

ÜBER DEN EXT-FUNKTOR VON  
GARBEN AUF DISKONTINUIERLICHEN  
RÄUMEN

I n a u g u r a l - D i s s e r t a t i o n

zur  
Erlangung des Doktorgrades der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

**Ferit Deniz**

aus Diyarbakir

Juli 2008

Diese Forschung wurde gefördert durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft  
im Rahmen des Graduiertenkollegs  
„Homotopie und Kohomologie“ (GRK 1150)

Aus dem Institut für Mathematik  
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Gedruckt mit der Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent: Prof. Dr. W. Singhof  
Korreferent: Prof. Dr. F. Grunewald

Tag der mündlichen Prüfung: 07.07.2008

## Kurzfassung

Sei  $\Gamma$  eine diskrete Gruppe, die auf einer zusammenziehbaren Mannigfaltigkeit  $X$  differenzierbar und eigentlich diskontinuierlich operiert. Ein wichtiges Beispiel ist die Operation von arithmetischen Untergruppen  $\Gamma$  gewisser Liegruppen  $G$  auf dem symmetrischen Raum  $X = G/K$ , wobei  $K < G$  eine maximal kompakte Untergruppe ist. Jeder Darstellung  $M$  von  $\Gamma$  (etwa über dem Körper  $k = \mathbb{C}$ ) kann man auf natürliche Weise eine Garbe  $\mathcal{M}$  auf  $Y = \Gamma \backslash X$  zuordnen und man hat einen wohlbekannten Isomorphismus  $H^*(\Gamma; M) \cong H^*(Y; \mathcal{M})$ , der ein grundlegendes Hilfsmittel zur geometrischen Beschreibung der Gruppenkohomologie ist.

Dieser Isomorphismus lässt sich folgendermaßen verallgemeinern: Es existiert ein Homomorphismus  $\alpha : H^*(\Gamma; \text{Hom}(M, N)) \rightarrow \text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ , der ein Isomorphismus ist, sofern eine der Darstellungen  $M$  oder  $N$  trivial, also gleich  $\mathbb{C}$  ist. Der Beweis, dass  $\alpha$  im Falle  $N = k$  ein Isomorphismus ist, folgt daraus, dass dann  $\text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0$  für alle  $j > 0$  gilt. In einer unveröffentlichten Arbeit hat W. Singhof dies mit Hilfe der Poincaré-Verdier-Dualität gezeigt. In der vorliegenden Arbeit wird dieser tiefliegende Dualitätssatz vermieden. Dieses Resultat ergibt sich nämlich als eine direkte Konsequenz eines allgemeinen Studiums des Homomorphismus  $\alpha$  für beliebige  $M$  und  $N$ , wobei wir uns auch auf die Entwicklung von Berechnungsmethoden für die Invarianten  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  bzw. der Garben  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  konzentrieren, in der Hoffnung, nützliche Informationen über die Kohomologie von  $\Gamma$  zu erhalten.

Ein Hauptresultat dieser Arbeit ist, dass  $\alpha$  ein Teil einer langen exakten Sequenz ist, wobei jeder dritte Term dieser exakten Sequenz durch die Homologie der  $\Gamma$ -Invarianten  $\mathbb{W}_\bullet^\Gamma$  eines kombinatorisch definierten Kettenkomplexes  $\mathbb{W}_\bullet$  von  $\Gamma$ -Moduln ist. Genauer ist  $\mathbb{W}_\bullet$  eine Art simplizialer Kettenkomplex auf der singulären Menge  $X_s$ , mit einem (nicht lokalkonstanten) von den Stabilisatoren und den Darstellungen  $M$  und  $N$  von  $\Gamma$  abhängigen Koeffizientensystem. Eine lokale Version der eben genannten Vorgehensweise zeigt, dass  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  die Homologie eines ähnlich definierten Komplexes von konstruierbaren Garben ist. Wir erhalten Endlichkeits- und Verschwindungsergebnisse für die genannten Invarianten.

Schließlich diskutieren wir niedrigdimensionale Beispiele, insbesondere die Modulgruppe  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  und die Gruppen  $\Gamma = \text{SL}_2(\mathcal{O})$ , wobei  $\mathcal{O}$  der Ganzheitsring eines imaginär quadratischen Zahlkörpers ist.

## Abstract

Let  $\Gamma$  be a discrete group which acts on a contractible manifold  $X$  smoothly and properly discontinuously. An important example is the action of arithmetic subgroups  $\Gamma$  of certain Lie groups  $G$  on the associated symmetric space  $X = G/K$  where  $K < G$  is a maximal compact subgroup. To each representation  $M$  of  $\Gamma$  (say, over the ground field  $k = \mathbb{C}$ ) one can associate a sheaf  $\mathcal{M}$  on the quotient  $Y = \Gamma \backslash X$  in a natural way and there is a well known isomorphism  $H^*(\Gamma; M) \cong H^*(Y; \mathcal{M})$  which is a basic tool to describe group cohomology geometrically.

This isomorphism can be generalized as follows. There is a homomorphism  $\alpha : H^*(\Gamma; \text{Hom}(M, N)) \rightarrow \text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ , which is an isomorphism whenever one of the representations  $M$  or  $N$  of  $\Gamma$  is trivial. The proof that  $\alpha$  is an isomorphism in the  $N = \mathbb{C}$  case follows from the fact that the sheaves  $\mathcal{E}xt^j(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  vanish for each  $j > 0$ , which was shown by Singhof in an unpublished paper with the help of Poincaré-Verdier-Duality. The approach presented in this thesis avoids this sophisticated tool. The result will, instead, be a direct consequence of a general study of the map  $\alpha$  for arbitrary  $M$  and  $N$ . Furthermore, we are interested in developing tools for the computations of the invariants  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  and  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  in the hope that they yield useful information about the cohomology of  $\Gamma$ .

One of the main results is that the comparison map  $\alpha$  fits into a long exact sequence where every third term in the sequence is given by the homology of the  $\Gamma$ -invariants  $\mathbb{W}_\bullet^\Gamma$  of a combinatorially defined complex  $\mathbb{W}_\bullet$  of  $\Gamma$ -modules. More precisely,  $\mathbb{W}_\bullet$  is a kind of simplicial chain complex on the singular set  $X_s$  with respect to a (not locally constant) coefficient system which depends on the stabilizers of  $\Gamma$  and on the representations  $M$  and  $N$ . A local version of this procedure shows that  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  is the homology of a chain complex of similarly defined constructible sheaves. We gain vanishing and finiteness results for the invariants mentioned above.

Finally, low dimensional examples are discussed, in particular the modular group  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  and the groups  $\Gamma = \text{SL}_2(\mathcal{O})$  where  $\mathcal{O}$  is the ring of integers of some quadratic imaginary number field.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>v</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.a. Diskontinuierliche Operationen . . . . .	1
1.b. Darstellungen und Äquivariante Garben . . . . .	4
1.c. Der Vergleichshomomorphismus . . . . .	11
1.d. Restriktionen von Ext auf Teilräume . . . . .	12
<b>2 Stratifizierungen diskontinuierlicher Räume</b>	<b>16</b>
2.a. Orbitbündel und Stratifizierungen . . . . .	17
2.b. Konstruierbare Garben . . . . .	22
2.c. Isotropie-Filtrierungen konstanter Garben . . . . .	27
2.d. Der Vietoris-Begle-Satz und Konstruierbarkeit von $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ . . . . .	30
<b>3 Der Hauptsatz und die Spektralsequenz <math>E(\mathcal{S}, \mathcal{L})</math></b>	<b>36</b>
3.a. Inzidenzhomomorphismen und Koeffizientensysteme . . . . .	36
3.b. Die Spektralsequenz $E(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ . . . . .	43
3.c. Degeneration der Spektralsequenz $E(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ bei Triangulierungen . . . . .	46
3.d. Alternative Beweise der klassischen Resultate . . . . .	54
<b>4 Über die Berechnungen von <math>H_*(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma)</math> und <math>\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})</math></b>	<b>57</b>
4.a. Orientierte diskontinuierliche Räume . . . . .	57
4.b. Einige Berechnungen bei lokalen Modellen . . . . .	58
4.c. Beispiele: $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ und $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ . . . . .	61
4.d. Endlichkeitsbedingungen . . . . .	66
<b>5 Azyklität der De-Rham-Auflösung</b>	<b>70</b>
5.a. Azyklische Auflösungen . . . . .	70
5.b. Der De-Rham-Komplex auf $\Gamma \backslash X$ . . . . .	76
5.c. Azyklitätslemmata . . . . .	77
5.d. Beweis der Azyklitätslemmata . . . . .	78

<b>6</b>	<b>Konstruktion der Spektralsequenz <math>E(\mathcal{S}, \mathcal{L})</math></b>	<b>81</b>
6.a.	Filtrierung von $\text{Hom}(\mathcal{K}, \Omega_X^\bullet(\mathbf{N}))$ . . . . .	81
6.b.	Bestimmung der Differentiale $d_1$ von $E(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ . . . . .	84
6.c.	Beweis des Zusatzes . . . . .	90
<b>7</b>	<b>Schluß</b>	<b>92</b>
7.a.	Zusammenfassung . . . . .	92
7.b.	Bemerkung über positive Charakteristik . . . . .	93
7.c.	Ausblick/ offene Fragen . . . . .	94
	<b>Index</b>	<b>98</b>

## Einleitung

Sei  $\Gamma$  eine diskrete Gruppe und  $k = \mathbb{R}$  oder  $k = \mathbb{C}$  der Grundkörper. Der klassische Isomorphismus

$$H^*(\Gamma) \cong H^*(B\Gamma),$$

lässt sich auf eine wohlbekanntere Weise, wie man aus Grothendiecks klassischem Tôhoku-Artikel herleiten kann, in der Sprache der Garbenkohomologie verallgemeinern: Es existiert ein Isomorphismus

$$(0.1) \quad H^*(\Gamma; \mathbb{M}) \cong H^*(\Gamma \backslash X; \mathcal{M}),$$

wobei  $X$  ein zusammenziehbarer topologischer Raum ist, auf dem  $\Gamma$  diskontinuierlich operiert und  $\mathcal{M}$  eine Garbe, die funktoriell einer  $k$ -linearen Darstellung  $\mathbb{M}$  von  $\Gamma$  assoziiert wird. Genauer ist  $\mathcal{M} = p_*^\Gamma(\underline{\mathbb{M}})$ , wobei  $p_*^\Gamma$  der Funktor ist, der einer  $\Gamma$ -Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  die  $\Gamma$ -Invarianten von  $p_*\mathcal{F}$  zuordnet. Dieser Funktor ist ein wichtiges Hilfsmittel in der äquivarianten Garbentheorie (siehe z.B. [BL], [Gro]), so wie der Isomorphismus 0.1 ein wichtiges Hilfsmittel für das Studium arithmetischer Gruppen ist, wie z.B. in [Har] oder [LH] erläutert wird.

Ist eine arithmetische Gruppe  $\Gamma$  eingebettet als eine diskrete Untergruppe in einer halbeinfachen Liegruppe  $G$ , so operiert  $\Gamma$  auf natürliche Weise auf dem zusammenziehbaren symmetrischen Raum  $X = G/K$ , mit  $K$  einer maximal kompakten Untergruppe von  $G$ . In diesem Fall ist die Operation glatt und orientierungserhaltend. Fügen wir diese beiden Voraussetzungen zu den Generalvoraussetzungen an  $X$  und  $\Gamma$  hinzu, so verschwinden die Garben  $\mathcal{E}xt^j(\mathcal{M}, \underline{k})$  für alle  $j > 0$ , [Sin]. Die Lokal-Global-Spektralsequenz kollabiert und liefert einen Isomorphismus

$$(0.2) \quad \text{Ext}^*(\mathcal{M}, \underline{k}) \cong H^*(\Gamma; \mathbb{M}^\vee),$$

wobei  $\mathbb{M}^\vee = \text{Hom}(\mathbb{M}, k)$  die zu  $\mathbb{M}$  duale Darstellung ist. Dies und 0.1 lassen sich zusammen auf die folgende nützliche Weise verallgemeinern: Für alle Darstellungen  $\mathbb{M}$  und  $\mathbb{N}$  von  $\Gamma$  existiert ein kanonischer Vergleichshomomorphismus

$$(0.3) \quad \alpha : H^*(\Gamma, \text{Hom}(\mathbb{M}, \mathbb{N})) \rightarrow \text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N}),$$

welcher ein Isomorphismus ist, sobald  $\mathbb{M}$  oder  $\mathbb{N}$  eine triviale Darstellung von  $\Gamma$  ist.

Mein Ziel ist es, ein besseres Verständnis der allgemeinen Situation mit nicht notwendig trivialen Darstellungen  $\mathbb{M}$  und  $\mathbb{N}$  zu erlangen. Für eine Theorie, die diesen Homomorphismus zufriedenstellend erklären soll, ist es wünschenswert, dass sie die Isomorphismen 0.1 und 0.2 als direkte Konsequenzen liefert. Wir möchten an einfachen Merkmalen der Operation von  $\Gamma$  auf  $\mathbb{M}$  und  $\mathbb{N}$  sowie  $X$  erkennen, wann  $\alpha$  ein Isomorphismus ist. Die Suche nach solch einer Theorie sollte mit der Suche nach Berechnungsmethoden für  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  bzw.  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  einhergehen, da wir erwarten, durch diese Berechnungen via  $\alpha$  Informationen über die Gruppenkohomologie  $H^*(\Gamma; \text{Hom}(\mathbb{M}, \mathbb{N}))$  zu erhalten. Auch deswegen ist jede homologische Information über  $\alpha$  interessant.

Schnell ist klar, dass bei einer freien Operation von  $\Gamma$  (z.B.  $\Gamma$  torsionsfrei)  $\alpha$  immer ein Isomorphismus ist, weil  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  lokalkonstante Garben, oder, mit anderen Worten, lokale Koeffizientensysteme sind. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns gezielt mit dem umgekehrten Fall, in dem die Operation nicht frei ist. Dieser ist komplizierter, zum Beispiel weil  $\alpha$  im Allgemeinen kein Isomorphismus mehr ist, wie wir an einfachen Beispielen sehen werden (i.A. auch dann nicht, wenn  $M$  und  $N$  irreduzibel und nicht isomorph zueinander sind, wie man vielleicht erwarten würde). Dies führt u.a. dazu, dass der Übergang zu einer torsionsfreien Untergruppe von  $\Gamma$  mit endlichem Index die Ext-Invarianten ändert. Dies steht in starkem Kontrast zur Gruppenkohomologie, dort ist dieser Übergang ein üblicher Trick, um eine freie Operation zu erzwingen.

Aus der Definition des Homomorphismus  $\alpha$  geht hervor, dass er kanonisch Teil eines exakten Tripels ist, d.h. dass sie in einer langen exakten Sequenz sitzt. Das erste Hauptresultat dieser Arbeit, welches wir nun erläutern, gibt eine Beschreibung des dritten Terms dieses exakten Tripels: Man wähle eine äquivariante Triangulierung von  $X$  und definiere den Kettenkomplex  $\mathbb{W}_\bullet$  durch

$$\mathbb{W}_j = \prod_{\dim \sigma=j} \text{Hom}(M/M^{\Gamma_\sigma}, N),$$

wobei  $\Gamma_\sigma$  der Stabilisator des Simplexes  $\sigma$  ist. Das Differential des Komplexes ist induziert von allen Inklusionen  $M^{\Gamma_\sigma} \subset M^{\Gamma_\tau}$  und geeigneten Vorzeichen (Inzidenzzahlen), wobei wir alle Simplizes  $\tau$  einer festen Dimension und deren Seiten  $\sigma$  durchlaufen.

**Theorem A.** *Sei  $\Gamma$  eine diskrete Gruppe und  $X$  eine zusammenziehbare Mannigfaltigkeit, auf der  $\Gamma$  diskontinuierlich und glatt operiert. Dann sitzt  $\alpha$  in einer langen exakten Sequenz*

$$\dots \rightarrow H_j(\mathbb{W}_{n-\bullet}^\Gamma) \rightarrow H^j(\Gamma; \text{Hom}(M, N)) \xrightarrow{\alpha} \text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\pm} \dots$$

Der Komplex  $\mathbb{W}_\bullet$  ist trivial, falls eine der beiden Darstellungen  $M, N$  die triviale Darstellung von  $\Gamma$  ist, so dass 0.1 und 0.2 eine direkte Folgerung aus diesem Theorem sind. Man bekommt sogar ein etwas allgemeineres (nicht notwendiges) Kriterium: Wenn für alle  $x \in X$  die  $\Gamma_x$ -Moduln  $M$  und  $N$  außer den trivialen Moduln sonst keine gemeinsamen irreduziblen Faktoren besitzen, so ist  $\alpha$  ein Isomorphismus.

Die Methoden des Beweises von Theorem A gehen von einer allgemeineren Situation aus: Man untersucht konstruierbare  $\Gamma$ -Untergarben  $\mathcal{K}$  der konstanten Garbe  $M_X$ . Die von der Inklusion  $\mathcal{K} \subset M_X$  induzierte Abbildung  $\text{Ext}_\Gamma^*(M_X, N_X) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^*(\mathcal{K}, N_X)$  sitzt wie die Abbildung  $\alpha$  aus Theorem A in einer langen exakten Sequenz, in der  $\mathbb{W}_\bullet$  auf die gleiche Weise definiert ist (man ersetze nur  $M^{\Gamma_\sigma}$  durch den Halm von  $\mathcal{K}$  über dem Simplex  $\sigma$ ). Durch spezielle Wahlen von  $\mathcal{K}$  bekommt man interessante lange exakte Sequenzen. Wählt man beispielsweise  $M = k$  und  $\mathcal{K}$  als die konstante Garbe auf der regulären Menge  $X_r$ , die trivial auf  $X$  fortgesetzt ist, so erhält man eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_{n-j} \mathbb{W}_\bullet^\Gamma \rightarrow H^*(Y; \mathcal{M}) \xrightarrow{j^*} H^*(Y_r; \mathcal{M}) \xrightarrow{\pm} \dots,$$



dabei ist  $j : Y_r \subset Y$  die Inklusion und  $\mathbb{W}_j^\Gamma$  ist isomorph zu  $\prod_{\dim \sigma = j} \mathbb{M}^{\Gamma_\sigma}$ . Im Falle der Zusammenziehbarkeit von  $X$  ist dies eine Sequenz, die aufgrund von 0.1 zur Untersuchung der Kohomologie von  $\Gamma$  dienen kann. Denn einerseits ist  $\mathbb{W}_\bullet$  einfach zu beschreiben und andererseits ist  $\mathcal{M}$  ein lokales Koeffizientensystem über  $Y_r$ , so dass zu erwarten ist, dass man  $H^*(Y_r; \mathcal{M})$  versteht, wenn die Topologie von  $Y_r$  verstanden ist.

Eine lokale Version der obigen Vorgehensweise liefert einen Komplex  $\mathcal{W}_\bullet^\Gamma$  von Garben auf  $\Gamma \backslash X$ , der über jedem Simplex  $\sigma$  von  $X$  isomorph zur konstanten Garbe von Komplexen mit Halm  $\mathbb{W}_\bullet|_\sigma := \prod_{\tau > \sigma} \text{Hom}_{\Gamma_\tau}(\mathbb{M}/\mathbb{M}^{\Gamma_\sigma}, \mathbb{N})$  ist. Also ist dieser Komplex von Garben kombinatorischer Natur und seine Homologiegarben beschreiben die Garben  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ :

**Theorem B.** *Es existiert für alle  $j \in \mathbb{Z}$  ein Isomorphismus von Garben*

$$\mathcal{E}xt^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \cong H_{n-j-1} \mathcal{W}_\bullet \quad .$$

Dies liefert einen alternativen Beweis der Verschwindung  $\mathcal{E}xt^j(\mathcal{M}, k_Y) = 0$  für alle  $j > 0$ , da wir nicht auf die Poincaré-Verdier-Dualität zurückgreifen, welche beim ursprünglichen Beweis in [Sin] benutzt wurde.

Aus der Theorie, die diese Theoreme umgibt, werden einige Aussagen über die Struktur und Berechnungsmethoden der Invarianten  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  und  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  hergeleitet. Als Beispiel nennen wir folgendes Theorem über allgemeine Verschwindung dieser Invarianten, welches wir ebenfalls zu den Hauptresultaten zählen.

**Theorem C.** *Sei  $X$  ein zusammenziehbarer Raum der Dimension  $n$ , auf dem eine diskrete Gruppe  $\Gamma$  diskontinuierlich operiert; seien  $\mathbb{M}$  und  $\mathbb{N}$  Darstellungen von  $\Gamma$ .*

- (i) *Der Vergleichshomomorphismus  $\alpha : H^j(\Gamma; \text{Hom}(\mathbb{M}, \mathbb{N})) \rightarrow \text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  aus 0.3 ist surjektiv für  $j = n$  und bijektiv für  $j > n$ .*
- (ii) *Es gilt  $\text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0$  für alle  $j > n$ . Ist darüberhinaus die Operation von  $\Gamma$  auf  $X$  nicht kokompakt (d.h.  $\Gamma \backslash X$  ist nicht kompakt), so gilt  $\text{Ext}^n(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0$ .*
- (iii) *Es gilt  $\mathcal{E}xt^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0$  für alle  $j \geq n$ .*
- (iv) *Es ist  $H^p(Y; \mathcal{E}xt^q(\mathcal{M}, \mathcal{N})) = 0$  für alle  $p, q \geq 0$  mit  $p + q > n$ .*

Wir diskutieren Beispiele, welche zeigen, dass dieser Verschwindungssatz i.A. nicht verbessert werden kann. Darüberhinaus diskutieren wir im Abschnitt 4.d. Endlichkeitsresultate für die Invarianten  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ ,  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  und  $\mathbb{W}_\bullet^\Gamma$ .

**Aufbau** und Kenntlichmachung der eigenen Arbeit.

Im Folgenden geben wir kurze Zusammenfassungen der einzelnen Kapitel und führen deren Ziele an. Obwohl im Text durch Quellenangaben ersichtlich ist, welche Stellen die eigene Arbeit des Autors sind und welche Materialien aus

anderen Quellen zusammengestellt wurden bzw. welche wohlbekannten Ideen verwendet werden, soll diese Differenzierung der Übersicht halber in folgender Zusammenfassung durch *kursive Schrift* kenntlich gemacht werden.

**Kapitel 1** dient zwei Zwecken. Einerseits sollen die grundlegenden Begriffe (diskontinuierliche Operationen, äquivariante Garben) eingeführt und die klassischen Resultate (Grothendiecks Isomorphismus 0.1 und Singhofs Beobachtung 0.2) vorgestellt werden – größtenteils folgen wir dabei Grothendiecks klassischem Tôhoku-Artikel [Gro]. Andererseits sollen auf diese Weise die Notationen festgelegt werden. Zentral ist auch die Einführung des Vergleichshomomorphismus 0.3, der es später ermöglichen wird, die beiden klassischen Resultate 0.1 und 0.2 als Spezialfall eines allgemeinen Phänomens zu sehen. *Der größte Teil dieses Kapitels ist aus verschiedenen Quellen, z.B. [Gro], [KS], [Bre2], zusammengestellt und einige elementare Eigenschaften des Ext-Funktors werden aus diesen Quellen abgeleitet. Die Einführung des Vergleichshomomorphismus 0.3 im Abschnitt 1.c war ein Ansatz des Autors, um 0.1 und 0.2 in einem gemeinsamen Kontext zu sehen.*

In **Kapitel 2** untersuchen wir gewisse Stratifizierungen diskontinuierlicher Räume. Als ein besonders wichtiges Beispiel von Stratifizierungen betrachten wir äquivariante Triangulierungen. Nach der Einführung dieser Begriffe und Diskussion ihrer grundlegenden Eigenschaften behandeln wir konstruierbare Garben. Das sind Garben, die auf jedem einzelnen Stratum einer gewählten Stratifizierung (lokal)konstant sind. Besondere Bedeutung bekommt die „Isotropie-Filtrierung“, die einer konstruierbaren Untergarbe einer konstanten Garbe assoziiert wird, denn diese ist der Ausgangspunkt der weiteren Theorie zur Untersuchung des Vergleichshomomorphismus in den späteren Kapiteln. *Die Stratifizierung eines diskontinuierlichen  $\Gamma$ -Raumes durch Orbitbündel ist bekannt. Die notwendigen Details sind mangels zufriedenstellender Quellen hier ausgearbeitet. Abschnitte 2.c und 2.d sind eigene Arbeiten des Autors. Abschnitt 2.d. behandelt eine Version des Vietoris-Satzes, die auf eine bekannte Version [Bor2] zurückgeführt wird. Die Version im Abschnitt 2.d. kann auch auf die in [BL] zurückgeführt werden, aber die Beweise in der vorliegenden Arbeit sind elementarer.*

*Die darauf folgenden Kapitel 3 bis 7 sind eigene Arbeiten des Autors.*

**Kapitel 3** ist den Hauptresultaten dieser Arbeit gewidmet. Wir führen den oben genannten Kettenkomplex  $\mathbb{W}_\bullet$  von graduierten  $\Gamma$ -Moduln ein, welcher einen Großteil des  $E_2$ -Terms einer Spektralsequenz bestimmt, die gegen  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  konvergiert. Aus dieser Spektralsequenz lassen sich dann die Theoreme A, B und C herleiten und die eingangs erwähnten klassischen Resultate 0.1 und 0.2 werden wir als Spezialfälle erkennen.

In **Kapitel 4** diskutieren wir, wie diese Theorie für Berechnungen der Invarianten  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  und (der Halme) der Garben  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  genutzt werden kann. In kleinen Dimensionen sind diese Rechnungen durchführbar: Wir bestimmen die Halme von  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  für alle  $X$  der Dimension  $\leq 3$  und berechnen vollständig die Invarianten  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  für 2-dimensionale, zusammenziehbare diskontinuierliche  $\Gamma$ -Räume (z.B. die Operation von  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  auf der oberen Halbebene). Für die Operation von  $\text{SL}_2(\mathcal{O})$  auf dem oberen Halbraum, wobei  $\mathcal{O}$

der Ganzheitsring eines imaginär quadratischen Zahlkörpers ist, werden Ansätze zur Berechnung von  $H_*\mathbb{W}_\bullet^\Gamma$  für den Spezialfall  $M = N = M_n$  kommentiert, wobei  $M_n$  der  $SL_2(\mathbb{C})$ -Modul der binären homogenen Polynome vom Grad  $n$  ist.

In **Kapitel 5** beschäftigen wir uns mit dem De-Rham-Komplex und seinen Azyklitätseigenschaften, vor allem bezüglich des Funktors  $\text{Ext}_\Gamma^*(M_Z; -)$ , wobei  $Z \subset X$  eine  $\Gamma$ -invariante, lokalabgeschlossene Teilmenge von  $X$  ist ( $Z = X$  ist zugelassen). Dieser Funktor ist verwandt mit der Kohomologie mit Träger in  $Z$ . Einerseits ist dieses Kapitel für sich genommen interessant, da man z.B. als Resultat die Berechenbarkeit von  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  mit der De-Rham-Auflösung bekommt. Andererseits dient dieses Kapitel der technischen Vorbereitung des **Kapitels 6**, das vollständig dem Beweis der Existenz einer Spektralsequenz aus Kapitel 3 gewidmet ist, aus der alle dort enthaltenen Hauptresultate hervorgehen.

**Kapitel 7** resümiert die Arbeit. In Abschnitt 7b skizzieren wir auch einen alternativen Beweis der Existenz der zentralen Spektralsequenz aus Kapitel 3. In diesem Beweis wird nicht von der De-Rham-Auflösung Gebrauch gemacht, so dass dieser Zugang analoge Resultate für positive Charakteristik liefert. Die Beweismethoden sind jedoch nahezu identisch und deshalb verzichten wir auf eine detaillierte Wiedergabe. Das Kapitel endet mit einer Übersicht über mögliche weiterführende Themen und interessante Fragestellungen, die im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt werden konnten.

## Danksagung

Herzlich bedanken möchte ich mich bei Herrn Professor Dr. Wilhelm Singhof für seine hervorragende Betreuung, für das interessante Thema und sein Engagement. Er fand immer die Zeit, mir bei sowohl mathematischen als auch nicht fachlichen Fragen zu helfen.

Philipp Wruck und Christian Löffelsend danke ich für die Durchsicht der fertigen Version dieser Arbeit und für ihre zahlreichen Kommentare und Korrekturen. Bei meinen Fragen zu  $\text{T}_\text{E}\text{X}$  hatte Tino Görtemöller stets ein offenes Ohr, wozu ich ihm sehr dankbar bin.

Nicht zuletzt bedanke ich mich bei meinen Eltern, Geschwistern und Freunden, die mich immer unterstützt und ermutigt haben.



# Kapitel 1

## Grundlagen

In diesem Kapitel behandeln diskontinuierliche Operationen bzw. Räume und äquivarianten Garben. Wir besprechen die Isomorphismen 0.1 und 0.2 und führen den Vergleichshomomorphismus 0.3 ein. Außerdem untersuchen wir elementare Eigenschaften des Ext-Funktors.

Sei  $\Gamma$  eine diskrete Gruppe. Ein  $\Gamma$ -Raum  $X$  ist ein topologischer Raum  $X$ , auf dem  $\Gamma$  von links durch Homöomorphismen  $g : X \rightarrow X$ ,  $g \in \Gamma$ , operiert. Ist  $X$  eine Mannigfaltigkeit, so verlangen wir zusätzlich, dass die  $g : X \rightarrow X$  Diffeomorphismen sind.

Für einen Teilraum  $Z \subset X$  definieren wir den *Stabilisator*  $\Gamma_Z = \{g \in \Gamma \mid gZ = Z\}$ . Wir setzen  $\Gamma_x = \Gamma_{\{x\}}$  für alle  $x \in X$ . Ein Teilraum  $Z \subset X$  heißt  *$\Gamma$ -invariant*, wenn  $\Gamma_Z = \Gamma$  gilt. In diesem Fall ist  $Z$  kanonisch ein  $\Gamma$ -Raum.

### 1.a. Diskontinuierliche Operationen

Sei  $X$  eine  $n$ -dimensionale, glatte Mannigfaltigkeit und  $\Gamma$  eine diskrete Gruppe, die glatt (von links) auf  $X$  operiert. Außerdem sei die Operation *diskontinuierlich*. Das heißt, dass sie Grothendiecks Bedingungen (D1) und (D2), die in [Gro, S. 203] als Bedingung (D) zusammengefasst sind, erfüllen soll:

(D1) Für alle  $x \in X$  ist der Stabilisator  $\Gamma_x$  endlich.

(D2) Jedes  $x \in X$  besitzt eine Umgebung  $V$ , so dass  $gV \cap V = \emptyset$  für alle  $g \in \Gamma - \Gamma_x$  gilt.

Man beachte, dass die Umgebung  $V$  wegen (D1)  $\Gamma_x$ -invariant gewählt werden kann.

Es sei bemerkt, dass die hier verwendete Bezeichnung „diskontinuierlich“ veraltet ist und in der Literatur der Terminus „eigentlich diskontinuierlich“ vorgezogen wird.

Um die Schreibweise zu vereinfachen, sagen wir in dieser Situation, dass  $X$  ein *diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum* ist. Darüberhinaus sagen wir, dass  $X$  ein *orientierbarer diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum* ist, wenn bezüglich einer (und damit jeder)

Orientierung von  $X$  die Operation von  $\Gamma$  orientierungserhaltend wird (dies setzt insbesondere voraus, dass  $X$  als Mannigfaltigkeit orientierbar ist).

Sei  $\Gamma_0 = \{g \in \Gamma \mid gx = x \text{ für alle } x \in X\}$ . Dies ist ein Normalteiler von  $\Gamma$  und  $\Gamma/\Gamma_0$  operiert diskontinuierlich und effektiv auf  $X$ . Auf diese Weise können wir stets und werden oft die Effektivität einer Operation erzwingen. Man beachte, dass  $\Gamma_0$  der Schnitt aller  $\Gamma_x$  über alle  $x \in X$  und somit nach (D1) endlich ist.

Wir werden den Raum der Orbits  $\Gamma \backslash X$  (versehen mit der Quotiententopologie) stets  $Y$  nennen und die natürliche Projektion durch  $p : X \rightarrow Y$  notieren. Bekanntlich ist  $p$  eine offene, abgeschlossene und stetige Surjektion, welche genau dann eine Überlagerung ist, wenn  $\Gamma_0 = \Gamma_x$  für alle  $x \in X$  gilt (zum Beispiel wenn die Operation von  $\Gamma$  frei ist).

**1.1. Proposition.** *Ist  $V$  eine  $\Gamma_x$ -invariante Umgebung eines Punktes  $x \in X$ , die (D2) erfüllt, so gilt*

$$p^{-1}(p(V)) = \coprod_{g \in \Gamma/\Gamma_x} gV \cong \Gamma \times_{\Gamma_x} V,$$

wobei hier mit „ $\cong$ “ ein Isomorphismus von differenzierbaren  $\Gamma$ -Räumen gemeint ist. Ist insbesondere  $\mathbf{N}$  ein topologischer  $k$ -Vektorraum mit einer stetigen und linearen  $\Gamma$ -Operation, so existiert ein Isomorphismus von  $\Gamma$ -Moduln

$$C(p^{-1}(p(V)), \mathbf{N}) \cong \text{coind}_{\Gamma_x}^{\Gamma} C(V, \mathbf{N}),$$

wobei  $C(-, \mathbf{N})$  den Vektorraum der stetigen Abbildungen in  $\mathbf{N}$  bezeichnet.

Die folgende Proposition liefert die Standardbeispiele diskontinuierlicher Operationen.

**1.2. Proposition.** *Sei  $G$  eine Liegruppe,  $K < G$  eine kompakte und  $\Gamma < G$  eine diskrete Untergruppe. Dann ist  $X = G/K$  mit der kanonischen Operation von  $\Gamma$  (von links) ein orientierbarer diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum. Darüberhinaus ist  $X$  zusammenziehbar, wenn  $G$  halbeinfach und  $K$  eine maximal kompakte Untergruppe von  $G$  ist.*

*Beweis.* Das sind die Propositionen 1.6. und 1.7. von [Shi] und für die letzte Aussage sei z.B. auf Theorem VI.2.2. aus [Hel] verwiesen.  $\square$

**1.3. Beispiel.** *a) Jede Operation einer endlichen Gruppe auf einem Hausdorffraum erfüllt Grothendiecks Bedingungen (D1) und (D2).*

*b) Einen Spezialfall des letzten Beispiels erhält man aus einem Gruppenhomomorphismus  $\varphi : G \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ , wobei  $G$  eine endliche Gruppe ist, indem man  $G$  via  $\varphi$  auf  $\mathbb{R}^n$  operieren lässt, so dass  $\mathbb{R}^n$  auf diese Weise ein diskontinuierlicher  $G$ -Raum wird.*

*c) Das klassische Beispiel der Operation der Modulgruppe  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  auf der oberen Halbebene  $\mathfrak{h}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  ist diskontinuierlich*

- d) Man kann die obige Operation auf eine Operation von  $SL_2(\mathcal{O})$  auf den oberen Halbraum  $\mathfrak{h}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$  „fortsetzen“, wobei  $\mathcal{O}$  der Ganzheitsring eines imaginärquadratischen Zahlkörpers  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$  für eine quadratfreie natürliche Zahl  $d > 0$  ist. Eine explizite Formel ist z.B. in [Swa], Lemma 3.1., gegeben.
- e) Die letzten beiden Beispiele sind Instanzen einer interessanten allgemeinen Konstruktion. Sei  $G$  die Liegruppe der reellwertigen oder komplexwertigen Punkte einer halbeinfachen, algebraischen Gruppe  $\mathbb{G}$  über  $\mathbb{Q}$ , d.h.  $G = \mathbb{G}(\mathbb{R})$  oder  $G = \mathbb{G}(\mathbb{C})$ . Sei  $K$  eine maximalkompakte Untergruppe von  $G$  (so ein  $K$  existiert und eine andere maximalkompakte Untergruppe ist stets konjugiert zu  $K$ , vgl. [Hel, VI.2.2]). Nach 1.2. ist  $X = G/K$  ein orientierbarer, zusammenziehbarer diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum für jede diskrete Untergruppe  $\Gamma < G$ . Man bekommt die Beispiele c) und d), wenn man diese Konstruktion ausgehend von der algebraischen Gruppe  $SL_2$  durchführt.

Folgende Proposition besagt anschaulich, dass jeder diskontinuierliche  $\Gamma$ -Raum lokal wie Beispiel b) aussieht.

**1.4. Proposition** ([Bre1]). *Jeder Punkt  $x \in X$  besitzt eine  $\Gamma_x$ -invariante Koordinatenumgebung  $V$  zusammen mit einem Diffeomorphismus  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass  $\psi(\gamma v) = \varphi(\gamma)\psi(v)$  für alle  $\gamma \in \Gamma_x$  und  $v \in V$  gilt, wobei  $\varphi$  der Homomorphismus*

$$\varphi : \Gamma_x \rightarrow GL_n(T_x X) \xrightarrow{d\psi_x} GL_n(\mathbb{R}), \quad g \mapsto d_x \psi \circ g_*$$

*ist. Mit anderen Worten operiert  $\Gamma_x$  linear auf kleine Umgebungen von  $x$ .*

**Definition.** Eine  $\Gamma_x$ -invariante Umgebung  $V$  eines Punktes  $x \in X$  wie in der letzten Proposition heißt *zulässig*, wenn sie zusätzlich Grothendiecks Bedingung (D2) erfüllt. Eine Umgebung  $U$  von  $p(x) \in Y$  heißt *zulässig*, wenn eine zulässige Umgebung  $V$  von  $x$  mit  $p(V) = U$  existiert. Das Paar  $(V, U)$  heißt dann *zulässiges Paar von Umgebungen* von  $(x, p(x))$ .

**Bemerkung.** Jeder Punkt  $x \in X$  besitzt eine Basis von zulässigen Umgebungen. Man wähle dafür zunächst eine  $\Gamma_x$ -invariante Koordinatenumgebung  $V$ , die in einer zulässigen Umgebung von  $x$  enthalten ist und die Bedingungen aus 1.4. erfüllt und man wähle eine  $\Gamma_x$ -invariante Riemannsche Metrik  $d$  auf  $V$ . Dann bilden die  $V_n = U_{1/n}^d(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine Basis von zulässigen Umgebungen von  $x$ .

Dies motiviert die folgende

**1.5. Definition** (Lokale Modelle). Wir nennen das Paar  $(V, G)$ , bestehend aus einer endlichen Gruppe  $G$  und einem  $n$ -dimensionalen  $G$ -Raum  $V$ , ein (*n*-dimensionales) *lokales Modell*, wenn ein Diffeomorphismus  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  und ein Homomorphismus  $\psi : G \rightarrow O(n)$  existiert, so dass  $\varphi(g \cdot x) = \psi(g) \cdot \varphi(x)$  für alle  $g \in G$  und  $x \in V$  gilt. Dabei operiere  $\psi(G) \subset O(n)$  in natürlicher Weise auf  $\mathbb{R}^n$ .

In dieser Terminologie ist  $(V, \Gamma_x)$  ein lokales Modell für jede zulässige Umge-

bung  $V$  eines jeden Punktes  $x \in X$ , denn wegen der Endlichkeit von  $\Gamma_x$  existiert ein  $\Gamma_x$ -invariantes Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n \cong V$ .

**Definition.** Sei  $X_r \subset X$  der Teilraum der *regulären Punkte*, d.h. der Punkte  $x \in X$  mit  $\Gamma_x = \Gamma_0$ . Dies ist eine  $\Gamma$ -invariante Teilmenge. Die Punkte des Komplements  $X_s = X - X_r$  heißen *singuläre Punkte*.

Ist  $V \cong \mathbb{R}^n$  eine zulässige Umgebung eines Punktes  $x \in X$ , so ist  $V \cap X_s = V_s$  die Vereinigung von Untervektorräumen der Dimension  $< n$  nach 1.4. und damit gilt:

**1.6. Korollar.** *Die regulären Punkte  $X_r$  bilden eine offene und dichte Teilmenge von  $X$ . Ist  $X$  darüberhinaus ein zusammenhängender, orientierbarer diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum, so ist  $X_r$  zusammenhängend.*

*Beweis.* Nach 1.4. ist  $X_s$  eine lokalendliche Vereinigung von Untermannigfaltigkeiten der Dimension  $< n$ , also ist  $X_r = X - X_s$  dicht in  $X$ . Außerdem ist  $X_s$  abgeschlossen in  $X$ : sei  $(x_n)$  eine Folge in  $X_s$  die gegen ein  $x \in X$  konvergiert. Ohne Einschränkung ist  $(x_n)$  in einer zulässigen Umgebung  $V$  von  $x$  enthalten. Insbesondere ist  $\Gamma_x \supset \Gamma_{x_n}$  für alle  $n$  und damit  $x \in X_s$ . Daraus folgt, dass  $X_r$  offen ist.

Ist  $X$  ein orientierbarer  $\Gamma$ -Raum, so ist  $X_s$  eine lokalendliche Vereinigung von Untervektorräumen der Dimension  $\leq n - 2$ , denn jedes  $g \in \Gamma$  operiert lokal als eine  $SO(2)$ -Matrix und der Fixpunktraum solcher Matrizen besitzt mindestens die Kodimension 2. Insbesondere besitzt  $X_r = X - X_s$  die gleiche Anzahl an Zusammenhangskomponenten wie  $X$ .  $\square$

## 1.b. Darstellungen und Äquivariante Garben

In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass  $k$  ein beliebiger kommutativer Ring mit 1 ist. Später nehmen wir wieder  $k = \mathbb{R}$  oder  $= \mathbb{C}$  an. Die Kategorie der Garben auf  $X$  mit Werten in  $k$ -mod notieren wir durch  $Sh(X)$  und ein Objekt nennen wir der Einfachheit wegen *Garbe auf  $X$* . Für jeden  $k$ -Modul  $A$  bezeichnet  $A_X$  die konstante Garbe auf  $X$  mit Halmen  $A$ .

**$\Gamma$ -Moduln (Notation).** Bevor wir auf  $\Gamma$ -Garben eingehen, wollen wir an einige Grundlagen und Notationen für  $\Gamma$ -Moduln erinnern. Die *Gruppenalgebra* von  $\Gamma$  über  $k$  bezeichnen wir mit  $k\Gamma = k[\Gamma]$ . Einen  $k\Gamma$ -Modul bezeichnen wir auch als  $\Gamma$ -Modul (dies führt nicht zu Missverständnissen, da der Grundring immer  $k$  heißt).

Die Kategorie der (Links)- $\Gamma$ -Moduln wird auch durch  $\Gamma$ -mod notiert. Ein  $\Gamma$ -Modul heißt *trivialer  $\Gamma$ -Modul*, wenn jedes  $g \in \Gamma$  als Identität auf dem Modul operiert. Weiterhin heißt ein  $\Gamma$ -Modul  $M$  eine *Darstellung von  $\Gamma$* , wenn er als  $k$ -Modul endlich erzeugt und frei ist. Darstellungen entsprechen in eindeutiger Weise den Gruppenhomomorphismen  $\Gamma \rightarrow GL_n(k)$  mit  $n \geq 1$ .



Wir setzen  $H^*(\Gamma; M) := \text{Ext}_{k\Gamma}^*(k, M)$ , wobei wir hier  $k$  als einen trivialen  $\Gamma$ -Modul interpretieren. Der  $k$ -Vektorraum  $\text{Hom}_k(M, N)$  besitzt für alle  $\Gamma$ -Moduln  $M$  und  $N$  eine kanonische  $\Gamma$ -Modulstruktur gegeben durch  $(g\varphi)(m) := g\varphi(g^{-1}m)$  für alle  $g \in \Gamma$ ,  $m \in M$  und  $\varphi : M \rightarrow N$ . Das Tensorprodukt  $M \otimes N$  besitzt ebenfalls eine kanonische  $\Gamma$ -Modulstruktur, die durch die diagonale Operation gegeben ist. Wenn  $k$  ein Körper ist, so gilt auf natürliche Weise:

$$(1.7) \quad \text{Ext}_{k\Gamma}^*(M, N) \cong H^*(\Gamma; \text{Hom}(M, N)), \quad M, N \in \Gamma\text{-mod},$$

denn der Funktor  $\text{Hom}_k(M, -)$  ist in diesem Fall exakt und erhält als Rechtsadjungierter (zu  $- \otimes M$ ) injektive Objekte. Darüberhinaus gilt  $\text{Hom}(M, N) = M^\vee \otimes N$  als  $\Gamma$ -Moduln, wenn  $M$  oder  $N$  endlichdimensional über  $k$  ist und  $M^\vee = \text{Hom}(M, k)$  den dualen Modul bezeichnet.

Ist  $H < \Gamma$  eine Untergruppe, so sei  $U : \Gamma\text{-mod} \rightarrow H\text{-mod}$  der Vergissfunktor. Dieser besitzt einen Rechtsadjungierten  $\text{coind}_H^\Gamma$  und einen Linksadjungierten  $\text{ind}_H^\Gamma$ . Für einen  $H$ -Modul  $M$  kann man definieren:

$$\text{coind}_H^\Gamma(M) = \prod_{g \in \Gamma/H} M$$

mit der offensichtlichen Operation von  $\Gamma$  auf der rechten Seite. Bei  $\text{ind}_H^\Gamma$  geht man genauso vor, nur ersetzt man das Produkt durch das Koprodukt. Vgl. auch [Wei].

**Grothendiecks Isomorphismus.** Sei  $M$  ein  $k\Gamma$ -Modul. Wir ordnen diesem Modul eine Garbe  $\mathcal{M} \in \text{Sh}(Y)$  zu, indem wir für alle offenen Teilmengen  $U \subset Y$  definieren:

$$\mathcal{M}(U) = \{ \text{lokalkonstante, } \Gamma\text{-äquivalente Abbildungen } p^{-1}(U) \rightarrow M \}.$$

Der folgende Satz ist wohlbekannt und wichtiges Hilfsmittel für das Studium der Kohomologie arithmetischer Gruppen.

**1.8. Theorem** ([Gro, Prop. 5.2.4.]). *Sei  $X$  ein topologischer Raum auf dem eine diskrete Gruppe  $\Gamma$  diskontinuierlich operiert, d.h. sie erfüllt Grothendiecks Bedingungen (D1) und (D2). Dann existiert für alle Darstellungen  $M$  von  $\Gamma$  ein natürlicher Isomorphismus  $H^*(Y; \mathcal{M}) \cong H^*(\Gamma; M)$ .*

Wir skizzieren später in diesem Abschnitt einen möglichen Beweis dieses Satzes.

**1.9. Bemerkung.** Es gilt mit den obigen Voraussetzungen  $H^j(\Gamma, M) = 0$  für alle  $j > \dim(X)$ , vgl. [Bre2, Cor. 16.28, Th. 19.3.]. Siehe auch 1.21. für eine ähnliche Aussage.

**Bemerkung.** Theorem 1.8. ist eine Verallgemeinerung des klassischen Isomorphismus von Eilenberg  $H^*(\Gamma) \cong H^*(B\Gamma)$  bzw.  $H^*(\Gamma; M) \cong H^*(B\Gamma; \tilde{M})$  wobei  $\tilde{M}$  ein kanonisch zu  $M$  assoziiertes lokales Koeffizientensystem auf  $B\Gamma$  ist, vgl. z.B. [Brw, II] oder [Whi, VI.3]. Dafür benötigt man die folgende Proposition.

**1.10. Proposition.** Für alle Darstellungen  $M$  von  $\Gamma$  gilt:

- (a)  $\mathcal{M}|_{X_r}$  ist eine lokalkonstante Garbe auf  $X_r$ .
- (b) Operiert  $\Gamma$  trivial auf  $M$ , so ist  $\mathcal{M}$  die konstante Garbe  $M_Y$ .

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei die Operation von  $\Gamma$  effektiv (ansonsten betrachte die Operation von  $\Gamma/\Gamma_0$ ).

(a) Sei  $x \in X_r$ , d.h.  $\Gamma_x$  ist trivial. Sei  $V$  eine zulässige Umgebung von  $x$ . Nach 1.1. ist  $p^{-1}(p(V)) = \coprod_{g \in \Gamma} gV$  und damit ist der Raum der  $\Gamma$ -äquivarianten lokalkonstanten Funktionen  $p^{-1}(W) \rightarrow M$  isomorph zum Raum der lokalkonstanten Funktionen  $W \rightarrow M$  für alle offenen Teilmengen  $W \subset p(V)$  (auf  $W$  ist  $p$  ein Homöomorphismus). Damit ist  $\mathcal{M}|_{p(V)}$  isomorph zu  $(p|_V)_*(M_V) = M_{p(V)}$ , also konstant.

(b) Sei  $U \subset Y$  eine beliebige offene Teilmenge. Da  $M$  ein trivialer  $\Gamma$ -Modul ist, faktorisiert jede  $\Gamma$ -äquivariante lokalkonstante Funktion  $p^{-1}(U) \rightarrow M$  eindeutig über eine lokalkonstante Funktion  $U \rightarrow M$ .  $\square$

**$\Gamma$ -Garben.** Es existiert ein Funktor  $p_*^\Gamma$ , so dass  $\mathcal{M} = p_*^\Gamma(M_X)$  ist. Dabei startet  $p_*^\Gamma$  in der Kategorie der  $\Gamma$ -Garben, die wir gleich definieren werden (siehe z.B. auch [Gro, 5.1.], [BL]) und landet in der Kategorie der Garben auf  $Y$ , und  $M_X$  besitzt für jede Darstellung  $M$  eine kanonische  $\Gamma$ -Garbenstruktur. Der Funktor  $p_*^\Gamma$  ist, um es kurz zu sagen, definiert durch die  $\Gamma$ -Invarianten des Push-Forward-Funktors  $p_*$ . Wir werden jetzt die präzisen Definitionen vorstellen.

**Definition.** Eine  $\Gamma$ -Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  ist eine Garbe  $\mathcal{F}$  (von  $k$ -Vektorräumen) zusammen mit *Strukturmorphismen*  $\mu_{\mathcal{F}}^g : \mathcal{F} \rightarrow g^*\mathcal{F}$  für alle  $g \in \Gamma$ , die folgende Bedingungen erfüllen.

- $\mu_{\mathcal{F}}^e = \text{id}_{\mathcal{F}}$ , wobei  $e \in \Gamma$  das Neutralelement ist.
- $h^*(\mu_{\mathcal{F}}^g) \circ \mu_{\mathcal{F}}^h = \mu_{\mathcal{F}}^{gh}$  für alle  $g, h \in \Gamma$ .

Ist aus dem Kontext ersichtlich, zu welcher Garbe  $\mathcal{F}$  ein Strukturmorphismus  $\mu_{\mathcal{F}}^g$  gehört, so schreiben wir auch  $\mu^g$  statt  $\mu_{\mathcal{F}}^g$ .

Ein Garbenhomomorphismus  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  heißt  $\Gamma$ -Morphismus oder  $\Gamma$ -äquivariant, wenn er mit den Strukturmorphismen von  $\mathcal{F}$  von  $\mathcal{G}$  vertauscht, d.h. es gilt  $g^*(f) = \mu_{\mathcal{G}}^g \circ f \circ (\mu_{\mathcal{F}}^g)^{-1}$  für alle  $g \in \Gamma$ . Die Kategorie der  $\Gamma$ -Garben auf  $X$  und  $\Gamma$ -Morphismen, die eine offensichtliche additive Struktur besitzt, notieren wir durch  $Sh^\Gamma(X)$ . Wir schreiben  $\text{Hom}_{X,\Gamma}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  für den  $k$ -Vektorraum der  $\Gamma$ -Morphismen  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ . Für alle  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in Sh^\Gamma(X)$  besitzt die Garbe  $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  eine  $\Gamma$ -Garbenstruktur gegeben durch die Strukturmorphismen

$$\mu^g : \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{H}om(g^*\mathcal{F}, g^*\mathcal{G}) \cong g^*\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}), \quad g \in \Gamma,$$

wobei beim ersten Pfeil die Strukturmorphismen von  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  und beim zweiten die Adjunktion [KS, Cor. 2.3.4.] mit der Identität  $g^* = g_*^{-1}$  kombiniert wurde. Es gilt

$$H^0(X; \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})) = \text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}), \quad \in k\Gamma\text{-mod}$$

also insbesondere  $H^0(X; \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}))^\Gamma = \text{Hom}_{X, \Gamma}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ .

Die homologische Algebra von  $\Gamma$ -Garben verhält sich wie die der gewöhnlichen Garben. Zum Beispiel ist nach [BL, 8.3.] die abgeleitete Kategorie von  $Sh^\Gamma(X)$  auf die gleiche Weise zu bilden wie die von  $Sh(X)$ , wenn  $\Gamma$  diskret ist. Für nichtdiskrete  $\Gamma$  werden dort andere Methoden vorgestellt. Wir benötigen im Moment nur die folgenden beiden Grundlagen.

**Bemerkung** ([Gro, Prop. 5.1.1., Prop. 5.1.2.]). Die additive Kategorie  $Sh^\Gamma(X)$  ist abelsch, bivollständig und besitzt genügend viele Injektive.

**Grothendieckspektralsequenzen.** Für die homologische Algebra in der Kategorie der Garben sind Grothendieck-Spektralsequenzen von großer Bedeutung. Wir erinnern an diese und führen folgende nützliche Begriffe ein:

**1.11. Bemerkung/Notation.** (a) Seien  $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$  komponierbare linksexakte Funktoren zwischen abelschen Kategorien, die genügend viele Injektive besitzen. Der Funktor  $F$  bilde injektive Objekte auf  $G$ -azyklische Objekte ab. Dann existiert nach [Gro, Th. 2.4.1.] (oder [Wei, 5.8]) eine Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = R^p G \circ R^q F \Rightarrow R^{p+q}(G \circ F).$$

Diese Spektralsequenz nennen wir die *Grothendieckspektralsequenz der Komposition*  $G \circ F$ . Der Kantenhomomorphismus  $R^*(G \circ F) \rightarrow G \circ R^*F$  ist auf folgende kanonische Weise gegeben:

Sei  $A \rightarrow I^\bullet$  eine injektive Auflösung eines Objekts  $A \in \mathcal{A}$ . Es sei  $K^p = \ker(I^p \rightarrow I^{p+1}) = \text{im}(I^{p-1} \rightarrow I^p)$ . Aufgrund der Linksexaktheit von  $F$  ist  $R^p F(A)$  der Kokern von  $FI^{p-1} \rightarrow FK^p$ . Wenden wir  $G$  an, so ist die Komposition  $G(FI^{p-1}) \rightarrow G(FK^p) \rightarrow G(R^p F(A))$  Null. Daher induziert diese Sequenz einen Homomorphismus  $R^p(GF)(A) \rightarrow G(R^p(A))$ , denn aus dem gleichen Grund wie oben ist  $R^p(GF)(A)$  der Kokern von  $GF(I^{p-1}) \rightarrow GF(K^p)$ .

(b) Sei  $(F, U) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  eine Adjunktion (d.h.  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ist linksadjungiert zu  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ) zwischen abelschen Kategorien mit genügend vielen Injektiven. Wir fixieren ein Objekt  $A \in \mathcal{C}$ . Dann ist  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, -) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) \circ U$ . Da  $U$  als Rechtsadjungierter linksexakt ist und Injektive erhält, vgl. [Wei, 2.6], können wir (a) anwenden und erhalten eine Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^p(A, R^q U(-)) \Rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{D}}^{p+q}(FA, -),$$

die wir die *Grothendieckspektralsequenz der Adjunktion*  $(F, U)$  nennen.

**1.12. Beispiel.** Die Grothendieckspektralsequenz der Komposition  $\text{Hom}_X = H^0(X; \mathcal{H}om_X)$  heißt die *Lokal-Global-Spektralsequenz* (oder kurz LG-Spektralsequenz) und besitzt die Form

$$E_2^{p,q} = H^p(X; \mathcal{E}xt^q(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \Rightarrow \text{Ext}^{p+q}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

für alle  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in Sh(X)$ . Der oben beschriebene Kantenhomomorphismus  $\text{Ext}^*(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(X; \text{Ext}^*(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$  stimmt hier mit dem Garbifizierungshomomorphismus überein, vgl. [Gro, (4.2.6)].

### Die Adjunktion $(f_*, f^*)$

**1.13. Bemerkung** ([BL, 8.1]). Sei  $f : X \rightarrow X'$  eine  $\Gamma$ -äquivalente Abbildung zwischen (diskontinuierlichen)  $\Gamma$ -Räumen. Dann besitzt der Pushforward  $f_*(\mathcal{G})$  eine kanonische  $\Gamma$ -Struktur für alle  $\mathcal{G} \in Sh^\Gamma(X)$ , indem man die Strukturabbildungen als  $f_*(\mu_{\mathcal{G}}^g)$  definiert (man beachte  $f_*g^* = g^*f_*$ , da  $f$  äquivalent ist). Das gleiche gilt für den Pullbackfunktork  $f^*$ , so dass wir eine „äquivalente Adjunktion“

$$f_* : Sh^\Gamma(X) \longleftrightarrow Sh^\Gamma(X') : f^*$$

also einen natürlichen Isomorphismus  $\text{Hom}_{X, \Gamma}(f^*\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \text{Hom}_{X', \Gamma}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G})$  bekommen, indem wir die  $\Gamma$ -Invarianten der üblichen Adjunktion [KS, Prop. 2.3.3.] nehmen. Insbesondere existiert ein natürlicher Isomorphismus

$$(1.14) \quad \text{Hom}_{X, \Gamma}(M_X, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{k\Gamma}(M, H^0(X; \mathcal{F}))$$

für alle  $k\Gamma$ -Moduln  $M$  und  $\mathcal{F} \in Sh^\Gamma(X)$ , indem wir die obige Adjunktion auf  $X' = *$  und die konstante Funktion  $f : X \rightarrow *$  anwenden.

Die Grothendieck-Spektralsequenz der Adjunktion  $(f^*, f_*)$  ist eine Spektralsequenz von  $\Gamma$ -Moduln und eine Verallgemeinerung der Leray-Spektralsequenz [Gro, 3.1]

Von nun an versehen wir  $Y$  mit der trivialen  $\Gamma$ -Operation, so dass  $p : X \rightarrow Y$  äquivalent ist. Mit dieser Vereinbarung ist  $Sh^\Gamma(Y) = Sh_{k\Gamma}(Y)$ , also die (gewöhnliche) Kategorie der Garben auf  $Y$  mit Werten in  $k\Gamma$ -mod. Die letzte Bemerkung gibt uns eine Adjunktion

$$(1.15) \quad p_* : Sh^\Gamma(X) \longleftrightarrow Sh_{k[\Gamma]}(Y) : p^*$$

**Definition** ([Gro, 5.1], [BL, 0.3]). Sei  $p_*^\Gamma : Sh^\Gamma(X) \rightarrow Sh(Y)$  der Funktor, der auf allen  $\mathcal{F} \in Sh^\Gamma(X)$  durch  $H^0(U; p_*^\Gamma(\mathcal{F})) := H^0(U; p_*(\mathcal{F}))^\Gamma = H^0(p^{-1}(U); \mathcal{F})^\Gamma$  definiert ist.

Für die nächste Proposition beachte man, dass jede Garbe  $\mathcal{F} \in Sh(Y)$  als eine  $\Gamma$ -Garbe gesehen werden kann, indem man jeden  $k$ -Vektorraum  $\mathcal{F}(U)$ ,  $U \subset Y$ , mit der trivialen  $\Gamma$ -Operation versieht. Auf diese Weise bekommt man eine Einbettung  $Sh(Y) \subset Sh^\Gamma(Y)$  und einen Funktor  $Sh(Y) \subset Sh^\Gamma(Y) \xrightarrow{p_*^\Gamma} Sh^\Gamma(X)$ , den wir ebenfalls mit  $p^*$  bezeichnen.

**1.16. Proposition** ([BL, 8.4.1, 8.6.1]). Sei  $\mathcal{F} \in Sh(Y)$  und  $\mathcal{G} \in Sh^\Gamma(X)$ . Dann existiert ein in  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  natürlicher Isomorphismus

$$\text{Hom}_{X, \Gamma}(p^*\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \text{Hom}_Y(\mathcal{F}, p_*^\Gamma\mathcal{G}).$$

Als Rechtsadjungierter erhält  $p_*^\Gamma$  damit Injektive. Außerdem ist dieser Funktor exakt, wenn für alle  $x \in X$  die Ordnung von  $\Gamma_x$  invertierbar im Grundring  $k$  ist.

*Beweis.* Der Funktor  $A \mapsto A^\Gamma$  ist rechtsadjungiert zum Funktor, der jeden  $k$ -Vektorraum mit der trivialen  $\Gamma$ -Operation versieht, siehe [Wei, 6.1]. Dies impliziert einen Isomorphismus  $\text{Hom}_Y(\mathcal{F}, p_*^\Gamma \mathcal{G}) \cong \text{Hom}_{Y, \Gamma}(\mathcal{F}, p_* \mathcal{G})$  und hieraus folgt mit 1.15 die gewünschte Adjunktion.

Als ein rechtsadjungierter Funktor bildet  $p_*^\Gamma$  injektive Objekte auf injektive Objekte ab. Nach [Gro, 5.3.1.] ist der Halm  $R^*(p_*^\Gamma)(\mathcal{G})_y$  für alle  $y \in Y$  isomorph zu  $H^*(\Gamma_x, \mathcal{G}_x)$ , wobei  $x$  in der Faser von  $y$  gewählt ist. Somit sind die höheren abgeleiteten Funktoren von  $p_*^\Gamma$  Null, weil der Funktor  $A \mapsto A^{\Gamma_x}$  aufgrund der Invertierbarkeit von  $\text{ord}(\Gamma_x)$  exakt ist, vgl. auch [Wei, Prop. 6.1.10]. Also ist  $p_*^\Gamma$  exakt.  $\square$

**1.17. Korollar.** Für alle  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(Y)$  und  $\mathcal{G} \in \text{Sh}^\Gamma(X)$  existiert ein natürlicher Isomorphismus  $\text{Ext}_{X, \Gamma}^*(p^* \mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \text{Ext}_Y^*(\mathcal{F}, p_*^\Gamma \mathcal{G})$ .

*Beweis.* Die Proposition 1.16. gibt uns einen Isomorphismus von Funktoren  $\text{Hom}_{X, \Gamma}(p^* \mathcal{F}, -) \cong \text{Hom}_Y(\mathcal{F}, -) \circ p_*^\Gamma$ , wobei  $p_*^\Gamma$  exakt ist und Injektive erhält. Das Ableiten auf beiden Seiten führt daher zum Ziel.  $\square$

**Die Beobachtung von Singhof** Man beachte, dass man für alle  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(Y)$  einen natürlichen Isomorphismus  $H^*(Y; \mathcal{F}) \cong \text{Ext}_Y^*(k_Y, \mathcal{F})$  hat, denn es ist  $H^0(Y, -) = \text{Hom}_Y(k_Y, -)$  nach 1.14. Somit kann 1.8. als ein Isomorphismus  $\text{Ext}^*(k_Y, \mathcal{M}) \cong \text{Ext}_{k, \Gamma}^*(k, \mathcal{M})$  gelesen werden. Eine der Grundfragen, denen in dieser Arbeit nachgegangen wird, beschäftigt sich damit, ob dies auch richtig ist, wenn statt  $k$  (als trivialer  $\Gamma$ -Modul aufgefasst) ein beliebiger  $\Gamma$ -Modul betrachtet wird.

Eine erste Antwort auf diese Frage gibt uns die Beobachtung von Singhof, die im gewissen Sinne dual zu 1.8. ist:

**1.18. Lemma** (Singhof, [Sin]). Sei  $X$  ein zusammenziehbarer diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum. Dann existiert für alle Darstellungen  $\mathcal{M}$  von  $\Gamma$  ein natürlicher Isomorphismus

$$H^*(\Gamma; \mathcal{M}^\vee) \cong \text{Ext}^*(\mathcal{M}, k_Y)$$

wobei  $\mathcal{M}^\vee = \text{Hom}(\mathcal{M}, k)$  die duale Darstellung von  $\mathcal{M}$  ist.

Beachte, dass  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, k) = H^*(\Gamma, \mathcal{M}^\vee)$  gilt, weil der Grundring ein Körper ist, siehe 1.7. Der Beweis in [Sin] benutzt die beiden folgenden Lemmata.

**1.19. Lemma** (Singhof). Sei  $X$  ein diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum und  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  Darstellungen von  $\Gamma$ .

(a) Es gilt  $\text{Ext}^j(\mathcal{M}, k_Y) = 0$  für alle  $j > 0$ .

(b) Ist  $X$  als diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum orientierbar, so existiert ein kanonischer Isomorphismus von Garben  $\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\cong} p_*^\Gamma(\underline{\mathcal{H}om}(\mathbf{M}, \mathbf{N})_X)$ .

All diese Aussagen werden später direkt aus Theorem A der Einleitung folgen. Den Beweisen für diese Aussagen habe ich ein eigenes Abschnitt 3.d. ab Seite 54 gewidmet. Wir wollen trotzdem hier die Beweismethoden aus [Sin] skizzieren, weil erstens [Sin] nicht veröffentlicht ist und wir zweitens die Unterschiede der Beweismethoden hervorheben möchten.

Die wohlbekanntere Verdier-Dualität [KS, Kap. III] besitzt die folgende nützliche spezielle Form:

**1.20. Lemma** (Poincaré-Verdier-Dualität). *Sei  $X$  ein orientierbarer diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum der Dimension  $n$ . Dann gilt  $\text{Ext}_Y^j(\mathcal{F}, k_Y) \cong \text{Hom}_k(H_c^{n-j}(Y; \mathcal{F}), k)$  für alle  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(Y)$  und  $j \in \mathbb{Z}$ .*

*Beweisskizze.* Der Quotient  $Y$  ist eine orientierbare,  $n$ -dimensionale Homologiemannigfaltigkeit über  $k$  (wir benutzen die Terminologie von [Bre2], Def. V.9.1). Dies folgt aus [Bre2], Th. II.19.2 und [Bre2], Th. V.9.3. Nun kann man [GM1], (III.68) auch auf diese Situation anwenden und es folgt die Behauptung, da die Orientierungsgarbe von  $X$  konstant ist.  $\square$

Dass dieser Beweis etwas skizzenhaft ist, soll uns nicht weiter stören: Für alle „klassischen“ Resultate, die in diesem Kapitel auftauchen (außer 1.21.), deren ursprünglichen Beweise die Poincaré-Verdier-Dualität benutzen, werden alternative Beweise präsentiert, die ausschließlich von der im weiteren Verlauf dieser Arbeit entwickelten Theorie Gebrauch machen werden.

Es folgt wie angekündigt eine Skizze des Beweises von [Sin] zu 1.19.a, woraus wir dann 1.18. folgern.

*Beweisskizze zu 1.19.a.* Da die Frage von lokaler Natur ist, können wir annehmen, dass  $X$  ein lokales Modell ist, also  $X \cong \mathbb{R}^n$ , wobei  $\Gamma$  eine endliche Gruppe ist, die linear operiert. Mit der Poincaré-Verdier-Dualität folgt  $\text{Ext}^j(\mathcal{M}, k_Y) \cong H_c^{n-j}(\Gamma \backslash \mathbb{R}^n; \mathcal{M})^\vee$ . Die Endlichkeit von  $\Gamma$  impliziert dann  $H_c^{n-j}(\Gamma \backslash \mathbb{R}^n; \mathcal{M}) \cong H_c^{n-j}(\mathbb{R}^n, \mathbf{M})^\Gamma = 0$  für alle  $j > 0$ .  $\square$

*Beweis von 1.18.* Nach 1.19. kollabiert die Lokal-Global-Spektralsequenz 1.12. und gibt uns einen Isomorphismus  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, k_Y) \cong H^*(Y; \mathcal{H}om(\mathcal{M}, k_Y))$ . Jetzt benutze man 1.8. und 1.19.a.  $\square$

Als eine Folgerung von 1.18. können wir eine verbesserte Variante des Verschwindungsergebnisses 1.9. beweisen. Allerdings sei erwähnt, dass wir dafür die Poincaré-Verdier-Dualität benötigen und das ist auch die einzige Stelle in dieser gesamten Arbeit, an der kein Weg gewählt wird, der diesen tiefen Dualitätssatz umgeht.

**1.21. Korollar.** *Sei  $X$  ein zusammenziehbarer, orientierbarer diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum, so dass  $\Gamma \backslash X$  nicht kompakt ist und  $\mathbf{M}$  eine Darstellung von  $\Gamma$ . Dann gilt  $H^j(\Gamma, \mathbf{M}) = 0$  für alle  $j \geq \dim(X)$ .*

*Beweis.* Sei  $n = \dim(X)$ . Wegen 1.18. und der Poincaré-Verdier-Dualität 1.20. gilt

$$H^j(\Gamma; \mathbf{M}^\vee) \cong H_c^{n-j}(Y; \mathcal{M})^\vee.$$

Also folgt die Aussage für alle  $j > 0$ . Es bleibt also für  $j = 0$  zu zeigen, dass  $H_c^0(Y; \mathcal{M}) = 0$  ist. Sei  $f \in H^0(Y; \mathcal{M}) = H^0(X; \mathbf{M}_X)^\Gamma$  ein Element mit kompaktem Träger  $K \subset Y$ . D.h.  $f$  kann man als  $\Gamma$ -äquivariante, lokalkonstante Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbf{M}$  auffassen, deren Träger  $p^{-1}(K) \subset X$  ist. Da  $Y$  nicht kompakt ist, gilt  $K \neq Y$  und damit  $p^{-1}(K) \neq X$ . Da  $f$  konstant ist ( $X$  ist zusammenhängend), muss  $f = 0$  gelten, da  $f$  auf  $X - p^{-1}(K) \neq \emptyset$  verschwindet.  $\square$

## 1.c. Der Vergleichshomomorphismus

Es ist möglich, 1.8. und 1.18. zu einem einzigen Satz zu vereinen. Sei

$$(1.22) \quad \iota : p^* \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{M}_X$$

der  $\Gamma$ -Morphismus, der unter 1.16. zur Identität von  $\mathcal{M}$  adjungiert ist. Der von  $\iota$  induzierte Morphismus  $\text{Ext}_\Gamma^*(\mathbf{M}_X, \mathbf{M}_X) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^*(p^* \mathcal{M}, \mathbf{N}_X)$  definiert wegen 1.17. einen kanonischen Homomorphismus

$$(1.23) \quad \alpha : \text{Ext}_{X,\Gamma}^*(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X) \rightarrow \text{Ext}_Y(\mathcal{M}, \mathcal{N}),$$

den wir *Vergleichsmorphismus* nennen.

Übrigens ist  $\iota$  auf den Halmen über alle  $x \in X$  gegeben durch die Inklusion  $\iota_x : \mathbf{M}^{\Gamma_x} \rightarrow \mathbf{M}$ , siehe auch [Gro, (5.1.2)] oder [BL, 8.5.5]. Wir notieren uns daher:

**1.24. Proposition.** *Für alle Darstellungen  $\mathbf{M}$  von  $\Gamma$  ist  $p^* \mathcal{M}$  via  $\iota$  isomorph zu einer  $\Gamma$ -Untergarbe von  $\mathbf{M}$ , deren Schnitte über alle offenen Teilmengen  $U \subset X$  gegeben sind durch*

$$H^0(U; \iota(p^* \mathcal{M})) = \{ \text{lokalkonstante Abb. } s : U \rightarrow \mathbf{M} \text{ mit } s(x) \in \mathbf{M}^{\Gamma_x} \forall x \in U \}$$

*Insbesondere ist  $H^0(X; p^* \mathcal{M}) \cong \mathbf{M}^{\Gamma_s}$ , wobei  $\Gamma_s \subset \Gamma$  die von allen Stabilisatoren erzeugte Untergruppe ist.*

Da also  $p^* \mathcal{M}$  eine  $\Gamma$ -Untergarbe von  $\mathbf{M}_X$  ist, existiert eine kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow p^* \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{M}_X \rightarrow \mathbf{M}_X/p^* \mathcal{M} \rightarrow 0$  welche eine lange exakte Sequenz

$$(1.25) \quad \dots \rightarrow \text{Ext}_{X,\Gamma}^j(\mathbf{M}_X/p^* \mathcal{M}, \mathbf{N}_X) \rightarrow \text{Ext}_{X,\Gamma}^j(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X) \xrightarrow{\alpha} \text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow \dots$$

induziert. Um den endgültigen Zusammenhang zum letzten Abschnitt herzustellen, müssen wir folgende Worte über  $\text{Ext}_{X,\Gamma}^*(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X)$  verlieren.

**1.26. Proposition.** *Ist  $X$  zusammenziehbar, so existiert ein kanonischer Isomorphismus  $\text{Ext}_{X,\Gamma}^*(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X) \xrightarrow{\cong} H^*(\Gamma; \text{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{N}))$ .*

*Beweis.* Die Adjunktion  $\text{Hom}_{X,\Gamma}(\mathbf{M}_X, -) \cong \text{Hom}_{k\Gamma}(\mathbf{M}, H^0(X, -))$  aus 1.14 gibt uns eine Spektralsequenz  $\text{Ext}_{k\Gamma}^p(\mathbf{M}, H^q(X; \mathbf{N})) \Rightarrow \text{Ext}_{X,\Gamma}^{p+q}(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X)$ , welche kollabiert, wenn  $X$  zusammenziehbar ist. Es folgt  $\text{Ext}_{X,\Gamma}^*(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X) \cong \text{Ext}_{k\Gamma}^*(\mathbf{M}, \mathbf{N})$  und dies ist nach 1.7 isomorph zu  $H^*(\Gamma, \text{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{N}))$ .  $\square$

**Bemerkung.** Ist  $\mathbf{M}$  trivial, so ist  $\alpha$  ein Isomorphismus wegen 1.25, denn es ist dann  $\mathcal{M} = \mathbf{M}_Y$  nach 1.10. und somit  $p^*\mathcal{M} = \mathbf{M}_X$ . Interessanter ist der Fall, wenn  $\mathbf{N}$  trivial ist. Auch dann ist  $\alpha$  ein Isomorphismus wie wir später in 3.30. beweisen werden. Prinzipiell können wir wie in 1.18. vorgehen, aber wir müssten die Poincaré-Verdier-Dualität benutzen, was wir eigentlich vermeiden wollen.

Im Falle der Zusammenziehbarkeit von  $X$  lehrt uns diese Bemerkung wegen 1.8. und 1.18. nichts Neues.

Zum Abschluss dieses Abschnitts diskutieren wir ein Beispiel, das zu diesem Zeitpunkt noch mit Vorsicht zu genießen ist, da wir die noch unbewiesene Aussage 1.19.b benutzen werden. Trotzdem soll an dieser Stelle auf das Beispiel aufmerksam gemacht werden, damit dem Leser bewusst ist, dass  $\alpha$  i.A. kein Isomorphismus ist.

**1.27. Beispiel.** Sei  $X = \mathbb{C}$  und  $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  operiere kanonisch als Untergruppe  $\{1, -1\} \subset \mathbb{C}^*$  auf  $X$  (diese Operation ist orientierungserhaltend). Beachte, dass der Quotient  $Y = \mathbb{C}/(z \sim -z)$  homöomorph zu  $\mathbb{C}$  ist. Sei  $y_0 = p(0)$  der Orbit von  $0 \in X$ . Fasse  $\mathbf{M} = X$  als lineare Darstellung von  $\Gamma$  auf.

Wir behaupten, dass  $\text{Ext}^1(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \cong \mathbb{C}$  gilt. Wir benutzen das Resultat 1.28. aus dem nächsten Abschnitt, nämlich die Identität  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{M}) = \text{Ext}^*(\mathcal{M}|_{Y_r}, \mathcal{M}|_{Y_r})$ , die aufgrund von  $\mathcal{M}_{y_0} = \mathbf{M}^\Gamma = 0$  gilt. Glaubt dies der Leser noch nicht, so kann er ruhig von vorne herein das Beispiel  $X = \mathbb{C} - \{0\}$  statt  $X = \mathbb{C}$  betrachten (das Beispiel  $X = \mathbb{C}$  ist jedenfalls dafür gedacht, dass man sieht, dass die Isomorphie von  $\alpha$  auch bei zusammenziehbaren  $X$  nicht erfüllt zu sein braucht).

Nach 1.10. ist  $\mathcal{M}$  lokalkonstant über der regulären Menge  $Y_r = Y - y_0$ , wobei  $y_0 = p(0)$  der Orbit von  $0 \in X$  ist. Insbesondere ist  $\text{Ext}^q(\mathcal{M}, \mathcal{N})|_{Y_r} = 0$  für alle  $q > 0$ , so dass die Lokal-Global-Spektralsequenz 1.12. kollabiert und einen Isomorphismus  $\text{Ext}^1(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \cong H^1(Y_r; \text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{M}))$  liefert. Nach 1.19.b ist  $\text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \cong p_*^\Gamma(\text{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{M}))$ . Daher folgt mit 1.17.:

$$\text{Ext}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \cong \text{Ext}_{X_r, \Gamma}^1(k_{X_r}, \text{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{M})_{X_r})$$

Wegen der Endlichkeit von  $\Gamma$  ist Letzteres isomorph zu  $H^1(X_r; \text{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{M}))^\Gamma = \text{Hom}_\Gamma(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \mathbb{C}$  (die Ableitung des Funktors  $\text{Hom}_\Gamma(k, -)$  ist  $\text{Ext}^*(k, -)^\Gamma$ , weil  $A \mapsto A^\Gamma$  wegen der Endlichkeit von  $\Gamma$  exakt ist).

## 1.d. Restriktionen von Ext auf Teilräume

Wir diskutieren in diesem Abschnitt grundlegende technische Eigenschaften des Ext-Funktors bei Restriktionen auf Teilräume. Wir fixieren in diesem Abschnitt zwei  $\Gamma$ -invariante Teilmengen  $U, A \subset X$ , wobei  $A$  abgeschlossen und  $U$  offen in



$X$  ist. Außerdem setzen wir  $Z := U \cap A$ .

In diesem Abschnitt ist  $k$  ein beliebiger kommutativer Ring mit 1 und  $Sh^\Gamma(X)$  ist die Kategorie der  $\Gamma$ -Garben mit Werten in  $k\text{-mod}$ . Wir erinnern zunächst an die übliche Notation der Fortsetzung von Garben außerhalb lokal abgeschlossener Teilmengen durch 0 (vgl. etwa [KS] oder [Bre2]). Es existiert für alle  $\mathcal{F} \in Sh^\Gamma(X)$  eine eindeutige  $\Gamma$ -Garbe  $\mathcal{F}_Z \in Sh^\Gamma(X)$  mit  $\mathcal{F}_Z|_Z = \mathcal{F}|_Z$  und  $\mathcal{F}_Z|_{X-Z} = 0$ . Etwas allgemeiner existiert für alle  $\mathcal{A} \in Sh^\Gamma(Z)$  eine eindeutige  $\Gamma$ -Garbe  $\mathcal{A}^X \in Sh^\Gamma(X)$  mit  $\mathcal{A}^X|_Z = \mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}^X|_{X-Z} = 0$  und man kann  $\mathcal{F}_Z = (\mathcal{F}|_Z)^X$  setzen. Üblicherweise heißt dieser Prozess „Fortsetzung durch Null“. Ist  $A$  ein  $\Gamma$ -Modul, so schreiben wir auch  $A_Z^X := (A_X)_Z$ . Dies ist also die eindeutige  $\Gamma$ -Garbe, die konstant  $A$  über  $Z$  und sonst 0 ist. Die Funktoren  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^X$  und  $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_Z$  sind exakt.

Für alle offenen  $\Gamma$ -invarianten Teilmengen  $U \subset X$  existiert eine kanonische kurze exakte Sequenz von  $\Gamma$ -Garben

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{X-U} \rightarrow 0.$$

**1.28. Lemma.** *Seien  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in Sh^\Gamma(X)$ . Dann gibt es kanonische Isomorphismen*

$$(a) \text{Ext}_{X,\Gamma}^*(\mathcal{F}_U, \mathcal{G}) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}_{U,\Gamma}^*(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U),$$

$$(b) \text{Ext}_{X,\Gamma}^*(\mathcal{F}, \mathcal{G}_A) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}_{A,\Gamma}^*(\mathcal{F}|_A, \mathcal{G}|_A).$$

Darüberhinaus stimmt die vom Monomorphismus  $\mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{F}$  induzierte Abbildung  $\text{Ext}_\Gamma^*(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^*(\mathcal{F}_U, \mathcal{G}) \cong \text{Ext}_\Gamma^*(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$  mit dem Restriktionshomomorphismus überein. Das gleiche gilt für die vom Epimorphismus  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_A$  induzierte Abbildung  $\text{Ext}_\Gamma^*(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^*(\mathcal{F}, \mathcal{G}_A) \cong \text{Ext}_\Gamma^*(\mathcal{F}|_A, \mathcal{G}|_A)$ .

*Beweis.* (a) Nach [KS, (2.3.18)] gilt  $\text{Hom}_\Gamma(\mathcal{F}_U, -) \cong \text{Hom}_\Gamma(\mathcal{F}|_U, -) \circ i^*$ , wobei  $i : U \rightarrow X$  die Inklusion sei (man nehme dort die globalen Schnitte und beachte dabei [KS, Prop. 2.3.9.(iii)]). Die Grothendieckspektralsequenz dieser Adjunktion kollabiert zum gewünschten Isomorphismus, weil  $i^*$  exakt ist (beachte, dass  $i^*(\mathcal{G}) = \mathcal{G}|_U$  gilt).

(b) Sei  $j : A \rightarrow X$  die Inklusion. Die Grothendieckspektralsequenz 1.11. der Adjunktion  $(j^*, j_*)$  kollabiert, weil  $j_*$  exakt ist (es ist  $j_*\mathcal{A} = \mathcal{A}^X$  für alle  $\mathcal{A} \in Sh^\Gamma(A)$ ) und man erhält den Isomorphismus  $\text{Ext}^*(\mathcal{F}, j_*(\mathcal{G}|_A)) = \text{Ext}^*(j^*\mathcal{F}, j^*\mathcal{G})$ .  $\square$

**Kohomologie mit Träger** Betrachte den Funktor  $H_Z^0(U; -) := \ker(H^0(U; -) \rightarrow H^0(U - A; -))$ , der üblicherweise „globale Schnitte mit Träger in  $Z$ “ genannt wird, vgl. z.B. [KS, 2.3.14]. Dieser ist linksexakt und der abgeleitete Funktor

$$H_Z^*(U; -) := R^*H_Z^0(U, -) : Sh^\Gamma(U) \rightarrow k\Gamma\text{-mod}$$

heißt *Kohomologie mit Träger in  $Z$* . Den Ausschneidungsisomorphismus [Dim, 2.4.2.] hat man ohne Modifikation auch im äquivarianten Kontext: Sei  $U' \subset U$

eine offene  $\Gamma$ -invariante Teilmenge mit  $Z \subset U'$ . Dann ist der Restriktionsmorphimus von  $\Gamma$ -Moduln

$$(1.29) \quad H_Z^*(U; -) \rightarrow H_Z^*(U'; -)$$

ein Isomorphismus. Es ist leicht zu sehen, dass  $H_Z^*(U; -)$  mit dem in [Bre2, II.12] definierten  $H^*(U, U - Z; -)$  Funktor übereinstimmt.

Ist  $A \subset Z$  eine abgeschlossene Teilmenge, so hat man nach [Dim, S. 45] für alle  $\mathcal{F} \in Sh^\Gamma(X)$  die sogenannte *lange exakte Sequenz des Tripels*  $(U, U - Z, U - A)$

$$(1.30) \quad \dots \rightarrow H_{A \cap (U - Z)}^j(U - Z; \mathcal{F}) \rightarrow H_Z^{j+1}(U, -) \rightarrow H_A^{j+1}(U, -) \rightarrow H_{A \cap (U - Z)}^{j+1}(U - Z, -) \rightarrow \dots$$

(man benutze [Dim, (2.6.32)] zusammen mit der Bemerkung [Dim, 2.6.10]).

**1.31. Lemma.** *Sei  $k$  ein beliebiger kommutativer Ring mit 1 und  $M$  ein  $k\Gamma$ -Modul. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus von Funktoren*

$$\mathrm{Hom}_X(M_Z^X, -) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_k(M, H_Z^0(U; -)) \in \Gamma\text{-mod.}$$

*Ist insbesondere  $M$  ein projektiver  $k\Gamma$ -Modul oder ist  $\mathcal{F} \in Sh^\Gamma(X)$  so dass  $H_Z^0(U; \mathcal{F})$  ein injektiver  $k\Gamma$ -Modul ist, so existiert ein kanonischer Isomorphismus*

$$\mathrm{Ext}_{X, \Gamma}^*(M_Z^X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{k\Gamma}(M, H_Z^*(U; \mathcal{F})).$$

*Die Isomorphismen sind funktoriell in  $M, \mathcal{F}, Z$  und  $U$ .*

Wir werden Letzteres später auf  $\Gamma$ -Garben der Form  $\mathcal{F} = \Omega_X^q \otimes \mathbf{N}_X$  anwenden, wobei  $\Omega_X^q$  die Garbe der differenzierbaren  $q$ -Formen auf  $X$  und  $\mathbf{N}$  eine Darstellung von  $\Gamma$  ist.

*Beweis.* Der Fall  $M = k$  folgt, indem man die globalen Schnitte in [KS, (2.3.18)] betrachtet (beachte, dass die dortigen Beweise im äquivarianten Kontext übernommen werden können), so ist unser Lemma für den Fall  $M = k$  bewiesen. Den allgemeinen Fall führt man auf diesen zurück, indem man die Adjunktion  $\mathrm{Hom}(M_Z^X, -) = \mathrm{Hom}(M, \mathcal{H}om(k_Z^X, -))$  benutzt (beachte hier [KS, (2.3.15)]).  $\square$

**1.32. Korollar.** *Sei  $A \subset X$  abgeschlossen,  $U \subset X$  offen und beide  $\Gamma$ -invariant. Dann existiert ein in  $A$  und  $U$  natürlicher Isomorphismus*

$$\mathrm{Ext}^*(k_{A \cap U}, k_X) \cong H_{A \cap U}^*(U; k) \in \Gamma\text{-mod.}$$

**Mayer-Vietoris-Sequenzen** Sei  $X$  ein diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum und  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in Sh^\Gamma(X)$ . Angenommen, wir haben  $\Gamma$ -invariante Teilräume  $A, B, U, V \subset X$  mit  $A \cup B = U \cup V = X$  und  $A, B$  abgeschlossen, sowie  $U, V$  offen. Dann existieren kanonische exakte Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{F}_{U \cap V} &\rightarrow \mathcal{F}_U \oplus \mathcal{F}_V \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G}_A \oplus \mathcal{G}_B \rightarrow \mathcal{G}_{A \cap B} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

die natürlich in  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  sind, siehe [KS, 2.3.6]. Die lange exakte Ext-Sequenz angewandt auf diese Sequenzen liefert zusammen mit 1.28. die *Mayer-Vietoris-Sequenzen* (die Argumente der Ext-Gruppen sind stets  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  bzw. entsprechende Restriktionen auf Teilräume):

$$(1.33) \quad \dots \rightarrow \text{Ext}_{X,\Gamma}^j \rightarrow \text{Ext}_{U,\Gamma}^j \oplus \text{Ext}_{V,\Gamma}^j \rightarrow \text{Ext}_{U \cap V,\Gamma}^j \xrightarrow{\pm} \dots$$

$$(1.34) \quad \dots \rightarrow \text{Ext}_{X,\Gamma}^j \rightarrow \text{Ext}_{A,\Gamma}^j \oplus \text{Ext}_{B,\Gamma}^j \rightarrow \text{Ext}_{A \cap B,\Gamma}^j \xrightarrow{\pm} \dots$$

und diese langen exakten Sequenzen sind funktoriell in  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$ . Die Pfeile sind wegen 1.28. wie üblich bei Mayer-Vietoris-Sequenzen gegeben durch die Produkte bzw. Differenzen von Restriktionsabbildungen, die von den Inklusionen  $A, B, U, V \subset X$  kommen.

## Kapitel 2

# Stratifizierungen diskontinuierlicher Räume

Das direkte Studium der Inklusion  $\iota : p^*\mathcal{M} \rightarrow M_X$  bzw. des Quotienten  $M_X/p^*\mathcal{M}$  erweist sich als schwierig. In diesem Kapitel studieren wir äquivariante Triangulierungen diskontinuierlicher Räume, um die Inklusion  $\iota$  zu einer Filtrierung

$$p^*\mathcal{M} = \mathcal{M}^n \subset \cdots \subset \mathcal{M}^1 \subset \mathcal{M}^0 = M_X,$$

so zu verfeinern, dass die sukzessiven Quotienten  $\mathcal{M}^m/\mathcal{M}^{m+1}$  konstant auf den Simplexes der Dimension  $m$  und trivial außerhalb dieser Simplexes sind.

Der Flexibilität wegen wird das oben Genannte etwas allgemeiner behandelt: Wir führen in den Abschnitten 2.a und 2.b die Begriffe der äquivarianten Stratifizierung bzw. konstruierbare Garben ein und behandeln einige elementare Eigenschaften her. Ausgehend von einer äquivarianten Stratifizierung  $\mathcal{S}$  von  $X$  und einer  $\Gamma$ -Untergarbe  $\mathcal{K} \subset M_X$ , konstant auf allen Straten ist, definieren wir eine Filtrierung der Inklusion  $\mathcal{K} \subset M_X$  derart, dass die sukzessiven Quotienten auf den Straten einer festen Dimension konzentriert und auf jedem einzelnen Stratum konstant sind – in unserer Terminologie werden wir solche Garben „dünn“ nennen. Dünne Garben  $\mathcal{Q}$  besitzen den Vorteil, dass der Funktor  $\text{Ext}^*(\mathcal{Q}, -)$  sehr gut zu verstehen ist, wie unsere Diskussion zeigen wird.

Diese Situation ist insofern allgemeiner als die obige, als äquivariante Triangulierungen spezielle äquivariante Stratifizierungen sind und  $p^*\mathcal{M}$  ein Beispiel für eine konstruierbare  $\Gamma$ -Untergarbe  $\mathcal{K} \subset M_X$  ist. Wir beginnen wie angekündigt mit der Verallgemeinerung der Stratifizierungs- und Triangulierungsbegriffe im äquivarianten Kontext:

## 2.a. Orbitbündel und Stratifizierungen

Wir fixieren einen diskontinuierlichen  $\Gamma$ -Raum  $X$ . Für jeden Stabilisator  $H < \Gamma$  sei  $(H)$  die Konjugationsklasse von  $H$  (*Isotropietyp* genannt) und wir definieren:

$$X_H := \{x \in X \mid \Gamma_x = H\}$$

$$X_{(H)} := \{x \in X \mid (\Gamma_x) = (H)\},$$

d.h.  $X_{(H)}$  ist der Orbit  $\Gamma \cdot X_H$ . Bezeichnet  $N_H$  den Normalisator von  $H$  in  $\Gamma$ , so beachte man, dass  $X_H$  ein  $N_H$ -Raum ist, auf dem  $H$  trivial operiert. Damit ist  $X_H$  insbesondere ein  $W_H$ -Raum, wobei  $W_H$  die Weylgruppe  $N_H/H$  ist. Es ist aufgrund der Diskretheit von  $\Gamma$  leicht zu sehen, dass

$$X_{(H)} = \coprod_{g \in \Gamma/N_H} gX_H$$

eine Identifikation von topologischen Räumen ist, wobei auf der rechten Seite die topologische Summe gemeint ist. Man kann dies auch als eine Identifikation (von differenzierbaren  $\Gamma$ -Mannigfaltigkeiten)  $X_{(H)} = \Gamma \times_{W_H} X_H$  interpretieren und das ist der Grund, warum  $X_{(H)}$  *Orbitbündel* genannt wird, mehr dazu z.B. in [Jän]. Nun ist relativ klar, dass

$$(2.1) \quad X = \coprod_H X_H$$

gilt, wobei die Vereinigung über alle Stabilisatoren  $H < \Gamma$  genommen wird. Dies ist keine topologische Identifizierung sondern erst einmal nur eine mengentheoretische. Diese stellt für uns in gewisser Weise *die* grundlegende Stratifizierung dar. Stratifizierungen werden wir gleich allgemein definieren und praktisch gesehen sind alle interessanten Stratifizierungen Verfeinerungen von 2.1. Analog dazu hat man übrigens auch eine Zerlegung von  $\Gamma$ -invarianten Teilräumen:

$$(2.2) \quad X = \coprod_{(H)} X_{(H)},$$

wobei  $(H)$  alle Isotropietypen durchläuft.

**2.3. Proposition.** *Sei  $X$  ein diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum und  $H < \Gamma$  ein Stabilisator. Dann gilt*

$$\overline{X_H} = X^H = \bigcup_{K \geq H} X_K.$$

*Darüberhinaus sind für alle Stabilisatoren  $H, K < \Gamma$  die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i)  $K \geq H$
- (ii)  $X_K \cap \overline{X_H} \neq \emptyset$

(iii)  $X_K \subset \overline{X_H}$

Außerdem gibt es für feste  $K < \Gamma$  nur endlich viele  $H < \Gamma$ , die eine dieser Bedingungen erfüllen.

*Beweis.* Ein Element  $x \in X$  ist genau dann in  $X^H$ , wenn  $H$  eine Untergruppe des Stabilisators  $\Gamma_x$  ist, so dass  $X^H = \bigcup_{K \geq H} X_K$  folgt.

Sei  $(x_n) \subset X_H$  eine in  $X$  konvergente Folge mit Grenzwert  $x \in X$ . Es gilt  $hx_n = x_n$  für alle  $h \in H$  und  $n \in \mathbb{N}$  und dies impliziert  $hx = x$  für alle  $h \in H$ , was gleichbedeutend mit  $x \in X^H$  ist. Dies beweist insgesamt  $\overline{X_H} \subset X^H$ . Es bleibt nur noch zu zeigen, dass  $X_K \subset \overline{X_H}$  gilt, wenn  $K, H$  Stabilisatoren mit  $K > H$  sind. Wähle  $x \in X$  mit  $\Gamma_x = K$  und eine  $K$ -invariante zulässige Umgebung  $V \cong \mathbb{R}^n$  von  $x$ . Da  $H < K$  linear auf  $V$  operiert, ist  $X_H \cap V = V_H = V^H - \bigcup_{P \neq H} V^P$  ein Komplement von Vereinigungen niedrig dimensionaler Unterräume des Unterraums  $V^H \subset \mathbb{R}^n$ , insbesondere ist  $V_H$  dicht in  $V^H$  und daraus folgt  $x \in \overline{V_H} \subset \overline{X_H}$ .

Die Äquivalenz der Aussagen (i), (ii), (iii) folgt nun leicht aus dieser Charakterisierung des Abschlusses von  $X_H$ . Der Zusatz, dass für alle  $K$  nur endlich viele  $H$  mit diesen Bedingungen existieren, folgt aus (i) und der Endlichkeit von  $K$  als Stabilisator (das ist Grothendiecks Bedingung (D1)).  $\square$

**$\Gamma$ -Stratifizierungen.** Die Zerlegung 2.1 definiert eine „Dekomposition“ von  $X$  im Sinne von [GM2, I.1.1] und es ist auch nach der obigen Vorarbeit nicht mehr schwer zu zeigen, dass diese Dekomposition eine *Whitney-Stratifizierung* im Sinne von [GM2, I.1.2] ist, was unsere folgende Begriffsbildungen rechtfertigt. Wir werden aber nicht beweisen, dass diese Stratifizierung Whitneys Bedingungen erfüllt, da diese in unseren Betrachtungen keine Rolle spielen. Wir verallgemeinern nun diesen Begriff in den äquivarianten Kontext (Im Falle  $\Gamma = 1$  ist das Folgende eine „Dekomposition“ im Sinne von [GM2, I.1.1]).

**Definition.** Eine  $\Gamma$ -Stratifizierung eines diskontinuierlichen  $\Gamma$ -Raums  $X$  besteht aus einer geordneten Menge  $(\mathcal{S}, \leq)$  zusammen mit einer monotonen  $\Gamma$ -Operation (d.h.  $\sigma \leq \tau \Rightarrow g\sigma \leq g\tau$  für alle  $g \in \Gamma$ ) und mit einer lokalabgeschlossenen Untermannigfaltigkeit  $|\sigma| \subset X$  für jedes  $\sigma \in \mathcal{S}$  mit den Eigenschaften

- (a) Die Familie  $\{|\sigma|\}_{\sigma \in \mathcal{S}}$  ist eine lokalendliche, disjunkte Überdeckung von  $X$ ,
- (b)  $\sigma \leq \tau \Leftrightarrow |\sigma| \cap \overline{|\tau|} \neq \emptyset \Leftrightarrow |\sigma| \subset \overline{|\tau|}$ ,
- (c)  $|g\sigma| = g|\sigma|$  für alle  $g \in \Gamma$  und  $\sigma \in \mathcal{S}$ ,
- (d) Für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  existieren nur endlich viele  $\tau \in \mathcal{S}$  mit  $\sigma \leq \tau$ .

Die Untermannigfaltigkeit  $|\sigma| \subset X$  heißt *das von  $\sigma$  definierte Stratum* oder einfach nur ein *Stratum* (von  $X$ ). Beachte, dass (b) äquivalent zu  $\overline{|\tau|} = \bigcup_{\sigma \leq \tau} |\sigma|$  für alle  $\tau \in \mathcal{S}$  ist. Die Gruppe  $\Gamma_\sigma = \{g \in \Gamma \mid g\sigma = \sigma\} = \{g \in \Gamma \mid g|\sigma| = |\sigma|\}$  heißt der *Stabilisator von  $\sigma$*  (bzw. von  $|\sigma|$ ).

Seien  $\mathcal{S}, \mathcal{T}$  zwei Stratifizierungen von  $X$ . Wir sagen, dass  $\mathcal{S}$  *feiner* als  $\mathcal{T}$  ist, wenn für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  ein  $\tau \in \mathcal{T}$  mit  $|\sigma| \subset |\tau|$  existiert.

**Bemerkung.** 1) Jede  $\Gamma$ -Stratifizierung  $\mathcal{S}$  von  $X$  induziert eine Dekomposition  $\Gamma \backslash \mathcal{S}$  von  $Y = \Gamma \backslash X$  im Sinne von [GM2, I.1,1]. Die Straten von  $Y$  sind definiert als die Orbits  $(\sigma) := \Gamma \cdot \sigma$  von Straten  $\sigma \in \mathcal{S}$ .

2) Ist  $V \subset X$  eine offene Teilmenge, so induziert jede  $\Gamma$ -Stratifizierung  $\mathcal{S}$  von  $X$  eine kanonische  $\Gamma_V$ -Stratifizierung von  $V$  mit Straten  $|\sigma| \cap V$ ,  $\sigma \in \mathcal{S}$ . Diese Stratifizierung notieren wir durch  $\mathcal{S} \cap V$ .

**Definition.** Für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  definieren wir den *offenen Stern*  $U_\sigma$  von  $\sigma$  durch  $U_\sigma = \bigcup_{\tau \geq \sigma} |\tau|$ . Diese Begriffsbildung wird später nachvollziehbar, wenn wir Triangulierungen als spezielle Stratifizierungen behandeln, denn dort ist es die übliche Definition des offenen Sterns. Überhaupt ist die ganze Terminologie von der Sprache in [KS, 8.1] für Simplicialkomplexe inspiriert bzw. übernommen.

**2.4. Proposition.** Sei  $\mathcal{S}$  eine  $\Gamma$ -Stratifizierung eines diskontinuierlichen  $\Gamma$ -Raumes  $X$ . Dann ist der offene Stern  $U_\sigma$  eine  $\Gamma_\sigma$ -invariante, offene Teilmenge von  $X$  für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$ .

*Beweis.* Die  $\Gamma_\sigma$ -Invarianz ist klar, denn für alle  $g$  mit  $g\sigma = \sigma$  gilt  $\sigma \leq \tau$  genau dann, wenn  $\sigma \leq g\tau$  gilt. Jetzt zeigen wir, dass das Komplement von  $U_\sigma$  abgeschlossen ist. Wähle eine konvergente Folge  $(x_n) \subset X - U_\sigma$  mit Grenzwert  $x \in X$  und sei  $\tilde{\sigma} \neq \sigma$  das eindeutige Stratum mit  $x \in |\tilde{\sigma}|$ . Wegen der lokalen Endlichkeit existieren nur endlich viele  $\tau_i$  mit  $(x_n) \subset \bigcup_i |\tau_i|$ . Indem man zu einer geeigneten Teilfolge übergeht, kann man ohne Einschränkung annehmen, dass die Folge  $(x_n)$  in genau einem Stratum  $|\tau| = |\tau_i|$  für ein  $i$  liegt. Wegen  $x = \lim x_n \in |\tilde{\sigma}|$  folgt  $|\tau| \cap |\tilde{\sigma}| \neq \emptyset$ , d.h.  $\tilde{\sigma} \leq \tau \neq \sigma$ . Andererseits gilt  $\tau \not\leq \sigma$  wegen  $(x_n) \cap U_\sigma = \emptyset$ , woraus  $\sigma \not\leq \tilde{\sigma}$  folgt. Insbesondere ist  $x \notin U_\sigma$ .  $\square$

Mit 2.3. und 2.1 hat man sofort:

**2.5. Beispiel.** Sei  $\mathcal{S}_{orb} = \{\sigma(H) | H < \Gamma \text{ ein Stabilisator}\}$  die geordnete Menge der Stabilisatoren und setze  $|\sigma(H)| := X_H$ . Dann definiert dies eine  $\Gamma$ -Stratifizierung von  $X$ .

Oft ist es technisch von Vorteil, wenn die Straten zusammenhängend sind. Daher führen wir den folgenden Begriff ein.

**Definition** (Isotropie-Stratifizierungen). Sei  $X$  ein diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum. Eine  $\Gamma$ -Stratifizierung  $\mathcal{S}$  von  $X$  heißt *Isotropie-Stratifizierung von  $X$* , wenn für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  gilt:

- $|\sigma| \subset X$  ist zusammenhängend.
- Es existiert (genau) ein  $H < \Gamma$  mit  $|\sigma| \subset X_H$ .

Wir bezeichnen mit  $x(\sigma)$  einen beliebigen Punkt von  $|\sigma|$ . Beachte, dass der Stabilisator  $\Gamma_{x(\sigma)}$  nicht von der Wahl von  $x(\sigma) \in |\sigma|$  abhängt. Wenn wir von nun an  $\Gamma_{x(\sigma)}$  schreiben, so ist die Wahl von  $x(\sigma)$  immer implizit gegeben.

**Bemerkung.** Für alle  $\sigma$  gilt  $\Gamma_{x(\sigma)} \subset \Gamma_\sigma$ , aber Gleichheit ist im Allgemeinen nicht gegeben, und zwar dann, wenn die Straten „zu groß“ sind. Bei Simplicialkomplexen gehört die Forderung  $\Gamma_\sigma = \Gamma_{x(\sigma)}$  quasi zur Definition, siehe unten.

**2.6. Beispiel.** Das Einzige, was an Beispiel 2.5. zu einer Isotropie-Stratifizierung fehlt, ist die Bedingung, dass alle Straten zusammenhängend sein sollen. Im Allgemeinen ist  $X_H$  für einen Stabilisator  $H < \Gamma$  nicht zusammenhängend. Wir verfeinern dieses Beispiel, indem wir alle Zusammenhangskomponenten von  $X_H$  zu Straten erklären, wobei  $H < \Gamma$  die Stabilisatoren durchlaufe. Wir nennen diese Stratifizierung die *größte Isotropie-Stratifizierung*, da aus der Definition klar ist, dass jede andere Isotropie-Stratifizierung feiner als diese ist.

Da bei einer Isotropie-Stratifizierung  $\mathcal{S}$  die Straten zusammenhängend sind, können wir von ihrer Dimension sprechen und wir setzen

$$\dim(\sigma) := \dim(|\sigma|), \quad \sigma \in \mathcal{S}.$$

Weiterhin definieren wir für alle  $m \geq 0$ :

$$(2.7) \quad X^{\geq m} := \bigcup_{\dim \sigma \geq m} |\sigma| = \bigcup_{\dim \sigma \geq m} U_\sigma$$

welches eine  $\Gamma$ -invariante, offene Teilmenge von  $X$  ist. Damit ist

$$(2.8) \quad X^{\leq m} := \bigcup_{\dim \sigma \leq m} |\sigma| = X - X^{\geq m+1}$$

eine  $\Gamma$ -invariante, abgeschlossene Teilmenge.

**Äquivariante Triangulierungen** bilden eine besonders wichtige Klasse von Isotropie-Stratifizierungen.

Wir führen zuerst den Begriff des (abstrakten) äquivarianten Simplicialkomplexes ein und gehen dabei wie in [KS, 8.1] vor mit dem einzigen Unterschied, dass wir noch die  $\Gamma$ -Operation berücksichtigen müssen.

**Definition** ( $\Gamma$ -Simplicialkomplex). Sei  $V$  eine  $\Gamma$ -Menge und  $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(V)$  eine  $\Gamma$ -invariante Teilmenge, wobei  $\mathcal{P}(V)$  die Potenzmenge von  $V$  mit der kanonischen  $\Gamma$ -Operation ist. Das Paar  $(V, \mathcal{S})$  heißt  $\Gamma$ -Simplicialkomplex, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (S1) Jedes  $\sigma \in \mathcal{S}$  ist eine nichtleere endliche Teilmenge von  $V$ .
- (S2) Ist  $\tau$  eine nichtleere Teilmenge eines Elements  $\sigma \in \mathcal{S}$  so gilt  $\tau \in \mathcal{S}$ .
- (S3) Für alle  $v \in V$  gilt  $\{v\} \in \mathcal{S}$ .



(S4) Für alle  $v \in V$  ist  $\{\sigma \in \mathcal{S} \mid v \in \sigma\}$  endlich.

(S5) Für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  und  $g \in \Gamma$  gilt genau dann  $g\sigma = \sigma$ , wenn  $gv = v$  für alle  $v \in \sigma$  gilt. D.h. es ist  $\Gamma_\sigma = \Gamma_v$  für alle  $v \in \sigma$ .

Jedes Element von  $\mathcal{S}$  heißt *Simplex* von  $(V, \mathcal{S})$  und jedes Element von  $V$  heißt *Ecke* von  $(V, \mathcal{S})$ . Ist  $\sigma$  ein Simplex, so heißt jedes Element  $v \in \sigma$  eine *Ecke von  $\sigma$* . Wir sagen, dass  $\sigma$  eine *Seite von  $\tau$*  ist, wenn  $\sigma \leq \tau$  gilt und wenn  $\tau$  aus genau einem Element mehr als  $\sigma$  besteht, so nennen wir  $\sigma$  eine *unmittelbare Seite* von  $\tau$  und schreiben  $\sigma \prec \tau$ .

Um die Notation simpel zu halten, identifizieren wir von nun an das Paar  $(V, \mathcal{S})$  mit der Menge der Simplexes  $\mathcal{S}$  und denken uns, dass die Eckenmenge  $V$  implizit gegeben ist.

Wir versehen  $[0, 1]^V$  mit der Produkttopologie sowie der kanonischen  $\Gamma$ -Operation und definieren wie in [KS, 8.1.1-8.1.5]:

$$\begin{aligned} |\sigma| &:= \left\{ x \in [0, 1]^V \mid x(v) > 0 \Leftrightarrow v \in \sigma \text{ für alle } v \in V \text{ und } \sum_v x(v) = 1 \right\}, \\ |\mathcal{S}| &:= \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}} |\sigma|, \\ U_\sigma &:= \bigcup_{\tau \supset \sigma} |\tau| = \{x \in |\mathcal{S}| \mid x(v) > 0 \text{ für alle } v \in \sigma\}. \end{aligned}$$

Der  $\Gamma$ -invariante Teilraum  $|\mathcal{S}| \subset [0, 1]^V$  heißt *geometrische Realisierung von  $\mathcal{S}$* . Die Teilmengen  $|\sigma|$  sowie  $U_\sigma$  sind jeweils  $\Gamma_\sigma$ -invariant, wobei wie üblich  $\Gamma_\sigma := \{g \in \Gamma \mid g\sigma = \sigma\}$  gesetzt ist (beachte:  $\Gamma_\sigma = \Gamma_{|\sigma|}$ ). Nach [KS, (8.1.9),(8.1.10)] gilt

$$(2.9) \quad U_\sigma \cap U_\tau = \begin{cases} U_{\sigma \cup \tau} & \text{falls } \sigma \cup \tau \in \mathcal{S} \\ \emptyset & \text{falls } \sigma \cup \tau \notin \mathcal{S} \end{cases}$$

$$(2.10) \quad U_\tau \subset U_\sigma \Leftrightarrow \sigma \leq \tau$$

und die Familie  $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \mathcal{S}}$  ist eine lokalendliche offene Überdeckung von  $|\mathcal{S}|$ . Darüberhinaus gilt.

$$(2.11) \quad \overline{|\sigma|} = \bigcup_{\tau \leq \sigma} |\tau|.$$

**2.12. Bemerkung.** Ist  $\mathcal{S}$  ein  $\Gamma$ -Simplizialkomplex, so besitzt  $\Gamma \backslash \mathcal{S}$  eine kanonische Struktur eines (abstrakten) Simplizialkomplexes im Sinne von [KS, 8.1.]. Die Simplexes von  $\Gamma \backslash \mathcal{S}$  sind dabei genau die Orbits  $(\sigma) := \Gamma \cdot \sigma$  von Simplexes  $\sigma \in \mathcal{S}$ . Es gilt genau dann  $(\sigma) \subset (\tau)$ , wenn ein  $g \in \Gamma$  mit  $\sigma \subset g\tau$  existiert. Die Projektion  $p$  bildet offene Sterne auf offene Sterne ab. Genauer gilt  $p(U_\sigma) = U_{(\sigma)}$

für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$ .

Darüberhinaus verhält sich diese Konstruktion insofern gut mit der geometrischen Realisierung, als wir einen kanonischen Homöomorphismus  $|\Gamma \backslash X| = \Gamma \backslash |X|$  haben (er ist die Restriktion der kanonischen Identifikation  $\Gamma \backslash ([0, 1]^V) \cong [0, 1]^{\Gamma \backslash V}$ ).

**Definition** (Äquivariante Triangulierung). Sei  $X$  ein diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum. Eine  $\Gamma$ -Triangulierung (oder äquivariante Triangulierung) von  $X$  ist ein  $\Gamma$ -Simplizialkomplex  $\mathcal{S}$  zusammen mit einem  $\Gamma$ -äquivarianten Homöomorphismus  $h : |\mathcal{S}| \rightarrow X$ , so dass  $h(|\sigma|) \subset X$  für alle  $\sigma$  eine lokalabgeschlossene  $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeit ist.

**Bemerkung.** Besitzt eine  $\Gamma$ -Mannigfaltigkeit  $X$  eine äquivariante Triangulierung, so ist  $X$  ein diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum. Äquivariante Triangulierungen sind stets Isotropie-Stratifizierungen.

Darüberhinaus ist eine äquivariante Triangulierung in unserem Sinne das gleiche wie eine  $\Gamma$ -Triangulierung im Sinne von [Ill1].

**2.13. Satz.** Jeder diskontinuierliche  $\Gamma$ -Raum besitzt eine äquivariante Triangulierung.

*Beweis.* Hier wird [Ill2] zitiert. Dort wird dies mit Hilfe von Theorem I in Kombination mit Proposition 9.4 bewiesen. Man beachte, dass unsere Definition eines äquivarianten Simplizialkomplexes mit der dortigen, in Lemma 9.3. erklärten, übereinstimmt. Illman verweist für seine Definition selbst auf seinen Artikel [Ill1].  $\square$

## 2.b. Konstruierbare Garben

Sei  $\mathcal{S}$  eine Isotropie-Stratifizierung von  $X$ . Nach all der Vorrede können wir nun über eine sehr wichtige Klasse von Garben sprechen, nämlich konstruierbare Garben – das sind Garben die lokalkonstant über allen Straten sind. Weiterhin konzentrieren wir uns auf zwei fundamentale Beispiele (einerseits konstruierbare Untergarben von konstanten Garben und andererseits „dünne“ Garben), die häufig im weiteren Verlauf des Textes auftauchen werden.

**Definition** (konstruierbare Garben). Eine Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  heißt  $\mathcal{S}$ -konstruierbar, wenn  $\mathcal{F}|_{|\sigma|}$  für alle Straten  $\sigma \in \mathcal{S}$  eine lokalkonstante Garbe ist. Eine Garbe  $\mathcal{G}$  auf dem Quotienten  $Y = \Gamma \backslash X$  heißt  $\Gamma \backslash \mathcal{S}$ -konstruierbar, wenn  $\mathcal{G}|_{|(\sigma)|}$  eine lokalkonstante Garbe ist für alle Straten  $(\sigma)$  der induzierten Stratifizierung  $\Gamma \backslash \mathcal{S}$  von  $Y$ .

Wir sagen, dass  $\mathcal{F} \in Sh^\Gamma(X)$  „strikt konstruierbar mit Halmen  $F_\sigma$  über  $|\sigma|$ “ ist, wenn  $\Gamma_\sigma$ -Moduln  $F_\sigma$  für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  existieren, so dass  $\mathcal{F}|_{|\sigma|}$  die konstante  $\Gamma_\sigma$ -Garbe  $(F_\sigma)|_{|\sigma|}$  für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  ist. Analog kann man strikt konstruierbare Garben auf  $Y$  definieren.

Ist aus dem Zusammenhang ersichtlich, welche Stratifizierung  $\mathcal{S}$  zugrunde-

liegt, so sagen wir nur „*konstruierbar*“ statt „ $\mathcal{S}$ -konstruierbar“ etc. Man beachte, dass strikt konstruierbare Garben konstruierbar sind. Die Umkehrung stimmt i.A. nur, wenn alle Straten einfach zusammenhängend sind, denn lokalkonstante Garben auf einfach zusammenhängenden Räumen sind konstant, wie z.B. aus [Dim, 2.5.1] folgt.

Wir weichen ein wenig von der üblichen Bezeichnung ab, indem wir nicht zwischen schwach-konstruierbaren und konstruierbaren Garben unterscheiden, d.h. dass es für uns keine Rolle spielt, ob die Halme endlich erzeugt sind (sie sind es jedenfalls in allen wichtigen Beispielen, die hier auftauchen werden).

**2.14. Beispiel.** Sei  $\mathcal{S}$  eine Isotropie-Stratifizierung von  $X$ .

- a) Jede konstante  $\Gamma$ -Garbe auf  $X$  oder  $Y$  ist strikt  $\mathcal{S}$ -konstruierbar und jede konstruierbare  $\Gamma$ -Untergarbe einer konstanten  $\Gamma$ -Garbe ist strikt konstruierbar.
- b) Sei  $\sigma \in \mathcal{S}$  ein Stratum von  $X$  und  $A$  ein  $\Gamma_\sigma$ -Modul. Dann ist  $A_{|\sigma|}^X$  eine strikt  $\mathcal{S}$ -konstruierbare  $\Gamma_\sigma$ -Garbe.
- c) Die Garbe  $p^*\mathcal{M} \in Sh^\Gamma(X)$  ist eine  $\mathcal{S}$ -konstruierbare  $\Gamma$ -Untergarbe von  $M_X$ , also nach a) eine strikt konstruierbare Garbe, vgl. 2.15. unten. Die Halme über einem  $|\sigma|$  sind nach 1.24. gegeben durch  $M^{\Gamma_x(\sigma)}$ .
- d) Ist  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  ein (äquivarianter) Morphismus von  $\mathcal{S}$ -konstruierbaren Garben, so ist jeweils der Kern und Kokern dieses Morphismus  $\mathcal{S}$ -konstruierbar. Mit anderen Worten bilden  $\mathcal{S}$ -konstruierbare (äquivariante) Garben eine volle abelsche Unterkategorie der (äquivarianten) Garben.

**2.15. Proposition.** Sei  $\mathcal{S}$  eine beliebige Isotropie-Stratifizierung eines diskontinuierlichen  $\Gamma$ -Raumes  $X$ . Der Funktor  $p_*^\Gamma : Sh^\Gamma(X) \rightarrow Sh(Y)$  bildet  $\mathcal{S}$ -konstruierbare Garben auf  $\Gamma \setminus \mathcal{S}$ -konstruierbare Garben ab. Insbesondere ist  $\mathcal{M}$  für jeden  $\Gamma$ -Modul  $\mathcal{M}$  eine  $\mathcal{S}$ -konstruierbare Garbe auf  $Y$ . Darüberhinaus respektiert auch der Funktor  $p^* : Sh^\Gamma(Y) \rightarrow Sh^\Gamma(X)$  Konstruierbarkeit.

*Beweis.* Sei  $(\sigma) = \Gamma \cdot \sigma \in \Gamma \setminus \mathcal{S}$  und sei  $H < \Gamma$  eindeutig mit  $|\sigma| \subset X_H$  gewählt. Für alle  $y \in p(|\sigma|)$  suchen wir eine Umgebung  $U$  von  $y$ , so dass  $p_*^\Gamma \mathcal{F}|_{U \cap p(|\sigma|)}$  konstant ist. Sei  $x \in |\sigma|$  mit  $p(x) = y$  und wähle eine zulässige Umgebung  $V$  von  $x$  mit der Eigenschaft, dass  $\mathcal{F}|_{V \cap |\sigma|}$  konstant ist (so ein  $V$  existiert, weil  $\mathcal{F}$  nach Voraussetzung konstruierbar ist). Dann erfüllt  $U = p(V)$  die gewünschte Eigenschaft, wie wir nun sehen: Es gilt  $p_*^\Gamma \mathcal{F}|_{U \cap p(|\sigma|)} = q_*^{\Gamma_x} (\mathcal{F}|_{V \cap |\sigma|})$ , wobei

$$q : V \cap |\sigma| \rightarrow U \cap p(|\sigma|) = (V \cap |\sigma|)/\Gamma_x$$

die Einschränkung von  $p$  bzw. die Projektion ist. Weil  $H = \Gamma_x$  trivial auf  $V \cap |\sigma| \subset X_H$  operiert, folgt, dass  $p_*^\Gamma \mathcal{F}|_{p(|\sigma|)}$  konstant ist, was zu zeigen war. Die letzte Behauptung folgt aus  $p^{-1}(p(|\sigma|)) = \Gamma \cdot |\sigma|$  (für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$ ) und der Tatsache, dass Pullbacks von konstanten Garben konstant sind.  $\square$

Konstruierbare Garben auf Simplizialkomplexen haben gute kohomologische Eigenschaften, siehe [KS, 8.1]. Ausschlaggebend dafür ist das folgende

**2.16. Lemma** ([KS, Prop. 8.1.4]). *Sei  $\mathcal{S}$  eine äquivariante Triangulierung eines diskontinuierlichen  $\Gamma$ -Raumes  $X$  und  $\mathcal{F} \in Sh^\Gamma(X)$  sei  $\mathcal{S}$ -konstruierbar. Dann sind die Restriktions-Homomorphismen  $H^0(U_\sigma; \mathcal{F}) \rightarrow H^0(|\sigma|; \mathcal{F})$  und  $H^0(|\sigma|, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_x$  für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  und  $x \in |\sigma|$  jeweils Isomorphismen und es gilt  $H^j(U_\sigma; \mathcal{F}) = H^j(|\sigma|; \mathcal{F}) = 0$  für alle  $j > 0$  und Simplizes  $\sigma \in \mathcal{S}$ .*

**2.17. Korollar.** *Sei  $X$ ,  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{F}$  wie in 2.16. Dann ist für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  die Komposition*

$$H^0(p(U_\sigma); p_*^\Gamma \mathcal{F}) = H^0(p^{-1}(p(U_\sigma)); \mathcal{F})^\Gamma \rightarrow H^0(p^{-1}(p(U_\sigma)); \mathcal{F})^\Gamma \subset H^0(U_\sigma; \mathcal{F})^{\Gamma_\sigma}$$

*ein Isomorphismus, wobei der Pfeil von der Restriktionsabbildung induziert ist. Darüberhinaus gilt  $p_*^\Gamma(\mathcal{F})_{p(x)} \cong H^0(U_\sigma; \mathcal{F})^{\Gamma_\sigma}$  für alle  $x$  mit  $x \in |\sigma|$ .*

*Beweis.* Wegen 2.16. ist die Auswertung  $H^0(U_\sigma; \mathcal{F})^{\Gamma_\sigma} \rightarrow \mathcal{F}_x^{\Gamma_\sigma}$  ein Isomorphismus. Die Garbe  $p_*^\Gamma \mathcal{F}$  ist nach 2.15.  $\Gamma \setminus \mathcal{S}$ -konstruierbar. Daher ist auch die Auswertung  $H^0(p(U_\sigma); p_*^\Gamma \mathcal{F}) \rightarrow (p_*^\Gamma \mathcal{F})_{p(x)} \cong \mathcal{F}_x^{\Gamma_\sigma}$  ein Isomorphismus (man wende 2.16. auf  $Y = \Gamma \setminus X$  an).  $\square$

**Dünne Garben.** In den technischen Anteilen der Kapitel 3, 5 und 6 wird die folgende Klasse konstruierbarer Garben eine wichtige Rolle spielen, weil sie die Quotienten konstruierbarer Untergarben von konstanten Garben beschreibt, die sich in dem Sinne wenig unterscheiden, als der Träger dieses Quotienten „dünn“ ist:

**2.18. Definition** (dünne Garben). Sei  $m \in \{0, \dots, n-1\}$ . Eine  $\mathcal{S}^m$ -dünne Garbe ist eine strikt  $\mathcal{S}$ -konstruierbare  $\Gamma$ -Garbe  $\mathcal{Q}$  mit  $\mathcal{Q}_{|\sigma|} = 0$  für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  mit  $\dim \sigma \neq m$ .

Mit anderen Worten ist eine  $\Gamma$ -Garbe  $\mathcal{S}^m$ -dünn, wenn sie auf den Straten der Dimension  $m$  konzentriert und auf allen  $m$ -dimensionalen Straten konstant ist.

Sei  $m \in \{0, \dots, n-1\}$  und  $\mathcal{Q} \in Sh^\Gamma(X)$  eine  $\mathcal{S}^m$ -dünne Garbe mit Halmen  $A_\sigma$  über  $|\sigma|$ . Beachte, dass die  $\Gamma$ -Struktur auf  $\mathcal{Q}$  Isomorphismen  $g : A_\sigma \xrightarrow{\cong} A_{g\sigma}$  für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  mit  $\dim(\sigma) = m$  induziert, auf die wir einfach mit „die induzierten Operationen“ verweisen. Wir führen folgende Garben ein:

$$\mathcal{Q}_\sigma := (A_\sigma)_{|\sigma|}^X \in Sh^{\Gamma_\sigma}(X),$$

$$\mathcal{Q}_{(\sigma)} := \bigoplus_{\tau \in \Gamma \cdot \sigma} \mathcal{Q}_\tau \in Sh^\Gamma(X),$$

wobei die  $\Gamma$ -Operation von  $g \in \Gamma$  auf  $\mathcal{Q}_{(\sigma)}$  durch die direkte Summe aller  $\mu_\tau^g : \mathcal{Q}_\tau \rightarrow g^* \mathcal{Q}_{g\tau}$  definiert ist, während  $\mu_\tau^g$  von der induzierten Operation  $g : A_\tau \rightarrow$

$A_{g\sigma}$  kommt. Man beachte, dass mit der Terminologie aus [BL, Def. 8.2.1] gilt:

$$(2.19) \quad \mathcal{Q}_{(\sigma)} \cong \text{ind}_{\Gamma_\sigma}^\Gamma \mathcal{Q}_\sigma \in \text{Sh}^\Gamma(X).$$

Im folgenden Satz bezeichne  $\mathcal{R}_m \subset \mathcal{S}$  eine Repräsentantenmenge der Orbits ( $\sigma$ ) aller Straten  $\sigma \in \mathcal{S}$  der Dimension  $m$ .

**2.20. Satz** (Charakterisierung dünner Garben). *Für alle  $m = 0, \dots, n-1$  und alle  $\mathcal{S}^m$ -dünnen  $\Gamma$ -Garben  $\mathcal{Q}$  mit Halmen  $A_\sigma$  über  $|\sigma|$  existiert ein Isomorphismus*

$$\mathcal{Q} = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{R}_m} \mathcal{Q}_{(\sigma)} \in \text{Sh}^\Gamma(X)$$

und für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  mit  $\dim \sigma = m$  existiert ein kanonischer Isomorphismus von  $\Gamma$ -Moduln:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_X(\mathcal{Q}_{(\sigma)}, \mathcal{F}) &\cong \prod_{g \in \Gamma/\Gamma_\sigma} \text{Hom}_k(A_{g\sigma}, H_{|g\sigma|}^0(U_{g\sigma}; \mathcal{F})) \\ &= \text{coind}_{\Gamma_\sigma}^\Gamma \text{Hom}_k(A_\sigma, H_{|\sigma|}^0(U_\sigma; \mathcal{F})) \end{aligned}$$

für alle  $\mathcal{F} \in \text{Sh}^\Gamma$ , wobei die Operation auf dem Produkt von den Operationen  $g : A_\sigma \rightarrow A_{g\sigma}$  sowie von der  $\Gamma$ -Struktur auf  $\mathcal{F}$  kommt.

**2.21. Korollar.** *Sei  $\mathcal{Q}$  eine dünne Garbe wie im letzten Satz. Dann existiert für alle  $\mathcal{F} \in \text{Sh}^\Gamma(X)$  ein kanonischer Isomorphismus von  $\Gamma$ -Moduln*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_X(\mathcal{Q}, \mathcal{F}) &\cong \prod_{\dim \sigma = m} \text{Hom}_k(A_\sigma, H_{|\sigma|}^0(U_\sigma; \mathcal{F})) \\ &= \prod_{\sigma \in \mathcal{R}_m} \text{coind}_{\Gamma_\sigma}^\Gamma \text{Hom}_k(A_\sigma, H_{|\sigma|}^0(U_\sigma; \mathcal{F})) \end{aligned}$$

also insbesondere  $\text{Hom}_{X,\Gamma}(\mathcal{Q}, \mathcal{F}) \cong \prod_{\sigma \in \mathcal{R}_m} \text{Hom}_{k\Gamma_\sigma}(A_\sigma, H_{|\sigma|}^0(U_\sigma, \mathcal{F}))$ .

*Beweis von 2.20.* Per definitionem ist  $\mathcal{Q}$  auf der lokalabgeschlossene Teilmenge  $X^m \subset X$  konzentriert, wobei  $X^m$  die Vereinigung der Straten der Dimension  $m$  ist, (denn es ist  $X^m = X^{\geq m} \cap X^{\leq m}$ , vgl. 2.7 und 2.8). Nach [KS], Prop. 8.1.4.(i) haben wir einen Isomorphismus von Garben

$$(2.22) \quad \mathcal{Q} \cong (\mathcal{Q}|_{X^m})^X.$$

Da die Teilmengen  $X^{\geq m}$ ,  $X^{\leq m}$  und  $X^m$  auch  $\Gamma$ -invariant sind, ist dies ein Isomorphismus von  $\Gamma$ -Garben, wobei  $\mathcal{Q}$  als eine  $\Gamma$ -Garbe auf  $X^m$  aufgefasst wird.

Nun ist  $X^m$  als topologischer Raum die topologische Summe aller Straten der Dimension  $m$ . Die Garbe  $\mathcal{Q}|_{X^m}$  zerfällt somit kanonisch:

$$\mathcal{Q}|_{X^m} = \bigoplus_{\dim \sigma = m} (A_\sigma)_{|\sigma|}^{X^m},$$

denn es ist  $\mathcal{Q}|_\sigma = (A_\sigma)|_{|\sigma|}$ . Wegen 2.22 erhält man nun eine kanonische Identifizierung

$$(2.23) \quad \mathcal{Q} \cong \bigoplus_{\dim \sigma = m} (A_\sigma)|_{|\sigma|}^X \in Sh^\Gamma(X).$$

Da die verschiedenen Straten disjunkt voneinander sind, muss die  $\Gamma$ -Struktur auf der direkten Summe so aussehen, dass die Operation eines Elements  $g \in \Gamma$  die direkte Summe von Isomorphismen der Form

$$\mu_\sigma^g : (A_\sigma)|_{|\sigma|}^X \rightarrow g^*((A_{g\sigma})|_{|g\sigma|}^X) = (A_{g\sigma})|_{|\sigma|}^X$$

ist. Verfolgt man die Wirkung von  $g$  bei der Herleitung des Isomorphismus 2.23, so stellt man fest, dass  $\mu_\sigma^g$  von der Operation  $g : A_\sigma \rightarrow A_{g\sigma}$  induziert ist.

Nun zur zweiten Aussage des Satzes. Es ist

$$\mathrm{Hom}_X(\mathcal{Q}_\sigma, \mathcal{F}) = \prod_{g \in \Gamma/\Gamma_\sigma} \mathrm{Hom}_X(\mathcal{Q}_{g\sigma}, \mathcal{F}) \in k\Gamma\text{-mod},$$

wobei die  $\Gamma$ -Struktur auf der rechten Seite wegen 2.19 so beschaffen ist, dass dieses Produkt der koinduzierte Modul (siehe [Wei]) von  $\mathrm{Hom}(\mathcal{Q}_\sigma, \mathcal{F})$  ist. Da  $\mathcal{Q}_\sigma$  seinen Träger in der offenen,  $\Gamma_\sigma$ -invarianten Teilmenge  $U_\sigma$  hat, existiert nach 1.28. ein kanonischer Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_X(\mathcal{Q}_\sigma, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{U_\sigma}(\mathcal{Q}_\sigma|_{U_\sigma}, \mathcal{F}|_{U_\sigma}) = \mathrm{Hom}_{U_\sigma}((A_\sigma)|_{|\sigma|}^{U_\sigma}, \mathcal{F}|_{U_\sigma})$$

von  $\Gamma_\sigma$ -Moduln. Letzteres ist nach 1.31. isomorph zum  $\Gamma_\sigma$ -Modul  $\mathrm{Hom}(A_\sigma, H_{|\sigma|}^0(U_\sigma; \mathcal{F}))$ , weil  $|\sigma| \subset U_\sigma$  abgeschlossen ist.  $\square$

**Konstruierbare Garben als Funktoren auf  $\mathcal{S}$ .** Jetzt kommen wir zu einer wohlbekannten kombinatorischen Beschreibung der Kategorie  $\mathcal{S}$ -konstruierbarer Garben auf  $|\mathcal{S}|$  für einen  $\Gamma$ -Simplizialkomplex  $\mathcal{S}$ . Man sollte sich dabei vorstellen, dass  $\mathcal{S}$  eine  $\Gamma$ -Triangulierung eines diskontinuierlichen  $\Gamma$ -Raumes  $X$  ist. Wir könnten im Prinzip beliebige Stratifizierungen betrachten. Dabei würde jedoch die Einfachheit verloren gehen und da hier kein Bedarf an dieser Allgemeinheit existiert, verzichten wir darauf.

**Definition** ( $\Gamma$ -Funktoren). Sei  $\mathcal{S}$  ein  $\Gamma$ -Simplizialkomplex. Wir fassen die geordnete Menge der Simplizes  $\mathcal{S}$  als Kategorie auf und nennen einen Funktor  $F : \mathcal{S} \rightarrow k\text{-mod}$  zusammen mit *kompatiblen* Isomorphismen  $\mu_\sigma^g : F(\sigma) \xrightarrow{\cong} F(g\sigma)$  für alle  $g \in \Gamma$  und  $\sigma \in \mathcal{S}$  einen  $\Gamma$ -*Funktor*. „Kompatibel“ heißt hier, dass  $\mu_\sigma^e = \mathrm{id}_{F(\sigma)}$  und  $\mu_{h\sigma}^g \circ \mu_\sigma^h = \mu_\sigma^{gh}$  für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  und  $g, h \in \Gamma$  gilt.

Da zwischen je zwei Elementen  $\sigma, \tau \in \mathcal{S}$  höchstens ein Morphismus existiert, ist die Schreibweise  $F_{\sigma, \tau}$  für  $F(\sigma \leq \tau)$  nicht mehrdeutig, so dass wir erstere vorziehen.

Eine natürliche Transformation zwischen  $\Gamma$ -Funktoren  $\mathcal{S} \rightarrow k\text{-mod}$  heißt *Morphismus von  $\Gamma$ -Funktoren*, wenn sie verträglich mit den Isomorphismen  $\mu_\sigma^g$

ist. Die Kategorie der  $\Gamma$ -Funktoren und ihrer Morphismen notieren wir durch  $Sh^\Gamma(\mathcal{S})$  (die Ähnlichkeit mit  $Sh^\Gamma(X)$  in der Notation beabsichtigt). Wir bezeichnen mit  $Sh_c^\Gamma(|\mathcal{S}|)$  als die volle Unterkategorie von  $Sh^\Gamma(|\mathcal{S}|)$  bestehend aus den  $\mathcal{S}$ -konstruierbaren Garben.

**2.24. Beispiel.** Zu jeder  $\Gamma$ -Garbe  $\mathcal{F} \in Sh^\Gamma(|\mathcal{S}|)$  kann man einen  $\Gamma$ -Funktork  $R(\mathcal{F})$  auf folgende Weise definieren. Setze  $R(\mathcal{F})(\sigma) := H^0(U_\sigma; \mathcal{F})$  und  $R(\mathcal{F})_{\sigma, \tau}$  sei der Restriktionsmorphismus  $H^0(U_\sigma; \mathcal{F}) \rightarrow H^0(U_\tau; \mathcal{F})$  für alle  $\sigma \leq \tau$ .

**2.25. Proposition.** *Der Funktor  $R : Sh_c^\Gamma(|\mathcal{S}|) \rightarrow Sh^\Gamma(\mathcal{S})$  ist eine Äquivalenz von Kategorien.*

*Beweis.* Wir konstruieren nun ein Inverses zu  $R$ , indem wir jedem  $\Gamma$ -Funktork  $F \in Sh^\Gamma(\mathcal{S})$  eine Garbe  $\beta(F)$  zuordnen mit  $\beta(F)|_{|\sigma|} = F(\sigma)|_{|\sigma|}$  für alle  $\sigma$  (damit folgte  $R(\beta(F)) \cong F$ ). Zunächst definiere die konstruierbare Garbe

$$\alpha(F) := \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}} F(\sigma)_{U_\sigma}^X, \quad \in Sh^\Gamma(|\mathcal{S}|).$$

Die Halme von  $\alpha(F)$  über  $\tau$  sind isomorph zur direkten Summe der  $F(\sigma)$  über alle  $\sigma \leq \tau$ . Sei  $\alpha'(F) \subset \alpha(F)$  die konstruierbare Untergarbe, die über einem Simplex  $|\tau|$  durch die Gleichung  $\sum_{\sigma \leq \tau} F_{\sigma, \tau}(f_\sigma) = 0$ ,  $f_\sigma \in F(\sigma)$ , gegeben ist. Der Funktor  $\beta : Sh^\Gamma(\mathcal{S}) \rightarrow Sh^\Gamma(|\mathcal{S}|)$ , der definiert ist durch  $\beta(F) := \alpha(F)/\alpha'(F)$ , ist invers zu  $R$ : Es existiert ein kanonischer Isomorphismus  $\alpha(R(\mathcal{F})) \cong \mathcal{F}$ , den man nach den Ausführungen von [KS] auf den Seiten 324 und 325 und der Proposition [KS], 8.1.9 konstruieren kann. Man beachte, dass der dortige Funktor  $\beta$  mit unserem Funktor  $\beta \circ R$  übereinstimmt.  $\square$

## 2.c. Isotropie-Filtrierungen konstanter Garben

Sei  $M$  ein  $k\Gamma$ -Modul. Nach 1.24. können wir  $p^*\mathcal{M}$  als eine  $\mathcal{S}$ -konstruierbare  $\Gamma$ -Untergarbe von  $M_X$  für alle Isotropie-Stratifizierungen  $\mathcal{S}$  auffassen. Wir werden dies zu einer Filtrierung ausbauen, deren Quotienten dünn sind, so dass Berechnungen von  $\text{Ext}_{X, \Gamma}^*(p^*\mathcal{M}, N_X) = \text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  zugänglicher werden.

In der Tat ist diese Filtrierung von großer Bedeutung für die restlichen Kapitel, wo die Hauptresultate (siehe Einleitung, Theoreme A bis C) hergeleitet werden.

Die Konstruktion dieser Filtrierung macht nur von der Eigenschaft Gebrauch, dass  $p^*\mathcal{M}$  eine konstruierbare  $\Gamma$ -Untergarbe von  $M_X$  ist. Es bietet sich an, von dieser allgemeinen Situation auszugehen.

**2.26. Bemerkung.** Sei  $\mathcal{K}$  eine konstruierbare  $\Gamma$ -Untergarbe von  $M_X$ . Beachte, dass  $\mathcal{K}|_{|\sigma|}$  als eine lokalkonstante Untergarbe einer konstanten Garbe konstant sein muss, also ist  $\mathcal{G}|_{|\sigma|} = (M_\sigma)_{|\sigma|}^X$  für einen  $\Gamma_\sigma$ -Untermodule  $M_\sigma \subset M$  (es ist  $M_\sigma = \mathcal{K}(|\sigma|)$ ). Die  $\Gamma$ -Operation auf  $\mathcal{K}$  induziert kompatible Isomorphismen

$g : M_\sigma \rightarrow M_{g\sigma}$  für alle  $g \in \Gamma$ . Darüberhinaus gilt

$$M_\sigma \subset M_\tau \quad \text{für alle } \sigma \leq \tau.$$

Um das zu sehen betrachte man die Restriktionen  $\mathcal{K}(|\sigma| \cup |\tau|) \rightarrow \mathcal{K}(|\sigma|) = M_\sigma$  und  $\mathcal{K}(|\sigma| \cup |\tau|) \rightarrow \mathcal{K}(|\tau|) = M_\tau$ , die jeweils injektiv sind, da es sich hier um Restriktionen von konstanten Funktionen handelt (beachte, dass  $|\sigma|$ ,  $|\tau|$  und  $|\sigma| \cup |\tau|$  jeweils zusammenhängend sind). Es existiert eine Basis von zusammenhängenden Umgebungen  $U_\alpha \subset |\sigma| \cup |\tau|$  von  $|\sigma|$ . Per definitionem besteht  $\mathcal{K}(U_\alpha)$  aus konstanten Funktionen  $f : U_\alpha \rightarrow M$  mit  $f(x) \in \mathcal{K}_{\sigma(x)}$  für alle  $x \in U_\alpha$ , woraus folgt, dass alle Restriktionen  $\mathcal{K}(U_\alpha) \rightarrow \mathcal{K}(U_\beta)$ ,  $U_\beta \subset U_\alpha$ , Isomorphismen sind. Damit ist die Restriktion  $\mathcal{K}(|\sigma| \cup |\tau|) \rightarrow \lim_\alpha \mathcal{K}(U_\alpha) = \mathcal{K}(|\sigma|)$  ein Isomorphismus.

Für uns sind nur solche  $\mathcal{K}$  interessant, wo  $M_\sigma = M$  für alle  $\sigma$  mit maximaler Dimension  $n$  gilt. (Gilt dies nicht, so kann man dies reparieren, indem man von  $\mathcal{K}$  zu  $\mathcal{K} \oplus \mathcal{H}$  übergeht, wobei  $\mathcal{H}$  die direkte Summe der  $(M/M_\sigma)_{|\sigma|}^X$  über alle offenen Straten  $\sigma$ , d.h. über alle  $\sigma$  mit  $\dim \sigma = n$  ist).

**2.27. Definition.** Sei  $\mathcal{S}$  eine Isotropie-Stratifizierung von  $X$  und  $M$  ein  $\Gamma$ -Modul. Eine „ $\mathcal{S}$ -konstruierbare Untergarbe  $\mathcal{K}$  von  $M_X$  mit Halmen  $M_\sigma$  über  $|\sigma|$ “ ist eine  $\Gamma$ -Untergarbe  $\mathcal{K} \subset M_X$ , die  $\mathcal{S}$ -konstruierbar ist zusammen mit  $\Gamma_\sigma$ -Untermoduln  $M_\sigma \subset M$ , so dass gilt:

- $\mathcal{K}|_{|\sigma|} = (M_\sigma)_{|\sigma|}$  für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$ ,
- $M_\sigma = M$  für alle  $n$ -dimensionale Straten  $\sigma$ .

**2.28. Beispiel.** Für alle Isotropie-Stratifizierungen  $\mathcal{S}$  von  $X$  und alle  $\Gamma$ -Moduln  $M$  ist die Garbe  $\mathcal{K} = p^*\mathcal{M}$  eine  $\mathcal{S}$ -konstruierbare Untergarbe von  $M_X$  mit Halmen  $M^{\Gamma_{x(\sigma)}}$  über  $|\sigma|$ . Hier ist  $x(\sigma)$  ein beliebig gewählter Punkt in  $|\sigma|$ .

**2.29. Definition.** Sei  $n = \dim X$ . Für alle  $m = 0, \dots, n$  definieren wir die folgenden Objekte.

(a) Für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  sei

$$M_\sigma^m := \begin{cases} M & \text{falls } \dim \sigma \geq m \\ M_\sigma & \text{falls } \dim \sigma < m. \end{cases}$$

(b)  $\mathcal{K}^m$  sei die Prägarbe auf  $X$ , die definiert ist durch

$$\mathcal{K}^m(U) := \{s : U \rightarrow M \mid s \text{ ist lokalkonstant mit } s(x) \in M_{\sigma(x)}^m \text{ für alle } x \in U\}$$

für alle offenen Teilmengen  $U \subset X$ , wobei  $\sigma(x) \in \mathcal{S}$  das eindeutige Stratum mit der Eigenschaft  $x \in |\sigma(x)|$  ist.

Unmittelbar aus der Definition folgt:

$$(2.30) \quad M_\sigma^m / M_\sigma^{m+1} = \begin{cases} M/M_\sigma & m = \dim \sigma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



für alle  $m = 0, \dots, n-1$ .

**Bemerkung.** Für alle  $m = 0, \dots, n$  ist  $\mathcal{K}^m$  eine  $\Gamma$ -Untergarbe von  $M_X$ . Dies folgert man aus den folgenden Beobachtungen:

- $\mathcal{K}^m$  ist eine Unterprägarbe von  $M_X$ , denn die lokalen Schnitte  $\mathcal{K}^m(U)$  bestehen aus lokalkonstanten Abbildungen mit Werten in  $M$ .
- $\mathcal{K}^m$  ist eine Garbe: Sei  $U \subset X$  offen und  $\{U_\alpha\}$  eine offene Überdeckung von  $U$ . Sind  $s_\alpha \in \mathcal{K}^m(U_\alpha) \subset H^0(U_\alpha; M_X)$  mit  $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$  für alle  $\alpha, \beta$  gegeben, so existiert genau ein  $s \in H^0(U; M_X)$  mit  $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$  für alle  $\alpha$  und es gilt  $s \in \mathcal{K}^m(U)$ , denn für alle  $x \in U$  ist  $s(x) = s_\alpha(x) \in M_{\sigma(x)}^m$  für ein geeignetes  $\alpha$ .
- $\mathcal{K}^m \subset M_X$  ist invariant unter der Operation von  $\Gamma$ . Denn ist  $s : U \rightarrow M$  lokalkonstant mit  $s(x) \in M_{\sigma(x)}^m$  für alle  $x \in U$ , so ist  $gs : gU \rightarrow M$  lokalkonstant mit  $(gs)(x) = gs(g^{-1}x) \in gM_{g^{-1}\sigma(x)}^m = M_{\sigma(x)}^m$  für alle  $g \in \Gamma$ .

Für alle  $m$  ist  $\mathcal{K}^{m+1}$  per definitionem eine  $\Gamma$ -Untergarbe von  $\mathcal{K}^m$ .

Die Halme der Quotienten  $\mathcal{K}^m/\mathcal{K}^{m+1}$  können mit 2.30 berechnet werden, was uns wegen 2.20. Folgendes beweist:

**2.31. Proposition.** Die  $\mathcal{K}^m$  definieren eine (absteigende) Filtrierung von  $\mathcal{S}$ -konstruierbaren  $\Gamma$ -Garben

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^n \subset \mathcal{K}^{n-1} \subset \dots \subset \mathcal{K}^1 \subset \mathcal{K}^0 = M_X$$

mit der Eigenschaft, dass für alle  $m = 0, \dots, n-1$  die  $\Gamma$ -Garbe  $\mathcal{Q}^m := \mathcal{K}^m/\mathcal{K}^{m+1}$  eine  $\mathcal{S}^m$ -dünne Garbe ist, d.h. sie ist konstant auf allen Straten und konzentriert auf den Straten der Dimension  $m$ . Insbesondere ist

$$\mathcal{K}^m/\mathcal{K}^{m+1} \cong \bigoplus_{\dim \sigma = m} (M/M_\sigma)_{|\sigma|}^X.$$

Wir nennen diese Filtrierung die *Isotropie-Filtrierung* von  $M_X$  über  $\mathcal{K}$  (bezüglich  $\mathcal{S}$ ).

**Zusatz.** Seien  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{T}$  Isotropie-Stratifizierungen, so dass  $\mathcal{S}$  feiner als  $\mathcal{T}$  ist und sei  $\mathcal{K}$  eine  $\Gamma$ -Untergarbe von  $M_X$ , die konstruierbar bezüglich  $\mathcal{T}$  (und damit auch bezüglich  $\mathcal{S}$ ) ist. Es bezeichne  $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}^\bullet$  die Isotropie-Filtrierung aus 2.29. von  $M_X$  bezüglich  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}^\bullet$  die Filtrierung bezüglich  $\mathcal{T}$ . Dann gibt es eine kanonische Abbildung von Filtrierungen  $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}^\bullet \rightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{S}}^\bullet$ . Präziser formuliert, es existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathcal{T}}^{n+1} & \hookrightarrow & \mathcal{K}_{\mathcal{T}}^n & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & \mathcal{K}_{\mathcal{T}}^1 & \hookrightarrow & \mathcal{K}_{\mathcal{T}}^0 = M_X \\ \parallel & & \downarrow & & & & \downarrow & & \parallel \\ \mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathcal{S}}^{n+1} & \hookrightarrow & \mathcal{K}_{\mathcal{S}}^n & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & \mathcal{K}_{\mathcal{S}}^1 & \hookrightarrow & \mathcal{K}_{\mathcal{S}}^0 = M_X. \end{array}$$

Dieses induziert für alle  $m$  einen Morphismus  $\mathcal{K}_T^m/\mathcal{K}_T^{m+1} \rightarrow \mathcal{K}_S^m/\mathcal{K}_S^{m+1}$ , welcher seinerseits die direkte Summe aller Monomorphismen  $(M/M_\sigma)_{|\tau|}^X \rightarrow (M/M_\sigma)_{|\sigma|}^X$  für alle  $\tau \in \mathcal{T}$  und  $\sigma \in \mathcal{S}$  mit  $|\sigma| \subset |\tau|$  und  $\dim \sigma = \dim \tau = m$  ist.

## 2.d. Der Vietoris-Begle-Satz und Konstruierbarkeit von $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$

Wir stellen hier eine für unsere Situation angepasste Version des Vietoris-Begle-Satz vor, vgl. auch [Bor2, V,3.13], [BL, 1.8] sowie [Bre2, II.13].

Seien  $B$  und  $T$  hausdorffsche und lokal zusammenziehbare topologische Räume. Typische Beispiele für  $B$  sind Orbifaltigkeiten (z.B.  $Y = \Gamma \backslash X$ ) und für  $T$  wählen wir meistens  $[0, 1]$  oder einen endlichdimensionalen, reellen Vektorraum. Betrachte den Raum  $E = B \times T$  (versehen mit der Produkttopologie) und die Projektion  $\pi : E \rightarrow B$ . Beachte, dass  $\pi$  eine offene, stetige, aber i.A. keine abgeschlossene Abbildung ist (z.B. wenn  $T$  nicht kompakt ist - dies ist im Wesentlichen der Unterschied zu [Bre2, II.13] und entsprechend differieren die Beweismethoden).

Der Funktor  $\pi^* : Sh(B) \rightarrow Sh(E)$  besitzt die folgenden grundlegenden Eigenschaften.

**2.32. Proposition.** Sei  $\mathcal{F} \in Sh(B)$ .

- (a) Sei  $U \subset B$  offen und  $V \subset T$  eine offene, zusammenhängende Teilmenge. Dann ist der kanonische Morphismus  $(\pi|_{U \times V})^* : H^0(U; \mathcal{F}) \rightarrow H^0(U \times V; \pi^* \mathcal{F})$  aus [Bre2, S. 62] ein Isomorphismus.
- (b) Die Einheit  $\mathcal{F} \rightarrow \pi_* \pi^* \mathcal{F}$  der Adjunktion  $(\pi^*, \pi_*)$  ist ein Isomorphismus.
- (c)  $\pi^*$  kommutiert mit Produkten.

*Beweis.* (a) folgt aus [Bor2, 3.13.(4)] und damit folgt (b), denn der Adjunktionsmorphismus  $\mathcal{F}(U) \rightarrow (\pi_* \pi^* \mathcal{F})(U) = p^* \mathcal{F}(U \times T)$  ist der kanonische Morphismus aus (a). Teil (c) folgt ebenso aus (a), vgl. [BL, A4].  $\square$

Sei von nun an eine Garbe  $\mathcal{F} \in Sh(B)$  fest gewählt. Weil  $\pi^*$  exakt ist, ist  $\text{Ext}_E^*(\pi^* \mathcal{F}, -) \circ \pi^*$  als Komposition von  $\delta$ -Funktoren ein  $\delta$ -Funktorkomplex  $Sh(B) \rightarrow k\text{-mod}$ . Als abgeleiteter Funktor ist  $\text{Ext}^*(\mathcal{F}, -)$  ein universeller  $\delta$ -Funktorkomplex  $Sh(B) \rightarrow k\text{-mod}$ . Sei

$$h_{B,T}^* : \text{Ext}_B^*(\mathcal{F}, -) \rightarrow \text{Ext}_{B \times T}^*(\pi^* \mathcal{F}, -) \circ \pi^* : Sh(B) \rightarrow k\text{-mod}$$

der eindeutige Morphismus von  $\delta$ -Funktorkomplexen, der von  $h_{B,T}^0 := \pi^* : \text{Hom}_B(\mathcal{F}, -) \rightarrow \text{Hom}_E(\pi^* \mathcal{F}, \pi^*(-))$  induziert ist (vgl. [Gro, 2.2.]). Eine ähnliche Konstruktion gibt uns einen Morphismus von  $\delta$ -Funktorkomplexen

$$\mathfrak{h}_{B,T}^* : \pi^* \mathcal{E}xt^*(\mathcal{F}, -) \rightarrow \mathcal{E}xt^*(\pi^* \mathcal{F}, -) \circ \pi^*,$$

so dass  $(\mathfrak{h}_{B,T}^0)_E = h_{B,T}^0$  gilt.

Wir erinnern daran, dass  $T$  *azyklisch* heißt, wenn  $\tilde{H}^*(T; \mathbb{Z}) = 0$  gilt.

**2.33. Satz** (Vietoris-Begle-Satz). *Seien  $B$  und  $T$  lokal zusammenziehbare Hausdorffräume und sei  $\pi : E = B \times T \rightarrow B$  die Projektion. Dann ist  $\mathfrak{h}_{B,T}$  ein Isomorphismus von  $\delta$ -Funktoren. Insbesondere ist für alle  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in Sh(B)$*

$$\mathfrak{h}_{B,T}^* : \pi^* \text{Ext}_B^*(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Ext}_E^*(\pi^* \mathcal{F}, \pi^* \mathcal{G})$$

ein Isomorphismus.

Ist  $T$  darüberhinaus *azyklisch*, so ist  $h_{B,T}^*$  ein Isomorphismus von  $\delta$ -Funktoren. Insbesondere ist

$$h_{B,T}^* : \text{Ext}_B^*(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Ext}_E^*(\pi^* \mathcal{F}, \pi^* \mathcal{G})$$

ein Isomorphismus für alle  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in Sh(B)$ .

**Zusatz.** Sei  $S \subset T$  eine *azyklische, offene Teilmenge*,  $\rho : B \times S \rightarrow B$  die Projektion. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_B^*(\mathcal{F}, \mathcal{G}) & \xrightarrow[\cong]{h_{B,T}} & \text{Ext}_{B \times T}^*(\pi^* \mathcal{F}, \pi^* \mathcal{G}) \\ = \downarrow & & \downarrow r^* \\ \text{Ext}_B^*(\mathcal{F}, \mathcal{G}) & \xrightarrow[\cong]{h_{B,S}} & \text{Ext}_{B \times S}^*(\rho^* \mathcal{F}, \rho^* \mathcal{G}) \end{array}$$

wobei der Morphismus  $r^*$  durch die Restriktion  $B \times S \subset B \times T$  induziert ist. Insbesondere ist  $r^*$  ein Isomorphismus.

*Beweis von 2.33.* Wir nehmen zunächst an, dass  $T$  *azyklisch* ist. Die Version des Vietoris-Begle-Satzes von [Bor2, 3.13 (14)] besagt, dass  $H^*(U \times T; \pi^* \mathcal{F}) \cong H^*(U; \mathcal{F})$  für alle offenen Teilmengen  $U \subset B$  gilt. Insbesondere gilt für alle  $x \in B$  und  $j > 0$ :

$$R^j \pi_* (\pi^* \mathcal{F})_x \cong \text{colim } H^j(U \times T; \pi^* \mathcal{F}) \cong \text{colim } H^j(U; \mathcal{F}) = 0,$$

wobei die Limites über alle Umgebungen  $U$  von  $x$  indiziert sind. Die Grothendieckspektralsequenz der Adjunktion  $(\pi^*, \pi_*)$  kollabiert daher zum Isomorphismus  $\text{Ext}^*(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \text{Ext}^*(\pi^* \mathcal{F}, \pi^* \mathcal{G})$ . Insbesondere ist  $\pi^* \mathcal{I}^\bullet$  eine *Hom* $(\pi^* \mathcal{F}, -)$ -azyklische Auflösung von  $\pi^* \mathcal{G}$  für alle injektiven Auflösungen  $\mathcal{I}^\bullet$  von  $\mathcal{G}$ , denn  $\pi^*$  ist exakt und es ist  $\text{Ext}^j(\pi^* \mathcal{F}, \pi^* \mathcal{I}^\bullet) = \text{Ext}^j(\mathcal{F}, \mathcal{I}^\bullet) = 0$  für alle  $j > 0$ . Es gilt also  $\text{Ext}^*(\pi^* \mathcal{F}, \pi^* \mathcal{G}) = H^*(\text{Hom}(\pi^* \mathcal{F}, \pi^* \mathcal{I}^\bullet))$  und daraus lässt sich ein Isomorphismus von langen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \text{Ext}^*(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1) & \longrightarrow & \text{Ext}^*(\mathcal{F}, \mathcal{G}_2) & \longrightarrow & \text{Ext}^*(\mathcal{F}, \mathcal{G}_3) \xrightarrow{+} \cdots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \cdots & \longrightarrow & \text{Ext}^*(\pi^* \mathcal{F}, \pi^* \mathcal{G}_1) & \longrightarrow & \text{Ext}^*(\pi^* \mathcal{F}, \pi^* \mathcal{G}_2) & \longrightarrow & \text{Ext}^*(\pi^* \mathcal{F}, \pi^* \mathcal{G}_3) \xrightarrow{+} \cdots \end{array}$$

für alle kurzen exakten Sequenzen  $0 \rightarrow \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_3 \rightarrow 0$  konstruieren.

Der Beweis für  $\pi^* \mathcal{E}xt^*(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \mathcal{E}xt^*(\pi^* \mathcal{F}, \pi^* \mathcal{G})$  kann analog geführt werden: Die kanonische Auflösung  $\pi^* \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G})$  ist  $\mathcal{H}om(\pi^* \mathcal{F}, -)$ -azyklisch – dies folgt aus dem ersten Teil des Beweises, wenn man ihn auf eine Umgebung der Form  $U \times V$  mit zusammenziehbaren offenen Teilmengen  $U \subset B$ ,  $V \subset T$  anwendet. Vergleiche auch [BL, 1.8].  $\square$

*Beweis des Zusatzes.* Beachte, dass  $r^*$  ein Morphismus von  $\delta$ -Funktoren ist. Es genügt also zu zeigen, dass wir eine Gleichheit  $r^* \circ h_{B,T}^* = h_{B,S}^*$  von Morphismen von  $\delta$ -Funktoren haben. Da  $\mathcal{E}xt_B^*(\mathcal{F}, -)$  ein universeller  $\delta$ -Funktorkomplex ist, genügt es die Gleichheit für  $* = 0$  einzusehen. Dies folgt aber aus 2.32.(a). Die Rolle von  $\mathcal{F}$  übernimmt hier  $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ .  $\square$

**2.34. Bemerkung.** In der Praxis werden wir diesen Satz in folgender Form verwenden: Sind  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  Garben auf  $E$  mit der Eigenschaft, dass  $\mathcal{A}|_{b \times T}$  und  $\mathcal{B}|_{b \times T}$  für alle  $b \in B$  konstante Garben sind, so gibt es für jede Wahl eines Basispunktes  $t_0 \in T$  kanonische Isomorphismen

$$\mathcal{E}xt_E^*(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cong \pi^* \mathcal{E}xt_B^*(\mathcal{A}|_{B \times t_0}, \mathcal{B}|_{B \times t_0})$$

und falls  $T$  azyklisch ist:

$$\mathcal{E}xt_E^*(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cong \mathcal{E}xt_B^*(\mathcal{A}|_{B \times t_0}, \mathcal{B}|_{B \times t_0}).$$

Auch die im Zusatz erwähnte Natürlichkeit hat hier ihre Gültigkeit. Dies alles wird mit dem folgenden Kriterium gerechtfertigt.

**2.35. Lemma.** Sei  $\mathcal{A} \in \mathcal{S}h(E)$  eine Garbe. Wir setzen  $E_b = \pi^{-1}(b) = b \times T$  für alle  $b \in B$ . Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent

- (i)  $\mathcal{A} = \pi^*(\mathcal{A}|_B)$
- (ii)  $\mathcal{A}|_{E_b} \in \mathcal{S}h(V)$  ist für alle  $x \in B$  eine konstante Garbe.

*Beweis.* Die Richtung (i)  $\Rightarrow$  (ii) ist leicht. Zu „(ii)  $\Rightarrow$  (i)“. Es gilt

$$(2.36) \quad \pi^* \pi_* \mathcal{A} \cong \mathcal{A},$$

nach dem Beweis der Proposition 8.1.4 in [KS]. Es bezeichne  $i : B = B \times \{t_0\} \rightarrow E$  die Inklusion. Wegen 2.36 gilt dann  $\pi \circ i = \text{id}$ , also  $\pi_* \mathcal{A} = i^* \pi^* \pi_* \mathcal{A} = i^* \mathcal{A} = \mathcal{A}|_B$ . Wir können also  $\pi_* \mathcal{A}$  in 2.36 durch  $\mathcal{A}|_B$  ersetzen und es folgt  $\pi^*(\mathcal{A}|_B) \cong \mathcal{A}$ .  $\square$

Nach diesem allgemeinen Diskurs über den Vietoris-Begle-Satz möchten wir diesen in unserer Ausgangssituation anwenden, in der wir einen diskontinuierlichen  $\Gamma$ -Raum  $X$  haben und die Gruppen  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  bzw. die Garben  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  für alle Darstellungen  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  von  $\Gamma$  studieren.

Wir notieren die Auswertung in  $y \in Y$  durch

$$\varepsilon_y : H^0(U; \mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})) \rightarrow \mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})_y$$

für alle  $U \subset Y$  und schreiben den Garbifizierungshomomorphismus über  $U$  als

$$\vartheta_U : \text{Ext}_U(\mathcal{M}|_U, \mathcal{N}|_U) \rightarrow H^0(U; \mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})).$$

**2.37. Lemma.** *Es sei  $y \in Y$  beliebig und  $U \subset Y$  eine zulässige Umgebung von  $y$ . Dann gilt*

(i)  $\mathcal{E}xt_Y^m(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \in \text{Sh}(Y)$  ist  $\Gamma \backslash \mathcal{S}$ -konstruierbar für alle  $m \geq 0$  und alle Isotropie-Stratifizierungen  $\mathcal{S}$  von  $X$ .

(ii)  $\varepsilon_y : H^0(U; \mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})) \rightarrow \mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})_y$  ist ein Isomorphismus.

(iii)  $\vartheta_U : \text{Ext}_U^*(\mathcal{M}|_U, \mathcal{N}|_U) \rightarrow H^0(U; \mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N}))$  ist ein Isomorphismus.

Insbesondere gilt  $\text{Ext}_U^*(\mathcal{M}|_U, \mathcal{N}|_U) \cong \mathcal{E}xt_Y^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})_y$ .

Eine wichtige Konsequenz des letzten Lemmas ist, die allgemeine Bestimmung der Halme von  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  auf das folgende Problem zurückzuführen:

**2.38. Problem.** *Man bestimme für alle lokalen Modelle  $(V, G)$  und alle irreduziblen Darstellungen  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  von  $G$  die Invarianten  $\text{Ext}_{G \backslash V}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ .*

Teil (ii) des obigen Lemmas gilt für allgemeine konstruierbare Garben, so dass wir es allgemein formulieren und dann auf das obige Lemma anwenden möchten.

**2.39. Lemma.** *Sei  $X$  ein diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum,  $p : X \rightarrow Y = \Gamma \backslash X$  die Projektion und  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(Y)$  eine Garbe mit der Eigenschaft, dass  $\mathcal{F}|_{p(X_H)}$  lokalkonstant ist für alle  $H < \Gamma$  (mit anderen Worten ist  $\mathcal{F}$  eine  $\Gamma \backslash \mathcal{S}_{orb}$ -konstruierbare Garbe, wobei  $\mathcal{S}_{orb}$  die Stratifizierung 2.5. ist). Dann ist die Auswertung*

$$H^0(U; \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_y$$

für alle  $y \in Y$  und alle zulässigen Umgebungen  $U$  von  $y$  ein Isomorphismus.

*Beweis.* Da die Frage lokaler Natur ist, können wir annehmen, dass  $U = \mathbb{R}^n/G$  für eine endliche Untergruppe  $G < O(n)$  und  $y = p(0) \in U$  ist, wobei  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow U$  die Projektion ist. Es bezeichne  $U_r = U_r(0)/G$  den Quotienten der offenen Kugel vom Radius  $0 < r \leq \infty$  (mit der Konvention  $U_\infty = U$ ). Außerdem sei  $U_r^0 = U_r - \{y\}$  für alle  $r$ . Wir behaupten, dass für alle  $r > s > 0$  die Restriktion

$$i_{r,s}^* : H^0(U_r; \mathcal{F}) \rightarrow H^0(U_s; \mathcal{F})$$

ein Isomorphismus ist, wobei  $i_{r,s} : U_s \rightarrow U_r$  die Inklusion ist. Damit wären wir fertig, denn  $H^0(U; \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_y$  ist der Kolimes dieser Restriktionen. Wähle ein  $t$  mit  $0 < t < s$  und sei  $S_t = \mathbb{S}_t^{n-1}/G$  der Quotient der Sphäre vom Radius  $t$ . Weil  $U_r = U_r^0 \cup U_t$  und  $U_s = U_s^0 \cup U_t$  sowie  $U_r^0 \cap U_t = U_s^0 \cap U_t = U_t^0$  gilt, existiert ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\mathcal{F}; U_r) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{F}; U_t) \oplus H^0(\mathcal{F}; U_r^0) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{F}; U_t^0) \\ & & \downarrow i_{r,s}^* & & \downarrow \text{id} \oplus j_{r,s}^* & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & H^0(\mathcal{F}; U_s) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{F}; U_t) \oplus H^0(\mathcal{F}; U_s^0) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{F}; U_t^0), \end{array}$$

wobei  $j_{r,s} : U_s^0 \rightarrow U_r^0$  die Inklusion ist. Also genügt zu zeigen, dass die Restriktion  $j_{r,s}^*$  ein Isomorphismus ist.

Man erinnere sich, dass jedes Stratum von  $\mathbb{R}^n$  von der Form  $\mathbb{R}_H^n$  für ein  $H < G$  ist. Für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda \neq 0$  gilt  $G_x = G_{\lambda x}$ , somit ist jeder Strahl  $\{\lambda x | \lambda > 0\}$  komplett in einem Stratum, nämlich  $\mathbb{R}_{G_x}$ , enthalten. Insbesondere ist  $\mathcal{F}$  als konstruierbare Garbe konstant auf jedem „Strahl“ von  $U$ , also einer Teilmenge der Form  $p(\{\lambda x | \lambda > 0\})$ . Unter der kanonischen Identifikation von  $U^0$  mit  $S_t \times \mathbb{R}_+$  identifiziert man die Strahlen von  $U$  mit den Teilmengen  $\{y\} \times \mathbb{R}_+$ ,  $y \in S_t$ . Nach 2.35. gilt  $\mathcal{F}|_{U^0} = \pi^*(\mathcal{F}|_{S_t})$  und somit ist für alle  $r > t$  die kanonische Abbildung  $\pi_r^* = (\pi|_{U_r})^* : H^0(S_t; \mathcal{F}) \rightarrow H^0(U_r^0; \mathcal{F})$  aus 2.32. ein Isomorphismus. Wegen  $\pi_r \circ j_{r,s} = \pi_s$  folgt daher, dass  $j_{r,s}^*$  ein Isomorphismus ist.  $\square$

*Beweis von 2.37.. (i)* Es genügt, die Konstruierbarkeit für die größte Isotropie-stratifizierung 2.6. zu beweisen. Wir führen eine Induktion über die Dimension von  $X$ . Für  $\dim(X) = 0$  ist nichts zu zeigen.

Sei also  $\dim X = n + 1$  mit  $n \geq 0$ . Weil Konstruierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist, können wir durch Übergang zu einer zulässigen Umgebung annehmen, dass  $X$  ein lokales Modell  $X = (\mathbb{R}^{n+1}, G)$  ist.

Erster Fall:  $\dim X^G = 0$ , also  $X^G = \{0\}$ . Dann bildet  $y_0 := p(0) \in Y$  ein einpunktiges Stratum von  $Y$ , weil  $X_G = \{0\}$  gilt. Somit reicht es, die Konstruierbarkeit von  $\mathcal{E}xt^m(\mathcal{M}, \mathcal{N})|_{Y_0}$  zu zeigen, wobei  $Y_0 = Y - \{y_0\}$  gesetzt ist. Wir setzen  $\mathbb{S}Y = p(\mathbb{S}^n)$  und  $\pi : Y_0 \rightarrow \mathbb{S}Y$  sei die von der radialen Projektion  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$  induzierte Abbildung. Topologisch kann  $\pi$  mit der Projektion  $\mathbb{S}Y \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^n$  identifiziert werden. Nach 2.35. ist  $\mathcal{M}|_{Y_0} \cong \pi^*(\mathcal{M}|_{\mathbb{S}Y})$ , denn für alle  $y \in \mathbb{S}Y$  ist  $\mathcal{M}|_{\{\lambda y | \lambda > 0\}}$  eine konstante Garbe. Analoges gilt für  $\mathcal{N}$ , so dass wir mit 2.33. folgern können:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}xt_{Y_0}^m(\mathcal{M}|_{Y_0}, \mathcal{N}|_{Y_0})|_{Y_0} &\cong \mathcal{E}xt_{Y_0}^m(\pi^*(\mathcal{M}|_{\mathbb{S}Y}), \pi^*(\mathcal{N}|_{\mathbb{S}Y})) \\ &\cong \pi^* \mathcal{E}xt_{\mathbb{S}Y}^m(\mathcal{M}|_{\mathbb{S}Y}, \mathcal{N}|_{\mathbb{S}Y}). \end{aligned}$$

Nun ist  $\mathcal{M}|_{\mathbb{S}Y} = q^*(\mathcal{M}_{\mathbb{S}^n})$ , wenn  $q : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}Y$  die Einschränkung von  $p$  ist. Entsprechendes gilt für  $\mathcal{N}|_{\mathbb{S}Y}$ . Wegen der Induktionsannahme ist somit  $\mathcal{E}xt_{\mathbb{S}Y}^m(\mathcal{M}|_{\mathbb{S}Y}, \mathcal{N}|_{\mathbb{S}Y})$  konstruierbar. Der Funktor  $\pi^*$  respektiert Konstruierbarkeit (denn die Straten von  $Y_0 = \mathbb{S}Y \times \mathbb{R}$  sind von der Form  $|\sigma| \times \mathbb{R}$ , wobei  $|\sigma|$  die Straten von  $\mathbb{S}Y$  durchlaufe), so dass wir in diesem Fall fertig sind.

Zweiter Fall:  $\dim X^G > 0$ . Wir zerlegen den  $G$ -Modul  $X = \mathbb{R}^n$  als  $X = X^G \times \tilde{Z}$ , wobei  $\tilde{Z}$  der Kern von  $X \rightarrow X^G$ ,  $x \mapsto 1/|G| \cdot \sum_g gx$  ist. Beachte, dass  $Y = X^G \times Z$  gilt, wenn wir  $Z = G \backslash \tilde{Z}$  setzen. Es bezeichne  $\nu : Y \rightarrow Z$  die Projektion. Dann ist  $\mathcal{M} \cong \nu^*(\mathcal{M}|_Z)$  und  $\mathcal{M}|_Z = r_*^G(\mathcal{M}_{\tilde{Z}})$ , wobei  $r : \tilde{Z} \rightarrow Z$  die Einschränkung von  $p$  ist. Entsprechendes gilt für  $\mathcal{N}$ . Es folgt mit 2.33.:

$$\mathcal{E}xt_Y^m(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \cong \nu^* \mathcal{E}xt^m(r_*^G(\mathcal{M}), r_*^G(\mathcal{N}))$$

Da  $\dim \tilde{Z} < \dim X$  gilt, greift hier die Induktion, woraus die Konstruierbarkeit von  $\mathcal{E}xt^m(r_*^G(\mathcal{M}), r_*^G(\mathcal{N}))$  folgt. Der Funktor  $\nu^*$  respektiert Konstruierbarkeit, da die Straten von  $Y = X^G \times Z$  von der Form  $X^G \times |\sigma|$  sind, wobei  $|\sigma|$  die Straten

von  $Z$  durchlaufe.

(ii) folgt aus 2.39.

(iii) Sei  $U$  eine zulässige Umgebung von  $y \in Y$ . Es genügt zu zeigen, dass  $\varepsilon_y \circ \vartheta_U : \text{Ext}_U^*(\mathcal{M}|_U, \mathcal{N}|_U) \rightarrow \mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})_y$  ein Isomorphismus ist. Wir können annehmen, dass  $U = \mathbb{R}^n/G$  für eine endliche Untergruppe  $G < O(n)$  und  $y = p(0) \in U$  ist, wobei  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow U$  die Projektion ist. Es bezeichne  $U_r = U_r(0)/G$  den Quotienten der offenen Kugel vom Radius  $0 < r \leq \infty$  (mit der Konvention  $U_\infty = U$ ). Weil  $\lim_{r>0} \text{Ext}_{U_r}^*(\mathcal{M}|_{U_r}, \mathcal{N}|_{U_r}) \cong \mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})_y$  gilt, genügt es zu zeigen, dass die Restriktion  $\text{Ext}_{U_r}^*(\mathcal{M}|_{U_r}, \mathcal{N}|_{U_r}) \rightarrow \text{Ext}_{U_s}^*(\mathcal{M}|_{U_s}, \mathcal{N}|_{U_s})$  für alle  $r > s > 0$  ein Isomorphismus ist. Wir wählen ein  $t > 0$  mit  $r > s > t$ . Beachte, dass  $\text{Ext}_{U_r}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow \text{Ext}_{U_s}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  nach 2.33. und 2.32. ein Isomorphismus ist. Mit dem kommutativen Diagramm der Mayer-Vietoris-Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \text{Ext}_{U_r}^q(\mathcal{M}, \mathcal{N}) & \longrightarrow & \text{Ext}_{U_0}^q(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \oplus \text{Ext}_{U_t}^q(\mathcal{M}, \mathcal{N}) & \longrightarrow & \text{Ext}_{U_t}^q(\mathcal{M}, \mathcal{N}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow = & & \\ \dots & \longrightarrow & \text{Ext}_{U_s}^q(\mathcal{M}, \mathcal{N}) & \longrightarrow & \text{Ext}_{U_0}^q(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \oplus \text{Ext}_{U_t}^q(\mathcal{M}, \mathcal{N}) & \longrightarrow & \text{Ext}_{U_t}^q(\mathcal{M}, \mathcal{N}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

(vgl. 1.33) und dem Fünfer-Lemma folgt die Behauptung.  $\square$

**2.40. Korollar.** Sei  $\mathcal{S}$  eine  $\Gamma$ -Triangulierung von  $X$ . Für alle Darstellungen  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  und alle Simplizes  $\sigma \in \mathcal{S}$  ist die Garbifizierung

$$\text{Ext}^*(\mathcal{M}|_{p(U_\sigma)}, \mathcal{N}|_{p(U_\sigma)}) \rightarrow H^0(p(U_\sigma); \mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N}))$$

bzw. die Auswertung

$$H^0(p(U_\sigma); \mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})) \rightarrow \mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})_y$$

für alle  $y \in p(|\sigma|)$  ein Isomorphismus.

*Beweis.* Auf  $Y$  haben wir die induzierte Triangulierung  $\Gamma \backslash \mathcal{S}$  und die Simplizes sind von der Form  $(\sigma) = \Gamma \cdot \sigma$ ,  $\sigma \in \mathcal{S}$ . Es gilt  $U_{(\sigma)} = p(U_\sigma)$ . Nach 2.37. ist  $\mathcal{E}xt(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \Gamma \backslash \mathcal{S}$ -konstruierbar. Nach 2.16. ist einerseits die Auswertung

$$H^0(p(U_\sigma); \mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})) \rightarrow \mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})_y$$

ein Isomorphismus und andererseits gilt

$$H^j(U_{(\sigma)}; \mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})) = 0 \quad \text{für alle } j > 0.$$

Damit kollabiert die LG-Spektralsequenz 1.12. Dessen Kantenhomomorphismen, die nach 1.12. mit der Garbifizierung übereinstimmen, sind also Isomorphismen.  $\square$

## Kapitel 3

# Der Hauptsatz und die Spektralsequenz $E(\mathcal{S}, \mathcal{L})$

In diesem zentralen Kapitel geht es um die Hauptresultate dieser Arbeit. Ausgehend von einer Spektralsequenz  $E(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ , die in Abschnitt 3.b. vorgestellt, aber erst später im Kapitel 6 hergeleitet wird, beweisen wir Versionen der Theoreme aus der Einleitung in einer allgemeineren Form und geben alternative Beweise der klassischen Resultate 1.8., 1.18. und 1.19.

Die Einträge der Spektralsequenz  $E(\mathcal{S}, \mathcal{L})$  sind durch  $\text{Ext}_\Gamma^*(M_X, N_X)$  und durch einen Kettenkomplex  $\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ , welcher zu einem Koeffizientensystem  $\mathcal{L}$  auf einer Stratifizierung  $\mathcal{S}$  assoziiert ist, bestimmt. Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit diesem Komplex und seinen Eigenschaften. Wir diskutieren auch eingehend den Begriff der Inzidenzhomomorphismen  $[\tau: \sigma]$  für Straten  $\sigma, \tau$  mit  $\sigma \prec \tau$ , die maßgeblich für die Definition des Komplexes  $\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}, \mathcal{L})$  sind. Die Inzidenzhomomorphismen spezialisieren sich zu den klassischen Inzidenzzahlen, wenn  $\mathcal{S}$  eine (Restriktion einer) Triangulierung ist.

### 3.a. Inzidenzhomomorphismen und Koeffizientensysteme

Wir fixieren eine diskrete Gruppe  $\Gamma$ , einen diskontinuierlichen  $\Gamma$ -Raum  $X$  und eine Isotropie-Stratifizierung  $\mathcal{S}$  von  $X$ .

**Definition.** Sei  $\sigma \in \mathcal{S}$  und  $j := \dim \sigma$ . Sei weiterhin  $\tau \in \mathcal{S}$  mit  $\dim \tau = j + 1$ . Wir definieren den *Inzidenzhomomorphismus*

$$[\tau: \sigma] : H_{|\tau|}^{*+n-j-1}(U_\tau) \rightarrow H_{|\sigma|}^{*+n-j}(U_\sigma)$$

als den Randhomomorphismus der langen exakten Sequenz von  $\text{Ext}^*(-, \mathbb{Z}_X)$ , die von der kurzen exakten Sequenz  $0 \rightarrow \mathbb{Z}_{|\tau|} \rightarrow \mathbb{Z}_{|\tau| \cup |\sigma|} \rightarrow \mathbb{Z}_{|\sigma|} \rightarrow 0$  induziert



ist. Beachte hierbei den Isomorphismus 1.32. und die Tatsache, dass  $|\sigma|$  abgeschlossen und  $|\tau|$  offen in  $|\sigma| \cup |\tau|$  ist (man verwende dazu  $|\sigma| = X^{\leq j} \cap (|\tau| \cup |\sigma|)$  und  $|\tau| = X^{\geq j+1} \cap (|\tau| \cup |\sigma|)$  in Kombination mit 2.7 bzw. 2.8).

Wir können und werden  $H_{|\sigma|}^{*+n-\dim \sigma}(U_\sigma)$  mithilfe des Thom-Isomorphismus 3.1. (unten) stets mit  $H^*(|\sigma|; \mathbf{or}_\sigma)$  identifizieren. Auf diese Weise können wir den Inzidenzhomomorphismus immer als einen Homomorphismus (von graduierten abelschen Gruppen)

$$[\tau : \sigma] : H^*(|\tau|; \mathbf{or}_\tau) \rightarrow H^*(|\sigma|; \mathbf{or}_\sigma)$$

auffassen, wenn  $\mathbf{or}_\sigma$  die Orientierungsgarbe eines jeden Stratums  $\sigma$  bezeichnet (vgl. [Bre2, 1.11]).

**3.1. Lemma** (Thom-Isomorphismus für Straten). *Für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  existiert ein kanonischer Isomorphismus*

$$H_{|\sigma|}^{*+n-\dim \sigma}(U_\sigma) \xrightarrow{\cong} H^*(|\sigma|; \mathbf{or}_\sigma) \in \Gamma_\sigma\text{-mod.}$$

*Beweis.* Wähle eine offene Tubenumgebung  $T_\sigma \subset U_\sigma$  von  $|\sigma|$ . Die Ausschneidung  $H_{|\sigma|}^*(U_\sigma) \rightarrow H_{|\sigma|}^*(T_\sigma) = H^*(T_\sigma, T_\sigma - |\sigma|)$  ist ein Isomorphismus (siehe 1.29), wende nun den klassischen Thom-Isomorphismus [Bre2, S.235, (22)] an (wähle dort  $\mathcal{B} = \mathbf{or}_\sigma$  und benutze  $\mathbf{or}_\sigma \otimes \mathbf{or}_\sigma = \mathbb{Z}_{|\sigma|}$ , [Bre2, S. 234]). Der Isomorphismus ist unabhängig von der Wahl der Tubenumgebung  $T_\sigma$ , denn eine kleinere induziert via Restriktion kommutative Diagramme (Ausschneidung und Thom-Isomorphismus ist funktoriell bezüglich Restriktion zwischen offenen Tubenumgebungen). Man benutze für die Funktorialität, dass Tubenumgebungen „kofinal“ in dem Sinne sind, dass für jedes Paar von offenen Tubenumgebungen eine gemeinsame kleinere offene Tubenumgebung existiert, also eine, die in beiden enthalten ist. Für die  $\Gamma_\sigma$ -Invarianz des Thom-Isomorphismus beachte man, dass  $gT_\sigma$  für alle  $g \in \Gamma_\sigma$  auch eine Tubenumgebung von  $|\sigma|$  ist und man benutze die Natürlichkeit des Thom-Isomorphismus (in diesem Fall bezüglich des Bündelisomorphismus  $g : T_\sigma \rightarrow gT_\sigma$ ).  $\square$

**Bemerkung.** Ist  $\sigma \not\leq \tau$  (d.h.  $|\sigma| \cap \overline{|\tau|} = \emptyset$ ), so ist  $[\tau : \sigma] = 0$ , denn in diesem Fall ist  $|\tau| = (|\tau| \cup |\sigma|) \cap \overline{|\tau|}$  abgeschlossen in  $|\tau| \cup |\sigma|$ , so dass eine kanonische Projektion  $\mathbb{Z}_{|\tau| \cup |\sigma|} \rightarrow \mathbb{Z}_{|\tau|}$  existiert, die wiederum eine Zerfällung der Sequenz  $0 \rightarrow \mathbb{Z}_{|\tau|} \rightarrow \mathbb{Z}_{|\tau| \cup |\sigma|} \rightarrow \mathbb{Z}_{|\sigma|} \rightarrow 0$  definiert.

Jetzt wenden wir uns alternativen Definitionen der Inzidenzmorphismen  $[\tau : \sigma]$  zu.

**3.2. Proposition.** *Sei  $\sigma \leq \tau$  mit  $\dim \tau - 1 = \dim \sigma =: j$ . Wähle eine Tubenumgebung  $T_\sigma \subset U_\sigma$  von  $|\sigma|$ . Dann ist der Inzidenzmorphismus  $[\tau : \sigma]$  identisch*

mit der Komposition

$$\begin{aligned}
H^{*+n-j-1}(U_\tau, U_\tau - |\tau|) &\xrightarrow{(1)} H^{*+n-j-1}(T_\sigma \cap U_\tau, T_\sigma \cap (U_\tau - |\tau|)) \\
&\stackrel{(2)}{\cong} H^{*+n-j-1}(T_\sigma - |\sigma|, T_\sigma - (|\tau| \cup |\sigma|)) \\
&\xrightarrow{(3)} H^{*+n-j}(T_\sigma, T_\sigma - |\sigma|).
\end{aligned}$$

Dabei sind die einzelnen Morphismen folgendermaßen erklärt.

- (1) ist induziert durch Restriktionen
- (2) ist der Ausschneidungsisomorphismus ( $T_\sigma \cap U_\tau$  ist eine offene Umgebung von  $T_\sigma \cap |\tau|$  in  $T_\sigma - |\sigma|$ )
- (3) ist der Randhomomorphismus der langen exakten Sequenz des Tripels  $(T_\sigma - (|\tau| \cup |\sigma|)) \subset (T_\sigma - |\sigma|) \subset T_\sigma$ .

*Beweis.* Das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{T_\sigma \cap |\tau|} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{T_\sigma \cap (|\tau| \cup |\sigma|)} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{T_\sigma \cap |\sigma|} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{|\tau|} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{|\tau| \cup |\sigma|} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{|\sigma|} \longrightarrow 0
\end{array}$$

zeigt, dass  $[\tau : \sigma]$  die Komposition der Restriktion  $H_{|\tau|}^*(U_\tau) \rightarrow H_{T_\sigma \cap |\tau|}^*(T_\sigma \cap U_\tau)$  mit dem Randhomomorphismus der langen exakten  $\text{Ext}^*(-, \mathbb{Z})$ -Sequenz der unteren Zeile ist. (Man benutze hier auch 1.32).  $\square$

Während die letzte Proposition für praktische Zwecke gut ist, um bei einer konkret vorgegebenen Stratifizierung die Inzidenzhomomorphismen zu identifizieren, ist die folgende Charakterisierung vom theoretischen Gesichtspunkt von Nutzen.

**3.3. Proposition.** Für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  mit  $\dim \sigma = j$  ist der Homomorphismus

$$(3.4) \quad \sum_{\dim \tau = j+1} [\tau : \sigma] : \prod_{\dim \tau = j+1} H^*(|\tau|; \mathfrak{or}_\tau) \rightarrow H^*(|\sigma|; \mathfrak{or}_\sigma)$$

wohldefiniert und er ist gegeben durch den Randhomomorphismus der langen exakten Sequenz von  $\text{Ext}^*(-, \mathbb{Z}_X)$  induziert durch die exakte Sequenz  $0 \rightarrow \mathbb{Z}_{X^{j+1}} \rightarrow \mathbb{Z}_{X^{j+1} \cup |\sigma|} \rightarrow \mathbb{Z}_{|\sigma|} \rightarrow 0$ . Darüberhinaus ist das Produkt (über alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  mit  $\dim \sigma = j$ ) der Homomorphismen 3.4 gegeben durch den Randhomomorphismus der langen exakten Sequenz von  $\text{Ext}^*(-, \mathbb{Z}_X)$ , die von der exakten Sequenz  $0 \rightarrow \mathbb{Z}_{X^{j+1}} \rightarrow \mathbb{Z}_{X^{j+1} \cup X^j} \rightarrow \mathbb{Z}_{X^j} \rightarrow 0$  induziert sei.

*Beweis.* Die Wohldefiniertheit von 3.4 folgt aus der Tatsache, dass  $\sigma$  per definitionem die Seite von nur endlich vielen Straten ist, so dass  $[\tau : \sigma] = 0$  für

fast alle  $\tau$  gilt. Es gilt kanonisch  $\mathbb{Z}_{X^j} \cong \bigoplus_{\dim \sigma = j} \mathbb{Z}_{|\sigma|}$  für alle  $j \geq 0$ . Der Isomorphismus ist gegeben durch die direkte Summe über alle  $\sigma$  der Inklusionen  $\mathbb{Z}_{|\sigma|} \rightarrow \mathbb{Z}_{X^j}$  (man beachte, dass  $|\sigma|$  offen und abgeschlossen in  $X^j$  ist). Diese Inklusion induziert die Projektion  $\text{Ext}^*(\mathbb{Z}_{X^j}, \mathbb{Z}_X) \rightarrow \text{Ext}^*(\mathbb{Z}_{|\sigma|}, \mathbb{Z}_X)$ , und das Produkt

$$\text{Ext}^*(\mathbb{Z}_{X^j}, \mathbb{Z}_X) \rightarrow \prod_{\dim \sigma = j} \text{Ext}^*(\mathbb{Z}_{|\sigma|}, \mathbb{Z}_X)$$

(über alle  $\sigma$  mit  $\dim \sigma = j$ ) dieser Projektionen ist ein Isomorphismus. Man beachte, dass 3.4 auf einem Faktor  $H^*(|\tau|; \mathfrak{or}_\sigma)$  trivial ist, wenn  $\sigma$  nicht von  $\tau$  getroffen wird. Also ist der Homomorphismus 3.4 vollständig bestimmt durch sein Verhalten auf  $\bigoplus_\tau H^*(|\tau|; \mathfrak{or}_\tau)$  und aufgrund der universellen Eigenschaft der direkten Summe ist er vollständig durch sein Verhalten auf den einzelnen Faktoren  $H^*(|\tau|; \mathfrak{or}_\tau)$  bestimmt. Auf solch einem Faktor ist aber 3.4 per definitionem durch den Inzidenzhomomorphismus  $[\tau: \sigma]$  gegeben. Betrachte nun das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{X^{j+1}} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{X^{j+1} \cup |\sigma|} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{|\sigma|} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{|\tau|} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{|\tau| \cup |\sigma|} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{|\sigma|} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Es folgt, dass der Randhomomorphismus der langen exakten Sequenz der oberen Zeile die Komposition des Randhomomorphismus der unteren Zeile mit der Inklusion des direkten Summanden  $\text{Ext}^*(\mathbb{Z}_{|\tau|}, \mathbb{Z}_X) \rightarrow \text{Ext}^*(\mathbb{Z}_{X^{j+1}}, \mathbb{Z}_X)$  ist, was zu zeigen war.

Die zweite Behauptung folgt ähnlich aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{X^{j+1}} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{X^{j+1} \cup |\sigma|} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{|\sigma|} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{X^{j+1}} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{X^{j+1} \cup X^j} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{X^j} & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

während der mittlere und rechte vertikale Pfeil jeweils Inklusionen sind – man beachte, dass  $X^{j+1} \cup |\sigma|$  offen in  $X^{j+1} \cup X^j$  ist, denn es gilt

$$X^{j+1} \cup |\sigma| = (U_\sigma \cap (X^{j+1} \cup X^j)) \cup X^j.$$

Da der rechte vertikale Pfeil die Projektion  $\text{Ext}^*(\mathbb{Z}_{X^j}, \mathbb{Z}_X) \rightarrow \text{Ext}^*(\mathbb{Z}_{|\sigma|}, \mathbb{Z}_X)$  induziert, folgt die Behauptung aus dem Diagramm langer exakter Sequenzen von  $\text{Ext}^*(-, \mathbb{Z}_X)$ , die von dem obigen Diagramm von kurzen exakten Sequenzen kommt.  $\square$

**Koeffizientensysteme** Es sei an die Definitionen (und Unterschiede) der Stabilisatoren  $\Gamma_\sigma$  und  $\Gamma_{x(\sigma)}$  erinnert. Die Gruppe  $\Gamma_{x(\sigma)}$  ist der Stabilisator eines Punktes  $x(\sigma) \in |\sigma|$ . Dies hängt nicht von der Wahl von  $x(\sigma) \in |\sigma|$  ab. Der Stabilisator des gesamten Stratums  $\Gamma_\sigma = \{g \in \Gamma \mid g\sigma = \sigma\}$  ist i.A. größer als  $\Gamma_{x(\sigma)}$ .

Bei  $\Gamma$ -Triangulierungen jedoch ist es Teil der Definition, dass diese Gruppen übereinstimmen. Beachte, dass der Halm  $\mathcal{F}_x$  einer jeden strikt konstruierbaren  $\Gamma$ -Garbe  $\mathcal{F} \in Sh^\Gamma(X)$  in kanonischer Weise ein  $\Gamma_\sigma$ -Modul ist, wenn  $\sigma \in \mathcal{S}$  das eindeutige Stratum mit  $x \in |\sigma|$  ist.

**3.5. Definition.** Ein *Koeffizientensystem*  $\mathcal{L}$  auf  $\mathcal{S}$  besteht aus

- $\Gamma_\sigma$ -Moduln  $L_\sigma$  für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$ ,
- Isomorphismen  $\mu_\sigma^g: L_\sigma \rightarrow L_{g\sigma}$  von  $k$ -Moduln für alle  $g \in \Gamma$  und  $\sigma \in \mathcal{S}$ , und
- $\Gamma_\sigma$ -äquivarianten Homomorphismen  $i_{\tau,\sigma}: L_\tau \rightarrow L_\sigma$  für alle  $\sigma \leq \tau$ ,

so dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

- $i_{\rho,\tau} \circ i_{\tau,\sigma} = i_{\rho,\sigma}$  für alle  $\sigma \leq \tau \leq \rho$ .
- Für alle  $g \in \Gamma_\sigma$  ist  $\mu_\sigma^g: L_\sigma \rightarrow L_\sigma$  die Multiplikation von  $g$  auf dem  $\Gamma_\sigma$ -Modul  $L_\sigma$ .
- $\mu_{g\sigma}^h \circ \mu_\sigma^g = \mu_\sigma^{hg}$  für alle  $g, h \in \Gamma$  und  $\sigma \in \mathcal{S}$ .
- $i_{g\tau,g\sigma} \circ \mu_\tau^g = \mu_\sigma^g \circ i_{\tau,\sigma}$  für alle  $\sigma < \tau$  und  $g \in \Gamma$ , d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L_\tau & \xrightarrow{\mu_\tau^g} & L_{g\tau} \\ i_{\tau,\sigma} \downarrow & & \downarrow i_{g\tau,g\sigma} \\ L_\sigma & \xrightarrow{\mu_\sigma^g} & L_{g\sigma} \end{array}$$

kommutiert.

Wenn  $\mathcal{S}$  eine äquivariante Triangulierung von  $X$  ist, ist ein Koeffizientensystem  $\mathcal{L}$  aufgrund von 2.25. nichts anderes als eine  $\mathcal{S}$ -konstruierbare  $\Gamma$ -Garbe auf  $X$ .

**3.6. Beispiel.** Seien  $M$  und  $N$  Darstellungen von  $\Gamma$  und  $\mathcal{K}$  eine  $\mathcal{S}$ -konstruierbare  $\Gamma$ -Untergarbe von  $M_X$  mit Halmen  $M_\sigma \subset M$  über  $|\sigma|$ . Dann existiert ein kanonisches Koeffizientensystem  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{K}, M, N)$  definiert durch folgende Daten:

- $L_\sigma := \text{Hom}(M/M_\sigma, N)$  und  $\mu_\sigma^g: L_\sigma \rightarrow L_{g\sigma}$  ist induziert von der Multiplikation  $g: M_\sigma \rightarrow M_{g\sigma} \subset M$  bzw. von der Multiplikation von  $g$  auf  $N$ . Mit anderen Worten: ein Element  $\varphi \in L_\sigma$  ist ein Homomorphismus  $\varphi: M \rightarrow N$  mit  $\varphi(M_\sigma) = 0$ . Dann ist  $\mu_\sigma^g(\varphi)$ , definiert durch  $\mu_\sigma^g(\varphi)(m) := g\varphi(g^{-1}m)$ , ein Homomorphismus, der auf  $M_{g\sigma}$  verschwindet, also ein Element von  $L_{g\sigma}$ .
- Für alle  $\sigma \leq \tau$  gilt  $M_\sigma \subset M_\tau$  nach 2.26. Die  $\Gamma_\sigma$ -äquivariante Projektion  $M/M_\sigma \rightarrow M/M_\tau$  induziert einen  $\Gamma_\sigma$ -Morphismus  $i_{\tau,\sigma}: \text{Hom}(M/M_\tau, N) \rightarrow \text{Hom}(M/M_\sigma, N)$ .

Die zu überprüfenden Eigenschaften folgen sofort aus der Tatsache, dass  $\mathcal{K}$  eine  $\Gamma$ -Garbe ist.

Wir werden später nur noch Koeffizientensysteme betrachten, die auf diese Weise entstehen. Die folgende Proposition zeigt, dass solche Koeffizientensysteme außerhalb der singulären Menge  $X_s$  Null sind.

**3.7. Proposition.** *Sei  $\mathcal{K} \subset M_X$  eine  $\mathcal{S}$ -konstruierbare Untergarbe mit Halmen  $M_\sigma$  über den Straten  $|\sigma|$ . Sei  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{K}, M, N)$  das Koeffizientensystem 3.6. auf  $\mathcal{S}$ . Dann gilt  $L_\sigma = 0$  für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  mit  $|\sigma| \subset X_r$ .*

*Beweis.* Sei  $|\sigma| \subset |X_r|$ , d.h.  $\Gamma_x = \{1\}$  für alle  $x \in |\sigma|$ . Daraus folgt  $M = M_\sigma$  für solche  $x$  nach 2.27. und somit  $L_\sigma = \text{Hom}(M/M_\sigma, N) = 0$ .  $\square$

**3.8. Definition.** Sei  $\mathcal{L}$  ein Koeffizientensystem einer Isotropiestratifizierung  $\mathcal{S}$  von  $X$ .

Wir definieren einen Kettenkomplex  $\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}, \mathcal{L})$  von graduierten Moduln durch

$$\mathbb{W}_j(\mathcal{S}, \mathcal{L}) := \prod_{\dim \sigma = j} L_\sigma \otimes H^*(|\sigma|; \mathfrak{or}_\sigma)$$

für alle  $j = 0, \dots, n$  mit Differentialen  $d = d_j: \mathbb{W}_{j+1}(\mathcal{S}, \mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{W}_j(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ , die auf folgende Weise mit Hilfe der Inzidenzhomomorphismen definiert sind. Für alle  $j = 0, \dots, n$  ist  $d_j$  das Produkt (über alle  $\sigma$  mit  $\dim(\sigma) = j$ ) der Abbildungen

$$(3.9) \quad \sum_{\dim \tau = j+1} i_{\tau, \sigma} \otimes [\tau: \sigma] : \prod_{\dim \tau = j+1} L_\tau \otimes H^*(|\tau|; \mathfrak{or}_\tau) \rightarrow L_\sigma \otimes H^*(|\sigma|; \mathfrak{or}_\sigma).$$

(Dass  $d$  wirklich ein Differential ist, besagt die Proposition 3.12. unten). Die Summe ist wohldefiniert, weil es nur endlich viele  $\tau$  mit  $[\tau: \sigma] \neq 0$  gibt (denn ein Stratum ist per definitionem eine Seite von nur endlich vielen anderen Straten). Ist aus dem Zusammenhang klar, welches  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{L}$  betrachtet wird, so schreiben wir auch  $\mathbb{W}_\bullet$  statt  $\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ . Wenn wir nur die Stratifizierung  $\mathcal{S}$  oder nur das Koeffizientensystem  $\mathcal{L}$  betonen wollen, schreiben wir  $\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S})$  bzw.  $\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{L})$ .

Der Komplex  $\mathbb{W}_\bullet$  besitzt eine natürliche  $\Gamma$ -Operation. Ein  $g \in \Gamma$  operiert auf  $\mathbb{W}_j$  als das Produkt (über alle  $\sigma \in \mathcal{S}$ ) der Abbildungen

$$(3.10) \quad \mu_\sigma^g \otimes g^* : L_\sigma \otimes H^*(|\sigma|; \mathfrak{or}_\sigma) \rightarrow L_{g\sigma} \otimes H^*(|g\sigma|; \mathfrak{or}_{g\sigma}).$$

Bezüglich dieser  $\Gamma$ -Struktur ist das Differential äquivariant und die Operation ist außerdem so gemacht, dass

$$\mathbb{W}_j = \prod_{\sigma \in \mathcal{R}_j} \text{coind}_{\Gamma_\sigma}^\Gamma (L_\sigma \otimes H^*(|\sigma|; \mathfrak{or}_\sigma)) \in k\Gamma\text{-mod}$$

gilt ( $\mathcal{R}_r$  ist eine Menge von Repräsentanten der Orbits von Straten der Dimension  $j$ ). Daraus folgt

$$(3.11) \quad \mathbb{W}_j^\Gamma = \prod_{\sigma \in \mathcal{R}_r} (L_\sigma \otimes H^*(|\sigma|; \mathfrak{or}_\sigma))^{\Gamma_\sigma}.$$

Die Homologie des Komplexes  $(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma, d^\Gamma)$  spielt eine wichtige Rolle bei der Untersuchung des Vergleichshomomorphismus  $\alpha$ , wie der Hauptsatz 3.18. zeigen wird. In Kapitel 4 werden wir an niederdimensionalen Beispielen demonstrieren, wie man solche Differentiale  $d^\Gamma$  und die Homologie von  $\mathbb{W}_\bullet^\Gamma$  bestimmen kann.

**3.12. Proposition.** *Für alle Koeffizienten  $\mathcal{L}$  ist  $\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{L})$  ein Kettenkomplex, d.h. es gilt  $d_{j+1} \circ d_j = 0$ .*

*Beweis.* Fixiere ein Stratum  $\rho \in \mathcal{S}$  mit  $\dim \rho = j - 1$  und bezeichne mit  $\pi_\rho: \mathbb{W}_{j-1}(\mathcal{L}) \rightarrow L_\rho \otimes H^*(|\rho|; \mathfrak{or}_\rho)$  die Projektion. Es genügt zu zeigen, dass  $\pi_\rho \circ d \circ d = 0$  für alle  $\rho$  gilt. Wegen  $i_{\sigma, \rho} \circ i_{\tau, \sigma} = i_{\tau, \rho}$  für alle  $\tau, \sigma$  mit  $\rho \leq \sigma \leq \tau$  gilt

$$\begin{aligned} \pi_\rho \circ d \circ d &= \left( \sum_{\dim \sigma = j} i_{\sigma, \rho} \otimes [\sigma: \rho] \right) \circ \left( \sum_{\dim \tau = j+1} i_{\tau, \sigma} \otimes [\tau: \sigma] \right)_{\dim \sigma = j} \\ &= \sum_{\sigma} \sum_{\tau} (i_{\sigma, \rho} \circ i_{\tau, \sigma}) \otimes ([\sigma: \rho] \circ [\tau: \sigma]) \\ &= \sum_{\dim \tau = j+1} i_{\tau, \rho} \otimes \sum_{\dim \sigma = j} [\sigma: \rho] \circ [\tau: \sigma], \end{aligned}$$

also genügt es zu zeigen, dass

$$0 = \left( \sum_{\dim \sigma = j} [\sigma: \rho] \circ [\tau: \sigma] \right)_{\dim \tau = j+1}$$

gilt, aber dieses Produkt von Homomorphismen ist nach 3.3. die Komposition des Randhomomorphismus der langen exakten  $\text{Ext}^*(-, \mathbb{Z})$ -Sequenz induziert von  $0 \rightarrow \mathbb{Z}_{X^{j+1}} \rightarrow \mathbb{Z}_{X^{j+1} \cup X^j} \rightarrow \mathbb{Z}_{X^j} \rightarrow 0$  mit dem Randhomomorphismus der langen exakten  $\text{Ext}^*(-, \mathbb{Z})$ -Sequenz induziert von  $0 \rightarrow \mathbb{Z}_{X^j} \rightarrow \mathbb{Z}_{X^j \cup X^{j-1}} \rightarrow \mathbb{Z}_{X^{j-1}} \rightarrow 0$ . Für alle  $m$  gibt es ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{X^{\geq m+1}} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{X^{\geq m}} & \xrightarrow{f^{m-1}} & \mathbb{Z}_{X^m} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_m & & \downarrow & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{X^{m+1}} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{X^{m+1} \cup X^m} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{X^m} \longrightarrow 0 \end{array}$$

denn  $X^m = X^{\leq m} \cap X^{\geq m}$  und  $X^m \cup X^{m+1} = X^{\leq m+1} \cap X^{\geq m}$  sind abgeschlossen in  $X^{\geq m}$  für alle  $m$  (siehe 2.8). Somit existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \text{Ext}^*(\mathbb{Z}_{X^{m+1}}, \mathbb{Z}_X) & \xrightarrow{\delta_m} & \text{Ext}^*(\mathbb{Z}_{X^m}, \mathbb{Z}_X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_m^* & & \downarrow = & & \\ \cdots & \longrightarrow & \text{Ext}^*(\mathbb{Z}_{X^{\geq m+1}}, \mathbb{Z}_X) & \xrightarrow{\varepsilon_m} & \text{Ext}^*(\mathbb{Z}_{X^m}, \mathbb{Z}_X) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Also ist  $\delta_j = \varepsilon_j f_j^*$ . Wegen  $f_j^* \varepsilon_{j+1} = 0$  (es sind aufeinanderfolgende Morphismen in einer langen exakten Sequenz) folgt  $\delta_j \delta_{j+1} = \varepsilon_j f_j^* \varepsilon_{j+1} f_{j+1}^* = 0$ .  $\square$

**Funktorialität von  $\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ .** Es ist möglich,  $\mathbb{W}_\bullet$  als einen Funktor in  $\mathcal{S}, \mathcal{L}$  und in offenen Teilmengen von  $X$  zu interpretieren. Wie die Abhängigkeit von  $\mathcal{L}$  aussieht, ist klar. Im Folgenden präzisieren wir die anderen Abhängigkeiten.

Sei  $V \subset X$  eine offene Teilmenge und sei  $\mathcal{S} \cap V$  die induzierte Isotropie-Stratifizierung von  $V$ , die dadurch definiert ist, indem wir alle Zusammenhangskomponenten von  $|\sigma| \cap V$  zu Straten von  $V$  erklären, während  $\sigma \in \mathcal{S}$  alle Straten von  $X$  durchläuft. Das Koeffizientensystem  $\mathcal{L}$  induziert auf kanonische Weise ein Koeffizientensystem  $\mathcal{L}|_V$  auf  $\mathcal{S} \cap V$ . Die Homomorphismen  $\text{id}_{L_\sigma} \otimes (H^*(|\sigma|; \mathbf{or}_\sigma) \rightarrow H^*(|\sigma| \cap V; \mathbf{or}_\sigma))$  definieren einen Homomorphismus von Kettenkomplexen von  $\Gamma_V$ -Moduln

$$(3.13) \quad r_{X,V}(\mathcal{S}, \mathcal{L}): \mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}, \mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S} \cap V, \mathcal{L}|_V),$$

welcher einen Homomorphismus

$$\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{L})^\Gamma \subset \mathbb{W}_\bullet(\mathcal{L})^{\Gamma_V} \rightarrow \mathbb{W}_\bullet(\mathcal{L}|_V)^{\Gamma_V}$$

induziert. Es gilt  $r_{V,V'} \circ r_{X,V} = r_{X,V'}$  für alle  $V' \subset V$ .

Nun zur Natürlichkeit von  $\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}, \mathcal{L})$  bezüglich der Stratifizierung  $\mathcal{S}$ . Sei  $\mathcal{T}$  eine Isotropie-Stratifizierung von  $X$ , die feiner als  $\mathcal{S}$  ist. Dann kann man  $\mathcal{L}$  in kanonischer Weise als Koeffizientensystem auf  $\mathcal{T}$  auffassen (für alle  $\tau \in \mathcal{T}$  ist  $L_\tau = L_\sigma$ , wenn  $\sigma \in \mathcal{S}$  eindeutig mit  $|\tau| \subset |\sigma|$  gewählt ist). Für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  und  $\tau \in \mathcal{T}$  mit  $|\tau| \subset |\sigma|$  setzen sich die Restriktionshomomorphismen  $H^*(|\sigma|; \mathbf{or}_\sigma) \rightarrow H^*(|\tau|; \mathbf{or}_\tau)$  zu einem  $\Gamma$ -Homomorphismus von Kettenkomplexen

$$(3.14) \quad f_{\mathcal{S},\mathcal{T}}: \mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}, \mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{W}_\bullet(\mathcal{T}, \mathcal{L})$$

zusammen. Ist  $\mathcal{T}'$  eine feinere Isotropiestratifizierung als  $\mathcal{T}$ , so gilt  $f_{\mathcal{T},\mathcal{T}'} \circ f_{\mathcal{S},\mathcal{T}} = f_{\mathcal{S},\mathcal{T}'}$ .

### 3.b. Die Spektralsequenz $E(\mathcal{S}, \mathcal{L})$

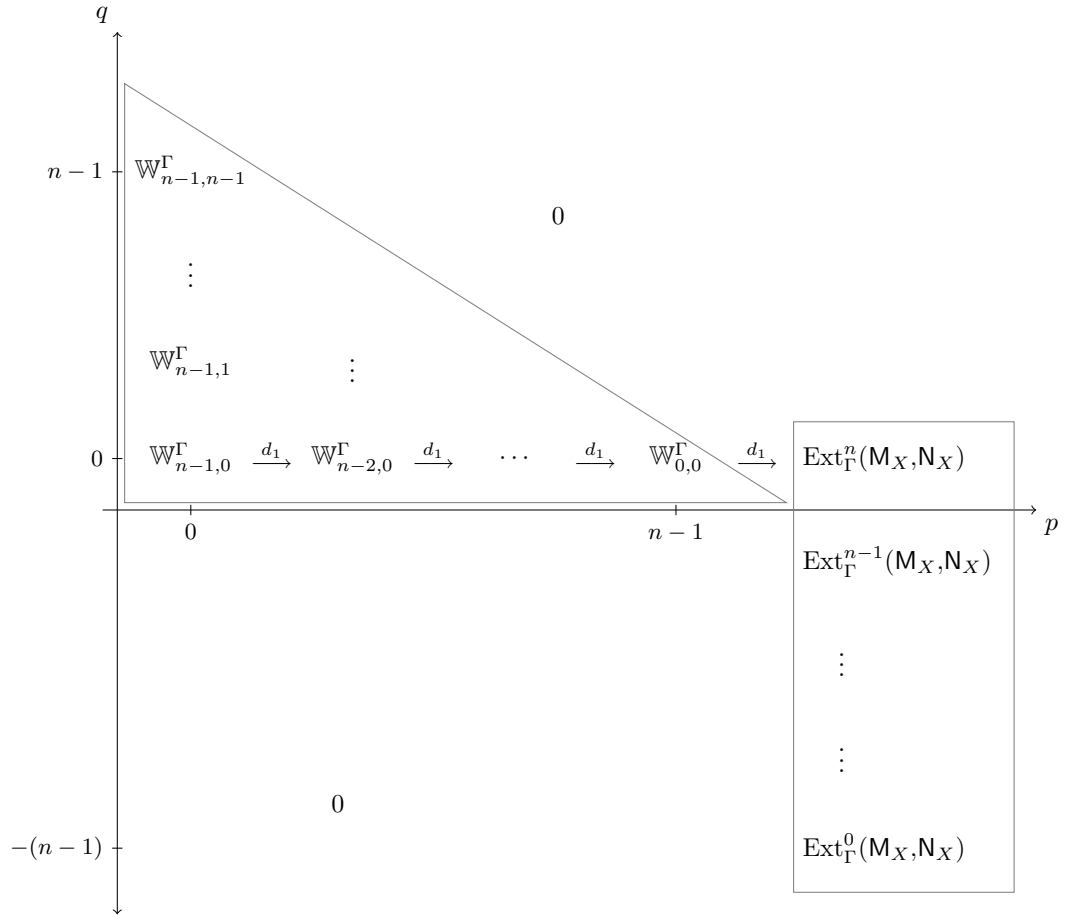
Ist  $A^\bullet$  ein Kettenkomplex und  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $a < b$ , so bezeichnet  $A^\bullet[a, b]$  die Einschränkung von  $A^\bullet$  auf das Intervall  $[a, b]$ , d.h.  $A^\bullet[a, b] = A^a \rightarrow \dots \rightarrow A^b$ . Für den  $E_1$ -Term einer Spektralsequenz setzen wir  $E_1^j := E_1^{j,*}$ . Also ist  $E_1^\bullet$  der Kettenkomplex von graduierten Moduln, welcher den  $E_1$ -Term vollständig beschreibt.

**3.15. Theorem.** *Sei  $X$  ein diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum,  $\mathcal{S}$  eine Isotropie-Stratifizierung von  $X$ . Seien  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$  Darstellungen von  $\Gamma$ ,  $\mathcal{K} \subset \mathbf{M}_X$  eine konstruierbare  $\Gamma$ -Untergarbe und  $\mathcal{L}$  das gemäß 3.6. zu  $\mathcal{K}$  assoziierte Koeffizientensystem auf  $\mathcal{S}$ . Dann existiert eine Spektralsequenz  $E = E(\mathcal{S}, \mathcal{K})$ , die gegen  $\text{Ext}_{X,\Gamma}^*(\mathcal{K}, \mathbf{N})$  konvergiert und deren  $E_1$ -Term folgende Bedingungen erfüllt.*

$$\begin{aligned} E_1^\bullet[0, n-1] &= \mathbb{W}_{n-1-\bullet}(\mathcal{S}, \mathcal{L})^\Gamma \\ E_1^{n,s} &= \text{Ext}_{X,\Gamma}^{n+s}(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X), \quad s \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Darüberhinaus ist  $E_1^{p,*} = 0$  für  $p < 0$  und  $p > n$ . Der von der Inklusion  $\mathcal{K} \subset M_X$  induzierte Homomorphismus  $\text{Ext}_\Gamma^*(M_X, N_X) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^*(\mathcal{K}, N_X)$  ist der Kantenhomomorphismus dieser Spektralsequenz.

**Bemerkung.** Der  $E_1$ -Term der Spektralsequenz aus Theorem 3.15. lässt sich folgendermaßen visualisieren.



Für das äußerste Differential  $d_1 : E_1^{n-1,0} = H_0(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma) \rightarrow \text{Ext}_{X,\Gamma}^n(M_X, N_X) = E_1^{n,0}$  haben wir hier keine Beschreibung. Alle anderen sind durch 3.9 gegeben.

**Zusatz** (Natürlichkeit der Spektralsequenz  $E(\mathcal{S}, \mathcal{K})$ ). Die Spektralsequenz  $E(\mathcal{S}, \mathcal{K})$  ist natürlich in  $\mathcal{K}$  sowie in der Stratifizierung  $\mathcal{S}$  und bezüglich offenen Teilmengen von  $X$ . Die Bedeutung dieser letzten beiden Eigenschaften wird nun erläutert:

- (a) Sei  $\mathcal{T}$  eine äquivariante Stratifizierung von  $X$ , die feiner als  $\mathcal{S}$  ist. Dann existiert ein Morphismus  $E(\mathcal{S}, \mathcal{K}) \rightarrow E(\mathcal{T}, \mathcal{K})$  von Spektralsequenzen, der



gegen die Identität von  $\text{Ext}_\Gamma^*(\mathcal{K}, \mathbf{N}_X)$  konvergiert. Darüberhinaus ist dieser Morphismus auf  $E_1^{p,*}$  für  $0 \leq p \leq n-1$  gegeben durch den Homomorphismus  $f_{\mathcal{S}, \mathcal{T}}^\Gamma$  aus 3.14 und auf  $E_1^{n,*}$  ist dieser Morphismus die Identität von  $\text{Ext}_{X, \Gamma}^{p+*}(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X)$ .

- (b) Sei  $V \subset X$  eine offene Teilmenge, so existiert ein Homomorphismus von Spektralsequenzen  $E(\mathcal{S}, \mathcal{K}) \rightarrow E(\mathcal{S} \cap V, \mathcal{K}|_V)$ , der gegen die Restriktion  $\text{Ext}_{X, \Gamma}^*(\mathcal{K}, \mathbf{N}_X) \rightarrow \text{Ext}_{V, \Gamma_V}^*(\mathcal{K}|_V, \mathbf{N}_V)$  konvergiert. Auf dem  $E_1$ -Term ist er durch die Abbildung  $\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}, \mathcal{L})^\Gamma \rightarrow \mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S} \cap V, \mathcal{L}|_V)^{\Gamma_V}$  aus 3.13 sowie durch die Restriktion  $\text{Ext}_{X, \Gamma}^*(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X) \rightarrow \text{Ext}_{V, \Gamma_V}^*(\mathbf{M}_V, \mathbf{N}_V)$  bestimmt.

Der Beweis dieses Satzes mit seinen Vorbereitungen erstreckt sich über zwei Kapitel. Die technischen Aspekte des Beweises werden in Kapitel 5 vorbereitet und der endgültige Beweis wird in Kapitel 6 erbracht.

Wählen wir im obigen Theorem die Garbe  $\mathcal{K}$  als  $p^*\mathcal{M}$ , so konvergiert diese Spektralsequenz gegen  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  (siehe 1.17.) und  $\mathbb{W}_j$  ist das Produkt der Moduln  $\text{Hom}(\mathbf{M}/\mathbf{M}^{\Gamma_x(\sigma)}, \mathbf{N})$  über alle Straten  $\sigma$  der Dimension  $j$ . Uns steht aber natürlich frei, welche Untergarbe  $\mathcal{K}$  wir wählen. Zum Beispiel ist  $\mathcal{K} = \mathbf{M}_{X_r}^X$  ebenfalls eine geeignete Wahl (die Halme über die singulären Straten sind also 0 und daraus ergibt sich  $\mathbb{W}_j = \prod_{\dim \sigma=j} \text{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ ). Dass diese Wahl auch etwas nützliches ergibt, zeigt z.B. 3.21.

Die Einträge der Spektralsequenz sind desto „größer“, je mehr Singularitäten die Operation von  $\Gamma$  „auf dem Tripel  $(X, \mathbf{M}, \mathbf{N})$  produziert“. Einerseits geht die Singularitätenmenge  $X_s$  und deren Stratifizierung durch  $\mathcal{S}$  ein (je größer und komplizierter die Straten in  $X_s$ , desto komplizierter die Spektralsequenz). Andererseits ergibt sich die Größe der Einträge der Spektralsequenz durch  $\mathbb{W}_\bullet^\Gamma$ : Sei  $\sigma \in \mathcal{S}$  mit  $|\sigma| \subset X_s$ . Betrachte die Zerlegung von  $\mathbf{M}/\mathbf{M}_\sigma$  und  $\mathbf{N}/\mathbf{N}_\sigma$  in irreduzible  $\Gamma_\sigma$ -Moduln (man kann hier der Einfachheit halber annehmen, dass  $\Gamma_\sigma$  endlich ist wie es z.B. bei Triangulierungen der Fall ist). Je größer die Anzahl der irreduziblen  $\Gamma_\sigma$ -Moduln die in beiden Zerlegungen gleichzeitig vorkommen (mit Vielfachheiten gezählt), desto größer ist der entsprechende Eintrag in der Spektralsequenz. Denn die eben genannte Anzahl ist nach dem Lemma von Schur [Ser1, 2.2] die Dimension von  $\text{Hom}_{\Gamma_x}(\mathbf{M}/\mathbf{M}^{\Gamma_x}, \mathbf{N}) = \text{Hom}_{\Gamma_x}(\mathbf{M}/\mathbf{M}^{\Gamma_x}, \mathbf{N}/\mathbf{N}^{\Gamma_x})$ , die seinerseits ein Faktor der Dimension von  $\mathbb{W}_\bullet^\Gamma$  ist.

Je kleiner die Dimension von  $H_*(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma)$  sind, desto „näher“ ist der von der Inklusion  $\mathcal{K} \subset \mathbf{M}_X$  induzierte Morphismus  $\alpha: \text{Ext}_\Gamma^*(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^*(\mathcal{K}, \mathbf{N}_X)$  an einem Isomorphismus. Im nächsten Abschnitt, wo wir den in der Einleitung erwähnten Hauptsatz A formulieren und beweisen, wird dieser Sachverhalt noch klarer, denn die Spektralsequenz kollabiert, sobald die „singulären“ Straten zusammenziehbar sind.

### 3.c. Degeneration der Spektralsequenz $E(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ bei Triangulierungen

Wir fixieren im Folgenden eine Isotropiestratifizierung  $\mathcal{S}$  von  $X$  mit der Eigenschaft, dass alle singulären Straten zusammenziehbar sind. Dabei heißt  $\sigma \in \mathcal{S}$  ein *singuläres Stratum*, wenn  $|\sigma| \subset X_s$  gilt.

In dieser Situation vereinfacht sich die Spektralsequenz  $E(\mathcal{S}, \mathcal{L})$  erheblich: Einerseits sind die graduierten Moduln  $\mathbb{W}_j(\mathcal{S}, \mathcal{L})$  wegen 3.7. in Grad 0 konzentriert, denn es ist  $H^j(|\sigma|) = 0$  für alle  $j > 0$  und alle singulären Simplexe  $\sigma$  (und die Spektralsequenz degeneriert dadurch zu einer langen exakten Sequenz, wie wir in 3.18. sehen werden). Andererseits sind die Inzidenzmorphismen  $[\tau : \sigma]$  durch gewisse ganze Zahlen bestimmt, die wir *Inzidenzzahlen* nennen werden (siehe unten).

Besonders wichtige Beispiele für solche Stratifizierungen sind  $\Gamma$ -Triangulierungen und in diesem Fall sind die Inzidenzzahlen die klassischen aus [Ste].

Eine *Orientierung* eines singulären (und damit zusammenziehbaren) Stratum  $\sigma$  ist die Wahl eines Isomorphismus  $H^0(|\sigma|; \mathfrak{or}_\sigma) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$  (beachte, dass  $\mathfrak{or}_\sigma$  eine konstante Garbe ist, da  $|\sigma|$  zusammenziehbar ist). Sind  $\sigma$  und  $\tau$  singuläre Straten mit  $\dim \tau = \dim \sigma + 1$ , so ist die Komposition  $\mathbb{Z} \xleftarrow{\cong} H^0(|\tau|; \mathfrak{or}_\tau) \xrightarrow{[\tau : \sigma]} H^0(|\sigma|; \mathfrak{or}_\sigma) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$  gegeben durch die Multiplikation einer ganzen Zahl, die wir die *Inzidenzzahl* von  $\tau$  und  $\sigma$  nennen. Weil keine Missverständnisse zu befürchten sind, notieren wir sie ebenfalls durch  $[\tau : \sigma]$ .

Damit ist der Komplex  $\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}, \mathcal{L})$  bei Stratifizierungen mit zusammenziehbaren singulären Simplexe von der folgenden einfachen Gestalt. Nach einer Wahl von Orientierungen aller singulären Straten ist  $\mathbb{W}_j(\mathcal{S}, \mathcal{L}) = \prod_{\dim \sigma = j} L_\sigma$  und das Differential ist das Produkt der Abbildungen

$$(3.16) \quad \prod_{\dim \tau = j+1} L_\tau \rightarrow L_\sigma, \quad (x_\tau) \mapsto \sum_{\dim \tau = j+1} [\tau : \sigma] \cdot i_{\tau, \sigma}(x_\tau)$$

über alle  $\sigma$  mit  $\dim \sigma = j$ . Dabei bezeichnet  $[\tau : \sigma]$  jetzt die Inzidenzzahl (die 0 ist, wenn  $\sigma \not\subseteq \tau$  gilt). Wenn  $\mathcal{L}$  ein Koeffizientensystem der Form  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathbf{M}, \mathbf{N})$  aus Beispiel 3.6. ist, sind die Morphismen  $i_{\tau, \sigma}$  sogar die Inklusionen  $\text{Hom}(\mathbf{M}/\mathbf{M}_\tau, \mathbf{N}) \subset \text{Hom}(\mathbf{M}/\mathbf{M}_\sigma, \mathbf{N})$ .

Wenn  $\mathcal{S}$  eine  $\Gamma$ -Triangulierung ist, sind die Inzidenzzahlen noch einfacher zu beschreiben. In diesem Fall entspricht eine Orientierung eines Simplexe  $\sigma$  einer Wahl einer Ordnung der Ecken von  $\sigma$ , wobei wir zwei Ordnungen als äquivalent bezeichnen, wenn ihre Vorzeichen übereinstimmen. Insbesondere induziert die Orientierung eines Simplexe  $\tau$  stets eine Orientierung einer Seite  $\sigma \subset \tau$  durch die Einschränkung der gewählten Ordnung.

**3.17. Proposition.** *Sei  $\mathcal{S}$  eine  $\Gamma$ -Triangulierung von  $X$ . Seien  $\tau, \sigma \in \mathcal{S}$  orientierte Simplexe mit  $\sigma \subset \tau$  und  $\dim \tau - 1 = \dim \sigma =: j$ . Dann gilt  $[\tau : \sigma] = 1$ , wenn die von  $\tau$  induzierte Orientierung äquivalent zur Orientierung von  $\sigma$  ist und andernfalls gilt  $[\tau : \sigma] = -1$ .*

Mit anderen Worten ist  $[\tau: \sigma]$  die klassische Inzidenzzahl, siehe z.B. [Ste].

*Beweis von 3.17..* Ist  $T_\sigma \subset U_\sigma$  eine Tubenumgebung von  $|\sigma|$ , so existiert ein Homöomorphismus  $\varphi: T_\sigma \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi(|\sigma|) = \mathbb{R}^j \times 0$  und  $\varphi(|\tau| \cap T_\sigma) = \mathbb{R}^j \times \mathbb{R}_+ \times 0$ , denn  $T_\sigma$  ist ein triviales Vektorbündel über dem zusammenziehbaren Raum  $|\sigma|$  und  $|\tau| \cap T_\sigma$  ist der „positive Teil“ eines trivialen, eindimensionalen Unterbündels von  $T_\sigma$ . Wir benutzen die Beschreibung des Inzidenzhomomorphismus aus 3.2. Der dortige Homomorphismus (1) ist hier ein Isomorphismus denn das Paar  $(T_\sigma \cap U_\tau, T_\sigma \cap (U_\tau - |\tau|))$  ist ein Deformationsretrakt von  $(U_\tau, U_\tau - |\tau|)$ , wie man folgendermaßen sieht: Als Tubenumgebung  $T_\sigma$  von  $|\sigma|$  kann man eine reguläre Umgebung von  $|\sigma|$  (nach der ersten baryzentrischen Unterteilung) nehmen, vgl. [Coh]. Jetzt findet man leicht eine Kollabierung (vgl. [Coh]) von  $\tau$  auf  $T_\sigma \cap \tau$ , die sich zu einer Kollabierung von  $U_\tau$  auf  $U_\tau \cap T_\sigma$  fortsetzen lässt.

Insgesamt ist der Inzidenzmorphismus nach 3.2. im Wesentlichen beschrieben durch (4), also durch den Randhomomorphismus des Tripels  $(T_\sigma, T_\sigma - |\sigma|, T_\sigma - (|\tau| \cup |\sigma|))$  und dieses Tripel ist via  $\varphi$  isomorph zum Tripel  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n - (\mathbb{R}^j \times \mathbb{R}_{\geq 0}))$ . Es existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & H^{n-j-1}(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \\ & \nearrow i & \downarrow \\ H^{n-j-1}(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j \times \mathbb{R}_{\geq 0}) & \longrightarrow & H^{n-j}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j), \end{array}$$

wobei der diagonale Pfeil  $i$  die Restriktion, der waagerechte Pfeil der Randhomomorphismus des Tripels  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n - (\mathbb{R}^j \times \mathbb{R}_{\geq 0}))$  und der senkrechte Pfeil der Randhomomorphismus des Paares  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j)$  ist. Beachte, dass alle Pfeile Isomorphismen sind, denn es ist  $0 = \tilde{H}^*(\mathbb{R}^n) = H^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j \times \mathbb{R}_{\geq 0})$  (diese Terme sind Teil der langen exakten Sequenzen des obigen Tripels bzw. des Paares). Auf diese Weise lässt sich der Inzidenzhomomorphismus  $[\tau: \sigma]: H^0(|\tau|) \rightarrow H^0(|\sigma|)$  mit dem diagonalen Pfeil  $i$  identifizieren.

Orientierungen von  $|\tau|$  bzw.  $|\sigma|$  (siehe Einleitung des Abschnitts 3.c.) korrespondieren mit Isomorphismen  $o_1: H^{n-j-1}(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \rightarrow \mathbb{Z}$  und  $o_2: H^0(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Nun ist  $o_1 \circ i^{-1}$  die von  $\tau$  induzierte Orientierung auf  $\sigma$ , und offensichtlich gilt

$$o_2 \circ i \circ o_1^{-1} = \begin{cases} 1 & \text{falls } o_1 \circ i^{-1} = o_2 \\ -1 & \text{falls } o_1 \circ i^{-1} = -o_2. \end{cases}$$

Da mit den obigen Identifikationen der Inzidenzmorphismus  $[\tau: \sigma]$  mit  $i$  identifiziert wurde, folgt damit das Gewünschte.  $\square$

**Der Hauptsatz.** Nun kommen wir zu einem der Hauptresultate, eine leichte Verallgemeinerung des Theorems A der Einleitung. Sei wie immer  $X$  ein diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum mit einer Isotropie-Stratifizierung  $\mathcal{S}$ , die zusammenziehbare singuläre Straten besitze und  $M$  sowie  $N$  Darstellungen von  $\Gamma$ . Es sei

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(p^*\mathcal{M}, \mathbf{M}, \mathbf{N})$  das Koeffizientensystem aus 3.6. für die spezielle Garbe  $\mathcal{K} = p^*\mathcal{M} \subset \mathbf{M}_X$ . Es sei  $\mathbb{W}_\bullet = \mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}, \mathcal{L})$  der diesem System gemäß 3.16 assoziierte Komplex von  $\Gamma$ -Moduln; insbesondere ist er gradweise gegeben durch

$$\mathbb{W}_j = \prod_{\dim \sigma=j} \text{Hom}_k(\mathbf{M}/\mathbf{M}^{\Gamma_\sigma}, \mathbf{N}).$$

**3.18. Theorem.** *Sind alle singulären Straten der Stratifizierung  $\mathcal{S}$  zusammenziehbar (z.B. wenn  $\mathcal{S}$  eine  $\Gamma$ -Triangulierung ist), so sitzt der Vergleichshomomorphismus  $\alpha$  (vgl. 1.23) in einer langen exakten Sequenz*

$$\dots \rightarrow H_{n-j}(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^j(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X) \xrightarrow{\alpha} \text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow H_{n-j-1}(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma) \rightarrow \dots$$

die funktoriell in  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ , in offenen Teilmengen  $V \subset X$  und der Stratifizierung  $\mathcal{S}$  im Sinne des folgenden Zusatzes ist.

**Zusatz.** *Für die lange exakte Sequenz aus 3.18. gilt weiterhin:*

- (a) *Es sei  $\mathcal{T}$  eine Isotropie-Stratifizierung, die feiner ist als  $\mathcal{S}$  und deren singuläre Straten alle zusammenziehbar sind. Sei  $\mathcal{L}_\mathcal{T}$  das natürliche Koeffizientensystem auf  $\mathcal{T}$ , das vom Koeffizientensystem  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\mathcal{S}$  auf  $\mathcal{S}$  (siehe oben) induziert ist. Dann kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_{n-j}(\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{L}_\mathcal{S})^\Gamma) & \longrightarrow & \text{Ext}_\Gamma^j(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow H_*j_{\mathcal{S}, \mathcal{T}}^\Gamma & & \downarrow = & & \downarrow = \\ \dots & \longrightarrow & H_{n-j}(\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{L}_\mathcal{T})^\Gamma) & \longrightarrow & \text{Ext}_\Gamma^j(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

wobei die langen exakten Sequenzen jeweils die von 3.18. sind.

- (b) *Sei  $V \subset X$  eine offene Teilmenge, so dass  $V \cap |\sigma|$  für alle singulären Straten zusammenziehbar ist. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_{n-j}(\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{L}_\mathcal{S})^\Gamma) & \longrightarrow & \text{Ext}_\Gamma^j(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow H_*r_{X, V}^\Gamma & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & H_{n-j}(\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{L}_\mathcal{S} \cap V)^\Gamma) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\Gamma_V}^j(\mathbf{M}_V, \mathbf{N}_V) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Ext}^j(\mathcal{M}|_{p(V)}, \mathcal{N}|_{p(V)}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

wobei die langen exakten Sequenzen jeweils die von 3.18. und die vertikalen Pfeile die Restriktionshomomorphismen sind.

Mit diesem Satz hat man ein hinreichendes (aber nicht notwendiges) Kriterium dafür, wann  $\alpha$  ein Isomorphismus ist:

**3.19. Korollar.** *Seien  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$  Darstellungen von  $\Gamma$  über  $k = \mathbb{C}$ , so dass für alle  $x \in X$  die  $\Gamma_x$ -Moduln  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{N}$  außer den trivialen Moduln sonst keine gemeinsamen irreduziblen Faktoren besitzen. Dann ist  $\alpha : \text{Ext}_\Gamma^*(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X) \rightarrow \text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  ein Isomorphismus.*

*Beweis.* Es gilt  $\mathrm{Hom}_{\Gamma_\sigma}(M/M^{\Gamma_\sigma}, N) = 0$  nach dem Lemma von Schur [Ser1, 2.2] für alle Simplices  $0$  und damit ist  $\mathbb{W}_\bullet^\Gamma = 0$  nach 3.11.  $\square$

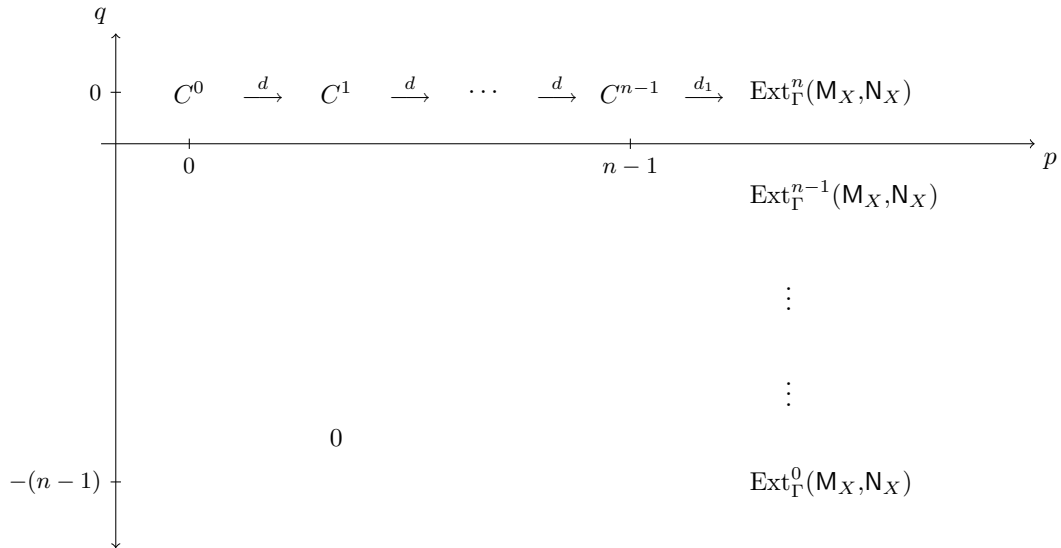
**Bemerkung.** Man kann zeigen, dass  $H_{n-j}\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}) \cong \mathrm{Ext}_\Gamma^j(M/p^*\mathcal{M}, N_X)$  gilt, wenn  $\mathcal{S}$  eine  $\Gamma$ -Triangulierung ist. Dies sieht man nach einem Vergleich der langen exakten Sequenzen 3.18. und 1.25 (die Dimensionen müssen übereinstimmen).

**Bemerkung.** Aus Zusatz (a) folgt, dass  $f_{\mathcal{S},\mathcal{T}}^\Gamma: \mathbb{W}_\bullet(\mathcal{L}_\mathcal{S})^\Gamma \rightarrow \mathbb{W}_\bullet(\mathcal{L}_\mathcal{T})^\Gamma$  ein Quasi-Isomorphismus ist, wenn  $\mathcal{T}$  eine  $\Gamma$ -Triangulierung ist, die feiner als eine  $\Gamma$ -Triangulierung  $\mathcal{S}$  ist und  $H_*(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma(\mathcal{S}))$  hängt in diesem Sinne nicht von der Wahl einer  $\Gamma$ -Triangulierung  $\mathcal{S}$  von  $X$  ab.

*Beweis von 3.18.* Weil die singulären Straten zusammenziehbar sind, vereinfacht sich die Spektralsequenz 3.15. wegen der Beobachtung in 3.16 zu  $E_1^{p,q} = 0$  für alle  $q > 0$ . D.h. der  $E_1$ -Term der Spektralsequenz 3.15. ist im Bereich  $\{q = 0, 0 \leq p \leq n\} \cup \{p = n, q \geq 0\}$  konzentriert und es ergibt sich nach der Abkürzung

$$C^p = E_1^{p,0} = \left( \prod_{\dim \sigma = n-p-1} \mathrm{Hom}_k(M/M_\sigma, N) \right)^\Gamma, \quad p = 0, \dots, n-1,$$

das folgende Bild



Genauer ist  $C^{n-1-\bullet} = \mathbb{W}_\bullet^\Gamma$  der Kettenkomplex der  $\Gamma$ -Invarianten von  $\mathbb{W}_\bullet$  (aus 3.16) mit den dort beschriebenen (also mit Hilfe der Inzidenzzahlen definierten) Differentialen  $d : C^p \rightarrow C^{p-1}$ . Aus dieser speziellen Form bekommt man

eine lange exakte Sequenz; dies geschieht in etwa so, wie man auch die „Gysin-Sequenz“ aus einer Spektralsequenz herleitet, die nur zwei nichttriviale horizontale Streifen besitzt, vgl. z.B. [McC, Ex. 1.D].

Die Durchführung dieses Prinzips in unserer Situation ist wie folgt. Sei

$$\eta: H^{n-1}(C^\bullet, d_1) = E_1^{n-1,0} / \text{im}(d_1) \rightarrow E_1^{n,0} = \text{Ext}_\Gamma^n(M_X, N_X)$$

der von  $d_1$  induzierte Morphismus. Für den  $E_2$ -Term der Spektralsequenz gilt dann:

$$E_2^{p,0} = \begin{cases} H^p(C^\bullet, d_1) & , p = 0, \dots, n-2 \\ \ker \eta & , p = n-1 \\ \text{coker } \eta & , p = n. \end{cases}$$

Alle anderen Einträge ändern sich nicht, denn es gibt keine weiteren nichttrivialen  $E_2$ -Differentialie. Dies führt zu einer exakten Sequenz

$$(3.20) \quad 0 \rightarrow E_2^{n-1,0} \rightarrow H^{n-1}(C^\bullet) \xrightarrow{\eta} \text{Ext}_\Gamma^n(M_X, N_X) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^n(\mathcal{K}, N_X) \rightarrow 0.$$

Analog zum  $E_2$ -Term kann man induktiv folgern, dass es auf den höheren Termen jeweils höchstens ein nichttriviales Differential geben kann und diese sind:

$$d_j: H^{n-j}(C^\bullet) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^{n-j+1}(M_X, N_X), \quad j = 2, \dots, n.$$

Die Konvergenz gegen  $\text{Ext}_\Gamma^*(\mathcal{K}, N_X)$  liefert uns exakte Sequenzen:

$$0 \rightarrow \text{coker } d_{j+1} \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^{n-j}(\mathcal{K}, N_X) \rightarrow \ker d_j \rightarrow 0, \quad j = 2, \dots, n.$$

Diese fügen sich zusammen mit 3.20 und den exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow \ker d_j \rightarrow H^{n-j}(C^\bullet) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^{n-j+1}(M_X, N_X) \rightarrow \text{coker } d_j \rightarrow 0$$

zu einer langen exakten Sequenz

$$\dots \rightarrow H^{j-1}C \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^j(M_X, N_X) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^j(\mathcal{K}, N) \rightarrow H^j C \rightarrow \dots$$

zusammen. Der Zusatz folgt direkt aus dem Zusatz von 3.15.  $\square$

Mit der gleichen Methode ist es möglich, folgende lange exakte Sequenz herzuleiten:

**3.21. Bemerkung.** Für alle zusammenziehbaren diskontinuierlichen  $\Gamma$ -Räume  $X$ , und Isotropiestratifizierungen  $\mathcal{S}$  mit zusammenziehbaren singulären Straten sowie für alle Drarstellungen  $\mathcal{N}$  von  $\Gamma$  existiert eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_{n-j} \mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}, \mathcal{L})^\Gamma \rightarrow H^j(\Gamma; \mathcal{N}) \xrightarrow{i} H^j(Y_r; \mathcal{N}) \rightarrow H_{n-j-1} \mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}, \mathcal{L})^\Gamma \rightarrow \dots,$$

wobei  $i: H^*(\Gamma; \mathcal{N}) \xrightarrow{1.8.} H^*(Y; \mathcal{N}) \rightarrow H^*(Y_r; \mathcal{N})$  der Restriktionshomomorphismus und  $\mathcal{L}$  das Koeffizientensystem  $\mathcal{L}(\mathcal{K}, k, \mathcal{N})$  mit  $\mathcal{K} = k_{X_r}$  ist. Insbesondere ist  $\mathbb{W}_\bullet^\Gamma$  nach 3.11 gradweise gegeben durch

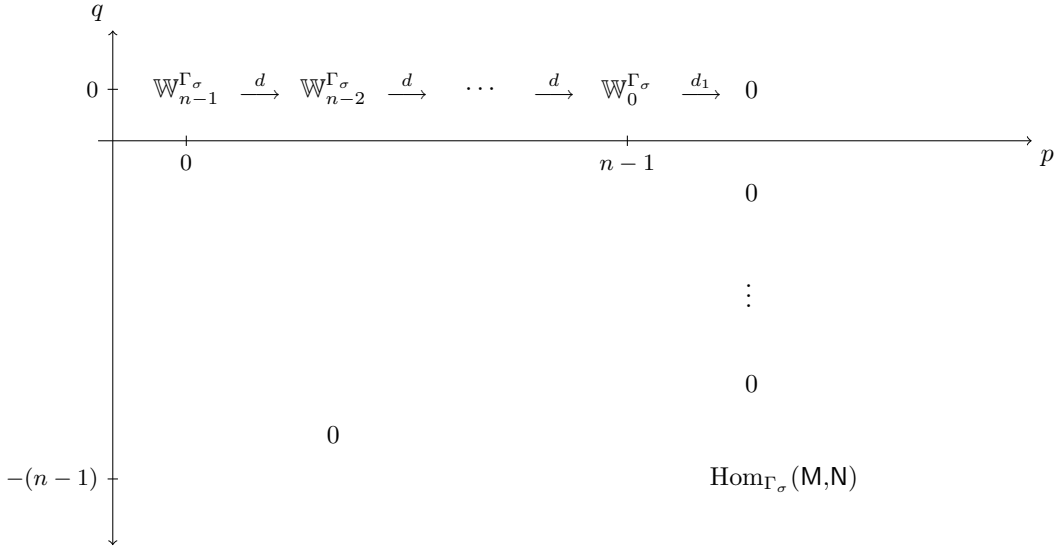
$$\mathbb{W}_j^\Gamma = \prod_{\dim \sigma = j} N^{\Gamma \sigma}.$$

Der Vorteil dieser Sequenz liegt darin, dass die Garbe  $\mathcal{N}$  lokalkonstant über  $Y_r$  ist, so dass in speziellen Situationen die Kohomologie  $H^*(Y_r; \mathcal{N})$  durchaus zugänglich sein kann, wenn die Topologie der regulären Menge  $Y_r$  verstanden ist.

*Beweis.* In der Situation von 3.15. betrachten wir den Modul  $M = k$  und die konstruierbare Untergarbe  $\mathcal{K} = k_{X_r} \subset k_X$ . Die letzte Inklusion entspricht unter der Adjunktion 1.17. dem Restriktionshomomorphismus  $H^*(Y; \mathcal{N}) \rightarrow H^*(Y_r)$  (beachte hier, dass  $p^*(k_{Y_r}) = k_{X_r}$  als  $\Gamma$ -Moduln gilt). Die lange exakte Sequenz ergibt sich nun wie im letzten Satz als Degeneration der Spektralsequenz 3.15..  $\square$

**Restriktion der Spektralsequenz  $E(\mathcal{S}, \mathcal{L})$  auf offene Sterne.** Wir nehmen wieder an, dass  $\mathcal{S}$  eine  $\Gamma$ -Triangulierung von  $X$  ist. Für alle Simplizes  $\sigma \in \mathcal{S}$  sei  $\mathcal{S}_\sigma := \mathcal{S} \cap U_\sigma = \{\tau \in \mathcal{S} \mid \sigma \subset \tau\}$  die Stratifizierung des offenen Sterns  $U_\sigma$ , die durch die Restriktion der Triangulierung  $\mathcal{S}$  entsteht. Beachte, dass dies i.A. keine Triangulierung im strengen Sinne ist, obwohl die Straten Simplizes sind.

Wegen der Endlichkeit von  $\Gamma_\sigma$  für alle Simplizes  $\sigma$  gilt  $\text{Ext}_{\Gamma_\sigma}^j(M_{U_\sigma}, N_{U_\sigma}) = H^j(U_\sigma; \text{Hom}(M, N))^{\Gamma_\sigma} = 0$  für alle  $j > 0$  (siehe auch 2.16.). Die Spektralsequenz  $E(\mathcal{S}, \mathcal{L})$  aus 3.15. konvergiert gegen  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}|_{p(U_\sigma)}, \mathcal{N}|_{p(U_\sigma)})$  und deren  $E_1$ -Term sieht in diesem Fall folgendermaßen aus.



Zusammen mit der Natürlichkeit der Spektralsequenz  $E(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ , wie sie im Zusatz von 3.15. erläutert wurde, beweist die obige Beobachtung die folgende

**3.22. Proposition.** Für alle  $j > 0$  und alle Simplizes  $\sigma \in \mathcal{S}$  existiert ein

*Isomorphismus*

$$\kappa_\sigma: \text{Ext}^j(\mathcal{M}|_{p(U_\sigma)}, \mathcal{N}|_{p(U_\sigma)}) \xrightarrow{\cong} H_{n-j-1}(\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{L}))^{\Gamma_\sigma}$$

der natürlich in  $\sigma \in \mathcal{S}$  im folgenden Sinne ist. Ist  $\sigma \leq \tau$ , so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}^j(\mathcal{M}|_{p(U_\sigma)}, \mathcal{N}|_{p(U_\sigma)}) & \xrightarrow{\kappa_\sigma} & H_{n-j-1}(\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{L}))^{\Gamma_\sigma} \\ \downarrow & & \downarrow r_{U_\sigma, U_\tau} \\ \text{Ext}^j(\mathcal{M}|_{p(U_\tau)}, \mathcal{N}|_{p(U_\tau)}) & \xrightarrow{\kappa_\tau} & H_{n-j-1}(\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}_\tau, \mathcal{L}))^{\Gamma_\tau} \end{array}$$

kommutativ, wenn der linke vertikale Pfeil die Restriktion ist.

Für  $j = 0$  existiert für alle  $\sigma$  eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\Gamma_\sigma}(\mathbf{M}_{U_\sigma}, \mathbf{N}_{U_\sigma}) \xrightarrow{\alpha|_{U_\sigma}} \text{Hom}(\mathcal{M}|_{p(U_\sigma)}, \mathcal{N}|_{p(U_\sigma)}) \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}_\sigma))^{\Gamma_\sigma} \rightarrow 0,$$

die natürlich in  $\sigma$  ist.

Aus 3.22. folgt in Kombination mit 2.40.:

$$(3.23) \quad \mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})_{p(x)} \cong H_{n-1-*}(\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}_{\sigma(x)}, \mathcal{L}))^{\Gamma_\sigma}, \quad x \in X,$$

während  $\sigma(x)$  wie immer das eindeutige Simplex mit  $x \in |\sigma(x)|$  ist.

**Der Komplex  $\mathcal{W}_\bullet$  von  $\Gamma$ -Garben.** Sei  $\mathcal{S}_\sigma := \mathcal{S} \cap U_\sigma = \{\tau | \sigma \leq \tau\}$  für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$ . Definiere für alle  $j \geq 0$  einen  $\Gamma$ -Funktorkomplex  $\mathcal{W}_j: \mathcal{S} \rightarrow k\text{-mod}$  auf Objekten durch

$$\mathcal{W}_j(\sigma) := \mathbb{W}_j(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{L}),$$

und auf Morphismen  $\sigma \leq \tau$  durch  $\mathcal{W}_j(\sigma \leq \tau) := r_{U_\sigma, U_\tau}$  (vgl. 3.13). Nach 2.25. kann man  $\mathcal{W}_j$  als die eindeutige konstruierbare  $\Gamma$ -Garbe mit  $H^0(U_\sigma; \mathcal{W}_j) = \mathbb{W}_j(\mathcal{S}_\sigma)$  für alle  $\sigma$  (und den Restriktionshomomorphismen  $r_{U_\sigma, U_\tau}$ ) auffassen. Die Differentiale der Kettenkomplexe  $\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}_\sigma)$  sind verträglich mit den Restriktionshomomorphismen, so dass wir einen Kettenkomplex

$$(3.24) \quad \mathcal{W}_\bullet \in \text{Ch}(Sh^\Gamma(X))$$

von konstruierbaren  $\Gamma$ -Garben erhalten. Die Halme über  $x \in |\sigma|$  für alle Simplexe  $\sigma \in \mathcal{S}$  sind wegen der Konstruierbarkeit (vgl. 2.16.) gegeben durch

$$(3.25) \quad (\mathcal{W}_\bullet)_x = H^0(U_\sigma; \mathcal{W}_\bullet) = \mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{L}), \quad x \in |\sigma|,$$

und aus 2.17. folgt

$$(3.26) \quad (p_*^\Gamma \mathcal{W}_\bullet)_{p(x)} = H^0(p(U_\sigma); p_*^\Gamma \mathcal{W}_\bullet) = (\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{L}))^{\Gamma_\sigma}.$$

Schließlich erhalten wir ein fundamentales Resultat, das uns eine kombinatorische Berechnungsmethode für die (Halme der) Garben  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  in Aussicht stellt, nämlich Theorem B der Einleitung:



**3.27. Theorem.** Für alle  $j > 0$  existiert ein Isomorphismus von Garben

$$\mathcal{E}xt^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \cong p_*^\Gamma H_{n-j-1}(\mathcal{W}_\bullet(\mathcal{S}, \mathcal{L})) \in Sh(Y).$$

Darüberhinaus existiert eine exakte Sequenz von Garben auf  $Y$

$$0 \rightarrow p_*^\Gamma(\underline{\text{Hom}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})) \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow p_*^\Gamma H_{n-1}(\mathcal{W}_\bullet^{\Gamma\sigma}) \rightarrow 0.$$

*Beweis.* Sei  $j > 0$  und  $\Gamma \setminus \mathcal{S}$  die induzierte Triangulierung auf  $Y$  (aufgefasst als geordnete Menge und damit als Kategorie). Wir haben eine Kette von Isomorphismen, die natürlich in  $\sigma$  sind:

$$\begin{aligned} H^0(p(U_\sigma); p_*^\Gamma H_j \mathcal{W}_\bullet) &\stackrel{2.17.}{\cong} H^0(U_\sigma; H_j \mathcal{W}_\bullet)^{\Gamma\sigma} \\ &\stackrel{(*)}{\cong} H_j(\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}_\sigma, \mathcal{L}))^{\Gamma\sigma} \\ &\stackrel{3.22.}{\cong} \text{Ext}^{n-j-1}(\mathcal{M}|_{p(U_\sigma)}, \mathcal{N}|_{p(U_\sigma)}) \\ &\stackrel{2.40.}{\cong} H^0(p(U_\sigma); \mathcal{E}xt^{n-j-1}(\mathcal{M}, \mathcal{N})). \end{aligned}$$

Bei  $(*)$  benutzen wir die Definition von  $\mathcal{W}_\bullet$  und die Exaktheit des Funktors  $H^0(U_\sigma; -)$  auf der Kategorie der  $\mathcal{S}$ -konstruierbaren Garben, vgl. 2.16.. Also definieren die konstruierbaren Garben  $p_*^\Gamma H_j \mathcal{W}_\bullet$  und  $\mathcal{E}xt^{n-j-1}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  gemäß 2.25. zueinander isomorphe  $\Gamma$ -Funktoren. Damit existiert ein Isomorphismus  $\mathcal{E}xt^{n-j-1}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \cong p_*^\Gamma H_j(\mathcal{W}_\bullet)$  (man benötigt auch die Exaktheit von  $p_*^\Gamma$ , siehe 1.16.).

Für  $j = 0$  lässt sich die gewünschte exakte Sequenz völlig analog aus der exakten Sequenz in 3.22. konstruieren. Notiert man durch  $\mathcal{F}$  die konstruierbare Garbe auf  $Y$ , die gemäß 2.25. vom Funktor  $(\sigma) \mapsto (\text{coind}_{\Gamma\sigma}^\Gamma \text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{N}))^\Gamma \cong \text{Hom}_{\Gamma\sigma}(\mathcal{M}_{U_\sigma}, \mathcal{N}_{U_\sigma})$  bestimmt ist, so erhält wie oben eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow p_*^\Gamma H_{n-1}(\mathbb{W}_\bullet) \rightarrow 0.$$

Die lokalen Schnitte  $H^0(p(U_\sigma); p_*^\Gamma(\underline{\text{Hom}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})))$  sehen wegen 2.16. ebenfalls so aus (es ist  $p(U_\sigma) = U_{(\sigma)}$  der offene Stern um  $(\sigma)$ ) und damit sind wir fertig.  $\square$

Hiermit sind wir in der Lage, die in der Einleitung vorgestellten Verschwindungsergebnisse, nämlich Theorem C, und sogar etwas mehr zu beweisen.

**3.28. Theorem.** Sei  $X$  ein diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum der Dimension  $n$  und seien  $\mathcal{M}$  sowie  $\mathcal{N}$  Darstellungen von  $\Gamma$ .

- (a) Der Vergleichshomomorphismus  $\alpha: \text{Ext}_\Gamma^j(\mathcal{M}_X, \mathcal{N}_X) \rightarrow \text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  ist surjektiv für  $j = n$  und bijektiv für  $j > n$ .
- (b) Ist  $X$  zusammenziehbar, so gilt  $\text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0$  für alle  $j > n$ . Ist darüberhinaus die Operation von  $\Gamma$  auf  $X$  nicht kokompakt, so gilt  $\text{Ext}^n(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0$ .
- (c) Sei  $x \in X$  und  $V$  eine zulässige Umgebung von  $x$ . Dann gilt  $\text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N})_{p(x)} = 0$  für alle  $j \geq \text{codim}(X^{\Gamma_x} \cap V)$ . Insbesondere gilt  $\text{Ext}^n(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0$ .

(d) Es ist  $H^p(Y; \mathcal{E}xt^q(\mathcal{M}, \mathcal{N})) = 0$  für alle  $p, q \geq 0$  mit  $p + q > n$ .

Es sei darauf hingewiesen, dass wir die Zusammenziehbarkeit von  $X$  im Vergleich zu Theorem C nur in einem Punkt vorausgesetzt haben.

*Beweis.* Wir fixieren eine  $\Gamma$ -Triangulierung  $\mathcal{S}$  von  $X$ .

(a) folgt aus 3.18. und aus der Definition des Komplexes  $\mathbb{W}_\bullet$ , der in den Graden 0 bis  $n - 1$  konzentriert ist. Der Abschnitt der langen exakten Sequenz  $H_0(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^n(\mathbb{M}_X, \mathbb{N}_X) \rightarrow \text{Ext}^n(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow 0$  beweist z.B. die Surjektivität.

(b) Es ist  $\text{Ext}_X^*(\mathbb{M}_X, \mathbb{N}_X) \cong H^*(Y; p_*^\Gamma(\text{Hom}(\mathbb{M}, \mathbb{N})))$  nach 1.8. und 1.26., falls  $X$  zusammenziehbar ist. Aus (a) folgt die Behauptung. Für den Fall der nicht kokompakten Operation siehe 1.21.

(c) Sei  $x \in X$  und  $d = \dim(X^{\Gamma_x} \cap V) = \dim(X_{\Gamma_x} \cap V)$ . Die Restriktion der Triangulierung auf  $V_{\Gamma_x} = X_{\Gamma_x} \cap V$  definiert eine Stratifizierung von  $V_{\Gamma_x}$ , weil Triangulierungen per definitionem insbesondere Isotropie-Stratifizierungen sind. Wir wählen ein offenes Stratum von  $V_{\Gamma_x}$ , welches die Dimension  $d$  haben muss. Dieses Stratum ist die Einschränkung eines Simplexes  $\sigma \in \mathcal{S}$  der Dimension  $d$  mit  $|\sigma| \subset X_{\Gamma_x}$  und  $|\sigma| \cap V \neq \emptyset$ . Aufgrund der Konstruierbarkeit von  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  bezüglich aller Isotropiestratifizierungen (vgl. 2.37.) gilt  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})_{p(x)} = \mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})_{p(x')}$  für alle  $x' \in |\sigma|$ . Aus 3.23 folgt jetzt die Behauptung, denn der Kettenkomplex  $\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}_\sigma)$  ist konzentriert im Bereich  $\{d, \dots, n - 1\}$ .

(d) Man beachte, dass  $X^{\leq j}$  aus den Punkten  $x \in X$  mit  $\dim(X^{\Gamma_x} \cap V_x) \leq j$  besteht, wenn  $V_x$  eine beliebige zulässige Umgebung von  $x$  ist. Aus (c) folgt, dass die Garbe  $\mathcal{E}xt^q(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  auf der abgeschlossenen Teilmenge  $X^{\leq n-q}$  konzentriert ist, woraus die Behauptung folgt, da  $Y^{\leq n-q} = \Gamma \setminus X^{\leq n-q}$  ein stratifizierter Raum der Dimension  $\leq n - q$  ist. (Für den Beweis der Verschwindung  $H^j(Y; \mathcal{E}xt^q(\mathcal{M}, \mathcal{N}))$

$H^j(Y^{\geq n-q}; \mathcal{E}xt^q(\mathcal{M}, \mathcal{N})) = 0$  für alle  $j > n - q$  wende man Übung II.11 von [Bre2] (S. 170) auf  $F = Y^{\leq j-1}$  und  $U = Y^{\leq j} - F = Y^j$  an, um induktiv zu zeigen, dass  $Y^{\leq j}$  die Dimension  $j$  besitzt. Dabei beachte man, dass  $Y^j = Y^{\leq j} - Y^{\leq j-1}$  eine topologische Summe von  $j$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten ist.)  $\square$

### 3.d. Alternative Beweise der klassischen Resultate

Wir fixieren weiterhin eine  $\Gamma$ -Triangulierung  $\mathcal{S}$  des diskontinuierlichen Raumes  $X$  sowie das Koeffizientensystem  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(p^*\mathcal{M}, \mathbb{M}, \mathbb{N})$  aus 3.6., das zu zwei Darstellungen  $\mathbb{M}$  und  $\mathbb{N}$  assoziiert ist. Bevor wir zu den ersten Beispielrechnungen im nächsten Kapitel 4 kommen, soll gezeigt werden, wie die eben entwickelten Methoden zu alternativen Beweisen der in Kapitel 1 vorgestellten klassischen Resultate führen. Diese alternativen Beweise basieren auf der folgenden elementaren Eigenschaft des Komplexes  $\mathbb{W}_\bullet$ .

**3.29. Proposition.** *Ist mindestens eine der Darstellungen  $M$  und  $N$  trivial, so gilt  $\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}, \mathcal{L})^\Gamma = 0$  und  $p_*^\Gamma \mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}, \mathcal{L}) = 0$ .*

*Beweis.* Wegen 3.11 und 3.26 genügt es zu zeigen, dass  $\text{Hom}_{\Gamma_x}(M/M^{\Gamma_x}, N) = 0$  für alle  $x$  gilt, denn  $\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S})^\Gamma$  und  $\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}_\sigma)^{\Gamma_\sigma}$  sind direkte Summen von solchen Termen. Ist  $M$  trivial, so gilt  $M^{\Gamma_x} = M$  also ist dieser Fall klar. Ist  $N$  trivial, so gilt  $\text{Hom}_{\Gamma_x}(M/M^{\Gamma_x}, N) = 0$  wie man folgendermaßen sieht. Sei  $\varphi : M \rightarrow N$  ein  $\Gamma_x$ -äquivarianter Homomorphismus mit  $\varphi(M^{\Gamma_x}) = 0$ . Sei  $m \in M$  beliebig und  $m' = (\sum_{g \in \Gamma_x} gm)/|\Gamma_x| \in M^{\Gamma_x}$ . Dann gilt  $0 = \varphi(m') = \sum_g g\varphi(m)/|\Gamma_x| = \varphi(m)$ , weil  $\Gamma_x$  trivial auf  $N$  operiert.  $\square$

Aus dieser Proposition folgt übrigens unmittelbar 1.19.a, indem wir 3.27. benutzen.

Die Kombination von 3.18. mit 3.29. führt uns zum

**3.30. Korollar.** *Sei  $X$  ein diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum und  $M$  sowie  $N$  Darstellungen von  $X$ . Dann ist der Vergleichshomomorphismus  $\alpha : \text{Ext}_\Gamma^*(M_X, N_X) \rightarrow \text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  aus 1.23 ein Isomorphismus, sofern mindestens eine der Darstellungen  $M$  und  $N$  trivial ist.*

In Anbetracht dessen, dass  $\text{Ext}_\Gamma^*(M_X, N_X)$  isomorph zu  $H^*(\Gamma; \text{Hom}(M, N))$  ist, wenn  $X$  zusammenziehbar ist (vgl. 1.26.), sind damit die beiden Resultate 1.18. und 1.8. bewiesen (zumindest, wenn beim Letzteren vorausgesetzt würde, dass  $X$  ein diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum, also insbesondere eine Mannigfaltigkeit, ist).

Es sei darauf hingewiesen, dass beim ursprünglichen Beweis von 1.18. in [Sin] vom Lemma 1.19. (das seinerseits in [Sin] mit der Poincaré-Verdier-Dualität bewiesen wird) Gebrauch gemacht wurde. Hier wurde dieses Lemma nicht benutzt. Interessant ist aber, dass man auch dieses Hilfslemma mit den neuen Methoden beweisen und dabei sogar zum Teil auf die Orientierbarkeit von  $X$  verzichten kann. Wir formulieren und beweisen daher ein etwas allgemeineres Lemma und der Leser vergleiche die folgenden Voraussetzungen mit denen aus 1.19.

**3.31. Lemma.** *Sei  $X$  ein diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum,  $M$  sowie  $N$  Darstellungen von  $\Gamma$ .*

- (a) *Ist  $M$  oder  $N$  trivial, so gilt  $\text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0$  für alle  $j > 0$  und  $\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \cong p_*^\Gamma(\underline{\text{Hom}}(M, N)_X)$ .*
- (b) *Ist  $X$  ein orientierter diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum, so gilt  $\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \cong p_*^\Gamma(\underline{\text{Hom}}(M, N)_X)$ .*

*Beweis.* (a) folgt aus 3.27. in Kombination mit 3.29.

Bei (b) beachte, dass die reguläre Menge  $X_r$  mindestens Kodimension 2 besitzt, weil  $\Gamma$  orientierungserhaltend operiert, siehe Beweis von 1.6. Insbesondere gilt  $\Gamma_\sigma = 1$  für alle Simplizes mit  $\dim(\sigma) = n-1$ , da solche Simplizes in der regulären Menge  $X_r$  enthalten sein müssen. Daraus folgt  $\text{Hom}_{\Gamma_\sigma}(M/M^{\Gamma_\sigma}, N) = 0$  für

alle solche Simplizes und damit ist  $p_*^\Gamma H_{n-1} \mathcal{W}_\bullet = 0$ , da deren Halme nach 3.26 direkte Summen von Moduln der Form  $\text{Hom}_{\Gamma_\sigma}(M/M^{\Gamma_\sigma}, \mathbb{N})$  mit  $\dim \sigma = n - 1$  sind (siehe Definition von  $\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S})$ ). Jetzt benutze man die exakte Sequenz in 3.27.  $\square$

## Kapitel 4

# Über die Berechnungen von $H_*(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma)$ und $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns eingehender mit dem Problem der Berechnungen der Invarianten  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ ,  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ . Da wir die Resultate aus Kapitel 3 heranziehen wollen, müssen wir uns mit der Berechnung der Homologie von  $\mathbb{W}_\bullet^\Gamma$  beschäftigen. Die dadurch entstehenden Methoden erproben wir an einigen Beispielen.

Schließlich wenden wir uns im letzten Abschnitt der Frage über die Endlichdimensionalität der obigen Invarianten. Wir stellen Bedingungen vor, die diese Endlichkeit garantieren. Dabei sei nicht vergessen, dass Theorem 3.15., auf dem alles basiert, noch nicht bewiesen wurde. Dieses wird wie schon erwähnt erst im Kapitel 6 bewiesen und Kapitel 5 dient der Vorbereitung. Der eher an dem Beweis interessierte Leser kann ruhig dieses Kapitel überspringen und ab Seite 70 fortfahren.

### 4.a. Orientierte diskontinuierliche Räume

Erinnern wir uns daran, welche Beispiele für  $\Gamma$  und  $X$  uns stets vorschweben: Es sind arithmetische Gruppen  $\Gamma$  die auf einem assoziierten symmetrischen (zusammenziehbaren) Raum  $X = G/K$  operieren, wie bereits in Beispiel 1.3. erklärt wurde. Die konkreten Berechnungen, die wir in folgenden Abschnitten anstellen möchten, werden wir an den Beispielen 1.3.c und 1.3.d vornehmen, nachdem wir etwas zur Berechnung der Halme von  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  (im Allgemeinen sowie konkret bei niederdimensionalen Beispielen) gesagt haben.

Eine Gemeinsamkeit all solcher Beispiele ist, dass  $\Gamma$  orientierungserhaltend auf  $X$  operiert. Viele interessante Beispiele besitzen die Eigenschaft, dass  $\Gamma$  nicht kokompakt auf  $X$  operiert, d.h. der Quotient  $Y = \Gamma \backslash X$  ist nicht kompakt. Daher erheben wir es in diesem Kapitel zur Grundvoraussetzung, dass  $X$  ein *orientierter, zusammenziehbarer, diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum* ist, auf dem  $\Gamma$  *nicht kokompakt* operiert. Dies führt zu einigen Vereinfachungen, die wir jetzt

aufzählen. Zunächst gilt

$$(4.1) \quad H^*(\Gamma; \mathbf{M}) \cong H^*(Y; \mathcal{M}) \text{ und } H^j(\Gamma; \mathbf{M}) = 0 \text{ für alle } j \geq \dim(X)$$

für alle Darstellungen  $\mathbf{M}$  von  $\Gamma$  wegen 1.8. und 1.21. Weiterhin ist die singuläre Menge  $X_s$  mindestens von der Kodimension 2 in  $X$  (siehe Beweis von 1.6.), woraus folgt, dass der Komplex  $\mathbb{W}_\bullet = \mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}, \mathcal{L})$  aus 3.8. wegen 3.7. im Bereich  $\{0, \dots, n-1\}$  konzentriert ist, wobei  $\mathcal{S}$  eine Isotropiestratifizierung von  $X$  und  $\mathcal{L}$  das Koeffizientensystem  $\mathcal{L}(p^*\mathcal{M}, \mathbf{M}, \mathbf{N})$  aus 3.6. für Darstellungen  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$  von  $\Gamma$  ist.

Sind die singulären Straten von  $\mathcal{S}$  zusammenziehbar (z.B. eine Triangulierung), so vereinfacht sich die nach 3.18. existierende lange exakte Sequenz an den beiden Enden und wir bekommen eine etwas kürzere exakte Sequenz

$$(4.2) \quad \begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\Gamma; \text{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{N})) &\xrightarrow{\alpha} \text{Ext}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow H_{n-2}(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H^j(\Gamma; \text{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{N})) &\xrightarrow{\alpha} \text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow H_{n-j-1}(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H^{n-1}(\Gamma; \text{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{N})) &\xrightarrow{\alpha} \text{Ext}^{n-1}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow H_0(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Darüberhinaus gilt

$$(4.3) \quad \text{Ext}^0(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \text{Hom}_\Gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \text{ und } \text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0 \text{ für alle } j \geq \dim(X),$$

während die erste Gleichung aus  $\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \cong p_*^\Gamma(\underline{\text{Hom}}(\mathbf{M}, \mathbf{N})_X)$  (vgl. 3.31.) und die zweite aus 3.28. folgt.

## 4.b. Einige Berechnungen bei lokalen Modellen

Wir möchten in diesem Abschnitt die Berechnung der Halme von  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  erörtern. Nach 2.40. gilt  $\mathcal{E}xt(\mathcal{M}, \mathcal{N})_{p(x)} = \text{Ext}^*(q_*^G \mathbf{M}_V, q_*^G \mathbf{N}_V)$  für alle zulässigen Umgebungen  $V$  eines Punktes  $x \in X$ , wenn  $G = \Gamma_x$  und  $q : V \rightarrow p(V) = G \setminus V$  die Projektion bezeichnet. Mit anderen Worten: Wir nehmen das Problem 2.38. in Angriff. Dies ist deshalb von Interesse, weil Informationen über die Garbe  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  nützlich für die Lokal-Global-Spektralsequenz 1.12., ein klassisches Werkzeug für die Berechnung von  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ , wäre.

Wir fixieren also ein lokales Modell  $(V, G)$ , d.h.  $V = \mathbb{R}^n$  und  $G$  ist eine endliche Gruppe zusammen mit einem Homomorphismus  $\varphi : G \rightarrow \text{SO}(n)$ , vgl. 1.5. (jede zulässige Umgebung ist ein lokales Modell). Die Gruppe  $G$  operiert via  $\varphi$  orientierungserhaltend und diskontinuierlich auf  $V$ . Wir notieren die kanonische Projektion durch  $q : V \rightarrow U = G \setminus V$ .

Die folgende Beobachtung zeigt, dass wir für unsere Zwecke ohne Einschränkung annehmen können, dass  $\varphi$  injektiv, also  $G$  eine Untergruppe von  $\text{SO}(n)$  ist.

**Bemerkung.** Sei  $G_0 = \ker(\varphi)$  und  $K = G/G_0$ . Dann gilt  $G \setminus V = K \setminus V$  und die Projektion  $V \rightarrow K \setminus V$  stimmt mit  $q$  überein. Weiterhin gilt  $q_*^G(\mathbf{M}_V) = q_*^K(\mathbf{M}_V)$

für alle Darstellungen  $M$  von  $G$ . Denn für alle  $W \subset U$  ist es für eine lokal-konstante Abbildung  $q^{-1}(W) \rightarrow M$  gleichwertig, ob sie  $G$ - oder  $K$ -äquivariant ist.

Wir nehmen also an, dass  $G$  eine endliche Untergruppe von  $SO(n)$  ist und auf natürliche Weise auf  $V = \mathbb{R}^n$  operiert. Wir verwenden wieder die Notation  $\mathcal{M} = q_*^G(M_V)$ , weil jetzt keine Missverständnisse zu befürchten sind.

Wie wir bereits wissen, gilt  $\text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \mathcal{E}xt^j(\mathcal{M}, \mathcal{N})_{p(0)} = 0$  für alle  $j \geq n - d$ , wobei  $d := \dim(V^G)$ , vgl. 3.28. und 2.40. Der nächste Satz gibt uns eine Formel für  $\mathcal{E}xt^{n-d-1}(\mathcal{M}, \mathcal{N})_{p(0)}$ .

**4.4. Satz.** *Sei  $(V, G)$  wie oben und  $d = \dim(V^G)$ . Es gilt  $\text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0$  für alle  $j \geq n - d$  und  $\text{Ext}^{n-1-d}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \cong \text{Hom}_G(M^{G_s}/M^G, \mathbb{N})$ , wobei  $G_s$  die Untergruppe von  $G$  ist, die von allen Stabilisatoren  $G_x$  mit  $x \in V$  und  $G_x \neq G$  erzeugt ist. Insbesondere gilt  $\text{Ext}^{n-d-1}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0$ , wenn  $n - d$  ungerade ist.*

*Beweis.* Wir haben eine Zerlegung  $V = V^G \times Z$  von  $G$ -Räumen, wobei  $Z$  der Kern der Normalisierung  $V = \mathbb{R}^n \rightarrow V^G$ ,  $x \mapsto |G|^{-1} \sum_{g \in G} gx$  ist. (Die Inklusion  $V^G \rightarrow V$  definiert eine Zerfällung der kurzen exakten Sequenz  $0 \rightarrow Z \rightarrow V \rightarrow V^G \rightarrow 0$ ). Die Operation von  $G$  auf  $V^G$  ist trivial und es gilt  $Z^G = 0$  und  $\dim Z = n - d = \text{codim } V^G$ . Außerdem ist die Operation auf  $Z$  treu, so dass man  $G$  als eine endliche Untergruppe von  $SO(n - d)$  auffassen kann. Wir wählen eine  $\Gamma$ -Triangulierung  $\mathcal{T}$  von  $Z$  und definieren durch  $\mathcal{S} = V^G \times \mathcal{T}$  eine Isotropiestratifizierung (d.h. die Straten sind von der Form  $V^G \times |\tau|$ , wobei  $\tau \in \mathcal{T}$  die Simplizes von  $Z$  durchläuft). Die Straten dieser Stratifizierung  $\mathcal{S}$  sind alle zusammenziehbar, so dass wir 3.18. anwenden können. Es gilt  $\text{Ext}_G^j(M_V, N_V) \cong H^j(G; \text{Hom}(M, N))$  wegen der Zusammenziehbarkeit von  $V$  und dies ist 0 für alle  $j > 0$  wegen der Endlichkeit von  $G$ . Nach 4.2 gibt es Isomorphismen  $\text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = H_{n-j-1} \mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S})^G$ . Beachte, dass es wegen der Endlichkeit von  $G$  und damit der Exaktheit von  $(-)^G$  keinen Unterschied macht, wie bei  $H_{n-j-1} \mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S})^G$  geklammert wird. Insbesondere gilt  $\text{Ext}^{n-1-d}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \cong H_d(\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}))^G$ . Wir betrachten nun den Kettenkomplex  $\mathbb{W}_\bullet$  genauer.

Beachte, dass  $\dim(\tau \times V^G) = \dim(\tau) + d$  gilt, also

$$\mathbb{W}_{j+d}(\mathcal{S}) = \prod_{\dim \tau = j} \text{Hom}(M/M^{G_\tau}, \mathbb{N}).$$

Da  $\mathcal{T}$  nur einen Simplex  $\sigma_0$  der Dimension 0 (und zwar  $Z^G = \{0\}$ ) besitzt und dessen Stabilisator  $G_{\sigma_0} = G$  ist, sieht die  $d$ -te Stelle des Komplexes  $\mathbb{W}_\bullet$  folgendermaßen aus.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathbb{W}_{d+1} & \longrightarrow & \mathbb{W}_d & \longrightarrow & \mathbb{W}_{d-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = \\ \cdots & \longrightarrow & \bigoplus_{\dim \tau = 1} \text{Hom}(M/M^{G_\tau}, \mathbb{N}) & \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}(M/M^G, \mathbb{N}) & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Das Differential  $\delta$  kann man schreiben als  $\delta = \text{Hom}(\partial, \mathbf{N})$ , wenn

$$\partial : \mathbf{M}/\mathbf{M}^G \rightarrow \prod_{\dim \tau=1} \mathbf{M}/\mathbf{M}^{G_\tau}$$

das Produkt der Homomorphismen  $[\tau : \sigma_0] \cdot \pi_\tau : \mathbf{M}/\mathbf{M}^G \rightarrow \mathbf{M}/\mathbf{M}^{G_\tau}$  bezeichnet und  $\pi_\tau$  von der Inklusion  $\mathbf{M}^G \subset \mathbf{M}^{G_\tau}$  induziert ist. Damit folgt  $\ker \partial = \mathbf{M}^{G'}/\mathbf{M}^G$ , wobei  $G'$  die von den  $G_\tau$  (über alle  $\tau$  mit  $\dim \tau = 1$ ) erzeugte Untergruppe von  $G$  ist. Es folgt

$$\text{Ext}^{n-d-1}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \text{coker } \delta = \text{Hom}(\ker \partial, \mathbf{N}) = \text{Hom}(\mathbf{M}^{G'}/\mathbf{M}^G, \mathbf{N}).$$

Damit genügt es,  $G'$  mit der Gruppe  $G_s$  aus der Behauptung zu identifizieren. Offensichtlich gilt  $G' \subset G_s$ , weil die  $G_\tau$  Stabilisatoren mit  $G_\tau \neq G$  sind. Andererseits sei  $G_x$  ein Stabilisator mit  $G_x \neq G$ . Man kann annehmen, dass  $x \in Z$  ist, weil  $G$  trivial auf  $V^G$  operiert. Sei  $\tau(x)$  das eindeutige Simplex von  $Z$  mit  $x \in |\tau(x)|$ . Sei  $\tau$  eine eindimensionale Seite von  $\tau(x)$ . Dann gilt  $G_x = G_{\tau(x)} \subset G_\tau \subset G'$ , was zu zeigen war.

Nun zu der letzten Aussage: Sei  $n - d$  ungerade. Dann hat jedes Element von  $G \subset \text{SO}(n - d)$  einen nichttrivialen Fixpunkt in  $Z$ , woraus  $G_s = G$  und damit  $\mathbf{M}^{G_s}/\mathbf{M}^G = 0$  folgt.  $\square$

Die Verschwindungsergebnisse für die Garben  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  im letzten Satz 4.4. und in 3.28. können i.A. nicht verbessert werden, wie wir an folgenden Beispielen sehen werden.

**4.5. Beispiel** (Zyklische Gruppen). Sei  $G \subset S^1$  die zyklische Gruppe der Ordnung  $m$ , die auf  $X = \mathbb{C}^n$  durch komponentenweise Multiplikation operiert. Dann besteht die singuläre Menge aus einem Punkt:  $X_s = \{0\}$  und  $\mathcal{S} = \{\{0\}, X_\tau\}$  ist eine Isotropiestratifizierung von  $X$ , bei der das einzige singuläre Stratum zusammenziehbar ist. Die irreduziblen Darstellungen von  $G$  sind in [Ser1, 5.1] wie folgt beschrieben: Sei  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{m}}$  ein Erzeuger von  $G$ . Definiere Charaktere  $\chi_h : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $h = 0, \dots, m - 1$  durch

$$\chi_h(\omega^k) = \omega^{kh}, \quad k = 0, \dots, m - 1.$$

Diese beschreiben irreduzible Darstellungen  $\mathbf{M}_h$  von  $G$  und dies sind bis auf Isomorphie die einzigen. Wir setzen  $\mathcal{M}_h := p_*^G(\mathbf{M}_h)$ . Beachte, dass  $\mathbf{M}_0 = \mathbb{C}$  die triviale Darstellung und  $\mathbf{M}_h^G = 0$  für alle  $h > 0$  ist. Nach 2.40. ist  $\text{Ext}^j(\mathcal{M}_0, \mathcal{N}) = \mathcal{E}xt^j(k, \mathcal{N})_{p(0)} = 0$  für alle  $j > 0$  und Darstellungen  $\mathbf{N}$  von  $G$ .

Sei  $h > 0$  und  $i \geq 0$  und  $h, i \leq m - 1$ . Nach 4.4. gilt  $\text{Ext}^{2n-1}(\mathcal{M}_h, \mathcal{M}_i) = \text{Hom}_G(\mathbf{M}_h^{G_s}/\mathbf{M}_h^G, \mathbf{M}_i) = \text{Hom}_G(\mathbf{M}_h^{G_s}, \mathbf{M}_i)$  (wegen  $\mathbf{M}_h^G = 0$ ). Nun existieren keine nichttrivialen Stabilisatoren  $G_x$  mit  $G_x \neq G$ , woraus  $G_s = 1$  folgt und damit gilt nach dem Lemma von Schur [Ser1, 2.2]

$$\text{Ext}^{2n-1}(\mathcal{M}_h, \mathcal{M}_i) = \text{Hom}_G(\mathbf{M}_h, \mathbf{M}_i) = \delta_{h,i} \cdot \mathbb{C},$$

wenn  $\delta_{h,i}$  das Kronecker-Delta bezeichnet. Analog kann man verfahren, indem man  $X = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$  betrachtet und  $G$  auf dem Faktor  $\mathbb{C}^n$  wie eben und auf  $\mathbb{R}$



trivial operieren lässt. Wieder aus 4.4. folgt  $\text{Ext}^{2n-1}(\mathcal{M}_h, \mathcal{M}_i) = \delta_{h,i} \cdot \mathbb{C}$ .

Darüberhinaus ist  $\text{Ext}^j(\mathcal{M}_h, \mathcal{M}_i) = 0$  für alle  $j \notin \{0, n\}$ , weil der Komplex  $\mathbb{W}_\bullet$  in Grad 0 konzentriert ist.

#### 4.c. Beispiele: $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ und $\text{SL}_2(\mathcal{O})$

Wir untersuchen nun die Berechenbarkeit von  $\text{Ext}_{\Gamma \backslash X}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  für orientierbare diskontinuierliche  $\Gamma$ -Räume mit  $\dim(X) \in \{2, 3\}$  erst im Allgemeinen und dann für die Beispiele  $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  und  $\Gamma = \text{SL}_2(\mathcal{O})$ , wobei  $\mathcal{O}$  der Ganzheitsring eines quadratisch imaginären Zahlkörpers ist.

**Dimension 2** Sei  $\Gamma$  eine diskrete Gruppe und  $X$  ein zusammenziehbarer orientierbarer  $\Gamma$ -Raum der Dimension 2. Da die Kodimension der singulären Menge  $X_s$  mindestens 2 ist (siehe Beweis von 1.6.), ist hier  $X_s$  diskret und wir schreiben  $X_s = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ . Damit ist der Komplex  $\mathbb{W}_\bullet$  aus 3.16 konzentriert in Dimension 0. Es gilt  $\text{Ext}^0(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \text{Hom}_\Gamma(\mathbb{M}, \mathbb{N})$  und  $\text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0$  für alle  $j \geq 2$  und alle Darstellungen  $\mathbb{M}, \mathbb{N}$  von  $\Gamma$  nach 4.3. Die exakte Sequenz aus 4.2 ist hier kurz:

$$0 \rightarrow H^1(\Gamma; \text{Hom}(\mathbb{M}, \mathbb{N})) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{W}_0^\Gamma \rightarrow 0$$

und da dies eine exakte Sequenz von Vektorräumen ist, erhalten wir einen (nicht natürlichen) Isomorphismus

$$(4.6) \quad \text{Ext}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \cong H^1(\Gamma; \text{Hom}(\mathbb{M}, \mathbb{N})) \oplus \bigoplus_{\bar{\alpha} \in \Gamma \backslash A} \text{Hom}_{\Gamma_{x_\alpha}}(\mathbb{M}/\mathbb{M}^{\Gamma_{x_\alpha}}, \mathbb{N}).$$

Wir wenden dies nun auf das folgende klassische Beispiel an:

**$\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$**  Sei  $X = \mathfrak{h}^2$  der obere Halbraum. Die Gruppe  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  operiert auf  $\mathfrak{h}^2$  via

$$A \cdot z := \frac{az + b}{cz + d}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad z \in \mathfrak{h}^2,$$

vgl. [Shi, 1.2]. Das einzige nichttriviale Element von  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , das als Identität operiert, ist  $-\mathbb{I}_2$ , während  $\mathbb{I}_2$  die  $2 \times 2$ -Identitätsmatrix ist. Somit operiert der Quotient

$$\Gamma := \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) := \text{SL}_2(\mathbb{Z}) / \{\pm \mathbb{I}_2\}$$

effektiv, diskontinuierlich und orientierungserhaltend auf dem zusammenziehbaren Raum  $X = \mathfrak{h}^2$ .

Die einzigen Punkte von  $X$ , die keinen trivialen Stabilisator haben, liegen in den Orbits von  $i$  und  $\rho := (1 + \sqrt{-3})/2$ . Es gilt

$$\Gamma_i = \langle B \rangle, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ord}(B) = 2,$$

$$\Gamma_\rho = \langle C \rangle, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ord}(C) = 3,$$

vgl. [Shi]. Darüberhinaus ist  $\Gamma$  nach [Ser2, 4.2.(c)] das freie Produkt von  $\Gamma_i$  und  $\Gamma_\rho$ :

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \Gamma_i * \Gamma_\rho.$$

Die singuläre Menge ist die Vereinigung der Orbits von  $\rho$  und  $i$ ,  $X_s = (\Gamma \cdot i) \cup (\Gamma \cdot \rho)$ . Die Menge  $\{\Gamma_i, \Gamma_\rho\}$  ist eine Repräsentantenmenge aller Stabilisatoren  $H \subset \Gamma$  und die größte Isotropiestratifizierung lässt sich einfach beschreiben: Das offene Stratum ist wie immer  $X_r$  und sonst gibt es nur 0-dimensionale Straten, nämlich die Punkte in den Orbits von  $i$  und  $\rho$ .

Weil topologisch  $\Gamma \backslash \mathfrak{h}^2 \cong \mathbb{R}^2$  gilt, ist die Operation von  $\Gamma$  nicht kokompakt. Außerdem ist  $\mathfrak{h}^2$  zusammenziehbar. Wir wenden die Beobachtungen bis 4.6 an, somit gilt  $\mathrm{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0$  für  $j \geq 2$  für jede Darstellung  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{N}$  von  $\Gamma$  und

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \cong H^1(\Gamma; \mathrm{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{N})) \oplus \mathrm{Hom}_{\Gamma_i}(\mathbf{M}/\mathbf{M}^{\Gamma_i}, \mathbf{N}) \oplus \mathrm{Hom}_{\Gamma_\rho}(\mathbf{M}/\mathbf{M}^{\Gamma_\rho}, \mathbf{N}).$$

Wir wollen Letzteres explizit für die Darstellungen  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{2n}$ ,  $\mathbf{N} = \mathbf{M}_{2m}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  bestimmen, wenn  $\mathbf{M}_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  die folgendermaßen definierte Darstellung von  $\Gamma$  bezeichnet (vgl. auch [Shi, 8.2]):

$$(4.7) \quad \mathbf{M}_n := \{p(X, Y) \in k[X, Y] \mid p \text{ ist homogen vom Grad } n\}.$$

Die Gruppe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  (und damit auch  $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ) operiert via

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot p(X, Y) = p(aX + cY, bX + dY).$$

Das sind bis auf Isomorphie alle irreduziblen Darstellungen von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  und  $\mathbf{M}_n$  heißt der *Modul der binären, homogenen, Polynome vom Grad  $n$* . (Beachte, dass für alle ungeraden  $n$  gilt:  $\mathcal{M}_n = 0$ . Daher beschränken wir uns nur auf gerade  $n$ , zumal nur Darstellungen von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  sind, weil  $-\mathbb{I}_2$  genau dann trivial auf  $\mathbf{M}_n$  operiert, wenn  $n$  gerade ist.)

Für die Berechnung der Kohomologie von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  gibt es wohlbekannte Methoden, wie sie z.B. in [Har] erläutert sind (dort wird die Čech-Kohomologie  $H^*(\Gamma \backslash X; p_*^\Gamma(\mathrm{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{N})))$  nach einer geeigneten Überdeckung von  $\Gamma \backslash X$  durch azyklische offene Teilmengen bestimmt). Wir konzentrieren uns auf die Berechnung der Summanden  $\mathrm{Hom}_{\Gamma_i}(\mathbf{M}_{2n}/\mathbf{M}_{2n}^{\Gamma_i}, \mathbf{M}_{2m})$  und  $\mathrm{Hom}_{\Gamma_\rho}(\mathbf{M}_{2n}/\mathbf{M}_{2n}^{\Gamma_\rho}, \mathbf{M}_{2m})$  für  $n, m \geq 0$ .

Es gilt

$$B \cdot p(X, Y) = p(-Y, X), \quad C \cdot p(X, Y) = p(-X - Y, X).$$

Weil  $\Gamma_i = \langle B \rangle$  und  $\Gamma_\rho = \langle C \rangle$  zyklische Gruppen sind, ist  $V^{\Gamma_i}$  die Menge der Fixpunkte von  $B$  für jeden  $\Gamma_i$ -Modul  $V$ . Entsprechendes gilt für  $\Gamma_\rho$ . Insbesondere ist  $\mathbf{M}_{2a}^{\Gamma_i}$  der Raum der homogenen Polynome  $p$  vom Grad  $2a$  mit  $p(X, Y) = p(-Y, X)$  und  $\mathbf{M}_{2a}^{\Gamma_\rho}$  ist der Raum der homogenen Polynome vom Grad  $2a$  mit  $p(X, Y) = p(-X - Y, X)$ .

Wir konzentrieren uns zunächst auf die Operation von  $\Gamma_i = \langle B \rangle$  auf der Darstellung  $\mathbf{M}_{2n}$  und wollen diese in irreduzible Darstellungen von  $\Gamma_i$  zerlegen.

Es gibt bis auf Isomorphie genau 2 irreduzible Darstellungen der zyklischen Gruppe  $\Gamma_i = \{1, B\}$ , die beide 1-dimensional sind und deren Charaktere  $\psi_0$  und  $\psi_1$  sind durch  $\psi_0(B) = 1$  bzw.  $\psi_1(B) = -1$  festgelegt, vgl. [Ser1, 5.1]. Sei  $\chi_{2m}$  der Charakter der  $\Gamma_i$ -Darstellung  $M_{2n}$ , also  $\chi_{2n}(1) = \dim M_{2n} = 2n + 1$  und

$$\chi_{2n}(B) = \text{Spur}(B : M_{2n} \rightarrow M_{2n}).$$

Um letzteres zu bestimmen, betrachten wir die Basis  $\{X^j Y^{2n-j} \mid j = 1, \dots, 2n\}$ . Es ist  $B \cdot X^j Y^{2n-j} = (-1)^j X^{2n-j} Y^j$ , also existiert auf der Diagonalen der Darstellungsmatrix nur ein nichttrivialer Eintrag und dieser ist  $(-1)^n$ . Es folgt  $\chi_{2n}(B) = (-1)^n$ . Nach [Ser1, Th. 4, S. 16] ist

$$\dim M^{\Gamma_i} = (\chi_{2n} | \psi_0) = \frac{1}{2}(2n + 1 + (-1)^n)$$

und die Anzahl der irreduziblen Faktoren von  $\psi_1$  in  $M_{2n}$  beträgt  $(\chi_{2m}, \psi_1) = (2n + 1 - (-1)^n)/2$ . Mit dem Lemma von Schur (vgl. z.B. [Ser1, 2.2]) folgt damit

$$(4.8) \quad \boxed{\dim \text{Hom}_{\Gamma_i}(M_{2n}/M_{2n}^{\Gamma_i}, M_{2m}) = \frac{1}{4}(2n + 1 - (-1)^n) \cdot (2m + 1 - (-1)^m).}$$

Nun wenden wir uns  $\Gamma_\rho$  zu und wollen auf die selbe Weise  $\text{Hom}_{\Gamma_\rho}(M_{2n}/M_{2n}^{\Gamma_\rho}, M_{2m})$  verstehen. Dafür beschreiben wir erst einmal die Charaktere der irreduziblen Darstellungen von  $\Gamma_\rho = \{1, C, C^2\}$ . Sei  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ . Nach [Ser1, 5.1] gibt es bis auf Isomorphie genau 3 irreduzible Darstellungen, deren Charaktere  $\psi_0, \psi_1, \psi_2$  durch die Tafel

	1	C	$C^2$
$\psi_0$	1	1	1
$\psi_1$	1	$\omega$	$\omega^2$
$\psi_2$	1	$\omega^2$	$\omega$

beschrieben sind. Es sei  $\zeta_{2n}$  der Charakter der  $\Gamma_\rho$ -Darstellung  $M_{2n}$ . Wir müssen die Spuren von  $C$  und  $C^2$  als Operatoren auf  $M_{2n}$  bestimmen. Diese Elemente operieren auf der kanonischen Basis durch

$$C \cdot (X^j Y^{2n-j}) = (-1)^j (X+Y)^j X^{2n-j}, \quad C^2 \cdot (X^j Y^{2n-j}) = (-1)^j Y^j (X+Y)^{2n-j},$$

für  $j = 1, \dots, 2n$ . Der  $j$ -te Eintrag der Hauptdiagonalen der Darstellungsmatrix ist  $(-1)^j \binom{2n-j}{j}$ , insbesondere 0 für  $j > n$ . Damit ergibt sich:

$$\alpha_n := \text{Spur}(C : M_{2n} \rightarrow M_{2n}) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{2n-j}{j}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass dies auch die Spur von  $C^2$  ist, so dass wir insgesamt Folgendes haben:

$$(4.9) \quad \zeta_{2n}(1) = 2n + 1, \quad \zeta_{2n}(C) = \zeta_{2n}(C^2) = \alpha_n.$$

Es ergibt sich

$$(\zeta_{2n}|\psi_0) = (2n + 1 + 2\alpha_n)/3$$

und

$$(\zeta_{2n}|\psi_1) = (\zeta_{2n}|\psi_2) = (2n + 1 + (\omega + \omega^2)\alpha_n)/3 = (2n + 1 - \alpha_n)/3.$$

Also mit dem Lemma von Schur:

$$(4.10) \quad \boxed{\dim_{\Gamma_\rho}(\mathbf{M}_{2n}/\mathbf{M}_{2n}^{\Gamma_\rho}, \mathbf{M}_{2m}) = \frac{2}{9}(2n + 1 - \alpha_n)(2n + 1 - \alpha_m)}$$

Zu guter Letzt ist es möglich,  $\alpha_n$  für alle  $n \geq 1$  zu bestimmen:

**Behauptung.** Für alle  $n \geq 1$  gilt

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 & , n \equiv 0 \pmod{3} \\ 0 & , n \equiv 1 \pmod{3} \\ -1 & , n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

*Beweis.* Wir definieren eine Hilfsfolge

$$\beta_n := \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{2n+1-j}{j}.$$

Mit der Pascalschen Identität  $\binom{a}{k} + \binom{a}{k-1} = \binom{a+1}{k}$  folgert man nun für alle  $n \geq 1$ :

$$\beta_{n-1} - \alpha_{n-1} = \alpha_n, \quad \alpha_n - \beta_{n-1} = \beta_n.$$

Mit Hilfe dieser Identitäten zeigt man nun induktiv für alle  $n \geq 1$ :

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 & , n \equiv 0 \pmod{3} \\ 0 & , n \equiv 1 \pmod{3} \\ -1 & , n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \quad \text{und} \quad \beta_n = \begin{cases} 1 & , n \equiv 0 \pmod{3} \\ -1 & , n \equiv 1 \pmod{3} \\ 0 & , n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Dabei unterscheidet man beim Induktionsschluss  $n \rightarrow n + 1$  die 3 Fälle, ob  $n \equiv 0, 1$  oder  $2 \pmod{3}$  gilt und für den Induktionsanfang beweist man die Gleichungen für  $n = 1, 2, 3$ .  $\square$

**Dimension 3** Sei  $\Gamma$  eine diskrete Gruppe und  $X$  ein orientierbarer zusammenziehbarer diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum der Dimension 3. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass für jeden Stabilisator  $H < \Gamma$  die Zusammenhangskomponenten des Raumes  $X_H$  zusammenziehbar sind (ansonsten müssen wir die Zusammenhangskomponenten in zusammenziehbare Straten zerlegen).

Beachte, dass die singuläre Menge  $X_s$  mindestens Kodimension 2 besitzt (vgl. 1.6.), also ist  $\dim(X_s) \leq 1$ . Der Fall  $\dim(X_s) = 0$  ist ebenso leicht zu behandeln wie im letzten Paragraphen, wo wir den Fall  $\dim(X) = 2$  behandelt haben (denn in diesem Fall ist der Komplex  $\mathbb{W}_\bullet$  in Grad 0 konzentriert).

Der interessante Fall ist  $\dim(X_s) = 1$ . In diesem Fall ist  $X_s$  ein Graph und der Komplex ist konzentriert in den Graden 0, 1, d.h. es ist die Homologie von

$$(4.11) \quad \dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{W}_1^\Gamma \xrightarrow{d} \mathbb{W}_0^\Gamma \rightarrow 0,$$

zu bestimmen, um mehr Information über die Sequenz

$$(4.12) \quad 0 \rightarrow H^1(\Gamma; \text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{N})) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow H_1(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma) \\ \rightarrow H^2(\Gamma; \text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{N})) \rightarrow \text{Ext}^2(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow H_0(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma) \rightarrow 0$$

aus 4.2 zu erhalten.

Wir möchten den Komplex  $\mathbb{W}_\bullet^\Gamma$  in dieser Situation etwas besser verstehen. Wir haben bereits im Beweis von 4.4. einen Differential von  $\mathbb{W}_\bullet^\Gamma$  bestimmt. Dort war dies jedoch einfach, weil genau ein Stratum die minimale Dimension besaß. Im Allgemeinen ist der Graph  $X_s$  jedoch komplizierter und der Komplex  $\mathbb{W}_\bullet^\Gamma$  schwieriger zu verstehen.

Um den Dingen Namen zu geben, sei  $V$  die Menge der 0-dimensionalen Straten von  $X$ , also die Menge der Ecken des Graphen  $X_s$ . Entsprechend sei  $E$  die Menge der 1-dimensionalen Straten, also Kanten von  $X_s$ . Weil wir angenommen haben, dass sie zusammenziehbar sind, sind diese homöomorph zu  $\mathbb{R}$ . Beachte, dass  $V$  und  $E$  eine von  $X$  induzierte Operation von  $\Gamma$  besitzen. Man gebe jeder Kante  $e \in E$  eine Orientierung und sei  $\alpha(e) \in V$  der „Anfangsrandpunkt“ und  $\omega(e) \in V$  der „Endrandpunkt“ von  $e$ . Die Inzidenzzahl  $[e: v]$  ist 1, wenn  $\alpha(e) = v$  ist und sie ist -1, wenn  $\omega(e) = v$  ist. Ansonsten ist sie 0. Da  $\Gamma$  orientierungserhaltend auf  $X$  operiert, kann man die Kanten so orientieren, dass die Abbildungen

$$\alpha, \omega : E \rightarrow V$$

$\Gamma$ -äquivariant sind. Für alle  $e \in E$  bezeichne  $\Gamma_e$  den Stabilisator von  $e$ , d.h.  $\Gamma_e$  besteht aus allen  $g \in \Gamma$  mit  $ge = e$ . Nun ist nach Definition klar, dass das Differential  $\mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{W}_0$  gegeben ist als das Produkt der Abbildungen (über alle  $v \in V$ )

$$\prod_{e \in E} \text{Hom}(\mathcal{M}/\mathcal{M}^{\Gamma_e}, \mathcal{N}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{M}/\mathcal{M}^{\Gamma_v}, \mathcal{N}), \quad (x_e)_{e \in E} \mapsto \sum_{\alpha(e)=v} x_e - \sum_{\omega(e)=v} x_e.$$

Es folgt

$$(4.13) \quad \ker d = \left\{ (x_e)_{e \in E} \mid \sum_{\alpha(e)=v} x_e = \sum_{\omega(e)=v} x_e \text{ für alle } v \in V \right\}$$

Diese Methoden kann man im Prinzip anwenden, um die Homologie von  $\mathbb{W}_\bullet^\Gamma$  im Beispiel der Operation von  $\text{SL}_2(\mathcal{O}_d)$  auf dem oberen Halbraum zu bestimmen (wobei  $\mathcal{O}_d$  der Ganzheitsring des imaginär quadratischen Zahlkörpers  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$  ist), um Informationen über die Kohomologie von  $\text{SL}_2(\mathcal{O}_d)$  mit Koeffizienten  $\text{Hom}(\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_n) = \mathcal{M}_n^\vee \otimes \mathcal{M}_n$ , während  $\mathcal{M}_n$  die Darstellung in 1.17. ist. Die Bilder

in [Hat] vermitteln einen Eindruck davon, welche geometrische Bedeutung die Berechnung von  $H_*\mathbb{W}_\bullet^\Gamma$  hat: es ist die Kohomologie des (gerichteten) Graphen  $Y_s$ , mit dem Koeffizientensystem, das über jeder Ecke/Kante ( $\sigma$ ) von  $Y_s$  durch  $\text{Hom}_{\Gamma_\sigma}(\mathbb{M}/\mathbb{M}^{\Gamma_\sigma}, \mathbb{N})$  gegeben ist.

Da hier aber Wahlen getroffen werden müssen, nämlich jeweils eine repräsentierende Ecken/Kanten  $\sigma$  von  $X_s$  für jede Ecke/Kante ( $\sigma$ ) von  $Y_s$ , stößt man bei der Berechnung von  $H_*\mathbb{W}_\bullet^\Gamma$  auf ähnliche Probleme wie bei den üblichen Ansätzen der Berechnung der Kohomologie  $H^*(\Gamma; \mathbb{M}_n^\vee \otimes \mathbb{M}_n)$  (in Abhängigkeit von  $d$ ), so dass man mit diesem Ansatz keine neue Informationen gewinnt – zumal man dann noch zusätzlich etwas über  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_n)$  sagen muss. Etwas nützlicher in dieser Hinsicht scheint jedoch der Ansatz über die exakte Sequenz 3.21. zu sein, weil die Kohomologie  $H^*(Y_r; \mathcal{N})$  leichter zu verstehen ist als  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ , da  $\mathcal{N}$  eine lokalkonstante Garbe auf der regulären Menge  $Y_r$  ist. Letzteres ist für viele  $d$  ein Komplement eines Graphen im  $\mathbb{R}^3$ , siehe z.B. die Bilder in [Hat].

#### 4.d. Endlichkeitsbedingungen

In diesem Abschnitt gehen wir der Frage nach, wann wir garantieren können, dass die Invarianten  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  endlichdimensional sind. Für lokale Modelle ist diese Frage grundsätzlich mit „immer“ zu beantworten.

**4.14. Satz.** *Sei  $X$  ein diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum und seien  $\mathbb{M}$  und  $\mathbb{N}$  Darstellungen von  $\Gamma$ . Dann sind die Halme der Garben  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  endlichdimensional.*

*Beweis.* Folgt aus 3.23, denn ein Simplex in einer  $\Gamma$ -Triangulierung ist eine Seite von nur endlich vielen anderen Simplizes, so dass der dortige Komplex  $\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}_{\sigma(x)}, \mathcal{L})$  für alle  $x \in X$  endlichdimensional ist.  $\square$

Das obige Argument geht über die Endlichkeit der Anzahl von Straten/Simplizes, was uns eine grundsätzliche Idee gibt, in welche Richtung wir suchen müssen, wenn wir Bedingungen für die Endlichdimensionalität suchen. Tatsächlich sind die bisherigen Beispiele immer vom endlichen Typ gewesen und dies rührte auch daher, dass der Quotient  $Y$  endlich viele Straten besaß:

**4.15. Proposition.** *Sei  $X$  ein diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum und seien  $\mathbb{M}, \mathbb{N}$  Darstellungen von  $\Gamma$ . Sei  $\mathcal{S}$  eine Isotropiestratifizierung von  $X$ , derart, dass nur endlich viele Orbits von singulären Straten existieren. Dann ist  $H_j(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma)$  für alle  $j$  endlichdimensional über  $k$ .*

*Beweis.* Dies folgt sofort aus 3.11.  $\square$

Wenn die Endlichkeitsbedingung der letzten Proposition nicht vorliegt, kann dies sogar dazu führen, dass die Invarianten  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  nicht endlichdimensional sind, wie das folgende Beispiel zeigt.

**4.16. Beispiel.** Sei  $X$  ein diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum. Wir könnten nun eine unendliche topologische Summe von  $\Sigma_X = \coprod_{j \in \mathbb{N}} X$  mit sich selbst betrachten, auf dem  $\Gamma$  komponentenweise operiert. Dies würde zum Ziel führen, denn es ist  $\text{Ext}_{\Gamma \setminus \Sigma_X}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \text{Ext}_{G \setminus \mathbb{N}}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})^{\mathbb{N}}$ . Das ist aber ein besonders langweiliges Beispiel, weil wir zumindest ein Beispiel mit einem zusammenhängenden diskontinuierlichen Raum haben wollen. Für diesen Zweck führen wir nun eine Art zusammenhängende Summe von diskontinuierlichen Räumen ein.

Man betrachte einen weiteren diskontinuierlichen  $\Gamma$ -Raum  $X'$  der selben Dimension wie  $X$ . Man fixiere ein  $x \in X$  und  $x' \in X'$  mit  $\Gamma_x = \Gamma_{x'} = 1$  und seien  $W$  und  $W'$  zulässige Umgebung von  $x$  bzw.  $x'$ . Weiterhin seien  $V \subset W$  und  $V' \subset W'$  die zulässigen offenen Teilmengen, die der Einheitskreisscheibe  $D_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \cong W \cong W'$  entsprechen. Auf  $Z_x = \Gamma \cdot V$  und  $Z'_x = \Gamma \cdot V'$  operiert  $\Gamma$  jeweils frei. Jetzt bilden wir die zusammenhängende Summe von  $X$  mit  $X'$  entlang  $Z_x$  und  $Z'_x$  im folgenden Sinne. Sei  $X_0 = X - \Gamma \cdot x$  und  $X'_0 = X' - \Gamma \cdot x'$  und setze

$$X +_{\{x, x'\}} X' := X_0 \cup_{\varphi} X'_0,$$

während  $\varphi : (Z_x - \Gamma \cdot x) \rightarrow (Z'_x - \Gamma \cdot x')$  von dem folgenden Diffeomorphismus induziert ist:

$$(V_x - \{x\}) \cong (D_1(0) - \{0\}) \xrightarrow{\tau} (D_1(0) - \{0\}) \cong (V'_{x'} - \{x'\})$$

mit  $\tau(x) = (1 - |x|) \cdot x$ . Es ist nun leicht zu überprüfen, dass  $X +_{\{x, x'\}} X'$  eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist und dass die Operation von  $\Gamma$  auf  $X$  bzw.  $X'$  eine Operation auf diesem Raum induziert. Sie ist diskontinuierlich (und orientierungserhaltend, wenn die vorherigen Operationen auf  $X$  und  $X'$  orientierungserhaltend waren). Diese Konstruktion wenden wir nun auf das Folgende an. Sei  $X = \mathfrak{h}^2$  der obere Halbraum, auf dem  $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  wie üblich operiert. Dann existieren zwei unterschiedliche Punkte  $x_1, x_2 \in X$  mit  $\overline{Z_{x_1}} \cap \overline{Z_{x_2}} = \emptyset$ . Wir definieren

$$\tilde{X} = X +_{\{x_1, x_1\}} X +_{\{x_2, x_2\}} X +_{\{x_1, x_1\}} \dots,$$

und dies ist ein diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum mit der Eigenschaft, dass der Quotient  $\tilde{Y} = \Gamma \setminus \tilde{X}$  unendlich viele Straten der Dimension 0 besitzt. Das einzige andere Stratum ist die reguläre Menge  $\tilde{Y}_r$ . Aufgrund von 4.6 und 4.8 bzw. 4.10 ist es nun leicht zu sehen, dass  $\dim \text{Ext}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \infty$  gilt für  $M = N = M_{2n}$ ,  $n > 0$ .

**Bemerkung.** Ein viel interessanteres Beispiel wäre, einen zusammenziehbaren diskontinuierlichen  $\Gamma$ -Raum  $X$  zu finden, so dass  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  unendlichdimensional ist. Dies ist dem Autor nicht gelungen. Ein Ansatz, dieses Problem zu lösen, wäre eine diskrete Gruppe  $\Gamma$  zu finden, die diskontinuierlich und orientierungserhaltend auf  $X = \mathbb{R}^2$  operiert, derart, dass die Menge der Orbits aller (0-dimensionalen) Straten unendlich ist. Die Versuche des Autors, die Existenz bzw. Nichtexistenz solch einer Operation für  $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$  zu beweisen, sind bisher gescheitert.

**4.17. Bemerkung** (Endliches Volumen ist auch nicht hinreichend). Eine typische Situation bei arithmetischen Gruppen, die uns interessieren, ist die, dass der Quotient  $\Gamma \backslash X$  des assoziierten zusammenziehbaren symmetrischen Raumes  $X$  endliches Volumen besitzt. Die Kohomologie von  $\Gamma$  ist in solchen Fällen endlichdimensional (siehe Beweis von 4.18. unten für eine genauere Aussage und Quellenangabe). Deshalb lohnt es zu untersuchen, ob die Invarianten  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  oder  $H_* \mathbb{W}_\bullet^\Gamma$  endlichdimensional sind, wenn wir annehmen, dass  $\Gamma \backslash X$  ein endliches Volumen besitzt. Dies ist jedoch nicht der Fall.

Als Gegenbeispiel können wir wieder den Raum  $\tilde{X}$  aus 4.16. heranziehen, indem wir eine geeignete Metrik auf diesen Raum definieren. Beachte, dass der Quotient des oberen Halbraums  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{h}^2$  bezüglich der hyperbolischen Metrik endliches Volumen besitzt, vgl. [Shi, 2.5]. Die Konstruktion von  $\tilde{X}$  wird nun dahingehend modifiziert, dass bei jedem Schritt der Verklebung eine kleinere Kopie von  $X$  genommen wird, so dass am Ende der Quotient immer noch ein endliches Volumen besitzt.

Wir skizzieren nun, wie man diese Konstruktion formalisieren kann. Man betrachte den Raum  $\mathfrak{h}^2 \times \mathbb{R}_+$ , auf dem  $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  komponentenweise operiert, nachdem wir  $\mathbb{R}_+$  mit der trivialen Operation versehen haben. Diese Operation ist diskontinuierlich. Man stelle sich vor, dass eine unendliche topologische Summe von  $\mathfrak{h}^2$  als  $\mathfrak{h}^2 \times \mathbb{N}$  in diesem Raum eingebettet ist. Die Verklebungen zwischen den einzelnen Kopien  $\mathfrak{h}^2 \times \{n\}$  und  $\mathfrak{h}^2 \times \{n+1\}$ , um den Raum  $\tilde{X}$  zu erhalten, können innerhalb  $\mathfrak{h}^2 \times \mathbb{R}_+$  durchgeführt werden und zwar so, dass  $\tilde{X} \subset \mathfrak{h}^2 \times \mathbb{R}_+$  eine abgeschlossene,  $\Gamma$ -invariante Untermannigfaltigkeit ist. Wir versehen jetzt diesen Raum  $\mathfrak{h}^2 \times \mathbb{R}_+$  mit einer Metrik: Es bezeichne  $(x, y)$ ,  $y > 0$ , die Koordinaten von  $\mathfrak{h}^2$  und  $t > 0$  die Koordinate von  $\mathbb{R}_+$ . Dann ist  $\frac{dx^2+dy^2}{y^2} + \frac{dt^2}{t^2}$  eine Metrik, die eingeschränkt auf  $\mathfrak{h}^2 \times \{t\}$  das  $\frac{1}{t^2}$ -fache der üblichen hyperbolischen Metrik liefert. Daraus folgt leicht, dass das Volumen von  $\Gamma \backslash \mathfrak{h}^2 \times \mathbb{R}_+$  endlich ist, für  $\Gamma \backslash \tilde{X}$  mit der eingeschränkten Metrik folgt dies aber nicht daraus. Die Verklebungen können so gemacht werden, dass für alle  $n \geq 1$  gilt:

$$\text{vol}(\Gamma \backslash (\tilde{X} \cap (\mathfrak{h}^2 \times [n, n+1]))) \leq \frac{\text{vol}(\Gamma \backslash \mathfrak{h}^2)}{n^2}$$

und Aufsummieren über  $n \geq 1$  zeigt, dass  $\Gamma \backslash \tilde{X}$  endliches Volumen besitzt.

Trotz dieser schlechten Nachrichten gibt es dennoch ein Endlichkeitsresultat für die meisten interessanten Beispiele. Dieses wird auch erklären, warum in den Berechnungen in Abschnitt 4.c. die auftretenden Invarianten alle endlichdimensional waren.

**4.18. Satz.** Sei  $\mathbb{G}$  eine halbeinfache algebraische Gruppe über  $\mathbb{Q}$ ,  $K$  eine maximal kompakte Untergruppe von  $G = \mathbb{G}(\mathbb{R})$ . Sei weiterhin  $X = G/K$  und  $\Gamma < G$  eine arithmetische Untergruppe sowie  $p : X \rightarrow \Gamma \backslash X$  die Projektion. Für alle Stabilisatoren  $H < \Gamma$  besitze  $p(X_H)$  nur endlich viele Zusammenhangskomponenten. Dann ist  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  endlichdimensional für alle Darstellungen  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  von  $\Gamma$ .



*Beweis.* Sei  $\mathcal{S}$  die grösste Isotropiestratifizierung von  $X$  aus 2.6., das heißt die Straten sind genau die Zusammenhangskomponenten von  $X_H$ , wobei  $H$  die Stabilisatoren durchläuft. Nach [Bor1] existieren nur endlich viele Konjugationsklassen von Stabilisatoren. Mit der Voraussetzung, dass  $p(X_H)$  endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzt, folgt, dass der Quotient  $Y = \Gamma \backslash X$  nur endlich viele Straten besitzt. Aus 4.15., folgt, dass  $\mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S})^\Gamma$  endlichdimensional ist. Wüssten wir, dass  $\text{Ext}_{X,\Gamma}^*(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X)$  endlichdimensional ist, wären wir aufgrund der Spektralsequenz 3.15. fertig. Nun ist aber  $X$  zusammenziehbar, weil  $G$  halbeinfach und  $K$  maximalkompakt ist (siehe [Hel, VI.2.2.]). Also ist  $\text{Ext}_{X,\Gamma}^*(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X) \cong H^*(\Gamma, \text{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{N}))$  nach 1.26. und dies ist endlichdimensional wegen [Rag].  $\square$

**Bemerkung.** Die Bedingung, dass  $p(X_H)$  endlich viele Zusammenhangskomponenten für alle  $H$  besitzt, ist für alle Standardbeispiele erfüllt und dem Autor sind keine Beispiele bekannt, wo dies nicht der Fall ist. Es ist nicht klar, ob diese Voraussetzung redundant ist, d.h. ob sie automatisch für alle (halbeinfachen) algebraischen Gruppen erfüllt ist.

## Kapitel 5

# Azyklität der De-Rham-Auflösung

Dieses Kapitel ist einerseits für sich genommen interessant, weil wir mitunter die Berechenbarkeit der Invarianten  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  durch die De-Rham-Auflösung beweisen. Andererseits ist dies eine Vorbereitung des Beweises von 3.15. Im ersten Abschnitt behandeln wir ganz allgemein azyklische Auflösungen. In den restlichen Abschnitten geht es um Azyklitätseigenschaften der De-Rham-Auflösung bezüglich der Funktoren  $\text{Ext}_\Gamma^*(\mathcal{K}, -)$  bzw.  $\text{Ext}_\Gamma^*(\mathcal{Q}, -)$ , die in den Azyklitätslemmata zusammengefasst sind – hierbei ist  $\mathcal{K}$  eine konstruierbare  $\Gamma$ -Untergarbe einer konstanten  $\Gamma$ -Garbe und  $\mathcal{Q}$  ist eine dünne Garbe. Diese Azyklitätslemmata sind grundlegend für das Kapitel 6, wo die Spektralsequenz 3.15. hergeleitet wird.

### 5.a. Azyklische Auflösungen

Sei  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein linksexakter Funktor zwischen abelschen Kategorien, wobei  $\mathcal{A}$  genügend viele Injektive besitze. Dann ist der abgeleitete Funktor  $R^*F$  auf Objekten  $A \in \mathcal{A}$  gegeben durch  $R^*F(A) = H^*(F(I^\bullet))$  für jede injektive Auflösung  $A \rightarrow I^\bullet$  von  $A$ . Statt injektive kann man aber auch  $F$ -azyklische Auflösungen nehmen. Ein Objekt  $J$  heißt  $F$ -azyklisch, wenn  $R^j F(J) = 0$  für alle  $j > 0$  gilt, vgl. [Wei, 2.4.3]. Die nächste Proposition liefert uns zusätzlich einen „expliziten“ Isomorphismus  $R^n F(A) \cong H^n(F(J^\bullet))$  bei einer  $F$ -azyklischen Auflösung  $J^\bullet$  von  $A$ .

**5.1. Proposition.** *Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  abelsche Kategorien und  $\mathcal{A}$  besitze genügend viele Injektive. Sei  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein linksexakter Funktor. Sei  $A \in \mathcal{A}$  ein Objekt mit einer  $F$ -azyklischen Auflösung  $A \rightarrow J^\bullet$ . Jeder Quasiisomorphismus  $\gamma : J^\bullet \rightarrow I^\bullet$ , wobei  $I^\bullet$  ein Komplex von injektiven Objekten ist, induziert einen Isomorphismus  $\gamma_* : H^*(F(J^\bullet)) \rightarrow H^*(F(I^\bullet)) = R^*F(A)$ .*

*Beweis.* Die Kettenabbildung  $\gamma$  induziert eine Abbildung von Spektralsequenzen

$$\begin{array}{ccc} H^p(R^q F(J^\bullet)) & \Longrightarrow & \mathbb{R}^{p+q} F(J^\bullet) \\ H^p(R^q F(\gamma)) \downarrow & & \cong \downarrow \mathbb{R}^{p+q} \gamma \\ H^p(R^q F(I^\bullet)) & \Longrightarrow & \mathbb{R}^{p+q} F(I^\bullet), \end{array}$$

wobei die Isomorphie des rechten vertikalen Pfeils von der Tatsache herrührt, dass hyperabgeleitete Funktoren nach [Wei, Cor. 5.7.7] Quasiisomorphismen in Isomorphismen überführen. Da  $I^\bullet$  und  $J^\bullet$  beide  $F$ -azyklisch sind, degeneriert die Abbildung von Spektralsequenzen zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^*(F(J^\bullet)) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{R}^* F(J^\bullet) \\ \downarrow \gamma_* & & \downarrow \cong \\ H^*(F(I^\bullet)) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{R}^* F(I^\bullet), \end{array}$$

wobei die horizontalen Pfeile jeweils die Kantenhomomorphismen sind.  $\square$

Es ist technisch gesehen von Vorteil, eine allgemeinere Klasse von azyklischen Auflösungen zu betrachten, nämlich solche, die nach einem „Shift“ azyklisch sind (ein Beispiel ist die De-Rham-Auflösung für die relative Kohomologie, wie wir später sehen werden):

**Definition.** Sei  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  wie oben und  $m \geq 0$  beliebig. Ein Objekt  $J$  von  $\mathcal{A}$  heißt *F-azyklisch von der Höhe  $m$* , wenn  $R^j F(J) = 0$  für alle  $j \neq m$  gilt. Eine Auflösung  $A \rightarrow J^\bullet$  eines Objektes  $A \in \mathcal{A}$  heißt *F-azyklisch von der Höhe  $m$* , wenn  $J^i$  für alle  $i \geq 0$  *F-azyklisch von der Höhe  $m$*  ist.

Beachte, dass „*F-azyklisch von der Höhe 0*“ gleichbedeutend mit „*F-azyklisch*“ ist.

**5.2. Lemma.** Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  abelsche Kategorien, wobei  $\mathcal{A}$  genügend viele Injektive besitze. Sei  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein linksexakter Funktor,  $A \in \mathcal{A}$  ein Objekt mit einer *F-azyklischen Auflösung*  $A \rightarrow C^\bullet$  von der Höhe  $m$  für ein  $m \geq 0$ . Dann gilt

$$H^*(R^m F(C^\bullet)) \cong R^{*+m} F(A),$$

wobei  $R^m F(C^\bullet)$  auf natürliche Weise als Kettenkomplex aufgefasst wird.

Man kann dies elementar beweisen. Die Maschinerie der hyperabgeleiteten Funktoren und ihrer Spektralsequenzen gibt uns aber auch den folgenden alternativen Beweis.

*Beweis.* Sei  $\mathbb{R}^* F$  der hyperabgeleitete Funktor von  $F$ , vgl. [Wei, S. 147ff.] oder [Gro, S. 146ff.] (auch für die folgenden Argumente). Es existiert eine Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H^p(R^q F(C^\bullet)) \Rightarrow \mathbb{R}^{p+q} F(C^\bullet).$$

Diese Spektralsequenz degeneriert unter unseren Voraussetzungen, so dass

$$H^*(R^m F(C^\bullet)) \cong \mathbb{R}^{*+m} F(C^\bullet)$$

folgt. Nun haben wir einen Quasiisomorphismus  $A \rightarrow C^\bullet$  und weil der hyperabgeleitete Funktor  $\mathbb{R}^* F$  Quasiisomorphismen in Isomorphismen überführt, gilt  $\mathbb{R}^* F(C^\bullet) \cong \mathbb{R}^* F(A) = R^* F(A)$ .  $\square$

Wir diskutieren nun einige für uns relevante Beispiele von azyklischen Auflösungen von linksexakten Funktoren auf der Kategorie von Garben  $\mathcal{A} = Sh(X)$ . Hier nehmen wir an, dass  $X$  ein beliebiger topologischer Raum und der Grundring  $k$  ebenfalls allgemein ist.

**5.3. Beispiel.** Eine Garbe  $\mathcal{C}$  auf  $X$  heißt *welk*, wenn  $\mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(U)$  für alle offenen Teilmengen  $U \subset X$  surjektiv ist. Welche Garben sind  $H^0(X, -)$ -azyklisch, so dass Garbenkohomologie mit welchen Auflösungen berechnet werden kann. Injektive Garben sind nach [Bre2, Prop. 5.3.] immer *welk*. Die Umkehrung gilt, wie man sich leicht davon überzeugen kann, im Allgemeinen nur, wenn der Grundkörper  $k$  ein Körper ist, so dass in diesem Fall *welke* Auflösungen für *alle* linksexakten Funktoren gut sind, also z.B. wenn man die  $\text{Ext}^n$ -Gruppen bestimmen möchte.

Eine kanonische *welke* Auflösung (von allen Garben) gibt uns die folgende klassische Konstruktion.

**5.4. Beispiel** ([Bre2, S. 44]). Sei  $\mathcal{F} \in Sh(X)$  eine Garbe. Sei  $\mathcal{C}^0(\mathcal{F})$  die Garbe der *Serrationen* auf  $X$ : Die lokalen Schnitte über  $U \subset X$  sind gegeben durch beliebige Abbildungen  $s : U \rightarrow \coprod_{x \in U} \mathcal{F}_x$  mit  $s(x) \in \mathcal{F}_x$  für alle  $x \in U$ . Diese Garbe ist offensichtlich *welk* und es existiert ein kanonischer Monomorphismus  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{F})$ , denn jeden lokalen Schnitt von  $\mathcal{F}$  kann man kanonisch als eine *Serration* auffassen. Es bezeichne  $\mathcal{Z}^1(\mathcal{F})$  den Kokern von  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{F})$  und  $\mathcal{C}^1(\mathcal{F}) := \mathcal{C}^0(\mathcal{Z}^1(\mathcal{F}))$ . Man kann diese Konstruktion induktiv fortsetzen und erhält eine kanonische *welke* Auflösung  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{F})$ .

Diese Konstruktion kann in den äquivarianten Kontext übertragen werden, siehe etwa [Gro, 5.1.2]. In beiden Fällen (äquivariant oder nicht) kann man diese Konstruktion verfeinern, indem man noch die Halme in injektive Moduln einbettet und diese Verfeinerung gibt uns den Beweis, dass die Kategorie der Garben bzw. der äquivarianten Garben genügend viele Injektive besitzt.

**5.5. Beispiel.** Eine Garbe  $\Omega$  heißt *weich*, wenn  $\Omega(X) \rightarrow \Omega(K)$  für alle kompakten Teilmengen  $K \subset X$  surjektiv ist. Solche Garben sind  $H_c^0(X, -)$ -injektiv nach [Bre2, Th. 9.11], so dass Kohomologie mit kompaktem Träger mit weichen Garben berechnet werden kann. Ist  $X$  eine Mannigfaltigkeit, so sind weiche Garben sogar  $H^0(X, -)$ -azyklisch nach [Bre2, Th. 9.11], so dass in diesem Fall auch die gewöhnliche Garbenkohomologie mit weichen Garben berechnet werden kann. Welche Garben sind *weich*. Das folgende Beispiel gibt uns eine kanonische *weiche* Auflösung von Garben auf Mannigfaltigkeiten, die nicht *welk* ist und in vielen Situationen besser als die kanonische *welke* Auflösung  $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{F})$  ist.

**5.6. Beispiel.** Sei  $X$  eine Mannigfaltigkeit und  $k = \mathbb{R}$  oder  $k = \mathbb{C}$ . Sei  $\Omega_X^q$  die Garbe der  $k$ -wertigen  $q$ -Differentialformen auf  $X$ . Die äußere Ableitung  $d: \Omega_X^q \rightarrow \Omega_X^{q+1}$  von Differentialformen definiert eine Auflösung  $k_X \rightarrow \Omega_X^\bullet$ , wobei die Exaktheit gerade der Inhalt des Poincaré-Lemmas ist. Für jede Garbe  $\mathcal{F} \in Sh(X)$ , ist  $\mathcal{F} \otimes_k \Omega_X^\bullet$  eine weiche Auflösung von  $\mathcal{F}$ , die sogenannte *De-Rham-Auflösung* von  $\mathcal{F}$ .

**5.7. Bemerkung.** Für alle lokalabgeschlossenen Untermannigfaltigkeiten  $Z \subset X$  gilt  $\Omega_X^\bullet|_Z = \Omega_Z^\bullet$ .

Ist  $Z$  offen, so ist dies offensichtlich. Ist  $Z$  abgeschlossen, so folgt dies aus der Tatsache, dass jede Differentialform auf  $U \cap Z$  für eine offene Teilmenge  $U \subset X$  fortgesetzt werden kann zu einer Differentialform auf  $U$ .

**5.8. Proposition.** Ist  $Z \subset X$  eine  $\Gamma$ -invariante, abgeschlossene Teilmenge, so dass  $\overline{X - Z} = X$  gilt, so ist  $\Omega_X^\bullet \otimes \mathbf{N}$  für jeden  $\Gamma$ -Modul  $\mathbf{N}$  eine  $H_Z^0(X; -)$ -azyklische Auflösung von  $\mathbf{N}_X$  von der Höhe 1, d.h.

$$H_Z^j(X; \Omega_X^\bullet \otimes \mathbf{N}_X) = 0, \quad j \neq 1.$$

Insbesondere gilt  $H_Z^{*+1}(X; \mathbf{N}_X) \cong H^*(H_Z^0(X; \Omega_X^\bullet \otimes \mathbf{N}_X)) \in \Gamma\text{-mod}$ .

*Beweis.* Jede Differentialform auf  $X$ , die auf  $X - Z$  verschwindet, muss aus Stetigkeitsgründen auf ganz  $X$  verschwinden. Das bedeutet  $H_Z^j(X; \Omega_X^\bullet \otimes \mathbf{N}_X) = 0$  für  $j = 0$ . Die Aussage für  $j \geq 2$  folgt aus der langen exakten Sequenz des Paares  $(X, X - Z)$ , denn nach der letzten Bemerkung 5.7. ist  $\Omega_X^\bullet \otimes \mathbf{N}_X$  azyklisch für die Funktoren  $H^0(X; -)$  und  $H^0(X - Z; -)$ .  $\square$

Die letzte Proposition wirft die Frage auf, ob die lange exakte Sequenz von  $0 \rightarrow H^0(X; \Omega^\bullet) \rightarrow H^0(X - Z; \Omega^\bullet) \rightarrow H^1(X, X - Z; \Omega^\bullet) \rightarrow 0$  mit der langen exakten Sequenz des Paares  $(X, X - Z)$  übereinstimmt. Das ist tatsächlich richtig bis auf ein Vorzeichen, wie wir gleich sehen werden.

**5.9. Definition.** Seien  $F_1, F_2, F_3: \mathcal{A} \rightarrow k\text{-mod}$  linksexakte Funktoren, wobei  $\mathcal{A}$  genügend viele Injektive besitze. Eine Sequenz  $F_1 \xrightarrow{\alpha} F_2 \xrightarrow{\beta} F_3$  von natürlichen Transformationen heißt *exakt*, wenn  $0 \rightarrow F_1(I) \rightarrow F_2(I) \rightarrow F_3(I) \rightarrow 0$  für alle injektiven Objekte  $I \in \mathcal{A}$  exakt ist. Man zeigt, dass  $0 \rightarrow F_1(A) \rightarrow F_2(A) \rightarrow F_3(A)$  für alle  $A \in \mathcal{A}$  exakt ist, indem man die Sequenz  $F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3$  auf einen Monomorphismus  $A \rightarrow I$  mit  $I$  injektiv anwendet.

Die *lange exakte Sequenz* von  $F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3$  in einem Objekt  $A \in \mathcal{A}$  ist die assoziierte lange exakte Sequenz der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen  $0 \rightarrow F_1(I^\bullet) \rightarrow F_2(I^\bullet) \rightarrow F_3(I^\bullet) \rightarrow 0$ , wobei  $A \rightarrow I^\bullet$  eine injektive Auflösung ist. Sie hat die Gestalt

$$(5.10) \quad \dots \rightarrow R^j F_1(A) \rightarrow R^j F_2(A) \rightarrow R^j F_3(A) \rightarrow R^{j+1} F_1(A) \rightarrow \dots$$

**5.11. Proposition.** Sei  $F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3$  eine exakte Sequenz wie oben. Sei  $A \in \mathcal{A}$  und  $A \rightarrow \mathbf{J}^\bullet$  eine Auflösung mit den Eigenschaften

- $J^\bullet$  ist  $F_2$ - und  $F_3$ -azyklisch
- $J^\bullet$  ist  $F_1$ -azyklisch von der Höhe 1.

Dann ist die lange exakte Sequenz von  $0 \rightarrow F_2(J^\bullet) \rightarrow F_3(J^\bullet) \rightarrow R^1 F_1(J^\bullet) \rightarrow 0$  isomorph zu 5.10 bis auf ein Vorzeichen. Das heißt, dass vertikale Isomorphismen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & R^j F_1(A) & \longrightarrow & R^j F_2(A) & \longrightarrow & R^j F_3(A) & \longrightarrow & R^{j+1} F_1(A) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow \cong & & -1 & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 \cdots & \longrightarrow & H^{j-1}(R^1 F_1(J^\bullet)) & \longrightarrow & H^j(F_2(J^\bullet)) & \longrightarrow & H^j(F_3(J^\bullet)) & \longrightarrow & H^j(R^1 F_1(J^\bullet)) & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

existieren, so dass das Rechteck mit „-1“ bis auf ein Vorzeichen und die anderen strikt kommutieren.

*Beweis.* Sei  $\gamma : J^\bullet \rightarrow I^\bullet$  ein Quasi-Isomorphismus, wobei  $I^\bullet$  ein Komplex von Injektiven sei (für die Existenz siehe man in [Ive] nach). Insbesondere ist  $I^\bullet$  eine Auflösung von  $A$ . Betrachte das kommutative Diagramm von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & F_2(J^\bullet) & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & F_3(J^\bullet) & \longrightarrow & R^1 F_1(J^\bullet) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow F_2(\gamma) & & \downarrow F_3(\gamma) & & & & \\
 0 & \longrightarrow & F_1(I^\bullet) & \xrightarrow{\alpha} & F_2(I^\bullet) & \xrightarrow{\beta} & F_3(I^\bullet) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Die beiden vertikalen Morphismen sind Quasi-Isomorphismen nach 5.1. Da wir mit Kettenkomplexen von Vektorräumen arbeiten und damit jede kurze exakte Sequenz gradweise zerfällt, existieren nach [GM1, IV.13] Kettenmorphismen  $R^1 F_1(J^\bullet) \rightarrow F_2 J^\bullet[1]$  und  $F_3 I^\bullet \rightarrow F_1 I^\bullet[1]$ , die die obigen kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen zu exakten Dreiecken  $F_2 J^\bullet \rightarrow F_3 J^\bullet \rightarrow R^1 F_1(J^\bullet) \rightarrow F_2 J^\bullet[1]$  bzw.  $F_1 I^\bullet \rightarrow F_2 I^\bullet \rightarrow F_3 I^\bullet \rightarrow F_1 I^\bullet[1]$  machen (wir fassen hier die Homotopiekategorie der Kettenkomplexe gemäß [GM1, IV.§2] als triangulierte Kategorie auf). Wir erhalten einen Morphismus von exakten Dreiecken nach den Axiomen triangulierter Kategorien:

$$(5.12) \quad \begin{array}{ccccccc}
 F_2(J^\bullet) & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & F_3(J^\bullet) & \longrightarrow & R^1 F_1(J^\bullet) & \longrightarrow & F_2(J^\bullet)[1] \\
 F_2(\gamma) \downarrow \simeq & & F_3(\gamma) \downarrow \simeq & & \downarrow \exists & & \downarrow \simeq \\
 F_2(I^\bullet) & \xrightarrow{\beta} & F_3(I^\bullet) & \longrightarrow & F_1(I^\bullet)[1] & \xrightarrow{-\alpha} & F_2(I^\bullet)[1],
 \end{array}$$

woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**5.13. Proposition.** Sei  $F_1 \xrightarrow{\alpha} F_2 \xrightarrow{\beta} F_3$  eine kurze exakte Sequenz von linksexakten Funktoren. Sei  $A \rightarrow J^\bullet$  eine  $F_i$ -azyklische Auflösung von der Höhe  $m \geq 0$

für  $i = 1, 2, 3$ . Dann existiert ein Isomorphismus von langen exakten Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^*(R^m F_1(J^\bullet)) & \longrightarrow & H^*(R^m F_2(J^\bullet)) & \longrightarrow & H^*(R^m F_3(J^\bullet)) \xrightarrow{+} \dots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \dots & \longrightarrow & R^{m+*} F(A) & \longrightarrow & R^{m+*} F(A) & \longrightarrow & R^{m+*} F(A) \xrightarrow{+} \dots \end{array}$$

*Beweis.* Sei  $F = F_i$  für ein  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Wähle eine Cartan-Eilenberg-Auflösung  $I^{\bullet\bullet}$  von  $J^\bullet$ , siehe [Wei, 5.7.1]. Insbesondere ist der Totalkomplex  $|I^{\bullet\bullet}|$  eine injektive Auflösung von  $A$ . Der Doppelkomplex  $I^{\bullet\bullet}$  kommt zusammen mit injektiven Auflösungen  $J^p \rightarrow I^{p,\bullet}$  für alle  $p \geq 0$ . Es gilt daher  $H^j(F(J^{p,\bullet})) = R^j F(J^p) = 0$  für alle  $p \geq 0$  und  $j \neq m$ . Nach [KS, 1.3.7] sind die beiden Pfeile in der Sequenz

$$F(I^{p,\bullet}) \rightarrow \tau^{\geq m} F(I^{p,\bullet}) \leftarrow \tau^{\leq m} \tau^{\geq m} F(I^{p,\bullet}) = H^m(F(I^{p,\bullet}))[m] = R^m F(J^p)[m]$$

Quasiisomorphismen für alle  $p \geq 0$ , wobei  $\tau^{\leq m}$  und  $\tau^{\geq m}$  die Abschneidungsfunktoren [KS, (1.3.10)] sind. Diese Pfeile induzieren Kettenhomomorphismen

$$|F(I^{\bullet\bullet})| \rightarrow |\tau^{\geq m}(F(I^{\bullet\bullet}))| \leftarrow R^m F(J^\bullet)[-m],$$

wobei  $\tau^{\geq m}$  auf dem Doppelkomplex  $F(I^{\bullet\bullet})$  komponentenweise, also auf den einzelnen  $F(I^{p,\bullet})$ ,  $p \geq 0$ , wirke. Diese Homomorphismen sind Quasiisomorphismen nach [KS, Th. 1.9.3] (oder man rechnet es per Hand mit der Technik des „Tic-Tac-Toe-Lemmas“ aus [BT, S. 135] nach). Die Konstruktion ist nun so gemacht, dass man eine Kette von Quasiisomorphismen von exakten Dreiecken hat:

$$\begin{array}{ccccc} |F_1(I^{\bullet\bullet})| & \longrightarrow & |\tau^{\geq m}(F_1(I^{\bullet\bullet}))| & \longleftarrow & R^m F_1(J^\bullet)[-m] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ |F_2(I^{\bullet\bullet})| & \longrightarrow & |\tau^{\geq m}(F_2(I^{\bullet\bullet}))| & \longleftarrow & R^m F_2(J^\bullet)[-m] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ |F_3(I^{\bullet\bullet})| & \longrightarrow & |\tau^{\geq m}(F_3(I^{\bullet\bullet}))| & \longleftarrow & R^m F_3(J^\bullet)[-m] \\ \downarrow + & & \downarrow + & & \downarrow + \\ |F_1(I^{\bullet\bullet})|[1] & \longrightarrow & |\tau^{\geq m}(F_1(I^{\bullet\bullet}))|[1] & \longleftarrow & R^m F_1(J^\bullet)[-m+1], \end{array}$$

denn  $\tau^{\geq m}$ ,  $\tau^{\leq m}$  und  $|\cdot|$  respektieren die triangulierte Struktur, siehe [KS, S. 54ff.]. Die langen exakten Sequenzen dieser exakten Dreiecke liefern das Gewünschte.  $\square$

**5.14. Korollar.** Sei  $X$  eine Mannigfaltigkeit und  $Y, Z \subset X$  abgeschlossene Teilmengen mit  $Z \subset Y$  und so dass  $X - Y$  dicht in  $X$  ist.

- (a) Die Sequenz  $0 \rightarrow k_{X-Y}^X \rightarrow k_X \rightarrow k_Y^X \rightarrow 0$  induziert eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen  $0 \rightarrow H^0(X; \Omega_X^\bullet) \rightarrow H^0(X \setminus Y; \Omega_X^\bullet) \rightarrow H_Y^1(X; \Omega_X^\bullet) \rightarrow 0$ , deren lange exakte Kohomologiesequenz bis auf ein Vorzeichen isomorph zur langen exakten Sequenz des Paares  $(X, X - Y)$  ist.

(b) Die Sequenz  $0 \rightarrow k_{Y-Z}^X \rightarrow k_Y^X \rightarrow k_Z^X \rightarrow 0$  induziert eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen  $0 \rightarrow H_Z^1(X; \Omega_X^\bullet) \rightarrow H_Y^1(X; \Omega_X^\bullet) \rightarrow H_Y^1(X-Z; \Omega_X^\bullet) \rightarrow 0$  deren lange exakte Kohomologiesequenz isomorph zur langen exakten Sequenz des Tripels  $(X, X-Z, X-Y)$  ist.

*Beweis.* (a) Wende 5.11. auf die Funktoren  $F_1 = \text{Hom}_X(k_X, -)$ ,  $F_2 = \text{Hom}_X(k_X, -)$ ,  $F_3 = \text{Hom}_X(k_{X-Z}, -)$  und auf die De-Rham-Auflösung  $J^\bullet = \Omega_X^\bullet$  an. Beachte dabei 1.31. (hier ist  $M = k$  und  $\Gamma$  die triviale Gruppe).

(b) Man gehe wie bei (a) vor, indem man Hom auf die kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow k_{Y-Z}^X \rightarrow k_Y^X \rightarrow k_Z^X \rightarrow 0$  anwendet, um eine kurze exakte Sequenz von Funktoren

$$0 \rightarrow \text{Hom}(k_Z^X, -) \rightarrow \text{Hom}(k_Y^X, -) \rightarrow \text{Hom}(k_{Y-Z}^X, -) \rightarrow 0$$

zu erhalten. Wähle wieder  $J^\bullet = \Omega_X^\bullet$  und wende 5.13. in Kombination mit 5.8. an (beachte, dass auch  $X-Z$  dicht in  $X$  ist, weil es  $X-Y$  enthält und  $X-Y$  dicht in  $X-Z$  ist). Benutze auch hier 1.31.  $\square$

## 5.b. Der De-Rham-Komplex auf $\Gamma \backslash X$

Es bezeichne  $\Omega_X^q$  die Garbe der  $k$ -wertigen  $q$ -Differentialformen auf  $X$ , d.h. für alle offenen Teilmengen  $U \subset X$  setzen wir

$$H^0(U; \Omega_X^q) := \Omega^q(U) = \{ k\text{-wertige } q\text{-Formen auf } U \}.$$

Dies hat eine kanonische  $\Gamma$ -Garbenstruktur. Ein  $g \in \Gamma$  operiert auf  $\Omega_X^q$  via

$$g^* : \Omega^q(U) \rightarrow \Omega^q(gU), \quad \omega \mapsto g^*\omega$$

für alle offenen Teilmengen  $U \subset X$ . (Es ist  $\Omega_X^0 = C_X^\infty$  eine Garbe von  $k$ -Algebren. Man beachte, dass  $\Omega_X^q$  auch eine  $C_X^\infty$ -Modulstruktur besitzt und dass diese mit der Operation  $g^*$  verträglich ist.)

Die äußere Ableitung  $d$  von Differentialformen definiert einen exakten Komplex von Garben  $0 \rightarrow k_X \rightarrow \Omega_X^0 \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \xrightarrow{d} \Omega_X^2 \xrightarrow{d} \dots$  (Poincaré-Lemma). Man beachte, dass der Morphismus  $d$  die  $\Gamma$ -Operation respektiert, d.h. für alle  $q \geq 0$  ist  $d : \Omega^q \rightarrow \Omega^{q+1}$  ein Morphismus von  $\Gamma$ -Garben.

Wir bezeichnen  $\Omega_X^\bullet$  als den *De-Rham-Komplex von  $X$* , welcher eine Auflösung von  $k_X$  in der Kategorie  $Sh^\Gamma(X)$  ist. Allgemeiner definieren wir für jede  $\Gamma$ -Garbe  $\mathcal{F}$  die *De-Rham-Auflösung von  $\mathcal{F}$*  durch  $\Omega_X^\bullet(\mathcal{F}) := \Omega_X^\bullet \otimes_k \mathcal{F}$ . Deren Exaktheit folgt aus der Exaktheit von  $- \otimes_k \mathcal{F}$  ( $k$  ist ein Körper). Für eine konstante  $\Gamma$ -Garbe  $\mathbf{N}_X$  ( $\mathbf{N} \in \Gamma\text{-mod}$ ) setzen wir  $\Omega_X^\bullet(\mathbf{N}) := \Omega_X^\bullet \otimes_k \mathbf{N}_X$ .

Um diese Standardbegriffe auf den Quotienten  $Y = \Gamma \backslash X$  zu übertragen, verwenden wir den Funktor  $p_*^\Gamma$ : Wir setzen

$$(5.15) \quad \begin{aligned} C_Y^\infty &:= p_*^\Gamma(C_X^\infty) \\ \Omega_Y^q &:= p_*^\Gamma(\Omega_X^q) \\ \Omega_Y^q(\mathcal{N}) &:= p_*^\Gamma(\Omega_X^q(\mathbf{N})) \end{aligned}$$



$C_Y^\infty$  ist eine Garbe von  $k$ -Algebren auf  $Y$  und  $\Omega_Y^\bullet(\mathcal{N})$  ist eine Auflösung von  $\mathcal{N}$  aufgrund der Exaktheit von  $p_*^\Gamma$  (vgl. 1.16.).

**5.16. Proposition.** *Für alle  $q \geq 0$  und  $\mathbf{N} \in \Gamma\text{-mod}$  existiert ein natürlicher Isomorphismus  $\Omega_Y^q(\mathcal{N}) \cong \Omega_Y^q \otimes_k \mathcal{N}$ .*

Diese Proposition beruht auf einem allgemeineren Prinzip (beachte, dass  $\Gamma_x$  trivial auf dem Halm  $(\Omega_X^q)_x$  operiert).

**5.17. Proposition.** *Für alle  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Sh}^\Gamma(X)$  existiert ein funktorieller Homomorphismus  $p_*^\Gamma(\mathcal{F}) \otimes p_*^\Gamma(\mathcal{G}) \rightarrow p_*^\Gamma(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ , der auf den Halmen über  $x \in X$  durch die kanonische Einbettung  $\mathcal{F}_x^{\Gamma_x} \otimes \mathcal{G}_x^{\Gamma_x} \rightarrow (\mathcal{F}_x \otimes \mathcal{G}_x)^{\Gamma_x}$  gegeben ist. Insbesondere ist  $p_*^\Gamma(\mathcal{F}) \otimes p_*^\Gamma(\mathcal{G})$  isomorph zu  $p_*^\Gamma(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ , wenn alle  $x \in X$  der Stabilisator  $\Gamma_x$  trivial auf  $\mathcal{F}_x$  oder  $\mathcal{G}_x$  operiert.*

*Beweis.* Zunächst eine allgemeine Bemerkung: Man hat immer eine kanonische Einbettung  $A^G \otimes B^G \hookrightarrow (A \otimes B)^G$  für alle Gruppen  $G$  und  $k[G]$ -Moduln  $A, B$ , welche ein Monomorphismus ist, wenn  $k$  ein Körper und einer der Moduln trivial ist.

Der fragliche Homomorphismus in unserer Situation ist definiert als die Garbifizierung des Homomorphismus von Prägarben, der über einer offenen Teilmenge  $U \subset Y$  gegeben ist durch die kanonische Einbettung

$$H^0(p^{-1}(U); \mathcal{F})^\Gamma \otimes H^0(p^{-1}(U); \mathcal{G})^\Gamma \hookrightarrow H^0(p^{-1}(U); \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})^\Gamma.$$

□

## 5.c. Azyklitätslemmata

Für die folgenden „Azyklitätslemmata“ fixieren wir eine Isotropie-Stratifizierung  $\mathcal{S}$  von  $X$  und zwei  $\Gamma$ -Moduln  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{N}$ . Es sei daran erinnert, dass die Definition von dünnen Garben in 2.18. gegeben wurde.

**5.18. Erstes Azyklitätslemma.** *Sei  $\mathcal{Q} \in \text{Sh}^\Gamma(X)$  eine  $\mathcal{S}^m$ -dünne Garbe für ein  $m \in \{0, \dots, n\}$  mit Halmen  $A_\sigma$  über  $|\sigma|$ . Dann gilt:*

- (a)  $\text{Ext}_X^j(\mathcal{Q}, \Omega^q(\mathbf{N})) = 0$  für alle  $j \neq 1$  und  $q \geq 0$ . D.h.  $\Omega^q(\mathbf{N})$  ist  $\text{Hom}(\mathcal{Q}, -)$ -azyklisch von der Höhe 1.
- (b) Der kanonische Morphismus  $\text{Ext}_{X, \Gamma}^*(\mathcal{Q}, \Omega^q(\mathbf{N})) \rightarrow \text{Ext}_X^*(\mathcal{Q}, \Omega^q(\mathbf{N}))^\Gamma$  ist ein Isomorphismus für alle  $q \geq 0$ .
- (c) Es existiert ein kanonischer Isomorphismus von Kettenkomplexen von injektiven  $\Gamma$ -Moduln:

$$\text{Ext}^1(\mathcal{Q}, \Omega^\bullet(\mathbf{N})) = \prod_{\dim \sigma = m} \text{Hom}(A_\sigma, \mathbf{N}) \otimes H_{|\sigma|}^1(U_\sigma; \Omega_X^\bullet).$$

**5.19. Zweites Azyklitätslemma.** Sei  $\mathcal{K} \subset \mathbf{M}_X$  eine  $\mathcal{S}$ -konstruierbare  $\Gamma$ -Untergarbe. Dann gilt  $\text{Ext}_{X,\Gamma}^j(\mathcal{K}, \Omega^q(\mathbf{N})) = 0$  für alle  $j > 0$  und  $q \geq 0$ .

Als einen Spezialfall des zweiten Azyklitätslemmas erhalten wir ein wichtiges theoretisches Hilfsmittel für das Studium der Invarianten  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ , nämlich dass sie mit der De-Rham-Auflösung berechnet werden können:

**5.20. Satz.** Sei  $X$  ein diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum,  $p : X \rightarrow Y = \Gamma \backslash X$  die natürliche Projektion,  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{N}$  Darstellungen von  $\Gamma$ ,  $\mathcal{M} = p_*^\Gamma(\mathbf{M}_X)$  und  $\mathcal{N} = p_*^\Gamma(\mathbf{N}_X)$ . Dann ist die De-Rham-Auflösung  $\Omega_X^\bullet(\mathcal{N})$  eine  $\text{Hom}_\Gamma(\mathcal{M}, -)$ -azyklische Auflösung von  $\mathcal{N}$ . Insbesondere gilt  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = H^*(\text{Hom}(\mathcal{M}, \Omega^\bullet(\mathcal{N})))$ .

*Beweis.* Man wende das zweite Azyklitätslemma 5.19. auf  $\mathcal{K} = p^*\mathcal{M}$  an ( $p^*\mathcal{M}$  ist eine konstruierbare Untergarbe von  $\mathbf{M}_X$ , vgl. 1.24.). Es gilt  $\text{Ext}^j(\mathcal{M}, \Omega^q(\mathcal{N})) = \text{Ext}_\Gamma^j(p^*\mathcal{M}, \Omega^q(\mathbf{N})) = 0$  nach 1.17. und 5.18. für alle  $j > 0$  und  $q \geq 0$ .  $\square$

**5.21. Korollar.** Die Voraussetzungen seien wie im letzten Theorem. Dann gilt:

- $\Omega^\bullet(\mathcal{N})$  ist  $\text{Hom}(\mathcal{M}, -)$ -azyklisch
- $\Omega^\bullet(\mathbf{N})$  ist  $p_*^\Gamma \text{Hom}(p^*\mathcal{M}, -)$ -azyklisch

Insbesondere gilt:

- $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = H^*(\text{Hom}(\mathcal{M}, \Omega^\bullet(\mathcal{N})))$
- $p_*^\Gamma \text{Ext}^*(p^*\mathcal{M}, \mathbf{N}_X) = p_*^\Gamma H^*(\text{Hom}(p^*\mathcal{M}, \Omega^\bullet(\mathbf{N})))$

## 5.d. Beweis der Azyklitätslemmata

Wir gehen von den Voraussetzungen von 5.18. aus und fixieren die dort vorkommenden Objekte, also  $X, \Gamma$ , die Projektion  $p : X \rightarrow Y = \Gamma \backslash X$ , die Darstellungen  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$  von  $\Gamma$ , sowie eine Isotropie-Stratifizierung  $\mathcal{S}$ . Außerdem fixieren wir  $q \geq 0$  und setzen  $\Omega := \Omega^q(\mathbf{N})$ .

**Beweis des ersten Azyklitätslemmas** Nach 2.21. haben wir einen Isomorphismus von  $\Gamma$ -mod-wertigen Funktoren

$$\begin{aligned} \text{Hom}_X(\mathcal{Q}, -) &\cong \prod_{\dim \sigma = m} \text{Hom}_k(A_\sigma, H_{|\sigma|}^0(U_\sigma; -)) \\ &\cong \prod_{\sigma \in \mathcal{R}_m} \text{coind}_{\Gamma_\sigma}^\Gamma \text{Hom}_k(A_\sigma, H_{|\sigma|}^0(U_\sigma; -)), \end{aligned}$$

wobei  $\mathcal{R}_m$  eine Menge von Repräsentanten der Orbits aller  $m$ -dimensionalen Straten ist. (Wir haben hier  $\text{Hom}(A_\sigma, H_{|\sigma|}^0(U_\sigma; -)) \cong \text{Hom}((A_\sigma)_{|\sigma|}^{U_\sigma}, -)$  benutzt, vgl. 1.31.). Ableitung auf beiden Seiten impliziert nach Einsetzen der Garbe  $\Omega$  den Isomorphismus von  $\Gamma$ -Moduln

$$\text{Ext}_X^*(\mathcal{Q}, \Omega) \cong \prod_{\sigma \in \mathcal{R}_m} \text{coind}_{\Gamma_\sigma}^\Gamma \text{Hom}_k(A_\sigma, H_{|\sigma|}^*(U_\sigma; \Omega)),$$

denn die Funktoren  $\text{Hom}_k$  und  $\text{coind}$  sind exakt. Da  $U_\sigma - |\sigma|$  dicht in  $U_\sigma$  ist, erhalten wir in Kombination mit 5.8. den Isomorphismus von  $\Gamma$ -Moduln:

$$(5.22) \quad \text{Ext}^j(\mathcal{Q}, \Omega) = \begin{cases} 0 & , j \neq 1 \\ \prod_{\sigma \in \mathcal{R}_m} \text{coind}_{\Gamma_\sigma}^\Gamma \text{Hom}(A_\sigma; H_{|\sigma|}^1(U_\sigma; \Omega)) & , j = 1. \end{cases}$$

Damit ist (a) und die Hälfte von (d) in 5.18. bewiesen (hier benutzen wir  $H_{|\sigma|}^*(U_\sigma; \Omega^q(\mathbf{N})) = H_{|\sigma|}^*(U_\sigma; \Omega_{U_\sigma}^q) \otimes \mathbf{N}$  – vgl. mit dem universellen Koeffizientensatz [Bre2, 15.3] und benutze die Endlichdimensionalität von  $\mathbf{N}$ .)

Für (b) und den Rest von (c) benötigen wir das folgende

**5.23. Lemma.** *Sei  $U \subset X$  eine offene Teilmenge und  $A \subset U$  eine  $\Gamma_U$ -invariante, abgeschlossene Teilmenge von  $U$ , so dass  $U - A$  dicht in  $U$  ist. Dann sind für alle  $q \geq 0$  die  $\Gamma_U$ -Moduln*

$$(a) \quad H^0(U; \Omega^q(\mathbf{N}))$$

$$(b) \quad H_A^1(U; \Omega^q(\mathbf{N})) = H^1(U, U - A; \Omega^q(\mathbf{N}))$$

*injektiv.*

*Beweis.* (a) Es sei ohne Einschränkung  $X = U$  und damit  $\Gamma_U = \Gamma$ . Man wähle eine lokalendliche Überdeckung  $\{U_\alpha\}$  von  $Y = \Gamma \backslash X$  durch zulässige Umgebungen  $U_\alpha$  (die zusammen mit einer zulässigen Umgebung  $V_\alpha \subset p^{-1}(U_\alpha)$  von gewissen  $x_\alpha \in X$  kommen). Zu dieser Überdeckung existiert eine Partition der Eins  $\{\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}\}$ . Wir setzen  $\varphi_\alpha := \psi_\alpha \circ p : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ . Betrachte nun den injektiven  $\Gamma$ -Morphismus

$$i : H^0(X; \Omega) \rightarrow \prod_{\alpha} H^0(p^{-1}(U_\alpha); \Omega), \quad \omega \mapsto (\omega|_{p^{-1}(U_\alpha)})_\alpha.$$

Dies hat eine  $\Gamma$ -äquivalente Retraktion:

$$\prod_{\alpha} H^0(p^{-1}(U_\alpha); \Omega) \rightarrow H^0(X; \Omega), \quad (\omega_\alpha)_\alpha \mapsto \sum_{\alpha} \varphi_\alpha \cdot \omega_\alpha,$$

wobei wir  $\varphi_\alpha \cdot \omega_\alpha$  auf ganz  $X$  mit 0 fortgesetzt verstehen. Die Wohldefiniertheit folgt aus der lokalen Endlichkeit der Überdeckung. Es genügt folglich zu zeigen, dass für alle  $\alpha$  der Modul  $H^0(p^{-1}(U_\alpha); \Omega)$  injektiv ist. Es ist  $H^0(p^{-1}(U_\alpha); \Omega) = \text{coind}_{\Gamma_{x_\alpha}}^\Gamma H^0(V_\alpha^{-1}; \Omega)$  nach 1.1. Da Moduln über der endlichen Gruppe  $\Gamma_{x_\alpha}$  immer injektiv sind und  $\text{coind}$  als rechtsadjungierter Funktor Injektive erhält, folgt die Behauptung.

(b) Beachte, dass  $H^0(U, U - A; \Omega) = 0$  gilt, denn  $U - A$  ist dicht in  $U$  und damit verschwindet jede Differentialform auf  $U$ , die auf  $U - A$  Null ist. Ferner ist  $H^1(U; \Omega) = 0$ , weil  $\Omega$  weich ist (vgl. auch 5.5.). Somit sieht das Anfangsstück der langen Kohomologiesequenz des Paares  $(U, U - A)$  folgendermaßen aus:

$$0 \rightarrow H^0(U; \Omega) \rightarrow H^0(U - A; \Omega) \rightarrow H^1(U, U - A; \Omega) \rightarrow 0.$$

Der linke und mittlere Term dieser kurzen exakten Sequenz sind nach (a) injektive  $\Gamma_U$ -Moduln, also ist es auch  $H^0(U, U - A; \Omega)$  (betrachte z.B. die lange exakte Sequenz von  $\text{Ext}_{k[\Gamma_U]}$ ).  $\square$

Mit 2.20. folgt nun, dass  $\text{Ext}_X^j(\mathcal{Q}, \Omega)$  für alle  $j$  ein injektiver  $\Gamma$ -Modul ist, denn als Rechtsadjungierte erhalten  $\text{Hom}(A_\sigma; -)$  und  $\text{coind}$  Injektive (womit auch (c) vollständig bewiesen wäre). Die Grothendieckspektralsequenz

$$H^p(\Gamma, \text{Ext}_X^q(\mathcal{K}^m/\mathcal{K}^{m+1}, \Omega)) \Rightarrow \text{Ext}_{X,\Gamma}^{p+q}(\mathcal{K}^m/\mathcal{K}^{m+1}, \Omega)$$

der Komposition  $(-)^{\Gamma} \circ \text{Hom}(\mathcal{K}^m/\mathcal{K}^{m+1}, -) = \text{Hom}_{\Gamma}(\mathcal{K}^m/\mathcal{K}^{m+1}, -)$  kollabiert daher und der Kantenmorphismus  $\text{Ext}_{\Gamma}^*(\mathcal{Q}, \Omega) \rightarrow \text{Ext}^*(\mathcal{Q}, \Omega)^{\Gamma}$  ist ein Isomorphismus.

**Beweis des zweiten Azyklitätslemmas** Sei  $\mathcal{K} \subset \mathbf{M}_X$  eine konstruierbare  $\Gamma$ -Untergarbe. Betrachte die Isotropie-Filtrierung  $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n+1} \subset \dots \subset \mathcal{K}^0 = \mathbf{M}_X$  aus 2.29. Wir werden jetzt induktiv beweisen, dass 5.19. für  $\mathcal{K}^j$  gültig ist. Die nächste Proposition behandelt den Induktionsanfang.

**5.24. Proposition.** *Sei  $X$  ein diskontinuierlicher  $\Gamma$ -Raum,  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{N}$  Darstellungen von  $\Gamma$ . Dann gilt  $\text{Ext}_{X,\Gamma}^j(\mathbf{M}_X, \Omega^q(\mathbf{N})) = 0$  für alle  $j > 0$  und  $q \geq 0$ .*

*Beweis.* Da die Garbe  $\Omega^q(\mathbf{N})$  fein ist, gilt  $H^j(X; \Omega^q(\mathbf{N})) = 0$  für alle  $j > 0$  und damit degeneriert die Spektralsequenz der Adjunktion 1.14 zum Isomorphismus  $\text{Ext}_{X,\Gamma}^*(\mathbf{M}_X, \Omega^q(\mathbf{N})) \cong \text{Ext}_{k\Gamma}^*(\mathbf{M}, H^0(X; \Omega^q(\mathbf{N})))$ . Die Aussage folgt nun aus Lemma 5.23., welches im Speziellen besagt, dass  $H^0(X; \Omega^q(\mathbf{N}))$  ein injektiver  $\Gamma$ -Modul ist.  $\square$

**Der Induktionsschritt.** Bei der Durchführung des induktiven Schritts werden wir über die kurze exakte Sequenz

$$(5.25) \quad 0 \rightarrow \mathcal{K}^{m+1} \rightarrow \mathcal{K}^m \rightarrow \mathcal{K}^m/\mathcal{K}^{m+1} \rightarrow 0$$

gehen.

*Abschluss des Beweises von 5.19..* Der Induktionsanfang  $m = 0$  ist der Inhalt von 5.24. und ist damit bereits gezeigt worden. Wir nehmen an, dass  $\text{Ext}_{\Gamma}^j(\mathcal{K}^i, \Omega) = 0$  für alle  $j > 0$  und  $i = 0, \dots, m$  wahr ist. Betrachte die von 5.25 induzierte lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_{\Gamma}^{j-1}(\mathcal{K}^m, \Omega) \rightarrow \text{Ext}_{\Gamma}^{j-1}(\mathcal{K}^{m+1}, \Omega) \rightarrow \text{Ext}_{\Gamma}^j(\mathcal{K}^m/\mathcal{K}^{m+1}, \Omega) \rightarrow \dots$$

Es ist  $\text{Ext}_{\Gamma}^{j-1}(\mathcal{K}^m, \Omega) = 0$  und  $\text{Ext}_{\Gamma}^j(\mathcal{K}^m/\mathcal{K}^{m+1}, \Omega) = 0$  für alle  $j > 1$  wegen der Induktionsvoraussetzungen bzw. wegen 5.18. (a) und (c). Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

## Kapitel 6

# Konstruktion der Spektralsequenz $E(\mathcal{S}, \mathcal{L})$

Dieses Kapitel stellt den Beweis des zentralen Theorems 3.15. dar, d.h. wir konstruieren die dort genannte Spektralsequenz  $E(\mathcal{S}, \mathcal{L})$  und beweisen die behaupteten Eigenschaften.

Wir fixieren im gesamten Kapitel eine Isotropiestratifizierung  $\mathcal{S}$  eines diskontinuierlichen  $\Gamma$ -Raumes  $X$ , die  $\Gamma$ -Moduln  $M$  und  $N$  sowie eine  $\mathcal{S}$ -konstruierbare  $\Gamma$ -Untergarbe  $\mathcal{K} \subset M_X$ . Es sei  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{K}, M, N)$  das Koeffizientensystem aus 3.6.

Die Konstruktion von  $E(\mathcal{S}, \mathcal{L})$  ist schnell erklärt: Die Isotropiefiltrierung  $\mathcal{K} = \mathcal{K}^n \subset \dots \subset \mathcal{K}^0 = M_X$  induziert eine Filtrierung von  $\text{Hom}(\mathcal{K}, \Omega_X^\bullet(N_X))$  durch die Kettenkomplexe  $\text{Hom}(\mathcal{K}^m, \Omega_X^\bullet(N_X))$ ,  $m \geq 0$ . Wir zeigen dann, dass die assoziierte Spektralsequenz isomorph zu  $E(\mathcal{S}, \mathcal{L})$  ist. Dass die Einträge isomorph sind, folgt leicht aus dem letzten Kapitel, wo dort die entscheidende Vorarbeit geleistet wurde, um die Azyklitätslemmata zu beweisen. Der schwierigere Teil ist der Vergleich der Differentiale, womit wir uns hier hauptsächlich beschäftigen werden. Zum Schluß beweisen wir dann die Zusätze des Theorems, die sich mit der Natürlichkeit der Spektralsequenz beschäftigen. Hier machen wir von der Eigenschaft von Spektralsequenzen, die von Filtrierungen herrühren, Gebrauch, dass sie funktoriell bezüglich Morphismen von Filtrierungen sind (vgl. [Gro, 2.4.]

### 6.a. Filtrierung von $\text{Hom}(\mathcal{K}, \Omega_X^\bullet(N))$

Wir erinnern an die Isotropie-Filtrierung 2.29. von  $M_X$  über  $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^n \subset \dots \subset \mathcal{K}^1 \subset \mathcal{K}^0 = M_X,$$

**6.1. Definition.** Für  $0 \leq m \leq n$  definieren wir den Komplex

$$F^m C^\bullet := \text{Hom}_\Gamma(\mathcal{K}^{n-m}, \Omega_X^\bullet(N))$$

und setzen  $C^\bullet = F^0 C^\bullet = \text{Hom}_\Gamma(\mathcal{K}, \Omega(\mathbf{N}))$ .  
 Man beachte, dass  $F^n C^\bullet \cong \text{Hom}_{k\Gamma}(\mathbf{M}, \Omega^\bullet(X) \otimes \mathbf{N})$  ist.

**6.2. Proposition.** *Die Inklusionen  $\mathcal{K}^{m+1} \subset \mathcal{K}^m$  induzieren eine absteigende Filtrierung von Kettenkomplexen*

$$0 \subset F^n C^\bullet \subset \dots \subset F^m C^\bullet \subset F^{m-1} C^\bullet \dots \subset F^0 C^\bullet = C^\bullet$$

mit den Eigenschaften

- (a)  $H^*(C^\bullet) = \text{Ext}_{X,\Gamma}^*(\mathcal{K}, \mathbf{N}_X)$
- (b)  $H^*(F^n C^\bullet) = \text{Ext}_{X,\Gamma}^*(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X)$ .
- (c)  $F^q C^\bullet / F^{q+j} C^\bullet = \text{Ext}_\Gamma^1(\mathcal{K}^{n-q-j} / \mathcal{K}^{n-q}, \Omega_X^\bullet(\mathbf{N}))$  für alle  $q, j \geq 0$  mit  $q + j \leq n$ .

*Beweis.* Teil (a) folgt aus 5.18. und Teil (b) aus 5.20. Zu (c): Sei  $\Omega = \Omega^\bullet(\mathbf{N})$ . Die kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow \mathcal{K}^{n-q} \rightarrow \mathcal{K}^{n-q-j} \rightarrow \mathcal{K}^{n-q-j} / \mathcal{K}^{n-q} \rightarrow 0$  induziert eine lange exakte Sequenz, deren Anfangsstück so aussieht:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_\Gamma(\mathcal{K}^{n-q-j} / \mathcal{K}^{n-q}, \Omega) &\rightarrow \text{Hom}_\Gamma(\mathcal{K}^{n-q-j}, \Omega) \rightarrow \text{Hom}_\Gamma(\mathcal{K}^{n-q}, \Omega) \\ &\rightarrow \text{Ext}_\Gamma^1(\mathcal{K}^{n-q-j} / \mathcal{K}^{n-q}, \Omega) \rightarrow \text{Ext}_\Gamma^1(\mathcal{K}^{n-q-j}, \Omega). \end{aligned}$$

Der erste und letzte Term dieser Sequenz ist 0 wegen des Azyklitätslemmas 5.18.  $\square$

Für die Filtrierung 6.1. existiert gemäß [McC, Th. 2.6] eine Spektralsequenz

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p C / F^{p+1} C) \Rightarrow H^{p+q}(C).$$

In Proposition 6.2. ist die halbe Arbeit getan, um die Einträge dieser Spektralsequenz mit den Einträgen von  $E(\mathcal{S}, \mathcal{L})$  aus 3.15. zu identifizieren. Es bleibt nur noch,  $H^{p+q}(F^p C / F^{p+1} C)$  entsprechend zu identifizieren. Mit Hilfe von Teil (b) und (c) von 6.2. lässt sich die Spektralsequenz in Kombination mit 5.18. ausdrücken als:

$$(6.3) \quad E_1^{p,q} = \begin{cases} \prod_{\sigma \in \mathcal{R}_{n-q-1}} (\text{Hom}(\mathbf{M} / \mathbf{M}_\sigma, \mathbf{N}) \otimes H^{p+q} \mathcal{C}_\sigma^\bullet)^{\Gamma_\sigma} & , q = 0, \dots, n-1 \\ \text{Ext}_{X,\Gamma}^{p+n}(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X) & , q = n, \end{cases}$$

wobei der Kettenkomplex  $\mathcal{C}_\sigma^\bullet$  von  $k\Gamma_\sigma$ -Moduln definiert sei durch

$$(6.4) \quad \mathcal{C}_\sigma^\bullet := H_{|\sigma|}^1(U_\sigma; \Omega_{U_\sigma}^\bullet) = H^1(U_\sigma, U_\sigma - |\sigma|; \Omega_{U_\sigma}^\bullet)$$

und  $\mathcal{R}_j$  ist eine Repräsentantenmenge der Orbits aller Straten in  $\mathcal{S}$  der Dimension  $j$ , also insbesondere gleichmächtig zu  $\Gamma \backslash \mathcal{S}^j$  ist. Wir haben hier stillschweigend benutzt, dass  $H_{|\sigma|}^1(U_\sigma; \Omega^\bullet(\mathbf{N}))$  als Kettenkomplex von  $\Gamma_\sigma$ -Moduln isomorph zu  $H_{|\sigma|}^1(U_\sigma; \Omega_{U_\sigma}^\bullet) \otimes_k \mathbf{N}$  ist, wie aus dem universellen Koeffizientensatz [Bre2, II.15.4]

folgt. Beachte, dass  $\text{Hom}(A, \mathbf{N} \otimes B) = \text{Hom}(A, B) \otimes \mathbf{N}$  als  $\Gamma$ -Moduln gilt für alle  $\Gamma$ -Moduln  $A$  und  $B$ , denn  $\mathbf{N}$  ist als  $k$ -Vektorraum endlichdimensional. Beachte, dass der Kantenhomomorphismus  $\text{Ext}_\Gamma^*(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X) \rightarrow \text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  wie bei allen Spektralsequenzen von filtrierten Kettenkomplexen von der Inklusion  $F^n C^\bullet \subset C^\bullet$  induziert ist. Letztere kommt ihrerseits von der Inklusion  $\mathcal{K} \subset \mathbf{M}_X$ . Insbesondere ist der Vergleichshomomorphismus  $\alpha$  aus 1.23 der Kantenhomomorphismus dieser Spektralsequenz, falls  $\mathcal{K} = p^* \mathcal{M}$  ist.

**6.5. Proposition.** *Es existiert ein Isomorphismus von  $\Gamma_\sigma$ -Moduln:*

$$H^* \mathcal{C}_\sigma^\bullet = H^{*+1}(U_\sigma, U_\sigma - |\sigma|; k) = H^{*+1+\dim(\sigma)-n}(|\sigma|; \mathbf{or}_\sigma),$$

wobei die  $\Gamma$ -Struktur auf der rechten Seite wie in 3.10 gegeben ist.

Bevor wir dies beweisen notieren wir eine Folgerung, die wir aus dieser Proposition und 5.18. schließen:

**6.6. Korollar.** *Es existiert ein Isomorphismus von  $\Gamma$ -Moduln*

$$\begin{aligned} H^*(\text{Ext}^1(\mathcal{K}^m / \mathcal{K}^{m+1}, \Omega^\bullet(\mathbf{N}))) &\cong \prod_{\dim \sigma = m} \text{Hom}(\mathbf{M} / \mathbf{M}_\sigma, \mathbf{N}) \otimes H_{|\sigma|}^{*+1}(U_\sigma) \\ &\cong \prod_{\dim \sigma = m} \text{Hom}(\mathbf{M} / \mathbf{M}_\sigma, \mathbf{N}) \otimes H^{*+1+m-n}(|\sigma|; \mathbf{or}_\sigma). \end{aligned}$$

*Beweis von 6.5..* Wir wenden das Lemma 5.2. an, indem wir setzen:  $m = 1$ ,  $\mathcal{A} = \text{Sh}^{\Gamma_\sigma}(X)$ ,  $\mathcal{B} = k[\Gamma_\sigma]\text{-mod}$ ,  $A = k$ ,  $C^\bullet = \Omega_X^\bullet$  und  $F = H_{|\sigma|}^0(U_\sigma, -)$ . Mit 5.8. gilt  $R^j H_{|\sigma|}^0(U_\sigma, \Omega_X^\bullet) = H^j(U_\sigma, U_\sigma - |\sigma|; \Omega_{U_\sigma}^\bullet) = 0$  für alle  $j \neq 1$ . Damit folgt aus 5.2.:  $H^* \mathcal{C}_\sigma^\bullet = H^{*+1}(U_\sigma, U_\sigma - |\sigma|) \in k\Gamma_\sigma\text{-mod}$ .

Letzteres ist nach Ausschneidung isomorph zu  $H^{*+1}(T_\sigma, T_\sigma - |\sigma|)$ , wobei  $T_\sigma$  eine Tubenumgebung von  $\sigma$  in  $U_\sigma$  ist und dies ist nach dem Thom-Isomorphismus 3.1. isomorph zu  $H^{*+1-\text{codim}|\sigma|}(|\sigma|; \mathbf{or}_\sigma)$ .  $\square$

Wir wollen zeigen, dass die zu der Isotropie-Filtrierung aus 6.1. assoziierte Spektralsequenz 6.3 mit der in 3.15. angegebenen übereinstimmt. Die Konvergenz gegen  $H^* F^0 C^\bullet = \text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  (vgl. 5.20.) ist jedenfalls sichergestellt, da die Filtrierung beschränkt ist. Wir machen die folgende Beobachtung: Sei  $q < n$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} &\stackrel{6.3}{=} \prod_{\sigma \in \mathcal{R}_{n-p-1}} (\text{Hom}(\mathbf{M} / \mathbf{M}_\sigma, \mathbf{N}) \otimes H^{p+q} \mathcal{C}_\sigma^\bullet)^{\Gamma_\sigma} \\ &\stackrel{6.5.}{=} \prod_{\sigma \in \mathcal{R}_{n-p-1}} \left( \text{Hom}(\mathbf{M} / \mathbf{M}_\sigma, \mathbf{N}) \otimes H^{p+q+1+\dim(\sigma)-n}(|\sigma|; \mathbf{or}_\sigma) \right)^{\Gamma_\sigma} \\ &= \prod_{\sigma \in \mathcal{R}_{n-p-1}} (\text{Hom}(\mathbf{M} / \mathbf{M}_\sigma, \mathbf{N}) \otimes H^q(|\sigma|; \mathbf{or}_\sigma))^{\Gamma_\sigma} \\ &\stackrel{2.21.}{=} \left( \prod_{\dim \sigma = n-p-1} \text{Hom}_k(\mathbf{M} / \mathbf{M}_\sigma, \mathbf{N}) \otimes H^q(|\sigma|; \mathbf{or}_\sigma) \right)^\Gamma. \end{aligned}$$

## 6.b. Bestimmung der Differentiale $d_1$ von $E(\mathcal{S}, \mathcal{L})$

Gradweise haben wir also einen Isomorphismus  $\mathbb{W}_q^\Gamma \cong E_1^{n-1-q,*}$ . Der schwierigere Part ist es, die Differentiale miteinander zu vergleichen. Wir erarbeiten uns eine Beschreibung des Differential von  $E_1$  in mehreren Schritten und werden am Ende feststellen, dass dies genau das Differential von  $\mathbb{W}_\bullet^\Gamma$  aus 3.8. ist.

Wir betrachten wieder die „Urform“ der Einträge der Spektralsequenz 3.15. Die Einträge  $E_1^{p,*}$  sind für  $p \neq n$  gegeben durch die Homologie der Komplexe  $\text{Ext}_\Gamma^1(\mathcal{K}^q/\mathcal{K}^{q-1}, \Omega^\bullet(\mathbf{N}))$ , vgl. 6.2. Um Schreibarbeit zu sparen, kürzen wir wie folgt ab.

**6.7. Notation.** Wir setzen:

- $\mathcal{K}_b^a := \mathcal{K}^a/\mathcal{K}^b$  für alle  $0 \leq a < b \leq n$ .
- $E_V(\mathcal{F}) := \text{Ext}_V^1(\mathcal{F}|_V, \Omega_V^\bullet(\mathbf{N}))$  für alle offenen Teilmengen  $V \subset X$  und für alle  $\mathcal{F} \in \text{Sh}^\Gamma(X)$ . Dies ist ein Kettenkomplex von  $\Gamma_V$ -Moduln.
- $E(\mathcal{F}) := E_X^\bullet(\mathcal{F})$ ,  $\mathcal{F} \in \text{Sh}^\Gamma(X)$ .
- $E_{V,\Gamma_V}(\mathcal{F}) := \text{Ext}_{V,\Gamma_V}^1(\mathcal{F}|_V, \Omega_V^\bullet(\mathbf{N}))$ ,  $V \subset X$  offen und  $\mathcal{F} \in \text{Sh}^\Gamma(X)$ .
- $E_\Gamma(\mathcal{F}) := E_{X,\Gamma}(\mathcal{F})$ .

Dabei bezeichnet  $\Gamma_V$  den Stabilisator von  $V$ , d.h.  $\Gamma_V = \{g \in \Gamma \mid gV = V\}$ . Dies lässt sich zu Definitionen von kontravarianten, halbexakten Funktoren

$$E_V : \text{Sh}^\Gamma(X) \rightarrow \text{Ch}(\Gamma_V\text{-mod}),$$

$$E_{V,\Gamma_V} : \text{Sh}^\Gamma(X) \rightarrow \text{Ch}(k\text{-mod})$$

erweitern ( $\text{Ch}(\mathcal{A})$  ist hier die Kategorie der Kettenkomplexe über einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$ ).

**6.8. Bemerkung.** Aufgrund von 5.8. und 5.18. gilt mit der obigen Notation Folgendes. Für alle  $q = 0, \dots, n$  ist

$$H^*E(\mathcal{K}_{q+1}^q) \cong \prod_{\dim \tau=q} \text{Hom}(\mathbf{M}/\mathbf{M}_\tau, \mathbf{N}) \otimes H_{|\tau|}^{*+1}(U_\tau) \in \Gamma\text{-mod}.$$

Außerdem gilt für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  mit  $\dim \sigma = q - 1$ :

$$H^*E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_{q+1}^q) \cong \prod_{\tau \succ \sigma} \text{Hom}(\mathbf{M}/\mathbf{M}_\tau, \mathbf{N}) \otimes H_{|\tau|}^{*+1}(U_\tau) \in \Gamma_\sigma\text{-mod}$$

und

$$H^*E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_{q+1}^{q-1}) = \text{Hom}(\mathbf{M}/\mathbf{M}_\sigma, \mathbf{N}) \in \Gamma_\sigma\text{-mod}.$$



**1. Schritt** Bei der Spektralsequenz einer absteigenden Filtrierung  $F^*C^\bullet$  eines Kettenkomplexes  $C^\bullet$  gleichen die Differentiale des  $E_1$ -Terms den Randhomomorphismen der langen exakten Sequenz, die der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow F^p C^\bullet / F^{p-1} C^\bullet \rightarrow F^{p+1} C^\bullet / F^{p-1} C^\bullet \rightarrow F^{p+1} C^\bullet / F^p C^\bullet \rightarrow 0,$$

assoziiert wird. Dies folgt zum Beispiel aus [McC, Prop. 2.11]. Angewendet auf unsere Situation, d.h. 6.2., heißt das, dass wir die Randhomomorphismen der langen exakten Sequenz studieren müssen, die von der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen der Form

$$(6.9) \quad 0 \rightarrow E_\Gamma(\mathcal{K}_q^{q-1}) \rightarrow E_\Gamma(\mathcal{K}_{q+1}^{q-1}) \rightarrow E_\Gamma(\mathcal{K}_{q+1}^q) \rightarrow 0$$

kommen, wobei letztere Sequenz aus der langen exakten Sequenz von

$$(6.10) \quad 0 \rightarrow \mathcal{K}_{q+1}^q \rightarrow \mathcal{K}_{q+1}^{q-1} \rightarrow \mathcal{K}_q^{q-1} \rightarrow 0$$

entsteht, nachdem man  $\text{Ext}_\Gamma^*(-, \Omega^\bullet(\mathbf{N}))$  angewendet hat (die Nullen ganz links und rechts in 6.9 hat man aufgrund des Azyklitätslemmas 5.18.). Der erste Schritt, diese Randhomomorphismen zu verstehen, ist die folgende

**6.11. Proposition.** *Unter den natürlichen Isomorphismen  $E(\mathcal{K}_{m+1}^m)^\Gamma \cong E_\Gamma(\mathcal{K}_{m+1}^m)$  aus 5.18. (für alle  $m$ ) kann der Randhomomorphismus der langen exakten Sequenz von 6.9 mit  $\partial^\Gamma$  identifiziert werden, wobei  $\partial$  der Randhomomorphismus der langen exakten Sequenz von  $0 \rightarrow E(\mathcal{K}_q^{q-1}) \rightarrow E(\mathcal{K}_{q+1}^{q-1}) \rightarrow E(\mathcal{K}_{q+1}^q) \rightarrow 0$  ist.*

Dabei entsteht die letzte Sequenz durch Anwendung von  $\text{Ext}^*(-, \Omega^\bullet(\mathbf{N}))$  auf die Sequenz 6.10 und das Azyklitätslemma 5.18. garantiert uns wieder die Exaktheit an den beiden Enden.

Nach dieser Proposition genügt es also, das Differential von  $\mathbb{W}_\bullet$  mit dem obigen ( $\Gamma$ -äquivarianten) Randhomomorphismus  $\partial$  zu identifizieren.

*Beweis von 6.11..* Für alle  $\Gamma$ -Garben  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Sh}^\Gamma(X)$  existiert ein kanonischer Homomorphismus  $\text{Ext}_\Gamma^*(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Ext}^*(\mathcal{F}, \mathcal{G})^\Gamma$ , der folgendermaßen definiert ist. Sei  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$  eine injektive Auflösung. Dann induziert die Inklusion von Kettenkomplexen  $\text{Hom}_\Gamma(\mathcal{F}, \mathcal{I}^\bullet) \subset \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^\bullet)$  einen Homomorphismus  $\text{Ext}_\Gamma^*(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Ext}^*(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ , dessen Bild in  $\text{Ext}^*(\mathcal{F}, \mathcal{G})^\Gamma$  enthalten ist. Dieser Morphismus ist funktoriell in  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$ , so dass wir ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen erhalten:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E_\Gamma(\mathcal{K}_q^{q-1}) & \longrightarrow & E_\Gamma(\mathcal{K}_{q+1}^{q-1}) & \longrightarrow & E_\Gamma(\mathcal{K}_{q+1}^q) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & E(\mathcal{K}_q^{q-1})^\Gamma & \longrightarrow & E(\mathcal{K}_{q+1}^{q-1})^\Gamma & \longrightarrow & E(\mathcal{K}_{q+1}^q)^\Gamma \longrightarrow 0. \end{array}$$

Die äußeren vertikalen Pfeile sind Isomorphismen wegen 5.18. Dabei ist die untere Sequenz entstanden, indem man die lange exakte Sequenz von  $\text{Ext}^*(-, \Omega)$

zur exakten Sequenz 6.10 assoziiert (die entstehende lange Sequenz ist in Wirklichkeit kurz, da die entscheidenden Terme wegen des Azyklitätslemmas 5.18. verschwinden) und dann die  $\Gamma$ -Invarianten davon betrachtet. Die entstehende Sequenz ist exakt, denn  $\text{Ext}^1(\mathcal{K}^{q-1}/\mathcal{K}^q, \Omega)$  ist ein Komplex von injektiven  $\Gamma$ -Moduln nach 5.18.(d). Das Fünfer-Lemma impliziert, dass der mittlere Pfeil auch ein Isomorphismus ist. Das heißt, dass die lange exakte Sequenz 6.9 isomorph zur langen exakten Sequenz von  $0 \rightarrow E(\mathcal{K}_q^{q-1})^\Gamma \rightarrow E(\mathcal{K}_{q+1}^{q-1})^\Gamma \rightarrow E(\mathcal{K}_{q+1}^q)^\Gamma \rightarrow 0$  ist. Wir benötigen nun das folgende

**6.12. Lemma.** *Für alle  $q$  ist der von der Inklusion  $E(\mathcal{K}_{q+1}^q)^\Gamma \subset E(\mathcal{K}_{q+1}^q)$  induzierte Morphismus  $H^*(E(\mathcal{K}_{q+1}^q)^\Gamma) \rightarrow H^*(E(\mathcal{K}_{q+1}^q))^\Gamma$  ein Isomorphismus.*

Mit diesem Lemma wären wir fertig, denn es existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^*(E(\mathcal{K}_{q+1}^q)^\Gamma) & \longrightarrow & H^{*+1}(E(\mathcal{K}_q^{q-1})^\Gamma) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ \cdots & \longrightarrow & H^*(E(\mathcal{K}_{q+1}^q))^\Gamma & \xrightarrow{\partial^\Gamma} & H^{*+1}(E(\mathcal{K}_q^{q-1}))^\Gamma & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Es bleibt noch der *Beweis von 6.12.* Nach 5.18. existiert ein Isomorphismus von Komplexen von  $\Gamma$ -Moduln

$$E(\mathcal{K}_{q+1}^q) \cong \prod_{\sigma \in \mathcal{R}_q} \text{coind}_{\Gamma_\sigma}^\Gamma \text{Hom}(M/M_\sigma, N) \otimes H_{|\sigma|}^1(U_\sigma; \Omega^\bullet(\mathbf{N})),$$

wobei  $\mathcal{R}_q$  eine Repräsentantenmenge der Orbits aller Straten der Dimension  $q$  sei. Die Aussage folgt nun leicht aus den folgenden Tatsachen:

- $H^*(\text{coind}_{\Gamma_\sigma}^\Gamma(A^\bullet)) \cong \text{coind}_{\Gamma_\sigma}^\Gamma H^*(A^\bullet)$  für alle Kettenkomplexe  $A^\bullet$  von  $\Gamma_\sigma$ -Moduln (denn  $\text{coind}$  ist exakt) und
- $(\text{coind}_{\Gamma_\sigma}^\Gamma(A))^\Gamma = A$  für alle  $\Gamma_\sigma$ -Moduln  $A$ , vgl. [Wei, 6.3].

□

**2. Schritt** Nach dem ersten Schritt (genauer: Proposition 6.11.) genügt es, den Randhomomorphismus von  $0 \rightarrow E(\mathcal{K}_q^{q-1}) \rightarrow E(\mathcal{K}_{q+1}^{q-1}) \rightarrow E(\mathcal{K}_{q+1}^q) \rightarrow 0$  mit dem Differential von  $\mathbb{W}_\bullet$  zu identifizieren. Betrachte den Morphismus von kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E(\mathcal{K}_q^{q-1}) & \longrightarrow & E(\mathcal{K}_{q+1}^{q-1}) & \longrightarrow & E(\mathcal{K}_{q+1}^q) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \prod_{\sigma^{q-1}} E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_q^{q-1}) & \longrightarrow & \prod_{\sigma^{q-1}} E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_{q+1}^{q-1}) & \longrightarrow & \prod_{\sigma^{q-1}} E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_{q+1}^q) \longrightarrow 0, \end{array}$$

wobei die vertikalen Pfeile die Produkte von Restriktionen sind („ $\sigma^{m-1}$ “ bedeutet von nun an, dass wir über alle Straten der Dimension  $m - 1$  indizieren). Der linke vertikale Pfeil ist ein Isomorphismus wegen 2.20. und 1.28., da der Träger von  $\mathcal{K}_q^{q-1}$  in der offenen Teilmenge  $\bigcup_{\dim \sigma = q-1} U_\sigma \subset X$  enthalten ist. Wir schauen uns den „verbindenden Abschnitt“ des kommutativen Diagramms von langen exakten Sequenzen an:

$$(6.13) \quad \begin{array}{ccc} H^* E(\mathcal{K}_{q+1}^q) & \xrightarrow{\partial} & H^{*+1} E(\mathcal{K}_q^{q-1}) \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ \prod_{\sigma^{q-1}} H^* E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_{q+1}^q) & \xrightarrow{\prod \partial_\sigma} & \prod_{\sigma^{q-1}} H^{*+1} E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_q^{q-1}) \end{array}$$

Daraus folgt, dass wir  $\partial$  mit der Komposition von oben links über unten links nach rechts unten identifizieren können. Da der linke vertikale Pfeil einfach zu verstehen ist, konzentrieren wir uns im nächsten Schritt auf die Beschreibung der Randhomomorphismen  $\partial_\sigma$ :

**3. Schritt** Wir untersuchen die ( $\Gamma_\sigma$ -äquivarianten) Randhomomorphismen  $\partial_\sigma$  der langen exakten Sequenz von  $0 \rightarrow E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_q^{q-1}) \rightarrow E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_{q+1}^q) \rightarrow E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_{q+1}^q) \rightarrow 0$  für ein fest gewähltes Stratum  $\sigma$  der Dimension  $q - 1 < n$ .

Wir setzen zur Abkürzung  $Q_\tau := M/M_\tau$  für alle Straten  $\tau$ . Beachte, dass die Inklusion  $M_\tau \subset M_{\tau'}$  für  $\tau \prec \tau'$  eine Projektion  $Q_\tau \rightarrow Q_{\tau'}$  induziert. Die Garbe  $\mathcal{K}_{q+1}^q|_{U_\sigma}$  ist konzentriert auf  $|\sigma|$  und dort ist sie konstant  $Q_\sigma$ . Außerdem ist

$$\mathcal{K}_q^{q-1}|_{U_\sigma} \cong \bigoplus_{\tau \succ \sigma} (Q_\tau)_{|\tau|}^{U_\sigma}$$

nach 2.20. Der Vorteil der „Fokussierung“ auf  $U_\sigma$ , die in Schritt 2 geschehen ist, ist der, dass wir eine nützliche Beschreibung von  $\mathcal{K}_{q+1}^q|_{U_\sigma}$  finden können, nämlich als ein Quotient einer konstanten Garbe – und diese Beschreibung ist global nicht möglich.

Wir setzen

$$\Sigma_\sigma := |\sigma| \cup \bigcup_{\tau \succ \sigma} |\tau| \subset U_\sigma.$$

Das heißt, dass  $\Sigma_\sigma$  die Vereinigung von  $|\sigma|$  mit allen Straten der Dimension  $\dim \sigma + 1$  ist, die  $\sigma$  als eine Seite besitzen. Dies ist eine  $\Gamma_\sigma$ -invariante, abgeschlossene Teilmenge von  $U_\sigma$  und der Träger der Garbe  $\mathcal{K}_{q+1}^q|_{U_\sigma}$  ist in  $\Sigma_\sigma$  enthalten.

Man hat eine Filtrierung von  $\Gamma_\sigma$ -Garben  $(M_\sigma)_{\Sigma_\sigma} \subset \mathcal{K}^{q+1}|_{\Sigma_\sigma} \subset \mathcal{K}^{q-1}|_{\Sigma_\sigma} = M_{\Sigma_\sigma}$ , welche eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow (\mathcal{K}^{q+1}/M_\sigma)|_{\Sigma_\sigma} \rightarrow (\mathcal{K}^{q-1}/M_\sigma)|_{\Sigma_\sigma} \rightarrow \mathcal{K}_{q+1}^{q-1}|_{\Sigma_\sigma} \rightarrow 0$$

induziert. Setzen wir  $R_\tau = \ker(Q_\sigma \rightarrow Q_\tau) = M_\tau/M_\sigma$  und setzen wir die obige kurze exakte Sequenz trivial auf ganz  $U_\sigma$  fort, so erhalten wir eine exakte

Sequenz

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\tau > \sigma} (R_\tau)_{|\tau|}^{U_\sigma} \rightarrow (Q_\sigma)_{\Sigma_\sigma}^{U_\sigma} \xrightarrow{\beta} \mathcal{K}_{q+1}^{q-1}|_{U_\sigma} \rightarrow 0.$$

Die Projektion  $\tilde{\beta}$  induziert einen Morphismus von kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{\tau > \sigma} (Q_\sigma)_{|\tau|}^{U_\sigma} & \longrightarrow & (Q_\sigma)_{\Sigma_\sigma}^{U_\sigma} & \longrightarrow & (Q_\sigma)_{|\sigma|}^{U_\sigma} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow \tilde{\beta} & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}_{q+1}^q|_{U_\sigma} & \longrightarrow & \mathcal{K}_{q+1}^{q-1}|_{U_\sigma} & \longrightarrow & \mathcal{K}_q^{q-1}|_{U_\sigma} \longrightarrow 0, \end{array}$$

wobei  $\beta$  die Restriktion von  $\tilde{\beta}$  ist. (Beachte, dass  $\bigoplus_{\tau > \sigma} (Q_\sigma)_{|\tau|}^{U_\sigma} = Q_{\Sigma_{\sigma-|\sigma|}}^{U_\sigma}$  gilt).

Anwendung des Funktors  $\text{Ext}^*(-, \Omega^\bullet(\mathbf{N}))$  liefert ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E_{U_\sigma}((Q_\sigma)_{|\sigma|}^{U_\sigma}) & \longrightarrow & E_{U_\sigma}((Q_\sigma)_{\Sigma_\sigma}^{U_\sigma}) & \longrightarrow & E_{U_\sigma}((Q_\sigma)_{\Sigma_{\sigma-|\sigma|}}^{U_\sigma}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \tilde{\beta}^* & & \downarrow \beta^* \\ 0 & \longrightarrow & E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_q^{q-1}) & \longrightarrow & E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_{q+1}^{q-1}) & \longrightarrow & E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_{q+1}^q) \longrightarrow 0, \end{array}$$

wobei die horizontalen Sequenzen exakt sind aufgrund des Azyklitätslemmas 5.18. (da z.B.  $\text{Hom}(\mathcal{K}_{q+1}^q, \Omega^\bullet) = 0$  und  $\text{Ext}^2(\mathcal{K}_q^{q-1}, \Omega^\bullet) = 0$ ). Dies induziert seinerseits einen Morphismus von langen exakten Kohomologiesequenzen dieser Komplexe, bei dem wir uns nur für das folgende Stück interessieren:

$$(6.14) \quad \begin{array}{ccc} H^* E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_{q+1}^q) & \xrightarrow{\partial_\sigma} & H^{*+1} E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_q^{q-1}) \\ \downarrow \beta^* & & \downarrow = \\ H^* \prod_{\tau > \sigma} E_{U_\sigma}((Q_\sigma)_{|\tau|}^{U_\sigma}) & \xrightarrow{\delta_\sigma} & H^{*+1} E_{U_\sigma}((Q_\sigma)_{|\sigma|}^{U_\sigma}). \end{array}$$

**Fazit:** Somit ist  $\partial_\sigma = \delta_\sigma \circ \beta^*$ . Dabei ist  $\delta_\sigma$  der Verbindungshomomorphismus der Sequenz

$$(6.15) \quad 0 \rightarrow E_{U_\sigma}((Q_\sigma)_{|\sigma|}^{U_\sigma}) \rightarrow E_{U_\sigma}((Q_\sigma)_{\Sigma_\sigma}^{U_\sigma}) \rightarrow \prod_{\tau > \sigma} E_{U_\sigma}((Q_\sigma)_{|\tau|}^{U_\sigma}) \rightarrow 0,$$

welche ihrerseits durch die Anwendung der langen exakten Sequenz von  $\text{Ext}^*(-, \Omega^\bullet(\mathbf{N}))$  auf die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\tau > \sigma} (Q_\sigma)_{|\tau|}^{U_\sigma} \rightarrow (Q_\sigma)_{\Sigma_\sigma}^{U_\sigma} \rightarrow (Q_\sigma)_{|\sigma|}^{U_\sigma} \rightarrow 0$$

entsteht (wie schon bereits erwähnt, verschwinden in dieser langen exakten Sequenz alle anderen Terme aufgrund des Azyklitätslemmas). Der Homomorphismus  $\beta^*$  besitzt eine gute Beschreibung, denn es existiert ein kommutatives Diagramm

$$(6.16) \quad \begin{array}{ccc} H^* E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_{q+1}^q) & \xrightarrow{\beta^*} & H^* \prod_{\tau \succ \sigma} E_{U_\sigma}((Q_\sigma)_{|\tau|}^{U_\sigma}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \prod_{\tau \succ \sigma} \text{Hom}(Q_\tau, \mathbf{N}) \otimes H_{|\tau|}^{*+1}(U_\tau) & \longrightarrow & \prod_{\tau \succ \sigma} \text{Hom}(Q_\sigma, \mathbf{N}) \otimes H_{|\tau|}^{*+1}(U_\tau) \end{array}$$

(vgl. 5.18.) wobei der untere waagerechte Pfeil von den Projektionen  $Q_\sigma \rightarrow Q_\tau$  induziert ist. Insbesondere kann  $\beta^*$  mit dieser Abbildung identifiziert werden.

**4. Schritt** Wir möchten den Randhomomorphismus der kurzen exakten Sequenz 6.15 studieren. Es ist nicht schwer zu sehen, dass diese Sequenz dadurch entsteht, dass wir den exakten Funktor  $\text{Hom}_k(Q_\sigma, -)$  auf die Sequenz

$$0 \rightarrow E_{U_\sigma}(k_{|\sigma|}^{U_\sigma}) \rightarrow E_{U_\sigma}(k_{\Sigma_\sigma}^{U_\sigma}) \rightarrow E_{U_\sigma}(k_{\Sigma_\sigma - |\sigma|}^{U_\sigma}) \rightarrow 0$$

anwenden. Nach 5.14. ist die induzierte lange exakte Sequenz isomorph zur langen Kohomologiesequenz des Tripels

$$(U_\sigma - \Sigma_\sigma) \subset (U_\sigma - |\sigma|) \subset U_\sigma.$$

Sei  $T_\sigma \subset U_\sigma$  eine Tubenumgebung von  $|\sigma|$  und wir wählen ein  $\tau \succ \sigma$ . Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} E_{U_\sigma}(k_{|\sigma|}) & \xrightarrow{=} & E_{T_\sigma}(k_{|\sigma|}) & \xleftarrow{=} & E_{T_\sigma}(k_{|\sigma|}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E_{U_\sigma}(k_{\Sigma_\sigma}) & \longrightarrow & E_{T_\sigma}(k_{\Sigma_\sigma}) & \xleftarrow{} & E_{T_\sigma}(k_{|\tau| \cup |\sigma|}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E_{U_\sigma}(k_{\Sigma_\sigma - \sigma}) & \longrightarrow & E_{T_\sigma}(k_{\Sigma_\sigma - |\sigma|}) & \xleftarrow{} & E_{T_\sigma}(k_{|\tau|}) \end{array}$$

von kurzen exakten Sequenzen (alle Pfeile sind von Morphismen von Garben, z.B. von  $k_{\Sigma_\sigma - |\sigma|} \rightarrow k_{|\tau|}$  induziert) gibt uns Morphismen von langen exakten Sequenzen, deren verbindende Abschnitte so aussehen:

$$\begin{array}{ccccc} H^*(U_\sigma - |\sigma|, U_\sigma - \Sigma_\sigma) & \longrightarrow & H^*(T_\sigma - |\sigma|, T_\sigma - \Sigma_\sigma) & \xleftarrow{i_\tau} & H^*(T_\sigma - |\sigma|, T_\sigma - (|\tau| \cup |\sigma|)) \\ \downarrow \delta_\sigma & & \downarrow & & \downarrow \\ H^{*+1}(U_\sigma, U_\sigma - |\sigma|) & \xrightarrow[\cong]{\text{exc.}} & H^{*+1}(T_\sigma, T_\sigma - |\sigma|) & \xleftarrow{=} & H^{*+1}(T_\sigma, T_\sigma - |\sigma|). \end{array}$$

Der Morphismus  $i_\tau$  ist die Inklusion eines direkten Summanden. Daraus folgt, dass man  $\delta_\sigma$  mit der Komposition der Restriktion von  $U_\sigma$  auf  $T_\sigma$  mit der direkten Summe der Randhomomorphismen

$$H^*(T_\tau, T_\tau - |\tau|) \cong H^*(T_\sigma - |\sigma|, T_\sigma - (|\tau| \cup |\sigma|)) \rightarrow H^{*+1}(T_\sigma, T_\sigma - |\sigma|)$$

identifizieren kann, wobei  $T_\tau \subset T_\sigma - |\sigma|$  eine Tubenumgebung von  $|\tau| \cap T_\sigma$  sei (der angedeutete Isomorphismus „exc.“ ist die Ausschneidung). Beachte, dass wir die lange exakte Sequenz von Paaren mit Koeffizienten in  $k$  dadurch erhalten, indem wir die lange exakte Sequenz des Paares mit  $\mathbb{Z}$ -Koeffizienten mit  $k$  tensorieren. Insbesondere gilt wegen Proposition 3.2.:

$$(6.17) \quad \delta_\sigma = \bigoplus_{\tau \succ \sigma} \text{id}_k \otimes [\tau : \sigma]$$

**Zusammenfassung der Schritte** Wegen Schritt 1 (Prop. 6.11.) genügt es, den Randhomomorphismus  $\partial$  der langen exakten Sequenz  $0 \rightarrow E(\mathcal{K}_q^{q-1}) \rightarrow E(\mathcal{K}_{q+1}^{q-1}) \rightarrow E(\mathcal{K}_{q+1}^q) \rightarrow E(\mathcal{K}_{q+1}^q) \rightarrow 0$  mit dem Differential 3.9 von  $\mathbb{W}_\bullet$  zu identifizieren. Nach Schritt 2 ist  $\partial$  das Produkt (über alle  $\sigma$  mit  $\dim \sigma = q-1$ ) der Kompositionen

$$H^*E(\mathcal{K}_{q+1}^q) \xrightarrow{\pi_\tau} H^*E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_{q+1}^q) \xrightarrow{\partial_\sigma} H^*E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_q^{q-1}),$$

wobei  $\pi_\tau$  von den Inklusionen  $U_\tau \subset U_\sigma$  für alle  $\tau \succ \sigma$  induziert und  $\partial_\sigma$  der Randhomomorphismus aus Schritt 3 ist. Identifizieren wir  $H^*E(\mathcal{K}_{q+1}^q)$  gemäß 6.8. mit  $\prod_\tau \text{Hom}(\mathbb{M}/\mathbb{M}_\tau, \mathbb{N}) \otimes H_{|\tau|}^{*+1}(U_\tau)$  und  $H^*E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_{q+1}^q)$  mit dem Faktor des letzten Produkts, wo nur Straten  $\tau$  mit  $\tau \succ \sigma$  zugelassen werden, so entspricht  $\pi_\tau$  der kanonischen Projektion. Insbesondere bildet  $\pi_\tau$  Faktoren, die zu Straten  $\tau$  mit  $\sigma \not\prec \tau$  gehören, auf 0 ab. Wenn wir entsprechend  $H^*E_{U_\sigma}(\mathcal{K}_q^{q-1})$  gemäß 6.8. mit  $\text{Hom}(\mathbb{M}/\mathbb{M}_\sigma, \mathbb{N}) \otimes H_{|\sigma|}^{*+1}(U_\sigma)$  identifizieren, so entspricht der Randhomomorphismus  $\partial_\sigma$  wegen Schritt 3 und Schritt 4 (genauer 6.16 und 6.17) der direkten Summe

$$\bigoplus_{\tau \succ \sigma} i_{\tau, \sigma} \otimes [\tau : \sigma]$$

wobei  $i_{\tau, \sigma} : \text{Hom}(\mathbb{M}/\mathbb{M}_\tau, \mathbb{N}) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{M}/\mathbb{M}_\sigma, \mathbb{N})$  von der Inklusion  $\mathbb{M}_\sigma \subset \mathbb{M}_\tau$  induziert und  $[\tau : \sigma]$  der Inzidenzhomomorphismus ist. Dies beendet den Beweis.

## 6.c. Beweis des Zusatzes

Schließlich kommen wir zum Beweis des Zusatzes von 3.15. Wir erinnern noch einmal kurz daran, wie wir die Spektralsequenz  $E(\mathcal{S}, \mathcal{K})$  für eine Isotropie-Stratifizierung  $\mathcal{S}$  und eine  $\mathcal{S}$ -konstruierbare Untergarbe  $\mathcal{K}$  von  $\mathbb{M}_X$  konstruiert haben. Sei  $\Omega^\bullet = \Omega^\bullet(\mathbb{N})$  der De-Rham-Komplex mit Werten in  $\mathbb{N}$ . Anwendung des Funktors

$\text{Hom}_\Gamma(-, \Omega^\bullet)$  auf die Isotropie-Stratifizierung

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_\mathcal{S}^n \subset \dots \mathcal{K}_\mathcal{S}^0 = \mathbb{M}_X$$

gab uns eine Filtrierung

$$\mathrm{Hom}_\Gamma(\mathcal{M}_X, \Omega^\bullet) = \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathcal{K}^0, \Omega^\bullet) \subset \dots \subset \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathcal{K}^n, \Omega) = \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathcal{K}, \Omega^\bullet)$$

von Kettenkomplexen und  $E(\mathcal{S}, \mathcal{K})$  ist die Spektralsequenz dieser Filtrierung.

(a) Ist  $\mathcal{T}$  eine feinere Isotropiestratifizierung, so gibt uns der Morphismus von Filtrierungen  $\mathcal{K}_\mathcal{T}^* \rightarrow \mathcal{K}_\mathcal{S}^*$  aus dem Zusatz von 2.31. einen Morphismus von Filtrierungen

$$\mathrm{Hom}_\Gamma(\mathcal{K}_\mathcal{S}^*, \Omega^\bullet) \rightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathcal{K}_\mathcal{T}^*, \Omega^\bullet),$$

welcher einen Homomorphismus von Spektralsequenzen  $f_{\mathcal{S}, \mathcal{T}} : E(\mathcal{S}, \mathcal{K}) \rightarrow E(\mathcal{T}, \mathcal{K})$  induziert, vgl. [McC, Th. 3.5]. Beachte, dass  $\mathcal{K}_\mathcal{S}^0 = \mathcal{K}_\mathcal{T}^0 = \mathcal{M}_X$  und  $\mathcal{K}_\mathcal{S}^n = \mathcal{K}_\mathcal{T}^n = \mathcal{K}$  sind. Daher konvergiert diese Spektralsequenz gegen die Identität von  $H^* \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathcal{K}^0, \Omega^\bullet) = \mathrm{Ext}_\Gamma^*(\mathcal{K}, \mathcal{N})$  und auf  $E_1^{n,*}$  ist  $f_{\mathcal{S}, \mathcal{T}}$  durch die Identität von  $H^* \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathcal{M}_X, \Omega^\bullet) = \mathrm{Ext}_\Gamma^*(\mathcal{M}_X, \mathcal{N}_X)$  gegeben. Auf  $E_1^{p,*}$  für  $0 \leq p \leq n-1$  ist der Morphismus  $f_{\mathcal{S}, \mathcal{T}}$  gegeben durch Abbildungen der Form

$$H^* \mathrm{Ext}_\Gamma^1(\mathcal{K}_\mathcal{S}^m / \mathcal{K}_\mathcal{S}^{m+1}, \Omega^\bullet) \rightarrow H^* \mathrm{Ext}_\Gamma^1(\mathcal{K}_\mathcal{T}^m / \mathcal{K}_\mathcal{T}^{m+1}, \Omega^\bullet),$$

die von den im Zusatz von 2.31. beschriebenen Homomorphismen  $\mathcal{K}_\mathcal{T}^m / \mathcal{K}_\mathcal{T}^{m+1} \rightarrow \mathcal{K}_\mathcal{S}^m / \mathcal{K}_\mathcal{S}^{m+1}$  induziert sind, woraus die Behauptung folgt, da dieser Homomorphismus von den Inklusionen  $|\tau| \subset |\sigma|$  über alle  $\sigma \in \mathcal{S}$  und  $\tau \in \mathcal{T}$  mit  $|\tau| \subset |\sigma|$  induziert sind.

(b) kann man analog beweisen. Der Restriktionshomomorphismus

$$\mathrm{Hom}_\Gamma(\mathcal{K}, \Omega^\bullet) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma_V}(\mathcal{K}|_V, \Omega^\bullet|_V)$$

ist ein Homomorphismus von filtrierten Kettenkomplexen und dieser induziert die gewünschte Abbildung von Spektralsequenzen.

# Kapitel 7

## Schluß

### 7.a. Zusammenfassung

Wir haben die klassischen Resultate, nämlich die Isomorphismen  $H^*(\Gamma; \mathbf{M}) \cong H^*(\Gamma \backslash X; \mathcal{M})$  und  $H^*(\Gamma, \mathbf{M}^\vee) \cong \text{Ext}^*(\mathcal{M}, k)$  (was an  $\text{Ext}^j(\mathcal{M}, k) = 0$  für  $j > 0$  lag) als Spezialfälle des folgenden allgemeinen Phänomens erkannt: Der Vergleichshomomorphismus

$$\alpha : H^*(\Gamma; \text{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{N})) \rightarrow \text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$$

ist ein Isomorphismus, wenn  $\mathbf{M}$  oder  $\mathbf{N}$  ein trivialer  $\Gamma$ -Modul ist. Für allgemeine Darstellungen  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{N}$  sitzt  $\alpha$  in einer langen exakten Sequenz

$$\dots H_{*-j}(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma) \rightarrow H^*(\Gamma) \xrightarrow{\alpha} \text{Ext}^* \rightarrow H_{*-j}(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma) \rightarrow \dots,$$

wobei  $\mathbb{W}_\bullet$  ein Kettenkomplex von  $\Gamma$ -Moduln ist, der gradweise durch

$$\mathbb{W}_j = \prod \text{Hom}(\mathbf{M}/\mathbf{M}^{\Gamma_\sigma}, \mathbf{N})$$

gegeben ist, wobei das Produkt über eine Repräsentantenmenge der Orbits aller  $j$ -dimensionalen Simplexe genommen wird (nachdem man eine  $\Gamma$ -Stratifizierung von  $X$  gewählt hat). Der Komplex  $\mathbb{W}_\bullet^\Gamma$  ist dann trivial, wenn  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{N}$  für alle  $x \in X$  keine gemeinsamen nichttrivialen  $\Gamma_x$ -Untermodule besitzen, also z.B. wenn  $\mathbf{M}$  oder  $\mathbf{N}$  trivial ist, so dass die klassischen Resultate auf einfache Weise aus der langen exakten Sequenz gefolgert werden.

Wir betonen, dass wir im Kontrast zu [Sin] vermeiden, bei den Beweisen auf die Poincaré-Verdier-Dualität zurückgreifen. Die Beweise beruhen auf hier entwickelte Berechnungsmethoden der Invarianten  $\text{Ext}_\Gamma^*(\mathcal{A}, -)$  für dünne Garben  $\mathcal{A}$  (die Quotienten der Isotropiestratifizierung von konstruierbaren Untergarben von  $\mathbf{M}$ , also z.B.  $p^*\mathcal{M}$ , haben diese Form). Diese Methoden führen u.a. dazu, dass die Invarianten  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  mit der De-Rham-Auflösung  $p_*^\Gamma(\Omega_X^\bullet) \otimes \mathcal{N}$  von  $\mathcal{N}$  berechnet werden können.

Die obige lange exakte Sequenz war Ausgangspunkt vieler Einsichten über



die Eigenschaften der Invarianten  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  bzw. der Garben  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ . Letztere ist isomorph zu den Homologiegarben  $H_{n-*}^{-1}(p_*^\Gamma \mathcal{W}_\bullet)$ , wobei  $\mathcal{W}_\bullet$  ein Komplex von konstruierbaren Garben ist, der lokal (d.h. auf offenen Sternen von Simplexes) definiert ist durch

$$H^0(U_\sigma; \mathcal{W}_\bullet) = \mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S} \cap U_\sigma).$$

Es folgt, dass  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  halmweise endlichdimensional ist und für  $* \geq \dim(X)$  verschwindet. Wir konstruierten Beispiele, wo  $\mathcal{E}xt^{\dim(X)-1}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \neq 0$  gilt, was den Kontrast zu der speziellen Situation aufzeigt, wo  $\mathcal{E}xt^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0$  für  $j > 0$  gilt, wenn  $\mathcal{M}$  oder  $\mathcal{N}$  trivial ist. Zu den globalen Verschwindungsergebnissen gehört  $\text{Ext}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0$  für alle  $j > \dim(X)$ . Dies gilt auch für  $j = n$ , wenn  $\Gamma \backslash X$  nicht kompakt ist.

In Kapitel 4 demonstrierten wir diese Methoden an speziellen Beispielen, wo wir allgemein die Halme von  $\mathcal{E}xt^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  für kleine Dimensionen berechnet haben und die globale Berechenbarkeit der Invarianten  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  bzw.  $H_*(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma)$  bei niederdimensionalen Beispielen diskutierten, die von arithmetischen Gruppen herrühren (vollständige Berechnung ist durchgeführt für die Modulgruppe  $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ). Leider stoßen wir bei  $\text{SL}_2(\mathcal{O}_d)$ , wobei  $\mathcal{O}_d$  der Ganzheitsring des imaginär quadratischen Zahlkörpers mit Diskriminante  $d$  ist, auf Grenzen der Berechenbarkeit, die denen bei der Kohomologie von  $\text{SL}_2(\mathcal{O})$  verwandt sind. Dies mag zwar ein weiteres Indiz dafür sein, wie ähnlich sich die Invarianten  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  und  $H^*(\Gamma; \text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{N}))$  verhalten. Aber es stärkt nicht die Hoffnung, einen Erfolg bringenden Zugang zur Kohomologie  $H^*(\Gamma; \text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{N}))$  über die Invarianten  $H^*(\Gamma; \text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{N}))$  zu bekommen. Zumindest in dieser Hinsicht scheint die lange exakte Sequenz 3.21. geeigneter zu sein, weil  $H^*(Y_r; \mathcal{M})$  leichter zu berechnen ist als  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ , denn  $\mathcal{M}$  ist lokalkonstant auf der regulären Menge  $Y_r$ .

## 7.b. Bemerkung über positive Charakteristik

In der vorliegenden Arbeit sind wir durchgängig davon ausgegangen, dass der Grundkörper  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist. Dies war größtenteils der Bequemlichkeit wegen, um folgende technische Bedingung zu vermeiden, die stets erhoben werden muss, um zu ähnlichen Resultaten zu gelangen:

Die Charakteristik des Grundkörpers  $k$  sei teilerfremd zur Ordnung des Stabilisators  $\Gamma_x$  für alle  $x \in X$

An den wenigen Stellen, wo das Lemma von Schur benutzt wurde, um Aussagen über  $\text{Hom}_{\Gamma_x}(\mathcal{M}/\mathcal{M}^{\Gamma_x}, \mathcal{N})$  zu treffen, müssen wir zusätzlich voraussetzen, dass  $k$  algebraisch abgeschlossen ist.

Für positive Charakteristik besitzt allerdings Kapitel 5 keine Entsprechung. Dieses Kapitel ist für sich genommen interessant, aber es wurde auch dafür benutzt, um in Kapitel 6 die Spektralsequenz 3.15. herzuleiten, so dass dieser Zugang nicht für positive Charakteristik geeignet zu sein scheint.

Es gibt aber eine ähnliche Methode, die für beliebige Charakteristik zu den gleichen Zielen führt. Technisch gesehen unterscheidet sie sich kaum von der in Kapitel 6, so dass es moralisch keinen Unterschied macht, welche man ausführt. Im Folgenden sei jene Methode kurz skizziert.

Anstatt der De-Rham-Auflösung arbeitet man mit einer injektiven Auflösung  $k_X \rightarrow \mathcal{J}^\bullet$  von  $\Gamma$ -Garben, so dass  $\mathcal{J}_x^i$  für alle  $x \in X$  und  $i \geq 0$  ein trivialer  $\Gamma_x$ -Modul ist. (Dies ist einfach die Standardauflösung von  $k_X$  aus [Gro, Prop. 5.1.2] – der  $\Gamma_x$ -Modul  $k$  ist injektiv, weil die Ordnung von  $\Gamma_x$  invertierbar in  $k$  ist). Die Rolle von  $\Omega^\bullet(\mathbf{N})$  spielt nun  $\mathbf{N} \otimes \mathcal{J}^\bullet = \mathcal{H}om(\mathbf{N}^\vee, \mathcal{J}^\bullet)$ , welche eine Auflösung von  $\mathbf{N}_X$  mit injektiven  $\Gamma$ -Moduln ist. Wir betrachten die Isotropie-Stratifizierung  $p^*\mathcal{M} = \mathcal{M}^n \subset \dots \subset \mathcal{M}^0 = \mathbf{M}_X$ . Sie induziert eine Folge von Projektionen

$$\mathbf{M}/\mathcal{M}^n \rightarrow \mathbf{M}/\mathcal{M}^{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{M}/\mathcal{M}^1$$

und damit eine Filtrierung

$$\mathrm{Hom}_\Gamma(\mathbf{M}/\mathcal{M}^1, \mathbf{N}^\vee \otimes \mathcal{J}^\bullet) \subset \dots \subset \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathbf{M}/p^*\mathcal{M}, \mathbf{N}^\vee \otimes \mathcal{J}^\bullet)$$

(beachte:  $\mathrm{Hom}_\Gamma(-, \mathbf{N}^\vee \otimes \mathcal{J}^\bullet)$  ist exakt). Die sukzessiven Quotienten sind von der Form  $\mathrm{Hom}(\mathcal{M}^m/\mathcal{M}^{m+1}, \mathbf{N}^\vee \otimes \mathcal{J}^\bullet)$ , also bekommen wir mit den selben Methoden wie in Kapitel 6 eine Spektralsequenz

$$E_1^{p,*} = \mathbb{W}_{n-p-1}^\Gamma \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+*}(\mathbf{M}_X/p^*\mathcal{M}, \mathbf{N}_X),$$

aus der wir wegen 1.25 die gleichen Folgerungen ziehen können wie aus der Spektralsequenz 3.15. in Kapitel 3.

## 7.c. Ausblick/ offene Fragen

In diesem letzten Abschnitt ist eine Auswahl von Fragen aufgelistet, die im Rahmen dieser Arbeit nicht beantwortet werden konnten.

**7.1.** (Berechenbarkeit). Durch diese Arbeit ist der Homomorphismus  $\alpha : \mathrm{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow H^*(\Gamma; \mathrm{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{N}))$  (mittels Berechnung von  $H_*(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma)$  in kleinen Dimensionen sehr gut verstanden. Man gerät aber schon bei  $\dim(X) = 3$  (z.B. wenn  $X$  der obere Halbraum und  $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$  für einen Ganzheitsring  $\mathcal{O}$  eines quadratisch imaginären Zahlkörpers ist) an die Grenzen der Berechenbarkeit, wie man in Abschnitt 4.c. ab Seite 64 sieht, und man stößt leider auf ähnliche Probleme wie bei der Kohomologie von  $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ . In diesem Sinne ist noch viel für die Berechenbarkeit von  $\mathrm{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  oder gar  $H_*(\mathbb{W}_\bullet^\Gamma)$  zu tun.

**7.2.** (Zusätzliche Strukturen). Die Kohomologie von  $\Gamma$  besitzt viele zusätzliche Strukturen. Da wären z.B. die multiplikative und die Hodge-Struktur sowie die Operation der Hecke-Algebra im Falle arithmetischer Gruppen. Alles deutet darauf hin, dass mittels der De-Rham-Auflösung die ersten beiden genannten Strukturen auch auf den Invarianten  $\mathrm{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  verwirklicht werden

können. Die aus zahlentheoretischer Sicht interessante Operation der Hecke-Algebra (oder etwas Verwandtes) scheint sich nicht verwirklichen zu lassen, weil auf den Invarianten  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  die dazu nötigen Transferabbildungen nicht in dieser Form existieren.

**7.3.** (Endlichkeit). An dem Satz 4.18. ist die Forderung, dass  $p(X_H)$  für alle Stabilisatoren nur endlich viele Komponenten besitzen soll, nicht zufriedenstellend. Vermutlich gilt das für alle dort betrachteten arithmetischen Gruppen  $\Gamma$ . Diese und ähnliche Fragen, die die Endlichkeit von  $\Gamma \backslash X$  in jeglicher Form betreffen und damit zwangsläufig etwas mit Kompaktifizierungen von  $X$  zu tun haben, sind auch für sich genommen interessant.

**7.4.** (Azyklische Auflösungen). Nachdem wir in 5.20. gesehen haben, dass die De-Rham-Auflösung azyklisch bezüglich dem Funktor  $\text{Hom}_\Gamma(p^*\mathcal{M}, -)$  ist, taucht natürlich die Frage auf, ob im Kontext arithmetischer Gruppen eine von der Lie-Algebra von  $G$  herrührende Auflösung in [BW, VII, 2.7] entsprechende azyklische Auflösung der Garbe  $\mathbf{N}_X$  existiert. Überhaupt wäre es interessant zu wissen, wie man etablierte Techniken für das Studium der Kohomologie arithmetischer Gruppen (wie sie z.B. in [LH], Seiten 1 bis 30 von Schwermer, vorgestellt werden) auf die Invarianten  $\text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  (oder allgemeiner  $\text{Ext}_\Gamma^*(\mathcal{K}, \mathbf{N}_X)$ ,  $\mathcal{K} \subset \mathbf{M}_X$ ) übertragen könnte.

# Literaturverzeichnis

- [BL] J. Bernstein and V. Lunts. *Equivariant Sheaves and Functors*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994.
- [Bor1] A. Borel. *Introduction aux groupes arithmétiques*. Hermann, Paris, 1969.
- [Bor2] A. Borel. *Intersection Cohomology*. Progress in Mathematics, Vol. 50, Birkhäuser, Boston, 1984.
- [Bre1] G. E. Bredon. *Introduction to Compact Transformation Groups*. Academic Press Inc., U.S., 1972.
- [Bre2] G. E. Bredon. *Sheaf Theory*. 2nd ed., Springer, GTM 170, New York, 1997.
- [Brw] K.S. Brwon. *Cohomology of Groups*. GTM 87 Springer-Verlag, New York, 1994.
- [BT] R. Bott and L.W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer, GTM 82, New York, 1982.
- [BW] A. Borel and N. Wallach. Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups. *Ann. Math. Studies*, 94 Princeton, 1980.
- [Coh] M.M. Cohen. *A Course in Simple-Homotopy Theory*. GTM 10 Springer-Verlag, New York, Berlin, 1973.
- [Dim] A. Dimca. *Sheaves in Topology*. Springer Universitext, Heidelberg, 2004.
- [GM1] S.I. Gelfand and Yu.I. Manin. *Methods of Homological Algebra*. Springer Monographs in Mathematics, 2nd ed., Berlin, Heidelberg, 2003.
- [GM2] M. Goresky and R. MacPhearson. *Stratified Morse Theory*. Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, 1988.
- [Gro] A. Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math J.*, 9 119–221, 1957.
- [Har] G. Harder. *Kohomologie arithmetischer Gruppen*. Vorlesung, Universität Bonn, 1987–1988.

- [Hat] A. Hatcher. Bianchi orbifolds of small discriminant. *unveröffentlichte Arbeit*, online verfügbar 6 Seiten, 1983.
- [Hel] S. Helgason. *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. Academic Press Inc., New York, 1962.
- [Ill1] S. Illman. Approximation of  $g$ -maps by maps in equivariant general position and imbeddings of  $g$ -complexes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 262 113–157, 1980.
- [Ill2] S. Illman. Existence and uniqueness of equivariant triangulations of smooth proper  $g$ -manifolds with some applications to equivariant whitehead torsion. *J. reine angew. Math.*, 524 129–183, 2000.
- [Ive] B. Iversen. *Cohomology of Sheaves*. Universitext Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Jän] K. Jänich. *Differenzierbare  $G$ -Mannigfaltigkeiten*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968.
- [KS] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Springer, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 2nd print, Berlin, Heidelberg, 2002.
- [LH] J.P. Labesse and J. Schwermer (Hsg.). *Cohomology of Arithmetic Groups and Automorphic Forms*. Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Luminy/Marseille, 1989.
- [McC] J. McCleary. *A User's Guide to Spectral Sequences*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 58, 2nd Edition, Cambridge University Press New York, 2001.
- [Rag] M.S. Raghunathan. A note on quotients of real algebraic groups by arithmetic subgroups. *Invent. Math.*, 4 318–335, 1967/1968.
- [Ser1] J.-P. Serre. *Linear Representations of Finite Groups*. Springer GTM 42, New York, 1977.
- [Ser2] J.P. Serre. Arbres, amalgames,  $sl_2$ . *Asterisque*, 46 189 pp., 1977.
- [Shi] G. Shimura. *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*. Princeton University Press (Publications of the Mathematical Society of Japan 11), New Jersey, 1977.
- [Sin] W. Singhof. unveröffentlichte arbeit.
- [Ste] N. Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton University Press, New Jersey, 1951.
- [Sw] R. G. Swan. Generators and relations for certain special linear groups. *Advances in Math.*, 6 1–77, 1971.

- [Wei] C. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge University Press, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 38, New York, 1994.
- [Whi] G.W. Whitehead. *Elements of Homotopy Theory*. GTM 61 Springer Verlag, New York-Berlin, 1978.

# Index

äquivariante Garbe . . . . .	6	Grothendieckspektralsequenz . . . . .	7
äquivariante Stratifizierung . . . . .	19	... einer Adjunktion . . . . .	8
äquivariante Triangulierung . . . . .	23	Gruppenalgebra . . . . .	4
$\alpha : \text{Ext}_\Gamma^*(\mathbf{M}_X, \mathbf{N}_X) \rightarrow \text{Ext}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ . . . . .	12	$\Gamma_\sigma$ . . . . .	22
$A_Z^X$ . . . . .	14	$\Gamma_Z = \{g \in \Gamma \mid gZ = Z\}$ . . . . .	1
azyklisch von der Höhe $m$ . . . . .	76	$H_Z^*(U; \mathcal{F}) = H^*(U, U - Z; \mathcal{F})$ . . . . .	14
Azyklitätslemma . . . . .	83		
$\text{coind}_H^\Gamma$ . . . . .	5	$\text{ind}_H^\Gamma$ . . . . .	5
$\mathcal{C}_\sigma^\bullet$ . . . . .	89	Inzidenzhomomorphismus . . . . .	39 f.
dünne Garbe . . . . .	25	Inzidenzzahl . . . . .	49
Darstellung von $\Gamma$ . . . . .	5	$\iota : p^* \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{M}_X$ . . . . .	12
De-Rham-Auflösung . . . . .	78, 82	Isotropie-Filtrierung . . . . .	31
De-Rham-Komplex . . . . .	82	Isotropie-Stratifizierung . . . . .	20
$\dim(\sigma)$ . . . . .	21	$\mathcal{K}_b^a$ . . . . .	91
diskontinuierlich . . . . .	1	Koeffizientensystem . . . . .	43
diskontinuierlicher $\Gamma$ -Raum . . . . .	<i>siehe</i>	Kohomologie mit Träger . . . . .	14
diskontinuierlich		kokompakt . . . . .	61
eigentlich diskontinuierlich . . . . .	<i>siehe</i>	kompatible Isomorphismen . . . . .	28
diskontinuierlich		konstruierbar . . . . .	23
$E_X(\mathcal{F}), E_\Gamma(\mathcal{F})$ . . . . .	91	Lokal-Global-Spektralsequenz . . . . .	8
Fortsetzung durch Null . . . . .	14	lokales Modell . . . . .	3
$f_{\mathcal{S}, \mathcal{I}}$ . . . . .	46	$\mathcal{M}$ . . . . .	5
$\mathcal{F}^X$ . . . . .	14	offener Stern . . . . .	20
$\mathcal{F}_Z$ . . . . .	14	$\sigma_\sigma$ . . . . .	40
$\Gamma$ -Garbe . . . . .	6	Orientierung . . . . .	49
$\Gamma$ -Funktorkomplex . . . . .	28	Orientierungsgarbe . . . . .	40
$\Gamma$ -Stratifizierung . . . . .	19	$p_*^\Gamma$ . . . . .	6
$\Gamma_\sigma$ . . . . .	19	Poincaré-Verdier-Dualität . . . . .	10
$\Gamma$ -Simplizialkomplex . . . . .	21	reguläre Punkte . . . . .	4
$\Gamma_{x(\sigma)}$ . . . . .	20	$r_{X, V}(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ . . . . .	46
geometrische Realisierung . . . . .	22	Restriktionshomomorphismus . . . . .	14
$\Gamma$ -invariant . . . . .	1		
größte Isotropie-Stratifizierung . . . . .	21		

$ \mathcal{S} $ .....	22
$\mathcal{S}$ -dünne Garbe .....	25
$\mathcal{S}$ -konstruierbar .....	23
$\mathcal{S} \cap V$ .....	20, 46
$Sh^\Gamma(X)$ .....	7
$ \sigma ,  \overline{\sigma} $ .....	19, 22
$(\sigma) = \Gamma \cdot \sigma$ .....	19
$\sigma(x)$ .....	30
Simplex .....	22
Simplizialkomplex .....	21
Simplizialkomplex, äquivarianter ...	21
singuläre Punkte .....	4
singuläres Stratum .....	49
$\mathcal{S}_{orb}$ .....	20
$\mathcal{S}_\sigma$ .....	55
Stratifizierung .....	19
Stratum .....	19
strikt $\mathcal{S}$ -konstruierbar .....	24
Strukturmorphismen .....	6
Thom-Isomorphismus .....	40
Triangulierung .....	23
$U_\sigma$ .....	20, 22
Vergleichsmorphismus .....	12
Vietoris-Begle-Satz .....	33
$\mathcal{W}_j$ .....	56
$\mathbb{W}_\bullet, \mathbb{W}_\bullet(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ .....	44
weich .....	77
welk .....	77
Whitney-Stratifizierung .....	19
$\mathcal{W}_\bullet(\mathcal{S}, \mathcal{L}) = \mathcal{W}_\bullet$ .....	56
$X^{\geq m}, X^{\leq m}$ .....	21
$X^m$ .....	27
$X_H, X_{(H)}$ .....	17
$x(\sigma)$ .....	20
zulässige Umgebung .....	3