

Eine geometrische Charakterisierung des
lokalen Phragmén-Lindelöf Prinzips für
algebraische Flächen in $\mathbb{C}^n$

In a u g u r a l - D i s s e r t a t i o n

zur

Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Tobias Heinrich
aus Düsseldorf

Düsseldorf 2008

Aus dem Mathematischen Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Gedruckt mit Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

1. Referent: Prof. Dr. R. Meise
2. Referent: Prof. Dr. R. W. Braun

Tag der mündlichen Prüfung: 3.7.2008

Eine geometrische Charakterisierung des lokalen Phragmén-Lindelöf Prinzips für algebraische Flächen in $\mathbb{C}^n$

Im Jahr 1973 bewies Hörmander, daß sich die Surjektivität eines linearen partiellen Differentialoperators mit konstanten Koeffizienten $P(D) : \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ anhand der folgenden Abschätzungen vom Phragmén-Lindelöf Typ charakterisieren läßt, welche in den reellen Punkten der Nullstellenvarietät des Hauptteils von P gelten: Eine analytische Menge $V \subset \mathbb{C}^n$ erfüllt das lokale Phragmén-Lindelöf Prinzip $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$ in einem Punkt $\xi \in V \cap \mathbb{R}^n$, wenn Konstanten $0 < r_1 < r_2$ und $A \geq 1$ existieren, so daß für jede plurisubharmonische Funktion u auf V , welche $u(z) \leq 1$ für alle $z \in V \cap B(\xi, r_1)$ und $u(x) \leq 0$ für alle $x \in V \cap B(\xi, r_1) \cap \mathbb{R}^n$ erfüllt, die Abschätzung $u(z) \leq A|\text{Im } z|$ für alle $z \in V \cap B(\xi, r_2)$ gilt.

Im Jahr 2004 haben Braun, Meise und Taylor erstmals eine geometrische Charakterisierung dafür gegeben, daß eine analytische Menge $V \subset \mathbb{C}^3$ der reinen Dimension 2 die Bedingung $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$ in einem reellen Punkt $\xi \in V \cap \mathbb{R}^3$ erfüllt. Dazu entwickelten sie das Konzept der Grenzvarietäten entlang einfacher Kurven, welche Approximationen an V von höherer Ordnung in Konoiden (das sind verallgemeinerte Kegel) darstellen. Unter Verwendung von Grenzvarietäten leiten wir die folgende notwendige Bedingung für PL_{loc} her, welche einen Zusammenhang zum starken Phragmén-Lindelöf Prinzip (SPL) herstellt:

Hauptsatz 1. *Ist $V \subset \mathbb{C}^n$ eine analytische Menge der reinen Dimension $k \geq 1$ mit $0 \in V$, welche das Prinzip $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$ erfüllt, so gilt für jede reelle einfache Kurve γ in $\mathbb{R}^n$ und jedes $d \geq 1$, daß die Grenzvarietät $T_{\gamma,d}V$ das Prinzip (SPL) erfüllt, sofern $T_{\gamma,d}V \neq \emptyset$ ist.*

Für $T_{\gamma,d}V \neq \emptyset$ folgt insbesondere, daß $T_{\gamma,d}V \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$ und somit eine reell-analytische Menge der reinen reellen Dimension k ist. Ferner erhält man aus Hauptsatz 1 zusammen mit Hörmanders oben genannter Charakterisierung ein neues notwendiges Kriterium dafür, daß $P(D)$ auf $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ surjektiv ist.

Erfüllt V das Prinzip $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$, so haben Braun, Meise und Taylor gezeigt, daß V eine Hyperbolizitätseigenschaft in denjenigen Konoiden besitzt, welche zu reellen regulären Punkten einer Grenzvarietät gehören. Diese nennen sie (γ, d) -Hyperbolizität. Hat eine analytische Menge $V \subset \mathbb{C}^n$ der reinen Dimension $k \geq 1$ die Eigenschaft, daß jede Grenzvarietät $T_{\gamma,d}V$ entlang einer reellen einfachen Kurve γ das Prinzip $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$ in jedem reellen Punkt $\xi \in T_{\gamma,d}V$ erfüllt, und ist V (γ, d) -hyperbolisch in jedem Punkt $\eta \in (T_{\gamma,d}V)_{\text{reg}} \cap \mathbb{R}^n$, so heißt V hyperbolisch in Konoiden (im Ursprung).

Wie Meise und Taylor gezeigt haben, impliziert das Prinzip (SPL) das Prinzip $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$ in jedem reellen Punkt ξ . Daher folgt aus Hauptsatz 1, daß Hyperbolizität in Konoiden notwendig dafür ist, daß V das Prinzip $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$ erfüllt. Basierend auf der Arbeit von Braun, Meise und Taylor zeigen wir für algebraische Mengen $V \subset \mathbb{C}^n$ der reinen Dimension 2 mit $0 \in V$, daß Hyperbolizität in Konoiden auch hinreichend dafür ist:

Hauptsatz 2. *Ist $V \subset \mathbb{C}^n$ eine algebraische Teilmenge der reinen Dimension 2 mit $0 \in V$, so sind äquivalent:*

- (1) *V erfüllt $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$,*
- (2) *V ist hyperbolisch in Konoiden,*
- (3) *V erfüllt die Bedingungen der Hyperbolizität in Konoiden in geeigneter Weise für den Tangentialkegel T_0V und für eine geeignete Menge endlich vieler Grenzvarietäten $T_{\gamma,d}V$.*

Weil T_0V homogen und $T_{\gamma,d}V$ translationsinvariant in Richtung der Tangente von γ im Ursprung ist, läßt sich PL_{loc} für die Mengen in (c) anhand bekannter Kriterien überprüfen.

Die Schwierigkeit im Beweis von Hauptsatz 2 besteht darin, Abschätzungen von Grenzvarietäten $T_{\gamma,d}V$ zurück auf V in Konoiden zu übertragen, welche mehrere reelle Verzweigungskurven bzgl. jeder nicht-charakteristischen Projektion enthalten. Hierzu zeigen wir, daß sich die Vielfachheit solcher Verzweigungskurve im Ursprung nur in Abhängigkeit vom Grad von V beschränken läßt. An dieser Stelle geht die Voraussetzung ein, daß V algebraisch ist.

A geometric characterization of the local Phragmén-Lindelöf principle for algebraic surfaces in $\mathbb{C}^n$

In 1973 Hörmander proved that surjectivity of a linear partial differential operator with constant coefficients $P(D) : \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ is characterized by the following estimates of Phragmén-Lindelöf type which hold on the real points of the zero variety of the symbol of P : An analytic set $V \subset \mathbb{C}^n$ satisfies the local Phragmén-Lindelöf principle $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$ at a point $\xi \in V \cap \mathbb{R}^n$, if there exist constants $0 < r_1 < r_2$ and $A \geq 1$ such that any plurisubharmonic function u on V satisfying $u(z) \leq 1$ for $z \in V \cap B(\xi, r_1)$ and $u(x) \leq 0$ for $x \in V \cap B(\xi, r_1) \cap \mathbb{R}^n$ also satisfies $u(z) \leq A|\text{Im } z|$ for $z \in V \cap B(\xi, r_2)$.

In 2004 Braun, Meise, and Taylor gave a geometric characterization for an analytic set $V \subset \mathbb{C}^3$ of pure dimension 2 to satisfy $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$ at a real point $\xi \in V \cap \mathbb{R}^3$. For this purpose they developed the notion of limit varieties along simple curves which are higher order approximations to V in conoids (i.e. generalized cones). Using limit varieties we obtain the following necessary condition for PL_{loc} in relation to the strong Phragmén-Lindelöf principle (SPL):

Theorem 1. *Let $V \subset \mathbb{C}^n$ be an analytic set of pure dimension $k \geq 1$ satisfying $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$ at $0 \in V$. Then for any real simple curve γ in $\mathbb{R}^n$ and any $d \geq 1$ the limit variety $T_{\gamma,d}V$ satisfies (SPL) provided $T_{\gamma,d}V \neq \emptyset$.*

In particular it follows from Theorem 1 that $T_{\gamma,d}V \neq \emptyset$ implies $T_{\gamma,d}V \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$. Hence $T_{\gamma,d}V \cap \mathbb{R}^n$ is a real-analytic set of pure real dimension k . Moreover, Theorem 1 combined with Hörmander's characterization from above gives a new necessary condition for the surjectivity $P(D)$ on $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$.

For V satisfying $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$ Braun, Meise, and Taylor proved certain hyperbolicity properties in those conoids that are related to real regular points of limit varieties which they called (γ, d) -hyperbolicity. An analytic set $V \subset \mathbb{C}^n$ of pure dimension $k \geq 1$ is said to be hyperbolic in conoids (at the origin), if any limit variety $T_{\gamma,d}V$ along some real simple curve γ satisfies $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$ at any point $\xi \in T_{\gamma,d}V \cap \mathbb{R}^n$ and V is (γ, d) -hyperbolic at any point $\eta \in (T_{\gamma,d}V)_{\text{reg}} \cap \mathbb{R}^n$.

Meise and Taylor proved that (SPL) implies $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$ at any real point ξ . Hence it follows from Theorem 1 that hyperbolicity in conoids is necessary for V to satisfy $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$. Based upon results of Braun, Meise, and Taylor we show for algebraic sets $V \subset \mathbb{C}^n$ that hyperbolicity in conoids is also sufficient:

Theorem 2. *Let $V \subset \mathbb{C}^n$ be an algebraic subset of pure dimension 2 containing the origin. The following are equivalent:*

- (1) *V satisfies $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$,*
- (2) *V is hyperbolic in conoids,*
- (3) *V satisfies the conditions of hyperbolicity in conoids appropriately for the tangent cone T_0V and for a particular finite set of limit varieties $T_{\gamma,d}V$.*

Since T_0V is homogeneous and $T_{\gamma,d}V$ is shift-invariant in direction of the tangent of γ at the origin one can verify PL_{loc} for the sets in (c) using well known criteria.

The difficulty in the proof of Theorem 2 consists of the attempt to pass estimates from limit varieties $T_{\gamma,d}V$ back to V in conoids which contain several real branch curves with respect to any non-characteristic projection. For this purpose we show that the multiplicity at the origin of any such branch curve is bounded only in terms of the degree of V . Here the assumption on V to be algebraic is applied.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundlagen	4
1.1 Geometrische Grundbegriffe der komplexen Analysis	4
1.2 Grenzvarietäten und Konoide	8
2 Phragmén-Lindelöf Bedingungen und Hyperbolizität in Konoiden	11
Hyperbolizität in Konoiden	15
3 Abschätzung der Vielfachheit von Verzweigungskurven nicht-charakteristischer Projektionen	16
4 Charakterisierung von PL_{loc} für algebraische Flächen bei beliebiger Kodimension	20
4.1 Nicht-einfache Punkte in Grenzvarietäten	20
4.2 Kritische Niveaus	24
4.3 Konstruktion einer endlichen Menge $\mathcal{C}$ reeller einfacher Kurven in $\mathbb{R}^n$	25
4.4 Charakterisierung von $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$	27
Anhang	46
Literaturverzeichnis	50

Einleitung

Im Jahr 1973 bewies Hörmander in [14], daß sich die Surjektivität eines partiellen Differentialoperators mit konstanten Koeffizienten $P(D)$ auf dem Raum der reell-analytischen Funktionen $\mathcal{A}(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex anhand von Abschätzungen charakterisieren läßt, welche für alle plurisubharmonischen Funktionen auf der Nullstellenvarietät $V(P_m)$ des Hauptteils P_m von P gelten. Diese Abschätzungen erhielten den Namen Phragmén-Lindelöf Abschätzungen aufgrund ihrer Ähnlichkeit zu denen im klassischen Phragmén-Lindelöf Theorem der komplexen Analysis.

Im Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ zeigte Hörmander, daß $P(D) : \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ genau dann surjektiv ist, wenn $V(P_m)$ das folgende lokale Phragmén-Lindelöf Prinzip $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$ in allen reellen Punkten $\xi \in V(P_m) \cap \mathbb{R}^n$ erfüllt:

Definition. Eine analytische Menge $V \subset \mathbb{C}^n$ erfüllt das lokale Phragmén-Lindelöf Prinzip $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$ in einem Punkt $\xi \in V \cap \mathbb{R}^n$, wenn Konstanten $0 < r_1 < r_2$ und $A \geq 1$ existieren, so daß für jede plurisubharmonische Funktion u auf V , welche $u(z) \leq 1$ für alle $z \in V \cap B(\xi, r_1)$ und $u(x) \leq 0$ für alle $x \in V \cap B(\xi, r_1) \cap \mathbb{R}^n$ erfüllt, die Abschätzung $u(z) \leq A|\text{Im } z|$ für alle $z \in V \cap B(\xi, r_2)$ gilt.

Im Laufe der Zeit haben verschiedene Autoren diese und weitere Abschätzungen vom Phragmén-Lindelöf Typ dazu verwendet, Eigenschaften von partiellen Differentialoperatoren auf verschiedenen Räumen zu charakterisieren:

Für eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ haben Meise, Taylor und Vogt 1990 in [16] die Frage beantwortet, wann $P(D) : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ eine stetige lineare Rechtsinverse besitzt. Ist Ω zusätzlich konvex, so läßt sich ihre Antwort mittels Fourier-Analysis in Form einer globalen Phragmén-Lindelöf Bedingung an die Nullstellenvarietät von $P(-z)$ ausdrücken.

Vogt verwendete 2007 Hörmanders lokales Phragmén-Lindelöf Prinzip in [20], um diejenigen kompakten kohärenten reell-analytischen Varietäten $X \subset \mathbb{R}^n$ anzugeben, auf denen ein stetiger linearer Ausdehnungsoperator $\mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ existiert.

Im Jahr 1992 übersetzte Braun in [1] Hörmanders Charakterisierung für die Surjektivität von $P(D)$ auf $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ im Fall $n = 3$ in eine geometrische Charakterisierung, welche Bedingungen an die reellen Punkte der Nullstellenvarietät des Hauptteils von P stellte.

Im Jahr 2004 haben Braun, Meise und Taylor in [9] erstmals eine geometrische Charakterisierung dafür gegeben, daß eine analytische Menge $V \subset \mathbb{C}^3$ der reinen Dimension 2 die Bedingung $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$ in einem reellen Punkt $\xi \in V \cap \mathbb{R}^3$ erfüllt. Dazu entwickelten sie das Konzept der Grenzvarietäten entlang einfacher Kurven, welches in Kapitel I dieser Arbeit vorgestellt wird.

Eine Grenzvarietät $T_{\gamma,d}V$ entlang einer einfachen Kurve γ ist eine Approximation an V der Ordnung $d \geq 1$ in einem Konoid. Dies ist ein verallgemeinerter Kegel, dessen Spitze im Ursprung liegt und dessen Profil von höherer Ordnung entlang einer komplexen Kurve zusammenschrumpft.

Als ein Resultat dieser Arbeit wird in Kapitel II unter Verwendung von Grenzvarietäten die folgende notwendige Bedingung gezeigt, welche einen Zusammenhang zwischen PL_{loc} und dem starken Phragmén-Lindelöf Prinzip (SPL) (siehe Definition 2.2) herstellt:

Hauptsatz 1. *Ist $V \subset \mathbb{C}^n$ eine analytische Menge der reinen Dimension $k \geq 1$ mit $0 \in V$, welche das Prinzip $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$ erfüllt, so gilt für jede reelle einfache Kurve γ in $\mathbb{R}^n$ und jedes $d \geq 1$, daß die Grenzvarietät $T_{\gamma,d}V$ das Prinzip (SPL) erfüllt, sofern $T_{\gamma,d}V \neq \emptyset$ ist.*

Für $T_{\gamma,d}V \neq \emptyset$ folgt insbesondere, daß $T_{\gamma,d}V \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$ und somit eine reell-analytische Menge der reinen reellen Dimension k ist.

Im Beweis von Hauptsatz 1 wird verwendet, daß sich (SPL) durch Abschätzungen für Extremalfunktionen ausdrücken läßt. Um diese nachzuhalten, werden Aussagen von Meise, Taylor und Vogt über geometrische Konvergenz benötigt, womit sich Abschätzungen von V auf $T_{\gamma,d}V$ übertragen lassen. Somit genügt es, plurisubharmonische Funktionen auf V in hinreichend kleinen Konoiden zu lokalisieren, um Aussagen über plurisubharmonische Funktionen auf $T_{\gamma,d}V$ zu treffen.

Zusammen mit Hörmanders oben genannter Charakterisierung erhält man ein neues notwendiges Kriterium dafür, daß $P(D)$ auf $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ surjektiv ist (siehe Folgerung 2.10).

Meise und Taylor haben in [15] gezeigt, daß das Prinzip (SPL) das Prinzip PL_{loc} in jedem reellen Punkt impliziert. Daher folgt aus Hauptsatz 1 für eine analytische Menge V mit $0 \in V$, die $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$ erfüllt, daß jede Grenzvarietät $T_{\gamma,d}V$ entlang einer reellen Kurve γ das Prinzip $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$ in jedem reellen Punkt $\xi \in T_{\gamma,d}V \cap \mathbb{R}^n$ erfüllt.

Wie Braun, Meise und Taylor in [9] gezeigt haben, impliziert $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$ für V weiterhin, daß V eine Hyperbolizitätseigenschaft in denjenigen Konoiden besitzt, welche zu reellen regulären Punkten einer Grenzvarietät gehören. Diese nennen sie (γ, d) -Hyperbolizität (siehe Definition 2.12).

Analog zu [9] definiert man: Hat eine analytische Menge $V \subset \mathbb{C}^n$ der reinen Dimension $k \geq 1$ die Eigenschaft, daß jede Grenzvarietät $T_{\gamma,d}V$ entlang einer reellen einfachen Kurve γ das Prinzip $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$ in jedem reellen Punkt $\xi \in T_{\gamma,d}V$ erfüllt, und ist V (γ, d) -hyperbolisch in jedem Punkt $\eta \in (T_{\gamma,d}V)_{\text{reg}} \cap \mathbb{R}^n$, so heißt V hyperbolisch in Konoiden (im Ursprung).

Für eine algebraische Menge $V \subset \mathbb{C}^n$ der reinen Dimension 2 (eine algebraische Fläche) mit $0 \in V$ ist Hyperbolizität in Konoiden auch hinreichend dafür, daß V das Prinzip $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$ erfüllt. Es gilt die folgende Charakterisierung:

Hauptsatz 2. *Ist $V \subset \mathbb{C}^n$ eine algebraische Teilmenge der reinen Dimension 2 mit $0 \in V$, so sind äquivalent:*

- (1) V erfüllt $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$,
- (2) V ist hyperbolisch in Konoiden,
- (3) V erfüllt die Bedingungen der Hyperbolizität in Konoiden in geeigneter Weise für den Tangentialkegel T_0V und für eine geeignete Menge endlich vieler Grenzvarietäten $T_{\gamma,d}V$ (siehe Abschnitt 4.3).

Weil der Tangentialkegel T_0V homogen bzw. jede Grenzvarietät $T_{\gamma,d}V$ translationsinvariant in Richtung der Tangente von γ im Ursprung ist, läßt sich für die Mengen in (c) das lokale Phragmén-Lindelöf Prinzip anhand bekannter Charakterisierungen überprüfen.

Im Beweis von Hauptsatz 2 müssen Eigenschaften von Grenzvarietäten zurück auf V übertragen werden (siehe Kapitel IV). Dies erweist sich als schwierig in den singulären reellen Punkten η der Grenzvarietät, welche dadurch entstehen können, daß V im zugehörigen Konoid meh-

rere reelle Verzweigungskurven bzgl. jeder nicht-charakteristischen Projektion enthält; das sind Projektionen, welche $T_{\gamma,d}V$ in einer Umgebung von η „vernünftig“ projizieren. Solche Punkte werden als nicht-einfache Punkte bezeichnet.

Um V in einem Konoid zu untersuchen, in dem mehrere reelle Verzweigungskurven bzgl. einer nicht-charakteristischen Projektion liegen, verkleinert man das Konoid, indem man die Ordnung erhöht, mit der das Profil zusammenschrumpft. Auf diese Weise erhält man ein Konoid, welches weniger Verzweigungskurven enthält. Um diesen Schritt mathematisch umzusetzen, wird in Kapitel III zunächst gezeigt, daß sich die Vielfachheit jeder Verzweigungskurve bzgl. einer nicht-charakteristischen Projektion im Ursprung nur in Abhängigkeit vom Grad von V beschränken läßt. An dieser Stelle geht die Voraussetzung ein, daß V algebraisch ist.

Abschließend wird in einem Beispiel Hauptsatz 2 auf eine algebraische Fläche im $\mathbb{C}^4$ angewendet.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Meise für die interessante Themenstellung und die hervorragende Betreuung, ohne die diese Arbeit nicht hätte entstehen können. Ebenso bedanken möchte ich mich bei meiner Familie und meiner Freundin für ihre Unterstützung.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Geometrische Grundbegriffe der komplexen Analysis

Diese Arbeit beginnt mit einer Einführung grundlegender geometrischer Begriffe, wie sie zum Beispiel im Buch „Complex Analytic Sets“ [11] von Chirka zu finden sind.

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen, dann heißt $V \subset \Omega$ eine komplexe analytische Teilmenge, wenn gilt: Zu jedem Punkt $z \in \Omega$ gibt es eine Umgebung U von z in Ω und $f_1, \dots, f_N \in H(U)$, so daß gilt

$$U \cap V = \{w \in U : f_1(w) = \dots = f_N(w) = 0\}.$$

Offensichtlich ist V abgeschlossen in Ω .

$V \subset \mathbb{C}^n$ heißt (lokal) analytische Menge, wenn V nur in der Nähe eines jeden Punktes $z \in V$ die Nullstellenmenge endlich vieler holomorpher Funktionen ist. Offenbar ist jede lokal analytische Menge die analytische Teilmenge einer geeigneten offenen Umgebung.

Ein Punkt $z \in V$ heißt regulär, falls eine Umgebung U von z in Ω existiert, so daß $U \cap V$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit von U ist. Die (komplexe) Dimension dieser Untermannigfaltigkeit ist die Dimension von V im Punkt z , geschrieben als $\dim_z V$. Isolierte Punkte von V sind regulär als Untermannigfaltigkeiten der Dimension 0. Definiert man V_{reg} als Menge aller regulären Punkte von V , so ist V_{reg} per Definition offen in V . Wir bezeichnen ihr Komplement $V_{\text{sing}} := V \setminus V_{\text{reg}}$ als die Menge der singulären Punkte von V .

Nach [11], Abschnitt 4.5, ist V_{sing} eine analytische Teilmenge von Ω , welche nirgends dicht in V ist. Daher läßt sich die Dimension von V an einem beliebigen Punkt $z \in V$ definieren als

$$\dim_z V := \limsup_{w \in V_{\text{reg}}, w \rightarrow z} \dim_w V.$$

Ferner setzen wir

$$\dim V := \max_{z \in V} \dim_z V = \max_{z \in V_{\text{reg}}} \dim_z V.$$

Wir sagen V ist rein k -dimensional, falls $\dim_z V = k$ für alle $z \in V$ gilt. Eine rein zweidimensionale, lokal analytische Menge in $\mathbb{C}^n$ bezeichnen wir als analytische Fläche. Eine Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ heißt (affin) algebraisch, wenn sie die Nullstellenmenge endlich vieler Polynome ist.

In dieser Arbeit bezeichne $|\cdot|$ die euklidische Norm in $\mathbb{C}^n$. Für $a \in \mathbb{C}^n$, $r > 0$ ist $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - a| < r\}$, und wir setzen $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

$\text{Grass}(k, n)$ ist die (komplexe) Grassmann-Mannigfaltigkeit aller k -dimensionalen linearen Unterräume von $\mathbb{C}^n$.

1.1 Definition. Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine analytische Menge und $z \in V$. Wir sagen $v \in \mathbb{C}^n$ ist tangential zu V im Punkt z , falls es Folgen $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in V und $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ gibt, so daß $\lim_{j \rightarrow \infty} z_j = z$ und $v = \lim_{j \rightarrow \infty} t_j(\zeta_j - z) = v$ gilt. Wir bezeichnen die Menge aller zu V in z tangentialen Vektoren als Tangentialkegel $T_z V$.

Offensichtlich ist $T_z V$ ein komplexer Kegel, d.h. für jedes $v \in T_z V$ und jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\lambda v \in T_z V$.

1.2 Definition. Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine analytische Menge der reinen Dimension $k \geq 1$ in der Umgebung eines Punktes $z \in V \cap \mathbb{R}^n$.

- (a) Ein linearer Teilraum L von $\mathbb{C}^n$ heißt nicht-charakteristisch für V im Punkt z , falls gilt: $\dim L = n - k$, L wird über $\mathbb{C}$ von reellen Vektoren aufgespannt, und $L \cap T_z V = \{0\}$. Wir bezeichnen mit $\text{NC}(V, z) \subset \text{Grass}_{\mathbb{R}}(n - k, n)$ die Menge aller für V in z nicht-charakteristischen Teilräume von $\mathbb{C}^n$.
- (b) Eine Projektion π in $\mathbb{C}^n$ heißt nicht-charakteristisch für V im Punkt z , wenn $\text{rank } \pi = k$ ist, Bild und Kern von π über $\mathbb{C}$ von reellen Vektoren aufgespannt werden, und $\ker \pi \cap T_z V = \{0\}$ gilt.

Ist π eine nicht-charakteristische Projektion für V in $z \in V \cap \mathbb{R}^n$, so existieren Basen offener Umgebungen $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von z und $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von $\pi(z)$ in $\mathbb{C}^n$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\pi : V \cap X_j \rightarrow Y_j$ eigentlich ist, d.h. das Urbild jeder kompakten Menge in Y_j unter $\pi|_{V \cap X_j}$ ist kompakt.

Lokal läßt sich eine analytische Menge durch eigentliche Projektionen folgendermaßen beschreiben (siehe [11], Theorem 3.7):

1.3 Theorem. Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $V \subset U$ eine analytische Teilmenge der reinen Dimension $k \geq 1$, und π eine Projektion in $\mathbb{C}^n$ vom Rang k , so daß für $U' := \pi(U)$ die Abbildung $\pi : V \rightarrow U'$ eigentlich ist. Dann existieren eine analytische Teilmenge $\sigma \subset U'$ der Dimension $< k$ und $m \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

- (1) $\pi : V \setminus \pi^{-1}(\sigma) \rightarrow U' \setminus \sigma$ ist eine lokal biholomorphe Abbildung und $\#(\pi^{-1}(z') \cap V) = m$ für jedes $z' \in U' \setminus \sigma$,
- (2) $\pi^{-1}(\sigma)$ ist nirgends dicht in V .

Ist σ minimal, so sagen wir, $\pi : V \rightarrow U'$ ist eine m -blättrige analytische Überlagerung mit kritischer Menge σ .

Im Folgenden bezeichne $\mathbb{P}^n$ den komplexen projektiven Raum der Dimension n . Wir identifizieren $\mathbb{C}^n$ mit

$$U_0 := \{(z_0 : z_1 : \dots : z_n) \in \mathbb{P}^n : z_0 = 1\},$$

und bezeichnen mit

$$H_\infty := \mathbb{P}^n \setminus U_0 = \{(z_0 : z_1 : \dots : z_n) \in \mathbb{P}^n : z_0 = 0\}$$

die Menge der unendlich fernen Punkte in $\mathbb{P}^n$.

1.4 Definition. Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine algebraische Teilmenge der Dimension $k \geq 1$. Nach [11], Abschnitt 7.2, ist $\overline{V}^{\mathbb{P}^n}$ eine algebraische Menge in $\mathbb{P}^n$, daher gibt es homogene Polynome $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ mit $\overline{V}^{\mathbb{P}^n} \cap H_\infty = V(z_0, f_1, \dots, f_N)$. Bezeichne

$$\rho : U_0^* := \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \rightarrow H_\infty, \quad (1 : z_1 : \dots : z_n) \mapsto (0 : z_1, \dots, z_n),$$

die analytische Abbildung, welche jeder Richtung $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ den Schnittpunkt der komplexen Geraden $t \mapsto tv$ mit der Menge aller unendlich fernen Punkte in $\mathbb{P}^n$ zuordnet. Es gilt (siehe anschließende Bemerkung) $\overline{V}^{\mathbb{P}^n} \cap H_\infty \neq \emptyset$, daher ist

$$V_h^* := \rho^{-1}(\overline{V}^{\mathbb{P}^n} \cap H_\infty) = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \mid f_1 \circ \rho(z) = \dots = f_N \circ \rho(z) = 0\}$$

eine nicht-leere, analytische Teilmenge von $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

Für jedes $j = 1, \dots, N$ ist $g_j := f_j \circ \rho \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ homogen, daher ist der Abschluß

$$V_h := \overline{V_h^*}^{\mathbb{C}^n} = V_h^* \cup \{0\} = V(g_1, \dots, g_N)$$

eine algebraische Teilmenge von $\mathbb{C}^n$. Wir nennen V_h den Grenzkegel von V .

1.5 Bemerkung. (a) Ist $V \subset \mathbb{C}^n$ eine algebraische Teilmenge der reinen Dimension $k \geq 1$, so hat V_h ebenfalls reine Dimension k . Denn $\overline{V}^{\mathbb{P}^n}$ hat reine Dimension k und H_∞ hat reine Dimension $n - 1$. Nach [11], Abschnitt 3.5, Proposition 2, hat $\overline{V}^{\mathbb{P}^n} \cap H_\infty$ mindestens reine Dimension $k + (n - 1) - n = k - 1$, und $\dim \overline{V}^{\mathbb{P}^n} \cap H_\infty < k$, weil $\overline{V}^{\mathbb{P}^n} \cap H_\infty$ nirgends dicht in $\overline{V}^{\mathbb{P}^n}$ ist. Also hat $\overline{V}^{\mathbb{P}^n} \cap H_\infty$ reine Dimension $k - 1$, und aus [11], Proposition 2.5, folgt die Behauptung.

(b) Es gilt die Beschreibung

$$V_h = \left\{ r \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{z_j}{|z_j|} \mid r \in \mathbb{C}, z_j \in V, |z_j| \rightarrow \infty \right\},$$

insbesondere ist V_h tatsächlich ein komplexer Kegel.

1.6 Lemma. Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine algebraische Teilmenge der reinen Dimension $k \geq 1$ und π eine Projektion in $\mathbb{C}^n$ vom Rang k . Dann sind äquivalent:

(a) $\pi|_V$ ist eigentlich,

(b) $\ker \pi \cap V_h = \{0\}$,

(c) es existiert ein $C \geq 1$ mit $|z| \leq C(1 + |\pi(z)|)$ für alle $z \in V$.

Beweis. „(a) $\Rightarrow$ (b)“ Sei $\pi|_V$ eigentlich. Angenommen es existiert ein $z \in \ker \pi \cap V_h \setminus \{0\}$, oBdA. $|z| = 1$. Wähle eine Folge $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in V mit $|z_j| \rightarrow \infty$ und $\lim_{j \rightarrow \infty} z_j/|z_j| = z$. Setzt man $z'_j := \pi(z_j)$ für $j \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim_{j \rightarrow \infty} z'_j = \pi(z) = 0$. Daher ist $K := \{z'_j : j \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ kompakt, allerdings $\pi^{-1}(K) \cap V$ unbeschränkt im Widerspruch zur Voraussetzung.

„(b) $\Rightarrow$ (c)“ Es gelte $\ker \pi \cap V_h = \{0\}$. Angenommen für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $z_m \in V$ mit $|z_m| \geq m(1 + |\pi(z_m)|)$. Dann gilt $|z_m| \rightarrow \infty$. OBdA. sei $(z_m/|z_m|)_{m \in \mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $z \in V_h$. Dann ist $|z| = 1$. Es gilt $|\pi(z)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |\pi(z_m)|/|z_m| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} 1/m = 0$, d.h. $z \in \ker \pi$ im Widerspruch zu $V_h \cap \ker \pi = \{0\}$.

„(c) $\Rightarrow$ (a)“ Sei $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt. Da $\pi|_V$ stetig ist, ist $\pi^{-1}(K) \cap V$ abgeschlossen und nach (c) beschränkt, also kompakt. $\square$

1.7 Definition. Ist $V \subset \mathbb{C}^n$ eine algebraische Teilmenge der reellen Dimension $k \geq 1$, so heißt ein linearer Teilraum L von $\mathbb{C}^n$ nicht-charakteristisch für V im Unendlichen, falls gilt: $\dim L = n - k$, L wird über $\mathbb{C}$ von reellen Vektoren aufgespannt, und $L \cap V_h = \{0\}$. Wir bezeichnen mit $\text{NC}(V, \infty) \subset \text{Grass}_{\mathbb{R}}(n - 2, n)$ die Menge aller für V im Unendlichen nicht-charakteristischen Teilräume von $\mathbb{C}^n$.

Die folgenden Aussagen zeigen, daß es hinreichend viele nicht-charakteristische Unterräume bzw. Projektionen gibt (siehe [21], Abschnitt 7.7, und [11], Abschnitt 3.4).

1.8 Satz. Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine analytische Menge der reellen Dimension $k \geq 1$ in der Umgebung eines Punktes $z \in V$. Setze

$$A := \{L \in \text{Grass}(n - k, n) : \dim T_z V \cap L > 0\}.$$

Dann ist A eine analytische Teilmenge von $\text{Grass}(n - k, n)$.

Wegen $V_h = T_0(V_h)$ folgt aus Bemerkung 1.5 (a) und Satz 1.8:

1.9 Folgerung. Ist $V \subset \mathbb{C}^n$ eine algebraische Teilmenge der Dimension $k \geq 1$ und setzt man

$$A := \{L \in \text{Grass}(n - k, n) : V_h \cap L \neq \{0\}\},$$

so ist A analytisch in $\text{Grass}(n - k, n)$.

Folglich ist in beiden Fällen $\text{Grass}(n - k, n) \setminus A$ offen und dicht in $\text{Grass}(n - k, n)$.

1.10 Folgerung. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ sei $A_j \subset \text{Grass}(n - k, n)$ eine echte analytische Teilmenge und $A := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$. Dann ist $\text{Grass}(n - k, n) \setminus A$ dicht in $\text{Grass}(n - k, n)$ und $\text{Grass}_{\mathbb{R}}(n - k, n) \setminus A$ dicht in $\text{Grass}_{\mathbb{R}}(n - k, n)$.

Beweis. Nach [11], Anhang 3, können wir $\text{Grass}(n - 2, n)$ als komplexe Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{P}^N$ für $N = \binom{n}{n-2} - 1$ auffassen. $\text{Grass}(n - k, n)$ wird dadurch zu einem kompakten metrischen Raum. Insbesondere ist $\text{Grass}(n - 2, n)$ vollständig, und die erste Aussage folgt aus dem Satz von Baire.

Um die zweite Aussage zu zeigen, sei $L \in \text{Grass}_{\mathbb{R}}(n - k, n)$ fest gewählt. Wir konstruieren eine Karte U_L in $\text{Grass}_{\mathbb{R}}(n - k, n)$ wie folgt: Wähle eine Basis $v_1, \dots, v_{n-k} \in \mathbb{R}^n$ von L , so daß $(v_{i,j})_{i,j=1}^{n-k}$ gleich der Einheitsmatrix ist. Wir fassen die Zeilen einer Matrix als Basis eines linearen Teilraums von $\mathbb{C}^n$ auf und setzen

$$U_L := \left\{ L_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_{1,n-k+1} & \dots & w_{1,n} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & w_{n-k,n-k+1} & \dots & w_{n-k,n} \end{pmatrix} \mid w_{i,j} \in \mathbb{C} \text{ für } 1 \leq i \leq n - k, n - k + 1 \leq j \leq n \right\}.$$

Dann ist U_L eine offene Umgebung von L in $\text{Grass}(n - k, n)$. Die Abbildung $\Phi : \mathbb{C}^{k(n-k)} \rightarrow U_L$, $w \mapsto L_w$ ist biholomorph und es gilt $\Phi(\mathbb{R}^{k(n-k)}) = U_L \cap \text{Grass}_{\mathbb{R}}(n - k, n)$. Da $\Phi^{-1}(A_j \cap U_L)$ eine echte analytische Teilmenge von $\mathbb{C}^{k(n-k)}$ ist, ist $\Phi^{-1}(A_j \cap U_L \cap \text{Grass}_{\mathbb{R}}(n - k, n))$ nirgends dicht in $\mathbb{R}^{k(n-k)}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Wie zuvor folgt aus dem Satz von Baire auch die zweite Behauptung. $\square$

1.11 Definition. Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine analytische Fläche mit $0 \in V$ und $L \in \text{NC}(V, 0)$. Wir bezeichnen mit B_L die Menge der Verzweigungspunkte einer beliebigen Projektion π in $\mathbb{C}^n$ mit

$\ker \pi = L$ im Sinne von [11], Abschnitt 2.7: Für $z \in V_{\text{reg}}$ sei $\varphi_z : U' \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow U \subset V_{\text{reg}}$ eine Karte für V in einer Umgebung von z , dann ist

$$B_L := V_{\text{sing}} \cup \{z \in V_{\text{reg}} : \text{rank } D(\pi \circ \varphi_z)(\varphi_z^{-1}(z)) < 2\}.$$

Sind π_1, π_2 Projektionen in $\mathbb{C}^n$ und gilt $\ker \pi_1 = \ker \pi_2 = L$, so haben π_1 und π_2 dieselben Verzweigungspunkte, daher ist B_L wohldefiniert.

Unter diesen Voraussetzungen bilden die Verzweigungspunkte einer nicht-charakteristischen Projektion eine analytische Menge der Dimension ≤ 1 .

1.12 Definition. Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine analytische Menge und U eine offene Teilmenge von V . Eine Funktion $f : U \rightarrow [-\infty, \infty[$ heißt plurisubharmonisch, falls gilt:

- (i) f ist lokal nach oben beschränkt,
- (ii) f ist plurisubharmonisch auf $U \cap V_{\text{reg}}$: Ist $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{C}^k \rightarrow \mathcal{V} \subset V_{\text{reg}} \cap U$ eine Karte, so ist $f \circ \varphi$ plurisubharmonisch auf $\mathcal{U}$, d.h. $f \circ \varphi$ ist von oben halbstetig und für jedes $\eta \in \mathcal{U}$ und jedes $\xi \in \mathbb{C}^k$ ist die Abbildung $\tau \mapsto f \circ \varphi(\eta + \tau\xi)$ subharmonisch auf ihrem Definitionsbereich $\{\tau \in \mathbb{C} : \eta + \tau\xi \in \mathcal{U}\}$.
- (iii) f erfüllt

$$f(z) = \limsup_{\zeta \in U \cap V_{\text{reg}}, \zeta \rightarrow z} f(\zeta)$$

in allen Punkten $z \in U \cap V_{\text{sing}}$.

Wir bezeichnen mit $\text{PSH}(U)$ die Menge aller plurisubharmonischen Funktionen auf U .

1.2 Grenzvarietäten und Konoide

Zur Untersuchung geometrischer Fragen haben Braun, Meise und Taylor das Konzept der Grenzvarietäten entlang einfacher Kurven entwickelt (siehe [6]), welches in diesem Abschnitt vorgestellt wird.

1.13 Definition. (a) Eine einfache Kurve ist eine Abbildung $\gamma :]0, \alpha[\rightarrow \mathbb{C}^n$, welche für ein $q \in \mathbb{N}$ eine konvergente Puiseux-Entwicklung

$$\gamma(t) = \sum_{j=q}^{\infty} a_j t^{j/q}$$

mit $|a_q| = 1$ besitzt. Wir nennen a_q den Tangentialvektor von γ im Ursprung und $\text{tr}(\gamma) := \gamma(]0, \alpha[)$ die Spur von γ . Eine reelle einfache Kurve ist eine einfache Kurve γ mit $\text{tr}(\gamma) \subset \mathbb{R}^n$.

(b) Eine reelle einfache Kurve $\gamma :]0, \alpha[\rightarrow \mathbb{R}^n$ ist in Standardparametrisierung bezüglich einer Basis $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ mit $|\xi_1| = 1$ von $\mathbb{R}^n$ gegeben, wenn es ein $q \in \mathbb{N}$ und konvergente Puiseux-Reihen $\gamma_\nu(t) = \sum_{j=q+1}^{\infty} a_{\nu,j} t^{j/q}$ gibt, so daß sich γ schreiben läßt als

$$\gamma(t) = t\xi_1 + \sum_{\nu=2}^n \gamma_\nu(t)\xi_\nu, \quad t \in]0, \alpha[.$$

In [11], Abschnitt 6.1, wird gezeigt, daß jede rein eindimensionale, irreduzible, analytische Menge V , die den Ursprung als einzigen singulären Punkt enthält, in einer hinreichend kleinen Nullumgebung eine Puiseux-Parametrisierung besitzt. Hieraus wird in [9] gefolgert, daß jede Zusammenhangskomponente S von $V \cap \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $0 \in \bar{S}$ als Bild einer reellen einfachen Kurve in Standardparametrisierung geschrieben werden kann.

1.14 Definition. Seien $V \subset \mathbb{C}^n$ eine analytische Menge der reinen Dimension k mit $0 \in V$, $\gamma :]0, \alpha[\rightarrow \mathbb{C}^n$ eine einfache Kurve und $d \geq 1$. Für $t \in]0, \alpha[$ setzen wir

$$V_t := V_{\gamma,d,t} := \{w \in \mathbb{C}^n : \gamma(t) + t^d w \in V\} = \frac{1}{t^d}(V - \gamma(t))$$

und definieren die Grenzvarietät von V entlang γ als

$$T_{\gamma,d}V := \left\{ \zeta \in \mathbb{C}^n \mid \begin{array}{l} \zeta = \lim_{j \rightarrow \infty} z_j \text{ mit } z_j \in V_{\gamma,d,t_j} \text{ für } j \in \mathbb{N}, \\ \text{und } (t_j)_{j \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Nullfolge in }]0, \alpha[\end{array} \right\}.$$

1.15 Theorem ([9], Theorem 2.7). *Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine analytische Menge der reinen Dimension $k \geq 1$ mit $0 \in V$, $\gamma :]0, \alpha[\rightarrow \mathbb{C}^n$ eine einfache Kurve mit Tangentialvektor ξ im Ursprung und $d \geq 1$. Dann gilt:*

- (a) $T_{\gamma,d}V$ ist entweder leer oder eine algebraische Menge der reinen Dimension k .
- (b) $T_{\gamma,1}V = T_0V - \xi$.
- (c) Ist $d > 1$, so ist $w \in T_{\gamma,d}V$ genau dann, wenn $w + \lambda\xi \in T_{\gamma,d}V$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ist.
- (d) Zu jedem $R > 0$ existiert ein $0 < \delta \leq \alpha$, so daß $V_{\gamma,d,t}$ eine analytische Teilmenge von $B(0, R)$ für jedes $0 < t < \delta$ ist, und für jede Nullfolge $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $]0, \delta[$ konvergieren die Mengen $(V_{\gamma,d,t_j} \cap B(0, R))_j$ gegen $T_{\gamma,d}V \cap B(0, R)$ im Sinne von Meise, Taylor und Vogt [19], Definition 4.3.

1.16 Definition. Sei $\gamma :]0, \alpha[\rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reelle einfache Kurve, $d \geq 1$, $U \subset \mathbb{C}^n$ und $0 < r \leq \alpha$. Dann heißt die Menge

$$\Gamma(\gamma, d, U, r) := \bigcup_{0 < t < r} \gamma(t) + t^d U$$

Konoid, sofern der Ursprung nicht dazu gehört.

Sei $z \in T_{\gamma,d}V$ Grenzwert einer Folge $z_j = (w_j - \gamma(t_j))/t_j^d \in V_{\gamma,d,t_j}$. Ist $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $r > 0$, so gilt für j hinreichend groß, daß $z_j - z \in U$ und $t_j < r$ ist. Dann ist

$$w_j = \gamma(t_j) + t_j^d z_j \in \Gamma(\gamma, d, z + U, r) \cap V.$$

Man kann zeigen, daß vermöge der Abbildung $z \mapsto \gamma(t) + t^d z$ für $0 < t < r$ hinreichend klein die Grenzvarietät $T_{\gamma,d}V$ in einer Umgebung U_ζ eines Punktes $\zeta \in T_{\gamma,d}V$ eine Approximation an V im Konoid $\Gamma(\gamma, d, U_\zeta, r)$ der Ordnung d ist (siehe [6], Proposition 5.4). Dies führt zu der Frage, ob Eigenschaften von V in Konoiden und Eigenschaften der zugehörigen Grenzvarietäten einander entsprechen.

1.17 Definition. Zwei einfache Kurven γ und σ in $\mathbb{C}^n$ heißen äquivalent modulo $d \geq 1$, wenn gilt: Für jede Nullumgebung $D \subset \mathbb{C}^n$ und jedes $\rho > 0$ ist

$$\Gamma(\gamma, d, D, \rho) \cap \Gamma(\sigma, d, D, \rho) \neq \emptyset.$$

1.18 Bemerkung. Seien $\gamma(t) = \sum_{j=q}^{\infty} a_j t^{j/q}$ und $\sigma(t) = \sum_{j=p}^{\infty} b_j t^{j/p}$ reelle einfache Kurven, welche in Standardparametrisierung bzgl. derselben Basis von $\mathbb{R}^n$ gegeben sind. Nach [9], Lemma 2.15, sind γ und σ genau dann äquivalent modulo $d > 1$, wenn gilt

$$\sum_{j=q}^{dq} a_j t^{j/q} = \sum_{j=p}^{dp} b_j t^{j/p}.$$

In diesem Fall stimmen insbesondere die Tangentialvektoren von γ und σ im Ursprung überein.

Kapitel 2

Phragmén-Lindelöf Bedingungen und Hyperbolizität in Konoiden

Mit Hilfe der im letzten Abschnitt eingeführten Begriffe zeigen wir, wie sich das im Folgenden definierte lokale Phragmén-Lindelöf Prinzip PL_{loc} auf Grenzvarietäten überträgt.

2.1 Definition. Für $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $r_0 > 0$ sei $V \subset B(\xi, r_0)$ eine analytische Teilmenge mit $\xi \in V$. Wir sagen, V erfüllt das lokale Phragmén-Lindelöf Prinzip $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$, falls gilt:

$$\exists A \geq 1 \quad \exists r_0 \geq r_1 \geq r_2 > 0 \quad \forall u \in \text{PSH}(V \cap B(\xi, r_1)) : \quad (\alpha) \wedge (\beta) \Rightarrow (\gamma),$$

wobei

- (α) $u(z) \leq 1, \quad z \in V \cap B(\xi, r_1),$
- (β) $u(z) \leq 0, \quad z \in V \cap \mathbb{R}^n \cap B(\xi, r_1),$
- (γ) $u(z) \leq A|\text{Im } z|, \quad z \in V \cap B(\xi, r_2).$

2.2 Definition. Sei V eine algebraische Teilmenge von $\mathbb{C}^n$. Wir sagen, V erfüllt das starke Phragmén-Lindelöf Prinzip (SPL), falls gilt:

$$\exists A \geq 1 \quad \forall u \in \text{PSH}(V) : \quad (\alpha) \wedge (\beta) \Rightarrow (\gamma),$$

wobei

- (α) $u(z) \leq |z| + o(|z|), \quad z \in V,$
- (β) $u(z) \leq 0, \quad z \in V \cap \mathbb{R}^n,$
- (γ) $u(z) \leq A|\text{Im } z|, \quad z \in V.$

Nach [15], Proposition 4.4, gilt:

2.3 Bemerkung. Ist $V \subset \mathbb{C}^n$ eine algebraische Teilmenge, welche (SPL) erfüllt, so hat V die Eigenschaft $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$ in jedem Punkt $\xi \in V \cap \mathbb{R}^n$.

2.4 Satz. Für $r_0 > 0$ sei $V \subset B(0, r_0)$ eine analytische Teilmenge der reinen Dimension $k \geq 1$ mit $0 \in V$, welche $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$ erfüllt. Dann hat $T_{\gamma, d}V$ die Eigenschaft (SPL) für jede reelle einfache Kurve γ und jedes $d \geq 1$. Insbesondere hat T_0V die Eigenschaft (SPL).

Nach Bemerkung 2.3 verallgemeinert Satz 2.4 das Resultat [9], Theorem 3.13, von Braun, Meise und Taylor, in welchem $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$ in jedem reellen Punkt $\xi \in T_{\gamma, d}V$ als notwendig dafür nachgewiesen wird, daß V die Bedingung $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$ erfüllt.

Der Beweis von 2.4 erfordert zunächst einige Vorbereitung. Braun, Meise und Taylor haben gezeigt, daß sich Phragmén-Lindelöf Bedingungen durch die folgenden Extremalfunktionen charakterisieren lassen.

2.5 Definition. (a) Seien $D \subset \mathbb{C}^n$ offen, h eine plurisubharmonische Funktion auf D , $V \subset \mathbb{C}^n$ eine analytische Menge, welche abgeschlossen in einer offenen Obermenge von $\bar{D}$ ist, und $E \subset D$ eine Teilmenge. Die relative Extremalfunktion von E relativ zu V, h, D ist definiert als

$$U_E(z; h, V, D) := \sup \left\{ u(z) \mid \begin{array}{l} u \in \text{PSH}(V \cap D), \\ u \leq h \text{ auf } V \cap D \text{ und } u \leq 0 \text{ auf } V \cap E \end{array} \right\}.$$

(b) Für eine analytische Menge $V \subset \mathbb{C}^n$ und $B, \rho > 0$ setzen wir

$$U^\rho(z, V, B) := \sup \left\{ \varphi(z) \mid \begin{array}{l} \varphi \in \text{PSH}(V), \\ \varphi(w) \leq \min(|w| + B, \rho |\text{Im } w|) \text{ für alle } w \in V \end{array} \right\}.$$

2.6 Bezeichnung. Für $R, \varepsilon, B > 0$ sei

$$K(R, \varepsilon, B) := \{z \in \mathbb{C}^n : |\text{Im } z| \leq \varepsilon(|z| + B), |z| \leq R/2\}.$$

Aus [17] verwenden wir folgende Funktion H zur Lokalisierung plurisubharmonischer Funktionen:

2.7 Lemma. *Definiert man $H : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ als $H(z) := \frac{1}{2}(|\text{Im } z|^2 - |\text{Re } z|^2)$, so ist H plurisubharmonisch auf $\mathbb{C}^n$ und hat folgende Eigenschaften:*

$$\begin{array}{ll} (a) & H(z) \leq |\text{Im } z|, \quad |z| < 1, \\ (b) & H(z) \leq |\text{Im } z| - \frac{1}{2}, \quad |z| = 1, \\ (c) & H(x) \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ (d) & H(iy) \geq 0, \quad y \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

2.8 Lemma. *Für $r_0 > 0$ sei $V \subset B(0, r_0)$ eine analytische Teilmenge der reellen Dimension $k \geq 1$ mit $0 \in V$, die $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$ erfüllt; seien $A \geq 1$ und $r_0 \geq r_1 \geq r_2 > 0$ gemäß Definition 2.1 gewählt. Sei $\gamma :]0, \alpha[\rightarrow \mathbb{C}^n$ eine reelle einfache Kurve und $d \geq 1$. Dann existiert für alle $R, \varepsilon, B > 0$ mit $R \geq 2B$ ein $0 < t_0 \leq \alpha$, so daß für alle $0 < t < t_0$ mit $h(z) := |z| + B$ gilt*

$$U_{K(R, \varepsilon, B)}(w; h, V_t, B(0, R)) \leq 8A |\text{Im } w|, \quad w \in V_t \cap B(0, R/8).$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir $0 < r_2 \leq r_1 < 1$ annehmen. Wähle $0 < t_0 \leq \alpha$ hinreichend klein, so daß $t^d R/8 + r_1 \leq 1$ und $\gamma(t) + t^d(V_t \cap B(0, R)) \subset V \cap B(0, r_2)$ für alle $0 < t < t_0$ gilt. Sei $u \in \text{PSH}(V_t \cap B(0, R))$ mit $u \leq h$ auf $V_t \cap B(0, R)$ und $u \leq 0$ auf $V_t \cap K(R, \varepsilon, B)$. Wir definieren

$$v(z) = v(\gamma(t) + t^d w) := u(w) = u\left(\frac{1}{t^d}(z - \gamma(t))\right)$$

für $z \in \gamma(t) + t^d(V_t \cap B(0, R)) = V \cap B(\gamma(t), t^d R)$. Ist

$$z \in \gamma(t) + t^d(V_t \cap \overline{B(0, R/2)}) = V \cap \overline{B(\gamma(t), t^d R/2)},$$

so können wir $v(z)$ abschätzen durch

$$v(z) = u(w) \leq |w| + B \leq \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R.$$

Wegen $B(0, R/2) \cap \mathbb{R}^n \subset K(R, \varepsilon, B)$ folgt für

$$\begin{aligned} z &\in \gamma(t) + t^d(V_t \cap \mathbb{R}^n \cap B(0, R/2)) \\ &= \mathbb{R}^n \cap \left[\gamma(t) + t^d(V_t \cap B(0, R/2)) \right] = V \cap \mathbb{R}^n \cap B(\gamma(t), t^d R/2), \end{aligned}$$

daß $v(z) = u(w) \leq 0$ ist.

Sei $0 < t < t_0$. Fixiere $w_0 \in V_t \cap B(0, R/8)$ und setze $z_0 := \gamma(t) + t^d w_0 \in V \cap B(\gamma(t), t^d R/8)$. Sei $r := t^d R/4$, dann gilt für $z \in V$ mit $|z - \operatorname{Re} z_0| \leq r$:

$$\begin{aligned} |z - \gamma(t)| &\leq |z - z_0| + |z_0 - \gamma(t)| \leq |z - \operatorname{Re} z_0| + |\operatorname{Im} z_0| + |z_0 - \gamma(t)| \\ &\leq |z - \operatorname{Re} z_0| + |\operatorname{Im}(z_0 - \gamma(t))| + |z_0 - \gamma(t)| \leq |z - \operatorname{Re} z_0| + 2|z_0 - \gamma(t)| \\ &\leq r + 2t^d \frac{R}{8} = t^d \frac{R}{4} + t^d \frac{R}{4} = t^d \frac{R}{2}. \end{aligned}$$

Folglich ist $z \in \overline{B(\gamma(t), t^d R/2)}$. Sei H wie in Lemma 2.7. Wir definieren

$$\tilde{v}(z) := \max \left\{ \frac{r}{2R} \left(v(z) + 2R H \left(\frac{z - \operatorname{Re} z_0}{r} \right) \right), |\operatorname{Im} z| \right\}$$

für $z \in V$ mit $|z - \operatorname{Re} z_0| < r$, und $\tilde{v}(z) := |\operatorname{Im} z|$ für $z \in V \cap B(0, r_1)$ mit $|z - \operatorname{Re} z_0| \geq r$. Für $z \in V$ mit $|z - \operatorname{Re} z_0| = r$ gilt wegen Lemma 2.7(b)

$$\frac{r}{2R} \left(v(z) + 2R H \left(\frac{z - \operatorname{Re} z_0}{r} \right) \right) \leq \frac{r}{2R} \left(R + 2R \left(|\operatorname{Im} \frac{z - \operatorname{Re} z_0}{r}| - \frac{1}{2} \right) \right) = |\operatorname{Im} z|,$$

daher ist $\tilde{v} \in \operatorname{PSH}(V \cap B(0, r_1))$. Für $z \in V$ mit $|z - \operatorname{Re} z_0| < r$ gilt wegen Lemma 2.7(a)

$$\frac{r}{2R} \left(v(z) + 2R H \left(\frac{z - \operatorname{Re} z_0}{r} \right) \right) \leq \frac{r}{2R} \left(R + 2R |\operatorname{Im} \frac{z - \operatorname{Re} z_0}{r}| \right) = \frac{r}{2} + |\operatorname{Im} z| \leq t^d \frac{R}{8} + r_1 \leq 1$$

nach Wahl von $t < t_0$. Nach Voraussetzung an u und wegen Lemma 2.7(c) gilt $\tilde{v}(z) \leq 0$ auf $V \cap \mathbb{R}^n \cap B(0, r_1)$, daher erfüllt $\tilde{v}$ die Bedingungen (α) und (β) in der Definition von $\operatorname{PL}_{\operatorname{loc}}(0)$. Folglich gilt $\tilde{v}(z) \leq A|\operatorname{Im} z|$ für alle $z \in V \cap B(0, r_2)$. Nach Lemma 2.7(d) können wir schreiben

$$\frac{r}{2R} u(w_0) = \frac{r}{2R} v(z_0) \leq \tilde{v}(z_0) \leq A|\operatorname{Im} z_0|,$$

woraus folgt

$$u(w_0) \leq \frac{2R}{r} A|\operatorname{Im} z_0| = \frac{2R}{t^d R/4} A|\operatorname{Im}(\gamma(t) + t^d w_0)| = 8A|\operatorname{Im} w_0|.$$

Da w_0 beliebig gewählt war, gilt die behauptete Abschätzung. $\square$

Beweis von Satz 2.4. Nach [4], Lemma 3.5, hat $T_{\gamma,d}V$ die Eigenschaft (SPL) genau dann, wenn

$$\exists A' \geq 1 \quad \forall \rho > 0 \quad \forall B > 0 : \quad U^\rho(z, T_{\gamma,d}V, B) \leq A'|\operatorname{Im} z|, \quad z \in (T_{\gamma,d}V)_{\operatorname{reg}}.$$

Fixiere $B, \rho > 0$. Sei $u \in \operatorname{PSH}(T_{\gamma,d}V)$ mit $u(z) \leq \min(|z| + B, \rho|\operatorname{Im} z|)$ für alle $z \in T_{\gamma,d}V$. Für $z \in K(R, \varepsilon, B)$ gilt $\rho|\operatorname{Im} z| \leq \rho\varepsilon(|z| + B) \leq \rho\varepsilon(B + R/2)$, daher ist $u - \rho\varepsilon(B + R/2) \leq 0$ auf $T_{\gamma,d}V \cap K(R, \varepsilon, B)$. Mit $h(z) = |z| + B$ folgt für $w \in T_{\gamma,d}V \cap B(0, R)$

$$(2.1) \quad U^\rho(w, T_{\gamma,d}V, B) \leq U_{K(R, \varepsilon, B)}(w; h, T_{\gamma,d}V, B(0, R)) + \rho\varepsilon \left(B + \frac{R}{2} \right).$$

Fixiere $w \in (T_{\gamma,d}V)_{\operatorname{reg}}$ und wähle $R > \max(8|w|, 2B)$. Nach [9], Theorem 2.7(d), existieren Folgen $t_j \searrow 0$, $w_j \in V_{t_j}$ mit $w_j \rightarrow w$. Dann gilt nach [19], Theorem 4.4

$$(2.2) \quad U_{K(R, \varepsilon, B)}(w; h, T_{\gamma,d}V, B(0, R)) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} U_{K(R, \varepsilon, B)}(w_j; h, V_{t_j}, B(0, R)).$$

Wegen $w \in B(0, R/8)$ können wir $w_j \in B(0, R/8)$ für fast alle j annehmen. Mit Lemma 2.8 folgt aus (2.2)

$$U_{K(R, \varepsilon, B)}(w; h, T_{\gamma, d}V, B(0, R)) \leq 8A|\operatorname{Im} w|,$$

und somit aus (2.1)

$$U^\rho(w, T_{\gamma, d}V, B) \leq 8A|\operatorname{Im} w| + \rho\varepsilon \left(B + \frac{R}{2} \right).$$

Da diese Abschätzung für beliebig kleine ε gilt, folgt mit $A' = 8A$, was zu zeigen war. $\square$

2.9 Bemerkung. Aus Satz 2.4 und dem Beweis von [4], Korollar 3.15, folgt, daß für jede analytische Menge V der reinen Dimension k , welche $\operatorname{PL}_{\operatorname{loc}}(0)$ erfüllt, jede reelle einfache Kurve γ , und jedes $d \geq 1$ mit $T_{\gamma, d}V \neq \emptyset$ gilt, daß $T_{\gamma, d}V \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$ ist. Mit [9], Bemerkung 3.7, erhält man darüber hinaus, daß $T_{\gamma, d}V \cap \mathbb{R}^n$ reine reelle Dimension k hat.

Unter Verwendung von Argumenten von Meise, Taylor und Vogt (siehe [18], Beweis von Theorem 2.3) läßt sich zeigen, daß Hörmanders Charakterisierung der Surjektivität von linearen partiellen Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten auf den reell-analytischen Funktionen das lokale Phragmén-Lindelöf Prinzip impliziert (siehe [14], nach Theorem 1.3). Daher erhalten wir folgende notwendige Bedingung:

2.10 Folgerung. Sei $P(D) : \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ ein linearer partieller Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten auf dem Raum $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ aller reell-analytischen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Sei $P(D)$ surjektiv. Bezeichne P_m den Hauptteil von P , dann gilt für $V := V(P_m)$: Für jedes $\xi \in V \cap \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| = 1$, jede reelle einfache Kurve γ in $\mathbb{R}^n$, und jedes $d \geq 1$ mit $T_{\gamma, d}(V - \xi) \neq \emptyset$ erfüllt $T_{\gamma, d}(V - \xi)$ die Bedingung (SPL).

Das folgende Beispiel zeigt, daß das Ergebnis von Satz 2.4 eine Verbesserung gegenüber [9], Theorem 3.13, von Braun, Meise und Taylor darstellt.

2.11 Beispiel. Definiere $f(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$ als

$$f(x, y, z) := (y^2 - x^2)(y^2 - 2x^2)^2 + xy^2z^6 + z^{12}$$

und sei $V := V(f)$. Wir zeigen, daß V nicht $\operatorname{PL}_{\operatorname{loc}}(0)$ erfüllt. Fixiere dazu $\xi := (0, 0, 1)$ und $\gamma(t) := t\xi$ für $t > 0$. Mit [6], Proposition 4.3, erhalten wir folgende Grenzvarietäten:

$$\begin{aligned} T_{\gamma, d}V &= T_0V = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : (y^2 - x^2)(y^2 - 2x^2)^2 = 0\}, \quad d \in [1, 2[, \\ T_{\gamma, 2}V &= \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : g(x, y) := y^6 - 5x^2y^4 + (8x^4 + x)y^2 - 4x^6 + 1 = 0\}, \\ T_{\gamma, d}V &= \emptyset, \quad d > 2. \end{aligned}$$

Zeigen wir, daß $T_{\gamma, 2}V$ nicht (SPL) erfüllt, dann folgt aus Satz 2.4, daß V nicht $\operatorname{PL}_{\operatorname{loc}}(0)$ erfüllt.

Bezeichne g_m den Hauptteil von g . Nach [8], Proposition 15, hat $V(g)$ die Eigenschaft (SPL) genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (a) $V(g)$ erfüllt $\operatorname{PL}_{\operatorname{loc}}(\xi)$ in jedem Punkt $\xi \in V(g) \cap \mathbb{R}^2$.
- (b) Für alle $\eta, \zeta \in S^1$ mit $g_m(\zeta) \neq 0$ und $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\eta, \zeta\} = \mathbb{R}^2$ existiert ein $R > 0$, so daß für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \geq R$ gilt: Das Polynom $\lambda \mapsto g(t\eta + \lambda\zeta)$ hat nur reelle Nullstellen.

Man beachte, daß sich g schreiben läßt als $g(x, y) = h(x, y^2)$ für

$$h(x, y) = y^3 - 5x^2y^2 + (8x^4 + x)y - 4x^6 + 1,$$

und daß für festes $x \in \mathbb{R}$ alle Nullstellen von $g(x, y)$ genau dann reell sind, wenn alle Nullstellen von $h(x, y)$ reell und nicht-negativ sind. Wegen $\deg h(x, \cdot) = 3$ genügt es, die Diskriminante von $h(x, \cdot)$ zu berechnen, um zu entscheiden, wo $h(x, \cdot)$ drei reelle Nullstellen hat.

Dazu bringen wir $h(x, \cdot)$ in eine geeignete Form, indem wir $y = z + 5x^2/3$ substituieren, und erhalten $\tilde{h}(x, z) = z^3 + 3pz + 2q$ mit $3p = -x^4/3 + x$ und $2q = 2x^6/27 + 5x^3/3 + 1$. Dann ist die Diskriminante definiert als $D := q^2 + p^3 = 2x^9/27 + 25x^6/26 + 47x^3/54 + 1/4$. Aus $D > 0$ für $x > 0$ folgt, daß $h(x, \cdot)$ nur eine reelle Nullstelle hat, weswegen $g(x, \cdot)$ nicht-reelle Nullstellen hat. Somit ist Bedingung (b) für $V(g)$ nicht erfüllt und $V(g)$ erfüllt nicht (SPL). Hieraus folgt die Behauptung für $T_{\gamma,2}V = V(g) \times \mathbb{C}$.

Jedoch läßt sich Bedingung (a) nachweisen: Jeder Punkt von $T_{\gamma,2}V$ ist regulär, da der Gradient

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} -10xy^4 + (32x^3 + 1)y^2 - 24x^5 \\ 2y(3y^4 - 10x^2y^2 + 8x^4 + x) \end{pmatrix}$$

keine gemeinsamen Nullstellen mit g hat. Daher ist $V(g) \cap \mathbb{R}^2$ eine reell-analytische Mannigfaltigkeit der reinen reellen Dimension 1. $T_{\gamma,2}V$ erfüllt somit die Bedingung $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$ in jedem reellen Punkt $\xi \in T_{\gamma,2}V$.

Hyperbolizität in Konoiden

2.12 Definition. Seien $V \subset \mathbb{C}^n$ eine analytische Menge der reinen Dimension $k \geq 1$ mit $0 \in V$, γ eine reelle einfache Kurve in $\mathbb{R}^n$, $d \geq 1$ und $\zeta \in T_{\gamma,d}V \cap \mathbb{R}^n$ gegeben. Wir sagen, V ist (γ, d) -hyperbolisch im Punkt ζ bezüglich einer Projektion π in $\mathbb{C}^n$, welche nicht-charakteristisch für $T_{\gamma,d}V$ in ζ ist, falls eine Nullumgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ und ein $r > 0$ existieren, so daß für jedes $z \in V \cap \Gamma(\gamma, d, \zeta + U, r)$ aus $\pi(z) \in \mathbb{R}^n$ bereits $z \in \mathbb{R}^n$ folgt. V heißt (γ, d) -hyperbolisch im Punkt ζ , falls eine solche Projektion π existiert, für welche V (γ, d) -hyperbolisch in ζ ist.

Braun, Meise und Taylor haben in [9], Proposition 3.12, gezeigt:

2.13 Satz. Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine analytische Teilmenge der reinen Dimension $k \geq 1$ mit $0 \in V$, welche $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$ erfüllt. Dann gilt für jede reelle einfache Kurve γ in $\mathbb{C}^n$, jedes $d \geq 1$, jeden Punkt $\xi \in (T_{\gamma,d}V)_{\text{reg}} \cap \mathbb{R}^n$ und jede Projektion π , welche nicht-charakteristisch für $T_{\gamma,d}V$ in ξ ist, daß V (γ, d) -hyperbolisch in ξ bezüglich π ist.

Zusammen mit Satz 2.4 und Bemerkung 2.3 folgt hieraus:

2.14 Satz. Seien $V \subset \mathbb{C}^n$ eine analytische Menge der reinen Dimension $k \geq 1$ mit $0 \in V$, welche $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$ erfüllt, γ eine reelle einfache Kurve in $\mathbb{R}^n$ und $d \geq 1$. Dann gilt:

(1) $T_{\gamma,d}V$ erfüllt $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$ in jedem Punkt $\xi \in T_{\gamma,d}V \cap \mathbb{R}^n$.

(2) V ist (γ, d) -hyperbolisch in jedem Punkt $\zeta \in (T_{\gamma,d}V)_{\text{reg}} \cap \mathbb{R}^n$.

2.15 Definition. Erfüllt V die Bedingungen (1) und (2) in Satz 2.14, so sagen wir, V ist hyperbolisch in Konoiden im Ursprung.

In dem Fall, daß V eine algebraische Fläche in $\mathbb{C}^n$ ist, werden wir in Kapitel 4 sehen, daß Hyperbolizität in Konoiden nicht nur notwendig dafür ist, daß V die Bedingung $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$ erfüllt, sondern auch hinreichend.

Kapitel 3

Abschätzung der Vielfachheit von Verzweigungskurven nicht-charakteristischer Projektionen

Das Auftreten von Verzweigungskurven erschwert es, Abschätzungen von Grenzvarietäten $T_{\gamma,d}V$ zurück auf V zu übertragen. Vorbereitend zeigen wir in diesem Abschnitt die folgende Eigenschaft: Ist V eine algebraische Fläche, so ist die Vielfachheit von Verzweigungskurven im Ursprung bzgl. beliebiger nicht-charakteristischer Projektionen beschränkt.

3.1 Definition. Seien $V \subset \mathbb{C}^n$ eine algebraische Teilmenge der reinen Dimension $k \geq 1$ und $L \in \text{Grass}(n-k, n)$ mit $L \cap V_h = \{0\}$. Bezeichne π_L die orthogonale Projektion in $\mathbb{C}^n$ entlang L , dann ist $\pi_L : V \rightarrow L^\perp$ eine analytische Überlagerung. Nach [11], Abschnitt 11.3, Corollar 1, ist die Blattzahl dieser Überlagerung unabhängig von L . Wir definieren den Grad von V als Blattzahl von $\pi_L|_V$ und schreiben dafür $\deg V$.

Unter einem Weierstraß-Polynom einer analytischen Menge $V \subset \mathbb{C}^n$ der reinen Dimension $n-1$ verstehen wir eine Funktion f von der Form

$$(3.1) \quad f(z_1, \dots, z_n) = z_n^k + c_1(z_1, \dots, z_{n-1})z_n^{k-1} + \dots + c_k(z_1, \dots, z_{n-1})$$

mit holomorphen Koeffizienten $c_1, \dots, c_k$, so daß $V = V(f)$ gilt. Ein Weierstraß-Polynom f heißt minimal, falls $V(f, \partial_{z_n} f)$ nirgends dicht in $V(f)$ ist. Aus dem Beweis von [11], Theorem 2.8, folgt: Ist $U = U' \times U_n \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ ein beschränkter Polyzylinder in $\mathbb{C}^n$ und $V \subset U$ eine rein $(n-1)$ -dimensionale analytische Teilmenge, welche keinen Häufungspunkt in $U' \times \partial U_n$ besitzt, dann ist V die Nullstellenmenge eines minimalen Weierstraß-Polynoms f wie in (3.1).

Der Vollständigkeit halber führen wir den Beweis des folgenden Lemmas aus.

3.2 Lemma. *Sei $V \subset \mathbb{C}^3$ eine algebraische Teilmenge der reinen Dimension 2 und seien Koordinaten (x, y, z) von $\mathbb{C}^3$ so gewählt, daß die Projektion $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ eigentlich auf V ist. Dann gibt es ein minimales Weierstraß-Polynom $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ mit $V = V(f)$.*

Beweis. Nach Lemma 1.6 existiert ein $C \geq 1$ mit

$$(3.2) \quad V \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : |z| \leq C(1 + |(x, y)|)\}.$$

Setzt man $\pi : (x, y, z) \rightarrow (x, y)$, so ist $\pi|_V$ eine k -blättrige analytische Überlagerung für ein $k \in \mathbb{N}$.

Für $0 < R_1 < R_2$ setzen wir $U'_j := B(0, R_j)^2 \subset \mathbb{C}^2$ und wählen ein $R_3 > 1$, so daß mit $U_3 := B(0, R_3)$ für den beschränkten Polyzylinder $U_j := U'_j \times U_3$ gilt, daß $V \cap U_j$ keine Häufungspunkte in $U'_j \times \partial U_3$ hat. Dann ist $\pi : V \cap U_j \rightarrow U'_j$ eine k -blättrige analytische Überlagerung für $j = 1, 2$ und R_3 hinreichend groß.

Bezeichne $f_j(x, y, z) = z^k + c_{j,1}(x, y)z^{k-1} + \dots + c_{j,k}(x, y)$ das zu $j = 1, 2$ gehörige minimale Weierstraß-Polynom, wie es im Beweis von [11], Theorem 2.8, konstruiert ist. Ist $(x, y) \in U'_1$, so haben $f_1(x, y, \cdot)$ und $f_2(x, y, \cdot)$ dieselben Nullstellen in U_3 , daher stimmen ihre Koeffizienten punktweise überein. Folglich ist $c_{2,i}|_{U'_1} = c_{1,i}$ in $H(U'_1)$ für $1 \leq i \leq k$.

Für $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ sei $c_i(x, y) := c_{1,i}(x, y)$ für R_1 hinreichend groß, dann ist $c_i \in H(\mathbb{C}^2)$ wohldefiniert. Für $f(x, y, z) := z^k + c_1(x, y)z^{k-1} + \dots + c_k(x, y)$ gilt $V = V(f)$.

Für $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ bezeichne $\{\alpha_i(x, y) : 1 \leq i \leq k\}$ die Nullstellen von $f(x, y, \cdot)$. Nach dem Satz von Vieta existiert für jedes $1 \leq i \leq k$ ein symmetrisches Polynom $g_i \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_k]$ vom Grad i (unabhängig von (x, y)) mit $c_i(x, y) = g_i(\alpha_1(x, y), \dots, \alpha_k(x, y))$. Aus (3.2) folgt $|\alpha_i(x, y)| \leq C(1 + |(x, y)|)$, daher gibt es Konstanten $C_i \geq 1$ mit $|c_i(x, y)| \leq C_i(1 + |(x, y)|^i)$. Nach dem Satz von Liouville ist $c_i \in \mathbb{C}[x, y]$ mit $\deg c_i \leq i$ für $1 \leq i \leq k$, was die Behauptung impliziert. $\square$

Um in $\mathbb{C}^3$ die Vielfachheit von Verzweigungskurven in Hyperflächen abzuschätzen, verwenden wir die Resultante, deren Definition zum Beispiel in [12], Kapitel 3, zu finden ist.

3.3 Bemerkung. Sei $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ ein minimales Weierstraß-Polynom vom Grad $d > 1$, für $V := V(f)$ gelte $0 \in V$, und $\pi : (x, y, z) \mapsto (x, y)$ eingeschränkt auf V sei eigentlich.

- (a) Bezeichne B die Menge der Verzweigungspunkte von $\pi|_V$, dann gilt $B = V(f, \partial_z f)$ nach [11], Abschnitt 2.9.
- (b) Ist $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2$, so haben $f(\xi_1, \xi_2, z)$ und $(\partial_z f)(\xi_1, \xi_2, z)$ genau dann einen gemeinsamen Faktor in $\mathbb{C}[z] \setminus \mathbb{C}$, wenn $\text{Res}_z(f(\xi_1, \xi_2, z), (\partial_z f)(\xi_1, \xi_2, z)) = 0$ in $\mathbb{C}$ gilt. Als Weierstraß-Polynom ist f und somit auch $\partial_z f$ normiert in $\mathbb{C}[x, y][z]$, daher gilt

$$\text{Res}_z(f, \partial_z f)(\xi_1, \xi_2) = \text{Res}_z(f(\xi_1, \xi_2, z), (\partial_z f)(\xi_1, \xi_2, z)).$$

Hieraus folgt $\pi(B) = V(\text{Res}_z(f, \partial_z f))$.

3.4 Lemma. Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine algebraische Fläche mit $0 \in V$. Für jedes $L \in \text{Grass}(n-2, n)$ mit $L \cap T_0 V = \{0\} = L \cap V_h$, jede eindimensionale, irreduzible Komponente W von B_L mit $0 \in W$ und jede Basis $(b_1, \dots, b_n)$ von $\mathbb{C}^n$ mit $b_1 \in T_0 W$ existieren eine Nullumgebung $K \subset \mathbb{C}^n$, ein $\alpha > 0$, ein $p \in \mathbb{N}$, und Potenzreihen $\sum_{j=p+1}^{\infty} a_{\nu,j} t^j$ für $2 \leq \nu \leq n$, so daß gilt

$$(3.3) \quad W \cap K = \left\{ t^p b_1 + \sum_{\nu=2}^n \left(\sum_{j=p+1}^{\infty} a_{\nu,j} t^j \right) b_\nu : |t| < \alpha \right\}.$$

Setzt man $m := \deg V$, so gilt die Abschätzung $p \leq m^2(m-1)$.

Beweis. Für $n = 3$ ist die Behauptung in [9] sogar für den Fall gezeigt, daß V analytisch ist. Sei daher $n \geq 4$.

Fixiere $L \in \text{Grass}(n-2, n)$ mit $L \cap T_0 V = \{0\} = L \cap V_h$, eine eindimensionale, irreduzible Komponente W von B_L mit $0 \in W$ und eine Basis $(b_1, \dots, b_n)$ von $\mathbb{C}^n$ mit $b_1 \in T_0 W$. Aus

$T_0W \subset T_0V$ folgt $b_1 \notin L$. In [11], Abschnitt 6.1, ist gezeigt, daß ein $p \in \mathbb{N}$ existiert, so daß W in der Nähe des Ursprungs wie in (3.3) dargestellt werden kann. Deshalb bleibt nur die Abschätzung für p zu zeigen.

Nach [11], Abschnitt 6.1, ist p die Vielfachheit von W im Ursprung. Ist π_1 eine beliebige Projektion entlang eines zu $\text{span}\{b_1\}$ komplementären Teilraums von $\mathbb{C}^n$, so stimmt die Vielfachheit der Abbildung $\pi_1 : W \rightarrow \text{span}\{b_1\}$ im Ursprung mit p überein.

Wähle $\tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n \in \mathbb{C}^n$ mit $\text{span}\{\tilde{b}_3, \dots, \tilde{b}_n\} = L$, so daß $(b_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n)$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$ ist. Wir verwenden diese als Standardbasis von $\mathbb{C}^n$, dann können wir $T_0W = \mathbb{C} \times \{0\}^{n-1}$ und $L = \{(0, 0)\} \times \mathbb{C}^{n-2}$ schreiben.

Wir setzen $\pi_1 : (z_1, \dots, z_n) \mapsto z_1$, dann ist $\pi_1|_W$ eine p -blättrige, analytische Überlagerung. Für $\pi : (z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, z_2)$ ist B_L gerade die Menge der Verzweigungspunkte von $\pi|_V$.

ObdA. seien $\tilde{b}_3, \dots, \tilde{b}_n \in L$ so gewählt, daß die Projektion $\pi' : (z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, z_2, z_3)$ die folgenden Eigenschaften hat (siehe [11], Abschnitt 3.6):

- (i) $\pi' : V \rightarrow \mathbb{C}^3$ ist eigentlich,
- (ii) für $V' := \pi'(V)$ gilt $V \cap (\pi')^{-1}(V'_{\text{reg}}) \subset V_{\text{reg}}$ und $\pi' : V \cap (\pi')^{-1}(V'_{\text{reg}}) \rightarrow V'_{\text{reg}}$ ist biholomorph,
- (iii) es gilt $(\pi')^{-1}(V'_{\text{sing}}) \supset V_{\text{sing}}$ und $(\pi')^{-1}(V'_{\text{sing}})$ ist nirgends dicht in V .

Nach [11], Theorem 3.2, folgt aus (i), daß V' eine algebraische Teilmenge von $\mathbb{C}^3$ ist. Aus (ii) erhält man, daß V' eine algebraische Fläche in $\mathbb{C}^3$ ist. Offensichtlich ist $\mathbb{C} \times \{(0, 0)\} = \pi'(T_0W)$ enthalten in T_0V' . Wir fassen $\mathbb{C}^3$ gemäß der Definition von π' als Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ auf. Dann ist mit $\pi|_V = \pi|_{V'} \circ \pi'|_V$ auch $\pi|_{V'}$ eigentlich. Bezeichne B' die Menge der Verzweigungspunkte von $\pi|_{V'}$. Dann existiert für jede eindimensionale, irreduzible Komponente W' von B' mit $0 \in W'$ und $\pi'(b_1) \in T_0W'$ ein $\tilde{p} \in \mathbb{N}$, so daß $\pi_1|_{W'}$ eine $\tilde{p}$ -blättrige analytische Überlagerung ist.

Wir behaupten $\pi'(B_L) \subset B'$. Denn nimmt man an, es gibt ein $z \in B_L$ mit $\pi'(z) =: z' \notin B'$, dann ist $z' \in V'_{\text{reg}}$ und daher $z \in V_{\text{reg}}$ aufgrund der Eigenschaften von $\pi'|_V$. Wegen $z' \notin B'$ gibt es eine Umgebung U' von z' in V'_{reg} , welche unter π biholomorph auf $\pi(U') \subset \mathbb{C}^2$ abgebildet wird. Dann ist $\pi|_V = \pi|_{V'} \circ \pi'|_V : (\pi'|_V)^{-1}(U') \subset V_{\text{reg}} \rightarrow \pi'(U')$ eine biholomorphe Abbildung und $z \in (\pi'|_V)^{-1}(U')$ steht im Widerspruch zu $z \in B_L$. Daher gilt $\pi_1|_{B_L} = \pi_1|_{B'} \circ \pi'|_{B_L}$.

Im Folgenden schätzen wir $\tilde{p}$ durch einen Ausdruck in m ab: Aus Eigenschaft (ii) von $\pi'|_V$ folgt, daß $\pi|_{V'}$ eine analytische Überlagerung ist, deren Blattzahl mit der von $\pi|_V$ übereinstimmt. Daher gilt $\deg V' = \deg V = m$. Nach Lemma 3.2 existiert ein minimales Weierstraß-Polynom $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ vom Grad m mit $V' = V(f)$ von der Form

$$f(x, y, z) = z^m + c_1(x, y)z^{m-1} + \dots + c_m(x, y)$$

mit Koeffizienten $c_i \in \mathbb{C}[x, y]$ vom Grad $\deg c_i \leq i$. Bezeichne $R \in \mathbb{C}[x, y]$ die Resultante von f und $\partial_z f$ bzgl. z , dann gilt $\deg R \leq m(m-1)$. Da $\pi_1|_{W'}$ eigentlich ist, ist auch $\pi_1|_{\pi(W')}$ eigentlich. Aus $\pi(W') \subset V(R)$ in $\mathbb{C}^2$ folgt, daß zu $x \in \mathbb{C}$ höchstens $m(m-1)$ Urbilder unter π_1 in $\pi(W')$ existieren. Zu jedem dieser Urbilder existieren wiederum höchstens m Urbilder unter π in W' . Somit haben wir $\tilde{p} \leq m^2(m-1)$ gezeigt.

Zu $W \subset B_L$ existiert ein Zweig $W' \subset B'$ mit $\pi'(b_1) \in T_0W'$, so daß $\pi'(W) = W'$ hinreichend nahe dem Ursprung ist, d.h.

$$W' = \pi'(W \cap K) = \left\{ t^p b_1 + \left(\sum_{j=p+1}^{\infty} a_{2,j} t^j \right) b_2 + \left(\sum_{j=p+1}^{\infty} a_{3,j} t^j \right) b_3 : |t| < \alpha \right\}.$$

Weil $\pi_1|_{W'}$ eine analytische Überlagerung ist, deren Blattzahl $\tilde{p}$ höchstens $m^2(m-1)$ beträgt, gilt ebenso $p \leq m^2(m-1)$, was zu zeigen war. $\square$

3.5 Folgerung. Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine algebraische Fläche mit $0 \in V$. Dann existiert ein $q \in \mathbb{N}$, so daß gilt: Ist $L \in \text{NC}(V, 0)$ mit $L \cap V_h = \{0\}$ und W ein Zweig von $B_L \cap \mathbb{R}^n$ mit $0 \in W$, dann existieren eine Basis $(b_1, \dots, b_n)$ von $\mathbb{R}^n$, eine reelle einfache Kurve $\gamma :]0, \alpha[\rightarrow \mathbb{R}^n$ in Standardparametrisierung bzgl. $(b_1, \dots, b_n)$, und eine Nullumgebung $U \subset \mathbb{R}^n$, so daß gilt

$$(3.4) \quad W \cap U \setminus \{0\} = \text{tr}(\gamma) = \left\{ tb_1 + \sum_{\nu=2}^n \left(\sum_{j=q+1}^{\infty} a_{\nu,j} t^{j/q} \right) b_{\nu} : 0 < t < \alpha \right\}.$$

Beweis. Nach [9], Lemma 2.5, existiert lokal eine Darstellung von W als Spur einer reellen einfachen Kurve γ in Standardparametrisierung bezüglich einer reellen Basis, so daß (3.4) für ein $p \in \mathbb{N}$ anstelle von q gilt. Die Abbildung $z \mapsto \gamma(z^p)$ ist holomorph auf $B(0, \alpha^{1/p})$ und daher $\{\gamma(z^p) : z \in B(0, \alpha^{1/p})\}$ eine analytische Kurve in $\mathbb{C}^n$ mit Vielfachheit p im Ursprung, welche in einer hinreichend kleinen Nullumgebung mit einer Irreduzibilitätskomponente von B_L übereinstimmt.

Aus Lemma 3.4 erhalten wir $p \leq m^2(m-1)$. Daher ist p Teiler von $q := (m^2(m-1))!$ und läßt sich durch q ersetzen. $\square$

3.6 Bemerkung. Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.4 gilt, daß sich die Blattzahl p von $\pi_1|_W$ (die Vielfachheit von W) nicht durch die Blattzahl von $\pi|_V$ (die Vielfachheit von V) lokal in der Nähe des Ursprungs abschätzen läßt, wie das folgende Beispiel in $\mathbb{C}^3$ zeigt: Sei $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ definiert als $f(x, y, z) := z^p - (y^q - x^{q+1})$ und $V := V(f)$. Für $q > p$ ist $T_0V = \mathbb{C}^2 \times \{0\}$, und $L := \{(0, 0)\} \times \mathbb{C}$ erfüllt $L \cap T_0V = \{0\}$. Sei $\pi : (x, y, z) \mapsto (x, y)$ mit $\ker \pi = L$, dann ist $B_L = V(f, \partial_z f)$ gegeben durch die Parametrisierung $x \mapsto (x^q, x^{q+1}, 0)$. Die Vielfachheit q von B_L im Ursprung hängt hierbei nicht von der Blattzahl p von $\pi|_V$ ab.

Kapitel 4

Charakterisierung von PL_{loc} für algebraische Flächen bei beliebiger Kodimension

In diesem Kapitel zeigen wir, daß Hyperbolizität in Konoiden für eine algebraische Fläche V hinreichend dafür ist, daß V die Eigenschaft $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$ hat. Tatsächlich reichen die Eigenschaften (1) und (2) aus Satz 2.14 für eine endliche Menge bestimmter Grenzvarietäten aus, welche in Abschnitt 4.3 definiert wird.

Von besonderer Bedeutung sind diejenigen Punkte einer Grenzvarietät, welche in der Nähe mehrerer Verzweigungskurven bzgl. aller nicht-charakteristischen Projektionen liegen. Damit beschäftigt sich der folgende Abschnitt.

4.1 Nicht-einfache Punkte in Grenzvarietäten

4.1 Definition. Seien $V \subset \mathbb{C}^n$ eine algebraische Fläche mit $0 \in V$, γ eine reelle einfache Kurve in $\mathbb{R}^n$, $d \geq 1$ und $\eta \in T_{\gamma,d}V \cap \mathbb{R}^n$. Setze

$$A := \text{Grass}(n-2, n) \setminus (\text{NC}(V, 0) \cap \text{NC}(V, \infty) \cap \text{NC}(T_{\gamma,d}V, \eta)).$$

Dann heißt η ein einfacher Punkt von $T_{\gamma,d}V$, falls ein $L \in \text{Grass}_{\mathbb{R}}(n-2, n) \setminus A$, eine Nullumgebung $D \subset \mathbb{C}^n$ und ein $R > 0$ existieren, so daß $\Gamma(\gamma, d, \eta + D, R)$ höchstens einen reellen Zweig von $B_L \cap \mathbb{R}^n$ enthält.

4.2 Lemma. Seien $\gamma :]0, \alpha[\rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reelle einfache Kurve mit Tangentialvektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ im Ursprung und $d > 1$ gegeben. Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ eine Nullumgebung, $0 < R < \alpha$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ und $\tau \in \mathbb{R}$, dann exististieren eine Nullumgebung $D' \subset D$ und ein $0 < R' < R$ mit

$$\Gamma(\gamma, d, \eta + \tau\xi + D', R') \subset \Gamma(\gamma, d, \eta + D, R).$$

Beweis. Wir schreiben $\gamma(t) = t\xi + \sigma(t)$ mit $\sigma(t) = \sum_{j=q+1}^{\infty} a_j t^{j/q}$ für $0 < t < \alpha$. Wegen

$$\sigma'(t) = \sum_{j=q+1}^{\infty} a_j \frac{j}{q} t^{j/q-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{j+q} \left(1 + \frac{j}{q}\right) t^{j/q} = O(t^{1/q})$$

gibt es ein $C > 0$ mit $|\sigma'(t)| \leq Ct^{1/q}$ für $0 < t \leq \alpha/2$. Setze $s := s(t) := t + \tau t^d$ und

$$R_1 := \frac{R}{2(1 + |\tau|\alpha^{d-1})} \leq \frac{\alpha}{2},$$

dann gelten für $0 < t < \min(R_1, |\tau|^{-1/(d-1)}) =: R_2$

$$s(t) = t(1 + \tau t^{d-1}) < R_1(1 + |\tau|\alpha^{d-1}) = \frac{R}{2} \leq \frac{\alpha}{2},$$

und

$$s(t) = t(1 + \tau t^{d-1}) \geq t(1 - |\tau|t^{d-1}) > t(1 - |\tau||\tau|^{-1}) = 0.$$

Aus dem Mittelwertsatz erhält man

$$|\sigma(t) - \sigma(s)| \leq \sup_{0 < \nu < 1} |\sigma'(t + \nu(s - t))| |t - s| \leq C \sup_{0 < \nu < 1} |t + \nu(s - t)|^{1/q} |\tau| t^d \leq C(t + |\tau|t^d)^{1/q} |\tau| t^d$$

nach Definition von s . Wähle eine Nullumgebung $D' \subset \mathbb{C}^n$ und ein $0 < R_3 < R_2$ hinreichend klein, so daß

$$(1 + \tau t^{d-1})^{-d}(\eta + 2D') \subset \eta + D \quad \text{für alle } 0 < t < R_3 \text{ gilt,}$$

und sei $0 < R' < R_3$ so gewählt, daß $\sigma(t) - \sigma(s(t)) \in t^d D'$ für alle $0 < t < R'$ ist. Aus $s^d = t^d(1 + \tau t^{d-1})^d$ folgt

$$\begin{aligned} \Gamma(\gamma, d, \eta + \tau\xi + D', R') &= \bigcup_{0 < t < R'} \gamma(t) + t^d(\eta + \tau\xi + D') \\ &= \bigcup_{0 < t < R'} (t + \tau t^d)\xi + \sigma(t) + t^d(\eta + D') = \bigcup_{0 < t < R'} \gamma(s(t)) + \sigma(t) - \sigma(s(t)) + t^d(\eta + D') \\ &\subset \bigcup_{0 < t < R'} \gamma(s(t)) + t^d(\eta + 2D') = \bigcup_{0 < t < R'} \gamma(s(t)) + \frac{s(t)^d}{(1 + \tau t^{d-1})^d}(\eta + 2D') \\ &\subset \bigcup_{0 < s < R} \gamma(s) + s^d(\eta + D) = \Gamma(\gamma, d, \eta + D, R), \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

4.3 Lemma. Sei V eine analytische Fläche in $\mathbb{C}^n$ mit $0 \in V$ und sei $\gamma :]0, \alpha[\rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reelle einfache Kurve mit Tangentialvektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ im Ursprung.

- (a) Gilt $\gamma(t) = t\xi$, so ist $\eta \in T_{\gamma,1}V \cap \mathbb{R}^n$ genau dann ein einfacher Punkt, wenn $\tau(\eta + \xi) - \xi$ ein einfacher Punkt von $T_{\gamma,1}V$ für jedes $\tau > 0$ ist.
- (b) Gilt $d > 1$, so ist $\eta \in T_{\gamma,d}V \cap \mathbb{R}^n$ genau dann ein einfacher Punkt, wenn $\eta + \tau\xi$ ein einfacher Punkt von $T_{\gamma,d}V$ für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ ist.

Beweis. (a) Nach Theorem 2.7 (b) gilt $T_{\gamma,1}V = T_0V - \xi$. Da T_0V ein komplexer Kegel ist, folgt

$$\eta \in T_{\gamma,1}V \cap \mathbb{R}^n \text{ genau dann, wenn } \tau(\eta + \xi) - \xi \in T_{\gamma,1}V \cap \mathbb{R}^n \text{ für alle } \tau \in \mathbb{R},$$

und

$$(4.1) \quad T_\eta(T_{\gamma,1}V) = T_\eta(T_0V - \xi) = T_{\eta+\xi}(T_0V) = T_{\tau(\eta+\xi)}(T_0V) = T_{\tau(\eta+\xi)-\xi}(T_{\gamma,1}V)$$

für jedes $\tau \in \mathbb{R}$. Beachte, daß für jede Nullumgebung D in $\mathbb{C}^n$, jedes $R > 0$ und jedes $\tau > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\gamma, 1, \tau(\eta + \xi) - \xi + \tau D, R/\tau) &= \bigcup_{0 < s < R/\tau} s\xi + s(\tau(\eta + \xi) - \xi + \tau D) \\
 (4.2) \quad &= \bigcup_{0 < s < R/\tau} s\tau(\eta + \xi) + s\tau D = \bigcup_{0 < t < R} t\xi + t(\eta + D) = \Gamma(\gamma, 1, \eta + D, R).
 \end{aligned}$$

Nach (4.1) gilt für $L \in \text{Grass}_{\mathbb{R}}(n-2, n)$ und $\tau > 0$, daß $L \cap T_\eta(T_{\gamma, d}V) = \{0\}$ genau dann gilt, wenn $L \cap T_{\tau(\eta + \xi) - \xi}(T_{\gamma, d}V) = \{0\}$ ist. Gemäß der Definition eines einfachen Punktes folgt die Behauptung aus (4.2).

(b) Offensichtlich gilt die Rückrichtung für $\tau = 0$. Nach Theorem 2.7 (c) ist $\eta \in T_{\gamma, d}V$ dazu äquivalent, daß $\eta + \tau\xi \in T_{\gamma, d}V$ für alle $\tau \in \mathbb{C}$ ist. Daher ist

$$T_\eta(T_{\gamma, d}V) = T_{\eta + \tau\xi}(T_{\gamma, d}V) \text{ für alle } \tau \in \mathbb{C}.$$

Für $L \in \text{Grass}_{\mathbb{R}}(n-2, n)$ folgt $L \cap T_\eta(T_{\gamma, d}V) = \{0\}$ genau dann, wenn $L \cap T_{\eta + \tau\xi}(T_{\gamma, d}V) = \{0\}$ für jedes $\tau \in \mathbb{C}$ ist.

Für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ gilt nach Lemma 4.2: Erfüllt $L \in \text{Grass}_{\mathbb{R}}(n-2, n)$ die Bedingungen in der Definition eines einfachen Punktes, sind D eine Nullumgebung in $\mathbb{C}^n$ und $R > 0$, so daß $\Gamma(\gamma, d, \eta + D, R)$ höchstens einen reellen Zweig von $B_L \cap \mathbb{R}^n$ enthält, dann gibt es eine Nullumgebung D' in $\mathbb{C}^n$ und ein $R' > 0$ mit

$$\Gamma(\gamma, d, \eta + \tau\xi + D', R') \subset \Gamma(\gamma, d, \eta + D, R).$$

Hieraus folgt wie in Teil (a) die Behauptung. $\square$

4.4 Bemerkung. Sei V eine analytische Fläche in $\mathbb{C}^n$ mit $0 \in V$ und γ eine reelle einfache Kurve in $\mathbb{R}^n$. Sei $\eta \in T_0V \cap S^{n-1}$ und $\xi, \zeta \in S^{n-1}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
 \eta - \xi &\in T_0V - \xi = T_{\gamma_\xi, 1}V \text{ für } \gamma_\xi(t) = t\xi, t > 0, \\
 \text{und } \eta - \zeta &\in T_0V - \zeta = T_{\gamma_\zeta, 1}V \text{ für } \gamma_\zeta(t) = t\zeta, t > 0.
 \end{aligned}$$

Es gilt $T_{\eta - \xi}(T_{\gamma_\xi, 1}V) = T_{\eta - \xi}(T_0V - \xi) = T_\eta(T_0V)$ und analog $T_{\eta - \zeta}(T_{\gamma_\zeta, 1}V) = T_\eta(T_0V)$. Daher erfüllt $L \in \text{Grass}_{\mathbb{R}}(n-2, 2)$ die Bedingung $L \cap T_{\eta - \xi}(T_{\gamma_\xi, 1}V) = \{0\}$ genau dann, wenn die Bedingung $L \cap T_{\eta - \zeta}(T_{\gamma_\zeta, 1}V) = \{0\}$ erfüllt ist. Folglich gilt $\text{NC}(T_{\gamma_\xi, 1}V, \eta - \xi) = \text{NC}(T_{\gamma_\zeta, 1}V, \eta - \zeta)$.

Ferner gilt für jede Nullumgebung D in $\mathbb{C}^n$, jedes $R > 0$ und mit $\gamma_\eta(t) = t\eta$, $t > 0$,

$$\Gamma(\gamma_\xi, 1, \eta - \xi + D, R) = \bigcup_{0 < t < R} t\xi + t(\eta - \xi + D) = \bigcup_{0 < t < R} t\eta + tD = \Gamma(\gamma_\eta, 1, D, R)$$

und analog $\Gamma(\gamma_\zeta, 1, \eta - \zeta + D, R) = \Gamma(\gamma_\eta, 1, D, R)$. Daher ist $\eta - \xi$ genau dann ein einfacher Punkt von $T_{\gamma_\xi, 1}V$, wenn $\eta - \zeta$ ein einfacher Punkt von $T_{\gamma_\zeta, 1}V$ ist. Denn beide Bedingungen bedeuten, daß ein $L \in \text{Grass}_{\mathbb{R}}(n-2, n)$ existiert, welches die Bedingungen in Definition 4.1 erfüllt, sowie eine Nullumgebung D in $\mathbb{C}^n$ und ein $R > 0$, so daß $\Gamma(\gamma_\eta, 1, D, R)$ höchstens einen reellen Zweig von $B_L \cap \mathbb{R}^n$ enthält.

4.5 Lemma. Sei V eine algebraische Fläche in $\mathbb{C}^n$ mit $0 \in V$ und γ eine reelle einfache Kurve in $\mathbb{R}^n$ mit Tangentialvektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ im Ursprung. Wir nehmen an, daß $\gamma(t) = \sum_{j=q}^{\infty} a_j t^{j/q}$ in Standardparametrisierung bzgl. einer Basis $(b_1, \dots, b_n)$ von $\mathbb{R}^n$ mit $b_1 = \xi$ gegeben ist, wobei q die Zahl aus Folgerung 3.5 bezeichne. Für $d \geq 1$ definieren wir

$$\mathcal{M}_{\gamma, d} := \{\eta \in T_{\gamma, d}V \cap \mathbb{R}^n : \eta \text{ ist kein einfacher Punkt}\}.$$

(a) Ist $d = 1$ und $\gamma(t) = t\xi$, so ist die Menge

$$M := \{\zeta \in T_0V \cap S^{n-1} : \zeta - \xi \in \mathcal{M}_{\gamma,1}\}$$

endlich und es gilt $\mathcal{M}_{\gamma,1} \setminus \{-\xi\} = \bigcup_{\zeta \in M} \{\tau\zeta - \xi : \tau > 0\}$.

(b) Ist $d = \nu/q$ für eine natürliche Zahl $\nu > q$, so ist die Menge

$$M := \mathcal{M}_{\gamma,d} \cap \text{span}\{b_2, \dots, b_n\}$$

endlich und es gilt $\mathcal{M}_{\gamma,d} = \bigcup_{\zeta \in M} \{\zeta + \tau\xi : \tau \in \mathbb{R}\}$.

Beweis. (a) Angenommen M enthält eine Folge paarweise verschiedener Punkte $(\zeta_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Dann existiert nach Folgerung 1.10 ein

$$L \in \text{NC}(V, 0) \cap \text{NC}(V, \infty) \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} \text{NC}(T_0V, \zeta_m).$$

Die Zerlegung von B_L in irreduzible Komponenten ist lokal endlich, und für jede irreduzible Komponente W von B_L gilt, daß die Anzahl der reellen Zweige von $W \cap \mathbb{R}^n$ kleiner gleich der Vielfachheit von W im Ursprung ist. Daher gibt es reelle einfache Kurven $\tau_1, \dots, \tau_N$ in $\mathbb{R}^n$ und eine Nullumgebung U in $\mathbb{R}^n$ hinreichend klein, so daß $B_L \cap U$ keine isolierten Punkte enthält und so daß gilt

$$(4.3) \quad B_L \cap U \setminus \{0\} = \bigcup_{j=1}^N \text{tr}(\tau_j).$$

Für $1 \leq j \leq N$ bezeichne ξ_j den Tangentialvektor von τ_j im Ursprung. Für ein festes $m \in \mathbb{N}$ setzen wir $\zeta := \zeta_m$ und $\gamma_\zeta(t) := t\zeta$. Da $\zeta - \xi$ kein einfacher Punkt von $T_{\gamma,1}V$ und L nicht-charakteristisch für V im Ursprung und für $T_{\gamma,1}V$ in $\zeta - \xi$ ist, gibt es mindestens zwei reelle einfache Kurven $\sigma_1, \sigma_2 \in \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$ mit der Eigenschaft

$$\text{tr}(\sigma_i) \subset B_L \cap \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \text{tr}(\sigma_i) \cap \Gamma(\gamma, 1, \zeta - \xi + D, R) \neq \emptyset$$

für $i = 1, 2$ und für jede Nullumgebung D in $\mathbb{C}^n$ und jedes $R > 0$. Es gilt

$$\Gamma(\gamma, 1, \zeta - \xi + D, R) = \bigcup_{0 < t < R} t\xi + t(\zeta - \xi + D) = \bigcup_{0 < t < R} t\zeta + tD = \Gamma(\gamma_\zeta, 1, D, R),$$

folglich gibt es ein $1 \leq i \leq N$, so daß γ_ζ äquivalent zu τ_i modulo 1 ist. Dies impliziert, daß τ_i und γ_ζ den gleichen Tangentialvektor im Ursprung haben, also $\zeta \in \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$. Da $m \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt war, hat M höchstens N Elemente im Widerspruch dazu, daß M als nicht endlich vorausgesetzt wurde. Damit ist die Endlichkeit von M gezeigt.

Ist $\zeta \in M$, d.h. $\zeta - \xi$ kein einfacher Punkt von $T_{\gamma,1}V$, so folgt aus Lemma 4.3 (a), daß $\tau\zeta - \xi$ kein einfacher Punkt von $T_{\gamma,1}V$ für jedes $\tau > 0$ ist, also $\tau\zeta - \xi \in \mathcal{M}_{\gamma,1} \setminus \{-\xi\}$ für jedes $\tau > 0$.

Ist andererseits $\eta \in T_{\gamma,1}V \cap \mathbb{R}^n$, $\eta \neq -\xi$, kein einfacher Punkt, so ist auch $\tau(\eta + \xi) - \xi$ kein einfacher Punkt von $T_{\gamma,1}V$ für jedes $\tau > 0$. Für $\tau := |\eta + \xi| > 0$ und $\zeta := (\eta + \xi)/\tau$ gilt $\zeta \in T_0V \cap S^{n-1}$, und man erhält $\eta = \tau\zeta - \xi$.

(b) Nimmt man an, daß M eine Folge paarweise verschiedener Punkte $(\zeta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ enthält, so findet man wie in (a) ein $L \in \text{Grass}_{\mathbb{R}}(n-2, n)$ mit

$$L \in \text{NC}(V, 0) \cap \text{NC}(V, \infty) \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} \text{NC}(T_{\gamma,d}V, \zeta_m)$$

und reelle einfache Kurven $\tau_1, \dots, \tau_N$ in $\mathbb{R}^n$, so daß (4.3) gilt. Ist $\zeta = \zeta_m$ fest, so folgt analog die Existenz einer reellen einfachen Kurve τ_i mit $\text{tr}(\tau_i) \subset B_L \cap \mathbb{R}^n$ und

$$(4.4) \quad \text{tr}(\tau_i) \cap \Gamma(\gamma, d, \zeta + D, R) \neq \emptyset$$

für jede Nullumgebung D in $\mathbb{C}^n$ und jedes $R > 0$. Setzt man $\gamma_\zeta(t) := \gamma(t) + \zeta t^d$, so ist γ_ζ in Standardparametrisierung bzgl. $(b_1, \dots, b_n)$ gegeben, denn $d > 1$ und $\zeta \in \text{span}\{b_2, \dots, b_n\}$ nach Definition von M . Es gilt

$$\Gamma(\gamma, d, \zeta + D, R) = \bigcup_{0 < t < R} \gamma(t) + t^d(\zeta + D) = \bigcup_{0 < t < R} \gamma_\zeta(t) + t^d D = \Gamma(\gamma_\zeta, d, D, R).$$

Daher folgt aus (4.4), daß τ_i äquivalent zu γ_ζ modulo d ist. Somit stimmen die Tangentialvektoren von τ_i und γ_ζ überein, und wir können annehmen, daß τ_i in Standardparametrisierung $\tau_i(t) = \sum_{j=q}^\infty b_{i,j} t^{j/q}$ bzgl. $(b_1, \dots, b_n)$ gegeben ist. Aus Bemerkung 1.18 folgt

$$\sum_{j=q}^{dq} a_j t^{j/q} + t^d \zeta = \sum_{j=q}^{dq} b_{i,j} t^{j/q},$$

also gilt $a_\nu + \zeta = b_{i,\nu}$. Somit ist $\zeta \in \{b_{i,\nu} - a_\nu : 1 \leq i \leq N\}$ im Widerspruch zur Annahme, daß M nicht endlich ist.

Für $\zeta \in M$ folgt aus Lemma 4.3 (b), daß $\zeta + \tau\xi$ kein einfacher Punkt von $T_{\gamma,d}V$ und daher in $\mathcal{M}_{\gamma,d}$ für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ ist. Ist andererseits $\eta \in \mathcal{M}_{\gamma,d}$ und bezeichne $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektion entlang $\text{span}\{b_2, \dots, b_n\}$ auf $\text{span}\{b_1\}$ mit $P(\xi) = 1$. Setzt man $\tau := P(\eta)$ und $\zeta := \eta - \tau\xi$, so ist ζ kein einfacher Punkt von $T_{\gamma,d}V$ nach Lemma 4.3 (b) und es gilt $P(\zeta) = 0$. Folglich ist $\zeta \in M$ und $\eta = \zeta + \tau\xi$ wie gewünscht. $\square$

4.2 Kritische Niveaus

4.6 Definition. Seien V eine analytische Fläche in $\mathbb{C}^n$ mit $0 \in V$, γ eine reelle einfache Kurve in $\mathbb{R}^n$, $d \geq 1$ und $A \subset \text{Grass}(n-2, n)$ eine echte Teilmenge, für die $\text{Grass}_{\mathbb{R}}(n-2, n) \setminus A \subset \text{NC}(V, 0)$ gilt. Wir sagen $\delta \geq d$ ist A -zulässig für γ , falls für jedes $L \in \text{Grass}_{\mathbb{R}}(n-2, n) \setminus A$ jede reelle einfache Kurve τ , die äquivalent zu γ modulo d ist und für die $\text{tr}(\tau) \subset B_L$ gilt, bereits äquivalent zu γ modulo δ ist.

In [9] haben Braun, Meise und Taylor bewiesen:

4.7 Lemma. *Unter den Voraussetzungen von Definition 4.6 existiert ein $\Delta^A(\gamma, d) > d$ mit*

$$\{\delta \geq d : \delta \text{ ist } A\text{-zulässig für } \gamma\} = [d, \Delta^A(\gamma, d)[.$$

4.8 Definition. Die Zahl $\Delta^A(\gamma, d)$ aus Lemma 4.7 heißt A -kritisches Niveau von (γ, d) .

Das folgende Lemma verallgemeinert [9], Lemma 4.8, für höhere Kodimension.

4.9 Lemma. *Seien $V \subset \mathbb{C}^n$ eine algebraische Fläche mit $0 \in V$, $d = \nu/q > 1$ mit q aus Folgerung 3.5 und $\nu \in \mathbb{N}$, und γ eine reelle einfache Kurve in Standardparametrisierung $\gamma(t) = \sum_{j=q}^{\nu-1} a_j t^{j/q}$ bzgl. einer gegebenen Basis $(b_1, \dots, b_n)$ von $\mathbb{R}^n$. Bezeichne $\xi = b_1$ den Tangentialvektor von γ im Ursprung und sei $\eta \in T_{\gamma,d}V \cap \mathbb{R}^n$ kein einfacher Punkt mit $\eta \in \text{span}\{b_2, \dots, b_n\}$. Setze $\gamma_\eta(t) := \gamma(t) + t^d \eta$ und*

$$A := \text{Grass}(n-2, n) \setminus (\text{NC}(V, 0) \cap \text{NC}(V, \infty) \cap \text{NC}(T_{\gamma,d}V, \eta)).$$

Dann gilt $A = \text{Grass}(n-2, n) \setminus (\text{NC}(V, 0) \cap \text{NC}(V, \infty) \cap \text{NC}(T_{\gamma_\eta, d}V, 0))$ und es gibt ein $\nu' \in \mathbb{N}$ mit $\nu' > \nu$, so daß $\Delta^A(\gamma_\eta, d) = \nu'/q$ ist.

Beweis. Um zu zeigen, daß $\Delta := \Delta^A(\gamma_\eta, d)$ endlich ist, fixiere ein $L \in \text{Grass}_{\mathbb{R}}(n-2, n) \setminus A$. Weil $\eta \in T_{\gamma, d}V \cap \mathbb{R}^n$ nicht einfach ist, gibt es mindestens zwei Verzweigungskurven S, T von $B_L \cap \mathbb{R}^n$, welche mit $\Gamma(\gamma, d, \eta + D, R) = \Gamma(\gamma_\eta, d, D, R)$ für jede Nullumgebung $D \subset \mathbb{C}^n$ und jedes $R > 0$ hinreichend klein einen nicht-leeren Schnitt haben. Folglich sind S und T äquivalent zu γ_η modulo d , und die Tangentialvektoren von S und T im Ursprung stimmen mit ξ überein. Wir können daher S und T in Standardparametrisierung bzgl. der gegebenen Basis betrachten und finden wegen $S \neq T$ ein $\delta > d$, so daß sich (wenigstens) eine der beiden Puiseux-Entwicklungen von der Ordnung t^δ von γ_η unterscheidet. Damit ist dieser Zweig nicht äquivalent zu γ_η modulo δ , und δ ist nicht A -zulässig für γ_η . Folglich ist $\Delta \leq \delta < \infty$.

Um die Existenz eines $\nu' \in \mathbb{N}$ mit $\Delta^A(\gamma_\eta, d) = \nu'/q$ zeigen, beachte man zunächst, daß aus $\eta \in \text{span}\{b_2, \dots, b_n\}$ und $d > 1$ folgt, daß γ_η in Standardparametrisierung $\gamma_\eta(t) = \sum_{j=q}^{\nu'} a_j t^{j/q}$ mit $a_\nu = \eta$ gegeben ist. Weil Δ nicht A -zulässig für γ_η ist, existieren ein $L \in \text{Grass}_{\mathbb{R}}(n-2, n) \setminus A$ und eine reelle einfache Kurve τ mit $\text{tr}(\tau) \subset B_L$, welche äquivalent zu γ_η modulo $\Delta - \varepsilon$ für jedes $0 < \varepsilon \leq \Delta - d$, jedoch nicht modulo Δ ist. Weil τ und γ_η denselben Tangentialvektor im Ursprung haben, können wir annehmen, daß τ in Standardparametrisierung $\tau(t) = \sum_{j=q}^{\infty} b_j t^{j/q}$ gegeben ist. Aus [9], Lemma 2.15, folgt für jedes $\varepsilon > 0$ hinreichend klein

$$\sum_{j=q}^{(\Delta-\varepsilon)q} a_j t^{j/q} = \sum_{j=q}^{(\Delta-\varepsilon)q} b_j t^{j/q}, \quad \text{wogegen} \quad \sum_{j=q}^{\Delta q} a_j t^{j/q} \neq \sum_{j=q}^{\Delta q} b_j t^{j/q},$$

was $\nu' := \Delta q \in \mathbb{N}$ impliziert. Somit ist $\Delta = \nu'/q > d$, also $\nu' > \nu$, und aus $T_{\gamma_\eta, d}V = T_{\gamma, d}V - \eta$ folgt die letzte Behauptung für A . $\square$

Genauso läßt sich zeigen:

4.10 Lemma. Seien $V \subset \mathbb{C}^n$ eine algebraische Fläche mit $0 \in V$ und $\eta \in T_0V \cap S^{n-1}$. Setze $\sigma : t \mapsto t\eta$ für $t > 0$, und

$$A := \text{Grass}(n-2, n) \setminus (\text{NC}(V, 0) \cap \text{NC}(V, \infty) \cap \text{NC}(T_{\sigma, 1}V, 0)).$$

Angenommen $0 \in T_{\sigma, 1}V = T_0V - \eta$ ist kein einfacher Punkt. Dann existiert ein $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu > q$ aus Folgerung 3.5, mit $\Delta^A(\sigma, 1) = \nu/q$.

4.3 Konstruktion einer endlichen Menge $\mathcal{C}$ reeller einfacher Kurven in $\mathbb{R}^n$

Sei V eine algebraische Fläche in $\mathbb{C}^n$ mit $0 \in V$. Bezeichne $q \in \mathbb{N}$ die Zahl aus Folgerung 3.5. Für $\eta \in S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ definieren wir $\sigma_\eta(t) = t\eta$ für $t > 0$.

Wir betrachten zunächst die Menge aller reellen singulären Richtungen von T_0V , in deren Nähe mehrere reelle Verzweigungskurven von V bezüglich fast aller reellen Projektionsrichtungen liegen: Für $\xi \in S^{n-1}$ sei

$$(4.5) \quad M_1 := \{\eta \in (T_0V)_{\text{sing}} \cap S^{n-1} : \eta - \xi \text{ ist kein einfacher Punkt von } T_{\sigma_\xi, 1}V\},$$

dann hängt M_1 nach Bemerkung 4.4 nicht von der Wahl von ξ ab. Ist $M_1 = \emptyset$, setze $\mathcal{C} := \emptyset$. Andernfalls definieren wir rekursiv Mengen $\mathcal{C}_j$ für $j \in \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} &\mathcal{C}_j \text{ ist endlich und für jedes } (\gamma, d) \in \mathcal{C}_j \text{ gibt es ein } \nu \in \mathbb{N}, \nu \geq q + j, \text{ so daß } d = \nu/q \\ &\text{ist, und } \gamma \text{ besitzt eine Standardparametrisierung der Form } \gamma(t) = \sum_{j=q}^{\nu-1} a_j t^{j/q}. \end{aligned}$$

Rekursionsanfang: Setze zunächst für $\eta \in T_0 V \cap S^{n-1}$

$$A(\eta) := \text{Grass}(n-2) \setminus (\text{NC}(V, 0) \cap \text{NC}(V, \infty) \cap \text{NC}(T_0 V, \eta))$$

und sei $\Delta^{A(\eta)}(\sigma_\eta, 1)$ wie in Lemma 4.7. Für $\eta \in M_1$ sei $\nu(\eta) := q\Delta^{A(\eta)}(\sigma_\eta, 1)$. Dann folgt aus Lemma 4.10, daß $\nu(\eta) \in \mathbb{N}$ und $\nu(\eta) > q$ gelten. Weil M_1 nach Lemma 4.5 endlich ist, erfüllt die Menge

$$\mathcal{C}_1 := \{(\sigma_\eta, \Delta^{A(\eta)}(\sigma_\eta, 1)) : \eta \in M_1\}$$

die Bedingungen (4.6).

Rekursionsschritt: Um $\mathcal{C}_j$ für $j \geq 2$ zu definieren, setze zunächst

$$\mathcal{C}_{j-1,c} := \{(\gamma, d) \in \mathcal{C}_{j-1} \mid \text{es gibt einen Punkt } \zeta \in (T_{\gamma,d} V)_{\text{sing}} \cap \mathbb{R}^n, \text{ der nicht einfach ist}\}.$$

Ist $\mathcal{C}_{j-1,c} = \emptyset$, dann setze $\mathcal{C}_j := \emptyset$. Andernfalls fixiere $(\gamma, d) \in \mathcal{C}_{j-1,c}$ und bezeichne mit η den Tangentialvektor von γ im Ursprung. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine natürliche Zahl $\nu \geq q + j - 1$ mit $d = \nu/q$ und es gilt $\gamma(t) = \sum_{i=q}^{\nu-1} a_i t^{i/q}$ in Standardparametrisierung bzgl. einer Basis $(\eta, b_2, \dots, b_n)$ von $\mathbb{R}^n$.

Setze

$$(4.7) \quad M_{\gamma,d} := \{\zeta \in (T_{\gamma,d} V)_{\text{sing}} \cap \mathbb{R}^n : \zeta \text{ ist nicht einfach}\} \cap \text{span}\{b_2, \dots, b_n\}.$$

Nach Lemma 4.5 ist $M_{\gamma,d}$ endlich. Für $\zeta \in M_{\gamma,d}$ definieren wir

$$\gamma_\zeta : t \mapsto \gamma(t) + \zeta t^d = \sum_{j=q}^{\nu} a_j t^{j/q} \quad \text{mit } a_\nu := \zeta.$$

Wegen $\zeta \in \text{span}\{b_2, \dots, b_n\}$ ist γ_ζ in Standardparametrisierung bzgl. $(\eta, b_2, \dots, b_n)$ gegeben. Definiere

$$A(\gamma, \zeta) := \text{Grass}(n-2, n) \setminus (\text{NC}(V, 0) \cap \text{NC}(V, \infty) \cap \text{NC}(T_{\gamma,d} V, \zeta)).$$

Dann gibt es nach Lemma 4.9 ein $\mu \in \mathbb{N}$ mit $\mu > \nu \geq q + j - 1$, so daß $\Delta^{A(\gamma,\zeta)}(\gamma_\zeta, d) = \mu/q$ gilt. Somit ist die Menge

$$\mathcal{C}_j := \{(\gamma_\zeta, \Delta^{A(\gamma,\zeta)}(\gamma_\zeta, d)) : (\gamma, d) \in \mathcal{C}_{j-1,c}, \zeta \in M_{\gamma,d}\}$$

endlich und erfüllt die Bedingungen (4.6).

Wir behaupten:

$$(4.8) \quad \text{Es gibt ein } N \in \mathbb{N}, \text{ so daß für jedes } (\gamma, d) \in \mathcal{C}_N \text{ alle Punkte in } (T_{\gamma,d} V)_{\text{sing}} \cap \mathbb{R}^n \text{ einfach sind.}$$

Angenommen $\mathcal{C}_{j,c} \neq \emptyset$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Setze

$$A := \text{Grass}(n-2, n) \setminus \left(\text{NC}(V, 0) \cap \text{NC}(V, \infty) \cap \bigcap_{j \in \mathbb{N}, (\gamma,d) \in \mathcal{C}_{j,c}, \zeta \in M_{\gamma,d}} \text{NC}(T_{\gamma,d} V, \zeta) \right).$$

Nach Folgerung 1.10 existiert ein $L \in \text{Grass}_{\mathbb{R}}(n-2, n) \setminus A$. Analog zu (4.3) findet man reelle einfache Kurven $\tau_1, \dots, \tau_m$ in $\mathbb{R}^n$ sowie eine Nullumgebung U in $\mathbb{R}^n$, für welche gilt

$$(4.9) \quad B_L \cap U \setminus \{0\} = \bigcup_{j=1}^m \text{tr}(\tau_j).$$

OBdA. sei $\text{tr}(\tau_i) \cap \text{tr}(\tau_k) = \emptyset$ für $i \neq k$. Dann können wir $\delta > 1$ hinreichend groß und $R, \varepsilon > 0$ hinreichend klein wählen, so daß für alle $j \neq k$ gilt

$$(4.10) \quad \Gamma(\tau_j, \delta, B(0, \varepsilon), R) \cap \Gamma(\tau_k, \delta, B(0, \varepsilon), R) = \emptyset.$$

Wähle $p \in \mathbb{N}$ mit $p > \delta q$. Fixiere $(\gamma, d) \in \mathcal{C}_{p,c}$ und $\zeta \in M_{\gamma,d}$. Aus (4.6) folgt $d \geq (q+p)/q = 1 + p/q > \delta$. Weil $\zeta \in T_{\gamma,d}V \cap \mathbb{R}^n$ kein einfacher Punkt und $L \notin A$ nicht-charakteristisch für $T_{\gamma,d}V$ im Punkt ζ ist, gibt es für jede Nullumgebung $D \subset \mathbb{C}^n$ und jedes $\rho > 0$ wenigstens zwei Verzweigungskurven $\tau_i \neq \tau_j$ von $B_L \cap \mathbb{R}^n$, welche mit $\Gamma(\gamma, d, \zeta + D, \rho) = \Gamma(\gamma_\zeta, d, D, \rho)$ nicht-leeren Schnitt haben. Dann ist τ_i äquivalent zu τ_j modulo d . Wegen $d > \delta$ widerspricht dies (4.10), und (4.8) ist gezeigt.

Somit haben wir bewiesen, daß $\mathcal{C} := \bigcup_{j=1}^N \mathcal{C}_j$ endlich ist.

4.4 Charakterisierung von $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$

Ziel dieses Abschnitts ist die folgende Charakterisierung von PL_{loc} :

4.11 Theorem. *Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine algebraische Fläche mit $0 \in V$. Dann sind äquivalent:*

- (a) V erfüllt $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$,
- (b) V ist hyperbolisch in Konoiden im Ursprung,
- (c) T_0V erfüllt $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$, es existiert ein $\zeta \in S^{n-1}$, so daß für $\gamma_\zeta(t) := t\zeta$ und jeden Punkt $\eta \in (T_0V)_{\text{reg}} \cap S^{n-1}$ gilt, daß V $(\gamma_\zeta, 1)$ -hyperbolisch im Punkt $\eta - \zeta \in T_{\gamma_\zeta, 1}V$ ist, und für alle $(\gamma, d) \in \mathcal{C}$ sind die folgenden Bedingungen erfüllt:
 - (i) $T_{\gamma,d}V$ erfüllt $\text{PL}_{\text{loc}}(\eta)$ in jedem Punkt $\eta \in T_{\gamma,d}V \cap \mathbb{R}^n$,
 - (ii) V ist (γ, d) -hyperbolisch in jedem Punkt $\eta \in (T_{\gamma,d}V)_{\text{reg}} \cap \mathbb{R}^n$.

Der Beweis von Theorem 4.11 erfordert einige Vorbereitung. Wir beginnen damit, Eigenschaften von Grenzvarietäten in einfachen Punkten zu analysieren.

4.12 Lemma. *Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine analytische Fläche mit $0 \in V$, γ eine reelle einfache Kurve in Standardparametrisierung bzgl. der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^n$ und $d \geq 1$. Wir nehmen $0 \in T_{\gamma,d}V$ an und $\pi : (z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, z_2)$ sei nicht-charakteristisch für $T_{\gamma,d}V$ im Ursprung. Für jede Nullumgebung $D \subset \mathbb{C}^n$ existieren $\varepsilon, \delta, r > 0$, so daß $G := B^2(0, \varepsilon) \times B^{n-2}(0, \delta)$ enthalten in D ist, und so daß*

$$\pi : V \cap \Gamma(\gamma, d, G, r) \rightarrow \Gamma'(\pi \cap \gamma, d, B(0, \varepsilon)^2, r)$$

eigentlich ist.

Beweis. Da π nicht-charakteristisch für $T_{\gamma,d}V$ im Ursprung ist, können wir [9], Lemma 3.10, anwenden und erhalten $\varepsilon_1 > 0$ und $0 < \delta_0 < \delta_1$, so daß für $G_0 := B^2(0, \varepsilon_1) \times B^{n-2}(0, \delta_1)$ gilt: $G_0 \subset D$ und

$$(4.11) \quad T_{\gamma,d}V \cap G_0 \subset T_{\gamma,d}V \cap (B^2(0, \varepsilon_1) \times B^{n-2}(0, \delta_0)).$$

Fixiere $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ und $\delta_0 < \delta < \delta_2 < \delta_1$. Wir behaupten, daß ein $r > 0$ existiert mit

$$(4.12) \quad V \cap \Gamma(\gamma, d, B^2(0, \varepsilon) \times B^{n-2}(0, \delta_2), r) \subset V \cap \Gamma(\gamma, d, B^2(0, \varepsilon) \times B^{n-2}(0, \delta), r).$$

Um (4.12) zu zeigen, setze $K := \overline{B^2(0, \varepsilon) \times B^{n-2}(0, \delta_2)} \subset G_0$, und für $0 < \eta < \min(\delta_1 - \delta_2, \delta - \delta_0)$ fest gewählt sei $G_1 := (K \cap T_{\gamma, d}V) + B(0, \eta)$. Dann folgt aus [9], Lemma 2.8, daß ein $r > 0$ existiert mit $K \cap V_{t, d} \subset G_1$ für alle $t \in]0, r[$. Fixiere ein $z = \gamma(t) + t^d \zeta \in V$ mit

$$\zeta = (\zeta', \zeta'') \in B^2(0, \varepsilon) \times B^{n-2}(0, \delta_2) \quad \text{und} \quad t \in]0, r[,$$

dann ist $\zeta \in V_{t, d}$. Nach Wahl von r existiert ein $w = (w', w'') \in K \cap T_{\gamma, d}V$ mit $|\zeta - w| < \eta$. Es gilt $w \in T_{\gamma, d}V \cap G_0$, also ist $|\zeta''| < |w''| + \eta < \delta_0 + \eta < \delta$ nach (4.11). Somit ist

$$z \in V \cap \Gamma(\gamma, d, B^2(0, \varepsilon) \times B^{n-2}(0, \delta), r)$$

und (4.12) ist gezeigt.

Aus (4.12) folgern wir, daß π wie im Lemma eigentlich ist: Fixiere $Q \subset \Gamma'(\pi \circ \gamma, d, B^2(0, \varepsilon), r)$ kompakt und sei

$$L := \{z \in V \cap \Gamma(\gamma, d, B^2(0, \varepsilon) \times B^{n-2}(0, \delta), r) : \pi(z) \in Q\}.$$

Wir behaupten: L ist kompakt in $V \cap \Gamma(\gamma, d, B^2(0, \varepsilon) \times B^{n-2}(0, \delta), r)$. Setze

$$U_k := \bigcup \left\{ \pi \circ \gamma(t) + t^d B\left(0, \frac{k}{k+1} \varepsilon\right)^2 \mid t \in \left] \frac{r}{k+1}, \frac{kr}{k+1} \right[\right\},$$

dann gilt $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k = \Gamma'(\pi \circ \gamma, d, B^2(0, \varepsilon), r)$. Da Q kompakt ist, existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $Q \subset U_k$. Sei $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in L . Da L beschränkt ist, enthält $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Daher können wir oBdA. $z_j \rightarrow \zeta \in \bar{L}$ für $j \rightarrow \infty$ annehmen.

Weil $(z'_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $Q \subset U_k$ ist, existieren Folgen $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $\left] \frac{r}{k+1}, \frac{rk}{k+1} \right[$ und $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $B^2(0, \frac{k}{k+1} \varepsilon) \times B^{n-2}(0, \delta)$ mit $z_j = \gamma(t_j) + t_j^d w_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Nach Übergang zu Teilfolgen gilt $t_j \rightarrow t_0 \in \left[\frac{r}{k+1}, \frac{kr}{k+1} \right]$ und $w_j \rightarrow w_0 \in \overline{B^2(0, \frac{k}{k+1} \varepsilon) \times B^{n-2}(0, \delta)} \subset B^2(0, \varepsilon) \times B^{n-2}(0, \delta_2)$. Nun ist V abgeschlossen und daher $\zeta = \gamma(t_0) + t_0^d w_0 \in V \cap \Gamma(\gamma, d, B^2(0, \varepsilon) \times B^{n-2}(0, \delta_2), r)$. Aus (4.12) folgt $\zeta \in V \cap \Gamma(\gamma, d, B^2(0, \varepsilon) \times B^{n-2}(0, \delta), r)$, also $\zeta \in L$. Damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

4.13 Definition. Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine analytische Menge in der Umgebung eines Punktes $a \in V \cap \mathbb{R}^n$.

- (a) Wir sagen, V erfüllt die Dimensionsbedingung in a , wenn für jede lokal irreduzible Komponente W von V mit $a \in W$ gilt, daß die reelle Dimension von $W \cap \mathbb{R}^n$ als reell-analytische Menge und die komplexe Dimension von W im Punkt a übereinstimmen.
- (b) Wir sagen, V ist lokal hyperbolisch in a , falls eine Umgebung U von a in $\mathbb{C}^n$ und eine Projektion π in $\mathbb{C}^n$ existieren, welche nicht-charakteristisch für V in a ist, so daß für alle $z \in V \cap U$ aus $\pi(z) \in \mathbb{R}^n$ bereits $z \in \mathbb{R}^n$ folgt.

Offensichtlich impliziert lokale Hyperbolizität die Dimensionsbedingung. Die Umkehrung gilt nicht, wie das Beispiel $V(x^2 - y^3)$ in $\mathbb{C}^2$ zeigt.

4.14 Lemma. Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine analytische Fläche mit $0 \in V$, γ eine reelle einfache Kurve und $d \geq 1$. Sei $\eta \in T_{\gamma,d}V \cap \mathbb{R}^n$ ein einfacher Punkt. Angenommen $T_{\gamma,d}V$ ist lokal hyperbolisch in η und es gibt eine offene Umgebung U von η , so daß V (γ, d) -hyperbolisch in allen Punkten $\zeta \in (T_{\gamma,d}V)_{\text{reg}} \cap U \cap \mathbb{R}^n$ ist. Dann ist V (γ, d) -hyperbolisch in η .

Beweis. Sei $\zeta_1 \in \mathbb{R}^n$ der Tangentialvektor von γ im Ursprung. Da $\eta \in T_{\gamma,d}V$ einfach ist, existieren ein $L \in \text{NC}(V, 0) \cap \text{NC}(T_{\gamma,d}V, \eta)$ mit $\zeta_1 \notin L$, eine Nullumgebung $D_0 \subset U$ in $\mathbb{C}^n$ und $\rho_1 > 0$, so daß

$$B_L \cap \mathbb{R}^n \cap \Gamma(\gamma, d, \eta + D_0, \rho_1)$$

höchstens einen Zweig von $B_L \cap \mathbb{R}^n$ enthält. Wähle $\zeta_2 \in \mathbb{R}^n$ und $\zeta_3, \dots, \zeta_n \in L$, so daß $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist. OBdA. sei dies die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ und $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ in Standardparametrisierung gegeben. Dann ist $\pi : (z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, z_2)$ nicht-charakteristisch für $T_{\gamma,d}V$ in η . OBdA. sei $\eta = 0$.

Nach Voraussetzung ist $T_{\gamma,d}V$ lokal hyperbolisch im Punkt $\eta = 0$. Wir zeigen, daß $T_{\gamma,d}V$ lokal hyperbolisch bzgl. der gegebenen Projektion π ist. Zunächst behaupten wir, daß eine offene Nullumgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^n$ und endlich viele komplexe Mannigfaltigkeiten $W_j \subset \mathcal{U}$ für $1 \leq j \leq m$ existieren, welche die Dimensionsbedingung in jedem Punkt $z \in W_j \cap \mathbb{R}^n$ erfüllen, so daß gilt

$$(4.13) \quad T_{\gamma,d}V \cap \mathcal{U} = \bigcup_{j=1}^m W_j.$$

Für $d > 1$ folgt (4.13) daraus, daß $T_{\gamma,d}V$ translationsinvariant in Richtung ζ_1 und daher das Produkt von $\mathbb{C}$ und einer analytischen Kurve in $\mathbb{C}^{n-1}$ ist, welche lokal hyperbolisch im Ursprung ist. Für diese impliziert [9], Proposition 3.16, die Darstellung in (4.13).

Für $d = 1$ ist $T_{\gamma,1}V = T_0V - \zeta_1$ homogen und (4.13) folgt aus [3], Proposition 3.12.

Weil $W_j \cap \mathbb{R}^n$ nahe Null eine zweidimensionale reell-analytische Menge ist, kann jede für $T_{\gamma,d}V$ im Ursprung nicht-charakteristische Projektion in der Definition von lokaler Hyperbolizität verwendet werden, insbesondere π . Denn jede solche Projektion bildet W_j nahe Null bijektiv auf eine offene Menge eines zweidimensionalen Unterraums von $\mathbb{C}^n$ ab, wobei $W_j \cap \mathbb{R}^n$ auf eine offene Menge eines zweidimensionalen Unterraums von $\mathbb{R}^n$ projiziert wird.

Daher können wir D_0 hinreichend klein wählen, so daß $z \in T_{\gamma,d}V \cap 2D_0$ reell ist, falls $\pi(z)$ reell ist. Weil π nicht-charakteristisch für $T_{\gamma,d}V$ in $\eta = 0$ ist, existieren Konstanten $\varepsilon, \delta > 0$, so daß für $D := B^2(0, \varepsilon) \times B^{n-2}(0, \delta)$ gilt: $D \subset D_0$ und

$$(4.14) \quad \pi : T_{\gamma,d}V \cap B^2(0, 2\varepsilon) \times B^{n-2}(0, \delta) \rightarrow B^2(0, 2\varepsilon)$$

ist eigentlich. Aus dem vorigem Lemma folgt, daß ein $0 < \rho_2 \leq \rho_1$ existiert, so daß

$$(4.15) \quad \pi : V \cap \Gamma(\gamma, d, D, \rho_2) \rightarrow \Gamma'(\pi \circ \gamma, d, B^2(0, \varepsilon), \rho_2)$$

eigentlich ist. Wir setzen $\Gamma := \Gamma(\gamma, d, D, \rho_2)$ und $\Gamma' := \pi(\Gamma)$.

Sei $\Sigma \subset \Gamma'$ die kritische Menge der analytischen Überlagerung in (4.15). OBdA. sei Γ hinreichend klein gewählt, so daß

$$\Sigma \cap \mathbb{R}^2 = \bigcup_{j=1}^m \text{tr}(\tau_j)$$

mit reellen einfachen Kurven τ_j ist, für welche gilt:

$$\lim_{t \searrow 0} \tau_j(t) = 0, \quad \text{tr}(\tau_i) \cap \text{tr}(\tau_j) = \emptyset \text{ für } i \neq j, \quad \tau_j(t) - \pi \circ \gamma(t) = o(t^d) \text{ für } j = 1, \dots, m.$$

Betrachten wir zunächst den Fall, daß Γ hinreichend klein gewählt werden kann, so daß $m = 0$ ist, und zeigen, daß V (γ, d) -hyperbolisch in $\eta = 0$ ist. Seien $W \subset V \cap \Gamma$ ein Blatt der Überlagerung (4.15) und $W_0 := \{z \in W : \pi(z) \in \mathbb{R}^2\}$, dann ist $W_0 \subset \mathbb{R}^n$ zu zeigen. Bezeichne $\Sigma_1 \subset B^2(0, 2\varepsilon)$ die kritische Menge der analytischen Überlagerung in (4.14) und sei $\kappa' \in \Gamma' \cap \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_1$ fest gewählt. Dann gilt für jedes $\kappa \in \pi^{-1}(\kappa') \cap T_{\gamma, d}V \cap B^2(0, 2\varepsilon) \times B^{n-2}(0, \delta)$, daß $\kappa \in (T_{\gamma, d}V)_{\text{reg}}$ ist: Denn nimmt man $\kappa \in (T_{\gamma, d}V)_{\text{sing}}$ an, so ist κ ein Verzweigungspunkt der Überlagerung in (4.14) und somit $\pi(\kappa) = \kappa' \in \Sigma_1$ im Widerspruch zur Wahl von κ' . Weil κ kein Verzweigungspunkt der Überlagerung in (4.14) ist, ist π in einer Umgebung von κ in $T_{\gamma, d}V$ biholomorph. Folglich ist $\pi : T_{\kappa}(T_{\gamma, d}V) \rightarrow \mathbb{C}^2$ biholomorph und somit $L \cap T_{\kappa}(T_{\gamma, d}V) = \{0\}$. Daher ist $\pi \in \text{NC}(T_{\gamma, d}V, \kappa)$ für alle $\kappa \in \pi^{-1}(\kappa') \cap T_{\gamma, d}V \cap B^2(0, 2\varepsilon) \times B^{n-2}(0, \delta)$.

Setze

$$\tilde{\sigma}(t) := \pi \circ \gamma(t) + \kappa' t^d, \quad t \in]0, \rho_2[,$$

dann ist $\tilde{\sigma}$ eine reelle einfache Kurve in $\Gamma' \cap \mathbb{R}^2$. Da W_0 unverzweigt über $\Gamma' \cap \mathbb{R}^2$ ist, können wir $\sigma := (\pi|_{W_0})^{-1} \circ \tilde{\sigma}$ setzen. Weil σ eine analytische Kurve in Γ ist, folgt

$$\frac{\sigma(t) - \gamma(t)}{t^d} \in D \quad \text{für alle } t \in]0, \rho_2[.$$

Daher gibt es eine Folge $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $t_j \searrow 0$, und es existiert

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sigma(t_j) - \gamma(t_j)}{t_j^d} = \kappa \in T_{\gamma, d}V \cap \bar{D}.$$

Aus Stetigkeitsgründen ist $\pi(\kappa) = \kappa'$ und somit $\kappa \in (T_{\gamma, d}V)_{\text{reg}} \cap \mathbb{R}^n$. Nach Voraussetzung ist V (γ, d) -hyperbolisch im Punkt κ bezüglich einer Projektion $\tilde{\pi}$, welche nicht-charakteristisch für $T_{\gamma, d}V$ im Punkt κ ist. Da π nicht-charakteristisch für $T_{\gamma, d}V$ in κ ist, folgt aus [9], Lemma 3.19, daß V (γ, d) -hyperbolisch in κ bezüglich π ist, d.h. es existieren eine offene Nullumgebung $G_0 \subset \mathbb{C}^n$ und $\rho_0 > 0$, so daß für jedes $z \in V \cap \Gamma(\gamma, d, \kappa + G_0, \rho_0)$ mit $\pi(z) \in \mathbb{R}^2$ folgt $z \in \mathbb{R}^n$.

Für j hinreichend groß gilt $\sigma(t_j) \in \Gamma(\gamma, d, \kappa + G_0, \rho_0)$. Daher ist $W_0 \cap \Gamma(\gamma, d, \kappa + G_0, \rho_0)$ offen und nicht leer in W_0 . Da W_0 reell-analytisch, Γ' zusammenhängend und $(\pi|_{W_0})^{-1} : \Gamma' \rightarrow W_0$ stetig sind, ist W_0 zusammenhängend, woraus $W_0 \subset \mathbb{R}^n$ folgt.

Für den Fall, daß Γ hinreichend klein gewählt werden kann, so daß $m = 1$ ist, lassen sich obige Argumente auf die beiden Zusammenhangskomponenten von $\Gamma' \cap \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ anwenden.

Angenommen $m > 1$ für beliebig kleines Γ , so läßt sich obige Argumentation auf die beiden äußeren Zusammenhangskomponenten von $\Gamma' \cap \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ anwenden, welche nicht von zweien der τ_j begrenzt werden. Denn wählt man κ' in einer dieser Zusammenhangskomponenten, so liegt $\text{tr}(\tilde{\sigma})$ ganz in dieser Zusammenhangskomponente. In diesem Fall erhält man, daß über den äußeren beiden Zusammenhangskomponenten von $\Gamma' \cap \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ alle Urbilder unter π reell sein müssen. Folglich enthält $B_L \cap \mathbb{R}^n$ mindestens zwei reelle einfache Kurven im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $\eta = 0$ ein einfacher Punkt ist. $\square$

Für nicht-einfache Punkte ist die folgende Schlußweise eine Verallgemeinerung für höhere Kodimension von [9], Lemma 5.10 und Lemma 5.11, von Braun, Meise und Taylor.

4.15 Definition. Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine analytische Menge der reinen Dimension k mit $0 \in V$, γ eine reelle einfache Kurve in $\mathbb{C}^n$ und $d \geq 1$. Für $r > 0$ und $D \subset \mathbb{C}^n$ offen sei $\Gamma := \Gamma(\gamma, d, D, r)$ ein Konoid in $\mathbb{C}^n$. Wir sagen, V erfüllt die Bedingung $\text{PL}(V, \Gamma)$, wenn gilt: Für jede kompakte Teilmenge K von D existieren $A_0, r_0 > 0$, so daß für jede plurisubharmonische Funktion u auf $V \cap \Gamma$, welche die Bedingungen (α) und (β) erfüllt, die Bedingung (γ) gilt, wobei

- (α) $u(z) \leq |z|^d, \quad z \in V \cap \Gamma,$
- (β) $u(z) \leq 0, \quad z \in V \cap \Gamma \cap \mathbb{R}^n,$
- (γ) $u(z) \leq A_0 |\operatorname{Im} z|, \quad z \in V \cap \Gamma \cap B(0, r_0).$

4.16 Lemma. Seien $\gamma(t) = (t, \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ eine reelle einfache Kurve mit $|\gamma_j(t)| = o(|t|)$ für $2 \leq j \leq n$, $\pi(z_1, \dots, z_n) := (z_1, z_2)$ und $r_j, R_j > 0$ für $j = 1, \dots, n$ gegeben. Setze

$$G := \prod_{j=1}^n B(0, r_j), \quad G' = \pi(G) \quad \text{und} \quad D := \prod_{j=1}^n B(0, R_j), \quad D' := \pi(D).$$

Für $1 \leq d < \Delta$ und $0 < \rho < \tilde{\rho} < 1$ sei $V \subset \Gamma(\gamma, d, G, \rho)$ eine analytische Fläche mit $0 \in \bar{V}$, so daß $\pi : V \rightarrow \Gamma'(\pi \circ \gamma, d, G', \rho)$ eigentlich ist. Angenommen

- (a) für alle $z \in V$ mit $\pi(z) \notin \Gamma'(\pi \circ \gamma, \Delta, D', \tilde{\rho})$ folgt aus $\pi(z) \in \mathbb{R}^2$, daß $z \in \mathbb{R}^n$ ist,
- (b) für alle $z \in V \setminus \Gamma\left(\gamma, \Delta, \prod_{j=1}^2 B(0, R_j) \times \prod_{j=3}^n B(0, 2R_j), \tilde{\rho}\right)$ mit $\pi(z) \in \Gamma'(\pi \circ \gamma, \Delta, D', \tilde{\rho})$ folgt aus $\pi(z) \in \mathbb{R}^2$, daß $z \in \mathbb{R}^n$ ist,
- (c) es existiert kein $z \in V$ von der Form $z = \gamma(t) + t^\Delta w$ mit $0 < t < \rho$, $\pi(w) \in 3D'$ und $R_j \leq |w_j| \leq 2R_j$ für $j \geq 3$,
- (d) V erfüllt $\text{PL}(V, \Gamma(\gamma, \Delta, 3D, \rho))$.

Dann existieren $A, \delta, \rho_0 > 0$, so daß für alle $u \in \text{PSH}(V)$ gilt: $(\alpha) \wedge (\beta) \Rightarrow (\gamma)$, wobei

- (α) $u(z) \leq |z|^d, \quad z \in V,$
- (β) $u(z) \leq 0, \quad z \in V \cap \mathbb{R}^n,$
- (γ) $u(z) \leq A |\operatorname{Im} z|, \quad z \in V \cap \Gamma(\gamma, d, \delta G, \rho_0).$

Beweis. Nach Voraussetzung an γ gibt es $C_1 > 0$ und $0 < \rho_1 \leq \rho$, so daß $|z| \leq C_1 |z_1|$ für alle $z \in \Gamma(\gamma, d, G, \rho_1)$ gilt. Weil γ als Puiseux-Reihe gegeben ist, läßt sich γ holomorph auf die geschlitzte Scheibe $B(0, \rho_1) \setminus]-\infty, 0]$ fortsetzen. Aus $|\gamma_j(t)| = o(|t|)$ für $2 \leq j \leq n$ folgt die Existenz eines $0 < \rho_2 < \rho_1$, so daß sich γ'_j stetig auf der kompakten Menge

$$W := \{x + iy : x \in [0, \rho_2], y \in [-\rho_2, \rho_2]\} \subset B(0, \rho_1)$$

mit $\gamma'_j(0) = 0$ erklären läßt. Sei $\rho_2 > 0$ hinreichend klein gewählt, daß für $2 \leq j \leq n$ und $r_0 := \min\{r_i : 1 \leq i \leq n\}$ die Abschätzung

$$(4.16) \quad |\gamma'_j(z)| < \min\left(\frac{R_2}{20R_1}, \frac{r_0}{r_1}, 1\right) \quad \text{für alle } z \in W$$

erfüllt ist. Ferner sei $m \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, daß $|x^\Delta - 1| < 1/40$ und $|x^d - 1| < 1/2$ für jedes

$$\frac{2}{3} < (m-1)/(m+1) \leq x \leq (m+1)/(m-1) < \frac{3}{2}$$

und $x^\Delta < 22/21$ für jedes

$$\frac{2}{3} < \frac{m}{m+1} \leq x \leq \frac{m}{m-1} < 2$$

gelten. Ohne Einschränkung können wir davon ausgehen, daß $\tilde{\rho}^{\Delta-1}3R_1 < 1/m$ ist und die Abschätzung (4.16) für $\tilde{\rho} = \rho_2$ gilt, indem wir ρ und $\tilde{\rho}$ verkleinern, wobei die Voraussetzungen (a)–(c) erhalten bleiben. Wähle positive Zahlen $\varepsilon, \delta, L, \rho_0$ fest, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\varepsilon < \min\left(r_1, \frac{r_2}{2}, \frac{1}{m}\right), \quad \delta < \min\left(\frac{1}{4mr_1}, \frac{3}{4} \frac{\varepsilon}{2^{d+2}(r_1+r_2)}\right),$$

$$L = \frac{11}{10} \frac{R_2}{\varepsilon}, \quad \rho_0 < \frac{\rho_2}{2}, \quad L\rho_0^{\Delta-d} < 1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{3}{2}\rho_0\right)^{\Delta-d} 3R_1 < \frac{\delta r_1}{2}.$$

Wir behaupten zunächst, daß ein $A_1 > 0$ existiert, so daß für jedes $u \in \text{PSH}(V)$ mit (α) und (β) gilt:

$$(4.17) \quad u(z) \leq A_1 |\text{Im } z|, \quad z \in V \cap \Gamma(\gamma, d, \delta G, \rho_0), \quad \pi(z) \notin \Gamma'(\pi \circ \gamma, \Delta, 2D', \tilde{\rho}),$$

$$(4.18) \quad u(z) \leq A_1 |z|^\Delta, \quad z \in V \cap \Gamma(\gamma, d, \delta G, \rho_0), \quad \pi(z) \in \Gamma'(\pi \circ \gamma, \Delta, 3D', \tilde{\rho}).$$

Sei ein solches $u \in \text{PSH}(V)$ fest gewählt. Wir definieren

$$v : \Gamma'(\pi \circ \gamma, d, G', \rho_0) \rightarrow [-\infty, \infty[, \quad z' \mapsto \max\{u(z) : z \in V, \pi(z) = z'\}.$$

Da die kritische Menge der analytischen Überlagerung $\pi : V \rightarrow \Gamma'(\pi \circ \gamma, d, G', \rho)$ hebbar ist, folgt $v \in \text{PSH}(\Gamma'(\pi \circ \gamma, d, G', \rho_0))$. Wegen (α) und nach Wahl von C_1 gilt $v(z') \leq (C_1 |z_1|)^d$ für $z' \in \Gamma'(\pi \circ \gamma, d, G', \rho_0)$.

Im Folgenden bezeichne $\mathbb{D} := B^1(0, 1)$. Für $0 < t_0 < \rho_0$ definieren wir

$$\psi : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad (a, b) \mapsto (t_0 + \varepsilon t_0^d a, \gamma_2(t_0 + \varepsilon t_0^d a) + \varepsilon t_0^d b),$$

und zeigen $\psi(a, b) \in \Gamma'(\pi \circ \gamma, d, G', \rho_0)$: Für $(\zeta_1, \zeta_2) := \psi(a, b) - (t_0, \gamma_2(t_0))$ ist $|\zeta_1| < \varepsilon t_0^d < t_0^d r_1$. Außerdem gelten $0 < \text{Re}(t_0 + \varepsilon t_0^d a) < t_0(1 + \varepsilon) < \rho_2$ und $|\text{Im}(t_0 + \varepsilon t_0^d a)| < \varepsilon t_0 < \rho_2$ und damit auch $|\zeta_2| < 2\varepsilon t_0^d < t_0^d r_2$ unter Verwendung von (4.16). Also ist $\psi(a, b) \in \pi \circ \gamma(t_0) + t_0^d G'$. Mit obiger Abschätzung erhält man hieraus $v \circ \psi(a, b) \leq (C_1(t_0 + \varepsilon t_0^d))^d \leq (2C_1)^d t_0^d$ für $(a, b) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

Seien $a \in \mathbb{D}$ und $b \in]-1, 1[\setminus]-Lt_0^{\Delta-d}, Lt_0^{\Delta-d}[$ fest gewählt. Wir behaupten

$$(4.19) \quad \psi(a, b) \notin \Gamma'(\pi \circ \gamma, \Delta, D', \tilde{\rho}).$$

Angenommen es existieren $0 < t < \tilde{\rho}$ und $w \in D'$ mit $\psi(a, b) = \pi \circ \gamma(t) + t^\Delta w$, d.h.

$$(4.20) \quad (t_0 + \varepsilon t_0^d a, \gamma_2(t_0 + \varepsilon t_0^d a) + \varepsilon t_0^d b) = (t + t^\Delta w_1, \gamma_2(t) + t^\Delta w_2).$$

Vergleicht man die erste Komponente dieser Gleichung, so erhält man

$$\frac{t_0}{t} = 1 + t^{\Delta-1} w_1 - \varepsilon t_0^d t^{-1} a,$$

also gilt

$$|1 + t^{\Delta-1} w_1| - \varepsilon \frac{t_0}{t} \leq \frac{t_0}{t} \leq |1 + t^{\Delta-1} w_1| + \varepsilon \frac{t_0}{t}.$$

Hieraus folgen

$$(1 + \varepsilon) \frac{t_0}{t} \geq |1 + t^{\Delta-1} w_1| \geq 1 - t^{\Delta-1} R_1 \geq \frac{m-1}{m}$$

und

$$(1 - \varepsilon) \frac{t_0}{t} \leq |1 + t^{\Delta-1} w_1| \leq 1 + t^{\Delta-1} R_1 \leq \frac{m+1}{m}.$$

Wegen $\varepsilon \leq 1/m$ ist

$$\frac{m-1}{m+1} \leq \frac{t_0}{t} \leq \frac{m+1}{m-1},$$

und somit

$$\left(\frac{t_0}{t}\right)^\Delta \geq \frac{39}{40}$$

nach Wahl von m . Wir lösen die zweite Komponente von Gleichung (4.20) nach w_2 auf

$$w_2 = t^{-\Delta}(\gamma_2(t_0 + \varepsilon t_0^d a) - \gamma_2(t) + \varepsilon t_0^d b)$$

und schätzen mit Hilfe der bisherigen Ungleichungen und (4.16) wie folgt ab:

$$\begin{aligned} |w_2| &\geq \varepsilon t_0^d t^{-\Delta} |b| - t^{-\Delta} |t_0 + \varepsilon t_0^d a - t| \frac{R_2}{20R_1} \geq \varepsilon L t_0^{\Delta-d} t_0^d t^{-\Delta} - t^{-\Delta} |t^\Delta w_1| \frac{R_2}{20R_1} \\ &= \varepsilon L \left(\frac{t_0}{t}\right)^\Delta - |w_1| \frac{R_2}{20R_1} \geq \frac{11}{10} \frac{39}{40} R_2 - \frac{R_2}{20} > R_2. \end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zur Annahme $w \in D'$, womit (4.19) gezeigt ist.

Definiere

$$\Phi : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow [-\infty, \infty[, \quad \Phi(a, b) := (2C_1 t_0)^{-d} v \circ \psi(a, b),$$

dann gilt $\Phi(a, b) \leq 1$ für $(a, b) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$, und mit Voraussetzung (a) folgt aus dem eben Gezeigten $\Phi(a, b) \leq 0$ für $(a, b) \in]-1, 1[\times]-1, 1[\setminus]-Lt_0^{\Delta-d}, Lt_0^{\Delta-d}[$. Nach [2], Theorem 5.8, gibt es eine Konstante $C_2 > 0$, so daß für $a, b \in B(0, 3/4)$ gilt

$$(4.21) \quad \Phi(a, b) \leq C_2 \left(|\operatorname{Im} a| + \left| \operatorname{Im} \sqrt{b^2 - L^2 t_0^{2(\Delta-d)}} \right| \right).$$

Aus [2], Lemma 5.7, erhält man: Falls $|b| > (3/2)Lt_0^{\Delta-d}$ ist, so gilt

$$|\operatorname{Im} \sqrt{b^2 - L^2 t_0^{2(\Delta-d)}}| \leq (3/\sqrt{5}) |\operatorname{Im} b|$$

nach Aussage (iii), und falls $|b| \leq 3Lt_0^{\Delta-d}$ ist, so gilt

$$|\operatorname{Im} \sqrt{b^2 - L^2 t_0^{2(\Delta-d)}}| \leq 4Lt_0^{\Delta-d}$$

nach Aussage (i). Ist $|\operatorname{Im} a|$ hinreichend groß (in Abhängigkeit von t_0 etc.), so schätzen wir im letzten Fall weiter durch ein Vielfaches von $|\operatorname{Im} a|$ ab, andernfalls schätzen wir $|\operatorname{Im} a|$ in (4.21) ebenfalls durch einen Ausdruck in t_0 ab. Somit erhalten wir ein $C_3 > 0$ unabhängig von u und t_0 , so daß

$$\Phi(a, b) \leq \begin{cases} C_3 |\operatorname{Im}(a, b)|, & \text{falls } |b| > (3/2)Lt_0^{\Delta-d} \text{ oder } |\operatorname{Im} a| > (R_1/\varepsilon)t_0^{\Delta-d}, \\ C_3 t_0^{\Delta-d}, & \text{falls } |b| \leq 3Lt_0^{\Delta-d} \text{ und } |\operatorname{Im} a| \leq 4(R_1/\varepsilon)t_0^{\Delta-d}. \end{cases}$$

Um (4.17) und (4.18) zu zeigen, sei $z \in \Gamma(\gamma, d, \delta G, \rho_0)$, $z = \gamma(t) + t^d w$ mit $0 < t < \rho_0$ und $w \in \delta G$, fest gewählt. Dann gelten für jede Wahl von $0 < \tilde{t} < (3/2)\rho_0$ und $\tilde{w} \in 4\delta G$ mit

$$(4.22) \quad z = \gamma(\tilde{t}) + \tilde{t}^d \tilde{w}$$

die folgenden Abschätzungen: Wir setzen

$$t_0 := \operatorname{Re} z_1, \quad a := \frac{i}{\varepsilon t_0^d} \operatorname{Im} z_1, \quad b := \frac{i}{\varepsilon t_0^d} (z_2 - \gamma_2(z_1)).$$

Dann ist $t_0 = \tilde{t} + \tilde{t}^d \operatorname{Re} \tilde{w}_1 > 0$, genauer

$$t_0 \leq \tilde{t} + \tilde{t}^d |\operatorname{Re} \tilde{w}_1| \leq \tilde{t} + \tilde{t}^d 4\delta r_1 \quad \text{und} \quad t_0 \geq \tilde{t} - \tilde{t}^d |\operatorname{Re} \tilde{w}_1| \geq \tilde{t} - \tilde{t}^d 4\delta r_1,$$

woraus nach Wahl von δ folgt

$$\frac{2}{3} \leq \frac{m}{m+1} < \frac{1}{1+4\delta r_1} \leq \frac{\tilde{t}}{t_0} \leq \frac{1}{1-4\delta r_1} < \frac{m}{m-1} \leq 2.$$

Hieraus erhält man a

$$|a| = \frac{1}{\varepsilon t_0^d} |\operatorname{Im} z_1| = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\tilde{t}}{t_0} \right)^d |\operatorname{Im} \tilde{w}_1| \leq \frac{2^d}{\varepsilon} 4\delta r_1 < \frac{3}{4}$$

und für b

$$\begin{aligned} |b| &= \frac{1}{\varepsilon t_0^d} |\gamma_2(\tilde{t}) - \gamma_2(z_1) + \tilde{t}^d \tilde{w}_2| \leq \frac{1}{\varepsilon t_0^d} (|\tilde{t} - z_1| + \tilde{t}^d |\tilde{w}_2|) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\tilde{t}}{t_0} \right)^d (|\tilde{w}_1| + |\tilde{w}_2|) \leq \frac{2^d}{\varepsilon} 4\delta(r_1 + r_2) < \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Also gilt $a, b \in B(0, 3/4)$ und $\psi(a, b) = \pi(z)$. Wir treffen folgende Fallunterscheidung:

Falls $\pi(z) \in \Gamma'(\pi \circ \gamma, \Delta, 3D', \tilde{\rho})$: Dann existieren ein $0 < \tau < \tilde{\rho}$ und ein $\omega \in 3D'$ mit $\pi(z) = \pi \circ \gamma(\tau) + \tau^\Delta \omega$. Aus $t + t^d w_1 = \tau + \tau^\Delta \omega_1$ folgt

$$\frac{t}{\tau} = 1 + \tau^{\Delta-1} \omega_1 - t^d \tau^{-1} w_1,$$

und analog zu oben erhält man

$$1 - 3\tilde{\rho}^{\Delta-1} R_1 - \frac{t}{\tau} \delta r_1 \leq \frac{t}{\tau} \leq 1 + 3\tilde{\rho}^{\Delta-1} R_1 + \frac{t}{\tau} \delta r_1.$$

Also ist

$$\frac{m-1}{m+1} \leq \frac{t}{\tau} \leq \frac{m+1}{m-1},$$

und somit gilt

$$\left(\frac{t}{\tau} \right)^d < \frac{3}{2}$$

nach Wahl von m .

Setze nun $\tilde{t} := \tau$ und $\tilde{w} := \tau^{-d}(z - \gamma(\tau))$, dann gelten

$$\gamma(\tilde{t}) + \tilde{t}^d \tilde{w} = z \quad \text{und} \quad \pi(\tilde{w}) = \tau^{\Delta-d} \omega \in 3\tilde{t}^{\Delta-d} D'.$$

Ferner ist

$$\tilde{t} = \tau \leq \frac{m+1}{m-1} t < \frac{3}{2} \rho_0$$

und

$$\tilde{w} = \frac{\gamma(t) - \gamma(\tau)}{\tau^d} + \left(\frac{t}{\tau} \right)^d w \in 2\delta G + \frac{3}{2} \delta G \subset 4\delta G.$$

Denn aus $t + t^d w_1 = \tau + \tau^\Delta \omega_1$ folgt für die erste Komponente von $(\gamma(t) - \gamma(\tau))/\tau^d$

$$\frac{|t - \tau|}{\tau^d} \leq \tau^{\Delta-d} |\omega_1| - \left(\frac{t}{\tau} \right)^d |w_1| \leq \left(\frac{3}{2} \rho_0 \right)^{\Delta-d} 3R_1 + \frac{3}{2} \delta r_1 < \frac{\delta}{2} r_1 + \frac{3}{2} \delta r_1 = 2\delta r_1$$

nach Wahl von ρ_0 . Für $2 \leq j \leq n$ gilt nach (4.16)

$$\frac{|\gamma_j(t) - \gamma_j(\tau)|}{\tau^d} \leq \sup_{0 < \xi < \rho_2} |\gamma'_j(\xi)| \frac{|t - \tau|}{\tau^d} < \frac{r_j}{r_1} 2\delta r_1 = 2\delta r_j.$$

In diesem Fall erhält man

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} a| &= \frac{1}{\varepsilon t_0^d} |\operatorname{Im} z_1| = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\tilde{t}}{t_0} \right)^d |\operatorname{Im} \tilde{w}_1| \leq \frac{3}{\varepsilon} \left(\frac{\tilde{t}}{t_0} \right)^d \tilde{t}^{\Delta-d} R_1 \\ &= \frac{3}{\varepsilon} \left(\frac{\tilde{t}}{t_0} \right)^\Delta t_0^{\Delta-d} R_1 \leq \frac{4R_1}{\varepsilon} t_0^{\Delta-d}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |b| &= \frac{1}{\varepsilon t_0^d} |\gamma_2(\tilde{t}) - \gamma_2(z_1) + \tilde{t}^d w_2| \leq \frac{1}{\varepsilon t_0^d} \left(|\tilde{t} - z_1| \frac{R_2}{20R_1} + \tilde{t}^d 3\tilde{t}^{\Delta-d} R_2 \right) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon t_0^d} \left(3\tilde{t}^\Delta R_1 \frac{R_2}{20R_1} + 3\tilde{t}^\Delta R_2 \right) \leq \frac{3}{\varepsilon} \frac{\tilde{t}^\Delta}{t_0^d} \frac{21}{20} R_2 = 3 \left(\frac{\tilde{t}}{t_0} \right)^\Delta t_0^{\Delta-d} \frac{21}{20} \frac{R_2}{\varepsilon} \\ &\leq 3 \frac{22}{21} \frac{21}{20} t_0^{\Delta-d} \frac{R_2}{\varepsilon} = 3L t_0^{\Delta-d}. \end{aligned}$$

Nach Definition von Φ folgt hieraus

$$u(z) \leq v(\pi(z)) \leq (2C_1 t_0)^d \Phi(a, b) \leq (2C_1 t_0)^d C_3 t_0^{\Delta-d} \leq (2C_1)^d C_3 t_0^\Delta \leq (2C_1)^d C_3 |z|^\Delta$$

nach Wahl von t_0 . Dies impliziert (4.18) für $A_1 := (2C_1)^d C_3$.

Falls $\pi(z) \notin \Gamma'(\pi \circ \gamma, \Delta, 2D', \tilde{\rho})$ **und** $|\operatorname{Im} z_1| > R_1 t_0^\Delta$: Dann ist

$$|\operatorname{Im} a| = \frac{1}{\varepsilon t_0^d} |\operatorname{Im} z_1| > \frac{R_1}{\varepsilon} t_0^{\Delta-d}.$$

Wir schätzen ab

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} b| &= \frac{1}{\varepsilon t_0^d} |\operatorname{Im} z_2 - \operatorname{Im} \gamma_2(z_1)| \leq \frac{1}{\varepsilon t_0^d} (|\operatorname{Im} z_2| + |\operatorname{Im}(\gamma_2(z_1) - \gamma_2(\operatorname{Re} z_1))|) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon t_0^d} (|\operatorname{Im} z_2| + |\gamma_2(z_1) - \gamma_2(\operatorname{Re} z_1)|) \leq \frac{1}{\varepsilon t_0^d} (|\operatorname{Im} z_2| + |\operatorname{Im} z_1|) \leq \frac{2}{\varepsilon t_0^d} |\operatorname{Im} z|, \end{aligned}$$

und erhalten hieraus mit der Abschätzung für Φ

$$\begin{aligned} u(z) &\leq v(\pi(z)) = (2C_1 t_0)^d \Phi(a, b) = (2C_1 t_0)^d C_3 |\operatorname{Im}(a, b)| \\ &\leq (2C_1 t_0)^d C_3 \frac{1}{\varepsilon t_0^d} (|\operatorname{Im} z_1| + 2|\operatorname{Im} z|) \leq \frac{(2C_1)^d 3C_4}{\varepsilon} |\operatorname{Im} z|, \end{aligned}$$

also gilt (4.17).

Falls $\pi(z) \notin \Gamma'(\pi \circ \gamma, \Delta, 2D', \tilde{\rho})$ **und** $|\operatorname{Im} z_1| \leq R_1 t_0^\Delta$: Dann gilt

$$z = \gamma(t_0) + t_0^\Delta x \quad \text{für} \quad x = \frac{z - \gamma(t_0)}{t_0^\Delta},$$

und in diesem Fall ist $\pi(x) \notin 2D'$. Betrachte die erste Koordinate von x

$$|x_1| = t_0^{-\Delta} |z_1 - \operatorname{Re}(z_1)| = t_0^{-\Delta} |\operatorname{Im} z_1| \leq R_1 < 2R_1,$$

dann folgt $|x_2| \geq 2R_2$. Für

$$b = \frac{i}{\varepsilon} t_0^{\Delta-d} x_2 + \frac{i}{\varepsilon t_0^d} (\gamma_2(\operatorname{Re} z_1) - \gamma_2(z_1))$$

erhält man

$$|b| \geq \frac{2}{\varepsilon} t_0^{\Delta-d} R_2 - \frac{1}{\varepsilon t_0^d} \frac{R_2}{20R_1} |\operatorname{Im} z_1| \geq \frac{t_0^{\Delta-d}}{\varepsilon} \left(2R_2 - \frac{R_2}{20} \right) > \frac{33}{20} \frac{R_2}{\varepsilon} t_0^{\Delta-d} = \frac{3}{2} L t_0^{\Delta-d}.$$

Aus der Abschätzung für Φ folgt wie im vorherigen Fall

$$u(z) \leq (2C_1 t_0)^d C_3 |\operatorname{Im}(a, b)| \leq \frac{(2C_1)^d 3C_4}{\varepsilon} |\operatorname{Im} z|.$$

Damit sind die Abschätzungen (4.17) und (4.18) gezeigt.

Um hieraus die Aussage des Lemmas zu folgern, beachten wir zunächst, daß (4.17) Abschätzung (γ) für $u(z)$ mit $z \in V \cap \Gamma(\gamma, d, \delta G, \rho_0)$ und $\pi(z) \notin \Gamma'(\pi \circ \gamma, \Delta, 2D', \tilde{\rho})$ impliziert. Ist andererseits $\pi(z) \in \Gamma'(\pi \circ \gamma, \Delta, 2D', \tilde{\rho})$, so unterscheiden wir die folgenden beiden Fälle: Indem wir ρ_0 verkleinern, folgt aus Voraussetzung (d), daß wir Abschätzung (γ) für alle $z \in V \cap \Gamma(\gamma, d, \delta G, \rho_0) \cap \Gamma(\gamma, \Delta, 2D, \rho)$ annehmen können, denn (4.18) und (β) implizieren die Voraussetzungen für $\operatorname{PL}(V, \Gamma(\gamma, \Delta, 3D, \rho))$.

Im verbleibenden Fall $z \in V \cap \Gamma(\gamma, d, \delta G, \rho_0) \setminus \Gamma(\gamma, \Delta, 2D, \rho)$ setzen wir

$$W := \Gamma(\gamma, d, \delta G, \rho_0) \cap \pi^{-1}(\Gamma'(\pi \circ \gamma, \Delta, 3D', \rho)) \setminus \Gamma(\gamma, \Delta, \prod_{j=1}^2 B(0, 3R_j) \times \prod_{j=3}^n B(0, 2R_j), \tilde{\rho})$$

und betrachten

$$\begin{aligned} w : \pi(W) &\rightarrow [-\infty, \infty[, \\ z' &\mapsto \max\{u(z) : z \in V \cap W, \pi(z) = z'\} \end{aligned}$$

mit $\max(\emptyset) = -\infty$. Nach Voraussetzung (c) ist $\pi : V \cap W \rightarrow \pi(W)$ eigentlich, daher ist w plurisubharmonisch. Weil W beschränkt ist, folgt aus (4.18), daß ein $C > 0$ unabhängig von u existiert, so daß $w(z') \leq C$ für alle $z' \in \pi(W) \cap \Gamma'(\pi \circ \gamma, \Delta, 2D', \rho)$ gilt. Ferner ist $w(z') \leq 0$ für $z' \in \mathbb{R}^2$ nach Voraussetzungen (a), (b) und (β) . Daher lassen sich die Argumente im Beweis von [9], Lemma 5.7, auf w anwenden, und wir erhalten aus [10], Lemma 4.1, für ein gegebenenfalls verkleinertes ρ_0 die gewünschte Abschätzung

$$w(z') \leq (4C/\pi) |\operatorname{Im} z'| \quad \text{für } z' \in \pi(W) \cap \Gamma'(\pi \circ \gamma, \Delta, 2D', \rho).$$

In allen Fällen kann man $A > 0$ hinreichend groß wählen, daß (γ) für jedes beliebige $u \in \operatorname{PSH}(V)$ mit (α) und (β) gilt, was den Beweis vollendet. $\square$

4.17 Lemma. *Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine algebraische Fläche mit $0 \in V$, $\gamma :]0, \alpha[\rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reelle einfache Kurve und $d \geq 1$. Es sei $0 \in T_{\gamma, d}V$. Setze $\Delta := \Delta^A(\gamma, d)$ für*

$$A := \operatorname{Grass}(n-2, n) \setminus (\operatorname{NC}(V, 0) \cap \operatorname{NC}(V, \infty) \cap \operatorname{NC}(T_{\gamma, d}V, 0)).$$

Angenommen es gelten die folgenden Voraussetzungen:

(a) $0 \in T_{\gamma, d}V$ ist kein einfacher Punkt.

(b) $T_{\gamma,d}V$ ist lokal hyperbolisch in jedem reellen Punkt.

(c) Für jedes $\eta \in (T_{\gamma,d}V)_{\text{reg}} \cap \mathbb{R}^n$ ist V (γ, d) -hyperbolisch in η .

(d) Für jedes $\zeta \in T_{\gamma,\Delta}V \cap \mathbb{R}^n$ existieren eine Nullumgebung $D_\zeta \subset \mathbb{C}^n$ und ein $\rho_\zeta > 0$, so daß V die Bedingung $\text{PL}(V, \Gamma(\gamma, \Delta, \zeta + D_\zeta, \rho_\zeta))$ erfüllt.

Dann gibt es eine Nullumgebung $G \subset \mathbb{C}^n$ und ein $\rho > 0$, so daß V die Bedingung $\text{PL}(V, \Gamma(\gamma, d, G, \rho))$ erfüllt.

Beweis. Weil $0 \in T_{\gamma,d}V$ kein einfacher Punkt ist, gilt $\Delta < \infty$. Ist $L \in \text{Grass}_{\mathbb{R}}(n-2, n) \setminus A$ und τ ein Zweig von $B_L \cap \mathbb{R}^n$, welcher äquivalent zu γ modulo d ist, so ist $\gamma(t) - \tau(t) = O(t^\Delta)$ und daher $T_{\gamma,\Delta}V \neq \emptyset$.

Sei $\xi_1 \in \mathbb{R}^n$ der Tangentialvektor von γ im Ursprung. Weil

$$\{L \in \text{Grass}(n-2, n) : \xi_1 \in L\}$$

als analytische Teilmenge von $\text{Grass}(n-2, n)$ nirgends dicht in $\text{Grass}_{\mathbb{R}}(n-2, n)$ ist, können wir ein $L \in \text{Grass}_{\mathbb{R}}(n-2, n) \setminus A$ mit $L \cap (T_{\gamma,\Delta}V)_h = \{0\}$ und $\xi_1 \notin L$ fest wählen. Fixiere eine Basis $\xi_3, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$ von L und $\xi_2 \in \mathbb{R}^n$ geeignet, so daß $\xi_1, \dots, \xi_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden. Nach einer linearen Transformation können wir oBdA. annehmen, daß $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ gleich der Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$ von $\mathbb{R}^n$ ist. Setzt man

$$\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad (z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, z_2, 0, \dots, 0),$$

so ist $\ker \pi = L$ und daher $\pi|_{T_{\gamma,\Delta}V}$ eigentlich. Folglich existiert ein $C > 1$, so daß $T_{\gamma,\Delta}V$ enthalten ist in $\{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leq C(1 + |\pi(z)|)\}$. Da e_1 tangential zu γ im Ursprung ist, können wir annehmen, daß γ in Standardparametrisierung gegeben ist. Somit hat γ die Form

$$\gamma(t) = (t, \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) \quad \text{mit } \gamma_j(t) = o(t) \text{ für } j = 2, \dots, n.$$

Ferner ist aufgrund der getroffenen Wahlen π nicht-charakteristisch für V und $T_{\gamma,d}V$ im Ursprung.

Nach (b) ist $T_{\gamma,d}V$ lokal hyperbolisch im Ursprung, daher folgt aus [3], Proposition 3.12, wie im Beweis von Lemma 4.14, daß $T_{\gamma,d}V$ lokal hyperbolisch bezüglich jeder nicht-charakteristischen Projektion ist, insbesondere π . Somit existiert eine Nullumgebung $G \subset \mathbb{C}^n$, so daß $z \in T_{\gamma,d}V \cap G$ reell ist, wann immer $\pi(z) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Bezeichne $\mathcal{M}_{\gamma,d}$ die Menge der reellen, nicht-einfachen Punkte von $T_{\gamma,d}V$. Nach Lemma 4.5 gilt: Ist $d > 1$, so ist $\mathcal{M}_{\gamma,d}$ die Vereinigung endlich vieler reeller Geraden parallel zu e_1 , und ist $d = 1$, so ist $\mathcal{M}_{\gamma,d}$ die Vereinigung endlich vieler halboffener reeller Geraden, welche alle in den Punkt $-e_1$ münden. Bezeichne $\widetilde{\mathcal{M}}_{\gamma,d} := \mathcal{M}_{\gamma,d}$ bzw. $\widetilde{\mathcal{M}}_{\gamma,d} := \mathcal{M}_{\gamma,d} \setminus \{-e_1\}$ respektive. OBdA. sei G hinreichend klein gewählt, daß $G \cap \widetilde{\mathcal{M}}_{\gamma,d}$ zusammenhängend ist.

Ferner können wir G und $\rho_1 > 0$ hinreichend klein wählen, so daß für jede reelle einfache Kurve τ mit $\text{tr}(\tau) \subset B_L \cap \mathbb{R}^n$ gilt: Aus $\text{tr}(\tau) \cap \Gamma(\gamma, d, G, \rho_1) \neq \emptyset$ folgt, daß τ und γ äquivalent modulo d sind und $\text{tr}(\pi \circ \tau) \subset \Gamma'(\pi \circ \gamma, d, G', \rho_1)$ gilt.

Nach Lemma 4.12 gibt es $\varepsilon, \delta > 0$, so daß wir G von der Form $G := B(0, \varepsilon)^2 \times B(0, \delta)^{n-2}$ wählen können und für $\rho_1 > 0$ hinreichend klein

$$\pi : V \cap \Gamma(\gamma, d, G, \rho_1) \rightarrow \Gamma'(\pi \circ \gamma, d, B(0, \varepsilon)^2, \rho_1)$$

eigentlich ist, wobei die bisherigen Voraussetzungen erhalten bleiben.

Nach Definition von Δ existieren $R_1 > 1$ und $0 < \rho_2 \leq \rho_1$, so daß für

$$(4.23) \quad D_1 := B(0, R_1)^2 \times B(0, 2C(15R_1 + 6))^{n-2}$$

gilt:

$$\Gamma(\gamma, \Delta, 3D_1, \rho_2) \subset \Gamma(\gamma, d, G, \rho_2)$$

und jede reelle einfache Kurve τ mit $\text{tr}(\tau) \subset B_L \cap \mathbb{R}^n$, welche äquivalent zu γ modulo d ist, erfüllt nach Einschränkung auf einen hinreichend kleinen Definitionsbereich $\text{tr}(\tau) \subset \Gamma(\gamma, \Delta, D_1, \rho_2)$. Hieraus folgt zusammen mit (b) und (c) wie im Beweis von Lemma 4.14 für ein $0 < \rho_3 < \rho_2$ und $D'_1 := \pi(D_1)$:

$$(4.24) \quad \text{Ist } z \in \Gamma(\gamma, d, G, \rho_3) \text{ mit } \pi(z) \in \mathbb{R}^2 \text{ und } \pi(z) \notin \Gamma'(\pi \circ \gamma, \Delta, D'_1, \rho_2), \text{ so gilt } z \in \mathbb{R}^n.$$

Für $R > 1$ setzen wir $S := 2C(5R + 6)$ und behaupten:

$$(4.25) \quad \text{Für jedes } R > 1 \text{ und jedes } L > S \text{ gibt es ein } r > 0, \text{ so daß aus } 0 < t < r, \\ \zeta \in B(0, R)^2 \times B(0, L)^{n-2} \text{ und } \gamma(t) + t^\Delta \zeta \in V \text{ folgt } |\zeta_j| < S \text{ für } j = 3, \dots, n.$$

Seien dazu $R > 1$ und $L > S$ fest gewählt, setze $\Omega := B(0, R)^2 \times B(0, L)^{n-2}$ und wähle $\eta > 0$ hinreichend klein mit

$$\eta < 2^{-\Delta} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} < (1 - \eta)^\Delta < (1 + \eta)^\Delta < 2.$$

Wir bezeichnen die holomorphe Fortsetzung von γ auf $B(0, \alpha) \setminus]-\infty, 0]$ ebenfalls mit γ . Weil γ in Standardparametrisierung gegeben ist, gibt es ein $0 < r_0 < \alpha$, so daß gilt:

$$|\gamma(t)| + t^\Delta(2R + (n-2)L) \leq 2t, \quad t \in]0, r_0[, \\ |\gamma'_j(s)| \leq \frac{1}{2^\Delta}, \quad s \in B(0, r_0) \setminus]-\infty, 0], \quad j = 2, \dots, n.$$

Nach [6], Proposition 5.4, können wir ein $0 < r < r_0/2$ wählen, mit folgender Eigenschaft:

$$(4.26) \quad \text{Für jedes } z \in V \cap \Gamma(\gamma, \Delta, \Omega, r) \text{ existieren ein } \tau \in B(0, \alpha) \setminus]-\infty, 0] \text{ und ein } v \in T_{\gamma, \Delta} V \\ \text{mit } v_1 = 0, \text{ so daß für } w := \gamma(\tau) + \tau^\Delta v \text{ gilt: } |z - w| \leq \eta|z|^\Delta.$$

OBdA. gelte $(2^\Delta \eta + R)r^{\Delta-1} < \eta$. Fixiere $z := \gamma(t) + t^\Delta \zeta \in V$ mit $0 < t < r$ und $\zeta \in \Omega$. Seien τ, v und w gemäß (4.26) gewählt. Dann folgt

$$|z| \leq |\gamma(t)| + t^\Delta |\zeta| \leq |\gamma(t)| + t^\Delta(2R + (n-2)L) \leq 2t,$$

und somit gilt

$$|\tau - t| \leq |w_1 - z_1| + t^\Delta |\zeta_1| \leq \eta|z|^\Delta + t^\Delta R \\ \leq (2^\Delta \eta + R)t^\Delta \leq (2^\Delta \eta + R)r^{\Delta-1}t < \eta t.$$

Hieraus folgen $|\tau| \leq |\tau - t| + t \leq \frac{3}{2}t < r_0$ und

$$t(1 - \eta) \leq t - |\tau - t| \leq |\tau| \leq |\tau - t| + t \leq t(1 + \eta).$$

Wegen $1 - \eta \leq |\tau|/t \leq 1 + \eta$ gilt nach Wahl von η

$$\frac{1}{2} \leq \left(\frac{|\tau|}{t} \right)^\Delta \leq 2.$$

Wir schätzen weiter ab:

$$\begin{aligned}
|v_2| &= \frac{1}{|\tau|^\Delta} |w_2 - \gamma_2(\tau)| \leq \frac{1}{|\tau|^\Delta} (|w_2 - z_2| + |z_2 - \gamma_2(t)| + |\gamma_2(t) - \gamma_2(\tau)|) \\
&\leq \frac{1}{|\tau|^\Delta} (|w - z| + t^\Delta |\zeta_2| + 2^{-\Delta} |t - \tau|) \leq \frac{1}{|\tau|^\Delta} (\eta |z|^\Delta + t^\Delta R + 2^{-\Delta} (2^\Delta \eta + R) t^\Delta) \\
&\leq \left(\frac{t}{|\tau|} \right)^\Delta (2^\Delta \eta + R + 2^{-\Delta} (2^\Delta \eta + R)) \leq 2((1 + 2^\Delta) \eta + (1 + 2^{-\Delta}) R) \\
&\leq 4R + 4.
\end{aligned}$$

Dies impliziert wegen $v = (0, v_2, \dots, v_n) \in T_{\gamma, \Delta} V$

$$|v| \leq C(1 + |\pi(v)|) \leq C(4R + 5),$$

und wir erhalten für $j = 3, \dots, n$

$$\begin{aligned}
|\zeta_j| &= \frac{1}{t^\Delta} |z_j - \gamma_j(t)| \leq \frac{1}{t^\Delta} (|z_j - w_j| + |w_j - \gamma_j(\tau)| + |\gamma_j(\tau) - \gamma_j(t)|) \\
&\leq \frac{1}{t^\Delta} (2^\Delta \eta t^\Delta + |\tau|^\Delta |v_j| + 2^{-\Delta} (2^\Delta \eta + R) t^\Delta) \leq 2^\Delta \eta + 2C(4R + 5) + \eta + 2^{-\Delta} R \\
&\leq 1 + 2C(4R + 5) + 1 + R \leq 2C(5R + 6) = S.
\end{aligned}$$

Damit ist (4.25) gezeigt.

Für R_1 wie oben setzen wir $R_2 := 3R_1$, $S_2 := 2C(5R_2 + 6)$, $L_2 := 2S_2$ und wählen $0 < \rho_4 < \rho_3$, so daß (4.25) für diese Wahlen von $R = R_2$ und $L = L_2$ mit $r = \rho_4$ gilt. OBdA. sei ρ_4 hinreichend klein gewählt, daß für alle $t \in]0, \rho_4[$ gilt

$$(4.27) \quad \pi \circ \gamma(t) + [-t^\Delta R_1, t^\Delta R_1] \times \{2R_1\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma'(\pi \circ \gamma, \Delta, D'_1, \rho_2).$$

Wir wählen ein $0 < \rho_5 < \rho_4$ mit

$$\Gamma'(\pi \circ \gamma, d, G, \rho_5) \cap \Gamma'(\pi \circ \gamma, \Delta, D'_1, \rho_2) \subset \Gamma'(\pi \circ \gamma, \Delta, D'_1, \rho_4)$$

und behaupten:

$$(4.28) \quad \text{Für jedes } z \in V \cap \Gamma(\gamma, d, G, \rho_5) \setminus \Gamma(\gamma, \Delta, D_1, \rho_3) \text{ mit } \pi(z) \in \Gamma'(\pi \circ \gamma, \Delta, D'_1, \rho_2) \text{ folgt aus } \pi(z) \in \mathbb{R}^2 \text{ bereits } z \in \mathbb{R}^n.$$

Sei dazu z_0 wie in (4.28) fest gewählt. Nach Wahl von ρ_5 existieren es ein $0 < t_0 < \rho_4$ und $(\xi_1, \xi_2) \in B(0, R_1)^2 \cap \mathbb{R}^2$ mit $\pi(z_0) = \pi \circ \gamma(t_0) + t_0^\Delta (\xi_1, \xi_2)$. Definiere $\tilde{\sigma} :]-R_2, R_2[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \mapsto \pi \circ \gamma(t_0) + t_0^\Delta (\xi_1, s)$. Die Abbildung

$$\pi : V \cap \Gamma(\gamma, d, G, \rho_3) \rightarrow \Gamma'(\pi \circ \gamma, d, G', \rho_3)$$

ist eigentlich und daher eine analytische Überlagerung mit kritischer Menge Σ . Sei W eine Zusammenhangskomponente von $V \cap \Gamma(\gamma, d, G, \rho_3) \setminus \pi^{-1}(\Sigma)$, dann ist

$$\pi^{-1} : \Gamma'(\pi \circ \gamma, d, G', \rho_3) \setminus \Sigma \rightarrow W$$

holomorph. Da Σ nirgends dicht in $\Gamma'(\pi \circ \gamma, d, G', \rho_3)$ und $\Gamma(\gamma, d, G, \rho_3)$ beschränkt ist, kann π^{-1} zu einer holomorphen Abbildung

$$\pi^{-1} : \Gamma'(\pi \circ \gamma, d, G', \rho_3) \rightarrow \overline{W}^{\Gamma(\gamma, d, G, \rho_3)} \subset V$$

fortgesetzt werden, welche bijektiv ist. Daher existiert eine stetige Abbildung

$$\sigma :]-R_2, R_2[\rightarrow V \cap \Gamma(\gamma, d, G, \rho_3) \quad \text{mit } \pi \circ \sigma = \tilde{\sigma} \text{ und } z_0 = \sigma(\xi_2).$$

Nach (4.27) ist $\tilde{\sigma}(2R_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma'(\pi \circ \gamma, \Delta, D'_1, \rho_2)$. Aus (4.24) folgt $\sigma(2R_1) \in \mathbb{R}^n \cap V_{\text{reg}}$, denn jede Verzweigungskurve von $\pi|_{V \cap \Gamma(\gamma, d, G, \rho_3)}$ liegt in $\Gamma(\gamma, \Delta, D_1, \rho_2)$.

Aus (4.25) erhält man

$$\begin{aligned} M &:= \{s \in]-R_2, R_2[: t_0^{-\Delta} |\sigma_k(s) - \gamma_k(t_0)| < L_2 \quad \text{für jedes } 3 \leq k \leq n\} \\ &= \{s \in]-R_2, R_2[: t_0^{-\Delta} |\sigma_k(s) - \gamma_k(t_0)| < S_2 \quad \text{für jedes } 3 \leq k \leq n\}. \end{aligned}$$

Weil $]-R_2, r_2[$ zusammenhängend ist, gilt entweder $M =]-R_2, R_2[$ oder $M = \emptyset$.

Wegen $z_0 \notin \Gamma(\gamma, \Delta, D_2, \rho_3)$ gibt es ein $3 \leq k_1 \leq n$ mit

$$t_0^{-\Delta} |\sigma_{k_1}(\xi_2) - \gamma_{k_1}(t_0)| = t_0^{-\Delta} |z_0^{(k_1)} - \gamma_{k_1}(t_0)| \geq L_2,$$

daher ist $M = \emptyset$, d.h. für jedes $s \in]-R_2, R_2[$ gibt es ein $3 \leq k \leq n$ mit

$$\left\| \left(t_0^{-\Delta} (\sigma_k(s) - \gamma_k(t_0)) \right)_{k=3}^n \right\|_{\infty} \geq L_2.$$

Folglich verläuft σ durch keine Verzweigungskurve von $\pi|_{V \cap \Gamma(\gamma, d, G, \rho_3)}$, welche nach Wahl von D_1 und ρ_2 alle in $\Gamma(\gamma, \Delta, D_1, \rho_2)$ liegen. Somit ist $\sigma(s) = (t_0 + t_0^{\Delta} \xi_1, \gamma_2(t_0) + t_0^{\Delta} s, \sigma_3(s), \dots, \sigma_n(s))$ eindeutig und eine reell-analytische Funktion in Abhängigkeit von s . Hieraus folgt mit $\sigma(s) \in \mathbb{R}^n$ für $2R_1 < s < R_2$, daß $\sigma(s) \in \mathbb{R}^n$ für alle $s \in]-R_2, R_2[$ gilt. Insbesondere ist $z_0 = \sigma(\xi_2)$ reell und (4.28) ist gezeigt.

Damit ist gezeigt, daß die Voraussetzungen von Lemma 4.16 erfüllt sind: Für $\rho = \rho_5$ und G wie angegeben (das bedeutet mit $r_1 = r_2 = \varepsilon$ und $r_3 = \dots = r_n = \delta$) ist die Projektion $\pi : V \cap \Gamma(\gamma, d, G, \rho_5) \rightarrow \Gamma'(\pi \circ \gamma, d, G', \rho_5)$ eigentlich, wobei π und γ die gewünschte Form haben.

Für $R'_1 = R'_2 = R_1$ und $R'_3 = \dots = R'_n = S_2$ ist $\prod_{j=1}^n B(0, R'_j) = D_1$ nach (4.23), und Voraussetzung (a) entspricht (4.24) mit $D = D_1$. Voraussetzung (b) folgt aus (4.28) zusammen mit der Tatsache, daß Voraussetzung (c) erfüllt ist. Diese erhält man aus (4.25) und den Wahlen von R_2 , S_2 und L_2 . Zuletzt implizieren Voraussetzung (d) dieses Lemmas und [9], Lemma 5.6, die Voraussetzung (d) von Lemma 4.16.

Wir verwenden Lemma 4.16 um zu zeigen, daß V die Eigenschaft $\text{PL}(V, \Gamma(\gamma, d, G, \rho))$ für ein geeignetes ρ besitzt: Bezeichne mit $A_0, \delta_0, \rho_0 > 0$ die Konstanten, welche hiernach gemäß unseren Wahlen von G und D existieren, und setze $\rho := \rho_0$. Fixiere $u \in \text{PSH}(V \cap \Gamma(\gamma, d, G, \rho))$ mit

$$u(z) \leq |z|^d, \quad z \in V \cap \Gamma(\gamma, d, G, \rho), \quad \text{und} \quad u(z) \leq 0, \quad z \in V \cap \mathbb{R}^n \cap \Gamma(\gamma, d, G, \rho).$$

Nach Lemma 4.16 folgt hieraus

$$(4.29) \quad u(z) \leq A_0 |\text{Im}(z)|, \quad z \in V \cap \Gamma(\gamma, d, \delta_0 G, \rho).$$

Sei $K \subset G$ kompakt, ohne Einschränkung sei $K = B(0, \varepsilon_1)^2 \times B(0, \delta_1)^{n-2}$ für $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ und $0 < \delta_1 < \delta$. Nach Wahl von $\widetilde{\mathcal{M}}_{\gamma, d}$ gilt, daß jeder Punkt $\eta \in K \cap T_{\gamma, d} V \cap \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}^{n-1})$ ein einfacher Punkt von $T_{\gamma, d} V$ ist. Aus Voraussetzung (b) folgt zusammen mit Lemma 4.14 und [9], Lemma 5.7, daß eine Nullumgebung $U_{\eta} \subset \mathbb{C}^n$ sowie Konstanten $A_{\eta} \geq 1$ und $r_{\eta} > 0$ existieren, so daß gilt

$$(4.30) \quad u(z) \leq A_{\eta} |\text{Im } z|, \quad z \in V \cap \Gamma(\gamma, d, \eta + U, \rho) \cap B(0, r_{\eta}).$$

Ist $\eta \in K \cap \mathbb{R}^n \setminus T_{\gamma,d}V$, so gilt diese Aussage trivialerweise, denn für U_η und r_η hinreichend klein ist $V \cap \Gamma(\gamma, d, \eta + U, \rho) \cap B(0, r_\eta) = \emptyset$.

Mit einem Kompaktheitsargument erhält man aus (4.29) und (4.30), daß Konstanten $A_1 \geq 1$, $r > 0$ und $\kappa > 0$ existieren, so daß für $K_1 := K \cap (\mathbb{R}^n + B(0, \kappa)^n)$ gilt

$$(4.31) \quad u(z) \leq A_1 |\operatorname{Im} z|, \quad z \in V \cap \Gamma(\gamma, d, K_1, \rho) \cap B(0, r).$$

Sei $z \in B(0, r) \cap \Gamma(\gamma, d, K, \rho) \setminus \Gamma(\gamma, d, K_1, \rho) = B(0, r) \cap \Gamma(\gamma, d, K \setminus K_1, \rho)$ gegeben als $z = \gamma(t) + t^d \zeta$. Dann gilt $|\operatorname{Im} \zeta| \geq \kappa$ und daher $|\operatorname{Im} z| = t^d |\operatorname{Im} \zeta| \geq t^d \kappa$. Weil $|\gamma(t)| = O(t)$ gilt und K beschränkt ist, gibt es eine Konstante $A_2 \geq 1$ (in Abhängigkeit von K) mit

$$|z|^d = |\gamma(t) + t^d \zeta|^d \leq t^d \left(\left| \frac{\gamma(t)}{t} \right| + t^{d-1} |\zeta| \right)^d \leq \frac{A_2}{\kappa} |\operatorname{Im} z|.$$

Somit implizieren Abschätzung (α) für u und (4.31) die Abschätzung (γ) von $\operatorname{PL}(V, \Gamma(\gamma, d, G, \rho))$ mit $A = \max(A_1, A_2/\kappa)$. $\square$

4.18 Definition. Für $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $r_0 > 0$ sei $V \subset B(\xi, r_0)$ eine analytische Teilmenge mit $\xi \in V$. Wir sagen V erfüllt die Bedingung $\operatorname{RPL}_{\operatorname{loc}}(\xi)$, falls gilt

$$\exists A \geq 1 \quad \exists r_0 \geq r_1 \geq r_2 > 0 \quad \forall u \in \operatorname{PSH}(V \cap B(\xi, r_1)) : \quad (\alpha) \wedge (\beta) \Rightarrow (\gamma),$$

wobei

- (α) $u(z) \leq 1, \quad z \in V \cap B(\xi, r_1),$
- (β) $u(z) \leq 0, \quad z \in V \cap \mathbb{R}^n \cap B(\xi, r_1),$
- (γ) $u(z) \leq A|z - \xi|, \quad z \in V \cap B(\xi, r_2).$

4.19 Bemerkung. Seien $V \subset \mathbb{C}^n$ eine analytische Fläche mit $0 \in V$ und $\eta \in (T_0 V)_{\operatorname{reg}} \cap S^{n-1}$ gegeben und sei $\gamma_\eta(t) := t\eta$. Ist V $(\gamma_\eta, 1)$ -hyperbolisch in $0 \in T_{\gamma_\eta, 1}V$, so ist V $(\gamma_\eta, 1)$ -hyperbolisch im Ursprung bezüglich jeder Projektion π in $\mathbb{C}^n$, welche nicht-charakteristisch für $T_0 V$ in η und nicht-charakteristisch für V im Ursprung ist (siehe [9], Lemma 3.19). Insbesondere ist V 1-hyperbolisch in Bezug auf η im Sinne von [7], Definition 9.

Beweis von Theorem 4.11. Nach [9], Lemma 5.13, genügt es, folgendes zu zeigen:

(I) V erfüllt die Bedingung $\operatorname{RPL}_{\operatorname{loc}}(0)$,

(II) für jedes $\eta \in T_0 V \cap S^{n-1}$ existieren eine Nullumgebung $G \subset \mathbb{C}^n$ und ein $r > 0$, so daß V für $\gamma_\eta(t) := t\eta$ die Bedingung $\operatorname{PL}(V, \Gamma(\gamma_\eta, 1, G, r))$ erfüllt.

Bedingung (I) folgt aus [7], Theorem 10, wenn wir zeigen, daß für jede irreduzible Komponente W von $T_0 V$ ein $\eta \in T_0 V \cap \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existiert, so daß V 1-hyperbolisch im Ursprung in Bezug auf η und $-\eta$ ist, was bedeutet: Ist $\xi \in \{\eta, -\eta\}$ und sei $\gamma_\xi(t) := t\xi$, so existieren eine Nullumgebung $D \subset \mathbb{C}^n$, ein $\varepsilon > 0$ und eine Projektion π in $\mathbb{C}^n$, welche nicht-charakteristisch für V im Ursprung ist, so daß für $\Gamma := \Gamma(\gamma_\xi, 1, D, \varepsilon)$ gilt: $\pi|_{V \cap \Gamma}$ ist eigentlich und für $z \in V \cap \Gamma$ folgt aus $\pi(z) \in \mathbb{R}^n$ bereits $z \in \mathbb{R}^n$.

Fixiere eine irreduzible Komponente W von $T_0 V$. Nach [3], Proposition 3.12, ist W eine komplexe Mannigfaltigkeit, welche die Dimensionsbedingung an allen reellen Punkten erfüllt. Daher existiert ein $\eta \in W_{\operatorname{reg}} \cap S^{n-1}$ und nach Voraussetzung 4.11 (c) und Bemerkung 4.19 ist V 1-hyperbolisch im Ursprung bezüglich η . Aus $-W = W$ folgt analog, daß V 1-hyperbolisch im Ursprung bezüglich $-\eta$ ist. Somit gilt (I).

Um Bedingung (II) zu zeigen, sei $\zeta \in S^{n-1}$ gemäß 4.11 (c) gewählt und sei $\eta \in T_0V \cap S^{n-1}$ fest. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

1. Fall $\eta \in (T_0V)_{\text{reg}} \cap S^{n-1}$: Dann ist V $(\gamma_\zeta, 1)$ -hyperbolisch in $\eta - \zeta \in T_{\gamma_\zeta, 1}V$ nach Voraussetzung. In diesem Fall impliziert [9], Theorem 5.7, die Existenz einer Nullumgebung $G \subset \mathbb{C}^n$, so daß V für $r > 0$ hinreichend klein die Bedingung $\text{PL}(V, \Gamma(\gamma_\zeta, 1, \eta - \zeta + G, r))$ erfüllt. Aus

$$\Gamma(\gamma_\zeta, 1, \eta - \zeta + G, r) = \Gamma(\gamma_\eta, 1, G, r)$$

folgt die Behauptung.

2. Fall $\eta \in (T_0V)_{\text{sing}} \cap S^{n-1}$ und $\eta - \zeta \in T_{\gamma_\zeta, 1}V$ ist ein einfacher Punkt: Nach Voraussetzung erfüllt T_0V die Bedingung $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$. Dann ist $0 \in T_{\gamma_\eta, 1}(T_0V) = T_0(T_0V) - \eta = T_0V - \eta$ und es folgt, daß auch $T_{\gamma_\eta, 1}V$ die Bedingung $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$ erfüllt. Daher erfüllt T_0V die Bedingung $\text{PL}_{\text{loc}}(\eta)$. Nach [3], Theorem 3.12, ist T_0V lokal hyperbolisch im Punkt η und somit $T_{\gamma_\zeta, 1}V = T_0V - \zeta$ lokal hyperbolisch im Punkt $\eta - \zeta$. Wegen der Homogenität von T_0V folgt aus Voraussetzung 4.11 (c), daß V $(\gamma_\zeta, 1)$ -hyperbolisch in jedem Punkt $\kappa \in (T_{\gamma_\zeta, 1}V)_{\text{reg}} \cap \mathbb{R}^n$ ist. Somit ist V $(\gamma_\zeta, 1)$ -hyperbolisch im Punkt $\eta - \zeta$ nach Lemma 4.14, und wie im ersten Fall folgt, daß Bedingung (II) erfüllt ist.

3. Fall $\eta \in (T_0V)_{\text{sing}} \cap S^{n-1}$ und $\eta - \zeta \in T_{\gamma_\zeta, 1}V$ ist kein einfacher Punkt: Da die Menge M_1 definiert in (4.5) unabhängig von ξ ist, gilt in diesem Fall $\eta \in M_1$. Für

$$A(\eta) = \text{Grass}(n-2, n) \setminus (\text{NC}(V, 0) \cap \text{NC}(V, \infty) \cap \text{NC}(T_0V, \eta))$$

ist somit $(\sigma_\eta, \Delta^{A(\eta)}(\sigma_\eta, 1)) \in \mathcal{C}_1$, daher ist $\mathcal{C} \neq \emptyset$ und es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{C} = \bigcup_{j=1}^N \mathcal{C}_j$. Wir behaupten:

(4.32) Für jedes $1 \leq j \leq N$, jedes $(\gamma, d) \in \mathcal{C}_j$ und jedes $\xi \in T_{\gamma, d}V \cap \mathbb{R}^n$ existieren eine Nullumgebung $D_\xi \subset \mathbb{C}^n$ und ein $\rho_\xi > 0$, so daß V die Bedingung $\text{PL}(V, \Gamma(\gamma, d, \xi + D_\xi, \rho_\xi))$ erfüllt.

Nehmen wir an, (4.32) sei bereits gezeigt: Wie eben ist $0 \in T_{\sigma_\eta, 1}V$ kein einfacher Punkt von $T_{\sigma_\eta, 1}V = T_0V - \eta$. Analog zum zweiten Fall folgt, daß $T_{\sigma_\eta, 1}V$ lokal hyperbolisch in jedem Punkt von $T_{\sigma_\eta, 1}V \cap \mathbb{R}^n$ und V $(\sigma_\eta, 1)$ -hyperbolisch in jedem Punkt von $(T_{\sigma_\eta, 1}V)_{\text{reg}} \cap \mathbb{R}^n$ ist. Daher sind die Voraussetzungen (a)–(c) von Lemma 4.17 erfüllt, ebenso wie Voraussetzung (d) nach (4.32). Aus Lemma 4.17 folgt, daß es eine Nullumgebung $G \subset \mathbb{C}^n$ und ein $\rho > 0$ gibt, so daß V die Bedingung $\text{PL}(V, \Gamma(\gamma, 1, G, \rho))$ erfüllt, womit (II) gezeigt ist.

Wir zeigen (4.32) mittels Induktion von N nach 1: Für $(\gamma, d) \in \mathcal{C}_N$ sei $\xi \in T_{\gamma, d}V \cap \mathbb{R}^n$. Ist $\xi \in (T_{\gamma, d}V)_{\text{reg}}$, so ist V nach Voraussetzung (γ, d) -hyperbolisch in ξ , und (4.32) folgt aus Lemma [9], Lemma 5.7. Ist $\xi \in (T_{\gamma, d}V)_{\text{sing}}$, so ist ξ ein einfacher Punkt von $T_{\gamma, d}V$ nach Konstruktion von $\mathcal{C}$. Nach Voraussetzung 4.11 (c) (i) erfüllt $T_{\gamma, d}V$ die Bedingung $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$. Hieraus folgt zusammen mit $d > 1$ und 1.15, daß sich $T_{\gamma, d}V$ in einer Umgebung von ξ als Produkt einer Kurve, welche $\text{PL}_{\text{loc}}(\xi)$ erfüllt, mit $\mathbb{C}$ darstellen läßt. Nach [9], Theorem 3.16, ist diese Kurve und somit auch $T_{\gamma, d}V$ im Punkt ξ lokal hyperbolisch. Wie zuvor folgt die Behauptung, und (4.32) ist für $j = N$ gezeigt.

Wir nehmen an, Aussage (4.32) gelte für $2 \leq j+1 \leq N$, und fixieren $(\gamma, d) \in \mathcal{C}_j$ und $\eta \in T_{\gamma, d}V \cap \mathbb{R}^n$. Ist $\eta \in (T_{\gamma, d}V)_{\text{reg}}$ oder $\eta \in (T_{\gamma, d}V)_{\text{sing}}$ ein einfacher Punkt von $T_{\gamma, d}V$, so wird (4.32) wie im Fall $j = N$ gezeigt. Sei daher $\xi \in (T_{\gamma, d}V)_{\text{sing}}$ kein einfacher Punkt von $T_{\gamma, d}V$.

Bezeichne ξ_0 den Tangentialvektor von γ im Ursprung, sei $(\xi_0, b_2, \dots, b_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$, bzgl. welcher γ in Standardparametrisierung gegeben ist, und wie in (4.7) sei

$$M_{\gamma,d} := \{\zeta \in (T_{\gamma,d}V)_{\text{sing}} \cap \mathbb{R}^n : \zeta \text{ ist nicht einfach}\} \cap \text{span}\{b_2, \dots, b_n\}.$$

Nach Lemma 4.5 ist $M_{\gamma,d}$ endlich und es existieren $\zeta \in M_{\gamma,d}$ und $\tau \in \mathbb{R}$ mit $\eta = \zeta + \tau\xi_0$. Wir nehmen zunächst $\eta \in M_{\gamma,d}$ an, d.h. $\tau = 0$, und setzen $\gamma_\zeta(t) := \gamma(t) + t^d\zeta$. Dann gilt

$$T_{\gamma_\zeta,d}V = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V - \gamma_\zeta(t)}{t^d} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V - \gamma(t)}{t^d} - \zeta = T_{\gamma,d}V - \zeta.$$

Wegen $\zeta = \eta$ ist $0 \in T_{\gamma_\zeta,d}V$ kein einfacher Punkt, und Voraussetzung (a) von Lemma 4.17 ist erfüllt. Analog folgen Voraussetzungen (b) und (c) von Lemma 4.17 aus (c) (i) und (ii) von Theorem 4.11, denn wie eben impliziert PL_{loc} lokale Hyperbolizität.

Wegen $\text{NC}(T_{\gamma,d}V, \eta) = \text{NC}(T_{\gamma_\zeta,d}V, 0)$ stimmen die Bezeichnungen $\Delta^{A(\gamma,\zeta)}(\gamma, d)$ in Abschnitt 4.3 und $\Delta^{A(\gamma_\zeta,0)}(\gamma_\zeta, d) =: \Delta$ in Lemma 4.17 übereinstimmen. Aus $(\gamma_\zeta, \Delta) \in \mathcal{C}_{j+1}$ nach Definition von $\mathcal{C}$ folgt mit der Induktionsvoraussetzung, daß für jedes $\xi \in T_{\gamma_\zeta,\Delta}V \cap \mathbb{R}^n$ eine Nullumgebung $G_\xi \subset \mathbb{C}^n$ und ein $\rho_\xi > 0$ existieren, so daß V die Bedingung $\text{PL}(V, \Gamma(\gamma_\zeta, \Delta, \xi + G_\xi, \rho_\xi))$ erfüllt. Somit ist auch Voraussetzung (d) von Lemma 4.17 erfüllt, und hieraus erhält man, daß eine Nullumgebung $G \subset \mathbb{C}^n$ und ein $\rho > 0$ existieren, für welche V die Bedingung $\text{PL}(V, \Gamma(\gamma_\zeta, d, G, \rho))$ erfüllt. Wegen $\Gamma(\gamma_\zeta, d, G, \rho) = \Gamma(\gamma, d, \zeta + G, \rho)$ erfüllt V somit $\text{PL}(V, \Gamma(\gamma, d, \zeta + G, \rho))$ und der Induktionsschritt in (4.32) ist gezeigt.

Sei nun $\eta = \zeta + \tau\xi_0$ mit $\tau \in \mathbb{R}$ beliebig. Da (4.32) für ζ bereits gezeigt ist, gibt es eine Nullumgebung $G \subset \mathbb{C}^n$ und ein $\rho > 0$, so daß V die Bedingung $\text{PL}(V, \Gamma(\gamma, d, \zeta + G, \rho))$ erfüllt. Nach Lemma 4.2 existieren ferner eine Nullumgebung $D_\eta \subset \mathbb{C}^n$ und ein $\rho_\eta > 0$, so daß $\Gamma(\gamma, d, \eta + D_\eta, \rho_\eta) \subset \Gamma(\gamma, d, \zeta + G, \rho)$ gilt. Nach [9], Lemma 5.6 (a), erfüllt V die Bedingung $\text{PL}(V, \Gamma(\gamma, d, \eta + D_\eta, \rho_\eta))$, und (4.32) ist gezeigt. $\square$

4.20 Beispiel. Sei $V := V(f_1, f_2)$ für $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, z_4]$ definiert als

$$f_1(z_1, z_2, z_3, z_4) := z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \quad \text{und} \quad f_2(z_1, z_2, z_3, z_4) := z_1^2 - z_3 + z_4^2.$$

Wir zeigen, daß V eine algebraische Fläche in $\mathbb{C}^4$ ist, und verwenden Theorem 4.11, um zu zeigen, daß V die Eigenschaft $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$ hat. Für die Berechnung verweisen wir auf den Anhang auf Seite 46.

Setzt man $\pi(z_1, z_2, z_3, z_4) := (z_1, z_2)$ und ist $z' = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ mit

$$1 + 4z_2^2 \neq 0 \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2} - z_2^2 \pm \sqrt{1 + 4z_2^2} \neq 0$$

gegeben, so gilt für $z \in V$ genau dann $\pi(z) = z'$, wenn z von einer der folgenden Formen ist:

- (i) $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4z_2^2}, \quad z_4 = \sqrt{-\frac{1}{2} - z_1^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4z_2^2}},$
- (ii) $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4z_2^2}, \quad z_4 = -\sqrt{-\frac{1}{2} - z_1^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4z_2^2}},$
- (iii) $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4z_2^2}, \quad z_4 = \sqrt{-\frac{1}{2} - z_1^2 - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4z_2^2}},$
- (iv) $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4z_2^2}, \quad z_4 = -\sqrt{-\frac{1}{2} - z_1^2 - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4z_2^2}},$

wobei $\sqrt{\cdot}$ die analytische Fortsetzung der Wurzel von $\mathbb{R}_+$ auf die Menge $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\theta} : r \geq 0\}$ für ein geeignetes $\theta \in [0, 2\pi[$ bezeichne. Aus (i)–(iv) folgt, daß ein $C \geq 1$ existiert mit $|z| \leq C(1 + |\pi(z)|)$ für alle $z \in V$. Daher ist $\pi : V \rightarrow \mathbb{C}^2$ eigentlich und somit eine analytische Überlagerung mit vier Blättern.

Um T_0V zu bestimmen, berechnen wir die kanonischen definierenden Funktionen von V bzgl. π gemäß [11], Abschnitt 4.3. Wir definieren $P \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, z_4][\xi_1, \xi_2]$ als

$$\begin{aligned} P(z_1, z_2, z_3, z_4, \xi_1, \xi_2) &:= \left(\xi_1 \left(z_3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4z_2^2} \right) + \xi_2 \left(z_4 - \sqrt{-\frac{1}{2} - z_1^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4z_2^2}} \right) \right) \\ &\quad \cdot \left(\xi_1 \left(z_3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4z_2^2} \right) + \xi_2 \left(z_4 + \sqrt{-\frac{1}{2} - z_1^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4z_2^2}} \right) \right) \\ &\quad \cdot \left(\xi_1 \left(z_3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4z_2^2} \right) + \xi_2 \left(z_4 - \sqrt{-\frac{1}{2} - z_1^2 - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4z_2^2}} \right) \right) \\ &\quad \cdot \left(\xi_1 \left(z_3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4z_2^2} \right) + \xi_2 \left(z_4 + \sqrt{-\frac{1}{2} - z_1^2 - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4z_2^2}} \right) \right) \\ &= g_1(z_1, z_2, z_3, z_4) \xi_1^4 + g_2(z_1, z_2, z_3, z_4) \xi_1^3 \xi_2 + g_3(z_1, z_2, z_3, z_4) \xi_1^2 \xi_2^2 \\ &\quad + g_4(z_1, z_2, z_3, z_4) \xi_1 \xi_2^3 + g_5(z_1, z_2, z_3, z_4) \xi_2^4 \end{aligned}$$

mit den folgenden Koeffizienten $g_1, \dots, g_5 \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, z_4]$

$$\begin{aligned} g_1(z_1, z_2, z_3, z_4) &= z_2^4 - 2z_2^2 z_3^2 + z_3^4 - 2z_2^2 z_3 + 2z_3^3 + z_3^2, \\ g_2(z_1, z_2, z_3, z_4) &= -4z_2^2 z_3 z_4 + 4z_3^3 z_4 - 2z_2^2 z_4 + 6z_3^2 z_4 + 2z_3 z_4, \\ g_3(z_1, z_2, z_3, z_4) &= 2z_1^2 z_2^2 + 2z_1^2 z_3^2 - 2z_2^2 z_4^2 + 6z_3^2 z_4^2 + 2z_1^2 z_3 - 4z_2^2 z_3 + 6z_3 z_4^2 + z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 + z_4^2, \\ g_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &= 4z_1^2 z_3 z_4 + 4z_3 z_4^3 + 2z_1^2 z_4 - 4z_2^2 z_4 + 2z_4^3 + 2z_3 z_4, \\ g_5(z_1, z_2, z_3, z_4) &= z_1^4 + 2z_1^2 z_4^2 + z_4^4 + z_1^2 - z_2^2 + z_4^2. \end{aligned}$$

Hierfür gilt $V = V(g_1, \dots, g_5)$, und setzt man $g := (g_1, \dots, g_5)$, so ist die Menge der Verzweigungspunkte von $\pi|_V$ gegeben durch

$$B := \left\{ z = (z_1, \dots, z_4) \in V : \text{rank} \frac{\partial g}{\partial (z_3, z_4)}(z) < 2 \right\}.$$

Dann enthält B in einer hinreichend kleinen Nullumgebung $U = U_1 \times U' \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^3$ genau zwei Kurven

$$B \cap U = \{(w, \pm \sqrt{1 + w^2} w, w^2, 0) : w \in U_1\},$$

und für die Menge der Verzweigungspunkte Σ von $\pi|_V$ gilt $\Sigma \cap U = \pi(B \cap U)$.

Nach [11], Abschnitt 8.4, ist T_0V die gemeinsame Nullstelle der homogenen Anteile niedrigsten Grades der g_i für $1 \leq i \leq 5$, d.h. $T_0V = V(h_1, \dots, h_4)$ mit

$$\begin{aligned} h_1(z_1, z_2, z_3, z_4) &:= z_3^2, \\ h_2(z_1, z_2, z_3, z_4) &:= 2z_3 z_4, \\ h_3(z_1, z_2, z_3, z_4) &:= z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 + z_4^2, \\ h_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &:= z_1^2 - z_2^2 + z_4^2. \end{aligned}$$

Aus $h_1(z) = 0$ folgen $h_2(z) = 0$ und $h_3(z) = h_4(z)$. Daher ist T_0V ein Kegel in $\mathbb{C}^2 \times \{0\} \times \mathbb{C}$, und als solcher lokal hyperbolisch im Ursprung. Somit erfüllt T_0V die Bedingung $\text{PL}_{\text{loc}}(0)$. Ferner

gilt $(T_0V)_{\text{sing}} = \{0\}$, also gilt für die in Abschnitt 4.3 konstruierte Menge $\mathcal{C} = \emptyset$. Wir zeigen für ein beliebiges $\zeta \in S^3$ und jedes $\eta \in (T_0V)_{\text{reg}} \cap S^3$, daß V $(\gamma_\zeta, 1)$ -hyperbolisch im Punkt $\eta - \zeta \in T_{\gamma_\zeta, 1}V$ ist. Dann sind die Bedingungen in Theorem 4.11 (c) erfüllt, und es folgt die Behauptung.

Sei $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \in (T_0V)_{\text{reg}} \cap S^3$, dann ist η von der Form $\eta = (\pm\sqrt{\eta_2^2 - \eta_4^2}, \eta_2, 0, \eta_4)$ und aus $1 = |\eta|^2 = 2\eta_2^2$ folgt $\eta_2 = \pm 1/\sqrt{2}$.

Falls $\eta_4 \neq 0$ ist, so ist π nicht-charakteristisch für T_0V im Punkt η . Denn parametrisiert man T_0V nahe η durch $(z_1, z_4) \mapsto (z_1, \sigma\sqrt{z_1^2 + z_4^2}, 0, z_4)$ mit $\sigma := \eta_2/|\eta_2|$, so erhält man

$$T_\eta(T_0V) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma\eta_1}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_4^2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sigma\eta_4}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_4^2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Daher ist $T_\eta(T_0V) \cap \ker \pi = \{0\}$.

Sei $0 < \varepsilon < |\eta_4|$ fest gewählt und sei $z \in V \cap \Gamma(\gamma_\zeta, 1, \eta - \zeta + B(0, \varepsilon), 1)$ mit $\pi(z) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann existieren ein $0 < t < 1$ und ein $u \in B(0, \varepsilon)$, so daß sich z schreiben läßt als

$$(4.33) \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\frac{1}{2} - \eta_4^2} + u_1 \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} + u_2 \\ u_3 \\ \eta_4 + u_4 \end{pmatrix}.$$

Aus $z_2 \in \mathbb{R}$ folgt mit (i)–(iv) unmittelbar $z_3 \in \mathbb{R}$. Gemäß der Definition von f_2 ist $z_4^2 \in \mathbb{R}$. Nach Wahl von ε gilt $z_4 \notin i\mathbb{R}$, daher ist $z_4 \in \mathbb{R}$, und V ist $(\gamma_\zeta, 1)$ -hyperbolisch in $\eta - \zeta$ bzgl. π .

Falls $\eta_4 = 0$ ist, so ist $\eta = (\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, 0, 0)$ Verzweigungspunkt von $\pi|_{T_0V}$, denn es gilt

$$T_\eta(T_0V) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma\eta_1}{|\eta_1|} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und $(0, 0, 0, 1) \in T_\eta(T_0V) \cap \ker \pi$. Setzt man $\tilde{\pi}(z_1, z_2, z_3, z_4) := (z_2, z_4)$, so ist $T_\eta(T_0V) \cap \ker \pi = \{0\}$, also ist $\tilde{\pi}$ nicht-charakteristisch für T_0V im Punkt η . Wir zeigen, daß V $(\gamma_\zeta, 1)$ -hyperbolisch in $\eta - \zeta$ bzgl. $\tilde{\pi}$ ist: Für $0 < \varepsilon < 1/\sqrt{2}$ sei $z \in V \cap \Gamma(\gamma_\zeta, 1, \eta - \zeta + B(0, \varepsilon), 1)$ wie in (4.33) mit $\eta_4 = 0$. Aus $\tilde{\pi}(z) \in \mathbb{R}^2$ folgt wie eben $z_3 \in \mathbb{R}$. Nach Definition von f_1 ist $z_1^2 \in \mathbb{R}$, und es gilt $z_1 \notin i\mathbb{R}$ nach Wahl von ε . Folglich gilt $z_1 \in \mathbb{R}$.

Anhang

Beispiel 4.20 wurde folgendermaßen mit Hilfe des Computeralgebrasystems MAPLE berechnet:

```

> restart;
> with(VectorCalculus): BasisFormat(false):
Warning, the assigned names `<,>` and `<|>` now have a global binding
Warning, these protected names have been redefined and unprotected: `*`, `+`
`, `^`, `.` , D, Vector, diff, int, limit, series
> with(LinearAlgebra):
Warning, these names have been rebound: `&x`, CrossProduct, DotProduct,
Norm, Normalize
> f1 := z[1]^2 - z[2]^2 + z[3]^2 + z[4]^2:
> f[1](z[1],z[2],z[3],z[4]) = f1;

$$f_1(z_1, z_2, z_3, z_4) = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \quad (1)$$

> f2 := z[1]^2 - z[3] + z[4]^2:
> f[2](z[1],z[2],z[3],z[4]) = f2;

$$f_2(z_1, z_2, z_3, z_4) = z_1^2 - z_3 + z_4^2 \quad (2)$$

> solve({f1,f2},{z[3],z[4]});

$$\left\{ \begin{array}{l} z_4 = \text{RootOf}\left(-Z^2 - \text{RootOf}\left(-Z^2 + z_1^2 - z_2^2 + z_1^4 + (2z_1^2 + 1) - Z\right)\right), \\ z_3 = z_1^2 + \text{RootOf}\left(-Z^2 + z_1^2 - z_2^2 + z_1^4 + (2z_1^2 + 1) - Z\right) \end{array} \right\} \quad (3)$$

> Urbilder := allvalues(%): seq( print(U), U=[Urbilder] );

$$\left\{ \begin{array}{l} z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4z_2^2}, z_4 = \sqrt{-z_1^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4z_2^2}} \\ z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4z_2^2}, z_4 = -\sqrt{-z_1^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4z_2^2}} \\ z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4z_2^2}, z_4 = \sqrt{-z_1^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4z_2^2}} \\ z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4z_2^2}, z_4 = -\sqrt{-z_1^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4z_2^2}} \end{array} \right\} \quad (4)$$


```

Bestimmung der kanonischen definierenden Funktionen:

**> P := mul(xi[1]*(z[3]-subs(U,z[3])) +
xi[2]*(z[4]-subs(U,z[4])), U=[Urbilder]);**

$$P := \left(\xi_1 \left(z_3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 z_2^2} \right) + \xi_2 \left(z_4 - \sqrt{-z_1^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 z_2^2}} \right) \right) \left(\xi_1 \left(z_3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 z_2^2} \right) + \xi_2 \left(z_4 + \sqrt{-z_1^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 z_2^2}} \right) \right) \left(\xi_1 \left(z_3 + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 z_2^2} \right) + \xi_2 \left(z_4 - \sqrt{-z_1^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 z_2^2}} \right) \right) \left(\xi_1 \left(z_3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 z_2^2} \right) + \xi_2 \left(z_4 + \sqrt{-z_1^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 z_2^2}} \right) \right) \quad (5)$$

> Q := collect(expand(P), [xi[1],xi[2]]);

$$Q := \left(z_3^2 - 2 z_3 z_2^2 + z_2^4 + z_3^4 + 2 z_3^3 - 2 z_3^2 z_2^2 \right) \xi_1^4 + \left(-2 z_4 z_2^2 + 2 z_3 z_4 + 6 z_4 z_3^2 - 4 z_3 z_4 z_2^2 + 4 z_3^3 z_4 \right) \xi_2 \xi_1^3 + \left(-z_2^2 - 4 z_3 z_2^2 + 2 z_3^2 z_1^2 - 2 z_4^2 z_2^2 + 6 z_3^2 z_4^2 + z_3^2 + 6 z_4^2 z_3 + z_1^2 + 2 z_2^2 z_1^2 + z_4^2 + 2 z_3 z_1^2 \right) \xi_2^2 \xi_1^2 + \left(4 z_3 z_3^3 + 2 z_4^3 + 2 z_1^2 z_4 + 4 z_3 z_4 z_1^2 - 4 z_4 z_2^2 + 2 z_3 z_4 \right) \xi_2^3 \xi_1 + \left(2 z_4^2 z_1^2 + z_1^4 + z_4^2 + z_1^2 - z_2^2 + z_4^4 \right) \xi_2^4 \quad (6)$$

> CDF := seq(coeff(Q,xi[1],4-k)/xi[2]^k, k=0..4):
> map(sort, [Q], [z[1],z[2],z[3],z[4]]):
> seq(print(g[k](z[1],z[2],z[3],z[4])=CDF[k]),
k=1..nops([CDF]));

$$g_1(z_1, z_2, z_3, z_4) = z_2^4 - 2 z_2^2 z_3^2 + z_3^4 - 2 z_2^2 z_3 + 2 z_3^3 + z_3^2$$

$$g_2(z_1, z_2, z_3, z_4) = -4 z_2^2 z_3 z_4 + 4 z_3^3 z_4 - 2 z_2^2 z_4 + 6 z_3^2 z_4 + 2 z_3 z_4$$

$$g_3(z_1, z_2, z_3, z_4) = 2 z_1^2 z_2^2 + 2 z_1^2 z_3^2 - 2 z_2^2 z_4^2 + 6 z_3^2 z_4^2 + 2 z_1^2 z_3 - 4 z_2^2 z_3 + 6 z_3 z_4^2 + z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$$

$$g_4(z_1, z_2, z_3, z_4) = 4 z_1^2 z_3 z_4 + 4 z_3 z_4^3 + 2 z_1^2 z_4 - 4 z_2^2 z_4 + 2 z_4^3 + 2 z_3 z_4$$

$$g_5(z_1, z_2, z_3, z_4) = z_1^4 + 2 z_1^2 z_4^2 + z_4^4 + z_1^2 - z_2^2 + z_4^2 \quad (7)$$

Berechnung der Verzweigungskurven der Projektion auf die ersten beiden Komponenten:

> Phi := Vector([CDF]):

> J := Jacobian(Phi,[z[3],z[4]]);

$$J := \begin{bmatrix} -4 z_2^2 z_3 + 4 z_3^3 - 2 z_2^2 + 6 z_3^2 + 2 z_3 & 0 \\ -4 z_2^2 z_4 + 12 z_3^2 z_4 + 12 z_3 z_4 + 2 z_4 & -4 z_2^2 z_3 + 4 z_3^3 - 2 z_2^2 + 6 z_3^2 + 2 z_3 \\ 4 z_1^2 z_3 + 12 z_3 z_4^2 + 2 z_1^2 - 4 z_2^2 + 6 z_4^2 + 2 z_3 & -4 z_2^2 z_4 + 12 z_3^2 z_4 + 12 z_3 z_4 + 2 z_4 \\ 4 z_1^2 z_4 + 4 z_4^3 + 2 z_4 & 4 z_1^2 z_3 + 12 z_3 z_4^2 + 2 z_1^2 - 4 z_2^2 + 6 z_4^2 + 2 z_3 \\ 0 & 4 z_1^2 z_4 + 4 z_4^3 + 2 z_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

> solve({ seq(seq(Determinant(J[[i,j],1..2]), j=i+1..5), i=1..4) } union {f1,f2});

$$\left\{ z_4 = 0, z_1 = z_1, z_2 = \text{RootOf}\left(-Z^2 - z_1^2 - 1, \text{label} = _L1\right) z_1, z_3 = z_1^2 \right\}, \left\{ z_1 = z_1, \right. \quad (9)$$

$$\left. z_4 = \text{RootOf}\left(2_Z^2 + 2 z_1^2 + 1\right), z_3 = \frac{-1}{2}, z_2 = \frac{1}{2} \text{RootOf}\left(-Z^2 + 1, \text{label} = _L2\right) \right\}$$

> BC := map(allvalues, {%}):

> seq(print(subs(bc,[z[1],z[2],z[3],z[4]])), bc=BC);

$$\begin{aligned} & \left[z_1, -\frac{1}{2} I, \frac{-1}{2}, \sqrt{-z_1^2 - \frac{1}{2}} \right] \\ & \left[z_1, \frac{1}{2} I, \frac{-1}{2}, \sqrt{-z_1^2 - \frac{1}{2}} \right] \\ & \left[z_1, \frac{1}{2} I, \frac{-1}{2}, -\sqrt{-z_1^2 - \frac{1}{2}} \right] \\ & \left[z_1, -\frac{1}{2} I, \frac{-1}{2}, -\sqrt{-z_1^2 - \frac{1}{2}} \right] \\ & \left[z_1, \sqrt{z_1^2 + 1} z_1, z_1^2, 0 \right] \\ & \left[z_1, -\sqrt{z_1^2 + 1} z_1, z_1^2, 0 \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Bestimmung des Tangentialkegels im Ursprung:

```
> map(1degree,[CDF]); # Der homogene Anteil niedrigsten Grades aller 5
kanonischen definierenden Funktionen ist vom Grad 2.
```

$$[2, 2, 2, 2, 2] \quad (11)$$

```
> N := seq( select(T->is(degree(T)=1degree(cdf)),cdf), cdf=[CDF] ); #
homogenen Anteile niedrigsten Grades
```

$$N := z_3^2, 2 z_3 z_4, z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 + z_4^2, 2 z_3 z_4, z_1^2 - z_2^2 + z_4^2 \quad (12)$$

```
> solve({N});
```

$$\left\{ z_2 = z_2, z_3 = 0, z_1 = z_1, z_4 = \text{RootOf}\left(-Z^2 + z_1^2 - z_2^2\right) \right\} \quad (13)$$

```
> allvalues(%);
```

$$\left\{ z_2 = z_2, z_4 = \sqrt{-z_1^2 + z_2^2}, z_3 = 0, z_1 = z_1 \right\}, \left\{ z_2 = z_2, z_4 = -\sqrt{-z_1^2 + z_2^2}, z_3 = 0, z_1 = z_1 \right\} \quad (14)$$

```
>
```

Literaturverzeichnis

- [1] R. W. Braun: *Hörmander's Phragmén-Lindelöf principle and irreducible singularities of codimension 1*, Boll. Unione Math. Ital. **VII Ser., A 6, No. 3** (1992), 339–348
- [2] R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor: *Algebraic varieties on which the classical Phragmén-Lindelöf estimates hold for plurisubharmonic functions*, Math. Z. **232** (1999), 103–135
- [3] R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor: *Characterization of the algebraic surfaces on which the classical Phragmén-Lindelöf theorem holds using branch curves*, to appear in Pure and Applied Math. Quarterly
- [4] R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor: *Characterization of the linear partial differential operators that admit solution operators on Gevrey classes*, J. reine angew. Math. **588** (2005), 169–220
- [5] R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor: *Higher order approximations at infinity to algebraic varieties*, Note di Mat. **25** (2005/06), 103–128
- [6] R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor: *Higher order tangents to analytic varieties along curves*, Canad. J. Math. **55** (2003), 64–90
- [7] R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor: *Local radial Phragmén-Lindelöf estimates for plurisubharmonic functions on analytic varieties*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 2423–2433
- [8] R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor: *Optimal Gevrey classes for the existence of solution operators for linear partial differential operators in three variables*, J. Math. Anal. Appl. **272** (2004), 852–868
- [9] R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor: *The geometry of analytic varieties satisfying the local Phragmén-Lindelöf condition and a geometric characterization of the partial differential operators that are surjective on $\mathcal{A}(\mathbb{R}^4)$* , Trans. Amer. Math. Soc. **365** (2004), 1315–1383
- [10] R. W. Braun, R. Meise, D. Vogt: *Characterization of the linear partial differential operators with constant coefficients which are surjective on non-quasianalytic classes of Romieu type on $\mathbb{R}^N$* , Math. Nachr. **168** (1994), 19–54
- [11] E. M. Chirka: *Complex Analytic Sets*, Kluwer Academic Publishers (1989)
- [12] D. Cox, J. Little, D. O'Shea: *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer-Verlag (1997)
- [13] T. Heinrich, *A new necessary condition for analytic varieties satisfying the local Phragmén-Lindelöf condition*, Ann. Polon. Math. **85** (2005), 283–290

- [14] L. Hörmander: *On the existence of real analytic solutions of partial differential equations with constant coefficients*, Invent. Math. **21** (1973), 151–183
- [15] R. Meise, B. A. Taylor: *Phragmén-Lindelöf conditions for graph varieties*, Result. Math. **36** (1999), 121–148
- [16] R. Meise, B. A. Taylor, D. Vogt: *Characterization of the linear partial differential operators with constant coefficients that admit a continuous linear right inverse*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **40** (1990), 619–655
- [17] R. Meise, B. A. Taylor, D. Vogt: *Continuous linear right inverses for partial differential operators on non-quasianalytic classes and on ultradistributions*, Math. Nachr. **180** (1996), 213–242
- [18] R. Meise, B. A. Taylor, D. Vogt: *Equivalence of analytic and plurisubharmonic Phragmén-Lindelöf conditions*, Pure Math. **52** (1991), Amer. Math. Soc., Part 3, 287–308
- [19] R. Meise, B. A. Taylor, D. Vogt: *Extremal plurisubharmonic functions of linear growth on algebraic varieties*, Math. Z. **219** (1995), 515–537
- [20] D. Vogt: *Extension operators for real analytic functions on compact subvarieties of $\mathbb{R}^d$* , J. Reine Angew. Math. **606** (2007), 217–233
- [21] H. Whitney: *Complex Analytic Varieties*, Addison-Wesley Publishing Company (1972)