Stochastische Steuerung von Sprung-Diffusionen mit Anwendung in der Portfoliooptimierung

I n a u g u r a l - D i s s e r t a t i o n

zur
Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Christoph Jonek

aus Knurow

Mai 2008

Aus dem Mathematischen Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Gedruckt mit der Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent:	Prof. Dr. K. Janßen
Koreferenten:	Prof. Dr. M. Möhle Prof. Dr. R. Korn
Tag der mündlichen Prüfung:	08. Mai 2008

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Portfolioprobleme eines Investors in einem Finanzmarkt betrachtet. Im Gegensatz zum klassischen Modell von Merton werden die Wertpapiere durch Sprung-Diffusionen modelliert. Fasst man die Vermögensgleichung des Investors als stochastische Differentialgleichung auf, so kann die Methode der stochastischen Steuerung zur Lösung von Portfolioproblemen herangezogen werden.

Es wird ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen stochastischer Differentialgleichungen, die von einer m-dimensionalen Brownschen Bewegung und einem l-dimensionalen Poissonschen Zufallsmaß gesteuert werden, bewiesen. Hierbei ist zugelassen, dass die Koeffizienten der stochastischen Differentialgleichungen vom Zufall abhängen. Desweiteren wird gezeigt, dass sich die Existenz des n-ten Momentes vom Anfangswert $X(0) = X_0$ auf alle Werte $X(t)$ überträgt.

Anschließend wird die Methode der stochastischen Steuerung bei endlichem Zeithorizont für Sprung-Diffusionsprozesse der Gestalt

$$dX(s) \quad = \quad \Lambda(s, X(s), u(s))\, ds + \Sigma(s, X(s), u(s))\, dW(s) + \Gamma(s, X(s-), u(s-))\, dN(s)$$

hergeleitet, wobei W eine m-dimensionale Brownsche Bewegung und N ein davon unabhängiger l-dimensionaler Poisson-Prozess sind. Unter geeigneten Lipschitz- und Wachstumsbedingungen an die Koeffizienten wird ein Verifikationssatz formuliert, der einen Zusammenhang zwischen der Lösung der HJB-Gleichung und der Lösung des Steuerungsproblems liefert. Werden Portfolioprobleme mit stochastischer Zinsrate betrachtet, so sind die geforderten Voraussetzungen an die Koeffizienten nicht immer erfüllt. Für diese Situation wird eine Variante des Verifikationssatzes hergeleitet.

Im 2. Teil dieser Arbeit wird ein stochastisches Modell für sprunghafte Bondpreise entwickelt. Dafür wird das klassische Heath-Jarrow-Morton-Modell verallgemeinert, indem die Vorwärtszinsrate zusätzlich mit Sprüngen eines Poisson-Prozesses überlagert wird. Es wird gezeigt, dass der Bondpreisprozess $B(\cdot, \tilde{T})$ bezüglich dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ die stochastische Differentialgleichung

$$dB(t, \tilde{T}) \quad = \quad B(t-, \tilde{T})\Big(r(t)\, dt + U_1(t, \tilde{T})\, dW_{\mathbb{P}^*}(t) + U_2(t, \tilde{T})\, d\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t)\Big)$$

erfüllt, wobei r die stochastische Zinsrate bezeichnet. Die beiden Prozesse $U_1(\cdot, \tilde{T})$ und $U_2(\cdot, \tilde{T})$ lassen sich explizit in Termen des Volatilitäts- und des Sprungkoeffizienten der Vorwärtszinsrate angeben.

Mit Hilfe der Variante des Verifikationssatzes werden ein Bond-Portfolioproblem und ein Aktie-Bond-Portfolioproblem gelöst, wobei der Zinsrate des Sparkontos, dem Bondpreisprozess und dem Aktienpreisprozess ein Sprung-Diffusionsmodell zugrunde gelegt werden. Im Spezialfall, dass keine Sprünge auftreten, finden sich die Ergebnisse aus der Arbeit von Korn und Kraft (2001) wieder.

Abstract

In this thesis portfolio problems of an investor in a financial market are considered. In contrast to the classical Merton model the assets are modelled by jump diffusions. The wealth equation of the investor is understood as a controlled SDE, hence stochastic control methods can be used to solve portfolio problems.
First of all an existence and uniqueness theorem is derived for solutions of SDE's which are driven by an m-dimensional Brownian motion and an l-dimensional Poisson random measure. Here the coefficients of the SDE's are allowed to be stochastic. In addition it is shown that the existence of the n-th moment of the initial value $X(0) = X_0$ carries over to all values $X(t)$.
In the following the method of stochastic control is derived for a finite time horizon and for jump diffusions of the form

$$dX(s) \quad = \quad \Lambda(s, X(s), u(s))\, ds + \Sigma(s, X(s), u(s))\, dW(s) + \Gamma(s, X(s-), u(s-))\, dN(s),$$

where W is an m-dimensional Brownian motion and N an l-dimensional Poisson process independent of W. Under appropriate Lipschitz and growth conditions on the coefficients a verification theorem is formulated, which connects the solution of the HJB-equation with the solution of the optimal control problem. For portfolio problems with stochastic interest rate the required assumptions of the verification theorem are not always satisfied. For this situation a modified verification theorem is derived.
In the second part of this thesis a stochastic model for bond prices with jumps is developed. For this purpose the classical Heath-Jarrow-Morton model is generalized in the sense that the dynamics of the forward rate process allows jumps which occur according to a Poisson process. With respect to the equivalent martingale measure $\mathbb{P}^*$ it is shown that the bond price process $B(\cdot, \tilde{T})$ satisfies the SDE

$$dB(t, \tilde{T}) \quad = \quad B(t-, \tilde{T})\Big(r(t)\, dt + U_1(t, \tilde{T})\, dW_{\mathbb{P}^*}(t) + U_2(t, \tilde{T})\, d\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t)\Big),$$

where r denotes the stochastic interest rate. The processes $U_1(\cdot, \tilde{T})$ and $U_2(\cdot, \tilde{T})$ can be written explicitly in terms of the volatility and the jump coefficient of the forward rate.
Using the modified verification theorem, a bond portfolio problem and a mixed stock and bond portfolio problem is solved, where the interest rate of the savings account, the bond price process and the stock price process follow jump diffusions. In the special case when there are no jumps these results contain those obtained by Korn and Kraft (2001).

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im 20. Jahrhundert gewann die Untersuchung von finanzwissenschaftlichen Problemen mittels stochastischer Methoden immer mehr an Bedeutung. Wichtige Vertreter in diesem Bereich sind Black und Scholes sowie Merton, denen mit ihren Arbeiten aus dem Jahr 1973 ([3], [25]) über die Preisfestsetzung und die Absicherung von Finanzderivaten ein bedeutender Durchbruch gelang. Bei der Lösung immer spezieller werdender finanzwissenschaftlicher Problemstellungen wurde immer häufiger auf Methoden der stochastischen Analysis zurückgegriffen. So stellen die Martingaltheorie und die stochastische Integration, aber auch die stochastische Steuerung wichtige Bestandteile der Finanzmathematik dar.

Eine klassische Problemstellung in der Finanzmathematik ist das sogenannte Portfolioproblem eines Investors in einem Finanzmarkt. Dieses besteht darin, zu gegebenem strikt positivem Anfangskapital eine bezüglich eines Nutzenfunktionals optimale Portfoliostrategie oder auch Konsum- und Portfoliostrategie zu bestimmen.
Das Portfolioproblem eines Investors lässt sich vorwiegend auf zwei verschiedene Arten lösen; zum einen nach der Methode der stochastischen Steuerung und zum anderen nach der Martingalmethode. Letztere geht hauptsächlich auf die in den 80er Jahren erschienenen Arbeiten von Cox und Huang [4], Karatzas, Lehoczky und Shreve [16] und Pliska [29] zurück. Hierauf wird jedoch nicht weiter eingegangen, da in dieser Arbeit lediglich die Methode der stochastischen Steuerung betrachtet wird.
Die Methode der stochastischen Steuerung zur Lösung des Portfolioproblems wurde erstmals von Merton in den Jahren 1969 bzw. 1971 ([23], [24]) eingeführt. Er fasste das Portfolioproblem eines Investors als ein stochastisches Steuerungsproblem auf, indem er die Vermögensgleichung des Investors als gesteuerte stochastische Differentialgleichung interpretierte.

In dem von Merton betrachteten Portfolioproblem wird der Finanzmarkt durch ein Diffusionsmodell beschrieben, indem der Preisprozess der Aktie durch eine geometrische Brownsche Bewegung modelliert wird. Ein wesentlicher Nachteil dieses Modells besteht darin, dass extreme Kursänderungen der Aktie, die am realen Aktienmarkt durchaus beobachtbar sind, nicht erfasst werden können. Dies liegt daran, dass die logarithmierten Renditen der Aktie normalverteilt sind und somit extreme Kursschwankungen eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit besitzen. Um dieser Problematik zu entgehen, kann man das von Merton entwickelte Diffusionsmodell durch ein Sprung-Diffusionsmodell ersetzen. Hierbei wird der Aktienpreisprozess durch eine geometrische Brownsche Bewegung modelliert, wobei nun jedoch auch zusätzlich Sprünge an zufälligen Zeitpunkten mit einbezogen werden. Ein Sprung-Diffusionsmodell beschreibt die beobachteten Aktienpreise somit realistischer.

Im Gegensatz zum klassischen Modell von Merton werden in dieser Arbeit Finanzmärkte betrachtet, in denen die Wertpapiere durch Sprung-Diffusionsmodelle modelliert werden. Dazu wird zunächst die Methode der stochastischen Steuerung für Sprung-Diffusionsprozesse hergeleitet. Im Vergleich zu Korn und Korn [18], Kraft [21] oder auch Flemming und Soner [8] werden hier Prozesse X betrachtet, die nicht nur von einer m-dimensionalen Brownschen Bewegung W, sondern zusätzlich auch von einem davon unabhängigen l-dimensionalen Poisson-Prozess N abhängen. Die Steuerung erfolgt dabei durch einen stochastischen Prozess u. Dieser ist im Allgemeinen im Driftkoeffizienten, im Volatilitätskoeffizienten und im Sprungkoeffizienten der gesteuerten stochastischen Differentialgleichung

$$dX(s) \;=\; \Lambda(s, X(s), u(s))\, ds + \Sigma(s, X(s), u(s))\, dW(s) + \Gamma(s, X(s-), u(s-))\, dN(s) \qquad (1)$$

enthalten. Im Fall, dass die Koeffizienten Λ, Σ und Γ geeignete Lipschitz- und Wachstumsbedingungen erfüllen, wird ein Verifikationssatz formuliert, der anschließend in einem konkreten Beispiel, dem Problem des optimalen Konsums und des optimalen Endvermögens bei einem endlichen Zeithorizont, eine Anwendung findet. Für den Fall, dass der Aktienpreisprozess lediglich durch eine geometrische Brownsche Bewegung modelliert wird, hat Merton [23] dieses Problem bereits gelöst.
In einigen Situationen sind die Lipschitz- und Wachstumsbedingungen an die Koeffizienten jedoch nicht erfüllt. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn Portfolioprobleme betrachtet werden, in denen die Zinsrate nicht wie im klassischen Merton-Modell deterministisch, sondern durch einen stochastischen Prozess gegeben ist. Da in dieser Arbeit auch solche Situationen betrachtet werden, wird eine Variante des Verifikationssatzes hergeleitet, in der man unter gewissen Voraussetzungen an die gesteuerte stochastische Differentialgleichung (1) ohne die Lipschitz- und Wachstumsbedingungen an die Koeffizienten auskommt.
Mit Hilfe dieser Variante werden ein Bond-Portfolioproblem und ein Aktie-Bond-

Portfolioproblem gelöst, wobei der Zinsrate des Sparkontos, dem Bondpreis und dem Aktienpreis ein Sprung-Diffusionsmodell zugrunde gelegt werden. Hierbei wird das Modell für den Bondpreis aus dem zuvor entwickelten „verallgemeinerten Heath-Jarrow-Morton-Modell" übernommen. Es wird gezeigt, dass die Variante des Verifikationssatzes anwendbar ist und dass man zu Ergebnissen kommt, die in den konkreten Spezialfällen, in denen die Zinsrate durch das Ho-Lee-Modell bzw. durch das Vasicek-Modell gegeben ist und in denen die gehandelten Wertpapiere keine Sprünge aufweisen, mit den Ergebnissen aus der Arbeit von Korn und Kraft [19] übereinstimmen.

Konkret ist diese Arbeit in 6 Kapitel unterteilt.

Da im Rahmen der Untersuchung häufig auf Resultate der stochastischen Analysis zurückgegriffen wird, werden in Kapitel 1 die wichtigsten Definitionen und Bezeichnungen sowie einige Ergebnisse aus diesem Bereich kurz vorgestellt. Von besonderer Bedeutung ist dabei der Abschnitt über die mehrdimensionale Itô-Formel für Semimartingale.

Das 2. Kapitel beschäftigt sich mit der Existenz und der Eindeutigkeit von Lösungen stochastischer Differentialgleichungen. Die Theorie der stochastischen Differentialgleichungen geht dabei auf die Arbeit von Itô [13] aus dem Jahre 1951 zurück. Seine Vorgehensweise ist in der heutigen Literatur zur stochastischen Analysis wohlbekannt. Im Laufe der Zeit wurde das Konzept von Itô immer weiter verallgemeinert. So bewiesen Doléans-Dade und Meyer [6] im Jahre 1977 einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für stochastische Differentialgleichungen, die von Semimartingalen gesteuert werden. Dabei durften die Koeffizienten im Vergleich zu Itô zusätzlich vom Zufall abhängen. Im Rahmen dieser Arbeit werden stochastische Differentialgleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned} dX(t) &= A(t,X(t-))\,dt + B(t,X(t-))\,dW(t) + \int_{|z|<c} F(t,X(t-),z)\,\widetilde{M}(dt,dz) \\ &\quad + \int_{|z|\geq c} G(t,X(t-),z)\,M(dt,dz), \qquad (2) \\ X(0) &= X_0 \end{aligned}$$

betrachtet, wobei W eine m-dimensionale Brownsche Bewegung und M ein davon unabhängiges l-dimensionales Poissonsches Zufallsmaß auf dem Messraum $(\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^k \setminus \{0\}), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}))$ mit zugehörigem Intensitätsmaß μ und zugehörigem Kompensator $\widetilde{M}$ sind. Hierbei ist ebenfalls zugelassen, dass die Koeffizienten A, B, F und G vom Zufall abhängen, also stochastische Prozesse sind. Unter der Voraussetzung, dass die Koeffizienten einer geeigneten Lipschitz- und Wachstumsbedingung genügen, wird mit Hilfe der Technik der Picard-Iteration ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen stochastischer Differentialgleichungen der Form (2) bewiesen. Darüber hinaus wird für den Fall $G \equiv 0$ gezeigt, dass sich die Existenz des n-ten Momentes vom Anfangswert X_0 auf alle Werte $X(t)$ überträgt, wobei $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ die eindeutig bestimmte Lösung des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes ist.

Wie man in Merton's Arbeit sehen konnte, können Portfolioprobleme in stetiger Zeit als stochastische Steuerungsprobleme interpretiert werden. Im 3. Kapitel wird daher die Methode der stochastischen Steuerung bei einem endlichen Zeithorizont vorgestellt, wobei der zu steuernde Prozess durch die gesteuerte stochastische Differentialgleichung (1) gegeben ist.
Im ersten Teil dieses Kapitels wird die Problemstellung erläutert und dabei insbesondere das Steuerungsproblem vorgestellt. Anschließend wird die sogenannte Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (HJB-Gleichung) mit dem Prinzip der dynamischen Programmierung hergeleitet. Mit Hilfe dieser kann ein Verifikationssatz formuliert werden, der einen Zusammenhang zwischen der Lösung der HJB-Gleichung und der Lösung des Steuerungsproblems liefert.
Als Anwendung des Satzes wird ein konkretes Beispiel untersucht. In diesem wird ein Investor betrachtet, dessen Ziel es ist, seinen erwarteten Nutzen aus Konsum und Endvermögen bei endlichem Zeithorizont zu maximieren. Wie im klassischen Merton-Modell hat er dabei die Möglichkeit, in ein risikoloses Sparkonto und in d verschiedene risikobehaftete Aktien zu investieren, wobei die Aktienpreise im Vergleich zu Merton durch Sprung-Diffusionen modelliert werden. Für den Fall $d = 1$ wird ein Vergleich zur klassischen Lösung gezogen.
Im letzten Teil des Kapitels werden „gesteuerte stochastische Differentialgleichungen mit linearer Komponente" betrachtet. Aufgrund ihrer konkreten Gestalt kann eine Variante des Verifikationssatzes hergeleitet werden, die auf die Lipschitz- und Wachstumsbedingungen an die Koeffizienten der gesteuerten stochastischen Differentialgleichung vezichtet und daher in der konkreten Situation von Kapitel 6 eine Anwendung findet.

Das 4. Kapitel beschäftigt sich mit der Methode der stochastischen Steuerung bei unendlichem Zeithorizont, wobei der zu steuernde Prozess durch eine autonome Version der gesteuerten stochastischen Differentialgleichung (1) gegeben ist. Wie in Kapitel 3 wird ein Verifikationssatz angegeben, der einen Zusammenhang zwischen der Lösung der HJB-Gleichung und der Lösung des Steuerungsproblems herstellt. In einem konkreten Beispiel, einem sogennanten Lebenszeit-Konsum-Problem, findet dieser Satz eine Anwendung.

Im 5. Kapitel wird ein stochastisches Modell für sprunghafte Bondpreise entwickelt. Die Sprünge werden dabei durch einen Poisson-Prozess modelliert.

Für eine reelle Brownsche Bewegung W und einen davon unabhängigen eindimensionalen Poisson-Prozess N zum Parameter $\alpha > 0$ wird zunächst dargelegt, unter welchen Voraussetzungen der Prozess $\exp(Y) = (\exp(Y(t)))_{t\in[0,T]}$ mit

$$Y(t) \;:=\; \int_0^t G(s)\,ds + \int_0^t F(s)\,dW(s) + \int_0^t H(s)\,d\big(N(s) - \alpha s\big)$$

ein exponentielles Martingal ist. Mit Hilfe eines exponentiellen Martingals wird anschließend für eine Familie von Bondpreisen $\{B(\cdot,\tilde{T}) : 0 < \tilde{T} \leq T\}$ ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ mit Dichte $\exp(Y(T))$ bezüglich des ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ definiert. In einem Existenzsatz wird gezeigt, dass geeignete Prozesse $U_1(\cdot,\tilde{T})$ und $U_2(\cdot,\tilde{T})$ existieren, so dass $B(\cdot,\tilde{T})$ bezüglich $\mathbb{P}^*$ die stochastische Differentialgleichung

$$dB(t,\tilde{T}) \;\;=\;\; B(t-,\tilde{T})\Big(r(t)\,dt + U_1(t,\tilde{T})\,dW_{\mathbb{P}^*}(t) + U_2(t,\tilde{T})\,d\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t)\Big)$$

erfüllt. Hierbei bezeichnen r die stochastische Zinsrate des Sparkontos, $W_{\mathbb{P}^*}$ eine reelle Brownsche Bewegung bezüglich $\mathbb{P}^*$ und $\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}$ ein lokales Martingal bezüglich $\mathbb{P}^*$. Im stetigen Fall (d.h. ohne Vorhandensein eines Poisson-Prozesses) findet man einen derartigen Existenzsatz im Buch von Musiela und Rutkowski [27] und in der Arbeit von Artzner und Delbaen [2].
Im zweiten Teil des Kapitels wird das klassische Heath-Jarrow-Morton-Modell (vgl. hierfür die Arbeit von Heath, Jarrow und Morton [9]) verallgemeinert, indem die Vorwärtszinsrate zusätzlich mit Sprüngen eines Poisson-Prozesses überlagert wird. In dieser konkreten Situation lassen sich die beiden Prozesse $U_1(\cdot,\tilde{T})$ und $U_2(\cdot,\tilde{T})$ aus dem obigen Existenzsatz explizit in Termen des Volatilitäts- und des Sprungkoeffizienten der Vorwärtszinsrate angeben.

Im letzten Kapitel werden ein Bond-Portfolioproblem und ein Aktie-Bond-Portfolioproblem gelöst. In beiden Situationen wird ein Investor betrachtet, dessen Ziel es ist, seinen erwarteten Nutzen aus dem Endvermögen bei endlichem Zeithorizont zu maximieren. Hierbei werden der Bondpreis durch das in Kapitel 5 entwickelte verallgemeinerte Heath-Jarrow-Morton-Modell und der Aktienpreis durch einen Sprung-Diffusionsprozess modelliert. Im Vergleich zum klassischen Merton-Modell ist die Zinsrate des Sparkontos durch eine stochastische Differentialgleichung gegeben, die von einer reellen Brownschen Bewegung und einem davon unabhängigen Poisson-Prozess gesteuert wird. Durch diese zusätzliche stochastische Komponente erfüllen die Koeffizienten der zum Optimierungsproblem zugehörigen gesteuerten stochastischen Differentialgleichung jedoch nicht die geforderten Lipschitz- und Wachstumsbedingungen des Verifikationssatzes. Es wird allerdings gezeigt, dass die gesteuerte stochastische Differentialgleichung eine „lineare“ Gestalt besitzt, so dass in dieser Situation die Variante des Verifikationssatzes aus Kapitel 3 anwendbar ist. In den Fällen, dass die Zinsrate durch das Ho-Lee-Modell bzw. durch das Vasicek-Modell gegeben ist und dass der Bond sowie die Aktie keine Sprungkomponente enthalten, haben Korn und Kraft [19] dieses Problem bereits gelöst. Für diese konkreten Spezialfälle stimmen die Ergebnisse aus dieser Arbeit mit denen von Korn und Kraft überein.

Abschließend möchte ich Herrn Prof. Dr. K. Janßen sowohl für die vielen anregenden Gespräche als auch für die umfangreiche Betreuung und Hilfsbereitschaft bei der Erstellung dieser Arbeit danken. Ein herzlicher Dank gebührt auch Herrn Prof. Dr. M. Möhle und Herrn Prof. Dr. R. Korn für die Übernahme und Erstellung der weiteren Gutachten.
Bedanken möchte ich mich auch bei den Mitarbeitern des Lehrstuhls für Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie am Mathematischen Institut der HHU Düsseldorf für ihre Hilfe und Unterstützung.
Ganz besonders danke ich meiner Familie, die mich all die Jahre seelisch unterstützt und motiviert hat. Ohne sie wäre diese Arbeit nie entstanden.

Kapitel 1

Grundlagen aus der stochastischen Analysis

1.1 Allgemeine Definitionen und Bezeichnungen

Gegeben sei ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, d.h.

$$\mathcal{N} := \Big\{ A \subseteq \Omega : \text{es gibt ein } N \in \mathcal{F} \text{ mit } A \subseteq N \text{ und } \mathbb{P}(N) = 0 \Big\} \subseteq \mathcal{F}.$$

Auf diesem definiert man einen stochastischen Prozess $Z = (Z(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ als eine Familie von Zufallsvariablen mit Werten in einem gemeinsamen Messraum $(E, \mathcal{E})$. In dieser Arbeit wird $(E, \mathcal{E})$ meist mit $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ für ein $n \in \mathbb{N}$ identifiziert. Für jedes $\omega \in \Omega$ heißt die durch $t \mapsto Z(t, \omega)$ definierte Abbildung von $\mathbb{R}_+$ nach E ein Pfad des Prozesses.
Sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine rechtsstetige Filtration in $\mathcal{F}$ mit $\{A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) = 0\} \subseteq \mathcal{F}_0$, d.h. die Filtration $\mathbb{F}$ erfüllt die üblichen Voraussetzungen.
Ein stochastischer Prozess Z heißt adaptiert an $\mathbb{F}$ oder auch $\mathbb{F}$-adaptiert, wenn für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ die Zufallsvariable $Z(t)$ $\mathcal{F}_t$-messbar ist.

Definition 1.1 (Lévy-Prozess)
Ein an $\mathbb{F}$ adaptierter stochastischer Prozess $L = (L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ mit Werten in $\mathbb{R}^k$ heißt k-dimensionaler Lévy-Prozess, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

i) $L(0) = 0$ *fast sicher.*

ii) *L besitzt fast sicher rechtsstetige Pfade mit endlichen Linkslimiten, d.h. L ist ein càdlàg-Prozess.*

iii) *L besitzt stationäre Zuwächse, d.h. es existiert eine Familie $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ mit $\mathbb{P}^{L(t)-L(s)} = \mu_{t-s}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$, $s \leq t$.*

iv) *L besitzt unabhängige Zuwächse, d.h. für je endlich viele Zeitpunkte $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ mit $0 < t_1 < \ldots < t_n$ sind die Zufallsvariablen*

$$L(t_1), L(t_2) - L(t_1), \ldots, L(t_n) - L(t_{n-1})$$

unabhängig.

v) *L ist stochastisch stetig, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ und für alle $t > 0$ gilt*

$$\lim_{s \nearrow t} \mathbb{P}\big(|L(t) - L(s)| > \varepsilon\big) \;=\; 0.$$

Nach Definition ist jeder Lévy-Prozess ein càdlàg-Prozess. Daher besitzen fast alle Pfade $t \mapsto L(t)(\omega)$ auf jedem Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_+$ höchstens abzählbar viele Sprungstellen (vgl. Applebaum [1, Theorem 2.8.1]).

Zwei spezielle Lévy-Prozesse sind die Brownsche Bewegung und der Poisson-Prozess.

Definition 1.2 (Mehrdimensionale Brownsche Bewegung)
Ein an $\mathbb{F}$ adaptierter stochastischer Prozess $W = (W(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ mit Werten in $\mathbb{R}^m$ heißt m-dimensionale Brownsche Bewegung, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

i) *$W(0) = 0$ fast sicher.*

ii) *Fast alle Pfade $t \mapsto W(t)(\omega)$ sind stetig auf $\mathbb{R}_+$.*

iii) *W besitzt stationäre Zuwächse.*

iv) *Für jede Wahl der Zeitpunkte $s, t \in \mathbb{R}_+$ mit $s < t$ ist $W(t) - W(s)$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und es gilt*

$$\mathbb{P}^{W(t)-W(s)} \;=\; N(0, (t-s)I_m) \;=\; \bigotimes_{i=1}^{m} N(0, t-s),$$

wobei $N(0, (t-s)I_m)$ die m-dimensionale Normalverteilung mit Erwartungswertvektor 0 und Kovarianzmatrix $(t-s)I_m$ ist.

Im Fall $m = 1$ nennt man $W = (W(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine reelle Brownsche Bewegung.

Definition 1.3 (Poisson-Prozess)
Ein an $\mathbb{F}$ adaptierter stochastischer Prozess $N = (N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ mit Werten in $\mathbb{N}_0$ heißt Poisson-Prozess zum Parameter $\alpha > 0$, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

i) *$N(0) = 0$ fast sicher.*

ii) *Fast alle Pfade $t \mapsto N(t)(\omega)$ sind rechtsstetige, isotone Funktionen auf $\mathbb{R}_+$ mit Sprüngen der Größe 1.*

iii) N besitzt stationäre Zuwächse.

iv) Für jede Wahl der Zeitpunkte $s, t \in \mathbb{R}_+$ mit $s < t$ ist $N(t) - N(s)$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und es gilt

$$\mathbb{P}^{N(t)-N(s)} = Poi(\alpha(t-s)),$$

wobei $Poi(\alpha(t-s))$ die Poisson-Verteilung zum Parameter $\alpha(t-s)$ bezeichnet.

Definition 1.4 (Mehrdimensionaler Poisson-Prozess)
Ein an $\mathbb{F}$ adaptierter stochastischer Prozess $N = (N_1, \ldots, N_l)^t$ mit Werten in $\mathbb{N}_0^l$ heißt l-dimensionaler Poisson-Prozess zum Parameter $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)^t \in (0, \infty)^l$, falls die einzelnen Komponenten unabhängige eindimensionale Poisson-Prozesse im Sinne von Definition 1.3 bilden.

Definition 1.5 (Progressive Messbarkeit, Vorhersehbarkeit)
a) Ein stochastischer Prozess $Z = (Z(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ mit Werten in $\mathbb{R}^k$ heißt progressiv-messbar bezüglich $\mathbb{F}$ oder auch $\mathbb{F}$-progressiv-messbar, wenn für jedes $t_0 \in \mathbb{R}_+$ die Abbildung

$$Z : [0, t_0] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k , \qquad (t, \omega) \mapsto Z(t, \omega)$$

$(\mathcal{B}([0, t_0]) \otimes \mathcal{F}_{t_0})$-messbar ist.
b) Sei $\mathcal{R} := \big\{\{0\} \times F_0 : F_0 \in \mathcal{F}_0\big\} \cup \big\{(s, t] \times F_s : F_s \in \mathcal{F}_s$ und $s, t \in \mathbb{R}_+$ mit $s < t\big\}$. $\mathcal{R}$ ist schnittstabil und heißt System der vorhersehbaren Rechtecke. Man definiert dann die σ-Algebra $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ der vorhersehbaren Mengen durch

$$\mathcal{P}(\mathbb{F}) := \sigma(\mathcal{R}).$$

Ein $\mathbb{R}^k$-wertiger stochastischer Prozess $Z = (Z(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ heißt vorhersehbar bezüglich $\mathbb{F}$ oder auch $\mathbb{F}$-vorhersehbar, wenn die Abbildung

$$Z : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k , \qquad (t, \omega) \mapsto Z(t, \omega)$$

$\mathcal{P}(\mathbb{F})$-messbar ist.

Jeder $\mathbb{F}$-vorhersehbare Prozess Z ist $\mathbb{F}$-progressiv-messbar (vgl. Irle [12, Anmerkung 9.5]) und damit auch $\mathbb{F}$-adaptiert (Satz von Fubini).
Umgekehrt ist jeder $\mathbb{F}$-adaptierte Prozess Z, der fast sicher rechts- oder linksstetige Pfade besitzt, progressiv-messbar bezüglich $\mathbb{F}$ (vgl. Elliott [7, Theorem 2.32]). Im Fall von linksstetigen Pfaden ist Z sogar $\mathbb{F}$-vorhersehbar (vgl. Irle [12, Anmerkung 9.5]).

Für einen k-dimensionalen Lévy-Prozess L ist der Sprung-Prozess $\Delta L = (\Delta L(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ zwar $\mathbb{F}$-adaptiert, jedoch im Allgemeinen kein Lévy-Prozess mehr. Weiterhin gilt $\Delta L(t) = 0$ fast sicher für jedes feste $t \in \mathbb{R}_+$ (vgl. Applebaum [1, Lemma 2.3.2]). Daher ist es sinnvoller, nicht den Prozess ΔL zu betrachten, sondern die Sprünge einer vorgegebenen Größe zu zählen. Dazu wird zunächst ein Poissonsches Zufallsmaß definiert.

Definition 1.6 (Poissonsche Zufallsmaße)
Sei $(S, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum mit σ-endlichem Maß μ. Ein Poissonsches Zufallsmaß M auf $(S, \mathcal{S})$ mit Intensitätsmaß μ ist eine Familie von Zufallsvariablen $\{M(A) : A \in \mathcal{S}\}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit den folgenden Eigenschaften:

i) Für alle $\omega \in \Omega$ ist $M(\cdot)(\omega)$ ein Maß auf $(S, \mathcal{S})$.

ii) Für jede disjunkte Familie $\{A_1, \ldots, A_n\}$ von Ereignissen aus $\mathcal{S}$ sind die Zufallsvariablen $M(A_1), \ldots, M(A_n)$ unabhängig.

iii) Für alle $A \in \mathcal{S}$ ist die Zufallsvariable $M(A)$ Poisson-verteilt zum Parameter $\mu(A)$. (Im Fall $\mu(A) = 0$ gilt $M(A) = 0$ fast sicher und im Fall $\mu(A) = \infty$ gilt $M(A) = \infty$ fast sicher.)

Nach Ikeda/Watanabe [11, I. Theorem 8.1] existiert zu jedem σ-endlichen Maß μ auf einem Messraum $(S, \mathcal{S})$ ein Poissonsches Zufallsmaß M auf $(S, \mathcal{S})$ mit $\mu(A) = \mathbb{E}(M(A))$ für alle $A \in \mathcal{S}$.

Sei $S = \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ versehen mit der σ-Algebra $\mathcal{S} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\})$. Weiterhin sei $L = (L(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein k-dimensionaler Lévy-Prozess. Für $t \in \mathbb{R}_+$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ definiere man

$$M([0,t], A) \;:=\; \#\big\{0 \le s \le t : \Delta L(s) \in A\big\} \;=\; \sum_{0\le s\le t} \mathbb{1}_A(\Delta L(s)). \tag{1.1}$$

Man beachte, dass $A \mapsto M([0,t], A)(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega$ und $t \in \mathbb{R}_+$ ein Zählmaß auf $(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}))$ ist. Folglich ist

$$A \mapsto \mathbb{E}\big(M([0,t], A)\big) \;=\; \int_\Omega M([0,t], A)(\omega)\, dP(\omega)$$

ein Maß auf $(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}))$. Setzt man $\nu(\cdot) = \mathbb{E}(M([0,1], \cdot))$, so folgt mit Hilfe von Applebaum [1, Lemma 2.3.4, Theorem 2.3.5 und Remark 1], dass ν ein σ-endliches Maß auf $(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}))$ ist und dass durch M ein Poissonsches Zufallsmaß auf $(\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^k \setminus \{0\}), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}))$ mit Intensitätsmaß $\mu = \lambda\big|_{\mathbb{R}_+} \otimes \nu$ festgelegt wird.

Für $t \in \mathbb{R}_+$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ mit $0 \notin \overline{A}$ definiere man weiterhin das zugehörige kompensierte Poissonsche Zufallsmaß $\widetilde{M}$ durch

$$\widetilde{M}([0,t],A) \quad := \quad M([0,t],A) - t\nu(A). \tag{1.2}$$

Man beachte dabei, dass $\nu(A) < \infty$ für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ mit $0 \notin \overline{A}$ gilt (vgl. Applebaum [1, S. 89, Remark 1]).

Als Nächstes wird erläutert, was im Folgenden unter einem l-dimensionalen Poissonschen Zufallsmaß auf $(\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^k \setminus \{0\}), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}))$ zu vestehen ist. Im Sinne von (1.1) sei M_j für jedes $j = 1, \ldots, l$ ein Poissonsches Zufallsmaß auf $(\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^k \setminus \{0\}), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}))$ mit zugehörigem Intensitätsmaß $\mu_j = \lambda\big|_{\mathbb{R}_+} \otimes \nu_j$ und zugehörigem kompensierten Poissonschen Zufallsmaß $\widetilde{M}_j$. Ferner sei die Familie $\{M_j : j = 1, \ldots, l\}$ unabhängig. Man setze

$$\begin{aligned} M &:= \Big(M_1, \ldots, M_l\Big)^t, \\ \mu &:= \Big(\mu_1, \ldots, \mu_l\Big)^t = \Big(\lambda\big|_{\mathbb{R}_+} \otimes \nu_1, \ldots, \lambda\big|_{\mathbb{R}_+} \otimes \nu_l\Big)^t, \\ \widetilde{M} &:= \Big(\widetilde{M}_1, \ldots, \widetilde{M}_l\Big)^t. \end{aligned} \tag{1.3}$$

In diesem Fall nennt man M ein l-dimensionales Poissonsches Zufallsmaß auf $(\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^k \setminus \{0\}), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}))$ mit zugehörigem Intensitätsmaß μ und zugehörigem kompensierten Poissonschen Zufallsmaß $\widetilde{M}$.

Definition 1.7 (Martingal, Submartingal, Supermartingal)
Ein reeller stochastischer Prozess $Z = (Z(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ heißt Martingal (bzw. Submartingal, Supermartingal) bezüglich $\mathbb{F}$, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

i) *Z ist $\mathbb{F}$-adaptiert.*

ii) $\mathbb{E}(|Z(t)|) < \infty$ *für alle $t \in \mathbb{R}_+$.*

iii) $\mathbb{E}[Z(t)|\mathcal{F}_s] = Z(s)$ *(bzw.* $\mathbb{E}[Z(t)|\mathcal{F}_s] \geq Z(s)$, $\mathbb{E}[Z(t)|\mathcal{F}_s] \leq Z(s)$*) für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$ mit $s \leq t$.*

Nach Definition des eindimensionalen Poisson-Prozesses zum Parameter $\alpha > 0$ und der reellen Brownschen Bewegung sind die beiden Prozesse $(N(t) - \alpha t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ und $(W(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ Martingale bezüglich $\mathbb{F}$.
Ferner ist der eindimensionale Prozess $(\widetilde{M}([0,t],A))_{t \in \mathbb{R}_+}$ aus (1.2) für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ mit $0 \notin \overline{A}$ ebenfalls ein Martingal bezüglich $\mathbb{F}$ (vgl. Applebaum [1, Theorem 2.3.5 und Remark 1]).

Definition 1.8 (Stoppzeit, σ-Algebra der Vergangenheit)
Eine Abbildung $S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ heißt Stoppzeit bezüglich $\mathbb{F}$ oder auch $\mathbb{F}$-Stoppzeit, falls für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ die Menge $\{S \leq t\}$ in $\mathcal{F}_t$ liegt.
Für eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit S definiert man weiterhin die σ-Algebra der Vergangenheit bis zur Zeit S durch

$$\mathcal{F}_S \quad := \quad \Big\{ A \in \sigma\Big(\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t \Big) : A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t \textit{ für alle } t \in \mathbb{R}_+ \Big\}.$$

Stoppzeiten spielen beim Prinzip der Lokalisation eine wesentliche Rolle. Von besonderer Bedeutung sind dabei die lokalen Martingale. Für diese benötigt man jedoch noch die Definition der gleichgradigen Integrierbarkeit.

Definition 1.9 (Gleichgradige Integrierbarkeit)
Eine Menge $\mathcal{X}$ von reellen Zufallsvariablen heißt gleichgradig integrierbar (in Zeichen g.g.i.), falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C \geq 0$ existiert mit

$$\mathbb{E}\big(|X| \mathbb{1}_{\{|X|>C\}}\big) \quad < \quad \varepsilon \qquad \textit{für alle } X \in \mathcal{X}.$$

Bemerkung 1.10

1. Sei $\mathcal{X}$ eine g.g.i. Menge von reellen Zufallsvariablen. Zu $\varepsilon > 0$ sei $C \geq 0$ eine zugehörige Konstante aus der Definition. Dann gilt

$$\mathbb{E}(|X|) \;=\; \mathbb{E}\big(|X|\mathbb{1}_{\{|X|>C\}}\big) + \mathbb{E}\big(|X|\mathbb{1}_{\{|X|\leq C\}}\big) \;<\; \varepsilon + C \;<\; \infty \qquad \text{für alle } X \in \mathcal{X}$$

   und somit $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$. Weiterhin ist $\mathcal{X}$ beschränkt in $\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, d.h.

$$\sup_{X \in \mathcal{X}} \underbrace{\mathbb{E}(|X|)}_{<\,\varepsilon + C} \quad < \quad \infty.$$

2. Nach dem Satz von Lebesgue gilt für alle $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$:

$$\mathbb{E}\big(|X|\mathbb{1}_{\{|X|>n\}}\big) \longrightarrow 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

   Somit ist jede endliche Menge $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ g.g.i..

3. Für eine reelle Zufallsvariable $U \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ sei die Menge $\mathcal{X}$ definiert durch

$$\mathcal{X} \quad := \quad \big\{ X : X \text{ ist reelle Zufallsvariable mit } |X| \leq U \text{ fast sicher} \big\}.$$

   Für jede Zufallsvariable X aus der Menge $\mathcal{X}$ gilt dann $|X|\mathbb{1}_{\{|X|>C\}} \leq U\mathbb{1}_{\{U>C\}}$ fast sicher und somit auch $\mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_{\{|X|>C\}}) \leq \mathbb{E}(U\mathbb{1}_{\{U>C\}})$. Mit Bemerkung 2 folgt daraus, dass $\mathcal{X}$ eine g.g.i. Familie ist.

Definition 1.11 (Lokales Martingal)
Ein $\mathbb{F}$-adaptierter càdlàg-Prozess $Z = (Z(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ mit Werten in $\mathbb{R}$ heißt lokales Martingal bezüglich $\mathbb{F}$, falls es eine aufsteigende Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{F}$-Stoppzeiten mit $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty) = 1$ gibt, so dass der gestoppte Prozess $Z^{S_n} = (Z(t \wedge S_n))_{t\in\mathbb{R}_+}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein g.g.i. Martingal bezüglich $\mathbb{F}$ ist. So eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{F}$-Stoppzeiten heißt lokalisierende Folge für Z.

Der Begriff des lokalen Sub- bzw. Supermartingals wird analog definiert.
Nach Definition 1.11 ist jedes càdlàg-Martingal Z ein lokales Martingal (wähle $S_n \equiv n$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Somit sind die eindimensionalen Prozesse $(N(t) - \alpha t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ und $(\widetilde{M}([0,t], A))_{t\in\mathbb{R}_+}$ für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ mit $0 \notin \overline{A}$ auch lokale Martingale bezüglich $\mathbb{F}$. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Für diese benötigt man noch weitere Voraussetzungen an Z. Darauf wird in Abschnitt 1.3 genauer eingegangen.

Definition 1.12 (Prozess von lokal-beschränkter Variation)
Eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt von lokal-beschränkter Variation, falls für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$var_0^t(f) \quad := \quad \sup\Big\{ \sum_{s_i\in\xi_t} \big|f(s_{i+1}) - f(s_i)\big| : \xi_t \textit{ ist endliche Zerlegung von } [0,t]\Big\} \quad < \quad \infty$$

(Variation von f über dem Intervall $[0,t]$).
Ein $\mathbb{F}$-adaptierter càdlàg-Prozess $Z = (Z(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ mit Werten in $\mathbb{R}$ heißt von lokal-beschränkter Variation, wenn fast alle Pfade $t \mapsto Z(t,\omega)$ von lokal-beschränkter Variation sind.

Nach Heuser [10, XI. Satz 91.7] ist eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann von lokal-beschränkter Variation, wenn zwei monoton wachsende Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ existieren mit $f = f_1 - f_2$. Mit Hilfe dieser Äquivalenz ist es oftmals leichter nachzuweisen, dass ein Prozess von lokal-beschränkten Variation ist.

Definition 1.13 (Semimartingal)
Ein $\mathbb{F}$-adaptierter càdlàg-Prozess $Z = (Z(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ mit Werten in $\mathbb{R}$ heißt Semimartingal bezüglich $\mathbb{F}$, wenn es ein lokales Martingal $L = (L(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ und einen Prozess $V = (V(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ von lokal-beschränkter Variation gibt mit $L(0) = V(0) = 0$ und $Z(t) = Z(0) + L(t) + V(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Alle vorhergehenden Definitionen und Bezeichnungen können ohne weiteres auf einen endlichen Zeithorizont $[0,T]$ für ein $T > 0$ übertragen werden. Lediglich bei der Definition eines lokalen Martingales ist die Bedingung

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty\Big) \;=\; 1$$

an die lokalisierende Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bei endlichem Zeithorizont durch die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(S_n < T\big) \;=\; 0$$

zu ersetzen. Darüber hinaus beachte man, dass die geforderte gleichgradige Integrierbarkeit bei endlichem Zeithorizont automatisch erfüllt ist, da das Martingal $Z^{S_n} = (Z(t\wedge S_n))_{t\in[0,T]}$ für jedes $n\in\mathbb{N}$ durch die Zufallsvariable $Z(T\wedge S_n)$ erzeugt wird.

1.2 Die Itô-Formel für Semimartingale

Zur Konstruktion von stochastischen Integralen bezüglich Semimartingalen vergleiche man das Buch von Protter [30, II. Abschnitt 4] und zur Konstruktion von stochastischen Integralen bezüglich martingal-wertigen Maßen vergleiche man das Buch von Applebaum [1, Kapitel 4]. Der Vollständigkeit halber ist ein martingal-wertiges Maß wie folgt definiert:

Definition 1.14 (Martingal-wertige Maße)
Sei U ein topologischer Raum versehen mit der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}(U)$. Sei M ein zufälliges Maß auf $(\mathbb{R}_+\times U, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{B}(U))$. Für jedes $A\in\mathcal{B}(U)$ definiere man den Prozess $M_A = (M_A(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ durch $M_A(t) := M([0,t],A)$. Man nennt M ein martingal-wertiges Maß, falls es eine Menge $V\in\mathcal{B}(U)$ gibt, so dass der Prozess M_A für jedes $A\in\mathcal{B}(U)$ mit $\overline{A}\cap V=\emptyset$ ein Martingal bildet. Dabei nennt man die Menge V die verbotene Menge.

Ist M ein Poissonsches Zufallsmaß auf $(\mathbb{R}_+\times(\mathbb{R}^k\setminus\{0\}), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^k\setminus\{0\}))$ mit Intensitätsmaß $\mu = \lambda\big|_{\mathbb{R}_+}\otimes\nu$, so ist das zugehörige kompensierte Poissonsche Zufallsmaß $\widetilde{M}$ zu einem martingal-wertigen Maß auf $(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ mit verbotener Menge $V=\{0\}$ erweiterbar.

Definition 1.15 (Quadratischer Variations- und Kovariationsprozess)
Seien $Z = (Z(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, $Z_1 = (Z_1(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ und $Z_2 = (Z_2(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ drei Semimartingale bezüglich $\mathbb{F}$.
Der quadratische Variationsprozess $[Z,Z] = \big([Z,Z](t)\big)_{t\in\mathbb{R}_+}$ von Z ist definiert durch

$$[Z,Z](t) \;=\; \big(Z(t)\big)^2 - \big(Z(0)\big)^2 - 2\int_{0+}^{t} Z(s-)\,dZ(s).$$

Der quadratische Kovariationsprozess $[Z_1, Z_2] = \big([Z_1, Z_2](t)\big)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *von* Z_1 *und* Z_2 *ist definiert durch*

$$[Z_1, Z_2](t) \;=\; Z_1(t)Z_2(t) - Z_1(0)Z_2(0) - \int_{0+}^{t} Z_1(s-)\, dZ_2(s) - \int_{0+}^{t} Z_2(s-)\, dZ_1(s).$$

Die Abbildung $(Z_1, Z_2) \mapsto [Z_1, Z_2]$ ist bilinear und symmetrisch und es gilt

$$[Z_1, Z_2](t) \;=\; \frac{1}{2}\Big(\big[Z_1 + Z_2, Z_1 + Z_2\big](t) - \big[Z_1, Z_1\big](t) - \big[Z_2, Z_2\big](t)\Big) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Weiterhin bezeichnet man mit $[Z, Z]^c$ den pfadweise stetigen Anteil von $[Z, Z]$. Nach Protter [30, II. Theorem 22] ist $[Z, Z]$ ein monoton wachsender, $\mathbb{F}$-adaptierter càdlàg-Prozess und für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\begin{aligned} [Z, Z](t) &= [Z, Z]^c(t) + \sum_{0<s\leq t} \Delta[Z, Z](s) \\ &= [Z, Z]^c(t) + \sum_{0<s\leq t} \big(\Delta Z(s)\big)^2. \end{aligned}$$

Analog bezeichnet man mit $[Z_1, Z_2]^c$ den pfadweise stetigen Anteil von $[Z_1, Z_2]$. Wie oben gilt mit Hilfe von Protter [30, II. Theorem 23] für alle $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} [Z_1, Z_2](t) &= [Z_1, Z_2]^c(t) + \sum_{0<s\leq t} \Delta[Z_1, Z_2](s) \\ &= [Z_1, Z_2]^c(t) + \sum_{0<s\leq t} \big(\Delta Z_1(s)\big)\big(\Delta Z_2(s)\big). \end{aligned}$$

Beispiel 1.16

Sei $Z = (Z(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein Semimartingal bezüglich $\mathbb{F}$, gegeben durch

$$\begin{aligned} Z(t) \;:=\; & \int_0^t G(s)\, ds + \int_0^t F(s)\, dW(s) + \int_0^t \int_{|x|<1} H(s, x)\, \widetilde{M}(ds, dx) \\ & + \int_0^t \int_{|x|\geq 1} K(s, x)\, M(ds, dx). \end{aligned}$$

Hierbei sind $W = (W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine reelle Brownsche Bewegung und M ein eindimensionales Poissonsches Zufallsmaß auf $(\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^k \setminus \{0\}), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}))$ mit zugehörigem Intensitätsmaß $\mu = \lambda\big|_{\mathbb{R}_+} \otimes \nu$ und zugehörigem kompensierten Poissonschen Zufallsmaß $\widetilde{M}$, wobei ν ein Lévy-Maß ist (d.h. ν ist ein Maß auf $(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}))$ mit $\int_{\mathbb{R}^k\setminus\{0\}}(|y|^2 \wedge 1)\nu(dy) < \infty$). Weiterhin sind G, F, H und K stochastische Prozesse, die geeignete Messbarkeits- und Integrabilitätsvoraussetzungen erfüllen, so dass die auftretenden (stochastischen) Integrale wohldefiniert sind (vgl. Applebaum [1, Kapitel 4.3]).

Nach Applebaum [1, Corollary 4.4.9] ist $[Z,Z](t)$ fast sicher endlich und es gilt

$$[Z,Z](t) = \int_0^t \big(F(s)\big)^2\,ds + \int_0^t \int_{|x|<1} \big(H(s,x)\big)^2\,M(ds,dx) + \int_0^t \int_{|x|\geq 1} \big(K(s,x)\big)^2\,M(ds,dx)$$

für jedes $t \in \mathbb{R}_+$.

Die nachfolgenden beiden Sätze liefern Bedingungen an Z, Z_1 und Z_2, unter denen die Prozesse $[Z,Z]^c$, $[Z_1,Z_2]^c$ bzw. $[Z,Z]$, $[Z_1,Z_2]$ identisch gleich Null sind. Damit lässt sich schnell herausfinden, welche Terme in der Itô-Formel für Semimartingale (vgl. Satz 1.19) wegfallen.

Satz 1.17
Sei Z ein Prozess von lokal-beschränkter Variation. Dann gilt $[Z,Z]^c = 0$. Insbesondere gilt $[Z,Z] = 0$, falls der Prozess Z zusätzlich stetige Pfade besitzt.

Beweis. Siehe Protter [30, II. Theorem 26]. ■

Satz 1.18
Seien Z_1 und Z_2 zwei Semimartingale bezüglich $\mathbb{F}$ mit $[Z_1,Z_1]^c = 0$. Dann gilt

$$[Z_1,Z_2](t) = \sum_{0<s\leq t} \big(\Delta Z_1(s)\big)\big(\Delta Z_2(s)\big) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+,$$

d.h. $[Z_1,Z_2]^c = 0$. Insbesondere gilt $[Z_1,Z_2] = 0$, falls einer der beiden Prozesse Z_1, Z_2 zusätzlich stetige Pfade besitzt.

Beweis. Siehe Protter [30, II. Theorem 28]. ■

Der nachfolgende Satz entspricht Theorem 33 aus dem II. Kapitel von Protter [30] oder auch Theorem 4.57 aus dem I. Kapitel von Jacod/Shiryaev [14]. In konkreten Fällen stellt dieser Satz ein wesentliches Hilfsmittel bei der expliziten Berechnung stochastischer Integrale dar.

Satz 1.19 (Itô-Formel für Semimartingale)
Sei $Z = (Z^{(1)},\dots,Z^{(n)})$ ein n-Tupel von Semimartingalen bezüglich $\mathbb{F}$. Sei weiterhin $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung. Dann ist auch $f(Z)$ ein Semimartingal bezüglich $\mathbb{F}$ und die folgende Integralgleichung ist $\mathbb{P}$-fast sicher erfüllt:

$$\begin{aligned} f(Z(t)) - f(Z(0)) &= \sum_{i=1}^{n} \int_{0+}^{t} \frac{\partial f}{\partial x_i}(Z(s-))\, dZ^{(i)}(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le n} \int_{0+}^{t} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Z(s-))\, d\big[Z^{(i)}, Z^{(j)}\big]^c(s) \\ &\quad + \sum_{0 < s \le t} \Big[f(Z(s)) - f(Z(s-)) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(Z(s-))\, \Delta Z^{(i)}(s) \Big] \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Siehe Jacod/Shiryaev [14, I. Theorem 4.57]. ∎

Nach Definition 1.13 haben die Semimartingale $Z^{(1)}, \ldots, Z^{(n)}$ fast sicher rechtsstetige Pfade. Im Fall von fast sicher stetigen Pfade fällt der letzte Term in der obigen Formel weg und es gilt $[Z^{(i)}, Z^{(j)}]^c = [Z^{(i)}, Z^{(j)}]$ für alle $1 \le i, j \le n$.

Korollar 1.20 (Produktformel für Semimartingale)
Seien $Z^{(1)}$ *und* $Z^{(2)}$ *zwei Semimartingale bezüglich* $\mathbb{F}$. *Dann ist auch* $Z^{(1)}Z^{(2)}$ *ein Semimartingal bezüglich* $\mathbb{F}$ *und es gilt* $\mathbb{P}$*-fast sicher*

$$\begin{aligned} Z^{(1)}(t)Z^{(2)}(t) - Z^{(1)}(0)Z^{(2)}(0) &= \int_{0+}^{t} Z^{(1)}(s-)\, dZ^{(2)}(s) + \int_{0+}^{t} Z^{(2)}(s-)\, dZ^{(1)}(s) \\ &\quad + \big[Z^{(1)}, Z^{(2)}\big](t) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Eine Anwendung von Satz 1.19 mit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ liefert die Behauptung. ∎

1.3 Einige Ergebnisse der stochastischen Analysis

Im Folgenden werden einige wichtige Sätze aus der stochastischen Analysis angegeben, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit angewendet werden.

Satz 1.21 (Gestoppte Supermartingale sind Supermartingale)
Sei $Z = (Z(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ *ein càdlàg-Supermartingal bezüglich* $\mathbb{F}$. *Sei weiterhin* S *eine* $\mathbb{F}$*-Stoppzeit. Dann ist der gestoppte Prozess* $Z^S = (Z(t \wedge S))_{t \in \mathbb{R}_+}$ *ebenfalls ein càdlàg-Supermartingal bezüglich* $\mathbb{F}$. *Insbesondere ist* Z^S *ein càdlàg-Martingal, wenn* Z *ein càdlàg-Martingal ist.*

Beweis. Siehe Rogers/Williams [32, II. Theorem 77.4]. ■

Satz 1.22 (Stoppsatz von Doob)
Sei $Z = (Z(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein càdlàg-Supermartingal bezüglich $\mathbb{F}$. Seien weiterhin S_1 und S_2 zwei $\mathbb{F}$-Stoppzeiten mit $S_1 \leq S_2$ fast sicher. Angenommen Z ist entweder eine g.g.i. Familie von Zufallsvariablen oder nichtnegativ. Dann sind $Z(S_1), Z(S_2) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und es gilt

$$\mathbb{E}[Z(S_2)|\mathcal{F}_{S_1}] \quad \leq \quad Z(S_1) \qquad \textit{fast sicher.}$$

Insbesondere gilt $\mathbb{E}(Z(S_2)) \leq \mathbb{E}(Z(S_1))$. Im Fall, dass Z ein g.g.i. càdlàg-Martingal ist, gilt sogar die Gleichheit.

Beweis. Siehe Rogers/Williams [32, II. Theorem 77.5]. ■

Sei $A \subseteq \mathbb{R}_+ \times \Omega$ gegeben. Man definiere die Abbildung $D_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ durch

$$D_A(\omega) \quad := \quad \inf\big\{t \in \mathbb{R}_+ : (t,\omega) \in A\big\}.$$

Das Infimum über die leere Menge ist dabei definiert als ∞. D_A heißt Ersteintrittszeit in die Menge A.
Der folgende Satz besagt, unter welcher Voraussetzung D_A eine Stoppzeit bezüglich $\mathbb{F}$ ist.

Satz 1.23
Für jede $\mathbb{F}$-progressiv-messbare Menge A ist die Ersteintrittszeit D_A in die Menge A eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit.

Beweis. Siehe Elliott [7, Theorem 6.11]. ■

Nach dem ersten Abschnitt ist jedes càdlàg-Martingal Z ein lokales Martingal. Die Umkehrung ist jedoch ohne weitere Voraussetzungen an Z falsch, denn es existieren lokale Martingale, die keine Martingale sind.

Satz 1.24
Sei $Z = (Z(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein lokales Martingal bezüglich $\mathbb{F}$ mit $\mathbb{E}(\sup_{s\in[0,t]} |Z(s)|) < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Dann ist Z ein Martingal bezüglich $\mathbb{F}$.

Beweis. Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge für Z, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist der gestoppte Prozess Z^{S_n} ein g.g.i. Martingal bezüglich $\mathbb{F}$.
• Für alle $t \in \mathbb{R}_+$ ist $Z(t)$ messbar bezüglich $\mathcal{F}_t$, da $Z(t) = \lim_{n\to\infty} Z(t \wedge S_n)$ fast sicher.
• Für alle $t \in \mathbb{R}_+$ ist $Z(t)$ integrierbar, da $|Z(t)| \leq Z_t^* := \sup_{s\in[0,t]} |Z(s)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$.

• Seien $s, t \in \mathbb{R}_+$ mit $s \leq t$ gegeben. Da Z ein lokales Martingal bezüglich $\mathbb{F}$ ist, gilt

$$\mathbb{E}[Z(t \wedge S_n)|\mathcal{F}_s] \quad = \quad Z(s \wedge S_n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$Z(s \wedge S_n)$ konvergiert fast sicher gegen $Z(s)$ für $n \to \infty$. Nach dem bedingten Satz von Lebesgue konvergiert $\mathbb{E}[Z(t \wedge S_n)|\mathcal{F}_s]$ fast sicher gegen $\mathbb{E}[Z(t)|\mathcal{F}_s]$ für $n \to \infty$ (denn nach Voraussetzung ist $Z_t^* \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und es gilt $|Z(t \wedge S_n)| \leq Z_t^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Für den Grenzwert $n \to \infty$ folgt somit

$$\mathbb{E}[Z(t)|\mathcal{F}_s] \quad = \quad Z_s.$$

Der Prozess Z ist damit ein Martingal bezüglich $\mathbb{F}$. ■

Analog ist jedes lokale Sub- bzw. Supermartingal, das die obige Voraussetzung erfüllt, ein Sub- bzw. Supermartingal.

Die folgenden beiden Ungleichungen werden vor allem in Kapitel 2 benötigt, um unter anderem einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen stochastischer Differentialgleichungen nachzuweisen.

Satz 1.25 (Martingalungleichung von Doob)
Sei $Z = (Z(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein positives càdlàg-Submartingal bezüglich $\mathbb{F}$. Ferner sei $p > 1$ gegeben. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0 \leq s \leq t} \big(Z(s)\big)^p\Big) \quad \leq \quad \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathbb{E}\Big(\big(Z(t)\big)^p\Big).$$

Beweis. Siehe Revuz/Yor [31, II. Theorem 1.7]. ■

Satz 1.26 (Burkholder-Davis-Gundy Ungleichung)
Sei $Z = (Z(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein lokales Martingal bezüglich $\mathbb{F}$ mit $Z(0) = 0$. Weiterhin sei S eine endliche $\mathbb{F}$-Stoppzeit. Dann gilt für jedes $2 \leq p < \infty$

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0 \leq t \leq S} \big|Z(t)\big|^p\Big) \quad \leq \quad C_p \, \mathbb{E}\Big(\big([Z, Z](S)\big)^{\frac{p}{2}}\Big),$$

wobei $C_p > 0$ eine nur von p abhängige Konstante ist.

Beweis. Siehe Protter [30, IV.7 Bemerkung zu Theorem 73] oder Dellacherie/Meyer [5, VII. Theorem 92]. ■

Ebenfalls wichtig für den Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes aus Kapitel 2 ist der nachfolgende Satz. Dieser besagt, dass unabhängige Poisson-Prozesse fast sicher zu verschiedenen Zeitpunkten springen.

Satz 1.27
Seien $N_1 = (N_1(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *und* $N_2 = (N_2(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *zwei unabhängige Poisson-Prozesse, die auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind. Weiterhin seien* $(T_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ *bzw.* $(T_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ *die zugehörigen Sprungzeiten von* N_1 *bzw.* N_2*. Dann gilt*

$$P\Big(T_m^{(1)} = T_n^{(2)} \text{ für ein } m, n \in \mathbb{N}\Big) \;=\; 0.$$

Beweis. Siehe Applebaum [1, Proposition 1.3.12]. ■

Aus diesem Satz folgt insbesondere, dass zusammengesetzte Poisson-Prozesse, die von unabhängigen Poisson-Prozessen gesteuert werden, fast sicher zu verschiedenen Zeitpunkten springen.

Speziell gilt damit der folgende Sachverhalt:
Seien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ mit $0 \notin \overline{A}$ und $M = (M_1, \ldots, M_l)^t$ ein l-dimensionales Poissonsches Zufallsmaß auf $(\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^k \setminus \{0\}), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}))$ mit zugehörigem Intensitätsmaß $\mu = (\lambda\big|_{\mathbb{R}_+} \otimes \nu_1, \ldots, \lambda\big|_{\mathbb{R}_+} \otimes \nu_l)^t$. Nach Applebaum [1, Lemma 2.3.4] gilt $M_j([0,t], A) < \infty$ fast sicher für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und für alle $j = 1, \ldots, l$. Weiterhin ist der Prozess $(M_j([0,t], A))_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein Poisson-Prozess zum Parameter $\alpha_j := \nu_j(A)$ (vgl. Applebaum [1, Theorem 2.3.5]). Nach Definition eines l-dimensionalen Poissonschen Zufallsmaßes bilden die Komponenten unabhängige eindimensionale Poissonsche Zufallsmaße. Somit sind die Poisson-Prozesse $\{(M_j([0,t], A))_{t\in\mathbb{R}_+} : j = 1, \ldots, l\}$ unabhängig voneinander. Definiert man nun die Prozesse $P_j = (P_j(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, $j = 1, \ldots, l$, durch

$$P_j(t) \;:=\; \int_A z\, M_j([0,t], dz),$$

so sind diese zusammengesetzte Poisson-Prozesse (vgl. Applebaum [1, Theorem 2.3.10]), die nach Satz 1.27 fast sicher zu verschiedenen Zeitpunkten springen.

Kapitel 2

Stochastische Differentialgleichungen – Existenz und Eindeutigkeit

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum versehen mit einer Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, die die üblichen Voraussetzungen erfüllt. Bezüglich dieser stochastischen Basis sei $W = (W(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine m-dimensionale Brownsche Bewegung und $M = (M_1, \ldots, M_l)^t$ ein davon unabhängiges l-dimensionales Poissonsches Zufallsmaß auf $(\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^k \setminus \{0\}), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}))$ mit zugehörigem Intensitätsmaß $\mu = (\lambda\big|_{\mathbb{R}_+} \otimes \nu_1, \ldots, \lambda\big|_{\mathbb{R}_+} \otimes \nu_l)^t$ und zugehörigem Kompensator $\widetilde{M} = (\widetilde{M}_1, \ldots, \widetilde{M}_l)^t$. Für jedes $j = 1, \ldots, l$ sei ν_j ein Lévy-Maß (d.h. ν_j ist ein Maß auf $(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}))$ mit $\int_{\mathbb{R}^k \setminus \{0\}} (|y|^2 \wedge 1) \nu_j(dy) < \infty$).
Ferner sei vorausgesetzt, dass sowohl die Brownsche Bewegung W als auch das Poissonsche Zufallsmaß M unabhängig von $\mathcal{F}_0$ sind.

Im Folgenden wird die Existenz und die Eindeutigkeit von Lösungen stochastischer Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} dX(t) &= A(t, X(t-))\, dt + B(t, X(t-))\, dW(t) + \int_{|z|<c} F(t, X(t-), z)\, \widetilde{M}(dt, dz) \\ &\quad + \int_{|z| \geq c} G(t, X(t-), z)\, M(dt, dz), \qquad (2.1) \\ X(0) &= X_0 \end{aligned}$$

für ein $c > 0$ untersucht. Hierbei ist zugelassen, dass die Koeffizienten A, B, F und G stochastische Prozesse sind, wobei die Abhängigkeit von ω in der Notation meist weggelassen wird.

Um dies zu präzisieren, seien

$$A : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^k \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k,$$

$$B : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^k \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times m},$$

$$F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times l},$$

$$G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times l}$$

$(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{F})$-messbare bzw. $(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{F})$-messbare Abbildungen. Weitere Voraussetzungen an diese Koeffizienten folgen im weiteren Verlauf dieses Kapitels. Ferner sei der Anfangswert X_0 eine $\mathbb{R}^k$-wertige $\mathcal{F}_0$-messbare Zufallsvariable.

Der in (2.1) durch G kontrollierte Term, der die großen Sprünge umfasst, lässt sich leicht mit Hilfe von „Vernetzungsmethoden“ behandeln. Aus diesem Grund betrachte man zunächst den Fall $G \equiv 0$, d.h. stochastische Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} dX(t) &= A(t, X(t-))\, dt + B(t, X(t-))\, dW(t) + \int_{|z|<c} F(t, X(t-), z)\, \widetilde{M}(dt, dz), \qquad (2.2) \\ X(0) &= X_0. \end{aligned}$$

Der nachfolgende Satz liefert die Existenz und die Eindeutigkeit von Lösungen derartiger stochastischer Differentialgleichungen. Für den Fall, dass die Koeffizienten A, B und F weder von der Zeit noch vom Zufall abhängen und das Poissonsche Zufallsmaß eindimensional ist, findet man einen ähnlichen Existenz- und Eindeutigkeitssatz in Applebaum [1, Theorem 6.2.3] und in Ikeda/Watanabe [11, IV. Theorem 9.1]. Für den Fall $F \equiv 0$ vergleiche man Flemming/Soner [8, Appendix D], die auch zufällige Koeffizienten zulassen.

Satz 2.1 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz für den Fall G ≡ 0)
Für feste Werte $x, z \in \mathbb{R}^k$ seien die Prozesse $A(\cdot, x, \cdot)$ und $B(\cdot, x, \cdot)$ progressiv-messbar bezüglich $\mathbb{F}$ und der Prozess $F(\cdot, x, z, \cdot)$ vorhersehbar bezüglich $\mathbb{F}$. Weiterhin existiere für jedes $T \geq 0$ eine Konstante $K_T > 0$, so dass für alle $t \in [0, T]$ und $x, y \in \mathbb{R}^k$ die globale Lipschitzbedingung

$$\begin{aligned} &\big|A(t,x) - A(t,y)\big|^2 + \big|B(t,x) - B(t,y)\big|^2 \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{l} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(t,x,z) - F^{(\cdot,j)}(t,y,z)\big|^2 \nu_j(dz) \;\leq\; K_T|x-y|^2 \end{aligned}$$

und die globale Wachstumsbedingung

$$\big|A(t,x)\big|^2 + \big|B(t,x)\big|^2 + \sum_{j=1}^{l} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(t,x,z)\big|^2 \nu_j(dz) \;\leq\; K_T\big(g(t)\big)^2 + K_T|x|^2$$

$\mathbb{P}$-fast sicher gelten. Hierbei sei $g = (g(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein stochastischer Prozess, der die folgende Integrabilitätsbedingung erfüllt:

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T \big(g(t)\big)^2\,dt\Big) \;<\; \infty \qquad \text{für alle } T\in\mathbb{R}_+. \tag{2.3}$$

Dann besitzt die stochastische Differentialgleichung (2.2) eine an $\mathbb{F}$ adaptierte Lösung $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, welche fast sicher rechtsstetige Pfade mit endlichen Linkslimiten besitzt. Ferner ist diese pfadweise eindeutig bestimmt, d.h. für zwei solche Lösungen X_1 und X_2 gilt

$$\mathbb{P}\Big(X_1(t) = X_2(t) \quad \text{für alle } t\in\mathbb{R}_+\Big) \;=\; 1.$$

Beweis. Teil A: Zunächst betrachte man den Fall $\mathbb{E}(|X_0|^2) < \infty$.
i) Existenz: Um die Existenz einer Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.2) zu zeigen, definiere man sich eine Folge von Prozessen $\{X_n = (X_n(t))_{t\in\mathbb{R}_+} : n\in\mathbb{N}_0\}$ durch

$$\begin{aligned} X_0(t) \;&:=\; X_0 \\ X_{n+1}(t) \;&:=\; X_0 + \int_{0+}^t A(s, X_n(s-))\,ds + \int_{0+}^t B(s, X_n(s-))\,dW(s) \\ &\qquad + \int_{0+}^t \int_{|z|<c} F(s, X_n(s-), z)\,\widetilde{M}(ds,dz) \end{aligned}$$

für alle $n\in\mathbb{N}_0$ und $t\in\mathbb{R}_+$.
Induktiv folgt aus dieser Definition, dass jeder Prozess X_n adaptiert an $\mathbb{F}$ ist und fast sicher rechtsstetige Pfade mit endlichen Linkslimiten besitzt.

Sei zunächst $n = 0$. Aufgrund der Gültigkeit der Ungleichung

$$\big|a_1 + \ldots + a_p\big|^2 \;\le\; p\Big(|a_1|^2 + \ldots + |a_p|^2\Big)$$

für $p\in\mathbb{N}$ und $a_1,\ldots,a_p\in\mathbb{R}^k$ und wegen der Hölder-Ungleichung für Zufallsvektoren (vgl. Kallenberg [15, Lemma 3.5]) gilt für alle $t\in\mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} &\big|X_1(t) - X_0(t)\big|^2 \\ &\;= \Big|\int_0^t A(s,X_0)\,ds + \int_0^t B(s,X_0)\,dW(s) + \int_0^t\int_{|z|<c} F(s,X_0,z)\,\widetilde{M}(ds,dz)\Big|^2 \\ &\;\le 3\Big(\Big|\int_0^t A(s,X_0)\,ds\Big|^2 + \Big|\int_0^t B(s,X_0)\,dW(s)\Big|^2 + \Big|\int_0^t\int_{|z|<c} F(s,X_0,z)\,\widetilde{M}(ds,dz)\Big|^2\Big) \\ &\;\le 3\Big(t\int_0^t \big|A(s,X_0)\big|^2\,ds + \Big|\int_0^t B(s,X_0)\,dW(s)\Big|^2 + \Big|\int_0^t\int_{|z|<c} F(s,X_0,z)\,\widetilde{M}(ds,dz)\Big|^2\Big). \end{aligned}$$

Bildet man auf beiden Seiten das Supremum über alle $t\in[0,T]$ sowie den Erwartungswert und wendet anschließend die Martingalungleichung von Doob sowie die Itô-Isometrie an, so erhält man für jedes $T \in \mathbb{R}_+$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}\big|X_1(t)-X_0(t)\big|^2\Big)\\
&\le\ 3T\mathbb{E}\bigg(\int_0^T \big|A(s,X_0)\big|^2\,ds\bigg)+3\mathbb{E}\bigg(\sup_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t B(s,X_0)\,dW(s)\Big|^2\bigg)\\
&\quad +3\mathbb{E}\bigg(\sup_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t\int_{|z|<c} F(s,X_0,z)\,\widetilde{M}(ds,dz)\Big|^2\bigg)\\
&\le\ 3T\mathbb{E}\bigg(\int_0^T \big|A(s,X_0)\big|^2\,ds\bigg)+3m\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^m\mathbb{E}\bigg(\sup_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t B^{(i,j)}(s,X_0)\,dW_j(s)\Big|^2\bigg)\\
&\quad +3l\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^l\mathbb{E}\bigg(\sup_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t\int_{|z|<c} F^{(i,j)}(s,X_0,z)\,\widetilde{M}_j(ds,dz)\Big|^2\bigg)\\
&\le\ 3T\mathbb{E}\bigg(\int_0^T \big|A(s,X_0)\big|^2\,ds\bigg)+12m\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^m\mathbb{E}\bigg(\Big|\int_0^T B^{(i,j)}(s,X_0)\,dW_j(s)\Big|^2\bigg)\\
&\quad +12l\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^l\mathbb{E}\bigg(\Big|\int_0^T\int_{|z|<c} F^{(i,j)}(s,X_0,z)\,\widetilde{M}_j(ds,dz)\Big|^2\bigg)\\
&=\ 3T\mathbb{E}\bigg(\int_0^T \big|A(s,X_0)\big|^2\,ds\bigg)+12m\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^m\mathbb{E}\bigg(\int_0^T \big|B^{(i,j)}(s,X_0)\big|^2\,ds\bigg)\\
&\quad +12l\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^l\mathbb{E}\bigg(\int_0^T\int_{|z|<c} \big|F^{(i,j)}(s,X_0,z)\big|^2\,\nu_j(dz)\,ds\bigg)\\
&=\ 3T\mathbb{E}\bigg(\int_0^T \big|A(s,X_0)\big|^2\,ds\bigg)+12m\mathbb{E}\bigg(\int_0^T \big|B(s,X_0)\big|^2\,ds\bigg)\\
&\quad +12l\sum_{j=1}^l\mathbb{E}\bigg(\int_0^T\int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(s,X_0,z)\big|^2\,\nu_j(dz)\,ds\bigg)\\
&\le\ C_1(T)\mathbb{E}\bigg(\int_0^T\Big\{\big|A(s,X_0)\big|^2+\big|B(s,X_0)\big|^2+\sum_{j=1}^l\int_{|z|<c}\big|F^{(\cdot,j)}(s,X_0,z)\big|^2\,\nu_j(dz)\Big\}\,ds\bigg)
\end{aligned}
$$

mit $C_1(T) := \max(3T, 12m, 12l)$.

Mit Hilfe der geforderten globalen Wachstumsbedingung folgt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}\big|X_1(t)-X_0(t)\big|^2\Big) &\le C_1(T)\mathbb{E}\bigg(\int_0^T\Big\{K_T\big(g(t)\big)^2+K_T|X_0|^2\Big\}\,dt\bigg)\\
&= C_1(T)K_T\mathbb{E}\bigg(\int_0^T\big(g(t)\big)^2\,dt\bigg)+C_1(T)TK_T\mathbb{E}\big(|X_0|^2\big)\\
&=: C_2(T).
\end{aligned}
$$

Wegen der Voraussetzung (2.3) und $\mathbb{E}(|X_0|^2) < \infty$ gilt $C_2(T) < \infty$.
Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ lässt sich mit den gleichen Argumenten wie oben für jedes $T \in \mathbb{R}_+$ die folgende Ungleichungskette schließen:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}\big|X_{n+1}(t) - X_n(t)\big|^2\Big) \\
&\quad\le\; 3T\mathbb{E}\Big(\int_{0+}^{T}\big|A(s,X_n(s-)) - A(s,X_{n-1}(s-))\big|^2\,ds\Big) \\
&\qquad +3\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}\Big|\int_{0+}^{t}\Big\{B(s,X_n(s-)) - B(s,X_{n-1}(s-))\Big\}\,dW(s)\Big|^2\Big) \\
&\qquad +3\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}\Big|\int_{0+}^{t}\int_{|z|<c}\Big\{F(s,X_n(s-),z) - F(s,X_{n-1}(s-),z)\Big\}\,\widetilde{M}(ds,dz)\Big|^2\Big) \\
&\quad\le\; 3T\mathbb{E}\Big(\int_{0+}^{T}\big|A(s,X_n(s-)) - A(s,X_{n-1}(s-))\big|^2\,ds\Big) \\
&\qquad +12m\mathbb{E}\Big(\int_{0+}^{T}\big|B(s,X_n(s-)) - B(s,X_{n-1}(s-))\big|^2\,ds\Big) \\
&\qquad +12l\sum_{j=1}^{l}\mathbb{E}\Big(\int_{0+}^{T}\int_{|z|<c}\big|F^{(\cdot,j)}(s,X_n(s-),z) - F^{(\cdot,j)}(s,X_{n-1}(s-),z)\big|^2\,\nu_j(dz)\,ds\Big) \\
&\quad\le\; C_1(T)\mathbb{E}\Big(\int_{0+}^{T}\Big\{\big|A(s,X_n(s-)) - A(s,X_{n-1}(s-))\big|^2 \\
&\qquad\qquad +\big|B(s,X_n(s-)) - B(s,X_{n-1}(s-))\big|^2 \\
&\qquad\qquad +\sum_{j=1}^{l}\int_{|z|<c}\big|F^{(\cdot,j)}(s,X_n(s-),z) - F^{(\cdot,j)}(s,X_{n-1}(s-),z)\big|^2\,\nu_j(dz)\Big\}\,ds\Big).
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der geforderten globalen Lipschitzbedingung sowie dem Satz von Fubini erhält man

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}\big|X_{n+1}(t) - X_n(t)\big|^2\Big) &\le\; C_1(T)K_T\int_{0+}^{T}\mathbb{E}\Big(\big|X_n(s-) - X_{n-1}(s-)\big|^2\Big)\,ds \qquad (2.4)\\
&\le\; C_1(T)K_T\int_{0}^{T}\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le u\le s}\big|X_n(u) - X_{n-1}(u)\big|^2\Big)\,ds.
\end{aligned}
$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich nun induktiv mit Hilfe der beiden obigen Abschätzungen, die man aus den Fällen '$n = 0$' und '$n \in \mathbb{N}$ beliebig' erhalten hat, die folgende Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}\big|X_{n+1}(t) - X_n(t)\big|^2\Big) \\
&\qquad\le\; (C_1(T))^n(K_T)^n\int_{0}^{T}\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le u\le s}\big|X_1(u) - X_0(u)\big|^2\Big)\,ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le (C_1(T))^n (K_T)^n \mathbb{E}\Big(\sup_{0\le u\le T}\big|X_1(u)-X_0(u)\big|^2\Big)\frac{T^n}{n!}\\
&\le C_2(T)\frac{\big(C_1(T)K_T T\big)^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Zwischenbehauptung: Die Folge $(X_n(t))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist für jedes $t\in\mathbb{R}_+$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

Für $m,n\in\mathbb{N}$ mit $m<n$ und für alle $0\le t\le T$ gilt mit Hilfe der Minkowski-Ungleichung

$$
\begin{aligned}
\Big(\mathbb{E}\Big(\big|X_n(t)-X_m(t)\big|^2\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} &\le \sum_{r=m}^{n-1}\Big(\mathbb{E}\Big(\big|X_{r+1}(t)-X_r(t)\big|^2\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\le \sum_{r=m}^{n-1}\Big(\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}\big|X_{r+1}(t)-X_r(t)\big|^2\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\le \sum_{r=m}^{n-1}\Big(C_2(T)\frac{\big(C_1(T)K_T T\big)^r}{r!}\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Da die Reihe auf der rechten Seite der Ungleichung konvergent ist, folgt daraus die Zwischenbehauptung.

Somit existiert für jedes $t\in\mathbb{R}_+$ ein $X(t)\in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ mit $X_n(t)\to X(t)$ in $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Mit Hilfe der $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$-Konvergenz lässt sich weiterhin für alle $m\in\mathbb{N}$ und $0\le t\le T$

$$
\begin{aligned}
\Big(\mathbb{E}\Big(\big|X(t)-X_m(t)\big|^2\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} &= \lim_{n\to\infty}\Big(\mathbb{E}\Big(\big|X_n(t)-X_m(t)\big|^2\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\le \lim_{n\to\infty}\sum_{r=m}^{n-1}\Big(C_2(T)\frac{\big(C_1(T)K_T T\big)^r}{r!}\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&= \sum_{r=m}^{\infty}\Big(C_2(T)\frac{\big(C_1(T)K_T T\big)^r}{r!}\Big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\sup_{0\le t\le T}\Big(\mathbb{E}\Big(\big|X(t)-X_m(t)\big|^2\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{r=m}^{\infty}\Big(C_2(T)\frac{\big(C_1(T)K_T T\big)^r}{r!}\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{2.5}
$$

folgern.

Mit Hilfe der Markov-Ungleichung gilt weiterhin für alle $T\in\mathbb{R}_+$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le t\le T}\big|X_{n+1}(t)-X_n(t)\big|\ge\frac{1}{2^n}\Big) &\le 4^n\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}\big|X_{n+1}(t)-X_n(t)\big|^2\Big)\\
&\le C_2(T)\frac{\big(4C_1(T)K_T T\big)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

und somit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\sup_{0\le t\le T} \big|X_{n+1}(t) - X_n(t)\big| \ge \frac{1}{2^n}\Big) \;\le\; \sum_{n=0}^{\infty} C_2(T)\frac{\big(4C_1(T)K_T T\big)^n}{n!} \;<\; \infty.$$

Nach dem Lemma von Borel-Cantelli gilt daher für alle $T \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_{n\to\infty} \Big\{ \sup_{0\le t\le T} \big|X_{n+1}(t) - X_n(t)\big| \ge \frac{1}{2^n}\Big\}\Big) \;=\; 0,$$

was äquivalent zu

$$\mathbb{P}\Big(\liminf_{n\to\infty} \Big\{ \sup_{0\le t\le T} \big|X_{n+1}(t) - X_n(t)\big| < \frac{1}{2^n}\Big\}\Big) \;=\; 1$$

ist. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert für fast alle $\omega \in \Omega$ ein $n_0 = n_0(\omega) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \ge n_0$ mit $n > m$

$$\sup_{0\le t\le T} \big|X_n(t)(\omega) - X_m(t)(\omega)\big| \;\le\; \sum_{r=m}^{n-1} \sup_{0\le t\le T} \big|X_{r+1}(t)(\omega) - X_r(t)(\omega)\big| \;<\; \sum_{r=m}^{n-1} \frac{1}{2^r} \;<\; \varepsilon$$

gilt. Somit ist die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine fast sicher gleichmäßige Cauchy-Folge auf jedem kompakten Intervall $[0,T]$ und daher fast sicher gleichmäßig konvergent gegen $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ auf $[0,T]$. Daraus folgt, dass der Prozess X adaptiert an $\mathbb{F}$ ist und fast sicher rechtsstetige Pfade mit endlichen Linkslimiten besitzt.

Es muss noch verifiziert werden, dass der Prozess X eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.2) ist. Dazu definiere man den Prozess $\widetilde{X} = (\widetilde{X}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ durch

$$\begin{aligned} \widetilde{X}(t) \;&:=\; X_0 + \int_{0+}^{t} A(s, X(s-))\,ds + \int_{0+}^{t} B(s, X(s-))\,dW(s) \\ &\quad + \int_{0+}^{t}\int_{|z|<c} F(s, X(s-), z)\,\widetilde{M}(ds, dz). \end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{X}(t) - X_{n+1}(t) \;&=\; \int_{0+}^{t} \Big\{A(s, X(s-)) - A(s, X_n(s-))\Big\}\,ds \\ &\quad + \int_{0+}^{t} \Big\{B(s, X(s-)) - B(s, X_n(s-))\Big\}\,dW(s) \\ &\quad + \int_{0+}^{t}\int_{|z|<c} \Big\{F(s, X(s-), z) - F(s, X_n(s-), z)\Big\}\,\widetilde{M}(ds, dz). \end{aligned}$$

Mit der gleichen Argumentation, wie die Ungleichung (2.4) gefolgert wurde, erhält man mit Hilfe der Abschätzung (2.5) für alle $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\big|\widetilde{X}(t) - X_{n+1}(t)\big|^2\Big) &\leq C_1(T)K_T \int_{0+}^{T} \mathbb{E}\Big(\big|X(s-) - X_n(s-)\big|^2\Big)\, ds \\
&\leq C_1(T)K_T T \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\Big(\big|X(t) - X_n(t)\big|^2\Big) \\
&\leq C_1(T)K_T T \left(\sum_{r=n}^{\infty}\left(C_2(T)\frac{\big(C_1(T)K_T T\big)^r}{r!}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 .
\end{aligned}$$

Da die Summe auf der rechten Seite konvergent ist, konvergiert die Folge $(X_n(t))_{n\in\mathbb{N}_0}$ für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gegen $\widetilde{X}(t)$ und aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt $\widetilde{X}(t) = X(t)$ fast sicher. Beide Prozesse besitzen fast sicher rechtsstetige Pfade, also sind X und $\widetilde{X}$ ununterscheidbar. Der Prozess $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ ist daher eine gesuchte Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.2).

ii) <u>Eindeutigkeit</u>: Die Eindeutigkeit folgt mit Hilfe des Gronwall-Lemmas (vgl. Applebaum [1, Proposition 6.1.4]). Dazu seien $X_1 = (X_1(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ und $X_2 = (X_2(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ zwei verschiedene $\mathbb{F}$-adaptierte Lösungen der stochastischen Differentialgleichung (2.2), welche fast sicher rechtsstetige Pfade mit endlichen Linkslimiten besitzen. Man definiere für jedes $n \in \mathbb{N}$ die beiden Stoppzeiten $S_n^{(1)}, S_n^{(2)} : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ durch

$$\begin{aligned}
S_n^{(1)} &:= \inf\big\{t \in \mathbb{R}_+ : |X_1(t)| \geq n\big\}, \\
S_n^{(2)} &:= \inf\big\{t \in \mathbb{R}_+ : |X_2(t)| \geq n\big\},
\end{aligned}$$

und setze $S_n := S_n^{(1)} \wedge S_n^{(2)}$. Da X_1 und X_2 càdlàg-Prozesse sind, gilt $S_n \nearrow \infty$ fast sicher. Für $t \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
&X_1(t \wedge S_n) - X_2(t \wedge S_n) \\
&\quad= \int_{0+}^{t\wedge S_n} \Big\{A(u, X_1(u-)) - A(u, X_2(u-))\Big\}\, du \\
&\qquad+ \int_{0+}^{t\wedge S_n} \Big\{B(u, X_1(u-)) - B(u, X_2(u-))\Big\}\, dW(u) \\
&\qquad+ \int_{0+}^{t\wedge S_n} \int_{|z|<c} \Big\{F(u, X_1(u-), z) - F(u, X_2(u-), z)\Big\}\, \widetilde{M}(du, dz).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Hölder-Ungleichung für Zufallsvektoren und der Itô-Isometrie folgt mit einer ähnlichen Argumentation wie im Beweis der Existenz für alle $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{t<S_n\}}\big|X_1(t) - X_2(t)\big|^2\Big) &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{t<S_n\}}\big|X_1(t\wedge S_n) - X_2(t\wedge S_n)\big|^2\Big) \\
&\leq \mathbb{E}\Big(\big|X_1(t\wedge S_n) - X_2(t\wedge S_n)\big|^2\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le\; 3\mathbb{E}\Big(\Big|\int_{0+}^{t\wedge S_n}\Big\{A(u,X_1(u-))-A(u,X_2(u-))\Big\}\,du\Big|^2\Big)\\
&\quad +3\mathbb{E}\Big(\Big|\int_{0+}^{t\wedge S_n}\Big\{B(u,X_1(u-))-B(u,X_2(u-))\Big\}\,dW(u)\Big|^2\Big)\\
&\quad +3\mathbb{E}\Big(\Big|\int_{0+}^{t\wedge S_n}\int_{|z|<c}\Big\{F(u,X_1(u-),z)-F(u,X_2(u-),z)\Big\}\,\widetilde{M}(du,dz)\Big|^2\Big)\\
&\le\; C_1(T)\mathbb{E}\Big(\int_{0+}^{t\wedge S_n}\Big\{\big|A(u,X_1(u-))-A(u,X_2(u-))\big|^2\\
&\qquad\qquad +\big|B(u,X_1(u-))-B(u,X_2(u-))\big|^2\\
&\qquad\qquad +\sum_{j=1}^{l}\int_{|z|<c}\big|F^{(\cdot,j)}(u,X_1(u-),z)-F^{(\cdot,j)}(u,X_2(u-),z)\big|^2\,\nu_j(dz)\Big\}du\Big).
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der geforderten Lipschitzbedingung sowie dem Satz von Fubini erhält man daraus

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{t<S_n\}}\big|X_1(t)-X_2(t)\big|^2\Big) &\le C_1(T)K_T\mathbb{E}\Big(\int_{0+}^{t\wedge S_n}\big|X_1(u-)-X_2(u-)\big|^2\,du\Big)\\
&= C_1(T)K_T\mathbb{E}\Big(\int_0^t \mathbb{1}_{\{u<S_n\}}\big|X_1(u)-X_2(u)\big|^2\,du\Big)\\
&= C_1(T)K_T\int_0^t \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{u<S_n\}}\big|X_1(u)-X_2(u)\big|^2\Big)\,du.
\end{aligned}
$$

Eine Anwendung des Gronwall-Lemmas liefert

$$
\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{t<S_n\}}\big|X_1(t)-X_2(t)\big|^2\Big) \;\le\; 0 \qquad \text{für alle } 0\le t\le T,
$$

d.h. $X_1(t)\mathbb{1}_{\{t<S_n\}} = X_2(t)\mathbb{1}_{\{t<S_n\}}$ fast sicher für alle $0\le t\le T$.
Wegen $\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{t<S_n\})=1$ folgt $X_1(t)=X_2(t)$ fast sicher für alle $0\le t\le T$. Daraus erhält man

$$
\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le t\le T}\big|X_1(t)-X_2(t)\big|=0\Big) \;=\; \mathbb{P}\Big(\bigcap_{0\le t\le T}\big\{\big|X_1(t)-X_2(t)\big|=0\big\}\Big) \;=\; 1, \tag{2.6}
$$

da die beiden Prozesse X_1 und X_2 fast sicher rechtsstetige Pfade besitzen. Da $T\in\mathbb{R}_+$ beliebig gewählt war, ergibt sich

$$
\mathbb{P}\Big(X_1(t)=X_2(t) \text{ für alle } t\in\mathbb{R}_+\Big) \;=\; \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{0\le t\le n}\big\{\big|X_1(t)-X_2(t)\big|=0\big\}\Big) \;=\; 1.
$$

Somit besitzt die stochastische Differentialgleichung (2.2) im Falle von $\mathbb{E}(|X_0|^2)<\infty$ eine eindeutig bestimmte, $\mathbb{F}$-adaptierte càdlàg-Lösung.

Teil B: Nun betrachte man den Fall $\mathbb{E}(|X_0|^2) = \infty$.
Der Beweis der Existenz erfolgt durch Abschneidetechniken. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiere man die Menge

$$\Omega_n \;:=\; \big\{\omega \in \Omega : |X_0(\omega)| \leq n\big\}.$$

Dann ist $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen Ω aufsteigende Folge von Mengen. Weiterhin definiere man für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$X_0^{(n)} \;:=\; X_0 \mathbb{1}_{\Omega_n}.$$

Nach Teil A besitzt die stochastische Differentialgleichung (2.2) mit dem Anfangswert $X(0) = X_0^{(n)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine eindeutig bestimmte, $\mathbb{F}$-adaptierte càdlàg-Lösung $X^{(n)} = (X^{(n)}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$.
Für $m \geq n$ und $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\begin{aligned}
&\Big(X^{(m)}(t) - X^{(n)}(t)\Big)\mathbb{1}_{\Omega_n}\\
&\qquad = \int_{0+}^{t} \Big\{A(u, X^{(m)}(u-)) - A(u, X^{(n)}(u-))\Big\}\mathbb{1}_{\Omega_n}\, du\\
&\qquad\quad + \int_{0+}^{t} \Big\{B(u, X^{(m)}(u-)) - B(u, X^{(n)}(u-))\Big\}\mathbb{1}_{\Omega_n}\, dW(u)\\
&\qquad\quad + \int_{0+}^{t}\int_{|z|<c} \Big\{F(u, X^{(m)}(u-), z) - F(u, X^{(n)}(u-), z)\Big\}\mathbb{1}_{\Omega_n}\, \widetilde{M}(du, dz).
\end{aligned}$$

Wie im Beweis der Eindeutigkeit im Fall A die Gleichung (2.6) gefolgert wurde, lässt sich auch hier mit den gleichen Argumenten

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq t\leq T} \big|X^{(m)}(t) - X^{(n)}(t)\big|\mathbb{1}_{\Omega_n} = 0\Big) \;=\; 1$$

folgern. Man definiere den Prozess $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ durch $X(t)(\omega) := X^{(n)}(t)(\omega)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\omega \in \Omega_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
X(t)\mathbb{1}_{\Omega_n} \;&=\; X^{(n)}(t)\mathbb{1}_{\Omega_n}\\
&=\; X_0^{(n)} + \int_{0+}^{t} A(u, X^{(n)}(u-))\mathbb{1}_{\Omega_n}\, du + \int_{0+}^{t} B(u, X^{(n)}(u-))\mathbb{1}_{\Omega_n}\, dW(u)\\
&\quad + \int_{0+}^{t}\int_{|z|<c} F(u, X^{(n)}(u-), z)\mathbb{1}_{\Omega_n}\, \widetilde{M}(du, dz)\\
&=\; X_0\mathbb{1}_{\Omega_n} + \int_{0+}^{t} A(u, X(u-))\mathbb{1}_{\Omega_n}\, du + \int_{0+}^{t} B(u, X(u-))\mathbb{1}_{\Omega_n}\, dW(u)\\
&\quad + \int_{0+}^{t}\int_{|z|<c} F(u, X(u-), z)\mathbb{1}_{\Omega_n}\, \widetilde{M}(du, dz)
\end{aligned}$$

$$= \Big(X_0 + \int_{0+}^{t} A(u, X(u-))\, du + \int_{0+}^{t} B(u, X(u-))\, dW(u)$$
$$+ \int_{0+}^{t} \int_{|z|<c} F(u, X(u-), z)\, \widetilde{M}(du, dz) \Big) \mathbb{1}_{\Omega_n}.$$

Wegen $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n) = 1$ und der Tatsache, dass X fast sicher rechtsstetige Pfade besitzt, folgt hieraus, dass X eine an $\mathbb{F}$ adaptierte càdlàg-Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.2) mit Anfangswert $X(0) = X_0$ ist.

Für die Eindeutigkeit sei $\widehat{X} = (\widehat{X}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine weitere Lösung.

<u>Zwischenbehauptung</u>: Für alle $m \geq n$ gilt $\widehat{X}(t)(\omega) = X^{(m)}(t)(\omega)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und fast alle $\omega \in \Omega_n$.

Angenommen es existiert ein $m \geq n$, so dass die Zwischenbehauptung nicht erfüllt ist. Man definiere den Prozess $\bar{X}^{(m)} = (\bar{X}^{(m)}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ durch

$$\bar{X}^{(m)}(t)(\omega) := \begin{cases} \widehat{X}(t)(\omega) & \text{falls } \omega \in \Omega_n, \\ X^{(m)}(t)(\omega) & \text{falls } \omega \notin \Omega_n. \end{cases}$$

In diesem Fall sind die beiden Prozesse $X^{(m)}$ und $\bar{X}^{(m)}$ zwei verschiedene Lösungen der stochastischen Differentialgleichung (2.2) mit Anfangswert $X^{(m)}(0) = \bar{X}^{(m)}(0) = X_0^{(m)}$, was zu einem Widerspruch der Eindeutigkeit im Fall A führt. Somit ist die Zwischenbehauptung bewiesen.

Da $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen Ω aufsteigende Folge ist, folgt mit Hilfe eines Grenzübergangs unmittelbar

$$\mathbb{P}\Big(X(t) = \widehat{X}(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+ \Big) = 1$$

und somit die Eindeutigkeit. ■

Bemerkung 2.2

Sind die Koeffizienten A, B und F und somit auch die stochastische Differentialgleichung (2.2) nur auf einem endlichen Zeithorizont $[0, T]$ für ein $T > 0$ definiert, so gilt ein analoger Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

Im Folgenden werden die Momente $\mathbb{E}(|X(t)|^k)$ der eindeutig bestimmten Lösung aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz 2.1 untersucht. Im Allgemeinen müssen diese nicht existieren, doch überträgt sich ihre Existenz vom Anfangswert X_0 auf alle Werte $X(t)$. Die

Burkholder-Davis-Gundy Ungleichung spielt dabei eine zentrale Rolle. In Krylov [22, II.5 Corollary 10] findet man eine entsprechende Aussage für den Fall $F \equiv 0$. Der nachfolgende Satz ist eine Verallgemeinerung und liefert auch im Fall $F \not\equiv 0$ eine Abschätzung der Momente.

Satz 2.3 (Momentenabschätzung)
Es seien die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes 2.1 erfüllt und es gelte

$$\mathbb{E}\big(|X_0|^{2^n}\big) \;<\; \infty \qquad \text{für ein } n \in \mathbb{N}.$$

Zusätzlich gelte die folgende Erweiterung der globalen Wachstumsbedingung aus Satz 2.1: Für jedes $T \geq 0$ existiere eine Konstante $K_T > 0$, so dass für alle $t \in [0,T]$ und $x \in \mathbb{R}^k$

$$\big|A(t,x)\big|^{2^d} + \big|B(t,x)\big|^{2^d} + \sum_{j=1}^{l} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(t,x,z)\big|^{2^d}\,\nu_j(dz) \;\leq\; K_T\big(g(t)\big)^{2^d} + K_T|x|^{2^d} \tag{2.7}$$

$\mathbb{P}$-fast sicher für alle $1 \leq d \leq n$ gelte. Hierbei sei $g = (g(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein stochastischer Prozess, der die folgende Integrabilitätsbedingung erfüllt:

$$\mathbb{E}\bigg(\int_0^T \big(g(t)\big)^{2^n}\,dt\bigg) \;<\; \infty \qquad \text{für alle } T \in \mathbb{R}_+.$$

Dann existiert für jedes $T \in \mathbb{R}_+$ eine Konstante $C = C(n, K_T, T) > 0$, so dass

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq t\leq T} \big|X(t)\big|^{2^n}\Big) \;\leq\; C \;<\; \infty$$

gilt, wobei $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ die eindeutig bestimmte Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.2) ist.

Beweis. Die Idee des Beweises ist, das Gronwall-Lemma (vgl. Applebaum [1, Proposition 6.1.4]) anzuwenden.
Sei $0 \leq t \leq T$ gegeben. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definiere man die Stoppzeit $S_k : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ durch

$$S_k \;:=\; \inf\big\{s \in \mathbb{R}_+ : |X(s)| \geq k\big\}.$$

Es gilt $S_k \nearrow \infty$ für $k \to \infty$. Aufgrund der Gültigkeit der Ungleichung

$$\Big(|a_1| + \ldots + |a_p|\Big)^q \;\leq\; p^{q-1}\Big(|a_1|^q + \ldots + |a_p|^q\Big) \;\leq\; p^{q-1}\Big(|a_1| + \ldots + |a_p|\Big)^q \tag{2.8}$$

für $p, q \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}^k$, sowie der Hölder-Ungleichung für Zufallsvektoren (vgl. Kallenberg [15, Lemma 3.5]) gilt für alle $s \in [0,t]$ und für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\big|X(s\wedge S_k)\big|^{2^n}\\
&\le \Big\{|X_0| + \Big|\int_{0+}^{s\wedge S_k} A(u,X(u-))\,du\Big| + \Big|\int_{0+}^{s\wedge S_k} B(u,X(u-))\,dW(u)\Big|\\
&\qquad + \Big|\int_{0+}^{s\wedge S_k}\int_{|z|<c} F(u,X(u-),z)\,\widetilde{M}(du,dz)\Big|\Big\}^{2^n}\\
&\le 4^{2^n-1}\Big\{|X_0|^{2^n} + \Big|\int_{0+}^{s\wedge S_k} A(u,X(u-))\,du\Big|^{2^n} + \Big|\int_{0+}^{s\wedge S_k} B(u,X(u-))\,dW(u)\Big|^{2^n}\\
&\qquad + \Big|\int_{0+}^{s\wedge S_k}\int_{|z|<c} F(u,X(u-),z)\,\widetilde{M}(du,dz)\Big|^{2^n}\Big\}\\
&\le 4^{2^n-1}\Big\{|X_0|^{2^n} + s^{2^n-1}\int_{0+}^{s\wedge S_k} \big|A(u,X(u-))\big|^{2^n}\,du + \Big|\int_{0+}^{s\wedge S_k} B(u,X(u-))\,dW(u)\Big|^{2^n}\\
&\qquad + \Big|\int_{0+}^{s\wedge S_k}\int_{|z|<c} F(u,X(u-),z)\,\widetilde{M}(du,dz)\Big|^{2^n}\Big\}.
\end{aligned}$$

Bildet man auf beiden Seiten das Supremum über alle $s \in [0,t]$ sowie den Erwartungswert, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}\big\{\mathbb{1}_{\{s<S_k\}}\big|X(s)\big|^{2^n}\big\}\Big)\\
&\qquad= \mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}\big\{\mathbb{1}_{\{s<S_k\}}\big|X(s\wedge S_k)\big|^{2^n}\big\}\Big)\\
&\qquad\le \mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}\big|X(s\wedge S_k)\big|^{2^n}\Big)\\
&\qquad\le 4^{2^n-1}\Big\{\mathbb{E}\big(|X_0|^{2^n}\big) + t^{2^n-1}\mathbb{E}\Big(\int_{0+}^{t\wedge S_k}\big|A(u,X(u-))\big|^{2^n}\,du\Big)\\
&\qquad\quad +\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}\Big|\int_{0+}^{s\wedge S_k} B(u,X(u-))\,dW(u)\Big|^{2^n}\Big)\\
&\qquad\quad +\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}\Big|\int_{0+}^{s\wedge S_k}\int_{|z|<c} F(u,X(u-),z)\,\widetilde{M}(du,dz)\Big|^{2^n}\Big)\Big\}\\
&\qquad\le 4^{2^n-1}\Big\{\mathbb{E}\big(|X_0|^{2^n}\big) + T^{2^n-1}\mathbb{E}\Big(\int_{0+}^{t\wedge S_k}\big|A(u,X(u-))\big|^{2^n}\,du\Big)\\
&\qquad\quad +\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}\Big|\int_{0+}^{s\wedge S_k} B(u,X(u-))\,dW(u)\Big|^{2^n}\Big)\\
&\qquad\quad +\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}\Big|\int_{0+}^{s\wedge S_k}\int_{|z|<c} F(u,X(u-),z)\,\widetilde{M}(du,dz)\Big|^{2^n}\Big)\Big\}. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Nun betrachte man die beiden letzten Terme der rechten Seite von (2.9) gesondert. Mit Hilfe der Ungleichung (2.8) sowie der Burkholder-Davis-Gundy Ungleichung (vgl. Satz 1.26) und der Hölder-Ungleichung gilt für den ersten Term

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\bigg(\sup_{0\le s\le t}\Big|\int_{0+}^{s\wedge S_k} B(u,X(u-))\,dW(u)\Big|^{2^n}\bigg)\\
&\quad\le\; k^{2^{n-1}-1}m^{2^n-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}\bigg(\sup_{0\le s\le t}\Big|\int_{0+}^{s\wedge S_k} B^{(i,j)}(u,X(u-))\,dW_j(u)\Big|^{2^n}\bigg)\\
&\quad\le\; k^{2^{n-1}-1}m^{2^n-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}C_{2^n}\mathbb{E}\bigg(\Big\{\int_{0+}^{t\wedge S_k}\big|B^{(i,j)}(u,X(u-))\big|^2\,du\Big\}^{2^{n-1}}\bigg)\\
&\quad\le\; k^{2^{n-1}-1}m^{2^n-1}C_{2^n}\mathbb{E}\bigg(\Big\{\int_{0+}^{t\wedge S_k}\big|B(u,X(u-))\big|^2\,du\Big\}^{2^{n-1}}\bigg)\\
&\quad\le\; k^{2^{n-1}-1}m^{2^n-1}T^{2^{n-1}-1}C_{2^n}\mathbb{E}\bigg(\int_{0+}^{t\wedge S_k}\big|B(u,X(u-))\big|^{2^n}\,du\bigg),
\end{aligned}\tag{2.10}$$

wobei $C_{2^n}>0$ eine von 2^n abhängige Konstante ist. Für den zweiten Term gilt ebenfalls mit Hilfe der Ungleichung (2.8) und der Burkholder-Davis-Gundy Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\bigg(\sup_{0\le s\le t}\Big|\int_{0+}^{s\wedge S_k}\int_{|z|<c} F(u,X(u-),z)\,\widetilde{M}(du,dz)\Big|^{2^n}\bigg)\\
&\le\; k^{2^{n-1}-1}l^{2^n-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\mathbb{E}\bigg(\sup_{0\le s\le t}\Big|\int_{0+}^{s\wedge S_k}\int_{|z|<c} F^{(i,j)}(u,X(u-),z)\,\widetilde{M}_j(du,dz)\Big|^{2^n}\bigg)\\
&\le\; k^{2^{n-1}-1}l^{2^n-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}C_{2^n}\mathbb{E}\bigg(\Big\{\int_{0+}^{t\wedge S_k}\int_{|z|<c}\big|F^{(i,j)}(u,X(u-),z)\big|^2 M_j(du,dz)\Big\}^{2^{n-1}}\bigg)\\
&\le\; k^{2^{n-1}-1}l^{2^n-1}C_{2^n}\sum_{j=1}^{l}\mathbb{E}\bigg(\Big\{\int_{0+}^{t\wedge S_k}\int_{|z|<c}\big|F^{(\cdot,j)}(u,X(u-),z)\big|^2 M_j(du,dz)\Big\}^{2^{n-1}}\bigg)\\
&\le\; k^{2^{n-1}-1}l^{2^n-1}C_{2^n}2^{2^{n-1}-1}\sum_{j=1}^{l}\mathbb{E}\bigg(\Big\{\int_{0+}^{t\wedge S_k}\int_{|z|<c}\big|F^{(\cdot,j)}(u,X(u-),z)\big|^2 \widetilde{M}_j(du,dz)\Big\}^{2^{n-1}}\bigg)\\
&\quad +k^{2^{n-1}-1}l^{2^n-1}C_{2^n}2^{2^{n-1}-1}\sum_{j=1}^{l}\mathbb{E}\bigg(\Big\{\int_{0+}^{t\wedge S_k}\int_{|z|<c}\big|F^{(\cdot,j)}(u,X(u-),z)\big|^2 \nu_j(dz)du\Big\}^{2^{n-1}}\bigg)\\
&\le\; \widetilde{C}_{2^n}\sum_{j=1}^{l}\mathbb{E}\bigg(\sup_{0\le s\le t}\Big|\int_{0+}^{s\wedge S_k}\int_{|z|<c}\big|F^{(\cdot,j)}(u,X(u-),z)\big|^2 \widetilde{M}_j(du,dz)\Big|^{2^{n-1}}\bigg)\\
&\quad +\widetilde{C}_{2^n}\mathbb{E}\bigg(\Big\{\int_{0+}^{t\wedge S_k}\Big[\sum_{j=1}^{l}\int_{|z|<c}\big|F^{(\cdot,j)}(u,X(u-),z)\big|^2 \nu_j(dz)\Big]du\Big\}^{2^{n-1}}\bigg)
\end{aligned}$$

mit $\widetilde{C}_{2^n} := k^{2^{n-1}-1} l^{2^n-1} C_{2^n} 2^{2^{n-1}-1}$. Eine erneute Anwendung der Burkholder-Davis-Gundy Ungleichung liefert

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t} \Big| \int_{0+}^{s\wedge S_k} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(u,X(u-),z)\big|^2 \widetilde{M}_j(du,dz)\Big|^{2^{n-1}}\Big) \\
&\le C_{2^{n-1}} \sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}\Big(\Big\{ \int_{0+}^{t\wedge S_k} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(u,X(u-),z)\big|^4 M_j(du,dz)\Big\}^{2^{n-2}}\Big) \\
&\le C_{2^{n-1}} 2^{2^{n-2}-1} \sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}\Big(\Big\{ \int_{0+}^{t\wedge S_k} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(u,X(u-),z)\big|^4 \widetilde{M}_j(du,dz)\Big\}^{2^{n-2}}\Big) \\
&\quad + C_{2^{n-1}} 2^{2^{n-2}-1} \sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}\Big(\Big\{ \int_{0+}^{t\wedge S_k} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(u,X(u-),z)\big|^4 \nu_j(dz)du\Big\}^{2^{n-2}}\Big) \\
&\le \widetilde{C}_{2^{n-1}} \sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t} \Big| \int_{0+}^{s\wedge S_k} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(u,X(u-),z)\big|^4 \widetilde{M}_j(du,dz)\Big|^{2^{n-2}}\Big) \\
&\quad + \widetilde{C}_{2^{n-1}} \mathbb{E}\Big(\Big\{ \int_{0+}^{t\wedge S_k} \Big[\sum_{j=1}^{l} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(u,X(u-),z)\big|^4 \nu_j(dz)\Big] du\Big\}^{2^{n-2}}\Big).
\end{aligned}
$$

Induktiv ergibt sich daraus

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t} \Big| \int_{0+}^{s\wedge S_k} \int_{|z|<c} F(u,X(u-),z)\, \widetilde{M}(du,dz)\Big|^{2^n}\Big) \\
&\le \widetilde{C}_{2^n} \mathbb{E}\Big(\Big\{ \int_{0+}^{t\wedge S_k} \Big[\sum_{j=1}^{l} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(u,X(u-),z)\big|^2 \nu_j(dz)\Big] du\Big\}^{2^{n-1}}\Big) \\
&\quad + \widetilde{C}_{2^n}\widetilde{C}_{2^{n-1}} \mathbb{E}\Big(\Big\{ \int_{0+}^{t\wedge S_k} \Big[\sum_{j=1}^{l} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(u,X(u-),z)\big|^{2^2} \nu_j(dz)\Big] du\Big\}^{2^{n-2}}\Big) \\
&\quad + \ldots + \\
&\quad + \widetilde{C}_{2^n} \cdot \ldots \cdot \widetilde{C}_2 \mathbb{E}\Big(\Big\{ \int_{0+}^{t\wedge S_k} \Big[\sum_{j=1}^{l} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(u,X(u-),z)\big|^{2^{n-1}} \nu_j(dz)\Big] du\Big\}^{2}\Big) \\
&\quad + \widetilde{C}_{2^n} \cdot \ldots \cdot \widetilde{C}_2 \sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}\Big(\Big\{ \int_{0+}^{t\wedge S_k} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(u,X(u-),z)\big|^{2^{n-1}} \widetilde{M}_j(du,dz)\Big\}^{2}\Big) \\
&\le \kappa(n) \sum_{d=1}^{n-1} \mathbb{E}\Big(\Big\{ \int_{0+}^{t\wedge S_k} \Big[\sum_{j=1}^{l} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(u,X(u-),z)\big|^{2^d} \nu_j(dz)\Big] du\Big\}^{2^{n-d}}\Big) \\
&\quad + \kappa(n) \sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}\Big(\Big\{ \int_{0+}^{t\wedge S_k} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(u,X(u-),z)\big|^{2^{n-1}} \widetilde{M}_j(du,dz)\Big\}^{2}\Big) \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

mit $\kappa(n) := \max\{\widetilde{C}_{2^n}, \widetilde{C}_{2^n}\widetilde{C}_{2^{n-1}}, \ldots, \widetilde{C}_{2^n} \cdot \ldots \cdot \widetilde{C}_2\}$. Eine Anwendung der Itô-Isometrie auf den zweiten Term der rechten Seite von (2.11) liefert insgesamt die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t} \Big| \int_{0+}^{s\wedge S_k} \int_{|z|<c} F(u, X(u-), z)\, \widetilde{M}(du, dz) \Big|^{2^n} \Big) \\
&\quad\le\ \kappa(n) \sum_{d=1}^{n} \mathbb{E}\bigg(\Big\{ \int_{0+}^{t\wedge S_k} \Big[\sum_{j=1}^{l} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(u, X(u-), z)\big|^{2^d} \nu_j(dz) \Big] du \Big\}^{2^{n-d}} \bigg). \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man die beiden Abschätzungen (2.10) und (2.12) sowie die geforderte Bedingung (2.7), so erhält man aus der Ungleichung (2.9)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t} \big\{ \mathbb{1}_{\{s<S_k\}} \big|X(s)\big|^{2^n} \big\} \Big) \\
&\quad\le\ 4^{2^n-1} \bigg\{ \mathbb{E}\big(|X_0|^{2^n}\big) + T^{2^n-1} \mathbb{E}\Big(\int_{0+}^{t\wedge S_k} \big|A(u, X(u-))\big|^{2^n} du \Big) \\
&\qquad + \mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t} \Big| \int_{0+}^{s\wedge S_k} B(u, X(u-))\, dW(u) \Big|^{2^n} \Big) \\
&\qquad + \mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t} \Big| \int_{0+}^{s\wedge S_k} \int_{|z|<c} F(u, X(u-), z)\, \widetilde{M}(du, dz) \Big|^{2^n} \Big) \bigg\} \\
&\quad\le\ 4^{2^n-1} \bigg\{ \mathbb{E}\big(|X_0|^{2^n}\big) + T^{2^n-1} \mathbb{E}\Big(\int_{0+}^{t\wedge S_k} \big|A(u, X(u-))\big|^{2^n} du \Big) \\
&\qquad + k^{2^{n-1}-1} m^{2^n-1} T^{2^{n-1}-1} C_{2^n} \mathbb{E}\Big(\int_{0+}^{t\wedge S_k} \big|B(u, X(u-))\big|^{2^n} du \Big) \\
&\qquad + \kappa(n) \sum_{d=1}^{n} \mathbb{E}\bigg(\Big\{ \int_{0+}^{t\wedge S_k} \Big[\sum_{j=1}^{l} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(u, X(u-), z)\big|^{2^d} \nu_j(dz) \Big] du \Big\}^{2^{n-d}} \bigg) \bigg\} \\
&\quad\le\ \tilde{\kappa}(n,T) \bigg\{ \mathbb{E}\big(|X_0|^{2^n}\big) + \mathbb{E}\Big(\int_{0+}^{t\wedge S_k} \Big\{ \big|A(u, X(u-))\big|^{2^n} + \big|B(u, X(u-))\big|^{2^n} \Big\} du \Big) \\
&\qquad + \sum_{d=1}^{n} \mathbb{E}\bigg(\Big\{ \int_{0+}^{t\wedge S_k} \Big[\sum_{j=1}^{l} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(u, X(u-), z)\big|^{2^d} \nu_j(dz) \Big] du \Big\}^{2^{n-d}} \bigg) \bigg\} \\
&\quad\le\ \tilde{\kappa}(n,T) \bigg\{ \mathbb{E}\big(|X_0|^{2^n}\big) + \mathbb{E}\Big(\int_{0+}^{t\wedge S_k} \Big[K_T\big(g(u)\big)^{2^n} + K_T\big|X(u-)\big|^{2^n} \Big] du \Big) \\
&\qquad + \sum_{d=1}^{n-1} \mathbb{E}\bigg(\Big\{ \int_{0+}^{t\wedge S_k} \Big[K_T\big(g(u)\big)^{2^d} + K_T\big|X(u-)\big|^{2^d} \Big] du \Big\}^{2^{n-d}} \bigg) \bigg\} \\
&\quad=\ \tilde{\kappa}(n,T) \bigg\{ \mathbb{E}\big(|X_0|^{2^n}\big) + \sum_{d=1}^{n} \mathbb{E}\bigg(\Big\{ \int_{0}^{t\wedge S_k} \Big[K_T\big(g(u)\big)^{2^d} + K_T\big|X(u)\big|^{2^d} \Big] du \Big\}^{2^{n-d}} \bigg) \bigg\}
\end{aligned}$$

mit $\tilde{\kappa}(n,T) := 4^{2^n-1} \max\{1, T^{2^n-1}, k^{2^{n-1}-1} m^{2^n-1} T^{2^{n-1}-1} C_{2^n}, \kappa(n)\}$.

Eine Anwendung der Hölder-Ungleichung und des Satzes von Fubini liefert unter Berücksichtigung von $\mathbb{E}(\int_0^T (g(s))^{2^n}\, ds) < \infty$ und $\mathbb{E}(|X_0|^{2^n}) < \infty$ die folgende Ungleichungskette:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}\big\{\mathbb{1}_{\{s<S_k\}}\big|X(s)\big|^{2^n}\big\}\Big)\\
&\le\ \tilde{\kappa}(n,T)\Bigg\{\mathbb{E}\big(|X_0|^{2^n}\big)+\sum_{d=1}^{n}2^{2^{n-d}-1}(K_T)^{2^{n-d}}\mathbb{E}\Bigg(\Big\{\int_0^{t\wedge S_k}\big(g(u)\big)^{2^d}\,du\Big\}^{2^{n-d}}\Bigg)\Bigg\}\\
&\quad+\tilde{\kappa}(n,T)\sum_{d=1}^{n}2^{2^{n-d}-1}(K_T)^{2^{n-d}}\mathbb{E}\Bigg(\Big\{\int_0^{t\wedge S_k}\big|X(u)\big|^{2^d}\,du\Big\}^{2^{n-d}}\Bigg)\\
&\le\ \tilde{\kappa}(n,T)\Bigg\{\mathbb{E}\big(|X_0|^{2^n}\big)+\sum_{d=1}^{n}2^{2^{n-d}-1}(K_T)^{2^{n-d}}t^{2^{n-d}-1}\mathbb{E}\Bigg(\int_0^{t\wedge S_k}\big(g(u)\big)^{2^n}\,du\Bigg)\Bigg\}\\
&\quad+\tilde{\kappa}(n,T)\sum_{d=1}^{n}2^{2^{n-d}-1}(K_T)^{2^{n-d}}t^{2^{n-d}-1}\mathbb{E}\Bigg(\int_0^{t\wedge S_k}\big|X(u)\big|^{2^n}\,du\Bigg)\\
&\le\ \tilde{\kappa}(n,T)\Bigg\{\mathbb{E}\big(|X_0|^{2^n}\big)+\Big(\sum_{d=1}^{n}2^{2^{n-d}-1}(K_T)^{2^{n-d}}T^{2^{n-d}-1}\Big)\mathbb{E}\Bigg(\int_0^{T}\big(g(u)\big)^{2^n}\,du\Bigg)\Bigg\}\\
&\quad+\tilde{\kappa}(n,T)\Big(\sum_{d=1}^{n}2^{2^{n-d}-1}(K_T)^{2^{n-d}}T^{2^{n-d}-1}\Big)\mathbb{E}\Bigg(\int_0^{t}\mathbb{1}_{\{u<S_k\}}\big|X(u)\big|^{2^n}\,du\Bigg)\\
&\le\ \tilde{\kappa}(n,T)\Bigg\{\mathbb{E}\big(|X_0|^{2^n}\big)+\Big(\sum_{d=1}^{n}2^{2^{n-d}-1}(K_T)^{2^{n-d}}T^{2^{n-d}-1}\Big)\mathbb{E}\Bigg(\int_0^{T}\big(g(u)\big)^{2^n}\,du\Bigg)\Bigg\}\\
&\quad+\tilde{\kappa}(n,T)\Big(\sum_{d=1}^{n}2^{2^{n-d}-1}(K_T)^{2^{n-d}}T^{2^{n-d}-1}\Big)\int_0^{t}\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le v\le u}\big\{\mathbb{1}_{\{v<S_k\}}\big|X(v)\big|^{2^n}\big\}\Big)\,du\\
&=:\ \alpha(n,K_T,T)+\beta(n,K_T,T)\int_0^{t}\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le v\le u}\big\{\mathbb{1}_{\{v<S_k\}}\big|X(v)\big|^{2^n}\big\}\Big)\,du,
\end{aligned}
$$

wobei $\alpha(n,K_T,T)$, $\beta(n,K_T,T) > 0$ zwei von n, K_T und T abhängige Konstanten sind. Eine Anwendung des Gronwall-Lemmas liefert für alle $0 \le t \le T$ und für alle $k \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}\big\{\mathbb{1}_{\{s<S_k\}}\big|X(s)\big|^{2^n}\big\}\Big)\ &\le\ \alpha(n,K_T,T)\exp\Big(\int_0^t\beta(n,K_T,T)\,du\Big)\\
&\le\ \underbrace{\alpha(n,K_T,T)\exp\Big(T\beta(n,K_T,T)\Big)}_{=:\,C(n,K_T,T)\,<\,\infty}.
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe des Lemmas von Fatou und der Tatsache, dass die Konstante $C(n,K_T,T)$ nicht von $k \in \mathbb{N}$ abhängt, folgt daraus für alle $0 \le t \le T$

$$
\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}\big|X(s)\big|^{2^n}\Big)\ \le\ \liminf_{k\to\infty}\ \mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}\big\{\mathbb{1}_{\{s<S_k\}}\big|X(s)\big|^{2^n}\big\}\Big)\ \le\ C(n,K_T,T)\ <\ \infty
$$

und somit die Behauptung. ■

Bemerkung 2.4
Gegeben sei ein l-dimensionaler Poisson-Prozess $N = (N_1, \dots, N_l)^t$ zum Parameter $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)^t \in (0, \infty)^l$. Ferner sei $M = (M_1, \dots, M_l)^t$ das zu N assoziierte l-dimensionale Poissonsche Zufallsmaß auf $(\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^k \setminus \{0\}), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}))$, das durch $M_j([0,t], A) := \#\{0 \leq s \leq t : \Delta(N_j(s)e_1) \in A\} = N_j(t)\,\varepsilon_{e_1}(A)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ und für alle $j = 1, \dots, l$ gegeben ist, wobei $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{R}^k$ der erste kanonische Einheitsvektor ist. In dieser Situation lässt sich die Ungleichung (2.7) aus Satz 2.3 unmittelbar aus der globalen Wachstumsbedingung des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes 2.1 herleiten:
Da das zu M zugehörige Intensitätsmaß $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)^t$ durch $\mu_j = \lambda|_{\mathbb{R}_+} \otimes \nu_j$ mit $\nu_j = \alpha_j \varepsilon_{e_1}$, $j = 1, \dots, l$, gegeben ist, gilt mit Hilfe der globalen Wachstumsbedingung für alle $1 \leq d \leq n$ und $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^k$

$$\begin{aligned}
\big|A(t,x)\big|^{2^d} &= \Big(\big|A(t,x)\big|^2\Big)^{2^{d-1}} \leq \Big(K_T\big(g(t)\big)^2 + K_T|x|^2\Big)^{2^{d-1}} \leq \widetilde{K}_T\big(g(t)\big)^{2^d} + \widetilde{K}_T|x|^{2^d}, \\
\big|B(t,x)\big|^{2^d} &= \Big(\big|B(t,x)\big|^2\Big)^{2^{d-1}} \leq \Big(K_T\big(g(t)\big)^2 + K_T|x|^2\Big)^{2^{d-1}} \leq \widetilde{K}_T\big(g(t)\big)^{2^d} + \widetilde{K}_T|x|^{2^d}
\end{aligned}$$

und im Fall $c > 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{l} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(t,x,z)\big|^{2^d}\,\nu_j(dz) &= \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \big|F^{(\cdot,j)}(t,x,e_1)\big|^{2^d} \\
&= \sum_{j=1}^{l} \frac{\alpha_j^{2^{d-1}}}{\alpha_j^{2^{d-1}-1}} \big|F^{(\cdot,j)}(t,x,e_1)\big|^{2^d} \\
&\leq \frac{1}{\min_{j=1,\dots,l}\{\alpha_j^{2^{d-1}-1}\}} \Big(\sum_{j=1}^{l} \alpha_j \big|F^{(\cdot,j)}(t,x,e_1)\big|^2\Big)^{2^{d-1}} \\
&\leq \frac{1}{\min_{j=1,\dots,l}\{\alpha_j^{2^{d-1}-1}\}} \Big(K_T\big(g(t)\big)^2 + K_T|x|^2\Big)^{2^{d-1}} \\
&\leq \widetilde{K}_T\big(g(t)\big)^{2^d} + \widetilde{K}_T|x|^{2^d}
\end{aligned}$$

für ein geeignetes $\widetilde{K}_T > 0$. Addiert man die drei Ungleichungen auf, so erhält man die Ungleichung (2.7) für eine geeignete Konstante.
In obiger Situation benötigt man für die Behauptung von Satz 2.3 also nur die Voraussetzungen aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz 2.1 sowie die beiden Bedingungen $\mathbb{E}(|X_0|^{2^n}) < \infty$ und $\mathbb{E}(\int_0^T (g(s))^{2^n}\,ds) < \infty$ für alle $T \in \mathbb{R}_+$.

Als Nächstes wird mit Hilfe einer „Vernetzungsmethode“ gezeigt, dass auch die ursprüngliche stochastische Differentialgleichung (2.1) der Form

$$\begin{aligned} dX(t) &= A(t,X(t-))\,dt + B(t,X(t-))\,dW(t) + \int_{|z|<c} F(t,X(t-),z)\,\widetilde{M}(dt,dz) \\ &\quad + \int_{|z|\geq c} G(t,X(t-),z)\,M(dt,dz), \\ X(0) &= X_0 \end{aligned}$$

unter gewissen Voraussetzungen eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Für den Fall, dass das Poissonsche Zufallsmaß eindimensional ist und die Koeffizienten A, B und F weder von der Zeit noch vom Zufall abhängen, findet man eine ähnliche Aussage in Applebaum [1, Theorem 6.2.9] und in Ikeda/Watanabe [11, IV. Theorem 9.1].

Satz 2.5 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)
Für feste Werte $x, z \in \mathbb{R}^k$ seien die Prozesse $A(\cdot,x,\cdot)$ und $B(\cdot,x,\cdot)$ progressiv-messbar bezüglich $\mathbb{F}$ und die Prozesse $F(\cdot,x,z,\cdot)$ und $G(\cdot,x,z,\cdot)$ vorhersehbar bezüglich $\mathbb{F}$. Weiterhin sei die Abbildung $x \mapsto G(t,x,z,\omega)$ stetig für alle $(t,z,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^k \times \Omega$. Es existiere eine Konstante $K > 0$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und $x, y \in \mathbb{R}^k$ die globale Lipschitzbedingung

$$\begin{aligned} &\big|A(t,x) - A(t,y)\big|^2 + \big|B(t,x) - B(t,y)\big|^2 \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{l} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(t,x,z) - F^{(\cdot,j)}(t,y,z)\big|^2 \,\nu_j(dz) \;\leq\; K|x-y|^2 \end{aligned}$$

und die globale Wachstumsbedingung

$$\big|A(t,x)\big|^2 + \big|B(t,x)\big|^2 + \sum_{j=1}^{l} \int_{|z|<c} \big|F^{(\cdot,j)}(t,x,z)\big|^2 \,\nu_j(dz) \;\leq\; K\big(g(t)\big)^2 + K|x|^2$$

$\mathbb{P}$-fast sicher gelten, wobei $g = (g(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein stochastischer Prozess ist, der die folgende Integrabilitätsbedingung erfüllt:

$$\mathbb{E}\bigg(\int_0^\infty \big(g(t)\big)^2\,dt\bigg) \;<\; \infty.$$

Dann besitzt die stochastische Differentialgleichung (2.1) eine eindeutige, $\mathbb{F}$-adaptierte Lösung $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, welche fast sicher rechtsstetige Pfade mit endlichen Linkslimiten besitzt.

Beweis. Wie in dem Spezialfall unterhalb von Satz 1.27 (vgl. S. 20) folgt, dass die Prozesse $P_j = (P_j(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, $j = 1,\ldots,l$, definiert durch

$$P_j(t) \;:=\; \int_{|z|\geq c} zM_j([0,t],dz),$$

zusammengesetzte Poisson-Prozesse sind, die fast sicher zu veschiedenen Zeitpunkten springen. Für $j = 1, \ldots, l$ sei $(T_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Sprungzeiten von P_j und $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der Menge $\{T_n^{(j)} : n \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, l\}$ mit $\tau_k < \tau_{k+1}$ fast sicher für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $Z_0 = (Z_0(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ die eindeutig bestimmte Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.2) mit Anfangswert $Z_0(0) = X_0$. Man setze

$$X(t) \;:=\; \begin{cases} Z_0(t) & \text{für } 0 \leq t < \tau_1, \\ Z_0(\tau_1-) + \sum_{j=1}^{l} G^{(\cdot,j)}(\tau_1, Z_0(\tau_1-), \Delta P_j(\tau_1))\mathbb{1}_{\{\Delta P_j(\tau_1)\neq 0\}} & \text{für } t = \tau_1. \end{cases}$$

Auf dem Intervall $[0, \tau_1]$ ist der Prozess $X = (X(t))_{t\in[0,\tau_1]}$ die eindeutig bestimmte Lösung von (2.1). Sei $Z_1 = (Z_1(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ die eindeutig bestimmte Lösung der um τ_1 geschifteten stochastischen Differentialgleichung (2.2) mit Anfangswert $Z_1(0) = X(\tau_1)$. Man setze weiterhin

$$X(t) \;:=\; \begin{cases} Z_1(t-\tau_1) & \text{für } \tau_1 < t < \tau_2, \\ & \\ Z_1((\tau_2-\tau_1)-) & \\ \quad + \sum_{j=1}^{l} G^{(\cdot,j)}(\tau_2, Z_1((\tau_2-\tau_1)-), \Delta P_j(\tau_2))\mathbb{1}_{\{\Delta P_j(\tau_2)\neq 0\}} & \text{für } t = \tau_2. \end{cases}$$

Sei $Z_2 = (Z_2(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ die eindeutig bestimmte Lösung der um τ_2 geschifteten stochastischen Differentialgleichung (2.2) mit Anfangswert $Z_2(0) = X(\tau_2)$, usw..
Mittels dieser rekursiven Definition erhält man einen an $\mathbb{F}$ adaptierten càdlàg-Prozess $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, der eine Lösung der ursprünglichen stochastischen Differentialgleichung (2.1) ist.

Die Eindeutigkeit der Lösung folgt unmittelbar aus der Eindeutigkeit der Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.2) und der Struktur der Vernetzung. ■

Kapitel 3

Stochastische Steuerung von Sprung-Diffusionen bei endlichem Zeithorizont

3.1 Problemstellung

Für einen endlichen Zeithorizont $T > 0$ definiere man die Menge $Q_0 := [0, T) \times \mathbb{R}^k$. Sei $F \subseteq \mathbb{R}^d$ eine abgeschlossene Teilmenge. Weiterhin seien $\Lambda : \overline{Q}_0 \times F \to \mathbb{R}^k$, $\Sigma : \overline{Q}_0 \times F \to \mathbb{R}^{k\times m}$ und $\Gamma : \overline{Q}_0 \times F \to \mathbb{R}^{k\times l}$ stetige Abbildungen, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- $\Lambda(\cdot,\cdot,u) : \overline{Q}_0 \to \mathbb{R}^k$, $\Sigma(\cdot,\cdot,u) : \overline{Q}_0 \to \mathbb{R}^{k\times m}$ und $\Gamma(\cdot,\cdot,u) : \overline{Q}_0 \to \mathbb{R}^{k\times l}$ sind aus $C^1(\overline{Q}_0)$ für alle $u \in F$.
- Es existiert ein $C_1 > 0$ mit

$$|\Lambda_t| + |\Lambda_x| \;\le\; C_1,\;\; |\Sigma_t| + |\Sigma_x| \;\le\; C_1,\;\; |\Gamma_t| + |\Gamma_x| \;\le\; C_1 \tag{3.1}$$

  und

$$\big|\Lambda(s,y,u)\big| + \big|\Sigma(s,y,u)\big| + \big|\Gamma(s,y,u)\big| \;\le\; C_1\big(1 + |y| + |u|\big) \tag{3.2}$$

  für alle $s \in [0, T]$, $y \in \mathbb{R}^k$ und $u \in F$.

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum versehen mit einer Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_s)_{s\in[0,T]}$, die die üblichen Voraussetzungen erfüllt. Bezüglich dieser stochastischen Basis sei $W = (W(s))_{s\in[0,T]}$ eine m-dimensionale Brownsche Bewegung und $N = (N(s))_{s\in[0,T]}$ ein davon unabhängiger l-dimensionaler Poisson-Prozess zum

Parameter $\alpha \in (0,\infty)^l$. Insgesamt spricht man von einem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitssystem

$$\mathcal{S}_T \;:=\; \Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F}, W, N\Big). \tag{3.3}$$

Bezüglich diesem betrachte man für $(t,x) \in Q_0$ die stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dX(s) &= \Lambda(s, X(s), u(s))\, ds + \Sigma(s, X(s), u(s))\, dW(s) + \Gamma(s, X(s-), u(s-))\, dN(s), \quad (3.4)\\ X(t) &= x \end{aligned}$$

für $s \in [t,T]$, wobei $u = (u(s))_{s\in[t,T]}$ ein an $\mathbb{F}$ adaptierter càdlàg-Prozess mit Werten in F ist. Man nennt den stochastischen Prozess u auch Steuerung und die stochastische Differentialgleichung dementsprechend gesteuerte stochastische Differentialgleichung.

Das Ziel der stochastischen Steuerung ist, eine bezüglich eines Nutzenfunktionals optimale zulässige Steuerung u (vgl. Definition 3.1) zu bestimmen.

Schreibweise: Die Lösung der gesteuerten stochastischen Differentialgleichung (3.4) mit Anfangsbedingung $X(t) = x$ wird mit $X^{t,x,u} = (X^{t,x,u}(s))_{s\in[t,T]}$ bezeichnet. Der Einfachheit halber werden im Folgenden die oberen Indizes t, x weggelassen.
Um die Abhängigkeit des Erwartungswertes von der Anfangsbedingung $X(t) = x$ dennoch hervorzuheben, wird der Erwartungswert mit einem oberen Index gekennzeichnet, d.h.

$$\mathbb{E}\big(\ldots X^{t,x,u}(s)\ldots\big) \;=\; \mathbb{E}^{t,x}\big(\ldots X^{u}(s)\ldots\big).$$

Definition 3.1 (Zulässige Steuerung)
Ein an $\mathbb{F}$ adaptierter càdlàg-Prozess $u = (u(s))_{s\in[t,T]}$ mit Werten in F heißt eine zulässige Steuerung, falls gilt:

i) Die gesteuerte stochastische Differentialgleichung (3.4) mit der Anfangsbedingung $X(t) = x$ besitzt eine eindeutige Lösung $X^u = (X^u(s))_{s\in[t,T]}$.

ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Integrabilitätsbedingung:

$$\mathbb{E}^{t,x}\left(\int_t^T \big|u(s)\big|^n\, ds\right) \;<\; \infty.$$

iii) Die eindeutig bestimmte Lösung $X^u = (X^u(s))_{s\in[t,T]}$ erfüllt

$$\mathbb{E}^{t,x}\Big(\sup_{t\le s\le T}\big|X^u(s)\big|^n\Big) \;<\; \infty \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dabei bezeichne man mit $\mathcal{A}(t,x)$ die Menge aller zulässigen Steuerungen u bei Start in $(t,x) \in Q_0$.

Mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 2 kann aufgrund der obigen Bedingungen an die Koeffizienten Λ, Σ und Γ gezeigt werden, dass jede Steuerung, die die Bedingung ii) aus der Definition 3.1 erfüllt, bereits zulässig ist (d.h. die Bedingungen i) und iii) aus Definition 3.1 sind in dieser Situation automatisch erfüllt).
Sei u eine Steuerung, die die Bedingung ii) erfüllt. Mit der Bezeichnungsweise aus Kapitel 2 setze man

$$\begin{aligned} A(s,y,\omega) &= \Lambda\big(s,y,u(s)(\omega)\big) + \Gamma\big(s,y,u(s-)(\omega)\big)\alpha, \\ B(s,y,\omega) &= \Sigma\big(s,y,u(s)(\omega)\big), \\ F(s,y,e_1,\omega) &= \Gamma\big(s,y,u(s-)(\omega)\big). \end{aligned}$$

Die globale Lipschitzbedingung aus Satz 2.1 folgt unmittelbar durch Anwendung des Mittelwertsatzes, da die benötigten partiellen Ableitungen der Funktionen Λ, Σ und Γ nach Voraussetzung (3.1) beschränkt sind. Setzt man weiterhin

$$g(s) \;:=\; 2 + \big|u(s)\big| + \big|u(s-)\big|,$$

so ist mit Hilfe von Voraussetzung (3.2) auch die globale Wachstumsbedingung aus Satz 2.1 erfüllt. Somit besitzt die gesteuerte stochastische Differentialgleichung (3.4) mit der Anfangsbedingung $X(t) = x$ eine eindeutige càdlàg-Lösung $X^u = (X^u(s))_{s\in[t,T]}$ (vgl. Bemerkung 2.2). Die Bedingung i) aus der Definition 3.1 ist also erfüllt. Eine Anwendung von Satz 2.3 liefert die gefordete Integrabilitätsbedingung aus der Bedingung iii) der Definition 3.1. Die zusätzliche erweiterte Wachstumsbedingung aus Satz 2.3 folgt unmittelbar aus der globalen Wachstumsbedingung des Satzes 2.1 (vgl. Bemerkung 2.4).

Es wird nun ein Problem betrachtet, in dem nur so lange gesteuert wird, wie sich der Prozess X^u innerhalb einer vorgegebenen Menge bewegt.
Dazu sei $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge, so dass der Rand $\partial\mathcal{O}$ im Fall von $\mathcal{O} \neq \mathbb{R}^k$ eine kompakte $(k-1)$-dimensionale C^3-Mannigfaltigkeit ist. Man definiere die Menge Q durch $Q := [0,T) \times \mathcal{O}$. Seien $L : \overline{Q}_0 \times F \to \mathbb{R}$ und $\Psi : \overline{Q}_0 \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die den polynomialen Wachstumsbedingungen

$$\big|L(s,y,u)\big| \;\leq\; C_2\big(1+|y|^p+|u|^p\big), \tag{3.5}$$

$$\big|\psi(s,y)\big| \;\leq\; C_2\big(1+|y|^p\big) \tag{3.6}$$

mit einem $p \in \mathbb{N}$ und $C_2 > 0$ genügen. Weiterhin sei $\tau_t : \Omega \to [t,T]$ gegeben durch

$$\tau_t \;:=\; \inf\big\{s \in [t,T] : (s, X^u(s)) \notin Q\big\},$$

d.h. τ_t ist die Erstaustrittszeit des Prozesses X^u aus der offenen Menge $\mathcal{O}$.

Für eine zulässige Steuerung $u \in \mathcal{A}(t,x)$ sei das Nutzenfunktional gegeben durch

$$J(t,x;u) \;:=\; \mathbb{E}^{t,x}\bigg(\int_t^{\tau_t} L(s,X^u(s),u(s))\,ds + \Psi(\tau_t, X^u(\tau_t))\bigg).$$

Die Definition einer zulässigen Steuerung und die Bedingungen (3.5) und (3.6) an die Funktionen L und Ψ gewährleisten, dass der Erwartungswert in der Definition des Nutzenfunktionals endlich ist.
Man nennt $L(s,X^u(s),u(s))$ den laufenden Nutzen und $\Psi(\tau_t, X^u(\tau_t))$ den Endnutzen.

Das Ziel ist nun, zu gegebenem Startwert $(t,x) \in Q$ das Nutzenfunktional $J(t,x;u)$ über alle zulässigen Steuerungen $u \in \mathcal{A}(t,x)$ zu maximieren, d.h. eine optimale Steuerung $u^* \in \mathcal{A}(t,x)$ zu finden, so dass

$$J(t,x;u^*) \;=\; \sup_{u\in\mathcal{A}(t,x)} J(t,x;u)$$

gilt. Die Funktion $V : Q \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$V(t,x) \;:=\; \sup_{u\in\mathcal{A}(t,x)} J(t,x;u),$$

heißt dann Wertefunktion des Maximierungsproblems. Sie ordnet jedem Startwert $(t,x) \in Q$ den maximalen Nutzen zu.

3.2 Heuristische Herleitung der HJB-Gleichung

Zur Lösung des in Abschnitt 3.1 vorgestellten Optimierungsproblems wird meist die sogenannte Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (HJB-Gleichung) verwendet. Sie wird im Folgenden mit dem Prinzip der dynamischen Programmierung (Bellman-Prinzip) heuristisch hergeleitet. Formal wird die Beziehung zwischen der Wertefunktion des Maximierungsproblems aus Abschnitt 3.1 und der HJB-Gleichung in Abschnitt 3.3 bewiesen.

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{O} = \mathbb{R}^k$, d.h. die beiden Mengen Q und Q_0 stimmen überein. Man setze die Wertefunktion V durch $V(T,x) = \Psi(T,x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^k$ zu einer Funktion auf $\overline{Q}_0$ fort. Das sogenannte Bellman-Prinzip besagt:

$$V(t,x) \;=\; \sup_{u\in\mathcal{A}(t,x)} \mathbb{E}^{t,x}\bigg(\int_t^{\theta} L(s,X^u(s),u(s))\,ds + V(\theta, X^u(\theta))\bigg) \tag{3.7}$$

für $(t,x) \in Q_0$ und $\theta \in [t,T]$.
Es wird angenommen, dass die auftretenden stochastischen Integrale bezüglich Martingalen den Erwartungswert 0 haben und dass die Vertauschung von Integral- und

Grenzwertoperator zulässig ist.
Seien $(t,x) \in Q_0$, $u \in \mathcal{A}(t,x)$ und $\theta \in [t,T]$ gegeben. Unter der Voraussetzung, dass $V \in C^{1,2}(Q_0)$ ist, folgt mit Hilfe der mehrdimensionalen Itô-Formel für Semimartingale

$$\begin{aligned}
& V(\theta, X^u(\theta)) \\
&= V(t,x) + \int_{t+}^{\theta} V_t(s, X^u(s-))\, ds + \sum_{i=1}^{k} \int_{t+}^{\theta} V_{x_i}(s, X^u(s-))\, d(X^u)^{(i)}(s) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} \int_{t+}^{\theta} V_{x_i x_j}(s, X^u(s-))\, d\big[(X^u)^{(i)}, (X^u)^{(j)}\big]^c(s) \\
&\quad + \sum_{t<s\leq\theta} \Big\{ V(s, X^u(s)) - V(s, X^u(s-)) - \sum_{i=1}^{k} V_{x_i}(s, X^u(s-)) \Delta (X^u)^{(i)}(s) \Big\} \\
&= V(t,x) + \int_{t}^{\theta} V_t(s, X^u(s))\, ds + \sum_{i=1}^{k} \int_{t}^{\theta} V_{x_i}(s, X^u(s)) \Lambda^{(i)}(s, X^u(s), u(s))\, ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \int_{t}^{\theta} V_{x_i}(s, X^u(s)) \Sigma^{(i,j)}(s, X^u(s), u(s))\, dW_j(s) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \int_{t+}^{\theta} V_{x_i}(s, X^u(s-)) \Gamma^{(i,j)}(s, X^u(s-), u(s-))\, dN_j(s) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} \sum_{n=1}^{m} \int_{t}^{\theta} V_{x_i x_j}(s, X^u(s)) \Sigma^{(i,n)}(s, X^u(s), u(s)) \Sigma^{(j,n)}(s, X^u(s), u(s))\, ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^{l} \int_{t+}^{\theta} \Big(V(s, X^u(s-) + \Gamma^{(\cdot,j)}(s, X^u(s-), u(s-))) - V(s, X^u(s-)) \Big)\, dN_j(s) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \int_{t+}^{\theta} V_{x_i}(s, X^u(s-)) \Gamma^{(i,j)}(s, X^u(s-), u(s-))\, dN_j(s) \\
&= V(t,x) + \int_{t}^{\theta} V_t(s, X^u(s))\, ds + \int_{t}^{\theta} \big(V_x(s, X^u(s))\big)^t \Lambda(s, X^u(s), u(s))\, ds \\
&\quad + \int_{t}^{\theta} \big(V_x(s, X^u(s))\big)^t \Sigma(s, X^u(s), u(s))\, dW(s) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{t}^{\theta} Spur\Big(\Sigma(s, X^u(s), u(s)) \big(\Sigma(s, X^u(s), u(s))\big)^t V_{xx}(s, X^u(s)) \Big)\, ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^{l} \int_{t+}^{\theta} \Big(V(s, X^u(s-) + \Gamma^{(\cdot,j)}(s, X^u(s-), u(s-))) - V(s, X^u(s-)) \Big)\, dN_j(s).
\end{aligned}$$

Addiert man auf beiden Seiten den Term $\int_t^\theta L(s, X^u(s), u(s))\, ds$ hinzu, so erhält man

$$
\begin{aligned}
&\int_t^\theta L(s, X^u(s), u(s))\, ds + V(\theta, X^u(\theta)) \\
&= \int_t^\theta L(s, X^u(s), u(s))\, ds + V(t,x) + \int_t^\theta V_t(s, X^u(s))\, ds \\
&\quad + \int_t^\theta \big(V_x(s, X^u(s))\big)^t \Lambda(s, X^u(s), u(s))\, ds + \int_t^\theta \big(V_x(s, X^u(s))\big)^t \Sigma(s, X^u(s), u(s))\, dW(s) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_t^\theta Spur\Big(\Sigma(s, X^u(s), u(s))\big(\Sigma(s, X^u(s), u(s))\big)^t V_{xx}(s, X^u(s))\Big)\, ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^{l} \int_{t+}^\theta \Big(V(s, X^u(s-) + \Gamma^{(\cdot,j)}(s, X^u(s-), u(s-))) - V(s, X^u(s-))\Big)\, dN_j(s) \\
&= \int_t^\theta L(s, X^u(s), u(s))\, ds + V(t,x) + \int_t^\theta V_t(s, X^u(s))\, ds \\
&\quad + \int_t^\theta \big(V_x(s, X^u(s))\big)^t \Lambda(s, X^u(s), u(s))\, ds + \int_t^\theta \big(V_x(s, X^u(s))\big)^t \Sigma(s, X^u(s), u(s))\, dW(s) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_t^\theta Spur\Big(\Sigma(s, X^u(s), u(s))\big(\Sigma(s, X^u(s), u(s))\big)^t V_{xx}(s, X^u(s))\Big)\, ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^{l} \int_{t+}^\theta \Big(V(s, X^u(s-) + \Gamma^{(\cdot,j)}(s, X^u(s-), u(s-))) - V(s, X^u(s-))\Big)\, d\big(N_j(s) - \alpha_j s\big) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \int_t^\theta \Big(V(s, X^u(s) + \Gamma^{(\cdot,j)}(s, X^u(s), u(s))) - V(s, X^u(s))\Big)\, ds.
\end{aligned}
$$

Erwartungswertbildung bezüglich $\mathbb{P}^{t,x}$ auf beiden Seiten (dabei benutze man, dass der Erwartungswert der stochastischen Integrale bezüglich Martingalen 0 ist) liefert

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{t,x}\Big(\int_t^\theta L(s, X^u(s), u(s))\, ds + V(\theta, X^u(\theta))\Big) \\
&\qquad = \mathbb{E}^{t,x}\Big(\int_t^\theta L(s, X^u(s), u(s))\, ds + V(t,x) + \int_t^\theta V_t(s, X^u(s))\, ds \\
&\qquad\quad + \int_t^\theta \big(V_x(s, X^u(s))\big)^t \Lambda(s, X^u(s), u(s))\, ds \\
&\qquad\quad + \frac{1}{2}\int_t^\theta Spur\Big(\Sigma(s, X^u(s), u(s))\big(\Sigma(s, X^u(s), u(s))\big)^t V_{xx}(s, X^u(s))\Big)\, ds \\
&\qquad\quad + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \int_t^\theta \Big(V(s, X^u(s) + \Gamma^{(\cdot,j)}(s, X^u(s), u(s))) - V(s, X^u(s))\Big)\, ds\Big).
\end{aligned}
$$

Bildet man nun auf beiden Seiten das Supremum über alle zulässigen Steuerungen und subtrahiert gleichzeitig den Term $V(t,x)$ (dabei benutze man die Gleichheit im Bellman-Prinzip, vgl. (3.7)), so erhält man

$$\begin{aligned}
0 \;=\; & \sup_{u\in\mathcal{A}(t,x)} \Big\{ \mathbb{E}^{t,x}\Big(\int_t^\theta L(s,X^u(s),u(s))\,ds + \int_t^\theta V_t(s,X^u(s))\,ds \\
& + \int_t^\theta \big(V_x(s,X^u(s))\big)^t \Lambda(s,X^u(s),u(s))\,ds \\
& + \frac{1}{2}\int_t^\theta Spur\Big(\Sigma(s,X^u(s),u(s))\big(\Sigma(s,X^u(s),u(s))\big)^t V_{xx}(s,X^u(s))\Big)\,ds \\
& + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \int_t^\theta \Big(V(s,X^u(s)+\Gamma^{(\cdot,j)}(s,X^u(s),u(s))) - V(s,X^u(s))\Big)\,ds\Big)\Big\}.
\end{aligned}$$

Multiplikation beider Seiten mit dem Term $\frac{1}{\theta - t}$ und anschließende Grenzwertbildung $\theta \searrow t$ liefert unter der Voraussetzung der Vertauschung von Integral- und Grenzwertoperator

$$\begin{aligned}
0 \;=\; & \sup_{u\in\mathcal{A}(t,x)} \Big\{ \mathbb{E}^{t,x}\Big(\lim_{\theta\searrow t} \frac{1}{\theta - t}\Big[\int_t^\theta L(s,X^u(s),u(s))\,ds + \int_t^\theta V_t(s,X^u(s))\,ds \\
& + \int_t^\theta \big(V_x(s,X^u(s))\big)^t \Lambda(s,X^u(s),u(s))\,ds \\
& + \frac{1}{2}\int_t^\theta Spur\Big(\Sigma(s,X^u(s),u(s))\big(\Sigma(s,X^u(s),u(s))\big)^t V_{xx}(s,X^u(s))\Big)\,ds \\
& + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \int_t^\theta \Big(V(s,X^u(s)+\Gamma^{(\cdot,j)}(s,X^u(s),u(s))) - V(s,X^u(s))\Big)\,ds\Big]\Big)\Big\} \\
=\; & \sup_{u\in\mathcal{A}(t,x)} \Big\{ \mathbb{E}^{t,x}\Big(L(t,X^u(t),u(t)) + V_t(t,X^u(t)) + \big(V_x(t,X^u(t))\big)^t \Lambda(t,X^u(t),u(t)) \\
& + \frac{1}{2} Spur\Big(\Sigma(t,X^u(t),u(t))\big(\Sigma(t,X^u(t),u(t))\big)^t V_{xx}(t,X^u(t))\Big) \\
& + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \Big(V(t,X^u(t)+\Gamma^{(\cdot,j)}(t,X^u(t),u(t))) - V(t,X^u(t))\Big)\Big)\Big\} \\
=\; & \sup_{u\in F} \Big\{ L(t,x,u) + V_t(t,x) + \big(V_x(t,x)\big)^t \Lambda(t,x,u) \\
& + \frac{1}{2} Spur\Big(\Sigma(t,x,u)\big(\Sigma(t,x,u)\big)^t V_{xx}(t,x)\Big) \\
& + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \Big(V(t,x+\Gamma^{(\cdot,j)}(t,x,u)) - V(t,x)\Big)\Big\}.
\end{aligned}$$

Die sogenannte HJB-Gleichung für das in Abschnitt 3.1 vorgestellte Maximierungsproblem ist somit gegeben durch

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; \sup_{u\in F} \Big\{ & L(t,x,u) + V_t(t,x) + \big(V_x(t,x)\big)^t \Lambda(t,x,u) \\
& + \frac{1}{2} Spur\Big(\Sigma(t,x,u)\big(\Sigma(t,x,u)\big)^t V_{xx}(t,x)\Big) \\
& + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \Big(V(t, x + \Gamma^{(\cdot,j)}(t,x,u)) - V(t,x)\Big)\Big\}.
\end{aligned}
$$

3.3 Ein Verifikationssatz für Lösungen der HJB-Gleichung

Für eine Funktion $G : \overline{Q}_0 \to \mathbb{R}$ mit $G \in C^{1,2}(Q)$ und für $(t,x) \in Q$ und $u \in F$ definiere man den Operator $\mathcal{E}^u$ durch

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}^u G(t,x) \;:=\; & G_t(t,x) + \big(G_x(t,x)\big)^t \Lambda(t,x,u) + \frac{1}{2} Spur\Big(\Sigma(t,x,u)\big(\Sigma(t,x,u)\big)^t G_{xx}(t,x)\Big) \\
& + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \Big(G(t, x + \Gamma^{(\cdot,j)}(t,x,u)) - G(t,x)\Big).
\end{aligned}
$$

Weiterhin definiere man die Menge

$$
\mathcal{C}Q \;:=\; \overline{Q}_0 \setminus Q \;=\; \Big([0,T) \times \mathcal{O}^c\Big) \cup \Big(\{T\} \times \mathbb{R}^k\Big).
$$

Die Zufallsvariable $(\tau_t, X^u(\tau_t))$ ist somit eine Abbildung von Ω nach $\mathcal{C}Q$.

Der nachfolgende Satz liefert einen Zusammenhang zwischen der Lösung der HJB-Gleichung und der Lösung des Steuerungsproblems aus Abschnitt 3.1. Im Vergleich zu Korn/Korn [18, V. Satz 11], Kraft [21, Theorem 1.3] oder auch Fleming/Soner [8, IV. Theorem 3.1], die lediglich den Fall $\Gamma \equiv 0$ betrachtet haben, wird hier ein allgemeinerer Fall bewiesen.

Satz 3.2 (Verifikationssatz für Lösungen der HJB-Gleichung)
Sei $G : \overline{Q}_0 \to \mathbb{R}$ mit $G \in C^{1,2}(Q) \cap C(\overline{Q})$ und $|G(t,x)| \le K(1 + |x|^d)$, $(t,x) \in \overline{Q}_0$, für ein $K > 0$ und $d \in \mathbb{N}$ geeignet, eine Lösung der HJB-Gleichung

$$
\sup_{u\in F} \Big(\mathcal{E}^u G(t,x) + L(t,x,u) \Big) \;=\; 0 \qquad \text{für } (t,x) \in Q, \tag{3.8}
$$

$$
G(t,x) \;=\; \Psi(t,x) \qquad \text{für } (t,x) \in \mathcal{C}Q. \tag{3.9}
$$

Dann gilt:

a) *$G(t,x) \geq J(t,x;u)$ für alle $(t,x) \in Q$ und $u \in \mathcal{A}(t,x)$.*

b) *Existiert für $(t,x) \in Q$ ein $u^* \in \mathcal{A}(t,x)$ mit*

$$u^*(s) \;\in\; \arg\max_{u \in F} \Big\{ \mathcal{E}^u G(s, X^{u^*}(s)) + L(s, X^{u^*}(s), u) \Big\} \tag{3.10}$$

für alle $s \in [t, \tau_t)$, so gilt

$$G(t,x) \;=\; V(t,x) \;=\; J(t,x;u^*).$$

D.h. für $(t,x) \in Q$ ist die Steuerung $u^* \in \mathcal{A}(t,x)$ optimal und die Funktion G entspricht der Wertefunktion des Optimierungsproblems.

Beweis.
a) Sei $(t,x) \in Q$ gegeben. Zu zeigen ist: Für jede zulässige Steuerung $u \in \mathcal{A}(t,x)$ gilt

$$G(t,x) \;\;\geq\;\; \mathbb{E}^{t,x}\bigg(\int_t^{\tau_t} L(s, X^u(s), u(s))\, ds + G(\tau_t, X^u(\tau_t)) \bigg).$$

Ist dies gezeigt, so folgt hieraus die Behauptung von a), da $G(s,y) = \Psi(s,y)$ für alle $(s,y) \in \mathcal{C}Q$ gilt.

Sei $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $\mathcal{O}$ aufsteigende Folge von beschränkten offenen Mengen mit $\overline{\mathcal{O}}_n \subseteq \mathcal{O}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man setze zum Beispiel

$$\mathcal{O}_n \;:=\; \mathcal{O} \cap \Big\{ x \in \mathbb{R}^k : |x| < n, \big|x - \partial\mathcal{O}\big| > \frac{1}{n} \Big\} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Ferner definiere man für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < T$ die Menge Q_n durch

$$Q_n \;:=\; \big[0, T - \frac{1}{n}\big) \times \mathcal{O}_n$$

sowie $\tau_t^{(n)} : \Omega \to [t, T - \frac{1}{n}]$ (für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$) durch

$$\tau_t^{(n)} \;:=\; \inf\Big\{ s \in \big[t, T - \frac{1}{n}\big] : (s, X^u(s)) \notin Q_n \Big\}.$$

Dann gilt $\tau_t^{(n)} \leq \tau_t$ fast sicher und $\tau_t^{(n)} \nearrow \tau_t$ fast sicher. Letzteres beruht auf der Tatsache, dass der Prozess $X^u = (X^u(s))_{s\in[t,T]}$ quasi-linksstetig ist (vgl. Jacod/Shiryaev [14, I. Proposition 2.26 und I. Proposition 3.27]).

Zwischenbehauptung: $\quad G(t,x) \;\geq\; \mathbb{E}^{t,x}\bigg(\displaystyle\int_t^{\tau_t^{(n)}} L(s, X^u(s), u(s))\, ds + G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)})) \bigg)$

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $(t,x) \notin Q_n$ folgt die Zwischenbehauptung unmittelbar aus der Tatsache, dass $\tau_t^{(n)} \equiv t$ ist. Sei also $n \in \mathbb{N}$ mit $(t,x) \in Q_n$ gegeben. Nach Voraussetzung gilt $G \in C^{1,2}(Q)$ und somit auch $G \in C^{1,2}(Q_{n+1})$. Man wähle eine Funktion $\overline{G} \in C^{1,2}(\overline{Q}_0)$ mit $\overline{G}(s,y) = G(s,y)$ für alle $(s,y) \in Q_{n+1}$. Eine Anwendung der mehrdimensionalen Itô-Formel für Semimartingale liefert

$$\begin{aligned}
&\overline{G}(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)})) \\
&\quad = \overline{G}(t,x) + \int_t^{\tau_t^{(n)}} \overline{G}_t(s, X^u(s))\, ds + \int_t^{\tau_t^{(n)}} \big(\overline{G}_x(s, X^u(s))\big)^t \Lambda(s, X^u(s), u(s))\, ds \\
&\qquad + \int_t^{\tau_t^{(n)}} \big(\overline{G}_x(s, X^u(s))\big)^t \Sigma(s, X^u(s), u(s))\, dW(s) \\
&\qquad + \frac{1}{2} \int_t^{\tau_t^{(n)}} \mathit{Spur}\Big(\Sigma(s, X^u(s), u(s)) \big(\Sigma(s, X^u(s), u(s))\big)^t \overline{G}_{xx}(s, X^u(s))\Big)\, ds \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{l} \int_{t+}^{\tau_t^{(n)}} \Big(\overline{G}(s, X^u(s-) + \Gamma^{(\cdot,j)}(s, X^u(s-), u(s-))) - \overline{G}(s, X^u(s-))\Big)\, dN_j(s).
\end{aligned}$$

Für $j = 1, \ldots, l$ definiere man die Menge A_j durch

$$A_j := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\tau_t^{(n)} = T_i^{(j)}\},$$

wobei $(T_i^{(j)})_{i \in \mathbb{N}}$ die Folge der Sprungstellen von N_j ist. Die Mengen $\{A_j : j = 1, \ldots, l\}$ sind fast sicher paarweise disjunkt, da die Poisson-Prozesse $\{N_j : j = 1, \ldots, l\}$ unabhängig sind und somit fast sicher zu verschiedenen Zeitpunkten springen (vgl. Satz 1.27). Auf der Menge Q_{n+1} stimmen die Funktionen $\overline{G}$ und G überein. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned}
&\overline{G}(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)})) \\
&\quad = G(t,x) + \int_t^{\tau_t^{(n)}} G_t(s, X^u(s))\, ds + \int_t^{\tau_t^{(n)}} \big(G_x(s, X^u(s))\big)^t \Lambda(s, X^u(s), u(s))\, ds \\
&\qquad + \int_t^{\tau_t^{(n)}} \big(G_x(s, X^u(s))\big)^t \Sigma(s, X^u(s), u(s))\, dW(s) \\
&\qquad + \frac{1}{2} \int_t^{\tau_t^{(n)}} \mathit{Spur}\Big(\Sigma(s, X^u(s), u(s)) \big(\Sigma(s, X^u(s), u(s))\big)^t G_{xx}(s, X^u(s))\Big)\, ds \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{l} \int_{t+}^{\tau_t^{(n)}-} \Big(G(s, X^u(s-) + \Gamma^{(\cdot,j)}(s, X^u(s-), u(s-))) - G(s, X^u(s-))\Big)\, dN_j(s) \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{l} \overline{G}(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)}-) + \Gamma^{(\cdot,j)}(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)}-), u(\tau_t^{(n)}-))) \mathbb{1}_{A_j} \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{l} G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)}-)) \mathbb{1}_{A_j}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Wegen der fast sicheren Gleichheit

$$\begin{aligned}\overline{G}(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)})) &= \sum_{j=1}^{l} \overline{G}(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)}-) + \Gamma^{(\cdot,j)}(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)}-), u(\tau_t^{(n)}-)))\mathbb{1}_{A_j} \\ &\quad + G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)}-))\mathbb{1}_{A^c}\end{aligned}$$

mit $A := \bigcup_{j=1}^{l} A_j$ ergibt sich aus (3.11)

$$\begin{aligned}&G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)}-)) \\ &\quad= G(t,x) + \int_t^{\tau_t^{(n)}} G_t(s, X^u(s))\,ds + \int_t^{\tau_t^{(n)}} \big(G_x(s, X^u(s))\big)^t \Lambda(s, X^u(s), u(s))\,ds \\ &\qquad + \int_t^{\tau_t^{(n)}} \big(G_x(s, X^u(s))\big)^t \Sigma(s, X^u(s), u(s))\,dW(s) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\int_t^{\tau_t^{(n)}} Spur\Big(\Sigma(s, X^u(s), u(s))\big(\Sigma(s, X^u(s), u(s))\big)^t G_{xx}(s, X^u(s))\Big)\,ds \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{l}\int_{t+}^{\tau_t^{(n)}-} \Big(G(s, X^u(s-) + \Gamma^{(\cdot,j)}(s, X^u(s-), u(s-))) - G(s, X^u(s-))\Big)\,dN_j(s).\end{aligned}$$

Addiert man nun auf beiden Seiten den Term $G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)})) - G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)}-))$, so erhält man

$$\begin{aligned}&G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)})) \\ &\quad= G(t,x) + \int_t^{\tau_t^{(n)}} G_t(s, X^u(s))\,ds + \int_t^{\tau_t^{(n)}} \big(G_x(s, X^u(s))\big)^t \Lambda(s, X^u(s), u(s))\,ds \\ &\qquad + \int_t^{\tau_t^{(n)}} \big(G_x(s, X^u(s))\big)^t \Sigma(s, X^u(s), u(s))\,dW(s) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\int_t^{\tau_t^{(n)}} Spur\Big(\Sigma(s, X^u(s), u(s))\big(\Sigma(s, X^u(s), u(s))\big)^t G_{xx}(s, X^u(s))\Big)\,ds \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{l}\int_{t+}^{\tau_t^{(n)}} \Big(G(s, X^u(s-) + \Gamma^{(\cdot,j)}(s, X^u(s-), u(s-))) - G(s, X^u(s-))\Big)\,dN_j(s).\end{aligned}$$

Dabei wurde die fast sichere Gleichheit

$$\begin{aligned}&G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)})) - G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)}-)) \\ &= \sum_{j=1}^{l}\Big(G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)}-) + \Gamma^{(\cdot,j)}(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)}-), u(\tau_t^{(n)}-))) - G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)}-))\Big)\mathbb{1}_{A_j}\end{aligned}$$

benutzt (man beachte, dass $G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)})) - G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)}-)) = 0$ auf der Menge A^c gilt).

Insgesamt ergibt sich unter Berücksichtigung der Definition des Operators $\mathcal{E}^u$ die fast sichere Gleichheit

$$
\begin{aligned}
&G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)})) - G(t,x) - \int_t^{\tau_t^{(n)}} \mathcal{E}^{u(s)} G(s, X^u(s))\, ds \\
&= \int_t^{\tau_t^{(n)}} \big(G_x(s, X^u(s))\big)^t \Sigma(s, X^u(s), u(s))\, dW(s) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{l} \int_{t+}^{\tau_t^{(n)}} \Big(G(s, X^u(s-) + \Gamma^{(\cdot,j)}(s, X^u(s-), u(s-))) - G(s, X^u(s-))\Big)\, d\widetilde{N}_j(s) \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

mit $\widetilde{N}_j(s) := N_j(s) - \alpha_j s$ für alle $j = 1, \ldots, l$.

Auf der Menge $[t, \tau_t^{(n)})$ gilt $(s, X^u(s)) \in Q_n$. Weiterhin ist die Menge $\mathcal{O}_n$ beschränkt und aufgrund der Forderung $\overline{\mathcal{O}}_n \subseteq \mathcal{O}_{n+1} \subseteq \mathcal{O}$ ist $\overline{Q}_n = [t, T - \frac{1}{n}] \times \overline{\mathcal{O}}_n \subseteq Q$ eine kompakte Teilmenge. Für eine geeignete Konstante $D > 0$ gilt folglich aufgrund der Stetigkeit von G_x auf Q und der Bedingung (3.2)

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{t,x}\bigg(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \big|\big(G_x(s, X^u(s))\big)^t \Sigma(s, X^u(s), u(s))\big|^2\, ds\bigg) \\
&\quad \le D\mathbb{E}^{t,x}\bigg(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \big|\Sigma(s, X^u(s), u(s))\big|^2\, ds\bigg) \\
&\quad \le DC_1^2 \mathbb{E}^{t,x}\bigg(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \Big(1 + \big|X^u(s)\big| + \big|u(s)\big|\Big)^2\, ds\bigg) \\
&\quad \le DC_1^2 3(T-t) + DC_1^2 3(T-t)\mathbb{E}^{t,x}\Big(\sup_{t \le s \le T} \big|X^u(s)\big|^2\Big) + DC_1^2 3\mathbb{E}^{t,x}\bigg(\int_t^T \big|u(s)\big|^2\, ds\bigg) \\
&\quad < \infty,
\end{aligned}
$$

da $u \in \mathcal{A}(t,x)$ eine zulässige Steuerung ist. Weiterhin gilt für jedes $j = 1, \ldots, l$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_j \mathbb{E}^{t,x}\bigg(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \Big(G(s, X^u(s) + \Gamma^{(\cdot,j)}(s, X^u(s), u(s))) - G(s, X^u(s))\Big)^2\, ds\bigg) \\
&\qquad \le 2\alpha_j \mathbb{E}^{t,x}\bigg(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \Big(G(s, X^u(s) + \Gamma^{(\cdot,j)}(s, X^u(s), u(s)))\Big)^2\, ds\bigg) \\
&\qquad\quad + 2\alpha_j \mathbb{E}^{t,x}\bigg(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \Big(G(s, X^u(s))\Big)^2\, ds\bigg) \\
&\qquad =: 2\alpha_j\, I_1 + 2\alpha_j\, I_2
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq K^2\mathbb{E}^{t,x}\Big(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \Big(1+\big|X^u(s)+\Gamma^{(\cdot,j)}(s,X^u(s),u(s))\big|^d\Big)^2\,ds\Big)\\
&\leq 2K^2(T-t)+2K^2\mathbb{E}^{t,x}\Big(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \big|X^u(s)+\Gamma^{(\cdot,j)}(s,X^u(s),u(s))\big|^{2d}\,ds\Big)\\
&\leq 2K^2(T-t)+2^{2d}K^2\mathbb{E}^{t,x}\Big(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \big|X^u(s)\big|^{2d}\,ds\Big)\\
&\quad +2^{2d}K^2\mathbb{E}^{t,x}\Big(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \big|\Gamma^{(\cdot,j)}(s,X^u(s),u(s))\big|^{2d}\,ds\Big)\\
&\leq 2K^2(T-t)+2^{2d}K^2(T-t)\mathbb{E}^{t,x}\Big(\sup_{t\leq s\leq T}\big|X^u(s)\big|^{2d}\Big)\\
&\quad +2^{2d}K^2C_1^{2d}\mathbb{E}^{t,x}\Big(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \Big(1+\big|X^u(s)\big|+\big|u(s)\big|\Big)^{2d}\,ds\Big)\\
&\leq 2K^2(T-t)+2^{2d}K^2(T-t)\mathbb{E}^{t,x}\Big(\sup_{t\leq s\leq T}\big|X^u(s)\big|^{2d}\Big)+2^{2d}3^{2d-1}K^2C_1^{2d}(T-t)\\
&\quad +2^{2d}3^{2d-1}K^2C_1^{2d}(T-t)\mathbb{E}^{t,x}\Big(\sup_{t\leq s\leq T}\big|X^u(s)\big|^{2d}\Big)\\
&\quad +2^{2d}3^{2d-1}K^2C_1^{2d}\mathbb{E}^{t,x}\Big(\int_t^T \big|u(s)\big|^{2d}\,ds\Big)\\
&< \infty
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq K^2\mathbb{E}^{t,x}\Big(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \Big(1+\big|X^u(s)\big|^d\Big)^2\,ds\Big)\\
&\leq 2K^2(T-t)+2K^2(T-t)\mathbb{E}^{t,x}\Big(\sup_{t\leq s\leq T}\big|X^u(s)\big|^{2d}\Big)\\
&< \infty
\end{aligned}
$$

nach Definition einer zulässigen Steuerung. Dabei wurden die Voraussetzung des Satzes und die Bedingung (3.2) benutzt.
Somit verschwinden die bezüglich $\mathbb{P}^{t,x}$ gebildeten Erwartungswerte der stochastischen Integrale

$$\int_t^{\tau_t^{(n)}} \big(G_x(s,X^u(s))\big)^t\Sigma(s,X^u(s),u(s))\,dW(s),$$

$$\int_{t+}^{\tau_t^{(n)}} \Big(G(s,X^u(s-)+\Gamma^{(\cdot,j)}(s,X^u(s-),u(s-)))-G(s,X^u(s-))\Big)\,d\widetilde{N}_j(s) \qquad (j=1,\dots,l).$$

Aus Gleichung (3.12) erhält man folglich

$$\mathbb{E}^{t,x}\Big(G(\tau_t^{(n)},X^u(\tau_t^{(n)}))-G(t,x)-\int_t^{\tau_t^{(n)}} \mathcal{E}^{u(s)}G(s,X^u(s))\,ds\Big) \;=\; 0.$$

Da G eine Lösung der HJB-Gleichung (3.8) ist, gilt für jede zulässige Steuerung $u \in \mathcal{A}(t,x)$ und für jedes $s \in [t, \tau_t^{(n)})$ (d.h. es gilt $(s, X^u(s)) \in Q_n \subseteq Q$)

$$\mathcal{E}^{u(s)} G(s, X^u(s)) + L(s, X^u(s), u(s)) \;\leq\; 0.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} G(t,x) &= \mathbb{E}^{t,x}\Big(-\int_t^{\tau_t^{(n)}} \underbrace{\mathcal{E}^{u(s)} G(s, X^u(s))}_{\leq\, -L(s,X^u(s),u(s))}\, ds + G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)}))\Big) \\ &\geq \mathbb{E}^{t,x}\Big(\int_t^{\tau_t^{(n)}} L(s, X^u(s), u(s))\, ds + G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)}))\Big) \end{aligned}$$

und somit ist die Zwischenbehauptung bewiesen.

Der Grenzübergang $n \to \infty$ erfolgt mit Hilfe des Satzes von Lebesgue. Aufgrund der Quasi-Linksstetigkeit des Prozesses $X^u = (X^u(s))_{s\in[t,T]}$ gilt $\tau_t^{(n)} \nearrow \tau_t$ fast sicher und somit auch

$$\mathbb{1}_{\{s<\tau_t^{(n)}\}} L(s, X^u(s), u(s)) \;\longrightarrow\; \mathbb{1}_{\{s<\tau_t\}} L(s, X^u(s), u(s)) \qquad \text{fast sicher.}$$

Weiterhin gilt nach Voraussetzung (3.5)

$$\big|\mathbb{1}_{\{s<\tau_t^{(n)}\}} L(s, X^u(s), u(s))\big| \;\leq\; C_2\Big(1 + \big|X^u(s)\big|^p + \big|u(s)\big|^p\Big)$$

mit

$$\begin{aligned} &C_2 \mathbb{E}^{t,x}\Big(\int_t^T \Big(1 + \big|X^u(s)\big|^p + \big|u(s)\big|^p\Big)\, ds\Big) \\ &\quad= C_2(T-t) + C_2\mathbb{E}^{t,x}\Big(\int_t^T \big|X^u(s)\big|^p\, ds\Big) + C_2\mathbb{E}^{t,x}\Big(\int_t^T \big|u(s)\big|^p\, ds\Big) \\ &\quad\leq C_2(T-t) + C_2(T-t)\mathbb{E}^{t,x}\Big(\sup_{t\leq s\leq T} \big|X^u(s)\big|^p\Big) + C_2\mathbb{E}^{t,x}\Big(\int_t^T \big|u(s)\big|^p\, ds\Big) \\ &\quad< \infty \end{aligned}$$

nach Definition einer zulässigen Steuerung. Mit dem Satz von Lebesgue folgt daraus

$$\mathbb{E}^{t,x}\Big(\int_t^{\tau_t^{(n)}} L(s, X^u(s), u(s))\, ds\Big) \;\longrightarrow\; \mathbb{E}^{t,x}\Big(\int_t^{\tau_t} L(s, X^u(s), u(s))\, ds\Big) \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Für den zweiten Term gilt aufgrund der Stetigkeit von G auf $\overline{Q}$ und der Quasi-Linksstetigkeit des Prozesses X^u

$$\lim_{n\to\infty} G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)})) \;=\; G(\tau_t, X^u(\tau_t)) \qquad \text{fast sicher.}$$

Nach Voraussetzung des Satzes gilt

$$\big|G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)}))\big| \;\le\; K\Big(1 + \big|X^u(\tau_t^{(n)})\big|^d\Big) \;\le\; K\Big(1 + \sup_{t\le s\le T}\big|X^u(s)\big|^d\Big) \tag{3.13}$$

mit

$$K\mathbb{E}^{t,x}\Big(1 + \sup_{t\le s\le T}\big|X^u(s)\big|^d\Big) \;=\; K + K\mathbb{E}^{t,x}\Big(\sup_{t\le s\le T}\big|X^u(s)\big|^d\Big) \;<\; \infty$$

nach Definition einer zulässigen Steuerung. Ebenfalls mit dem Satz von Lebesgue folgt daraus

$$\mathbb{E}^{t,x}\Big(G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)}))\Big) \;\longrightarrow\; \mathbb{E}^{t,x}\Big(G(\tau_t, X^u(\tau_t))\Big) \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Insgesamt erhält man somit mit Hilfe der obigen Zwischenbehauptung

$$G(t,x) \;\;\ge\;\; \mathbb{E}^{t,x}\bigg(\int_t^{\tau_t} L(s, X^u(s), u(s))\,ds + \underbrace{G(\tau_t, X^u(\tau_t))}_{=\,\Psi(\tau_t, X^u(\tau_t))}\bigg) \;\;=\;\; J(t,x;u)$$

und somit die Behauptung von a).

b) Für eine zulässige Steuerung u^*, die die Bedingung (3.10) erfüllt, erhält man Gleichheit in der Ungleichung aus Behauptung a) (d.h. es gilt $G(t,x) = J(t,x;u^*)$). Daraus ergibt sich

$$J(t,x;u^*) \;=\; G(t,x) \;\ge\; \sup_{u\in\mathcal{A}(t,x)} J(t,x;u) \;=\; V(t,x) \;\ge\; J(t,x;u^*)$$

und somit die Behauptung von b). ■

Bemerkung: Eine Funktion $G : \overline{Q}_0 \to \mathbb{R}$ mit $G \in C^{1,2}(Q) \cap C(\overline{Q})$, die (3.8) und (3.9) erfüllt, nennt man eine klassische $C^{1,2}$-Lösung der HJB-Gleichung. Erfüllt G zusätzlich die polynomiale Wachstumsbedingung aus dem Verifikationssatz, so nennt man G eine klassische $C^{1,2}$-Lösung der HJB-Gleichung mit höchstens polynomialem Wachstum.

Der oben aufgeführte Verifikationssatz begründet die folgende Vorgehensweise zur Lösung des Steuerungsproblems (vgl. Korn/Korn [18, S. 270] oder Kraft [21, S. 17]):

Vorgehensweise zur Lösung des Steuerungsproblems:

- Zu gegebenem $(t,x) \in Q$ löse man die Maximierungsaufgabe

  $$\sup_{v\in F}\Big(\mathcal{E}^v G(t,x) + L(t,x,v)\Big),$$

  indem man die Funktion G als gegeben ansieht. Dadurch erhält man einen optimalen Wert v^* in Abhängigkeit von t, x und der unbekannten Funktion G sowie ihren partiellen Ableitungen. Aufgefasst als Funktion in $(t,x) \in Q$, erhält man somit eine Funktion $u^*(t,x;G)$.

- Man setze die Funktion u^* in die HJB-Gleichung ein und löse die entstehende partielle Differential-Differenzen-Gleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{u^*(t,x;G)}G(t,x) + L(t,x,u^*(t,x;G)) &= 0 \qquad \text{für } (t,x) \in Q, \\ G(t,x) &= \Psi(t,x) \qquad \text{für } (t,x) \in \mathcal{C}Q. \end{aligned}$$

  Anschließend setze man die Lösung G und den Zustands-Prozess X^{u^*} in die Funktion u^* ein. Man erhält damit einen Kandidaten für die optimale Steuerung, der nicht mehr von G abhängt.

- In einem letzten Schritt überprüfe man die benötigten Voraussetzungen des Verifikationssatzes. Insbesondere überprüfe man, ob G die geforderten Eigenschaften aus dem Verifikationssatz erfüllt und ob u^* zulässig ist.

Bemerkung 3.3
Für eine beschränkte, stetige Funktion $q : \overline{Q}_0 \times F \to \mathbb{R}$ definiere man den Prozess $(D(s))_{s\in[t,T]}$ durch

$$D(s) \;=\; \exp\Big(\int_t^s q(r, X^u(r), u(r))\, dr \Big).$$

Betrachtet man ein Nutzenfunktional $J(t,x;u)$ von der Form

$$J(t,x;u) \;=\; \mathbb{E}^{t,x}\bigg(\int_t^{\tau_t} D(s) L(s, X^u(s), u(s))\, ds + D(\tau_t)\Psi(\tau_t, X^u(\tau_t)) \bigg),$$

so bleibt der oben aufgeführte Verifikationssatz 3.2 gültig. Man muss lediglich die HJB-Gleichung (3.8) aus dem Verifikationssatz durch die Gleichung

$$\sup_{u\in F} \Big(\mathcal{E}^u G(t,x) + L(t,x,u) + q(t,x,u) G(t,x) \Big) \;=\; 0 \qquad \text{für } (t,x) \in Q$$

ersetzen. Ein Spezialfall dieser Situation ist

$$D(s) \;=\; \exp\big(-\zeta(s-t) \big) \qquad (s \in [t,T])$$

für ein $\zeta > 0$, d.h. der Fall der diskontierten Kosten ist mit enthalten.

3.4 Beispiel: Finanzmarkt mit sprunghaften Preisen

Dieses Beispiel stellt eine Verallgemeinerung des Beispiels „Optimaler Konsum und optimales Endvermögen bei endlichem Horizont“ aus Korn/Korn [18, S. 276] dar, und zwar insofern, als dass die Aktienpreise hier durch Sprung-Diffusionen modelliert werden.

Zunächst wird ein Marktmodell entwickelt, um das Handeln eines Investors am Markt mathematisch beschreiben zu können. In diesem Marktmodell werden $d+1$ Wertpapiere gehandelt. Darunter befinden sich eine risikolose und d risikobehaftete Anlagen. Bei der risikolosen Anlage handelt es sich um ein Sparkonto, bei den risikobehafteten um Aktien. Im Folgenden wird dies in mathematischer Hinsicht präzisiert.

Für einen endlichen Zeithorizont $T > 0$ betrachte man ein zugrundeliegendes Wahrscheinlichkeitssystem $\mathcal{S}_T$ (vgl. (3.3)). Dabei beachte man, dass die m-dimensionale Brownsche Bewegung W und der l-dimensionale Poisson-Prozess N unabhängig sind.
Für $t \in [0, T)$ seien ferner $d+1$ Finanzgüter auf dem Zeithorizont $[t, T]$ gegeben:

- Der Preisverlauf $S^{(0)} = (S^{(0)}(s))_{s\in[t,T]}$ des Sparkontos entwickle sich gemäß

$$\begin{aligned} dS^{(0)}(s) &= rS^{(0)}(s)\,ds, \\ S^{(0)}(t) &= s_0 > 0. \end{aligned}$$

- Der Preisverlauf $S^{(i)} = (S^{(i)}(s))_{s\in[t,T]}$ der i-ten Aktie ($1 \le i \le d$) entwickle sich gemäß

$$\begin{aligned} dS^{(i)}(s) &= S^{(i)}(s-)\Big(\mu^{(i)}\,ds + \sum_{j=1}^{m}\sigma^{(i,j)}\,dW^{(j)}(s) + \sum_{j=1}^{l}\gamma^{(i,j)}\,d\big(N_j(s) - \alpha_j s\big)\Big), \\ S^{(i)}(t) &= s_i > 0. \end{aligned}$$

Hierbei sind $r > 0$, $\mu = (\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(d)})^t \in (0,\infty)^d$, $\sigma = (\sigma^{(i,j)})_{1\le i\le d, 1\le j\le m} \in \mathbb{R}^{d\times m}$ und $\gamma = (\gamma^{(i,j)})_{1\le i\le d, 1\le j\le l} \in (-1,\infty)^{d\times l}$. Weiterhin sei vorausgesetzt, dass $r < \mu^{(i)}$ für alle $i = 1, \ldots, d$ gilt, dass $m \ge d$ ist und dass die Matrix σ maximalen Rang hat, d.h. die Matrix $\sigma\sigma^t$ ist positiv definit.
Durch die Bedingung $\gamma \in (-1,\infty)^{d\times l}$ wird gewährleistet, dass die Aktienkurse zu jedem Zeitpunkt fast sicher strikt positiv sind.

In einen solchen Markt kann investiert werden. Für den Fall $\gamma \equiv 0$ vergleiche man für die nachfolgenden Definitionen das Buch von Korn/Korn [18].

Definition 3.4 (Handelsstrategie)
Eine Handelsstrategie η ist ein $\mathbb{R}^{d+1}$-wertiger, $\mathbb{F}$-adaptierter càdlàg-Prozess

$$\eta(s) := \Big(\eta^{(0)}(s), \eta^{(1)}(s), \ldots, \eta^{(d)}(s)\Big)^t \qquad (s \in [t, T])$$

mit

$$\int_t^T \left|\eta^{(0)}(s)\right| ds + \sum_{i=1}^{d} \int_t^T \left(\eta^{(i)}(s) S^{(i)}(s)\right)^2 ds \ < \ \infty \qquad \mathbb{P}\textit{-fast sicher.}$$

Der Wert $x := \sum_{i=0}^{d} \eta^{(i)}(t) s_i$ *heißt Anfangswert von* η.

Definition 3.5 (Vermögensprozess)
Sei η *eine Handelsstrategie mit Anfangswert* $x > 0$. *Dann definiert man den Vermögensprozess* $X = (X(s))_{s\in[t,T]}$ *bezüglich* η *mit Startvermögen* x *durch*

$$X(s) \ := \ \sum_{i=0}^{d} \eta^{(i)}(s) S^{(i)}(s).$$

Definition 3.6 (Konsumprozess)
Ein nicht-negativer, reellwertiger, $\mathbb{F}$*-adaptierter càdlàg-Prozess* $c = (c(s))_{s\in[t,T]}$ *mit*

$$\int_t^T c(s)\, ds \ < \ \infty \qquad \mathbb{P}\textit{-fast sicher}$$

heißt Konsumprozess.

Interpretation: Der Investor entnimmt seinem Vermögen kontinuierlich Geld mit Rate c, d.h. bis zur Zeit $s \in [t,T]$ hat er $\int_t^s c(u)\, du$ „konsumiert".

Definition 3.7 (Selbst-finanzierend)
Ein Paar (η, c)*, bestehend aus einer Handelsstrategie* η *und einem Konsumprozess* c *heißt selbst-finanzierend zum Startkapital* $x > 0$*, falls für den zugehörigen Vermögensprozess* X *für alle* $s \in [t,T]$ *gilt:*

$$X(s) \ = \ x + \int_t^s \eta^{(0)}(u)\, dS^{(0)}(u) + \sum_{i=1}^{d} \int_t^s \eta^{(i)}(u-)\, dS^{(i)}(u) - \int_t^s c(u)\, du \qquad \mathbb{P}\textit{-fast sicher}$$

(„aktuelles Vermögen" $=$ *„Startvermögen"* $+$ *„Gewinne/Verluste"* $-$ *„Konsum").*

Aufgrund der Definitionen einer Handelsstrategie und eines Konsumprozesses ist gewährleistet, dass die (stochastischen) Integrale der rechten Seite wohldefiniert sind.

Definition 3.8 (Selbst-finanzierender Portfolioprozess)
Sei (η, c) *ein selbst-finanzierendes Paar, bestehend aus einer Handelsstrategie* η *und einem Konsumprozess* c *mit* $X(s) > 0$ $\mathbb{P}$*-fast sicher für alle* $s \in [t,T]$*. Dann heißt der* $\mathbb{R}^d$*-wertige Prozess* $\pi = (\pi^{(1)}, \ldots, \pi^{(d)})^t$*, definiert durch*

$$\pi^{(i)}(s) \ = \ \frac{\eta^{(i)}(s) S^{(i)}(s)}{X(s)} \qquad (s \in [t,T]) \qquad \textit{für alle } 1 \le i \le d,$$

selbst-finanzierender Portfolioprozess zum Paar (η, c).

Bemerkung: Die i-te Koordinate des Portfolioprozesses gibt den Anteil vom Gesamtvermögen an, der zum Zeitpunkt $s \in [t,T]$ in die i-te Aktie investiert wird. Folglich entspricht

$$\pi^{(0)}(s) := \Big(1 - \big(\pi(s)\big)^t \underline{1}\Big) = \frac{\eta^{(0)}(s) S^{(0)}(s)}{X(s)} \qquad \text{mit } \underline{1} := (1,\ldots,1)^t \in \mathbb{R}^d$$

jenem Anteil des Gesamtvermögens, der zum Zeitpunkt $s \in [t,T]$ in das Sparkonto investiert wird.

Für den Vermögensprozess X lässt sich eine einfache stochastische Differentialgleichung, auch Vermögensgleichung genannt, herleiten. Dazu wird das Verhalten des Investors mittels eines selbst-finanzierenden Portfolioprozesses beschrieben.

Satz 3.9 (Vermögensgleichung)
Sei (η, c) ein selbst-finanzierendes Paar, bestehend aus einer Handelsstrategie η und einem Konsumprozess c mit $X(s) > 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher für alle $s \in [t,T]$. Dann erfüllt der Vermögensprozess $X = (X(s))_{s\in[t,T]}$ die folgende Vermögensgleichung:

$$\begin{aligned} dX(s) &= \Big(X(s)\big[r + \big(\pi(s)\big)^t(\mu - r\underline{1})\big] - c(s)\Big)\, ds + X(s)\big(\pi(s)\big)^t \sigma\, dW(s) \\ &\quad + X(s-)\big(\pi(s-)\big)^t \gamma\, d\big(N(s) - \alpha s\big), \\ X(t) &= x. \end{aligned}$$

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Definitionen 3.7 und 3.8. ■

Das Ziel des Investors ist, das Funktional

$$\mathbb{E}^{t,x}\left(\int_t^T \exp(-\beta s)\frac{\big(c(s)\big)^\lambda}{\lambda}\, ds + \frac{1}{\lambda}\big(X^{(\pi,c)}(T)\big)^\lambda\right), \tag{3.14}$$

für ein $\beta \geq 0$ und ein $\lambda \in (0,1)$, über alle Strategien (π, c) mit Werten in der abgeschlossenen Menge $\{v \in [0,\kappa]^d : \sum_{i=1}^d v_i \leq \kappa\} \times [0,\infty)$ zu maximieren, so dass der zugehörige Vermögensprozess $X^{(\pi,c)}$ fast sicher strikt positiv ist. Hierbei ist $\kappa > 0$ so gewählt, dass $z^t\gamma^{(\cdot,j)} > -1$ für alle $j = 1,\ldots,l$ und für alle $z \in \{v \in [0,\kappa]^d : \sum_{i=1}^d v_i \leq \kappa\}$ gilt, d.h. $\gamma \in (-\frac{1}{\kappa}, \infty)^{d\times l}$. Wie man später sehen wird, wird dadurch gewährleistet, dass der Vermögensprozess $X^{(\pi^*,c^*)}$ bei Start in $(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty)$ zum optimalen (π^*, c^*) fast sicher strikt positiv ist.

Das obige Maximierungsproblem wird mit Hilfe der in diesem Kapitel entwickelten Theorie gelöst. Dazu wird die Vermögensgleichung eines Investors mit Strategie (π, c) als gesteuerte stochastische Differentialgleichung der Form

$$\begin{aligned} dX(s) &= \Lambda(s, X(s), u(s))\, ds + \Sigma(s, X(s), u(s))\, dW(s) + \Gamma(s, X(s-), u(s-))\, dN(s) \\ X(t) &= x \end{aligned}$$

für $s \in [t,T]$ aufgefasst. Die Koeffizienten Λ, Σ, Γ und die Steuerung u haben dabei die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} u &= (u_1, u_2) := (\pi, c), \\ \Lambda(s,y,u) &= y\big[r + \pi^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big)\big] - c, \\ \Sigma(s,y,u) &= y\pi^t\sigma, \\ \Gamma(s,y,u) &= y\pi^t\gamma. \end{aligned}$$

Weiterhin definiere man die abgeschlossene Menge $F \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ durch

$$F := F_1 \times F_2 := \Big\{v \in [0,\kappa]^d : \sum_{i=1}^d v_i \le \kappa\Big\} \times \big[0,\infty\big),$$

die Menge Q durch

$$Q := [0,T) \times (0,\infty)$$

und die Stoppzeit $\tau_t : \Omega \to [t,T]$ durch

$$\tau_t := \inf\big\{s \in [t,T] : \big(s, X^{(\pi,c)}(s)\big) \notin Q\big\}.$$

Man betrachte das Nutzenfunktional $J(t,x;(\pi,c))$, gegeben durch

$$J(t,x;(\pi,c)) := \mathbb{E}^{t,x}\bigg(\int_t^{\tau_t} \exp(-\beta s)\frac{\big(c(s)\big)^\lambda}{\lambda}\,ds + \frac{1}{\lambda}\big(X^{(\pi,c)}(\tau_t)\big)^\lambda \mathbb{1}_{\{X^{(\pi,c)}(\tau_t)>0\}}\bigg).$$

Problem: Finde eine Funktion $G : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und eine zulässige Steuerung $u^* = (\pi^*, c^*) \in \mathcal{A}(t,x)$ mit

$$G(t,x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t,x)} J(t,x;u) = J(t,x;u^*).$$

Für $G : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $G \in C^{1,2}(Q)$, für $(t,x) \in Q$ und für $u = (\pi, c) \in F$ definiere man den Operator $\mathcal{E}^u = \mathcal{E}^{\pi,c}$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^u G(t,x) := {} & G_t(t,x) + \Big(x\big[r + \pi^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big)\big] - c\Big)G_x(t,x) + \frac{1}{2}x^2\pi^t\sigma\sigma^t\pi G_{xx}(t,x) \\ & + \sum_{j=1}^l \alpha_j\Big[G(t, x + x\pi^t\gamma^{(\cdot,j)}) - G(t,x)\Big]. \end{aligned}$$

Dann ist die zu dem Portfolioproblem zugehörige HJB-Gleichung gegeben durch

$$\begin{aligned} \sup_{u \in F}\Big\{\mathcal{E}^u G(t,x) + \exp(-\beta t)\frac{c^\lambda}{\lambda}\Big\} &= 0 \qquad \text{für } (t,x) \in Q, \\ G(t,x) &= \frac{x^\lambda}{\lambda}\mathbb{1}_{\{x>0\}} \qquad \text{für } (t,x) \in \mathcal{C}Q := \big([0,T) \times (-\infty,0]\big) \cup \big(\{T\} \times \mathbb{R}\big). \end{aligned}$$

Zur Lösung der HJB-Gleichung legt die vorgegebene Randbedingung den folgenden Separationsansatz nahe:

$$G(t,x) \;=\; f(t)\frac{x^\lambda}{\lambda}\mathbb{1}_{\{x>0\}} \qquad \text{mit} \qquad f(T) \;=\; 1. \tag{3.15}$$

Bestimmt man für $(t,x)\in Q$ alle partiellen Ableitungen, die im Ausdruck $\mathcal{E}^u G(t,x)$ auftreten, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}^u G(t,x) + \exp(-\beta t)\frac{c^\lambda}{\lambda}\\
&\quad= f'(t)\frac{x^\lambda}{\lambda} + \Big(x\big[r+\pi^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big)\big] - c\Big) f(t)x^{\lambda-1} + \frac{1}{2}x^2\pi^t\sigma\sigma^t\pi(\lambda-1)f(t)x^{\lambda-2}\\
&\qquad + \sum_{j=1}^{l}\alpha_j f(t)\frac{1}{\lambda}\Big[\big(x + x\pi^t\gamma^{(\cdot,j)}\big)^\lambda - x^\lambda\Big] + \exp(-\beta t)\frac{c^\lambda}{\lambda}\\
&\quad=:\; h_{t,x}(\pi,c)
\end{aligned}$$

mit $h_{t,x} : F_1 \times F_2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Definiert man die beiden Funktionen $h^{(1)}_{t,x} : F_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ und $h^{(2)}_{t,x} : F_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned}
h^{(1)}_{t,x}(\pi) \;&:=\; \big[r+\pi^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big)\big] f(t)x^\lambda + \frac{1}{2}\pi^t\sigma\sigma^t\pi(\lambda-1)f(t)x^\lambda\\
&\qquad + \sum_{j=1}^{l}\alpha_j\frac{1}{\lambda}\Big[\big(1+\pi^t\gamma^{(\cdot,j)}\big)^\lambda - 1\Big] f(t)x^\lambda,\\
h^{(2)}_{t,x}(c) \;&:=\; f'(t)\frac{x^\lambda}{\lambda} - cf(t)x^{\lambda-1} + \exp(-\beta t)\frac{c^\lambda}{\lambda},
\end{aligned}$$

so gilt $h_{t,x}(\pi,c) = h^{(1)}_{t,x}(\pi) + h^{(2)}_{t,x}(c)$ für alle $(\pi,c)\in F_1\times F_2$.
Unter der Annahme, dass die Funktion f strikt positiv ist (dies muss später noch überprüft werden), sieht man leicht, dass die Funktion $h^{(1)}_{t,x}$ genau dann maximal wird, wenn die Funktion $h^* : F_1 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$h^*(\pi) \;:=\; r+\pi^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big) + \frac{1}{2}\pi^t\sigma\sigma^t\pi(\lambda-1) + \sum_{j=1}^{l}\alpha_j\frac{1}{\lambda}\Big[\big(1+\pi^t\gamma^{(\cdot,j)}\big)^\lambda - 1\Big], \tag{3.16}$$

maximal wird (es gilt $x>0$, da $(t,x)\in Q$ ist). Da die Funktion h^* auf der kompakten Menge F_1 stetig und strikt konkav in π ist, besitzt h^* eine eindeutig bestimmte globale Maximalstelle $\pi^*\in F_1$. Man beachte dabei, dass π^* unabhängig von t und x ist. Die Funktion $h^{(2)}_{t,x}$ ist stetig, strikt konkav und nimmt offenbar ihr globales Maximum an einem kritischen Punkt an, d.h. für die globale Maximalstelle $c^*_{t,x}\in F_2$ gilt

$$(h^{(2)}_{t,x})'(c^*_{t,x}) \;=\; -f(t)x^{\lambda-1} + \exp(-\beta t)(c^*_{t,x})^{\lambda-1} \;=\; 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$c^*_{t,x} \;=\; \Big(\exp(\beta t) f(t) x^{\lambda-1}\Big)^{\frac{1}{\lambda-1}} \;=\; \Big(\exp(\beta t) f(t)\Big)^{\frac{1}{\lambda-1}} x.$$

Da sich die Funktion $h_{t,x}$ als Summe der beiden Funktionen $h^{(1)}_{t,x}$ und $h^{(2)}_{t,x}$ schreiben lässt, wird somit das globale Maximum von $h_{t,x}$ an der eindeutig bestimmten Stelle $(\pi^*, c^*_{t,x}) \in F_1 \times F_2$ angenommen, wobei sich das $c^*_{t,x}$ explizit angeben lässt.

Durch Einsetzen von π^* und $c^*_{t,x}$ in die HJB-Gleichung erhält man die folgende gewöhnliche Differentialgleichung für f:

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \mathcal{E}^{u^*} G(t,x) + \exp(-\beta t) \frac{(c^*_{t,x})^\lambda}{\lambda} \\
&=\; f'(t)\frac{x^\lambda}{\lambda} + \Big(r + (\pi^*)^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big) + \frac{1}{2}(\pi^*)^t \sigma\sigma^t \pi^* (\lambda - 1)\Big) f(t) x^\lambda \\
&\quad + \sum_{j=1}^{l} \frac{\alpha_j}{\lambda}\Big[\big(1 + (\pi^*)^t \gamma^{(\cdot,j)}\big)^\lambda - 1\Big] f(t) x^\lambda - \Big(\exp(\beta t) f(t)\Big)^{\frac{1}{\lambda-1}} f(t) x^\lambda \\
&\quad + \exp(-\beta t)\frac{1}{\lambda}\Big(\exp(\beta t) f(t)\Big)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} x^\lambda.
\end{aligned}$$

Teilt man beide Seiten durch x^λ, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
f'(t)\frac{1}{\lambda} \;&=\; -\Big(r + (\pi^*)^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big) + \frac{1}{2}(\pi^*)^t \sigma\sigma^t \pi^* (\lambda - 1)\Big) f(t) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{l} \frac{\alpha_j}{\lambda}\Big[\big(1 + (\pi^*)^t \gamma^{(\cdot,j)}\big)^\lambda - 1\Big] f(t) + \exp(-\beta t)\Big(\exp(\beta t) f(t)\Big)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \\
&\quad - \exp(-\beta t)\frac{1}{\lambda}\Big(\exp(\beta t) f(t)\Big)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \\
&=\; -\Big(r + (\pi^*)^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big) + \frac{1}{2}(\pi^*)^t \sigma\sigma^t \pi^* (\lambda - 1)\Big) f(t) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{l} \frac{\alpha_j}{\lambda}\Big[\big(1 + (\pi^*)^t \gamma^{(\cdot,j)}\big)^\lambda - 1\Big] f(t) + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)\exp(-\beta t)\exp\Big(\frac{\beta t \lambda}{\lambda - 1}\Big)\big(f(t)\big)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \\
&=\; -\Big(r + (\pi^*)^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big) + \frac{1}{2}(\pi^*)^t \sigma\sigma^t \pi^* (\lambda - 1)\Big) f(t) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{l} \frac{\alpha_j}{\lambda}\Big[\big(1 + (\pi^*)^t \gamma^{(\cdot,j)}\big)^\lambda - 1\Big] f(t) + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)\exp\Big(\frac{\beta t}{\lambda - 1}\Big)\big(f(t)\big)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}.
\end{aligned}$$

Multiplikation mit λ und Division durch $(1-\lambda)\big(f(t)\big)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}$ auf beiden Seiten liefert

$$\frac{1}{1-\lambda}\big(f(t)\big)^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} f'(t) \;=\; -\frac{A}{1-\lambda}\big(f(t)\big)^{\frac{1}{1-\lambda}} - \exp\Big(\frac{\beta t}{\lambda - 1}\Big), \tag{3.17}$$

wobei

$$\begin{aligned} A \; &:= \; \lambda\Big(r + (\pi^*)^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big) + \frac{1}{2}(\pi^*)^t\sigma\sigma^t\pi^*(\lambda - 1)\Big) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j\Big[\big(1 + (\pi^*)^t\gamma^{(\cdot,j)}\big)^\lambda - 1\Big]. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Nach Definition der Funktion h^* (vgl. (3.16)) gilt $A = \lambda h^*(\pi^*) \geq \lambda h^*(0) = \lambda r > 0$, da π^* auf der Menge F_1 die eindeutig bestimmte globale Maximalstelle der Funktion h^* ist.
Die Substitution

$$g(t) \; = \; \big(f(t)\big)^{\frac{1}{1-\lambda}} \tag{3.19}$$

ergibt

$$g'(t) \; = \; \frac{1}{1-\lambda}\big(f(t)\big)^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} f'(t).$$

Setzt man diese Substitution in die umgeformte HJB-Gleichung (3.17) ein, so erhält man die folgende gewöhnliche lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\begin{aligned} g'(t) \; &= \; -\frac{A}{1-\lambda}g(t) - \exp\Big(\frac{\beta t}{\lambda - 1}\Big), \\ g(T) \; &= \; 1. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Variation der Konstante ist die eindeutig bestimmte Lösung gegeben durch

$$g(t) \; = \; \exp\Big(-\frac{A}{1-\lambda}(t-T)\Big)\Big[1 + \int_t^T \exp\Big(\frac{A}{1-\lambda}(s-T)\Big)\exp\Big(\frac{\beta s}{\lambda-1}\Big)\,ds\Big] \tag{3.20}$$

mit

$$\begin{aligned} &\int_t^T \exp\Big(\frac{A}{1-\lambda}(s-T)\Big)\exp\Big(\frac{\beta s}{\lambda - 1}\Big)\,ds \\ &\qquad = \begin{cases} \frac{1-\lambda}{A-\beta}\exp\Big(-\frac{A}{1-\lambda}T\Big)\Big[\exp\Big(\frac{A-\beta}{1-\lambda}T\Big) - \exp\Big(\frac{A-\beta}{1-\lambda}t\Big)\Big] & \text{falls } A \neq \beta, \\ \exp\Big(-\frac{A}{1-\lambda}T\Big)(T-t) & \text{falls } A = \beta. \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgrund der Gestalt von g gilt $g(t) > 0$ für alle $t \in [0,T]$. Damit ist auch $f(t) = (g(t))^{1-\lambda} > 0$ für alle $t \in [0,T]$, was die obige Annahme, dass f strikt positiv ist, rechtfertigt.
Der mögliche Kandidat G für die Wertefunktion ist somit gegeben durch

$$G(t,x) \; = \; f(t)\frac{x^\lambda}{\lambda}\mathbb{1}_{\{x>0\}} \qquad \text{mit } f \text{ aus (3.19) und (3.20).}$$

Da f strikt positiv ist, ist G auf der Menge $(0,\infty)$ strikt konkav in x. Ferner ist G eine klassische $C^{1,2}$-Lösung der HJB-Gleichung mit höchstens polynomialem Wachstum.

Unter der Annahme, dass der Vermögensprozess $X^{(\pi^*,c^*)} = (X^{(\pi^*,c^*)}(s))_{s\in[t,T]}$ bei Start in $(t,x) \in Q$ fast sicher strikt positiv ist, ist der mögliche Kandidat für die optimale Steuerung $u^* = (\pi^*, c^*)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \pi^*(s) &= \pi^*, \\ c^*(s) &= \Big(\exp(\beta s) f(s)\Big)^{\frac{1}{\lambda-1}} X^{(\pi^*,c^*)}(s) \end{aligned}$$

für alle $s \in [t,T]$. Dabei ist $\pi^* \in F_1$ die eindeutig bestimmte globale Maximalstelle von h^* (vgl. (3.16)).

Es bleibt zu zeigen, dass die obige Annahme gerechtfertigt ist. Bei Start in $(t,x) \in Q$ genügt der Vermögensprozess X^{u^*} der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dX^{u^*}(s) &= X^{u^*}(s)\Big(r + (\pi^*)^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big) - \big(\exp(\beta s) f(s)\big)^{\frac{1}{\lambda-1}}\Big)\, ds \\ &\quad + X^{u^*}(s)(\pi^*)^t \sigma\, dW(s) + X^{u^*}(s-)(\pi^*)^t \gamma\, dN(s) \\ &= X^{u^*}(s-)\, dZ(s), \\ X^{u^*}(t) &= x \;>\; 0 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} Z(s) \;:=\; Z^{\pi^*}(s) \;:=\; & \Big(r + (\pi^*)^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big)\Big)(s-t) - \int_t^s \Big(\exp(\beta v) f(v)\Big)^{\frac{1}{\lambda-1}}\, dv \\ & + (\pi^*)^t \sigma\big(W(s) - W(t)\big) + (\pi^*)^t \gamma\big(N(s) - N(t)\big). \end{aligned}$$

Nach Protter [30, II. Theorem 37] besitzen derartige stochastische Differentialgleichungen eine eindeutig bestimmte Lösung X^{u^*}, gegeben durch

$$\begin{aligned} X^{u^*}(s) &= x \exp\Big(Z(s) - \frac{1}{2}[Z,Z]^c(s)\Big) \prod_{t<v\le s} \big(1 + \Delta Z(v)\big) \exp\big(-\Delta Z(v)\big) \\ &= x \exp\Big(Z(s) - \frac{1}{2}[Z,Z]^c(s)\Big) \prod_{j=1}^{l} \prod_{\{n:\, t<T_n^{(j)} \le s\}} \big(1 + \Delta Z(T_n^{(j)})\big) \exp\big(-\Delta Z(T_n^{(j)})\big) \end{aligned}$$

für $s \in [t,T]$, wobei $(T_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Sprungstellen des eindimensionalen Poisson-Prozesses N_j ist ($j = 1, \ldots, l$). Aus $\Delta Z(T_n^{(j)}) = (\pi^*)^t \gamma^{(\cdot,j)}$ fast sicher auf der Menge $\{t < T_n^{(j)} \le s\}$ und $(\pi^*)^t \gamma^{(\cdot,j)} > -1$ (dies gilt, da $\pi^* \in F_1$ und $\gamma \in (-\frac{1}{\kappa}, \infty)^{d\times l}$ sind) folgt $X^{u^*}(s) > 0$ fast sicher für alle $s \in [t,T]$.

Zur Lösung des Steuerungsproblems wird abschließend der Verifikationssatz 3.2 angewendet. Die geforderte Integrabilitätsbedingung an X^{u^*} aus der Definition 3.1 einer zulässigen Steuerung ist mit Hilfe von Satz 2.3 und Bemerkung 2.4 erfüllt. Alle weiteren noch nicht gezeigten Voraussetzungen sind auf triviale Weise erfüllt, so dass eine Anwendung des Verifikationssatzes 3.2 mit $Q = [0,T) \times (0,\infty)$ das folgende Ergebnis liefert:

Folgerung 3.10

Sei $(t,x) \in Q$ gegeben. Ferner sei π^* die eindeutig bestimmte globale Maximalstelle der Funktion $h^* : F_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h^*(\pi) \;:=\; r + \pi^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big) + \frac{1}{2}\pi^t\sigma\sigma^t\pi(\lambda-1) + \sum_{j=1}^{l}\alpha_j\frac{1}{\lambda}\Big[\big(1+\pi^t\gamma^{(\cdot,j)}\big)^{\lambda} - 1\Big].$$

Sei f durch die Ausdrücke (3.19) und (3.20) gegeben. Dann ist die zulässige Steuerung $u^* = (\pi^*, c^*)$ mit

$$\pi^*(s) \;=\; \pi^* \qquad \textit{und} \qquad c^*(s) \;=\; \Big(\exp(\beta s) f(s)\Big)^{\frac{1}{\lambda-1}} X^{u^*}(s)$$

für $s \in [t,T]$ eine Lösung des Steuerungsproblems

$$\sup_{(\pi,c)\in\mathcal{A}(t,x)} \mathbb{E}^{t,x}\left(\int_t^{\tau_t} \exp(-\beta s)\frac{\big(c(s)\big)^{\lambda}}{\lambda}\,ds + \frac{1}{\lambda}\big(X^{(\pi,c)}(\tau_t)\big)^{\lambda}\mathbb{1}_{\{X^{(\pi,c)}(\tau_t)>0\}}\right).$$

Bemerkung 3.11

1. Bei Start in $(t,x) \in Q$ ist der Vermögensprozess $X^{u^*} = (X^{u^*}(s))_{s\in[t,T]}$ zum optimalen $u^* = (\pi^*, c^*)$ aus Folgerung 3.10 fast sicher strikt positiv. Insbesondere ist u^* somit eine optimale Strategie des ursprünglichen Problems, d.h. u^* maximiert das Funktional (3.14).

2. Im Fall $\gamma \equiv 0$ lässt sich die eindeutig bestimmte globale Maximalstelle π^* der Funktion h^* explizit angeben. Es gilt
$$\pi^* \;=\; \pi_0^* \;=\; \frac{1}{1-\lambda}\big(\sigma\sigma^t\big)^{-1}\big(\mu - r\underline{1}\big).$$
In dieser Situation stimmt die optimale zulässige Steuerung $u^* = (\pi^*, c^*)$ mit dem Ergebnis von Korn/Korn [18, S. 280] überein (bei Korrektur der kleinen Rechenfehler in Korn/Korn).

Im Folgenden wird die Situation $d = 1$ betrachtet. Fasst man $\pi^* = \pi^*_\gamma$ als Funktion in $\gamma = (\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(l)}) \in (-1,\infty)^{1\times l}$ auf, wobei π^*_γ die eindeutig bestimmte globale Maximalstelle der Funktion $h^* = h^*_\gamma : [0,\kappa] \to \mathbb{R}$ aus Folgerung 3.10 ist, so lässt sich die folgende Beziehung herstellen:
Die erste Ableitung von h^*_γ ist gegeben durch $(h^*_\gamma)' : (0,\kappa) \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}(h^*_\gamma)'(\pi) &= \mu - r - \gamma\alpha + \sigma\sigma^t\pi(\lambda-1) + \sum_{j=1}^{l}\gamma^{(j)}\alpha_j\big(1+\pi\gamma^{(j)}\big)^{\lambda-1} \\ &= \underbrace{\mu - r}_{>0} + \underbrace{\sigma\sigma^t\pi(\lambda-1)}_{<0} + \sum_{j=1}^{l}\underbrace{\gamma^{(j)}\alpha_j\Big[\big(1+\pi\gamma^{(j)}\big)^{\lambda-1} - 1\Big]}_{\leq 0}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Dabei beachte man, dass $(h_\gamma^*)'$ für ein festes γ streng monoton fallend in π ist.
Es wird zunächst der Fall $\gamma = (0, \dots, 0)$ betrachtet. In diesem Fall ist der dritte Term in (3.21) gleich Null. Für hinreichend großes $\kappa > 0$ ist die eindeutig bestimmte globale Maximalstelle π_0^* der Funktion $h_0^* : [0, \kappa] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\pi_0^* \;=\; \frac{\mu - r}{(1-\lambda)\sigma\sigma^t}.$$

Im Fall $\gamma \in (-1, \infty)^{1\times l}$, $\gamma \neq (0, \dots, 0)$ ist der dritte Term in (3.21) strikt negativ, unabhängig davon, ob die einzelnen Komponenten von γ positiv oder negativ sind. Aufgrund der Monotonieeigenschaft der Funktion $(h_\gamma^*)'$ gilt für die eindeutig bestimmte globale Maximalstelle π_γ^* der Funktion h_γ^* folglich die Beziehung

$$\pi_\gamma^* \;<\; \pi_0^*. \tag{3.22}$$

Berücksichtigt man, dass die Konstante π_γ^* das Investitionsverhalten des Investors beschreibt, so lässt sich die obige Beziehung wie folgt interpretieren: Im Fall von $\gamma \in (-1, \infty)^{1\times l}$, $\gamma \neq (0, \dots, 0)$ ist der Investor einem zusätzlichen Risiko in Form der kompensierten Poisson-Prozesse ausgesetzt. Folglich neigt er dazu, weniger in die Aktie zu investieren.

Für den optimalen Konsum lässt sich eine konträre Beziehung zeigen. Zunächst fasse man die Konstante $A = A_{\gamma,\pi}$ aus (3.18) als Funktion in γ und π auf. Es gilt

$$\begin{aligned} A_{\gamma,\pi} &= \lambda\Big(r + \pi\big(\mu - r - \gamma\alpha\big) + \frac{1}{2}\sigma\sigma^t\pi^2(\lambda - 1)\Big) + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \Big[\big(1 + \pi\gamma^{(j)}\big)^\lambda - 1\Big] \\ &= \lambda\Big(\underbrace{r + \pi(\mu - r)}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{2}\sigma\sigma^t\pi^2(\lambda - 1)}_{\leq 0}\Big) + \sum_{j=1}^{l} \underbrace{\alpha_j \Big[\big(1 + \pi\gamma^{(j)}\big)^\lambda - 1 - \lambda\pi\gamma^{(j)}\Big]}_{\leq 0}. \end{aligned}$$

Für ein festes γ ergibt sich $A_{\gamma,\pi} = \lambda h_\gamma^*(\pi) < \lambda h_\gamma^*(\pi_\gamma^*) = A_{\gamma,\pi_\gamma^*}$ für alle $0 \leq \pi < \pi_\gamma^*$. Weiterhin gilt für ein festes π die Ungleichung $A_{\gamma,\pi} \leq A_{0,\pi}$. Somit erhält man mit (3.22) die Beziehung

$$A_\gamma^* \;:=\; A_{\gamma,\pi_\gamma^*} \;\leq\; A_{0,\pi_\gamma^*} \;<\; A_{0,\pi_0^*} \;=:\; A_0^* \qquad \text{für } \gamma \neq (0, \dots, 0).$$

Für festes $t \in [0, T)$ fasse man den Ausdruck $g(t) = g_A(t)$ aus (3.20) als Funktion in A auf. Mit Hilfe der Ableitung nach A lässt sich zeigen, dass $g_A(t)$ streng monoton steigend in A ist.

Insgesamt erhält man dadurch für ein festes $x > 0$ und für $\gamma \in (-1, \infty)^{1\times l}$ mit $\gamma \neq (0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned} c_{t,x}^*(0) &:= \Big(\exp(\beta t) f_{A_0^*}(t)\Big)^{\frac{1}{\lambda-1}} x \\ &= \big(\exp(\beta t)\big)^{\frac{1}{\lambda-1}} \big(g_{A_0^*}(t)\big)^{-1} x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \Big(\exp(\beta t)\Big)^{\frac{1}{\lambda-1}}\Big(g_{A^*_\gamma}(t)\Big)^{-1}x \\
&= \Big(\exp(\beta t) f_{A^*_\gamma}(t)\Big)^{\frac{1}{\lambda-1}} x \\
&=: c^*_{t,x}(\gamma).
\end{aligned}
$$

Hierbei entspricht $c^*_{t,x}(\gamma)$ (für festes $\gamma \in (-1,\infty)^{1\times l}$) dem optimalen Konsum des Investors zum Zeitpunkt t bei einem Vermögen in Höhe von $x > 0$.

3.5 Gesteuerte stochastische Differentialgleichungen mit linearer Komponente

In einigen Anwendungen (vgl. z.B. das Bond-Portfolioproblem aus Abschnitt 6.1 oder das Aktie-Bond-Portfolioproblem aus Abschnitt 6.2) sind die Bedingungen (3.1) und (3.2) an die Koeffizienten der gesteuerten stochastischen Differentialgleichung nicht immer erfüllt. Desweiteren genügt der mögliche Kandidat für die Wertefunktion oft nicht der polynomialen Wachstumsbedingung. Für eine spezielle Klasse von Steuerungsproblemen lässt sich jedoch auch ohne diese Bedingungen ein entsprechender Verifikationssatz herleiten. Darüber hinaus kann für diese spezielle Klasse von Steuerungsproblemen auch ohne die Bedingungen (3.1) und (3.2) gezeigt werden, dass zumindest die Bedingung i) aus der Definition 3.1 einer zulässigen Steuerung unmittelbar aus der Bedingung ii) folgt.

Gegeben seien Abbildungen $\widetilde{\mu} : [0,T] \times \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^{k-1}$, $\widetilde{\sigma} : [0,T] \times \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^{(k-1)\times m}$ und $\widetilde{\gamma} : [0,T] \times \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^{(k-1)\times l}$, die die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes 2.1 erfüllen. Weiterhin seien $\bar{\mu}_1 : [0,T] \times \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^{1\times d}$, $\bar{\sigma}_1 : [0,T] \times \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^{m\times d}$, $\bar{\gamma}_1 : [0,T] \times \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^{l\times d}$ und $\bar{\mu}_2 : [0,T] \times \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}$, $\bar{\sigma}_2 : [0,T] \times \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^{m}$, $\bar{\gamma}_2 : [0,T] \times \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^{l}$ stetige Funktionen.
Bezüglich eines zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitssystems $\mathcal{S}_T$ (vgl. (3.3)) betrachte man für $(t,x) \in Q_0 = [0,T) \times \mathbb{R}^k$ die gesteuerte stochastische Differentialgleichung

$$
\begin{aligned}
dX(s) &= \Lambda(s,X(s),u(s))\,ds + \Sigma(s,X(s),u(s))\,dW(s) \\
&\quad +\Gamma(s,X(s-),u(s-))\,dN(s), \qquad (3.23) \\
X(t) &= x,
\end{aligned}
$$

wobei die Koeffizienten Λ, Σ und Γ die folgende Gestalt besitzen:

$$
X(s) = \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\Lambda(s,y_1,y_2,u) &= \begin{pmatrix} \widetilde{\mu}(s,y_1) \\ y_2\big[\bar{\mu}_1(s,y_1)u + \bar{\mu}_2(s,y_1)\big] \end{pmatrix}, \\
\Sigma(s,y_1,y_2,u) &= \begin{pmatrix} \widetilde{\sigma}(s,y_1) \\ y_2\big[\bar{\sigma}_1(s,y_1)u + \bar{\sigma}_2(s,y_1)\big]^t \end{pmatrix}, \\
\Gamma(s,y_1,y_2,u) &= \begin{pmatrix} \widetilde{\gamma}(s,y_1) \\ y_2\big[\bar{\gamma}_1(s,y_1)u + \bar{\gamma}_2(s,y_1)\big]^t \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Hierbei ist $u = (u(s))_{s\in[t,T]}$ ein $\mathbb{F}$-adaptierter càdlàg-Prozess mit Werten in der abgeschlossenen Menge $F \subseteq \mathbb{R}^d$, der die Bedingung ii) aus der Definition 3.1 erfüllt.

Aufgrund der Voraussetzungen an die Koeffizienten $\widetilde{\mu}, \widetilde{\sigma}$ und $\widetilde{\gamma}$ besitzt die stochastische Differentialgleichung

$$
\begin{aligned}
dY_1(s) &= \widetilde{\mu}(s,Y_1(s))\,ds + \widetilde{\sigma}(s,Y_1(s))\,dW(s) + \widetilde{\gamma}(s,Y_1(s-))\,dN(s), \qquad (3.24) \\
Y_1(t) &= y_1
\end{aligned}
$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $Y_1 = (Y_1(s))_{s\in[t,T]}$, welche fast sicher rechtsstetige Pfade mit endlichen Linkslimiten besitzt. Setzt man diese in die Koeffizienten der zweiten Komponente von (3.23) ein, so erhält man eine eindimensionale lineare stochastische Differentialgleichung von der Form

$$
\begin{aligned}
dY_2(s) &= Y_2(s-)\Big[\Big(\bar{\mu}_1(s,Y_1(s))u(s) + \bar{\mu}_2(s,Y_1(s))\Big)\,ds \\
&\qquad + \Big(\bar{\sigma}_1(s,Y_1(s))u(s) + \bar{\sigma}_2(s,Y_1(s))\Big)^t\,dW(s) \\
&\qquad + \Big(\bar{\gamma}_1(s,Y_1(s-))u(s-) + \bar{\gamma}_2(s,Y_1(s-))\Big)^t\,dN(s)\Big], \qquad (3.25) \\
Y_2(t) &= y_2.
\end{aligned}
$$

Es sei vorausgesetzt, dass die folgenden Integrabilitätsbedingungen gelten:

$$
\begin{aligned}
&\int_t^T \Big(\big|\bar{\mu}_2(s,Y_1(s))\big| + \big|\bar{\gamma}_2(s,Y_1(s))\big|\Big)\,ds \;<\; \infty \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher}, \\
&\int_t^T \Big(\big|\bar{\mu}_1(s,Y_1(s))\big|^2 + \big|\bar{\sigma}_2(s,Y_1(s))\big|^2 + \big|\bar{\gamma}_1(s,Y_1(s))\big|^2\Big)\,ds \;<\; \infty \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher}, \\
&\int_t^T \big|\bar{\sigma}_1(s,Y_1(s))\big|^4\,ds \;<\; \infty \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher}.
\end{aligned}
$$

Unter diesen Voraussetzungen sowie der Tatsache, dass der Prozess u die Bedingung ii) aus der Definition 3.1 erfüllt, ist der Prozess $Z^u = (Z^u(s))_{s\in[t,T]}$, definiert durch

$$\begin{aligned}
Z^u(s) \;&:=\; \int_t^s \Big(\bar{\mu}_1(v, Y_1(v))u(v) + \bar{\mu}_2(v, Y_1(v))\Big)\, dv \\
&\quad + \int_t^s \Big(\bar{\sigma}_1(v, Y_1(v))u(v) + \bar{\sigma}_2(v, Y_1(v))\Big)^t\, dW(v) \\
&\quad + \int_{t+}^s \Big((\bar{\gamma}_1(v, Y_1(v-)))^t u(v-) + \bar{\gamma}_2(v, Y_1(v-))\Big)^t\, dN(v),
\end{aligned}$$

ein Semimartingal bezüglich $\mathbb{F}$. Damit erhält (3.25) die einfache Gestalt

$$dY_2(s) \;=\; Y_2(s-)\, dZ^u(s), \qquad Y_2(t) = y_2.$$

Nach Protter [30, II. Theorem 37] ist die eindeutige Lösung $Y_2^u = (Y_2^u(s))_{s\in[t,T]}$ gegeben durch

$$Y_2^u(s) \;=\; y_2 \exp\Big(Z^u(s) - \frac{1}{2}\big[Z^u, Z^u\big]^c(s)\Big) \prod_{t<v\le s} \Big(1 + \Delta Z^u(v)\Big) \exp\big(-\Delta Z^u(v)\big).$$

Die gesteuerte stochastische Differentialgleichung (3.23) mit der Anfangsbedingung $X(t) = x$ besitzt somit eine eindeutig bestimmte Lösung $X^u = (X^u(s))_{s\in[t,T]}$, die durch $X^u(s) = (Y_1(s), Y_2^u(s))^t$ gegeben ist.

Der folgende Satz zeigt, dass die Ergebnisse des Verifikationssatzes 3.2 auch für gesteuerte stochastische Differentialgleichungen der Form (3.23) gültig bleiben. Dabei beachte man, dass die Bedingungen (3.1) und (3.2) sowie die polynomiale Wachstumsbedingung an die Wertefunktion nicht notwendigerweise gegeben sein müssen.

Satz 3.12 (Variante des Verifikationssatzes)

Seien L und Ψ stetige Funktionen, die die polynomialen Wachstumsbedingungen (3.5) und (3.6) erfüllen. Weiterhin sei $G : \overline{Q}_0 \to \mathbb{R}$ mit $G \in C^{1,2}(Q) \cap C(\overline{Q})$ eine Lösung der HJB-Gleichung

$$\begin{aligned}
\sup_{u\in F} \Big(\mathcal{E}^u G(t,x) + L(t,x,u)\Big) \;&=\; 0 \qquad \textit{für } (t,x) \in Q, \\
G(t,x) \;&=\; \Psi(t,x) \qquad \textit{für } (t,x) \in \mathcal{C}Q.
\end{aligned}$$

Für alle $(t,x) \in Q$ und alle $u \in \mathcal{A}(t,x)$ gelte

$$\mathbb{E}^{t,x}\bigg(\int_t^T \Big(\big|\bar{\sigma}_2(s, Y_1(s))\big|^2 + \big|\bar{\sigma}_1(s, Y_1(s))\big|^4\Big)\, ds\bigg) \;<\; \infty \tag{3.26}$$

sowie

$$\mathbb{E}^{t,x}\Big(\sup_{t\le s\le T} \big[G(s, X^u(s))\big]^2\Big) \;<\; \infty, \tag{3.27}$$

$$\mathbb{E}^{t,x}\Big(\sup_{t\le s\le T} \big[G(s, X^u(s) + \Gamma^{(\cdot,j)}(s, X^u(s), u(s)))\big]^2\Big) \;<\; \infty \qquad (j = 1,\dots,l). \tag{3.28}$$

Dann bleiben die Aussagen i) und ii) aus dem Verifikationssatz 3.2 gültig.

Beweis. Für zulässige Steuerungen u besitzt die gesteuerte stochastische Differentialgleichung (3.23) eine eindeutige Lösung $X^u = (Y_1, Y_2^u)^t$. Mit der gleichen Argumentation und Bezeichnungsweise wie im Beweis zum Verifikationssatz 3.2 erhält man mit Hilfe der mehrdimensionalen Itô-Formel für Semimartingale die Gleichung

$$G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)})) - G(t,x) - \int_t^{\tau_t^{(n)}} \mathcal{E}^{u(s)} G(s, X^u(s))\, ds$$
$$= \int_t^{\tau_t^{(n)}} \big(G_x(s, X^u(s))\big)^t \Sigma(s, X^u(s), u(s))\, dW(s)$$
$$+ \sum_{j=1}^{l} \int_{t+}^{\tau_t^{(n)}} \Big(G(s, X^u(s-) + \Gamma^{(\cdot,j)}(s, X^u(s-), u(s-))) - G(s, X^u(s-))\Big)\, d\widetilde{N}_j(s)$$

mit $\widetilde{N}_j(s) := N_j(s) - \alpha_j s$ für alle $j = 1, \ldots, l$.

Da die Funktion $\widetilde{\sigma}$ die globale Wachstumsbedingung aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz 2.1 erfüllt und Y_1 die eindeutig bestimmte càdlàg-Lösung von (3.24) ist, gilt mit Hilfe von Satz 2.3 und Bemerkung 2.4

$$\mathbb{E}^{t,x}\bigg(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \big|\widetilde{\sigma}(s, Y_1(s))\big|^2\, ds \bigg)$$
$$\leq K_T \bigg[\mathbb{E}\bigg(\int_t^T \big(g(s)\big)^2\, ds \bigg) + (T-t)\mathbb{E}^{t,x}\Big(\sup_{t \leq s \leq T} \big|Y_1(s)\big|^2 \Big) \bigg]$$
$$< \infty,$$

wobei die Konstante $K_T > 0$ und der stochastische Prozess g aus der globalen Wachstumsbedingung von Satz 2.1 stammen.

Aufgrund der Beschränktheit der Menge $\mathcal{O}_n$ sowie der Voraussetzung (3.26) und der Bedingung ii) aus Definition 3.1 gilt außerdem

$$\mathbb{E}^{t,x}\bigg(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \Big| Y_2^u(s)\Big(\bar{\sigma}_1(s, Y_1(s))u(s) + \bar{\sigma}_2(s, Y_1(s))\Big)\Big|^2\, ds \bigg)$$
$$\leq D\mathbb{E}^{t,x}\bigg(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \Big(\big|\bar{\sigma}_1(s, Y_1(s))u(s)\big| + \big|\bar{\sigma}_2(s, Y_1(s))\big|\Big)^2\, ds \bigg)$$
$$\leq 2D\mathbb{E}^{t,x}\bigg(\int_t^{T} \Big(\big|\bar{\sigma}_1(s, Y_1(s))u(s)\big|^2 + \big|\bar{\sigma}_2(s, Y_1(s))\big|^2\Big)\, ds \bigg)$$
$$\leq 2D\mathbb{E}^{t,x}\bigg(\int_t^{T} \Big(\big|\bar{\sigma}_1(s, Y_1(s))\big|^4 + \big|u(s)\big|^4 + \big|\bar{\sigma}_2(s, Y_1(s))\big|^2\Big)\, ds \bigg)$$
$$< \infty$$

für eine geeignete Konstante $D > 0$.

Da G_x auf der kompakten Menge $\overline{Q}_n$ stetig ist, folgt daraus insgesamt mit Hilfe der beiden obigen Abschätzungen

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^{t,x}\Bigg(\int_t^{\tau_t^{(n)}} & \left|\left(G_x(s,X^u(s))\right)^t \Sigma(s,X^u(s),u(s))\right|^2 ds\Bigg) \\
&\leq \widetilde{D}\mathbb{E}^{t,x}\Bigg(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \left|\Sigma(s,X^u(s),u(s))\right|^2 ds\Bigg) \\
&= \widetilde{D}\mathbb{E}^{t,x}\Bigg(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \left|\widetilde{\sigma}(s,Y_1(s))\right|^2 ds\Bigg) \\
&\quad +\widetilde{D}\mathbb{E}^{t,x}\Bigg(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \left|Y_2^u(s)\Big(\bar{\sigma}_1(s,Y_1(s))u(s)+\bar{\sigma}_2(s,Y_1(s))\Big)\right|^2 ds\Bigg) \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

für eine geeignete Konstante $\widetilde{D} > 0$.
Desweiteren gilt nach Voraussetzung (3.27) und (3.28) für jedes $j = 1, \ldots, l$

$$
\begin{aligned}
\alpha_j\mathbb{E}^{t,x}\Bigg(\int_t^{\tau_t^{(n)}} & \Big[G(s,X^u(s)+\Gamma^{(\cdot,j)}(s,X^u(s),u(s))) - G(s,X^u(s))\Big]^2 ds\Bigg) \\
&\leq 2\alpha_j\mathbb{E}^{t,x}\Bigg(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \Big[G(s,X^u(s)+\Gamma^{(\cdot,j)}(s,X^u(s),u(s)))\Big]^2 ds\Bigg) \\
&\quad +2\alpha_j\mathbb{E}^{t,x}\Bigg(\int_t^{\tau_t^{(n)}} \Big[G(s,X^u(s))\Big]^2 ds\Bigg) \\
&\leq 2\alpha_j(T-t)\mathbb{E}^{t,x}\Big(\sup_{t\leq s\leq T} \big[G(s,X^u(s)+\Gamma^{(\cdot,j)}(s,X^u(s),u(s)))\big]^2\Big) \\
&\quad +2\alpha_j(T-t)\mathbb{E}^{t,x}\Big(\sup_{t\leq s\leq T} \big[G(s,X^u(s))\big]^2\Big) \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Wie im Beweis des Verifikationssatzes 3.2 kann nun die dortige Zwischenbehauptung

$$
G(t,x) \quad \geq \quad \mathbb{E}^{t,x}\Bigg(\int_t^{\tau_t^{(n)}} L(s,X^u(s),u(s))\,ds + G(\tau_t^{(n)}, X^u(\tau_t^{(n)}))\Bigg)
$$

gezeigt werden.
Für den Grenzübergang $n \to \infty$ gehe man ebenfalls wie im Beweis von Satz 3.2 vor. Lediglich für die Abschätzung (3.13) benutze man die Voraussetzung (3.27) anstelle der polynomialen Wachstumsbedingung an G. ∎

Kapitel 4

Stochastische Steuerung von Sprung-Diffusionen bei unendlichem Zeithorizont

4.1 Ein Verifikationssatz für Lösungen der HJB-Gleichung

Das Ziel dieses Abschnittes ist, einen Zusammenhang zwischen der Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung und der Lösung des Steuerungsproblems bei unendlichem Zeithorizont $[0, \infty)$ herzustellen.
Dazu sei $F \subseteq \mathbb{R}^d$ eine abgeschlossene Teilmenge. Weiterhin sei ein zugrundeliegendes Wahrscheinlichkeitssystem

$$\mathcal{S} = \Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F}, W, N\Big) \tag{4.1}$$

gegeben, d.h. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum versehen mit einer Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, die die üblichen Voraussetzungen erfüllt, $W = (W(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine m-dimensionale Brownsche Bewegung und $N = (N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein davon unabhängiger l-dimensionaler Poisson-Prozess zum Parameter $\alpha \in (0, \infty)^l$.
Bezüglich diesem Wahrscheinlichkeitssystem betrachte man für $x \in \mathbb{R}^k$ die autonome gesteuerte stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dX(t) &= \Lambda(X(t), u(t))\, dt + \Sigma(X(t), u(t))\, dW(t) + \Gamma(X(t-), u(t-))\, dN(t), \qquad (4.2) \\ X(0) &= x \end{aligned}$$

für $t \in \mathbb{R}_+$.

Dabei ist $u = (u(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein an $\mathbb{F}$ adaptierter càdlàg-Prozess mit Werten in F. Ferner seien die Koeffizienten Λ, Σ und Γ autonome Funktionen (d.h. unabhängig von der Zeit t), die jedoch weiterhin den Voraussetzungen aus Kapitel 3 genügen, d.h.:

- $\Lambda : \mathbb{R}^k \times F \to \mathbb{R}^k$, $\Sigma : \mathbb{R}^k \times F \to \mathbb{R}^{k\times m}$ und $\Gamma : \mathbb{R}^k \times F \to \mathbb{R}^{k\times l}$ sind stetig.
- $\Lambda(\cdot, u) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $\Sigma(\cdot, u) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k\times m}$ und $\Gamma(\cdot, u) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k\times l}$ sind aus $C^1(\mathbb{R}^k)$ für alle $u \in F$.
- Es existiert ein $C_1 > 0$ mit

$$|\Lambda_x| \ \leq \ C_1, \ \ |\Sigma_x| \ \leq \ C_1, \ \ |\Gamma_x| \ \leq \ C_1 \tag{4.3}$$

und

$$\big|\Lambda(y,u)\big| + \big|\Sigma(y,u)\big| + \big|\Gamma(y,u)\big| \ \leq \ C_1\big(1 + |y| + |u|\big) \tag{4.4}$$

für alle $y \in \mathbb{R}^k$ und $u \in F$.

Wie beim endlichen Zeithorizont wird auch hier ein Problem betrachtet, in dem nur so lange gesteuert wird, wie sich der Prozess X^u innerhalb einer vorgegebenen Menge bewegt. Dazu sei $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge, so dass der Rand $\partial\mathcal{O}$ im Fall von $\mathcal{O} \neq \mathbb{R}^k$ eine kompakte $(k-1)$-dimensionale C^3-Mannigfaltigkeit ist. Ferner definiere man die Stoppzeit $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ durch

$$\tau \ := \ \inf\big\{t \in \mathbb{R}_+ : X^u(t) \notin \mathcal{O}\big\},$$

d.h. τ ist die Erstaustrittszeit des Prozesses X^u aus der offenen Menge $\mathcal{O}$.

Für eine zulässige Steuerung $u \in \mathcal{A}(x)$ (vgl. Definition 4.1) sei das Nutzenfunktional gegeben durch

$$J(x;u) \ := \ \mathbb{E}^x\bigg(\int_0^\tau \exp(-\beta s) L(X^u(s), u(s))\, ds + \exp(-\beta\tau)\Psi(X^u(\tau))\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\bigg).$$

Dabei sind $\beta \geq 0$ ein Abzinsfaktor und $L : \mathbb{R}^k \times F \to \mathbb{R}$ sowie $\Psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, wie in Kapitel 3, stetige Funktionen, die den polynomialen Wachstumsbedingungen

$$\big|L(y,u)\big| \ \ \leq \ \ C_2\big(1 + |y|^p + |u|^p\big), \tag{4.5}$$

$$\big|\psi(y)\big| \ \ \leq \ \ C_2\big(1 + |y|^p\big) \tag{4.6}$$

mit einem $p \in \mathbb{N}$ und $C_2 > 0$ genügen.

Aufgrund der Definition einer zulässigen Steuerung (vgl. Definition 4.1 iii)+iv)) ist gewährleistet, dass der Erwartungswert in der obigen Definition des Nutzenfunktionals endlich ist.

Definition 4.1 (Zulässige Steuerung bei unendlichem Zeithorizont)
Ein an $\mathbb{F}$ adaptierter càdlàg-Prozess $u = (u(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ mit Werten in F heißt eine zulässige Steuerung, falls die gesteuerte stochastische Differentialgleichung (4.2) mit der Anfangsbedingung $X(0) = x$ eine eindeutige Lösung $X^u = (X^u(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ besitzt und die folgenden Integrabilitätsbedingungen gelten:

$$\begin{array}{lll} i) & \mathbb{E}^x\Big(\int_0^t \big|u(s)\big|^n\,ds\Big) \;<\; \infty & \text{für alle } n\in\mathbb{N} \text{ und } t\in\mathbb{R}_+, \\ ii) & \mathbb{E}^x\Big(\sup\limits_{0\le s\le t}\big|X^u(s)\big|^n\Big) \;<\; \infty & \text{für alle } n\in\mathbb{N} \text{ und } t\in\mathbb{R}_+, \\ iii) & \mathbb{E}^x\Big(\int_0^\tau \exp(-\beta s)\big|L(X^u(s),u(s))\big|\,ds\Big) \;<\; \infty, & \\ iv) & \mathbb{E}^x\Big(\exp(-\beta\tau)\big|\Psi(X^u(\tau))\big|\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\Big) \;<\; \infty. & \end{array}$$

Dabei bezeichne man mit $\mathcal{A}(x)$ die Menge aller zulässigen Steuerungen bei Start in $x\in\mathbb{R}^k$.

Wie in Kapitel 3 ist das Ziel, zu gegebenem Startwert $x \in \mathcal{O}$ das Nutzenfunktional $J(x;u)$ über alle zulässigen Steuerungen $u \in \mathcal{A}(x)$ zu maximieren, d.h. eine optimale Steuerung $u^* \in \mathcal{A}(x)$ zu finden, so dass

$$J(x;u^*) \;=\; \sup_{u\in\mathcal{A}(x)} J(x;u)$$

gilt. Die Wertefunktion des Maximierungsproblems ist in dieser Situation gegeben durch die Funktion $V : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$V(x) \;:=\; \sup_{u\in\mathcal{A}(x)} J(x;u).$$

Für $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mit $G \in C^2(\mathcal{O})$, für $x \in \mathcal{O}$ und für $u \in F$ definiere man den Operator $\mathcal{E}^u$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^u G(x) \;:=\;& \big(G_x(x)\big)^t\Lambda(x,u) + \frac{1}{2}Spur\Big(\Sigma(x,u)\big(\Sigma(x,u)\big)^t G_{xx}(x)\Big) \\ &+\sum_{j=1}^{l}\alpha_j\Big(G(x+\Gamma^{(\cdot,j)}(x,u)) - G(x)\Big). \end{aligned}$$

Um auch beim unendlichen Zeithorizont einen Zusammenhang zwischen der Lösung der HJB-Gleichung und der Lösung des Steuerungsproblems herzustellen, wird ein analoger Verifikationssatz formuliert. Für den Fall $\Gamma \equiv 0$ findet man einen entsprechenden Satz in Fleming/Soner [8, IV. Theorem 5.1].

Satz 4.2 (Verifikationssatz für den unendlichen Zeithorizont)
Sei $\beta \geq 0$ und sei $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mit $G \in C^2(\mathcal{O}) \cap C(\overline{\mathcal{O}})$ und $|G(x)| \leq K(1 + |x|^d)$, $x \in \mathbb{R}^k$, für ein $K > 0$ und $d \in \mathbb{N}$ geeignet, eine Lösung der HJB-Gleichung

$$\sup_{u \in F} \Big(\mathcal{E}^u G(x) + L(x,u) - \beta G(x) \Big) \;=\; 0 \qquad \text{für } x \in \mathcal{O}, \tag{4.7}$$

$$G(x) \;=\; \Psi(x) \qquad \text{für } x \in \mathcal{O}^c. \tag{4.8}$$

Dann gilt:

a) $G(x) \geq J(x;u)$ *für alle* $x \in \mathcal{O}$ *und* $u \in \mathcal{A}(x)$ *mit*

$$\limsup_{t \to \infty} \Big\{ \exp(-\beta t) \mathbb{E}^x \Big(G(X^u(t)) \mathbb{1}_{\{t \leq \tau\}} \Big) \Big\} \;\geq\; 0. \tag{4.9}$$

b) Existiert für $x \in \mathcal{O}$ *ein* $u^* \in \mathcal{A}(x)$ *mit*

$$u^*(t) \;\in\; \arg\max_{u \in F} \Big\{ \mathcal{E}^u G(X^{u^*}(t)) + L(X^{u^*}(t), u) - \beta G(X^{u^*}(t)) \Big\} \tag{4.10}$$

für alle $t \in [0, \tau)$ *und*

$$\lim_{t \to \infty} \Big[\exp(-\beta t) \mathbb{E}^x \Big(G(X^{u^*}(t)) \mathbb{1}_{\{t \leq \tau\}} \Big) \Big] \;=\; 0, \tag{4.11}$$

so gilt

$$G(x) \;=\; V(x) \;=\; J(x; u^*).$$

D.h. für $x \in \mathcal{O}$ *ist die Steuerung* $u^* \in \mathcal{A}(x)$ *optimal und die Funktion* G *entspricht der Wertefunktion des Optimierungsproblems.*

Beweis.
a) Sei $x \in \mathcal{O}$ gegeben. Zu zeigen ist: Für jede zulässige Steuerung $u \in \mathcal{A}(x)$, die die Bedingung (4.9) erfüllt, gilt

$$G(x) \;\;\geq\;\; \mathbb{E}^x \bigg(\int_0^\tau \exp(-\beta s) L(X^u(s), u(s))\, ds + \exp(-\beta \tau) G(X^u(\tau)) \mathbb{1}_{\{\tau < \infty\}} \bigg).$$

Ist dies gezeigt, so folgt hieraus die Behauptung von a), da $G(y) = \Psi(y)$ für alle $y \in \mathcal{O}^c$ gilt.

Wie im Beweis zu Satz 3.2 sei $(\mathcal{O}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen $\mathcal{O}$ aufsteigende Folge von beschränkten offenen Mengen mit $\overline{\mathcal{O}}_n \subseteq \mathcal{O}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere $\tau_n : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ durch

$$\tau_n \;:=\; \inf \big\{ t \in \mathbb{R}_+ : X^u(t) \notin \mathcal{O}_n \big\}.$$

Es gilt $\tau_n \leq \tau$ fast sicher.

Zwischenbehauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$G(x) \;\geq\; \mathbb{E}^x\bigg(\int_0^{\tau_n\wedge t} \exp(-\beta s)L(X^u(s),u(s))\,ds + \exp(-\beta(\tau_n\wedge t))G(X^u(\tau_n\wedge t))\bigg).$$

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}_+$ gegeben. Mit einer ähnlichen Argumentation wie im Beweis von Satz 3.2 erhält man mit Hilfe der mehrdimensionalen Itô-Formel für Semimartingale die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\exp(-\beta(\tau_n\wedge t))G(X^u(\tau_n\wedge t)) - G(x) - \int_0^{\tau_n\wedge t}\exp(-\beta s)\Big[\mathcal{E}^{u(s)}G(X^u(s)) - \beta G(X^u(s))\Big]ds \\
&\quad= \int_0^{\tau_n\wedge t}\exp(-\beta s)\big(G_x(X^u(s))\big)^t\Sigma(X^u(s),u(s))\,dW(s) \\
&\qquad+ \sum_{j=1}^{l}\int_{0+}^{\tau_n\wedge t}\exp(-\beta s)\Big(G(X^u(s-)+\Gamma^{(\cdot,j)}(X^u(s-),u(s-))) - G(X^u(s-))\Big)\,d\widetilde{N}_j(s)
\end{aligned}$$

mit $\widetilde{N}_j(s) := N_j(s) - \alpha_j s$ für alle $j = 1,\ldots,l$.
Analog zum Beweis von Satz 3.2 zeigt man

$$\mathbb{E}^x\bigg(\int_0^{\tau_n\wedge t}\exp(-2\beta s)\big|\big(G_x(X^u(s))\big)^t\Sigma(X^u(s),u(s))\big|^2\,ds\bigg) \;<\; \infty$$

und

$$\alpha_j\mathbb{E}^x\bigg(\int_0^{\tau_n\wedge t}\exp(-2\beta s)\Big(G(X^u(s)+\Gamma^{(\cdot,j)}(X^u(s),u(s))) - G(X^u(s))\Big)^2 ds\bigg) \;<\; \infty$$

für $j = 1,\ldots,l$. Somit verschwinden die bezüglich $\mathbb{P}^x$ gebildeten Erwartungswerte der stochastischen Integrale und man erhält

$$\begin{aligned}
G(x) \;=\; \mathbb{E}^x\bigg(&\exp(-\beta(\tau_n\wedge t))G(X^u(\tau_n\wedge t)) \\
&- \int_0^{\tau_n\wedge t}\exp(-\beta s)\Big(\mathcal{E}^{u(s)}G(X^u(s)) - \beta G(X^u(s))\Big)\,ds\bigg).
\end{aligned}$$

Da G eine Lösung der HJB-Gleichung (4.7) ist, gilt für jede zulässige Steuerung u, die die Bedingung (4.9) erfüllt und für jedes $s \in [0,\tau_n\wedge t)$ (d.h. es gilt $X^u(s) \in \mathcal{O}_n \subseteq \mathcal{O}$)

$$\mathcal{E}^{u(s)}G(X^u(s)) + L(X^u(s),u(s)) - \beta G(X^u(s)) \;\leq\; 0.$$

Damit folgt

$$G(x) \;\;\geq\;\; \mathbb{E}^x\bigg(\int_0^{\tau_n\wedge t}\exp(-\beta s)L(X^u(s),u(s))\,ds + \exp(-\beta(\tau_n\wedge t))G(X^u(\tau_n\wedge t))\bigg)$$

und somit ist die Zwischenbehauptung bewiesen.

Die eigentliche Behauptung folgt durch mehrmaliges Anwenden des Satzes von Lebesgue. Zunächst führe man den Grenzübergang $n \to \infty$ durch. Da der Prozess $X^u = (X^u(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ quasi-linksstetig ist (vgl. Jacod/Shiryaev [14, I. Proposition 2.26 und I. Proposition 3.27]), gilt $\tau_n \nearrow \tau$ fast sicher und folglich

$$\mathbb{1}_{\{s<\tau_n \wedge t\}} \exp(-\beta s) L(X^u(s), u(s)) \;\longrightarrow\; \mathbb{1}_{\{s<\tau \wedge t\}} \exp(-\beta s) L(X^u(s), u(s)) \qquad \text{fast sicher.}$$

Nach Voraussetzung (4.5) gilt

$$\left|\mathbb{1}_{\{s<\tau_n \wedge t\}} \exp(-\beta s) L(X^u(s), u(s))\right| \;\leq\; C_2 \mathbf{1}_{\{s<t\}} \Big(1 + \left|X^u(s)\right|^p + \left|u(s)\right|^p\Big)$$

mit

$$C_2 \mathbb{E}^x \bigg(\int_0^t \Big(1 + \left|X^u(s)\right|^p + \left|u(s)\right|^p\Big)\, ds \bigg) \;<\; \infty$$

nach Definition einer zulässigen Steuerung. Mit dem Satz von Lebesgue folgt daraus

$$\mathbb{E}^x \bigg(\int_0^{\tau_n \wedge t} \exp(-\beta s) L(X^u(s), u(s))\, ds \bigg) \;\longrightarrow\; \mathbb{E}^x \bigg(\int_0^{\tau \wedge t} \exp(-\beta s) L(X^u(s), u(s))\, ds \bigg).$$

Aufgrund der Stetigkeit von G auf $\overline{\mathcal{O}}$ und der Quasi-Linksstetigkeit des Prozesses X^u gilt für den zweiten Term

$$\lim_{n\to\infty} \big[\exp(-\beta(\tau_n \wedge t)) G(X^u(\tau_n \wedge t))\big] \;=\; \exp(-\beta(\tau \wedge t)) G(X^u(\tau \wedge t)) \qquad \text{fast sicher.}$$

Mit Hilfe der Voraussetzung des Satzes erhält man

$$\big|\exp(-\beta(\tau_n \wedge t)) G(X^u(\tau_n \wedge t))\big| \;\leq\; K\Big(1 + \left|X^u(\tau_n \wedge t)\right|^d\Big) \;\leq\; K\Big(1 + \sup_{0\leq s\leq t} \left|X^u(s)\right|^d\Big)$$

mit

$$K \mathbb{E}^x \Big(1 + \sup_{0\leq s\leq t} \left|X^u(s)\right|^d\Big) \;<\; \infty$$

nach Definition einer zulässigen Steuerung. Eine weitere Anwendung des Satzes von Lebesgue liefert

$$\mathbb{E}^x \Big(\exp(-\beta(\tau_n \wedge t)) G(X^u(\tau_n \wedge t))\Big) \;\longrightarrow\; \mathbb{E}^x \Big(\exp(-\beta(\tau \wedge t)) G(X^u(\tau \wedge t))\Big).$$

Insgesamt ergibt sich mit Hilfe der obigen Zwischenbehauptung

$$\begin{aligned} G(x) \;&\geq\; \mathbb{E}^x \bigg(\int_0^{\tau \wedge t} \exp(-\beta s) L(X^u(s), u(s))\, ds + \exp(-\beta(\tau \wedge t)) G(X^u(\tau \wedge t)) \bigg) \\ &=\; \mathbb{E}^x \bigg(\int_0^{\tau \wedge t} \exp(-\beta s) L(X^u(s), u(s))\, ds + \exp(-\beta \tau) G(X^u(\tau)) \mathbb{1}_{\{\tau<t\}} \bigg) \\ &\quad\; + \exp(-\beta t) \mathbb{E}^x \Big(G(X^u(t)) \mathbb{1}_{\{t\leq\tau\}} \Big) \end{aligned} \tag{4.12}$$

für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Abschließend führe man für eine geeignete Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ den Grenzübergang $t_k \to \infty$ durch. Dazu wähle man die Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ so, dass $t_k \nearrow \infty$ und

$$\lim_{k\to\infty} \Big[\exp(-\beta t_k)\mathbb{E}^x\Big(G(X^u(t_k))\mathbb{1}_{\{t_k \le \tau\}} \Big) \Big] \;\ge\; 0$$

gelten. Die Existenz einer solchen Folge folgt unmittelbar aus der Voraussetzung (4.9). Für $k \to \infty$ gilt

$$\mathbb{1}_{\{s<\tau\wedge t_k\}} \exp(-\beta s)L(X^u(s), u(s)) \;\longrightarrow\; \mathbb{1}_{\{s<\tau\}} \exp(-\beta s)L(X^u(s), u(s)) \qquad \text{fast sicher.}$$

Ferner ist

$$\big|\mathbb{1}_{\{s<\tau\wedge t_k\}} \exp(-\beta s)L(X^u(s), u(s))\big| \;\le\; \mathbb{1}_{\{s<\tau\}} \exp(-\beta s)\big|L(X^u(s), u(s))\big|$$

mit

$$\mathbb{E}^x\bigg(\int_0^\tau \exp(-\beta s)\big|L(X^u(s), u(s))\big|\, ds \bigg) \;<\; \infty$$

nach Definition einer zulässigen Steuerung. Der Satz von Lebesgue liefert

$$\mathbb{E}^x\bigg(\int_0^{\tau\wedge t_k} \exp(-\beta s)L(X^u(s), u(s))\, ds \bigg) \;\longrightarrow\; \mathbb{E}^x\bigg(\int_0^{\tau} \exp(-\beta s)L(X^u(s), u(s))\, ds \bigg).$$

Desweiteren gilt

$$\lim_{k\to\infty} \big[\exp(-\beta\tau)G(X^u(\tau))\mathbb{1}_{\{\tau<t_k\}} \big] \;=\; \exp(-\beta\tau)G(X^u(\tau))\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} \qquad \text{fast sicher}$$

mit

$$\big|\exp(-\beta\tau)G(X^u(\tau))\mathbb{1}_{\{\tau<t_k\}}\big| \;\le\; \exp(-\beta\tau)\big|G(X^u(\tau))\big|\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}$$

und

$$\mathbb{E}^x\Big(\exp(-\beta\tau)\big|G(X^u(\tau))\big|\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} \Big) \;<\; \infty$$

ebenfalls nach Definition einer zulässigen Steuerung. Wendet man den Satz von Lebesgue erneut an, so erhält man

$$\mathbb{E}^x\Big(\exp(-\beta\tau)G(X^u(\tau))\mathbb{1}_{\{\tau<t_k\}} \Big) \;\longrightarrow\; \mathbb{E}^x\Big(\exp(-\beta\tau)G(X^u(\tau))\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} \Big).$$

Zusammenfassend ergibt sich damit aus der Ungleichung (4.12)

$$G(x) \;\ge\; \mathbb{E}^x\bigg(\int_0^\tau \exp(-\beta s)L(X^u(s), u(s))\, ds + \exp(-\beta\tau)G(X^u(\tau))\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} \bigg)$$

und somit die Behauptung von a).

b) Für eine zulässige Steuerung u^*, die die Bedingung (4.10) erfüllt, erhält man mit Hilfe von Voraussetzung (4.11) Gleichheit in der Ungleichung aus Behauptung a) (d.h. es gilt $G(x) = J(x; u^*)$). Daraus ergibt sich

$$J(x; u^*) \;=\; G(x) \;\geq\; \sup_{u \in \mathcal{A}(x)} J(x; u) \;=\; V(x) \;\geq\; J(x; u^*)$$

und somit die Behauptung von b). ■

Bemerkung 4.3

Unter anderen Voraussetzungen findet man einen Verifikationssatz auch im Buch von Øksendal und Sulem [28, Theorem 3.1]. Dort wird jedoch die Bedingung $X^u(\tau) \in \partial F$ fast sicher auf der Menge $\{\tau < \infty\}$ benötigt, die zwar für Diffusionsprozesse stets erfüllt ist, jedoch typischerweise nicht, wenn zusätzlich Sprünge auftreten können.

4.2 Beispiel: Finanzmarkt mit sprunghaften Preisen

Dieses Beispiel verallgemeinert das Beispiel „Optimaler Konsum bei unendlichem Horizont“ aus Korn/Korn [18, S. 281]. Im Gegensatz zu Korn/Korn werden die Aktienpreise hier durch Sprung-Diffusionen modelliert.

Genau wie im Beispiel mit endlichem Zeithorizont aus Abschnitt 3.4 liegt auch hier ein Marktmodell zugrunde, in dem $d+1$ Wertpapiere gehandelt werden.

Sei $\mathcal{S}$ ein zugrundeliegendes Wahrscheinlichkeitssystem (vgl. (4.1)). Dabei beachte man, dass die m-dimensionale Brownsche Bewegung W und der l-dimensionale Poisson-Prozess N unabhängig sind.

Es seien $d+1$ Finanzgüter auf dem unendlichen Zeithorizont $[0, \infty)$ gegeben:

- Der Preisverlauf $S^{(0)} = (S^{(0)}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ des Sparkontos entwickle sich gemäß

$$\begin{aligned} dS^{(0)}(t) &= rS^{(0)}(t)\,dt, \\ S^{(0)}(0) &= s_0 \;>\; 0. \end{aligned}$$

- Der Preisverlauf $S^{(i)} = (S^{(i)}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ der i-ten Aktie ($1 \leq i \leq d$) entwickle sich gemäß

$$\begin{aligned} dS^{(i)}(t) &= S^{(i)}(t-)\Big(\mu^{(i)}\,dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma^{(i,j)}\,dW^{(j)}(t) + \sum_{j=1}^{l} \gamma^{(i,j)}\,d\big(N_j(t) - \alpha_j t\big)\Big), \\ S^{(i)}(0) &= s_i \;>\; 0. \end{aligned}$$

Hierbei sind $r > 0$, $\mu = (\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(d)})^t \in (0,\infty)^d$, $\sigma = (\sigma^{(i,j)})_{1\le i\le d, 1\le j\le m} \in \mathbb{R}^{d\times m}$ und $\gamma = (\gamma^{(i,j)})_{1\le i\le d,1\le j\le l} \in (-1,\infty)^{d\times l}$. Wie im Beispiel aus Abschnitt 3.4 sei auch hier vorausgesetzt, dass $r < \mu^{(i)}$ für alle $i = 1,\ldots,d$ gilt, dass $m \ge d$ ist und dass die Matrix σ maximalen Rang hat.
Man beachte, dass die Aktienkurse aufgrund der Bedingung $\gamma \in (-1,\infty)^{d\times l}$ zu jedem Zeitpunkt fast sicher strikt positiv sind.

Die Begriffe einer Handelsstrategie η, eines Vermögensprozesses X, eines Konsumprozesses c und eines selbst-finanzierenden Portfolioprozesses π aus dem Beispiel in Abschnitt 3.4 sind auf den unendlichen Zeithorizont $[0,\infty)$ zu übertragen, indem man die auftretenden Integrabilitätsbedingungen für jedes endliche $T > 0$ fordert.

Beschreibt man das Investitionsverhalten eines Investors mittels eines selbst-finanzierenden Portfolioprozesses, so erfüllt der Vermögensprozess $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \Big(X(t)\big[r + \big(\pi(t)\big)^t(\mu - r\underline{1})\big] - c(t)\Big)\,dt + X(t)(\pi(t))^t\sigma\,dW(t) \\ &\quad + X(t-)\big(\pi(t-)\big)^t\gamma\,d\big(N(t) - \alpha t\big), \\ X(0) &= x. \end{aligned}$$

Das Ziel des Investors ist, das Funktional

$$\mathbb{E}^x\bigg(\int_0^\infty \exp(-\beta s)\frac{\big(c(s)\big)^\lambda}{\lambda}\,ds\bigg), \tag{4.13}$$

für ein $\beta \ge 0$ und ein $\lambda \in (0,1)$, über alle Strategien (π, c) mit Werten in der abgeschlossenen Menge $\{v \in [0,\kappa]^d : \sum_{i=1}^d v_i \le \kappa\} \times \big[0,\infty)$ zu maximieren, so dass der zugehörige Vermögensprozess $X^{(\pi,c)}$ fast sicher strikt positiv ist. Die Konstante $\kappa > 0$ ist so gewählt, dass $z^t\gamma^{(\cdot,j)} > -1$ für alle $j = 1,\ldots,l$ und für alle $z \in \{v \in [0,\kappa]^d : \sum_{i=1}^d v_i \le \kappa\}$ gilt, d.h. $\gamma \in (-\frac{1}{\kappa},\infty)^{d\times l}$.

Um dieses Problem mit Hilfe der in diesem Kapitel entwickelten Theorie zu lösen, fasse man die Vermögensgleichung eines Investors mit Strategie (π, c) als gesteuerte stochastische Differentialgleichung auf. Analog zum Beispiel aus Abschnitt 3.4 definiere man die abgeschlossene Menge $F \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ durch

$$F \;:=\; F_1 \times F_2 \;:=\; \Big\{v \in [0,\kappa]^d : \sum_{i=1}^d v_i \le \kappa\Big\} \times \big[0,\infty)$$

und die Stoppzeit $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ durch

$$\tau \;:=\; \inf\big\{t \in \mathbb{R}_+ : X^{(\pi,c)}(t) \notin \mathcal{O}\big\}$$

mit $\mathcal{O} := (0, \infty)$. Man betrachte das Nutzenfunktional $J(x; (\pi, c))$, gegeben durch

$$J(x; (\pi, c)) \;:=\; \mathbb{E}^x\bigg(\int_0^\tau \exp(-\beta s) \frac{\big(c(s)\big)^\lambda}{\lambda}\, ds\bigg).$$

Problem: Finde eine Funktion $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und eine optimale zulässige Steuerung $u^* = (\pi^*, c^*) \in \mathcal{A}(x)$ mit

$$G(x) \;=\; \sup_{u \in \mathcal{A}(x)} J(x; u) \;=\; J(x; u^*).$$

Für $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $G \in C^2(\mathcal{O})$, für $x \in \mathcal{O}$ und $u \in F$ definiere man $\mathcal{E}^u = \mathcal{E}^{\pi,c}$ durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^u G(x) \;&:=\; \Big(x\big[r + \pi^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big)\big] - c\Big) G_x(x) + \frac{1}{2} x^2 \pi^t \sigma\sigma^t \pi G_{xx}(x) \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \Big[G(x + x\pi^t \gamma^{(\cdot,j)}) - G(x)\Big].
\end{aligned}$$

Die zu dem Maximierungsproblem zugehörige HJB-Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\sup_{u \in F} \Big\{\mathcal{E}^u G(x) - \beta G(x) + \frac{c^\lambda}{\lambda}\Big\} \;&=\; 0 \qquad &&\text{für } x \in \mathcal{O}, \\
G(x) \;&=\; 0 &&\text{für } x \in \mathcal{O}^c.
\end{aligned}$$

Für die Anwendung des Verifaktionssatzes 4.2 ist es erforderlich, dass die Lösung G der HJB-Gleichung die polynomiale Wachstumsbedingung aus dem Satz erfüllt. Dies legt den Ansatz

$$G(x) \;=\; D \frac{x^\lambda}{\lambda} \mathbb{1}_{\{x>0\}} \tag{4.14}$$

mit einem $D > 0$ nahe. Bildet man für $x \in \mathcal{O}$ die in dem Ausdruck $\mathcal{E}^u G(x)$ vorkommenden Ableitungen, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}^u G(x) - \beta G(x) + \frac{c^\lambda}{\lambda} \\
&\quad= \Big(x\big[r + \pi^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big)\big] - c\Big) D x^{\lambda-1} + \frac{1}{2} x^2 \pi^t \sigma\sigma^t \pi (\lambda - 1) D x^{\lambda-2} \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j D \frac{1}{\lambda}\Big[\big(x + x\pi^t\gamma^{(\cdot,j)}\big)^\lambda - x^\lambda\Big] - \beta D \frac{x^\lambda}{\lambda} + \frac{c^\lambda}{\lambda} \\
&\quad=: \; h_x(\pi, c)
\end{aligned}$$

mit $h_x : F_1 \times F_2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Definiert man die beiden Funktionen $h_x^{(1)} : F_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ und

$h_x^{(2)} : F_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} h_x^{(1)}(\pi) &:= \big[r + \pi^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big)\big]Dx^\lambda + \frac{1}{2}\pi^t\sigma\sigma^t\pi(\lambda-1)Dx^\lambda \\ &\quad + \sum_{j=1}^{l}\alpha_j\frac{1}{\lambda}\Big[\big(1+\pi^t\gamma^{(\cdot,j)}\big)^\lambda - 1\Big]Dx^\lambda, \\ h_x^{(2)}(c) &:= -cDx^{\lambda-1} - \beta D\frac{x^\lambda}{\lambda} + \frac{c^\lambda}{\lambda}, \end{aligned}$$

so gilt $h_x(\pi, c) = h_x^{(1)}(\pi) + h_x^{(2)}(c)$ für alle $(\pi, c) \in F_1 \times F_2$.
Wegen $D > 0$ wird die Funktion $h_x^{(1)}$ genau dann maximal, wenn die Funktion $h^* : F_1 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$h^*(\pi) := r + \pi^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big) + \frac{1}{2}\pi^t\sigma\sigma^t\pi(\lambda-1) + \sum_{j=1}^{l}\alpha_j\frac{1}{\lambda}\Big[\big(1+\pi^t\gamma^{(\cdot,j)}\big)^\lambda - 1\Big], \quad (4.15)$$

maximal wird (es gilt $x > 0$, da $x \in \mathcal{O}$ ist). Auf der kompakten Menge F_1 ist h^* stetig und strikt konkav in π. Somit besitzt h^* eine eindeutige globale Maximalstelle $\pi^* \in F_1$. Dabei beachte man, dass π^* unabhängig von x ist. Die Funktion $h_x^{(2)}$ ist stetig und strikt konkav. Das globale Maximum von $h_x^{(2)}$ wird an einem kritischen Punkt angenommen, d.h. für die globale Maximalstelle $c_x^* \in F_2$ gilt

$$(h_x^{(2)})'(c_x^*) = -Dx^{\lambda-1} + (c_x^*)^{\lambda-1} = 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$c_x^* = \Big(Dx^{\lambda-1}\Big)^{\frac{1}{\lambda-1}} = D^{\frac{1}{\lambda-1}}x.$$

Wegen $h_x(\pi, c) = h_x^{(1)}(\pi) + h_x^{(2)}(c)$ für alle $(\pi, c) \in F_1 \times F_2$ besitzt h_x die eindeutig bestimmte globale Maximalstelle $(\pi^*, c_x^*) \in F_1 \times F_2$, wobei man das c_x^* explizit in Abhängigkeit von x und der Konstante D angeben kann.

Setzt man π^* und c_x^* in die HJB-Gleichung ein und teilt beide Seiten durch Dx^λ, so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= r + (\pi^*)^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big) + \frac{1}{2}(\pi^*)^t\sigma\sigma^t\pi^*(\lambda-1) + \sum_{j=1}^{l}\frac{\alpha_j}{\lambda}\Big[\big(1+(\pi^*)^t\gamma^{(\cdot,j)}\big)^\lambda - 1\Big] \\ &\quad -D^{\frac{1}{\lambda-1}} - \frac{\beta}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}D^{\frac{1}{\lambda-1}} \\ &= r + (\pi^*)^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big) + \frac{1}{2}(\pi^*)^t\sigma\sigma^t\pi^*(\lambda-1) + \sum_{j=1}^{l}\frac{\alpha_j}{\lambda}\Big[\big(1+(\pi^*)^t\gamma^{(\cdot,j)}\big)^\lambda - 1\Big] \\ &\quad -\frac{\beta}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\lambda}D^{\frac{1}{\lambda-1}}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$
\begin{aligned}
D \;&=\; \Bigg[\frac{\lambda}{1-\lambda}\Bigg(\frac{\beta}{\lambda} - r - (\pi^*)^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big) - \frac{1}{2}(\pi^*)^t\sigma\sigma^t\pi^*(\lambda-1) \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{l}\frac{\alpha_j}{\lambda}\Big[\big(1+(\pi^*)^t\gamma^{(\cdot,j)}\big)^\lambda - 1\Big]\Bigg)\Bigg]^{\lambda-1},
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

wobei D genau dann strikt positiv ist, falls β hinreichend groß ist, nämlich $\beta > A$ mit

$$
\begin{aligned}
A \;&:=\; \lambda\Big(r + (\pi^*)^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big) + \frac{1}{2}(\pi^*)^t\sigma\sigma^t\pi^*(\lambda-1)\Big) \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{l}\alpha_j\Big[\big(1+(\pi^*)^t\gamma^{(\cdot,j)}\big)^\lambda - 1\Big].
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

Es gilt $A = \lambda h^*(\pi^*) \geq \lambda h^*(0) = \lambda r > 0$, da $\pi^* \in F_1$ die eindeutig bestimmte globale Maximalstelle von h^* ist.

Sei nun $\beta > A$ vorausgesetzt. Der mögliche Kandidat G für die Wertefunktion ist damit gegeben durch

$$
G(x) \;=\; D\frac{x^\lambda}{\lambda}\mathbb{1}_{\{x>0\}} \qquad \text{mit } D > 0 \text{ aus (4.16).}
$$

Die Funktion G ist auf der Menge $(0,\infty)$ strikt konkav, da D strikt positiv ist. Weiterhin ist G eine klassische C^2-Lösung der HJB-Gleichung mit höchstens polynomialem Wachstum. Nimmt man an, dass der Vermögensprozess $X^{(\pi^*,c^*)}$ bei Start in $x \in \mathcal{O}$ fast sicher strikt positiv ist, so ist der mögliche Kandidat für die optimale Steuerung $u^* = (\pi^*, c^*)$ gegeben durch

$$
\pi^*(t) \;=\; \pi^*, \tag{4.18}
$$

$$
c^*(t) \;=\; D^{\frac{1}{\lambda-1}}X^{(\pi^*,c^*)}(t) \tag{4.19}
$$

für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Dabei ist π^* die eindeutig bestimmte globale Maximalstelle von h^* (vgl. (4.15)) auf der Menge F_1.

Im Folgenden wird gezeigt, dass die obige Annahme gerechtfertigt ist. Bei Start in $x \in \mathcal{O}$ genügt der Prozess X^{u^*} der stochastischen Differentialgleichung

$$
\begin{aligned}
dX^{u^*}(t) \;&=\; X^{u^*}(t)\Big(r + (\pi^*)^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big) - D^{\frac{1}{\lambda-1}}\Big)\,dt \\
&\qquad + X^{u^*}(t)(\pi^*)^t\sigma\,dW(t) + X^{u^*}(t-)(\pi^*)^t\gamma\,dN(t) \\
&=\; X^{u^*}(t-)\,dZ(t), \qquad\qquad (4.20) \\
X^{u^*}(0) \;&=\; x \;>\; 0
\end{aligned}
$$

mit

$$Z(t) \;:=\; Z^{\pi^*}(t) \;:=\; \Big(r + (\pi^*)^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big) - D^{\frac{1}{\lambda-1}}\Big)t + (\pi^*)^t\sigma W(t) + (\pi^*)^t\gamma N(t).$$

Die fast sicher eindeutig bestimmte Lösung X^{u^*} ist gegeben durch

$$X^{u^*}(t) \;=\; x\exp\Big(Z(t) - \frac{1}{2}\big[Z,Z\big]^c(t)\Big)\prod_{j=1}^{l}\prod_{\{n:\,0<T_n^{(j)}\le t\}}\big(1+\Delta Z(T_n^{(j)})\big)\exp\big(-\Delta Z(T_n^{(j)})\big)$$

für $t \in \mathbb{R}_+$, wobei $(T_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Sprungstellen des eindimensionalen Poisson-Prozesses N_j ist ($j = 1,\ldots,l$). Aus $\Delta Z(T_n^{(j)}) = (\pi^*)^t\gamma^{(\cdot,j)}$ fast sicher auf der Menge $\{0 < T_n^{(j)} \le t\}$ und $(\pi^*)^t\gamma^{(\cdot,j)} > -1$ (dies gilt, da $\pi^* \in F_1$ und $\gamma \in (-\frac{1}{\kappa},\infty)^{d\times l}$ sind) folgt $X^{u^*}(t) > 0$ fast sicher für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Um den Verifikationssatz 4.2 anwenden zu können, müssen noch die folgenden Voraussetzungen überprüft werden:

1) Die Bedingung (4.11) aus Satz 4.2 muss gelten.

2) Die Steuerung $u^* = (\pi^*, c^*)$, gegeben durch (4.18) und (4.19), muss zulässig sein.

Ad 1): Die fast sicher eindeutig bestimmte Lösung X^{u^*} der gesteuerten stochastischen Differentialgleichung (4.20) lässt sich explizit angeben durch

$$\begin{aligned}X^{u^*}(t) \;&=\; x\exp\Big(\big[r + (\pi^*)^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big) - D^{\frac{1}{\lambda-1}}\big]t + (\pi^*)^t\sigma W(t) - \frac{1}{2}(\pi^*)^t\sigma\sigma^t\pi^* t\Big)\\ &\quad\cdot\prod_{j=1}^{l}\big(1+(\pi^*)^t\gamma^{(\cdot,j)}\big)^{N_j(t)} \qquad (4.21)\\ &=\; x\exp\Big((\pi^*)^t\sigma W(t) - \frac{1}{2}(\pi^*)^t\sigma\sigma^t\pi^* t\Big)\exp\Big(\big[r + (\pi^*)^t(\mu - r\underline{1}) - D^{\frac{1}{\lambda-1}}\big]t\Big)\\ &\quad\cdot\prod_{j=1}^{l}\Big[\big(1+(\pi^*)^t\gamma^{(\cdot,j)}\big)^{N_j(t)}\exp\Big(-(\pi^*)^t\gamma^{(\cdot,j)}\alpha_j t\Big)\Big] \qquad (4.22)\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Mit Hilfe der expliziten Gestalt (4.21) von X^{u^*} erhält man für $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^x\big(G(X^{u^*}(t))\big) \;&=\; D\frac{x^\lambda}{\lambda}\exp\Big(\big[r + (\pi^*)^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big) - D^{\frac{1}{\lambda-1}}\big]t\lambda - \frac{1}{2}(\pi^*)^t\sigma\sigma^t\pi^* t\lambda\Big)\\ &\quad\cdot\mathbb{E}\bigg(\exp\Big(\lambda(\pi^*)^t\sigma W(t)\Big)\prod_{j=1}^{l}\big(1+(\pi^*)^t\gamma^{(\cdot,j)}\big)^{\lambda N_j(t)}\bigg)\\ &=\; D\frac{x^\lambda}{\lambda}\exp\Big(\big[r + (\pi^*)^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big) - D^{\frac{1}{\lambda-1}}\big]t\lambda - \frac{1}{2}(\pi^*)^t\sigma\sigma^t\pi^* t\lambda\Big)\\ &\quad\cdot\exp\Big(\frac{1}{2}\lambda^2(\pi^*)^t\sigma\sigma^t\pi^* t\Big)\prod_{j=1}^{l}\exp\Big(\alpha_j t\Big[\big(1+(\pi^*)^t\gamma^{(\cdot,j)}\big)^\lambda - 1\Big]\Big). \qquad (4.23)\end{aligned}$$

Dabei wurden zum einen die Unabhängigkeit der beiden Prozesse W und N sowie die Unabhängigkeit der Komponenten von N benutzt und zum anderen die Tatsache, dass $W(t) \sim N(0, tI_m)$ und $N_j(t) \sim Poi(\alpha_j t)$, $j = 1, \dots, l$, sind.

Wegen der Beziehung $\beta > A$ mit A aus (4.17) ergibt sich

$$\lim_{t\to\infty}\Big[\exp(-\beta t)\mathbb{E}^x\big(G(X^{u^*}(t))\big)\Big] \;=\; \lim_{t\to\infty}\Big[D\frac{x^\lambda}{\lambda}\exp\big((-\beta + A)t\big)\exp\big(-D^{\frac{1}{\lambda-1}}t\lambda\big)\Big] \;=\; 0$$

und somit ist die Bedingung (4.11) aus Satz 4.2 erfüllt.

Ad 2): Definiert man die Prozesse $Y_1 = (Y_1(t))_{t\in\mathbb{R}_+}, Y_{2,j} = (Y_{2,j}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, $j = 1, \dots, l$, und $Y_3 = (Y_3(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ durch

$$\begin{aligned}
Y_1(t) &:= \exp\Big((\pi^*)^t\sigma W(t) - \frac{1}{2}(\pi^*)^t\sigma\sigma^t\pi^* t\Big),\\
Y_{2,j}(t) &:= \big(1 + (\pi^*)^t\gamma^{(\cdot,j)}\big)^{N_j(t)}\exp\Big(-(\pi^*)^t\gamma^{(\cdot,j)}\alpha_j t\Big),\\
Y_3(t) &:= \exp\Big(\big[r + (\pi^*)^t(\mu - r\underline{1}) - D^{\frac{1}{\lambda-1}}\big]t\Big),
\end{aligned}$$

so lässt sich leicht nachrechnen, dass die Prozesse Y_1 und $Y_{2,j}$, $j = 1, \dots, l$, positive Martingale mit stetigen bzw. rechtsstetigen Pfaden sind. Der Prozess Y_3 ist auf jedem Intervall $[0, t]$ mit $t \in \mathbb{R}_+$ beschränkt.
Mit Hilfe der expliziten Gestalt (4.22) von X^{u^*}, der Unabhängigkeit der Prozesse Y_1 und $Y_{2,j}$, $j = 1, \dots, l$, sowie der Doob-Ungleichung folgt daraus für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^x\Big(\sup_{0\le s\le t}\big|X^{u^*}(s)\big|^n\Big)\\
&\quad= \mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}\Big|xY_1(s)Y_3(s)\prod_{j=1}^{l}Y_{2,j}(s)\Big|^n\Big)\\
&\quad\le K\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}\big(Y_1(s)\big)^n\Big)\prod_{j=1}^{l}\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}\big(Y_{2,j}(s)\big)^n\Big)\\
&\quad\le K\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{(l+1)n}\mathbb{E}\Big(\big(Y_1(t)\big)^n\Big)\prod_{j=1}^{l}\mathbb{E}\Big(\big(Y_{2,j}(t)\big)^n\Big)\\
&\quad= K\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{(l+1)n}\mathbb{E}\Big(\exp\big(n(\pi^*)^t\sigma W(t)\big)\Big)\exp\Big(-\frac{1}{2}n(\pi^*)^t\sigma\sigma^t\pi^* t\Big)\\
&\qquad\cdot\prod_{j=1}^{l}\Big[\mathbb{E}\Big(\big(1 + (\pi^*)^t\gamma(\cdot,j)\big)^{nN_j(t)}\Big)\exp\Big(-n(\pi^*)^t\gamma^{(\cdot,j)}\alpha_j t\Big)\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= K\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{(l+1)n} \exp\Big(\frac{1}{2}\, n^2(\pi^*)^t\sigma\sigma^t\pi^* t\Big) \exp\Big(-\frac{1}{2}\, n(\pi^*)^t\sigma\sigma^t\pi^* t\Big) \\
&\quad \cdot \prod_{j=1}^{l} \Big[\exp\Big(\alpha_j t\big[\big(1+(\pi^*)^t\gamma^{(\cdot,j)}\big)^n - 1\big]\Big) \exp\Big(-n(\pi^*)^t\gamma^{(\cdot,j)}\alpha_j t\Big)\Big] \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

für ein geeignetes $K > 0$. Damit ist die Bedingung ii) aus Definition 4.1 erfüllt. Darüber hinaus ist auch die Bedingung i) einer zulässigen Steuerung erfüllt, denn zum einen ist der Prozess π^* konstant und zum anderen gilt

$$
\mathbb{E}^x\Big(\int_0^t \big|c^*(s)\big|^n\, ds\Big) \;\leq\; D^{\frac{n}{\lambda-1}} t\,\mathbb{E}^x\Big(\sup_{0\leq s\leq t} \big|X^{u^*}(s)\big|^n\Big) \;<\; \infty
$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}_+$.
Es bleibt die Bedingung iii) aus Definition 4.1 zu zeigen. Mit Hilfe des Satzes von Fubini sowie der Gleichung (4.23) gilt

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^x\Big(\int_0^\tau \exp(-\beta s)\big|L(X^{u^*}(s), u^*(s))\big|\, ds\Big) \\
&\qquad \leq \frac{1}{\lambda} D^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \mathbb{E}^x\Big(\int_0^\infty \exp(-\beta s)\big(X^{u^*}(s)\big)^\lambda\, ds\Big) \\
&\qquad = D^{\frac{1}{\lambda-1}} \mathbb{E}^x\Big(\int_0^\infty \exp(-\beta s) G(X^{u^*}(s))\, ds\Big) \\
&\qquad = D^{\frac{1}{\lambda-1}} \int_0^\infty \exp(-\beta s)\mathbb{E}^x\big(G(X^{u^*}(s))\big)\, ds \\
&\qquad = D^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \frac{x^\lambda}{\lambda} \int_0^\infty \exp\big((-\beta + A)s\big) \exp\big(-D^{\frac{1}{\lambda-1}} s\lambda\big)\, ds \\
&\qquad = D^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \frac{x^\lambda}{\lambda} \Big[\frac{1}{-\beta + A - \lambda D^{\frac{1}{\lambda-1}}} \exp\Big(\big(-\beta + A - \lambda D^{\frac{1}{\lambda-1}}\big)s\Big)\Big]_0^\infty \\
&\qquad = -D^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \frac{x^\lambda}{\lambda} \frac{1}{-\beta + A - \lambda D^{\frac{1}{\lambda-1}}} \\
&\qquad < \infty
\end{aligned}
$$

und somit ist die Bedingung iii) der Definition 4.1 erfüllt.
Dadurch ist die Steuerung $u^* = (\pi^*, c^*)$, gegeben durch (4.18) und (4.19), zulässig.

Alle weiteren Voraussetzungen sind auf triviale Weise erfüllt, so dass der Verifikationssatz 4.2 mit $\mathcal{O} = (0, \infty)$ angewendet werden kann. Das Ergebnis lässt sich wie folgt zusammenfassen:

Folgerung 4.4

Sei $x \in \mathcal{O}$ gegeben. Ferner sei π^* die eindeutig bestimmte globale Maximalstelle der Funktion $h^* : F_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h^*(\pi) \;:=\; r + \pi^t\big(\mu - r\underline{1} - \gamma\alpha\big) + \frac{1}{2}\pi^t\sigma\sigma^t\pi(\lambda - 1) + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \frac{1}{\lambda}\Big[\big(1 + \pi^t\gamma^{(\cdot,j)}\big)^\lambda - 1\Big].$$

Es gelte $\beta > A$ mit A aus (4.17). Sei $D > 0$ durch (4.16) gegeben. Dann ist die zulässige Steuerung $u^* = (\pi^*, c^*)$ mit

$$\pi^*(t) \;=\; \pi^* \qquad \textit{und} \qquad c^*(t) \;=\; D^{\frac{1}{\lambda-1}} X^{u^*}(t)$$

für $t \in \mathbb{R}_+$ eine Lösung des Steuerungsproblems

$$\sup_{(\pi,c)\in\mathcal{A}(x)} \mathbb{E}^x\bigg(\int_0^\tau \exp(-\beta s)\frac{\big(c(s)\big)^\lambda}{\lambda}\, ds\bigg).$$

Bemerkung 4.5

1. Bei Start in $x \in \mathcal{O}$ ist der Vermögensprozess $X^{u^*} = (X^{u^*}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ zum optimalen $u^* = (\pi^*, c^*)$ aus Folgerung 4.4 fast sicher strikt positiv. Insbesondere ist u^* somit eine optimale Strategie des ursprünglichen Problems, d.h. u^* maximiert das Funktional (4.13).

2. Da die Funktion h^* mit der aus Folgerung 3.10 übereinstimmt, lässt sich auch hier im Fall $\gamma \equiv 0$ die eindeutig bestimmte globale Maximalstelle π^* der Funktion h^* explizit angeben. Genau wie im endlichen Zeithorizont gilt

   $$\pi^* \;=\; \pi_0^* \;=\; \frac{1}{1-\lambda}\big(\sigma\sigma^t\big)^{-1}\big(\mu - r\underline{1}\big).$$

   In dieser Situation stimmt die optimale zulässige Steuerung $u^* = (\pi^*, c^*)$ mit dem Ergebnis von Korn/Korn [18, S. 283] überein.

Wie im Beispiel des endlichen Zeithorizonts aus Abschnitt 3.4 lässt sich auch hier für den Fall $d = 1$ ein Zusammenhang zwischen dem Parameter $\gamma \in (-1, \infty)^{1\times l}$ und der optimalen zulässigen Steuerung $u^* = (\pi^*, c^*)$ herstellen. Fasst man die eindeutig bestimmte globale Maximalstelle $\pi^* = \pi_\gamma^*$ als Funktion in $\gamma \in (-1, \infty)^{1\times l}$ auf, so erhält man mit den gleichen Argumenten wie im Beispiel des endlichen Zeithorizonts die Beziehung:

$$\pi_\gamma^* \;<\; \pi_0^* \;=\; \frac{\mu - r}{(1-\lambda)\sigma\sigma^t} \qquad \text{für alle } \gamma \in (-1,\infty)^{1\times l},\ \gamma \neq (0,\dots,0).$$

Analog zu Abschnitt 3.4 lässt sich auch für den optimalen Konsum eine konträre Beziehung zeigen. Fasst man nämlich die Konstante $D = D_{\gamma,\pi}$ aus (4.16) als Funktion in γ und π auf, so erhält man für hinreichend großes β durch eine einfache Rechnung die Beziehung $D_{\gamma,\pi_\gamma^*} < D_{0,\pi_0^*}$ für $\gamma \in (-1,\infty)^{1\times l}$, $\gamma \neq (0,\dots,0)$ (man beachte dabei, dass die Beziehung $A_{\gamma,\pi_\gamma^*} < A_{0,\pi_0^*}$ für $A = A_{\gamma,\pi}$ aus (4.17) bereits in Abschnitt 3.4 gezeigt wurde und dass $D_{\gamma,\pi} = (\frac{1}{1-\lambda}(\beta - A_{\gamma,\pi}))^{\lambda-1}$ gilt). Somit gilt für ein festes $x > 0$ und für $\gamma \in (-1,\infty)^{1\times l}$ mit $\gamma \neq (0,\dots,0)$

$$c_x^*(0) \;:=\; (D_{0,\pi_0^*})^{\frac{1}{\lambda-1}}x \;<\; (D_{\gamma,\pi_\gamma^*})^{\frac{1}{\lambda-1}}x \;=:\; c_x^*(\gamma),$$

wobei $c_x^*(\gamma)$ (für festes $\gamma \in (-1,\infty)^{1\times l}$) dem optimalen Konsum des Investors bei einem Vermögen in Höhe von $x > 0$ entspricht.

Kapitel 5

Stochastisches Modell für sprunghafte Bondpreise

5.1 Exponentielle Martingale und Martingalmaße

Für einen endlichen Zeithorizont $T > 0$ sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum versehen mit einer Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, die die üblichen Voraussetzungen erfüllt. Bezüglich dieser stochastischen Basis sei $W = (W(t))_{t\in[0,T]}$ eine reelle Brownsche Bewegung und $N = (N(t))_{t\in[0,T]}$ ein davon unabhängiger eindimensionaler Poisson-Prozess zum Parameter $\alpha > 0$.
Sei $Y = (Y(t))_{t\in[0,T]}$ ein reeller stochastischer Prozess von der Form

$$Y(t) \quad = \quad \int_0^t G(s)\,ds + \int_0^t F(s)\,dW(s) + \int_0^t H(s)\,d\big(N(s) - \alpha s\big), \tag{5.1}$$

wobei die Koeffizienten $G = (G(t))_{t\in[0,T]}$, $F = (F(t))_{t\in[0,T]}$ und $H = (H(t))_{t\in[0,T]}$ geeignete Messbarkeits- und Integrabilitätsbedingungen erfüllen, so dass die auftretenden (stochastischen) Integrale wohldefiniert sind.

Es wird nun untersucht, unter welchen Voraussetzungen der stochastische Prozess $\exp(Y) = (\exp(Y(t)))_{t\in[0,T]}$ ein Martingal bezüglich $\mathbb{F}$ ist.
Mit Hilfe der Itô-Formel für Semimartingale ergibt sich für jedes $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
\exp(Y(t)) \quad = \quad & 1 + \int_{0+}^t \exp(Y(s-))F(s)\,dW(s) \\
& + \int_{0+}^t \exp(Y(s-))\big(\exp(H(s)) - 1\big)\,d\big(N(s) - \alpha s\big) \\
& + \int_{0+}^t \exp(Y(s-))\Big(G(s) + \frac{1}{2}\big(F(s)\big)^2 + \alpha\big[\exp(H(s)) - 1 - H(s)\big]\Big)\,ds.
\end{aligned}$$

Nach Applebaum [1, Corollary 5.2.2] ist der Prozess $\exp(Y)$ genau dann ein lokales Martingal, wenn für Lebesgue fast alle $t \in [0,T]$

$$G(t) + \frac{1}{2}\big(F(t)\big)^2 + \alpha\big[\exp(H(t)) - 1 - H(t)\big] \quad = \quad 0 \qquad \text{fast sicher} \tag{5.2}$$

gilt. Somit ist $\exp(Y)$ genau dann ein lokales Martingal, wenn für alle $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \exp(Y(t)) \quad &= \quad 1 + \int_{0+}^{t} \exp(Y(s-))F(s)\,dW(s) \\ &\quad + \int_{0+}^{t} \exp(Y(s-))\big(\exp(H(s)) - 1\big)\,d\big(N(s) - \alpha s\big) \end{aligned} \tag{5.3}$$

gilt.

Im Folgenden sei die Bedingung (5.2) stets erfüllt. Da der Prozess $\exp(Y)$ positiv ist, ist $\exp(Y)$ (mit Hilfe des bedingten Lemmas von Fatou) ein Supermartingal. Somit ist $\exp(Y)$ genau dann ein Martingal, wenn $\mathbb{E}(\exp(Y(T))) = 1$ gilt. In diesem Fall nennt man den stochastischen Prozess $\exp(Y)$, gegeben durch (5.3), ein exponentielles Martingal.

Im folgenden Beispiel sind zwei wohlbekannte exponentielle Martingale aufgeführt.

Beispiel 5.1

a) Sei $Y = (Y(t))_{t\in[0,T]}$ ein reeller stochastischer Prozess von der Form

$$Y(t) \quad = \quad \int_0^t G(s)\,ds + \int_0^t F(s)\,dW(s),$$

wobei die Integranden geeignete Messbarkeits- und Integrabilitätsbedingungen erfüllen. Die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung (5.2) ist $G(t) = -\frac{1}{2}(F(t))^2$. Also ist das exponentielle Martingal gegeben durch

$$\exp(Y(t)) \quad = \quad \exp\Big(\int_0^t F(s)\,dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \big(F(s)\big)^2\,ds\Big)$$

für alle $t \in [0,T]$.

b) Sei $Y = (Y(t))_{t\in[0,T]}$ ein reeller stochastischer Prozess von der Form

$$Y(t) \quad = \quad \int_0^t G(s)\,ds + \int_0^t H(s)\,d\big(N(s) - \alpha s\big),$$

wobei die Integranden geeignete Messbarkeits- und Integrabilitätsbedingungen erfüllen. Die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung (5.2) ist $G(t) = -\alpha(\exp(H(t)) - 1 - H(t))$. Also ist das exponentielle Martingal gegeben durch

$$\exp(Y(t)) \quad = \quad \exp\Big(\int_0^t H(s)\,d\big(N(s) - \alpha s\big) - \alpha\int_0^t \big[\exp(H(s)) - 1 - H(s)\big]\,ds\Big)$$

für alle $t \in [0,T]$.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels sei vorausgesetzt, dass der stochastische Prozess $\exp(Y)$, gegeben durch (5.3), ein exponentielles Martingal ist.

Verzinsliche Wertpapiere (Bonds) sind Wertpapiere zur Kreditfinanzierung. Unter einer Nullkuponanleihe (engl. zero coupon bond) mit Fälligkeit $0 < \tilde{T} \leq T$ versteht man eine Sonderform des verzinslichen Wertpapiers. Dabei gibt es keinen Kupon (d.h. keine laufende Zinszahlung), sondern nur eine Auszahlung am Ende der Laufzeit $\tilde{T}$ der Anleihe. Der Gewinn für den Anleger besteht damit nur in der Differenz zwischen dem Erwerbskurs und dem Rückzahlungspreis bzw. dem Verkaufskurs.
Für jedes feste $0 < \tilde{T} \leq T$ bezeichne man den Preis einer Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt $t \in [0, \tilde{T}]$ mit $B(t, \tilde{T})$ und man nehme der Einfachheit halber an, dass $B(\tilde{T}, \tilde{T}) = 1$ ist. Ferner sei der Preisprozess $B(\cdot, \tilde{T}) = (B(t, \tilde{T}))_{t \in [0, \tilde{T}]}$ für jedes $0 < \tilde{T} \leq T$ ein strikt positiver und adaptierter càdlàg-Prozess bezüglich der stochastischen Basis $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$. Hierbei sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$ nun stets die $\mathbb{P}$-Vervollständigung der Filtration, die von der reellen Brownschen Bewegung W und dem davon unabhängigen eindimensionalen Poisson-Prozess N erzeugt wird, d.h. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{W,N} := \sigma(\{W(s), N(s) : s \in [0, t]\}, \mathcal{N})$ für alle $t \in [0, T]$. Nach Protter [30, I. Theorem 31] erfüllt $\mathbb{F}$ die üblichen Voraussetzungen.
Weiterhin sei ein festverzinsliches Sparkonto durch den Preisprozess $S = (S(t))_{t \in [0,T]}$ mit

$$S(t) \quad := \quad \exp\Big(\int_0^t r(s)\, ds \Big)$$

gegeben, wobei $r = (r(t))_{t \in [0,T]}$ ein $\mathbb{F}$-adaptierter càdlàg-Prozess ist (man beachte, dass $\int_0^T |r(s)| ds < \infty$ $\mathbb{P}$-fast sicher aufgrund der càdlàg-Eigenschaft von r automatisch erfüllt ist). Der Prozess S ist damit stetig und $\mathbb{F}$-adaptiert.

Für eine Familie $\{B(\cdot, \tilde{T}) : 0 < \tilde{T} \leq T\}$ sei $\mathbb{P}^*$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Martingalmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, gegeben durch die Dichte

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \quad = \quad \exp(Y(T)), \tag{5.4}$$

d.h. $\mathbb{P}^*$ und $\mathbb{P}$ sind äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und der diskontierte Preisprozess $\frac{B(\cdot, \tilde{T})}{S} = (\frac{B(t, \tilde{T})}{S(t)})_{t \in [0, \tilde{T}]}$ bildet für jedes $0 < \tilde{T} \leq T$ ein erzeugtes Martingal bezüglich $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*, \mathbb{F})$.
Somit gilt für alle $t \in [0, \tilde{T}]$ mit $0 < \tilde{T} \leq T$

$$B(t, \tilde{T}) \quad = \quad S(t) \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \Big[\frac{B(\tilde{T}, \tilde{T})}{S(\tilde{T})} \Big| \mathcal{F}_t \Big] \quad = \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \Big[\exp\Big(- \int_t^{\tilde{T}} r(s)\, ds \Big) \Big| \mathcal{F}_t \Big].$$

Aufgrund dieser Darstellung ist der Preisprozess $B(\cdot, \tilde{T})$ für jedes $0 < \tilde{T} \leq T$ ein $\mathbb{P}^*$-Semimartingal (als Produkt eines Prozesses von lokalbeschränkter Variation und eines

$\mathbb{P}^*$-Martingals) und mit Hilfe von Protter [30, III. Theorem 35] auch ein $\mathbb{P}$-Semimartingal.

Es gilt das folgende Lemma:

Lemma 5.2
Definiert man die beiden Prozesse $W_{\mathbb{P}^*} = (W_{\mathbb{P}^*}(t))_{t\in[0,T]}$ und $\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*} = (\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t))_{t\in[0,T]}$ durch

$$\begin{aligned} W_{\mathbb{P}^*}(t) &:= W(t) - \int_0^t F(s)\,ds, \\ \widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t) &:= N(t) - \alpha t - \alpha \int_0^t \big(\exp(H(s)) - 1\big)\,ds \;=\; N(t) - \alpha \int_0^t \exp(H(s))\,ds, \end{aligned}$$

dann gilt:

i) $W_{\mathbb{P}^*}$ ist eine Brownsche Bewegung bezüglich $\mathbb{P}^*$.

ii) $\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}$ ist ein lokales Martingal bezüglich $\mathbb{P}^*$.

Beweis. i) Mit Hilfe der Produktformel für Semimartingale gilt für alle $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} & d\big(\exp(Y(t))W_{\mathbb{P}^*}(t)\big) \\ &\quad= \exp(Y(t-))\,dW_{\mathbb{P}^*}(t) + W_{\mathbb{P}^*}(t-)\,d\big(\exp(Y(t))\big) + d\big[\exp(Y), W_{\mathbb{P}^*}\big](t) \\ &\quad= \exp(Y(t-))\,dW(t) - \exp(Y(t-))F(t)\,dt + W_{\mathbb{P}^*}(t-)\exp(Y(t-))F(t)\,dW(t) \\ &\qquad +W_{\mathbb{P}^*}(t-)\exp(Y(t-))\big(\exp(H(t)) - 1\big)\,d\big(N(t) - \alpha t\big) + \exp(Y(t-))F(t)\,dt \\ &\quad= \exp(Y(t-))\big(1 + W_{\mathbb{P}^*}(t-)F(t)\big)\,dW(t) \\ &\qquad +W_{\mathbb{P}^*}(t-)\exp(Y(t-))\big(\exp(H(t)) - 1\big)\,d\big(N(t) - \alpha t\big). \end{aligned}$$

Somit ist der Prozess $\exp(Y)W_{\mathbb{P}^*} = (\exp(Y(t))W_{\mathbb{P}^*}(t))_{t\in[0,T]}$ ein lokales Martingal bezüglich $\mathbb{P}$. Mit Hilfe von Applebaum [1, Lemma 5.2.10] folgt daraus, dass $W_{\mathbb{P}^*}$ ein lokales Martingal bezüglich $\mathbb{P}^*$ ist. Weiterhin besitzt $W_{\mathbb{P}^*}$ fast sicher stetige Pfade und es gilt $W_{\mathbb{P}^*}(0) = 0$.
Da die beiden Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}$ und $\mathbb{P}^*$ äquivalent sind und der Prozess W eine reelle Brownsche Bewegung bezüglich $\mathbb{P}$ ist, ist der quadratische Variationsprozess $[W_{\mathbb{P}^*}, W_{\mathbb{P}^*}]^{\mathbb{P}^*} = ([W_{\mathbb{P}^*}, W_{\mathbb{P}^*}]^{\mathbb{P}^*}(t))_{t\in[0,T]}$ bezüglich $\mathbb{P}^*$ gegeben durch

$$\big[W_{\mathbb{P}^*}, W_{\mathbb{P}^*}\big]^{\mathbb{P}^*}(t) \;=\; \big[W_{\mathbb{P}^*}, W_{\mathbb{P}^*}\big]^{\mathbb{P}}(t) \;=\; \big[W, W\big]^{\mathbb{P}}(t) \;=\; t.$$

Eine Anwendung von Levy's Charakterisierung einer Brownschen Bewegung (vgl. Revuz/Yor [31, IV. Theorem 3.6]) liefert die Behauptung.

ii) Aufgrund von Applebaum [1, Lemma 5.2.10] reicht es aus zu zeigen, dass der Prozess $\exp(Y)\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*} = (\exp(Y(t))\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t))_{t\in[0,T]}$ ein lokales Martingal bezüglich $\mathbb{P}$ ist. Mit Hilfe der Produktformel für Semimartingale gilt für alle $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
&d\big(\exp(Y(t))\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t)\big) \\
&\quad= \exp(Y(t-))\,d\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t) + \widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t-)\,d\big(\exp(Y(t))\big) + d\big[\exp(Y),\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}\big](t) \\
&\quad= \exp(Y(t-))\,d\big(N(t)-\alpha t\big) - \alpha\exp(Y(t-))\big(\exp(H(t))-1\big)\,dt \\
&\qquad+\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t-)\exp(Y(t-))F(t)\,dW(t) \\
&\qquad+\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t-)\exp(Y(t-))\big(\exp(H(t))-1\big)\,d\big(N(t)-\alpha t\big) \\
&\qquad+\exp(Y(t-))\big(\exp(H(t))-1\big)\,dN(t) \\
&\quad= \exp(Y(t-))\Big(1+\big(\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t-)+1\big)\big(\exp(H(t))-1\big)\Big)\,d\big(N(t)-\alpha t\big) \\
&\qquad+\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t-)\exp(Y(t-))F(t)\,dW(t).
\end{aligned}$$

Somit ist der Prozess $\exp(Y)\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}$ ein lokales Martingal bezüglich $\mathbb{P}$. ■

Unter gewissen Voraussetzungen sind die beiden Prozesse $W_{\mathbb{P}^*}$ und $\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}$ sogar unabhängig bezüglich $\mathbb{P}^*$. Dazu seien $\mathbb{F}^W = (\mathcal{F}_t^W)_{t\in[0,T]}$ und $\mathbb{F}^N = (\mathcal{F}_t^N)_{t\in[0,T]}$ die $\mathbb{P}$-Vervollständigungen der von den Prozessen W bzw. N erzeugten Subfiltrationen von $\mathbb{F}$. Dann gilt:

Lemma 5.3
Sind die Prozesse F und H adaptiert an $\mathbb{F}^W$ bzw. $\mathbb{F}^N$, so sind die beiden Prozesse $W_{\mathbb{P}^*}$ und $\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}$ aus Lemma 5.2 unabhängig bezüglich $\mathbb{P}^*$.

Beweis. Nach Beispiel 5.1 sind die Prozesse $D_1 = (D_1(t))_{t\in[0,T]}$ und $D_2 = (D_2(t))_{t\in[0,T]}$, definiert durch

$$\begin{aligned}
D_1(t) &:= \exp\Big(\int_0^t F(s)\,dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \big(F(s)\big)^2\,ds\Big), \\
D_2(t) &:= \exp\Big(\int_0^t H(s)\,d\big(N(s)-\alpha s\big) - \alpha\int_0^t \big[\exp(H(s))-1-H(s)\big]\,ds\Big),
\end{aligned}$$

exponentielle Martingale bezüglich $\mathbb{P}$. Mit Hilfe der konkreten Gestalt der beiden Prozesse D_1 und D_2 sowie der Bedingung (5.2) gilt

$$\exp(Y(T)) = D_1(T)D_2(T).$$

Aufgrund der Produktgestalt der Dichte, der Unabhängigkeit der beiden Prozesse W und N bezüglich $\mathbb{P}$ und der Tatsache, dass $\mathbb{E}(D_1(T)) = \mathbb{E}(D_2(T)) = 1$ gilt, folgt unmittelbar die Behauptung. ■

Für den Rest dieses Abschnittes wird angenommen, dass die Zinsrate $r = (r(t))_{t\in[0,T]}$ unter dem ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ die folgende explizite Gestalt besitzt:

$$r(t) \;=\; r_0 + \int_0^t a(s)\,ds + \int_0^t b(s)\,dW(s) + \int_0^t c(s)\,d\big(N(s) - \alpha s\big) \qquad (r_0 > 0). \tag{5.5}$$

Hierbei erfüllen die Koeffizienten $a = (a(t))_{t\in[0,T]}$, $b = (b(t))_{t\in[0,T]}$ und $c = (c(t))_{t\in[0,T]}$ geeignete Messbarkeits- und Integrabilitätsbedingungen, so dass die auftretenden (stochastischen) Integrale wohldefiniert sind.

Im Folgenden wird untersucht, wie sich der Preisprozess $B(\cdot,\tilde{T})$ einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeit $0 < \tilde{T} \le T$ und die Zinsrate r bei Übergang zum äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ aus (5.4) verhalten. Im stetigen Fall (d.h. ohne Vorhandensein eines Poisson-Prozesses) findet man eine ähnliche Aussage des folgenden Satzes im Buch von Musiela/Rutkowski [27, Proposition 9.5.1] und in der Arbeit von Artzner/Delbaen [2, Proposition 2].

Satz 5.4
Bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ aus (5.4) gilt:
i) Die Zinsrate r besitzt das stochastische Differential

$$\begin{aligned} dr(t) &= \Big(a(t) + b(t)F(t) + \alpha c(t)\big(\exp(H(t)) - 1\big)\Big)\,dt + b(t)\,dW_{\mathbb{P}^*}(t) + c(t)\,d\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t), \\ r(0) &= r_0 \end{aligned}$$

für alle $t \in [0,T]$.
ii) Es existieren reellwertige $\mathbb{F}$-adaptierte Prozesse $U_1(\cdot,\tilde{T}) = (U_1(t,\tilde{T}))_{t\in[0,\tilde{T}]}$ und $U_2(\cdot,\tilde{T}) = (U_2(t,\tilde{T}))_{t\in[0,\tilde{T}]}$, so dass gilt:

$$dB(t,\tilde{T}) \;=\; B(t-,\tilde{T})\Big(r(t)\,dt + U_1(t,\tilde{T})\,dW_{\mathbb{P}^*}(t) + U_2(t,\tilde{T})\,d\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t)\Big)$$

für alle $t \in [0,\tilde{T}]$.

Beweis. i) Diese Aussage folgt unmittelbar aus der expliziten Gestalt (5.5) der Zinsrate r bezüglich dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ und Lemma 5.2.
ii) Vorbemerkung: Mit Hilfe der Itô-Formel für Semimartingale lässt sich der Prozess $\exp(-Y) = (\exp(-Y(t)))_{t\in[0,T]}$ für jedes $t \in [0,T]$ schreiben als

$$\begin{aligned} \exp(-Y(t)) \;=\; 1 &- \int_0^t \exp(-Y(s-))F(s)\,dW(s) \\ &+ \int_0^t \exp(-Y(s-))\big(\exp(-H(s)) - 1\big)\,d\big(N(s) - \alpha s\big) \\ &- \int_0^t \exp(-Y(s-))\Big(G(s) - \frac{1}{2}\big(F(s)\big)^2 - \alpha\big(\exp(-H(s)) - 1 + H(s)\big)\Big)\,ds. \end{aligned}$$

Eigentlicher Beweis:
Da $\mathbb{P}^*$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Martingalmaß für die Familie $\{B(\cdot,\tilde{T}) : 0 < \tilde{T} \leq T\}$ ist, ist der Prozess $\frac{B(\cdot,\tilde{T})}{S} = (\frac{B(t,\tilde{T})}{S(t)})_{t\in[0,\tilde{T}]}$ ein Martingal bezüglich $\mathbb{P}^*$. Nach Applebaum [1, Lemma 5.2.10] ist der Prozess $\exp(Y)\frac{B(\cdot,\tilde{T})}{S} = (\exp(Y(t))\frac{B(t,\tilde{T})}{S(t)})_{t\in[0,\tilde{T}]}$ somit ein Martingal bezüglich $\mathbb{P}$. Eine Anwendung des Darstellungssatzes für lokale Martingale (vgl. Jacod/Shiryaev [14, III. Theorem 4.34] oder Kunita [20, Theorem 1.1]) liefert die Existenz von geeigneten $\mathbb{F}$-adaptierten stochastischen Prozessen $\widetilde{U}_1(\cdot,\tilde{T}) = (\widetilde{U}_1(t,\tilde{T}))_{t\in[0,\tilde{T}]}$ und $\widetilde{U}_2(\cdot,\tilde{T}) = (\widetilde{U}_2(t,\tilde{T}))_{t\in[0,\tilde{T}]}$, so dass für alle $t \in [0,\tilde{T}]$ gilt:

$$\exp(Y(t))\frac{B(t,\tilde{T})}{S(t)} = B(0,\tilde{T}) + \int_0^t \widetilde{U}_1(s,\tilde{T})\,dW(s) + \int_0^t \widetilde{U}_2(s,\tilde{T})\,d\big(N(s)-\alpha s\big).$$

Man definiere den Prozess $Z = (Z(t))_{t\in[0,\tilde{T}]}$ durch

$$Z(t) := \exp(Y(t))\frac{B(t,\tilde{T})}{S(t)}.$$

Aufgrund der fast sicheren Gleichheit $G(t) = -\frac{1}{2}(F(t))^2 - \alpha(\exp(H(t)) - 1 - H(t))$ aus (5.2) und der konkreten Gestalt der beiden Prozesse $W_{\mathbb{P}^*}$ und $\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}$ aus Lemma 5.2 folgt mit Hilfe der Produktformel für Semimartingale für alle $t \in [0,\tilde{T}]$

$$\begin{aligned}
&d\Big(\frac{B(t,\tilde{T})}{S(t)}\Big)\\
&= d\big(Z(t)\exp(-Y(t))\big)\\
&= Z(t-)\,d\big(\exp(-Y(t))\big) + \exp(-Y(t-))\,dZ(t) + d\big[Z,\exp(-Y)\big](t)\\
&= -Z(t-)\exp(-Y(t-))F(t)\,dW(t)\\
&\quad +Z(t-)\exp(-Y(t-))\big(\exp(-H(t))-1\big)\,d\big(N(t)-\alpha t\big)\\
&\quad -Z(t-)\exp(-Y(t-))\Big(G(t) - \frac{1}{2}\big(F(t)\big)^2 - \alpha\big(\exp(-H(t)) - 1 + H(t)\big)\Big)\,dt\\
&\quad +\exp(-Y(t-))\widetilde{U}_1(t,\tilde{T})\,dW(t) + \exp(-Y(t-))\widetilde{U}_2(t,\tilde{T})\,d\big(N(t)-\alpha t\big)\\
&\quad -\exp(-Y(t-))F(t)\widetilde{U}_1(t,\tilde{T})\,dt + \exp(-Y(t-))\big(\exp(-H(t))-1\big)\widetilde{U}_2(t,\tilde{T})\,dN(t)\\
&= -Z(t-)\exp(-Y(t-))F(t)\,dW(t) + Z(t-)\exp(-Y(t-))\big(\exp(-H(t))-1\big)\,dN(t)\\
&\quad -Z(t-)\exp(-Y(t-))\Big(-\alpha\big(\exp(H(t))-1\big) - \big(F(t)\big)^2\Big)\,dt\\
&\quad +\exp(-Y(t-))\widetilde{U}_1(t,\tilde{T})\,dW(t) - \alpha\exp(-Y(t-))\widetilde{U}_2(t,\tilde{T})\,dt\\
&\quad -\exp(-Y(t-))F(t)\widetilde{U}_1(t,\tilde{T})\,dt + \exp(-Y(t-))\exp(-H(t))\widetilde{U}_2(t,\tilde{T})\,dN(t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -Z(t-)\exp(-Y(t-))F(t)\,dW_{\mathbb{P}^*}(t) + \exp(-Y(t-))\widetilde{U}_1(t,\tilde{T})\,dW_{\mathbb{P}^*}(t)\\
&\quad +Z(t-)\exp(-Y(t-))\Big(\exp(-H(t))-1\Big)\,d\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t)\\
&\quad +\exp(-Y(t-))\exp(-H(t))\widetilde{U}_2(t,\tilde{T})\,d\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t)\\
&= \exp(-Y(t-))\Big(\widetilde{U}_1(t,\tilde{T}) - Z(t-)F(t)\Big)\,dW_{\mathbb{P}^*}(t)\\
&\quad +\exp(-Y(t-))\Big(\exp(-H(t))\widetilde{U}_2(t,\tilde{T}) + Z(t-)\Big[\exp(-H(t))-1\Big]\Big)\,d\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t).
\end{aligned}
$$

Eine erneute Anwendung der Produktformel für Semimartingale liefert für alle $t \in [0,\tilde{T}]$

$$
\begin{aligned}
&dB(t,\tilde{T})\\
&= d\Big(\frac{B(t,\tilde{T})}{S(t)}S(t)\Big)\\
&= \frac{B(t-,\tilde{T})}{S(t)}\,dS(t) + S(t)d\Big(\frac{B(t,\tilde{T})}{S(t)}\Big)\\
&= B(t-,\tilde{T})r(t)\,dt + S(t)\exp(-Y(t-))\big(\widetilde{U}_1(t,\tilde{T}) - Z(t-)F(t)\big)\,dW_{\mathbb{P}^*}(t)\\
&\quad +S(t)\exp(-Y(t-))\Big(\exp(-H(t))\widetilde{U}_2(t,\tilde{T}) + Z(t-)\Big[\exp(-H(t))-1\Big]\Big)\,d\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t)\\
&= B(t-,\tilde{T})\Big(r(t)\,dt + U_1(t,\tilde{T})\,dW_{\mathbb{P}^*}(t) + U_2(t,\tilde{T})\,d\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t)\Big)
\end{aligned}
$$

mit geeigneten $\mathbb{F}$-adaptierten Prozessen $U_1(\cdot,\tilde{T})$ und $U_2(\cdot,\tilde{T})$. Dabei beachte man, dass der Prozess $(B(t,\tilde{T}))_{t\in[0,\tilde{T}]}$ und somit auch der Prozess $(B(t-,\tilde{T}))_{t\in[0,\tilde{T}]}$ strikt positiv sind (vgl. Meyer [26, VI. Theorem 15]). Die Behauptung ist damit bewiesen. ■

Mit Hilfe dieses Satzes folgt unmittelbar, dass der Preisprozess $B(\cdot,\tilde{T})$ bezüglich des ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ das folgende stochastische Differential besitzt:

$$
\begin{aligned}
dB(t,\tilde{T}) &= B(t-,\tilde{T})\Big[\Big(r(t) - U_1(t,\tilde{T})F(t) - \alpha U_2(t,\tilde{T})\exp(H(t))\Big)\,dt\\
&\qquad +U_1(t,\tilde{T})\,dW(t) + U_2(t,\tilde{T})\,dN(t)\Big].
\end{aligned}
$$

5.2 Verallgemeinertes Heath-Jarrow-Morton-Modell

Im Folgenden wird das klassische Heath-Jarrow-Morton-Modell (vgl. Musiela/Rutkowski [27, Kapitel 11] bzw. Heath/Jarrow/Morton [9]) verallgemeinert, indem die Vorwärtszinsrate zusätzlich mit Sprüngen eines Poisson-Prozesses überlagert wird. Anschließend lässt sich in diesem Modell die Gestalt der beiden Prozesse $U_1(\cdot,\tilde{T})$ und $U_2(\cdot,\tilde{T})$ aus Satz 5.4 genauer bestimmen.

Für jedes $0 < \tilde{T} \leq T$ sei die Vorwärtszinsrate (engl. forward rate) $f(\cdot, \tilde{T}) = (f(t, \tilde{T}))_{t \in [0, \tilde{T}]}$ gegeben durch

$$f(t, \tilde{T}) \;=\; f(0, \tilde{T}) + \int_0^t \upsilon(u, \tilde{T})\, du + \int_0^t \varsigma(u, \tilde{T})\, dW(u) + \int_0^t \delta(u, \tilde{T})\, d\big(N(u) - \alpha u\big).$$

Hierbei sind die Koeffizienten $\upsilon, \varsigma, \delta : [0, T] \times \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ beschränkte $(\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}([0, T]))$-messbare Funktionen, wobei $\mathcal{P}$ die σ-Algebra der vorhersehbaren Mengen auf $[0, T] \times \Omega$ bezeichnet. Ferner ist $f(0, \cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion mit

$$\int_0^T \big|f(0, u)\big|\, du \;<\; \infty.$$

Das stochastische Differential von $f(\cdot, \tilde{T})$ ist gegeben durch

$$df(t, \tilde{T}) \;=\; \upsilon(t, \tilde{T})\, dt + \varsigma(t, \tilde{T})\, dW(t) + \delta(t, \tilde{T})\, d\big(N(t) - \alpha t\big). \tag{5.6}$$

Für eine gegebene Familie von Vorwärtszinsraten $\{f(\cdot, \tilde{T}) : 0 < \tilde{T} \leq T\}$ seien die Preisprozesse $\{B(\cdot, \tilde{T}) : 0 < \tilde{T} \leq T\}$ von Nullkuponanleihen wie im klassischen Heath-Jarrow-Morton-Modell definiert, d.h. für $0 < \tilde{T} \leq T$ ist der Preisprozess $B(\cdot, \tilde{T})$ definiert durch

$$B(t, \tilde{T}) \;:=\; \exp\Big(-\int_t^{\tilde{T}} f(t, u)\, du\Big) \qquad (t \in [0, \tilde{T}]). \tag{5.7}$$

Weiterhin sei vorausgesetzt, dass der Prozess $f(\cdot, \cdot) = (f(t, t))_{t \in [0, T]}$ fast sicher rechtsstetige Pfade mit endlichen Linkslimiten besitzt. Man setze $r(t) := f(t, t)$ für alle $t \in [0, T]$. Der Preisprozess des Sparkontos ist damit gegeben durch

$$S(t) \;=\; \exp\Big(\int_0^t f(u, u)\, du\Big) \qquad (t \in [0, T]).$$

Der nachfolgende Satz befasst sich mit dem stochastischen Differential von $B(\cdot, \tilde{T})$ unter dem ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$. Es wird gezeigt, dass sich der Driftkoeffizient, der Volatilitätskoeffizient und der Sprungkoeffizient von $B(\cdot, \tilde{T})$ explizit in Termen von den Koeffizienten $\upsilon, \varsigma, \delta$ und der Zinsrate r darstellen lassen. Im Fall $\delta \equiv 0$ findet man eine entsprechende Aussage in Musiela/Rutkowski [27, Lemma 11.1.1].

Satz 5.5

Das stochastische Differential des Preisprozesses $B(\cdot, \tilde{T})$ ist gegeben durch

$$dB(t, \tilde{T}) \;=\; B(t-, \tilde{T})\Big(\rho(t, \tilde{T})\, dt + \varphi(t, \tilde{T})\, dW(t) + \eta(t, \tilde{T})\, dN(t)\Big)$$

mit

$$\begin{aligned}
\rho(t, \tilde{T}) &= r(t) - \upsilon^*(t, \tilde{T}) + \frac{1}{2}\big(\varsigma^*(t, \tilde{T})\big)^2 + \alpha\delta^*(t, \tilde{T}),\\
\varphi(t, \tilde{T}) &= -\varsigma^*(t, \tilde{T}),\\
\eta(t, \tilde{T}) &= \exp(-\delta^*(t, \tilde{T})) - 1
\end{aligned}$$

für jedes $t \in [0, \tilde{T}]$. *Hierbei gilt*

$$\upsilon^*(t, \tilde{T}) \;=\; \int_t^{\tilde{T}} \upsilon(t, u)\, du, \quad \varsigma^*(t, \tilde{T}) \;=\; \int_t^{\tilde{T}} \varsigma(t, u)\, du, \quad \delta^*(t, \tilde{T}) \;=\; \int_t^{\tilde{T}} \delta(t, u)\, du$$

für alle $t \in [0, \tilde{T}]$.

Beweis. Man definiere den Prozess $Z = (Z(t))_{t\in[0,\tilde{T}]}$ durch $Z(t) := \ln(B(t, \tilde{T}))$. Berücksichtigt man die explizite Gestalt des Preisprozesses $B(\cdot, \tilde{T})$ aus (5.7), so erhält man durch Anwendung der klassischen und der stochastischen Version des Satzes von Fubini (für die stochastische Version vgl. Protter [30, IV. Theorem 64]) für alle $t \in [0, \tilde{T}]$

$$\begin{aligned}
Z(t) \;&=\; -\int_t^{\tilde{T}} f(t, u)\, du \\
&=\; -\int_t^{\tilde{T}} f(0, u)\, du - \int_t^{\tilde{T}}\int_0^t \upsilon(s, u)\, ds\, du - \int_t^{\tilde{T}}\int_0^t \varsigma(s, u)\, dW(s)\, du \\
&\quad\; -\int_t^{\tilde{T}}\int_0^t \delta(s, u)\, d\big(N(s) - \alpha s\big)\, du \\
&=\; -\int_t^{\tilde{T}} f(0, u)\, du - \int_0^t\int_t^{\tilde{T}} \upsilon(s, u)\, du\, ds - \int_0^t\int_t^{\tilde{T}} \varsigma(s, u)\, du\, dW(s) \\
&\quad\; -\int_0^t\int_t^{\tilde{T}} \delta(s, u)\, du\, d\big(N(s) - \alpha s\big) \\
&=\; -\int_0^{\tilde{T}} f(0, u)\, du - \int_0^t\int_s^{\tilde{T}} \upsilon(s, u)\, du\, ds - \int_0^t\int_s^{\tilde{T}} \varsigma(s, u)\, du\, dW(s) \\
&\quad\; -\int_0^t\int_s^{\tilde{T}} \delta(s, u)\, du\, d\big(N(s) - \alpha s\big) + \int_0^t f(0, u)\, du + \int_0^t\int_s^t \upsilon(s, u)\, du\, ds \\
&\quad\; +\int_0^t\int_s^t \varsigma(s, u)\, du\, dW(s) + \int_0^t\int_s^t \delta(s, u)\, du\, d\big(N(s) - \alpha s\big) \\
&=\; -\int_0^{\tilde{T}} f(0, u)\, du - \int_0^t\int_s^{\tilde{T}} \upsilon(s, u)\, du\, ds - \int_0^t\int_s^{\tilde{T}} \varsigma(s, u)\, du\, dW(s) \\
&\quad\; -\int_0^t\int_s^{\tilde{T}} \delta(s, u)\, du\, d\big(N(s) - \alpha s\big) + \int_0^t f(0, u)\, du + \int_0^t\int_0^u \upsilon(s, u)\, ds\, du \\
&\quad\; +\int_0^t\int_0^u \varsigma(s, u)\, dW(s)\, du + \int_0^t\int_0^u \delta(s, u)\, d\big(N(s) - \alpha s\big)\, du.
\end{aligned}$$

Benutzt man nun die Gleichheit

$$r(u) \;=\; f(u, u) \;=\; f(0, u) + \int_0^u \upsilon(s, u)\, ds + \int_0^u \varsigma(s, u)\, dW(s) + \int_0^u \delta(s, u)\, d\big(N(s) - \alpha s\big),$$

so erhält man

$$\begin{aligned} Z(t) &= Z(0) - \int_0^t \upsilon^*(s,\tilde{T})\,ds - \int_0^t \varsigma^*(s,\tilde{T})\,dW(s) \\ &\quad - \int_0^t \delta^*(s,\tilde{T})\,d\big(N(s)-\alpha s\big) + \int_0^t r(u)\,du. \end{aligned}$$

Eine Anwendung der Itô-Formel für Semimartingale liefert

$$\begin{aligned} dB(t,\tilde{T}) &= B(t-,\tilde{T})\Big(r(t) - \upsilon^*(t,\tilde{T}) + \alpha\delta^*(t,\tilde{T})\Big)\,dt - B(t-,\tilde{T})\varsigma^*(t,\tilde{T})\,dW(t) \\ &\quad -B(t-,\tilde{T})\delta^*(t,\tilde{T})\,dN(t) + \frac{1}{2}B(t-,\tilde{T})\big(\varsigma^*(t,\tilde{T})\big)^2\,dt \\ &\quad +B(t-,\tilde{T})\big(\exp(-\delta^*(t,\tilde{T})) - 1\big)\,dN(t) + B(t-,\tilde{T})\delta^*(t,\tilde{T})\,dN(t) \\ &= B(t-,\tilde{T})\Big(\rho(t,\tilde{T})\,dt + \varphi(t,\tilde{T})\,dW(t) + \eta(t,\tilde{T})\,dN(t)\Big) \end{aligned}$$

und somit ist die Behauptung bewiesen. ■

Als Nächstes wird untersucht, wie sich das stochastische Differential von $B(\cdot,\tilde{T})$ bei Übergang zum äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ aus (5.4) verändert.
Dazu definiere man den Prozess $\widehat{B}(\cdot,\tilde{T}) = (\widehat{B}(t,\tilde{T}))_{t\in[0,\tilde{T}]}$ durch

$$\widehat{B}(t,\tilde{T}) = \frac{B(t,\tilde{T})}{S(t)} = \exp\Big(-\int_t^{\tilde{T}} f(t,u)\,du - \int_0^t f(u,u)\,du\Big).$$

Mit Satz 5.5 ist das stochastische Differential von $\widehat{B}(\cdot,\tilde{T})$ gegeben durch

$$\begin{aligned} d\widehat{B}(t,\tilde{T}) &= \widehat{B}(t-,\tilde{T})\Big(\rho(t,\tilde{T})\,dt + \varphi(t,\tilde{T})\,dW(t) + \eta(t,\tilde{T})\,dN(t)\Big) - \widehat{B}(t-,\tilde{T})r(t)\,dt \\ &= \widehat{B}(t-,\tilde{T})\Big(\big(\rho(t,\tilde{T}) - r(t)\big)\,dt + \varphi(t,\tilde{T})\,dW(t) + \eta(t,\tilde{T})\,dN(t)\Big). \end{aligned}$$

Bei Übergang zum äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ gilt aufgrund der konkreten Gestalt der beiden Prozesse $W_{\mathbb{P}^*}$ und $\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}$ aus Lemma 5.2

$$\begin{aligned} d\widehat{B}(t,\tilde{T}) &= \widehat{B}(t-,\tilde{T})\Big[\Big(\rho(t,\tilde{T}) - r(t) + \varphi(t,\tilde{T})F(t) + \alpha\eta(t,\tilde{T})\exp(H(t))\Big)\,dt \\ &\qquad + \varphi(t,\tilde{T})\,dW_{\mathbb{P}^*}(t) + \eta(t,\tilde{T})\,d\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t)\Big]. \end{aligned}$$

Da der Prozess $\widehat{B}(\cdot,\tilde{T})$ bezüglich $\mathbb{P}^*$ ein Martingal ist, gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \rho(t,\tilde{T}) - r(t) + \varphi(t,\tilde{T})F(t) + \alpha\eta(t,\tilde{T})\exp(H(t)) \qquad (5.8) \\ &= -\upsilon^*(t,\tilde{T}) + \frac{1}{2}\big(\varsigma^*(t,\tilde{T})\big)^2 + \alpha\delta^*(t,\tilde{T}) - \varsigma^*(t,\tilde{T})F(t) \\ &\quad +\alpha\big(\exp(-\delta^*(t,\tilde{T})) - 1\big)\exp(H(t)). \end{aligned}$$

Bildet man von dieser Gleichung die partielle Ableitung nach $\tilde{T}$, so erhält man

$$\begin{aligned} \upsilon(t,\tilde{T}) &= \varsigma^*(t,\tilde{T})\varsigma(t,\tilde{T}) + \alpha\delta(t,\tilde{T}) - \varsigma(t,\tilde{T})F(t) \\ &\quad -\alpha\delta(t,\tilde{T})\exp(-\delta^*(t,\tilde{T}))\exp(H(t)). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Mit Hilfe der beiden Gleichungen (5.8) und (5.9) lässt sich das folgende Korollar zeigen, welches für den Fall $\delta \equiv 0$ im Buch von Musiela/Rutkowski [27, Corollary 11.1.1] zu finden ist.

Korollar 5.6

Bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ aus (5.4) ist das stochastische Differential des Preisprozesses $B(\cdot,\tilde{T})$ gegeben durch

$$dB(t,\tilde{T}) = B(t-,\tilde{T})\Big(r(t)\,dt + \varphi(t,\tilde{T})\,dW_{\mathbb{P}^*}(t) + \eta(t,\tilde{T})\,d\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t)\Big).$$

Weiterhin ist die Vorwärtszinsrate $f(\cdot,\tilde{T}) = (f(t,\tilde{T}))_{t\in[0,\tilde{T}]}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} df(t,\tilde{T}) &= \Big(\varsigma^*(t,\tilde{T})\varsigma(t,\tilde{T}) - \alpha\delta(t,\tilde{T})\big(\exp(-\delta^*(t,\tilde{T})) - 1\big)\exp(H(t))\Big)\,dt \\ &\quad +\varsigma(t,\tilde{T})\,dW_{\mathbb{P}^*}(t) + \delta(t,\tilde{T})\,d\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t) \end{aligned}$$

und wegen $r(t) = f(t,t)$ für alle $t \in [0,T]$ gilt

$$\begin{aligned} r(t) &= f(0,t) + \int_0^t \Big(\varsigma^*(u,t)\varsigma(u,t) - \alpha\delta(u,t)\big(\exp(-\delta^*(u,t)) - 1\big)\exp(H(u))\Big)\,du \\ &\quad + \int_0^t \varsigma(u,t)\,dW_{\mathbb{P}^*}(u) + \int_0^t \delta(u,t)\,d\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(u). \end{aligned}$$

Beweis. Mit Hilfe von Satz 5.5 und der Gleichung (5.8) gilt

$$\begin{aligned} dB(t,\tilde{T}) &= B(t-,\tilde{T})\Big[\Big(\rho(t,\tilde{T}) + \varphi(t,\tilde{T})F(t) + \alpha\eta(t,\tilde{T})\exp(H(t))\Big)\,dt \\ &\qquad +\varphi(t,\tilde{T})\,dW_{\mathbb{P}^*}(t) + \eta(t,\tilde{T})\,d\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t)\Big] \\ &= B(t-,\tilde{T})\Big[r(t)\,dt + \varphi(t,\tilde{T})\,dW_{\mathbb{P}^*}(t) + \eta(t,\tilde{T})\,d\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t)\Big]. \end{aligned}$$

Weiterhin folgt wegen (5.6) und der Gleichung (5.9)

$$\begin{aligned} df(t,\tilde{T}) &= \Big(\upsilon(t,\tilde{T}) + \varsigma(t,\tilde{T})F(t) + \alpha\delta(t,\tilde{T})\big(\exp(H(t)) - 1\big)\Big)\,dt \\ &\quad +\varsigma(t,\tilde{T})\,dW_{\mathbb{P}^*}(t) + \delta(t,\tilde{T})\,d\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t) \\ &= \Big(\varsigma^*(t,\tilde{T})\varsigma(t,\tilde{T}) - \alpha\delta(t,\tilde{T})\big(\exp(-\delta^*(t,\tilde{T})) - 1\big)\exp(H(t))\Big)\,dt \\ &\quad +\varsigma(t,\tilde{T})\,dW_{\mathbb{P}^*}(t) + \delta(t,\tilde{T})\,d\widetilde{N}_{\mathbb{P}^*}(t). \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Unter dem ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ besitzt der Preisprozess $B(\cdot, \tilde{T})$ damit das folgende stochastische Differential:

$$\begin{aligned} dB(t,\tilde{T}) &= B(t-,\tilde{T})\Big[\Big(r(t) - \varphi(t,\tilde{T})F(t) - \alpha\eta(t,\tilde{T})\exp(H(t))\Big)\,dt \\ &\qquad +\varphi(t,\tilde{T})\,dW(t) + \eta(t,\tilde{T})\,dN(t)\Big] \\ &= B(t-,\tilde{T})\Big[\Big(r(t) + \varsigma^*(t,\tilde{T})F(t) - \alpha\big(\exp(-\delta^*(t,\tilde{T})) - 1\big)\exp(H(t))\Big)\,dt \\ &\qquad -\varsigma^*(t,\tilde{T})\,dW(t) + \big(\exp(-\delta^*(t,\tilde{T})) - 1\big)\,dN(t)\Big]. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Kapitel 6

Portfoliooptimierung bei stochastischem Zinssatz mit Sprüngen

Die Grundidee des folgenden Bond-Portfolioproblems und des anschließenden Aktie-Bond-Portfolioproblems stammt aus Korn/Kraft [19]. Im Vergleich dazu sind hier jedoch auch Sprünge zugelassen. Die in Korn/Kraft [19] betrachteten Fälle, in denen die Zinsrate durch das Ho-Lee-Modell bzw. durch das Vasicek-Modell gegeben ist und in denen die gehandelten Wertpapiere keine Sprünge aufweisen, treten dabei als Spezialfälle auf.

6.1 Ein Bond-Portfolioproblem

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum. Weiterhin seien $W = (W(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine reelle Brownsche Bewegung, $N = (N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein davon unabhängiger eindimensionaler Poisson-Prozess zum Parameter $\alpha > 0$ und $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ die $\mathbb{P}$-Vervollständigung der von W und N erzeugten Filtration. Nach Protter [30, I. Theorem 31] erfüllt $\mathbb{F}$ die üblichen Voraussetzungen.

Für einen endlichen Zeithorizont $T > 0$ seien zwei Finanzgüter gegeben; zum einen ein Sparkonto und zum anderen eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeit $\tilde{T} > T$.

Der Preisverlauf $S = (S(t))_{t \in [0,T]}$ des Sparkontos entwickle sich gemäß

$$\begin{aligned} dS(t) &= r(t)S(t)\,dt, \\ S(0) &= 1. \end{aligned}$$

Hierbei beschreibt der Prozess $r = (r(t))_{t \in [0,T]}$ den Verlauf der Zinsrate. Im Vergleich zum klassischen Merton-Modell ist r stochastisch, gegeben durch die stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dr(t) &= \big(a_1(t)r(t) + a_2(t)\big)\,dt + b(t)\,dW(t) + c(t)\,dN(t), \\ r(0) &= r_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei $a_1, a_2, b, c : [0,T] \to \mathbb{R}$ deterministische und stetige Funktionen sind. Insbesondere sind die Funktionen a_1, a_2, b und c damit beschränkt auf dem Intervall $[0,T]$.

Der Preisverlauf $B(\cdot, \tilde{T}) = (B(t,\tilde{T}))_{t\in[0,T]}$ der Nullkuponanleihe mit Fälligkeit $\tilde{T} > T$ entwickle sich gemäß

$$\begin{aligned} dB(t,\tilde{T}) &= B(t-,\tilde{T})\Big(\underbrace{\big(r(t) + \xi_1(t)\sigma(t) + \xi_2(t)\gamma(t)\big)}_{=:\,\mu(t)}\,dt + \sigma(t)\,dW(t) + \gamma(t)\,dN(t)\Big), \\ B(0,\tilde{T}) &= B_0 > 0, \end{aligned}$$

wobei die Funktionen $\xi_1, \xi_2, \sigma : [0,T] \to \mathbb{R}$ und $\gamma : [0,T] \to (-1,\infty)$ deterministisch und stetig, insbesondere also beschränkt sind. Weiterhin sei σ wegbeschränkt von der Null, d.h. es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $|\sigma(t)| \geq \varepsilon$ für alle $t \in [0,T]$. Man beachte, dass der Preisprozess $B(\cdot,\tilde{T})$ fast sicher strikt positiv ist, da γ eine Funktion mit Werten in $(-1,\infty)$ ist.

Betrachtet wird ein Investor mit Startkapital $x_0 > 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Das Investitionsverhalten des Investors wird durch einen eindimensionalen selbst-finanzierenden Portfolioprozess $\pi = (\pi(t))_{t\in[0,T]}$ beschrieben. Die Werte $\pi(t)$ bzw. $1 - \pi(t)$ geben somit die Anteile des Gesamtvermögens an, die zum Zeitpunkt $t \in [0,T]$ in die Nullkuponanleihe bzw. in das Sparkonto investiert werden.
Beschränkt man sich nur auf selbst-finanzierende Portfolioprozesse π, so entwickelt sich das Vermögen des Investors gemäß der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dX(t) &= X(t-)\Big(\big[r(t) + \pi(t)(\mu(t) - r(t))\big]\,dt + \pi(t)\sigma(t)\,dW(t) + \pi(t-)\gamma(t)\,dN(t)\Big), \\ &= X(t-)\Big(\big[r(t) + \pi(t)\big(\xi_1(t)\sigma(t) + \xi_2(t)\gamma(t)\big)\big]\,dt + \pi(t)\sigma(t)\,dW(t) \\ &\qquad + \pi(t-)\gamma(t)\,dN(t)\Big), \\ X(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Das Ziel des Investors ist, einen bezüglich des Funktionals

$$\mathbb{E}^{0,x_0,r_0}\big((X^\pi(T))^\lambda\big) \qquad (\lambda \in (0,1)) \tag{6.1}$$

optimalen Portfolioprozess π^* mit Werten in der abgeschlossenen Menge $[0,\kappa]$ zu bestimmen, so dass der zugehörige Vermögensprozess X^{π^*} fast sicher strikt positiv ist. Hierbei ist $\kappa > 0$ so gewählt, dass $z\gamma(t) > -1$ für alle $t \in [0,T]$ und für alle $z \in [0,\kappa]$ gilt. Wie man später sehen wird, wird dadurch gewährleistet, dass der Vermögensprozess X^{π^*} bei Start in $x_0 \in (0,\infty)$ zum optimalen π^* fast sicher strikt positiv ist.

Das obige Maximierungsproblem wird im Folgenden mit Methoden der stochastischen Steuerung gelöst. Dazu stelle man zunächst eine geeignete gesteuerte stochastische Differentialgleichung auf. Im Vergleich zum klassischen Merton Problem, hängt der Driftkoeffizient der Vermögensgleichung zusätzlich vom stochastischen Term $r(t)$ ab. Um dieses Problem dennoch mit Methoden der stochastischen Steuerung lösen zu können, ist es erforderlich, einen zweidimensionalen Zustandsprozess $Y = (X,r)^t$ zu betrachten.
Die gesteuerte stochastische Differentialgleichung hat somit die Form

$$\begin{aligned} dY(t) &= \Lambda(t,Y(t),u(t))\,dt + \Sigma(t,Y(t),u(t))\,dW(t) + \Gamma(t,Y(t-),u(t-))\,dN(t), \qquad (6.2)\\ Y(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ r_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} X(t) \\ r(t) \end{pmatrix}, \\ u(t) &= \pi(t), \\ \Lambda(t,x,r,\pi) &= \begin{pmatrix} x\big[r + \pi\big(\xi_1(t)\sigma(t) + \xi_2(t)\gamma(t)\big)\big] \\ a_1(t)r + a_2(t) \end{pmatrix}, \\ \Sigma(t,x,r,\pi) &= \begin{pmatrix} x\pi\sigma(t) \\ b(t) \end{pmatrix}, \\ \Gamma(t,x,r,\pi) &= \begin{pmatrix} x\pi\gamma(t) \\ c(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Weiterhin definiere man die abgeschlossene Menge $F \subseteq \mathbb{R}$ durch $F := [0,\kappa]$, die Menge Q durch $Q := [0,T) \times \big((0,\infty) \times \mathbb{R}\big)$ und die Stoppzeit $\tau : \Omega \to [0,T]$ durch

$$\tau := \inf\big\{t \in [0,T] : (t, X^\pi(t), r(t)) \notin Q\big\}.$$

Man betrachte das Nutzenfunktional $J(0,x_0,r_0;\pi)$, das gegeben ist durch

$$J(0,x_0,r_0;\pi) := \mathbb{E}^{0,x_0,r_0}\big((X^\pi(\tau))^\lambda\big).$$

Problem: Finde eine Funktion $G : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ und eine zulässige Steuerung $u^* = \pi^* \in \mathcal{A}(0,x_0,r_0)$ mit

$$G(0,x_0,r_0) = \sup_{u \in \mathcal{A}(0,x_0,r_0)} \mathbb{E}^{0,x_0,r_0}\big((X^u(\tau))^\lambda\big) = \mathbb{E}^{0,x_0,r_0}\big((X^{u^*}(\tau))^\lambda\big).$$

Für $G : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $G \in C^{1,2}(Q)$, für $(t,x,r) \in Q$ und für $\pi \in [0,\kappa]$ definiere man den Operator $\mathcal{E}^\pi$ durch

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^\pi G(t,x,r) \;:=\; & G_t(t,x,r) + x\big[r + \pi\big(\xi_1(t)\sigma(t) + \xi_2(t)\gamma(t)\big)\big]G_x(t,x,r)\\ & +\big(a_1(t)r + a_2(t)\big)G_r(t,x,r) + \frac{1}{2}x^2\pi^2\big(\sigma(t)\big)^2 G_{xx}(t,x,r)\\ & +x\pi\sigma(t)b(t)G_{xr}(t,x,r) + \frac{1}{2}\big(b(t)\big)^2 G_{rr}(t,x,r)\\ & +\alpha\Big(G(t,x+x\pi\gamma(t), r+c(t)) - G(t,x,r)\Big).\end{aligned}$$

Die zu dem Portfolioproblem zugehörige HJB-Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\sup_{\pi\in[0,\kappa]} \mathcal{E}^\pi G(t,x,r) \;=\; 0 \qquad & \text{für } (t,x,r) \in Q,\\ G(t,x,r) \;=\; x^\lambda \mathbb{1}_{\{x>0\}} \qquad & \text{für } (t,x,r) \in \mathcal{C}Q := \big([0,T) \times (-\infty,0] \times \mathbb{R}\big) \cup \big(\{T\} \times \mathbb{R}^2\big).\end{aligned}$$

Die vorgegebene Randbedingung legt den Separationsansatz

$$G(t,x,r) \;=\; f(t,r)x^\lambda \mathbb{1}_{\{x>0\}} \qquad \text{mit} \qquad f(T,r) \;=\; 1 \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R} \tag{6.3}$$

nahe. Bestimmt man für $(t,x,r) \in Q$ alle partiellen Ableitungen, die im Ausdruck $\mathcal{E}^\pi G(t,x,r)$ auftreten, so erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^\pi G(t,x,r) \;=\; & f_t(t,r)x^\lambda + \big[r + \pi\big(\xi_1(t)\sigma(t) + \xi_2(t)\gamma(t)\big)\big]\lambda f(t,r)x^\lambda\\ & +\big(a_1(t)r + a_2(t)\big)f_r(t,r)x^\lambda + \frac{1}{2}\pi^2\big(\sigma(t)\big)^2\lambda(\lambda-1)f(t,r)x^\lambda\\ & +\pi\sigma(t)b(t)\lambda f_r(t,r)x^\lambda + \frac{1}{2}\big(b(t)\big)^2 f_{rr}(t,r)x^\lambda\\ & +\alpha\Big(f(t,r+c(t))\big(x+x\pi\gamma(t)\big)^\lambda - f(t,r)x^\lambda\Big).\end{aligned}$$

Mittels des Ansatzes $f(t,r) = g(t)\exp(\beta(t)r)$ mit $g(T) = 1$ und $\beta(T) = 0$ folgt daraus

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}^\pi G(t,x,r)\\ &\quad= \Big(g'(t)\exp(\beta(t)r) + r\beta'(t)g(t)\exp(\beta(t)r)\Big)x^\lambda\\ &\qquad +\big[r + \pi\big(\xi_1(t)\sigma(t) + \xi_2(t)\gamma(t)\big)\big]\lambda g(t)\exp(\beta(t)r)x^\lambda\\ &\qquad +\big(a_1(t)r + a_2(t)\big)\beta(t)g(t)\exp(\beta(t)r)x^\lambda + \frac{1}{2}\pi^2\big(\sigma(t)\big)^2\lambda(\lambda-1)g(t)\exp(\beta(t)r)x^\lambda\\ &\qquad +\pi\sigma(t)b(t)\lambda\beta(t)g(t)\exp(\beta(t)r)x^\lambda + \frac{1}{2}\big(b(t)\big)^2\big(\beta(t)\big)^2 g(t)\exp(\beta(t)r)x^\lambda\\ &\qquad +\alpha\Big(g(t)\exp(\beta(t)r)\exp(\beta(t)c(t))\big(x+x\pi\gamma(t)\big)^\lambda - g(t)\exp(\beta(t)r)x^\lambda\Big)\\ &\quad=: h_{t,x,r}(\pi)\end{aligned}$$

mit $h_{t,x,r} : [0,\kappa] \to \mathbb{R}$. Unter der Annahme, dass die Funktion g strikt positiv ist (dies muss später noch überprüft werden), ist es leicht einzusehen, dass die Funktion $h_{t,x,r}$ genau dann maximal wird, wenn die Funktion $h_t^* : [0,\kappa] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\begin{aligned} h_t^*(\pi) \;&:=\; \pi\Big(\xi_1(t)\sigma(t) + \xi_2(t)\gamma(t) + \sigma(t)b(t)\beta(t)\Big)\lambda + \frac{1}{2}\pi^2\big(\sigma(t)\big)^2\lambda(\lambda-1) \\ &\quad +\alpha\Big(\exp(\beta(t)c(t))\big(1+\pi\gamma(t)\big)^\lambda - 1\Big), \end{aligned} \tag{6.4}$$

maximal wird (es gilt $x > 0$, da $(t,x,r) \in Q$ ist). Da die Funktion h_t^* auf der kompakten Menge $[0,\kappa]$ stetig und strikt konkav in π ist, besitzt h_t^* eine eindeutig bestimmte globale Maximalstelle $\pi_t^* \in [0,\kappa]$. Man beachte dabei, dass π_t^* unabhängig von x und r ist.
Durch Einsetzen von π_t^* in die umgewandelte HJB-Gleichung erhält man

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \Big(g'(t)\exp(\beta(t)r) + r\beta'(t)g(t)\exp(\beta(t)r)\Big)x^\lambda \\ & +\big[r + \pi_t^*\big(\xi_1(t)\sigma(t) + \xi_2(t)\gamma(t)\big)\big]\lambda g(t)\exp(\beta(t)r)x^\lambda \\ & +\big(a_1(t)r + a_2(t)\big)\beta(t)g(t)\exp(\beta(t)r)x^\lambda + \frac{1}{2}\big(\pi_t^*\big)^2\big(\sigma(t)\big)^2\lambda(\lambda-1)g(t)\exp(\beta(t)r)x^\lambda \\ & +\pi_t^*\sigma(t)b(t)\lambda\beta(t)g(t)\exp(\beta(t)r)x^\lambda + \frac{1}{2}\big(b(t)\big)^2\big(\beta(t)\big)^2 g(t)\exp(\beta(t)r)x^\lambda \\ & +\alpha\Big(g(t)\exp(\beta(t)r)\exp(\beta(t)c(t))\big(x + x\pi_t^*\gamma(t)\big)^\lambda - g(t)\exp(\beta(t)r)x^\lambda\Big). \end{aligned}$$

Teilt man beide Seiten durch $\exp(\beta(t)r)x^\lambda$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; g'(t) + r\beta'(t)g(t) + \big[r + \pi_t^*\big(\xi_1(t)\sigma(t) + \xi_2(t)\gamma(t)\big)\big]\lambda g(t) \\ &\quad +\big(a_1(t)r + a_2(t)\big)\beta(t)g(t) + \frac{1}{2}\big(\pi_t^*\big)^2\big(\sigma(t)\big)^2\lambda(\lambda-1)g(t) + \pi_t^*\sigma(t)b(t)\lambda\beta(t)g(t) \\ &\quad +\frac{1}{2}\big(b(t)\big)^2\big(\beta(t)\big)^2 g(t) + \alpha\Big(g(t)\exp(\beta(t)c(t))\big(1+\pi_t^*\gamma(t)\big)^\lambda - g(t)\Big) \\ &=\; g'(t) + \Big(\beta'(t) + \lambda + a_1(t)\beta(t)\Big)g(t)r \\ &\quad +g(t)\Big[\pi_t^*\Big(\xi_1(t)\sigma(t) + \xi_2(t)\gamma(t) + \sigma(t)b(t)\beta(t)\Big)\lambda + a_2(t)\beta(t) + \frac{1}{2}\big(b(t)\big)^2\big(\beta(t)\big)^2 \\ &\qquad +\frac{1}{2}\big(\pi_t^*\big)^2\big(\sigma(t)\big)^2\lambda(\lambda-1) + \alpha\exp(\beta(t)c(t))\big(1+\pi_t^*\gamma(t)\big)^\lambda - \alpha\Big]. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Setzt man nun $\beta(t) = \lambda\int_t^T \exp(\int_t^u a_1(s)\,ds)\,du$, so ist β die eindeutig bestimmte Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\beta'(t) + \lambda + a_1(t)\beta(t) \;=\; 0, \qquad \beta(T) \;=\; 0.$$

Der zweite Term der rechten Seite in Gleichung (6.5) fällt damit weg und man erhält eine gewöhnliche Differentialgleichung von der Form

$$0 \;=\; g'(t) + g(t)\varphi(t), \qquad g(T) = 1$$

mit

$$\begin{aligned}\varphi(t) \;:=\; & \pi_t^*\Big(\xi_1(t)\sigma(t)+\xi_2(t)\gamma(t)+\sigma(t)b(t)\beta(t)\Big)\lambda + a_2(t)\beta(t)\\ & +\frac{1}{2}\big(b(t)\big)^2\big(\beta(t)\big)^2+\frac{1}{2}\big(\pi_t^*\big)^2\big(\sigma(t)\big)^2\lambda(\lambda-1)\\ & +\alpha\exp(\beta(t)c(t))\big(1+\pi_t^*\gamma(t)\big)^{\lambda}-\alpha.\end{aligned}$$

Da alle auftretenden Funktionen in der Definition von h_t^* (vgl. (6.4)) deterministisch und stetig sind, ist π_t^*, aufgefasst als Funktion in t, ebenfalls deterministisch und stetig. Somit ist auch φ eine deterministische und stetige Funktion. „Trennung der Variablen“ liefert die eindeutig bestimmte Lösung

$$g(t) \;=\; \exp\big(\Phi(T)-\Phi(t)\big),$$

wobei Φ die Stammfunktion von φ bezeichnet. Die Funktion g ist strikt positiv, womit die obige Annahme gerechtfertigt ist.
Der mögliche Kandidat G für die Wertefunktion ist somit gegeben durch

$$G(t,x,r) \;=\; x^{\lambda}\exp\Big(\Phi(T)-\Phi(t)+r\lambda\int_t^T\exp\Big(\int_t^u a_1(s)\,ds\Big)\,du\Big)\mathbb{1}_{\{x>0\}}.$$

Auf der Menge $(0,\infty)$ ist G strikt konkav in x. Weiterhin ist G eine klassische $C^{1,2}$-Lösung der HJB-Gleichung.
Der mögliche Kandidat für die optimale Steuerung ist gegeben durch $u^* = \pi^*$, wobei $\pi^*(t)=\pi_t^*$ die eindeutig bestimmte globale Maximalstelle der Funktion h_t^* (vgl. (6.4)) ist.

Man beachte, dass die mögliche Wertefunktion G nicht der geforderten polynomialen Wachstumsbedingung aus dem Verifikationssatz 3.2 genügt. Desweiteren erfüllen die Koeffizienten der gesteuerten stochastischen Differentialgleichung (6.2) nicht die Bedingungen (3.1) und (3.2). Letzteres folgt aus der Tatsache, dass der Ausdruck xr in dem Koeffizienten Λ auftritt und sowohl der Vermögensprozess X^{π^*} als auch die Zinsrate r unbeschränkt sind. Eine Anwendung des Verifikationssatzes 3.2 ist daher nicht möglich. Allerdings ist in dieser Situation die Variante des Verifikationssatzes (vgl. Satz 3.12) anwendbar. Dazu werden im Folgenden alle benötigten Voraussetzungen überprüft.

Der Zustandsprozess $Y=(X,r)^t$ ist zweidimensional. Die zweite Komponente wird jedoch nicht mittels π gesteuert. Dadurch lassen sich für die zweite Komponente die Bedingungen i) und iii) aus der Definition 3.1 unabhängig von der vorgegebenen zulässigen Steuerung nachweisen.
Nach Voraussetzung erfüllen die Koeffizienten der stochastischen Differentialgleichung

$$dr(t) \;=\; \big(a_1(t)r(t)+a_2(t)\big)\,dt+b(t)\,dW(t)+c(t)\,dN(t), \qquad r(0) \;=\; r_0 \tag{6.6}$$

die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes 2.1. Somit besitzt (6.6) eine eindeutige Lösung $r = (r(t))_{t\in[0,T]}$ und nach Satz 2.3 sowie Bemerkung 2.4 gilt $\mathbb{E}^{0,x_0,r_0}(\sup_{0\leq t\leq T}|r(t)|^n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Setzt man die eindeutig bestimmte Lösung r in die Koeffizienten der ersten Komponente von (6.2) ein, so erhält man eine lineare stochastische Differentialgleichung.

Um Satz 3.12 anwenden zu können, müssen noch die folgenden Voraussetzungen überprüft werden:

1) Der Prozess π^* muss die Bedingung ii) aus Definition 3.1 erfüllen.
2) Der Prozess π^* muss die Bedingung iii) aus Definition 3.1 erfüllen.
3) Die Bedingung (3.27) aus Satz 3.12 muss gelten.
4) Die Bedingung (3.28) aus Satz 3.12 muss gelten.

Ad 1): Der Prozess π^* ist deterministisch, stetig und beschränkt. Folglich ist π^* ein an $\mathbb{F}$ adaptierter càdlàg-Prozess, der die Bedingung ii) aus der Definition 3.1 erfüllt.

Ad 2): Der Prozess X^{π^*} genügt der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dX^{\pi^*}(t) &= X^{\pi^*}(t-)\Big(\big[r(t) + \pi^*(t)\big(\xi_1(t)\sigma(t) + \xi_2(t)\gamma(t)\big)\big]\,dt + \pi^*(t)\sigma(t)\,dW(t) \\ &\qquad + \pi^*(t-)\gamma(t)\,dN(t)\Big) \\ &= X^{\pi^*}(t-)\,dZ^*(t), \\ X^{\pi^*}(0) &= x_0 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} Z^*(t) &:= \int_0^t \Big(r(s) + \pi^*(s)\big(\xi_1(s)\sigma(s) + \xi_2(s)\gamma(s)\big)\Big)\,ds \\ &\quad + \int_0^t \pi^*(s)\sigma(s)\,dW(s) + \int_{0+}^t \pi^*(s-)\gamma(s)\,dN(s) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0,T]$.
Die fast sicher eindeutig bestimmte Lösung X^{π^*} ist gegeben durch

$$X^{\pi^*}(t) = x_0 \exp\Big(Z^*(t) - \frac{1}{2}\big[Z^*, Z^*\big]^c(t)\Big) \prod_{0<s\leq t} \big(1 + \Delta Z^*(s)\big)\exp\big(-\Delta Z^*(s)\big)$$

$$\begin{aligned}
&= x_0 \exp\Big(\int_0^t \Big[r(s) + \pi^*(s)\big(\xi_1(s)\sigma(s) + \xi_2(s)\gamma(s)\big) - \frac{1}{2}\big(\pi^*(s)\big)^2\big(\sigma(s)\big)^2\Big]\,ds\Big) \\
&\quad \cdot \exp\Big(\int_0^t \pi^*(s)\sigma(s)\,dW(s)\Big) \prod_{\{n:\,0<T_n\le t\}} \big(1 + \pi^*(T_n-)\gamma(T_n)\big) \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

für $t \in [0,T]$, wobei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Sprungstellen des Poisson-Prozesses N ist. Aufgrund der Wahl der Konstante $\kappa > 0$ gilt $\pi^*(T_n-)\gamma(T_n) > -1$ fast sicher auf der Menge $\{0 < T_n \le t\}$. Somit ist $X^{\pi^*} = (X^{\pi^*}(t))_{t\in[0,T]}$ bei Start in $x_0 \in (0,\infty)$ fast sicher strikt positiv.

Sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Aufgrund der expliziten Gestalt des Prozesses X^{π^*} aus (6.7) und der Tatsache, dass die Funktionen $\xi_1, \xi_2, \sigma, \gamma$ und π^* beschränkt sind, gilt für alle $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
\big|X^{\pi^*}(t)\big|^k &= \Big|x_0 \exp\Big(\int_0^t \Big[r(s) + \pi^*(s)\big(\xi_1(s)\sigma(s) + \xi_2(s)\gamma(s)\big) - \frac{1}{2}\big(\pi^*(s)\big)^2\big(\sigma(s)\big)^2\Big]\,ds\Big) \\
&\qquad \cdot \exp\Big(\int_0^t \pi^*(s)\sigma(s)\,dW(s)\Big) \prod_{\{n:\,0<T_n\le t\}} \big(1 + \pi^*(T_n-)\gamma(T_n)\big)\Big|^k \\
&\le K \exp\Big(k\int_0^t r(s)\,ds\Big) \exp\Big(k\int_0^t \pi^*(s)\sigma(s)\,dW(s)\Big)\big(1+C\big)^{kN(t)} \\
&\le K \exp\Big(2k\int_0^t r(s)\,ds\Big) \exp\Big(2k\int_0^t \pi^*(s)\sigma(s)\,dW(s)\Big) + K\big(1+C\big)^{2kN(t)} \\
&\le K \exp\Big(4k\int_0^t r(s)\,ds\Big) + K\exp\Big(4k\int_0^t \pi^*(s)\sigma(s)\,dW(s)\Big) + K\big(1+C\big)^{2kN(t)}
\end{aligned}$$

für geeignete Konstanten $K > 0$ und $C > 0$.

Zwischenbehauptung 1: $\quad \mathbb{E}^{0,x_0,r_0}\Big(\sup_{0\le t\le T}\Big[\exp\Big(4k\int_0^t r(s)\,ds\Big)\Big]\Big) < \infty$

Die eindeutig bestimmte Lösung der stochastischen Differentialgleichung (6.6) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
r(t) &= r_0 \exp\Big(\int_0^t a_1(s)\,ds\Big) \\
&\quad + \exp\Big(\int_0^t a_1(s)\,ds\Big)\int_0^t \exp\Big(-\int_0^s a_1(v)\,dv\Big)a_2(s)\,ds \\
&\quad + \exp\Big(\int_0^t a_1(s)\,ds\Big)\int_0^t \exp\Big(-\int_0^s a_1(v)\,dv\Big)b(s)\,dW(s) \\
&\quad + \exp\Big(\int_0^t a_1(s)\,ds\Big)\int_0^t \exp\Big(-\int_0^s a_1(v)\,dv\Big)c(s)\,dN(s)
\end{aligned}$$

für alle $t \in [0,T]$.

Da die Funktionen a_1, a_2 und c beschränkt sind gilt für alle $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
\int_0^t r(s)\,ds &= \int_0^t r_0 \exp\Big(\int_0^s a_1(v)\,dv\Big)\,ds \\
&\quad + \int_0^t \Big[\exp\Big(\int_0^s a_1(v)\,dv\Big)\int_0^s \exp\Big(-\int_0^u a_1(v)\,dv\Big)a_2(u)\,du\Big]\,ds \\
&\quad + \int_0^t \Big[\exp\Big(\int_0^s a_1(v)\,dv\Big)\int_0^s \exp\Big(-\int_0^u a_1(v)\,dv\Big)b(u)\,dW(u)\Big]\,ds \\
&\quad + \int_0^t \Big[\exp\Big(\int_0^s a_1(v)\,dv\Big)\int_0^s \exp\Big(-\int_0^u a_1(v)\,dv\Big)c(u)\,dN(u)\Big]\,ds \\
&\le K_1|r_0| + K_1 \sup_{0\le s\le T}\Big[\int_0^s \exp\Big(-\int_0^u a_1(v)\,dv\Big)\big|a_2(u)\big|\,du\Big] \\
&\quad + K_1 \sup_{0\le s\le T}\Big[\int_0^s \exp\Big(-\int_0^u a_1(v)\,dv\Big)b(u)\,dW(u)\Big] \\
&\quad + K_1 \sup_{0\le s\le T}\Big[\int_0^s \exp\Big(-\int_0^u a_1(v)\,dv\Big)|c(u)|\,dN(u)\Big] \\
&\le K_2 + K_1 \sup_{0\le s\le T}\Big[\int_0^s \exp\Big(-\int_0^u a_1(v)\,dv\Big)b(u)\,dW(u)\Big] \\
&\quad + K_1 \sup_{0\le u\le T}\Big[\exp\Big(-\int_0^u a_1(v)\,dv\Big)|c(u)|\Big]\,N(T) \\
&\le K_2 + K_1 \sup_{0\le s\le T}\Big[\int_0^s \underbrace{\exp\Big(-\int_0^u a_1(v)\,dv\Big)b(u)}_{=:\,p(u)}\,dW(u)\Big] + K_3 N(T)
\end{aligned}$$

mit geeigneten Konstanten $K_1, K_2, K_3 > 0$.
Wegen der Unabhängigkeit der beiden Prozesse W und N sowie der Tatsache, dass $N(T) \sim Poi(\alpha T)$ ist, folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{0,x_0,r_0}\Big(\sup_{0\le t\le T}\Big[\exp\Big(4k\int_0^t r(s)\,ds\Big)\Big]\Big) \\
&\qquad \le \underbrace{\exp(4kK_2)}_{<\infty}\,\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}\Big[\exp\Big(4kK_1\int_0^t p(u)\,dW(u)\Big)\Big]\Big)\,\underbrace{\mathbb{E}\big(\exp(4kK_3N(T))\big)}_{<\infty}.
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
&\exp\Big(4kK_1\int_0^t p(u)\,dW(u)\Big) \\
&\quad = \exp\Big(\frac{(4kK_1)^2}{2}\int_0^t \big(p(u)\big)^2\,du\Big)\underbrace{\exp\Big(4kK_1\int_0^t p(u)\,dW(u) - \frac{(4kK_1)^2}{2}\int_0^t \big(p(u)\big)^2\,du\Big)}_{=:\,Z_1(t)},
\end{aligned}$$

wobei der Prozess $Z_1 = (Z_1(t))_{t\in[0,T]}$ die stochastische Differentialgleichung

$$dZ_1(t) \;=\; Z_1(t)4kK_1p(t)\,dW(t), \qquad Z_1(0) = 1$$

erfüllt. Mit Hilfe von Satz 2.3 folgt daraus

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}\Big[\exp\Big(4kK_1\int_0^t p(u)\,dW(u)\Big)\Big]\Big)$$
$$\le\; \exp\Big(\frac{(4kK_1)^2}{2}\int_0^T \big(p(u)\big)^2\,du\Big)\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T} Z_1(t)\Big) \;<\; \infty$$

und somit ist die Zwischenbehauptung 1 bewiesen.

<u>Zwischenbehauptung 2:</u> $\quad \mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}\Big[\exp\Big(4k\int_0^t \pi^*(s)\sigma(s)\,dW(s)\Big)\Big]\Big) \;<\; \infty$

Man definiere die deterministische und beschränkte Funktion $\widetilde{p} : [0,T] \to \mathbb{R}$ durch $\widetilde{p}(s) = 4k\pi^*(s)\sigma(s)$. Wegen

$$\exp\Big(\int_0^t \widetilde{p}(s)\,dW(s)\Big) \;=\; \exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^t \big(\widetilde{p}(s)\big)^2\,ds\Big)\underbrace{\exp\Big(\int_0^t \widetilde{p}(s)\,dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \big(\widetilde{p}(s)\big)^2\,ds\Big)}_{=:\,Z_2(t)}$$

gilt mit den gleichen Argumenten wie am Ende von Zwischenbehauptung 1

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}\Big[\exp\Big(4k\int_0^t \pi^*(s)\sigma(s)\,dW(s)\Big)\Big]\Big)$$
$$\le\; \exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^T \big(\widetilde{p}(s)\big)^2\,ds\Big)\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T} Z_2(t)\Big) \;<\; \infty$$

und somit ist die Zwischenbehauptung 2 bewiesen.

<u>Zwischenbehauptung 3:</u> $\quad \mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}\Big[\big(1+C\big)^{2kN(t)}\Big]\Big) \;<\; \infty$

Da $N(T) \sim Poi(\alpha T)$ ist, gilt

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}\Big[\big(1+C\big)^{2kN(t)}\Big]\Big) \;\le\; \mathbb{E}\Big(\big(1+C\big)^{2kN(T)}\Big) \;<\; \infty.$$

Somit ist die Zwischenbehauptung 3 gezeigt.

Mit Hilfe der drei Zwischenbehauptungen erhält man

$$\mathbb{E}^{0,x_0,r_0}\Big(\sup_{0\le t\le T}\big|X^{\pi^*}(t)\big|^k\Big) \;<\; \infty$$

und somit ist die Bedingung iii) aus Definition 3.1 erfüllt.

Ad 3): Für $(t,x,r) \in Q$ sei $\pi \in \mathcal{A}(t,x,r)$ eine zulässige Steuerung bei Start in (t,x,r). Wegen $\pi(s) \in [0,\kappa]$ für alle $s \in [t,T]$ ist der Prozess π insbesondere beschränkt. Aufgrund der Beschränktheit der Funktionen $\xi_1, \xi_2, \sigma, \gamma, \Phi$ und des Prozesses π gilt für alle $s \in [t,T]$

$$\begin{aligned}
&\big[G(s, X^\pi(s), r(s))\big]^2 \\
&= \big(X^\pi(s)\big)^{2\lambda} \exp\Big(2\big(\Phi(T)-\Phi(s)\big) + 2r(s)\lambda \int_s^T \exp\Big(\int_s^u a_1(v)\,dv\Big)\,du\Big) \\
&= x^{2\lambda} \exp\Big(2\lambda \int_t^s \Big[r(u) + \pi(u)\big(\xi_1(u)\sigma(u) + \xi_2(u)\gamma(u)\big) - \frac{1}{2}\big(\pi(u)\big)^2\big(\sigma(u)\big)^2\Big]\,du\Big) \\
&\quad \cdot \exp\Big(2\lambda \int_t^s \pi(u)\sigma(u)\,dW(u)\Big) \prod_{\{n:\, t<T_n\le s\}} \big(1 + \pi(T_n-)\gamma(T_n)\big)^{2\lambda} \\
&\quad \cdot \exp\Big(2\big(\Phi(T)-\Phi(s)\big) + 2r(s)\lambda \int_s^T \exp\Big(\int_s^u a_1(v)\,dv\Big)\,du\Big) \\
&\le K_1 \exp\Big(2\lambda \int_t^s r(u)\,du + 2\lambda \int_t^s \pi(u)\sigma(u)\,dW(u)\Big)\big(1+C\big)^{2\lambda(N(s)-N(t))} \\
&\quad \cdot \exp\Big(2r(s)\underbrace{\lambda \int_s^T \exp\Big(\int_s^u a_1(v)\,dv\Big)\,du}_{=\beta(s)}\Big)
\end{aligned}$$

für geeignete Konstanten $K_1 > 0$ und $C > 0$. Weiterhin gilt mit Hilfe der Produktformel für Semimartingale für alle $s \in [t,T]$

$$\begin{aligned}
r(s)\beta(s) &= r\beta(t) + \int_t^s \beta(u)\,dr(u) + \int_t^s r(u)\,d\beta(u) \\
&= r\beta(t) + \int_t^s \beta(u)a_1(u)r(u)\,du + \int_t^s \beta(u)a_2(u)\,du + \int_t^s \beta(u)b(u)\,dW(u) \\
&\quad + \int_t^s \beta(u)c(u)\,dN(u) - \int_t^s r(u)a_1(u)\beta(u)\,du - \lambda \int_t^s r(u)\,du \\
&= r\beta(t) + \int_t^s \beta(u)a_2(u)\,du + \int_t^s \beta(u)b(u)\,dW(u) \\
&\quad + \int_t^s \beta(u)c(u)\,dN(u) - \lambda \int_t^s r(u)\,du.
\end{aligned}$$

Setzt man dies in die obige Ungleichung ein und berücksichtigt, dass die Funktionen a_2 und β beschränkt sind, so erhält man

$$\begin{aligned}
\big[G(s, X^\pi(s), r(s))\big]^2 \le\ & K_1 \exp\Big(2\lambda \int_t^s \pi(u)\sigma(u)\,dW(u)\Big)\big(1+C\big)^{2\lambda(N(s)-N(t))} \\
& \cdot \exp\Big(2r\beta(t) + 2\int_t^s \beta(u)a_2(u)\,du + 2\int_t^s \beta(u)b(u)\,dW(u)\Big) \\
& \cdot \exp\Big(2\int_t^s \beta(u)c(u)\,dN(u)\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq\ K_2 \exp\Big(2\lambda \int_t^s \pi(u)\sigma(u)\, dW(u)\Big)\big(1+C\big)^{2\lambda(N(s)-N(t))} \\
&\quad \cdot \exp\Big(2\int_t^s \beta(u)b(u)\, dW(u) + 2\int_t^s \beta(u)c(u)\, dN(u)\Big) \\
&\leq\ K_2 \exp\Big(2\int_t^s \big(\lambda\pi(u)\sigma(u) + \beta(u)b(u)\big)\, dW(u)\Big)\big(1+C\big)^{2\lambda(N(T)-N(t))} \\
&\quad \cdot \exp\Big(2 \sup_{t\leq u\leq T} \big[\beta(u)|c(u)|\big]\big(N(T)-N(t)\big)\Big) \\
&\leq\ K_2 \exp\Big(8\int_t^s \big(\lambda\pi(u)\sigma(u) + \beta(u)b(u)\big)\, dW(u)\Big) + K_2\big(1+C\big)^{4\lambda(N(T)-N(t))} \\
&\quad + K_2 \exp\Big(8 \sup_{t\leq u\leq T} \big[\beta(u)|c(u)|\big]\big(N(T)-N(t)\big)\Big)
\end{aligned}$$

für eine geeignete Konstante $K_2 > 0$.
Man definiere die Funktion $\bar{p} : [t,T] \to \mathbb{R}$ durch $\bar{p}(u) := 8(\lambda\pi(u)\sigma(u) + \beta(u)b(u))$. Wegen

$$\begin{aligned}
&\exp\Big(\int_t^s \bar{p}(u)\, dW(u)\Big) \\
&\quad = \exp\Big(\frac{1}{2}\int_t^s \big(\bar{p}(u)\big)^2\, du\Big) \underbrace{\exp\Big(\int_t^s \bar{p}(u)\, dW(u) - \frac{1}{2}\int_t^s \big(\bar{p}(u)\big)^2\, du\Big)}_{=:\, Z_3(s)}
\end{aligned}$$

sowie der Tatsache, dass $N(T) - N(t) \sim Poi(\alpha(T-t))$ ist, gilt mit Hilfe von Satz 2.3

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{t,x,r}\Big(\sup_{t\leq s\leq T} \big[G(s, X^\pi(s), r(s))\big]^2\Big) \\
&\leq\ K_2 \exp\Big(\frac{1}{2}\int_t^T \big(\bar{p}(u)\big)^2\, du\Big)\mathbb{E}\Big(\sup_{t\leq s\leq T} Z_3(s)\Big) + K_2\mathbb{E}\Big(\big(1+C\big)^{4\lambda(N(T)-N(t))}\Big) \\
&\quad + K_2\mathbb{E}\Big(\exp\Big(8 \sup_{t\leq u\leq T} \big[\beta(u)|c(u)|\big]\big(N(T)-N(t)\big)\Big)\Big) \\
&<\ \infty.
\end{aligned}$$

Somit ist die Bedingung (3.27) aus Satz 3.12 erfüllt.

Ad 4): Für $(t,x,r) \in Q$ sei $\pi \in \mathcal{A}(t,x,r)$ eine zulässige Steuerung bei Start in (t,x,r). Aufgrund der Beschränktheit der Funktionen γ, c, β und des Prozesses π gilt für alle $s \in [t,T]$

$$\begin{aligned}
&\big[G(s, X^\pi(s) + X^\pi(s)\pi(s)\gamma(s), r(s) + c(s))\big]^2 \\
&\quad = \big(X^\pi(s) + X^\pi(s)\pi(s)\gamma(s)\big)^{2\lambda} \exp\Big(2\big(\Phi(T) - \Phi(s)\big) + 2\beta(s)\big(r(s) + c(s)\big)\Big) \\
&\quad = \big(X^\pi(s)\big)^{2\lambda}\big(1 + \pi(s)\gamma(s)\big)^{2\lambda} \exp\Big(2\big(\Phi(T) - \Phi(s)\big) + 2\beta(s)\big(r(s) + c(s)\big)\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq K_1\big(1+C\big)^{2\lambda}\big(X^\pi(s)\big)^{2\lambda}\exp\Big(2\big(\Phi(T)-\Phi(s)\big)+2\beta(s)r(s)\Big)\\
&= K_1\big(1+C\big)^{2\lambda}\big[G(s,X^\pi(s),r(s))\big]^2
\end{aligned}
$$

für geeignete Konstanten $K_1 > 0$ und $C > 0$. Daraus ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{t,x,r}\Big(\sup_{t\leq s\leq T}\big[G(s,X^\pi(s)+X^\pi(s)\pi(s)\gamma(s),r(s)+c(s))\big]^2\Big)\\
&\qquad\leq K_1\big(1+C\big)^{2\lambda}\mathbb{E}^{t,x,r}\Big(\sup_{t\leq s\leq T}\big[G(s,X^\pi(s),r(s))\big]^2\Big) < \infty
\end{aligned}
$$

nach Punkt 3) und somit ist die Bedingung (3.28) aus Satz 3.12 erfüllt.

Eine Anwendung von Satz 3.12 mit $Q = [0,T) \times \big((0,\infty)\times\mathbb{R}\big)$ liefert die nachstehende Folgerung:

Folgerung 6.1

Für alle $t \in [0,T]$ sei $\pi^*(t)$ die eindeutig bestimmte globale Maximalstelle der Funktion $h_t^* : [0,\kappa] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$
\begin{aligned}
h_t^*(\pi) \;:=\; &\pi\Big(\xi_1(t)\sigma(t)+\xi_2(t)\gamma(t)+\sigma(t)b(t)\lambda\int_t^T\exp\Big(\int_t^u a_1(s)\,ds\Big)\,du\Big)\lambda\\
&+\frac{1}{2}\pi^2\big(\sigma(t)\big)^2\lambda(\lambda-1)\\
&+\alpha\Big[\exp\Big(c(t)\lambda\int_t^T\exp\Big(\int_t^u a_1(s)\,ds\Big)\,du\Big)\big(1+\pi\gamma(t)\big)^\lambda-1\Big].
\end{aligned}
$$

Dann ist die zulässige Steuerung $\pi^* = (\pi^*(t))_{t\in[0,T]}$ eine Lösung des Steuerungsproblems

$$
\sup_{\pi\in\mathcal{A}(0,x_0,r_0)} J(0,x_0,r_0;\pi) \;=\; \sup_{\pi\in\mathcal{A}(0,x_0,r_0)} \mathbb{E}^{0,x_0,r_0}\big((X^\pi(\tau))^\lambda\big). \tag{6.8}
$$

Bemerkung 6.2

1. Man beachte, dass der Prozess π^* aus Folgerung 6.1 auch eine optimale Strategie des ursprünglichen Problems ist, d.h. π^* maximiert das Funktional (6.1), da der zugehörige Vermögensprozess $X^{\pi^*} = (X^{\pi^*}(t))_{t\in[0,T]}$ bei Start in $x_0 \in (0,\infty)$ fast sicher strikt positiv ist.

2. Im Fall $a_1 \equiv 0$ gilt $\beta(t) = \lambda\int_t^T\exp(\int_t^u a_1(s)\,ds)\,du = \lambda(T-t)$ für alle $t \in [0,T]$. Dadurch vereinfacht sich die Funktion $h_t^* : [0,\kappa] \longrightarrow \mathbb{R}$ aus Folgerung 6.1 zu

$$
\begin{aligned}
h_t^*(\pi) \;:=\; &\pi\Big(\xi_1(t)\sigma(t)+\xi_2(t)\gamma(t)+\sigma(t)b(t)\lambda(T-t)\Big)\lambda+\frac{1}{2}\pi^2\big(\sigma(t)\big)^2\lambda(\lambda-1)\\
&+\alpha\Big[\exp\Big(c(t)\lambda(T-t)\Big)\big(1+\pi\gamma(t)\big)^\lambda-1\Big].
\end{aligned}
$$

3. Im Fall $\gamma \equiv 0$ und $c \equiv 0$ stimmt die optimale zulässige Portfoliostrategie π^* mit dem Ergebnis von Korn/Kraft [19] überein. In dieser Situation gilt
$$\pi^*(t) \;=\; \frac{\xi_1(t)}{(1-\lambda)\sigma(t)} + \frac{b(t)}{(1-\lambda)\sigma(t)}\lambda \int_t^T \exp\Big(\int_t^u a_1(s)\,ds\Big)\,du.$$
Gilt zusätzlich $a_1 \equiv 0$, so erhält man
$$\pi^*(t) \;=\; \frac{\xi_1(t)}{(1-\lambda)\sigma(t)} + \frac{b(t)\lambda(T-t)}{(1-\lambda)\sigma(t)}.$$

6.2 Ein Aktie-Bond-Portfolioproblem

Gegeben seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, eine zweidimensionale Brownsche Bewegung $W = (W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, ein davon unabhängiger zweidimensionaler Poisson-Prozess $N = (N(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ zum Parameter $\alpha \in (0,\infty)^2$ und die $\mathbb{P}$-Vervollständigung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ der von W und N erzeugten Filtration. Damit erfüllt $\mathbb{F}$ die üblichen Voraussetzungen.
Ferner seien für einen endlichen Zeithorizont $T > 0$ drei Finanzgüter gegeben: ein Sparkonto, eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeit $\tilde{T} > T$ und eine Aktie.

Der Preisverlauf $S = (S(t))_{t\in[0,T]}$ des Sparkontos entwickle sich wie im Bond-Portfolioproblem aus Abschnitt 6.1 gemäß
$$\begin{aligned} dS(t) &= r(t)S(t)\,dt, \\ S(0) &= 1, \end{aligned}$$
wobei die stochastische Zinsrate $r = (r(t))_{t\in[0,T]}$ durch die folgende stochastische Differentialgleichung gegeben ist:
$$\begin{aligned} dr(t) &= \Big(a_1(t)r(t) + a_2(t)\Big)\,dt + b(t)\,dW_2(t) + c(t)\,dN_2(t), \\ r(0) &= r_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
Dabei sind $a_1, a_2, b, c : [0,T] \to \mathbb{R}$ wieder deterministische und stetige Funktionen, insbesondere also beschränkt auf dem Intervall $[0,T]$.

Der Preisverlauf $B(\cdot,\tilde{T}) = (B(t,\tilde{T}))_{t\in[0,T]}$ der Nullkuponanleihe mit Fälligkeit $\tilde{T} > T$ entwickle sich gemäß
$$dB(t,\tilde{T}) \;=\; B(t-,\tilde{T})\Big(\underbrace{\big(r(t) + \xi_1(t)\sigma_B(t) + \xi_2(t)\gamma_B(t)\big)}_{=:\,\mu_B(t)}\,dt + \sigma_B(t)\,dW_2(t) + \gamma_B(t)\,dN_2(t)\Big),$$
$$B(0,\tilde{T}) \;=\; B_0 \;>\; 0,$$

wobei die Funktionen $\xi_1, \xi_2, \sigma_B : [0,T] \to \mathbb{R}$ und $\gamma_B : [0,T] \to (-1,\infty)$ wie zuvor deterministisch und stetig, insbesondere also beschränkt sind. Ferner sei σ_B wegbeschränkt von der Null.

Der Preisverlauf $A = (A(t))_{t\in[0,T]}$ der Aktie entwickle sich gemäß

$$\begin{aligned} dA(t) &= A(t-)\Big[\mu_A(t)\,dt + \sigma_A(t)\,dW_1(t) + \sigma_{AB}(t)\,dW_2(t) \\ &\qquad + \gamma_A(t)\,dN_1(t) + \gamma_{AB}(t)\,dN_2(t)\Big] \\ A(0) &= A_0 > 0 \end{aligned}$$

mit

$$\mu_A(t) = r(t) + \underbrace{\mu_A(t) - r(t)}_{=:\,\varrho(t)}.$$

Hierbei sind die Funktionen $\varrho, \sigma_A, \sigma_{AB} : [0,T] \to \mathbb{R}$ und $\gamma_A, \gamma_{AB} : [0,T] \to (-1,\infty)$ ebenfalls deterministisch und stetig, also auch beschränkt auf $[0,T]$. Die Funktion σ_A sei zusätzlich wegbeschränkt von der Null. Da γ_A und γ_{AB} Funktionen mit Werten in $(-1,\infty)$ sind, ist der Aktienpreisprozess A fast sicher strikt positiv.

Wie in Abschnitt 6.1 wird auch hier ein Investor mit Startkapital $x_0 > 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ betrachtet. Das Investitionsverhalten des Investors wird durch einen zweidimensionalen selbst-finanzierenden Portfolioprozess $\pi = (\pi_A, \pi_B)^t$ beschrieben.
In dieser Situation entwickelt sich das Vermögen des Investors gemäß der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dX(t) &= X(t-)\Big(\big[r(t) + \pi_A(t)\varrho(t) + \pi_B(t)\big(\xi_1(t)\sigma_B(t) + \xi_2(t)\gamma_B(t)\big)\big]\,dt \\ &\qquad + \pi_A(t)\sigma_A(t)\,dW_1(t) + \big(\pi_A(t)\sigma_{AB}(t) + \pi_B(t)\sigma_B(t)\big)\,dW_2(t) \\ &\qquad + \pi_A(t-)\gamma_A(t)\,dN_1(t) + \big(\pi_A(t-)\gamma_{AB}(t) + \pi_B(t-)\gamma_B(t)\big)\,dN_2(t)\Big), \\ X(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Genau wie im Bond-Portfolioproblem aus Abschnitt 6.1 ist das Ziel des Investors, das Funktional

$$\mathbb{E}^{0,x_0,r_0}\big((X^\pi(T))^\lambda\big) \qquad (\lambda \in (0,1)) \tag{6.9}$$

über alle Portfolioprozesse $\pi = (\pi(t))_{t\in[0,T]}$ mit Werten in der abgeschlossenen Menge $\{v \in [0,\kappa]^2 : v_1 + v_2 \leq \kappa\}$ zu maximieren, so dass der zugehörige Vermögensprozess X^{π^*} fast sicher strikt positiv ist. Die Konstante $\kappa > 0$ ist so gewählt, dass $z_1\gamma_A(t) > -1$ und $z_1\gamma_{AB}(t) + z_2\gamma_B(t) > -1$ für alle $t \in [0,T]$ und für alle

$z = (z_1, z_2)^t \in \{v \in [0, \kappa]^2 : v_1 + v_2 \le \kappa\}$ gilt.

Um dieses Problem mit Methoden der stochastischen Steuerung lösen zu können, ist es wie in Abschnitt 6.1 erforderlich, einen zweidimensionalen Zustandsprozess $Y = (X, r)^t$ zu betrachten.

Die gesteuerte stochastische Differentialgleichung besitzt damit die Form

$$\begin{aligned} dY(t) &= \Lambda(t, Y(t), u(t))\, dt + \Sigma(t, Y(t), u(t))\, dW(t) + \Gamma(t, Y(t-), u(t-))\, dN(t), \quad (6.10) \\ Y(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ r_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} X(t) \\ r(t) \end{pmatrix}, \\ u(t) &= \pi(t) = \begin{pmatrix} \pi_A(t) \\ \pi_B(t) \end{pmatrix}, \\ \Lambda(t, x, r, \pi_A, \pi_B) &= \begin{pmatrix} x\big[r + \pi_A \varrho(t) + \pi_B\big(\xi_1(t)\sigma_B(t) + \xi_2(t)\gamma_B(t)\big)\big] \\ a_1(t) r + a_2(t) \end{pmatrix}, \\ \Sigma(t, x, r, \pi_A, \pi_B) &= \begin{pmatrix} x\pi_A\sigma_A(t) & x\big(\pi_A\sigma_{AB}(t) + \pi_B\sigma_B(t)\big) \\ 0 & b(t) \end{pmatrix}, \\ \Gamma(t, x, r, \pi_A, \pi_B) &= \begin{pmatrix} x\pi_A\gamma_A(t) & x\big(\pi_A\gamma_{AB}(t) + \pi_B\gamma_B(t)\big) \\ 0 & c(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analog zu Abschnitt 6.1 definiere man die abgeschlossene Menge $F \subseteq \mathbb{R}^2$ durch

$$F := \{v \in [0, \kappa]^2 : v_1 + v_2 \le \kappa\},$$

die Menge Q durch

$$Q := [0, T) \times \big((0, \infty) \times \mathbb{R}\big)$$

und die Stoppzeit $\tau : \Omega \to [0, T]$ durch

$$\tau := \inf\big\{t \in [0, T] : (t, X^\pi(t), r(t)) \notin Q\big\}.$$

Problem: Finde eine Funktion $G : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ und eine zulässige Steuerung $u^* = \pi^* \in \mathcal{A}(0, x_0, r_0)$ mit

$$G(0, x_0, r_0) = \sup_{u \in \mathcal{A}(0, x_0, r_0)} \mathbb{E}^{0, x_0, r_0}\big((X^u(\tau))^\lambda\big) = \mathbb{E}^{0, x_0, r_0}\big((X^{u^*}(\tau))^\lambda\big).$$

Für $G : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $G \in C^{1,2}(Q)$, für $(t,x,r) \in Q$ und für $\pi = (\pi_A, \pi_B)^t \in F$ sei der Operator $\mathcal{E}^\pi$ definiert durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^\pi G(t,x,r) \;&:=\; G_t(t,x,r) + x\big[r + \pi_A \varrho(t) + \pi_B\big(\xi_1(t)\sigma_B(t) + \xi_2(t)\gamma_B(t)\big)\big] G_x(t,x,r) \\
&\quad + \big(a_1(t)r + a_2(t)\big) G_r(t,x,r) \\
&\quad + \frac{1}{2}x^2\big[\pi_A^2\big(\sigma_A(t)\big)^2 + \big(\pi_A\sigma_{AB}(t) + \pi_B\sigma_B(t)\big)^2\big] G_{xx}(t,x,r) \\
&\quad + x\big(\pi_A\sigma_{AB}(t) + \pi_B\sigma_B(t)\big) b(t) G_{xr}(t,x,r) + \frac{1}{2}\big(b(t)\big)^2 G_{rr}(t,x,r) \\
&\quad + \alpha_1\Big(G(t, x + x\pi_A\gamma_A(t), r) - G(t,x,r)\Big) \\
&\quad + \alpha_2\Big(G(t, x + x[\pi_A\gamma_{AB}(t) + \pi_B\gamma_B(t)], r + c(t)) - G(t,x,r)\Big).
\end{aligned}$$

Die zugehörige HJB-Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\sup_{\pi\in F} \mathcal{E}^\pi G(t,x,r) \;&=\; 0 \qquad \text{für } (t,x,r) \in Q, \\
G(t,x,r) \;&=\; x^\lambda \mathbb{1}_{\{x>0\}} \qquad \text{für } (t,x,r) \in \mathcal{C}Q := \big([0,T) \times (-\infty, 0] \times \mathbb{R}\big) \cup \big(\{T\} \times \mathbb{R}^2\big).
\end{aligned}$$

Da die vorgegebene Randbedingung dieselbe wie in Abschnitt 6.1 ist, bietet sich auch derselbe Separationsansatz an, nämlich

$$G(t,x,r) \;=\; f(t,r)x^\lambda \mathbb{1}_{\{x>0\}} \qquad \text{mit} \qquad f(T,r) \;=\; 1 \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R}. \tag{6.11}$$

Für $(t,x,r) \in Q$ erhält man damit

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^\pi G(t,x,r) \;&=\; f_t(t,r)x^\lambda + \big[r + \pi_A\varrho(t) + \pi_B\big(\xi_1(t)\sigma_B(t) + \xi_2(t)\gamma_B(t)\big)\big]\lambda f(t,r)x^\lambda \\
&\quad + \big(a_1(t)r + a_2(t)\big) f_r(t,r)x^\lambda \\
&\quad + \frac{1}{2}\big[\pi_A^2\big(\sigma_A(t)\big)^2 + \big(\pi_A\sigma_{AB}(t) + \pi_B\sigma_B(t)\big)^2\big]\lambda(\lambda-1) f(t,r)x^\lambda \\
&\quad + \big(\pi_A\sigma_{AB}(t) + \pi_B\sigma_B(t)\big) b(t)\lambda f_r(t,r)x^\lambda + \frac{1}{2}\big(b(t)\big)^2 f_{rr}(t,r)x^\lambda \\
&\quad + \alpha_1\Big(f(t,r)\big(x + x\pi_A\gamma_A(t)\big)^\lambda - f(t,r)x^\lambda\Big) \\
&\quad + \alpha_2\Big(f(t, r + c(t))\big(x + x\big[\pi_A\gamma_{AB}(t) + \pi_B\gamma_B(t)\big]\big)^\lambda - f(t,r)x^\lambda\Big).
\end{aligned}$$

Wählt man nun den Ansatz $f(t,r) = g(t)\exp(\beta(t)r)$ mit $g(T) = 1$ und $\beta(T) = 0$, so erhält man

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}^{\pi} G(t,x,r)\\
&= \Big(g'(t)\exp(\beta(t)r) + r\beta'(t)g(t)\exp(\beta(t)r)\Big)x^{\lambda}\\
&\quad +\big[r + \pi_A\varrho(t) + \pi_B\big(\xi_1(t)\sigma_B(t) + \xi_2(t)\gamma_B(t)\big)\big]\lambda g(t)\exp(\beta(t)r)x^{\lambda}\\
&\quad +\big(a_1(t)r + a_2(t)\big)\beta(t)g(t)\exp(\beta(t)r)x^{\lambda}\\
&\quad +\frac{1}{2}\big[\pi_A^2\big(\sigma_A(t)\big)^2 + \big(\pi_A\sigma_{AB}(t) + \pi_B\sigma_B(t)\big)^2\big]\lambda(\lambda-1)g(t)\exp(\beta(t)r)x^{\lambda}\\
&\quad +\big(\pi_A\sigma_{AB}(t) + \pi_B\sigma_B(t)\big)b(t)\lambda\beta(t)g(t)\exp(\beta(t)r)x^{\lambda} + \frac{1}{2}\big(b(t)\big)^2\big(\beta(t)\big)^2 g(t)\exp(\beta(t)r)x^{\lambda}\\
&\quad +\alpha_1\Big(g(t)\exp(\beta(t)r)\big(x + x\pi_A\gamma_A(t)\big)^{\lambda} - g(t)\exp(\beta(t)r)x^{\lambda}\Big)\\
&\quad +\alpha_2\Big(g(t)\exp(\beta(t)r)\exp(\beta(t)c(t))\big(x + x\big[\pi_A\gamma_{AB}(t) + \pi_B\gamma_B(t)\big]\big)^{\lambda} - g(t)\exp(\beta(t)r)x^{\lambda}\Big)\\
&=: \widetilde{h}_{t,x,r}(\pi)
\end{aligned}
$$

mit $\widetilde{h}_{t,x,r} : F \to \mathbb{R}$. Nimmt man an, dass die Funktion g strikt positiv ist (dies muss später noch überprüft werden), so wird die Funktion $\widetilde{h}_{t,x,r}$ genau dann maximal, wenn die Funktion $\widetilde{h}_t^* : F \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\widetilde{h}_t^*(\pi) \;:=\; & \pi_A\big[\varrho(t) + \sigma_{AB}(t)b(t)\beta(t)\big]\lambda + \pi_B\big[\xi_1(t)\sigma_B(t) + \xi_2(t)\gamma_B(t) + \sigma_B(t)b(t)\beta(t)\big]\lambda\\
& +\frac{1}{2}\big[\pi_A^2\big(\sigma_A(t)\big)^2 + \big(\pi_A\sigma_{AB}(t) + \pi_B\sigma_B(t)\big)^2\big]\lambda(\lambda-1)\\
& +\alpha_1\Big(\big(1 + \pi_A\gamma_A(t)\big)^{\lambda} - 1\Big) + \alpha_2\Big(\exp(\beta(t)c(t))\big(1 + \pi_A\gamma_{AB}(t) + \pi_B\gamma_B(t)\big)^{\lambda} - 1\Big),
\end{aligned}
$$

maximal wird (es gilt $x > 0$, da $(t,x,r) \in Q$ ist). Da $\widetilde{h}_t^*$ auf der kompakten Menge F stetig und strikt konkav in π ist, besitzt $\widetilde{h}_t^*$ eine von x und r unabhängige, eindeutig bestimmte globale Maximalstelle $\pi_t^* = (\pi_{A,t}^*, \pi_{B,t}^*)^t \in F$.

Setzt man $\pi_t^* = (\pi_{A,t}^*, \pi_{B,t}^*)^t$ in die umgewandelte HJB-Gleichung ein und teilt gleichzeitig beide Seiten durch $\exp(\beta(t)r)x^{\lambda}$, so erhält man

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & g'(t) + r\beta'(t)g(t) + \big[r + \pi_{A,t}^*\varrho(t) + \pi_{B,t}^*\big(\xi_1(t)\sigma_B(t) + \xi_2(t)\gamma_B(t)\big)\big]\lambda g(t)\\
& +\big(a_1(t)r + a_2(t)\big)\beta(t)g(t)\\
& +\frac{1}{2}\big[\big(\pi_{A,t}^*\big)^2\big(\sigma_A(t)\big)^2 + \big(\pi_{A,t}^*\sigma_{AB}(t) + \pi_{B,t}^*\sigma_B(t)\big)^2\big]\lambda(\lambda-1)g(t)\\
& +\big(\pi_{A,t}^*\sigma_{AB}(t) + \pi_{B,t}^*\sigma_B(t)\big)b(t)\lambda\beta(t)g(t) + \frac{1}{2}\big(b(t)\big)^2\big(\beta(t)\big)^2 g(t)\\
& +\alpha_1\Big(g(t)\big(1 + \pi_{A,t}^*\gamma_A(t)\big)^{\lambda} - g(t)\Big)\\
& +\alpha_2\Big(g(t)\exp(\beta(t)c(t))\big(1 + \pi_{A,t}^*\gamma_{AB}(t) + \pi_{B,t}^*\gamma_B(t)\big)^{\lambda} - g(t)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & g'(t) + \Big(\beta'(t) + \lambda + a_1(t)\beta(t)\Big)g(t)r \\
& + g(t)\Big[\pi^*_{A,t}\big(\varrho(t) + \sigma_{AB}(t)b(t)\beta(t)\big)\lambda + a_2(t)\beta(t) + \frac{1}{2}\big(b(t)\big)^2\big(\beta(t)\big)^2 \\
& \qquad + \pi^*_{B,t}\big[\xi_1(t)\sigma_B(t) + \xi_2(t)\gamma_B(t) + \sigma_B(t)b(t)\beta(t)\big]\lambda \\
& \qquad + \frac{1}{2}\big[\big(\pi^*_{A,t}\big)^2\big(\sigma_A(t)\big)^2 + \big(\pi^*_{A,t}\sigma_{AB}(t) + \pi^*_{B,t}\sigma_B(t)\big)^2\big]\lambda(\lambda-1) \\
& \qquad + \alpha_1\big(1 + \pi^*_{A,t}\gamma_A(t)\big)^\lambda - \alpha_1 \\
& \qquad + \alpha_2\exp(\beta(t)c(t))\big(1 + \pi^*_{A,t}\gamma_{AB}(t) + \pi^*_{B,t}\gamma_B(t)\big)^\lambda - \alpha_2\Big].
\end{aligned} \tag{6.12}
$$

Setzt man $\beta(t) = \lambda\int_t^T \exp(\int_t^u a_1(s)\,ds)\,du$, so fällt der zweite Term der rechten Seite in Gleichung (6.12) weg und man erhält eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$0 \;=\; g'(t) + g(t)\widetilde{\varphi}(t), \qquad g(T) \;=\; 1$$

mit

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(t) \quad := \quad & \pi^*_{A,t}\big(\varrho(t) + \sigma_{AB}(t)b(t)\beta(t)\big)\lambda + a_2(t)\beta(t) + \frac{1}{2}\big(b(t)\big)^2\big(\beta(t)\big)^2 \\
& + \pi^*_{B,t}\big[\xi_1(t)\sigma_B(t) + \xi_2(t)\gamma_B(t) + \sigma_B(t)b(t)\beta(t)\big]\lambda \\
& + \frac{1}{2}\big[\big(\pi^*_{A,t}\big)^2\big(\sigma_A(t)\big)^2 + \big(\pi^*_{A,t}\sigma_{AB}(t) + \pi^*_{B,t}\sigma_B(t)\big)^2\big]\lambda(\lambda-1) \\
& + \alpha_1\big(1 + \pi^*_{A,t}\gamma_A(t)\big)^\lambda - \alpha_1 \\
& + \alpha_2\exp(\beta(t)c(t))\big(1 + \pi^*_{A,t}\gamma_{AB}(t) + \pi^*_{B,t}\gamma_B(t)\big)^\lambda - \alpha_2.
\end{aligned}
$$

Da alle auftretenden Funktionen deterministisch und stetig sind, ist die Funktion $\widetilde{\varphi}$ ebenfalls deterministisch und stetig. „Trennung der Variablen" liefert die eindeutig bestimmte Lösung

$$g(t) \quad = \quad \exp\Big(\widetilde{\Phi}(T) - \widetilde{\Phi}(t)\Big),$$

wobei $\widetilde{\Phi}$ die Stammfunktion von $\widetilde{\varphi}$ bezeichnet. Die Funktion g ist strikt positiv. Die obige Annahme ist also gerechtfertigt.
Der mögliche Kandidat G für die Wertefunktion ist damit gegeben durch

$$G(t,x,r) \;=\; x^\lambda \exp\Big(\widetilde{\Phi}(T) - \widetilde{\Phi}(t) + r\lambda\int_t^T \exp\Big(\int_t^u a_1(s)\,ds\Big)\,du\Big)\mathbb{1}_{\{x>0\}}.$$

Der mögliche Kandidat für die optimale Steuerung ist gegeben durch $u^* = \pi^*$, wobei $\pi^*(t) = (\pi^*_A(t), \pi^*_B(t))^t = \pi^*_t = (\pi^*_{A,t}, \pi^*_{B,t})^t$ die eindeutig bestimmte globale Maximalstelle der Funktion $\widetilde{h}^*_t$ ist.

Es wird nun gezeigt, dass X^{π^*} bei Start in $x_0 \in (0,\infty)$ fast sicher strikt positiv ist. Der Vermögensprozess X^{π^*} genügt der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
dX^{\pi^*}(t) &= X^{\pi^*}(t-)\Big(\big[r(t)+\pi_A^*(t)\varrho(t)+\pi_B^*(t)\big(\xi_1(t)\sigma_B(t)+\xi_2(t)\gamma_B(t)\big)\big]\,dt \\
&\qquad +\pi_A^*(t)\sigma_A(t)\,dW_1(t)+\big(\pi_A^*(t)\sigma_{AB}(t)+\pi_B^*(t)\sigma_B(t)\big)\,dW_2(t) \\
&\qquad +\pi_A^*(t-)\gamma_A(t)\,dN_1(t)+\big(\pi_A^*(t-)\gamma_{AB}(t)+\pi_B^*(t-)\gamma_B(t)\big)\,dN_2(t)\Big) \\
&= X^{\pi^*}(t-)\,dZ^*(t), \\
X^{\pi^*}(0) &= x_0 \;>\; 0
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
Z^*(t) &:= \int_0^t \big[r(s)+\pi_A^*(s)\varrho(s)+\pi_B^*(s)\big(\xi_1(s)\sigma_B(s)+\xi_2(s)\gamma_B(s)\big)\big]\,ds \\
&\quad + \int_0^t \pi_A^*(s)\sigma_A(s)\,dW_1(s)+\int_0^t \big[\pi_A^*(s)\sigma_{AB}(s)+\pi_B^*(s)\sigma_B(s)\big]\,dW_2(s) \\
&\quad + \int_{0+}^t \pi_A^*(s-)\gamma_A(s)\,dN_1(s)+\int_{0+}^t \big[\pi_A^*(s-)\gamma_{AB}(s)+\pi_B^*(s-)\gamma_B(s)\big]\,dN_2(s)
\end{aligned}$$

für alle $t \in [0,T]$.
Die fast sicher eindeutig bestimmte Lösung X^{π^*} ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
X^{\pi^*}(t) &= x_0 \exp\Big(Z^*(t)-\frac{1}{2}\big[Z^*,Z^*\big]^c(t)\Big)\prod_{0<s\le t}\big(1+\Delta Z^*(s)\big)\exp\big(-\Delta Z^*(s)\big) \\
&= x_0 \exp\Big(\int_0^t \big[r(s)+\pi_A^*(s)\varrho(s)+\pi_B^*(s)\big(\xi_1(s)\sigma_B(s)+\xi_2(s)\gamma_B(s)\big)\big]\,ds\Big) \\
&\quad \cdot \exp\Big(-\frac{1}{2}\int_0^t \big[\big(\pi_A^*(s)\big)^2\big(\sigma_A(s)\big)^2+\big(\pi_A^*(s)\sigma_{AB}(s)+\pi_B^*(s)\sigma_B(s)\big)^2\big]\,ds\Big) \\
&\quad \cdot \exp\Big(\int_0^t \pi_A^*(s)\sigma_A(s)\,dW_1(s)+\int_0^t \big[\pi_A^*(s)\sigma_{AB}(s)+\pi_B^*(s)\sigma_B(s)\big]\,dW_2(s)\Big) \\
&\quad \cdot \prod_{\{n:\,0<T_n^{(1)}\le t\}} \big(1+\pi_A^*(T_n^{(1)}-)\gamma_A(T_n^{(1)})\big) \\
&\quad \cdot \prod_{\{n:\,0<T_n^{(2)}\le t\}} \big(1+\pi_A^*(T_n^{(2)}-)\gamma_{AB}(T_n^{(2)})+\pi_B^*(T_n^{(2)}-)\gamma_B(T_n^{(2)})\big)
\end{aligned}$$

für $t \in [0,T]$, wobei $(T_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(T_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Sprungstellen des eindimensionalen Poisson-Prozesses N_1 bzw. N_2 ist. Aufgrund der Wahl der Konstante $\kappa > 0$ gilt $\pi_A^*(T_n^{(1)}-)\gamma_A(T_n^{(1)}) > -1$ fast sicher auf der Menge $\{0 < T_n^{(1)} \le t\}$ und $\pi_B^*(T_n^{(2)}-)\gamma_B(T_n^{(2)}) + \pi_A^*(T_n^{(2)}-)\gamma_{AB}(T_n^{(2)}) > -1$ fast sicher auf der Menge $\{0 < T_n^{(2)} \le t\}$. Daraus folgt $X^{\pi^*}(t) > 0$ fast sicher für alle $t \in [0,T]$.

Alle weiteren Voraussetzungen der Variante des Verifikationssatzes (vgl. Satz 3.12) können analog zu Abschnitt 6.1 gezeigt werden, so dass eine Anwendung des Satzes mit $Q = [0,T) \times \big((0,\infty) \times \mathbb{R}\big)$ das folgende Resultat liefert:

Folgerung 6.3

Sei $\pi^*(t) = (\pi_A^*(t), \pi_B^*(t))^t$ die eindeutig bestimmte globale Maximalstelle der Funktion $\widetilde{h}_t^* : F \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{h}_t^*(\pi) \quad := \quad & \pi_A\Big(\varrho(t) + \sigma_{AB}(t)b(t)\lambda\int_t^T \exp\Big(\int_t^u a_1(s)\,ds\Big)\,du\Big)\lambda \\
& +\pi_B\Big(\xi_1(t)\sigma_B(t) + \xi_2(t)\gamma_B(t) + \sigma_B(t)b(t)\lambda\int_t^T \exp\Big(\int_t^u a_1(s)\,ds\Big)\,du\Big)\lambda \\
& +\frac{1}{2}\Big(\pi_A^2\big(\sigma_A(t)\big)^2 + \big(\pi_A\sigma_{AB}(t) + \pi_B\sigma_B(t)\big)^2\Big)\lambda(\lambda-1) \\
& +\alpha_1\Big(\big(1+\pi_A\gamma_A(t)\big)^\lambda - 1\Big) \\
& +\alpha_2\Big[\exp\Big(c(t)\lambda\int_t^T \exp\Big(\int_t^u a_1(s)\,ds\Big)\,du\Big)\big(1+\pi_A\gamma_{AB}(t)+\pi_B\gamma_B(t)\big)^\lambda - 1\Big].
\end{aligned}$$

Dann ist die zulässige Steuerung $\pi^* = (\pi^*(t))_{t\in[0,T]}$ eine Lösung des Steuerungsproblems

$$\sup_{\pi\in\mathcal{A}(0,x_0,r_0)} \mathbb{E}^{0,x_0,r_0}\big((X^\pi(\tau))^\lambda\big).$$

Bemerkung 6.4

1. Da der Vermögensprozess $X^{\pi^*} = (X^{\pi^*}(t))_{t\in[0,T]}$ bei Start in $x_0 \in (0,\infty)$ zum optimalen π^* aus Folgerung 6.1 fast sicher strikt positiv ist, ist π^* insbesondere eine optimale Strategie des ursprünglichen Problems, d.h. π^* maximiert das Funktional (6.9).

2. Für den Fall $a_1 \equiv 0$ gilt $\beta(t) = \lambda\int_t^T \exp(\int_t^u a_1(s)\,ds)\,du = \lambda(T-t)$ für alle $t \in [0,T]$ und somit vereinfacht sich die Funktion $\widetilde{h}_t^* : F \longrightarrow \mathbb{R}$ aus Folgerung 6.1 zu

$$\begin{aligned}
\widetilde{h}_t^*(\pi) \quad := \quad & \pi_A\Big(\varrho(t) + \sigma_{AB}(t)b(t)\lambda(T-t)\Big)\lambda \\
& +\pi_B\Big(\xi_1(t)\sigma_B(t) + \xi_2(t)\gamma_B(t) + \sigma_B(t)b(t)\lambda(T-t)\Big)\lambda \\
& +\frac{1}{2}\Big(\pi_A^2\big(\sigma_A(t)\big)^2 + \big(\pi_A\sigma_{AB}(t) + \pi_B\sigma_B(t)\big)^2\Big)\lambda(\lambda-1) \\
& +\alpha_1\Big(\big(1+\pi_A\gamma_A(t)\big)^\lambda - 1\Big) \\
& +\alpha_2\Big(\exp\big(c(t)\lambda(T-t)\big)\big(1+\pi_A\gamma_{AB}(t)+\pi_B\gamma_B(t)\big)^\lambda - 1\Big).
\end{aligned}$$

3. Wie im Bond-Portfolioproblem aus Abschnitt 6.1 stimmt auch hier die optimale zulässige Portfoliostrategie π^* im Fall $\gamma_A \equiv 0$, $\gamma_B \equiv 0$, $\gamma_{AB} \equiv 0$ und $c \equiv 0$ mit dem Ergebnis von Korn/Kraft [19] überein. In dieser Situation gilt

$$\begin{aligned}
\pi_A^*(t) &= \frac{1}{1-\lambda} \frac{\sigma_B(t)\varrho(t) - \sigma_{AB}(t)\xi_1(t)\sigma_B(t)}{\big(\sigma_A(t)\big)^2 \sigma_B(t)}, \\
\pi_B^*(t) &= \frac{1}{1-\lambda} \left[\left(1 + \frac{\big(\sigma_{AB}(t)\big)^2}{\big(\sigma_A(t)\big)^2} \right) \frac{\xi_1(t)}{\sigma_B(t)} - \frac{\sigma_{AB}(t)\varrho(t)}{\sigma_B(t)\big(\sigma_A(t)\big)^2} + \frac{b(t)\beta(t)}{\sigma_B(t)} \right]
\end{aligned}$$

mit $\beta(t) = \lambda \int_t^T \exp(\int_t^u a_1(s)\, ds)\, du$.

Literaturverzeichnis

[1] D. Applebaum (2004). *Lévy Processes and Stochastic Calculus.* Cambridge University Press.

[2] P. Artzner, F. Delbaen (1989). *Term Structure of Interest Rates: The Martingale Approach.* Advances in Applied Mathematics 10, pp. 95-129.

[3] F. Black, M. Scholes (1973). *The pricing of options and corporate liabilities.* Journal of Political Economy 81, pp. 637-654.

[4] J. C. Cox, C. F. Huang (1989). *Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process.* Journal of Economic Theory 49, pp. 33-83.

[5] C. Dellacherie, P.-A. Meyer (1982). *Probabilities and Potential B.* North-Holland Publishing Company.

[6] C. Doléans-Dade, P.-A. Meyer (1977). *Equations differentielles stochastique.* Séminaire de Probabilités XI, Université de Strasbourg 1975/76, pp. 376-382.

[7] R. J. Elliott (1982). *Stochastic calculus and applications.* Springer-Verlag New York Inc..

[8] W. H. Flemming, H. M. Soner (1993). *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions.* Springer-Verlag.

[9] D. Heath, R. Jarrow, A. Morton (1992). *Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation.* Econometrica 60, No. 1, pp. 77-105.

[10] H. Heuser (1988). *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.* B. G. Teubner Stuttgart.

[11] N. Ikeda, S. Watanabe (1989). *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. Second Edition.* North Holland-Kodansha.

[12] A. Irle (1998). *Finanzmathematik: Die Bewertung von Derivaten.* B. G. Teubner Stuttgart.

[13] K. Itô (1951). *On stochastic differential equations.* Memoirs of the American Mathematical Society 4, pp. 1-51.

[14] J. Jacod, A. N. Shiryaev (2003). *Limit theorems for stochastic processes. 2nd Edition.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[15] O. Kallenberg (2002). *Foundations of Modern Probability. 2nd Edition.* Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg.

[16] I. Karatzas, J. P. Lehoczky, S. E. Shreve (1987). *Optimal portfolio and consumption decisions for a small investor on a finite horizon.* SIAM Journal on Control and Optimization 27, pp. 1157-1186.

[17] I. Karatzas, S. E. Shreve (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus. 2nd Edition.* Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg.

[18] R. Korn, E. Korn (1999). *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung.* Vieweg.

[19] R. Korn, H. Kraft (2001). *A stochastic control approach to portfolio problems with stochastic interest rates.* SIAM Journal on Control and Optimization 40, No. 4, pp. 1250-1269.

[20] H. Kunita (2004). *Representation of Martingales with Jumps and Applications to Mathematical Finance.* Stochastic Analysis and Related Topics in Kyoto 2004, In honour of Kiyosi Itô, Advanced Studies in Pure Mathematics 41, pp. 209-232, Mathematical Society of Japan.

[21] H. Kraft (2004). *Optimal Portfolios with Stochastic Interest Rates and Defaultable Assets.* Springer-Verlag.

[22] N. Krylov (1980). *Controlled diffusion processes.* Springer-Verlag.

[23] R. C. Merton (1969). *Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous case.* Review of Economics and Statistics 51, No. 3, pp. 247-257.

[24] R. C. Merton (1971). *Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model.* Journal of Economic Theory 3, pp. 373-413.

[25] R. C. Merton (1973). *Theory of rational option pricing.* Bell Journal of Economics and Management Science 4, pp. 141-183.

[26] P. A. Meyer (1966). *Probability and Potentials.* Blaisdell Publishing Company, A Division of Ginn and Company.

[27] M. Musiela, M. Rutkowski (2005). *Martingale Methods in Financial Modelling. 2nd Edition.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[28] B. Øksendal, A. Sulem (2005). *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[29] S. R. Pliska (1986). *A stochastic calculus model of continuous trading: Optimal portfolios.* Mathematics of Operations Research 11, pp. 371-382.

[30] P. Protter (2004). *Stochastic integration and differential equations. 2nd Edition.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[31] D. Revuz, M. Yor (1999). *Continuous Martingales and Brownian Motion. Third Edition.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[32] L. C. G. Rogers, D. Williams (1994). *Diffusions, markov processes and martingales. Volume 1: Foundations. 2nd Edition.* John Wiley & Sons Ltd..

Erklärung

Die hier vorgelegte Dissertation habe ich eigenständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt. Die Dissertation wurde in der vorgelegten oder in ähnlicher Form noch bei keiner anderen Institution eingereicht. Ich habe bisher keine erfolglosen Promotionsversuche unternommen.

Christoph Jonek Düsseldorf, den 20. Mai 2008