
ELEKTRON-POSITRON-PAARPRODUKTION
UND RELATIVISTISCHE IONISATION IN
STARKEN ELEKTROMAGNETISCHEN FELDERN

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES
DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER HEINRICH-HEINE-UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

VORGELEGT VON
ALEXANDRA ECKEY
AUS ALTENA

DÜSSELDORF, JANUAR 2025

aus dem Institut für Theoretische Physik I
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Gedruckt mit der Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Berichterstatter:

1. Prof. Dr. Dr. Carsten Müller
2. Prof. Dr. Alexander Pukhov

Tag der mündlichen Prüfung: 05.03.2025

Meiner Familie, Marcel und Hannah

ZUSAMMENFASSUNG

Die neuesten technologischen Fortschritte eröffnen die Möglichkeit, intensive Laserstrahlung einzusetzen, sodass relativistische Effekte bei Starkfeldprozessen berücksichtigt werden müssen. Dies bringt eine Vielzahl neuer Effekte aber auch Prozesse mit sich. In der vorliegenden Arbeit werden verschiedene theoretische Beschreibungen zur Elektron-Positron-Paarproduktion und relativistischen Ionisation in starken elektromagnetischen Feldern für unterschiedliche Feldkonfigurationen dargestellt. Entsprechend gliedert sich diese Arbeit in zwei Teile.

Zunächst werden die zwei relativistischen Prozesse der Ionisation und der gebunden-freien Paarproduktion in einem konstanten gekreuzten elektromagnetischen Feld betrachtet. Die Übergangsamplitude wird dabei im Rahmen der Starkfeldnäherung in der Göppert-Mayer-Eichung formuliert, wobei die Anfangs- und Endzustände der Elektronen bzw. Positronen durch die entsprechenden Dirac-Coulomb- bzw. Dirac-Volkov-Wellenfunktionen beschrieben werden. Für beide Prozesse werden Coulomb-Korrekturen für die Elektronenbewegung während des Tunnelns bestimmt, welche durch Anpassung der etablierten Methode der imaginären Zeit ermittelt werden. Die Gesamtraten werden für diese Prozesse berechnet und mit Vorhersagen anderer Theorien in einem breiten Bereich von atomaren Ordnungszahlen und angelegten Feldstärken verglichen.

Der zweite Teil der Arbeit befasst sich mit dem Breit-Wheeler-Paarproduktionsprozess beim Stoß von Gamma-Photonen aus Bremsstrahlung mit hochintensiven Laserpulsen. Dabei wird zunächst der Einfluss des breiten Frequenzspektrums der Bremsstrahlung auf die Eigenschaften des Prozesses im Übergangsbereich zwischen dem perturbativen und nicht-perturbativen Wechselwirkungsregime untersucht. Insbesondere werden dabei neben der Gesamtrate des Prozesses auch die Energie- und Winkelverteilungen der erzeugten Teilchen betrachtet. Durch den Wechsel der Regime ist eine kontinuierliche Verschiebung des hauptsächlich beitragenden Intervalls der Bremsstrahlungsfrequenzen zu verzeichnen und es zeigen sich charakteristische Signaturen der gedressten Masse. Für die theoretische Beschreibung des Prozesses werden sowohl unendlich ausgedehnte monochromatische Laserwellen verwendet, als auch endlich gepulste ebene Wellen, welche im Zuge der lokal monochromatischen Approximation (*locally monochromatic approximation*) betrachtet werden.

Eine weitere Untersuchung des Breit-Wheeler-Prozesses beschäftigt sich mit dem Einfluss der Laserfokussierung, Strahlungsdämpfung und Bremsstrahlung auf die Paarproduktionsspektren im nicht-perturbativen Regime, insbesondere auf die Energie- und Winkelverteilungen. Die Parameter dieser Betrachtung sind an zukünftige Experimente angelehnt. Für das betrachtete Regime lässt sich zeigen, dass die Strahlungsdämpfung zu einem schmalen Energiespektrum der erzeugten Teilchen führt, dessen Maximum im Vergleich zu dem Fall, in dem Strahlungsverluste außer Acht gelassen werden, zu wesentlich niedrigeren Energien verschoben ist. Das breite Bremsstrahlungsspektrum nimmt ebenfalls einen starken Einfluss auf die Spektren der erzeugten Paare. Die Laserfokussierung hat im Gegensatz dazu für die hier betrachteten Parameter einen eher gemäßigten Einfluss.

ABSTRACT

The latest technological advances open up the possibility of using intense laser radiation, so that relativistic effects must be taken into account in strong-field processes. This opens up a variety of new effects and processes. In the present work, different theoretical descriptions of electron-positron pair production and relativistic ionization in strong electromagnetic fields are presented for different field configurations. Accordingly, this work is divided into two parts. First, the two relativistic processes of ionization and bound-free pair production in a constant crossed electromagnetic field are considered. The transition amplitude is calculated using the strong-field approximation in the Göppert-Mayer gauge, where the Dirac-Coulomb and Dirac-Volkov wave functions are used as initial and final states of the electrons and positrons. For both processes, Coulomb corrections for the electron motion during tunneling are determined by adapting the established method of imaginary time. The total rates are determined for these processes and compared with predictions of other theories across a wide range of applied field strengths and atomic numbers.

The second part of the thesis deals with Breit-Wheeler pair production. First, the broad frequency spectrum of the bremsstrahlung is examined for its effect on the properties of the process in the perturbative-to-nonperturbative-transition regime. In particular, the energy and angular distributions of the generated particles are considered in addition to the total yield of the process. Furthermore, we show that by changing the regimes, a continuous shift of the main contributing interval of the bremsstrahlung frequencies can be found and show distinctive characteristics of the laser-dressed mass. For this investigation, both infinitely extended monochromatic laser waves and finite plane-wave laser pulses are used, which are considered in the course of the locally monochromatic approximation.

A further investigation of the Breit-Wheeler process deals with the combined influence of laser focusing, radiation reaction and bremsstrahlung on the pair production spectra in the non-perturbative regime. The parameters of this study are based on future experiments. The focus of this theoretical study lies again on the influence of these specific reaction characteristics regarding the energy and angular distributions of the produced pairs. It can be shown that radiation reaction in particular leads to a narrow energy spectrum of the generated particles. Its maximum is shifted to significantly lower energies compared to the case in which radiation losses are disregarded. The broad bremsstrahlung spectrum also has a strong impact on the spectra of the generated pairs. In contrast, laser focusing has a rather moderate influence on the spectra for the considered parameters.

PUBLIKATIONSLISTE

Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit erzielten Ergebnisse basieren auf den von mir veröffentlichten Ergebnissen:

1. F. C. Salgado, K. Grafenstein, A. Golub, A. Döpp, **A. Eckey**, D. Hollatz, C. Müller, A. Seidel, D. Seipt, S. Karsch und M. Zepf, *Towards pair production in the non-perturbative regime*, New J. Phys. **23**, 105002 (2021).

In dieser Referenz wird der geplante experimentelle Aufbau für die Detektierung von Breit-Wheeler-Paaren bei hoher Intensität beschrieben, die im Rahmen der Kollaboration FOR 2783 geplant sind. Mein Beitrag zu dieser Veröffentlichung besteht in der Beteiligung an dem Abschnitt 2.1, in dem die Energieverteilung der erzeugten Elektron-Positron-Paare in der gepulsten ebenen Welle beschrieben wird.

2. **A. Eckey**, A.B. Voitkiv und C. Müller, *Strong-field Breit-Wheeler pair production with bremsstrahlung γ rays in the perturbative-to-nonperturbative-transition regime*, Phys. Rev. A **105**, 013105 (2022).

In dieser Referenz wird die Breit-Wheeler Paarproduktion durch γ -Bremsstrahlung, die sich durch eine hochintensive optische Laserwelle ausbreitet, untersucht. Durch die Berechnung der vollständigen Paarproduktionsrate sowie der Energie- und Winkelverteilungen der erzeugten Teilchen für einen Bereich von Laserintensitäten wird der Einfluss des breiten Frequenzspektrums der Bremsstrahlung auf die Eigenschaften des Prozesses im Übergangsbereich zwischen dem perturbativem und dem nicht-perturbativem Wechselwirkungsregime untersucht. In dieser Arbeit habe ich die Paarproduktionsraten und -spektren berechnet, die dazugehörigen Grafiken erstellt und maßgeblich zur Erstellung des Manuskripts beigetragen.

3. **A. Eckey**, M. Klaiber, A.B. Voitkiv und C. Müller, *Relativistic strong-field ionization of hydrogenlike atomic systems in constant crossed electromagnetic fields*, Phys. Rev. A **107**, 033113 (2023).

Die relativistische Starkfeldionisation von wasserstoffähnlichen Atomen oder Ionen in einem konstanten gekreuzten elektromagnetischen Feld wird in diesem Artikel untersucht. Die Übergangsamplitude wird im Rahmen der Starkfeldnäherung in der Göppert-Mayer-Eichung formuliert, wobei die Anfangs- und Endzustände der Elektronen durch die entsprechenden Dirac-Coulomb- bzw. Dirac-Volkov-Wellenfunktionen beschrieben werden. Coulomb-Korrekturen an der Elektronenbewegung während des Tunnelns werden durch Anpassung einer etablierten Methode an die vorliegende Situation berücksichtigt. Die Gesamtraten sowie die Energiespektren wurden von mir berechnet und mit den Vorhersagen anderer Theorien in einem weiten Bereich von Ordnungszahlen und angelegten Feldstärken verglichen. Die dazugehörigen Grafiken wurden von mir erstellt und ich habe zur Erstellung des Manuskripts maßgeblich beigetragen.

4. **A. Eckey**, A. Golub, F. C. Salgado, S. Villalba-Chávez, A.B. Voitkiv, M. Zepf und C. Müller, *Impact of laser focussing and radiation reaction on particle spectra from nonlinear Breit-Wheeler pair production*, Phys. Rev. A **110**, 043113 (2024).

Das im Rahmen der Kollaboration FOR 2783 geplante Experiment zur Detektierung von Breit-Wheeler-Paaren aus der Kollision zwischen GeV- γ -Photonen aus

Bremsstrahlung und hochintensiven Laserpulsen dient in diesem Artikel als Referenz. In dieser theoretischen Studie untersuchen wir den Einfluss der Laserfokussierung, der Strahlungsdämpfung und eines breiten γ -Bremsstrahlungsspektrums auf die Energie- und Winkelverteilungen der erzeugten Paare. Das Verständnis der Rolle dieser Reaktionsmerkmale liefert wichtige Erkenntnisse für experimentelle Nachweisstrategien. Die gezeigten Spektren sind von mir berechnet, die entsprechenden Abbildungen erstellt und das Manuskript entworfen worden.

Des Weiteren wurde während dieser Arbeit ein Artikel veröffentlicht, der auf der Grundlage der während meines Masterstudiums durchgeführten Forschung entstand:

5. **A. Eckey**, A.B. Voitkiv und C. Müller, *Resonant single-photon double ionization driven by combined intra- and interatomic electron correlations*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **53** 055001 (2020).

In diesem Artikel wird die Doppelionisation eines Atoms durch Absorption eines einzelnen Photons in Gegenwart eines benachbarten Atoms untersucht. Letzteres wird zunächst resonant photo-angeregt und überträgt im Anschluss die Anregungsenergie strahlungslos auf das andere Atom, was zu dessen Doppelionisation führt. Es wird gezeigt, dass die relative Position des Nachbaratoms einen charakteristischen Einfluss auf die Winkelverteilung der emittierten Elektronen hat. An den Berechnungen der Raten sowie den dazugehörigen Abbildungen habe ich mitgewirkt. Beim Erstellen des Manuskripts habe ich geholfen.

INHALTSVERZEICHNIS

Zusammenfassung	iii
Abstract	iv
Publikationsliste	v
1 Einleitung und Motivation	1
1.1 Aufbau der Arbeit	5
2 Freie und gebundene Zustände in der Starkfeld-QED	7
2.1 Volkov-Zustände	7
2.2 Strahlungs-Eichung und Göppert-Mayer-Eichung	10
2.3 Zustände in fokussierten Laserfeldern	12
2.4 $1s$ -Zustände	18
3 Relativistische Ionisation wasserstoffähnlicher Atomsysteme in konstanten gekreuzten elektromagnetischen Feldern	21
3.1 Theoretische Vorgehensweise	22
3.1.1 Ionisationsrate in der Standard-SFA	22
3.1.2 Coulomb-Korrektur	28
3.1.3 Analytische Vereinfachungen	31
3.2 Diskussion der Resultate	34
3.3 Zusammenfassung	37
4 Die gebunden-freie Paarproduktion in konstanten gekreuzten elektromagnetischen Feldern	39
4.1 Theoretische Beschreibung der gebunden-freien Paarproduktion . . .	40
4.1.1 Konstantes gekreuztes Feld in Göppert-Mayer-Eichung	40
4.1.2 Coulomb-Korrektur	44
4.1.3 Analytische Vereinfachung	46
4.1.4 Vergleich mit einem zirkular polarisierten Laserfeld in Strahlungseichung	48
4.2 Ergebnisse der gebunden-freien Paarproduktion	50
4.3 Zusammenfassung	52
5 Breit-Wheeler-Paarproduktion im Übergangsregime von perturbativ zu nicht-perturbativ	55
5.1 Theoretische Vorgehensweise	56
5.1.1 Unendlich ausgedehnte, monochromatische Laserwelle	56
5.1.2 Endlich gepulste ebene Welle	59

5.1.3	Berücksichtigung der Bremsstrahlung	63
5.2	Diskussion der Ergebnisse	65
5.3	Zusammenfassung	73
6	Der Einfluss von Laserfokussierung und Strahlungsdämpfung auf die Spektren der Breit-Wheeler-Paare im nicht-perturbativen Regime	75
6.1	Grundlegende Aspekte	76
6.1.1	Experimentelle Rahmenbedingungen	76
6.1.2	Differentielle Paarproduktionsraten für eine unendlich ausgedehnte, monochromatische Laserwelle	78
6.2	Theoretische Beschreibung der Paarproduktion in fokussierten Laserfeldern	80
6.2.1	Fokussierter Laserpuls	80
6.2.2	Paarproduktion in einem fokussierten Laserfeld	81
6.2.3	Zusätzliche Berücksichtigung der Bremsstrahlung	87
6.3	Energie- und Winkelverteilungen der Breit-Wheeler- Paarproduktion in fokussierten Laserfeldern	88
6.3.1	Energieverteilungen	88
6.3.2	Winkelverteilungen	91
6.4	Theoretische Beschreibung der Strahlungsdämpfung	93
6.5	Der Einfluss der Strahlungsdämpfung auf die Spektren	98
6.6	Zusammenfassung	103
7	Zusammenfassung und Ausblick	105
A	Notationen	109
A.1	Relativistische Einheiten	109
A.2	Atomare Einheiten	109
B	Nützliche Relationen	111
B.1	Identitäten mit γ -Matrizen	111
B.2	Spurberechnung	111
B.3	Spinoren	112
C	Ortsintegrale	113
D	Lokal monochromatische Approximation für die gebunden-freie Paarproduktion	115
E	Breit-Wheeler-Paarproduktion in linear polarisierten ebenen Laserwellen	123
F	Energie- und Winkelverteilungen	127
	Literaturverzeichnis	138
	Danksagung	139
	Eidesstattliche Versicherung	141

In den letzten 100 Jahren gab es viele physikalische Meilensteine, zu denen zweifellos auch die experimentelle Entwicklung des Lasers zählt. Diese lässt sich auf das Jahr 1960 zurückführen, in dem Theodore Harold Maiman den ersten funktionstüchtigen Laser konstruierte [1]. Das Prinzip der stimulierten Emission, welches der Konstruktion zugrunde liegt, war zu diesem Zeitpunkt schon mehr als 40 Jahre zuvor von Albert Einstein beschrieben worden [2]. Damals noch nicht abzusehen, haben sich aus diesem technischen Fortschritt unzählige Möglichkeiten für die Atom-, Kern-, Plasma- und Starkfeldphysik ergeben, um sich entsprechend weiterzuentwickeln. Dieser Umstand ist insbesondere den besonderen Eigenschaften von Lasern geschuldet, welche eine große Kohärenz und Monochromatizität besitzen.

Mit den Jahren der Weiterentwicklung der Lasersysteme haben sich immer mehr Möglichkeiten zur experimentellen Realisierung von zuvor beschriebenen theoretischen Prozessen ergeben. Die ersten Laserkonstruktionen haben bei Laserintensitäten von 10^{10} W/cm² angefangen [3]. Diese reichten aus, um nichtlineare optische Effekte in atomaren Systemen zu untersuchen. Die Multiphotonenionisation wurde beispielsweise im Jahre 1966 zum ersten Mal experimentell beobachtet [4]. Etwa 10 Jahre später erfolgte die Entdeckung der *Above Threshold Ionisation*, bei der mehr Photonen absorbiert, als energetisch für die Ionisation des Atoms benötigt werden [5]. Bei Betrachtung höherer Laserintensitäten ab 10^{17} bis 10^{18} W/cm² muss die Wechselwirkung zwischen Elektron (oder Positron) und Laser relativistisch beschrieben werden. Die Grenze wird dadurch definiert, dass die Bewegung eines freien Elektrons, das solch intensiven Feldern ausgesetzt ist, innerhalb von weniger als einem Schwingungszyklus relativistische Geschwindigkeiten annimmt [3]. Obgleich viele theoretische Konzepte, wie die relativistische Ionisation, schon vor den 1990er Jahren publiziert wurden, ist das relativistische Regime erst seit Mitte der 90er Jahre experimentell zugänglich. Dies ermöglichte nicht nur die Beobachtung relativistischer Effekte und Prozesse, sondern führte unter anderem auch zur Entwicklung von Laser-Plasma-Beschleunigern für Elektronen mit einer kompakten Länge [6–8].

In den letzten Jahren haben sich die Aufbauten der Lasersysteme erneut weiterentwickelt und werden heutige Laser betrachtet, so unterscheiden sich diese in ihren Pulsdauern und Spitzenintensitäten um mehrere Größenordnungen von den anfänglichen Werten. Ein Grund, warum ab Mitte der 80er-Jahre die Spitzenintensitäten so stark zugenommen haben, ist die Erfindung der *Chirped Pulse Amplification* [9]. Bei dieser Methode wird ein anfänglich kurzer und relativ schwacher Puls zunächst gestreckt und verlängert. Anschließend wird der Puls verstärkt. Zuletzt wird der verstärkte lange Puls wieder komprimiert, um kurz und intensiv zu werden. Die Streckung des Pulses ist erforderlich, um die Leistung des Lasers gering zu halten

und das verstärkende Medium nicht zu zerstören. Heutzutage werden Pulsdauern von Femtosekunden, teils sogar indirekt über höhere Harmonische von Attosekunden umgesetzt [3, 10, 11] und Intensitäten von bis zu 10^{23} W/cm² erreicht [12]. In dem Zuge wird die Licht-Materie-Wechselwirkung hochgradig nichtlinear und es treten neuartige Phänomene auf. Beispielsweise erfährt das Elektron durch die Beschleunigung in dem intensiven Feld nicht zu vernachlässigende Strahlungsverluste, welche auch Strahlungsdämpfung genannt werden [13]. Betrachtet man die Wechselwirkung solcher starken Felder mit einer zusätzlichen Photonenquelle oder einem Coulomb-Feld, so eröffnet sich zudem die Möglichkeit, den Prozess der Paarproduktion zu untersuchen.

Die Paarproduktion stellt sicherlich eines der interessantesten Phänomene der Quantenelektrodynamik dar. Bei diesem Prozess wird im Allgemeinen aus einem energiereichen Photon ein sogenanntes Paar, meist in Form von einem Elektron und Positron, erzeugt. Entsprechend lässt sich auf die verblüffende Tatsache schließen, dass Materie allein aus Licht entsteht, in Übereinstimmung mit Einsteins Äquivalenz zwischen Masse und Energie. Die ersten Untersuchungen zur Paarproduktion erfolgten für Vakuum in einem reinen elektrischen Feld. So beschrieb Fritz Sauter im Jahre 1931 die Paarproduktion durch ein reines konstantes elektrisches Feld [14]. Die von ihm postulierte notwendige Feldstärke, bei der eine spontane Produktion von Elektron-Positron-Paaren erfolgt, liegt bei

$$F_{\text{cr}} = \frac{m^2 c^3}{|e| \hbar} = 1.3 \times 10^{16} \text{V/cm}. \quad (1.1)$$

Dies ist die sogenannte kritische Feldstärke, wobei m die Elektronenmasse, c die Lichtgeschwindigkeit, $e < 0$ die Ladung eines Elektrons und \hbar das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum bezeichnen. Die kritische Feldstärke entspricht dem Wert des Feldes, welcher dazu führt, dass an einer Elementarladung $|e|$ entlang der Compton-Wellenlänge $\lambda_c = \hbar/mc$ die Arbeit verrichtet wird, welche der Ruheenergie mc^2 eines Elektrons entspricht.

Die Möglichkeit, Elektron und Positron in starken Feldern darzustellen, ergab sich 1928 durch die von Paul Dirac aufgestellte und nach ihm benannte Gleichung [15]. Dabei sind die Lösungen der Dirac-Gleichung zu negativen Energien so zu interpretieren, dass sie das Positron, als das positiv geladene Antiteilchen des Elektrons, beschreiben. In diesem Formalismus der Quantenelektrodynamik bestimmte Julian Schwinger 1951 die Paarproduktionswahrscheinlichkeit in einem konstanten elektrischen Feld der Feldstärke F_0 [16] und fand für diese

$$W \approx \frac{1}{4\pi^3} \frac{c}{\lambda_c^4} \left(\frac{F_0}{F_{\text{cr}}} \right)^2 \exp \left(-\pi \frac{F_{\text{cr}}}{F_0} \right). \quad (1.2)$$

Wie bereits Sauter zwanzig Jahre zuvor vorhersagte, nimmt die Paarproduktionswahrscheinlichkeit für Feldstärken unterhalb F_{cr} exponentiell ab.

Die Paarproduktion im Laserfeld lässt sich in guter Näherung durch eine unifrequente, ebene Welle beschreiben. Anders als für das rein elektrische Feld ist eine Paarproduktion im Vakuum in diesem Fall nicht möglich, wie Schwinger im Jahre 1951 nachwies [16]. Um in einem Laserfeld den Prozess der Paarproduktion beobachten zu können, ist eine weitere elektromagnetische Energiequelle notwendig.

Eine Möglichkeit besteht darin ein zusätzliches Coulomb-Feld in Form eines Kernfeldes zu betrachten [17]. Eine andere Option ist das Hinzuziehen einer zusätzlichen Photonenquelle [18].

Für die Betrachtung eines bewegten schweren Atomkerns innerhalb eines intensiven Laserfeldes tun sich zwei verschiedene Paarproduktionsprozesse auf. Zum einen lässt sich der sogenannte Bethe-Heitler-Prozess beschreiben [17]. Bei diesem wird ein freies Elektron-Positron-Paar gebildet:

$$Z + n\hbar\omega \rightarrow Z + e^- + e^+. \quad (1.3)$$

Hierbei bezeichnet Z die Kernladungszahl, n die Anzahl absorbierter Photonen und $\hbar\omega$ die Energie der einzelnen Laserphotonen. Für einen ruhenden Atomkern ist der Wirkungsquerschnitt dieses Prozesses, wie V. Yakolev und auch M. H. Mittelmann zeigten, verschwindend gering und ein erfolgreiches Experiment lässt sich somit nur schwer prognostizieren [19, 20]. Betrachtet man jedoch einen beschleunigten Atomkern, so ist in dessen Ruhesystem die Laserfeldstärke groß genug, dass sich positive Prognosen für Experimente aussprechen lassen [21]. Unter der Voraussetzung, dass sich der beschleunigte Kern und das Laserfeld frontal begegnen, ist der Verstärkungsfaktor maximal und durch $(1 + \beta)\gamma$ gegeben, wobei β die reduzierte Geschwindigkeit des Kerns im Laborsystem bezeichnet und $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ seinen Lorentzfaktor.

Neben dem Bethe-Heitler-Prozess besteht zum anderen die Möglichkeit einer gebunden-freien Paarproduktion. Dabei wird das Elektron in einem gebundenen Zustand erzeugt, während das Positron als freies Teilchen vorliegt. Für ein einzelnes hochenergetisches Photon wurde dieser Prozess in den Ref. [22, 23] beschrieben und in den Ref. [21, 24, 25] auf den nichtlinearen Fall erweitert. Ein möglicher Vergleich zur frei-freien Paarproduktion lässt sich am leichtesten im Dirac-See-Bild darstellen. In diesem wird das negative Kontinuum als vollständig durch Elektronen ausgefüllt betrachtet. Demnach wird ein Loch im negativen Kontinuum als Positron interpretiert [26]. In Abbildung 1.1 werden die drei Prozesse frei-freie Paarproduktion, gebunden-freie Paarproduktion und Ionisation gezeigt. Dabei lässt sich auch die Ähnlichkeit zwischen dem Prozess der gebunden-freien Paarproduktion und der Ionisation feststellen, welcher in dieser Arbeit auch rechnerisch verdeutlicht wird.

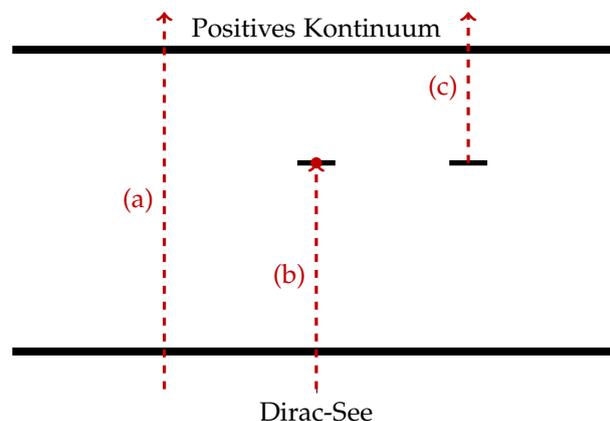


Abbildung 1.1: In Schema (a) wird der Bethe-Heitler-Prozess (die frei-freie Paarproduktion) gezeigt. Schema (b) zeigt die gebunden-freie Paarproduktion. In (c) wird der Ionisations-Prozess dargestellt.

Die Paarproduktion durch das Hinzuziehen einer zusätzlichen Photonenquelle nennt sich Breit-Wheeler-Prozess. Bei dieser Reaktion wird ein Elektron-Positron-Paar durch die Kollision von zwei oder mehr Photonen mit einer weiteren Photonenquelle erzeugt. Dieser Prozess wurde erstmals von Gregory Breit und John A. Wheeler im Jahr 1934 beschrieben [27]. Der Prozess kann symbolisch dargestellt werden durch:

$$n\hbar\omega + \hbar\omega' \rightarrow e^+ + e^-, \quad (1.4)$$

dabei bezeichnet $\hbar\omega$ die Energie der ersten Photonenquelle und $\hbar\omega'$ die der zweiten. Für die Photonenzahl $n = 1$ wird der Prozess linear, bei mehr beteiligten Photonen $n > 1$ nichtlinear. Der nichtlineare Prozess ist in den 60er- und 70er-Jahren in vielen theoretischen Studien untersucht worden [28–30]. Eine Vielzahl von aktuelleren Untersuchungen des nichtlinearen Breit-Wheeler-Prozesses findet sich zudem in den Ref. [31–36]. Abhängig von der Intensität des Lasers und seiner Energie werden unterschiedlich viele Photonen absorbiert.

Es lassen sich unterschiedliche Laserregime ausmachen, unter welchen jeweils charakteristische Merkmale für den Paarproduktionsprozess ausgemacht werden können. Diese Regime werden in Abhängigkeit vom Laserintensitätsparameter bestimmt:

$$\xi = |e|\mathcal{E}_0/mc\omega. \quad (1.5)$$

Der Parameter \mathcal{E}_0 bezeichnet die Amplitude des Feldes der ebenen Laserwelle. Für $\xi \ll 1$ findet der Prozess in einem perturbativen Regime statt, in dem die Paarbildungsrate R durch die Absorption einer kleinen Anzahl von Photonen bestimmt wird und mit wachsendem n durch die Proportionalität $R \propto \xi^{2n}$ unterdrückt wird. Für $\xi \gg 1$ findet der Prozess im nicht-perturbativen Regime statt. Dort lässt sich, wie in den Ref. [29, 37] beschrieben, für die Rate ein charakteristisches Schwingenähnliches Verhalten mit $R \propto e^{-8/(3\kappa)}$ finden, wobei $\kappa = 2\hbar\omega'\mathcal{E}_0/(mc^2F_{cr}) \ll 1$ den Quanten-Nichtlinearitäts-Parameter für die gegenläufige Geometrie des entsprechenden Feldes bezeichnet. Für $\xi \lesssim 1$ lässt sich zudem das nichtlineare Multiphotonenregime bestimmen, welches auch den Beginn des Übergangsregimes von perturbativ zu nicht-perturbativ kennzeichnet.

Im Multiphotonenregime hat bislang die einzige experimentelle Verifizierung des Breit-Wheeler-Prozesses stattgefunden. In einem Experiment am Stanford Linearbeschleunigerzentrum (SLAC) wurden in einem ersten Schritt Photonen mit einer Energie von mehreren GeV durch die Wechselwirkung eines 46.6 GeV-Elektronenstrahls mit einem optischen Terawatt-Laserpuls erzeugt. In einem zweiten Schritt erfolgte eine Wechselwirkung der erzeugten Photonen mit einem Laserfeld, was die Erzeugung von Breit-Wheeler-Paaren ermöglichte. Für die Paarproduktion sind mindestens fünf Laserphotonen im zweiten Reaktionsschritt benötigt worden, um die notwendige energetische Schwelle zu überschreiten. Die analytische Grundlage dieses Experiments wurde bereits 1971 von H. Reiss gelegt [38]. Die Ergebnisse und Rahmenbedingungen dieses Experiments werden in Ref. [39, 40] gezeigt.

Überlegungen zu zukünftigen Experimenten werden beispielsweise über thermische Hohlraumstrahlung in Kombination mit einem ebenen elektromagnetischen Feld aufgestellt [41]. Zudem zielen momentane Planungen eines Versuchsaufbaus

am Rutherford Appleton Laboratory darauf ab, den Zwei-Photonen-Breit-Wheeler-Prozess bei der Wechselwirkung von MeV-Bremsstrahlungs-Photonen mit einem Röntgenlaser nachzuweisen [42]. Auch zum nicht-perturbativen Regime werden momentan Versuchsaufbauten geplant, wie beispielsweise das Experiment am Center for Advanced Laser Applications (CALA) [43] und das LUXE-Experiment am DESY [44, 45]. Die experimentelle Anforderung einer hohen Laserintensität und extrem hohen effektiven Feldstärke nahe dem Schwinger-Limit ist durch die jüngsten Entwicklungen bei den Laser- und Beschleunigeranlagen in greifbarer Nähe [44, 46]. Die erforderlichen hohen Laserintensitäten werden momentan nur bei stark fokussierten, kurzen Laserpulsen erreicht, weshalb große theoretische Anstrengungen unternommen werden, um das beteiligte Laserfeld realistisch zu beschreiben [47–51].

1.1 AUFBAU DER ARBEIT

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns sowohl mit der Ionisation als auch mit der Paarproduktion in starken elektromagnetischen Feldern. Die Arbeit gliedert sich so, dass wir in Kapitel 2 einen Überblick über die verwendeten Zustände und deren Herleitung geben. Dabei gehen wir auf die Volkov-Zustände, die Zustände in fokussierten Laserfeldern und auch auf die gebundenen $1s$ -Zustände ein.

In Kapitel 3 bestimmen wir die Ionisationsrate in einem konstanten gekreuzten elektromagnetischen Feld und geben einen Ansatz für die Bestimmung der notwendigen Coulomb-Korrektur. Die von uns gewählte Berechnung erfolgt über die Dirac-Theorie und *Strong Field Approximation* (SFA) in Göppert-Mayer Eichung und basiert dabei auf den vorangegangenen Studien aus den Ref. [52–55]. Das von uns erzielte Ergebnis wird mit Berechnungen der Perelomov-Popov-Terentev-Theorie (PPT) aus Ref. [55–57] und der Coulomb-korrigierten SFA aus Ref. [58] verglichen.

Ein Prozess, der der Ionisation rechnerisch sehr ähnelt, ist die gebunden-freie Paarproduktion. Die Ergebnisse für diesen Prozess werden ebenfalls für ein konstantes gekreuztes elektromagnetisches Feld in Göppert-Mayer-Eichung bestimmt und in Kapitel 4 präsentiert. Die Möglichkeit zur Bestimmung der Coulomb-Korrektur wird ebenfalls skizziert. Das Ergebnis lässt sich mit der Paarproduktionsrate in einem zirkular-polarisierten Feld vergleichen, welche wir der Ref. [21] entnommen haben. Dabei lassen sich zwischen der dort verwendeten Strahlungseichung und der Göppert-Mayer-Eichung Vergleiche ziehen. Abschließend lassen sich die gebunden-freie Paarproduktion und der Bethe-Heitler-Prozess gegenüberstellen.

Wir bleiben thematisch bei der Paarproduktion und zeigen im darauffolgenden Kapitel differentielle Raten des Breit-Wheeler-Prozesses im Übergangsregime von perturbativ zu nicht-perturbativ. Die Grundrechnung basiert hier auf dem Modell der ebenen Laserwelle. Um die Effekte einer zeitlich endlichen Laserwelle zu untersuchen, bedienen wir uns in Kapitel 5 darüber hinaus der in Ref. [59] gezeigten Methode der *locally monochromatic approximation* (LMA), also einer Approximation, die eine lokale Monochromatizität annimmt. In diesem Kapitel führen wir zudem die Mittelung über Bremsstrahlungsspektren ein und analysieren deren Effekt auf Energie- und Winkelverteilungen. Die gewählten Parameter orientieren sich an dem geplanten LUXE-Experiment [44, 45].

Im abschließenden Kapitel konzentrieren wir uns weiterhin auf den Breit-Wheeler-Prozess und zeigen für diesen im nicht-perturbativen Regime Energie- und Winkelspektren. Dabei wird der Einfluss der Laserfokussierung zusätzlich betrachtet, indem wir die Ergebnisse aus Ref. [48] über die von A. Di Piazza aufgestellten Zustände aus Ref. [60–62] nachrechnen. Ferner nehmen wir den Einfluss der Bremsstrahlung in unsere Betrachtung mit auf. Um darüber hinaus auch eine Prognose über den Einfluss der Strahlungsdämpfung geben zu können, zeigen wir ein mögliches Modell, um diese für die Energie- und Winkelverteilung mit einzubeziehen. Die verwendeten Parameter orientieren sich an dem geplanten Experiment aus Ref. [43], welches im Rahmen der DFG-Forschungsgruppe 2783 *Probing the Quantum Vacuum at the High-Intensity Frontier* stattfinden soll.

Nach einer Zusammenfassung der Ergebnisse in Kapitel 7 folgt ein Anhang, welcher neben hilfreichen Nebenrechnungen und Relationen, zusätzlich die Berechnung der gebunden-freien-Paarproduktionswahrscheinlichkeit in zirkular-polarisierten Laserfeldern für einen zeitlich endlichen Puls enthält. Diese Berechnung basiert auf der hierfür angepassten LMA.

Das Einheitensystem in dieser Arbeit ist nicht einheitlich. In den Kapiteln 3 und 4 verwenden wir atomare Einheiten mit $|e| = m = \hbar = 1$, da diese zur Beschreibung der Ionisation und verwandter Prozesse sehr gebräuchlich sind. Die Kapitel 5 und 6 verwenden wiederum relativistische Einheiten mit $\hbar = c = 4\pi\epsilon_0 = 1$, wie es für (freie) Paarproduktionsprozesse üblich ist. Das verwendete Einheitensystem wird zusätzlich zum Anfang eines jeden Kapitels erneut angegeben. In dieser Arbeit wird zudem die Feynman-Slash-Notation verwendet, sodass für einen allgemeinen Vierer-Vektor D^μ die Relation $\not{D} = \gamma_\mu D^\mu$ gilt.

2 | FREIE UND GEBUNDENE ZUSTÄNDE IN DER STARKFELD-QED

In diesem Kapitel werden alle benötigten Elektronen- und Positronenzustände hergeleitet, welche in den folgenden Rechnungen dieser Arbeit verwendet werden. Der in den Kapiteln 5 und 6 beschriebene Breit-Wheeler-Prozess in einem starken Laserfeld setzt eine Beteiligung einer großen Anzahl von Photonen am Prozess voraus. Eine störungstheoretische Beschreibung, wie beim Fall eines schwachen elektromagnetischen Feldes, bei dem nur wenige Photonen an dem Prozess beteiligt sind, ist daher nicht möglich. Zur Beschreibung dieser Felder wird das sogenannte Furry-Bild verwendet. Dabei wird die Wechselwirkung geladener Teilchen mit dem starken Feld genau berücksichtigt. Das Eichfeld wird entsprechend aufgeteilt in ein perturbativ schwaches Feld, das weiterhin quantisiert betrachtet wird, und ein starkes Hintergrundfeld. Das starke Hintergrundfeld wird klassisch behandelt und mit in die Zustände integriert, indem sich diese aus den Lösungen der Dirac-Gleichung im externen elektromagnetischen Feld ergeben und somit die Wechselwirkung mit dem Hintergrundfeld voll berücksichtigen. Diese Zustände werden Volkov-Zustände genannt und in dem folgenden Abschnitt beschrieben. Eine verallgemeinerte Form dieser Zustände für ein fokussiertes elektromagnetisches Hintergrundfeld wird ebenso gezeigt.

In den Kapiteln 3 und 4 werden die Ionisation und gebunden-freie Paarproduktion in der sogenannten Starkfeldapproximation, besser bekannt unter der englischen Übersetzung *Strong Field Approximation* (SFA), betrachtet. Dabei wird angenommen, dass sich das Elektron nur kurz im Einflussbereich des Kerns aufhält, weswegen sich der End- und im anderen Fall der Anfangszustand ebenfalls durch Volkov-Zustände beschreiben lässt. Der zudem benötigte gebundene Zustand wird in diesem Kapitel ebenfalls erläutert. Da sich die SFA als von der Eichung abhängige Methode erwiesen hat, widmen wir einen kurzen Abschnitt der Strahlungs- und Göppert-Mayer-Eichung.

Dieses Kapitel orientiert sich an verschiedenen Herleitungen aus der bestehenden Literatur und an den dort verwendeten Maßeinheiten. Die verwendeten Einheitensysteme werden daher abschnittsweise angegeben.

2.1 VOLKOV-ZUSTÄNDE

Die Lösungen der Dirac-Gleichung in einer ebenen elektromagnetischen Welle werden Volkov-Zustände genannt. In diesem Abschnitt wollen wir die Herleitung dieser Zustände kurz skizzieren. Wir beschreiben das elektromagnetische Feld durch

das Vierer-Potential $A_\mu(\varphi_k)$, wobei $\varphi_k = k \cdot x$. Für dieses gelte zudem die Lorentz-Eichbedingung $\partial^\mu A_\mu = 0$. Um eine Lösung der Dirac-Gleichung

$$\left(\not{p} - \frac{e}{c}\not{A}\right)\Psi = mc\Psi \quad (2.1)$$

zu finden, gibt es in der Literatur zwei gängige Herangehensweisen. Zunächst gibt es die Möglichkeit, auf die Dirac-Gleichung zweiter Ordnung überzugehen, indem wir beide Seiten mit $(\not{p} - e\mathcal{A}/c)$ multiplizieren (vgl. Ref. [21]). Dies führt uns zu

$$\left(p^2 - 2\frac{e}{c}(A \cdot p) + \frac{e^2}{c^2}A^2 - i\frac{e\hbar}{c}\not{k}\not{A}' - m^2c^2\right)\Psi = 0. \quad (2.2)$$

Die gestrichene Form von A bezeichnet hierbei die Ableitung nach φ_k . Wir nutzen als Ansatz zur Lösung

$$\Psi_{p,s}(x) = N_p \Phi(\varphi_k) u_{p,s} e^{-\frac{i}{\hbar} p x}. \quad (2.3)$$

Dabei bezeichnet N_p die Normierungskonstante, $\Phi(\varphi_k)$ die gesuchte Lösungsfunktion, $u_{p,s}$ einen Spinor und p^μ den Viererimpuls des Elektrons mit $p^2 = m^2c^2$. Für $A(\varphi_k) = 0$ soll der Ansatz in die Lösung der freien Dirac-Gleichung übergehen. Entsprechend können wir $u_{p,s}$ als freien Elektronen-Spinor identifizieren. Setzen wir den Ansatz in Glg. (2.2) ein und nutzen die Entwicklung

$$\exp\left(\frac{e}{2c(k \cdot p)}\not{k}\not{A}\right) = \mathbb{1} + \frac{e}{2c(k \cdot p)}\not{k}\not{A}, \quad (2.4)$$

erhalten wir die Lösung für den elektronischen Volkov-Zustand.

Eine weitere Möglichkeit die Zustände zu ermitteln, liegt darin, das System in Lichtkegelkoordinaten zu betrachten. Diese Herleitung wollen wir an dieser Stelle näher erörtern. Wir orientieren uns dabei an Kapitel 3.20 aus Ref. [63], welches für die Herleitung das relativistische Einheitensystem mit $\hbar = c = 1$ verwendet.

Lichtkegelkoordinaten sind eine gängige Wahl das Bezugssystem zu beschreiben, wenn es um Problemstellungen geht, die eine Bewegung nahe der Lichtgeschwindigkeit beinhalten. Für einen allgemeinen Vierervektor $v^\mu = (v^0, \mathbf{v})$ lässt sich in Lichtkegelkoordinaten schreiben:

$$v^\mu = v_+ \mathbf{n}^\mu + v_- \tilde{\mathbf{n}}^\mu + v_1 a_1^\mu + v_2 a_2^\mu, \quad (2.5)$$

mit einem beliebigen Einheitsvektor \mathbf{n} , $\mathbf{n}^\mu = (1, \mathbf{n})$, $\tilde{\mathbf{n}}^\mu = 1/2(1, -\mathbf{n})$ und $a_j^\mu = (0, \mathbf{a}_j)$, wobei $j = 1, 2$. Die Vektoren \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 sind Einheitsvektoren, welche senkrecht zueinander und senkrecht zu \mathbf{n} orientiert sind. Die Parameter der Lichtkegelkoordinaten sind durch $v_+ = (\tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}) = (v^0 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v})/2$, $v_- = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) = v^0 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$ und $v_j = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_j$ gegeben. Für die Raum-Zeit-Koordinaten definieren wir entsprechend:

$$\begin{aligned} \phi &= t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}, \\ \tau &= \frac{t + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{2}, \\ \mathbf{x}_\perp &= \mathbf{x} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})\mathbf{n}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Die Ableitungen transformieren sich demzufolge gemäß

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (2.7)$$

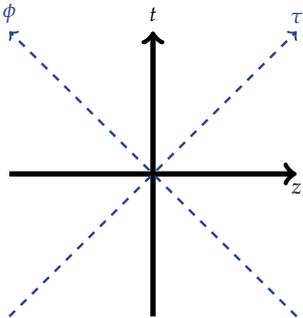


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung der Lichtkegelkoordinaten.

Skalarprodukte lassen sich wie folgt ausdrücken:

$$a \cdot b = a_+ b_- + a_- b_+ - \mathbf{a}_\perp \cdot \mathbf{b}_\perp. \quad (2.8)$$

Wir wollen uns im Folgenden auf den Fall $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ beschränken. Die Dirac-Matrizen lassen sich infolgedessen durch

$$\begin{aligned} \gamma_+ &= \frac{\gamma^0 + \gamma^3}{2}, \\ \gamma_- &= \gamma^0 - \gamma^3, \\ \boldsymbol{\gamma}_\perp &= (\gamma^1, \gamma^2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

in Lichtkegelkoordinaten ausdrücken. Mit $k^\mu = (1, 0, 0, 1)$, was zu $k_+ = \omega$, $k_- = 0$ und $\mathbf{k}_\perp = 0$ führt, sowie der Lorentz-Bedingung, die uns $A_- = 0$ liefert, lässt sich nun die Dirac-Gleichung vereinfacht darstellen:

$$(i\gamma_+ \partial_\tau + i\gamma_- \partial_\phi + i\boldsymbol{\gamma}_\perp \cdot \nabla_\perp - e\gamma_- A_+ + e\boldsymbol{\gamma}_\perp \cdot \mathbf{A}_\perp - m) \Psi(x) = 0. \quad (2.10)$$

Wir nehmen an, dass sich das Potential mit Lichtgeschwindigkeit in die z-Richtung bewegt. Entsprechend hängt es nur von ϕ ab. Somit gilt $A_+ = A_+(\phi)$ und $\mathbf{A}_\perp = \mathbf{A}_\perp(\phi)$. Demnach kann die Bewegung des Elektrons in Richtung von τ und \mathbf{x}_\perp durch eine gewöhnliche ebene Welle beschrieben werden. Für die Lösung können wir entsprechend den Ansatz

$$\Psi(x) = N_p e^{-ip \cdot x} f(\phi) \quad (2.11)$$

wählen. Diesen setzen wir in Glg. (2.10) ein. Wir splitten $f(\phi)$ in zwei Teile auf:

$$f(\phi) = f_+(\phi) + f_-(\phi), \quad (2.12)$$

mit $f_\pm(\phi) = \left(\frac{1}{2}\right)^{(1\mp 1)/2} \gamma^0 \gamma_\pm f(\phi)$. Die neue Gleichung multiplizieren wir jeweils mit γ_- und γ_+ . Die zwei Gleichungen, die wir dadurch erhalten, lauten:

$$f_+(\phi) = \frac{1}{p_-} \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma}_\perp \cdot (\mathbf{p}_\perp - e\mathbf{A}_\perp) + m) f_-(\phi) \quad (2.13)$$

und

$$(\boldsymbol{\gamma}_\perp \cdot (\mathbf{p}_\perp - e\mathbf{A}_\perp) - m) \gamma^0 f_+(\phi) + 2(i\partial_\phi + (p_+ - eA_+)) f_-(\phi) = 0. \quad (2.14)$$

Dabei haben wir die im Anhang aufgeführten Relationen für γ -Matrizen verwendet. Wir setzen Glg. (2.13) in Glg. (2.14) ein und schließen auf eine Differentialgleichung, welche keine γ -Matrizen mehr enthält:

$$\left(i\partial_\phi - \frac{1}{2p_-} (-e^2 A^2 + 2eA \cdot p)\right) f_-(\phi) = 0. \quad (2.15)$$

Diese Gleichung lässt sich direkt lösen und liefert uns $f_-(\phi) = f_0 e^{-ig(\phi)}$ mit $g(\phi) = \int^\phi d\tilde{\phi} \left(\frac{eA \cdot p}{p_-} - \frac{e^2 A^2}{2p_-}\right)$. Dabei bezeichnet $f_0 = \frac{1}{2} \gamma^0 \gamma_- u_{p,s}$ einen konstanten Spinor, wobei $u_{p,s}$ dem Spinor der freien Dirac-Gleichung entspricht. Setzen wir nun $f_-(\phi)$ in den Ansatz ein, ergibt sich als Lösung der elektronische Volkov-Zustand

$$\Psi_{p,s}^{(-)} = N_p \left(1 + \frac{e\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}}{2c(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})}\right) u_{p,s} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S^{(-)}\right) \quad (2.16)$$

mit der klassischen Wirkung

$$S^{(-)} = -(p \cdot x) - \frac{e}{c(k \cdot p)} \int^{\varphi_k} \left[p \cdot A(\tilde{\varphi}_k) - \frac{eA^2(\tilde{\varphi}_k)}{2c} \right] d\tilde{\varphi}_k, \quad (2.17)$$

wobei für die Lösungen die Naturkonstanten \hbar und c wieder reinstalled wurden. Die untere Grenze lassen wir dabei unbestimmt, da sie lediglich einen von x^μ unabhängigen Phasenfaktor beisteuert.

Um nun vom elektronischen Volkov-Zustand zum entsprechenden positronischen Zustand zu kommen, müssen wir $p \rightarrow -p$ substituieren sowie den elektronischen mit dem positronischen Spinor $v_{p,s}$ tauschen. Somit ergibt sich

$$\Psi_{p,s}^{(+)} = N_p \left(1 - \frac{ekA}{2c(k \cdot p)} \right) v_{p,s} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S^{(+)} \right) \quad (2.18)$$

mit

$$S^{(+)} = (p \cdot x) - \frac{e}{c(k \cdot p)} \int^{\varphi_k} \left[p \cdot A(\tilde{\varphi}_k) + \frac{eA^2(\tilde{\varphi}_k)}{2c} \right] d\tilde{\varphi}_k. \quad (2.19)$$

Nun geht es an die Bestimmung der Normierungskonstanten. Dazu wird die nullte Komponente der mittleren Stromdichte betrachtet. Für die Stromdichte lässt sich

$$j^\mu = \bar{\Psi}_{p,s} \gamma^\mu \Psi_{p,s} = N_p^2 \frac{1}{m} \left[p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu + k^\mu \left(\frac{eA \cdot p}{c(k \cdot p)} - \frac{e^2 A^2}{2c^2(k \cdot p)} \right) \right] \quad (2.20)$$

bestimmen. Der zeitliche Mittelwert ist im Falle eines periodisch oszillierenden Laserfeldes, für welches $\langle A^\mu \rangle = 0$ gilt, durch

$$\langle j^\mu \rangle = \frac{N_p^2}{m} q^\mu \quad (2.21)$$

gegeben. Hierbei bezeichnet

$$q^\mu = p^\mu - \frac{e^2 \langle A^2 \rangle}{2c^2(k \cdot p)} k^\mu \quad (2.22)$$

den effektiven Impuls. Dieser erfüllt die modifizierte Energie-Impuls-Beziehung

$$q^2 = p^2 - \frac{e^2}{c^2} \langle A^2 \rangle = m^2 c^2 \left(1 - \frac{e^2 \langle A^2 \rangle}{c^4 m^2} \right) = m_*^2 c^2. \quad (2.23)$$

Das Elektron besitzt im Feld die effektive Masse m_* , welche größer ist als die freie Masse m . Für die Normierung fordern wir, dass die mittlere Elektronendichte $\langle j^0 \rangle$ einem Teilchen pro Volumen V entspricht. Dies führt uns zu

$$N_p = \sqrt{\frac{mc}{q^0 V}}. \quad (2.24)$$

Um die Berechnungen kompakt zu halten wird häufig ein Einheitsquantisierungsvolumen verwendet.

2.2 STRAHLUNGS-EICHUNG UND GÖPPERT-MAYER-EICHUNG

Die im vorangegangenen Abschnitt hergeleiteten Ausdrücke für die Volkov-Zustände werden in der sogenannten Strahlungseichung gezeigt. Diese ist die relativistische

Verallgemeinerung der Geschwindigkeitseichung. So wie es im nicht-relativistischen Fall die Möglichkeit gibt das elektromagnetische Potential in Geschwindigkeitseichung oder Längeneichung zu beschreiben, gibt es im relativistischen die Möglichkeit zwischen Strahlungseichung und Göppert-Mayer-Eichung zu wählen. Während der S-Matrix-Formalismus eichinvariant ist, ist das Ergebnis der SFA abhängig von der Eichung. Im nicht-relativistischen hat sich die Längen-Eichung in dem Sinne als vorteilhaft erwiesen, als dass sie für die Ionisation eine bessere Übereinstimmung mit experimentellen Daten liefert [64]. Entsprechend verwenden wir für die SFA-Berechnungen in Kapitel 3 und 4 die Göppert-Mayer-Eichung.

Die Eichtransformation der Strahlungseichung in die Göppert-Mayer-Eichung wird in den Ref. [58, 65, 66] anschaulich beschrieben. Dennoch wird an dieser Stelle kurz die Transformation der Zustände hergeleitet.

Die zum Vierer-Potential A^μ gehörigen elektromagnetischen Felder sind invariant gegenüber der Transformation

$$\begin{aligned}\phi' &= \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \zeta.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Wird die Definition in die Dirac-Gleichung

$$\left(i\hbar \boldsymbol{\nabla} - \frac{e}{c} \mathbf{A} - mc \right) \Psi = 0\tag{2.26}$$

eingesetzt, dann ergibt sich

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{e}{c} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \Psi = c\alpha \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}' + \frac{e}{c} \nabla \zeta \right) \Psi + e\phi' \Psi + \beta mc^2 \Psi.\tag{2.27}$$

Hierbei entsprechen $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ und β den bekannten Dirac-Matrizen

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix},$$

wobei diese aus den Pauli-Matrizen σ^i und der zweidimensionalen Einheitsmatrix aufgebaut sind.

Damit die Dirac-Gleichung invariant gegenüber der Transformation bleibt, führen wir die Phasentransformation bezüglich des Zustands $\Psi = \Psi' e^{iv}$ ein. Dabei bringt uns dieser transformierte Zustand genau dann zu einer invarianten Form der Dirac-Gleichung, wenn

$$v = -\frac{e}{\hbar c} \zeta.\tag{2.28}$$

Für die Göppert-Mayer-Eichung ist das Vierer-Potential durch

$$\begin{aligned}\phi' &= -\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}, \\ \mathbf{A}' &= -(\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}) \mathbf{e}_k\end{aligned}\tag{2.29}$$

gegeben. Hier beschreibt \mathbf{e}_k den Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Welle und \mathbf{F} das entsprechende elektrische Feld. Damit sich Glg. (2.29) aus Glg. (2.25) ergibt, muss

$$\zeta = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}\tag{2.30}$$

gelten. Somit ist der transformierte Zustand durch

$$\Psi' = \Psi e^{-i\frac{e}{\hbar c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.31)$$

gegeben, mit dem Vektorpotential \mathbf{A} in der Strahlungseichung.

2.3 ZUSTÄNDE IN FOKUSSierten LASERFELDERN

In vielen analytischen Rechnungen werden für das elektromagnetische Hintergrundfeld Näherungen in Form von ebenen Wellen verwendet. Diese Vereinfachung wird insbesondere aus dem Grund vorgenommen, dass es nur wenige Fälle gibt, in denen sich die Dirac-Gleichung für ein elektromagnetisches Hintergrundfeld analytisch lösen lässt. Um mit analytischen Rechnungen jedoch eine gute Vorhersage zu experimentellen Versuchen machen zu können, werden Zustände benötigt, welche die Fokussierung des Laserfeldes mit berücksichtigen. Beispielsweise werden viele Prozesse erst bei hohen Intensitäten umsetzbar, was eine starke Fokussierung der Laserenergie zur Voraussetzung macht.

In Ref. [60] werden im Rahmen der Wentzel-Kramers-Brillouin-Näherung (WKB-Näherung) Elektronenzustände in Gegenwart eines elektromagnetischen Hintergrundfeldes von allgemeiner Raum-Zeit-Struktur analytisch hergeleitet. Die Herleitung beruht auf der Prämisse, dass die Anfangsenergie des Elektrons die größte dynamische Energieskala im Problem ist. Um die Verwendung dieser Zustände in Kapitel 6 eingängiger zu machen, folgen wir strikt den Schritten aus Ref. [60] und skizzieren an dieser Stelle einige Teile dieser Herleitung.

Zunächst wird in Ref. [60] die Trajektorie eines Elektrons in einem allgemeinen Hintergrundfeld ermittelt, um anschließend mithilfe der WKB-Methode die Zustände zu bestimmen. Als Ausgangspunkt für die Trajektorie dient die Lorentz-Gleichung

$$\frac{d\Pi^\mu}{ds} = \frac{e}{m} F^{\mu\nu} \Pi_\nu. \quad (2.32)$$

Dabei bezeichnet $\Pi^\mu = (\epsilon, \mathbf{\Pi})$ den Vierer-Impuls, s die Eigenzeit und $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = (\mathbf{E}(x), \mathbf{B}(x))$ den Feldstärketensor, welcher die Amplitude F_0 besitzt. Feldstärke und Winkelfrequenz sollen dabei so groß sein, dass für den entsprechenden Intensitätsparameter $\xi = |e|F_0/m\omega_0$ die Ungleichung $m \ll m\xi \ll \epsilon_0$ gelte, wobei ϵ_0 die anfängliche Elektronenenergie und $p_0^\mu = (\epsilon_0, \mathbf{p}_0)$ den anfänglichen Viererimpuls beschreibt. Durch diese Bedingung wird sichergestellt, dass sich die Bewegung des Elektrons nur leicht im Vergleich zu seiner Ausgangsrichtung verändern wird. Es bietet sich daher an, für die analytische Beschreibung Lichtkegelkoordinaten zu verwenden. Wir nutzen dazu die in Abschnitt 2.1 definierten Glg. (2.5), (2.6), (2.7) und (2.8). Die Bedingung $\Pi^2 = m^2$ impliziert $\Pi_- = (m^2 + \mathbf{\Pi}_\perp^2)/2\Pi_+$. Zudem wird in der betrachteten Situation $|\mathbf{\Pi}_\perp| \propto m\xi \ll \Pi_+$ sowie $\Pi_+ \approx \epsilon$ vorausgesetzt.

Die Elektronen-Trajektorie wird entlang τ parametrisiert. Es ist dabei hilfreich sich die Relation

$$\Pi^\mu = \Pi_+ dx^\mu / d\tau \quad (2.33)$$

vor Augen zu führen. Diese folgt aus der direkten Definition von $\Pi^\mu = m \frac{dx^\mu}{dt}$. Entsprechend lassen sich die Komponenten der Lorentz-Gleichung über $\frac{dt}{d\tau} = \frac{\Pi_0}{\Pi_+}$ in

Lichtkegelkoordinaten ausdrücken. Diese sind somit durch

$$\frac{d\Pi_+}{d\tau} = eE_n + \frac{e}{2} \frac{\mathbf{F}_m \cdot \boldsymbol{\Pi}_\perp}{\Pi_+} \quad (2.34)$$

und

$$\frac{d\Pi_\perp}{d\tau} = e\mathbf{F}_p - eB_n \frac{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Pi}_\perp}{\Pi_+} + \frac{e}{4} \frac{m^2 + \Pi_\perp^2}{\Pi_+^2} \mathbf{F}_m \quad (2.35)$$

gegeben. Dabei bezeichnen $B_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}$, $E_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$ und $\mathbf{F}_{p/m} = \mathbf{E}_\perp \pm \mathbf{n} \times \mathbf{B}_\perp$. Diese Gleichungen werden nun dadurch gelöst, dass $|\boldsymbol{\Pi}_\perp|/\Pi_+$ eine sehr kleine Größe ist, die in unterschiedlichen Potenzen auftritt. Die Größe jedes einzelnen Terms wird durch die Potenz von $1/\Pi_+$ bestimmt. Zudem nehmen wir an, dass die Komponenten von $F^{\mu\nu}$ alle dieselbe Größenordnung haben.

Im nächsten Schritt werden die Feldkomponenten entlang der Trajektorie bestimmt. Über den Zusammenhang aus Glg. (2.33) können die folgenden Gleichungen für die räumliche Komponente $\mathbf{r}(\tau) = (\phi(\tau), \mathbf{x}_\perp(\tau))$ des Elektrons ermittelt werden:

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{d(x^0 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})}{d\tau} = \frac{\Pi^0}{\Pi_+} - \frac{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Pi}}{\Pi_+} = \frac{\Pi_-}{\Pi_+} = \frac{m^2 + \Pi_\perp^2}{2\Pi_+^2}, \quad (2.36)$$

und auf demselben Weg

$$\frac{d^2\mathbf{x}_\perp}{d\tau^2} = e \frac{\mathbf{F}_p}{\Pi_+} - eE_n \frac{\boldsymbol{\Pi}_\perp}{\Pi_+^2} - eB_n \frac{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Pi}_\perp}{\Pi_+^2} + \frac{e}{4} \frac{m^2 + \Pi_\perp^2}{\Pi_+^3} \mathbf{F}_m - \frac{e}{2} (\mathbf{F}_m \cdot \boldsymbol{\Pi}_\perp) \frac{\boldsymbol{\Pi}_\perp}{\Pi_+^3}. \quad (2.37)$$

Die Anfangsbedingungen zur Zeit $\tau_0 = (t_0 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0)/2$ werden durch $\mathbf{r}(\tau_0) = \mathbf{r}_0 = (\phi_0, \mathbf{x}_{0,\perp})$, mit $\phi_0 = t_0 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0$ und durch $\Pi_+(\tau_0) = p_{0,+} = p_+$ gegeben. Per Definition sind $\boldsymbol{\Pi}_\perp(\tau_0) = 0$ und $\Pi_-(\tau_0) = p_{0,-} = p_- = m^2/2p_+$.

Durch eine einfache Integration der Glg. (2.36) und (2.37) sowie der Beschränkung auf Terme der Ordnung p_+^{-1} oder höher ergibt sich für den Ortsvektor

$$\mathbf{r}^{(1)}(\tau) = \left(\phi_0, \mathbf{x}_{0,\perp} + \frac{e}{p_+} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \mathbf{G}(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0) \right) \quad (2.38)$$

mit $\mathbf{G}(\tau, \mathbf{r}_0) = \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \mathbf{F}_p(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0)$. Dabei haben wir verwendet, dass sich die Felder nur wenig in \mathbf{x}_\perp ändern und sich $\Pi_+ \approx p_+$ in führender Ordnung ermitteln lässt. Wir setzen diese Relation in die Glg. (2.34) ein und entwickeln E_n um \mathbf{r}_0 :

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_+}{d\tau} &= eE_n + \frac{e}{2} \mathbf{F}_m \cdot \frac{d\mathbf{x}_\perp}{d\tau} \\ &= eE_n(\tau, \mathbf{r}_0) + \frac{e^2}{p_+} \left(\int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \mathbf{G}_p(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0) \right) \cdot \nabla_\perp E_n(\tau, \mathbf{r}_0) + \frac{e^2}{2p_+} \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{G}_p(\tau, \mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Durch beidseitige Integration über τ lässt sich eine Gleichung für Π_+ finden:

$$\begin{aligned} \Pi_+ &= p_+ + \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \left(eE_n(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0) + \frac{e^2}{2p_+} \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{G}_p(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0) \right) \\ &\quad + \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \left(\int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}} d\tilde{\tau} \mathbf{G}_p(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0) \right) \nabla_\perp E_n(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Der letzte Summand vereinfacht sich mit Hilfe der partiellen Integration. Dadurch lässt sich die gesamte Gleichung auf eine kompaktere Form bringen:

$$\begin{aligned}
 \Pi_+ &= p_+ + \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \left(eE_n(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0) + \frac{e^2}{2p_+} \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{G}_p(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0) \right) \\
 &\quad + \frac{e^2}{p_+} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \mathbf{G}_p(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0) \left(\int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \nabla_{\perp} E_n(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0) - \int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}} d\tilde{\tau} \nabla_{\perp} E_n(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0) \right) \\
 &= p_+ + \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \left(eE_n(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0) + \frac{e^2}{2p_+} \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{G}_p(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^2}{p_+} \mathbf{G}_p(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0) \nabla_{\perp} \int_{\tilde{\tau}}^{\tau} d\tilde{\tau} E_n(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0) \right) \tag{2.41}
 \end{aligned}$$

Für Π_{\perp} lässt sich auf dieselbe Weise eine Gleichung finden. Wir setzen ebenfalls Glg. (2.38) in Glg. (2.35) ein und integrieren beide Seiten über τ , wobei sich auch hier die Terme mithilfe der partiellen Integration vereinfachen lassen. Dadurch gelangen wir zur Gleichung

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\perp} &= \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \left(e\mathbf{F}_p(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0) - \frac{e^2}{p_+} B_n (\mathbf{n} \times \mathbf{G}_p(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0)) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^2}{p_+} \mathbf{G}_p(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0) \int_{\tilde{\tau}}^{\tau} d\tilde{\tau} \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{F}_p(\tilde{\tau}, \mathbf{r}_0) \right). \tag{2.42}
 \end{aligned}$$

Zudem lässt sich die letzte Impulskomponente auf direktem Weg bestimmen:

$$\Pi_- = \frac{m^2 + e^2 \mathbf{G}_p^2(\tau, \mathbf{r}_0)}{2p_+}. \tag{2.43}$$

Nachdem nun die Trajektorie des Elektrons bestimmt wurde, wenden wir uns dem quantenmechanischen Fall zu und betrachten die Dirac-Gleichung

$$(\gamma^{\mu} (i\hbar \partial_{\mu} - eA_{\mu}) - m) \Psi = 0. \tag{2.44}$$

Dadurch, dass bei ultrarelativistischen Teilchen die de Broglie-Wellenlänge sehr klein ist, kann das System als quasiklassisch betrachtet werden und die Gleichung lässt sich über die WKB-Methode lösen.

Die WKB-Methode [67–69] wird in der Literatur insbesondere dann erwähnt, wenn es um die Berechnung von semiklassischen Näherungslösungen der Schrödinger-Gleichung bei nicht-konstanten Potentialen geht, wie es beispielsweise in der Ref. [70] erläutert wird. Die Methode an sich ist jedoch zur Bestimmung der Lösung von verschiedensten Differentialgleichungen anwendbar. Beispielsweise lassen sich lineare Differentialgleichungen, bei denen der Term mit der Ableitung höchster Ordnung im gewissen Sinne klein ist, lösen, indem ein Ansatz der Form $\exp(iA)$ eingesetzt wird und die Funktion A als Reihenentwicklung betrachtet wird [70–72].

Wie in Ref. [60] beschrieben, sieht die WKB-Methode für unsere Fragestellung vor, dass wir den Ansatz $\Psi(x) = \psi(x) \exp[iS(x)/\hbar]$ in die Dirac-Gleichung einsetzen und $S(x)$ in einer Potenzreihe in \hbar entwickeln. Dabei werden die verschiedenen Ordnungen in der Größe von \hbar als einzelne Gleichungen formuliert, die sich nach der Funktion $S(x)$ auflösen lassen. Der gewählte Ansatz spiegelt den Grenzfall zur

klassischen Mechanik wieder, wenn wir $S(x)$ als Wirkung identifizieren. Setzen wir diesen Ansatz in die Dirac-Gleichung ein, führt dies zum Ausdruck:

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu S(x) + eA_\mu) + m] \psi(x) = i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x). \quad (2.45)$$

Werden, wie zuvor beschrieben, die Terme proportional zu \hbar vernachlässigt und die nullte Ordnung in \hbar betrachtet, lässt sich die folgende Gleichung gewinnen:

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu S(x) + eA_\mu) + m] \psi(x) = 0. \quad (2.46)$$

Diese besitzt genau dann eine von Null verschiedene Lösung für den Bispinor $\psi(x)$, wenn die Determinante $\det[\gamma^\mu(\partial_\mu S(x) + eA_\mu) + m] = 0$ verschwindet. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass diese Determinanten-Gleichung die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$(\partial_\mu S(x) + eA_\mu)(\partial^\mu S(x) + eA^\mu) - m^2 = 0 \quad (2.47)$$

impliziert. Ausgehend von dieser wird in Ref. [60] nun die Methode der Charakteristiken angewendet. Eine alternative Vorgehensweise wird in Ref. [61] präsentiert. Beide Möglichkeiten werden an dieser Stelle kurz skizziert. Die Methode der Charakteristiken erlaubt es ein System partieller Differentialgleichungen in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu überführen, indem die unabhängigen Variablen und die gesuchte Funktion entlang von sogenannten Charakteristiken parametrisiert werden. Wir folgen der Vorgehensweise aus Ref. [73], in der die partielle Differentialgleichung $F(x^\mu, u, P^\mu)$, mit $P^\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, in folgendes Differentialgleichungssystem überführt wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\mu}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial P_\mu}, \\ \frac{\partial P^\mu}{\partial t} &= -\left(\frac{\partial F}{\partial x_\mu} + P^\mu \frac{\partial F}{\partial u}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= P_\mu \frac{\partial F}{\partial P_\mu}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Hierbei bezeichnet t einen noch unbestimmten Parametrisierungsparameter. Dieses hergeleitete System lässt sich nun für unsere Zwecke nutzen. Wir beginnen mit der partiellen Differentialgleichung

$$F(x^\mu, S, \partial^\mu S) = (\partial_\mu S(x) + eA_\mu)(\partial^\mu S(x) + eA^\mu) - m^2. \quad (2.49)$$

Mit $u = S$, $t = s/(-2m)$ und $\Pi^\mu = -\partial^\mu S - eA^\mu$ folgt aus den ersten beiden Zeilen der Glg. (2.48) die Lorentz-Gleichung, während sich aus der letzten Zeile die folgende Konstruktionsvorschrift für die Wirkung folgern lässt:

$$\frac{dS}{ds} = -m - \frac{e}{m}\Pi_\mu A^\mu. \quad (2.50)$$

Diese lässt sich unter Ausnutzung von Glg. (2.33) ausintegrieren. Dabei werden die bereits bestimmten Trajektorien aus Glg. (2.41) bis (2.43) verwendet. Die Anfangsbedingung der Wirkung ist durch

$$S(\tau_0) = -p_+\phi_0 - p_-\tau_0 + \mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_{0,\perp} \quad (2.51)$$

gegeben. Wir drücken das Ergebnis durch Glg. (2.38) aus und verwenden zudem nur Terme bis zur Ordnung p_+^{-1} . Somit ergibt sich die Wirkung

$$S_p^{(1)} = -p_+\phi - \frac{m^2}{2p_+}\tau - \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \left[eA_-(\tilde{\tau}, \mathbf{r}) + \frac{e^2}{2p_+}\mathbf{G}_p^2(\tilde{\tau}, \mathbf{r}) \right]. \quad (2.52)$$

Diese lässt sich über einen verallgemeinerten Weg ebenfalls direkt aus der Hamilton-Jacobi-Gleichung gewinnen. Dazu erläutern wir kurz die alternative Herleitung aus Ref. [61]. In dieser wird die Variation der Wirkung verwendet und wir setzen $S = S_p(\tau_0) = -(p_+\phi + p_-\tau - \mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp) + \delta S_p(\tau_0)$ in die Hamilton-Jacobi-Gleichung ein, woraus sich

$$\begin{aligned} & p_+ \left(\frac{\partial \delta S_p}{\partial \tau} + eA_+ \right) + \mathbf{p}_\perp \cdot (\nabla_\perp \delta S_p - e\mathbf{A}_\perp) - \frac{\partial \delta S_p}{\partial \phi} \frac{\partial \delta S_p}{\partial \tau} + \frac{1}{2} (\nabla_\perp \delta S_p)^2 \\ & - e^2 A_- A_+ + \frac{1}{2} e^2 \mathbf{A}_\perp^2 - eA_- \frac{\partial \delta S_p}{\partial \phi} - eA_+ \frac{\partial \delta S_p}{\partial \tau} - e\mathbf{A}_\perp \cdot \nabla_\perp \delta S_p \\ & + p_- \left(\frac{\partial \delta S_p}{\partial \phi} + eA_+ \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

erschließen lässt. Diese Gleichung wird im Anschluss iterativ gelöst. Dazu wird $\delta S_p(\tau_0) = \delta S_p^{(0)}(\tau_0) + \delta S_p^{(1)}(\tau_0) + \dots$ nach der Ordnung $\delta S_p^{(n)}(\tau_0) = \mathcal{O}(1/p_+^n)$ definiert. Das Einsetzen dieses Ansatzes in die obige Gleichung schafft in führender Ordnung

$$\delta S_p^{(0)}(\tau, \mathbf{r}) = -e \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} A_-(\tilde{\tau}, \mathbf{r}). \quad (2.54)$$

Erneutes Einsetzen dieser Gleichung in Glg. (2.53) und erneut für die führende Ordnung gelöst, führt dies zum Ausdruck

$$p_+ \frac{\partial \delta S_p^{(1)}}{\partial \tau} = e\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{A}_\perp - \frac{1}{2} e^2 \mathbf{A}_\perp^2, \quad (2.55)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\perp(\tau, \mathbf{r}) &= \mathbf{A}_\perp(\tau, \mathbf{r}) + \nabla_\perp \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} A_-(\tilde{\tau}, \mathbf{r}) \\ &= - \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} (\mathbf{E}_\perp(\tilde{\tau}, \mathbf{r}) + \mathbf{n} \times \mathbf{B}_\perp(\tilde{\tau}, \mathbf{r})) = -\mathbf{G}_p(\tau, \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Wird Glg. (2.55) aufintegriert und zur Lösung nullter Ordnung hinzu addiert, lässt sich für die Wirkung der verallgemeinerte Ausdruck

$$\begin{aligned} S_p &= -(p_+\phi + p_-\tau - \mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp) - e \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} A_-(\tilde{\tau}, \mathbf{r}) \\ &+ \frac{1}{p_+} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \left[e\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{A}_\perp(\tilde{\tau}, \mathbf{r}) - \frac{1}{2} e^2 \mathbf{A}_\perp^2(\tilde{\tau}, \mathbf{r}) \right] \end{aligned} \quad (2.57)$$

gewinnen. Anders als beim Ansatz aus Ref. [60] ist $\mathbf{p}_\perp = 0$ keine Randbedingung.

Um den Zustand vollständig angeben zu können, verbleibt nun die Aufgabe den Bi-Spinor $\psi(x)$ zu bestimmen. Dabei folgen wir weiter der Herleitung aus Ref. [60]. Mit dem Vierer-Impuls $\Pi^\mu(x) = -\partial^\mu S(x) - eA^\mu(x)$, welcher nun ortsabhängig betrachtet wird, lässt sich Glg. (2.46) zu

$$[\gamma^\mu \Pi_\mu(x) - m] \psi_{p,s} = 0 \quad (2.58)$$

zusammenfassen, wobei $s = \pm 1$ den Spinfreiheitsgrad des Elektrons angibt. Eine Lösung dieser Gleichung entspricht der einer freien Dirac-Gleichung. Der Ansatz für den Spinor lautet entsprechend

$$\psi_{p,s} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0 V}} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon(x) + mw_{p,s}(x)} \\ \frac{\boldsymbol{\Pi}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\varepsilon(x) + m}} w_{p,s}(x) \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Hier bezeichnen $\boldsymbol{\sigma}$ die Pauli-Matrizen, $w_{p,s}(x)$ beliebige Spinoren und der Faktor $\sqrt{2\varepsilon_0 V}$ ist für die Normierung eingeführt worden.

Bis zu diesem Punkt haben wir eine Lösung der nullten Ordnung in \hbar bestimmt. Im nächsten Schritt betrachten wir Glg. (2.45), welche proportional zu \hbar ist. Das Multiplizieren dieser Gleichung mit dem Faktor $(\mathbb{I} + m)$ führt zu der vereinfachten Form

$$[\gamma^\mu \Pi_\mu(x) + m] \gamma^\nu \partial_\nu \psi_{p,s} = 0. \quad (2.60)$$

Einsetzen des Spinors aus Glg. (2.59) in diese Gleichung führt zu dem Ausdruck

$$\Pi^\mu \partial_\mu w_{p,s} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu \Pi^\mu) w_{p,s} + \frac{ie}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{B} - \frac{\boldsymbol{\Pi} \times \mathbf{E}}{\varepsilon + m} \right) w_{p,s}. \quad (2.61)$$

Wie zuvor, können wir die Methode der Charakteristiken an dieser Stelle anwenden und den Spinor entlang τ parametrisieren. Eine geschickte Wahl der Parametrisierung ist

$$w_{p,s}(\tau) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \frac{\partial_\mu \Pi^\mu}{\Pi_+} \right] \rho_{p,s}(\tau). \quad (2.62)$$

Dieser Ausdruck wird in Glg. (2.61) eingesetzt und es wird iterativ eine Lösung für $\rho_{p,s}(\tau)$ bestimmt. Dies führt zur Gleichung

$$\frac{\partial \rho_{p,s}(\tau)}{\partial \tau} = \frac{ie}{2\Pi_+} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{B}(\tau, \mathbf{r}) - \frac{\boldsymbol{\Pi} \times \mathbf{E}(\tau, \mathbf{r})}{\varepsilon + m} \right) \rho_{p,s}(\tau), \quad (2.63)$$

welche wir auf beiden Seiten über τ integrieren. Setzen wir das Ergebnis in den Ansatz aus Glg. (2.62) ein und verwenden $\rho_{p,s}(\tau_0) = w_{p,s}(\tau_0)$ gelangen wir zum Ausdruck

$$\begin{aligned} w_{p,s}(\tau) \approx & \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \frac{\partial_\mu \Pi^\mu}{\Pi_+} \right] \\ & \times \left(w_{p,s}(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \frac{ie}{2\Pi_+} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{B}(\tilde{\tau}, \mathbf{r}) - \frac{\boldsymbol{\Pi} \times \mathbf{E}(\tilde{\tau}, \mathbf{r})}{\varepsilon + m} \right) w_{p,s}(\tau_0) \right). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Wir betrachten nun den Exponenten und verwenden nur die Terme bis zur Ordnung Π_+^{-1} , sodass

$$\exp \left[-\frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \frac{\partial_\mu \Pi^\mu}{\Pi_+} \right] = \exp \left[-\frac{1}{2} \ln \left[\frac{\Pi_+(\tau)}{\Pi_+(\tau_0)} \right] \right] \exp \left[-\frac{e}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \frac{\boldsymbol{\nabla}_\perp \cdot \mathbf{G}_p(\tilde{\tau}, \mathbf{r})}{\Pi_+} \right]. \quad (2.65)$$

Beide Faktoren lassen sich entsprechend entwickeln, wenn wir $\Pi_+ \approx p_+$ als größte Variable identifizieren. Über diese Entwicklung lässt sich für den Spinor die Gleichung

$$\begin{aligned} w_{p,s}(\tau) \approx & w_{p,s}(\tau_0) - \frac{e}{2p_+} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \left[\boldsymbol{\nabla}_\perp \cdot \mathbf{G}_p(\tilde{\tau}, \mathbf{r}) \right. \\ & \left. - i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{B}(\tilde{\tau}, \mathbf{r}) - \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\tilde{\tau}, \mathbf{r})) \right] w_{p,s}(\tau_0) \end{aligned} \quad (2.66)$$

finden. Setzen wir Spinor und Wirkung in unseren Ansatz $\Psi(x) = \psi(x) \exp[iS(x)/\hbar]$ ein und behalten die Terme bis zur Ordnung p_+^{-1} , finden wir den elektronischen

Zustand

$$\Psi_{p,s}^{(1)}(\tau, \mathbf{r}) = \exp \left[iS_p^{(1)}(\tau, \mathbf{r})/\hbar \right] \left[1 - \frac{e}{2p_+} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \left[\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{G}_p(\tilde{\tau}, \mathbf{r}) - i\boldsymbol{\Sigma} \cdot (\mathbf{B}(\tilde{\tau}, \mathbf{r}) - \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\tilde{\tau}, \mathbf{r})) \right] \frac{u_{p,s}}{\sqrt{2\varepsilon_0 V}} \right] \quad (2.67)$$

für eine allgemeine Feldkonfiguration. Hier bezeichnen $\boldsymbol{\Sigma} = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\boldsymbol{\gamma}$ und $u_{p,s}$ den freien Bi-Spinor eines Elektrons. Für eine aus- bzw. einlaufende Welle wird in dieser Gleichung formal der Limes $\tau_0 \rightarrow \pm\infty$ gebildet. Den positronischen Zustand erhalten wir wie zuvor durch die Ersetzung von p^μ durch $-p^\mu$ und den entsprechenden elektronischen durch den positronischen Bi-Spinor $v_{p,s}$.

2.4 1s-ZUSTÄNDE

Neben den Kontinuums-Zuständen werden in dieser Arbeit ebenfalls gebundene Zustände verwendet. Entsprechend wollen wir die Dirac-Gleichung für ein Elektron im Coulomb-Potential lösen. Die stationäre Dirac-Gleichung ist dabei gegeben durch

$$\left(\not{p} - \frac{Ze^2}{r} - mc \right) \varphi(\mathbf{r}) = E\varphi(\mathbf{r}), \quad (2.68)$$

wobei $\varphi(\mathbf{r})$ der ortsabhängige Spinor der zeitabhängigen Wellenfunktion ist:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}) \exp(-iEt/\hbar). \quad (2.69)$$

Bei der Lösung dieses Problems folgen wir der Herleitung aus Ref. [74].

Betrachten wir das nicht-relativistische Problem eines Elektrons in einem sphärischen Potential, so ist bekannt, dass die Operatoren $\hat{\mathbf{L}}^2$, $\hat{\mathbf{j}}^2$ und \hat{j}_z mit dem Hamilton-Operator kommutieren. Dabei bezeichnet $\hat{\mathbf{L}}$ den Bahndrehimpulsoperator und $\hat{\mathbf{j}}$ den totalen Drehimpulsoperator. So lässt sich das dortige Quantensystem mit den dazugehörigen Quantenzahlen $l, j = l \pm \frac{1}{2}$ und m_j beschreiben.

Schauen wir uns nun den relativistischen Hamiltonian an. Dieser kommutiert im Gegensatz zum nicht-relativistischen Fall nicht mit dem Operator $\hat{\mathbf{L}}^2$. Um die fehlende Quantenzahl zu ersetzen führen wir den Spin-Bahn-Kopplungs-Operator

$$\hat{K} = \gamma^0(\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{L} + \hbar) \quad (2.70)$$

ein, mit der Quantenzahl $-\hbar\kappa$. Somit haben wir ein System gemeinsamer Eigenfunktionen für \hat{H} , \hat{K} , $\hat{\mathbf{j}}^2$ und \hat{j}_z mit den Eigenwerten E , $-\hbar\kappa$, $j(j+1)\hbar^2$ und $m_j\hbar$. Wir stellen eine Verbindung zwischen den einzelnen Quantenzahlen her, indem wir

$$\hat{K}^2 = \hat{\mathbf{L}}^2 + \hbar\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{L} + \hbar^2 \quad (2.71)$$

mit

$$\hat{\mathbf{j}}^2 = \hat{\mathbf{L}}^2 + \hbar\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{L} + \frac{3}{4}\hbar^2 \quad (2.72)$$

vergleichen. Hieraus können wir die Relationen

$$\hat{K}^2 = \hat{\mathbf{j}}^2 + \frac{1}{4}\hbar^2 \quad (2.73)$$

und

$$\kappa = \pm \left(j + \frac{1}{2} \right) \quad (2.74)$$

ableiten. Die Quantenzahl κ ist eine ganzzahlige positive oder negative Zahl.

Wir spalten den Vier-komponentigen Spinor $\varphi(\mathbf{r})$ in einen oberen Teil φ_A und einen unteren Teil φ_B auf. Wenden wir hierauf die Operatoren \hat{K} , $\hat{\mathbf{J}}^2$ und \hat{J}_z an, ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \hbar) \varphi_A &= -\kappa \hbar \varphi_A, \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \hbar) \varphi_B &= \kappa \hbar \varphi_B, \end{aligned} \quad (2.75)$$

sowie

$$\hat{\mathbf{J}}^2 \varphi_{A,B} = j(j+1) \hbar^2 \varphi_{A,B} \quad (2.76)$$

und

$$\hat{J}_z \varphi_{A,B} = m_j \hbar \varphi_{A,B}. \quad (2.77)$$

Dadurch, dass φ_A und φ_B jeweils Eigenfunktion von $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \hbar)$ und $\hat{\mathbf{J}}^2$ sind, sind sie ebenfalls Eigenfunktionen von $\hat{\mathbf{L}}^2$, ganz im Gegenteil zum Vierer-Spinor. Die Eigenwerte zu $\hat{\mathbf{L}}^2$ sind durch $l_A(l_A+1)\hbar^2$ bzw. durch $l_B(l_B+1)\hbar^2$ gegeben. Durch den Vergleich der obigen Gleichungen mit den Eigenwerten von $\hat{\mathbf{L}}^2$ lassen sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} -\kappa &= j(j+1) - l_A(l_A+1) + \frac{1}{4}, \\ \kappa &= j(j+1) - l_B(l_B+1) + \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (2.78)$$

und somit die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} j &= |\kappa| - \frac{1}{2}, \\ l_A &= \begin{cases} \kappa & \text{für } \kappa > 0 \\ |\kappa| - 1 & \text{für } \kappa < 0 \end{cases}, \\ l_B &= \begin{cases} \kappa - 1 & \text{für } \kappa > 0 \\ |\kappa| & \text{für } \kappa < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.79)$$

ermitteln. Dadurch, dass die obere und untere Komponente nun doch jeweils durch ihre Bahndrehimpulsquantenzahl beschrieben werden können, liegt es nahe φ_A und φ_B ähnlich wie die nicht-relativistischen Pauli-Spinoren zu konstruieren. Entsprechend wird der Ansatz

$$\varphi_{\kappa m_j}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} g_\kappa(r) \chi_\kappa^{m_j} \\ i f_\kappa(r) \chi_{-\kappa}^{m_j} \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

gewählt. Für $j = l + \frac{1}{2}$ gilt

$$\chi_\kappa^{m_j} = \sqrt{\frac{l+m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}} Y_{l,m_j-1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{l-m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}} Y_{l,m_j+1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

und für $j = l - \frac{1}{2}$

$$\chi_{\kappa}^{m_j} = -\sqrt{\frac{l - m_j + \frac{1}{2}}{2l + 1}} Y_{l, m_j - 1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{l + m_j + \frac{1}{2}}{2l + 1}} Y_{l, m_j + 1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Es lässt sich erkennen, dass $\chi_{\frac{1}{2}}^{\pm \frac{1}{2}}$ den Pauli-Spinoren entspricht. Setzen wir den Ansatz aus Glg. (2.80) in die Dirac-Gleichung (2.68) ein und folgen den in Ref. [74] beschriebenen Schritten, so lässt sich der Grundzustand

$$\Phi_{1s} = g(r) \chi_s \exp(-iE_{1s}t), \quad (2.83)$$

mit der radialen Funktion $g(r) = C_{1s} (2Zr)^{\sigma-1} \exp(-Zr)$, $\sigma = [1 - (\alpha Z)^2]^{1/2}$, $C_{1s} = \left(\frac{Z^3}{\pi} \frac{1+\sigma}{\Gamma(1+2\sigma)} \right)^{\frac{1}{2}}$ und der Feinstrukturkonstante α bestimmen. Die zwei möglichen Spinoren des Elektrons sind gegeben durch

$$\chi_{+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \frac{1-\sigma}{\alpha Z} \cos \vartheta \\ i \frac{1-\sigma}{\alpha Z} \sin \vartheta e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \frac{1-\sigma}{\alpha Z} \sin \vartheta e^{-i\varphi} \\ -i \frac{1-\sigma}{\alpha Z} \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Hier bezeichnet $E_{1s} = \sigma c^2$ die Energie des gebundenen $1s$ -Zustands, sowie Z die Kernladungszahl. Die Grundzustandsenergie ist, durch die zwei möglichen Quantenzahlen $m_j = \pm \frac{1}{2}$ und den entsprechenden zwei möglichen Spinoren, zweifach entartet. Im nicht-relativistischen Limes reduziert sich Φ_{1s} auf die Lösungen der Schrödinger-Gleichung, welche mit den Pauli-Spinoren aus den oberen beiden Komponenten multipliziert werden.

3 | RELATIVISTISCHE IONISATION WASSERSTOFFÄHNLICHER ATOMSYSTEME IN KONSTANTEN GEKREUZTEN ELEKTROMAGNETISCHEN FELDERN

In diesem Kapitel beschreiben wir die relativistische Ionisation eines Atoms in einem konstanten gekreuzten elektromagnetischen Feld, welches wir angelehnt an die englische Übersetzung mit CCF abkürzen. Wie eingangs in Kapitel 1 erläutert, hat in den letzten Jahren das Interesse an der relativistischen Ionisation insbesondere dadurch zugenommen, dass in der Laserentwicklung immer größere Fortschritte gemacht wurden. Somit ist die relativistische Ionisation bereits in vielfältiger Weise ergründet worden. Beispielsweise konnte in Experimenten bei Edelgasatomen die Bildung sehr hoher Ladungszustände mit Ionisation bis hinunter zur K-Schale beobachtet werden [75–78]. Auf theoretischer Seite liegen ebenfalls zahlreiche Studien vor. Die in diesem Kapitel gezeigte neue Berechnung der Ionisationsrate bildet ein Bindeglied einzelner vorangegangener theoretischer Arbeiten. Daher ist es nützlich, sich zunächst mit der vorhandenen Literatur und Historie zu beschäftigen.

Den Anfang macht die Veröffentlichung [79] von Keldysh, in der die Starkfeldionisation von Atomen in einem sich zeitlich verändernden elektrischen Feld zum ersten Mal behandelt wurde. Keldysh führte dazu die Nutzung der *Strong Field Approximation* (SFA) in einem nicht-relativistischen Kontext ein. Die relativistische Starkfeldionisation wurde kurz darauf im Rahmen der Klein-Gordon-Theorie für gebundene spin-lose Teilchen in Gegenwart einer ebenen Welle beziehungsweise eines konstanten gekreuzten Feldes von Nikishov und Ritus beschrieben [52, 53]. Im Hinblick auf den weiteren zeitlichen Verlauf wurde kurz darauf die Keldysh-Theorie auf den relativistischen Bereich verallgemeinert. Dies gelang Reiss, indem er im Rahmen der Dirac-Theorie die Ionisationswahrscheinlichkeit eines durch Coulomb-Kräfte gebundenen $1s$ -Elektrons in einer ebenen elektromagnetischen Laserwelle berechnete, wie es in Ref. [54, 80] gezeigt wird. Ein anderer Ansatz wurde parallel von Perelomov, Popov und Terentev verfolgt. Die nach ihnen benannte Perelomov-Popov-Terentev-Theorie (PPT) stützt sich auf die Methode der imaginären Zeit [55, 57, 81, 82]. Die Methode der imaginären Zeit beschreibt den Tunnelprozess mithilfe klassischer Bewegungsgleichungen, die in Abhängigkeit von einer imaginären Tunnelzeit formuliert werden. Die Wahrscheinlichkeit des Tunnelns wird durch den imaginären Teil des Wirkungsfunktionals bestimmt, wobei dieser imaginäre Teil entlang der Trajektorie berechnet wird.

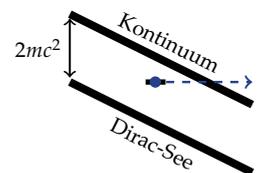


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der relativistischen Tunnelionisation eines gebundenen $1s$ -Elektrons.

Die in diesem Kapitel gezeigten Ergebnisse basieren auf der Veröffentlichung [83]. Dort haben wir eine weitere Behandlung der relativistischen Starkfeldionisation eines wasserstoffähnlichen Atomsystems vorgestellt, die so in der Literatur zuvor noch keinen Eingang gefunden hat. Dabei berechnen wir auf Basis der Dirac-Theorie und der SFA die relativistische Ionisationsrate eines $1s$ -Elektrons, welches durch ein Coulomb-Kernpotential in Gegenwart eines konstanten gekreuzten Feldes gebunden ist. Somit bildet der erste Teil der Rechnung ein Bindeglied zwischen der Arbeit von Nikishov und Ritus und der Arbeit von Reiss aus den Ref. [52–54]. Es hat sich gezeigt, dass die umfangreiche Physik der Starkfeldionisation durch die SFA qualitativ korrekt beschrieben wird. Insbesondere unterscheidet sie in Abhängigkeit vom Wert des Keldysh-Parameters (vgl. Ref. [79]) die Bereiche Mehrphotonen-, Überschwellen- und Tunnel-Ionisation korrekt. Bei kleinen Keldysh-Parametern gleicht die Ionisation einem Tunnelprozess durch die Potentialbarriere, die durch das Feld des Atomkerns und das Laserfeld gebildet wird [84]. Dieser Prozess wird in Abbildung 3.1 gezeigt. Auf der Zeitskala der Ionisationsdynamik erscheint diese Tunnelbarriere quasi-statisch. Dies legt die Wahl eines konstanten gekreuzten Feldes nahe. Um auch in quantitativer Hinsicht eine Vorhersagekraft zu erreichen, muss die SFA geeignet angepasst werden. Dazu wird in einem zweiten Schritt ein entsprechender Korrekturfaktor eingeführt. Dieser ist notwendig, da das ionisierte Elektron durch den entsprechenden Volkov-Zustand beschrieben wird, der die Wechselwirkung mit dem externen Feld vollständig berücksichtigt, aber den Einfluss des atomaren Kernpotentials auf die Elektronen-Dynamik beim Tunneln außer Acht lässt. Dementsprechend müssen die Effekte des Coulomb-Feldes unter der Barriere mit einbezogen werden. Diese Effekte wurden beispielsweise in Ref. [52] durch die dortige Verwendung der Methode der imaginären Zeit eingebunden. Für unsere Zwecke muss der dort bestimmte Korrekturfaktor jedoch umgeändert werden. Es bedarf einer Modifikation, da das langreichweitige Coulomb-Potential in unserer Rechnung bereits im anfänglichen $1s$ -Zustand des Elektrons enthalten ist, während in den früheren Studien von Mur, Karnakov und Popov aus Ref. [55, 81, 82, 85] ein kurzreichweitiges Bindungspotential angenommen wurde.

Eine kurze Überblick über die verwendeten Maßeinheiten wird im Anhang gezeigt.

In diesem Kapitel werden atomare Einheiten mit der elementaren Ladungseinheit $|e| = 1$ genutzt, um die doch recht umfangreichen Formeln möglichst kompakt darzustellen. Zudem verwenden wir die Feynman-Slash-Notation.

3.1 THEORETISCHE VORGEHENSWEISE

Dieser Abschnitt lässt sich in drei Teile gliedern. Wir erläutern zunächst die Vorgehensweise zur Bestimmung der Ionisationsrate in der Standard-SFA, um im nächsten Abschnitt auf die modifizierte Coulomb-Korrektur einzugehen. Im Anschluss präsentieren wir einige Möglichkeiten durch geeignete Approximationen das Ergebnis in kompakter Form darzustellen.

3.1.1 IONISATIONSRATE IN DER STANDARD-SFA

Wir beschreiben den relativistischen Ionisationsprozess im kombinierten Coulomb- und Laserfeld mithilfe des S -Matrix-Formalismus. Die Übergangsamplitude ist für

die Ionisation gegeben durch

$$S^{\text{SFA}} = -\frac{i}{c} \int d^4x \bar{\Psi}_{p,s}^{(-)} \mathcal{A}_G \Phi_{1s}. \quad (3.1)$$

Für die Beschreibung des Prozesses gibt es die Option zwischen der Strahlungseichung und der Göppert-Mayer-Eichung, der relativistischen Version der Längeneichung, zu wählen. Die hier gewählte Methode der SFA ist bekanntlich abhängig von der Wahl der Eichung. Aus Berechnungen im nicht-relativistischen Bereich ist bekannt, dass die Wahl der Längeneichung zu besser übereinstimmenden Ergebnissen mit dem Experiment führt, wie Ref. [64] entnommen werden kann. Aufgrund dessen fällt die Wahl für diese Rechnungen auf die Göppert-Mayer-Eichung. Die Wechselwirkung ist in dieser Eichung gegeben durch das Vierer-Potential

$$A_G^\mu = (-\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}, -\mathbf{e}_k(\mathbf{F} \cdot \mathbf{r})). \quad (3.2)$$

Hier beschreibt \mathbf{F} das elektrische Feld. Dieses zeigt in Richtung der x -Achse. Das magnetische Feld \mathbf{B} zeigt entsprechend entlang der y -Achse. Die Feldamplituden sind dabei gleich groß: $|\mathbf{F}| = |\mathbf{B}| = F$. Der Vektor \mathbf{e}_k zeigt entlang der z -Achse.

Der Anfangszustand ist durch den gebundenen $1s$ -Zustand aus Glg. (2.83) gegeben. Hier bezeichnet $E_{1s} = \sigma c^2$ die Energie des gebundenen $1s$ -Zustands, sowie Z die Kernladungszahl. Entsprechend wird das Ionisationspotential durch $I_p = c^2 - E_{1s}$ beschrieben.

Der Ausdruck aus Glg. (3.1) würde die genaue Übergangsamplitude beschreiben, wenn der Endzustand die Dirac-Gleichung mit dem vollständigen Hamiltonian, also inklusive CCF und Coulomb-Potential lösen würde. Ein solcher Zustand ist jedoch nicht in analytischer Form bekannt. Im Sinne der SFA können wir den Endzustand jedoch durch einen Volkov-Zustand nähern. Dieser vernachlässigt die Coulomb-Wechselwirkung und gibt eine Lösung der Dirac-Gleichung für eine ebene Welle. Für ein CCF wird der relativistische Volkov-Zustand eines Elektrons beschrieben durch

$$\Psi_{p,s}^{(-)} = \sqrt{\frac{c}{p_0}} \left(1 - \frac{kA}{2c(k \cdot p)} \right) u_{s-} \exp(iS^{(-)}) \exp(-i(\tilde{a} \cdot x)\varphi_k/c) \quad (3.3)$$

mit der Wirkung

$$S^{(-)} = -(p \cdot x) + \frac{1}{c(k \cdot p)} \left[\frac{(p \cdot \tilde{a})}{2} \varphi_k^2 - \frac{a^2}{6c} \varphi_k^3 \right], \quad (3.4)$$

dem freien Dirac-Spinor u_s und dem Vierer-Impuls $p^\mu = (p_0, \mathbf{p})$, wobei $p_0 = \varepsilon_p/c$. Zudem entspricht $A^\mu = \tilde{a}^\mu \varphi_k$ dem Vierer-Potential der Strahlungseichung, mit $\tilde{a}^\mu = (0, -a, 0, 0)$. Dieses ist linear in der Phase $\varphi_k = k \cdot x$. Durch die Exponentialfunktion $\exp(-i(\tilde{a} \cdot x)\varphi_k/c)$ wird der Volkov-Zustand von der Strahlungseichung in die Göppert-Mayer-Eichung umgeformt, wie es bereits in Glg. (2.31) gezeigt wurde.

Ein konstantes gekreuztes Feld kann zwar als Grenzwert für unendliche Wellenlängen einer ebenen Welle angesehen werden, dennoch erweist es sich als praktisch, im Folgenden den Wellenvektor $k^\mu = \frac{\omega}{c}(1, \mathbf{e}_z)$ mit der Frequenz ω als Hilfsgröße einzuführen. Die Ergebnisse am Ende müssen entsprechend wieder unabhängig von

In Ref. [54] wird Glg. (3.1) als sogenannte Prior-Form bezeichnet, da das Störpotential im Endzustand enthalten ist, jedoch nicht im Anfangszustand. Bei der sogenannten Post-Form wäre dieses Verhalten genau andersherum.

diesen Größen sein.

Die Rechnung lässt sich deutlich vereinfachen, wenn wir den Integranden aus Glg. (3.1) über seine Fourier-Transformierte bezüglich der Phase φ_k ausdrücken:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\mathcal{A}k}{2c(k \cdot p)}\right) \exp\left(-i \frac{(p \cdot \tilde{a})}{2c(k \cdot p)} \varphi_k^2 + i \frac{a^2}{6c^2(k \cdot p)} \varphi_k^3 + i \frac{(\tilde{a} \cdot x)}{c} \varphi_k\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-is\varphi_k} \left(\mathcal{A}(s) + i \frac{\tilde{a}k}{2c(k \cdot p)} \mathcal{A}'(s)\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit

$$\mathcal{A}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_k e^{i\varphi_k s} \exp\left(-i \frac{(p \cdot \tilde{a})}{2c(k \cdot p)} \varphi_k^2 + i \frac{a^2}{6c^2(k \cdot p)} \varphi_k^3 + i \frac{(\tilde{a} \cdot x)}{c} \varphi_k\right).$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{A}'(s)$ die nach s abgeleitete Funktion. Den gewonnenen Ausdruck setzen wir in die Wahrscheinlichkeitsamplitude ein und lösen die Integration über die Zeit t . Dies liefert uns den Faktor $2\pi\delta(\varepsilon_p - E_{1s} - s\omega)$, mit dessen Hilfe wir im Anschluss die Integration über s ausführen können. Dies liefert uns

$$\begin{aligned} S^{\text{SFA}} &= -\frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{c}{p_0}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_k \int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} e^{i\mathbf{s}k\cdot\mathbf{r}} g(r) \bar{u}_{s-} \left(1 - \frac{\tilde{a}k}{2c(k \cdot p)} \varphi_k\right) e^{i\varphi_k s} \mathcal{A}_G \chi_{s-} \\ &\quad \times \exp\left(-i \frac{(p \cdot \tilde{a})}{2c(k \cdot p)} \varphi_k^2 + i \frac{a^2}{6c^2(k \cdot p)} \varphi_k^3 + i \frac{(\tilde{a} \cdot x)}{c} \varphi_k\right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Hier entspricht $s = (\varepsilon_p - E_{1s})/\omega$. Um den Ausdruck möglichst kompakt zu halten, führen wir den Vektor $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{s}k - \frac{a}{c} \varphi_k \mathbf{e}_x$ und die Variablen $\alpha = \frac{p \cdot \tilde{a}}{c(k \cdot p)}$, $\beta = \frac{a^2}{8c^2(k \cdot p)}$ und $y = (4\beta)^{2/3} \left[\frac{s}{4\beta} - \left(\frac{\alpha}{8\beta}\right)^2\right]$ ein. Zusätzlich substituieren wir $z = (4\beta)^{1/3} (\varphi_k - \frac{\alpha}{8\beta})$. Dies führt uns zu

$$\begin{aligned} S^{\text{SFA}} &= -\frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{c}{p_0}} (4\beta)^{-1/3} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} g(r) \bar{u}_{s-} \left(1 - \frac{\tilde{a}k}{2c(k \cdot p)} \varphi_k\right) \mathcal{A}_G \chi_{s-} \\ &\quad \times \exp\left[i\left(yz + \frac{z^3}{3}\right)\right] \exp\left[-i \frac{8\beta}{3} \left(\frac{\alpha}{8\beta}\right)^3 + i \frac{\alpha s}{8\beta}\right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Um die differentielle Ionisationsrate zu erhalten, muss das Betragsquadrat der Übergangsamplitude gebildet und über die anfänglichen Spin-Polarisationen gemittelt sowie über die finalen Spin-Polarisationen summiert werden. Dieses Vorgehen ist analog zur Berechnung in Ref. [54]. Daher werden wir bis zur Spurbildung, die sich durch die Göppert-Mayer-Eichung deutlich vereinfacht, die kommenden Schritte nur kurz beschreiben.

Das Betragsquadrat der Übergangsamplitude lautet

$$\begin{aligned} |S^{\text{SFA}}|^2 &= \frac{c}{p_0 \omega^2} (4\beta)^{-2/3} \int dz \int dz' \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} e^{i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{r}'} g(r) \\ &\quad \times g(r') \exp\left[i(yz + z^3/3)\right] \exp\left[-i(yz' + z'^3/3)\right] \\ &\quad \times \bar{u}_{s-} \left(1 - \frac{\tilde{a}k}{2c(k \cdot p)} \varphi_k\right) \mathcal{A}_G \chi_{s-} \bar{\chi}'_{s-} \mathcal{A}'_G \left(1 - \frac{k\tilde{a}}{2c(k \cdot p)} \varphi'_k\right) u_{s-}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

wobei $\mathcal{A}'_G = \mathcal{A}_G(x')$ und $\mathbf{q}' = \mathbf{q}(z')$. Über die anfänglichen Elektronenspins wird summiert und gemittelt, indem die entsprechende Matrix M explizit berechnet wird. Diese lässt sich vereinfacht über verschiedene γ -Matrizen darstellen, wobei der obere

Index angibt, wie viele γ -Matrizen im Eintrag jeweils als Produkt vorkommen. Somit ergibt sich

$$M = \frac{1}{2} \sum_{s_i} \chi_{s_i} \bar{\chi}'_{s_i} = \frac{1}{4} (M^{(0)} + M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)}) \quad (3.9)$$

mit

$$\begin{aligned} M^{(0)} &= \bar{c} \mathbb{1}, \\ M^{(1)} &= c_0 \gamma^0 + c_1 \gamma^1 + c_2 \gamma^2 + c_3 \gamma^3, \\ M^{(2)} &= c_{01} \gamma^0 \gamma^1 + c_{02} \gamma^0 \gamma^2 + c_{03} \gamma^0 \gamma^3 + c_{12} \gamma^1 \gamma^2 + c_{13} \gamma^1 \gamma^3 + c_{23} \gamma^2 \gamma^3, \\ M^{(3)} &= c_{012} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 + c_{013} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 + c_{023} \gamma^0 \gamma^2 \gamma^3 + c_{123} \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \end{aligned}$$

Die jeweiligen Variablen c_{ijk} können den Ref. [21, 54] sowie Glg. (D.13) entnommen werden. Im Anschluss wird über die Spin-Endzustände summiert. Die folgende Formel erweist sich dabei als nützlich:

$$\sum_{s_f} \bar{u}_{s_f} \Gamma u_{s_f} = \frac{1}{2c} \text{Tr} (\Gamma (\not{p} + c)) = \frac{1}{8c} \mathcal{T} \quad (3.10)$$

mit

$$\Gamma = (1 - \nu \not{k} \not{\varphi}_k) A_G M A'_G (1 - \nu k \not{\varphi}'_k) \quad (3.11)$$

und

$$\nu = \frac{1}{2c(k \cdot p)}. \quad (3.12)$$

Die Größe \mathcal{T} lässt sich zudem in vier Teile aufspalten:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \text{Sp} \left((M^{(1)} + M^{(3)}) A'_G (1 - \nu k \not{\varphi}'_k) \not{p} (1 - \nu \not{k} \not{\varphi}_k) A_G \right) \\ &\quad + c \text{Sp} \left((M^{(0)} + M^{(2)}) A'_G (1 - \nu k \not{\varphi}'_k) (1 - \nu \not{k} \not{\varphi}_k) A_G \right) \\ &= \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_3 + c \mathcal{T}_0 + c \mathcal{T}_2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Für die Berechnung der Spuren ist es hilfreich sich vor Augen zu halten, dass die Vierer-Produkte $A_G^2 = A_G \cdot A = A_G \cdot k = A \cdot k = k^2 = A_G \cdot A'_G = 0$ verschwinden. Dadurch verschwinden $\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ und \mathcal{T}_4 . Entsprechend bleibt für \mathcal{T}

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \mathcal{T}_1 = \text{Sp} \left((c_0 \not{\epsilon}_0 - c_1 \not{\epsilon}_1 - c_2 \not{\epsilon}_2 - c_3 \not{\epsilon}_3) A'_G (1 - \nu k \not{A}') \not{p} (1 - \nu A k) A_G \right) \\ &= c_0 \text{Sp} \left(\not{\epsilon}_0 A'_G \not{p} A_G \right) - c_3 \text{Sp} \left(\not{\epsilon}_3 A'_G \not{p} A_G \right) \\ &= 8(c_0 + c_3) F^2 (p_0 - p_z) r' \sin \vartheta' \cos \varphi' r \sin \vartheta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Einsetzen dieses Ergebnisses in den Ausdruck für das Amplitudenquadrat führt zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |S^{\text{SFA}}|^2 &= \frac{F^2}{p_0 \omega^2} (4\beta)^{-2/3} (p_0 - p_z) \\ &\quad \int dz \int dz' \exp [i(yz + z^3/3)] \exp [-i(yz' + z'^3/3)] \\ &\quad \times \int d^3 \mathbf{r} \int d^3 \mathbf{r}' e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{q}' \cdot \mathbf{r}'} g(r) g(r') (c_0 + c_3) \\ &\quad \times r' \sin \vartheta' \cos \varphi' r \sin \vartheta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Die verbleibenden Orts-Integrationen können in die vier wiederkehrenden Strukturen $I_1(q)$ bis $I_4(q)$ unterteilt werden:

$$\frac{1}{2} \sum_{S_i, S_f} |S^{\text{SFA}}|^2 \propto I_1(q) I_1^*(q') + \tau^2 [I_2(q) I_2^*(q') + I_3(q) I_3^*(q') + I_4(q) I_4^*(q')] - i\tau I_1(q) I_2^*(q') + i\tau I_2(q) I_1^*(q'). \quad (3.16)$$

Dabei bezeichnen

$$I_1(q) = \int d^3\mathbf{r} r^\sigma e^{-Zr} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \sin\vartheta \cos\varphi, \quad (3.17)$$

$$I_2(q) = \int d^3\mathbf{r} r^\sigma e^{-Zr} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \sin\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi, \quad (3.18)$$

$$I_3(q) = \int d^3\mathbf{r} r^\sigma e^{-Zr} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \sin^2\vartheta \cos(\varphi - \phi_q) \cos\varphi \quad (3.19)$$

und

$$I_4(q) = \int d^3\mathbf{r} r^\sigma e^{-Zr} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \sin^2\vartheta \sin(\varphi - \phi_q) \cos\varphi, \quad (3.20)$$

wobei ϕ_q den azimuthalen Winkel bezüglich \mathbf{q} bezeichnet. Die Integrationen sind denen aus Ref. [21, 54] sehr ähnlich. Daher werden diese hier nicht genauer gezeigt. Eine detailliertere Beschreibung befindet sich jedoch im Anhang und die Ergebnisse der einzelnen Integrale werden in den Glg. C.2 bis C.5 gegeben. Das Amplitudenquadrat enthält entsprechend Summanden, welche alle von der Form

$$\frac{1}{(Z+iq)^\nu} \pm \frac{1}{(Z-iq)^\nu} = \frac{(Z-iq)^\nu \pm (Z+iq)^\nu}{(Z^2+q^2)^\nu} \quad (3.21)$$

sind. Der Nenner kann umgeformt werden mithilfe von

$$q^2 + Z^2 = i \frac{1}{c^2} (2c^2 F \gamma)^{2/3} f'(z) \approx i \frac{1}{c^2} (2c^2 F \gamma)^{2/3} (z - z_0) f''(z_0). \quad (3.22)$$

Dabei entsprechen $q = |\mathbf{q}| = q(z)$ sowie $f(z) = -i(yz + z^3/3)$ und z_0 bezeichnet die Nullstelle der ersten Ableitung $f'(z)$.

Bis zu diesem Punkt ist \mathbf{q} eine rein reelle Größe. Für die verbleibenden Integrationen über z und z' nutzen wir nun eine Variante der Sattelpunktmethode. Die notwendige Integrationsformel wird in Ref. [86] gegeben:

$$J_\nu = \int \frac{\exp(-\lambda f(x))}{(x-x_0)^\nu} dx \approx i^\nu \frac{\Gamma(\nu/2)}{2\Gamma(\nu)} \left(\frac{2\pi}{f''(x_0)} \right)^{\frac{1}{2}} [2\lambda f''(x_0)]^{\nu/2} \exp[-\lambda f(x_0)]. \quad (3.23)$$

Dabei bezeichnet x_0 die Sattelpunkte der allgemeinen Funktion $f(x)$. Diese befinden sich in der komplexen Ebene. Die obige Formel lässt sich direkt auf die verbliebene z -Integration übertragen. Dementsprechend sind die Komponenten von \mathbf{q} , welche vorher rein reeller Natur waren, nun ebenfalls komplex. Der physikalisch relevante Sattelpunkt ist in diesem Fall $z_0 = i\sqrt{y}$. Aus diesem folgt der erwartete exponentielle Abfall. Für die weitere Rechnung ist es nun hilfreich die Variablen

$$\begin{aligned} \gamma &= p_0 - p_z, \\ \eta &= \sqrt{c^4 - E_{1s}^2}, \\ \varepsilon &= \sqrt{\eta^2 + p_y^2 c^2 + (c\gamma - E_{1s})^2}, \\ \zeta &= \sqrt{\eta^2 + (c\gamma - E_{1s})^2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

einzuführen. Dadurch lässt sich auch y entsprechend vereinfachen:

$$y = \left(\frac{1}{2c^2 F \gamma} \right)^{\frac{2}{3}} \varepsilon^2. \quad (3.25)$$

Die einzelnen Komponenten von \mathbf{q} am Sattelpunkt sind demzufolge

$$\begin{aligned} q_x &= -\frac{az}{c(4\beta)^{1/3}} = -i\frac{\varepsilon}{c}, \\ q_{\perp} &= \sqrt{q_x^2 + q_y^2} = i\frac{\zeta}{c}, \\ q &= \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} = i\frac{\eta}{c}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Über die Sattelpunktsrelation lässt sich entsprechend das Betragsquadrat der Amplitude als

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |S^{\text{SFA}}|^2 &= \frac{2F}{p_0} \frac{\gamma^2}{\varepsilon} e^{-\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}} \pi^3 C_{1s}^2 (2Z)^{2\sigma-2} \left[|\tilde{S}_1|^2 \right. \\ &\quad \left. + \tau^2 \left(|\tilde{S}_2(p_y, \gamma)|^2 + |\tilde{S}_3(p_y, \gamma)|^2 + |\tilde{S}_4(p_y, \gamma)|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\tau \text{Re}(i\tilde{S}_1(p_y, \gamma)\tilde{S}_2(p_y, \gamma)) \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

ausdrücken. Dabei haben wir die Abkürzungen $D = Zc \left(\frac{2}{F\gamma\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}$ und

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(p_y, \gamma) &= \varepsilon \left[\frac{c^2}{\eta^3} \Gamma\left(\frac{\sigma+1}{2}\right) D^{\sigma+1} - \frac{c}{\eta^2} \Gamma\left(\frac{\sigma+2}{2}\right) D^{\sigma+2} \right], \\ \tilde{S}_2(p_y, \gamma) &= i\varepsilon q_z \left[3\frac{c^4}{\eta^5} \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) D^{\sigma} - 3\frac{c^3}{\eta^4} \Gamma\left(\frac{\sigma+1}{2}\right) D^{\sigma+1} + \frac{c^2}{\eta^3} \Gamma\left(\frac{\sigma+2}{2}\right) D^{\sigma+2} \right], \\ \tilde{S}_3(p_y, \gamma) &= -\frac{\varepsilon}{\zeta} \left[\left(3\frac{\zeta^2 c^3}{\eta^5} - \frac{c^3}{\eta^3} \right) \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) D^{\sigma} + \left(\frac{c^2}{\eta^2} - 3\frac{\zeta^2 c^2}{\eta^4} \right) \Gamma\left(\frac{\sigma+1}{2}\right) D^{\sigma+1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\zeta^2 c}{\eta^3} \Gamma\left(\frac{\sigma+2}{2}\right) D^{\sigma+2} \right], \\ \tilde{S}_4(p_y, \gamma) &= -i\frac{p_y c}{\zeta} \left[\frac{c^3}{\eta^3} \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) D^{\sigma} - \frac{c^2}{\eta^2} \Gamma\left(\frac{\sigma+1}{2}\right) D^{\sigma+1} \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

eingeführt. Um hieraus die Rate zu ermitteln, integrieren wir in üblicher Weise über den Impulsraum und teilen das Ergebnis durch die Wechselwirkungsdauer T :

$$R = \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{|S^{\text{SFA}}|^2}{T}. \quad (3.29)$$

Dabei fällt auf, dass es keine Abhängigkeit von p_x in $|S^{\text{SFA}}|^2$ gibt. Nach Ref. [52] ergibt sich somit

$$\int dp_x = FT. \quad (3.30)$$

Die verbleibenden Integrationen über p_y und p_z werden in Integrationen über p_y und γ überführt:

$$\begin{aligned} R &= \frac{F^2 C_{1s}^2}{4} (2Z)^{2\sigma-2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_0^{\infty} d\gamma \frac{\gamma}{\varepsilon} e^{-\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}} \left[|\tilde{S}_1(p_y, \gamma)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \tau^2 \left(|\tilde{S}_2(p_y, \gamma)|^2 + |\tilde{S}_3(p_y, \gamma)|^2 + |\tilde{S}_4(p_y, \gamma)|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\tau \text{Re} [\tilde{S}_1(p_y, \gamma)] \text{Im} [\tilde{S}_2(p_y, \gamma)] \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.1.2 COULOMB-KORREKTUR

Als Nächstes wird der Einfluss des Coulomb-Feldes auf den Kontinuumszustand mit berücksichtigt. Insbesondere während des Tunnelns kann der Umstand, dass das Elektron weiterhin dem Einfluss des Coulomb-Feldes ausgesetzt ist, nicht vernachlässigt werden. Daher gilt es, einen Weg zu finden, den Einfluss des Kerns auf das ionisierte Elektron mit zu berücksichtigen. Die Ref. [55, 56, 81, 82, 85, 87] stellen dabei eine Orientierungsmöglichkeit dar, da sie eine geeignete Coulomb-Korrektur für den Fall eines kurzreichweitigen Potentials zeigen. Dabei wird der Einfluss des Kerns auf das Elektron über die komplette Tunnellänge betrachtet. Hierzu wird der Tunnel in zwei Bereiche aufgeteilt, welche sich in Abhängigkeit der Variable r_b ergeben. Hierbei bezeichnet r_b den Verknüpfungspunkt beider Bereiche. Dieser liegt zwischen dem mittleren Radius des gebundenen Zustands und der Tunnellänge. Für große Abstände geht die Wirkung in die der asymptotischen Wellenfunktion eines freien Atoms über, sodass sich der Coulomb-Anteil wie folgt darstellt [55, 85]:

$$S_C = -i \frac{Z}{c} \frac{\epsilon_0}{\sqrt{1 - \epsilon_0^2}} \ln \left(c \sqrt{1 - \epsilon_0^2} r_b \right) + Z \int_{t_b}^0 \frac{1}{r(t)} dt. \quad (3.32)$$

Hier bezeichnet $\epsilon_0 = E_{1s}/c^2$. Im ersten Bereich des Tunnels wird der Coulomb-Effekt über den sogenannten Coulomb-Logarithmus, in Form des ersten Summanden der obigen Gleichung, eingebaut. Im zweiten Bereich, welcher im Verhältnis dazu relativ lang ist, wird das Coulomb-Potential als Störung aufgefasst. Beide Bereiche werden anschließend über r_b miteinander geeignet verbunden, wie es in Ref. [55, 56, 81, 82, 85, 87] beschrieben wird.

In dieser Rechnung können wir uns zwar an der oben beschriebenen Herangehensweise orientieren, jedoch müssen wir diese geeignet anpassen. In unserem Fall ist das langreichweitige Coulomb-Feld bereits im $1s$ -Grundzustand enthalten. Ein Teil der Tunnelbarriere wird entsprechend bereits jetzt in dieser Rechnung berücksichtigt. Um in Anlehnung an die Ref. [55, 56, 81, 82, 85, 87] die Coulomb-Korrektur bestimmen zu können, muss der dort für ein kurzreichweitiges Potential hergeleitete Korrektur-Faktor entsprechend angepasst und begrenzt werden. Andernfalls würde der Effekt des Coulomb-Feldes überschätzt werden. In diesem Sinne wird daher dessen Einfluss auf das ionisierende Elektron auf den Bereich, in welchem das Coulomb-Feld im Vergleich zum konstanten gekreuzten elektromagnetischen Feld lediglich als Störung betrachtet werden kann, beschränkt.

Die Coulomb-Korrektur wird hier gemeinsam mit der SFA angewendet. Bevor die Coulomb-Korrektur berechnet wird, stellt sich daher die Frage, inwieweit die Coulomb-Faktor-Näherung und SFA zusammen anwendbar sind. Diese Thematik wird unter anderem in Ref. [88] behandelt. Da die Coulomb-Korrektur über semiklassische Elektronen-Trajektorien gewonnen wird, können künstliche Singularitäten für das Coulomb-Potential auftreten, wenn das Elektron dem Kern zu nahe kommt. Im hier betrachteten Fall eines konstanten gekreuzten Feldes, bei dem der Start des Einflusses der Korrektur angepasst wird, bleibt das Elektron jedoch immer weit vom Kern entfernt und kehrt nie zurück, wie wir in den folgenden Abschnitten sehen werden. Rekollisionen werden im Allgemeinen aufgrund des magnetischen Anteils der Lorentzkraft, die eine Driftbewegung des Elektrons hervorruft (wie in Ref. [3] beschrieben), unterdrückt. Die Anwendbarkeitsbedingung

für einen Coulomb-Korrekturfaktor aus Ref. [88] ist somit erfüllt.

Wie in den Ref. [55, 56, 81, 82, 85, 87] beschrieben, lässt sich die Coulomb-Korrektur Q wie folgt bestimmen:

$$Q = \exp\left(2iZ \int_{t_1}^0 \frac{1}{r(t)} dt\right). \quad (3.33)$$

Dabei bezeichnet $t = t_1$ den Zeitpunkt, ab dem wir die Korrektur in Betracht ziehen. Der Zeitpunkt $t = 0$ bezeichnet die Zeit des Tunnelaustritts.

Die Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ wird durch die Lösung der klassischen, relativistischen Bewegungsgleichung eines Elektrons in einem konstanten gekreuzten Feld bestimmt. Wir passen die Trajektorie an die Anfangsbedingungen $\mathbf{r}(t_0) = 0, \text{Im}(\mathbf{r}(0)) = 0, \text{Im}(\dot{\mathbf{r}}(0)) = 0$ und $\frac{1}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{r}}^2(t_0)/c^2}} = \epsilon_0$ an. Der Zeitpunkt $t = t_0$ ist die Zeit des Tunnelleintritts für ein kurzreichweitiges Potential. Diese Voraussetzungen führen, wie in den Ref. [55, 56, 87] gezeigt wurde, zu den parametrisierten Koordinaten

$$\begin{aligned} x(u) &= \frac{c^2}{2F\lambda}(u^2 - u_0^2), y(u) = 0, \\ z(u) &= i\frac{c^2}{6F\lambda}(u_0^2 - u^2)u, \\ ct(u) &= i\frac{c^2}{2F\lambda}(1 + \lambda^2)u - i\frac{c^2}{6F\lambda}u^3, \end{aligned} \quad (3.34)$$

mit $u_0^2 = 3(\lambda^2 - 1)$ und $\lambda = -\frac{\epsilon_0}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\epsilon_0^2 + 8}$.

Um t_1 zu bestimmen, eröffnen sich verschiedene Ansätze. Im Folgenden werden zwei Möglichkeiten vorgestellt, eine intuitive sowie eine mathematisch begründete. Intuitiv liegt der Ansatz nahe, dass das Coulomb-Potential genau dann perturbativ wird, sobald die Coulomb-Feldstärke kleiner ist als die Amplitude des konstanten gekreuzten Feldes. Wir bestimmen t_1 entsprechend als Zeitpunkt, ab dem diese beiden Größen gleich sind. Im zeitlichen Anschluss ist die Coulomb-Feldstärke kleiner als die Amplitude des konstanten gekreuzten Feldes. Daraus lässt sich $r_1 = r(t_1)$ folgern. Dies führt uns zu der Gleichung

$$r_1 = \sqrt{\frac{Z}{F}}. \quad (3.35)$$

Während r_1 viel größer ist als die Ausdehnung des gebundenen Zustands $\sim 1/Z$, so ist diese approximierte Größe gleichzeitig viel kleiner als die Ausdehnung der Tunnelbarriere $\sim Z^2/F$. Mit dem Wissen über r_1 lässt sich nun ebenfalls u_1 bestimmen:

$$\frac{c^2}{2F\lambda}(u_0^2 - u^2)\sqrt{1 - \frac{u^2}{9}} = r_1. \quad (3.36)$$

Nehmen wir an, dass die Tunnelbarriere komplett entlang der x -Achse orientiert ist, wo entsprechend $|x(u)| \gg |z(u)|$ gilt, kann die obige Gleichung noch vereinfacht werden:

$$u_1 = \sqrt{u_0^2 - \frac{2F^{\frac{1}{2}}Z^{\frac{1}{2}}\lambda}{c^2}}. \quad (3.37)$$

Der Wert von r_1 lässt sich noch weiter verbessern, indem wir als Ansatz den Sattelpunkt des Integranden der S -Matrix suchen. Dieses Vorgehen ist analog zur

Vorgehensweise in Ref. [55]. Dort diente der Sattelpunkt t_0 gleichzeitig als Startpunkt des Tunneleintritts für ein kurzreichweitiges Potential und als Zeitpunkt, ab dem die Coulomb-Korrektur Anwendung findet. Wir behalten die Anfangsbedingungen und die Trajektorie unterm Tunnel aus Glg. (3.34) bei und verwenden den Sattelpunkt lediglich als Zeitpunkt, ab dem die Coulomb-Korrektur hinzugezogen werden muss. Zur Bestimmung des Sattelpunktes, ähnlich zum Vorgehen aus Ref. [89], nähern wir die Raum-Zeit-Abhängigkeit des Integranden aus Glg. (3.1) in zylindrischen Koordinaten mit (ρ, ϕ, z) durch die Funktion

$$m = \rho^2 \cos(\phi) e^{-iS[\rho, \phi, z, t]} \left(2Z \sqrt{\rho^2 + z^2} \right)^{\sigma-1} e^{-Z \sqrt{\rho^2 + z^2}} e^{-i\sigma c^2 t}, \quad (3.38)$$

wobei $S[\rho, \phi, z, t]$ die klassische Wirkung bezeichnet. Dabei wird die Winkelabhängigkeit der Spinoren $\chi_{\pm 1/2}$ vernachlässigt, da diese durch den Faktor τ unterdrückt werden. Die klassische Wirkung erfüllt die Hamilton-Jacobi-Gleichung, welche neben dem Laserpotential ebenfalls das Coulomb-Potential enthält:

$$\left(\nabla S + \frac{1}{c} \mathbf{A}_G \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - A_G^0 - \frac{Z}{r} \right)^2 + c^2 = 0. \quad (3.39)$$

Wir können nun x_1 bestimmen, indem wir die Sattelpunktbedingungen in die Hamilton-Jacobi-Gleichung einsetzen. Dazu bilden wir die entsprechenden Ableitungen von $\ln(m)$ in Zylinder-Koordinaten, setzen diese mit Null gleich und lösen die Gleichungen nach den Ableitungen von $S[\rho, \phi, z, t]$ auf, um anschließend diese in die Hamilton-Jacobi-Gleichung einzusetzen. Das weitere Verfahren erfolgt rein numerisch. Dazu ist es hilfreich die dimensionslosen Variablen P und \mathcal{Z} einzuführen, mit $\rho = P/(fZ)$, $z = i\mathcal{Z}/(fc)$ und $f = \sqrt{F/F_a}$. Es lässt sich im Folgenden ausnutzen, dass die Größen I_p/c^2 und F/F_a klein sind, dabei bezeichnet $F_a = Z^3$ die atomare Feldstärke. Entsprechend entwickeln wir die Hamilton-Jacobi-Gleichung um diese kleinen Parameter bis in die jeweils zweite Ordnung und können anschließend eine Gleichung für x_1 bestimmen. Hierfür betrachten wir zunächst den Fall $\mathcal{Z} = 0$, was zu einem vorläufigen x_1 führt. Über die Bewegungsgleichungen (3.34) lässt sich zu diesem x_1 ein entsprechendes z_1 bzw. \mathcal{Z}_1 bestimmen, welches wir in die Hamilton-Jacobi-Gleichung einsetzen und erneut nach x_1 auflösen. In führender Ordnung lässt sich der folgende Ausdruck bestimmen:

$$\tilde{x}_1 = -\sqrt{\frac{Z}{F}} \left(1 + \frac{Z^2}{9c^2} \right) + \frac{1}{Z} \quad (3.40)$$

und

$$\tilde{u}_1 = \sqrt{u_0^2 + \frac{2F\lambda}{c^2} \tilde{x}_1}. \quad (3.41)$$

Der zweite Term in Klammern stammt daher, dass der Einfluss der z -Komponente bei der Rechnung mit berücksichtigt wird. Wir sehen, dass bereits am Sattelpunkt, von dem aus wir die Coulomb-Korrektur berücksichtigen, das Größenverhältnis $r_1/r_a \approx \sqrt{F_a/F} \gg 1$ vorliegt. Dabei bezeichnet $r_a \approx 1/Z$ den atomaren Bohrradius. Von diesem Punkt an wächst der Elektron-Kern-Abstand für spätere Zeiten weiter an. Die Anwendbarkeitsbedingung für einen Coulomb-Korrekturfaktor aus Ref. [88] ist somit auch noch einmal rechnerisch gezeigt worden. Interessanterweise stimmt der intuitive Wert von r_1 (und somit die damit verbundene Koordinate x_1) mit dem berechneten Sattelpunkt in etwa überein.

Für die Coulomb-Korrektur ergibt sich nun entsprechend

$$Q = \left(\frac{\sin(\varphi_0 + \varphi_1)}{\sin(\varphi_0 - \varphi_1)} \right)^{2\delta} \exp \left[\frac{6Z\varphi_1}{c} \right] \quad (3.42)$$

mit $\delta = Ze_0(1 - \epsilon_0^2)^{-1/2}/c$, $\varphi_0 = \arcsin(u_0/3)$ und $\varphi_1 = \arcsin(\tilde{u}_1/3)$. Dabei haben wir die Integrationsformel

$$\int_0^\phi \frac{d\phi}{a^2 - \sin^2(\phi)} = \frac{1}{\sin(2\varphi_0)} \frac{\sin(\varphi_0 + \phi)}{\sin(\varphi_0 - \phi)} \quad (3.43)$$

aus Ref. [55] verwendet, wobei $u = 3 \sin \phi$, $a = u_0/3$ und $\varphi_0 = \arcsin a$.

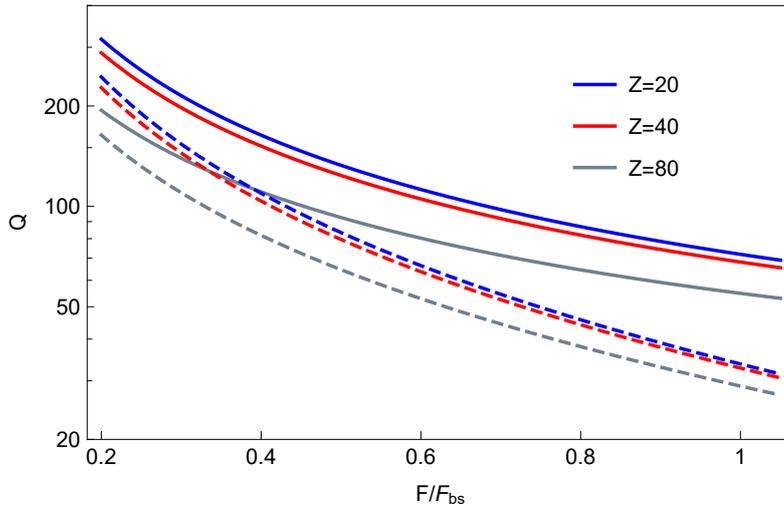


Abbildung 3.2: Coulomb-Korrekturfaktor aus Glg. (3.42) als Funktion der normierten Feldstärke F/F_{bs} , wobei $F_{bs} = c^4(1 - \sigma)^2/(4Z)$ die Feldstärke der Barrierenunterdrückung ("barrier suppression field strength") bezeichnet, also die Feldstärke, ab der die Überschwellenionisation einsetzt. Als Vergleich wird der Korrekturfaktor mit dem intuitiven Ansatz für $x_1(u_1)$ aus Glg. (3.37) als gestrichelte Kurven gezeigt, mit $\varphi_1 = \arcsin(u_1/3)$. Diese Abbildung stammt aus der Publikation [83].

Abbildung 3.2 zeigt den Coulomb-Korrekturfaktor Q in Abhängigkeit von der normierten Feldstärke F/F_{bs} für den mathematischen Ansatz aus Glg. (3.42) als durchgezogene Kurven und für den intuitiven Ansatz aus Glg. (3.37) als gestrichelte Kurven. Die mathematische Beschreibung führt im Vergleich zu den intuitiven Werten zu größeren Korrekturwerten. Dieses Verhalten wird für große Feldstärken noch verstärkt. Vergleicht man diese Korrekturwerte jedoch mit den bereits bekannten Werten aus Ref. [55], so sind die hier gezeigten Q -Faktoren um etwa zwei Größenordnungen kleiner. Dies liegt daran, dass die Korrektur aus Ref. [55] für die gesamte Tunnellänge berechnet wird, während diese in dieser Rechnung beschränkt wird.

3.1.3 ANALYTISCHE VEREINFACHUNGEN

Der bisherige Ausdruck der Ionisationsrate in Glg. (3.31) enthält noch die zwei Integrationen nach γ und p_y , weshalb er sich an dieser Stelle nicht ohne Weiteres lösen lässt. Um die Ionisationsrate dennoch kompakter angeben zu können, werden wir geeignete analytische Vereinfachungen vornehmen.

Es lässt sich im Folgenden ausnutzen, dass sich der Vorfaktor der exponentiellen Funktion $\exp\left(-\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)$ nur langsam in Abhängigkeit von γ und p_y ändert. Die p_y -Abhängigkeit steckt in den Variablen ϵ und ζ sowie im Exponenten durch die Variable y . Um die Integration über p_y ausführen zu können, werten wir den exponentiellen Vorfaktor an der Stelle $p_y = 0$ aus. Die Funktion im Exponenten wird um $p_y = 0$ bis zur zweiten Ordnung in eine Taylor-Reihe entwickelt. Die verbleibende

Funktion kann anschließend in guter Näherung als Gauß'sches Integral ausgewertet werden.

Die Abhängigkeit von γ ist komplexer. Dennoch erweist es sich als sinnvoller Ansatz, auch hier lediglich die exponentielle Abhängigkeit für die Integration zu betrachten. Um diese geeignet umschreiben zu können, bestimmen wir zunächst den Wert von γ_0 , an welchem die Exponentialfunktion ihr Maximum erreicht:

$$\gamma_0 = \frac{E_{1s}}{4c} + \frac{1}{4c} \sqrt{E_{1s}^2 + 8c^4}. \quad (3.44)$$

Der Exponent wird entsprechend um $\gamma = \gamma_0$ bis zur zweiten Ordnung entwickelt und der Vorfaktor wird an dieser Stelle ausgewertet. Dies liefert:

$$\begin{aligned} R = & \frac{1}{4} F^2 C_{1s}^2 (2Z)^{2\sigma-2} \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{\pi F \gamma_0}{\varepsilon_0}} e^{-h(\gamma_0)} \left[|\tilde{S}_1(p_y = 0, \gamma = \gamma_0)|^2 \right. \\ & + \tau^2 \left(|\tilde{S}_2(p_y = 0, \gamma = \gamma_0)|^2 + |\tilde{S}_3(p_y = 0, \gamma = \gamma_0)|^2 + |\tilde{S}_3(p_y = 0, \gamma = \gamma_0)|^2 \right) \\ & \left. + 2\tau \operatorname{Re} \left(i \tilde{S}_1(p_y = 0, \gamma = \gamma_0) \tilde{S}_2(p_y = 0, \gamma = \gamma_0) \right) \right] \times \int_0^\infty d\gamma e^{-h''(\gamma_0)(\gamma-\gamma_0)^2} \end{aligned} \quad (3.45)$$

mit $\varepsilon_0 = \sqrt{\eta^2 + (c\gamma_0 - E_{1s})^2}$ und $h(\gamma) = \frac{2\varepsilon^3}{3c^2 F \gamma}$.

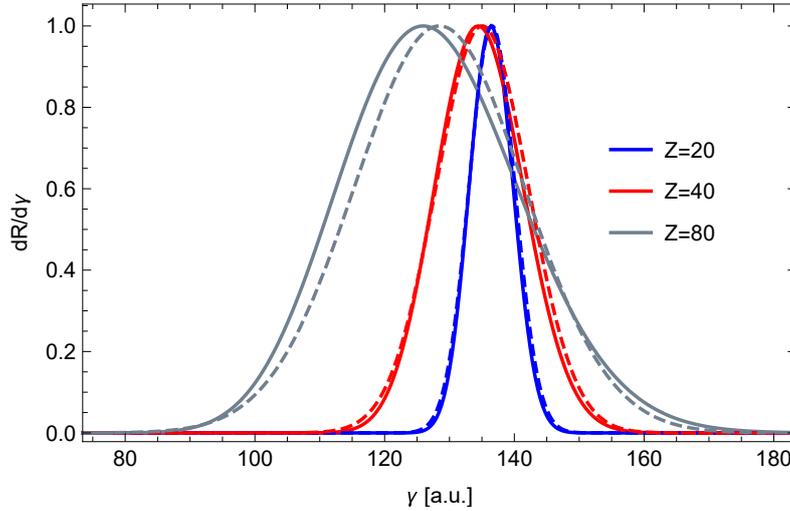


Abbildung 3.3: Differentielle Rate $\frac{dR}{d\gamma}$ als Funktion von γ für unterschiedliche Kernladungszahlen Z mit einer Feldstärke von $F = F_{ls}$. Die durchgezogenen Kurven zeigen die differentielle Rate für die exakte Berechnung aus Glg. (3.31), bei numerisch ausintegrierter p_y -Abhängigkeit. Die gestrichelten Kurven zeigen die Approximation, bei der der exponentielle Vorfaktor an den Stellen $p_y = 0$ und $\gamma = \gamma_0$ ausgewertet wird sowie die p_y -Abhängigkeit ausintegriert und der verbleibende Exponent bis zur zweiten Ordnung um $\gamma = \gamma_0$ entwickelt wird. Die Höhe der Kurven ist auf 1 normiert, um einen Vergleich zu vereinfachen. Die Originalabbildung wird in Ref. [83] gezeigt.

Wir vergleichen diesen Ansatz in Abbildung 3.3 mit dem Ergebnis aus Glg. (3.31). In dieser Grafik wird die differentielle Rate $dR/d\gamma$ in Abhängigkeit von γ für verschiedene Kernladungszahlen Z dargestellt. Die durchgezogene Kurve zeigt das Ergebnis aus Glg. (3.31), welches numerisch über p_y integriert wurde. Im Vergleich dazu wird die differentielle Rate aus Glg. (3.45) als gestrichelte Kurve gezeigt. Das Maximum der exakten differentiellen Rate liegt nur leicht unter dem Wert von γ_0 und die Breite der Kurven bei gleichem Z ist in etwa dieselbe.

Indem formal die untere Integrationsgrenze auf $-\infty$ erweitert wird, da aus diesem Bereich praktisch kein zusätzlicher Beitrag zum Integral stammt, kann die verbleibende γ -Integration ebenfalls durch ein Gauß'sches Integral gelöst werden.

Die Rate lautet somit:

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{1}{4} \pi F^2 C_{1s}^2 (2Z)^{2\sigma-2} \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{2F\gamma_0}{\varepsilon_0 h''(\gamma_0)}} e^{-h(\gamma_0)} \\
 &\times \left[|\tilde{S}_1(p_y = 0, \gamma = \gamma_0)|^2 \right. \\
 &+ \tau^2 \left(|\tilde{S}_2(p_y = 0, \gamma = \gamma_0)|^2 + |\tilde{S}_3(p_y = 0, \gamma = \gamma_0)|^2 \right) \\
 &\left. + 2\tau \operatorname{Re} [\tilde{S}_1(p_y = 0, \gamma = \gamma_0)] \operatorname{Im} [\tilde{S}_2(p_y = 0, \gamma = \gamma_0)] \right]. \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wollen wir den Ausdruck für die Ionisationsrate noch weiter vereinfachen. Dazu nutzen wir aus, dass sich γ_0 für kleine Werte von $I_p/c^2 \ll 1$ entwickeln lässt, sodass

$$\gamma_0 \approx c - \frac{I_p}{3c}. \quad (3.47)$$

Bevor wir alle Größen für kleine I_p/c^2 untersuchen, werfen wir einen Blick auf die Bedeutung von γ_0 . Wir können anhand der obigen Darstellung ablesen, dass der Hauptbeitrag der p_z -Komponente von den Werten um $\frac{I_p}{3c}$ stammt. Dieses Verhalten wurde ebenfalls in Ref. [58] beobachtet, wo dieselbe Verschiebung des zu k parallelen Impulses gefunden wurde. Diese Verschiebung stammt von der magnetischen Feldkomponente, die im klassischen Bereich eine Kraft in Richtung von $-\frac{1}{c} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ ausübt. So lange die Geschwindigkeit des Elektrons viel kleiner ist als c , ist die Kraft des elektrischen Feldes dominant. Entsprechend ist \boldsymbol{v} hauptsächlich in die negative x -Richtung orientiert. Das Magnetfeld entlang der y -Achse erzeugt eine Lorentzkraft in z -Richtung, die wiederum die charakteristische Verschiebung in der p_z -Verteilung bewirkt. In einem rein elektrischen Feld, ohne magnetische Feldkomponente, wäre diese Verschiebung nicht vorhanden [58, 84, 87].

Wir gehen noch einen Schritt weiter und zeigen, dass sich die Größe der Verschiebung begründen lässt. Die durch das magnetische Feld hervorgerufene Verschiebung findet während der Bewegung im Tunnel statt [58, 84, 89]. Die Tunnel-Zeit kann durch $\tau_t \sim Z/F$ abgeschätzt werden [79, 87]. Die Größenordnung der Verschiebung lässt sich daher durch $\Delta p_z \sim \frac{v}{c} F \tau_t \sim I_p/c$ angeben, wobei $v \sim Z$ die atomare Geschwindigkeit des Elektrons angibt. Dies zeigt insbesondere, warum die durch das Magnetfeld resultierende Verschiebung unabhängig von der Feldamplitude ist.

Für stark geladene Ionen, bei denen das Ionisationspotential I_p besonders groß ist, ist diese Verschiebung dementsprechend ebenfalls besonders groß. Genauer gesagt wird die Verschiebung deutlich, wenn sie vergleichbar oder sogar größer als die Breite $\sim \sqrt{F/Z}$ der p_z -Impulsverteilung ist, also wenn $Z/c \gtrsim \sqrt{F/F_a}$ gilt.

Zur weiteren Vereinfachung von Glg. (3.46) werden nun die einzelnen Beiträge der $|\tilde{S}_i|$ miteinander verglichen. Dabei fällt auf, dass in dem relevanten Parameterbereich $|\tilde{S}_1| \gg \tau |\tilde{S}_i|$ mit $i \in \{2, 3, 4\}$ gilt. Entsprechend verwenden wir für die folgende Darstellung nur den Beitrag von \tilde{S}_1 . Zudem können in einzelnen Teilen der Rechnung die vorkommenden Funktionen um $I_p/c^2 = 0$ entwickelt werden. Demnach ist die

Das Verhältnis von $|\tilde{S}_1|^2$ zu $(\tau^2 (|\tilde{S}_2|^2 + |\tilde{S}_3|^2) + 2\tau |\tilde{S}_1 \tilde{S}_2|)$ ist stark abhängig von der Kernladung. Es beträgt $\approx 5 \times 10^4$ bei $F/F_{bs} = 1$ und $Z = 1$ und lediglich ≈ 5 bei $F/F_{bs} = 1$ und $Z = 80$.

Approximation insbesondere dann gut, wenn Z klein ist. Dies führt uns zu der Rate

$$\begin{aligned}
 R \approx & \frac{F^{2-\sigma} F_a^{1+\frac{4\sigma}{3}}}{(2I_p)^{\frac{7}{2}+\frac{\sigma}{2}}} \frac{1+\sigma}{\Gamma(1+2\sigma)} 2^{3\sigma-3} \frac{1-\frac{7}{72}\frac{I_p}{c^2}}{\sqrt{1+\frac{5}{12}\frac{I_p}{c^2}}} \frac{1}{(1-\frac{1}{2}\frac{I_p}{c^2})^3} \Gamma\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)^2 \left[1+\frac{17}{36}\frac{I_p}{c^2}\right]^\sigma \\
 & \times \left[1-\frac{\Gamma\left(\frac{\sigma+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)} Z \left(2\frac{\sqrt{2I_p}}{F} \left(1-\frac{1}{36}\frac{I_p}{c^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \exp\left[-\frac{2}{3}\frac{(2I_p)^{\frac{3}{2}}}{F} \left(1-\frac{1}{12}\frac{I_p}{c^2}\right)\right].
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Während die exponentielle Abhängigkeit von $\exp\left[-\frac{2}{3}\frac{(2I_p)^{\frac{3}{2}}}{F}\right]$ sehr charakteristisch für Ionisationsprozesse ist und generell in Tunnelprozessen gefunden wird, wie der Vergleich mit den Ref. [52, 53, 55, 56, 79, 81, 82, 85, 87] zeigt, fällt bei unserem Ausdruck insbesondere ins Auge, dass der zusätzliche Term von $I_p/12c^2$ in der letzten Zeile von Glg. (3.48) mit dem Ergebnis aus Ref. [58] übereinstimmt.

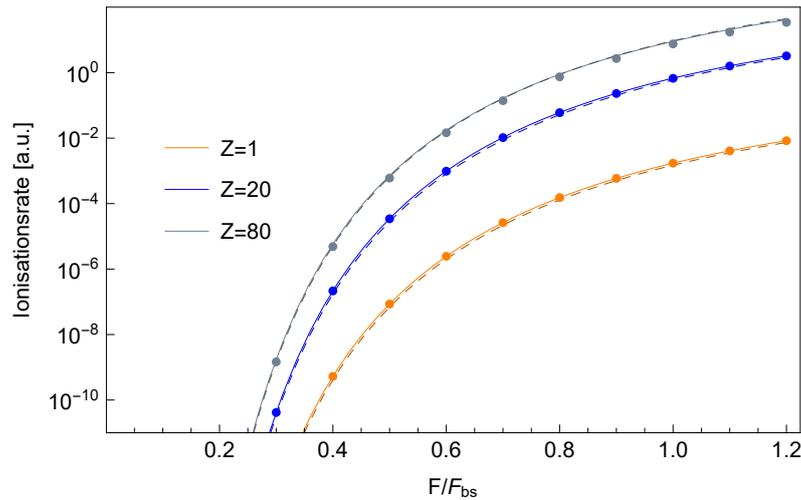
Um abschließend auch die Coulomb-Korrektur mit ins Ergebnis einzubringen, wird die exakte SFA-Rate aus Glg. (3.46), beziehungsweise die approximierte Rate aus Glg. (3.48), mit dem Faktor Q multipliziert:

$$R_Q = R \cdot Q. \tag{3.49}$$

3.2 DISKUSSION DER RESULTATE

In diesem Abschnitt zeigen wir für verschiedenste Feldstärken und Kernladungszahlen das Ergebnis unserer Ionisationsrate. Zum Vergleich stellen wir unser Ergebnis bereits existierenden Berechnungen der relativistischen Starkfeldionisation gegenüber. Die Abhängigkeit der Ionisationsrate von der Feldstärke wird hauptsächlich durch die exponentielle Abhängigkeit bestimmt. Jedoch können unterschiedliche Ionisationstheorien verschiedene Vorfaktoren vorhersagen.

Abbildung 3.4: Die totale Ionisationsrate wird als Funktion der normierten Feldstärke F/F_{bs} dargestellt. Die durchgezogenen Kurven zeigen die mit Glg. (3.49) Coulomb-korrigierte Glg. (3.31). Die gestrichelten Kurven zeigen das Ergebnis aus Ref. [56, 87]. Die Coulomb-korrigierte approximierte Rate aus Glg. (3.48) wird durch Punkte verdeutlicht. Die Abbildung stammt aus Ref. [83]



In Abbildung 3.4 wird die totale Ionisationsrate aus Glg. (3.31) mit dem Korrekturfaktor aus Glg. (3.49) in Abhängigkeit von der normierten Feldstärke als durchgezogene Linie gezeigt. Im Vergleich dazu sehen wir die Ionisationsraten aus den Ref. [56, 87] als gestrichelte Linien. Bei beiden ist die starke exponentielle

Abhängigkeit deutlich zu sehen. Die unterschiedlichen Ergebnisse stimmen auf dieser logarithmischen Skala beinahe komplett überein. Als gepunktete Linien wird die Coulomb-korrigierte Glg. (3.48) gezeigt. Wie sich gut erkennen lässt, stimmt die Approximation sehr gut mit dem Ergebnis aus Glg. (3.31) überein. Lediglich für sehr große Kernladungszahlen Z und große Feldstärken unterscheiden sich die Ergebnisse.

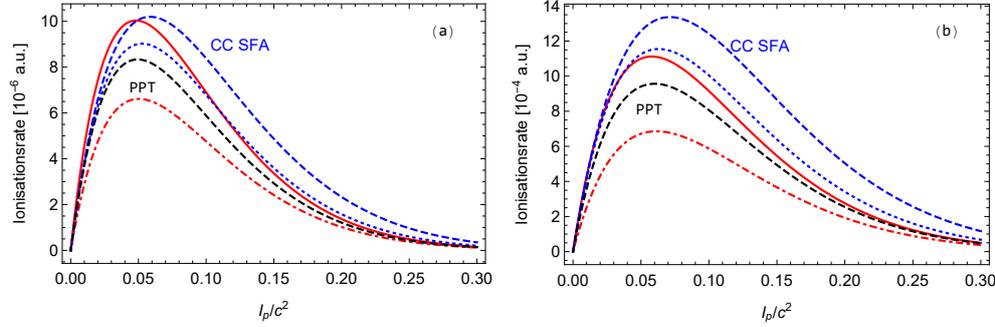


Abbildung 3.5: Die totale Ionisationsrate wird in Abhängigkeit von dem normierten Ionisationspotential I_p/c^2 für die Werte (a) $F/F_a = 1/32$ und (b) $F/F_a = 1/25$ gezeigt. Die rote durchgezogene Kurve zeigt die über eine halbe Periode eines oszillierenden Laserfeldes gemittelte Rate aus Glg. (3.46), welche mit dem Coulomb-Faktor aus Glg. (3.42) multipliziert wurde. Die rote gepunktgestrichelte Kurve zeigt das Ergebnis mit dem intuitiven Korrekturfaktor mit $\varphi_1 = \arcsin(u_1/3)$ und Glg. (3.37). Die blau gestrichelte (gepunktete) Kurve zeigt das Ergebnis aus Glg. (3.50) (Glg. (3.51)) aus Ref. [58] und die schwarze Kurve das Laser-gemittelte Ergebnis aus Ref. [56, 87]. Beide Abbildungen werden ebenfalls in Ref. [83] gezeigt.

Die Abhängigkeit der Ionisationsrate von der Kernladungszahl Z wird in Abbildung 3.5 gezeigt. Dazu wird die Rate in Abhängigkeit vom normierten Ionisationspotential I_p/c^2 präsentiert. Um unser Ergebnis mit dem SFA-Resultat aus Ref. [58], welches das Vektorpotential als linear polarisiert annimmt, vergleichen zu können, mitteln wir unser Ergebnis über einen halben Zyklus einer oszillierenden Laserwelle mit dem elektrischem Feld $F \sin(\varphi_k)$. Wir vergleichen unser Ergebnis zudem mit dem Resultat aus den Ref. [56, 87], welches wir ebenfalls über eine halbe Laserperiode gemittelt haben. In Ref. [58] werden zwei mögliche Varianten der Ionisationsrate gezeigt, welche auf unterschiedlichen Zerlegungen des Hamiltonians beruhen. Während die dortige Gleichung

$$R_{\text{SFA},1} = \frac{2^{3-\frac{4I_p}{c^2}}}{\Gamma\left(3-\frac{2I_p}{c^2}\right)} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \left(1 + \frac{161I_p}{72c^2}\right) \exp\left(\frac{4I_p}{c^2}\right) \frac{(2I_p)^{\frac{7}{4}-\frac{3I_p}{c^2}}}{F^{\frac{1}{2}-\frac{2I_p}{c^2}}} \times \exp\left[-\frac{2}{3} \frac{F_a}{F} \left(1 - \frac{I_p}{12c^2}\right)\right] \quad (3.50)$$

auf der Standardaufteilung basiert, wirkt in der gedressten Coulomb-korrigierten SFA in Gleichung

$$R_{\text{SFA},2} = \frac{2^{3-\frac{4I_p}{c^2}}}{\Gamma\left(3-\frac{2I_p}{c^2}\right)} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \left(1 - \frac{7I_p}{72c^2}\right) \exp\left(\frac{4I_p}{c^2}\right) \frac{(2I_p)^{\frac{7}{4}-\frac{3I_p}{c^2}}}{F^{\frac{1}{2}-\frac{2I_p}{c^2}}} \times \exp\left[-\frac{2}{3} \frac{F_a}{F} \left(1 - \frac{I_p}{12c^2}\right)\right] \quad (3.51)$$

ein Teil des Laserfeldes auf die Entwicklung des gebundenen Zustands. Letztere bringt die Rate näher heran an das PPT-Ergebnis aus Ref. [56, 87].

Wir zeigen in dieser Abbildung ebenfalls zwei Varianten unserer Ionisationsrate. Dabei verwenden wir einerseits den intuitiven Coulomb-Korrekturfaktor und andererseits den Faktor aus Glg. (3.42). Bei Verwendung des intuitiven Coulomb-Faktors ist der Wert der Ionisationsrate im Vergleich zu den anderen Ergebnissen

ein wenig zu niedrig. Dieser Korrekturfaktor unterschätzt dementsprechend den Einfluss des Coulomb-Feldes leicht. Die Form der Kurve ähnelt dem Resultat aus den Ref. [56, 58, 87]. Verwenden wir den genaueren Coulomb-Korrekturfaktor, so verbessert sich die Ionisationsrate signifikant. Dies zeigt die rote durchgezogene Kurve. Das Ergebnis nähert sich den Voraussagen aus Ref. [58], in welcher der Coulomb-Effekt auf kohärente Weise durch die Verwendung von Eikonal-Volkov-Zuständen berücksichtigt wird. Der verbleibende Unterschied weist darauf hin, dass noch weitere Korrektur-Terme, insbesondere von der innersten Region des Tunnels, berücksichtigt werden müssen.

Wie eingangs erläutert, findet sich eine Eichabhängigkeit der hier verwendeten SFA. Die in Ref. [64, 90, 91] gezeigten qualitativen Unterschiede zwischen der Strahlungseichung und der Göppert-Mayer-Eichung finden sich in der hier gezeigten relativistischen Rechnung wieder. Eine Möglichkeit zum Vergleich bietet die in Ref. [54] gezeigte SFA-Rechnung, welche neben der Strahlungseichung zusätzlich ein zirkular polarisiertes Feld in Betracht zieht, welches im quasistatischen Bereich vergleichbar ist mit dem hier verwendeten konstanten gekreuzten Feld. Für die Ionisation sollte sich ein Laserfeld bereits quasistatisch verhalten, wenn der Keldysh-Parameter $\gamma_K = \sqrt{I_p/2U_p} \ll 1$. Dabei bezeichnet U_p die ponderomotive Energie, welche die zyklusgemittelte Bewegungsenergie eines freien Elektrons in einem elektromagnetischen Feld angibt. Nehmen wir beispielsweise eine Frequenz von $\omega = 0.12 \text{ eV}$, was einem CO_2 -Laser (infrarot) entspricht und eine Feldstärke von $F = F_{bs}$ an, so ergibt sich unter Verwendung der Ergebnisse aus Ref. [54] eine um etwa vier Größenordnungen kleinere Ionisationsrate als die hier bestimmte Glg. (3.46) vermuten lässt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wird das Verhältnis zwischen unseren Ergebnissen in einem konstanten gekreuzten Feld zu den Ionisationsraten in einem statischen elektrischen Feld (SEF) beleuchtet. Obwohl die magnetische Feldkomponente die Impulsverteilung der emittierten Photoelektronen stark beeinflusst, wurde in Ref. [87] gezeigt, dass die totale Ionisationsrate in einem konstanten gekreuzten Feld und einem statischen elektrischen Feld nahezu identisch ist. Insbesondere im nichtrelativistischen Regime der Laser-Atom-Wechselwirkung kann die magnetische Feldkomponente vernachlässigt werden, sodass die Dipol-Approximation Anwendung findet. Die nichtrelativistische Rate der Tunnelionisation ist durch die bekannte Formel

$$R_{\text{SEF}}^{(\text{nr})} = \frac{4Z^5}{F} \exp\left(-\frac{2Z^3}{3F}\right) \quad (3.52)$$

aus Ref. [71] gegeben. Abbildung 3.6 zeigt einen Vergleich dieser Formel mit den Vorhersagen unseres Ansatzes aus Glg. (3.46) mit der Coulomb-Korrektur aus Glg. (3.42). Beide Kurven verlaufen nahezu parallel, wobei unser Ansatz die Rate leicht überschätzt: mit 23% bei $F = 0.03 \text{ a.u.}$ bis runter zu 11% bei $F = 0.09 \text{ a.u.}$. Die Abweichungen lassen sich durch die Approximationen, welche wir im Zuge der analytischen Vereinfachungen gemacht haben, begründen. Die in Ref. [87] mittels eines quasi-klassischen Ansatzes bestimmte relativistische Ionisationsrate in einem statischen elektrischen Feld würde im betrachteten Feldstärkenbereich nahezu mit der nichtrelativistischen Rate aus Glg. (3.52) übereinstimmen. In Abbildung 3.6 werden zudem die Ergebnisse aus Ref. [92, 93] durch schwarze Punkte gezeigt. Die relativistische Ionisationsrate wurde hier numerisch nach der Methode der komplexen Skalierung

rung unter Verwendung einer endlichen Basis-Entwicklung berechnet. Für kleine Feldstärken $F \approx 0.03$ a.u. führen alle Ansätze zu sehr ähnlichen Werten. Für große Feldstärken bringt die Methode der komplexen Skalierung kleinere Raten hervor, was dafür spricht, dass die Tunneltheorie zu einer Überschätzung führen kann, wenn man die Grenze zur Überschwellen-Ionisation erreicht bzw. überschreitet. Diese Erkenntnis deckt sich mit den Ergebnissen aus vollständig numerischen Lösungen der Schrödinger-Gleichung, wie beispielsweise aus Ref. [94].

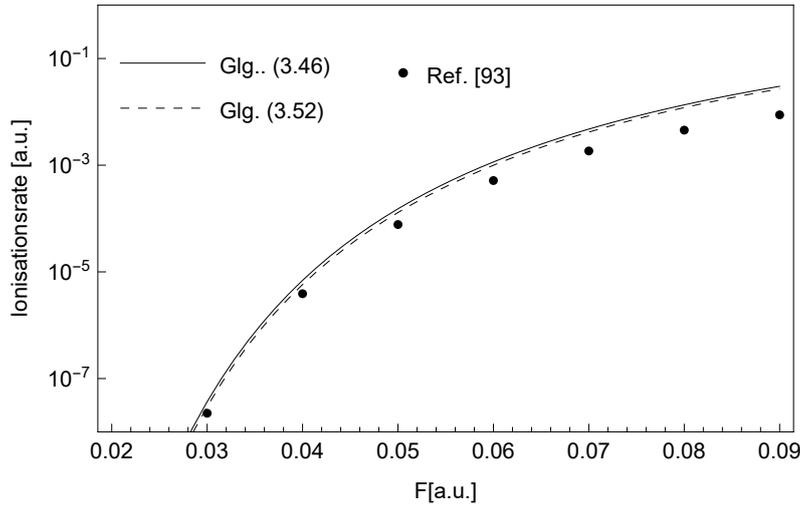


Abbildung 3.6: Die totale Ionisationsrate eines Wasserstoffatoms als Funktion der Feldstärke F wird gezeigt. Die durchgezogene Kurve zeigt die mit Glg. (3.42) Coulomb-korrigierte Glg. (3.46). Die gestrichelte Kurve zeigt die nichtrelativistische Rate in einem SEF aus Glg. (3.52). Die Kreise zeigen die relativistische Rate in einem SEF aus Ref. [93]. Die *barrier suppression* Feldstärke ist durch $F_{bs}(Z = 1) \approx 0.06$ a.u. gegeben. Die Abbildung entstammt Ref. [83].

Während Abbildung 3.6 sich auf ein nichtrelativistisches System mit $Z = 1$ bezieht, wollen wir an dieser Stelle noch einmal betonen, dass relativistische Effekte für stärker geladene Ionen signifikant werden können. Um dies zu untermauern, vergleichen wir unsere Coulomb-korrigierte Glg. (3.46) mit den Vorhersagen aus Glg. (3.52) für weitere Kernladungszahlen. Für eine Feldstärke von beispielsweise $F = 0.1F_{bs}$ ($F = 0.3F_{bs}$) beläuft sich das Verhältnis von relativistischer zu nichtrelativistischer Rate auf einen Wert von ≈ 0.6 (≈ 0.94) für $Z = 20$. Bei $Z = 40$ lautet das Verhältnis ≈ 0.048 (≈ 0.37) und bei $Z = 80$ erhalten wir $\approx 1.5 \times 10^{-6}$ ($\approx 7.4 \times 10^{-3}$). Entsprechend führt unsere Vorhersage bei großen Kernladungszahlen zu einer Reduktion der Ionisationsrate, bedingt durch relativistische Effekte. Dieses Verhalten wird ebenfalls in Ref. [87] gezeigt. Wir stellen fest, dass dieser allgemeine Trend mit dem durch relativistische Effekte hervorgerufenen Anstieg des Bindungspotenzials I_p übereinstimmt, wodurch es schwieriger wird, das gebundene Elektron zu ionisieren, als es auf der Grundlage einer nichtrelativistischen Beschreibung erwartet werden würde.

3.3 ZUSAMMENFASSUNG

Wir haben zunächst die totale Ionisationsrate eines $1s$ -Elektrons, welches durch ein Coulomb-Potential gebunden ist und sich in einem konstanten gekreuzten Feld aufhält, mit Hilfe der Dirac-Theorie und der SFA in Göppert-Mayer-Eichung berechnet. Um den Einfluss des Coulomb-Feldes auf das Elektron im Kontinuumszustand während des Tunnelns zu berücksichtigen, haben wir eine geeignete Methode, welche auf einem kurzreichweitigen Bindungspotential basiert [55], an unsere Rechnung angepasst. Dabei haben wir zwei Versionen der Coulomb-Korrektur bestimmt, eine

intuitive und eine basierend auf der Bestimmung des Sattelpunkts der beschreibenden Wirkung. Die Korrekturfaktoren wirken in dem Bereich des Tunnels, in dem das Coulomb-Feld kleiner ist als das konstante gekreuzte Feld. Beide Versionen unseres Coulomb-Korrekturfaktors stellen jedoch nur Näherungen dar, da sie den innersten Tunnelbereich außer Acht lassen. Die hier gezeigten Berechnungen kombinieren dabei die vorangegangenen Studien aus den Ref. [52–55] und basieren auf diesen.

Beim Vergleich unserer entsprechenden Ergebnisse mit Vorhersagen aus früheren Studien, die auf PPT [56, 87] oder Coulomb-korrigierten SFA Theorien [58] beruhen, fanden wir eine gute Übereinstimmung in einem weiten Bereich von Kernladungen und Ionisationspotentialen für Feldstärken unterhalb der *barrier suppression* Feldstärke, ab dem die Überschwellenionisation einsetzt. Das gezeigte Ergebnis konnte zudem gut durch eine analytische Formel in geschlossener Form angenähert werden. Diese Rechnung kann darüber hinaus dazu beitragen, weitere Verbindungen zwischen den entsprechenden PPT- und SFA-Theorien herzustellen und sie kann somit zusätzliche Einblicke in die relativistische Starkfeldionisation im Allgemeinen sowie die Rolle der Coulomb-Korrekturen im Besonderen bieten.

Ein rechnerisch sehr ähnlicher Prozess ist die gebunden-freie Paarproduktion. Viele Rechenschritte zur Bestimmung der Paarproduktionsrate laufen sehr analog zu der Berechnung der Ionisationsrate ab. Wir wollen im folgenden Kapitel die entsprechenden Ergebnisse präsentieren.

DIE GEBUNDEN-FREIE PAARPRODUKTION IN KONSTANTEN GEKREUZTEN ELEKTROMAGNETISCHEN FELDERN

Im vorangegangenen Kapitel wurde die relativistische Ionisation betrachtet, jedoch gibt es weitere Prozesse, die sich eröffnen, wenn wir ein atomares System in einem Strahlungsfeld hoher Intensität betrachten. So kann es zur Paarproduktion kommen, wenn ein Kern mit einem Laserstrahl kollidiert. Neben der freien Paarproduktion, bei der Elektron und Positron im Kontinuum entstehen, besteht auch die Möglichkeit der gebunden-freien Paarproduktion, wie in Abbildung 4.1 dargestellt. Bei dieser wird das Elektron im gebundenen Zustand erzeugt, während das Positron als freies Teilchen vorliegt. Dieser Prozess soll im Folgenden für den Fall eines konstanten gekreuzten elektromagnetischen Feldes berechnet werden (vgl. Abbildung 4.2).

Die rechnerische Herangehensweise ist hier ähnlich zu der bei der Ionisation. Wir bestimmen auf Basis der Dirac-Theorie und der *Strong Field Approximation* (SFA) die Rate der gebunden-freien Paarproduktion durch die Kollision eines sich relativistisch bewegenden Kerns konstanter Geschwindigkeit mit einem starken Laserfeld. Für ein zirkular polarisiertes Laserfeld wurde diese Rechnung bereits in der Strahlungseichung gezeigt [21]. Auch die Berechnung der gebunden-freien Paarproduktion durch ein einzelnes hochenergetisches Photon wurde schon vor langer Zeit behandelt, unter anderem in den Ref. [22, 23].

Die SFA ist bekanntlich abhängig von der Wahl der Eichung. Für die Ionisation hat sich aus Berechnungen im nicht-relativistischen Bereich ergeben, dass die Wahl der Längeneichung zu besser übereinstimmenden Ergebnissen mit dem Experiment geführt hat, wie unter anderem Ref. [64] untermauert. Auch bei der Betrachtung der relativistischen Ionisation konnten wir im vorangegangenen Kapitel Unterschiede zwischen den Eichungen feststellen. Durch diesen Umstand motiviert, wählen wir auch für diese Rechnung die Göppert-Mayer-Eichung, die relativistische Verallgemeinerung der Längeneichung. Die so berechnete Paarproduktionsrate hat bisher noch keinen Eingang in die Literatur gefunden und soll mit den Ergebnissen der Berechnung in einem zirkular polarisierten Laserfeld in Strahlungseichung und denen des Bethe-Heitler-Prozesses verglichen werden.

In diesem Kapitel werden erneut atomare Einheiten mit der elementaren Ladungseinheit $|e| = 1$ genutzt, um die Formeln möglichst kompakt darzustellen. Zudem verwenden wir die Feynman-Slash-Notation.

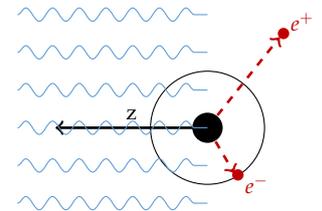


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung für die gebunden-freie Paarproduktion durch den Stoß eines Atomkerns mit einem Laserpuls.

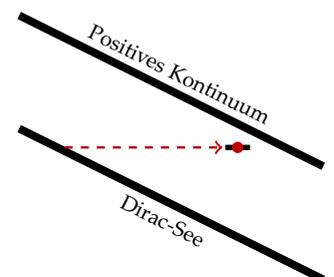


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung der gebunden-freien Paarproduktion im Tunnelregime.

4.1 THEORETISCHE BESCHREIBUNG DER GEBUNDEN-FREIEN PAARPRODUKTION

Der Paarproduktionsprozess im kombinierten Coulomb- und Laserfeld wird mithilfe des S-Matrix-Formalismus beschrieben. Die Übergangsamplitude in der sogenannten Post-Form wird durch

$$S^{\text{SFA}} = \frac{i}{c} \int d^4x \Phi_{1s} A_G \Psi_{p,s}^{(+)} \quad (4.1)$$

In Ref. [21] wird Glg. (4.1) die sogenannte Post-Form genannt, da das Störpotential im Anfangszustand enthalten ist, nicht jedoch im Endzustand. Bei der sogenannten Prior-Form ist dieses Verhalten genau andersherum, wie wir am Beispiel der Ionisation gesehen haben.

gegeben. Da für diese Rechnungen die Göppert-Mayer-Eichung zur Beschreibung des Laserfeldes gewählt wurde, ähnelt die folgende Rechnung in weiten Teilen der Berechnung der Ionisationsrate aus Kapitel 3.

Der Ausdruck in Glg. (4.1) würde die genaue Übergangsamplitude beschreiben, wenn der Anfangszustand, welcher das Elektron im negativen Dirac-Kontinuum beschreibt, die Dirac-Gleichung mit dem vollständigen Hamiltonian, also inklusive des Potentials des konstanten gekreuzten Feldes und des Coulomb-Potentials lösen würde. Da ein solcher Zustand analytisch nicht bekannt ist, wird im Sinne der SFA der Anfangszustand durch einen Volkov-Zustand genähert. Dieser vernachlässigt entsprechend die Coulomb-Wechselwirkung und gibt eine Lösung der Dirac-Gleichung für eine ebene Welle.

Anders als bei der Ionisation betrachten wir das Kern-System als mit dem Lorentzfaktor γ_z bewegtes System. Die nachfolgenden Berechnungen beziehen sich auf das Ruhesystem des Kerns, ohne dass wir zu gestrichenen Größen übergehen. Die Raten transformieren sich entsprechend der Relation [21]

$$R_{\text{lab}} = \frac{1}{\gamma_z} R. \quad (4.2)$$

4.1.1 KONSTANTES GEKREUZTES FELD IN GÖPPERT-MAYER-EICHUNG

Die Wechselwirkung in der Göppert-Mayer-Eichung, welche durch das Vierer-Potential A_G^μ gegeben ist, kann der Glg. (3.2) entnommen werden. Analog zu Kapitel 3 legen wir das elektrische Feld \mathbf{E} entlang der x -Achse und das magnetische Feld \mathbf{B} entlang der y -Achse. Der Vektor \mathbf{e}_k zeigt weiterhin entlang der z -Achse. Der gebundene Endzustand ist durch den $1s$ -Zustand Φ_{1s} aus Glg. (2.83) gegeben.

Für ein konstantes gekreuztes Feld wird der relativistische Volkov-Zustand eines Positrons beschrieben durch

$$\Psi_{p,s^+}^{(+)} = \sqrt{\frac{c}{p_0}} \left(1 + \frac{kA}{2c(k \cdot p)} \right) v_{s^+} \exp(iS^{(+)}) \exp(-i(\tilde{a} \cdot x) \varphi_k / c) \quad (4.3)$$

mit der Wirkung

$$S^{(+)} = (p \cdot x) + \frac{1}{c(k \cdot p)} \left[\frac{(p \cdot \tilde{a})}{2} \varphi_k^2 + \frac{a^2}{6c} \varphi_k^3 \right], \quad (4.4)$$

dem freien Dirac-Spinor v_{s^+} eines Positrons und dem Vierer-Positronen-Impuls $p^\mu = (p_0, \mathbf{p})$, wobei $p_0 = \varepsilon_p / c$. Weiterhin beschreibt $A^\mu = \tilde{a}^\mu \varphi_k$ das Vierer-Potential in der Strahlungs-Eichung, mit $\tilde{a}^\mu = (0, -a, 0, 0)$ und der Phase $\varphi_k = k \cdot x$, analog

zu Kapitel 3. Durch die Exponentialfunktion $\exp(-i(\vec{a} \cdot \mathbf{x})\varphi_k/c)$ wird der Volkov-Zustand von der Strahlungs-Eichung in die Göppert-Mayer-Eichung umgeformt.

Es erweist sich auch hier als praktikabel den Wellenvektor $k^\mu = \frac{\omega}{c}(1, \mathbf{e}_z)$ mit der Frequenz ω als Hilfsgröße einzuführen, wobei die Endergebnisse unabhängig von dieser Größe sein müssen.

Der Integrand wird mittels seiner Fourier-Transformierten ausgedrückt:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\mathbf{k} \cdot \vec{A}}{2c(k \cdot p)}\right) \exp\left(i \frac{(p \cdot \vec{a})}{2c(k \cdot p)} \varphi_k^2 + i \frac{a^2}{6c^2(k \cdot p)} \varphi_k^3 - i \frac{(\vec{a} \cdot \mathbf{x})}{c} \varphi_k\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-is\varphi_k} \left(\mathcal{A}(s) - i \frac{\mathbf{k} \cdot \vec{A}}{2c(k \cdot p)} \mathcal{A}'(s)\right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

mit

$$\mathcal{A}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_k e^{i\varphi_k s} \exp\left(i \frac{(p \cdot \vec{a})}{2c(k \cdot p)} \varphi_k^2 + i \frac{a^2}{6c^2(k \cdot p)} \varphi_k^3 - i \frac{(\vec{a} \cdot \mathbf{x})}{c} \varphi_k\right).$$

Durch diesen Schritt lässt sich die nachfolgende Berechnung deutlich vereinfachen. Dabei bezeichnet $\mathcal{A}'(s)$ die nach s abgeleitete Funktion. Einsetzen dieses Ausdrucks in die Wahrscheinlichkeitsamplitude und anschließendes Lösen der Integration über t , liefert den Faktor $2\pi\delta(\varepsilon_p + E_{1s} - s\omega)$. Im Anschluss wird die Integration über s ausgeführt, wodurch sich die folgende Abhängigkeit ergibt:

$$\begin{aligned} S^{\text{SFA}} &= \frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{c}{p_0}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_k \int d^3\mathbf{r} g(r) \bar{\chi}_{s-} \mathcal{A}_G \left(1 + \frac{\mathbf{k} \cdot \vec{A}}{2c(k \cdot p)} \varphi_k\right) v_{s+} e^{i\varphi_k s} e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}} \\ &\quad \times \exp\left(i \frac{(p \cdot \vec{a})}{2c(k \cdot p)} \varphi_k^2 + i \frac{a^2}{6c^2(k \cdot p)} \varphi_k^3 - i \frac{(\vec{a} \cdot \mathbf{x})}{c} \varphi_k\right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

mit $s = (\varepsilon_p + E_{1s})/\omega$. Wir führen den Vektor $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{s} \mathbf{k} + \frac{a}{c} \varphi_k \mathbf{e}_x$ sowie die aus Kapitel 3 bekannten Variablen $\alpha = \frac{p \cdot \vec{a}}{c(k \cdot p)}$, $\beta = \frac{a^2}{8c^2(k \cdot p)}$ und $y = (4\beta)^{2/3} [4\beta - (\frac{\alpha}{8\beta})^2]$ ein. Wir substituieren anschließend mit $z = (4\beta)^{1/3} (\varphi_k + \frac{\alpha}{8\beta})$. Einsetzen dieser Variablen führt zu der Gleichung:

Die Struktur bleibt derjenigen aus Kapitel 3 ähnlich. Die Variablen ändern jedoch ihre Definitionen und unterscheiden sich insbesondere durch einzelne Vorzeichen.

$$\begin{aligned} S^{\text{SFA}} &= \frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{c}{p_0}} (4\beta)^{-1/3} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int d^3\mathbf{r} g(r) \bar{\chi}_{s-} \mathcal{A}_G \left(1 + \frac{\mathbf{k} \cdot \vec{A}}{2c(k \cdot p)} \varphi_k\right) v_{s+} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \\ &\quad \times \exp\left[i\left(yz + \frac{z^3}{3}\right)\right] \exp\left[i\frac{8\beta}{3} \left(\frac{\alpha}{8\beta}\right)^3 - i\frac{\alpha s}{8\beta}\right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Das Betragsquadrat dieser Übergangsamplitude lautet

$$\begin{aligned} |S^{\text{SFA}}|^2 &= \frac{c}{p_0 \omega^2} (4\beta)^{-2/3} \int dz \int dz' \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{q}' \cdot \mathbf{r}'} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} g(r) \\ &\quad \times g(r') \exp\left[-i(yz + z^3/3)\right] \exp\left[i(yz' + z'^3/3)\right] \\ &\quad \times \bar{v}_{s+} \left(1 + \frac{\vec{A} \cdot \mathbf{k}}{2c(k \cdot p)} \varphi_k\right) \mathcal{A}_G \chi_{s-} \bar{\chi}'_{s-} \mathcal{A}'_G \left(1 + \frac{\mathbf{k} \cdot \vec{A}}{2c(k \cdot p)} \varphi'_k\right) v_{s+}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Wir summieren über die auftretenden Elektronenspins und Positronenspins. Die Summation über den Elektronenspin führt uns zu der Matrix

$$M = \sum_{s^-} \chi_{s^-} \bar{\chi}'_{s^-} = \frac{1}{2} (M^{(0)} + M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)}), \quad (4.9)$$

wobei wir die Notation aus Kapitel 3 verwendet haben. Anschließende Summation über den Positronenspin liefert uns

$$\sum_{s^+} \bar{v}_{s^+} \Gamma v_{s^+} = \frac{1}{2c} \text{Sp}(\Gamma(\not{p} - c)) = \frac{1}{4c} \mathcal{T}. \quad (4.10)$$

Dabei entspricht in diesem Fall

$$\Gamma = (1 + \nu \not{a} \not{k} \varphi_k) \not{A}_G M \not{A}'_G (1 + \nu k \not{a} \varphi'_k) \quad (4.11)$$

und ν können wir Glg. (3.12) entnehmen. Wir spalten \mathcal{T} in vier Teile auf, sodass

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & \text{Sp} \left((M^{(1)} + M^{(3)}) \not{A}'_G (1 + \nu k \not{a} \varphi'_k) \not{p} (1 + \nu \not{a} \not{k} \varphi_k) \not{A}_G \right) \\ & - c \text{Sp} \left((M^{(0)} + M^{(2)}) \not{A}'_G (1 + \nu k \not{a} \varphi'_k) (1 + \nu \not{a} \not{k} \varphi_k) \not{A}_G \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Die Berechnung der Spuren verläuft analog zu Kapitel 3 und liefert mit

$$\mathcal{T} = 8(c_0 + c_3) F^2 (p_0 - p_z) r' \sin \vartheta' \cos \varphi' r \sin \vartheta \cos \varphi \quad (4.13)$$

dasselbe Ergebnis. Dieses wird in den Ausdruck für das Amplitudenquadrat eingesetzt:

$$\begin{aligned} \sum_{s^-, s^+} |S^{\text{SFA}}|^2 = & \frac{2F^2}{p_0 \omega^2} (4\beta)^{-2/3} (p_0 - p_z) \\ & \int dz \int dz' \exp \left[-i(yz + z^3/3) \right] \exp \left[i(yz' + z'^3/3) \right] \\ & \times \int d^3 \mathbf{r} \int d^3 \mathbf{r}' e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{q}' \cdot \mathbf{r}'} g(r) g(r') (c_0 + c_3) \\ & \times r' \sin \vartheta' \cos \varphi' r \sin \vartheta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Die verbleibenden Ortsintegrationen werden mit den Glg. (C.2) bis (C.5) aus dem Anhang gelöst. Im Vergleich zum vorherigen Kapitel entsprechen diese Gleichungen in ihrer jetzigen Form den Integrationen über die gestrichenen Ortskomponenten.

Die daraus resultierenden Summanden des Amplitudenquadrats besitzen alle dieselbe Struktur $q'^2 + Z^2 \approx i \frac{1}{c^2} (2c^2 F \gamma)^{2/3} (z' - z'_0) f''(z'_0)$ im Nenner. Dabei entspricht $q' = |\mathbf{q}'| = q'(z')$, $f(z') = -i(yz' + z'^3/3)$ und z'_0 bezeichnet die Nullstelle der ersten Ableitung $f'(z')$.

Bis zu diesem Punkt sind \mathbf{q} und \mathbf{q}' reelle Größen. Für die verbleibenden Integrationen über z und z' nutzen wir die Variante der Sattelpunktmethode aus Glg. (3.23). Diese Sattelpunkte befinden sich in der komplexen Ebene, weshalb die Komponenten von \mathbf{q}' nun ebenfalls komplex sind. Der physikalisch relevante Sattelpunkt ist $z'_0 = i\sqrt{y}$. Aus diesem folgt die erwartete exponentielle Abhängigkeit. Für die weitere Rechnung ist es nun hilfreich die Variablen

$$\begin{aligned} \gamma &= p_0 - p_z, \\ \eta &= \sqrt{c^4 - E_{1s}^2}, \\ \varepsilon &= \sqrt{\eta^2 + p_y^2 c^2 + (c\gamma + E_{1s})^2}, \\ \zeta &= \sqrt{\eta^2 + (c\gamma + E_{1s})^2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

einzuführen. Es ist zu beachten, dass sich in ε und ζ im Vergleich zu Kapitel 3 die Vorzeichen im letzten Summanden unter der Wurzel ändern. Für y lässt sich demnach schreiben:

$$y = \left(\frac{1}{2c^2 F \gamma} \right)^{\frac{2}{3}} \varepsilon^2. \quad (4.16)$$

Die einzelnen Komponenten von \mathbf{q}' am Sattelpunkt sind entsprechend

$$\begin{aligned} q'_x &= \frac{az'_0}{c(4\beta)^{1/3}} = i \frac{\varepsilon}{c}, \\ q'_\perp &= \sqrt{q_x^2 + q_y^2} = i \frac{\zeta}{c}, \\ q'_z &= \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} = i \frac{\eta}{c}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Über die Sattelpunktsrelation lässt sich das Betragsquadrat der Amplitude als

$$\begin{aligned} \sum_{s^-, s^+} |S^{\text{SFA}}|^2 &= \frac{4F}{p_0} \frac{\gamma^2}{\varepsilon} e^{-\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}} \pi^3 C_{\text{is}}^2 (2Z)^{2\sigma-2} \left[|\tilde{S}_1|^2 \right. \\ &\quad \left. + \tau^2 \left(|\tilde{S}_2(p_y, \gamma)|^2 + |\tilde{S}_3(p_y, \gamma)|^2 + |\tilde{S}_3(p_y, \gamma)|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - 2\tau \text{Re}(i\tilde{S}_1(p_y, \gamma)\tilde{S}_2(p_y, \gamma)) \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

ausdrücken. Dabei haben wir die Abkürzungen $D = Zc \left(\frac{2}{F\gamma\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}$ und

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(p_y, \gamma) &= \varepsilon \left[\frac{c}{\eta^2} \Gamma\left(\frac{\sigma+2}{2}\right) D^{\sigma+2} - \frac{c^2}{\eta^3} \Gamma\left(\frac{\sigma+1}{2}\right) D^{\sigma+1} \right], \\ \tilde{S}_2(p_y, \gamma) &= i\varepsilon q_z \left[-3 \frac{c^4}{\eta^5} \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) D^\sigma + 3 \frac{c^3}{\eta^4} \Gamma\left(\frac{\sigma+1}{2}\right) D^{\sigma+1} - \frac{c^2}{\eta^3} \Gamma\left(\frac{\sigma+2}{2}\right) D^{\sigma+2} \right], \\ \tilde{S}_3(p_y, \gamma) &= \frac{\varepsilon}{\zeta} \left[\left(3 \frac{\zeta^2 c^3}{\eta^5} - \frac{c^3}{\eta^3} \right) \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) D^\sigma \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{c^2}{\eta^2} - 3 \frac{\zeta^2 c^2}{\eta^4} \right) \Gamma\left(\frac{\sigma+1}{2}\right) D^{\sigma+1} + \frac{\zeta^2 c}{\eta^3} \Gamma\left(\frac{\sigma+2}{2}\right) D^{\sigma+2} \right], \\ \tilde{S}_4(p_y, \gamma) &= -i \frac{p_y c}{\zeta} \left[\frac{c^3}{\eta^3} \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) D^\sigma - \frac{c^2}{\eta^2} \Gamma\left(\frac{\sigma+1}{2}\right) D^{\sigma+1} \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

eingeführt.

Um hieraus die Rate zu ermitteln, wird in üblicher Weise über den Impulsraum integriert und anschließend das Ergebnis durch die Wechselwirkungsdauer T dividiert:

$$R = \sum_{s^-, s^+} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{|S^{\text{SFA}}|^2}{T}. \quad (4.20)$$

Es besteht im obigen Ausdruck keine Abhängigkeit von p_x , weshalb sich diese Integration mit Glg. (3.30) lösen lässt. Abschließend wird das Integral über p_z in

eines über γ überführt, sodass

$$\begin{aligned}
 R = & \frac{F^2 C_{1s}^2}{2} (2Z)^{2\sigma-2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_0^{\infty} d\gamma \frac{\gamma}{\varepsilon} e^{-\frac{4}{3}\gamma^{\frac{3}{2}}} \left[|\tilde{S}_1(p_y, \gamma)|^2 \right. \\
 & + \tau^2 \left(|\tilde{S}_2(p_y, \gamma)|^2 + |\tilde{S}_3(p_y, \gamma)|^2 + |\tilde{S}_4(p_y, \gamma)|^2 \right) \\
 & \left. - 2\tau \operatorname{Re} [\tilde{S}_1(p_y, \gamma)] \operatorname{Im} [\tilde{S}_2(p_y, \gamma)] \right]. \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

4.1.2 COULOMB-KORREKTUR

Die Bestimmung der Coulomb-Korrektur ist für den Fall der Ionisation in der Literatur weit verbreitet und verlief im letzten Kapitel sehr stringent. Der Fall der gebunden-freien Paarproduktion wird in der Ausführlichkeit nicht von der Literatur abgedeckt und eine Bestimmung eines einzelnen Korrekturfaktors ist bislang nicht erfolgt.

Zur Bestimmung der Coulomb-Korrektur verfolgen wir zwei unterschiedliche Wege. In Ref. [55] wurde gezeigt, dass die dort verwendete Methode der imaginären Zeit zur richtigen exponentiellen Abhängigkeit bei der freien Paarproduktion führt, wenn die Randbedingungen die untere Energiegrenze $-mc^2$ berücksichtigen. Die Paarproduktion wird dort entsprechend ähnlich zum Bild des Dirac-Sees als Tunnelprozess vom negativen Kontinuum zum positiven betrachtet und kann ansonsten wie die Berechnung der Ionisation verlaufen. Im Falle der gebunden-freien Paarproduktion kann ebenfalls im Sinne des Dirac-See-Bildes ein Tunnelprozess des Elektrons vom Dirac-See hin zum gebundenen Zustand betrachtet werden. Die Bewegungsgleichung eines Elektrons im konstanten gekreuzten Feld muss entsprechend an die Randbedingungen $\mathbf{r}(t_0) = 0, \operatorname{Im}(\mathbf{r}(0)) = 0, \operatorname{Im}(\dot{\mathbf{r}}(0)) = 0$ und $-\frac{1}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{r}}^2(t_0)/c^2}} = \epsilon_0$ angepasst werden. Hierbei bezeichnet $\epsilon_0 = E_{1s}/c^2$. Alternativ kann der Prozess auch aus Sicht des Positrons beschrieben werden, was einer rückwärts ablaufenden Anihilation entspricht. Es wird also ein Positron betrachtet, welches vom gebundenen Zustand ins Kontinuum tunnelt. Dieser Ansatz ist näher an der Beschreibung der Ionisation aus einem Zustand negativer Energie, wie sie in Ref. [55] gegeben ist, wobei wir die Energie des gebundenen Zustands für das Positron entsprechend anpassen müssen. Die Lösung der Bewegungsgleichung eines Positrons im konstanten gekreuzten Feld mit den Randbedingungen $\mathbf{r}(t_0) = 0, \operatorname{Im}(\mathbf{r}(0)) = 0, \operatorname{Im}(\dot{\mathbf{r}}(0)) = 0$ und $\frac{1}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{r}}^2(t_0)/c^2}} = -\epsilon_0$ ist in dem Falle zu bestimmen. Beide Ansätze führen zum selben Ergebnis. Für den Ansatz aus Sicht des Elektrons erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 x(u) &= \frac{c^2}{2F\lambda} (u^2 - u_0^2), \quad y(u) = 0, \\
 z(u) &= i \frac{c^2}{6F\lambda} (u_0^2 - u^2) u, \\
 ct(u) &= i \frac{c^2}{2F\lambda} (1 + \lambda^2) u - i \frac{c^2}{6F\lambda} u^3, \tag{4.22}
 \end{aligned}$$

mit $u_0^2 = 3(\lambda^2 - 1)$ und $\lambda = \frac{\epsilon_0}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_0^2 + 8}$. Die Coulomb-Korrektur Q wird mit dieser Trajektorie über

$$Q = \exp \left(2iZ \int_0^{t_1} \frac{1}{r(t)} dt \right) \tag{4.23}$$

bestimmt, wobei

$$r(t) = \frac{c^2}{2F\lambda} (u_0^2 - u^2) \sqrt{1 - \frac{u^2}{9}}. \quad (4.24)$$

Für die obere Grenze verbleiben wir an dieser Stelle bei der einfachen Approximation, dass das Coulomb-Potential genau dann perturbativ wird, sobald die Coulomb-Feldstärke kleiner ist als die Amplitude des konstanten gekreuzten Feldes. Mit t_1 wird der Zeitpunkt bezeichnet, ab dem diese beiden Größen gleich sind. Im zeitlichen Anschluss ist die Coulomb-Feldstärke kleiner als die Amplitude des konstanten gekreuzten Feldes. Daraus lässt sich $r_1 = r(t_1)$ bestimmen:

$$r_1 = \sqrt{\frac{Z}{F}}. \quad (4.25)$$

Überdies lässt sich auf

$$u_1 = \sqrt{u_0^2 - \frac{2F^{\frac{1}{2}}Z^{\frac{1}{2}}\lambda}{c^2}} \quad (4.26)$$

schließen. Die Coulomb-Korrektur lässt sich ebenfalls mit Hilfe von Glg. (3.43) berechnen und ergibt in diesem Fall

$$Q = \left(\frac{\sin(\varphi_0 + \varphi_1)}{\sin(\varphi_0 - \varphi_1)} \right)^{2\delta} \exp \left[-\frac{6Z\varphi_1}{c} \right], \quad (4.27)$$

mit $\delta = Z\epsilon_0(1 - \epsilon_0^2)^{-1/2}/c$, $\varphi_0 = \arcsin(u_0/3)$ und $\varphi_1 = \arcsin(u_1/3)$.

Die für die Trajektorie des Elektrons bzw. Positrons verwendete Anschauung des Dirac-Sees erscheint für eine semiklassische Rechnung zunächst unkonventionell, da wir in der Rechnung mit negativen Energien umgehen müssen. Wie sich jedoch anhand der daraus resultierenden Tunnellänge zeigen lässt, hat diese Annahme jedoch durchaus ihre Daseinsberechtigung. Die Tunnelbreite für ein kurzreichweitiges Potential ist durch

$$d = \frac{F_{cr}\lambda_c}{F} (r(t=0) - r(t_0)) = \frac{F_{cr}\lambda_c}{F} \frac{3}{8} \left(\sqrt{\epsilon_0^2 + 8} + 3\epsilon_0 \right) \quad (4.28)$$

gegeben [55]. Dabei bezeichnet λ_c die Comptonwellenlänge. Der Unterschied zur Tunnelbreite der Ionisation liegt entsprechend im Vorzeichen des zweiten Summanden. Während bei der Ionisation die volle Tunnelbreite für $\epsilon_0 \rightarrow -1$ erreicht wird, erreichen wir hier die volle Tunnelbreite für den Limes $\epsilon_0 \rightarrow 1$, ganz wie es zu erwarten ist. Im Falle eines rein elektrischen Feldes ist die Tunnelbreite durch $\frac{F_{cr}\lambda_c}{F}(1 - \epsilon_0)$ gegeben und somit ist die volle Tunnelbreite proportional zu $2c$. Im konstanten gekreuzten Feld beläuft sich die maximale Tunnelbreite auf $\frac{9}{4} \frac{F_{cr}\lambda_c}{F}$ und ist damit etwas breiter. Diese Verbreiterung stammt von der magnetischen Feld-Komponente, die die Trajektorie des Elektrons deutlich verändert.

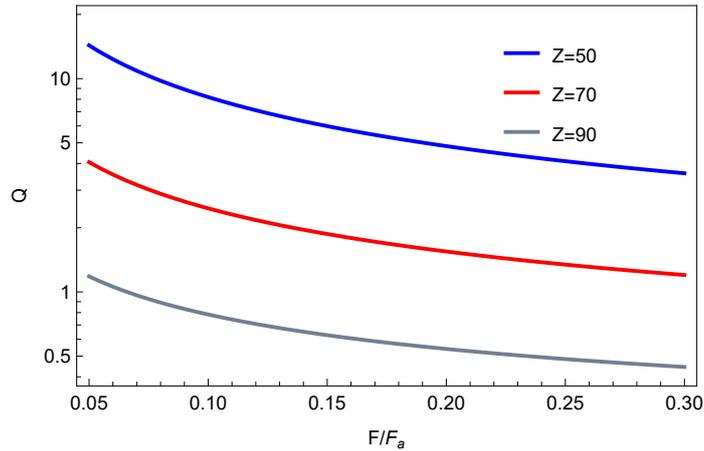
Um die Coulomb-Korrektur mit ins Ergebnis einzubringen, wird die exakte SFA-Rate aus Glg. (4.32) mit dem Faktor Q multipliziert:

$$R_Q = R \cdot Q. \quad (4.29)$$

Abbildung 4.3 zeigt den Coulomb-Korrekturfaktor Q in Abhängigkeit von der normierten Feldstärke F/F_a für den intuitiven Ansatz mit Glg. (4.26) für unterschiedliche Kernladungszahlen Z . Dabei bezeichnet $F_a = Z^3$ die atomare Feldstärke. Es

zeigt sich, dass die Coulomb-Korrektur bei unterschiedlichen Kernladungszahlen sowohl einen verstärkenden Effekt haben als auch die Rate bei sehr hohen Kernladungszahlen reduzieren kann. Dieses Verhalten lässt sich durch den negativen Exponenten in Glg. (4.27) verstehen, welcher sich dadurch insbesondere von dem Korrekturfaktor der Ionisation stark unterscheidet. Würden die Korrekturwerte für die komplette Tunnellänge bestimmt und nicht entsprechend begrenzt werden, so würde der Korrekturfaktor um etwa zwei Größenordnungen anwachsen.

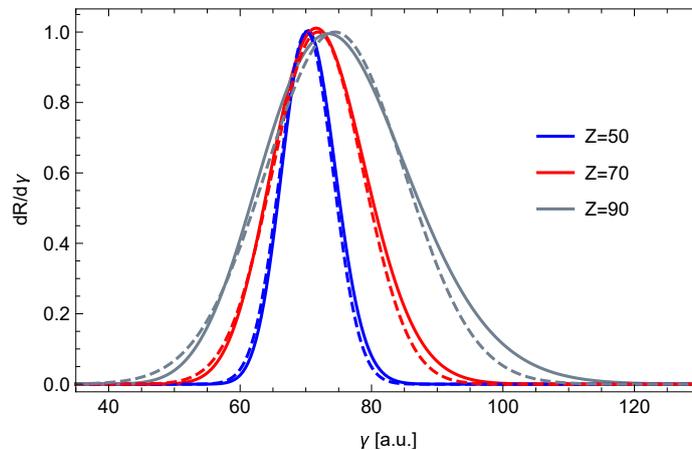
Abbildung 4.3: Coulomb-Korrekturfaktor aus Glg. (4.27) als Funktion der normierten Feldstärke F/F_a , wobei $F_a = Z^3$ die atomare Feldstärke bezeichnet.



4.1.3 ANALYTISCHE VEREINFACHUNG

Die gefundene Paarproduktionsrate lässt sich noch weiter vereinfachen, sodass sich die verbleibenden Integrationen in guter Näherung lösen lassen. Wir verwenden die Annahme, dass sich der Vorfaktor der exponentiellen Funktion $e^{-\frac{4}{3}y^3}$ nur langsam in Abhängigkeit von γ und p_y verändert. Daher werten wir diesen an der Stelle $p_y = 0$ aus und entwickeln den Exponenten um diese Stelle bis zur zweiten Ordnung. Die verbliebene p_y -Abhängigkeit im Exponenten kann als Gauß'sches Integral identifiziert werden.

Abbildung 4.4: Differentielle Rate $\frac{dR}{d\gamma}$ als Funktion von γ für unterschiedliche Kernladungszahlen Z und einer Feldstärke von $F = 0.2F_a$. Die durchgezogenen Kurven zeigen die differentielle Rate für die exakte Berechnung aus Glg. (4.21), bei numerisch ausintegrierter p_y -Abhängigkeit. Die gestrichelten Kurven zeigen die Approximation, bei der der exponentielle Vorfaktor an den Stellen $p_y = 0$ und $\gamma = \gamma_0$ ausgewertet wird, sowie die p_y -Abhängigkeit ausintegriert und der verbleibende Exponent bis zur zweiten Ordnung um $\gamma = \gamma_0$ entwickelt wird. Die Höhe der Kurven ist auf 1 normiert, um einen Vergleich zu vereinfachen.



Die Abhängigkeit vom Parameter γ ist auch in diesem Fall deutlich komplexer. Dennoch erweist es sich als zweckmäßig auch hier lediglich die exponentielle Ab-

hängigkeit auszuintegrieren. Dazu wird zunächst der Wert von γ_0 bestimmt, an welchem die Exponentialfunktion ihr Maximum erreicht:

$$\gamma_0 = -\frac{E_{1s}}{4c} + \frac{1}{4c} \sqrt{E_{1s}^2 + 8c^4}. \quad (4.30)$$

Die Entwicklung des Exponenten um $\gamma = \gamma_0$ bis zur zweiten Ordnung und die Auswertung des Vorfaktors an dieser Stelle liefern:

$$\begin{aligned} R = & \frac{1}{2} F^2 C_{1s}^2 (2Z)^{2\sigma-2} \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{\pi F \gamma_0}{\varepsilon_0}} e^{-h(\gamma_0)} \left[|\tilde{S}_1(p_y = 0, \gamma = \gamma_0)|^2 \right. \\ & + \tau^2 \left(|\tilde{S}_2(p_y = 0, \gamma = \gamma_0)|^2 + |\tilde{S}_3(p_y = 0, \gamma = \gamma_0)|^2 + |\tilde{S}_3(p_y = 0, \gamma = \gamma_0)|^2 \right) \\ & \left. + 2\tau \operatorname{Re} (i \tilde{S}_1(p_y = 0, \gamma = \gamma_0) \tilde{S}_2(p_y = 0, \gamma = \gamma_0)) \right] \int_0^\infty d\gamma e^{-h''(\gamma_0)(\gamma-\gamma_0)^2} \end{aligned} \quad (4.31)$$

mit $\varepsilon_0 = \sqrt{\eta^2 + (c\gamma_0 + E_{1s})^2}$ und $h(\gamma) = \frac{2\varepsilon^3}{3c^2 F \gamma}$.

Dieser Ansatz wird in Abbildung 4.4 mit dem Ergebnis aus Glg. (4.21) verglichen. Dort wird die differentielle Rate $dR/d\gamma$ in Abhängigkeit von γ für verschiedene Kernladungszahlen Z gezeigt. Die durchgezogenen Kurven präsentieren das numerisch über p_y integrierte Ergebnis aus Glg. (4.21). Zum Vergleich wird die differentielle Rate aus Glg. (4.31) als gestrichelte Kurve gezeigt. Das Maximum der exakten differentiellen Rate verschiebt sich nur leicht zu niedrigeren Werten bezüglich der Position von $\gamma = \gamma_0$ und die Breite der Kurven bei gleichem Z stimmt in etwa überein.

Zuletzt wird formal die untere Integrationsgrenze auf $-\infty$ erweitert, was rechnerisch dadurch vertretbar ist, dass aus diesem Bereich kein signifikanter zusätzlicher Beitrag zum Integral stammt. Daher können wir die γ -Integration ebenfalls durch ein Gauß'sches Integral lösen. Das nun vereinfachte Ergebnis der Rate lautet

$$\begin{aligned} R = & \frac{1}{2} \pi F^2 C_{1s}^2 (2Z)^{2\sigma-2} \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{2F\gamma_0}{\varepsilon_0 h''(\gamma_0)}} e^{-h(\gamma_0)} \\ & \times \left[|\tilde{S}_1(p_y = 0, \gamma = \gamma_0)|^2 \right. \\ & + \tau^2 \left(|\tilde{S}_2(p_y = 0, \gamma = \gamma_0)|^2 + |\tilde{S}_3(p_y = 0, \gamma = \gamma_0)|^2 \right) \\ & \left. + 2\tau \operatorname{Re} [\tilde{S}_1(p_y = 0, \gamma = \gamma_0)] \operatorname{Im} [\tilde{S}_2(p_y = 0, \gamma = \gamma_0)] \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Die dominante exponentielle Abhängigkeit von γ_0 lässt sich noch weiter vereinfachen, indem wir γ_0 für kleine Werte von $I_p/c^2 \ll 1$ entwickeln. Dies führt uns zum Ausdruck

$$\gamma_0 \approx c - \frac{1}{2} \left(c - \frac{I_p}{3c} \right). \quad (4.33)$$

Dabei ist nun zu beachten, dass die Werte von I_p/c^2 mit zunehmender Kernladungszahl Z größer werden und entsprechend näher bei 1 liegen. Somit dient diese Approximation nur einer groben Abschätzung. Die beobachtbare Verschiebung in γ_0 stammt von der magnetischen Feldkomponente, die im klassischen Bereich eine

Kraft in Richtung von $-\frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ausübt. Die Geschwindigkeit des Elektrons ist in dieser Betrachtung nahe c , entsprechend kann die Kraft des elektrischen Feldes nicht als dominant betrachtet werden. Wir nehmen für eine grobe Abschätzung dennoch an, dass die Geschwindigkeit des Elektrons \mathbf{v} vorwiegend in die negative x -Richtung orientiert ist. Das magnetische Feld entlang y führt entsprechend zu einer Lorentz-Kraft, die in z -Richtung zeigt und somit eine Verschiebung in der p_z -Verteilung hervorruft. Die Größenordnung der Verschiebung lässt sich durch $\Delta p_z \sim \frac{v}{c} F \tau_t \sim c$ angeben, wobei die Tunnelzeit $\tau_t \sim d/v$ durch die Tunnelbreite und die Tunnelgeschwindigkeit abgeschätzt wird. Die Verschiebung wird allein durch das magnetische Feld hervorgerufen und wäre in einem rein elektrischen Feld nicht vorhanden, wie es auch bei der Ionisation der Fall war (vgl. Ref. [58, 84, 87]).

Um die exponentielle Abhängigkeit etwas besser einordnen zu können, verwenden wir Glg. (4.33), um den Exponenten geeignet zu vereinfachen. Wir entwickeln diesen ebenfalls in eine Taylor-Reihe um $I_p/c^2 = 0$ und gelangen dadurch zu der Abhängigkeit

$$R \propto \exp \left[-\frac{4F_{cr}}{3F} \left(\frac{9}{4} - \frac{I_p}{c^2} \right)^{3/2} \right]. \quad (4.34)$$

Der exponentielle Ausdruck enthält die charakteristische Feldstärken-Abhängigkeit F_{cr}/F . Diese findet sich so auch in Vergleichsrechnungen wieder, wie wir im Fall der zirkular polarisierten Laserwelle im folgenden Abschnitt sehen werden. Zudem lässt sich erkennen, dass in etwa die Tunnelbreite aus Glg. (4.28) im Exponenten enthalten ist, welche den charakteristischen Faktor $9/4$ aufweist.

4.1.4 VERGLEICH MIT EINEM ZIRKULAR POLARISIERTEN LASERFELD IN STRAHLUNGSEICHUNG

Um zu untersuchen, wie sich die Wahl der Eichung des Laserfeldes auf die SFA-Berechnung auswirkt, wollen wir das zuvor erzielte Ergebnis mit den Ergebnissen aus Ref. [21] vergleichen. In dieser Arbeit wurde die gebunden-freie Paarproduktion in einem zirkular polarisiertem Laserfeld in Strahlungseichung betrachtet. Das Laserfeld wird dort durch den Wellenvektor $k^\mu = \omega/c(1, \mathbf{e}_z)$ und das Viererpotential

$$A_L^\mu(x) = a(0, \cos(k \cdot x), \sin(k \cdot x), 0) = a_1^\mu \cos(k \cdot x) + a_2^\mu \sin(k \cdot x) \quad (4.35)$$

beschrieben. Der positronische Volkov-Zustand vereinfacht sich entsprechend zu

$$\begin{aligned} \Psi_{p,s^+}^{(+)}(x) &= \sqrt{\frac{c}{q_0}} \left(1 + \frac{1}{2ck \cdot p} k \cdot A \right) v_{s^+} \\ &\times \exp \left[-i \frac{a_1 \cdot p}{ck \cdot p} \sin(k \cdot x) + i \frac{a_2 \cdot p}{ck \cdot p} \cos(k \cdot x) - iq \cdot x \right], \end{aligned} \quad (4.36)$$

mit dem effektiven Impuls $q^\mu = p^\mu + \zeta^2 c^2 / (2k \cdot p) k^\mu$.

Wie üblich lässt sich zunächst die Übergangsamplitude bestimmen um mit dieser die Rate zu berechnen. Wir geben an dieser Stelle jedoch direkt das Ergebnis der Rate an, da sich eine detaillierte Berechnung bereits in Ref. [21] befindet. Des Weiteren wird im Anhang eine Berechnung der gebunden-freien Paarproduktion für eine endliche Pulsdauer gezeigt, welche in vielen Punkten der Herleitung aus

Ref. [21] ähnelt. Für die Produktionsrate gilt entsprechend:

$$\frac{d^2R}{d\varepsilon_q d\cos(\vartheta_q)} = 4 \frac{a^2}{Z^3} \sum_{n \geq n_0} |\mathbf{q}| \frac{u_A + u_B + u_C}{[1 + (\rho/Z)^2]^4} \delta(\varepsilon_q + E_{1s} - n\omega), \quad (4.37)$$

mit

$$\begin{aligned} u_A &= \frac{\mathcal{P}}{c} \left\{ \left([J_{n-1}(\bar{\alpha})]^2 + [J_{n+1}(\bar{\alpha})]^2 \right)^2 \left[(p_0 + c)\sigma^2 \left(\frac{\rho}{Z} \right)^4 \mathcal{U}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (p_0 - c)\tau^2 \left(\frac{\rho}{Z} \right)^2 \mathcal{V}^2 - \frac{2}{Z} p_z \sigma \tau \left(\frac{\rho}{Z} \right)^2 (p_z - bk_z) \mathcal{U} \mathcal{V} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{Z} J_{n-1}(\alpha) J_{n+1}(\bar{\alpha}) \sigma \tau \left(\frac{\rho}{Z} \right)^2 \mathbf{p}_\perp^2 \mathcal{U} \mathcal{V} \right\}, \\ u_B &= -2 \frac{\omega}{c^2} \left(\frac{\rho}{Z} \right)^2 \mathcal{P} n [J_n(\bar{\alpha})]^2 \\ &\quad \times \left(\sigma^2 \left(\frac{\rho}{Z} \right)^2 \mathcal{U}^2 + \tau^2 \mathcal{V}^2 + \frac{2}{Z} \sigma \tau (p_0 + bk_z - 2p_z) \mathcal{U} \mathcal{V} \right), \\ u_C &= \frac{a^2}{c^3 (p_0 - p_z)} \mathcal{P} \left(\frac{\rho}{Z} \right)^2 [J_n(\bar{\alpha})]^2 \\ &\quad \times \left(\sigma^2 \left(\frac{\rho}{Z} \right)^2 \mathcal{U}^2 + \tau^2 \mathcal{V}^2 - \frac{2}{Z} \sigma \tau (p_0 - bk_z) \mathcal{U} \mathcal{V} \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Hierbei ist zu beachten, dass die differentielle Rate über die effektiven Größen ε_q und ϑ_q definiert ist.

und

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \frac{c^2 \xi}{\omega} \frac{q_\perp}{q_0 - q_z}, \\ b &= n - \nu, \\ \nu &= \frac{a^2}{2c^2 (k \cdot p)}, \\ \tau &= \frac{1 - \sigma}{\alpha Z}, \\ \mathcal{U} &= \sin \mathcal{X} + \frac{\rho}{Z} \cos \mathcal{X}, \\ \mathcal{V} &= \sigma \frac{\rho}{Z} \cos \mathcal{X} - \left[1 + (1 + \sigma) \left(\frac{\rho}{Z} \right)^2 \right] \sin \mathcal{X}, \\ \mathcal{X} &= \sigma \arctan \left(\frac{\rho}{Z} \right), \\ \rho &= \mathbf{q} - n\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Um das hier gezeigte Ergebnis mit der Berechnung im konstanten gekreuzten Feld vergleichen zu können, wollen wir die Besselfunktionen für $\xi \gg 1$ näher betrachten. Das Argument $\bar{\alpha}$ der Besselfunktionen ist stets kleiner als die Ordnung n , welche durch

$$n = \frac{1}{\omega} (cq_0 + c^2 - I_p) \quad (4.40)$$

gegeben ist. Der größtmögliche Beitrag stammt entsprechend von einem maximalen $\bar{\alpha}$ oder anders ausgedrückt, einer minimierten Differenz $n - \bar{\alpha}$. Untersuchen wir zunächst die Winkel-Abhängigkeit des Arguments $\bar{\alpha}$, lässt sich dieses für den Winkel $\sin \tilde{\Theta} = m_* c / q_0$ maximieren, dabei bezeichnet $m_* = \sqrt{1 + \bar{\xi}^2}$ die effektive Masse in atomaren Einheiten. Somit gilt:

$$\bar{\alpha}(q_0, \tilde{\Theta}) = \frac{c \bar{\xi}}{\sqrt{1 + \bar{\xi}^2}} \frac{|\mathbf{q}|}{\omega}. \quad (4.41)$$

Minimieren wir im Anschluss die Funktion $f(q_0) = n(q_0) - \bar{\alpha}(q_0, \tilde{\Theta})$, beläuft sich der optimale Wert der effektiven Elektronenenergie auf

$$\tilde{q}_0 = c(1 + \zeta^2). \quad (4.42)$$

Die Differenz $q_0 - q_z$ ist für effektive Impulse dieselbe wie für die kanonischen Impulse und beläuft sich hier auf den Wert c . Die Energien und z -Komponenten der Impulse unterscheiden sich jedoch, weshalb diese separat betrachtet werden. Rechnen wir auf die kanonischen Größen um, erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{p}_0 &= \tilde{q}_0 - \frac{c^2 \zeta^2}{2(\tilde{q}_0 - |\tilde{q}| \cos \tilde{\Theta})} = c + \frac{\zeta^2 c}{2}, \\ \tilde{p}_z &= \tilde{q}_z - \frac{c^2 \zeta^2}{2(\tilde{q}_0 - |\tilde{q}| \cos \tilde{\Theta})} = \frac{\zeta^2 c}{2}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Als optimale Werte lassen sich somit

$$\tilde{n} = \frac{1}{\omega} \left(2c^2 + c^2 \zeta^2 - I_p \right) \text{ und } \tilde{\alpha} = \tilde{n} - \tilde{\varepsilon}, \quad (4.44)$$

mit $\tilde{\varepsilon} = \frac{2c^2 - I_p}{\omega} \ll \tilde{n}$ festhalten. Für unsere Besselfunktionen gilt laut Ref. [95] die Asymptotik

$$J_{\tilde{n}}(\tilde{\alpha}) \propto \exp \left[-\frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\tilde{\varepsilon}^{3/2}}{\tilde{\alpha}^{1/2}} \right]. \quad (4.45)$$

Da die Rate proportional zum Betragsquadrat der Besselfunktionen ist, lässt sich die exponentielle Abhängigkeit durch

$$R \propto \exp \left[-\frac{4\sqrt{2}F_{cr}}{3F} \left(2 - \frac{I_p}{c^2} \right)^{3/2} \right] \quad (4.46)$$

beschreiben. Die hier gefundene exponentielle Abhängigkeit stimmt nicht mit der Abhängigkeit im konstanten gekreuzten Feld überein, weist jedoch große Ähnlichkeiten zu dieser auf. Die charakteristische Struktur F_{cr}/F der Feldstärke steckt auch in diesem Ausdruck. Ebenso findet sich in etwa die Tunnelbreite wieder, welche hier durch den intuitiven Faktor $2c^2 - I_p$ gegeben ist. Dass der hier gegebene Exponent nicht bis ins Detail mit dem in Glg. (4.34) übereinstimmt, kann neben der Tatsache, dass sich die Trajektorie eines Elektrons im zirkular polarisierten Feld von der im konstanten gekreuzten Feld unterscheidet, dadurch bedingt sein, dass die Besselanalyse lediglich eine gute Näherung der genauen Abhängigkeit liefert.

4.2 ERGEBNISSE DER GEBUNDEN-FREIEN PAARPRODUKTION

Wir vergleichen im Folgenden die ausintegrierte Paarproduktionsrate aus Glg. (4.37) mit der Paarproduktionsrate aus Glg. (4.32). Die Ergebnisse werden in Abbildung 4.5 für verschiedene Kernladungszahlen Z in Abhängigkeit von der normierten Feldstärke F/F_a gezeigt. Dabei bezeichnet F_a die atomare Feldstärke. Zunächst fällt auf, dass die Raten mit zunehmender Feldstärke anwachsen. Für eine Rate, welche messbare Werte liefert, muss in diesem Parameterregime die Kernladungszahl sehr groß sein. Ein Vergleich zwischen den beiden Rechnungen zeigt, dass die Berechnung in der Göppert-Mayer-Eichung und dem konstanten gekreuzten Feld zu deutlich größeren Raten führt. Während bei $Z = 70$ vier Größenordnungen zwischen den

unterschiedlich bestimmten Raten liegen, reduziert sich für $Z = 110$ der Unterschied auf drei Größenordnungen. Die signifikante Differenz zwischen diesen beiden Rechnungen kann zum einen durch die unterschiedlichen exponentiellen Abhängigkeiten erklärt werden, zum anderen ist aufgrund der verschiedenen Eichungen in den Rechnungen eine Abweichung zu erwarten. In den Ref. [64, 90, 91] sind für die nicht-relativistische Ionisation Unterschiede von bis zu zwei Größenordnungen zwischen der Längen- und Geschwindigkeitseichung gefunden worden. Die Längeneichung hat sich in dortigen Vergleichen zu experimentellen Daten als die bessere Wahl herausgestellt. Begründet wurde dies darüber, dass der Wechselwirkungsterm in der Längeneichung vom Abstand zum Kern abhängig ist und für große Abstände ausgelegt ist, was wiederum zu der Annahme der Volkov-Zustände passt [64]. Für die Rechnung der gebunden-freien Paarproduktion lässt sich auf dieselbe Weise für den Anfangszustand in Verbindung mit der Göppert-Mayer-Eichung argumentieren.

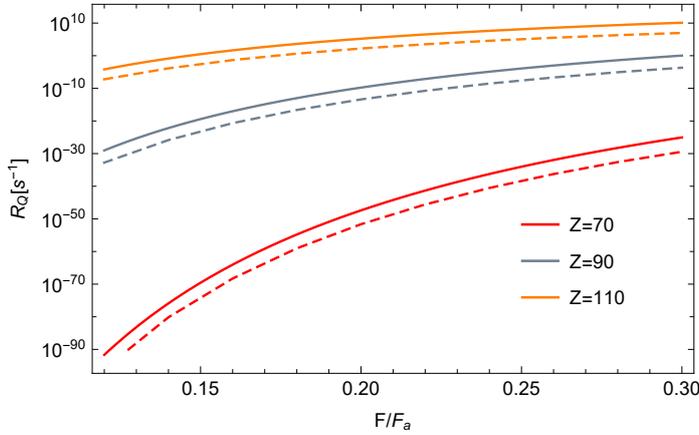


Abbildung 4.5: Mit dem Faktor Q korrigierte Paarproduktionsrate. Die durchgezogenen Linien zeigen die Rate in einem konstanten gekreuzten Feld in Göppert-Mayer-Eichung für Glg. (4.32) und die gestrichelten Kurven zeigen die Rate in einer zirkular polarisierten Laserwelle für Glg. (4.37) als Funktion der normierten Feldstärke F/F_a , wobei $F_a = Z^3$ die atomare Feldstärke bezeichnet.

Wir wollen zuletzt einen Vergleich zwischen der gebunden-freien zur frei-freien Paarproduktion, auch nichtlinearer Bethe-Heitler-Prozess genannt, ziehen. Die exakte Rate der freien Paarproduktion für ein konstantes gekreuztes Feld wird in Ref. [96] durch

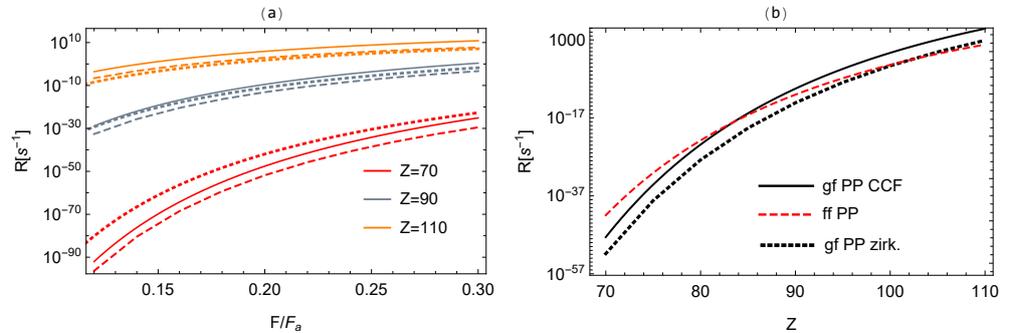
$$R_{\text{ff}} = \frac{Z^2}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{3}} \right)^{5/2} \exp\left(-\frac{2\sqrt{3}}{\eta}\right), \quad (4.47)$$

gegeben, mit $\eta = \omega\zeta/c^2$. Die Rate stimmt mit dem Ergebnis der Rechnung aus Ref. [97] überein, indem der Grenzwert $\zeta \gg 1$ für eine zirkular polarisierte Welle berechnet wurde, wohingegen die Besselbetrachtung in Ref. [21] zu einem leicht anderen Ergebnis in der exponentiellen Abhängigkeit geführt hat (vgl. $\exp\left(-\frac{8\sqrt{2}}{3\eta}\right)$), wie es auch bei uns der Fall ist für die gebunden-freie Paarproduktion.

In Abbildung 4.6 (a) wird diese Rate in Abhängigkeit von der normierten Feldstärke F/F_a für verschiedene Kernladungszahlen Z als gepunktete Linie gezeigt. Im Vergleich dazu wird als durchgezogene Linie die unkorrigierte Rate aus Glg. (4.32), sowie die unkorrigierte ausintegrierte Rate aus Glg. (4.37) als gestrichelte Kurve gezeigt. Beim Vergleich der Raten fällt auf, dass für kleinere Kernladungszahlen Z die freie Paarproduktion mit größerer Wahrscheinlichkeit auftritt, während für sehr große Kernladungszahlen die gebunden-freie Paarproduktion bevorzugt auftritt. Dieses sich verändernde Verhalten lässt sich einerseits dadurch begründen, dass bei

der gebunden-freien Paarproduktion die Tunnellänge im Vergleich zu der freien Paarproduktion verkürzt ist (vgl. Abb. 4.2). Entsprechend ist es für das Elektron einfacher, diese kürzere Distanz zu überwinden. Mit zunehmender Kernladungszahl reduziert sich die Tunnellänge weiter. Andererseits ist der Phasenraum eines Elektrons für die freie Paarproduktion größer als bei einem Elektron, welches final in einem gebundenen Zustand vorliegt, weshalb auch die freie Paarproduktion eine größere Rate aufweisen kann. Dieses Wechselspiel zwischen Phasenraumgröße und Tunnellänge sorgt dafür, dass erst für eine sehr große Kernladungszahl die gebunden-freie Paarproduktion überwiegt. Ab welcher Kernladungszahl die gebunden-freie Paarproduktion der freien überlegen ist, wird in Abbildung 4.5 (b) gezeigt. Hier wird die freie Paarproduktion als rot gestrichelte Kurve gezeigt. Die gebunden-freie Paarproduktion der CCF-Rechnung wird als schwarze durchgezogene Linie präsentiert, während die Rechnung im zirkular polarisierten Laserfeld als schwarz gepunktete Linie gezeigt wird. Die Feldstärke wird dabei konstant beim Wert $F/F_a = 0.2$ gehalten. Es fällt auf, dass die Rechnung im konstanten gekreuzten Feld schon bei Kernladungszahlen ab $Z \approx 84$ zu größeren Raten als im Fall der freien Paarproduktion führt, während die Berechnung der gebunden-freien Paarproduktion im zirkular polarisierten Laserfeld erst bei Kernladungszahlen ab $Z \approx 104$ überwiegt. Neben der unterschiedlichen Feldkonfiguration unterscheiden sich die Rechnungen insbesondere in ihrer Eichung. Für die Göppert-Mayer-Eichung erzielen wir deutlich größere Raten als in der Strahlungseichung (in Abb. 4.6(b) liegen in etwa vier Größenordnungen zwischen den unterschiedlichen Raten). Während bei der nicht-relativistischen Ionisation die Längeneichung (nicht-relativistisches Gegenstück zur Göppert-Mayer-Eichung) bessere Übereinstimmungen mit den experimentellen Daten gezeigt hat [64], steht ein Vergleich mit wirklichen Experimenten bei der gebunden-freien Paarproduktion noch aus.

Abbildung 4.6: In Paneel (a) werden die totalen Raten der gebunden-freien Paarproduktion aus Glg. (4.32) (durchgezogene Linie), sowie aus Glg. (4.37) (gepunktete Linie) und die totale Rate der freien Paarproduktion aus Glg. (4.47) (gestrichelte Linie) in Abhängigkeit zur normierten Feldstärke F/F_a gezeigt. Die Kernladungszahlen sind der Farbskala zu entnehmen. In Paneel (b) werden die totalen Raten in Abhängigkeit von der Kernladungszahl Z für eine Feldstärke von $F/F_a = 0.2$ gezeigt.



4.3 ZUSAMMENFASSUNG

Wir haben zunächst die totale Paarproduktionsrate mit Hilfe der Dirac-Theorie und der SFA in Göppert-Mayer-Eichung berechnet, wobei wir für das Feld ein konstantes gekreuztes Feld angenommen haben. Um den Einfluss des Coulomb-Feldes auf das Elektron während des Tunnelns zu berücksichtigen, haben wir eine geeignete Methode, welche auf einem kurzreichweitigen Bindungspotential basiert [55], an unsere Rechnung angepasst, ähnlich zu der Vorgehensweise, die wir bereits in Kapitel 3 verwendet haben. Die Version unseres Coulomb-Korrekturfaktors stellt dabei eine Näherung dar, da sie den innersten Tunnelbereich außer Acht lässt und den genauen

Endpunkt des Einflussbereichs nur intuitiv betrachtet.

Der Vergleich unserer entsprechenden Ergebnisse mit Vorhersagen aus früheren Studien, die die gebunden-freie Paarproduktion in einem zirkular polarisierten Feld in der Strahlungseichung berechnen, führt zu deutlichen Unterschieden von mehreren Größenordnungen zwischen den Raten. Die Tatsache, dass sich beide Rechnungen unterscheiden, ist insbesondere daher zu erwarten gewesen, da sich der Einfluss der Eichung bereits in SFA-Rechnungen zur nicht-relativistischen Ionisation in starker Weise gezeigt hat [64]. Unsere Rechnung kann entsprechend dazu beitragen, die Eichabhängigkeit der SFA besser zu verstehen.

Im weiteren Vergleich der gebunden-freien Paarproduktion mit der freien Paarproduktion konnten wir feststellen, dass erst für sehr große Kernladungszahlen die gebunden-freie Paarproduktion durch die verkürzte Tunnellänge im Vorteil ist.

BREIT-WHEELER-PAARPRODUKTION IM ÜBERGANGSREGIME VON PERTUR- BATIV ZU NICHT-PERTURBATIV

Der Breit-Wheeler-Paarproduktionsprozess kann, wie bereits in Kapitel 1 beschrieben, in verschiedene Regime unterteilt werden. Insbesondere wird für die Wechselwirkung mit dem Laserfeld zwischen dem perturbativen und nicht-perturbativen Regime unterschieden. Die Unterscheidung wird hauptsächlich durch den dimensionslosen Intensitätsparameter $\zeta = |e|\mathcal{E}_0/(\omega m)$ vorgenommen. Im perturbativen Regime mit $\zeta \ll 1$ folgt die Paarproduktionsrate einem einfachen Potenzgesetz der Form ζ^{2n} . Im nicht-perturbativem Regime beginnt die Produktionsrate zunächst vom Potenzgesetz abzuweichen und geht für $\zeta \gg 1$ in ein exponentielles Verhalten ähnlich der bekannten Schwinger-Rate über, wie es in Ref. [3, 16] gezeigt wird. Wir fokussieren uns in diesem Kapitel auf das Übergangsregime von nicht-perturbativ zu perturbativ um $\zeta \approx 1$.

Gegenwärtig besteht erhebliches Interesse an dem nicht-perturbativen Regime, für dessen experimentelle Realisierung die Kombination von Gammastrahlung mit einer gegenläufigen optischen Laserwelle hoher Intensität als möglicher experimenteller Weg angesehen wird. Die Erzeugung von Breit-Wheeler-Paaren in einem starken Feld wurde bereits theoretisch untersucht und das LUXE-Konsortium am DESY hat ein entsprechendes Experiment vorgeschlagen [44, 45]. Dabei soll der hochenergetische Elektronenstrahl, welcher normalerweise den *European XFEL* (Europäischen Freielektronen-Röntgenlaser) antreibt, verwendet werden, um GeV-Photonen durch Bremsstrahlung aus einem Wolfram-Target zu erzeugen. Eines der Ziele besteht darin, den Übergang vom perturbativen Bereich des Prozesses bei $\zeta \ll 1$ zum nicht-perturbativen Bereich bei $\zeta > 1$ (oder sogar $\zeta \gg 1$) zu untersuchen.

Der Fokus dieses Kapitels wird, in Anlehnung an die geplanten Experimente, darauf gelegt, den Einfluss des breiten Frequenzspektrums der Bremsstrahlung auf den Prozess mit zu berücksichtigen und in die Rechnungen mit einzubinden. In den letzten Jahren wurden eine Reihe von theoretischen Studien zur Starkfeld-Breit-Wheeler-Paarbildung unter Verwendung monoenergetischer γ -Photonen und kurzer Laserpulse mit wenigen Zyklen durchgeführt [33, 51, 98–104]. In diesem Fall deckt das Laserfeld ein relativ schmales kohärentes Frequenzspektrum ab, welches die Prozesseigenschaften in charakteristischer Weise beeinflusst. Komplementär dazu können Paarproduktionsstudien mit Bremsstrahlung betrachtet werden, da hier der Strahl der γ -Photonen ein sehr breites inkohärentes Frequenzspektrum umfasst.

Dieses Kapitel basiert auf der Veröffentlichung [105]. Die entsprechenden Abschnitte wurden übersetzt, überarbeitet und an den Kontext der Dissertation angepasst. Dort haben wir sowohl die Gesamtproduktionsrate als auch die Energie- und Winkelverteilungen des entstandenen Positrons für eine Reihe von ξ -Werten im Übergangsregime berechnet, wobei das Bremsstrahlungsfrequenzspektrum für das hochenergetische γ -Photon mit berücksichtigt worden ist.

In diesem Kapitel werden relativistische Einheiten mit $c = \hbar = 4\pi\epsilon_0 = 1$ verwendet.

5.1 THEORETISCHE VORGEHENSWEISE

In diesem Abschnitt erläutern wir die Vorgehensweise zur Bestimmung der Paarproduktionsrate. Unsere Arbeit ist unter anderem durch das geplante LUXE-Experiment aus Ref. [44, 45] motiviert, bei dem Laserpulse mit einer Wellenlänge von $\lambda = 800$ nm und 30 fs Pulsdauern eingesetzt werden sollen. Da diese Pulse - die etwa 11 Feldzyklen umfassen - weder extrem kurz noch lang sind, werden die Vorhersagen von zwei verschiedenen Feldmodellen verglichen. Zunächst wird das Laserfeld als monochromatische Welle von unendlicher Ausdehnung betrachtet. Im Anschluss bestimmen wir die Produktionsrate für einen endlichen Laserpuls mit langsam variierender Hülle im Rahmen der lokal monochromatischen Approximation (LMA). Im letzten Abschnitt wird gezeigt, wie sich das Bremsstrahlungsspektrum mit in die Rate einbeziehen lässt.

5.1.1 UNENDLICH AUSGEDEHNTE, MONOCHROMATISCHE LASERWELLE

Wir folgen der Herleitung aus Ref. [63] und beginnen damit, das S -Matrix-Element für den Breit-Wheeler-Prozess in einem starken Feld zu bestimmen. Das für diesen Prozess nötige hochenergetische γ -Photon besitzt die Frequenz ω' , den Wellenvektor k'^μ und den Polarisationsvektor ϵ'^μ . Entsprechend ist das Matrix-Element durch

$$S_{fi} = -ie \sqrt{\frac{4\pi}{2\omega'V}} \int d^4x e^{-ik' \cdot x} \bar{\Psi}_{p',s'} \epsilon'^\mu \Psi_{-p,s} \quad (5.1)$$

gegeben. Wir betrachten das Laserfeld als unendlich ausgehende, monochromatische Welle zirkularer Polarisation mit dem Viererpotential

$$A^\mu(x) = a(\epsilon_1^\mu \cos k \cdot x + \epsilon_2^\mu \sin k \cdot x) \quad (5.2)$$

in der Lorenz-Eichung $k \cdot A = 0$. Der entsprechende Wellenvektor der gegenläufigen Laserwelle und die beiden entsprechenden transversalen und orthogonalen Polarisationsvektoren werden durch $k^\mu = \omega(1, 0, 0, -1)$, $\epsilon_1^\mu = (0, 1, 0, 0)$ und $\epsilon_2^\mu = (0, 0, 1, 0)$ definiert. Für die geplanten Parameter ist die Annahme eines monochromatischen Feldes gut geeignet.

Für den Anfangs- und Endzustand werden die positronischen und elektronischen Volkzustände aus den Glg. (2.18) und (2.16), in die das Viererpotential der zirkular polarisierten Welle eingesetzt wird, verwendet. Dadurch lässt sich der elektronische Zustand durch

$$\begin{aligned} \Psi_{p',s'}(x) &= \sqrt{\frac{m}{q'_0 V}} \left(1 + \frac{e}{2k \cdot p'} k \cdot A \right) u_{p',s'} \\ &\times \exp \left[-iea \frac{\epsilon_1 \cdot p'}{k \cdot p'} \sin(k \cdot x) + iea \frac{\epsilon_2 \cdot p'}{k \cdot p'} \cos(k \cdot x) - iq' \cdot x \right] \end{aligned} \quad (5.3)$$

darstellen. Dabei bezeichnet $p'^{\mu} = (\varepsilon_{p'}, \mathbf{p}')$ den elektronischen Impuls, sowie $q'^{\mu} = p'^{\mu} + \zeta^2 m^2 / (2k \cdot p') k^{\mu}$ den effektiven elektronischen Impuls, welcher die Dispersionsrelation $q'^2 = m_*^2$ erfüllt, mit der effektiven Masse $m_* = m\sqrt{1 + \zeta^2}$. Der entsprechende positronische Volkov-Zustand wird durch die Ersetzung p'^{μ} durch $-p^{\mu}$, mit dem positronischen Impuls \mathbf{p} , erreicht, woraus sich auch der positronische effektive Impuls q^{μ} ableitet. Zudem wird der elektronische Spinor $u_{p',s'}$ mit dem positronischen $v_{p,s}$ getauscht.

Einsetzen der Volkov-Zustände in Glg. (5.1) und geeignetes Zusammenfassen der Terme führt zu dem Ausdruck

$$S_{\text{fi}} = -ie \sqrt{\frac{m}{q_0 V}} \sqrt{\frac{m}{q'_0 V}} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega' V}} \int d^4x e^{i(q+q'-k') \cdot x} \bar{u}_{p',s'} M v_{p,s} e^{i\Phi}, \quad (5.4)$$

mit der Dirac-Matrix

$$M = \left(1 + \frac{eA k}{2k \cdot p'}\right) \not{\epsilon}' \left(1 + \frac{ekA}{2k \cdot p}\right) \quad (5.5)$$

und der Phase

$$\Phi = -ea \left(\frac{\varepsilon_1 \cdot p}{k \cdot p} - \frac{\varepsilon_1 \cdot p'}{k \cdot p'} \right) \sin(k \cdot x) + ea \left(\frac{\varepsilon_2 \cdot p}{k \cdot p} - \frac{\varepsilon_2 \cdot p'}{k \cdot p'} \right) \cos(k \cdot x). \quad (5.6)$$

Über $z = ea \sqrt{-[q/(k \cdot q) - q'/(k \cdot q')]^2}$, $z \cos \varphi_0 = ea \varepsilon_1 \cdot [q/(k \cdot q) - q'/(k \cdot q')]$ und $\varphi_k = k \cdot x$ lässt sich die Phase vereinfacht darstellen als

$$\Phi = -z \sin(\varphi_k - \varphi_0). \quad (5.7)$$

Die φ_k -Abhängigkeit lässt sich über eine Fourier-Reihenentwicklung mit Hilfe von Besselfunktionen ausdrücken, wozu die Relation

$$e^{-iu \sin \varphi_k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(u) e^{-in\varphi_k} \quad (5.8)$$

aus Ref. [95] verwendet wird. Mit dieser Definition lassen sich die Relationen

$$e^{i\Phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_{0,n}(z) e^{-in\varphi_k}, \quad (5.9)$$

$$e^{i\Phi} \cos \varphi_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_{1,n}(z) e^{-in\varphi_k} \quad (5.10)$$

und

$$e^{i\Phi} \sin \varphi_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_{2,n}(z) e^{-in\varphi_k} \quad (5.11)$$

finden, wobei die Abkürzungen

$$\mathcal{D}_{0,n}(z) = J_n(z) e^{in\varphi_0}, \quad (5.12)$$

$$\mathcal{D}_{1,n}(z) = \frac{1}{2} \left(J_{n+1}(z) e^{i(n+1)\varphi_0} + J_{n-1}(z) e^{i(n-1)\varphi_0} \right) \quad (5.13)$$

und

$$\mathcal{D}_{2,n}(z) = \frac{1}{2i} \left(J_{n+1}(z) e^{i(n+1)\varphi_0} - J_{n-1}(z) e^{i(n-1)\varphi_0} \right), \quad (5.14)$$

eingeführt werden. Über diese Vereinfachungen lässt sich nun die Übergangsamplitude

$$S_{fi} = -ie \sqrt{\frac{m}{q_0 V}} \sqrt{\frac{m}{q'_0 V}} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega' V}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^4x e^{i(q+q'-k'-nk)\cdot x} \bar{u}_{p',s'} M_n v_{p,s} \quad (5.15)$$

darstellen. Die enthaltene Dirac-Matrix wird n -abhängig und zur Verdeutlichung M_n benannt:

$$\begin{aligned} M_n = & \mathcal{D}_{0,n} \left(\not{\epsilon}' - \frac{e^2 a^2}{2(k \cdot p)(k \cdot p')} \not{\epsilon}' \cdot k \not{k} \right) + \mathcal{D}_{1,n} e a \left(\frac{\not{\epsilon}_1 \not{k} \not{\epsilon}'}{2k \cdot p'} - \frac{\not{\epsilon}' \not{k} \not{\epsilon}_1}{2k \cdot p} \right) \\ & + \mathcal{D}_{2,n} e a \left(\frac{\not{\epsilon}_2 \not{k} \not{\epsilon}'}{2k \cdot p'} - \frac{\not{\epsilon}' \not{k} \not{\epsilon}_2}{2k \cdot p} \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Die Summation über n stellt die Anzahl absorbierter bzw. emittierter Photonen dar. Für die Paarproduktion ist die Absorption von mindestens einem Photon notwendig, weshalb die Summe im folgenden bei $n = 1$ startet. Die anschließende Raum-Zeit-Integration liefert die Delta-Funktion $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q + q' - k' - nk)$. Die Produktionsrate pro γ -Photon ist durch

$$dR(k, k') = \frac{|S_{fi}|^2}{T} V \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \quad (5.17)$$

gegeben. Um die unpolarisierte Rate zu bestimmen, mitteln wir zusätzlich über die Photonenpolarisation mithilfe von

$$\sum_{\lambda=1,2} \epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda) = -g_{\mu\nu} + \text{Eichterme} \quad (5.18)$$

und summieren über die Leptonenspins s und s' mithilfe von Glg. (B.16). Die daraus resultierenden Spuren lassen sich über die Relationen in Anhang B bestimmen. Anschließendes Zusammenfassen führt zu dem Ausdruck

$$dR(k, k') = \frac{e^2}{2\pi} \frac{m^2}{q_0 q'_0 \omega'} \sum_{n=n_0}^{\infty} \delta^4(q + q' - k' - nk) B_n(q', q, \xi) d^3q d^3q', \quad (5.19)$$

mit der Abkürzung

$$\begin{aligned} B_n(q', q, \xi) = & J_n^2(z) \\ & + \xi^2 \left(J_n^2(z) - \frac{1}{2} J_{n-1}^2(z) - \frac{1}{2} J_{n+1}^2(z) \right) \left(1 - \frac{(k \cdot k')^2}{2k \cdot p k \cdot p'} \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Dabei gibt n_0 die minimal notwendige Anzahl an Laserphotonen an, welche von der effektiven Masse durch

$$n_0 \geq \frac{2m_*^2}{k \cdot k'} \quad (5.21)$$

bestimmt werden und sich aus dem Argument der δ -Funktion ergeben. Für den Fall einer komplett entgegengesetzten Kollision der Laserphotonen mit dem γ -Photon, welche wir im Folgenden genauer betrachten werden, gilt $k \cdot k' = 2\omega\omega'$.

Die in Glg. (5.19) gezeigte Rate ist noch sechsfach differentiell. Um hieraus die totale Rate zu erhalten, müssen die verbliebenen sechs Integrationen gelöst werden. Dies wird in Ref. [63] über einen Wechsel ins Schwerpunktsystem erreicht. Wir verbleiben jedoch im Laborsystem, um zusätzlich das Winkel- und Energiespektrum

bestimmen zu können. Dazu wird über \mathbf{q}' sowie φ_q und ε_q bzw. ϑ_q integriert. Dies lässt sich durch die in Glg. (5.19) enthaltene δ -Funktion leicht bewerkstelligen. Integrieren wir zunächst über \mathbf{q}' erhalten wir den Zusammenhang $\mathbf{q}' = \mathbf{k}' + n\mathbf{k} - \mathbf{q}$. Die letzte δ -Funktion lässt sich anschließend als Funktion von $g(|\mathbf{q}|)$ oder $g(\cos(\vartheta_q))$ auffassen und entsprechend lösen. Die Nullstellen dieser Funktion sind durch die Werte

$$\frac{Q_{\pm}}{m_{\star}} = \frac{(1 - \rho_n^2)\rho_n\chi_n \cos \vartheta_q}{1 - \rho_n^2 \cos^2 \vartheta_q} \pm \frac{\sqrt{\chi_n^2(1 - \rho_n^2)^2 - 1 + (\rho_n \cos \vartheta_q)^2}}{1 - \rho_n^2 \cos^2 \vartheta_q} \quad (5.22)$$

und

$$\cos(\vartheta_0) = \frac{E_n \varepsilon_q - 2n\omega\omega'}{|\mathbf{q}|(\omega' - n\omega)} \quad (5.23)$$

gegeben. Lösen wir nach üblicher Vorgehensweise die verbleibenden Integrale, wobei sich die φ_q -Integration für eine komplett gegenläufige Kollision direkt mit 2π auswerten lässt, dann gelangen wir zu den differentiellen Raten

$$\frac{dR}{d\cos(\vartheta_q)} = \sum_{i=\pm} \sum_{n=n_0}^{\infty} Q_i^2 \frac{e^2 m^2}{q_0 q'_0 \omega'} \left[\frac{B_n(q', q, \xi)|_{|\mathbf{q}|=Q_i}}{\frac{Q_i}{\sqrt{Q_i^2 + m_{\star}^2}} + \frac{Q_i - p_n \cos \vartheta_q}{\sqrt{p_n^2 + Q_i^2 - 2p_n Q_i \cos \vartheta_q + m_{\star}^2}}} \right] \sin \vartheta_q \quad (5.24)$$

im Bezug auf den Polarwinkel ϑ_q und

$$\frac{dR}{d\varepsilon_q} = \frac{e^2 m^2}{\omega'} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\omega' - n\omega} B_n(q', q, \xi)|_{\cos \vartheta_q = \cos \vartheta_0} \quad (5.25)$$

für das Energiespektrum des auslaufenden Positrons. Um die Gleichungen möglichst kompakt zu halten, wurden die Parameter $p_n = \omega' - n\omega$, $E_n = \omega' + n\omega$, $\rho_n = p_n/E_n$ sowie $\chi_n = E_n/2m_{\star}$ eingeführt.

Aus den Nullstellen aus Glg. (5.22) und (5.23) lassen sich Rahmenbedingungen für die Winkel und Energien des Positrons bestimmen. Da das Argument einer Wurzel positiv sein sollte und $|\cos(\vartheta_0)| \leq 1$ gilt, ergeben sich ein maximaler Winkel von

$$\vartheta_{\max} = \arccos \left(\sqrt{\frac{1}{\rho_n^2} - \frac{\chi_n^2}{\rho_n^2} (1 - \rho_n^2)^2} \right) \quad (5.26)$$

und die minimale und maximale Energie

$$E_{\min} = \frac{E_n}{2} - \Omega \leq \varepsilon_q \leq \frac{E_n}{2} + \Omega = E_{\max} \quad (5.27)$$

mit

$$\Omega = \frac{p_n}{2} \sqrt{\frac{n\omega\omega' - m_{\star}^2}{n\omega\omega'}}. \quad (5.28)$$

5.1.2 ENDLICH GEPULSTE EBENE WELLE

In dem zuvor beschriebenen Abschnitt wurde die Paarproduktion in einer unendlich ausgedehnten, monochromatischen Laserwelle beschrieben. Wir wollen einen Schritt weiter gehen und die experimentelle Realität noch besser beschreiben, indem wir den Laserpuls als zeitlich endlich annehmen. Die endliche Ausdehnung

kann direkt mit in die Volkov-Zuständen mit einbezogen werden, wie es in den Ref. [32, 33, 48, 50, 51, 98–104] gehandhabt wird. Ein alternativer Ansatz ist die sogenannte *locally monochromatic approximation* [59]. Diese Methode lässt sich immer dann verwenden, wenn die Pulsdauer lang ist und sich die Einhüllende des Pulses nur sehr langsam verglichen zu der Zeitskala der Feldoszillationen verändert [39, 106]. Die Methode beruht auf einer Mittelung der monochromatischen Paarproduktionsrate über die Einhüllende des endlichen Laserpulses. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass bei dem Laserfeld weiterhin keine Fokussierungseffekte einbezogen werden, die zu Abweichungen von den Ergebnissen berechnet mit einer ebenen Laserwelle führen. Diese Abweichungen können durch die Strahldivergenz gemessen werden. Die Strahldivergenz wird durch das Verhältnis von der fokalen Taillengröße (*beam waist size*) w_0 zur Rayleigh-Länge $z_R = \pi w_0^2 / \lambda$ bestimmt. In diesem Kapitel, in dem wir uns an dem LUXE-Experiment orientieren, welches das Übergangsregime in der sogenannten *Phase 0* untersucht, wird ein Laserstrahl mit 40 TW Leistung verwendet [44, 45]. Eine eher moderate Fokussierung auf $w_0 = 8 \mu\text{m}$ führt bereits zu $\zeta \sim 3$. Dies entspricht dem höchsten hier betrachteten Wert. Die resultierende Strahldivergenz ist mit $w_0 / z_R \approx 0.03$ somit sehr klein und verringert sich für kleinere Werte von ζ noch weiter. Für dieses Kapitel ist es daher legitim, die Laserfokussierungseffekte zu vernachlässigen. Die Betrachtung dieser Fokussierungseffekte wird jedoch in Kapitel 6, wo ein anderes Parameterregime betrachtet wird, relevant und entsprechend dort untersucht.

Der Grundgedanke, die LMA für diese Parameter zu verwenden, ist dadurch begründet, dass wir von einer langen Pulsdauer ausgehen und sich die Einhüllende nur langsam ändert. Der Gedanke diese als monochromatisch zu betrachten, erscheint daher durchaus plausibel. Die Beschreibung des Laserfeldes und des damit verknüpften Vierer-Potentials ändert sich wie folgt:

$$A^\mu(x) = af(\phi/\Phi)(\epsilon_1^\mu \cos k \cdot x + \epsilon_2^\mu \sin k \cdot x), \quad (5.29)$$

wobei $\phi = k \cdot x$ nun die Laserphase beschreibt, $\pi\Phi$ die Phasendauer und $f(\phi/\Phi)$ die Funktion der Einhüllenden. Diese ist auf das Intervall $-N\pi \leq \phi \leq N\pi$ beschränkt, so dass $\Phi = 2N$, mit der Anzahl N der Feldoszillationszyklen. Mit Hilfe der LMA lässt sich nun die Paarproduktionswahrscheinlichkeit bestimmen, deren Ergebnis in Ref. [59] angegeben wird. Die allgemeine Rechenmethodik wird in dieser Referenz am Beispiel der Compton-Streuung vorgeführt, welche sich auf die Breit-Wheeler-Paarproduktion übertragen lässt. Bei dieser Rechnung erweist es sich als besonders praktikabel, Lichtkegelkoordinaten zu verwenden, welche bereits in Kapitel 2 vorgestellt wurden. Die Parameter der Lichtkegelkoordinaten sind in dem gewählten Bezugssystem von der Form $v_+ = (v^0 + v^3)/2$, $v_- = v^0 - v^3$ und $v_\perp = (v^1, v^2)$. Nach diesem Beispiel lassen sich auch x^μ und p^μ definieren.

Ausgehend von der Übergangsamplitude in Glg. (5.1) lässt sich in diesen Ansatz das angepasste Vierer-Potential einsetzen. Wir gelangen so zu dem Ausdruck:

$$\begin{aligned} S_{fi}(x_+) &= -ie \sqrt{\frac{2\pi m^2}{\omega' p_0 p'_0 V^3}} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}'_\perp + \mathbf{p}_\perp) \delta(p'_+ + p_+ - k'_+) \\ &\times \int dx_+ \mathcal{S}(\varphi_k) \exp \left[i \int^{\varphi_k} d\tilde{\varphi} \frac{1}{\eta(1-r)} \frac{k' \cdot \Pi_{p'}}{m^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Dabei wurden die Abkürzungen

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{k \cdot k'}{m^2}, \\
r &= \frac{k \cdot p'}{k \cdot k'}, \\
\Pi_{p'} &= p' + k \frac{2ea \cdot p' - e^2 a^2}{2k \cdot p'}, \\
\mathcal{S}(\varphi_k) &= \bar{u}_{p',s'} \left(1 + \frac{e\mathcal{A}(\varphi_k)k}{2k \cdot p'} \right) \not{\epsilon}' \left(1 + \frac{ek\mathcal{A}(\varphi_k)}{2k \cdot p} \right) v_{p,s} \quad (5.31)
\end{aligned}$$

verwendet. Bei der Integration im Exponenten lässt sich an der Stelle ausnutzen, dass Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\Phi^{-1})$ vernachlässigt werden können. Ableitungen der Einhüllenden bezüglich der Phase können demzufolge ebenfalls vernachlässigt werden. Werden zudem die Größen

$$\begin{aligned}
\alpha_c \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right) &= \frac{\zeta f \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right)}{mr\eta(1-r)} p' \cdot \epsilon_1 = z \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right) \cos \varphi_p, \\
\alpha_s \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right) &= \frac{\zeta f \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right)}{mr\eta(1-r)} p' \cdot \epsilon_2 = z \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right) \sin \varphi_p, \\
z \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right) &= \sqrt{\alpha_c^2 \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right) + \alpha_s^2 \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right)} = \sqrt{\frac{\zeta^2 f^2 \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right)}{m^2 r^2 \eta^2 (1-r)^2} \mathbf{p}'^2}, \\
G \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right) &= \frac{1}{2r\eta(1-r)} \left(\frac{2r(k' \cdot p)}{m^2} \varphi_k + \int^{\varphi_k} d\tilde{\varphi} \zeta^2 f^2 \left(\frac{\tilde{\varphi}}{\Phi} \right) \right), \\
\varphi_p &= \arctan \left(\frac{\alpha_s \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right)}{\alpha_c \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right)} \right) \quad (5.32)
\end{aligned}$$

eingeführt, so nimmt die Übergangsamplitude folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
S_{fi}(x_+) &= -ie \sqrt{\frac{2\pi m^2}{\omega' p_0 p'_0 V^3}} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}'_{\perp} + \mathbf{p}_{\perp}) \delta(p'_+ + p_+ - k'_+) \\
&\quad \times \int dx_+ \mathcal{S}(\varphi_k) \exp \left[i \left(G \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right) - z \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right) \sin(\varphi_k - \varphi_p) \right) \right]. \quad (5.33)
\end{aligned}$$

Die Produktionswahrscheinlichkeit lässt sich auf üblichem Weg durch das Bilden des Betragsquadrats der Übergangsamplitude sowie anschließender Integration über \mathbf{p} und \mathbf{p}' bestimmen:

$$dW = |S_{fi}|^2 V^2 \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3}. \quad (5.34)$$

Die Relation $|2\pi\delta(p_+ + p'_+ - k'_+)|^2 = \frac{1}{2}L\delta(p_+ + p'_+ - k'_+)$ aus Ref. [101] findet dabei Anwendung. Um die unpolarisierte Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, wird über die Photonenpolarisation gemittelt und anschließend über die Leptonenspins s' und s mithilfe von Glg. (B.16) summiert. Die daraus folgende Spurbildung kann mithilfe der Glg. (B.8) bis (B.11) berechnet werden und zeigt eine Analogie zum Ausdruck, welchen wir im vorangegangenen Abschnitt 5.1.1 gefunden haben. Ähnlich zum Fall der unendlich ausgedehnten monochromatischen Laserwelle nutzen wir zur Vereinfachung der Ausdrücke die Darstellung über Besselfunktionen. Dazu können die Glg. (5.12) bis (5.14) verwendet werden. Es lässt sich im Folgenden mit der

Proportionalität

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\lambda, s_+, s_-} |\mathcal{S}(\varphi_k) \bar{\mathcal{S}}(\varphi'_k)| e^{-iz(\varphi_k) \sin(\varphi_k - \varphi_p) + iz(\varphi'_k) \sin(\varphi'_k - \varphi_p)} \\ & \propto \sum_{n, n'} \mathcal{T}(\varphi_k, n, \varphi'_k, n') e^{i(n-n')\varphi_p} e^{-in\varphi_k} e^{in'\varphi'_k} \end{aligned} \quad (5.35)$$

weiterarbeiten. Die Integration über \mathbf{p} kann mit Hilfe der δ -Funktionen erfolgen, wobei für die p_z -Integration die Umschreibung

$$\delta(p'_+ + p_+ - k'_+) = \frac{\varepsilon_p}{p_+} \delta(p_z - p_{z,0}), \quad (5.36)$$

mit $p_{z,0} = (2p'_+k'_+ - p_z p'_+ - k'_+{}^2)/(p'_+ - k'_+)$ verwendet wird. Die weitere Integration erfolgt in Zylinderkoordinaten. Die Abhängigkeit vom Azimutalwinkel φ_p steckt lediglich in der Exponentialfunktion $\exp(i(n-n')\varphi_p)$, was folglich als Integrationsbeitrag ein $2\pi\delta(n-n')$ mit sich führt. Die Doppelsumme reduziert sich daher auf die n -Abhängigkeit. Im nachfolgenden Schritt werden die Variablen $\theta = \varphi_k - \varphi'_k$ und $\phi = (\varphi_k + \varphi'_k)/2$ eingeführt. Zudem werden die Integrationen über φ_k und φ'_k (bzw. x_+ und x'_+) auf Integrationen über θ und ϕ überführt. An dieser Stelle erfolgt ebenfalls die Approximation, dass die Einhüllende $f(\varphi_k/\Phi) \approx f(\varphi'_k/\Phi) \approx f(\phi/\Phi)$ als lokal monochromatisch betrachtet wird. Diese Approximation ermöglicht es, die θ -Abhängigkeit auf die einer exponentiellen Abhängigkeit der Form

$$G(\varphi) - G(\varphi') - n\theta = \frac{1}{2r\eta(1-r)} \left[\frac{2r(k' \cdot p)}{m^2} + \zeta^2 f^2\left(\frac{\phi}{\Phi}\right) - 2r\eta(1-r)n \right] \theta \quad (5.37)$$

zu beschränken. Die Integration über θ liefert entsprechend eine weitere δ -Funktion, welche es durch geeignete Umformung ermöglicht über p'_{\perp} zu integrieren. Die transversale Impulskomponente wird dadurch auf den Wert

$$p'_{\perp,0} = \sqrt{2n\eta(1-r)m^2 - \zeta^2 f^2\left(\frac{\phi}{\Phi}\right)m^2 - m^2} \quad (5.38)$$

festgelegt. Aus dieser Definition lässt sich zudem eine Bedingung für r ablesen. So ergibt sich die Beschränkung auf den Bereich $r_- \leq r \leq r_+$ mit

$$r_{\pm}(\phi) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{n_0}{n}} \right). \quad (5.39)$$

Die Funktion $\mathcal{T}(\varphi_k, n, \varphi'_k, n')$ wird durch die lokale Approximation und die gewonnenen Ausdrücke in ihrer Form identisch zum Ausdruck $B_n(q', q, f(\phi/\Phi)\xi)$ aus Glg. (5.20), wobei die Argumente der Besselfunktionen phasenabhängig werden, sodass

$$\begin{aligned} z(\phi) &= \frac{2n\xi |f(\phi/\Phi)|}{\sqrt{1 + \zeta^2 f^2(\phi/\Phi)}} \\ &\times \left[\frac{(1 + \zeta^2 f^2(\phi/\Phi))m^2}{2n(k \cdot k')(1-r)r} \left(1 - \frac{(1 + \zeta^2 f^2(\phi/\Phi))m^2}{2n(k \cdot k')(1-r)r} \right) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Wird die verbleibende Integration nach p'_z nun über die Größe r ausgedrückt, ergibt sich insgesamt für die Produktionswahrscheinlichkeit der Ausdruck

$$W(k, k') = \frac{e^2 m^2}{k \cdot k'} \int d\phi \sum_{n=n_0(\phi)}^{\infty} \int_{r_-(\phi)}^{r_+(\phi)} dr B_n(q', q, f(\phi/\Phi)\xi). \quad (5.41)$$

Die Anzahl an minimal notwendigen Laserphotonen ist nun ebenfalls abhängig von ϕ , da sich die Laserintensität langsam über die Puls-Einhüllende verändert:

$$n_0(\phi) \geq \frac{2m^2(1 + \zeta^2 f^2(\phi/\Phi))}{k \cdot k'}. \quad (5.42)$$

Auch die effektiven Impulse q^μ , q'^μ und die effektive Masse m_* werden ϕ -abhängig durch das Austauschen von $\zeta^2 \rightarrow \zeta^2 f^2(\phi/\Phi)$. Die Frequenz ω beschreibt währenddessen nun die Zentralfrequenz des Pulses, welcher durch die endliche Ausdehnung eine Bandbreite an Frequenzen beinhaltet. Dieses Spektrum ist für lange Pulsdauern jedoch sehr schmal. Aus diesem Grund weichen für endliche Pulsdauern die Energiegrenzen als auch die Grenze für den maximalen Winkel, welche für unendlich ausgedehnte monochromatische Laserwellen gelten, auf. Dennoch bleibt sie auch für lange Pulsdauern physikalisch relevant, wie wir in Abschnitt 5.2 sehen werden.

Eine Diskussion über die effektive Masse in kurzen Laserpulsen wird in Ref. [107] gegeben.

Während Interferenzeffekte durch die Verwendung der lokal monochromatischen Approximation insbesondere zwischen Pulsanfang und Pulsende vernachlässigt werden, so werden dennoch die schnell oszillierenden Bereiche des Pulses beibehalten und mit berücksichtigt. Wie sich die zeitlich endliche Ausdehnung eines Pulses auf die Energie- und Winkelverteilung der erzeugten Paare auswirkt, soll im folgenden Abschnitt beschrieben werden. Dazu wird Glg. (5.41) numerisch ausgewertet und zuvor mit Hilfe geeigneter Approximationen auf Energie- und Winkelspektrum überführt. Zur Bestimmung der Energieverteilung lässt sich $\cos \vartheta_{p'} \approx 1$ annehmen. Das führt zu der Abhängigkeit

$$r \approx \frac{p'_0 + \sqrt{p'_0{}^2 - m^2}}{2\omega'}. \quad (5.43)$$

Für die Winkelverteilung nutzen wir hingegen die Näherung

$$\omega' r \approx \sqrt{m^2 + \frac{p'^2_{\perp}}{\sin^2 \vartheta_{p'}}}. \quad (5.44)$$

Bei der numerischen Auswertung ist darauf zu achten, dass sowohl die Photonenanzahl als auch r von der Phase abhängig sind. Entsprechend muss für jeden Phasenpunkt der Bereich von r bzw. $\varepsilon_{p'}$ und $\vartheta_{p'}$ angepasst werden.

5.1.3 BERÜCKSICHTIGUNG DER BREMSSTRAHLUNG

Das einfallende hochenergetische γ -Photon, welches durch Kollision mit den entgegenlaufenden Laserphotonen zur Paarproduktion führt, wird durch Bremsstrahlung erzeugt. Diese Bremsstrahlung muss nun in die bisherige monochromatische Rechnung mit eingebunden werden. Dazu integrieren wir, analog zu Ref. [108] die Rate aus Glg. (5.19) (im anderen Fall die Wahrscheinlichkeit aus Glg. (5.41)), welche wir durch die Verteilungsfunktion der Bremsstrahlungsphotonen gewichten, über den Photonenimpuls k' . Die gemittelte Rate nimmt somit die folgende Form an:

$$\bar{R}(k) = \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} w_{\gamma}(k') R(k, k'). \quad (5.45)$$

Die Verteilungsfunktion der Bremsstrahlungsphotonen wird in Kugelkoordinaten durch

$$w_{\gamma}(k') = \frac{(2\pi)^3 I_{\gamma}(f, \ell)}{\omega'^2 \sin(\theta_{k'}) E_0} \Theta(E_0 - \omega') \delta(\theta_{k'} - \vartheta_{k'}) \delta(\varphi_{k'}) \quad (5.46)$$

beschrieben. Der Parameter E_0 bezeichnet die anfängliche kinetische Energie des einlaufenden Elektrons, welches für die Erzeugung der Bremsstrahlungsphotonen verantwortlich ist. Der Winkel $\theta_{k'}$ bezeichnet die polare Ausbreitungsrichtung der Bremsstrahlungsphotonen und Θ kennzeichnet die Heaviside-Funktion. $I_\gamma(\mathfrak{f}, \ell)$ ist das Photonenfrequenzspektrum

$$I_\gamma(\mathfrak{f}, \ell) \approx \frac{(1 - \mathfrak{f})^{\frac{4}{3}\ell} - e^{-\frac{7}{9}\ell}}{\mathfrak{f}(\frac{7}{9} + \frac{4}{3}\ln(1 - \mathfrak{f}))}, \quad (5.47)$$

welches in der vollständigen Abschirmungsapproximation ermittelt wurde und in Ref. [49] zu finden ist. Es hängt von der normierten Targetdicke $\ell = L_T/L_{\text{rad}}$ ab. Hier bezeichnen L_{rad} die Strahlungslänge des Targetmaterials und L_T die tatsächliche Targetbreite. Durch L_{rad} ist $I_\gamma(\mathfrak{f}, \ell)$ indirekt abhängig von der Kernladungszahl Z des verwendeten Targetmaterials. Zudem ist Glg. (5.47) auf die Targetdicke $0.5 \leq \ell \leq 2$ begrenzt. Für dünnere Targets lernen wir eine weitere Abschätzung in Kapitel 6 kennen. Das Frequenzspektrum ist ebenfalls abhängig von der normierten Photonenenergie $\mathfrak{f} = \omega'/E_0$. Es weist für $\mathfrak{f} \rightarrow 0$ eine unphysikalische Divergenz auf. Die Paarproduktionsrate verschwindet jedoch für diesen Grenzfall und nimmt mit kleiner werdender Energie des γ -Photons ab. Somit nimmt der Teil um $\mathfrak{f} \approx 0$ keinen Einfluss auf die gemittelte Rate. Es zeigt sich, dass der Bereich um $\mathfrak{f}_{\text{min}} \approx 0.2$ eine gute Abschätzung für eine untere Grenze liefert. Des Weiteren muss beachtet werden, dass sich während der Integration über \mathfrak{f} die minimal notwendige Laserphotonenanzahl ändert, da diese, wie in Glg. (5.21) ersichtlich, von ω' abhängig ist.

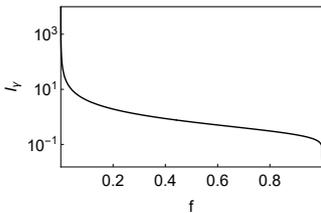


Abbildung 5.1: Frequenzspektrum $I_\gamma(\mathfrak{f}, \ell = 0.5)$ der Bremsstrahlung in Abhängigkeit von \mathfrak{f} .

Die hier betrachteten einlaufenden Elektronen sind hoch-relativistisch. Aus diesem Grund ist die Richtung der einlaufenden Elektronen ebenfalls die präferierte Richtung der emittierten Bremsstrahlungsphotonen. Im Falle einer komplett gegenläufigen Kollision zwischen Laserphotonen und Bremsstrahlungsphoton gilt $\theta_{k'} = \pi$. Über diese Annahmen kommen wir nach Integration über die Winkel $\varphi_{k'}$ und $\theta_{k'}$ auf die gemittelte Rate

$$\bar{R}(k) = \int_{\mathfrak{f}_{\text{min}}}^1 d\mathfrak{f} R(k, k') I_\gamma(\mathfrak{f}, \ell). \quad (5.48)$$

Im Falle eines endlichen Laserpulses lässt sich die Produktionswahrscheinlichkeit ebenfalls über die Frequenz der Bremsstrahlungsphotonen mitteln. Indem wir in Glg. (5.48) die Rate $R(k, k')$ durch die Wahrscheinlichkeit $W(k, k')$ tauschen, erhalten wir eine Gleichung für $\bar{W}(k)$. Dadurch, dass bei der Berechnung mit der endlich gepulsten ebenen Welle eine weitere Integration über die Phase des Lasers vorhanden ist, wird hier im Gegensatz zum Fall der unendlich ausgedehnten, monochromatischen Laserwelle keine Rate, sondern eine Wahrscheinlichkeit bestimmt.

Um aus den hier bestimmten Raten die Anzahl produzierter Elektron-Positron-Paare pro einlaufendem Elektron zu bestimmen, muss die Rate aus Glg. (5.48) mit der Wechselwirkungszeit, dem Volumen des Laserfokus und der γ -Photonendichte multipliziert werden. Letztere hängt, wie in Ref. [108] gezeigt wird, von der Divergenz der Bremsstrahlung und dem Abstand des Konverterziels zum Wechselwirkungspunkt ab.

5.2 DISKUSSION DER ERGEBNISSE

Die Auswertung der zuvor bestimmten Spektren erfolgt im Übergangsregime von perturbativ zu nicht-perturbativ. Daher wird der Intensitätsparameter im Bereich $0.2 \leq \xi \leq 3.0$ variiert. Für die verwendeten Photonenfrequenzen werden zwei unterschiedliche Varianten betrachtet. Zum einen werden die geplanten Parameter aus dem LUXE-Experiment aus Ref. [45] verwendet. Hier beträgt die Energie des anfänglich einlaufenden Bremsstrahlung generierenden Elektrons $E_0 = 16.5 \text{ GeV}$ und die Laserphotonenfrequenz beträgt $\omega = 1.5 \text{ eV}$. Um die Paarproduktcharakteristiken auch für größere Frequenzen zu untersuchen, werden zum anderen zusätzlich die Parameter $E_0 = 70 \text{ GeV}$ und $\omega = 2.4 \text{ eV}$ verwendet. Solch große Elektronenenergien sind dabei nicht abwegig, wenn die bisher erreichten Werte bei CERN aus den Ref. [109, 110] in Betrachtung genommen werden, welche zeigen, dass durchaus Elektronenenergien bis zu 100 GeV im möglichen Bereich liegen. Für die Berechnungen in diesem Abschnitt, welche das Bremsstrahlungsspektrum mit berücksichtigen, beträgt die Targetdicke $\ell = 0.5$.

Bevor wir mit der Auswertung der Ergebnisse fortfahren, sei an dieser Stelle angemerkt, dass auch das zweite hier beschriebene Szenario im LUXE-Experiment umsetzbar wäre. Würde eine Targetfolie mit dem vorgesehenen optischen Laser bestrahlt werden, welcher eine maximale Intensität von über 10^{20} W/cm^2 aufweist [111], könnten höhere Harmonische generiert werden. Dabei wandelt der Laserstrahl die feste Zieloberfläche in ein Plasma um, dessen sich relativistisch bewegende Elektronen das Laserlicht reflektieren und so für die Erzeugung höherer Harmonischer der Laserwellenlänge sorgen, wie in den Ref. [112, 113] beschrieben. Wenn die 7. Harmonische extrahiert wird und mit dem Bremsstrahl kollidiert, dann erreicht das Produkt ωE_0 praktisch den gleichen Wert wie im zweiten Szenario und eröffnet so die Aussicht, die dort auftretenden Effekte und die effektiven-Masse-Signaturen nachzuweisen. Dabei bezieht sich ω nun auf die Frequenz der 7. Harmonischen. Die Ausnutzung noch höherer Harmonischer könnte auch den Weg ebnen, um den linearen Breit-Wheeler-Prozess zu betrachten.

	$E_0 = 16.5 \text{ GeV}$ $\omega = 1.5 \text{ eV}$		$E_0 = 70.0 \text{ GeV}$ $\omega = 2.4 \text{ eV}$	
ξ	$\bar{R} [\text{s}^{-1}]$	$\omega'_{\text{eq}} [\text{GeV}]$	$\bar{R} [\text{s}^{-1}]$	$\omega'_{\text{eq}} [\text{GeV}]$
0.2	2.5×10^{-9}	14.6	2.2×10^8	44.4
0.4	1.5×10^{-2}	13.9	3.8×10^9	39.6
0.7	6.4×10^2	13.1	3.9×10^{10}	35.2
1.0	1.5×10^5	12.5	1.4×10^{11}	31.7
1.5	2.2×10^7	11.6	5.2×10^{11}	27.8
3.0	7.7×10^9	9.8	3.2×10^{12}	21.5

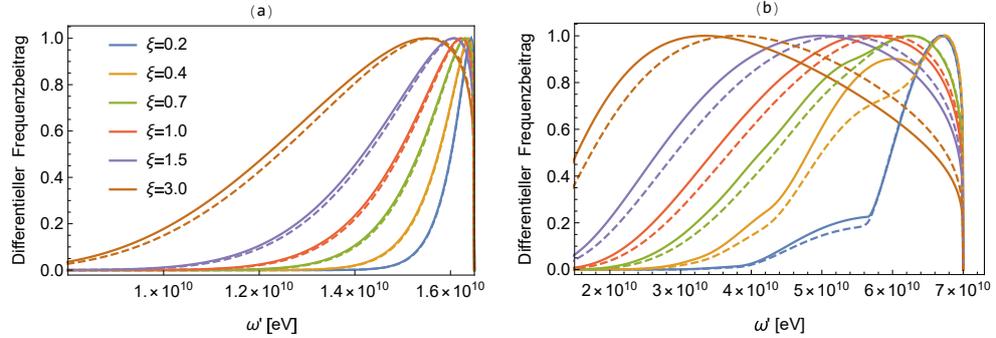
Tabelle 5.1: Die totale Rate \bar{R} , welche über das Bremsstrahlungsspektrum gemittelt wurde, wird für verschiedene ξ -Werte gezeigt. Die angegebenen Werte für ω und E_0 zeigen die verwendete Energie der Laserphotonen und die anfängliche Elektronenenergie, um die Bremsstrahlung zu generieren. Zusätzlich gibt ω'_{eq} die γ -Photonenenergie an, bei der die monochromatische Rate R denselben Wert annimmt, wie die gemittelte Rate \bar{R} . Die Tabelle entstammt Ref. [105].

In Tabelle 5.1 werden die totalen, über das Bremsstrahlungsspektrum gemittelten Produktionsraten für die zwei möglichen Parametersätze gezeigt. Zudem wird der Wert von ω'_{eq} bestimmt, welcher der γ -Photonen-Frequenz entspricht, welche notwendig ist, damit die monochromatische Rate $R(k, k')$ denselben Beitrag liefert wie die über die Bremsstrahlung gemittelte Rate. Für den ersten Parametersatz fällt auf, dass die gemittelte Rate mit zunehmendem ξ steil anwächst. Dies lässt

sich verstehen, wenn die Laserfeldstärke im Lorentz-geboosteten Bezugssystem betrachtet wird. Dort beträgt sie $\mathcal{E}' \sim (E_0/m)\mathcal{E}_0$. Für den ersten Parametersatz, welcher sich am LUXE-Experiment orientiert, bleibt die Feldstärke auch für $\xi = 3.0$ in einem Bereich, der deutlich unter der Schwinger-Feldstärke $F_{\text{cr}} = m^2/|e|$ liegt und das Verhältnis beider Feldstärken liegt bei etwa $\mathcal{E}'/F_{\text{cr}} \approx 0.3$. Für den zweiten Parametersatz verhält es sich anders: Hier gilt $\mathcal{E}' \sim F_{\text{cr}}$, was zu viel größeren Raten führt, aber auch zu einem geringeren Ratenanstieg mit zunehmendem ξ . Bei den äquivalenten Frequenzen ω'_{eq} verhält es sich so, dass sich diese mit zunehmendem ξ verringern. Da ein größerer ξ -Wert die Absorption einer größeren Anzahl von Laserphotonen erleichtert und somit niedrigere γ -Photonenenergien ausreichen, um Paare zu erzeugen, lässt sich auch dieses Verhalten gut verstehen.

In den folgenden Abschnitten werden verschiedene differentielle Raten betrachtet. Wie Tabelle 5.1 zu entnehmen ist, variiert die Größenordnung der gezeigten Raten in Abhängigkeit von ξ stark. Um einen Vergleich der differentiellen Raten zu vereinfachen, bietet es sich daher an, alle Graphen auf den Wert 1.0 zu normieren.

Abbildung 5.2: Als durchgezogene Kurven wird die differentielle Rate $d\bar{R}/d\omega'$ als Funktion der γ -Photonenenergie für eine unendlich ausgedehnte Laserwelle gezeigt. Die gestrichelten Kurven zeigen derweil die differentielle Wahrscheinlichkeit $d\bar{W}/d\omega'$ als Funktion der γ -Photonenenergie für einen 11-zyklischen \cos^2 -förmigen Laserpuls. Die Intensitätsparameter variieren zwischen $\xi = 0.2, 0.4, 0.7, 1.0, 1.5$ und 3.0 und werden durch die angegebene Farbcodierung unterschieden. In Abbildung (a) werden die Graphen für $E_0 = 16.5 \text{ GeV}$ und $\omega = 1.5 \text{ eV}$ gezeigt, während sich Abbildung (b) auf die Parameter $E_0 = 70.0 \text{ GeV}$ und $\omega = 2.4 \text{ eV}$ bezieht. Alle Kurven wurden auf 1 normiert, um einen Vergleich zu vereinfachen. Die Originalabbildung befindet sich in Ref. [105].



In Abbildung 5.2 wird die differentielle Rate $d\bar{R}/d\omega'$ als Funktion der Energie der Bremsstrahlungsphotonen ω' gezeigt. Es wird deutlich, dass mit steigender Intensität eine größere Anzahl von Bremsstrahlungsphotonen mit tendenziell geringeren Energien zur Rate beitragen. Dieses Verhalten lässt sich ebenfalls in Tabelle 5.1 für ω'_{eq} beobachten. In diesem Parameterbereich steigt, für zunehmende Werte von ω' , die monochromatische Rate $R(k, k')$. Währenddessen nimmt das Bremsstrahlungsspektrum mit zunehmenden ω' ab, wie wir in Abbildung 5.1 sehen können. Das Zusammenspiel dieser beiden Argumente bestimmt den jeweiligen Bereich an ω' , welcher den Hauptbeitrag zur totalen gemittelten Rate leistet. Für $\xi \ll 1$ liefern Bremsstrahlungsphotonen mit einer Energie nahe E_0 den Hauptbeitrag. Auf diesem Wege wird die minimal notwendige Anzahl an Laserphotonen minimiert. Wird ξ vergrößert, so wird das Spektrum $d\bar{R}/d\omega'$ verbreitert und sein Maximum verschiebt sich hin zu kleineren Bremsstrahlungsenergien. Dieses Verhalten deutet klar auf den Übergang in das nicht-perturbative Regime hin, in welchem eine größere Anzahl von Laserphotonen über n_0 signifikant zur Rate beiträgt [114]. Um diese Verschiebungen besser zu verstehen, wird zusätzlich die mittlere γ -Photonenenergie $\langle \omega' \rangle = \frac{1}{\bar{R}} \int \frac{d\bar{R}}{d\omega'} \omega' d\omega'$ bestimmt, welche zur Rate \bar{R} beiträgt. Diese nimmt für $\xi = 0.2, 1.0$ und 3.0 die Werte $\langle \omega' \rangle = 16.1, 15.2$ und 13.7 GeV an und zeigt somit, dass die mittlere γ -Photonenenergie für zunehmende Intensitätsparameter abnimmt.

Über das oben beschriebene Verhalten der Graphen hinausgehend, lassen sich zusätzlich in Abbildung 5.2 (b) für $E_0 = 70 \text{ GeV}$ stufenförmige Strukturen für $\xi < 1$

auffinden. Diese können auf die Photonen zurückgeführt werden, welche in diesem Regime die Hauptbeiträge liefern. Beispielsweise wechselt die minimal notwendige Photonenzahl von 3 auf 2 bei $\omega' \approx 57 \text{ GeV}$ und $\xi = 0.2$. Im Graphen für $\xi = 0.4$ findet dieser Wechsel der minimal notwendigen Photonenzahl bei $\omega' \approx 63 \text{ GeV}$ statt und ist auch hier durch ein Abknicken der Kurve sichtbar. Ein Vergrößern der Laserintensität und ein damit verbundenes weiteres Annähern an das nicht-perturbative Regime mit $\xi \gtrsim 1$ führt dazu, dass diese abknickenden, stufenartigen Strukturen zunehmend verloren gehen bis sie komplett verschwunden sind. In Abbildung 5.2 (a) ist ein solches stufenweises Verhalten der Funktion nicht auffindbar, da die Anzahl der teilnehmenden Photonen hier von vornherein größer ist.

Zusätzlich zu den berechneten Raten für unendlich ausgedehnte Laserwellen werden hier die differentiellen Wahrscheinlichkeiten $d\bar{W}/d\omega'$ gezeigt, welche in Abschnitt 5.1.2 über die LMA berechnet werden. Die Funktion der Einhüllenden ist zunächst durch

$$f(\phi/\Phi) = \cos^2(\phi/\Phi) \quad (5.49)$$

gegeben. Dabei wird die Anzahl der Laserzyklen auf $N = 11$ festgelegt. Es lässt sich gut erkennen, dass sich der differentielle Frequenzbeitrag durch die Berücksichtigung einer endlichen Pulsdauer nur leicht ändert. Für $E_0 = 70 \text{ GeV}$ bleibt die Form der Kurven fast unverändert. Die Ausnahme bildet der Bereich $\omega' \approx 50 - 65 \text{ GeV}$ für $\xi = 0.4$, wo ein deutlicherer Unterschied sichtbar ist. Zudem kann eine kleine Verschiebung zu höheren Frequenzen ω' für $\xi \gtrsim 1$ beobachtet werden. Für die LUXE-Parameter stimmen die LMA-Kurven fast komplett mit denen der unendlich ausgedehnten Laserwelle überein.

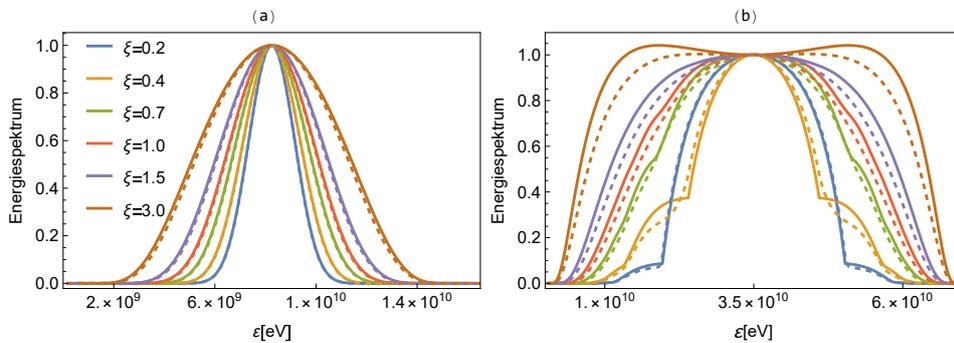


Abbildung 5.3: Als durchgezogene Linie wird die differentielle Rate $dR/d\varepsilon_q$ als Funktion der Positronenenergie ε_q für eine unendlich ausgedehnte Laserwelle gezeigt. Die gestrichelten Kurven zeigen die differentielle Wahrscheinlichkeit $dW/d\varepsilon_p$ für einen 11-zyklischen \cos^2 -förmigen Laserpuls. Die Intensitätsparameter variieren wie in Abb. 5.2 zwischen $\xi = 0.2, 0.4, 0.7, 1.0, 1.5$ und 3.0 und werden durch die angegebene Farbcodierung unterschieden. In Paneel (a) werden die Graphen für $\omega' = 16.5 \text{ GeV}$ und $\omega = 1.5 \text{ eV}$ gezeigt, während sich Paneel (b) auf die Parameter $\omega' = 70.0 \text{ GeV}$ und $\omega = 2.4 \text{ eV}$ bezieht. Alle Kurven wurden auf 1 normiert, um einen Vergleich zu vereinfachen. Die Originalabbildung stammt aus Ref. [105].

Als nächstes werden die energetisch differentiellen Produktionsraten bezüglich der Energie ε_q der entstandenen Positronen betrachtet, wobei die differentiellen Raten der Elektronen identisch sind. Die Größe ε_q ergibt sich dabei in einem unendlichen Laserwellenmodell von selbst. Die entsprechenden energetisch differentiellen Wahrscheinlichkeiten für einen endlichen Laserpuls werden in Abhängigkeit der freien Positronenenergie ε_p angegeben. Die folgenden Abbildungen werden zeigen, dass die entstandenen Teilchen hauptsächlich mit sehr großen Energien emittiert werden, welche in etwa von der Größenordnung $\varepsilon_q \approx \omega'/2 \sim 10^{10} \text{ eV}$ sind. Zudem ist die Emissionsrichtung mit $\vartheta_q \approx 0$ entgegengesetzt zur Einlaufrichtung der Laserwelle. Entsprechend ist der Unterschied $\sim m^2 \xi^2 / \omega' \lesssim 10^2 \text{ eV}$ zwischen der gedressten Energie ε_q und der asymptotischen freien Energie ε_p sehr klein und praktisch vernachlässigbar für unsere gewählten Parameter. Daher ist es im Folgenden

durchaus vertretbar, die Energiespektren einer unendlichen Laserwelle mit denen von endlichen Laserpulsen in einem Graphen zu zeigen und zu vergleichen.

In Abbildung 5.3 werden die monochromatischen differentiellen Raten, welche als durchgezogene Kurven abgebildet sind, für ein festes ω' , also ohne Mittelung über das Bremsstrahlungsspektrum, gezeigt. In diesem Fall ist das Energiespektrum immer symmetrisch bezüglich des Punkts $\varepsilon_q \approx \omega'/2$, wo zudem das Maximum des Spektrums liegt. Lediglich für $\omega' = 70 \text{ GeV}$ entwickelt sich mit größer werdendem ζ ein symmetrisches Paar von Maxima zu den Seiten, was wiederum auf ein nicht-perturbatives Phänomen oberhalb der Schwelle hinweist, bei dem die Laserphotonenzahl deutlich über n_0 den Hauptbeitrag liefert. Dieses Verhalten bleibt für $\omega' = 16.5 \text{ GeV}$ aus. In beiden Abbildungen lässt sich jedoch beobachten, dass die Verteilung mit anwachsendem ζ breiter wird. In Paneel (b) lassen sich zusätzlich für kleine ζ -Werte die einzelnen n -Beiträge beobachten. So lässt sich bei $\zeta = 0.2$ der Bereich von etwa 20 GeV bis 50 GeV ausmachen, welcher durch ein dortiges Abknicken der Kurve sichtbar wird. Dieses Gebiet entspricht dem Energiebereich, der nach Glg. (5.27) für die minimale Photonenzahl $n_0 = 2$ erlaubt ist. Für die nächst höhere Photonenzahl $n = 3$ ergibt sich ein erlaubter Bereich von etwa $\approx 11 \text{ GeV}$ bis $\approx 59 \text{ GeV}$. Auch an diesen Stellen lässt sich in der Abbildung ein stufenartiges Verhalten der Kurve ausmachen. Die Stufen sind immer symmetrisch um das Maximum liegend platziert. Ihre Position ist eine Charakteristik der effektiven Masse m_* , welche vom Intensitätsparameter ζ abhängig ist. Dies erklärt den Umstand, weshalb die Position der Stufen für ein größeres ζ , aber gleicher Photonenzahl nach innen wandert. Bei $\zeta = 0.4$ liegen die Stufen entsprechend bei ungefähr 24 GeV und 46 GeV . Solche Charakteristiken der effektiven Masse sind auch in anderen Feldkonfigurationen gefunden worden, wie beispielsweise in Ref. [115]. Ebenso finden sich Kennzeichen der effektiven Masse für die Compton-Streuung [107, 116, 117].

Neben den differentiellen Raten werden in Abbildung 5.3 zusätzlich die energetisch differentiellen Wahrscheinlichkeiten für einen endlichen Laserpuls als gestrichelte Kurven gezeigt. Diese beziehen sich auf die freie Positronenenergie ε_p , welche bei einem Laserpuls, bei dem der effektive Impuls phasenabhängig ist, die geeignetere Größe darstellt. Für unsere Parameterwahl lässt sich jedoch festhalten, dass eine endliche Laserpulsdauer den Verlauf der Spektren nicht stark ändert. Insbesondere in Abbildung 5.3 (a) liegen die gestrichelten Kurven fast vollständig auf den durchgezogenen.

Als nächstes werden Energiespektren betrachtet, welche zusätzlich über das Bremsstrahlungsspektrum gemittelt worden sind. Diese werden in Abbildung 5.4 für unsere zwei verschiedenen Szenarien gezeigt. Für beide kann beobachtet werden, dass sich die Position des Maximums der Rate mit zunehmender Laserintensität zu niedrigeren Positronenenergien hin verschiebt. Wie sich in Abbildung 5.2 bereits gezeigt hat, spielen mit zunehmender Laserintensität ebenfalls die Bremsstrahlungsphotonen mit niedrigerer Energie eine wichtigere Rolle, was mit den jetzigen Beobachtungen übereinstimmt. Die Gesamtenergie eines Paares erfüllt die Beziehung $\varepsilon_q + \varepsilon_{q'} \approx \omega'$, dennoch liegen die Maxima von $d\bar{R}/d\varepsilon_q$ nicht bei der Hälfte des Wertes von ω'_{max} , wo die entsprechende Verteilung $d\bar{R}/d\omega'$ ein Maximum aufweist, sondern etwas darunter. Dieses Verhalten lässt sich durch zwei Argumente stützen. Zunächst führt jedes ω' gemäß Glg. (5.27) zu einem unterschiedlichen Bereich an Po-

sitronenenergien ε_q . Außerdem liefern die Bremsstrahlungsphotonen mit $\omega' < \omega'_{\max}$ größere Beiträge zur Rate als diejenigen mit $\omega' > \omega'_{\max}$, wie sich ebenfalls der Abbildung 5.2 entnehmen lässt. Diese Eigenschaft ist für große Intensitäten besonders stark ausgeprägt, sodass sich im Energiespektrum die Verschiebung des Maximums für diese Intensitäten besonders deutlich zeigt.

Bei genauerer Analyse von Abbildung 5.4 (b), lässt sich erkennen, dass Teile der Stufen-förmigen Strukturen, welche sich im monochromatischen Fall gezeigt haben auch nach Mittelung über die Bremsstrahlung erhalten bleiben. So ist beispielsweise der Übergang für $\xi = 0.2$ und $\xi = 0.4$ von 3 auf 2 Laserphotonen weiterhin durch ein Abknicken der Kurven sichtbar.

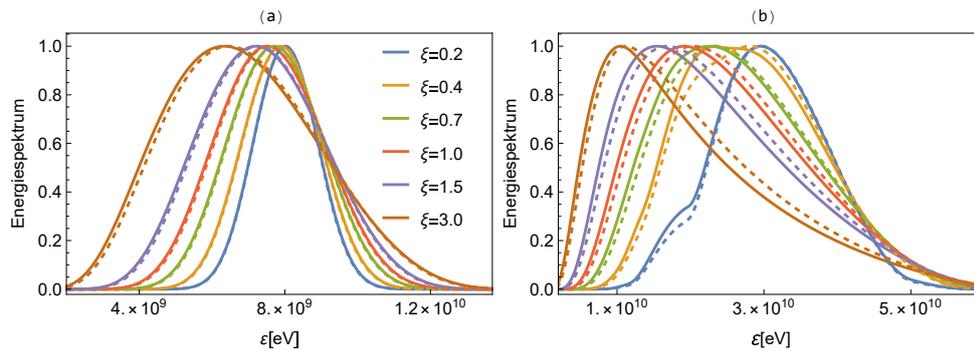


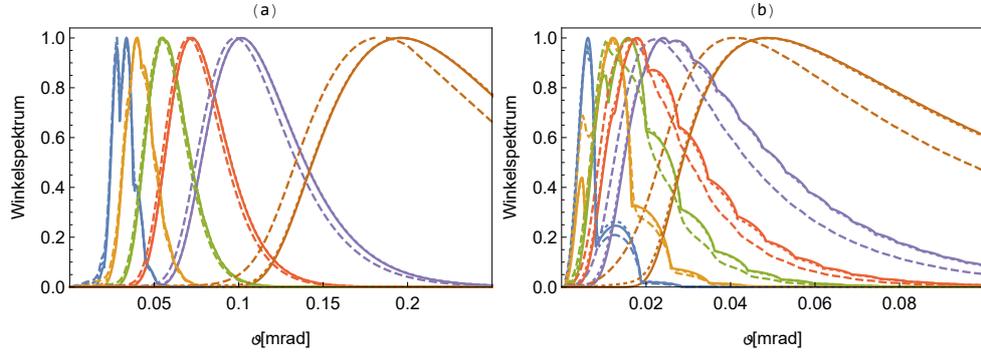
Abbildung 5.4: Als durchgezogene Linie wird die differentielle Rate $d\dot{R}/d\varepsilon_q$ als Funktion der Positronenenergie ε_q für eine unendlich ausgedehnte Laserwelle gezeigt. Die gestrichelte Linie zeigt derweil die differentielle Wahrscheinlichkeit $d\dot{W}/d\varepsilon_p$ für einen 11-zyklischen \cos^2 -förmigen Laserpuls. In Panel (a) werden die Graphen für $E_0 = 16.5 \text{ GeV}$ und $\omega = 1.5 \text{ eV}$ gezeigt, während sich Panel (b) auf die Parameter $E_0 = 70.0 \text{ GeV}$ und $\omega = 2.4 \text{ eV}$ bezieht. Die Variation des Intensitätsparameters ξ und die Normierung sind wie in den vorherigen Abbildungen gewählt. Diese Abbildung wurde bereits in Ref. [105] veröffentlicht.

Abbildung 5.4 zeigt ebenfalls die energetisch differentiellen Wahrscheinlichkeiten für einen endlichen Laserpuls. Ähnlich zu den monochromatischen Verteilungen in Abbildung 5.3 ändern sich durch die Berücksichtigung einer endlichen Pulslänge die Verteilungen nur geringfügig. Insbesondere für die LUXE-Parameter sind quasi keine Unterschiede auszumachen. Dies steht im Einklang mit den Ergebnissen zur Paarproduktion aus den Ref. [103, 118, 119]. In diesen wird gezeigt, dass eine monochromatische Beschreibung des Feldes bereits für Pulsdauern ab $N \gtrsim 5$ eine sehr gute Näherung darstellt. Vergleichen wir Abbildung 5.3 (b) und 5.4 (b), lässt sich zudem feststellen, dass die zusätzliche Mittelung der Energiespektren über das Bremsstrahlungsspektrum dazu führt, dass die endliche Pulslänge einen noch kleineren Effekt auf die Energieverteilung ausübt. Diese Beobachtung lässt sich dadurch begründen, dass die Frequenzbandbreite, welche aus der endlichen Pulsdauer hervorgeht, von der Größenordnung $\Delta\omega \approx 0.1 \text{ eV}$ ist, währenddessen die Bremsstrahlung eine spektrale Breite im GeV-Bereich hat. So werden durch die Mittelung über dieses sehr breite Spektrum jegliche Strukturen viel stärker verwischt, als es die endliche Dauer des Laserpulses bewirken kann.

In Abbildung 5.5 werden die differentiellen Produktionsraten bezüglich des Winkels ϑ_q , welcher zwischen dem Positronenimpuls \mathbf{q} sowie dem Wellenvektor \mathbf{k}' des γ -Photons liegt, gezeigt. Für die Winkelspektren lassen sich dabei sehr spezifische Eigenschaften ausmachen. Zunächst lässt sich festhalten, dass die Elektron-Positron-Paare mit einem Winkel nahe $\vartheta_q = 0$ emittiert werden, da die Energie der Bremsstrahlungsphotonen um ein Vielfaches größer ist als die Energie, welche vom entgegenlaufenden Laserfeld absorbiert wird. Dennoch nimmt der transversale Positronenimpuls mit zunehmender Intensität zu und die Breite der Winkelverteilung vergrößert sich. Es spiegelt sich hier wider, dass mit größerem ξ -Wert mehr

Laserphotonen am Prozess beteiligt sind. Dies ließ sich auch in Abbildung 5.2 für die differentielle Rate $d\bar{R}/d\omega'$ beobachten.

Abbildung 5.5: Differentielle Paarproduktionsraten $dR/d\theta_q$ und differentielle Paarproduktionswahrscheinlichkeiten $dW/d\theta_p$ werden in Abhängigkeit vom polaren Emissionswinkel des Positrons gezeigt. Für die differentielle Wahrscheinlichkeit zeigen wir die Ergebnisse der LMA-Berechnung mit $N = 11$ und $f(\phi/\Phi) = \cos^2(\phi/\Phi)$ (gestrichelte Linie) sowie mit der *Flat-Top*-Einhüllenden (gepunktete Linie). Paneel (a) bezieht sich auf $\omega = 1.5\text{eV}$ und $E_0 = 16.5\text{GeV}$, und Paneel (b) auf $\omega = 2.4\text{eV}$ und $E_0 = 70.0\text{GeV}$. Es gilt die gleiche Farbkodierung und Normierung wie in den Abbildungen 5.2 bis 5.4. Die gezeigte Abbildung entstammt Ref. [105].



Ähnlich zu den gefundenen Eigenschaften der Energiespektren, lassen sich auch hier für kleinere ξ -Werte in der Winkelverteilung sehr charakteristische Strukturen beobachten. Diese sind geprägt von auftretenden Minima und Maxima, welche auf die entsprechende Anzahl an absorbierten Laserphotonen zurückgeführt werden können. Die Strukturen lassen sich besser verstehen, wenn wir uns vor Augen halten, dass für gegebene Werte von ω' und n die monochromatische Rate $dR/d\theta_q$ ein divergentes Maximum bei ϑ_{\max} aus Glg. (5.26) aufweist. Jedoch werden diese Singularitäten endlich, wenn über das Bremsstrahlungsspektrum gemittelt wird. Dementsprechend resultiert beispielsweise der Peak bei $\theta_q \approx 5.7\ \mu\text{rad}$ für $\xi = 0.2$ in Paneel (b) hauptsächlich aus $n = 2$, wobei sein Zentrum der Photonenergie $\omega' \approx 62.5\text{GeV}$ zuzuordnen ist. Die Verknüpfung des Winkels θ_q und der Anzahl absorbierten Photonen zur γ -Photonenergie ω' ergibt sich aus der Beziehung

$$\omega' = \frac{m_x^2 n \omega (1 + \cos^2 \vartheta_q)}{4n^2 \omega^2 - m_x^2 \sin^2 \vartheta_q} + \sqrt{\frac{m_x^4 n^2 \omega^2 (1 + \cos^2 \vartheta_q)^2}{(4n^2 \omega^2 - m_x^2 \sin^2 \vartheta_q)^2} + \frac{m_x^2 n^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta_q}{4n^2 \omega^2 - m_x^2 \sin^2 \vartheta_q}}, \quad (5.50)$$

welche aus Glg. (5.26) folgt. Der benachbarte Peak bei $\theta_q \approx 12.9\ \mu\text{rad}$ stammt hingegen hauptsächlich aus der Absorption von $n = 3$ Photonen. Die Position der Minima zwischen den einzelnen Peaks stimmt mit der Position der oberen Begrenzung ϑ_{\max} der einzelnen Photonen überein. In diesem Fall ist das erste Minimum bei $\vartheta_{\min} \approx 7.7\ \mu\text{rad}$ für $\omega' = E_0$ und $n = 2$. So stellt jedes einzelne Minimum eine Möglichkeit dar, die n -Übergänge zu bestimmen. Wie bei der Energieverteilung ergibt sich somit auch hier die Möglichkeit die effektive Masse zu beobachten. In Abhängigkeit vom Intensitätsparameter ξ verschieben sich die Orte der Minima, wie sich am Vergleich der Kurven für $\xi = 0.2$ und $\xi = 0.4$ in Paneel (b) zeigt. Wenn ξ schrittweise vergrößert wird, verschwinden diese Strukturen nach und nach im Verlauf des Übergangs vom perturbativen zum nicht-perturbativen Regime. Für $\xi = 3.0$ erscheinen die gezeigten Kurven in Abbildung 5.5 (a) und (b) bereits vollständig geglättet.

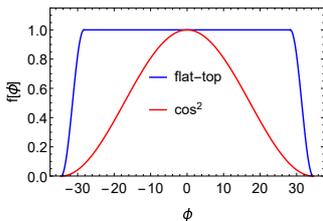


Abbildung 5.6: Die Funktion der Einhüllenden wird als Funktion von ϕ gezeigt. In blau zeigen wir einen *flat-top*-Puls und in rot einen \cos^2 -förmigen Puls.

Wenn nun die endliche Länge des Laserpulses mit in die Berechnungen einbezogen wird, lässt sich im Falle eines \cos^2 -förmigen Pulses eine Verschiebung in Richtung kleinerer Winkel feststellen, welche umso deutlicher wird, je weiter ξ erhöht wird. Die Graphen dieses \cos^2 -förmigen Pulses werden durch gestrichelte Kurven in der Abbildung dargestellt. Es fällt auf, dass sich die zuvor gefundenen

Strukturen viel schneller mit anwachsendem ξ glätten als bei der Berechnung für eine unendlich ausgedehnte Laserwelle. Für $E_0 = 70 \text{ GeV}$ fallen diese Effekte stärker aus, als für die LUXE-Parameter. Verglichen mit den Energieverteilungen aus Abbildung 5.4 reagieren die Winkelverteilungen viel empfindlicher auf die Berücksichtigung dieser Art von Laserpulsprofil. Ob die beobachteten Effekte hauptsächlich durch die endliche Länge oder die Variation der Intensität innerhalb des Pulses verursacht werden, zeigt sich durch zusätzliche Berechnungen mit einer anderen Form der Einhüllenden des Pulses. Die Einhüllende wird so gewählt, dass sie aus einem \cos^2 -förmigen Ein- und Ausschaltbereich besteht, mit einer jeweiligen Dauer von einem Zyklus. Im Bereich dazwischen liegt ein flaches Plateau (flat-top-Puls). Die Winkelverteilungen, die aus dieser Pulsform resultieren, werden in Abbildung 5.5 durch gepunktete Kurven gekennzeichnet. Sie liegen beinahe perfekt auf denen der Berechnungen mit der unendlich ausgedehnten Laserwelle. Entsprechend ergeben sich die Unterschiede in der Verteilung der \cos^2 -förmigen Pulse hauptsächlich durch die Intensitätsänderungen. Würde in den vorigen Spektren ebenfalls die Pulsform mit der Plateauregion berücksichtigt werden, so würde dies in der Frequenzverteilung und der Energieverteilung zu einer fast perfekten Übereinstimmung mit dem Ergebnis der unendlich ausgedehnten Laserwelle führen.

Bis zu diesem Punkt haben wir uns fast ausschließlich mit differentiellen Raten beschäftigt. Nun soll zudem der Einfluss der endlichen Pulslänge sowie der Form der Einhüllenden auf die totale Anzahl an Paaren untersucht werden. Die Produktionswahrscheinlichkeit $\bar{W}_{\text{rec}} = \frac{1}{2} \bar{R} \tau$ ergibt sich aus der gemittelten Rate aus Glg. (5.48). Der verwendete Laserpuls hat die Dauer $\tau = 2\pi N/\omega$ und eine rechteckige Form, was $f(\phi/\Phi) = 1$ entspricht. Für $N = 11$, $E_0 = 16.5 \text{ GeV}$ und $\xi = 3$ erhalten wir $\bar{W}_{\text{rec}} = 1.2 \times 10^{-4}$. Verwenden wir stattdessen eine \cos^2 -förmige Einhüllende und integrieren das entsprechende Energie- bzw. Winkelspektrum aus, so reduziert sich die Wahrscheinlichkeit zu $\bar{W}_{\text{cos}} = 2.4 \times 10^{-5}$. Die Intensität bei einem \cos^2 -förmigen Puls variiert und erreicht lediglich im Zentrum den maximalen Wert, was zur entsprechenden Verringerung der Wahrscheinlichkeit führt. Für den flat-top-Puls ergibt sich mit $\bar{W}_{\text{flat}} = 9.9 \times 10^{-5}$ eine Wahrscheinlichkeit, welche in etwa dem Anteil $\approx \frac{9}{11}$ von \bar{W}_{rec} entspricht. Die Größe ergibt sich aus der Überlegung, dass sich die Plateauregion über 9 Zyklen spannt, während Ein- und Ausschaltbereich nur einen kleinen Beitrag liefern. Für die restlichen Parameter können die Paarproduktionswahrscheinlichkeiten der Tabelle 5.2 entnommen werden.

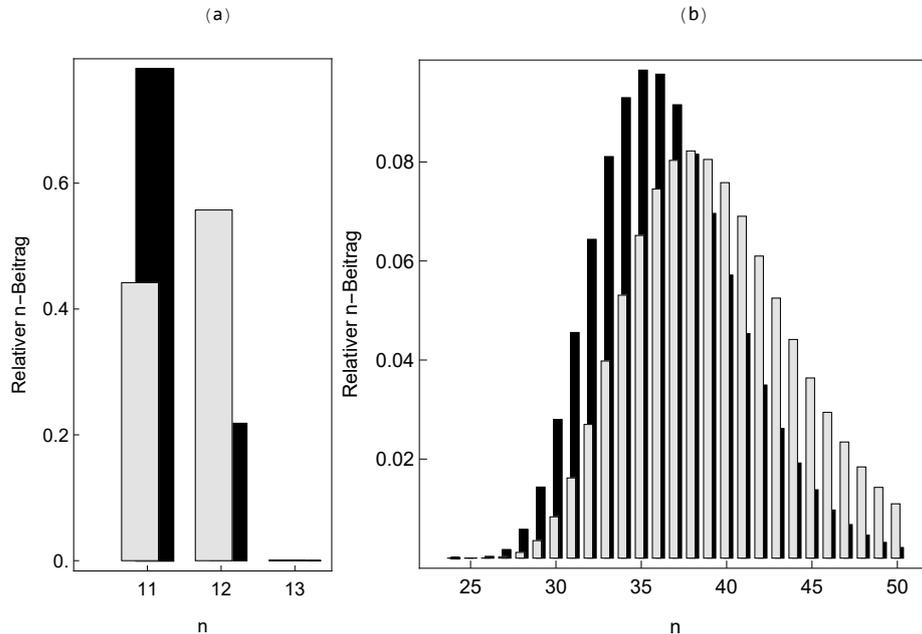
ξ	$E_0 = 16.5 \text{ GeV}$ $\omega = 1.5 \text{ eV}$			$E_0 = 70.0 \text{ GeV}$ $\omega = 2.4 \text{ eV}$		
	\bar{W}_{rec}	\bar{W}_{cos}	\bar{W}_{flat}	\bar{W}_{rec}	\bar{W}_{cos}	\bar{W}_{flat}
0.2	3.8[-23]	4.2[-24]	3.1[-23]	2.1[-6]	5.6[-7]	1.8[-6]
0.4	2.3[-16]	2.7[-17]	1.9[-16]	3.6[-5]	9.7[-6]	3.1[-5]
0.7	9.7[-12]	1.3[-12]	8.1[-12]	3.7[-4]	1.0[-4]	3.2[-4]
1.0	2.3[-9]	3.4[-10]	2.0[-9]	1.3[-3]	3.8[-4]	1.2[-3]
1.5	3.3[-7]	5.5[-8]	2.8[-7]	5.0[-3]	1.5[-3]	4.3[-3]
3.0	1.2[-4]	2.4[-5]	9.9[-5]	3.0[-2]	1.0[-2]	2.6[-2]

Tabelle 5.2: Totale Paarproduktionswahrscheinlichkeiten \bar{W} pro einlaufendem Elektron, welche über das Bremsstrahlungsspektrum gemittelt wurden, werden für verschiedene ξ -Werte gezeigt. Die Energie der Laserphotonen wird durch ω und die des anfänglichen Elektrons durch E_0 gegeben. Es werden drei verschiedene Formen für Pulse gezeigt: rechteckig, \cos^2 -förmig und flat-top. Alle Pulse umfassen 11 Zyklen. Die Größenordnung wird in eckigen Klammern angegeben: $[-X] = 10^{-X}$. Die Tabelle stammt aus Ref. [105].

Abschließend werden die individuellen Beiträge R_n und \bar{R}_n für eine bestimmte Anzahl an absorbierten Laserphotonen zur totalen Rate $R = \sum_{n \geq n_0} R_n$ sowie zu

$\bar{R} = \sum_{n \geq n_0} \bar{R}_n$ bestimmt. Das Verhältnis von den einzelnen Photonenbeiträgen zu der Gesamtrate wird in Abbildung 5.7 gezeigt. Dabei wird der monochromatische Fall R_n/R in schwarz abgebildet, während das Verhältnis \bar{R}_n/\bar{R} für den Fall, dass die Rate über das Bremsstrahlungsspektrum gemittelt wurde, in hellgrau gefärbt ist. Die Abbildung bezieht sich dabei auf die LUXE-Parameter. In Abb. 5.7(a) wird mit $\zeta = 0.003$ das eindeutig perturbative Regime gezeigt. Der Beitrag der minimalen Anzahl an Photonen $n_0 = 11$ ist im monochromatischen Fall der größte. Für $n = 12$ Photonen ist der Beitrag stark vermindert. Im Gegensatz dazu ist der Beitrag von $n = 12$ absorbierten Photonen der größte für den Fall, dass die Rate über das Bremsstrahlungsspektrum gemittelt wurde. Dieses Verhalten deutet zunächst auf einen Übergang vom perturbativen zum nicht-perturbativen Regime hin, insbesondere da der Term der führenden Ordnung im Vergleich zu den Termen höherer Ordnung unterdrückt wird. Jedoch liegt der wahre Grund der Umverteilung darin, dass ein großes Intervall von Bremsstrahlungsenergien ω' zur Rate beiträgt. Wie in Abschnitt 5.2.3 bereits erklärt wurde, führt jedes ω' zu einer anderen notwendigen Mindestphotonenzahl $n_0 = n_0(\omega')$. So stammt der Beitrag von $n = 12$ absorbierten Laserphotonen von Bremsstrahlungsenergien die unter $\omega' = E_0$ liegen. Diese Bremsstrahlungsphotonen kommen mit Blick auf Abbildung 5.1 häufiger vor als die Bremsstrahlungsphotonen mit sehr hohen Energien, welche für $n_0 = 11$ notwendig wären. Um zusätzlich zu überprüfen, dass wir uns weiterhin im perturbativem Regime befinden, betrachten wir die Skalierung der Beiträge \bar{R}_n . Die Beiträge skalieren in beiden Fällen mit dem Faktor ζ^{2n} , was eine typische perturbative Charakteristik ist.

Abbildung 5.7: Relative Beiträge der einzelnen Laserphotonenzahlen zur gesamten Paarproduktionsrate für (a) $\zeta = 0.003$ und (b) $\zeta = 1.0$ mit $\omega = 1.5$ eV. Die schwarzen Balken beziehen sich auf den monochromatischen Fall R_n/R für $\omega' = 16.5$ GeV und die grauen Balken auf den über die Bremsstrahlung gemittelten Fall \bar{R}_n/\bar{R} für $E_0 = 16.5$ GeV. Zur besseren Sichtbarkeit sind die Balken auf der horizontalen Achse leicht gegeneinander verschoben. Diese Abbildung stammt aus der Ref. [105].



Wenn wir uns die unterschiedlichen Beiträge R_n und \bar{R}_n für ein größeres ζ anschauen, bleibt der Effekt des breiten Bremsstrahlungsspektrums auf die Verteilung derselbe. Betrachten wir beispielsweise $\zeta = 0.2$, so liefert der energetisch erlaubte Kanal mit $n = 11$ Photonen vernachlässigbare Beiträge sowohl für R als auch für \bar{R} , da der für die erzeugten Teilchen verfügbare Phasenraum hier sehr klein ist. Die Hauptbeiträge stammen stattdessen von $n = 13, 14, 15$ und 16 Laserphotonen, die

sich jeweils auf etwa 35 %, 41 %, 17 % und 4 % für die monochromatische Rate R und auf 22 %, 42 %, 25 % und 8 % für die gemittelte Rate belaufen. Hier weist die Paarbildung bereits nicht-perturbative Eigenschaften auf. In Abbildung 5.7 (b) werden die relativen Beiträge für $\xi = 1.0$ betrachtet. Dort befinden wir uns noch deutlicher im nicht-perturbativen Regime. Es lässt sich hier eine ausgeprägte Verschiebung zu höheren Photonenzahlen aufgrund der Mittelung über die Bremsstrahlung beobachten.

5.3 ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Kapitel wurde der Breit-Wheeler-Paarproduktionsprozess im starken elektromagnetischen Feld für ein durch Bremsstrahlung erzeugtes γ -Photon im Übergangsregime von perturbativ zu nicht-perturbativ betrachtet. Dabei konnte festgestellt werden, dass sich der relevante Bereich des Bremsstrahlungsspektrums immer weiter zu kleineren Frequenzen verschiebt, desto größer der Intensitätsparameter ξ ist. Eine ähnliche Verschiebung konnte ebenfalls für die Energieverteilung gefunden werden. Zusätzlich hat sich gezeigt, dass dieses Spektrum asymmetrischer wird, wenn die Intensität erhöht wird. Die Winkelverteilungen sind ebenfalls stark durch die Bremsstrahlung beeinflusst worden. In diesen konnten die einzelnen Photonenübergänge $n \rightarrow n + 1$ durch charakteristische Strukturen ausgemacht werden. Die Positionen dieser Übergänge im Spektrum sind dabei eng mit der effektiven Masse verbunden. Für mittlere Intensitätsparameter sind solche Strukturen, die auf m_* zurückzuführen sind, ebenfalls in den Energiespektren sichtbar gewesen. Der Einfluss der Bremsstrahlung auf die Anzahl an absorbierten Laserphotonen konnte dadurch ausgemacht werden, dass der Hauptbeitrag zur totalen Rate von einer größeren Anzahl an Photonen stammt, als es bei der monochromatischen Rate der Fall ist. Die Betrachtung einer endlichen Pulsdauer hat in den hier gezeigten Spektren nur einen sehr kleinen Effekt hervorgerufen. Lediglich die Winkelverteilung reagiert sensitiv auf die genaue Form und somit die genaue Intensitätsverteilung des Pulses.

6 | DER EINFLUSS VON LASERFOKUS- SIERUNG UND STRAHLUNGSDÄMP- FUNG AUF DIE SPEKTREN DER BREIT- WHEELER-PAARE IM NICHT-PERTUR- BATIVEN REGIME

In diesem Kapitel werden die bisherigen Untersuchungen zur nichtlinearen Breit-Wheeler-Paarproduktion im Übergangsregime auf das nicht-perturbative Regime erweitert. Im nicht-perturbativen Regime für $\xi \gg 1$ wird eine sehr große Anzahl von Laserphotonen absorbiert. Dabei entspricht $\xi = |e|\mathcal{E}_0/(m\omega)$ dem klassischen Laserintensitätsparameter. Die Gesamtproduktionsrate in diesem Bereich ist proportional zu $R \propto \exp[-8/(3\kappa)]$, vorausgesetzt $\kappa \ll 1$ gilt für den Quanten-Nichtlinearitätsparameter. Unter der Annahme einer gegenläufigen Strahlgeometrie ist letzterer gegeben durch $\kappa = 2\omega'\mathcal{E}_0/(mF_{cr})$. Es sind demnach eine starke exponentielle Dämpfung und entsprechend kleine Paarproduktionsausbeuten zu erwarten. Dies hat bisher eine experimentelle Beobachtung verhindert, da die selbst mit den stärksten gegenwärtigen Laserquellen erreichbaren Feldstärken $\mathcal{E}_0 \sim 10^{-3}F_{cr}$ weit unterhalb der kritischen Skala liegen [12]. Wenn jedoch ein hoch-intensiver Laserpuls mit einem Strahl hochenergetischer γ -Photonen zur Kollision gebracht wird, können κ -Werte nahe 1 erreicht werden, was die Beobachtung nichtlinearer Breit-Wheeler-Paare im nicht-perturbativen Bereich ermöglicht. Entsprechende Experimente werden derzeit in verschiedenen Hochfeldlaboratorien weltweit durchgeführt, darunter die *Extreme Light Infrastructure* (ELI) [120], das E-320-Projekt am SLAC [121], das *Rutherford Appleton Laboratory* [111], die zweite Phase des LUXE-Projekts bei DESY [44] und das *Center for Advanced Laser Applications* (CALA) [43]. Die beiden letztgenannten Kollaborationen werden durch Bremsstrahlung erzeugte GeV- γ -Photonen nutzen.

Während die Gesamtausbeute für $\xi \sim 1$ [105, 122] und für $\xi \gg 1$ [47, 49] insbesondere im Hinblick auf die bevorstehenden Experimente bei DESY und CALA bereits berechnet wurde, fokussieren wir uns auch in diesem Kapitel auf die Bestimmung der Energie- und Winkelverteilungen der erzeugten Paare. Diese Art von Information ist für die Planung zukünftiger Experimente relevant, um beispielsweise die Detektion der Paare anzupassen. Wir orientieren uns dabei an den Parametern aus Ref. [43]. Während in Kapitel 5 insbesondere der Einfluss des breiten Bremsstrahlungsspektrums berücksichtigt wurde, wird in diesem Kapitel die Anschauung erweitert, indem zusätzlich die Auswirkungen der Laserfokussierung untersucht

werden. Experimentell ist eine möglichst starke Fokussierung erforderlich, um hohe Spitzenintensitäten, wie sie in Ref. [43] beschrieben werden, zu erreichen. Für die Berechnung der Spektren des Breit-Wheeler-Prozesses hat dies zur Folge, dass die Laserfelder erheblich von einer ebenen Wellenform abweichen [47–50]. Ein weiterer wichtiger Aspekt, welcher berücksichtigt werden muss, ist die sogenannte Strahlungsdämpfung. Da die Paare mit hoher Energie (\sim GeV) erzeugt werden und direkt nach ihrer Erzeugung noch dem hoch-intensiven Laserpuls ($\xi \sim 10^2$, $\kappa \sim 1$) ausgesetzt sind, wird ihre Dynamik stark von der Strahlungsdämpfung des Laserfeldes [13, 123–131] beeinflusst, deren Relevanz im vorliegenden Szenario durch den Parameter $\mathcal{R} \approx \frac{1}{4}\alpha\kappa\xi \sim 1$, mit der Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2$, abgeschätzt werden kann. Um Energie- und Winkelverteilungen zu bestimmen, wie sie möglicherweise an einem Detektor gemessen werden können, müssen all jene Effekte mit berücksichtigt werden.

Wir orientieren uns in diesem Kapitel an den Ergebnissen aus Ref. [43] und [132]. Basierend auf diesen werden zunächst Energie- und Winkelspektren für eine linear polarisierte, unendlich ausgedehnte, monochromatische Laserwelle gezeigt, wobei der Einfluss des zugrundeliegenden Schnittwinkels mit berücksichtigt wird. Diese Ergebnisse sind in die Ausarbeitung der Ref. [43] mit eingeflossen. Im Anschluss daran stellen wir, auf Ref. [132] fußend, unseren theoretischen Hintergrund dar, der den allgemeinen Breit-Wheeler-Prozess in fokussierten Laserfeldern, die Einbeziehung des Bremsstrahlungsspektrums und einen semiklassischen Ansatz für die Auswirkungen der Strahlungsdämpfung umfasst. Basierend auf Ref. [132] präsentieren wir im darauf folgenden Abschnitt Energie- und Winkelspektren für fokussierte und nicht fokussierte Feldkonfigurationen.

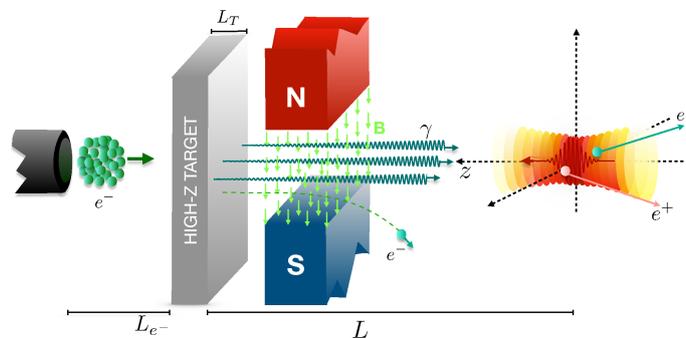
In diesem Kapitel werden relativistische Einheiten mit $c = \hbar = 4\pi\epsilon_0 = 1$ verwendet.

6.1 GRUNDLEGENDE ASPEKTE

In diesem Abschnitt werden die experimentellen Rahmenbedingungen beschrieben und eine erste Prognose zu den zu erwartenden Energie- und Winkelspektren abgegeben. Die gezeigten Ergebnisse basieren auf den Resultaten aus Ref. [43].

6.1.1 EXPERIMENTELLE RAHMENBEDINGUNGEN

Abbildung 6.1: Experimenteller Aufbau des Starkfeldprozesses der nichtlinearen Breit-Wheeler-Paarproduktion aus der Kollision von Bremsstrahlungs-Photonen und einem hochintensiven Laserpuls. Die in der Versuchsanordnung verwendeten Bremsstrahlungs-Photonen werden durch die Wechselwirkung zwischen einem monoenergetischen Elektronenstrahl und einem dünnen Target hoher Kernladungszahl Z erzeugt. Ein Magnet hinter dem Target lenkt die eintreffenden Elektronen von dem Bereich ab, in dem der Breit-Wheeler-Prozess stattfindet [43]. Die Abbildung entstammt Ref. [132].



Die nachfolgenden theoretischen Berechnungen sind zum größten Teil durch den aktuellen Aufbau bei CALA [43] motiviert. Dabei sollen Elektron-Positron-Paare aus der Kollision zwischen einer hochenergetischen Photonenquelle und einem stark

fokussierten Laserpuls erzeugt werden. Dazu werden Bremsstrahlungsphotonen durch die Wechselwirkung zwischen einem monoenergetischen Elektronenstrahl von wenigen GeV und einem Target hoher Kernladungszahl Z erzeugt. Die Dicke dieses Targets ist viel kleiner als die charakteristische Strahlungslänge L_{rad} des Materials. In Abb. 6.1 wird eine Skizze des entsprechenden Versuchsaufbaus gezeigt. Wir treffen dabei die Annahme, dass der Elektronenstrahl bei der Wechselwirkung mit dem Target nahezu keine räumliche Divergenz erfährt, was einerseits an seiner ultra-relativistischen Natur als auch andererseits an der Tatsache liegt, dass seine Ausdehnung mit der Dicke des Targets vergleichbar ist. Es ist daher realistisch davon auszugehen, dass die Emission der Bremsstrahlungsphotonen innerhalb des Elektronenstrahlvolumens stattfindet, und zwar innerhalb eines Streuwinkels, der weitgehend durch den inversen Elektronen-Lorentzfaktor $\theta_\gamma \approx 1/\gamma_0 \propto \mathcal{O}(1)$ mrad bestimmt wird. Infolgedessen wird die überwiegende Mehrheit der Bremsstrahlungsphotonen in die Ausbreitungsrichtung des einfallenden Elektronenstrahls emittiert. Der Bereich der Wechselwirkung von Laserpuls und Bremsstrahlungsphotonen wird hauptsächlich durch den Bereich um den Fokussierungspunkt des Lasers bestimmt. Aufgrund der Streuung kann nur eine kleine Anzahl von Bremsstrahlungsphotonen am Prozess teilnehmen, was die Anzahl der erzeugten Breit-Wheeler-Paare verringert. Eine Abschätzung des von den Bremsstrahlungsphotonen abgedeckten Volumens wird in Ref. [47] gegeben. In dieser wird gezeigt, dass sich das Bremsstrahlungsvolumen durch

$$V_\gamma = \pi\sigma_z \bar{r}^2 \quad \text{mit } \bar{r} = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} \quad (6.1)$$

bestimmen lässt. Dabei bezeichnet \bar{r} den mittleren Radius des Kegelstumpfs, welcher durch die Bremsstrahlung gebildet wird. Dieser wird durch den maximalen Radius $r_{\max} = r_{\min} + \sigma_z \theta_{\text{rms}}$ und den minimalen Radius $r_{\min} = \sigma_r + L\theta_{\text{rms}} + L_{e^-} \theta_{e^-}$ gebildet, welche von der transversalen Ausdehnung σ_r und longitudinalen Ausdehnung σ_z der Bremsstrahlungselektronen abhängen. Der Winkel θ_{e^-} bezeichnet den Streuwinkel der Elektronen vor dem Target. Hinter dem Target bestimmt sich der Streuwinkel der Bremsstrahlungsphotonen nach $\theta_{\text{rms}} = \sqrt{\theta_{e^-}^2 + \theta_\gamma^2}$, welcher sich aus dem Winkel der Bremsstrahlung erzeugenden Elektronen und dem Winkel des hinter dem Target erzeugten γ -Photons zusammensetzt. In Ref. [47] werden ideale Kollisionen betrachtet, die durch perfekte Synchronisation der kollidierenden Strahlen gekennzeichnet sind. Neben dem Bremsstrahlungsvolumen können wir analog eine Bremsstrahlungsfläche definieren, welche sich durch $A_\gamma = \pi\bar{r}^2$ bestimmen lässt.

Energie der einlaufenden Elektronen E_0	2.5 GeV
Strecke der Bremsstrahlung erzeugenden Elektronen L_{e^-}	0.1 m
Anfangswinkel der Bremsstrahlung erzeugenden Elektronen θ_{e^-}	0.5 mrad
Normierte Targetdicke ℓ	0.015
Wegstrecke der Bremsstrahlung L	0.5 m
Wellenlänge des Pulses λ	0.8 μm
Taillienbreite des Pulses w_0	2 μm
Pulslänge τ	30 fs
Laserintensitätsparameter ζ	70

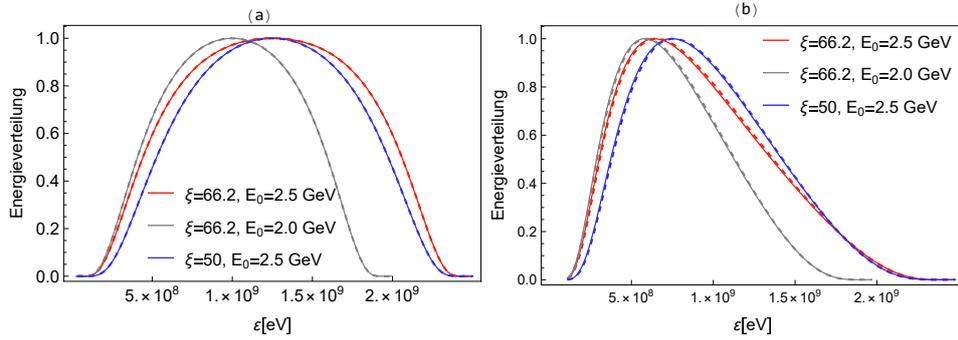
Tabelle 6.1: Experimentelle Parameter aus Ref. [43], für einen linear polarisierten, stark fokussierten Laserpuls. Unsere Berechnungen basieren auf diesen Parametern.

Die experimentellen Parameter aus Ref. [43] werden in der Tabelle 6.1 gezeigt. Sie dienen in den folgenden Abschnitten als Referenz für unsere Berechnungen.

6.1.2 DIFFERENTIELLE PAARPRODUKTIONS-RATEN FÜR EINE UNENDLICH AUSGEDEHNTE, MONOCHROMATISCHE LASERWELLE

Im Rahmen der Veröffentlichung [43] haben wir die Energieverteilung der erzeugten Paare bestimmt, indem wir Paarproduktionsraten mit der Annahme einer linear polarisierten, unendlich ausgedehnten, monochromatischen Laserwelle bestimmt haben. Die dazu erforderliche Rechnung wird im Anhang präsentiert. Im Rahmen dieser Untersuchung soll zudem der Einfluss eines Schnittwinkels zwischen der Achse der einlaufenden γ -Photonen und den entgegenlaufenden Laserphotonen betrachtet werden. Die Berechnung der differentiellen Raten unter Hinzuziehen eines solchen Schnittwinkels wird ebenfalls in einem separaten Kapitel im Anhang präsentiert.

Abbildung 6.2: Als durchgezogene Linie wird das Energiespektrum als Funktion der Elektronenenergie ε_q für eine unendlich ausgedehnte Laserwelle mit $\omega = 1.5\text{ eV}$ für eine gegenläufige Geometrie zwischen γ -Photon und Laserstrahl gezeigt. Die gestrichelten Linien zeigen die Spektren unter Verwendung eines Schnittwinkels von 162° . In Abbildung (a) wird ein einzelnes monochromatisches γ -Photon mit $\omega' = E_0$ angenommen während in Abbildung (b) das Bremsstrahlungsspektrum mit berücksichtigt wird. Die Höhe der Kurven wurde auf 1 normiert, um einen Vergleich zu vereinfachen. Die entsprechenden Intensitätsparameter und Anfangsenergien E_0 sind in der Abbildung mit angegeben. Die Abbildung basiert auf Ref. [43].



In Abbildung 6.2 werden Energieverteilungen für verschiedene Parameterbereiche gezeigt. Die zugrundeliegenden Referenzkurven in rot zeigen die Spektren für $\xi = 66.2$ und eine anfängliche Elektronenenergie von $E_0 = 2.5\text{ GeV}$, welche dazu genutzt wird, das Bremsstrahlungsphoton zu erzeugen. In blau und grau werden die Vergleichskurven für $\xi = 66.2, E_0 = 2.0\text{ GeV}$ und $\xi = 50, E_0 = 2.5\text{ GeV}$ dargestellt. Paneel (a) zeigt die Verteilungen für ein monochromatisches γ -Photon mit $\omega' = E_0$. Die Maxima der Kurven liegen bei einer Teilchenenergie von etwa $\varepsilon_q \approx \omega'/2$. Der Vergleich der Kurven zeigt, dass eine Minimierung der Intensität von $\xi = 66.2$ auf $\xi = 50$ zu einer Schmälerung des Spektrums führt. Die verschiedenen Linientypen repräsentieren die verwendeten Schnittwinkel. Die durchgezogenen Linien entsprechen einem Schnittwinkel von $\alpha_s = 180^\circ$, während die gestrichelten Linien einen Schnittwinkel von $\alpha_s = 162^\circ$ darstellen. Es wird ersichtlich, dass der Schnittwinkel keine Auswirkung auf die Gestalt der Spektren hat.

Paneel (b) zeigt das Energiespektrum, das entsteht, wenn das am Prozess beteiligte γ -Photon durch Bremsstrahlung generiert wird. Die Maxima der Verteilungen verschieben sich in diesem Szenario im Vergleich zum Spektrum ohne Betrachtung von Bremsstrahlungsverteilungen hin zu niedrigeren Energien. Bei gleichbleibender Energie E_0 wird das Maximum für einen höheren ξ -Wert stärker zu kleineren Energiewerten hin verschoben. Dies steht in Zusammenhang damit, dass bei größeren ξ -Werten mehr Photonen aus dem Laserfeld absorbiert werden und entsprechend kleinere ω' ausreichend sind, um ein Paar zu erzeugen. Die Veränderung des Schnittwinkels zwischen den beteiligten Laserphotonen und den Bremsstrahlungsphotonen führt in diesem Parameterbereich zu keiner Änderung des Spektrums.

In Abbildung 6.3 werden Winkelverteilungen gezeigt. Die Spektren werden für den Fall eines durch Bremsstrahlung erzeugten γ -Photons präsentiert. Während in Paneel (a) der Fall der linear polarisierten Laserwelle gezeigt wird, wird zum Vergleich in Paneel (b) das Spektrum für eine zirkular polarisierte Laserwelle präsentiert. Der Vergleich der beiden Abbildungen zeigt, dass die Betrachtung der Polarisation einen großen Einfluss auf die Winkelspektren nimmt. Während bei der linearen Polarisation der Hauptbeitrag von Winkeln nahe 0 rad stammt, liegt das Maximum bei Verwendung eines zirkular polarisierten Laserfeldes bei deutlich größeren Werten. In diesem Fall haben wir eine Feldkomponente, die durchgängig für einen transversalen Impuls bezüglich der Ausbreitungsrichtung der Laserwelle sorgt. Bei der linearen Polarisation ist dies anders. Der Betrag der Feldamplitude weist je nach betrachteter Phase einen Nulldurchgang auf, weshalb der transversale Impuls des Elektrons bzw. Positrons durch die absorbierten Laserphotonen kleiner ausfällt. Für die Winkelverteilung lässt sich anhand von Abbildung 6.3 allgemein

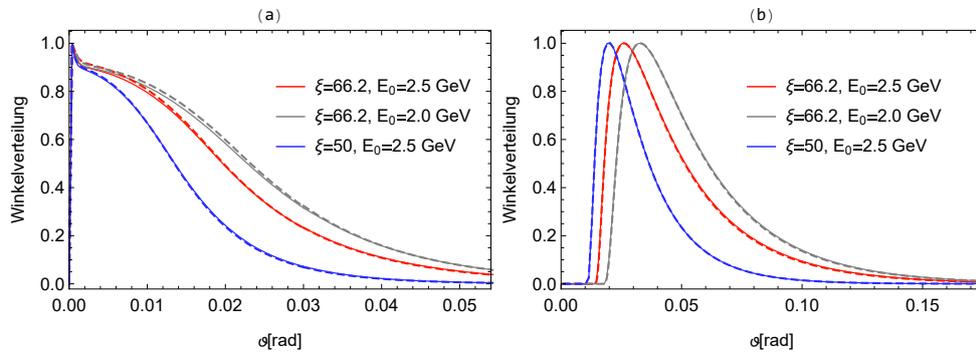


Abbildung 6.3: Differentielle, über die Bremsstrahlung gemittelte Winkelverteilungen werden in Abhängigkeit vom polaren Emissionswinkel des Positrons gezeigt. Als durchgezogene Linie wird das Spektrum für eine unendlich ausgedehnte Laserwelle mit $\omega = 1.5 \text{ eV}$ für eine gegenläufige Geometrie zwischen γ -Photon und Laserstrahl gezeigt. Die gestrichelte Linie zeigt das Spektrum unter Verwendung eines Schnittwinkels von 162° . Paneel (a) bezieht sich auf ein linear polarisiertes und Paneel (b) auf ein zirkular polarisiertes Laserfeld. Die Höhe der Kurven wurde auf 1 normiert, um einen Vergleich zu vereinfachen. Die entsprechenden Intensitätsparameter und Anfangsenergien E_0 sind in der Abbildung mit angegeben.

festhalten, dass eine größere Energie E_0 zu einem schmaleren Spektrum führt und dieses hin zu kleineren Winkeln verschiebt, da das hochenergetische γ -Photon den größten Energiebeitrag zur Erzeugung des Elektron-Positron-Paares beisteuert und somit maßgeblich die Trajektorie der erzeugten Teilchen bestimmt. Darüber hinaus führt ein größerer Laserintensitätsparameter zu breiteren Spektren und einer Verschiebung zu größeren Winkeln, da mit größerem ξ die Anzahl der absorbierten Laserphotonen steigt und somit die transversale Impulskomponente zunimmt.

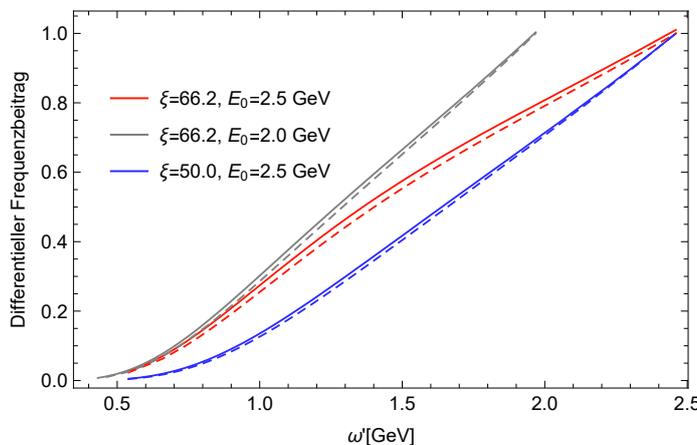


Abbildung 6.4: Differentielle Paarproduktionsrate $d\bar{R}/d\omega'$ als Funktion der γ -Photonenenergie für eine unendlich ausgedehnte, linear polarisierte Laserwelle. Die durchgezogenen Linien verwenden einen Schnittwinkel von 180° , während die gestrichelten Linien einen Schnittwinkel von 162° verwenden. Die Graphen werden für $\omega = 1.5 \text{ eV}$ gezeigt. Die Höhe der Kurven wurde auf 1 normiert, um einen Vergleich zu vereinfachen.

In Abbildung 6.4 wird die differentielle Rate $dR/d\omega'$ für verschiedene Intensitätsparameter ξ , Bremsstrahlungselektronenenergien und Kollisionswinkel gezeigt.

Zunächst lässt sich festhalten, dass der Kollisionswinkel auch hier keinen Einfluss auf die Form des Spektrums nimmt. Zudem ist zu erkennen, dass alle Kurven mit zunehmendem ω' steil ansteigen und dementsprechend die Teilchenausbeute mit zunehmender Energie der Bremsstrahlungsphotonen zunimmt. Aufgrund dessen, dass die Energie der γ -Photonen, die von den Bremsstrahlungselektronen emittiert werden, den Wert von E_0 nicht überschreiten kann, weisen alle Kurven ein Maximum bei $\omega' \approx E_0$ auf und fallen danach auf Null herab, wobei die hier gezeigte Grafik nur bis zum jeweiligen Maximum ausgewertet wurde. Abschließend lässt sich noch der Einfluss der Laserintensität ermitteln. Der Vergleich der roten Kurve, welche für $\zeta = 66.2$ ausgewertet wurde, mit der blauen Kurve, für welche $\zeta = 50$ gilt, zeigt, dass ein größerer Laserintensitätsparameter dafür sorgt, dass die Kurve weniger steil ansteigt. Dies verdeutlicht, dass durch höhere ζ -Werte mit größerer Wahrscheinlichkeit mehr Photonen mit niedrigerer Energie am Paarproduktionsprozess teilnehmen als bei kleineren Laserintensitätsparametern.

Wie sich in den hier gezeigten Spektren erkennen lässt, hat die Reduktion des Schnittwinkels von $\alpha_S = 180^\circ$ auf 162° keinen Einfluss auf die Form der Spektren. Die totale Rate verringert sich jedoch um etwa fünf Prozent, wenn die hier verwendete Reduktion des Schnittwinkels berücksichtigt wird.

6.2 THEORETISCHE BESCHREIBUNG DER PAARPRODUKTION IN FOKUSSIERTEN LASERFELDERN

Nach der ersten Prognose der Spektren erfolgt nun die genaue Berechnung mit Hilfe der Wellenfunktionen aus Abschnitt 2.3, welche die Fokussierung berücksichtigen. Die grundlegende Rechnung folgt den Schritten aus Ref. [48]. Die gezeigten Ergebnisse stammen aus Ref. [132].

6.2.1 FOKUSSIERTER LASERPULS

Der im Experiment verwendete hochintensive Laser soll in diesem Abschnitt beschrieben werden. Das Laserfeld wird durch einen linear polarisierten Gauß'schen Puls modelliert. Die Polarisationsrichtung sei in x -Richtung gewählt und die Ausbreitung verläuft in die negative z -Richtung, sodass das Bremsstrahlungs- γ -Photon und der Laserstrahl entlang der z -Achse kollidieren. Der Fokussierungspunkt des Laserpulses befindet sich im Koordinatenursprung. Zur Beschreibung des Gauß'schen Pulses verwenden wir die paraxiale Approximation. Die elektrischen und magnetischen Feldkomponenten werden demnach durch $B_y = E_x$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\perp(\mathbf{x}) = & \mathcal{E}_0 \mathbf{e}_x e^{-\frac{r^2}{w_0^2(1+\zeta(z)^2)}} e^{-\left(\sqrt{2\ln(2)}\frac{\Phi}{\omega\tau}\right)^2} \\ & \times \sin\left(\Phi - \zeta(z)\frac{r^2}{w_0^2(1+\zeta(z)^2)} + \arctan(\zeta(z))\right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

beschrieben [133]. In diesem Ausdruck bezeichnet $\Phi = \omega(t+z)$ die Phase des Lasers, \mathcal{E}_0 bezeichnet die Amplitude des Feldes, z ist seine longitudinale Komponente und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ der transversale Anteil. Der Parameter w_0 gibt die Breite des Laserstrahls am Fokussierungspunkt $z = 0$ an (auch Taille genannt). Die Breite des restlichen Strahls wird durch $w(z) = w_0\sqrt{1+\zeta(z)^2}$ beschrieben, wobei $\zeta(z) = z/z_R$ und

$z_R = \pi w_0^2 / \lambda$ die Rayleigh-Länge bezeichnet. Wir werden in den folgenden Abschnitten zwischen transversaler und longitudinaler Fokussierung und rein transversaler Fokussierung unterscheiden. Ein Feld, welches nur eine transversale Fokussierung aufweist, lässt sich in dem Sinne verstehen, dass die z -Abhängigkeit gegenüber z_R vernachlässigt werden kann. Es wird an dieser Stelle auch von der Approximation der unendlichen Rayleigh-Länge gesprochen. Wird nämlich der Limes $z_R \rightarrow \infty$ betrachtet, so reduziert sich die Abhängigkeit des Feldes auf die transversale $\sim e^{-r^2/w_0^2}$. Für eine kleine endliche Rayleigh-Länge hängt hingegen das Feld zusätzlich von der longitudinalen Fokussierung ab. Es sei zudem an dieser Stelle angemerkt, dass die zeitliche Ausdehnung des Pulses τ an der FWHM (*full width to half maximum*) der Intensität gemessen wird.

Wird der Limes $w_0 \rightarrow \infty$ in Glg. (6.2) betrachtet, so landen wir bei dem Ausdruck einer gepulsten ebenen Welle

$$\mathbf{E}_\perp(\Phi) = \mathcal{E}_0 \mathbf{e}_x e^{-\left(\sqrt{2 \ln(2)} \frac{\Phi}{\omega \tau}\right)^2} \sin(\Phi). \quad (6.3)$$

Wir nutzen diesen Ausdruck, um die Spektren mit einem nicht-fokussierten Hintergrundfeld vergleichen zu können und so den Einfluss der Fokussierung auf die Verteilungen zu untersuchen.

6.2.2 PAARPRODUKTION IN EINEM FOKUSSIERTEM LASERFELD

Wir wollen in diesem Abschnitt die Paarproduktionswahrscheinlichkeit bestimmen, bei der die Form des elektromagnetischen Hintergrundfeldes ebenfalls die Fokussierung des Feldes mit berücksichtigt. In Ref. [48] wird eine analytische Methode zur Untersuchung des Breit-Wheeler-Prozesses in Laserfeldern mit beliebiger Raum-Zeit-Struktur präsentiert, welche wir für unsere Berechnungen ebenfalls verwenden wollen. Die zugrunde liegende Annahme für diese Herangehensweise ist die, dass die Energie des einfallenden γ -Photons die größte dynamische Energie des Problems ist. Die nachfolgende Rechnung wurde eigenständig durchgeführt, folgt und basiert jedoch strikt auf den in Ref. [48] präsentierten Schritten und der dort verwendeten Notation.

Wir beginnen damit, dass wir zunächst das S-Matrix-Element für den Prozess bestimmen, welches gegeben ist durch

$$S_{\text{fi}} = -ie \sqrt{\frac{2\pi}{\omega' V}} \int d^4x e^{-ik' \cdot x} \bar{\Psi}_{p,s} \not{\epsilon}_{k',l} \Psi_{-p',-s'}. \quad (6.4)$$

Dabei bezeichnet $p^\mu = (\varepsilon, \mathbf{p})$ den Vierer-Impuls des Elektrons und $p'^\mu = (\varepsilon', \mathbf{p}')$ den des Positrons. Für den elektronischen und positronischen Zustand wird Glg. (2.67) verwendet, welche unter der Bedingung $\omega' \gg m\xi \geq m$ und $\varepsilon \approx \varepsilon' \approx \omega'$ hergeleitet wurde und auf Ref. [60] beruht. Wie in der Herleitung der Zustände in Kapitel 2 werden auch hier Lichtkegelkoordinaten verwendet, wobei $T = (t+z)/2$, $\mathbf{x}_\perp = (x, y)$ und $\phi = t-z$. Analog werden für beliebige Vierervektoren die Lichtkegelkomponenten durch $v_\pm = (v^0 \pm v_z)/2^{(1\pm 1)/2}$ und $\mathbf{v}_\perp = (v_x, v_y)$ definiert. Für das Elektron bzw. Positron ergibt sich für den Ausgangszustand entsprechend

$$\Psi_{\pm p, \pm s}(x) = e^{iS_{\pm p}(x)} \left(1 \pm \frac{e}{4p_+} \not{\mathcal{A}}(x) \right) \frac{u_{\pm p, \pm s}}{\sqrt{2\varepsilon V}} \quad (6.5)$$

Auf den Index wird bei den Größen bezüglich p^μ bzw. p'^μ in diesem Kapitel verzichtet, sodass $\varepsilon_p = \varepsilon$, $\vartheta_p = \vartheta$ und $\varphi_p = \varphi$. Dies vereinfacht die Darstellung. Zudem wird anders als in Kapitel 2 die Lichtkegelkoordinate $T = (t+z)/2$ verwendet um den Vergleich zu Ref. [48] zu vereinfachen. Die Phase wird anders als in den vorherigen Kapiteln mit dem Großbuchstaben Φ bezeichnet.

mit

$$S_{\pm p}(x) = \mp(p_+ \phi + p_- T - \mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp) + e \int_T^\infty d\tilde{T} A_-(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (6.6)$$

$$+ \frac{1}{p_+} \int_T^\infty d\tilde{T} \left[e(p \cdot \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{x}})) \mp \frac{1}{2} e^2 \mathcal{A}^2(\tilde{\mathbf{x}}) \right]$$

und

$$\mathcal{A}_\perp(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_\perp(\mathbf{x}) - \nabla_\perp \int_T^\infty d\tilde{T} A_-(\tilde{\mathbf{x}}) = \int_T^\infty d\tilde{T} [\mathbf{E}_\perp(\tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_\perp(\tilde{\mathbf{x}})], \quad (6.7)$$

wobei $\mathcal{A}^\mu(\mathbf{x}) = (0, \mathcal{A}_\perp(\mathbf{x}), 0)$ und $\mathbf{x} = (T, \mathbf{x}_\perp)$.

Wir setzen Glg. (6.5) in (6.4) ein und fassen die Argumente der Exponentialfunktionen zusammen, sodass

$$-S_+ + S_- - k' \cdot x = (p_+ + p'_+ - k'_+) \phi + (p_- + p'_-) T - (\mathbf{p}_\perp + \mathbf{p}'_\perp) \cdot \mathbf{x}_\perp$$

$$+ e \int_T^\infty d\tilde{T} \left[\left(-\frac{p \cdot \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{x}})}{p_+} + \frac{p' \cdot \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{x}})}{p'_+} \right) + \frac{1}{2} e \mathcal{A}^2(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{k'_+}{p_+ p'_+} \right]. \quad (6.8)$$

Die Integration über ϕ liefert entsprechend $2\pi\delta(p_+ + p'_+ - k'_+)$. Die Anzahl der erzeugten Paare lässt sich auf üblichem Weg durch das Bilden des Betragsquadrats des S-Matrix-Elements und anschließender Integration über \mathbf{p} und \mathbf{p}' bilden. Zudem wird über die Leptonenspins summiert, über die Photonenpolarisation gemittelt und mit der Anzahl der einlaufenden γ -Photonen multipliziert. Dies liefert den Ausdruck

$$dN = \rho_\gamma \frac{\pi\alpha}{\omega'\varepsilon\varepsilon'} \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^2} \frac{d^2\mathbf{p}'_\perp}{(2\pi)^2} \frac{d\varepsilon'}{2\pi} d\varepsilon \delta(p_+ + p'_+ - k'_+) \int d^3x \int d^3x' \mathcal{M} e^{i(Y(x) - Y(x'))}, \quad (6.9)$$

In Ref. [48] wird hingegen die Anzahl der γ -Photonen pro Einheitsfläche verwendet. Die nachfolgende Rechnung entspricht jedoch weiterhin den Schritten aus Ref. [48].

mit der Flächendichte ρ_γ der γ -Photonen, welche durch A_γ^{-1} gegeben ist. Des Weiteren bezeichnen

$$\mathcal{M} = \frac{1}{4} \sum_{\ell, s, s'} \bar{u}_{p, s} \left(1 - \frac{e}{4p_+} \not{n} \mathcal{A}(\mathbf{x}) \right) \not{\epsilon}_{k', \ell} \left(1 - \frac{e}{4p'_+} \not{n} \mathcal{A}(\mathbf{x}) \right) v_{p', s'}$$

$$\times \bar{v}_{p', s'} \left(1 + \frac{e}{4p'_+} \not{n} \mathcal{A}(\mathbf{x}') \right) \not{\epsilon}_{k', \ell} \left(1 + \frac{e}{4p_+} \not{n} \mathcal{A}(\mathbf{x}') \right) u_{p, s}$$

$$= -\frac{1}{4} \text{Sp} \left[(\not{p} + m) \left(1 - \frac{e}{4p_+} \not{n} \mathcal{A}(\mathbf{x}) \right) \gamma^\mu \left(1 - \frac{e}{4p'_+} \not{n} \mathcal{A}(\mathbf{x}) \right) \right.$$

$$\left. \times (\not{p}' - m) \left(1 + \frac{e}{4p'_+} \not{n} \mathcal{A}(\mathbf{x}') \right) \gamma_\mu \left(1 + \frac{e}{4p_+} \not{n} \mathcal{A}(\mathbf{x}') \right) \right] \quad (6.10)$$

und

$$Y(x) = \left(\frac{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{2\varepsilon} + \frac{m^2 + \mathbf{p}'_\perp^2}{2\varepsilon'} \right) T - (\mathbf{p}_\perp + \mathbf{p}'_\perp) \cdot \mathbf{x}_\perp$$

$$+ e \left(\frac{\mathbf{p}_\perp}{\varepsilon} - \frac{\mathbf{p}'_\perp}{\varepsilon'} \right) \cdot \int_T^\infty d\tilde{T} \mathcal{A}_\perp(\tilde{\mathbf{x}}) - \frac{\omega' e^2}{\varepsilon\varepsilon'} \int_T^\infty d\tilde{T} \mathcal{A}_\perp(\tilde{\mathbf{x}})^2. \quad (6.11)$$

Die Berechnung der Spur beläuft sich auf

$$\mathcal{M} = m^2 \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + 4 \right) + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \mathbf{p}_\perp^2 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \mathbf{p}'_\perp^2 - 2\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{p}'_\perp$$

$$+ e \frac{\omega'}{\varepsilon\varepsilon'} (\varepsilon \mathbf{p}'_\perp - \varepsilon' \mathbf{p}_\perp) \cdot (\mathcal{A}_\perp(\mathbf{x}) + \mathcal{A}_\perp(\mathbf{x}'))$$

$$+ e^2 \left[\mathcal{A}_\perp^2(\mathbf{x}) + \mathcal{A}_\perp^2(\mathbf{x}') + \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \right) (\mathcal{A}_\perp(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{A}_\perp(\mathbf{x}')) \right], \quad (6.12)$$

wobei die Relationen aus Abschnitt B.1 und B.2 verwendet wurden. Die in Glg. (6.9) enthaltene δ -Funktion kann dazu verwendet werden die Integration über ε auszuführen und liefert $\varepsilon = \omega' - \varepsilon'$. Werden die Variablen

$$\Delta \mathbf{x}_{\perp, e} = \mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{x}'_{\perp} - \frac{e}{\varepsilon} \int_T^{\infty} d\tilde{T} \mathbf{A}_{\perp}(\tilde{\mathbf{x}}) + \frac{e}{\varepsilon} \int_{T'}^{\infty} d\tilde{T}' \mathbf{A}_{\perp}(\tilde{\mathbf{x}}') \quad (6.13)$$

und

$$\Delta \mathbf{x}_{\perp, p} = \mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{x}'_{\perp} + \frac{e}{\varepsilon'} \int_T^{\infty} d\tilde{T} \mathbf{A}_{\perp}(\tilde{\mathbf{x}}) - \frac{e}{\varepsilon'} \int_{T'}^{\infty} d\tilde{T}' \mathbf{A}_{\perp}(\tilde{\mathbf{x}}') \quad (6.14)$$

eingeführt, so lässt sich mit zusätzlicher Substitution von $\mathbf{p}_{\perp} = \mathbf{q}_{\perp} + \varepsilon \Delta \mathbf{x}_{\perp, e} / (T - T')$ die Differenz $Y(x) - Y(x')$ vereinfachen:

$$\begin{aligned} Y(x) - Y(x') &= \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) (T - T') + \frac{\mathbf{q}_{\perp}^2}{2\varepsilon} (T - T') - \frac{\varepsilon \Delta \mathbf{x}_{\perp, e}^2}{2(T - T')} + \frac{\mathbf{p}'_{\perp}{}^2}{2\varepsilon'} (T - T') \\ &\quad - \mathbf{p}'_{\perp} \cdot \Delta \mathbf{x}_{\perp, p} - \frac{\omega' e^2}{\varepsilon \varepsilon'} \frac{1}{2} \left(\int_T^{\infty} d\tilde{T} \mathbf{A}_{\perp}^2(\tilde{\mathbf{x}}) - \int_{T'}^{\infty} d\tilde{T}' \mathbf{A}_{\perp}^2(\tilde{\mathbf{x}}') \right). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Für die Integration über \mathbf{q}_{\perp} können die Relationen

$$I(a) = \int \frac{d^2z}{(2\pi)^2} e^{iaz^2} = \int_0^{\infty} \frac{ds}{4\pi} e^{ias} = \frac{i}{4\pi a} \quad (6.16)$$

und

$$\int \frac{d^2z}{(2\pi)^2} z^2 e^{iaz^2} = -i \frac{dI(a)}{da} = -\frac{1}{4\pi a^2} \quad (6.17)$$

verwendet werden. Die exponentielle Abhängigkeit von \mathbf{q}_{\perp} ist quadratisch. Alle Summanden des Vorfaktors, die linear von \mathbf{q}_{\perp} abhängen, liefern entsprechend bei der Integration über \mathbf{q}_{\perp} keinen Beitrag. Die Verwendung von $d^2\mathbf{p}'_{\perp} \approx \varepsilon' d\Omega'$ führt zum Ausdruck:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2N}{d\varepsilon' d\Omega'} \\ &= \rho_{\gamma} \frac{\pi \alpha}{\omega' \varepsilon \varepsilon'} \frac{1}{(2\pi)^5} \int d^3x \int d^3x' \varepsilon'^2 \exp \left[i \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) (T - T') - i \frac{\varepsilon \Delta \mathbf{x}_{\perp, e}^2}{2(T - T')} \right. \\ &\quad \left. + i \frac{\mathbf{p}'_{\perp}{}^2}{2\varepsilon'} (T - T') - i \mathbf{p}'_{\perp} \cdot \Delta \mathbf{x}_{\perp, p} - i \frac{\omega' e^2}{\varepsilon \varepsilon'} \frac{1}{2} \left(\int_T^{\infty} d\tilde{T} \mathbf{A}_{\perp}^2(\tilde{\mathbf{x}}) - \int_{T'}^{\infty} d\tilde{T}' \mathbf{A}_{\perp}^2(\tilde{\mathbf{x}}') \right) \right] \\ &\quad \times \left\{ \frac{i\pi}{(T - T')} 2\varepsilon \left[m^2 \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + 4 \right) + \varepsilon \varepsilon' \frac{\Delta \mathbf{x}_{\perp, e}^2}{(T - T')^2} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \mathbf{p}'_{\perp}{}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\mathbf{p}'_{\perp} \cdot \Delta \mathbf{x}_{\perp, e} \frac{\varepsilon}{(T - T')} + e \frac{\omega'}{\varepsilon \varepsilon'} \left(\varepsilon \mathbf{p}'_{\perp} - \frac{\varepsilon \varepsilon'}{(T - T')} \Delta \mathbf{x}_{\perp, e} \right) \cdot \Delta \mathbf{A}_{\perp} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^2 \left(\mathbf{A}_{\perp}^2(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_{\perp}^2(\mathbf{x}') + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right) \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{x}') \right) \right] - \frac{\pi}{(T - T')} 4\varepsilon \varepsilon' \right\}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Bevor die weiteren Integrationen gelöst werden, erweist es sich als praktisch die Größen

$$\begin{aligned} T_{\pm} &= \frac{(T \pm T')}{2^{(1\pm 1)/2}}, \\ \mathbf{x}_{\perp, \pm} &= \frac{(\mathbf{x}_{\perp} \pm \mathbf{x}'_{\perp})}{2^{(1\pm 1)/2}}, \\ \mathbf{A}_{\perp, \pm} &= \frac{(\mathbf{A}_{\perp}(x) \pm \mathbf{A}_{\perp}(x'))}{2^{(1\pm 1)/2}}, \\ \mathbf{p}'_{\perp} &= \mathbf{p}'_{\perp} - \frac{e}{T - T'} \left(\int_T^{\infty} d\tilde{T} \mathbf{A}_{\perp}(\tilde{\mathbf{x}}) - \int_{T'}^{\infty} d\tilde{T}' \mathbf{A}_{\perp}(\tilde{\mathbf{x}}') \right) \end{aligned} \quad (6.19)$$

einzuführen. Dadurch transformiert sich die obige differentielle Gleichung zu

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 N}{d\varepsilon' d\Omega'} &= i\rho_\gamma \frac{\alpha\varepsilon'}{16\pi^3\omega'} \int \int \frac{d^3 x d^3 x'}{T_-} \\
&\times \exp \left[i \left\{ \frac{\omega' T_-}{\varepsilon\varepsilon'} \left(m^2 + \mathbf{P}'_\perp{}^2 \right) - \frac{\varepsilon}{2T_-} \left(\mathbf{x}_{\perp,-} + \frac{T_-}{\varepsilon} \mathbf{P}'_\perp \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\omega' e^2}{\varepsilon\varepsilon'} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_-} \left(\int_T^\infty d\tilde{T} \mathcal{A}_\perp^2(\tilde{\mathbf{x}}) - \int_{T'}^\infty d\tilde{T}' \mathcal{A}_\perp^2(\tilde{\mathbf{x}}) \right)^2 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_T^\infty d\tilde{T} \mathcal{A}_\perp^2(\tilde{\mathbf{x}}) - \int_{T'}^\infty d\tilde{T}' \mathcal{A}_\perp^2(\tilde{\mathbf{x}}') \right) \right\} \Big] \\
&\times \left[m^2 \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + 4 \right) + \frac{2i\varepsilon'}{T_-} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \left\{ \mathbf{P}'_\perp - \frac{\varepsilon'}{T_-} \mathbf{x}_{\perp,-} + e \frac{\omega'}{\varepsilon} \left(\mathcal{A}_{\perp,+}(\mathbf{x}) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{T_-} \left(\int_T^\infty d\tilde{T} \mathcal{A}_\perp(\tilde{\mathbf{x}}) - \int_{T'}^\infty d\tilde{T}' \mathcal{A}_\perp(\tilde{\mathbf{x}}') \right) \right) \right\}^2 - e^2 \frac{(\varepsilon - \varepsilon')^2}{4\varepsilon\varepsilon'} \mathcal{A}_{\perp,-}^2 \right]. \tag{6.20}
\end{aligned}$$

Für die nachfolgenden Integrationen werden die Integrationsvariablen von $d^2\mathbf{x}_\perp$ und $d^2\mathbf{x}'_\perp$ zu $d^2\mathbf{x}_{\perp,-}$ und $d^2\mathbf{x}'_{\perp,-}$ überführt. Von den ersten beiden Termen der exponentiellen Abhängigkeit lässt sich abschätzen, dass für eine feste Emissionsrichtung des Positrons der Hauptbeitrag zum Integral von $|\mathbf{P}'_\perp(x, x')| \lesssim m$ stammt. Für Energien von $\varepsilon \sim \varepsilon' \sim \omega'$ ist die charakteristische Länge der Paarbildung bezüglich T_- von der Größe $\varepsilon\varepsilon'/m^2\omega' \sim \lambda_0\kappa_0/\xi_0 \sim \lambda_C\omega'/m$ [29]. Hierbei bezeichnet λ_0 die zentrale Laserwellenlänge und $\lambda_C = 1/m$ die Compton-Wellenlänge. Setzen wir $\mathbf{X}_{\perp,-} = \mathbf{x}_{\perp,-} + \frac{T_-}{\varepsilon} \mathbf{P}'_\perp$, dann ist die charakteristische Länge für $|\mathbf{X}_{\perp,-}|$ und entsprechend für $|\mathbf{x}'_{\perp,-}|$ von der Größenordnung der Compton-Wellenlänge. Die Größe $\omega|\mathbf{x}'_{\perp,-}|$ ist durch $\omega/m \sim (m/\omega')(\kappa_0/\xi_0) \lesssim m/\omega' \ll m\xi_0/\omega' \ll 1$ nach oben beschränkt und für das Feld vernachlässigbar, da dieses entweder von $\mathbf{x}_\perp = \mathbf{x}_{\perp,+} + \mathbf{x}_{\perp,-}/2$ oder $\mathbf{x}'_\perp = \mathbf{x}_{\perp,+} - \mathbf{x}_{\perp,-}/2$ abhängt. Wird aufgrund dessen die Abhängigkeit von $\mathbf{x}_{\perp,-}$ im Feld vernachlässigt, so lässt sich die verbleibende Gauß'sche Integration über $d^2\mathbf{x}_{\perp,-}$ lösen. Dazu vereinfachen wir

$$\mathbf{P}'_\perp = \mathbf{p}'_\perp - \frac{e}{T_-} \int_T^{T'} d\tilde{T} \mathcal{A}_\perp(\tilde{\mathbf{x}}) \tag{6.21}$$

und substituieren mit

$$\mathbf{y}_{\perp,-} = \mathbf{x}_{\perp,-} + \frac{T_-}{\varepsilon} \mathbf{P}'_\perp. \tag{6.22}$$

Eingesetzt in Glg. (6.20) lässt sich der Ausdruck mit Hilfe von Glg. (6.16) und Glg. (6.17) noch weiter vereinfachen, sodass

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 N}{d\varepsilon' d\Omega'} &= \rho_\gamma \frac{\alpha m^2}{8\pi^2\omega'\varepsilon^2} \int dT \int dT' \int d^2\mathbf{x}_{\perp,+} e^{i\frac{\omega'}{2\varepsilon\varepsilon'} T_- \left(m^2 + \left(\mathbf{p}'_\perp - \frac{e}{T_-} \int_T^{T'} d\tilde{T} \mathcal{A}_\perp(\tilde{\mathbf{x}}) \right)^2 \right)} \\
&\quad e^{-i\frac{\omega' e^2}{2\varepsilon\varepsilon'} \left(\frac{1}{T_-} \left(\int_T^{T'} d\tilde{T} \mathcal{A}_\perp(\tilde{\mathbf{x}}) \right)^2 + \int_T^{T'} d\tilde{T} \mathcal{A}_\perp^2(\tilde{\mathbf{x}}) \right)} \left[\frac{\omega'^2}{m^2} \left(\mathbf{p}'_\perp + e \frac{\mathcal{A}_\perp(\mathbf{x}) + \mathcal{A}_\perp(\mathbf{x}')}{2} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon'^2 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon\varepsilon' - e^2 \frac{(\varepsilon - \varepsilon')^2}{m^2} \left(\frac{\mathcal{A}_\perp(\mathbf{x}) - \mathcal{A}_\perp(\mathbf{x}')}{2} \right)^2 \right]. \tag{6.23}
\end{aligned}$$

Das externe Feld variiert nur langsam im Bildungsgebiet von T_- , sodass es um T_+ entwickelt werden kann. Für die nachfolgende Berechnung benötigen wir die Entwicklungen

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_\perp(\mathbf{x}) &= \mathcal{A}_\perp\left(T_+ + \frac{T_-}{2}, \mathbf{x}_\perp\right) \\
 &\approx \mathcal{A}_\perp(T_+, \mathbf{x}_\perp) + \frac{\partial \mathcal{A}_\perp(T_+, \mathbf{x}_\perp)}{\partial T_+} \frac{1}{2} T_- + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_\perp(T_+, \mathbf{x}_\perp)}{\partial T_+^2} \left(\frac{1}{2} T_-\right)^2, \\
 \mathcal{A}_\perp(\mathbf{x}') &= \mathcal{A}_\perp\left(T_+ - \frac{T_-}{2}, \mathbf{x}_\perp\right) \\
 &\approx \mathcal{A}_\perp(T_+, \mathbf{x}_\perp) - \frac{\partial \mathcal{A}_\perp(T_+, \mathbf{x}_\perp)}{\partial T_+} \frac{1}{2} T_- + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_\perp(T_+, \mathbf{x}_\perp)}{\partial T_+^2} \left(\frac{1}{2} T_-\right)^2, \\
 \int_T^{T'} d\tilde{T} \mathcal{A}_\perp(\tilde{x}) &= \int_{T_+ + T_-/2}^{T_+ - T_-/2} d\tilde{T} \mathcal{A}_\perp(\tilde{x}) \approx -\mathcal{A}_\perp(T_+, \mathbf{x}_\perp) T_- - \frac{1}{24} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_\perp(T_+, \mathbf{x}_\perp)}{\partial T_+^2} T_-^3, \\
 \int_T^{T'} d\tilde{T} \mathcal{A}_\perp^2(\tilde{x}) &= \int_{T_+ + T_-/2}^{T_+ - T_-/2} d\tilde{T} \mathcal{A}_\perp^2(\tilde{x}) \approx -\mathcal{A}_\perp^2(T_+, \mathbf{x}_\perp) T_- - \frac{1}{24} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_\perp^2(T_+, \mathbf{x}_\perp)}{\partial T_+^2} T_-^3.
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

Einsetzen dieser Relationen in Glg. (6.23) und zusammenfassen der Terme führt zu

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 N}{d\varepsilon' d\Omega'} &= \rho_\gamma \frac{\alpha m^2}{8\pi^2 \omega' \varepsilon^2} \int dT \int dT' \int d^2 \mathbf{x}_{\perp,+} e^{i \frac{\omega'}{2\varepsilon\varepsilon'} T_- (m^2 + (\mathbf{p}'_\perp + e\mathcal{A}_\perp(\mathbf{x}))^2)} \\
 &\quad e^{i \frac{\omega' \varepsilon^2}{24\varepsilon\varepsilon'} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_\perp(\mathbf{x})}{\partial T_+}\right)^2 T_-^3} \times \left[\varepsilon'^2 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon\varepsilon' + \frac{\omega'^2}{m^2} (\mathbf{p}'_\perp + e\mathcal{A}_\perp(\mathbf{x}))^2 \right. \\
 &\quad \left. - e^2 \frac{(\varepsilon - \varepsilon')^2}{4m^2} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_\perp(\mathbf{x})}{\partial T_+} T_-\right)^2 \right].
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

Hierbei wurde verwendet, dass Ordnungen größer als T_-^2 und T_-^3 einen vernachlässigbaren Beitrag liefern. Um zuletzt noch die Integration über dT_- auszuführen, ist es hilfreich, die obige Gleichung über die Parameter

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}) &= \sqrt{1 + \frac{[\mathbf{p}'_\perp + e\mathcal{A}_\perp(\mathbf{x})]^2}{m^2}}, \\
 b(\mathbf{x}) &= \frac{m\omega'}{\varepsilon\varepsilon'} F_{cr} \frac{1}{\left|\frac{\partial \mathcal{A}_\perp(\mathbf{x})}{\partial T}\right|}, \\
 g(\mathbf{x}) &= b(\mathbf{x}) f^3(\mathbf{x}), \\
 s(\mathbf{x}) &= \frac{\omega' m^2}{2\varepsilon\varepsilon'} \frac{1}{f(\mathbf{x}) b(\mathbf{x})} T_-.
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

auszudrücken. In der Funktion $b(\mathbf{x})$ ist der lokale Quanten-Nichtlinearitätsparameter $\kappa(\mathbf{x}) = \frac{\omega'}{mF_{cr}} \left|\frac{\partial \mathcal{A}_\perp}{\partial T}\right|$ enthalten. Eingesetzt in Glg. (6.25) führt dies zu der Gleichung

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 N}{d\varepsilon' d\Omega'} &= \rho_\gamma \frac{\alpha \varepsilon'}{4\pi^2 \omega'^2 \varepsilon} \int ds \int dT \int d^2 \mathbf{x}_\perp f(\mathbf{x}) b(\mathbf{x}) e^{ig(\mathbf{x})(s(\mathbf{x}) + \frac{1}{3}s(\mathbf{x})^3)} \\
 &\quad \times \left[\varepsilon'^2 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon\varepsilon' + \frac{\omega'^2}{m^2} (\mathbf{p}'_\perp + e\mathcal{A}_\perp(\mathbf{x}))^2 \right. \\
 &\quad \left. - e^2 \frac{(\varepsilon - \varepsilon')^2}{4m^2} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_\perp(\mathbf{x})}{\partial T_+}\right)^2 f^2(\mathbf{x}) b^2(\mathbf{x}) \frac{4\varepsilon^2 \varepsilon'^2}{\omega'^2 m^4} s^2(\mathbf{x}) \right].
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Die Relationen aus Ref. [95]

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} ds e^{ig(s+s^3/3)} &= \frac{2}{\sqrt{3}} K_{1/3} \left(\frac{2}{3} g \right), \\ \int_{-\infty}^{\infty} ds s^2 e^{ig(s+s^3/3)} &= - \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{ig(s+s^3/3)}\end{aligned}\quad (6.28)$$

werden verwendet, um die Integration über s zu lösen. Hier bezeichnet $K_{1/3}(x)$ die modifizierte Bessel-Funktion [134]. Das Winkelspektrum berechnet sich entsprechend über

$$\begin{aligned}\frac{d^2 N(\omega')}{d\vartheta' d\varphi'} &= \frac{\rho\gamma\alpha}{\sqrt{3}\pi\omega'^2\omega} \int d\varepsilon' \int d\Phi \int dr \varepsilon'^2 r \sin(\vartheta) f(\mathbf{x}) b(\mathbf{x}) \\ &\times \left[1 + \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{\varepsilon\varepsilon'} f^2(\mathbf{x}) \right] K_{1/3} \left(\frac{2}{3} b(\mathbf{x}) f^3(\mathbf{x}) \right),\end{aligned}\quad (6.29)$$

wobei wir von T zur Phase $\Phi = 2\omega T$ übergegangen sind. Das Winkelspektrum $\frac{d^2 N(\omega')}{d\vartheta' d\varphi'}$ lässt sich entsprechend analog zu dieser Berechnung formulieren.

Um das Energiespektrum zu bestimmen, starten wir erneut bei Glg. (6.23) und nutzen aus, dass $d\Omega' \approx d^2 \mathbf{p}'_{\perp} / \varepsilon'^2$. Zudem verwenden wir direkt die Substitution $\mathbf{p}'_{\perp} = \mathbf{q}'_{\perp} + \frac{e}{T_-} \int_T^{T'} d\tilde{T} \mathcal{A}_{\perp}(\tilde{\mathbf{x}})$. Dieses Vorgehen führt zum Ausdruck

$$\begin{aligned}\frac{dN}{d\varepsilon'} &= \rho\gamma \frac{\alpha m^2}{8\pi^2 \omega' \varepsilon^2 \varepsilon'^2} \int dT \int dT' \int d^2 \mathbf{x}_{\perp,+} \int d^2 \mathbf{q}'_{\perp} \\ &\times e^{-i\frac{\omega'\varepsilon^2}{2\varepsilon\varepsilon'}} \left(\frac{1}{T_-} \left(\int_T^{T'} d\tilde{T} \mathcal{A}_{\perp}(\tilde{\mathbf{x}}) \right)^2 + \int_T^{T'} d\tilde{T} \mathcal{A}_{\perp}^2(\tilde{\mathbf{x}}) \right) e^{i\frac{\omega'}{2\varepsilon\varepsilon'} T_- (m^2 + \mathbf{q}'_{\perp}{}^2)} \\ &\times \left\{ \varepsilon'^2 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon\varepsilon' - e^2 \frac{(\varepsilon - \varepsilon')^2}{m^2} \left(\frac{\mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{x}')}{2} \right)^2 \right. \\ &+ \left[\frac{2\mathbf{q}'_{\perp} e}{T_-} \int_T^{T'} d\tilde{T} \mathcal{A}_{\perp}(\tilde{\mathbf{x}}) + \frac{e^2}{T_-^2} \left(\int_T^{T'} d\tilde{T} \mathcal{A}_{\perp}(\tilde{\mathbf{x}}) \right)^2 + e^2 \frac{(\mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{x}'))^2}{4} \right. \\ &+ e (\mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{x}')) \cdot \left(\mathbf{q}'_{\perp} + \frac{e}{T_-} \int_T^{T'} d\tilde{T} \mathcal{A}_{\perp}(\tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{q}'_{\perp} \right)^2 \frac{\omega'^2}{m^2} \\ &\left. \left. - e^2 \frac{(\varepsilon - \varepsilon')^2}{m^2} \left(\frac{\mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{x}')}{2} \right)^2 \right\}.\end{aligned}\quad (6.30)$$

Zur Integration werden erneut die Glg. (6.16) und (6.17) verwendet, wobei die Summanden, welche linear in \mathbf{q}'_{\perp} sind, keinen Beitrag liefern, sodass

$$\begin{aligned}\frac{dN}{d\varepsilon'} &= i\rho\gamma \frac{\alpha m^2}{4\pi\omega'^2 \varepsilon\varepsilon'} \int \frac{dT dT' d^2 \mathbf{x}_{\perp,+}}{T_-} e^{i\frac{\omega'}{2\varepsilon\varepsilon'} \left(m^2 T_- - e^2 \frac{1}{T_-} \left(\int_T^{T'} d\tilde{T} \mathcal{A}_{\perp}(\tilde{\mathbf{x}}) \right)^2 \right)} \\ &\times e^{-i\frac{\omega'\varepsilon^2}{2\varepsilon\varepsilon'}} \int_T^{T'} d\tilde{T} \mathcal{A}_{\perp}^2(\tilde{\mathbf{x}}) \times \left\{ i\frac{2\omega'}{T_-} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{m^2} - e^2 \frac{(\varepsilon - \varepsilon')^2}{m^2} \left(\frac{\mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{x}')}{2} \right)^2 + \varepsilon'^2 \right. \\ &\left. + \varepsilon^2 + 4\varepsilon\varepsilon' + \frac{e^2 \omega'^2}{m^2} \left[\frac{1}{T_-} \int_T^{T'} d\tilde{T} \mathcal{A}_{\perp}(\tilde{\mathbf{x}}) + \frac{\mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{x}')}{2} \right]^2 \right\}.\end{aligned}\quad (6.31)$$

Wird nun die Entwicklung der Felder aus Glg. (6.24) in die obige Gleichung einge-

setzt, dann vereinfacht sich diese zu

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\varepsilon'} &= i\rho_\gamma \frac{\alpha m^2}{4\pi\omega'^2\varepsilon\varepsilon'} \int \frac{dT dT' d^2\mathbf{x}_{\perp,+}}{T_-} e^{i\frac{\omega}{2\varepsilon\varepsilon'} \left(m^2 T_- + \frac{e^2}{12} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_\perp(\mathbf{x})}{\partial T_+} \right)^2 T_-^3 \right)} \times \left\{ \varepsilon'^2 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon\varepsilon' \right. \\ &\quad \left. + i \frac{2\omega'}{T_-} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{m^2} + e^2 \frac{\omega'^2}{m^2} \left[\frac{1}{T_-} \frac{1}{12} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_\perp(\mathbf{x})}{\partial T_+^2} T_-^3 \right]^2 - e^2 \frac{(\varepsilon - \varepsilon')^2}{4m^2} T_-^2 \left(\frac{\partial \mathcal{A}_\perp(\mathbf{x})}{\partial T_+} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Über die Abkürzungen in Glg. (6.26) formt sich der obige Ausdruck um zu

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\varepsilon'} &= i\rho_\gamma \frac{\alpha m^2}{4\pi\omega'^2\varepsilon\varepsilon'} \int d^3\mathbf{x} \int ds e^{ig(\mathbf{x})(s(\mathbf{x}) + \frac{1}{3}s(\mathbf{x})^3)} \times \left\{ \frac{\varepsilon'^2 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon\varepsilon'}{s(\mathbf{x})} \right. \\ &\quad \left. + i \frac{\omega'^2}{s^2(\mathbf{x})g(\mathbf{x})} - (\varepsilon - \varepsilon')^2 s(\mathbf{x}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Zur Lösung dieser Gleichung werden die Integrationsformeln

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{s + i0} e^{ig(s+s^3/3)} &= -\frac{2i}{\sqrt{3}} \int_{\frac{2}{3}g}^{\infty} d\rho K_{1/3}(\rho), \\ \int_{-\infty}^{\infty} ds s e^{ig(s+s^3/3)} &= \frac{2i}{\sqrt{3}} K_{2/3}\left(\frac{2}{3}g\right) \end{aligned} \quad (6.34)$$

verwendet. Für den Summanden, welcher proportional zu s^{-2} ist, wird die partielle Integration verwendet. Damit resultiert die Energieverteilung in dem Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{dN(\omega')}{d\varepsilon'} &= \frac{\rho_\gamma \alpha}{\sqrt{3}\omega'^2\omega} \int d\Phi \int dr r \left[\frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{\varepsilon\varepsilon'} K_{2/3}\left(\frac{2}{3}b(\mathbf{x})\right) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{2}{3}b(\mathbf{x})}^{\infty} dv K_{1/3}(v) \right], \end{aligned} \quad (6.35)$$

wobei die Lichtkegelkoordinate T über die Phasenabhängigkeit des Feldes ausgedrückt wurde. Die Verteilung für ε lässt sich analog hierzu formulieren.

Um nun die entsprechenden Energie- und Winkelspektren zu bestimmen, setzen wir das Feld des fokussierten Laserpulses aus Glg. (6.2) in die Glg. (6.35) und (6.29) ein. Bei der Betrachtung eines longitudinal und transversal fokussierten Laserfeldes kann die longitudinale Komponente z wie in Ref. [48] über $z \approx t \approx T$ abgeschätzt werden, sodass die erforderliche Integration über die Laserphase möglich wird.

Wir wollen in den folgenden Abschnitten die Ergebnisse der fokussierten Laserfelder mit denen einer gepulsten ebenen Welle vergleichen. Dazu setzen wir Glg. (6.3) ebenfalls in die obigen Gleichungen für die Energie- und Winkelverteilung ein. Die Abhängigkeit der Spektren von der transversalen Komponente r entfällt dabei und wird formal durch $\int d^2\mathbf{x}_\perp = \Sigma_{\text{eff}}$ ausgetauscht. Dabei ist es erforderlich, dass das fokussierte Feld und die ebene Welle dieselbe Energie besitzen. Dies ist genau dann der Fall, wenn die effektive transversale Fläche $\Sigma_{\text{eff}} = \pi\omega_0^2/2$ für die ebene Welle eingeführt wird (vgl. Ref. [47]).

6.2.3 ZUSÄTZLICHE BERÜCKSICHTIGUNG DER BREMSSTRAHLUNG

Um das Bremsstrahlungsspektrum in die bisherige Berechnung der Energie- und Winkelverteilung mit aufzunehmen, werden diese Spektren gewichtet mit dem

Bremsstrahlungsspektrum $d\mathcal{N}_\gamma/d\omega'$ eines Elektrons der Einfallenergie E_0 über ω' integriert [135]. Das Verfahren ist analog zum Vorgehen in Kapitel 5. Entsprechend lauten die so gewonnenen Verteilungen:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar{N}}{d\vartheta d\varphi} &= \int_{f_{\min}}^1 df I_\gamma(f, \ell) \left. \frac{d^2N(\omega')}{d\vartheta d\varphi} \right|_{\omega'=fE_0}, \\ \frac{d\bar{N}}{d\varepsilon} &= \int_{f_{\min}}^1 df I_\gamma(f, \ell) \left. \frac{dN(\omega')}{d\varepsilon} \right|_{\omega'=fE_0},\end{aligned}\quad (6.36)$$

wobei die normierte Energie $f = \omega'/E_0$ eingeführt wurde. Anders als in Kapitel 5 ist das hier verwendete Target sehr dünn, weshalb das Bremsstrahlungsspektrum durch

$$I_\gamma(f, \ell) = \frac{d\mathcal{N}_\gamma}{df} \approx \frac{\ell}{f} \left(\frac{4}{3} - \frac{4f}{3} + f^2 \right) \quad (6.37)$$

approximiert werden kann [135, 136]. Dieser Ausdruck lässt sich immer dann verwenden, wenn für die normierte Targetdicke $\ell = L_T/L_{\text{rad}} < 1$ gilt. Die Energieerhaltung innerhalb des Prozesses führt dazu, dass der minimale Wert von f durch $f_{\min} = \varepsilon/E_0$ bestimmt wird, also abhängig ist von der Energie ε des erzeugten Elektrons. Dabei ist zu beachten, dass die Energie des erzeugten Paares hauptsächlich durch die Energie des γ -Photons bestimmt wird und die Abhängigkeit $\omega' \approx \varepsilon + \varepsilon'$ besteht.

Das breite Spektrum der Bremsstrahlung enthält neben den hochenergetischen Photonen auch einen großen Anteil an niederenergetischen Photonen, die jedoch nicht zur Paarbildung führen oder nur einen sehr geringen Beitrag dazu liefern. In dem hier verwendeten Parameterregime stammt der Hauptbeitrag zur Paarproduktion von $f \approx 1$ (vgl. Ref. [47] und Abb. 6.4). Demzufolge wird die im vorherigen Abschnitt festgelegte Bedingung $\omega' \gg m\xi$ weiterhin erfüllt, solange $\xi \lesssim 10^2$.

6.3 ENERGIE- UND WINKELVERTEILUNGEN DER BREIT-WHEELER- PAAR-PRODUKTION IN FOKUSSierten LASERFELDERN

In diesem Abschnitt betrachten wir die Energie- und Winkelverteilungen der erzeugten Elektron-Positron-Paare. Wir gehen von einer ebenen gepulsten Laserwelle als Referenz aus, um durch Vergleiche den Einfluss von Laserfokussierungseffekten aufzuzeigen. Bei der Laserfokussierung betrachten wir sowohl die transversale als auch die longitudinale Fokussierung. Wir weisen darauf hin, dass alle Kurven in den folgenden Abbildungen auf eine Höhe von 1 normiert wurden, um ihren Vergleich zu erleichtern. Die verwendeten Parameter können der experimentellen Beschreibung in Abschnitt 6.1.1 entnommen werden. Die Ergebnisse dieses Abschnitts beruhen auf Ref. [132].

6.3.1 ENERGIEVERTEILUNGEN

In Abbildung 6.5 wird das normierte Energiespektrum in Abhängigkeit von ε/E_0 für die Kollision eines einzelnen monoenergetischen γ -Photons mit einem starken Laserfeld dargestellt. Die Abbildung zeigt die folgenden unterschiedlichen Modelle für das Laserfeld: eine gepulste ebene Welle als rote Kurve, ein fokussierter Puls mit ausschließlich transversaler Fokussierung als durchgezogene blaue Kurve und ein Puls mit sowohl transversaler als auch longitudinaler Fokussierung als gestrichelte blaue Kurve. Das Maximum aller gezeigten Kurven liegt bei $\varepsilon/E_0 \approx 0.5$. Dies kann

dadurch begründet werden, dass sich die absorbierte Energie, welche hauptsächlich vom γ -Photon stammt ($\omega' \approx \varepsilon + \varepsilon'$), ungefähr gleichmäßig auf das Elektron und das Positron aufteilt. Zudem lässt sich erkennen, dass beide Kurven, welche sich auf das fokussierte Feld beziehen, im normierten Fall nahezu identisch sind. Dies impliziert, dass es zur Vorhersage des Energiespektrums ausreichend ist, allein die transversale Fokussierung zu berücksichtigen. Tatsächlich lässt sich numerisch feststellen, dass die totale Anzahl im Fall ohne longitudinale Fokussierung um etwa 1% größer ist als im Fall, wo diese berücksichtigt wird. Das Spektrum, welches sich für eine gepulste ebene Welle ergibt, ist im Vergleich zu den fokussierten Laserfeldmodellen deutlich breiter. Demnach bewirkt die Laserfokussierung, dass das Spektrum der erzeugten Teilchen verengt wird. Dieses Phänomen lässt sich dadurch erklären, dass bei der gepulsten ebenen Welle die Intensität in der gesamten transversalen Wechselwirkungsebene konstant hoch gehalten wird, während sich die Intensität bei einem fokussierten Gaußprofil von ihrem Maximum in der Mitte zu den minimalen Werten an den Rändern ändert.

In Ref. [48] wird ebenfalls gezeigt, dass das Spektrum der erzeugten Teilchen durch die Laserfokussierung verengt wird.

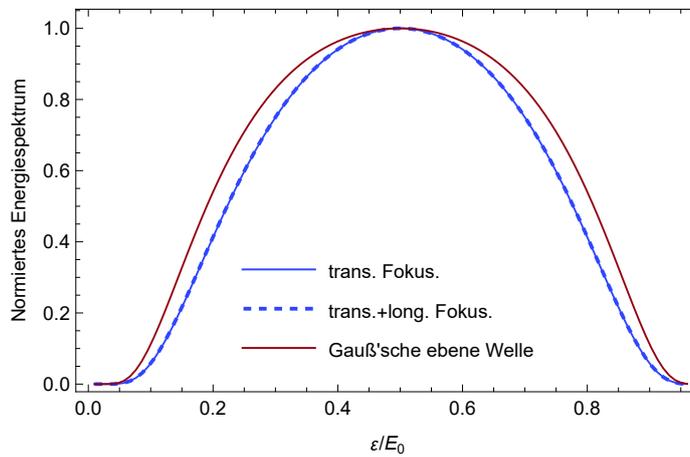


Abbildung 6.5: Das normierte Energiespektrum für ein einzelnes monoenergetisches γ -Photon mit $\omega' = 2.5 \text{ GeV} = E_0$ wird für das fokussierte Laserfeld mit transversaler Fokussierung als durchgezogene blaue Kurve und mit transversaler und longitudinaler Fokussierung als gestrichelte blaue Kurve dargestellt. Das Spektrum für ein Laserfeld in Form einer gepulsten ebenen Welle wird als durchgezogene rote Kurve dargestellt. Die Abbildung entstammt Ref. [132].

Im Folgenden wird die Energieverteilung in Abbildung 6.6 analysiert, wobei das Bremsstrahlungsspektrum der hochenergetischen γ -Photonen mit berücksichtigt wird. Im Vergleich zu Abbildung 6.5 führt der Effekt des Bremsstrahlungsspektrums bei allen betrachteten Feldkonfigurationen zu einer deutlich veränderten Energieverteilung. Es lässt sich beobachten, dass die Maxima der Energieverteilungen nicht mehr beim halben Wert von E_0 liegen, sondern etwas darunter. Dieses Verhalten stammt daher, dass zwar γ -Frequenzen in der Nähe von E_0 am relevantesten sind, aber auch weniger energiereiche γ -Photonen mit Frequenzen $\omega' > 0.2E_0$ beträchtliche Beiträge zur Paarerausbeute liefern [47]. Die Gesamtenergie eines Paares erfüllt währenddessen weiterhin die Beziehung $\omega' \approx \varepsilon + \varepsilon'$.

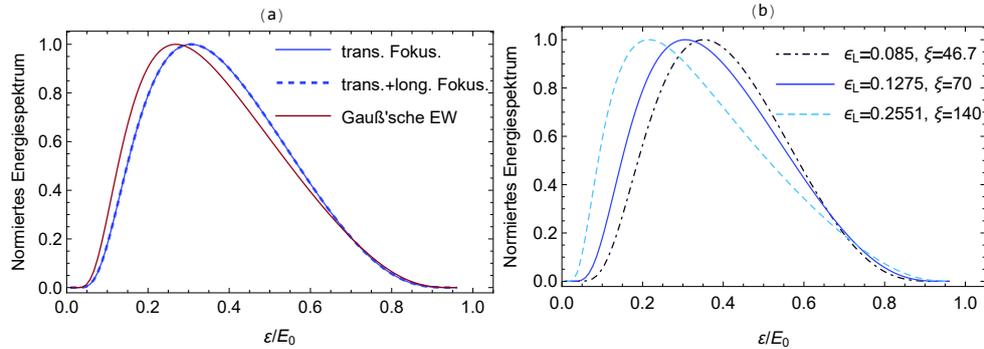
Dasselbe Phänomen der Verschiebung des Maximums hin zu niedrigeren Energien wurde bereits in Kapitel 5 festgestellt. Insbesondere für größere Intensitätsparameter ξ wurde diese Verschiebung dort verstärkt (vgl. Abbildung 5.4).

In Abbildung 6.6(a) sehen wir den Vergleich zwischen dem Energiespektrum resultierend aus dem fokussierten Laserpuls und der gepulsten ebenen Welle. Die durchgezogene blaue Kurve zeigt den Fall mit rein transversaler Fokussierung, die gestrichelte Kurve den Fall mit zusätzlicher longitudinaler Fokussierung. Es zeigt sich, dass auch hier praktisch kein Unterschied zwischen den beiden Laserfeldmodellen im normierten Energiespektrum zu erkennen ist. Wenn wir nun den fokussierten Fall mit dem Fall der ebenen Welle (dargestellt als rote durchgezogene Kurve) vergleichen, dann ist ersichtlich, dass das Maximum unter Berücksichtigung der

Fokussierung bei höheren Energien liegt. Im direkten Vergleich liegt das Maximum für die fokussierte Laserwelle bei $\varepsilon/E_0 \approx 0.3$ und für das Laserfeld als gepulste ebene Welle bei $\varepsilon/E_0 \approx 0.26$. Die Ursache für diesen Unterschied in den Spektren ist der bereits erwähnte Intensitätsgradient des fokussierten Laserfeldes. Das Maximum verschiebt sich mit zunehmendem Intensitätsparameter ζ zu kleineren Energien (vgl. Abb. 6.2 (b)). Im Fall des fokussierten Laserpulses kommt es dazu, dass auch Paarbildungsprozesse außerhalb des Laserfokus stattfinden. In diesen Regionen, in denen die lokale Intensität abgenommen hat, werden größere ω' -Werte (annähernd E_0) als im Fall einer ebenen Welle benötigt, um eine nennenswerte Wahrscheinlichkeit zu erreichen. Infolgedessen wird, wenn wir die Laserfokussierung berücksichtigen, die wahrscheinlichste Paarenergie zu größeren Werten hin verschoben.

In Abbildung 6.6 (b) wird das normierte Energiespektrum für unterschiedliche Fokussierungen gezeigt. Dabei wird die Pulsenergie des Lasers $W_G \propto \zeta^2 w_0^2$ konstant gehalten. Wir vergleichen dabei eine Fokusweite von $w_0 = 2 \mu\text{m}$ mit den Werten $w_0 = 1 \mu\text{m}$ und $3 \mu\text{m}$. Die dazugehörigen Dispersionswinkel sind durch $\epsilon_L = 2/(w_0\omega)$ gegeben. Es zeigt sich, dass eine schwächere Laserfokussierung eine Verschiebung des Maximums der Energieverteilung hin zu höherer Energien bewirkt im Vergleich zu den Ausgangsparametern. Somit bewirkt eine engere Fokussierung mit entsprechend größeren Intensitätsparametern eine Verschiebung des Maximums hin zu niedrigeren Elektronenenergien. Die Verschiebung wird durch die vergrößerten ζ -Parameter (und den größeren lokalen Werten des Quanten-Nichtlinearitätsparameters) verursacht, wodurch mehr Photonen aus dem Laserfeld absorbiert werden können, so dass ein kleineres ω' ausreicht, um ein Paar zu erzeugen.

Abbildung 6.6: Das normierte Energiespektrum einschließlich Bremsstrahlung ist für das fokussierte Laserfeld ohne longitudinale Fokussierung als durchgezogene blaue Kurve dargestellt. In (a) sind Vergleiche mit einem ebenfalls longitudinal fokussierten Laserpuls und mit einer gepulsten ebenen Welle dargestellt. Der Intensitätsparameter wurde für alle Kurven mit $\zeta = 70$ gewählt. Es gilt die gleiche Farbkodierung und Normierung wie in Abb. 6.5. In (b) wird das normierte Energiespektrum für das fokussierte Laserfeld ohne longitudinale Fokussierung für verschiedene fokale Tailenweiten w_0 dargestellt, wobei die Pulsenergie $W_G \propto \zeta^2 w_0^2$ konstant gehalten wird. Die resultierenden unterschiedlichen Dispersionswinkel und Intensitätsparameter können der Legende entnommen werden. Die Abbildung entstammt Ref. [132].



Die Auswirkung der Fokussierung auf die totale Anzahl der Paare wurde bereits in Ref. [47] unter Verwendung der *locally constant field approximation* untersucht. Dort wurde gezeigt, dass die Gesamtanzahl der erzeugten Paare steigt, wenn der Fokussierungspunkt verkleinert wird. Durch eine Integration über das nicht normierte Energiespektrum erhalten wir ebenfalls die Gesamtanzahl der erzeugten Paare und können die in Ref. [47] gezeigten Werte mit unseren vergleichen. Mit der hier verwendeten Berechnung ergibt sich eine Gesamtanzahl von $\approx 4.4 \times 10^{-8}$ Paaren pro einfallendem Bremsstrahlung-erzeugendem Elektron. Dieses Ergebnis stimmt gut mit der Vorhersage aus Ref. [47] überein (vgl. Abb. 7 dort).

6.3.2 WINKELVERTEILUNGEN

In diesem Abschnitt wird die Winkelverteilung der erzeugten Paare untersucht. Dabei bezeichnet ϑ den Winkel zwischen dem Elektronenimpuls \mathbf{p} und der Richtung des einlaufenden γ -Photons \mathbf{k}' . Der erwartete Emissionswinkel lässt sich durch $\vartheta \sim m\zeta/E_0 \approx 14\text{ mrad}$ abschätzen, da die transversale Impulskomponente des Elektrons von der Größenordnung $p_{\perp} \sim m\zeta$ ist, während die longitudinale Impulskomponente etwa $p_z \approx p_0 \approx \omega'/2 \approx E_0/2$ beträgt.

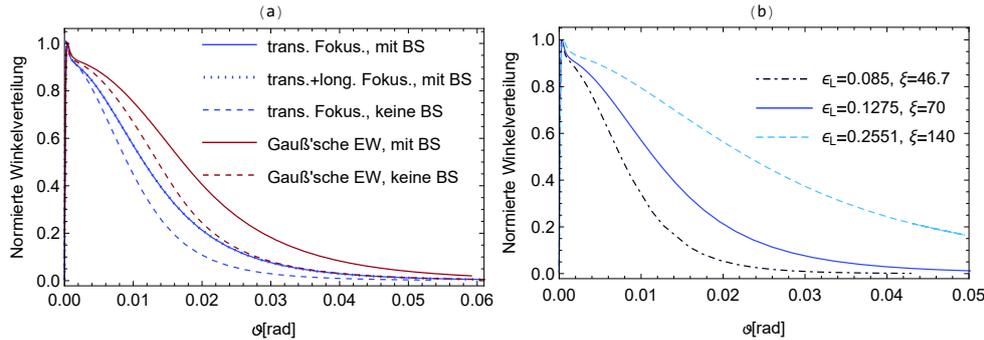


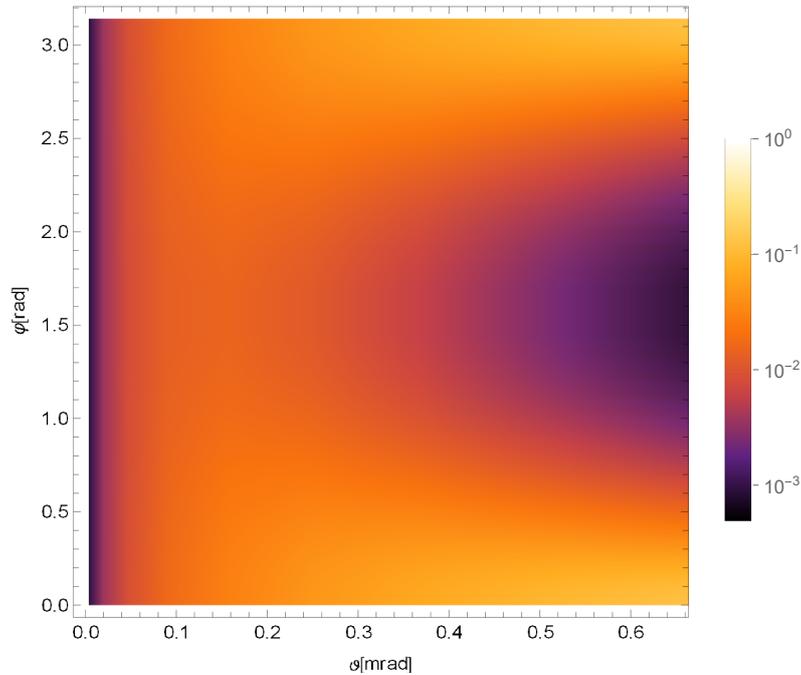
Abbildung 6.7: Die normierte Winkelverteilung einschließlich Bremsstrahlung ist für das fokussierte Laserfeld ohne longitudinale Fokussierung als durchgezogene blaue Kurve dargestellt. In (a) ist der Vergleich mit einem Laserfeld als gepulste ebene Welle in rot dargestellt. Die blau gepunktete Kurve zeigt das Spektrum mit longitudinaler Fokussierung. Die gestrichelten Kurven zeigen die Winkelverteilung ohne Bremsstrahlung. Der Laserintensitätsparameter $\xi = 70$ wird konstant gehalten. In (b) wird das normierte Spektrum für das fokussierte Laserfeld ohne longitudinale Fokussierung für verschiedene Strahltaillenweiten w_0 dargestellt, wobei die Pulsenergie $W_G \propto \xi^2 w_0^2$ konstant gehalten wird. Die Legende zeigt die entsprechenden Dispersionswinkel und Laserintensitätsparameter. Die Abbildung entstammt Ref. [132].

In Abbildung 6.7 wird das normierte Winkelspektrum der erzeugten Elektronen gezeigt. Dabei werden die Fälle eines fokussierten Laserpulses und die gepulste ebene Welle miteinander verglichen. Zudem werden die Spektren für ein einzelnes monoenergetisches γ -Photon und für die Mittelung über das Bremsstrahlungsspektrum gezeigt. Die Verteilung für das fokussierte Laserfeld ohne longitudinale Fokussierung unter Einbeziehung des Bremsstrahlungsspektrums wird durch eine blaue durchgezogene Linie dargestellt. Das Maximum dieser Verteilung besitzt eine charakteristische Spitzenform und liegt bei etwa $\vartheta_0 = 0.3\text{ mrad}$. Wird die longitudinale Fokussierung mit einbezogen (blaue gepunktete Linie), bleibt die Winkelverteilung unverändert. Der Unterschied der beiden Verteilungen ist also nicht durch die Form der Kurven, sondern lediglich durch eine geringfügig verschiedene absolute Höhe von unter 1% gegeben. Für ein einzelnes monoenergetisches γ -Photon und einen fokussierten Laserpuls wird die Winkelverteilung als blau gestrichelte Kurve gezeigt. Das Maximum verschiebt sich in diesem Fall zu kleineren Energien und liegt bei etwa $\vartheta_0 \approx 0.2\text{ mrad}$. Da für ein einzelnes monoenergetisches γ -Photon das Verhältnis zwischen der Energie des γ -Photons und den absorbierten Laserphotonen am größten ist, nimmt in diesem Fall die Breite des Spektrums signifikant ab. Das Spektrum der gepulsten ebenen Welle wird in rot dargestellt. Die durchgezogene Linie bezieht sich auf die Berechnung, welche das Bremsstrahlungsspektrum mit berücksichtigt, während die gestrichelte Kurve den Fall eines einzelnen γ -Photons beschreibt. Wie bei der zuvor beschriebenen Situation des fokussierten Laserpulses, führt das Weglassen der Bremsstrahlung auch hier zu einer schmaleren Verteilung. Im direkten Vergleich zu den Spektren, welche den Fall des fokussierten Gauß'schen Pulses beschreiben, sind die hier gezeigten Spektren jedoch viel breiter. Während im fokussierten Fall die Intensität zu den Rändern hin abnimmt, ist bei der gepulsten ebenen Welle die Intensität im Wechselwirkungsvolumen überall die Gleiche. Eine größere Intensität führt dazu, dass mehr Photonen vom Laserfeld absorbiert werden, was wiederum einen größeren transversalen Impulsbeitrag mit sich bringt. Somit

resultiert ein verbreitertes Spektrum. Alle in Abbildung 6.7 (a) gezeigten Spektren, haben miteinander gemein, dass der Emissionswinkel nahe $\vartheta = 0$ liegt, da die Energie des γ -Photons viel größer ist als die der Photonen der entgegenlaufenden Laserwelle.

In Abbildung 6.7 (b) wird das normierte Winkelspektrum unter Einbeziehung des Bremsstrahlungsspektrums für verschiedene Stärken der Fokussierung gezeigt. Die Pulsenergie des Lasers $W_G \propto \xi^2 w_0^2$ wird dabei konstant gehalten. Wir vergleichen $w_0 = 2 \mu\text{m}$ mit $w_0 = 1 \mu\text{m}$ und $3 \mu\text{m}$. Bei einer schwächeren Fokussierung, ausgehend von der anfänglichen Parameterwahl, verschiebt sich das Maximum von $\vartheta_0 \approx 0.3 \text{ mrad}$ zu $\vartheta_0 = 0.2 \text{ mrad}$. Im Gegensatz dazu führt eine stärkere Fokussierung zu einer breiteren Winkelverteilung und einem minimal größeren Winkel für die Position des Maximums. Die mit der Veränderung der Strahltille verbundene Veränderung der Intensität erklärt das hier gezeigte Verhalten. Bei größeren Laserintensitäten werden mehr Laserphotonen absorbiert, der transversale Impuls der erzeugten Paare nimmt zu und in dem Zuge auch die Breite der Winkelverteilung.

Abbildung 6.8: Die normierte Winkelverteilung $\frac{d^2\tilde{N}}{d\vartheta d\varphi}$ inklusive Bremsstrahlung und transversaler Fokussierung wird als Dichteplot in Abhängigkeit von φ und ϑ dargestellt. Der Beitrag zur Winkelverteilung wird entsprechend der Farbskalierung auf der rechten Seite gekennzeichnet. Die Abbildung entstammt Ref. [132].



Die bisher präsentierten Winkelverteilungen haben alle gemeinsam, dass sie eine charakteristische Peak-Struktur bei sehr kleinen Winkeln aufweisen. Durch einen Blick auf die zweifach differentielle Winkelverteilung $\frac{d^2\tilde{N}}{d\vartheta d\varphi}$ lässt sich diese besondere Struktur verstehen. Halten wir den azimutalen Winkel, bezüglich der Polarisationsrichtung, bei $\varphi = 0$ fest, so würde der maximal beitragende Polarwinkel bei deutlich größeren Werten liegen, in diesem Fall bei etwa $\vartheta_0 = 1 \text{ mrad}$. Die maximalen Beiträge vom azimutalen Winkel stammen von den Werten $\varphi_0 = 0, \pi, 2\pi$. Insbesondere für größere ϑ tragen nur Bereiche nahe dieser φ_0 zur Verteilung bei. Für sehr kleine polare Winkel liefert hingegen eine große Breite an azimutalen Winkeln φ einen Beitrag zur Verteilung und der Unterschied zu den Maxima bei φ_0 ist nur gering. Somit entsteht nach der Integration über φ diese charakteristische Struktur in der Winkelverteilung. Das soeben beschriebene zweifach differentielle Winkel-

spektrum wird in Abhängigkeit von φ und ϑ in Abbildung 6.8, unter Einbeziehung des Bremsstrahlungsspektrums, als farb-skaliertes Dichteplot gezeigt.

6.4 THEORETISCHE BESCHREIBUNG DER STRAHLUNGSDÄMPFUNG

In der bisherigen Ausführung der Paarproduktion ist der Effekt der Strahlungsdämpfung vernachlässigt worden. Die klassische Wirkung, wie sie in den Volkov-Zuständen enthalten ist, beschreibt die Bewegung des Elektrons beziehungsweise Positrons im externen Feld im Rahmen der Lorentz-Gleichung. In dem hier verwendeten Parameterregime kann die Bewegung der Teilchen jedoch nicht geeignet durch die Lorentzgleichung dargestellt werden. Nachdem die Teilchen im Laserpuls erzeugt werden, sind diese dem starken elektromagnetischen Feld weiterhin ausgesetzt. Durch die starke Kraft des Laserfeldes auf die Teilchen werden diese entsprechend stark beschleunigt. Dies führt zu einem Energieverlust der Teilchen durch emittierte Strahlung. Das Teilchen kann wiederum mit dieser Strahlung ebenfalls wechselwirken. Genau dieser Effekt, welcher auch Strahlungsdämpfung genannt wird, muss bei der Berechnung mit berücksichtigt werden, um zuverlässige Vorhersagen für die Impulsverteilung zu treffen.

Für die Problemstellung der Strahlungsdämpfung in einem Hintergrundfeld in Form der ebenen Welle gibt es eine Möglichkeit der analytischen Herangehensweise, welche in Ref. [130] präsentiert wird. Abhängig vom Elektronen-Quanten-Nichtlinearitätsparameter $\chi_e = (1 - \cos \theta_e) \gamma_e \mathcal{E}_0 / F_{cr}$, mit $\gamma_e = \varepsilon / m$ und dem Winkel θ_e zwischen Propagationsrichtung des Lasers und dem Elektronenimpuls, muss die Berechnung der Strahlungsdämpfung geeignet betrachtet werden. Für $\chi_e \ll 1$ kann die Elektronenbewegung in einem externen Hintergrundfeld und dem selbst emittierten Feld durch die Landau-Lifschitz-Gleichung (LL-Gleichung) beschrieben werden. Diese ist laut Ref. [13] gegeben durch

$$m \frac{du^\mu}{ds} = -eF^{\mu\nu}(x)u_\nu + R^\mu, \quad (6.38)$$

mit der Strahlungsdämpfungskraft

$$R^\mu = -\frac{2}{3}\alpha \left[\frac{e}{m} (\partial_\delta F^{\mu\nu}) u^\delta u_\nu + \frac{e^2}{m^2} F^{\mu\nu} F_{\delta\nu} u^\delta - \frac{e^2}{m^2} (F^{\delta\nu} u_\nu) (F_{\delta\lambda} u^\lambda) u^\mu \right]. \quad (6.39)$$

Dabei bezeichnet u die Vierer-Geschwindigkeit des Elektrons und s seine Eigenzeit. Darüber hinaus beschreibt $F_{\mu\nu}$ den elektromagnetischen Feldstärketensor bezüglich des starken Hintergrundfeldes.

Tritt nun der Fall ein, dass χ_e hingegen keinen kleinen Parameter darstellt, wie es in unserem Parameterregime mit $\chi_e \approx 1$ für $\varepsilon \approx 1$ GeV der Fall ist, so wird der Energieverlust des Elektrons durch Glg. (6.38) überschätzt. Die Überschätzung rührt daher, dass es in einer klassischen Betrachtung keine obere Grenze für die emittierte Strahlung gibt, während bei einer quantenmechanischen Betrachtung die Energie eines emittierten Photons durch die kinetische Energie des Elektrons begrenzt ist. Im Spektrum der emittierten Strahlung kommt es somit zu einem scharfen Grenzwert, wodurch die Menge der emittierten Energie verringert wird. Um diesen quantenmechanischen Grenzwert zu berücksichtigen, wird R^μ mit einer Gewichtungsfunktion

$g(\chi_e)$ multipliziert. Diese wird auch Gaunt-Faktor genannt und über das Verhältnis der Quantenstrahlungsintensität in einem konstanten gekreuzten Feld I_Q zur klassischen Strahlungsintensität I_C definiert. Wir bedienen uns der Näherungsformel aus Ref. [129]:

$$g(\chi_e) = \frac{I_Q}{I_C} \approx \left[1 + 4.8(1 + \chi_e) \ln(1 + 1.7\chi_e) + 2.44\chi_e^2 \right]^{-\frac{2}{3}}. \quad (6.40)$$

Der hier gezeigte Gaunt-Faktor erschwert eine weitere analytische Betrachtung der modifizierten Landau-Lifschitz-Gleichung. Jedoch lässt sich unter der Prämisse, dass sich γ_e während der Laserphase nur langsam ändert, die Berechnung analytisch fortsetzen. Dies entspricht der Abhängigkeit $g(\chi_e(\Phi))$, wobei zusätzlich die Phasenabhängigkeit des Feldes aus Glg. (6.3) für $\chi_e(\Phi)$ mit berücksichtigt wird.

Wir folgen nun den in Ref. [130] gezeigten Schritten und passen diese an unsere modifizierte Landau-Lifschitz-Gleichung an. Für eine linear polarisierte ebene Welle lässt sich das Vierer-Vektorpotential in Lorentz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ durch die Form

$$A^\mu(\Phi) = a^\mu \psi(\Phi) \quad (6.41)$$

beschreiben. Dabei bezeichnet $\psi(\Phi)$ eine phasenabhängige skalarwertige Funktion. Der Feldstärketensor lässt sich hierüber durch

$$F^{\mu\nu}(\Phi) = \partial^\mu A^\nu(\Phi) - \partial^\nu A^\mu(\Phi) = \omega f^{\mu\nu} \psi'(\Phi) \quad (6.42)$$

ausdrücken, wobei $f^{\mu\nu} = n^\mu a^\nu - n^\nu a^\mu$ und $n^\mu = k^\mu / \omega$ die Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle beschreibt. Es gelten zudem die daraus folgenden Bedingungen

$$n_\mu f^{\mu\nu} = 0 \text{ und } f^{\mu\nu} f_{\lambda\nu} = a^2 n^\mu n_\lambda. \quad (6.43)$$

Wir beginnen bei der modifizierten Landau-Lifschitz-Gleichung und multiplizieren diese mit n_μ . Daraus lässt sich eine Gleichung für $\rho_0 = n_\mu u_0^\mu$ ableiten:

$$m \frac{d(n \cdot u)}{ds} = \frac{2}{3} \alpha \frac{e^2}{m^2} g(\chi_e(\Phi)) (F^{\alpha\nu} u_\nu) (F_{\alpha\lambda} u^\lambda) (n \cdot u). \quad (6.44)$$

Der Ausdruck lässt sich durch $(F^{\alpha\nu} u_\nu) (F_{\alpha\lambda} u^\lambda) = \omega^2 a^2 \rho^2(\Phi) \psi'^2(\Phi)$ vereinfachen. Die Funktion $\rho(\Phi)$ steht mit $\frac{ds}{d\Phi} = \frac{1}{\omega \rho(\Phi)}$ in Abhängigkeit zu den Differentialen. Wird die linke Seite der Differentialgleichung zudem mit $\rho^{-3}(\Phi)$ multipliziert, lässt sich diese entsprechend zu

$$\frac{d\rho(\Phi)}{ds} \frac{1}{\rho^3(\Phi)} = -\omega^2 \frac{d^2 s}{d\Phi^2} \quad (6.45)$$

vereinfachen. Setzen wir die obige Gleichung in Glg. (6.44) ein und integrieren beide Seiten über Φ , lässt sich daraus folgender Ausdruck für $\rho(\Phi)$ ableiten:

$$\rho(\Phi) = \frac{\rho_0}{h(\Phi)}, \quad (6.46)$$

mit

$$h(\Phi) = 1 + \frac{2}{3} \frac{\rho_0 \omega}{m} \alpha \zeta^2 \int_{\Phi_i}^{\Phi} d\tilde{\Phi} g(\chi_e(\tilde{\Phi})) \psi'^2(\tilde{\Phi}). \quad (6.47)$$

Im nächsten Schritt betrachten wir die Differentialgleichung für die reduzierte Vierergeschwindigkeit $\tilde{u}^\mu(\Phi) = h(\Phi) u^\mu(\Phi)$, welche

$$m \frac{d\tilde{u}}{d\Phi} = m \frac{dh(\Phi)}{d\Phi} u^\mu + mh(\Phi) \frac{du^\mu}{d\Phi} \quad (6.48)$$

Die hier gezeigte Gleichung für den Gaunt-Faktor hat einen Fehleranteil von weniger als 2% über den gesamten Bereich von χ_e nach Ref. [123, 137]. Weitere Abschätzungen des Gaunt-Faktors sind in Ref. [123] gegeben, welche jedoch auf Bereiche von χ_e beschränkt sind.

lautet. Im letzten Summanden lässt sich die Definition der modifizierten Landau-Lifschitz-Gleichung einsetzen. Die Verwendung der Gleichungen

$$\begin{aligned}\partial_\alpha F^{\mu\nu} &= \omega^2 f^{\mu\nu} \frac{\rho(\Phi)}{u^\alpha} \psi''(\Phi), \\ F^{\mu\nu} F_{\alpha\nu} u^\alpha &= \omega^2 a^2 \psi'^2(\Phi) n^\mu \frac{\rho_0}{h(\Phi)}\end{aligned}\quad (6.49)$$

wird dazu genutzt Glg. (6.48) auf folgende Form zu bringen:

$$\begin{aligned}m \frac{d\tilde{u}}{d\Phi} &= -\frac{1}{\rho_0} \left[\frac{1}{\omega} h(\Phi) e F^{\mu\nu} + \frac{2}{3} \alpha g(\chi_e(\Phi)) \frac{\rho_0}{m} e F'^{\mu\nu}(\Phi) \right] \tilde{u}_\nu \\ &+ \frac{2}{3} \alpha \omega h(\Phi) \zeta^2 \psi'^2(\Phi) g(\chi_e(\Phi)) n^\mu.\end{aligned}\quad (6.50)$$

Dieser Ausdruck wird über Φ integriert. Dabei lässt sich erkennen, dass im letzten Summanden die Integration von der Form

$$\int_{\Phi_0}^{\Phi} d\tilde{\Phi} h'(\tilde{\Phi}) h(\tilde{\Phi}) = \frac{1}{2} [h(\Phi) - 1] \quad (6.51)$$

ist. Somit finden wir

$$\begin{aligned}\tilde{u}^\mu &= \tilde{u}_0^\mu - \frac{e}{m\omega\rho_0} \int_{\Phi_0}^{\Phi} d\tilde{\Phi} h(\tilde{\Phi}) F^{\mu\nu}(\tilde{\Phi}) \tilde{u}_\nu(\tilde{\Phi}) \\ &- \frac{2}{3} \alpha \frac{e}{m^2} \int_{\Phi_0}^{\Phi} d\tilde{\Phi} F'^{\mu\nu}(\tilde{\Phi}) \tilde{u}_\nu(\tilde{\Phi}) g(\chi_e(\tilde{\Phi})) + \frac{1}{2} \frac{n^\mu}{\rho_0} [h(\Phi) - 1].\end{aligned}\quad (6.52)$$

Um diesen Ausdruck weiter aufzulösen, ist ein iteratives Verfahren nützlich, bei dem der Ausdruck von \tilde{u}^μ erneut in die obige Gleichung eingesetzt wird. Dieses Vorgehen führt zu dem Ausdruck

$$\begin{aligned}\tilde{u}^\mu &= \tilde{u}_0^\mu + \frac{1}{2} \frac{n^\mu}{\rho_0} [h(\Phi) - 1] - \frac{e}{m\omega\rho_0} \int_{\Phi_0}^{\Phi} d\tilde{\Phi} h(\tilde{\Phi}) F^{\mu\nu}(\tilde{\Phi}) \tilde{u}_{0,\nu} \\ &- \frac{2}{3} \alpha \frac{e}{m^2} \int_{\Phi_0}^{\Phi} d\tilde{\Phi} F'^{\mu\nu}(\tilde{\Phi}) g(\chi_e(\tilde{\Phi})) \tilde{u}_{0,\nu} \\ &+ \left(\frac{e}{m\omega\rho_0} \right)^2 \int_{\Phi_0}^{\Phi} d\tilde{\Phi} h(\tilde{\Phi}) F^{\mu\nu}(\tilde{\Phi}) \int_{\Phi_0}^{\tilde{\Phi}} d\tilde{\phi} h(\tilde{\phi}) F_{\nu\lambda}(\tilde{\phi}) \tilde{u}^\lambda(\tilde{\phi}) \\ &+ \frac{2}{3} \alpha \frac{e^2}{m^3\omega\rho_0} \int_{\Phi_0}^{\Phi} d\tilde{\Phi} h(\tilde{\Phi}) F^{\mu\nu}(\tilde{\Phi}) \int_{\Phi_0}^{\tilde{\Phi}} d\tilde{\phi} g(\tilde{\phi}) F'_{\nu\lambda}(\tilde{\phi}) \tilde{u}^\lambda(\tilde{\phi}) \\ &+ \frac{2}{3} \alpha \frac{e^2}{m^3\omega\rho_0} \int_{\Phi_0}^{\Phi} d\tilde{\Phi} g(\tilde{\Phi}) F'^{\mu\nu}(\tilde{\Phi}) \int_{\Phi_0}^{\tilde{\Phi}} d\tilde{\phi} h(\tilde{\phi}) F_{\nu\lambda}(\tilde{\phi}) \tilde{u}^\lambda(\tilde{\phi}) \\ &+ \left(\frac{2}{3} \alpha \frac{e}{m^2} \right)^2 \int_{\Phi_0}^{\Phi} d\tilde{\Phi} g(\tilde{\Phi}) F'^{\mu\nu}(\tilde{\Phi}) \int_{\Phi_0}^{\tilde{\Phi}} d\tilde{\phi} g(\tilde{\phi}) F'_{\nu\lambda}(\tilde{\phi}) \tilde{u}^\lambda(\tilde{\phi}).\end{aligned}\quad (6.53)$$

Der dritte und vierte Summand lassen sich über die Definition

$$I(\Phi) = \int_{\Phi_0}^{\Phi} d\tilde{\Phi} \left[h(\tilde{\Phi}) \psi'(\tilde{\Phi}) + \frac{2}{3} \frac{\rho_0 \omega}{m} \alpha g(\chi_e(\tilde{\Phi})) \psi''(\tilde{\Phi}) \right] \quad (6.54)$$

vereinfacht darstellen. Die danach folgenden Summanden sind allesamt proportional zu der Form $F^{(n)\mu\nu}(\phi) F^{(m)}_{\nu\lambda}(\tilde{\phi})$, wobei n und m beliebige Ableitungen kennzeichnen. Es ist hilfreich, diesen Faktor durch die Gleichung

$$F^{(n)\mu\nu}(\phi) F^{(m)}_{\nu\lambda}(\tilde{\phi}) \tilde{u}^\lambda(\tilde{\phi}) = -a^2 \omega^2 \psi^{(n+1)}(\phi) \psi^{(m+1)}(\tilde{\phi}) n^\mu \rho(\tilde{\phi}) \quad (6.55)$$

auszudrücken. Entsprechend entstehen einerseits Integrationen der Form

$$\int_{\Phi_0}^{\Phi} d\tilde{\Phi} f(\tilde{\Phi}) \int_{\Phi_0}^{\tilde{\Phi}} d\tilde{\phi} f(\tilde{\phi}) = \int_{\Phi_0}^{\Phi} d\tilde{\Phi} f(\tilde{\Phi}) F(\tilde{\Phi}) = \frac{1}{2} \left(\int_{\Phi_0}^{\Phi} d\tilde{\Phi} f(\tilde{\Phi}) \right)^2, \quad (6.56)$$

wobei die innerste Integration als Stammfunktion des Integranden $f(\tilde{\Phi})$ betrachtet werden kann, und andererseits lässt sich das Doppelintegral

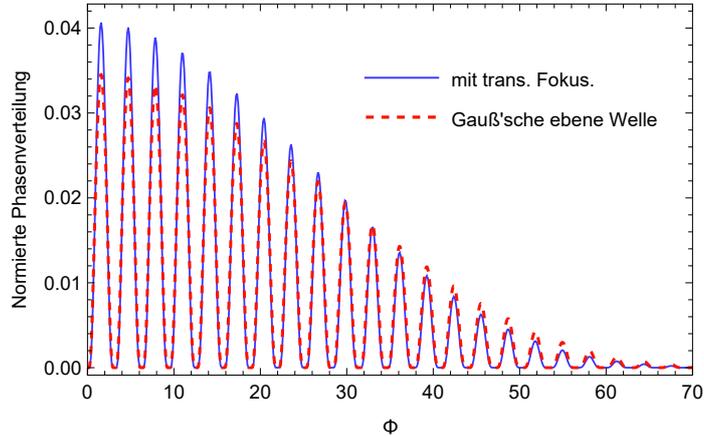
$$\begin{aligned} & \int_{\Phi_0}^{\Phi} d\tilde{\Phi} h(\tilde{\Phi}) \psi'(\tilde{\Phi}) \int_{\Phi_0}^{\tilde{\Phi}} d\tilde{\phi} g(\tilde{\phi}) \psi''(\tilde{\phi}) + \int_{\Phi_0}^{\Phi} d\tilde{\Phi} g(\tilde{\Phi}) \psi''(\tilde{\Phi}) \int_{\Phi_0}^{\tilde{\Phi}} d\tilde{\phi} h(\tilde{\phi}) \psi'(\tilde{\phi}) \\ &= \int_{\Phi_0}^{\Phi} d\tilde{\Phi} \left(\int_{\Phi_0}^{\tilde{\Phi}} d\tilde{\phi} g(\tilde{\phi}) \psi''(\tilde{\phi}) \int_{\Phi_0}^{\tilde{\Phi}} d\tilde{\phi} h(\tilde{\phi}) \psi'(\tilde{\phi}) \right)' \\ &= \int_{\Phi_0}^{\Phi} d\tilde{\phi} g(\tilde{\phi}) \psi''(\tilde{\phi}) \int_{\Phi_0}^{\tilde{\phi}} d\tilde{\phi} h(\tilde{\phi}) \psi'(\tilde{\phi}) \end{aligned} \quad (6.57)$$

geschickt vereinfachen. Dadurch ergibt sich insgesamt die strahlungsgedämpfte Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu(\Phi) = \frac{1}{h(\Phi)} \left[u_0^\mu + \frac{1}{2\rho_0} [h^2(\Phi) - 1] n^\mu - \frac{1}{\rho_0} I(\Phi) \frac{e f^{\mu\nu}}{m} u_{0,\nu} + \frac{1}{2\rho_0} \zeta^2 I^2(\Phi) n^\mu \right]. \quad (6.58)$$

Falls $g(\chi_e) = 1$ gilt, entspricht das Ergebnis dem in Ref. [130] beschriebenen. Für die obere Integrationsgrenze setzen wir Φ ans Pulsende, entsprechend wählen wir die Grenze $\Phi \rightarrow \infty$. Die untere Grenze Φ_0 wird ab dem Phasenpunkt betrachtet, ab dem die Strahlungsdämpfung berücksichtigt werden muss. Näherungswerte hierfür lassen sich durch die Analyse des Verhaltens der normierten Phasenverteilung ermitteln. Diese wird in Abbildung 6.9 für die Fälle, in denen der starke Feldhintergrund entweder als Gauß'sche ebene Welle (rote Kurve) oder als fokussierter Laserpuls (blaue Kurve) gewählt wurde, gezeigt.

Abbildung 6.9: Normierte Phasenverteilung $\frac{1}{N} \frac{dN}{d\Phi}$ des Breit-Wheeler-Paarbildungsprozesses aus der Kollision eines einzelnen Gamma-Quants mit der Energie $\omega' = E_0 = 2.5$ GeV und einem starken Laserfeld. Die blaue Kurve bezieht sich auf den Fall, dass der Hintergrund ein fokussierter Puls ist, während die rote Kurve der Situation entspricht, in der der Hintergrund durch eine Gauß'sche ebene Welle beschrieben wird. Die Abbildung entstammt Ref. [132].



Es fällt auf, dass innerhalb jedes Phasenintervalls $\Delta\Phi_n = [n\pi, (n+1)\pi]$ eine Peak-Struktur auszumachen ist. Die Positionen dieser Maxima liegen für die beiden gezeigten Fälle in etwa bei $\Phi_n = (2n+1)\pi/2$. Da an diesen Stellen die Wahrscheinlichkeit der Elektronen-Positronen-Paarproduktion am größten ist, stellen sie eine geeignete Approximation für Φ_0 dar. Zudem lässt sich erkennen, dass die Spitzen, die mit jedem Starkfeldmodell verbunden sind, ähnliche Höhen bei $\Phi_n = (2n+1)\pi/2$ aufweisen. Dies deutet darauf hin, dass jedes Phasenintervall in beiden Starkfeldmodellen fast den gleichen Beitrag zur Gesamtzahl der erzeugten Paare leistet. Folglich

können die Ergebnisse im Zusammenhang mit den Auswirkungen der Strahlungsdämpfung in der Situation, in der der Hintergrund eine Gauß'sche ebene Welle ist, als gute Annäherung an das realistische Szenario betrachtet werden, welches durch einen stark fokussierten Laserpuls beschrieben wird. Verwenden wir nacheinander alle Φ_n in Glg. (6.58), dann beziehen wir das intuitive Bild mit ein, wonach Paare, die zu Beginn des Pulses entstehen, über einen längeren Zeitraum der Strahlungsdämpfung ausgesetzt sind als solche, die am Ende des Pulses entstehen.

Ohne Einfluss der Strahlungsdämpfung lässt sich für den kinetischen Impuls eines Elektrons folgende Gleichung aufstellen (vgl. [21]):

$$p^\mu(\Phi) = mu^\mu(\infty) + eA^\mu(\Phi) - \left[eA(\Phi) \cdot u(\infty) + \frac{e^2}{2m} A^2(\Phi) \right] \frac{k^\mu}{k \cdot u(\infty)}, \quad (6.59)$$

wobei $mu^\mu(\infty)$ den asymptotischen Impuls des Elektrons nach Verlassen der elektromagnetischen Welle bezeichnet. An den Phasenmaxima $\Phi_n = (2n + 1)\pi/2$ ergibt sich somit ohne Einfluss der Strahlungsdämpfung dieselbe Vierergeschwindigkeit wie am Ende des Pulses. Diese Gleichung lässt sich nutzen, um die im vorherigen Kapitel gezeigten Verteilungen nun mit Hilfe von Glg. (6.58) auch für den Fall mit Strahlungsdämpfung präsentieren zu können. Es werden zunächst für jedes Phasenintervall die Impulsverteilungen innerhalb des Feldes bestimmt. Dazu lässt sich die dreifach differentielle Verteilung aus Glg. (6.29) für das Hintergrundfeld aus Glg. (6.3) verwenden. Anschließend werden die hieraus ermittelten Anfangswerte mit Hilfe von Glg. (6.58) durch den restlichen Laserpuls propagiert. Es lässt sich somit beispielsweise von den anfänglichen Werten $\varphi_0, \vartheta_0, \varepsilon_0, \frac{d^3 N_0(\omega')}{d\vartheta_0 d\varphi_0 d\varepsilon_0}$ auf die Werte $\varphi_0, \vartheta_0, \varepsilon, \frac{d^3 N_0(\omega')}{d\vartheta_0 d\varphi_0 d\varepsilon}$ schließen, um hieraus mit Hilfe einer numerischen Integration über die anfänglichen Winkel eine neue Energieverteilung pro Phasenintervall zu gewinnen (für die Winkelverteilung wäre das Vorgehen analog). Diese Herangehensweise ist insofern approximativ, da auf die genaue Bestimmung der Jacobi-Determinanten für den Wechsel des Koordinatensystems verzichtet wurde und die Verteilung lediglich mit dem numerisch bestimmten Faktor $\Delta\varepsilon_0/\Delta\varepsilon$ multipliziert wurde (für die ϑ -Verteilung wäre es entsprechend $\Delta\vartheta_0/\Delta\vartheta$). Durch Summierung der so gewonnenen Verteilungen über alle Phasenintervalle lässt sich schließlich die gesamte Impulsverteilung außerhalb des Feldes, einschließlich der Strahlungsdämpfung, ermitteln.

In Ref. [129] wurde gezeigt, dass der semiklassische Ansatz für die Strahlungsdämpfung, welcher auf der LL-Gleichung in Verbindung mit dem Gaunt-Faktor beruht, eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Energiespektren liefert. In dieser Referenz wurden Kollisionen von Elektronen mit einer maximalen Anfangsenergie von ≈ 2 GeV und einem intensiven Laserpuls mit $\xi \approx 10$ untersucht. Dabei ist zu beachten, dass das semiklassische Modell zwar den Elektronenrückstoßeffect durch die emittierte Strahlung berücksichtigt, jedoch die Wahrscheinlichkeitsnatur der Photonenemissionen vernachlässigt. Um solche stochastischen Effekte mit zu berücksichtigen, wäre eine vollständige Quantenbeschreibung der Strahlungsdämpfung erforderlich. Aus genau diesem Grund hat sich durch Simulationen, wie beispielsweise in Ref. [138], gezeigt, dass das semiklassische Modell für Winkelspektren nicht gut geeignet ist. Bei der Betrachtung von Elektronen mit einer Energie von etwa 1 GeV, die frontal mit hoch-intensiven zirkular polarisierten Laserpulsen von $\xi = 100$ kollidieren, wurde festgestellt, dass stochastische Effekte berücksichtigt werden müssen, um die endgültigen Winkelverteilungen der Elektronen vorher-

zusagen. Während Simulationen, die auf der LL-Gleichung basieren, ausgeprägte Ablenkungen zur Seite ergaben, führte eine QED-Behandlung zu einer Verteilung der Elektronen in Vorwärtsrichtung. Wir behalten daher im Hinterkopf, dass eine Untersuchung der Winkelspektren in unserem Modell zwar qualitative Hinweise auf die Verteilung geben kann, jedoch um den Einfluss der Strahlungsdämpfung auf die Winkelverteilungen der Teilchen zu quantifizieren, eine strengere QED-Untersuchung ähnlich wie in Ref. [138] erforderlich ist.

In den letzten Jahren wurden entsprechende numerische Berechnungen auf der Grundlage von Monte-Carlo-Simulationen in *Particle-In-Cell-Codes* (PIC-Codes) zur Simulation von Laser-Materie-Wechselwirkungen implementiert. Die Vorhersagen des hier gezeigten semiklassischen Modells der Strahlungsdämpfung werden mit den Ergebnissen des öffentlich zugänglichen PIC-Codes *SMILEI* verglichen (vgl. Ref. [139]).

6.5 DER EINFLUSS DER STRAHLUNGSDÄMPFUNG AUF DIE SPEKTREN

Während die Strahlungsdämpfung keinen Einfluss auf die Anzahl der Breit-Wheeler-Paare nimmt, verändern sich durch sie dennoch die Spektren. Wir betrachten daher zunächst den Einfluss der Strahlungsdämpfung auf die Energiespektren. Angesichts des sehr moderaten Einflusses der Laserfokussierung wird unsere entsprechende Analyse, wie zuvor beschrieben mit einem ebenen Wellenmodell für den Laserpuls durchgeführt. An dieser Stelle sei auch erwähnt, dass bereits in den Studien [140, 141] Strahlungsdämpfungseffekte für die Paarerzeugung in Laser-Elektronen-Kollisionen theoretisch berücksichtigt wurden. Dabei unterliegen sowohl die erzeugten Teilchen als auch der einfallende Elektronenstrahl der Strahlungsdämpfung.

In Abbildung 6.10 wird das Energiespektrum unter Einbeziehung der Strahlungsdämpfung für den Fall eines einzelnen monoenergetischen γ -Photons und unter Einbeziehung des Bremsstrahlungsspektrums gezeigt. In Panel (a) wird das Energiespektrum für den Fall betrachtet, in welchem das Bremsstrahlungsspektrum auf die anfänglichen γ -Photonen mit berücksichtigt wird. Die durchgezogene rote Kurve zeigt das Spektrum, indem die Betrachtung der Strahlungsdämpfung im semiklassischen korrigierten Landau-Lifschitz-Modell erfolgt ist. Das Maximum des Spektrums liegt bei $\varepsilon \approx 0.12E_0 \approx 300$ MeV. Ohne die Betrachtung der Strahlungsdämpfung verschiebt sich das Maximum auf etwa $\varepsilon \approx 0.26E_0 \approx 650$ MeV, was als gestrichelte rote Linie gezeigt wird. Der durch die Strahlungsdämpfung herbeigeführte Energieverlust führt zu einer erheblichen Verschiebung hin zu niedrigeren Energien. Zudem wird das Spektrum durch die Strahlungsdämpfung deutlich schmaler. Für die Betrachtung der Positronen würde das Spektrum gleich aussehen.

Ab einem Quanten-Nichtlinearitätsparameter von $\chi_e \approx 1$ treten bekanntermaßen stochastische Effekte auf, welche das Spektrum, wie in Ref. [131] beschrieben, verändern können. Wie groß der Einfluss dieser stochastischen Effekte ist, lässt sich durch einen Vergleich mit dem Energiespektrum bestimmen, welches durch eine numerische Monte-Carlo-PIC-Simulation in *SMILEI* erzeugt wurde (vgl. Ref. [139]). Diese ermöglicht die Betrachtung von diskreten Photonenemissionen auf stochastische Weise und entsprechende abrupte Änderungen der Teilchenflugbahn. Bei diesem Berechnungsschema wird die stochastische Flugbahn jedes Testteilchens einzeln

Die Ergebnisse dieses Abschnitts entstammen weiterhin der Ref. [132]. Über die Ergebnisse aus Ref. [132] jedoch hinausgehend sind die Abbildungen 6.12, 6.13 und 6.14, welche zu einem besseren Verständnis beitragen sollen.

durch das Laserfeld verfolgt. Dies führt zu einer gewissen statistischen Varianz des Gesamtergebnisses für das Ensemble von Teilchen. Wie die vollen Kreise in Panel (a) zeigen, ergibt die PIC-Simulation eine Energieverteilung, die breiter ist als die Vorhersage des semiklassischen Modells. Demnach liefern hier Energien oberhalb von $\varepsilon \approx 0.2E_0 = 500 \text{ MeV}$ größere Beiträge. Die Verbreiterung der Spektren ist eine aus Ref. [131] bekannte Folge für stochastische Effekte. Bei den betrachteten Parametern ist die Verbreiterung nicht sehr ausgeprägt. Das PIC-Energiespektrum ist immer noch deutlich schmäler als das Energiespektrum, welches sich ohne Strahlungsdämpfungseffekte ergibt. Die Positionen der Maxima, die sich aus der PIC-Simulation und dem semiklassischen Modell ergeben, stimmen in etwa überein. Daraus lässt sich für den hier betrachteten Parameterbereich schließen, dass das semiklassische Modell auf der Grundlage der korrigierten Landau-Lifschitz-Gleichung eine recht gute Abschätzung der Strahlungsdämpfungseffekte ermöglicht. Da dennoch Stochastizitätseffekte in den Spektren der erzeugten Teilchen sichtbar sind, könnten diese auch in dem geplanten Experiment bei CALA aus Ref. [43] beobachtet werden. Aufgrund dessen, dass die Höhen der Spektren konstruktionsbedingt durch die Normierung übereinstimmen, sei an dieser Stelle erwähnt, dass das breitere Spektrum der PIC-Simulation in absoluten Zahlen niedriger als das schmalere Spektrum unserer semiklassischen Berechnung ist.

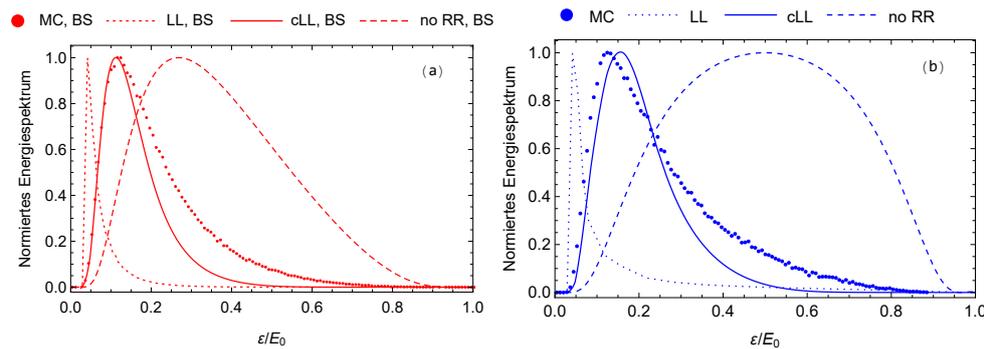


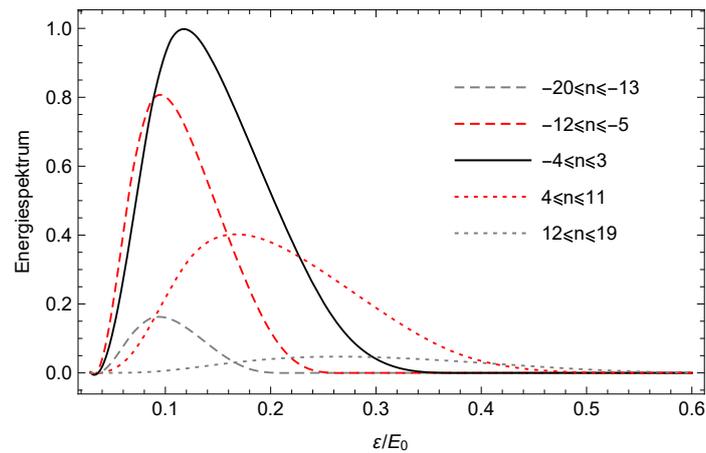
Abbildung 6.10: Normiertes Energiespektrum als Funktion der normierten Elektronenenergie ε/E_0 in einer gepulsten ebenen Welle. Effekte der Strahlungsdämpfung werden beachtet. In Panel (a) wird das Bremsstrahlungsspektrum mit berücksichtigt. Die durchgezogene rote Kurve zeigt das Spektrum für das semiklassische Strahlungsdämpfungs-Modell, während die roten Kreise das über Monte-Carlo-Simulationen bestimmte Spektrum zeigt. Die rot gepunktete Kurve zeigt das Spektrum für das Landau-Lifschitz-Modell. In Panel (b) wird ein anfänglich monochromatisches γ -Photon mit der Energie $\omega' = E_0 = 2.5 \text{ GeV}$ betrachtet. Die durchgezogene blaue Kurve bezieht sich auf die semiklassisch berechnete Strahlungsdämpfung, während die blauen Kreise das Monte-Carlo-Ergebnis und die gepunktete Kurve das Landau-Lifschitz-Ergebnis zeigen. Zur Referenz werden als gestrichelte Kurven die Ergebnisse ohne Strahlungsdämpfung gezeigt. Die Abbildung wurde in Ref. [132] veröffentlicht.

Darüber hinaus zeigt die gepunktete rote Linie in Abb. 6.10 (a) das Energiespektrum für den Fall, dass die Strahlungsdämpfung klassisch mit der unmodifizierten Landau-Lifschitz-Gleichung berechnet wird (d.h. mit $g = 1$). Im Vergleich zum Spektrum des korrigierten Landau-Lifschitz-Modells ist das Spektrum nun wesentlich schmäler und zu viel kleineren Energien verschoben. Dies deutet darauf hin, dass die unmodifizierte Landau-Lifschitz-Gleichung im betrachteten Parameterbereich den Einfluss der Strahlungsdämpfung überschätzt und Quantenrückstoßeffekte, die die abgestrahlte Energie begrenzen, wichtig sind.

In Abbildung 6.10 (b) wird das Energiespektrum für den Fall der Paarproduktion, ausgelöst durch ein einzelnes monochromatisches γ -Photon, gezeigt. Während die blau gestrichelte Kurve, welche das Spektrum ohne Betrachtung der Strahlungsdämpfung zeigt, symmetrisch um den Punkt $\varepsilon = E_0/2$ verläuft, verschiebt sich das Energiespektrum bei Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung zu deutlich kleineren Energien und wird asymmetrisch. Die blaue durchgezogene Kurve wird durch die Anwendung des semiklassischen Modells bestimmt, während die vollen Kreise das Ergebnis der Monte-Carlo-PIC-Simulation, einschließlich stochastischer Effekte, zeigen. Im Vergleich zu Abbildung (a) sind die Unterschiede zwischen den beiden

Beschreibungen der Strahlungsdämpfung in diesem Fall größer, da die gewählte γ -Photonenenergie dem größten Wert der Bremsstrahlungsphotonenenergie entspricht und daher der Quanten-Nichtlinearitätsparameter hier seinen möglichen Maximalwert erreicht. Entsprechend nehmen auch die Auswirkungen der stochastischen Effekte zu. Im Gegensatz dazu liefern bei der durch Bremsstrahlung induzierten Paarbildung in Paneel (a) auch γ -Photonen mit niedrigeren Energien als E_0 einen relevanten Beitrag, was zu einem kleineren Quanten-Nichtlinearitätsparameter führt. Wie die blau gepunktete Kurve zeigt, überschätzt auch hier die Anwendung der unmodifizierten Landau-Lifschitz-Gleichung den Effekt der Strahlungsdämpfung erheblich.

Abbildung 6.11: Der Beitrag der einzelnen Phasenintervalle zum bremsstrahlungsgemittelten Energiespektrum unter Verwendung des semiklassischen Strahlungsdämpfungsbildes. Die Höhe wurde auf die der schwarzen Kurve normiert. Die Legende gibt an, welche Phasenintervalle betrachtet wurden (vgl. Abbildung 6.9). Die Originalabbildung stammt aus Ref. [132].



Im nächsten Schritt betrachten wir den Einfluss der Strahlungsdämpfung in Abhängigkeit von der Laserphase Φ_0 , zu welcher das Paar erzeugt wurde. Abbildung 6.11 zeigt, wie sich das Energiespektrum für den Fall mit semiklassisch betrachteter Strahlungsdämpfung und Bremsstrahlung aus den einzelnen Beiträgen der Phase zusammensetzt. Für eine Entstehung des Paares im mittleren Phasenbereich, dargestellt als schwarze durchgezogene Kurve, ist der Beitrag am größten. Dementsprechend wird das gesamte Energiespektrum am deutlichsten durch diesen Bereich geprägt. Der größte Unterschied besteht zwischen den Paaren, welche zu Beginn des Pulses gebildet wurden (gestrichelte Kurven) und denen die gegen Ende des Pulses entstanden sind (gepunktete Kurven). Während die Paare, welche sich zu Beginn des Pulses bilden, von der nachfolgenden Strahlungsdämpfung am stärksten betroffen sind und ihr Maximum somit am weitesten zu kleineren Energien hin verschoben wird, werden die Paare, welche sich gegen Ende des Laserpulses formieren, weniger von der Strahlungsdämpfung beeinflusst und ihr Spektrum wird demjenigen ohne Strahlungsdämpfung immer ähnlicher.

Der Energieverlust durch die Strahlungsdämpfung, welcher mit einer entsprechenden Menge an Photonenemissionen verbunden ist, besitzt eine gewisse Ähnlichkeit mit der Erzeugung der Bremsstrahlungsphotonen durch den einfallenden Elektronenstrahl. Bei der Bremsstrahlung verhält es sich so, dass die einfallenden Elektronen bei der Photonenemission durch ihre Wechselwirkung mit den starken Feldern der Atomkerne in der Konverterfolie gestreut und abgebremst werden. Währenddessen verlieren die erzeugten Teilchen durch ihre Wechselwirkung mit dem intensiven Laserpuls an Strahlungsenergie.

In Abbildung 6.12 wird die Abhängigkeit der Elektronenenergie von der Phase Φ gezeigt. In Paneel (a) wird diese Abhängigkeit für den Fall betrachtet, dass keine Strahlungsdämpfung auf die Elektronen wirkt. Es ist erkennbar, dass bei unterschiedlichen Phasenpunkten der Paarentstehung Φ_0 dennoch dieselbe Ausgangsenergie erreicht wird. In Paneel (b) wird der Effekt der Strahlungsdämpfung hinzugezogen. Diese hat auf die gezeigte Ausgangsenergie einen deutlichen Effekt. Es ist insbesondere ersichtlich, dass in Abhängigkeit vom gewählten Φ_0 die Ausgangsenergie variiert. Mit zunehmend längerem Aufenthalt des Elektrons im Puls nimmt der Energieverlust zu.

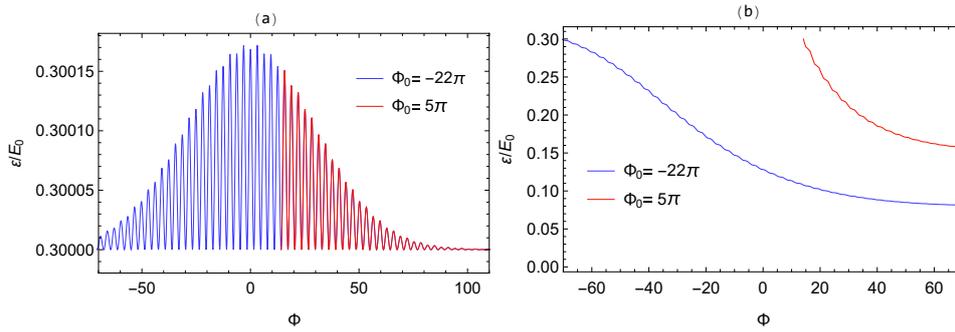
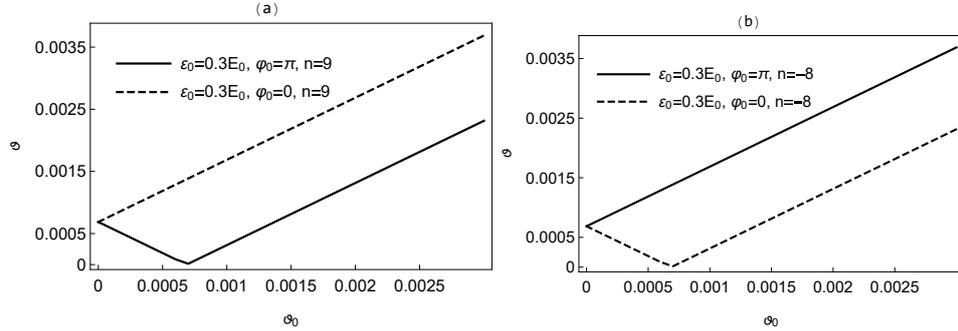


Abbildung 6.12: Die Abhängigkeit der Elektronenenergie von der Phase Φ zu unterschiedlichen anfänglichen Phasen Φ_0 . In Paneel (a) wird die Strahlungsdämpfung vernachlässigt, während in Paneel (b) die Strahlungsdämpfung berücksichtigt wird. Die Anfangsparameter belaufen sich auf $\varepsilon_0 = 0.3E_0$, $\varphi_0 = 0$ und $\vartheta_0 = 0.0003$.

Die Strahlungsdämpfung hat auf die Energieverteilung einen starken Effekt ausgeübt. Prinzipiell lässt sich diese Untersuchung auf die Winkelverteilung übertragen. Jedoch, wie eingangs erwähnt, wurde in Ref. [138] gezeigt, dass sich das semiklassische Modell für diese Untersuchung nicht gut eignet. Somit wäre eine genauere QED-Untersuchung, ähnlich wie in Ref. [138], auch hier nötig, um die Winkelverteilungen der Teilchen nach dem Effekt der Strahlungsdämpfung zu quantifizieren. Eine solche Analyse haben wir im Rahmen der Monte-Carlo-PIC-Simulation SMILEI aus Ref. [139] durchgeführt. Zudem wollen wir zeigen, zu welchem Ergebnis der semiklassische Ansatz führt.

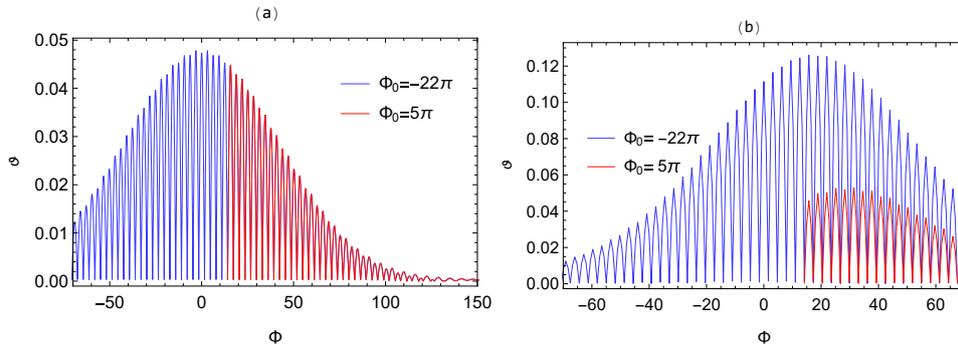
In Abbildung 6.13 werden die Ausgangswinkel in Abhängigkeit von den Eingangswinkeln für feste ε_0 und φ_0 gezeigt. Für die Unterscheidung von $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_0 = \pi$ ergeben sich qualitative Unterschiede. Je nachdem, ob der transversale Impuls entlang der Polarisationsrichtung zeigt, wirkt die Strahlungsdämpfung vergrößernd oder verkleinernd bezüglich des Eingangswinkels, da der Impulsübertrag entweder in die transversale Bewegungsrichtung oder entgegen dieser stattfindet. In Paneel (b) wird gezeigt, wie sich zudem Φ_0 auf die Verteilung auswirkt. Wechseln wir vom Peak $n = 9$ zu dem dazu bezüglich des Pulsmittelpunkts symmetrischen Peak $n = -8$, welcher dieselbe Anzahl an Paaren hervorbringt, so ergibt sich dieselbe Abbildung, jedoch unter der Bedingung, dass die verwendeten φ_0 vertauscht werden. Dies liegt daran, dass bei $n = 9$ das Vektorpotential genau in die entgegengesetzte Richtung wie das Vektorpotential bei $n = -8$ zeigt. Da die Ausgangswinkel teilweise etwas kleiner und für den Gegenwinkel in φ_0 teilweise etwas größer als die Eingangswinkel sind, ergibt sich bei der Integration über den Azimutalwinkel annähernd der gleiche Winkel, mit dem die Rechnung begonnen wurde. Dies führt dazu, dass sich die Strahlungsdämpfung in der semiklassischen Betrachtung nicht auf die Gesamtwinkelverteilung auswirkt.

Abbildung 6.13: Die Abhängigkeit der Winkel des erzeugten Elektrons nach Einflussnahme der Strahlungsdämpfung in Abhängigkeit von den Anfangswinkeln (bevor die Strahlungsdämpfung berücksichtigt wurde). Die verwendeten Startparameter können der Legende entnommen werden. In Paneel (a) wird der Phasenpeak $n = 9$ verwendet, während in Paneel (b) der dazu symmetrische Phasenpeak $n = -8$ verwendet wird. Die Kurven mit durchgezogener Linie und die mit gestrichelter Linie unterscheiden sich im anfänglichen Azimutalwinkel um $\Delta\varphi_0 = \pi$.



In Abbildung 6.14 zeigen wir den Winkel ϑ in Abhängigkeit von der Phase Φ . In Paneel (a) wird die Strahlungsdämpfung zunächst vernachlässigt. Der Startwinkel, ab dem die Trajektorie betrachtet wird, stimmt mit dem Winkel am Ende des Laserpulses überein. Dies ändert sich auch nicht, wenn der Startpunkt, ab dem die Trajektorie betrachtet wird, von $\Phi_0 = -22\pi$ zu $\Phi_0 = 5\pi$ verschoben wird. Die beiden gezeigten Kurven verlaufen in diesem Fall parallel. In Paneel (b) lässt sich nun die Trajektorie unter dem Einfluss der Strahlungsdämpfung betrachten. Für $\Phi_0 = -22\pi$ fällt direkt auf, dass die Schwankung in ϑ deutlich größer ist. Zudem ändert sich die Trajektorie erheblich, wenn ein anderer Startpunkt Φ_0 gewählt wird. Der Ausgangswinkel am Ende des Pulses unterscheidet sich ebenfalls ($\vartheta = 0.33$ mrad für $\Phi_0 = -22\pi$ und $\vartheta = 0.67$ mrad für $\Phi_0 = 5\pi$).

Abbildung 6.14: Die Abhängigkeit der Polarwinkel von der Phase Φ . In Paneel (a) wird die Strahlungsdämpfung vernachlässigt, während in Paneel (b) die Strahlungsdämpfung mit berücksichtigt wird. Die Anfangsparameter belaufen sich auf $\varepsilon_0 = 0.3E_0$, $\varphi_0 = 0$ und $\vartheta_0 = 0.0003$. Die blauen Kurven zeigen den Phasenverlauf von Beginn des Pulses an. Die roten Kurven starten ab dem Phasenpunkt $\Phi_0 = 5\pi$.



Der hier gezeigte semiklassische Ansatz für die Strahlungsdämpfung lässt insgesamt keinen Einfluss auf die Ausgangswinkelverteilung erkennen. Jedoch unterscheiden sich die Trajektorien der einzelnen erzeugten Teilchen von denen ohne Einflussnahme der Strahlungsdämpfung. Blicken wir zurück auf Ref. [138], wo die Parameterwahl unserer ähnelt, jedoch eine zirkulare Polarisation verwendet wird, so sind die Elektronen dort ebenfalls unter einem sehr kleinen Winkel gestreut worden. Da in unserem Szenario die erzeugten Teilchen unter sehr kleinen Winkeln emittiert werden (siehe Abb. 6.7), können wir ebenfalls davon ausgehen, dass die Strahlungsdämpfung die Winkelspektren qualitativ nicht verändern wird. Diese Beobachtung bestätigt sich in Abbildung 6.14. Dort wird die Winkelverteilung ohne Strahlungsdämpfung als durchgezogene Kurve gezeigt und mit dem Ergebnis des SMILEI-PIC-Codes verglichen, welches durch blaue Punkte abgebildet wird. Die gezeigten Spektren liegen nahe beieinander und die Einbeziehung von Quanten-Strahlungsdämpfungseffekten führt lediglich zu einer geringfügig breiteren Verteilung. Um die Unterschie-

de hervorzuheben, wird hier ein einzelnes γ -Photon von $\omega' = 2.5 \text{ GeV}$ angenommen, bei dem der Wert des Quanten-Nichtlinearitätsparameters am größten ist und damit der Einfluss der Strahlungsdämpfung und der daraus resultierenden stochastischen Effekte am stärksten ausgeprägt ist. Würde stattdessen der Effekt der Bremsstrahlung auf die Erzeugung des γ -Photons mit berücksichtigt werden, so würde der Einfluss der Strahlungsdämpfung auf die Winkelverteilungen noch deutlich geringer ausfallen und somit quasi keinen Effekt haben.

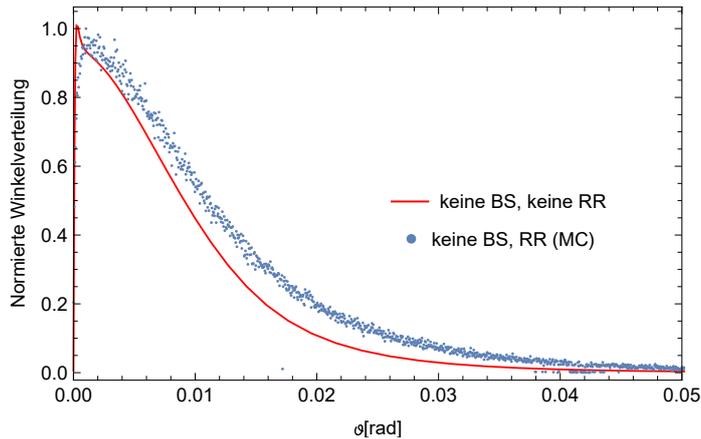


Abbildung 6.15: Normierte Winkelverteilungen von Elektronen, die durch ein monoenergetisches γ -Photon mit $\omega' = 2.5 \text{ GeV}$ und einen fokussierten Laserpuls: ohne Strahlungsdämpfung (durchgezogene Linie) und mit Strahlungsdämpfung über Monte-Carlo-PIC-Simulationen (Punkte) erzeugt wurden. Die Abbildung entstammt Ref. [132].

6.6 ZUSAMMENFASSUNG

Wir haben in diesem Kapitel Energiespektren und Winkelverteilungen der Elektron-Positron-Paare untersucht, die durch den nichtlinearen Breit-Wheeler-Prozess im nicht-perturbativen Regime erzeugt werden. Dabei wurden die Effekte der Laserfokussierung, der Bremsstrahlung und der Strahlungsdämpfung berücksichtigt. Die zugrundeliegenden Parameter orientierten sich dabei an dem geplanten Experiment aus Ref. [43].

Es ließ sich feststellen, dass sich die Energiespektren im Vergleich zum Fall der ebenen Welle zu etwas höheren Energien verschoben haben, wenn die Laserfokussierung mit einbezogen wurde. Dieser Effekt basiert auf der transversalen Fokussierung, während sich die longitudinale Fokussierung als unerheblich erwiesen hat. Bei der Winkelverteilung ist in allen betrachteten Fällen eine ausgeprägte Peak-Form bei sehr kleinen Winkeln ins Auge gefallen. Bei kleinen Polarwinkeln ϑ trägt die gesamte Breite der azimuthalen Winkel zum Spektrum bei, bei größeren ϑ tragen jedoch nur kleinere Bereiche der azimuthalen Winkel bei. Dieses Verhalten führt zu der ausgeprägten Form des Spektrums. Wird der Fall der Laserfokussierung mit dem Fall der ebenen Welle verglichen, so führt die Berücksichtigung der Fokussierung zu einem engeren Winkelspektrum. Bei einer konstanten Pulsenergie konnte bei einer stärkeren Fokussierung hingegen eine Verbreiterung des Spektrums beobachtet werden.

Einen sehr starken Effekt auf die Energieverteilung konnten wir durch die Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung beobachten. So verschieben sich die Energien der Teilchen - die mit einem Detektor messbar sind - auf wesentlich kleinere Werte.

Das semiklassische Modell führte dabei im Vergleich zur genaueren PIC-Simulation, in dem hier betrachteten Parameterregime, zu guten Ergebnissen. Im Allgemeinen haben die Effekte der Strahlungsdämpfung sehr deutlich die moderate Verschiebung durch die Laserfokussierung übertroffen. Anders als bei den Energiespektren konnten wir bei den Winkelspektren bei Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung kaum eine Veränderung beobachten. Auch stochastische Effekte sind bei der Winkelverteilung im Vergleich zur Energieverteilung weniger von Bedeutung. Die Einbeziehung des Bremsstrahlungsspektrums hat die Winkelverteilung in allen Fällen verbreitert.

In dieser Arbeit sind verschiedene Elektron-Positron-Paarproduktionsprozesse sowie die relativistische Ionisation in starken elektromagnetischen Feldern betrachtet worden. Nach einer kurzen theoretischen Einführung über die verwendeten elektronischen und positronischen Zustände in Kapitel 2 wurde die Ionisationsrate eines $1s$ -Elektrons in konstanten gekreuzten Feldern untersucht, welche mit Hilfe der Dirac-Theorie und der SFA in Göppert-Mayer-Eichung berechnet wurde. Der Einfluss des Coulomb-Feldes auf das tunnelnde Elektron im Kontinuumszustand ist dabei durch einen angepassten Coulomb-Faktor basierend auf Ref. [55] bestimmt worden. Die so ermittelte Ionisationsrate entsprach über einen breiten Bereich von Kernladungen hinweg dem Ergebnis aus den Ref. [56, 87], in denen die Coulomb-Korrektur mittels PPT-Theorie berücksichtigt wurde, sowie den Ergebnissen aus Ref. [58], in der die Coulomb-korrigierte Rate für ein linear polarisiertes Feld unter Verwendung der SFA bestimmt wurde. Unsere Berechnung eröffnet dabei zusätzliche Einblicke in die relativistische Starkfeldionisation im Allgemeinen und die Rolle der Coulomb-Korrekturen im Besonderen und stellt so eine Verbindung zwischen den entsprechenden PPT- und SFA-Theorien her. In einem nächsten Schritt wäre eine noch genauere Bestimmung des Coulomb-Korrekturfaktors denkbar, welcher den bis zu diesem Punkt ausgelassenen inneren Teil des Tunnels ebenfalls berücksichtigt.

Von der Ionisation ausgehend, ist ein rechnerisch sehr ähnlicher Prozess die gebunden-freie Paarproduktion. Diese haben wir im Zuge dieser Arbeit ebenfalls für konstante gekreuzte Felder betrachtet. Die Rechnung basierte wie zuvor auf der Dirac-Theorie und der SFA in der Göppert-Mayer-Eichung, sodass viele Rechenschritte analog zum Fall der Ionisation betrachtet werden konnten. Die zuvor für die Ionisation erarbeitete Methode des Coulomb-Korrekturfaktors fand auch hier Anwendung. Die dazu notwendige Anpassung der Korrektur basierte auf dem intuitiven Dirac-See-Bild. Entsprechend tunnelt das Elektron vom negativen Kontinuum in den gebundenen Zustand. Um zusätzlich den Aspekt der Eichung in diesem Prozess zu untersuchen, wurde die hier berechnete Paarproduktionsrate mit derjenigen verglichen, welche die Annahme eines zirkular polarisierten Feldes in der Strahlungseichung trifft. Die Raten variierten in den verschiedenen Eichungen um mehrere Größenordnungen. Von der Warte her, dass sich solche Unterschiede ebenfalls in SFA-Rechnungen zur nicht-relativistischen Ionisation in starker Weise gezeigt haben (vgl. Ref. [64]), ist ein solcher Unterschied jedoch nicht überraschend. Unsere Rechnung kann entsprechend dazu beitragen, die Eichabhängigkeit bezüglich der SFA noch besser zu verstehen. Ein weiterer Vergleich wurde zwischen der gebunden-freien Paarproduktion und der freien Paarproduktion gezogen. Dabei wurden die nicht Coulomb-korrigierten Raten miteinander verglichen. Dieser Vergleich hat ergeben, dass erst für sehr große Kernladungszahlen die gebunden-

freie Paarproduktion durch die verkürzte Tunnellänge der bevorzugte Prozess ist. Ein Vergleich der Coulomb-korrigierten Größen steht zukünftig noch aus, bei dem insbesondere der Coulomb-Korrekturfaktor für die freie Paarproduktion noch zu bestimmen ist.

Sowohl für die Ionisation als auch die gebunden-freie Paarproduktion wäre eine erweiterte Betrachtung auf endliche fokussierte Laserpulse wünschenswert um durch ebendiese Effekte eine noch realistischere Beschreibung dieser Prozesse zu ermöglichen. Einen ersten Aufschlag präsentieren wir im Anhang, in dem für eine endlich gepulste ebene Welle unter Verwendung der lokal monochromatischen Approximation die Paarproduktionswahrscheinlichkeit bestimmt wird.

In Kapitel 5 haben wir den Breit-Wheeler-Paarproduktionsprozess im starken elektromagnetischen Feld für ein durch Bremsstrahlung erzeugtes γ -Photon im Übergangsbereich von perturbativ zu nicht-perturbativ untersucht. Das LUXE-Konsortium am DESY hat ein entsprechendes Experiment geplant [44, 45], bei dem eines der Ziele ebenfalls darin besteht, den Übergang vom perturbativen Bereich des Breit-Wheeler-Prozesses zum nicht-perturbativen Bereich zu untersuchen. Die Parameter unserer Berechnung haben sich unter anderem an diesem Experiment orientiert. Das Laserfeld wurde sowohl als unendlich ausgedehnte ebene Welle beschrieben als auch als zeitlich endliche Welle, wobei die Methode der lokal monochromatischen Approximation verwendet wurde. Ein Hauptaugenmerk dieses Kapitels lag dabei auf der Bestimmung der Energie- und Winkelverteilungen. Zudem wurde der differentielle Frequenzbeitrag $d\bar{R}/d\omega'$ als Funktion der Energie der Bremsstrahlungspotonen ω' betrachtet. Bei einer schrittweisen Erhöhung des Laserintensitätsparameters ξ konnte dabei zunächst festgestellt werden, dass sich der relevante Bereich des Bremsstrahlungsspektrums immer weiter zu kleineren Energien hin verschoben hat. Dieses Verhalten konnte als klares Indiz für den Übergang zum nicht-perturbativen Regime verstanden werden, indem eine größere Anzahl an Laserphotonen über der energetisch minimal notwendigen Anzahl n_0 einen relevanten Beitrag zur Rate liefert. Eine Verschiebung des Maximums konnte ebenfalls für die Energieverteilung gefunden werden. Zudem stellte sich mit erhöhter Laserintensität eine zunehmende Asymmetrie des Spektrums ein. Sowohl Frequenz- als auch Energiespektren haben zudem für mittlere Intensitätsparameter Strukturen gezeigt, welche in Abhängigkeit von den beteiligten Photonen und der entsprechenden effektiven Masse positioniert sind. Die Winkelverteilungen sind ebenfalls durch die Bremsstrahlung beeinflusst worden. In diesen konnten die einzelnen Photonenübergänge $n \rightarrow n + 1$ durch charakteristische Strukturen ausgemacht werden. Die Positionen dieser Übergänge im Spektrum sind auch dabei eng mit der effektiven Masse verbunden gewesen. Die Anzahl der absorbierten Laserphotonen wurde durch die Bremsstrahlung so beeinflusst, dass der Hauptbeitrag zur totalen Rate von einer größeren Anzahl an Photonen stammte, als es bei der monochromatischen Rate der Fall gewesen wäre. In allen in diesem Kapitel gezeigten Spektren hat die Betrachtung einer endlichen Pulsdauer nur einen sehr kleinen Effekt gezeigt. Allein die Winkelverteilung reagierte sensitiv auf die genaue Form des Pulses.

Im letzten Kapitel haben wir die Betrachtung des nichtlinearen Breit-Wheeler-Prozesses auf das nicht-perturbative Regime erweitert. Dabei wurden die Effekte der Laserfokussierung, der Bremsstrahlung mit breitem Frequenzspektrum und

der Strahlungsdämpfung berücksichtigt. Für die Betrachtung wurden die Parameter des bevorstehenden Experiments aus Ref. [43] verwendet. Das Experiment soll im Rahmen der DFG-Forschungsgruppe 2783 *Probing the Quantum Vacuum at the High-Intensity Frontier* stattfinden. Hierfür haben wir erneut die Energie- und Winkelverteilungen betrachtet. Die Energiespektren der erzeugten Paare haben sich durch die Fokussierung zu etwas höheren Energien verschoben, verglichen mit dem Fall der ebenen Wellen. Der Effekt wurde dabei durch die transversale Fokussierung verursacht, während sich die longitudinale Fokussierung als unerheblich erwiesen hat. Unter Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung haben sich jedoch die Energien der erzeugten Teilchen, welche am Detektor messbar sind, zu wesentlich kleineren Energien verschoben. Die Strahlungsdämpfung hatte – verglichen mit der Fokussierung – einen deutlich stärkeren Effekt. Bei Betrachtung der Winkelverteilung konnten wir in allen Fällen eine ausgeprägte Peak-Struktur bei sehr kleinen Winkeln feststellen. Diese konnte darauf zurückgeführt werden, dass bei kleinen Polarwinkeln θ die gesamte Breite der azimutalen Winkel zur Rate beiträgt, während bei größeren θ nur ein kleiner Bereich von azimutalen Winkeln beiträgt. Im Vergleich zur ebenen Welle führte die Berücksichtigung der Fokussierung zu einem schmaleren Winkelspektrum. Währenddessen konnte bei konstanter Pulsenergie beobachtet werden, dass eine stärkere Fokussierung dagegen zu einer Verbreiterung des Spektrums geführt hat. Die Einbeziehung des Bremsstrahlungsspektrums hat die Verteilung in allen Fällen verbreitert. Die gewählte Methode zur Einbeziehung der Strahlungsdämpfung hat sich für die Winkelverteilung als nur bedingt geeignet erwiesen. Daher wurde zusätzlich eine numerische Rechnung herangezogen, um die Beschreibung der Strahlungsdämpfung zu verbessern. Der Einfluss der Strahlungsdämpfung auf die Winkelverteilung war aber auch hier nur gering. Zukünftig wäre es von großem Interesse eine noch genauere analytische Vorgehensweise zu finden, um die Strahlungsdämpfung zu beschreiben. Die gefundenen Ergebnisse sind von Relevanz für den Aufbau des geplanten Experiments aus Ref. [43] am Center for Advanced Laser Applications, das die erstmalige Beobachtung einer Starkfeld-Paarproduktion im nicht-perturbativen Regime zum Ziel hat.

A | NOTATIONEN

In dieser Arbeit wird kein einheitliches Einheitensystem verwendet. Atomare Einheiten kommen in den Kapiteln 3 und 4 zum Einsatz, während in den Kapiteln 5 und 6 relativistische Einheiten genutzt werden. Zudem werden einige Größen, um diese mit experimentellen Daten vergleichen zu können, in SI-Einheiten angegeben. Um einen Überblick über die hier verwendeten Maßsysteme zu erhalten, geben wir an dieser Stelle eine kurze Übersicht.

A.1 RELATIVISTISCHE EINHEITEN

Bei relativistischen Einheiten gibt es verschiedene Konventionen. Bei uns gilt einheitlich $\hbar = c = 4\pi\epsilon_0 = 1$. Dabei entspricht c der Vakuumlichtgeschwindigkeit, \hbar dem reduzierten Planckschen Wirkungsquantum und ϵ_0 der dielektrischen Permittivität. Die Verwendung relativistischer Einheiten führt insbesondere zu

- $m_0 = 1 \text{ GeV} \rightarrow 1.7827 \times 10^{-27} \text{ kg}$,
- $l_0 = 1 \text{ GeV}^{-1} \rightarrow 1.9733 \times 10^{-16} \text{ m}$,
- $t_0 = 1 \text{ GeV}^{-1} \rightarrow 6.5832 \times 10^{-25} \text{ s}$.

Für die Elektronenmasse gilt dementsprechend

- $m_e = 511 \text{ keV}$.

Die Feinstrukturkonstante bestimmt sich nach

- $\alpha = e^2 \approx 1/137$.

A.2 ATOMARE EINHEITEN

In atomaren Einheiten werden alle Größen in Vielfachen der Elementarladung $|e|$, der Elektronenmasse m_e und des Planck'schen Wirkungsquantums \hbar gemessen, sodass $\hbar = m_e = |e| = 1$. Für die Größen Länge, Zeit und Geschwindigkeit bedeutet dies in atomaren Einheiten

- $a_0 = 1 \text{ a.u.} = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$
- $t_0 = 1 \text{ a.u.} = \frac{\hbar^3}{m_e e^4} = 2.42 \times 10^{-17} \text{ s}$
- $v_0 = 1 \text{ a.u.} = r_0/t_0 = 2.19 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Hier bezeichnet a_0 den Bohr'schen Radius. Die Zeit t_0 entspricht genau der Zeit, die ein Elektron auf der 1. Bohrschen Umlaufbahn benötigt, um einmal um den Kern zu laufen. Die Geschwindigkeit v_0 bezeichnet die Elektronengeschwindigkeit in der 1. Bohr'schen Umlaufbahn von atomarem Wasserstoff. Für Frequenzen, Energien und Feldstärken lässt sich folgendes festhalten:

- $\omega_0 = 1 \text{ a.u.} = \frac{1}{t_0} = 4.13 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$
- $E_h = 1 \text{ a.u.} = \hbar\omega_0 = 27.21 \text{ eV}$
- $F_0 = 1 \text{ a.u.} = \frac{e}{r_0^2} = 5.14 \times 10^9 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$.

Somit gibt ω_0 die Winkelfrequenz des Elektrons in der 1. Bohrschen Umlaufbahn von atomarem Wasserstoff an. E_h bezeichnet die Hartree-Energie und F_0 stimmt mit der Stärke des Coulomb-Feldes, welches das Elektron auf der 1. Bohr'schen Umlaufbahn des atomaren Wasserstoffs erfährt, überein.

B | NÜTZLICHE RELATIONEN

B.1 IDENTITÄTEN MIT γ -MATRIZEN

Über die fundamentale Antikommutatorrelation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}, \quad (\text{B.1})$$

mit dem vierdimensionalen Metrischen Tensor $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, ergeben sich viele weitere nützliche Relationen, die die Berechnung von den in dieser Dissertation vorkommenden Spuren deutlich vereinfachen. Insbesondere sind die Gleichungen

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4\mathbf{1}, \quad (\text{B.2})$$

$$\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a}, \quad (\text{B.3})$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4(a \cdot b)\mathbf{1}, \quad (\text{B.4})$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu = -2\not{c} \not{b} \not{a} \quad (\text{B.5})$$

und

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} \gamma^\mu = 2\not{d} \not{a} \not{b} \not{c} + 2\not{c} \not{b} \not{a} \not{d} \quad (\text{B.6})$$

in Kapitel 3 bis 6 verwendet worden. Die Gleichung

$$\overline{\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}} = \not{d} \not{c} \not{b} \not{a} \quad (\text{B.7})$$

erweist sich ebenfalls als nützlich.

B.2 SPURBERECHNUNG

Für die Berechnung der Spuren lässt sich allgemein aus der Antikommutatorrelation herleiten, dass die Spur über eine ungerade Anzahl von γ -Matrizen verschwindet. Unter Ausnutzung der Invarianz der Spur unter zyklischen Vertauschungen der γ -Matrizen ergeben sich zudem die Relationen

$$Sp(\not{u}_1 \not{u}_2) = 4(u_1 \cdot u_2), \quad (\text{B.8})$$

$$Sp(\not{u}_1 \not{u}_2 \not{u}_3 \not{u}_4) = 4(u_1 \cdot u_2)(u_3 \cdot u_4) - 4(u_1 \cdot u_3)(u_2 \cdot u_4) + 4(u_1 \cdot u_4)(u_2 \cdot u_3), \quad (\text{B.9})$$

sowie der allgemeine Entwicklungssatz

$$\begin{aligned} Sp(\psi_1 \psi_2 \dots \psi_{2n}) &= (u_1 \cdot u_2) Sp(\psi_3 \psi_4 \dots \psi_{2n}) - (u_1 \cdot u_3) Sp(\psi_2 \psi_4 \dots \psi_{2n}) \pm \dots \\ &\quad + (u_1 \cdot u_{2n}) Sp(\psi_2 \dots \psi_{2n-1}). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Zudem erweist sich die Gleichung

$$Sp(\psi_1 \psi_2 \dots \psi_{2n}) = Sp(\psi_{2n} \dots \psi_2 \psi_1) \quad (\text{B.11})$$

als nützliche Hilfe.

B.3 SPINOREN

In dieser Dissertation werden Teilchenzahlen, Produktionswahrscheinlichkeiten sowie Raten bestimmt, welche alle darauf beruhen, dass das entsprechende Amplitudenquadrat berechnet wird und dieses anschließend über die Spins der erzeugten Teilchen summiert wird. Dafür lässt sich eine hilfreiche Relation finden, welche darauf basiert die Spur eines Matrixprodukts zu bestimmen. Wir betrachten jedoch zunächst die allgemeinen Eigenschaften der Dirac-Spinoren.

Die freien Dirac-Spinoren des Elektrons bzw. Positrons lauten [63]:

$$u_{p-,s} = \sqrt{\frac{mc + p_{0,-}}{2mc}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_-}{mc + p_{0,-}} \chi_s \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

und

$$v_{p+,s} = \sqrt{\frac{mc + p_{0,+}}{2mc}} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_+}{mc + p_{0,+}} \chi'_s \\ \chi'_s \end{pmatrix}, \quad (\text{B.13})$$

mit $\chi_{s,1}^T = \chi'_{s,2} = (1, 0)$, $\chi_{s,2}^T = \chi'_{s,1} = (0, 1)$ und dem Vektor $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, wobei σ_i die Pauli-Matrizen bezeichnen. Die Normierung der Spinoren findet über die Relationen

$$\sum_{s=1}^2 u_{p-,s} \bar{u}_{p-,s} = \frac{\not{p}_- + mc}{2mc}, \quad (\text{B.14})$$

$$\sum_{s=1}^2 v_{p+,s} \bar{v}_{p+,s} = \frac{\not{p}_+ - mc}{2mc} \quad (\text{B.15})$$

und $\bar{u}_{p-,s} \gamma^\mu u_{p-,s} = \frac{p_-^\mu}{mc}$, $\bar{v}_{p+,s} \gamma^\mu v_{p+,s} = \frac{p_+^\mu}{mc}$ statt. Hierbei bezeichnen $\bar{u}_{p-,s} = u_{p-,s}^\dagger \gamma^0$ und $\bar{v}_{p+,s} = v_{p+,s}^\dagger \gamma^0$.

Aufgrund dieser Relationen kann eine Spinsumme nun als Spur über ein Matrixprodukt beschrieben werden, für welche sich

$$\sum_{s-,s+} |\bar{u} \Gamma v|^2 = Sp \left(\Gamma \frac{\not{p}_+ - mc}{2mc} \Gamma \frac{\not{p}_- + mc}{2mc} \right) \quad (\text{B.16})$$

ergibt. Die entsprechende Herleitung findet sich beispielsweise in Ref. [21].

C | ORTSINTEGRALE

Wir zeigen hier einige hilfreiche Integrationen. Wir beginnen mit:

$$I_1(q) = \int d^3\mathbf{r} r^\sigma e^{-Zr} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \sin \vartheta \cos \varphi.$$

Für das vorkommende Skalarprodukt lässt sich

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = q_\perp r \sin \vartheta \cos(\varphi - \phi_q) + q_z r \cos \vartheta$$

bestimmen. Die Variable ϕ_q bezieht sich dabei auf den azimuthalen Winkel bezüglich \mathbf{q} . Zusätzlich nutzen wir

$$\cos(\varphi - \varphi') = \cos(\varphi - \phi_q) \cos(\varphi' - \phi_q) + \sin(\varphi - \phi_q) \sin(\varphi' - \phi_q). \quad (\text{C.1})$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} I_1(q) &= \int d^3\mathbf{r} r^\sigma e^{-Zr} e^{-iq_\perp r \sin \vartheta \cos(\varphi - \phi_q)} e^{-iq_z r \cos \vartheta} \sin \vartheta \cos(\varphi - \phi_q) \cos \phi_q \\ &\quad - \int d^3\mathbf{r} r^\sigma e^{-Zr} e^{-iq_\perp r \sin \vartheta \cos(\varphi - \phi_q)} e^{-iq_z r \cos \vartheta} \sin \vartheta \sin(\varphi - \phi_q) \sin \phi_q. \end{aligned}$$

Die Integration der letzten Zeile verschwindet aufgrund der azimuthalen Symmetrie. Für die verbleibende φ -Integration lässt sich Glg. (9.1.21) aus Ref. [95] verwenden. Dazu schreiben wir den Ausdruck mit Hilfe der Ableitung nach q_\perp um. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} I_1(q) &= \int dr \int d\vartheta \int d\varphi r^{\sigma+2} e^{-Zr} e^{-iq_\perp r \sin \vartheta \cos(\varphi - \phi_q)} e^{-iq_z r \cos \vartheta} \\ &\quad \times \sin^2 \vartheta \cos(\varphi - \phi) \cos \phi_q \\ &= i \frac{d}{dq_\perp} \int dr \int d\vartheta \int d\varphi r^{\sigma+1} e^{-Zr} e^{-iq_\perp r \sin \vartheta \cos(\varphi - \phi_q)} e^{-iq_z r \cos \vartheta} \sin \vartheta \cos \phi_q \\ &= 2\pi i \frac{d}{dq_\perp} \int dr \int d\vartheta r^{\sigma+1} e^{-Zr} J_0(q_\perp r \sin \vartheta) e^{-iq_z r \cos \vartheta} \sin \vartheta \cos \phi_q. \end{aligned}$$

Die ϑ -Integration kann über Glg. (6.677.6) aus Ref. [142] bestimmt werden. Dazu führen wir zudem die Substitution $x = \sin \vartheta$ ein. Dies führt uns zu dem Ausdruck:

$$\begin{aligned} I_1(q) &= 2\pi i \frac{d}{dq_\perp} \int dr \int_{-1}^1 dx r^{\sigma+1} e^{-Zr} J_0(q_\perp r \sqrt{1-x^2}) \\ &\quad \times [\cos(q_z r x) - i \sin(q_z r x)] \cos \phi_q \\ &= 4\pi i \cos \phi_q \frac{d}{dq_\perp} \int dr r^{\sigma+1} e^{-Zr} \frac{1}{qr} \sin(qr). \end{aligned}$$

Die r -Integration lässt sich mithilfe von Glg. (3.381.4) aus Ref. [142] bestimmen. Dies bringt uns als Ergebnis:

$$\begin{aligned}
 I_1(q) &= 2\pi \cos \phi_q \Gamma(\sigma + 1) \frac{d}{dq_\perp} \left[\frac{1}{q} \left(\frac{1}{(Z - iq)^{\sigma+1}} - \frac{1}{(Z + iq)^{\sigma+1}} \right) \right] \\
 &= 2\pi \cos \phi_q \Gamma(\sigma + 1) \left[\frac{q_\perp}{q^3} \left(\frac{1}{(Z + iq)^{\sigma+1}} - \frac{1}{(Z - iq)^{\sigma+1}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + i(\sigma + 1) \frac{q_\perp}{q^2} \left(\frac{1}{(Z - iq)^{\sigma+2}} + \frac{1}{(Z + iq)^{\sigma+2}} \right) \right]. \tag{C.2}
 \end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise lassen sich auch $I_2(q)$ bis $I_4(q)$ bestimmen, sodass

$$\begin{aligned}
 I_2(q) &= \int d^3\mathbf{r} r^\sigma e^{-Zr} e^{-iq \cdot \mathbf{r}} \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \\
 &= 2\pi i \cos \phi_q \Gamma(\sigma) \left[3 \frac{q_\perp q_z}{q^5} \left(\frac{1}{(Z - iq)^\sigma} - \frac{1}{(Z + iq)^\sigma} \right) \right. \\
 &\quad \left. - 3i\sigma \frac{q_\perp q_z}{q^4} \left(\frac{1}{(Z - iq)^{\sigma+1}} + \frac{1}{(Z + iq)^{\sigma+1}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sigma(\sigma + 1) \frac{q_\perp q_z}{q^3} \left(\frac{1}{(Z + iq)^{\sigma+2}} - \frac{1}{(Z - iq)^{\sigma+2}} \right) \right], \tag{C.3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3(q) &= \int d^3\mathbf{r} r^\sigma e^{-Zr} e^{-iq \cdot \mathbf{r}} \sin^2 \vartheta \cos(\varphi - \phi_q) \cos \varphi \\
 &= 2\pi i \Gamma(\sigma) \cos \phi_q \left[\left(\frac{1}{q^3} - 3 \frac{q_\perp^2}{q^5} \right) \left(\frac{1}{(Z + iq)^\sigma} - \frac{1}{(Z - iq)^\sigma} \right) \right. \\
 &\quad \left. + i\sigma \left(\frac{1}{q^2} - 3 \frac{q_\perp^2}{q^4} \right) \left(\frac{1}{(Z + iq)^{\sigma+1}} + \frac{1}{(Z - iq)^{\sigma+1}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sigma(\sigma + 1) \frac{q_\perp^2}{q^3} \left(\frac{1}{(Z + iq)^{\sigma+2}} - \frac{1}{(Z - iq)^{\sigma+2}} \right) \right] \tag{C.4}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 I_4(q) &= \int d^3\mathbf{r} r^\sigma e^{-Zr} e^{-iq \cdot \mathbf{r}} \sin^2 \vartheta \sin(\varphi - \phi_q) \cos \varphi \\
 &= -2\pi i \Gamma(\sigma) \sin \phi_q \left[\frac{1}{q^3} \left(\frac{1}{(Z + iq)^\sigma} - \frac{1}{(Z - iq)^\sigma} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{i\sigma}{q^2} \left(\frac{1}{(Z - iq)^{\sigma+1}} + \frac{1}{(Z + iq)^{\sigma+1}} \right) \right]. \tag{C.5}
 \end{aligned}$$

D | LOKAL MONOCHROMATISCHE APPROXIMATION FÜR DIE GEBUNDENFREIE PAARPRODUKTION

Wir zeigen hier die Rechnung zur gebunden-freien Paarproduktion in einer zirkular polarisierten, endlich langen Laserwelle. Die Grundrechnung basiert auf der Rechnung aus Ref. [21], in welcher dieser nichtlineare Prozess zum ersten Mal für den Fall einer unendlich ausgedehnten ebenen Welle beschrieben wurde. Wir verwenden hier eine zeitlich endliche Ausdehnung der Laserwelle und erweitern die Rechnung aus Ref. [21] über die Methode der *locally monochromatic approximation*, welche wir im Zuge des Breit-Wheeler-Prozesses basierend auf Ref. [59] bereits in Kapitel 5 verwendet haben. Wir verwenden für diese Rechnung atomare Einheiten.

Das Vierer-Potential einer zirkular polarisierten, endlichen ebenen Welle ist durch

$$A^\mu(x) = af(k \cdot x / \Phi)(\epsilon_1^\mu \cos k \cdot x + \epsilon_2^\mu \sin k \cdot x) \quad (\text{D.1})$$

gegeben, wobei $\varphi_k = k \cdot x$ die Laserphase beschreibt und $\pi\Phi$ die Phasendauer. Wir setzen dies in den in Glg. (2.18) gegebenen positronischen Volkov-Zustand ein, sodass

$$\begin{aligned} \Psi_{p,s^+}^{(+)}(x) = & \sqrt{\frac{m}{q_0}} \left(1 + \frac{kA}{2c(k \cdot p)} \right) v_{s^+} \exp \left[ip \cdot x \right. \\ & \left. + i \frac{a^2}{2c^2 k \cdot p} \int^{\varphi_k} f^2 \left(\frac{\tilde{\varphi}_k}{\Phi} \right) d\tilde{\varphi}_k - i\bar{a} f \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right) \sin(\varphi_k - \varphi_p) \right], \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

wobei wir analog zu Ref. [21] die Variablen

$$\begin{aligned} \alpha_j &= -(A_j \cdot p) / c(k \cdot p), \\ \bar{a} &= \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \\ \phi_p &= \arcsin(\alpha_2 / \bar{a}) \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

eingeführt haben. Der gebundenen 1s-Zustand wird durch

$$\Phi_{1s} = g(r) \chi_{s^-} \exp(-iE_{1s}t) \quad (\text{D.4})$$

beschrieben, mit der radialen Funktion $g(r) = C_{1s}(2Zr)^{\sigma-1} \exp(-Zr)$, $\sigma = [1 - (\alpha Z)^2]^{1/2}$ und $C_{1s} = \left(\frac{Z^3}{\pi} \frac{1+\sigma}{\Gamma(1+2\sigma)} \right)^{1/2}$. Die zwei möglichen Spinoren des Elektrons sind

$$\chi_{+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \frac{1-\sigma}{\alpha Z} \cos \vartheta \\ i \frac{1-\sigma}{\alpha Z} \sin \vartheta e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \frac{1-\sigma}{\alpha Z} \sin \vartheta e^{-i\varphi} \\ -i \frac{1-\sigma}{\alpha Z} \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Die Übergangsamplitude wird in der Post-Form durch die Gleichung

$$S^{\text{SFA}} = \frac{i}{c} \int d^4x \bar{\Phi}_{1s} \mathcal{A} \Psi_{p,s}^{(+)} \quad (\text{D.5})$$

beschrieben. Wie in Kapitel 4 drücken wir den Integranden über ein Fourier-Integral aus, wozu wir

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_k e^{i\varphi_k s} \left(1 + \frac{k\mathcal{A}}{2c(k \cdot p)} \right) \\ &\times \exp \left[\frac{ia^2}{2c^2k \cdot p} \int^{\varphi_k} f^2 \left(\frac{\tilde{\varphi}_k}{\Phi} \right) d\tilde{\varphi}_k - i\bar{\alpha} f \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right) \sin(\varphi_k - \varphi_p) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

eingeführen. Über die Rücktransformation gelangen wir entsprechend zu dem Ausdruck

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{k\mathcal{A}}{2c(k \cdot p)} \right) \exp \left[\frac{ia^2}{2c^2k \cdot p} \int^{\varphi_k} f^2 \left(\frac{\tilde{\varphi}_k}{\Phi} \right) d\tilde{\varphi}_k - i\bar{\alpha} f \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right) \sin(\varphi_k - \varphi_p) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-is\varphi_k} \mathcal{A}(s). \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Einsetzen dieses Ausdrucks in die Übergangsamplitude und anschließendes Lösen der Integration über t liefert uns den Faktor $2\pi\delta(\varepsilon_p + E_{1s} - s\omega)$. Danach lösen wir die Integration über s , sodass

$$\begin{aligned} S^{\text{SFA}} &= \frac{i}{c} \sqrt{\frac{c}{p_0}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int d^4x e^{iE_{1s}t} g(r) \bar{\chi}_s - \mathcal{A} \mathcal{A}(s) v_{s^+} e^{ip \cdot x} e^{-is\varphi_k} \\ &= \frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{c}{p_0}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_k \int d^3\mathbf{r} g(r) \bar{\chi}_s - \mathcal{A} \left(1 + \frac{k\mathcal{A}}{2c(k \cdot p)} \right) v_{s^+} e^{i\varphi_k s} e^{is\frac{\omega}{c}z} e^{-ip \cdot \mathbf{r}} \\ &\times e^{i\frac{a^2}{2c^2k \cdot p} \int^{\varphi_k} f^2 \left(\frac{\tilde{\varphi}_k}{\Phi} \right) d\tilde{\varphi}_k - i\bar{\alpha} f \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right) \sin(\varphi_k - \varphi_p)}, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

mit $s = (E_{1s} + \varepsilon_p)/\omega$. An dieser Stelle gehen wir direkt zum Betragsquadrat der Amplitude über:

$$\begin{aligned} |S^{\text{SFA}}|^2 &= \frac{1}{\omega^2} \frac{c}{p_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_k \int d^3\mathbf{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi'_k \int d^3\mathbf{r}' g(r) g(r') \\ &\times \bar{v}_{s^+} \left(1 + \frac{\mathcal{A}k}{2c(k \cdot p)} \right) \mathcal{A} \chi_s - \bar{\chi}'_s - \mathcal{A}' \left(1 + \frac{k\mathcal{A}'}{2c(k \cdot p)} \right) v_{s^+} \\ &\times e^{i(\varphi'_k - \varphi_k)s} e^{is\frac{\omega}{c}(z' - z)} e^{-ip \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})} e^{-i\bar{\alpha} \left(f \left(\frac{\varphi'_k}{\Phi} \right) \sin(\varphi'_k - \varphi_p) - f \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right) \sin(\varphi_k - \varphi_p) \right)} \\ &\times e^{i\frac{a^2}{2c^2k \cdot p} \left(\int^{\varphi'_k} d\tilde{\varphi}_k f^2 \left(\frac{\tilde{\varphi}_k}{\Phi} \right) - \int^{\varphi_k} d\tilde{\varphi}_k f^2 \left(\frac{\tilde{\varphi}_k}{\Phi} \right) \right)}. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Im nächsten Schritt nutzen wir die Relation

$$\begin{aligned} &e^{-i\bar{\alpha} \left(f \left(\frac{\varphi'_k}{\Phi} \right) \sin(\varphi'_k - \varphi_p) - f \left(\frac{\varphi_k}{\Phi} \right) \sin(\varphi_k - \varphi_p) \right)} \\ &= \sum_{n,n'} J_n \left(\bar{\alpha} f \left(\frac{\varphi}{\Phi} \right) \right) J_{n'} \left(\bar{\alpha} f \left(\frac{\varphi'}{\Phi} \right) \right) e^{in\varphi_k} e^{-in'\varphi'_k} e^{-i(n-n')\varphi_p}, \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

um unseren Integranden über Besselfunktionen auszudrücken. Zudem führen wir die Variablen $\phi = \frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi'_k)$ und $\theta = (\varphi_k - \varphi'_k)$ ein, wie wir es auch in Kapitel 5 getan haben. An dieser Stelle erfolgt ebenfalls direkt die Approximation der lokal monochromatischen Betrachtung der Einhüllenden $f(\varphi_k/\Phi) \approx f(\varphi'_k/\Phi) \approx f(\phi/\Phi)$, wodurch sich die weiteren Integrationen analytisch berechnen lassen. Zuvor

summieren wir jedoch über die Elektronenspins. Dabei nutzen wir die in Ref. [21] verwendete Notation:

$$M = \sum_{s^-} \chi_{s^-} \tilde{\chi}'_{s^-} = \frac{1}{2} (M^{(0)} + M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)}), \quad (\text{D.11})$$

mit

$$\begin{aligned} M^{(0)} &= \tilde{c} \mathbb{1}, \\ M^{(1)} &= c_0 \gamma^0 + c_1 \gamma^1 + c_2 \gamma^2 + c_3 \gamma^3, \\ M^{(2)} &= c_{01} \gamma^0 \gamma^1 + c_{02} \gamma^0 \gamma^2 + c_{03} \gamma^0 \gamma^3 + c_{12} \gamma^1 \gamma^2 + c_{13} \gamma^1 \gamma^3 + c_{22} \gamma^2 \gamma^3, \\ M^{(3)} &= c_{012} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 + c_{013} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 + c_{2023} \gamma^0 \gamma^2 \gamma^3 + c_{123} \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{c} &= 1 - \tau^2 (\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi')), \\ c_0 &= 1 + \tau^2 (\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi')), \\ c_1 &= i\tau (-\sin \vartheta \cos \varphi + \sin \vartheta' \cos \varphi'), \\ c_2 &= i\tau (-\sin \vartheta \sin \varphi + \sin \vartheta' \sin \varphi'), \\ c_3 &= i\tau (-\cos \vartheta + \cos \vartheta'), \\ c_{01} &= i\tau (\sin \vartheta \cos \varphi + \sin \vartheta' \cos \varphi'), \\ c_{02} &= i\tau (\sin \vartheta \sin \varphi + \sin \vartheta' \sin \varphi'), \\ c_{03} &= i\tau (\cos \vartheta + \cos \vartheta'), \\ c_{12} &= \tau^2 (-\sin \vartheta \sin \vartheta' \sin(\varphi - \varphi')), \\ c_{13} &= \tau^2 (-\cos \vartheta \sin \vartheta' \cos \varphi' + \sin \vartheta \cos \vartheta' \cos \varphi), \\ c_{23} &= \tau^2 (-\cos \vartheta \sin \vartheta' \sin \varphi' + \sin \vartheta \cos \vartheta' \sin \varphi), \\ c_{012} &= \tau^2 (\sin \vartheta \sin \vartheta' \sin(\varphi - \varphi')), \\ c_{013} &= \tau^2 (\cos \vartheta \sin \vartheta' \cos \varphi' - \sin \vartheta \cos \vartheta' \cos \varphi), \\ c_{023} &= \tau^2 (\cos \vartheta \sin \vartheta' \sin \varphi' - \sin \vartheta \cos \vartheta' \sin \varphi), \\ c_{123} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

wobei $\tau = \frac{1-\sigma}{\alpha Z}$. Die anschließende Summation über den Positronenspin liefert uns:

$$\sum_{s^+} \bar{v}_{s^+} \Gamma v_{s^+} = \frac{1}{2c} \text{Sp}(\Gamma(\not{p} - c)) = \frac{1}{4c} \mathcal{T}. \quad (\text{D.14})$$

Dabei entspricht in diesem Fall

$$\Gamma = \left(\not{A} + \nu c \not{k} \right) M \left(\not{A}' + \nu c \not{k} \right) \quad (\text{D.15})$$

und $\nu = \frac{a^2 f^2(\phi/\Phi)}{2c^2(k \cdot p)}$. Mit der Aufspaltung von M ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \text{Sp} \left((M^{(1)} + M^{(3)}) \left(\not{A}' + \nu c \not{k} \right) \not{p} \left(\not{A} + \nu c \not{k} \right) \right) \\ &\quad - c \text{Sp} \left((M^{(0)} + M^{(2)}) \left(\not{A}' + \nu c \not{k} \right) \left(\not{A} + \nu c \not{k} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Die Berechnung der Spuren erfolgt mit den Regeln aus Anhang B und kann zudem in

Ref. [21] nachvollzogen werden. Das Ergebnis von T lässt sich in drei Teile separieren:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_A &= 4a^2 f^2 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) \left[(c_0 p_0 + c_3 p_z + \tilde{c} c) \cos(\varphi_k - \varphi'_k) + (c_{012} p_0 + c_{12} c) \sin(\varphi_k - \varphi'_k) \right. \\
 &\quad + p_\perp (-c_1 \cos \phi_p + c_2 \sin \phi_p) \cos(\varphi_k + \varphi'_k) \\
 &\quad \left. - p_\perp (c_1 \sin \phi_p + c_2 \cos \phi_p) \sin(\varphi_k + \varphi'_k) \right], \\
 \mathcal{T}_B &= 4f \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) v \omega \left[(A_x + A'_x) (c_1 (p_0 - p_z) - (c_0 + c_3) p_x) \right. \\
 &\quad + (A_y + A'_y) (c_2 (p_0 - p_z) - (c_0 + c_3) p_y) \\
 &\quad + (A_x - A'_x) ((c_{01} - c_{13}) c + c_{012} p_y - c_{013} (p_0 - p_z)) \\
 &\quad \left. + (A_y - A'_y) ((c_{02} - c_{23}) c - c_{012} p_x - c_{023} (p_0 - p_z)) \right], \\
 \mathcal{T}_C &= 8v^2 \omega^2 (c_0 + c_3) (p_0 - p_z). \tag{D.17}
 \end{aligned}$$

Wir unterteilen \mathcal{T}_A noch weiter:

$$\mathcal{T}_A = 2a^2 f^2 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) \left[C_1 e^{i(\varphi_k - \varphi'_k)} + C_2 e^{-i(\varphi_k - \varphi'_k)} + C_3 e^{i(\varphi_k + \varphi'_k)} + C_4 e^{-i(\varphi_k + \varphi'_k)} \right], \tag{D.18}$$

mit

$$\begin{aligned}
 C_1 &= (c_0 - ic_{012}) p_0 + c_3 p_z + (\tilde{c} - ic_{12}) c, \\
 C_2 &= (c_0 + ic_{012}) p_0 + c_3 p_z + (\tilde{c} + ic_{12}) c, \\
 C_3 &= (-c_1 \cos \phi_p + c_2 \sin \phi_p) p_\perp + i(c_1 \sin \phi_p + c_2 \cos \phi_p) p_\perp, \\
 C_4 &= (-c_1 \cos \phi_p + c_2 \sin \phi_p) p_\perp - i(c_1 \sin \phi_p + c_2 \cos \phi_p) p_\perp. \tag{D.19}
 \end{aligned}$$

Somit lässt sich auch die Integration mit dem zu \mathcal{T}_A proportionalen Integranden aufteilen. Wir beginnen mit

$$\begin{aligned}
 I_A^{(1)} &= \frac{1}{4\omega^2 p_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_k \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi'_k \int d^3 \mathbf{r} \int d^3 \mathbf{r}' e^{-is \frac{\omega}{c} (z-z')} e^{-i(\varphi_k - \varphi'_k) s} \\
 &\quad \times e^{-i \frac{a^2}{2c^2(k \cdot p)} f^2 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) (\varphi_k - \varphi'_k)} e^{i \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} g(r) g(r') 2a^2 f^2 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) C_1 e^{i(\varphi_k - \varphi'_k)} \\
 &\quad \times \sum_{n, n'} J_n \left(\bar{\alpha} f \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) \right) J_{n'} \left(\bar{\alpha} f \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) \right) e^{in\varphi_k} e^{-in'\varphi'_k} e^{-i(n-n')\phi_p} \\
 &= \frac{a^2}{2\omega^2 p_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_k \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi'_k \sum_{n, n'} J_n \left(\bar{\alpha} f \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) \right) J_{n'} \left(\bar{\alpha} f \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) \right) e^{i(n+1)\varphi_k} \\
 &\quad \times e^{-i(n'+1)\varphi'_k} e^{-i(n-n')\phi_p} f^2 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) e^{-i \left(\frac{a^2}{2c^2(k \cdot p)} f^2 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) + s \right) (\varphi_k - \varphi'_k)} \\
 &\quad \times \int d^3 \mathbf{r} \int d^3 \mathbf{r}' e^{-isk \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{i \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} C_1 g(r) g(r'). \tag{D.20}
 \end{aligned}$$

Die Ortsintegrationen werden später separat betrachtet. Das Ergebnis dieser ist unabhängig von ϕ_p . Die zusätzliche Integration über \mathbf{p} ermöglicht es uns die Paarproduktionswahrscheinlichkeit zu ermitteln:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} I_A^{(1)} &= \frac{a^2}{2^4 \pi^3 \omega^2} \int dp \frac{p^2}{p_0} \int_{-1}^1 d \cos \vartheta_p \int d\phi_p \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_k \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi'_k \sum_{n, n'} \\
 &\quad \times J_n \left(\bar{\alpha} f \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) \right) J_{n'} \left(\bar{\alpha} f \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) \right) e^{i(n+1)\varphi_k} e^{-i(n'+1)\varphi'_k} \\
 &\quad \times e^{-i(n-n')\phi_p} f^2 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) e^{-i \left(\frac{a^2}{2c^2(k \cdot p)} f^2 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) + s \right) (\varphi_k - \varphi'_k)} O_A^{(1)}, \tag{D.21}
 \end{aligned}$$

mit $O_A^{(1)} = \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{s}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} C_1 g(r) g(r')$. Die Integration über $d\phi_p$ liefert den Beitrag $2\pi\delta(n-n')$, womit sich im Anschluss die Summe $\sum_{n,n'}$ zu \sum_n vereinfacht. Zusammen mit der Indexverschiebung $n \rightarrow n-1$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} I_A^{(1)} &= \frac{a^2}{2^3\pi^2\omega^2} \int dp \frac{p^2}{p_0} \int_{-1}^1 d\cos\vartheta_p \int d\phi_p \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_k \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi'_k \sum_n \\ &\times J_{n-1}^2 \left(\bar{\alpha} f \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) \right) e^{-i \left(\frac{a^2}{2c^2(k\cdot p)} f^2 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) + s - n \right) (\varphi_k - \varphi'_k)} f^2 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) O_A^{(1)}. \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

Zur weiteren Vereinfachung wechseln wir zu den Koordinaten $\theta = \varphi_k - \varphi'_k$ und $\phi = \frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi'_k)$, sodass $\int d\varphi_k \int d\varphi'_k \rightarrow \int d\theta \int d\phi$. Die θ -Integration liefert den Beitrag $2\pi\delta \left(\frac{a^2}{2c^2(k\cdot p)} f^2 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) + s - n \right)$. Die δ -Funktion lässt sich dazu nutzen das Integral über $\cos\vartheta_p$ zu lösen. Das Argument der δ -Funktion lässt sich als Funktion von $\cos\vartheta_p$ auffassen, mit der Nullstelle

$$\cos\vartheta_{p,0} = \frac{p_0}{p} - \frac{a^2 f^2 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right)}{2pc(n\omega - E_{1s} - \varepsilon_p)}. \quad (\text{D.23})$$

Da $|\cos\vartheta_{p,0}| \leq 1$ beschränkt ist, ergibt sich für p_0 die Bedingung

$$\frac{(c^3 + \mathcal{K})(n\omega - E_{1s}) - \sqrt{\mathcal{W}}}{c^4 + 2c\mathcal{K}} \leq p_0 \leq \frac{(c^3 + \mathcal{K})(n\omega - E_{1s}) + \sqrt{\mathcal{W}}}{c^4 + 2c\mathcal{K}}, \quad (\text{D.24})$$

mit $\mathcal{K} = \frac{a^2 f^2 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right)}{2c}$ und $\mathcal{W} = \mathcal{K}^2(n\omega - E_{1s}^2) - c^4 \mathcal{K}^2 - 2c\mathcal{K}^3$. Dadurch, dass das Argument einer Wurzel positiv definiert sein sollte, ergibt sich die weitere Bedingung

$$n \geq \frac{E_{1s} + m_* c^2}{\omega} = n_*, \quad (\text{D.25})$$

mit der effektiven Masse $m_* = \sqrt{1 + \xi^2 f^2 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right)}$. Dementsprechend erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} I_A^{(1)} &= \frac{a^4}{2^3 c \pi \omega} \int_{p_{0,\min}}^{p_{0,\max}} dp_0 \sum_{n \geq n_*} \frac{1}{(n\omega - E_{1s} - p_0 c)^2} \\ &\times \int d\phi J_{n-1}^2 \left(\bar{\alpha} f \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) \right) f^4 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) O_A^{(1)}. \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

Wir betrachten nun die Ortsintegration. In der Ref. [21] sind dazu die folgenden nützlichen Integrationsformeln hergeleitet worden:

$$\begin{aligned} R &= \int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} g(r) = \sigma \frac{\rho^2}{Z} \mathcal{U}\mathcal{R}, \\ R_1 &= \int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} g(r) \cos\vartheta = i(p_z - sk_z) \mathcal{V}\mathcal{R}, \\ R_2 &= \int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} g(r) \sin\vartheta \cos(\varphi_r - \varphi_p) = ip_{\perp} \mathcal{V}\mathcal{R}, \\ R_3 &= \int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} g(r) \sin\vartheta \sin(\varphi_r - \varphi_p) = 0, \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \sin\mathcal{X} + \frac{\rho}{Z} \cos\mathcal{X}, \\ \mathcal{V} &= \sigma \frac{\rho}{Z} \cos\mathcal{X} - \left[1 + (1 + \sigma) \left(\frac{\rho}{Z} \right)^2 \right] \sin\mathcal{X}, \\ \mathcal{X} &= \sigma \arctan \left(\frac{\rho}{Z} \right), \\ \rho &= \mathbf{p} - \mathbf{s}\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Unter Beachtung der Umformungen

$$\begin{aligned}\cos(\varphi - \varphi') &= \cos(\varphi - \phi_p) \cos(\varphi' - \phi_p) + \sin(\varphi - \phi_p) \sin(\varphi' - \phi_p), \\ \sin(\varphi - \varphi') &= \sin(\varphi - \phi_p) \cos(\varphi' - \phi_p) - \cos(\varphi - \phi_p) \sin(\varphi' - \phi_p)\end{aligned}\quad (\text{D.29})$$

lässt sich für $O_A^{(1)}$ direkt die folgende Gleichung ermitteln:

$$\begin{aligned}O_A^{(1)} &= \frac{16\pi}{Z^3 \left[1 + \left(\frac{\rho}{Z}\right)^2\right]^4} \mathcal{P} \left\{ (p_0 + c)\sigma^2 \left(\frac{\rho}{Z}\right)^4 \mathcal{U}^2 + (p_0 - c)\tau^2 \frac{\rho^2}{Z^2} \mathcal{V}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{Z} p_z \sigma \tau \left(\frac{\rho}{Z}\right)^2 (p_z - sk_z) \mathcal{U} \mathcal{V} \right\}.\end{aligned}\quad (\text{D.30})$$

Auf dieselbe Weise lässt sich mit $I_A^{(2)}$ umgehen. Der Unterschied zur vorherigen Rechnung besteht in der notwendigen Indexverschiebung, sodass

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} I_A^{(2)} &= \frac{a^4}{2^3 c \pi \omega} \int_{p_{0,\min}}^{p_{0,\max}} dp_0 \sum_{n \geq n_*} \frac{1}{(n\omega - E_{1s} - p_0 c)^2} \\ &\quad \times \int d\phi J_{n+1}^2 \left(\bar{\alpha} f \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) \right) f^4 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) O_A^{(2)}.\end{aligned}\quad (\text{D.31})$$

Für die Ortsintegrale lässt sich $O_A^{(1)} = O_A^{(2)}$ finden. Zur Berechnung von $I_A^{(3)}$ und $I_A^{(4)}$ bietet es sich an die Relation

$$\begin{aligned}C_3 e^{2i\phi_p} &= (\tau \sin \vartheta \sin(\varphi - \phi_p) + i\tau \sin \vartheta \cos(\varphi - \phi_p) \\ &\quad - \tau \sin \vartheta' \sin(\varphi' - \phi_p) - i\tau \sin \vartheta' \cos(\varphi' - \phi_p)) p_\perp\end{aligned}\quad (\text{D.32})$$

zu verwenden. Die nachfolgenden Schritte lassen sich analog zur bisherigen Rechnung durchführen. Wir gelangen so zu dem Ausdruck

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} I_A^{(3)} &= \frac{a^4}{2^3 c \pi \omega} \int_{p_{0,\min}}^{p_{0,\max}} dp_0 \sum_{n \geq n_*} \frac{1}{(n\omega - E_{1s} - p_0 c)^2} \\ &\quad \times \int d\phi J_{n+1} \left(\bar{\alpha} f \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) \right) J_{n-1} \left(\bar{\alpha} f \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) \right) f^4 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) O_A^{(3)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} I_A^{(4)},\end{aligned}\quad (\text{D.33})$$

wobei

$$O_A^{(3)} = 32\pi \frac{\rho^2}{Z^6 \left[1 + \left(\frac{\rho}{Z}\right)^2\right]^4} \mathcal{P} p_\perp^2 \tau \sigma \mathcal{U} \mathcal{V}.\quad (\text{D.34})$$

Fassen wir die bis hierhin berechneten Summanden zusammen, so findet sich der Ausdruck:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \left(I_A^{(1)} + I_A^{(2)} + I_A^{(3)} + I_A^{(4)} \right) \\ &= \frac{2a^4}{\omega Z^3} \int_{p_{0,\min}}^{p_{0,\max}} dp_0 \int d\phi \sum_{n \geq n_*} \frac{f^4 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right)}{(n\omega - E_{1s} - p_0 c)^2 \left[1 + \left(\frac{\rho}{Z}\right)^2\right]^4} u_A,\end{aligned}\quad (\text{D.35})$$

mit

$$\begin{aligned}
 u_A = & \frac{\mathcal{P}}{c} \left\{ \left[J_{n+1}^2 \left(\bar{\alpha} f \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) \right) + J_{n-1}^2 \left(\bar{\alpha} f \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) \right) \right] \left[(p_0 + c) \sigma^2 \left(\frac{\rho}{Z} \right)^4 \mathcal{U}^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + (p_0 - c) \tau^2 \left(\frac{\rho}{Z} \right)^2 \mathcal{V}^2 - \frac{2}{Z} p_z \sigma \tau \left(\frac{\rho}{Z} \right)^2 (p_z - s k_z) \mathcal{U} \mathcal{V} \right] \right. \\
 & \left. + J_{n+1} \left(\bar{\alpha} f \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) \right) J_{n-1} \left(\bar{\alpha} f \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) \right) \frac{4}{Z} \left(\frac{\rho}{Z} \right)^2 p_{\perp}^2 \tau \sigma \mathcal{U} \mathcal{V} \right\}. \quad (\text{D.36})
 \end{aligned}$$

Wir wiederholen die hier gezeigte Vorgehensweise für die ähnlich aufwendigen Integrationen über die Summanden \mathcal{T}_B und \mathcal{T}_C aus Glg. (D.17). Das Ergebnis für die Paarproduktionswahrscheinlichkeit lautet somit

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} (I_A + I_B + I_C) \quad (\text{D.37}) \\
 &= \frac{2a^4}{\omega Z^3} \int_{p_{0,\min}}^{p_{0,\max}} dp_0 \int d\phi \sum_{n \geq n_*} \frac{f^4 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right)}{(n\omega - E_{1s} - p_0 c)^2 \left[1 + \left(\frac{\rho}{Z} \right)^2 \right]^4} (u_A + u_B + u_C),
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 u_B = & -2 \frac{\omega}{c^2} \left(\frac{\rho}{Z} \right)^2 \mathcal{P} n J_n^2 \left(\bar{\alpha} f \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) \right) \\
 & \times \left[\sigma^2 \left(\frac{\rho}{Z} \right)^2 \mathcal{U}^2 + \tau^2 \mathcal{V}^2 + \frac{2}{Z} \sigma \tau (p_0 + s k_z - 2 p_z) \mathcal{U} \mathcal{V} \right] \quad (\text{D.38})
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 u_C = & \frac{a^2 f^2 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right)}{c^3 (p_0 - p_z)} \mathcal{P} \left(\frac{\rho}{Z} \right)^2 \mathcal{P} J_n^2 \left(\bar{\alpha} f \left(\frac{\phi}{\Phi} \right) \right) \\
 & \times \left[\sigma^2 \left(\frac{\rho}{Z} \right)^2 \mathcal{U}^2 + \tau^2 \mathcal{V}^2 - \frac{2}{Z} \sigma \tau (p_z - s k_z) \mathcal{U} \mathcal{V} \right]. \quad (\text{D.39})
 \end{aligned}$$

Die Struktur dieser Gleichung ähnelt dem in Kapitel 4 gezeigten Ergebnis für die gebunden-freie Paarproduktionsrate in einer unendlich ausgedehnten, ebenen, zirkular polarisierten Laserwelle. Insbesondere die Terme u_A , u_B und u_C finden sich in beiden Rechnungen wieder. Der qualitativ größte Unterschied zwischen den Rechnungen ist die nun auftretende Integration über die Phase ϕ des Lasers. Derselbe qualitative Unterschied konnte auch in Kapitel 5 beim Vergleich der Breit-Wheeler-Paarproduktionsrechnung in einer unendlich ausgedehnten monochromatischen Laserwelle mit der für den Fall gezeigten LMA-Rechnung beobachtet werden.

Die lokal monochromatische Approximation lässt sich für die Ionisation ebenfalls anwenden. Unter der Annahme, dass die Laserwelle zirkular polarisiert ist, verläuft die Rechnung vollständig analog zu der bereits gezeigten für die gebunden-freie Paarproduktion und wird daher nicht näher erläutert. Die so ermittelte Ionisationswahrscheinlichkeit ähnelt stark dem aus Ref. [18] bekannten Ausdruck, mit dem Unterschied, dass hier ebenfalls zusätzlich über die Phase ϕ integriert werden muss.

E | BREIT-WHEELER-PAARPRODUKTION IN LINEAR POLARISIERTEN EBENEN LASERWELLEN

In diesem Abschnitt können wir uns an der Herleitung in Kapitel 5.1.1 orientieren, in dem für eine unendlich ausgedehnte, monochromatische Laserwelle zirkularer Polarisation die Rate bestimmt wurde. Wir beginnen mit dem S-Matrix-Element (vgl. Ref. [29, 63])

$$S_{fi} = -ie\sqrt{\frac{4\pi}{2\omega'V}} \int d^4x e^{-ik'\cdot x} \bar{\Psi}_{\mathbf{p}',s'} \not{\epsilon}' \Psi_{-\mathbf{p},s}. \quad (\text{E.1})$$

Hierbei beschreibt ω' die Energie des γ -Photons, k'^μ dessen Wellenvektor und ϵ'^μ den entsprechenden Polarisationsvektor. Das linear polarisierte Laserfeld wird zunächst durch das Viererpotential

$$A^\mu(x) = a\epsilon^\mu \cos k \cdot x \quad (\text{E.2})$$

beschrieben, wobei die Lorenz-Eichung $k \cdot A = 0$ Verwendung findet. Der entsprechende Wellenvektor der gegenläufigen Laserwelle und der orthogonale Polarisationsvektor werden durch $k^\mu = \omega(1, 0, 0, -1)$ und $\epsilon^\mu = (0, 1, 0, 0)$ gegeben.

Für den Anfangs- und Endzustand passen wir die positronischen und elektronischen Volkov-Zustände aus Glg. (2.18) und (2.16) an das Viererpotential der linear polarisierten Welle an. Für den elektronischen Zustand erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{p}',s'}(x) &= \sqrt{\frac{m}{q'_0 V}} \left(1 + \frac{e}{2k \cdot p'} \not{k} \not{A} \right) u_{\mathbf{p}',s'} \\ &\times \exp \left[-iea \frac{\epsilon \cdot p'}{k \cdot p'} \sin(k \cdot x) - i \frac{e^2 a^2}{8(k \cdot p')} \sin(2k \cdot x) - iq' \cdot x \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Dabei bezeichnet $p'^\mu = (\epsilon_{p'}, \mathbf{p}')$ den elektronischen Impuls, sowie $q'^\mu = p'^\mu + \zeta^2 m^2 / (4k \cdot p') k^\mu$ den effektiven elektronischen Impuls, welcher die Dispersionsrelation $q'^2 = m_\star^2$ erfüllt, mit der effektiven Masse $m_\star = m\sqrt{1 + \frac{1}{2}\zeta^2}$. Der entsprechende positronische Volkov-Zustand wird durch die Ersetzung p'^μ durch $-p^\mu$, mit dem positronischen Impuls \mathbf{p} erreicht, woraus sich auch der positronische effektive Impuls q^μ ableitet. Zudem wird der elektronische Spinor $u_{\mathbf{p}',s'}$ mit dem positronischen $v_{\mathbf{p},s}$ getauscht.

Einsetzen der Volkov-Zustände in Glg. (E.1) und geeignetes Zusammenfassen der Terme führt zu dem Ausdruck

$$S_{fi} = -ie\sqrt{\frac{m}{q_0 V}} \sqrt{\frac{m}{q'_0 V}} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega' V}} \int d^4x e^{i(q+q'-k')\cdot x} \bar{u}_{\mathbf{p}',s'} M v_{\mathbf{p},s} e^{i\Phi}, \quad (\text{E.4})$$

mit der bereits zusammengefassten Dirac-Matrix

$$M = \not{\epsilon}' - \frac{ea}{2(k \cdot p)} \not{\epsilon}' \not{k} \not{\epsilon} \cos(k \cdot x) + \frac{ea}{2(k \cdot p')} \not{\epsilon} \not{k} \not{\epsilon}' \cos(k \cdot x) - \frac{e^2 a^2 (\epsilon' \cdot k)}{4(k \cdot p)(k \cdot p')} \not{k} (1 + \cos(2k \cdot x)) \quad (\text{E.5})$$

und der Phase

$$\Phi = -ea \left(\frac{\epsilon \cdot p}{k \cdot p} - \frac{\epsilon \cdot p'}{k \cdot p'} \right) \sin(k \cdot x) + \left(\frac{e^2 a^2}{8(k \cdot p)} + \frac{e^2 a^2}{8(k \cdot p')} \right) \sin(2k \cdot x). \quad (\text{E.6})$$

Zur weiteren Vereinfachung der Terme verwenden wir die Definition der verallgemeinerten Besselfunktionen:

$$\tilde{J}_n(\alpha, \beta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-2m}(\alpha) J_m(\beta). \quad (\text{E.7})$$

Mit den Abkürzungen $\alpha = ea \left(\frac{\epsilon \cdot p}{k \cdot p} - \frac{\epsilon \cdot p'}{k \cdot p'} \right)$ und $\beta = - \left(\frac{e^2 a^2}{8(k \cdot p)} + \frac{e^2 a^2}{8(k \cdot p')} \right)$ lässt sich die exponentielle Abhängigkeit entsprechend darstellen:

$$\begin{aligned} e^{i\Phi} &= e^{-i\alpha \sin(k \cdot x) - i\beta \sin(2k \cdot x)} \\ &= \sum_{\ell} J_{\ell}(\alpha) e^{-i\ell(k \cdot x)} \sum_m J_m(\beta) e^{-i2m(k \cdot x)} \\ &= \sum_m \sum_{\ell} J_{\ell}(\alpha) J_m(\beta) e^{-i(\ell+2m)(k \cdot x)} \\ &= \sum_m \sum_n J_{n-2m}(\alpha) J_m(\beta) e^{-in(k \cdot x)} \\ &= \sum_n \tilde{J}_n(\alpha, \beta) e^{-in(k \cdot x)}. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Mit dieser Definition lassen sich die Relationen

$$e^{i\phi} \cos(k \cdot x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(\alpha, \beta) e^{-in\phi} \quad (\text{E.9})$$

und

$$e^{i\phi} \cos(2k \cdot x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n(\alpha, \beta) e^{-in\phi} \quad (\text{E.10})$$

finden, wobei wir die Abkürzungen

$$C_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} (\tilde{J}_{n+1}(\alpha, \beta) + \tilde{J}_{n-1}(\alpha, \beta)), \quad (\text{E.11})$$

und

$$D_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} (\tilde{J}_{n+2}(\alpha, \beta) + \tilde{J}_{n-2}(\alpha, \beta)), \quad (\text{E.12})$$

eingeführt haben. Dementsprechend kann die Matrix M über eine Summation von Matrizen

$$M_n = \left(\not{\epsilon}' - \frac{e^2 a^2 (\epsilon' \cdot k)}{4(k \cdot p)(k \cdot p')} \not{k} \right) \tilde{J}_n(\alpha, \beta) + C_n(\alpha, \beta) ea \left(\not{\epsilon} \not{k} \not{\epsilon}' - \frac{\not{\epsilon}' \not{k} \not{\epsilon}}{2k \cdot p} \right) - D_n(\alpha, \beta) \frac{e^2 a^2 (\epsilon' \cdot k)}{4(k \cdot p)(k \cdot p')} \not{k} \quad (\text{E.13})$$

ausdrückt werden. Über diese Vereinfachungen lässt sich nun die Übergangsamplitude

$$S_{fi} = -ie \sqrt{\frac{m}{q_0 V}} \sqrt{\frac{m}{q'_0 V}} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega' V}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^4x e^{i(q+q'-k'-nk)\cdot x} \bar{u}_{p',s'} M_n v_{p,s} \quad (\text{E.14})$$

darstellen. Die Summation über n stellt die Anzahl absorbiertes bzw. emittierter Photonen dar. Für die Paarproduktion ist die Absorption von mindestens einem Photon notwendig, weshalb die Summe im Folgenden bei $n = 1$ startet. Die anschließende Raum-Zeit-Integration liefert die Delta-Funktion $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q + q' - k' - nk)$. Die Produktionsrate pro γ -Photon, wird durch

$$dR(k, k') = \frac{|S_{fi}|^2}{T} V \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \quad (\text{E.15})$$

bestimmt. Wir wollen die unpolarisierte Rate bestimmen, daher mitteln wir zusätzlich über die Photonenpolarisation mithilfe von

$$\sum_{\lambda=1,2} \epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda) = -g_{\mu\nu} + \text{Eichterme} \quad (\text{E.16})$$

und summieren über die Leptonenspins s und s' mithilfe von Glg. (B.16). Die daraus resultierenden Spuren lassen sich über die Relationen in Anhang B bestimmen. Anschließendes Zusammenfassen führt zu dem Ausdruck

$$dR(k, k') = \frac{e^2 m^2}{2\pi q_0 q'_0 \omega'} \sum_{n=n_0}^{\infty} \delta^4(q + q' - k' - nk) B_n(q', q, \xi) d^3q d^3q', \quad (\text{E.17})$$

mit der Abkürzung

$$B_n(q', q, \xi) = \frac{e^2 a^2}{2m^2} \left(D_n(\alpha, \beta) \tilde{J}_n(\alpha, \beta) - 2C_n^2(\alpha, \beta) + \tilde{J}_n^2(\alpha, \beta) \right) \left(1 - \frac{(k \cdot k')^2}{2(k \cdot p)(k \cdot p')} \right) + \tilde{J}_n^2(\alpha, \beta). \quad (\text{E.18})$$

Dabei gibt n_0 die minimal notwendige Anzahl an Laserphotonen an, welche von der effektiven Masse durch

$$n_0 \geq \frac{2m_*^2}{k \cdot k'} \quad (\text{E.19})$$

abhängt und sich aus dem Argument der δ -Funktion ergibt.

Die in Glg. (E.17) gezeigte Rate ist noch sechsfach differentiell. Um hieraus die totale Rate zu erhalten, müssen die verbliebenen sechs Integrationen gelöst werden. Dazu gehen wir analog zu Kapitel 5 vor. Die dortige Auswertung hat sich auf den Fall einer komplett entgegengesetzten Kollision der Laserphotonen mit dem γ -Photon beschränkt.

F | ENERGIE- UND WINKELVERTEILUNGEN

Wir wollen in diesem Abschnitt den Einfluss des Kollisionswinkels auf die Winkel- und Energieverteilung berücksichtigen, weshalb wir die Herleitung verallgemeinern. Wir nutzen erneut die in Glg. (E.17) enthaltene δ -Funktion aus, um über \mathbf{q}' zu integrieren. Dadurch ergibt sich der Zusammenhang $\mathbf{q}' = \mathbf{k}' + n\mathbf{k} - \mathbf{q}$. Die letzte δ -Funktion lässt sich anschließend als δ -Funktion einer Funktion $g(|\mathbf{q}|)$ bzw. der Funktion $g(\cos(\vartheta_q))$ auffassen und entsprechend lösen. Für den verallgemeinerten Fall eines Schnittwinkels α_s und des dadurch definierten Wellenvektors $\mathbf{k}^t = (\omega, \omega \sin \alpha_s, 0, \omega \cos \alpha_s)$ lassen sich die Nullstellen dieser Funktionen durch

$$Q_{\pm} = \frac{(E_n^2 - \mathbf{p}_n^2)h_n(\vartheta_q, \varphi_q)}{2(E_n^2 - h_n^2(\vartheta_q, \varphi_q))} \pm \sqrt{\frac{(E_n^2 - \mathbf{p}_n^2)^2 h_n^2(\vartheta_q, \varphi_q)}{4(E_n^2 - h_n^2(\vartheta_q, \varphi_q))^2} + \frac{(E_n^2 - \mathbf{p}_n^2)^2 - 4E_n^2 m_*^2}{4(E_n^2 - h_n^2(\vartheta_q, \varphi_q))}} \quad (\text{F.1})$$

und

$$\cos(\vartheta_0) = \frac{c_n b_n - a_n(\varphi_q) \sqrt{a_n^2(\varphi_q) + b_n^2 - c_n^2}}{a_n^2(\varphi_q) + b_n^2}, \quad (\text{F.2})$$

mit

$$\begin{aligned} E_n &= \omega' + n\omega, \\ \mathbf{p}_n &= (n\omega \sin \alpha_s, 0, \omega' + n\omega \cos \alpha_s), \\ a_n(\varphi_q) &= n\omega \sin \alpha_s \cos \varphi_q, \\ b_n &= \omega' + n\omega \cos \alpha_s, \\ c_n &= (n\omega \omega' (\cos \alpha_s - 1) + E_n \varepsilon_{q'}) / |\mathbf{q}'|, \\ h_n(\vartheta_q, \varphi_q) &= n\omega \sin \alpha_s \sin \vartheta_q \cos \varphi_q + \omega' \cos \vartheta_q + n\omega \cos \alpha_s \cos \vartheta_q \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

angeben. Die Relation für $\cos(\vartheta_0)$ wird über die Gleichung

$$a_n(\varphi_q) \sin \vartheta_q + b_n \cos \vartheta_q = c_n \quad (\text{F.4})$$

gewonnen. Generell ergeben sich hieraus zwei Möglichkeiten für $\cos(\vartheta_0)$, wobei in dem in Kapitel 6 betrachteten Parameterregime nur eine Nullstelle die Gleichung für $\vartheta_q \in [0, \pi]$ löst.

Die verbleibenden Integrale können auf dieselbe Weise wie in Kapitel 5 berechnet werden woraus sich die differentiellen Raten

$$\frac{dR}{d \cos(\vartheta_q)} = \sum_{i=\pm} \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi_q Q_i^2(\vartheta_q, \varphi_q) \frac{e^2 m^2}{2\pi q_0 q'_0 \omega'} \times \frac{B_n(q', q, \xi)|_{|q|=Q_i(\vartheta_q, \varphi_q)}}{\left| \frac{Q_i(\vartheta_q, \varphi_q)}{\sqrt{Q_i(\vartheta_q, \varphi_q)^2 + m_*^2}} + \frac{Q_i(\vartheta_q, \varphi_q) h_n(\vartheta_q, \varphi_q)}{\sqrt{p_n^2 + Q_i(\vartheta_q, \varphi_q)^2 - 2Q_i(\vartheta_q, \varphi_q) h_n(\vartheta_q, \varphi_q) + m_*^2}} \right|} \quad (\text{F.5})$$

im Bezug auf den Polarwinkel ϑ_q und

$$\frac{dR}{d\varepsilon_q} = \frac{e^2 m^2}{2\pi \omega'} \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi_q \frac{\sin \vartheta_0 B_n(q', q, \xi)|_{\cos \vartheta_q = \cos \vartheta_0}}{\omega' \sin \vartheta_0 + n\omega \cos \alpha_s \sin \vartheta_0 - n\omega \sin \alpha_s \cos \varphi_q \cos \vartheta_0} \quad (\text{F.6})$$

für das Energiespektrum des auslaufenden Positrons bestimmen lassen. Für den Fall, dass der Kollisionswinkel $\alpha_s = \pi$ beträgt, sodass Laserphotonen und γ -Photon frontal zusammenstoßen, gelangen wir zu den bekannten Ergebnissen aus Glg. (5.22) und (5.23).

Aus den Nullstellen der Glg. (F.1) und (F.2) lassen sich Rahmenbedingungen für die Winkel und Energien des Positrons bestimmen. Da das Argument einer Wurzel positiv sein sollte und $|\cos(\vartheta_0)| \leq 1$ gilt, ergeben sich ein maximaler Winkel von

$$\vartheta_{\max} = 2 \arctan \left(\frac{a_n(\varphi) - \sqrt{a_n^2(\varphi) + b_n^2 - d_n^2}}{d_n + b_n} \right) \quad (\text{F.7})$$

mit $d_n = \sqrt{E_n^2 - (E_n^2 - p_n^2)^2 / (4m_*^2)}$ sowie die minimale und maximale Energie

$$E_{\min} = \frac{n\omega\omega'(1 - \cos \alpha_s)E_n}{E_n^2 - a_n^2(\varphi_q) - b_n^2} - \Omega_n \leq \varepsilon_q \leq \frac{n\omega\omega'(1 + \cos \alpha_s)E_n}{E_n^2 - a_n^2(\varphi_q) - b_n^2} + \Omega_n = E_{\max}, \quad (\text{F.8})$$

mit

$$\Omega_n = \frac{\sqrt{(a_n^2 + b_n^2 - E_n^2)(a_n^2 + b_n^2)m_*^2 + (a_n^2 + b_n^2)n^2\omega^2\omega'^2(\cos \alpha_s - 1)^2}}{E_n^2 - a_n^2 - b_n^2}. \quad (\text{F.9})$$

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] T. H. Maiman, "Stimulated optical radiation in ruby," *Nature* **187**, 493 (1960).
- [2] A. Einstein, "Strahlungsemission und Absorption nach der Quantentheorie," *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* **18**, 318 (1916).
- [3] A. Di Piazza, C. Müller, K. Z. Hatsagortsyan, and C. H. Keitel, "Extremely high-intensity laser interactions with fundamental quantum systems," *Reviews of Modern Physics* **84**, 1177 (2012).
- [4] G. S. Voronov and N. B. Delone, "Many-photon ionization of the Xenon atom by ruby laser radiation," *Soviet Physics JETP* **23**, 54 (1966).
- [5] P. Agostini, F. Fabre, G. Mainfray, G. Petite, and N. K. Rahman, "Free-Free Transitions Following Six-Photon Ionization of Xenon Atoms," *Physical Review Letters* **42**, 1127 (1979).
- [6] T. Tajima and J. M. Dawson, "Laser electron accelerator," *Physical Review Letters* **43**, 267 (1979).
- [7] J. Faure, Y. Glinec, A. Pukhov, S. Kiselev, S. Gordienko, E. Lefebvre, J.-P. Rousseau, F. Burgy, and V. Malka, "A laser-plasma accelerator producing monoenergetic electron beams," *Nature* **431**, 541 (2004).
- [8] A. Pukhov and J. Meyer-ter-Vehn, "Laser wake field acceleration: the highly non-linear broken-wave regime," *Applied Physics B: Lasers and Optics* **74**, 355 (2002).
- [9] D. Strickland and G. Mourou, "Compression of amplified chirped optical pulses," *Optics Communications* **55**, 447 (1985).
- [10] F. Krausz and M. Ivanov, "Attosecond physics," *Reviews of Modern Physics* **81**, 163 (2009).
- [11] A. Deng, Y. Li, Y. Weng, Z. Luo, X. Yu, and J. Zeng, "Simulation study on attosecond inverse compton scattering source from laser wakefield acceleration with near-threshold ionization injection," *Applied Sciences* **14**, 7749 (2024).
- [12] J. W. Yoon, Y. G. Kim, I. W. Choi, J. H. Sung, H. W. Lee, S. K. Lee, and C. H. Nam, "Realization of laser intensity over 10^{23} W/cm²," *Optica* **8**, 630 (2021).
- [13] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie* (Akademie-Verlag, Berlin, 1992).
- [14] F. Sauter, "Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs," *Zeitschrift für Physik* **69**, 742 (1931).

- [15] P. Dirac, "*The quantum theory of the electron*," Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character **117**, 610 (1928).
- [16] J. Schwinger, "*On gauge invariance and vacuum polarization*," Physical Review **82**, 664 (1951).
- [17] H. A. Bethe and W. Heitler, "*On the stopping of fast particles and on the creation of positive electrons*," Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character **146**, 83 (1934).
- [18] H. R. Reiss, "*Absorption of light by light*," Journal of Mathematical Physics **3**, 59 (1962).
- [19] M. H. Mittleman, "*Multiphoton pair creation*," Physical Review A **35**, 4624 (1987).
- [20] V. P. Yakovlev, "*Electron-positron pair formation by a strong electromagnetic wave in the field of a nucleus*," Zh. Eksp. Teor. Fiz. **49**, 318 (1965).
- [21] C. Müller, "*Nichtlineare Paarerzeugung im Stoß eines relativistischen Kerns mit einem intensiven Laserstrahl*", Ph.D. thesis, Justus-Liebig-Universität Gießen (2003).
- [22] E. Fermi and G. E. Uhlenbeck, "*On the recombination of electrons and positrons*," Physical Review **44**, 510 (1933).
- [23] C. A. Bertulani and G. Baur, "*Electromagnetic processes in relativistic heavy ion collisions*," Physics Reports **163**, 299 (1988).
- [24] V. I. Matveev, E. S. Gusarevich, and I. N. Pashev, "*Inelastic processes in the interaction of an atom with an ultrashort electromagnetic pulse*," Journal of Experimental and Theoretical Physics **100**, 1043 (2005).
- [25] C. Müller, A. B. Voitkiv, and N. Grün, "*Nonlinear Bound-Free Pair Creation in the Strong Electromagnetic Fields of a Heavy Nucleus and an Intense X-Ray Laser*," Physical Review Letters **91**, 223601 (2003).
- [26] P. A. M. Dirac, "*A theory of electrons and protons*," Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character **126**, 360 (1930).
- [27] G. Breit and J. A. Wheeler, "*Collision of two light quanta*," Physical Review **46**, 1087 (1934).
- [28] A. I. Nikishov and V. I. Ritus, "*Quantum processes in the field of a plane electromagnetic wave and in constant field I.*" Sov. Phys. JETP **19**, 529 (1964).
- [29] V. I. Ritus, "*Quantum effects of the interaction of elementary particles with an intense electromagnetic field*," Journal of Soviet Laser Research **6**, 497 (1985).
- [30] A. I. Nikishov and V. I. Ritus, "*Pair production by a photon and photon emission by an electron in the field of an intense electromagnetic wave and in a constant field*," Sov. Phys. JETP **25**, 1135 (1967).
- [31] A. I. Titov and B. Kämpfer, "*Non-linear Breit–Wheeler process with linearly polarized beams*," The European Physical Journal D **74**, 218 (2020).

- [32] F. Wan, Y. Wang, R.-T. Guo, Y.-Y. Chen, R. Shaisultanov, Z.-F. Xu, K. Z. Hatsagortsyan, C. H. Keitel, and J.-X. Li, “High-energy γ -photon polarization in nonlinear Breit-Wheeler pair production and γ polarimetry,” *Physical Review Research* **2**, 032049 (2020).
- [33] D. Seipt and B. King, “Spin- and polarization-dependent locally-constant-field-approximation rates for nonlinear Compton and Breit-Wheeler processes,” *Physical Review A* **102**, 052805 (2020).
- [34] Y. Lu, N. Christensen, Q. Su, and R. Grobe, “Space-time-resolved Breit-Wheeler process for a model system,” *Physical Review A* **101**, 022503 (2020).
- [35] N. Mahlin, S. Villalba-Chávez, and C. Müller, “Dynamically assisted nonlinear Breit-Wheeler pair production in bichromatic laser fields of circular polarization,” *Physical Review D* **108**, 096023 (2023).
- [36] A. J. MacLeod, P. Hadjisolomou, T. M. Jeong, and S. V. Bulanov, “All-optical nonlinear Breit-Wheeler pair production with γ -flash photons,” *Physical Review A* **107**, 012215 (2023).
- [37] A. I. Nikishov, “Problems of intense external-field intensity in quantum electrodynamics,” *Journal of Soviet Laser Research* **6**, 619 (1985).
- [38] H. R. Reiss, “Production of electron pairs from a zero-mass state,” *Physical Review Letters* **26**, 1072 (1971).
- [39] C. Bamber, S. J. Boege, T. Koffas, T. Kotseroglou, A. C. Melissinos, D. D. Meyerhofer, D. A. Reis, W. Ragg, C. Bula, K. T. McDonald, *et al.*, “Studies of nonlinear QED in collisions of 46.6 GeV electrons with intense laser pulses,” *Physical Review D* **60**, 092004 (1999).
- [40] D. L. Burke, R. C. Field, G. Horton-Smith, J. E. Spencer, D. Walz, S. C. Berridge, W. M. Bugg, K. Shmakov, A. W. Weidemann, C. Bula, *et al.*, “Positron production in multiphoton light-by-light scattering,” *Physical Review Letters* **79**, 1626 (1997).
- [41] O. J. Pike, F. Mackenroth, E. G. Hill, and S. J. Rose, “A photon–photon collider in a vacuum hohlraum,” *Nature Photonics* **8**, 434 (2014).
- [42] B. Kettle, D. Hollatz, E. Gerstmayr, G. M. Samarin, A. Alejo, S. Astbury, C. Baird, S. Bohlen, M. Campbell, C. Colgan, *et al.*, “A laser–plasma platform for photon–photon physics: the two photon Breit–Wheeler process,” *New Journal of Physics* **23**, 115006 (2021).
- [43] F. C. Salgado, K. Grafenstein, A. Golub, A. Döpp, A. Eckey, D. Hollatz, C. Müller, A. Seidel, D. Seipt, S. Karsch, and M. Zepf, “Towards pair production in the non-perturbative regime,” *New Journal of Physics* **23**, 105002 (2021).
- [44] H. Abramowicz, U. Acosta, M. Altarelli, R. Aßmann, Z. Bai, T. Behnke, Y. Benhammou, T. Blackburn, S. Boogert, O. Borysov, *et al.*, “Conceptual design report for the LUXE experiment,” *The European Physical Journal Special Topics* **230**, 2445 (2021).
- [45] H. Abramowicz, M. Altarelli, R. Aßmann, T. Behnke, Y. Benhammou, O. Borysov, M. Borysova, R. Brinkmann, F. Burkart, K. Büßer, *et al.*, “Letter of intent for the LUXE experiment,” arXiv:1909.00860 (2019).

- [46] A. Fedotov, A. Ilderton, F. Karbstein, B. King, D. Seipt, H. Taya, and G. Torgrimsson, “*Advances in QED with intense background fields*,” *Physics Reports* **1010**, 1 (2023).
- [47] A. Golub, S. Villalba-Chávez, and C. Müller, “*Nonlinear Breit-Wheeler pair production in collisions of bremsstrahlung γ quanta and a tightly focused laser pulse*,” *Physical Review D* **105**, 116016 (2022).
- [48] A. Di Piazza, “*Nonlinear Breit-Wheeler pair production in a tightly focused laser beam*,” *Physical Review Letters* **117**, 213201 (2016).
- [49] T. G. Blackburn and M. Marklund, “*Nonlinear Breit–Wheeler pair creation with bremsstrahlung γ -rays*,” *Plasma Physics and Controlled Fusion* **60**, 054009 (2018).
- [50] A. Mercuri-Baron, M. Grech, F. Niel, A. Grassi, M. Lobet, A. Di Piazza, and C. Riconda, “*Impact of the laser spatio-temporal shape on Breit–Wheeler pair production*,” *New Journal of Physics* **23**, 085006 (2021).
- [51] A. I. Titov, H. Takabe, B. Kämpfer, and A. Hosaka, “*Enhanced subthreshold e^+e^- production in short laser pulses*,” *Physical Review Letters* **108**, 240406 (2012).
- [52] A. I. Nikishov and V. I. Ritus, “*Ionization of systems bound by short-range forces by the field of an electromagnetic wave*,” *Sov. Phys. JETP* **23**, 168 (1966).
- [53] A. I. Nikishov and V. I. Ritus, “*Ionization of atoms by an electromagnetic-wave field*,” *Sov. Phys. JETP* **25**, 145 (1967).
- [54] H. R. Reiss, “*Relativistic strong-field photoionization*,” *Journal of the Optical Society of America B* **7**, 574 (1990).
- [55] V. D. Mur, B. M. Karnakov, and V. S. Popov, “*Relativistic version of the imaginary-time formalism*,” *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **87**, 433 (1998).
- [56] N. Milosevic, V. P. Krainov, and T. Brabec, “*Semiclassical dirac theory of tunnel ionization*,” *Physical Review Letters* **89**, 193001 (2002).
- [57] A. M. Perelomov and V. S. Popov, “*Ionization of atoms in an alternating electrical-field III.*” *Sov. Phys. JETP* **25**, 336 (1967).
- [58] M. Klaiber, E. Yakaboylu, and K. Z. Hatsagortsyan, “*Above-threshold ionization with highly charged ions in superstrong laser fields: II. Relativistic Coulomb-corrected strong-field approximation*,” *Physical Review A* **87**, 023418 (2013).
- [59] T. Heinzl, B. King, and A. J. MacLeod, “*Locally monochromatic approximation to QED in intense laser fields*,” *Physical Review A* **102**, 063110 (2020).
- [60] A. Di Piazza, “*Ultrarelativistic electron states in a general background electromagnetic field*,” *Physical Review Letters* **113**, 040402 (2014).
- [61] A. Di Piazza, “*Analytical tools for investigating strong-field QED processes in tightly focused laser fields*,” *Physical Review A* **91**, 042118 (2015).
- [62] A. Di Piazza, “*Wkb electron wave functions in a tightly focused laser beam*,” *Physical Review D* **103**, 076011 (2021).

- [63] W. Greiner and J. Reinhardt, *“Quantum Electrodynamics”* (Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2009).
- [64] D. Bauer, D. B. Milošević, and W. Becker, *“Strong-field approximation for intense-laser-atom processes: The choice of gauge,”* *Physical Review A* **72**, 023415 (2005).
- [65] H. R. Reiss, *“Theoretical methods in quantum optics: S-matrix and Keldysh techniques for strong-field processes,”* *Progress in Quantum Electronics* **16**, 1 (1992).
- [66] C. J. Joachain and N. J. Kylstra, *“Relativistic effects in the multiphoton ionization of hydrogenlike ions by ultrashort infrared laser pulses,”* *Physical Review A* **100**, 013417 (2019).
- [67] G. Wentzel, *“Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik,”* *Zeitschrift für Physik* **38**, 518 (1926).
- [68] H. A. Kramers, *“Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung,”* *Zeitschrift für Physik* **39**, 828 (1926).
- [69] L. Brillouin, *“La mécanique ondulatoire de Schrödinger; une méthode générale de résolution par approximations successives,”* *Compt. Rend. Hebd. Seances Acad. Sci.* **183**, 24 (1926).
- [70] J. Oertel, *“Pair production in spacetime-dependent fields using WKB-like techniques”*, Ph.D. thesis, Universität Duisburg-Essen (2020).
- [71] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *“Quantenmechanik”* (Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2012).
- [72] C. M. Bender and S. A. Orszag, *“Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I”* (Springer, New York, 1999).
- [73] L. C. Evans, *“Partial differential equations”* (American Mathematical Society, Rhode Island, 1999).
- [74] J. Eichler and W. E. Meyerhof, *“Relativistic atomic collisions”* (Academic Press, San Diego, 1995).
- [75] C. I. Moore, A. Ting, S. J. McNaught, J. Qiu, H. R. Burris, and P. Sprangle, *“A Laser-Accelerator Injector Based on Laser Ionization and Ponderomotive Acceleration of Electrons,”* *Physical Review Letters* **82**, 1688 (1999).
- [76] K. Yamakawa, Y. Akahane, Y. Fukuda, M. Aoyama, N. Inoue, and H. Ueda, *“Ionization of many-electron atoms by ultrafast laser pulses with peak intensities greater than 10^{19} W/cm²,”* *Physical Review A* **68**, 065403 (2003).
- [77] A. D. DiChiara, I. Ghebregziabher, R. Sauer, J. Waesche, S. Palaniyappan, B. L. Wen, and B. C. Walker, *“Relativistic MeV Photoelectrons from the Single Atom Response of Argon to a 10^{19} W/cm² Laser Field,”* *Physical Review Letters* **101**, 173002 (2008).
- [78] A. D. DiChiara, I. Ghebregziabher, J. M. Waesche, T. Stanev, N. Ekanayake, L. R. Barclay, S. J. Wells, A. Watts, M. Videtto, C. A. Mancuso, and B. C. Walker, *“Photoionization by an ultraintense laser field: Response of atomic xenon,”* *Physical Review A* **81**, 043417 (2010).

- [79] L. Keldysh, "Ionization in the field of a strong electromagnetic wave," *Sov. Phys. JETP* **20**, 5 (1965).
- [80] H. R. Reiss, "Complete Keldysh theory and its limiting cases," *Physical Review A* **42**, 1476 (1990).
- [81] V. Popov, V. Mur, and B. Karnakov, "Relativistic version of the imaginary time method," *Physics Letters A* **250**, 20 (1998).
- [82] V. S. Popov, B. M. Karnakov, V. D. Mur, and S. G. Pozdnyakov, "Relativistic theory of tunnel and multiphoton ionization of atoms in a strong laser field," *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **102**, 760 (2006).
- [83] A. Eckey, M. Klaiber, A. B. Voitkiv, and C. Müller, "Relativistic strong-field ionization of hydrogenlike atomic systems in constant crossed electromagnetic fields," *Physical Review A* **107**, 033113 (2023).
- [84] M. Klaiber, E. Yakaboylu, H. Bauke, K. Z. Hatsagortsyan, and C. H. Keitel, "Under-the-barrier dynamics in laser-induced relativistic tunneling," *Physical Review Letters* **110**, 153004 (2013).
- [85] V. S. Popov, "Imaginary-time method in quantum mechanics and field theory," *Physics of Atomic Nuclei* **68**, 686 (2005).
- [86] G. F. Gribakin and M. Y. Kuchiev, "Multiphoton detachment of electrons from negative ions," *Physical Review A* **55**, 3760 (1997).
- [87] N. Milosevic, V. P. Krainov, and T. Brabec, "Relativistic theory of tunnel ionization," *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **35**, 3515 (2002).
- [88] J. Z. Kamiński, F. Cajiao Vélez, and K. Krajewska, "Coulomb-corrected strong field approximation without singularities and branching points," *Journal of Physics: Conference Series* **1206**, 012004 (2019).
- [89] M. Klaiber, K. Z. Hatsagortsyan, and C. H. Keitel, "Tunneling dynamics in multiphoton ionization and attoclock calibration," *Physical Review Letters* **114**, 083001 (2015).
- [90] J. Zhang and T. Nakajima, "Influence of coulomb potential for photoionization of H atoms in an elliptically polarized laser field: Velocity gauge versus length gauge," *Physical Review A* **77**, 043417 (2008).
- [91] T. K. Kjeldsen and L. B. Madsen, "Strong-field ionization of N₂: length and velocity gauge strong-field approximation and tunnelling theory," *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **37**, 2033 (2004).
- [92] I. A. Ivanov and Y. K. Ho, "Complex rotation method for the Dirac Hamiltonian," *Physical Review A* **69**, 023407 (2004).
- [93] I. A. Maltsev, D. A. Tumakov, R. V. Popov, and V. M. Shabaev, "Calculations of relativistic stark energies and widths in hydrogen-like ions using the complex-scaling method," *Optics and Spectroscopy* **131**, 226 (2023).
- [94] A. Scrinzi, M. Geissler, and T. Brabec, "Ionization above the Coulomb Barrier," *Physical Review Letters* **83**, 706 (1999).

- [95] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *“Handbook of mathematical functions”* (Martino Publishing, Mansfield Centre, 2014).
- [96] N. B. Narozhnyi and A. I. Nikishov, *“Electron-positron pair production by a Coulomb center located in a constant field,”* Sov.Phys. JETP **36**, 598 (1973).
- [97] A. I. Milstein, C. Müller, K. Z. Hatsagortsyan, U. D. Jentschura, and C. H. Keitel, *“Polarization-operator approach to electron-positron pair production in combined laser and Coulomb fields,”* Physical Review A **73**, 062106 (2006).
- [98] T. Heinzl, A. Ilderton, and M. Marklund, *“Finite size effects in stimulated laser pair production,”* Physics Letters B **692**, 250 (2010).
- [99] K. Krajewska and J. Z. Kamiński, *“Breit-Wheeler process in intense short laser pulses,”* Physical Review A **86**, 052104 (2012).
- [100] S. Meuren, K. Z. Hatsagortsyan, C. H. Keitel, and A. Di Piazza, *“Polarization-operator approach to pair creation in short laser pulses,”* Physical Review D **91**, 013009 (2015).
- [101] M. Jansen and C. Müller, *“Strong-field Breit-Wheeler pair production in short laser pulses: Identifying multiphoton interference and carrier-envelope-phase effects,”* Physical Review D **93**, 053011 (2016).
- [102] M. Jansen, J. Kamiński, K. Krajewska, and C. Müller, *“Strong-field Breit-Wheeler pair production in short laser pulses: Relevance of spin effects,”* Physical Review D **94**, 013010 (2016).
- [103] A. Titov, H. Takabe, and B. Kämpfer, *“Nonlinear Breit-Wheeler process in short laser double pulses,”* Physical Review D **98**, 036022 (2018).
- [104] Q. Z. Lv, S. Dong, Y. T. Li, Z. M. Sheng, Q. Su, and R. Grobe, *“Role of the spatial inhomogeneity on the laser-induced vacuum decay,”* Physical Review A **97**, 022515 (2018).
- [105] A. Eckey, A. B. Voitkiv, and C. Müller, *“Strong-field Breit-Wheeler pair production with bremsstrahlung γ rays in the perturbative-to-nonperturbative-transition regime,”* Physical Review A **105**, 013105 (2022).
- [106] S. P. Roshchupkin, A. A. Lebed', and E. A. Padusenko, *“Nonresonant quantum electrodynamics processes in a pulsed laser field,”* Laser Physics **22**, 1513 (2012).
- [107] C. Harvey, T. Heinzl, A. Ilderton, and M. Marklund, *“Intensity-dependent electron mass shift in a laser field: Existence, universality, and detection,”* Physical Review Letters **109**, 100402 (2012).
- [108] A. Golub, S. Villalba-Chávez, H. Ruhl, and C. Müller, *“Linear Breit-Wheeler pair production by high-energy bremsstrahlung photons colliding with an intense x-ray laser pulse,”* Physical Review D **103**, 016009 (2021).
- [109] E. Depero, D. Banerjee, V. Burtsev, A. Chumakov, D. Cooke, A. Dermenev, S. Donskov, F. Dubinin, R. Dusaev, S. Emmenegger, et al., *“High purity 100 GeV electron identification with synchrotron radiation,”* Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment **866**, 196 (2017).

- [110] D. Banerjee, V. Burtsev, D. Cooke, P. Crivelli, E. Depero, A. V. Dermenev, S. V. Donskov, F. Dubinin, R. R. Dusaev, S. Emmenegger, *et al.*, “Search for Invisible Decays of Sub-GeV Dark Photons in Missing-Energy Events at the CERN SPS,” *Physical Review Letters* **118**, 011802 (2017).
- [111] C. Keitel, A. Piazza, G. Paulus, T. Stöhlker, E. Clark, S. Mangles, Z. Najmudin, K. Krushelnick, J. Schreiber, M. Borghesi, *et al.*, “Photo-induced pair production and strong field QED on Gemini,” arxiv:2103.06059 (2021).
- [112] C. Rödel, D. an der Brügge, J. Bierbach, M. Yeung, T. Hahn, B. Dromey, S. Herzer, S. Fuchs, A. G. Pour, E. Eckner, *et al.*, “Harmonic generation from relativistic plasma surfaces in ultra-steep plasma density gradients,” *Physical Review Letters* **109**, 125002 (2012).
- [113] Z.-Y. Chen and A. Pukhov, “Bright high-order harmonic generation with controllable polarization from a relativistic plasma mirror,” *Nature Communications* **7**, 12515 (2016).
- [114] C. Müller, K. Z. Hatsagortsyan, M. Ruf, S. J. Müller, H. G. Hetzheim, M. C. Kohler, and C. H. Keitel, “Relativistic nonperturbative above-threshold phenomena in strong laser fields,” *Laser Physics* **19**, 1743 (2009).
- [115] C. Kohlfürst, H. Gies, and R. Alkofer, “Effective mass signatures in multiphoton pair production,” *Physical Review Letters* **112**, 050402 (2014).
- [116] T. Heinzl, D. Seipt, and B. Kämpfer, “Beam-shape effects in nonlinear Compton and Thomson scattering,” *Physical Review A* **81**, 022125 (2010).
- [117] C. Harvey, T. Heinzl, and A. Ilderton, “Signatures of high-intensity Compton scattering,” *Physical Review A* **79**, 063407 (2009).
- [118] A. Titov, B. Kämpfer, A. Hosaka, and H. Takabe, “Quantum processes in short and intensive electromagnetic fields,” *Physics of Particles and Nuclei* **47**, 456 (2016).
- [119] K. Krajewska, J. Z. Kamiński, and C. Müller, “Pulse shape effects in high-field Bethe-Heitler pair production,” *New Journal of Physics* **23**, 095012 (2021).
- [120] E. Turcu, F. Negoita, D. Jaroszynski, P. McKenna, S. Balascuta, D. Ursescu, I. Dancus, M. Cernaianu, M. Tataru, P. Ghenuche, *et al.*, “High field physics and QED experiments at ELI-NP,” *Romanian Reports in Physics* **68**, 145 (2016).
- [121] S. Meuren, “E-320 collaboration at FACET-II”, <https://facet.slac.stanford.edu>, accessed: 08.12.24.
- [122] A. Hartin, A. Ringwald, and N. Tapia, “Measuring the boiling point of the vacuum of quantum electrodynamics,” *Physical Review D* **99**, 036008 (2019).
- [123] A. Gonoskov, T. Blackburn, M. Marklund, and S. Bulanov, “Charged particle motion and radiation in strong electromagnetic fields,” *Reviews of Modern Physics* **94**, 045001 (2022).
- [124] J. Koga, T. Z. Esirkepov, and S. V. Bulanov, “Nonlinear Thomson scattering in the strong radiation damping regime,” *Physics of Plasmas* **12**, 093106 (2005).

- [125] G. Lehmann and K. H. Spatschek, “Energy gain of an electron by a laser pulse in the presence of radiation reaction,” *Physical Review E* **84**, 046409 (2011).
- [126] A. M. Fedotov, N. V. Elkina, E. G. Gelfer, N. B. Narozhny, and H. Ruhl, “Radiation friction versus ponderomotive effect,” *Physical Review A* **90**, 053847 (2014).
- [127] A. Di Piazza and G. Audagnotto, “Analytical spectrum of nonlinear Thomson scattering including radiation reaction,” *Physical Review D* **104**, 016007 (2021).
- [128] A. Hosak and A. Di Piazza, “Approximated analytical solution of the Landau–Lifshitz equation in tightly focused laser beams in the ultrarelativistic limit,” *The European Physical Journal D* **76**, 200 (2022).
- [129] K. Poder, M. Tamburini, G. Sarri, A. Di Piazza, S. Kuschel, C. D. Baird, K. Behm, S. Bohlen, J. M. Cole, D. J. Corvan, *et al.*, “Experimental signatures of the quantum nature of radiation reaction in the field of an ultraintense laser,” *Physical Review X* **8**, 031004 (2018).
- [130] A. Di Piazza, “Exact solution of the Landau-Lifshitz Equation in a Plane Wave,” *Letters in Mathematical Physics* **83**, 305 (2008).
- [131] N. Neitz and A. Di Piazza, “Stochasticity effects in quantum radiation reaction,” *Physical Review Letters* **111**, 054802 (2013).
- [132] A. Eckey, A. Golub, F. C. Salgado, S. Villalba-Chávez, A. B. Voitkiv, M. Zepf, and C. Müller, “Impact of laser focussing and radiation reaction on particle spectra from nonlinear Breit-Wheeler pair production in the nonperturbative regime,” *Phys. Rev. A* **110**, 043113 (2024).
- [133] Y. Salamin, “Fields of a Gaussian beam beyond the paraxial approximation,” *Applied Physics B* **86**, 319 (2006).
- [134] “NIST Digital Library of Mathematical Functions”, <https://dlmf.nist.gov/>, accessed: 08.12.24.
- [135] Y.-S. Tsai, “Pair production and bremsstrahlung of charged leptons,” *Reviews of Modern Physics* **46**, 815 (1974).
- [136] P. A. Zyla, R. M. Barnett, J. Beringer, O. Dahl, D. A. Dwyer, D. E. Groom, C. J. Lin, K. S. Lugovsky, E. Pianori, D. J. Robinson, *et al.*, “Review of Particle Physics,” *Progress of Theoretical and Experimental Physics* **2020**, 083C01 (2020).
- [137] V. N. Baier, V. M. Katkov, and V. M. Strakhovenko, *Electromagnetic Processes at High Energies in Oriented Single Crystals* (World Scientific, 1998).
- [138] Y.-F. Li, Y.-T. Zhao, K. Z. Hatsagortsyan, C. H. Keitel, and J.-X. Li, “Electron-angular-distribution reshaping in the quantum radiation-dominated regime,” *Physical Review A* **98**, 052120 (2018).
- [139] J. Derouillat, A. Beck, F. Pérez, T. Vinci, M. Chiaramello, A. Grassi, M. Flé, G. Bouchard, I. Plotnikov, N. Aunai, *et al.*, “SMILEI: A collaborative, open-source, multi-purpose particle-in-cell code for plasma simulation,” **222**, 351 (2018).

- [140] T. G. Blackburn, A. Ilderton, C. D. Murphy, and M. Marklund, “*Scaling laws for positron production in laser–electron-beam collisions,*” *Physical Review A* **96**, 022128 (2017).
- [141] C. Baumann, E. N. Nerush, A. Pukhov, and I. Y. Kostyukov, “*Probing non-perturbative QED with electron-laser collisions,*” *Scientific Reports* **9**, 9407 (2019).
- [142] I. S. Gradštejn and I. M. Ryžik, “*Summen-, Produkt- und Integraltafeln*” (Harri Deutsch, Thun, 1981).

DANKSAGUNG

Ich möchte mich an dieser Stelle bei all denen bedanken, die meinen Weg die letzten Jahre begleitet und zum erfolgreichen Abschluss dieser Arbeit beigetragen haben. Mein herzlichster Dank richtet sich zunächst an meinen Doktorvater Prof. Dr. Dr. Carsten Müller, welcher mir immer mit Rat und Tat zur Seite stand und dessen Betreuung sich von der Bachelorarbeit bis hin zur Promotion durch Verständnis, Motivation und Unterstützung auszeichnete. Ein weiterer großer Dank gebührt meinem Zweitbetreuer Dr. habil. Alexander Voitkiv, welcher immer einen guten Ratschlag wusste. Des Weiteren möchte ich Prof. Dr. Alexander Pukhov für die Begutachtung dieser Arbeit danken. Mein aufrichtiger Dank gilt auch meinem Mentor Dr. Götz Lehmann, der stets die passenden Worte findet, um zu motivieren und am Ball zu bleiben. Zudem danke ich Dr. Michael Klaiber für die gute Zusammenarbeit und Hilfe bei meinem zweiten Projekt. Ebenfalls möchte ich Dr. Felipe Salgado für die gute gemeinsame Zeit auf Konferenzen und die Zusammenarbeit im Rahmen der DFG-Forschungsgruppe danken. Die letzten Jahre haben sich auch durch viele freudige Stunden ausgezeichnet, insbesondere durch die Zusammenarbeit und Gespräche mit meinen Kollegen Dr. Andreas Jacob, Dr. Alina Golub, Dr. Fiona Grill und Dr. Marko Filipovic, wofür ich mich herzlichst bedanke. Ebenfalls möchte ich meinen sehr guten Studienfreunden Maximilian Münzberg und Rana Walied Ahmad für die gute Zeit im Studium danken. Ein besonderer Dank geht an einen meiner liebsten Arbeitskollegen und besten Freunde Dr. Lars Reichwein, welcher mir seit Anbeginn des Studiums immer mit Rat und Tat zur Seite stand und auf den ich mich immer verlassen konnte. Überdies bin ich Elvira Gröters, Ute Birkenkamp-Pickshaus und Eugen Braun dankbar, dass sie mit ihrem täglichen Einsatz für ein reibungsloses Leben am Institut gesorgt haben.

Zuletzt möchte ich den größten Dank meinen Eltern, Schwiegereltern, Geschwistern, meinem Mann Marcel Hackmann-Eckey, meiner besten Freundin Hannah Steigerwald sowie meinen guten Freunden Markus Steigerwald, Abbas Karout, Holger Gomille und Patricia Voß aussprechen, die mich während all der Jahre des Studiums und der Promotion immer bedingungslos unterstützt haben.

EIDESSTATTLICHE VERSICHERUNG

Ich versichere an Eides Statt, dass die Dissertation von mir selbständig und ohne unzulässige fremde Hilfe unter Beachtung der „Grundsätze zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf“ erstellt worden ist. Ich habe keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen genutzt; wörtliche oder sinngemäße Inhalte anderer Werke oder Quellen sind als solche kenntlich gemacht. Weiterhin erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit zuvor weder von mir, noch - soweit mir bekannt - von anderen Personen an dieser oder an einer anderen Hochschule eingereicht wurde und ich bisher weder erfolglose noch erfolgreiche Promotionsversuche unternommen habe. Darüber hinaus ist mir bekannt, dass jeder Betrugsversuch zum Nichtbestehen oder zur Aberkennung der Prüfungsleistung führen kann.

Düsseldorf, der 07.01.2025
