

Quantitative Evaluation spatialer 2D-Phase-Unwrapping-Algorithmen

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Bachelor of Science (B.Sc.) im Studiengang Medizinische Physik
an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Robby Hesse

26. Juli 2020

Erstgutachter:

Univ.-Prof. Dr. Hans-Jörg Wittsack
Institut für Diagnostische und
Interventionelle Radiologie
Universitätsklinikum Düsseldorf

Zweitgutachter:

Univ.-Prof. Dr. Thomas Heinzel
Lehrstuhl für Festkörperphysik
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Abstract[†]

In magnetic resonance imaging (MRI), phase images can be generated that provide information about the magnetizability (susceptibility) of matter. In quantitative susceptibility mapping (QSM), these are used to visualize, among other things, iron deposits in the brain, allowing conclusions to be drawn about the course of neurodegenerative diseases. The phase cannot be measured directly, it is part of the complex-valued MR signal and gets folded into the range $(-\pi, \pi]$ during separation from it. This results in phase jumps, which manifest themselves in the images as characteristic lines. To unwrap these wrapped phase images for clinical use, special mathematical algorithms are needed.

Due to the complexity of MR images and the containing noise, the so-called phase unwrapping is a non-trivial task that is performed by algorithms with varying degrees of accuracy. In this work, MATLAB implementations of [3 global least-squares algorithms](#) (LS-CPULSI, LS-PCG, and LS-Unweighted) and [3 local path-following algorithms](#) (PF-Goldstein, PF-QualityMap, and PF-SRNCP) were compared using 3 different data sets of varying complexity. These include a simple 2D circular geometry with an increasing phase gradient, a simulated fat/water test specimen in air, and a simplified reconstruction of a real coronal MRI of the kidneys. Because the original, unwrapped phase image is known for the [3 simulated data sets](#), unlike in real MRI images, the root-mean-square error (RMSE) between the algorithm results and the unwrapped original phase, as well as the required runtime of the algorithms, could be evaluated for a statistically significant number of examinations. A total of 24 660 unwrap operations were performed in [51 trials](#) with variable signal-to-noise ratio (SNR) and variable phase wrappings (by adjusting the echo time TE). 41 of these trials were repeated in 100 iterations, each with the trial parameters unchanged to minimize the influences of random noise.

It was found that for SNR greater than 20 dB, the noise hardly affects the unwrapped results on average. Rather, they are determined by the structures and tissue edges in the image, which lead to extreme phase jumps. In addition, with a larger echo time TE during data generation, the convolution of the phase and thus the mean error in the unwrapped phase images increases linearly. With the exception of the LS-PCG algorithm, the results of the global algorithms had the largest deviations from the original phase and also the largest variations within iterations of a single study. However, the global algorithms were significantly faster than the local ones. The most stable and noise-insensitive results, especially for long echo times, were obtained by the local algorithm PF-QualityMap and the global [algorithm LS-PCG](#). The latter is to be preferred to the other investigated algorithms due to its 2 orders of magnitude faster execution time for unwrapping 2D MR phase images.

[†]This translated abstract was inserted on 5th June 2022 for publication, after the thesis was already submitted.

Zusammenfassung

In der Magnetresonanz-Tomografie (MR-Tomografie, MRT) können Phasenbilder generiert werden, welche Aufschlüsse über die Magnetisierbarkeit (Suszeptibilität) von Materie geben. Mit Hilfe der quantitativen Suszeptibilitätskartierung (QSM) werden diese zur Darstellung u.a. von Eisenablagerungen im Gehirn verwendet, wodurch Rückschlüsse auf den Verlauf von neurodegenerativen Erkrankungen gezogen werden können. Die Phase ist nicht direkt einzeln messbar. Sie ist Teil des komplexwertigen MR-Signals und wird bei der Separation daraus in den Bereich $(-\pi, \pi]$ gefaltet. Dadurch kommt es zu Phasensprüngen, die sich in den Bildern als charakteristische Linien manifestieren. Um diese gefalteten Phasenbilder zur klinischen Verwendung zu entfalten, benötigt man spezielle mathematische Algorithmen.

Aufgrund der Komplexität der MR-Bilder und des darin enthaltenen Rauschens, ist das sogenannte *Phase Unwrapping* eine nichttriviale Aufgabe, die von den Algorithmen in unterschiedlich akkuraten Verfahren ausgeführt wird. In dieser Arbeit wurden die MATLAB-Umsetzungen von **3 globalen *Least-Squares-Algorithm*en** (LS-CPULSI, LS-PCG und LS-Unweighted) und **3 lokalen *Path-Following-Algorithm*en** (PF-Goldstein, PF-QualityMap und PF-SRNCP) anhand 3 verschiedener Datensätze unterschiedlicher Komplexität miteinander verglichen. Diese umfassen eine einfache 2D-Kreisgeometrie mit ansteigendem Phasengradienten, einen simulierten Fett/Wasser-Probenkörper in Luft und eine simplifizierte Rekonstruktion einer realen, coronalen Nieren-MRT. Da bei den **3 simulierten Datensätzen**, anders als in realen MRT-Aufnahmen, das ursprüngliche Phasenbild vor der Faltung bekannt ist, konnte die mittlere quadratische Abweichung (*Root Mean Square Error*, RMSE) zwischen den Algorithmenenergebnissen und der ungefalteten Ursprungsphase, sowie die benötigte Laufzeit der Algorithmen für eine statistisch signifikante Anzahl an Untersuchungen evaluiert werden. Es wurden insgesamt 24 660 Unwrap-Vorgänge in **51 Untersuchungen** mit variablem Signal-zu-Rausch-Verhältnis (SNR) und veränderlicher Phasenfaltung (u.a. durch Anpassung der Echozeit T_E) durchgeführt, wobei 41 dieser Untersuchungen in je 100 Iterationen bei gleichbleibenden Untersuchungsparametern wiederholt wurden, um die Einflüsse des zufälligen Rauschens zu minimieren.

Es zeigte sich, dass bei einem SNR von über 20 dB das Rauschen die Unwrap-Ergebnisse im Mittel kaum beeinflusst. Vielmehr werden diese durch die Strukturen und Gewebekanten im Bild bestimmt, die zu extremen Phasensprüngen führen. Zudem steigt mit einer größeren Echozeit T_E bei der Datengenerierung die Faltung der Phase und damit auch der mittlere Fehler in den ungewrappten Phasenbildern linear an. Die Ergebnisse der globalen Algorithmen wiesen, abgesehen vom LS-PCG-Algorithmus, die größten Abweichungen zur Ursprungsphase und auch die stärksten Schwankungen innerhalb der Iterationen einer einzelnen Untersuchung auf. Allerdings waren die globalen Algorithmen signifikant schneller als die lokalen. Die gerade auch bei langen Echozeiten stabilsten und rauschunempfindlichsten Ergebnisse erzielten der lokale Algorithmus PF-QualityMap und der globale **Algorithmus LS-PCG**. Letzterer ist aufgrund seiner um 2 Größenordnungen schnelleren Ausführungszeit zur Entfaltung von 2D-MR-Phasenbildern den anderen untersuchten Algorithmen zu bevorzugen.

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungs- und Akronymverzeichnis	III
1 Einleitung	1
2 Theoretische Grundlagen	2
2.1 Physikalische Grundlagen der Magnetresonanz-Tomografie	2
2.1.1 Kernspins: Eigendrehungen der Atomkerne	2
2.1.2 Präzession im externen Magnetfeld	3
2.1.3 Energieniveaus und Magnetisierung	4
2.1.4 Anregung und Relaxation der Magnetisierung	5
2.1.5 Spinechos und Einfluss der Relaxationszeiten auf den Bildkontrast	8
2.2 Vom MR-Signal zum Tomogramm	9
2.2.1 Ortsauflösung des MR-Signals mittels drei Gradientenfeldern	9
2.2.2 k-Raum und Fourier-Transformation	10
2.2.3 Magnitudenbilder, Phasenbilder und Suszeptibilitäten	11
2.3 Grundlagen des Phase Unwrapping	13
2.3.1 Komplikationen beim Unwrapping	14
2.3.2 Wegunabhängigkeit und Residuennachweis	16
2.3.3 Verfahren des räumlichen Phase Unwrapping	17
3 Material und Methoden	19
3.1 Aufbau des MATLAB-Skripts	19
3.2 Generierung der verwendeten Datensätze und des Rauschens	20
3.2.1 Set 1: Kreis mit linearem Phasengradienten	22
3.2.2 Set 2: Fett/Wasser-Probenkörper mit Luft	23
3.2.3 Set 3: Rekonstruktion einer coronalen MRT der Nieren	24
3.3 Verwendete Phase-Unwrapping-Algorithmen	25
3.3.1 Lokale Path-Following-Algorithmen	25
3.3.2 Globale Least-Squares-Algorithmen	26
3.4 Durchzuführende Untersuchungen	27
3.5 Methoden zur Evaluation der Algorithmen-Ergebnisse	28
4 Ergebnisse	30
4.1 Determiniertheit und Laufzeitanalyse der Algorithmen	30
4.2 Untersuchungen am Set 1: SNR und Grad	31
4.3 Untersuchungen am Set 2: SNR und T_E	33
4.4 Untersuchungen am Set 3: SNR und T_E	35
4.5 Zusammenfassung ausgewählter Untersuchungen	37
5 Diskussion der Ergebnisse	38
6 Schlussfolgerung und Ausblick	41

Literaturverzeichnis	VI
Abbildungsverzeichnis	X
Tabellenverzeichnis	XVII
A Anhang	XVIII
A.1 Programmablaufpläne	XVIII
A.2 Ausgewählte gefaltete Ausgangsphasenbilder der 3 Datensätze	XX
A.3 Fehlerpixel der Algorithmen	XXII
A.4 Publikationen zu Untersuchungen der verwendeten Algorithmen	XXIII
A.5 Ergebnisübersichten: Set 1 - SNR	XXIV
A.6 Ergebnisübersichten: Set 1 - Grad	XXXVI
A.7 Ergebnisübersichten: Set 2 - SNR	XLVIII
A.8 Ergebnisübersichten: Set 2 - T_E	LX
A.9 Ergebnisübersichten: Set 3 - SNR	LXV
A.10 Ergebnisübersichten: Set 3 - T_E	LXX

Abkürzungs- und Akronymverzeichnis

1D, 2D, 3D	<i>ein-, zwei- bzw. dreidimensional</i>
Abb.	<i>Abbildung(en)</i>
CT	<i>(Röntgen-)Computertomografie</i> ; ein Verfahren zur medizinischen Bildgebung
dB	<i>Dezibel (Einheit)</i> ; Dekadischer Logarithmus des Verhältnisses zweier gleichartiger Größen
DCT	<i>diskrete Cosinus-Transformation</i> ; ein mathematisches Verfahren, ähnlich der DFT, welches von einigen Least-Squares-Algorithmen zur Lösung der Poisson-Gleichung mit Neumann-Randbedingungen verwendet wird
DFT	<i>diskrete Fourier-Transformation</i> ; ein in der digitalen Signalverarbeitung häufig verwendetes, mathematisches Verfahren aus der Fourier-Analyse
FFT	<i>Fast-Fourier-Transformation</i> ; Algorithmus zur schnellen und effizienten Berechnung der DFT
FFT⁻¹	<i>inverse Fast-Fourier-Transformation</i>
FID	<i>Free Induction Decay</i> ; Messsignal durch Abnahme der Magnetisierung nach Auslenkung der Kernspins über einen HF-Puls
Gl.	<i>Gleichung(en)</i>
Grad	Parameter des <i>Phasengradienten</i> in $\frac{\text{rad}}{\text{px}}$ beim Datensatz 1
HF	<i>Hochfrequenz</i> ; Frequenz der elektromagnetischen Anregungspulse im zweistelligen Megahertz-Bereich, entsprechend der Larmorfrequenz der anzuregenden Spins
InSAR	<i>Interferometric Synthetic Aperture Radar</i> ; Radarinterferometrie zur Erfassung von Geländestrukturen über Phasenunterschiede zwischen Empfangssignalen zweier Antennen an einem Flugzeug oder Satelliten
Kap.	<i>Kapitel</i>
KTP	<i>(Point of) Known True Phase</i> ; Startpixel für die Algorithmen, welcher sicher innerhalb der binären Maske und der (sofern möglich) unverschobenen Phase liegt
LS-CPULSI	<i>Calibrated Phase Unwrapping based on Least-Squares and Iterations</i> [1, 2]; einer der drei verwendeten globalen Least-Squares-Algorithmen
LS-PCG	<i>Preconditioned Conjugate Gradient</i> [3, 4, Kap. 5.4.3]; einer der drei verwendeten globalen Least-Squares-Algorithmen

LS-Unweighted	<i>Unweighted Least Squares</i> [3, 4, Kap. 5.3.1 u. 5.3.2]; einer der drei verwendeten globalen Least-Squares-Algorithmen
magn.	<i>magnetisch(e/n)</i>
MATLAB	Software des Unternehmens MathWorks Inc. zu Lösung numerischer Probleme mittels Matrizen (Name abgeleitet von <i>Matrix Laboratory</i>) und zur grafischen Darstellung der Ergebnisse [5]
MR	<i>Magnetresonanz</i>
MRT	<i>Magnetresonanz-Tomografie</i> ; ein Verfahren zur medizinischen Bildgebung
NaN	<i>Not a Number</i> ; ein numerischer Datentyp-Wert, der einem undefinierten Wert (z.B. $\frac{0}{0}$) entspricht und hier zum Ausschluss von (fehlerhaften) Pixeln aus Berechnungen genutzt wird
NIFTI	<i>Neuroimaging Informatics Technology Initiative</i> ; ein offenes Dateiformat zur Speicherung von MR-Bildern
PET	<i>Positronen-Emissions-Tomografie</i> ; ein Verfahren zur medizinischen Bildgebung
PF-Goldstein	<i>Goldsteins Branch Cut</i> [6, 4, Kap. 4.2]; einer der drei verwendeten lokalen Path-Following-Algorithmen
PF-QualityMap	<i>Quality Guided Map</i> [4, Kap. 4.3]; einer der drei verwendeten lokalen Path-Following-Algorithmen
PF-SRNCP	<i>Sorting by Reliability following a Non-Continuous Path</i> [7]; einer der drei verwendeten lokalen Path-Following-Algorithmen
ppm	<i>parts per million</i> ; $1 \cdot 10^{-6}$
Φ_0	Ursprüngliche, ungewrappte Originalphase, die mit Hilfe der Algorithmen wieder aus der gewrappten Phase Φ_w rekonstruiert werden soll; in Literatur teils φ
Φ_w	Gewrappte Phase (in Definitionsbereich $-\pi < \Phi_w \leq \pi$ gefaltet), welche von den Algorithmen rekonstruiert werden soll; in Literatur teils ψ
Φ_{uw}	Ungewrappte Phase als Ergebnis der Algorithmen, die im besten Fall eine sehr gute Abschätzung der Originalphase Φ_0 sein kann; in Literatur teils ϕ
rad	<i>Radiant</i> (Einheit), Winkelmaß im Einheitskreis
$\frac{\text{rad}}{\text{px}}$	<i>Radiant pro Pixel</i> ; Einheit des Parameters Grad im Datensatz 1
RMSE	<i>Root Mean Square Error</i> ; Wurzel der mittleren quadratischen Fehlersumme

SNR	<i>Signal to Noise Ratio</i> ; messtechnischer Begriff für das Verhältnis vom eigentlichen Messsignal zum überlagerten Hintergrundrauschen
SPECT	<i>Single Photon Emission Computed Tomography</i> ; ein Verfahren zur medizinischen Bildgebung
SWI	<i>Susceptibility-Weighted Imaging</i> ; Suszeptibilitätsgewichtete MR-Bildgebung, bei der die magnetische Suszeptibilität (Magnetisierbarkeit) von Materie indirekt und qualitativ repräsentiert wird
T₁	Gewebespezifische Zeitkonstante der Spin-Gitter-Relaxation
T₂	Gewebespezifische Zeitkonstante der Spin-Spin-Relaxation
T₂*	Effektive, gewebespezifische Zeitkonstante der Spin-Spin-Relaxation
T_E	Variable <i>Echozeit</i> zwischen 90°-Puls und Spinecho
T_R	Variable <i>Repetitionszeit</i> zwischen zwei Spinechosequenzen
QSM	<i>Quantitative Susceptibility Mapping</i> ; Quantitative Suszeptibilitätskartierung, bei der über den SWI-Kontrast z.B. Kalzifikationen und Eisenablagerungen im Hirn dargestellt werden können
Voxel	<i>Volumenpixel</i> ; ein dreidimensionales Volumenelement definierter Größe

1 Einleitung

Die Magnetresonanz-Tomografie (MR-Tomografie, MRT) ist eines der bedeutendsten nicht-invasiven Bildgebungsverfahren in der modernen medizinischen Diagnostik. In konventionellen MR-Bildern werden meist nur die Magnituden des komplexen MR-Signals, nicht dessen Phaseninformationen verwendet. Ghiglia und Pritt [4] zeigten jedoch, dass letztere in Bildern eine unterschätzte Rolle spielen, indem sie die Magnituden- und Phasenspektren zweier digitaler Fotografien von Albert Einstein und der Mona Lisa mittels diskreter 2D-Fourier-Transformation (DFT) trennten und die Phasen den Magnituden der jeweils anderen Aufnahme wieder zuführten. Aus der Rücktransformation ergaben sich stark verschwommene, aber eindeutig identifizierbare Aufnahmen der beiden – jedoch im Bild des jeweils anderen. Dies zeigt, dass die Interpretierbarkeit der Bilder entscheidend vom Phasenspektrum geprägt wird, was daher rührt, dass die Phase unter anderem Informationen über scharfe Kanten und feine Strukturen enthält [4].

Das Problem ist jedoch, dass die Phase nicht eigenständig messbar ist, sondern eher als eine *Eigenschaft* von komplexen Signalen verstanden werden kann. Die aus dem eigentlich gemessenen Signal extrahierten Phasendaten sind im Intervall $(-\pi, \pi]$ *gewrappt*, wobei es beim Übergang $\pi \rightarrow -\pi$ zu Phasensprüngen kommt, die in unbearbeiteten Phasenbildern als charakteristische Linien erkennbar sind [4]. Um ein verwertbares Bild zu erhalten, muss die Phase an diesen Stellen rekonstruiert (*ungewrappt*) werden. Dabei handelt es sich jedoch um eine nichttriviale Aufgabe, da beim Wrappen Informationen der ursprünglichen Phase verloren gehen.

Seit Jahrzehnten wird Phase Unwrapping bei der hochpräzisen Profilanalyse von mechanischen Bauteilen mittels optischer Interferometrie und Holografie, aber auch in der Radarinterferometrie (InSAR) zur Vermessung von Geländetopografien und Meeresströmungen erforscht [1, 6, 8]. Phaseninformationen in der MRT sind aber auch medizinisch interessant, beispielsweise zur Darstellung des Blutsauerstoff-, Eisen- oder Kalziumgehaltes in venösen Gefäßen durch Suszeptibilitätsunterschiede in den Gewebestrukturen mittels SWI bzw. QSM. Dies wird unter anderem zur Diagnostik von Multipler Sklerose, Schädel-Hirn-Traumata oder auch Morbus Alzheimer eingesetzt [9–12]. Auch bei der separierten Darstellung von Fett und Wasser im MRT spielen die unterschiedlichen Phasen im sog. *Chemical Shift Imaging* eine zentrale Rolle [13].

Die Aufgabe des Phase Unwrapping übernehmen dabei mathematische Algorithmen, bei denen es ein breites Spektrum an unterschiedlichen Unwrap-Methoden gibt, welche meist auf Spezialanwendungen ausgelegte Vor- und Nachteile mit sich bringen. In dieser Arbeit sollen 3 globale *Least-Squares*- und 3 lokale *Path-Following*-Algorithmen untereinander anhand unterschiedlich komplexer, simulierter Datensätze verglichen werden. Dass bei diesen Datensätzen im Gegensatz zu natürlichen Phasendaten die ursprüngliche Originalphase bekannt ist, ermöglicht eine quantitative Evaluation der Algorithmenenergebnisse für eine statistisch signifikante Anzahl an Untersuchungen mit veränderlichen Parametern, wie beispielsweise dem Signal-zu-Rausch-Verhältnis (SNR) in den Phasenbildern. Anschließend werden die Erkenntnisse aus den Untersuchungen im Kontext vergleichbarer Publikationen analysiert.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Physikalische Grundlagen der Magnetresonanz-Tomografie

Die MRT stellt ein nicht-invasives Schnittbildverfahren zur dreidimensionalen Bildgebung von Strukturen innerhalb von Objekten dar. Anders als bei vielen vergleichbaren Verfahren wie PET, SPECT oder CT werden dabei keine schädlichen ionisierenden Strahlen, sondern starke Magnetfelder und Hochfrequenz-Strahlung verwendet, wodurch nach heutigem Stand der Wissenschaft keine signifikanten Nebenwirkungen bekannt sind [14, 15]. Daher spielt die MRT eine wichtige Rolle in der modernen medizinischen Diagnostik.

Wie bereits der Name Magnetresonanz- oder auch Kernspin-Tomografie erahnen lässt, basiert das Verfahren auf der Detektion von angeregten (resonanten) Spins der Atomkerne des Objektes innerhalb eines starken Magnetfeldes. Da unter anderem Gehirn, Herz, Nieren und Muskeln eines durchschnittlichen, erwachsenen Menschen jeweils zu 73-83% aus Wasser bestehen und selbst Knochen mit 31% noch einen bemerkenswert hohen Wasseranteil besitzen [16], werden zur medizinischen Bildgebung vornehmlich Wasserstoffprotonen (^1H) genutzt. Für spezielle Fragestellungen können aber auch andere Isotope verwendet werden, z.B. Kohlenstoff (^{13}C) zur Darstellung des Glukosemetabolismus im Gehirn von Schlaganfallpatienten oder Fluor (^{19}F) bei der Untersuchungen von pharmazeutischen Substanzen im Körper. Sogar hyperpolarisierte Gase wie Xenon (^{129}Xe) und Helium (^3He) können zur Darstellung von Bronchien und Alveolen in der Lunge genutzt werden [15]. Im Folgenden soll die zugrundeliegende Physik anhand der Wasserstoffprotonen erläutert werden.

2.1.1 Kernspins: Eigendrehungen der Atomkerne

Atomare Teilchen mit einer ungeraden Nukleonenzahl (Protonen + Neutronen) haben die quantenmechanische Eigenschaft, dass sie einen Eigendrehimpuls \vec{L} (Spin) besitzen. Sie verhalten sich dadurch ähnlich zu magnetischen Kreiseln, bei denen jedes Ladungselement einen Kreisstrom darstellt, welcher einen Beitrag zum magnetischen Dipolmoment $\vec{\mu}$, der erzeugten „Magnetfeldmenge“, des Teilchens leistet [17, Gl. 11.17]:

$$\vec{\mu} = \gamma \cdot \vec{L} \quad (2.1)$$

Dabei ist das gyromagnetische Verhältnis γ eine kernspezifische Konstante, die angibt, wie stark ein Kern mit einem äußeren Magnetfeld wechselwirkt. Anders als bei klassischen Kreiseln können Atomkerne in ihrem Drall jedoch nicht abgebremst oder beschleunigt werden, der Spin bleibt als Grundeigenschaft der Elementarteilchen immer gleich [18]. Er liegt gequantelt vor und ist abhängig von der Quantenzahl ℓ [17, Gl. 11.22]:

$$|\vec{L}| = \sqrt{\ell(\ell + 1)} \cdot \hbar \quad (2.2)$$

Diese Drehimpulsquantenzahl kann dabei Werte von $\ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ annehmen, wobei entsprechend Gl. 2.1 Kerne mit einem Spin von $\ell = 0$ kein magnetisches Moment haben [19]. Das zu betrachtende Wasserstoffproton hat einen Spin $\ell = \frac{1}{2}$ und damit einen Drehimpuls $|\vec{L}| = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$. Man spricht dabei von Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen.

2.1.2 Präzession im externen Magnetfeld

Man kann sich Atomkerne mit Kernspins vereinfacht als Dipole vorstellen, die im feldfreien Raum völlig zufällig orientiert sind, wenn man das im Vergleich zum MR-Magneten sehr schwache Erdmagnetfeld¹ vernachlässigt. Betrachtet man die Spinnmagnete in einem Volumenelement (Voxel), so negieren sich die einzelnen Magnete durch die zufällige Orientierung, so dass die Gesamtheit der Spins im Voxel als unmagnetisch betrachtet werden kann [23]. Während die Eigenrotation dieser modellhaften Spinnmagnete von außen nicht zu erkennen ist, kann man jedoch die Orientierung der Rotationsachse am Feldvektor eines homogenen, statischen Magnetfeldes $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ betrachten. Legt man an den Voxel ein entsprechendes Magnetfeld an, so orientieren sich die Drehimpulse der Kerne darin parallel (*Spin-up*, \uparrow) oder antiparallel (*Spin-down*, \downarrow) zu den Magnetfeldlinien, wobei im Verhältnis minimal mehr Spins aufwärts als abwärts zeigen [18]. Aus der veränderten Kernorientierung resultiert eine **makroskopisch messbare Magnetisierung** \vec{M} des gesamten Voxels (s. Kap. 2.1.3). Die entsprechende Magnetisierungsrichtung der Drehimpulse wird mit Hilfe der magnetischen Quantenzahl m_ℓ beschrieben durch [17, Gl. 11.22]:

$$L_z = m_\ell \cdot \hbar \quad \text{mit } m_\ell \in \{-\ell, -\ell + 1, \dots, +\ell\} \quad (2.3)$$

Für Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen gibt es daher genau zwei Einstellmöglichkeiten von Drehimpuls und magnetischem Moment im Magnetfeld: $m_\ell = \frac{1}{2}$ und $m_\ell = -\frac{1}{2}$. Diese sog. Richtungsquantelung wirkt sich auch auf das magnetische Moment in Feldrichtung z aus, da gilt [19, Gl. 1-5]:

$$\mu_z = m_\ell \cdot \gamma \cdot \hbar \quad (2.4)$$

Im vorherigen Abschnitt wurde bereits die Analogie zum klassischen Kreisel erwähnt und durch die Eigendrehung ergibt sich eine weitere markante Gemeinsamkeit zwischen Kreisel und Kernspin: Der klassische Kreisel vollführt eine Ausweichbewegung (Präzession), wenn eine äußere Kraft (z.B. die Schwerkraft) auf ihn wirkt. Er neigt dadurch die Lage seiner Rotationsachse, bis ihm durch Reibung genug Energie entzogen wurde, so dass er schließlich umfällt. Beim Kernspin wirkt das Magnetfeld \vec{B} als externe Kraft, wodurch auch der Spin eine Präzessionsbewegung um die Magnetisierungsrichtung B_z vollführt [18]. In Abb. 2.1 wird diese Präzession des Protons im Koordinatenursprung dargestellt. Dabei soll verdeutlicht werden, dass sich nicht das Proton selbst um die z -Achse bewegt, sondern lediglich sein Spin. Die Präzessionsbewegung erfolgt mit der charakteristischen **Larmorfrequenz**² ω_L , die proportional zur magn. Flussdichte und damit auch zur Magnetfeldstärke ist [17, Gl. 11.29]:

$$\omega_L = \gamma \cdot B_z \quad (2.5)$$

Für ^1H beträgt diese $\omega_L = 63.8646$ MHz bei einer Feldstärke von $B_z = 1.5$ T [24, Table 1-1].

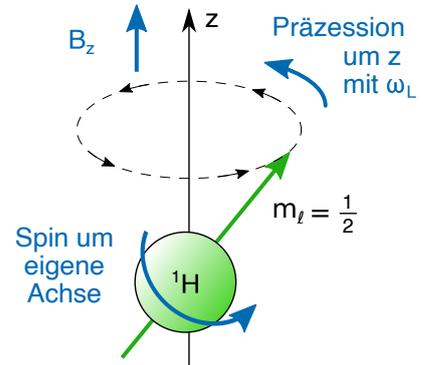


Abb. 2.1: Präzession eines ^1H im Magnetfeld B_z [nach 20, Fig. 2.4].

¹Klinische MR-Magneten arbeiten heutzutage mit magnetischen Flussdichten im Bereich von 1.5 bis 9.4 T [21], die Totalintensität des Erdmagnetfeldes an der Erdoberfläche (in Braunschweig) liegt dagegen etwa bei $49.5 \mu\text{T}$ [22].

²In der MR-Literatur wird die Kreisfrequenz $\omega_L = 2\pi \cdot \nu_L$ als Larmorfrequenz bezeichnet [Anm. in 24, S. 6]. Ähnlich verhält es sich mit den arbiträr verwendeten Begriffen magn. Feldstärke \vec{H} und magn. Flussdichte $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ [Amk. in 25, S. 103].

2.1.3 Energieniveaus und Magnetisierung

Allgemein gilt für die Energie der Spins im Magnetfeld [25, Gl. 7.7]:

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -m_\ell \cdot \gamma \cdot \hbar \cdot B \quad (2.6)$$

Die Richtungsquantelung wirkt sich jedoch auch auf die Energie der Spins aus. Durch den nuklearen Zeeman-Effekt spaltet sie sich für die beiden Zustände $m_\ell = \pm\frac{1}{2}$ in zwei Energieniveaus auf. Mit Gl. 2.4 ergibt sich die Energiedifferenz ΔE zwischen den beiden Zuständen im Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ zu [17, Gl. 11.26 u. 11.27]:

$$E = -\mu_z \cdot B_z = \mp \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \hbar \cdot B_z$$

$$\Rightarrow \Delta E = \gamma \cdot \hbar \cdot B_z \quad (2.7)$$

In Abb. 2.2 ist die Aufspaltung der Energieniveaus für parallel zur Magnetfeldrichtung ausgerichtete Spin-up- (\uparrow) und antiparallele Spin-down-Kerne (\downarrow) dargestellt. Der niedrigere Zustand ist dabei energetisch günstiger und damit stärker besetzt. Die Boltzmann-Statistik gibt das Verhältnis von Spin-up- zu Spin-down-Kernen und damit die Besetzungswahrscheinlichkeit der beiden Energieniveaus im thermischen Gleichgewicht an und ist definiert durch [17, Gl. 11.31 u. 11.32]:

$$\frac{N_\uparrow}{N_\downarrow} = e^{\frac{\Delta E}{k_B \cdot T}} \approx 1 + \frac{\gamma \cdot \hbar \cdot B_z}{k_B \cdot T} \quad (2.8)$$

Für Wasserstoffprotonen beträgt das Verhältnis bei Körpertemperatur ($T = 37^\circ\text{C} \approx 310\text{K}$) und einer typischen Feldstärke von $B_z = 1.5\text{T}$ demnach $\frac{N_\uparrow}{N_\downarrow} = 1.000004$, es herrscht also ein geringer Überschuss an Spin-up-Kernen [15]. Da aber nicht ein einzelnes Proton, sondern ganze Voxel zur MR-Bildgebung genutzt werden, ist dieser geringe Überschuss ausreichend, um ein messbares Signal zu erzeugen [17]. Die Einzelmagnetisierungen μ_z der Protonen innerhalb des Voxels summieren sich durch den Spin-Up-Überschuss zu einer messbaren Gesamtmagnetisierung M_z in Feldrichtung z. Für einen menschlichen Kopf mit einem angenäherten Volumen von 1500 ml,

der zu ungefähr 80 % aus Wasser besteht, erhält man über dessen Protonendichte ($6.67 \cdot 10^{22}\text{ml}^{-1}$) beispielsweise eine Netto-Gesamtmagnetisierung von $M_z \approx 20\mu\text{T}$ bei Körpertemperatur und einer Feldstärke von 1.5 T [15, S. 140]. In der xy-Ebene hebt sich die Magnetisierung dagegen auf. Zwar präzedieren alle Spins mit gleicher Frequenz (ihrer Larmorfrequenz ω_L) um die z-Achse, allerdings sind sie dabei völlig zufällig orientiert, d.h. ihre Phasenlage ist beliebig. Aus diesem Grund annullieren sich die Komponenten in dieser quer zur Feldrichtung gelegenen Ebene statistisch und es ist keine Magnetisierung nach außen messbar [23]. Daher spricht man von einer **Längsmagnetisierung des Voxels**.

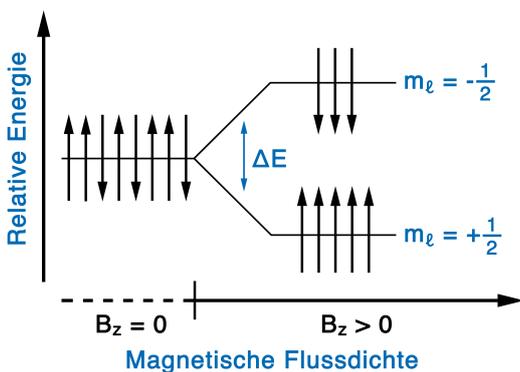


Abb. 2.2: Aufspaltung der Energieniveaus für $m_\ell = \pm\frac{1}{2}$ [nach 19, Abb. 1-4 u. 24, Fig. 1-4].

2.1.4 Anregung und Relaxation der Magnetisierung

Das Spinsystem in einem statischen Magnetfeld befindet sich zunächst im thermischen Gleichgewicht. Die MR-Bildgebung basiert darauf, dieses Gleichgewichtssystem zu stören, indem Energie in Form einer elektromagnetischen Welle mit wohldefinierter Frequenz ν_{HF} eingestrahlt wird. Um die Spins stören zu können, muss eine Resonanzbedingung erfüllt sein, vergleichbar mit der Anregung einer Stimmgabel durch einen spezifischen Ton [23]. Das bedeutet, dass genug Energie ins System gebracht werden muss, um die Energiedifferenz ΔE zwischen Spin-down und Spin-up zu überbrücken und somit eine Umkehr der Spinorientierung zu ermöglichen [19]. Aus der Planck-Einstein-Relation $E = h \nu = \hbar \omega$ [26, Gl. 1.10] und den Gleichungen 2.5 und 2.7 ergibt sich für die notwendige Energie E_{HF} , dass zur resonanten Anregung der Spins die Frequenz des Anregungspulses ν_{HF} der kernspezifischen Larmorfrequenz entsprechen muss [vgl. 19, Gl. 1-12]:

$$\begin{aligned}
 E_{HF} &\stackrel{!}{=} \Delta E \\
 E_{HF} &= h \cdot \nu_{HF} = \hbar \cdot \omega_{HF} \\
 \Delta E &= \gamma \cdot \hbar \cdot B_z = h \cdot \nu_L = \hbar \cdot \omega_L \\
 \Rightarrow \nu_{HF} &\stackrel{!}{=} \nu_L = \left| \frac{\gamma}{2\pi} \right| \cdot B_z
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Da diese Frequenzen im MHz-Bereich liegen (vgl. Kap. 2.1.2), spricht man von einer **Anregung durch Hochfrequenz-Pulse** (HF). Der Flipwinkel, um den die Spins durch solche transversale Pulswellen mit Dauer τ und Amplitude B_τ gekippt werden, ist definiert durch [17, S. 303]:

$$\alpha = \gamma \cdot B_\tau \cdot \tau
 \tag{2.10}$$

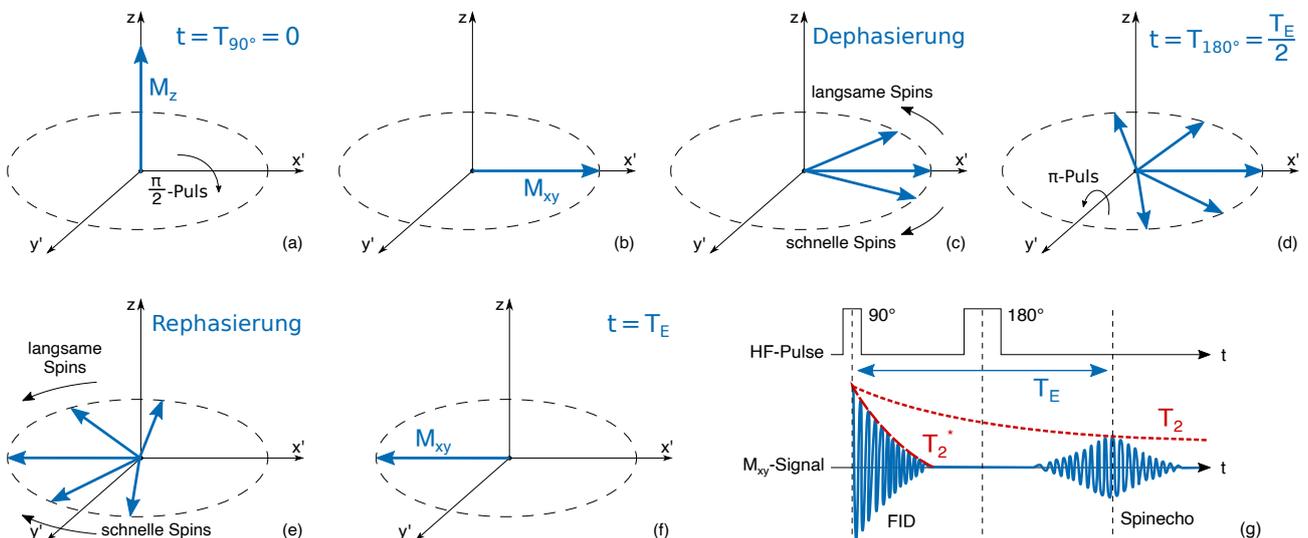


Abb. 2.3: Darstellung der Magnetisierungsvektoren der Spins im rotierenden Koordinatensystem (x', y') nach Anregung durch zwei HF-Pulse. Nach Gabe eines $\frac{\pi}{2}$ -Puls zur Zeit T_{90° (a) klappen die Spins in die xy -Ebene, wodurch aus der Längsmagnetisierung M_z eine als FID messbare Quermagnetisierung M_{xy} wird (b). In der xy -Ebene dephasiert das Spinensemble aufgrund lokaler Unterschiede im Magnetfeld (c) und kann durch Einstrahlen eines π -Pulses zum Zeitpunkt $T_{180^\circ} = \frac{T_E}{2}$ (d) um 180° an einer Achse der xy -Ebene gedreht werden, wodurch es wieder zusammenläuft (e). Die dann vorübergehend erneut verstärkte Quermagnetisierung (f) ist nach der Zeit T_E als Spinecho messbar (g) [nach 17, Abb. 11.25 u. 11.26].

Wie im vorherigen Kapitel gezeigt, ist der sich drehende Magnetisierungsvektor \vec{M} der Spins vor der Auslenkung durch einen solchen hochfrequenten Puls entlang der z-Achse (Feldrichtung des äußeren Magnetfeldes) ausgerichtet und sorgt damit für eine maximale Längsmagnetisierung M_z des Voxels. Strahlt man nun einen Puls mit passender Leistung und Dauer ein, so können die Spins dadurch beispielsweise um 90° ausgelenkt und in die xy-Ebene geklappt werden. In den Abbildungen 2.3a und b ist dieses Umklappen der Spins nach Gabe eines sog. 90° - oder $\frac{\pi}{2}$ -Pulses dargestellt, wodurch aus der Längsmagnetisierung M_z eine Quermagnetisierung M_{xy} wird. Zur vereinfachten Darstellung wird in Abb. 2.3 ein um die z-Achse rotierendes Koordinatensystem (x', y') verwendet, welches die eigentliche Präzession der Spins außer Betracht lässt. Die Bewegung der Spins in der xy-Ebene erzeugt jedoch eine Wechsellspannung in einer externen Empfangsspule, deren Frequenz wieder genau der Larmorfrequenz entspricht. Diese induzierte Spannung bildet das messbare MR-Signal, welches verstärkt und digital weiterverarbeitet zur Bildgebung genutzt wird [18]. Dieses Signal ist umso stärker, je größer die entstandene Quermagnetisierung ist. Da die ausgelenkten Spins wieder in ihren thermischen Grundzustand zurückstreben, geht die Quermagnetisierung wieder verloren, womit auch das Messsignal relativ schnell wieder abklingt. Aus diesem Grund spricht man bei dem „zerfallenden“ MR-Signal (Abb. 2.3g) vom **freien Induktionszerfall FID** (von engl. *Free Induction Decay*) [17, 23].

Die Relaxation der Magnetisierung lässt sich in zwei voneinander unabhängige Prozesse für die Längsmagnetisierung in z-Richtung (longitudinal) und für die Quermagnetisierung in xy-Ebene (transversal) auftrennen. Dabei zerfällt die Quermagnetisierung M_{xy} deutlich schneller, als sich die Längsmagnetisierung M_z wieder aufbauen kann [17, 23]. Der zeitliche Verlauf dieser beiden Abklingprozesse nach Anregung durch einen $\frac{\pi}{2}$ -Puls ist in Abb. 2.4 für Fettgewebe und Liquor dargestellt und soll nachfolgend näher betrachtet werden. Die Lösungen der **Bloch'schen Gleichungen** liefern dazu entsprechend die beiden Magnetisierungskomponenten in der zeitlichen Entwicklung [15, S. 158 u. 27, Gl. 2.1]:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma (\vec{M} \times \vec{B}) \text{ mit } \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \cos(\omega t) \\ B_1 \sin(\omega t) \\ B_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} M_z(t) &= M_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \\ M_{xy}(t) &= M_0 \cdot e^{-i\omega_0 t} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

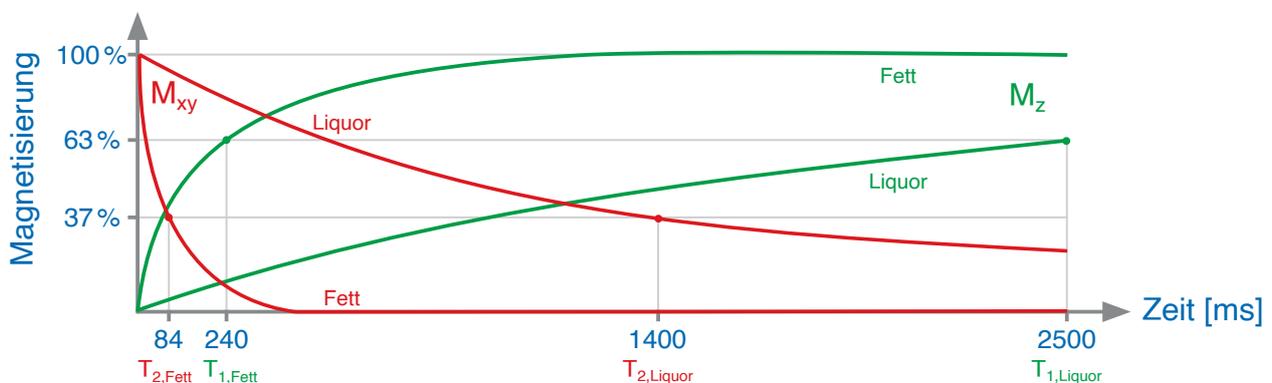


Abb. 2.4: Darstellung der Relaxationszeiten von Fett und Liquor bei 1 T nach Gabe eines $\frac{\pi}{2}$ -Pulses mit Hilfe der Magnetisierungsvektoren M_z (grün) und M_{xy} (rot). T_1 ist die gewebespezifische Zeitkonstante, nach der M_z auf 63 % angewachsen ist. T_2 ist die gewebespezifische Zeitkonstante, nach der M_{xy} auf 37 % abgefallen ist [nach 23, Abb. S. 72 u. 80].

Longitudinale Spin-Gitter-Relaxation (T_1)

Nachdem die Spins durch Einstrahlen eines $\frac{\pi}{2}$ -Pulses in die xy-Ebene geklappt wurden (Abb. 2.3b), geben sie durch **Wechselwirkung mit ihrer Umgebung** (der atomaren Gitterstruktur) Energie an diese ab, wodurch sie langsam zurück in die ursprüngliche z-Richtung klappen (Abb. 2.3a). Dadurch baut sich die Längsmagnetisierung M_z langsam exponentiell wieder auf, was in Abb. 2.4 in den grünen Kurven dargestellt wird. Die entsprechende Zeitkonstante T_1 , nach der M_z wieder auf etwa 63 % des Ursprungszustandes angewachsen ist, hängt von der angelegten Magnetfeldstärke und der inneren Bewegung der Moleküle ab. Dabei zeigen verschiedene Gewebearten unterschiedliche Relaxationszeiten, beispielsweise hat Fettgewebe ein deutlich kürzeres T_1 als Wasser oder wässrige Flüssigkeiten wie Liquor, weshalb durch verschiedene T_1 -Gewichtungen unterschiedliche Bildkontraste in den MR-Aufnahmen erreicht werden können [18, 23].

Transversale Spin-Spin-Relaxation (T_2)

Der andere Relaxationsprozess ist auf die Wechselwirkung der Spins untereinander zurückzuführen. Noch direkt nach Anregung durch den HF-Puls befindet sich das Spinensemble in der xy-Ebene in Phase (Phasenkohärenz, Abb. 2.3b). Das bedeutet, dass alle Spins synchron präzedieren und das Ensemble wie ein einziger großer Magnet in der xy-Ebene rotiert [23]. Da die Spins jedoch wie kleine Dipole sind, beeinflussen sie sich gegenseitig und auch das Magnetfeld um sie herum. So nehmen einige Spins durch den Wechsel der Spinzustände vom angeregten zurück in den Grundzustand (T_1 -Relaxation) ein lokal leicht verschobenes Magnetfeld wahr, was dazu führt, dass sich die Larmorfrequenz dieser Spins minimal ändert (vgl. Gl. 2.5). Dadurch präzedieren manche Spins etwas schneller oder langsamer als andere, wodurch die **Phasenkohärenz mit der Zeit verloren** geht, so dass das Spinensemble auseinanderläuft (Dephasierung, Abb. 2.3c). Die einzelnen Magnetisierungsvektoren beginnen damit, sich gegenseitig aufzuheben, wodurch die transversale Magnetisierung M_{xy} und damit das MR-Signal exponentiell abnimmt. Anders als bei der Spin-Gitter-Relaxation wird hier keine Energie an die Umgebung abgegeben, die Spins tauschen vielmehr die Energie untereinander aus [17, 18, 23]. In Abbildung 2.4 ist der Einfluss der Spin-Spin-Relaxation auf den schnelleren Abbau der Transversalmagnetisierung in den roten Kurven verdeutlicht. Dabei ist T_2 die Zeitkonstante, nach der M_{xy} auf ca. 37 % des Maximalwertes abgefallen ist. Auch die T_2 -Zeit ist gewebespezifisch und ebenso für Fett kürzer als für Liquor, so dass auch sie zum Bildkontrast ausgenutzt werden kann [23].

Effektive Relaxationszeit der MR-Signale (T_2^*)

Zudem bewirken zeitlich konstante **Inhomogenitäten des externen Magnetfeldes** eine zusätzliche Dephasierung des Spinensembles. Solche Inhomogenitäten treten beispielsweise durch lokale Magnetfelder (z.B. aufgrund von Eisenpartikeln im Probenkörper) oder an Gewebegrenzflächen auf und beeinflussen den Signalabfall zusätzlich, so dass das eigentlich MR-Signal letztlich nicht mit der Zeit T_2 sondern der kürzeren, effektiven Zeitkonstante T_2^* abklingt. Dieses effektive Signal, das FID, ist zur Visualisierung des Unterschieds zwischen den Zeiten T_2 und T_2^* in Abb. 2.3g dargestellt [18, 23]. Im Allgemeinen gilt für die drei Relaxationszeiten [23]:

$$T_2^* < T_2 < T_1 \quad (2.12)$$

2.1.5 Spinechos und Einfluss der Relaxationszeiten auf den Bildkontrast

Der Einfluss der statischen Magnetfeldinhomogenitäten auf das MR-Signal kann korrigiert werden. Hierzu wird, nachdem das Spinensemble dephasiert (Abb. 2.3c) und das FID mit der Zeit T_2^* abgeklungen ist, erneut ein HF-Puls eingestrahlt, diesmal jedoch ein 180° - oder auch π -Puls (Abb. 2.3d). Durch diesen wird das gesamte Spinensemble um eine Achse in der xy-Ebene gedreht³, wodurch nun die langsameren Spins den schnelleren vorauslaufen, so dass das Spinensemble rephasiert (Abb. 2.3e). Nach exakt der Zeit, die zwischen den beiden HF-Pulsen lag, befinden sich alle magnetischen Momente wieder in Phase und es kommt erneut zu einer messbaren Quermagnetisierung (Abb. 2.3f). Diese induzierte Wechsellspannung ist als sog. „Spinecho“ nach der Echozeit T_E messbar, wobei diese abhängig vom Einstrahlzeitpunkt des 180° -Pulses ($T_{180^\circ} = \frac{T_E}{2}$) variiert werden kann. Die Stärke des Spinechos (das Amplitudenmaximum) nimmt dabei mit der T_2 -Relaxation ab, während das Spinecho selbst genau wie das FID mit T_2^* abnimmt (Abb. 2.3g). Durch mehrfache Anregung mit 180° -Pulsen können mehrfache Echos hintereinander erzeugt werden, solange die T_2 -Relaxation noch anhält. Über diesen Spinecho-Effekt lassen sich so auch die gewebespezifischen T_2 -Zeiten bestimmen [17, 18, 23, 28].

Der Bildkontrast im MR-Bild hängt u.a. von den im vorherigen Abschnitt erwähnten Parametern des Gewebes ab. Zum einen spielt die Anzahl der anregbaren Spins in einem Voxel (die *Protonendichte*) eine Rolle, zum anderen die gewebespezifischen Zeiten T_1 und T_2 . Letztere bestimmen, wie schnell sich die Spins nach der Anregung erholen und wie rasch damit das MR-Signal abklingt. Je nachdem, welchen dieser Parameter man bei der MR-Messung gewichtet, kann man damit anders als beim CT ohne Gabe eines zusätzlichen Kontrastmittels den Bildkontrast zwischen unterschiedlichen Gewebearten beeinflussen. Um eine T_2 -Gewichtung zu erreichen, wird die Echozeit T_E so gewählt, dass die Unterschiede in den T_2 -Zeiten möglichst groß sind ($T_E > 60$ ms). Dann haben Gewebe mit kurzem T_2 wie Muskeln oder Hirnsubstanz bereits stark an Signalintensität verloren und erscheinen daher dunkel, während Substanzen mit langem T_2 , wie Liquor oder [Wasser, in \$T_2\$ -gewichteten Bildern hell](#) erscheinen, da in ihnen noch relativ viel Signal gemessen werden kann. Bei kürzeren T_E -Zeiten sind die Signale von Geweben mit kurzem T_2 noch nicht stark genug abgeklungen (in Abb. 2.4 sind die beiden roten Kurven dort zu eng beieinander), so dass die T_2 -Gewichtung des Bildes gering ist [18, 23].

Da zur MR-Bildgebung die Schichten mehrfach gemessen werden müssen, kann auch die Zeit zwischen zwei Spinechosequenzen, also die Repetitionszeit T_R zwischen den 90° -Pulsen, variiert werden, um den T_1 -Kontrast in den Bildern zu beeinflussen. Wird ein kurzes T_R (< 600 ms) gewählt, erscheinen Gewebe wie Fett oder Knochenmark, die mit kurzem T_1 relaxieren, nach erneuter Anregung hell. Dagegen sind Substanzen mit langem T_1 , wie [Wasser, in \$T_1\$ -gewichteten Bildern dunkel](#). Bei sehr langem T_R (> 2000 ms) haben dagegen auch Gewebearten mit langem T_1 genügend Zeit zu relaxieren und der Kontrast ist entsprechend gering (in Abb. 2.4 laufen dann beide grünen Kurven wieder zusammen). Wählt man dagegen ein langes T_R und kurzes T_E , spielen die Relaxationsprozesse eine untergeordnete Rolle und die Gewichtung der Bildkontraste erfolgt vorrangig entsprechend der Protonendichte des Gewebes. Dies wird z.B. zur Bildgebung von Strukturen mit geringer Signalintensität wie Knochen oder Sehnen genutzt [18, 23].

³Sowohl eine Drehung um die y-Achse, wie in Abb. 2.3 dargestellt, als auch eine Drehung um die x-Achse ist möglich und hängt von der Phasenlage des Pulses ab. Im ersten Fall hat er eine Phasenlage $\Psi = 0^\circ$, in letzterem $\Psi = 90^\circ$ [17].

2.2 Vom MR-Signal zum Tomogramm

Im vorherigen Kapitel wurde erläutert, wie Spins angeregt und deren Magnetisierung als Spannungen gemessen werden können. Die Spins werden jedoch überall im Untersuchungsobjekt angeregt. Um nun dreidimensionale Aufnahmen zu generieren und die Strukturen im Inneren sichtbar zu machen, muss der genaue Ursprung jedes einzelnen MR-Signals identifiziert werden.

2.2.1 Ortsauflösung des MR-Signals mittels drei Gradientenfeldern

Die Larmorfrequenz der Spins ist proportional zur Magnetfeldstärke und eine Anregung der Spins erfolgt nur, wenn die Anregungsfrequenz dieser Präzessionsfrequenz entspricht (*Resonanzbedingung*). Damit aber nicht der gesamte Patientenkörper gleichermaßen angeregt wird, sondern einzelne Schichten selektiert werden können⁴, muss das Magnetfeld inhomogen sein. Dazu werden in MR-Tomographen zusätzliche Spulenpaare in den 3 Raumrichtungen verwendet, um das Magnetfeld beispielsweise in z-Richtung am Kopfende des Patienten zu verstärken und an den Füßen abzuschwächen. Die sich daraus ergebende fließende Änderung (auch *Gradient* G_z) des B-Feldes ist in Abb.

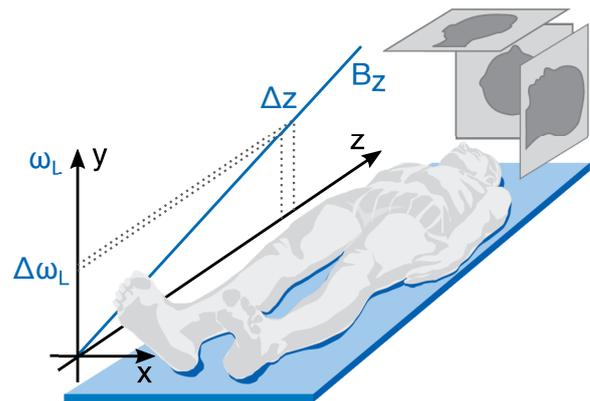


Abb. 2.5: Gradient des B_z -Feldes zur Selektion der Schicht Δz über Anregung mit HF-Pulsen der Frequenzbandbreite $\Delta\omega_L$ [nach 23, Abb. S. 102, 106 u. 107].

2.5 dargestellt. Damit einher geht auch eine fließende Änderung der Larmorfrequenzen ω_L , so dass individuelle Schichten entlang z über ihre individuelle Frequenz angeregt werden können. Es ist technisch jedoch nicht möglich, eine „einzelne Spinschicht“ anzuregen, da u.a. das Magnetfeld nie 100% homogen sein kann. Entsprechend umfasst der HF-Puls um diese mittlere Anregungsfrequenz herum immer eine Bandbreite von Nachbarfrequenzen $\Delta\omega_L$, über welche die Schichtdicke Δz bedarfsspezifisch variiert werden kann [18, 23].

Um die Voxel nun zusätzlich in x - und y -Richtung zu separieren, sind zwei weitere Gradientenfelder notwendig, die ebenfalls durch zusätzliche Spulen erzeugt werden können. Zum einen kann in x -Richtung ein Frequenzgradient G_x geschaltet werden, so dass das Magnetfeld von links nach rechts (in Abb. 2.5) zunimmt. Entsprechend ändert sich wieder die Larmorfrequenz, wodurch sich die Spins rechts schneller drehen als links. Wird nun eine z -Schicht gemessen, detektiert man als MR-Signal ein Frequenzspektrum, wobei die hohen Frequenzen von rechts und die niedrigeren von links stammen. Analog dazu wird ein Phasengradient G_y in y -Richtung geschaltet, so dass oben im Tomographen die Spins eine höhere Larmorfrequenz haben als unten. Dadurch kreiseln sie oben schnell und „laufen den Unteren davon“, was in einer Phasenverschiebung der Spins gegeneinander resultiert. Schaltet man den Phasengradienten wieder ab, präzedieren die Spins nach einer Zeit wieder mit der ursprünglichen Frequenz, der Phasenvorsprung bleibt jedoch erhalten. So lässt sich in der angeregten Schicht über die Phase der Spins als Zeilen- und die Frequenz als Spaltenkodierung ein Voxel in 3 Dimensionen eindeutig identifizieren [17, 18, 23].

⁴Dem entsprechend ist die MR-Tomografie (von altgriechisch *tome* = „Schnitt“) auch ein Schnittbildverfahren.

2.2.2 k-Raum und Fourier-Transformation

Das MR-Signal stammt, wie in Kap. 2.1.4 erläutert, aus der Transversalmagnetisierung M_{xy} der angeregten Spins, welche in Quadraturspulen messbare Spannungen induziert (das FID, bzw. die Spinechos). Dabei wird die Magnetisierung in der xy -Ebene über orthogonal zueinander angeordnete Empfangsspulen aus beiden Richtungen separat gemessen. Ähnlich wie bei Stereo-Kanälen in Lautsprechern werden diese unterschiedlichen Signalkomponenten beider Spulen dann wieder zusammengefügt, wobei im Falle der Lautsprecher der Raumklang entsteht und in der MR-Bildgebung das mathematisch komplexe MR-Signal [15, 29]. Allerdings ist es wichtig für das Verständnis der MR-Bildgebung, dass es sich bei den Messsignalen keinesfalls um einfache Schwingungen aus jeweils einem einzelnen Voxel handelt. Aus Zeit- und Effizienzgründen werden ganze Zeilen einer Schicht in einem Schritt gemessen⁵, so dass das MR-Signal die Summe aller Transversalmagnetisierungen der Voxel in einer Bildzeile enthält. Damit besteht es aus Überlagerungen vieler verschiedener Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen und Phasen (auch aufgrund unterschiedlicher Gewebearten). Da die einzelnen Pixel so nicht identifiziert werden können, ist es nicht möglich aus einem einzigen Zeilensignal direkt eine Zeile des letztendlichen 2D-MRT-Bildes zu rekonstruieren [18, 23, 27, 31–33].

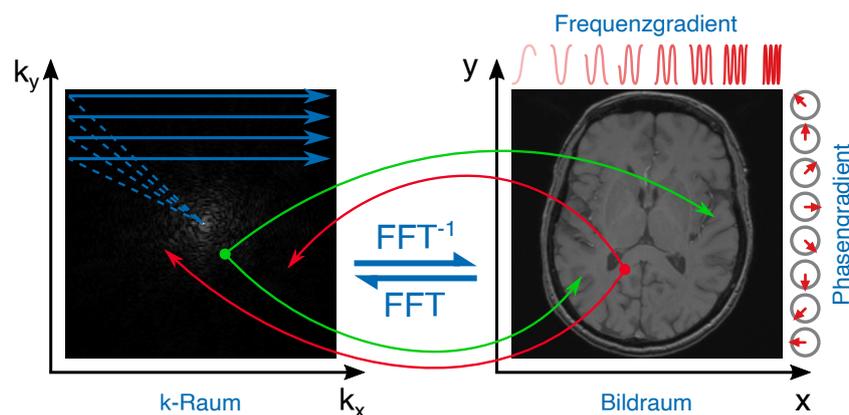


Abb. 2.6: Zusammenhang zwischen k-Raum und Bildraum über die Fouriertransformation (FFT). Jeder Punkt im k-Raum enthält Informationen über jeden Punkt im Bildraum und vice versa (rote und grüne Pfeile). Zur Ortsauflösung sind die Signale in x - und k_x -Richtung frequenzkodiert und in y - und k_y -Richtung phasenkodiert. Die Abtastung des k-Raums kann z.B. radial in die kartesischen Koordinaten des Bildraums erfolgen (Trajektorien in blau) [nach 23, Abb. S. 115 u. 29].

Entsprechend dem Fourier-Theorem lässt sich ein Bild in ein Spektrum aus periodischen Signalen unterschiedlicher Frequenzen und Amplituden (also effektiv in Streifenmuster) zerlegen, ähnlich einem Prisma, welches weißes Licht in sein farbiges Spektrum zerlegt. Dies wird bei der MR-Bildgebung umgekehrt angewandt, um in den Messsignalen die Beiträge der einzelnen Frequenzen und Phasen zu separieren und damit anhand der im vorherigen Kapitel beschriebenen Ortskodierungen später ein 2D-Bild zu errechnen. Dessen Graustufen der Pixel repräsentieren die Signalstärke für jeden einzelnen Voxel, also letztendlich wie viele angeregte Protonenspins in welchem Voxel zur Magnetisierung beigetragen haben [23, 30, 31, 34].

⁵Bereits die Messung einer Schicht aus 256×256 Voxeln würde bei einer Akquisitionszeit von $T_R = 100$ ms fast 9 h dauern. Durch alleinige Messungen der 256 Zeilen kann die Schicht dagegen in etwa einer halben Minute akquiriert werden [30].

Dafür werden alle Messungen zunächst in einer Rohdatenmatrix, dem sog. *k-Raum*⁶, zwischengespeichert. In diesem werden die Ortsfrequenzen in Phasenkodierrichtung k_y und Frequenzkodierrichtung k_x derart gespeichert, dass sich niedrige Ortsfrequenzen mit hoher Amplitude und geringer Phasenverschiebung im Zentrum befinden. Der *k-Raum* wird also von innen nach außen zeilenweise befüllt, wodurch das charakteristische Streifenmuster entsteht (Abb. 2.7a bzw. 2.6 links). Wenn dieser *k-Raum* befüllt ist, kann aus ihm über eine inverse, diskrete 2D-Fouriertransformation (DFT) das (medizinisch) interpretierbare MRT-Bild errechnet werden. In der digitalen Bildverarbeitung wird hierfür der Algorithmus der *schnellen Fourier-Transformation* (FFT), bzw. die Rücktransformation (FFT^{-1}) verwendet [23, 31, 33, 35].

Eine bei erster Betrachtung schwer verständliche Tatsache ist, dass der Pixel oben links im *k-Raum* nicht den Pixel oben links im Bildraum repräsentiert, da der *k-Raum* eben nicht pixelweise befüllt wird, sondern seine Zeilen mathematisch komplexen, fouriertransformierten Projektionen aus dem Bildraum entstammen. Damit enthalten alle Punkte im *k-Raum* Informationen über alle Punkte im Bildraum und vice versa (grüne und rote Pfeile in Abb. 2.6) [15, 29, 31]. Anschaulich wird dies, wenn man nur ein kleines Quadrat aus Datenpunkten in der Mitte des *k-Raumes* in Abb. 2.7a entnimmt und trotzdem aus der Fourier-Rücktransformation ein identifizierbares Bild des kompletten Hirns erhält, das im Vergleich zu Abb. 2.7b allerdings sehr verschwommen wäre. Das wäre deshalb möglich, weil in der Mitte des *k-Raums* (dort wo die Spins keine Frequenz- und Phasenverschiebung erfahren haben, weil der *k-Raum* aus der Mitte heraus befüllt wird) die Informationen für den Bildkontrast liegen. An den Rändern dagegen haben die gemessenen Spins eine zunehmende Frequenz- und Phasenverschiebung und dort sind Informationen für die Auflösung und damit die Bildschärfe enthalten. Je mehr Messungen aufgenommen werden und je mehr Punkte damit im *k-Raum* enthalten sind, umso besser wird auch die Auflösung des MR-Bildes. Dabei ist wichtig, dass das Rauschen gleichmäßig über den *k-Raum* verteilt ist (Näheres zum Rauschen in Kap. 3.2), während das Signal im Zentrum des *k-Raums* konzentriert ist. Wird nun die Auflösung durch mehr Messungen erhöht, steigt auch das Rauschen entsprechend an. Durch zusätzliche digitale Filter ist es jedoch möglich, Bereiche im *k-Raum* stärker zu gewichten als andere, um damit das Rauschen bei höherer Auflösung zu minimieren [15, 27, 30–33].

2.2.3 Magnitudenbilder, Phasenbilder und Suszeptibilitäten

Nach der Fourier-Rücktransformation aus dem *k-Raum* (Abb. 2.7a) erhält man das mathematisch komplexe Signal, welches den vollständigen Bildraum abdeckt. Wie im vorherigen Kapitel erläutert, werden dessen Imaginär- und Realkomponenten in 90° gegeneinander verschobenen Messspulen induziert. Da es sich bei beiden um reale Messdaten handelt, könnte man aus ihnen separate MR-Graustufenbilder rekonstruieren. In diesen würde die Phasenverschiebung der beiden Signale um 90° durch diffuse, dunkle Bänder (Bereiche, in denen die MR-Informationen des jeweils anderen Bildes fehlen) sichtbar werden [15, 29]. Solche Bilder haben jedoch klinisch keinerlei Relevanz, stattdessen greift man klassisch auf die Absolutbeträge der Signale für sog. Magnituden- oder Betragsbilder (Abb. 2.7b) zurück. In ihnen wird die Dichte, bzw. die Anzahl der angeregten Spins sichtbar, wobei hellere Bereiche auf stärkere Signale und damit mehr Spins zurückzuführen sind. Abhängig von der medizinischen Fragestellung und der dafür entsprechend

⁶Der Begriff „*k-Raum*“ (teils auch „Ortsfrequenz-Raum“) kommt von der Wellenzahl k aus der Wellenphysik.

gewählten Gewichtung (vgl. Kapitel 2.1.5) kann man so variable Bildkontraste für unterschiedliche Gewebearten ausnutzen, so dass beispielsweise bei einer T_2 -Gewichtung Entzündungen aufgrund der Durchblutung heller als umliegendes Gewebe dargestellt werden können [18].

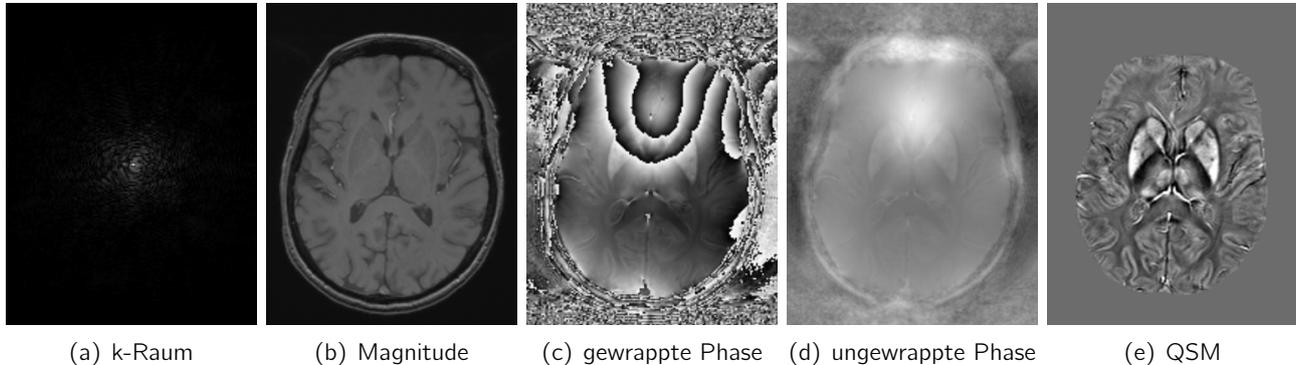


Abb. 2.7: Verschiedene Abbildungen, generiert aus einer axialen MRT-Aufnahme eines Patienten-Hirns. Bilder freundlicherweise bereitgestellt vom Institut für Diagnostische und Interventionelle Radiologie des Universitätsklinikums Düsseldorf.

Da das komplexe MR-Signal einen Phasenwinkel enthält, lassen sich daraus Phasenbilder errechnen, welche in dieser Arbeit die zentrale Rolle spielen. Diese haben den Nachteil, dass sie nur gefaltet akquiriert werden können, wobei diese Faltungen als charakteristische Linien in Abb. 2.7c erkennbar sind. Im nächsten Kapitel soll noch genauer mathematisch erläutert werden, woher diese Faltung stammt und wie diese *gewrappten* Bilder zu weiterverwendbaren Phasenbildern entfaltet werden können (Abb. 2.7d). Die Informationen in den Phasenbildern sind im Gegensatz zu den Magnitudenbildern proportional zu lokalen Magnetfeldänderungen [10]. Damit lässt sich die **unterschiedliche Magnetisierbarkeit von Gewebe** und Objekten im externen Magnetfeld darstellen, die sog. magnetische Suszeptibilität χ . Diese ist eng mit der magn. Permeabilität μ verknüpft und war lange nur eine störende, intrinsische Gewebeeigenschaft, die in MR-Bildern zu unerwünschten Artefakten (Signalverlust, Bildverzerrung) führt [27]. Mit Hilfe der suszeptibilitätsgewichteten Bildgebung (SWI), bei der eine modifizierte Phasenmaske mit dem Magnitudenbild multipliziert wird, ist es mittlerweile möglich, die Phasendifferenzen aufgrund der unterschiedlichen Gewebes susceptibilitäten zur Darstellung von ferritinhaltigem Gewebe, Kalzifikationen oder desoxygeniertem Blut⁷ zu nutzen und damit unter anderem kleinste Blutungen im Hirn (Mikrohämorrhagien) oder Eisenablagerungen im Gehirn zu detektieren [9, 10, 36]. Da der SWI-Kontrast die zugrundeliegende Suszeptibilitätsverteilung nur indirekt und qualitativ darstellt, wurde darauf aufbauend das Verfahren der quantitativen Suszeptibilitätskartierung (QSM) entwickelt. Damit ist die hochspezifische Differenzierung von Blutungen, Eisenverteilungen und Kalzifikationen im Gehirn möglich, über die Rückschlüsse auf den Verlauf von neurodegenerativen Krankheitsbildern wie Morbus Parkinson, Morbus Alzheimer, Chorea Huntington oder Multipler Sklerose möglich sind. Auch zur Darstellung von Gehirntumoren, Gefäßanomalien und Schlaganfällen können QSM-Karten wie in Abb. 2.7e verwendet werden [11, 12].

⁷Die Darstellung von venösen Gefäßen mit Hilfe von sauerstoffarmem (= weniger diamagnetischem) Blut wurde früher als „BOLD-Venografie“ (*Blood Oxygenation Level Dependent*) bezeichnet, das Verfahren gehört allerdings zur SWI [9, 36].

2.3 Grundlagen des Phase Unwrapping

Magnituden- und Phasenbilder sind, wie in den vorherigen Kapiteln erläutert, keine separaten Instanzen, die auf unterschiedliche Weise gemessen werden. Die Informationen liegen in mathematisch komplexen Messdaten vor und müssen erst mittels inverser DFT aus den k -Raum-Daten rekonstruiert werden. Die „Phase“ ist dementsprechend auch kein eigenständig gemessenes Signal, sondern eher eine Eigenschaft des komplexen MR-Messsignals z [4, 15]. Dieses hat eine reale (\Re) und eine imaginäre (\Im) Komponente, welche sich zum besseren mathematischen Verständnis des Phase Unwrappings auch in der Polarform darstellen lassen:

$$z = \Re(z) + \Im(z)i = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \quad (2.13)$$

Der Betrag des Signals $|z|$ und der Phasenwinkel φ enthalten dabei die entsprechenden Informationen für die Magnituden- (oder Betrags-) und Phasenbilder [15, S. 299 u. 4, Gl. 1.13]:

$$\begin{aligned} \text{Magnitude: } |z| &= \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} \\ \text{Phase: } \varphi &= \arctan\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z)}\right) = \arctan\left(\frac{|z| \cdot \cos \varphi}{|z| \cdot \sin \varphi}\right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dabei ist \arctan der 4-Quadranten-Arkustangens⁸, der auch als Wrapping-Operator \mathcal{W} bezeichnet wird. Daraus ergibt sich für die gewrappte Phase Φ_w und die Originalphase Φ_0 [4, Gl. 1.14]:

$$\Phi_w = \arctan(\Phi_0) = \mathcal{W}\{\Phi_0\} \quad \text{mit } -\pi < \Phi_w \leq \pi \quad (2.15)$$

Die Phase des komplexen MR-Signals z beschreibt durch die periodischen Winkelfunktionen also eine Rotation mit Periode 2π . Dadurch werden die Phasenwerte als Modulo von 2π angegeben, wobei es zu einem Phasensprung beim Übergang von π zu $-\pi$ kommt. Deshalb ist die Phase im Intervall $(-\pi, \pi]$ gewrappt und die dabei entstehenden Phasensprünge sind in den gewrappten Phasenbildern als charakteristische Linien erkennbar (vgl. Abb. 2.7c) [4]. Diese Modulo-Charakteristik sorgt zudem dafür, dass beim Wrap-Prozess Informationen über die Originalphase verloren gehen⁹. Es gilt entsprechend [4, Gl. 1.5]:

$$\Phi_0 = \Phi_w + k \cdot 2\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z} \quad (2.16)$$

Dabei ist k ein unbekanntes ganzzahliges Vielfaches von 2π , um das die gewrappte Phase gegenüber der Originalphase verschoben sein kann. Es handelt sich also um einen nicht-linearen Faltungsprozess, da man nicht mehr direkt auf die konkreten, ursprünglichen Phasenwerte schließen kann. Man spricht in diesem Zusammenhang von **Phasemehrdeutigkeit**.

Zur grafischen Verdeutlichung ist in Abb. 2.8a ein kreisförmiges Phasenbild mit Graustufen-Pixelwerten von 0 bis 16 rad dargestellt. Dieses wird in Abb. 2.8c als Pseudo-3D-Ansicht einer Glockenkurve visualisiert. Beim Wrap-Vorgang werden alle Phasenwerte gemäß Gl. 2.15 in den Wertebereich $(-\pi, \pi]$ transferiert. Übertragen auf die Glockenkurve bedeutet dies, dass diese

⁸Der klassische Arkustangens ist definiert in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und auf 2 Quadranten beschränkt. Der 4-Quadranten-Arkustangens erweitert den Definitionsbereich auf das Intervall $(-\pi, \pi]$, um alle 4 Quadranten der komplexen Ebene abzudecken (z.B. für Polarkoordinaten). In mehreren Programmiersprachen existiert dafür die Funktion $\text{atan2}()$. [37, u. 28, Kap. 13.5]

⁹Bsp.: $8 \bmod 3 \equiv -4 \bmod 3 \equiv 17 \bmod 3 \equiv 2$. Der Rest entspricht der gewrappten Phase Φ_w und ist immer 2. Die *kongruente Restklasse* $(8, -4, 17)$ entspricht allen möglichen Originalphasen Φ_0 . Man kann nicht direkt von Φ_w auf ein Φ_0 schließen.

immer beim Wert π rad „abgeschnitten“ und darüber liegende Teile auf $-\pi$ rad versetzt werden, solange bis alle Pixelwerte in diesem Definitionsbereich liegen (Abb. 2.8d). Schaut man von oben auf die xy-Ebene dieser ineinander gestapelten Glocke, erhält man das gewrappte 2D-Phasenbild mit den charakteristischen Streifen an den „Schnittkanten“, den sog. Phasensprüngen (Abb. 2.8b). In Abb. 2.8e sind die Profilkurven entlang der Hauptdiagonalen beider Phasenbilder vereint, um die Phasensprünge genauer zu identifizieren. Die Algorithmen translätieren die gewrappte Kurve (Φ_w , rot) zurück ins Original (Φ_0 , blau), indem sie im einfachsten 1D-Fall von links nach rechts die Kurve auf Unstetigkeitsstellen überprüfen und ab diesen die Funktionswerte um ein passendes Vielfaches von 2π derart verschieben, dass die Funktion wieder stetig ist.

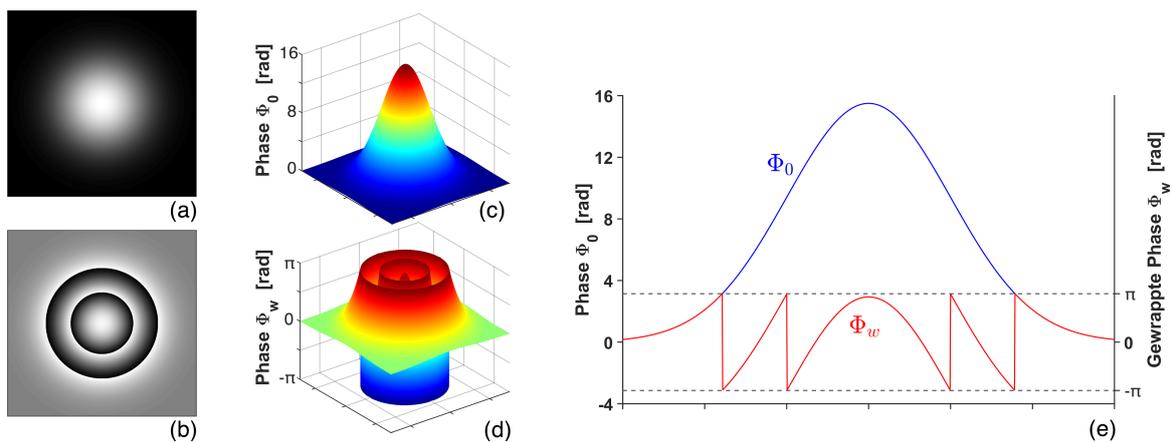


Abb. 2.8: Veranschaulichung der Faltung anhand einer 2D-Phase und ihrer Pseudo-3D-Projektion als Glockenkurve. Beim Wrappen wird die Glockenkurve „in sich gestapelt“, wodurch die charakteristischen Linien entstehen.

2.3.1 Komplikationen beim Unwrapping

Die wenigsten Unwrap-Algorithmen werden Probleme haben, aus der gewrappten Glockenkurve in Abb. 2.8e wieder die Originalkurve zu ermitteln. In der Realität liegen jedoch nie solche sauberen und eindeutigen Signalfunktionen vor. Sie sind deutlich komplexer und **mit Rauschen überlagert**, welches bei MRT-Aufnahmen unweigerlich auftritt (vgl. Kapitel 3.2). Abb. 2.9a zeigt beispielhaft eine mit leichtem Rauschen überlagerte, sinusförmige Phasenfunktion Φ_0 (blau), sowie die zugehörige gewrappte Phasenfunktion Φ_w (rot). Letztere wird mit Hilfe des MATLAB-eigenen 1D-Unwrapping-Algorithmus [38] rekonstruiert und das Ergebnis als Φ_{uw} im selben Graphen geplottet (grün). Dabei sieht man, dass die rekonstruierte Phase gegenüber der Originalphase verschoben ist, was am Startpunkt der Rekonstruktion liegt. Der Algorithmus muss mangels Informationen davon ausgehen, dass der erste Funktionswert der Ursprungsphase entspricht (*Known True Phase, KTP*) und wird von dort ausgehend die Funktion an ihren Unstetigkeitsstellen rekonstruieren.

In Abb. 2.9b wird das Rauschen stark erhöht, was zu einem unidentifizierbaren Unwrapergebnis führt, dem jeglicher Sinuscharakter verloren geht. Da das Rauschen eine Bandbreite von mehr als π rad aufweist, ist es dem Algorithmus unmöglich, treffsicher zu entscheiden, ob ein gewrappter Funktionswert an einer Unstetigkeitsstelle ins Positive oder ins Negative korrigiert werden muss. Dabei sind die Ergebnisse bei verändertem Rauschen mit gleicher Bandbreite durchaus

unterschiedlich, so dass durch bloßen Zufall selbst bei dieser Rauschstärke eine Sinusfunktion mit wenig Fehlstellen rekonstruiert werden könnte. Die Rekonstruktion der Funktion kann sich allerdings extrem ändern, wenn sich nur das Rauschen minimal ändert, denn gerade bei leicht- bis mittelstark verrauschten Signalen spielt Fehlerfortpflanzung eine bedeutende Rolle. Vor allem im Eindimensionalen wirken sich einmal falsch getroffene Annahmen stark auf die nachfolgenden Unwrap-Entscheidungen aus. Das Ergebnis hängt also nicht nur von der reinen Rauschintensität (bzw. dem Signal-zu-Rausch-Verhältnis, SNR) ab, sondern auch von einer zufälligen Komponente, die in den durchgeführten Untersuchungen durch hohe Iterationszahlen und statistisch gemittelte Ergebnisse minimiert wird. Dennoch ist klar erkennbar, dass sich ein deutlich größeres Rauschen (und damit ein geringeres SNR) extremer auf das Unwrap-Ergebnis auswirkt.

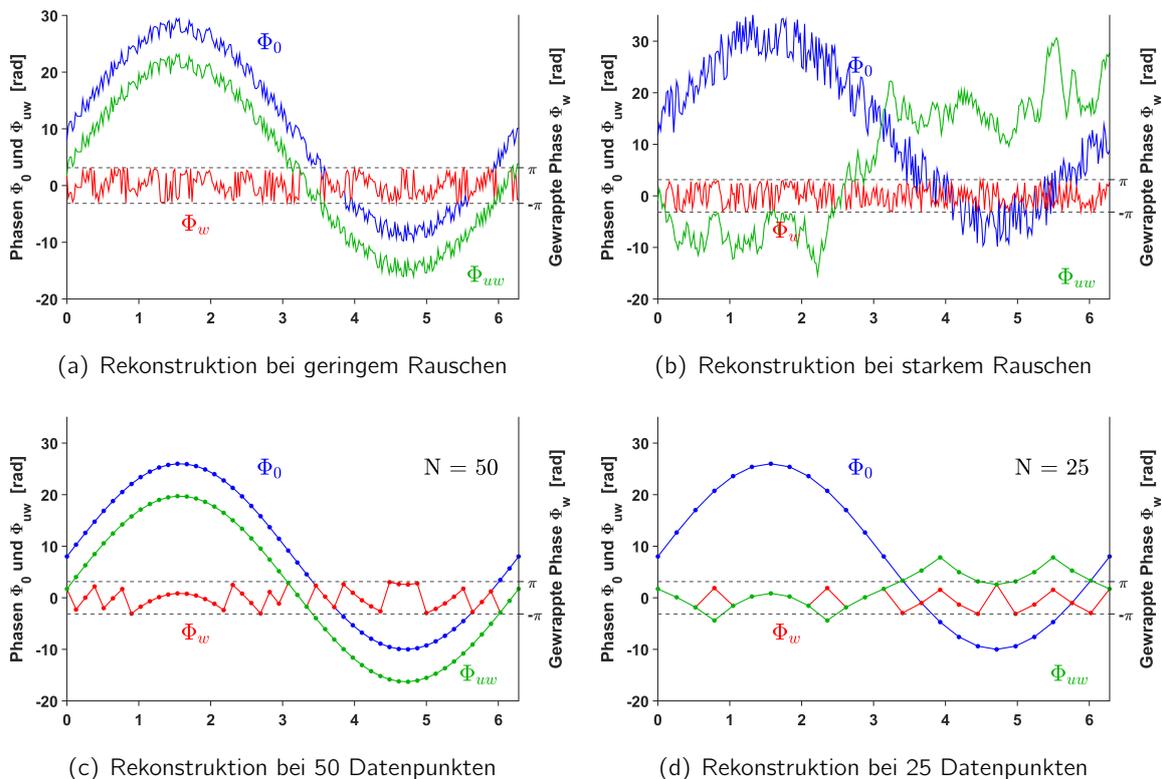


Abb. 2.9: Darstellung des Einflusses von Rauschstärke und Abtastrate auf das Unwrappergebnis Φ_{uw} (grün) am Beispiel einer 1D-Sinusfunktion. Blau: Ursprüngliche Sinusfunktion Φ_0 . Rot: Gewrappte Funktion $\Phi_w \in (-\pi, \pi]$.

Ein weiterer Aspekt, der beim Unwrapping zu Komplikationen führen kann, ist **Undersampling** bzw. **Aliasing**. Bei MR-Aufnahmen ist es physikalisch nicht möglich, unendlich dünne Schichten und damit Datenpunkte zu selektieren. Die Abtastrate der einzelnen Datenpunkte hat jedoch einen Einfluss auf die Güte der Algorithmenergebnisse. In Abb. 2.9c wurde die Sinuskurve mit $N = 50$ Funktionswerten und ohne Rauschen dargestellt. Analog zu Abb. 2.9a hat der Algorithmus keine Schwierigkeiten, die blaue Originalphase Φ_0 aus der roten, gewrappten Phasenfunktion Φ_w zu rekonstruieren (mit unvermeidbarer Verschiebung aufgrund der Phasenmehrdeutigkeit). Bei halbiertes Datenpunktzahl (Abb. 2.9d) liegen die Funktionswerte derart weit auseinander, dass die Algorithmen genau wie bei zu starkem Rauschen zwangsläufig Fehlannahmen treffen und somit den ursprünglichen Funktionscharakter nicht wiederherstellen können.

2.3.2 Wegunabhängigkeit und Residuennachweis

Beim Phase Unwrapping handelt es sich um eine nicht vollständig lösbare Aufgabe, da ohne weitere Informationen für gewrappte Phasenbilder unendlich ungewrappte Phasen möglich wären, die alle 2π -kongruent zueinander sind (vgl. Kap. 2.3). Daher existiert auch kein perfekter Algorithmus, um dieses Problem zu lösen. Es gibt viele verschiedene Algorithmen, die meist nach dem Prinzip arbeiten, die Phasengradienten ∇_{Φ} zweier benachbarter Pixel aufzusummieren und anschließend ein ganzzahliges Vielfaches $k \cdot 2\pi$ zu addieren, damit die Differenz beider Phasen kleiner als π ist [4]. Letzteres ist eine grundlegende Annahme (Itoh's Kontinuitätsbedingung [39]), um die ursprüngliche Phase aufgrund der Beschränkung der gewrappten Phase auf das Intervall $(-\pi, \pi]$ durch Integration der Phasendifferenzen zwischen den Pixeln bestimmen zu können. Zwei Pixel r_0 und r können dabei bei zwei und mehr Dimensionen auf beliebig viele Wege C miteinander verbunden werden, solange Itoh's Bedingung nicht verletzt wird. Zur Bestimmung des Phasenwertes von $\Phi(r)$ gilt daher das allgemeine Wegintegral [4, Gl. 2.1]:

$$\Phi(r) = \int_C \nabla_{\Phi} \cdot dr + \Phi(r_0) \quad (2.17)$$

Problematisch wird es, wenn eine Diskontinuität vorliegt, d.h. wenn der Phasensprung beispielsweise durch eine hohe intrinsische Variation der Phase (z.B. an Gewebegrenzen) oder durch ein sehr niedriges SNR den Wert von π überschreitet [40]. Die aus diesen lokalen Diskontinuitäten resultierende inkorrekte Integration pflanzt sich zu globalen Fehlern in der gesamten Phase fort, weshalb die zentrale Aufgabe beim Phase Unwrapping darin besteht, solche Diskontinuitäten zu lokalisieren und zu umgehen [41]. Das Ergebnis der Phasenrekonstruktion muss dabei unabhängig von der Richtung und Reihenfolge bleiben, mit der die Phasengradienten integriert werden (Wegunabhängigkeit), damit die Ergebnisphase eindeutig determiniert und nicht bei mehrmaliger Rekonstruktion der selben gewrappten Phase von zufälligen Schwankungen geprägt ist.

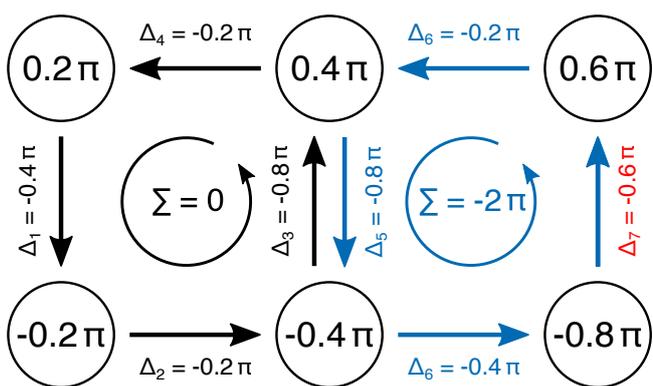


Abb. 2.10: Nachweis einer Residue (im blauen Weg rechts) anhand der aufsummierten Phasengradienten zwischen je 4 benachbarten Pixeln (schwarze Kreise) eines gewrappten Phasenbildes aus 6 Pixeln. Es liegt ein Phasensprung beim Gradienten Δ_7 (rot) vor [nach 4, Fig. 2.5 u. 2.6].

Zur Lokalisation der Unstetigkeiten in der Phase, den Diskontinuitäten oder auch Residuen, werden jeweils 4 benachbarte Pixel betrachtet. Abb. 2.10 zeigt dazu beispielhaft 6 Pixel eines gewrappten Phasenbildes. Um Residuen in diesem Phasenfeld nachzuweisen, werden zuerst die Gradienten zwischen jeweils zwei Pixeln errechnet, wobei gilt:

$$\Delta_{r,r_0} = \mathcal{W}\{\Phi(r) - \Phi(r_0)\} \quad (2.18)$$

Dabei ist \mathcal{W} der bereits in Gl. 2.15 eingeführte Wrapping-Operator. Diese Phasengradienten wurden bereits in die Abbildung eingefügt. Um die Phase auf Residuen zu untersuchen, werden die Gradienten von je 4 Pixeln aufsummiert. Dabei ist zu erwarten, dass sich die Phase eines beliebigen Pixels nicht ändert, wenn

man ausgehend von diesem Pixel die Gradienten über einen geschlossenen Weg zurück zu diesem Pixel integriert. Im linken, schwarzen Weg in Abb. 2.10 ist dies auch gegeben. Die Summe der Phasengradienten entlang der schwarzen Pfeile beträgt Null, womit dieser Weg keine Residue enthält. Für den blauen Integrationspfad zwischen den rechten 4 Pixeln erhält man jedoch als Ergebnis -2π . Das bedeutet, dass sich die bereits bekannte Phase des Startpixels ändern würde, nur weil eben jene Phase entlang eines bestimmten Weges erneut berechnet wurde. Damit wäre die zuvor erwähnte Bedingung der Wegunabhängigkeit verletzt.

Die Ursache hierfür liegt im rot unterlegten Gradienten Δ_7 . Die Differenz der Phasenwerte beider Pixel beträgt eigentlich $0.6\pi - (-0.8\pi) = 1.4\pi$ und liegt damit außerhalb des Definitionsbereichs $(-\pi, \pi]$ für die gewrappte Phase. Damit ist Itoh's Bedingung verletzt und es liegt ein Phasensprung vor. Der gewrappte Phasengradient berechnet sich entsprechend zu $\Delta_7 = \mathcal{W}\{0.6\pi - (-0.8\pi)\} = -0.6\pi$. Da die Summe der Gradienten entlang des blauen Pfades -2π beträgt, spricht man in diesem Beispiel von einer Residue mit negativer Polarität [4].

2.3.3 Verfahren des räumlichen Phase Unwrapping

Es gibt viele verschiedene Verfahren, nach denen Phase-Unwrapping-Algorithmen arbeiten. Dabei wird unter anderem zwischen *temporalen* (zeitlichen) und *spatialen* (räumlichen) Verfahren unterschieden¹⁰. Die spatialen Algorithmen gliedern sich wieder in verschiedene Dimensionen, von 1D-Algorithmen (wie für das Beispiel in Kap. 2.3.1 verwendet) über 2D- und in der MR-Bildgebung häufig benutzte 3D-Algorithmen, bis hin zu multidimensional verwendbare nD-Algorithmen. In dieser Arbeit werden spatiale 2D-Algorithmen untersucht, welche sich wiederum in *lokale*, *regionale* und *globale* Algorithmen unterteilen [7]. Die lokalen Algorithmen betrachten dabei die Phasenänderung von einem Pixel zum nächsten entlang bestimmter Wege (*Path-Following*), während die globalen Algorithmen nach einer möglichst homogenen Lösung für das gesamte Phasenfeld suchen, wobei größere lokale Abweichungen in Kauf genommen werden, solange die globale Abweichung minimiert wird. Die regionalen Algorithmen separieren das Phasenbild in Areale, die zunächst einzeln verarbeitet werden, um anschließend diese Regionen zu größeren Arealen zusammenzufassen und so die gesamte Phase zu entfalten [4, 7]. Die in dieser Arbeit verwendeten lokalen Algorithmen arbeiten (ebenso wie die globalen Algorithmen) wieder nach gänzlich anderen Prinzipien. Nachfolgend sollen die lokalen und globalen Ansätze anhand des Verfahrens je eines der verwendeten Algorithmen exemplarisch erläutert werden. Die einzelnen Methoden der verwendeten Algorithmen werden in Kapitel 3.3 noch näher erläutert.

Lokale Path-Following-Verfahren

Das Prinzip der Path-Following-Algorithmen basiert auf der [Integration der Phasengradienten entlang eines bestimmten Weges](#), der beim PF-Goldstein-Algorithmus durch die Residuen definiert wird und ausgehend von einem Pixel das gesamte Phasenbild einbeziehen soll. Dabei ist es essentiell, dass zunächst die Residuen identifiziert werden (vgl. Kap. 2.3.2), um diese bei der Rekonstruktion zu umgehen und damit die Wegunabhängigkeit zu erhalten. Sind keine Residuen vorhanden, ist das Phasenbild immer vom gewählten Integrationsweg unabhängig [8, 40].

¹⁰Die Klassifizierung der Phase-Unwrapping-Algorithmen erfolgt in den Veröffentlichungen dazu äußerst heterogen und variiert u.a. abhängig von der jeweiligen Disziplin. Die Einteilung in diesem Kapitel basiert auf der Klassifikation nach [7].

Im Falle des Phasenbildes in Abb. 2.11, in dem die Phasenwerte von $-\pi$ in Schwarz bis π in Weiß dargestellt sind, befinden sich in der Mitte zwei Residuen mit positiver und negativer Polarität. Die Wahl des Integrationspfades beeinflusst hier die Phase in Punkt B, da der rote Weg 1 durch die Residuen eine kleinere Anzahl an Phasensprüngen aufweist, als die blauen Wege 2 und 3. Die Phase in B, integriert entlang des roten Weges, ist damit effektiv um 2π geringer als integriert über die anderen Wege. Um dies zu verhindern, wird beim PF-Goldstein-Algorithmus ein sog. „Branch Cut“ als virtuelle Barriere zwischen Residuen gegensätzlicher Polarität gelegt, wodurch die Integration über Weg 1 unzulässig wird. Damit kann B wieder unabhängig von der Wahl der noch verfügbaren Integrationswege korrekt bestimmt werden, ohne dass sich das Phasenbild insgesamt ändert. Die Branch Cuts isolieren also Diskontinuitätsstellen an denen intrinsische Phasengradienten $> \pi$ vorliegen dürfen. Existieren mehrere solcher Residuen in der Phase, muss darauf geachtet werden, dass sie auf kürzest möglichem Wege miteinander verbunden werden und die Branch Cuts keinen Bereich des Phasenbildes isolieren¹¹. In der Regel führt diese pfadfolgende Methode zu einem besseren Ergebnis bei vertretbarem Rechenaufwand als die nachfolgende globale Methode [4, 7, 8].

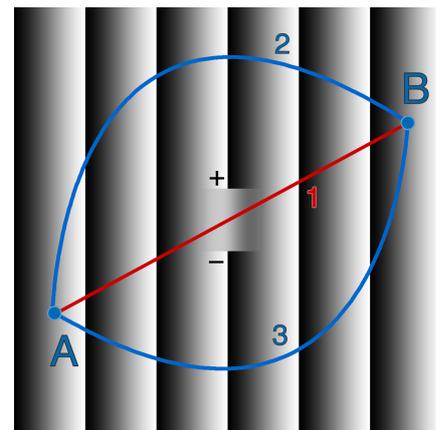


Abb. 2.11: Wegabhängigkeit bei einer positiven (+) und negativen (-) Residuen. Punkt B hängt vom Integrationsweg ausgehend von Punkt A ab. Die Wege 2 und 3 führen zu einem anderen Phasenwert in B als über Weg 1 [nach 4, Fig. 4.1].

Globale Least-Squares-Verfahren

Im Gegensatz zu den lokalen Ansätzen, wird bei den globalen Verfahren versucht, eine möglichst homogene Lösung für das gesamte Phasenbild zu finden. Hierbei werden keine Residuen identifiziert und keine Integrationspfade ausgewiesen, entlang derer die Phasengradienten kleiner als π sein müssen. Stattdessen wird, ähnlich wie bei *Surface-Fitting*-Verfahren¹², eine **homogene Funktion für das gesamte Phasenfeld gesucht**, die eine möglichst geringe Abweichung zu den Gradienten der gewrappten Phase aufweist. Es handelt sich hierbei um ein mathem. Minimierungsproblem. Das Minimum dieser Abweichung ϵ ist definiert als [4, Gl. 5.1 u. 42, Gl. 2.11]:

$$\epsilon^p = \sum_{i=1}^n |y_i - f(x_i)|^p \quad (2.19)$$

Dabei muss die Lösungsfunktion $f(x_i)$ erst iterativ gefunden werden, so dass ihre Abweichung ϵ zu den Datenpunkten (x_i, y_i) der gewrappten Phase minimal ist. Diese Lösung wird für $p = 2$ mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate (engl. *Least Squares Method*) ermittelt, indem die *quadratische* Abweichung minimiert wird. Für $p = 1$ erhält man die minimale *absolute* Abweichung und die Lösung für $p = 0$ liefert eines der möglichen lokalen Minima. Die verwendeten globalen Least-Squares-Algorithmen sind effizienter und deutlich schneller als lokale Algorithmen, führen jedoch oft zu schlechteren Ergebnissen, da sich die Pixelwerte der entfalteten Phase nicht auf 2π -Vielfache der jeweiligen gewrappten Phase beschränken. Sie können beliebige Werte annehmen, solange sich dadurch eine homogene Phasenfunktion ergibt [3, 4, 40, 43].

¹¹Überschneiden sich z.B. 3 Branch Cuts im Dreieck, wäre das Innere isoliert, da kein Integrationsweg hinein zulässig wäre.

¹²Dabei werden die einzelnen Messdaten interpoliert, bis man eine geschlossene Oberflächenfunktion erhält.

3 Material und Methoden

In dieser Arbeit sollen Phase-Unwrapping-Algorithmen quantitativ verglichen werden. Dafür ist es notwendig, das zugrundeliegende, ungewrappte Phasenbild zu kennen, um die Algorithmenergebnisse damit vergleichen zu können. Hierfür wurde ein Skript in MATLAB¹³ entwickelt, einer Software zur numerischen Lösung und grafischen Darstellung mathematischer Probleme mithilfe von Matrizen. Damit können folgende drei MR-Datensätze simuliert (bzw. im Falle des Set 3 eingelesen) werden, die jeweils störungsfreie Magnituden- und Phaseninformationen enthalten:

- Set 1:** Ein einfacher 2D-Kreis mit linear ansteigendem Phasengradienten.
- Set 2:** Eine 2D-Schicht aus einem 3D-Körper, bestehend aus 2 Kugelvolumina mit den Eigenschaften von Fettgewebe und Wasser mit eingeschlossener und umgebender Luft.
- Set 3:** Eine 2D-Schicht aus einem auf Basis von Patientenaufnahmen extern simulierten 3D-Nieren-MRT mit möglichst realitätsnahen, komplexen Strukturen und Grenzflächen.

Beurteilt wird dabei die Güte von 6 unterschiedlichen Algorithmen über die pixelweise ermittelte Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung (RMSE) der Algorithmenergebnisse von der bekannten Ursprungsphase. Nachfolgend sollen die verwendeten Datensätze und Algorithmen, sowie die Auswertungsmethode detailliert erläutert werden.

3.1 Aufbau des MATLAB-Skripts

Das dieser Arbeit zugrundeliegende Skript wurde für MATLAB entwickelt. Die Algorithmen wurden als externe Funktionen eingebunden und deren Aufrufe entsprechend angepasst. Der Ablauf des Skriptes (schematisch dargestellt im Anhang in Abb. A.1) folgt dem Muster:

- Auswahl der Skriptparameter (z.B. Anzahl der Iterationen), der auszuführenden Algorithmen, des verwendeten Datensatzes und der jeweils zugehörigen Datensatzparameter (z.B. Stärke und Richtung des Magnetfeldes im Set 2 oder SNR bei allen Sets)
- für jede Untersuchung (z.B. für SNR = 5, 10 und 30 dB):
 - Generierung der Ausgangsdaten anhand der jeweiligen Untersuchungsparameter
 - für jede Skriptiteration: Gegebenenfalls Überlagerung des Datensatzes mit veränderlichem Rauschen, anschließend Ausführung der Algorithmen
 - für jeden Algorithmus: Numerische Einzelevaluation der Iterationsergebnisse
 - Evaluation aller gemittelten Algorithmenergebnisse für die jeweilige Untersuchung
- Abschlussevaluation aller Untersuchungen und Erstellung der Ergebnisgraphen

Die Funktion zur Auswertung der Iterationsergebnisse ist schematisch im Anhang in Abb. A.2 dargestellt. Auf diese Evaluationsmethode wird in Kapitel 3.5 detaillierter eingegangen werden.

¹³MATLAB® Version 8.5.0.197613 (R2015a) unter Verwendung der Image Processing Toolbox 9.2, der Signal Processing Toolbox 7.0 und der Statistics and Machine Learning Toolbox 10.0 [5]

3.2 Generierung der verwendeten Datensätze und des Rauschens

Wie in den Kapiteln 2.2.2 bis 2.3 erläutert, können aus den mathematisch komplexen MR-Messdaten unter anderem Magnituden- und Phasenbilder generiert werden. Entsprechend bestehen auch alle drei in dieser Arbeit verwendeten Datensätze aus komplexzahligen, zweidimensionalen Matrizen \mathbf{Z} mit variabler Größe¹⁴, deren Absolutwerte als Magnitudenmatrix $\mathbf{M} = \text{abs}(\mathbf{Z})$ und deren Winkelanteile als Phasenmatrix $\Phi = \text{angle}(\mathbf{Z})$ abgebildet werden können (vgl. Kap. 2.3, Gl. 2.14). Exemplarisch dargestellt wird dies in Abb. 3.2a und 3.2e. Sowohl die Magnitudenmatrix als auch die ursprüngliche, ungewrappte Phasenmatrix Φ_0 werden für die unterschiedlichen Untersuchungen mit den in Kap. 3.4 aufgeführten Parametern des jeweiligen Datensatzes separat generiert. Aus diesen kann dann die komplexe Bildmatrix entsprechend der Gleichung 2.13 folgendermaßen pixelweise zusammengesetzt werden:

$$\mathbf{Z}(r, c) = \mathbf{M}(r, c) \cdot [\cos \Phi_0(r, c) + i \cdot \sin \Phi_0(r, c)] \quad (3.1)$$

mit $r, c =$ Zeile, bzw. Spalte der Matrix

Diese komplexe Matrix wird anschließend mittels 2D-FFT in den k-Raum transferiert (Beispiel: Abb. 3.2d) und kann dort mit Rauschen überlagert werden, welches zwangsläufig in MR-Bildern enthalten ist und daher auch in den simulierten Datensätzen berücksichtigt werden muss. Es gibt prinzipiell drei Quellen von Rauschen bei der MRT: *Thermisches Rauschen* wird hervorgerufen durch die ungeordnete Wärmebewegung der freien Ladungsträger (Brown'sche Bewegung) in den elektronischen Komponenten der MR-Scanner und im Probengewebe selbst, *systematisches Rauschen* entsteht u.a. durch Inhomogenitäten im statischen Magnetfeld oder Instabilitäten in den Gradientenfeldern und zusätzlich führen z.B. Atem- oder Körperbewegungen, sowie der Puls der Patienten zu *physiologischem Rauschen* [44, 45]. Anders als im klinischen Einsatz mit Patienten, haben bei Untersuchungen von Objekten oder flüssigkeitsgefüllten Phantomkörpern nur die ersten beiden intrinsischen Rauschquellen einen Einfluss auf die Bildqualität.

Man kann davon ausgehen, dass Rauschen in MR-Bildern alle gemessenen Frequenzen gleichermaßen beeinflusst, so dass es unabhängig von der Quelle als additives weißes Rauschen modelliert werden kann [46–48]. Gerade in Phasendaten lässt es sich mit einer Gaußverteilung annähern [49], entsprechend wird auch in dieser Arbeit auf [additives, weißes Gaußrauschen zur Rauschmodellierung](#) zurückgegriffen. Die komplexe Bildmatrix wird, basierend auf einer externen Funktion¹⁵, folgendermaßen mit Rauschen variabler Stärke im k-Raum überlagert:

$$\mathbf{Z}_{k,\text{noise}}(r, c) = \sqrt{\frac{\frac{1}{L^2} \sum_{r=0}^{n_r-1} \sum_{c=0}^{n_c-1} |\mathbf{Z}_k(r, c)|^2}{2 \cdot 10^{\frac{\text{SNR}}{10}}}} \cdot [\text{randn}(L) + \sqrt{-1} \cdot \text{randn}(L)] \quad (3.2)$$

mit $n_r, n_c =$ Anzahl der Zeilen, bzw. Spalten
und $L =$ Länge der k-Raum-Matrix \mathbf{Z}_k

¹⁴In den durchgeführten Untersuchungen wurden jeweils Matrizen für Bilder mit 200×200 Pixeln verwendet.

¹⁵Die in MATLAB 2015a fehlende Funktion AWGN() wurde (für komplexe 2D-Matrizen angepasst) aus [50] implementiert.

Ziel bei der MR-Bildgebung ist es, ein hohes Signal-zu-Rausch-Verhältnis (SNR) zu erreichen, da starkes Rauschen u.a. einen problematischen Einfluss auch auf das Phase Unwrapping hat (vgl. Kap. 2.3.1). Das SNR wird von vielen Aufnahmeparametern beeinflusst, beispielsweise von der gewählten Schichtdicke¹⁶, der angelegten Magnetfeldstärke, der Wahl der HF-Spulen, dem T_E und T_R oder auch der Bildmatrixgröße [18]. Es existieren mehrere Definitionen des SNR, die in der MR-Bildgebung inkonsistent verwendet werden. Da es sich hierbei um eine Verhältnisgröße handelt, wird es in vielen Publikationen im dekadischen Logarithmus mit der Einheit dB angegeben und in anderen ohne Einheit als direkte Größe verwendet. In dieser Arbeit wird die logarithmische Definition verwendet, so dass sich das SNR folgendermaßen errechnet [51, 52, Gl. 1.29 u. 53, Gl. 8.1-9]:

$$\text{SNR} = 10 \cdot \log_{10} \left[\frac{\sum_{r=0}^{n_r-1} \sum_{c=0}^{n_c-1} \left(\Phi_0(r, c) \right)^2}{\sum_{r=0}^{n_r-1} \sum_{c=0}^{n_c-1} \left(\Phi_0(r, c) - \Phi_{\text{uw}}(r, c) \right)^2} \right] \quad (3.3)$$

mit $n_r, n_c =$ Anzahl der Zeilen, bzw. Spalten

Das SNR bildet für alle 3 Datensätze einen der zwei Untersuchungsparameter, wobei in den externen Daten des Set 3 das Rauschen bereits inkludiert ist und entsprechend nicht im laufenden Skript dynamisch generiert wird. Das SNR der anhand Gl. 3.2 mit Rauschen überlagerten Bilder wird nach der Generierung überprüft¹⁷, wobei eine Abweichung von bis zu ± 0.4 dB zwischen dem als Parameter eingegebenen und dem letztendlich in den Phasenbildern messbarem SNR festzustellen ist. Diese Abweichungen sind abhängig von der verwendeten Matrixgröße und schwanken aufgrund der zufälligen Gaußverteilung zwischen den Iterationen, sofern als Rauschmodus im Skript „Dynamisches Rauschen“ verwendet wird. In diesem Modus, mit dem die meisten Untersuchungen durchgeführt wurden, wird für jede einzelne Iteration der Datensatz erneut mit zufällig-variablem Rauschen überlagert, wodurch sich entsprechend auch die Ergebnisse der Algorithmen verändern. Über die Mittelung der Iterationsergebnisse bei der Auswertung (vgl. Kap. 3.5) wird der spezifische Einfluss des Rauschens dann statistisch minimiert.

Um sicherzustellen, dass die Algorithmen deterministisch arbeiten und die Ergebnisse nicht bereits bei konstanten gewrappten Phasenbildern variieren, kann als Rauschmodus auch „Statisches Rauschen“ gewählt werden. Dabei werden für alle Iterationen die selben, einmalig mit Rauschen überlagerten Bilddaten verwendet. Für die Untersuchungen an Set 3 kann die Rauschgenerierung komplett deaktiviert werden, da dessen Bilddaten bereits verrauscht sind. Daher kann man die Determiniertheit der Algorithmen auch am Set 3 prüfen, die Untersuchungen selbst werden aber nur einmalig durchgeführt. Nach der Rauschüberlagerung im k-Raum werden die Daten wie auch bei der realen MR-Aufnahme durch inverse Fouriertransformation (FFT^{-1}) zurücktransformiert. Wie in Kap. 2.3 gezeigt, kommt es anschließend zur Faltung der Phase durch die Separation aus dem komplexen Datensatz mittels des 4-Quadranten-Arkustangens. Das so erhaltene Phasenbild (exemplarisch dargestellt in Abb. 3.2f) wird dann den Algorithmen bereitgestellt.

¹⁶In dünneren Schichten des zu scannenden Objektes sind weniger Protonen vorhanden, weshalb das Signal geringer ist.

¹⁷Zur Überprüfung wurde die Funktion `computeSNR()` der `SNR.java` von Sage D [51] angepasst. Das so ermittelte SNR wurde durch manuelle Vergleichsmessungen direkt an den erstellten NIFTI-Dateien mit verschiedenen Parametern verifiziert.

3.2.1 Set 1: Kreis mit linearem Phasengradienten

Der einfachste Datensatz Set 1 besteht in seiner Ausgangskonfiguration¹⁸ aus einem zentrierten Kreis mit frei wählbarem Radius und beliebiger Magnitude $\mathbf{M} > 0$, die im komplexen Datensatz zwar enthalten sein muss, auf die Phase jedoch im weiteren keinen Einfluss hat. Das eigentlich relevante Phasenfeld befindet sich nur innerhalb des Kreises und ändert sich dort von links nach rechts pixelweise um einen definierten Wert, der die Steigung des Phasengradienten definiert und in der weiteren Arbeit als Parameter Grad mit der Einheit $\frac{\text{rad}}{\text{px}}$ verwendet wird. Außerhalb des Kreises sind die Phase und die Magnitude 0.

Um sich den Phasengradienten besser vorstellen zu können, zeigt Abb. 3.1a die generierte Phasenmatrix und zusätzlich ist diese in Abb. 3.1d als Pseudo-3D-Ansicht dargestellt. Beim Unwrap-Vorgang (ohne vorherige Rauschüberlagerung) entsteht die charakteristische Phasensprunglinie, die in Abb. 3.1b als 2D-Phasenbild und in Abb. 3.1e wieder als Pseudo-3D-Grafik dargestellt ist. Wird dieses Datenset für die Untersuchungen zusätzlich mit Rauschen überlagert, erhält man die verrauschte, gewrappte Phase in Abb. 3.1c und 3.1f.

Eine Auswahl der gewrappten, rauschüberlagerten Phasenbilder des Set 1 mit verändertem SNR bzw. Gradienten ist in Abb. A.3 im Anhang zu finden. Diese bildeten die gefalteten Ausgangsmatrizen Φ_w , die von den Algorithmen in den jeweiligen Untersuchungen entfaltet werden.

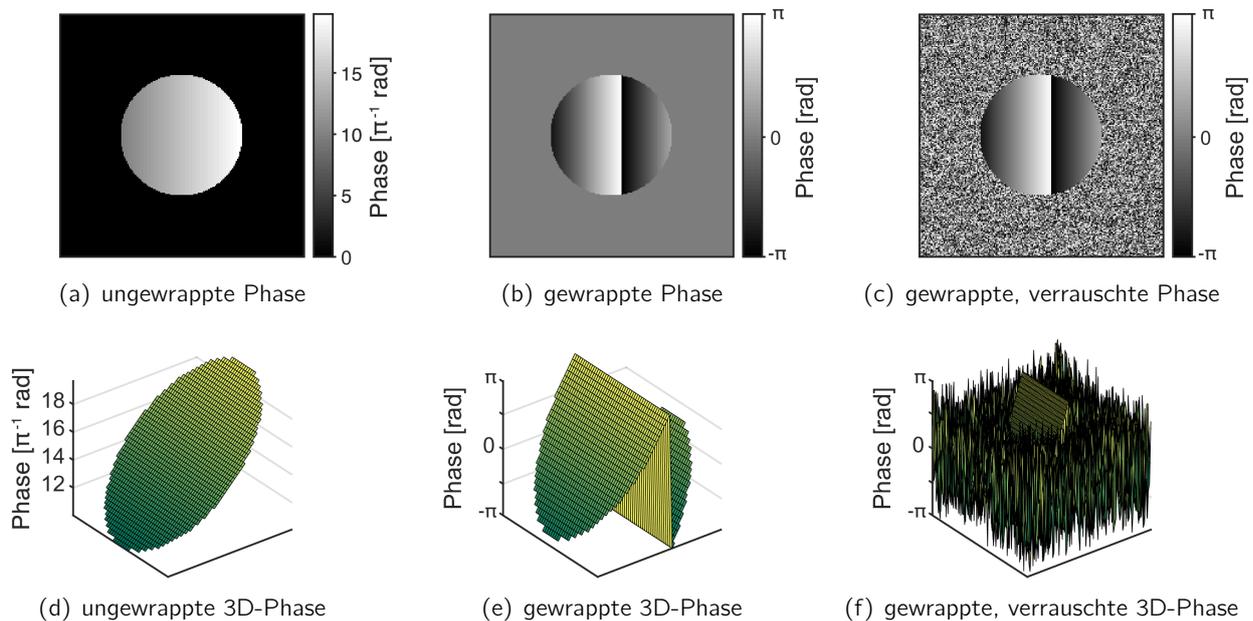


Abb. 3.1: Phasenmatrizen des Set 1 bei Grad $0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$. Die Abb. entstammen einer einzigen Skript-Iteration und wurden mit den jeweiligen Standard-Bildparametern¹⁸ erzeugt. In den Pseudo-3D-Ansichten wurden die umliegenden, leeren Pixel um den Kreis zur größeren Darstellung in den Achsenskalen exkludiert, die xy-Ebene ist nur auf den Kreis fokussiert.

¹⁸Matrixgröße: 200×200 Pixel, Kreisradius: 50 Pixel, Magnitude: 500, Grad: $0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$, SNR: 100 dB

3.2.2 Set 2: Fett/Wasser-Probenkörper mit Luft

Mit dem Set 2 wird die Brücke vom Set 1 mit seiner simplen 2D-Geometrie hin zu den möglichst realitätsnahen, aber simulierten 3D-Daten des Set 3 geschlagen. Es besteht aus 2 aneinander geschmiegtten Kugeln mit den Eigenschaften¹⁹ von Fettgewebe und Wasser in einer Umgebung aus Luft und mit einer eingeschlossenen Luftblase, um den Umgang der Algorithmen mit Phaseninformationen aus verschiedenen Gewebearten und an deren Grenzflächen zu betrachten. Die zugehörige Phase $\Phi_0(\vec{r})$ wird durch Multiplikation der zugrundeliegenden magnetischen Suszeptibilitätsunterschiede²⁰ $\Delta\chi(\vec{r})$ von Fett, Wasser und Luft mit dem Feld eines Einheitsdipols im k-Raum $D(\vec{k})$ mit Hilfe des *Forward Models* folgendermaßen berechnet [nach 11, Gl. 5 u. 6]:

$$\Phi_0(\vec{r}) = (\gamma \cdot B_0 \cdot T_E) \cdot \text{FFT}^{-1} \left(D(\vec{k}) \cdot \text{FFT}(\Delta\chi(\vec{r})) \right) \quad (3.4)$$

mit Einheitsdipol $D(\vec{k}) = \frac{1}{3} - \frac{k_z^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$

Dabei wird das gyromagnetische Verhältnis $\gamma = 26.7513 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}\text{T}^{-1}$, die Feldstärke $B_0 = 3 \text{ T}$ und ein variables T_E verwendet, wobei letzteres einen der beiden Untersuchungsparameter dieses Datensatzes darstellt. Die derart erzeugte 3D-Phasenmatrix wird in Abb. 3.2b und 3.2c über 2D-Schnitte in den 3 Koordinatenebenen visualisiert. Aus der Mitte dieses 3D-Datensatzes wird eine Schicht der xz-Ebene entnommen, deren Magnitude und Phase in Abb. 3.2a und Abb. 3.2e dargestellt sind. Nach Transformation in den k-Raum (Abb. 3.2d) und zurück erhält man die gewrappte Phase, die den Algorithmen zur Verfügung gestellt wird (Abb. 3.2f).

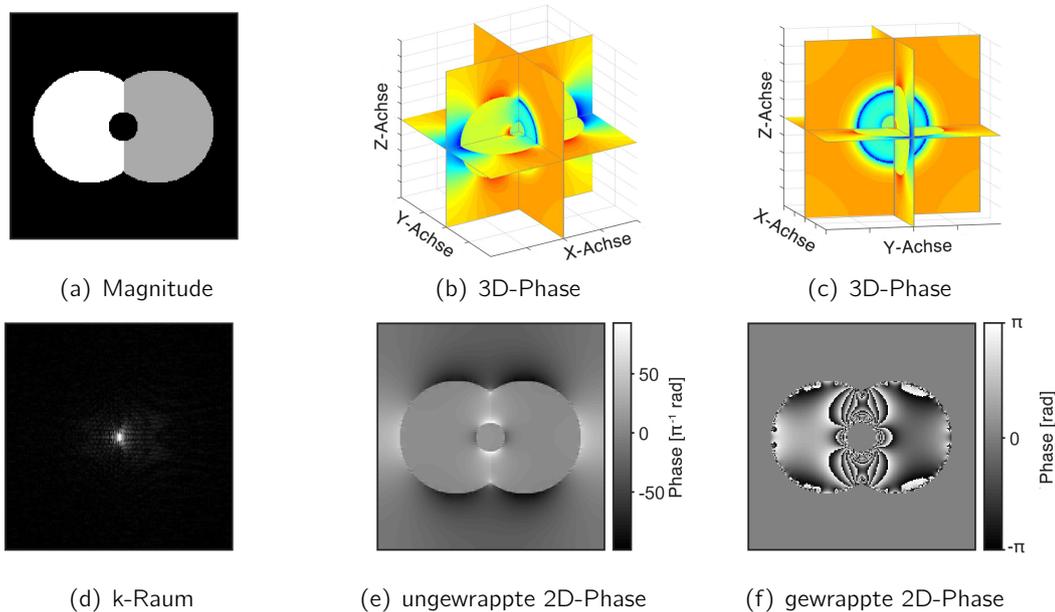


Abb. 3.2: Ausgangsbilder des Datensatzes Set 2 mit 3D-Ansicht des Dipols aus verschiedenen Richtungen, den gefalteten (bei $T_E = 19.68 \text{ ms}$) und entfalteten Phasenmatrizen, sowie dem Magnitudenbild und eine Projektion des k-Raums.

¹⁹Struktureigenschaften anhand Abb. 3.2a: Fett (weiße Kugel links) mit Magnitude 1500 und $\Delta\chi = 1.2 \text{ ppm}$; Wasser (graue Kugel rechts) mit Magnitude 1000 und $\Delta\chi = 0 \text{ ppm}$; Luft (schwarze Bereiche) mit Magnitude 0 und $\Delta\chi = 9.4 \text{ ppm}$.

²⁰Die Suszeptibilitätsunterschiede sind dabei gegenüber Wasser referenziert, basierend auf [54, Table 3.2].

Eine Auswahl der gewrappten und rauschüberlagerten Phasenbilder des Set 2 mit verändertem SNR bzw. T_E ist in Abb. A.4 im Anhang zu finden. Diese Phasen bildeten die gefalteten Ausgangsmatrizen Φ_w , die von den Algorithmen in den jeweiligen Untersuchungen entfaltet werden.

3.2.3 Set 3: Rekonstruktion einer coronalen MRT der Nieren

Um die Algorithmen auch unter möglichst realitätsnahen Bedingungen prüfen zu können, wurden vom Institut für Diagnostische und Interventionelle Radiologie des Universitätsklinikums Düsseldorf freundlicherweise Bilddaten bereitgestellt, die auf Basis eines realen Nieren-Tomogramms einer Patientin für eine ähnliche Untersuchung von 3D-Unwrap-Algorithmen [55] erstellt wurden. Es handelt sich dabei um dreidimensionale, zur quantitativen Suszeptibilitätskartierung (QSM) simulierte Daten, die sich einerseits möglichst genau an den ursprünglichen Tomogrammen orientieren und für die andererseits aber ein zu erwartendes, ungewrapptes Phasenbild vorliegt. Ohne bekannte Phase Φ_0 wäre keine quantitative, sondern lediglich eine optische, subjektive Beurteilung der Qualität der Algorithmenenergebnisse möglich. Aus diesen 3D-Bilddaten wurde eine markante, mittlere Schicht extrahiert, für die folglich auch keine weiteren Bild-Parameter angepasst werden können. Von dem simulierten Nieren-MRT liegen jedoch Datensätze mit unterschiedlichem SNR und T_E vor, die analog zum Set 2 untersucht wurden. Abbildung 3.3 zeigt exemplarische gewrappte und ungewrappte Phasenbilder sowie eine Magnitude des Set 3.

Eine Auswahl der gewrappten und rauschüberlagerten Phasenbilder des Set 3 mit verändertem SNR bzw. T_E ist in Abb. A.5 im Anhang zu finden. Diese Phasen bildeten die gefalteten Ausgangsmatrizen Φ_w , die von den Algorithmen in den jeweiligen Untersuchungen entfaltet werden.

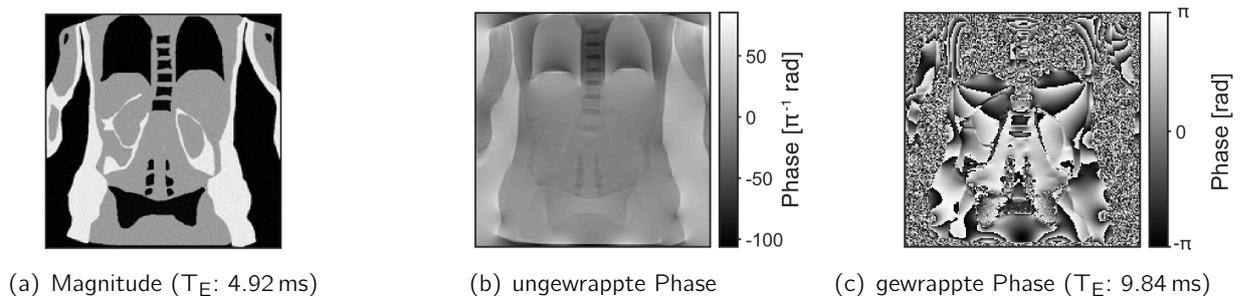


Abb. 3.3: Beispielhafte Ausgangsbilder des Datensatzes Set 3 (jeweils aus Schicht 8 bei SNR = 100 dB).

3.3 Verwendete Phase-Unwrapping-Algorithmen

In dieser Arbeit wurden die MATLAB-Umsetzungen²¹ von 6 Phase-Unwrapping-Algorithmen evaluiert, von denen 4 zu den „klassischen“ Algorithmen gehören, deren Umsetzungen im Standardwerk von D.C. Ghiglia und M.D. Pritt [4] 1998 beschrieben und seitdem mehrfach untersucht wurden (vgl. Anhang A.4). Die in dieser Arbeit verwendeten Algorithmen arbeiten nach 3 globalen und 3 lokalen Methoden, deren Unterschiede in diesem Kapitel nur peripher erörtert werden sollen. Eine allgemeinere Erläuterung findet sich im Kapitel 2.3.3.

Die Algorithmen-Umsetzungen enthalten zum Teil Parameter zur Kalibrierung, die in dieser Arbeit jedoch nicht näher untersucht und deshalb durchweg in der Standard-Einstellung²² beibehalten wurden. Die Algorithmen PF-QualityMap, PF-Goldstein und LS-CPULSI benötigen zudem einen Startpunkt (KTP, vgl. Kap. 2.3.1), der bei der Generierung der Datensätze festgelegt und für alle Untersuchungen, Iterationen und Algorithmen konstant gehalten wurde.

3.3.1 Lokale Path-Following-Algorithmen

Goldsteins Branch Cut (PF-Goldstein)

Der PF-Goldstein-Algorithmus wurde 1988 von R.M. Goldstein et al. [6] für die Radarinterferometrie (InSAR) entwickelt und verwendet ein lokales Path-Following-Verfahren, bei dem Diskontinuitätsstellen in der Phase identifiziert und anschließend diese **Residuen mittels Barrieren isoliert** werden („Branch Cuts“), damit die Integration der Phase beim Unwrapping wegunabhängig bleibt und sich lokale Fehler nicht fortsetzen können [4, Kap. 4.2]. Das Verfahren ist in den Kapiteln 2.3.2 und 2.3.3 ausführlich beschrieben. In der Arbeit wurde die MATLAB-Umsetzung von B. Spottiswoode [56] inklusive eines Updates²³ von C. Smith [57] verwendet.

Quality Guided Map (PF-QualityMap)

Der zweite lokale Algorithmus wurde im bereits erwähnten Buch von Ghiglia und Pritt vorgestellt [4, Kap. 4.3]. Anders als beim PF-Goldstein-Algorithmus werden beim PF-QualityMap keine Residuen identifiziert. Stattdessen wird der **Integrationspfad über eine Quality Map festgelegt**, die anhand unterschiedlicher Parameter generiert wird, beispielsweise die Kohärenz der Phase oder die Varianz der Phasenableitungen. Anhand der Quality Map wird die Phase beginnend bei Pixeln mit hoher Qualität (oder „Güte“) mittels des Region-Growing-Verfahrens hin zu Bereichen mit geringer Güte entwickelt. Die Ergebnisse hängen somit maßgeblich von der Verfügbarkeit einer hochwertigen Quality Map ab. Da diese erst generiert werden muss, benötigt der Algorithmus deutlich mehr Rechenzeit als andere Methoden. Da die Diskontinuitäten in der Phase sich vornehmlich auf Bereiche mit geringer Phasenqualität konzentrieren, sind dafür die Ergebnisse des PF-QualityMap-Algorithmus im Allgemeinen recht fehlerarm [8]. Die in dieser Arbeit verwendete MATLAB-Umsetzung stammt ebenfalls von B. Spottiswoode [56].

²¹Es wurden jeweils Versionen verwendet, die im Februar 2020 verfügbar waren. Für einige Algorithmen wurden vor Abgabe der Arbeit zwar Updates veröffentlicht, die jedoch aus zeitlichen Gründen nicht mehr berücksichtigt werden konnten.

²²LS-PCG: Maximale Anzahl an Iterationen (5), ein Konvergenz-Parameter (0.00001), sowie die Anzahl der Kongruenz-Schritte N (20). PF-Goldstein: Maximaler Pixel-Suchradius für Branch Cuts (4).

²³Das Update wurde notwendig, da sich der Algorithmus mit gewisser Regelmäßigkeit bei der *FloodFill*-Operation in einer Endlosschleife aufgehängt hat und das gesamte Skript damit zum Absturz brachte. Nach Implementierung des Updates kam dies deutlich seltener vor, lediglich in Untersuchungen des Set 2 bei hohem T_E trat es unregelmäßig erneut auf.

Sorting by Reliability following a Non-Continuous Path (PF-SRNCP)

Viele Quality-Guided-Algorithmen basieren darauf, den zuverlässigsten Pixel (mit hoher „Qualität“) zuerst zu unwrappen, wobei bei der Bestimmung dieser Verlässlichkeit meist auf die geringsten Phasendifferenzen (die kleinsten Modulo- 2π -Werte) zu angrenzenden Pixeln zurückgegriffen wird. Ausgehend von diesem Pixel werden die angrenzenden zuverlässigsten Pixel entlang eines kontinuierlichen Integrationspfades entfaltet. Der verwendete 2D-PF-SRNCP-Algorithmus dagegen nutzt zur Bestimmung der Qualität oder Verlässlichkeit R eines Pixels eine **Quality Map basierend auf der zweiten Phasendifferenz** $D = \Delta^2 \Phi$ mit $R = \frac{1}{D}$ und integriert die Phase dann entlang eines diskreten, nicht-kontinuierlichen Weges. Der Algorithmus wurde 2002 von M.A. Herráez et al. [7] in C entwickelt und von M. Mullen in MATLAB umgesetzt [58].

3.3.2 Globale Least-Squares-Algorithmen

Unweighted Least-Squares (LS-Unweighted)

Die Least-Squares-Algorithmen versuchen die Abweichung zwischen der gewrappten Phase und einer homogenen Lösungsfunktion mit der Methode der kleinsten Quadrate zu minimieren (vgl. Kap. 2.3.3). Dazu werden **diskrete Cosinus-Transformationen (Forward DCTs)** auf die gewrappte Phase angewandt, deren Lösung mathematisch identisch zur Lösung der partiellen Poisson-Differentialgleichung eines rechteckigen Gitters mit Neumann-Randbedingungen ist. Ein großes Problem ist dabei, dass Residuen nicht umgangen werden und so zu globalen Fehlern führen, wodurch die Ergebnisse stark vom Rauschen geprägt sind [3, 4, Kap. 5.3]. Dies kann durch Gewichtung (über Quality Maps oder Masken) kompensiert werden. Der verwendete LS-Unweighted ist aber die ungewichtete Variante von Ghiglia und Romero [3], umgesetzt von M.F. Kasim [59].

Preconditioned Conjugate Gradient (LS-PCG)

LS-PCG ist ein gewichteter Least-Square-Algorithmus, der das Verfahren der konjugierten Gradienten zur Lösung der linearen Gleichungssysteme verwendet. Die Schwächen des LS-Unweighted gleicht er aus, indem Regionen mit starkem Rauschen und **Residuen durch Gewichtungsfaktoren nullgewichtet** und isoliert werden, so dass sie keinen Einfluss auf das Unwrapergebnis haben. Die Gewichtung erfolgt mit Hilfe einer Quality Map durch Vorkonditionierung der gewrappten Phasenmatrix, wobei durch Definition von Abbruchkriterien stabile Konvergenzeigenschaften erreicht werden. Das führt zu einem stabilen Algorithmus, der das gewichtete Problem der kleinsten Quadrate auf iterativem Weg löst und so akkuratere Ergebnisse liefert [3, 4]. Die ursprüngliche Implementierung in C++ [4, Kap. 5.4.3] wurde von B. Dymerska in MATLAB umgesetzt [60].

Calibrated Phase Unwrapping based on Least-Squares and Iterations (LS-CPULSI)

Der von X. Haiting in MATLAB entwickelte LS-CPULSI [1, 2, 61] nutzt auch DCTs zur Lösung der diskreten Poisson-Gleichung mit Neumann-Bedingungen. Um die Probleme des LS-Unweighted zu beheben, wird die Genauigkeit der ungewrappten Phase über **iterative Berechnungen und zusätzliche Kalibrierung** verbessert. Der Ansatz der Kalibrierung basiert auf den 1. Ableitungen der Phase, wobei alle Werte, die größer als die Standardabweichung der Phasenableitungen sind, durch deren Durchschnittswert ersetzt werden. Damit kann insgesamt der Einfluss des Rauschens in den gewrappten Phasendaten minimiert werden.

3.4 Durchzuführende Untersuchungen

Um eine aussagekräftige, statistische Auswertung der Algorithmen vorzunehmen, muss zunächst sichergestellt sein, dass die Algorithmen deterministisch arbeiten. Das bedeutet, dass ein Algorithmus bei gleichen Anfangsbedingungen immer das gleiche Ergebnis liefert und keine unbekannte Größe das Ergebnis beeinflusst. Dies wird unter anderem mit Set 1 und Set 2 untersucht, indem die Datensätze zum einen mit statischem und zum anderen gänzlich ohne Rauschen generiert werden, so dass die Ausgangsmatrizen jeweils für alle Iterationen konstant bleiben. Zudem kann die Determiniertheit anhand mehrmaliger Durchführung des Set 3 evaluiert werden, da dieser Datensatz bereits verrauscht vorliegt und somit ebenfalls keine Änderung an den Matrizen vor den einzelnen Iterationen erfolgt.

Wenn die Determiniertheit der Algorithmen bestätigt wurde, werden die eigentlichen Untersuchungen dieser Arbeit durchgeführt. Dabei sollen für jeden der zuvor vorgestellten Datensätze jeweils zwei Untersuchungen mit allen 6 Algorithmen und den in nachfolgender Tabelle aufgelisteten Parametern durchgeführt werden. Die Ergebnisse der Algorithmen werden anschließend für jede Untersuchung separat evaluiert und dabei werden unter anderem die Abweichung der Algorithmenresultate von der erwarteten Originalphase, sowie die benötigte Laufzeit der Algorithmen erhoben. Im nachfolgenden Kapitel wird die dazu angewandte Evaluationsmethode für die Auswertung der einzelnen Iterationsergebnisse im Detail erläutert.

Datensatz	Set 1		Set 2		Set 3	
Rauschen	dynamisch		dynamisch		statisch	
Iterationen	100		100		1	
Fixer Parameter	Grad: $0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$	SNR: 100 dB	T_E : 4.92 ms	SNR: 100 dB	T_E : 4.92 ms	SNR: 100 dB
Variabler Parameter	SNR [dB]:	Grad [$\frac{\text{rad}}{\text{px}}$]:	SNR [dB]:	T_E [ms]:	SNR [dB]:	T_E [ms]:
	1	0.1	1	4.92	5	4.92
	5	0.5	5	9.84	10	9.84
	10	1.0	10	14.76	30	14.76
	15	1.5	15	19.68	60	19.68
	20	2.0	20	24.60	100	24.60
	25	2.5	25			
	30	3.0	30			
	40	3.5	40			
	50	4.0	50			
	60	5.0	60			
80	6.0	80				
100	7.0	100				

Tab. 1: Überblick über die durchgeführten Untersuchungen an den 3 Datensätzen und die zugehörigen Parameter.

3.5 Methoden zur Evaluation der Algorithmen-Ergebnisse

Wie im vorherigen Kapitel dargestellt, wurden mehrere Untersuchungen an den 3 Datensätzen durchgeführt, wobei die einzelnen Untersuchungen für Set 1 und Set 2 aufgrund des variablen Rauschens mit jeweils 100 Iterationen wiederholt und für die fixen Matrizen des Set 3 einmalig ausgeführt wurden. Zur Auswertung der Untersuchungen wurden die Algorithmenresultate der einzelnen Iterationen zwischengespeichert und erst am Ende der Untersuchung en bloc evaluiert. Dabei werden zunächst für jeden Algorithmus die einzelnen Iterationsergebnisse ausgewertet, diese anschließend gemittelt und zuletzt, nachdem die Iterationsergebnisse für alle Algorithmen ausgewertet wurden, die gemittelten Algorithmenresultate miteinander verglichen. Der gesamte Ablauf ist in Abb. A.1 dargestellt. Für jede Einzelauswertung (also pro Algorithmus und pro Skriptiteration, separat dargestellt in Abb. A.2) beinhaltet dies u.a. folgende Schritte:

Multiplikation mit binärer Maske

Zuerst wird die Ergebnismatrix Φ_{uw} des Algorithmus (Abb. 3.4a) mit der binären Maske multipliziert, um Bereiche auszublenden, in denen kein MR-Signal gemessen werden kann, z.B. Luft in der Lunge oder um den Probenkörper herum. Die binäre Maske (Abb. 3.4c) wird für alle Iterationen anhand der unverrauschten Magnitude erstellt und besteht aus NaN und Einsen (vgl. Kap. 3.2), so dass nach Multiplikation mit der Ergebnismatrix nur letztere Bereiche übrig bleiben.

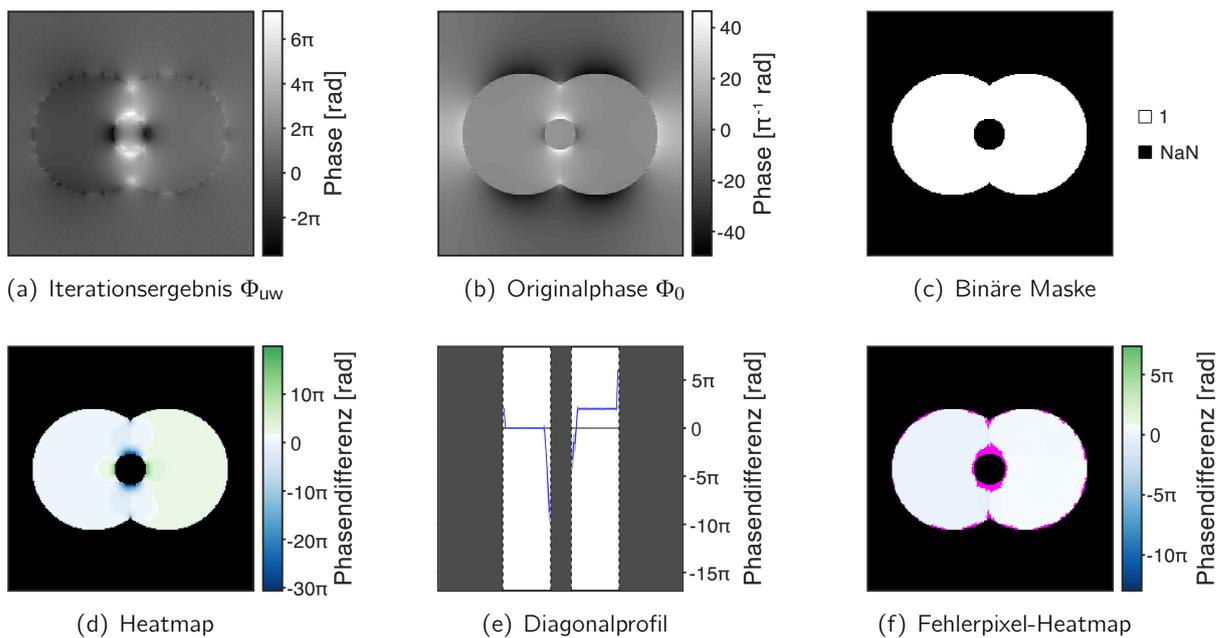


Abb. 3.4: Beispielhafte Ergebnisplots aus der Iterationsauswertung von Set 2. Das Algorithmenresultat (a) wird mit der binären Maske (c) multipliziert und von der Originalphase (b) subtrahiert. Die dabei entstehende Differenzmatrix wird um den Modus (am häufigsten vorkommenden Wert) ihrer Verschiebung korrigiert, um die Algorithmen überhaupt numerisch miteinander vergleichen zu können. Die so entstehende Matrix wird in dieser Arbeit als referenzierte Heatmap (d) bezeichnet, deren Diagonalprofil in (e) separat dargestellt ist. Eventuelle von den Algorithmen erzeugte Fehlerpixel (NaN) werden für die Auswertung in den Heatmaps zur besseren Identifizierung rosa eingefärbt (f).

Absolute und referenzierte Heatmap

Anschließend wird die Ergebnismatrix Φ_{uw} von der ungewrappten Phasenmatrix Φ_0 (Abb. 3.4b) subtrahiert. Diese Differenz ist die absolute Abweichung der Algorithmenergebnisse von der ursprünglichen Originalphase. Da diese Abweichung auch als 2D-Bild dargestellt werden kann, um so problematische Sektoren farblich hervorzuheben, werden diese Differenzmatrizen im folgenden „Heatmaps“ genannt. Wie in Kapitel 2.3 erläutert, kann die Ergebnisphase als Gesamtes mathematisch-bedingt um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π gegenüber der Originalphase verschoben sein, ohne dass dies für die Qualität des Ergebnisses von Relevanz wäre. Um die Algorithmen miteinander numerisch vergleichen zu können, muss jedoch diese Verschiebung korrigiert werden. Dazu werden die Pixelwerte der absoluten Heatmap auf eine Nachkommastelle gerundet²⁴ und anschließend der Modus ermittelt²⁵. Die nicht gerundeten Pixelwerte der absoluten Heatmap werden anschließend um diesen häufigsten Wert verringert, wodurch eine referenzierte Heatmap (Abb. 3.4d) entsteht. Über die Höhenprofile²⁶ der Heatmaps (Abb. 3.4e) lässt sich die erfolgreiche Referenzierung gut überprüfen, da hier die $k \cdot 2\pi$ -Verschiebungen direkt abgelesen werden können. Die auf diese Weise vereinheitlichten Heatmaps werden letztendlich über alle Skriptiterationen gemittelt und dienen so als Grundlage für den quantitativen Vergleich zwischen den Algorithmen. Um auch eine optische Vergleichbarkeit der Heatmaps zu gewährleisten, werden deren Farbskalen anschließend auf einen gemeinsamen Wertebereich normiert.

Quantitative Auswertung und Fehlerpixel

Schließlich werden in jeder Iteration verschiedene numerische Messgrößen ermittelt, anhand derer die Algorithmen letztendlich verglichen werden. Neben der benötigten Laufzeit der Algorithmen ist der zentrale Vergleichsparameter zur Beurteilung der Algorithmenergebnisse die **mittlere quadratische Abweichung** (RMSE, auch „Wurzel der gemittelten Fehlerquadratsumme“) der rekonstruierten Phase Φ_{uw} gegenüber der zugrundeliegenden Originalphase Φ_0 . Dieser lässt sich im Allgemeinen folgendermaßen pixelweise ermitteln [51, 62, Gl. 23]:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n_r \cdot n_c} \cdot \sum_{r=0}^{n_r-1} \sum_{c=0}^{n_c-1} \left(\Phi_0(r, c) - \Phi_{uw}(r, c) \right)^2} \quad (3.5)$$

mit $n_r, n_c =$ Anzahl der Zeilen, bzw. Spalten

In dieser Arbeit entspricht $\Phi_0(r, c) - \Phi_{uw}(r, c)$ der referenzierten Heatmap. Anschließend an die Evaluierung der einzelnen Iterationen werden die Messgrößen, sowie die Ergebnisgrafiken gemittelt und zusammen mit der jeweiligen Standardabweichung zum Vergleich zwischen den Algorithmen untereinander herangezogen. Daraus werden 3 Liniendiagramme bezüglich des RMSE, der Laufzeit und der aufgetretenen Fehlerpixel für jede Untersuchung erstellt. Fehlerhafte Pixel (NaN) werden bei der Berechnung des RMSE exkludiert, jedoch separat gezählt und für die optische Auswertung in den Heatmaps rosa eingefärbt (Abb. 3.4f).

²⁴Ohne Rundung verhindern die durch Rauschen höchst individuellen Pixelwerte eine Identifizierung der Gesamtverschiebung.

²⁵In mehreren Versuchsreihen hat sich herausgestellt, dass die $k \cdot 2\pi$ -Verschiebung mit dem am häufigsten vorkommenden Wert (Modus) am zuverlässigsten identifiziert werden kann, da er im Gegensatz zum Median oder Mittelwert gegen extreme Einzel-Pixelwerte, wie sie beispielsweise beim PF-Goldstein-Algorithmus häufig vorkommen, resistent ist.

²⁶Die in dieser Arbeit vorkommenden Profilplots entsprechen durchweg der Hauptdiagonalen der zugrundeliegenden Matrix.

4 Ergebnisse

4.1 Determiniertheit und Laufzeitanalyse der Algorithmen

Wie in Kapitel 3.4 erläutert, wird zunächst untersucht, ob die Algorithmen deterministisch arbeiten. Für alle 6 Algorithmen kann dazu bei konstant bleibenden Ausgangsphasenbildern sowohl numerisch durch konstanten RMSE als auch optisch anhand der Ergebnisbilder festgestellt werden, dass diese sich bei mehrmaliger Durchführung der Untersuchung nicht verändern. Zudem werden die Ergebnismatrizen der einzelnen Iterationen testweise voneinander subtrahiert, wodurch jedes Mal eine Nullmatrix²⁷ erzeugt wird. Damit wurde die Determiniertheit aller Algorithmen bestätigt und alle weiteren Untersuchungen können durchgeführt werden.

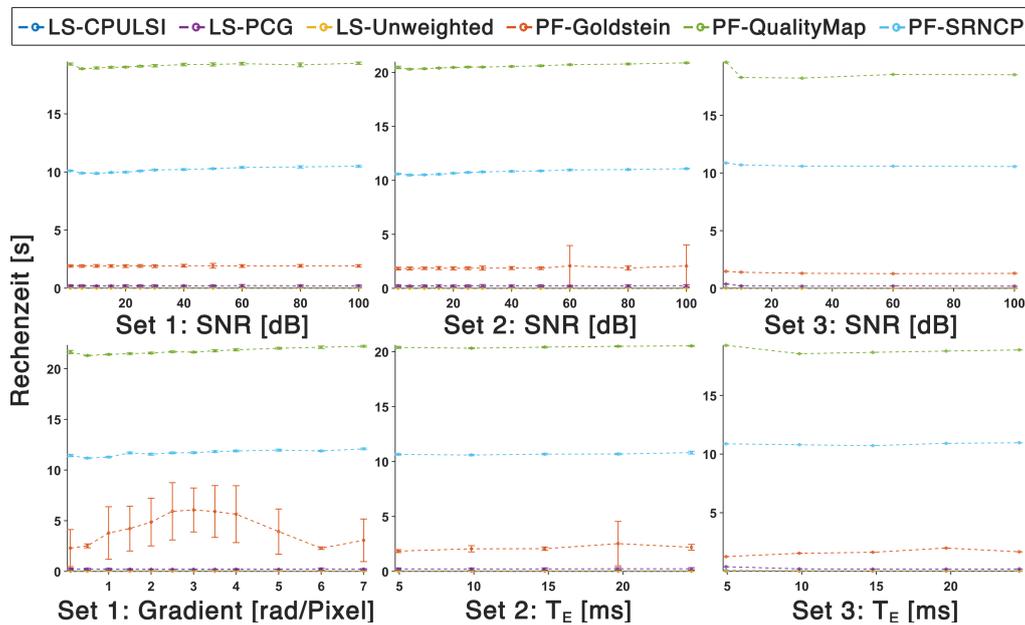


Abb. 4.1: Übersicht der benötigten Laufzeiten der Algorithmen in den durchgeführten Untersuchungen.

Abb. 4.1 zeigt die Ergebnisse der Laufzeitanalysen aller durchgeführten Untersuchungen. Es zeigt sich über alle Untersuchungen hinweg für Phasenbilder mit 200x200 Pixeln das gleiche Bild, nahezu unabhängig von den einzelnen Untersuchungsparametern. Für den detaillierteren Vergleich sind in Tabelle 2 die durchschnittlichen Laufzeiten ($\bar{t} \pm \Delta t$), sowie die Zeiten der langsamsten (t_{\min}) und schnellsten (t_{\max}) Iterationen der Algorithmen in Sekunden aufgeführt.

Laufzeit t [s]	Globale Least-Squares-Algorithmen			Lokale Path-Following-Algorithmen		
	CPULSI	PCG	Unweighted	Goldstein	QualityMap	SRNCP
$\bar{t} \pm \Delta t$	0.05 ± 0.01	0.22 ± 0.07	0.00 ± 0.01	2.60 ± 1.82	20.46 ± 1.01	10.84 ± 0.63
t_{\min}	0.025	0.179	0.000	1.262	18.230	9.753
t_{\max}	0.109	0.625	0.020	21.413	22.942	12.349

Tab. 2: Tabellarische Übersicht der gemessenen Laufzeiten der Algorithmen über alle Untersuchungen hinweg.

²⁷Nullmatrix: Matrix, bei der alle Einträge Null sind. Dies zeigt, dass die voneinander subtrahierten Matrizen identisch sind.

4.2 Untersuchungen am Set 1: SNR und Grad

Anhand des Set 1 wird die Auswirkung von unterschiedlichen Rauschstärken und Steigungen des Phasengradienten auf das Unwrapergebnis untersucht. Es zeigt sich in den Ergebnisgraphen in Abb. 4.2, dass bei niedrigem SNR < 20 dB bei allen Algorithmen außer dem LS-Unweighted der RMSE augenscheinlich exponentiell ansteigt. Bei höherem SNR bleibt dagegen der RMSE bis auf geringe Schwankungen konstant. Gerade bei den Algorithmen PF-Goldstein, LS-CPULSI und LS-Unweighted ist auch eine große Schwankung innerhalb der Iterationen anhand der Fehlerbalken zu erkennen. Letztere beiden weisen generell ein um den Faktor 2 für PF-SRNCP bzw. 4 für LS-Unweighted höheren RMSE auf als die anderen Algorithmen, deren Kurven dicht beieinander liegen und ähnlich gute Ergebnisse erzielen.

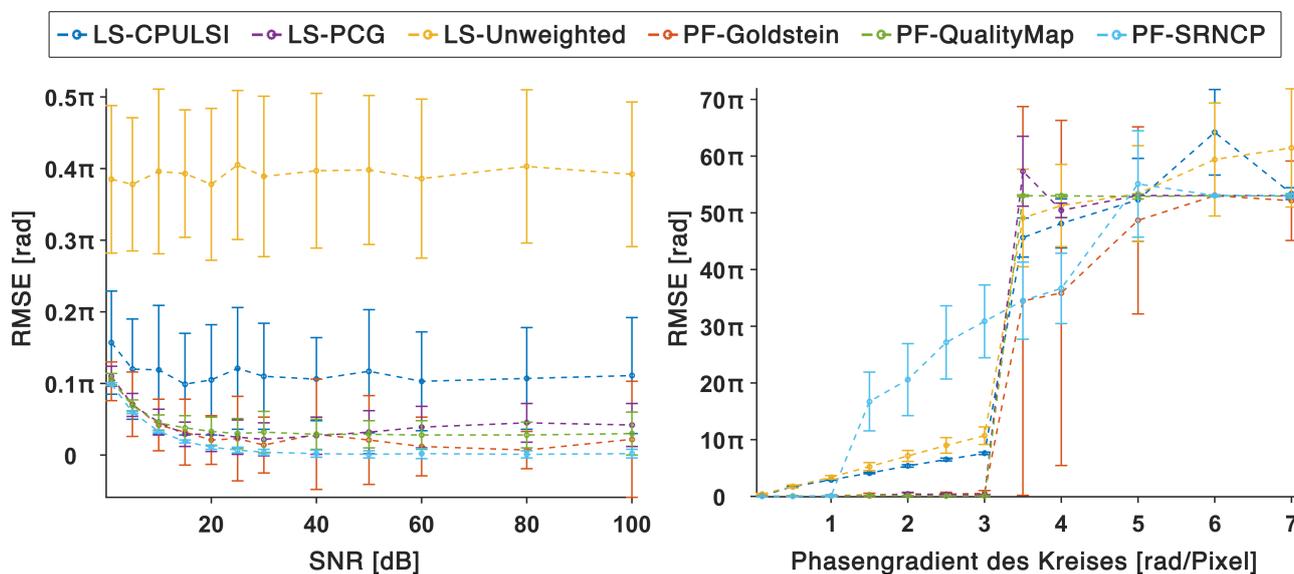


Abb. 4.2: RMSE-Ergebnisgraphen zu den Untersuchungen am Set 1.

Bei der Untersuchung des ansteigenden Phasengradienten fällt ein sprunghafter Anstieg bei Werten von über $3 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ auf. Der RMSE fast aller Algorithmen ist ab dann um teils mehr als das 50-fache gegenüber Werten $\leq 3 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ erhöht. Während die Algorithmen PF-Goldstein, LS-PCG und PF-QualityMap bis zu diesem sprunghaften Anstieg verhältnismäßig niedrige RMSE unter 0.5π rad aufweisen, steigt der Fehler bei LS-CPULSI und LS-Unweighted linear auf 7.6 , bzw. 10.7π rad an. Beim PF-SRNCP-Algorithmus steigt der RMSE bereits ab $1.5 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ auf 16.7π rad und wird ab dann konstant steigend schlechter, so dass kein sprunghafter Anstieg des RMSE zwischen 3 und $3.5 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ erkennbar ist. Damit fällt die Charakteristik dieser RMSE-Kurve im Vergleich zu den ähnlichen der anderen Algorithmen heraus.

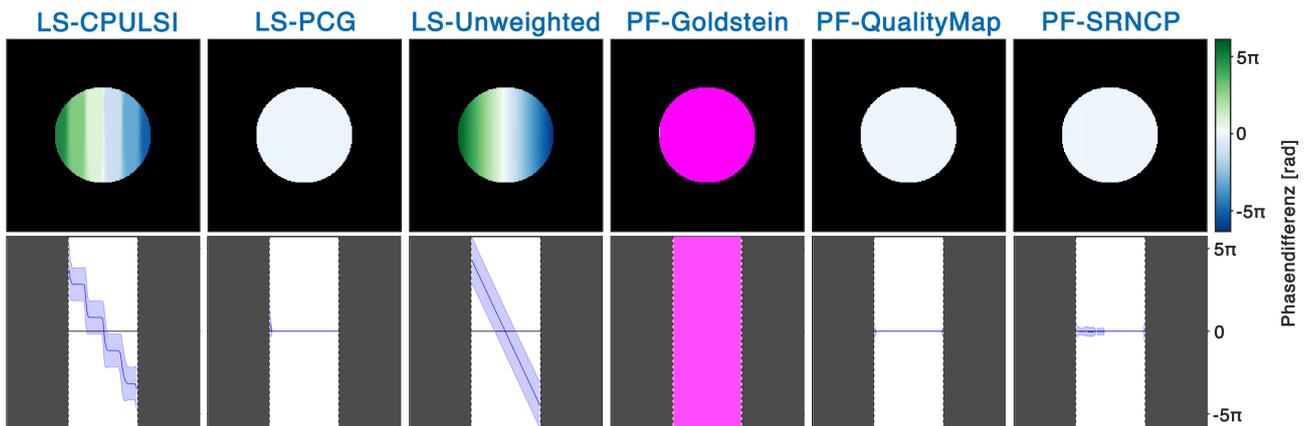


Abb. 4.3: Exemplarische Ergebnisse der Untersuchung des Set 1 mit $\text{Grad} = 1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$. Oben: Heatmaps der Phasendifferenz zur Originalphase. Unten: Diagonalprofile der Heatmaps. Die Skalen sind jeweils einheitlich.

Die gemittelten Ergebnisübersichten zu den einzelnen Untersuchungen sind im Anhang A.5 und A.6 zu finden. Exemplarisch daraus sind in Abb. 4.3 die gemittelten Heatmaps und deren Diagonalprofile der Untersuchung des Phasengradienten bei $1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ zusammengefasst. Dabei sind gerade für den LS-CPULSI-Algorithmus die in der Theorie erwähnten, charakteristischen 2π -Abstufungen zu erkennen. Diese weist der LS-Unweighted-Algorithmus nicht auf, stattdessen ist dessen Abweichung vom eigentlichen Gradientenverlauf durchgehend geradlinig. Dieses Phänomen zeigt sich in allen Heatmaps des Algorithmus, sowohl für die Untersuchung des SNR als auch die der Gradientensteigung.

In den Untersuchungen zum SNR sind in den Heatmaps des PF-Goldstein Algorithmus an den Rändern vereinzelte, rosa gefärbte Fehlerpixel-Bereiche erkennbar, aber insgesamt sind die Ergebnisse gut mit denen der anderen Algorithmen vergleichbar. Im Gegensatz dazu sind die Heatmaps der Gradientenuntersuchung des Algorithmus bis auf die Untersuchung bei $6 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ nahezu vollständig von Fehlerpixeln dominiert, wie auch in Abb. 4.3 zu sehen.

Die Heatmaps der Algorithmen LS-PCG und PF-QualityMap sind optisch bis zu den Untersuchungen bei $3.5 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ durchweg homogen und verdeutlichen die geringe Abweichung von der Originalphase. Die Ergebnisse des PF-SRNCP-Algorithmus bei 0.1, 0.5 und $1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ sind für die Gradientenuntersuchung vergleichbar mit den geringen Abweichungen von LS-PCG und PF-QualityMap. Bei höheren Gradientenwerten sind sie genauso stark fehlerbehaftet wie die Ergebnisse von LS-CPULSI und LS-Unweighted.

Generell ist festzustellen, dass alle Algorithmen außer LS-Unweighted wenig Probleme mit schwankendem SNR haben. Selbst bei extrem niedrigem SNR von 1 dB zeigen sich keine gravierenden Unwrap-Probleme in den Heatmaps. Dagegen ist der Einfluss der Phasensteigung prägend für die Algorithmenresultate. Dies zeigt sich nicht zuletzt auch in den gemittelten Ergebnisübersichten in der Form, dass alle Algorithmen ab einer Phasenänderung von 3.5 rad von einem Pixel zum nächsten die Phase in die entgegengesetzte Richtung rekonstruieren.

4.3 Untersuchungen am Set 2: SNR und T_E

Am komplexeren Set 2 sollte neben dem Rauschen auch der Einfluss der T_E -Zeit bei einem Probenkörper aus Fettgewebe und Wasser untersucht werden. In den zugehörigen Ergebnisgraphen in Abb. 4.4 zeigt sich für die SNR-Untersuchung ein ähnliches Bild wie in Set 1. Die Abweichungen sind ab einem SNR von > 10 dB in erster Näherung konstant bleibend, für kleiner werdendes SNR steigt der RMSE für die meisten Algorithmen an. Allerdings unterscheiden sich die Algorithmenresultate hier generell deutlicher voneinander. Im Schnitt ist der RMSE ab 10 dB für PF-Goldstein und LS-PCG mit 0.24π rad gleich, gefolgt von PF-QualityMap mit 0.34π rad. Mit deutlich größeren mittleren Fehlern folgen LS-Unweighted (0.54π rad), PF-SRNCP (0.63π rad) und LS-CPULSI (0.99π rad). Die Schwankungen innerhalb der Iterationen sind auch hier vor allem beim LS-CPULSI-Algorithmus besonders ausgeprägt.

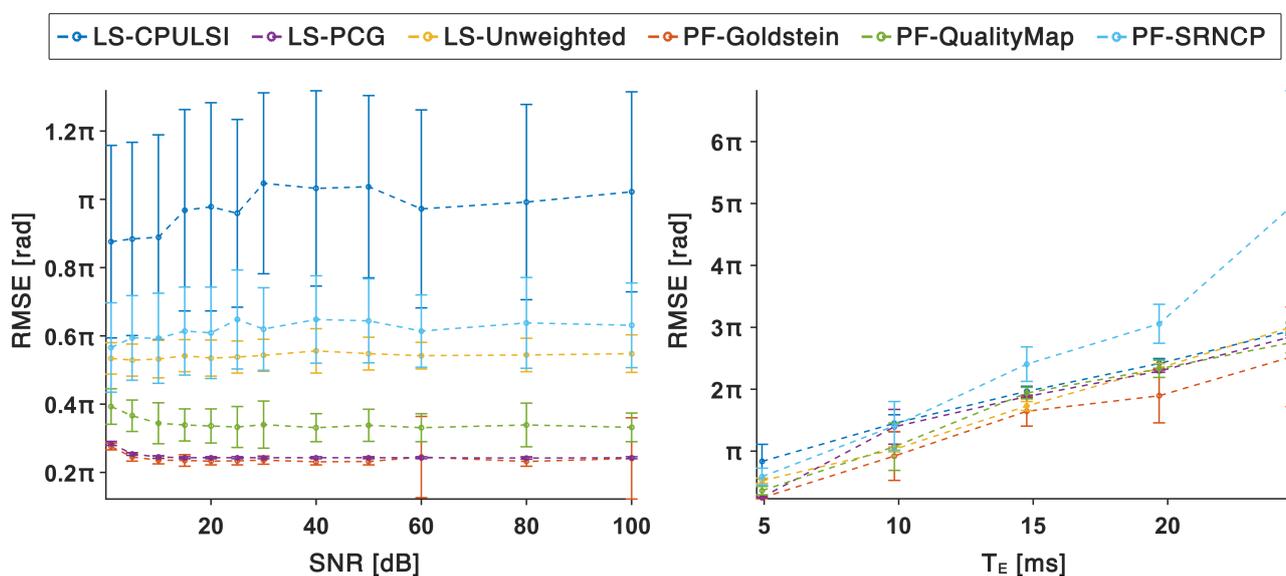


Abb. 4.4: RMSE-Ergebnisgraphen zu den Untersuchungen am Set 2.

Bei der Untersuchung des T_E ist eine insgesamt einheitliche Tendenz für alle Algorithmen zu erkennen, nach der bei steigendem T_E auch der RMSE linear steigt. Für höheres T_E (und damit auch eine stärkere Faltung der gewrappten Phase) steigen ebenso die Unterschiede innerhalb der Iterationen, wie man an den Fehlerbalken erkennen kann. Auffällig ist hier der PF-SRNCP-Algorithmus, der für die Untersuchung bei $T_E = 24.6$ ms deutlich größere Schwankungen als andere Algorithmen aufweist und mit $4.95 (\pm 1,87) \pi$ rad zudem einen fast doppelt so großen Fehler produziert. Abgesehen vom PF-SRNCP und dem PF-Goldstein-Algorithmus sind die Schwankungen der anderen Algorithmen innerhalb der Iterationsergebnisse vergleichsweise gering. Augenscheinlich ist der PF-Goldstein-Algorithmus in der T_E -Untersuchung der Algorithmus mit dem geringsten Fehler. Die Ergebnisübersichten zu den einzelnen Untersuchungen, die im Anhang A.7 und A.8 zu finden sind, belegen jedoch, dass bereits bei $T_E = 14.76$ ms der Algorithmus mehr als die Hälfte aller Pixel in mindestens einer Iteration überhaupt nicht (Wert: NaN) rekonstruieren konnte. In den beiden Untersuchungen mit höherem T_E waren 99.74 % aller Pixel mindestens einmal von derart fehlerhaften Rekonstruktionen betroffen. Insgesamt waren bei die-

sen beiden Untersuchungen $6.6 (\pm 16.5) \%$ aller Pixel fehlerhaft und wurden damit nicht in der Berechnung des RMSE von PF-Goldstein berücksichtigt, wodurch zwangsläufig die Abweichung der verbleibenden Pixel und damit der RMSE-Wert für den Algorithmus sinkt. Eine Übersicht des Anteils an fehlerhaften Pixeln aller Algorithmen²⁸ ist im Anhang A.3 zusammengestellt.

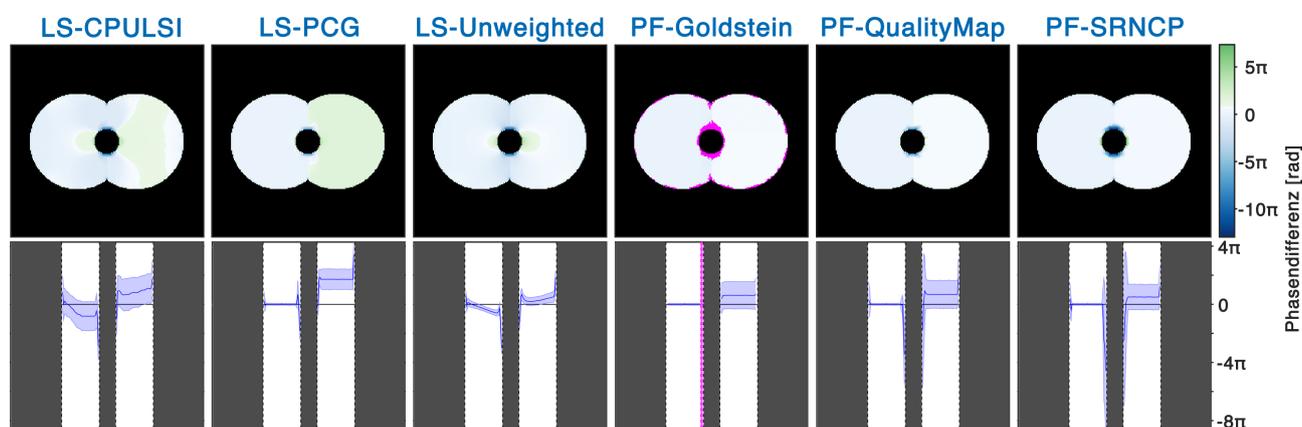


Abb. 4.5: Exemplarische Ergebnisse der Untersuchung des Set 2 mit $T_E = 9.84$ ms bei $\text{SNR} = 100$ dB. Oben: Heatmaps der Phasendifferenz zur Originalphase. Unten: Diagonalprofile der Heatmaps. Die Skalen sind jeweils einheitlich.

Abb. 4.5 zeigt exemplarisch die gemittelten Heatmaps und deren Diagonalprofile für die Untersuchung des T_E bei 9.84 ms. Hierbei kann man erkennen, dass nahezu alle Algorithmen verhältnismäßig starke Abweichungen an den Rändern der zentralen Luftblase aufweisen, was vor allem in den Diagonalprofilen oder an den rosa gefärbten Fehlerpixeln des PF-Goldstein-Algorithmus zu sehen ist. Auch weisen alle Algorithmenenergebnisse der Untersuchung bei $T_E = 4.92$ ms einen Sprung um 2π beim geradlinigen Übergang von der Fett- zur Wasserseite auf. Dieser Sprung zeigt sich in Abb. 4.5 zum einen in den Diagonalprofilen, aber auch durch die teils einheitliche Grünfärbung der rechten Seite in den Heatmaps. Die Fehlerbalken in den Diagonalprofilen deuten darauf hin, dass die Algorithmen nach dem Übergang von Fett zu Wasser in den Iterationen teils sehr unterschiedliche Ergebnisse erzielten, während die Fettseite mit Ausnahme beim LS-CPULSI-Algorithmus überwiegend über die Iterationen konstant ungewrappt wurde.

Die gemittelten Ergebnisübersichten des PF-Goldstein-Algorithmus zeigen bei $T_E = 4.92$ ms nur minimale, bei dem in Abb. 4.5 verwendeten $T_E = 9.84$ ms schon größere Areale an fehlerhaften Pixeln. In der darauffolgenden Untersuchung bei $T_E = 14.76$ ms fehlt die komplette rechte Wasserhälfte, sowie Randbereiche der Fetthälfte. Bei höherem T_E war jeder Pixel in mindestens einer Iteration fehlerhaft, wodurch die gemittelten Phasenbilder keine Auswertung mehr zulassen. Der RMSE für diese Untersuchungen basiert, wie im oberen Absatz bereits erwähnt, auf wenigen korrekten Pixeln in vereinzelt Iterationen.

Für die beiden globalen Algorithmen LS-CPULSI und LS-Unweighted kann man in den Diagonalprofilen wieder einen deutlichen Unterschied zu den Profilen der anderen Algorithmen erkennen. Während die anderen Profile meist geradlinige, überwiegend konstant verlaufende Abweichungen in diskreten 2π -Schritten aufweisen, sind die Abweichungen von LS-CPULSI und LS-Unweighted durchgängig und nehmen auch beliebige Werte zwischen zwei 2π -Stufen an.

²⁸Auch wenn alle 6 Algorithmen darin enthalten sind, hat effektiv nur PF-Goldstein derartig fehlerhafte Pixel hervorgebracht.

4.4 Untersuchungen am Set 3: SNR und T_E

Das dritte Datenset besteht aus bereits verrauschten Daten, weshalb hierbei jeweils nur eine Iteration zur Auswertung analysiert werden kann. Weitere Durchführungen bringen die exakt gleichen Ergebnisse, womit ebenfalls die Determiniertheit der Algorithmen bestätigt wird (vgl. Kap. 4.1). Dementsprechend weisen die Ergebnisgraphen in Abb. 4.6 auch keine Fehlerbalken auf und die Aussagekraft vor allem der SNR-Untersuchung ist sehr begrenzt. Die in den SNR-Untersuchungen der anderen Datensätze sichtbaren Anstiege des RMSE bei niedrigem SNR sind nicht erkennbar und auch über die vermutete Linearität der Kurven kann anhand von nur 5 Messpunkten keine qualifizierte Aussage getroffen werden. Erkennbar ist, dass beispielsweise der PF-Goldstein-Algorithmus im Mittel eine etwa drei- bis vierfach größere Abweichung von der Originalphase aufweist, als beispielsweise der PF-QualityMap-Algorithmus. Das allerdings kann auch komplett durch das Rauschen im jeweiligen Bild bedingt sein und lässt ebenso keine fundierte Analyse zu.

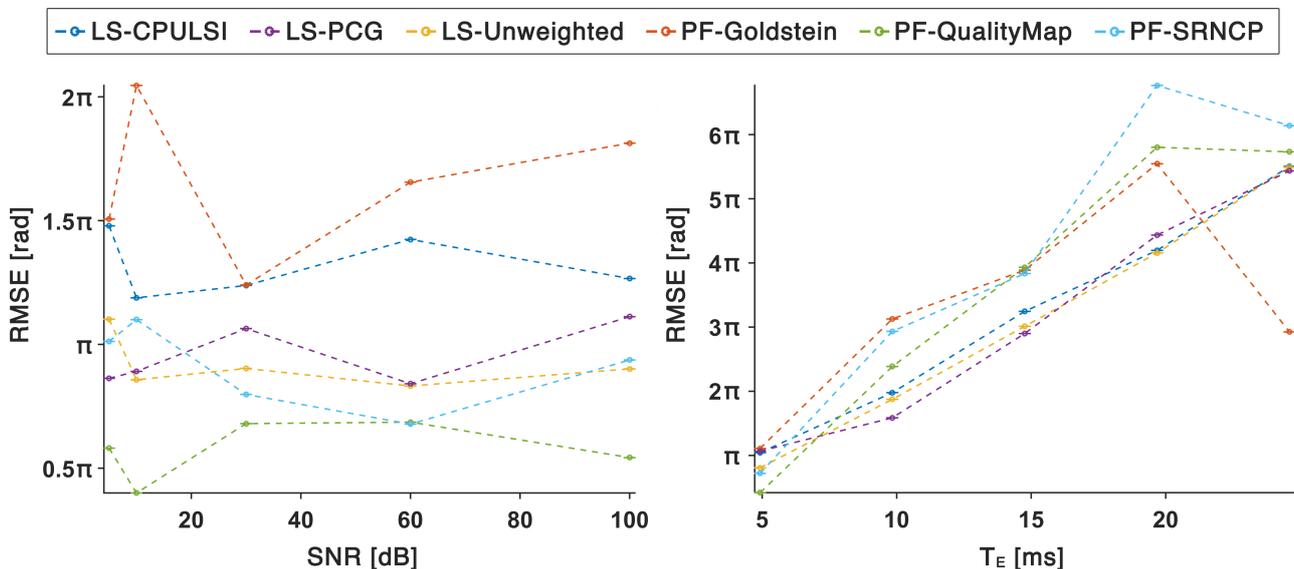


Abb. 4.6: RMSE-Ergebnisgraphen zu den Untersuchungen am Set 3.

Bei den 5 Untersuchungen des T_E dagegen ist vor allem im Vergleich mit der T_E -Untersuchung des Set 2 eine Linearität erkennbar, wobei auch hier mit steigendem T_E und damit mit stärkerer Faltung die Fehler der Algorithmen zunehmen. Dass scheinbar die Ergebnisse beim höchsten T_E für einige Algorithmen wieder besser werden, hängt auch mit der singulären Betrachtung eines verhältnismäßig „günstig verrauschten/gefalteten“ Phasenbildes zusammen. Diese Entwicklung wäre für eine Untersuchung mit variablem Rauschen und vielen Iterationen nicht zu erwarten. Während der RMSE im Set 2 allerdings bei höchstem T_E im Schnitt auf etwa 2 bis 3π rad ansteigt, erreicht die mittlere Abweichung im Set 3 durch die vielen Störkanten an den Übergängen zwischen Lunge/Knochen und Gewebe einen mittleren Wert von etwa 5 bis 6π rad für alle Algorithmen.

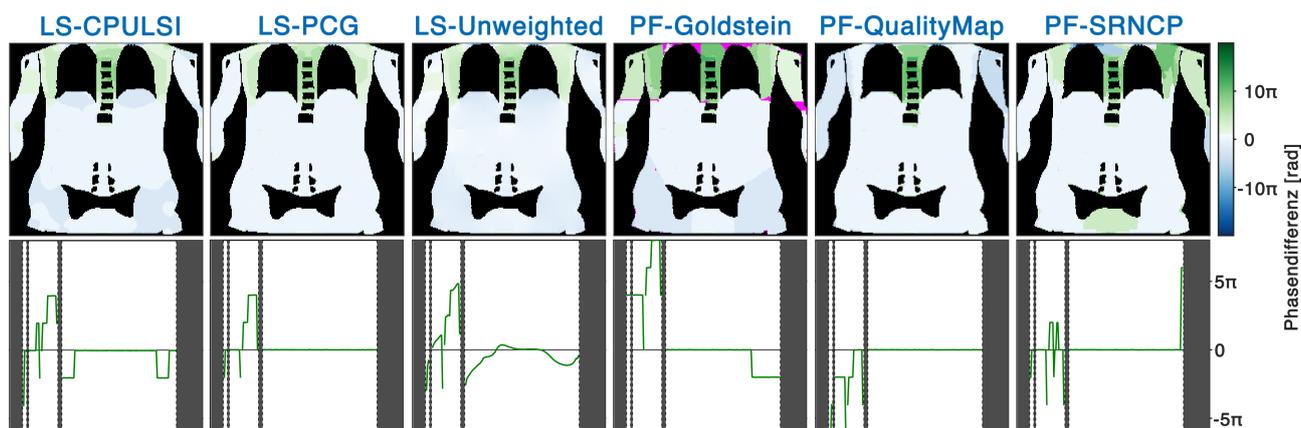


Abb. 4.7: Exemplarische Ergebnisse der Untersuchung des Set 3 mit $T_E = 9.84$ ms bei $\text{SNR} = 100$ dB. Oben: Heatmaps der Phasendifferenz zur Originalphase. Unten: Diagonalprofile der Heatmaps. Die Skalen sind jeweils einheitlich.

Die gemittelten Ergebnisübersichten zu den einzelnen Untersuchungen sind im Anhang A.9 und A.10 zu finden. Exemplarisch daraus sind für eine aussagekräftige Untersuchung in Abb. 4.7 die gemittelten Heatmaps und deren Diagonalprofile zusammengefasst. Dabei fällt zunächst auf, dass alle Algorithmen ausnahmslos die größten Abweichungen im Oberkörper zwischen der Wirbelsäule und den Lungen, teils auch in den Schultern und Oberarmen und in manchen Fällen auch unter dem Beckenknochen aufweisen. Dagegen wurden die abdominalen Bereiche, in denen kaum störende Strukturen und keine großen Phasensprünge vorhanden sind, in fast allen Untersuchungen fehlerfrei entfaltet. Lediglich der LS-CPULSI-Algorithmus hat (am deutlichsten in den gemittelten Ergebnissen der SNR-Untersuchungen in Anhang A.9) größere zusammenhängende, „fleckige“ Bereiche im Abdomen mit einer Verschiebung um bis zu 4π rad ungewrappt. Gerade in den Diagonalprofilen sieht man die 2π -stufigen Abweichungen der meisten Algorithmen sehr gut. Dagegen nimmt die Abweichungskurve beim LS-Unweighted-Algorithmus wieder beliebige Werte zwischen diesen Stufen an. Auffallend sind die Profile bei der Untersuchung mit niedrigstem $\text{SNR} = 5$ dB, da sie bei allen 6 Algorithmen von Rauschen geprägt sind, während die Profile aller anderen Untersuchungen sehr glatt verlaufen.

Die optisch „saubersten“ Ergebnisse liefern über alle Untersuchungen hinweg die Algorithmen LS-PCG, PF-SRNCP und PF-QualityMap. Letzterer hat meist (außer gerade in der obenstehenden Abb. 4.7) die geringsten Abweichungen zwischen den problematischen Lungenflügeln, was sich zumindest für die SNR-Untersuchung auch im RMSE-Graphen widerspiegelt. Der PF-Goldstein-Algorithmus hat, wie auch in vorherigen Untersuchungen, teilweise Pixel nicht ungewrappt (Wert = NaN), dies auch vorrangig zwischen den Lungen und in den Armen/Schultern, wo die anderen Algorithmen ebenfalls die größten Abweichungen zeigen. Gerade bei der Untersuchung des höchsten $T_E = 24.6$ ms hat PF-Goldstein 99.33 % Fehlerpixel hervorgebracht, womit der berechnete RMSE auf weniger als 100 ungewrappten Pixeln basiert. Deshalb ist es auch nicht überraschend, dass die gemessene mittlere Abweichung für diese Untersuchung nur halb so stark ausfällt, wie bei allen anderen Algorithmen. PF-Goldstein muss daher in der Evaluation separat von den anderen Algorithmen betrachtet werden.

4.5 Zusammenfassung ausgewählter Untersuchungen

Um letztlich eine allgemeinere Aussage über die Güte der einzelnen Algorithmen treffen zu können, sollen an dieser Stelle ausgewählte Untersuchungsergebnisse an den 3 unterschiedlichen Datensätzen in einer tabellarischen Übersicht vereint werden. Dafür wurden jeweils die gemittelten Abweichungen der Algorithmenresultate von der Ursprungsphase (hier in π rad) für exemplarische Untersuchungen bei kleinem und großem SNR, sowie bei geringer und starker Faltung gegenüber gestellt. Zur leichteren Identifikation von besonders niedrigen, bzw. hohen RMSE-Werten wurden diese zeilenweise farblich markiert.

RMSE [π rad]	Set	Globale Least-Squares-Algorithmen			Lokale Path-Following-Algorithmen		
		CPULSI	PCG	Unweighted	Goldstein	QualityMap	SRNCP
kleines SNR	1	0.12 \pm 0.07	0.07 \pm 0.02	0.38 \pm 0.09	0.07 \pm 0.05	0.07 \pm 0.01	0.06 \pm 0.00
	2	0.88 \pm 0.28	0.25 \pm 0.00	0.53 \pm 0.05	0.25 \pm 0.01	0.37 \pm 0.05	0.59 \pm 0.12
	3	1.48	0.86	1.10	1.51	0.58	1.01
großes SNR	1	0.11 \pm 0.08	0.04 \pm 0.03	0.39 \pm 0.10	0.02 \pm 0.08	0.03 \pm 0.03	0.00 \pm 0.01
	2	1.02 \pm 0.29	0.24 \pm 0.00	0.55 \pm 0.06	0.24 \pm 0.12	0.33 \pm 0.04	0.63 \pm 0.12
	3	1.27	1.11	0.90	1.81	0.54	0.94
geringe Faltung	1	1.72 \pm 0.13	0.06 \pm 0.02	1.75 \pm 0.26	0.04 \pm 0.10	0.05 \pm 0.04	0.01 \pm 0.01
	2	0.83 \pm 0.28	0.25 \pm 0.00	0.52 \pm 0.04	0.25 \pm 0.02	0.36 \pm 0.07	0.59 \pm 0.14
	3	1.04	1.07	0.81	1.11	0.42	0.72
starke Faltung	1	7.59 \pm 0.22	0.26 \pm 0.04	10.70 \pm 1.55	0.55 \pm 0.48	0.07 \pm 0.03	30.86 \pm 6.42
	2	2.95 \pm 0.05	2.85 \pm 0.02	3.00 \pm 0.06	2.52 \pm 0.80	2.75 \pm 0.17	4.95 \pm 1.87
	3	5.50	5.43	5.49	2.93	5.73	6.14

Tab. 3: Abweichung der Algorithmenresultate von der Originalphase für ausgewählte Untersuchungen. Alle Werte als RMSE in π rad. Vergleichsuntersuchungen bei kleinem SNR = 5 dB und großem SNR = 100 dB an allen Datensätzen. Geringe Faltung entspricht Untersuchungen bei Grad = $0.5 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ für Datensatz 1 und $T_E = 4.92$ ms für Datensätze 2 und 3. Starke Faltung entspricht Untersuchungen bei Grad = $3.0 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ für Datensatz 1 und $T_E = 24.60$ ms für Datensätze 2 und 3. Für die einzelnen Untersuchungen und Datensätze wurden auffällig hohe (rote) und niedrige (grüne) Werte im Vergleich zu den Werten der anderen Algorithmen zeilenweise eingefärbt.

Die isolierte Betrachtung des RMSE aus Tab. 3 genügt jedoch nicht allein für eine Analyse der Algorithmen, da die Werte für den PF-Goldstein-Algorithmus durch fehlerhafte Pixel, die in der RMSE-Berechnung nicht berücksichtigt werden konnten, verzerrt sind (vgl. Anhang A.3). Es zeigte sich, dass PF-Goldstein in 63 % aller Iterationen Fehlerpixel mit dem Wert NaN generierte, wobei über alle Untersuchungen hinweg 7.05 (± 24.70) % der Pixel betroffen waren. Als sekundäre Kenngrößen der Algorithmen wurden zudem die Laufzeiten erfasst (vgl. Kap. 4.1), welche ebenso in der nachfolgenden Ergebnisdiskussion berücksichtigt werden sollen.

5 Diskussion der Ergebnisse

Die Mehrzahl der durchgeführten Untersuchungen zeigt anhand der gemittelten Ergebnisübersichten (Anhänge A.5 bis A.10), dass sich die graustufigen Algorithmenergebnisse rein optisch nur selten eindeutig unterscheiden oder gar evaluieren lassen. Erst in den Heatmaps, den Differenzbildern zur Originalphase, werden die teils gewaltigen Unterschiede sichtbar und lassen sich lokalisieren und quantitativ bestimmen. Für den Vergleich der Algorithmen hat es sich als praktikabel erwiesen, die variierende $k \cdot 2\pi$ -Verschiebung der Ergebnisphasen über den Modalwert der Pixel in der gerundeten Phasenmatrix zu bestimmen und diese für alle Algorithmen zu normieren (vgl. Referenzierung der Heatmaps, Kap. 3.5). Für den klinischen Einsatz ist dies unerheblich, da sich bei der Änderung aller Werte um einen konstanten Faktor die Graustufen des einzelnen Phasenbildes nicht ändern.

Eine besondere Rolle bei der quantitativen Evaluation spielt der PF-Goldstein-Algorithmus. Anders als die anderen Algorithmen, erzeugt er regelmäßig fehlerhafte Pixel, die numerisch nicht ausgewertet werden können und zur Differenzierung in den Heatmaps daher rosa eingefärbt werden. Gerade in Untersuchungen mit hohem T_E bzw. hohem Phasengradienten zwischen den Pixeln, aber unerwarteterweise auch bei Untersuchungen mit hohem SNR, treten diese Fehlerpixel gehäuft auf. Dabei werden teilweise über 99 % der verfügbaren Pixel in mindestens einer Iteration mit einem undefinierten Wert (NaN) „rekonstruiert“. Insgesamt treten derartige Fehlerpixel in 63 % aller durchgeführten Iterationen auf, wobei durchschnittlich 7.05 (± 24.70) % aller Pixel betroffen sind (vgl. Diagramme zu den Fehlerpixeln, Anhang A.3). Da diese Fehlerpixel im RMSE numerisch nicht berücksichtigt werden, erscheinen die RMSE-Ergebnisse des PF-Goldstein-Algorithmus gegenüber den anderen Algorithmen teils herausragend zuverlässig, obwohl die zugehörigen Phasenbilder nur wenige reale Pixel enthalten.

Vergleichbare Arbeiten evaluierten PF-Goldstein als schnellen und robusten Algorithmus [63, 64]. Vor diesem Hintergrund legt das unerklärliche Versagen selbst bei hohem SNR nahe, dass die beobachteten Probleme entweder der spezifischen MATLAB-Umsetzung oder einer fehlerhaften Implementierung im Skript entstammen. Nur einer der untersuchten Algorithmen wurde vom ursprünglichen Entwickler auch in MATLAB umgesetzt, bei den anderen handelt es sich um Adaptionen von Dritten. Die konkreten [Probleme des PF-Goldstein-Algorithmus](#) zeigten sich darin, dass beim Unwrappprozess in der *FloodFill*-Operation teils Pfade gewählt wurden, die durch Branch Cuts für die Integration ausgeschlossen waren, was letztlich zum Abbruch des gesamten Skriptes führte. Dieses Verhalten der MATLAB-Umsetzung war bekannt und sollte durch ein Update [57] behoben werden. Nach dessen Implementierung konnte das Problem deutlich reduziert werden, so dass es letztendlich nur noch etwa alle 300 Iterationen bei den Untersuchungen am Set 2 und Set 3 mit höheren T_E auftrat. Trotz konstanter Parameter konnte das Problem bei statischem Rauschen nicht gezielt reproduziert werden. Die Suche nach zulässigen Integrationspfaden bei problembehafteten Untersuchungen dauert entsprechend länger, was im direkten Vergleich der Fehlerpixel-Diagramme (Anhang A.3) mit den Diagrammen der Algorithmenlaufzeiten (Kapitel 4.1) gut erkennbar ist. Aufgrund dieser Problematik können die Ergebnisse des PF-Goldstein nicht direkt mit den anderen Algorithmen verglichen werden.

Da für alle Algorithmen gerade extreme Abweichungen oft nur in einzelnen Iterationen aufgrund des variierenden Rauschens auftreten, ist es sinnvoll, die Untersuchungen mehrfach zu wiederho-

len. So kann über die 100 Iterationen der [spezifische Einfluss des Rauschens in den Ergebnissen herausgemittelt](#) werden. Für die MRT-Aufnahme in der Praxis ist dieses Verfahren natürlich bedeutungslos, da es nicht möglich ist, die Patienten 100-fach für optimale Aufnahmen zu scannen. Für die Evaluation ist es jedoch unerlässlich, um lokale Fehler durch Residuen und auch globale Fehler, die sich aus der Fehlerfortpflanzung ergeben, statistisch zu minimieren. Das zeigt sich gerade am Set 3, für welches nur eine einmalige Untersuchung möglich ist. Die Algorithmenergebnisse der Untersuchungen an Datenset 2 und 3 sind zwar allgemein miteinander vergleichbar, aber gerade die Schwankungen innerhalb eines einzelnen Algorithmus bei der Untersuchung des SNR an Set 3 deutet darauf hin, dass die Ergebnisse hier sehr zufällig sind. Im Vergleich dazu sind die Abweichungen in den SNR-Untersuchungen an Set 2 für die meisten Algorithmen im Mittel konstant.

Gerade für das Verhalten an Gewebegrenzen werden die Erwartungen experimentell bestätigt. So zeigt sich für die meisten Algorithmen und Untersuchungen ein exponentieller Anstieg des RMSE bei kleinem SNR < 10 dB, während [ab SNR \$> 20\$ dB die RMSE-Kurven konstant](#) verlaufen, mit vernachlässigbaren Schwankungen. Das Rauschen ist dann so gering, dass es keinen signifikanten Einfluss mehr auf die Unwrapergebnisse ausübt. Stattdessen ist die Qualität der Algorithmenergebnisse von den jeweiligen Strukturen abhängig. An Übergängen von Substanzen mit deutlich unterschiedlicher Suszeptibilität (beispielsweise zwischen Fett und Wasser im Set 2 oder zwischen Lungen, Gewebe und Knochen im Set 3) kommt es zu starken Phasensprüngen, die oft zu Fehlern in der entfalteten Phase führen. [Problematisch sind lokal rasch aufeinander folgende Phasensprünge](#) (Bereich zwischen den Lungen und der Wirbelsäule in Set 3) oder solche, die sich über weite Teile des Bildes erstrecken (Set 1 bei Grad $> 3 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$). In diesen Fällen ist es den meisten Algorithmen nicht möglich, das Phasenbild hinter diesen Kanten korrekt zu entfalten. Dagegen zeigen die Algorithmen bis auf LS-CPULSI im abdominalen Bereich die geringsten Abweichungen. Da sich dort die Phase über größere Areale im Phasenbild nicht signifikant ändert und auch keine zusätzlichen Phasensprünge durch Gewebegrenzen vorhanden sind, ist das Unwrapergebnis der meisten Algorithmen sehr homogen und weicht kaum von der Originalphase ab. Diese Beobachtungen lassen sich als experimentelle Bestätigung von Itoh's Kontinuitätsbedingung (vgl. Kap. 2.3.2) verstehen. Entsprechend sind auch schlechtere Algorithmenergebnisse bei den Untersuchungen mit hohem T_E zu erwarten gewesen, da die lange Echozeit zu einer stärkeren Faltung der Phase und somit zu mehr potentiell problematischen Phasensprüngen in einem geringeren Abstand zueinander führt (vgl. Anhang A.2). In den Untersuchungen am Set 2 und 3 ist eine [lineare Abhängigkeit zwischen RMSE und \$T_E\$](#) festzustellen. Bei genauerer Betrachtung der einzelnen Algorithmen fällt auf, dass die globalen Algorithmen LS-CPULSI und LS-Unweighted, sowie der lokale Algorithmus PF-SRNCP vor allem in den Untersuchungen des Datenset 1 und 2 sowohl optisch in den Heatmaps, als auch numerisch über den RMSE die schlechtesten Ergebnisse erzielen. Dabei ist der PF-SRNCP-Algorithmus in den SNR-Untersuchungen erstaunlich zuverlässig, nur bei stärkerer Faltung und größeren Phasensprüngen zeigt er mitunter die stärksten Abweichungen unter allen Algorithmen. Im Gegensatz dazu erzielt [PF-QualityMap und LS-PCG die homogensten Ergebnisse mit oft geringster Abweichung](#), die sich zumindest in den gemittelten Ergebnisübersichten nur selten voneinander unterscheiden. Auch in den numerischen Auswertungen liegen beide Algorithmen sehr dicht aneinander, lediglich im einmalig ausgeführten Set 3 ist in den Graphen eine Differenz erkennbar, aus der

allein aber keine Präferenz abgeleitet werden kann. In der SNR-Untersuchung an Set 2 schwankt der PF-QualityMap-Algorithmus deutlich häufiger in den Iterationen und weist eine insgesamt größere Abweichung auf, was sich in der SNR-Untersuchung an Set 3 wieder genau gegenteilig darstellt. Insgesamt zeigt der LS-PCG-Algorithmus über alle Untersuchungen hinweg sehr stabile Ergebnisse. Lediglich unter extremen Bedingungen zeigen sich geringe Iterationsschwankungen anhand der Fehlerbalken, die in anderen Untersuchungen dafür fast nicht vorhanden sind. Beide Algorithmen sind also relativ rauschunempfindlich und zeigen auch bei Aufnahmen mit hohen Echozeiten im Vergleich zu den anderen Algorithmen keine nennenswerten Probleme. Dies ist insofern eine interessante Erkenntnis, als dass beide Algorithmen prinzipiell unterschiedliche Verfahren verwenden und gerade die Least-Squares-Algorithmen als schneller, dafür aber deutlich fehleranfälliger gelten.

Das zeigt sich auch in den erhobenen Laufzeiten der Algorithmen (Kap. 4.1): Die globalen Algorithmen benötigen gegenüber den lokalen nur einen Bruchteil der Rechenkapazität. Dabei benötigt PF-SRNCP etwa die 4-fache und PF-QualityMap die 8-fache Rechenzeit des PF-Goldstein-Algorithmus. Bemerkenswert ist auch, dass die Laufzeit der Algorithmen zum einen innerhalb der Iterationen kaum schwanken, zum anderen auch bei Untersuchungen mit extremen SNR- und T_E -Werten, also bei intensiver Faltung und starkem Rauschen, nahezu konstant bleiben. Lediglich die Laufzeit von PF-Goldstein variiert von Durchlauf zu Durchlauf teils stark, was aus dem erhöhten Rechenaufwand in der problematischen *FloodFill*-Operation resultiert. Die gemessenen Laufzeiten sind von vielen Parametern, wie der verwendeten Rechnerkonfiguration²⁹ oder auch der schwankenden Auslastung während der Skriptausführung, abhängig. Die Rechnerauslastung lässt sich gut an den identischen Schwankungen der Laufzeitkurven der verschiedenen Algorithmen ablesen. Allein das Betriebssystem führt im Hintergrund zahlreiche Operationen parallel aus, wodurch die Skriptausführung immer wieder teils für den Bruchteil einer Millisekunde pausiert wird, während die Zeitmessung weiter läuft. Um dieses Problem der Laufzeitkomplexität zu kompensieren, werden in der Informatik die notwendigen Rechenoperationen eines Algorithmus im Detail analysiert [65]. Für diese Arbeit, deren Fokus auf der quantitativen Auswertung der Güte und nicht auf der Effizienz der Algorithmen liegt, genügt jedoch die zeitliche Messung als hinreichend genaue Einschätzung. Denn auch wenn im klinischen Alltag die Rechenzeit nicht kostenlos ist, liegt das Hauptaugenmerk bei der Verarbeitung medizinischer MR-Aufnahmen auf deren Qualität. Zuverlässige und fehlerfreie Phasenbilder sind unabdingbar, wenn sie für diagnostische oder therapeutische Entscheidungen verwendet werden, da sie so einen indirekten Einfluss auf die Gesundheit des Patienten haben können. Aus diesem Grund kann die **Laufzeit nur als sekundäres Bewertungskriterium** gelten, welches beispielsweise bei den qualitativ sehr ähnlichen Algorithmen LS-PCG und PF-QualityMap zum Tragen kommt. Beide wurden auch in anderen Untersuchungen als vergleichsweise zuverlässige Algorithmen evaluiert [63, 66, 67]. Jedoch hat der PF-QualityMap-Algorithmus im Mittel über alle Untersuchungen hinweg die 93-fache Rechenzeit pro Iteration gebraucht (20.46 s), die der LS-PCG-Algorithmus benötigte (0.22 s). Vor diesem Hintergrund ist die zu schlussfolgernde Erkenntnis aus dieser Arbeit, dass der LS-PCG-Algorithmus den anderen Algorithmen bei der Aufgabe des Phase Unwrapping hinsichtlich der Qualität der Ergebnisse unter Berücksichtigung der schnelleren Laufzeit vorzuziehen ist.

²⁹ Alle Untersuchungen wurden auf einem Acer Aspire XC-885 Rechner mit einem Hexa-Core-Prozessor (Intel® Core™ i5-8400 CPU @ 2.8 GHz) und 16 GB Arbeitsspeicher (DDR4-2666) unter Windows 10 Pro (64-Bit Version) durchgeführt.

6 Schlussfolgerung und Ausblick

Es gibt eine Vielzahl an Untersuchungen verschiedener Phase-Unwrapping-Algorithmen aus den Bereichen Radarinterferometrie (InSAR) und Optik (vgl. Anhang A.4), jedoch noch recht wenige an MR-Daten. Letztere untersuchen vorrangig 3D-Algorithmen, da es sich bei vollständigen MR-Tomogrammen letztlich um 3D-Aufnahmen aus 2D-Schnittbildern handelt. Die vorliegende Arbeit bildet die Brücke zur Übertragung der Erkenntnisse aus Untersuchungen an 2D-Algorithmen auf die Besonderheiten von 3D-MR-Aufnahmen, die auch schichtweise in 2D entfaltet werden können. Zudem werden zusätzlich zu 4 „klassischen“ auch die 2 neueren Algorithmen LS-CPULSI und PF-SRNCP untersucht, zu denen es bisher kaum Untersuchungen gibt.

Da sowohl in InSAR- als auch MRT-Daten die tatsächlich zugrundeliegende Phase unbekannt ist, beschränken sich viele Publikationen auf quantitative Untersuchungen von Phase-Unwrapping-Algorithmen an simpelsten Geometrien und zusätzlich auf rein optische, qualitative Untersuchungen der ungewrappten Phasenbilder aus realen Daten. Auch wenn sich die Algorithmenresultate optisch sehr ähneln, konnte in dieser Arbeit gezeigt werden, dass die darin enthaltenen Fehler erst in der quantitativen Evaluation sichtbar und die Unterschiede zwischen den Algorithmen deutlich werden.

In den durchgeführten Untersuchungen konnte festgestellt werden, dass der mittlere Fehler in den Unwrap-Ergebnissen an MR-Phasenbildern bei allen Algorithmen linear mit längerer Echozeit T_E steigt und dass der quantitative Einfluss des intrinsischen Rauschens in den Bildern ab einem Signal-zu-Rausch-Verhältnis (SNR) von über 20 dB konstant bleibt und im Mittel vernachlässigbar ist. Viel entscheidender für die Güte der Algorithmenresultate sind die Strukturen und Gewebekanten in den Bildern, wobei es besonders in Bereichen mit lokal rasch aufeinander folgenden Phasensprüngen, wie zwischen Lungen und der Wirbelsäule, zu den größten Abweichungen kommt. Die Ergebnisse der globalen Algorithmen wiesen, abgesehen vom LS-PCG-Algorithmus, die größten Abweichungen zur Ursprungsphase und auch die stärksten Schwankungen innerhalb der Iterationen einer einzelnen Untersuchung auf. Allerdings waren die globalen Algorithmen signifikant schneller als die lokalen. Als rauschunempfindlichste, stabilste Algorithmen mit den im Mittel geringsten Fehlern kristallisierten sich der PF-QualityMap [4, Kap. 4.3] und der LS-PCG-Algorithmus [4, Kap. 5.4.3] heraus. Da erster mit durchschnittlich 20 Sekunden pro Phasenbild eine um 2 Größenordnungen längere Rechenzeit als LS-PCG benötigte, ist letzterer den anderen untersuchten Phase-Unwrapping-Algorithmen vorzuziehen.

Über diese Arbeit hinaus ist es denkbar, weitere Untersuchungen an den 6 Algorithmen durchzuführen, wobei die Parameter einiger Algorithmen näher untersucht und optimiert werden könnten. Zudem wäre vor dem Hintergrund der problematischen Goldstein-Umsetzung eine größere Untersuchung verschiedenster Umsetzungen in anderen Programmiersprachen denkbar, bei denen auch möglicherweise vorhandene 3D-Varianten der Algorithmen einbezogen werden könnten, um die Übertragbarkeit zwischen Erkenntnissen zu 2D- und 3D-Algorithmen zu evaluieren. Letztendlich beschränkt sich die Bandbreite der Phase-Unwrapping-Algorithmen nicht auf die 6 untersuchten Methoden, so dass in Untersuchungen weiterer Algorithmen an ähnlich komplexen Datensätzen wie dem Set 3 mehr Erkenntnisse über die Verwendbarkeit der unterschiedlichen Unwrap-Methoden auch für das SWI und die QSM-Methodik gewonnen werden könnten.

Literaturverzeichnis

- [1] Xia H, Guo RX, Fan ZB, Cheng HM und Yang BC. [Non-invasive Mechanical Measurement for Transparent Objects by Digital Holographic Interferometry Based on Iterative Least-Squares Phase Unwrapping](#). *Exp Mech* 52 (2012), S. 439–45.
- [2] Xia H, Montresor S, Guo RX, Li J, Yan F, Cheng HM und Picart P. [Phase calibration unwrapping algorithm for phase data corrupted by strong decorrelation speckle noise](#). *Opt Express* 24.25 (2016), S. 28713–30.
- [3] Ghiglia DC und Romero LA. [Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods](#). *J Opt Soc Am A* 11.1 (1994), S. 107–17.
- [4] Ghiglia DC und Pritt MD. [Two-Dimensional Phase Unwrapping: Theory, Algorithms, and Software](#). New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998. ISBN: 0-471-24935-1.
- [5] [MATLAB® Version 8.5.0.197613 \(R2015a\)](#). The Mathworks Inc., Natick, Massachusetts, 2015.
- [6] Goldstein RM, Zebker HA und Werner CL. [Satellite radar interferometry: Two-dimensional phase unwrapping](#). *Radio Sci* 23.4 (1988), S. 713–20.
- [7] Herráez MA, Burton DR, Lalor MJ und Gdeisat MA. [A Fast two-dimensional phase unwrapping algorithm based on sorting by reliability following a non-continuous path](#). *Appl Opt* 41.35 (2002), S. 7437–44.
- [8] Moll A. [Radarinterferometrische Untersuchungen mit ERS-1/2 auf der Antarktischen Halbinsel](#). Diss. Deutschland: Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2008. URL: nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:5N-13101. Letzter Abruf: 01.06.2020.
- [9] Haacke EM, Xu Y, Cheng Y-CN und Reichenbach JR. [Susceptibility weighted imaging \(SWI\)](#). *Magn Reson Med* 52.3 (2004), S. 612–8.
- [10] Harzheim D. [Suszeptibilitätsgewichtete MR-Bildgebung in der Diagnostik der Multiplen-Sklerose](#). Diss. Deutschland: Friedrich-Schiller-Universität Jena, 2013. URL: nbn-resolving.de/urn:nbn:de:gbv:27-20130410-102405-0. Letzter Abruf: 01.06.2020.
- [11] Haacke EM, Liu S, Buch S, Zheng W, Wu D und Ye Y. [Quantitative susceptibility mapping: current status and future directions](#). *J Magn Reson Imaging* 33.1 (2015), S. 1–25.
- [12] Deistung A, Schweser F und Reichenbach JR. [Overview of quantitative susceptibility mapping](#). *NMR Biomed* 30.4 (2017), e3569.
- [13] Ma J. [Dixon techniques for water and fat imaging](#). *J Magn Reson Imaging* 28.3 (2008), S. 543–58.
- [14] Hartwig V, Giovannetti G, Vanello N, Lombardi M, Landini L und Simi S. [Biological Effects and Safety in Magnetic Resonance Imaging: A Review](#). *Int J Environ Res Publ Health* 6.6 (2009), S. 1778–98.
- [15] McRobbie DW, Moore EA, Graves MJ und Prince MR. [MRI - From Picture to Proton](#). 2. Auflage. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. ISBN: 978-0-521-86527-2.
- [16] Mitchell HH, Hamilton TS, Steggerda FR und Bean HW. [The Chemical Composition of the Adult Human Body and its Bearing on the Biochemistry of Growth](#). *J Biol Chem* 158 (1945), S. 625–37.
- [17] Dössel O. [Bildgebende Verfahren in der Medizin - Von der Technik zur medizinischen Anwendung](#). 2. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer Vieweg, 2016. ISBN: 978-3-642-54406-4.

- [18] Weishaupt D, Köchli VD und Marincek B. [Wie funktioniert MRI? - Eine Einführung in Physik und Funktionsweise der Magnetresonanztomographie](#). 7. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer Medizin, 2013. ISBN: 978-3-642-41615-6.
- [19] Friebolin H. [Ein- und zweidimensionale NMR-Spektroskopie - Eine Einführung](#). 4. Auflage. Weinheim: Wiley-VCH Verlag, 2006. ISBN: 3-527-31571-3.
- [20] Haacke EM, Brown RW, Thompson MR und Venkatesan R. [Magnetic Resonance Imaging - Physical Principles and Sequence Design](#). New York: John Wiley & Sons, Inc., 1999. ISBN: 978-0471351283.
- [21] [9komma4: Scharfer Blick ins Gehirn](#). www.fz-juelich.de/portal/DE/Forschung/it-gehirn/WerkzeugeHirnforschung/9komma4/_node.html. Jülich, 2011. Letzter Abruf: 01.06.2020.
- [22] [Live-Messung des Erdmagnetfeldes in der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt, Braunschweig](#). www.ptb.de/cms/nc/ptb/fachabteilungen/abt2/fb-25/ag-251/live-daten-erdmagnetfeldmessung.html. Letzter Abruf: 01.06.2020.
- [23] Hendrix A. [Magnete, Spins und Resonanzen - Eine Einführung in die Grundlagen der Magnetresonanztomographie](#). www.healthcare.siemens.de/magnetic-resonance-imaging/magnetom-world/publications/mr-basics. Erlangen, 2003. Letzter Abruf: 01.06.2020.
- [24] Brown MA und Semelka RC. [MRI - Basic Principles and Applications](#). 3. Auflage. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2003. ISBN: 0-471-43310-1.
- [25] Bethge K, Kraft G, Kreisler P und Walter G. [Medical Applications of Nuclear Physics](#). 1. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. ISBN: 978-3-642-05870-7.
- [26] Fließbach T. [Quantenmechanik: Lehrbuch zur Theoretischen Physik III](#). 6. Auflage. Springer Spektrum, 2018. ISBN: 978-3-662-58030-1.
- [27] Vlaardingerbroek MT und Boer JA. [Magnetresonanztomographie - Theorie und Praxis](#). Übers. von Geske R. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. ISBN: 978-3-540-20028-4.
- [28] Bernstein MA, King KF und Zhou XJ. [Handbook of MRI Pulse Sequences](#). Elsevier Inc., 2004. ISBN: 978-0-12-092861-3.
- [29] Elster AD. [Real v Imaginary Signals](#). mriquestions.com/real-v-imaginary.html. Questions und Answers in MRI. Letzter Abruf: 01.06.2020.
- [30] Wameling J und Billebaut B. [Bildgebung und Gerätekomponenten – Magnetresonanztomografie Teil II](#). *Radiopraxis* 4.4 (2011), S. 201–9.
- [31] Nitz WR, Runge VM und Schmeets SH. [Praxiskurs MRT - Anleitung zur MRT-Physik über klinische Beispiele](#). 1. deutsche Auflage. Georg Thieme Verlag Stuttgart New York, 2007. ISBN: 978-3-13-139722-5.
- [32] Nitz WR, Runge VM und Schmeets SH. [Edition Radiopraxis - MRT-Guide für MTRA/RT](#). Georg Thieme Verlag Stuttgart New York, 2012. ISBN: 978-3-13-154801-6.
- [33] Trzebiatowski E. [Die Idee des K-Raums](#). *Radiopraxis* 5.2 (2012), S. 97–105.
- [34] Butz T. [Fouriertransformation für Fußgänger](#). 7. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2012. ISBN: 978-3-8348-8295-0.
- [35] Steinbrecher R. [Bildverarbeitung in der Praxis](#). 2. Auflage. München, Wien, Oldenbourg: Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2005. ISBN: 3-486-22372-0.
- [36] Rauscher A. [Phase information in magnetic resonance imaging](#). Diss. Österreich: Technische Universität Wien, 2005. URL: resolver.obvsg.at/urn:nbn:at:at-ubtuw:1-17773. Letzter Abruf: 01.06.2020.

- [37] The MathWorks Inc. [atan2: Four-quadrant inverse tangent](http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/atan2.html). www.mathworks.com/help/matlab/ref/atan2.html. MATLAB Help Center. Letzter Abruf: 01.06.2020.
- [38] The MathWorks Inc. [unwrap: Shift phase angles](http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/unwrap.html). www.mathworks.com/help/matlab/ref/unwrap.html. MATLAB Help Center. Letzter Abruf: 01.06.2020.
- [39] Itoh K. [Analysis of the phase unwrapping algorithm](#). *Appl Opt* 21.14 (1982), S. 2470.
- [40] Fornaro G, Franceschetti G, Lanari R, Sansosti E und Tesauro M. [Global and local phase-unwrapping techniques: a comparison](#). *J Opt Soc Am A* 14.10 (1997), S. 2702–8.
- [41] Chen CW und Zebker HA. [Two-dimensional phase unwrapping with use of statistical models for cost functions in nonlinear optimization](#). *J Opt Soc Am A* 18.2 (2001), S. 338–51.
- [42] Simmel RM. [Evaluierung von Algorithmen für das Phase Unwrapping von MRI - Daten](#). Diplomarbeit. Österreich: Technische Universität Graz, 2013. URL: diglib.tugraz.at/evaluierung-von-algorithmen-fuer-das-phase-unwrapping-von-mri-daten-2013. Letzter Abruf: 01.06.2020.
- [43] Kaufmann GH, Galizzi GE und Ruiz PD. [Evaluation of a preconditioned conjugate-gradient algorithm for weighted least-squares unwrapping of digital speckle-pattern interferometry phase maps](#). *Appl Opt* 37.14 (1998), S. 3076–84.
- [44] Lazar N. [The Statistical Analysis of Functional MRI Data](#). New York: Springer-Verlag, 2008. ISBN: 978-0-387-78190-7.
- [45] Edelstein WA, Glover GH, Hardy CJ und Redington RW. [The intrinsic signal-to-noise ratio in NMR imaging](#). *Magn Reson Med* 3.4 (1986), S. 604–18.
- [46] Cárdenas-Blanco A, Tejos C, Irarrazaval P und Cameron I. [Noise in Magnitude Magnetic Resonance Images](#). *Concepts in Magnetic Resonance Part A* 32A.6 (2008), S. 409–16.
- [47] Aja-Fernández S. [Selected papers on statistical noise analysis in MRI](#). LPI, Universidad de Valladolid, 2015.
- [48] Erdogmus D, Larsson EG, Yan R, Principe JC und Fitzsimmons JR. [Measuring the Signal-to-Noise Ratio in Magnetic Resonance Imaging: A Caveat](#). *Signal Process* 84 (2004), S. 1035–40.
- [49] Gudbjartsson H und Patz S. [The rician distribution of noisy mri data](#). *Magn Reson Med* 34.6 (1995), S. 910–4.
- [50] Viswanathan M. [How to generate AWGN noise in Matlab/Octave \(without using in-built awgn function\)](#). www.gaussianwaves.com/2015/06/how-to-generate-awgn-noise-in-matlaboctave-without-using-in-built-awgn-function. 2015. Letzter Abruf: 01.06.2020.
- [51] Sage D. [SNR, PSNR, RMSE, MAE: ImageJ's plugin to assess the quality of images](#). bigwww.epfl.ch/sage/soft/snr. Switzerland, 2017. Letzter Abruf: 01.06.2020.
- [52] Placidi G. [MRI Essentials for Innovative Technologies](#). Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012. ISBN: 978-1-4398-4062-7.
- [53] Gonzalez RC und Woods RE. [Digital Image Processing](#). 2. Auflage. Prentice Hall International, 2001. ISBN: 978-0201180756.
- [54] Stroman PW. [Essentials of Functional MRI](#). Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2011. ISBN: 978-1-4398-1878-7.
- [55] Bechler E, Stabinska J und Wittsack HJ. [Analysis of different phase unwrapping methods to optimize quantitative susceptibility mapping in the abdomen](#). *Magn Reson Med* 82 (2019), S. 2077–89.

- [56] Spottiswoode B. [2D phase unwrapping algorithms](http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/22504-2d-phase-unwrapping-algorithms). www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/22504-2d-phase-unwrapping-algorithms. MATLAB Central File Exchange. Letzter Abruf: 01.06.2020.
- [57] Smith C. [GoldsteinUnwrap2D_r1](http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/29497-goldsteinunwrap2d_r1). www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/29497-goldsteinunwrap2d_r1. MATLAB Central File Exchange. Letzter Abruf: 01.06.2020.
- [58] Mullen M. [2D Phase Unwrapping using SRNCP](http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/64630-2d-phase-unwrapping-using-srnpc). www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/64630-2d-phase-unwrapping-using-srnpc. MATLAB Central File Exchange. Letzter Abruf: 01.06.2020.
- [59] Kasim MF. [2D Weighted Phase Unwrapping](http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/60345-2d-weighted-phase-unwrapping). www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/60345-2d-weighted-phase-unwrapping. MATLAB Central File Exchange. Letzter Abruf: 01.06.2020.
- [60] Dymerska B. [PCG_unwrap_2D\(ph_nii, ph_file, mask_nii, max_iter, epsi_con, N\)](http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/57666-pcg_unwrap_2d-ph_nii-ph_file-mask_nii-max_iter-epsi_con-n). www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/57666-pcg_unwrap_2d-ph_nii-ph_file-mask_nii-max_iter-epsi_con-n. MATLAB Central File Exchange. Letzter Abruf: 01.06.2020.
- [61] Xia H. [Calibrated 2D phase unwrapping algorithm based on least-squares and iteration](http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/60629-calibrated-2d-phase-unwrapping-algorithm-based-on-least-squares-and-iteration). www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/60629-calibrated-2d-phase-unwrapping-algorithm-based-on-least-squares-and-iteration. MATLAB Central File Exchange. Letzter Abruf: 01.06.2020.
- [62] Martens JB und Meesters L. [Image dissimilarity](#). *Signal Process* 70 (1998), S. 155–76.
- [63] Pritt MD. [Comparison of path-following and least-squares phase unwrapping algorithms](#). *IGARSS'97. 1997 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium Proceedings. Remote Sensing - A Scientific Vision for Sustainable Development*. Bd. 2. 1997, S. 872–4.
- [64] Zebker HA und Lu Y. [Phase Unwrapping Algorithms for Radar Interferometry: Residue-Cut, Least-Squares, and Synthesis Algorithms](#). *J Opt Soc Am A* 15.3 (1998), S. 586–98.
- [65] Ottmann T und Widmayer P. [Algorithmen und Datenstrukturen](#). 6. Auflage. Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2017. ISBN: 978-3-662-55650-4.
- [66] Zappa E und Busca G. [Comparison of eight unwrapping algorithms applied to Fourier-transform profilometry](#). *Opt Laser Eng* 46.2 (2008), S. 106–16. ISSN: 0143-8166.
- [67] Shi X und Zhang Y. [Quantitative comparison of phase unwrapping algorithms for SAR interferometry](#). *2008 Asia-Pacific Microwave Conference* (2008), S. 1–4.
- [68] Just D, Adam N, Schwabisch M und Bamler R. [Comparison of phase unwrapping algorithms for SAR interferograms](#). *1995 International Geoscience and Remote Sensing Symposium, IGARSS '95. Quantitative Remote Sensing for Science and Applications*. Bd. 1. 1995, S. 767–9.
- [69] Braganza S. [Analysis of Phase-Unwrap Quality of OQM Images](http://coe.northeastern.edu/Research/rcl/projects/phaseunwrap/Analysis%20of%20phase-ver2.html). coe.northeastern.edu/Research/rcl/projects/phaseunwrap/Analysis%20of%20phase-ver2.html. 2006. Letzter Abruf: 01.06.2020.
- [70] Heshmat S, Tomioka S und Nishiyama S. [Performance Evaluation of Phase Unwrapping Algorithms for Noisy Phase Measurements](#). *Int J Optomechatronics* 8.4 (2014), S. 260–74.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Präzession eines ^1H im Magnetfeld B_z [nach 20, Fig. 2.4].	3
2.2	Aufspaltung der Energieniveaus für $m_\ell = \pm\frac{1}{2}$ [nach 19, Abb. 1-4 u. 24, Fig. 1-4].	4
2.3	Darstellung der Magnetisierungsvektoren der Spins im mitrotierenden Koordinatensystem (x',y') nach Anregung durch zwei HF-Pulse. Nach Gabe eines $\frac{\pi}{2}$ -Puls zur Zeit T_{90° (a) klappen die Spins in die xy -Ebene, wodurch aus der Längsmagnetisierung M_z eine als FID messbare Quermagnetisierung M_{xy} wird (b). In der xy -Ebene dephasiert das Spinensemble aufgrund lokaler Unterschiede im Magnetfeld (c) und kann durch Einstrahlen eines π -Pulses zum Zeitpunkt $T_{180^\circ} = \frac{T_E}{2}$ (d) um 180° an einer Achse der xy -Ebene gedreht werden, wodurch es wieder zusammenläuft (e). Die dann vorübergehend erneut verstärkte Quermagnetisierung (f) ist nach der Zeit T_E als Spinecho messbar (g) [nach 17, Abb. 11.25 u. 11.26].	5
2.4	Darstellung der Relaxationszeiten von Fett und Liquor bei 1 T nach Gabe eines $\frac{\pi}{2}$ -Pulses mit Hilfe der Magnetisierungsvektoren M_z (grün) und M_{xy} (rot). T_1 ist die gewebespezifische Zeitkonstante, nach der M_z auf 63 % angewachsen ist. T_2 ist die gewebespezifische Zeitkonstante, nach der M_{xy} auf 37 % abgefallen ist [nach 23, Abb. S. 72 u. 80].	6
2.5	Gradient des B_z -Feldes zur Selektion der Schicht Δz über Anregung mit HF-Pulsen der Frequenzbandbreite $\Delta\omega_L$ [nach 23, Abb. S. 102, 106 u. 107]. . .	9
2.6	Zusammenhang zwischen k -Raum und Bildraum über die Fouriertransformation (FFT). Jeder Punkt im k -Raum enthält Informationen über jeden Punkt im Bildraum und vice versa (rote und grüne Pfeile). Zur Ortsauflösung sind die Signale in x - und k_x -Richtung frequenzkodiert und in y - und k_y -Richtung phasenkodiert. Die Abtastung des k -Raums kann z.B. radial in die kartesischen Koordinaten des Bildraums erfolgen (Trajektorien in blau) [nach 23, Abb. S. 115 u. 29].	10
2.7	Verschiedene Abbildungen, generiert aus einer axialen MRT-Aufnahme eines Patienten-Hirns. Bilder freundlicherweise bereitgestellt vom Institut für Diagnostische und Interventionelle Radiologie des Universitätsklinikums Düsseldorf. .	12
2.8	Veranschaulichung der Faltung anhand einer 2D-Phase und ihrer Pseudo-3D-Projektion als Glockenkurve. Beim Wrappen wird die Glockenkurve „in sich gestapelt“, wodurch die charakteristischen Linien entstehen.	14
2.9	Darstellung des Einflusses von Rauschstärke und Abtastrate auf das Unwrappergebnis Φ_{uw} (grün) am Beispiel einer 1D-Sinusfunktion. Blau: Ursprüngliche Sinusfunktion Φ_0 . Rot: Gewrappte Funktion $\Phi_w \in (-\pi, \pi]$	15
2.10	Nachweis einer Residue (im blauen Weg rechts) anhand der aufsummierten Phasengradienten zwischen je 4 benachbarten Pixeln (schwarze Kreise) eines gewrappten Phasenbildes aus 6 Pixeln. Es liegt ein Phasensprung beim Gradienten Δ_7 (rot) vor [nach 4, Fig. 2.5 u. 2.6].	16

2.11	Wegabhängigkeit bei einer positiven (+) und negativen (-) Residue. Punkt B hängt vom Integrationsweg ausgehend von Punkt A ab. Die Wege 2 und 3 führen zu einem anderen Phasenwert in B als über Weg 1 [nach 4, Fig. 4.1].	18
3.1	Phasenmatrizen des Set 1 bei Grad $0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$. Die Abb. entstammen einer einzigen Skript-Iteration und wurden mit den jeweiligen Standard-Bildparametern erzeugt. In den Pseudo-3D-Ansichten wurden die umliegenden, leeren Pixel um den Kreis zur größeren Darstellung in den Achsenskalen exkludiert, die xy-Ebene ist nur auf den Kreis fokussiert.	22
3.2	Ausgangsbilder des Datensatzes Set 2 mit 3D-Ansicht des Dipols aus verschiedenen Richtungen, den gefalteten (bei $T_E = 19.68 \text{ ms}$) und entfalteten Phasenmatrizen, sowie dem Magnitudenbild und eine Projektion des k-Raums.	23
3.3	Beispielhafte Ausgangsbilder des Datensatzes Set 3 (jeweils aus Schicht 8 bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$).	24
3.4	Beispielhafte Ergebnisplots aus der Iterationsauswertung von Set 2. Das Algorithmenergebnis (a) wird mit der binären Maske (c) multipliziert und von der Originalphase (b) subtrahiert. Die dabei entstehende Differenzmatrix wird um den Modus (am häufigsten vorkommenden Wert) ihrer Verschiebung korrigiert, um die Algorithmen überhaupt numerisch miteinander vergleichen zu können. Die so entstehende Matrix wird in dieser Arbeit als referenzierte Heatmap (d) bezeichnet, deren Diagonalprofil in (e) separat dargestellt ist. Eventuelle von den Algorithmen erzeugte Fehlerpixel (NaN) werden für die Auswertung in den Heatmaps zur besseren Identifizierung rosa eingefärbt (f).	28
4.1	Übersicht der benötigten Laufzeiten der Algorithmen in den durchgeführten Untersuchungen.	30
4.2	RMSE-Ergebnisgraphen zu den Untersuchungen am Set 1.	31
4.3	Exemplarische Ergebnisse der Untersuchung des Set 1 mit Grad = $1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$. Oben: Heatmaps der Phasendifferenz zur Originalphase. Unten: Diagonalprofile der Heatmaps. Die Skalen sind jeweils einheitlich.	32
4.4	RMSE-Ergebnisgraphen zu den Untersuchungen am Set 2.	33
4.5	Exemplarische Ergebnisse der Untersuchung des Set 2 mit $T_E = 9.84 \text{ ms}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$. Oben: Heatmaps der Phasendifferenz zur Originalphase. Unten: Diagonalprofile der Heatmaps. Die Skalen sind jeweils einheitlich.	34
4.6	RMSE-Ergebnisgraphen zu den Untersuchungen am Set 3.	35
4.7	Exemplarische Ergebnisse der Untersuchung des Set 3 mit $T_E = 9.84 \text{ ms}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$. Oben: Heatmaps der Phasendifferenz zur Originalphase. Unten: Diagonalprofile der Heatmaps. Die Skalen sind jeweils einheitlich.	36
A.1	Vereinfachter schematischer Programmablaufplan des MATLAB-Skriptes. Rot „E“: Eingabe von Daten. Rot „A“: Ausgabe von Daten. Grün: Ausführung von Operationen an den Daten. Gelb: Schleifen und Abfragen. Details der Funktion zur Evaluation der Algorithmenergebnisse sind in Abb. A.2 separat dargestellt.	XVIII

A.2 Schematischer Programmablaufplan der Funktion zur Evaluation der einzelnen Iterationsergebnisse (vgl. Kapitel 3.5). Rot „A“: Ausgabe von Daten. Grün: Ausführung von Operationen an den Daten. Gelb: Schleifen und Abfragen. Φ_0 : Entfaltete Originalphase. Φ_{UW} : Entfaltete Phase als Ergebnis des Algorithmus. H_{Abs} : Absolute Heatmap (Abweichung von Φ_{UW} gegenüber Φ_0). H_{Ref} : Referenzierte Heatmap (Abweichung von Φ_{UW} mit korrigierter 2π -Verschiebung gegenüber Φ_0). XIX

A.3 Ausgewählte Phasenbilder für die Untersuchungen an Set 1. Diese Phasen stellen die Ausgangsmatrizen Φ_w dar, die von den Algorithmen in den jeweiligen Untersuchungen entfaltet werden. Die Abb. (a) bis (c) gehören zur Untersuchung des SNR bei einem Phasengradienten von $0.1 \frac{rad}{px}$. Die Abb. (d) bis (f) gehören zur Untersuchung der Gradientensteigung bei einem SNR von 100 dB. XX

A.4 Ausgewählte Phasenbilder für die Untersuchungen an Set 2. Diese Phasen stellen die Ausgangsmatrizen Φ_w dar, die von den Algorithmen in den jeweiligen Untersuchungen entfaltet werden. Die Abb. (a) bis (c) gehören zur Untersuchung des SNR bei einer T_E von 4.91 ms. Die Abb. (d) bis (f) gehören zur Untersuchung der T_E bei einem SNR von 100 dB. XXI

A.5 Ausgewählte Phasenbilder für die Untersuchungen an Set 3. Diese Phasen stellen die Ausgangsmatrizen Φ_w dar, die von den Algorithmen in den jeweiligen Untersuchungen entfaltet werden. Die Abb. (a) bis (c) gehören zur Untersuchung des SNR bei einer T_E von 4.91 ms. Die Abb. (d) bis (f) gehören zur Untersuchung der T_E bei einem SNR von 100 dB. XXI

A.6 Übersicht des Anteils an fehlerhaften, nicht ungewrappten Pixeln mit Wert NaN innerhalb der binären Maske in allen durchgeführten Untersuchungen. Es zeigt sich, dass nur der PF-Goldstein-Algorithmus derartig kaputte Pixel hervorbringt, die in den Ergebnisübersichten im Anhang A.5 bis A.10 zur besseren Lokalisation rosa eingefärbt wurden. XXII

A.7 Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit **SNR = 1 dB** bei Grad = $0.1 \frac{rad}{px}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. XXIV

A.8 Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit **SNR = 5 dB** bei Grad = $0.1 \frac{rad}{px}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. XXV

A.9 Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit **SNR = 10 dB** bei Grad = $0.1 \frac{rad}{px}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. XXVI

A.10 Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit **SNR = 15 dB** bei Grad = $0.1 \frac{rad}{px}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. XXVII

A.11 Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit **SNR = 20 dB** bei Grad = $0.1 \frac{rad}{px}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. XXVIII

A.12	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $SNR = 25 \text{ dB}$ bei $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XXIX
A.13	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $SNR = 30 \text{ dB}$ bei $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XXX
A.14	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $SNR = 40 \text{ dB}$ bei $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XXXI
A.15	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $SNR = 50 \text{ dB}$ bei $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XXXII
A.16	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $SNR = 60 \text{ dB}$ bei $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XXXIII
A.17	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $SNR = 80 \text{ dB}$ bei $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XXXIV
A.18	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $SNR = 100 \text{ dB}$ bei $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XXXV
A.19	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $SNR = 100 \text{ dB}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XXXVI
A.20	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 0.5 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $SNR = 100 \text{ dB}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XXXVII
A.21	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 1.0 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $SNR = 100 \text{ dB}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XXXVIII
A.22	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 1.5 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $SNR = 100 \text{ dB}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XXXIX
A.23	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 2.0 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $SNR = 100 \text{ dB}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XL
A.24	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 2.5 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $SNR = 100 \text{ dB}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XLI
A.25	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 3.0 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $SNR = 100 \text{ dB}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XLII

A.26	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 3.5 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei SNR = 100 dB am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XLIII
A.27	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 4.0 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei SNR = 100 dB am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XLIV
A.28	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 5.0 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei SNR = 100 dB am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XLV
A.29	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 6.0 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei SNR = 100 dB am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XLVI
A.30	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 7.0 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei SNR = 100 dB am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XLVII
A.31	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 1 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XLVIII
A.32	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 5 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	XLIX
A.33	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 10 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	L
A.34	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 15 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	LI
A.35	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 20 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	LII
A.36	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 25 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	LIII
A.37	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	LIV
A.38	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 40 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	LV
A.39	Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 50 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.	LVI

A.40 Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $SNR = 60 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. LVII

A.41 Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $SNR = 80 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. LVIII

A.42 Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $SNR = 100 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. LIX

A.43 Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 4.92 \text{ ms}$ bei $SNR = 100 \text{ dB}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. LX

A.44 Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 9.84 \text{ ms}$ bei $SNR = 100 \text{ dB}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. LXI

A.45 Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 14.76 \text{ ms}$ bei $SNR = 100 \text{ dB}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. LXII

A.46 Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 19.68 \text{ ms}$ bei $SNR = 100 \text{ dB}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. LXIII

A.47 Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 24.60 \text{ ms}$ bei $SNR = 100 \text{ dB}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. LXIV

A.48 Ergebnisse der Untersuchung mit $SNR = 5 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 3. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. LXV

A.49 Ergebnisse der Untersuchung mit $SNR = 10 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 3. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. LXVI

A.50 Ergebnisse der Untersuchung mit $SNR = 30 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 3. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. LXVII

A.51 Ergebnisse der Untersuchung mit $SNR = 60 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 3. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. LXVIII

A.52 Ergebnisse der Untersuchung mit $SNR = 100 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 3. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. LXIX

A.53 Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 4.92 \text{ ms}$ bei $SNR = 100 \text{ dB}$ am Set 3. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. LXX

- A.54 Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 9.84 \text{ ms}$ bei SNR = 100 dB am Set 3. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. LXXI
- A.55 Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 14.76 \text{ ms}$ bei SNR = 100 dB am Set 3. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. LXXII
- A.56 Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 19.68 \text{ ms}$ bei SNR = 100 dB am Set 3. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. LXXIII
- A.57 Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 24.60 \text{ ms}$ bei SNR = 100 dB am Set 3. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt. LXXIV

Tabellenverzeichnis

1	Überblick über die durchgeführten Untersuchungen an den 3 Datensätzen und die zugehörigen Parameter.	27
2	Tabellarische Übersicht der gemessenen Laufzeiten der Algorithmen über alle Untersuchungen hinweg.	30
3	Abweichung der Algorithmenenergebnisse von der Originalphase für ausgewählte Untersuchungen. Alle Werte als RMSE in π rad. Vergleichsuntersuchungen bei kleinem SNR = 5 dB und großem SNR = 100 dB an allen Datensätzen. Geringe Faltung entspricht Untersuchungen bei Grad = $0.5 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ für Datensatz 1 und $T_E = 4.92$ ms für Datensätze 2 und 3. Starke Faltung entspricht Untersuchungen bei Grad = $3.0 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ für Datensatz 1 und $T_E = 24.60$ ms für Datensätze 2 und 3. Für die einzelnen Untersuchungen und Datensätze wurden auffällig hohe (rote) und niedrige (grüne) Werte im Vergleich zu den Werten der anderen Algorithmen zeilenweise eingefärbt.	37
A.1	Übersicht zu verwendeten Publikationen, welche unter anderem Algorithmen verglichen haben, die auch in dieser Arbeit verwendet wurden. Der neuste LS-CPULSI-Algorithmus (2016, [2]) wurde in keiner der aufgelisteten Arbeiten verwendet und daher ebenso wie zusätzliche in den Publikationen untersuchte Algorithmen hier nicht separat aufgeführt.	XXIII

A Anhang

A.1 Programmablaufpläne

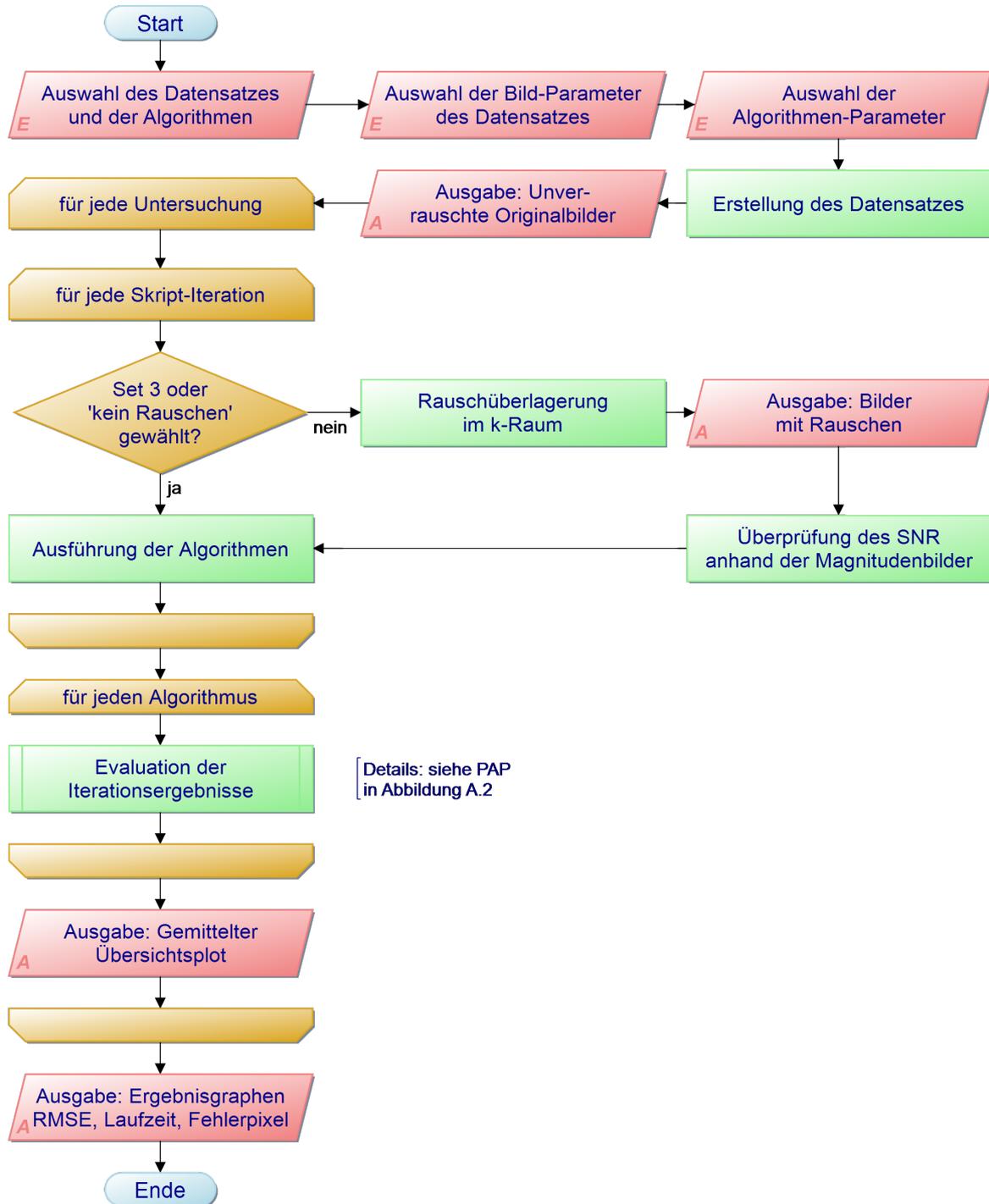


Abb. A.1: Vereinfachter schematischer Programmablaufplan des MATLAB-Skriptes. Rot „E“: Eingabe von Daten. Rot „A“: Ausgabe von Daten. Grün: Ausführung von Operationen an den Daten. Gelb: Schleifen und Abfragen. Details der Funktion zur Evaluation der Algorithmenenergebnisse sind in Abb. A.2 separat dargestellt.

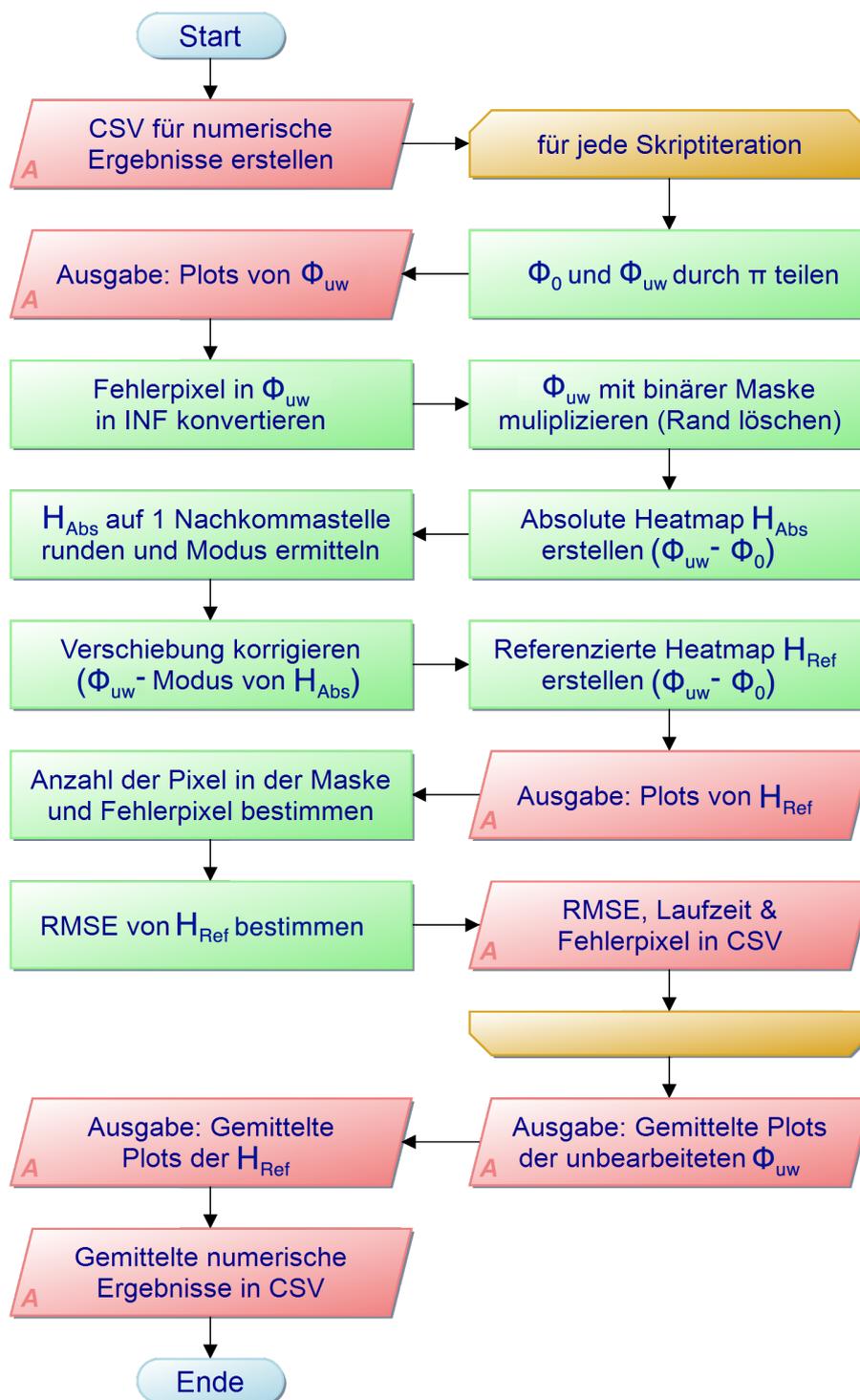


Abb. A.2: Schematischer Programmablaufplan der Funktion zur Evaluation der einzelnen Iterationsergebnisse (vgl. Kapitel 3.5). Rot „A“: Ausgabe von Daten. Grün: Ausführung von Operationen an den Daten. Gelb: Schleifen und Abfragen. Φ_0 : Entfaltete Originalphase. Φ_{uw} : Entfaltete Phase als Ergebnis des Algorithmus. H_{Abs} : Absolute Heatmap (Abweichung von Φ_{uw} gegenüber Φ_0). H_{Ref} : Referenzierte Heatmap (Abweichung von Φ_{uw} mit korrigierter 2π -Verschiebung gegenüber Φ_0).

A.2 Ausgewählte gefaltete Ausgangsphasenbilder der 3 Datensätze

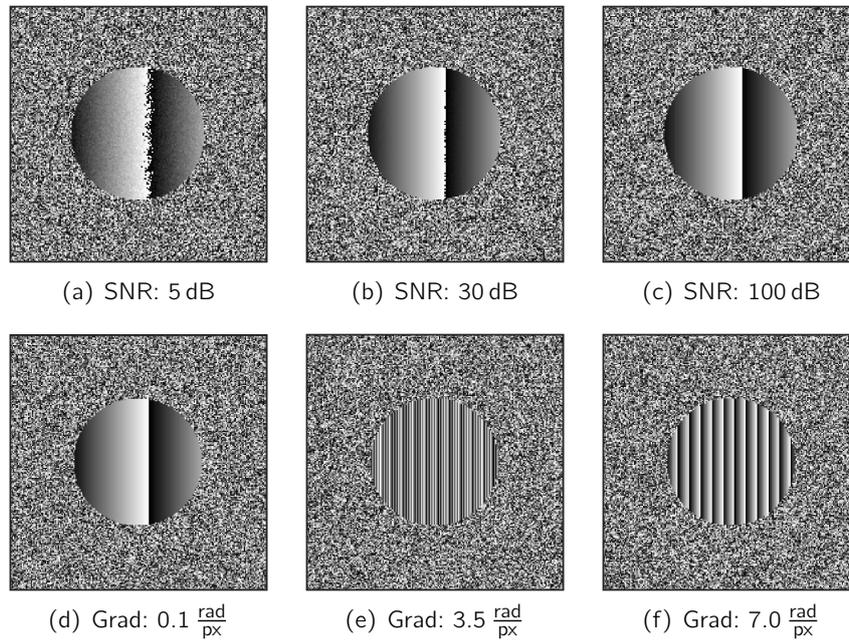


Abb. A.3: Ausgewählte Phasenbilder für die Untersuchungen an Set 1. Diese Phasen stellen die Ausgangsmatrizen Φ_w dar, die von den Algorithmen in den jeweiligen Untersuchungen entfaltet werden. Die Abb. (a) bis (c) gehören zur Untersuchung des SNR bei einem Phasengradienten von $0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$. Die Abb. (d) bis (f) gehören zur Untersuchung der Gradientensteigung bei einem SNR von 100 dB.

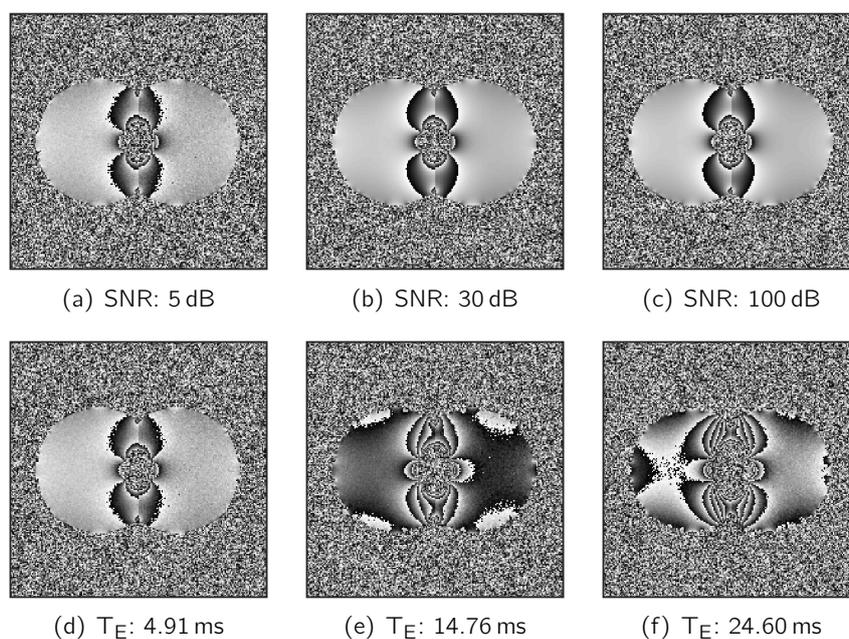


Abb. A.4: Ausgewählte Phasenbilder für die Untersuchungen an Set 2. Diese Phasen stellen die Ausgangsmatrizen Φ_W dar, die von den Algorithmen in den jeweiligen Untersuchungen entfaltet werden. Die Abb. (a) bis (c) gehören zur Untersuchung des SNR bei einer T_E von 4.91 ms. Die Abb. (d) bis (f) gehören zur Untersuchung der T_E bei einem SNR von 100 dB.

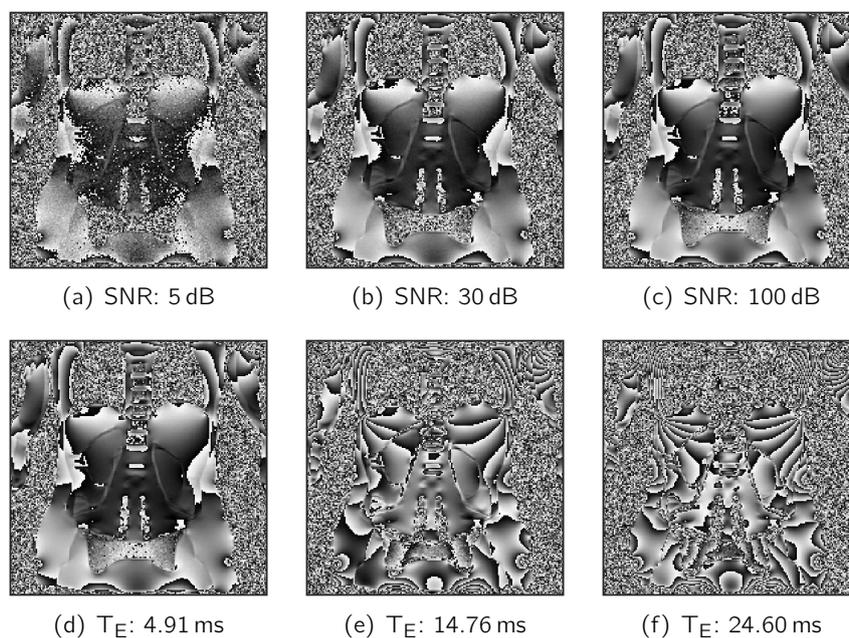
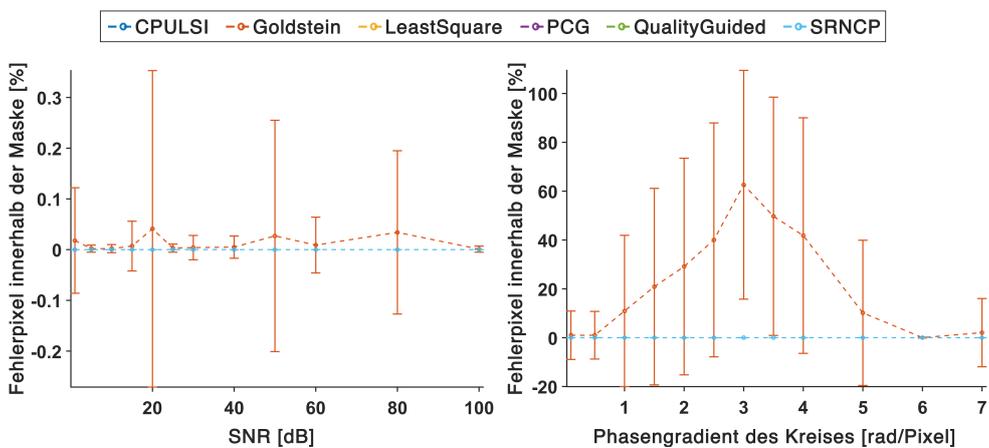
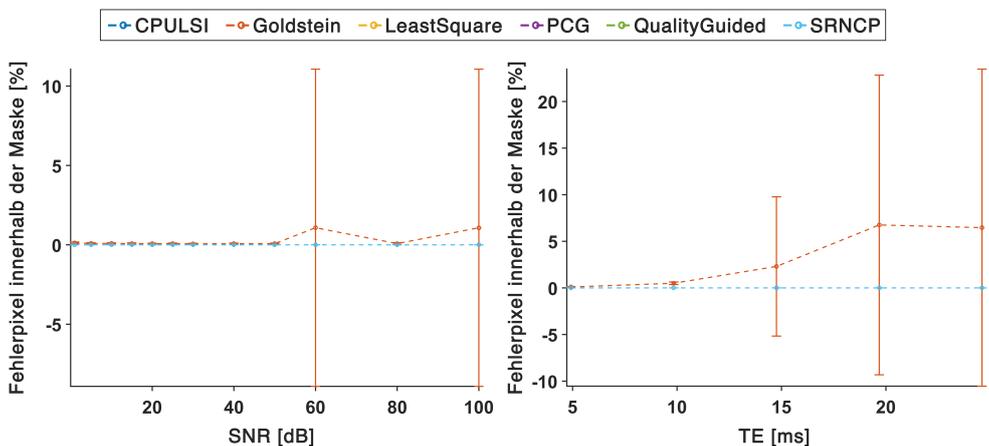


Abb. A.5: Ausgewählte Phasenbilder für die Untersuchungen an Set 3. Diese Phasen stellen die Ausgangsmatrizen Φ_W dar, die von den Algorithmen in den jeweiligen Untersuchungen entfaltet werden. Die Abb. (a) bis (c) gehören zur Untersuchung des SNR bei einer T_E von 4.91 ms. Die Abb. (d) bis (f) gehören zur Untersuchung der T_E bei einem SNR von 100 dB.

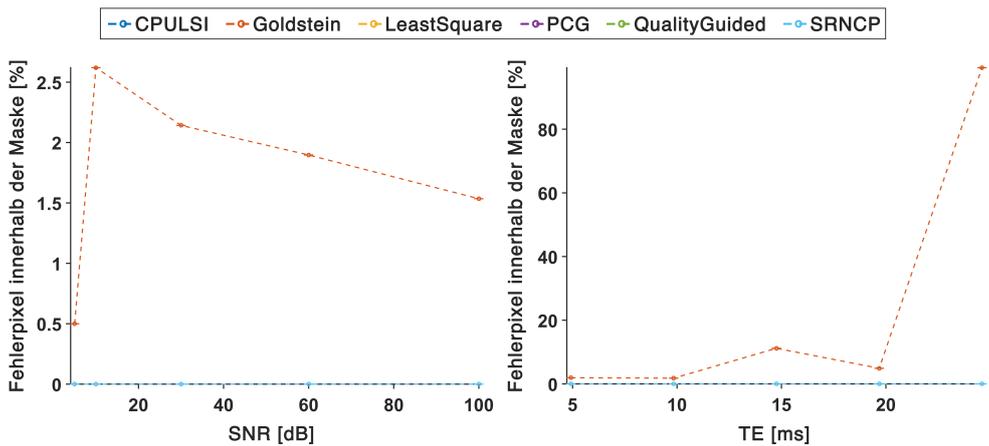
A.3 Fehlerpixel der Algorithmen



(a) Fehlerpixel in den Untersuchungen am Set 1



(b) Fehlerpixel in den Untersuchungen am Set 2



(c) Fehlerpixel in den Untersuchungen am Set 3

Abb. A.6: Übersicht des Anteils an fehlerhaften, nicht ungewrappten Pixeln mit Wert NaN innerhalb der binären Maske in allen durchgeführten Untersuchungen. Es zeigt sich, dass nur der PF-Goldstein-Algorithmus derartig kaputte Pixel hervorbringt, die in den Ergebnisübersichten im Anhang A.5 bis A.10 zur besseren Lokalisation rosa eingefärbt wurden.

A.4 Publikationen zu Untersuchungen der verwendeten Algorithmen

Diese Arbeit ist nicht die erste ihrer Art, gerade die 4 klassischen Algorithmen aus dem Buch von Ghiglia und Pritt [4] wurden in verschiedensten Konstellationen bereits untersucht. Nachfolgende Übersicht zeigt nur einige Veröffentlichungen zu Untersuchungen mit den verwendeten Algorithmen z.B. für QSM- oder InSAR-Phasenbilder, deren Erkenntnisse in der Ergebnisdiskussion dieser Arbeit zum Teil berücksichtigt wurden. Weitere in diesen Arbeiten untersuchte Algorithmen werden nicht zusätzlich aufgeführt.

Veröffentlichung	Least-Squares-Algorithmen		Path-Following-Algorithmen		
	PCG	Unweighted	Goldstein	QualityMap	SRNCP
1995: Just D et al. [68]		✓	✓		
1997: Zebker HA et al. [64]		✓	✓		
1997: Pritt MD [63]	✓	✓	✓	✓	
2006: Braganza S [69]	✓		✓	✓	
2007: Zappa E et al.[66]	✓		✓	✓	
2008: Shi X et al. [67]	✓	✓	✓	✓	
2013: Simmel RM [42]	✓		✓		
2014: Heshmat S et al. [70]		✓	✓		✓

Tab. A.1: Übersicht zu verwendeten Publikationen, welche unter anderem Algorithmen verglichen haben, die auch in dieser Arbeit verwendet wurden. Der neuste LS-CPULSI-Algorithmus (2016, [2]) wurde in keiner der aufgelisteten Arbeiten verwendet und daher ebenso wie zusätzliche in den Publikationen untersuchte Algorithmen hier nicht separat aufgeführt.

A.5 Ergebnisübersichten: Set 1 - SNR

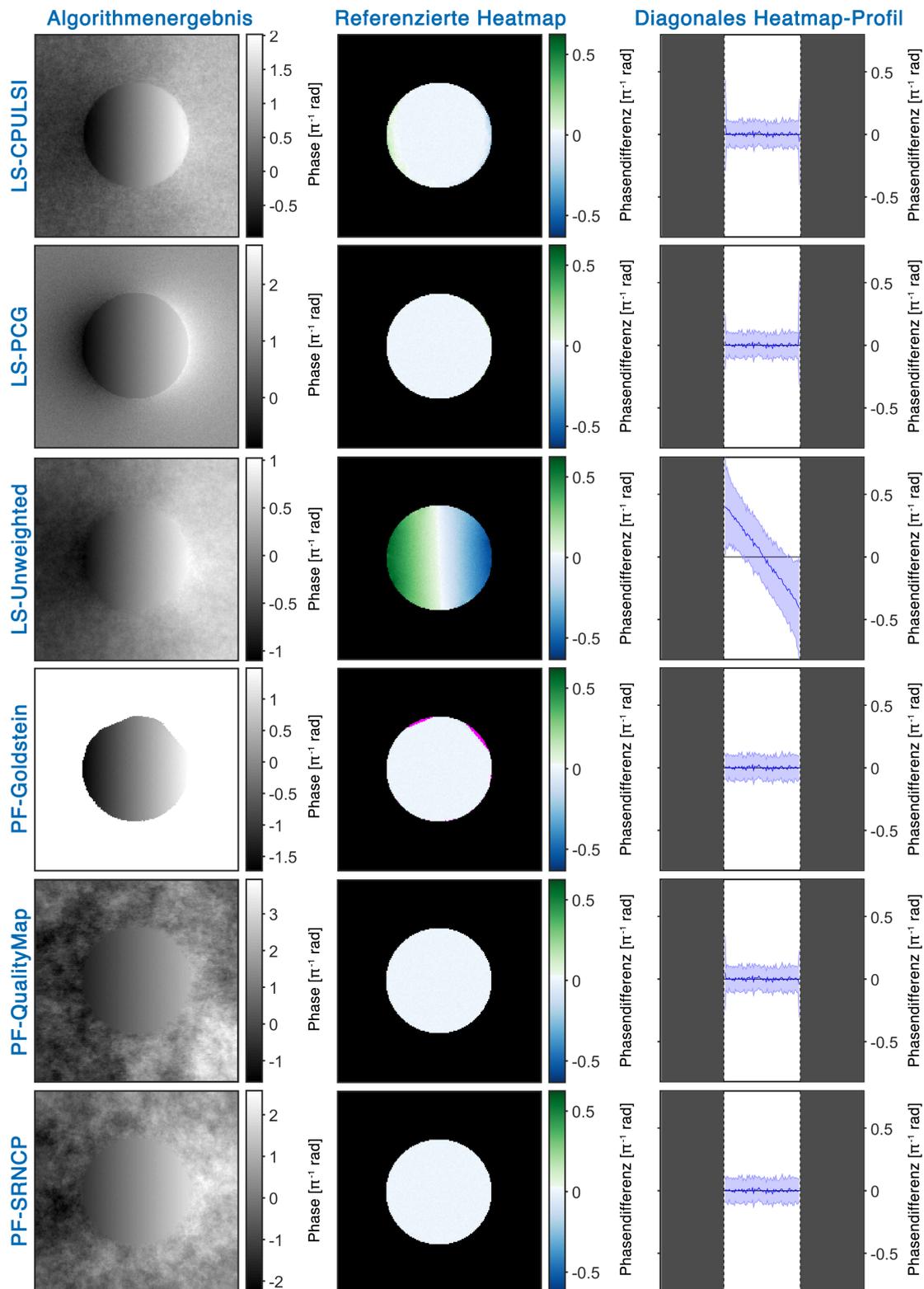


Abb. A.7: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 1 \text{ dB}$ bei $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

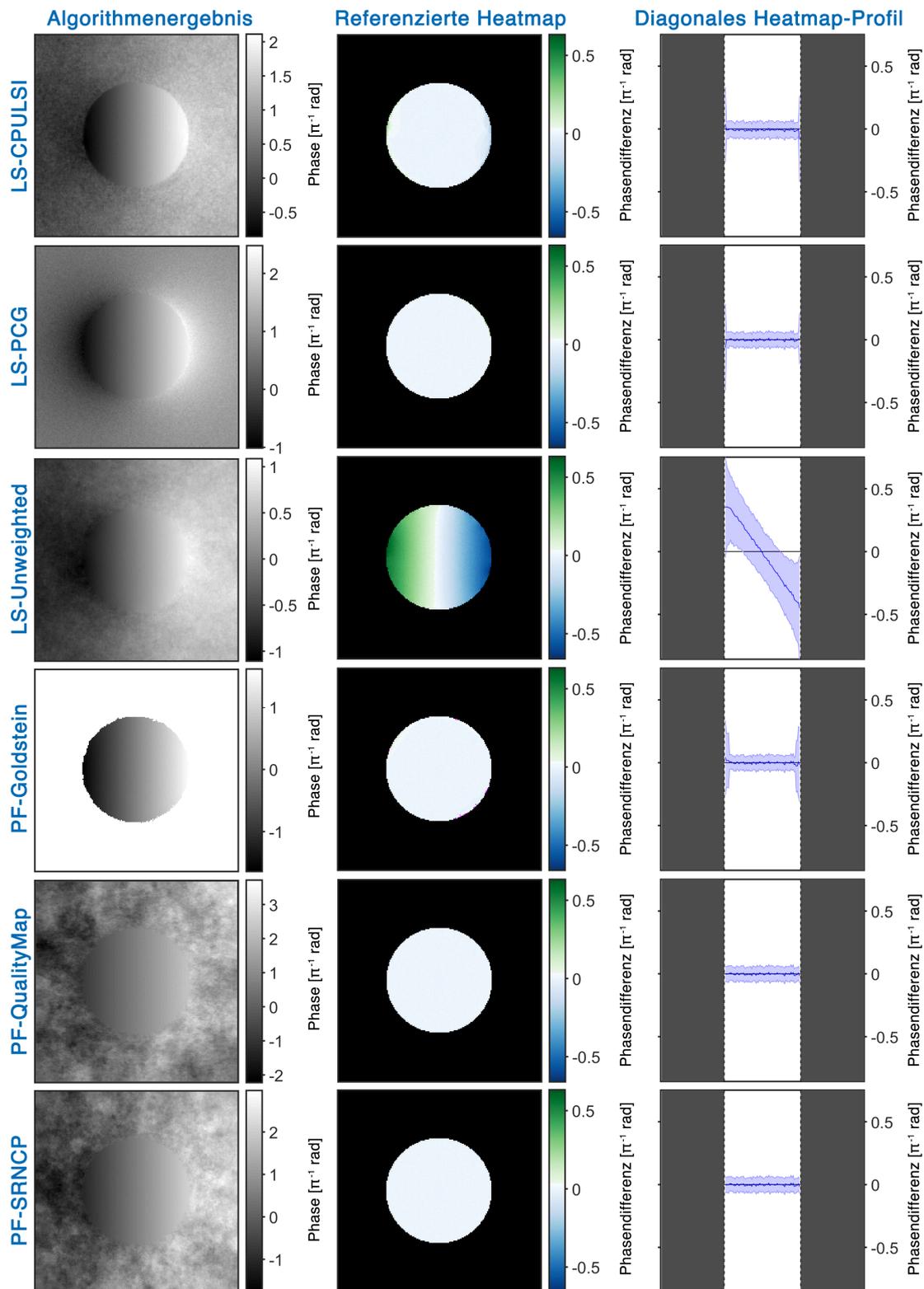


Abb. A.8: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 5 \text{ dB}$ bei $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

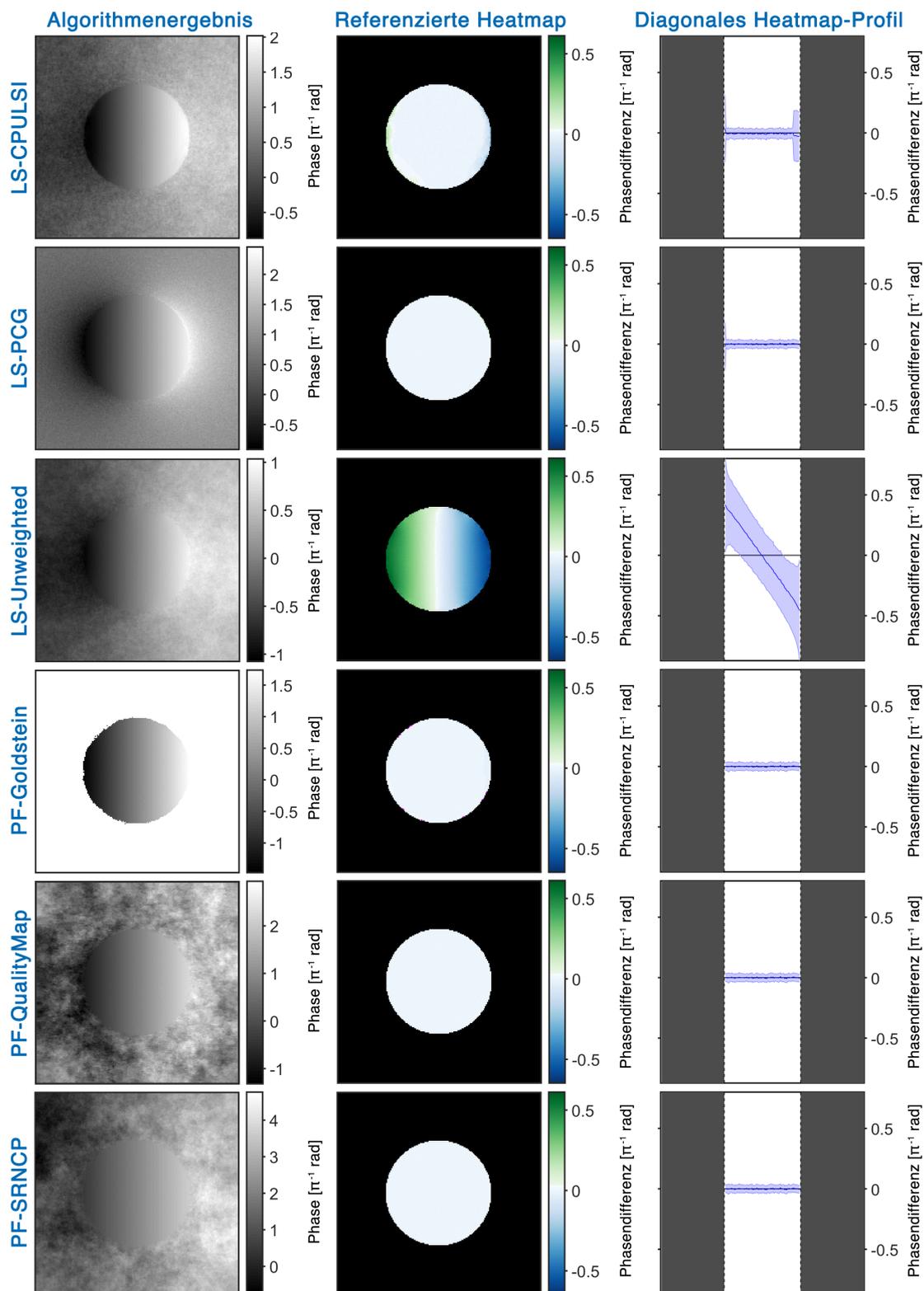


Abb. A.9: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 10 \text{ dB}$ bei $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

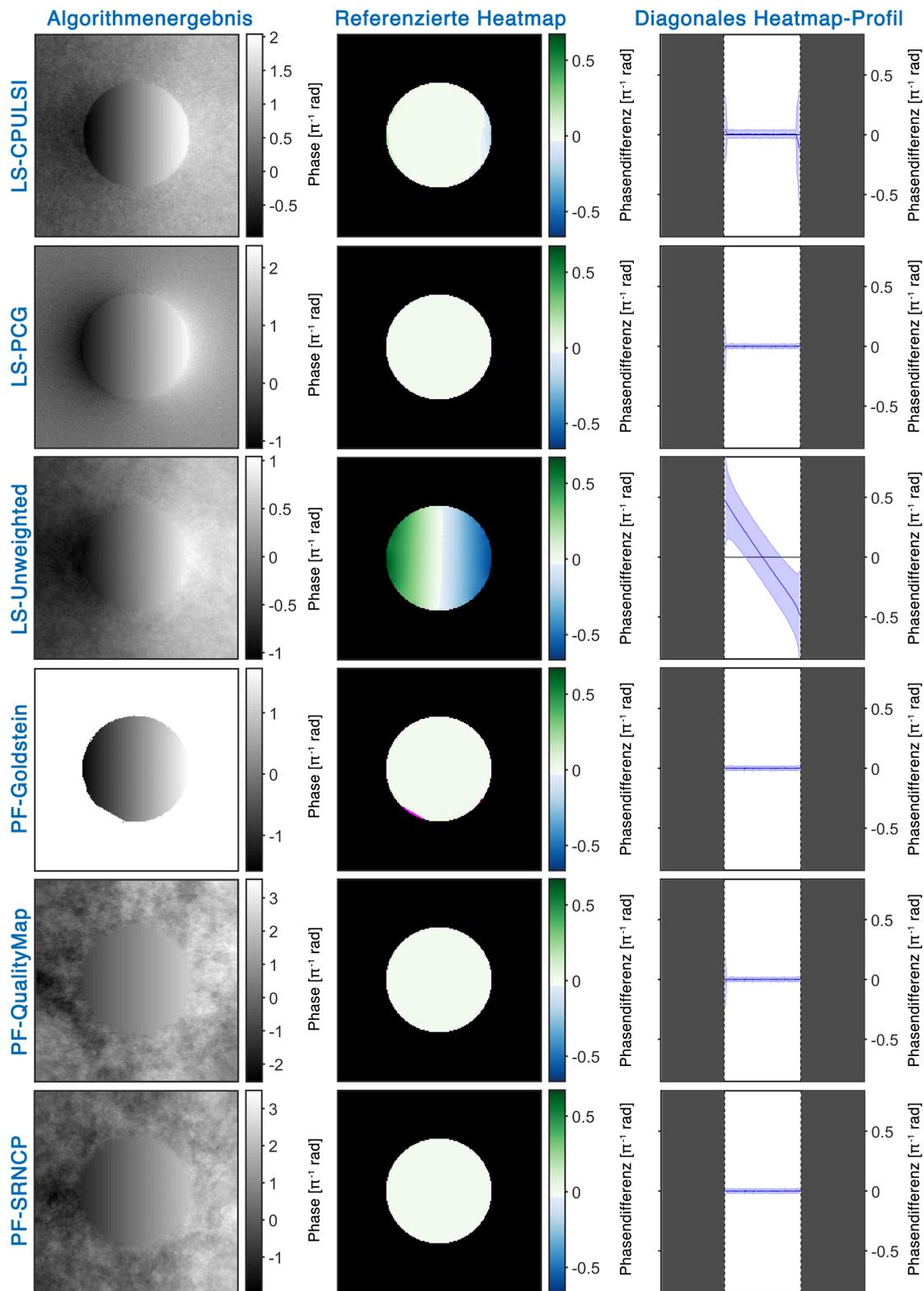


Abb. A.10: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 15 \text{ dB}$ bei $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

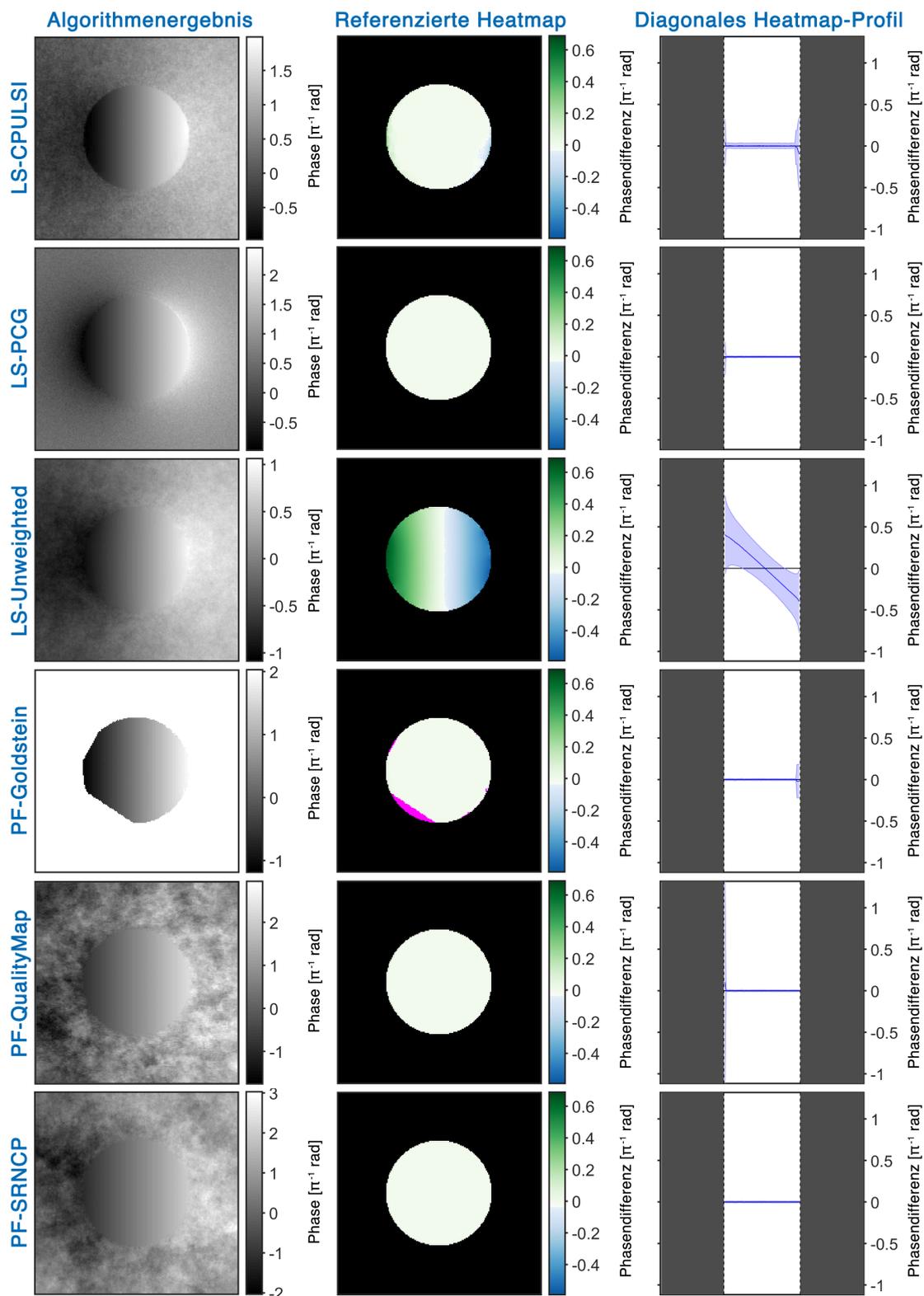


Abb. A.11: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 20 \text{ dB}$ bei $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

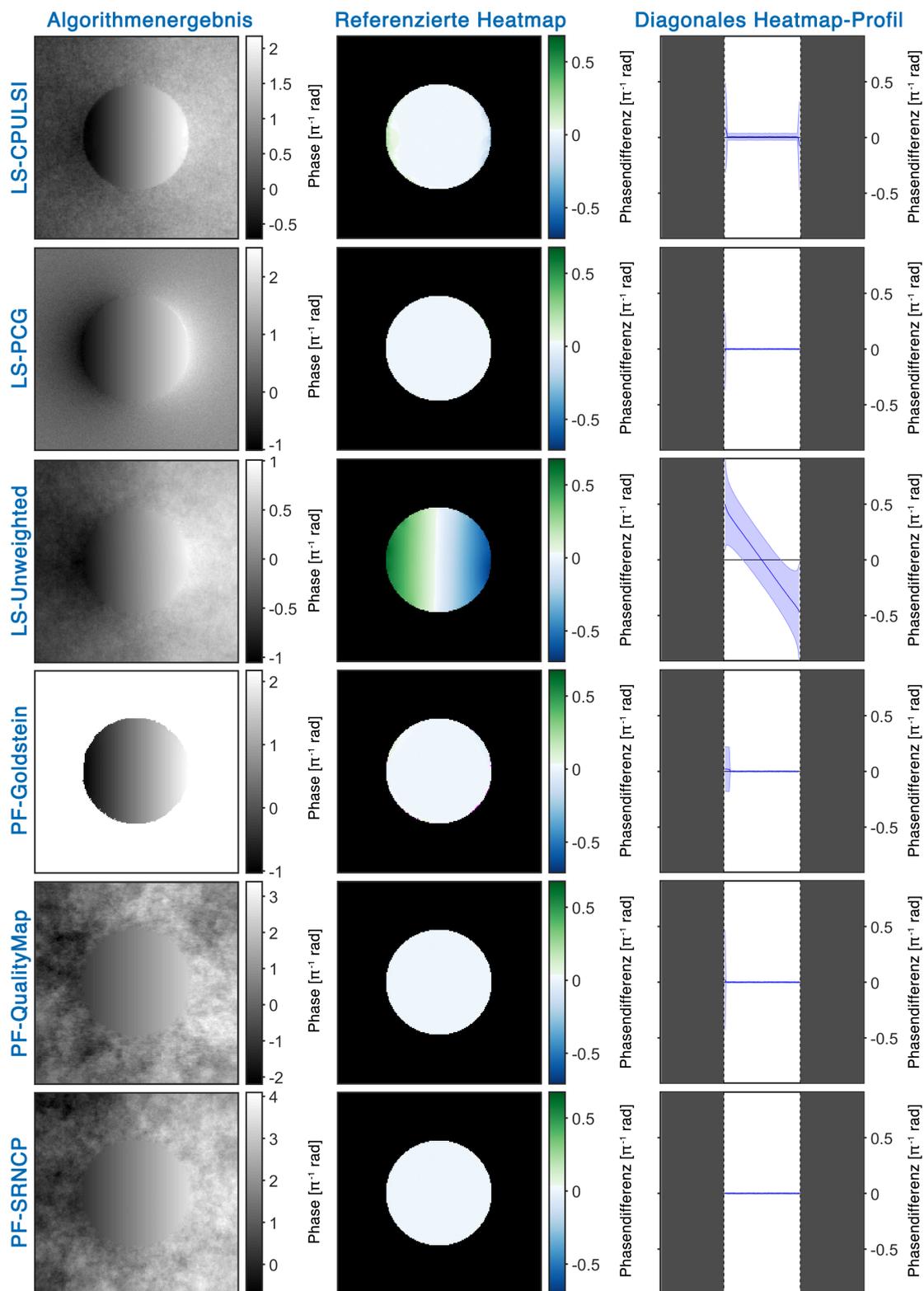


Abb. A.12: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 25 \text{ dB}$ bei $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

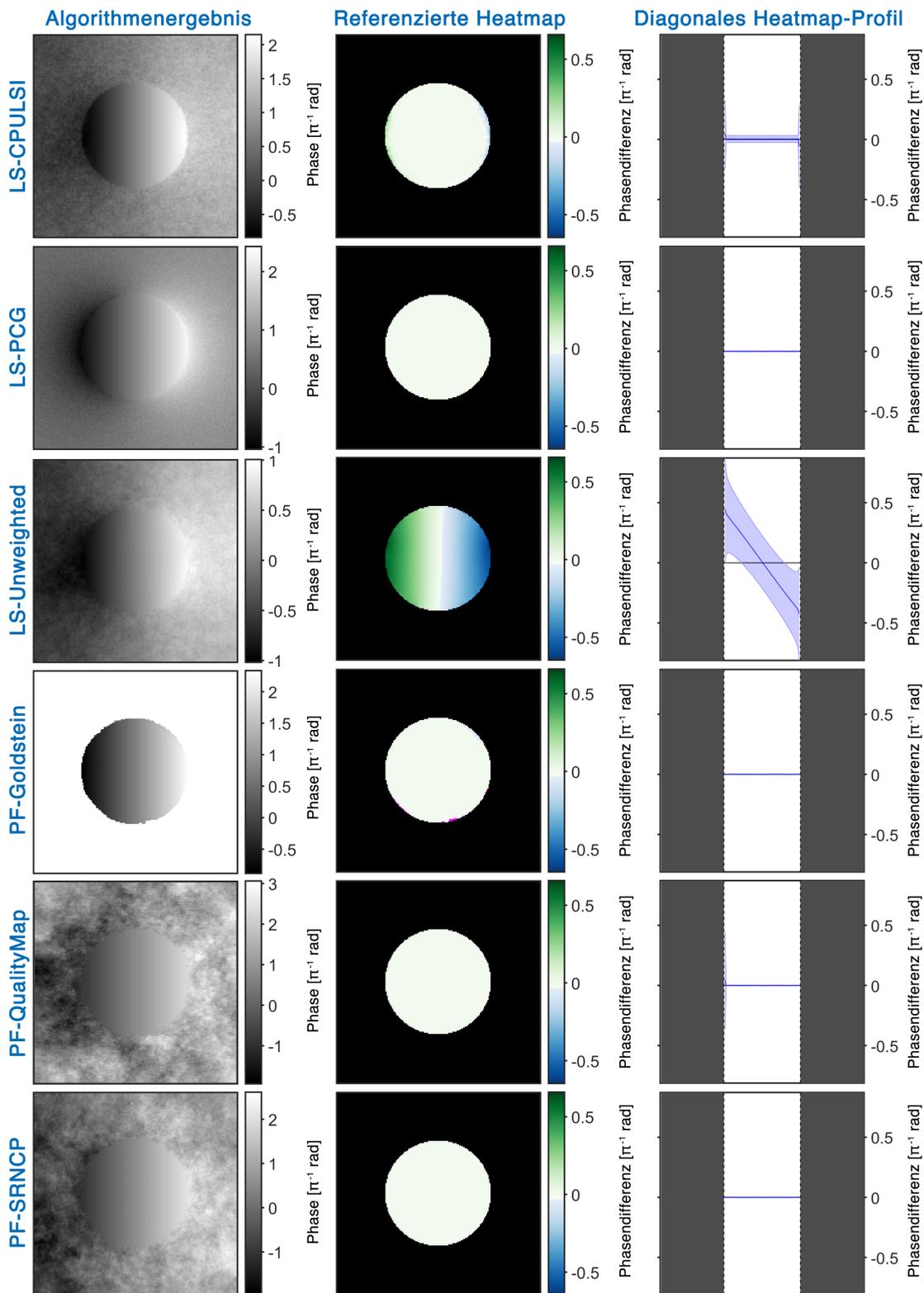


Abb. A.13: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$ bei $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

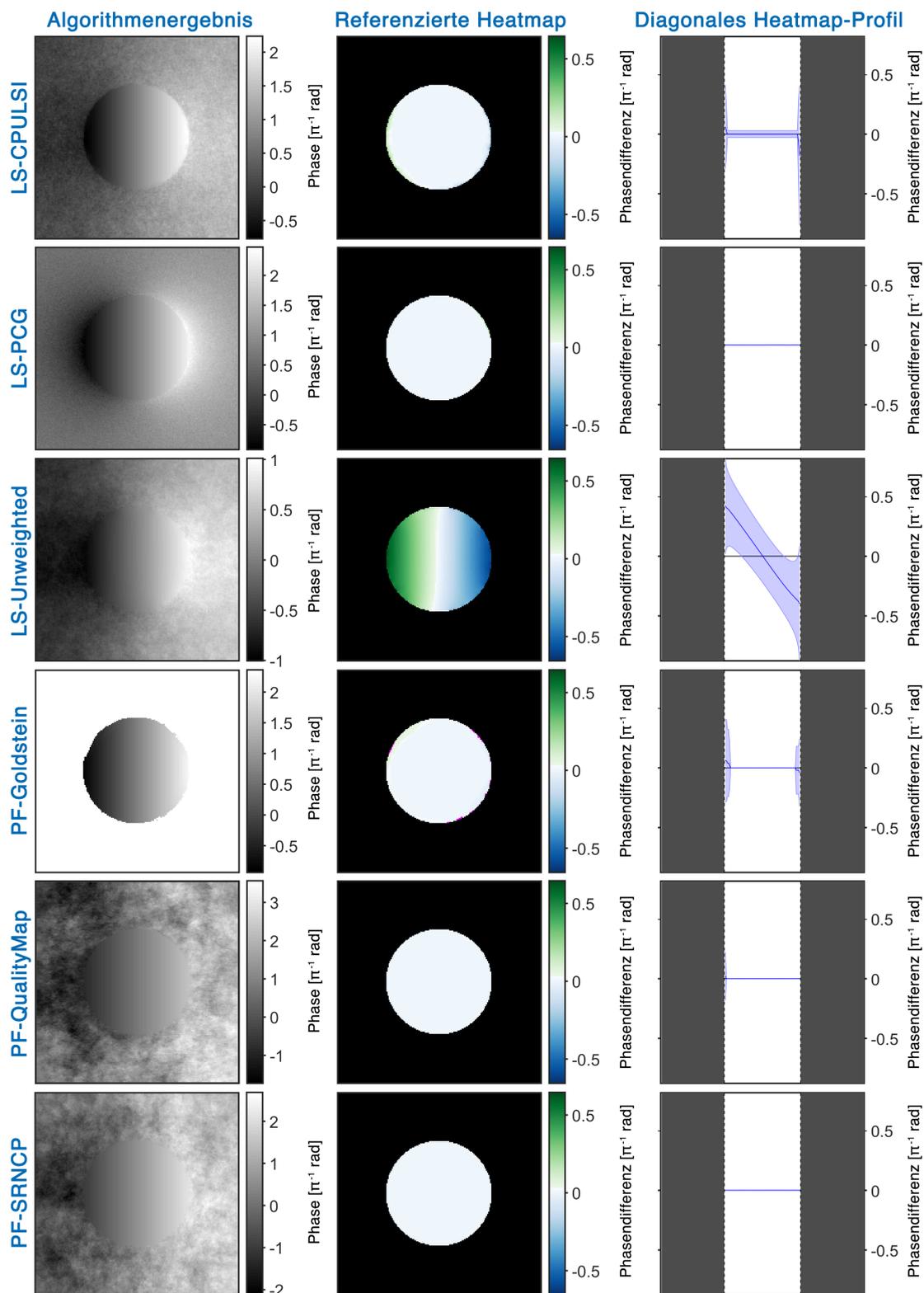


Abb. A.14: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 40 \text{ dB}$ bei $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

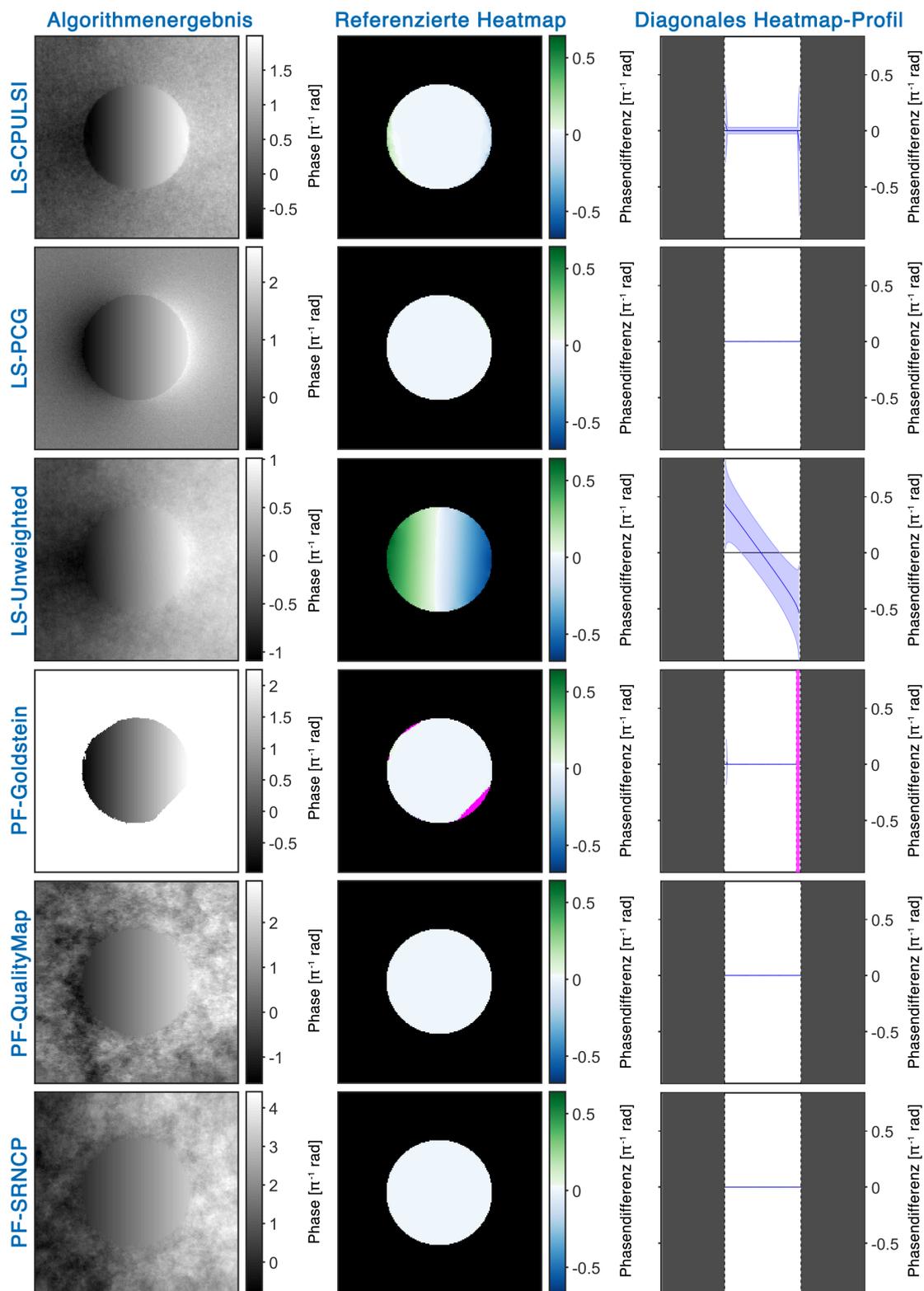


Abb. A.15: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 50 \text{ dB}$ bei $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

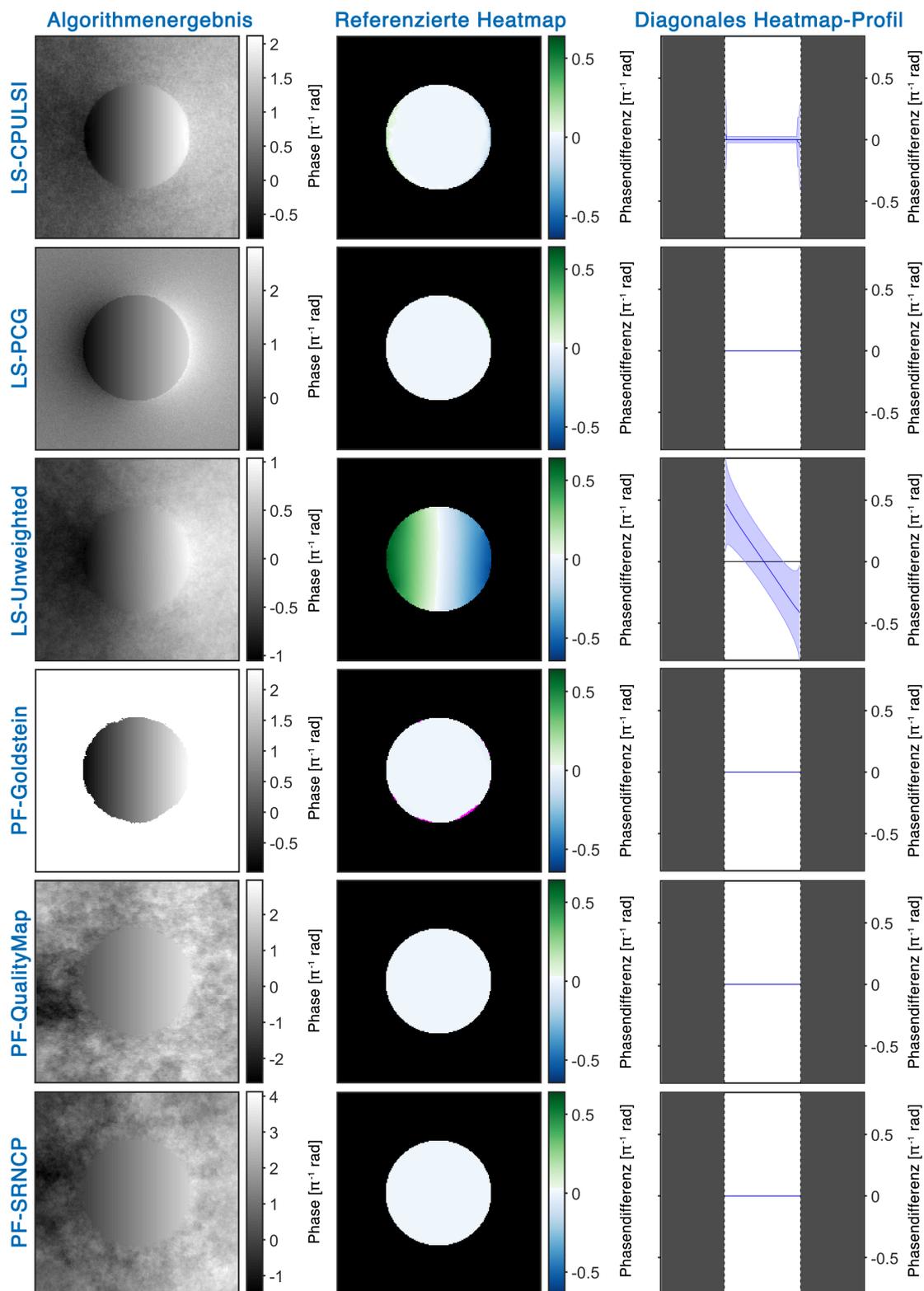


Abb. A.16: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 60 \text{ dB}$ bei $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

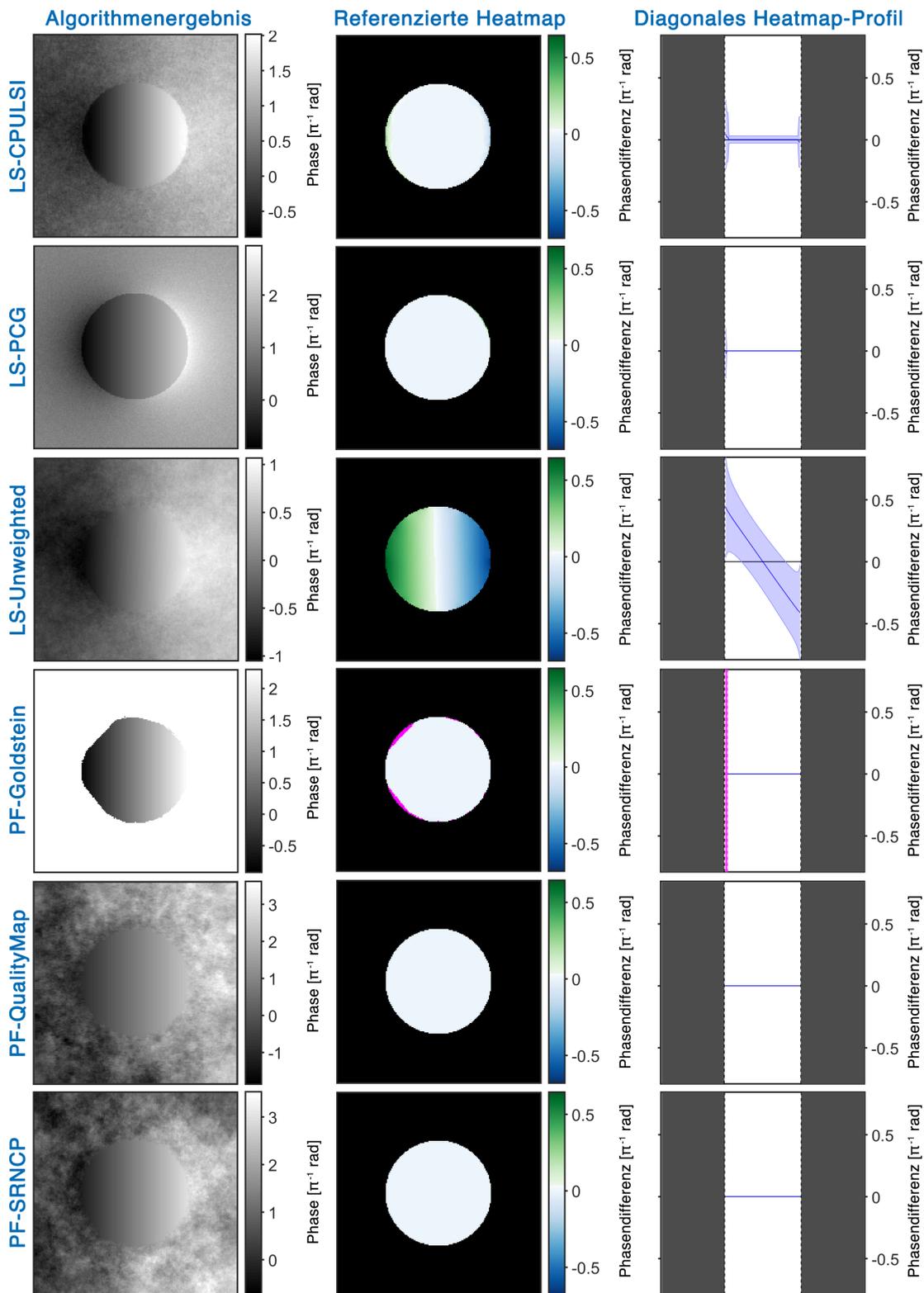


Abb. A.17: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 80 \text{ dB}$ bei $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

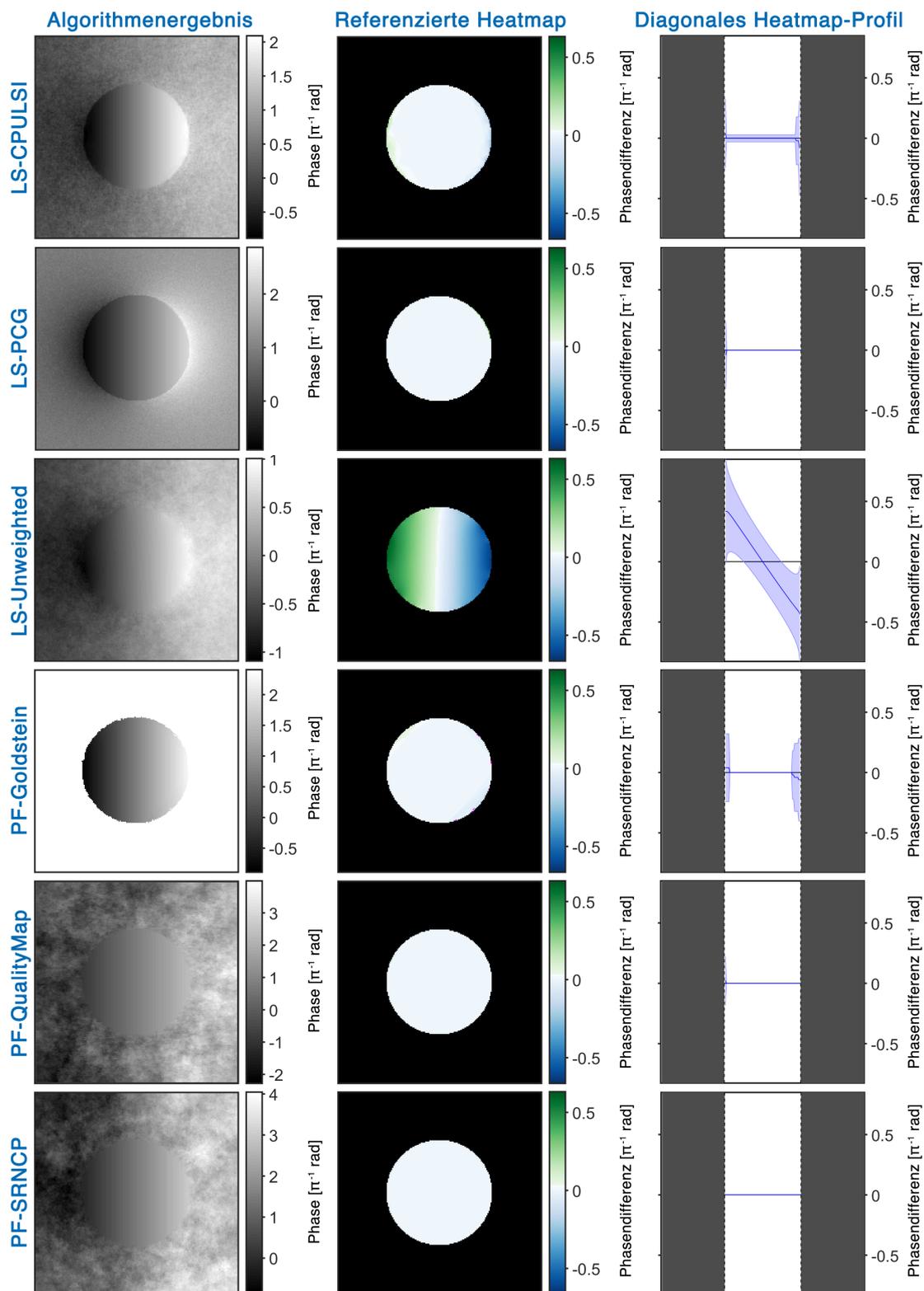


Abb. A.18: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ bei $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

A.6 Ergebnisübersichten: Set 1 - Grad

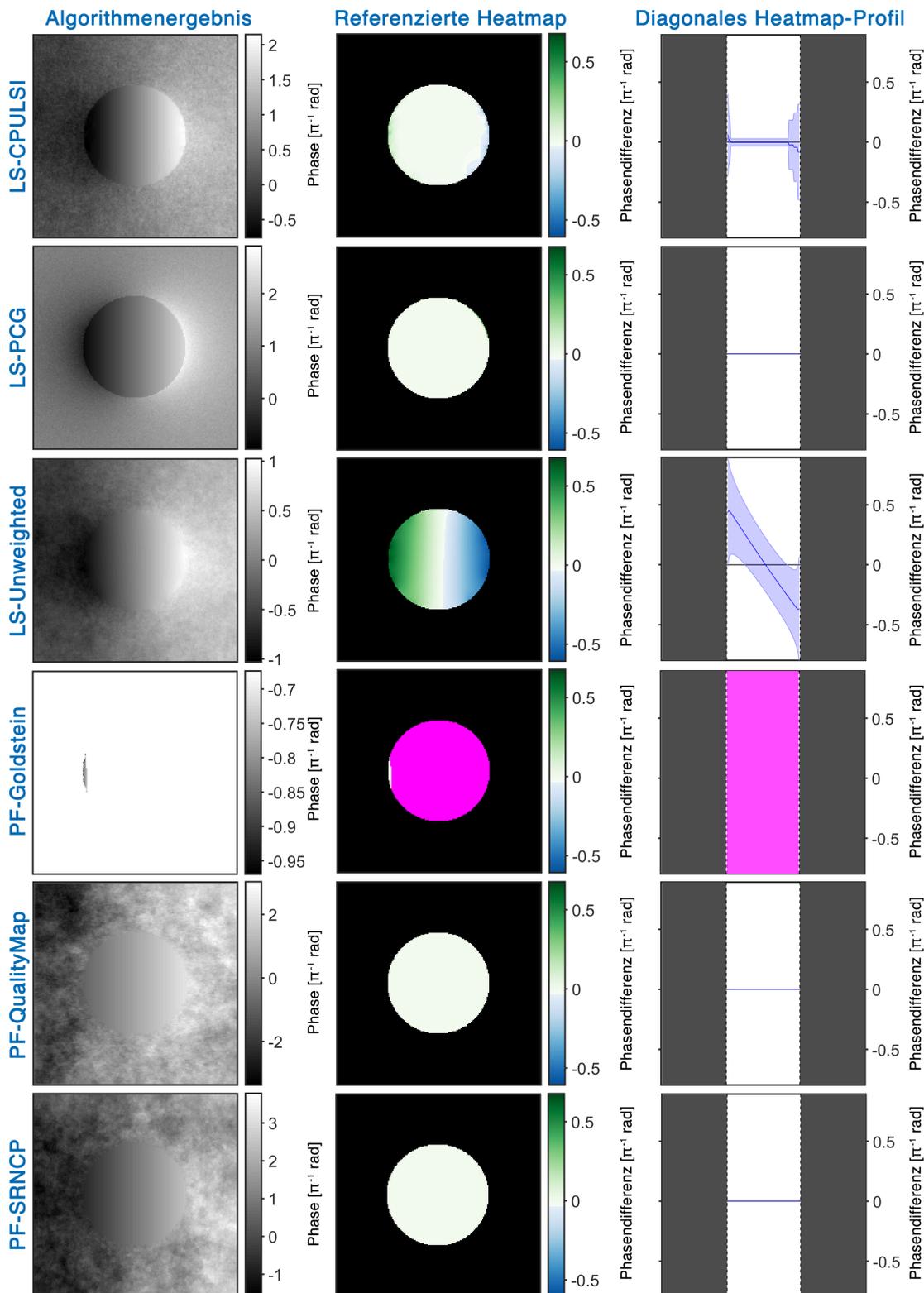


Abb. A.19: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

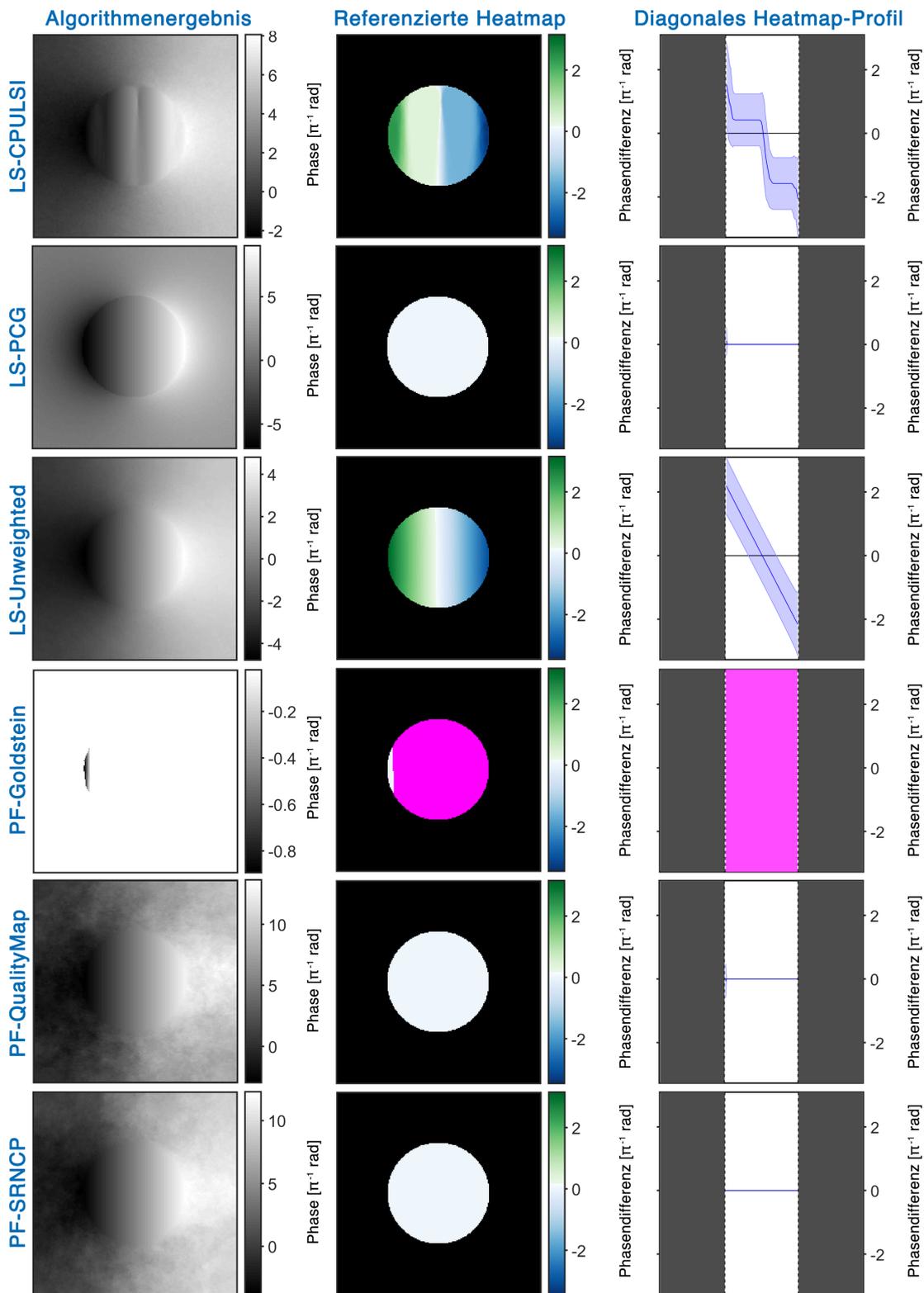


Abb. A.20: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 0.5 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

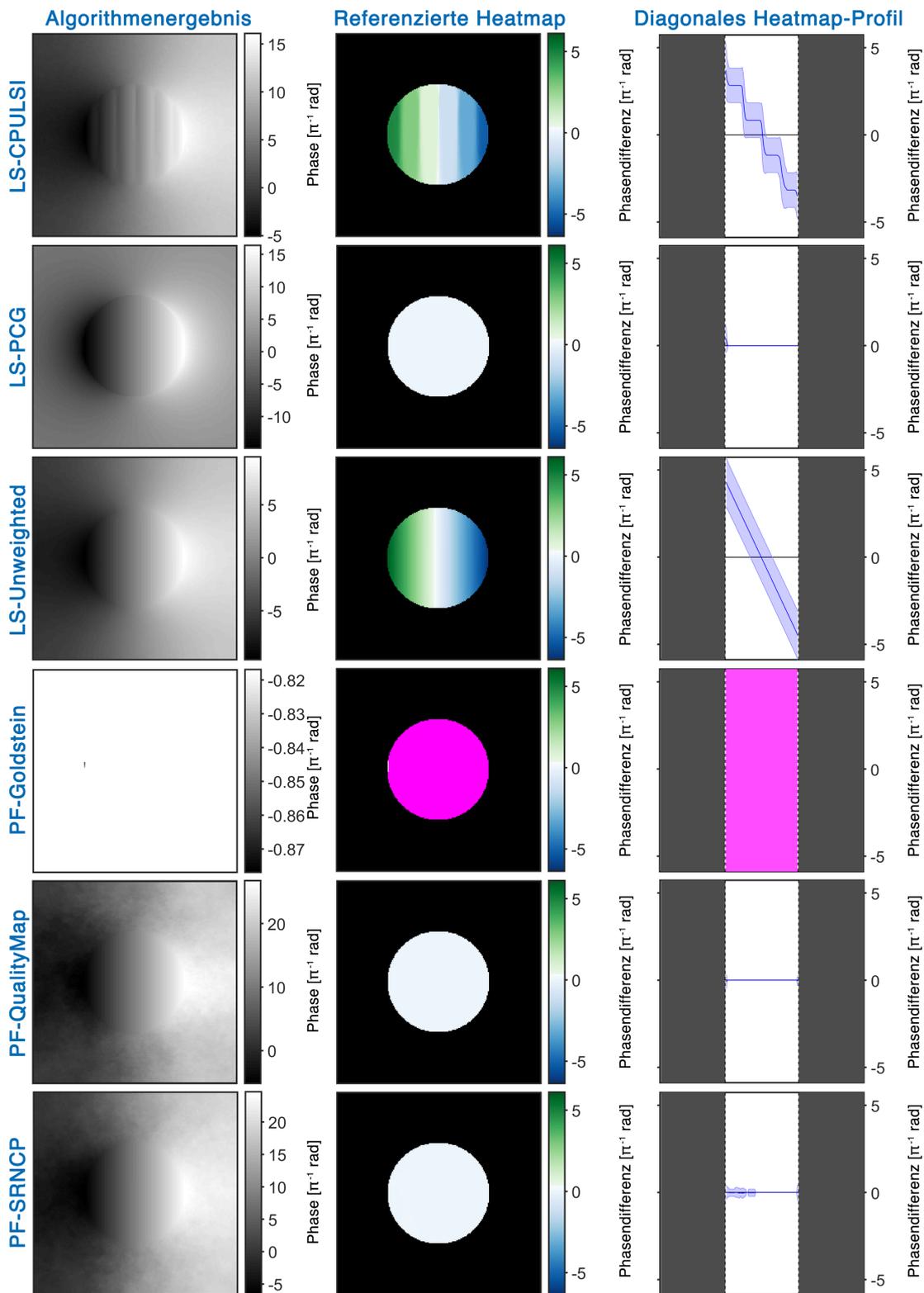


Abb. A.21: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 1.0 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

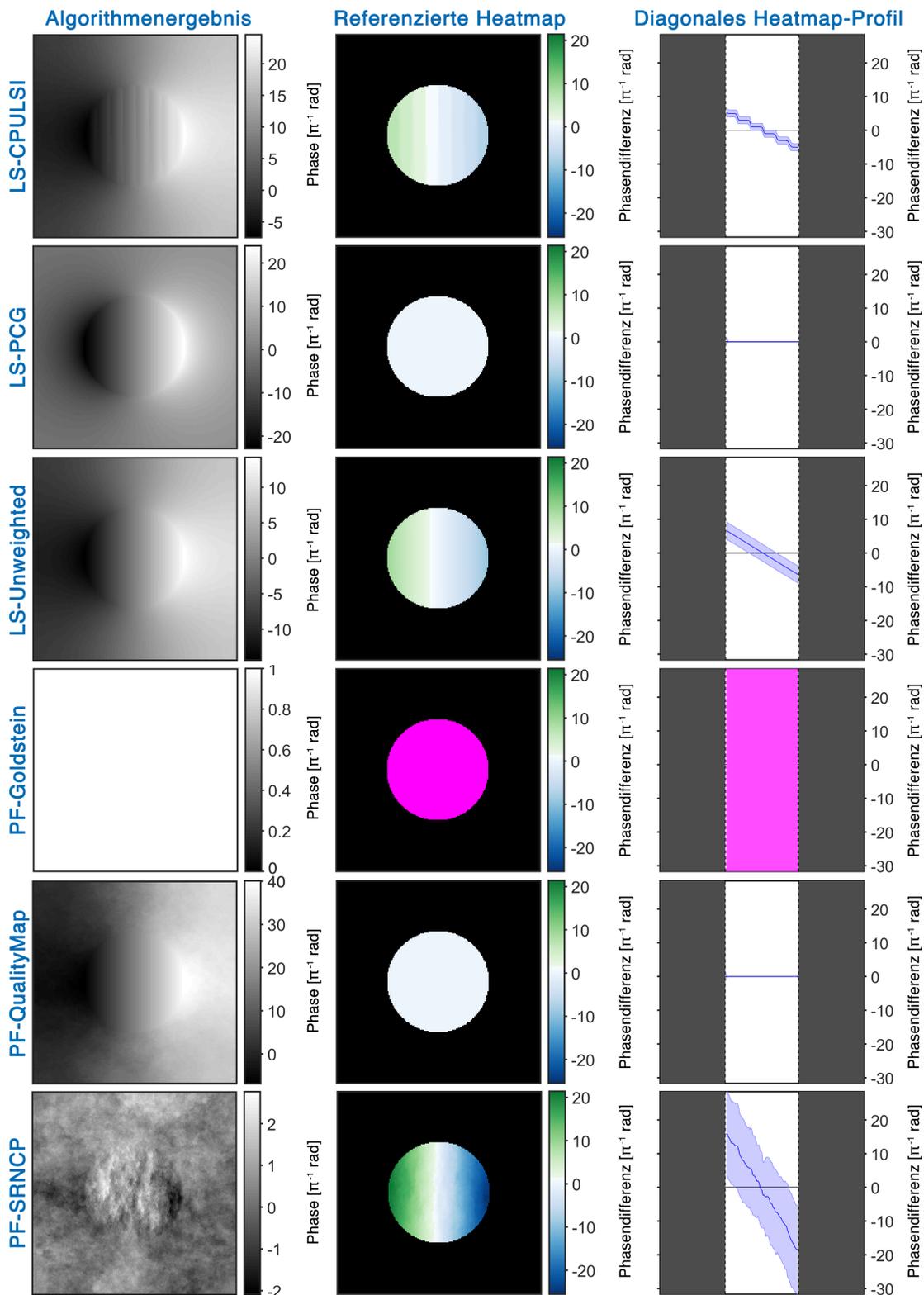


Abb. A.22: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 1.5 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

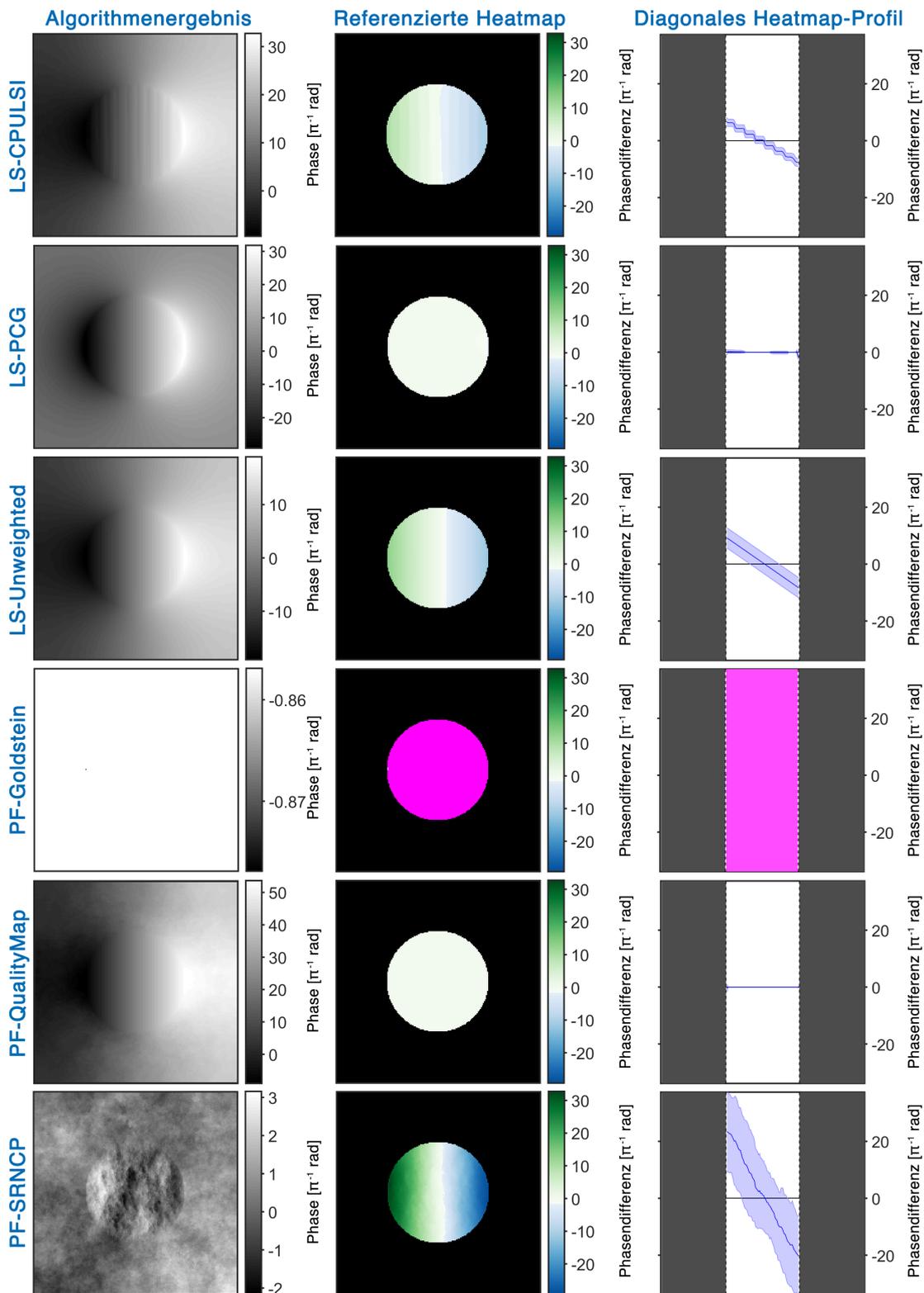


Abb. A.23: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 2.0 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

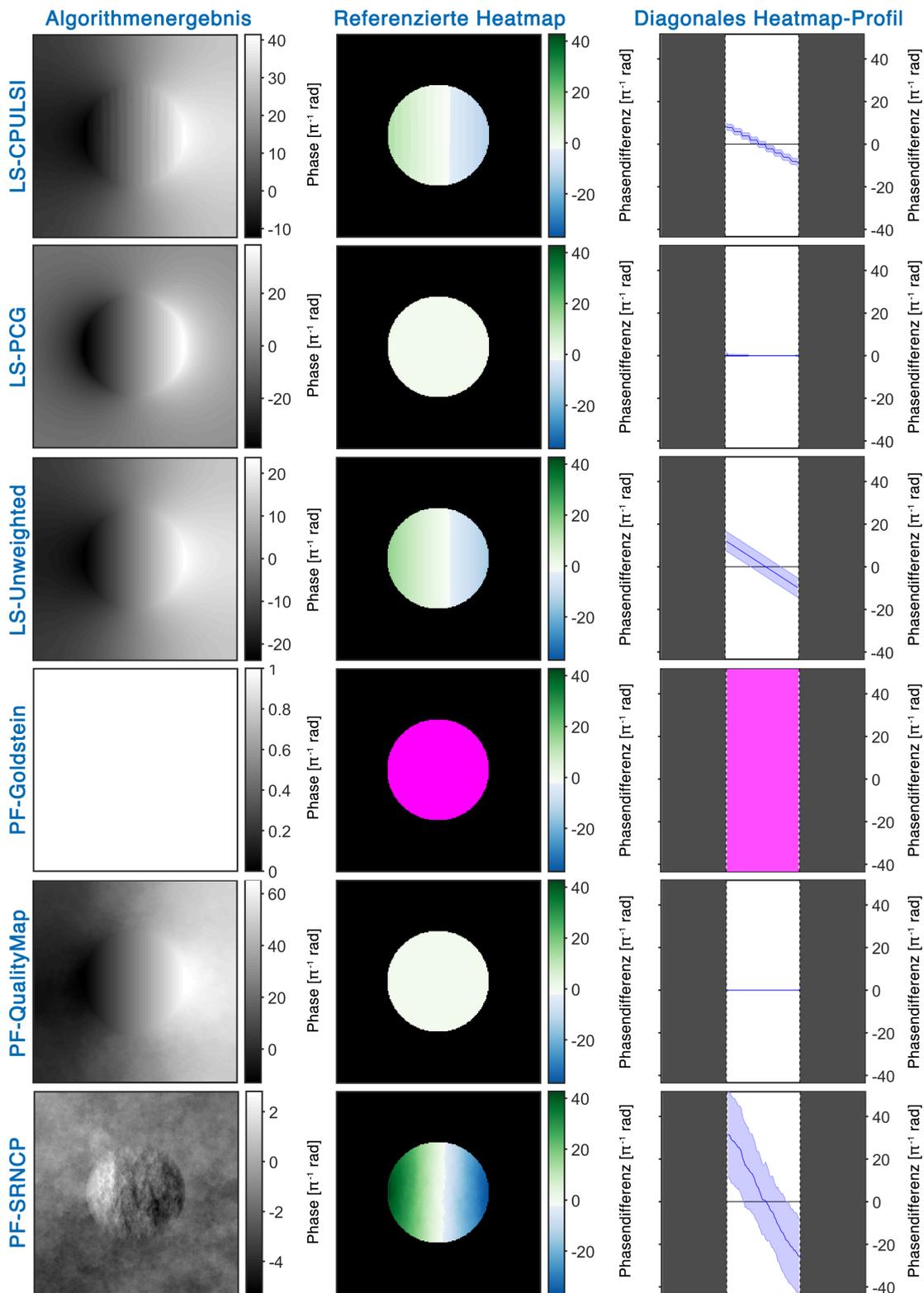


Abb. A.24: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 2.5 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

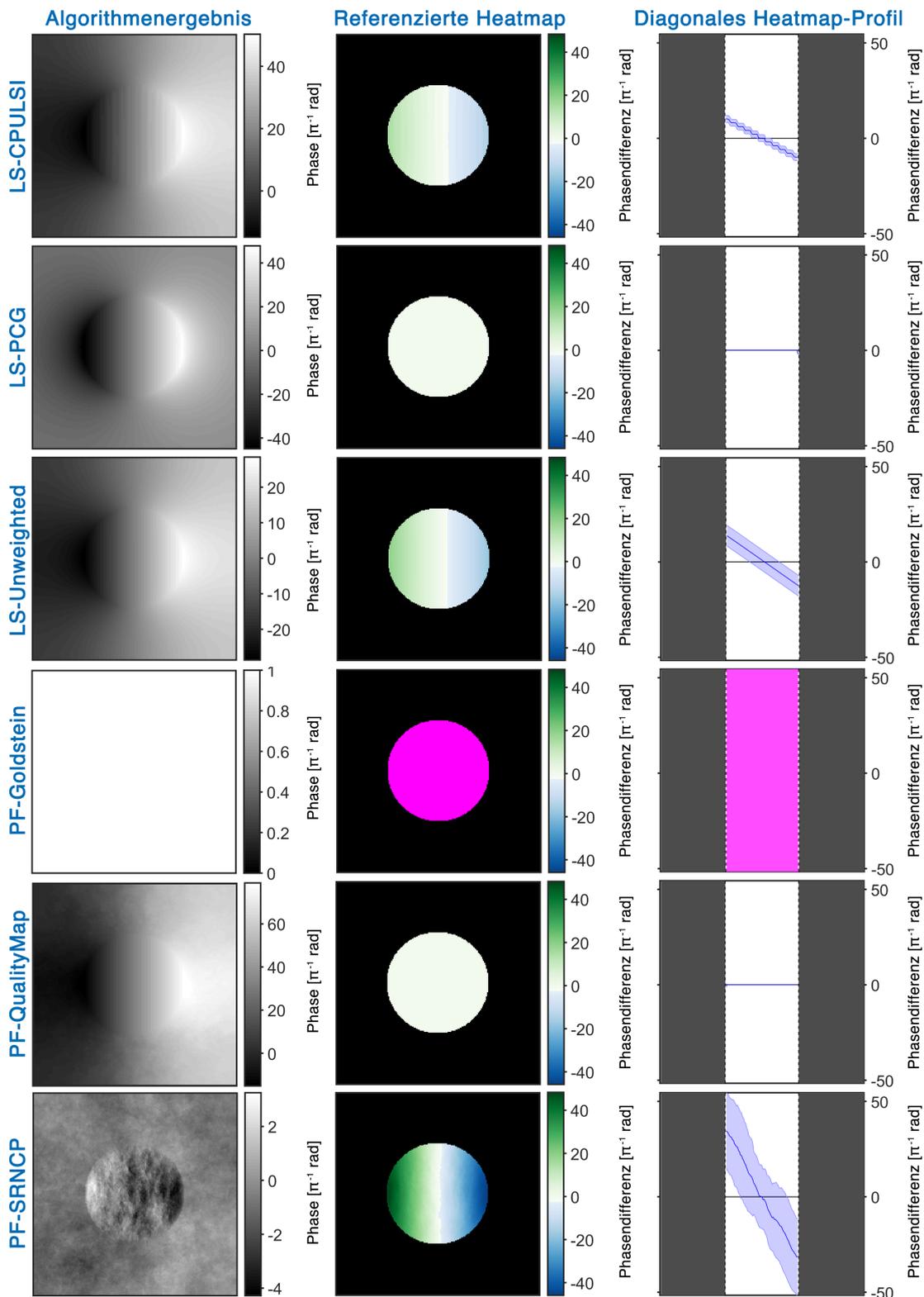


Abb. A.25: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 3.0 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

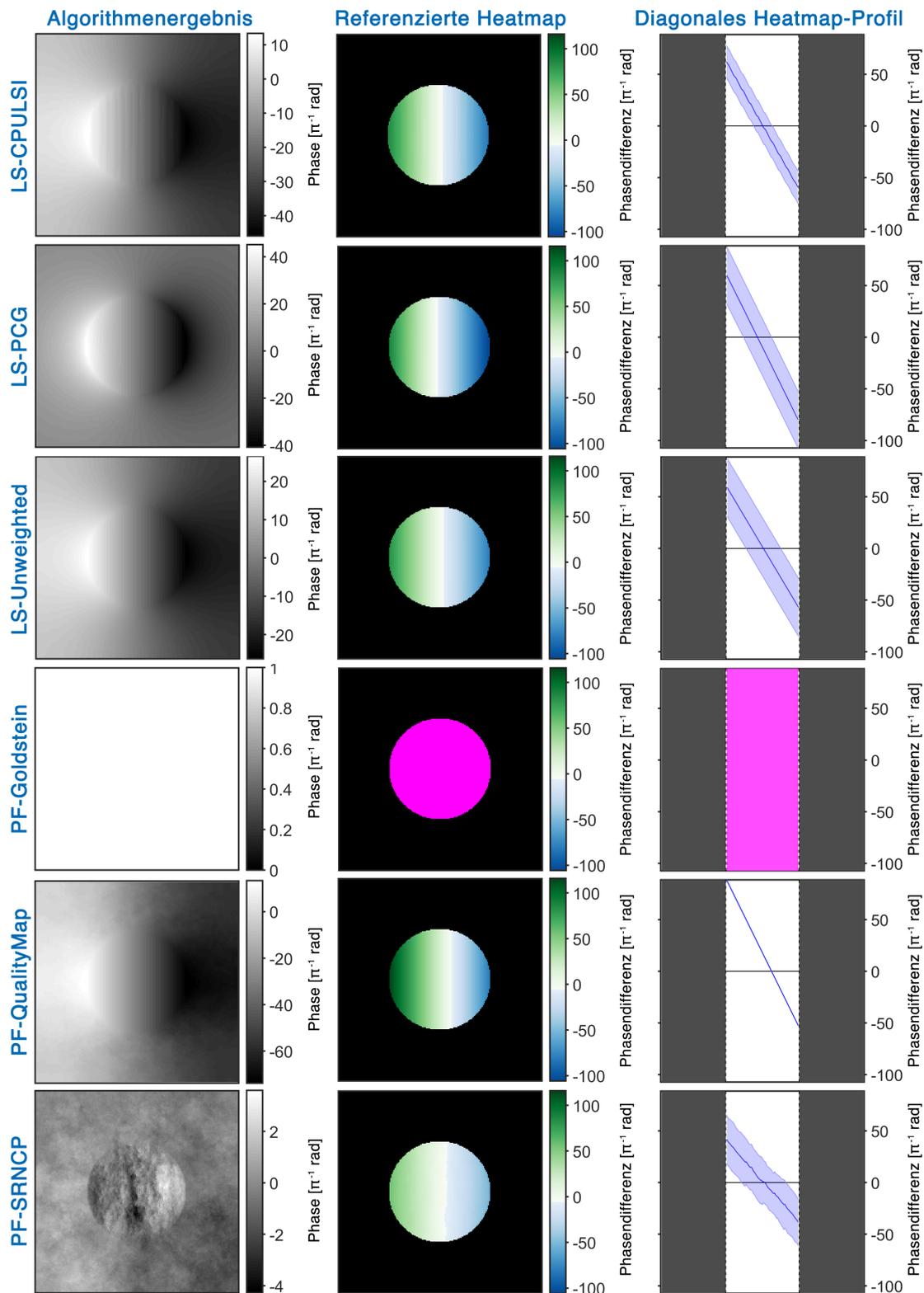


Abb. A.26: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 3.5 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

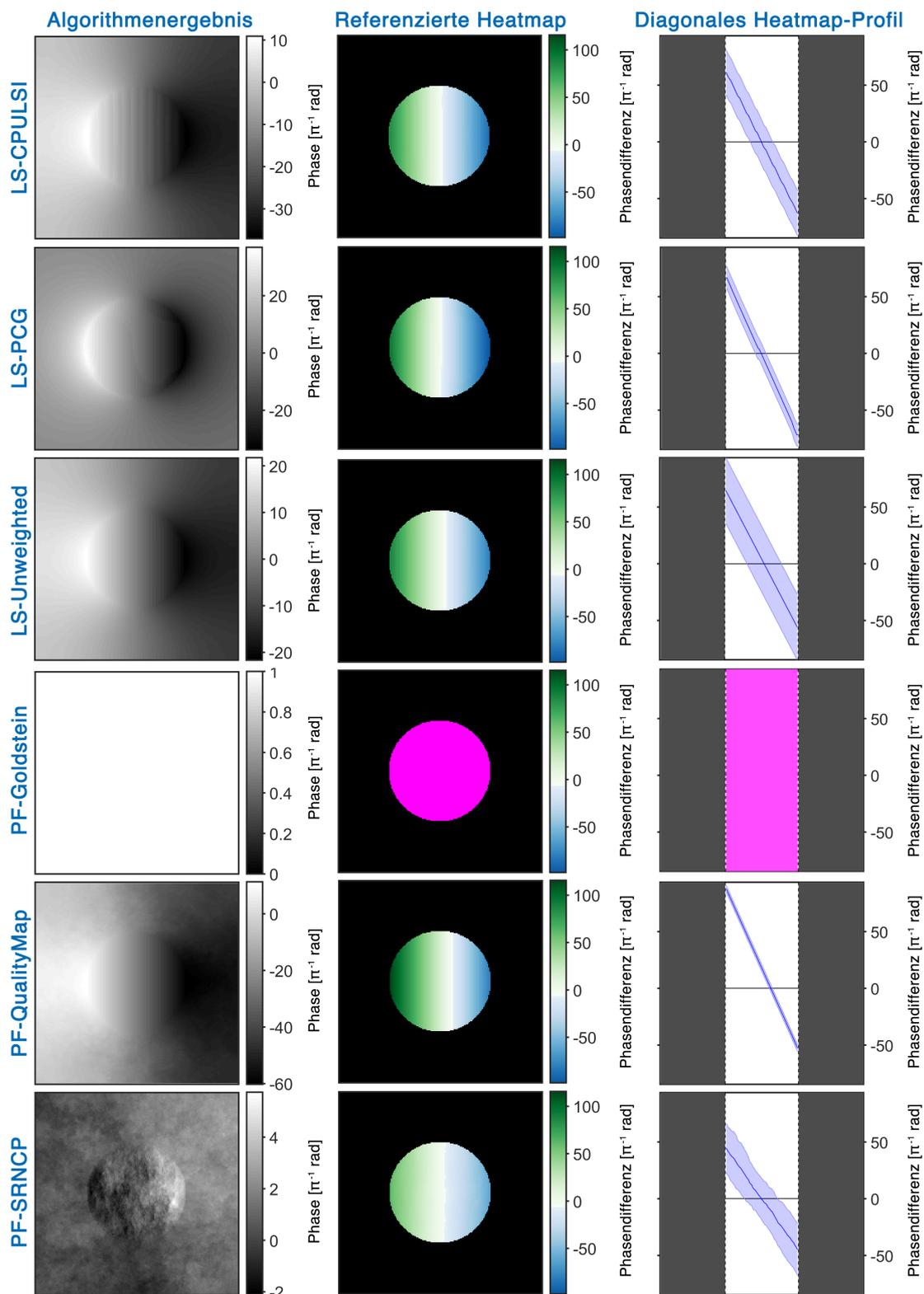


Abb. A.27: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 4.0 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

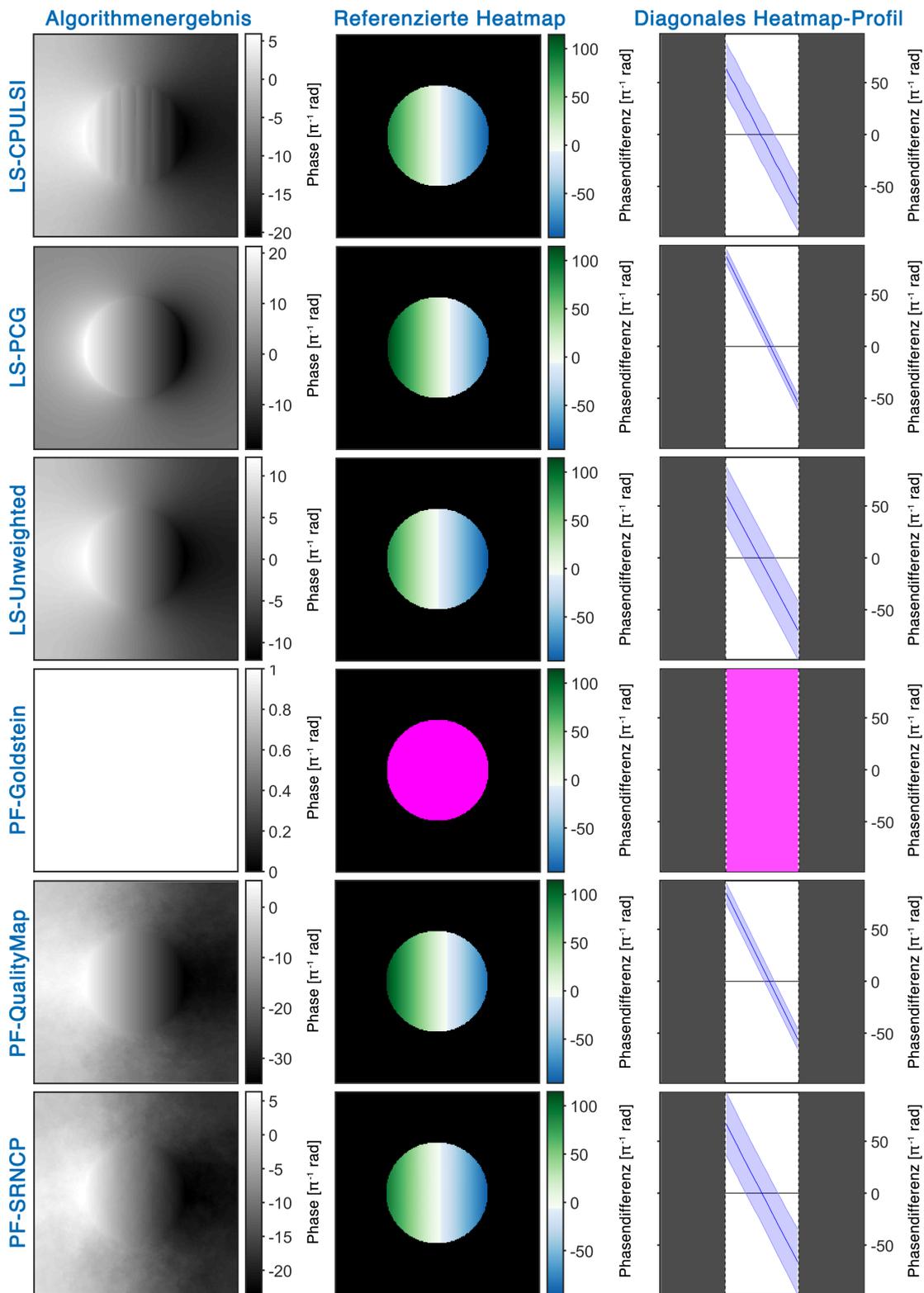


Abb. A.28: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 5.0 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

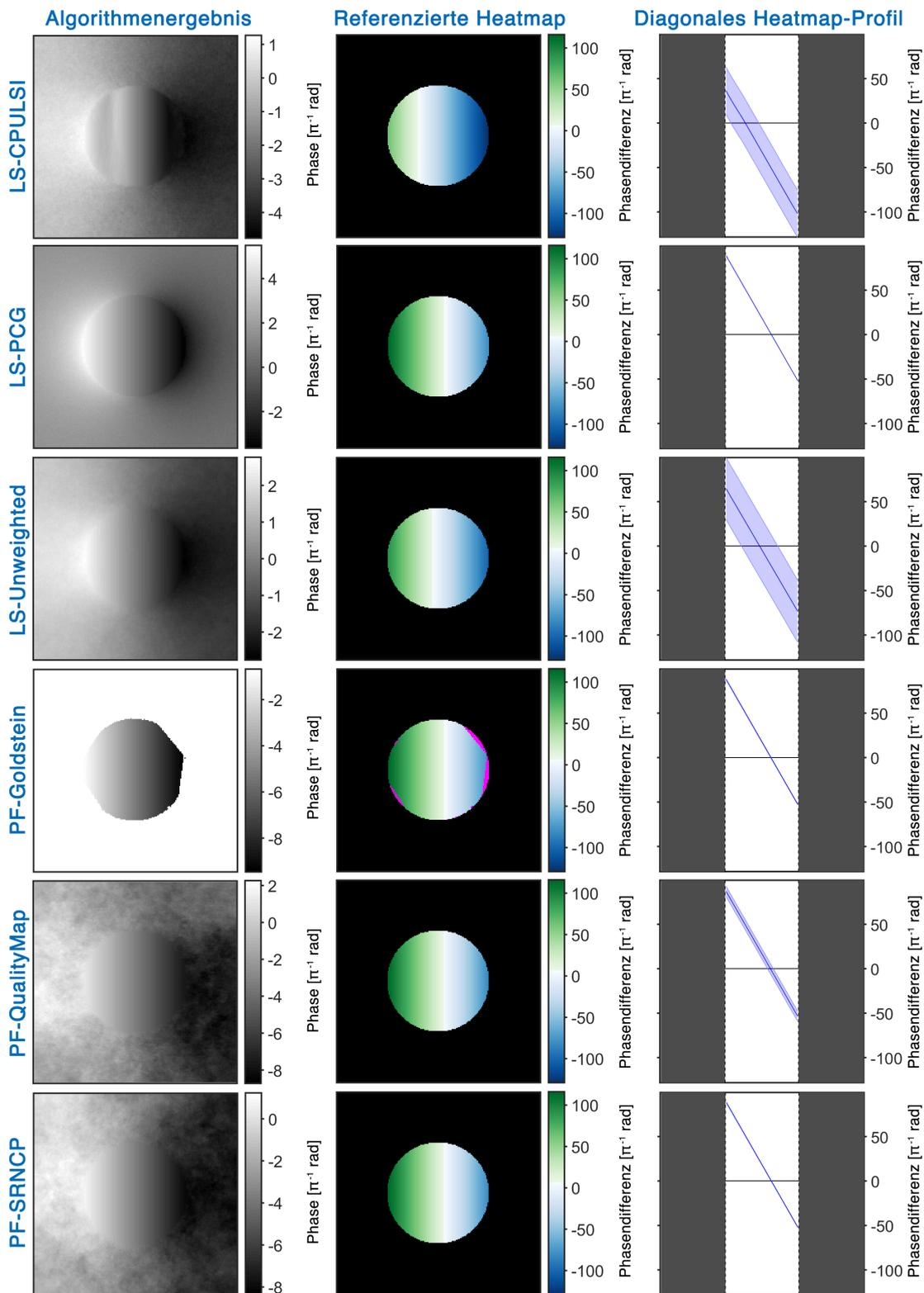


Abb. A.29: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 6.0 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

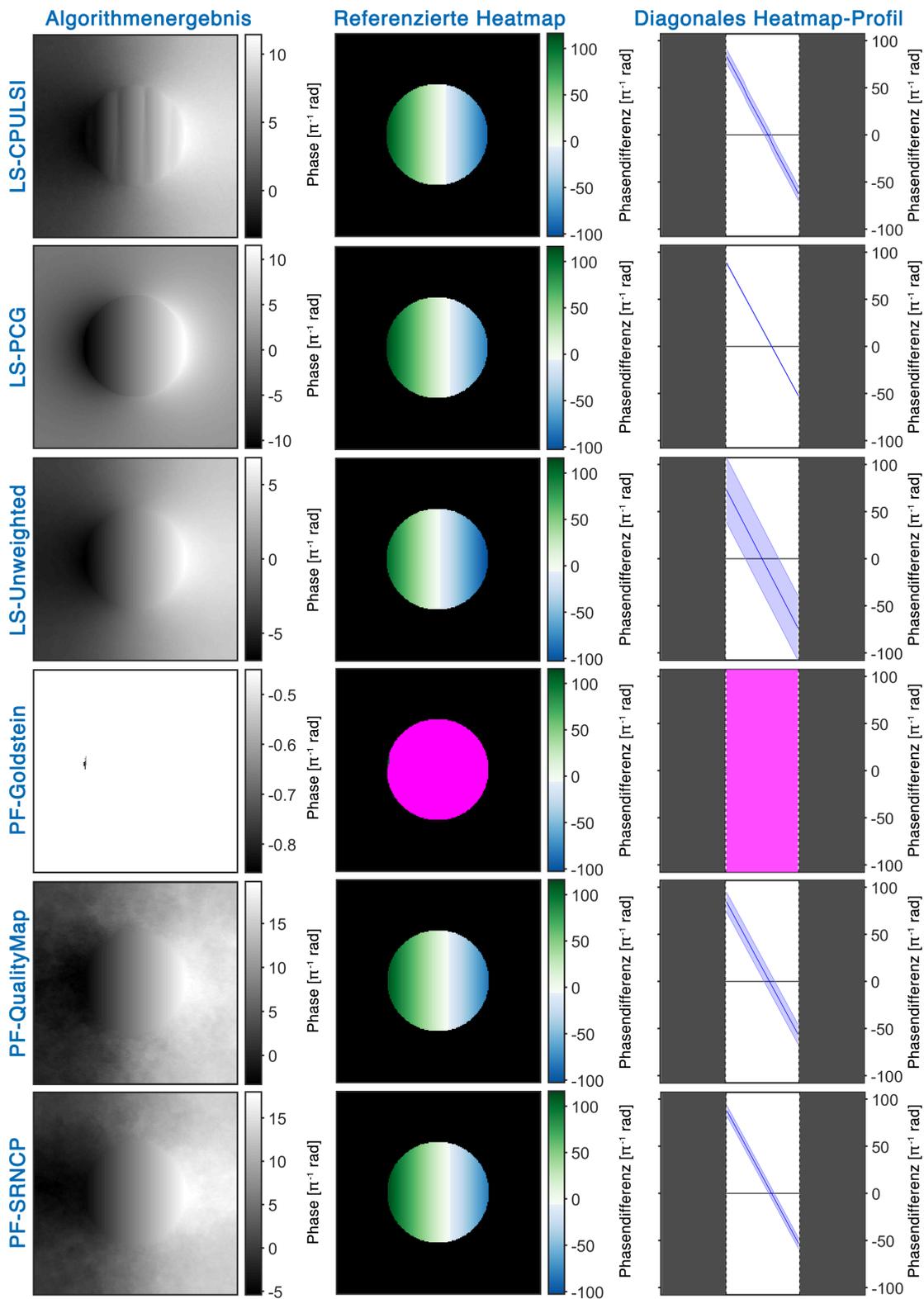


Abb. A.30: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{Grad} = 7.0 \frac{\text{rad}}{\text{px}}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ am Set 1. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

A.7 Ergebnisübersichten: Set 2 - SNR

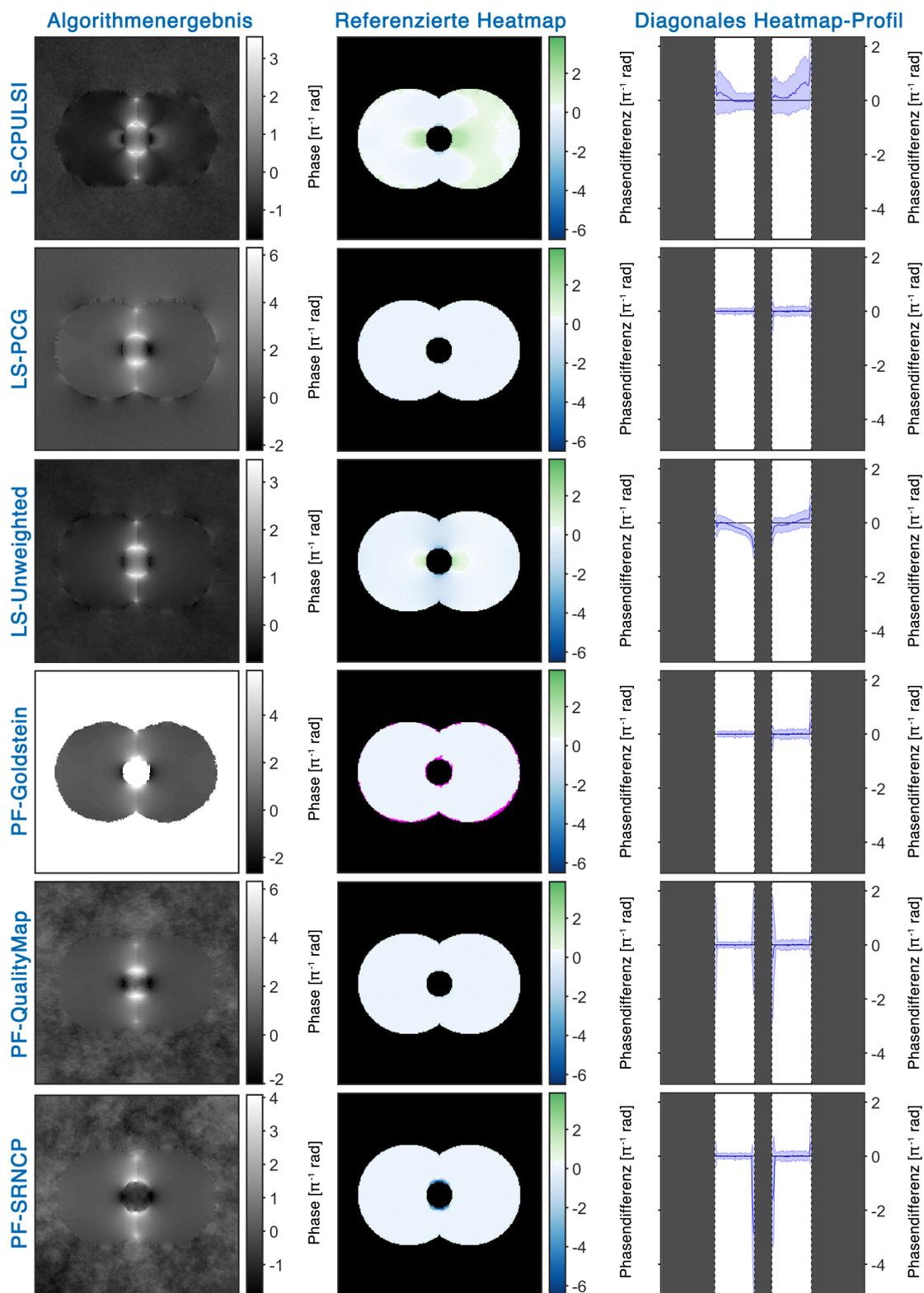


Abb. A.31: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 1 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

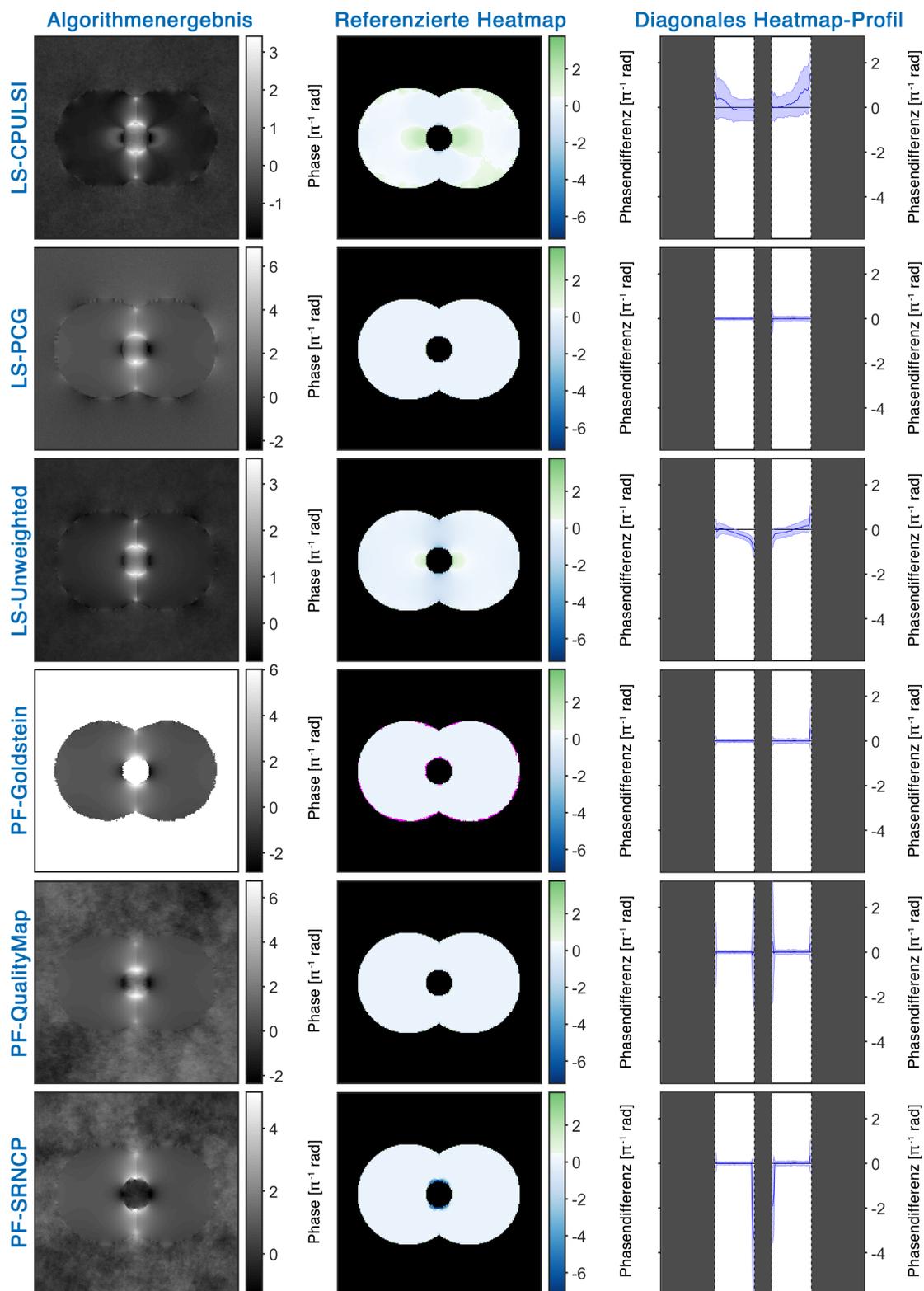


Abb. A.32: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 5 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

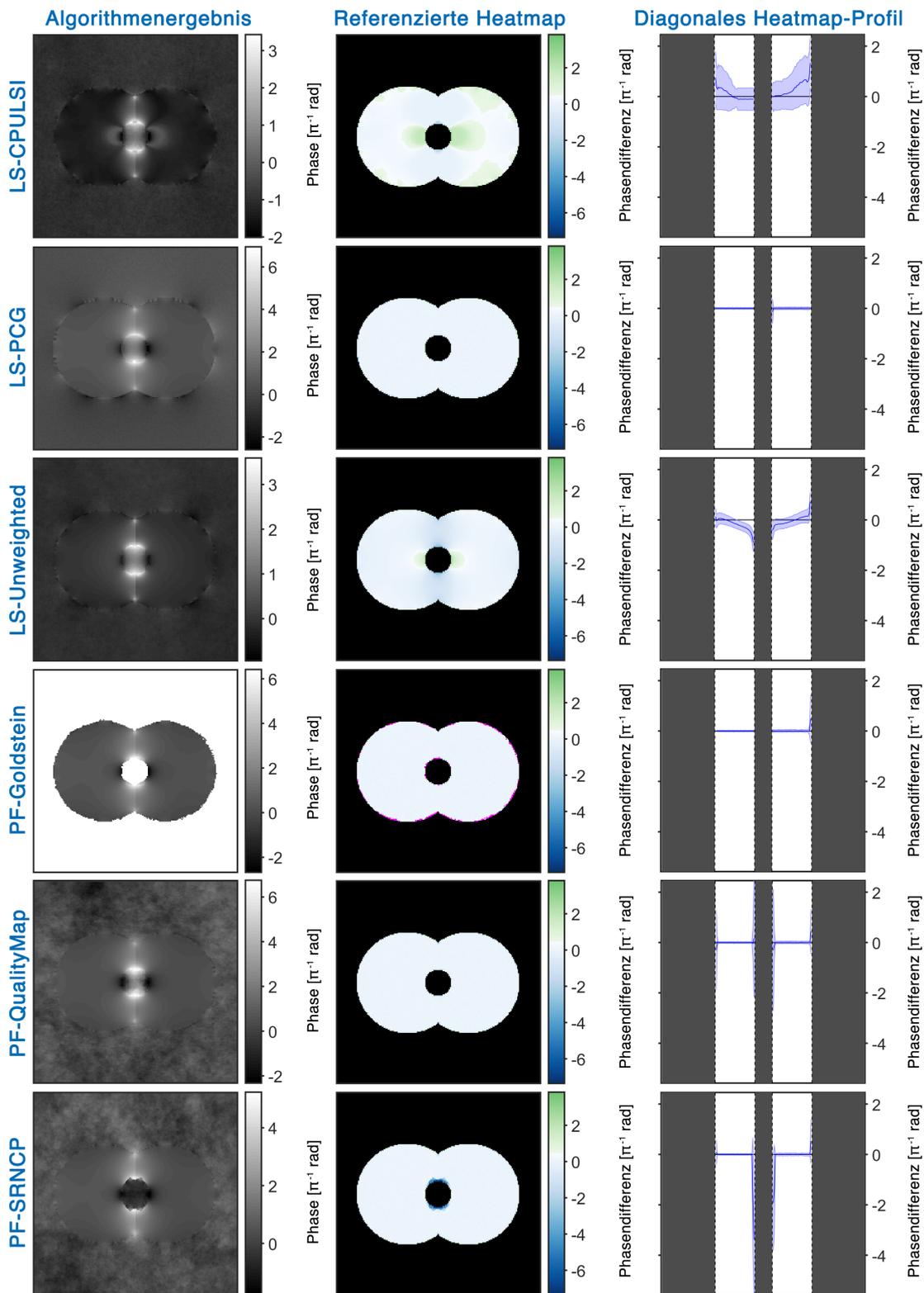


Abb. A.33: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 10 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

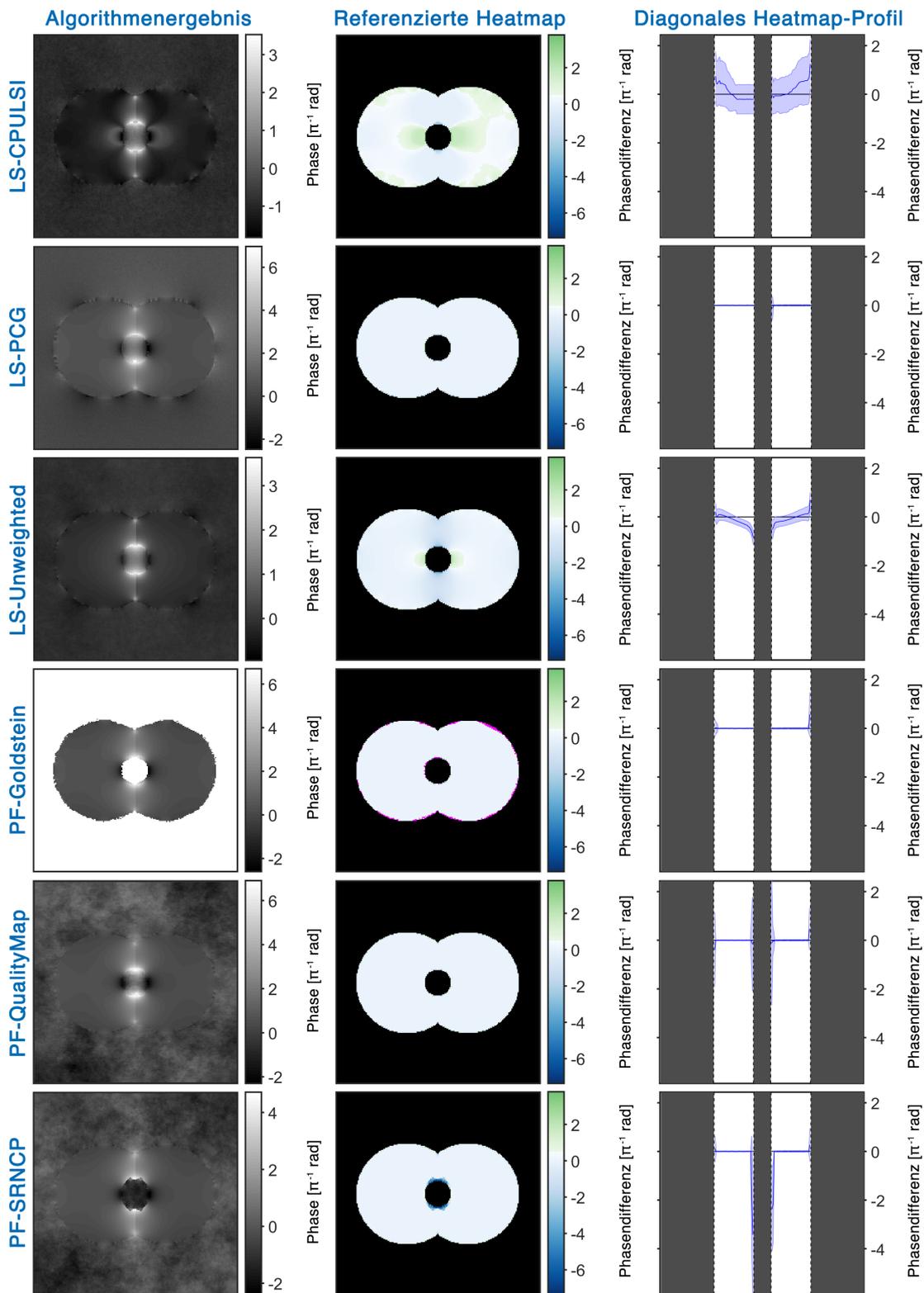


Abb. A.34: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 15 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

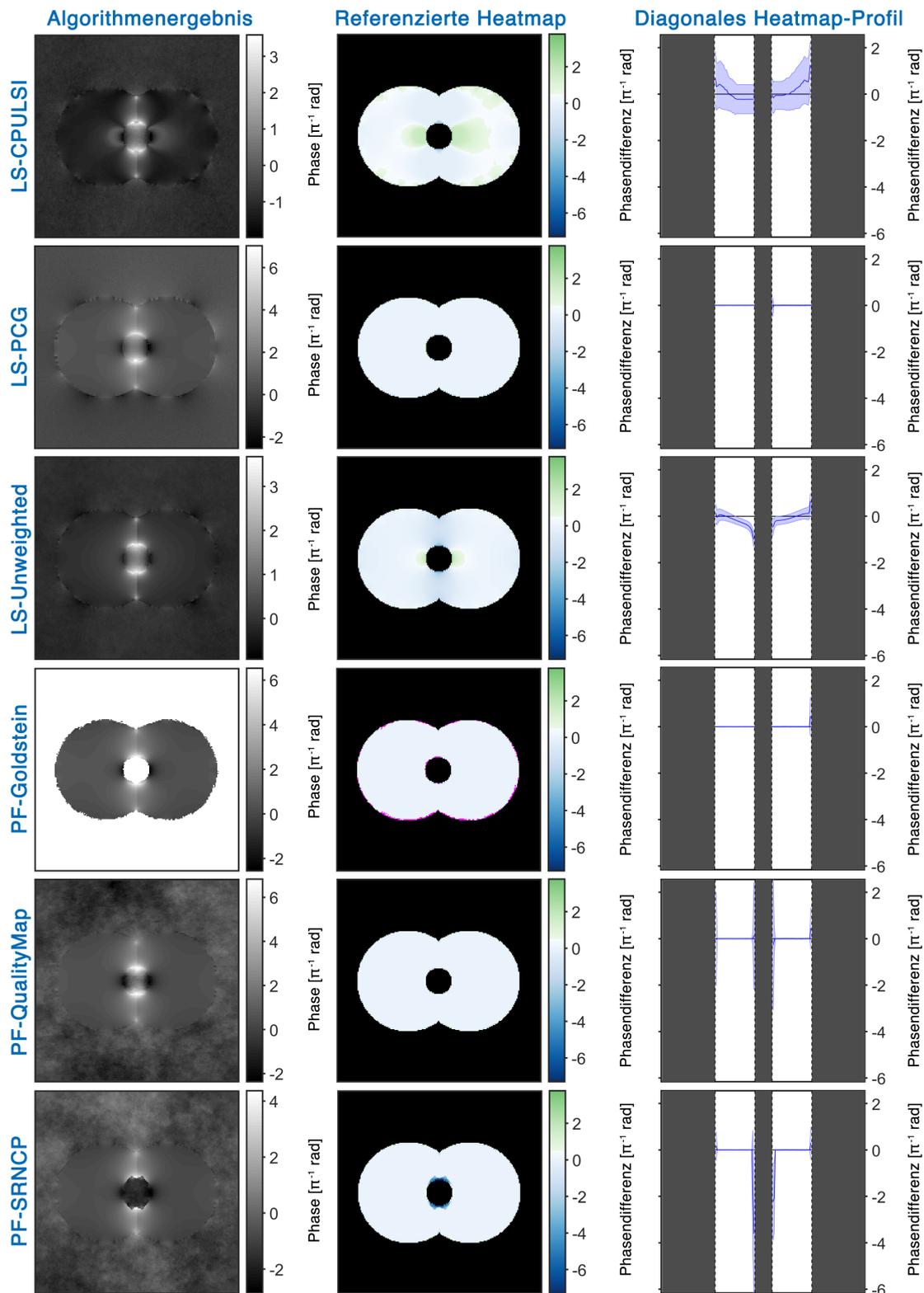


Abb. A.35: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 20$ dB bei $T_E = 4.92$ ms am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

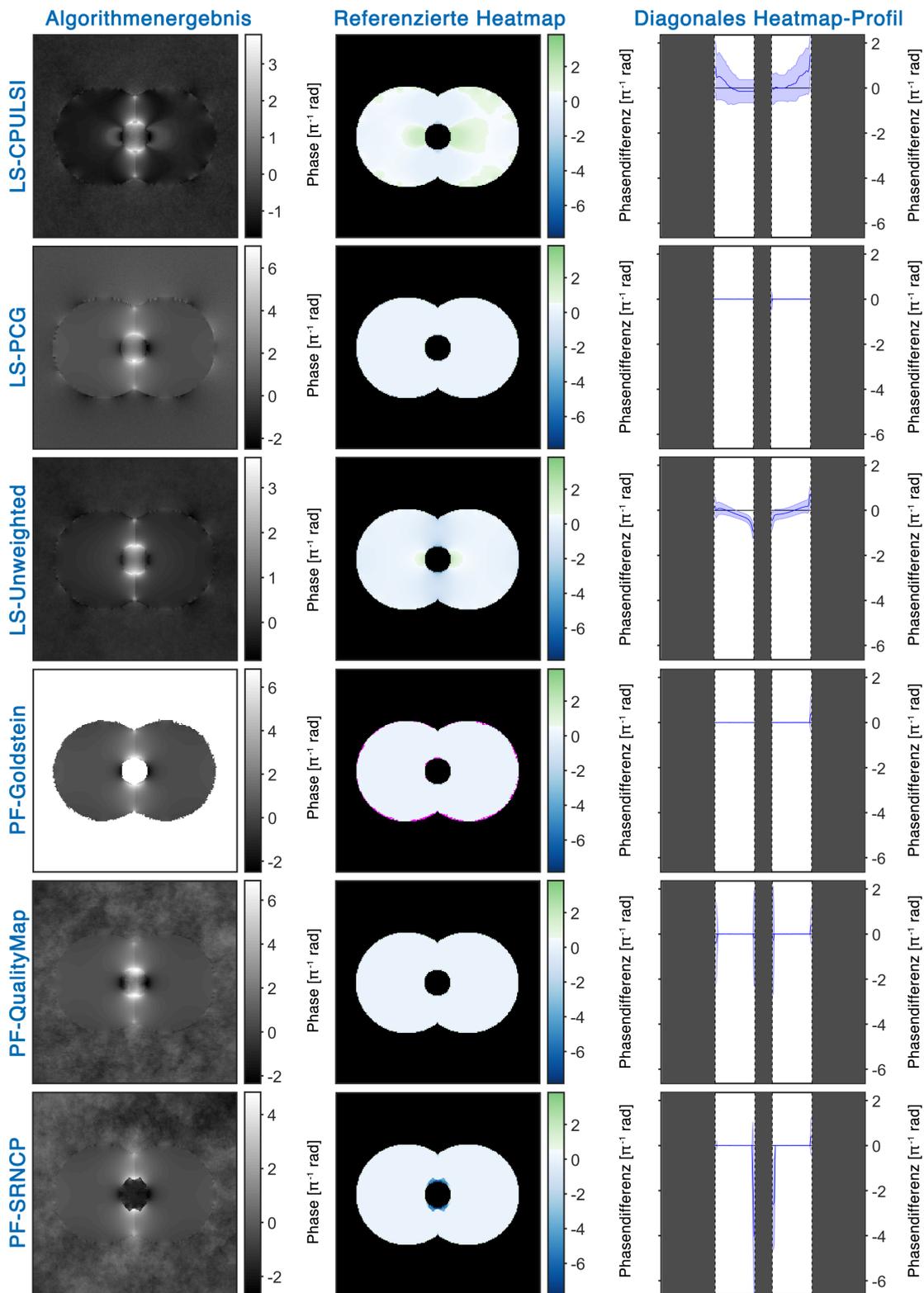


Abb. A.36: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 25 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

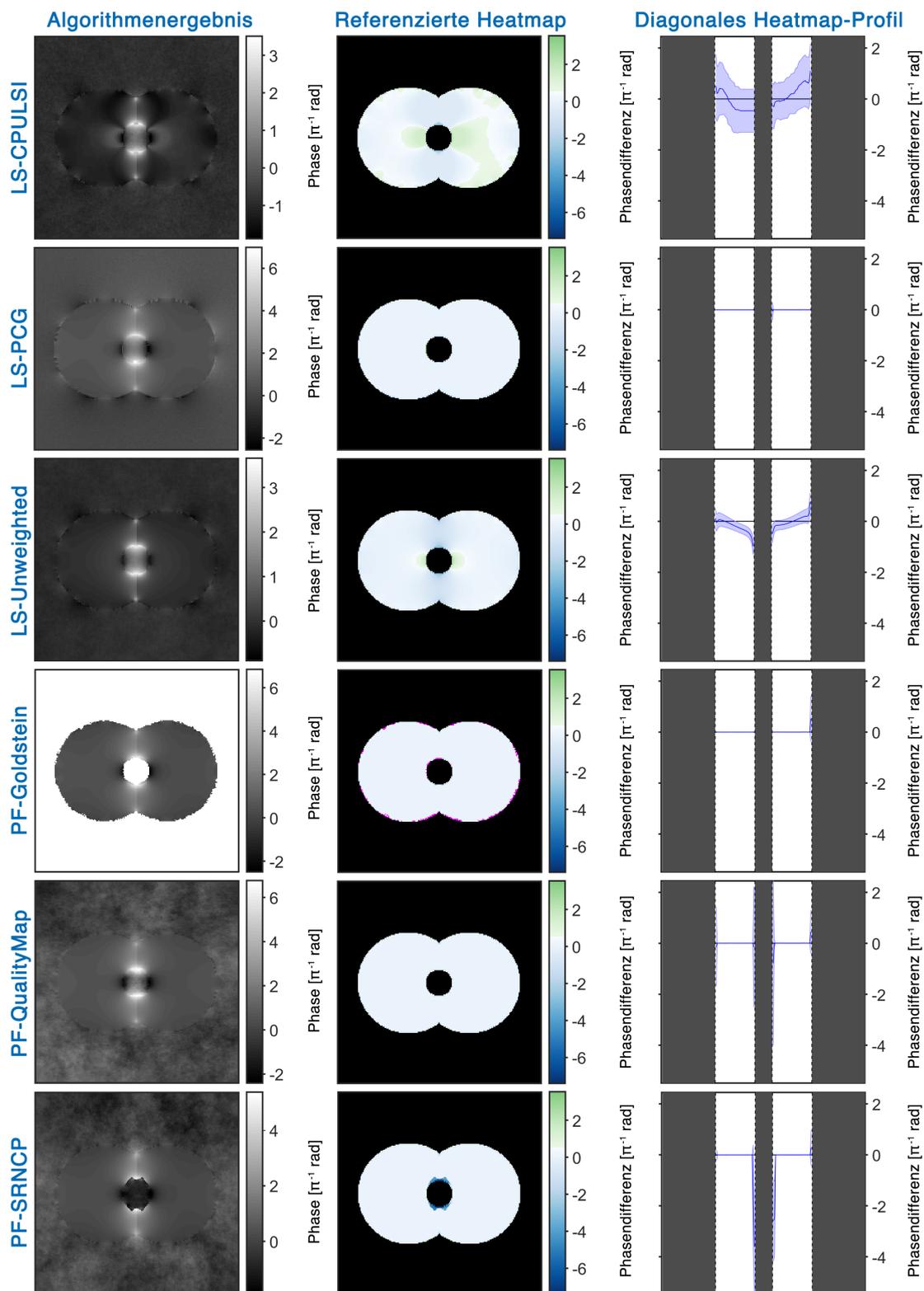


Abb. A.37: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

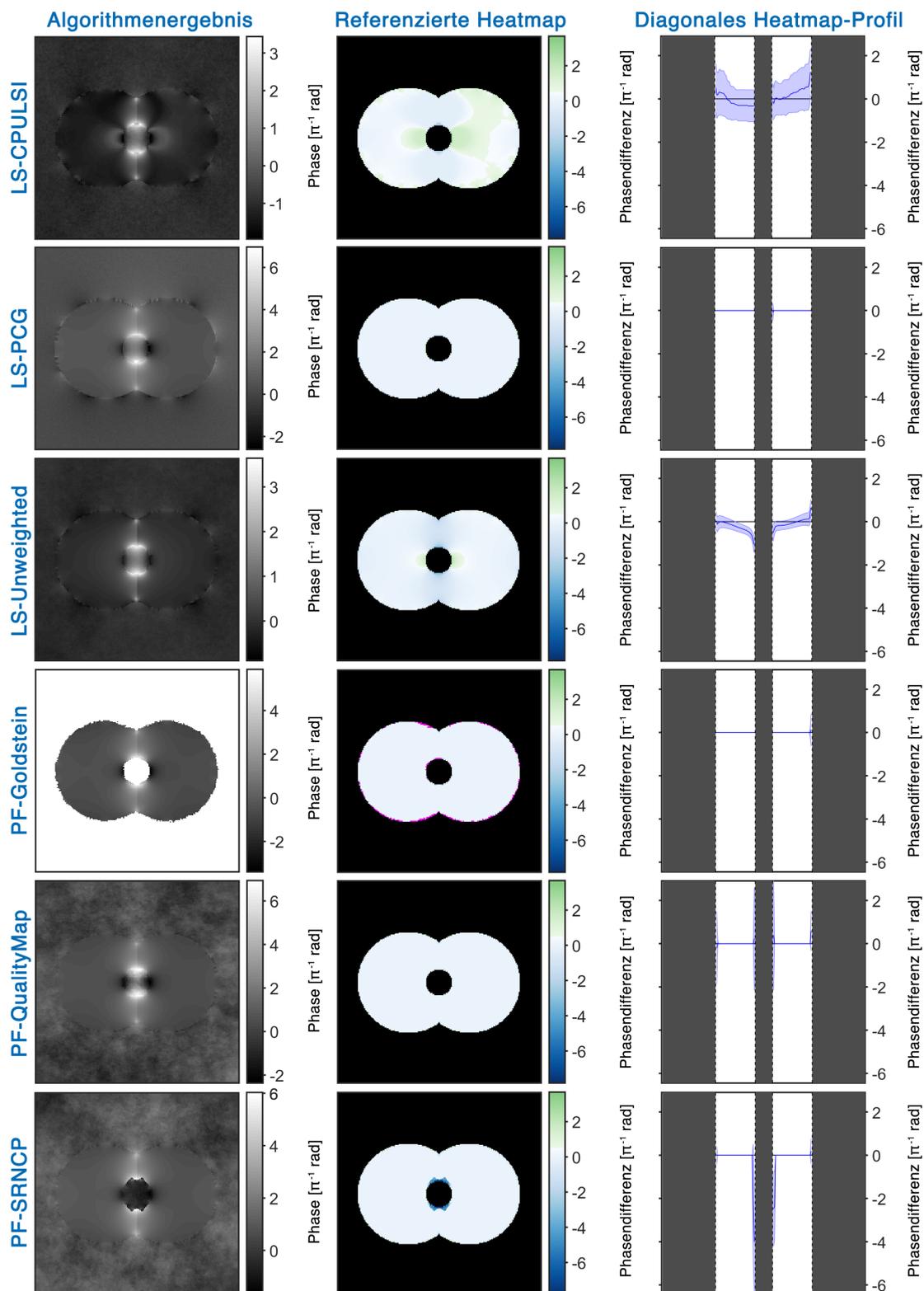


Abb. A.38: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 40 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

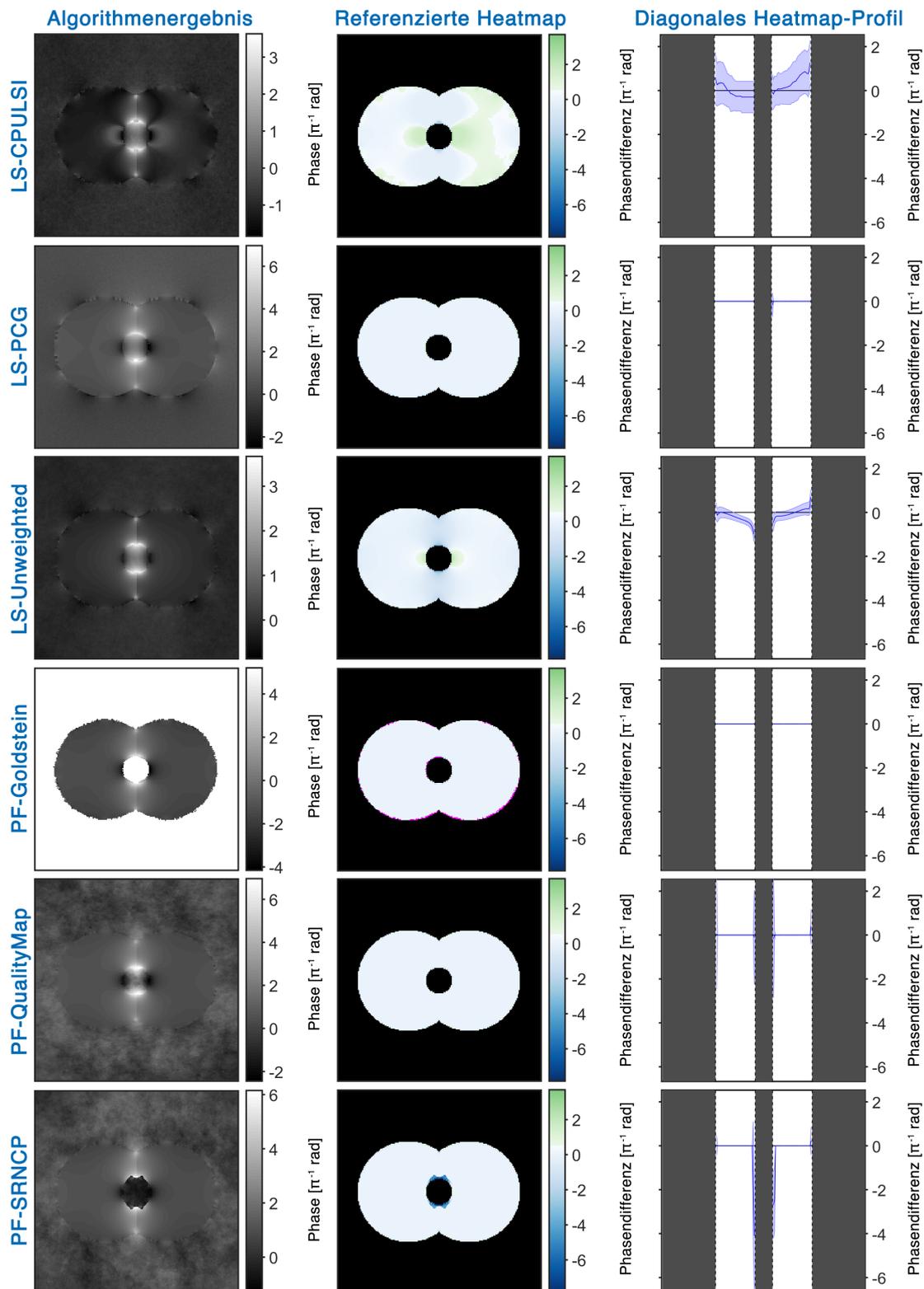


Abb. A.39: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 50 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

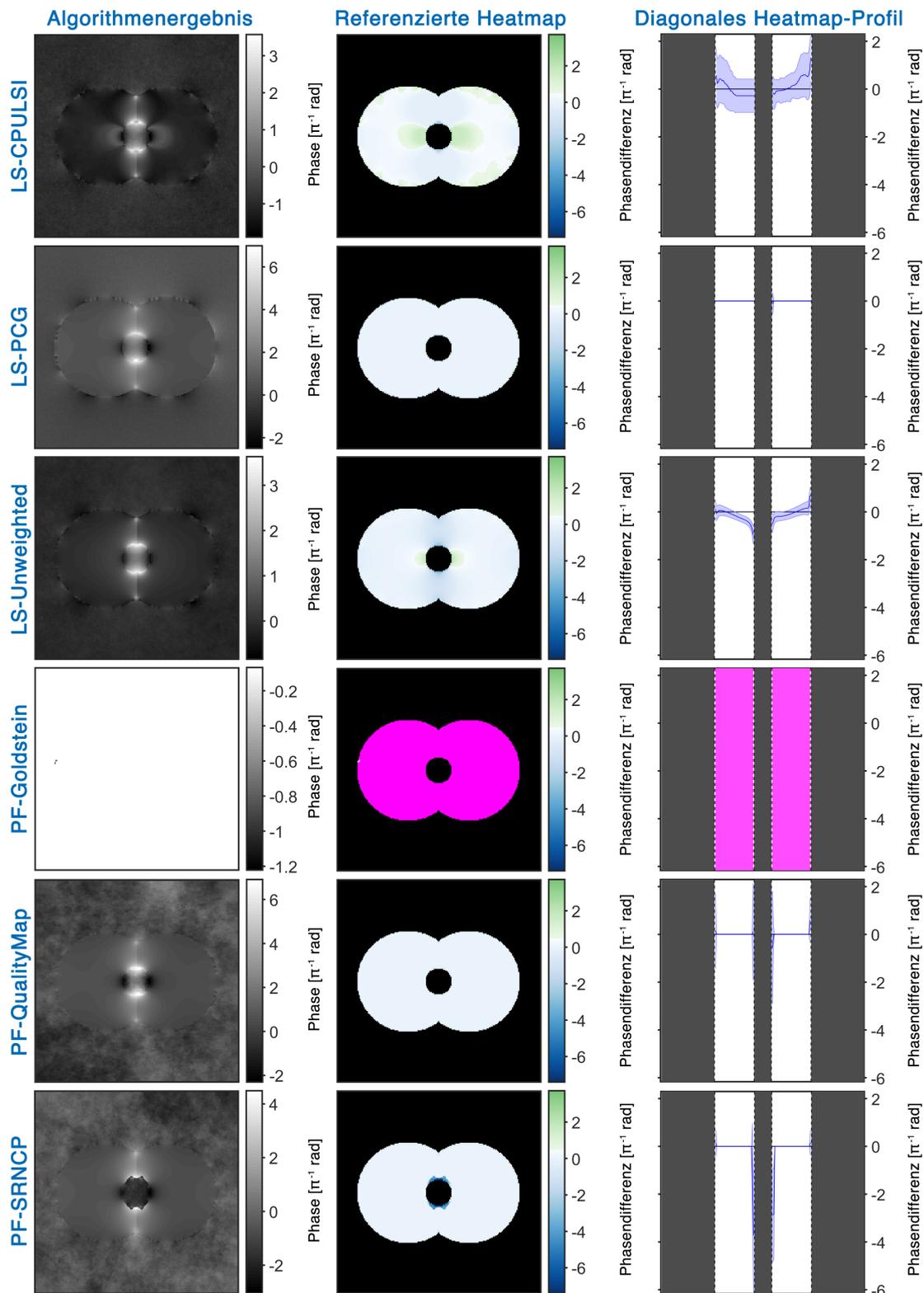


Abb. A.40: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 60 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

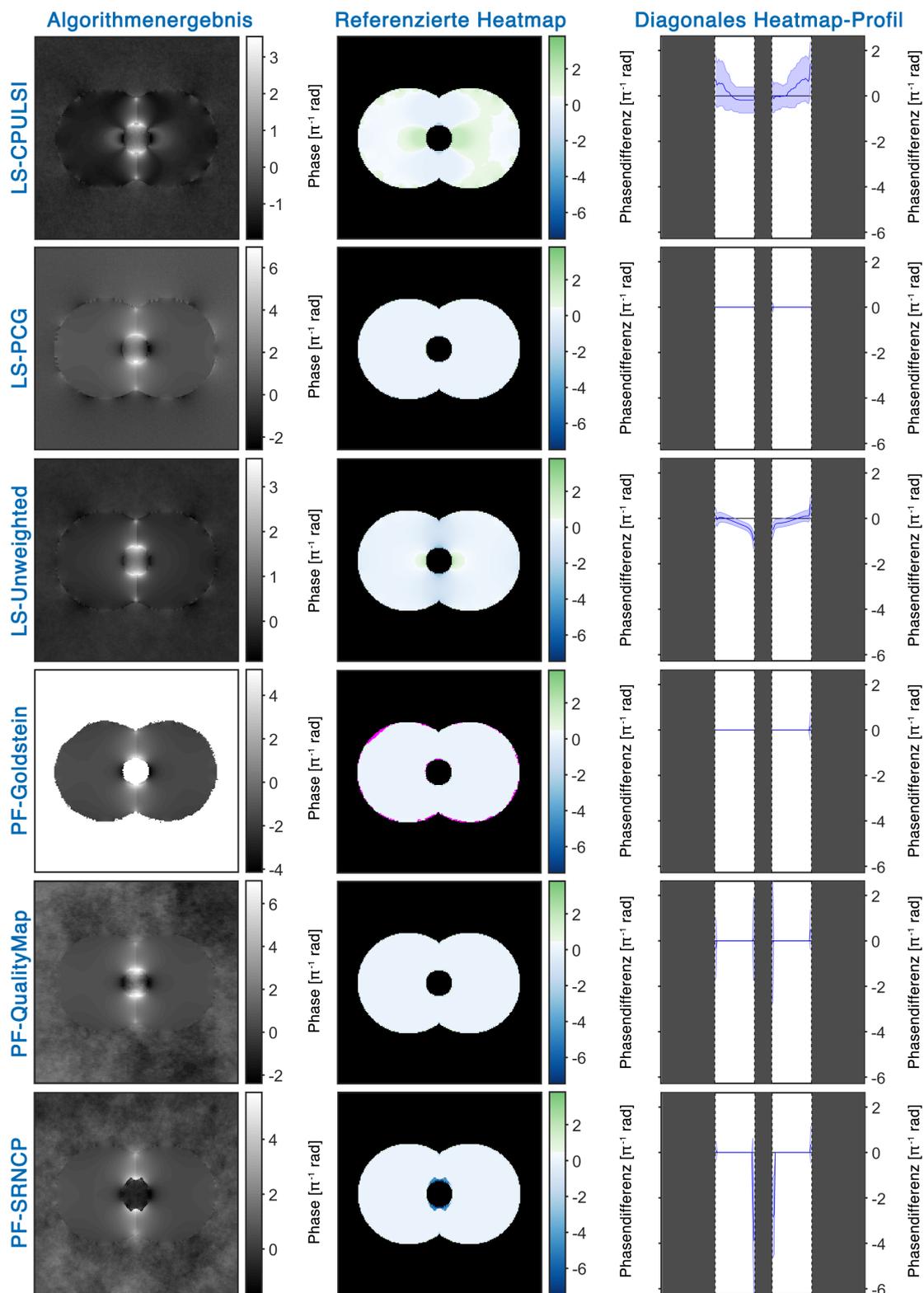


Abb. A.41: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 80 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

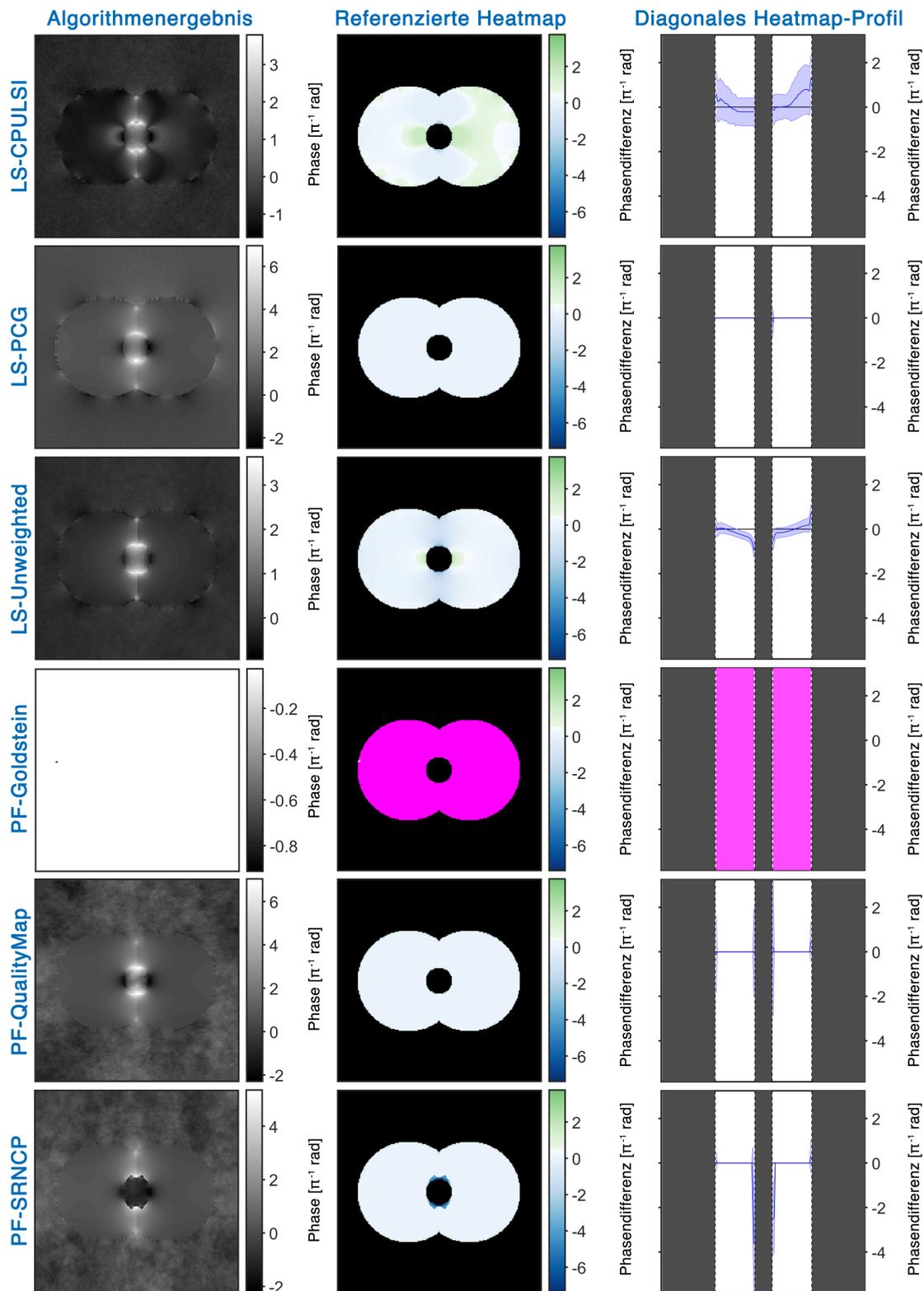


Abb. A.42: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

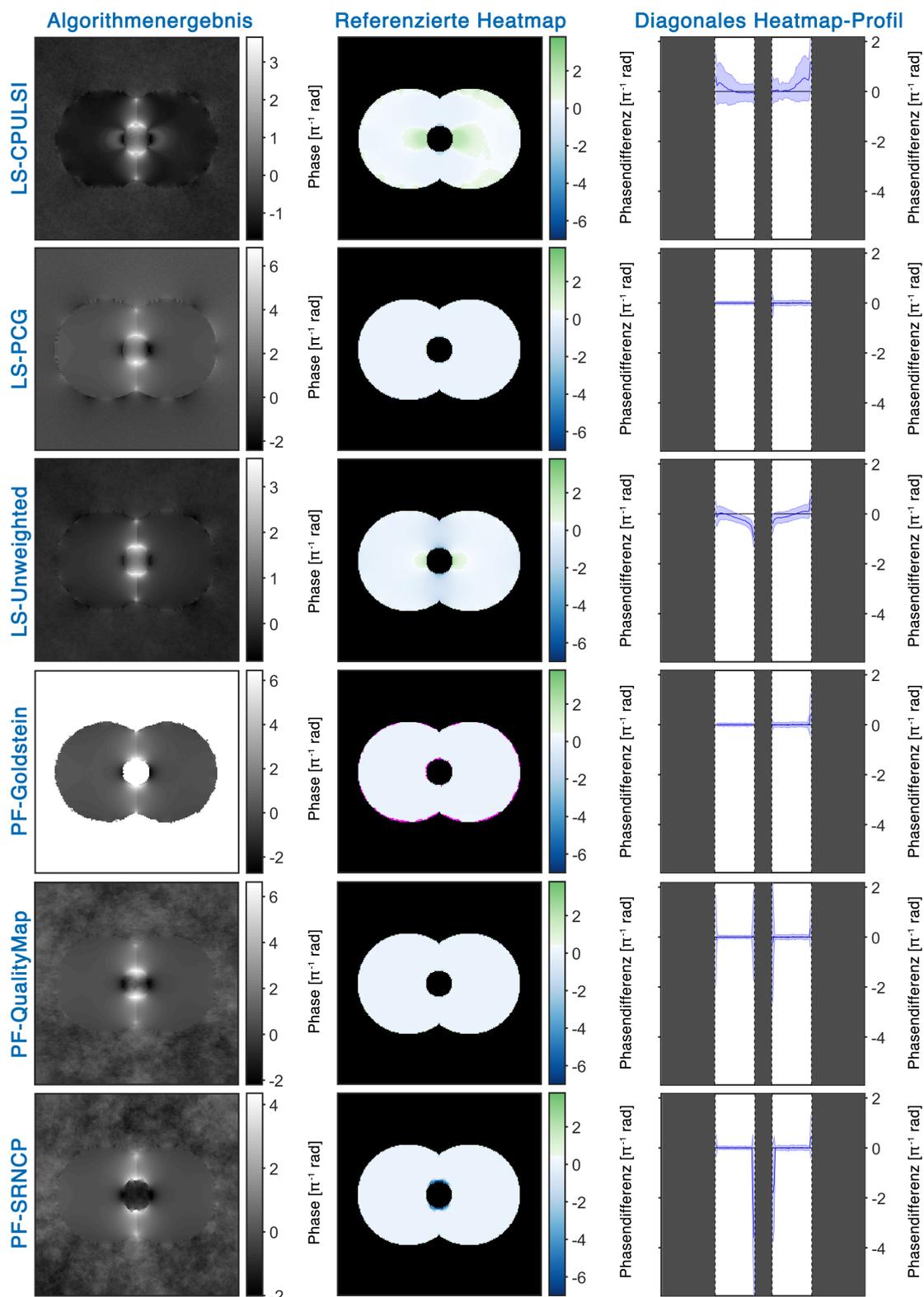
A.8 Ergebnisübersichten: Set 2 - T_E 

Abb. A.43: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 4.92$ ms bei SNR = 100 dB am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

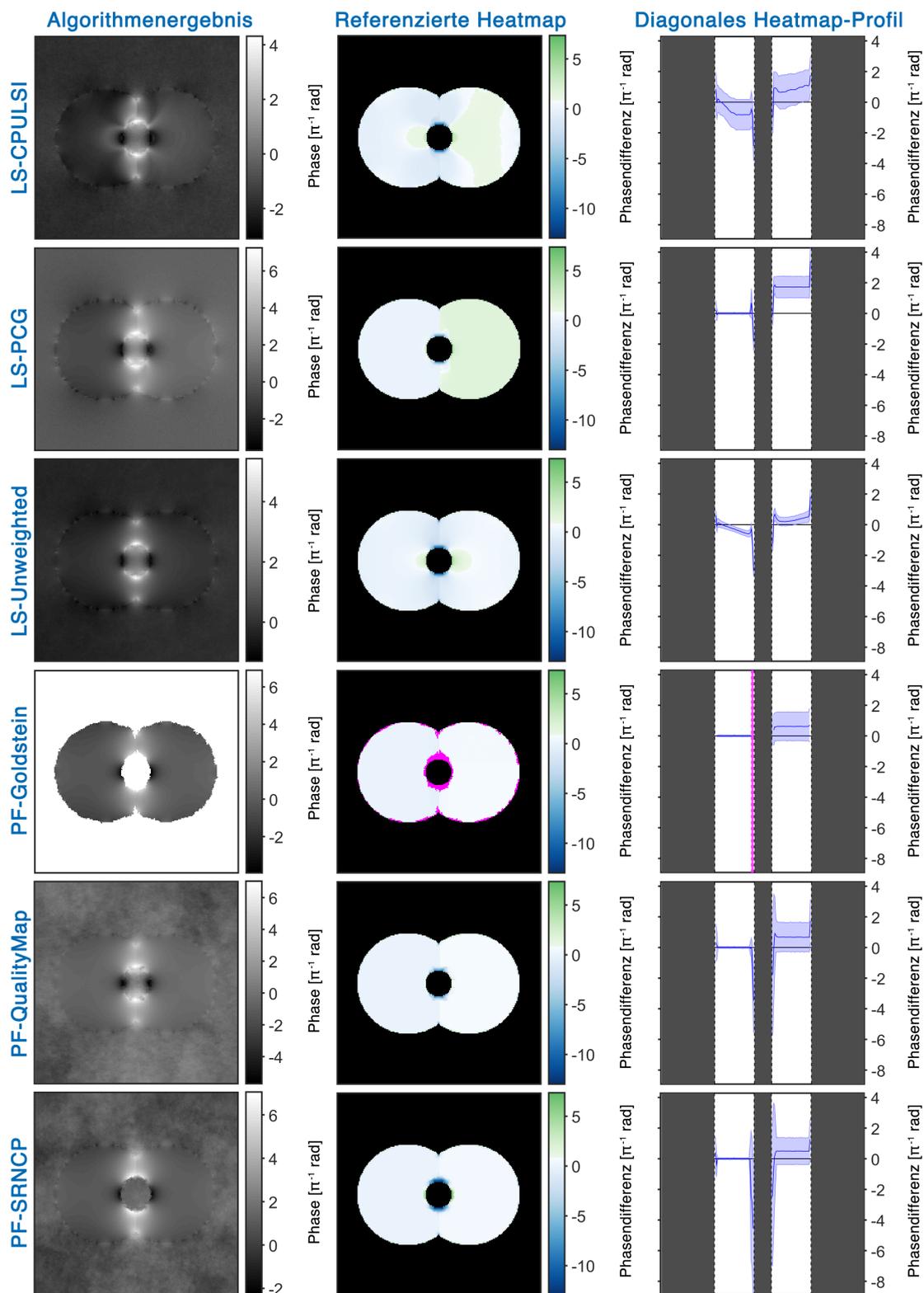


Abb. A.44: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 9.84 \text{ ms}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

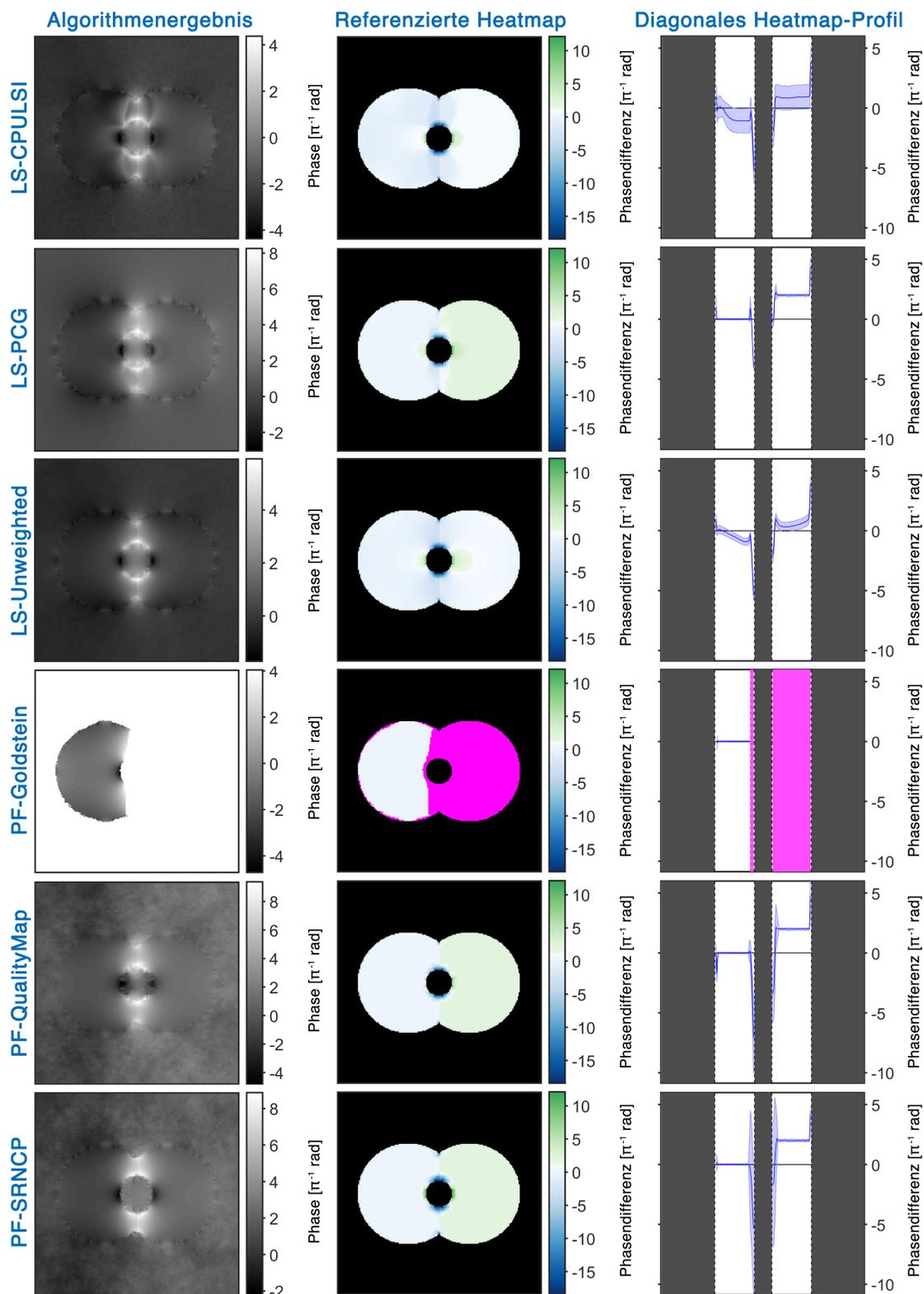


Abb. A.45: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 14.76 \text{ ms}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

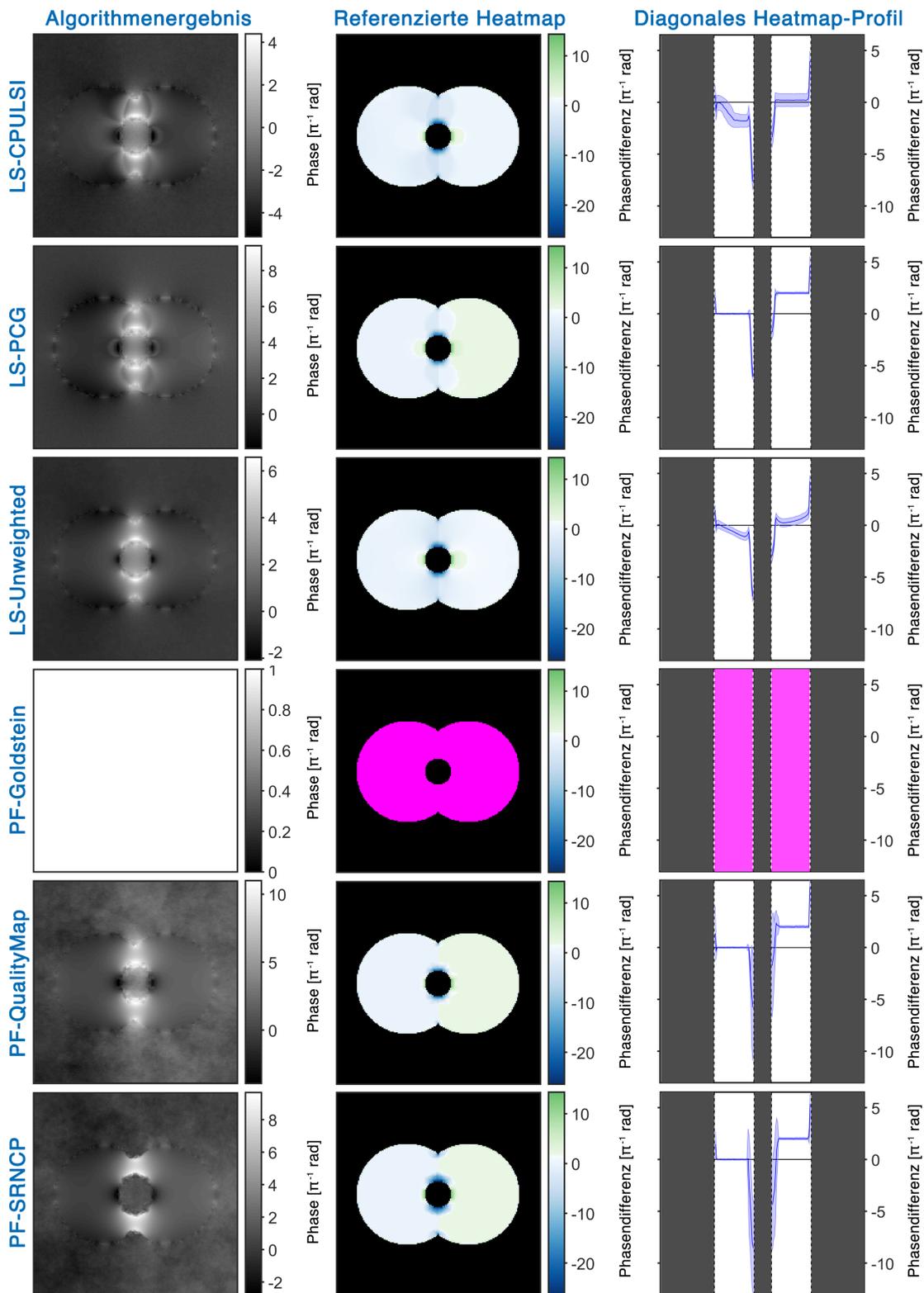


Abb. A.46: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 19.68 \text{ ms}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

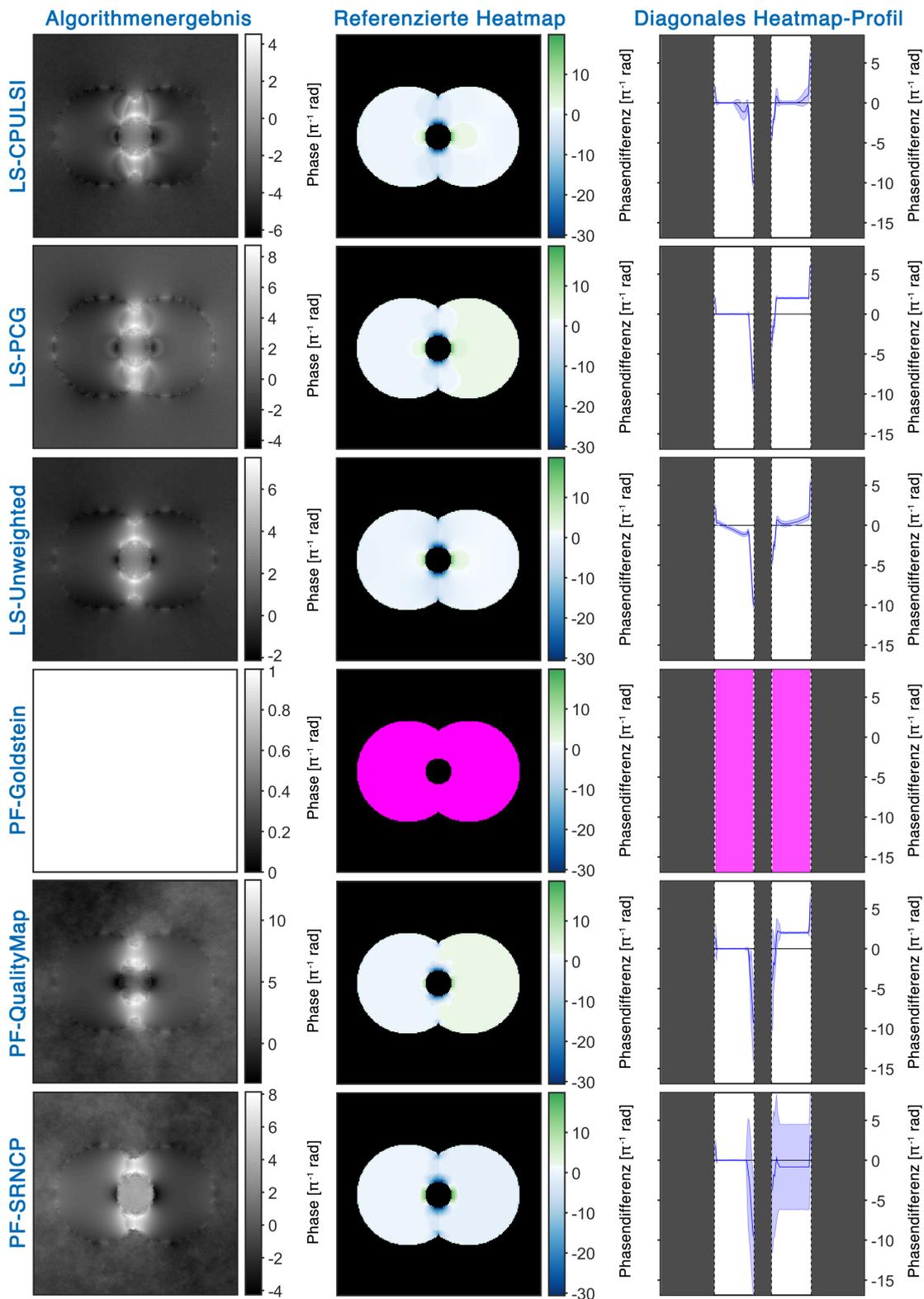


Abb. A.47: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 24.60 \text{ ms}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ am Set 2. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

A.9 Ergebnisübersichten: Set 3 - SNR

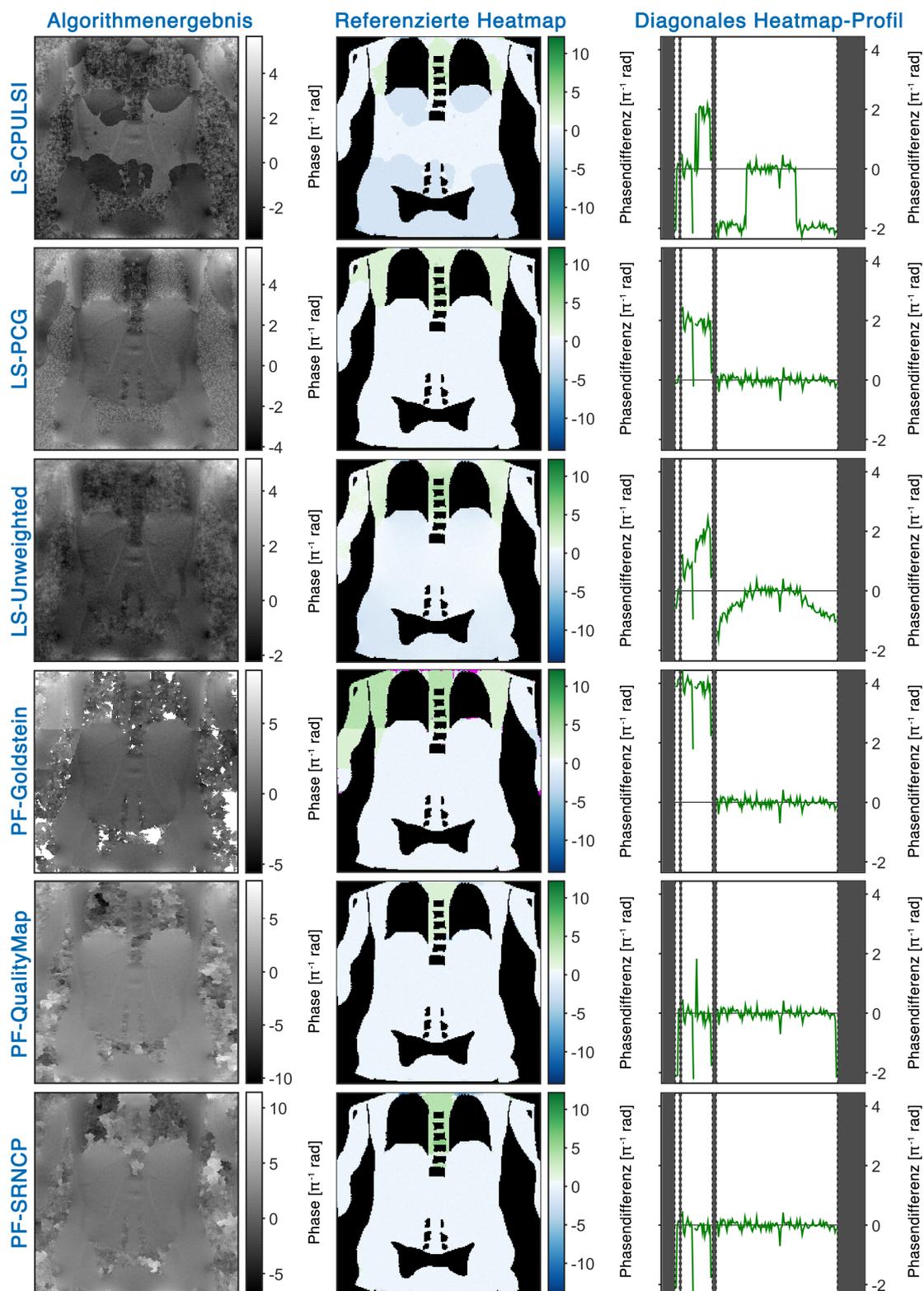


Abb. A.48: Ergebnisse der Untersuchung mit $SNR = 5 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 3. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

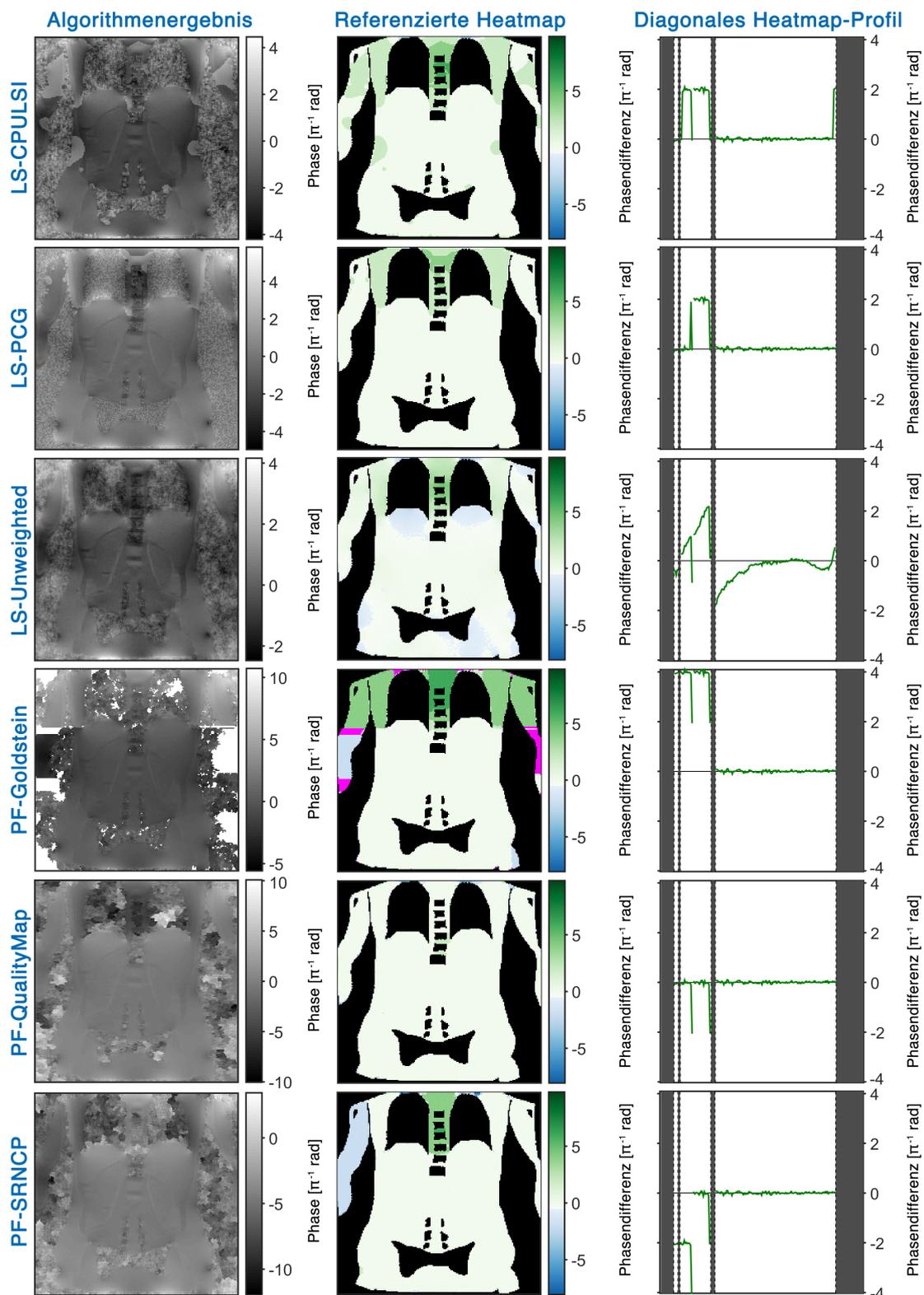


Abb. A.49: Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 10 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 3. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

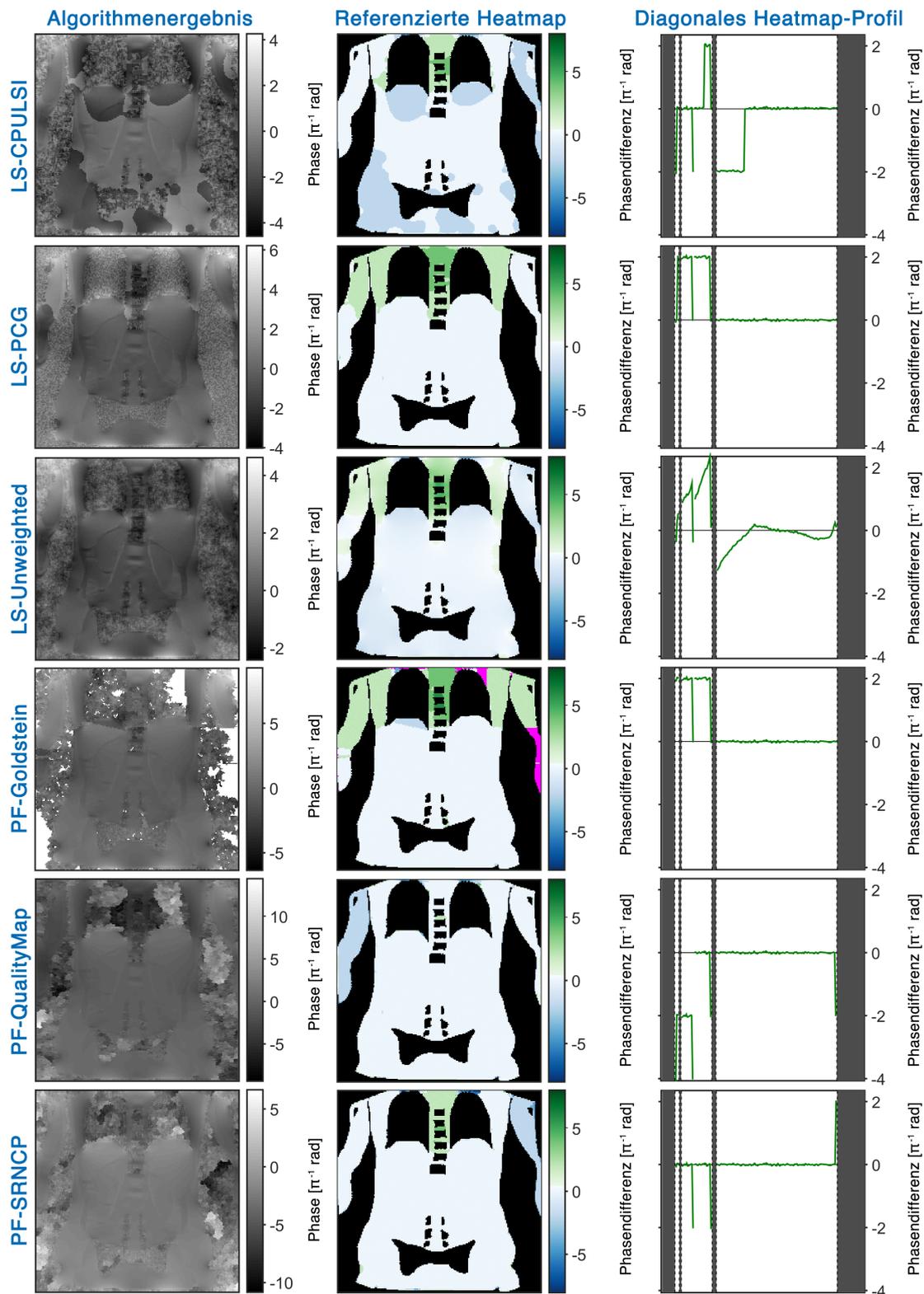


Abb. A.50: Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 3. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

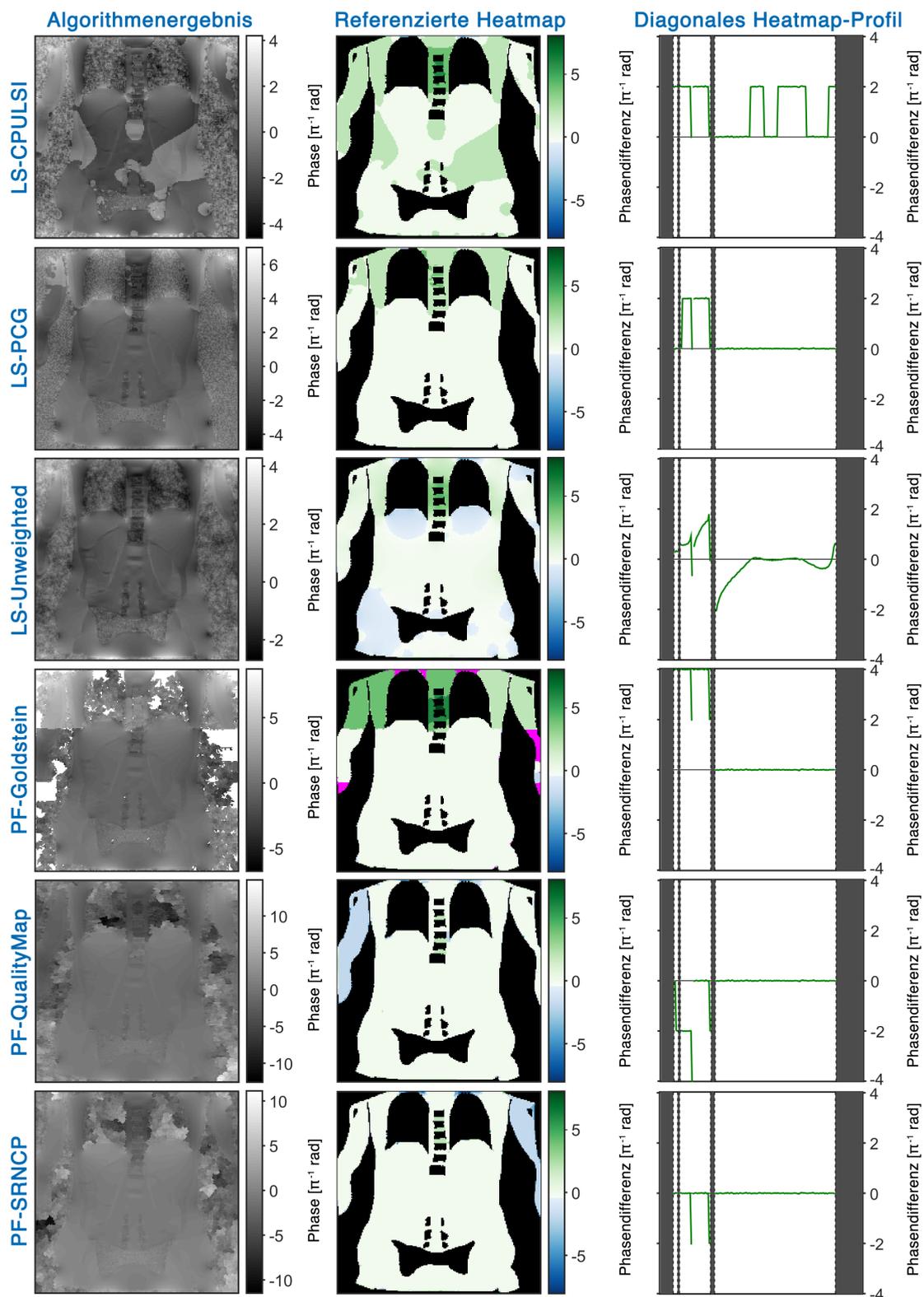


Abb. A.51: Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 60 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 3. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

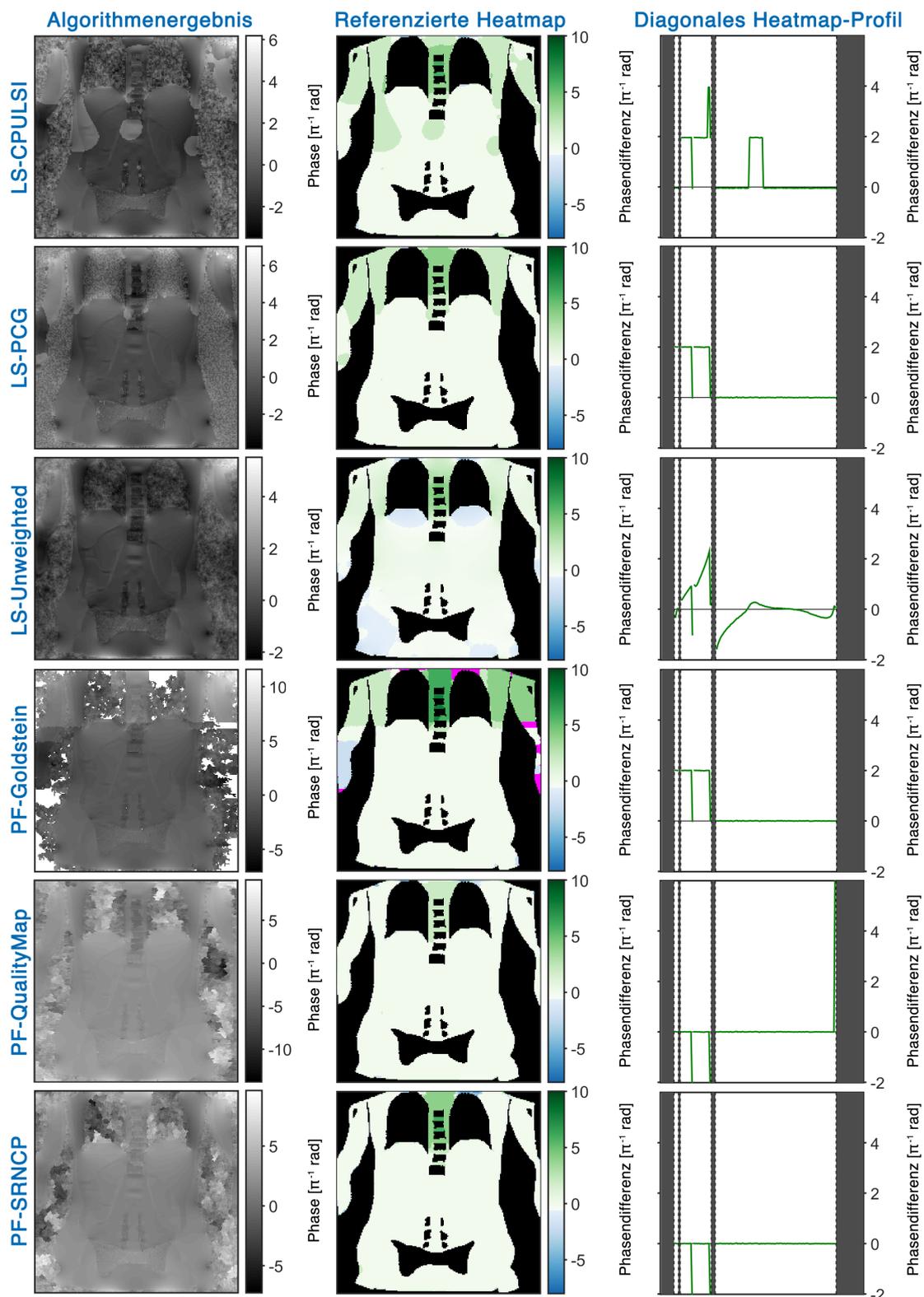


Abb. A.52: Ergebnisse der Untersuchung mit $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ bei $T_E = 4.92 \text{ ms}$ am Set 3.

In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

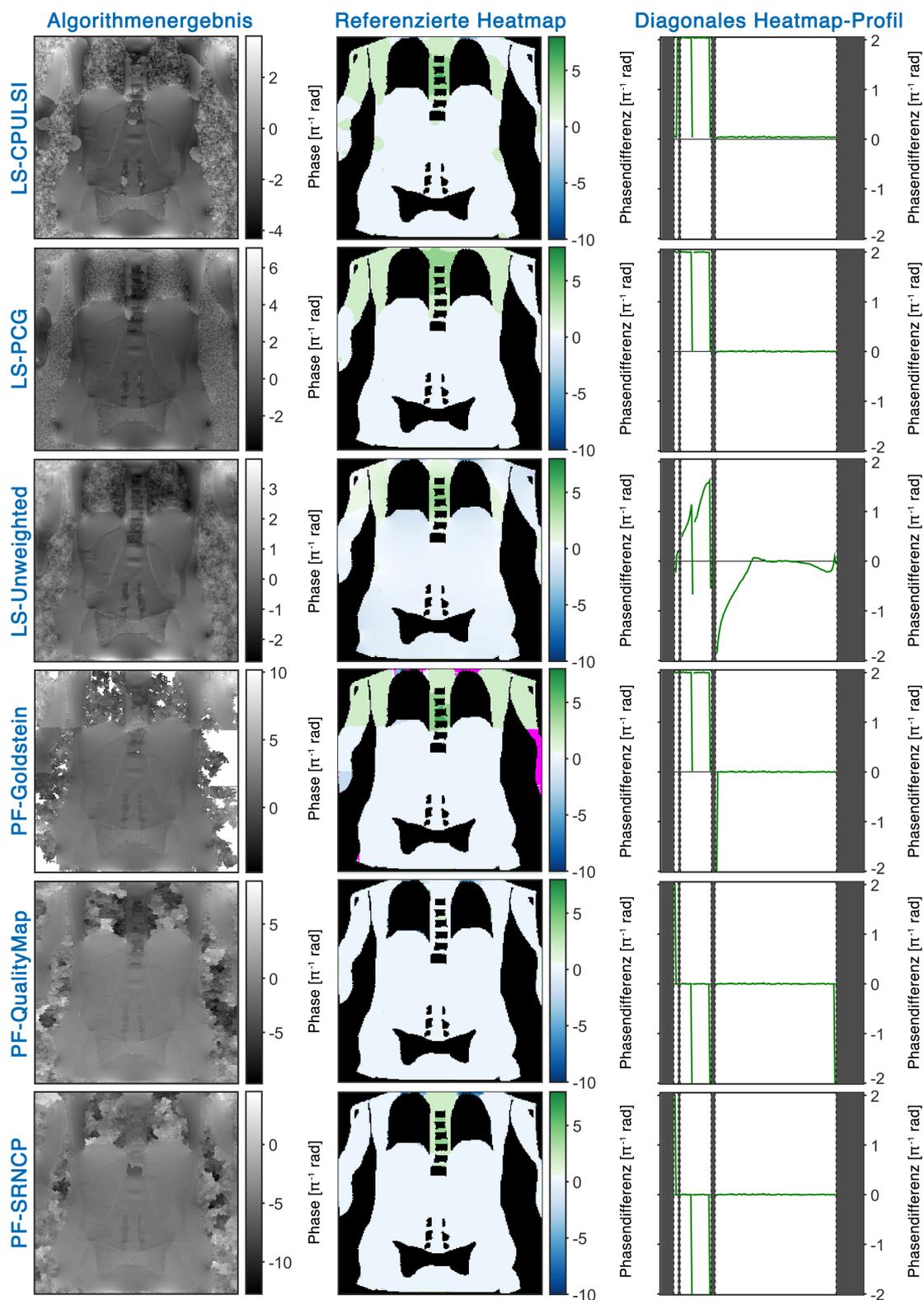
A.10 Ergebnisübersichten: Set 3 - T_E 

Abb. A.53: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 4.92 \text{ ms}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ am Set 3. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

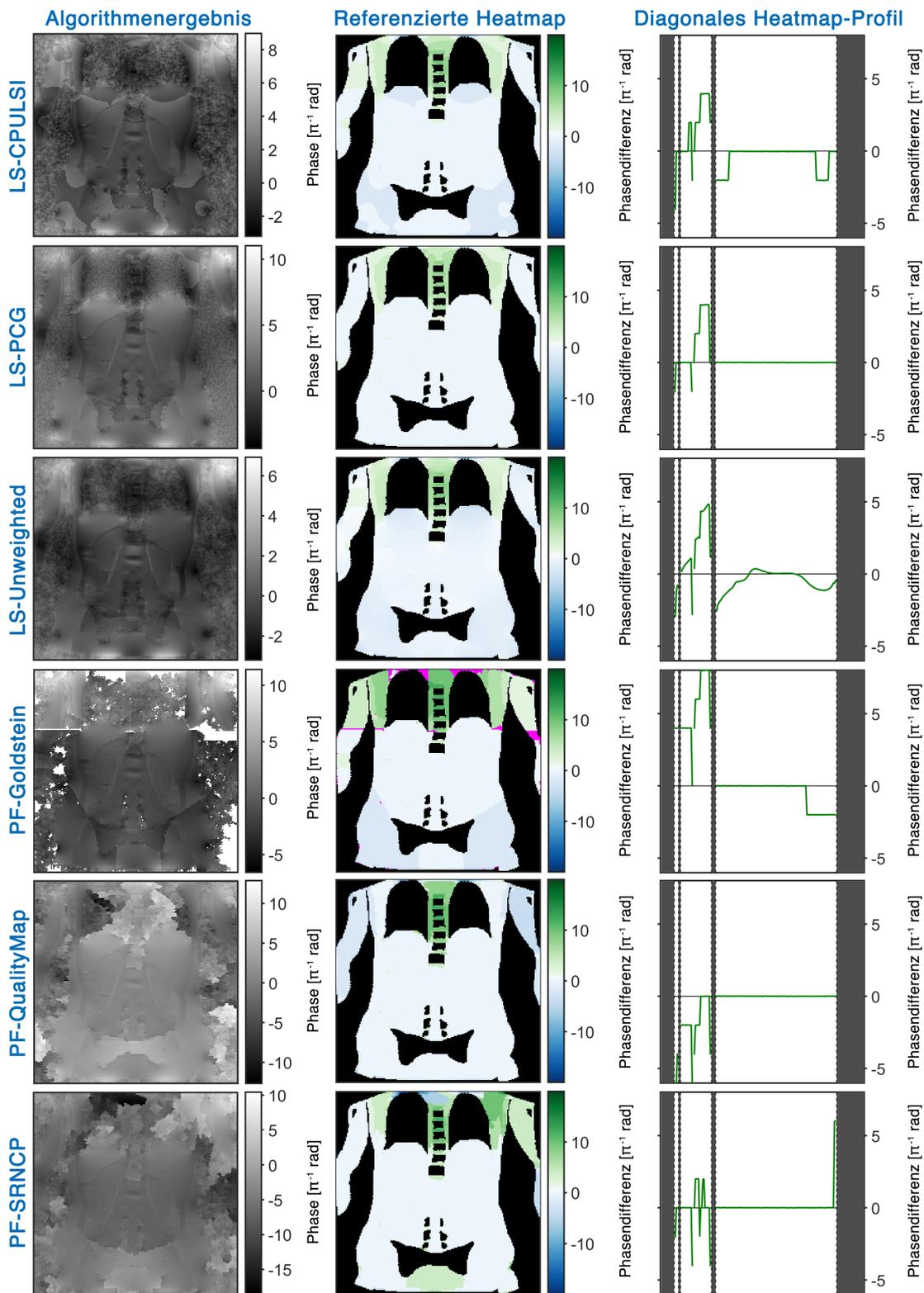


Abb. A.54: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 9.84$ ms bei SNR = 100 dB am Set 3. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

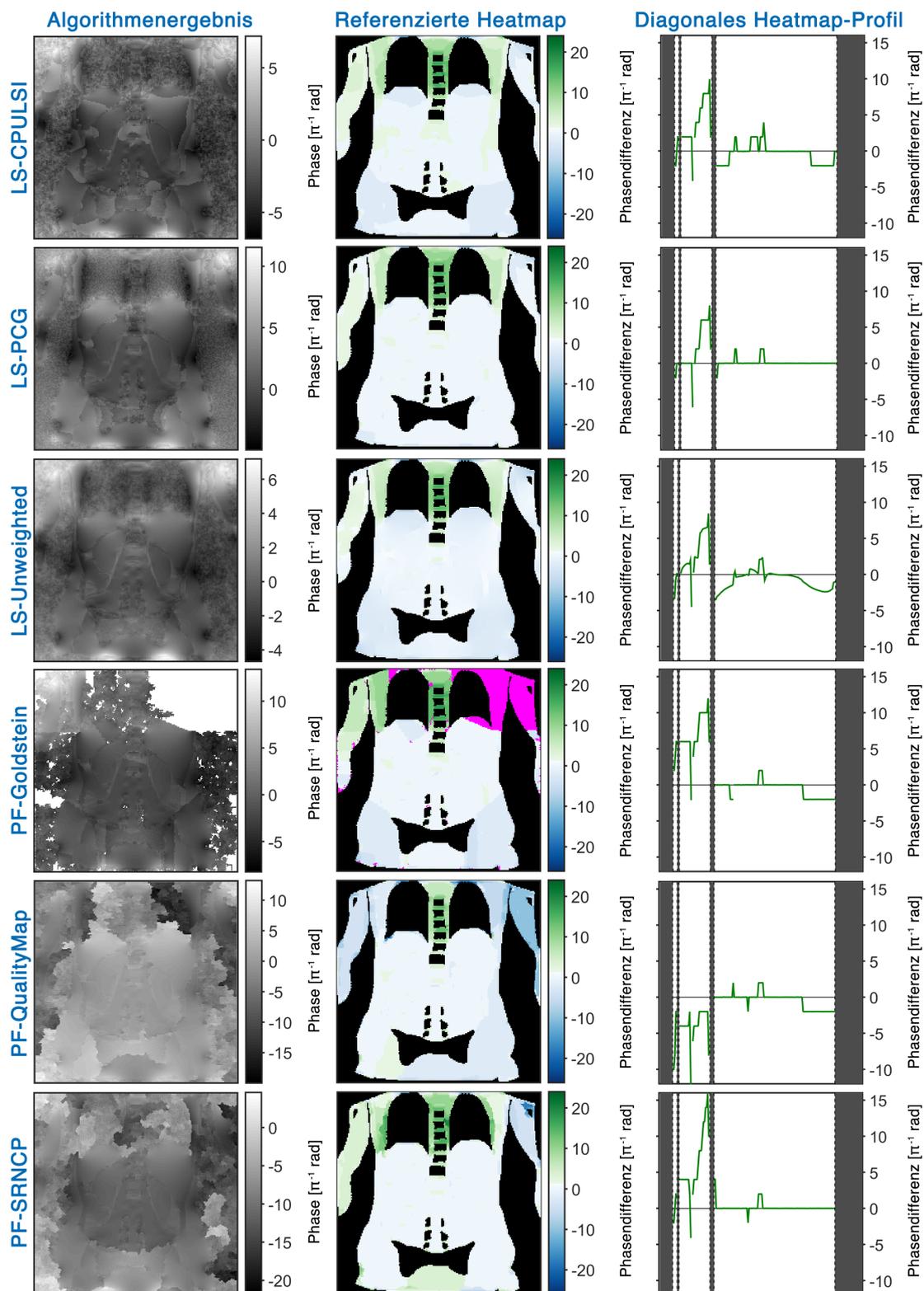


Abb. A.55: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 14.76 \text{ ms}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ am Set 3. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

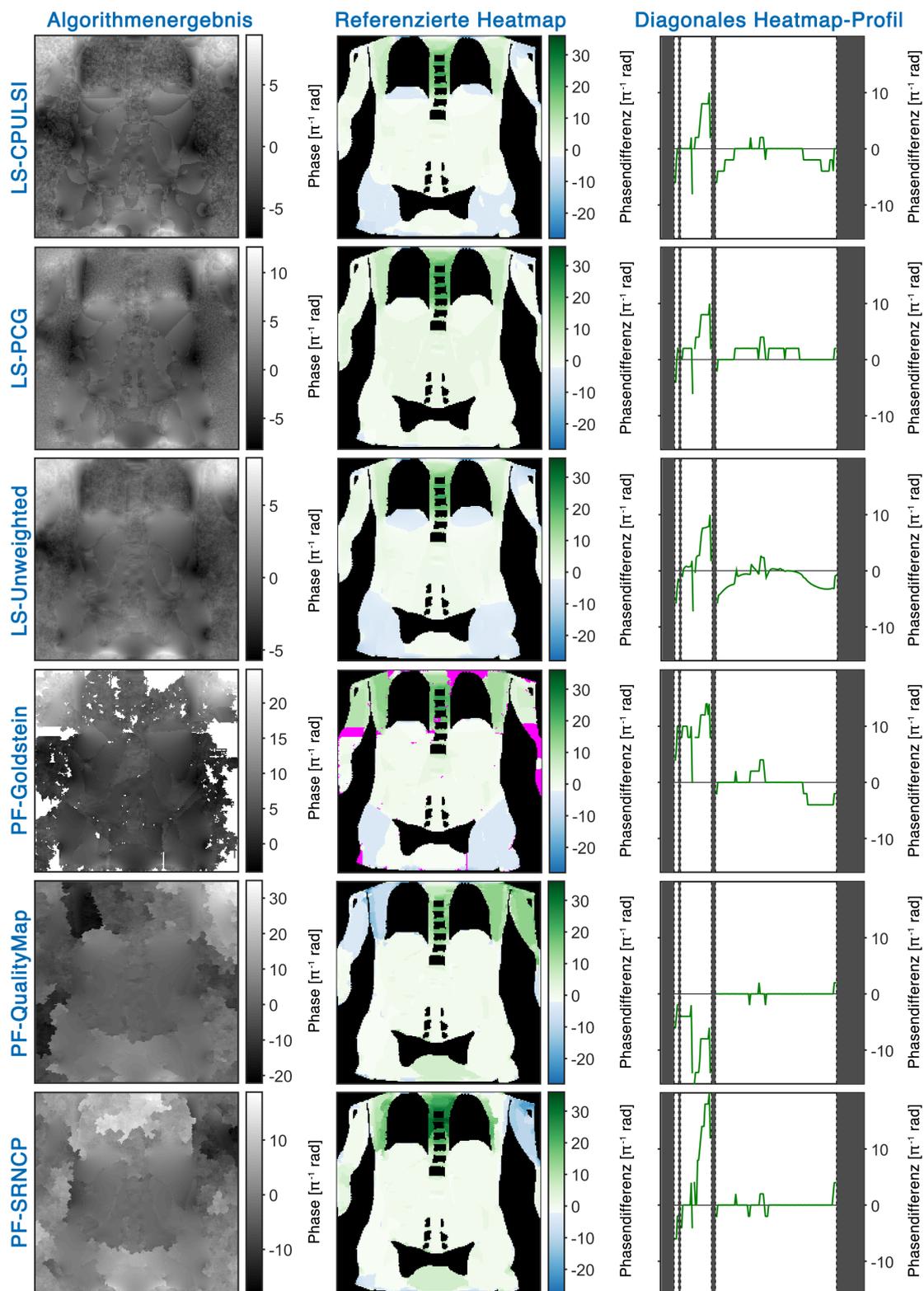


Abb. A.56: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 19.68$ ms bei SNR = 100 dB am Set 3. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

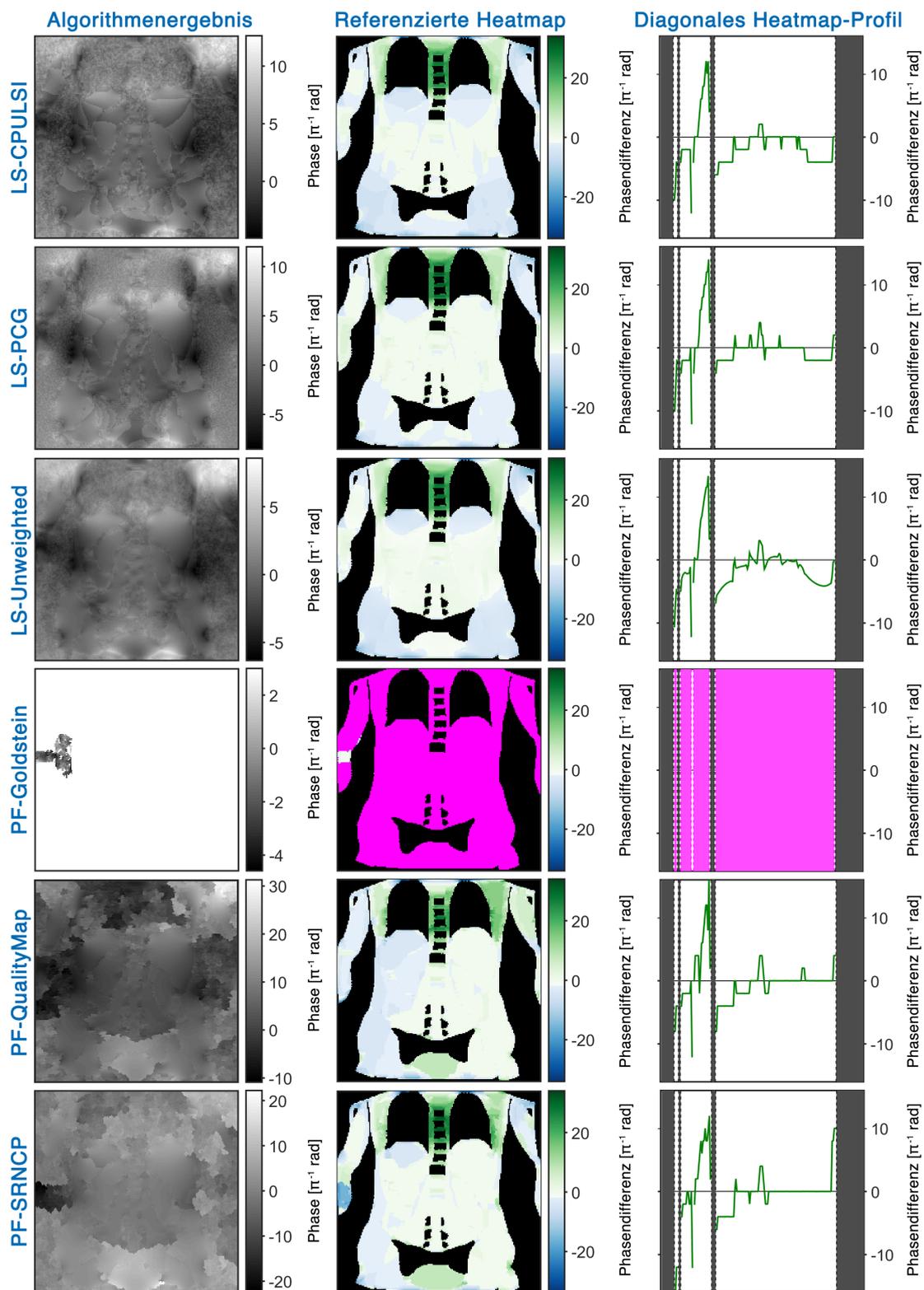


Abb. A.57: Über 100 Iterationen gemittelte Ergebnisse der Untersuchung mit $T_E = 24.60 \text{ ms}$ bei $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$ am Set 3. In der Heatmap und im Profilplot sind eventuelle fehlerhafte Pixel (NaN-Werte, nur bei PF-Goldstein) rosa eingefärbt.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, Robby Hesse, an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit zum Thema

Quantitative Evaluation spatialer 2D-Phase-Unwrapping-Algorithmen

selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Alle wörtlichen und sinngemäßen Zitate, sowie die beigefügten Skizzen und graphischen Darstellungen, die anderen Werken dem Sinn nach entnommen sind, habe ich als solche gekennzeichnet und unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht.

Ich habe bei der Erstellung dieser Arbeit die Grundsätze zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf in der entsprechenden Ordnung vom 19.02.2014 zur Kenntnis genommen und befolgt.

Düsseldorf, 26. Juli 2020

Ort, Datum

Robby Hesse

Danksagung

Abschließend möchte ich mich bei allen bedanken, die mich während meines Bachelor-Studiums und bei der Anfertigung dieser Abschlussarbeit unterstützt und motiviert haben.

Mein Dank gilt [Prof. Dr. H.-J. Wittsack](#) dafür, dass ich diese Arbeit am Institut für Diagnostische und Interventionelle Radiologie des Universitätsklinikums Düsseldorf unter seiner Expertise anfertigen konnte. Zudem danke ich [Prof. Dr. T. Heinzl](#) für die Übernahme des Zweitgutachtens der Arbeit und meinem Betreuer [E. Bechler](#), der mich von der ersten Minute an unterstützt hat und mir bei der Bewältigung von fachlichen Problemen und vor allem beim Fokussieren meiner schriftlichen Ausführungen aufs Wesentliche tatkräftig zur Seite stand.

Ich danke auch den zahlreichen inner- und außeruniversitären [Korrekturlesern](#), die mir noch bis kurz vor Abgabe der Arbeit geholfen haben, Rechtschreib- und Formatierungsfehler aufzuspüren und zu korrigieren. Zu guter Letzt möchte ich mich bei [meiner Familie und all meinen Freunden](#) bedanken, die mir während meiner Studienzeit den Rücken gestärkt, mich zur Entspannung abgelenkt, aber dann auch wieder meinen Fokus beispielsweise auf die Fertigstellung dieser Arbeit gerichtet haben. Sie standen mir in der langen Zeit stets bei, motivierten mich in schwierigen Stunden und haben mich bei Problemen jeglicher Art auf vielfältige Weise unterstützt.