

**Holomorphe Familien von
Pseudo-Laplace-Operatoren auf
Riemannschen Flächen mit einer Spitze**

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Marlis Julia Balkenhol
aus Wuppertal

Düsseldorf, Februar 2022

aus dem Mathematischen Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Gedruckt mit der Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Berichtersteller:

1. Prof. Dr. Rüdiger W. Braun
2. Prof. Dr. Michael Langenbruch

Tag der mündlichen Prüfung:
02.06.2022

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine Störungstheorie für Pseudo-Laplace-Operatoren auf Riemannschen Flächen X mit einer Spitze entwickelt, die als Quotient der hyperbolischen Ebene \mathbb{H} nach einer diskreten Untergruppe der $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ dargestellt werden können. Für jede Spitze von X gibt es eine Eisensteinreihe $E(z, s)$, welche die Gleichung $\Delta E(z, s) = s(1-s)E(z, s)$ für $z \in \mathbb{H}$ erfüllt, aber nicht L^2 -integrierbar auf X und daher keine echte Eigenfunktion des Laplace-Beltrami-Operators Δ ist. Der Pseudo-Laplace-Operator Δ^η von Colin de Verdière ist so konstruiert, dass er als echte Eigenfunktionen Eisensteinreihen $E(z, s)$ besitzt, bei denen der konstante Term E_0 der Fourierentwicklung in einer Spitzenregion abgeschnitten wird. Das Ziel unserer Störungstheorie ist es, Informationen über die Eisensteinreihe und ihre Streumatrix φ zu erhalten.

Für die Störung verfolgen wir zwei verschiedene Ansätze. Der erste verwendet das Minimum-Maximum-Prinzip, um den Operator Δ^η in dem reellen Parameter $\eta > 0$ zu stören, in dem E_0 trunziert wird. Dieser Ansatz liefert eine Formel für die erste Ableitung der Eigenwerte $\mu_n(\eta)$ von Δ^η sowie eine Formel für die logarithmische Ableitung von φ , welche durch die Maass-Selberg-Relation bereits bekannt ist. Für die zweite Ableitung erhalten wir eine Abschätzung, deren Implikationen für die Phasenfunktion ϑ und die Ordnung von φ unklar sind. Wir können aber eine Differentialgleichung für ϑ angeben, welche die zweite Ableitung $\mu_n''(\eta)$ enthält.

Der zweite Ansatz verwendet die holomorphe Störungstheorie, die von Rellich und Kato entwickelt wurde. Hierzu konstruieren wir eine neue Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ von Pseudo-Laplace-Operatoren, indem wir die Dirichlet-Bedingung bei η durch eine Bedingung $f_0'(\eta) = -\gamma f_0(\eta)$ vom Robin-Typ ersetzen. Die Operatoren Δ_γ sind genau dann selbstadjungiert, wenn γ reell ist, und m -sektoriell im allgemeinen Fall. Eines unserer Ergebnisse ist, dass Δ^η die holomorphe Fortsetzung von Δ_γ im unendlich fernen Punkt ist.

Im Hauptteil der Arbeit wird das Spektrum von Δ_γ untersucht. Es wird gezeigt, dass Δ_γ wie Δ^η ein diskretes Spektrum bestehend aus Spitzenformen und trunzierten Eisensteinreihen besitzt. Wir geben eine Klassifizierung der Eigenwerte und Eigenfunktionen in Abhängigkeit von φ an, und zeigen, dass der Eisenstein-Robin-Quotient $\gamma = -\frac{E_0'(\eta, s)}{E_0(\eta, s)}$ holomorph von s abhängt. Wir diskutieren, wann die Eigenwerte $\lambda(\gamma)$ von Δ_γ differenzierbar sind, und berechnen ihre ersten beiden Ableitungen. Für $\gamma \in \mathbb{R}$ gibt es eine vollständige Folge holomorpher Eigenwertfunktionen $(\lambda_n(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$. Wir zeigen, dass die Bildmengen $L_n = \lambda_n(\mathbb{R})$ dieser Funktionen disjunkte Intervalle sind so, dass die Vereinigung aller \bar{L}_n die reelle Achse überdeckt. Im letzten Teil der Arbeit leiten wir Folgerungen für die „kleinen“ Eigenwerte im Intervall $]0, \frac{1}{4}[$ ab, die zu Polen von φ assoziiert sind, sowie für die Eigenwerte im Intervall $] \frac{1}{4}, \infty[$. Für letztere wird eine Integralformel für den Abstand zweier aufeinanderfolgender Eigenwerte von Δ^η hergeleitet.

Summary

In this thesis, we study the perturbation of Pseudo-Laplace operators on Riemannian surfaces X with one cusp which can be represented by a quotient of the hyperbolic plane \mathbb{H} by the action of a discrete subgroup of $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. For each cusp of X , there exists an Eisenstein series $E(z, s)$ which fulfills the equation $\Delta E(z, s) = s(1-s)E(z, s)$ for each $z \in \mathbb{H}$, but is not square integrable on X and therefore no proper eigenfunction of the Laplace-Beltrami operator Δ . To get an operator which has the Eisenstein series as proper eigenfunctions, Colin de Verdière constructed the class of Pseudo-Laplace operators Δ^η by cutting off the constant term E_0 of the Fourier expansion of $E(z, s)$ in a cusp neighbourhood. The goal of our perturbation theory is to gain information about the Eisenstein series and its scattering matrix φ .

For the perturbation of the Pseudo-Laplacian, we have two different approaches. First, we give a real perturbation theory of the point $\eta > 0$ at which E_0 is truncated using the min-max principle. This approach gives a formula for the first derivative of the eigenvalue $\mu_n(\eta)$ of Δ^η and a formula for the logarithmic derivative of φ , that is already known by the Maass-Selberg relation. For the second derivative, this method gives an estimate, the implications of which regarding the phase function ϑ and the order of φ on the critical line $\frac{1}{2} + i\tau$ remain unclear. However, we find a differential equation for ϑ involving the second derivative $\mu_n''(\eta)$.

The second approach uses the holomorphic perturbation theory established by Rellich and Kato. To apply this theory, we construct a new class of Pseudo-Laplacians $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ by changing the Dirichlet boundary condition at η to a condition $f_0'(\eta) = -\gamma f_0(\eta)$ of Robin type. The operators Δ_γ are selfadjoint if and only if γ is real, but m -sectorial in the general case. One of our results is that Δ^η is the holomorphic continuation of Δ_γ at infinity.

The main part of this thesis is the study of the spectrum of Δ_γ . We will show that as Δ^η , Δ_γ has discrete spectrum consisting only of cusp forms and truncated Eisenstein series. We will give a classification of the eigenvalues and eigenfunctions depending on the behaviour of the scattering matrix φ , and show that the Eisenstein-Robin quotient $\gamma = -\frac{E_0'(\eta, s)}{E_0(\eta, s)}$ depends holomorphically on s . We will discuss in which cases the eigenvalues $\lambda(\gamma)$ of Δ_γ are differentiable, and compute their first and second derivative. When γ is real, we have a complete set of holomorphic eigenvalue functions $(\lambda_n(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$. We will show that the images $L_n = \lambda_n(\mathbb{R})$ of these functions are disjoint intervals such that the union of \bar{L}_n covers the whole real axis. In the last part of the thesis, we will draw some conclusions for the “small“ eigenvalues below $\frac{1}{4}$ which are associated with poles of φ , and the eigenvalues greater than $\frac{1}{4}$. In the latter case, we will derive an integral formula for the distance between two subsequent eigenvalues of Δ^η .

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr. Rüdiger Braun für die Betreuung bei der Entstehung dieser Arbeit bedanken. Dies gilt vor allem für den Glauben an das Gelingen der Arbeit in schwierigen Phasen, wodurch er mich stets für einen Neuanfang motivieren konnte, sowie für die aufgewendete Zeit und Kraft für Unterstützung, Korrektur und Diskussionen in arbeitsreichen Phasen.

Und für die Empfehlung, mir nicht ins Knie zu beißen.

Bei Herrn Prof. Dr. Michael Langenbruch bedanke ich mich für die Übernahme der Zweitbegutachtung.

Die Credits für das geduldige Ertragen langer Mathematikvorträge und das Bemühen um Ratschläge im Angesicht der Ratlosigkeit gehen an: Benedikt Schilson („pass op, Jung“), Jan-Gerrit *Leporidus* Haase, Michelle Millow („mathiviert“), Maxim Lipkin („help“) und Anna *Baculior* Stöcker.

Für ihre *diligentia* sei den Korrekturlesern Joseph Adams und Benedikt Schilson gedankt.

Jo.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundlagen der hyperbolischen Geometrie	11
1.1 Hyperbolische Metrik und Fuchssche Gruppen	11
1.2 Fundamentalgebiete	15
1.3 Analysis auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten	19
1.3.1 Kovariante Ableitung und Sobolevräume	20
1.3.2 Distributionen	22
1.3.3 Elliptische Regularität	23
2 Verallgemeinerte Eigenfunktionen	25
2.1 Automorphe Funktionen und Eisensteinreihen	25
2.2 Trunkierte Eisensteinreihen	32
2.3 Das Spektrum des automorphen Laplace-Operators	34
2.4 Asymptotische Verteilung der Eigenwerte	36
2.5 Der Pseudo-Laplace-Operator von Colin de Verdière	38
3 Reelle Störung des Pseudo-Laplace-Operators	45
3.1 Das Courantsche Minimum-Maximum-Prinzip	46
3.2 Ansatz für die Störung des Pseudo-Laplace-Operators	47
3.3 Lineare Approximation	50
3.4 Eine Differentialgleichung für die Phasenfunktion der Streumatrix	57
4 Grundlagen der holomorphen Störungstheorie	63
4.1 Sesquilinearformen in komplexen Hilberträumen	63
4.2 Sektorielle Formen und Operatoren	65
4.3 Holomorphe Familien von Operatoren	68
5 Robin-Pseudo-Laplace-Operatoren	73
5.1 Der euklidische Laplace-Operator als Beispiel für eine nicht holomorphe Familie	74
5.2 Folgenräume	78
5.3 Eine holomorphe Familie sektorieller Formen vom Typ (a)	83
5.4 Definitionsbereich des Robin-Pseudo-Laplace-Operators	87
5.5 Kompakte Resolvente	90
5.6 Holomorphe Fortsetzung auf die Riemannsche Zahlensphäre	93

6	Das Spektrum des Robin-Pseudo-Laplace-Operators	97
6.1	Kategorisierung der Eigenfunktionen	98
6.2	Typisierung der Eigenwerte vom Typ (II)	109
6.3	Spektralsätze	116
7	Holomorphie der Eigenwerte	121
7.1	Exzeptionelle Punkte und Verzweigungen	122
7.2	Ableitung des Eisenstein-Robin-Parameters	125
7.3	Ableitung der Eigenwerte einer holomorphen Familie vom Typ (B)	130
7.4	Monotonieverhalten	134
7.5	Eigenwerte im Intervall $]1/4, \infty[$	140
7.6	Eigenwerte im Intervall $]0, 1/4[$	145
	Literatur	147
	Notationsindex	151
	Stichwortverzeichnis	153

Einleitung

Pseudo-Laplace-Operatoren sind 1982 von Colin de Verdière als Verallgemeinerung des klassischen Laplace-Operators Δ auf einer vollständigen Riemannschen Fläche X mit Spitzen eingeführt worden ([3], [4]). Die Motivation hierzu besteht in der Existenz *verallgemeinerter Eigenfunktionen*, welche zwar der Eigenwertgleichung

$$\Delta f = \lambda f$$

genügen, aber nicht $L^2(X)$ -integrierbar sind und daher nicht zum Punktspektrum von Δ gehören. Diese Funktionen heißen *Eisensteinreihen*. Der Pseudo-Laplace-Operator Δ^η wird von Colin de Verdière als selbstadjungierter Operator konstruiert, dessen Spektrum diskret ist und nur aus echten und verallgemeinerten Eigenfunktionen von Δ besteht.

Die Abhängigkeit des Pseudo-Laplace-Operators von einem reellen, positiven Parameter η motiviert es, die Familie $(\Delta^\eta)_\eta$ mit der Störungstheorie linearer Operatoren nach Rellich ([22], [23], [24], [25], [26]) und Kato [13] zu untersuchen. Die Störungstheorie beschäftigt sich mit der Frage, inwiefern sich das Spektrum eines linearen Operators T_0 verändert, wenn er durch eine Störung der Form

$$T_\varepsilon = T_0 + \varepsilon \cdot T_1$$

für $\varepsilon \ll 1$ aus einer reellen oder komplexen Umgebung der Null verändert wird. Insbesondere wird die Frage nach einer *analytischen* oder *holomorphen* Störung gestellt.

Der „klassische“ Pseudo-Laplace-Operator Δ^η fügt sich in die Störungstheorie, die von Kato bereitgestellt wird, aufgrund der spezifischen Rolle des Parameters η nicht auf eine ersichtliche Weise ein. Wir führen daher eine neue Klasse von Pseudo-Laplace-Operatoren ein, welche eine holomorphe Störungstheorie erlaubt. Wir nennen diese Operatoren *Robin-Pseudo-Laplace-Operatoren*, da sie durch eine Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma u = 0$$

vom Robin-Typ charakterisiert werden, und schreiben $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ für die Familie. Diese Operatoren sind im Allgemeinen nicht mehr selbstadjungiert, ermöglichen es aber, jede Eisensteinreihe als Eigenfunktion eines Operators aus der Familie darzustellen. Als eines der Hauptresultate der Arbeit wird gezeigt, dass der klassische Pseudo-Laplace-Operator Δ^η die holomorphe Fortsetzung der Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ in den unendlich fernen Punkt ist,¹ sodass wir eine holomorphe Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \hat{\mathbb{C}}}$ auf der gesamten Riemannschen Zahlensphäre erhalten.

¹Dies ist so zu verstehen, dass die Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ von einem einmal fest gewählten η abhängt und in γ holomorph variiert wird.

Die Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ zeichnet sich dadurch aus, dass sie die Voraussetzungen des folgenden Resultats der Störungstheorie unbeschränkter Operatoren in Hilberträumen erfüllt.²

Theorem (Rellich; Kato [13], VII, Theorem 3.9 und Bemerkung 4.22; s. Theorem 4.3.19). *Es sei $(T_z)_{z \in U}$ eine selbstadjungierte holomorphe Familie von Operatoren vom Typ (A) oder (B) mit kompakter Resolvente. Dann gibt es eine Folge $(f_n[z])_{n \in \mathbb{N}}$ der Eigenvektoren von T_z und eine Folge $(\lambda_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ der zugehörigen Eigenwerte, sodass*

- (i) für $x \in U \cap \mathbb{R}$ die Folge $(f_n[x])_{n \in \mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von H bildet,
- (ii) für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine komplexe Umgebung U_n von $U \cap \mathbb{R}$ existiert, sodass $f_n|_{U_n}$ und $\lambda_n|_{U_n}$ holomorph in z sind.

Vom Typ (A) oder (B) zu sein, bedeutet, dass der Definitionsbereich $D(T_z)$ des Operators T_z oder der Definitionsbereich $D(\mathfrak{t}_z)$ der zugrundeliegenden Sesquilinearform \mathfrak{t}_z mit

$$\mathfrak{t}_z(u, v) = (T_z u, v), \quad u \in D(T_z), \quad v \in D(\mathfrak{t}_z),$$

nicht von dem Parameter z abhängt. Dieser Satz ist in dem Sinne „optimal“, dass er im Allgemeinen falsch wird, wenn man auf die Bedingung (A) oder (B) verzichtet.

Bevor die Konstruktion der Pseudo-Laplace-Operatoren genauer erklärt werden kann, wird zunächst ein konzeptionelles Verständnis der betrachteten Flächen benötigt.

Die Riemannsche Fläche $\Gamma \backslash \mathbb{H}$

Eine *Riemannsche Fläche* ist eine eindimensionale komplexe topologische Mannigfaltigkeit mit einer *komplexen Struktur*, d. h. einer Äquivalenzklasse von Atlanten mit holomorphen Kartenwechseln.

Die obere Halbebene \mathbb{H} zusammen mit der *hyperbolischen Metrik*

$$dg = \frac{dx \, dy}{y^2}$$

ist eine Riemannsche Fläche, bekannt als das *Poincaré-Modell* der hyperbolischen Ebene. Es handelt sich in dem Sinne um eine *hyperbolische Mannigfaltigkeit*, dass (\mathbb{H}, g) von konstanter negativer Schnittkrümmung -1 ist.

Die Riemannsche Metrik g ist invariant unter Möbiustransformationen, die als Automorphismen auf der oberen Halbebene \mathbb{H} operieren. Daher wird der durch die Gruppenoperation von $\text{Aut}(\mathbb{H})$ induzierte Quotient

$$\Gamma \backslash \mathbb{H},$$

wieder zu einer Riemannschen Fläche, wenn Γ eine diskrete Untergruppe der $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ ist. Eine solche Gruppe heißt *Fuchssch*.

²Für die Gültigkeit des Resultats muss der unendlich ferne Punkt ausgenommen werden.

Das bekannteste Beispiel hierfür ist die *Modulgruppe* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, die von der Translation

$$z \mapsto z + 1$$

und der Spiegelung an der Einheitskreisscheibe

$$z \mapsto -\frac{1}{z}$$

erzeugt wird. Wir bezeichnen eine solche Fläche $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ ab nun mit X .

Die Funktionen auf X heißen *automorph*, da für alle $\gamma \in \Gamma$ und $z \in \mathbb{H}$ gilt

$$f(\gamma z) = f(z).$$

Automorphe Funktionen sind bereits im 19. Jahrhundert beispielsweise von Felix Klein und Henri Poincaré untersucht worden. Erst in der Mitte des 20. Jahrhunderts verband Atle Selberg die Theorie der Fuchsschen Gruppen und automorphen Funktionen mit der Spektralanalyse von Laplace-Operatoren auf X im Sinne der Theorie selbstadjungierter Operatoren auf Hilberträumen.³ Auf kompakten Flächen X gilt der Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren mit kompakter Resolvente. Wesentlich interessanter ist der Fall, dass X nicht kompakt ist, aber ein Fundamentalgebiet von endlichem hyperbolischen Volumen besitzt, wie im Falle der $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\mathrm{vol}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}) = \frac{\pi}{3}$.

Ähnlich wie bei einem Gitter im \mathbb{R}^n lässt sich die Fläche $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ mit einem *Fundamentalgebiet* identifizieren, das genau einen Repräsentanten jedes Orbits $\Gamma z \in \Gamma \backslash \mathbb{H}$ enthält. Die Fundamentalgebiete induzieren eine Parkettierung der oberen Halbebene, wie in Abbildung 1 am Beispiel der $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ illustriert.

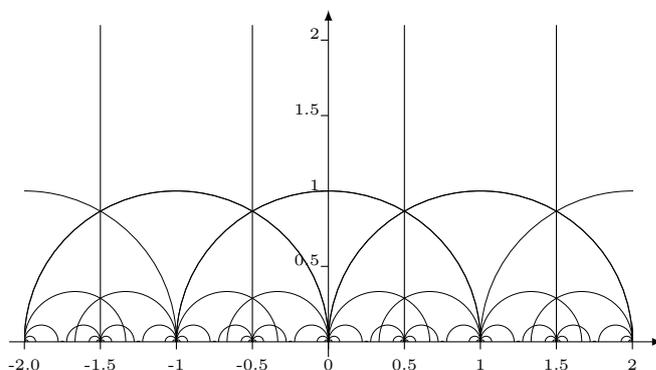


Abbildung 1: Parkettierung der oberen Halbebene für die $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$

Die Fundamentalgebiete aus Abbildung 1 sind kurvig berandete Dreiecke. Da ihre Seiten *Geodäten* der hyperbolischen Ebene \mathbb{H} sind, handelt es sich tatsächlich um *Polygone* im geometrischen Sinn. Jedes Fundamentalgebiet in Abbildung 1 hat entweder eine Ecke im unendlich fernen Punkt ∞ der Riemannschen Zahlensphäre oder in \mathbb{R} . Ein solcher Eckpunkt, der in der

³Für den historischen Überblick s. Venkov [31], Kapitel 1.

hyperbolischen Metrik unendlich weit entfernt ist, heißt *Spitze*.

Die Spitzen sind der Grund dafür, dass die Fläche X nicht kompakt ist. Insbesondere existiert nur in diesem Fall die *Eisensteinreihe* $E(z, s)$ im Sinne der verallgemeinerten Eigenfunktionen, und eine sinnvolle Definition des Pseudo-Laplace-Operators.

Pseudo-Laplace-Operatoren

Mit der Konvention von Colin de Verdière [4] können wir stets annehmen, dass eine Spitze in ∞ liegt,⁴ und Γ die Translation

$$z \mapsto z + 1$$

enthält. Dann ist jede Γ -automorphe Funktion 1-periodisch in x -Richtung und besitzt eine Fourierentwicklung

$$f(x + iy) = f_0(y) + \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} f_m(y) e^{2\pi i m x}.$$

Für die Eisensteinreihe hat diese Fourierreihe die Gestalt

$$E(x + iy, s) = y^s + \varphi(s) y^{1-s} + \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c_m(s) \sqrt{|y|} K_{s-1/2}(2\pi |m| y) e^{2\pi i m x}.$$

Hierbei ist $s \in \mathbb{C}$ ein Parameter, $\varphi(s)$, $c_m(s)$ sind komplexe Koeffizienten, und $K_\nu(x)$ bezeichnet die modifizierte Besselfunktion zweiter Art. Es ist ein klassisches Resultat von Selberg, dass die Eisensteinreihe für $\operatorname{Re} s > 1$ absolut konvergiert, und eine meromorphe Fortsetzung nach \mathbb{C} besitzt (s. Theorem 2.1.14). Sie ist aber nicht $L^2(X)$ -integrierbar, da der in x konstante Term

$$E_0(y, s) = y^s + \varphi(s) y^{1-s}$$

für $y \rightarrow \infty$ wächst wie

$$\max\{y^{\operatorname{Re} s}, y^{1-\operatorname{Re} s}\}.$$

Für jedes $s \in \mathbb{C}$ ist einer der Terme $\operatorname{Re} s$ oder $1 - \operatorname{Re} s$ größer oder gleich $\frac{1}{2}$, und somit wächst das Integral

$$\int_{X \cap \{Y < \operatorname{Im}(z) < \eta\}} |E_0(y, s)|^2 \frac{dx dy}{y^2}$$

für ein festes, hinreichend großes $Y > 0$ mindestens so schnell wie $\ln(\eta)$ für $\eta \rightarrow \infty$.

Durch „Abschneiden“ des konstanten Terms an einer fest gewählten Stelle $\eta > 0$ wird die Funktion

$$E^\eta(z, s) = \begin{cases} E(z, s), & \operatorname{Im} z \leq \eta, \\ E(z, s) - E_0(z, s), & \operatorname{Im} z > \eta, \end{cases}$$

zu einer Funktion in $L^2(X)$. E^η wird als *trunkierte Eisensteinreihe* bezeichnet. Während die ursprüngliche Eisensteinreihe die Eigenwertgleichung

$$\Delta E(z, s) = s(1-s)E(z, s)$$

⁴Dies erleichtert die Notation und stellt keine Beschränkung der Allgemeinheit dar (s. Abschnitt 1.2).

erfüllt, ist die trunkeerte Eisensteinreihe jedoch nicht mehr im klassischen und höchstens einmal im schwachen Sinn differenzierbar. Der Pseudo-Laplace-Operator von Colin de Verdière wird gerade so definiert, dass er in genau einem Punkt η eine nicht differenzierbare Stelle zulässt. Dies geschieht formal durch die Definition der nichtnegativen quadratischen Form

$$q(f) = \int_X (\text{grad } f, \text{grad } f)$$

auf dem Unterraum

$$\mathcal{H}_\eta = \{f \in H^1(X) \mid f_0(y)|_{]r, \infty[} = 0\}$$

von $L^2(X)$, und die anschließende Konstruktion des Operators Δ^η als die Friedrichserweiterung bezüglich der Form q . Die Bedingung $f \in H^1(X)$ in der Definition von \mathcal{H}_η impliziert die Stetigkeit des konstanten Terms f_0 der Fourierentwicklung in η . Daher sind die Eigenfunktionen von Δ^η alle verallgemeinerten Eigenfunktionen von Δ mit

$$f_0(\eta) = 0.$$

Die Bedingung $f_0(\eta) = 0$ können wir als eine Art von Dirichlet-Randbedingung verstehen, wenn wir den konstanten Term f_0 als Funktion auf einem offenen Intervall der Form $I_0 =]r, \eta[$ mit Rand η betrachten, während alle anderen Fourierkoeffizienten auf einem unbeschränkten Intervall der Form $]r, \infty[$ definiert sind. Hierbei ist zu beachten, dass dies nur für hinreichend große $r > 0$ sinnvoll ist, da das Fundamentalgebiet von Γ im unteren Teil von endlich vielen Stücken von Halbkreisen berandet wird.

Diese Betrachtungsweise motiviert es, die Randbedingung an f_0 auf ∂I_0 durch eine *Robin-Randbedingung*

$$f_0'(\eta) + \gamma f_0(\eta) = 0 \tag{1}$$

zu ersetzen, wobei $\gamma \in \mathbb{C}$ beliebig gesetzt werden kann. Wenn wir (1) umformulieren zu

$$\gamma = -\frac{f_0'(\eta)}{f_0(\eta)}$$

und annehmen, dass $f_0(\eta)$ und $f_0'(\eta)$ nicht gleichzeitig verschwinden, sehen wir außerdem, dass eine Nullstelle von f_0 in η bedeutet, dass $\gamma = \infty$ gilt.

Die Unterscheidung, ob der konstante Term f_0 einer Eigenfunktion eines Pseudo-Laplace-Operators identisch Null ist (*Eigenwerte vom Typ (I)*) oder nicht (*Eigenwerte vom Typ (II)*), ist grundlegend. Die Eigenwerte vom Typ (I) heißen *Spitzenformen* und werden in dieser Arbeit nicht weiter untersucht. Die Eigenwerte vom Typ (II) sind im Wesentlichen, d. h. bis auf einzelne Punkte, in denen die Eisensteinreihe einen Pol besitzt oder identisch verschwindet, trunkeerte Eisensteinreihen.

Bevor Aufbau und Inhalte der Arbeit skizziert werden, soll in einem kurzen Abschnitt motiviert werden, welche mathematischen Problemstellungen die Beschäftigung mit Eisensteinreihen interessant machen.

Eisensteinreihen

Die Eisensteinreihe $E(z, s)$ spielt in verschiedenen innermathematischen und physikalischen Situationen eine Rolle. Hierbei interessiert man sich vor allem für den Koeffizienten $\varphi(s)$ ihres konstanten Terms. Wir bezeichnen $\varphi(s)$ nach Lax und Phillips [17] als *Streumatrix*. In unserem Fall, in dem wir nur eine Spitze in ∞ betrachten, ist $\varphi(s)$ eine skalarwertige Funktion.

Wir wollen an dieser Stelle nur auf zwei Fragestellungen im Zusammenhang mit der Eisensteinreihe eingehen. Auf diese Fragen werden wir auch im Laufe der Arbeit zurückkommen, indem wir Implikationen der entwickelten Störungstheorie herausarbeiten.

Die erste Frage, für die wir uns interessieren, ist die asymptotische Verteilung der Eigenwerte des klassischen Laplace-Operators Δ_Γ der Fläche $\Gamma \backslash \mathbb{H}$. Für den nicht kompakten Fall gilt die *Weyl-Selbergsche Asymptotik*

$$N_\Gamma(T) + W_\Gamma(T) \sim T^2 \cdot \frac{\text{vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{4\pi}, \quad T \rightarrow \infty,$$

welche eine Folgerung aus der Selbergschen Spurformel ist (s. Iwaniec [11], Theorem 10.2 und §11.1). Hierbei ist $N_\Gamma(T)$ die Zählfunktion der Eigenwerte, die kleiner als T^2 sind, und $W_\Gamma(T)$ die *Windungszahl*

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{-T}^T \frac{\varphi'}{\varphi} \left(\frac{1}{2} + i\tau \right) d\tau$$

der Streumatrix φ . Die Weyl-Selberg-Asymptotik ist eine Verallgemeinerung des bekannten Weylschen Gesetzes, das für den euklidischen Laplace-Operator mit Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit hinreichend glattem Rand besagt

$$N_\Omega(R) \sim R \cdot \frac{\lambda^2(\Omega)}{4\pi}, \quad R \rightarrow \infty,$$

wobei in diesem Fall $N_\Omega(R)$ die Zählfunktion der Eigenwerte kleiner als R ist (s. z. B. [12], [7]).

Eine Abschätzung der Windungszahl $W_\Gamma(T)$ ist bisher nur für spezifische Gruppen bekannt (beispielsweise für die $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ und Kongruenzuntergruppen, für welche φ explizit berechnet werden kann), und hängt mit der Ordnung von φ zusammen, d. h. mit dem asymptotischen Wachstum von

$$\vartheta(\tau) = -i \log \left(\varphi \left(\frac{1}{2} + i\tau \right) \right), \quad \tau \rightarrow \infty \quad (\text{in } \mathbb{R}).$$

In Bezug auf die Frage, ob für eine beliebige Fläche $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ endlichen Volumens in Wahrheit das Weylsche Gesetz gilt, stehen sich eine ältere Vermutung, welche auf Selberg und Roelcke zurückgehen soll (s. [20]) und dies bejaht, und die jüngere Vermutung von Phillips und Sarnak ([20]) gegenüber, nach welcher es Gruppen gibt, die nur endlich viele Eigenwerte besitzen.⁵

Die zweite Frage ist die nach den Null- und Polstellen der meromorphen Funktion $\varphi(s)$. Dies ist einerseits eine natürliche funktionentheoretische Fragestellung, und hat andererseits in der

⁵Einen Überblick über verschiedene Vermutungen findet man beispielsweise in Elstrodt et al. [8], S. 308f., Venkov [31], S. 112f., und Iwaniec [11], § 11.1.

Anwendung auf spezielle Gruppen Implikationen für zahlentheoretische Funktionen. Im Beispiel der $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ wird die Streumatrix durch die Riemannsche Zetafunktion wie folgt beschrieben

$$\varphi(s) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \zeta(2s - 1)}{\Gamma(s) \zeta(2s)},$$

sodass eine offensichtliche Beziehung zwischen den Nullstellen von ζ und den Null- und Polstellen von φ besteht.

Aufbau der Arbeit

In Kapitel 1 werden zunächst die benötigten Grundlagen der hyperbolischen Geometrie erklärt. Ferner wird in Abschnitt 1.3 erläutert, wie wir auf der Riemannschen Fläche mit den Mitteln der euklidischen Analysis arbeiten können.

In Kapitel 2 werden die verallgemeinerten (einschließlich der eigentlichen) Eigenfunktionen von Δ beschrieben, wobei mit Δ der Laplace-Operator im Sinne der Distributionsableitung bezeichnet wird. Die selbstadjungierte Friedrichserweiterung des Laplace-Beltrami-Operators auf $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ wird zur Unterscheidung mit Δ_Γ bezeichnet. Am Ende des zweiten Kapitels wird der Spektralsatz für Δ_Γ angegeben (Abschnitt 2.3) sowie die oben erwähnten Sätze und Vermutungen bezüglich der asymptotischen Verteilung der Eigenwerte (Abschnitt 2.4). In Abschnitt 2.5 werden der Pseudo-Laplace-Operator Δ^η von Colin de Verdière und sein Spektrum beschrieben.

In Kapitel 3 stellen wir eine Methode vor, mit der wir die Eigenwerte $\mu_n(\eta)$ des Typs (II) von Δ^η nach η differenzieren können, indem wir das Minimum-Maximum-Prinzip für ein „naives“ Störungsverfahren für Δ^η verwenden. Hiermit lässt sich die Formel

$$\vartheta'(\tau) = \frac{\varphi'}{\varphi} \left(\frac{1}{2} + i\tau \right) = 2 \ln(\eta) - \|E^\eta(\cdot, \frac{1}{2} + i\tau)\|_{L^2(X)}^2$$

für die logarithmische Ableitung von φ herleiten (Korollar 3.3.12), welche durch die *Maass-Selberg-Relation* bereits bekannt ist. In Abschnitt 3.4 wird diskutiert, warum eine Anwendung des Verfahrens für die Bestimmung der zweiten Ableitung der Eigenwerte nicht gleichermaßen nutzbringend ist. Es wird jedoch ein Differentialgleichungsansatz vorgestellt, wie eine geeignete Abschätzung von $\mu_n''(\eta)$ für die Bearbeitung der Frage nach dem Wachstum von ϑ benutzt werden könnte (Theorem 3.4.1).

In Kapitel 4 werden die Grundlagen der Theorie der sektoriellen Sesquilinearformen und Operatoren in Hilberträumen (Abschnitt 4.1 und 4.2) sowie der holomorphen Störungstheorie (Abschnitt 4.3) nach Kato [13] dargelegt. Eine *sektorielle* Form ist eine Form, deren numerischer Wertebereich in einem nach rechts geöffneten Sektor der Form

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \beta, |\arg(z - \beta)| \leq \theta\}, \quad \beta \in \mathbb{R}, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2},$$

liegt. Die sektorielle Form ist somit eine Verallgemeinerung einer nach unten beschränkten Form. Analog ist ein sektorieller Operator die Verallgemeinerung eines nach unten beschränkten Operators, insbesondere in der Weise, dass das Spektrum eines sektoriellen Operators in demselben

Sektor enthalten ist. Wie bei der klassischen Friedrichserweiterung zu einer positiven Form ein selbstadjungierter positiver Operator konstruiert werden kann, lässt sich für eine sektorielle Form unter entsprechenden Bedingungen ein m -sektorieller Operator erklären (Kato [13], VI, Theorem 2.1; s. Theorem 4.2.11).

Wir nutzen diese sektorielle Operatortheorie für die Konstruktion der Robin-Pseudo-Laplace-Operatoren $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ vom Typ (B) in Kapitel 5. Als Motivation wird in Abschnitt 5.1 zunächst am Beispiel des eindimensionalen euklidischen Laplace-Operators modellhaft die Schwierigkeit demonstriert, den Pseudo-Laplace-Operator Δ^η als holomorphe Familie, und insbesondere vom Typ (B), zu definieren.

In den Abschnitten 5.2 und 5.3 werden geeignete Hilberträume sowie eine zu der Robin-Bedingung (1) passende Form t_γ definiert, für welche die Voraussetzungen von Theorem 4.2.11 nachgewiesen werden. In Abschnitt 5.4 bestimmen wir den Definitionsbereich des zugehörigen m -sektoriellen Operators Δ_γ unter Verwendung des Prinzips der elliptischen Regularität aus Abschnitt 1.3.3. In Abschnitt 5.5 wird nach dem Vorbild des entsprechenden Beweises von Lax und Phillips [17] für den klassischen Pseudo-Laplace-Operator Δ^η die Kompaktheit der Resolvente des Robin-Pseudo-Laplace-Operators Δ_γ bewiesen, um zu folgern, dass das Spektrum für alle Parameter $\gamma \in \mathbb{C}$ diskret ist. In Abschnitt 5.6 zeigen wir, dass der klassische Pseudo-Laplace-Operator Δ^η der holomorphen Fortsetzung der Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ in den unendlich fernen Punkt entspricht.

In den Kapiteln 6 und 7 werden die Eigenwerte und Eigenvektoren der Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ beschrieben und ihre Eigenschaften analysiert.

Unser Ziel in Kapitel 6 ist es zunächst zu zeigen, dass alle Eigenwerte vom Typ (II) eindeutig durch Eisensteinreihen gegeben oder (im Falle eines Pols oder einer Nullstelle der Abbildung $\mathcal{E} : s \mapsto E(z, s)$) von diesen abgeleitet werden können. Für den Beweis der Eindeutigkeit verwenden wir erneut ein Resultat von Lax und Phillips ([17], Theorem 8.4; s. Theorem 6.1.19). Für die Anwendung dieses Satzes nehmen wir eine Kategorisierung der verallgemeinerten Eigenfunktionen nach der Gestalt ihres absoluten Terms

$$f_0(y) = ay^s + by^{1-s} \tag{2}$$

in drei Klassen (a'), (b') und (c') vor je nachdem, welche der Parameter a und b aus (2) verschwinden.⁶

Nachdem die Eindeutigkeit bewiesen ist, führen wir eine von den Typen (a') bis (c') induzierte Typisierung (a) bis (d) für die Eigenfunktionen sowie die zugehörigen Eigenwerte ein. Die Parameter a und b aus (2) sind nun, nach einer entsprechenden Normierung, durch die Streumatrix φ der Eisensteinreihe bestimmt. Die Typisierung unterscheidet daher, ob

- (a) φ in s weder eine Nullstelle noch einen Pol besitzt,
- (b) φ einen Pol in s besitzt,

⁶Der Fall $a = b = 0$, in dem f eine Spitzenform ist, spielt hierbei keine Rolle.

(c) φ in s eine Nullstelle besitzt,

(d) $s = \frac{1}{2}$ ist.

Der Fall $s = \frac{1}{2}$ wird hierbei stets als Sonderfall betrachtet, da er der einzige Punkt ist, in dem die Eisensteinreihe $E(z, s)$ für alle z verschwinden kann (Satz 2.1.16).

Die Eigenwerte vom Typ (b) und (c) hängen offenkundig mit den Polen und Nullstellen von φ zusammen, über deren Bedeutung wir oben gesprochen haben. Die Eigenwerte vom Typ (a) sind von Interesse, da die zugehörigen $s = \frac{1}{2} + i\tau$ für $\tau \in \mathbb{R}$ mit der Windungszahl

$$W_{\Gamma}(T) = - \int_{-T}^T \frac{\varphi'}{\varphi} \left(\frac{1}{2} + i\tau \right) d\tau$$

in Zusammenhang stehen. Da φ meromorph ist, gehören fast alle Eigenwerte diesem Typ an. Ein wichtiges Ergebnis in diesem Abschnitt ist die Holomorphie des *Eisenstein-Robin-Quotienten*:

Theorem (s. Theorem 6.2.4). *Die Abbildung*

$$\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad s \mapsto \gamma(s) = - \frac{E_0'(\eta, s)}{E_0(\eta, s)},$$

ist holomorph und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\gamma(1-s) = \gamma(s).$$

Ferner ist γ verträglich mit der komplexen Konjugation:

$$\overline{\gamma(s)} = \gamma(\bar{s}).$$

In Abschnitt 6.3 fassen wir die Ergebnisse in einem Spektralsatz für Δ_{γ} (Theorem 6.3.1) in Analogie zum Spektralsatz für Δ^{η} von Colin de Verdière (s. Theorem 2.5.8) zusammen. In einem zweiten Spektralsatz (Theorem 6.3.3) verschärfen wir die Ergebnisse für $\gamma \in \mathbb{R}$. In diesem Fall gilt das oben zitierte Theorem für eine holomorphe Familie vom Typ (B) aus der Störungstheorie nach Rellich und Kato, sodass wir eine (unendliche) Folge holomorpher Eigenwertfunktionen

$$\lambda_1(\gamma), \lambda_2(\gamma), \dots$$

erhalten, die für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ alle Eigenwerte vom Typ (II) des Operators Δ_{γ} enthält. Diese Funktionen $\lambda_n(\gamma)$ sind die Grundlage für die weiteren Untersuchungen in Kapitel 7.

In Abschnitt 7.1 wird das Auftreten algebraischer Singularitäten bei Eigenwerten einer holomorphen Familie nach der Theorie von Kato [13] erklärt (s. Theorem 4.3.20). Dieses Thema spielt für die Familie $(\Delta_{\gamma})_{\gamma \in \hat{\mathbb{C}}}$ eine Rolle, da

- (i) die Familie in keiner Umgebung des Punktes ∞ vom Typ (B) ist,
- (ii) der Operator für echt komplexe Parameter γ nicht normal ist.

Einleitung

In Abschnitt 7.2 wird die Ableitung des Eisenstein-Robin-Quotienten $\gamma(s)$ bestimmt. Hieraus werden Kriterien für die Differenzierbarkeit der Eigenwerte $\lambda(\gamma)$ vom Typ (II) hergeleitet (Theorem 7.2.12), und die Ableitung $\lambda'(\gamma)$ bestimmt (Satz 7.2.8).

In Abschnitt 7.3 wird gezeigt, wie man im allgemeinen Fall die reellen Eigenwerte $\lambda(x)$ mit Eigenfunktionen $f[x]$ einer selbstadjungierten holomorphen Familie $(T_x)_x$ vom Typ (A) oder (B) durch Betrachtung des Quotienten

$$\lambda(x) = \frac{(T_x f[x], f[x])}{(f[x], f[x])},$$

welcher aus der linearen Algebra als *Rayleigh-Quotient* bekannt ist, bestimmen kann (Satz 7.3.1). Diese Rechnung weist Ähnlichkeiten zu dem Ansatz aus Kapitel 3 auf, da das Minimum-Maximum-Prinzip mit dem gleichen Quotienten arbeitet, ist in der Anwendung jedoch wesentlich eleganter. Wie in Kapitel 3 können wir hiermit die Ableitung $\lambda'_n(\gamma)$ bestimmen.

In Abschnitt 7.4 untersuchen wir Monotonieeigenschaften der Eigenwertfunktionen $\lambda_n(\gamma)$ sowie der Abbildungen

$$\tau_n(\gamma) = \sqrt{\lambda_n(\gamma) - \frac{1}{4}} \quad \text{für } \lambda_n(\gamma) > \frac{1}{4}$$

und

$$r_n(\gamma) = \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_n(\gamma)} \quad \text{für } \lambda_n(\gamma) < \frac{1}{4},$$

die durch die Darstellung eines Eigenwertes $\lambda \in \mathbb{R}$ in der Form $\lambda = \frac{1}{4} + \tau^2$ induziert werden. Als Hauptresultat dieses Abschnitts zeigen wir, dass \mathbb{R} sich durch den Abschluss disjunkter Eigenwertintervalle $L_n = \lambda_n(\mathbb{R})$ überdecken lässt, deren Ränder jeweils zu Eigenwerten des Pseudo-Laplace-Operators Δ^η gehören (Theorem 7.4.14).

In Abschnitt 7.5 beschäftigen wir uns mit den Eigenwerten der Form $\lambda = \frac{1}{4} + \tau^2$ für $\tau \gg 0$, die mit der Windungszahl und der Weyl-Selberg-Asymptotik zusammenhängen. Mithilfe der Resultate aus Abschnitt 7.3 und Abschnitt 7.4 kann wie in Kapitel 3 die Maass-Selberg-Relation für $\vartheta'(\tau)$ bewiesen werden. Anschließend wird hiermit die zweite Ableitung $\lambda''_n(\gamma)$ bestimmt (Satz 7.5.3). Wir zeigen ferner, dass der Robin-Pseudo-Laplace-Operator Δ_γ für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ das Weylsche Gesetz erfüllt (Satz 7.5.5) und stellen für den Abstand

$$\mu_{n+1} - \mu_n$$

zweier Eigenwerte des Typs (II) von Δ^η eine Integralformel auf (Theorem 7.5.6).

In Abschnitt 7.6 betrachten wir die Eigenwerte, die unterhalb von $\frac{1}{4}$ liegen, und untersuchen das Auftreten von Polen der Streumatrix φ im Intervall $s \in]\frac{1}{2}, 1]$. Es ist bekannt, dass höchstens endlich viele dieser Pole existieren, die alle von einfacher Ordnung sind, und dass $s_1 = 1$ stets ein Pol ist (s. Kapitel 2). Für die $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ folgt durch das vorhandene Wissen über die Nullstellen der Zetafunktion, dass $s_1 = 1$ der einzige Pol in $]\frac{1}{2}, 1]$ ist (Beispiel 2.1.18). Mithilfe des Kriteriums für das Auftreten algebraischer Singularitäten in Theorem 7.2.12 stellen wir eine geometrische Bedingung an die Existenz von Polen $s \in]\frac{1}{2}, 1[$ auf, d. h. eine Bedingung, welche nur von der Gruppe Γ abhängt (Satz 7.6.2).

Kapitel 1

Grundlagen der hyperbolischen Geometrie

In diesem Kapitel wird das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene \mathbb{H} dargestellt und die Konstruktion einer Riemannschen Fläche

$$X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$$

als Quotient von \mathbb{H} nach der Operation einer Fuchsschen Gruppe Γ beschrieben. Da für den Hauptteil dieser Arbeit keine detaillierten Kenntnisse der Geometrie vonnöten sind, beschränken wir uns hierbei auf grundlegende Begriffe.

Zentral für die Rechnungen in den folgenden Kapiteln ist das Konzept des *Fundamentalpolygons*, welches wir auf eine geschickte Weise zerlegen können. Da das Polygon, mit dem wir die Fläche $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ identifizieren wollen, als Teilmenge des \mathbb{R}^2 betrachtet, keinen glatten Rand hat, wird ferner dargelegt, inwiefern aufgrund der spezifischen hyperbolischen Metrik auf \mathbb{H} durch eine lokale Koordinatenbasis Differentiation und Integration wie auf einer euklidischen Menge „ohne Rand“ verstanden werden können.

Für die Theorie der Fuchsschen Gruppen folgen wir den Büchern von Katok [14] und Iwaniec [11]. Eine ausführliche Behandlung bietet das Buch von Beardon [2].

1.1 Hyperbolische Metrik und Fuchssche Gruppen

Es sei $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Riemannsche Zahlensphäre und

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

die obere Halbebene in $\hat{\mathbb{C}}$. Der Rand von \mathbb{H} in der Topologie auf $\hat{\mathbb{C}}$ sei $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Definition 1.1.1 (Katok [14], §1.1). Es sei $z \in \mathbb{H}$, $T_z \mathbb{H}$ der Tangentialraum im Fußpunkt z und $(\cdot, -)_{\text{eukl}}$ das euklidische Skalarprodukt in \mathbb{C} .

(i) Durch

$$g : T_z \mathbb{H} \times T_z \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(Z, W)|_z = \frac{(Z, W)_{\text{eukl}}}{(\operatorname{Im} z)^2},$$

wird eine Riemannsche Metrik auf \mathbb{H} definiert, die wir als *hyperbolische Metrik* bezeichnen.

(ii) Die zugehörige kanonische Volumenform auf (\mathbb{H}, g) ist gegeben durch

$$\mathrm{dvol}_g(x, y) = \frac{dx \, dy}{y^2}, \quad z = x + iy \in \mathbb{H}.$$

(iii) Das von der Metrik g induzierte Maß auf \mathbb{H} ist

$$\mu_{\mathbb{H}}(M) := \int_M \mathrm{dvol}_g, \quad M \subseteq \mathbb{H} \text{ messbar.}$$

(iv) Der von g induzierte *Abstand* auf \mathbb{H} ist

$$\varrho_{\mathbb{H}}(z, w) = \arccos \left(1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w} \right).$$

Bemerkung 1.1.2. (i) Die von $\varrho_{\mathbb{H}}$ induzierte Topologie auf \mathbb{H} ist die euklidische.

(ii) Die hyperbolische Ebene $(\mathbb{H}, \varrho_{\mathbb{H}})$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

(iii) Nach dem Satz von Hopf-Rinow (Köhler [15], Theorem 5.3.4) ist eine Teilmenge M von (\mathbb{H}, g) genau dann kompakt, wenn M beschränkt und abgeschlossen ist.

(iv) (Katok [14], Theorem 1.2.1) Die Geodäten von \mathbb{H} sind Stücke von Senkrechten zur reellen Achse oder Halbkreisen mit Mittelpunkt in \mathbb{R} .

Der Abschluss einer Teilmenge $M \subseteq \mathbb{H}$ in $(\mathbb{H}, \varrho_{\mathbb{H}})$ wird mit \overline{M} bezeichnet. Für das Integral auf der Fläche (\mathbb{H}, g) schreiben wir ab nun

$$\int_M \mathrm{d}\mu_{\mathbb{H}} = \int_M \frac{dx \, dy}{y^2}, \quad M \subseteq \mathbb{H} \text{ messbar.}$$

Satz 1.1.3 (Katok [14], §1.1). *Die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ der oberen Halbebene ist die Menge aller Möbiustransformationen*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0.$$

Die Gruppe $\operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ ist isomorph zur projektiven speziellen linearen Gruppe

$$\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{SL}_2(\mathbb{R}) / \{\pm \operatorname{Id}\}.$$

Die induzierte Gruppenoperation der $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ auf \mathbb{H} ist gegeben durch

$$A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad z \mapsto \gamma.z = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit} \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{PSL}_2(\mathbb{R}). \quad (1.1)$$

Theorem 1.1.4 (Katok [14], Theorem 1.1.2). *Die Metrik g ist $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ -invariant, d. h. es gilt*

$$g(Z, W)|_z = g(\gamma.Z, \gamma.W)|_{\gamma.z} \quad \text{für alle } Z, W \in T_z \mathbb{H}.$$

Dabei ist die induzierte Gruppenoperation auf dem Tangentialraum $T_{z_0} \mathbb{H}$ im Fußpunkt $z_0 \in \mathbb{H}$ gegeben durch

$$(\gamma.Z)|_{\gamma.z_0} = \left. \frac{dA}{dz} \right|_{z=z_0} \cdot Z|_{z_0}.$$

Die Gruppenoperation aus (1.1) ist transitiv und treu, aber nicht frei. Durch ihre Fixpunkte lassen sich die Elemente $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ folgendermaßen klassifizieren.

Definition und Satz 1.1.5 (Katok [14], §2.1). Eine Transformation $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ heißt

- (i) *parabolisch*, wenn γ genau einen Fixpunkt in $\hat{\mathbb{R}}$ besitzt,
- (ii) *hyperbolisch*, wenn γ genau zwei Fixpunkte in $\hat{\mathbb{R}}$ besitzt,
- (iii) *elliptisch*, wenn γ genau ein $z \in \mathbb{H}$ und den komplex konjugierten Punkt \bar{z} stabilisiert.

Jedes nichttriviale $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ gehört zu genau einer der Klassen (i), (ii) oder (iii).

Bezeichnung 1.1.6. Die Fixpunkte einer elliptischen Transformation $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ bezeichnen wir als *elliptische Punkte*. Ein Punkt $z \in \mathbb{H}$ ist genau dann elliptisch für eine Untergruppe Γ der $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, wenn der Stabilisator Γ_z von z nicht trivial ist.

Definition 1.1.7 (Katok [14], §2.2 und §3.4). Es sei Γ eine Untergruppe von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

- (i) Zwei Punkte $z, w \in \mathbb{H}$ heißen *äquivalent (bezüglich Γ)*, wenn sie im selben Orbit Γz liegen.
- (ii) Die Gruppe Γ operiert *diskontinuierlich* auf \mathbb{H} , wenn kein Orbit einen Häufungspunkt in \mathbb{H} besitzt. In diesem Fall heißt Γ eine *Fuchssche Gruppe*.
- (iii) Eine Fuchssche Gruppe Γ ist von *erster Art*, wenn jeder Punkt in $\hat{\mathbb{R}}$ Häufungspunkt eines Orbits Γz in der Topologie auf $\hat{\mathbb{C}}$ ist.
- (iv) Eine Fuchssche Gruppe ist von *zweiter Art*, wenn sie nicht von erster Art ist.

Theorem 1.1.8 (Poincaré; Iwaniec [11], Proposition 2.1). *Eine Untergruppe der $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ operiert genau dann diskontinuierlich auf \mathbb{H} , wenn sie diskret in der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist.*

Beispiel 1.1.9 (Iwaniec [11], §2.3). Das bekannteste Beispiel für eine Fuchssche Gruppe erster Art ist die *Modulgruppe*

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\} / \{\pm \mathrm{Id}\}.$$

Als weitere Beispiele betrachten wir Untergruppen der $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

- (i) Der *Stabilisator des Punktes ∞* in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ ist gegeben durch

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Die Gruppe Γ_∞ ist eine Fuchssche Gruppe zweiter Art, da ∞ der einzige Häufungspunkt jedes Orbits $\Gamma_\infty z$ ist.

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ ist die *Hauptkongruenzgruppe modulo n* der $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$

$$\Gamma(n) = \{\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv \mathrm{Id} \pmod{n}\}$$

eine Fuchssche Gruppe erster Art.

(iii) Eine Untergruppe Γ der $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\Gamma(n) \subseteq \Gamma$ heißt eine *Kongruenzuntergruppe der Stufe n* . Ein bekanntes Beispiel sind die *Heckekongruenzgruppen*

$$\Gamma_0(n) = \{\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{n}\}.$$

Theorem 1.1.10 (Beardon [2], Theorem 6.2.1). *Es sei Γ eine Fuchssche Gruppe. Dann ist $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ eine Riemannsche Fläche.*

Die komplexe Struktur auf $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ kann durch die Quotientenprojektion $\pi : \mathbb{H} \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}$ konstruiert werden. Der folgende Satz zeigt, wie hierdurch eine einfache lokale Koordinatendarstellung induziert wird. Die Konstruktion des Atlas erfolgt nach dem Beweis von Theorem 6.2.1 in [2].

Satz 1.1.11. *Für jeden Orbit $\Gamma z \in \Gamma \backslash \mathbb{H}$ und einen beliebig gewählten Repräsentanten z von Γz gibt es Umgebungen U von Γz , V von z und eine Karte $\varphi : U \rightarrow V$ mit*

$$g_{ij} = \frac{1}{(\mathrm{Im} z)^2} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2,$$

wobei die Koeffizienten der Matrix $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} \in C^\infty(V, \mathbb{R}^n)$ durch die Darstellung

$$(\varphi^{-1})^* g = \sum_{i, j=1}^2 g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

der Riemannschen Metrik g in lokalen Koordinaten bestimmt sind.

Beweis. Ist $z \in \mathbb{H}$ nicht elliptisch für Γ , dann ist die Projektion π aufgrund der diskontinuierlichen Operation von Γ ein lokaler Homöomorphismus. Folglich ist die Inverse $\pi^{-1} : \pi(V) \rightarrow V$ eine Karte. In diesem Fall ist die Behauptung klar.

Es sei nun $z \in \mathbb{H}$ ein elliptischer Punkt von Γ . Nach Iwaniec [11], Proposition 2.2, ist der Stabilisator Γ_z von z eine zyklische Gruppe $\Gamma_z = \langle \gamma_0 \rangle$ der Ordnung $n \geq 2$. Da Γ diskontinuierlich auf \mathbb{H} operiert, gibt es eine Umgebung $W = B_r(z)$ von z , sodass für jedes $\gamma \in \Gamma$ gilt

$$\gamma(W) = W, \text{ falls } \gamma(z) = z, \quad \text{oder} \quad \gamma(W) \cap W = \emptyset, \text{ falls } \gamma(z) \neq z$$

([2], Theorem 5.3.12). Wir setzen $U := \pi(W)$. Ein Punkt $w \in U$ kann als Orbit $\Gamma v = \{\gamma v \mid \gamma \in \Gamma\}$ für ein $v \in \mathbb{H}$ dargestellt werden. Also gibt es ein $v_0 \in \mathbb{H}$ mit

$$\Gamma v \cap W = \{\gamma_0 v_0, \gamma_0^2 v_0, \dots, \gamma_0^{n-1} v_0\}.$$

Für alle $v \in W \setminus \{z\}$ gilt $\gamma_0^i v \neq \gamma_0^j v$ für $i \neq j$. Es sei nun σ eine Möbiustransformation mit $\sigma(z) = 0$ und $\sigma(W) = \mathbb{D}$, wobei \mathbb{D} die offene Einheitskreisscheibe in \mathbb{C} ist. Dann ist

$$g_0 = \sigma \gamma_0 \sigma^{-1}$$

ein Erzeuger des Stabilisators von $a_0 = 0$ bezüglich $\sigma\Gamma$ mit $\text{ord}(g_0) = n$, und für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ gilt $g_0^j = \sigma\gamma_0^j\sigma^{-1}$. Die Operation von g_0 auf $a \in \mathbb{D}$ kann durch Multiplikation mit der n -ten Einheitswurzel

$$g_0(a) = a \cdot \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$$

beschrieben werden. Setzen wir $q : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, $q(a) = a^n$, so ist

$$\varphi : U \rightarrow W, \quad \varphi(w) = \sigma^{-1} \circ q \circ \sigma \circ \pi^{-1}(w),$$

eine Karte um z mit $\varphi(\Gamma z) = z$. Für einen Punkt $v \in W \setminus \{z\}$ mit $\Gamma v \cap W = \{\gamma_0^j \tilde{v} \mid j = 1, \dots, n\}$ für ein $\tilde{v} \in \mathbb{H}$ hat $\varphi(\Gamma v)$ die Gestalt

$$\begin{aligned} \varphi(\Gamma v) &= \sigma^{-1}(\sigma(\gamma_0^j(\tilde{v}))^n) = \sigma^{-1} \circ (g_0^j(\sigma\tilde{v}))^n \\ &= \sigma^{-1} \circ (\sigma\gamma_0^j\sigma^{-1}) \circ \dots \circ (\sigma\gamma_0^j\sigma^{-1}) \circ \sigma(\tilde{v}) \\ &= \gamma_0^{jn}(\tilde{v}) = \gamma_0^j v = \tilde{v}. \end{aligned}$$

Also wirkt φ durch Automorphismen auf \mathbb{H} . Die Invarianz der Riemannschen Metrik liefert, dass nach Wahl einer Basis (e_j) von $T_{\Gamma v}U$ mit $g(e_i, e_j)|_{\Gamma z} = \frac{1}{(\text{Im } \Gamma z)^2} \delta_{ij}$ in lokalen Koordinaten und eines beliebig gewählten Repräsentanten v von $\Gamma v \in U$ gilt

$$g_{ij}(v) = \frac{1}{(\text{Im } v)^2} \delta_{ij}. \quad \square$$

Katok [14] gibt in §3.6 einen Überblick darüber, welche Riemannschen Flächen eine Darstellung der Form $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ besitzen.

Notation 1.1.12. Aufgrund der $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ -Invarianz der Riemannschen Metrik g schreiben wir weiterhin nur g für die induzierte Metrik auf $\Gamma \setminus \mathbb{H}$. Selbiges gilt für alle durch g definierten Objekte auf $\Gamma \setminus \mathbb{H}$, welche die Invarianz von g erben.

1.2 Fundamentalgebiete

Ab nun sei Γ stets eine Fuchssche Gruppe. Um die Fläche $X = \Gamma \setminus \mathbb{H}$ mit einer Teilmenge von \mathbb{H} und jeden Orbit Γz mit einem Punkt $z \in \mathbb{H}$ zu identifizieren, wird der Begriff des *Fundamentalgebiets* eingeführt. Ähnlich wie bei einem Gitter in \mathbb{R}^n lässt sich die gesamte obere Halbebene durch Fundamentalgebiete parkettieren.

Ein Fundamentalgebiet $F \subset \mathbb{H}$ besitzt als euklidische Teilmenge von \mathbb{H} einen Rand ∂F , während X als Mannigfaltigkeit randlos ist. Auf den Seiten von ∂F treffen je zwei Fundamentalgebiete zusammen. Üblicherweise werden daher die Seiten von ∂F zu Paaren angeordnet, welche man sich als miteinander identifiziert beziehungsweise „verklebt“ vorstellen kann.¹ Dies impliziert eine Vorstellung von F als offene Teilmenge von \mathbb{H} „ohne Rand“, welche im Hauptteil der Arbeit stets implizit vorgenommen wird.

¹Hierbei können Seiten auch mit sich selbst gepaart sein. In diesem Fall werden entsprechende Teilstücke miteinander verklebt.

Definition 1.2.1 (Iwaniec [11], §2.2 und Katok [14], §3.1). Ein Gebiet $F \subset \mathbb{H}$ ist ein *Fundamentalgebiet* für Γ , wenn

- (i) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{F}) = \mathbb{H}$,
- (ii) $F \cap \gamma(F) = \emptyset$ für alle $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\}$.

Ist F ein Fundamentalgebiet für Γ , so ist die Familie $\{\gamma(F) \mid \gamma \in \Gamma\}$ eine *Parkettierung* von \mathbb{H} .

Katok [14] verwendet den Begriff des Fundamentalgebiets für den Abschluss \overline{F} von F in \mathbb{H} . Wir folgen in diesem Punkt der Konvention von Iwaniec [11], um keine Konfusion mit dem klassischen Begriff des Gebiets hervorzurufen.

Satz 1.2.2 (Iwaniec [11], Theorem 2.3). *Jede Fuchssche Gruppe erster Art besitzt ein Fundamentalgebiet F endlichen Volumens. In diesem Fall haben alle Fundamentalgebiete das gleiche Volumen, und es gilt*

$$\mu_{\mathbb{H}}(F) = \text{vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H}).$$

Man nennt eine Fuchssche Gruppe erster Art daher *kofinit*. Wenn \overline{F} kompakt in $(\mathbb{H}, \rho_{\mathbb{H}})$ ist, dann ist $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ eine kompakte Riemannsche Fläche. In diesem Fall heißt Γ *kokompakt*.

Bemerkung 1.2.3 (Iwaniec [11], §2.2 und Beardon [2], §9.3). Es sei F ein Fundamentalgebiet einer Fuchsschen Gruppe Γ .

- (i) Der Rand ∂F von F in \mathbb{H} ist eine Nullmenge.
- (ii) Ist Γ kofinit, dann kann F als konvexes Polygon mit endlich vielen Seiten und Ecken gewählt werden, wobei die Seiten Geodäten von \mathbb{H} sind. In diesem Fall heißt F ein *Fundamentalpolygon*.
- (iii) Es sei Γ eine kofinite Fuchssche Gruppe, F ein Fundamentalpolygon für Γ und

$$S_{\Gamma} = \{\gamma \in \Gamma \mid \overline{F} \cap \gamma(\overline{F}) \text{ ist eine Seite von } F\}.$$

Für jede Seite s existiert ein eindeutiges $\gamma_s \in S_{\Gamma}$ mit $s = \overline{F} \cap \gamma_s(\overline{F})$, und via

$$s' := \gamma_s^{-1}(s) = \overline{F} \cap \gamma_s^{-1}(\overline{F})$$

wird eine Paarung von Seiten (s, s') induziert mit $\gamma_{s'} = (\gamma_s)^{-1}$ und $(s')' = s$.

- (iv) Die Elemente von S_{Γ} erzeugen die Gruppe Γ .
- (v) Ein Punkt $z \in \overline{F}$ ist genau dann elliptisch, wenn z auf einer Seite s von F mit $s' = s$ liegt.

Beispiel 1.2.4. Ein Fundamentalpolygon der $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ ist

$$F = \left\{ z \in \mathbb{H} \mid |\text{Re } z| < \frac{1}{2}, |z| > 1 \right\}.$$

Die Seiten von F sind die Halbgeraden

$$s_1 = \left\{ \frac{1}{2} + iy \mid y \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}, \quad s_2 = \left\{ -\frac{1}{2} + iy \mid y \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

und der Kreisbogen

$$s_3 = \left\{ x + i\sqrt{1-x^2} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Die zugehörigen Paarungen sind (s_1, s_2) mit $\gamma_{s_1}z = z + 1$, und (s_3, s_3) mit $\gamma_{s_3}z = -z^{-1}$, und es gilt $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle \gamma_{s_1}, \gamma_{s_3} \rangle$.

Die elliptischen Punkte in ∂F sind i und $\pm \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Alle weiteren elliptischen Punkte in \mathbb{H} sind $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ -äquivalent zu diesen Punkten.

Bemerkung 1.2.5. Wir können die Fläche $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ mit der Fläche $\Gamma \backslash \bar{F}$ identifizieren, wobei je zwei gepaarte Seiten von ∂F miteinander „verklebt“ werden (s. Katok [14], §3.6). Wenn eine Seite s mit sich selbst gepaart ist, werden die Teilstücke von s , die an einem elliptischen Punkt z auf s zusammentreffen, miteinander identifiziert.

Wir interessieren uns nur für kofinite, aber nicht kokompakte Gruppen. Diese werden durch das Auftreten von einer oder mehreren *Spitzen* charakterisiert.

Definition 1.2.6 (Iwaniec [11], §2.2). Wenn das Fundamentalpolygon F einer kofiniten Fuchsschen Gruppe einen Eckpunkt $\mathfrak{a} \in \hat{\mathbb{R}}$ hat, dann heißt \mathfrak{a} eine *Spitze* von $\Gamma \backslash \mathbb{H}$.

Satz 1.2.7 (Iwaniec [11], Proposition 2.5). *Eine kofinite Fuchssche Gruppe ist genau dann kokompakt, wenn sie keine Spitze in $\hat{\mathbb{R}}$ besitzt.*

Beispiel 1.2.8. Das Fundamentalgebiet F der $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ aus Beispiel 1.2.4 ist ein hyperbolisches Dreieck mit einer Spitze in ∞ . Insbesondere ist die $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ nicht kokompakt, aber kofinit mit

$$\mathrm{vol}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}) = \frac{\pi}{3}.$$

Wir erläutern nun, wie eine beliebige Spitze mit einer Spitze in ∞ konjugiert werden kann.

Bemerkung 1.2.9 (Iwaniec [11], §2.2). Es sei \mathfrak{a} eine Spitze einer kofiniten Gruppe Γ und

$$\Gamma_{\mathfrak{a}} = \{ \gamma \in \Gamma \mid \gamma \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \}$$

der Stabilisator von \mathfrak{a} . Dann existiert eine *Skalierungsmatrix* $\sigma_{\mathfrak{a}} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ mit

$$\sigma_{\mathfrak{a}} \infty = \mathfrak{a} \quad \text{und} \quad \sigma_{\mathfrak{a}} \Gamma_{\mathfrak{a}} = \Gamma_{\infty}.$$

Für $\eta > 0$ setzen wir

$$\Sigma(\eta) :=]0, 1[\times]\eta, \infty[. \tag{1.2}$$

Die Menge

$$F_{\mathfrak{a}}(\eta) := \sigma_{\mathfrak{a}} \Sigma(\eta)$$

ist die zu \mathfrak{a} assoziierte *Spitzenregion*. Ist $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ eine Fläche mit Spitzen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots$ und F ein Fundamentalpolygon von $\Gamma \backslash \mathbb{H}$, ist für ein hinreichend großes η die Menge

$$F(\eta) = F \setminus \bigcup_{\mathfrak{a}_j} F_{\mathfrak{a}_j}(\eta)$$

relativ kompakt und es gilt

$$\partial F_{\mathfrak{a}_j}(\eta) \cap \partial F(\eta) = \sigma_{\mathfrak{a}_j} \mathcal{H}_\eta, \quad j = 1, 2, \dots$$

Hierbei ist

$$\mathcal{H}_\eta =]0, 1[\times \{\eta\}. \quad (1.3)$$

Der Rand \mathcal{H}_η der kompakten Mannigfaltigkeit $\overline{F(\eta)}$ ist ein Stück eines *Horozykels*. Wir benötigen diesen Begriff im weiteren Verlauf der Arbeit nicht, geben aber aus Gründen der Vollständigkeit eine Definition.

Bezeichnung 1.2.10 (Katok [14], §4.2). Ein euklidischer Kreis, der durch $a \in \mathbb{R}$ verläuft und tangential zur reellen Achse liegt, ist ein *Horozykel* für jede Geodäte, die durch a verläuft.

Ist $a = \infty$, dann sind die Geodäten durch a Geraden parallel zur imaginären Achse, und die zugehörigen Horozykel sind Geraden der Form $h_\eta = \mathbb{R} \times \{\eta\}$ parallel zur reellen Achse.

Die Zerlegung von F in eine kompakte Untermannigfaltigkeit und eine (hyperbolisch) unbeschränkte Spitzenregion wie in Bemerkung 1.2.9 ist gerechtfertigt in dem Sinne, dass Horozykel von Gruppenelementen $\gamma \in \Gamma$ wieder auf Horozykel abgebildet werden.

Die Spitzen von $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ sind die Fixpunkte der parabolischen Elemente von Γ (Iwaniec [11], §2.2). Andererseits sind die parabolischen Elemente genau diejenigen $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, für die jeder Horozykel $\omega(z)$ zum Fixpunkt z von γ invariant unter der Operation von γ ist, d. h. für die $\gamma(\omega(z)) = \omega(z)$ gilt (Katok [14], Theorem 4.2.4).

Beispiel 1.2.11. Nach Beispiel 1.2.4 wird die $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ erzeugt von

$$\gamma_1.z = z + 1 \quad \text{und} \quad \gamma_2.z = -\frac{1}{z}.$$

Die Translation γ_1 ist parabolisch mit dem Fixpunkt ∞ . Jeder Horozykel in ∞ ist von der Form $h_\eta = \mathbb{R} \times \{\eta\}$ und invariant unter der Operation von γ_1 .

Unter der Operation von γ_2 wird $x + i\eta \in h_\eta$ abgebildet auf

$$\gamma_2.(x + i\eta) = \frac{-x + i\eta}{x^2 + \eta^2}.$$

Die Menge $\left\{ \frac{-x+i\eta}{x^2+\eta^2} \mid x \in \hat{\mathbb{R}} \right\}$ ist ein euklidischer Kreis mit Mittelpunkt $\frac{i}{2\eta}$ und Radius $\frac{1}{2\eta}$, der durch die Spitze 0 verläuft.

Folgerung 1.2.12. (i) Wenn $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ eine Riemannsche Fläche mit einer einzigen Spitze \mathfrak{a} ist, dann können wir (via Konjugation mit einer Skalierungsmatrix $\sigma_{\mathfrak{a}}$ wie in Bemerkung 1.2.9) ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Spitze in ∞ liegt. Das bedeutet,

dass wir $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ mit einem euklidisch unbeschränkten Fundamentalgebiet identifizieren, das bis auf Translationen in x -Richtung (d. h. der Operation von Γ_∞) eindeutig bestimmt ist. Wir bezeichnen dieses Fundamentalgebiet mit F_∞ .

(ii) Ist X wie in (i) mit F_∞ identifiziert, dann ist der Rand zwischen dem kompakten Teil

$$X_\eta := \overline{F(\eta)}$$

von X und der Spitzenregion

$$S_\eta := F_\infty(\eta)$$

Stück eines Horozykels der Form \mathcal{H}_η wie in (1.3), und es gilt

$$X_\eta = \{z \in F_\infty \mid \operatorname{Im} z \leq \eta\}, \quad S_\eta = \{z \in F_\infty \mid \operatorname{Im} z \geq \eta\}.$$

(iii) Die Spitzenregion S_η ist bis auf Verschiebung in x -Richtung ein Halbstreifen $\Sigma(\eta)$ der Form (1.2). Identifizieren wir X mit F_∞ , dann ist die Menge der η , für die $S_\eta \subseteq F_\infty$ gilt, nach unten durch eine Schranke $p_\Gamma > 0$ beschränkt.

Beispiel 1.2.13. Für die $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{Z})$ gilt $p_\Gamma = 1$.

Konvention 1.2.14. Im Hauptteil der Arbeit werden nur kofinite Gruppen Γ betrachtet, für die $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ eine einzige Spitze besitzt. Ab nun wird ohne Einschränkung stets angenommen, dass diese Spitze in ∞ liegt. Folgerung 1.2.12 rechtfertigt, dass wir X kanonisch mit F_∞ identifizieren und annehmen, dass $S_\eta =]0, 1[\times]\eta, \infty[$ gilt.

Ist $\pi_{F_\infty}^{-1} : \Gamma \backslash \mathbb{H} \rightarrow F_\infty$, $\Gamma z \mapsto z \in F_\infty$, impliziert die Identifizierung von X mit F_∞ durch Wahl der lokalen Koordinatenbasis aus Satz 1.1.11 für das Integral über $M \subseteq X$

$$\int_M f \, d\mu_{\mathbb{H}} = \int_{M_\infty} f(x, y) \frac{dx \, dy}{y^2}$$

mit $M_\infty = \pi_{F_\infty}^{-1}(M)$. Da die Fläche X keinen Rand hat, können wir $M_\infty \subset \mathbb{H}$ als Menge betrachten, deren Rand nur aus dem von $\partial M \subseteq X$ induzierten Rand $\pi^{-1}(\partial M)$ in \mathbb{H} besteht, indem wir alle euklidischen Randstücke von M_∞ , die auf einer Seite des Fundamentalpolygons F_∞ liegen, durch die „Verklebung“ von gepaarten Seiten vernachlässigen.

1.3 Analysis auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Durch Identifikation von $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ mit einem Fundamentalpolygon F können wir auf der Fläche X wie auf einer Teilmenge des euklidischen Raums, ausgestattet mit dem hyperbolischen Maß $\mu_{\mathbb{H}}$, operieren. Allerdings besitzt F als Teilmenge von \mathbb{H} einen nicht glatten Rand, während die Riemannsche Fläche X randlos ist. Daher legen wir im folgenden Abschnitt dar, wie sich für unsere Zwecke relevante Begriffe der Standardanalysis auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten übertragen lassen.

Für die grundlegenden Begriffe der Differentialgeometrie folgen wir der Notation von Köhler [15]. Die meisten Sätze der Standardanalysis, die wir hier und in den folgenden Kapiteln für (kompakte) Mannigfaltigkeiten benötigen, stammen aus dem Buch von Taylor [30].

1.3.1 Kovariante Ableitung und Sobolevräume

In diesem Abschnitt sei M stets eine glatte Mannigfaltigkeit.

Bezeichnung 1.3.1 (Köhler [15], Definition 2.1.3). Die Menge der *Schnitte* eines Vektorbündels $\pi : E \rightarrow M$ sei

$$\Gamma(M, E) = \{s : M \rightarrow E \in C^\infty(M) \mid \pi \circ s = \text{id}_M\}.$$

Definition 1.3.2 (Köhler [15], Definition 3.2.1). Es sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel. Ein (*kovarianter*) *Zusammenhang* ∇ auf E ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\nabla : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, T^*M \otimes E)$, welche die Leibniz-Regel

$$\nabla(f \cdot s) = df \otimes s + f \cdot \nabla s, \quad f \in C^\infty(M), s \in \Gamma(M, E),$$

erfüllt. Hierbei bezeichnet $d : \mathfrak{A}^q \rightarrow \mathfrak{A}^{q+1}$ die äußere Ableitung auf den glatten q -Formen.

Bemerkung 1.3.3. Man kann einen Zusammenhang ∇ auch als Abbildung

$$\nabla : \Gamma(M, TM) \times \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E), \quad (Z, s) \mapsto \nabla_Z s,$$

betrachten, die im ersten Argument $C^\infty(M)$ -linear ist und im zweiten die Leibniz-Regel erfüllt.

Satz 1.3.4 (Köhler [15], Satz 3.3.1). *Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Zusammenhang ∇^{LC} auf TM , der*

- (i) *metrisch ist: $\nabla^{LC} g = 0$,*
- (ii) *torsionsfrei ist: $\nabla_Z^{LC} W - \nabla_W^{LC} Z = [Z, W]$ für alle $Z, W \in \Gamma(M, TM)$, wobei $[Z, W]$ die Lieklammer bezeichnet.*

Der Zusammenhang ∇^{LC} heißt Levi-Civita-Zusammenhang.

Definition 1.3.5. Der *Gradient* $\text{grad } f$ einer Funktion $f \in C^\infty(M)$ ist bestimmt durch

$$g(\text{grad } f, Z) = df(Z) \quad \text{für alle } Z \in TM.$$

Beispiel 1.3.6. Der hyperbolische Gradient auf (\mathbb{H}, g) ist in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$\text{grad } f = y^2 \nabla f,$$

wobei ∇ den euklidischen Gradienten bezeichnet. Da der Gradient von der Riemannschen Metrik g induziert wird, erbt der Gradient die $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ -Invarianz von g .

Definition 1.3.7 (Hebey [9], S. 21). Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit kanonischer Volumenform dvol . Für $f \in C^\infty(M)$ sei die Norm $\|f\|_{H^k(M)}$ definiert durch

$$\|f\|_{H^k(M)}^2 := \sum_{j=0}^k \int_M g \left((\nabla^{LC})^j f, (\nabla^{LC})^j f \right) \text{dvol}.$$

Der Sobolevraum $H^k(M)$ ist die Vervollständigung von

$$C_k^2(M) = \left\{ f \in C^\infty(M) \mid \|f\|_{H^k(M)} < \infty \right\}$$

bezüglich $\|\cdot\|_{H^k(M)}$.

Beispiel 1.3.8. Auf $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ ist die Norm in $H^1(X, \mu_{\mathbb{H}})$ gegeben durch

$$\|f\|_{H^1(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2 = \|f\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2 + \int_X g(\text{grad } f, \text{grad } f) \, d\mu_{\mathbb{H}}.$$

Hierbei gilt für jedes beliebige Fundamentalpolygon F von X

$$\int_X g(\text{grad } f, \text{grad } f) \, d\mu_{\mathbb{H}} = \int_F \nabla f \cdot \nabla \bar{f} \, d\lambda^2.$$

Die Norm auf $H^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$ ist äquivalent zu

$$\|f\|_{H^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2 = \|f\|_{H^1(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2 + \int_X y^4 (|\partial_{xx} f|^2 + |\partial_{xy} f|^2 + |\partial_{yy} f|^2) \, d\mu_{\mathbb{H}}.$$

Satz 1.3.9 (Hebey [9], Proposition 2.2). *Wenn M kompakt ist, hängt $H^k(M)$ nicht von der Riemannschen Metrik ab.*

Beispiel 1.3.10. Die Fläche $X = \Gamma \backslash$ besitze eine Spitze in ∞ und sei mit dem unbeschränkten Fundamentalgebiet F_∞ identifiziert wie in Konvention 1.2.14.

- (i) Es sei $M \subset X$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit von X mit der von g induzierten Riemannschen Metrik. Es sei $M_\infty = \pi_{F_\infty}^{-1}(M)$ wie in Konvention 1.2.14. Dann gibt es $Y_1, Y_2 > 0$ mit

$$Y_1^{2k} \leq y^{2k} \leq Y_2^{2k} \quad \text{für alle } y \in \{\text{Im } z \mid z \in M_\infty\}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (1.4)$$

Insbesondere gibt es $C_1, C_2 > 0$, sodass

$$C_1 \|f\|_{H^k(M_\infty, \lambda^2)} \leq \|f\|_{H^k(M, \mu_{\mathbb{H}})} \leq C_2 \|f\|_{H^k(M_\infty, \lambda^2)}.$$

Die Konstanten C_1 und C_2 sind durch (1.4) bestimmt. Der Parameter Y_1 kann unabhängig von M gewählt werden, Y_2 hingegen nicht. Ist beispielsweise $M = X_\eta$, dann ist η die kleinstmögliche Wahl für Y_2 und daher gilt $C_2(X_\eta) \rightarrow \infty$ für $\eta \rightarrow \infty$.

- (ii) Es gebe ein $x_0 \in \mathbb{R}$ und ein Intervall $I =]a, b[\subseteq \mathbb{R}_{>0}$, sodass $M = \{x_0\} \times I$. Dann trägt I die von g induzierte Metrik

$$d\tilde{g} = \frac{dy}{y^2}.$$

Definition 1.3.11 (Taylor [30], §2.4). Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und $\mathcal{D}(M)$ der Raum der C^∞ -Funktionen mit kompaktem Träger auf M . Der *Laplace-Beltrami-Operator* auf $\mathcal{D}(M)$ ist definiert durch

$$\Delta = -\text{Tr} \left(\nabla^{LC} \right)^2.$$

Beispiel 1.3.12. Der Laplace-Operator auf $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ hat in lokalen Koordinaten die Gestalt

$$\Delta = y^2 \Delta_{\text{eukl}},$$

wobei $\Delta_{\text{eukl}} = -(\partial_{xx} + \partial_{yy})$ den euklidischen Laplace-Operator in \mathbb{R}^2 bezeichnet.

1.3.2 Distributionen

Definition 1.3.13 (Hörmander [10], Definition 6.3.3). Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $(\varphi_j : U_j \rightarrow V_j)_{j \in J}$ eine glatte Struktur auf M . Wenn es für jede Karte $\varphi : U \rightarrow V$ eine Distribution $u_\varphi \in \mathcal{D}'(V)$ gibt, sodass für alle $i, j \in J$ gilt

$$u_{\varphi_j} = (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})^* u_{\varphi_i} \quad \text{auf } \varphi_j(U_j \cap U_i),$$

dann heißt $u = (u_{\varphi_j})_{j \in J}$ eine *Distribution* auf M . Die Menge aller Distributionen auf M wird mit $\mathcal{D}'(M)$ bezeichnet.

In Hörmander ([10], S. 34) wird ein alternativer Distributionsbegriff mithilfe von Dichten gegeben, der unabhängig von der Wahl der lokalen Koordinatenbasis ist. Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit lassen sich beide Distributionsbegriffe kanonisch miteinander identifizieren.

Da wir $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ auf einfache Weise mit dem Fundamentalgebiet F_∞ identifizieren können wie in Abschnitt 1.1 beschrieben, ist für unsere Zwecke die Definition durch lokale Koordinaten geeignet. Ferner lassen sich nun die Begriffe der Distributionsableitung und der Distributionslösung in natürlicher Weise von \mathbb{R}^n auf eine Riemannsche Mannigfaltigkeit übertragen.

Bezeichnung 1.3.14 (Aubin [1], §3.53). Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension N .

- (i) Ein linearer Differentialoperator A der Ordnung n auf M in lokalen Koordinaten ist ein Ausdruck der Form

$$Au(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha(x) D^\alpha u(x). \quad (1.5)$$

- (ii) Der zu A *formal adjungierte* Operator A^\dagger ist definiert durch

$$(Au, v)_{L^2(M)} = (u, A^\dagger v)_{L^2(M)}, \quad u, v \in \mathcal{D}(M).$$

- (iii) Wir sagen, $u \in \mathcal{D}'(M)$ löst $Au = f$ im *Distributionssinn*, wenn

$$(u, A^\dagger \phi)_{L^2(M)} = (f, \phi)_{L^2(M)} \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{D}(M).$$

Definition 1.3.15. Es sei $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$. Für $f \in L^1_{\text{loc}}(X)$ setzen wir

$$\text{grad}_d f := y^2(\partial_x f, \partial_y f),$$

wobei ∂_x und ∂_y als euklidische Distributionsableitung nach x beziehungsweise y und die rechte Seite in lokalen Koordinaten zu verstehen ist. Analog setzen wir

$$\Delta_d f := -y^2(\partial_{xx} f + \partial_{yy} f).$$

Dann werden durch grad_d und Δ_d Distributionen auf X definiert. Wir bezeichnen grad_d und Δ_d als den *hyperbolischen Gradienten* beziehungsweise *Laplace-Operator im Distributionssinne*.

Bemerkung 1.3.16. Nach der Greenschen Formel (Taylor [30], §4.4) ist der Laplace-Operator Δ_d auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M ohne Rand formal selbstadjungiert, d. h. dass für alle $u \in \mathcal{D}'(M)$ und $\phi \in \mathcal{D}(M)$ gilt

$$(\Delta_d u, \phi) = (u, \Delta_d^t \phi) = (u, \Delta \phi) = (\text{grad } u, \text{grad } \phi).$$

Der Nachweis der formalen Selbstadjungiertheit erfolgt mittels der Darstellung

$$\Delta_d f = - \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}}} \cdot \partial_{x_j} \left(\sqrt{\det(g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}} \cdot g^{ij} \cdot \partial_{x_i} f \right)$$

in lokalen Koordinaten (Taylor [30], §2.4), wobei für $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ die Koeffizienten

$$g_{ij} = \frac{1}{y^2} \delta_{ij} \quad \text{und} \quad g^{ij} = y^2 \delta_{ij}$$

durch die Riemannsche Metrik g bestimmt sind wie in Satz 1.1.11.

Notation 1.3.17. Es sei $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$.

- (i) Da für hinreichend glatte Funktionen f auf X der Gradient und Laplace-Operator im klassischen Sinne mit dem jeweiligen distributionellen Operator übereinstimmt, schreiben wir nur Δ für Δ_d beziehungsweise grad für grad_d . Nach Definition 1.3.15 gilt

$$\text{grad } f(x, y) = y^2 \nabla f(x, y).$$

- (ii) Wir schreiben Δ_{eukl} für den euklidischen Laplace-Operator (im Distributionssinne), falls die Unterscheidung zwischen Δ und Δ_{eukl} relevant ist. Nach Definition 1.3.15 gilt

$$\Delta f(x, y) = y^2 \Delta_{\text{eukl}} f(x, y).$$

- (iii) In Analogie zum Distributionskalkül auf dem \mathbb{R}^n schreiben wir

$$\langle \Delta u, \phi \rangle := (u, \Delta \phi),$$

wenn wir betonen wollen, dass Δ im distributionellen Sinn zu verstehen ist.

1.3.3 Elliptische Regularität

Das Konzept der elliptischen Differentialoperatoren liefert für den euklidischen Laplace-Operator Δ_{eukl} auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, dass alle Eigenfunktionen $u \in L^2(\Omega, \lambda^n)$ von Δ_{eukl} von der Klasse C^∞ sind. Entsprechende Regularitätssätze gelten auch für Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Wir werden diese in Kapitel 5 verwenden, um den Definitionsbereich des Robin-Pseudo-Laplace-Operators Δ_γ anzugeben.

Bezeichnung 1.3.18 (Taylor [30], §2.9 und §5.11). Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension N . Es sei A ein Differentialoperator auf M mit lokaler Koordinatendarstellung

$$A(x)u = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha(x) D^\alpha u.$$

(i) Das *Hauptsymbol* von A ist der Operator

$$A_n(x; \xi) := \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

(ii) Wenn $A_n(x, \xi)$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ und $x \in M$ invertierbar ist, heißt A elliptisch.

Satz 1.3.19. *Es sei $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ eine Riemannsche Fläche mit einer Spitze. Dann ist der hyperbolische Laplace-Operator*

$$\Delta = -y^2(\partial_{xx} + \partial_{yy})$$

auf $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ elliptisch.

Beweis. Der Operator Δ hat das Hauptsymbol

$$A_2((x, y); \xi) = -y^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) = -y^2 \|\xi\|_{\mathbb{R}^2}^2.$$

Die Fläche $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ sei mit dem unbeschränkten Fundamentalpolygon F_∞ identifiziert wie in Konvention 1.2.14. Es sei

$$\theta = \inf\{\operatorname{Im} z \mid z \in F_\infty\} > 0.$$

Dann gilt für alle $(x, y) \in F_\infty$

$$|A_2((x, y); \xi)| \geq \theta^2 \cdot \|\xi\|_{\mathbb{R}^2}^2. \quad \square$$

Theorem 1.3.20 (Innere Regularität für glatt berandete Mannigfaltigkeiten, Taylor [30], Kapitel 5, Theorem 11.1). *Es sei $A(x)$ ein elliptischer Operator auf einer glatten Mannigfaltigkeit M der Dimension N . Der Rand von M sei entweder leer oder glatt. Ferner habe A glatte Koeffizienten $a_\alpha \in C^\infty(\overline{M})$, und das Hauptsymbol $A_n(x, \xi)$ sei für alle $x \in \overline{M}$ und $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ invertierbar. Wenn $u \in \mathcal{D}'(M)$ ist und*

$$A(x)u = f$$

in $H^\sigma(M)$ liegt, dann gilt $u \in H_{\text{loc}}^{\sigma+n}(M)$. Sind U und V kompakte Mengen mit $U \Subset V \Subset M$ und ist $\rho < \sigma + n$, so gibt es ein $C > 0$ mit

$$\|u\|_{H^{\sigma+n}(U)} \leq C \cdot \|f\|_{H^\sigma(V)} + C \cdot \|u\|_{H^\rho(V)}.$$

Wie im klassischen Fall liefert der Regularitätssatz durch sukzessive Anwendung auf kompakte Teilmengen von $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ für den hyperbolischen Laplace-Operator das folgende Korollar.

Korollar 1.3.21. *Jede Eigenfunktion $f \in L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$ von Δ ist von der Klasse C^∞ .*

Kapitel 2

Verallgemeinerte Eigenfunktionen

Der hyperbolische Laplace-Operator Δ auf $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ kann im funktionalanalytischen Sinn als unbeschränkter Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(X)$ betrachtet werden. Dann besitzt Δ eine eindeutige, selbstadjungierte Friedrichserweiterung Δ_Γ . Wenn die Gruppe Γ kofinit, aber nicht kokompakt ist, dann existieren Lösungen der Eigenwertgleichung

$$\Delta f = \lambda f, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

die keine Eigenfunktionen von Δ_Γ sind, da sie nicht in $L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$ liegen. Wir sprechen in diesem Fall von *verallgemeinerten Eigenfunktionen*. Um Operatoren untersuchen zu können, für welche die verallgemeinerten Eigenfunktionen von Δ_Γ echte Eigenfunktionen sind, wird von Colin de Verdière ([3], [4]) die Klasse der *Pseudo-Laplace-Operatoren* eingeführt (s. Abschnitt 2.5).

Eine spezielle verallgemeinerte Eigenfunktion ist die *Eisensteinreihe* $E(z, s)$, die (2.1) mit $\lambda = s(1-s)$ erfüllt. Da sich zeigen wird, dass jede Eigenfunktion eines Pseudo-Laplace-Operators entweder durch eine echte Eigenfunktion von Δ_Γ oder durch eine Eisensteinreihe beschrieben werden kann (s. Theorem 2.5.8, Theorem 6.3.1), genügt es, sich auf die Darstellung der Theorie der Eisensteinreihen zu beschränken. Dies ist Gegenstand der Abschnitte 2.1 und 2.2. Für die Theorie der Eisensteinreihen folgen wir den Büchern von Kubota [16] und Iwaniec [11].

Der zweite Teil dieses Kapitels beschäftigt sich mit dem Spektrum des Laplace-Operators Δ_Γ und des Pseudo-Laplace-Operators Δ^η von Colin de Verdière, den wir zur Abgrenzung gegenüber der Robin-Pseudo-Laplace-Operatoren aus Kapitel 5 als den *klassischen Pseudo-Laplace-Operator* bezeichnen werden. Neben der Beschreibung des Spektrums dieser Operatoren wird insbesondere auf die asymptotische Verteilung der Eigenwerte eingegangen.

2.1 Automorphe Funktionen und Eisensteinreihen

Eine Funktion $f : \Gamma \backslash \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ auf der Mannigfaltigkeit $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ können wir als Funktion auf \mathbb{H} verstehen, die mit der Gruppenoperation von Γ kompatibel ist:

Definition 2.1.1. Es sei Γ eine Fuchssche Gruppe. Eine Funktion $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Γ -*automorph*, wenn für alle $\gamma \in \Gamma$ und $z \in \mathbb{H}$ gilt

$$f(\gamma.z) = f(z).$$

Die Menge der Γ -automorphen Funktionen wird mit $\mathcal{A}(\Gamma \backslash \mathbb{H})$ bezeichnet.

Aufgrund der Invarianz der hyperbolischen Metrik ist der Laplace-Operator Δ ebenfalls $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ -invariant, d. h. es gilt

$$\Delta(f(\gamma.z)) = (\Delta f)(\gamma.z) \quad \text{für alle } \gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

Man nennt Δ daher auch den *automorphen Laplace-Operator*.

Durch Summation über die Gruppenelemente von Γ lassen sich wie folgt Γ -automorphe Funktion konstruieren.

Bezeichnung 2.1.2. Es sei Γ eine Fuchssche Gruppe mit $\Gamma_\infty \subseteq \Gamma$. Für $f \in \mathcal{A}(\Gamma_\infty \backslash \mathbb{H})$ definieren wir die formale *Poincaré-Reihe* durch

$$P_{\Gamma_\infty \backslash \Gamma}[f](z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} f(\gamma.z). \quad (2.2)$$

Wenn die Reihe konvergiert, wird die Poincaré-Reihe zu einer wohldefinierten Γ -automorphen Funktion.

Definition 2.1.3 (Kubota [16], §5.1). Der Raum Θ der *unvollständigen Thetareihen* oder *unvollständigen Eisensteinreihen* ist die Menge aller Poincaré-Reihen der Form

$$P_{\Gamma_\infty \backslash \Gamma}[\chi(\mathrm{Im}(\cdot))](z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \chi(\mathrm{Im}(\gamma.z)), \quad \chi \in \mathcal{D}(]0, \infty[).$$

Definition 2.1.4. Als *Eisensteinreihe* bezeichnen wir die Poincaré-Reihe $P_{\Gamma_\infty \backslash \Gamma}[f]$ zu

$$f(x + iy) = y^s, \quad s \in \mathbb{C},$$

und schreiben

$$E(z, s) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} (\mathrm{Im}(\gamma.z))^s.$$

Bemerkung 2.1.5 (Kubota [16], §2.1). Für die Funktion $f(y) = y^s$ gilt

$$f''(y) = s(s-1)y^{s-2}.$$

Also erfüllt f punktweise die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\Delta f(y) = -y^2 f''(y) = \lambda f(y) \quad \text{mit} \quad \lambda = s(1-s). \quad (2.3)$$

Aus der Γ -Invarianz von Δ folgt, dass die Eisensteinreihe $E(z, s)$ ebenfalls punktweise die Eigenwertgleichung

$$\Delta E(z, s) = s(1-s)E(z, s), \quad z \in \mathbb{H},$$

erfüllt, wann immer sie konvergiert.

Satz 2.1.6 (Kubota [16], Theorem 2.1.1 bis 2.1.3). *Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re} s > 1$ konvergiert die Eisensteinreihe $E(z, s)$ absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\Gamma \backslash \mathbb{H}$, und es gilt*

$$E(z, s) - y^s = \mathcal{O}(y^{1-s}), \quad y \rightarrow \infty.$$

Für die Betrachtung der automorphen Funktionen und alle folgenden Rechnungen in dieser Arbeit ist die Existenz der Fourierentwicklung grundlegend.

Satz 2.1.7 (Fourierentwicklung automorpher Funktionen; Kubota [16], §2.2). *Es sei Γ eine kofinite Gruppe und f eine Γ -automorphe Funktion. Ohne Einschränkung gelte $\Gamma_\infty \subseteq \Gamma$, sodass die Fläche $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ eine Spitze in ∞ besitzt. Dann ist f invariant unter der Translation $\gamma.z = z + 1$, und erlaubt eine formale Fourierentwicklung*

$$f(x + iy) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \text{fc}_m[f](y) e_m(x) \quad (2.4)$$

mit

$$e_m(x) := e^{2\pi i m x}$$

und

$$\text{fc}_m[f](y) = \int_0^1 f(x + iy) e_{-m}(x) \, dx,$$

welche unter geeigneten Voraussetzungen an die Funktion f konvergiert.

Satz 2.1.8. *Es sei Γ eine kofinite Fuchssche Gruppe so, dass $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ eine Spitze in ∞ besitzt.*

(i) *Für $f \in C^\infty(X)$ konvergiert die Fourierreihe (2.4) absolut und gleichmäßig auf Kompakta (Iwaniec [11], §3.1).*

(ii) *Für $f \in L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$ konvergiert die Fourierreihe (2.4) in der Norm auf $L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$.*

Notation 2.1.9. Wir schreiben

$$f_m := \text{fc}_m[f].$$

Bemerkung 2.1.10. Der automorphe Laplace-Operator

$$\Delta = -y^2 (\partial_{xx} + \partial_{yy})$$

wirkt auf die Fourierreihe

$$f(x + iy) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m(y) e_m(x)$$

einer Funktion $f \in C^\infty(X)$ durch

$$\Delta f = -y^2 \cdot \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(f_m''(y) - 4\pi^2 m^2 f_m(y) \right) e_m(x).$$

Demnach ist $f \in C^\infty(X)$ genau dann eine Lösung von $\Delta f = \lambda f$, wenn für jedes $m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$-y^2 (f_m''(y) - 4\pi^2 m^2 f_m(y)) = \lambda f_m(y). \quad (2.5)$$

Wir schreiben wie in Bemerkung 2.1.5 den Eigenwert λ in der Form

$$\lambda = s(1 - s), \quad s \in \mathbb{C}.$$

Dann ist für $m = 0$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (2.5) gegeben durch

$$\phi_{0,1}(y) = y^s, \quad \phi_{0,2}(y) = y^{1-s}, \quad \text{falls } s \neq \frac{1}{2},$$

und

$$\phi_{0,1}(y) = \sqrt{y}, \quad \phi_{0,2}(y) = \sqrt{y} \ln(y), \quad \text{falls } s = \frac{1}{2}.$$

Für $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ lässt sich (2.5) mit einer geeigneten Transformation in eine modifizierte Besselsche Differentialgleichung umformen. Man erhält die Lösungen

$$\phi_{m,1}(y) = \sqrt{y} K_{s-1/2}(2\pi|m|y), \quad \phi_{m,2}(y) = \sqrt{y} I_{s-1/2}(2\pi|m|y), \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

wobei $I_\nu(x)$ und $K_\nu(x)$ die modifizierten Besselfunktionen erster und zweiter Art sind. Für jedes feste $\nu \in \mathbb{C}$ gelten nach Olver [19], Kapitel 7, §8.1, die asymptotischen Entwicklungen

$$I_\nu(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{in } \mathbb{R}),$$

und

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{in } \mathbb{R}).$$

Insbesondere muss für jede Funktion $f \in L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$ mit $\Delta f = s(1-s)f$ gelten

$$f_m(y) = c_m K_{s-1/2}(2\pi|m|y), \quad c_m \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (2.6)$$

Für die Eisensteinreihe $E(\cdot, s)$ mit $\operatorname{Re} s > 1$ impliziert die Wachstumsbedingung aus Satz 2.1.6 ebenfalls, dass (2.6) gilt. Wir geben im folgenden Beispiel die Fourierentwicklung der Eisensteinreihe auf ihrem Konvergenzbereich an. Wir interessieren uns vor allem für ihren nullten Fourierkoeffizienten E_0 , den wir als den *absoluten Term* bezeichnen.

Beispiel 2.1.11 (Kubota [16], S. 15f.). Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 1$ sind die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe $E(z, s)$ gegeben durch

$$E_m(y, s) = \begin{cases} c_m(s) \sqrt{y} K_{s-1/2}(2\pi|m|y), & m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ y^s + \varphi(s) y^{1-s}, & m = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Die Koeffizienten $c_m(s) \in \mathbb{C}$ und $\varphi(s) \in \mathbb{C}$ sind gegeben durch

$$c_m(s) = 2\pi^s |m|^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)^{-1} \varphi_m(s)$$

und

$$\varphi(s) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)} \varphi_0(s), \quad (2.8)$$

wobei Γ die Gammafunktion ist und φ_m für alle $m \in \mathbb{Z}$ durch eine Dirichletreihe beschrieben wird. Für die genaue Darstellung der φ_m verweisen wir auf Kubota [16], S. 16.

Bezeichnung 2.1.12. Die Funktion φ aus Gleichung (2.7) heißt *Streumatrix*.

Bemerkung 2.1.13. Der Begriff *Streumatrix* ist dadurch motiviert, dass im Falle von h vielen Spitzen $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_h$ für jede Spitze eine Eisensteinreihe $E_i(z, s)$ definiert werden kann, von denen jede eine Fourierentwicklung in jeder Spitze \mathfrak{a}_j besitzt. Auf diese Weise werden h^2 Funktionen $\varphi_{ij}(s)$ definiert, die sich zu einer quadratischen Matrix anordnen lassen. Die Funktionalgleichungen aus dem folgenden Theorem lassen sich für die vektorwertige Eisensteinreihe $E = (E_1, \dots, E_h)$ und die Streumatrix $(\varphi_{ij}(s))_{1 \leq i, j \leq h}$ mit $h \geq 2$ verallgemeinern.

Theorem 2.1.14 (Selberg; Kubota [16], Theorem 4.4.1 und 4.4.2). *Die Abbildungen*

$$\varphi : \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > 1\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad s \mapsto \varphi(s),$$

und

$$\mathcal{E} : \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > 1\} \rightarrow C^\infty(X), \quad s \mapsto E(\cdot, s),$$

sind holomorph und besitzen eine eindeutige meromorphe Fortsetzung nach \mathbb{C} mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Die Pole von \mathcal{E} sind die Pole der Streumatrix φ .

(ii) Auf der rechten Halbebene $\{\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}\}$ ist φ holomorph bis auf endlich viele einfache Pole im Intervall $]\frac{1}{2}, 1]$. In $s_1 = 1$ besitzt φ stets einen Pol.

(iii) Es gelten die Funktionalgleichungen

$$(a) \quad E(z, s) = \varphi(s) \cdot E(z, 1 - s),$$

$$(b) \quad \varphi(s) \cdot \varphi(1 - s) = 1.$$

Ferner sind φ und \mathcal{E} verträglich mit der komplexen Konjugation, d. h. für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt

$$(c) \quad \varphi(\bar{s}) = \overline{\varphi(s)},$$

$$(d) \quad E(z, \bar{s}) = \overline{E(z, s)} \text{ für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Colin de Verdière beweist dieses Theorem in [4] mithilfe des Pseudo-Laplace-Operators, der in Abschnitt 2.5 beschrieben wird.

Beispiel 2.1.15. (i) Die Symmetrie (c) impliziert, dass $\varphi(s) \in \hat{\mathbb{R}}$ für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt.

(ii) Es sei $s = \frac{1}{2} + i\tau$ mit $\tau \in \mathbb{R}$ ein Punkt auf der kritischen Geraden

$$\mathcal{G} := \left\{ \frac{1}{2} + i\tau \mid \tau \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dann gilt

$$\hat{s} := 1 - s = \frac{1}{2} - i\tau = \bar{s}.$$

Die Funktionalgleichungen (b) und (c) implizieren

$$|\varphi(s)| = 1. \tag{2.9}$$

Insbesondere existiert in einer Umgebung von \mathcal{G} eine holomorphe Funktion ϑ , sodass

$$\varphi(s) = e^{i\vartheta(s)}$$

und $\vartheta\left(\frac{1}{2} + i\tau\right) \in \mathbb{R}$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $\vartheta(\tau)$ für $\vartheta\left(\frac{1}{2} + i\tau\right)$.

(iii) Aus (i) und (ii) folgt für $s_0 = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \cap \mathcal{G}$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \in \{\pm 1\}.$$

Der Punkt $s_0 = \frac{1}{2}$ wird bei der Untersuchung der Pseudo-Laplace-Operatoren stets als Sonderfall behandelt, da er der einzige Punkt ist, an dem $E(\cdot, s)$ identisch verschwinden kann. Dieses Resultat ist bei Iwaniec [11] zu finden ([11], Proposition 6.12 und anschließende Bemerkung). Für ein besseres Verständnis führen wir den Beweis an dieser Stelle aus.

Satz 2.1.16. *Die Eisensteinreihe $E(z, s)$ ist genau dann identisch Null für alle $z \in \mathbb{H}$, wenn*

$$s = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Beweis. Es sei $s_0 = \frac{1}{2}$. Wir betrachten nur den absoluten Term

$$E_0(y, s) = y^s + \varphi(s)y^{1-s},$$

der als Funktion in y auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}_{>0}$ mit $[p_\Gamma, \infty[\subset I$ definiert ist. Die Abbildungen $y \mapsto y^s$ und $y \mapsto y^{1-s}$ sind genau dann \mathbb{C} -linear abhängig, wenn $s = 1 - s$ gilt. Daher muss notwendig $s = s_0$ gelten, wenn $E_0(y, s) = 0$ für alle $y \geq p_\Gamma$ gilt.

Für $s_0 = \frac{1}{2}$ ist

$$E_0(y, s_0) = (1 + \varphi(s_0))\sqrt{y}.$$

Dieser Term verschwindet für beliebiges $y > 0$ genau dann, wenn $\varphi(s_0) = -1$. In diesem Fall liefert die Funktionalgleichung (a)

$$E(z, 1 - s_0) = \varphi(s_0)E(z, s_0) = -E(z, s_0).$$

Da andererseits $1 - s_0 = s_0$ gilt, bedeutet dies

$$E(z, s_0) = -E(z, s_0) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}. \quad \square$$

Satz 2.1.17 (Iwaniec [11], Theorem 6.9 und 6.13). *Ist s einer der endlich vielen Pole von φ in $]\frac{1}{2}, 1]$, dann gilt $\text{Res}_s(\varphi) > 0$. Das Residuum im Pol $s_1 = 1$ ist gegeben durch*

$$\text{Res}_{s_1}(\varphi) = \frac{1}{\text{vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}.$$

Beispiel 2.1.18 (Kubota [16], S. 46). Für die $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ hat der Term φ_m aus Beispiel 2.1.11 die Gestalt

$$\varphi_m(s) = \frac{1}{\zeta(2s)} \cdot \sum_{d|m} \frac{1}{d^{2s-1}},$$

wobei ζ die Riemannsche Zetafunktion bezeichnet. Für $m = 0$ ist diese Reihe gegeben durch

$$\sum_{d|0} \frac{1}{d^{2s-1}} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^{2s-1}} = \zeta(2s-1).$$

Einsetzen in (2.8) liefert

$$\varphi(s) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \zeta(2s-1)}{\Gamma(s) \zeta(2s)}.$$

Da die Funktionen Γ und ζ für $s \in]\frac{1}{2}, 1]$ bis auf den Pol von ζ in $2s_1 - 1 = 1$ für $s_1 = 1$ keine relevanten Pole und Nullstellen besitzen, hat die Streumatrix φ der $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ keine Pole im Intervall $]\frac{1}{2}, 1[$.

Der absolute Term

$$E_0(y, s) = y^s + \varphi(s)y^{1-s}$$

kann unter Verwendung der Darstellung $\varphi(s) = \exp(i\vartheta(s))$ für $\varphi(s) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ durch den Cosinus ausgedrückt werden. Diese Darstellung ist vor allem auf der kritischen Geraden nützlich, und wird in dieser Arbeit vornehmlich in Kapitel 3 sowie in Kapitel 6 und Kapitel 7 verwendet.

Lemma 2.1.19. *Für beliebiges $s \in \mathbb{C}$ sei $z \in \mathbb{C}$ bestimmt durch*

$$s = \frac{1}{2} + iz.$$

(i) *Es gelte $\varphi(s) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann hat der absolute Term der Eisensteinreihe die Gestalt*

$$E_0(y, s) = c_0(s) \tilde{E}_0(y, s)$$

mit

$$\tilde{E}_0(y, s) = \sqrt{y} \cos\left(z \ln(y) - \frac{\vartheta(s)}{2}\right) \tag{2.10}$$

und

$$c_0(s) = 2\varphi(s)^{1/2},$$

wobei $\vartheta(s) \in \mathbb{C}$ und $\varphi(s)^{1/2} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ durch eine geeignete Zweigwahl definiert sind. Die so normierte Eisensteinreihe sei

$$\tilde{E}(z, s) = \frac{1}{c_0(s)} E(z, s).$$

(ii) *Für das Argument des Cosinus in (2.10) schreiben wir*

$$\xi(y, z) = z \ln(y) - \frac{\vartheta(s)}{2}.$$

(iii) *Wenn $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, auf welchem φ weder eine Nullstelle noch einen Pol besitzt, dann sind die durch (i) und (ii) definierten Terme ϑ , c_0 und ξ holomorphe Funktionen auf G .*

(iv) Für $s \in \mathcal{G}$ ist $z = \tau \in \mathbb{R}$, und nach (2.9) gilt $|c_0(s)| = 2$ für $s \in \mathcal{G}$. In diesem Fall schreiben wir

$$\xi(y, \tau) = \tau \ln(y) - \frac{\vartheta(\tau)}{2}.$$

Beweis. Der Einfachheit der Notation halber schreiben wir nur φ für $\varphi(s) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Nach einer Zweigwahl des Logarithmus auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet G besitze $\varphi(s)$ mit $s \in G$ die Darstellung $\varphi = \exp(i\vartheta)$. Wir setzen $\tilde{s} = s - \frac{1}{2}$ und $z = -i\tilde{s}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} y^s + \varphi y^{1-s} &= \sqrt{y} (\exp(\tilde{s} \ln(y)) + \varphi \exp(-\tilde{s} \ln(y))) \\ &= \sqrt{y} \varphi^{1/2} (\varphi^{-1/2} \exp(\tilde{s} \ln(y)) + \varphi^{1/2} \exp(-\tilde{s} \ln(y))) \\ &= \sqrt{y} \varphi^{1/2} \left(\exp\left(\tilde{s} \ln(y) - \frac{\log(\varphi)}{2}\right) + \exp\left(-\tilde{s} \ln(y) + \frac{\log(\varphi)}{2}\right) \right) \\ &= \sqrt{y} \varphi^{1/2} \left(\exp\left(\tilde{s} \ln(y) - i\frac{\vartheta}{2}\right) + \exp\left(-\tilde{s} \ln(y) + i\frac{\vartheta}{2}\right) \right) \\ &= 2\sqrt{y} \varphi^{1/2} \cdot \cos\left(-i\tilde{s} \ln(y) - \frac{\vartheta}{2}\right) = 2\sqrt{y} \varphi^{1/2} \cdot \cos\left(z \ln(y) - \frac{\vartheta}{2}\right). \quad \square \end{aligned}$$

2.2 Trunkierte Eisensteinreihen

Der absolute Term

$$E_0(y, s) = y^s + \varphi(s) y^{1-s}$$

der Eisensteinreihe wächst für $y \rightarrow \infty$ wie

$$\max\{y^{\operatorname{Re} s}, y^{1-\operatorname{Re} s}\}.$$

Für jedes $s \in \mathbb{C}$ gilt entweder $\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}$ oder $\operatorname{Re} \hat{s} \geq \frac{1}{2}$, wobei $\hat{s} = 1 - s$ ist. Das folgende Beispiel demonstriert, warum $E(\cdot, s)$ daher nicht in $L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$ liegen kann.

Beispiel 2.2.1. Es sei $s > 1$, sodass die Eisensteinreihe $E(z, s)$ für alle $z \in \mathbb{H}$ absolut konvergiert. Durch Identifizierung von X mit F_{∞} und Zerlegung von F_{∞} in einen kompakten Teil X_{η} und die Spitzenregion S_{η} wie in Konvention 1.2.14 können wir das Integral von $|E|^2$ über X als Summe

$$\|E(\cdot, s)\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2 = \int_{X_{\eta}} |E(\cdot, s)|^2 d\mu_{\mathbb{H}} + \int_{S_{\eta}} |E(\cdot, s)|^2 d\mu_{\mathbb{H}}$$

schreiben. Auf der Spitzenregion $S_{\eta} =]0, 1[\times]\eta, \infty[$ gilt nach der Parsevalschen Gleichung

$$\int_0^1 \int_{\eta}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |E_m(y, s) e_m(x)|^2 \frac{dy}{y^2} dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\eta}^{\infty} |E_m(y, s)|^2 \frac{dy}{y^2}.$$

Es folgt

$$\|E(\cdot, s)\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2 > \int_{\eta}^{\infty} (y^s + \varphi(s) y^{1-s})^2 \frac{dy}{y^2}.$$

Da der Exponent $2s - 2$ für $s > 1$ positiv ist, konvergiert dieses Integral nicht. Daher ist $E(\cdot, s)$ keine Funktion in $L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$.

Bezeichnung 2.2.2. Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, die eine Lösung der Gleichung

$$\Delta f = \lambda f$$

für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ ist, aber nicht notwendig in $L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$ liegt, nennen wir Lax und Phillips [17] folgend eine *verallgemeinerte Eigenfunktion* von Δ .

Bemerkung 2.2.3. (i) Aus der Elliptizität des hyperbolischen Laplace-Operators Δ folgt wie in Korollar 1.3.21, dass jede verallgemeinerte Eigenfunktion von Δ von der Klasse C^∞ ist. Daher ist f durch die Fourierkoeffizienten aus Bemerkung 2.1.10 bestimmt.

(ii) Es sei s_k einer der Pole von φ im Intervall $]\frac{1}{2}, 1]$. Dann gilt für das koeffizientenweise gebildete *Residuum der Eisensteinreihe* $R_E(\cdot, s_k) := \text{Res}_{s_k}(E(\cdot, s))$

$$\begin{aligned} R_E(x + iy, s_k) &= \text{Res}_{s_k}(\varphi) y^{1-s_k} + \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \text{Res}_{s_k}(c_m) \sqrt{y} K_{s_k-1/2}(2\pi|m|y) e_m(x) \\ &= \mathcal{O}(y^{1-s}), \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Also ist R_E eine verallgemeinerte Eigenfunktion, die wegen $1 - s_k < \frac{1}{2}$ in $L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$ liegt.

Definition 2.2.4. Für eine Γ -automorphe Funktion f und $\eta \geq p_\Gamma$ definieren wir die *trunkierte Funktion* f^η durch

$$f^\eta = f_0^\eta + (f - f_0),$$

wobei der absolute Term f_0^η definiert sei durch

$$f_0^\eta(y) = \begin{cases} f_0(y), & y \leq \eta, \\ 0, & y > \eta. \end{cases}$$

Satz 2.2.5 (Kubota [16], Theorem 2.3.2). *Wenn \mathcal{E} in $s \in \mathbb{C}$ keinen Pol besitzt, liegt die trunkierte Eisensteinreihe $E^\eta(\cdot, s)$ in $L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$.*

Theorem 2.2.6 (Maass-Selberg-Relation, Kubota [16], Theorem 2.3.1). *Es seien f und g zwei verallgemeinerte Eigenfunktionen von Δ mit*

$$\Delta f = \lambda f \quad \text{und} \quad \Delta g = \mu g$$

so, dass die Trunkierungen f^η und g^η in $L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$ liegen. Wenn $\lambda \neq \mu$, dann gilt

$$(f^\eta, \bar{g}^\eta)_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})} = \frac{f_0(\eta)g'_0(\eta) - f'_0(\eta)g_0(\eta)}{\lambda - \mu}.$$

Der Beweis von [16], Theorem 2.3.1, mit g^η an der Stelle von \bar{g}^η liefert die folgende Version des Theorems:

Korollar 2.2.7. *Es seien f und g wie in Theorem 2.2.6. Für $\lambda \neq \bar{\mu}$ gilt*

$$(f^\eta, g^\eta)_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})} = \frac{f_0(\eta)\bar{g}'_0(\eta) - f'_0(\eta)\bar{g}_0(\eta)}{\lambda - \bar{\mu}}.$$

Beispiel 2.2.8 (Colin de Verdière [4], §2). Wenn $s = \frac{1}{2} + i\tau \in \mathcal{G}$, dann gilt

$$\|E^\eta(\cdot, \frac{1}{2} + i\tau)\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2 = 2 \ln(\eta) - \frac{\varphi'(\frac{1}{2} + i\tau)}{\varphi(\frac{1}{2} + i\tau)} - \frac{1}{\tau} \operatorname{Im} \left(\varphi(\frac{1}{2} + i\tau) \eta^{-2i\tau} \right). \quad (2.11)$$

Unter Verwendung der Notation aus Lemma 2.1.19 hat der letzte Summand aus (2.11) die Gestalt

$$-\frac{1}{\tau} \operatorname{Im} \left(\varphi(\frac{1}{2} + i\tau) \eta^{-2i\tau} \right) = \frac{2 \sin(\xi(\eta, \tau)) \cos(\xi(\eta, \tau))}{\tau}.$$

Bezeichnung 2.2.9. Für eine Fläche $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ mit einer Spitze in ∞ und $\eta \geq p_\Gamma$ setzen wir

$$L_\eta^2 := \left\{ f \in L^2(X, \mu_{\mathbb{H}}) \mid f_0|_{] \eta, \infty[} = 0 \right\}.$$

Dann ist L_η^2 ein Hilbertraum mit dem von $L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$ induzierten Skalarprodukt

$$(f, g)_{L_\eta^2} = (f, g)_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})},$$

und für beliebige Funktionen $f, g \in L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$ gilt

$$(f^\eta, g^\eta)_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})} = (f, g)_{L_\eta^2}.$$

Lemma 2.2.10. *Wenn \mathcal{E} in s keinen Pol besitzt und die Eisensteinreihe $E(z, s)$ nicht konstant Null ist, liegt die trunkierte Eisensteinreihe genau dann in $H^1(X, \mu_{\mathbb{H}})$, wenn der absolute Term $E_0(y, s)$ in $y = \eta$ eine Nullstelle besitzt.*

Beweis. Wir können den absoluten Term der trunkierten Eisensteinreihe mittels der Heaviside-Funktion H darstellen als

$$E_0^\eta(y, s) = E_0(y, s)H(\eta - y).$$

Dann besitzt E_0^η die Distributionsableitung

$$(E_0^\eta)'(y, s) = E_0'(y, s)H(\eta - y) - E_0(\eta, s)\delta_{\eta, 0}$$

mit der Deltadistribution

$$\langle \delta_{\eta, 0}, \phi \rangle = \phi_0(\eta), \quad \phi \in \mathcal{D}(X). \quad \square$$

2.3 Das Spektrum des automorphen Laplace-Operators

Satz 2.3.1 (Colin de Verdière [3], §1). *Der Laplace-Operator Δ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(X)$ ist ein unbeschränkter, symmetrischer und nichtnegativer Operator in $L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$, und besitzt eine eindeutige selbstadjungierte Friedrichserweiterung, die wir mit Δ_Γ bezeichnen.*

Bezeichnung 2.3.2. (i) Eine (automorphe) Spitzenfunktion ist eine Funktion $f \in L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$ mit absolutem Term

$$f_0 = 0.$$

Der Unterraum der automorphen Spitzenfunktionen von $L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$ heiße \hat{L}_0^2 .

- (ii) Eine Funktion $f \in \hat{L}_0^2$, die eine Eigenfunktion von Δ_Γ ist, heißt (*automorphe*) *Spitzenform*. Der von den automorphen Spitzenformen erzeugte Unterraum von $L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$ sei L_0^2 .

Satz 2.3.3 (Kubota [16], Theorem 5.2.2). *Es gilt $\hat{L}_0^2 = L_0^2$.*

Bezeichnung 2.3.4. Es sei Θ_R derjenige Unterraum von $L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$, der von den Residuen R_E der Eisensteinreihe in den Polen $s \in]\frac{1}{2}, 1]$ von φ aufgespannt wird.

Satz 2.3.5 (Kubota [16], Theorem 5.2.4). *Es sei Γ eine kofinite, nicht kokompakte Gruppe und $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) Θ_R ist endlichdimensional und ein Unterraum von Θ .
(ii) Wenn Θ_0 das orthogonale Komplement von Θ_R in Θ ist, dann ist $L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$ die orthogonale direkte Summe

$$L^2(X, \mu_{\mathbb{H}}) = L_0^2 \oplus \Theta_0 \oplus \Theta_R.$$

(iii) Die Räume L_0^2 , Θ_0 und Θ_R sind Δ -invariant.

(iv) Das Spektrum von Δ_Γ ist diskret in Θ_R und L_0^2 , und kontinuierlich in Θ_0 .

Bemerkung 2.3.6. (i) Da der Operator Δ_Γ nichtnegativ ist, gilt $\sigma(\Delta_\Gamma) \subseteq [0, \infty[$. Hierbei gilt stets $0 \in \sigma(\Delta_\Gamma)$, da die Eisensteinreihe einen Pol in $s_1 = 1$ besitzt.

(ii) Der Raum Θ ist unendlichdimensional. Die Dimension von L_0^2 ist im Allgemeinen unbekannt (s. Iwaniec [11], Bemerkung nach Theorem 4.7).

(iii) Das kontinuierliche Spektrum von Δ_Γ umfasst das Intervall $[\frac{1}{4}, \infty[$ und ist zu den Eisensteinreihen $E(\cdot, \frac{1}{2} + i\tau)$ mit $\tau \in \mathbb{R}$ assoziiert (s. Kubota [16], §5.3).

Bezeichnung 2.3.7. Wir schreiben

- (I) $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_N < \frac{1}{4}$ für die endlich vielen Eigenwerte von Δ_Γ in Θ_R , die zu einem Pol $s_k \in]\frac{1}{2}, 1]$ von φ mit $x_k = s_k(1 - s_k)$ assoziiert sind, und
(II) $0 < \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots$ für die (endliche oder unendliche) Folge der Eigenwerte von Δ_Γ in L_0^2 , aufgezählt entsprechend ihrer Vielfachheiten, deren zugehörige Eigenfunktionen automorphe Spitzenformen sind. Falls die Folge der ν_n endlich ist, ist $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als die mit Nullen aufgefüllte Folge zu verstehen.

In Analogie zur Notation für die Eigenwerte des Pseudo-Laplace-Operators durch Colin de Verdière [4] (s. Theorem 2.5.8) sprechen wir anhand dieser Kategorisierung von den Eigenwerten vom *Typ (I)* oder *Typ (II)*.

Bis heute unbewiesen ist Selbergs Vermutung über die Spektrallücke im Intervall $]0, \frac{1}{4}[$.

Vermutung 2.3.8 (Selbergsche Spektrallückenvermutung, Selberg [29]). *Für jede Kongruenzuntergruppe Γ gilt*

$$\sigma(\Delta_\Gamma) \cap]0, \frac{1}{4}[= \emptyset.$$

Satz 2.3.9 (Spektrallückensatz, Selberg [29]). *Für jede Kongruenzuntergruppe Γ gilt*

$$\sigma(\Delta_\Gamma) \cap]0, \frac{3}{16}[= \emptyset.$$

Für weitere Resultate im Zusammenhang mit der Spektrallückenvermutung sei beispielsweise auf Iwaniec [11], §11.3 verwiesen.

2.4 Asymptotische Verteilung der Eigenwerte

Ein klassisches Resultat der euklidischen Analysis ist das Weylsche Gesetz für die asymptotische Verteilung der Eigenwerte, das von Weyl [32] im Jahr 1912 für den zwei- und dreidimensionalen Fall bewiesen wurde.¹

Theorem 2.4.1 (Weylsches Gesetz, Weyl [32]). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge mit C^2 -Rand. Es sei Δ_Ω der euklidische Laplace-Operator auf Ω mit Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen, und es sei*

$$N_\Omega(R) = \#\{\lambda \leq R \mid \lambda \text{ Eigenwert von } \Delta_\Omega\}$$

die Zählfunktion der Eigenwerte. Dann gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N_\Omega(R)}{R^{n/2}} = \frac{\omega_n \text{vol}_{\text{eukl}}(\Omega)}{(2\pi)^n},$$

wobei ω_n das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel und $\text{vol}_{\text{eukl}}(\Omega)$ das euklidische Volumen von Ω bezeichnet.

Beispiel 2.4.2. Es sei Δ_ω der euklidische Laplace-Operator mit Dirichlet-Randbedingungen auf dem Intervall $\Omega =]0, \omega[$, und Δ_ω^N der Laplace-Operator mit Neumann-Randbedingungen auf Ω . Die Eigenwerte von Δ_ω sind gegeben durch

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{\omega^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Der Operator Δ_ω^N besitzt dieselben Eigenwerte und zusätzlich den Eigenwert $\lambda_0 = 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $R > 0$ gilt genau dann $\lambda_n \leq R$, wenn

$$n \leq \frac{\omega}{\pi} \sqrt{R}.$$

Also gilt in beiden Fällen

$$\#\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \lambda_n \leq R\} \sim \frac{\omega}{\pi} \sqrt{R}, \quad R \rightarrow \infty.$$

Bezeichnung 2.4.3. Es sei Γ eine kofinite Fuchssche Gruppe. In Analogie zum euklidischen Fall sagen wir, dass Δ_Γ das Weylsche Gesetz erfüllt, wenn für die Zählfunktion

$$N_\Gamma(T) = \#\{\lambda \leq T^2 : \lambda \text{ Eigenwert von } \Delta_\Gamma\}$$

gilt

$$N_\Gamma(T) \sim T^2 \cdot \frac{\text{vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{4\pi}, \quad T \rightarrow \infty.$$

¹Einen Beweis für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ durch Untersuchung des Wärmekerns findet man z. B. in Dodziuk [7].

Für kompakte Flächen $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ ist das Weylsche Gesetz erfüllt. Für den Laplace-Operator auf einer nicht kompakten Riemannschen Fläche $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ gilt die *Weyl-Selbergsche Asymptotik*, die sich von der klassischen Weylschen Formel um einen zusätzlichen Term unterscheidet.

Bezeichnung 2.4.4 (Iwaniec [11], §11.1). Für $T > 0$ und eine kofinite Fuchssche Gruppe Γ sei

$$W_\Gamma(T) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-T}^T \frac{\varphi'}{\varphi} \left(\frac{1}{2} + i\tau \right) d\tau$$

die *Windungszahl* der Streumatrix φ .

Theorem 2.4.5 (Weyl-Selbergsche Asymptotik; Venkov [31], Formel (7.8)). *Für jede kofinite Fuchssche Gruppe Γ gilt die Asymptotik*

$$N_\Gamma(T) + W_\Gamma(T) \sim T^2 \cdot \frac{\text{vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{4\pi}, \quad T \rightarrow \infty.$$

Bemerkung 2.4.6. Für beide Terme $W_\Gamma(T)$ und $N_\Gamma(T)$ aus der Weyl-Selberg-Formel gilt

$$N_\Gamma(T) = \mathcal{O}(T^2), \quad T \rightarrow \infty,$$

und

$$W_\Gamma(T) = \mathcal{O}(T^2), \quad T \rightarrow \infty,$$

(Iwaniec [11], Formel (7.11) und (10.13)). Im Allgemeinen kann man N_Γ und W_Γ jedoch nicht separat abschätzen. Auf Selberg (s. Iwaniec [11], §11.1) geht das Resultat zurück, dass für die $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ und Kongruenzuntergruppen Γ gilt

$$W_\Gamma(T) \sim T \log(T), \quad T \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Das bedeutet, dass die Streumatrix auf der kritischen Geraden \mathcal{G} eine Funktion der Ordnung 1 ist, d. h. dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\frac{\varphi'}{\varphi} \left(\frac{1}{2} + i\tau \right) = \mathcal{O}(\tau^\varepsilon), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Darüber, ob (2.12) für alle kofiniten Gruppen verallgemeinert werden kann, herrscht keine einstimmige Meinung. Nach Elstrodt et al. [8], S. 309, und Phillips und Sarnak [20] vermuteten Selberg und Roelcke, dass für jede kofinite Fuchssche Gruppe das Weylsche Gesetz gilt. Bei Roelcke selbst findet man die folgende Vermutung:

Vermutung 2.4.7 (Selberg-Roelcke-Vermutung, Roelcke [28], S. 335). *Für jede kofinite Gruppe Γ besitzt der Laplace-Operator Δ_Γ unendlich viele Eigenwerte.*

Dem entgegen steht eine jüngere Vermutung von Phillips und Sarnak:

Vermutung 2.4.8 (Phillips-Sarnak-Vermutung, Phillips und Sarnak [20]). *Für generische Gruppen Γ besitzt Δ_Γ nur endlich viele Eigenwerte.*

Äquivalente Fragen werden auch für den dreidimensionalen hyperbolischen Raum gestellt. Nach einer Vermutung von Grunewald und Huntebrinker gilt hier für jede kofinite Gruppe das Weylsche Gesetz (vgl. Elstrodt et al. [8], S. 308).

Für einen detaillierteren Überblick über diese Vermutungen verweisen wir auf die Zusammenfassungen in Elstrodt et al. [8], S. 308f., Venkov [31], S. 112f., und Iwaniec [11], §11.1.

2.5 Der Pseudo-Laplace-Operator von Colin de Verdière

Es sei ab jetzt $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ eine Riemannsche Fläche mit einer einzigen Spitze. Wie in Abschnitt 1.2 erklärt, nehmen wir an, dass die Spitze in ∞ liegt, und identifizieren $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ mit dem unbeschränkten Fundamentalpolygon F_∞ , welches in einen kompakten Teil X_η und eine Spitzenregion

$$S_\eta \simeq]0, 1[\times]\eta, \infty[$$

zerlegt werden kann, wobei $\eta \geq p_\Gamma$ zu wählen ist.

In Abschnitt 2.2 wurde dargelegt, dass die Eisensteinreihe eine Lösung der Eigenwertgleichung, aber keine Eigenfunktion von Δ_Γ im eigentlichen Sinne ist, da der absolute Term E_0 wächst wie $y^{|\operatorname{Re} s|}$. Die trunkierte Eisensteinreihe $E^\eta(\cdot, s)$ liegt in $L^2(X, \mu_\mathbb{H})$ und löst die Eigenwertgleichung fast überall. Im Punkt η , in welchem E_0 trunkiert wird, ist die Funktion nicht glatt. Im besten Fall kann die trunkierte Funktion in η stetig fortgesetzt werden, was nach Lemma 2.2.10 genau dann der Fall ist, wenn gilt

$$E_0(\eta, s) = \eta^s + \varphi(s)\eta^{1-s} = 0. \quad (2.13)$$

In diesem Fall ist E^η einmal schwach differenzierbar, und die zweite distributionelle Ableitung ist nach der Greenschen Formel von der Form

$$E_0''(y, s) = E''(y, s) \cdot \chi_{]0, \eta[\cap X_\eta^c}(y) + E_0'(\eta, s) \cdot \delta_{0, \eta}$$

mit der Deltadistribution $\langle \delta_{0, \eta}, \phi \rangle = \phi_0(\eta)$. Wenn (2.13) gilt, dann folgt $\varphi(s) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und mit der Cosinusdarstellung aus Lemma 2.1.19 folgt

$$E_0'(\eta, s) = c_0(s) \frac{\pm z}{\sqrt{\eta}} \neq 0.$$

Also liegt ΔE^η nicht in $L^2(X, \mu_\mathbb{H})$.

Der *Pseudo-Laplace-Operator* Δ^η von Colin de Verdière ist genau so konstruiert, dass er die Nicht-Differenzierbarkeit an einer einzigen Stelle zulässt. Der Operator, den wir betrachten, ist ein Spezialfall einer allgemeineren Klasse von Pseudo-Laplace-Operatoren, die von Colin de Verdière in „Pseudo-laplaciens. I“ ([3]) eingeführt wird. Er wird bereits von Lax und Phillips [17] für einen Beweis der Weyl-Selberg-Asymptotik verwendet (s. [17], §8), ohne als solcher benannt zu werden. Der Name „Pseudo-Laplace-Operator“ wird von Colin de Verdière in Anlehnung an ältere Arbeiten von Hejhal gewählt (s. [3]).

Definition und Satz 2.5.1 (Colin de Verdière [4], §1). Es sei \mathcal{H} ein abgeschlossener Unterraum von $H^1(X, \mu_\mathbb{H})$, und $\overline{\mathcal{H}}$ der Abschluss von \mathcal{H} in $L^2(X, \mu_\mathbb{H})$. Dann existiert ein eindeutiger nichtnegativer, selbstadjungierter Operator $\Delta_{\mathcal{H}}$ mit Definitionsbereich

$$D(\Delta_{\mathcal{H}}) = \left\{ f \in \mathcal{H} \mid \exists T \in H^{-1}(X, \mu_\mathbb{H}) \cap \mathcal{H}^\perp : \Delta f - T \in \overline{\mathcal{H}} \right\}.$$

Auf $f \in D(\Delta_{\mathcal{H}})$ wirkt $\Delta_{\mathcal{H}}$ durch die Vorschrift

$$\Delta_{\mathcal{H}} f = \Delta f - T.$$

Bemerkung 2.5.2. (i) Ein abgeschlossener Unterraum \mathcal{H} von $H^1(X, \mu_{\mathbb{H}})$ ist ein Hilbertraum mit dem von der Norm aus Beispiel 1.3.8 induzierten Skalarprodukt

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^1(X, \mu_{\mathbb{H}})} &= (u, v)_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})} + \int_X g(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) \, d\mu_{\mathbb{H}} \\ &= (u, v)_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})} + \int_{F_{\infty}} (\nabla u, \nabla v) \, d\lambda^2. \end{aligned}$$

(ii) Es sei A_F die Friedrichserweiterung zur quadratischen Form

$$q(u) = (u, u)_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})} + \int_{F_{\infty}} (\nabla u, \nabla u) \, d\lambda^2, \quad u \in \mathcal{H},$$

welche durch die Einschränkung der $H^1(X, \mu_{\mathbb{H}})$ -Norm auf \mathcal{H} definiert ist. Dann gilt

$$\Delta_{\mathcal{H}} = A_F - \operatorname{id}_{\overline{\mathcal{H}}}.$$

In diesem Sinne entspricht \sqrt{q} der *Energienorm* und \mathcal{H} dem *Energieraum* im Setting der klassischen Friedrichserweiterung. Wir schreiben daher $(\cdot, \cdot)_E$ für das von q induzierte Skalarprodukt und $\|\cdot\|_E$ für die zugehörige Norm.

Beispiel 2.5.3 (Colin de Verdière [4], §1). Im Fall $\mathcal{H} = H^1(X, \mu_{\mathbb{H}})$ ist $\Delta_{\mathcal{H}}$ identisch mit der Friedrichserweiterung Δ_{Γ} des Laplace-Operators Δ auf $\mathcal{D}(X)$.

Bezeichnung 2.5.4. Für $\eta \geq p_{\Gamma}$ sei

$$\mathcal{H}_{\eta} := \left\{ f \in H^1(X, \mu_{\mathbb{H}}) \mid f_0|_{]_{\eta, \infty}[} = 0 \right\}.$$

Der Abschluss $\overline{\mathcal{H}}$ von \mathcal{H}_{η} in $L^2(X, \mu)$ ist der Raum

$$L_{\eta}^2 = \left\{ f \in L^2(X, \mu_{\mathbb{H}}) \mid f_0|_{]_{\eta, \infty}[} = 0 \right\}$$

aus Bezeichnung 2.2.9. Es ist klar, dass $L_0^2 \subsetneq L_{\eta}^2$ gilt. Das orthogonale Komplement von L_0^2 in L_{η}^2 bezeichnen wir mit Θ_{η} .

Bemerkung 2.5.5. Nach Bemerkung 2.3.6 (ii) ist die Dimension von L_0^2 unklar. Der Raum Θ_{η} für $\eta > p_{\Gamma}$ muss aber unendlichdimensional sein, da für alle $p_{\Gamma} < a < b < \eta$ die automorphe Fortsetzung der charakteristischen Funktion $\chi_{[a, b]}(y)$ in Θ_{η} liegt.

Definition und Satz 2.5.6 (Colin de Verdière [4], Theorem 1). Der *Pseudo-Laplace-Operator* Δ^{η} zum Parameter $\eta \geq p_{\Gamma}$ sei die Friedrichserweiterung

$$\Delta^{\eta} := \Delta_{\mathcal{H}_{\eta}}$$

von Δ im Sinne von Definition und Satz 2.5.1. Der Definitionsbereich von Δ^{η} ist die Menge

$$D(\Delta^{\eta}) = \left\{ f \in \mathcal{H}_{\eta} \mid \exists C \in \mathbb{C} : \Delta f - C \cdot \delta_{\eta, 0} \in L^2(X, \mu_{\mathbb{H}}) \right\},$$

wobei $\delta_{\eta, 0} \in \mathcal{D}'(X)$ definiert ist durch

$$\langle \delta_{\eta, 0}, \phi \rangle = \phi_0(\eta), \quad \phi \in \mathcal{D}(X).$$

Für $f \in D(\Delta^{\eta})$ ist

$$\Delta^{\eta} f = \Delta f - C \cdot \delta_{\eta, 0}.$$

Mit der Greenschen Formel lässt sich berechnen, dass $C = -f'_0(\eta)$ gelten muss, sofern f_0 einen Repräsentanten in $C^1([r, \eta])$ besitzt.

Satz 2.5.7 (Colin de Verdière [4], Theorem 2). *Der Pseudo-Laplace-Operator Δ^η ist ein selbst-adjungierter Operator in L^2_η mit kompakter Resolvente.*

Theorem 2.5.8 (Colin de Verdière [4], Theorem 5). *Es sei $\eta > p_\Gamma$. Dann besteht das Spektrum von Δ^η aus einer unendlichen Folge $0 < \Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \dots$ von Eigenwerten mit*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_k = \infty,$$

welche sich aus den folgenden zwei Typen von Eigenwerten zusammensetzt:

(I) *den endlich oder unendlich vielen Eigenwerten $0 < \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots$ von Δ_Γ mit den zugehörigen Spitzenformen als Eigenfunktionen,*

(II) *einer unendlichen Folge $0 < \mu_1(\eta) < \mu_2(\eta) < \dots$ von Eigenwerten der Form*

$$\mu_j(\eta) = s_j(1 - s_j) \quad \text{mit} \quad s_j = \frac{1}{2} + i\tau_j,$$

wobei τ_j entweder in $[0, \infty[$ liegt, wenn $\mu_j \geq \frac{1}{4}$ gilt, oder durch $\tau_j = ir_j$ für $r_j \in] -\frac{1}{2}, 0[$ gegeben ist, falls $\mu_j < \frac{1}{4}$ gilt. Die zugehörigen Eigenfunktionen v_j vom Typ (II) sind ein Vielfaches der trunkierten Eisensteinreihe

$$v_j(z) = E^\eta(z, s_j), \quad \text{falls } s_j \neq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad E_0(\eta, s_j) = 0,$$

und

$$v_j(z) = \partial_s E^\eta(z, s)|_{s=s_j}, \quad \text{falls } s_j = \frac{1}{2}, \quad \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -1, \quad \varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \ln(\eta).$$

Die Folge $(\mu_j(\eta))_{j \in \mathbb{N}}$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

(i) *Für jedes $j \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $\eta \mapsto \mu_j(\eta)$ monoton fallend.*

(ii) *Sind $0 = x_1 < \dots < x_N < \frac{1}{4}$ die Eigenwerte vom Typ (II) von Δ_Γ , so gilt*

$$0 = x_1 < \mu_1(\eta) < x_2 < \dots < \mu_{N-1}(\eta) < x_N < \mu_N(\eta).$$

Ferner gilt für $1 \leq j \leq N$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \mu_j(\eta) = x_j,$$

und für $j > N$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \mu_j(\eta) = \frac{1}{4}.$$

Colin de Verdière interessiert sich auch für den Fall $\eta \in]0, p_\Gamma]$. Für unsere Störungstheorie ist nur $\eta > p_\Gamma$ eine sinnvolle Wahl. In der folgenden Bemerkung konstatieren wir Eigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen vom Typ (II), die für den Kalkül in Kapitel 3 und den Kapiteln 5 bis 7 benötigt werden.

Bemerkung 2.5.9. (i) Nach Lemma 2.1.19 ist der absolute Term $E_0(y, s)$ für $s \in \mathcal{G}$ ein Vielfaches von

$$\tilde{E}_0(y, \frac{1}{2} + i\tau) = \sqrt{y} \cos(\xi(y, \tau)), \quad \xi(y, \tau) = \tau \ln(y) - \frac{\vartheta(\tau)}{2}.$$

Ist $\eta > p_\Gamma$ fest gewählt, sind alle Eigenwerte $\mu_j > \frac{1}{4}$ durch $\mu_j = \tau_j^2 + \frac{1}{4}$ für diejenigen $\tau_j > 0$ mit $\xi(\eta, \tau_j) \in \pi\mathbb{Z}$ gegeben.

(ii) Betrachten wir umgekehrt ein festes $\tau > 0$, dann gibt es unendlich viele $\eta > p_\Gamma$, sodass

$$\tau = \tau_n(\eta)$$

zu einem Eigenwert

$$\mu_n(\eta) = \frac{1}{4} + \tau_n(\eta)^2$$

von Δ^η assoziiert ist, wobei n von η abhängt. Wenn für festes $\tau > 0$ und $\eta_1, \eta_2 > p_\Gamma$ gilt

$$\mu_{n_j}(\eta_j) = \frac{1}{4} + \tau^2, \quad j = 1, 2,$$

dann gilt $\xi(\eta_1, \tau) - \xi(\eta_2, \tau) \in \pi\mathbb{Z}$.

(iii) Die Eigenfunktionen v_j sind nur innerhalb des Typs (II), d. h. bis auf Addition einer Spitzenfunktion, eindeutig. Insbesondere kann der Fall auftreten, dass $\mu_j(\eta) = \nu_k$ ein Eigenwert mit Vielfachheit ≥ 2 ist.

(iv) Für $s_0 = \frac{1}{2}$ gilt entweder $\varphi(s_0) = -1$ oder $\varphi(s_0) = 1$. Im Fall $\varphi(s_0) = 1$ besitzt der absolute Term der Eisensteinreihe

$$E_0(y, s_0) = 2\sqrt{y}$$

keine Nullstelle in $y \in]0, \infty[$. Im Fall $\varphi(s_0) = -1$ ist $z \mapsto E^\eta(z, s_0)$ nach Satz 2.1.16 die Nullfunktion und kann daher keine Eigenfunktion sein. Für die Parameter-Ableitung von $E(z, s)$ nach s im Punkt $s_0 = \frac{1}{2}$ gilt

$$\partial_s E_0(y, s)|_{s=1/2} = \sqrt{y} \left(2 \ln(y) + \varphi' \left(\frac{1}{2} \right) \right).$$

Dieser Term ist nicht konstant in y und hat genau dann eine Nullstelle in $\eta > 0$, wenn

$$\varphi' \left(\frac{1}{2} \right) = -2 \ln(\eta).$$

(v) Für kein $s \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ ist $\partial_s E(\cdot, s)$ eine verallgemeinerte Eigenfunktion von Δ , denn in diesem Fall gilt

$$\partial_s E_0(y, s) = \ln(y) \left(y^s - \varphi(s) y^{1-s} \right) + \varphi'(s) y^{1-s},$$

aber

$$\begin{aligned} \Delta \partial_s E_0(y, s) &= s(1-s) \cdot \partial_s E_0(y, s) + (1-2s) \cdot \left(y^s + \varphi(s) y^{1-s} \right) \\ &= \lambda \cdot \partial_s E_0(y, s) + \frac{\partial \lambda}{\partial s} \cdot E_0(y, s), \end{aligned}$$

wobei wie üblich $\lambda = s(1-s)$ gesetzt wird.

(vi) Aus Theorem 2.5.8 (ii) folgt

$$\mu_j(\eta) < \frac{1}{4} \quad \text{für alle } \eta > p_\Gamma, j < N,$$

und

$$\mu_j(\eta) > \frac{1}{4} \quad \text{für alle } \eta > p_\Gamma, j > N + 1.$$

Für $j = N + 1$ impliziert die Monotonie von μ_j ebenfalls

$$\mu_{N+1}(\eta) \geq \frac{1}{4} \quad \text{für alle } \eta > p_\Gamma.$$

Andererseits gibt es höchstens ein $\eta_\Gamma > 0$ mit

$$\varphi' \left(\frac{1}{2} \right) = -2 \ln(\eta_\Gamma).$$

Also muss gelten

$$\mu_{N+1}(\eta) > \frac{1}{4} \quad \text{für alle } \eta > p_\Gamma,$$

da sonst ein $\eta_0 > 0$ existiert, sodass $\mu_{N+1}(\eta) = \frac{1}{4}$ für alle $\eta \geq \eta_0$. Wenn also $\mu_0 := \frac{1}{4}$ ein Eigenwert des Typs (II) von Δ^η ist, dann folgt bereits

$$\eta = \eta_\Gamma \quad \text{und} \quad \mu_0 = \mu_N(\eta_\Gamma).$$

Insbesondere sind die hierdurch zum Eigenwert $\frac{1}{4}$ assoziierten η und N durch Γ eindeutig festgelegt. Umgekehrt ist für beliebiges $\eta > 0$ a priori nicht entscheidbar, ob $\mu_N(\eta) = \frac{1}{4}$, $\mu_N(\eta) > \frac{1}{4}$ oder $\mu_N(\eta) < \frac{1}{4}$ gilt.

Aus [4], §3, geht implizit hervor, dass Δ^η unendlich viele Eigenwerte $\mu_j(\eta)$ vom Typ (II) besitzt. In der folgenden Bemerkung wird erläutert, wie man dies einsehen kann.

Bemerkung 2.5.10. Es sei $R(\Delta^\eta, \lambda)$ die Resolvente von Δ^η mit $\lambda \in \rho(\Delta^\eta)$. Nach Satz 2.5.7 ist $R(\Delta^\eta, \lambda)$ kompakt und selbstadjungiert. Es sei $f \in \Theta_\eta$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von L_0^2 mit $\Delta^\eta g_n = \nu_n g_n$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(R(\Delta^\eta, \lambda)f, g_n) = (f, R(\Delta^\eta, \lambda)g_n) = \frac{1}{\nu_n - \lambda}(f, g_n) = 0.$$

Folglich operiert $R(\Delta^\eta, \lambda)$ in Θ_η . Da Θ_η unendlichdimensional ist, besitzt $R(\Delta^\eta, \lambda)$ in Θ^η eine unendlich abzählbare Folge von Eigenwerten mit Häufungspunkt 0. Dies sind (bis auf Verschiebung um λ) die Reziproken der Eigenwerte $\mu_j(\eta)$ von Δ^η .

Wir können diese Aussage auch analytisch mit der Maass-Selberg-Relation nachweisen.

Satz 2.5.11. *Für jedes $\eta > p_\Gamma$ gibt es ein $\tau_0 > 0$, sodass die Einschränkung $\xi|_{] \tau_0, \infty[}$ von*

$$\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau \mapsto \xi(\eta, \tau) = \tau \ln(\eta) - \frac{\vartheta(\tau)}{2},$$

streng monoton steigend ist.

Beweis. Nach der Maass-Selberg-Relation 2.2.8 ist die Ableitung $\vartheta'(\tau)$ der Funktion

$$\vartheta(\tau) = -i \log \left(\varphi \left(\frac{1}{2} + i\tau \right) \right)$$

gegeben durch

$$\vartheta'(\tau) = -\|E^\eta\|^2 + 2 \ln(\eta) + \frac{2 \sin(\xi(\tau)) \cos(\xi(\tau))}{\tau}.$$

Daraus folgt

$$\xi'(\tau) = \frac{\|E^\eta\|^2}{2} - \frac{\sin(\xi(\tau)) \cos(\xi(\tau))}{\tau}.$$

Das Integral von $|E^\eta|^2$ über X berechnen wir durch Zerlegung des Fundamentalpolygons F_∞ in X_r und S_r für ein $r \in [p_\Gamma, \eta[$ wie in Konvention 1.2.14. Dann gilt

$$\|E^\eta\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2 = \int_{X_r} |E^\eta|^2 d\mu_{\mathbb{H}} + \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \int_r^\infty |E_m(y, s)|^2 \frac{dy}{y^2} + 4 \int_r^\eta \cos^2(\xi(y, \tau)) \frac{dy}{y}.$$

Die ersten beiden Summanden hängen von τ ab und sind nichtnegativ. Das Integral im letzten Summanden lässt sich durch die Substitution $u = \ln(y)$ berechnen. Man erhält

$$\begin{aligned} 4 \int_r^\eta \cos^2(\xi(y, \tau)) \frac{dy}{y} &= 2 \ln(\eta) - 2 \ln(r) \\ &+ \frac{2 (\cos(\xi(\eta, \tau)) \sin(\xi(\eta, \tau)) - \cos(\xi(r, \tau)) \sin(\xi(r, \tau)))}{\tau}. \end{aligned}$$

Die trigonometrischen Terme im Zähler des zweiten Summanden sind beschränkt. Daher konvergiert dieser Summand für $\tau \rightarrow \infty$ gegen 0. Der verbleibende Term

$$2(\ln(\eta) - \ln(r))$$

ist in τ konstant und für $\eta > r \geq p_\Gamma$ positiv. Also gibt es ein $\tau_0 = \tau(\eta)$, sodass

$$\xi'(\tau) > 0 \quad \text{für alle } \tau > \tau_0. \quad \square$$

Korollar 2.5.12. *Für $\eta > p_\Gamma$ besitzt der Pseudo-Laplace-Operator Δ^η unendlich viele Eigenwerte vom Typ (II).*

Beweis. Aus dem Beweis von Satz 2.5.11 folgt, dass es eine Konstante $c > 0$, eine nichtnegative Funktion $g(\tau)$ und eine Funktion $f(\tau)$ mit

$$|f(\tau)| \leq 2 \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{R}$$

gibt, sodass

$$\xi'(\tau) = c + g(\tau) + \frac{f(\tau)}{\tau}.$$

Für $0 < \tau_0 < \tau$ folgt

$$\int_{\tau_0}^\tau \xi'(t) dt = c(\tau - \tau_0) + \int_{\tau_0}^\tau g(t) dt + \int_{\tau_0}^\tau \frac{f(t)}{t} dt.$$

Da f beschränkt ist, gilt

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{f(t)}{t} dt = \mathcal{O}(\ln(\tau)), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Daraus folgt, dass es eine Funktion $F(\tau)$, eine Konstante $C > 0$ und $\tau_0 > 0$ gibt, sodass

$$|F(\tau)| \geq C \quad \text{für alle } \tau > \tau_0$$

und

$$\xi(\tau) \sim F(\tau) \cdot \tau, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Insbesondere ist ξ unbeschränkt und nach Satz 2.5.11 streng monoton steigend auf einem Intervall $]\tau_0, \infty[$. Es folgt, dass die Bildmenge $\xi(]\tau_0, \infty[)$ unendlich viele Nullstellen des Cosinus enthält. Jede Nullstelle τ_j von ξ liefert einen Eigenwert $\mu_j = \frac{1}{4} + \tau_j^2$ von Δ^η . \square

Theorem 2.5.13 (Weylsches Gesetz für den Pseudo-Laplace-Operator; Lax und Phillips [17], Formel (8.41)). *Es sei*

$$N_\Gamma^\eta(R) = \#\{\lambda \leq R \mid \lambda \text{ Eigenwert von } \Delta^\eta\}$$

die Zählfunktion der Eigenwerte von Δ^η . Dann gilt das Weylsche Gesetz

$$N_\Gamma^\eta(R) \sim R \cdot \frac{\text{vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{4\pi}, \quad R \rightarrow \infty.$$

Kapitel 3

Reelle Störung des Pseudo-Laplace-Operators

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Pseudo-Laplace-Operators Δ^η sind dadurch bestimmt, dass der absolute Term eine Nullstelle in η besitzt. Für die Eigenfunktionen vom Typ (I), deren konstanter Term verschwindet, ist diese Bedingung trivial. Für die Eigenfunktionen $E(\cdot, \frac{1}{2} + i\tau)$ vom Typ (II) impliziert die Bedingung hingegen einen Zusammenhang zwischen η , τ und der Phasenfunktion

$$\vartheta(\tau) = -i \log \left(\varphi \left(\frac{1}{2} + i\tau \right) \right)$$

von φ auf der kritischen Geraden \mathcal{G} , beschrieben durch die Gleichung

$$\sqrt{\eta} \cos \left(\tau \ln(\eta) + \frac{\vartheta(\tau)}{2} \right) = 0.$$

Wegen $\eta > 0$ ist die Bedingung äquivalent zu

$$\cos \left(\tau \ln(\eta) + \frac{\vartheta(\tau)}{2} \right) = 0. \tag{3.1}$$

Wir stellen im folgenden Kapitel einen Ansatz zur Störung des Pseudo-Laplace-Operators vor, welcher auf dem klassischen *Minimum-Maximum-Prinzip* für selbstadjungierte Operatoren von Courant und Fischer (s. Courant [5]) basiert. Mithilfe des Minimum-Maximum-Prinzips wird von Weyl das nach ihm benannte Weylsche Gesetz für die asymptotische Verteilung der Eigenwerte des euklidischen Laplace-Operators bewiesen (s. [6], § 6.4).

Das Minimum-Maximum-Prinzip wird auch von Colin de Verdière im Beweis des Spektralsatzes 2.5.8 zum Nachweis der Monotonieeigenschaften sowie für die Weylschen Asymptotik 2.5.13 für den Pseudo-Laplace-Operator verwendet. Wie beim euklidischen Laplace-Operator führt eine Vergrößerung von η zu einer Verkleinerung der Frequenz, entsprechend der Monotonie der Eigenwerte $\mu_n(\eta)$ aus Theorem 2.5.8. Wir wollen diesen Effekt quantifizieren, indem wir die lokale Änderungsrate der Eigenwertes $\mu_n(\eta)$ vom Typ (II) in η bestimmen. Als Ziel erhoffen wir uns, mittels der Gleichung (3.1) Implikationen für die Streumatrix φ beziehungsweise ϑ herleiten zu können. Dies interessiert uns vor allem im Hinblick auf die Weyl-Selbergsche Asymptotik.

Da die Störung des Parameters η nur den konstanten Term f_0 betrifft, ist sie konzeptionell vergleichbar mit der Störung des eindimensionalen euklidischen Laplace-Operators Δ_ω auf einem

reellen Intervall

$$\Omega =]0, \omega[.$$

Das Intervall Ω kann durch eine einfache Streckung der Form

$$\psi(x) = ax, \quad a = \frac{\tilde{\omega}}{\omega},$$

auf ein Intervall

$$\tilde{\Omega} =]0, \tilde{\omega}[\quad \text{mit} \quad \tilde{\omega} = \omega + \varepsilon$$

transformiert werden. Hierin besteht ein wesentlicher, d. h. über die Differenzierung der Technik hinausgehender, Unterschied zum hyperbolischen Pseudo-Laplace-Operator: Die Automorphie von f impliziert auf dem (euklidischen) Rand des kompakten „unteren“ Teils X_r des Fundamentalpolygons F_∞ mit $r \geq p_\Gamma$ Randbedingungen, die wir nicht explizit angeben können. Die Streckung des konstanten Terms f_0 kann daher nur auf der Spitzenregion S_r vorgenommen werden, und die auf S_r gestreckte Funktion \tilde{f} muss auf dem Horozykel \mathcal{H}_r stetig in die ursprüngliche Funktion f auf X_r übergehen, damit \tilde{f} von der Klasse $H^1(X, \mu_{\mathbb{H}})$ bleibt.

Das Vorgehen in diesem Abschnitt kann als eine Art „manuelle“ Störungstheorie verstanden werden, welche konzeptionell nur für reelle η sinnvoll ist, aber ohne Theorie auskommt. Im zweiten Teil der Arbeit wird unter Verwendung der Theorie von Kato und Rellich eine *holomorphe* Störungstheorie von Pseudo-Laplace-Operatoren entwickelt. Welche Probleme bei der Anwendung der holomorphen Theorie auf Δ^η auftreten, wird in Abschnitt 5.1 skizziert.

Die holomorphe Theorie ist in ihrer Anwendung eleganter. Interessant ist aber, dass das Minimum-Maximum-Prinzip eine explizite Abschätzung für $\mu_n''(\eta)$ liefert. Den Ansatz, das Verfahren und die Ergebnisse stellen wir im folgenden Kapitel vor. Insbesondere werden wir auf Implikationen für die Abschätzung von ϑ im Hinblick auf die Weyl-Selberg-Asymptotik eingehen, welche jedoch ungeklärt bleiben (s. Abschnitt 3.4).

3.1 Das Courantsche Minimum-Maximum-Prinzip

Wie soeben erläutert, können wir die Streckung von f_0 nur auf einem Intervall $[r, \eta]$ mit $r \geq p_\Gamma$ durchführen. Dies führt dazu, dass die teilweise gestreckte Funktion \tilde{f} stetig, aber in r nicht differenzierbar ist, und folglich nicht im Definitionsbereich des Operators Δ^η liegt.

Wir verwenden daher eine Formulierung des Minimum-Maximum-Prinzips, welche die Anwendung auf die Friedrichserweiterung A_E eines symmetrischen, positiven Operators A mit zugehöriger Energienorm $(\cdot, \cdot)_E$ und Variation der Vektoren x des Rayleigh-Quotienten

$$\frac{(x, x)_E}{(x, x)}$$

im zugehörigen Energierraum H_E erlaubt.

Theorem 3.1.1 (Minimum-Maximum-Prinzip, Reed und Simon [21], Theorem 13.2). *Es sei A ein selbstadjungierter Operator mit kompakter Resolvente in einem Hilbertraum H mit Skalarprodukt $(\cdot, -)_H$. Es gebe ein $c > 0$, sodass für alle $u \in D(A)$ gilt*

$$q(u) := (Au, u)_H \geq c(u, u)_H,$$

und es sei $Q(A)$ der Abschluss von $D(A)$ in H bezüglich des von q induzierten Skalarproduktes. Ferner sei $c \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ eine aufsteigende Folge der Eigenwerte, aufgezählt unter Berücksichtigung der Vielfachheiten. Dann gilt

$$\lambda_n = \sup_{v_1, \dots, v_{n-1} \in H} \inf \{q(x, x) \mid x \in Q(A), \|x\|_H = 1, (x, v_j)_H = 0 \text{ für alle } 1 \leq j \leq n-1\}. \quad (3.2)$$

Bemerkung 3.1.2. (i) Das Supremum in (3.2) wird angenommen, wenn für v_1, \dots, v_{n-1} ein Orthonormalsystem u_1, \dots, u_{n-1} von Eigenvektoren der ersten $n-1$ Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ von A gewählt wird. In diesem Fall folgt

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \inf \{q(x, x) \mid x \in Q(A), \|x\|_H = 1\} \\ &= \inf \left\{ \frac{q(x, x)}{(x, x)_H} \mid x \in Q(A) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Für beliebiges $x \in Q(A)$ erhält man hierdurch eine Abschätzung

$$\lambda_n \leq \frac{q(x, x)}{(x, x)_H}. \quad (3.4)$$

(ii) Die Aussage in Theorem 3.1.1 gilt auch für einen beliebigen nach unten beschränkten Operator A mit

$$(Au, u)_H \geq c(u, u)_H, \quad c \in \mathbb{R},$$

indem man Theorem 3.1.1 auf $\tilde{A} = A - (c-1)\text{id}_H$ anwendet.

(iii) Ist A_F die Friedrichserweiterung eines symmetrischen, dicht definierten Operators A , dann erfüllt A_F die Bedingungen von Theorem 3.1.1, \sqrt{q} ist die Energienorm $\|\cdot\|_E$ und $Q(A)$ der Energieraum H_E von A .

Nach Bemerkung 2.5.2 können wir das Minimum-Maximum-Prinzip auf den Pseudo-Laplace-Operator Δ^η mit der Energienorm anwenden, die durch die Einschränkung der $H^1(X, \mu_{\mathbb{H}})$ -Norm auf \mathcal{H}_η induziert wird.

3.2 Ansatz für die Störung des Pseudo-Laplace-Operators

Wir formulieren nun den Ansatz für die Störung der Eigenwerte μ_n vom Typ (II) von Δ^η mithilfe des Minimum-Maximum-Prinzips. Um die Abhängigkeit eines Eigenwertes μ_n des Operators Δ^η von η zu betonen, schreiben wir in diesem Kapitel $\mu_n(\eta)$.

Es sei $\eta_0 > p_\Gamma$ fixiert und es sei

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon$$

für ein $0 < \varepsilon \ll 1$. Es sei ferner $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt und $v_n(z)$ sei die Eigenfunktion aus Theorem 2.5.8 von Δ^{η_0} zum Eigenwert $\mu_n(\eta_0)$.

Der absolute Term $v_{n,0}$ ist auf dem Intervall $[p_\Gamma, \infty[$ definiert und besitzt eine Nullstelle in η_0 . Wählen wir ein $r \geq p_\Gamma$ und eine stetige Funktion ψ , die das Intervall $[r, \eta]$ auf $[r, \eta_0]$ abbildet, dann ist die Funktion

$$w_n = w_{n,0} + (v_n - v_{n,0}) \quad (3.5)$$

mit absolutem Term

$$w_{n,0} = v_{n,0} \circ \psi$$

eine stetige Funktion in \mathcal{H}_η mit

$$w_{n,0}(\eta) = 0.$$

Wenn ψ auf dem Intervall $]r, \eta[$ von der Klasse C^k ist, gilt das gleiche für $w_{n,0}$. Für alle $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ stimmen die Fourierkoeffizienten $v_{n,m}$ und $w_{n,m}$ überein.

Bezeichnung 3.2.1. Für ein festes $r \in [p_\Gamma, \eta_0[$ sei $\psi :]r, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ eine Abbildung, sodass

- (i) $\psi(r) = r$,
- (ii) $\psi(\eta) = \eta_0$,
- (iii) $\psi :]r, \eta[\rightarrow]r, \eta_0[$ ein C^∞ -Diffeomorphismus ist.

Wenn wir die Abhängigkeit der Abbildung ψ von η oder r betonen wollen, schreiben wir ψ_η oder $\psi_\eta[r]$.

Beispiel 3.2.2. Wir geben einige naheliegende Wahlen für ψ an.

- (i) Die eindeutige affin-lineare Funktion, welche die Bedingungen aus Bezeichnung 3.2.1 erfüllt, ist

$$\psi_\eta[r](y) = r + \frac{\eta_0 - r}{\eta - r} \cdot (y - r).$$

Für diese Wahl von ψ ist $w_{n,0}$ nicht differenzierbar in r . Das bedeutet, w_n liegt in \mathcal{H}_η , aber nicht in $D(\Delta^\eta)$.

- (ii) Wenn ψ als die eindeutige quadratische Funktion mit $\psi'(r) = 1$ gewählt wird, gegeben durch

$$\psi_\eta[r](y) = y + \frac{\eta_0 - \eta}{(\eta - r)^2} \cdot (y - r)^2,$$

dann ist $w_{n,0}$ auch in r differenzierbar und w_n liegt im Definitionsbereich von Δ^η .

(iii) Der hyperbolische Abstand zweier Punkte y_1, y_2 auf der imaginären Achse ist

$$\varrho(y_1, y_2) = |\ln(y_2) - \ln(y_1)|.$$

Im Hinblick darauf geben wir eine „hyperbolische“ Transformation mit

$$\log(\psi_\eta[r](y)) = a \ln(y) + b$$

an. Sie ist gegeben durch

$$\psi_\eta[r](y) = \tilde{b}y^a$$

mit

$$\tilde{b} = r^{1-a} \quad \text{und} \quad a = \frac{\ln(\eta_0) - \ln(r)}{\ln(\eta) - \ln(r)}.$$

Für die Anwendung des Minimum-Maximum-Prinzips wird ein System von orthonormierten Funktionen benötigt. Wir legen daher die folgenden Bezeichnungen fest.

Bezeichnung 3.2.3. Es seien

$$\eta_0 > r \geq p_\Gamma$$

fest gewählt. Zusätzlich sei $\eta = \eta_0 + \varepsilon$ aus einer Umgebung $U =]\eta_0 - \delta, \eta_0 + \delta[$ von η_0 .

(i) Für $\eta > p_\Gamma$ sei $(v_n[\eta])_{n \in \mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthogonalsystem der Eigenvektoren von Δ^η und

$$u_n[\eta] = \frac{v_n[\eta]}{\|v_n[\eta]\|_{L_\eta^2}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

seien die zugehörigen normierten Eigenvektoren.

(ii) Für beliebiges festes $n \in \mathbb{N}$, eine Eigenfunktion $v_n[\eta_0]$ des Operators Δ^{η_0} und eine Transformation $\psi_\eta[r]$ wie in Bezeichnung 3.2.1 setzen wir

$$\begin{aligned} w_n &= v_{n,0}[\eta_0] \circ \psi_\eta[r] + (v_n[\eta_0] - v_{n,0}[\eta_0]), \\ \hat{w}_n &= w_n - \sum_{j=1}^{n-1} (u_j[\eta], w_n)_{L_\eta^2} \cdot u_j[\eta], \end{aligned}$$

und

$$\tilde{w}_n = \frac{\hat{w}_n}{\|\hat{w}_n\|_{L_\eta^2}}.$$

(iii) Wie in Theorem 2.5.8 sei $N \in \mathbb{N}$ dadurch bestimmt, dass $\mu_n(\eta) > \frac{1}{4}$ für alle $n > N$ gilt. Für $n > N$ wählen wir für $v_n[\eta]$ die trunkierte Eisensteinreihe

$$v_n[\eta](z) = \tilde{E}^\eta(z, s_n(\eta)), \quad s_n(\eta) = \frac{1}{2} + i\tau_n(\eta),$$

mit der Normierung aus Lemma 2.1.19, sodass der absolute Term von der Form

$$v_{n,0}[\eta](y) = \sqrt{y} \cos(\xi(y, \tau_n(\eta))), \quad \xi(y, \tau) = \ln(y)\tau - \frac{\vartheta(\tau)}{2},$$

ist, und $\|E^\eta(\cdot, s_n(\eta))\|_{L_\eta^2} = 2 \cdot \|v_n[\eta]\|_{L_\eta^2}$ gilt.

Der Spektralsatz 2.3.5 für den klassischen Laplace-Operator Δ_Γ impliziert, dass alle Eigenfunktionen des Typs (II) von Δ^η orthogonal zum Unterraum L_0^2 der automorphen Spitzenformen sind (Satz 2.3.5). Das Orthogonalisierungsverfahren muss daher nur innerhalb des Unterraums Θ_η angewendet werden, der von den Eigenfunktionen vom Typ (II) aufgespannt wird. Wir nehmen daher ohne Einschränkung an, dass die Vektoren u_1, \dots, u_{n-1} aus Bezeichnung 3.2.3 Eigenfunktionen vom Typ (II) sind.

3.3 Lineare Approximation

Ab nun seien $n > N$ und $\eta_0 > p_\Gamma$ fixiert.

Bemerkung 3.3.1. Wir betrachten zuerst $\eta > \eta_0$ und setzen

$$\varepsilon := \eta - \eta_0 > 0.$$

Nach (3.4) impliziert das Minimum-Maximum-Prinzip für den n -ten Eigenwert $\mu_n(\eta)$ des gestörten Operators Δ^η

$$\mu_n(\eta) \leq (\tilde{w}_n, \tilde{w}_n)_{\mathcal{H}_\eta}. \quad (3.6)$$

Wir nehmen an, dass die rechte Seite der Ungleichung eine Taylorentwicklung

$$(\tilde{w}_n, \tilde{w}_n)_{\mathcal{H}_\eta} = \mu_n(\eta_0) + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \dots \quad (3.7)$$

besitzt. Dann erhalten wir durch Einsetzen von (3.7) in (3.6) die Ungleichung

$$\mu_n(\eta) - \mu_n(\eta_0) \leq \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \dots$$

Division durch $\varepsilon > 0$ liefert

$$\frac{\mu_n(\eta) - \mu_n(\eta_0)}{\eta - \eta_0} \leq \alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon + \dots$$

Die Taylorentwicklung in (3.7) hängt nicht davon ab, ob $\eta > \eta_0$ oder $\eta < \eta_0$ gewählt wird. Daher erhalten wir durch analoge Rechnung mit $\varepsilon < 0$

$$\frac{\mu_n(\eta) - \mu_n(\eta_0)}{\eta - \eta_0} \geq \alpha_1,$$

da sich bei Division durch $\varepsilon < 0$ die Ungleichung umkehrt.

Zusammenfassung beider Ungleichungen liefert, dass der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{\eta \rightarrow \eta_0} \frac{\mu_n(\eta) - \mu_n(\eta_0)}{\eta - \eta_0} = \alpha_1$$

existiert, und folglich μ_n in η_0 differenzierbar ist mit

$$\mu_n'(\eta_0) = \alpha_1.$$

Im Folgenden weisen wir nach, dass der Term $(\tilde{w}_n, \tilde{w}_n)_{\mathcal{H}_\eta}$ eine Taylorentwicklung der Form (3.7) besitzt, und bestimmen daraus die Ableitung wie soeben beschrieben. Hierfür verwenden wir die affin-lineare Transformation

$$\psi(y) = r + \frac{\eta_0 - r}{\eta - r} \cdot (y - r)$$

aus Beispiel 3.2.2 (i).

Notation 3.3.2. Wir schreiben im Folgenden nur $(\cdot, -)$ für das Skalarprodukt auf L_η^2 und $(\cdot, -)_\eta$ für das Skalarprodukt auf \mathcal{H}_η .

Bemerkung 3.3.3. Es seien $v_n := v_n[\eta_0]$, w_n , \hat{w}_n und $u_j[\eta]$ bestimmt wie in Bezeichnung 3.2.3.

(i) Es gilt

$$(\hat{w}_n, \hat{w}_n) = (w_n, w_n) - \sum_{j=1}^{n-1} |(u_j[\eta], w_n)|^2$$

und

$$(\hat{w}_n, \hat{w}_n)_\eta = (w_n, w_n)_\eta - \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j(\eta) \cdot |(u_j[\eta], w_n)|^2,$$

da $u_j[\eta]$ eine Eigenfunktion zum Eigenwert $\mu_j(\eta)$ von Δ^η ist.

(ii) Da v_n reell analytisch von y abhängt ist, erhält man durch Anwendung der Kettenregel auf $w_{n,0} = v_{n,0}[\eta_0] \circ \psi_\eta$ für w_n eine Taylorentwicklung

$$w_n = v_n[\eta_0] + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots, \quad (3.8)$$

wobei die Koeffizienten f_j in L_η^2 , aber nicht notwendig in \mathcal{H}_η liegen. Insbesondere gibt es ein $g \in L_\eta^2$, sodass $w_n = v_n[\eta_0] + \varepsilon g$. Für $1 \leq j \leq n-1$ folgt

$$(u_j[\eta], w_n) = (u_j[\eta], v_n[\eta_0] + \varepsilon g) = (u_j[\eta], v_n[\eta_0]) + \varepsilon (u_j[\eta], g).$$

Beispiel 3.3.4. Die Funktion f_1 aus Gleichung (3.8) ist gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial \eta} v_{n,0}(\psi_\eta[r](y)) = v'_{n,0}(\psi_\eta[r](y)) \cdot \frac{\partial \psi_\eta[r]}{\partial \eta}(y).$$

Für die trunkeerte Eisensteinreihe $v_n = \tilde{E}^\eta(\cdot, \frac{1}{2} + i\tau_n)$ mit $v_{n,0}(\eta) = 0$ folgt

$$v'_{n,0}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{y}} \left(\frac{\cos(\xi(y, \tau_n))}{2} - \tau_n \sin(\xi(y, \tau_n)) \right) \Big|_{y=\eta} = \pm \frac{\tau_n}{\sqrt{\eta}} \neq 0.$$

Die Parameter-Ableitung der affin-linearen Transformation

$$\psi_\eta[r](y) = r + \frac{\eta_0 - r}{\eta - r} \cdot (y - r)$$

ist gegeben durch

$$\frac{\partial \psi_\eta[r]}{\partial \eta}(y) \Big|_{\eta=\eta_0} = -\frac{y - r}{\eta_0 - r}$$

und besitzt keine Nullstelle in $y_0 = \eta_0$. Also liegt f_1 nicht in \mathcal{H}_η .

Lemma 3.3.5. Für alle $1 \leq j \leq n-1$ gilt

$$(u_j[\eta], v_n) = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Beweis. Die Maass-Selberg-Relation 2.2.6 für $f = u_j[\eta]$ und $g = v_n[\eta_0]$ liefert wegen $f_0(\eta) = 0$

$$\begin{aligned} (\tau_j[\eta]^2 - \tau_n[\eta_0]^2) \cdot (u_j[\eta], v_n[\eta_0]) &= (f^\eta, g^\eta)_{L^2} \\ &= \frac{1}{\|v_j[\eta]\|_{L^2_\eta}} \cdot \sin(\xi(\eta_0, \tau_j[\eta])) \frac{\tau_j[\eta]}{\sqrt{\eta}} \cdot \sqrt{\eta} \cos(\xi(\eta, \tau_n[\eta_0])) \\ &= \frac{\sin(\xi(\eta_0, \tau_j[\eta])) \tau_j[\eta]}{\|v_j[\eta]\|_{L^2_\eta}} \cos(\xi(\eta, \tau_n[\eta_0])). \end{aligned}$$

Durch Taylorentwicklung des Terms $\cos(\xi(\eta, \tau_n[\eta_0]))$ in η_0 erhält man

$$\cos\left(\tau_n[\eta_0] \ln(\eta) - \frac{\vartheta(\tau_n[\eta_0])}{2}\right) = -\sin(\xi(\eta_0, \tau_n[\eta_0])) \frac{\tau_n[\eta_0]}{\eta_0} \cdot \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad \square$$

Bemerkung 3.3.6. Wir benötigen an diesem Punkt die Maass-Selberg-Relation, da wir a priori nicht wissen, ob u_j nach η differenziert werden kann. Dieses Problem entfällt unter Verwendung der holomorphen Störungstheorie im zweiten Teil der Arbeit (s. Abschnitt 7.3).

Korollar 3.3.7. Es gilt

$$(\tilde{w}_n, \tilde{w}_n)_\eta = \frac{(\hat{w}_n, \hat{w}_n)_\eta}{(\hat{w}_n, \hat{w}_n)} = \frac{(w_n, w_n)_\eta}{(w_n, w_n)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Bemerkung 3.3.8. Die Koeffizienten $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ seien bestimmt durch

$$(w_n, w_n)_\eta = \mu_n(\eta_0) \cdot (w_n, w_n) + a_1 \cdot \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.9)$$

$$(w_n, w_n) = (v_n, v_n) + b_1 \varepsilon + b_2 \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

Dann gilt

$$\frac{(w_n, w_n)_\eta}{(w_n, w_n)} = \mu_n(\eta_0) + \varepsilon \cdot \frac{a_1}{(v_n, v_n)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

A priori ist nicht bekannt, ob die Parameter a_j und b_j von den Wahlen von r und ψ abhängen. Wenn wir die Abhängigkeiten betonen wollen, schreiben wir $a_j[r]$ oder $a_j[r, \psi]$ beziehungsweise $b_j[r]$ oder $b_j[r, \psi]$.

Lemma 3.3.9. Es sei $n > N$, und es sei v_n die trunkierte Eisensteinreihe $\tilde{E}^\eta(\cdot, \frac{1}{2} + i\tau_n)$ zum Eigenwert $\mu_n(\eta) = \frac{1}{4} + \tau_n^2$ von Δ^{η_0} . Ferner sei ψ die affin-lineare Transformation aus Beispiel 3.2.2 (i). Dann ist der Koeffizient

$$a_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(w_n, w_n)_\eta - \mu_n(\eta) \cdot (w_n, w_n)}{\varepsilon}$$

aus (3.9) gegeben durch

$$a_1 = -\frac{\tau_n^2}{\eta_0}.$$

Für den Beweis zerlegen wir das Integral über X in drei Teile. Hierzu führen wir die folgende Bezeichnung ein.

Bezeichnung 3.3.10. Die Fläche $X = \Gamma \setminus \mathbb{H}$ sei mit dem Fundamentalpolygon $F_\infty = X_\eta \cup S_\eta$ identifiziert wie in Konvention 1.2.14. Für $\eta > r \geq p_\Gamma$ zerlegen wir X_η zusätzlich in zwei Teilmengen

$$X_\eta = X_r \cup P_{r,\eta}$$

mit

$$P_{r,\eta} = X_\eta \setminus X_r^\circ \simeq]0, 1[\times [r, \eta].$$

Beweis von Lemma 3.3.9. Wir spalten das Integral über X mittels der Zerlegung in Bezeichnung 3.3.10 in drei Teile auf wie folgt:

$$\begin{aligned} (w_n, w_n)_\eta &= \int_{X_r} (\text{grad } w_n, \text{grad } w_n) \, d\mu_{\mathbb{H}} + \int_{P_{r,\eta}} (\text{grad } w_n, \text{grad } w_n) \, d\mu_{\mathbb{H}} \\ &\quad + \int_{S_\eta} (\text{grad } w_n, \text{grad } w_n) \, d\mu_{\mathbb{H}}. \end{aligned}$$

Die Greensche Formel liefert

$$\begin{aligned} (w_n, w_n)_\eta &= \int_{X_r} \Delta w_n \cdot w_n \, d\mu_{\mathbb{H}} + v_{n,0}(r) v'_{n,0}(r) \\ &\quad + \int_{P_{r,\eta}} \Delta w_n \cdot w_n \, d\mu_{\mathbb{H}} - w_{n,0}(r) w'_{n,0}(r) + \int_{S_\eta} \Delta w_n \cdot w_n \, d\mu_{\mathbb{H}}, \end{aligned}$$

da alle Fourierkoeffizienten $w_{n,m} = v_{n,m}$ für $m \neq 0$ stetig sind, und $w_{n,0}$ nach Konstruktion in η eine Nullstelle besitzt. Für die affine Transformation ψ schreiben wir hilfsweise

$$\psi_\eta[r](y) = a_\eta y + b_\eta. \tag{3.11}$$

Dann gilt für den Randterm von $w_{n,0}$ in r

$$w'_{n,0}(r) = a_\eta v'_{n,0}(r)$$

und folglich

$$v_{n,0}(r) v'_{n,0}(r) - w_{n,0}(r) w'_{n,0}(r) = (1 - a_\eta) v_{n,0}(r) v'_{n,0}(r).$$

Da w_n auf X_r und S_η mit v_n übereinstimmt, folgt mit $\Delta v_n = \mu_n(\eta_0) v_n$

$$\begin{aligned} (w_n, w_n)_\eta &= \mu_n(\eta_0) \cdot \int_{X_r} w_n^2 \, d\mu_{\mathbb{H}} + (1 - a) v_{n,0}(r) v'_{n,0}(r) \\ &\quad + \int_{P_{r,\eta}} \Delta w_n \cdot w_n \, d\mu_{\mathbb{H}} + \mu_n(\eta_0) \cdot \int_{S_\eta} w_n^2 \, d\mu_{\mathbb{H}}. \end{aligned}$$

Auf $P_{r,\eta}$ gilt zusätzlich für jedes $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\Delta (w_{n,m}(y) e_m(x)) = \mu_n(\eta_0) \cdot w_{n,m}(y) e_m(x).$$

Daher bleibt nur noch die Differenz

$$\begin{aligned} (w_n, w_n)_\eta - \mu_n(\eta_0) \cdot (w_n, w_n) &= - \int_r^\eta w''_{n,0}(y) \cdot w_{n,0}(y) \, dy - \mu_n(\eta_0) \cdot \int_r^\eta w_{n,0}^2 \, d\mu_{\mathbb{H}} \\ &\quad + (1 - a_\eta)v_{n,0}(r)v'_{n,0}(r) \end{aligned} \quad (3.12)$$

zu berechnen. Wir setzen

$$I_1 := - \int_r^\eta w''_{n,0}(y) \cdot w_{n,0}(y) \, dy.$$

Nach der Kettenregel gilt

$$w''_{n,0}(y) = (v_{n,0} \circ \psi)''(y) = a_\eta^2(v''_{n,0} \circ \psi)(y).$$

Dann folgt mit dem Transformationssatz

$$\begin{aligned} I_1 &= -a_\eta^2 \int_r^\eta v''_{n,0}(\psi(y)) \cdot v_{n,0}(\psi(y)) \, dy = -a_\eta \int_r^{\eta_0} v''_{n,0}(y) \cdot v_{n,0}(y) \, dy \\ &= a_\eta \mu_n(\eta_0) \cdot \int_r^{\eta_0} v_{n,0}(y)^2 \frac{dy}{y^2}, \end{aligned}$$

da $v_{n,0}$ für alle $r < y < \eta_0$ die Eigenwertgleichung

$$-v''_{n,0}(y) = \frac{\mu_n(\eta_0)}{y^2} \cdot v_{n,0}(y)$$

erfüllt. Andererseits liefert die Transformationsformel für das zweite Integral

$$I_2 := \int_r^\eta w_n(y)^2 \frac{dy}{y^2} = a_\eta \int_r^{\eta_0} v_{n,0}(y)^2 \frac{dy}{(y - b_\eta)^2}.$$

Die Koeffizienten a_η und b_η aus (3.11) sind gegeben durch

$$a_\eta = \frac{\eta_0 - r}{\eta - r} = 1 - \frac{\varepsilon}{\eta_0 - r} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

und

$$b_\eta = r(1 - a_\eta).$$

Da $b_\eta = \mathcal{O}(\varepsilon)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ und

$$\frac{1}{(y - b)^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{2b}{y^3} + \mathcal{O}(b^2), \quad b \rightarrow 0,$$

folgt

$$I_2 = a_\eta \int_r^{\eta_0} v_{n,0}(y)^2 \frac{dy}{y^2} + 2a_\eta b_\eta \int_r^{\eta_0} v_{n,0}(y)^2 \frac{dy}{y^3} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Mit

$$a_\eta b_\eta = a_\eta r(1 - a_\eta) = r(1 - a_\eta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

erhalten wir

$$I_2 = a_\eta \int_r^{\eta_0} v_{n,0}(y)^2 \frac{dy}{y^2} + 2r(1 - a_\eta) \int_r^{\eta_0} v_{n,0}(y)^2 \frac{dy}{y^3} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Für die Differenz aus (3.12) gilt damit insgesamt

$$\begin{aligned}
 & I_1 - \mu_n(\eta_0)I_2 + (1 - a_\eta)v_{n,0}(r)v'_{n,0}(r) \\
 &= -2r(1 - a_\eta)\mu_n(\eta_0) \cdot \int_r^{\eta_0} v_{n,0}(y)^2 \frac{dy}{y^3} + (1 - a_\eta)v_{n,0}(r)v'_{n,0}(r) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \frac{\varepsilon}{\eta_0 - r} \cdot \left(-2r\mu_n(\eta_0) \cdot \int_r^{\eta_0} v_{n,0}(y)^2 \frac{dy}{y^3} + v_{n,0}(r)v'_{n,0}(r) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Um den Ausdruck in der Klammer zu berechnen, bestimmt man zu

$$f(y) := v_{n,0}^2(y) \cdot \frac{1}{y^3} = \cos^2(\xi(y, \tau_n)) \cdot \frac{1}{y^2} = \cos^2\left(\tau_n \ln(y) - \frac{\vartheta(\tau_n)}{2}\right) \cdot \frac{1}{y^2}$$

mit partieller Integration die Stammfunktion

$$\int f = \frac{1}{y} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}(\sin^2(\xi(y, \tau_n)) - \cos^2(\xi(y, \tau_n))) + 2\tau \sin(\xi(y, \tau_n)) \cos(\xi(y, \tau_n))}{1 + 4\tau_n^2} \right).$$

Hierbei gilt $1 + 4\tau_n^2 = 4\mu_n(\eta_0)$. Ferner liefert Anwendung des trigonometrischen Pythagoras

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sin^2(\xi(y, \tau_n)) - \frac{1}{2} \cos^2(\xi(y, \tau_n)) + 2\tau \sin(\xi(y, \tau_n)) \cos(\xi(y, \tau_n)) \\
 &= \frac{1}{2} - \cos^2(\xi(y, \tau_n)) + 2\tau \sin(\xi(y, \tau_n)) \cos(\xi(y, \tau_n)) \\
 &= \frac{1}{2} - 2v_{n,0}(y) \cdot v'_{n,0}(y).
 \end{aligned}$$

Damit folgt durch Auswertung des Integrals

$$\begin{aligned}
 \int_r^{\eta_0} f &= \frac{1}{\eta_0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8\mu_n(\eta_0)} \right) - \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8\mu_n(\eta_0)} \right) + \frac{v_{n,0}(r) \cdot v'_{n,0}(r)}{2r\mu_n(\eta_0)} \\
 &= \frac{\eta_0 - r}{2\eta_0 r} \cdot \frac{\tau_n^2}{\mu_n(\eta_0)} + \frac{v_{n,0}(r) \cdot v'_{n,0}(r)}{2r\mu_n(\eta_0)}
 \end{aligned}$$

und schließlich

$$a_1 = \frac{1}{\eta_0 - r} \cdot \left(-(\eta_0 - r) \frac{\tau_n^2}{\eta_0} - v_{n,0}(r)v'_{n,0}(r) + v_{n,0}(r)v'_{n,0}(r) \right) = -\frac{\tau_n^2}{\eta_0}. \quad \square$$

Nach der Vorüberlegung in Bemerkung 3.3.1 erhalten wir somit das folgende Ergebnis.

Satz 3.3.11. Für $n > N$ ist der Eigenwert

$$\mu_n(\eta) = \tau_n(\eta)^2 + \frac{1}{4}$$

von Δ^η , der zu der trunkierten Eisensteinreihe

$$v_n[\eta](z) = \tilde{E}^\eta(z, s_n(\eta)), \quad s_n(\eta) = \frac{1}{2} + i\tau_n(\eta), \quad \tau_n(\eta) > 0,$$

mit $\tilde{E}(z, s)$ wie in Lemma 2.1.19 assoziiert ist, auf $]p_\Gamma, \infty[$ differenzierbar nach η mit

$$\mu'_n(\eta) = -\frac{\tau_n(\eta)^2}{\eta \cdot \|v_n[\eta]\|_{L^2_\eta}^2}.$$

Der Koeffizient a_1 aus Lemma 3.3.9 hängt nicht von r ab. Das Verfahren im Beweis von Lemma 3.3.9 liefert für die beiden anderen in Beispiel 3.2.2 angegebenen Transformationen ψ dasselbe Ergebnis.

Mithilfe der Ableitung $\mu'_n(\eta)$ können wir durch implizites Ableiten nun die Ableitung der Phasenfunktion ϑ nach τ bestimmen. Die Formel, die wir hieraus erhalten, stimmt mit der Maass-Selberg-Relation aus Beispiel 2.2.8 überein.

Korollar 3.3.12. *Es sei φ die Streumatrix der Eisensteinreihe und es sei*

$$\vartheta(\tau) = -i \log \left(\varphi \left(\frac{1}{2} + i\tau \right) \right).$$

Dann gilt für $\tau > 0$ und jede Nullstelle $\eta = \eta(\tau) > p_\Gamma$ von $E_0(y, \frac{1}{2} + i\tau)$

$$\vartheta'(\tau) = 2 \ln(\eta) - \|E^\eta(\cdot, \frac{1}{2} + i\tau)\|_{L^2_\eta}^2.$$

Beweis. Zu $\tau > 0$ seien $\eta(\tau) > p_\Gamma$ und $n(\tau) \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$$\tau = \tau_n(\eta)$$

zum Eigenwert $\mu_n(\eta) = \frac{1}{4} + \tau^2$ von Δ^η gehört. Dann gilt

$$\cos \left(\tau \ln(\eta) - \frac{\vartheta(\tau)}{2} \right) = 0.$$

Folglich gibt es ein $C \in \mathbb{R}$, das nicht von τ abhängt, sodass

$$\xi(\tau) := \xi(\eta(\tau), \tau) = \tau \ln(\eta(\tau)) - \frac{\vartheta(\tau)}{2} = C.$$

Es folgt

$$\vartheta'(\tau) = 2 \ln(\eta(\tau)) + 2\tau \frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)}. \quad (3.13)$$

Des Weiteren folgt aus Satz 3.3.11 und

$$\mu'(\eta) = 2\tau(\eta) \cdot \tau'(\eta),$$

dass

$$\tau'(\eta) = -\frac{2\tau(\eta)}{\eta \|E^\eta\|^2}.$$

Inversion liefert

$$\eta'(\tau) = -\frac{\eta \|E^\eta\|^2}{2\tau(\eta)}.$$

Schließlich erhalten wir

$$\vartheta'(\tau) = 2 \ln(\eta) + 2\frac{\tau}{\eta} \cdot \left(-\frac{\eta \|E^\eta\|^2}{2\tau} \right) = 2 \ln(\eta) - \|E^\eta\|^2. \quad \square$$

3.4 Eine Differentialgleichung für die Phasenfunktion der Streumatrix

Durch die Bestimmung der ersten Ableitung ist es nicht direkt möglich, das Wachstum von ϑ zu bestimmen, da das Wachstum von $\|E^\eta(\cdot, s)\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2$ in s nicht bekannt ist.

Wir können stattdessen das Verfahren aus Abschnitt 3.3 wiederholen mit dem Ziel, eine Abschätzung für die zweite Ableitung von $\mu_n(\eta)$ zu erhalten und durch Lösung einer Differentialgleichung oder -ungleichung für ϑ das asymptotische Verhalten zu ermitteln.

Die Abschätzung für $\mu_n''(\eta)$, die auf diese Weise gewonnen wird, hängt von der Wahl von r , der Transformation ψ und den $n-1$ Eigenvektoren u_j ab, die zur Orthogonalisierung der gestauchten Funktion w_n nötig sind. Ferner liefert das Verfahren keine Abschätzung nach unten.

Theorem 3.4.1. *Es sei $\tau_0 > 0$. Für τ aus einer reellen Umgebung U von τ_0 seien $n = n(\tau) > N$ und $\eta = \eta(\tau) > p_\Gamma$ dadurch bestimmt, dass für alle $\tau \in U$ gilt*

$$\tau = \tau_n(\eta),$$

und

$$\mu_n(\eta) = \tau_n(\eta)^2 + \frac{1}{4}$$

der n -te Eigenwert von Δ^η mit zugehöriger Eigenfunktion

$$v_n[\eta](z) = \tilde{E}^\eta(z, s_n(\eta)), \quad s_n(\eta) = \frac{1}{2} + i\tau_n(\eta),$$

ist, wobei die Eisensteinreihe normiert sei wie in Lemma 2.1.19. Dann gilt für $\tau \in U$

$$\vartheta''(\tau) = 8 \frac{\|v_n[\eta]\|_{L^2_\eta}^6}{\tau^3} \cdot \eta^2 \mu_n''(\eta) - 8 \frac{\|v_n[\eta]\|_{L^2_\eta}^4}{\tau} - 12 \frac{\|v_n[\eta]\|_{L^2_\eta}^2}{\tau}.$$

Beweis. Wir gehen vor wie im Beweis von Korollar 3.3.12. Dort haben wir als Zwischenergebnis (3.13) erhalten

$$\vartheta'(\tau) = 2 \ln(\eta) + 2\tau \frac{\eta'(\tau)}{\eta}.$$

Durch erneutes Ableiten folgt

$$\vartheta''(\tau) = 4 \frac{\eta'(\tau)}{\eta} + 2\tau \left(\frac{\eta''(\tau)}{\eta} - \frac{(\eta'(\tau))^2}{\eta^2} \right).$$

Einsetzen von

$$\eta'(\tau) = -\frac{2\eta \|v_n\|_{L^2_\eta}^2}{\tau}$$

liefert

$$\vartheta''(\tau) = -8 \frac{\|v_n\|_{L^2_\eta}^2}{\tau} - 8 \frac{\|v_n\|_{L^2_\eta}^4}{\tau} + 2\tau \frac{\eta''(\tau)}{\eta}. \quad (3.14)$$

Wir wollen nun den Term $\frac{\eta''(\tau)}{\eta}$ durch $\mu_n''(\eta)$ ausdrücken. Wegen $\mu_n(\eta) = \tau^2 + \frac{1}{4}$ gilt

$$\mu_n'(\eta) = 2\tau \cdot \tau'(\eta)$$

und

$$\mu_n''(\eta) = 2\tau'(\eta)^2 + 2\tau \cdot \tau''(\eta).$$

Einsetzen von

$$\tau'(\eta) = -\frac{\tau}{2\eta\|v_n\|_{L_\eta^2}^2}$$

führt zu

$$\mu_n''(\eta) = \frac{\tau^2}{2\eta^2\|v_n\|_{L_\eta^2}^4} + 2\tau \cdot \tau''(\eta).$$

Es folgt

$$\tau''(\eta) = \frac{\mu_n''(\eta)}{2\tau} - \frac{\tau}{4\eta^2\|v_n\|_{L_\eta^2}^4}.$$

Es bleibt, eine Formel für die Inversion von $\eta''(\tau)$ in $\tau''(\eta)$ zu bestimmen. Es sei hierzu f ein beliebiger C^2 -Diffeomorphismus mit nullstellenfreier Ableitung und $g = f^{-1}$. Dann lautet die Inversionsformel für die erste Ableitung

$$g'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Erneutes Differenzieren dieser Formel liefert

$$\begin{aligned} g''(y) &= -\frac{1}{(f'(f^{-1}(y)))^2} \cdot (f'(f^{-1}(y)))'(y) \\ &= -\frac{1}{(f'(f^{-1}(y)))^2} \cdot f''(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) \\ &= -\frac{1}{(f'(f^{-1}(y)))^3} \cdot f''(f^{-1}(y)) \\ &= -g'(y)^3 \cdot f''(x) \end{aligned}$$

mit $x = f^{-1}(y)$. Anwendung auf $\eta(\tau)$ liefert

$$\begin{aligned} \eta''(\tau) &= -(\eta'(\tau))^3 \cdot \tau''(\eta) = \frac{8\eta^3\|v_n\|_{L_\eta^2}^6}{\tau^3} \cdot \tau''(\eta) \\ &= \frac{8\eta^3\|v_n\|_{L_\eta^2}^6}{\tau^3} \cdot \left(\frac{\mu_n''(\eta)}{2\tau} - \frac{\tau}{4\eta^2\|v_n\|_{L_\eta^2}^4} \right) \\ &= \frac{4\eta^3\|v_n\|_{L_\eta^2}^6}{\tau^4} \cdot \mu_n''(\eta) - \frac{2\eta\|v_n\|_{L_\eta^2}^2}{\tau^2}. \end{aligned}$$

Einsetzen von $\frac{\eta''(\tau)}{\eta}$ in ϑ'' aus (3.14) liefert schließlich

$$\begin{aligned} \vartheta''(\tau) &= -8\frac{\|v_n\|_{L_\eta^2}^2}{\tau} - 8\frac{\|v_n\|_{L_\eta^2}^4}{\tau} + 2\tau\frac{\eta''(\tau)}{\eta} \\ &= -8\frac{\|v_n\|_{L_\eta^2}^2}{\tau} - 8\frac{\|v_n\|_{L_\eta^2}^4}{\tau} + 8\frac{\|v_n\|_{L_\eta^2}^6\eta^2}{\tau^3} \cdot \mu_n''(\eta) - 4\frac{\|v_n\|_{L_\eta^2}^2}{\tau} \\ &= -12\frac{\|v_n\|_{L_\eta^2}^2}{\tau} - 8\frac{\|v_n\|_{L_\eta^2}^4}{\tau} + 8\frac{\|v_n\|_{L_\eta^2}^6}{\tau^3} \cdot \eta^2\mu_n''(\eta). \end{aligned}$$

□

Durch Substitution von

$$4\|v_n\|_{L_\eta^2}^2 = -\vartheta'(\tau) + 2\ln(\eta) = -\vartheta'(\tau) + \frac{\vartheta(\tau)}{\tau}$$

erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 3.4.2. *Es gelten die Voraussetzungen von Theorem 3.4.1. Dann löst $\vartheta(\tau)$ die Differentialgleichung*

$$\vartheta'' = \frac{1}{\tau} \left(-\vartheta' + \frac{\vartheta}{\tau} \right) \cdot 2\|v_n\|_{L_\eta^2}^4 \cdot \frac{\eta^2 \mu_n''(\eta)}{\tau^2} - \frac{1}{2\tau} \left(\vartheta' - \frac{\vartheta}{\tau} \right)^2 - \frac{3}{\tau} \left(-\vartheta' + \frac{\vartheta}{\tau} \right). \quad (3.15)$$

In der folgenden Bemerkung überlegen wir uns, wie man diese Differentialgleichung durch geeignete Substitutionen in eine einfachere Differentialgleichung überführen kann.

Bemerkung 3.4.3. Wir setzen

$$T(\tau) = \frac{\vartheta(\tau)}{\tau}.$$

Die ersten beiden Ableitungen von T sind gegeben durch

$$T' = \frac{\vartheta'}{\tau} - \frac{\vartheta}{\tau^2} = -\frac{1}{\tau} \left(-\vartheta' + \frac{\vartheta}{\tau} \right)$$

und

$$T'' = \frac{\vartheta''}{\tau} - 2\frac{\vartheta'}{\tau^2} + 2\frac{\vartheta}{\tau^3} = \frac{\vartheta''}{\tau} - \frac{2T'}{\tau}.$$

Also gilt

$$\vartheta'' = \tau \cdot T'' + 2T'$$

und T löst die Differentialgleichung

$$T'' = -T' \cdot 2\|v_n\|_{L_\eta^2}^4 \frac{\eta^2 \mu_n''(\eta)}{\tau^2} - \frac{1}{2} \cdot (T')^2 + \frac{T'}{\tau}. \quad (3.16)$$

Setzen wir ferner

$$U(\tau) = T'(\tau),$$

dann löst U die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} U' &= -U \cdot 2\|v_n\|_{L_\eta^2}^4 \frac{\eta^2 \mu_n''(\eta)}{\tau^2} - \frac{1}{2} U^2 + \frac{U}{\tau} \\ &= \left(-2\|v_n\|_{L_\eta^2}^4 \frac{\eta^2 \mu_n''(\eta)}{\tau^2} + \frac{1}{\tau} \right) U - \frac{1}{2} U^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die Differentialgleichung

$$u' + M(\tau) \cdot u + \frac{1}{2} u^2 = 0 \quad (3.18)$$

ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit Bernoulli-Exponent $\alpha = 2$, und die zugehörige lineare Differentialgleichung für

$$g(\tau) = \frac{1}{u(\tau)}$$

ist

$$g' - M(\tau) \cdot g - \frac{1}{2} = 0.$$

Ihre Lösung ist gegeben durch

$$g(\tau) = c \cdot \exp\left(\int^\tau M(t) dt\right) + \frac{1}{2} \cdot \int^\tau \exp\left(-\int^x M(t) dt\right) dx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Resubstitution ergibt

$$\vartheta(\tau) = \tau \cdot \int \frac{dt}{g(t)}.$$

In Abschnitt 3.3 wurde durch Bestimmung des Taylorpolynoms erster Ordnung des Ausdrucks

$$(\tilde{w}_n, \tilde{w}_n)_\eta - \mu_n(\eta_0) \cdot (\tilde{w}_n, \tilde{w}_n)$$

die erste Ableitung von $\mu_n(\eta_0)$ exakt bestimmt. Hierbei wurde ausgenutzt, dass $\varepsilon = \eta - \eta_0$ das Vorzeichen wechselt je nachdem, ob $\eta > \eta_0$ oder $\eta < \eta_0$ gewählt wird. Dies ist für den zweiten Taylorkoeffizienten nicht möglich, da in jedem Fall $\varepsilon^2 > 0$ gilt. Das Minimum-Maximum-Prinzip liefert somit im Allgemeinen nur eine Abschätzung nach oben. Ferner hängen die Taylorkoeffizienten α_k höherer Ordnung aus Gleichung (3.7) von der Wahl von r und $\psi_\eta[r]$ ab.

Beispiel 3.4.4. Es sei $\psi_\eta[r]$ die affin-lineare Transformation aus Beispiel 3.2.2 (i), $n > N$ und v_n normiert wie in Satz 3.3.11. Wir nehmen zusätzlich an, dass η_0 so groß ist, dass es ein $r \in]p_\Gamma, \eta[$ gibt mit

$$v_{n,0}(r) = 0.$$

Dann erhalten wir für $\varepsilon \rightarrow 0$ die Näherung zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{(\hat{w}_n, \hat{w}_n)_\eta}{(\hat{w}_n, \hat{w}_n)} &= \mu_n(\eta_0) + \mu_n'(\eta_0) \cdot \varepsilon \\ &+ \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{-a_1 \cdot b_1[r]}{\|v_n\|_{L_\eta^2}^4} + \frac{a_2[r] + \sum_{j=1}^{n-1} t_j[r] \cdot (\mu_n(\eta_0) - \mu_j(\eta_0))}{\|v_n\|_{L_\eta^2}^2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten a_1 , $a_2[r]$ und $b_1[r]$ aus Bemerkung 3.3.8 gegeben sind durch

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{\tau_n^2}{\eta_0}, & a_2[r] &= \frac{\tau_n^2}{\eta_0^2} \cdot \frac{(\frac{29}{16} + \frac{5}{4}\tau_n^2)\eta_0 - (\frac{3}{16} + \frac{3}{4}\tau_n^2)r}{(\eta_0 - r)(1 + \tau_n^2)}, \\ b_1[r] &= \frac{\ln(\eta_0) - \ln(r)}{2(\eta_0 - r)} - \frac{\tau_n^2}{\eta_0 \mu_n(\eta_0)}, \end{aligned}$$

und $t_j[r]$ für $1 \leq j \leq n-1$ durch

$$|(u_j, w_n)|^2 = t_j[r] \cdot \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

bestimmt sei.

Das folgende Beispiel zeigt, dass im Falle des euklidischen Laplace-Operators die Orthogonalisierung von w_n , die für die Anwendung des Minimum-Maximum-Prinzips notwendig ist, die Abschätzung für die höheren Ableitungen verschlechtert.

3.4 Eine Differentialgleichung für die Phasenfunktion der Streumatrix

Beispiel 3.4.5. Es sei $\Omega =]0, \omega[$ ein beschränktes Intervall in \mathbb{R} und Δ_ω der Laplace-Operator auf Ω mit Dirichlet-Randbedingungen, d. h.

$$\Delta_\omega f(x) = -f''(x), \quad f \in D(\Delta_\omega) = H_0^2(\Omega, \lambda^1).$$

Die induzierte Sesquilinearform ist

$$(u, v)_\omega = (u', v')_{L^2(\Omega, \lambda^1)}.$$

Ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren von Δ_ω mit den zugehörigen Eigenwerten ist gegeben durch

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \cdot \sin(\kappa_n(\omega)x), \quad \lambda_n(\omega) = \kappa_n(\omega)^2, \quad \kappa_n(\omega) = \frac{\pi n}{\omega}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Wir fixieren $n \in \mathbb{N}$ und betrachten die nicht normierte Eigenfunktion

$$v_n[\omega](x) := \sin(\kappa_n(\omega)x).$$

Es sei nun $\omega_0 > 0$ fest gewählt und

$$\psi_\omega(x) = \frac{\omega_0}{\omega} \cdot x$$

die eindeutig bestimmte affin-lineare Funktion mit $\psi_\omega(0) = 0$ und $\psi_\omega(\omega) = \omega_0$. Dann gilt für die gestauchte Funktion $w_n = v_n \circ \psi$ bereits

$$w_n(x) = v_n[\omega_0] \circ \psi_\omega(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{\omega_0} \cdot \frac{\omega_0}{\omega} \cdot x\right) = \sin\left(\frac{\pi n}{\omega} \cdot x\right) = v_n[\omega](x).$$

Insbesondere gilt

$$\frac{(w_n, w_n)_\omega}{(w_n, w_n)} = \lambda_n(\omega),$$

und durch Taylorentwicklung der linken Seite lassen sich alle Ableitungen von λ_n bestimmen.

(ii) Ist \hat{w}_n zu w_n durch Orthogonalisierung bestimmt wie in Bezeichnung 3.2.3, dann erhält man in Analogie zu Beispiel 3.4.4 durch das Minimum-Maximum-Prinzip für $\varepsilon \rightarrow 0$ die Näherung zweiter Ordnung

$$\frac{(\hat{w}_n, \hat{w}_n)_\omega}{(\hat{w}_n, \hat{w}_n)} = \lambda_n(\omega_0) + \lambda_n'(\omega_0) \cdot \varepsilon + \lambda_n''(\omega_0) \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} + \varepsilon^2 \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \frac{t_j \cdot (\lambda_n(\omega_0) - \lambda_j(\omega_0))}{\|v_n\|_{L^2(\Omega, \lambda^1)}^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Die durch Orthogonalisierung entstehenden Zusatzterme

$$t_j = \frac{2}{\omega_0(j+n)^2}$$

sind positiv.

Abschätzungen unter Vernachlässigung der „störenden“ Terme r und t_j in der Formel aus Beispiel 3.4.4 führen zu der folgenden Vermutung, die in Übereinstimmung mit der Selberg-Roelcke-Vermutung steht.

Vermutung 3.4.6. (i) Es gibt $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, sodass für alle $\eta > p_\Gamma$ gilt

$$C_1 \cdot 2 \frac{\tau_n^2}{\eta^2 \cdot \|v_n\|_{L_\eta^2}^2} \leq \mu_n''(\eta) \leq C_2 \cdot 2 \frac{\tau_n^2}{\eta^2 \cdot \|v_n\|_{L_\eta^2}^2}.$$

(ii) Die Phasenfunktion ϑ besitzt Wendestellen, d. h. $\vartheta''(\tau)$ hat Nullstellen.

(iii) Für die Funktion

$$M(\tau) = 2 \|v_n\|_{L_\eta^2}^4 \frac{\eta^2 \mu_n''(\tau)}{\tau^2} - \frac{1}{\tau}$$

aus (3.18) gilt

$$M(\tau) \approx \frac{1}{\tau}, \quad \tau \rightarrow \infty,$$

und ϑ wächst asymptotisch wie

$$\vartheta(\tau) \approx \tau \log(\tau), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Kapitel 4

Grundlagen der holomorphen Störungstheorie

Bei der klassischen Friedrichserweiterung wird zu einem unbeschränkten symmetrischen Operator, für den es ein $\beta > 0$ gibt mit

$$(Au, u) \geq \beta(u, u), \quad u \in D(A) \subset H,$$

eine selbstadjungierte positive Erweiterung A_F konstruiert, deren Spektrum im Intervall $[\beta, \infty[$ enthalten ist. Diese Konstruktion wird durch das Konzept des *m-sektoriellen Operators* verallgemeinert, dessen Spektrum in einem Sektor der Form

$$\{\operatorname{Re} z \geq \beta, |\arg(z - \beta)| < \theta\}, \quad \beta \in \mathbb{R}, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2},$$

liegt. Wie die Friedrichserweiterung mithilfe der positiven Form (Au, u) konstruiert wird, kann man zu einer *sektoriellen Form* einen *m-sektoriellen Operator* konstruieren (Theorem 4.2.11).

Wenn die Form zusätzlich holomorph von einem Parameter abhängt, dann erhält man unter bestimmten Voraussetzungen eine *holomorphe Familie von Operatoren*, deren Eigenwerte und Eigenfunktionen ebenfalls holomorph variiert werden können (Theorem 4.3.19). Dies gilt aber im Allgemeinen nur für endliche Systeme von Eigenwerten und Eigenvektoren.

Für den Leser, der mit der holomorphen Störungstheorie von Formen und Operatoren nicht vertraut ist, legen wir im folgenden Kapitel die Grundlagen des für uns relevanten Ausschnitts dieser Theorie nach Kato [13], Kapitel VI und VII, dar. In diesem Kapitel bezeichnen $(\cdot, -)$ und $\|\cdot\|$ stets das Skalarprodukt beziehungsweise die Norm auf dem Hilbertraum H .

4.1 Sesquilinearformen in komplexen Hilberträumen

Die Definitionen dieses Abschnitts sind aus Kato [13], Kapitel VI, §1.1, entnommen.

Es sei t eine unbeschränkte Sesquilinearform, definiert auf einem Unterraum D eines separablen Hilbertraums H . Wir schreiben

$$t(u, v) \quad \text{für } u, v \in D,$$

und bezeichnen die Sesquilinearform $t(u, v)$ kurz als *Form* t . Der Raum D , auf dem t definiert ist, heißt *Definitionsbereich* von t und wird mit $D(t)$ bezeichnet. Wenn $D(t)$ dicht in H ist, heißt die Form t *dicht definiert*.

Definition 4.1.1. Ist \mathfrak{t} eine Sesquilinearform, so heißt

$$\mathfrak{t}(u) := \mathfrak{t}(u, u)$$

die zu \mathfrak{t} assoziierte *quadratische Form*.

Bemerkung 4.1.2 (Polarisationsformel). Wenn H ein komplexer Hilbertraum ist, dann wird die Sesquilinearform $\mathfrak{t}(u, v)$ durch die *Polarisationsformel*

$$\mathfrak{t}(u, v) = \frac{1}{4} (\mathfrak{t}(u+v) - \mathfrak{t}(u-v) + i\mathfrak{t}(u+iv) - i\mathfrak{t}(u-iv))$$

eindeutig durch die quadratische Form $\mathfrak{t}(\cdot)$ bestimmt.

Analog zu unbeschränkten Operatoren in Hilberträumen werden für Sesquilinearformen die folgenden Begriffe eingeführt:

Definition 4.1.3. (i) Eine Form $\mathfrak{t}^{(2)}$ ist eine *Erweiterung* von $\mathfrak{t}^{(1)}$, in Zeichen $\mathfrak{t}^{(1)} \subseteq \mathfrak{t}^{(2)}$, wenn $D(\mathfrak{t}^{(1)}) \subseteq D(\mathfrak{t}^{(2)})$ und $\mathfrak{t}^{(2)}(u, v) = \mathfrak{t}^{(1)}(u, v)$ für alle $u, v \in D(\mathfrak{t}^{(2)})$ gilt. Ist $\mathfrak{t}^{(2)}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{t}^{(1)}$, dann ist $\mathfrak{t}^{(1)}$ eine *Einschränkung* von $\mathfrak{t}^{(2)}$.

(ii) Zwei Formen $\mathfrak{t}^{(1)}$ und $\mathfrak{t}^{(2)}$ sind *gleich*, in Zeichen $\mathfrak{t}^{(1)} = \mathfrak{t}^{(2)}$, wenn $\mathfrak{t}^{(1)} \subseteq \mathfrak{t}^{(2)}$ und $\mathfrak{t}^{(2)} \subseteq \mathfrak{t}^{(1)}$ gilt.

(iii) Die Summe \mathfrak{t} zweier Formen $\mathfrak{t}^{(1)}$ und $\mathfrak{t}^{(2)}$ ist definiert als

$$\mathfrak{t}(u, v) = \mathfrak{t}^{(1)}(u, v) + \mathfrak{t}^{(2)}(u, v), \quad u, v \in D(\mathfrak{t}) = D(\mathfrak{t}^{(1)}) \cap D(\mathfrak{t}^{(2)}).$$

(iv) Die *Einheitsform* ist definiert durch

$$\mathbf{1}(u, v) = (u, v), \quad u, v \in D(\mathbf{1}) = H.$$

Die *Nullform* ist definiert durch $\mathbf{0}(u, v) = 0$ für $u, v \in D(\mathbf{0}) = H$. Für eine beliebige Form \mathfrak{t} und $c \in \mathbb{C}$ setzt man

$$(\mathfrak{t}+c)(u, v) := (\mathfrak{t}+c \cdot \mathbf{1})(u, v) = \mathfrak{t}(u, v) + c \cdot (u, v), \quad u, v \in D(\mathfrak{t}).$$

Definition 4.1.4. (i) Die zu einer Form \mathfrak{t} *adjungierte Form* \mathfrak{t}^* ist definiert durch

$$\mathfrak{t}^*(u, v) = \overline{\mathfrak{t}(v, u)}, \quad u, v \in D(\mathfrak{t}^*) = D(\mathfrak{t}).$$

(ii) Eine Form \mathfrak{t} heißt *symmetrisch*, wenn

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}^*.$$

Bemerkung 4.1.5. Aus Bemerkung 4.1.2 folgt, dass \mathfrak{t} genau dann symmetrisch ist, wenn die quadratische Form $\mathfrak{t}(\cdot)$ reellwertig ist.

Definition 4.1.6. Für eine Form t seien die Formen \mathfrak{h} und \mathfrak{k} definiert durch

$$\mathfrak{h}(u, v) := \frac{1}{2} (t(u, v) + t^*(u, v)) \quad \text{und} \quad \mathfrak{k}(u, v) := \frac{1}{2i} (t(u, v) - t^*(u, v)).$$

Die Formen \mathfrak{h} und \mathfrak{k} sind symmetrisch mit $t = \mathfrak{h} + i\mathfrak{k}$. Für die zugehörigen quadratischen Formen gilt

$$\mathfrak{h}(u) = \operatorname{Re}(t(u)) \quad \text{und} \quad \mathfrak{k}(u) = \operatorname{Im}(t(u)). \quad (4.1)$$

Die Beziehungen in (4.1) motivieren die Bezeichnungen *Real-* und *Imaginärteil* von t für \mathfrak{h} und \mathfrak{k} . Wir schreiben daher

$$\operatorname{Re} t := \mathfrak{h} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} t := \mathfrak{k}.$$

4.2 Sektorielle Formen und Operatoren

Die Definitionen in diesem Abschnitt sind aus Kato [13], Kapitel VI, §1.2 und §1.3, entnommen.

Definition 4.2.1. Es sei \mathfrak{s} eine symmetrische Form in H mit Definitionsbereich $D(\mathfrak{s})$. Die Form \mathfrak{s} heißt *nach unten beschränkt*, wenn es ein $\beta \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\mathfrak{s}(u) \geq \beta \cdot \|u\|^2, \quad u \in D(\mathfrak{s}). \quad (4.2)$$

Wir schreiben kurz $\mathfrak{s} \geq \beta$. Falls $\mathfrak{s} \geq 0$, heißt die Form \mathfrak{s} *nichtnegativ*.

Definition 4.2.2. Es sei t eine (nicht notwendig symmetrische) Form.

- (i) Der *numerische Wertebereich* von t ist die Menge

$$\mathscr{W}(t) = \{t(u) \mid u \in D(t), \|u\| = 1\}.$$

- (ii) Die Form t heißt *nach links beschränkt*, wenn es ein $\beta \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\mathscr{W}(t)$ in einer Halbebene der Form $\operatorname{Re} z \geq \beta$ liegt, d. h.

$$\mathscr{W}(t) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq \beta\}.$$

- (iii) Eine Form t heißt *sektoriell (nach links beschränkt)*, wenn $\mathscr{W}(t)$ eine Teilmenge eines Sektors der Form

$$\Sigma(\beta, \theta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg(z - \beta)| \leq \theta\}$$

mit einem *Scheitel* $\beta \in \mathbb{R}$ und einem *Halbwinkel* $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ist. Hierbei sind β und θ nicht eindeutig bestimmt.

Bemerkung 4.2.3. Eine Form t ist genau dann sektoriell, wenn es $\beta \in \mathbb{R}$ und $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ gibt, sodass gilt

$$\operatorname{Re} t \geq \beta \quad (4.3)$$

und

$$|\operatorname{Im} t(u)| \leq \tan(\theta) \cdot (\operatorname{Re} t - \beta)(u), \quad u \in D(t). \quad (4.4)$$

Definition 4.2.4. Es sei \mathfrak{t} eine sektorielle Form. Eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in H heißt \mathfrak{t} -konvergent (gegen $u \in H$), wenn

- (i) die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D(\mathfrak{t})$ liegt und in der Norm auf H gegen $u \in H$ konvergiert,
- (ii) es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n, m \geq N$ gilt: $|\mathfrak{t}(u_n - u_m)| < \varepsilon$.

Wenn $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ \mathfrak{t} -konvergent gegen $u \in H$ ist, schreiben wir $u_n \xrightarrow{\mathfrak{t}} u$, $n \rightarrow \infty$.

Definition 4.2.5. Es sei \mathfrak{t} eine sektorielle Form.

- (i) Die Form \mathfrak{t} ist *abgeschlossen*, wenn für jede \mathfrak{t} -konvergente Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $u_n \xrightarrow{\mathfrak{t}} u$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, dass $u \in D(\mathfrak{t})$ und $\mathfrak{t}(u_n - u) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.
- (ii) Die Form \mathfrak{t} heißt *abschließbar*, wenn sie eine abgeschlossene Erweiterung besitzt. Die kleinste abgeschlossene Erweiterung $\bar{\mathfrak{t}}$ einer abschließbaren Form \mathfrak{t} heißt *Abschluss* von \mathfrak{t} .

Satz 4.2.6 (Kato [13], VI, §1.3). *Es sei \mathfrak{t} eine sektorielle Form. Eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann \mathfrak{t} -konvergent, wenn sie $(\operatorname{Re} \mathfrak{t})$ -konvergent ist. Insbesondere ist \mathfrak{t} genau dann abgeschlossen, wenn $\operatorname{Re} \mathfrak{t}$ abgeschlossen ist.*

Bezeichnung 4.2.7. (i) Es sei \mathfrak{s} eine symmetrische, nichtnegative Form. Dann wird durch

$$(u, v)_{\mathfrak{s}} := (\mathfrak{s} + 1)(u, v), \quad u, v \in D(\mathfrak{s}),$$

ein Skalarprodukt auf $D(\mathfrak{s})$ definiert. Insbesondere wird $(D(\mathfrak{s}), (\cdot, \cdot)_{\mathfrak{s}})$ zu einem Prähilbertraum, der mit $H_{\mathfrak{s}}$ bezeichnet wird.

- (ii) Wenn \mathfrak{t} eine sektorielle Form mit $\operatorname{Re} \mathfrak{t} = \mathfrak{h}$ ist und β ein Scheitel von \mathfrak{t} , dann ist die Form

$$\mathfrak{h}' = \operatorname{Re} \mathfrak{t} - \beta$$

symmetrisch und nichtnegativ, sodass durch $H_{\mathfrak{t}} := H_{\mathfrak{h}'}$ ein Prähilbertraum wie in (i) definiert wird. $H_{\mathfrak{t}}$ ist gegeben durch $D(\mathfrak{t})$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{\mathfrak{t}} := (\operatorname{Re} \mathfrak{t} - \beta + \mathbf{1})(u, v), \quad u, v \in D(\mathfrak{t}).$$

Da $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{t}}$ von β abhängt, ist $H_{\mathfrak{t}}$ nicht eindeutig bestimmt.

Satz 4.2.8 (Kato [13], VI, Theorem 1.11). *Eine sektorielle Form \mathfrak{t} in H ist genau dann abgeschlossen, wenn der Prähilbertraum $H_{\mathfrak{t}}$ vollständig ist.*

Ein *sektorieller Operator* wird analog zu einer sektoriellen Form wie folgt definiert.

Definition 4.2.9 (Kato [13], V, §3.10). (i) Ein symmetrischer Operator S in H heißt *nach unten beschränkt*, wenn es ein $\beta \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$(Su, u) \geq \beta(u, u), \quad u \in D(S).$$

(ii) Ein Operator T heißt *akkretiv*, wenn der numerische Wertebereich

$$\mathscr{W}(T) = \{(Tu, u) \mid u \in D(T), \|u\| = 1\}$$

eine Teilmenge der rechten Halbebene ist, d. h.

$$\operatorname{Re}(Tu, u) \geq 0, \quad u \in D(T).$$

(iii) Ein Operator heißt *m-akkretiv*, wenn $(T + \lambda)^{-1}$ für jedes λ mit $\operatorname{Re} \lambda > 0$ beschränkt ist und die Operatornorm die Abschätzung

$$\|(T + \lambda)^{-1}\| \leq (\operatorname{Re} \lambda)^{-1}$$

erfüllt. Ein m-akkretiver Operator ist maximal akkretiv in dem Sinne, dass T akkretiv ist und keine echte akkretive Erweiterung besitzt.

(iv) Ein Operator heißt *quasi-akkretiv* (*quasi-m-akkretiv*), wenn es ein $\alpha \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $T + \alpha$ akkretiv (m-akkretiv) ist.

(v) Analog zu Definition 4.2.2 heißt ein Operator T *sektoriell*, wenn $\mathscr{W}(T)$ in einem Sektor

$$\Sigma(\beta, \theta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg(z - \beta)| \leq \theta\}$$

mit $\beta \in \mathbb{R}$ und $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ liegt.

(vi) Ein Operator T heißt *m-sektoriell*, wenn T sektoriell und quasi-m-akkretiv ist.

Bemerkung 4.2.10 (Kato [13], V, §3.10). Wenn T ein m-sektorieller Operator mit Sektor $\Sigma(\beta, \theta)$ ist, dann liegt das Spektrum $\sigma(T)$ ebenfalls in dem Sektor $\Sigma(\beta, \theta)$. Der Begriff ist insofern eine Verallgemeinerung eines nach unten beschränkten selbstadjungierten Operators mit Spektrum in einem reellen Intervall der Form $[\beta, \infty[$.

Das folgende Theorem besagt, dass zu einer sektoriellen Form ein m-sektorieller Operator im Sinne einer Verallgemeinerung der Friedrichserweiterung für monotone Operatoren existiert.

Theorem 4.2.11 (Erster Darstellungssatz, Kato [13], VI, Theorem 2.1). *Es sei \mathfrak{t} eine dicht definierte, abgeschlossene und sektorielle Sesquilinearform in H . Dann gibt es einen eindeutigen m-sektoriellen Operator $T_{\mathfrak{t}}$, definiert auf einer dichten Teilmenge $D(T_{\mathfrak{t}})$ von $D(\mathfrak{t})$, sodass*

$$\mathfrak{t}(u, v) = (T_{\mathfrak{t}}u, v) \quad u \in D(T_{\mathfrak{t}}), v \in D(\mathfrak{t}).$$

Satz 4.2.12 (Kato [13], VI, Theorem 2.5). *Die Form \mathfrak{t} erfülle die Voraussetzungen von Theorem 4.2.11. Dann gilt für den Operator $T_{\mathfrak{t}}$ aus Theorem 4.2.11*

$$T^* = T_{\mathfrak{t}^*}.$$

Insbesondere ist $T_{\mathfrak{t}}$ genau dann selbstadjungiert, wenn \mathfrak{t} symmetrisch ist.

Bemerkung 4.2.13. Aus dem Beweis von Theorem 4.2.11 (Kato [13], VI, §2.2) geht hervor, dass der Definitionsbereich von $T_{\mathfrak{t}}$ wie im Fall der klassischen Friedrichserweiterung gegeben ist durch

$$D(T_{\mathfrak{t}}) = \{u \in D(\mathfrak{t}) \mid v \mapsto \mathfrak{t}(u, v) \text{ ist stetig in } H\}.$$

4.3 Holomorphe Familien von Operatoren

In diesem Abschnitt wird definiert, wann ein unbeschränkter Operator T_z zwischen Banachräumen X und Y holomorph von einem Parameter z abhängt. Von besonderem Interesse sind selbstadjungierte holomorphe Familien in einem Hilbertraum H vom Typ (A) und (B) mit kompakter Resolvente, da sie in Bezug auf die Holomorphie des Spektrums besonders günstige Eigenschaften besitzen.

Soweit nicht anders gekennzeichnet, stammen alle Definitionen und Sätze dieses Abschnitts aus Kato [13], VII, §1.1.

Definition 4.3.1. Es sei X ein Banachraum. Eine Teilmenge $S \subseteq X$ heißt *total*, wenn die lineare Hülle von S dicht in X ist.

Beispiel 4.3.2. Ist H ein Hilbertraum und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine vollständige Orthonormalbasis von H , dann ist die Menge $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ total.

Definition und Satz 4.3.3 (Kato [13], VII, §1.1). Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(u_z)_{z \in U}$ eine Familie von Vektoren in einem Banachraum X . Ein Vektor u_z hängt holomorph von $z \in U$ ab, wenn für jedes $f \in X^*$ die Abbildung $z \mapsto (u_z, f)$ holomorph in $z \in U$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn es für $z \in U$ eine Umgebung V gibt, sodass

- (i) die Norm $\|u_z\|$ beschränkt in V ist und
- (ii) die Abbildung $z \mapsto (u_z, f)$ für jedes f aus einer totalen Menge von X^* holomorph auf V ist.

Bemerkung 4.3.4. Analog zu Definition und Satz 4.3.3 heißt eine Familie von Vektoren $(u_x)_{x \in I}$ *reell analytisch* auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, wenn sie eine Potenzreihenentwicklung in jedem $x \in I$ besitzt. In diesem Fall kann $(u_x)_{x \in I}$ zu einer holomorphen Familie $(u_z)_{z \in U}$ auf einer Umgebung $I \subset U \subseteq \mathbb{C}$ fortgesetzt werden.

Bezeichnung 4.3.5. Es sei $\mathcal{C}(X, Y)$ die Menge aller abgeschlossenen Operatoren und $\mathcal{B}(X, Y)$ die Menge der beschränkten Operatoren zwischen den Banachräumen X und Y . Wenn $X = Y$ gilt, schreiben wir $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$ und $\mathcal{C}(X) := \mathcal{C}(X, X)$.

Definition 4.3.6. Eine Familie $(T_z)_{z \in U} \in \mathcal{B}(X, Y)$ beschränkter Operatoren heißt (*beschränkt*) *holomorph*, wenn es für jedes $z \in U$ eine Umgebung V gibt, sodass

- (i) die Norm $\|T_z\|$ beschränkt in V ist und
- (ii) die Abbildung $z \mapsto (T_z u, g)$ holomorph für jedes u aus einer totalen Menge von X und g aus einer totalen Menge von Y^* ist.

Bemerkung 4.3.7. Analog zum Fall einer reell analytischen Familie von Vektoren wird eine reell analytische Familie von beschränkten Operatoren definiert.

Ein *unbeschränkter holomorpher Operator* wird über die beschränkte Holomorphie wie folgt definiert.

Definition 4.3.8. Es seien X und Y Banachräume. Eine Familie $(T_z)_{z \in U} \in \mathcal{C}(X, Y)$ abgeschlossener Operatoren heißt *holomorph* in $z \in U$, wenn es einen Banachraum Z und in z beschränkt holomorphe Operatoren $U_z \in \mathcal{B}(Z, X)$ und $V_z \in \mathcal{B}(Z, Y)$ gibt, sodass gilt

$$U_z(Z) = D(T_z) \quad \text{und} \quad T_z U_z = V_z.$$

Eine (beschränkte oder unbeschränkte) Familie von Operatoren heißt *holomorph* auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$, wenn sie holomorph in jedem $z \in U$ ist. Das folgende Theorem charakterisiert die Holomorphie eines unbeschränkten Operators durch die Holomorphie der Resolvente.

Theorem 4.3.9 (Kato, [13], VII, Theorem 1.3). *Es sei $(T_z)_{z \in U} \in \mathcal{C}(X)$ eine Familie abgeschlossener Operatoren in X . Ferner seien $z_0 \in U$ und $\zeta \in \rho(T_{z_0})$. Der Operator T_z ist genau dann holomorph in z_0 , wenn es eine Umgebung U_0 von z_0 gibt, sodass ζ für alle $z \in U_0$ in $\rho(T_z)$ liegt und die Resolvente $R(\zeta, z) = (T_z - \zeta)^{-1}$ beschränkt holomorph ist. In diesem Fall ist $R(\zeta, z)$ in beiden Variablen beschränkt holomorph auf einer Menge $\{(\zeta, z) \mid \zeta \in \rho(T_{z_0}), z \in U_0(\zeta)\}$, wobei die Umgebung $U_0(\zeta)$ von ζ abhängt.*

Bemerkung 4.3.10. Analog zu Definition 4.3.8 heißt eine Familie $(T_x)_{x \in I} \in \mathcal{C}(X, Y)$ *reell analytisch*, wenn U_x und V_x reell analytische beschränkte Operatoren sind. Allerdings ist es im Allgemeinen nicht möglich, eine reell analytische Familie unbeschränkter Operatoren auf ein Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ zu einer holomorphen Familie fortzusetzen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.3.11 (s. Kato [13], Fußnote auf S. 367). Der Operator

$$A : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}), \quad (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto \left(ix_1, \frac{i}{2}x_2, \frac{i}{3}x_3, \dots \right),$$

ist ein kompakter Operator in $\ell^2(\mathbb{N})$ mit Spektrum

$$\sigma(A) = \{0\} \cup \left\{ \frac{i}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Alle Elemente aus $\sigma(A) \setminus \{0\}$ sind Eigenwerte von A . Die Inverse

$$A^{-1}(x_1, x_2, x_3, \dots) = (-ix_1, -2ix_2, -3ix_3, \dots)$$

ist ein unbeschränkter Operator in $\ell^2(\mathbb{N})$. Für $z \in]-\delta, \delta[$ setzen wir

$$T_z = (A - z)^{-1}.$$

Dann erfüllt T_z für alle $z \in]-\delta, \delta[$ die Bedingung aus Definition 4.3.8 mit

$$U_z = A - z \quad \text{und} \quad V_z = 1.$$

Für $z_0 = 0$ ist T_0 invertierbar und die Resolvente ist gegeben durch

$$T_0^{-1} = A \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N})).$$

Wenn $(T_z)_{z \in B_\delta(0)}$ zu einer holomorphen Familie auf einer komplexen Umgebung $B_\delta(0)$ von z_0 fortgesetzt werden kann, dann muss nach Theorem 4.3.9 für alle $|z| < \delta$ gelten, dass $0 \in \rho(T_z)$ und somit die Resolvente

$$T_z^{-1} = A - z \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$$

invertierbar ist. Dies steht im Widerspruch dazu, dass zu jedem $\delta > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$z = \frac{i}{n} \quad \text{mit} \quad |z| \in B_\delta(0) \cap (\sigma(A) \setminus \{0\}).$$

Wenn der Definitionsbereich des Operators T_z oder der Form t_z nicht von z abhängt, sprechen wir gemäß Kato von einer holomorphen Familie vom Typ (A) oder (B). Diese Eigenschaft erlaubt es, Theorem 4.3.19 anzuwenden.

Definition 4.3.12 (Holomorphe Familien vom Typ (A), Kato [13], VII, §2.1). Eine Familie von Operatoren $(T_z)_{z \in U}$ ist eine *holomorphe Familie vom Typ (A)*, wenn

- (i) der Definitionsbereich $D(T_z) = D$ nicht von z abhängt und
- (ii) die Abbildung $z \mapsto T_z u$ für jedes $u \in D$ auf U holomorph ist.

Bemerkung 4.3.13. Ist $(T_z)_{z \in U}$ eine holomorphe Familie vom Typ (A), dann besitzt T_z eine Taylorentwicklung in jedem $z_0 \in U$, d. h. für jedes $u \in D$ kann $T_z u$ in eine Taylorreihe

$$T_z u = T^{(0)} u + (z - z_0) T^{(1)} u + \frac{(z - z_0)^2}{2} T^{(2)} u + \dots \quad (4.5)$$

entwickelt werden, wobei $T^{(k)}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ein linearer Operator von X nach Y mit Definitionsbereich $D(T^{(k)}) = D$ ist, und die Reihe auf einer Umgebung $B_r(z_0)$ von z_0 konvergiert, die nicht von $u \in D$ abhängt.

Um Typ (B) charakterisieren zu können, benötigen wir zunächst den Begriff der holomorphen Familie von Formen. Die folgenden Definitionen stammen aus Kapitel VII, §4.1, in Kato [13].

Definition 4.3.14 (Holomorphe Familien von Formen vom Typ (a)). Eine Familie $(t_z)_{z \in U}$ von Sesquilinearformen in H ist eine *holomorphe Familie (von Formen) vom Typ (a)*, wenn

- (i) die Form t_z für jedes $z \in U$ dicht definiert, sektoriell und abgeschlossen ist,
- (ii) der Definitionsbereich $\mathfrak{D} = D(t_z)$ nicht von $z \in U$ abhängt und
- (iii) die Abbildung $z \mapsto t_z(u)$ für jedes $u \in \mathfrak{D}$ holomorph auf U ist.

Bemerkung 4.3.15. (i) Aus der Polarisationsformel folgt, dass $z \mapsto t_z(u)$ genau dann holomorph ist, wenn $z \mapsto t_z(u, v)$ für alle $u, v \in \mathfrak{D}$ holomorph auf U ist.

- (ii) Wie beim Typ (A) besitzt eine holomorphe Familie vom Typ (a) für jedes $z_0 \in U$ eine Taylorentwicklung der Form

$$t_z(u, v) = t^{(0)}(u, v) + (z - z_0) t^{(1)}(u, v) + \frac{(z - z_0)^2}{2} t^{(2)}(u, v) + \dots, \quad u, v \in \mathfrak{D}, \quad (4.6)$$

die unabhängig von $u, v \in \mathfrak{D}$ in einer Umgebung $B_r(z_0)$ von z_0 konvergiert.

(iii) Wenn die Form \mathfrak{t}_z auf ganz H definiert ist, dann wird durch

$$(T_z u, v) = \mathfrak{t}_z(u, v)$$

ein beschränkter Operator T_z in H definiert. Wenn die Familie $(\mathfrak{t}_z)_{z \in U}$ holomorph ist, dann ist $(T_z)_{z \in U}$ beschränkt holomorph.

Definition und Satz 4.3.16 (Holomorphe Familien von Operatoren vom Typ (B)). Es sei $(\mathfrak{t}_z)_{z \in U}$ eine holomorphe Familie vom Typ (a). Für jedes $z \in U$ sei

$$T_z := T_{\mathfrak{t}_z}$$

der zu \mathfrak{t}_z assoziierte m -sektorielle Operator aus Theorem 4.2.11. Dann ist $(T_z)_{z \in U}$ eine holomorphe Familie von Operatoren. Die Familie $(T_z)_{z \in U}$ ist lokal gleichmäßig sektoriell.

Die hierdurch definierte Familie $(T_z)_{z \in U}$ heißt *holomorphe Familie vom Typ (B)*.

Satz 4.3.17 (Kato [13], VII, Theorem 4.3). *Es sei $(T_z)_{z \in U}$ eine holomorphe Familie vom Typ (B). Dann besitzt T_z entweder für alle $z \in U$ kompakte Resolvente oder für kein $z \in U$.*

Definition und Satz 4.3.18 (Selbstadjungierte holomorphe Familien von Formen und Operatoren, Kato [13], VII, §3.1 und Bemerkung 4.7). Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\{\bar{z} \mid z \in U\} = U$.

(i) Eine holomorphe Familie $(T_z)_{z \in U}$ dicht definierter und abgeschlossener Operatoren in einem Hilbertraum H heißt *selbstadjungierte (holomorphe) Familie* von Operatoren, wenn für jedes $z \in U$ gilt

$$T_z^* = T_{\bar{z}}.$$

(ii) Wenn $(\mathfrak{t}_z)_{z \in U}$ eine holomorphe Familie vom Typ (a) mit

$$\mathfrak{t}_z(u) \in \mathbb{R}$$

für alle $z \in U \cap \mathbb{R}$ ist, dann gilt für jedes $z \in U$

$$\mathfrak{t}_z^* = \mathfrak{t}_{\bar{z}},$$

und $(\mathfrak{t}_z)_{z \in U}$ ist eine *selbstadjungierte (holomorphe) Familie* von Formen.

In diesem Fall ist die durch Theorem 4.2.11 induzierte Familie $(T_z)_{z \in U}$ eine selbstadjungierte holomorphe Familie von Operatoren vom Typ (B). Insbesondere ist T_z für jedes $z \in U \cap \mathbb{R}$ selbstadjungiert.

Die holomorphe Störungstheorie untersucht, inwiefern das Spektrum einer holomorphen Familie $(T_z)_{z \in U}$ holomorph in U variiert werden kann. Die Holomorphie des Spektrums und des Operators sind aber nicht äquivalent. Beispielsweise gibt Rellich in [24], §5, eine Familie nicht holomorpher Operatoren an, deren Eigenwerte und Eigenfunktionen sämtlich holomorph sind.

Für die Untersuchungen zur Holomorphie der Eigenwerte und Eigenvektoren des Robin-Pseudo-Laplace-Operators $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \hat{\mathbb{C}}}$ in Kapitel 6 und 7 verwenden wir hauptsächlich zwei Resultate aus der Störungstheorie, die im Folgenden nach Kato [13] zitiert werden.

Die Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ erfüllt die Voraussetzungen des folgenden Theorems (s. Abschnitt 5.3).

Theorem 4.3.19 (Kato [13], VII, Theorem 3.9 und Bemerkung 4.22). *Es sei $(T_z)_{z \in U}$ eine selbstadjungierte holomorphe Familie von Operatoren vom Typ (A) oder (B) mit kompakter Resolvente. Dann gibt es eine Folge $(f_n[z])_{n \in \mathbb{N}}$ der Eigenvektoren von T_z und eine Folge $(\lambda_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ der zugehörigen Eigenwerte, sodass*

- (i) *für $x \in U \cap \mathbb{R}$ die Folge $(f_n[x])_{n \in \mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von H bildet,*
- (ii) *für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine komplexe Umgebung U_n von $U \cap \mathbb{R}$ existiert, sodass $f_n|_{U_n}$ und $\lambda_n|_{U_n}$ holomorph in z sind.*

Hierbei können die Mengen U_n im Allgemeinen nicht unabhängig von $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden, sodass nur für die Einschränkung der Familie $(T_z)_{z \in U}$ auf $I = U \cap \mathbb{R}$ von einer (reell) analytischen Abhängigkeit des gesamten Spektrums von dem Parameter $x \in I$ gesprochen werden kann.

Ferner verliert die Aussage ihre Gültigkeit, wenn die Zusatzbedingung an den Definitionsbereich nicht erfüllt ist, selbst wenn alle Operatoren kompakte Resolvente haben. Für den Robin-Pseudo-Laplace-Operator $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \hat{\mathbb{C}}}$ liegt dieser Fall vor, wenn γ in einer Umgebung von ∞ betrachtet wird (s. Abschnitt 5.6).

Für ein endliches System von Eigenwerten gilt jedoch stets die folgende lokale Aussage.

Theorem 4.3.20 (Kato [13], VII, Theorem 1.8). *Es sei $(T_z)_{z \in U}$ eine holomorphe Familie in einer Umgebung U eines Punktes $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann besteht jedes endliche System von Eigenwerten von $(T_z)_{z \in U}$ aus Zweigen einer oder mehrerer analytischer Funktionen, die höchstens algebraische Singularitäten in z_0 besitzen. Dasselbe gilt für die zugehörigen Eigenprojektionen.*

Bemerkung 4.3.21. Theorem 4.3.20 impliziert, dass die Mengen

$$\{(\Lambda, z) \in \mathbb{C} \times U \mid \Lambda \text{ Eigenwert von } T_z\}$$

analytische Kurven, d. h. eindimensionale komplexe Varietäten sind, und die hierdurch bestimmten Funktionen $\Lambda(z)$ lokal durch eine *Puiseuxreihe*

$$\Lambda(z) = \Lambda(z_0) + \alpha_1 \omega^j (z - z_0)^{1/p} + \alpha_2 \omega^{2j} (z - z_0)^{2/p} + \dots, \quad j = 1, \dots, p-1, \quad (4.7)$$

mit $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right)$ gegeben sind (Kato [13], Kapitel II, §1.2). Insbesondere ist jede einzelne Eigenwertfunktion $\Lambda(z)$ stetig, aber nicht notwendig holomorph. Das Auftreten von algebraischen Singularitäten hängt mit den Vielfachheiten der Eigenwerte zusammen. Dieser Aspekt wird in Abschnitt 7.1 genauer besprochen.

Kapitel 5

Robin-Pseudo-Laplace-Operatoren

In Kapitel 3 wurde ein Ansatz für die Störung des Pseudo-Laplace-Operators Δ^η durch Variation von η vorgestellt. Wie zu Beginn von Kapitel 3 erklärt worden ist, kann dies als Variation des Horozykels \mathcal{H}_η verstanden werden, entsprechend dem Rand beziehungsweise der Randbedingung des eindimensionalen euklidischen Laplace-Operators. Insofern ist erst einmal nicht ersichtlich, ob und wie Δ^η auf eine komplexe Umgebung von $\eta \in \mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann.

Nach Beispiel 4.3.11 kann eine reell parametrisierte Familie unbeschränkter Operatoren im Allgemeinen nicht holomorph auf eine komplexe Umgebung fortgesetzt werden, selbst wenn sie analytisch von dem Parameter abhängt. Um die in Kapitel 4 dargelegte holomorphe Störungstheorie von Kato anzuwenden, ist es daher erforderlich, dass die Operatorfamilie auch für komplexe Parameter wohldefiniert ist.

Ein weiteres Problem in der Anwendung dieser Theorie besteht darin, dass der Hilbertraum

$$L_\eta^2 = \{f \in L^2(X, \mu_{\mathbb{H}}) \mid f_0|_{[\eta, \infty[} = 0\},$$

in dem Δ^η operiert, selbst von η abhängt. Dies impliziert, dass Δ^η bereits formal kein holomorpher Operator im Sinne von Definition 4.3.8 sein kann.

Da der Hilbertraum L_η^2 durch Einschränkung des $L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$ definiert ist und dessen Skalarprodukt erbt, besteht ein naheliegender Ansatz für die Behebung dieses Problems darin, den Hilbertraum L_η^2 in einen größeren Raum $L_{\tilde{\eta}}^2$ mit $\tilde{\eta} > \eta$ einzubetten und η nur auf einem offenen Intervall $]\tilde{\eta} - \varepsilon, \tilde{\eta}[$ zu variieren, um einen reell analytischen Operator zu erhalten.

Wir stellen im ersten Abschnitt dieses Kapitels am Beispiel des eindimensionalen Laplace-Operators mit Dirichlet-Randbedingungen die Problematik dieses Ansatzes dar.

In den Abschnitten 5.2 bis 5.5 wird eine holomorphe Familie vom Typ (B) von Robin-Pseudo-Laplace-Operatoren $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ mit kompakter Resolvente konstruiert, indem die Randbedingung

$$f_0(\eta) = 0$$

vom Dirichlet-Typ auf dem Horozykel \mathcal{H}_η durch eine Robin-Randbedingung

$$f'_0(\eta) = -\gamma f_0(\eta)$$

ersetzt wird. In Abschnitt 5.6 wird gezeigt, dass der klassische Pseudo-Laplace-Operator Δ^η die holomorphe Fortsetzung von $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ in den unendlich fernen Punkt im Sinne von Definition 4.3.8, die entstehende Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \hat{\mathbb{C}}}$ aber nicht vom Typ (B) ist.

5.1 Der euklidische Laplace-Operator als Beispiel für eine nicht holomorphe Familie

Es sei Δ_ω der euklidische Laplace-Operator auf dem beschränkten Intervall $\Omega =]0, \omega[\subset \mathbb{R}$ mit Dirichlet-Randbedingungen, definiert durch

$$\Delta_\omega f(x) = -f''(x), \quad f \in D(\Delta_\omega) = H_0^2(\Omega, \lambda^1).$$

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen von Δ_ω , gegeben durch

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \cdot \sin(\kappa_n(\omega) \cdot x), \quad \lambda_n(\omega) = \kappa_n(\omega)^2, \quad \kappa_n(\omega) = \frac{\pi n}{\omega}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.1)$$

hängen holomorph von $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ab.

Beispiel 3.4.5 (i) rechtfertigt den Ansatz, die Abbildung U_ω aus Definition 4.3.8 mithilfe der linearen Transformation ψ_ω zu konstruieren. Der Operator Δ_ω kann aber bereits deswegen kein holomorpher Operator im Sinne von Definition 4.3.8 sein, da der Hilbertraum $L^2(\Omega, \lambda^1)$, in dem Δ_ω definiert ist, selbst von ω abhängt.

Um eine holomorphe Formulierung für Δ_ω zu finden, verfolgen wir nun den Ansatz, $L^2(\Omega, \lambda^1)$ in einen größeren Hilbertraum $L^2(\tilde{\Omega}, \lambda^1)$ einzubetten, wobei $\tilde{\Omega}$ dadurch definiert ist, dass für alle ω aus einer Umgebung U_0 eines fest gewählten $\omega_0 > 0$ gilt

$$]0, \omega[\subset \tilde{\Omega},$$

und $\tilde{\Omega}$ nicht von $\omega \in U_0$ abhängt. Da Δ_ω nur durch die Dirichlet-Randbedingung auf $\partial\Omega$ von ω abhängt, und an der Vorschrift

$$\Delta_\omega f(x) = -f''(x)$$

nicht sichtbar wird, verwenden wir für die Konstruktion die zu Δ_ω gehörige Sesquilinearform mit dem Ziel, eine holomorphe Familie vom Typ (B) zu erhalten. Der folgende Satz aus der klassischen Theorie selbstadjungierter Operatoren wird als bekannt vorausgesetzt und daher ohne Beweis angegeben.

Satz 5.1.1. *Der Laplace-Operator Δ_ω mit Dirichlet-Randbedingung ist die Friedrichserweiterung der symmetrischen, nichtnegativen Form*

$$t_\omega(u, v) = \int_0^\omega u' \cdot \bar{v}' \, d\lambda^1.$$

mit Definitionsbereich

$$D(t_\omega) = H_0^1(\Omega, \lambda^1).$$

Es sei nun $\omega_0 > 0$ fest gewählt und für ein $\delta > 0$ sei

$$U_0 =]\omega_0 - \delta, \omega_0 + \delta[.$$

Ferner sei

$$\Omega_1 =]0, \omega_1[\quad \text{mit} \quad \omega_1 = \omega_0 + \delta.$$

5.1 Der euklidische Laplace-Operator als Beispiel für eine nicht holomorphe Familie

Dann definieren wir für $\omega \in U_0$ auf

$$\mathfrak{D}_1 = \left\{ f \in H^1(\Omega_1, \lambda^1) \mid f(0) = 0 \right\}$$

eine Form \mathfrak{s}_ω in $L^2(\Omega_1, \lambda^1)$ durch

$$\mathfrak{s}_\omega(u, v) = \int_0^{\omega_1} u' \cdot \bar{v}' \, d\lambda^1 - \int_\omega^{\omega_1} u' \cdot \bar{v}' \, d\lambda^1, \quad \omega \in U, \quad u, v \in \mathfrak{D}_1. \quad (5.2)$$

Die Form \mathfrak{s}_ω ist dicht definiert, nichtnegativ und abgeschlossen. Nach Theorem 4.2.11 induziert \mathfrak{s}_ω einen eindeutigen nichtnegativen selbstadjungierten Operator

$$\tilde{\Delta}_\omega := T_{\mathfrak{s}_\omega}.$$

Satz 5.1.2. *Der Definitionsbereich des Operators $\tilde{\Delta}_\omega$ ist gegeben durch*

$$D(\tilde{\Delta}_\omega) = \{f \in H^2(\Omega_1, \lambda^1) \mid f(0) = f'(\omega) = 0\}.$$

Beweis. Mit partieller Integration folgt für $u \in C^2(\Omega_1) \cap \mathfrak{D}_1$ und beliebiges $v \in \mathfrak{D}_1$

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_\omega(u, v) &= - \int_0^{\omega_1} u'' \cdot \bar{v} \, d\lambda^1 + u'(\omega_1)\bar{v}(\omega_1) \\ &\quad + \int_\omega^{\omega_1} u'' \cdot \bar{v} \, d\lambda^1 - u'(\omega_1)\bar{v}(\omega_1) + u'(\omega)\bar{v}(\omega) \\ &= - \int_0^{\omega_1} u'' \cdot \bar{v} \, d\lambda^1 + \int_\omega^{\omega_1} u'' \cdot \bar{v} \, d\lambda^1 + u'(\omega)\bar{v}(\omega). \end{aligned}$$

Damit $v \mapsto \mathfrak{s}_\omega(u, v)$ stetig nach $L^2(\Omega_1, \lambda^1)$ fortgesetzt werden kann, muss $u \in H^2(\Omega_1, \lambda^1)$ und $u'(\omega) = 0$ gelten. \square

Die durch Satz 5.1.2 induzierte Randbedingung

$$f'(\omega) = 0$$

entspricht einer Neumann-Randbedingung auf $\partial\Omega$ und ist daher nicht kompatibel mit dem Dirichlet-Operator. Diese Überlegung wird in dem folgenden Satz präzisiert.

Satz 5.1.3. *Der Operator $\tilde{\Delta}_\omega$ ist keine Fortsetzung von Δ_ω .*

Beweis. Es sei

$$\omega_{-1} = \omega_0 - \delta,$$

und $\chi \in \mathcal{D}(]0, \infty[)$ eine Testfunktion mit $\chi(x) = 1$ für $x \in [\omega_{-1}, \omega_1]$ und

$$\chi(0) = 0, \quad \chi'(\omega) = 0, \quad \chi(\omega) = 1.$$

Dann liegt χ in $D(\tilde{\Delta}_\omega)$, aber nicht in $D(\Delta_\omega)$. \square

Wir betrachten nun den Neumann-Operator

$$\Delta_\omega^N f = -f'', \quad f \in D(\Delta_\omega^N),$$

mit Definitionsbereich

$$D(\Delta_\omega^N) = \left\{ f \in H^2(\Omega, \lambda^1) \mid f'(0) = f'(\omega) = 0 \right\}.$$

Zusätzlich zu den Eigenwerten v_n und $\lambda_n(\omega)$ aus (5.1) besitzt Δ_ω^N den Eigenwert $\lambda_0(\omega) = 0$ mit der zugehörigen Eigenfunktion $v_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}$.

Um den Operator $\tilde{\Delta}_\omega$ vollständig an die Neumann-Bedingungen anzupassen, setzen wir

$$\mathfrak{D}_1^N := D(\mathfrak{s}_\omega) := \left\{ f \in H^1(\Omega_1, \lambda^1) \mid f'(0) = 0 \right\}.$$

Dann induziert \mathfrak{s}_ω einen Operator $\tilde{\Delta}_\omega^N$ mit

$$D(\tilde{\Delta}_\omega^N) = \left\{ f \in H^2(\Omega_1, \lambda^1) \mid f'(0) = f'(\omega) = 0 \right\}.$$

Der Zusammenhang zwischen $\tilde{\Delta}_\omega^N$ und Δ_ω^N ist Gegenstand des folgenden Satzes.

Satz 5.1.4. *Es sei $\omega \in U_0$. Dann gilt $D(\tilde{\Delta}_\omega^N) \subseteq D(\Delta_\omega^N)$, und für $f \in D(\tilde{\Delta}_\omega^N)$ gilt*

$$\tilde{\Delta}_\omega^N f = \Delta_\omega^N f.$$

Ist umgekehrt $f \in D(\Delta_\omega^N)$, dann existiert eine (nicht eindeutige) Fortsetzung $\tilde{f} \in D(\tilde{\Delta}_\omega^N)$, sodass $\tilde{f}|_\Omega = f$ und $\tilde{\Delta}_\omega^N \tilde{f}|_\Omega = \Delta_\omega^N f$.

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ist klar. Es sei also $f \in D(\Delta_\omega^N)$, d. h. $f \in H^2(\Omega, \lambda^1)$ mit $f'(0) = 0$ und $f'(\omega) = 0$. Nach dem Einbettungssatz von Sobolev besitzt $f \in H^2(\Omega, \lambda^1)$ einen Repräsentanten in $C^1(\bar{\Omega})$. Wir setzen

$$\tilde{f}_1 = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq \omega, \\ f(\omega), & \omega < x \leq \omega_1. \end{cases}$$

Dann liegt \tilde{f}_1 in $C^1(\bar{\Omega}_1) \cap H^2(\Omega_1, \lambda^1)$, und es gilt

$$\tilde{f}_1'(0) = \tilde{f}_1'(\omega) = 0$$

sowie

$$\tilde{f}_1''(x) = f''(x), \quad x \in \Omega.$$

Ist $\chi_\omega \neq 0 \in \mathcal{D}(] \omega, \omega_1[)$, dann ist $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 + \chi_\omega$ eine weitere Fortsetzung von f mit $\tilde{f}_2 \neq \tilde{f}_1$. \square

Da der Definitionsbereich von $\tilde{\Delta}_\omega$ von ω abhängt, ist die Familie $(\tilde{\Delta}_\omega)_{\omega \in U_0}$ nicht vom Typ (A). Der Definitionsbereich der Form \mathfrak{s}_ω hingegen hängt nicht von $\omega \in U_0$ ab. Der folgende Satz zeigt jedoch, dass $(\tilde{\Delta}_\omega)_{\omega \in U_0}$ auch keine Familie vom Typ (B) sein kann.

5.1 Der euklidische Laplace-Operator als Beispiel für eine nicht holomorphe Familie

Satz 5.1.5. *Es gibt keine komplexe Umgebung U von ω_0 , sodass $(\mathfrak{s}_z)_{z \in U}$ eine holomorphe Familie vom Typ (a) ist.*

Beweis. Für beliebiges $\delta > 0$ sei $U = B_\delta(\omega_0)$. Es sei

$$U_0(\delta) =]\omega_0 - \delta, \omega_0 + \delta[$$

der Schnitt von U mit der reellen Achse. Die Form \mathfrak{s}_ω und der zugehörige Operator $\tilde{\Delta}_\omega$ sind für jedes $\delta > 0$ erklärt.

Es sei nun $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ so gewählt, dass

- (i) $\text{supp}(\chi) =: [x_1, x_4] \subset]\omega_0, \omega_1[$,
- (ii) $\chi(\omega_0) = \chi'(\omega_0) = 0$ und $\chi(\omega_1) = \chi'(\omega_1) = 0$,
- (iii) $\chi(x) = 1$ für alle $x \in [x_2, x_3] \subseteq]x_1, x_4[$.

Dann gibt es kompakte Intervalle $I \subseteq [x_1, x_2]$ und $J \subseteq [x_3, x_4]$, sodass

$$|\chi'(x)|^2 > 0 \quad \text{für alle } x \in I \cup J. \quad (5.3)$$

Die Funktion χ hängt von ω_0 und δ ab, aber nicht von $\omega \in U_0(\delta)$.

Es sei nun zuerst $\omega \leq \omega_0$. Dann gilt

$$\mathfrak{s}_\omega(\chi) = \int_{\omega_0}^{\omega_1} |\chi'|^2 d\lambda^1 - \int_{\omega_0}^{\omega_1} |\chi'|^2 d\lambda^1 = 0. \quad (5.4)$$

Wenn eine holomorphe Fortsetzung $\hat{\mathfrak{s}}$ von \mathfrak{s} nach U existiert, dann folgt aus (5.4) und dem Identitätssatz, dass für alle $z \in U$ gilt

$$\hat{\mathfrak{s}}_z(\chi) = 0.$$

Das Intervall $I \subseteq [x_1, x_2]$ aus (5.3) sei $I =: [a, b]$ mit $a \geq x_1$ und $b \leq x_2$. Dann gilt nach Wahl von χ für jedes $\tilde{\omega} \in I$

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_{\tilde{\omega}}(\chi) &= \int_{\omega_0}^{\omega_1} |\chi'|^2 d\lambda^1 - \int_{\tilde{\omega}}^{\omega_1} |\chi'|^2 d\lambda^1 \\ &= \int_a^b |\chi'|^2 d\lambda^1 + \int_J |\chi'|^2 d\lambda^1 - \int_{\tilde{\omega}}^b |\chi'|^2 d\lambda^1 - \int_J |\chi'|^2 d\lambda^1 \\ &= \int_a^{\tilde{\omega}} |\chi'|^2 d\lambda^1 > 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Da wir für jedes beliebige δ eine Funktion $\chi = \chi_\delta$ mit den Eigenschaften (i) bis (iii) und somit ein ω_δ mit (5.4) und ein $\tilde{\omega}_\delta$ mit (5.5) finden können, kann die Familie $(\mathfrak{s}_\omega)_{\omega \in U_0(\delta)}$ für kein δ holomorph auf eine komplexe Umgebung fortgesetzt werden. \square

5.2 Folgenräume

Der Ansatz, den Rand \mathcal{H}_η der kompakten Untermannigfaltigkeit X_η zu variieren, auf dem die Randbedingung an den absoluten Term E_0 der Eisensteinreihe gestellt wird, führt zu der folgenden Überlegung.

Bemerkung 5.2.1. Die Eisensteinreihe $E(z, s)$ mit $s = \frac{1}{2} + i\tau$ erfülle die Bedingung

$$E_0(\eta, s) = c_0(s)\sqrt{y} \cos\left(\tau \ln(\eta) - \frac{\vartheta(s)}{2}\right) = 0, \quad c_0(s) \neq 0,$$

sodass $E^\eta(\cdot, s)$ eine Eigenfunktion von Δ^η ist. Weiter sei angenommen, für $\tilde{\eta} = \eta + \varepsilon$ mit $\varepsilon \ll 1$ sei $E^{\tilde{\eta}}(\cdot, \tilde{s})$ eine Eigenfunktion des gestörten Operators $\Delta^{\tilde{\eta}}$. Da die Nullstellen des Cosinus isoliert sind, gilt für hinreichend kleines ε

$$E_0(\tilde{\eta}, \tilde{s}) = 0 \quad \text{und} \quad E_0(\eta, \tilde{s}) \neq 0.$$

Folglich erfüllt $E(z, \tilde{s})$ in η eine Robin-Randbedingung der Form

$$E'_0(\eta, \tilde{s}) = -\gamma E_0(\eta, \tilde{s}) \quad \text{für ein } \gamma \in \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

Unser Ziel ist nun die Konstruktion einer holomorphen Familie von Operatoren Δ_γ mit

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma u &= \Delta u && \text{auf } X, \\ u'_0(\eta) &= -\gamma u_0(\eta). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Wie Colin de Verdière wollen wir den Hilbertraum, in dem Δ_γ operiert, so konstruieren, dass wir trunkeerte Eisensteinreihen als Eigenfunktionen erhalten. Der Raum

$$\mathcal{H}_\eta = \{f \in H^1(X, \mu_{\mathbb{H}}) \mid f_0|_{[\eta, \infty[} = 0\}$$

ist für unsere Zwecke jedoch nicht geeignet, da die trunkeerte Eisensteinreihe, welche die Robin-Randbedingung (5.6) für $\gamma \in \mathbb{R}$ erfüllt, nach Lemma 2.2.10 nicht in $H^1(X, \mu_{\mathbb{H}})$ liegt.

Für die Definition eines geeigneten Raums wollen wir die Tatsache nutzen, dass jede automorphe Funktion in $L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$ eine Fourierzerlegung besitzt und die Familie $(e_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von $L^2([0, 1], \lambda^1)$ ist. Die Orthogonalität der Basis $(e_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ können wir aber nur auf der Spitzenregion S_η ausnutzen. Dies wird im folgenden Beispiel demonstriert.

Beispiel 5.2.2. Für eine zweimal differenzierbare Funktion $f \in \mathcal{A}(X)$ mit Fourierzerlegung

$$f(x + iy) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m(y) e_m(x)$$

und den hyperbolischen Laplace-Operator

$$\Delta = -y^2(\partial_{xx} + \partial_{yy})$$

gilt nach Bemerkung 2.1.10

$$\Delta f = - \sum_{m \in \mathbb{Z}} y^2(f''_m(y) - 4\pi^2 m^2 f_m(y)) e_m(x). \quad (5.8)$$

Für beliebiges $r \geq p_\Gamma$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt auf der Spitzenregion S_r

$$\begin{aligned} & \int_{S_r} \Delta f_m(y) e_m(x) \cdot \bar{f}_n(y) e_{-n}(x) \, d\mu_{\mathbb{H}}(x, y) \\ &= -\delta_{mn} \int_r^\infty y^2 (f_m''(y) - 4\pi^2 m^2 f_m(y)) \cdot \bar{f}_m(y) \frac{dy}{y^2} \\ &= \delta_{mn} \left(- \int_r^\infty f_m''(y) \cdot \bar{f}_m(y) \, dy + 4\pi^2 m^2 \int_{S_r} f_m(y) \cdot \bar{f}_m(y) \, dy \right) \\ &= \delta_{mn} \left(f_m'(r) \cdot \bar{f}_m(r) + \int_r^\infty f_m'(y) \cdot \bar{f}_m'(y) \, dy + 4\pi^2 m^2 \int_{S_r} f_m(y) \cdot \bar{f}_m(y) \, dy \right). \end{aligned}$$

Für das Integral über das gesamte Fundamentalgebiet F_∞ folgt durch Summierung und Anwendung der Greenschen Formel auf jeden einzelnen Summanden

$$\begin{aligned} \int_{F_\infty} \Delta f \cdot \bar{f} \, d\mu_{\mathbb{H}} &= \int_{X_r} \Delta f \cdot \bar{f} \, d\mu_{\mathbb{H}} + \int_{S_r} \Delta f \cdot \bar{f} \, d\mu_{\mathbb{H}} \\ &= \int_{X_r} g(\text{grad } f, \text{grad } f) \, d\mu_{\mathbb{H}} - \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m'(r) \bar{f}_m(r) + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(f_m'(r) \cdot \bar{f}_m(r) \right. \\ &\quad \left. + \int_r^\infty f_m'(y) \cdot \bar{f}_m'(y) \, dy + 4\pi^2 m^2 \int_r^\infty f_m(y) \cdot \bar{f}_m(y) \, dy \right) \\ &= \int_{X_r} g(\text{grad } f, \text{grad } f) \, d\mu_{\mathbb{H}} \\ &\quad + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\int_r^\infty f_m'(y) \cdot \bar{f}_m'(y) \, dy + 4\pi^2 m^2 \int_r^\infty f_m(y) \cdot \bar{f}_m(y) \, dy \right). \end{aligned}$$

Dieselbe Rechnung für die trunkierte Funktion f^η liefert

$$\begin{aligned} \int_{F_\infty \setminus \mathcal{H}_\eta} \Delta f^\eta \cdot \bar{f}^\eta \, d\mu_{\mathbb{H}} &= \int_{X_r} g(\text{grad } f, \text{grad } f) \, d\mu_{\mathbb{H}} + \int_r^\eta f_0'(y) \cdot \bar{f}_0'(y) \, dy \\ &\quad + \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\int_r^\infty f_m'(y) \cdot \bar{f}_m'(y) \, dy + 4\pi^2 m^2 \int_r^\infty f_m(y) \cdot \bar{f}_m(y) \, dy \right), \end{aligned}$$

wobei $[r, \eta]$ die Projektion $\pi_2(P_{r,\eta})$ des Rechtecks $P_{r,\eta} = X_\eta \setminus X_r^\circ$ auf die zweite Komponente ist, das in Bezeichnung 3.3.10 definiert wurde, und \mathcal{H}_η eine Nullmenge ist.

Diese Zerlegung ermöglicht es, den absoluten Term f_0 als Funktion zu betrachten, welche nur für $y \leq \eta$ definiert ist, und somit den Punkt η als Rand eines Intervalls in \mathbb{R} zu verstehen anstatt einer Stelle, an der f nicht differenzierbar ist. Da alle anderen Fourierkoeffizienten f_m nicht auf dieselbe Weise „abgeschnitten“ werden sollen, führen wir nun geeignete Folgenräume ein, um die Hilbertraumtheorie linearer Operatoren anwenden zu können.

Bezeichnung 5.2.3. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei H_n ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, -)_n$ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|_n$. Dann wird die ℓ^2 -direkte Summe

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}}^{\ell^2} H_n := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in H_n, \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^2 < \infty \right\}$$

zu einem Hilbertraum, versehen mit dem Skalarprodukt

$$((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) := \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y_n)_n.$$

Definition 5.2.4. Es seien r und η so gewählt, dass $\eta > r \geq p_\Gamma$ gilt. Für $m \in \mathbb{Z}$ seien die Intervalle $I_m \subset \mathbb{R}_{>0}$ gegeben durch

$$I_0 =]r, \eta[\quad \text{und} \quad I_m =]r, \infty[, \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Ferner sei \mathcal{H}_m der Hilbertraum

$$\mathcal{H}_m := \left\{ u \in H^1(I_m, \mu_{\mathbb{H}}) \mid \|u\|_m < \infty \right\}.$$

Hierbei ist der Maßraum $(I_m, \mu_{\mathbb{H}})$ durch die Einschränkung der hyperbolischen Metrik auf die zweite Komponente zu verstehen wie in Beispiel 1.3.10, und $\|\cdot\|_m$ bezeichnet die durch das Skalarprodukt

$$(u, v)_m := \int_{I_m} u(y) \cdot \bar{v}(y) \frac{dy}{y^2} + 4\pi^2 m^2 \cdot \int_{I_m} u(y) \cdot \bar{v}(y) dy + \int_{I_m} u'(y) \cdot \bar{v}'(y) dy$$

induzierte Norm. Wir setzen

$$A_0 := \left(L^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}}) \oplus_{\ell_2} \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} L^2(I_m, \mu_{\mathbb{H}}) \right) / \mathcal{N},$$

wobei die Äquivalenzrelation

$$(f, (g_m)_{m \in \mathbb{Z}}) \in \mathcal{N}$$

durch

$$f(x + iy) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m(y) e_m(x) \quad \text{fast überall auf } P_{r,\eta} = X_\eta \setminus X_r^\circ$$

definiert sei. Analog zu A_0 definieren wir

$$A_1 := \left(H^1(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}}) \oplus_{\ell_2} \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_m \right) / \mathcal{N}.$$

Die Überlappung der einzelnen Folgenglieder für $r \leq y \leq \eta$ soll hierbei sicherstellen, dass die Funktion $f|_{X_r}$ auf dem kompakten Teil X_r von X stetig in die Fourierreihe auf $P_{r,\eta}$ übergeht. Die Setzung der Norm in Bezeichnung 5.2.3 impliziert allerdings, dass in den Normen auf A_0 und A_1 die Integrale über das Rechteck $P_{r,\eta} =]0, 1[\times]r, \eta[$ mit dem Faktor 2 berechnet werden.

Dies führt zu der folgenden Überlegung.

Bemerkung 5.2.5. (i) Die Norm auf dem Folgenraum A_0 ist äquivalent zur Norm auf

$$L_\eta^2 = \{ f \in L^2(X, \mu_{\mathbb{H}}) \mid f_0|_{]r, \infty[} = 0 \}.$$

Insbesondere können wir eine Funktion $f \in L_\eta^2$ mit der Folge

$$\mathfrak{z}(f) := (f|_{X_\eta}, (f_m|_{I_m})_{m \in \mathbb{Z}})$$

identifizieren, deren Folgenglieder durch die Funktion auf dem kompakten Teil X_η und die Koeffizienten $f_m|_{I_m}$ der Fourierreihe $f(x + iy) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m(y) e_m(x)$ auf der Spitzenregion S_r gegeben sind. Genauer gilt

$$\|f\|_{A_0}^2 = \|f\|_{L_\eta^2}^2 + (f, f)_{L^2(P_{r,\eta}, \mu_{\mathbb{H}})}.$$

(ii) Ein zu $(\cdot, -)_{A_1}$ äquivalentes Skalarprodukt wird gegeben durch

$$(u, v)'_{A_1} := (u, v)_{A_1} - (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)_{L^2(P_{r,\eta}, \mu_{\mathbb{H}})}.$$

Es sei daran erinnert, dass für eine Teilmenge $M \subseteq X$ gilt

$$(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)_{L^2(M, \mu_{\mathbb{H}})} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(M_\infty, \lambda^2)},$$

wobei $M_\infty \subseteq F_\infty$ definiert sei wie in Konvention 1.2.14.

(iii) Da I_0 kompakt ist, stimmen die Räume \mathcal{H}_0 und $H^1(I_0, \mu_{\mathbb{H}})$ überein. Für $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist dies nicht der Fall.

Entsprechend Gleichung (5.8) definieren wir nun einen Differentialoperator für jedes $m \in \mathbb{Z}$.

Definition 5.2.6. Für $u \in H^1_{\text{loc}}(I_m, \mu_{\mathbb{H}})$ wird durch

$$\langle L_m u, \phi \rangle := (u, \phi)_m, \quad \phi \in \mathcal{D}(I_m),$$

ein Differentialoperator im Distributionssinne definiert. Auf $u \in C^2(I_m)$ wirkt L_m durch die Vorschrift

$$L_m u(y) = -y^2(u''(y) - 4\pi^2 m^2 u(y)).$$

Bemerkung 5.2.7. (i) Wir können L_m als die Einschränkung des distributionellen hyperbolischen Laplace-Operators Δ auf den m -ten Fourierkoeffizienten einer trunkierten Γ -automorphen Funktion auf der Spitze von $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ verstehen.

(ii) Der Operator L_m hat das von Δ induzierte Hauptsymbol

$$L_{m,2}(y; \xi) = -y^2 \xi^2, \quad \xi \in \mathbb{R}, y \in I_m,$$

und ist daher ebenfalls elliptisch auf \bar{I}_m .

Um Regularitätseigenschaften der Fourierkoeffizienten f_m zeigen zu können, benötigen wir die folgenden Sätze für kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

Theorem 5.2.8 (Sobolevscher Einbettungssatz für kompakte Mannigfaltigkeiten, Taylor [30], Kapitel 4, Proposition 4.3). *Es sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n mit glattem Rand, und es sei $u \in H^\sigma(M)$. Wenn $\sigma > \frac{n}{2} + k$ ist, dann besitzt u einen Repräsentanten in $C^k(\bar{M})$.*

Theorem 5.2.9 (Spurtheorem für kompakte Mannigfaltigkeiten, Taylor [30], Kapitel 4, Proposition 4.5). *Es sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit glattem Rand. Für jedes $\sigma > \frac{1}{2}$ besitzt der Spuroperator*

$$Tu = u|_{\partial M}$$

eine eindeutige stetige Fortsetzung

$$T : H^\sigma(M) \rightarrow H^{\sigma-1/2}(\partial M).$$

Bemerkung 5.2.10. Wenn $f \in H^1(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}})$ und $(g_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ mit $g_m \in \mathcal{H}_m$ durch die Äquivalenzrelation $f \underset{\mathcal{N}}{\sim} (g_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ miteinander identifiziert sind, dann existiert nach dem Spurtheorem 5.2.9 für jedes $R \in [p_\Gamma, \eta]$ der Fourierkoeffizient

$$\text{fc}_m[f](R) = \int_{\mathcal{H}_R} f(x, R) e_{-m}(x) \, d\sigma(x),$$

wobei das Oberflächenmaß σ auf \mathcal{H}_R durch das Lebesguemaß λ^1 auf $[0, 1]$ gegeben ist. Insbesondere existiert für alle $p_\Gamma \leq R \leq \eta$ die Punktauswertung

$$\text{fc}_m[f](R) = g_m(R).$$

Nach dem Sobolevschen Einbettungssatz 5.2.8 besitzen die Fourierkoeffizienten g_m einen Repräsentanten in $C([p_\Gamma, \eta])$. Für $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt sogar $g_m \in C([p_\Gamma, \infty[)$.

Im Hinblick auf den Pseudo-Laplace-Operator von Colin de Verdière [4] geben wir im folgenden Satz eine äquivalente Beschreibung des Raumes A_1 an.

Satz 5.2.11. *Es sei $f \in L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$ und $f^\eta \in L^2_\eta$ die Trunkierung von f bei η aus Definition 2.2.4, identifiziert mit einem Element $\mathfrak{z}(f^\eta) \in A_0$ wie in Bemerkung 5.2.5. Es gilt genau dann $\mathfrak{z}(f^\eta) \in A_1$, wenn ein $C \in \mathbb{C}$ existiert, sodass die Distribution*

$$\text{grad } f^\eta - C \cdot \delta_{\eta,0}$$

durch eine Funktion in $L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$ gegeben ist. In diesem Fall kann die Konstante C durch die Punktauswertung $f_0(\eta)$ eines stetigen Repräsentanten $f_0 \in C([r, \eta])$ des absoluten Terms von f ausgedrückt werden.

Beweis. Ohne Einschränkung gelte $f = f^\eta$. Wir nehmen zuerst an, dass $\mathfrak{z}(f) \in A_1$ gilt. Es genügt, den absoluten Term von f auf der Spitzenregion S_r zu betrachten, da

$$\int_{F_\infty} |f - f_0|^2 + g(\text{grad } f, \text{grad } f) \, d\mu_{\mathbb{H}} = \int_{X_r} |f - f_0| + g(\text{grad } f, \text{grad } f) \, d\mu_{\mathbb{H}} + \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \|f_m\|_m^2,$$

und f nach Bemerkung 5.2.10 bei \mathcal{H}_r stetig in die Fourierreihe $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m(y) e_m(x)$ übergeht.

Nach dem Spurtheorem besitzt der absolute Term $f_0 \in H^1(I_0, \mu_{\mathbb{H}})$ einen Repräsentanten in $C([r, \eta])$ mit Punktauswertung $f_0(\eta)$. Ist nun $\phi \in \mathcal{D}(S_r)$ eine Testfunktion mit absolutem Term ϕ_0 , dann gilt nach Definition der Distributionsableitung

$$\langle \text{grad } f, \phi_0 \rangle = - \int_r^\eta f_0(y) \phi_0'(y) \, dy = \int_r^\eta f_0'(y) \phi_0(y) \, dy + f_0(\eta) \phi_0(\eta).$$

Es folgt

$$\text{grad } f - f_0(\eta) \cdot \delta_{0,\eta} \in L^2(X, \mu_{\mathbb{H}}).$$

Gibt es umgekehrt ein $C \in \mathbb{C}$ mit $\text{grad } f^\eta - C \cdot \delta_{\eta,0} \in L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})$, dann liefert dieselbe Rechnung, dass f_0 in $H^1(I_0, \mu_{\mathbb{H}})$ und $\mathfrak{z}(f^\eta)$ in A_1 liegt. Insbesondere folgt $C = f_0(\eta)$ für einen Repräsentanten von f_0 in $C([r, \eta])$. \square

Korollar 5.2.12. *Der Folgenraum A_1 liegt dicht in A_0 .*

5.3 Eine holomorphe Familie sektorieller Formen vom Typ (a)

Wir definieren nun eine holomorphe Familie von Formen in A_1 , und zeigen, dass die Familie sektoriell und abgeschlossen ist. Nach Theorem 4.2.11 erhalten wir einen durch die Form induzierten eindeutigen m -sektoriellen Operator, welcher dem Pseudo-Laplace-Operator mit Robin-Randbedingung wie im Ansatz (5.7) entspricht.

Wie in Abschnitt 5.2 wird die Definition der Form durch die Greensche Formel motiviert. Als Modellproblem berechnen wir für $f, g \in C^2([0, 1])$ mit partieller Integration

$$-\int_0^1 f''(x)g(x) dx = \int_0^1 f'(x)g'(x) dx - f'(1)g(1) + f'(0)g(0).$$

Wir vernachlässigen die Randterme in 0, da im hyperbolischen Setting kein unterer Rand existiert. Nehmen wir an, dass f die Robin-Randbedingung

$$f'(1) = -\gamma f(1)$$

erfüllt, so gilt

$$-\int_0^1 f''(x)g(x) dx = \int_0^1 f'(x)g'(x) dx + \gamma f(1)g(1).$$

Entsprechend definieren wir nun eine Form für den hyperbolischen Laplace-Operator mit Robin-Randbedingung.

Definition und Satz 5.3.1. Für $\gamma \in \mathbb{C}$ wird in A_0 auf

$$D(\mathfrak{t}_\gamma) = A_1$$

eine holomorphe Sesquilinearform \mathfrak{t}_γ durch

$$\mathfrak{t}_\gamma(u, v) := (u, v)'_{A_1} + \gamma \cdot u_0(\eta)\bar{v}_0(\eta), \quad u, v \in A_1,$$

definiert. Hierbei ist

$$(u, v)'_{A_1} = (u, v)_{A_1} - (\text{grad } u, \text{grad } v)_{L^2(P_{r,\eta}, \mu_{\mathbb{H}})}$$

das Skalarprodukt aus Bemerkung 5.2.5 (ii).

Beweis. Nach Bemerkung 5.2.10 existiert für $u \in A_1$ die Punktauswertung $u_0(\eta)$. Somit ist \mathfrak{t}_γ wohldefiniert. Für jedes $u \in A_1$ ist $\gamma \mapsto \mathfrak{t}_\gamma(u) = (u, u)'_{A_1} + \gamma \cdot |u_0(\eta)|^2$ holomorph auf \mathbb{C} . \square

Die Form \mathfrak{t}_γ ist genau dann symmetrisch, wenn $\gamma \in \mathbb{R}$. Ferner ist \mathfrak{t}_γ nach Korollar 5.2.12 für jedes $\gamma \in \mathbb{C}$ dicht definiert. Die Sektorialität von \mathfrak{t}_γ ist für $\text{Re } \gamma > 0$ leicht einzusehen, da in diesem Fall gilt

$$\text{Re } \mathfrak{t}_\gamma(u) > \|u\|_{A_0}.$$

Für allgemeines $\gamma \in \mathbb{C}$ ist die Sektorialität nicht offensichtlich, weil die Randauswertung $f_0(\eta)$ des Fourierkoeffizienten f_0 nicht stetig in der Norm des L^2 -Folgenraums A_0 ist.

Zum Nachweis der Sektorialität für alle $\gamma \in \mathbb{C}$ benötigen wir das Lemma von Ehrling.

Theorem 5.3.2 (Lemma von Ehrling; Renardy und Rogers [27], Theorem 7.30). *Es seien $X \subseteq Y \subseteq Z$ Banachräume derart, dass die Einbettung $X \hookrightarrow Y$ kompakt und die Einbettung $Y \hookrightarrow Z$ stetig ist. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C(\varepsilon) > 0$, sodass für alle $x \in X$ gilt*

$$\|x\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X + C(\varepsilon) \|x\|_Z.$$

Korollar 5.3.3. *Es seien X, Y und Z Banachräume wie in Theorem 5.3.2. Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $C(\delta) > 0$, sodass für alle $x \in X$ gilt*

$$\|x\|_Y^2 \leq \delta \|x\|_X^2 + C(\delta) \|x\|_Z^2.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt wie in Theorem 5.3.2, [27]. Dazu sei angenommen, es gebe ein $\delta_0 > 0$, für das die Behauptung nicht gilt. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit $\|x_n\|_X = 1$, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|x_n\|_Y^2 > \delta_0 + n \|x_n\|_Z^2. \quad (5.9)$$

Weil die Einbettung $X \hookrightarrow Y$ kompakt und die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, besitzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Y eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Da die Einbettung $Y \hookrightarrow Z$ stetig ist, gibt es ein $C > 0$, sodass für alle $x \in Y$

$$\|x\|_Z \leq C \cdot \|x\|_Y.$$

Folglich impliziert (5.9), dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in Z sein muss, weil die linke Seite beschränkt ist. Daraus folgt

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}\|_Y^2 > \delta_0$$

im Widerspruch zu $\delta_0 > 0$. □

Lemma 5.3.4. *Die Form \mathfrak{t}_γ aus Definition und Satz 5.3.1 ist für jedes $\gamma \in \mathbb{C}$ sektoriell.*

Beweis. Nach dem Spurtheorem 5.2.9 gibt es ein $C > 0$ mit

$$|u_0(\eta)| \leq C \|u_0\|_{H^{2/3}(I_0, \mu_{\mathbb{H}})}.$$

Wir wenden die Version 5.3.3 des Ehrling-Lemmas auf die Banachräume $X = H^1(I_0, \mu_{\mathbb{H}})$, $Z = L^2(I_0, \mu_{\mathbb{H}})$ und $Y = H^{2/3}(I_0, \mu_{\mathbb{H}})$ an. Demnach existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $C(\varepsilon) > 0$ mit

$$\begin{aligned} |u_0(\eta)|^2 &\leq \varepsilon \|u_0\|_{H^1(I_0, \mu_{\mathbb{H}})}^2 + C(\varepsilon) \|u_0\|_{L^2(I_0, \mu_{\mathbb{H}})}^2 \\ &\leq \varepsilon \|u\|_{A_1}^2 + C(\varepsilon) \|u\|_{A_0}^2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Es sei nun $\gamma \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann existiert nach (5.10) für jedes $\varepsilon > 0$ ein $C(\varepsilon) > 0$, sodass

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathfrak{t}_\gamma(u) &= (u, u)'_{A_1} + \operatorname{Re} \gamma \cdot |u_0(\eta)|^2 \geq (u, u)'_{A_1} - |\operatorname{Re} \gamma| \cdot |u_0(\eta)|^2 \\ &\geq (1 - C(\varepsilon) |\operatorname{Re} \gamma|) \cdot \|u\|_{A_0}^2 + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon |\operatorname{Re} \gamma| \right) \cdot \|\operatorname{grad} u\|_{A_0}^2. \end{aligned} \quad (5.11)$$

5.3 Eine holomorphe Familie sektorieller Formen vom Typ (a)

Nach Wahl eines ε_1 mit

$$\frac{1}{2} - \varepsilon_1 |\operatorname{Re} \gamma| > 0 \quad (5.12)$$

erhalten wir

$$\operatorname{Re} \mathfrak{t}_\gamma(u) \geq (1 - C(\varepsilon_1) |\operatorname{Re} \gamma|) \cdot \|u\|_{A_0}^2.$$

Wir setzen $C_0 := 1 - C(\varepsilon_1) |\operatorname{Re} \gamma|$. Dann wird für jedes $c > 0$ durch

$$\beta(c) := C_0 - c \quad (5.13)$$

ein Scheitel für \mathfrak{t}_γ definiert mit

$$\operatorname{Re} \mathfrak{t}_\gamma(u) - \beta(c) \|u\|_{A_0}^2 \geq c \|u\|_{A_0}^2.$$

Wir betrachten nun den Imaginärteil von \mathfrak{t}_γ . Für die Sektorialität bleibt nach Bemerkung 4.2.3 zu zeigen, dass es $C_1 \geq 0$ und $\beta_1 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$|\operatorname{Im} \mathfrak{t}_\gamma(u)| \leq C_1 \cdot (\operatorname{Re} \mathfrak{t}_\gamma(u) - \beta_1 \|u\|_{A_0}^2). \quad (5.14)$$

Im Fall $\operatorname{Im} \gamma = 0$ ist nichts zu zeigen, da $C_1 = 0$ gewählt werden kann. Es sei also $\operatorname{Im} \gamma \neq 0$. Für beliebiges $\delta > 0$ gilt nach erneuter Anwendung des Ehrling-Lemmas

$$|\operatorname{Im} \mathfrak{t}_\gamma(u)| = |\operatorname{Im} \gamma| \cdot |u_0(\eta)|^2 \leq |\operatorname{Im} \gamma| \cdot (\delta \|\operatorname{grad} u\|_{A_0}^2 + C(\delta) \|u\|_{A_0}^2). \quad (5.15)$$

Nach Wahl von ε_1 wie in (5.12) gibt es $\delta_1 > 0$ mit

$$\delta_1 < |\operatorname{Im} \gamma|^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_1 |\operatorname{Re} \gamma| \right).$$

Nun wählen wir β_1 so klein, dass

$$\beta_1 < 1 - C(\varepsilon_1) |\operatorname{Re} \gamma| - C(\delta_1) |\operatorname{Im} \gamma|. \quad (5.16)$$

Das so definierte β_1 ist ein Scheitel der Form

$$\beta_1 = \beta(c_1) \quad \text{für} \quad c_1 = C(\delta_1) |\operatorname{Im} \gamma| > 0$$

wie in (5.13). Umstellen von (5.16) nach $C(\delta_1)$ ergibt

$$C(\delta_1) < |\operatorname{Im} \gamma|^{-1} \cdot (1 - C(\varepsilon_1) |\operatorname{Re} \gamma| - \beta_1).$$

Für diese Wahl von δ_1 und β_1 gilt nach (5.15)

$$|\operatorname{Im} \mathfrak{t}_\gamma(u)| \leq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_1 |\operatorname{Re} \gamma| \right) \cdot \|\operatorname{grad} u\|_{A_0}^2 + (1 - C(\varepsilon_1) |\operatorname{Re} \gamma| - \beta_1) \cdot \|u\|_{A_0}^2.$$

Andererseits gilt nach (5.11)

$$\operatorname{Re} \mathfrak{t}_\gamma(u) - \beta_1 \|u\|_{A_0}^2 \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_1 |\operatorname{Re} \gamma| \right) \cdot \|\operatorname{grad} u\|_{A_0}^2 + (1 - C(\varepsilon_1) |\operatorname{Re} \gamma| - \beta_1) \cdot \|u\|_{A_0}^2.$$

Damit ist (5.14) erfüllt. □

Bemerkung 5.3.5. Das von einem Scheitel β_1 wie in (5.16) induzierte Skalarprodukt auf dem Prähilbertraum $H_{\mathfrak{t}_\gamma}$ aus Bezeichnung 4.2.7 (ii) ist

$$(u, v)_{\mathfrak{t}_\gamma} = (u, v)'_{A_1} + \operatorname{Re} \gamma \cdot u_0(\eta) \bar{v}_0(\eta) + (1 - \beta_1) \cdot (u, v)_{A_0}.$$

Lemma 5.3.6. *Die Form \mathfrak{t}_γ ist für jedes $\gamma \in \mathbb{C}$ abgeschlossen.*

Beweis. Es seien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A_1 und $f \in A_0$, sodass

$$\|f - f_n\|_{A_0} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

gilt und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|\mathfrak{t}_\gamma(f_n - f_m)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Es ist zu zeigen, dass $f \in A_1$ und $\mathfrak{t}_\gamma(f_n - f) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Die erste Aussage ist klar, da A_1 ein Hilbertraum ist. Um die zweite Behauptung einzusehen, schreiben wir

$$\mathfrak{t}_\gamma(f_n - f) = (f_n - f, f_n - f)'_{A_1} + \gamma \cdot |(f_n - f)_0(\eta)|^2.$$

Da die Norm $\|\cdot\|'_{A_1}$ äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_{A_1}$ ist, die Konvergenz des ersten Summanden klar. Für die Konvergenz des zweiten Summanden wenden wir das Spurtheorem 5.2.9 an, aus welchem die Stetigkeit der Spurabbildung $H^1(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}}) \rightarrow H^{1/2}(\partial X_\eta, \lambda^1)$ folgt. Dann ist nämlich auch die Abbildung

$$f_0 : A_1 \rightarrow \mathbb{C}, \quad u \mapsto f_0[u](\eta) = u_0(\eta),$$

stetig, und für eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $f \in A_1$ gilt

$$|(f_n)_0(\eta) - f_0(\eta)| \leq C \|f_n - f\|_{A_1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

wobei $C > 0$ die Konstante aus der Stetigkeitsabschätzung für f_0 ist. Somit erhalten wir

$$|(f_n - f)_0(\eta)|^2 = |(f_n)_0(\eta) - f_0(\eta)|^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad \square$$

Da alle Voraussetzungen von Theorem 4.2.11 erfüllt sind, können wir nun den zu \mathfrak{t}_γ gehörigen m -sektoriellen Operator definieren.

Definition und Satz 5.3.7. Die Form \mathfrak{t}_γ induziert für jedes $\gamma \in \mathbb{C}$ einen m -sektoriellen Operator

$$T_\gamma := T_{\mathfrak{t}_\gamma},$$

dessen Definitionsbereich $D(T_\gamma)$ eine dichte Teilmenge von A_1 ist. Der *Robin-Pseudo-Laplace-Operator* Δ_γ sei definiert durch

$$\Delta_\gamma := T_\gamma - \operatorname{id}_{A_0}, \quad D(\Delta_\gamma) = D(T_\gamma).$$

Satz 5.3.8. *Die Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ ist eine selbstadjungierte holomorphe Familie vom Typ (B) im Sinne von Definition und Satz 4.3.16.*

Beweis. Da $D(\mathfrak{t}_\gamma) = A_1$ nicht von γ abhängt, ist $(\mathfrak{t}_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ eine holomorphe Familie vom Typ (a). Die Familie ist selbstadjungiert, da \mathfrak{t}_γ für $\gamma \in \mathbb{R}$ symmetrisch ist. \square

Korollar 5.3.9. *Der Robin-Pseudo-Laplace-Operator Δ_γ ist genau dann selbstadjungiert, wenn $\gamma \in \mathbb{R}$ gilt.*

5.4 Definitionsbereich des Robin-Pseudo-Laplace-Operators

Wir bestimmen nun den Definitionsbereich des Operators Δ_γ mithilfe der elliptischen Regularität aus Abschnitt 1.3.3. Wir zeigen die Aussage für den Operator $T_\gamma = \Delta_\gamma + \text{id}_{A_0}$.

In Analogie zu A_0 und A_1 führen wir hierzu einen Folgenraum A_2 höherer Regularität ein.

Definition 5.4.1. Für $m \in \mathbb{Z}$ sei \mathcal{H}_m^2 der Hilbertraum

$$\mathcal{H}_m^2 := \{u \in \mathcal{H}_m \mid L_m u \in L^2(I_m, \mu_{\mathbb{H}})\},$$

wobei der Differentialoperator L_m in $L^2(I_m, \mu_{\mathbb{H}})$ für jedes $m \in \mathbb{Z}$ durch die Vorschrift

$$L_m u(y) = -y^2 \left(u''(y) - 4\pi^2 m^2 u(y) \right)$$

wie in Definition 5.2.6 gegeben sei. Der Folgenraum A_2 sei definiert durch

$$A_2 := \left(H^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}}) \oplus_{\ell_2} \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_m^2 \right) / \mathcal{N}.$$

Bemerkung 5.4.2. Nach den Beispielen 1.3.8 und 1.3.10 ist die H^2 -Norm auf I_0 gegeben durch

$$\|u\|_{H^2(I_0, \mu_{\mathbb{H}})}^2 = \|u\|_{H^1(I_0, \mu_{\mathbb{H}})}^2 + \int_{I_0} y^4 |u''(y)|^2 \frac{dy}{y^2} = \|u\|_{H^1(I_0, \mu_{\mathbb{H}})}^2 + \|L_0 u\|_{L^2(I_0, \mu_{\mathbb{H}})}^2.$$

Daher gilt $\mathcal{H}_0^2 = H^2(I_0, \mu_{\mathbb{H}})$.

Satz 5.4.3. *Der Operator T_γ hat den Definitionsbereich*

$$D(T_\gamma) = \{u \in A_2 \mid u'_0(\eta) = -\gamma u_0(\eta)\}$$

und bildet Funktionen $u = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_m(y) e_m(x) \in D(T_\gamma)$ gemäß der Vorschrift

$$T_\gamma(u, (u_m)_{m \in \mathbb{Z}}) = (\Delta|_{X_\eta} u, (L_m u_m)_{m \in \mathbb{Z}}) + (u, (u_m)_{m \in \mathbb{Z}})$$

nach A_0 ab. Schreiben wir kurz Δu für $(\Delta|_{X_\eta} u, (L_m u_m)_{m \in \mathbb{Z}})$, so gilt $T_\gamma u = \Delta u + u$.

Beweis. Nach Bemerkung 4.2.13 ist der Definitionsbereich von T_γ gegeben durch

$$M_1 := \{u \in A_1 \mid v \mapsto \mathfrak{t}_\gamma(u, v) \text{ ist stetig in } A_0\},$$

wobei die Stetigkeit von $v \mapsto \mathfrak{t}_\gamma(u, v)$ äquivalent ist zur Stetigkeit von

$$\begin{aligned} v \mapsto (\mathfrak{t}_\gamma - \mathbf{1})(u, v) &= (\text{grad } u, \text{grad } v)_{L^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}})} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} 4\pi^2 m^2 \int_{I_m} u_m \cdot \bar{v}_m \, d\lambda^1 + \int_{I_m} u'_m \cdot \bar{v}'_m \, d\lambda^1 \\ &\quad + \gamma \cdot u_0(\eta) \bar{v}_0(\eta). \end{aligned}$$

Wir zeigen demnach nun die Gleichheit der Mengen M_1 und

$$M_2 := \{u \in A_2 \mid u'_0(\eta) = -\gamma u_0(\eta)\}.$$

„ $M_1 \supseteq M_2$ “: Es sei $u \in A_2$ mit $u'_0(\eta) = -\gamma u_0(\eta)$. Für $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt $u_m \in H^2(I, \mu_{\mathbb{H}})$ für jedes kompakte Intervall $I \subseteq I_m$. Insbesondere besitzt u_m nach dem Sobolevschen Einbettungssatz einen Repräsentanten in $C^1(\bar{I})$, sodass die Punktauswertung $u'_m(r)$ wohldefiniert ist. Anwendung der Greenschen Formel auf I_m liefert

$$\begin{aligned} & 4\pi^2 m^2 \cdot \int_{I_m} u_m(y) \cdot \bar{v}_m(y) \, dy + \int_{I_m} u'_m(y) \cdot \bar{v}'_m(y) \, dy \\ &= \int_{I_m} -y^2 \left(u''_m(y) - 4\pi^2 m^2 u_m(y) \right) \cdot \bar{v}_m(y) \frac{dy}{y^2} - u'_m(r) \bar{v}_m(r) \\ &= \int_{I_m} L_m u_m \cdot \bar{v}_m \, d\mu_{\mathbb{H}} - u'_m(r) \bar{v}_m(r). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Für $m = 0$ gilt analog

$$\int_{I_0} u'_0(y) \cdot \bar{v}'_0(y) \, dy = \int_{I_0} L_0 u_0 \cdot \bar{v}_0(y) \, dy + u'_0(\eta) \bar{v}_0(\eta) - u'_0(r) \bar{v}'_0(r). \quad (5.18)$$

Durch Summation über $m \in \mathbb{Z}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (\mathbf{t}_\gamma - \mathbf{1})(u, v) &= \int_{X_r} \Delta u \cdot \bar{v} \, d\mu_{\mathbb{H}} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{I_m} L_m u_m \cdot \bar{v}_m \, d\mu_{\mathbb{H}} \\ &\quad + \int_{\mathcal{H}_r} \partial_\nu u \cdot \bar{v} \, d\lambda^1 - \sum_{m \in \mathbb{Z}} u'_m(r) \bar{v}_m(r) + u'_0(\eta) \bar{v}_0(\eta) + \gamma \cdot u_0(\eta) \bar{v}_0(\eta). \end{aligned}$$

Wie in Bemerkung 5.2.10 liefert Anwendung des Spurtheorems auf $u|_{X_\eta} \in H^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}})$

$$\int_{\mathcal{H}_r} \partial_\nu u \cdot \bar{v} \, d\lambda^1 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u'_m(r) \bar{v}_m(r). \quad (5.19)$$

Somit heben sich die Randterme in r auf, und aus $u'_0(\eta) = -\gamma \bar{u}_0(\eta)$ folgt

$$(\mathbf{t}_\gamma - \mathbf{1})(u, v) = (\Delta u, v)_{A_0} - (\Delta u, v)_{L^2(P_{r,\eta}, \mu_{\mathbb{H}})} \quad (5.20)$$

mit $\Delta u = (\Delta|_{X_\eta} u, (L_m u_m)_{m \in \mathbb{Z}}) \in A_0$. Die rechte Seite von (5.20) ist daher stetig in $v \in A_0$.

„ $M_1 \subseteq M_2$ “: Für $u \in D(T_\gamma)$ und beliebiges $v \in A_1$ gilt nach Theorem 4.2.11

$$\mathbf{t}_\gamma(u, v) = (T_\gamma u, v).$$

Insbesondere liegt $w := T_\gamma u$ in A_0 . Daher folgt für eine Testfunktion $\phi \in \mathcal{D}(X_\eta)$

$$\begin{aligned} (w, \phi)_{L^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}})} &= (T_\gamma u, \phi)_{L^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}})} = (u, T_\gamma^* \phi)_{L^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}})} = \mathbf{t}_\gamma^*(u, \phi) = \overline{\mathbf{t}_\gamma(\phi, u)} \\ &= \overline{(\phi, u)_{L^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}})}} + \overline{(\text{grad } \phi, \text{grad } u)_{L^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}})}} \\ &= (u, \phi)_{L^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}})} + (\text{grad } u, \text{grad } \phi)_{L^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}})} \\ &= (u, \phi)_{L^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}})} + \langle \Delta u, \phi \rangle, \end{aligned}$$

wobei $\langle \Delta u, \phi \rangle$ im Distributionssinn zu verstehen ist. Insbesondere folgt für alle $\phi \in \mathcal{D}(X_\eta)$

$$\langle \Delta u, \phi \rangle = (w - u, \phi)_{L^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}})} = (T_\gamma u - u, \phi)_{L^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}})}.$$

Da $\mathcal{D}(X_\eta)$ dicht in $L^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}})$ ist, folgt somit

$$\Delta|_{X_\eta} u|_{X_\eta} = T_\gamma u|_{X_\eta} - u|_{X_\eta} \in L^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}}).$$

Analoge Rechnung mit $\phi \in \mathcal{D}(I_m)$ zeigt, dass $L_m u_m \in L^2(I_m, \mu_{\mathbb{H}})$ und daher $u_m \in \mathcal{H}_m^2$ für jedes $m \in \mathbb{Z}$ gilt.

Es bleibt zu zeigen, dass aus $\Delta|_{X_\eta} u \in L^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}})$ bereits $u \in H^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}})$ folgt. Der innere Regularitätssatz 1.3.20 impliziert, dass für jedes $\varepsilon > 0$ und $r < R < \eta - \varepsilon$ gilt

$$u \in H^2(X_R, \mu_{\mathbb{H}}). \quad (5.21)$$

Für $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ liefert Anwendung von Theorem 1.3.20 auf den elliptischen Operator L_m und eine kompakte Teilmenge $[r, h]$ von I_m , dass $u_m \in H^2([r, h], \mu_{\mathbb{H}})$ für jedes $h \in [r, \infty[$ gilt. Ferner gilt $u_0 \in H^2(I_0, \mu_{\mathbb{H}})$ nach Bemerkung 5.4.2. Aus dem Einbettungssatz von Sobolev folgt

$$u_0 \in C^1([r, \eta]).$$

Wir definieren eine stetig differenzierbare Fortsetzung $\tilde{u}_0 \in C^1([r, \eta + 1])$ von u_0 durch

$$\tilde{u}_0(y) = \begin{cases} u_0(y), & y \leq \eta, \\ u_0(\eta) + (y - \eta)u_0'(\eta), & \eta < y \leq \eta + 1, \end{cases}$$

und setzen

$$\tilde{u} = (u - u_0) + \tilde{u}_0.$$

Dann ist \tilde{u} eine Fortsetzung von u nach $L^2(X_{\eta+1}, \mu_{\mathbb{H}})$ mit $\Delta\tilde{u} \in L^2(X_{\eta+1}, \mu_{\mathbb{H}})$. Durch Anwendung des Argumentes in (5.21) mit $\tilde{\eta} = \eta + 1$ und $\tilde{R} = \eta + \frac{1}{2}$ ergibt sich

$$\tilde{u} \in H^2(X_{\eta+1/2}, \mu_{\mathbb{H}}).$$

Folglich gilt

$$u = \tilde{u}|_{X_\eta} \in H^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}}).$$

Nun liefert die Greensche Formel für beliebiges $v \in A_1$ mit derselben Rechnung wie in (5.17), (5.18) und (5.19)

$$(\mathbf{t}_\gamma - \mathbf{1})(u, v) = \int_{X_r} \Delta u \cdot \bar{v} \, d\mu_{\mathbb{H}} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{I_m} L_m u_m \cdot \bar{v}_m \, d\mu_{\mathbb{H}} + (u_0'(\eta) + \gamma u_0(\eta)) \cdot \bar{v}_0(\eta).$$

Die rechte Seite kann genau dann stetig für $v \in A_0$ fortgesetzt werden, wenn der absolute Term u_0 die Randbedingung

$$u_0'(\eta) = -\gamma u_0(\eta)$$

erfüllt und die Reihe

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{I_m} |L_m u_m|^2 \, d\mu_{\mathbb{H}} < \infty$$

über die L^2 -Normen der Folgenglieder $(L_m u_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ konvergiert. Dies ist äquivalent dazu, dass $(\Delta|_{X_\eta} u, (L_m u_m)_{m \in \mathbb{Z}})$ in A_0 und somit u in A_2 liegt. \square

Korollar 5.4.4. Für $u = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_m(y) e_m(x) \in D(\Delta_\gamma) = D(T_\gamma)$ gilt

$$\Delta_\gamma(u, (u_m)_{m \in \mathbb{Z}}) = (\Delta|_{X_\eta} u, (L_m u_m)_{m \in \mathbb{Z}}).$$

Bemerkung 5.4.5. Mithilfe der Identifikation aus Bemerkung 5.2.5 können wir den Definitionsbereich $D(\Delta_\gamma)$ in Analogie zu Satz 5.2.11 beschreiben durch

$$D(\Delta_\gamma) = \{f \in L^2(X, \mu_{\mathbb{H}}) \mid \Delta f^\eta + f_0(\eta) \cdot (\delta'_{\eta,0} + \gamma \cdot \delta_{\eta,0}) \in L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})\}$$

mit $\langle \delta'_{\eta,0}, \phi \rangle = \phi'_0(\eta)$. Diese Darstellung entspricht einer Verallgemeinerung von $D(\Delta^\eta)$ in der Darstellung von Colin de Verdière aus Definition und Satz 2.5.6.

Lemma 5.4.6. Für $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist der Robin-Pseudo-Laplace-Operator Δ_γ nicht normal.

Beweis. Für $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt

$$D(\Delta_\gamma^*) = \{u \in A_2 \mid u'_0(\eta) = -\bar{\gamma} u_0(\eta)\} \neq D(\Delta_\gamma). \quad \square$$

5.5 Kompakte Resolvente

Wir zeigen nun, dass die Resolvente von Δ_γ kompakt ist. Wie in Abschnitt 5.4 berechnen wir dies für T_γ . Die Kompaktheit der Resolvente impliziert, dass das Spektrum von Δ_γ für alle $\gamma \in \mathbb{C}$ diskret ist. Insbesondere erfüllt die Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ die Voraussetzungen von Theorem 4.3.19.

Satz 5.5.1. Für jedes $\gamma \in \mathbb{C}$ besitzt der Operator T_γ kompakte Resolvente.

Der Beweis von Satz 5.5.1 orientiert sich am Beweis von Lemma 8.7 in Lax und Phillips [17]. Zur Vorbereitung benötigen wir den Begriff der Präkompaktheit sowie den Rellichschen Einbettungssatz für kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

Definition 5.5.2 (Meise und Vogt [18], Bemerkung 4.4 und vorhergehende Definition). Eine nichtleere Teilmenge K eines metrischen Raumes Y heißt *präkompakt*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele $y_1, \dots, y_n \in Y$ gibt, sodass $K \subset \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(y_j)$.

Satz 5.5.3 (Meise und Vogt [18], Satz 4.8 und Korollar 4.10). Ein metrischer Raum Y ist genau dann kompakt, wenn er vollständig und präkompakt ist.

Insbesondere ist eine Teilmenge K eines vollständigen metrischen Raumes Y genau dann relativ kompakt, wenn sie präkompakt ist.

Theorem 5.5.4 (Rellichscher Einbettungssatz für kompakte Mannigfaltigkeiten, Taylor [30], Kapitel 4, Proposition 4.4). *Es sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit glattem Rand und es seien $\sigma \geq 0$ und $d > 0$. Dann ist die Einbettung*

$$H^{\sigma+d}(M) \hookrightarrow H^\sigma(M)$$

kompakt.

Beweis von Satz 5.5.1. Da die Resolvente

$$(T_\gamma - \lambda \text{Id})^{-1} : A_0 \rightarrow D(T_\gamma) \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$$

über A_1 faktorisiert, genügt es zu zeigen, dass die Einbettung $A_1 \hookrightarrow A_0$ kompakt ist. Nach Satz 5.5.3 genügt es hierfür zu zeigen, dass die Menge

$$K := \{u \in A_1 \mid \|u\|_{A_1} \leq 1\} \quad (5.22)$$

eine präkompakte Teilmenge von A_0 ist. Es sei dazu $\varepsilon > 0$ vorgegeben und

$$w = (f, (g_m)_{m \in \mathbb{Z}}) \in K.$$

Da X_η kompakt ist, ist nach dem Rellichschen Einbettungssatz 5.5.4 die Menge

$$K_1 := \{f \mid (f, (g_m)_{m \in \mathbb{Z}}) \in K\}$$

relativ kompakt in $L^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}})$. Für jedes $h > r$ und $m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\|g_m|_{[r,h]}\|_{H^1([r,h], \mu_{\mathbb{H}})} \leq \|w\|_{A_1} \leq 1.$$

Also ist die Menge

$$K_2 = \{g_m \mid m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, (f, (g_m)_{m \in \mathbb{Z}}) \in K\}$$

eine Teilmenge von

$$\{g \in H^1([r, h], \mu_{\mathbb{H}}) \mid \|g\|_{H^1([r, h], \mu_{\mathbb{H}})} \leq 1\},$$

welche wiederum nach dem Rellichschen Einbettungssatz relativ kompakt in $L^2([r, h], \mu_{\mathbb{H}})$ ist.

Gleiches gilt für die Menge

$$K_3 = \{g_0 \mid (f, (g_m)_{m \in \mathbb{Z}}) \in K\},$$

die eine Teilmenge von

$$\{g \in H^1([r, \eta], \mu_{\mathbb{H}}) \mid \|g\|_{H^1([r, \eta], \mu_{\mathbb{H}})} \leq 1\}$$

und somit relativ kompakt in $L^2([r, \eta], \mu_{\mathbb{H}})$ ist. Nach Satz 5.5.3 gibt es endlich viele

$$w_j = (f_j, (g_{j,m})_{m \in \mathbb{Z}}) \in K, \quad j = 1, \dots, n,$$

sodass

$$K_4 := \{(f, g_0, (g_m|_{[r,h]})_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}) \mid (f, (g_m)_{m \in \mathbb{Z}}) \in K\} \subset \bigcup_{j=1}^n B_{\varepsilon/3}(w_j).$$

Wir zeigen

$$K \subset \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(w_j).$$

Dazu setzen wir

$$h = \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}.$$

Für hinreichend kleines ε gilt $h > \eta$, sodass g_0 auf $[h, \infty[$ verschwindet. Demnach gilt für die Einschränkung von $w = (f, (g_m)_{m \in \mathbb{Z}})$ auf $[h, \infty[$

$$\begin{aligned} \|(0, (g_m|_{[h, \infty[})_{m \in \mathbb{Z}})\|_{A_0} &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_h^\infty |g_m(y)|^2 \frac{dy}{y^2} \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} 4\pi^2 m^2 \cdot \int_h^\infty |g_m(y)|^2 \frac{dy}{y^2} \\ &\leq \frac{1}{h^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} 4\pi^2 m^2 \cdot \int_h^\infty |g_m(y)|^2 dy \leq \frac{1}{h^2} \|(0, (g_m|_{[h, \infty[})_{m \in \mathbb{Z}})\|_{A_1}. \end{aligned}$$

Daher gilt für jedes $w \in K$

$$\|(0, (g_m|_{[h, \infty[})_{m \in \mathbb{Z}})\|_{A_0} \leq \frac{\varepsilon}{3} \|w\|_{A_1} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Folglich existiert für jedes $w \in K$ ein $w_j \in \{w_1, \dots, w_n\}$, sodass

$$\begin{aligned} \|w - w_j\|_{A_0} &\leq \|(f - f_j, ((g_m - g_{j,m})|_{[r, h])_{m \in \mathbb{Z}})\|_{A_0} + \|(0, (g_m|_{[h, \infty[})_{m \in \mathbb{Z}})\|_{A_0} \\ &\quad + \|(0, (g_{j,m}|_{[h, \infty[})_{m \in \mathbb{Z}})\|_{A_0} < \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

Die Implikationen aus Satz 5.5.1 für das Spektrum von Δ_γ unterscheiden sich je nachdem, ob γ reell oder echt komplex ist. Für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ ist Δ_γ selbstadjungiert und besitzt daher ein Punktspektrum in \mathbb{R} , das sich zu einer unendlichen aufsteigenden Folge

$$\Lambda_1(\gamma) \leq \Lambda_2(\gamma) \leq \dots \quad (5.23)$$

von Eigenwerten anordnen lässt, sodass gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_k(\gamma) = \infty. \quad (5.24)$$

Ferner gilt Theorem 4.3.19, sodass die $\Lambda_k(\gamma)$ als holomorphe Funktionen

$$\mathfrak{L}_k : U_k \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma \mapsto \Lambda_k(\gamma), \quad (5.25)$$

auf einer komplexen Umgebung U_k von \mathbb{R} verstanden werden können. Für beliebiges $\gamma \in \mathbb{C}$ können wir das folgende Theorem anwenden.

Theorem 5.5.5 (Kato [13], III, Theorem 6.29). *Es sei T ein abgeschlossener Operator mit kompakter Resolvente in einem Banachraum Y . Dann besteht das Spektrum von T aus einer (unendlich) abzählbaren Menge isolierter Eigenwerte endlicher Vielfachheit, die keinen Häufungspunkt außer ∞ besitzen.*

Bemerkung 5.5.6. (i) Die Eigenwerte $\Lambda(\gamma)$ sind für komplexes γ nicht notwendig reell, da der Operator nicht selbstadjungiert ist. Nach Theorem 5.5.5 lässt sich das Spektrum von Δ_γ jedoch wie im reellen Fall zu einer Folge $(\Lambda_k(\gamma))_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{C} anordnen, die in $\hat{\mathbb{C}}$ gegen den unendlich fernen Punkt konvergiert. Da der Operator sektoriell ist, liegt die Folge $(\Lambda_k(\gamma))_{k \in \mathbb{N}}$ zudem in einem nach rechts geöffneten Sektor $\Sigma(\beta, \theta)$ wie in Definition 4.2.9.

(ii) Nach Bemerkung 4.3.21 kann im allgemeinen Fall jeder einzelne Eigenwert $\Lambda(\gamma)$ lokal als stetige Funktion in γ verstanden werden, die fast überall holomorph ist und höchstens algebraische Singularitäten besitzt. Diese Aussage bleibt auch dann gültig, wenn die holomorphe Familie nicht mehr vom Typ (B) ist. Dieser Fall liegt für die Fortsetzung $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \hat{\mathbb{C}}}$ im unendlich fernen Punkt $\gamma = \infty$ vor, die im folgenden Abschnitt 5.6 konstruiert wird.

5.6 Holomorphe Fortsetzung auf die Riemannsche Zahlensphäre

Der klassische Pseudo-Laplace-Operator Δ^η von Colin de Verdière hat die Randbedingung

$$f_0(\eta) = 0. \quad (5.26)$$

Wir nehmen an, dass nicht gleichzeitig $f_0(\eta) = 0$ und $f'_0(\eta) = 0$ gilt. Da wir am Beginn von Abschnitt 2.5 gesehen haben, dass für die Eisensteinreihe mit $s = \frac{1}{2} + i\tau$ die Terme

$$E_0(\eta, s) = c_0(s)\sqrt{\eta}\cos(\xi(\eta, \tau))$$

und

$$E'_0(\eta, s) = \frac{c_0(s)}{\sqrt{\eta}} \left(\frac{\cos(\xi(\eta, \tau))}{2} - \tau \sin(\xi(\eta, \tau)) \right)$$

nicht gleichzeitig verschwinden können, ist diese Annahme sinnvoll.

In diesem Fall kann die Robin-Bedingung

$$-\gamma f_0(\eta) = f'_0(\eta) \quad (5.27)$$

nur dann gleichzeitig mit (5.26) gelten, wenn $\gamma = \infty$ als Wert zugelassen wird, und der Term $\gamma f_0(\eta)$ eine hebbare Singularität besitzt.

Im Folgenden zeigen wir, dass der klassische Pseudo-Laplace-Operator Δ^η tatsächlich als holomorphe Fortsetzung von $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ in den unendlich fernen Punkt verstanden werden kann. Die entstehende Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \hat{\mathbb{C}}}$ ist in keiner Umgebung von ∞ vom Typ (B).

Um in der Theorie der Folgenräume zu bleiben, definieren wir zunächst einen Operator Δ_D mit Dirichlet-Randbedingungen. Der Beweis für die Gestalt des Definitionsbereiches und der kompakten Resolvente erfolgt analog zu Satz 5.4.3 und Satz 5.5.1.

Definition und Satz 5.6.1. Wir definieren auf

$$D(\mathfrak{t}_D) = \{u \in A_1 \mid u_0(\eta) = 0\}$$

eine symmetrische Form durch

$$\mathfrak{t}_D(u, v) = (u, v)'_{A_1}.$$

Dann ist \mathfrak{t}_D nichtnegativ und induziert einen m -sektoriellen Operator T_D mit Definitionsbereich

$$D(T_D) = \{u \in A_2 \mid u_0(\eta) = 0\}.$$

Der Operator T_D hat eine kompakte Resolvente. Wir setzen

$$\Delta_D = T_D - \text{id}_{A_0}.$$

Für $u \in D(\Delta_D)$ gilt $\Delta_D u = \Delta u$.

Der Operator Δ_D entspricht dem Pseudo-Laplace-Operator Δ^η Colin de Verdières in η in dem Sinne, dass Δ_D und Δ^η die gleichen Eigenwerte besitzen und ihre Eigenfunktionen miteinander identifiziert werden können wie in Bemerkung 5.2.5.

Bezeichnung 5.6.2. Auf \mathbb{C} wird durch

$$S_\gamma := \begin{cases} \Delta_{1/\gamma}, & \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ \Delta_D, & \gamma = 0, \end{cases}$$

eine Familie m -sektorieller Operatoren in A_0 mit Definitionsbereich

$$D(S_\gamma) = \{u \in A_2 \mid u_0(\eta) = -\gamma u'_0(\eta)\}$$

gegeben.

Theorem 5.6.3. *Es gibt eine Umgebung U_0 von $\gamma = 0$, sodass $(S_\gamma)_{\gamma \in U_0}$ eine holomorphe Familie von Operatoren im Sinne von Definition 4.3.8 ist.*

Beweis. Es sei Y_1 der Banachraum A_2 , versehen mit der Norm

$$\|u\|_{A_2} = \|u\|_{A_0} + \|\Delta u\|_{L^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}})} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \|L_m u_m\|_{L^2(I_m, \mu_{\mathbb{H}})}.$$

Wir schreiben der Einfachheit halber

$$\|\Delta u\|_{A_0} := \|\Delta u\|_{L^2(X_\eta, \mu_{\mathbb{H}})} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \|L_m u_m\|_{L^2(I_m, \mu_{\mathbb{H}})}.$$

Ferner sei $Y_2 = A_0$, sodass $S_\gamma \in \mathcal{C}(Y_1, Y_2)$. Wir setzen

$$Z = D(\Delta_D) = D(S_0)$$

und definieren $U_\gamma : Z \rightarrow Y_1$ durch

$$f \mapsto g := f - \gamma f'_0(\eta) \cdot \chi. \tag{5.28}$$

Hierbei sei $\chi \in C^\infty([0, \infty[)$ so gewählt, dass

- (i) $\text{supp}(\chi) \subseteq [r, \eta + 1]$,
- (ii) $\chi(\eta) = 1$,
- (iii) $\chi'(\eta) = 0$.

Die Abbildung U_γ ist stetig, weil für $f \in A_2$ der absolute Term f_0 in $H^2(I_0, \mu_{\mathbb{H}})$ liegt und daher nach dem Spurtheorem 5.2.9 die Punktauswertung $f'_0(\eta)$ stetig in $f \in A_2$ ist.

Als Nächstes ist zu zeigen, dass gilt

$$U_\gamma(Z) = D(S_\gamma)$$

und

$$U_\gamma : D(S_0) \rightarrow D(S_\gamma)$$

bijektiv ist.

Hierzu setzen wir

$$W_\gamma : D(S_\gamma) \rightarrow D(S_0), \quad f \mapsto h := f - f_0(\eta) \cdot \chi.$$

Für $f \in D(S_\gamma)$ gilt

$$h_0(\eta) = f_0(\eta) - f_0(\eta)\chi(\eta) = 0$$

und

$$h'_0(\eta) = f'_0(\eta) - f_0(\eta)\chi'(\eta) = f'_0(\eta).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} U_\gamma(W_\gamma(f)) &= U_\gamma(h) = (f - f_0(\eta) \cdot \chi) - \gamma h'_0(\eta) \cdot \chi \\ &= f - (f_0(\eta) + \gamma f'_0(\eta)) \cdot \chi \\ &= f, \end{aligned}$$

weil $f \in D(S_\gamma)$ die Randbedingung $f_0(\eta) = -\gamma f'_0(\eta)$ erfüllt.

Umgekehrt gilt für $f \in D(S_0)$ und $g = U_\gamma(f)$ wie in (5.28)

$$\begin{aligned} g_0(\eta) &= f_0(\eta) - \gamma f'_0(\eta)\chi(\eta) = -\gamma f'_0(\eta), \\ g'_0(\eta) &= f'_0(\eta) - \gamma f'_0(\eta)\chi'(\eta) = f'_0(\eta) \end{aligned}$$

und daher

$$g_0(\eta) = -\gamma g'_0(\eta).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} W_\gamma(U_\gamma(f)) &= W_\gamma(g) = (f - \gamma f'_0(\eta) \cdot \chi) - g_0(\eta) \cdot \chi \\ &= f - \gamma f'_0(\eta) \cdot \chi - (-\gamma) f'_0(\eta) \cdot \chi \\ &= f. \end{aligned}$$

Also gilt $W_\gamma = (U_\gamma)^{-1}$.

Zu zeigen bleibt die Stetigkeit der Verknüpfung

$$V_\gamma : Z \rightarrow Y_2, \quad V_\gamma = S_\gamma \circ U_\gamma.$$

Für $f \in Z = D(S_0)$ ist $V_\gamma(f)$ gegeben durch

$$V_\gamma(f) = S_\gamma(U_\gamma(f)) = S_\gamma(f - \gamma f'_0(\eta) \cdot \chi).$$

Wegen der Stetigkeit von $f_0 : f \mapsto f'_0(\eta)$ für $f \in A_2$ existiert $C > 0$, sodass

$$\|V_\gamma\|_{A_0} = \|\Delta(f - \gamma f'_0(\eta) \cdot \chi)\|_{A_0} \leq \|\Delta f\|_{A_0} + |\gamma f'_0(\eta)| \cdot \|\Delta \chi\|_{A_0} \leq C \cdot \|f\|_{A_2}.$$

Ferner sind U_γ und V_γ auf \mathbb{C} beschränkt holomorph im Sinne von Definition 4.3.6, da die Abbildungsvorschriften von U_γ und V_γ affin-linear in γ sind. \square

Definition und Satz 5.6.4. Es sei $R > 0$ und $U_\infty = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R - 1\} \cup \{\infty\}$ eine Umgebung von ∞ . Dann gilt $\hat{\mathbb{C}} = B_R(0) \cup U_\infty$ und die Familie

$$\tilde{\Delta}_\gamma = \begin{cases} \Delta_\gamma, & \gamma \in B_R(0), \\ S_{1/\gamma}, & \gamma \in U_\infty, \end{cases}$$

ist eine holomorphe Fortsetzung von $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ nach $\hat{\mathbb{C}}$. Wir bezeichnen im Folgenden den klassischen Pseudo-Laplace-Operator Δ_D mit Δ_∞ und die Fortsetzung $(\tilde{\Delta})_{\gamma \in \hat{\mathbb{C}}}$ mit $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \hat{\mathbb{C}}}$.

Die so definierte Familie ist nicht vom Typ (B), da $D(\mathfrak{t}_D) \subsetneq D(\mathfrak{t}_\gamma)$ für jedes $\gamma \in \mathbb{C}$ gilt. Betrachtet man die Form $\mathfrak{t}_{1/\gamma}$ mit Definitionsbereich A_1 , dann gilt für beliebiges $u \in A_1$ mit $u_0(\eta) \neq 0$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathfrak{t}_{1/\gamma}(u) = (u, u)'_{A_1} + \frac{1}{\gamma} |u_0(\eta)|^2 = \infty.$$

Es ist also nicht möglich, die holomorphe Familie $(\mathfrak{t}_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ in ∞ als holomorphe Familie vom Typ (a) fortzusetzen. Entsprechend kann $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \hat{\mathbb{C}}}$ nicht vom Typ (B) sein.

Kapitel 6

Das Spektrum des Robin-Pseudo-Laplace-Operators

In diesem Kapitel wird das Spektrum der Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \hat{\mathbb{C}}}$ beschrieben. Die Eigenwerte und Eigenfunktionen von Δ_∞ sind identisch mit denen des klassischen Pseudo-Laplace-Operators Δ^η von Colin de Verdière [4], welche in Theorem 2.5.8 angegeben worden sind.

Da sich der Operator Δ_γ lediglich durch die Randbedingung auf dem Horozykel \mathcal{H}_η von Δ^η unterscheidet, ist es plausibel, dass auch für Δ_γ alle Eigenfunktionen, die keine Spitzenformen sind, eindeutig durch trunkierte Eisensteinreihen beschrieben werden können. Dies wird in Abschnitt 6.1 bewiesen. Als Vorbereitung hierzu werden die Eigenfunktionen von Δ^η nach ihrem absoluten Term kategorisiert. Wie Colin de Verdière nennen wir alle Eigenfunktionen, deren absoluter Term nicht trivial ist, *Eigenfunktionen vom Typ (II)*, und verwenden diese Bezeichnung auch für die zugehörigen Eigenwerte.

Da die Abbildung $\mathcal{E} : s \mapsto E(z, s)$ Pole besitzt, kann der Fall eintreten, dass ein zu Δ_γ gehöriger Eigenwert

$$\lambda(\gamma) = s(\gamma) \cdot (1 - s(\gamma)) \quad (6.1)$$

zu einem Pol $s(\gamma)$ von \mathcal{E} gehört. Auf der rechten Halbebene $\{\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}\}$ allerdings sind die einzigen Pole von \mathcal{E} die endlich vielen Pole der Streumatrix φ im Intervall $]\frac{1}{2}, 1]$ (Theorem 2.1.14). Alle weiteren Pole von φ liegen in der linken Halbebene und sind durch die Funktionalgleichung

$$\varphi(s)\varphi(1-s) = 1$$

mit einer Nullstelle von φ in $\{\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}\}$ assoziiert. Die Anzahl und Vielfachheit dieser Pole ist nicht bekannt. In Abschnitt 6.2 wird durch das Verhalten von φ eine Typisierung der Eigenwerte vom Typ (II) vorgenommen. Hierbei zeigt sich, dass durch die Robin-Bedingung für die Eisensteinreihe

$$E'_0(\eta, s) = -\gamma E_0(\eta, s)$$

eine holomorphe Funktion $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, $s \mapsto \gamma(s)$, definiert wird, die nur einfache Pole besitzt, wenn s zu einem Eigenwert des klassischen Pseudo-Laplace-Operators Δ_∞ gehört.

In Abschnitt 6.3 formulieren wir einen allgemeinen Spektralsatz für alle $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$, in dem analog zu Theorem 2.5.8 alle Eigenfunktionen und Eigenwerte von Δ_∞ angegeben werden. Für $\gamma \in \mathbb{R}$

können anschließend aus Theorem 4.3.19 weitere Aussagen über das Spektrum abgeleitet werden, wie bereits am Ende von Abschnitt 5.5 skizziert worden ist.

6.1 Kategorisierung der Eigenfunktionen

In Abschnitt 5.5 wurde gezeigt, dass das Spektrum von Δ_γ für jedes $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ diskret ist. Korollar 5.4.4 impliziert die folgende offensichtliche Charakterisierung der Eigenfunktionen.

Satz 6.1.1. *Es sei $\gamma \in \mathbb{C}$ beliebig. Eine Funktion $u \in D(\Delta_\gamma)$ ist genau dann eine Eigenfunktion von Δ_γ zum Eigenwert λ , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) *Es gilt $\Delta u = \lambda u$ auf X_η .*
- (ii) *Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ gilt $L_m u_m = \lambda u_m$ auf I_m .*
- (iii) *Der absolute Term erfüllt auf \mathcal{H}_η die Randbedingung $u'_0(\eta) = -\gamma u_0(\eta)$.*

Konvention 6.1.2. Wir können eine Funktionenfolge in A_0 mit einer Funktion in L^2_η identifizieren, wie in Bemerkung 5.2.5 beschrieben. Im Folgenden nehmen wir diese Identifizierung stillschweigend vor und behandeln Δ_γ als Operator in L^2_η .

Mit dieser Konvention impliziert Satz 6.1.1, dass alle Eigenfunktionen von Δ_γ verallgemeinerte Eigenfunktionen von Δ sind, welche die Randbedingung (iii) erfüllen. Da der absolute Term u_0 eine eindeutige analytische Fortsetzung nach \mathbb{R} besitzt, lässt sich jede Eigenfunktion u von Δ_γ eindeutig zu einer Funktion

$$\tilde{u}(x, y) = u(x, y) + u_0(y) \cdot \chi_{[\eta, \infty[}(y) \in C^\infty(X)$$

fortsetzen. Hierbei wird die die Fortsetzung von u_0 wiederum mit u_0 bezeichnet.

Lemma 6.1.3. *Die Eigenwerte $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des Laplace-Operators Δ_Γ , deren zugehörige Eigenfunktionen durch Spitzenformen gegeben sind, sind auch Eigenwerte von Δ_γ für jedes $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$.*

Insbesondere besitzt der Operator Δ_γ für jedes $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ im Δ -invarianten Unterraum L^2_0 ein vollständiges Orthonormalsystem $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Eigenvektoren.

Bezeichnung 6.1.4. Die Eigenwerte aus Lemma 6.1.3 bezeichnen wir in Analogie zu Theorem 2.5.8 als zum *Typ (I)* gehörig. Alle anderen Eigenwerte von Δ_γ seien vom *Typ (II)*. Entsprechende Bezeichnungen werden für die zugehörigen Eigenfunktionen verwendet. Die Menge der Eigenwerte vom Typ (I) wird für alle $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ mit $\sigma_1(\Delta_\gamma)$ bezeichnet, die Menge der Eigenwerte vom Typ (II) mit $\sigma_2(\Delta_\gamma)$.

Die Eigenwerte $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vom Typ (I) sowie die zugehörigen Eigenfunktionen können wir als konstante Funktionen in $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ auffassen. Wir schreiben daher auch σ_1 für die endliche oder unendliche Menge der Eigenwerte $\{\nu_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ vom Typ (I), wenn wir dies betonen wollen.

Am Ende von Abschnitt 2.5 wurde auf zwei verschiedene Weisen gezeigt, warum Δ^η unendlich viele Eigenwerte vom Typ (II) besitzt (Bemerkung 2.5.10 und Korollar 2.5.12).

Aus Lemma 6.1.3 folgt, dass der Beweis von Bemerkung 2.5.10 auf alle Operatoren der Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \hat{\mathbb{C}}}$ übertragen werden kann. Zusammen mit Theorem 5.5.5 und der anschließenden Bemerkung erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 6.1.5. *Für jedes $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ besitzt der Robin-Pseudo-Laplace-Operator Δ_γ eine unendliche Folge $(\lambda_n(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$ von Eigenwerten des Typs (II), die in $\hat{\mathbb{C}}$ gegen den unendlich fernen Punkt konvergiert.*

Als Nächstes wollen wir die Eigenfunktionen vom Typ (II) charakterisieren. Wie üblich schreiben wir einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ in der Form

$$\lambda = s(1 - s). \quad (6.2)$$

Die durch (6.2) induzierte Zuordnung

$$\mathfrak{S} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \lambda \mapsto s, \quad (6.3)$$

ist nicht eindeutig, da zu jedem $\lambda \neq \frac{1}{4}$ zwei verschiedene Lösungen $s \in \mathbb{C}$ von (6.2) existieren. Die folgende Überlegung dient dazu, eine Konvention für die Wahl von s festzulegen, die mit der von Colin de Verdière getroffenen Konvention $\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}$ und $\operatorname{Im} s \geq 0$ kompatibel ist. Anschließend wird gezeigt, dass diese Wahl von s keine Einschränkung der Allgemeinheit darstellt.

Bemerkung 6.1.6. Für $s \in \mathbb{C}$, das (6.2) erfüllt, definieren wir die Parameter z , τ und r durch

$$s = \frac{1}{2} + iz, \quad z = \tau + ir, \quad \tau, r \in \mathbb{R}.$$

(i) Falls $\lambda \in \mathbb{R}$, sind die Lösungen der quadratischen Gleichung (6.2) gegeben durch

$$s^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}, & \lambda > \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}, & \lambda < \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}, & \lambda = \frac{1}{4}, \end{cases}$$

wobei $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ die reelle Wurzelfunktion bezeichnet. Für $\lambda > \frac{1}{4}$ gilt

$$\operatorname{Re}(s^\pm) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Im}(s^+) > 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(s^-) < 0.$$

In diesem Fall wählen wir die Lösung s^+ mit $\operatorname{Re}(s^+) = \frac{1}{2}$ und $\operatorname{Im}(s^+) > 0$, sodass für das zugehörige z gilt

$$z = \tau \quad \text{mit} \quad \tau = \sqrt{\lambda - \frac{1}{4}} > 0.$$

Im Fall $\lambda < \frac{1}{4}$ gilt

$$\operatorname{Re}(s^+) > \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Re}(s^-) < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(s^\pm) = 0.$$

In diesem Fall wählen wir ebenfalls die Lösung s^+ und erhalten

$$z = ir \quad \text{mit} \quad r = -\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda} < 0.$$

(ii) Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, \frac{1}{4}[$ lassen sich die Lösungen von (6.2) mit dem Hauptzweig $(\cdot)^{1/2}$ der komplexen Wurzel beschreiben durch

$$s^\pm = \frac{1}{2} \pm \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)^{1/2}.$$

Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und die Lösung s^+ gilt

$$\operatorname{Re}(s^+) > \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(s^+) \begin{cases} > 0, & \text{falls } \operatorname{Im} \lambda > 0, \\ < 0, & \text{falls } \operatorname{Im} \lambda < 0. \end{cases}$$

In diesem Fall ist $z = \tau + ir$ echt komplex mit

$$\tau = \operatorname{Im} \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)^{1/2} = \operatorname{Im}(s^+) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad r = -\operatorname{Re} \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)^{1/2} < 0.$$

Bezeichnung 6.1.7. Es sei \mathcal{S} die disjunkte Vereinigung der Mengen

$$\mathcal{S}_1 = \left\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}, \operatorname{Im} s \geq 0\right\}, \quad \mathcal{S}_2 = \left\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}, \operatorname{Im} s = 0\right\}$$

und

$$\mathcal{S}_3 = \left\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}, \operatorname{Im} s \neq 0\right\}.$$

Dann wird durch die Zuordnung aus (6.3) eine Abbildung

$$\mathfrak{S} : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{S}, \quad \lambda \mapsto s(\lambda) := s^+,$$

induziert, und es gilt

- (i) $s(\lambda) \in \mathcal{S}_1$, falls $\lambda \geq \frac{1}{4}$,
- (ii) $s(\lambda) \in \mathcal{S}_2$, falls $\lambda < \frac{1}{4}$,
- (iii) $s(\lambda) \in \mathcal{S}_3$, falls $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Ferner wird durch

$$s = \frac{1}{2} + iz$$

ein eindeutiges $z = \tau + ir \in \mathbb{C}$ mit

- (i) $r \leq 0$ und $\tau \in \mathbb{R}$ für alle $s \in \mathcal{S}$,
- (ii) $\tau \geq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

definiert. Für $s \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$\hat{s} := 1 - s.$$

Dann ist die Abbildung $s \mapsto \hat{s}$ eine Involution mit $\lambda = s \cdot \hat{s} = \hat{s} \cdot s$. Wir setzen ferner

$$\hat{\mathcal{S}} := \{\hat{s} \in \mathbb{C} \mid s \in \mathcal{S}\}$$

mit $\mathcal{S} \cap \hat{\mathcal{S}} = \{\frac{1}{2}\}$.

Als Vorbereitung für den Eindeutigkeitssatz der Eigenfunktionen vom Typ (II) kategorisieren wir beliebige verallgemeinerte Eigenfunktionen von Δ nach ihrem absoluten Term.

Bemerkung 6.1.8. Es sei v eine Eigenfunktion von Δ_γ vom Typ (II) zum Eigenwert

$$\lambda(\gamma) = s(1 - s) \quad \text{mit} \quad s := s(\lambda(\gamma)) \in \mathcal{S}.$$

Dann ist die analytische Fortsetzung \tilde{v} von v eine verallgemeinerte Eigenfunktion von Δ . Nach Bemerkung 2.1.10 existieren komplexe Koeffizienten $a = a(v, s)$ und $b = b(v, s)$, sodass der absolute Term v_0 die Gestalt

$$v_0(y) = \begin{cases} a(v, s)y^s + b(v, s)y^{1-s}, & \text{falls } s \neq \frac{1}{2}, \\ a(v, s)\sqrt{y} + b(v, s)\sqrt{y} \ln(y), & \text{falls } s = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

hat. Da v keine Spitzenform ist, tritt für jedes $s \in \mathbb{C}$ genau einer der folgenden drei Fälle ein:

(a') $a(v, s) \neq 0$ und $b(v, s) \neq 0$,

(b') $a(v, s) = 0$ und $b(v, s) \neq 0$,

(c') $a(v, s) \neq 0$ und $b(v, s) = 0$.

In der folgenden Bemerkung wird erläutert, wie die Festlegung auf die Wahl von $s \in \mathcal{S}$ diese Kategorisierung beeinflusst.

Bemerkung 6.1.9. Die Kategorien (a'), (b') und (c') seien wie in Bemerkung 6.1.8 definiert. Für einen Eigenwert $\lambda(\gamma)$ von Δ_γ seien

$$s^+ = s(\lambda(\gamma)) \in \mathcal{S} \quad \text{und} \quad s^- = \hat{s}(\lambda(\gamma)) \in \hat{\mathcal{S}}$$

die beiden komplexen Lösungen von

$$\lambda(\gamma) = s(1 - s).$$

Für $\lambda(\gamma) = \frac{1}{4}$ stimmen $s^\pm = \frac{1}{2} \in \mathcal{S} \cap \hat{\mathcal{S}}$ überein. Für $\lambda(\gamma) \neq \frac{1}{4}$ gilt:

- (i) Falls v eine Eigenfunktion vom Typ (a') zu s^+ ist, dann ist v auch eine Eigenfunktion vom Typ (a') zu s^- . Genauer gilt

$$v_0(y) = a(v, s^+)y^{s^+} + b(v, s^+)y^{1-s^+} = a(v, s^-)y^{s^-} + b(v, s^-)y^{1-s^-}$$

mit

$$a(v, s^-) = b(v, s^+) \quad \text{und} \quad b(v, s^-) = a(v, s^+).$$

- (ii) Ist v eine Eigenfunktion vom Typ (b') zu s^+ , so ist v eine Eigenfunktion vom Typ (c') zu s^- . In diesem Fall gilt

$$v_0(y) = b(v, s^+)y^{1-s^+} = a(v, s^-)y^{s^-}, \quad a(v, s^-) = b(v, s^+).$$

- (iii) Wenn v eine Eigenfunktion vom Typ (c') zu s^+ ist, dann ist v eine Eigenfunktion vom Typ (b') zu s^- , und es gilt

$$v_0(y) = a(v, s^+)y^{s^+} = b(v, s^-)y^{1-s^-}, \quad b(v, s^-) = a(v, s^+).$$

Die Bemerkung zeigt, dass die Definition der Kategorien (b') und (c') zwar davon abhängt, ob wir $s^+ \in \mathcal{S}$ oder $s^- \in \hat{\mathcal{S}}$ betrachten, aber die Eigenfunktionen, die zu s^+ und s^- gehören, \mathbb{C} -linear abhängig sind. Wir können somit das folgende Lemma formulieren.

Lemma 6.1.10. *Es sei w eine Eigenfunktion vom Typ (II) zum Eigenwert $\lambda(\gamma)$ von Δ_γ und es sei $s_1 \in \mathbb{C}$ eine beliebige Lösung von $\lambda(\gamma) = s(1-s)$. Dann existieren ein $c(s_1) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, eine Eigenfunktion v vom Typ (II) zum Eigenwert $\lambda(\gamma)$ von Δ_γ und ein eindeutiges $s_2 \in \mathcal{S}$ so, dass*

$$w = c(s_1) \cdot v$$

ein \mathbb{C} -lineares Vielfaches von v ist, und der absolute Term von v von der Form

$$v_0(y) = a(s_2)y^{s_2} + b(s_2)y^{1-s_2}$$

ist, wobei die Koeffizienten $a(s_2)$ und $b(s_2)$ eine der drei Bedingungen (a') bis (c') in Bemerkung 6.1.8 erfüllen. Genauer gilt $s_2 \in \{s_1, \hat{s}_1\}$.

Das Lemma zeigt, dass wir dem Unterraum

$$E_{(\text{II}),\gamma}(\lambda) := \text{span}\{v \mid v \text{ Eigenvektor vom Typ (II) zu } \lambda \in \sigma_2(\Delta)\}$$

ein eindeutiges $s \in \mathcal{S}$ zuordnen können. Wir nehmen daher im Folgenden stets an, dass eine Eigenfunktion v vom Typ (II) zu einem der Untertypen (a'), (b') oder (c') für ein $s \in \mathcal{S}$ gehört.

Bemerkung 6.1.11. (i) Der Raum $E_{(\text{II}),\gamma}(\lambda)$ ist nur dann identisch mit dem Eigenraum $E_\gamma(\lambda)$ zum Eigenwert λ , wenn $\lambda \in \sigma_2(\Delta_\gamma)$ nicht gleichzeitig Eigenwert vom Typ (I) ist. Dies ist nicht immer der Fall (s. Satz 6.2.1). Nach Satz 2.3.5 sind Eigenfunktionen vom Typ (I) und (II) jedoch stets orthogonal zueinander. Der Eigenraum $E_\gamma(\lambda)$ kann daher als orthogonale direkte Summe

$$E_\gamma(\lambda) = E_{(\text{II}),\gamma}(\lambda) \oplus E_{(\text{I}),\gamma}(\lambda)$$

geschrieben werden, wobei

$$E_{(\text{I}),\gamma}(\lambda) := \text{span}\{v \mid v \text{ Eigenvektor vom Typ (I) zu } \lambda \in \sigma_1(\Delta_\gamma)\}$$

analog zu $E_{(\text{II}),\gamma}(\lambda)$ definiert sei.

- (ii) Nach Korollar 5.3.9 ist der Operator Δ_γ genau dann selbstadjungiert, wenn $\gamma \in \hat{\mathbb{R}}$ gilt. In diesem Fall stimmen für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(\Delta_\gamma)$ algebraische und geometrische Vielfachheit überein. Für $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist dies im Allgemeinen unklar.

Bezeichnung 6.1.12. Wenn v eine Eigenfunktion von Δ_γ vom Typ (II) ist, dann gilt

$$v'_0(\eta) = -\gamma v_0(\eta).$$

Das hierdurch bestimmte $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ bezeichnen wir mit $\gamma_{a'}(v, s)$, $\gamma_{b'}(v, s)$ oder $\gamma_{c'}(v, s)$ je nachdem, ob v vom Typ (a'), (b') oder (c') aus Bemerkung 6.1.8 ist.

Lemma 6.1.13. *Es seien v und w zwei Eigenfunktionen zu $\lambda \in \sigma_2(\Delta_\gamma)$ für dasselbe Paar (γ, λ) . Dann gehören v und w zum gleichen Typ (a'), (b') oder (c') aus Bemerkung 6.1.8.*

Beweis. Es sei $s(\lambda)$ das zu λ gehörige $s \in \mathcal{S}$, und v eine beliebige Eigenfunktion zum Eigenwert λ . Wir schreiben $s = \frac{1}{2} + iz$ und bestimmen, für welches $\gamma \in \mathbb{C}$ die Robin-Randbedingung erfüllt wird. Wir schreiben an dieser Stelle nur a und b für die Koeffizienten $a(v, s)$ und $b(v, s)$.

Es sei zuerst $s \neq \frac{1}{2}$ mit $z \neq 0$. Dann gilt im Fall (a')

$$v_0(y) = ay^{1/2+iz} + by^{-1/2-iz}.$$

Die Parameter α und β seien bestimmt durch

$$\beta = \frac{b}{a} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad \alpha = \exp(2i\alpha).$$

Dann schreiben wir v_0 wie im Beweis von Lemma 2.1.19 in der Form

$$\begin{aligned} v_0(y) &= ay^{1/2} \cdot (y^{iz} + \beta y^{-iz}) = a(y\beta)^{1/2} \cdot (y^{iz} \exp(-i\alpha) + \exp(i\alpha)y^{-iz}) \\ &= a(y\beta)^{1/2} \cdot (\exp(\ln(y)iz - i\alpha) + \exp(-\ln(y)iz + i\alpha)) = a(y\beta)^{1/2} \cdot 2 \cos(\ln(y)z - \alpha). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$A(y, z) := \ln(y)z - \alpha.$$

Die Ableitung von v_0 nach y ist

$$v'_0(y) = \frac{2a\beta^{1/2}}{\sqrt{y}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cos(A(y, z)) - z \sin(A(y, z)) \right).$$

Einsetzen von η in die Robin-Gleichung $v'_0(\eta) = -\gamma v_0(\eta)$ liefert

$$\gamma_{a'}(v, s) = -\frac{v'_0(\eta)}{v_0(\eta)} = \frac{2z \tan(A(\eta, z)) - 1}{2\eta}.$$

Im Fall (b') mit $a = 0$ gilt

$$v_0(\eta) = b\eta^{1-s}, \quad v'_0(\eta) = b(1-s)\eta^{-s}$$

und wir erhalten

$$\gamma_{b'}(v, s) = -\frac{v'_0(\eta)}{v_0(\eta)} = \frac{s-1}{\eta}.$$

Im Fall (c') mit $b = 0$ gilt

$$v_0(\eta) = a\eta^s, \quad v'_0(\eta) = as\eta^{s-1}$$

und somit

$$\gamma_{c'}(v, s) = -\frac{v_0'(\eta)}{v_0(\eta)} = \frac{-s}{\eta}.$$

Durch Einsetzen von $s = \frac{1}{2} + iz$ folgt andererseits

$$\gamma_{b'}(v, s) = \frac{s-1}{\eta} = \frac{iz - \frac{1}{2}}{\eta} = \frac{2iz - 1}{2\eta}$$

und

$$\gamma_{c'}(v, s) = \frac{-s}{\eta} = \frac{-\frac{1}{2} - iz}{\eta} = \frac{-2iz - 1}{2\eta}.$$

Wenn es Eigenfunktionen v und w zum selben $s \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ gibt, die zwei verschiedenen Kategorien angehören, dann muss entweder gelten

$$\frac{s-1}{\eta} = \frac{-s}{\eta}$$

oder

$$\tan(A(\eta, z)) = \pm i \quad \text{mod } 2\pi.$$

Da der komplexe Tangens die Werte $\pm i \text{ mod } 2\pi$ nicht annimmt, und $s-1 = -s$ nur für $z = 0$ gilt, kann dieser Fall nicht eintreten.

Es sei nun $s_0 = \frac{1}{2}$ mit $z_0 = 0$. Dann liefert Faktorisierung wie oben für den Fall (a') mit

$$\beta = \frac{b}{a} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

für den absoluten Term in η

$$v_0(\eta) = a\sqrt{\eta}(1 + \beta \ln(\eta)), \quad v_0'(\eta) = \frac{a}{2\sqrt{\eta}}(1 + \beta \ln(\eta) + 2\beta)$$

und somit

$$\gamma_{a'}(v, s_0) = -\frac{1}{2\eta} \cdot \frac{1 + \beta \ln(\eta) + 2\beta}{1 + \beta \ln(\eta)}.$$

Falls $a = 0$ gilt, erhalten wir

$$v_0(\eta) = b\sqrt{\eta} \ln(\eta), \quad v_0'(\eta) = \frac{b}{2\sqrt{\eta}}(\ln(\eta) + 2)$$

und somit für den Fall (b')

$$\gamma_{b'}(v, s_0) = -\frac{1}{2\eta} \cdot \frac{\ln(\eta) + 2}{\ln(\eta)}.$$

Im Fall (c') mit $b = 0$ ist

$$v_0(\eta) = a\sqrt{\eta}, \quad v_0'(\eta) = \frac{a}{2\sqrt{\eta}}$$

und

$$\gamma_{c'}(v, s_0) = -\frac{1}{2\eta}.$$

Für alle Wahlen von v und w aus der jeweiligen Kategorie (a') bis (c') muss gelten

$$\gamma_{c'}(v, s_0) \neq \gamma_{a'}(w, s_0) \quad \text{und} \quad \gamma_{c'}(v, s_0) \neq \gamma_{b'}(w, s_0),$$

denn anderenfalls muss eine der Bedingungen

$$\frac{1 + \beta \ln(\eta) + 2\beta}{1 + \beta \ln(\eta)} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\ln(\eta) + 2}{\ln(\eta)} = 1$$

erfüllt sein, die äquivalent zu $2 = 0$ sind. Wenn wir annehmen, dass ein v vom Typ (a') und ein w vom Typ (b') zum selben $s \in \mathcal{S}$ existieren, dann muss gelten

$$\frac{1 + \beta \ln(\eta) + 2\beta}{1 + \beta \ln(\eta)} = \frac{\ln(\eta) + 2}{\ln(\eta)},$$

was ebenfalls auf die nicht lösbare Gleichung $2 = 0$ führt. □

Lemma 6.1.14. *Es sei v eine Eigenfunktion von Δ_γ zu einem Eigenwert $\lambda(\gamma)$ vom Typ (II). Dann können $v_0(\eta)$ und $v'_0(\eta)$ nicht gleichzeitig verschwinden.*

Beweis. Für $s \neq \frac{1}{2}$ und die Fälle (b') und (c') ist die Aussage klar, weil v_0 eine Potenzfunktion ist, und daher weder $v_0(\eta) = 0$ noch $v'_0(\eta) = 0$ gelten kann.

Wenn v eine Eigenfunktion vom Typ (a') mit $v_0(\eta) = 0$ ist, dann gibt es $c_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$v_0(\eta) = c_0 \sqrt{\eta} \cos(A(\eta, z)) = 0.$$

Folglich gelten $\cos(A(\eta, z)) = 0$ und $\sin(A(\eta, z)) \in \{\pm 1\}$. Dies impliziert für die Ableitung

$$v'_0(\eta) = \frac{c_0}{\sqrt{\eta}} \left(\frac{\cos(A(\eta, z))}{2} - z \sin(A(\eta, z)) \right) = c_0 \frac{\pm z}{\sqrt{\eta}} \neq 0.$$

Es sei nun $s_0 = \frac{1}{2}$. Falls $b = 0$ gilt, dann ist die Aussage klar, weil v_0 in diesem Fall die Wurzelfunktion ist. Im Fall $a = 0$ folgt aus

$$v_0(\eta) = b \sqrt{\eta} \ln(\eta) = 0,$$

dass $\ln(\eta) = 0$ und daher

$$v'_0(\eta) = b \left(\frac{1}{2\sqrt{\eta}} \ln(\eta) + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \right) = \frac{b}{\sqrt{\eta}} \neq 0.$$

Falls beide Koeffizienten a und b nicht verschwinden, erhält man durch Faktorisierung

$$v_0(\eta) = a \sqrt{\eta} (1 + \beta \ln(\eta)) = 0, \quad \beta = \frac{b}{a},$$

und daher ebenfalls

$$v'_0(\eta) = \frac{a}{2\sqrt{\eta}} (1 + \beta \ln(\eta)) + \frac{b}{\sqrt{\eta}} = \frac{b}{\sqrt{\eta}} \neq 0. \quad \square$$

Die obigen Berechnungen implizieren Symmetrien für die Eigenfunktionen vom Typ (II), welche im folgenden Satz formuliert werden.

Satz 6.1.15. *Es sei $\lambda(\gamma)$ ein Eigenwert von Δ_γ vom Typ (II) und $s = s(\lambda(\gamma)) \in \mathcal{S}$. Ferner sei v eine zugehörige Eigenfunktion mit absolutem Term*

$$v_0(y) = a(v, s)y^s + b(v, s)y^{1-s}.$$

Wie in Bezeichnung 6.1.7 sei $\hat{s} = 1 - s \in \hat{\mathcal{S}}$. Dann ist \hat{v} , definiert durch

$$\hat{v} := a(\hat{v}, \hat{s})y^{\hat{s}} + b(\hat{v}, \hat{s})y^{1-\hat{s}}, \quad a(\hat{v}, \hat{s}) = b(v, s), \quad b(\hat{v}, \hat{s}) = a(v, s),$$

ebenfalls eine Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda(\gamma)$ mit

$$\hat{v} = \frac{b(v, s)}{a(v, s)} \cdot v.$$

Ferner gilt

$$\gamma(v, s) = \gamma(\hat{v}, \hat{s}).$$

Setzen wir

$$\beta : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad \beta(v, s) := \frac{b(v, s)}{a(v, s)},$$

dann gilt für alle $s \in \mathbb{C}$

$$\beta(v, s) = \frac{1}{\beta(\hat{v}, \hat{s})} \quad \text{und} \quad \hat{v} = \beta(v, s)v.$$

Aus Kapitel 2 wissen wir, dass die Eisensteinreihen $E(z, s)$ verallgemeinerte Eigenfunktionen von Δ sind. Insbesondere gilt für $E(z, s)$ die Aussage aus Lemma 6.1.14, wenn $s \neq \frac{1}{2}$ gilt und $\varphi(s)$ keinen Pol besitzt. Wir erhalten somit durch $E^\eta(z, s)$ eine wohldefinierte Eigenfunktion zu

$$\gamma(s) = -\frac{E'_0(\eta, s)}{E_0(\eta, s)} \in \hat{\mathbb{C}}, \quad (6.4)$$

wobei γ den Wert ∞ genau dann annimmt, wenn $E_0(y, s)$ eine Nullstelle in η besitzt. Dies steht in Übereinstimmung damit, dass Δ_∞ dem Pseudo-Laplace-Operator Δ^η entspricht.

Für die Eisensteinreihe $E(z, s)$ sind die im Beweis von Lemma 6.1.13 eingeführten Terme gegeben durch

$$\beta(s) = \varphi(s), \quad \alpha(s) = \frac{\vartheta(s)}{2}, \quad A(s) = \xi(s),$$

wobei ϑ und ξ wie in Lemma 2.1.19 definiert seien. Insbesondere stimmen die Symmetrien aus Satz 6.1.15 mit den Funktionalgleichungen von $E(z, s)$ und $\varphi(s)$ überein.

Falls die Eisensteinreihe in $s \in \mathcal{S}$ einen Pol besitzt, dann ist die „gegenüberliegende“ Eisensteinreihe $E(z, \hat{s})$ mit $\hat{s} \in \hat{\mathcal{S}}$ eine verallgemeinerte Eigenfunktion ohne Polstelle. Die einzigen Pole von φ auf $\mathcal{S} \subset \{\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}\}$ sind aber die endlich vielen Pole s_1, \dots, s_N im Intervall $]\frac{1}{2}, 1]$. Nach Bemerkung 2.2.3 gilt in diesem Fall für das Residuum R_E der Eisensteinreihe im Pol s_k

$$R_{E,0}(y, s_k) = \operatorname{Res}_{s_k}(\varphi)y^{1-s_k} = \operatorname{Res}_{s_k}(\varphi)y^{\hat{s}_k}.$$

Demnach ist $R_E(\cdot, s_k)$ bis auf Addition einer Spitzenform ein Vielfaches von $E(\cdot, \hat{s}_k)$.

Der Fall $E(\cdot, s) = 0$ kann nach Satz 2.1.16 nur dann eintreten, wenn gleichzeitig $s_0 = \frac{1}{2}$ und $\varphi(s_0) = -1$ gilt. Diese Beobachtungen führen zu folgendem Satz.

Satz 6.1.16. *Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Zu $s = s(\lambda)$ wie in Bezeichnung 6.1.7 sei $v[s] \in L_\eta^2$ definiert durch*

(i) $v[s] = E^\eta(\cdot, s)$ für $s \neq \frac{1}{2}$ mit $\varphi(s) \in \mathbb{C}$, oder falls $s = \frac{1}{2}$ ist mit $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 1$,

(ii) $v[s] = E^\eta(\cdot, \hat{s})$, falls s ein Pol von φ ist,

(iii) $v[s_0] = \partial_s E^\eta(\cdot, s)|_{s=s_0}$, falls $s_0 = \frac{1}{2}$ mit $\varphi(s_0) = -1$ gilt.

Dann gibt es genau ein $\gamma = \gamma(s) \in \hat{\mathbb{C}}$, sodass $v[s]$ eine Eigenfunktion vom Typ (II) zum Eigenwert λ des Pseudo-Laplace-Operators Δ_γ ist.

Beweis. Falls φ keinen Pol in s hat, ist die Eisensteinreihe $E(z, s)$ eine punktweise Lösung der Eigenwertgleichung $\Delta u = s(1 - s)u$. Falls $E(\cdot, s)$ nicht identisch verschwindet, ist demnach durch die trunkierte Eisensteinreihe eine Eigenfunktion von Δ_γ gegeben. In diesem Fall ist $E(z, s)$ von der Gestalt (a') aus Bemerkung 6.1.8, falls $\varphi(s) \neq 0$, und von der Gestalt (c'), falls $\varphi(s) = 0$.

Falls φ einen Pol in s besitzt, ist \hat{s} eine Nullstelle von φ , und die Eisensteinreihe $E(z, \hat{s})$ ist eine nichttriviale Lösung der Eigenwertgleichung zu $s(1 - s) = (1 - \hat{s})\hat{s}$. Der absolute Term

$$E_0(y, \hat{s}) = y^{1-s}$$

ist vom Typ (b') aus Bemerkung 6.1.8.

Nach Satz 2.1.16 tritt der Fall $E(\cdot, s) = 0$ nur dann ein, wenn gleichzeitig $s = \frac{1}{2}$ und $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ gilt. In Bemerkung 2.5.9 (iv) wurde gezeigt, dass in diesem Fall der absolute Term der Parameter-Ableitung von E in $s_0 = \frac{1}{2}$ gegeben ist durch

$$\partial_s E_0(y, s)|_{s=s_0} = \sqrt{y} (2 \ln(y) + \varphi'(s_0)),$$

was dem Typ (a') oder (b') aus Bemerkung 6.1.8 entspricht. Falls $\varphi(s_0) = 1$, dann ist der absolute Term der Eisensteinreihe ebenfalls nach Bemerkung 2.5.9 (iv) gegeben durch

$$E_0(y, s_0) = 2\sqrt{y},$$

sodass $E(\cdot, s_0)$ in die Kategorie (c') aus Bemerkung 6.1.8 fällt.

In allen Fällen gilt für das jeweilige $v[s]$ die Aussage aus Lemma 6.1.14, sodass durch

$$\gamma(s) := -\frac{v'_0[s](\eta)}{v_0[s](\eta)} \tag{6.5}$$

ein eindeutiges $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ bestimmt wird. Da $v'_0(\eta)$ und $v_0(\eta)$ nicht gleichzeitig verschwinden können, gilt genau dann $\gamma = \infty$, wenn $v_0[s](\eta) = 0$ gilt. □

Bezeichnung 6.1.17. (i) Es sei $\mathfrak{E}^\eta \subset L_\eta^2$ die Vereinigung der in Satz 6.1.16 (i) bis (iii) angegebenen Funktionen $v[s]$ für alle $s \in \mathcal{S}$. Dann wird durch

$$\mathcal{S} \rightarrow \mathfrak{E}^\eta, \quad s \mapsto v[s],$$

eine bijektive Abbildung gegeben.

- (ii) Wenn $\gamma = \gamma(s)$ wie in Satz 6.1.16 definiert ist, und wir die Abhängigkeit der Funktion $v[s]$ von γ ausdrücken wollen, schreiben wir $v[\gamma]$. Die implizierte Zuordnung $\gamma \mapsto s(\gamma)$ ist jedoch nicht eindeutig, da Δ_γ für jedes $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ unendlich viele Eigenwerte vom Typ (II) besitzt.

Durch (6.4) und (6.5) werden zwei verschiedene Funktionen in s definiert, die für $s \in \mathcal{S}$ fast überall übereinstimmen.

Lemma 6.1.18. *Es sei*

$$q_{1,\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad s \mapsto -\frac{v'_0[s](\eta)}{v_0[s](\eta)},$$

die Funktion aus (6.5) im Beweis von Satz 6.1.16. Wir setzen

$$q_1 : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad s \mapsto \begin{cases} q_{1,\mathcal{S}}(s), & \text{falls } s \in \mathcal{S}, \\ q_{1,\mathcal{S}}(\hat{s}), & \text{falls } \hat{s} \in \mathcal{S}. \end{cases}$$

Des Weiteren sei

$$q_2 : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad s \mapsto -\frac{E'_0(\eta, s)}{E_0(\eta, s)},$$

die durch den Quotienten in (6.4) definierte meromorphe Funktion. Dann gilt für alle $s \in \mathcal{S} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, für die $E(z, s)$ keinen Pol besitzt,

$$q_1(s) = q_2(s).$$

Wir werden in Abschnitt 6.2 zeigen, dass es sich in Wirklichkeit um eine einzige meromorphe Funktion handelt, die wir als holomorphe Funktion $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ auffassen.

Zunächst wollen wir die Eindeutigkeit der Eigenfunktionen $v[s]$ aus Satz 6.1.16 innerhalb des Typs (II) zeigen. Dies wird nur für $s \neq \frac{1}{2}$ vorgeführt. Für den Fall $s_0 = \frac{1}{2}$ verweisen wir auf Colin de Verdière [4], Theorem 5. Der Beweis erfolgt in allen Fällen durch ein Argument der Energieerhaltung. Wir zitieren dieses Resultat aus dem Buch von Lax und Phillips [17].

Theorem 6.1.19 (Lax und Phillips [17], Theorem 8.4). *Es sei w eine verallgemeinerte Eigenfunktion von Δ mit*

$$\Delta w = \left(\frac{1}{4} + z^2\right) w, \quad \text{Im } z \leq 0, \quad z \neq 0.$$

Der absolute Term in der Fourierentwicklung von w sei von der Form

$$w_0(y) = b \cdot y^{1/2-iz}, \quad b \in \mathbb{C}, \tag{6.6}$$

und es gelte

$$\int_{F_\infty} |w - w_0|^2 \, d\mu_{\mathbb{H}} < \infty,$$

wobei F_∞ das unbeschränkte Fundamentalpolygon von $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ mit einer Spitze in ∞ bezeichne. Dann ist w entweder eine Eigenfunktion von Δ_Γ oder identisch Null.

Bemerkung 6.1.20. Die Funktionenklasse, für die Theorem 8.4 in [17] formuliert wird, heißt in der Theorie von Lax und Phillips *outgoing*. Dass der Begriff *outgoing* durch Gleichung (6.6) charakterisiert ist, kann dem Beweis von Theorem 8.4 auf S. 202f. in [17] entnommen werden.

Satz 6.1.21. *Es sei $\gamma \in \mathbb{C}$ und $\lambda \neq \frac{1}{4}$ ein Eigenwert vom Typ (II) des Operators Δ_γ . Dann ist die zugehörige Eigenfunktion vom Typ (II) bis auf Addition einer Spitzenform ein Vielfaches der in Satz 6.1.16 angegebenen Funktion $v[\gamma] = v[s(\gamma)]$. Insbesondere ist der zu L_0^2 orthogonale Unterraum $E_{(\text{II}),\gamma}(\lambda) = \text{span}\{v[\gamma]\}$ des Eigenraums $E_\gamma(\lambda)$ von Δ_γ eindimensional.*

Beweis. Es sei $\gamma \in \mathbb{C}$ fixiert und $\lambda = \lambda(\gamma)$ wie vorausgesetzt. Zu λ sei $s = \frac{1}{2} + iz \in \mathcal{S}$ wie in Bezeichnung 6.1.7 so bestimmt, dass $\text{Im } z \leq 0$ und $z \neq 0$. Ferner sei nun v eine Eigenfunktion zu λ mit nicht verschwindendem absoluten Term

$$v_0(y) = a_1 y^s + b_1 y^{1-s}.$$

Wir nehmen an, dass es eine zweite Eigenfunktion u zum gleichen Eigenwert gibt mit

$$u_0(y) = a_2 y^s + b_2 y^{1-s}.$$

Nach Lemma 6.1.13 gehören alle Eigenfunktionen zu einem Paar (γ, s) zum selben Typ (a'), (b') oder (c'). Demnach gilt entweder gleichzeitig $a_j = 0$ oder $a_j \neq 0$ für $j = 1, 2$. In jedem Fall existieren c und $b_0 \in \mathbb{C}$, sodass der absolute Term von $w := v - cu$ die Gestalt

$$w_0(y) = b_0 \cdot y^{1-s}$$

besitzt. Die eindeutige analytische Fortsetzung

$$\tilde{w} = w + \chi_{[\eta, \infty[}(y) \cdot w_0(y)$$

erfüllt die Bedingungen von Theorem 6.1.19. Folglich gilt entweder $\tilde{w} = 0$, oder \tilde{w} ist eine Eigenfunktion von Δ_Γ . Falls $\tilde{w} = 0$ gilt oder \tilde{w} eine Spitzenform ist, ist die Behauptung gezeigt.

Ist \tilde{w} eine Eigenfunktion von Δ_Γ , aber keine Spitzenform, so ist \tilde{w} nach Satz 2.3.5 durch das Residuum R_E einer Eisensteinreihe zu einem Pol in $s \in]\frac{1}{2}, 1]$ gegeben. In diesem Fall gilt

$$w_0(y) = c_0 \cdot y^{1-s} \quad \text{mit} \quad c_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Aus Lemma 6.1.13 folgt wiederum, dass die absoluten Terme von u und v ebenfalls ein Vielfaches von $y \mapsto y^{1-s}$ sind. Also sind u , v und w auch in diesem Fall linear abhängig bis auf Addition einer Spitzenform $f \in L_0^2$. \square

6.2 Typisierung der Eigenwerte vom Typ (II)

In diesem Abschnitt werden wir entsprechend der Kategorisierung der Eigenfunktionen vom Typ (II) eine Typisierung der Eigenwerte vornehmen und das Auftreten der einzelnen Typen

im Spektrum von Δ_γ untersuchen. Die wechselseitige Abhängigkeit des Parameters γ und der Eigenwerte $\lambda = s(1-s)$ lässt sich durch die Funktion

$$\gamma(s) = -\frac{E'_0(\eta, s)}{E_0(\eta, s)}$$

untersuchen. Wir werden zeigen, dass $\gamma(s)$ eine holomorphe Funktion von \mathbb{C} nach $\hat{\mathbb{C}}$ ist.

Wie bereits am Ende von Abschnitt 5.5 erläutert wurde, existiert für die holomorphe Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ vom Typ (B) eine Folge von Eigenwerten $(\Lambda_k(\gamma))_{\gamma \in \mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, sodass

- (i) für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ gilt $\sigma(\Delta_\gamma) = \{\Lambda_k(\gamma) \mid k \in \mathbb{N}\}$, und die Folge $(\Psi_k[\gamma])_{k \in \mathbb{N}}$ der zugehörigen Eigenfunktionen ein vollständiges Orthonormalsystem von L^2_η bildet,
- (ii) die Eigenwerte $\Lambda_k(\gamma)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ holomorph von γ aus einer komplexen Umgebung U_k von \mathbb{R} abhängen.

Die Folge der durch (ii) induzierten Eigenwertfunktionen $\mathfrak{L}_k : U_k \rightarrow \mathbb{C}$ kann nur auf \mathbb{R} als „vollständige“ Eigenwertfolge im Sinne von (i) betrachtet werden, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 6.2.1. (i) \mathbb{C} ist die disjunkte Vereinigung der Eigenwerte vom Typ (II) aller Δ_γ , d. h.

$$\mathbb{C} = \bigcup_{\gamma \in \hat{\mathbb{C}}} \sigma_2(\Delta_\gamma).$$

- (ii) Es gilt nicht notwendig $\sigma_1(\Delta_\gamma) \cap \sigma_2(\Delta_\gamma) = \emptyset$. Genauer gibt es für jedes $\nu_n \in \sigma_1$ genau ein $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ mit $\nu_n \in \sigma_1(\Delta_\gamma) \cap \sigma_2(\Delta_\gamma)$.
- (iii) Es existiert keine Folge $(\mathfrak{L}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ holomorpher Funktionen $\mathfrak{L}_k : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$, sodass das Spektrum $\sigma(\Delta_\gamma)$ von Δ_γ für jedes $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ mit der Menge $\{\mathfrak{L}_k(\gamma) \mid k \in \mathbb{N}\}$ übereinstimmt.

Beweis. Aussage (i) folgt unmittelbar aus Satz 6.1.16. Dies gilt auch für (ii), da für jedes $\nu \in \sigma_1$ ein $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ existiert, sodass $\lambda(\gamma) = \nu$ ein Eigenwert vom Typ (II) ist.

Nun sei angenommen, es gebe eine Folge $(\mathfrak{L}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wie in (iii) beschrieben. Die Eigenwerte ν_n vom Typ (I) sind konstant in $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$. Die Eigenwerte $\lambda(\gamma)$ vom Typ (II) können nach (i) nicht konstant in γ sein, da ansonsten $\mathbb{C} = \sigma_2$ diskret wäre. Folglich existiert eine Teilfolge nicht konstanter, holomorpher Funktionen $(\mathfrak{L}_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ der Eigenwerte vom Typ (II). Wir schreiben ohne Einschränkung $(\mathfrak{L}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ für die Teilfolge vom Typ (II). Der Satz über die Gebietstreue impliziert nun, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Bildmenge $\mathfrak{L}_k(\mathbb{C})$ ein Gebiet in \mathbb{C} ist. Andererseits impliziert Satz 6.1.16, dass die Bildmengen $\mathfrak{L}_k(\mathbb{C})$ disjunkt sind. Hieraus folgt, dass

$$A := \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{L}_k(\mathbb{C})$$

eine überabzählbare Menge mit $A \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \neq \emptyset$ sein muss. Hierin liegt aber ein Widerspruch zu (i), da die Menge A mit $\sigma_2(\Delta_\infty)$ übereinstimmen muss, wohingegen das Spektrum von Δ_∞ eine diskrete Teilmenge von \mathbb{R} ist. \square

Satz 6.2.2. *Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert zum Operator Δ_γ für ein $\gamma \in \mathbb{C}$. Dann ist $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert des Operators $\Delta_{\bar{\gamma}}$. Insbesondere gilt genau dann $\lambda \in \mathbb{R}$, wenn $\gamma \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Es sei $u \in D(\Delta_\gamma)$ ein Eigenvektor von Δ_γ zum Eigenwert λ . Dann gilt für alle $v \in A_1$

$$(\Delta_\gamma u, v) = \mathfrak{t}_\gamma(u, v) = \lambda(u, v).$$

Für $u \in D(\Delta_\gamma)$ gilt $\bar{u}'_0(\eta) = -\bar{\gamma} \cdot \bar{u}_0(\eta)$. Also liegt \bar{u} in $D(\Delta_{\bar{\gamma}})$. Die Form \mathfrak{t}_γ erfüllt die Symmetrien

$$\mathfrak{t}_\gamma(u, v) = (u, v)'_{A_1} + \gamma \cdot u_0(\eta) \bar{v}_0(\eta) = (\bar{v}, \bar{u})'_{A_1} + \gamma \cdot \bar{v}_0(\eta) \overline{u_0(\eta)} = \mathfrak{t}_\gamma(\bar{v}, \bar{u}).$$

und

$$\overline{\mathfrak{t}_\gamma(u, v)} = \overline{(u, v)'_{A_1}} + \overline{\gamma \cdot u_0(\eta) \bar{v}_0(\eta)} = (v, u)'_{A_1} + \bar{\gamma} \cdot v_0(\eta) \bar{u}_0(\eta) = \mathfrak{t}_{\bar{\gamma}}(v, u).$$

Für beliebiges $v \in A_1$ gilt daher

$$\begin{aligned} (\Delta_{\bar{\gamma}} \bar{u}, v) &= \mathfrak{t}_{\bar{\gamma}}(\bar{u}, v) = \mathfrak{t}_{\bar{\gamma}}(\bar{v}, u) = \overline{\mathfrak{t}_\gamma(u, \bar{v})} \\ &= \overline{(\Delta_\gamma u, \bar{v})} = (\bar{v}, \Delta_\gamma u) = (\bar{v}, \lambda u) = (\bar{\lambda} u, v) = \bar{\lambda}(\bar{u}, v). \end{aligned}$$

Demnach ist $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von $\Delta_{\bar{\gamma}}$ zum Eigenvektor \bar{u} . Für $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt $\lambda \in \sigma(\Delta_\gamma) \cap \sigma(\Delta_{\bar{\gamma}})$.

Nach Satz 6.1.16 impliziert dies bereits $\bar{\gamma} = \gamma$. \square

Korollar 6.2.3. *(i) Sind $\nu_n \in \sigma_1$ und $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ so, dass $\nu_n \in \sigma_1(\Delta_\gamma) \cap \sigma_2(\Delta_\gamma)$ gilt wie in Satz 6.2.1 (ii), dann gilt $\gamma \in \hat{\mathbb{R}}$.*

(ii) Wenn $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist und λ ein Eigenwert von Δ_γ des Typs (II) ist, dann gilt $\lambda \notin \sigma_1(\Delta_\gamma)$. Nach Satz 6.1.21 ist λ von einfacher geometrischer Vielfachheit.

Wir zeigen nun, dass die Funktionen q_1 und q_2 aus Lemma 6.1.18 übereinstimmen. Da diese Funktionen den Parameter γ des zugehörigen Robin-Pseudo-Laplace-Operators eindeutig festlegen, bezeichnen wir diese Funktion als (*Eisenstein-*)*Robin-Quotienten* und schreiben $\gamma(s)$.

Theorem 6.2.4. *Die Abbildung*

$$\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad s \mapsto \gamma(s) := q_2(s) = -\frac{E'_0(\eta, s)}{E_0(\eta, s)},$$

ist holomorph und es gilt $\gamma(s) = q_1(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$. Ferner erfüllt $\gamma(s)$ die Funktionalgleichung

$$\gamma(1-s) = \gamma(s)$$

und ist verträglich mit der komplexen Konjugation:

$$\overline{\gamma(s)} = \gamma(\bar{s}).$$

Beweis. Es sei $s_0 = \frac{1}{2}$. Dann ist $\gamma(s)$ für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{s_0\}$ bestimmt durch

$$\gamma(s) = -\frac{E'_0(\eta, s)}{E_0(\eta, s)} = -\frac{s\eta^{s-1} + \varphi(s)(1-s)\eta^{-s}}{\eta^s + \varphi(s)\eta^{1-s}}. \quad (6.7)$$

Da die Streumatrix φ nach Theorem 2.1.14 auf \mathbb{C} meromorph ist, ist auf jedem Gebiet, wo der Nenner von (6.7) nicht verschwindet und φ keinen Pol besitzt, die Holomorphie von γ in s klar.

Falls φ in s_1 einen Pol der Ordnung n besitzt, dann impliziert die Funktionalgleichung

$$\varphi(s)\varphi(1-s) = 1,$$

dass φ in $1-s_1$ eine n -fache Nullstelle besitzt.

Für alle $s \in U \setminus \{s_0\}$, wobei $U \subset \mathbb{C} \setminus \{s_1\}$ eine Umgebung von s_1 sei, auf der φ keinen weiteren Pol und keine Nullstelle besitzt, liefert Erweiterung des Bruchs in (6.7) mit $\varphi(1-s)$

$$\gamma(s) = -\frac{\varphi(1-s)s\eta^{s-1} + (1-s)\eta^{-s}}{\varphi(1-s)\eta^s + \eta^{1-s}}.$$

Für $s \rightarrow s_1$ konvergiert dieser Ausdruck gegen die komplexe Zahl

$$\gamma_1 = -\frac{(1-s_1)\eta^{-s_1}}{\eta^{1-s_1}} = \frac{s_1-1}{\eta}.$$

Also ist die Singularität von γ in s_1 hebbar. Andererseits gilt für die zu s_1 gehörige Eigenfunktion $v[s_1] \in \mathfrak{E}^\eta$

$$v_0[s_1](\eta) = \eta^{1-s_1} \quad \text{und} \quad v'_0[s_1](\eta) = (1-s_1)\eta^{-s_1}.$$

Also stimmt die holomorphe Fortsetzung γ_1 von $\gamma|_U$ nach s_1 mit der Definition

$$q_1(s_1) = -\frac{v'_0[s_1](\eta)}{v_0[s_1](\eta)}$$

überein.

Wir betrachten nun den Fall, dass es $s_1 \in \mathbb{C} \setminus \{s_0\}$ gibt, sodass der Nenner

$$\eta^{s_1} + \varphi(s_1)\eta^{1-s_1} = 0$$

eine Nullstelle besitzt. Nach Lemma 6.1.14 kann der Zähler von γ nicht gleichzeitig verschwinden. Also ist s_1 ein Pol erster Ordnung von γ , und $\frac{1}{\gamma(s)}$ ist in einer Umgebung U von s_1 holomorph. Somit ist γ als Funktion von U nach $\hat{\mathbb{C}}$ holomorph.

Die Funktionalgleichung $E(z, s) = \varphi(s)E(z, 1-s)$ liefert für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{s_0\}$

$$\gamma(1-s) = -\frac{E'_0(\eta, 1-s)}{E_0(\eta, 1-s)} = -\frac{\varphi(1-s)E'_0(\eta, s)}{\varphi(1-s)E_0(\eta, s)} = -\frac{E'_0(\eta, s)}{E_0(\eta, s)} = \gamma(s).$$

Falls $s_0 = \frac{1}{2}$ und $\varphi(s_0) = -1$ gilt, sodass $E(\cdot, s_0)$ die Nullfunktion ist, gilt für die in (6.7) definierte Funktion γ aus nach der Regel von de l'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow s_0} \gamma(s) &= -\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\eta^{s-1} + s \ln(\eta)\eta^{s-1} + \varphi'(s)(1-s)\eta^{-s} - \varphi(s)\eta^{-s} - \varphi(s)(1-s) \ln(\eta)\eta^{-s}}{\ln(\eta)\eta^s + \varphi'(s)\eta^{1-s} - \varphi(s) \ln(\eta)\eta^{1-s}} \\ &= -\frac{1}{\eta} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2} \ln(\eta) + \frac{1}{2} \varphi'(s_0) + 1 + \frac{1}{2} \ln(\eta)}{\ln(\eta) + \varphi'(s_0) + \ln(\eta)} = -\frac{4 + 2 \ln(\eta) + \varphi'(s_0)}{2\eta \cdot (2 \ln(\eta) + \varphi'(s_0))}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\gamma(s_0) = -\frac{\partial_s E'_0(\eta, s)|_{s=s_0}}{\partial_s E_0(\eta, s)|_{s=s_0}}$$

die holomorphe Fortsetzung von γ aus (6.7) mit höchstens einem einfachen Pol, falls $\varphi(s_0) = -1$ und $\varphi'(s_0) = -2 \ln(\eta)$.

Die Verträglichkeit mit der komplexen Konjugation folgt aus $\overline{E(z, s)} = E(z, \bar{s})$. \square

Korollar 6.2.5. (i) Die Ableitung γ' ist punktsymmetrisch in $s_0 = \frac{1}{2}$, d. h. für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt

$$\gamma'(1-s) = -\gamma'(s).$$

Insbesondere gilt

$$\gamma'(s_0) = 0.$$

(ii) Es gilt genau dann $\gamma(s) \in \mathbb{R}$, wenn

(a) $s \in \mathbb{R}$ oder

(b) $\bar{s} = 1 - s$, d. h. $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

Bemerkung 6.2.6. (i) Korollar 6.2.5 (ii) liefert einen zweiten Beweis für Satz 6.2.2, weil

$$\lambda = s(1-s) = \frac{1}{4} + z(s)^2 \quad \text{mit} \quad s = \frac{1}{2} + iz(s)$$

genau dann reell ist, wenn gilt

$$z(s) = ir(s), \quad r(s) \in \mathbb{R},$$

oder

$$z(s) = \tau(s), \quad \tau(s) \in \mathbb{R}.$$

(ii) Die Abbildung $G_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, $s \mapsto \gamma(s)$, ist surjektiv, aber nicht injektiv. Dasselbe gilt für die Einschränkung $G_{\mathcal{S}}$ von $G_{\mathbb{C}}$ auf \mathcal{S} , da für jeden der unendlich vielen Eigenwerte $\lambda_j(\gamma_0)$ vom Typ (II) eines Operators Δ_{γ_0} und $s_j = s(\lambda_j(\gamma_0))$ gilt $\gamma_0 = \gamma(s_j)$.

Wir geben nun entsprechend der Kategorisierung der Eigenfunktionen $v[s]$ den jeweiligen Robin-Quotienten $\gamma(s)$ an, und unterscheiden hierbei vier Typen (a), (b), (c) und (d).

Lemma 6.2.7. Es sei $s \in \mathcal{S}$.

(a) Falls φ in $s \neq \frac{1}{2}$ weder einen Pol noch eine Nullstelle besitzt, gilt

$$\gamma(s) = \frac{2z(s) \tan\left(z(s) \ln(\eta) - \frac{\vartheta(s)}{2}\right) - 1}{2\eta}.$$

(b) Falls φ in $s \neq \frac{1}{2}$ einen Pol besitzt, ist $\gamma(s)$ gegeben durch

$$\gamma(s) = \frac{s-1}{\eta}.$$

(c) Falls φ in $s \neq \frac{1}{2}$ eine Nullstelle besitzt, gilt

$$\gamma(s) = -\frac{s}{\eta}.$$

(d) Für $s_0 = \frac{1}{2}$ ist

$$\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} -\frac{1}{2\eta}, & \text{falls } \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \\ -\frac{1}{2\eta} \cdot \left(1 + \frac{4}{2\ln(\eta) + \varphi'\left(\frac{1}{2}\right)}\right), & \text{falls } \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -1. \end{cases}$$

Beweis. Im Fall (a) existiert nach Lemma 2.1.19 ein $c_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$v_0(y) = c_0 \sqrt{y} \cos\left(z \ln(y) - \frac{\vartheta}{2}\right)$$

und

$$v_0'(y) = \frac{c_0}{\sqrt{y}} \left(\frac{1}{2} \cos\left(z \ln(y) - \frac{\vartheta}{2}\right) - z \sin\left(z \ln(y) - \frac{\vartheta}{2}\right) \right).$$

Falls $s_0 = \frac{1}{2}$ und $\varphi(s_0) = 1$, dann gilt $E_0(\eta, s_0) = 2\sqrt{\eta}$ und $E_0'(\eta, s_0) = \frac{1}{\sqrt{\eta}}$. Die anderen Fälle gehen aus dem Beweis von Theorem 6.2.4 hervor. \square

Bezeichnung 6.2.8. Es seien γ_a , γ_b , γ_c und γ_d die in Lemma 6.2.7 (a) bis (d) definierten Werte von $\gamma(s)$. Ist $\lambda(s)$ ein Eigenwert und $v[s]$ eine Eigenfunktion zu $\gamma(s) \in \hat{\mathbb{C}}$ für ein $s \in \mathcal{S}$, so nennen wir $\lambda(s)$ und $v[s]$ ebenfalls zum Typ (a), (b), (c) oder (d) gehörig.

Für das Argument des Tangens in der Darstellung von γ_a verwenden wir die Notation

$$\xi(s) = z(s) \ln(\eta) - \frac{\vartheta(s)}{2}$$

aus Lemma 2.1.19.

Bemerkung 6.2.9. (i) Für $s \neq \frac{1}{2}$ entsprechen die Typen (a), (b) und (c) den Kategorien (a'), (b') und (c') aus Bemerkung 6.1.8.

(ii) Es sei $s_0 = \frac{1}{2}$. Falls $\varphi(s_0) = 1$ gilt, ist Typ (d) ein Spezialfall von Typ (a) mit

$$z(s) = 0, \quad \vartheta(s_0) = 0 \pmod{2\pi}, \quad \cos(\xi(s_0)) = \cos(0) = 1.$$

Im Fall $\varphi(s) = -1$ gilt

$$z(s) = 0, \quad \vartheta(s_0) = \pi \pmod{2\pi}, \quad \cos(\xi(s_0)) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

und wir erhalten den Wert von $\gamma(s_0)$ durch Anwendung der Regel von de l'Hospital auf γ_a .

(iii) Für den Wert von γ an der Stelle $s_0 = \frac{1}{2}$ schreiben wir

$$\gamma_{\Gamma, \eta} := \gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Nach Bemerkung 2.5.9 (iv) gilt genau dann $\gamma_{\Gamma, \eta} = \infty$, wenn es η_{Γ} mit $\varphi'(s_0) = -2\ln(\eta_{\Gamma})$ gibt, und $\eta = \eta_{\Gamma}$ ist. Insbesondere gilt für fast alle $\eta > p_{\Gamma}$, dass $\gamma_{\Gamma, \eta}$ in \mathbb{R} liegt.

Da die Pole und Nullstellen von φ isoliert sind, gehören fast alle Eigenwerte des Typs (II) zum Untertyp (a). Ferner impliziert Theorem 2.5.8, dass Δ_∞ keine Eigenwerte vom Typ (b) oder (c) besitzt. Dies können wir nun direkt nachweisen.

Satz 6.2.10. *Alle Eigenwerte $\lambda \neq \frac{1}{4}$ vom Typ (II) des Operators Δ_∞ sind vom Typ (a).*

Beweis. Die Eigenwerte vom Typ (b) oder (c) haben einen konstanten Term der Form

$$v_0(y) = b \cdot y^\sigma, \quad b \neq 0,$$

für ein $\sigma \in \mathbb{C}$. Insbesondere kann v_0 keine Nullstelle in $\eta > 0$ haben. □

Satz 6.2.11. *Es sei $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ beliebig. Dann besitzt Δ_γ höchstens einen Eigenwert vom Typ (b) oder (c), und es können nicht beide Fälle zugleich eintreten.*

Beweis. Zuerst sei angenommen, es gebe $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$, sodass $\gamma_b(s_1) = \gamma_b(s_2)$. Dann folgt aus $\gamma_b(s) = \frac{s-1}{\eta}$, dass $s_1 = s_2$ gilt. Dasselbe gilt für γ_c .

Als Nächstes nehmen wir an, es gebe $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ mit $\gamma_b(s_1) = \gamma_c(s_2)$. Dann folgt $s_2 = 1 - s_1$. Somit gilt entweder $\operatorname{Re}(s_1) > \frac{1}{2}$ und daher $\operatorname{Re}(s_2) = \operatorname{Re}(1 - s_1) < \frac{1}{2}$ im Widerspruch zur Annahme $s_2 \in \mathcal{S}$, oder es gilt $\operatorname{Re}(s_1) = \operatorname{Re}(s_2) = \frac{1}{2}$. In diesem Fall besitzt $\varphi(s_j)$ weder eine Nullstelle noch einen Pol, also gehören s_1 und s_2 zum Typ (a) oder (d). □

Bemerkung 6.2.12. Ob umgekehrt gilt, dass auf einer Kurve $\{(\gamma, \lambda) \mid \lambda \in \sigma_2(\Delta_\gamma)\}$ auch höchstens ein Eigenwert vom Typ (b) oder (c) liegen kann, ist bislang unklar.

Satz 6.2.13. *Wenn $\gamma \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \sigma_2(\Delta_\gamma)$ ein Eigenwert vom Typ (b) oder (c) ist, dann gilt*

$$\gamma \leq 0.$$

Beweis. Wenn $\lambda = s(1 - s)$ vom Typ (b) oder (c) ist, dann gilt $\gamma(s) \in \left\{-\frac{s}{\eta}, \frac{s-1}{\eta}\right\}$. Somit gilt entweder

$$s = -\gamma(s)\eta \quad \text{und} \quad 1 - s = 1 + \gamma(s)\eta$$

oder

$$1 - s = -\gamma(s)\eta \quad \text{und} \quad s = 1 + \gamma(s)\eta.$$

In beiden Fällen folgt

$$\lambda = -\gamma(s)\eta(1 + \gamma(s)\eta).$$

Für $\gamma(s) > 0$ ist dann $\lambda < 0$ im Widerspruch zu $\sigma(\Delta_\gamma) \subset [0, \infty[$ für $\gamma > 0$. □

Korollar 6.2.14. *Es gilt genau dann $0 \in \sigma_2(\Delta_\gamma)$, wenn $\gamma = 0$ ist.*

Beweis. Für $\lambda = 0$ ist dasjenige $s \in \mathcal{S}$ mit $\lambda = s(1 - s)$ durch $s_1 = 1$ gegeben. Da φ in $s_1 = 1$ einen Pol besitzt, ist $\lambda = 0$ vom Typ (b). Es folgt $\gamma_b(s_1) = \frac{s_1-1}{\eta} = 0$. □

6.3 Spektralsätze

Wir fassen die Ergebnisse dieses Kapitels in dem folgenden Spektralsatz zusammen.

Theorem 6.3.1 (Erster Spektralsatz). *Es sei $\eta > p_\Gamma$. Für jedes $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ ist das Spektrum von Δ_γ diskret und besteht aus den folgenden zwei Typen von Eigenwerten:*

(I) *Die Eigenwerte vom Typ (I) sind die endlich oder unendlich vielen Eigenwerte*

$$0 < \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots$$

des Laplace-Operators Δ_Γ mit den zugehörigen Spitzenformen aus L_0^2 als Eigenvektoren.

(II) *Die Eigenwerte vom Typ (II) sind von der Form*

$$\lambda(\gamma) = s(\gamma) \cdot (1 - s(\gamma)), \quad s(\gamma) \in \mathcal{S}, \quad (6.8)$$

mit einer eindeutigen Eigenfunktion $v[\gamma]$ vom Typ (II), gegeben durch

(i) *die trunkierte Eisensteinreihe*

$$v[\gamma] = E^\eta(\cdot, s(\gamma)),$$

falls φ bei $s(\gamma) \neq \frac{1}{2}$ keinen Pol besitzt oder falls $s(\gamma) = \frac{1}{2}$ und $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ gilt, mit

(a)

$$\gamma = \frac{2z(\gamma) \tan(\xi(z(\gamma))) - 1}{2\eta},$$

falls $\varphi(s(\gamma)) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, wobei $z(\gamma)$ und $\xi(z)$ bestimmt sind durch

$$s(\gamma) = \frac{1}{2} + iz(\gamma), \quad \xi(z) = z \ln(\eta) - \frac{\vartheta(z)}{2}, \quad \vartheta(z) = -i \log(\varphi(s)),$$

und

(b)

$$\gamma = \frac{-s(\gamma)}{\eta},$$

falls $\varphi(s(\gamma)) = 0$ gilt,

(ii) *das trunkierte Residuum der Eisensteinreihe*

$$v[\gamma] = R_E^\eta(\cdot, s(\gamma)),$$

falls $s(\gamma)$ mit einem der endlich vielen Pole s_k von φ in $]\frac{1}{2}, 1]$ und $\lambda(\gamma)$ mit einem der Eigenwerte $x_k \in [0, \frac{1}{4}[$ von Δ_Γ übereinstimmt, mit

$$\gamma = \frac{s(\gamma) - 1}{\eta},$$

oder

(iii) die Parameter-Ableitung der trunkierten Eisensteinreihe

$$v[\gamma] = \partial_s E^\eta(\cdot, s)|_{s=1/2},$$

falls $s(\gamma) = \frac{1}{2}$ und $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ gilt, mit

$$\gamma = -\frac{1}{2\eta} \left(1 + \frac{4}{2\ln(\eta) + \varphi'\left(\frac{1}{2}\right)} \right).$$

Bemerkung 6.3.2. Die Eigenwerte $\lambda(\gamma)$ vom Typ (II) aus (6.8) können nach den Bemerkungen 4.3.21 und 5.5.6 lokal als Funktionen von γ betrachtet werden, die durch Zweige analytischer Funktionen mit höchstens algebraischen Singularitäten gegeben sind.

Für die Einschränkung der Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \hat{\mathbb{C}}}$ auf \mathbb{R} gilt zusätzlich das folgende Theorem.

Theorem 6.3.3 (Zweiter Spektralsatz). *Für den Robin-Pseudo-Laplace-Operator Δ_γ mit $\gamma \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Alle Eigenwerte von Δ_γ sind reell und lassen sich zu einer aufsteigenden Folge*

$$\Lambda_1(\gamma) \leq \Lambda_2(\gamma) \leq \dots$$

mit ∞ als einzigem Häufungspunkt anordnen. Die Folge $(\Lambda_k(\gamma))_{k \in \mathbb{N}}$ ist die Vereinigung der Teilfolge

$$0 < \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots$$

der Eigenwerte vom Typ (I), die nicht von $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ abhängt und entweder endlich oder unendlich ist, und der abzählbar unendlichen Teilfolge

$$\lambda_1(\gamma) < \lambda_2(\gamma) < \dots$$

der Eigenwerte vom Typ (II) mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\gamma) = \infty.$$

(ii) *Wenn $\gamma \geq 0$ ist, dann sind alle $\Lambda_k(\gamma)$ nichtnegativ.*

(iii) *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\Lambda_k(\gamma)$ eine holomorphe Funktion $\mathfrak{L}_k : \gamma \mapsto \Lambda_k(\gamma)$ auf einer komplexen Umgebung U_k von \mathbb{R} , und es gibt eine Folge $(\Psi_k[\gamma])_{k \in \mathbb{N}}$ der zugehörigen Eigenfunktionen so, dass $\gamma \mapsto \Psi_k[\gamma]$ ebenfalls holomorph auf U_k ist und die Familie $(\Psi_k[\gamma])_{k \in \mathbb{N}}$ für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von L_η^2 bildet.*

(iv) *Spaltet man die Folgen $(\mathfrak{L}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\Psi_k[\cdot])_{k \in \mathbb{N}}$ aus (iii) in zwei Teilfolgen vom Typ (I) und (II) auf wie in (i), dann sind die Teilfolgen der Eigenwerte und Eigenfunktionen vom Typ (I) konstant in γ .*

(v) Es sei $(\mathfrak{L}_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}} := (\mathfrak{L}_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ die Teilfolge aller Eigenwertfunktionen vom Typ (II), und es sei $(u_n[\cdot])_{n \in \mathbb{N}} := (\Psi_{k_j}[\cdot])_{j \in \mathbb{N}}$ die zugehörige Teilfolge von Eigenfunktionen aus (iv). Dann wird durch $(u_n[\gamma])_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ ein vollständiges Orthonormalsystem des (unendlichdimensionalen) Unterraums Θ_η von L_η^2 gegeben.

Hieraus ergibt sich die Frage nach dem Zusammenhang zwischen dem Orthonormalsystem $(u_n[\gamma])_{n \in \mathbb{N}}$ aus Theorem 6.3.3 und der Funktionen $v[\gamma]$ aus Theorem 6.3.1. Allgemeiner besteht die Frage, ob zwei verschiedene Eigenfunktionen $v[s_1(\gamma)]$ und $v[s_2(\gamma)]$ von Δ_γ aus Theorem 6.3.1 für $s_1(\gamma) \neq s_2(\gamma) \in \mathcal{S}$ stets orthogonal zueinander sind. Dies ist jedoch im Allgemeinen nicht der Fall, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 6.3.4. *Es sei $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ und es seien $\lambda_1(\gamma) \neq \lambda_2(\gamma) \in \sigma_2(\Delta_\gamma)$ zwei verschiedene Eigenwerte vom Typ (II) von Δ_γ mit den zugehörigen Parametern $s_1(\gamma), s_2(\gamma) \in \mathcal{S}$. Dann gilt für die Eigenfunktionen $v[s_1(\gamma)], v[s_2(\gamma)]$ aus Theorem 6.3.1 genau dann*

$$(v[s_1(\gamma)], v[s_2(\gamma)])_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})} = 0,$$

wenn $\gamma \in \hat{\mathbb{R}}$.

Beweis. Wir schreiben $v_j := v[s_j(\gamma)]$ für die Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda_j(\gamma)$ für $j = 1, 2$. Für $\gamma \in \mathbb{C}$ und $j = 1, 2$ gilt

$$v'_{j,0}(\eta) = -\gamma v_{j,0}(\eta) \quad \text{mit} \quad v_{j,0}(\eta) \neq 0.$$

Aus der Maass-Selberg-Relation 2.2.7 folgt

$$\begin{aligned} (v_1, v_2)_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})} &= \frac{v_{1,0}(\eta) \bar{v}'_{2,0}(\eta) - v'_{1,0}(\eta) \bar{v}_{2,0}(\eta)}{\lambda_1 - \bar{\lambda}_2} \\ &= \frac{-\bar{\gamma} v_{1,0}(\eta) \bar{v}_{2,0}(\eta) + \gamma v_{1,0}(\eta) \bar{v}'_{2,0}(\eta)}{\lambda_1 - \bar{\lambda}_2} = 2i \operatorname{Im} \gamma \cdot \frac{v_{1,0}(\eta) \bar{v}_{2,0}(\eta)}{\lambda_1 - \bar{\lambda}_2}. \end{aligned}$$

Dieser Term verschwindet genau dann, wenn $\operatorname{Im} \gamma = 0$, da $v_{1,0}$ und $v_{2,0}$ keine Nullstelle in η haben. Im Fall $\gamma = \infty$ folgt die Behauptung ebenfalls aus der Maass-Selberg-Relation 2.2.7 mit

$$v_{1,0}(\eta) = v_{2,0}(\eta) = 0. \quad \square$$

Korollar 6.3.5. *Die Funktionen $u_n[\gamma]$ aus Theorem 6.3.3 (v) sind durch ein Vielfaches*

$$u_n[\gamma] = h(\gamma) v[s(\gamma)], \quad h(\gamma) \in \mathbb{C},$$

der Funktionen $v[s(\gamma)]$ aus Satz 6.1.16 gegeben mit $|h(\gamma)| = \|v[\gamma]\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^{-1}$ für $\gamma \in \mathbb{R}$.

Nach Theorem 6.3.3 besitzen die Funktionen $u_n[\gamma]$ eine holomorphe Fortsetzung auf eine komplexe Umgebung U_n von \mathbb{R} . Im folgenden Beispiel wird dargelegt, wie die Norm auf eine komplexe Umgebung von \mathbb{R} fortgesetzt werden kann. Ferner wird gezeigt, wie die holomorphe Funktion $u_n[\gamma(s)]$ in der Umgebung von $\gamma(s_n)$ eines Eigenwertes $\lambda_n = s_n(1 - s_n)$ vom Typ (b) konstruiert werden kann, der zu einem Pol s_n von φ gehört.

Beispiel 6.3.6. (i) Es sei $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ vom Typ (a) (mit $s(\gamma_0) \neq \frac{1}{2}$), es sei $s(\gamma) \in \mathcal{S}$ mit

$$\lambda(\gamma_0) = s(\gamma) \cdot (1 - s(\gamma)) \in \sigma_2(\Delta_{\gamma_0})$$

und $v[\gamma] = E^\eta(\cdot, s(\gamma))$ die zugehörige Eigenfunktion. Für γ aus einer reellen Umgebung V_0 von γ_0 so, dass φ auf $s(V_0)$ keine Nullstellen und Pole besitzt, sei

$$\kappa(\gamma) := \|E^\eta(\cdot, s(\gamma))\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})} = \sqrt{\int_X E^\eta(\cdot, s(\gamma)) \cdot E^\eta(\cdot, \overline{s(\gamma)}) \, d\mu_{\mathbb{H}}}$$

die Norm von $v[\gamma]$. Dann gibt es nach Korollar 6.3.5 ein $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$u_n[\gamma] = \frac{v[\gamma]}{\kappa(\gamma)}, \quad \gamma \in V_0,$$

ein Element des Orthonormalsystems $(u_n[\gamma])_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Es gilt

$$\overline{s(\gamma)} = \begin{cases} 1 - s(\gamma), & \text{falls } \lambda_n(\gamma) > \frac{1}{4} \text{ und } s(\gamma) \in \mathcal{G}, \\ s(\gamma), & \text{falls } \lambda_n(\gamma) < \frac{1}{4} \text{ und } s(\gamma) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Im ersten Fall folgt

$$\begin{aligned} \kappa(\gamma) &= \sqrt{\int_X E^\eta(\cdot, s(\gamma)) \cdot E^\eta(\cdot, 1 - s(\gamma)) \, d\mu_{\mathbb{H}}} \\ &= \sqrt{\int_X \varphi(1 - s(\gamma)) E^\eta(\cdot, s(\gamma))^2 \, d\mu_{\mathbb{H}}} \\ &= \varphi(1 - s(\gamma))^{1/2} \sqrt{\int_X E^\eta(\cdot, s(\gamma))^2 \, d\mu_{\mathbb{H}}} \end{aligned}$$

mit $|\varphi(1 - s(\gamma))| = 1$. Im zweiten Fall gilt

$$\kappa(\gamma) = \sqrt{\int_X E^\eta(\cdot, s(\gamma))^2 \, d\mu_{\mathbb{H}}}.$$

Für $\gamma \in V_0$ gilt stets $\kappa(\gamma) > 0$. Also existiert eine komplexe Umgebung U_0 von γ_0 , für die das Integral über $E^\eta(\cdot, s(\gamma))^2$ nicht verschwindet. Somit besitzt

$$h(\gamma) = \frac{1}{\kappa(\gamma)}$$

eine holomorphe Fortsetzung nach U_0 .

(ii) Es sei $s_0 \in]\frac{1}{2}, 1]$ ein Pol von φ . Dann gilt für alle s in einer Umgebung U von s_0 , auf der φ keinen weiteren Pol und keine Nullstelle besitzt,

$$\frac{E^\eta(z, s)}{\varphi(s)} = E^\eta(z, 1 - s), \quad s \in U,$$

und

$$\frac{E^\eta(z, s)}{\kappa(s)} = \omega(s) \frac{E^\eta(z, 1 - s)}{\kappa(1 - s)}, \quad s \in U \setminus \{s_0\}.$$

Hierbei ist wie in (i)

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \sqrt{\int_X E^\eta(\cdot, s)^2 d\mu_{\mathbb{H}}} = \sqrt{\varphi(s)^2 \int_X E^\eta(\cdot, 1-s)^2 d\mu_{\mathbb{H}}} \\ &= \sqrt{\varphi(s)^2} \cdot \kappa(1-s)\end{aligned}$$

und

$$\omega(s) = \frac{\varphi(s)}{\sqrt{\varphi(s)^2}} \quad \text{mit} \quad |\omega(s) = 1|, \quad s \in U \setminus \{s_0\}.$$

Demnach gilt $\omega^2(s) = 1$ für alle $s \in U \setminus \{s_0\}$, sodass die Funktion ω^2 holomorph nach s_0 fortgesetzt werden kann. Also ist die Funktion

$$\tilde{u}[s](z) := \omega^2(s) \frac{E^\eta(z, 1-s)}{\kappa(1-s)}$$

eine holomorphe Fortsetzung von

$$u[s](z) = \frac{E^\eta(z, s)}{\kappa(s)}, \quad s \in (U \cap \mathbb{R}) \setminus \{s_0\},$$

nach U mit

$$\|\tilde{u}[s]\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2 = 1 \quad \text{für alle } s \in U \cap \mathbb{R}.$$

Wenn $\gamma(s)$ in einer Umgebung $U_0 \subseteq U$ des Punktes s_n invertierbar ist, hängt $\tilde{u}[\gamma] := \tilde{u}[s(\gamma)]$ auf $\gamma(U_0)$ holomorph von γ ab. Dies wird in Abschnitt 7.2 gezeigt (s. Theorem 7.2.12 und anschließende Bemerkung).

Bemerkung 6.3.7. Beispiel 6.3.6 impliziert, dass eine notwendige Bedingung an das Gebiet U_n , auf welches die Abbildung $\gamma \mapsto u_n[\gamma]$ fortgesetzt werden kann, dadurch gegeben ist, dass für alle $\gamma \in U_n$ gilt

$$\left(E^\eta(\cdot, s(\gamma)), E^\eta(\cdot, \overline{s(\gamma)}) \right)_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})} = \int_X E^\eta(\cdot, s(\gamma))^2 d\mu_{\mathbb{H}} \neq 0.$$

Kapitel 7

Holomorphie der Eigenwerte

Im Spektralsatz 6.3.3 für die reell parametrisierte Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{R}}$ wurde die Holomorphie der Eigenwerte mittels Theorem 4.3.19 hergeleitet. Die Umgebungen U_k von \mathbb{R} , auf denen die Eigenwerte Λ_k und die Eigenfunktionen Ψ_k holomorph sind, können hierbei im Allgemeinen nicht unabhängig von $k \in \mathbb{N}$ gewählt werden (Kato [13], Kapitel VII, Bemerkung 3.9). Insbesondere gilt der Satz über die holomorphe Abhängigkeit des gesamten Spektrums nur für eine holomorphe Familie vom Typ (A) oder (B). Hieraus ergeben sich die Fragen,

- (i) inwieweit das Spektrum für komplex parametrisierte Δ_γ holomorph von γ abhängt, und
- (ii) wie sich das Spektrum in einer Umgebung des unendlich fernen Punkts verhält, in dem die Familie zwar holomorph, aber nicht vom Typ (B) ist.

In den Bemerkungen 4.3.21 und 5.5.6 wurde erklärt, dass jeder Eigenwert Λ der holomorphen Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \hat{\mathbb{C}}}$ als analytische Kurve

$$\{(\gamma, \Lambda) \in \hat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C} \mid \Lambda \in \sigma(\Delta_\gamma)\}$$

und lokal durch Zweige einer holomorphen Funktion mit höchstens algebraischen Singularitäten betrachtet werden kann, dargestellt durch eine Puiseuxreihe

$$\Lambda(z) = \Lambda(z_0) + \alpha_1 \omega^j (z - z_0)^{1/p} + \alpha_2 \omega^{2j} (z - z_0)^{2/p} + \dots, \quad j = 1, \dots, p-1, \quad (7.1)$$

mit $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right)$.

Alle Eigenwerte vom Typ (I) sind konstant auf $\hat{\mathbb{C}}$. Daher betrachten wir ab nun nur noch die Eigenwerte

$$\lambda(\gamma) = s(\gamma) \cdot (1 - s(\gamma)) \quad (7.2)$$

vom Typ (II), die wir (lokal) als Funktionen im obigen Sinne verstehen.

Im Folgenden wird in Abschnitt 7.1 das Verhalten der Eigenwerte eines holomorphen Operators an den *exzeptionellen Punkten* und *Verzweigungspunkten* nach der Theorie von Kato [13], Kapitel II, erklärt, die mit dem Auftreten algebraischer Singularitäten zusammenhängen. Anschließend wird in Abschnitt 7.2 die Ableitung des Eisenstein-Robin-Quotienten $\gamma(s)$ bestimmt, um die Differenzierbarkeit der Eigenwerte $\lambda(\gamma)$ zu untersuchen.

Im zweiten Teil des Kapitels wird die Eigenwertfunktionenfolge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} := (\mathfrak{L}_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ vom Typ (II) untersucht, die für $\gamma \in \mathbb{R}$ wie in Theorem 6.3.3 definiert ist.

7.1 Exzeptionelle Punkte und Verzweigungen

Wir erinnern an das folgende Theorem von Kato (s. Theorem 4.3.20).

Theorem (Kato [13], VII, Theorem 1.8). *Es sei $(T_z)_{z \in U}$ eine holomorphe Familie in einer Umgebung U eines Punktes $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann besteht jedes endliche System von Eigenwerten von $(T_z)_{z \in U}$ aus Zweigen einer oder mehrerer analytischer Funktionen, die höchstens algebraische Singularitäten in z_0 besitzen. Dasselbe gilt für die zugehörigen Eigenprojektionen.*

Nach Kato [13], Kapitel VII, §1.3 und §3.1, verhält sich jedes endliche System von Eigenwerten eines (beliebigen) holomorphen Operators genau wie die Eigenwerte eines holomorphen Operators in einem endlichdimensionalen Vektorraum. Wir erklären daher das Verhalten der Eigenwerte und das Auftreten von Singularitäten wie Kato [13] in Kapitel II, §1, anhand von holomorphen Operatoren A_z in endlichdimensionalen Vektorräumen.

Bezeichnung 7.1.1. Einen Punkt z_0 , an dem ein Eigenwert $\lambda(z)$ einer holomorphen Familie $(A_z)_{z \in U}$ eine algebraische Singularität besitzt, nennen wir einen *Verzweigungspunkt*.

Die Puiseuxreihendarstellung (7.1) impliziert, dass eine algebraische Singularität genau dann vorliegt, wenn $p > 1$ gilt. Wir erklären nun, wie der Wert p bestimmt werden kann. Er wird durch die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte bestimmt, ist aber nicht mit dieser identisch.

Beispiel 7.1.2 (Kato [13], II, Beispiel 1.1). Wir betrachten je einen Operator in \mathbb{R}^2 mit und ohne algebraische Singularitäten.

(i) Es sei

$$A_z = \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & -1 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten

$$\lambda^\pm(z) = \pm\sqrt{1+z^2}.$$

Die Eigenwerte λ^\pm sind Zweige der komplexen Wurzel. Für jedes $z \notin \{\pm i\}$ hat A_z zwei verschiedene Eigenwerte, aber $A_{\pm i}$ hat den doppelten Eigenwert

$$\lambda^\pm(\pm i) = \pm\sqrt{1+(\pm i)^2} = 0,$$

und die Funktionen λ^\pm sind nicht differenzierbar in $\pm i$.

(ii) Die Eigenwerte der Matrix

$$B_z = \begin{pmatrix} 0 & z \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

sind gegeben durch

$$\lambda^\pm(z) = \pm z.$$

Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzt B_z zwei verschiedene Eigenwerte, in $z_0 = 0$ hat B_{z_0} den doppelten Eigenwert 0. Die Funktionen λ^\pm sind ganz.

Die Punkte $\pm i$ aus Beispiel 7.1.2 (i) und $z_0 = 0$ aus Beispiel 7.1.2 (ii), in denen die algebraische Vielfachheit größer als 1 ist, heißen *exzeptionelle Punkte*. Das Beispiel zeigt aber, dass dieser Begriff nicht identisch ist mit dem des Verzweigungspunkts, da die Funktionen λ^\pm aus Beispiel 7.1.2 (ii) differenzierbar in $z_0 = 0$ sind.

Definition und Satz 7.1.3 (Kato [13], II, §1.1 und 1.2). Es sei $(A_z)_{z \in U}$ eine holomorphe Familie von Operatoren in einem endlichdimensionalen Vektorraum.

- (i) Ein Punkt $z_0 \in U$, für den es komplexe Umgebungen V von z_0 , W von λ_0 und ein $k \geq 2$ gibt, sodass
 - (a) für jedes $z \in V$ alle Eigenwerte von A_z in W durch $\lambda_1(z), \dots, \lambda_k(z) \in W$ gegeben sind,
 - (b) für alle $z \in V \setminus \{z_0\}$ die Eigenwerte $\lambda_j(z)$, $j = 1, \dots, k$, paarweise verschieden sind, und
 - (c) in z_0 die Eigenwerte $\lambda_0 = \lambda_j(z_0)$ für alle $j = 1, \dots, k$ übereinstimmen,
 heißt *exzeptioneller Punkt*.

- (ii) Es sei z_0 ein exzeptioneller Punkt und es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $z_0 \notin G$ und $G \subset B_\delta(z_0)$ für ein $\delta > 0$. Dann sind die Eigenwerte $\lambda_1(z), \dots, \lambda_k(z)$ auf G holomorph in z .

Ist $\alpha_z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\alpha_z(t) = |z - z_0| \cdot e^{2\pi it} + z_0$, ein geschlossener Weg in $B_\delta(z_0)$, dann werden die Funktionen $\lambda_1(z), \dots, \lambda_k(z)$ permutiert, wenn der Weg α_z für jedes $z \in G$ durchlaufen wird. Hierdurch lassen sich die Eigenwertfunktionen $\lambda_1(z), \dots, \lambda_k(z)$ zu $q \leq k$ zyklischen Gruppen anordnen, die Kato als *Zykel* bezeichnet. Die Ordnung einer solchen Gruppe heißt *Periode* des Zyklens und wird mit p bezeichnet.

Bemerkung 7.1.4 (Kato [13], II, §1.2). (i) Die Periode p eines Zyklens entspricht dem Parameter p in der Puiseuxreihe (7.1). Das bedeutet, die Elemente $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ eines Zyklens der Periode p sind in der Umgebung von z_0 durch die p Zweige der Puiseuxreihe

$$\lambda_j(z) = \lambda_0 + \alpha_1 \omega^j (z - z_0)^{1/p} + \alpha_2 \omega^{2j} (z - z_0)^{2/p} + \dots, \quad j = 0, \dots, p - 1,$$

mit $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right)$ gegeben.

- (ii) Die Eigenwertfunktionen λ , die in einem exzeptionellen Punkt z_0 zusammenlaufen, sind genau dann lokal holomorph, wenn jeder Zykel in z_0 der Periode 1 ist. Hieraus folgt, dass nicht jeder exzeptionelle Punkt ein Verzweigungspunkt ist, aber jeder Verzweigungspunkt ein exzeptioneller Punkt sein muss. Ein exzeptioneller Punkt ist genau dann ein Verzweigungspunkt, wenn er einen Zykel der Periode $p > 1$ besitzt.
- (iii) Ein Operator A_z hat in einem exzeptionellen Punkt z_0 notwendig einen Eigenwert λ_0 der algebraischen Vielfachheit $k > 1$. Ist der Operator A_{z_0} selbstadjungiert, ist dies gleichbedeutend damit, dass der zugehörige Eigenraum $E(A_{z_0}, \lambda_0)$ von der Dimension $k > 1$ ist. Für einen beliebigen Operator ist dies nicht notwendig der Fall.

Beispiel 7.1.5. Der Operator

$$A_z = \begin{pmatrix} z & 1 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix}$$

besitzt die Eigenwerte

$$\lambda_1(z) = z, \quad \lambda_2(z) = z^2,$$

die jeweils ganz sind. Für $z \in B_{1/2}(0) \setminus \{0\}$ gilt $\lambda_1(z) \neq \lambda_2(z)$, also ist A_z diagonalisierbar, und die Eigenwerte $\lambda_j(z)$ haben beide die algebraische und geometrische Vielfachheit 1. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$v_1[z] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2[z] = \begin{pmatrix} 1 \\ z^2 - z \end{pmatrix}.$$

In $z_0 = 0$ gilt

$$\lambda_1(0) = \lambda_2(0) =: \lambda_0,$$

aber

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist nicht diagonalisierbar. Der Eigenwert λ_0 hat die algebraische Vielfachheit 2, aber die geometrische Vielfachheit 1. Die Eigenvektoren $v_1[z]$ und $v_2[z]$ konvergieren für $z \rightarrow 0$ beide gegen den Vektor

$$v_1[0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

der bis auf skalare Vielfache der einzige Eigenvektor von A_0 ist.

Bemerkung 7.1.6. Im Falle eines selbstadjungierten oder normalen Operators kann der in Beispiel 7.1.5 beschriebene Fall nicht eintreten, da die Eigenräume zu unterschiedlichen Eigenwerten orthogonal sind. Die Operatoren der Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \hat{\mathbb{C}}}$ sind genau dann selbstadjungiert, wenn γ in $\hat{\mathbb{R}}$ liegt. Für $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sind alle Eigenwerte vom Typ (II) von geometrischer Vielfachheit 1 (Korollar 6.2.3), aber die zugehörigen Eigenräume sind nicht zueinander orthogonal, da Δ_γ nach Lemma 5.4.6 nicht normal ist. Daher kann für echt komplexe γ das Auftreten von Verzweigungspunkten nicht ausgeschlossen werden.

Theorem 7.1.7 (Kato [13], VII, §3.1). *Es sei $(T_z)_{z \in U}$ eine selbstadjungierte holomorphe Familie, d. h. eine holomorphe Familie auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ mit $\{\bar{z} \mid z \in U\} = U$ und*

$$T_z^* = T_{\bar{z}} \quad \text{für alle } z \in U.$$

Dann sind alle Eigenwerte $\lambda(x)$ von T_x für $x \in U \cap \mathbb{R}$ holomorph in x , d. h. die analytischen Funktionen aus Theorem 4.3.20 besitzen keine algebraischen Singularitäten.

Die Holomorphie der Eigenwerte der Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{R}}$ wurde in Theorem 6.3.3 gezeigt. Die holomorphe Eigenwertfunktionfolge $(\mathfrak{L}_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ vom Typ (II), nennen wir ab nun $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Mit Theorem 7.1.7 können wir nun zeigen, dass jeder Eigenwert des Typs (II) von Δ_∞ als holomorphe Fortsetzung einer Eigenwertfunktion λ_n verstanden werden kann.

Bezeichnung 7.1.8. Die Eigenwerte vom Typ (II) von Δ_∞ bezeichnen wir wie Colin de Verdière mit $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$, um sie von der Eigenwertfunktionenfolge

$$\lambda_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma \mapsto \lambda_n(\gamma),$$

zu unterscheiden, die nur für die Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ vom Typ (B) wohldefiniert ist.

Satz 7.1.9. *Es seien $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ die Eigenwerte vom Typ (II) des Operators Δ_∞ . Dann gibt es für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine Umgebung W_j von ∞ und eine auf W_j holomorphe Funktion $\lambda(\gamma)$, sodass*

- (i) $\lambda(\gamma) \in \sigma_2(\Delta_\gamma)$ für alle $\gamma \in W_j$ und
- (ii) $\mu_j = \lambda(\infty)$.

Beweis. Die Behauptung folgt durch Anwendung von Theorem 7.1.7 auf den Operator $S_\gamma = \Delta_{1/\gamma}$ im Punkt $\gamma_0 = 0$. □

Auf zusammenhängenden Gebieten von $W_j \cap \mathbb{R}$ müssen die holomorphen Funktionen $\lambda(\gamma)$ aus Satz 7.1.9 mit einer der auf \mathbb{R} definierten Eigenwertfunktionen λ_k übereinstimmen. Dieser Zusammenhang wird in Abschnitt 7.4 untersucht.

7.2 Ableitung des Eisenstein-Robin-Parameters

In diesem Abschnitt wird die Ableitung der holomorphen Funktion γ aus Theorem 6.2.4 bestimmt. Die Ableitung $\gamma'(s)$ wird benutzt, um ein Kriterium für das Auftreten von Verzweigungspunkten aufzustellen und die Ableitung der Eigenwerte $\lambda(\gamma)$ für alle $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ zu bestimmen.

Wie in Abschnitt 6.2 untersuchen wir das Verhalten von $\gamma(s)$ für die unterschiedlichen Typen (a), (b), (c) und (d) separat. Für den Fall (d) mit $s = \frac{1}{2}$ wurde in Korollar 6.2.5 aus der Funktionalgleichung

$$\gamma'(1-s) = -\gamma'(s)$$

von γ' bereits gefolgert

$$\gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Wir betrachten nun zuerst die Punkte vom Typ (c), in denen eine Nullstelle von φ vorliegt.

Satz 7.2.1. *Die Streumatrix φ der Eisensteinreihe habe in s_0 eine Nullstelle. Dann gilt*

$$\gamma'(s_0) = -\frac{1}{\eta} + \frac{2s_0 - 1}{\eta^{2s_0}} \cdot \varphi'(s_0).$$

Beweis. Es sei U eine Umgebung von s_0 , auf der φ keine weitere Nullstelle und keinen Pol besitzt. Dann gilt für $s \in U \setminus \{s_0\}$

$$\gamma(s) = -\frac{s\eta^{s-1} + (1-s)\varphi(s)\eta^{-s}}{\eta^s + \varphi(s)\eta^{1-s}}.$$

Um die Ableitung an der Stelle s_0 von γ zu berechnen, schreiben wir

$$\gamma(s) = -\frac{P(s)}{Q(s)}, \quad \gamma'(s) = -\frac{P'(s)Q(s) - P(s)Q'(s)}{Q(s)^2}.$$

Hierbei sind $P(s) = E'_0(\eta, s)$ und $Q(s) = E_0(\eta, s)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} P(s) &= s\eta^{s-1} + (1-s)\varphi(s)\eta^{-s}, \\ P'(s) &= \eta^{s-1} + s\ln(\eta)\eta^{s-1} - \varphi(s)\eta^{-s} + (1-s)\varphi'(s)\eta^{-s} - (1-s)\varphi(s)\ln(\eta)\eta^{-s} \\ &= (1+s\ln(\eta))\eta^{s-1} + \varphi'(s)(1-s)\eta^{-s} - \varphi(s) \cdot (1+(1-s)\ln(\eta))\eta^{-s} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Q(s) &= \eta^s + \varphi(s)\eta^{1-s}, \\ Q'(s) &= \ln(\eta)\eta^s + \varphi'(s)\eta^{1-s} - \varphi(s)\ln(\eta)\eta^{1-s}. \end{aligned}$$

Einsetzen von s_0 mit $\varphi(s_0) = 0$ liefert

$$\begin{aligned} P(s_0) &= s_0\eta^{s_0-1}, \\ P'(s_0) &= (1+s_0\ln(\eta))\eta^{s_0-1} + (1-s_0)\varphi'(s_0)\eta^{-s_0} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Q(s_0) &= \eta^{s_0}, \\ Q'(s_0) &= \ln(\eta)\eta^{s_0} + \varphi'(s_0)\eta^{1-s_0}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} P'(s_0)Q(s_0) &= (1+s_0\ln(\eta))\eta^{2s_0-1} + (1-s_0)\varphi'(s_0), \\ P(s_0)Q'(s_0) &= s_0\ln(\eta)\eta^{2s_0-1} + s_0\varphi'(s_0). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\gamma'(s_0) = -\frac{P'(s_0)Q(s_0) - P(s_0)Q'(s_0)}{Q(s_0)^2} = -\frac{\eta^{2s_0-1} + (1-2s_0)\varphi'(s_0)}{\eta^{2s_0}}. \quad \square$$

Unter Ausnutzung der Punktsymmetrie

$$\gamma'(1-s) = -\gamma'(s)$$

können wir nun sofort die Ableitung in einem Punkt vom Typ (b) angeben.

Korollar 7.2.2. *Die Streumatrix φ der Eisensteinreihe habe in s_0 einen Pol. Dann gilt*

$$\gamma'(s_0) = \frac{1}{\eta} + \frac{2s_0-1}{\eta^{2(1-s_0)}} \cdot \varphi'(1-s_0).$$

Bemerkung 7.2.3. Für beliebiges $s \in \mathbb{C}$ liefert der Beweis von Satz 7.2.1 die Darstellung

$$\gamma'(s) = -\frac{\partial_\sigma E_0'(\eta, \sigma)|_{\sigma=s} \cdot E_0(\eta, s) - E_0'(\eta, s) \cdot \partial_\sigma E_0(\eta, \sigma)|_{\sigma=s}}{E_0(\eta, s)^2},$$

wobei für $s = \frac{1}{2}$ oder im Falle eines Pols s von φ auf der rechten Seite die Regel von de l'Hospital angewendet werden muss. Falls $\varphi(s) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt, bietet sich für eine übersichtliche Darstellung dieses Ausdrucks die Verwendung der Notation

$$\tilde{E}_0(\eta, s) = \sqrt{\eta} \cos(\xi(s)) \quad \text{mit} \quad \xi(s) = z(s) \ln(\eta) - \frac{\vartheta(s)}{2}$$

des absoluten Terms an, wobei \tilde{E} normiert ist wie in Lemma 2.1.19.

Satz 7.2.4. *Es sei $U \subset \mathbb{C} \setminus \{\gamma_{\Gamma, n}\}$ ein Gebiet so, dass φ auf $s(U)$ keine Nullstellen und keine Pole besitzt und jeder zu $\gamma \in U$ gehörige Eigenwert $\lambda(\gamma) = s(\gamma) \cdot (1 - s(\gamma))$ mit $s(\gamma) \in \mathcal{S}$ vom Typ (a) ist. Dann ist die Ableitung von γ in $s \in U$ gegeben durch*

$$\gamma'(s) = \frac{-i}{2\eta \cos^2(\xi(s))} \cdot \left(2z(s) \ln(\eta) - z(s) \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} + 2 \sin(\xi(s)) \cos(\xi(s)) \right). \quad (7.3)$$

Beweis. Für jedes $s \in U$ gilt

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \frac{1}{2\eta \cos^2(\xi(s))} \cdot (-2i \sin(\xi(s)) \cos(\xi(s)) + 2z(s)\xi'(s)) \\ &= \frac{-i}{2\eta \cos^2(\xi(s))} \cdot \left(2z(s) \ln(\eta) - z(s) \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} + 2 \sin(\xi(s)) \cos(\xi(s)) \right) \end{aligned}$$

mit

$$\xi'(s) = -i \ln(\eta) - \frac{\vartheta'(s)}{2} = -i \ln(\eta) + \frac{i}{2} \cdot \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}. \quad \square$$

Bemerkung 7.2.5. (i) Zusammen mit Bemerkung 6.2.9 kann man aus der Formel in Satz 7.2.4 auch direkt herleiten, dass $\gamma'(\frac{1}{2}) = 0$.

(ii) Die Funktion ϑ kann nur lokal auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet ohne Nullstellen und Pole von φ definiert werden und ist nicht eindeutig bestimmt. Hingegen ist die logarithmische Ableitung

$$\frac{\varphi'}{\varphi}$$

eine in s meromorphe Funktion auf ganz \mathbb{C} , die nur einfache Pole besitzt, und zwar genau dann, wenn es $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

- (a) s eine n -fache Nullstelle von φ und somit eine $(n - 1)$ -fache Nullstelle von φ' ist, oder
- (b) s ein Pol n -ter Ordnung von φ und daher ein Pol $(n + 1)$ -ter Ordnung von φ' ist.

Daher ist die Funktion $\gamma'(s)$ aus (7.3) als meromorphe Funktion auf \mathbb{C} wohldefiniert. Da bereits gezeigt wurde, dass die einzigen Pole der Abbildung $s \mapsto \gamma(s)$ durch die Nullstellen des absoluten Terms $E_0(y, s)$ bei $y = \eta$ gegeben sind, sind die Pole der logarithmischen Ableitung $\frac{\varphi'}{\varphi}$ hebbare Singularitäten von $\gamma'(s)$. Die holomorphe Fortsetzung von $\gamma'(s)$ in diesen Punkten ist durch die Formeln in Satz 7.2.1 und Korollar 7.2.2 gegeben.

Die Maass-Selberg-Relation liefert eine zweite Darstellung für $\gamma'(s)$.

Satz 7.2.6. Für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt

$$\gamma'(s) = (1 - 2s) \frac{(E^\eta(\cdot, s), E^\eta(\cdot, \bar{s}))_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}}{E_0(\eta, s)^2}.$$

Beweis. Es sei $s_0 \neq \frac{1}{2}$ fixiert. Ohne Einschränkung habe E keinen Pol in s_0 . Für $s \neq s_0$ gilt nach der Maass-Selberg-Relation 2.2.6

$$\begin{aligned} (E^\eta(\cdot, s), E^\eta(\cdot, \bar{s}_0))_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})} &= \frac{E_0(\eta, s)E'_0(\eta, s_0) - E'_0(\eta, s)E_0(\eta, s_0)}{s(1-s) - s_0(1-s_0)} \\ &= -\frac{\gamma(s_0)E_0(\eta, s)E_0(\eta, s_0) - \gamma(s)E_0(\eta, s)E_0(\eta, s_0)}{s(1-s) - s_0(1-s_0)} \\ &= \frac{(\gamma(s) - \gamma(s_0))E_0(\eta, s)E_0(\eta, s_0)}{s(1-s) - s_0(1-s_0)}. \end{aligned}$$

Mit der Regel von de l'Hospital folgt für $s \rightarrow s_0$

$$(E^\eta(\cdot, s_0), E^\eta(\cdot, \bar{s}_0))_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})} = \frac{\gamma'(s_0)E_0(\eta, s_0)^2}{1 - 2s_0}.$$

Das bedeutet

$$\gamma'(s_0) = (1 - 2s_0) \frac{(E^\eta(\cdot, s_0), E^\eta(\cdot, \bar{s}_0))_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}}{E_0(\eta, s_0)^2}.$$

Wenn s_0 ein Pol der Eisensteinreihe ist oder $s_0 = \frac{1}{2}$ gilt, dann folgt die Aussage ebenfalls mit der Regel von de l'Hospital. \square

Anwendung des Satzes über implizite Funktionen erlaubt es, die Ableitung $\lambda'(\gamma)$ der Eigenwerte vom Typ (II) durch Inversion zu bestimmen. Wir formulieren daher das folgende Lemma.

Lemma 7.2.7. Wenn $\gamma'(s) \neq 0$ gilt, dann ist γ lokal invertierbar mit

$$s'(\gamma) = \frac{1}{\gamma'(s)}.$$

In diesem Fall ist die Ableitung des zugehörigen Eigenwertes $\lambda(\gamma)$ gegeben durch

$$\lambda'(\gamma) = s'(\gamma) \cdot (1 - 2s(\gamma)). \quad (7.4)$$

Mit Satz 7.2.6 erhalten wir für $\lambda'(\gamma)$ die folgende Formel.

Satz 7.2.8. Falls $\gamma'(s) \neq 0$ gilt, dann ist $\lambda'(\gamma)$ gegeben durch

$$\lambda'(\gamma) = \frac{E_0(\eta, s)^2}{(E^\eta(\cdot, s), E^\eta(\cdot, \bar{s}))_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}}.$$

Korollar 7.2.9. Zu $\mu_j \in \sigma_2(\Delta_\infty)$ sei eine Umgebung W_j von ∞ und eine Funktion $\lambda : W_j \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma \mapsto \lambda(\gamma)$, mit $\lambda(\infty) = \mu_j$ gegeben wie in Satz 7.1.9. Dann gilt

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \lambda'(\gamma) = 0.$$

Beweis. Da die Funktion λ stetig in γ ist, muss die zugehörige Eigenfunktion $v[\gamma]$ für $\gamma \rightarrow \infty$ gegen eine Eigenfunktion $v[\infty]$ von Δ_∞ mit

$$v_0[\infty](\eta) = 0$$

konvergieren. Nach Satz 7.2.8 folgt hieraus

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \lambda'(\gamma) = 0. \quad \square$$

Bemerkung 7.2.10. Es gilt genau dann $\gamma'(s) = 0$, wenn

(i) $s = \frac{1}{2}$,

(ii) $(E(\cdot, s), E(\cdot, \bar{s}))_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})} = 0$, falls φ in s keinen Pol besitzt, oder

(iii) $(E(\cdot, 1-s), E(\cdot, 1-\bar{s}))_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})} = 0$, falls s ein Pol von φ ist.

Falls $\gamma'(s) = 0$ und $s \neq \frac{1}{2}$ gilt, dann besitzt

$$\lambda'(\gamma) = s'(\gamma) \cdot (1 - 2s(\gamma))$$

eine nicht hebbare isolierte Singularität.

Nach dem Satz über implizite Funktionen gilt genau dann $\gamma'(s_0) = 0$, wenn $\gamma(s)$ in keiner Umgebung von s_0 invertierbar ist. In Bemerkung 6.2.6 wurde bereits festgehalten, dass die Abbildung $s \mapsto \gamma(s)$ surjektiv, aber nicht injektiv ist. Für die Differenzierbarkeit ist nur die lokale Injektivität von Interesse. Wenn γ in keiner Umgebung eines Punktes s_0 injektiv ist, dann muss $\lambda_0 = s_0(1-s_0)$ ein Eigenwert von Δ_{γ_0} , $\gamma_0 = \gamma(s_0)$, mit algebraischer Vielfachheit ≥ 2 sein. Das bedeutet, γ_0 ist ein exzeptioneller Punkt.

Satz 7.2.11. *Es sei $s_0 = \frac{1}{2}$. In $\gamma_{\Gamma, \eta} = \gamma(s_0)$ besitzt die Funktion*

$$\lambda'(\gamma) = s'(\gamma) \cdot (1 - 2s(\gamma))$$

aus Gleichung (7.4) eine hebbare Singularität.

Beweis. Wegen $s_0 = \bar{s}_0$ gilt

$$\lambda'(\gamma_{\Gamma, \eta}) = \frac{1 - 2s_0}{-(1 - 2s_0)} \cdot \frac{E_0(\eta, s_0)^2}{\|E^\eta(\cdot, s_0)\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2} = -\frac{E_0(\eta, s_0)^2}{\|E^\eta(\cdot, s_0)\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2}.$$

Falls $\varphi(s_0) = 1$, ist die Behauptung bewiesen. Falls $\varphi(s_0) = -1$, erhalten wir durch zweifache Anwendung der Regel von de l'Hospital

$$\lambda'(\gamma_{\Gamma, \eta}) = -\frac{2E_0(\eta, s_0)\partial_s E_0(\eta, s)|_{s=s_0}}{2(E^\eta(\cdot, s_0), \partial_s E^\eta(\cdot, s)|_{s=s_0})_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}} = -\frac{(\partial_s E_0(\eta, s)|_{s=s_0})^2}{\|\partial_s E^\eta(\cdot, s)|_{s=s_0}\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2}. \quad \square$$

Zusammenfassung der Ergebnisse des Abschnitts liefert nun das folgende Kriterium für das Auftreten von algebraischen Singularitäten bei einem Eigenwert $\lambda(\gamma)$ von Δ_γ .

Theorem 7.2.12. *Es sei $s_0 \in \mathbb{C}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) *Es gilt $\gamma'(s_0) \neq 0$ oder $\gamma(s_0) \in \hat{\mathbb{R}}$.*
- (ii) *Die Funktion $\gamma(s)$ ist in einer Umgebung U von s_0 invertierbar, und die Inverse $s(\gamma)$ ist auf $V := \gamma(U)$ holomorph.*
- (iii) *Es gibt eine Umgebung U von s_0 , sodass für die zu $s \in U$ gehörigen trunkierten Eisensteinreihen $E^\eta(\cdot, s)$ und $E^\eta(\cdot, 1-s)$ gilt*

$$(E^\eta(\cdot, \sigma), E^\eta(\cdot, \bar{\sigma}))_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})} \neq 0, \quad \sigma \in \{s, 1-s\}.$$

- (iv) *Es gibt eine Umgebung V von $\gamma_0 := \gamma(s_0)$, sodass durch $\lambda(\gamma) = s(\gamma) \cdot (1-s(\gamma))$ eine auf V holomorphe Funktion gegeben wird.*
- (v) *Der Punkt $\gamma_0 := \gamma(s_0)$ ist kein Verzweigungspunkt des Eigenwerts $\lambda(\gamma)$ von Δ_γ .*

Bemerkung 7.2.13. (i) Alle $\gamma \in \hat{\mathbb{R}}$, für die es einen Eigenwert ν_n vom Typ (I) gibt mit

$$\nu_n \in \sigma_1(\Delta_\gamma) \cap \sigma_2(\Delta_\gamma),$$

sind exzeptionelle Punkte der Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \hat{\mathbb{C}}}$, aber keine Verzweigungspunkte.

- (ii) Durch Beispiel 6.3.6 wurde ein Zusammenhang zwischen der holomorphen Fortsetzbarkeit der Norm $\|u_n[\gamma]\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}$ auf eine komplexe Umgebung U_n von \mathbb{R} und dem Verschwinden des Skalarproduktes $(E^\eta(\cdot, s), E^\eta(\cdot, \bar{s}))_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}$ impliziert (s. Bemerkung 6.3.7). Dies stimmt mit dem Kriterium in Theorem 7.2.12 (iii) überein.

Insbesondere ist nun der Beweis der Holomorphie von $\gamma \mapsto u[\gamma]$ aus Beispiel 6.3.6 (ii) vervollständigt.

- (iii) Satz 6.2.1 (iii) legt die Vermutung nahe, dass die Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{C}}$ echt komplexe Verzweigungspunkte besitzt.

7.3 Ableitung der Eigenwerte einer holomorphen Familie vom Typ (B)

Wir betrachten ab nun die reellen Eigenwertfunktionen λ_n aus Bezeichnung 7.1.8 sowie ihre Ausdehnungen nach $\hat{\mathbb{R}}$. In Satz 7.2.8 haben wir bereits die Ableitung $\lambda'(\gamma)$ für jeden einzelnen Eigenwert und alle $\gamma \in \mathbb{C}$ bestimmt.

Wir geben nun einen zweiten Beweis für die Ableitung der Funktionen λ_n und $\gamma \in \mathbb{R}$, indem wir eine allgemeine Formel für die Ableitung der Eigenwerte einer selbstadjungierten holomorphen Familie $(T_x)_{x \in U}$ vom Typ (B) herleiten. Hierzu bestimmen wir unter Ausnutzung der Eigenwertgleichung

$$T_x f[x] = \lambda(x) f[x]$$

die Taylor-Entwicklung des Rayleigh-Quotienten

$$\lambda(x) = \frac{(T_x f[x], f[x])}{(f[x], f[x])}$$

in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Dieses Vorgehen erinnert an das Verfahren in Kapitel 3, hat jedoch den Vorteil, dass es ohne die Konstruktion einer Approximationsfunktion auskommt.

Ferner können wir bei einer holomorphen Familie vom Typ (B) die Tatsache ausnutzen, dass der Definitionsbereich \mathfrak{D} der Form \mathfrak{t}_x nicht von x abhängt und die Form \mathfrak{t}_x eine Taylorentwicklung

$$\mathfrak{t}_x(u, v) = \mathfrak{t}^{(0)}(u, v) + (x - x_0) \mathfrak{t}^{(1)}(u, v) + \frac{(x - x_0)^2}{2} \mathfrak{t}^{(2)}(u, v) + \dots, \quad u, v \in \mathfrak{D}, \quad (7.5)$$

besitzt, die unabhängig von x für alle $u, v \in \mathfrak{D}$ konvergiert. Hierdurch können wir die Taylorentwicklungen von \mathfrak{t} , f und eines Eigenwerts ν mit dem Skalarprodukt „vertauschen“, was bei dem Verfahren in Kapitel 3 nicht möglich ist (s. Beispiel 3.3.4).

Wir bestimmen im folgenden Satz die ersten zwei Koeffizienten der Taylorentwicklung.

Satz 7.3.1. *Es sei $(T_x)_{x \in U}$ eine selbstadjungierte holomorphe Familie von Operatoren des Typs (B) mit kompakter Resolvente in einem Hilbertraum H , und es sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Die zu T_x gehörige Form \mathfrak{t}_x habe in x_0 die Taylorentwicklung*

$$\mathfrak{t}_x = \mathfrak{t}^{(0)} + \varepsilon \mathfrak{t}^{(1)} + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathfrak{t}^{(2)} + \dots$$

wie in (4.6), wobei $\varepsilon = x - x_0$ sei. Ferner sei $f[x]$ eine Eigenfunktion von T_x zum Eigenwert $\nu(x)$ und

$$\begin{aligned} f[x] &= f_0 + \varepsilon f_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} f_2 + \dots, \\ \nu(x) &= \nu_0 + \varepsilon \nu_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \nu_2 + \dots \end{aligned}$$

die Taylorentwicklung von $f[x]$ beziehungsweise $\nu(x)$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, welche nach Theorem 4.3.19 existieren. Dann sind die ersten beiden Ableitungen von ν in x_0 gegeben durch

$$\nu'(x_0) = \frac{\mathfrak{t}^{(1)}(f_0, f_0)}{(f_0, f_0)}$$

und

$$\nu''(x_0) = \frac{\mathfrak{t}^{(2)}(f_0, f_0)}{(f_0, f_0)} + 2 \frac{\mathfrak{t}^{(1)}(f_0, f_1) + \mathfrak{t}^{(1)}(f_1, f_0)}{(f_0, f_0)} - 4\nu'(x_0) \cdot \frac{\operatorname{Re}(f_0, f_1)}{(f_0, f_0)}.$$

Hierbei bezeichnet $(\cdot, -)$ das Skalarprodukt auf H .

Beweis. Es sei $x \in U \cap \mathbb{R}$. Da f die Eigenwertgleichung $T_x f[x] = \nu(x) f[x]$ erfüllt, ist ν durch den Quotienten

$$\nu(x) = \frac{(T_x f[x], f[x])}{(f[x], f[x])} = \frac{\mathfrak{t}_x(f[x], f[x])}{(f[x], f[x])}$$

bestimmt. Für den Zähler gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_x(f[x], f[x]) &= \mathbf{t}^{(0)}(f_0, f_0) + \varepsilon \cdot \left(\mathbf{t}^{(1)}(f_0, f_0) + \mathbf{t}^{(0)}(f_1, f_0) + \mathbf{t}^{(0)}(f_0, f_1) \right) \\ &\quad + \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{t}^{(2)}(f_0, f_0) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{t}^{(0)}(f_0, f_2) + \mathbf{t}^{(0)}(f_2, f_0) \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{t}^{(1)}(f_0, f_1) + \mathbf{t}^{(1)}(f_1, f_0) + \mathbf{t}^{(0)}(f_1, f_1) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Für den Term im Nenner gilt

$$\begin{aligned} (f[x], f[x]) &= (f_0, f_0) + \varepsilon \cdot ((f_0, f_1) + (f_1, f_0)) \\ &\quad + \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{1}{2} (f_0, f_2) + (f_1, f_1) + \frac{1}{2} (f_2, f_0) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ &= (f_0, f_0) + 2\varepsilon \cdot \operatorname{Re}(f_0, f_1) + \varepsilon^2 \cdot (\operatorname{Re}(f_0, f_2) + (f_1, f_1)) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

wobei $(f_j, f_k) + (f_k, f_j) = (f_j, f_k) + \overline{(f_j, f_k)} = 2 \operatorname{Re}(f_j, f_k)$ angewendet wurde. Mit

$$\frac{1}{a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \varepsilon + \left(\frac{b^2}{a^3} - \frac{c}{a^2} \right) \cdot \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{(f[x], f[x])} &= \frac{1}{(f_0, f_0)} - 2\varepsilon \cdot \frac{\operatorname{Re}(f_0, f_1)}{(f_0, f_0)^2} \\ &\quad + \varepsilon^2 \cdot \left(4 \cdot \frac{(\operatorname{Re}(f_0, f_1))^2}{(f_0, f_0)^3} - \frac{\operatorname{Re}(f_0, f_2) + (f_1, f_1)}{(f_0, f_0)^2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Nun liefert Multiplikation

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{t}_x(f[x], f[x])}{(f[x], f[x])} &= \frac{\mathbf{t}^{(0)}(f_0, f_0)}{(f_0, f_0)} + \varepsilon \cdot \left(\frac{\mathbf{t}^{(1)}(f_0, f_0) + \mathbf{t}^{(0)}(f_1, f_0) + \mathbf{t}^{(0)}(f_0, f_1)}{(f_0, f_0)} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\mathbf{t}^{(0)}(f_0, f_0) \cdot \operatorname{Re}(f_0, f_1)}{(f_0, f_0)^2} \right) \\ &\quad + \varepsilon^2 \cdot \left(\mathbf{t}^{(0)}(f_0, f_0) \cdot \left(4 \cdot \frac{(\operatorname{Re}(f_0, f_1))^2}{(f_0, f_0)^3} - \frac{\operatorname{Re}(f_0, f_2) + (f_1, f_1)}{(f_0, f_0)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\operatorname{Re}(f_0, f_1)}{(f_0, f_0)^2} \cdot \left(\mathbf{t}^{(1)}(f_0, f_0) + \mathbf{t}^{(0)}(f_1, f_0) + \mathbf{t}^{(0)}(f_0, f_1) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{t}^{(2)}(f_0, f_0)}{2(f_0, f_0)} + \frac{\mathbf{t}^{(0)}(f_0, f_2) + \mathbf{t}^{(0)}(f_2, f_0)}{2(f_0, f_0)} + \frac{\mathbf{t}^{(0)}(f_1, f_1)}{(f_0, f_0)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{t}^{(1)}(f_0, f_1) + \mathbf{t}^{(1)}(f_1, f_0)}{(f_0, f_0)} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7.6) \end{aligned}$$

Da f_0 ein Eigenvektor von $T^{(0)}$ zum Eigenwert ν_0 ist und $\mathbf{t}^{(0)} = \mathbf{t}_{x_0}$ symmetrisch ist, lässt sich der Koeffizient vor ε vereinfachen zu

$$\frac{\mathbf{t}^{(1)}(f_0, f_0)}{(f_0, f_0)} + 2\nu_0 \frac{\operatorname{Re}(f_0, f_1)}{(f_0, f_0)} - 2\nu_0 \frac{\operatorname{Re}(f_0, f_1)}{(f_0, f_0)} = \frac{\mathbf{t}^{(1)}(f_0, f_0)}{(f_0, f_0)}.$$

Durch Koeffizientenvergleich der Taylorentwicklung von $\nu(x)$ in x_0 mit (7.6) folgt

$$\nu'(x_0) = \nu_1 = \frac{\mathfrak{t}^{(1)}(f_0, f_0)}{(f_0, f_0)}.$$

Analog liefert Koeffizientenvergleich für den quadratischen Anteil

$$\begin{aligned} \frac{\nu''(x_0)}{2} &= 4\nu_0 \frac{(\operatorname{Re}(f_0, f_1))^2}{(f_0, f_0)^2} - \nu_0 \frac{\operatorname{Re}(f_0, f_2) + (f_1, f_1)}{(f_0, f_0)} - 2 \frac{\mathfrak{t}^{(1)}(f_0, f_0) \cdot \operatorname{Re}(f_0, f_1)}{(f_0, f_0)^2} \\ &\quad - 4\nu_0 \frac{(\operatorname{Re}(f_0, f_1))^2}{(f_0, f_0)^2} + \frac{\mathfrak{t}^{(2)}(f_0, f_0)}{2(f_0, f_0)} \\ &\quad + \nu_0 \frac{\operatorname{Re}(f_0, f_2) + (f_1, f_1)}{(f_0, f_0)} + \frac{\mathfrak{t}^{(1)}(f_0, f_1) + \mathfrak{t}^{(1)}(f_1, f_0)}{(f_0, f_0)} \\ &= \frac{\mathfrak{t}^{(2)}(f_0, f_0)}{2(f_0, f_0)} + \frac{\mathfrak{t}^{(1)}(f_0, f_1) + \mathfrak{t}^{(1)}(f_1, f_0)}{(f_0, f_0)} - 2\nu'(x_0) \cdot \frac{\operatorname{Re}(f_0, f_1)}{(f_0, f_0)}. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 7.3.2. Satz 7.3.1 gilt auch, wenn man statt eines Operators vom Typ (B) einen Operator vom Typ (A) betrachtet, und $\mathfrak{t}^{(j)}(f_k, f_l)$, $j, k, l \in \mathbb{N}_0$, durch $(T^{(j)} f_k, f_l)$ ersetzt, wobei die Operatoren $T^{(j)}$ durch die Taylorentwicklung von T wie in (4.5) bestimmt sind.

Der Robin-Pseudo-Laplace-Operator Δ_γ ist affin-linear in γ mit

$$\mathfrak{t}^{(0)}(u, v) = (u, v)'_{A_1}, \quad \mathfrak{t}^{(1)}(u, v) = u_0(\eta) \cdot \bar{v}_0(\eta) \quad \text{und} \quad \mathfrak{t}^{(n)}(u, v) = 0 \text{ für } n \geq 2.$$

Für die Ableitung der Eigenwertfunktionen λ_n liefert Satz 7.3.1 daher das folgende Ergebnis.

Satz 7.3.3. *Es sei $\gamma \in \mathbb{R}$ und $(\lambda_n(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$ die aufsteigende Folge der Eigenwerte des Typs (II) von Δ_γ mit zugehörigen (nicht notwendig normierten) Eigenfunktionen $(v_n[\gamma])_{n \in \mathbb{N}}$ wie in Theorem 6.3.1. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$*

$$\lambda'_n(\gamma) = \frac{|v_{n,0}[\gamma](\eta)|^2}{\|v_n[\gamma]\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2}.$$

Bemerkung 7.3.4. (i) Die Ableitung $\lambda'_n(\gamma)$ für $\gamma \in \mathbb{R}$ kann auch mit dem Verfahren aus Kapitel 3 unter Benutzung des Minimum-Maximum-Prinzips berechnet werden. Hierzu wird wie in Abschnitt 3.2 ein C^∞ -Diffeomorphismus ψ_γ konstruiert, sodass für γ in einer reellen Umgebung U von $\gamma_0 \in \mathbb{R}$

- (a) $\psi_\gamma(r) = r$ gilt,
- (b) die Funktion $w_n := v_n \circ \psi_\gamma$ die Randbedingung

$$w'_n(\eta) = -\gamma w_n(\eta)$$

erfüllt, wobei v_n die Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda_n(\gamma_0)$ von Δ_{γ_0} sei.

Mit dem Ansatz einer affin-linearen Transformation

$$\psi_\gamma(y) = r + a_\gamma(y - r)$$

impliziert Bedingung (b) wegen $v'_{n,0}(\eta) = -\gamma_0 v_{n,0}(\eta)$, dass

(c) $a_{\gamma_0} = 1$ und

(d) (γ, a_γ) für $\gamma \in U$ die Gleichung $F(\gamma, a) = 0$ löst, wobei F bestimmt ist durch

$$F(\gamma, a) = a \cdot \frac{v'_{n,0}(\psi_\gamma(\eta))}{v_{n,0}(\psi_\gamma(\eta))} + \gamma.$$

Um den Parameter a_γ nach γ zu differenzieren wie im Beweis von Lemma 3.3.9, wird der Satz über implizite Funktionen verwendet.

(ii) Die Ableitung in ∞ kann ebenfalls mit dem Verfahren aus Kapitel 3 und der Transformation aus (i) gezeigt werden, indem das Verfahren für den Operator $S_\gamma = \Delta_{1/\gamma}$ durchgeführt wird. Hierzu geht man wie in (i) beschrieben vor mit $\tilde{\gamma} := \frac{1}{\gamma}$ anstelle von γ , und betrachtet den Grenzwert für $\tilde{\gamma} \rightarrow 0$.

7.4 Monotonieverhalten

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ werden durch

$$\tau :]\frac{1}{4}, \infty[\rightarrow]0, \infty[, \quad \lambda \mapsto \sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}$$

und

$$r :]-\infty, \frac{1}{4}[\rightarrow]-\infty, 0[, \quad \lambda \mapsto -\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$$

wie in Bezeichnung 6.1.7 zwei holomorphe Funktionen bestimmt. Wir untersuchen in diesem Abschnitt Monotonieeigenschaften der Eigenwertfunktionen λ_n und der induzierten Funktionen τ_n und r_n , um daraus Aussagen über die Verteilung der Eigenwerte $(\lambda_n(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ der Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \hat{\mathbb{R}}}$ auf der reellen Achse herzuleiten.

Satz 7.4.1. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Eigenwertfunktion $\lambda_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma \mapsto \lambda_n(\gamma)$, streng monoton steigend.*

Beweis. Für $\gamma \in \mathbb{R}$ seien $(\lambda_n(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(v_n[\gamma])_{n \in \mathbb{N}}$ wie in Satz 7.3.3. Dann gilt $\lambda'_n(\gamma) > 0$, falls der absolute Term von $v_n := v_n[\gamma]$ keine Nullstelle in η besitzt. Da v_n die Robin-Randbedingung

$$v'_{n,0}(\eta) = -\gamma v_{n,0}(\eta)$$

erfüllt, impliziert die Annahme $v_{n,0}(\eta) = 0$, dass auch $v'_{n,0}(\eta) = 0$. In Lemma 6.1.14 wurde gezeigt, dass dieser Fall nicht eintreten kann. \square

Bezeichnung 7.4.2. Wie in Bemerkung 6.2.9 (iii) sei $\gamma_{\Gamma,\eta} = \gamma(\frac{1}{2})$ dasjenige $\gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ mit

$$\frac{1}{4} \in \sigma_2(\Delta_{\gamma_{\Gamma,\eta}}).$$

Falls $\gamma_{\Gamma,\eta} \in \mathbb{R}$ gilt, sei $M \in \mathbb{N}$ dadurch bestimmt, dass

$$\lambda_M(\gamma_{\Gamma,\eta}) = \frac{1}{4}$$

ein Eigenwert vom Typ (II) des Operators $\Delta_{\gamma_{\Gamma,n}}$ ist. Im Fall $\gamma_{\Gamma,n} = \infty$ sei M bestimmt durch

$$\lim_{\gamma \searrow -\infty} \lambda_M(\gamma) = \frac{1}{4}.$$

Bemerkung 7.4.3. Es seien

$$\tau_n(\lambda_n) = \sqrt{\lambda_n - \frac{1}{4}}, \quad \lambda_n > \frac{1}{4},$$

und

$$r_n(\lambda_n) = -\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_n}, \quad \lambda_n < \frac{1}{4},$$

wie in Bezeichnung 6.1.7. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Die Abbildung $\lambda_n \mapsto \tau_n(\lambda_n)$ ist stetig und bijektiv für $\gamma \in \mathbb{R}$. Da aufgrund der Monotonie von $\gamma \mapsto \lambda_n(\gamma)$ die Funktion λ_n auf \mathbb{R} invertierbar ist, folgt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$T_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad \gamma \mapsto \tau_n(\gamma) := \tau \circ \lambda_n(\gamma),$$

stetig und bijektiv ist. Das gleiche gilt für die Abbildung

$$R_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{<0}, \quad \gamma \mapsto r_n(\gamma) := r \circ \lambda_n(\gamma).$$

- (ii) Die Abbildungen T_M und R_M sind nicht differenzierbar in $\gamma_{\Gamma,\eta}$.

Lemma 7.4.4. *Es sei $\eta > p_{\Gamma}$. Falls $(\gamma, n) \neq (\gamma_{\Gamma,\eta}, M)$, sind die Funktionen T_n und R_n differenzierbar in γ mit*

$$T'_n(\gamma) = \frac{|v_{n,0}[\gamma](\eta)|^2}{2\tau_n(\gamma) \cdot \|v_n[\gamma]\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2}$$

und

$$R'_n(\gamma) = -\frac{|v_{n,0}[\gamma](\eta)|^2}{2r_n(\gamma) \cdot \|v_n[\gamma]\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt durch Anwendung der Kettenregel auf $\lambda_n(\gamma) = \tau_n^2(\gamma) + \frac{1}{4}$ beziehungsweise $\lambda_n(\gamma) = \frac{1}{4} - r_n^2(\gamma)$. \square

Korollar 7.4.5. (i) *Wenn $\lambda_n(\gamma) > \frac{1}{4}$ für alle $\gamma \in \mathbb{R}$ gilt, dann ist die Abbildung*

$$T_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad \gamma \mapsto \tau_n(\gamma),$$

streng monoton steigend und invertierbar mit

$$\gamma'(\tau_n) = \frac{2\tau_n(\gamma) \cdot \|v_n[\gamma]\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2}{|v_{n,0}[\gamma](\eta)|^2}.$$

- (ii) *Gilt analog $\lambda_n(\gamma) < \frac{1}{4}$ für alle $\gamma \in \mathbb{R}$, dann ist die Abbildung*

$$R_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{<0}, \quad \gamma \mapsto r_n(\gamma),$$

ebenfalls streng monoton steigend und invertierbar mit

$$\gamma'(r_n) = -\frac{2r_n(\gamma) \cdot \|v_n[\gamma]\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2}{|v_{n,0}[\gamma](\eta)|^2}.$$

(iii) Im Fall $n = M$ und $\gamma_{\Gamma, \eta} \in \mathbb{R}$ ist die Funktion T_n streng monoton steigend auf dem Intervall $] \gamma_{\Gamma, \eta}, \infty[$, die Funktion R_n ist streng monoton steigend auf $] - \infty, \gamma_{\Gamma, \eta}[$, und die Umkehrregel für die Ableitung gilt auf den jeweiligen Teilintervallen.

(iv) Falls $\gamma_{\Gamma, \eta} \in \mathbb{R}$, tritt für $n > M$ der Fall (i) ein, und für $n < M$ der Fall (ii). Falls $\gamma_{\Gamma, \eta} = \infty$, gilt $\lambda_M(\gamma) > \frac{1}{4}$ für alle $\gamma \in \mathbb{R}$. Daher liegt Fall (i) vor.

Beweis. Die Teile (i) und (ii) erhält man durch Anwendung der Umkehrregel auf τ_n und r_n . Die Teile (iii) und (iv) folgen daraus, dass jedes λ_n streng monoton steigend in γ ist und die Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aufsteigend angeordnet ist. \square

Bezeichnung 7.4.6. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\begin{aligned} J_n^+ &:= T_n(\mathbb{R}), & n > M, \\ J_n^- &:= R_n(\mathbb{R}), & n < M. \end{aligned}$$

Ferner seien

$$J_M^+ := T_n(] \gamma_{\Gamma, \eta}, \infty[), \quad J_M^- := R_n(] - \infty, \gamma_{\Gamma, \eta}[), \quad \text{falls } \gamma_{\Gamma, \eta} \in \mathbb{R},$$

und

$$J_M^+ := T_M(\mathbb{R}), \quad \text{falls } \gamma_{\Gamma, \eta} = \infty.$$

Dann sind alle $J_n^\pm \subseteq \mathbb{R}^\pm$ offene Intervalle, und die Abbildungen

$$G_n^+ : J_n^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau_n \mapsto \gamma(\tau_n),$$

und

$$G_n^- : J_n^- \rightarrow \mathbb{R}, \quad r_n \mapsto \gamma(r_n),$$

sind streng monoton steigend.

Notation 7.4.7. Falls $\gamma_{\Gamma, \eta} = \infty$, schreiben wir

$$k^- = M - 1$$

für das größte $n \in \mathbb{N}$, für welches $J_n^- \subseteq \mathbb{R}$ aus Bezeichnung 7.4.6 definiert worden ist, und analog

$$k^+ = M$$

für das kleinste $n \in \mathbb{N}$, für welches $J_n^+ \subseteq \mathbb{R}$ definiert worden ist. Falls $\gamma_{\Gamma, \eta} \in \mathbb{R}$, dann sind die analog definierten Indizes k^\pm gegeben durch

$$k^- = M \quad \text{und} \quad k^+ = M.$$

Lemma 7.4.8. Es sei $J_n^+ =]a_n, b_n[$, $n \geq k^+$, und $J_n^- =]c_n, d_n[$, $n \leq k^-$. Dann gilt $b_n = a_{n+1}$ für alle $n \geq k^+$, und $d_n = c_{n+1}$ für alle $n < k^-$.

Beweis. Nach Satz 6.2.1 gilt

$$\lambda_n(\gamma_1) > \lambda_m(\gamma_2)$$

für beliebige $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ und $n > m \in \mathbb{N}$, da die Mengen $\sigma_2(\Delta_{\gamma_1})$ und $\sigma_2(\Delta_{\gamma_2})$ disjunkt sind und die Eigenwertfolge $(\lambda_n(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ aufsteigend angeordnet ist. Aus der Monotonie der Folgen $(\tau_n)_n$ und $(r_n)_n$ folgt

$$b_n \leq a_{n+1}, \quad n \geq k^+, \quad \text{und} \quad d_n \leq c_{n+1}, \quad n < k^-.$$

Es sei nun angenommen, dass es $\tau_0 \in]b_n, a_{n+1}[$ gebe. Dann ist die zu $s_0 = \frac{1}{2} + i\tau_0$ gehörige Eisensteinreihe eine Eigenfunktion für ein $\gamma_0 := \gamma(\tau_0) \in \hat{\mathbb{R}}$. Wenn $\gamma_0 \in \mathbb{R}$, folgt daraus

$$\tau_n(\gamma_0) < \tau_0 < \tau_{n+1}(\gamma_0)$$

im Widerspruch dazu, dass $\tau_n(\gamma_0)$ und $\tau_{n+1}(\gamma_0)$ zu aufeinanderfolgenden Eigenwerten von Δ_γ gehören.

Wenn $\gamma_0 = \infty$ ist, dann ist $\lambda_0 = \frac{1}{4} + \tau_0^2$ ein Eigenwert von Δ_∞ . Da Δ_∞ nur isolierte Eigenwerte hat, existiert somit ein $\tilde{\tau}_0 \neq \tau_0 \in]b_n, a_{n+1}[$, sodass $\tilde{\tau}_0$ zu einem Eigenwert von Δ_γ für $\gamma \in \mathbb{R}$ gehört.

Ein analoges Argument für r_n liefert $d_n = c_{n+1}$. □

Lemma 7.4.9. *Mit möglicher Ausnahme von J_1^- ist der Abschluss von allen J_n^\pm kompakt.*

Beweis. Die Intervalle $J_{k^+}^+, J_{k^++1}^+, \dots$ bilden eine unendliche Kette von Intervallen in $\mathbb{R}_{>0}$ mit $b_n \leq a_{n+1}$. Also sind alle J_n^+ aus Bezeichnung 7.4.6 sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt.

Analog sind die Intervalle $J_1^-, J_2^-, \dots, J_{k^-}^-$ eine endliche Kette in $\mathbb{R}_{<0}$ mit $d_n \leq c_{n+1}$. Also sind alle J_n^- nach oben beschränkt, und für $n \geq 2$ ist J_n^- auch nach unten beschränkt. □

Bezeichnung 7.4.10. Wir schreiben

$$\tau_n^+ = b_n = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \tau_n(\gamma), \quad n \geq k^+, \quad \tau_n^- = a_n = \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \tau_n(\gamma), \quad n > k^+,$$

und

$$r_n^+ = d_n = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} r_n(\gamma), \quad n < k^-, \quad r_n^- = c_n = \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} r_n(\gamma), \quad n \leq k^-,$$

für die Grenzen der Intervalle J_n^\pm . Im Fall $\gamma_{\Gamma, \eta} = \infty$ setzen wir zusätzlich

$$\tau_M^- = \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \tau_M(\gamma) \quad \text{und} \quad r_{M-1}^+ = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} r_{M-1}(\gamma).$$

Satz 7.4.11. *Es gelten die Bezeichnungen aus 7.4.10. Dann sind für alle $n \geq 2$, für die τ_n^\pm und r_n^\pm jeweils definiert worden sind, die Zahlen*

$$\lambda_n^\pm := \frac{1}{4} + (\tau_n^\pm)^2 \quad \text{und} \quad \lambda_n^\pm := \frac{1}{4} - (r_n^\pm)^2$$

Eigenwerte des Pseudo-Laplace-Operators Δ_∞ zum Parameter η .

Beweis. Da φ auf \mathbb{C} meromorph ist und also nur isolierte Pole hat, ist die Menge derjenigen γ , die einen Eigenwert vom Typ (b) oder (c) haben, ebenfalls diskret. Ferner kann für $\gamma \rightarrow \pm\infty$ die Eigenwertfunktion $\lambda_n(\gamma)$ nicht gegen einen Eigenwert vom Typ (b) oder (c) konvergieren, da in diesem Fall das durch

$$\gamma = \frac{-s}{\eta} \quad \text{oder} \quad \gamma = \frac{s-1}{\eta}$$

bestimmte $s(\gamma)$ nach unendlich divergieren würde. Es kann daher ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass alle Eigenwerte vom Typ (a) sind. Dann lässt sich aus der Darstellung

$$\gamma(s) = \frac{2z(s) \tan(\xi(z(s))) - 1}{2\eta}$$

mit $s = \frac{1}{2} + iz(s)$ wie in Bezeichnung 6.1.7 folgern, dass für $\gamma \rightarrow \pm\infty$ mindestens einer der Faktoren $|z(\gamma)|$ oder $|\tan(\xi(z(\gamma)))|$ gegen ∞ divergieren muss. Für $\gamma \in \mathbb{R}$ ist hierbei $z(s) = \tau(s)$ oder $z(s) = ir(s)$.

Der Fall $|\tan(\xi(\tau(\gamma)))| \rightarrow \infty$ und $\lim_{\gamma \rightarrow \pm\infty} |\tau(\gamma)| < \infty$ ist äquivalent dazu, dass $\tan(x)$ einen Pol in $\xi(z^\pm)$ hat, wobei

$$z^\pm = \tau_n^\pm = \lim_{\gamma \rightarrow \pm\infty} \tau_n(\gamma)$$

entweder die Grenzen des Intervalls J_n^+ bezeichnen, oder

$$z^\pm = ir_n^\pm, \quad r_n^\pm = \lim_{\gamma \rightarrow \pm\infty} r_n(\gamma),$$

durch die Grenzen r_n^\pm des Intervalls J_n^- bestimmt sind. Dann sind die Werte $\xi(z^\pm)$ Nullstellen des Cosinus und

$$\lambda^\pm := \frac{1}{4} + (z^\pm)^2 \in \mathbb{R}$$

ein Eigenwert von Δ_∞ , sofern $z^\pm \neq \infty$. Aus Lemma 7.4.9 folgt andererseits, dass alle Intervallgrenzen τ_n^\pm und r_n^\pm mit eventueller Ausnahme von r_1^- in \mathbb{R} liegen. \square

Lemma 7.4.12. *Es gilt $r_1^- = -\infty$.*

Beweis. Angenommen, es sei $r_1^- =: r_0 \in \mathbb{R}$. Da der Operator Δ_γ für $\gamma \geq 0$ keine negativen Eigenwerte hat, und der Fall

$$\lambda = \frac{1}{4} - r^2 < 0$$

genau dann eintritt, wenn $r < -\frac{1}{2}$ gilt, folgt $J_n^- \subseteq]-\frac{1}{2}, 0[$ für alle $2 \leq n \leq k^-$. Dies impliziert, dass auch $r_0 < -\frac{1}{2}$ gelten muss.

Dann folgt mit dem Argument aus dem Beweis von Satz 7.4.11, dass $\lambda_0 = \frac{1}{4} - r_0^2 < 0$ ein Eigenwert von Δ_∞ ist im Widerspruch dazu, dass Δ_∞ keine negativen Eigenwerte hat. \square

Korollar 7.4.13. *Es gilt*

$$\bigcup_{n=1}^{k^-} \bar{J}_n^- = \mathbb{R}_{\leq 0} \quad \text{und} \quad \bigcup_{n=k^+}^{\infty} \bar{J}_n^+ = \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnitts in dem folgenden Theorem zusammen.

Theorem 7.4.14. *Es seien $\mu_1 < \mu_2 < \dots$ die Eigenwerte des Typs (II) von Δ_∞ , und für $\gamma \in \mathbb{R}$ seien $\lambda_1(\gamma) < \lambda_2(\gamma) < \dots$ die Eigenwerte des Typs (II) von Δ_γ . Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Bildmenge

$$L_n := \lambda_n(\mathbb{R})$$

ein offenes Intervall in \mathbb{R} mit $L_n \cap L_k = \emptyset$ für $n \neq k$, für alle $n \geq 2$ ist der Abschluss \bar{L}_n kompakt, und es gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}_n = \mathbb{R}.$$

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu_n = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \lambda_n(\gamma) \quad \text{und} \quad \mu_n = \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \lambda_{n+1}(\gamma).$$

(iii) Für $n > k^+$ sei $\tau_{D,n} > 0$ durch $\mu_n = \frac{1}{4} + \tau_{D,n}^2$ bestimmt. Dann gilt

$$\tau_n^+ = \tau_{D,n} = \tau_{n+1}^-.$$

(iv) Für $n < k^-$ und $r_{D,n} < 0$ mit $\mu_n = \frac{1}{4} - r_{D,n}^2$ gilt

$$r_n^+ = r_{D,n} = r_{n+1}^-.$$

(v) Im Fall $\gamma_{\Gamma,\eta} = \infty$, $k^+ = M$ und $k^- = M - 1$ gilt zusätzlich

$$\tau_M^- = r_{M-1}^+ = 0.$$

Bemerkung 7.4.15. Falls $\gamma_{\Gamma,\eta} \in \mathbb{R}$, gilt für das zugehörige $\mu_N(\eta)$ aus Theorem 2.5.8 entweder

$$\mu_N(\eta) < \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad N = M - 1$$

oder

$$\mu_N(\eta) > \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad N = M.$$

Im Fall $\gamma_{\Gamma,\eta} = \infty$ und $\mu_N(\eta) = \frac{1}{4}$ gilt ebenfalls $N = M$.

In den folgenden beiden Abschnitten leiten wir aus den Ergebnissen weitere Implikationen für die Eigenwerte oberhalb und unterhalb von $\frac{1}{4}$ ab.

7.5 Eigenwerte im Intervall $]1/4, \infty[$

Wie bereits in Korollar 3.3.12 können wir nun aus Satz 7.3.3 die Ableitung der Funktion

$$\vartheta(\tau) = -i \log(\varphi(\frac{1}{2} + i\tau))$$

auf der kritischen Gerade \mathcal{G} bestimmen und hierdurch die Maass-Selberg-Relation herleiten.

Satz 7.5.1. Für $s = \frac{1}{2} + i\tau$ mit $\tau > 0$ gilt

$$\vartheta'(\tau) = 2 \ln(\eta) - \|E^\eta(\cdot, s)\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2 + \frac{2 \sin(\xi(\tau)) \cos(\xi(\tau))}{\tau}.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass $\tau = \tau_n(\gamma) > 0$ zu einem Eigenwert $\lambda_n(\gamma) > \frac{1}{4}$ vom Typ (a) von Δ_γ für $\gamma \in \mathbb{R}$ gehört. Dann sind nach Lemma 6.2.7 (a) die Parameter τ , γ und ϑ durch die Gleichung

$$\gamma = \frac{2\tau \tan(\xi(\tau)) - 1}{2\eta}, \quad \xi(\tau) = \tau \ln(\eta) - \frac{\vartheta(\tau)}{2},$$

bestimmt. Diese Gleichung können wir zu

$$1 + 2\eta\gamma = 2\tau \tan(\xi(\tau)) \tag{7.7}$$

umformen und somit wie folgt nach ϑ auflösen:

$$\vartheta(\tau) = 2\tau \ln(\eta) - 2 \arctan\left(\frac{1 + 2\eta\gamma}{2\tau}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Da τ_n lokal biholomorph von γ abhängt, können wir annehmen, dass k in einer Umgebung eines Punktes $\tau_n(\gamma_0)$ konstant ist. Demnach liefert Differenzieren

$$\vartheta'(\tau) = 2 \ln(\eta) - \frac{4(2\tau\eta\gamma'(\tau) - (1 + 2\eta\gamma))}{4\tau^2 + (1 + 2\eta\gamma)^2}.$$

Einsetzen von (7.7) und der Formel für $\gamma'(\tau)$ aus Korollar 7.4.5 liefert

$$\begin{aligned} \vartheta'(\tau) &= 2 \ln(\eta) - 2 \frac{\eta\gamma'(\tau) - \tan(\xi)}{\tau(1 + \tan^2(\xi))} \\ &= 2 \ln(\eta) - 2 \cos^2(\xi) \cdot \left(\frac{\eta \cdot 2\tau \|E^\eta\|^2}{\tau \cdot 4\eta \cos^2(\xi)} - \frac{\tan(\xi)}{\tau} \right) \\ &= 2 \ln(\eta) - \|E^\eta\|^2 + 2 \frac{\sin(\xi) \cos(\xi)}{\tau}. \end{aligned}$$

Grenzwertbildung $\tau_n(\gamma) \rightarrow \tau_n^\pm$ für $\gamma \rightarrow \infty$ liefert die Behauptung für alle $\tau > 0$. □

Bemerkung 7.5.2. Dieselbe Rechnung im obigen Beweis mit der normierten Eisensteinreihe \tilde{E}^η aus Lemma 2.1.19 anstelle von E^η liefert die Formel

$$\vartheta'(\tau) = 2 \ln(\eta) - 4 \|\tilde{E}^\eta(\cdot, s)\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2 + \frac{2 \sin(\xi(\tau)) \cos(\xi(\tau))}{\tau}.$$

Hiernach können wir nun die zweite Ableitung von λ_n mithilfe der Formel

$$\lambda_n''(\gamma_0) = 2 \frac{\mathfrak{t}^{(1)}(v^{(0)}, v^{(1)}) + \mathfrak{t}^{(1)}(v^{(0)}, v^{(1)})}{(v^{(0)}, v^{(0)})} - 4\lambda_n'(\gamma_0) \cdot \frac{\operatorname{Re}(v^{(0)}, v^{(1)})}{(v^{(0)}, v^{(0)})} \quad (7.8)$$

aus Satz 7.3.1 bestimmen. Als Eigenfunktion v verwenden wir hierbei erneut die normierte Eisensteinreihe $\tilde{E}(z, s)$ aus Lemma 2.1.19, um den Vorfaktor $c_0(s)$ bei der Bestimmung der Parameterableitung $\partial_s E(\cdot, s)$ nicht berücksichtigen zu müssen.

Da $\mathfrak{t}^{(1)}$ in unserem Fall nur vom absoluten Term der Eisensteinreihe abhängt, können wir den ersten Summanden aus (7.8) exakt bestimmen. Das Skalarprodukt $(v^{(0)}, v^{(1)})$ können wir nicht berechnen, da $\partial_s E(\cdot, s)$ für $s \neq \frac{1}{2}$ keine verallgemeinerte Eigenfunktion ist (s. Bemerkung 2.5.9 (v)) und wir daher nicht auf die Maass-Selberg-Relation zurückgreifen können.

Satz 7.5.3. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\lambda_n(\gamma) > \frac{1}{4}$ für alle $\gamma \in \mathbb{R}$. Es sei $\tilde{E}(\cdot, s_n(\gamma))$ die zugehörige Eisensteinreihe, normiert wie in Lemma 2.1.19. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \lambda_n''(\gamma_0) = & 4 \frac{\eta^2 \cos^2(\xi(\tau_n(\gamma_0))) \sin(\xi(\tau_n(\gamma_0)))}{\|\tilde{E}^\eta(\cdot, s_n(\gamma_0))\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2} \cdot \left(-2 + \frac{\sin(\xi(\tau_n(\gamma_0))) \cos(\xi(\tau_n(\gamma_0)))}{\tau_n(\gamma_0) \cdot \|\tilde{E}^\eta(\cdot, s_n(\gamma_0))\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2} \right) \\ & - 4 \frac{\eta \cos^2(\xi(\tau_n(\gamma_0))) \cdot \operatorname{Re}(\tilde{E}^\eta(\cdot, s_n(\gamma_0)), \partial_s \tilde{E}^\eta(\cdot, s)|_{s=s_n(\gamma_0)})}{\|\tilde{E}^\eta(\cdot, s_n(\gamma_0))\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2}. \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $\gamma_0 \in \mathbb{R}$. Wir wenden Satz 7.3.1 an auf die Eigenfunktion $v_n[\gamma] = \tilde{E}^\eta(\cdot, s_n(\gamma))$. Der einfacheren Notation halber schreiben wir für den Beweis nur $v[\gamma]$, da n fest ist. Die ersten beiden Koeffizienten der Taylorentwicklung von $v[\gamma]$ nach γ im Punkt γ_0 sind gegeben durch

$$v^{(0)} = \tilde{E}^\eta(\cdot, s_n(\gamma_0)), \quad v^{(1)} = \partial_\gamma \tilde{E}^\eta(\cdot, s_n(\gamma))|_{\gamma=\gamma_0}.$$

Die Kettenregel liefert

$$v^{(1)} = s_n'(\gamma_0) \cdot \partial_s \tilde{E}^\eta(\cdot, s)|_{s=s_n(\gamma_0)},$$

und wegen $s_n(\gamma) = \frac{1}{2} + i\tau_n(\gamma)$ gilt

$$s_n'(\gamma_0) = i \frac{|\tilde{E}_0(\eta, s_n(\gamma_0))|^2}{2\tau_n(\gamma_0) \cdot \|\tilde{E}^\eta(\cdot, s_n(\gamma_0))\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}}.$$

Für den zweiten Faktor des absoluten Terms von $v^{(1)}$ gilt

$$\partial_s \tilde{E}_0(\eta, s) = \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{\eta} \cos(\xi(\tau)) = -\partial_s \xi(\tau) \cdot \sqrt{\eta} \sin(\xi(\tau)).$$

Die Ableitung von ξ nach s kann nach Bemerkung 7.5.2 durch

$$\partial_s \xi(\tau) = -i \left(\ln(\eta) - \frac{\vartheta'(\tau)}{2} \right) = -i \left(2\|\tilde{E}^\eta(\cdot, s)\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2 - \frac{\sin(\xi(\tau)) \cos(\xi(\tau))}{\tau} \right)$$

beschrieben werden. Nun liefert Einsetzen dieser Terme

$$v_0^{(0)}(\eta) \cdot v_0^{(1)}(\eta) = \eta^2 \cos^2(\xi(\tau_n(\gamma_0))) \sin(\xi(\tau_n(\gamma_0))) \cdot \left(-2 + \frac{\sin(\xi(\tau_n(\gamma_0))) \cos(\xi(\tau_n(\gamma_0)))}{\tau_n(\gamma_0) \cdot \|\tilde{E}^\eta(\cdot, s_n(\gamma_0))\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2} \right).$$

Da dieser Term reellwertig ist, gilt

$$\mathfrak{t}^{(1)}(v^{(0)}, v^{(1)}) = \mathfrak{t}^{(1)}(v^{(1)}, v^{(0)}) = v_0^{(0)}(\eta) \cdot v_0^{(1)}(\eta).$$

Wegen $\mathfrak{t}^{(2)}(\cdot, -) = 0$ ist die zweite Ableitung von λ_n nach Satz 7.3.1 somit gegeben durch

$$\begin{aligned} \lambda_n''(\gamma_0) &= 4 \frac{\mathfrak{t}^{(1)}(v^{(0)}, v^{(1)})}{(v^{(0)}, v^{(0)})} - 4\lambda_n'(\gamma_0) \cdot \frac{(v^{(0)}, v^{(1)})}{(v^{(0)}, v^{(0)})} \\ &= 4 \frac{\eta^2 \cos^2(\xi(\tau_n(\gamma_0))) \sin(\xi(\tau_n(\gamma_0)))}{\|\tilde{E}^\eta(\cdot, s_n(\gamma_0))\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2} \cdot \left(-2 + \frac{\sin(\xi(\tau_n(\gamma_0))) \cos(\xi(\tau_n(\gamma_0)))}{\tau_n(\gamma_0) \cdot \|\tilde{E}^\eta(\cdot, s_n(\gamma_0))\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2} \right) \\ &\quad - 4 \frac{\eta \cos^2(\xi(\tau_n(\gamma_0))) \cdot \operatorname{Re}(\tilde{E}^\eta(\cdot, s_n(\gamma_0)), \partial_s \tilde{E}^\eta(\cdot, s)|_{s=s_n(\gamma)})}{\|\tilde{E}^\eta(\cdot, s_n(\gamma_0))\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Die Konvergenz der Eigenwerte $\mu_j(\eta)$ für $\eta \rightarrow \infty$ aus Theorem 2.5.8 zusammen mit Theorem 7.4.14 liefert eine analoge Aussage über die Konvergenz der Eigenwerte $\lambda_n(\gamma)$.

Satz 7.5.4. *Es seien $(\lambda_n(\gamma, \eta))_{n \in \mathbb{N}}$ die Eigenwerte von Δ_γ zum Parameter $\eta > p_\Gamma$. Es sei $N \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Eigenwerte x_k im Intervall $[0, \frac{1}{4}[$ von Δ_Γ wie in Theorem 2.5.8. Dann gibt es für jedes $n > N + 1$ und $\delta > 0$ ein $\eta_0 > p_\Gamma$, sodass für alle $\eta \geq \eta_0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ gilt*

$$|\lambda_n(\gamma, \eta) - \frac{1}{4}| < \delta.$$

Beweis. Es sei $n > N + 1$ fixiert, sodass

$$\frac{1}{4} < \mu_{n-1}(\eta) \leq \lambda_n(\gamma, \eta) \leq \mu_n(\eta)$$

für alle $\gamma \in \mathbb{R}$. Nach Theorem 2.5.8 (ii) konvergieren $\mu_{n-1}(\eta)$ und $\mu_n(\eta)$ für $\eta \rightarrow \infty$ jeweils gegen $\frac{1}{4}$, woraus die Behauptung nach dem Sandwich-Satz folgt. \square

Da unterhalb von $\frac{1}{4}$ nur endlich viele Eigenwerte liegen, folgt aus der Weylschen Asymptotik für den klassischen Pseudo-Laplace-Operator (Theorem 2.5.13), dass auch der Operator Δ_γ für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ die Weylsche Asymptotik erfüllt.

Satz 7.5.5 (Weylsches Gesetz für den Robin-Pseudo-Laplace-Operator). *Es sei*

$$N_\Gamma^\gamma(R) = \#\{|\lambda_n| \leq R \mid \lambda_n \in \sigma(\Delta_\gamma)\}.$$

Dann gilt für jedes $\gamma \in \hat{\mathbb{R}}$

$$N_\Gamma^\gamma(R) \sim R \cdot \frac{\operatorname{vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{4\pi}, \quad R \rightarrow \infty.$$

Das asymptotische Wachstum der Zählfunktion für die Eigenwerte vom Typ (II) hängt mit dem Abstand von je zwei aufeinanderfolgenden Eigenwerten zusammen. Für diesen Abstand können wir eine Integralformel angeben.

Theorem 7.5.6. Für $n > N + 1$ gilt

$$\tau_{D,n} - \tau_{D,n-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau'_n(\gamma) \, d\gamma \quad (7.9)$$

mit

$$\tau'_n(\gamma) = \frac{|E_0(\eta, s_n(\gamma))|^2}{2\tau_n(\gamma) \|E^\eta(\cdot, s_n(\gamma))\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2}.$$

Ferner gilt

$$\mu_n - \mu_{n-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda'_n(\gamma) \, d\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|E_0(\eta, s_n(\gamma))|^2}{\|E^\eta(\cdot, s_n(\gamma))\|_{L^2(X, \mu_{\mathbb{H}})}^2} \, d\gamma. \quad (7.10)$$

Beweis. Nach Theorem 7.4.14 existiert das uneigentliche Integral

$$\tau_{D,n} - \tau_{D,n-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau'_n(\gamma) \, d\gamma$$

für alle $n \geq 2$. Für $n > N + 1$ hat $\tau'_n(\gamma)$ die behauptete Gestalt. Das gleiche Argument liefert die Behauptung für den Abstand $\mu_n - \mu_{n-1}$ der Eigenwerte. \square

Die Konvergenz der Eigenwerte $\mu_n(\eta)$ für $\eta \rightarrow \infty$ (Theorem 2.5.8 und Satz 7.5.4) impliziert ferner, dass für jedes $n > N + 1$ gilt

$$\tau_{D,n}(\eta) - \tau_{D,n-1}(\eta) \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (7.11)$$

Unter Verwendung der Normierung \tilde{E} für die Eisensteinreihe aus Lemma 2.1.19 besitzt der Zähler des Integranden aus (7.9) die Gestalt

$$\eta \cos^2(\xi(\tau_n(\gamma))) = \eta \cos^2\left(\ln(\eta)\tau_n(\gamma) - \frac{\vartheta(\tau_n(\gamma))}{2}\right).$$

Der Nenner ist gegeben durch

$$\tau_n(\gamma) \cdot \frac{\ln(\eta)}{2} - \tau_n(\gamma) \cdot \frac{\vartheta'(\tau_n(\gamma))}{4} + \frac{\sin(\xi(\tau_n(\gamma))) \cos(\xi(\tau_n(\gamma)))}{2}.$$

Die Konvergenz in Gleichung (7.11) impliziert demnach einen Wachstumszusammenhang zwischen τ_n und η .

Ferner muss die Konvergenz des Integrals (7.9) durch den Zähler erzwungen werden, da der Nenner des Integranden für $\gamma \in \hat{\mathbb{R}}$ nach oben und unten beschränkt ist.

Korollar 7.5.7. Für $n > N + 1$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(\xi(\tau_n(\gamma))) \, d\gamma < \infty.$$

Beweis. Es gibt $C_1, C_2 > 0$, sodass für alle $\gamma \in \hat{\mathbb{R}}$ gilt

$$C_1 \leq \tau_n(\gamma) \|E^\eta(\cdot, s_n(\gamma))\|_{L^2}^2 \leq C_2.$$

Daher gibt es ein $\tilde{C}_2 > 0$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau'_n(\gamma) \, d\gamma \geq \tilde{C}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(\xi(\tau_n(\gamma))) \, d\gamma. \quad \square$$

Korollar 7.5.8. *Es gibt $C > 0$ und $\gamma_0 > 0$, sodass für alle $\gamma \geq \gamma_0$ gilt*

$$\cos^2(\xi(\tau_n(\gamma))) < \frac{C}{\gamma}.$$

Beweis. Anderenfalls gibt es für jedes $R > 0$ ein $c(R) > 0$, sodass

$$\int_{-R}^R \cos^2(\xi(\tau_n(\gamma))) \, d\gamma \geq c(R) \ln(R). \quad \square$$

Bemerkung 7.5.9. Aus

$$\cos^2(\xi(\tau_n(\gamma))) < \frac{C}{\gamma}$$

für $\gamma \geq \gamma_0$ folgt

$$|\cos(\xi(\tau_n(\gamma)))| < \frac{\tilde{C}}{\sqrt{\gamma}}.$$

Da der Cosinus für $\gamma \in \mathbb{R}$ keine Nullstellen hat, ist er auf dem betrachteten Intervall entweder überall positiv oder überall negativ. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $\cos(\xi) > 0$ und

$$\cos(\xi(\tau_n(\gamma))) < \frac{\tilde{C}}{\sqrt{\gamma}} \quad \text{für alle } \gamma \geq \gamma_0.$$

In Satz 2.5.11 wurde gezeigt, dass das Argument

$$\xi(\tau) = \tau \ln(\eta) - \frac{\vartheta(\tau)}{2}$$

des Cosinus für $\tau > \tau_0$ streng monoton steigend ist. Andererseits folgt aus der Monotonie von T_n und Theorem 7.4.14 das folgende Korollar.

Korollar 7.5.10. *(i) Für jedes $n > N + 1$ gibt es ein $k(n) \in \mathbb{Z}$, sodass*

$$\xi(\tau_n(\mathbb{R})) = \left] -\frac{\pi}{2} + \pi k(n), \frac{\pi}{2} + \pi k(n) \right[.$$

(ii) Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ die Funktion

$$\gamma \mapsto \xi(\tau_n(\gamma))$$

streng monoton steigend ist.

Folgerung 7.5.11. Für hinreichend große $n \geq n_0$ und $\gamma \geq \gamma_0$ gilt $\xi(\tau_n([\gamma_0, \infty[)) \subseteq]0, \frac{\pi}{2}[\pmod{2\pi}$. Auf diesem Intervall ist der Cosinus positiv und streng monoton fallend. Dasselbe gilt für die Umkehrfunktion, die modulo 2π durch den Arcuscossinus gegeben ist. Daraus folgt für $n \geq n_0$ und $\gamma \geq \gamma_0$

$$\xi(\tau_n(\gamma)) > \arccos\left(\frac{\tilde{C}}{\sqrt{\gamma}}\right) \pmod{2\pi}$$

und

$$\frac{\vartheta(\tau_n(\gamma))}{2} < \ln(\eta)\tau_n(\gamma) - \arccos\left(\frac{\tilde{C}}{\sqrt{\gamma}}\right) \pmod{2\pi}.$$

Der implizite Summand aus $2\pi\mathbb{Z}$ hängt von $n \in \mathbb{N}$ ab.

7.6 Eigenwerte im Intervall $]0, 1/4[$

Jedes $\lambda \in]0, \frac{1}{4}[\cap \sigma(\Delta_\Gamma)$ gehört entweder zur Folge $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vom Typ (I) oder zu einem der $N - 1$ Eigenwerte

$$0 < x_2 < \dots < x_N$$

vom Typ (II) des klassischen Laplace-Operators Δ_Γ . Diese sind nach Satz 2.3.5 zu den Polen s_2, \dots, s_N im Intervall $] \frac{1}{2}, 1[$ der Streumatrix φ assoziiert, was nach unserer Typisierung einem Eigenwert vom Typ (b) entspricht.

In Beispiel 2.1.18 wurde gezeigt, dass die Streumatrix φ der Modulgruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ außer $s_1 = 1$ keine Pole im Intervall $] \frac{1}{2}, 1[$ besitzt. Also gilt in diesem Fall $N = 1$.

Da \mathbb{R} von den Intervallen \bar{L}_k , bestehend aus den Eigenwerten der Δ_γ , $\gamma \in \hat{\mathbb{R}}$, überdeckt wird, und Δ_∞ keine Eigenwerte vom Typ (b) oder (c) hat (Satz 6.2.10), gibt es $\gamma_1, \dots, \gamma_N \in \mathbb{R}$ und $j_1, \dots, j_N \in \mathbb{N}$, sodass

$$x_k = \lambda_{j_k}(\gamma_k) \quad \text{für alle } 1 \leq k \leq N$$

ein Eigenwert vom Typ (b) von Δ_{γ_k} ist. Wir haben bereits gezeigt, dass für $x_1 = 0$ und $s_1 = 1$ gilt

$$\gamma_1 = 0 \quad \text{und} \quad j_1 = 1.$$

Da die Folgen $(x_k)_{1 \leq k \leq N}$ und $(\lambda_n(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils aufsteigend angeordnet sind, gilt

$$j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_N.$$

Satz 7.6.1. Für alle $k \in \{1, \dots, N\}$ gilt $j_k = k$.

Beweis. Es sei $k \in \{1, \dots, N - 1\}$. Wir nehmen zuerst an, dass

$$j_{k+1} > j_k + 1.$$

Nach den Überlegungen aus dem vorherigen Abschnitt gilt

$$r_{j_k}(\gamma_k) \in J_{j_k}^-.$$

Nach der Annahme liegt nun zwischen $J_{j_k}^-$ und $J_{j_{k+1}}^-$ ein nichtleeres Intervall J_n^- . Dann gibt es $k < n < k + 1$, sodass

$$\mu_{k-1} < x_k < \mu_k < \mu_n < x_{k+1} < \mu_{k+1}.$$

Das ist ein Widerspruch.

Als zweites sei angenommen, dass

$$j_{k+1} = j_k =: j_0.$$

Dann liegen auf dem Graphen $\mathcal{C}_0 = \{(\gamma, \lambda_{j_0}(\gamma)) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$ zwei verschiedene Eigenwerte vom Typ (b). Nach Theorem 2.5.8 muss aber zwischen zwei Eigenwerten x_k und x_{k+1} ein Eigenwert μ_k von Δ_∞ liegen. Nach Theorem 7.4.14 können die Punkte (γ_k, x_k) und (γ_{k+1}, x_{k+1}) nicht beide auf der Kurve \mathcal{C}_0 liegen. \square

Satz 7.6.2. *Es sei s_k einer der N Pole von φ im Intervall $]\frac{1}{2}, 1]$. Dann gilt*

$$p_\Gamma \geq \left(\frac{1}{-\varphi'(1-s_k) \cdot (2s_k-1)} \right)^{1/(2s_k-1)} = \left(\frac{\text{Res}_{s_k}(\varphi)}{(2s_k-1)} \right)^{1/(2s_k-1)}.$$

Beweis. Nach Korollar 7.2.2 ist die Ableitung von γ in s_k gegeben durch

$$\gamma'(s_k) = \frac{1}{\eta} + \frac{2s_k-1}{\eta^{2(1-s_k)}} \cdot \varphi'(1-s_k).$$

Andererseits gilt nach Satz 2.1.17, dass die Residuen der Polstellen s_k im Intervall $]\frac{1}{2}, 1]$ alle positiv sind. Da $\varphi(s_k)$ ein einfacher Pol und durch die Funktionalgleichung

$$\varphi(s_k) = \frac{1}{\varphi(1-s_k)}$$

bestimmt ist, folgt

$$\text{Res}_{s_k}(\varphi) = \text{Res}_{s_k} \left(\frac{1}{\varphi(1-s)} \right) = \left(\frac{d}{ds} \varphi(1-s) \right)^{-1} \Big|_{s=s_k} = -\frac{1}{\varphi'(1-s_k)} > 0.$$

Also gilt $\varphi'(1-s_k) < 0$. Wir betrachten nun die Gleichung

$$\gamma'(s_k) = \frac{1}{\eta} + \frac{2s_k-1}{\eta^{2(1-s_k)}} \cdot \varphi'(1-s_k) = 0.$$

Durch elementare Termumformungen erhalten wir

$$\varphi'(1-s_k) = -\frac{\eta^{1-2s_k}}{2s_k-1}.$$

Da $s_k \in]\frac{1}{2}, 1]$, ist die rechte Seite negativ für alle $\eta > 0$ in Übereinstimmung mit dem Vorzeichen von $\varphi'(1-s_k)$. Umformen nach η liefert

$$\eta = \left(\frac{1}{-\varphi'(1-s_k) \cdot (2s_k-1)} \right)^{1/(2s_k-1)}. \quad (7.12)$$

Ist das hierdurch definierte η größer als p_Γ , dann ist die Familie $(\Delta_\gamma)_{\gamma \in \hat{\mathbb{C}}}$ von Pseudo-Laplace-Operatoren wohldefiniert. Dies liefert einen Widerspruch dazu, dass die Eigenwertfunktion $\lambda_k(\gamma)$ im Punkt $\gamma(s_k) \in \mathbb{R}$ differenzierbar sein muss, weil alle Verzweigungspunkte echt komplex sind. Also muss die rechte Seite von (7.12) kleiner oder gleich p_Γ sein. \square

Beispiel 7.6.3. Nach Satz 2.1.17 ist das Residuum im Pol $s_1 = 1$ gegeben durch

$$\text{Res}_1(\varphi) = \frac{1}{\text{vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}.$$

Aus Satz 7.6.2 folgt daher

$$\text{vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H}) \geq \frac{1}{p_\Gamma}.$$

Dies können wir direkt nachrechnen, denn durch Zerlegung von $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ in einen kompakten Teil X_{p_Γ} und der Spitzenregion S_{p_Γ} erhalten wir

$$\text{vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H}) > \int_{p_\Gamma}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{p_\Gamma}.$$

Literatur

- [1] Thierry Aubin. *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations*. Bd. 252. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, New York, 1982, S. xii+204. ISBN: 0-387-90704-1. DOI: 10.1007/978-1-4612-5734-9. URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5734-9>.
- [2] Alan F. Beardon. *The geometry of discrete groups*. Bd. 91. Graduate Texts in Mathematics. Corrected reprint of the 1983 original. Springer-Verlag, New York, 1995, S. xii+337. ISBN: 0-387-90788-2.
- [3] Yves Colin de Verdière. „Pseudo-laplaciens. I“. In: *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 32.3 (1982), S. xiii, 275–286. ISSN: 0373-0956. URL: http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_3_275_0.
- [4] Yves Colin de Verdière. „Pseudo-laplaciens. II“. In: *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 33.2 (1983), S. 87–113. ISSN: 0373-0956. URL: http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_2_87_0.
- [5] R. Courant. „Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik“. In: *Math. Z.* 7.1-4 (1920), S. 1–57. ISSN: 0025-5874. DOI: 10.1007/BF01199396. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01199396>.
- [6] R. Courant und D. Hilbert. *Methoden der Mathematischen Physik. Vol. I*. Interscience Publishers, Inc., N.Y., 1943, S. xiv+469.
- [7] Jozef Dodziuk. „Eigenvalues of the Laplacian and the heat equation“. In: *Amer. Math. Monthly* 88.9 (1981), S. 686–695. ISSN: 0002-9890. DOI: 10.2307/2320674. URL: <https://doi.org/10.2307/2320674>.
- [8] J. Elstrodt, F. Grunewald und J. Mennicke. *Groups acting on hyperbolic space*. Springer Monographs in Mathematics. Harmonic analysis and number theory. Springer-Verlag, Berlin, 1998, S. xvi+524. ISBN: 3-540-62745-6. DOI: 10.1007/978-3-662-03626-6. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-03626-6>.
- [9] Emmanuel Hebey. *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*. Bd. 5. Courant Lecture Notes in Mathematics. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, S. x+309. ISBN: 0-9658703-4-0; 0-8218-2700-6.

- [10] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I.* Classics in Mathematics. Distribution theory and Fourier analysis, Reprint of the second (1990) edition [Springer, Berlin; MR1065993 (91m:35001a)]. Springer-Verlag, Berlin, 2003, S. x+440. ISBN: 3-540-00662-1. DOI: 10.1007/978-3-642-61497-2. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61497-2>.
- [11] Henryk Iwaniec. *Spectral methods of automorphic forms.* Second. Bd. 53. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI; Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, 2002, S. xii+220. ISBN: 0-8218-3160-7. DOI: 10.1090/gsm/053. URL: <https://doi.org/10.1090/gsm/053>.
- [12] Mark Kac. „Can one hear the shape of a drum?“ In: *Amer. Math. Monthly* 73.4, part II (1966), S. 1–23. ISSN: 0002-9890. DOI: 10.2307/2313748. URL: <https://doi.org/10.2307/2313748>.
- [13] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators.* Second. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976, S. xxi+619.
- [14] Svetlana Katok. *Fuchsian groups.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992, S. x+175. ISBN: 0-226-42582-7; 0-226-42583-5.
- [15] Kai Köhler. *Differentialgeometrie und homogene Räume.* Springer Fachmedien Wiesbaden, 2014.
- [16] Tomio Kubota. *Elementary theory of Eisenstein series.* Kodansha Ltd., Tokyo; Halsted Press [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1973.
- [17] Peter D. Lax und Ralph S. Phillips. *Scattering theory for automorphic functions.* Annals of Mathematics Studies, No. 87. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1976, S. x+300. ISBN: 0-691-08179-4.
- [18] Reinhold Meise und Dietmar Vogt. *Einführung in die Funktionalanalysis.* Bd. 62. Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik [Vieweg Studies: Mathematics Course]. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992, S. x+416. ISBN: 3-528-07262-8. DOI: 10.1007/978-3-322-80310-8. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-322-80310-8>.
- [19] F. W. J. Olver. *Asymptotics and special functions.* Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974, S. xvi+572.
- [20] R. S. Phillips und P. Sarnak. „The Weyl theorem and the deformation of discrete groups“. In: *Comm. Pure Appl. Math.* 38.6 (1985), S. 853–866. ISSN: 0010-3640. DOI: 10.1002/cpa.3160380614. URL: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160380614>.
- [21] Michael Reed und Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978, S. xv+396. ISBN: 0-12-585004-2.

- [22] Franz Rellich. „Störungstheorie der Spektralzerlegung. I“. In: *Math. Ann.* 113.1 (1937), S. 600–619. ISSN: 0025-5831. DOI: 10.1007/BF01571652. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01571652>.
- [23] Franz Rellich. „Störungstheorie der Spektralzerlegung. II“. In: *Math. Ann.* 113.1 (1937), S. 677–685. ISSN: 0025-5831. DOI: 10.1007/BF01571658. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01571658>.
- [24] Franz Rellich. „Störungstheorie der Spektralzerlegung. III“. In: *Math. Ann.* 116.1 (1939), S. 555–570. ISSN: 0025-5831. DOI: 10.1007/BF01597374. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01597374>.
- [25] Franz Rellich. „Störungstheorie der Spektralzerlegung. IV“. In: *Math. Ann.* 117 (1940), S. 356–382. ISSN: 0025-5831. DOI: 10.1007/BF01450023. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01450023>.
- [26] Franz Rellich. „Störungstheorie der Spektralzerlegung. V“. In: *Math. Ann.* 118 (1942), S. 462–484. ISSN: 0025-5831. DOI: 10.1007/BF01487382. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01487382>.
- [27] Michael Renardy und Robert C. Rogers. *An introduction to partial differential equations*. Second. Bd. 13. Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2004, S. xiv+434. ISBN: 0-387-00444-0.
- [28] Walter Roelcke. „Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene, I“. In: *Math. Ann.* 167.4 (1966), S. 292–337. ISSN: 0025-5831. DOI: 10.1007/BF01364540. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01364540>.
- [29] Atle Selberg. „On the estimation of Fourier coefficients of modular forms“. In: *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VIII*. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965, S. 1–15.
- [30] Michael E. Taylor. *Partial differential equations I. Basic theory*. Second. Bd. 115. Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, 2011, S. xxii+654. ISBN: 978-1-4419-7054-1. DOI: 10.1007/978-1-4419-7055-8. URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7055-8>.
- [31] Alexei B. Venkov. *Spectral theory of automorphic functions and its applications*. Bd. 51. Mathematics and its Applications (Soviet Series). Translated from the Russian by N. B. Lebedinskaya. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990. ISBN: 0-7923-0487-X. DOI: 10.1007/978-94-009-1892-4. URL: <https://doi.org/10.1007/978-94-009-1892-4>.
- [32] Hermann Weyl. „Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung)“. In: *Math. Ann.* 71.4 (1912), S. 441–479. ISSN: 0025-5831. DOI: 10.1007/BF01456804. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01456804>.

Notationsindex

- A_0 , 80
 A_1 , 80
 A_2 , 87
 $\mathcal{A}(\Gamma \backslash \mathbb{H})$, $\mathcal{A}(X)$, 25
 Typ (a), Typ (II.a), 114
 $\mathcal{B}(X, Y)$, $\mathcal{B}(X)$, 68
 Typ (b), Typ (II.b), 114
 $\hat{\mathcal{C}}$, 11
 $\mathcal{C}(X, Y)$, $\mathcal{C}(X)$, 68
 Typ (c), Typ (II.c), 114
 $c_0(s)$, 31
 $\mathcal{D}(M)$, 21
 $D(T_t)$, 67
 $D(t)$, 63
 $D(\Delta^\eta)$, 39
 Typ (d), Typ (II.d), 114
 E , $E(z, s)$, 26
 \tilde{E} , $\tilde{E}(z, s)$, 31
 \mathcal{E} , 29
 $E_{(I), \gamma}(\lambda)$, 102
 $E_{(II), \gamma}(\lambda)$, 102
 E_m , $E_m(y, s)$, 28
 $E_\gamma(\lambda)$, 102
 \mathfrak{E}^η , 107
 $e_m(x)$, 27
 F_∞ , 19
 f_m , $\text{fc}_m[f]$, 27
 f^η , 33
 \mathcal{G} , 29
 g , $g(Z, W)$, 11
 g_{ij} , 14
 grad, grad f , 20, 23
 \mathbb{H} , 11
 \mathcal{H}_η , 39
 \mathcal{H}_m , 80
 H_t , 66
 \mathcal{H}_η , 18
 Typ (I), 35, 40, 98
 Typ (II), 35, 40, 98
 I_m , 80
 $\text{Im } t$, 65
 J_n^\pm , 136
 k^\pm , 136
 L_0^2 , 35
 L_η^2 , 34, 39
 \mathfrak{L}_k , 92, 110, 117
 $\mathfrak{L}_n^{(2)}$, 118
 L_m , 81, 87
 L_n , 139
 M , 134
 \mathcal{N} , 80
 $N_\Gamma^\lambda(R)$, 142
 $N_\Gamma^\eta(R)$, 44
 $N_\Gamma(T)$, 36
 $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, 12
 $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$, 13
 $P_{r, \eta}$, 53
 p_Γ , 19
 q_1 , 108
 q_2 , 108

$\hat{\mathbb{R}}$, 11
 $R_E(\cdot, s)$, 33
 $\text{Re } t$, 65
 R_n , 135
 $r, r(s)$, 99, 100
 $r_{D,n}$, 139
 r_n , 135
 r_n^\pm , 137
 \mathcal{S} , 100
 $\hat{\mathcal{S}}$, 100
 S_γ , 94
 S_η , 19
 \hat{s} , 100
 s^\pm , 99
 T_n , 135
 T_γ , 86
 $\mathfrak{t}, \mathfrak{t}(u, v)$, 63
 $\mathfrak{t}(u)$, 64
 $\mathfrak{t}^*, \mathfrak{t}^*(u, v)$, 64
 $\mathfrak{t}_\gamma, \mathfrak{t}_\gamma(u, v)$, 83
 $\mathscr{W}(T)$, 67
 $\mathscr{W}(\mathfrak{t})$, 65
 $W_\Gamma(T)$, 37
 X_η , 19
 $x_k, (x_k)_{1 \leq k \leq N}$, 35
 $z, z(s)$, 99, 100
 $\mathfrak{z}(f)$, 80
 Γ_∞ , 13
 $\Gamma(n)$, 14
 $\gamma.z$, 12
 $\gamma_{a,b,c,d}(s)$, 113, 114
 $\gamma_{\Gamma,\eta}$, 114, 134
 Δ , 21, 23
 Δ_D , 93
 Δ_{eukl} , 21, 23
 Δ_Γ , 34
 Δ_γ , 86, 96
 Δ^η , 39
 $\delta_{\eta,0}$, 39
 η_Γ , 42, 114
 Θ , 26
 Θ_R , 35
 Θ_η , 39
 ϑ , 30
 $\Lambda_k, \Lambda_k(\gamma)$, 92, 110, 117
 $\lambda_n, \lambda_n(\gamma)$, 117, 121, 124, 125
 λ_n^\pm , 137
 $\mu_{\mathbb{H}}$, 12
 $\mu_j, \mu_j(\eta)$, 40, 125
 $\nu_n, (\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$, 35
 ξ , 31, 32, 114
 $\varrho_{\mathbb{H}}$, 12
 $\Sigma(\beta, \theta)$, 65, 67
 $\sigma_1, \sigma_1(\Delta_\gamma)$, 98
 $\sigma_2(\Delta_\gamma)$, 98
 $\tau, \tau(s)$, 99, 100
 $\tau_{D,n}$, 139
 τ_n , 135
 τ_n^\pm , 137
 φ , 29, 30
 $\psi, \psi_\eta, \psi_\eta[r]$, 48
 $(\cdot, -)'_{A_1}$, 81
 $(\cdot, -)'_{A_1}$, 83
 $(\cdot, -)_E$, 39
 $(\cdot, -)_m$, 80
 $(\cdot, -)_t$, 66
 $(\cdot, -)_{t_\gamma}$, 86
 $(\cdot, -)_\eta$, 51
 $\langle u, \phi \rangle$, 23
 ∇ , 20

Stichwortverzeichnis

- abgeschlossene Form, 66
- absoluter Term, 28
- adjungierte Form, 64
- automorphe Funktion, 25
- Ehrling (Lemma), 84
- Eisenstein-Robin-Quotient, 111
- Eisensteinreihe, 26
 - Fourierkoeffizienten, 28
 - Residuum, 33
- elliptisch
 - er Punkt, 13
 - es Element der $PSL_2(\mathbb{R})$, 13
- Erster Darstellungssatz für sektorielle Formen, 67
- exzeptioneller Punkt, 123
- Fuchssche Gruppe, 13
 - von erster Art, 13
 - von zweiter Art, 13
- Fundamentalgebiet, 16
- Fundamentalpolygon, 16
- Funktionalgleichung
 - des Eisenstein-Robin-Quotienten, 111
- Funktionalgleichungen
 - der Eisensteinreihe, 29
 - der Streumatrix, 29
- Gradient, 20
- Halbwinkel, 65
- Hauptkongruenzuntergruppe, 14
- holomorphe Familie
 - beschränkter Operatoren, 68
 - unbeschränkter Operatoren, 69
 - von Formen vom Typ (a), 70
 - von Operatoren vom Typ (A), 70
 - von Operatoren vom Typ (B), 71
 - von Vektoren, 68
- Horozykel, 18
- hyperbolisch
 - e Metrik, 11
 - es Element der $PSL_2(\mathbb{R})$, 13
 - es Maß, 12
- Imaginärteil einer Form, 65
- kofinit, 16
- kokompakt, 16
- Kongruenzuntergruppe, 14
- kritische Gerade, 29
- Laplace-Beltrami-Operator, 21
- Levi-Civita-Zusammenhang, 20
- m-sektorieller Operator, 67
- Maass-Selberg-Relation, 33
- Minimum-Maximum-Prinzip, 46
- Modulgruppe, 13
- numerischer Wertebereich
 - einer Form, 65
 - eines Operators, 67
- parabolisches Element der $PSL_2(\mathbb{R})$, 13
- Parkettierung, 16
- Phillips-Sarnak-Vermutung, 37
- Poincaré-Reihe, 26
- Polarisationsformel, 64

präkompakt, 90
 Pseudo-Laplace-Operator, 39
 Puiseuxreihe, 72, 121

 Realteil einer Form, 65
 Rellichscher Einbettungssatz für kompakte
 Mannigfaltigkeiten, 90
 Robin-Pseudo-Laplace-Operator, 86

 Scheitel, 65
 Sektor, 65
 sektorielle Form, 65
 Selberg-Roelcke-Vermutung, 37
 selbstadjungierte Familie
 holomorpher Formen, 71
 holomorpher Operatoren, 71
 Skalierungsmatrix, 17
 Sobolevscher Einbettungssatz für kompakte
 Mannigfaltigkeiten, 81

 Spektrallückensatz, 36
 Spektrallückenvermutung, 35
 Spitze, 17
 Spitzenform, 35
 Spitzenfunktion, 34
 Spitzenregion, 18
 Spurtheorem für kompakte
 Mannigfaltigkeiten, 81
 Streumatrix, 29
 symmetrische Form, 64

 t -Konvergenz, 66
 totale Menge, 68
 Trunkierung, 33

 verallgemeinerte Eigenfunktion, 33
 Verzweigungspunkt, 122

 Weyl-Selbergsche Asymptotik, 37
 Windungszahl (der Streumatrix), 37

Eidesstattliche Versicherung

Ich, Frau Marlis Julia Balkenhol, versichere an Eides statt, dass die vorliegende Dissertation von mir selbstständig und ohne unzulässige fremde Hilfe unter Beachtung der „Grundsätze zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf“ erstellt worden ist. Ferner erkläre ich, dass ich diese in der jetzigen oder eine ähnlichen Form noch bei keiner anderen Fakultät mit oder ohne Erfolg eingereicht habe.

Düsseldorf, der 10. Februar 2022

Marlis Julia Balkenhol