

Wahlbetrug mit festen und variablen Präferenzen: Eine Komplexitätsanalyse von Kontroll- und Bestechungsproblemen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Cynthia Maushagen
aus Düsseldorf

Düsseldorf, Februar 2021

aus dem Institut für Informatik
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Gedruckt mit der Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Berichtersteller:

1. Prof. Dr. Jörg Rothe
2. Jun-Prof. Dr. Dorothea Baumeister

Tag der mündlichen Prüfung: 15.04.2021

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Dissertation werden verschiedene Kontroll- und Bestechungsprobleme mit Hilfe der klassischen und parametrisierten Komplexitätstheorie untersucht, die sich aus dem Kontext von Wahlen ergeben. Dabei zeichnet sich ein Kontrollproblem dadurch aus, dass der Wahlleiter einer Wahl deren Ergebnis durch Veränderung der Wahlstruktur ändern möchte. Bei Bestechungsproblemen wiederum geht man, wie zu vermuten ist, davon aus, dass einzelne Wähler mittels Bestechung durch einen externen Agenten dazu gebracht werden, ihre Stimme nach dem Willen des Agenten zu ändern. Bei Bestechungsproblemen sind die Präferenzen also variabel, während diese bei Kontrollproblemen fest sind und sich lediglich die Struktur der Wahl verändern lässt. Für die Wahlregeln Veto und Maximin untersuchen wir mit Hilfe der klassischen Komplexitätstheorie zwei Gruppen von Kontrollproblemen. Während in der ersten Gruppe Probleme zur Partitionierung der Wählermenge betrachtet werden, werden in der zweiten Gruppe Probleme zur Partitionierung der Kandidatenmenge betrachtet. Je nach Gruppe teilt der Wahlleiter die Wähler bzw. Kandidaten in zwei Gruppen auf. Um als Sieger aus einer solchen Wahl hervorzugehen, muss sich ein Kandidat in einer Vorrunde und einem Finale gegen die Gewinner der anderen Vorrunde bewähren. Wir zeigen, dass die untersuchten Kontrollprobleme für die Wahlregel Maximin NP-vollständig sind. Für Veto teilen sich die Ergebnisse in NP-Vollständigkeitsresultate und effiziente Algorithmen auf.

Danach widmen wir uns der Wahlregel Plurality und betrachten ein Kontrollproblem aus Sicht der parametrisierten Komplexitätstheorie. Bei diesem Kontrollproblem nehmen wir an, dass der Wahlleiter die Möglichkeit hat, weitere Kandidaten an der Wahl teilnehmen zu lassen. Wir analysieren dazu einen fehlerhaften Beweis aus der Literatur zur $W[1]$ -Härte und können mit Hilfe eines neuen Beweises die $W[1]$ -Härte nachweisen.

Im Anschluss untersuchen wir für insgesamt acht iterative Wahlregeln das Bestechungsproblem SHIFT-BRIBERY. Bei diesem Problem gehen wir davon aus, dass der eingangs erwähnte Agent mit einem gewissen Budget zur Bestechung der Wähler ausgestattet ist. Dabei darf der Agent nur die Position eines ausgewählten Kandidaten relativ zu den anderen Kandidaten verändern. Die Kosten für die Veränderung der Stimme eines Wähler ergeben sich hierbei über einen individuell festgelegten Preis, der für jede paarweise Vertauschung zweier Kandidaten veranschlagt wird. Dabei stellt sich heraus, dass dieses Problem für alle untersuchten Wahlregeln NP-vollständig ist.

INHALTSVERZEICHNIS

1	EINLEITUNG	1
2	KOMPLEXITÄTSTHEORIE	3
2.1	Klassische Komplexitätstheorie	3
2.2	Parametrisierte Komplexitätstheorie	9
3	SOZIALWAHLTHEORIE	15
4	COMPUTATIONAL SOCIAL CHOICE	17
4.1	Wahlen, Gewinnerbestimmung und Manipulation	18
4.2	Kontrolle von Wahlen	21
4.3	Bestechung von Wahlen	24
5	KONTROLLE BEI VETO- UND PLURALITY-WAHLEN	27
5.1	Zusammenfassung	27
5.2	Eigener Anteil	28
6	KONTROLLE IN MAXIMIN-WAHLEN	29
6.1	Zusammenfassung	29
6.2	Eigener Anteil	29
6.3	Korrigendum	30
7	SHIFT-BRIBERY	31
7.1	Zusammenfassung	31
7.2	Eigener Anteil	32
8	ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK	33
	LITERATUR	37

EINLEITUNG

In einer Gesellschaft wird das Leben immer direkt oder mindestens indirekt von Wahlen geprägt. Die Wahl über das künftige Reiseziel innerhalb der Familie, die Wahl für einen Arbeitnehmervertreter im Beruf und die Wahl der Abgeordneten im Bundestag, welche später wieder stellvertretend für uns wählen, stellen nur eine kleine Auswahl an Wahlen dar, die unser Leben beeinflussen. Durch diese Bedeutung, die Wahlen für unser Leben haben, ist es von besonderer Relevanz, dass jeglicher manipulative Einfluss von außen verhindert wird, um eine gerechte Wahl zu garantieren. Angriffe auf Wahlen können dabei nicht nur von außen stattfinden. Bereits das Design der Wahlstruktur birgt die Gefahr, ein Ungleichgewicht in den Chancen für den Sieg einzelner Kandidaten bei einer Wahl zu produzieren. Ein bekanntes Beispiel dafür ist das sogenannte Gerrymandering. In regelmäßigen Abständen wird in den deutschen Medien über Gerrymandering in den Vereinigten Staaten berichtet, so z.B. von Heinzelmann [36], Middelhoff [58], Misteli [59], Steffens [71] und Müller [60].

Das Problem des Gerrymandering ist aber durchaus auch ein Problem in Deutschland. So berichtet beispielsweise Riemenschneider in der Zeitung *Westfälische Nachrichten* [66], dass im schwarz-gelb geführten Nordrhein-Westfalen für die nächste Landtagswahl 2022 die Wahlkreise in und um Münster neu zugeschnitten werden müssen. Die aktuellen Pläne sehen dabei vor, das besonders grün geprägte Zentrum Münsters auf drei Wahlkreise aufzuteilen. Die so neu entstandenen Wahlkreise würden dabei auch jeweils das ländlichere Umland Münsters mit beinhalten. Damit wäre es sehr wahrscheinlich, dass alle drei Wahlkreise an die CDU gehen und das grün geprägte Zentrum keine Gefahr für die CDU in einem der Wahlkreise darstellt. Dadurch, dass es in Deutschland kein direktes Mehrheitswahlsystem gibt, ist der Einfluss von Gerrymandering sicherlich weniger schwerwiegend als in den Vereinigten Staaten. Trotzdem ist dies kein zu vernachlässigendes Thema. Besondere Vorsicht ist geboten, je nachdem, wie eine neue Regelung für die Überhangmandate ausfällt.

GLIEDERUNG DER ARBEIT

Diese Arbeit umfasst Ergebnisse zur Komplexität von Problemen aus der Wahlkontrolle und der Bestechung für verschiedene Wahlregeln. Kapitel 2 liefert uns eine Grundlage für das Verständnis der Komplexitätstheorie. In Kapitel 3 umreißen wir grob die historische Geschichte der Sozialwahltheorie. Kapitel 4 ist in drei Teile gegliedert. Im ersten

Teil wiederholen wir Definitionen und Grundlagen bezüglich Wahlen in der Computational Social Choice und betrachten das Problem der Manipulation und der Gewinnerbestimmung. Im zweiten und dritten Teil befassen wir uns mit der Wahlkontrolle bzw. Bestechung. Dabei stellen wir die Modelle vor, welche wir in einem späteren Teil der Arbeit untersuchen. Zusätzlich schauen wir uns noch weitere Modelle an, welche in der Literatur untersucht werden. Kapitel 5 und Kapitel 6 umfassen eine Komplexitätsanalyse zu verschiedenen Problemen der Wahlkontrolle. Genauer werden wir in Kapitel 5 die Wahlregeln Plurality und Veto betrachten und in Kapitel 6 die Wahlregel Maximin untersuchen. In Kapitel 7 analysieren wir das Problem SHIFT-BRIBERY hinsichtlich iterativer Wahlregeln. Schließlich resümieren wir in Kapitel 8 die Ergebnisse dieser Arbeit und richten unseren Blick auf mögliche Fortsetzungen in der Forschung.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, Entscheidungsprobleme, die aus dem Kontext der Sozialwahltheorie kommen, hinsichtlich ihrer Komplexität zu klassifizieren. In diesem Kapitel werden wir dafür die grundlegenden Konzepte der klassischen und parametrisierten Komplexitätstheorie wiederholen. Präzise Definitionen und eine umfassende Einführung in die klassische Komplexitätstheorie sind in den Büchern von Rothe [67] und Papadimitriou [63] zu finden. Für eine Einführung in die parametrisierte Komplexitätstheorie sind die Bücher von Cygan et al. [17] und Gurski et al. [35] zu empfehlen.

2.1 KLASSISCHE KOMPLEXITÄTSTHEORIE

Hat man es mit einem algorithmisch lösbaren Problem zu tun, so gibt es im Allgemeinen mehrere sinnvolle Algorithmen, die dieses Problem lösen. Dies bringt uns zu der natürlichen Frage, wie man Algorithmen miteinander vergleichen kann. Um einen sinnvollen Vergleich führen zu können, muss zunächst entschieden werden, welche Parameter miteinander verglichen werden sollen. Zwei besonders interessante Parameter sind der Speicherbedarf und der Zeitverbrauch. Im Rahmen dieser Arbeit konzentrieren wir uns ausschließlich auf den Zeitverbrauch. Um nun Algorithmen hinsichtlich des Zeitverbrauchs vergleichen zu können, muss erst das grundlegende Problem geklärt werden, wie die Zeit, die während der Anwendung eines Algorithmus auf eine vorgegebene Probleminstanz vergeht, gemessen werden soll. Es wäre wenig sinnvoll, die tatsächlich vergangene physikalische Zeit zu messen, die bei der Ausführung einer konkreten Implementierung des Algorithmus vergeht. Durch die enorme Diversität von Rechnerarchitekturen und Programmiersprachen, hätte ein so konstruierter Begriff des Zeitverbrauchs nur wenig Aussagekraft. Stattdessen wird die Zeit abstrakt in der Anzahl der durchzuführenden, elementaren Rechenoperationen gemessen. So können wir Algorithmen bzgl. einzelner Instanzen miteinander vergleichen. Nun kommt es in der Regel vor, dass bei verschiedenen Instanzen mal der eine Algorithmus und mal der andere Algorithmus schneller ist, bzw. weniger Rechenschritte benötigt. Dies trifft vor allem dann zu, wenn Algorithmen für spezielle Typen von Probleminstanzen optimiert wurden. Diese Beobachtung legt nahe, dass es im Allgemeinen nicht ausreicht den Zeitverbrauch zweier Algorithmen auf einer endlichen Menge von Probleminstanzen zu vergleichen. Auf der anderen Seite ist es völlig praxisfern, dass einem alle Laufzeiten bekannt sind, welche bei Anwendung eines

Algorithmus auf eine unendliche und repräsentative Teilmenge aller Probleminstanzen anfallen. An dieser Stelle stützt uns die Komplexitätstheorie mit mehreren Möglichkeiten aus um mit dieser Sachlage umzugehen. Eine solche Möglichkeit besteht in der Betrachtung des sogenannten *worst-case* Szenarios, um welches es in dieser Arbeit geht. Konkret bedeutet dies, dass wir für eine feste Eingabelänge n die Anzahl der Rechenoperationen, welche im *worst-case*, also bei den am schwersten zu berechnenden Instanzen der Eingabelänge n , benötigt werden, nach oben abschätzen. Für das Wachstum der benötigten Rechenoperationen im *worst-case* Szenario wird eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gesucht, welche dieses Wachstum möglichst genau nach oben beschränkt. Haben wir für zwei Algorithmen solche Funktionen, so schauen wir welche Funktion für immer größer werdende Eingaben weniger stark wächst. Die präzisen Werte $f(n)$ sind hierbei nicht von Bedeutung. Wichtig ist jedoch, dass $f(n)$ zumindest so klein gewählt wird, dass sich der tatsächliche *worst-case* der Länge n im Sinne der \mathcal{O} -Notation nicht von f unterscheidet. In diesem Fall bezeichnen wir f auch als *worst-case-Funktion* des Algorithmus. Diese dient uns als Maß, mit dem wir verschiedene Algorithmen miteinander vergleichen können. Um nun die Frage nach der Vergleichbarkeit zweier Algorithmen A und B zu beantworten, ordnen wir ihnen wie eben beschrieben ihre *worst-case-Funktionen* f_A bzw. f_B zu und vergleichen anschließend deren asymptotisches Wachstum mittels der \mathcal{O} -Notation. Es sei an dieser Stelle jedoch darauf hingewiesen, dass es durchaus noch weitere sinnvolle Möglichkeiten gibt, Algorithmen einem aussagekräftigen Vergleich zu unterziehen. So verrät uns das sogenannte *average-case* Szenario, wie sich die Laufzeit eines Algorithmus im durchschnittlichen Fall verhält.

Neben einem Mittel zum Vergleich von Algorithmen stellen *worst-case-Funktionen* auch Werkzeuge zur Einteilung algorithmisch zugänglicher Probleme in Komplexitätsklassen dar. Eine besonders wichtige solche Klasse ist die Klasse P aller Entscheidungsprobleme für deren Lösung ein Algorithmus existiert, dessen *worst-case-Funktion* durch ein Polynom nach oben abgeschätzt werden kann. In diesem Fall sagen wir, dass der Algorithmus eine *polynomielle Laufzeit* hat und das zugehörige Problem *effizient lösbar* ist.

Um die Zugehörigkeit eines Problems zur Klasse P nachzuweisen, reicht es also irgendeinen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit anzugeben, der dieses Problem löst. Findet man jedoch keinen Algorithmus mit entsprechender Laufzeit, so kann oft nur schwer ausgeschlossen werden, dass lediglich noch kein solcher Algorithmus gefunden wurde. Es gibt bis heute (Stand Februar 2021) keine Möglichkeit zu beweisen, dass bestimmte Probleme nicht effizient lösbar sind. Eine Möglichkeit um dennoch eine gewisse Sicherheit dafür zu gewährleisten, dass ein Problem nicht in P liegt, erhalten wir aus der Betrachtung polynomieller Reduktionen und der sogenannten Klasse

NP. Bei dieser handelt es sich um die Klasse aller Entscheidungsprobleme für die ein *nichtdeterministischer Algorithmus* existiert, welcher sie in polynomieller Zeit löst. Wir wollen nun das Konzept, welches einem nichtdeterministischen Algorithmus zugrunde liegt anhand eines Bildes erläutern:

Angenommen wir finden uns in einem Labyrinth wieder aus welchem wir den Ausgang finden sollen. Ein algorithmischer Ansatz, sich dieser Aufgabe zu stellen, könnte beispielsweise wie folgt aussehen. Zu jedem Zeitpunkt markieren oder merken wir uns den Weg, den wir bereits abgelaufen sind. Stehen wir vor einer Verzweigung im Labyrinth, so wählen wir den am weitesten links liegenden Weg, welchen wir noch nicht probiert haben. Kommen wir in einer Sackgasse an oder treffen auf ein Wegstück, welches bereits markiert ist, so gehen wir bis zur letzten Verzweigung zurück bei der wir noch nicht alle Pfade ausprobiert haben. Hier wählen wir wieder den am weitesten links liegenden Weg, welchen wir noch nicht genommen haben. Es lässt sich leicht zeigen, dass wir mit dieser Strategie stets den Ausgang finden. Im schlimmsten Fall müssen wir dabei jedoch das komplette Labyrinth durchlaufen bis wir es wieder verlassen können. Nichtsdestotrotz wird uns zu jedem Zeitpunkt genau eine klare Anweisung gegeben, sodass es sich bei diesem Verfahren um einen (deterministischen) Algorithmus handelt. Diese Eindeutigkeit der Handlungsanweisung ist es nun, die bei der Betrachtung nichtdeterministischer Algorithmen verloren geht. Um etwas näher zu erläutern, was damit gemeint ist, bleiben wir im Bilde des Labyrinths und stellen uns vor, dass wir es mit einer ausreichend großen Gruppe von Leuten verlassen wollen. Das Ziel bleibt also, den Ausgang so schnell wie möglich zu finden. Im nichtdeterministischen Fall reicht es jedoch, dass irgendeine Person den Ausgang findet. Dieser wird hier am schnellsten gefunden, wenn sich die Gruppe bei jeder Verzweigung aufteilt, sodass jede Verzweigung gleichzeitig untersucht werden kann. Ist die Gruppe hinreichend groß, dann gibt es mindestens ein Mitglied, welches den Ausgang ohne Umwege über einen Pfad kürzester Länge erreicht. Auch wenn die meisten anderen Mitglieder noch nicht am Ausgang angelangt sind, wird bei einem nichtdeterministischen Algorithmus festgelegt, dass dieser beendet ist, sobald eine Person das Labyrinth verlässt. Diese Festlegung kann dahingehend interpretiert werden, dass ein nichtdeterministischer Algorithmus verschiedene Handlungsoptionen gleichzeitig testen kann. Um die Laufzeit eines nichtdeterministischen Algorithmus zu bestimmen, betrachtet man für jede Eingabe immer den Handlungsstrang, welcher am schnellsten zur Lösung führt. Es sei noch angemerkt, dass jeder deterministische Algorithmus auch als nichtdeterministischer Algorithmus aufgefasst werden kann, da Verzweigungen und parallele Berechnungen der unterschiedlichen Pfade für einen nichtdeterministischen Algorithmus nicht verpflichtend sind.

Als besonders interessant gelten die Probleme in NP, welche vermutlich nicht in P liegen. Cook [16] und Levin [45] zeigten, dass sich solche Probleme in eine tiefere Struktur eingliedern lassen. Um ihr Resultat zu verstehen, müssen wir uns zunächst noch das Konzept der Reduktion von Problemen anschauen. Dieses wollen wir mit Hilfe der beiden Graphprobleme VERTEX COVER und INDEPENDENT SET demonstrieren. Wie üblich verstehen wir unter einem *Graphen* \mathcal{G} eine Menge V von *Knoten* zusammen mit einer Teilmenge E aller 2-elementiger Teilmengen von V , welche wir als die *Kanten* von \mathcal{G} bezeichnen. Im Folgenden betrachten wir zunächst die beiden Probleme einzeln und erläutern anschließend am Beispiel der Reduktion von VERTEX COVER auf INDEPENDENT SET das dahinter liegende Konzept. Schauen wir uns zunächst das Problem VERTEX COVER an, welches als Entscheidungsproblem wie folgt definiert ist.

VERTEX COVER

Gegeben: Ein Graph $\mathcal{G} = (V, E)$ und eine natürliche Zahl k .

Frage: Gibt es eine k -elementige Teilmenge $V' \subset V$, welche die Kantenmenge überdeckt?

Dabei sagen wir, dass eine Kante $\{u, v\}$ von einer Teilmenge $V' \subset V$ überdeckt wird, wenn u oder v in V' enthalten ist. Im folgenden Beispiel untersuchen wir das Problem VERTEX COVER für einen kleinen Graphen \mathcal{G} und verschiedene Parameter k .

Beispiel. Wir schauen uns den Graph \mathcal{G} mit der Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_6\}$ und der Kantenmenge

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \\ \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}\}$$

an, welcher in [Abbildung 2.1](#) dargestellt wird. Gesucht wird eine Teilmenge

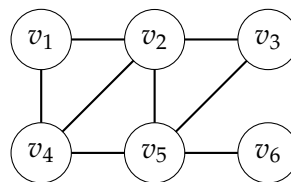


Abb. 2.1: Der Graph $\mathcal{G} = (V, E)$

$V' \subset V$, sodass jede Kante $e \in E$ von V' überdeckt wird. Setzen wir $V' = V$, so gilt offensichtlich, dass unsere Bedingung erfüllt ist und für jede Kante mindestens ein (dann sogar immer genau zwei) Knoten in V' enthalten ist. Schwieriger wird die Aufgabe, wenn die Größe von V' wie in VERTEX COVER durch eine Zahl k , etwa durch 2, beschränkt wird. In diesem Fall stellt die Teilmenge $V' = \{v_2, v_5\}$ beispielsweise keine Überdeckung von E dar, wie wir an der Kante $\{v_1, v_4\}$ sehen können. Die [Abbildung 2.2](#) zeigt den Graphen \mathcal{G}

mit den markierten Knoten v_2 und v_5 sowie der markierten Kante $\{v_1, v_4\}$. Des Weiteren lässt sich leicht zeigen, dass überhaupt keine 2-elementige Teilmenge $V' \subset V$ existiert, welche E überdeckt. Das Entscheidungsproblem VERTEX COVER kann für die Instanz $(\mathcal{G}, 2)$ also mit nein beantwortet werden.

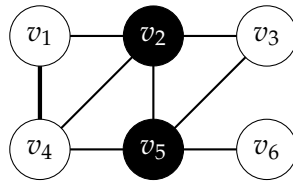


Abb. 2.2: Der Graph \mathcal{G} mit markierten Knoten v_2, v_5 und markierter Kante $\{v_1, v_4\}$

Anders sieht es aus, wenn wir einen der beiden Knoten v_1 oder v_4 zur Menge V' hinzufügen. Dann sehen wir nämlich an den Abbildungen 2.3 und 2.4, dass die Mengen $\{v_1, v_2, v_5\}$ und $\{v_2, v_4, v_5\}$ jeweils eine Überdeckung von E darstellen.

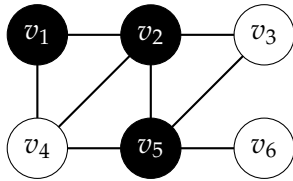


Abb. 2.3: Der Graph \mathcal{G} mit markierten Knoten v_1, v_2 und v_5

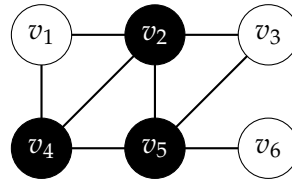


Abb. 2.4: Der Graph \mathcal{G} mit markierten Knoten v_2, v_4 und v_5

Insgesamt können wir für den Graphen \mathcal{G} zusammenfassen, dass das Tupel (\mathcal{G}, k) mit $k < 3$ eine Nein-Instanz und mit $k \geq 3$ eine Ja-Instanz für das Entscheidungsproblem VERTEX COVER ist.

Wir wollen uns nun das zweitgenannte Problem INDEPENDENT SET anschauen. Dafür brauchen wir zunächst den Begriff der Unabhängigkeit von Knoten. Wir nennen zwei Knoten eines Graphen *unabhängig voneinander*, wenn sie durch keine Kante dieses Graphen verbunden sind. Das Entscheidungsproblem INDEPENDENT SET wird formal wie folgt definiert.

INDEPENDENT SET	
Gegeben:	Ein Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl k .
Frage:	Gibt es eine k -elementige Teilmenge $V' \subset V$, sodass die Knoten in V' paarweise unabhängig voneinander sind?

Anders als bei VERTEX COVER, liegt die Schwierigkeit bei INDEPENDENT SET darin, eine möglichst große Teilmenge $V' \subset V$ zu finden, welche den Anforderungen genügt. Im Folgenden schauen wir uns noch ein Beispiel zu INDEPENDENT SET an.

Beispiel. Wir betrachten hier wieder den oben definierten Graphen \mathcal{G} . Per Definition bildet jeder einzelne Knoten eine unabhängige Menge. Wir schauen

uns nun an, wie dies für größere Teilmengen $V' \subset V$ aussieht. Wählen wir den Knoten v_2 , so können wir nur noch den Knoten v_6 hinzunehmen um weiterhin eine unabhängige Menge zu erhalten. Ähnlich verhält es sich, wenn wir den Knoten v_5 zuerst wählen. Um eine größere unabhängige Menge zu kriegen, können wir hier nur noch den Knoten v_1 hinzufügen. Ausgehend davon können wir leicht feststellen, dass die einzigen unabhängigen, 3-elementigen Knotenmengen durch $\{v_1, v_3, v_6\}$ und $\{v_3, v_4, v_6\}$ gegeben sind und es keine unabhängige, 4-elementige Knotenmenge gibt. Jede Teilmenge von diesen 3-elementigen Teilmengen bildet wiederum eine unabhängige Menge.

Betrachten wir nun noch einmal die beiden Beispiele nebeneinander. Dann fällt schnell auf, dass die Komplemente der beiden kleinsten überdeckenden Mengen $\{v_1, v_2, v_5\}$ und $\{v_2, v_4, v_5\}$ genau mit den beiden größten, unabhängigen Mengen $\{v_2, v_3, v_6\}$ und $\{v_1, v_3, v_6\}$ übereinstimmen. Dies können wir verallgemeinern. Für eine überdeckende Menge V' der Größe k eines Graphen \mathcal{G} ist das Komplement $V \setminus V'$ stets eine unabhängige Menge der Größe $|V| - k$. Um das zu beweisen, nehmen wir an $V' \subset V$ sei eine überdeckende Menge eines Graphen \mathcal{G} . Dann gilt für jede Kante $\{u, v\} \in E$, dass u oder v in V' enthalten ist. Damit gilt für zwei Knoten $s, w \in V \setminus V'$, dass diese durch keine Kante verbunden sein können. Daraus folgt, dass diese Knoten unabhängig voneinander sind, was zu zeigen war. Ebenso leicht kann man sich auch von der Rückrichtung der Aussage überzeugen. Somit haben wir nun einen starken Zusammenhang zwischen den beiden Problemen VERTEX COVER und INDEPENDENT SET gefunden. Um das Resultat von Cook [16] und Levin [45] zu verstehen, müssen wir uns jetzt noch ein paar technische Details anschauen.

Formal gesehen sind die beiden Probleme VERTEX COVER und INDEPENDENT SET Sprachen über einem Alphabet Σ . Dabei ist ein *Alphabet* als eine nichtleere Menge definiert, deren Elemente wir *Buchstaben* nennen. Weiter bezeichnet Σ^* die Menge aller *Wörter*, welche sich aus dem Alphabet Σ bilden lassen. In dieser Terminologie wird eine Teilmenge von Σ^* auch als *Sprache* über dem Alphabet Σ bezeichnet. Die Wörter der Sprachen VERTEX COVER und INDEPENDENT SET sind nun genau die Ja-Instanzen (\mathcal{G}, k) vom jeweiligen Problem.

Wollen wir für einen Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ entscheiden, ob (\mathcal{G}, k) in der Sprache VERTEX COVER enthalten ist, so können wir durch obige Feststellung alternativ prüfen, ob $(\mathcal{G}, |V| - k)$ in der Sprache INDEPENDENT SET enthalten ist. Da die Umformung eines Wortes (\mathcal{G}, k) zum Wort $(\mathcal{G}, |V| - k)$ offenbar in polynomialer Zeit vonstatten geht, sprechen wir hier von einer *polynomialzeit-beschränkten many-one-Reduktion*.

Allgemeiner sagen wir, dass sich ein Problem A mittels einer Reduktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ auf ein weiteres Problem B in Polynomialzeit (many-one-)reduzieren lässt, wenn die Bedingung $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ für alle $x \in \Sigma^*$ erfüllt ist und die Funktion f *polynomialzeit-berechenbar* ist. Letzteres bedeutet, dass ein Algorithmus mit polynomialer Laufzeit

existiert, welcher für eine beliebige Eingabe $x \in \Sigma^*$ den Funktionswert $f(x)$ berechnet. Folgt man dem Paradigma, dass Algorithmen mit einer polynomiellen Laufzeit effizient sind und deren Laufzeit damit vernachlässigbar ist, dann kann man sagen, dass ein Problem B mindestens so schwer wie ein Problem A ist, wenn sich A auf B in Polynomialzeit reduzieren lässt. Kommen wir nun zu den beiden Problemen VERTEX COVER und INDEPENDENT SET zurück. Dadurch, dass wir von beiden Problemen auf das jeweils andere Problem reduzieren können, ist jedes der Probleme jeweils mindestens so schwer wie das andere. Somit gelten beide Probleme als gleich schwer. Können wir jedes Problem der Klasse NP im obigen Sinne auf ein Problem A reduzieren, so nennen wir A NP-hart. Liegt das Problem A zusätzlich selbst in NP, so wird A als NP-vollständig bezeichnet.

Cook [16] und Levin [45] zeigten unabhängig voneinander, dass das Problem SATISFIABILITY NP-vollständig ist. Damit war SATISFIABILITY das erste bekannte NP-harte und damit auch NP-vollständige Problem. Da Cook und Levin bei ihren Reduktionen von beliebigen Problemen aus NP ausgehen mussten, ist deren Konstruktion entsprechend abstrakt. Dank ihres Resultats kann jedoch seitdem auf dieses abstrakte Vorgehen verzichtet werden, wenn es darum geht die NP-Härte eines Problems nachzuweisen. Da die Relation der polynomiellen many-one Reduzierbarkeit transitiv ist, reicht es seitdem aus, beim Beweis der NP-Härte eines Problems B eine Reduktion durchzuführen, bei der man ein beliebiges NP-hartes Problem A auf B reduziert.

Für die oben betrachteten Probleme VERTEX COVER und INDEPENDENT SET bewies Karp [44], dass diese NP-vollständig sind. Eine umfangreiche Liste weiterer NP-vollständiger Probleme ist im Buch von Garey und Johnson [33] zu finden.

Bei der unüberschaubaren Menge aller Probleme in NP und der Vielzahl an Forschern, die sich mit der Optimierung von Algorithmen zu diesen Problemen beschäftigen, scheint es äußerst unwahrscheinlich, dass es sich bei P und NP um die gleichen Problemklassen handelt.

2.2 PARAMETRISIERTE KOMPLEXITÄTSTHEORIE

Hat man es mit einem NP-harten Problem zu tun, so ist dieses je nach Anwendungsfall oft dennoch gut handhabbar. Ist man beispielsweise bei dem Problem VERTEX COVER ausschließlich an Überdeckungen der Größe k interessiert, wobei k eine vorher fest gewählte Konstante ist, so zeigen Chen et al. [13], dass es einen Algorithmus mit einer Laufzeit in $\mathcal{O}(kn + 1.274^k)$ gibt, welcher das Problem löst. Insbesondere sehen wir, dass das Problem dann effizient lösbar ist. Wie bei VERTEX COVER, kann man bei vielen NP-vollständigen Problemen beobachten, dass die Härte des Problems auf einen gewissen Parameter zurückzuführen ist. Die parametrisierte Komplexitätstheorie beschäftigt sich genau mit

diesem Phänomen und bietet eine feinere Gliederung innerhalb der Klasse der NP-harten Probleme.

Diese Theorie wurde Ende 90er Jahre von Downey und Fellows [20] entwickelt und stattet Probleme, welche bereits aus der klassischen Komplexitätstheorie bekannt sind, mit einem zusätzlichen Parameter aus. So gibt es zu einem Problem aus der klassischen Komplexitätstheorie in der Regel mehrere zugehörige, parametrisierte Probleme. Formal gesehen ist ein parametrisiertes Problem eine Teilmenge $L \subset \Sigma^* \times \mathbb{N}$, welche auch als Sprache bezeichnet wird. Dabei steht die erste Komponente für ein Problem aus der klassischen Komplexitätstheorie. Die zweite Komponente bezeichnen wir als Parameter. Bei dem Studium einer parametrisierten Version eines Entscheidungsproblems stellen wir dem Problemnamen ein "p" voran.

Suchen wir nun einen Algorithmus für ein parametrisiertes Problem, so nehmen wir an, dass der Parameter fest gesetzt, also eine Konstante ist. Finden wir einen Algorithmus, der entscheidet, ob $(x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$ eine Ja-Instanz eines solchen Problems ist, und hat dieser Algorithmus eine Laufzeit in $\mathcal{O}(f(k) \cdot |x|^{\mathcal{O}(1)})$, so nennen wir das Problem *fixed parameter tractable*, kurz FPT. Dabei ist f eine beliebige Funktion, die nur von k abhängt. Während das Problem p -VERTEX COVER, mit der Größe der Überdeckung als Parameter, FPT ist, wird für p -INDEPENDENT SET, mit der Größe der unabhängigen Menge als Parameter, vermutet, dass das Problem nicht FPT ist.

Um nachzuweisen, dass ein parametrisiertes Problem A mindestens so schwer wie ein parametrisiertes Problem B ist, genügt es in der parametrisierten Komplexitätstheorie nicht, einen polynomiellen Algorithmus zu finden, der eine Instanz x des Problems A in eine Instanz x' des Problems B überführt und dabei die Eigenschaft, ob es sich um eine Ja- bzw. Nein-Instanz handelt, beibehält. Stattdessen wird hier eine sogenannte *parametrisierte Reduktion* benötigt. Für zwei Sprachen $A, B \subset \Sigma^* \times \mathbb{N}$ ist eine parametrisierte Reduktion von A nach B ein Algorithmus, der eine Instanz $(x, k) \in A$ auf eine Instanz $(x', k') \in B$ abbildet und die drei folgenden Punkte für zwei feste, berechenbare Funktionen f und g erfüllt:

1. Die Instanz (x, k) liegt genau dann in A , wenn die Instanz (x', k') in B liegt.
2. Es gilt $k' \leq g(k)$.
3. Die Laufzeit des Algorithmus liegt in $\mathcal{O}(f(k) \cdot |x|^{\mathcal{O}(1)})$.

Analog zur klassischen Komplexitätstheorie gelten für die parametrisierte Komplexitätstheorie die folgenden zwei Theoreme.

Theorem. *Wenn eine parametrisierte Reduktion eines Problems A zu einem Problem B existiert und B FPT ist, dann ist auch A FPT.*

Theorem. *Wenn jeweils eine parametrisierte Reduktion eines Problems A auf ein Problem B und von B auf ein Problem C existiert, dann gibt es auch eine parametrisierte Reduktion von A nach C .*

Um ein Gefühl für diese Begriffe zu erhalten, schauen wir uns nun an, warum sich die Reduktion von INDEPENDENT SET auf VERTEX COVER nicht zu einer parametrisierten Reduktion fortsetzen lässt. Dazu erinnern wir uns zunächst daran, dass wir im Rahmen der klassischen Komplexitätstheorie bei der Reduktion von INDEPENDENT SET auf VERTEX COVER, eine INDEPENDENT SET-Instanz (\mathcal{G}, k) auf eine VERTEX COVER-Instanz $(\mathcal{G}, |V| - k)$ geschickt haben. Da der Wert $|V|$ beliebig groß im Vergleich zu k werden kann, hat das zur Folge, dass es keine Funktion g gibt, sodass $|V| - k \leq g(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und jegliche Knotenmenge V erfüllt ist. Dadurch ist der 2. Punkt der Definition einer parametrisierten Reduktion nicht erfüllt.

Wie bereits oben angedeutet, wird im Allgemeinen angenommen, dass p -INDEPENDENT SET für den Parameter *Größe der unabhängigen Menge* nicht FPT ist. Neben einem Werkzeug zur Einteilung parametrisierter Probleme in solche die FPT sind und solche die es vermutlich nicht sind, bietet die parametrisierte Komplexitätstheorie für letztere eine Möglichkeit sie in die sogenannte *W-Hierarchie* einzuordnen. Um die W-Hierarchie einzuführen, brauchen wir noch ein paar Definitionen.

Es folgt dafür ein kurzer Abschnitt, in dem wir gerichtete Graphen und einige ihrer Eigenschaften definieren.

Unter einem *gerichteten Graphen* \mathcal{G} verstehen wir ein Tupel (V, E) , wobei V eine nichtleere Menge von Knoten und $E \subset V \times V$ eine Menge von *gerichteten Kanten* ist. Sei nun $\mathcal{G} = (V, E)$ ein solcher gerichteter Graph. Wir nennen eine Folge von l Knoten $C = (v_1, \dots, v_l)$ einen *Weg*, wenn $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle $i \in \{1, \dots, l-1\}$ gilt und die Knoten paarweise verschieden sind. Die *Länge eines Weges* $C = (v_1, \dots, v_l)$ ist definiert als $l - 1$. Ein Weg $C = (v_1, \dots, v_l)$ wird auch als *Kreis* bezeichnet, falls zusätzlich die Kante $(v_l, v_1) \in E$ enthalten ist. Besitzt \mathcal{G} keinen Kreis, so nennen wir \mathcal{G} auch *kreisfrei*. Der *Eingangsgrad* eines Knotens $v \in V$ ist durch $|\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$ definiert. Analog dazu ist der *Ausgangsgrad* durch $|\{u \in V \mid (v, u) \in E\}|$ definiert.

Für die Einführung der W-Hierarchie benötigen wir noch die Definition boolescher Schaltkreise.

Ein *boolescher Schaltkreis* ist ein gerichteter, kreisfreier Graph \mathcal{G} , dessen Knoten mit einem konstanten Wahrheitswert (**true** oder **false**), einer Eingabevariablen $x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ oder einer booleschen Operation \wedge, \vee und \neg markiert sind. Die Knoten werden entsprechend nach ihrer Markierung **true**-, **false**-, x_i -, \wedge -, \vee - oder \neg -Gatter benannt. Die x_i -Gatter, sowie die **true**- und **false**-Gatter haben einen Eingangsgrad 0. Ein x_i -Gatter nennen wir auch *Eingabegatter*. Während die \neg -Gatter einen Eingangsgrad von 1 haben, haben die \vee - und \wedge -Gatter einen Eingangsgrad von mindestens 2. Hat ein Gatter einen Ausgangsgrad von 0, so wird dieses auch als *Ausgabegatter* bezeichnet. Hat ein boolescher

Schaltkreis mehrere Ausgangsgatter so können mehrere boolesche Funktionen gleichzeitig berechnet werden.

Jede Belegung T der Variablen x_1, x_2, \dots, x_n definiert für jedes Gatter g einen Wahrheitswert $f(g) \in \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}$, der sich induktiv wie folgt definieren lässt:

- Falls g ein **true**-Gatter, **false**-Gatter bzw. x_i -Gatter ist, so ist $f(g) = \mathbf{true}, \mathbf{false}$ bzw. $T(x_i)$,
- Ist g ein \neg -Gatter und g' der Vorgänger von g , dann ist $f(g) = \mathbf{true}$, falls $f(g') = \mathbf{false}$ ist, und umgekehrt $f(g) = \mathbf{false}$, falls $f(g') = \mathbf{true}$ gilt.
- Ist g ein \wedge -Gatter (bzw. ein \vee -Gatter) und sind g_1, \dots, g_n die Vorgänger von g , dann ist $f(g) = \mathbf{true}$, falls $f(g_i) = \mathbf{true}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ (bzw. falls $f(g_i) = \mathbf{true}$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$) ist. Andernfalls gilt $f(g) = \mathbf{false}$.

Gatter in einem booleschen Schaltkreis, die einen Eingangsgrad größer als zwei haben, werden als *große Gatter* bezeichnet. Die *Weft eines booleschen Schaltkreises* ist die maximale Anzahl an großen Gattern auf einem gerichteten Weg von einem Eingangsgatter zum Ausgangsgatter. Die *Höhe eines booleschen Schaltkreises* ist die Länge eines längsten gerichteten Wegs von einem Eingang zu einem Ausgang.

Durch das wie folgt definierte, parametrisierte Problem p -WEIGHTED CIRCUIT SATISFIABILITY(t, h), können wir endlich die W -Hierarchie definieren.

p -WEIGHTED CIRCUIT SATISFIABILITY(t, h)	
Gegeben:	Ein boolescher Schaltkreis C mit Weft t , Höhe h und eine natürliche Zahl k .
Parameter:	k .
Frage:	Gibt es eine erfüllende Belegung von C mit Gewicht k ?

Das *Gewicht* einer erfüllenden Belegung ist dabei als die Anzahl der Variablen definiert, die mit dem Wahrheitswert **true** belegt werden.

Für $t \geq 1$, gehört ein parametrisiertes Problem P zur Klasse $W[t]$, falls eine parametrisierte Reduktion von P auf das Problem p -WEIGHTED CIRCUIT SATISFIABILITY(t, h) mit $h \geq 1$ existiert.

Die Komplexitätsklassen $W[t]$ für $t \geq 1$ bilden zusammen die *W-Hierarchie*.

Ein parametrisiertes Problem P heißt *W[t]-hart*, wenn für jedes Problem der Klasse $W[t]$ eine parametrisierte Reduktion auf P existiert. Liegt P zusätzlich in $W[t]$, so nennen wir P auch *W[t]-vollständig*.

Das folgende Beispiel zeigt einen booleschen Schaltkreis.

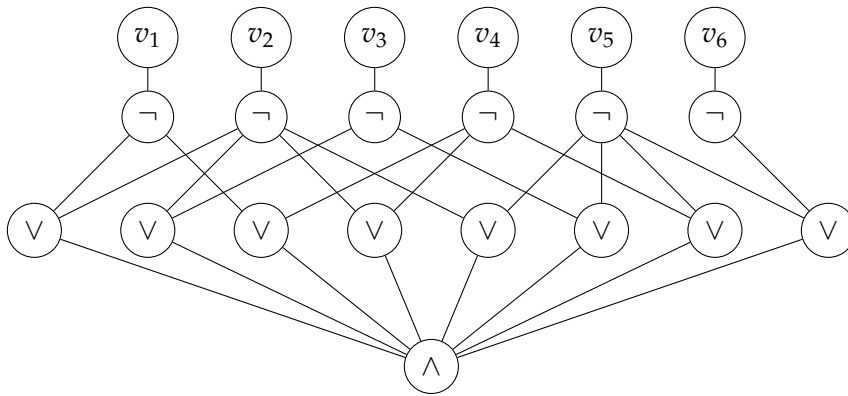


Abb. 2.5: Der boolesche Schaltkreis zur INDEPENDENT SET-Instanz aus Abschnitt 2.1

Beispiel. Die Abbildung 2.5 zeigt den booleschen Schaltkreis zur INDEPENDENT SET-Instanz aus Abschnitt 2.1.

Der boolesche Schaltkreis besitzt genau ein großes Gatter, welches hier gleichzeitig das Ausgabegatter ist, wodurch sich eine Weft von 1 ergibt. Die Höhe des booleschen Schaltkreises beträgt hier 3.

Das Beispiel skizziert die Idee, wie eine parametrisierte Reduktion von p -INDEPENDENT SET auf p -WEIGHTED CIRCUIT SATISFIABILITY(1, 3) aussieht. Mit einer solchen Reduktion lässt sich nun zeigen, dass p -INDEPENDENT SET in $W[1]$ liegt. Den Nachweis der $W[1]$ -Härte erbrachten Downey und Fellows [19].

Als Quelle für dieses Kapitel dienten die Bücher von Arrow et al. [2] und Thiele [73].

Die Sozialwahltheorie ist die Theorie der kollektiven Entscheidungen. In einer Gruppe von Menschen müssen immer wieder Entscheidungen getroffen werden. So unterschiedlich verschiedene Menschen sind, so unterschiedlich können auch ihre Präferenzen über verschiedene Wahloptionen sein. Das hat zur Folge, dass eine sinnvolle Aggregation verschiedener Präferenzen in ein Wahlergebnis nicht trivial ist. Dabei reicht die Möglichkeit für das Design einer Wahlregel von der Diktatur, in der ein Einzelner die Macht besitzt alleine zu bestimmen, bis zur Einstimmigkeitsregel, wo ein Kandidat nur gewinnen kann, wenn jeder Wähler für ihn stimmt. Bis ins 12. Jahrhundert konnten im kanonischen Recht bei Personalentscheidungen Wahlen nur durch Einstimmigkeit beschlossen werden, da dies als ein Zeichen göttlichen Willens gewertet wurde. Nun ist es so, dass Diktaturen in liberalen Gesellschaften mehrheitlich abgelehnt werden und die Einstimmigkeitsregel zur Konsequenz hat, dass praktisch niemals ein Beschluss gefasst werden kann. Zwischen diesen beiden sehr extremen Wahlregeln gibt es eine Vielzahl von weiteren Wahlregeln, welche bei Wahlen auf der ganzen Welt verwendet werden.

In der Geschichte der Sozialwahltheorie haben Wissenschaftler aus verschiedenen Disziplinen wie z.B. der Philosophie, Mathematik und Ökonomie immer wieder neue Impulse gesetzt. Dabei sind Sokrates und Platon um 400 v. Chr., über Plinius den Jüngeren im 2. Jahrhundert, über Ramon Llull im 13. Jahrhundert zu Jean-Charles de Borda und Marquis de Condorcet im 18. Jahrhundert einige der prominentesten Vertreter der eben genannten Wissenschaften, die sich diesem Thema widmeten.

Trotz der langen Zeit der Forschung, wählt Frankreich, ein Land welches Deutschland nicht nur geografisch nahe steht, den französischen Präsidenten durch ein anderes Wahlverfahren als wir in Deutschland den deutschen Kanzler. Damit stellt sich die Frage, ob nicht bereits bekannt ist, dass eins der beiden Wahlverfahren besser ist oder ob es nicht ein noch besseres oder sogar perfektes Wahlsystem gäbe. Dafür müsste zuerst geklärt werden, wie man Wahlregeln miteinander vergleicht. Wahlregeln lassen sich hinsichtlich verschiedener Eigenschaften kategorisieren. Um eine Vorstellung davon zu erhalten, wie so eine Eigenschaft aussehen kann, betrachten wir zwei exemplarisch. Eine intuitiv sinnvolle Eigenschaft beschreibt das *Pareto-Kriterium*. Dieses besagt, dass ein Kandidat a nicht zu den Gewinnern der Wahl

gehören darf, wenn es einen Kandidaten b gibt, der von jedem Wähler gegenüber a bevorzugt wird. Eine andere wünschenswerte Eigenschaft beschreibt das Kriterium *Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen*. Damit eine Wahlregel diese Eigenschaft erfüllt muss für eine gegebene Wahl das Folgende gelten. Angenommen an dieser Wahl nehmen die Kandidaten a, b und möglicherweise weitere Kandidaten teil und Kandidat a gewinnt die Wahl. Wiederholen wir nun diese Wahl und lassen einen zusätzlichen Kandidaten c an der Wahl teilnehmen, während alle Wähler ihre alte Präferenz bezüglich der anderen Kandidaten beibehalten und nur den Kandidaten c in ihrer Präferenz einordnen, so garantiert die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen, dass b kein Gewinner der Wahl ist.

Nun könnte man prüfen, welches Wahlsystem mehr wünschenswerte Eigenschaften erfüllt. Wenn eine Wahlregel A nur eine echte Teilmenge der wünschenswerten Eigenschaften einer Wahlregel B erfüllt, so ist sicherlich die Wahlregel B zu bevorzugen. Wenn die beiden Wahlregeln allerdings unterschiedliche wünschenswerte Eigenschaften erfüllen, dann ist ein Vergleich wohl eher nur subjektiv bewertbar. Ein perfektes Wahlsystem wäre vermutlich eines, welches alle wünschenswerten Eigenschaften erfüllt. Während in der Anfangszeit der Sozialwahltheorie Wahlregeln einzeln auf Eigenschaften geprüft wurden, so wird in der modernen Sozialwahltheorie auch der Zusammenhang verschiedener Eigenschaften unabhängig von einzelnen Wahlregeln untersucht. Die moderne Sozialwahltheorie erfährt als wissenschaftliche Disziplin in der Mitte des 20. Jahrhunderts ihre Anfangsphase. Eines der wichtigsten und zugleich enttäuschendsten Resultate aus dieser Zeit stammt von Arrow [1]. Er bewies, dass eine Wahlregel, welche das Pareto-Kriterium und das Kriterium der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen erfüllt automatisch eine Diktatur ist. Dieses Resultat ist eines von mehreren sogenannten Unmöglichkeitsergebnissen, welche aussagen, dass gewisse wünschenswerte Eigenschaften nur innerhalb einer Diktatur gemeinsam realisiert werden können. Die Frage nach der Existenz eines perfekten Wahlsystems lässt sich daher sicherlich mit nein beantworten. Das hat zur Folge, dass Gesellschaften, die nicht in einer Diktatur leben wollen, stets gezwungen sind positive Eigenschaften einer Wahl derart zu gewichten, dass diese durch ein Wahlsystem realisiert werden können.

Die Computational Social Choice ist ein noch recht junges Forschungsgebiet, welches aus der Sozialwahltheorie und der Informatik entstanden ist. Hierbei ist es vor allem die theoretische Informatik, die eine neue Perspektive auf viele Probleme der Sozialwahltheorie bietet. Ein gutes Beispiel für diese neu gewonnene Perspektive steht im Zusammenhang mit dem Gibbard-Satterthwaite-Theorem. Dieses ist neben Arrows Theorem ein weiteres Unmöglichkeitsergebnis, welches das gleichzeitige Auftreten bestimmter wünschenswerter Eigenschaften von Wahlregeln ausschließt. Genauer haben Gibbard [34] und Satterthwaite [69] unabhängig voneinander bewiesen, dass es sich bei einer Wahlregel, bei der potentiell jeder Kandidat gewinnen kann und die nicht manipulierbar ist, um eine Diktatur handelt. Anders als der Begriff Manipulation zunächst vermuten lässt, gilt es in der Sozialwahltheorie bereits als Manipulation, wenn ein Wähler aus strategischen Gründen entgegen seiner eigentlichen Interessen wählt. Konfrontiert mit den Alternativen einer Diktatur und Wahlen, bei denen gewisse Kandidaten vorab als Verlierer feststehen, ist es sicherlich am einfachsten hinnehmbar, wenn Wähler das Wahlergebnis durch strategisches Wählen beeinflussen können.

Trotzdem ist strategisches Wählen natürlich nicht wünschenswert und so wurde ein Ausweg aus der Misere gesucht, welcher schließlich von Bartholdi et al. [3] gefunden wurde. Mit Hilfe der theoretischen Informatik haben sie untersucht, wie schwer es für einen unehrlichen Wähler ist die Wahl in seinem Sinne zu manipulieren. Dabei gingen sie von der Grundannahme aus, dass eine hohe Komplexität, die mit der Manipulation einhergeht, einen ausreichenden Schutz vor einer solchen Manipulation darstellt. Während also in der Sozialwahltheorie abstrakt nach der Existenz von Wahlsystemen mit gewissen Eigenschaften gesucht wird und Verbindungen zwischen diesen Eigenschaften hergeleitet werden, steht in der Computational Social Choice die Komplexität von Problemen im Vordergrund, die mit Wahlen einhergehen.

Das restliche Kapitel ist in drei Teile gegliedert. Im ersten Teil führen wir die für uns relevanten Definitionen zu Wahlen ein und schauen uns die Probleme der Gewinnerbestimmung und der Manipulation an. Im zweiten und dritten Teil beschäftigen wir uns mit der Kontrolle von Wahlen bzw. mit der Bestechung von Wählern, schauen uns verschiedene Modelle an und ordnen diese ein. Wir werden uns dabei stets an die Definitionen und Notationen aus dem Buch von Rothe [68] halten.

4.1 WAHLEN, GEWINNERBESTIMMUNG UND MANIPULATION

Wir beginnen mit der Wiederholung der wichtigsten Definitionen bezüglich Wahlen. Eine *Wahl* E wird durch ein Tupel (C, V) definiert, wobei $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ eine *Menge von Kandidaten* ist und $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ eine *Liste von Präferenzen* über die Kandidaten bezeichnet. Dabei ist eine *Präferenz*, auch *Stimme* genannt, als vollständige lineare Ordnung über der Kandidatenmenge definiert. Wir gehen also davon aus, dass die Präferenz eines jeden Wählers durch eine vollständige Rangordnung über die Kandidaten gegeben ist. Zwecks sprachlicher Vereinfachung identifizieren wir im Folgenden einen Wähler mit seiner Stimme bzw. Präferenz. Eine *Wahlregel*, auch *Wahl-system* genannt, ist eine Funktion, die jeder Wahl eine Teilmenge ihrer Kandidaten zuordnet, welche wir als die *Gewinner* der Wahl interpretieren. Eine natürliche Familie von Wahlregeln bilden die *Scoring-Protokolle*. Dabei gehört zu jedem Scoring-Protokoll ein aus einer absteigenden Folge nichtnegativer Zahlen bestehender *Scoring-Vektor* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$. Naturgemäß wird hierbei festgelegt, dass ein Kandidat, der an der i -ten Stelle einer Stimme steht, die Punktzahl α_i erhält. Wie zu erwarten, ist der Gesamtpunktstand eines Kandidaten als die Summe der Punkte definiert, die er über alle Stimmen hinweg erhält. Die Kandidaten mit dem höchsten Punktstand sind die Gewinner der Wahl. Der vielleicht prominenteste Vertreter aus der Familie der Scoring-Protokolle ist *Plurality*. Bei diesem bekommt nur der am meisten präferierte Kandidat eines Wählers einen Punkt und alle weiteren Kandidaten erhalten keinen Punkt. Deutlich mehr Punkte werden bei der Wahlregel *Veto* vergeben. Hier erhält ein Kandidat genau dann einen Punkt durch einen Wähler, wenn er nicht an der letzten Stelle der Stimme des Wählers steht. Das kann dahingehend interpretiert werden, dass jeder Wähler ein Veto an einen der Kandidaten vergeben kann. Zuletzt sei noch die Wahlregel *Borda* erwähnt, die dadurch charakterisiert wird, dass ein Kandidat für die Position i in der Präferenz eines Wählers genau $m - i$ Punkte erhält. Zu den vorgestellten Scoring-Protokollen gehören somit die Scoring-Vektoren $(1, 0, \dots, 0)$, $(1, \dots, 1, 0)$ und $(m - 1, m - 2, \dots, 1, 0)$.

Mit dem Resultat zur Manipulation von Wahlen haben Bartholdi et al. [3] einen Grundstein für das Forschungsgebiet der Computational Social Choice gelegt. Da die Manipulation von Wahlen eng verwandt mit der Kontrolle und Bestechung von Wahlen ist, wollen wir im Folgenden die Manipulation noch einmal genauer betrachten.

Das folgende Beispiel illustriert, wie Manipulation bei einer gegebenen Wahl aussehen kann.

Beispiel. Wir betrachten die Wahl $(\{a, b, c, d\}, V)$ mit der wie folgt gegebenen Liste von Präferenzen V :

$$\begin{array}{rcccc} & 3 & 2 & 1 & 0 \\ v_1 & : & a > b > c > d \\ v_2 & : & a > c > d > b \\ v_3 & : & d > c > a > b \\ v_4 & : & d > c > b > a \\ v_5 & : & c > a > b > d \end{array}$$

Die Kandidaten a , b , c und d erreichen unter Anwendung der Wahlregel Borda 9, 4, 10 bzw. 7 Punkte. Wir sehen also, dass c durch Anwendung von Borda zum Gewinner der Wahl wird.

Nehmen wir nun an, dass der Wähler v_2 in etwa weiß wie die Präferenzen der anderen Wähler aussehen. Dann könnte er statt seiner eigentlichen Präferenz die Stimme $a > d > b > c$ abgeben. In diesem Fall bekämen die Kandidaten a , b , c und d der Reihenfolge nach 9, 5, 8 und 8 Punkte. Insbesondere hätte das zur Folge, dass der von v_2 am meist präferierte Kandidat a die Wahl gewinnt. Der Wähler v_2 kann also durch Veränderung seiner Stimme die Wahl zu seinen Gunsten manipulieren.

Wie dieses Beispiel zeigt, kann die Manipulation von Wahlen für bestimmte Instanzen ziemlich einfach sein. Um eine Wahlregel zu finden, die nur schwer manipuliert werden kann, untersuchen wir das Entscheidungsproblem ε -MANIPULATION. Die Variable ε steht dabei stets für eine Wahlregel. Das Problem ist formal wie folgt definiert.

ε -MANIPULATION

Gegeben: Eine Wahl (C, V) und ein ausgewählter Kandidat $p \in C$.

Frage: Gibt es eine lineare Präferenz v , sodass p der alleinige Gewinner der Wahl ist, wenn v der Wahl hinzugefügt wird?

Ist bereits die Gewinnerbestimmung bei einer Wahl schwer, d.h. nicht effizient lösbar, dann ist natürlich auch die Manipulation schwer. Eine schwere Gewinnerbestimmung kann allerdings nicht wünschenswert sein, da es ein natürliches Interesse der Wähler ist das Wahlergebnis zeitnah zu erhalten. Das Entscheidungsproblem der Gewinnerbestimmung ist dabei wie folgt definiert.

ε -WINNER

Gegeben: Eine Wahl (C, V) und ein ausgewählter Kandidat $p \in C$.

Frage: Ist p unter Verwendung der Wahlregel ε der alleinige Gewinner der Wahl?

Wie man leicht erkennen kann, bilden Scoring-Protokolle eine Klasse von Wahlregeln, für welche die Gewinnerbestimmung effizient berechenbar ist. Hat eine Wahlregel keine effiziente Gewinnerbestimmung, so ist diese für die praktische Anwendung in den meisten Fällen nicht sinnvoll einsetzbar. Das Interesse an der Manipulation von Wahlregeln wie *Dodgson*, bei denen bereits die Gewinnerbestimmung NP-schwer ist, ist daher eher von theoretischer Natur. Den Beweis der NP-Schwere von *Dodgson-WINNER* führten Bartholdi et al. [4]. Auch bei den Problemen der Kontrolle und Bestechung von Wahlen, welche wir in den nächsten Abschnitten betrachten, soll die Schwere der Probleme jeweils nur im Angriff auf die Wahl liegen. In dieser Arbeit werden daher nur Wahlregeln untersucht, bei denen die Gewinnerbestimmung effizient lösbar ist.

Eine weitere Gemeinsamkeit zwischen der Manipulation, Kontrolle und Bestechung liegt in der Annahme, dass einem Angreifer alle Stimmen der ehrlichen Wähler bekannt sind. Wahrscheinlich hat man nur in sehr seltenen Fällen tatsächlich die vollständige Liste der Präferenzen bevor ein solcher Angriff auf die Wahl durchgeführt wird. Wir schauen uns nun verschiedene Gründe an, warum eine solche Annahme trotzdem sinnvoll ist. Den ersten Grund liefern Bartholdi et al. [3] in ihrer Arbeit bereits selbst. Sie verteidigen die Annahme damit, dass eine Manipulation, die bereits schwer ist, obwohl man das Wissen über alle Wählerstimmen hat, nicht einfacher sein kann, wenn dort noch Ungewissheiten dazukommen. Weiter lassen sich durch Wahlprognosen gute Schätzungen modellieren, welche für die Eingabe genutzt werden können und uns als zweite Rechtfertigung dieser Annahme dienen. Betrachtet man die untersuchten Probleme nicht nur als Angriffe auf eine Wahl, so kommt ein weiterer guter Grund hinzu. So lassen sich beispielsweise verschiedene Bestechungsprobleme auch als Messinstrument einsetzen, welches misst ob ein Angriff auf eine bereits ausgewertete Wahl stattgefunden haben könnte. Nach einer Wahl sind die Stimmen bekannt und können dadurch für die Berechnungen tatsächlich genutzt werden.

In der Literatur finden sich aber durchaus auch Arbeiten, in denen davon ausgegangen wird, dass nur ein Teil der Wählerliste bekannt ist. Beispiele hierfür liefern die Arbeiten von Hemaspaandra et al. [39–41], in denen die Probleme der Online Manipulation, Online Kontrolle und Online Bestechung betrachtet werden. Hier ist dem Angreifer immer nur ein Teil der Wählerliste bekannt, sodass er eine Angriffsstrategie finden muss, die unabhängig von den noch restlichen Wählerstimmen funktioniert.

In dieser Arbeit beschränken wir uns auf Probleme bei denen die gesamte Wählerliste gegeben ist.

4.2 KONTROLLE VON WAHLEN

Die Kontrolle von Wahlen ist Forschungsgegenstand in den Arbeiten aus Kapitel 5 und 6.

Unter den Begriff der *Wahlkontrolle* fallen verschiedene Szenarien, in denen beispielsweise ein Wahlleiter durch Veränderungen der Wahlstruktur Einfluss auf den Ausgang der Wahl nimmt. Wir betrachten zunächst die von Bartholdi et al. [5] definierten Kontrollprobleme, bei denen der Wahlleiter durch das

- Hinzufügen oder Löschen von Kandidaten,
- Hinzufügen oder Löschen von Wählern oder
- Einführen einer mehrstufigen Wahl

einen ausgewählten Kandidaten zum Gewinner der Wahl machen möchte. Hemaspaandra et al. [38] definierten die dazu destruktive Variante, bei welcher der Wahlleiter den Sieg eines ausgewählten Kandidaten verhindern möchte.

Im Folgenden betrachten wir die von Bartholdi et al. definierten Probleme, die mit einer mehrstufigen Wahl einhergehen. Durch die Änderung auf eine rundenbasierte bzw. mehrstufige Wahl stehen dem Wahlleiter bei der Gestaltung der Wahl eine Vielzahl an Möglichkeiten offen. Die von Bartholdi et al. definierten Probleme lassen sich in zwei Kategorien einteilen. Bei den Problemen der ersten Kategorie werden die Kandidaten in zwei Gruppen eingeteilt und müssen sich in einer Vorrunde für das Finale qualifizieren. Die Kandidaten dürfen hier in beliebiger Weise aufgeteilt werden. Die Wähler stimmen dabei in den beiden Vorrunden und im Finale gemeinsam ab. Das erste Problem, welches wir betrachten, ist ε -CONSTRUCTIVE-CONTROL-BY-RUN-OFF-PARTITION-OF-CANDIDATES-TE. Dieses ist für eine beliebige Wahlregel ε wie folgt definiert.

 ε -CONSTRUCTIVE-CONTROL-BY-RUN-OFF-PARTITION-OF-CANDIDATES-TE

Gegeben: Eine Wahl (C, V) und ein ausgewählter Kandidat $p \in C$.

Frage: Gibt es eine Partition von C in C_1 und C_2 , sodass p der alleinige Sieger der zweistufigen Wahl ist, in der (bezüglich der Stimmen aus V) die Gewinner der Vorwahlen (C_1, V) und (C_2, V) , die in ihrer Vorwahl jeweils die Gleichstandsbrechungsregel TE (ties eliminate) überstehen, gegeneinander antreten?

Ein ähnliches Problem ergibt sich, wenn wir die Gleichstandsbrechungsregel TE durch TP (ties promote) ersetzen. Bei Anwendung dieser Regel dürfen alle Gewinner einer Vorwahl am Finale teilnehmen. Dieses zweite Problem nennt sich ε -CONSTRUCTIVE-CONTROL-BY-RUN-OFF-PARTITION-OF-CANDIDATES-TP. Eine zusätzliche Variante der

beiden Probleme ergibt sich, wenn es lediglich eine Vorwahl (C_1, V) gibt und die Kandidaten der Gruppe C_2 direkt ins Finale einziehen. Diese Probleme nennen sich ε -CONSTRUCTIVE-CONTROL-BY-PARTITION-OF-CANDIDATES-TE und ε -CONSTRUCTIVE-CONTROL-BY-PARTITION-OF-CANDIDATES-TP. Das erinnert an manche Sportveranstaltungen, in denen topgesetzte Spieler oder Teams keine Vorrundenspiele bestreiten müssen. Alle vier definierten Probleme gibt es auch in einer destruktiven Version. Hier möchte der Wahlleiter nun verhindern, dass der ausgewählte Kandidat als alleiniger Sieger aus der Wahl hervorgeht. Dabei ist es bei einer Ja-Instanz ausreichend, dass ein anderer Kandidat ein Gewinner der Wahl wird. Im Namen dieser Probleme ändert sich in diesem Fall das Wort CONSTRUCTIVE zu DESTRUCTIVE.

Alle definierten Problem sind im sogenannten *unique-winner* Modell formuliert. Daneben existiert noch das *nonunique-winner* Modell. Dabei ist im konstruktiven Fall das Problem so definiert, dass es für den ausgewählten Kandidaten ausreicht ein Gewinner neben möglicherweise mehreren Gewinnern zu sein. Im destruktiven Fall muss entsprechend verhindert werden, dass der ausgewählte Kandidat zu den Gewinnern der Wahl zählt.

Hemaspaandra et al. [37, Thm. 8, S. 386] haben gezeigt, dass die erzeugten Sprachen zu den Problemen ε -DESTRUCTIVE-CONTROL-BY-RUN-OFF-PARTITION-OF-CANDIDATES-TP und ε -DESTRUCTIVE-CONTROL-BY-PARTITION-OF-CANDIDATES-TP im nonunique-winner Modell für jede Wahlregel ε identisch sind. Selbiges gilt für die Sprachen zu den beiden Problemen ε -DESTRUCTIVE-CONTROL-BY-RUN-OFF-PARTITION-OF-CANDIDATES-TE und ε -DESTRUCTIVE-CONTROL-BY-PARTITION-OF-CANDIDATES-TE, welche im unique-winner als auch im nonunique-winner Modell übereinstimmen. Damit umfasst diese erste Kategorie der von uns betrachteten Kontrollprobleme effektiv 13 verschiedene Probleme.

Kommen wir nun zu der zweiten Kategorie, der von uns betrachteten Kontrollprobleme. Bei dieser wird nun die Wählermenge in zwei Wählergruppen aufgeteilt. Beide Wählergruppen ermitteln jeweils unabhängig voneinander die Sieger, der durch sie definierten Vorrunden. Anschließend müssen sich die Gewinner der beiden Vorrunden in einem gemeinsamen Finale dem Voting aller Wähler stellen. Wie schon bei der Partitionierung der Kandidatenmenge, können auch bei der Partitionierung der Wählermenge unterschiedliche Varianten betrachtet werden. Das folgende Entscheidungsproblem ε -CONSTRUCTIVE-CONTROL-BY-PARTITION-OF-VOTERS-TE präzisiert eine davon.

 ε -CONSTRUCTIVE-CONTROL-BY-PARTITION-OF-VOTERS-TE

Gegeben: Eine Wahl (C, V) und ein ausgewählter Kandidat $p \in C$.

Frage: Gibt es eine Partition von V in V_1 und V_2 , sodass p der alleinige Sieger der Wahl ist, in der die Gewinner der Vorwahlen (C, V_1) und (C, V_2) , die in ihrer Vorwahl jeweils die Gleichstandsbrechungsregel TE überstehen, gegeneinander antreten?

Durch die Alternativen, die sich aus der Betrachtung des destruktiven Falls, der Änderung auf das nonunique-winner Modell oder der Anwendung der Gleichstandsbrechungsregel TP ergeben, erhalten wir insgesamt acht Probleme zur Partitionierung der Wählermenge.

Für reale Anwendungen lassen sich die Probleme der Partitionierung der Wählermenge in der hier angegebenen Form kaum anwenden. Grund dafür ist die hohe Flexibilität, die dem Wahlleiter bei der Partitionierung gewährt wird. So darf beispielsweise die Bevölkerungszahl eines Wahlkreises für die Bundestagswahl maximal um 15 Prozent von der durchschnittlichen Bevölkerungszahl der Wahlkreise abweichen¹. Es sei jedoch erwähnt, dass es durchaus auch Anwendungsbeispiele gibt, bei denen es ein großes Ungleichgewicht zwischen der Größe zweier Wählergruppen gibt. So etwa, wenn eine der Gruppen aus einem Expertenkomitee zusammengesetzt ist, welches naturgemäß deutlich weniger Mitglieder enthält.

Die von Bartholdi et al. und Hemaspaandra et al. definierten Probleme wurden bereits für eine Vielzahl von Wahlregeln untersucht. Zu nennen sind dabei unter anderem die Arbeiten von Erdélyi et al. [24], Erdélyi et al. [26], Faliszewski et al. [29], Neveling und Rothe [61, 62], Menton [56] sowie Menton und Singh [57].

Darüber hinaus wurden in einer Vielzahl von Arbeiten verwandte Modelle definiert und für diverse Wahlregeln analysiert. So definierten Erdélyi et al. [25] drei neuen Probleme zur Partitionierung der Wählermenge. Diese sind von der Modellierung her sehr ähnlich zu der von Bartholdi et al. definierten Version, versuchen jedoch durch unterschiedliche Einschränkungen bei der Partitionierung reale Gegebenheiten zu modellieren. Ein weiteres Problem zeichnet sich dadurch aus, dass die Menge der Wähler auch in mehr als zwei Gruppen aufgeteilt werden kann. Schließlich wird noch das Problem definiert, dass nur ganze Wählergemeinschaften in eine von zwei Gruppen sortiert werden können. In den Arbeiten von Borodin et al. [7], Cohen-Zemach et al. [15] und Ito et al. [42] werden Graphen für eine geografische Einordnung der Wähler genutzt, sodass die beim Gerrymandering üblichen örtlichen Einschränkungen bei der Partitionierung der Wählermenge berücksichtigt werden können. Ein anderer Ansatz, um örtliche Gegebenheiten einzubinden, wurde von Lewenberg et al. [46]

¹ Nach § 3 Abs. 1 Satz 1 Nr. 2, 3 und 5 Bundeswahlgesetz (BWG).

verfolgt. Dabei betten sie eine Wahl in den \mathbb{R}^2 ein und lassen eine Einteilung in verschiedene Wahldistrikte nur indirekt durch die Platzierung von Wahllokalen zu. Ein Wähler muss dann am ihm nächstgelegenen Wahllokal abstimmen. Die Platzierung von Wahllokalen hat noch weitere Auswirkungen auf die Wahl. Umso weiter weg oder umso schwieriger das nächste Wahllokal zu erreichen ist, umso eher ist davon auszugehen, dass einige Wähler ihr Wahlrecht nicht in Anspruch nehmen. Genau dieser Umstand wird in der Arbeit von Fitzsimmons und Lev [32] untersucht.

4.3 BESTECHUNG VON WAHLEN

In Kapitel 7 wird die Bestechung von Wahlen untersucht. Neben der Manipulation und der Kontrolle von Wahlen ist Bestechung eine weitere unerwünschte Form der Einflussnahme auf eine Wahl. Während allerdings die Manipulation und die Kontrolle von Wahlen als Probleme bereits Ende der 80er Jahre bzw. Anfang der 90er Jahre definiert und untersucht wurden, wurde die Bestechung erst Mitte der 2000er Jahre von Faliszewski et al. [27] definiert. Das erste dort definierte Bestechungsproblem ist ε -BRIBERY und wurde für eine Wahlregel ε wie folgt definiert.

ε -BRIBERY	
Gegeben:	Eine Wahl (C, V) , ein ausgewählter Kandidat $p \in C$ und eine natürliche Zahl k .
Frage:	Ist es möglich durch Bestechung von höchstens k Wählern p zum Gewinner der Wahl zu machen?

Wird ein Wähler bestochen, so kann dessen Stimme auf beliebige Weise verändert werden. Damit stellt ε -BRIBERY eine gewisse Verallgemeinerung des Manipulationsproblems ε -MANIPULATION dar. In der selben Arbeit definieren die Autoren das Problem ε -BIBERY, welches ε -BRIBERY noch weiter verallgemeinert. Hier wird angenommen, dass jeder Wähler einen individuellen Preis für die Änderung seiner Stimme verlangt und einem Angreifer zusätzlich ein Budget zum Bestechen zur Verfügung steht.

Diese Probleme wurden seitdem in vielen weiteren Arbeiten für verschiedene Wahlregeln untersucht, wie etwa in den Arbeiten von Xia [74], Lin [47], Brelsford et al. [11], Faliszewski et al. [31], Faliszewski et al. [28] und Reisch et al. [65].

Seit der Formulierung des ersten Bestechungsproblems hat sich die Bestechung genau wie die Manipulation und Kontrolle als eigenständiger Zweig innerhalb der Computational Social Choice entwickelt. Zu der Untersuchung von verschiedenen Wahlregeln hinsichtlich der vorgestellten Bestechungsprobleme wurden eine Reihe weiterer interessanter Bestechungsprobleme definiert und untersucht.

Ein besonders interessantes Problem ist SWAP-BRIBERY, welches von Elkind et al. [23] definiert wurde und eine Verallgemeinerung des Problems MICROBRIBERY von Faliszewski et al. [29] darstellt. Hier kann die Stimme eines Wählers im Allgemeinen nicht durch eine feste Geldeinheit beliebig geändert werden. Stattdessen hat jeder Wähler eine Kostenfunktion, welche für jedes Paar von Kandidaten angibt wie viel eine Verstauchung dieses Paares (auch Swap genannt) kostet. Die Gesamtkosten für die Transformation der ehrlichen Stimme eines Wählers in die veränderte Stimme ergeben sich dann aus der Summe der Kosten der Swaps, welche für diese Transformation benötigt werden. Eine positivere Interpretation ergibt sich, wenn man das SWAP-BRIBERY Problem, wie weiter oben erwähnt, als Messinstrument für das Abschneiden einzelner Kandidaten bei einer Wahl verwendet. Die Anzahl der Swaps, die ein Kandidat benötigt um eine gegebene Wahl zu gewinnen, kann als Maß genutzt werden um zu bestimmen wie knapp dieser Kandidat vom Sieg entfernt ist. Besonders interessant ist diese Art des Vergleichs für Wahlregeln, bei welchen den Kandidaten am Ende der Wahl kein Punktestand zugeordnet werden kann, wie etwa bei rundenbasierten Wahlregeln.

Ein Spezialfall von SWAP-BRIBERY ist SHIFT-BRIBERY, welches ebenfalls in der Arbeit von Elkind et al. [23] definiert wurde. Hier darf sich in einer Stimme nur die Position vom ausgewählten Kandidaten relativ zu der Position der anderen Kandidaten verändern. Auch dieses Problem lässt eine positive Betrachtungsweise zu. So kann ein Wahlteam eine vollzogene Wahl analysieren und planen, wie sie in der nächsten Wahl werben müssen oder welche Versprechen an die Wähler gegeben werden müssen um künftig besser abzuschneiden. Ähnlich wie bei den zuvor diskutierten Kontrollproblemen lassen sich auch Bestechungsprobleme in einer destruktiven Variante definieren, in der es darum geht einen ausgewählten Kandidaten am Sieg der Wahl zu hindern. Die destruktive Version von SHIFT-BRIBERY wurde zuerst von Kaczmarczyk und Faliszewski [43] definiert. In Kapitel 7 widmen wir uns diesem Problem sowohl in der konstruktiven als auch in der destruktiven Version für verschiedene iterative Wahlregeln.

Das Problem SHIFT-BRIBERY wurde für viele Wahlregeln hinsichtlich der klassischen und parametrisierten Komplexitätstheorie sowie mittels Approximationsalgorithmen untersucht. Zu nennen sind dabei unter anderem die Arbeiten von Boehmer et al. [6], Schlotter et al. [70], Elkind und Faliszewski [21], Faliszewski et al. [30], sowie von Bredereck et al. [9]. Eine weitere Richtung bei der Untersuchung von SHIFT-BRIBERY haben Elkind et al. [22] eingeschlagen, indem sie das Problem im Hinblick auf Stimmen untersucht haben, die als *single-peaked* oder *single-crossing* bezeichnet werden, worauf wir hier jedoch nicht im Detail eingehen werden.

Nah verwandt zum SHIFT-BRIBERY Problem ist das COMBINATORIAL SHIFT-BRIBERY Problem, welches Bredereck et al. [10] definierten. Ge-

nau wie beim SHIFT-BRIBERY Problem darf sich hier nur die Position des ausgewählten Kandidaten relativ zu der Position der anderen Kandidaten ändern. Um den Einfluss von Werbung zu modellieren, werden hier jedoch hauptsächlich Eingriffe betrachtet durch die mehrere Wähler gleichzeitig beeinflusst werden. Eine sicherlich nicht ganz unproblematische Annahme, welche wir bei den bisher vorgestellten Bestechungsvarianten getätigt haben, ist, dass jeder Wähler für eine bestimmte Summe bereit ist, den ausgewählten Kandidaten an eine beliebige Position seiner Stimme zu setzen. Um diese Annahme abzuschwächen, definieren Dey et al. [18] das Problem FRUGAL BRIBERY. Hier ist die Bestechung nur möglich, wenn der ausgewählte Kandidat in der Gunst des zu bestechenden Wählers ohnehin weiter vorne steht als der zu erwartende Gewinner der Wahl. Einer ähnlichen Logik folgen Yang et al. [75] bei ihren Untersuchungen zum BRIBERY Problem, indem sie die zusätzliche Einschränkung einführen, dass sich die veränderte Stimme nicht zu sehr von der echten Stimme unterscheiden darf. Schließlich sei noch die Arbeit von Chen et al. [14] erwähnt, in welcher eine BRIBERY-Instanz mit einem Budget für einen Verteidiger ausgestattet wird. Dieser soll die Wähler durch eine Zahlung dazu motivieren sich gegen etwaige Bestechungsversuche zu widersetzen und bei ihrer ehrlichen Stimme zu bleiben. In gewisser Weise findet sich dieser Ansatz bei der Entlohnung diverser Mandatsträger wieder. Der Kritik, dass diese oft zu üppig sei, wird gerne mit dem Argument begegnet, dass die Entscheidungen der Mandatsträger so vor äußeren Einflüssen geschützt werden soll.

KONTROLLE BEI VETO- UND PLURALITY-WAHLEN

In diesem Kapitel wird die Komplexität verschiedener Kontrollprobleme für Veto- und Plurality-Wahlen untersucht. Die Arbeit wurde in der Fachzeitschrift [53] veröffentlicht:

C. Maushagen und J. Rothe. „Complexity of Control by Partitioning Veto Elections and of Control by Adding Candidates to Plurality Elections“. In: *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 82.4 (2018), S. 219–244.

Die Arbeit umfasst und erweitert Resultate aus der bei ECAI 2016 veröffentlichten Arbeit [50] und der bei AAMAS 2017 veröffentlichten Arbeit [52].

5.1 ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit untersuchen wir die Wahlregeln Veto und Plurality hinsichtlich verschiedener Kontrollprobleme, welche von Bartholdi et al. [5] und Hemaspaandra et al. [38] eingeführt wurden.

Im ersten Teil der Arbeit betrachten wir für die Wahlregel Veto die Kontrollprobleme zur Partitionierung der Kandidaten und Partitionierung der Wähler, welche im Abschnitt 4.2 definiert wurden. Es zeigt sich, dass die Kontrollprobleme zur Partitionierung der Wählermenge effizient lösbar sind, wenn als Gleichstandsbrechungsregel TE genutzt wird. Dieses Ergebnis gilt dabei sowohl für den konstruktiven als auch für den destruktiven Fall, sowie für das unique-winner Modell und das nonunique-winner Modell. Alle anderen untersuchten Kontrollprobleme bezüglich der Partitionierung der Wähler- oder Kandidatenmenge sind ebenfalls NP-vollständig.

Im zweiten Teil der Arbeit wenden wir uns der Wahlregel Plurality zu. Hier betrachten wir das Kontrollproblem des Hinzufügens von Kandidaten. Dieses ist wie folgt definiert.

 ε -CONSTRUCTIVE-CONTROL-BY-ADDING-CANDIDATES

Gegeben: Eine Menge C und eine Menge D von Kandidaten, $C \cap D = \emptyset$, eine Liste V von Wählern über $C \cup D$, ein ausgezeichnete Kandidat $p \in C$ und eine natürliche Zahl $k \leq |D|$.

Frage: Gibt es eine Teilmenge $D' \subset D$ mit $|D'| \leq k$, sodass p unter dem Wahlsystem ε die Wahl $(C \cup D', V)$ gewinnt?

Dieses Problem wurde bereits zuvor in der Arbeit von Chen et al. [12] behandelt, welche das Problem hinsichtlich seiner parametrisier-

ten Komplexität analysieren. Dabei haben die Autoren untersucht, welchen Einfluss das Festhalten des Parameters *Anzahl der Wähler* auf die Komplexität verschiedener Kontrollprobleme hat. Der dort angegebene Beweis für die $W[1]$ -Härte für Plurality ist fehlerhaft. Dieser Umstand wird in unserer Arbeit aufgezeigt und analysiert. Zudem konnten wir durch eine Änderung der dort angegebenen Konstruktion einen vollständigen Beweis der $W[1]$ -Härte angeben.

5.2 EIGENER ANTEIL

Die Arbeit wurde zusammen mit Jörg Rothe geschrieben. Die technischen Teile der Arbeit sind mir zuzuschreiben.

Wie das vorangegangene Kapitel 5, behandelt dieses Kapitel Kontrollprobleme bezüglich der Partitionierung der Kandidaten- und Wählermenge. Im Fokus der zugrunde liegenden Arbeit steht die Wahlregel Maximin. Die Arbeit wurde in den Proceedings zu ECAI 2020 [54] veröffentlicht:

C. Maushagen und J. Rothe. „The Last Voting Rule Is Home: Complexity of Control by Partition of Candidates or Voters in Maximin Elections“. In: *Proceedings of the 24th European Conference on Artificial Intelligence*. IOS Press, 2020, S. 163–170.

6.1 ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit betrachten wir die Wahlregel Maximin und untersuchen diese hinsichtlich verschiedener Kontrollprobleme, welche von Bartholdi et al. [5] und Hemaspaandra et al. [38] eingeführt wurden. Dabei wird Maximin mit Hilfe des *Maximin-Scores* eines Kandidaten definiert. Dieser ergibt sich aus der Anzahl der Wähler, welche diesen Kandidaten gegenüber seinem stärksten Kontrahenten im paarweisen Vergleich bevorzugen. Die Kandidaten mit dem höchsten Maximin-Score gewinnen die Wahl. Kurz gesagt gewinnt der Kandidat, dessen schlechtester paarweiser Vergleich besser ist als der aller anderen Kandidaten.

Die so definierte Wahlregel wurde bereits von Faliszewski et al. [28] für diverse Kontrollprobleme untersucht. Weitere Kontrollprobleme zu Maximin wurden von der Autorin zusammen mit Rothe [50] hinsichtlich ihrer Komplexität klassifiziert. In dieser Arbeit untersuchen wir die damals noch offen gebliebenen Kontrollprobleme, welche die Partitionierung der Kandidaten- und Wählermenge betreffen. Dabei beweisen wir, dass alle untersuchten Kontrollprobleme für Maximin NP-vollständig sind.

6.2 EIGENER ANTEIL

Die Arbeit wurde zusammen mit Jörg Rothe geschrieben. Die technischen Teile der Arbeit sind mir zuzuschreiben.

6.3 KORRIGENDUM

Im Beweis von Theorem 4.1 zur NP-Härte von Maximin-CCPV-TP und Maximin-DCPV-TP ist ein Argumentationsfehler aufgetreten. Dieser befindet sich im zweiten Teil des Beweises, wo angenommen wird, dass eine Nein-Instanz zu X_3C vorliegt.

Es wird im Beweis behauptet, dass bei einer Vorwahl in der ein Kandidat $b \in B$ gewinnt, höchstens 13 Wähler teilnehmen können. Bei einer Vorwahl an der nun allerdings alle $2k$ Wähler mit einer Präferenz der Form $Bdwp$ teilnehmen, gewinnt offensichtlich ein Kandidat $b \in B$ und für $k \geq 7$ haben wir stets mehr als 13 Wähler.

Stattdessen muss im Beweis wie folgt argumentiert werden:

Angenommen ein Kandidat $b \in B$ gewinnt eine Vorwahl, oBdA können wir annehmen, dass dies die Vorwahl (C, V_1) ist. Da der Punktstand eines Kandidaten $b \in B$ höchstens 7 sein kann, können höchstens 7 Wähler mit einer Stimme der Form $w \dots$ an dieser Vorwahl teilnehmen. Damit nehmen also mindestens $6k - 9$ Wähler mit einer Stimme der Form $w \dots$ an der zweiten Vorwahl (C, V_2) teil, wodurch der Punktstand von w mindestens $6k - 9$ beträgt. Die Kandidaten $b \in B$ können weiterhin höchstens einen Punktstand von 7 erreichen, p höchstens $2k + 1$ und d höchstens $4k + 1$. Der Kandidat w bleibt also der alleinige Sieger der zweiten Vorwahl und der gesamten Wahl.

SHIFT-BRIBERY

In diesem Kapitel wird die Komplexität für das Bestechungsproblem SHIFT-BRIBERY hinsichtlich verschiedener iterativer Wahlregeln untersucht. Die Arbeit wurde bei der Fachzeitschrift [48] eingereicht:

C. Maushagen, M. Neveling, J. Rothe und A. Selker. „Complexity of Shift Bribery in Iterative Elections“. Manuscript submitted to *Journal of Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*.

Teile dieser Arbeit wurden bereits in einer früheren Arbeit mit den selben Autoren bei AAMAS 2018 [49] veröffentlicht.

7.1 ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Kapitel untersuchen wir das Bestechungsproblem SHIFT-BRIBERY, welches von Elkind et al. [23] eingeführt wurde. Alle untersuchten Wahlregeln verbindet, dass diese rundenbasiert sind und in jeder Runde eine der drei Wahlregeln Plurality, Veto oder Borda genutzt wird, um einen Punktestand zu ermitteln. Die Unterschiede in den Wahlregeln ergeben sich aus der Festlegung, wann ein Kandidat an der nächsten Runde teilnehmen darf. Die von uns untersuchten Wahlregeln lassen sich in vier Gruppen aufteilen. Zur ersten Gruppe gehören die Wahlregeln *Hare*, *Coombs* und *Baldwin*, welche Plurality, Veto bzw. Borda zur Berechnung des Scores nutzen. Bei jeder dieser Wahlregeln scheiden die Kandidaten mit dem niedrigsten Punktestand solange aus, bis alle übrig gebliebenen Kandidaten einen Gleichstand erzielen. Die zweite Gruppe umfasst nur die Wahlregel *Nanson*, welche wie Baldwin in jeder Runde Borda verwendet um einen Punktestand zu ermitteln. Allerdings dürfen hier nur solche Kandidaten an der nächsten Runde teilnehmen, deren erzielter Borda-Score größer ist als der durchschnittliche Borda-Score dieser Runde. Die Wahlregeln *Iterated Plurality* und *Iterated Veto* bilden die dritte Gruppe von uns untersuchten Wahlregeln. Hier können Kandidaten nur an der nächsten Runde teilnehmen, wenn sie zu den Plurality- bzw. Veto-Gewinnern gehören. Bei der letzten Gruppe von Wahlregeln, welche *Plurality with runoff* und *Veto with runoff* umfasst, gibt es im Gegensatz zu den zuvor definierten Wahlregeln immer nur genau zwei Runden. Hier kommen die Kandidaten mit höchsten Plurality- bzw. Veto-Score in die finale zweite Runde und der Plurality- bzw. Veto-Sieger der zweiten Runde gewinnt die gesamte Wahl. Gibt es in der ersten Runde nur einen Plurality- bzw. Veto-Sieger so kommen alle Kandidaten mit den zweitmeisten Punkten auch ins Finale. In der Literatur gibt es

zu diesen Wahlregeln verschiedene Varianten, die sich dahingehend unterscheiden, dass Gleichstandsbrechungsregeln genutzt werden, damit in jeder Runde genau ein Kandidat ausscheidet. Die von uns gewählten Definitionen orientieren sich an dem Buch von Taylor [72]. Wir zeigen, dass das Problem SHIFT-BRIBERY für alle untersuchten Wahlregeln NP-vollständig ist.

7.2 EIGENER ANTEIL

Die Arbeit wurde zu gleichen Teilen zusammen mit meinen Koautoren geschrieben. Die Beweise zu den Theoremen 1, 3, 4, 9 und 10 sind mir zuzuschreiben.

Wir wollen die Ergebnisse dieser Arbeit hier noch einmal kurz zusammenfassen. Darüber hinaus schauen wir uns offene Fragen an, die sich bei den untersuchten Problemen ergeben haben und diskutieren welche Richtung eine weiterführende Forschung einschlagen könnte.

In dieser Arbeit haben wir verschiedene Wahlregeln hinsichtlich diverser Kontroll- und Bestechungsprobleme untersucht. Dabei haben wir die Komplexität dieser Probleme aus der Sicht der klassischen und parametrisierten Komplexitätstheorie analysiert und in den meisten Fällen Ergebnisse in Form von Vollständigkeitsresultaten erhalten.

Teile dieser Ergebnisse wurden durch die Lektüre eines von Brandt et al. [8] verfassten Standardwerks der Computational Social Choice motiviert. In dem darin enthaltenen Kapitel zur Wahlkontrolle ist eine Übersichtstabelle dargestellt, welche für eine prominente Auswahl an Wahlregeln aufführt, wie diese sich gegenüber den von Bartholdi et al. [5] sowie Hemaspaandra et al. [38] eingeführten Kontrollproblemen verhalten. Bei Betrachtung dieser Tabelle sticht einem ins Auge, dass für die Wahlregeln Borda und Maximin noch eine Vielzahl von Ergebnissen fehlt.

Für die Wahlregel Borda haben Neveling und Rothe [61, 62] diese Lücke schließen können. Für die Wahlregel Maximin sind in der Übersichtstabelle alle Einträge bezüglich der Partitionierung der Kandidatenmenge und der Partitionierung der Wählermenge leer.

In Kapitel 6 haben wir für die Kontrollprobleme zur Partitionierung der Wählermenge die NP-Vollständigkeit für die Wahlregel Maximin nachweisen können. Bei den Kontrollproblemen zur Partitionierung der Kandidatenmenge konnten wir für die konstruktive Variante die NP-Vollständigkeit nachweisen. Zusammen mit den Ergebnissen aus der Arbeit von Maushagen und Rothe [51], wird durch die Arbeit aus Kapitel 6 die Lücke für Maximin komplett geschlossen.

Eine Wahlregel, die trotz ihrer Popularität nicht in die besagte Übersichtstabelle aufgenommen wurde, ist Veto. Nichtsdestotrotz lassen sich in der Literatur bereits einige Resultate für Veto finden, so etwa in der Arbeit von Lin [47]. Wie schon bei Maximin blieb jedoch die Frage offen, wie sich Veto gegenüber der Partitionierung der Kandidaten- und Wählermenge verhält. In Kapitel 5 haben wir uns der Beantwortung dieser Frage gewidmet. Für die Partitionierung der Kandidatenmenge haben wir gezeigt, dass alle untersuchten Varianten NP-vollständig sind. Bei den Problemen zur Partitionierung der Wählermenge ergab sich ein differenzierteres Bild. Hier hängen die Ergebnisse von der jeweils genutzten Gleichstandsbrechungsregel ab.

Wird bei einem Problem die Regel TE, also ties eliminate, genutzt, so ist dieses effizient lösbar. Bei Nutzung der Regel TP, also ties promote, ist das Problem NP-vollständig.

Nicht zuletzt wegen der Bedeutung, welche die oben erwähnte Übersichtstabelle aus dem Handbook of Computational Social Choice [8] auf die vorliegende Arbeit hatte, sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass es noch vier Tabelleneinträge gibt, die auf noch offene Fragestellungen hinweisen. Zum einen ist da die Wahlregel Schulze, für welche Parkes und Xia [64], sowie Menton und Singh [57] verschiedene Kontrollprobleme hinsichtlich ihrer Komplexität klassifiziert haben. Übrig geblieben sind dabei die drei Kontrollprobleme DESTRUCTIVE-CONTROL-BY-DELETING-CANDIDATES, DESTRUCTIVE-CONTROL-BY-ADDING-AN-UNLIMITED-NUMBER-OF-CANDIDATES, sowie DESTRUCTIVE-CONTROL-BY-ADDING-CANDIDATES. Menton und Singh gehen in ihrer Arbeit davon aus, dass die Probleme wahrscheinlich effizient lösbar sind. Bisher konnte dies allerdings noch nicht bewiesen werden. Beim letzten noch offenen Tabelleneintrag handelt es sich um das Problem DESTRUCTIVE-CONTROL-PARTITION-OF-VOTERS-TP für die Wahlregel Bucklin. Dieses Problem ist bei der Arbeit von Erdélyi et al. [24] noch offen geblieben und stellt, wie die zuvor erwähnten Probleme, einen natürlichen Anknüpfungspunkt für die in der vorliegenden Arbeit getätigte Forschung dar.

Neben den bereits erwähnten Ergebnissen zur klassischen Komplexitätstheorie, haben wir in Kapitel 5 ein Resultat zur parametrisierten Komplexitätstheorie erhalten. Genauer haben wir das Problem CONSTRUCTIVE-CONTROL-BY-ADDING-CANDIDATES für die Wahlregel Plurality betrachtet. Der in der Literatur angegebene Beweis zur $W[1]$ -Härte von Chen et al. [12] erwies sich als fehlerhaft. Diesen Umstand haben wir analysiert und die $W[1]$ -Härte mit einem neuen Beweis nachgewiesen.

In Kapitel 7 haben wir das Bestechungsproblem SHIFT-BRIBERY für insgesamt acht iterative Wahlregeln betrachtet. Dabei konnten wir für jede untersuchte Wahlregel zeigen, dass das Problem SHIFT-BRIBERY sowohl in der konstruktiven als auch in der destruktiven Variante NP-vollständig ist.

Allen Fällen gemeinsam war hierbei, dass der Nachweis der NP-Vollständigkeit bezüglich eines Typs von Preisfunktion geführt wurde. Als natürliche Frage ergibt sich, ob das Problem durch andere Preisfunktionen effizient lösbar wird.

Eine grundsätzliche Beobachtung aus der Komplexitätstheorie ist, dass sich durch den Nachweis der NP-Vollständigkeit eines Problems oft weitere, interessante Forschungsansätze eröffnen, wie etwa das Studium der parametrisierten Komplexität dieses Problems. Im Falle der in Kapitel 7 vorgestellten Arbeit [48] wurde dieser Pfad von Zhou und Guo [76] eingeschlagen. Sie haben für die Wahlregeln Hare, Coombs, Baldwin und Nanson eine parametrisierte Komplexitätsanalyse für

verschiedene Parameter durchgeführt. Sie untersuchten, welchen Einfluss das Festhalten der Parameter *Anzahl der Kandidaten*, *Anzahl der Wähler* und *Anzahl der Swap-Vertauschungen* auf die Komplexität des Problems hat. Für den Parameter Anzahl der Kandidaten hat sich dabei ergeben, dass die entsprechenden Probleme für alle betrachteten Wahlregeln sowohl in der konstruktiven als auch in der destruktiven Variante effizient lösbar sind. Wird hingegen die Anzahl der Swap-Vertauschungen fixiert, so zeigen die Autoren, dass die resultierenden Probleme $W[1]$ -hart sind. Offen geblieben sind jedoch weiterhin einige Probleme, die sich durch das Festhalten des Parameters Anzahl der Wähler ergeben und stellen somit einen natürlichen Anknüpfungspunkt für eine weitergehende Forschung dar.

Unabhängig von den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit, lässt sich feststellen, dass die Computational Social Choice ein sich schnell entwickelndes Forschungsgebiet ist.

Eine spannende Richtung ergibt sich bei der Betrachtung von iterativen Wahlen. Hier geht man davon aus, dass mehrere Wähler unabhängig voneinander strategisch wählen. Hier ist es häufig der Fall, dass die Wähler nur ein eingeschränktes Wissen über das Stimmungsbild haben und beispielsweise Informationen durch ein Umfrageinstitut erhalten. Wähler können dann iterativ ihre Stimme updaten und eine beste Antwortstrategie auf die momentane Situation abgeben. Hier kann man Fragen nach der Konvergenz eines solchen iterativen Prozess stellen oder beispielsweise betrachten, was passiert wenn das Umfrageinstitut versucht durch falsche Angaben die Wahl zu beeinflussen. Einen Überblick über einige Resultate zu diesem Thema kann man in dem Übersichtsartikel von Meir [55] finden.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] K. Arrow. *Social Choice and Individual Values*. John Wiley und Sons, 1951 (revised edition 1963).
- [2] K. Arrow, A. Sen und K. Suzumura, Hrsg. *Handbook of Social Choice and Welfare*. Bd. 1. North-Holland, 2002.
- [3] J. Bartholdi III, C. Tovey und M. Trick. „The Computational Difficulty of Manipulating an Election“. In: *Social Choice and Welfare* 6.3 (1989), S. 227–241.
- [4] J. Bartholdi III, C. Tovey und M. Trick. „Voting Schemes for Which it Can Be Difficult to Tell Who Won the Election“. In: *Social Choice and Welfare* 6.2 (1989), S. 157–165.
- [5] J. Bartholdi III, C. Tovey und M. Trick. „How Hard Is It to Control an Election?“ In: *Mathematical and Computer Modelling* 16.8/9 (1992), S. 27–40.
- [6] N. Boehmer, R. Bredereck, P. Faliszewski und R. Niedermeier. *On the Robustness of Winners: Counting Briberies in Elections*. Techn. Ber. arXiv:2010.09678v1. ACM Computing Research Repository (CoRR), Okt. 2020.
- [7] A. Borodin, O. Lev, N. Shah und T. Strangway. „Big City vs. the Great Outdoors: Voter Distribution and How It Affects Gerrymandering.“ In: *Proceedings of the 27th International Joint Conference on Artificial Intelligence*. ijcai.org, 2018, S. 98–104.
- [8] F. Brandt, V. Conitzer, U. Endriss, J. Lang und A. Procaccia, Hrsg. *Handbook of Computational Social Choice*. Cambridge University Press, 2016.
- [9] R. Bredereck, J. Chen, P. Faliszewski, A. Nichterlein und R. Niedermeier. „Prices Matter for the Parameterized Complexity of Shift Bribery“. In: *Information and Computation* 251 (2016), S. 140–164.
- [10] R. Bredereck, P. Faliszewski, R. Niedermeier und N. Talmon. „Large-Scale Election Campaigns: Combinatorial Shift Bribery“. In: *Journal of Artificial Intelligence Research* 55 (2016), S. 603–652.
- [11] E. Brelsford, P. Faliszewski, E. Hemaspaandra, H. Schnoor und I. Schnoor. „Approximability of Manipulating Elections“. In: *Proceedings of the 23rd AAAI Conference on Artificial Intelligence*. AAAI Press, 2008, S. 44–49.
- [12] J. Chen, P. Faliszewski, R. Niedermeier und N. Talmon. „Elections with Few Voters: Candidate Control Can Be Easy“. In: *Proceedings of the 29th AAAI Conference on Artificial Intelligence*. AAAI Press, Jan. 2015, S. 2045–2051.

- [13] J. Chen, I. Kanj und G. Xia. „Improved Parameterized Upper Bounds for Vertex Cover“. In: *Proceedings of the 31st International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*. Springer-Verlag *Lecture Notes in Computer Science* #4162, 2006, S. 238–249.
- [14] L. Chen, L. Xu, S. Xu, Z. Gao, N. Shah, Y. Lu und W. Shi. „Protecting Election from Bribery: New Approach and Computational Complexity Characterization“. In: *Proceedings of the 17th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*. IFAAMAS, Juli 2018, S. 1894–1896.
- [15] A. Cohen-Zemach, Y. Lewenberg und J. Rosenschein. „Gerrymandering over Graphs“. In: *Proceedings of the 17th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*. IFAAMAS, Juli 2018, S. 274–282.
- [16] S. Cook. „The Complexity of Theorem-Proving Procedures“. In: *Proceedings of the 3rd ACM Symposium on Theory of Computing*. ACM Press, 1971, S. 151–158.
- [17] M. Cygan, F. Fomin, L. Kowalik, D. Lokshtanov, D. Marx, M. Pilipczuk, M. Pilipczuk und S. Saurabh. *Parameterized Algorithms*. Bd. 5. 4. Springer, 2015.
- [18] P. Dey, N. Misra und Y. Narahari. „Frugal Bribery in Voting“. In: *Theoretical Computer Science* 676 (2017), S. 15–32.
- [19] R. Downey und M. Fellows. „Fixed-Parameter Tractability and Completeness II: On Completeness for $W[1]$ “. In: *Theoretical Computer Science* 141.1 (1995), S. 109–131.
- [20] R. Downey und M. Fellows. *Parameterized Complexity*. 2nd. Springer-Verlag, 2013.
- [21] E. Elkind und P. Faliszewski. „Approximation Algorithms for Campaign Management“. In: *Proceedings of the 6th International Workshop on Internet & Network Economics*. Springer-Verlag *Lecture Notes in Computer Science* #6484, Dez. 2010, S. 473–482.
- [22] E. Elkind, P. Faliszewski, S. Gupta und S. Roy. „Algorithms for Swap and Shift Bribery in Structured Elections“. In: *Proceedings of the 19th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*. IFAAMAS, Mai 2020, S. 366–374.
- [23] E. Elkind, P. Faliszewski und A. Slinko. „Swap Bribery“. In: *Proceedings of the 2nd International Symposium on Algorithmic Game Theory*. Springer-Verlag *Lecture Notes in Computer Science* #5814, Okt. 2009, S. 299–310.
- [24] G. Erdélyi, M. Fellows, J. Rothe und L. Schend. „Control Complexity in Bucklin and Fallback Voting: A Theoretical Analysis“. In: *Journal of Computer and System Sciences* 81.4 (2015), S. 632–660.

- [25] G. Erdélyi, E. Hemaspaandra und L. Hemaspaandra. „More Natural Models of Electoral Control by Partition“. In: *Proceedings of the 4th International Conference on Algorithmic Decision Theory*. Springer-Verlag *Lecture Notes in Artificial Intelligence* #9346, Sep. 2015, S. 396–413.
- [26] G. Erdélyi, M. Nowak und J. Rothe. „Sincere-Strategy Preference-Based Approval Voting Fully Resists Constructive Control and Broadly Resists Destructive Control“. In: *Mathematical Logic Quarterly* 55.4 (2009), S. 425–443.
- [27] P. Faliszewski, E. Hemaspaandra und L. Hemaspaandra. „How Hard Is Bribery in Elections?“ In: *Journal of Artificial Intelligence Research* 35 (2009), S. 485–532.
- [28] P. Faliszewski, E. Hemaspaandra und L. Hemaspaandra. „Multimode Control Attacks on Elections“. In: *Journal of Artificial Intelligence Research* 40 (2011), S. 305–351.
- [29] P. Faliszewski, E. Hemaspaandra, L. Hemaspaandra und J. Rothe. „Llull and Copeland Voting Computationally Resist Bribery and Constructive Control“. In: *Journal of Artificial Intelligence Research* 35 (2009), S. 275–341.
- [30] P. Faliszewski, P. Manurangsi und K. Sornat. „Approximation and Hardness of Shift-Bribery“. In: *Proceedings of the 33rd AAAI Conference on Artificial Intelligence*. AAAI Press, Juli 2019, S. 1901–1908.
- [31] P. Faliszewski, Y. Reisch, J. Rothe und L. Schend. „Complexity of Manipulation, Bribery, and Campaign Management in Bucklin and Fallback Voting“. In: *Journal of Autonomous Agents and Multi-Agent Systems* 29.6 (2015), S. 1091–1124.
- [32] Z. Fitzsimmons und O. Lev. „Selecting Voting Locations for Fun and Profit“. In: *Proceedings of the 29th International Joint Conference on Artificial Intelligence*. ijcai.org, Juli 2020, S. 224–230.
- [33] M. Garey und D. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, 1979.
- [34] A. Gibbard. „Manipulation of Voting Schemes“. In: *Econometrica* 41.4 (1973), S. 587–601.
- [35] F. Gurski, I. Rothe, J. Rothe und E. Wanke. *Exakte Algorithmen für schwere Graphenprobleme*. eXamen.Press. Springer-Verlag, 2010.
- [36] S. Heinzelmann. „Der Sieg des Salamanders“. In: *Süddeutsche Zeitung* (17. Mai 2010). URL: <https://www.sueddeutsche.de/politik/wahl-ohne-ueberraschung-der-sieg-des-salamanders-1.841593> (besucht am 07. 11. 2020).

- [37] E. Hemaspaandra, L. Hemaspaandra und C. Menton. „Search versus Decision for Election Manipulation Problems“. In: *stacs13*. Bd. 20. LIPIcs. Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, Feb. 2013, S. 377–388.
- [38] E. Hemaspaandra, L. Hemaspaandra und J. Rothe. „Anyone But Him: The Complexity of Precluding an Alternative“. In: *Artificial Intelligence* 171.5–6 (2007), S. 255–285.
- [39] E. Hemaspaandra, L. Hemaspaandra und J. Rothe. „The Complexity of Online Manipulation of Sequential Elections“. In: *Journal of Computer and System Sciences* 80.4 (2014), S. 697–710.
- [40] E. Hemaspaandra, L. Hemaspaandra und J. Rothe. „The Complexity of Online Voter Control in Sequential Elections“. In: *Journal of Autonomous Agents and Multi-Agent Systems* 31.5 (2017), S. 1055–1076.
- [41] E. Hemaspaandra, L. Hemaspaandra und J. Rothe. „The Complexity of Online Bribery in Sequential Elections“. In: *Proceedings of the 17th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge*. Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science #297, Juli 2019, S. 233–251.
- [42] T. Ito, N. Kamiyama, Y. Kobayashi und Y. Okamoto. „Algorithms for gerrymandering over graphs“. In: *Proceedings of the 18th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*. IFAAMAS, Mai 2019, S. 1413–1421.
- [43] A. Kaczmarczyk und P. Faliszewski. „Algorithms for Destructive Shift Bribery“. In: *Proceedings of the 15th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*. IFAAMAS, Mai 2016, S. 305–313.
- [44] R. Karp. „Reducibility among Combinatorial Problems“. In: *Complexity of Computer Computations*. Hrsg. von R. Miller und J. Thatcher. Plenum Press, 1972, S. 85–103.
- [45] L. Levin. „Universal Sorting Problems“. In: *Problemy Peredaci Informacii* 9 (1973). In Russian. English translation in *Problems of Information Transmission*, 9:265–266, 1973, S. 115–116.
- [46] Y. Lewenberg, O. Lev und J. Rosenschein. „Divide and Conquer: Using Geographic Manipulation to Win District-Based Elections“. In: *Proceedings of the 16th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*. IFAAMAS, Mai 2017, S. 624–632.
- [47] A. Lin. „Solving Hard Problems in Election Systems“. Diss. Rochester, NY, USA: Rochester Institute of Technology, März 2012.
- [48] C. Maushagen, M. Neveling, J. Rothe und A. Selker. „Complexity of Shift Bribery in Iterative Elections“. Manuscript submitted to *Journal of Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*.

- [49] C. Maushagen, M. Neveling, J. Rothe und A. Selker. „Complexity of Shift Bribery in Iterative Elections“. In: *Proceedings of the 17th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*. A preliminary version was presented at ISAIM 2018. IFAAMAS, Juli 2018, S. 1567–1575.
- [50] C. Maushagen und J. Rothe. „Complexity of Control by Partitioning Veto and Maximin Elections and of Control by Adding Candidates to Plurality Elections“. In: *Proceedings of the 22nd European Conference on Artificial Intelligence*. A preliminary version was presented at ISAIM 2016. IOS Press, Aug. 2016, S. 277–285.
- [51] C. Maushagen und J. Rothe. „Complexity of Control by Partitioning Veto and Maximin Elections“. In: *Nonarchival website proceedings of the 14th International Symposium on Artificial Intelligence and Mathematics*. Jan. 2016. URL: http://isaim2016.cs.virginia.edu/papers/ISAIM2016_Maushagen_Rothe.pdf.
- [52] C. Maushagen und J. Rothe. „Complexity of Control by Partition of Voters and of Voter Groups in Veto and Other Scoring Protocols“. In: *Proceedings of the 16th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*. IFAAMAS, 2017, S. 615–623.
- [53] C. Maushagen und J. Rothe. „Complexity of Control by Partitioning Veto Elections and of Control by Adding Candidates to Plurality Elections“. In: *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 82.4 (2018), S. 219–244.
- [54] C. Maushagen und J. Rothe. „The Last Voting Rule Is Home: Complexity of Control by Partition of Candidates or Voters in Maximin Elections“. In: *Proceedings of the 24th European Conference on Artificial Intelligence*. IOS Press, 2020, S. 163–170.
- [55] R. Meir. „Iterative voting“. In: *Trends in Computational Social Choice*. Hrsg. von U. Endriss. AI Access Foundation, 2017. Kap. 4, S. 69–86.
- [56] C. Menton. „Normalized Range Voting Broadly Resists Control“. In: *Theory of Computing Systems* 53.4 (2013), S. 507–531.
- [57] C. Menton und P. Singh. „Control Complexity of Schulze Voting“. In: *Proceedings of the 23rd International Joint Conference on Artificial Intelligence*. AAAI Press/IJCAI, Aug. 2013, S. 286–292.
- [58] P. Middelhoff. „Ist die US-Wahl gezinkt?“ In: *Zeit Online* (28. Okt. 2016). URL: <https://www.zeit.de/politik/ausland/2016-10/betrugsvorwurf-usa-wahlen-praesidentschaft-donald-trump/komplettansicht> (besucht am 07. 11. 2020).
- [59] S. Misteli. „Obama geht auf Salamanderjagd“. In: *Neue Zürcher Zeitung* (2. Okt. 2017). URL: <https://www.nzz.ch/international/barack-obama-macht-wieder-politik-ld.1319540> (besucht am 07. 11. 2020).

- [60] E. Müller. „Ich zieh mir die Grenze, wie sie mir gefällt ...“ In: *Frankfurter Rundschau* (23. Okt. 2020). URL: <https://www.fr.de/politik/gerrymandering-in-den-usa-ich-zieh-mir-die-grenze-wie-sie-mir-gefaellt-90079071.html> (besucht am 07. 11. 2020).
- [61] M. Neveling und J. Rothe. „Closing the Gap of Control Complexity in Borda Elections: Solving Ten Open Cases“. In: *Proceedings of the 18th Italian Conference on Theoretical Computer Science*. Bd. 1949. CEUR-WS.org, Sep. 2017, S. 138–149.
- [62] M. Neveling und J. Rothe. „Solving Seven Open Problems of Offline and Online Control in Borda Elections“. In: *Proceedings of the 31st AAAI Conference on Artificial Intelligence*. AAAI Press, Feb. 2017, S. 3029–3035.
- [63] C. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Second. Addison-Wesley, 1995.
- [64] D. Parkes und L. Xia. „A Complexity-of-Strategic-Behavior Comparison between Schulze’s Rule and Ranked Pairs“. In: *Proceedings of the 26th AAAI Conference on Artificial Intelligence*. AAAI Press, Juli 2012, S. 1429–1435.
- [65] Y. Reisch, J. Rothe und L. Schend. „The Margin of Victory in Schulze, Cup, and Copeland Elections: Complexity of the Regular and Exact Variants“. In: *Proceedings of the 7th European Starting AI Researcher Symposium*. IOS Press, Aug. 2014, S. 250–259.
- [66] H. Riemenschneider. „Münster künftig in drei Wahlkreise geteilt“. In: *Westfälische Nachrichten* (7. Nov. 2020). URL: <https://www.wn.de/Muenster/4308866-Gesetzentwurf-Muenster-kuenftig-in-drei-Wahlkreise-geteilt> (besucht am 07. 01. 2021).
- [67] J. Rothe. *Komplexitätstheorie und Kryptologie: Eine Einführung in Kryptokomplexität*. Springer-Verlag, 2008.
- [68] J. Rothe, Hrsg. *Economics and Computation. An Introduction to Algorithmic Game Theory, Computational Social Choice, and Fair Division*. Springer Texts in Business and Economics. Springer-Verlag, 2015.
- [69] M. Satterthwaite. „Strategy-Proofness and Arrow’s Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions“. In: *Journal of Economic Theory* 10.2 (1975), S. 187–217.
- [70] I. Schlotter, P. Faliszewski und E. Elkind. „Campaign Management under Approval-Driven Voting Rules“. In: *Proceedings of the 25th AAAI Conference on Artificial Intelligence*. AAAI Press, Aug. 2011, S. 726–731.

- [71] F. Steffens. „Eine Demokratie mit Macken“. In: *Frankfurter Allgemeine* (27. Jan. 2018). URL: <https://www.faz.net/aktuell/politik/von-trump-zu-biden/usa-streit-ueber-gerrymandering-und-das-wahlssystem-15414307.html> (besucht am 07. 11. 2020).
- [72] A. Taylor. *Social Choice and the Mathematics of Manipulation*. Cambridge University Press, 2005.
- [73] C. Thiele. *Regeln und Verfahren der Entscheidungsfindung innerhalb von Staaten und Staatenverbindungen: Staats- und kommunalrechtliche sowie europa- und völkerrechtliche Untersuchungen*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [74] L. Xia. „Computing the Margin of Victory for Various Voting Rules“. In: *Proceedings of the 13th ACM Conference on Electronic Commerce*. ACM Press, Juni 2012, S. 982–999.
- [75] Y. Yang, Y. Shrestha und J. Guo. „On the Complexity of Bribery with Distance Restrictions“. In: *Theoretical Computer Science* 760 (2019), S. 55–71.
- [76] A. Zhou und J. Guo. „Parameterized Complexity of Shift Bribery in Iterative Elections“. In: *Proceedings of the 19th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*. IFAAMAS, Mai 2020, S. 1665–1673.

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

ENTSPRECHEND §5 DER PROMOTIONSORDNUNG VOM 15.06.2018

Ich versichere an Eides Statt, dass die Dissertation von mir selbständig und ohne unzulässige fremde Hilfe unter Beachtung der „Grundsätze zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf“ erstellt worden ist.

Des Weiteren erkläre ich, dass ich eine Dissertation in der vorliegenden oder in ähnlicher Form noch bei keiner anderen Institution eingereicht habe.

Teile dieser Arbeit wurden bereits in den folgenden Schriften veröffentlicht oder zur Begutachtung eingereicht: [50], [52], [53], [54], [49] und [48].

Düsseldorf, Februar 2021

Cynthia Maushagen