Magnus-Eigenschaft und Freiheitssätze für Gruppen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Carsten Michael Feldkamp
aus Düsseldorf

Düsseldorf, Januar 2020

Aus dem Institut für Mathematik
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Gedruckt mit Genehmigung
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Berichterstatter:

1. Prof. Dr. Oleg Bogopolski

2. Prof. Dr. Benjamin Klopsch

Tag der mündlichen Prüfung: 29.05.2020

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere an Eides statt, dass diese Dissertation von mir selbstständig und ohne unzulässige fremde Hilfe unter Beachtung der „Grundsätze zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf“ erstellt worden ist.

Zusammenfassung

Das Ziel dieser Dissertation besteht in der Untersuchung diverser Gruppen auf Magnus-Eigenschaft sowie in der Entwicklung von Freiheitssätzen.

Eine Gruppe G besitzt die *Magnus-Eigenschaft*, wenn für alle Elemente r, $s \in G$ mit demselben normalen Abschluss in G gilt, dass r in G zu s oder s^{-1} konjugiert ist. Die Magnus-Eigenschaft ist nach W. Magnus benannt, welcher diese Eigenschaft im Jahr 1930 für freie Gruppen beliebigen Rangs zeigte. In derselben Arbeit bewies W. Magnus auch den sogenannten *Freiheitssatz*: Sei F eine freie Gruppe mit Basis $\mathcal{X}$ und v ein zyklisch gekürztes Element von F, welches ein Basiselement $x \in \mathcal{X}$ enthält, dann enthält auch jedes nichttriviale Element aus dem normalen Abschluss von v in F das Basiselement x. Äquivalent zu dieser Aussage ist, dass die von $\mathcal{X}\backslash\{x\}$ erzeugte freie Gruppe kanonisch in die Faktorgruppe $F/\langle\langle v \rangle\rangle_F$ einbettet. Allgemein verstehen wir unter einem *Freiheits-* oder *Einbettungssatz* für eine Gruppe H einen Satz, welcher unter bestimmten Voraussetzungen an H, an eine Untergruppe $U \subset H$ sowie an ein Element $w \in H$ die kanonische Einbettung von U in $H/\langle\langle w \rangle\rangle_H$ liefert.

In den letzten Jahrzehnten wurden nicht nur viele weitere Gruppen auf Magnus-Eigenschaft untersucht, sondern es entstanden auch weitere Freiheitssätze.

In dieser Arbeit zeigen wir analog zum Beweis des Adian–Rabin-Satzes die algorithmische Unentscheidbarkeit der Magnus-Eigenschaft für endlich präsentierbare, torsionsfreie Gruppen. Als natürliche Verallgemeinerung der Hauptresultate von [BS08] und [Fel19] beweisen wir die Magnus-Eigenschaft der Gruppen $(G \ *_{u=[a,b]} \ F(a,b)) \times C$, wobei G eine indizierbare sowie lokal indizierbare Gruppe, u ein nichttriviales Element aus G und C eine (möglicherweise triviale) Gruppe seien, so dass $G \times C$ die Magnus-Eigenschaft besitzt. Dazu führen wir eine leichte Verallgemeinerung des Freiheitssatzes von J. Howie ein und erweitern ein Resultat von M. Edjvet auf eine größere Klasse von Gruppen. In diesem Zusammenhang beweisen wir mithilfe der elementaren Theorie von Gruppen (im Sinne der Modelltheorie) die Magnus-Eigenschaft aller direkten Produkte von Limesgruppen mit der Magnus-Eigenschaft. Als Weiterentwicklung des Freiheitssatzes von Magnus beweisen wir einen Einbettungssatz für amalgamierte Produkte zweier freier Gruppen über eine maximale zyklische Untergruppe beider Faktoren. Dafür definieren und untersuchen wir mithilfe der Freiheitssätze von W. Magnus und J. Howie komplexere amalgamierte Produkte, welche wir *Baumprodukte* nennen. Das Buch „Seifert Manifolds“ von P. Orlik enthält eine Klassifikation aller Fundamentalgruppen von Seifert-Mannigfaltigkeiten. Unter den Invarianten der Klassifikation befinden sich das Geschlecht g und die Zahl r, welche als Anzahl der bei der Konstruktion der Seifert-Mannigfaltigkeit eingeklebten, nichttrivial gefaserten Tori verstanden werden kann. Unter Verwendung der Theorie kleiner Kürzungen zeigen wir u. a., dass keine Fundamentalgruppe einer orientierbaren Seifert-Mannigfaltigkeit mit $g, r \geqslant 1$ oder $r \geqslant 4$ die Magnus-Eigenschaft besitzt.

Abstract

The aim of this thesis is the examination of various groups for Magnus property as well as the development of embedding theorems.

A group G possesses the Magnus property if for every two elements r, $s \in G$ with the same normal closure in G, r is conjugate in G to s or s^{-1}. The Magnus property was named after W. Magnus who showed, in 1930, that this property holds for free groups of arbitrary rank. In the same thesis W. Magnus proved the so-called *Freiheitssatz*: Let F be a free group with basis $\mathcal{X}$ and let v be a cyclically reduced element of F which contains a basis element $x \in \mathcal{X}$, then every non-trivial element of the normal closure of v in F contains the basis element x. Equivalently, the subgroup freely generated by $\mathcal{X}\backslash\{x\}$ embeds canonically into the quotient group $F/\langle\langle v \rangle\rangle_F$. In general, we call some theorem a *Freiheitssatz* or an *embedding theorem* for a group H if, under certain conditions on H, on a subgroup $U \subset H$ and on an element $w \in H$, it gives us the canonical embedding of U in $H/\langle\langle w \rangle\rangle_H$.

Over the last decades, not only was the Magnus property of many more groups examined, but also further embedding theorems were developed.

In this thesis we show that the Magnus property is algorithmically undecidable for finitely presentable, torsion-free groups. Our proof is analogous to the proof of the Adian–Rabin Theorem. As a natural generalisation of the main theorems in [BS08] and [Fel19] we prove the Magnus property for the groups $(G \ *_{u=[a,b]} \ F(a,b)) \times C$, where G is an indicable as well as locally indicable group, u is a non-trivial element of G and C is a (possibly trivial) group such that $G \times C$ possesses the Magnus property. For this purpose we slightly generalise the Freiheitssatz of J. Howie and expand a theorem of M. Edjvet on a larger class of groups. In this context we prove the Magnus property for all direct products of limit groups that possess the Magnus property by using the elementary theory of groups (in the sense of model theory). As an advancement of the Freiheitssatz of Magnus we prove an embedding theorem for free products of two free groups with amalgamation over a maximal cyclic group in both factors. For this purpose we define and examine, with the help of the embedding theorems by W. Magnus and J. Howie, more complex amalgamated products which we call "Baumprodukte". In the book "Seifert Manifolds" by P. Orlik, there is a classification of all fundamental groups of Seifert manifolds. Among the invariants of that classification, we find the genus g and the number r which can be understood as the number of non-trivial fibered tori that are used for constructing the Seifert manifold. Applying small cancellation theory, we show for instance that no fundamental group of oriented Seifert manifolds with $g, r \geqslant 1$ or $r \geqslant 4$ possesses the Magnus property.

Inhaltsverzeichnis

Notationsverzeichnis

$\mathbb{N}$ ..... natürliche Zahlen (ohne 0)
$\mathbb{Z}_i$ ..... zyklische Gruppe der Ordnung $i \in \mathbb{N}$
F_k ..... freie Gruppe vom Rang k
$F(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ..... von a_i ($k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant k$) erzeugte freie Gruppe
$A * B$ ..... freies Produkt zweier Gruppen A und B
$A \times B$ ..... direktes Produkt zweier Gruppen A und B
$A *_C B$ ..... amalgamiertes Produkt von Gruppen A, B über eine Untergruppe C
$\langle \mathcal{G} \rangle_G$ ..... die von einer Menge $\mathcal{G} \subset G$ erzeugte Untergruppe einer Gruppe G
$\langle\langle g \rangle\rangle_G$ ..... normaler Abschluss eines Elements g in einer Gruppe G
$G/\langle\langle g \rangle\rangle$ ..... Kurzschreibweise für $G/\langle\langle g \rangle\rangle_G$
$a \sim_G b$ oder $a \sim b$ in G ..... Konjugation zweier Elemente a, b in einer Gruppe G
$a \nsim_G b$ oder $a \nsim b$ in G ..... Nicht-Konjugation zweier Elemente a, b in einer Gruppe G
$a \sim_G b^{\pm 1}$ ..... Konjugation von a in einer Gruppe G zu b oder b^{-1}
$a \nsim_G b^{\pm 1}$ ..... Nicht-Konjugation von a in einer Gruppe G zu b und b^{-1}
$a^{\pm 1}$ ..... Gruppenelement a oder a^{-1}
$A \hookrightarrow B$ ..... Monomorphismus einer Gruppe A in eine Gruppe B
$A \twoheadrightarrow B$ ..... Epimorphismus einer Gruppe A auf eine Gruppe B
$-\infty$ bzw. ∞ ..... Element mit $-\infty < i$ bzw. $\infty > i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{ggT}(a, b)$ ..... größter gemeinsamer Teiler von a, $b \in \mathbb{N}_0$ ($\mathrm{ggT}(0, b) = b$)

Einleitung

Eine Gruppe G besitzt die *Magnus-Eigenschaft*, wenn für alle Elemente r, $s \in G$ mit demselben normalen Abschluss in G gilt, dass r in G zu s oder s^{-1} konjugiert ist. Der Begriff der Magnus-Eigenschaft geht auf Wilhelm Magnus ($\star$1907 in Berlin; †1990 in New York City) zurück, welcher diese Eigenschaft im Jahr 1930 für freie Gruppen beliebigen Rangs zeigte (siehe [Mag30]).

Unabhängig voneinander bewiesen S. Adian im Jahr 1955 (siehe [Adi55]) und M. Rabin im Jahr 1958 (siehe [Rab58]) den später nach ihnen benannten Adian–Rabin-Satz (siehe Satz 1.2), welcher besagt, dass sogenannte Markov-Eigenschaften (siehe Definition 1.1) endlich präsentierbarer Gruppen nicht algorithmisch entscheidbar sind. Zu den Markov-Eigenschaften zählen viele gruppentheoretische Eigenschaften endlich präsentierbarer Gruppen wie z. B. Kommutativität, Endlichkeit oder Torsionsfreiheit. Benjamin Klopsch bemerkte, dass auch die Magnus-Eigenschaft eine Markov-Eigenschaft ist (siehe Bemerkung 1.3). Somit ist die Magnus-Eigenschaft algorithmisch unentscheidbar in der Klasse von endlich präsentierbaren Gruppen. Dieses einfache Argument funktioniert nicht in der Klasse von endlich präsentierbaren, torsionsfreien Gruppen. In Kapitel 1 zeigen wir basierend auf M. Rabins Beweis des Adian–Rabin-Satzes folgende Aussage.

Satz A. (siehe Satz 1.6) *Es existiert kein Algorithmus, welcher entscheidet, ob eine endlich präsentierbare, torsionsfreie Gruppe die Magnus-Eigenschaft besitzt oder nicht.*

Kapitel 2 widmet sich der Magnus-Eigenschaft direkter Produkte von Limesgruppen sowie von lokal indizierbaren Gruppen. Es dient vor allem der Vorbereitung auf Kapitel 3, enthält jedoch auch Resultate, welche unabhängig von Kapitel 3 betrachtet werden können. In der Masterarbeit des Autors (siehe [Fel15]) wurde bewiesen, dass direkte Produkte zweier freier Gruppen die Magnus-Eigenschaft besitzen. In Abschnitt 2.1 verallgemeinern wir dieses Resultat auf folgende Aussage.

Satz B. (siehe Satz 2.5) Sei C eine beliebige Gruppe. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(*i*) Die Gruppe $\mathbb{Z} \times C$ besitzt die Magnus-Eigenschaft.

(*ii*) Alle Gruppen $\left(\times_{i \in \mathcal{I}} L_i \right) \times C$ für eine nichtleere Indexmenge $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}$ und Limesgruppen L_i mit der Magnus-Eigenschaft besitzen die Magnus-Eigenschaft.

Zum Beweis von Satz B nutzen wir die bekannte Tatsache, dass Limesgruppen dieselbe universelle Theorie wie eine freie abelsche oder freie Gruppe endlichen Rangs besitzen (siehe Satz F.4). Im Vorfeld dieser Arbeit stellte Oleg Bogopolski die Frage, ob beliebige direkte Produkte von Limesgruppen mit der Magnus-Eigenschaft die Magnus-Eigenschaft besitzen. Der Spezialfall von Satz B für $C = \{1\}$ (siehe Korollar 2.8) beantwortet diese Frage positiv. Wir merken an, dass Korollar 2.8 auch aus [KK16, Theorem 1.1] folgt.

Beim Beweis der Magnus-Eigenschaft freier Gruppen findet der sogenannte *Freiheitssatz* Anwendung, welcher ebenfalls von W. Magnus im Jahr 1930 bewiesen wurde.

Satz 0.1. ***(Freiheitssatz von Magnus, vgl. [Mag30])*** *Seien F eine freie Gruppe beliebigen Rangs mit Basis $\mathcal{X}$ und r ein zyklisch gekürztes Element von F, welches ein Basiselement $x \in \mathcal{X}$ enthält. Dann enthält auch jedes nichttriviale Element aus dem normalen Abschluss von r in F das Basiselement x.*

Für eine beliebige Gruppe G und eine normale Untergruppe N von G dürfen wir den kanonischen Homomorphismus $\varphi\colon G \to G/N$ betrachten. Wir sagen, dass eine Untergruppe U von G *kanonisch in G/N einbettet*, falls $\varphi_{|U}$ ein Monomorphismus ist. Äquivalent zum Freiheitssatz von Magnus ist somit die Aussage, dass die von $\mathcal{X}\backslash\{x\}$ erzeugte freie Gruppe kanonisch in die Faktorgruppe $F/\langle\langle r\rangle\rangle_F$ einbettet. Allgemein bezeichnen wir ein Resultat als *Freiheits-* oder *Einbettungssatz* für eine Gruppe H im Stil von W. Magnus, falls das Resultat unter bestimmten Voraussetzungen an H, an eine Untergruppe $U \subset H$ sowie an ein Element $w \in H$ die kanonische Einbettung von U in $H/\langle\langle w\rangle\rangle_H$ liefert. In den letzten Jahrzehnten wurden nicht nur viele weitere Gruppen auf Magnus-Eigenschaft untersucht (siehe z. B. [Edj89], [Bog05], [BS08], [LT18], [Fel19]), sondern es entstanden auch weitere Freiheitssätze (siehe z. B. [Rom72], [How81], [Col04], [Juh06], [Col08], [HS09], [HS10]). An dieser Stelle möchten wir nur auf jene Verallgemeinerungen näher eingehen, die in der vorliegenden Arbeit verwendet werden oder in engem Bezug zu den Resultaten dieser Arbeit stehen. Als *Magnus-Erweiterungen* über einer Gruppe G mit der Magnus-Eigenschaft bezeichnen wir Konstruktionen, welche aus G unter vorgegebenen Bedingungen weitere Gruppen mit der Magnus-Eigenschaft bilden.

Im Jahr 1981 veröffentlichte J. Howie den Freiheitssatz für lokal indizierbare Gruppen. Dieser Freiheitssatz besagt, dass für zwei lokal indizierbare Gruppen A, B und ein Wort $r \in A * B$, welches eine gerade Länge von mindestens zwei bzgl. der Normalform des freien Produkts von A und B besitzt, kanonische Einbettungen der Faktoren A und B in $(A * B)/\langle\langle r\rangle\rangle$ existieren. In Abschnitt 2.2 führen wir eine kleine Verallgemeinerung dieses Resultats für Gruppen $(A * B) \times C$ ein, wobei C eine beliebige Gruppe und A, B lokal indizierbare Gruppen sind.

Mithilfe des Freiheitssatzes für lokal indizierbare Gruppen gelang es M. Edjvet im Jahr 1989 (siehe [Edj89]), ein Resultat zu beweisen, welches folgende Magnus-Erweiterung impliziert: Jedes freie Produkt $A * B$ von lokal indizierbaren Gruppen A, B mit der Magnus-Eigenschaft besitzt die Magnus-Eigenschaft.

Unter Zuhilfenahme unserer Verallgemeinerung von J. Howies Freiheitssatz und einiger weiterer Hilfsresultate aus Kapitel 2 beweisen wir analog zum Beweis der Magnus-Erweiterung von M. Edjvet folgendes Resultat.

Satz C. (siehe Satz 2.18) *Sei $\mathcal{J}$ eine beliebige Indexmenge und seien A_j ($j \in \mathcal{J}$) indizierbare sowie lokal indizierbare Gruppen. Weiter sei C eine Gruppe. Dann besitzt $(*_{j\in\mathcal{J}} A_j) \times C$ genau dann die Magnus-Eigenschaft, wenn alle Gruppen $A_j \times C$ ($j \in \mathcal{J}$) die Magnus-Eigenschaft besitzen.*

Im Jahr 2005 bewies O. Bogopolski unter Benutzung algebraischer Methoden, dass jede Fundamentalgruppe einer geschlossenen orientierbaren Fläche die Magnus-Eigenschaft besitzt (siehe [Bog05]). J. Howie bewies dieselbe Aussage mit topologischen Methoden (siehe [How04]). Es ist einfach zu sehen, dass Fundamentalgruppen geschlossener, nicht-orientierbarer Flächen vom Geschlecht 1 oder 2 die Magnus-Eigenschaft besitzen. Zur Untersuchung der restlichen Fundamentalgruppen von geschlossenen, nicht-orientierbaren Flächen auf Magnus-Eigenschaft bewiesen O. Bogopolski und K. Sviridov im Jahr 2008 das folgende Resultat.

Satz 0.2. ***(vgl. [BS08, Main Theorem])*** *Sei $G = \langle a, b, y_1, \ldots, y_\ell \mid [a, b]uv \rangle$, wobei $\ell \geqslant 2$. Weiter seien u, v nichttriviale, gekürzte Wörter geschrieben mit den Buchstaben $y_1, \ldots, y_\ell$, so dass u und v keine gemeinsamen Buchstaben benutzen. Dann folgt aus der Gleichheit der normalen Abschlüsse zweier beliebiger Elemente r, $s \in G$, dass r zu s oder s^{-1} konjugiert ist. Insbesondere besitzen die Fundamentalgruppen aller geschlossener, nicht-orientierbarer Flächen vom Geschlecht größer oder gleich 4 die Magnus-Eigenschaft.*

Satz 0.2 kann als Magnus-Erweiterung über die freie Gruppe $F(y_1, y_2, \ldots, y_\ell)$ aufgefasst werden. In der Masterarbeit des Autors (siehe [Fel15], [Fel19]) wurde bewiesen, dass das Teilwort uv der Relation $[a, b]uv$ aus Satz 0.2 durch ein beliebiges nichttriviales Element w, geschrieben in den Erzeugern $y_1, ..., y_\ell$ mit $\ell \geqslant 1$, ersetzt werden kann. Daraus folgt die Magnus-Eigenschaft der Fundamentalgruppen aller geschlossener, nicht-orientierbarer Flächen vom Geschlecht größer oder gleich 3 (siehe [Fel19, Corollary 1.4]). Zentral für den Beweis dieser Verallgemeinerung war die Einführung von α- und ω-Grenzen, die in abgewandelter Form auch in der vorliegenden Arbeit angewandt werden (siehe Abschnitt 3.4).

Als natürliche Verallgemeinerung von Satz 0.2 aus [BS08] sowie [Fel19, Main Theorem] auf lokal indizierbare Gruppen beweisen wir in Kapitel 3 folgende Aussage. Dabei nehmen

die durch Kapitel 2 bereitgestellten Resultate eine zentrale Rolle ein.

Satz D. (vgl. Hauptsatz 3.1) *Seien C eine beliebige Gruppe und G eine indizierbare sowie lokal indizierbare Gruppe. Weiter sei u ein nichttriviales Element in G. Dann besitzt die Gruppe*

$$(G \underset{u=[a,b]}{*} F(a,b)) \times C$$

genau dann die Magnus-Eigenschaft, wenn $G \times C$ die Magnus-Eigenschaft besitzt. Im Fall $C = \{1\}$ dürfen wir auf die Bedingung der Indizierbarkeit von G verzichten.

Das Grundprinzip bei Beweisen der Magnus-Eigenschaft im Stil von [Mag30] und [Edj89] lautet wie folgt: Für zwei beliebige Elemente r, s mit demselben normalen Abschluss in einer Gruppe G sucht man eine „Größe“ sowie einen Homomorphismus $\varphi\colon G \to \mathbb{Z}$, so dass die Darstellungen der Elemente r und s in $\ker(\varphi)$ eine echt kleinere „Größe“ besitzen. Im Allgemeinen entsprechen die normalen Abschlüsse der Elemente r, s in G den normalen Abschlüssen unendlicher Mengen $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ von Elementen in $\ker(\varphi)$. Um von $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ wieder zu einzelnen Elementen r, s zurückkehren zu können, verwendet man einen geeigneten Einbettungssatz. Dies ermöglicht den Beweis der Magnus-Eigenschaft der Gruppe G per Induktion über die gewählte „Größe“.

In [BS08] wird eine Variation des beschriebenen Grundprinzips angewandt, bei der man einen geeigneten Homomorphismus $\varphi\colon G \to \mathbb{Z}$ findet, so dass die Magnus-Eigenschaft von $\ker(\varphi)$ bereits bekannt ist. Unser Beweis von Satz D nutzt ebenfalls diese Variation des Grundprinzips.

Die Anwesenheit des direkten Faktors C in der Aussage von Satz D ermöglicht uns, Satz D auf Fundamentalgruppen spezieller orientierbarer Seifert-Mannigfaltigkeiten anzuwenden (siehe Abschnitt 3.8.2), welche nicht mit den in Kapitel 5 vorgestellten Methoden untersucht werden können. Als weitere Anwendung beweisen wir in Abschnitt 3.8 folgendes Resultat, das eine im Vorfeld dieser Arbeit gestellte Frage beantwortet.

Satz E. (siehe Korollar 3.45) *Seien $\mathcal{I}$, $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{N}$ Indexmengen. Dann besitzt die Gruppe*

$$G = \langle a_i, b_i \ (i \in \mathcal{I}),\ f_j \ (j \in \mathcal{J}) \ \mid \ [a_i, b_i] = u_i \ (i \in \mathcal{I}) \rangle,$$

wobei die u_i nichttriviale Elemente aus $\langle f_j \, (j \in \mathcal{J}) \mid \rangle$ seien, die Magnus-Eigenschaft.

In Kapitel 4 beweisen wir einen Freiheitssatz für amalgamierte Produkte freier Gruppen über eine maximale zyklische Untergruppe beider Faktoren:

Satz F. (vgl. Hauptsatz 4.1) *Sei $G := A *_U B$ ein amalgamiertes Produkt, wobei A, B freie Gruppen seien. Die amalgamierte Gruppe U sei eine maximale zyklische Untergruppe*

beider Faktoren. Wir wählen einen Erzeuger $q \in B$ von U und eine Basis $\mathcal{B}$ von B, so dass q zyklisch gekürzt bzgl. $\mathcal{B}$ ist. (Man bemerke, dass eine solche Basis immer existiert, siehe Bemerkung 4.3.) Weiter sei r ein Element aus G, dessen Normalform bzgl. G eine gerade Länge besitze und $b \in \mathcal{B}$ sei ein im Wort q enthaltenes Basiselement. Dann bettet die von $\mathcal{B}\backslash\{b\}$ erzeugte freie Gruppe kanonisch in $G/\langle\langle r \rangle\rangle$ ein.

Der Freiheitssatz von Magnus sowie die Freiheitssätze aus [How81] und [Juh06] beziehen sich jeweils auf einrelationige Produkte (engl. „one-relator products“), d. h. auf Faktorgruppen freier Produkte mit dem normalen Abschluss eines einzigen Elements des freien Produkts. Die Besonderheit unseres Freiheitssatzes ist, dass er sich auf Faktorgruppen freier Gruppen mit dem normalen Abschluss zweier Elemente der freien Gruppe bezieht. Zum Beweis führen wir komplexere amalgamierte Produkte ein, welche wir Baumprodukte nennen. Mithilfe der Freiheitssätze von W. Magnus und J. Howie beweisen wir zunächst einen Freiheitssatz für Baumprodukte, aus welchem wir den Freiheitssatz für amalgamierte Produkte folgern können. Wir gehen zudem auf die bisher noch offene Frage ein, ob unter den Bedingungen von Satz F der gesamte Faktor B in $G/\langle\langle r \rangle\rangle$ einbettet, und beweisen diese Aussage am Ende von Kapitel 4 für einen Spezialfall.

Wie bereits erwähnt, besitzen die Fundamentalgruppen aller geschlossener, orientierbarer oder nicht-orientierbarer Flächen die Magnus-Eigenschaft. Es ist natürlich zu fragen, welche anderen Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten die Magnus-Eigenschaft besitzen. Eine Frage im Vorfeld dieser Arbeit bezog sich auf die Magnus-Eigenschaft für Fundamentalgruppen von Seifert-Mannigfaltigkeiten. Das Buch „Seifert Manifolds“ von P. Orlik aus dem Jahr 1972 (siehe [Orl72]) enthält eine Klassifikation aller Fundamentalgruppen von Seifert-Mannigfaltigkeiten. Unter den Invarianten der Klassifikation befinden sich u. a. das Geschlecht g der Seifert-Mannigfaltigkeit und die Zahl r, welche als Anzahl der bei der Konstruktion der Seifert-Mannigfaltigkeit eingeklebten, nichttrivial gefaserten Tori verstanden werden kann. In Kapitel 5 untersuchen wir alle nicht zu $L := \langle x, y \mid x^3 = y^3,\ (xy)^3 = x^6 \rangle$ isomorphen Fundamentalgruppen orientierbarer Seifert-Mannigfaltigkeiten mit $r \geqslant 1$ auf Magnus-Eigenschaft. Dabei verwenden wir u. a. die Theorie kleiner Kürzungen (engl. „small cancellation theory“). Das Hauptresultat von Kapitel 5 ist eine komplette Liste aller Fundamentalgruppen orientierbarer Seifert-Mannigfaltigkeiten mit $r \geqslant 1$, welche die Magnus-Eigenschaft besitzen und nicht isomorph zu L sind. Insbesondere zeigen wir, dass keine Fundamentalgruppe einer orientierbaren Seifert-Mannigfaltigkeit mit $g, r \geqslant 1$ oder $r \geqslant 4$ die Magnus-Eigenschaft besitzt.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Oleg Bogopolski für die Themenvergabe und die Betreuung dieser Arbeit. Für die Möglichkeit, Doktorand der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf sein zu dürfen, und die Erstellung der Gutachten danke ich Herrn Prof. Dr. Oleg Bogopolski und Herrn Prof. Dr. Benjamin Klopsch.

Ganz herzlich danke ich dem gesamten Kollegium des Mathematischen Instituts für die vielen interessanten mathematischen, aber auch nicht-mathematischen Gespräche. An dieser Stelle möchte ich mich besonders bei Thomas Leßmann bedanken, der mir zudem beim Probelesen dieser Arbeit geholfen hat.

Schließlich bin ich meiner Mutter sehr dankbar, die mich von Kindheit an bis zuletzt immer wieder motiviert hat. Ich werde ihren Fleiß und ihre Unermüdlichkeit in der Familie sowie im Beruf nie vergessen.

1. Algorithmische Unentscheidbarkeit der Magnus-Eigenschaft

Im vorliegenden Kapitel beweisen wir, dass die Problemstellung, ob eine gegebene endlich präsentierbare, torsionsfreie Gruppe die Magnus-Eigenschaft besitzt, nicht algorithmisch lösbar ist.

Wir beginnen mit der Definition einer Markov-Eigenschaft für Gruppen. Als Erstes wurden Markov-Eigenschaften jedoch von Andrey Markov Jr. für Halbgruppen formuliert (siehe [Mar51]).

Definition 1.1. (vgl. [LS01, Chapter IV, Section 4]) Sei P eine Eigenschaft von endlich präsentierbaren Gruppen, welche invariant unter Anwendung von Isomorphismen ist. Wir bezeichnen die Eigenschaft P als *Markov-Eigenschaft*, falls gilt:

(1) Es existiert eine endlich präsentierbare Gruppe G_1 mit der Eigenschaft P.

(2) Es existiert eine endlich präsentierbare Gruppe G_2, welche in keine endlich präsentierbare Gruppe mit der Eigenschaft P eingebettet werden kann.

Die folgende Aussage wurde voneinander unabhängig von S. Adian im Jahr 1955 (siehe [Adi55]) und von M. Rabin im Jahr 1958 (siehe [Rab58]) bewiesen und ist daher auch als Adian–Rabin-Satz bekannt.

Satz 1.2. (vgl. [LS01, Chapter IV, Theorem 4.1]) *Sei P eine Markov-Eigenschaft. Dann existiert kein Algorithmus, welcher entscheidet, ob eine endlich präsentierbare Gruppe die Eigenschaft P besitzt oder nicht.*

Die erste Version dieses Kapitels bestand im Beweis der algorithmischen Unentscheidbarkeit der Magnus-Eigenschaft für endlich präsentierbare Gruppen analog zu M. Rabins Beweis des Adian–Rabin-Satzes. Durch die folgende Bemerkung von Benjamin Klopsch ist diese Unentscheidbarkeit jedoch bereits im Adian–Rabin-Satz enthalten.

Bemerkung 1.3. Die Magnus-Eigenschaft ist eine Markov-Eigenschaft. Als Gruppe G_1 aus Definition 1.1 wählen wir $\mathbb{Z}$. Für die Gruppe G_2 aus Eigenschaft (2) von Definition 1.1 wählen wir die alternierende Gruppe A_5 vom Grad 5. Die Gruppe A_5 ist einfach und enthält nichttriviale Elemente unterschiedlicher Ordnungen; z. B. (12)(34) und (123). Da Elemente unterschiedlicher Ordnungen nicht zueinander konjugiert sein können, besitzt A_5

nicht die Magnus-Eigenschaft. Sei G eine Gruppe, in welche G_2 eingebettet werden kann. Dann besitzen die Bilder von (12)(34) und (123) unter der Einbettung denselben normalen Abschluss in G, da sie denselben normalen Abschluss in einer Untergruppe von G besitzen. Auch die Ordnungen der beiden Elemente bleiben unter der Einbettung erhalten. Somit besitzt G nicht die Magnus-Eigenschaft und Bedingung (2) von Definition 1.1 ist erfüllt.

Verfolgt man M. Rabins Beweis des Adian–Rabin-Satzes, erhält man folgende Aussage.

Lemma 1.4. *Sei P eine Eigenschaft von endlich präsentierbaren Gruppen, welche invariant unter Anwendungen von Isomorphismen ist. Falls P die Bedingungen von Definition 1.1 erfüllt und die Gruppen G_1, G_2 aus Definition 1.1 zusätzlich torsionsfrei sind, dann existiert kein Algorithmus, welcher entscheidet, ob eine endlich präsentierbare, torsionsfreie Gruppe die Eigenschaft P besitzt.*

Im Fall der Magnus-Eigenschaft existiert mit $\mathbb{Z}$ zwar eine torsionsfreie Gruppe, welche sich als Wahl für G_1 in Definition 1.1 eignet, jedoch ist unklar, ob es eine für G_2 geeignete torsionsfreie Gruppe geben kann. Zur Diskussion dieser Frage geben wir folgendes Resultat von Denis Osin wieder.

Satz 1.5. (siehe [Osi10, Corollary 1.2]) *Jede abzählbare, torsionsfreie Gruppe kann in eine torsionsfreie, zwei-erzeugte Gruppe mit genau zwei Konjugationsklassen eingebettet werden.*

Gruppen mit genau zwei Konjugationsklassen besitzen trivialerweise die Magnus-Eigenschaft. Folglich liefert Satz 1.5 insbesondere die Einbettung einer beliebigen endlich präsentierbaren, torsionsfreien Gruppe in eine endlich erzeugte, torsionsfreie Gruppe mit der Magnus-Eigenschaft. Falls es gelingt, Satz 1.5 in unserem Spezialfall auf die Einbettung in eine nicht nur endlich erzeugte, sondern auch endlich präsentierbare torsionsfreie Gruppe zu verallgemeinern, so könnte es keine für G_2 geeignete torsionsfreie Gruppe geben.

Da also zurzeit ungeklärt ist, ob Lemma 1.4 auf die Magnus-Eigenschaft angewandt werden kann, beweisen wir die folgenden Aussage analog zu M. Rabins Beweis des Adian–Rabin-Satzes.

Satz 1.6. *Es existiert kein Algorithmus, welcher entscheidet, ob eine endlich präsentierbare, torsionsfreie Gruppe die Magnus-Eigenschaft besitzt oder nicht.*

In gleicher Weise wie [LT18] formulieren wir die folgende Definition.

Definition 1.7. Sei G eine Gruppe. Wir bezeichnen ein Paar (r, s) zweier Elemente r, $s \in G$ als *Magnus-Paar*, falls r und s denselben normalen Abschluss in G haben, aber r in G weder zu s noch s^{-1} konjugiert ist.

Bevor wir mit dem Beweis des Hauptresultats dieses Kapitels beginnen, beweisen wir ein Hilfslemma. Dafür führen wir eine weitere Definition ein. Zur Definition von Graphen von Gruppen sowie der Einbettungen α_v, ω_v verweisen wir auf Kapitel G im Anhang.

Definition 1.8. Seien $(\mathbb{G}, Y)$ ein Graph von Gruppen und v eine Ecke von Y. Weiter sei $\mathcal{E}$ die Menge aller Kanten aus Y^1 mit Anfangsecke v. Wir nennen ein Element $g \in G_v$ *isoliert*, falls g in G_v zu keinem Element einer Gruppe $\alpha_e(G_e)$ mit $e \in \mathcal{E}$ konjugiert ist.

Lemma 1.9. *Seien $(\mathbb{G}, Y)$ ein Graph von Gruppen und v eine Ecke von Y. Weiter seien r und s zwei isolierte Elemente von G_v, welche (bzgl. G_v) ein Magnus-Paar bilden. Dann ist (r, s) auch ein Magnus-Paar der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{G}, Y, v)$.*

Zusatz:

(i) *Ein isoliertes Element $w \in G_v$ ist genau dann in $\pi_1(\mathbb{G}, Y, v)$ zu einem Element aus G_v konjugiert, wenn es in G_v zu diesem Element konjugiert ist.*

(ii) *Ein isoliertes Element $w \in G_v$ ist in $\pi_1(\mathbb{G}, Y, v)$ zu keinem Element einer von G_v verschiedenen Eckengruppe konjugiert.*

Beweis. Laut Bemerkung G.3 können wir $(\mathbb{G}, Y)$ schrittweise durch Bildung von HNN-Erweiterungen und amalgamierten Produkten konstruieren. Wir starten mit der Ecke v. Dann fügen wir schrittweise ein Kantenpaar für jede HNN-Erweiterung und eine Ecke sowie ein Kantenpaar für jede Amalgamierung hinzu. Dies ermöglicht uns, den Beweis per Induktion über die gerade Anzahl der Kanten Y^1 von Y zu führen.

Für den Induktionsanfang gelte $Y^1 = \varnothing$ sowie $Y^0 = \{v\}$ und somit $\pi_1(\mathbb{G}, Y, v) = G_v$. Dann ist die gewünschte Aussage samt Zusatz trivial erfüllt.

Für den Induktionsschritt $(\mathbb{G}_Y, Y) \to (\mathbb{G}_Z, Z)$ gehe der Graph $(\mathbb{G}_Z, Z)$ unter Hinzufügen eines Kantenpaars $(e, \bar{e})$ entgegengesetzt gerichteter Kanten mit Kantengruppe G_e aus $(\mathbb{G}_Y, Y)$ hervor. Weiter sei

$$G := \pi_1(\mathbb{G}_Y, Y, v) \quad \text{und} \quad H := \pi_1(\mathbb{G}_Z, Z, v).$$

Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: Es gelte $\alpha(e), \omega(e) \in Y^0$, d. h. Z^0 enthält keine neue Ecke.
In diesem Fall erhalten wir H als HNN-Eweiterung

$$H \;=\; \langle G, t \mid t^{-1}\alpha_e(x)t \;=\; \omega_e(x) \quad (\forall x \in G_e)\rangle.$$

Aufgrund des Zusatzes der Induktionsvoraussetzung und der Voraussetzung des Lemmas ist weder r noch s in G zu einem Element aus $\alpha_e(G_e)$ oder $\omega_e(G_e)$ konjugiert. Somit dürfen wir Korollar C.5 anwenden. Wegen Korollar C.5 (2) sind r und s nicht in H zueinander konjugiert, da sie als Magnus-Paar von G nicht in G zueinander konjugiert sind. Daher ist (r, s) auch ein Magnus-Paar von H. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung liefert Korollar C.5 (2) zudem die Aussagen (i) und (ii) des Zusatzes.

Fall 2: Die Kante e sei mit einer Ecke $w \in Z^0 \backslash Y^0$ verbunden.
Da nach Konstruktion höchstens eine Ecke in $Z^0 \backslash Y^0$ existiert, erhalten wir

$$H \;\cong\; G \underset{G_e}{*} G_w.$$

O. B. d. A. gelte $\omega(e) = w$. Wir zeigen zunächst, dass weder r noch s in G zu einem Element von G_e konjugiert sind: Im Fall $\alpha(e) = v$ folgt dies aus der Voraussetzung des Lemmas zusammen mit der ersten Aussage des Zusatzes der Induktionsvoraussetzung. Für $\alpha(e) \neq v$ sind r und s wegen der zweiten Aussage des Zusatzes nicht in G zu einem Element von G_e konjugiert. Wir dürfen somit Korollar B.8 auf r und s anwenden. Da (r, s) ein Magnus-Paar von G ist, bilden r und s wegen Korollar B.8 (1) auch ein Magnus-Paar von H.

Aussage (i) des Zusatzes folgt direkt aus Korollar B.8 (1) zusammen mit Aussage (i) des Zusatzes der Induktionsvoraussetzung.

Es bleibt, Aussage (ii) des Zusatzes zu zeigen. Aufgrund von Korollar B.8 (1) und der Aussage (ii) des Zusatzes der Induktionsvoraussetzung ist w in H zu keinem Element einer von G_v und G_w verschiedenen Eckengruppe konjugiert. Zudem ist w wegen Korollar B.8 (2) auch zu keinem Element aus G_w konjugiert.

□

Schließlich beweisen wir den Hauptssatz dieses Kapitels in analoger Weise zu M. Rabins Beweis von Satz 1.2.

Beweis von Satz 1.6. Sei U eine endlich präsentierbare, torsionsfreie Gruppe mit unlösbarem Wortproblem (zur Existenz solcher Gruppen siehe [Nov58]). Weiter sei M eine endlich präsentierbare, torsionsfreie Gruppe ohne die Magnus-Eigenschaft (z. B. $\langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle$, vgl. [Bog05]). Wir fixieren ein Magnus-Paar (r, s) von M und schreiben

$$\begin{aligned} U * M &= \langle x_1, x_2, \ldots, x_m \mid h_1, h_2, \ldots, h_n \rangle, \\ G_v &:= U * M * \langle y \mid \rangle. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Da M ein Faktor des freien Produkts G_v ist, bilden r und s auch ein Magnus-Paar von G_v. Als freies Produkt torsionsfreier Gruppen ist G_v selbst torsionsfrei. Zudem ist das Wortproblem für G_v unlösbar, da der freie Faktor U ein unlösbares Wortproblem besitzt.

Wir konstruieren nun den Graphen von Gruppen $(\mathbb{G}, Y)$, wobei Y aus einem Punkt v und $m + 1$ Kanten e_0, $e_1, \ldots, e_m$ bestehe. Die Eckengruppe zu v sei die Gruppe G_v aus (1.1). Für die Kantengruppen G_{e_i} $(0 \leqslant i \leqslant m)$ gelte

$$\begin{aligned} \alpha_{e_0}(G_{e_0}) &= \langle y \rangle \quad \text{und} \quad \omega_{e_0}(G_{e_0}) = \langle y^2 \rangle, \\ \alpha_{e_i}(G_{e_i}) &= \langle y x_i \rangle \quad \text{und} \quad \omega_{e_i}(G_{e_i}) = \langle (y x_i)^2 \rangle \;\; (1 \leqslant i \leqslant m). \end{aligned}$$

Die stabilen Buchstaben zu den Kanten e_i bezeichnen wir mit t_i $(0 \leqslant i \leqslant m)$. Zudem schreiben wir $U' := \pi_1(\mathbb{G}, Y, v)$. Laut Korollar C.5 (1) ist U' torsionsfrei.

Aus der Eindeutigkeit der Länge von Normalformen freier Produkte (vgl. Lemma B.5) folgt, dass r und s als Elemente von M in G_v zu keinem Element der Gruppen $\langle y\rangle$, $\langle yx_i\rangle$ $(0 \leqslant i \leqslant m)$ konjugiert sind. Wegen Lemma 1.9 bildet (r, s) somit ein Magnus-Paar für U'. Für den nächsten Konstruktionsschritt möchten wir zeigen, dass die von den Elementen t_i $(0 \leqslant i \leqslant m)$ erzeugte Untergruppe von U' eine freie Gruppe vom Rang $m+1$ ist. Dazu betrachten wir den Homomorphismus ζ von U', welcher die Erzeuger t_i $(0 \leqslant i \leqslant m)$ auf sich selbst und alle anderen Erzeuger auf das triviale Element abbildet. Dann ist das Bild von U' unter ζ die von den t_i $(0 \leqslant i \leqslant m)$ erzeugte freie Gruppe vom Rang $m+1$. Folglich ist auch $\langle t_i\,(0 \leqslant i \leqslant m)\rangle_{U'}$ eine freie Gruppe vom Rang $m+1$. Dies ermöglicht uns, die HNN-Erweiterung

$$V \;=\; \langle U', z \;\mid\; z^{-1}t_i z = t_i^2 \;(0 \leqslant i \leqslant m)\rangle \tag{1.2}$$

zu definieren. Laut Korollar C.5 (1) ist V torsionsfrei. Zudem sehen wir mithilfe von ζ, dass wegen $\zeta(r) = \zeta(s) = 1$ weder r noch s zu einem Elemente aus $\langle t_i\,(0 \leqslant i \leqslant m)\rangle$ konjugiert sein können. Somit ist Lemma 1.9 auf V und r, s in der Eckengruppe U' von V anwendbar. Wir erhalten, dass (r, s) ein Magnus-Paar von V ist.

Als weitere Bausteine der Konstruktion definieren wir

$$\widetilde{U}' \;:=\; \langle \widetilde{y}, \widetilde{t}_0 \mid \widetilde{t}_0^{-1}\widetilde{y}\widetilde{t}_0 = \widetilde{y}^2\rangle \quad \text{und} \quad \widetilde{V} \;:=\; \langle \widetilde{U}', \widetilde{z} \;\mid\; \widetilde{z}^{-1}\widetilde{t}_0\widetilde{z} = \widetilde{t}_0^2\rangle, \tag{1.3}$$

wobei die Begründung der Wohldefiniertheit und Torsionsfreiheit der HNN-Erweitung $\widetilde{V}$ analog zur Begründung bei V verläuft.

Sei w ein beliebiges Element aus $U * M$. Für den letzten Konstruktionsschritt zeigen wir zwei Hilfsaussagen:

(1) Die von z und $[w, y]$ erzeugte Untergruppe von V ist für $w \neq_{G_v} 1$ eine freie Gruppe vom Rang 2.

(2) Die von $\widetilde{y}$ und $\widetilde{z}$ erzeugte Untergruppe von $\widetilde{V}$ ist eine freie Gruppe vom Rang 2.

Zu (1)*:* Falls w nichttrivial in G_v ist, so folgt mit Lemma B.5 $[w, y] \neq_{G_v} 1$ und $\mathrm{Ord}_{G_v}([w, y]) = \infty$. Folglich bettet $\langle [w, y]\rangle$ als freie Gruppe vom Rang 1 in G_v ein. Da $[w, y]$ vom Homomorphismus $\zeta\colon U' \to \langle t_i \mid 0 \leqslant i \leqslant m\rangle$ auf das triviale Element abgebildet wird, aber alle t_i $(0 \leqslant i \leqslant m)$ auf sich selbst abgebildet werden, gibt es keine Darstellung einer nichttrivialen Potenz von $[w, y]$ in U', welche ausschließlich die Erzeuger t_i $(0 \leqslant i \leqslant m)$ benutzt. Somit stellt laut Satz C.3 (2) keine Darstellung der Form

$$[w, y]^{p_1} z^{q_1} [w, y]^{p_2} z^{q_2} \ldots [w, y]^{p_j} z^{q_j} [w, y]^{\delta} \;\text{ mit }\; p_i, q_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\; \delta \in \mathbb{Z} \;\; (1 \leqslant i \leqslant j) \tag{1.4}$$

das triviale Element in V dar. Es folgt die gewünschte Aussage.

Zu (2)*:* Diese Aussage kann analog zu Aussage (1) gezeigt werden.

Schließlich definieren wir für $w \in U * M$ die Gruppe

$$W(w) \quad := \quad (V * \widetilde{V}) \,/\, \langle\langle z = \widetilde{y},\, [w, y] = \widetilde{z} \rangle\rangle. \tag{1.5}$$

Aufgrund der Hilfsaussagen (1) und (2) können wir $W(w)$ für nichttriviale Elemente w als amalgamiertes Produkt $V *_{F_2} \widetilde{V}$ auffassen. Somit ist $W(w)$ laut Korollar B.7 torsionsfrei. Im Fall $w =_{U*M} 1$ folgt in $W(1)$:

$$\widetilde{z} = 1 \quad \overset{\text{mit(1.3)}}{\Longrightarrow} \quad \widetilde{t}_0 = 1 \quad \overset{\text{mit(1.3)}}{\Longrightarrow} \quad \widetilde{y} = 1 \quad \overset{\text{mit(1.5)}}{\Longrightarrow} \quad z = 1 \quad \overset{\text{mit(1.2)}}{\Longrightarrow} \quad t_i = 1 \ (0 \leqslant i \leqslant m)$$
$$\overset{\text{Def. von } U'}{\Longrightarrow} \quad y = 1,\ yx_i = 1 \ (1 \leqslant i \leqslant m) \quad \Longrightarrow \quad y = 1,\ x_i = 1 \ (1 \leqslant i \leqslant m)$$

Insgesamt erhalten wir somit:

$$W(w) = \begin{cases} V *_{F_2} \widetilde{V}, & w \neq_{U*M} 1 \\ 1, & w =_{U*M} 1 \end{cases}$$

Wir möchten zeigen, dass $W(w)$ für $w \neq 1$ nicht die Magnus-Eigenschaft besitzt. Dazu erinnern wir daran, dass (r, s) ein Magnus-Paar für V ist und die Elemente r, s mit den Erzeugern x_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ darstellbar sind. Um mit Lemma 1.9 folgern zu können, dass (r, s) auch ein Magnus-Paar für $W(w)$ ist, bleibt zu zeigen, dass weder r noch s in V zu einem Element aus $\langle z, [w, y] \rangle_V \cong F_2$ konjugiert sind. Im Hinblick auf einen Widerspruch sei r oder s zu einem Element $c \in \langle z, [w, y] \rangle_V$ konjugiert. O. B. d. A. existiere ein Element $v \in V$ mit $v^{-1} r v = c$. Wir betrachten den Homomorphismus ψ von V, welcher y auf das triviale Element und alle anderen Erzeuger auf sich selbst abbildet. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \psi(V) \quad = \quad & \langle x_1, x_2, \ldots, x_m, t_0, t_1, \ldots, t_m, z \mid h_1, h_2, \ldots, h_n, \\ & t_i^{-1} x_i t_i = x_i^2 \ (1 \leqslant i \leqslant m),\ z^{-1} t_i z = t_i^2 \ (0 \leqslant i \leqslant m) \rangle \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $\psi(V)$ aus der torsionsfreien Gruppe $M * U = \langle x_1, x_2, \ldots, x_m \mid h_1, h_2, \ldots, h_n \rangle$ durch wiederholte Bildung von HNN-Erweiterungen hervorgeht und $M * U$ somit in $\psi(V)$ einbettet. Insbesondere gilt $\psi(r) = r \neq 1$. Wegen $\psi([w, y]) = 1$ folgt $\psi(c) = z^k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Für $k = 0$ erhalten wir sofort einen Widerspruch mit $\psi(c) = \psi(u)^{-1} \psi(r) \psi(u) \neq 1$. Auch für $k \neq 0$ kann nicht $\psi(c) = \psi(u)^{-1} \psi(r) \psi(u)$ gelten, da alle Relationen von $\psi(V)$ eine Exponentensumme von 0 bzgl. z besitzen und dadurch die Exponentensummen von Elementen aus $\psi(V)$ bzgl. z wohldefiniert sind. Das Element $\psi(c)$ hat jedoch die Exponentensumme $k \neq 0$ und das Element $\psi(r)$ die Exponentensumme 0 bzgl. z. Folglich ist (r, s) wegen Lemma 1.9 ein Magnus-Paar von $W(w)$ und $W(w)$ besitzt für nichttriviale w nicht die Magnus-Eigenschaft. Zudem bemerken wir, dass die triviale Gruppe die Magnus-Eigenschaft besitzt. Es folgt daher:

Die endlich präsentierbare, torsionsfreie Gruppe $W(w)$ besitzt genau dann die Magnus-Eigenschaft, wenn w nichttrivial in $U * M$ ist.

Wäre die Magnus-Eigenschaft also für endlich präsentierbare, torsionsfreie Gruppen algorithmisch entscheidbar, so wäre auch das Wortproblem in der Gruppe $U * M$ algorithmisch entscheidbar. Nach Konstruktion besitzt jedoch U und damit auch $U * M$ ein unlösbares Wortproblem. Dies beendet den Beweis.

□

2. Direkte Produkte und die Magnus-Eigenschaft

Das vorliegende Kapitel dient vor allem der Vorbereitung von Kapitel 3. Einige der in diesem Kapitel enthaltenen Resultate können jedoch auch als unabhängig von Kapitel 3 betrachtet werden wie z. B. Korollar 2.8 oder Satz 2.18.

2.1. Direkte Produkte von Limesgruppen

Die Masterarbeit des Autors aus dem Jahr 2015 (siehe [Fel15]) enthält ein Kapitel über die Magnus-Eigenschaft von direkten Produkten. In diesem Kapitel wurden erstmals das folgende Resultat sowie einige kleine Resultate wie z. B. Lemma A.2 und das recht hilfreiche Lemma A.3 bewiesen.

Satz 2.1. (siehe [Fel15, Satz 4.5.3]) *Alle Gruppen $F_m \times F_n$ mit $m, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ besitzen die Magnus-Eigenschaft.*

Oleg Bogopolski stellte im Vorfeld dieser Arbeit die Frage, ob Satz 2.1 auch für direkte Produkte von Limesgruppen mit der Magnus-Eigenschaft gültig ist. Mit Korollar 2.8 von Satz 2.5 beantworten wir diese Frage positiv. Die Aussage von Korollar 2.8 ist auch in folgendem Satz von Benjamin Klopsch und Benno Kuckuck enthalten, welcher im Anschluss an die Masterarbeit des Autors gleichzeitig zu Satz 2.5 entstanden ist.

Satz 2.2. (siehe [KK16, Theorem 1.1]) *Sei p eine ungerade Primzahl und seien G, L residuell p-endliche Gruppen. Falls G und H die Magnus-Eigenschaft besitzen, so besitzt auch das direkte Produkt $G \times H$ die Magnus-Eigenschaft.*

Im vorliegenden Abschnitt benutzen wir die existenzielle Theorie der Sprache der Gruppen. Eine kurze Einführung in diese Theorie sowie einige äquivalente Definitionen von Limesgruppen finden sich in Kapitel F im Anhang. In [Bog05] wurde bereits auf die Möglichkeit hingewiesen, die Magnus-Eigenschaft einer Gruppe zu beweisen, indem man zeigt, dass sie dieselbe elementare Theorie wie eine Gruppe mit der Magnus-Eigenschaft hat. Bemerkung 2.4 verdeutlicht die Verbindung dieses Abschnitts mit dem nächsten Abschnitt. Zunächst erinnern wir dazu an die Definition (lokal) indizierbarer Gruppen.

Definition 2.3. (vgl. z. B. [Hig40]) Eine Gruppe G heißt *indizierbar*, wenn ein Epimorphismus von G auf $\mathbb{Z}$ existiert; G heißt *lokal indizierbar*, wenn jede nichttriviale, endlich erzeugte Untergruppe U von G indizierbar ist.

Bemerkung 2.4. Limesgruppen sind insbesondere lokal indizierbar. Um dies zu sehen, betrachten wir Satz F.4 (ii) und Definition F.3. Sei U eine nichttriviale, endlich erzeugte Untergruppe einer Limesgruppe L und $\mathcal{U}$ ein endliches Erzeugendensystem von U. Wegen Definition F.3 existieren $k \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathrm{Hom}(L, F_k)$, so dass $f(x) \neq 1$ für alle $x \in \mathcal{U}$ gilt. Wir wählen eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathrm{Im}(f_{|U}) \subseteq F_k$ und ein Element $b \in \mathcal{B}$. Sei π die kanonische Projektion von $\mathrm{Im}(f_{|U})$, welche b auf sich selbst und alle anderen Elemente von $\mathcal{B}$ auf das triviale Element abbildet. Dann ist $\pi \circ f_{|U} \colon U \to \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}$ surjektiv.

Der folgende Satz bildet das Hauptresultat dieses Abschnitts. Korollar 2.8 ist die prägnante Formulierung eines interessanten Spezialfalls.

Satz 2.5. *Sei C eine beliebige Gruppe. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(*i*) *Die Gruppe $\mathbb{Z} \times C$ besitzt die Magnus-Eigenschaft.*

(*ii*) *Alle Gruppen $\left(\times_{i \in \mathcal{I}} L_i \right) \times C$ für eine nichtleere Indexmenge $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}$ und Limesgruppen L_i mit der Magnus-Eigenschaft besitzen die Magnus-Eigenschaft.*

In der folgenden Bemerkung untersuchen wir die Bedingungen von Satz 2.5.

Bemerkung 2.6.

1) Nicht alle Limesgruppen besitzen die Magnus-Eigenschaft. Eine Limesgruppe, welche nicht die Magnus-Eigenschaft besitzt, findet sich z. B. in [LT18, Lemma 2.2].

2) Wegen Lemma 2.10 und Bemerkung 2.4 lässt sich $\mathbb{Z}$ in Aussage (*i*) von Satz 2.5 durch eine beliebige Limesgruppe mit der Magnus-Eigenschaft ersetzen.

3) Es ist unklar, ob eine Gruppe C mit der Magnus-Eigenschaft existiert, so dass $\mathbb{Z} \times C$ nicht die Magnus-Eigenschaft besitzt.

4) Die Menge aller Limesgruppen ist nicht abgeschlossen bzgl. der Bildung direkter Produkte: Nach Satz F.4 (oder direkt per Definition, siehe Kapitel F) ist F_2 eine Limesgruppe. Wir zeigen, dass die Gruppen $F_m \times F_n$ ($m \geqslant 1$, $n \geqslant 2$) keine Limesgruppen sind: Laut [LS01, Proposition 2.17] kommutieren zwei Elemente a, b einer freien Gruppe genau dann, wenn a und b Potenzen desselben Elements d sind. Insbesondere ist damit der Satz

$$\forall a, b, c \colon \ ([a, b] = 1 \ \wedge \ [b, c] = 1) \ \Rightarrow \ [a, c] = 1 \tag{2.1}$$

in jeder freien Gruppe wahr. Wir bemerken, dass dieser Satz auch in jeder freien abelschen Gruppe erfüllt ist. Mithilfe von Satz F.4 folgt, dass (2.1) in jeder Limesgruppe wahr ist. Sei b ein nichttriviales Element aus F_m. Weiter seien a, c zwei Elemente aus F_n, welche nicht kommutieren. Dann gilt in $F_m \times F_n$:

$$[a, b] = 1 \ \wedge \ [b, c] = 1, \quad \text{aber} \quad [a, c] \neq 1.$$

Daher ist $F_m \times F_n$ keine Limesgruppe. (Diese Tatsache wurde bereits in [BS08] bemerkt.)

Für den Beweis von Satz 2.5 benötigen wir zunächst folgende Hilfsaussage.

Lemma 2.7. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\delta_j, \epsilon \in \{\pm 1\}$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ mit $\sum_{j=1}^{m} \delta_j \neq \epsilon$ gegeben. Weiter sei F eine freie abelsche oder freie Gruppe. Dann ist die Aussage*

$$\exists g_j \ (1 \leqslant j \leqslant m),\ \exists r:\ \neg(r = 1) \ \wedge \ r^{\epsilon} = \prod_{j=1}^{m} g_j^{-1} r^{\delta_j} g_j \tag{2.2}$$

falsch in F.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Kontraposition. Dazu gelte die Aussage (2.2). Zunächst betrachten wir den Fall, dass F abelsch ist. Dann entspricht (2.2) der Aussage

$$\exists r:\ \neg(r = 1) \ \wedge \ r^{\epsilon} = r^{\delta},$$

wobei $\delta := \sum_{j=1}^{m} \delta_j$. Wäre diese Aussage gültig, so würde $r^{\epsilon-\delta} = 1$ folgen. Wegen $\delta \neq \epsilon$ wäre F somit nicht torsionsfrei. Dies ist ein Widerspruch.

Für den Fall, dass F nicht abelsch ist, sei $\mathcal{X}$ eine Basis von F. Wir betrachten die Gruppenpräsentation $G = \langle \mathcal{X} \mid r \rangle$. Wegen Satz E.5 ist diese Präsentation asphärisch. Somit dürfen wir Satz E.6 auf (2.2) anwenden. Es folgt, dass die Menge $\{-\epsilon, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$ in Paare (i, j) mit $i = -j$ zerfällt. Schließlich gilt

$$-\epsilon + \sum_{j=1}^{m} \delta_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{m} \delta_j = \epsilon.$$

□

Nun sind wir in der Lage, Satz 2.5 zu beweisen.

Beweis von Satz 2.5. Die Beweisrichtung von (ii) nach (i) ist trivial, da $\mathbb{Z}$ eine Limesgruppe ist (siehe Satz F.4). Für die Beweisrichtung von (i) nach (ii) betrachten wir das direkte Produkt $G := \times_{i \in \mathcal{I}} L_i$ von Limesgruppen L_i mit der Magnus-Eigenschaft. Wir bemerken, dass C als Faktor eines direkten Produkts mit der Magnus-Eigenschaft laut Bemerkung A.1 ebenfalls die Magnus-Eigenschaft besitzt. Da sich jedes Gegenbeispiel für die Magnus-Eigenschaft von $G \times C$ auf ein endliches direktes Teilprodukt von G einschränken lässt, dürfen wir o. B. d. A. $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ voraussetzen. Laut Lemma A.3 besitzt $G \times C$ genau dann die Magnus-Eigenschaft, wenn für jedes Element $((r_i)_{i \in \mathcal{I}}, c) \in G \times C$ und alle $(\epsilon_i)_{i \in \mathcal{I}} \in \{(\pm 1)_{i \in \mathcal{I}}\} \backslash \{(1)_{i \in \mathcal{I}}\}$ mit der Eigenschaft $\langle\!\langle \big((r_i)_{i \in \mathcal{I}}, c\big) \rangle\!\rangle_{G \times C} = \langle\!\langle \big((r_i^{\epsilon_i})_{i \in \mathcal{I}}, c\big) \rangle\!\rangle_{G \times C}$ gilt:

$$\begin{aligned} &(r_i \sim_{L_i} r_i^{-1} \quad \text{für alle } i \text{ mit } \epsilon_i = 1 \qquad \text{sowie} \qquad c \sim_C c^{-1}) \\ \text{oder} \quad &(r_i \sim_{L_i} r_i^{-1} \quad \text{für alle } i \text{ mit } \epsilon_i = -1) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Indem wir alle Faktoren L_i entfernen, für welche $r_i = 1$ gilt, dürfen wir o. B. d. A. $r_i \neq 1$ für alle $i \in \mathcal{I}$ annehmen. Seien Elemente $((r_i)_{i\in\mathcal{I}}, c) \in G \times C$ und $(\epsilon_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \{(\pm 1)_{i\in\mathcal{I}}\}\backslash\{(1)_{i\in\mathcal{I}}\}$ mit $\langle\!\langle\big((r_i)_{i\in\mathcal{I}}, c\big)\rangle\!\rangle_{G\times C} = \langle\!\langle\big((r_i^{\epsilon_i})_{i\in\mathcal{I}}, c\big)\rangle\!\rangle_{G\times C}$ gegeben. Unser Ziel ist, (2.3) zu zeigen. Aus $\langle\!\langle\big((r_i)_{i\in\mathcal{I}}, c\big)\rangle\!\rangle_{G\times C} = \langle\!\langle\big((r_i^{\epsilon_i})_{i\in\mathcal{I}}, c\big)\rangle\!\rangle_{G\times C}$ folgt die Existenz von Elementen $m \in \mathbb{N}$, $\delta_j \in \{-1, 1\}$ und $w_j \in G \times C$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ mit

$$((r_i^{\epsilon_i})_{i\in\mathcal{I}}, c) = \prod_{j=1}^{m} w_j^{-1}((r_i)_{i\in\mathcal{I}}, c)^{\delta_j} w_j. \tag{2.4}$$

Insbesondere folgt für alle $i \in \mathcal{I}$ die Existenz von Elementen $h(i)_j \in L_i$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ mit

$$r_i^{\epsilon_i} = \prod_{j=1}^{m} h(i)_j^{-1} r_i^{\delta_j} h(i)_j. \tag{2.5}$$

Laut Lemma 2.7 ist der Satz

$$\exists g_j\ (1 \leqslant j \leqslant m), r:\ \neg(r = 1)\ \wedge\ r^{\epsilon_i} = \prod_{j=1}^{m} g_j^{-1} r^{\delta_j} g_j$$

für $\sum_{j=1}^{m} \delta_j \neq \epsilon_i$ sowohl in jeder freien abelschen als auch freien Gruppe falsch. Da Limesgruppen laut Satz F.4 dieselbe existenzielle Theorie wie eine freie abelsche oder freie Gruppe endlichen Rangs besitzen, folgt somit aus (2.5)

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_j = \epsilon_i \quad \text{für alle } i \in \mathcal{I}. \tag{2.6}$$

Insbesondere sind alle ϵ_i $(i \in \mathcal{I})$ gleich. Wegen der Voraussetzung $(\epsilon_i)_{i\in\mathcal{I}} \neq (1)_{i\in\mathcal{I}}$ folgt $\epsilon_i = -1$ $(i \in \mathcal{I})$. Daher ist (2.3) im Fall $c = 1$ erfüllt. Im Fall $c \neq 1$ betrachten wir die natürliche Projektion π von $G \times C$ auf $L_1 \times C$. Durch Anwendung von π auf (2.4) erhalten wir für $\pi(w_j) = (h(1)_j, d_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant m,\ d_j \in C)$

$$(r_1^{-1}, c) = \prod_{j=1}^{m} (h(1)_j, d_j)^{-1}(r_1, c)^{\delta_j}(h(1)_j, d_j), \quad \text{wobei} \quad \sum_{j=1}^{m} \delta_j = -1. \tag{2.7}$$

Sei z ein Erzeuger von $\mathbb{Z}$. Dann gelten wegen (2.7) die Gleichungen

$$(z^{-1}, c) = \prod_{j=1}^{m} (1, d_j)^{-1}(z, c)^{\delta_j}(1, d_j) \quad \text{und} \quad (z, c) = \prod_{j=1}^{m} (1, d_j)^{-1}(z^{-1}, c)^{\delta_j}(1, d_j)$$

in $\mathbb{Z} \times C$. Insgesamt folgt $\langle\!\langle(z, c)\rangle\!\rangle_{\mathbb{Z}\times C} = \langle\!\langle(z, c^{-1})\rangle\!\rangle_{\mathbb{Z}\times C}$. Da z in $\mathbb{Z}$ nicht zu z^{-1} konjugiert ist und $\mathbb{Z} \times C$ laut Voraussetzung die Magnus-Eigenschaft besitzt, folgt wegen Lemma A.3, dass c in C zu c^{-1} konjugiert ist. Schließlich ist (2.3) wegen $\epsilon_i = -1$ $(i \in \mathcal{I})$ erfüllt und $G \times C$ besitzt die Magnus-Eigenschaft.

□

Da freie Gruppen die Magnus-Eigenschaft besitzen, erhalten wir für $C = \{1\}$ folgenden Spezialfall von Satz 2.5.

Korollar 2.8. *Seien $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}$ eine Indexmenge und L_i $(i \in \mathcal{I})$ Limesgruppen mit der Magnus-Eigenschaft. Dann besitzt $\times_{i\in\mathcal{I}} L_i$ die Magnus-Eigenschaft.*

2.2. Verallgemeinerung eines Resultats von J. Howie

Im Hauptsatz von Kapitel 3 wird das direkte Produkt eines amalgamierten Produkts betrachtet. Um den Umgang mit diesem Produkt im Beweis des Hauptsatzes zu vereinfachen, beweisen wir in den folgenden Abschnitten einige Aussagen über direkte Produkte mit (lokal) indizierbaren Gruppen. Es ist leicht, die folgenden Eigenschaften lokal indizierbarer Gruppen zu bemerken.

Bemerkung 2.9. Jede Untergruppe einer lokal indizierbaren Gruppe ist wieder lokal indizierbar. Zudem ist die lokale Indizierbarkeit abgeschlossen unter der Bildung freier und direkter Produkte.

Die folgende Hilfsaussage beweisen wir im Stil der Beweise des vorherigen Abschnittes.

Lemma 2.10. *Sei C eine Gruppe. Falls eine indizierbare Gruppe G existiert, für die $G \times C$ die Magnus-Eigenschaft besitzt, so besitzt auch $\mathbb{Z} \times C$ die Magnus-Eigenschaft.*

Beweis. Im Hinblick auf einen Widerspruch besitze die Gruppe $\mathbb{Z} \times C$ nicht die Magnus-Eigenschaft und G sei eine indizierbare Gruppe, so dass $G \times C$ die Magnus-Eigenschaft besitzt. Da G indizierbar ist, existiert ein Epimorphismus $\zeta : G \to \mathbb{Z}$. Sei g ein Element von G mit $\zeta(g) = 1$ (wobei 1 Erzeuger von $\mathbb{Z}$ sei). Für die Homomorphismen $\varphi\colon \mathbb{Z} \times C \hookrightarrow G \times C$ und $\psi\colon G \times C \to \mathbb{Z} \times C$, welche durch $\varphi(1, c) = (g, c)$ und $\psi(h, c) = (\zeta(h), c)$ für alle $h \in G$ und $c \in C$ definiert seien, betrachten wir die Abbildungskette

$$\mathbb{Z} \times C \overset{\varphi}{\hookrightarrow} G \times C \overset{\psi}{\to} \mathbb{Z} \times C. \tag{2.8}$$

Es gilt $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z} \times C}$. Laut Voraussetzung existieren Elemente $r, s \in \mathbb{Z} \times C$, welche denselben normalen Abschluss in $\mathbb{Z} \times C$ besitzen, aber r weder zu s noch zu s^{-1} konjugiert ist. Aus (2.8) liest man ab, dass $\varphi(r)$ und $\varphi(s)$ zum einen denselben normalen Abschluss in $\mathbb{Z} \times C$ besitzen und zum anderen $\varphi(r)$ und $\varphi(s)$ als Urbilder von r und s unter ψ nicht zueinander in $G \times C$ konjugiert sein können. Somit besitzt $G \times C$ nicht die Magnus-Eigenschaft und wir erhalten einen Widerspruch.

□

Im Jahr 1981 bewies J. Howie einen Freiheitssatz für lokal indizierbare Gruppen:

Satz 2.11. (vgl. [How81, Theorem 4.3 (Freiheitssatz)]) *Sei die Gruppe $G = (A * B)/N$ gegeben, wobei A, B lokal indizierbare Gruppen und N der normale Abschluss in $A * B$ eines zyklisch gekürzten Worts r mit einer Länge von mindestens 2 sei. Dann sind die kanonischen Abbildungen $A \to G$, $B \to G$ injektiv.*

Ein Jahr später veröffentlichte J. Howie das folgendes Resultat.

Satz 2.12. (vgl. [How82, Theorem 4.2]) *Sei die Gruppe $G = (A * B)/N$ gegeben, wobei A, B lokal indizierbare Gruppen und N der normale Abschluss in $A * B$ eines*

zyklisch gekürzten Worts r mit einer Länge von mindestens 2 sei. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) G *ist lokal indizierbar.*

(ii) G *ist torsionsfrei.*

(iii) r *ist keine echte Potenz in* $A * B$.

Bemerkung 2.13. Es ist leicht zu sehen, dass lokal indizierbare Gruppen torsionsfrei sind. Die sogenannte Higman-Gruppe

$$HG := \langle a, b, c, d \mid a^{-1}ba = b^2,\ b^{-1}cb = c^2,\ c^{-1}dc = d^2,\ d^{-1}ad = a^2 \rangle$$

ist ein Standardbeispiel für eine Gruppe, welche torsionsfrei, aber nicht lokal indizierbar ist (siehe [Hig51]). Im Folgenden möchten wir dieses Beispiel mit den Methoden aus [Hig51] nachvollziehen.

Zunächst bemerken wir, dass HG nicht indizierbar und daher als endlich erzeugte Gruppe auch nicht lokal indizierbar ist. Dazu sei φ ein beliebiger Homomorphismus von HG nach $\mathbb{Z}$. Da φ alle Relationen von HG auf das triviale Element abbilden muss, folgt aus der ersten Relation $a^{-1}ba = b^2$ die Gleichung $\varphi(b) = 0$. Aus den anderen drei Relationen folgt analog $\varphi(c) = \varphi(d) = \varphi(a) = 0$, also insgesamt $\varphi(HG) = \{0\}$. Somit existiert kein Epimorphismus $\varphi\colon HG \to \mathbb{Z}$. Alternativ kann man die Abwesenheit eines solchen Epimorphismus dadurch begründen, dass dann auch die Existenz eines Epimorphismus $\psi\colon HG \to \mathbb{Z}_2$ und somit insbesondere die Existenz einer echten Untergruppe endlichen Indexes folgt. Das steht im Widerspruch dazu, dass die Higman-Gruppe das erste Beispiel einer unendlichen, endlich erzeugten Gruppe war, welche keine nichttrivialen endlichen Quotienten besitzt (siehe [Hig51]).

Für unsere Zwecke bleibt zu bemerken, dass HG torsionsfrei ist. Dazu erinnern wir an Graham Higmans Konstruktion von HG als Amalgamierung von HNN-Erweiterungen (siehe [Hig51]): Wir definieren

$$U := \langle a_1, b \mid a_1^{-1}ba_1 = b^2 \rangle, \quad V := \langle b, c_1 \mid b^{-1}c_1b = c_1^2 \rangle.$$

Laut Definition C.1 ist U eine HNN-Erweiterung mit HNN-Basis $\langle b \rangle$ und stabilem Buchstaben a_1. Analog dazu ist V eine HNN-Erweiterung mit HNN-Basis $\langle c_1 \rangle$ und stabilem Buchstaben b. Mithilfe von Brittons Lemma (siehe Satz C.3 (2)) erhalten wir sowohl die Einbettung von $\langle b \rangle$ in U als auch in V. Zudem sind U, V nach Korollar C.5 (1) torsionsfrei, da ihre HNN-Basen torsionsfrei sind. Wir bilden die Gruppe

$$H_1 := U \underset{\langle b \rangle}{*} V \cong \langle a_1, b, c_1 \mid a_1^{-1}ba_1 = b^2,\ b^{-1}c_1b = c_1^2 \rangle, \tag{2.9}$$

welche als amalgamiertes Produkt torsionsfreier Gruppen ebenfalls torsionsfrei ist (siehe Korollar B.7). In gleicher Weise definieren wir die torsionsfreie Gruppe

$$H_2 := \langle a_2, c_2, d \mid c_2^{-1}dc_2 = d^2,\ d^{-1}a_2d = a_2^2 \rangle.$$

Sei $F \cong \langle a_1, c_1 \rangle \cong \langle a_2, c_2 \rangle$ die freie Gruppe vom Rang 2, wobei der Isomorphismus dadurch gegeben sei, dass a_1 auf a_2 und c_1 auf c_2 abgebildet wird. Wir bemerken, dass F aufgrund der eindeutigen Länge der Normalform amalgamierter Produkte (siehe Lemma B.5) in H_1 und H_2 einbettet. Es folgt $HG \cong H_1 *_F H_2$. Schließlich ist die Higman-Gruppe als amalgamiertes Produkt torsionsfreier Gruppen torsionsfrei.

In Anbetracht dieses Beispiels ist es natürlich, zu fragen, ob Satz 2.11 auch für torsionsfreie Gruppen A und B gültig ist. Dieses Problem ist noch offen.

Im Jahr 1988 bewies M. Edjvet unter Benutzung von J. Howies Freiheitssatz (Satz 2.11) folgendes Resultat:

Satz 2.14. (siehe [Edj89, (Main)Theorem]) *Seien A, B zwei lokal indizierbare Gruppen und seien r, $s \in A * B$ zyklisch gekürzte Wörter mit einer Länge von mindestens 2. Falls r und s denselben normalen Abschluss in $A * B$ besitzen, dann ist r in $A * B$ zu s oder s^{-1} konjugiert.*

Wir erhalten folgendes Korollar zu Satz 2.14:

Korollar 2.15. (vgl. [Fel15, Satz 4.1.4]) *Seien $\mathcal{J}$ eine beliebige nichtleere Indexmenge und A_j ($j \in \mathcal{J}$) lokal indizierbare Gruppen mit der Magnus-Eigenschaft. Dann besitzt auch $G = *_{j \in \mathcal{J}} A_j$ die Magnus-Eigenschaft.*

Beweis. In der Masterarbeit des Autors (siehe [Fel15]) findet sich die Aussage von Korollar 2.15 für $|\mathcal{J}| = 2$ als direkte Folgerung aus Satz 2.14. Wir haben bereits bemerkt, dass freie Produkte lokal indizierbarer Gruppen wieder lokal indizierbar sind. Somit folgt die Aussage des Korollars für endliche Indexmengen $\mathcal{J}$. Für unendliche Indexmengen $\mathcal{J}$ bemerken wir, dass zwei Element $r, s \in G$ mit demselben normalen Abschluss in G auch denselben normalen Abschluss in $G' := *_{j \in \mathcal{J}'} A_j$ für eine endliche Indexmenge $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$ besitzten. Laut Vorüberlegung sind r, s somit in G' und daher auch in G konjugiert.

□

Im Jahr 2013 veröffentlichten Y. Antolín und A. Kar folgende Verallgemeinerung von Satz 2.11:

Behauptung. (siehe [AK13, Theorem C]) Seien A, B zwei lokal indizierbare Gruppen und sei $G := (A * B) \times C$ für eine Gruppe C. Weiter sei ein Element $w \in G$ gegeben, das weder zu einem Element aus $A \times C$ noch aus $B \times C$ konjugiert ist. Dann bettet $A \times C$ in $G/\langle\langle w \rangle\rangle_G$ ein.

Mit Beispiel 2.16 zeigen wir, dass diese Aussage falsch ist, da C im Allgemeinen nicht in $G/\langle\langle w \rangle\rangle_G$ einbettet.

Beispiel 2.16. Wir betrachten die freien Gruppen $A = \langle a \mid \rangle$, $B = \langle b \mid \rangle$ vom Rang 1 und $C = \langle c, d \mid \rangle$ vom Rang 2. Sei $G := (A * B) \times C$ und $w := abc$. Dann gilt

$$d^{-1} w^{-1} d \cdot w \quad = \quad [d, w] \quad = \quad [d, abc] \quad = \quad [d, c] c^{-1} [d, ab] c \quad = \quad [d, c] \ \in C.$$

Somit ist $[d, c]$ ein nichttriviales Element von C, welches dem trivialen Element in $G/\langle\langle w \rangle\rangle$ entspricht.

Das folgende Lemma zeigt, dass Elemente aus C die einzigen Elemente sind, welche der Einbettung von $A \times C$ im Weg stehen können. Als missbräuchliche Notation bezeichnen wir dabei die Untergruppe $\{1\} \times C$ auch mit C.

Lemma 2.17. *Seien A, B zwei lokal indizierbare Gruppen und sei $G := (A * B) \times C$ für eine Gruppe C. Weiter sei ein Element $w \in G$ gegeben, das weder zu einem Element aus $A \times C$ noch aus $B \times C$ konjugiert ist. Wir definieren $N := \langle\langle w \rangle\rangle_G \cap C$ sowie $\widetilde{C} := C/N$. Dann bettet $A \times \widetilde{C}$ kanonisch in $G/\langle\langle w \rangle\rangle_G$ ein.*

Beweis. Im Hinblick auf einen Widerspruch sei $u = (a, c)$ ein Element aus

$$(A \times C) \setminus (\{1\} \times C),$$

welches in $G/\langle\langle w \rangle\rangle_G$ dem trivialen Element entspricht. Dann folgt die Existenz von Zahlen $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ und Elementen $p_i \in A * B$, $d_i \in C$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ mit

$$(a, c) \;=\; \prod_{i=1}^{n} (p_i, d_i)^{-1}\, w^{\epsilon_i}\, (p_i, d_i) \;\text{ in }\; G. \tag{2.10}$$

Sei $\pi\colon G \to A * B$ die kanonische Projektion. Es gilt $\pi(a) = a \neq 1$. Zudem ist $\pi(w)$ weder zu einem Element aus A noch aus B konjugiert. Wegen $(a, c) \in \langle\langle w \rangle\rangle_G$ liegt $\pi((a, c)) = a$ im normalen Abschluss von $\pi(w)$ in $\pi(G) = A * B$. Dies ist ein Widerspruch zu Satz 2.11.

Wir haben somit $\langle\langle w \rangle\rangle_G \cap (A \times C) = \langle\langle w \rangle\rangle_G \cap C$ bewiesen. Wegen

$$(A \times C)/(\langle\langle w \rangle\rangle_G \cap C) \;=\; (A \times C)/N \;=\; (A \times (C/N)) \;= A \times \widetilde{C}$$

folgt schließlich aus der trivialen kanonischen Einbettung

$$(A \times C)/(\langle\langle w \rangle\rangle_G \cap (A \times C)) \quad \hookrightarrow \quad G/\langle\langle w \rangle\rangle_G$$

die kanonische Einbettung von $A \times \widetilde{C}$ in $G/\langle\langle w \rangle\rangle_G$.

□

2.3. Technische Hilfsresultate

Unser nächster Satz ist als Verallgemeinerung des Resultats von M. Edjvet über freie Produkte lokal indizierbarer Gruppen (Satz 2.14) gedacht. Durch die Hinzunahme des direkten Produkts müssen wir jedoch zusätzlich die Bedingung der Indizierbarkeit voraussetzen.

Satz 2.18. *Sei $\mathcal{J}$ eine beliebige Indexmenge und seien A_j $(j \in \mathcal{J})$ indizierbare sowie lokal indizierbare Gruppen. Weiter sei C eine Gruppe. Dann besitzt $(\ast_{j \in \mathcal{J}} A_j) \times C$ genau dann die Magnus-Eigenschaft, wenn alle Gruppen $A_j \times C$ $(j \in \mathcal{J})$ die Magnus-Eigenschaft besitzen.*

Bevor wir mit dem Beweis von Satz 2.18 in Abschnitt 2.4 beginnen, benötigen wir zunächst einige Hilfsresultate, welche in diesem Abschnitt zur Verfügung gestellt werden.

Als Erstes erinnern wir an den Untergruppensatz von Kurosch für amalgamierte Produkte.

Satz 2.19. (Untergruppensatz von Kurosch, siehe z. B. [Bog08, Chapter 2, Theorem 19.1]) *Sei H das amalgamierte Produkt einer Familie $(H_i)_{i\in\mathcal{I}}$ von Gruppen mit Amalgamierung über eine gemeinsame Untergruppe U. Weiter sei G eine Untergruppe von H, so dass $G \cap xUx^{-1} = \{1\}$ für alle $x \in H$ gilt. Dann existieren eine freie Gruppe F und ein Repräsentantensystem X_i von Doppelnebenklassen $G\backslash H/H_i$, so dass G das freie Produkt von F und den Gruppen $G \cap xH_ix^{-1}$ für $i \in \mathcal{I}$ und $x \in X_i$ ist.*

Bemerkung 2.20. Die zulässigen Wahlen für die Repräsentantensysteme X_i aus Satz 2.19 können auf folgende Weise präzisiert werden: Für den Beweis von Satz 2.19 betrachtet man das amalgamierte Produkt der Gruppen U und H_i ($i \in \mathcal{I}$) über die Gruppe U sowie den zu diesem amalgamierten Produkt assoziierten Graphen von Gruppen Y (siehe Anhang G). Dann operiert H ohne Invertierung der Kanten auf dem Baum X mit Knotenmenge $H/U \cup \bigcup_{i\in\mathcal{I}} H/H_i$ und Kantenmenge $\bigcup_{i\in\mathcal{I}}(H/U \times \{i\})$, so dass $H\backslash X$ isomorph zu Y ist (vgl. [Bog08, Chapter 2, Theorem 18.2]). Sei T schließlich ein maximaler Teilbaum von $G\backslash X$ und $\widetilde{T}$ eine Liftung von T in X. Dann sind geeignete Wahlen für die X_i ($i \in \mathcal{I}$) diejenigen Repräsentanten, welche zu den jeweiligen Knoten und Kanten von $\widetilde{T}$ gehören.

Mithilfe von Satz 2.19 erhalten wir die folgenden beiden Lemmata.

Lemma 2.21. *Seien A, B zwei Gruppen und $\varphi\colon A * B \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ ein Epimorphismus, welcher alle Elemente von B auf das neutrale Element $0 \in \mathbb{Z}$ abbildet. Weiter sei ein Element a aus A mit $\varphi(a) = 1$ gegeben. Dann gilt*

$$\ker(\varphi) = \big(A \cap \ker(\varphi)\big) * \mathop{\ast}_{i\in\mathbb{Z}} a^{-i}Ba^i.$$

Beweis. Als Repräsentantensystem der Doppelnebenklassen $\ker(\varphi)\backslash(A * B)/B$ wählen wir $\{a^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Die Menge $\ker(\varphi)\backslash(A * B)/A$ besteht nur aus der trivialen Doppelnebenklasse. Wir wählen den Repräsentanten 1. Nach Bemerkung 2.20 sind diese Wahlen geeignet. Somit folgt mit Kuroschs Untergruppensatz (Satz 2.19), dass

$$\ker(\varphi) = F * \big(A \cap \ker(\varphi)\big) * \mathop{\ast}_{i\in\mathbb{Z}} \big(a^{-i}Ba^i \cap \ker(\varphi)\big) = F * \big(A \cap \ker(\varphi)\big) * \mathop{\ast}_{i\in\mathbb{Z}} a^{-i}Ba^i$$

für eine freie Gruppe F gilt. Wir bemerken, dass die Untergruppe

$$N := \big(A \cap \ker(\varphi)\big) * \mathop{\ast}_{i\in\mathbb{Z}} a^{-i}Ba^i$$

von $\ker(\varphi)$ normal in $A * B$ ist und a^i ($i \in \mathbb{Z}$) ein Repräsentantensystem der Nebenklassen von N in $A * B$ ist. Es folgt:

$$\big((A * B)/N\big) \,/\, (\ker(\varphi)/N) \;\cong\; (A * B)/\ker(\varphi) \;\cong\; \langle a\rangle \;\cong\; (A * B)/N$$

Somit gilt $\ker(\varphi) = N$.

□

Lemma 2.22. *Seien A, B zwei Gruppen und $\psi\colon A * B \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ ein Epimorphismus, welcher sowohl ein Element $a \in A$ als auch ein Element $b \in B$ auf 1 abbildet (dabei sei 1 ein Erzeuger von $\mathbb{Z}$). Wir betrachten die Gruppe $G' := A * B * \langle x \rangle$ und erweitern ψ zu einem Epimorphismus $\varphi\colon G' \to \mathbb{Z}$ mit $\varphi(x) = 1$. Sei $a_i := x^{-i}ax^{i-1}$ und $b_i := x^{-i}bx^{i-1}$. Dann gilt*

$$\ker(\varphi) = \big(A \cap \ker(\varphi)\big) * \big(B \cap \ker(\varphi)\big) \ * \ \langle \{a_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \{b_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \mid \rangle.$$

Beweis. Als Repräsentantensysteme der Doppelnebenklassen

$$\ker(\varphi)\backslash(A * B)/A \quad \text{und} \quad \ker(\varphi)\backslash(A * B)/B$$

wählen wir jeweils $\{1\}$. Dann folgt laut Satz 2.19

$$\ker(\varphi) = F * \big(A \cap \ker(\varphi)\big) * \big(B \cap \ker(\varphi)\big)$$

für eine freie Gruppe F. Um zu sehen, dass $F = \langle \{a_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \{b_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \mid \rangle$ gilt, bemerken wir zunächst, dass es keine nichttrivialen Relationen zwischen den Elementen a_i, b_i $(i \in \mathbb{Z})$ in G' gibt. Da jedes nichttriviale, von a_i, b_i $(i \in \mathbb{Z})$ erzeugte Element, geschrieben in den Erzeugern a, b und x, den Erzeuger x enthält, gibt es auch keine nichttrivialen Relationen zwischen Elementen aus $\big(A \cap \ker(\varphi)\big) * \big(B \cap \ker(\varphi)\big)$ und $\langle \{a_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \{b_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \mid \rangle$. Das freie Produkt $N := \big(A \cap \ker(\varphi)\big) * \big(B \cap \ker(\varphi)\big) \ * \ \langle \{a_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \{b_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \mid \rangle$ aus der Aussage des Lemmas ist somit als Untergruppe von G' wohldefiniert. Wir bemerken, dass N im Kern von φ liegt. Es bleibt zu zeigen, dass jedes Element w von $\ker(\varphi)$ in N liegt. Dazu betrachten wir beispielhaft eine Normalform uvx^3u' von w bzgl. G' mit $u, u' \in A$ und $v \in B$. Es gilt:

$$\begin{aligned} & w = uvx^3u' \\ = \ & \underbrace{ua^{-\varphi(u)}}_{\in A \cap \ker(\varphi)} \cdot a^{\varphi(u)}x^{-\varphi(u)} \cdot x^{\varphi(u)}b^{-\varphi(u)} \cdot \underbrace{b^{\varphi(u)}vb^{-\varphi(uv)}}_{\in B \cap \ker(\varphi)} \cdot b^{\varphi(uv)}x^{-\varphi(uv)} \cdot x^{\varphi(uv)+3}a^{-\varphi(uvx^3)} \\ \cdot \ & \underbrace{a^{\varphi(uvx^3)}u'}_{\in A \cap \ker(\varphi)} \underbrace{a^{\varphi(-uvx^3u')}}_{=1} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Jedes Element a^kx^{-k} $(k \in \mathbb{Z})$ kann mithilfe der Erzeuger a_i $(i \in \mathbb{Z})$ dargestellt werden, denn es gilt:

$$a^kx^{-k} \ = \ \prod_{j=0}^{k-1} x^jax^{-j-1} \ = \ \prod_{j=0}^{k-1} a_{-j}$$

Analog können wir auch jedes Element b^kx^{-k} $(k \in \mathbb{Z})$ mithilfe der Erzeuger b_i $(i \in \mathbb{Z})$ darstellen. Daher haben wir mit (2.11) eine Darstellung von w als Element von N gefunden.

□

Für einen Homomorphismus φ von einer Gruppe G nach $\mathbb{Z}$ und ein Element $r \in G$ mit $\varphi(r) = 0$ bildet der normale Abschluss von r in G eine Untergruppe von $\ker(\varphi)$. Diese Untergruppe entspricht jedoch im Allgemeinen nicht dem normalen Abschluss von r in $\ker(\varphi)$. Wir beweisen daher folgendes kleine Hilfslemma, auf welches wir auch in anderen Kapiteln zurückgreifen werden.

Lemma 2.23. *Sei G eine Gruppe und φ ein Homomorphismus von G nach $\mathbb{Z}$ (als additive Gruppe). Weiter seien Elemente $r, x \in G$ mit $\varphi(r) = 0$ und $\varphi(x) = 1$ gegeben. Dann gilt für $r_i := x^{-i} r x^i$:*

$$\langle\!\langle\, r \,\rangle\!\rangle_G = \langle\!\langle\, r_i \mid i \in \mathbb{Z} \,\rangle\!\rangle_{\ker(\varphi)}$$

Beweis. Die Inklusion von $\langle\!\langle\, r_i \mid i \in \mathbb{Z} \,\rangle\!\rangle_{\ker(\varphi)}$ in $\langle\!\langle\, r \,\rangle\!\rangle_G$ ist trivial. Für die andere Inklusion reicht es zu zeigen, dass für jedes $w \in G$ das Konjugierte $w^{-1}rw$ ein Element von $\langle\!\langle\, r_i \mid i \in \mathbb{Z} \,\rangle\!\rangle_{\ker(\varphi)}$ ist. Dazu schreiben wir

$$w^{-1}rw \quad = \quad \underbrace{w^{-1}x^{\varphi(w)}}_{\in \ker(\varphi)} \; \underbrace{x^{-\varphi(w)} r x^{\varphi(w)}}_{= r_{\varphi(w)}} \; \underbrace{x^{-\varphi(w)} w}_{\in \ker(\varphi)}.$$

Somit ist $w^{-1}rw$ ein Element von $\langle\!\langle\, r_i \mid i \in \mathbb{Z} \,\rangle\!\rangle_{\ker(\varphi)}$.

□

Für die folgenden technischen Lemmata sowie den Beweis von Satz 2.18 führen wir zur Verkürzung eine gemeinsame Notation ein.

Notation 2.24. Seien A, B zwei lokal indizierbare sowie indizierbare Gruppen. Weiter sei C eine beliebige Gruppe. Wir betrachten einen Epimorphismus $\psi : A \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ und erweitern ihn zu einem Epimorphismus $\varphi : (A * B) \times C \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, indem wir $\varphi_{|A} = \psi$ und $\varphi(b) = \varphi(d) = 0$ für alle $b \in B$, $d \in C$ setzen. Zudem sei ein Element $a \in A$ mit $\varphi(a) = 1$ gegeben. Wir betrachten ein beliebiges Element $c \in C$ sowie eine Darstellung r eines nichttrivialen Elements aus $A * B$ in Normalform (siehe Definition B.4), wobei r gerade Länge habe und $\varphi((r, c)) = 0$ gelte. Es sei $r_i := a^{-i} r a^i$. Dann folgt mithilfe von Lemma 2.23, dass der normale Abschluss von (r, c) in $(A * B) \times C$ gleich dem normalen Abschluss der Elemente $\{(r_i, c) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ in $\ker(\varphi)$ ist. Wir definieren $\widetilde{A} := A \cap \ker(\varphi)$ und $B_i := a^{-i} B a^i$ $(i \in \mathbb{Z})$. Laut Lemma 2.21 gilt $\ker(\varphi) = \widetilde{A} * \ast_{i \in \mathbb{Z}} B_i$. Mit α_{r_i} bezeichnen wir den kleinsten und mit ω_{r_i} den größten Index j, so dass eine Darstellung von r_i in Normalform bzgl. $\widetilde{A} * \ast_{i \in \mathbb{Z}} B_i$ ein Stück aus B_j enthält. Schließlich definieren wir für $\alpha, \omega \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$

$$B_{\alpha,\omega} := \overset{\omega}{\underset{i=\alpha}{\ast}} B_i \;\text{ falls } \alpha \leqslant \omega \qquad \text{und} \qquad B_{\alpha,\omega} := \{1\} \;\text{ falls } \alpha > \omega.$$

Das nächste Lemma dient der Vorbereitung zur Darstellung von $\ker(\varphi)/\langle\!\langle (r_i, c) \mid i \in \mathbb{Z} \rangle\!\rangle$ als amalgamiertes Produkt (siehe Lemma 2.27).

Lemma 2.25. *Sei C eine beliebige Gruppe. Mit der Schreibweise von Notation 2.24 betrachten wir die Gruppen*

$$G_i = (\widetilde{A} * B_{\alpha_{r_i},\omega_{r_i}}) \times C, \quad N_i = \langle\!\langle (r_i, c) \rangle\!\rangle_{G_i} \ \cap \ C \quad \textit{und} \quad C_i = C/N_i.$$

Dann gilt $C_k = C_\ell$ für alle $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Wir dürfen somit $\widetilde{C} := C_j$ $(j \in \mathbb{Z})$ definieren.

Beweis. Sei $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Weiter sei w ein Element von N_k. Wir zeigen, dass w auch ein Element von N_ℓ ist. Es existieren Zahlen $m \in \mathbb{N}$, $\epsilon_i \in \mathbb{Z}$ und Elemente $u_i \in G_k$ $(i \in \{1, 2, \ldots, m\})$ mit

$$w \ = \ \prod_{i=1}^{m} u_i^{-1} \, (r_k, c)^{\epsilon_i} \, u_i. \tag{2.12}$$

Wir betrachten den Isomorphismus $\zeta \colon G_k \to G_\ell$, welcher durch $\zeta(x) = a^{-\ell+k} x a^{\ell-k}$ gegeben ist. Dann gilt $\zeta(u_i) \in G_\ell$ und $\zeta((r_k, c)) = (r_\ell, c)$. Man bemerke, dass ζ eingeschränkt auf C der Identität entspricht. Insbesondere gilt $w = \zeta(w)$. Durch Anwendung von ζ auf (2.12) erhalten wir

$$w \ = \ \zeta(w) \ = \ \prod_{i=1}^{m} \zeta(u_i)^{-1} \, (r_\ell, c)^{\epsilon_i} \, \zeta(u_i) \quad \in \ \langle\!\langle (r_\ell, c) \rangle\!\rangle_{G_\ell},$$

also insgesamt $w \in N_\ell$. Es folgt $N_k = N_\ell$ und damit auch $C_k = C_\ell$ für alle k, $\ell \in \mathbb{Z}$.

□

Mit dem nächsten Lemma beweisen wir zwei Einbettungen. Dafür benutzen wir die Schreibweise aus Notation 2.24 und Lemma 2.25.

Lemma 2.26. *Seien $m \in \mathbb{Z}$ und k, $\ell \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ mit $k \leqslant \alpha_{r_m}$ sowie $\ell \geqslant \omega_{r_m}$ gegeben. Wir definieren $P_n := (\widetilde{A} * B_{\alpha_{r_n},\omega_{r_n}-1}) \times \widetilde{C})$ $(n \in \mathbb{Z})$. Dann gelten die folgenden Einbettungen:*

(i) $P_m \quad \hookrightarrow \quad \big((\widetilde{A} * B_{k,\ell}) \times C\big) / \langle\!\langle (r_m, c) \rangle\!\rangle$

(ii) $P_{m+1} \quad \hookrightarrow \quad \big((\widetilde{A} * B_{k,\ell}) \times C\big) / \langle\!\langle (r_m, c) \rangle\!\rangle$

Beweis. Für den Beweis von (i) erinnern wir daran, dass r eine Darstellung eines nichttrivialen Elements von $A * B$ in Normalform ist, so dass r eine gerade Länge hat. Es folgt, dass r_m zyklisch gekürzt ist und den Faktor B_m sowie mindestens einen weiteren Faktor $\widetilde{A}$ oder B_k mit $k \neq m$ benutzt. Insbesondere benutzt r_m mindestens zwei Faktoren des unendlichen freien Produkts $\widetilde{A} * (\ast_{k \leqslant i \leqslant \ell} B_i)$. Nach Definition von ω_{r_m} benutzt r_j den Faktor $B_{\omega_{r_m}}$. Da r_m laut Definition von α_{r_m} und ω_{r_m} insgesamt ausschließlich Faktoren $\widetilde{A}$ oder B_i $(\alpha_{r_m} \leqslant i \leqslant \omega_{r_m})$ benutzt, muss der zweite von r_m benutzte Faktor in $\widetilde{A} * B_{k,\omega_{r_m}-1}$ liegen. Somit besitzt die Normalform von r_m bzgl. des freien Produkts $(\widetilde{A} * B_{k,\omega_{r_m}-1}) * B_{\omega_{r_m},\ell}$ eine Länge von mindestens 2. Mit Satz 2.17 folgt nun die Einbettung von P_m in $\big((\widetilde{A} * B_{k,\ell}) \times C\big) / \langle\!\langle (r_m, c) \rangle\!\rangle$.

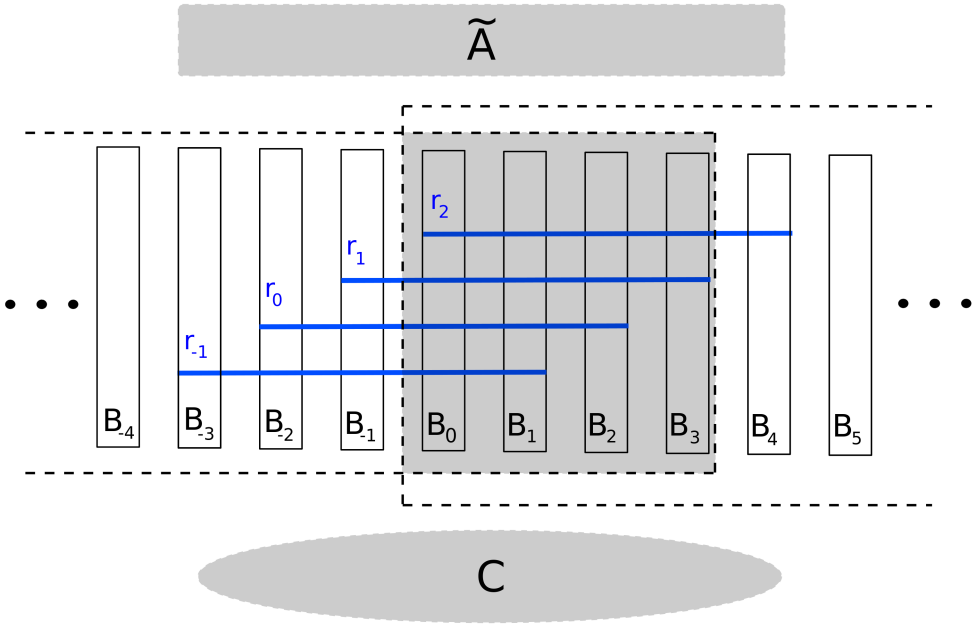


Abbildung 2.1.: Grafische Veranschaulichung von Lemma 2.27 für $i = -1$, $j = 2$, $\alpha_2 = 0$ und $\omega_2 = 4$. (Die amalgamierte Gruppe P_2 wird durch die grau hinterlegten Flächen angedeutet.)

Die Einbettung (ii) kann in analoger Weise bewiesen werden. Dazu übernimmt der Index α_{r_m} die Rolle des Indexes ω_{r_m}.

□

Nun sind wir in der Lage, eine Darstellung von $\ker(\varphi)/\langle\langle r_i \mid i \in \mathbb{Z}\rangle\rangle$ als amalgamiertes Produkt herzuleiten. Diese Darstellung spielt eine zentrale Rolle im Beweis von Satz 2.18. Für eine grafische Veranschaulichung der Aussage des folgenden Lemmas siehe Abbildung 2.1.

Lemma 2.27. *Wir benutzen die Schreibweise von Notation 2.24 und Lemma 2.25. Seien $i, j \in \mathbb{Z}$ zwei Zahlen mit $i < j$. Wir definieren $P_j := (\tilde{A} * B_{\alpha_{r_j}, \omega_{r_{j-1}}}) \times \tilde{C}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} &\big((\tilde{A} * B_{-\infty,\infty}) \times C\big)/\langle\langle (r_i, c), (r_{i+1}, c), \ldots, (r_j, c)\rangle\rangle \\ \cong\ &\big((\tilde{A} * B_{-\infty,\omega_{r_{j-1}}}) \times C\big)/\langle\langle (r_i, c), \ldots, (r_{j-1}, c)\rangle\rangle \underset{P_j}{*} \big((\tilde{A} * B_{\alpha_{r_j},\infty}) \times C\big)/\langle\langle (r_j, c)\rangle\rangle. \end{aligned}$$

Beweis. Wir führen den Beweis per Induktion über j für ein fest gewähltes Element $i \in \mathbb{Z}$. Als Induktionsanfang ($j = i + 1$) ist folgende Aussage zu beweisen:

$$\begin{aligned} &\big((\tilde{A} * B_{-\infty,\infty}) \times C\big)/\langle\langle (r_i, c), (r_j, c)\rangle\rangle \\ \cong\ &\big((\tilde{A} * B_{-\infty,\omega_{r_{j-1}}}) \times C\big)/\langle\langle (r_i, c)\rangle\rangle \underset{P_j}{*} \big((\tilde{A} * B_{\alpha_{r_j},\infty}) \times C\big)/\langle\langle (r_j, c)\rangle\rangle \end{aligned} \tag{2.13}$$

Für die Wohldefiniertheit des amalgamierten Produkts aus (2.13) zeigen wir die Einbettung von P_j in die beiden Faktoren. Die Einbettung in den rechten Faktor folgt aus

Lemma 2.26 (i) für $m = j$. Die Einbettung in den linken Faktor folgt wegen $i = j - 1$ aus Lemma 2.26 (ii) für $m = j - 1$. Durch das Auffinden einer identischen Präsentation beider Seiten von (2.13) kann leicht die Isomorphie gezeigt werden.

Als Induktionsschritt ($j \to j + 1$) ist für

$$\begin{aligned} G &:= \left((\widetilde{A} * B_{-\infty,\omega_{r_j}}) \times C\right) / \langle\!\langle (r_i, c), (r_{i+1}, c), \ldots, (r_j, c) \rangle\!\rangle \\ &\cong \left((\widetilde{A} * B_{-\infty,\omega_{r_j}}) \times \widetilde{C}\right) / \langle\!\langle (r_i, c), (r_{i+1}, c), \ldots, (r_j, c) \rangle\!\rangle \end{aligned}$$

die Darstellung

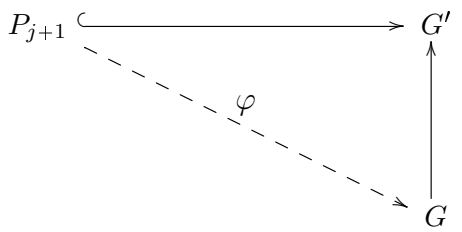
$$\begin{aligned} & \left((\widetilde{A} * B_{-\infty,\infty}) \times C\right) / \langle\!\langle (r_i, c), (r_{i+1}, c), \ldots, (r_{j+1}, c) \rangle\!\rangle \\ \cong \quad & G \underset{P_{j+1}}{*} \left((\widetilde{A} * B_{\alpha_{r_{j+1}},\infty}) \times C\right) / \langle\!\langle (r_{j+1}, c) \rangle\!\rangle \end{aligned} \tag{2.14}$$

mit $P_{j+1} = (\widetilde{A} * B_{\alpha_{r_{j+1}},\omega_{r_j}}) \times \widetilde{C}$ zu zeigen. Wir werden die Einbettungen von P_j in den linken und rechten Faktor beweisen. Damit ist das amalgamierte Produkt aus (2.14) wohldefiniert. Die Isomorphie zu $\left((\widetilde{A} * B_{-\infty,\infty}) \times C\right)/\langle\!\langle (r_i, c), (r_{i+1}, c), \ldots, (r_{j+1}, c) \rangle\!\rangle$ folgt dann leicht durch Auffinden einer gemeinsamen Präsentation. Wir bemerken, dass die Einbettung von P_{j+1} in den rechten Faktor durch Lemma 2.26 (i) mit $m = j + 1$ gegeben ist. Es bleibt, die Einbettung von P_{j+1} in den linken Faktor G zu beweisen:

Wegen Lemma 2.26 (ii) mit $m = j$ bettet P_{j+1} in $\left((\widetilde{A} * B_{\alpha_{r_j},\infty}) \times C\right)/\langle\!\langle (r_j, c) \rangle\!\rangle$ ein. Die Gruppe $\left((\widetilde{A} * B_{\alpha_{r_j},\infty}) \times C\right)/\langle\!\langle (r_j, c) \rangle\!\rangle$ bettet wiederum als Faktor des amalgamierten Produkts aus der Induktionsvoraussetzung in

$$G' := \left((\widetilde{A} * B_{-\infty,\infty}) \times C\right)/\langle\!\langle (r_i, c), (r_{i+1}, c), \ldots, (r_j, c) \rangle\!\rangle$$

ein. Wir definieren den Homomorphismus $\varphi\colon P_{j+1} \to G$ als Verknüpfung der trivialen Einbettung von P_{j+1} in $(\widetilde{A} * B_{-\infty,\omega_{r_j}}) \times \widetilde{C}$ mit dem natürlichen Homomorphismus von $(\widetilde{A} * B_{-\infty,\omega_{r_j}}) \times \widetilde{C}$ in die Faktorgruppe G. Insgesamt erhalten wir das kommutative Diagramm:



Schließlich lesen wir ab, dass φ ein Monomorphismus ist, also P_{j+1} in G einbettet. Dies beendet den Beweis.

□

In gleicher Weise wie Lemma 2.27 kann auch die folgende „gespiegelte“ Version von Lemma 2.27 bewiesen werden.

Lemma 2.28. *Wir benutzen die Schreibweise von Notation 2.24 und Lemma 2.25. Seien $i, j \in \mathbb{Z}$ zwei Zahlen mit $i < j$. Wir definieren $P_{i+1} := (\widetilde{A} * B_{\alpha_{r_i+1},\omega_{r_i}}) \times \widetilde{C}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} &\big((\widetilde{A} * B_{-\infty,\infty}) \times C\big)/\langle\langle (r_i, c), (r_{i+1}, c), \ldots, (r_j, c)\rangle\rangle \\ \cong\ &\big((\widetilde{A} * B_{-\infty,\omega_{r_i}}) \times C\big)/\langle\langle (r_i, c)\rangle\rangle \underset{P_{i+1}}{*} \big((\widetilde{A} * B_{\alpha_{r_i+1},\infty}) \times C\big)/\langle\langle (r_{i+1}, c), \ldots, (r_j, c)\rangle\rangle. \end{aligned}$$

Als letztes Resultat dieses Abschnitts beweisen wir ein kleines Hilfslemma, dessen Aussage wir nicht nur in diesem Kapitel, sondern auch an drei Stellen des Beweises von Hauptsatz 3.1 benutzen. Faktoren amalgamierter Produkte betten kanonisch in das amalgamierte Produkt ein (siehe Kapitel B). Daher unterscheiden wir im Folgenden in missbräuchlicher Notation nicht zwischen Elementen eines Faktors und ihren Bildern unter der kanonischen Einbettung des Faktors in das amalgamierte Produkt.

Lemma 2.29. *Seien X, Y zwei Gruppen, $W := X \underset{Z}{*} Y$ ein amalgamiertes Produkt und r, s zwei Elemente von X. Es gelte mindestens eine der folgenden Bedingungen:*

(i) Die Untergruppe Z liegt im Zentrum von Y.

(ii) Der Faktor Y ist eine freie Gruppe und Z ist eine maximale zyklische Untergruppe von Y.

Dann sind r und s genau dann in X konjugiert, wenn sie in W konjugiert sind.

Beweis. Wir bemerken, dass r und s zueinander in W konjugiert sind, wenn sie bereits im Faktor X konjugiert sind. Es bleibt zu beweisen, dass r und s in X konjugiert sind, wenn sie in W konjugiert sind. Sei also $w \in W$ ein Element mit $r = w^{-1}sw$. Wir nutzen die eindeutige Länge von Normalformen amalgamierter Produkte (siehe Lemma B.5), um zu folgern, dass w bereits in X liegt: Für $w \in X$ ist nichts zu zeigen. Wir können somit die Normalform

$$w = g_1 h_1 g_2 h_2 \cdots g_{n-1} h_{n-1} g_n \tag{2.15}$$

von w betrachten, wobei $g_i \in (X \backslash Z) \cup \{1\}$, $h_i \in Y \backslash Z$ und $n \geqslant 2$. Um eine größere Fallunterscheidung zu umgehen, erlauben wir ausschließlich g_1 und g_n trivial zu sein. Alle anderen Elemente g_i $(2 \leqslant i \leqslant n-1)$ seien nicht trivial. Dies ist eine leicht missbräuchliche Verwendung des Begriffs „Normalform“ (vgl. Definition B.4). Wir wählen unter den Elementen w mit den geschilderten Eigenschaften ein Element minimaler Länge. Dann gilt

$$r = g_n^{-1} h_{n-1}^{-1} g_{n-1}^{-1} \cdots h_2^{-1} g_2^{-1} \overbrace{h_1^{-1} \underbrace{g_1^{-1} s\, g_1}_{=:p} h_1}^{=:q} g_2 h_2 \cdots g_{n-1} h_{n-1} g_n. \tag{2.16}$$

Als Komposition von Elementen aus X ist $p := g_1^{-1} s g_1$ ebenfalls ein Element aus X. Daher genügt es, folgende zwei Fälle zu betrachten.

Fall 1: Sei p ein Element von $X\backslash Z$.
Da h_1 wegen $n \geqslant 2$ nicht trivial ist, besitzt das Element r einerseits laut rechter Seite von (2.16) eine Länge größer oder gleich 3 bzgl. der Normalform des amalgamierten Produkts W. Andererseits besitzt das Element r als Element von X die Länge 1 bzgl. dieser Normalform. Somit erhalten wir einen Widerspruch.

Fall 2: Sei p ein Element von Z.
Wir definieren $q := h_1^{-1}ph_1$. Als Produkt von Elementen aus Y ist q ebenfalls ein Element von Y. Nach Voraussetzung ist r kein Element von $Y\backslash Z$. Wäre q ein Element von $Y\backslash Z$, hätte die Normalform von r eine Länge von mindestens 3. Dies ist ein Widerspruch. Das Element q liegt somit in Z.

Fall 2.1: Sei Voraussetzung (i) von Lemma 2.29 erfüllt.
Da p im Zentrum der Gruppe Y liegt und somit insbesondere mit h_1 kommutiert, erhalten wir

$$r = g_n^{-1}h_{n-1}^{-1}g_{n-1}^{-1}\cdots h_2^{-1}g_2^{-1}g_1^{-1}\ s\ g_1g_2h_2\cdots g_{n-1}h_{n-1}g_n.$$

Somit erfüllt

$$w' := \underbrace{g_1g_2}_{=:g_1'}\ \underbrace{h_2}_{=:h_1'}\ \cdots\ \underbrace{g_{n-1}}_{=:g_{n-2}'}\ \underbrace{h_{n-1}}_{=:h_{n-2}'}\ \underbrace{g_n}_{=:g_{n-1}'} \tag{2.17}$$

die Gleichung $r = w'^{-1}sw'$. Wir bemerken, dass w' ein H-Stück weniger als w enthält. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von w als Element minimaler Länge mit $r = w^{-1}sw$.

Fall 2.2: Sei Voraussetzung (ii) von Lemma 2.29 erfüllt.
Sei z ein Erzeuger von Z. Dann erhalten wir wegen $p, q \in Z$ und $q = h_1^{-1}ph_1$ folgende Gleichung in Y:

$$z^\alpha = h_1^{-1}z^\beta h_1 \quad \text{für Elemente} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \quad \text{und} \quad h_1 \in Y\backslash Z$$

Laut Bedingung (ii) ist Y eine freie Gruppe. Daher folgt mit Satz E.5 die Asphärizität der Präsentation $\langle \mathcal{Y} \mid z\rangle$, wobei $\mathcal{Y}$ eine Basis von Y sei. Mithilfe von Satz E.6 folgern wir $\alpha = \beta$. Somit liegt h_1 im Zentralisator des Elements z^α. Da der Zentralisator eines nichttrivialen Elements einer freien Gruppe zyklisch ist und $Z = \langle z\rangle$ laut Bedingung (ii) eine maximale zyklische Untergruppe von Y ist, folgt $h_1 = z^\ell$ für ein $\ell \in \mathbb{Z}$. Dies ist ein Widerspruch zu $h_1 \in Y\backslash Z$.

□

2.4. Verallgemeinerung eines Resultats von M. Edjvet

In diesem Abschnitt beweisen wir Satz 2.18 mithilfe einer Kombination aus bereits von M. Edjvet benutzen Methoden und Argumenten über direkte Produkte, welche auf in

diesem Kapitel eingeführten Resultaten beruhen. Die Rolle von Satz 2.11 in M. Edjvets Beweis von Satz 2.14 wird in unserem Beweis von Lemma 2.17 übernommen.

Zunächst bemerken wir Folgendes:

Bemerkung 2.30. Sei G eine freie Gruppe mit Basis $\mathcal{X}$ und H eine beliebige Gruppe. Weiter sei $\mathcal{R}$ eine Menge von Elementen aus H und $\mathcal{S}$ sei eine Menge von Elementen aus $G * H$. Wir setzen $\widetilde{H} := H/\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$ und definieren den kanonischen Homomorphismus

$$\varphi\colon G * H \;\to\; (G * H)/\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle_{G*H} \cong G * \widetilde{H}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(G * H)/\langle\langle \mathcal{R}, \mathcal{S} \rangle\rangle &\cong \varphi(G * H)/\varphi(\langle\langle \mathcal{R}, \mathcal{S} \rangle\rangle_{G*H}) && (\text{wegen } \ker(\varphi) \subseteq \langle\langle \mathcal{R}, \mathcal{S} \rangle\rangle_{G*H}) \\
&\cong \varphi(G * H)/\langle\langle \varphi(\mathcal{S}) \rangle\rangle_{\varphi(G*H)} && (\text{wegen } \mathcal{R} \subseteq \ker(\varphi)) \\
&\cong (G * \widetilde{H})/\langle\langle \varphi(\mathcal{S}) \rangle\rangle_{G*\widetilde{H}}
\end{aligned}$$

Mit Blick auf Bemerkung 2.30 führen wir eine weitere Notation ein.

Notation 2.31. Seien $G = \langle \mathcal{X} \mid \rangle$ und $H = \langle \mathcal{Y} \mid \rangle$ freie Gruppen mit Basen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$. Weiter seien $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ Teilmengen von H und $\mathcal{S}$ sei eine Teilmenge von $G * H$. Wir setzen $\widetilde{H} := H/\langle\langle \mathcal{R}_1 \rangle\rangle$ und definieren den kanonischen Homomorphismus

$$\varphi\colon G * H \;\to\; (G * H)/\langle\langle \mathcal{R}_1 \rangle\rangle_{G*H} \;\cong\; G * \widetilde{H}$$

sowie für $\bar{H} := \widetilde{H}/\langle\langle \varphi(\mathcal{R}_2) \rangle\rangle$ den kanonischen Homomorphismus

$$\psi\colon G * \widetilde{H} \;\to\; (G * \widetilde{H})/\langle\langle \varphi(\mathcal{R}_1) \rangle\rangle_{G*\widetilde{H}} \;\cong\; G * \bar{H}.$$

Dann benutzen wir die folgenden Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \mid \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S} \rangle \;=\; \langle G, H \mid \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S} \rangle \;=\; \langle G, \widetilde{H} \mid \varphi(\mathcal{R}_2) \cup \varphi(\mathcal{S}) \rangle \\
=\; &\langle G, \bar{H} \mid \psi(\varphi(\mathcal{S})) \rangle
\end{aligned}$$

Falls es zu keinen Missverständnissen kommen kann, verzichten wir bei den Präsentationen auf die Erwähnung der Homomorphismen φ und ψ, indem wir für ein Element $w \in G * H$ die Bilder $\varphi(w) \in G * \widetilde{H}$ oder $\psi(\varphi(w)) \in G * \bar{H}$ in missbräuchlicher Notation wieder mit w bezeichnen.

Wir starten den Beweis von Satz 2.18 mit der Betrachtung des Falls $|\mathcal{J}| = 2$, d. h., wir beweisen folgende Aussage:

Proposition 2.32. *Seien A, B zwei indizierbare und lokal indizierbare Gruppen. Weiter sei C eine Gruppe. Dann besitzt $(A * B) \times C$ genau dann die Magnus-Eigenschaft, wenn sowohl $A \times C$ als auch $B \times C$ die Magnus-Eigenschaft besitzen.*

Beweis. Zunächst zeigen wir durch Kontraposition, dass die Gruppen $A \times C$ und $B \times C$ die Magnus-Eigenschaft besitzen, wenn $(A * B) \times C$ die Magnus-Eigenschaft besitzt. O. B. d. A. nehmen wir an, dass $A \times C$ nicht die Magnus-Eigenschaft besitzt. Dann existiert laut Lemma A.3 ein Element $(a, c) \in A \times C$, so dass $\langle\langle (a,c) \rangle\rangle_{A\times C} = \langle\langle (a^{-1},c) \rangle\rangle_{A\times C}$ gilt, aber weder a zu a^{-1} in A noch c zu c^{-1} in C konjugiert ist. Aufgrund der eindeutigen Länge von Normalformen freier Produkte folgt, dass a auch in $A * B$ nicht zu a^{-1} konjugiert ist. Nach Lemma A.3 besitzt $(A * B) \times C$ daher nicht die Magnus-Eigenschaft.

Es bleibt, die Magnus-Eigenschaft von $(A * B) \times C$ unter der Annahme zu beweisen, dass $A \times C$ und $B \times C$ die Magnus-Eigenschaft besitzen. Wegen Bemerkung A.1 besitzen A, B und C die Magnus-Eigenschaft. Da A und B zusätzlich lokal indizierbare Gruppen sind, ist wegen Korollar 2.15 auch $A * B$ eine Gruppe mit der Magnus-Eigenschaft. Laut Lemma A.3 besitzt $(A * B) \times C$ somit genau dann die Magnus-Eigenschaft, wenn für alle $r \in (A * B) \backslash \{1\}$ und $c \in C \backslash \{1\}$ gilt:

$$\langle\langle (r,c) \rangle\rangle_{(A*B)\times C} = \langle\langle (r^{-1},c) \rangle\rangle_{(A*B)\times C} \quad \Rightarrow \quad (r \sim_{(A*B)} r^{-1} \vee c \sim_C c^{-1}) \tag{2.18}$$

Seien also zwei Elemente $r \in (A * B) \backslash \{1\}$ und $c \in C \backslash \{1\}$ mit

$$\langle\langle (r,c) \rangle\rangle_{(A*B)\times C} = \langle\langle (r^{-1},c) \rangle\rangle_{(A*B)\times C} \tag{2.19}$$

gegeben. Wir möchten die Implikation (2.18) beweisen. Zunächst betrachten wir dazu den Fall, dass r die Länge $|r| = 1$ bzgl. der Normalform von $A * B$ besitzt. Dabei gelte o. B. d. A. $r \in A$. Sei $\pi : (A*B)\times C \to A \times C$ die kanonische Projektion. Wegen (2.19) haben $\pi((r,c)) = (r,c)$ und $\pi((r^{-1},c)) = (r^{-1},c)$ denselben normalen Abschluss in $A \times C$. Da $A \times C$ nach Voraussetzung die Magnus-Eigenschaft besitzt, gilt laut Lemma A.3 $r \sim r^{-1}$ in A (und somit auch in $A * B$) oder $c \sim c^{-1}$ in C.

Wir dürfen folglich $|r| \geqslant 2$ annehmen. Sei $r = u(1)v(1)u(2)v(2)\dots u(n)v(n)$ die Normalform von r. O. B. d. A. dürfen wir voraussetzen, dass r zyklisch gekürzt ist und mit einem A-Stück beginnt, da normale Abschlüsse invariant unter Konjugation sind. Wir definieren die Untergruppen

$$\begin{aligned} A' &= \langle u(1), u(2), \dots, u(n) \rangle \text{ von } A \text{ und} \\ B' &= \langle v(1), v(2), \dots, v(n) \rangle \text{ von } B. \end{aligned}$$

Zudem setzen wir $R := \langle\langle (r,c) \rangle\rangle_{(A*B)\times C}$, $R' := \langle\langle (r,c) \rangle\rangle_{(A'*B')\times C}$, $N := C \cap R'$ und $\widetilde{C} := C/N$.

Unser nächstes Zwischenziel ist, die folgende Behauptung zu beweisen:

$$((A * B) \times C)/R \;\cong\; (A \times \widetilde{C}) \underset{A'\times\widetilde{C}}{*} ((A' * B') \times C)/R' \underset{B'\times\widetilde{C}}{*} (B \times \widetilde{C}) \tag{2.20}$$

Für die Wohldefiniertheit des amalgamierten Produkts bemerken wir, dass die Einbettungen in den mittleren Faktor aus Lemma 2.17 folgen. Die Einbettungen in die äußeren

Faktoren sind Einbettungen von Untergruppen. Es bleibt, die Isomorphie der beiden Seiten von (2.20) zu zeigen, indem wir eine gemeinsame Präsentation beider Seiten finden. Seien dazu die natürlichen Projektionen $\pi\colon A*B*C \to A*B*\widetilde{C}$ und $\pi'\colon A'*B'*C \to A'*B'*\widetilde{C}$ gegeben. Für die rechte Seite von (2.20) schreiben wir mithilfe von Notation 2.31 und unter Verwendung von Tietze-Transformation der Form „Hinzufügen und Eliminieren redundanter Relationen“:

$$\begin{aligned}
& (A\times\widetilde{C}) \underset{A'\times\widetilde{C}}{*} ((A'*B')\times C)/R' \underset{B'\times\widetilde{C}}{*} (B\times\widetilde{C}) \\
= \;& (A\times\widetilde{C}) \underset{A'\times\widetilde{C}}{*} \langle A', B', C \mid [A', C],\, [B', C],\, N,\, rc\rangle \underset{B'\times\widetilde{C}}{*} (B\times\widetilde{C}) \\
= \;& (A\times\widetilde{C}) \underset{A'\times\widetilde{C}}{*} \langle A', B', (C/N) \mid \pi'([A', C]),\, \pi'([B', C]),\, \pi'(rc)\rangle \underset{B'\times\widetilde{C}}{*} (B\times\widetilde{C}) \\
= \;& \langle A, \widetilde{C} \mid [A, \widetilde{C}]\rangle \underset{A'\times\widetilde{C}}{*} \langle A', B', \widetilde{C} \mid [A', \widetilde{C}],\, [B', \widetilde{C}],\, \pi'(rc)\rangle \underset{B'\times\widetilde{C}}{*} \langle B, \widetilde{C} \mid [B, \widetilde{C}]\rangle \\
= \;& \langle A, A', B, B', \widetilde{C} \mid [A, \widetilde{C}],\, [A', \widetilde{C}],\, [B, \widetilde{C}],\, [B', \widetilde{C}],\, \pi'(rc)\rangle \\
= \;& \langle A, B, \widetilde{C} \mid [A, \widetilde{C}],\, [B, \widetilde{C}],\, \pi'(rc)\rangle = \langle A, B, \widetilde{C} \mid [A, \widetilde{C}],\, [B, \widetilde{C}],\, \pi(rc)\rangle
\end{aligned}$$

Bei der letzten Umformung haben wir genutzt, dass π eingeschränkt auf $A'*B'*\widetilde{C}$ der Projektion π' entspricht. Für die linke Seite von (2.20) schreiben wir:

$$\begin{aligned}
& ((A*B)\times C)/R \;=\; \langle A, B, C \mid [A, C],\, [B, C],\, rc\rangle \\
= \;& \langle A, B, C \mid [A, C],\, [B, C],\, N,\, rc\rangle \;=\; \langle A, B, C \mid [A, C],\, [B, C],\, N,\, rc\rangle \\
= \;& \langle A, B, (C/N) \mid \pi([A, C]),\, \pi([B, C]),\, \pi(rc)\rangle \\
= \;& \langle A, B, \widetilde{C} \mid [A, \widetilde{C}],\, [B, \widetilde{C}],\, \pi(rc)\rangle
\end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis der Isomorphie (2.20).

Als Faktor des amalgamierten Produkts in (2.20) bettet $((A'*B')\times C)/R'$ in $((A*B)\times C)/R$ ein. Da das Element (r^{-1}, c) trivial in $((A*B)\times C)/R$ ist und in der Untergruppe $(A'*B')\times C$ von $(A*B)\times C$ liegt, ist es somit bereits in $((A'*B')\times C)/R'$ trivial. Aus Symmetriegründen folgt

$$\langle\!\langle (r, c)\rangle\!\rangle_{(A'*B')\times C} \;=\; \langle\!\langle (r^{-1}, c)\rangle\!\rangle_{(A'*B')\times C}. \tag{2.21}$$

Wir bemerken, dass es zum Beweis der Implikation (2.18) ausreicht, die Konjugation von (r, c) zu (r^{-1}, c) oder $(r^{-1}, c)^{-1}$ in $(A'*B')\times C$ zu zeigen, da aus einer Konjugation von r zu r^{-1} in $A'*B'$ auch die Konjugation von r zu r^{-1} in $A*B$ folgt und der Faktor C gleich geblieben ist. Den restlichen Beweis führen wir per Induktion über $|r|$.

Für den Induktionsanfang setzen wir $|r| = 2$ voraus. O. B. d. A. sei $r = u(1)v(1)$. Dann gilt $(A'*B')\times C \cong F_2\times C$, wobei F_2 die freie Gruppe vom Rang 2 sei. Da $A\times C$ nach Voraussetzung die Magnus-Eigenschaft besitzt und A indizierbar ist, besitzt laut Lemma 2.10 $\mathbb{Z}\times C$ die Magnus-Eigenschaft. Wegen Satz 2.5 besitzt schließlich auch $F_2\times C$ die Magnus-Eigenschaft.

Für den Induktionsschritt betrachten wir zwei Fälle (siehe unten). Normale Abschlüsse sind invariant unter Konjugation. Daher dürfen wir o. B. d. A. voraussetzen, dass die Normalform von r bzgl. $A' * B'$ eine gerade Länge hat. Da A' sowie B' lokal indizierbar und als endlich erzeugte Gruppen damit auch indizierbar sind, existieren Epimorphismen

$$\varphi : A' \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \psi : B' \twoheadrightarrow \mathbb{Z}.$$

Für beliebige Elemente $w = u(1)v(1)u(2)v(2)\dots u(n)v(n) \in A * B$ in Normalform definieren wir $w_A := u(1)u(2)\dots u(n)$ und $w_B := v(1)v(2)\dots v(n)$.

Fall 1: Es gelte $\varphi(r_A) = 0$ oder $\psi(r_B) = 0$.
O. B. d. A. gelte $\varphi(r_A) = 0$. Sei $\zeta : (A' * B') \times C \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ der durch $\zeta(w, d) = \varphi(w_A)$ definierte Epimorphismus. Dann liegt (r, c) im Kern von ζ. Weiter sei $a \in A'$ ein Element mit $\varphi(a) = 1$. Wir definieren $\widetilde{A} := \ker(\varphi)$ und $B_i := a^{-i}B'a^i$ $(i \in \mathbb{Z})$. Da $\zeta(c) = 0$ für alle $c \in C$ gilt, dürfen wir mithilfe von Lemma 2.21

$$\ker(\zeta) = (\widetilde{A} * \mathop{\ast}_{i\in\mathbb{Z}} B_i) \times C \tag{2.22}$$

schreiben. Für $r_i := a^{-i}ra^i$ erhalten wir laut Lemma 2.23

$$\langle\!\langle (r_i, c) | i \in \mathbb{Z} \rangle\!\rangle_{\ker(\zeta)} = \langle\!\langle (r_i^{-1}, c) | i \in \mathbb{Z} \rangle\!\rangle_{\ker(\zeta)}.$$

Man bemerke, dass wegen $r_i = a^{-i}ra^i$ und Notation 2.24

$$\omega_{r_{k+\ell}} = \omega_{r_k} + \ell \quad \text{und} \quad \alpha_{r_{k+\ell}} = \alpha_{r_k} + \ell \quad \text{für alle } k, \ell \in \mathbb{Z} \tag{2.23}$$

gilt. Wir wählen Indizes $i, j \in \mathbb{Z}$ mit $i \leqslant j$, so dass (r_0^{-1}, c) in

$$\langle\!\langle (r_i, c), (r_{i+1}, c), \dots (r_j, c) \rangle\!\rangle_{\ker(\zeta)}$$

liegt und $j - i$ minimal mit dieser Eigenschaft ist. Unser Ziel ist zu zeigen, dass $i = j = 0$ gilt. Im Hinblick auf einen Widerspruch gelte daher $i < j$. Unter Verwendung von Lemma 2.27 folgt $\omega_{r_0^{-1}} = \omega_{r_0} \geqslant \omega_{r_j}$, denn wäre ω_{r_0} echt kleiner als ω_{r_j}, würde (r_0^{-1}, c) im linken Faktor des amalgamierten Produkts aus Lemma 2.27 liegen und somit bereits dort trivial sein. Dies widerspricht der Minimalität von $i - j$. Mit Lemma 2.28 kann in analoger Weise $\alpha_{r_0^{-1}} = \alpha_{r_0} \leqslant \alpha_{r_i}$ gezeigt werden. Insgesamt erhalten wir:

(i) $\alpha_{r_0} \leqslant \alpha_{r_i} \overset{(2.23)}{=} \alpha_{r_0} + i \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant i$

(ii) $\omega_{r_0} \geqslant \omega_{r_j} \overset{(2.23)}{=} \omega_{r_0} + j \quad \Rightarrow \quad 0 \geqslant j$

Wir folgern mit (i) und (ii) die Ungleichungskette $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant 0$. Somit gilt $i = j = 0$. Schließlich ist (r_0^{-1}, c) ein Element von $\langle\!\langle (r_0, c) \rangle\!\rangle_{\ker(\zeta)}$. Aus Symmetriegründen liegt auch (r_0, c) in $\langle\!\langle (r_0^{-1}, c) \rangle\!\rangle_{\ker(\zeta)}$ und es folgt insgesamt

$$\langle\!\langle (r_0, c) \rangle\!\rangle_{\ker(\zeta)} = \langle\!\langle (r_0^{-1}, c) \rangle\!\rangle_{\ker(\zeta)}. \tag{2.24}$$

Als Nächstes zeigen wir, dass r_0 geschrieben in den Erzeugern des freien Produkts (2.22) mindestens zwei Faktoren B_i benutzt. Im Hinblick auf einen Widerspruch nehmen wir an, dass r_0 und damit auch r_0^{-1} nur einen Faktor B_i benutzt. Man bemerke, dass $B_i = B_0$ gilt, da die Normalform von r bzgl. $A' * B'$ eine gerade Länge von mindestens 2 hat. Laut Voraussetzung gilt somit $r_0 = r \in \widetilde{A} * B_0 \cong \widetilde{A} * B'$. Dies steht im Widerspruch zur Definition von A', denn wegen $a \notin \widetilde{A}$ ist $\widetilde{A}$ eine echte Untergruppe von A'.

Wir schreiben

$$\ker(\zeta) = \big(K * B_0\big) \times C \quad \text{mit} \quad K := \widetilde{A} * \mathop{\ast}_{k\neq 0} B_k.$$

Da r_0 neben B_0 mindestens einen weiteren Faktor B_i mit $i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ benutzt, hat eine Normalform von $r_0 \in K * B_0$ eine gerade Länge von mindestens 2. Wir begründen, dass diese Länge echt kleiner als die Länge der ursprünglichen Normalform von $r \in A' * B'$ ist: Beim Umschreiben der Normalform $r_0 \in K * B_0$ in die Normalform $r \in A' * B'$ erhält man für jedes B_0-Stück wegen $B' = B_0$ ein B'-Stück. Jedes Stück von K entspricht einem Teil der Normalform r, welcher ein A'-Stück ist oder mit einem A'-Stück anfängt und endet, denn ansonsten wäre das erste oder letzte Stück des Teilworts aus $K = \widetilde{A} * \ast_{k\neq 0} B_k$ ein B_0-Stück. Beim Zusammenfügen dieser Teilwörter mit den B'-Stücken können sich somit keine Kürzungen ergeben. Insbesondere kann r_0 nicht gleichzeitig mit einem B_0-Stück anfangen und enden. Wir erhalten somit für jedes Stück der Normalform von $r_0 \in K * B_0$ mindestens ein Stück der Normalform von $r \in A' * B'$. Laut Voraussetzung enthält mindestens ein K-Stück von r_0 ein Stück aus B_i. Für dieses K-Stück erhalten wir mindestens drei Stücke in der Normalform von $r \in A' * B'$. Folglich ist die Normalform von $r_0 \in K * B_0$ echt kürzer als die von $r \in A' * B'$.

Um schließlich die Induktionsvoraussetzung anwenden zu können, möchten wir r_0 als Element eines freien Produkts zweier Faktoren darstellen, die nicht nur lokal indizierbar, sondern auch indizierbar sind. Dazu betrachten wir die Normalform von $r_0 \in K * B_0$. Die von den K-Stücken erzeugte Untergruppe nennen wir K' und die von den B_0-Stücken erzeugte Untergruppe B_0'. Man bemerke, dass beide Untergruppen endlich erzeugt, lokal indizierbar und damit auch indizierbar sind. Wir haben bereits gezeigt, dass die Normalform von $r_0 \in K * B_0$ eine gerade Länge größer oder gleich 2 besitzt. Daher kann $(r_0, c) \in (K' * B_0') \times C$ nicht zu einem Element von $K' \times C$ oder $B_0' \times C$ konjugiert sein. Durch Anwendung von Lemma 2.17 erhalten wir für $\widetilde{C} := C \cap \langle\langle r_0 \rangle\rangle_{(K' * B_0') \times C}$ die Einbettungen von $K' \times \widetilde{C}$ und $B_0' \times \widetilde{C}$ in $((K' * B_0') \times C)/\widetilde{R}$, wobei $\widetilde{R} := \langle\langle (r_0, c) \rangle\rangle_{(K' * B_0') \times C}$. Dies rechtfertig analog zu (2.20) die Schreibweise

$$((K * B_0) \times C)/\langle\langle (r_0, c) \rangle\rangle \quad \cong \quad (K \times \widetilde{C}) \mathop{*}_{K' \times \widetilde{C}} ((K' * B_0') \times C)/\widetilde{R} \mathop{*}_{B_0' \times \widetilde{C}} (B_0 \times \widetilde{C}).$$

Als Faktor des amalgamierten Produkts bettet $((K' * B_0') \times C)/\widetilde{R}$ in $((K * B_0) \times C)/\langle\langle (r_0, c) \rangle\rangle$ ein. Da (r_0^{-1}, c) wegen (2.24) trivial in $((K * B_0) \times C)/\langle\langle (r_0, c) \rangle\rangle$ ist, muss (r_0^{-1}, c) folglich

bereits in $((K' * B'_0) \times C)/\langle\!\langle (r_0, c) \rangle\!\rangle$ trivial sein. Aus Symmetriegründen ist auch (r_0, c) in $((K' * B'_0) \times C)/\langle\!\langle (r_0^{-1}, c) \rangle\!\rangle$ trivial. Insgesamt erhalten wir die Gleichheit der normalen Abschlüsse von (r_0, c) und (r_0^{-1}, c) in $(K' * B'_0) \times C$. Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung folgt, dass (r_0, c) in $(K' * B'_0) \times C$ zu $(r_0^{-1}, c)^{\pm 1}$ konjugiert ist. Schließlich ist auch (r, c) in $(A * B) \times C$ zu $(r^{-1}, c)^{\pm 1}$ konjugiert, denn $K' * B'_0$ ist nach Konstruktion eine Untergruppe von $A * B$. Dies beendet den Beweis der Implikation (2.18) für Fall 1.

Fall 2: Es gelte $\varphi(r_A) \neq 0$ und $\psi(r_B) \neq 0$.
Wir betrachten den Epimorphismus $\xi\colon (A' * B') \times C \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, welcher durch

$$\xi(w, d) \;=\; \psi(r_B) \cdot \varphi(w_A) \;-\; \varphi(r_A) \cdot \psi(w_B)$$

definiert ist. Sei $r = u(1)v(1)u(2)v(2)\dots u(\frac{n}{2})v(\frac{n}{2})$ eine Normalform von r bzgl. $A' * B'$, wobei $u(i) \in A'$ und $v(i) \in B'$ $(1 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2})$ gelte. Wegen $\varphi(r_A) \neq 0$ existiert mindestens ein A'-Stück $a := u(i)$ von r mit $\xi(u(i)) \neq 0$. Indem wir r ggf. zyklisch vertauschen, dürfen wir o. B. d. A. $a = u(1)$ annehmen. Wir wählen ein $b \in B'$ mit $\psi(b) = -1$ und setzen $\mu := \xi(a) \neq 0$ sowie $\nu := \xi(b)$ $(= \varphi(r_A) \neq 0)$.

Da A', B' lokal indizierbar und damit insbesondere torsionsfrei sind, dürfen wir

$$\begin{aligned} \widetilde{G} \;&:=\; \Big(\langle \widetilde{a} \mid\rangle \underset{\widetilde{a}^\mu = a}{*} (A' * B') \underset{b = \widetilde{b}^\nu}{*} \langle \widetilde{b} \mid\rangle\Big) \times C \;=\; \big(A'' * B''\big) \times C \qquad (2.25) \\ \text{mit}\;\; A'' \;&:=\; \langle A', \widetilde{a} \mid \widetilde{a}^\mu = a\rangle \quad\text{und}\quad B'' \;:=\; \langle B', \widetilde{b} \mid \widetilde{b}^\nu = b\rangle \end{aligned}$$

definieren. Nach Satz 2.12 sind auch A'' und B'' lokal indizierbare Gruppen. Wir wählen einen zusätzlichen Erzeuger x und erweitern ξ durch $\xi(\widetilde{a}) = \xi(\widetilde{b}) = \xi(x) = 1$ zu einem Epimorphismus von $\widetilde{G} * \langle x\rangle$ auf $\mathbb{Z}$. Schließlich definieren wir $\widetilde{a}_i := x^{-i}\widetilde{a}x^{i-1}$ und $\widetilde{b}_i := x^{-i}\widetilde{b}x^{i-1}$ $(i \in \mathbb{Z})$. Dann gilt laut Lemma 2.22

$$\ker(\xi) \;=\; \Big(\big(A'' \cap \ker(\xi)\big) * \big(B'' \cap \ker(\xi)\big) * \langle \widetilde{a}_i, \widetilde{b}_i \,(i \in \mathbb{Z}) \mid\rangle\Big) \times C.$$

Für $r_i := x^{-i}rx^i$ erhalten wir wegen Lemma 2.23 die Gleichheit der normalen Abschlüsse der Mengen $\{(r_i, c) | i \in \mathbb{Z}\}$ und $\{(r_i^{-1}, c) | i \in \mathbb{Z}\}$ in $\ker(\xi)$. Den kleinsten bzw. größten Index k, so dass $r_i \in \ker(\xi)$ einen Erzeuger b_k benutzt, bezeichnen wir mit α_{r_i} bzw. ω_{r_i}. Es gilt:

$$\alpha_{r_j} \;=\; \alpha_{r_j^{-1}}, \quad \omega_{r_j} \;=\; \omega_{r_j^{-1}} \qquad \text{sowie} \qquad \alpha_{r_{j+k}} = \alpha_{r_j} + k, \quad \omega_{r_{j+k}} = \omega_{r_j} + k \;\; (\forall j, k \in \mathbb{Z})$$

Wir wählen Indizes $i, j \in \mathbb{Z}$ mit $i \leqslant j$, so dass (r_0^{-1}, c) in

$$\langle\!\langle (r_i, c), (r_{i+1}, c), \dots (r_j, c) \rangle\!\rangle_{\ker(\xi)}$$

liegt und $j - i$ minimal mit dieser Eigenschaft ist. Unser Ziel ist zu zeigen, dass $i = j = 0$ gilt. Im Hinblick auf einen Widerspruch gelte daher $i < j$. Wir möchten Lemma 2.27 anwenden. Dazu setzen wir $B_i := \langle \widetilde{b}_i \rangle$ und $\widetilde{A} := \big(A'' \cap \ker(\xi)\big) * \big(B'' \cap \ker(\xi)\big) * \langle \widetilde{a}_i \,(i \in \mathbb{Z}) \mid\rangle$.

Wie in Fall 1 folgern wir aus Lemma 2.27 und Lemma 2.28 die Gleichungskette $i = j = 0$ und somit

$$\langle\!\langle (r_0, c) \rangle\!\rangle_{\ker(\xi)} = \langle\!\langle (r_0^{-1}, c) \rangle\!\rangle_{\ker(\xi)}. \tag{2.26}$$

Wir schreiben nun $\ker(\xi)$ in der Form

$$\begin{aligned} \ker(\xi) &= (K * L) \times C \text{ mit} \\ K &= A'' \cap \ker(\xi) \text{ und } L = \big(B'' \cap \ker(\xi)\big) * \langle \widetilde{a}_i, \widetilde{b}_i \, (i \in \mathbb{Z}) \mid \rangle. \end{aligned}$$

Um zu sehen, dass die Normalform von r_0 bzgl. $K * L$ eine echt kürzere Länge als die Normalform $r = av(1)u(2)v(2)\dots u(\frac{n}{2})v(\frac{n}{2})$ bzgl. $A' * B'$ besitzt, formen wir die beiden Normalformen ineinander um. Wir schreiben

$$\begin{aligned} r &= av(1)u(2)\dots v(\frac{n}{2}) \\ &= \widetilde{a}^{\mu}x^{-\mu} \cdot x^{\mu}\widetilde{b}^{-\mu} \cdot \widetilde{v}(1) \cdot \widetilde{b}^{\delta_1}x^{-\delta_1} \cdot x^{\delta_1}\widetilde{a}^{-\delta_1} \cdot \widetilde{u}(2)\dots \widetilde{a}^{\delta_{2n-2}}x^{-\delta_{2n-2}} \cdot x^{\delta_{2n-2}}\widetilde{b}^{-\delta_{2n-2}} \cdot \widetilde{v}(\frac{n}{2}) \end{aligned}$$

für Element $\widetilde{u}(i) \in A'' \cap \ker(\xi)$, $\widetilde{v}(i) \in B'' \cap \ker(\xi)$ und $\delta_i \in \mathbb{Z}$. Wie im Beweis zu Lemma 2.22 bemerken wir $\widetilde{a}^k x^{-k} = \Pi_{j=0}^{k-1}\widetilde{a}_{-j}$ sowie $\widetilde{b}^k x^{-k} = \Pi_{j=0}^{k-1}\widetilde{b}_{-j}$. Schließlich erhalten wir die Darstellung

$$r = \underbrace{\widetilde{a}_0\widetilde{a}_{-1}\dots\widetilde{a}_{-\mu+1} \cdot g(1) \cdot \widetilde{v}(1) \cdot g(2) \cdot f(2)}_{\in L} \cdot \underbrace{\widetilde{u}(2)}_{\in K} \dots \underbrace{f(n-2) \cdot g(n-1) \cdot \widetilde{v}(\frac{n}{2})}_{\in L},$$

wobei $f(i)$ Elemente in den Erzeugern $\widetilde{a}_j$ $(j \in \mathbb{Z})$ und $g(i)$ Elemente in den Erzeugern $\widetilde{b}_j$ $(j \in \mathbb{Z})$ sind. Wir sehen, dass mit Ausnahme des ersten A'-Stücks $a = u(1)$ von $r \in A' * B'$ alle Stücke von $r \in A' * B'$ in jeweils höchstens ein Stück von $r_0 \in K * L$ übergegangen sind. Da a und $v(1)$ in ein gemeinsames L-Stück übergegangen sind, ist die Länge der Normalform von $r_0 \in K * L$ echt kleiner als n. Um die Induktionsvoraussetzung anwenden zu können, müssen wir zu Faktoren übergehen, welche nicht nur lokal indizierbar, sondern auch indizierbar sind. Dafür definieren wir K' bzw. L' als die von allen K- bzw. L-Stücken von $r_0 \in K * L$ erzeugte Untergruppe. Für $K' = \{1\}$ folgt $A' \cong \mathbb{Z}$. In diesem Fall gehen wir zum Beginn von Fall 2 zurück und führen den Beweis mit vertauschten Rollen von A' und B' durch. Gelangen wir auch hier zum Fall $B' \cong \mathbb{Z}$, so sind wir in der Situation $A' * B' = F_2$ des Induktionsanfangs. Wir dürfen daher o. B. d. A. annehmen, dass die Normalform von $r_0 \in K' * L'$ eine gerade Länge von mindestens 2 besitzt. Ähnlich wie zuvor bei (2.20) folgern wir für $\widetilde{R} := \langle\!\langle (r_0, c) \rangle\!\rangle_{(K'*L')\times C}$, $N := C \cap \widetilde{R}$ und $\widetilde{C} := C/N$ mithilfe von Lemma 2.17 die Darstellung

$$((K * L) \times C)/\langle\!\langle (r_0, c) \rangle\!\rangle \cong (K \times \widetilde{C}) \underset{K' \times \widetilde{C}}{*} ((K' * L') \times C)/\widetilde{R} \underset{L' \times \widetilde{C}}{*} (L \times \widetilde{C}).$$

Analog zu Fall 1 folgt die Gleichheit der normalen Abschlüsse von (r_0, c) und (r_0^{-1}, c) in $(K' * L') \times C$. Laut Induktionsvoraussetzung ist daher (r_0, c) in $(K' * L') \times C$ zu $(r_0^{-1}, c)^{\pm 1}$

konjugiert. Da $(K' * L') \times C$ eine Untergruppe von $(\widetilde{G} * \langle x \rangle) \times C$ ist, erhalten wir die Konjugation von (r, c) zu $(r^{-1}, c)^{\pm 1}$ in $(\widetilde{G} * \langle x \rangle) \times C$. Wir erinnern daran, dass r ein Element von $\widetilde{G}$ ist. Durch Anwendung der kanonischen Projektion von $(\widetilde{G} * \langle x \rangle) \times C$ auf $\widetilde{G} \times C$ erhalten wir daher die Konjugation von (r, c) und (r^{-1}, c) in $\widetilde{G} \times C$. Zudem gilt $r \in A' * B'$. Zweimalige Anwendung von Lemma 2.29 (i) auf das amalgamierte Produkt aus (2.25) ergibt schließlich die Konjugation von (r, c) zu $(r^{-1}, c)^{\pm 1}$ in $(A' * B') \times C$ und damit auch in $(A * B) \times C$.

Insgesamt haben wir nun Implikation (2.18) und somit die Magnus-Eigenschaft von $(A * B) \times C$ bewiesen.

□

Schließlich können wir die Aussage von Satz 2.18 aus Proposition 2.32 folgern:

Beweis von Satz 2.18.
Für den Beweis von Satz 2.18 (für beliebige Indexmengen $\mathcal{J}$) erinnern wir zunächst an Bemerkung 2.9, dass freie Produkte lokal indizierbarer Gruppen wieder lokal indizierbar sind. Somit erhalten wir aus der Gültigkeit von Satz 2.18 für $|\mathcal{J}| = 2$ (siehe Proposition 2.32) die Gültigkeit von Satz 2.18 für alle endlichen Indexmengen $\mathcal{J}$. Den Beweis für unendliche Indexmengen $\mathcal{J}$ führen wir als Widerspruchsbeweis. Dazu seien Elemente (r, c), $(s, d) \in G := (\ast_{j \in \mathcal{J}} A_j) \times C$ mit demselben normalen Abschluss in G gegeben, so dass (r, c) in G weder zu (s, d) noch zu $(s, d)^{-1}$ konjugiert ist. Da r und s endlich sind, existiert eine endliche Teilmenge $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$, so dass (r, c) und (s, d) bereits Elemente der Untergruppe $G' := (\ast_{j \in \mathcal{J}'} A_j) \times C$ von G sind. Wir definieren die kanonische Projektion $\pi \colon G \to G'$. Wegen $\pi((r, c)) = (r, c)$ und $\pi((s, d)) = (s, d)$ sind die normalen Abschlüsse von (r, c) und (s, d) in G' gleich. Aufgrund der Endlichkeit von $\mathcal{J}'$ folgt, dass (r, c) in der Untergruppe G' von G zu (s, d) oder $(s, d)^{-1}$ konjugiert ist. Dies ist ein Widerspruch.

□

3. Eine Magnus-Erweiterung über lokal indizierbare Gruppen

In diesem Kapitel beweisen wir folgenden Hauptsatz.

Hauptsatz 3.1. *Seien C und G Gruppen, die eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllen.*

(1) Es gelte $C = \{1\}$ und G sei lokal indizierbar.

(2) Es gelte $C \neq \{1\}$ und G sei sowohl lokal indizierbar als auch indizierbar.

Weiter sei u ein nichttriviales Element in G. Dann besitzt die Gruppe

$$\widetilde{G} = (G \underset{u=[a,b]}{*} F(a,b)) \times C$$

genau dann die Magnus-Eigenschaft, wenn $G \times C$ die Magnus-Eigenschaft besitzt.

Zu den Bedingungen (1) und (2) von Hauptsatz 3.1 bemerken wir:

Bemerkung 3.2. Offensichtlich ist jede endlich erzeugte lokal indizierbare Gruppe indizierbar. Andererseits existieren lokal indizierbare, aber nicht indizierbare abzählbare Gruppen (z. B. $\mathbb{Q}$). Zudem gibt es indizierbare, aber nicht lokal indizierbare endlich erzeugte Gruppen (z. B. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$).

3.1. Reduktion auf eine neue Gruppe

Als Erstes werden wir zeigen, dass $G \times C$ die Magnus-Eigenschaft besitzt, falls $\widetilde{G}$ die Magnus-Eigenschaft besitzt. Dazu beweisen wir mit Lemma 3.5 eine leicht allgemeinere Aussage. Wir definieren:

Definition 3.3. Seien G' eine Gruppe und G eine Untergruppe von G'. Dann bezeichnen wir G als *konjugationsneutrale Untergruppe* von G', falls aus der Konjugation zweier beliebiger Elemente r, $s \in G$ in G' auch die Konjugation von r und s in G folgt, d. h.

$$\forall\, r, s \in G\colon \ \big((\exists\, u \in G'\colon \ u^{-1}ru = s) \ \Rightarrow \ (\exists\, v \in G\colon \ v^{-1}rv = s)\big).$$

Für konjugationsneutrale Untergruppen beweisen wir folgende einfache Aussagen, welche den Beweis von Lemma 3.5 verkürzt.

Lemma 3.4. *Sei G eine konjugationsneutrale Untergruppe einer Gruppe G'. Falls G' die Magnus-Eigenschaft besitzt, dann besitzt auch G die Magnus-Eigenschaft.*

Beweis. Seien $r, s \in G$ zwei Elemente mit $\langle\langle r \rangle\rangle_G = \langle\langle s \rangle\rangle_G$. Dann gilt auch $\langle\langle r \rangle\rangle_{G'} = \langle\langle s \rangle\rangle_{G'}$. Laut Voraussetzung besitzt G' die Magnus-Eigenschaft. Somit gilt $r \sim_{G'} s^{\pm 1}$. Da G eine konjugationsneutrale Untergruppe von G' ist, folgt schließlich $r \sim_G s^{\pm 1}$.

□

Lemma 3.5. *Seien G', C Gruppen und G eine konjugationsneutrale Untergruppe von G'. Wenn $G' \times C$ die Magnus-Eigenschaft besitzt, dann besitzt auch $G \times C$ die Magnus-Eigenschaft.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $G' \times C$ die Magnus-Eigenschaft besitzt. Dann besitzen wegen Bemerkung A.1 auch die Gruppen G' und C die Magnus-Eigenschaft. Mit Lemma 3.4 folgt die Magnus-Eigenschaft der Gruppe G.

Im Hinblick auf einen Widerspruch besitze $G \times C$ nicht die Magnus-Eigenschaft. Dann existieren laut Lemma A.3 Elemente (r, c), $(r, c^{-1}) \in G \times C$ mit demselben normalen Abschluss in $G \times C$, so dass weder r zu r^{-1} in G noch c zu c^{-1} in C konjugiert sind. Da G eine Untergruppe von G' ist, sind auch die normalen Abschlüsse von (r, c) und (r, c^{-1}) in $G' \times C$ gleich. Laut Voraussetzung besitzt $G' \times C$ die Magnus-Eigenschaft. Somit ist entweder r zu r^{-1} in G' oder c zu c^{-1} in C konjugiert. Letzteres haben wir bereits ausgeschlossen. Es folgt

$$r \sim r^{-1} \text{ in } G', \quad \text{aber} \quad r \not\sim r^{-1} \text{ in } G.$$

Da r ein Element der konjugationsneutralen Untergruppe G von G' ist, erhalten wir einen Widerspruch.

□

Wir bemerken, dass G aus Hauptsatz 3.1 wegen Lemma 2.29 (ii) eine konjugationsneutrale Untergruppe von $G \underset{u=[a,b]}{*} F(a,b)$ ist. Somit dürfen wir Lemma 3.5 auf $G' := G \underset{u=[a,b]}{*} F(a,b)$ anwenden. Folglich besitzt $G \times C$ die Magnus-Eigenschaft, falls $\widetilde{G} = G' \times C$ die Magnus-Eigenschaft besitzt. Damit ist eine Implikationsrichtung von Hauptsatz 3.1 bewiesen.

Im restlichen Beweis widmen wir uns der anderen Implikationsrichtung der Äquivalenzaussage von Hauptsatz 3.1, d. h. wir zeigen:

Satz 3.6 (Rückrichtung von Hauptsatz 3.1)**.** *Es seien die Bedingungen von Hauptsatz 3.1 erfüllt. Wenn $G \times C$ die Magnus-Eigenschaft besitzt, dann besitzt auch $\widetilde{G} = (G *_{u=[a,b]} F(a,b)) \times C$ die Magnus-Eigenschaft.*

Im verbleibenden Teil dieses Abschnitts leiten wir Satz 3.6 aus Proposition 3.8 ab, welche wir in den Abschnitten 3.2 bis 3.7 beweisen. Zuvor bemerken wir Folgendes:

Bemerkung 3.7. Wir betrachten eine Gruppenpräsentation $G = \langle \widetilde{E} \mid \widetilde{R} \rangle$ mit Erzeugermenge $\widetilde{E}$ und Relationenmenge $\widetilde{R}$. Sei x ein Erzeuger aus $\widetilde{E}$. Falls alle Relationen aus $\widetilde{R}$ in der von $\widetilde{E}$ erzeugten freien Gruppe eine Exponentensumme von 0 bzgl. x besitzen, so ist die Exponentensumme eines beliebigen Elements $r \in G$ bzgl. x wohldefiniert.

Proposition 3.8. *Seien C und G Gruppen, für welche eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist.*

(1) Es gelte $C = \{1\}$ und G sei lokal indizierbar.

(2) Es gelte $C \neq \{1\}$ und G sei sowohl lokal indizierbar als auch indizierbar.

Zudem besitze $G \times C$ die Magnus-Eigenschaft. Wir betrachten die Gruppe

$$\widetilde{H} = (G \underset{u=[x^k,b]}{*} F(x,b)) \times C$$

für ein nichttriviales Element $u \in G$ und $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Weiter seien Elemente (r,c), (s,d) von $\widetilde{H}$ mit den folgenden Eigenschaften gegeben:

- *Die Elemente (r,c) und (s,d) besitzen denselben normalen Abschluss in $\widetilde{H}$.*
- *Das Element $r \in G \underset{u=[x^k,b]}{*} F(x,b)$ ist nichttrivial und besitzt eine Exponentensumme von 0 bzgl. x.*
- *Im Fall $k \neq 1$ besitzt $r \in G \underset{u=[x^k,b]}{*} F(x,b)$ eine Exponentensumme ungleich 0 bzgl. b.*

Dann ist (r,c) in $\widetilde{H}$ zu (s,d) oder $(s,d)^{-1}$ konjugiert.

Beweis von Satz 3.6 unter Voraussetzung von Proposition 3.8.
Dieser Beweis verläuft analog zur Deduktion des Haupttheorems aus Proposition 2.1 in [BS08]. Zunächst bemerke man, dass die Exponentensummen bzgl. a, b in $\widetilde{G}$ bzw. x, b in $\widetilde{H}$ laut Bemerkung 3.7 wohldefiniert sind. Seien (r,c) und (s,d) Elemente aus $\widetilde{G}$ mit demselben normalen Abschluss in $\widetilde{G}$. Wir möchten zeigen, dass (r,c) in $\widetilde{G}$ zu $(s,d)^{\pm 1}$ konjugiert ist. Dazu betrachten wir als Erstes den Fall, dass r und damit auch s trivial sind. Dann erhalten wir die Gleichheit der normalen Abschlüsse von c und d in C. Das direkte Produkt $G \times C$ besitzt nach Voraussetzung von Satz 3.6 die Magnus-Eigenschaft. Wegen Bemerkung A.1 besitzt daher auch C die Magnus-Eigenschaft. Somit ist c in C zu $d^{\pm 1}$ und folglich $(1,c)$ in $\widetilde{G}$ zu $(1,d)^{\pm 1}$ konjugiert. Im Folgenden dürfen wir also r als nichttrivial voraussetzen. Die Exponentensumme eines Elementes w bzgl. eines Erzeugers z bezeichnen wir mit w_z.

Fall 1: Sei $r_b = 0$, wobei r_b die Exponentensumme des Elements r bzgl. b sei.
In diesem Fall benutzen wir die Präsentation

$$\widetilde{G} = (G \underset{u^{-1}=[b,a]}{*} F(a,b)) \times C.$$

Durch Umbenennung von a, b, u in b, x, u^{-1} ergibt sich eine Darstellung der Form $\widetilde{H}$ aus Proposition 3.8 samt der dort geforderten Bedingungen. Somit folgt Satz 3.6 direkt aus Proposition 3.8.

Fall 2: Sei $r_b \neq 0$.
In diesem Fall existiert eine natürliche Einbettung

$$G' := G \underset{u=[a,b]}{*} F(a,b) \quad \hookrightarrow \quad H' := G' \underset{a=x^{r_b}}{*} F(x), \tag{3.1}$$

welche eine natürliche Einbettung

$$\widetilde{G} \quad \hookrightarrow \quad \widetilde{H} := H' \times C \;=\; (G \underset{u=[x^{r_b},b]}{*} F(x,b)) \times C$$

induziert. Wegen der Gleichheit der normalen Abschlüsse von (r,c) und (s,d) in $\widetilde{G}$ stimmen auch die normalen Abschlüsse der beiden Elemente in $\widetilde{H}$ überein. Sei $\bar{b} = x^{-r_a} b$. Dann dürfen wir wegen

$$[x^{r_b}, b] = x^{-r_b} b^{-1} x^{r_b} b = x^{-r_b} \bar{b}^{-1} x^{r_b} \bar{b} = [x^{r_b}, \bar{b}]$$

mit der Präsentation

$$H' = G \underset{u=[x^{r_b},\bar{b}]}{*} F(x,\bar{b}) \tag{3.2}$$

arbeiten. Zudem dürfen wir das Element $r \in G'$ als Element von H' betrachten. Für die Exponentensummen r_a, r_b von $r \in G'$ bzgl. a, b sowie für die Exponentensummen r_x, $r_{\bar{b}}$ von $r \in H'$ bzgl. x, $\bar{b}$ gilt:

$$r_x = r_a r_b - r_b r_a = 0 \quad \text{und} \quad r_{\bar{b}} = r_b \neq 0$$

Somit sind alle Bedingungen von Proposition 3.8 erfüllt und (r,c) ist in $\widetilde{H}$ zu $(s,d)^{\pm 1}$ konjugiert. Indem wir (s,d) ggf. invertieren, können wir o. B. d. A. annehmen, dass (r,c) in $\widetilde{H}$ zu (s,d) konjugiert ist. Daher gilt $r \sim_{H'} s$ und $c \sim_C d$. Wegen (3.1) folgt $r \sim_{G'} s$ sofort aus Lemma 2.29 mit Bedingung (i). Schließlich gilt $(r,c) \sim_{\widetilde{G}} (s,d)$.

□

Als Vorbereitung für die folgenden Abschnitte führen wir weitere Bezeichnungen ein.

Notation 3.9. Wir setzen

$$H := G *_{u=[x^k,b]} F(x,b) \quad \text{sowie} \quad \widetilde{H} := H \times C \;\; (\text{vgl. } \widetilde{H} \text{ aus Proposition 3.8})$$

und betrachten für die laut Bemerkung 3.7 wohldefinierte Exponentensumme h_x eines Elements $h \in H$ bzw. $h \in \widetilde{H}$ bzgl. x die Homomorphismen

$$\begin{array}{rrcll} \varphi: & H & \longrightarrow & \mathbb{Z}, \quad h \mapsto h_x & \text{bzw.} \\ \widetilde{\varphi}: & \widetilde{H} & \longrightarrow & \mathbb{Z}, \quad (h,c) \mapsto h_x & (h \in H, c \in C). \end{array}$$

Wir definieren

$$M := \ker(\varphi) \quad \text{und} \quad K := \ker(\widetilde{\varphi}).$$

Dann gilt $K = M \times C$.

Laut Voraussetzung von Proposition 3.8 besitzt r eine Exponentensumme von 0 bzgl. x. Somit gilt $r \in M$ und $(r, c) \in K$. Es folgt, dass auch alle Elemente aus dem normalen Abschluss von (r, c) in $\widetilde{H}$ Elemente von K sind. Insbesondere liegt (s, d) in K. Falls wir zeigen können, dass (r, c) in der Untergruppe K von $\widetilde{H}$ zu $(s, d)^{\pm 1}$ konjugiert ist, folgt sofort die Konjugation von (r, c) in $\widetilde{H}$ zu $(s, d)^{\pm 1}$. Die Bedingungen von Proposition 3.8 ermöglichen es uns also, bei der Beweisführung von Proposition 3.8 anstelle von $\widetilde{H}$ mit dem Kern K des Homomorphismus $\widetilde{\varphi}$ zu arbeiten.

3.2. Struktur von K und b-rechts/links-Erzeugendensysteme

Wir benutzen die Bezeichnungen aus Notation 3.9. Mithilfe des Reidemeister–Schreier-Verfahrens ermitteln wir eine Präsentation des Kerns $K = M \times C$ von $\widetilde{\varphi}$. Im Folgenden schreiben wir für ein Element $(a, 1)$ eines direkten Produkts $A \times B$ auch $a \in A \times B$, um die Beweise dadurch übersichtlicher zu gestalten. Wir erinnern zunächst an die Definition einer Schreier-Transversalen (vgl. z. B. [Bog08]).

Eine *Schreier-Transversale* für eine Untergruppe M^* einer freien Gruppe H^* ist eine Menge $\mathcal{T}$ frei gekürzter Wörter in H^*, so dass jede Nebenklasse von M^* in H^* genau ein Wort aus $\mathcal{T}$ enthält und für jedes Wort $t \in \mathcal{T} \backslash \{1\}$ auch das Wort t ohne den letzten Buchstaben in $\mathcal{T}$ enthalten ist.

Die Gruppe H ist von $G \cup \{x, b\}$ erzeugt. Sei H^* die freie Gruppe mit Basis $G \cup \{x, b\}$ und sei $\xi \colon H^* \to H$ der kanonische Homomorphismus. Wir definieren $M^* := \xi^{-1}(M)$. Man kann leicht überprüfen, dass $\mathcal{T} = \{x^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ eine Schreier-Transversale für $M^* \subset H^*$ darstellt. Durch das Reidemeister–Schreier-Verfahren (vgl. z. B. [LS01, Chapter II, Section 4]) erhalten wir die Erzeuger $x^{-i} g x^i$ und $x^{-i} b x^i$ ($g \in G$, $i \in \mathbb{Z}$) von M.

Notation 3.10. Für ein Element $v \in H$ mit $v_x = 0$ und $i \in \mathbb{Z}$ sei v_i das Element $x^{-i} v x^i$ von M. Dann erhalten wir die Erzeuger

$$g_i = x^{-i} g x^i \quad \text{und} \quad b_i = x^{-i} b x^i \quad (g \in G,\ i \in \mathbb{Z}) \tag{3.3}$$

von M. Wir definieren die Untergruppen $G_i := x^{-i} G x^i$ ($i \in \mathbb{Z}$) von M.

Durch das Reidemeister–Schreier-Verfahren erhalten wir für jede Relation v von H und jedes Element t der Schreier-Transversalen $\mathcal{T}$ eine Relation von M, welche dem Element $t^{-1} v t$ geschrieben in den Erzeugern aus (3.3) entspricht. Für die Relation $[x^k, b] u^{-1} = 1$ von H erhalten wir also die Relationen

$$x^{-i}([x^k, b]u^{-1})x^i = 1 \ \Leftrightarrow\ x^{-k-i} b^{-1} x^{k+i} \cdot x^{-i} b x^i \cdot x^{-i} u^{-1} x^i = 1 \ \Leftrightarrow\ b_{k+i} = b_i u_i^{-1} \ (i \in \mathbb{Z})$$

von M. Aus jeder Relation w von G erhalten wir abzählbar unendlich viele Relationen w_i ($i \in \mathbb{Z}$). Für jedes $\ell \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} M &= N_\ell * N_{\ell+1} * \cdots * N_{\ell+k-1} \quad \text{mit} \\ N_i &= \cdots \underset{Z_{i-k}}{*} (G_{i-k} * \langle b_{i-k} \mid\rangle) \underset{Z_i}{*} (G_i * \langle b_i \mid\rangle) \underset{Z_{i+k}}{*} (G_{i+k} * \langle b_{i+k} \mid\rangle) \underset{Z_{i+2k}}{*} \cdots \quad (i \in \mathbb{Z}), \end{aligned} \tag{3.4}$$

wobei Z_{i+k} der von $b_i u_i^{-1}$ in $G_i * \langle b_i \rangle$ und von b_{i+k} in $G_{i+k} * \langle b_{i+k} \rangle$ erzeugten zyklischen Untergruppe entspricht.

Hinweis. Im Folgenden bezeichnet G_{ij} die Gruppe G_λ, wobei λ das Produkt von i und j sei. Diese Gruppe unterscheidet sich von der in Notation 3.13 eingeführten Gruppe $G_{i,j}$.

Die nächste Proposition liefert handlichere Erzeugendensysteme sowie eine Darstellung von M als freies Produkt.

Proposition 3.11. *Für jedes $i \in \mathbb{Z}$ ist*

$$\mathcal{E}(i) := \{b_i, b_{i+1}, \ldots, b_{i+k-1}\} \ \cup \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} G_j$$

ein Erzeugendensystem von M. Zudem erhalten wir für jedes $i \in \mathbb{Z}$ eine Präsentation

$$M = \langle b_i, b_{i+1}, \ldots, b_{i+k-1} \mid\rangle \ * \ \underset{j\in\mathbb{Z}}{\circledast} G_j.$$

Beweis. Sei

$$\mathcal{S}_i := \{b_i\} \ \cup \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} G_{jk+i} \quad (i \in \mathbb{Z}).$$

Zunächst zeigen wir, dass S_0 ein Erzeugendensystem von N_0 ist. Wir definieren für $p \in \mathbb{N}_0$ die Untergruppen

$$\begin{aligned} N_{0,p} &:= (G_{-pk} * \langle b_{-pk} \mid\rangle) \underset{Z_{-(p-1)k}}{*} \cdots \underset{Z_0}{*} (G_0 * \langle b_0 \mid\rangle) \underset{Z_k}{*} \cdots \underset{Z_{pk}}{*} (G_{pk} * \langle b_{pk} \mid\rangle) \\ &= \big\langle b_{-pk}, b_{-(p-1)k}, \ldots, b_{pk}, G_{-pk}, G_{-(p-1)k}, \ldots, G_{pk} \mid \\ &\qquad b_{jk} = b_{(j+1)k} u_{jk} \ (-p \leqslant j \leqslant -1), \ b_{(j+1)k} = b_{jk} u_{jk}^{-1} \ (0 \leqslant j \leqslant p-1) \big\rangle \end{aligned} \tag{3.5}$$

von N_0. Dann ist N_0 die Vereinigung der unendlichen, aufsteigenden Kette $N_{0,0} \subset N_{0,1} \subset N_{0,2} \subset \ldots$. Wir wenden eine Tietze-Transformation der Form „Entfernen eines Erzeugers“ auf den Erzeuger b_{-pk} in (3.5) an. Dadurch wird auch die Relation $b_{-pk} = b_{(-p+1)k} u_{-pk}$ entfernt. Man bemerke, dass der Erzeuger b_{-pk} in keiner weiteren Relation vorkommt. Durch schrittweise Anwendung von Tietze-Transformationen der gleichen Form auf die Erzeuger $b_{-(p-1)k}, \ldots, b_{-k}$ und $b_{pk}, b_{(p-1)k}, \ldots, b_k$ erhalten wir die Präsentation:

$$N_{0,p} = \big\langle b_0, G_{-pk}, G_{-(p-1)k}, \ldots, G_{pk} \mid \big\rangle = \langle b_0 \mid\rangle * \underset{|j|\leqslant p}{\circledast} G_{jk}$$

Somit ist $S_{0,p} := \{b_0\} \cup \bigcup_{-p \leqslant j \leqslant p} G_{jk}$ ein Erzeugendensystem von $N_{0,p}$. Da S_0 die Vereinigung der Erzeugendensysteme in der unendlichen, aufsteigenden Kette $S_{0,0} \subset S_{0,1} \subset S_{0,2} \subset \ldots$ ist, folgern wir, dass S_0 ein Erzeugendensystem von N_0 ist. Zudem besitzt N_0 als Vereinigung der Untergruppen in der unendlichen, aufsteigenden Kette $N_{0,0} \subset N_{0,1} \subset N_{0,2} \subset \ldots$ die Präsentation

$$N_0 = \langle b_0 \mid \rangle * \mathop{\ast}_{j \in \mathbb{Z}} G_{jk}. \tag{3.6}$$

Die Operation von x durch Konjugation auf M induziert einen Automorphismus von M. Wegen $x^{-i} G_0 x^i = G_i$ und $x^{-i} b_0 x^i = b_i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt auch $x^{-i} N_0 x^i = N_i$ und $x^{-i} \mathcal{S}_0 x^i = \mathcal{S}_i$. Somit ist S_i für alle $i \in \mathbb{Z}$ ein Erzeugendensystem von N_i. Wegen des freien Produkts in (3.4) erhalten wir für jedes $i \in \mathbb{Z}$ ein Erzeugendensystem von M durch Vereinigung der Erzeugendensysteme S_j von N_j für $j \in \{i, i+1, \ldots, i+k-1\}$. Diese Vereinigung entspricht genau der Menge $\mathcal{E}(i)$. Zudem erhalten wir wegen (3.4) und (3.6) die gewünschte Präsentation von M. □

Das nächste Lemma nimmt eine zentrale Rolle im Abschluss des Beweises von Proposition 3.8 ein.

Lemma 3.12. *Der Kern K von $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{H} \to \mathbb{Z}$ (siehe Notation 3.9) besitzt die Magnus-Eigenschaft.*

Beweis. Wegen $K = M \times C$ und Proposition 3.11 dürfen wir mit der Darstellung

$$K = (\underbrace{\langle b_i, b_{i+1}, \ldots, b_{i+k-1} \mid \rangle}_{=F_k} * \mathop{\ast}_{j \in \mathbb{Z}} G_j) \times C$$

arbeiten, wobei F_k die freie Gruppe vom Rang k sei. Wir möchten im Fall, dass C nicht trivial ist, Satz 2.18 mit der Präsentation von M aus Proposition 3.11 anwenden. Für $C = \{1\}$ möchten wir Korollar 2.15 anwenden. Dazu sind folgende Bedingungen zu überprüfen:

(i) Die Gruppe F_k ist indizierbar und lokal indizierbar.

(ii) Die Gruppen G_j ($j \in \mathbb{Z}$) sind lokal indizierbar und, falls C nicht trivial ist, auch indizierbar.

(iii) Die Gruppen $F_k \times C$ und $G_j \times C$ ($j \in \mathbb{Z}$) besitzen die Magnus-Eigenschaft.

Zu (i): Jede nichttriviale freie Gruppe ist indizierbar. Da jede Untergruppe einer freien Gruppe frei ist, folgt somit auch die lokale Indizierbarkeit freier Gruppen.

Zu (ii): Die Untergruppe G_0 von K ist nach Konstruktion isomorph zur Untergruppe G von $\widetilde{H}$. Laut Voraussetzung von Proposition 3.8 ist G_0 somit lokal indizierbar und, falls C nicht trivial ist, auch indizierbar. Die Untergruppe G_j ist das Bild von G_0 unter

dem Automorphismus von K, welcher durch Konjugation mit x^j indiziert wird. Daher übertragen sich die gewünschten Eigenschaften von G_0 auf G_j für alle $j \in \mathbb{Z}$.

Zu (iii): Wie im Beweis zu (ii) bemerkt, ist G_j für alle $j \in \mathbb{Z}$ isomorph zu G. Somit besitzt $G_j \times C$ laut Voraussetzung von Proposition 3.8 für alle $j \in \mathbb{Z}$ die Magnus-Eigenschaft. Für $C = \{1\}$ besitzt $F_k \times C \cong F_k$ als freie Gruppe die Magnus-Eigenschaft. Wir bemerken, dass wir hierfür die Voraussetzung der Indizierbarkeit von G nicht benötigen. Ist C nichttrivial, so ist G_j laut (ii) indizierbar und es folgt mit Lemma 2.10, dass auch $\mathbb{Z} \times C$ die Magnus-Eigenschaft besitzt. Schließlich folgern wir mit Satz 2.5, dass $L \times C$ für alle Limesgruppen die Magnus-Eigenschaft besitzt. Insbesondere hat dann $F_k \times C$ die Magnus-Eigenschaft.

□

An dieser Stelle ist der Beweis der Aussage von Proposition 3.8, dass (r, c) in $\widetilde{H}$ zu $(s, d)^{\pm 1}$ konjugiert ist, noch keineswegs abgeschlossen. Zwar haben wir nun mit K eine Untergruppe von $\widetilde{H}$ mit der Magnus-Eigenschaft gefunden, welche die Elemente (r_0, c) und (s_0, d) enthält, allerdings entspricht der normale Abschluss von (r, c) in $\widetilde{H}$ im Allgemeinen nicht dem normalen Abschluss von (r_0, c) in K. Daher ist unklar, ob die normalen Abschlüsse von (r_0, c) und (s_0, d) in K übereinstimmen. Wegen Lemma 2.23 gilt jedoch, dass die normalen Abschlüsse von $\{(r_i, c) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ und $\{(s_i, d) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ in K übereinstimmen. Dabei verwenden wir $(x, 1) \in \widetilde{H}$ für das Element x aus Lemma 2.23.

In Abschnitt 3.4 werden Werkzeuge zur Verfügung gestellt, um später zum normalen Abschluss eines Elements r_0 in K übergehen zu können und dann die Magnus-Eigenschaft von K zu nutzen. Dafür führen wir u.a. folgende Notationen ein.

Notation 3.13. Wir definieren für s, $t \in \mathbb{Z}$ folgende Untergruppen von M:

$$\begin{aligned} M_{s,t} &:= \langle G_j, b_j \mid s \leqslant j \leqslant t \rangle, \quad M_{s,\infty} := \langle G_j, b_j \mid j \geqslant s \rangle, \quad M_{-\infty,t} := \langle G_j, b_j \mid j \leqslant t \rangle, \\ G_{s,t} &:= \langle G_j \mid s \leqslant j \leqslant t \rangle, \quad G_{s,\infty} := \langle G_j \mid j \geqslant s \rangle, \quad G_{-\infty,t} := \langle G_j \mid j \leqslant t \rangle \end{aligned}$$

Bemerkung 3.14. Analog zum Beweis von Proposition 3.11 erhalten wir für alle $s \in \mathbb{Z}$ und jedes $i \in \mathbb{Z}$ größer oder gleich s die Präsentation

$$M_{s,\infty} = \langle b_i, b_{i+1}, \ldots, b_{i+k-1} \mid \rangle * \mathop{\ast}_{j \geqslant s} G_j$$

sowie für alle $t \in \mathbb{Z}$ und $i \in \mathbb{Z}$ kleiner oder gleich t die Präsentation

$$M_{-\infty,t} = \langle b_{i-k+1}, b_{i-k+2}, \ldots, b_i \mid \rangle * \mathop{\ast}_{j \leqslant t} G_j.$$

Notation 3.15 (***b*-rechts/links-Erzeugendensysteme**)**.** Für s, $t \in \mathbb{Z}$ sei

$$\mathcal{E}_{s,\infty} := \{b_s, b_{s+1}, \ldots, b_{s+k-1}\} \cup \bigcup_{j \geqslant s} G_j$$

das *b-links-Erzeugendensystem* von $M_{s,\infty}$ und

$$\mathcal{E}_{-\infty,t} := \{b_{t-k+1}, b_{t-k+2}, \ldots, b_t\} \ \cup \ \bigcup_{j \leqslant t} G_j$$

das *b-rechts-Erzeugendensystem* von $M_{-\infty,t}$.

Die folgende Definition präzisiert den Begriff von Darstellungen eines Gruppenelements.

Definition 3.16. (Darstellungen) Seien $U = \langle \mathcal{E} \mid \mathcal{R} \rangle$ eine Gruppenpräsentation, v ein Element aus U und $\zeta\colon \langle \mathcal{E} \mid \rangle \to U$ der kanonische Homomorphismus. Dann nennen wir jedes Element $\bar{v} \in \langle \mathcal{E} \mid \rangle$ mit $\zeta(\bar{v}) = v$ eine *Darstellung* von $v \in U$. In missbräuchlicher Notation bezeichnen wir im Folgenden das zu einer Darstellung $w \in \langle \mathcal{E} \mid \rangle$ gehörige Element aus U ebenfalls mit w.

Für die nächste Definition erinnern wir daran, dass wir als Erzeugendensystem der Gruppen G_i ($i \in \mathbb{Z}$) die Gruppen selbst wählen.

Definition 3.17. (gekürzte Darstellungen von Elementen aus M) Sei w ein Element von M. Wir bezeichnen eine Darstellung $\bar{w}$ von w bzgl. eines Erzeugendensystems $\mathcal{E}(i)$ ($i \in \mathbb{Z}$) als *gekürzte Darstellung von w bzgl. $\mathcal{E}(i)$*, falls sie von der Form

$$\bar{w} \quad = \quad \prod_{\ell=1}^{n} \tau(\ell)$$

ist, wobei folgende Bedingungen gelten:

(1) Es gilt $n \in \mathbb{N}_0$. (Für $n = 0$ ist $\bar{w} = 1$.)

(2) Jedes $\tau(\ell)$ ist ein nichttriviales, frei gekürztes Wort der Gruppe $\langle b_i, b_{i+1}, \ldots, b_{i+k-1} \mid \rangle$ oder ein Erzeuger aus $G_j \backslash \{1\}$ für ein $j \in \mathbb{Z}$.

(3) Aufeinanderfolgende $\tau(\ell)$, $\tau(\ell+1)$ stammen aus verschiedenen Erzeugendensystemen G_j oder aus einem Erzeugendensystem G_j und $\langle b_i, b_{i+1}, \ldots, b_{i+k-1} \mid \rangle$.

Wir nennen n die *Länge* der gekürzten Darstellung von w bzgl. $\mathcal{E}(i)$. Die Elemente $\tau(\ell)$ ($1 \leqslant \ell \leqslant n$) nennen wir *Stücke* der gekürzten Darstellung.

In analoger Weise definieren wir für ein Element w aus $M_{s,\infty}$ bzw. $M_{-\infty,t}$ gekürzte Darstellungen von w bzgl. $\mathcal{E}_{s,\infty}$ bzw. $\mathcal{E}_{-\infty,t}$.

Zu den verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten eines Elements $w \in M$ bemerken wir Folgendes.

Bemerkung 3.18. (Eindeutigkeit und Kürzungsvorgang) Sei w eine beliebige Darstellung bzgl. eines Erzeugendensystems $\mathcal{E}(i)$ von M. Indem wir nebeneinanderliegende Erzeuger desselben Erzeugendensystems G_i zusammenfassen und die Erzeuger b_i ($i \in \mathbb{Z}$) frei kürzen, erhält w die Form einer gekürzten Darstellung bzgl. $\mathcal{E}(i)$. Einen solchen Übergang von einer Darstellung zu einer gekürzten Darstellung bezeichnen wir im Folgenden

auch als *Kürzen* der Darstellung. Wir bemerken, dass die gekürzte Darstellung wegen Satz B.3 (Spezialfall für freie Produkte) und der Darstellung von M als freies Produkt aus Proposition 3.11 eindeutig ist. Gleiches gilt auch für die gekürzten Darstellungen eines Elements aus $M_{s,\infty}$ bzw. $M_{-\infty,t}$ bzgl. $\mathcal{E}_{s,\infty}$ bzw. $\mathcal{E}_{-\infty,t}$.

Schließlich geben wir einen Algorithmus an, welcher Darstellungswechsel ermöglicht.

Algorithmus 3.19. Sei w eine Darstellung eines Elements von M bzgl. des Erzeugendensystems $\{b_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} G_i$. Weiter sei s der kleinste Index j, so dass w einen Erzeuger mit Index j benutzt. Das folgende Verfahren formt die gegebene Darstellung von w in eine gekürzte Darstellung bzgl. des Erzeugendensystems $\mathcal{E}_{s,\infty}$ um: Zunächst ersetzen wir jeden Erzeuger b_j in w durch $b_{j-k}u_{j-k}^{-1}$, falls $j \geqslant s+k$. Anschließend kürzen wir. Enthält die neue Darstellung immer noch Erzeuger b_j, welche nicht in $\mathcal{E}_{s,\infty}$ vorkommen, wiederholen wir das Verfahren und gelangen schließlich zu einer gekürzten Darstellung bzgl. des Erzeugendensystems $\mathcal{E}_{s,\infty}$. Das Verfahren endet nach endlich vielen Schritten, da der größte Index j, so dass ein Erzeuger b_j benutzt wird, mit jedem Durchlauf streng monoton kleiner wird.

Sei t der größte Index j, so dass die anfangs gegebene Darstellung von w einen Erzeuger mit Index j benutzt. Dann können wir w auf analoge Weise in eine gekürzte Darstellung bzgl. des Erzeugendensystems $\mathcal{E}_{-\infty,t}$ umformen.

Zur Funktionsweise von Algorithmus 3.19 betrachten wir ein kleines Beispiel.

Beispiel 3.20. Sei $k = 4$. Wir betrachten das Element $w := b_1 b_{10} g_{12} b_7 u_3$, wobei g_{12} ein Element aus G_{12} sei. Der kleinste Index j, so dass w einen Erzeuger mit Index j benutzt, ist 1. Um eine gekürzte Darstellung von w geschrieben im Erzeugendensystem $\mathcal{E}_{1,\infty} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\} \cup \bigcup_{\ell\geqslant 1} G_\ell$ zu erhalten, schreiben wir mit Algorithmus 3.19:

$$w = b_1 b_6 u_6^{-1} g_{12} b_7 u_3 = b_1 b_6 u_6^{-1} g_{12} b_3 u_3^{-1} u_3 = b_1 b_6 u_6^{-1} g_{12} b_3 = b_1 b_2 u_2^{-1} u_6^{-1} g_{12} b_3$$

3.3. Duale Struktur von M

In diesem kurzen, aber technischen Abschnitt weisen wir auf eine besondere Struktur der Gruppe K hin, welche wir als *dual* zu der in Abschnitt 3.2 beschriebenen Struktur von K bezeichnen. Die duale Struktur ermöglicht uns in den folgenden Abschnitten starke Verkürzungen bestimmter Beweisteile. In diesem Zusammenhang seien vor allem die Herleitung des Beweises von Lemma 3.37 aus Lemma 3.36 erwähnt sowie der Beweis der Endlichkeit von Algorithmus 3.22 für den dualen Fall (siehe Bemerkung 3.24).

Wir definieren für $i \in \mathbb{Z}$ und $g \in G$

$$b_i' := b_{-i}u_{-i}^{-1} \quad \text{sowie} \quad g_i' := g_{-i}.$$

Die Gruppe G_{-i}, präsentiert mithilfe der Erzeuger g'_i anstelle von g_{-i}, nennen wir G'_i. Bei G'_i und G_{-i} handelt es sich also um zwei Bezeichnungen für dieselbe Gruppe. Die Erzeuger aus $\{b'_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} G'_i$ bezeichnen wir als *duale Erzeuger* von M. Einen Erzeuger g'_i ($g \in G$, $i \in \mathbb{Z}$) nennen wir *dual* zu g_{-i}.

Indem wir die Erzeuger der Relation $b_i u_i^{-1} = b_{i+k}$ mithilfe von dualen Erzeugern ausdrücken, erhalten wir $b'_{-i} = b'_{-i-k} u'^{-1}_{-i-k}$, wobei die Darstellung $u'_{-i-k} \in G'_{-i-k}$ aus der Darstellung $u_{i+k} \in G_{i+k}$ durch Invertierung und anschließender Ersetzung aller Erzeuger durch duale Erzeuger aus G'_{-i-k} hervorgeht. Mithilfe der Indexverschiebung $i' = -i-k$ erhalten wir die Darstellungen $b'_{i'+k} = b'_{i'} u'^{-1}_{i'}$ ($i' \in \mathbb{Z}$) der ursprünglichen Relationen $b_i u_i^{-1} = b_{i+k}$ ($i \in \mathbb{Z}$). Dies rechtfertigt die Bezeichnung „dual“.

Analog zu Notation 3.13 definieren wir für s, $t \in \mathbb{Z}$ die Untergruppen

$$\begin{aligned} M'_{s,t} &:= \langle G'_j, b'_j \mid s \leqslant j \leqslant t\rangle, \quad M'_{s,\infty} := \langle G'_j, b'_j \mid j \geqslant s\rangle, \quad M'_{-\infty,t} := \langle G'_j, b'_j \mid j \leqslant t\rangle, \\ G'_{s,t} &:= \langle G'_j \mid s \leqslant j \leqslant t\rangle, \quad G'_{s,\infty} := \langle G'_j \mid j \geqslant s\rangle \text{ und } G'_{-\infty,t} := \langle G'_j \mid j \leqslant t\rangle \end{aligned}$$

von M. Somit entsprechen die Untergruppen $M'_{s,t}$, $M'_{s,\infty}$ und $M'_{-\infty,t}$ den Untergruppen $M_{-t,-s}$, $M_{-\infty,-s}$ und $M_{-t,\infty}$. In gleicher Weise wie in Abschnitt 3.2 erhalten wir die Darstellungen

$$\begin{aligned} M &= \langle b'_i, b'_{i+1}, \ldots, b'_{i+k-1} \mid\rangle * \mathop{\ast}_{j\in\mathbb{Z}} G'_j \text{ für alle } i \in \mathbb{Z}, \\ M'_{s,\infty} &= \langle b'_i, b'_{i+1}, \ldots, b'_{i+k-1} \mid\rangle * \mathop{\ast}_{j\geqslant s} G'_j \text{ für alle } i \in \mathbb{Z} \text{ mit } i \geqslant s, \\ M'_{-\infty,t} &= \langle b'_{i-k+1}, b'_{i-k+2}, \ldots, b'_i \mid\rangle * \mathop{\ast}_{j\leqslant t} G'_j \text{ für alle } i \in \mathbb{Z} \text{ mit } i \leqslant t \end{aligned}$$

sowie die Erzeugendensysteme

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(i) := \{b'_i, b'_{i+1}, \ldots, b'_{i+k-1}\} \cup \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} G'_j \quad &\text{von} \quad M \quad \text{für alle } i \in \mathbb{Z}, \\ \{b'_i, b'_{i+1}, \ldots, b'_{i+k-1}\} \cup \bigcup_{j\geqslant s} G'_j \quad &\text{von} \quad M'_{s,\infty} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{Z} \text{ mit } i \geqslant s, \\ \{b'_{i-k+1}, b'_{i-k+2}, \ldots, b'_i\} \cup \bigcup_{j\leqslant t} G'_j \quad &\text{von} \quad M'_{-\infty,t} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{Z} \text{ mit } i \leqslant t. \end{aligned}$$

Analog zu Notation 3.15 definieren wir für s, $t \in \mathbb{Z}$ das *b'-links-Erzeugendensystem*

$$\mathcal{E}'_{s,\infty} := \{b'_s, b'_{s+1}, \ldots, b'_{s+k-1}\} \cup \bigcup_{j\geqslant s} G'_j \text{ von } M'_{s,\infty}$$

und das *b'-rechts-Erzeugendensystem*

$$\mathcal{E}'_{-\infty,t} := \{b'_{t-k+1}, b'_{t-k+2}, \ldots, b'_t\} \cup \bigcup_{j\leqslant t} G'_j \text{ von } M'_{-\infty,t}.$$

Schließlich definieren wir *gekürzte Darstellungen* bzgl. dualer Erzeugendensysteme in gleicher Weise wie in Definition 3.17.

Im Folgenden werden wir bei vielen Aussagen auch direkt die Formulierungen für die zugehörigen dualen Objekte angeben und ggf. beweisen.

3.4. α- und ω-Grenzen

Bevor wir α- und ω-Grenzen definieren, betrachten wir zur Motivation folgende Darstellungen des Elements $b_k b_{k+1}^{-1} \in M$:

$$\begin{aligned} b_0 u_0^{-1} u_1 u_{1-k} b_{1-k}^{-1} &= b_0 u_0^{-1} u_1 b_1^{-1} = b_k b_{k+1}^{-1} = b_{2k} u_k u_{k+1}^{-1} b_{2k+1}^{-1} \\ &= b_{3k} u_{2k} u_k u_{k+1}^{-1} u_{2k+1}^{-1} b_{3k+1}^{-1} \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Darstellungen Erzeuger mit Indizes in unterschiedlichen Intervallen benutzen. Es scheint jedoch in diesem Beispiel so zu sein, dass keine Darstellung von $b_k b_{k+1}^{-1}$ existiert, welche ausschließlich Erzeuger mit einem Index echt größer als k benutzt. Auch scheint es keine Darstellung zu geben, welche ausschließlich Erzeuger mit Index echt kleiner als 1 benutzt. Diese Beobachtung motiviert die folgende Definition.

Definition 3.21 (**α-/ω-Grenzen und α-ω-Länge**)**.** Sei r ein nichttriviales Element von M. Dann sind die *α-Grenze* α_r, die *ω-Grenze* ω_r und die *α-ω-Länge* $|r|_{\alpha,\omega}$ von r durch

$$\begin{aligned} \alpha_r &:= \max\{j \in \mathbb{Z} \mid r \in M_{j,\infty}\}, \\ \omega_r &:= \min\{j \in \mathbb{Z} \mid r \in M_{-\infty,j}\}, \\ |r|_{\alpha,\omega} &:= \omega_r - \alpha_r + 1 \end{aligned}$$

definiert. Analog definieren wir die *dualen α- und ω-Grenzen*

$$\alpha'_r := \max\{j \in \mathbb{Z} \mid r \in M'_{j,\infty}\} \quad \text{und} \quad \omega'_r := \min\{j \in \mathbb{Z} \mid r \in M'_{-\infty,j}\}$$

sowie die *duale α-ω-Länge* $|r|_{\alpha',\omega'} := \omega'_r - \alpha'_r + 1$.

Wir zeigen nun schrittweise die Wohldefiniertheit der α- und ω-Grenzen. Dabei widmen wir uns zunächst der α-Grenze α_r für ein nichttriviales Element $r \in M$. In Lemma 3.23 beweisen wir, dass der folgende Algorithmus eine Darstellung von r geschrieben mit Erzeugern aus $\{b_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} G_i$ in endlich vielen Durchläufen zu einer Darstellung r^* von r bzgl. des Erzeugendensystems $\mathcal{E}_{\alpha_r,\infty}$ von $M_{\alpha_r,\infty}$ umformt.

Algorithmus 3.22. *Sei r ein nichttriviales Element von M.*

(1) Wir betrachten eine Darstellung von r bzgl. der Erzeugermenge $\{b_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} G_i$. Sei λ der kleinste Index $\mu \in \mathbb{Z}$, so dass die Darstellung von r einen Erzeuger mit Index μ benutzt. Insbesondere gilt dann $r \in M_{\lambda,\infty}$. Unter Benutzung von Algorithmus 3.19 ermitteln wir eine gekürzte Darstellung $r[1]$ von r bzgl. des Erzeugendensystems $\mathcal{E}_{\lambda,\infty}$. Sei j der kleinste Index $\nu \in \mathbb{Z}$, so dass $r[1]$ einen Erzeuger mit Index ν benutzt. Wir bemerken, dass dann $r[1]$ auch eine gekürzte Darstellung bzgl. des Erzeugendensystems $\mathcal{E}_{j,\infty}$ ist.

(2) *Sei* $r[2]$ *die gekürzte Darstellung von* r*, welche man erhält, wenn man jeden Erzeuger* b_j *in* $r[1]$ *durch* $b_{j+k}u_j$ *ersetzt und anschließend kürzt. Dann ist* $r[2]$ *eine Darstellung von* r *bzgl. des Erzeugendensystems*

$$\{b_{j+1}, b_{j+2}, \ldots, b_{j+k}\} \cup \bigcup_{i \geqslant j} G_i. \tag{3.7}$$

(2a) *Falls* $r[2]$ *keinen Erzeuger aus* G_j *enthält, ist* $r[2]$ *eine gekürzte Darstellung bzgl. des Erzeugendensystems* $\mathcal{E}_{j+1,\infty}$*. Wir wählen* ℓ *als den kleinsten Index* $\mu \in \mathbb{Z}$*, so dass* $r[2]$ *einen Erzeuger mit Index* μ *benutzt. Mit den Eingaben* $j := \ell$ *und* $r[1] := r[2]$ *beginnen wir Schritt (2) erneut. Man bemerke, dass der Wert* j *echt größer geworden ist.*

(2b) *Falls* $r[2]$ *einen Erzeuger aus* G_j *enthält, beenden wir den Algorithmus mit der Ausgabe* $\alpha_r := j$ *und* $r^* := r[1]$*.*

Lemma 3.23. *Die Ausgabe* α_r *von Algorithmus 3.22 entspricht der in Definition 3.21 eingeführten* α*-Grenze von* r*. Die Ausgabe* r^* *ist eine gekürzte Darstellung von* r *bzgl. des Erzeugendensystems* $\mathcal{E}_{\alpha_r,\infty}$*.*

Beweis. Um Verwechslungen mit der in Definition 3.21 eingeführten α-Grenze α_r zu vermeiden, bezeichnen wir in diesem Beweis den von Algorithmus 3.22 ausgegebenen Wert für α_r mit $\widetilde{\alpha}_r$. Wir möchten beweisen, dass der Algorithmus nach endlich vielen Durchläufen endet und $\widetilde{\alpha}_r = \alpha_r$ gilt.

Für die Endlichkeit des Algorithmus zeigen wir, dass die Länge der gekürzten Darstellung $r[1]$ mit jedem Durchlauf, der den Algorithmus nicht beendet, streng monoton fällt. Die Darstellung $r[2]$ geht aus $r[1]$ hervor, indem wir jeden Erzeuger b_j durch $b_{j+k}u_j$ ersetzen. Falls die gekürzte Darstellung $r[1]$ kein Stück aus $G_j \backslash \{1\}$ (vgl. Definition 3.17) enthält, so kann es zu keiner Kürzung der neuen Teilwörter $u_j^{\pm 1} \in G_j$ in $r[2]$ kommen und der Algorithmus endet. Enthält $r[1]$ ein Stück aus $G_j \backslash \{1\}$ und wir gelangen zu Schritt (2a), so muss es zur vollständigen Kürzungen der neuen Teilwörter $u_j^{\pm 1}$ mit Stücken von $r[1]$ aus G_j gekommen sein. Daher ist die gekürzte Darstellung $r[2]$ echt kürzer als $r[1]$. Wir bemerken, dass $r[2]$ die Darstellung $r[1]$ des nächsten Durchlaufs ist.

Da Algorithmus 3.22 das Element r als Element von $M_{\widetilde{\alpha}_r,\infty}$ schreibt, gilt laut Definition 3.21 $\widetilde{\alpha}_r \leqslant \alpha_r$. Schließlich bleibt zu zeigen, dass r kein Element von $M_{\widetilde{\alpha}_r+1,\infty}$ ist, also $\widetilde{\alpha}_r \geqslant \alpha_r$ gilt. Algorithmus 3.22 kann nur in Schritt (2b) enden. Daher benutzt die gekürzte Darstellung $r[2]$ von r geschrieben in den Erzeugern von (3.7) (mit $j = \widetilde{\alpha}_r$) mindestens einen Erzeuger aus $G_{\widetilde{\alpha}_r}$. Wir bemerken, dass $r[2]$ der eindeutigen gekürzten Darstellung von r bzgl. $\mathcal{E}(\widetilde{\alpha}_r+1)$ entspricht. Zudem entspricht die gekürzte Darstellung eines beliebigen Elementes $w \in M_{\widetilde{\alpha}_r+1,\infty}$ bzgl. $\mathcal{E}(\widetilde{\alpha}_r + 1)$ der gekürzten Darstellung von w bzgl. $\mathcal{E}_{\widetilde{\alpha}_r+1,\infty}$. Da $r[2]$ einen Erzeuger von $\mathcal{E}(\widetilde{\alpha}_r + 1) \backslash \mathcal{E}_{\widetilde{\alpha}_r+1,\infty}$ enthält, kann r somit kein Element von $M_{\widetilde{\alpha}_r+1,\infty}$ sein.

□

Bemerkung 3.24. Indem man in Algorithmus 3.22 alle Objekte durch ihre zugehörigen dualen Objekte ersetzt, erhält man einen Algorithmus, der zu einer nichttrivialen Darstellung $r \in M$ die duale α-Grenze α' sowie eine gekürzte Darstellung von r bzgl. des dualen Erzeugendensystems $\mathcal{E}'_{\alpha'_r,\infty}$ ausgibt. Auch der Beweis der Funktionalität dieses Algorithmus verläuft analog zu Lemma 3.23.

Somit sind die α-Grenzen α_r und α'_r für jedes nichttriviale Element $r \in M$ wohldefiniert. Wegen Punkt (a) des folgenden Lemmas sind damit auch die ω-Grenzen ω_r und ω'_r von r wohldefiniert.

Lemma 3.25. *Sei r ein nichttriviales Element von M.*

(a) Es gilt $\omega_r = -\alpha'_r$ und $\omega'_r = -\alpha_r$. Insbesondere folgt $|r|_{\alpha,\omega} = |r|_{\alpha',\omega'}$.

(b) Für alle $i, j \in \mathbb{Z}$ gilt $\alpha_{r_{i+j}} = \alpha_{r_i} + j$ und $\omega_{r_{i+j}} = \omega_{r_i} + j$. Insbesondere folgt $|r_i|_{\alpha,\omega} = |r_{i+j}|_{\alpha,\omega}$. (Zur Erinnerung: $r_i := x^{-i}rx^i$, siehe Notation 3.10)

Beweis. Zu (a): Die Aussage folgt sofort aus Definition 3.21, denn in Abschnitt 3.3 haben wir bereits bemerkt, dass für alle $t \in \mathbb{Z}$ die Untergruppe $M_{-\infty,t}$ der Untergruppe $M'_{-t,\infty}$ entspricht. Falls also i der kleinste Index ist, so dass r ein Element von $M_{-\infty,i}$ ist, dann ist $-i$ der größte Index, so dass r ein Element von $M'_{-i,\infty}$ ist. Es folgt $\omega_r = -\alpha'_r$. Die Gleichung $\omega'_r = -\alpha_r$ kann in analoger Weise gezeigt werden. Schließlich bemerken wir $|r|_{\alpha,\omega} = \omega_r - \alpha_r + 1 = -\alpha'_r - (-\omega'_r) + 1 = \omega'_r - \alpha'_r + 1 = |r|_{\alpha',\omega'}$.

Zu (b): Es reicht zu bemerken, dass wir eine Darstellung von r_{i+j} erhalten, indem wir in einer Darstellung von r_i alle Indizes um j erhöhen.

□

Beispiel 3.26.

(i) Sei $r = b_{-1}u_{-1}^{-1}g_1b_5u_2$ für einen Erzeuger $g_1 \in G_1$ und $k = 3$. Wir wenden Algorithmus 3.22 an:

$$\xrightarrow{\text{Schritt (1)}} \; b_{-1}u_{-1}^{-1}g_1b_2u_2^{-1}u_2 = b_{-1}u_{-1}^{-1}g_1b_{-1}u_{-1}^{-1} \; \xrightarrow{\text{Schritt (2a)}} \; b_2g_1b_2$$

Somit gilt $\alpha_r = 1$. Eine Darstellung von r bzgl. des dualen Erzeugendensystems lautet $b'_1g'_{-1}b'_{-5}u'^{-1}_{-5}u'^{-1}_{-2}$, wobei g'_{-1} der duale Erzeuger zu g_1 sei und u'_i die Darstellung sei, welches man aus u_{-i}^{-1} erhält, indem man alle Erzeuger durch ihre dualen Entsprechungen ersetzt. Wir wenden auf diese Darstellung die duale Version von Algorithmus 3.22 (siehe Bemerkung 3.24) an:

$$\xrightarrow{\text{Schritt (1)}} \; b'_{-2}u'^{-1}_{-2}g'_{-1}b'_{-5}u'^{-1}_{-5}u'^{-1}_{-2} = b'_{-5}u'^{-1}_{-5}u'^{-1}_{-2}g'_{-1}b'_{-5}u'^{-1}_{-5}u'^{-1}_{-2} \; \xrightarrow{\text{Schritt (2a)}}$$
$$b'_{-2}u'^{-1}_{-2}g'_{-1}b'_{-2}u'^{-1}_{-2} \; \xrightarrow{\text{Schritt (2a)}} \; b'_1g'_{-1}b'_1$$

Also gilt $\alpha'_r = -1$. Laut Lemma 3.25 (a) folgt $\omega_r = 1$. Somit gilt $|r|_{\alpha,\omega} = \omega_r - \alpha_r + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$. Man bemerke, dass r *kein* Element von $G_{\alpha_r,\omega_r} = G_1$ ist.

(ii) Seien $r = b_5 b_6$ und $k = 4$. Anwendung von Algorithmus 3.22 ergibt:

$$\xrightarrow{\text{Schritt (1)}} \; b_5 b_6 \; \xrightarrow{\text{Schritt (2a)}} \; b_9 u_5 b_6$$

Wir lesen $\alpha_r = 5$ ab. Die Darstellung $b'_{-5} u'^{-1}_{-5} b'_{-6} u'_{-6}$ ist eine Darstellung von r in dualen Erzeugern. Die duale Version von Algorithmus 3.22 ergibt:

$$\xrightarrow{\text{Schritt (1)}} \; b'_{-5} u'^{-1}_{-5} b'_{-6} u'^{-1}_{-6} \; \xrightarrow{\text{Schritt (2a)}} \; b'_{-5} u'^{-1}_{-5} b'_{-2} \; \xrightarrow{\text{Schritt (2a)}} \; b'_{-1} b'_{-2}$$
$$\xrightarrow{\text{Schritt (2a)}} \; b'_{-1} b'_2 u'_{-2}$$

Es folgt $\alpha'_r = -2$. Wegen Lemma 3.25 (a) gilt $\omega_r = 2$. Somit erhalten wir die *negative* α-ω-Länge $|r|_{\alpha,\omega} = 2 - 5 + 1 = -2$.

(iii) Sei $r = b_i^j$ für $i, j, k \in \mathbb{Z}$ und $j \neq 0 \neq k$. Dann liefert Algorithmus 3.22:

$$\xrightarrow{\text{Schritt (1)}} \; b_i^j \; \xrightarrow{\text{Schritt (2a)}} \; (b_{i+k} u_i)^j,$$

also $\alpha_r = i$. Eine Darstellung von r geschrieben in dualen Erzeugern lautet $(b'_{-i} u'^{-1}_{-i})^j$. Durch die duale Version von Algorithmus 3.22 erhalten wir:

$$\xrightarrow{\text{Schritt (1)}} \; (b'_{-i} u'^{-1}_{-i})^j \; \xrightarrow{\text{Schritt (2a)}} \; (b'_{-i+k} u'_{-i} u'^{-1}_{-i})^j = b'^j_{-i+k}$$
$$\xrightarrow{\text{Schritt (2a)}} \; (b'_{-i+2k} u'_{-i+k})^j$$

Somit gilt $\omega_r = -\alpha'_r = i - k$. Insgesamt folgt $|r|_{\alpha,\omega} = i - k - i + 1 = -k + 1$.

3.5. Geeignete Konjugierte

Dieser Abschnitt dient als Vorbereitung, um in Abschnitt 3.6.2 ohne weitere Vorüberlegung Lemma 2.17 anwenden zu können. Wir möchten dafür ein Konjugiertes $\widetilde{r}$ von r finden, so dass jede gekürzte Darstellung von $\widetilde{r}$ bzgl. der Erzeugendensysteme $\mathcal{E}(i)$ $(i \in \mathbb{Z})$ sowie ihrer dualen Entsprechungen $\mathcal{E}'(i)$ $(i \in \mathbb{Z})$ im Sinne von Definition 3.28 zyklisch gekürzt ist.

Notation 3.27. Sei r ein nichttriviales Element von M. Dann bezeichnen wir mit $r(i)$ die gekürzte Darstellung von r bzgl. $\mathcal{E}(i)$ (siehe Definition 3.17). Mit $r'(i)$ bezeichnen wir die gekürzte Darstellung von r bzgl. $\mathcal{E}'(i)$ (siehe Abschnitt 3.3).

Erzeuger aus der Menge $\{b_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ nennen wir *b-Erzeuger* und Erzeuger aus der Menge $\{b'_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ bezeichnen wir als *b′-Erzeuger*.

Wir schreiben abkürzend, dass eine gekürzte Darstellung mit einem b- bzw. b'-Erzeuger beginnt, und meinen damit, dass das erste Stück der gekürzte Darstellung mit einem b- bzw. b'-Erzeuger beginnt. Analog ist die Formulierung zu verstehen, dass eine gekürzte Darstellung mit einem b- bzw. b'-Erzeuger endet.

Definition 3.28. Seien r ein nichttriviales Element von M und $i \in \mathbb{Z}$. Wir bezeichnen eine gekürzte Darstellung $r(i)$ bzw. $r'(i)$ als *zyklisch gekürzt*, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) Die gekürzte Darstellung $r(i)$ bzw. $r'(i)$ besitzt eine Länge kleiner oder gleich 1.

(ii) Das erste und letzte Stück der gekürzten Darstellung $r(i)$ bzw. $r'(i)$ stammen weder beide aus demselben Erzeugendensystem G_j noch bestehen beide Stücke aus b- bzw. b'-Erzeugern.

(iii) Die gekürzten Darstellung $r(i)$ bzw. $r'(i)$ beginnt und endet mit b- bzw. b'-Erzeugern, welche nicht invers zueinander sind.

Lemma 3.29. *Sei r ein nichttriviales Element von M. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Es existiert ein $i \in \mathbb{Z}$, so dass $r(i)$ mit einer positiven Potenz eines b-Erzeugers beginnt.

(ii) Für alle $i \in \mathbb{Z}$ beginnt $r(i)$ mit einer positiven Potenz eines b-Erzeugers.

(iii) Es existiert ein $i \in \mathbb{Z}$, so dass $r'(i)$ mit einer positiven Potenz eines b'-Erzeugers beginnt.

(iv) Für alle $i \in \mathbb{Z}$ beginnt $r'(i)$ mit einer positiven Potenz eines b'-Erzeugers.

Beweis. Aus der gekürzten Dastellung $r(i)$ können wir die gekürzte Darstellung $r(i+1)$ erhalten, indem wir jeden Erzeuger b_i in $r(i)$ durch $b_{i+k}u_i$ ersetzen und anschließend kürzen. Umgekehrt erhalten wir aus der gekürzten Darstellung $r(i+1)$ die gekürzte Darstellung $r(i)$, indem wir alle Erzueger b_{i+k} durch $b_i u_i^{-1}$ ersetzen und anschließend kürzen. Der Erzeuger b_{i+k} liegt nicht in der Menge der von $r(i)$ benutzen b-Erzeuger und b_i liegt nicht in der Menge der von $r(i+1)$ benutzen b-Erzeuger. Zusammen mit der Darstellung von M aus Proposition 3.11 als freies Produkt folgt, dass es zu keinen Kürzungen von b-Erzeugern kommen kann. Eine Darstellung $r(i)$ beginnt also genau dann mit einem positiven b-Erzeuger, wenn $r(i+1)$ mit einem positiven b-Erzeuger beginnt. Dies beendet den Beweis der Äquivalenz von (i) und (ii).

In analoger Weise kann die Äquivalenz von (iii) und (iv) bewiesen werden. Für die Äquivalenz von (i) und (iii) zeigen wir, dass $r(i)$ genau dann mit einer positiven Potenz eines b-Erzeugers beginnt, wenn $r'(-i-k+1)$ mit einer positiven Potenz eines b'-Erzeugers beginnt. Dazu sei an die Bezeichnungen $b'_j = b_{-j}u_{-j}^{-1}$ und $g_j = g'_{-j}$ $(\forall j \in \mathbb{Z},\ g_j \in G_j)$ aus Abschnitt 3.3 erinnert. Wir erhalten also die gekürzte Darstellung von $r(i)$ in dualen Erzeugern, indem wir jeden Erzeuger b_j durch $b'_{-j}u_j = b'_{-j}u'^{-1}_{-j}$ sowie alle Erzeuger $g_j \in G_j$ durch g'_{-j} ersetzen und anschließend kürzen. Dies zeigt, dass die duale Darstellung mit einer positiven Potenz eines b'-Erzeugers beginnt, falls $r(i)$ mit einer positiven Potenz eines

b-Erzeugers beginnt. Da $r(i)$ b-Erzeuger mit Indizes aus der Menge $\{i, i+1, \ldots, i+k-1\}$ benutzt, sind in der dualen Darstellung ausschließlich b-Erzeuger mit Indizes in $\{-i-k+1, -i-k+2, \ldots, -i\}$ enthalten. Es handelt sich somit um die Darstellung $r'(-i-k+1)$. In gleicher Weise kann gezeigt werden, dass $r(i)$ mit einer positiven Potenz eines b-Erzeugers beginnt, falls $r'(-i-k+1)$ mit einer positiven Potenz eines b'-Erzeugers beginnt.

□

Korollar 3.30. *Für jedes nichttriviale r in M existiert ein Konjugiertes $\widetilde{r}$ von r, so dass $\widetilde{r}(i)$ und $\widetilde{r}'(i)$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ zyklisch gekürzt sind (im Sinne von Definition 3.28).*

Beweis. Wir wählen ein Konjugiertes $\widetilde{r}$ von r, so dass $\widetilde{r}(0)$ zyklisch gekürzt ist.

Fall 1: Das Konjugierte $\widetilde{r}(0)$ enthalte keine b-Erzeuger.
In diesem Fall sind alle Darstellungen $r(i)$ mit $i \in \mathbb{Z}$ identisch und somit zyklisch gekürzt. Die Darstellungen $\widetilde{r}'(i)$ sind in diesem Fall ebenfalls für alle $i \in \mathbb{Z}$ identisch und gehen aus der Darstellung $\widetilde{r}(0)$ hervor, indem man jeden Erzeuger $g_j \in G_j$ ($j \in \mathbb{Z}$) durch den dualen Erzeuger $g'_{-j} \in G'_{-j}$ ersetzt (siehe Abschnitt 3.3). Daher sind die Darstellungen $\widetilde{r}'(i)$ ($i \in \mathbb{Z}$) ebenfalls zyklisch gekürzt.

Fall 2: Das Konjugierte $\widetilde{r}(0)$ enthalte einen b-Erzeuger.
Zunächst bemerken wir, dass Lemma 3.29 durch Invertierung auch auf Darstellungen anwendbar ist, welche mit einer negativen Potenz eines b-Erzeugers enden. O. B. d. A. dürfen wir annehmen, dass $\widetilde{r}(0)$ mit einer positiven Potenz eines b-Erzeugers beginnt oder mit einer negativen Potenz eines b-Erzeugers endet (aber nicht beides für b-Erzeuger mit demselben Index). Wegen Lemma 3.29 (i)+(ii) gilt Gleiches für alle $\widetilde{r}(i)$ ($i \in \mathbb{Z}$). Insbesondere ist $\widetilde{r}(i)$ ($i \in \mathbb{Z}$) somit zyklisch gekürzt. Die Anwendung von Lemma 3.29 (iv) ergibt, dass auch alle Darstellungen $\widetilde{r}'(i)$ ($i \in \mathbb{Z}$) zyklisch gekürzt sind.

□

Definition 3.31 (geeignete Konjugierte)**.** Ein nichttriviales Element $\widetilde{r}$ aus M bezeichnen wir als *geeignetes Konjugat*, wenn die gekürzten Darstellungen von $\widetilde{r}$ bzgl. der Erzeugendensysteme $\mathcal{E}(i)$ und $\mathcal{E}'(i)$ für jedes $i \in \mathbb{Z}$ im Sinne von Definition 3.28 zyklisch gekürzt sind.

Bemerkung 3.32. Wegen Korollar 3.30 existiert für jedes nichttriviale Element r aus M ein geeignetes Konjugat. Da normale Abschlüsse invariant unter Konjugation sind, dürfen wir im Folgenden o. B. d. A. anstelle von r und s mit geeigneten Konjugierten $\widetilde{r}$ und $\widetilde{s}$ arbeiten.

3.6. Beweis von Proposition 3.8 für $\widetilde{r}$ mit positiver α-ω-Länge

Dieser Abschnitt bildet den Abschluss des Beweises von Propostion 3.8 für den Fall, dass $\widetilde{r}$ eine positive α-ω-Länge besitzt. Im ersten Unterabschnitt zeigen wir einige Hilfsaussagen,

auf die wir nur in diesem Fall zurückgreifen können. Im zweiten Unterabschnitt beweisen wir das zentrale Lemma 3.36, welches uns schließlich im dritten Unterabschnitt ermöglicht, vom normalen Abschluss der Elemente aus $\{(r_i, c) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ in K zum normalen Abschluss eines einzelnen Elements (r_i, c) in K übergehen zu können und so den Beweis dieses Falls auf Lemma 3.12 zurückzuführen.

3.6.1. Eigenschaften von $\tilde{r}$ mit positiver α-ω-Länge

Lemma 3.33. *Sei $r \in M\backslash\{1\}$ mit $|r|_{\alpha,\omega} \geqslant 1$ gegeben. Dann enthält jede Darstellung von r geschrieben mit Erzeugern des Erzeugendensystems $\mathcal{E}_{\alpha_r,\infty}$ von $M_{\alpha_r,\infty}$ mindestens einen Erzeuger $g_i \in G_i$ mit $i \geqslant \omega_r$. Jede Darstellung von r geschrieben mit Erzeugern des Erzeugendensystems $\mathcal{E}'_{\alpha'_r,\infty}$ von $M'_{\alpha'_r,\infty}$ enthält mindestens einen Erzeuger $g'_i \in G'_i$ mit $i \geqslant \omega'_r$.*

Beweis. Wir beweisen nur die nichtduale Aussage des Lemmas. Aufgrund der in Abschnitt 3.3 geschilderten dualen Struktur von M kann die duale Aussage in gleicher Weise gezeigt werden.

Laut Voraussetzung gilt $\alpha_r \leqslant \omega_r$. Im Hinblick auf einen Widerspruch sei

$$r \in \langle b_{\alpha_r}, b_{\alpha_r+1}, \ldots, b_{\alpha_r+k-1}, G_{\alpha_r}, G_{\alpha_r+1}, \ldots, G_{\omega_r-1} \mid\rangle.$$

Indem wir die Relationen $b_i = b_{i-k}u_{i-k}^{-1}$ $(i \in \mathbb{Z})$ benutzen, erhalten wir

$$r \in \langle b_{\alpha_r-k}, b_{\alpha_r-k+1}, \ldots, b_{\alpha_r-1}, G_{\alpha_r-k}, G_{\alpha_r-k+1}, \ldots, G_{\omega_r-1} \mid\rangle \subset \langle \mathcal{E}_{-\infty,\omega_r-1} \mid\rangle = M_{-\infty,\omega_r-1}.$$

Dies ist ein Widerspruch zu Definition 3.21.

□

Durch Anwendung des Einbettungssatzes aus Lemma 2.17 erhalten wir folgendes Korollar.

Korollar 3.34. *Sei $(\tilde{r}, c)$ ein Element von K mit $|\tilde{r}|_{\alpha,\omega} \geqslant 1$, wobei $\tilde{r}$ ein geeignetes Konjugiertes sei. Weiter definieren wir*

$$N \;:=\; \langle\!\langle (\tilde{r}, c) \rangle\!\rangle_K \cap C \qquad \text{und} \qquad \widetilde{C} \;:=\; C/N.$$

Dann betten $M_{\alpha_{\tilde{r}}+1,\infty} \times \widetilde{C}$ und $M_{-\infty,\omega_{\tilde{r}}-1} \times \widetilde{C}$ kanonisch in $K/\langle\!\langle (\tilde{r}, c) \rangle\!\rangle$ ein. Zudem betten $M'_{\alpha'_{\tilde{r}}+1,\infty} \times \widetilde{C}$ und $M'_{-\infty,\omega'_{\tilde{r}}-1} \times \widetilde{C}$ kanonisch in $K/\langle\!\langle (\tilde{r}, c) \rangle\!\rangle$ ein.

Beweis. Wir beweisen nur die erste der beiden Einbettungen im nichtdualen Fall, da die anderen Einbettungen in analoger Weise gezeigt werden können. Wegen Proposition 3.11, Notation 3.13 und Bemerkung 3.14 erhalten wir die Darstellungen

$$\begin{aligned} K &= M \times C = \Big(\langle b_{\alpha_{\tilde{r}}+1}, b_{\alpha_{\tilde{r}}+2}, \ldots, b_{\alpha_{\tilde{r}}+k} \mid\rangle \;*\; \mathop{\ast}_{j\in\mathbb{Z}} G_j\Big) \times C \\ &= \big(G_{-\infty,\alpha_{\tilde{r}}} \;*\; M_{\alpha_{\tilde{r}}+1,\infty}\big) \times C \qquad (3.8) \\ &\cong \; (G_{-\infty,\alpha_{\tilde{r}}} \times C) \mathop{\ast}_{C} (M_{\alpha_{\tilde{r}}+1,\infty} \times C). \qquad (3.9) \end{aligned}$$

Fall 1: Sei $\widetilde{r}$ ein Element von $G_{-\infty,\alpha_{\widetilde{r}}}$.
Durch Anwendung der Projektion $\pi\colon \big(G_{-\infty,\alpha_{\widetilde{r}}} \ * \ M_{\alpha_{\widetilde{r}}+1,\infty}\big) \times C \to G_{-\infty,\alpha_{\widetilde{r}}} \times C$ erhalten wir die Gleichung $N = \langle\!\langle (\widetilde{r}, c) \rangle\!\rangle_{G_{-\infty,\alpha_{\widetilde{r}}}} \cap C$. Dann gilt wegen der Definition von $\widetilde{C}$ und (3.9):

$$K/\langle\!\langle (\widetilde{r}, c) \rangle\!\rangle \cong \big((G_{-\infty,\alpha_{\widetilde{r}}} \times C)/\langle\!\langle (\widetilde{r}, c) \rangle\!\rangle\big) \underset{\widetilde{C}}{*} (M_{\alpha_{\widetilde{r}}+1,\infty} \times \widetilde{C})$$

Mit Korollar B.6 folgt die gewünschte Einbettung.

Fall 2: Sei $\widetilde{r}$ kein Element von $G_{-\infty,\alpha_{\widetilde{r}}}$.
Wir dürfen somit annehmen, dass $\widetilde{r}$ geschrieben als Element des freien Produkts in (3.8) den Faktor $M_{\alpha_{\widetilde{r}}+1,\infty}$ benutzt. Aus Definition 3.21 folgt, dass die Darstellung von $\widetilde{r}$ auch den Faktor $G_{-\infty,\alpha_{\widetilde{r}}}$ benutzt. Da $\widetilde{r}$ als geeignetes Konjugierte im Sinne von Definition 3.28 zyklisch gekürzt ist, kann $\widetilde{r}$ weder zu einem Element aus $G_{-\infty,\alpha_{\widetilde{r}}}$ noch aus $M_{\alpha_{\widetilde{r}}+1,\infty}$ konjugiert sein. Es sind folglich alle Bedingungen erfüllt, um Lemma 2.17 anwenden zu können. Wir erhalten die kanonische Einbettung von $M_{\alpha_{\widetilde{r}}+1,\infty} \times \widetilde{C}$ in $K/\langle\!\langle (\widetilde{r}, c) \rangle\!\rangle$.

□

3.6.2. Die Struktur einiger Quotienten von K

Notation 3.35. Sei $(\widetilde{r}, c)$ ein Element in K, wobei $\widetilde{r}$ ein geeignetes Konjugiertes sei. Dann definieren wir wie schon zuvor in Korollar 3.34

$$N_{\widetilde{r}} \ := \ \langle\!\langle (\widetilde{r}, c) \rangle\!\rangle_K \cap C \qquad \text{und} \qquad \widetilde{C}_{\widetilde{r}} \ := \ C/N_{\widetilde{r}}.$$

Man bemerke, dass der Endomorphismus von K, welcher alle Erzeuger b_i ($i \in \mathbb{Z}$) auf b_{i+1} abbildet, alle Erzeuger $g_i \in G_i$ ($i \in \mathbb{Z}$) auf g_{i+1} abbildet und alle Erzeuger von C auf sich selbst abbildet, laut Abschnitt 3.2 ein Automorphismus von K ist, welcher eingeschränkt auf C der Identität entspricht. Daher ist $\widetilde{C}_{\widetilde{r}}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ identisch mit $\widetilde{C}_{\widetilde{r}_i}$ (wobei $\widetilde{r}_i := x^{-i}\widetilde{r}x^i$, siehe Notation 3.10).

Im Folgenden bezeichnen wir das Bild von $c \in C$ in der Faktorgruppe $\widetilde{C}_{\widetilde{r}}$ von C wieder mit c.

Lemma 3.36. *Sei $(\widetilde{r}, c)$ ein Element aus K mit $|\widetilde{r}|_{\alpha,\omega} \geqslant 1$, wobei $\widetilde{r}$ ein geeignetes Konjugiertes sei. Weiter seien Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m < n$ gegeben. Wir setzen $s := \alpha_{\widetilde{r}_n}$, $t := \omega_{\widetilde{r}_n} - 1$ und $w_i := b_i u_i^{-1}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:*

(1) $K/\langle\!\langle (\widetilde{r}_i, c) \mid m \leqslant i \leqslant n \rangle\!\rangle$
$\cong \big((M_{-\infty,t} \times C)/\langle\!\langle (\widetilde{r}_i, c) \mid m \leqslant i \leqslant n-1 \rangle\!\rangle\big) \underset{P \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}}{*} \big((M_{s,\infty} \times C)/\langle\!\langle (\widetilde{r}_n, c) \rangle\!\rangle\big)$
mit $P \cong \langle w_{t-k+1}, w_{t-k+2}, \ldots, w_t \ |\rangle * G_{s,t} = \langle b_{t+1}, b_{t+2}, \ldots, b_{t+k} \ |\rangle * G_{s,t}$

(2) *Die Gruppe $M_{s+1,\infty} \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}$ bettet kanonisch in $K/\langle\!\langle (\widetilde{r}_i, c) \mid m \leqslant i \leqslant n \rangle\!\rangle$ ein.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass Aussage (2) für fest gewählte Zahlen m, n von Aussage (1) impliziert wird. Wegen Korollar 3.34 bettet $M_{s+1,\infty} \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}$ kanonisch in die Gruppe $(M_{s,\infty} \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}_n, c)\rangle\rangle$ ein, welche wiederum als Faktor des amalgamierten Produkts aus (1) in $K/\langle\langle(\widetilde{r}_i, c) \mid m \leqslant i \leqslant n\rangle\rangle$ einbettet. Insgesamt erhalten wir also Aussage (2).

Wir fixieren ein beliebiges Element $m \in \mathbb{Z}$ und führen den Beweis von Aussage (1) per Induktion über n. Aufgrund der Vorüberlegung stehen uns dabei im Induktionsschritt sowohl Aussage (1) als auch (2) für die Induktionsvoraussetzung zur Verfügung.

Als Induktionsanfang ($m + 1 = n$) möchten wir

$$K/\langle\langle(\widetilde{r}_m, c), (\widetilde{r}_n, c)\rangle\rangle \cong \big((M_{-\infty,t} \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}_m, c)\rangle\rangle\big) \underset{P \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}}{*} \big((M_{s,\infty} \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}_n, c)\rangle\rangle\big) \quad (3.10)$$

zeigen, wobei $P \cong \langle w_{t-k+1}, w_{t-k+2}, \ldots, w_t \mid\rangle * G_{s,t} \cong \langle b_{t+1}, b_{t+2}, \ldots, b_{t+k} \mid\rangle * G_{s,t}$. Um diese kanonische Isomorphie zu zeigen, ist es ausreichend, folgende beiden Behauptungen zu beweisen:

(a) Die Gruppe $P \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}$ bettet in $(M_{-\infty,t} \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}_m, c)\rangle\rangle$ und $(M_{s,\infty} \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}_n, c)\rangle\rangle$ ein. (Dies rechtfertigt die Schreibweise des amalgamierten Produkts in (3.10).)

(b) Das amalgamierte Produkt auf der rechten Seite von (3.10) ist zur linken Seite $K/\langle\langle(\widetilde{r}_m, c), (\widetilde{r}_n, c)\rangle\rangle$ isomorph.

Beweis von (a). Wir beweisen nur die Einbettung von $P \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}$ in $(M_{s,\infty} \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}_n, c)\rangle\rangle$. Die andere Einbettung kann auf analoge Weise gezeigt werden. Wir bemerken:

$$\begin{aligned} P &= \langle b_{t+1}, b_{t+2}, \ldots, b_{t+k} \mid\rangle * G_{s,t} = \langle b_t u_t^{-1}, b_{t+1}, \ldots, b_{t+k-1} \mid\rangle * G_{s,t} \\ &= \langle b_t, b_{t+1}, \ldots, b_{t+k-1} \mid\rangle * G_{s,t} = \ \ldots \ = \langle b_s, b_{s+1}, \ldots, b_{s+k-1} \mid\rangle * G_{s,t} \end{aligned}$$

Insbesondere ist somit $\mathcal{P} := \mathcal{E}_{s,\infty} \setminus \bigcup_{i \geqslant t+1} G_i$ ein Erzeugendensystem von P. Wir schreiben mit Bemerkung 3.14:

$$M_{s,\infty} = \langle b_s, b_{t+2}, \ldots, b_{s+k-1} \mid\rangle * G_{s,t} * G_{t+1,\infty} = P * G_{t+1,\infty} \quad (3.11)$$

Wegen Lemma 3.33 und $s = \alpha_{\widetilde{r}_n}$ enthält $\widetilde{r}_n$ geschrieben im Erzeugendensystem $\mathcal{E}_{s,\infty}$ von $M_{s,\infty}$ mindestens einen Erzeuger des Erzeugendensystems $\mathcal{Q} := \bigcup_{i \geqslant t+1} G_i$ von $G_{t+1,\infty}$. Da $\mathcal{E}_{s,\infty}$ die disjunkte Vereinigung von $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ ist, enthält $\widetilde{r}_n$ geschrieben als Element des freien Produkts $P * G_{t+1,\infty}$ mindestens ein Stück aus $G_{t+1,\infty}$. Falls $\widetilde{r}_n$ kein Stück aus P benutzt, dürfen wir wegen der Definition von $\widetilde{C}_{\widetilde{r}}$ (siehe Notation 3.35) und (3.11)

$$(M_{s,\infty} \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}_n, c)\rangle\rangle \cong (P \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}) \underset{\widetilde{C}_{\widetilde{r}}}{*} \big((G_{t+1,\infty} \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}_n, c)\rangle\rangle\big)$$

schreiben. Als Faktor des amalgamierten Produkts bettet $P \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}$ somit in $(M_{s,\infty} \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}_n, c)\rangle\rangle$ ein. Das Element $\widetilde{r}_n$ geschrieben als Element des freien Produkts $P * G_{t+1,\infty}$

enthalte also jeweils mindestens ein Stück beider Faktoren. Da $\widetilde{r}_n$ im Sinne von Definition 3.28 zyklisch gekürzt ist, kann $(\widetilde{r}_n, c)$ weder zu einem Element aus $P \times C$ noch aus $G_{t+1,\infty} \times C$ konjugiert sein. Mit (3.11) erhalten wir durch Anwendung von Lemma 2.17 die Einbettung von $P \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}$ in $(M_{s,\infty} \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}_n, c)\rangle\rangle$. Dabei benutzen wir die lokale Indizierbarkeit von P und $G_{t+1,\infty}$ als freie Produkte lokal indizierbarer Gruppen.

Behauptung (b) kann leicht durch das Auffinden einer gemeinsamen Präsentation der beiden Seiten der Isomorphie (3.10) gezeigt werden. Damit ist der Induktionsanfang bewiesen.

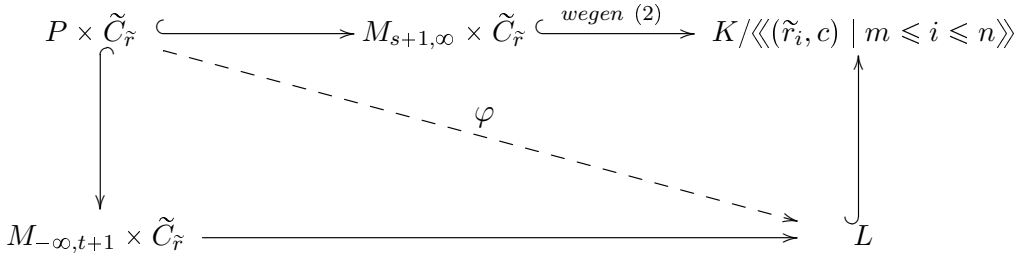
Für den Induktionsschritt von (m, n) nach $(m, n+1)$ zeigen wir für $t = \omega_{\widetilde{r}_n} - 1$ und $s = \alpha_{\widetilde{r}_n}$ (diese Wahlen bleiben unverändert) die Darstellung

$$\begin{aligned} & K/\langle\langle(\widetilde{r}_i, c) \mid m \leqslant i \leqslant n+1\rangle\rangle \\ \cong\ & \big((M_{-\infty,t+1} \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}_i, c) \mid m \leqslant i \leqslant n\rangle\rangle\big) \underset{P \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}}{*} \big((M_{s+1,\infty} \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}_{n+1}, c)\rangle\rangle\big), \end{aligned}$$

wobei $P \cong \langle w_{t-k+2}, w_{t-k+3}, \ldots, w_{t+1} \mid\rangle * G_{s+1,t+1} = \langle b_{t+2}, b_{t+3}, \ldots, b_{t+k+1} \mid\rangle * G_{s+1,t+1}$. Es ist ausreichend, die Wohldefiniertheit des amalgamierten Produkts zu zeigen. Dann kann die Isomorphie der beiden Seiten leicht durch Auffinden einer gemeinsamen Präsentation gezeigt werden. Unser Ziel ist also, die beiden Einbettungen von $P \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}$ in

$$L := (M_{-\infty,t+1} \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}_i, c) \mid m \leqslant i \leqslant n\rangle\rangle$$

und $(M_{s+1,\infty} \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}_{n+1}, c)\rangle\rangle$ zu zeigen. Die Einbettung von $P \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}$ in $\big((M_{s+1,\infty} \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}_{n+1}, c)\rangle\rangle\big)$ kann in gleicher Weise wie im Induktionsanfang gezeigt werden. Zum Beweis der Einbettung von $P \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}$ in L betrachten wir das folgende kommutative Diagramm, wobei alle nicht beschrifteten Einbettungen kanonische Einbettungen von Untergruppen sind:



Der eingezeichnete Homomorphismus φ sei die Komposition aus der Einbettung von $P \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}$ als Untergruppe in $M_{-\infty,t+1} \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}$ und dem Homomorphismus von der Gruppe $M_{-\infty,t+1} \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}$ in ihre Faktorgruppe L. Wir möchten zeigen, dass φ eine Einbettung ist. Dazu betrachten wir P als Untergruppe von $M_{s+1,\infty}$ und wenden Aussage (2) an, um $M_{s+1,\infty} \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}$ in $K/\langle\langle(\widetilde{r}_i, c) \mid m \leqslant i \leqslant n\rangle\rangle$ einzubetten. Insgesamt erhalten wir die Einbettung von $P \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}$

in $K/\langle\!\langle(\widetilde{r}_i, c) \mid m \leqslant i \leqslant n\rangle\!\rangle$. Wir finden diese Gruppe oben rechts im Diagramm. Wäre nun φ keine Einbettung in L, so könnte auch die Kombination von φ mit der Einbettung von L als Untergruppe in $K/\langle\!\langle(\widetilde{r}_i, c) \mid m \leqslant i \leqslant n\rangle\!\rangle$ keine Einbettung sein. Dies widerspricht der Kommutativität des Diagramms.

□

Schließlich benötigen wir folgende „gespiegelte“ Version von Lemma 3.36.

Lemma 3.37. *Sei $(\widetilde{r}, c)$ ein Element aus K mit $|\widetilde{r}|_{\alpha,\omega} \geqslant 1$, wobei $\widetilde{r}$ ein geeignetes Konjugiertes sei. Weiter seien Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m < n$ gegeben. Wir setzen $s := \alpha_{\widetilde{r}_m} + 1$, $t := \omega_{\widetilde{r}_m}$ und $w_i := b_i u_i^{-1}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:*

(1) $K/\langle\!\langle(\widetilde{r}_i, c) \mid m \leqslant i \leqslant n\rangle\!\rangle$
$\cong \big((M_{-\infty,t} \times C)/\langle\!\langle(\widetilde{r}_m, c)\rangle\!\rangle\big) \underset{P \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}}{*} \big((M_{s,\infty} \times C)/\langle\!\langle(\widetilde{r}_i, c) \mid m+1 \leqslant i \leqslant n\rangle\!\rangle\big)$,
wobei $P \cong \langle w_{s-k}, w_{s-k+1}, \ldots, w_{s-1} \mid\rangle * G_{s,t} = \langle b_s, b_{s+1}, \ldots, b_{s+k-1} \mid\rangle * G_{s,t}$

(2) *Die Gruppe $M_{-\infty,t-1} \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}$ bettet kanonisch in $K/\langle\!\langle(\widetilde{r}_i, c) \mid m \leqslant i \leqslant n\rangle\!\rangle$ ein.*

Beweis. Wir werden die Aussage des Lemmas mithilfe der dualen Struktur von K aus Lemma 3.36 herleiten. Sei dazu $\tilde{r}'_i$ ($i \in \mathbb{Z}$) eine Darstellung von $\widetilde{r}_{-i}$ in dualen Erzeugern. Unter Benutzung der Notation aus Abschnitt 3.3 schreiben wir

$$w_i = b_i u_i^{-1} = b'_{-i} \quad \text{und} \quad b_i = b_i u_i^{-1} u_i = b'_{-i} u'^{-1}_{-i} =: w'_{-i}.$$

Zudem setzen wir $m' = -n$, $n' = -m$, $s' = -t$ und $t' = -s$. Durch Umschreiben der Aussagen (1) und (2) des Lemmas mithilfe dualer Objekte erhalten wir:

(1) $K/\langle\!\langle(\tilde{r}'_i, c) \mid m' \leqslant i \leqslant n'\rangle\!\rangle$
$\cong \big((M'_{-\infty,t'} \times C)/\langle\!\langle(\tilde{r}'_i, c) \mid m' \leqslant i \leqslant n'-1\rangle\!\rangle\big) \underset{P' \times \widetilde{C}_{\tilde{r}}}{*} \big((M'_{s',\infty} \times C)/\langle\!\langle(\tilde{r}'_{n'}, c)\rangle\!\rangle\big)$,
wobei $P' \cong \langle b'_{t'+1}, b'_{t'+2}, \ldots, b'_{t'+k} \mid\rangle * G_{s',t'} \cong \langle w'_{t'-k+1}, w'_{t'-k+2}, \ldots, w'_{t'} \mid\rangle * G_{s',t'}$

(2) Die Gruppe $M_{s'+1,\infty} \times \widetilde{C}_{\tilde{r}}$ bettet kanonisch in $K/\langle\!\langle(\tilde{r}'_i, c) \mid m' \leqslant i \leqslant n'\rangle\!\rangle$ ein.

Wegen Lemma 3.25 gilt $s' = -t = -\omega_{\widetilde{r}_m} = -\omega_{\widetilde{r}'_{-m}} = \alpha'_{\widetilde{r}'_{n'}}$ und $t' = -s = -\alpha_{\widetilde{r}_m} - 1 = \omega'_{\widetilde{r}'_{-m}} - 1 = \omega'_{\widetilde{r}'_{n'}} - 1$. Die beiden Aussagen erhalten somit dieselbe Form wie in Lemma 3.36. Allerdings arbeiten wir nun mit dualen Objekten. Da wir alle im Beweis zu Lemma 3.36 benutzten Aussagen auch für duale Objekte gezeigt haben, kann die Aussage in gleicher Weise wie Lemma 3.36 bewiesen werden.

□

3.6.3. Abschluss des Beweises für $\widetilde{r}$ mit positiver α-ω-Länge

In Proposition 3.8 sind zwei Elemente (r, c), $(s, d) \in \widetilde{H}$ mit demselben normalen Abschluss und $r_x = 0$ gegeben. Wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, stimmen wegen Lemma 2.23 auch

die normalen Abschlüsse von $\{(r_i, c) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ und $\{(s_i, d) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ in K überein. Am Ende von Abschnitt 3.5 haben wir bereits bemerkt, dass wir o. B. d. A. mit $\{(\widetilde{r}_i, c) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ und $\{(\widetilde{s}_i, d) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ arbeiten können, wobei $\widetilde{r}_i$ und $\widetilde{s}_i$ $(i \in \mathbb{Z})$ geeignete Konjugierte seien. Wegen der Gleichheit der normalen Abschlüsse von $\{(\widetilde{r}_i, c) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ und $\{(\widetilde{s}_i, d) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ in K ist insbesondere $(\widetilde{s}_0, d)$ trivial in $K/\langle\langle(\widetilde{r}_i, c) \mid i \in \mathbb{Z}\rangle\rangle$. Somit existieren Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leqslant n$, so dass $(\widetilde{s}_0, d)$ trivial in $K/\langle\langle(\widetilde{r}_i, c) \mid m \leqslant i \leqslant n\rangle\rangle$ ist. Wir wählen ein Paar (m, n) mit dieser Eigenschaft, so dass $n - m$ minimal ist. Unser erstes Ziel ist, $m = n$ zu zeigen. Dazu beweisen wir zunächst das folgende Lemma.

Lemma 3.38. *Sei* $|\widetilde{r}|_{\alpha,\omega} \geqslant 1$. *Dann gilt*

(a) $\omega_{\widetilde{s}_0} \geqslant \omega_{\widetilde{r}_n} \geqslant \omega_{\widetilde{r}_m}$, (b) $\alpha_{\widetilde{s}_0} \leqslant \alpha_{\widetilde{r}_m} \leqslant \alpha_{\widetilde{r}_n}$ *und* (c) $|\widetilde{s}|_{\alpha,\omega} \geqslant |\widetilde{r}|_{\alpha,\omega}$.

Beweis. Um (a) zu zeigen, nehmen wir im Hinblick auf einen Widerspruch $\omega_{\widetilde{s}_0} < \omega_{\widetilde{r}_n}$ an. Dann folgt, dass $\widetilde{s}_0$ Element von $M_{-\infty,\omega_{\widetilde{r}_n}-1}$ ist. Nach Wahl von m, n ist $(\widetilde{s}_0, d)$ trivial in $K/\langle\langle(\widetilde{r}_i, c) \mid m \leqslant i \leqslant n\rangle\rangle$. Im Fall $m < n$ erhalten wir laut Lemma 3.36 (1) die Darstellung

$$\big((M_{-\infty,\tau} \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}_i, c) \mid m \leqslant i \leqslant n-1\rangle\rangle\big) \underset{P\times\widetilde{C}_{\widetilde{r}}}{*} \big((M_{\sigma,\infty} \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}_n, c)\rangle\rangle\big) \tag{3.12}$$

von $K/\langle\langle(\widetilde{r}_i, c) \mid m \leqslant i \leqslant n\rangle\rangle$, wobei $\sigma = \alpha_{\widetilde{r}_n}$ und $\tau = \omega_{\widetilde{r}_n} - 1$. Somit ist $(\widetilde{s}_0, d)$ für $m < n$ bereits trivial im linken Faktor des amalgamierten Produkts (3.12). Dies widerspricht der Minimalität von $n - m$. Für $m = n$ wäre $(\widetilde{s}_0, d)$ wegen

$$K/\langle\langle(\widetilde{r}_i, c) \mid m \leqslant i \leqslant n\rangle\rangle \qucong (M_{-\infty,\tau} \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}) \underset{\{1\}\times\widetilde{C}_{\widetilde{r}}}{*} \big((M_{\sigma,\infty} \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}_n, c)\rangle\rangle\big)$$

bereits trivial in $M_{-\infty,\tau} \times \widetilde{C}_{\widetilde{r}}$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass r und folglich auch s nach Voraussetzung von Proposition 3.8 nicht trivial in K sind. Die Ungleichung $\omega_{\widetilde{r}_n} \geqslant \omega_{\widetilde{r}_m}$ folgt wegen $n \geqslant m$ aus Lemma 3.25.

Ungleichung (b) kann mithilfe von Lemma 3.37 in gleicher Weise wie (a) gezeigt werden.

Schließlich gilt unter Benutzung von Lemma 3.25 sowie (a) und (b)

$$|\widetilde{s}|_{\alpha,\omega} = |\widetilde{s}_0|_{\alpha,\omega} = \omega_{\widetilde{s}_0} - \alpha_{\widetilde{s}_0} + 1 \geqslant \omega_{\widetilde{r}_m} - \alpha_{\widetilde{r}_m} + 1 = |\widetilde{r}_m|_{\alpha,\omega} = |\widetilde{r}|_{\alpha,\omega}.$$

□

Wegen Lemma 3.38 (c) und $|\widetilde{r}|_{\alpha,\omega} \geqslant 1$ erhalten wir aus Symmetriegründen auch die Ungleichung $|\widetilde{s}|_{\alpha,\omega} \leqslant |\widetilde{r}|_{\alpha,\omega}$. Insgesamt folgt $|\widetilde{s}|_{\alpha,\omega} = |\widetilde{r}|_{\alpha,\omega}$.

Bemerkung 3.39. Wir haben soeben gezeigt, dass $\widetilde{r}$ genau dann eine positive α-ω-Länge hat, wenn $\widetilde{s}$ eine positive α-ω-Länge hat.

Mit Lemma 3.25 folgt

$$|\widetilde{r}_m|_{\alpha,\omega} = |\widetilde{s}_0|_{\alpha,\omega} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{\widetilde{r}_m} - \alpha_{\widetilde{r}_m} = \omega_{\widetilde{s}_0} - \alpha_{\widetilde{s}_0} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{\widetilde{r}_m} - \omega_{\widetilde{s}_0} = \alpha_{\widetilde{r}_m} - \alpha_{\widetilde{s}_0}$$

Unter Benutzung dieser Gleichung sowie Lemma 3.38 (a) und (b) folgt

$$0 \geqslant \omega_{\widetilde{r}_m} - \omega_{\widetilde{s}_0} = \alpha_{\widetilde{r}_m} - \alpha_{\widetilde{s}_0} \geqslant 0.$$

Somit erhalten wir $\omega_{\widetilde{r}_m} = \omega_{\widetilde{s}_0}$. Wegen Lemma 3.38 (a) und Lemma 3.25 gilt insbesondere $m = n$. Dies bedeutet, dass $(\widetilde{s}_0, d)$ trivial in $K/\langle\langle(\widetilde{r}_m, c)\rangle\rangle$ ist, wobei der Index m eindeutig durch $\omega_{\widetilde{r}_m} = \omega_{\widetilde{s}_0}$ bestimmt ist. In gleicher Weise können wir daher zeigen, dass $(\widetilde{r}_m, c)$ trivial in $K/\langle\langle(\widetilde{s}_0, d)\rangle\rangle$ ist. Also stimmen die normalen Abschlüsse von $(\widetilde{r}_m, c)$ und $(\widetilde{s}_0, d)$ in K überein. Laut Lemma 3.12 besitzt K die Magnus-Eigenschaft. Somit ist $(\widetilde{r}_m, c)$ in K zu $(\widetilde{s}_0, d)$ oder $(\widetilde{s}_0, d)^{-1}$ konjugiert. Da K eine Untergruppe von $\widetilde{H}$ ist und $\widetilde{r}_m = x^{-m}\widetilde{r}x^m$ sowie $\widetilde{s}_0 = \widetilde{s}$ gilt (siehe Notation 3.10), ist $(\widetilde{r}, c)$ in $\widetilde{H}$ zu $(\widetilde{s}, d)$ oder $(\widetilde{s}, d)^{-1}$ konjugiert. Dies beendet den Beweis von Proposition 3.8 im Fall $|\widetilde{r}|_{\alpha,\omega} \geqslant 1$.

3.7. Beweis von Proposition 3.8 für $\widetilde{r}$ mit nichtpositiver α-ω-Länge

Dieser Abschnitt bildet den Abschluss des Beweises von Proposition 3.8 für den Fall, dass $\widetilde{r}$ nichtpositive α-ω-Länge hat (d. h. $|\widetilde{r}|_{\alpha,\omega} < 1$). Im ersten Unterabschnitt beweisen wir zunächst einige Lemmata, auf die wir in diesem Fall zurückgreifen möchten, und geben zwei Resultate von A. Karras, W. Magnus und D. Solitar über Torsionselemente in einrelationigen Gruppen (engl. „one-relator groups“) wieder. Mithilfe dieser Aussagen beenden wir im zweiten Unterabschnitt den Beweis von Proposition 3.8.

3.7.1. Vorbereitungen und Hilfsaussagen

Lemma 3.40. *Sei r ein Element in M mit nichtpositiver α-ω-Länge. Dann enthält jede gekürzte Darstellung von r bzgl. des Erzeugendensystems $\mathcal{E}_{\alpha_r,\infty}$ von $M_{\alpha_r,\infty}$ ausschließlich b-Erzeuger.*

Beweis. Wegen $|r|_{\alpha,\omega} < 1$ gilt $\omega_r < \alpha_r$. Laut Definition 3.21 ist r sowohl ein Element von $M_{-\infty,\omega_r}$ als auch von $M_{\alpha_r,\infty}$. Wir führen lokal in diesem Beweis die folgende Notation ein.

- Sei $r(\alpha)$ die gekürzte Darstellung von r bzgl. $\mathcal{E}_{\alpha_r,\infty} = \{b_{\alpha_r}, b_{\alpha_r+1}, \ldots, b_{\alpha_r+k-1}\} \cup \bigcup_{j\geqslant\alpha_r} G_j$ von $M_{\alpha_r,\infty}$.
- Sei $r(\omega)$ die gekürzte Darstellung von r bzgl. $\mathcal{E}_{-\infty,\omega_r} = \{b_{\omega_r-k+1}, b_{\omega_r-k+2}, \ldots, b_{\omega_r}\} \cup \bigcup_{j\leqslant\omega_r} G_j$ von $M_{-\infty,\omega_r}$.

Für jeden Index $i \in \{\omega_r - k + 1, \omega_r - k + 2, \ldots, \omega_r\}$ existiert ein eindeutig bestimmter Index $j \in \{\alpha_r, \alpha_r + 1, \ldots, \alpha_r + k - 1\}$ mit $j \equiv i \mod k$. Somit erhalten wir eine Darstellung $r(\alpha)$ aus einer Darstellung $r(\omega)$, indem wir jeden Erzeuger b_i in $r(\omega)$ durch $b_j u_{j-k} u_{j-2k} \ldots u_i$ ersetzen und anschließend kürzen. Die Indizes der Erzeuger $g_\ell \in \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} G_p$, welche durch die

Ersetzungen hinzugekommen sind, stammen aus dem Intervall $(-\infty, \alpha_r - 1]$. Die Indizes der anfangs in $r(\omega)$ enthaltenen Erzeuger $g_\ell \in \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} G_p$ liegen im Intervall $(-\infty, \omega_r] \subset (-\infty, \alpha_r - 1]$. Somit liegen die Indizes aller Erzeuger aus $r(\alpha)$, welche keine b-Erzeuger sind, im Intervall $(-\infty, \alpha_r - 1]$. Wegen der Definition von $r(\alpha)$ enthält $r(\alpha)$ folglich ausschließlich b-Erzeuger.

□

Die folgenden beiden Aussagen dienen der Vorbereitung einer Fallunterscheidung im nächsten Unterabschnitt.

Korollar 3.41. *Sei $r \in G \underset{u=[x,b]}{*} \langle x, b\rangle$ das Element aus der Voraussetzung von Proposition 3.8. Falls r eine Exponentensumme von 0 bzgl. b hat, so besitzt r aufgefasst als Element von M eine positive α-ω-Länge.*

Beweis. Wegen der Voraussetzungen von Proposition 3.8 gilt $k = 1$. O. B. d. A. sei $r \in M$ ein geeignetes Konjugat. Im Hinblick auf einen Widerspruch nehmen wir an, dass $|r|_{\alpha,\beta} \leqslant 0$ gilt. Laut Lemma 3.40 enthält die gekürzte Darstellung von r bzgl. $\mathcal{E}_{\alpha_r,\infty} = \{b_{\alpha_r}\} \cup \bigcup_{j\geqslant\alpha_r} G_j$ ausschließlich b-Erzeuger. Somit erhalten wir die Darstellung $r = x^{-\alpha_r} b^j x^{\alpha_r}$ in $G \underset{u=[x,b]}{*} \langle x, b \,|\rangle$ für eine Zahl $j \in \mathbb{Z}$. Da die Exponentensumme von r bzgl. b laut Voraussetzung gleich 0 ist, folgt $r = 1$. Dies widerspricht der Voraussetzung von Proposition 3.8.

□

Lemma 3.42. *Seien B, C Gruppen und $Z = \langle z\rangle$ eine unendliche zyklische Untergruppe von B. Weiter sei (r, c) ein Element von $B \times C$. Dann existieren eine eindeutig bestimmte Zahl $\mu \in \mathbb{N}_0$, eine Zahl $\nu \in \mathbb{Z}$ und eine normale Untergruppe D von C mit*

$$\langle\!\langle (r,c)\rangle\!\rangle_{B\times C} \;\cap\; (Z \times C) \;=\; \langle (z^\mu, c^\nu)\rangle_{Z\times C} \bullet (\{1\} \times D). \tag{3.13}$$

Beweis. Sei X bzw. Y die linke bzw. rechte Seite der Gleichung (3.13). Wir führen den Beweis, indem wir μ, ν und D konstruieren. Als Erstes definieren wir die normale Untergruppe D von C durch

$$\{1\} \times D = \langle\!\langle (r,c)\rangle\!\rangle_{B\times C} \;\cap\; (\{1\} \times C).$$

Somit ist sichergestellt, dass alle Elemente der Form $(1, f)$ mit $f \in C$, welche in X enthalten sind, auch in Y enthalten sind. Enthält X kein Element (z^i, f) mit $i \neq 0$ und $f \in C$, so setzen wir $\mu = \nu = 0$. In diesem Fall ist nichts weiter zu zeigen. Andernfalls definieren wir μ als kleinste Zahl $i \in \mathbb{N}$, für die X ein Element (z^i, f) für ein $f \in C$ enthält. Dann existiert eine Darstellung

$$z^\mu = \prod_{j=1}^{n} v_j^{-1} r^{\epsilon_j} v_j \;\text{ in }\; B, \;\text{ wobei }\; v_j \in B, \;\; \epsilon_j \in \mathbb{Z} \;\text{ und }\; n \in \mathbb{N}.$$

Wir wählen eine solche Darstellung, so dass die Zahl $\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j$ betragsmäßig minimal ist, und bezeichnen diese Zahl mit ν. Es folgt, dass

$$\langle (z^\mu, c^\nu) \rangle_{Z \times C} = \{(z^\mu, c^\nu)^i \mid i \in \mathbb{Z}\} = \{(z^{\mu i}, c^{\nu i}) \mid i \in \mathbb{Z}\}$$

eine Teilmenge von X ist. Wegen der Wahl von μ gilt umgekehrt für jedes Element der Form (z^ℓ, f) $(f \in C)$ aus X, dass ℓ ein Vielfaches von μ ist. Existiert nun ein Element $(z^{\mu i}, f)$ in X mit $f \neq c^{\nu i}$, so ist $c^{-\nu i} f$ laut Definition in D enthalten. Es folgt, dass auch $(z^{\mu i}, f) = (z^{\mu i}, c^{\nu i})(1, c^{-\nu i} f)$ ein Element von Y ist. Insgesamt gilt daher $X = Y$.

□

Schließlich geben wir zwei Resultate von A. Karras, W. Magnus und D. Solitar über Torsionselemente einer einrelationigen Gruppe wieder.

Satz 3.43. (siehe [KMS60, Theorem 1]) *Sei G eine Gruppe mit Erzeugern $a, b, c, \ldots$ und einer definierenden Relation $R(a, b, c, \ldots) = 1$. Falls G ein nichttriviales Element endlicher Ordnung enthält, so muss R eine echte Potenz sein, d. h. $R = W^k$, $k > 1$, $W \neq 1$.*

Satz 3.44. (siehe [KMS60, Theorem 3]) *Sei G eine Gruppe mit Erzeugern $a, b, c, \ldots$ und einer definierenden Relation $V^k(a, b, c, \ldots) = 1$, $k > 1$, wobei $V(a, b, c, \ldots)$ keine echte Potenz sei. Dann hat V Ordnung k und alle Elemente endlicher Ordnung in G sind zu Potenzen von V konjugiert.*

3.7.2. Abschluss des Beweises für $\widetilde{r}$ mit nichtpositiver α-ω-Länge

In Proposition 3.8 sind zwei Elemente (r, c), $(s, d) \in \widetilde{H}$ mit dem gleichen normalen Abschluss und $r_x = 0$ gegeben. In Abschnitt 3.6.3 haben wir bereits gesehen, dass wir o. B. d. A. mit $\{(\widetilde{r}_i, c) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ und $\{(\widetilde{s}_i, d) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ arbeiten können, wobei $\widetilde{r}_i$ und $\widetilde{s}_i$ $(i \in \mathbb{Z})$ geeignete Konjugierte seien. Da wir in diesem Abschnitt $|\widetilde{r}|_{\alpha,\omega} < 1$ voraussetzen, gilt laut Bemerkung 3.39 auch $|\widetilde{s}|_{\alpha,\omega} < 1$. Wegen Lemma 3.40 können die Elemente $\widetilde{s}_0$ und $\widetilde{r}_0$ aus K als Wörter dargestellt werden, welche ausschließlich b-Erzeuger benutzen. Daraus folgt, dass es Darstellungen der Elemente $\widetilde{r}$ und $\widetilde{s}$ in

$$G \underset{u=[x^k,b]}{*} \langle x, b \mid \rangle$$

gibt, welche ausschließlich die beiden Erzeuger x und b benutzen. An dieser Stelle betrachten wir nicht mehr den Kern K, sondern arbeiten wieder mit den Elementen $(\widetilde{r}, c)$, $(\widetilde{s}, d)$ in der Gruppe

$$\widetilde{H} = (G \underset{u=[x^k,b]}{*} \langle x, b \mid \rangle) \times C = (G \times C) \underset{Z \times C}{*} (\langle x, b \mid \rangle \times C),$$

wobei Z die unendliche zyklische Untergruppe sei, welche von u in G und von $[x^k, b]$ in $\langle x, b \mid\rangle$ erzeugt ist. Aufgrund der Vorüberlegung wissen wir, dass $(\widetilde{r}, c)$ und $(\widetilde{s}, d)$ Elemente des rechten Faktors $\langle x, b \mid\rangle \times C$ des amalgamierten Produkts sind.

Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, dass $(\langle x, b \mid\rangle \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}, c)\rangle\rangle$ in $\widetilde{H}/\langle\langle(\widetilde{r}, c)\rangle\rangle$ einbettet. Dafür unterscheiden wir drei Fälle für die durch Lemma 3.42 mit $B = \langle x, b \mid\rangle$ und $Z = \langle[x^k, b]\rangle$ eindeutig bestimmte Zahl $\mu \in \mathbb{N}_0$.

Fall 1: Es sei $\mu = 0$.
Dann gilt $\langle\langle(\widetilde{r}, c)\rangle\rangle_{\langle x,b|\rangle\times C} \cap (Z \times C) = \{1\} \times D$ und somit

$$\widetilde{H}/\langle\langle(\widetilde{r}, c)\rangle\rangle = (G \times (C/D)) \underset{Z\times(C/D)}{*} \big((\langle x, b \mid\rangle \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}, c)\rangle\rangle\big).$$

Wegen Korollar B.6 erhalten wir die Einbettung von $(\langle x, b \mid\rangle \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}, c)\rangle\rangle$ in $\widetilde{H}/\langle\langle(\widetilde{r}, c)\rangle\rangle$.

Fall 2: Es sei $\mu = 1$.
Ist $([x^k, b], 1)$ ein Element von $\langle\langle(\widetilde{r}, c)\rangle\rangle_{\langle x,b|\rangle\times C} \cap (Z \times C)$, so gilt laut Lemma 3.42

$$X := \langle\langle(\widetilde{r}, c)\rangle\rangle_{\langle x,b|\rangle\times C} \cap (Z \times C) = Z \times D,$$

wobei D eine normale Untergruppe von C ist. Folglich dürfen wir

$$\widetilde{H}/\langle\langle(\widetilde{r}, c)\rangle\rangle = \big((G/\langle\langle u\rangle\rangle) \times (C/D)\big) \underset{\{1\}\times(C/D)}{*} \big((\langle x, b \mid\rangle \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}, c)\rangle\rangle\big)$$

schreiben. Also erhalten wir auch in diesem Fall mit Korollar B.6 die gewünschte Einbettung. Wir können somit annehmen, dass $([x^k, b], 1)$ kein Element von X ist, aber ein $c \in C$ existiert, so dass $([x^k, b], c)$ ein Element von X ist. Insbesondere liegt $[x^k, b]$ im normalen Abschluss von $\widetilde{r}$ in $\langle x, b \mid\rangle$ und wir erhalten eine Darstellung

$$[x^k, b] = \prod_{j=1}^{n} v_j^{-1} \widetilde{r}^{\epsilon_j} v_j \quad \text{in } \langle x, b \mid\rangle, \quad \text{wobei } v_j \in \langle x, b \mid\rangle, \quad \epsilon_j \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N}. \tag{3.14}$$

Für $\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j = 0$ erhalten wir auch die Darstellung

$$([x^k, b], 1) = \prod_{j=1}^{n} (v_j, 1)^{-1} (\widetilde{r}, c)^{\epsilon_j} (v_j, 1) \quad \text{in } \langle x, b \mid\rangle \times C.$$

Also wäre $([x^k, b], 1)$ ein Element von X. Dies widerspricht der Voraussetzung. Es gilt somit $\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j \neq 0$. Da die Exponentensummen bzgl. x und b in der freien Gruppe $\langle x, b \mid\rangle$ wohldefiniert sind, besitzt $\widetilde{r}$ wegen (3.14) sowohl bzgl. x als auch bzgl. b eine Exponentensumme von 0. Wegen Korollar 3.41 widerspricht dies der Voraussetzung des Abschnitts, dass r eine nichtpositive α-ω-Länge hat.

Fall 3: Es gelte $\mu > 1$.
Wegen Lemma 3.42 (mit $B = \langle x, b \mid\rangle$, $Z = \langle [x^k, b] \rangle$) folgt, dass $[x^k, b]^\mu$ im normalen Abschluss von $\widetilde{r}$ in $\langle x, b \mid\rangle$ liegt, während $[x^k, b]$ kein Element dieses Abschlusses ist. Somit ist $[x^k, b]$ ein Torsionselement der Gruppe $\langle x, b \mid \widetilde{r} \rangle$. Laut Satz 3.43 ist $\widetilde{r}$ eine echte Potenz. Wir setzen $\widetilde{r} = \rho^n$, wobei ρ keine echte Potenz sei und $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ gelte. Zudem erhalten wir mit Satz 3.44

$$[x^k, b] = w^{-1}\rho^m w \text{ in } \langle x, b \mid \rho^n \rangle$$

für ein m mit $0 < m < n$ und ein $w \in \langle x, b \mid \rho^n \rangle$. Somit folgt

$$[x^k, b] = \widetilde{w}^{-1}\rho^m \widetilde{w}\, \mathcal{N}(\rho^n) \text{ in } \langle x, b \mid\rangle \tag{3.15}$$

für ein $\widetilde{w} \in \langle x, b \mid\rangle$ und ein Element $\mathcal{N}(\rho^n)$ aus dem normalen Abschluss von ρ^n in $\langle x, b \mid\rangle$. Sei β die Exponentensumme von ρ bzgl. b in $\langle x, b \mid\rangle$. Dann folgt aus (3.15), dass $m\beta$ ein Vielfaches von $n\beta$ ist. Wegen $0 < m < n$ gilt somit $\beta = 0$. D. h., dass die Exponentensumme von ρ bzgl. b und damit auch von $\widetilde{r} = \rho^n$ bzgl. b gleich 0 ist. Dies steht wegen Korollar 3.41 im Widerspruch zur Voraussetzung des Abschnitts, dass r eine nichtpositive α-ω-Länge hat.

Insgesamt dürfen wir also in diesem Abschnitt benutzen, dass $(\langle x, b \mid\rangle \times C)/\langle\langle(\widetilde{r}, c)\rangle\rangle$ in $\widetilde{H}/\langle\langle(\widetilde{r}, c)\rangle\rangle$ einbettet. Da $(\widetilde{s}, d)$ ein Element von $\langle x, b \mid\rangle \times C$ ist und im normalen Abschluss von $(\widetilde{r}, c)$ in $\widetilde{H}$ liegt, ist $(\widetilde{s}, d)$ aufgrund der soeben gezeigten Einbettung auch im normalen Abschluss von $(\widetilde{r}, c)$ in $\langle x, b \mid\rangle \times C$ enthalten. Aus Symmetriegründen folgt, dass auch $(\widetilde{r}, c)$ im normalen Abschluss von $(\widetilde{s}, d)$ in $\langle x, b \mid\rangle \times C$ liegt. Somit besitzen $(\widetilde{r}, c)$ und $(\widetilde{s}, d)$ denselben normalen Abschluss in $F_2 \times C$, wobei F_2 die freie Gruppe $\langle x, b \mid\rangle$ vom Rang 2 ist. Laut Voraussetzung ist G für $C \neq \{1\}$ indizierbar und $G \times C$ besitzt die Magnus-Eigenschaft. Mit Lemma 2.10 folgt, dass $\mathbb{Z} \times C$ die Magnus-Eigenschaft besitzt. Wegen Satz 2.5 besitzt dann auch $F_2 \times C$ die Magnus-Eigenschaft. Schließlich ist $(\widetilde{r}, c)$ in der Untergruppe $\langle x, b \mid\rangle \times C$ von $\widetilde{H}$ und damit auch in $\widetilde{H}$ zu $(\widetilde{s}, d)$ oder $(\widetilde{s}, d)^{-1}$ konjugiert.

□

3.8. Anwendungen des Hauptsatzes

In diesem Abschnitt betrachten wir zwei Anwendungen von Hauptsatz 3.1. Die erste Anwendung nutzt Bedingung (1) und die zweite Anwendung Bedingung (2) von Hauptsatz 3.1.

3.8.1. Magnus-Eigenschaft von Fundamentalgruppen spezieller Graphen von Gruppen

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, existiert ein Zusammenhang zwischen Hauptsatz 3.1 und den Hauptresultaten von [BS08] sowie [Fel19]. Laut [Fel19] besitzt die Gruppe

$$G = \langle \{a, b\} \cup \mathcal{Y} \mid [a, b] = u \rangle$$

mit $\mathcal{Y} \neq \varnothing$ und $u \in \langle \mathcal{Y} \mid \rangle \backslash \{1\}$ die Magnus-Eigenschaft. Wir können G als Fundamentalgruppe des folgenden Graphen von Gruppen $(\mathbb{G}, Y)$ auffassen.

- Die Eckenmenge Y^0 bestehe aus zwei Ecken x, y und die Kantenmenge Y^1 aus einem Kantenpaar $(e, \bar{e})$.
- Es gelte $\alpha(e) = x$, $\omega(e) = y$, $G_x = \langle a, b \mid \rangle$, $G_y = \langle \mathcal{Y} \mid \rangle$ und $G_e = \langle z \mid \rangle$.
- Die Monomorphismen α_e und $\alpha_{\bar{e}}$ seien durch $\alpha_e(z) = [a, b]$ und $\alpha_{\bar{e}}(z) = u$ gegeben.

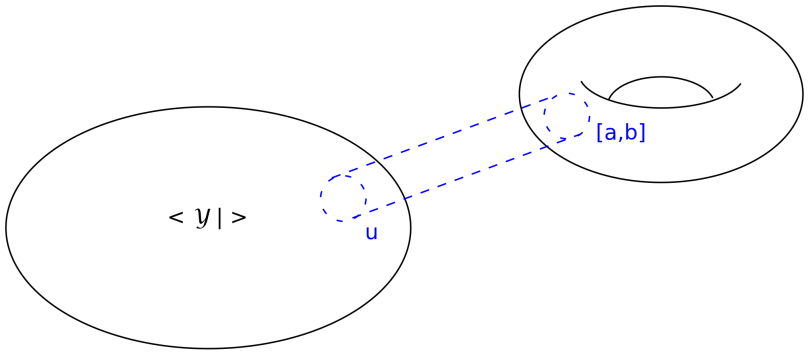


Abbildung 3.1.: Grafische Veranschaulichung der Gruppe G

Als erste Anwendung von Hauptsatz 3.1 beweisen wir folgende Aussage, welche eine der Problemstellungen im Vorfeld dieser Arbeit beantwortet. Im Anschluss daran bemerken wir, dass wir auch die Gruppen aus Korollar 3.45 als Fundamentalgruppen von Graphen von Gruppen auffassen können.

Korollar 3.45. *Seien $\mathcal{I}$, $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{N}$ Indexmengen. Dann besitzt die Gruppe*

$$G = \langle \{a_i \mid i \in \mathcal{I}\} \cup \{b_i \mid i \in \mathcal{I}\} \cup \{f_j \mid j \in \mathcal{J}\} \mid \{[a_i, b_i] = u_i \mid i \in \mathcal{I}\} \rangle,$$

wobei die u_i nichttriviale Elemente aus $\langle f_j \ (j \in \mathcal{J}) \mid \rangle$ seien, die Magnus-Eigenschaft. (Zudem ist G lokal indizierbar.)

Beweis. O. B. d. A. gelte $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, m\}$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$ oder $\mathcal{I} = \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$G_n := \langle \{a_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{b_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{f_j \mid j \in \mathcal{J}\} \mid \{[a_i, b_i] = u_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \rangle.$$

Da jedes Gegenbeispiel für die Magnus-Eigenschaft von G in einer Gruppe G_n mit $n \in \mathbb{N}_0$ enthalten ist, reicht es aus, die Magnus-Eigenschaft von G_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zu beweisen.

Wir führen den Beweis per Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. Die Gruppe G_0 ist frei und besitzt somit laut [Mag30] die Magnus-Eigenschaft. Insbesondere ist G_0 lokal indizierbar. Für den Induktionsschritt $(n \to n+1)$ besitze die lokal indizierbare Gruppe

$$G_n = \langle \{a_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{b_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{f_j \mid j \in \mathcal{J}\} \mid \{[a_i, b_i] = u_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \rangle$$

die Magnus-Eigenschaft. Wir möchten zeigen, dass

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= \langle \{a_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n+1\} \cup \{b_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n+1\} \cup \{f_j \mid j \in \mathcal{J}\} \mid \\ &\quad \{[a_i, b_i] = u_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n+1\} \rangle \end{aligned}$$

die Magnus-Eigenschaft besitzt und lokal indizierbar ist. Dazu schreiben wir zunächst

$$G_{n+1} = G_n \underset{u_{n+1}=[a_{n+1},b_{n+1}]}{*} \langle a_{n+1}, b_{n+1} \mid \rangle.$$

Der linke Faktor ist nach Induktionsvoraussetzung lokal indizierbar und der rechte Faktor ist frei. Somit folgt aus Satz 2.12, dass G_{n+1} lokal indizierbar ist. Laut Induktionsvoraussetzung können wir Hauptsatz 3.1 (für $C = \{1\}$) anwenden und die Magnus-Eigenschaft von G_{n+1} folgern.

□

Ein Graph von Gruppen $(\mathbb{G}, Y)$ mit $\pi_1(\mathbb{G}, Y, P) = G$ für die Gruppe G aus Korollar 3.45 kann auf folgende Art konstruiert werden:

- Wir setzen $Y^0 = P \cup \{v_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ und $Y^1 = \{e_i, \bar{e}_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$.
- Als Knoten- und Kantengruppen wählen wir $G_P = \langle f_j \, (j \in \mathcal{J}) \mid \rangle$, $G_{v_i} = \langle a_i, b_i \mid \rangle$ und $G_{e_i} = \langle z_i \mid \rangle$.
- Es gelte $\alpha(e_i) = P$ und $\alpha(\bar{e}_i) = v_i$.
- Schließlich sei $\alpha_{e_i}(z_i) = u_i$ und $\alpha_{\bar{e}_i}(z_i) = [a_i, b_i]$.

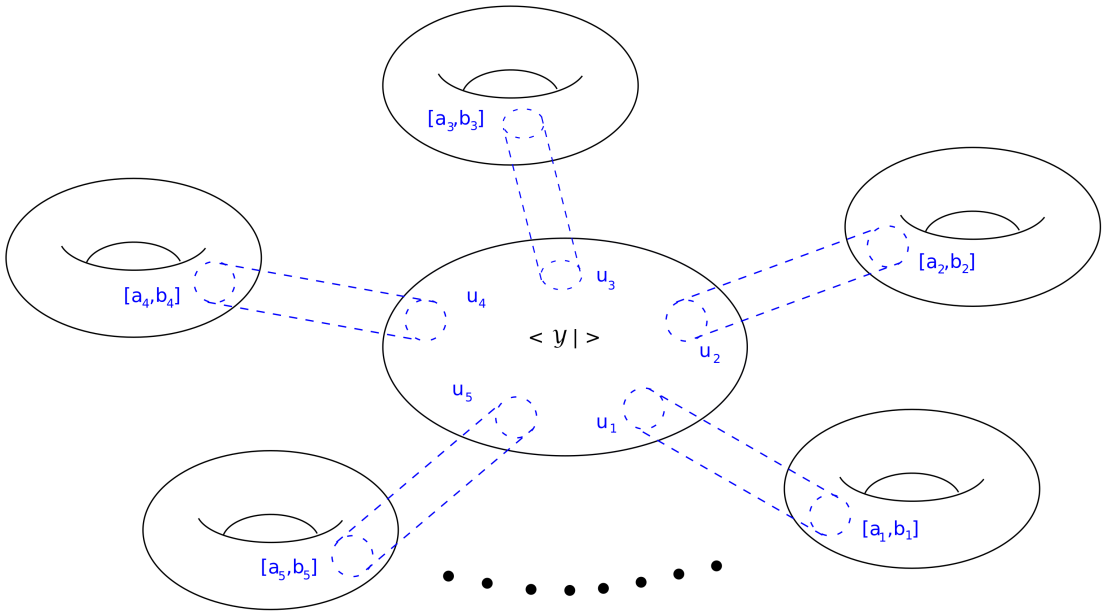


Abbildung 3.2.: Grafische Veranschaulichung der Gruppe G aus Korollar 3.45 (wobei $\mathcal{Y} := \{f_j \mid j \in \mathcal{J}\}$)

3.8.2. Magnus-Eigenschaft von Fundamentalgruppen spezieller Seifert-Mannigfaltigkeiten

Die nächste Anwendung von Hauptsatz 3.1 schlägt eine Brücke zwischen Kapitel 3 und Kapitel 5. Wir betrachten für $g \in \mathbb{N}_0$ die Gruppen

$$\begin{aligned} K &:= \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1,b_1][a_2,b_2]\cdots[a_g,b_g] = 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant g)\rangle \\ &= \langle a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g \mid\rangle \underset{([a_2,b_2][a_3,b_3]\cdots[a_g,b_g])^{-1}=[a_1,b_1]}{*} \langle a_1, b_1 \mid\rangle \qquad \text{und} \\ \widetilde{G} &:= K \times \langle h \mid\rangle. \end{aligned}$$

Die Gruppe $\widetilde{G}$ entspricht der Fundamentalgruppe der orientierbaren Seifert-Mannigfaltigkeit zu $r = 0$, $b = 0$ und $\epsilon_i = 1$ für $1 \leqslant i \leqslant g$ (vgl. (5.1)). Um die Magnus-Eigenschaft von $\widetilde{G}$ festzustellen, können wir Hauptssatz 3.1 mit

$$G = \langle a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g \mid\rangle, \quad u = ([a_2,b_2][a_3,b_3]\cdots[a_g,b_g])^{-1}, \quad a = a_1, \quad b = b_1$$

und $C = \langle h \mid\rangle$ anwenden, denn G ist als freie Gruppe indizierbar sowie lokal indizierbar und $G \times C$ besitzt laut Satz 2.1 die Magnus-Eigenschaft.

4. Freiheitssatz für einige amalgamierte Produkte freier Gruppen

Ziel dieses Kapitels ist, Hauptsatz 4.1 zu beweisen, welcher einen Freiheitssatz im Stil von Magnus für amalgamierte Produkte freier Gruppen über maximale zyklische Gruppen beider Faktoren darstellt. Dafür zeigen wir mit Satz 4.36 einen allgemeineren Satz über spezielle Gruppen, welche wir Baumprodukte nennen.

Hauptsatz 4.1. *Sei $G := A *_U X$ ein amalgamiertes Produkt, wobei A, X freie Gruppen seien. Die amalgamierte Gruppe U sei eine maximale zyklische Untergruppe beider Faktoren. Wir wählen einen Erzeuger $q \in X$ von U und eine Basis $\mathcal{X}$ von X, so dass q zyklisch gekürzt bzgl. $\mathcal{X}$ ist. Weiter sei r ein Element aus G, dessen Normalform bzgl. G eine gerade Länge besitze. Für ein Basiselement $x \in \mathcal{X}$ gelte eine der folgenden Bedingungen:*

- *Das Wort q enthalte das Basiselement $x \in \mathcal{X}$.*
- *Das Wort q enthalte nicht das Basiselement $x \in \mathcal{X}$, aber x sei in der Normalform von $r \in G = (A \underset{U}{*} \langle \mathcal{X} \backslash \{x\} \mid \rangle) * \langle x \mid \rangle$ enthalten.*

Dann bettet die von $\mathcal{X} \backslash \{x\}$ erzeugte freie Gruppe kanonisch in $G/\langle\langle r \rangle\rangle$ ein.

Bevor wir mit dem Beweis von Hauptsatz 4.1 beginnen, diskutieren wir zunächst die Bedingungen von Hauptsatz 4.1:

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Bedingung an U, maximal zyklisch in beiden Faktoren zu sein, unverzichtbar ist.

Beispiel 4.2. Seien $A := \langle a \mid \rangle$ und $X = \langle x, y, z \mid \rangle$ freie Gruppen. Weiter sei U von $p := a^2$ in A und von $q := (xy)^2 z^2$ in X erzeugt. Wir setzen $r = a(xy)^{-1}$. Dann gilt in $(A *_U X)/\langle\langle r \rangle\rangle$:

$$(xy)^2 z^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad (xy)^2 z^2 = (xy)^2 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = 1$$

Somit bettet $\langle y, z \mid \rangle$ nicht in $(A *_U X)/\langle\langle r \rangle\rangle$ ein, obwohl q das Basiselement x von X enthält.

Bemerkung 4.3. Eine wie in Hauptsatz 4.1 beschriebene Basis $\mathcal{X}$ zu q ist immer wählbar. Um dies zu sehen, sei $\mathcal{X}'$ eine Basis von X, so dass q, geschrieben in dieser Basis, nicht zyklisch gekürzt ist. Dann existiert ein Element $u \in X$ mit $q = u^{-1} \widetilde{q} u$, so dass $\widetilde{q}$ bzgl. $\mathcal{X}'$

zyklisch gekürzt ist. Indem wir $\mathcal{X} := \{x := ux'u^{-1} \mid x' \in \mathcal{X}'\}$ setzen, erhalten wir eine Basis, bzgl. welcher q zyklisch gekürzt ist.

Verzichtet man auf die Bedingung der zyklischen Gekürztheit von q, so sind Beispiele denkbar, in denen der Automorphismus von G, welcher alle Erzeuger y von X auf $x^{-i}yx^i$ ($i \in \mathbb{Z}$) und alle anderen Erzeuger auf sich selbst abbildet, alle vorkommenden Erzeuger x in q und r auflöst. In dieser Situation folgt $G := G' * \langle x \rangle$ und $r \in G'$ mit $G' := A *_U (X/\langle\langle x \rangle\rangle)$. Es ergäbe sich damit die stärkere Aussage, dass der gesamte Faktor $X/\langle\langle x \rangle\rangle$ von G' in $G'/\langle\langle r \rangle\rangle$ einbettet. Wir gelangen somit zu folgender offener Fragestellung:

Bettet unter den Bedingungen von Hauptsatz 4.1 auch X kanonisch in $G/\langle\langle r \rangle\rangle$ ein?

Lemma 4.42 beantwortet diese Frage positiv, falls r eine Länge von 2 bzgl. des amalgamierten Produkts besitzt. Der Versuch, den Beweis von Hauptsatz 4.1 auf die Einbettung von X zu verallgemeinern, scheitert bisher an der Beantwortung folgender Frage.

Frage 4.4. Seien $A := \langle a, b \mid \rangle$ und $X = \langle x, y \mid \rangle$ freie Gruppen und $p \in A$, $q \in X$ zyklisch gekürzte Elemente, welche keine echten Potenzen sind. Weiter sei r ein Element des amalgamierten Produkts $G := A *_{p=q} X$, so dass r weder zu einem Element aus A noch aus X konjugiert ist. Es seien folgende Exponentensummen gegeben:

$$p_a \neq 0 \neq q_x, \quad p_b = q_y = 0, \quad r_b \neq 0 \neq r_y$$

Bettet nun X kanonisch in $G/\langle\langle r \rangle\rangle$ ein?

Zur kurzen Diskussion der Bedeutung von Satz 4.36 und Hauptsatz 4.1 für die Beantwortung von Frage 1 aus [BS08] siehe Bemerkung 4.41.

4.1. Baumprodukte

In diesem Unterabschnitt definieren und untersuchen wir Baumprodukte, um den Beweis des Freiheitssatzes für Baumprodukte (Satz 4.36) vorzubereiten.

4.1.1. Definition und lokale Indizierbarkeit von Baumprodukten

Definition 4.5. (verschobene Mengen und Randerzeuger) Gegeben sei eine Menge $\mathcal{X}$. Wir betrachten die freie Gruppe $\widetilde{F}$ mit Basis $\widetilde{\mathcal{F}} := \{x_i \mid x \in \mathcal{X}, i \in \mathbb{Z}\}$. Weiter sei p ein Element von $\widetilde{F}$, welches nichttrivial, zyklisch gekürzt und keine echte Potenz ist. Mit p_j ($j \in \mathbb{Z}$) bezeichnen wir das Element von $\widetilde{F}$, welches aus p hervorgeht, indem wir alle in p vorkommenden Indizes $k \in \mathbb{Z}$ durch $k + j$ ersetzen. Für jedes $x \in \mathcal{X}$ sei eine Teilmenge $\mathcal{I}_x \subseteq \mathbb{Z}$ gegeben. Wir setzen $\mathcal{I} = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}_x$ und definieren für jedes $i \in \mathcal{I}$ die Menge $\mathcal{F}_i := \{x_i \mid x \in \mathcal{X} \text{ mit } i \in \mathcal{I}_x\}$ sowie $\mathcal{F} := \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i$. Sei F die freie Gruppe mit Basis $\mathcal{F}$. Schließlich sei $\mathcal{J}$ eine Indexmenge, so dass p_j für alle $j \in \mathcal{J}$ ein Element von F ist. Dann

bezeichnen wir die Menge $\mathcal{P} := \{p_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ als eine *verschobene Menge von* F. Falls $\mathcal{J}$ endlich ist, so bezeichnen wir $p_{\min(\mathcal{J})}$ (bzw. $p_{\max(\mathcal{J})}$) als *minimales* (bzw. *maximales) Element der verschobenen Menge.*

Ein Basiselement aus $\mathcal{F}$, welches im minimalen (bzw. maximalen) Element der verschobenen Menge vorkommt, aber in keinem anderen Element der verschobenen Menge enthalten ist, nennen wir *linken (bzw. rechten) Randerzeuger.*

Beispiel 4.6. Seien $\mathcal{X} = \{a, b, c\}$, $\mathcal{I}_a = \{0, 2, 3, 5, 6\}$, $\mathcal{I}_b = \{1, 3, 4\}$ und $\mathcal{I}_c = \{1, 3, 4\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= \{a_0\}, \quad \mathcal{F}_1 = \{b_1, c_1\}, \quad \mathcal{F}_2 = \{a_2\}, \quad \mathcal{F}_3 = \{a_3, b_3, c_3\}, \\ \mathcal{F}_4 &= \{b_4, c_4\}, \quad \mathcal{F}_5 = \{a_5\} \text{ und } \mathcal{F}_6 = \{a_6\} \text{ sowie} \\ \mathcal{I} &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ und } \mathcal{F} = \{a_0, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_3, b_4, c_1, c_3, c_4\}. \end{aligned}$$

Weiter seien $p = a_2 b_3 c_3^{-1} a_2 a_5^{-1}$ und $\mathcal{J} = \{-2, 0, 1\}$. Dann bilden die Wörter

$$p_{-2} = a_0 b_1 c_1^{-1} a_0 a_3^{-1}, \quad p_0 = a_2 b_3 c_3^{-1} a_2 a_5^{-1} \text{ und } p_1 = a_3 b_4 c_4^{-1} a_3 a_6^{-1}$$

eine verschobene Menge von F. Das minimale Element ist p_{-2} und das maximale p_1. Die linken Randerzeuger zu p_{-2} sind a_0, b_1 und c_1. Die rechten Randerzeuger zu p_1 sind a_6, b_4 und c_4.

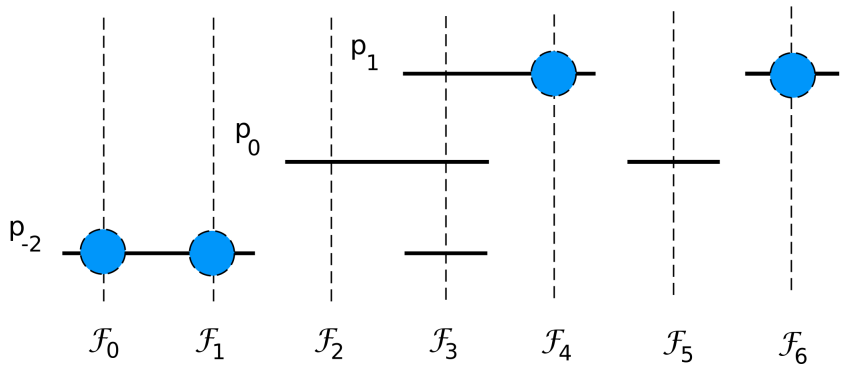


Abbildung 4.1.: Grafische Veranschaulichung von Beispiel 4.6 (Dabei markieren die ausgefüllten Kreise die Positionen der Randerzeuger a_0, a_6, b_1, b_4, c_1 und c_4.)

Definition 4.7. (Baumprodukte) Sei $\mathcal{B}$ ein Baum. Jeder Knoten entspreche einer freien Gruppe F vom Rang größer oder gleich zwei mit Basis $\mathcal{F}$. Jede Kante zwischen zwei Knoten mit Knotengruppen K, L entspreche einer *Kantenrelation* $p = q$ mit $p \in K$ und $q \in L$. Wir nennen p bzw. q ein *Kantenwort* von K bzw. L. Für jede Knotengruppe F bilde die Menge aller Kantenwörter von F eine verschobene Menge in F. Sei $\mathfrak{G}$ die Vereinigung der Basen $\mathcal{F}$ aller Knotengruppen und $\mathfrak{R}$ die Menge aller Kantenrelationen. Dann bezeichnen wir die Gruppe $G = \langle \mathfrak{G} \mid \mathfrak{R} \rangle$ als *(zu $\mathcal{B}$ assoziiertes) Baumprodukt.* Die

zu den Blättern von $\mathcal{B}$ assoziierten Gruppen nennen wir *Blattgruppen*. Besteht G nur aus einer Knotengruppe K, bezeichnen wir diese Gruppe nicht als Blattgruppe.

Ein zu einem Teilbaum von $\mathcal{B}$ assoziiertes Baumprodukt nennen wir *Teilbaumprodukt* von G. Wir bezeichnen einen Teilbaum von $\mathcal{B}$ als Zweig $\mathcal{Z}$, falls beim Löschen aller Knotengruppen sowie der anliegenden Kanten von $\mathcal{Z}$ in $\mathcal{B}$ wieder ein Baum entsteht. Ein Baumprodukt, das zu einem Zweig von $\mathcal{B}$ assoziiert ist, nennen wir *Zweigprodukt* von G.

Seien r ein Element von G und A eine Blattgruppe von G. Wir sagen, dass r die Blattgruppe A benutzt, falls jede Darstellung von r, geschrieben in den Erzeugern $\mathfrak{G}$, mindestens ein Basiselement von A benutzt. Äquivalent dazu ist, dass r kein Element des zu $\mathcal{B}'$ assoziierten Teilbaumprodukts ist, wobei $\mathcal{B}'$ der Baum sei, welcher aus $\mathcal{B}$ hervorgeht, indem wir das Blatt zur Blattgruppe A sowie die anliegende Kante löschen.

Die *Größe* $|G|$ eines Baumprodukts G sei die Anzahl seiner Knotengruppen. Für die Menge $\mathcal{P}$ der Kantenwörter aller Blattgruppen von G bezeichnen wir $\sigma := \Sigma_{p\in\mathcal{P}}\ |p|$ als *Grenzlänge* des Baumprodukts G.

Definition 4.8. (äußere Blattgruppen, Pfeiler- und Eremiterzeuger) Seien G ein Baumprodukt und A eine Blattgruppe von G, welche über die Relation $p = q$ ($p \in A$) zu einer Knotengruppe X von G verbunden ist. Dann nennen wir A *linke (bzw. rechte) äußere Blattgruppe* oder kurz *äußere Blattgruppe*, falls q das minimale (bzw. maximale) Element der verschobenen Menge zu X ist. Für den Fall, dass q ein minimales Element ist, bezeichnen wir jeden linken Randerzeuger von q als *Pfeilererzeuger* zur äußeren Blattgruppe A. Falls q ein maximales Element ist, so bezeichnen wir jeden rechten Randerzeuger von q als *Pfeilererzeuger* zur äußeren Blattgruppe A.

Einen Erzeuger von G, welcher in keiner Kantenrelation von G vorkommt, nennen wir *Eremiterzeuger*.

Im folgenden Beispiel betrachten wir ein Baumprodukt der Größe 3. In Abbildung 4.2 findet sich die grafische Veranschaulichung eines größeren Baumprodukts.

Beispiel 4.9. Wir definieren die Knotengruppen $A = \langle a, b\ |\rangle$, $E = \langle e, f, g\ |\rangle$ sowie $X = \langle x_1, y_1, x_2, y_2, z_2, y_3, z_3\ |\rangle$ und fügen die Kantenrelationen $a^2b^2 = x_1y_2^3x_1^{-1}z_2^2$ sowie $x_2y_3^3x_2^{-1}z_3^2 = e^{-2}gf^2eg^{-1}h$ hinzu. Dann gilt für das zugehörige Baumprodukt G:

$$G = \langle a, b\ |\rangle \underset{a^2b^2=x_1y_2^3x_1^{-1}z_2^2}{*} \langle x_1, y_1, x_2, y_2, z_2, y_3, z_3\ |\rangle \underset{x_2y_3^3x_2^{-1}z_3^2=e^{-2}gf^2eg^{-1}}{*} \langle e, f, g, h\ |\rangle$$

Wir betrachten die Blattgruppen A, E von G und bemerken, dass A eine linke und E eine rechte äußere Blattgruppe von G ist. Die Pfeilererzeuger zu A sind x_1, y_2 und z_2. Die Eremiterzeuger des Baumprodukts sind y_1 und h. Als Pfeilererzeuger von E lesen wir x_2, y_3 und z_3 ab. Für die Grenzlänge σ von G gilt $\sigma = |a^2b^2| + |e^{-2}gf^2eg^{-1}| = 4 + 7 = 11$.

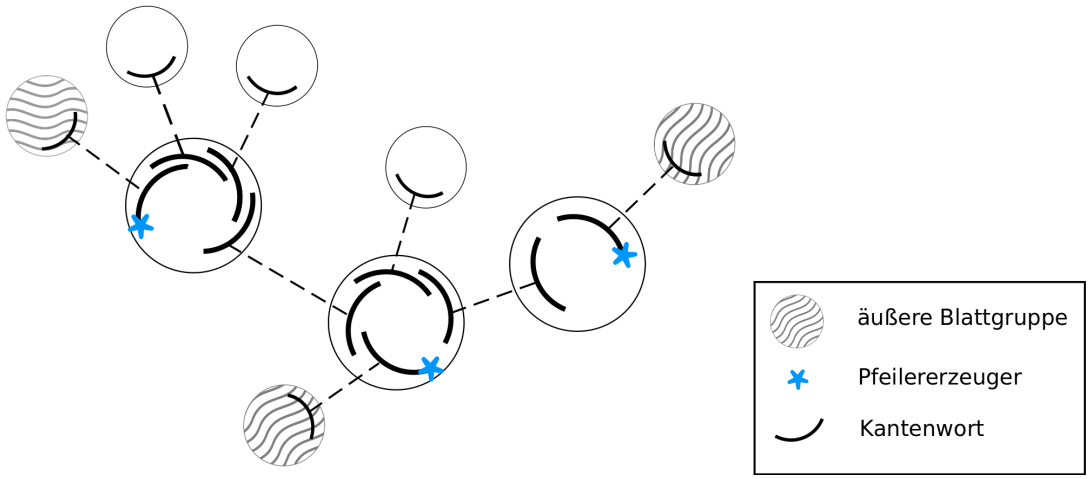


Abbildung 4.2.: Grafische Veranschaulichung eines Baumprodukts

Notation 4.10. Seien G ein Baumprodukt und A eine Blattgruppe von G. Dann bezeichnen wir mit $G \ominus A$ das Baumprodukt, welches von den Basiselementen aller von A verschiedenen Knotengruppen sowie den Relationen aller Kanten mit Ausnahme der an A angrenzenden Kante gebildet wird. Durch Wiederholung dieses Verfahrens definieren wir auch $G \ominus Z$ für ein Zweigprodukt Z von G. Sei $p = q$ die zu der an A angrenzenden Kante gehörige Kantenrelation, wobei $p \in A$ gelte. Für ein Basiselement $a \in A$ definieren wir

$$G \ominus \{a\} \;:=\; \begin{cases} (A/\langle\langle a \rangle\rangle) * (G \ominus A), & \text{falls } p \text{ den Erzeuger } a \text{ enthält.} \\ (A/\langle\langle a \rangle\rangle) \underset{p=q}{*} (G \ominus A) = G/\langle\langle a \rangle\rangle, & \text{falls } p \text{ nicht den Erzeuger } a \text{ enthält.} \end{cases}$$

Beispiel 4.11. Wir betrachten das Baumprodukt G aus Beispiel 4.9. Es gilt

$$\begin{aligned} G \ominus E &= \langle a, b \mid\rangle \underset{a^2b^2 = x_1 y_2^3 x_1^{-1} z_2^2}{*} \langle x_1, y_1, x_2, y_2, z_2, y_3, z_3 \mid\rangle, \\ G \ominus \{f\} &= \langle a, b \mid\rangle \underset{a^2b^2 = x_1 y_2^3 x_1^{-1} z_2^2}{*} \langle x_1, y_1, x_2, y_2, z_2, y_3, z_3 \mid\rangle * \langle e, g, h \mid\rangle \text{ und} \\ G \ominus \{h\} &= \langle a, b \mid\rangle \underset{a^2b^2 = x_1 y_2^3 x_1^{-1} z_2^2}{*} \langle x_1, y_1, x_2, y_2, z_2, y_3, z_3 \mid\rangle \underset{x_2 y_3^3 x_2^{-1} z_3^2 = e^{-2} g f^2 e g^{-1}}{*} \langle e, f, g \mid\rangle \\ &= G/\langle\langle h \rangle\rangle. \end{aligned}$$

Bemerkung 4.12. Die Gruppe $G \ominus \{a\}$ aus Notation 4.10 bettet in das Baumprodukt G ein. Für den Fall, dass p den Erzeuger a nicht enthält, folgt die Einbettung daraus, dass $\langle a \mid\rangle$ ein freier Faktor von G ist. Falls p den Erzeuger a enthält, folgt die Einbettung aus Satz 2.11, da $\langle a \mid\rangle$ und $(A/\langle\langle a \rangle\rangle) * (G \ominus A)$ lokal indizierbar sind, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 4.13. *Baumprodukte sind lokal indizierbar.*

Beweis. Sei G ein Baumprodukt. Wir führen den Beweis per Induktion über die Größe von G. Laut Definition 4.7 sind alle Knotengruppen frei. Somit ist für den Induktionsanfang ($|G| = 1$) wegen Bemerkung 2.4 nichts zu zeigen. Seien $n \in \mathbb{N}$ und G ein Baumprodukt mit $n+1$ Knotengruppen. Weiter sei A eine Blattgruppe von G mit Kantenrelation $p = q$, wobei $p \in A$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $G \ominus A$ lokal indizierbar. Es gilt $G = (G \ominus A) \underset{q=p}{*} A$. Laut Satz 2.12 ist G somit ebenfalls lokal indizierbar.

□

Analog zu äußeren Blattgruppen definieren wir äußere Zweigprodukte:

Definition 4.14. (äußere Zweigprodukte) Seien G ein Baumprodukt und Z ein Zweigprodukt von G. Weiter sei A die mit $G \ominus Z$ über eine Kantenrelation $p = q$ ($p \in A$) verbundene Knotengruppe von Z. Dann nennen wir Z ein *äußeres Zweigprodukt*, wenn A eine äußere Blattgruppe von $A *_{p=q} (G \ominus Z)$ ist. Die Pfeilererzeuger von A in $A *_{p=q} (G \ominus Z)$ bezeichnen wir auch als *Pfeilererzeuger des äußeren Zweigprodukts* Z in G.

4.1.2. Verdichtete Konjugierte und minimale Baumprodukte

In diesem Unterabschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, ob wir einem beliebigen Element eines Baumprodukts ein eindeutiges kleinstes Teilbaumprodukt zuordnen können, in dem mindestens ein Konjugiertes dieses Elements enthalten ist. Wir beginnen mit folgender Definition, deren Wohldefiniertheit wir in Lemma 4.16 zeigen.

Definition 4.15. (verdichtete Konjugierte/minimale Baumprodukte) Seien G ein Baumprodukt und H eine beliebige lokal indizierbare Gruppe. Weiter sei r ein Element von $G * H$, welches nicht zu einem Element aus $X * H$ für eine Knotengruppe X von G konjugiert ist. Wir bezeichnen eine Darstellung $\widetilde{r}$ eines Konjugats von r als *verdichtetes Konjugiertes*, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

Die Darstellung $\widetilde{r}$ enthalte unter allen Darstellungen von Konjugierten von r in $G * H$ neben den Erzeugern von H ausschließlich Erzeuger eines minimal kleinen Teilbaumprodukts T von G. Zudem sei $\widetilde{r}$ von der Form $\Pi_{i=1}^{n} v^{(i)}$, wobei folgende Bedingungen erfüllt seien.

(i) Alle $v^{(i)}$ enthalten jeweils nur Basiselemente einer einzigen Knotengruppe oder sind Elemente von $H \backslash \{1\}$.

(ii) Zyklisch aufeinanderfolgende $v^{(i)}$ ($i \in \mathbb{Z}_n$) enthalten Basiselemente von verschiedenen Knotengruppen oder einer Knotengruppe und H.

(iii) Es existiere kein $v^{(i)}$, welches Potenz eines Kantenworts zu einer Blattgruppe von T ist.

(*iv*) Die Darstellung $\widetilde{r}$ enthalte eine minimale Anzahl von Eremiterzeugern aus T. (Die enthaltenen Eremiterzeuger sind dadurch eindeutig bestimmt, siehe Lemma 4.17.)

Die Elemente $v^{(i)}$ bezeichnen wir als *Stücke* des verdichteten Konjugierten $\widetilde{r}$. Wir nennen n die *Länge* des verdichteten Konjugierten $\widetilde{r}$ und schreiben hierfür $||\widetilde{r}||_{G*H}$ (oder $||\widetilde{r}||$). Das Teilbaumprodukt T nennen wir *minimales Baumprodukt* von $r \in G * H$.

Mit dem folgenden Lemma beweisen wir die Wohldefiniertheit minimaler Baumprodukte.

Lemma 4.16. *Seien G ein Baumprodukt und H eine beliebige lokal indizierbare Gruppe. Weiter sei r ein Element von $G * H$, welches nicht zu einem Element aus $X * H$ für eine Knotengruppe X von G konjugiert ist. Dann ist das minimale Baumprodukt von r eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $\widetilde{r}$ ein verdichtetes Konjugiertes von r zu einem minimalen Baumprodukt T. Für eine beliebige Blattgruppe A von T betrachten wir die Zweigprodukte, welche entstehen, wenn man in G alle Knotengruppen von $T \ominus A$ samt der Kantenrelationen der angrenzenden Kanten streicht. Das A enthaltende Zweigprodukt nennen wir Z_A. Wir bezeichnen das freie Produkt der restlichen Zweigprodukte mit R_A.

Im Hinblick auf einen Widerspruch existiere ein verdichtetes Konjugiertes r^* zu einem von T verschiedenen minimalen Baumprodukt T^* von r. Nach Definition gilt $|T| = |T^*|$. Da T und T^* verschieden sind, existiert mindestens eine Blattgruppe A von T, so dass T^* keine Knotengruppe von Z_A enthält. Wir definieren für eine solche Blattgruppe A

$$X := \big(G \ominus R_A\big) * H, \quad Y := \big(G \ominus Z_A\big) * H \quad \text{sowie} \quad S := \big(G \ominus (Z_A \cup R_A)\big) * H$$

und schreiben

$$G * H \;=\; X \underset{S}{*} Y. \tag{4.1}$$

Da $X \cap (T^* * H) \subseteq S$ gilt und das Baumprodukt $G \ominus (Z_A \cup R_A)$ aus S echt kleiner als T ist, kann r^* kein Element von X sein. Es folgt die Existenz eines Elements $w \in G * H$ mit

$$w^{-1}\widetilde{r}w \;=\; r^* \;\notin\; X. \tag{4.2}$$

Wegen $\widetilde{r} \in T \subset X$ und (4.2) kann w kein Element von X sein. Wir betrachten die Darstellung $w = x_1 y_1 x_2 \dots y_m x_{m+1}$ $(m \geqslant 1)$ in Normalform bzgl. (4.1), wobei x_1, $x_{m+1} \in (X \backslash S) \cup \{1\}$, $x_i \in X \backslash S$ für $2 \leqslant i \leqslant m$ und $y_i \in Y \backslash S$ für $1 \leqslant i \leqslant m$. Dies ist eine leicht missbräuchliche Verwendung des Begriffs „Normalform“ (vgl. Definition B.4), denn um eine größere Fallunterscheidung zu umgehen, erlauben wir x_1 und x_{m+1} trivial zu sein. Wir schreiben

$$x_{m+1}^{-1} y_m^{-1} \dots y_1^{-1} \underbrace{x_1^{-1}\, \widetilde{r}\, x_1}_{=:\, u} y_1 x_2 \dots y_m x_{m+1} \;=\; r^* \;\in\; Y.$$

Für $x_1 = 1$ ergibt sich sofort ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Länge von Normalformen. Auch für $x_1 \neq 1$ ergibt sich ein solcher Widerspruch, da u als Konjugiertes von $\widetilde{r}$ kein Element von S sein kann. Dies beendet den Beweis der Eindeutigkeit minimaler Baumprodukte.

□

Zur Erläuterung von Eigenschaft (iv) von Definition 4.15 beweisen wir folgende Aussage.

Lemma 4.17. *In der Situation von Definition 4.15 ist die Menge $\mathcal{M}_{\widetilde{r}}$ aller in $\widetilde{r}$ enthaltenen Eremiterzeuger eindeutig bestimmt.*

Beweis. Im Hinblick auf einen Widerspruch sei $\widetilde{r}'$ ein verdichtetes Konjugiertes von r, welches eine von $\mathcal{M}_{\widetilde{r}}$ verschiedene Menge $\mathcal{M}_{\widetilde{r}'}$ von Eremiterzeugern enthält. Dann existiert ein Erzeuger x mit $x \in \mathcal{M}_{\widetilde{r}}$, $x \notin \mathcal{M}_{\widetilde{r}'}$ oder $x \notin \mathcal{M}_{\widetilde{r}}$, $x \in \mathcal{M}_{\widetilde{r}'}$. O. B. d. A. gelte $x \in \mathcal{M}_{\widetilde{r}}$ und $x \notin \mathcal{M}_{\widetilde{r}'}$. Sei $w \in G * H$ ein Element mit $w^{-1}\widetilde{r}w = \widetilde{r}'$. Wir betrachten den Homomorphismus $\zeta\colon G * H \to (G/\langle\langle x \rangle\rangle) * H$, welcher x auf 1 und alle anderen Erzeuger auf sich selbst abbildet. Es folgt $\zeta(w^{-1}\widetilde{r}w) = \zeta(\widetilde{r}') = \widetilde{r}'$ und somit $\zeta(\widetilde{r}) = \zeta(w)\widetilde{r}'\zeta(w^{-1})$. Wegen $\zeta(w)$, $\zeta(\widetilde{r}) \in (G/\langle\langle x \rangle\rangle) * H \subset G * H$ folgt $\zeta(\widetilde{r}) \sim_{G*H} \widetilde{r}' \sim_{G*H} r$. Wir bemerken, dass wir für jedes Element $u \in G * H$ eine Präsentation der Form $\Pi_{i=1}^{n}\, v^{(i)}$ finden können, welche die Eigenschaften (i)-(iii) aus Definition 4.15 erfüllt, indem wir geeignete Kantenrelationen auf u anwenden und u ggf. zyklisch vertauschen. Dabei können keine zusätzlichen Eremiterzeuger in die Darstellung gelangen. Somit erhalten wir durch $\zeta(\widetilde{r})$ eine Darstellung eines Konjugats von r, welche die Eigenschaften (i)-(iii) aus Definition 4.15 erfüllt und mindestens einen Eremiterzeuger weniger als $\widetilde{r}$ benutzt. Dies ist ein Widerspruch.

□

4.2. Operationen für Baumprodukte

In diesem Unterabschnitt führen wir verschiedene Operationen für Baumprodukte ein, welche den Beweisverlauf der Einbettungssätze erleichtern.

Definition 4.18. (Wurzelbaumprodukt) Sei G ein Baumprodukt und $\mathcal{G}$ die Vereinigung der Basen aller Knotengruppen von G. Weiter sei $\mathcal{R}$ die Vereinigung aller Kantenrelationen von G. Wir betrachten eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{G}$, welche ausschließlich Basiselemente von Blattgruppen von G enthält, und wählen für jedes $a \in \mathcal{M}$ ein Element $n(a) \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Dann heißt

$$\widetilde{G} := \langle\, \mathcal{G},\ \widetilde{a}\ (a \in \mathcal{M})\ \mid \mathcal{R},\ a = \widetilde{a}^{n(a)}\ (a \in \mathcal{M})\, \rangle$$

Wurzelbaumprodukt von G. Wir sagen, dass beim Übergang von G zu $\widetilde{G}$ die *Wurzeln* $\widetilde{a}$ aus den Elementen a von $\mathcal{M}$ gezogen werden.

Bemerkung 4.19. Falls alle Kantenwörter von Blattgruppen eines Baumprodukts G mindestens zwei Basiselemente enthalten, ist jedes Wurzelbaumprodukt von G wieder ein Baumprodukt.

Neben dem Übergang zu Wurzelbaumprodukten führen wir noch eine weitere Operation für Baumprodukte ein, bei der das Erzeugendensystem geändert wird. Dazu definieren wir folgende Isomorphismen für Baumprodukte.

Definition 4.20. (Blattisomorphismus) Seien G ein Baumprodukt, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ und a, b zwei Erzeuger derselben Blattgruppe A von G. Dann bezeichnen wir den Wechsel vom Erzeuger b zum neuen Erzeuger $\bar{b} := ba^n$ oder $\bar{b} := a^n b$ als *Blattisomorphismus* (des Baumprodukts G), falls die entstehende Gruppenpräsentation von G wieder ein Baumprodukt ist.

Man bemerke, dass mindestens eine der beiden Möglichkeiten $\bar{b} := ba^n$ oder $\bar{b} = a^n b$ wieder ein Baumprodukt hervorbringt, da das Kantenwort der Blattgruppe A (geschrieben in den alten Erzeugern) zyklisch gekürzt ist.

Wir werden Wurzelbaumprodukte und Blattisomorphismen nutzen, um die Bedingungen zur Anwendung der Homomorphismen aus folgender Definition zu schaffen (siehe Bemerkung 4.23).

Definition 4.21. (Blatthomomorphismus) Seien G ein Baumprodukt, A eine Blattgruppe von G und H eine beliebige lokal indizierbare Gruppe. Die zu der an A angrenzenden Kante gehörige Kantenrelation sei $p = q$ mit $p \in A$. Sei a ein Basiselement aus A, welches in p mit Exponentensumme 0 vorkommt. (D. h. a sei insbesondere in p enthalten.) Dann bezeichnen wir den Homomorphismus $\varphi\colon G * H \to \mathbb{Z}$, der a auf 1 und alle anderen Erzeuger von $G * H$ auf 0 abbildet, als *Blatthomomorphismus (zum Erzeuger a der Blattgruppe A von $G * H$/zur Blattgruppe A von $G * H$)*. Falls zudem ein Element $r \in G * H$ mit einer Exponentensumme von 0 bzgl. a gegeben ist, so bezeichnen wir φ auch als *Blatthomomorphismus zu $r \in G * H$*. (Laut Bemerkung 3.7 ist die Exponentensumme bzgl. a wohldefiniert.)

Im Folgenden interessieren wir uns vor allem für Kerne von Blatthomomorphismen. Dazu bemerken wir:

Bemerkung 4.22. Der Kern $\ker(\varphi)$ eines Blatthomomorphismus $\varphi\colon G * H \to \mathbb{Z}$ hat folgende Struktur: Für H erhalten wir abzählbar unendlich viele freie Faktoren $H_i := a^{-1}Ha$ von $\ker(\varphi)$. Diese Faktoren können wir zusammen als lokal indizierbaren freien Faktor $\widetilde{H}$ von $\ker(\varphi)$ betrachten. Für jeden von a verschiedenen Erzeuger b von A erhalten wir abzählbar unendlich viele Erzeuger $b_i := a^{-i}ba^i$ $(i \in \mathbb{Z})$. Diese Erzeuger bilden eine eigene Knotengruppe $\widetilde{A}$. Für das Kantenwort $p \in A$ erhalten wir eine verschobene Menge $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ von $\widetilde{A}$, wobei $p_i := a^{-i}pa^i$. Anstelle von $G \ominus A$ erhalten wir unendlich viele Kopien $X_i := a^{-i}(G \ominus A)a^i$ von $G \ominus A$. Jede Kopie X_i enthält eine Kopie $q_i := a^{-i}qa^i$

des Kantenworts q der Kantenrelation $p = q$ zu der an A angrenzenden Kante. Wir verbinden X_i mit $\widetilde{A}$ über Kanten mit Kantenrelationen $p_i = q_i$ und erhalten dadurch ein Baumprodukt K mit $\ker(\varphi) = K * \widetilde{H}$. Die Wörter $p_i \in \widetilde{A}$ $(i \in \mathbb{Z})$ sind echt kürzer als das Wort $p \in A$, da alle Buchstaben $a^{\pm 1}$ verschwinden und p_i für jeden Buchstaben b in p, welcher nicht $a^{\pm 1}$ ist, genau einen Buchstaben b_j $(j \in \mathbb{Z})$ enthält.

Es kann sein, dass ein Baumprodukt zunächst keine Anwendung eines Blatthomomorphismus erlaubt. Die folgende Bemerkung beschreibt ein Verfahren, um entweder zu einem Baumprodukt mit kleinerer Grenzlänge überzugehen oder die Anwendung eines Blatthomomorphismus vorzubereiten.

Bemerkung 4.23. Sei G ein Baumprodukt, A eine Blattgruppe von G und H eine beliebige lokal indizierbare Gruppe. Weiter seien a, b zwei Basiselemente, welche in der zu an A angrenzenden Kante gehörigen Kantenrelation mit Exponentensummen p_a, $p_b \neq 0$ enthalten sind. Als Erstes gehen wir durch $a = \widetilde{a}^{p_b}$ zum Wurzelbaumprodukt $\widetilde{G}$ über. Anschließend betrachten wir den Blattisomorphismus ψ von A in $\widetilde{G}$, welcher durch $\bar{b} = b\widetilde{a}^{-p_a}$ oder $\bar{b} = \widetilde{a}^{-p_a} b$ gegeben ist. Dann folgt, dass p, geschrieben mithilfe der neuen Erzeuger $\widetilde{a}$ und $\bar{b}$, eine Exponentensumme von 0 bzgl. $\widetilde{a}$ besitzt. Enthält p nicht den Erzeuger $\widetilde{a}$, wird $\widetilde{a}$ zu einem Eremiterzeuger von $\widetilde{G}$ und die Grenzlänge von $\widetilde{G}$ ist echt kleiner als die Grenzlänge von G. Ist $\widetilde{a}$ in p enthalten, existiert ein Blatthomomorphismus φ für den Erzeuger $\widetilde{a}$ der Blattgruppe A in $\widetilde{G}$. Da sich beim Übergang von G zu $\psi(\widetilde{G})$ nur die Anzahl der Erzeuger $a/\widetilde{a}$ in der Kantenrelation zu A verändert hat und diese Erzeuger laut Bemerkung 4.22 beim Übergang vom Kantenwort $p \in A \subset \psi(\widetilde{G})$ zu $p_i \in \widetilde{A} \subset \ker(\varphi)$ verschwinden, ist die Wortlänge von $p_i \in \widetilde{A}$ nicht nur echt kürzer als die Wortlänge von $p \in A \subset \psi(\widetilde{G})$, sondern auch echt kürzer als die Wortlänge von $p \in A \subset G$.

Der folgende Algorithmus ermöglicht für Elemente aus dem Kern eines Blatthomomorphismus den Übergang von verdichteten Konjugierten in der ursprünglichen Gruppe zu verdichteten Konjugierten im Kern.

Algorithmus 4.24. Seien G ein Baumprodukt, H eine beliebige lokal indizierbare Gruppe und r ein Element von $G * H$ mit verdichtetem Konjugierten $\widetilde{r}$. Zudem existiere ein Blatthomomorphismus φ für einen Erzeuger a einer Blattgruppe A von G, welcher den Erzeuger a auf 1 abbildet. Das Element r liege im Kern von φ, wobei $\ker(\varphi)$ wie in Bemerkung 4.22 gegeben sei. Dann schreibt der vorliegende Algorithmus das verdichtete Konjugierte $\widetilde{r}$ von $r \in G * H$ in ein verdichtetes Konjugiertes $\widetilde{r}^*$ von $a^{-\ell} r a^{\ell} \in \ker(\varphi)$ $(\ell \in \mathbb{Z})$ um, für welches zudem $||\widetilde{r}^*||_{\ker(\varphi)} \leqslant ||\widetilde{r}||_{G*H}$ erfüllt ist.

Aus Symmetriegründen genügt es, verdichtete Konjugierte $\widetilde{r}^*$ von $r = r_0 \in \ker(\varphi)$ zu finden: Um für ein beliebiges $\ell \in \mathbb{Z}$ ein verdichtetes Konjugiertes von $a^{-\ell} r a^{\ell} \in \ker(\varphi)$ zu erhalten, können wir den Algorithmus auf $r = r_0$ anwenden und am Ende alle im verdichteten Konjugierten $\widetilde{r}^*$ vorkommenden Indizes mit ℓ addieren.

Es gelte $\widetilde{r} = \Pi_{i=1}^{n} v^{(i)}$ (vgl. Definition 4.15). Als Erstes bauen wir schrittweise eine Darstellung $\widetilde{r}'$ von $\widetilde{r}$ in $\ker(\varphi)$ auf. Dazu setzen wir zunächst $\lambda = 0$, $\widetilde{r}' = 1 \in \ker(\varphi)$ und $j = 1$.

Schritt 1: Wir betrachten den j-ten Erzeuger $e^{(j)}$ in $\widetilde{r}$. Für $e^{(j)} = a$ setzen wir $\lambda = \lambda - 1$ und für $e_j = a^{-1}$ setzen wir $\lambda = \lambda + 1$. Im Fall $e^{(j)} \neq a^{\pm 1}$ fügen wir zu $\widetilde{r}'$ den Erzeuger $e_{\lambda}^{(j)} = a^{-\lambda} e^{(j)} a^{\lambda}$ hinzu. Falls $e^{(j)}$ der letzte Erzeuger in $\widetilde{r}$ ist, fahren wir mit dem Algorithmus fort. Ansonsten setzen wir $j = j + 1$ und wiederholen Schritt 1 mit den neuen Eingaben λ, $\widetilde{r}'$ und j.

Die soeben gebildete Darstellung $\widetilde{r}'$ kann in der Form $\widetilde{r}' = \Pi_{i=1}^{n} \widetilde{v}^{(i)}$ geschrieben werden, wobei sich Teilwörter $\widetilde{v}^{(i)}$, für welche $v^{(i)}$ nicht in A liegt, nur dadurch von $v^{(i)}$ unterscheiden, dass jedem Erzeuger derselbe Index hinzugefügt wird. Teilwörter $\widetilde{v}^{(i)}$ sind genau dann trivial, wenn $v^{(i)}$ eine Potenz a^k ($k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$) ist. In diesem Fall unterscheiden sich jedoch die Indizes der anliegenden Teilwörter $\widetilde{v}^{(i-1)}$ und $\widetilde{v}^{(i+1)}$ um k.

Nun streichen wir alle trivialen Stücke $\widetilde{v}^{(i)}$. Falls $\widetilde{v}^{(i)}$ trivial ist und $\widetilde{v}^{(i-1)}$ sowie $\widetilde{v}^{(i+1)}$ Stücke aus $\widetilde{H}$ sind, fassen wir sie zu einem Stück aus $\widetilde{H}$ zusammen. Falls $\widetilde{v}^{(1)}$ trivial ist und $\widetilde{v}^{(2)}$ sowie $\widetilde{v}^{(n)}$ Stücke aus $\widetilde{H}$ sind, so permutieren wir zyklisch mit $\widetilde{v}^{(2)}$ und fassen $\widetilde{v}^{(n)}\widetilde{v}^{(2)}$ zu einem Element aus $\widetilde{H}$ zusammen. Analog verfahren wir für den Fall $\widetilde{v}^{(n)} = 1$ und $\widetilde{v}^{(1)}$, $\widetilde{v}^{(n-1)} \in \widetilde{H}$. Sei $\widetilde{r}' = \Pi_{i=1}^{n'} v'^{(i)}$ die dadurch entstehende Darstellung. Dann sind die Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 4.15 erfüllt. Weiter sei T' das kleinste Teilbaumprodukt von $\ker(\varphi)$, welches alle in $\widetilde{r}'$ vorkommenden Erzeuger aus G enthält. Die folgenden Algorithmusschritte schreiben $\widetilde{r}'$ in ein Konjugiertes $\widetilde{r}^*$ von r in $\ker(\varphi)$ um, das zudem die Eigenschaften (iii) und (iv) erfüllt.

Schritt 2: Wir ersetzen alle Teilwörter $v'^{(i)}$, welche Potenzen des Kantenworts einer Blattgruppe von T' sind, durch die entsprechende Potenz des Kantenworts der anliegenden Knotengruppe. Liegt $v'^{(i)}$ ($i \in \mathbb{Z}_{n'}$) in derselben Knotengruppe wie $v'^{(i-1)}$ oder $v'^{(i+1)}$, so vereinigen wir diese Teilwörter (indem wir ggf. zuvor zyklisch permutieren). Dadurch erhalten wir eine neue kürzere Darstellung eines Konjugats von r. Falls nun Blattgruppen von T' existieren, welche nicht von der neuen Darstellung benutzt werden, löschen wir diese Blattgruppe samt der anliegenden Kante im Teilbaumprodukt T'. Wir wiederholen Schritt 2 mit den neuen Eingabedaten, bis kein Teilwort der Darstellung existiert, welches Potenz des Kantenworts einer Blattgruppe ist. Die dadurch entstehende Darstellung sowie das zugehörige Teilbaumprodukt nennen wir $\widetilde{r}'' = \Pi_{i=1}^{n''} v''^{(i)}$ und T''.

Schritt 3: Wir durchlaufen schrittweise alle Blattgruppen B von T''. Sei m die Anzahl der Stücke $v''^{(i)}$ aus B in der Darstellung $\widetilde{r}'' = \Pi_{i=1}^{n''} v''^{(i)}$. Weiter sei $\sigma \colon \{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, n''\}$ die Funktion, welche j auf die Position i des j-ten Stücks aus B abbildet. Die Teilwörter $v''^{(i)}$, welche nicht in B liegen und sich vor dem ersten, nach dem letzten oder zwischen zwei Stücken $v''^{\sigma(j)}$ ($j \in \{1, 2, \ldots, m\}$) aus B befinden, fassen wir jeweils zu Stücken $w^{(j)}$ ($j \in \{0, 1, \ldots, m\}$) zusammen. Dann gilt $\widetilde{r}'' = w^{(0)} \Pi_{j=1}^{m} v''^{(\sigma(j))} w^{(j)}$, wo-

bei $w^{(0)}$ und $w^{(m)}$ trivial sein können. Falls ein $w^{(i)}$ als Element von $\ker(\varphi)$ einer Potenz des Kantenworts $p \in B$ der Kantenrelation $p = q$ von B entspricht, so vereinigen wir $v^{(\sigma(i))}w^{(i)}v^{(\sigma(i+1))}$ zu einem neuen Stück aus B. Entspricht dieses Stück dem trivialen Element, so löschen wir es sofort. Indem wir ggf. zyklisch permutieren und zyklisch nebeneinanderstehende $w^{(k)}$- oder $v''^{(k)}$-Stücke vereinigen, können wir o. B. d. A. annehmen, dass $\widetilde{r}''$ die Form $\Pi_{j=1}^{\widetilde{m}}\widetilde{v}''^{(j)}\widetilde{w}^{(j)}$ besitzt, wobei $\widetilde{v}''^{(j)} \in B$ und $\widetilde{w}^{(j)} \in (T'' \ominus B) * \widetilde{H}$ gilt. Wir bemerken, dass diese Darstellung einer zyklisch gekürzten Normalform der Länge größer oder gleich zwei bzgl. des amalgamierten Produkts $B *_{p=q} \big((T'' \ominus B) * \widetilde{H}\big)$ entspricht (vgl. Anhang B). Schließlich zerlegen wir die Stücke $\widetilde{w}^{(j)}$ wieder in ihre ursprünglichen Stücke $v''^{(i)}$, vereinigen nebeneinanderstehende Stücke derselben Knotengruppe oder $\widetilde{H}$ und kehren mit der so entstehenden Darstellung zu Schritt 2 zurück.

Kommt es für die Blattgruppe B mit Ausnahme von zyklischen Permutationen der Stücke $v''^{(i)}$ (ohne Vereinigung) zu keiner Änderung, verfahren wir analog mit der nächsten Blattgruppe. Falls wir zu Schritt 3 gelangen und es mit Ausnahme von zyklischen Permutationen der Stücke $v''^{(i)}$ (ohne Vereinigung) für keine Blattgruppe zu einer Änderung kommt, gehen wir mit $\widetilde{r}'' = \Pi_{i=1}^{n''}v''^{(i)}$ und T'' weiter zu Schritt 4.

Schritt 4: Wir durchlaufen schrittweise alle Eremiterzeuger x von T''. Sei X die Knotengruppe, welche x enthält. Wegen $T * H = \big((T/\langle\langle x \rangle\rangle) * H\big) * \langle x \mid \rangle$ und der durch Schritt 2 bereits sichergestellten Eigenschaft (ii) können wir $\widetilde{r}''$ in der Form $\widetilde{r}'' = x^{\nu_0}\Pi_{i=1}^{\mu}\lambda^{(i)}x^{\nu_i}$ darstellen, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(a) Es existiert kein Erzeuger x in $\lambda^{(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant \mu)$.

(b) Die Darstellung $\lambda^{(i)}$ ist ein nichttriviales Teilwort eines Stücks $v''^{(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant n'')$ oder hat eine Form $sv''^{(k)}v''^{(k+1)}\dots v''^{(\ell)}t$ $(k, \ell \in \mathbb{N},\ k \leqslant \ell)$. Dabei sei s ein hinteres Teilwort von $v''^{(k-1)}$ und t sei ein vorderes Teilwort von $v''^{(\ell+1)}$.

(c) Für jedes $i \in \{1, 2, \dots, \mu - 1\}$ gilt $\nu_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Zudem gilt ν_0, $\nu_\mu \in \mathbb{Z}$ und $\nu_0 \cdot \nu_\mu = 0$.

(d) Für $\nu_\mu \neq 0$ gilt $\lambda^{(1)} = v''^{(k)}v''^{(k+1)}\dots v''^{(\ell)}t$ mit $v''^{(k)} \notin X$ und für $\nu_0 \neq 0$ gilt $\lambda^{(\mu)} = sv''^{(k)}v''^{(k+1)}\dots v''^{(\ell)}$ mit $v''^{(\ell)} \notin X$, wobei alle Objekte wie in Punkt (b) gegeben seien.

In zwei Fällen nehmen wir Änderungen an der Präsentation $\widetilde{r}''$ vor:

Fall 1: Ein $\lambda^{(i)} = sv''^{(k)}v''^{(k+1)}\dots v''^{(\ell)}t$ entspreche dem trivialen Element.
Wir löschen alle Stücke $v''^{(k)}$, $v''^{(k+1)}, \dots, v''^{(\ell)}$ aus $\widetilde{r}'' = \Pi_{i=1}^{n''}v''^{(i)}$ und ersetzen die Stücke $v''^{(k-1)}$, $v''^{(\ell+1)}$ durch $v''^{(k-1)}s^{-1}$, $t^{-1}v''^{(\ell+1)}$. Mit der dadurch entstehenden Präsentation gehen wir zu Schritt 2 zurück. Wir betonen, dass hierbei wegen $k \leqslant \ell$ mindestens ein Stück $v''^{(i)}$ gelöscht wird.

Fall 2: Es gelte $\nu_0 = \nu_\mu = 0$.
Wir konjugieren die Darstellung $\widetilde{r}'' = \big(\Pi_{i=1}^{\mu-1}\lambda^{(i)}x^{\nu_i}\big)\lambda^{(\mu)}$ mit ${\lambda^{(\mu)}}^{-1}$. Entspricht $\lambda^{(\mu)}\lambda^{(1)} =$

$sv''^{(k)}v''^{(k+1)}\dots v''^{(\ell)}t$ dem trivialen Element, so löschen wir wie in Fall 1 alle an $\lambda^{(1)}$ oder $\lambda^{(\mu)}$ beteiligten Stücke $v''^{(i)}$. Alle Stücke $v''^{(i)}$, welche teilweise in $\lambda^{(1)}$ oder $\lambda^{(\mu)}$ vorkommen, ersetzen wir wie in Fall 1 durch die jeweiligen Reste. Mit der dadurch entstehenden Präsentation gehen wir zu Schritt 2 zurück. Wir betonen, dass auch hierbei mindestens ein Stück $v''^{(i)}$ gelöscht wird, denn wegen Schritt 2 erfüllt $\widetilde{r}'' = \Pi_{i=1}^{n''} v''^{(i)}$ Eigenschaft (ii) von Definition 4.15, d. h. $\lambda^{(1)}$ muss mit einem Stück $v''^{(i)}$ anfangen oder $\lambda^{(\mu)}$ mit einem Stück $v''^{(i)}$ enden, das nicht aus der Knotengruppe von x stammt.

Führt die beschriebene Vorgehensweise zu keiner Änderung, so betrachten wir den nächsten Eremiterzeuger. Kommt es für keinen der Eremiterzeuger zu einer Änderung, setzen wir schließlich $\widetilde{r}^* := \widetilde{r}''$.

Das folgende Lemma sichert die Funktionalität von Algorithmus 4.24.

Lemma 4.25. *Algorithmus 4.24 endet nach endlich vielen Schritten. Das durch Algorithmus 4.24 gegebene Element $\widetilde{r}^*$ entspricht einem verdichteten Konjugierten von $a^{-i}ra^i \in \ker(\varphi)$. Die Länge von $\widetilde{r}^*$ ist kleiner oder gleich der Länge des verdichteten Konjugierten $\widetilde{r}$ von $r \in G * H$.*

Beweis. Die Endlichkeit des Algorithmus sowie die Ungleichung $||\widetilde{r}^*||_{\ker(\varphi)} \leqslant ||\widetilde{r}||_{G*H}$ sind offensichtlich, denn die Anzahl der Stücke in der aktuellen Darstellung von r wird in jedem Schritt höchstens kleiner und bei jedem Durchlauf eines Schrittes, welcher die Wiederholung eines vorherigen Schrittes anweist, echt kleiner.

Es bleibt zu zeigen, dass $\widetilde{r}^*$ tatsächlich ein verdichtetes Konjugiertes von $r \in \ker(\varphi)$ ist. Zunächst bemerken wir, dass $r \in \ker(\varphi) = K * \widetilde{H}$ (vgl. Notation aus Bemerkung 4.22) nicht zu einem Element aus $X * \widetilde{H}$ für eine Knotengruppe X von K konjugiert sein kann, da ansonsten $r \in G * H$ zu einem Element aus $Y * H$ für eine Knotengruppe Y von G konjugiert wäre. Dies steht im Widerspruch zu Definition 4.15. Die Gültigkeit der Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 4.15 wird am Ende jedes Schrittes von Algorithmus 4.24 sichergestellt. Schritt 2 sichert zudem Eigenschaft (iii), da der Algorithmus nur dann endet, wenn die Schritte 3 und 4 mit Ausnahme von zyklischen Permutationen der Stücke $v''^{(i)}$ (ohne Vereinigung) keine Änderung hervorbringen, und wir andernfalls von Schritt 3 oder 4 zu Schritt 2 zurückspringen. Wir beenden den Beweis, indem wir zeigen, dass kein Konjugiertes von r in $\ker(\varphi)$ in einem freien Produkt von $\widetilde{H}$ mit einem kleineren Teilbaumprodukt als T'' enthalten sein kann. Dafür sei B eine beliebige Blattgruppe von T''. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 4.16 betrachten wir die Zweigprodukte, welche entstehen, wenn man in K alle Knotengruppen von $T'' \ominus B$ samt der Kantenrelationen der angrenzenden Kanten streicht. Das B enthaltende Zweigprodukt nennen wir Z_B. Es gilt

$$\ker(\varphi) \quad = \quad K * \widetilde{H} \quad = \quad Z_B \underset{p=q}{*} \big((K \ominus Z_B) * \widetilde{H}\big). \tag{4.3}$$

Wir bemerken, dass jede Darstellung $\widetilde{r}\,' = \Pi_{i=1}^{m} v'^{(\sigma(i))} w^{(i)}$ aus Schritt 3 von Algorithmus 4.24 eine zyklisch gekürzte Normalform der Länge größer oder gleich zwei eines Konjugats von r bzgl. des amalgamierten Produkts $B *_{p=q} (T'' \ominus B)$ ist. Diese Darstellung ist insbesondere eine zyklisch gekürzte Normalform der Länge größer oder gleich zwei bzgl. des amalgamierten Produkts aus (4.3). Wegen Lemma B.5 kann daher kein Konjugiertes von r Element von $(K \ominus Z_B) * \widetilde{H}$ sein. Das minimale Baumprodukt von r enthält somit für jede Blattgruppe B von T'' mindestens eine Knotengruppe aus Z_B, d. h. das minimale Baumprodukt von r enthält das Baumprodukt T''. Wegen $\widetilde{r}^* \in T'' * \widetilde{H}$ ist T'' das minimale Baumprodukt von r in $\ker(\varphi)$.

Schließlich sichert Schritt 4, dass jeder Eremiterzeuger x des minimalen Baumprodukts T'' von r in G nur dann in $\widetilde{r}^*$ enthalten ist, wenn er in jedem Konjugierten von r enthalten ist. Um dies zu sehen, betrachten wir die Darstellung $\widetilde{r}\,'' = x^{\nu_0} \Pi_{i=1}^{\mu} \lambda^{(i)} x^{\nu_i}$ im letzten Durchlauf von Schritt 4. Laut Punkt (c) von Schritt 4 gilt $\nu_0 = 0$ oder $\nu_\mu = 0$. Ist eines dieser Elemente ungleich 0, so ist $\widetilde{r}\,''$ eine zyklisch gekürzte Normalform bzgl. $\big((T/\langle\!\langle x \rangle\!\rangle) * H\big) * \langle x \mid\rangle$. Im Fall $\nu_0 = \nu_\mu = 0$ konjugieren wir die Normalform $\widetilde{r}\,''$ mit ${\lambda^{(\mu)}}^{-1}$ und erhalten wegen Fall 2 aus Schritt 4 ebenfalls eine zyklisch gekürzte Normalform bzgl. $\big((T/\langle\!\langle x \rangle\!\rangle) * H\big) * \langle x \rangle$. D. h. $\widetilde{r}^*$ enthält genau dann den Eremiterzeuger, wenn ein Konjugiertes von $\widetilde{r}^*$ in zyklisch gekürzter Normalform bzgl. $\big((T/\langle\!\langle x \rangle\!\rangle) * H\big) * \langle x \rangle$ den Eremiterzeuger enthält. Genau dann enthält jedoch auch jedes Konjugiertes von $\widetilde{r}^*$ den Eremiterzeuger. Folglich benutzt $\widetilde{r}^*$ eine minimale Anzahl von Eremiterzeugern und die Menge der enthaltenen Eremiterzeuger ist eindeutig bestimmt.

□

Die folgende Bemerkung zeigt, dass Algorithmus 4.24 auch dazu verwendet werden kann, ein verdichtetes Konjugiertes von $G * H$ in ein verdichtetes Konjugiertes von $\widetilde{G} * H$ umzuformen, wobei $\widetilde{G}$ das Bild von G unter einem Blattisomorphismus sei.

Bemerkung 4.26. Sei G ein Baumprodukt, H eine beliebige lokal indizierbare Gruppe und $\widetilde{r}$ ein verdichtetes Konjugiertes in $G * H$. Weiter sie φ ein Blattisomorphismus von $G * H$ zu einer Blattgruppe A. Dann schreibt folgende Variation von Algorithmus 4.24 das verdichtete Konjugierte $\widetilde{r}$ in ein verdichtetes Konjugiertes $\widetilde{r}^*$ von $\varphi(G * H)$ mit $||\widetilde{r}^*||_{\varphi(G*H)} \leqslant ||\widetilde{r}||_{G*H}$ um.

Sei $\widetilde{r} = \Pi_{i=1}^{n} v^{(i)}$ die Darstellung aus Definition 4.15. Anstelle des ersten Schrittes von Algorithmus 4.24 schreiben wir jedes Stück $v^{(i)}$ aus A mithilfe der neuen Erzeuger aus $\varphi(A)$ und kürzen danach frei. Klar ist, dass die dadurch entstehende Darstellung $\widetilde{r}'$ die Bedingungen (i)-(iii) von Definition 4.15 erfüllt. Wir gehen also sofort zu Schritt 4 des Algorithmus. Ab diesem Moment halten wir uns an die Anweisungen aus Algorithmus 4.24. Insbesondere springen wir wie gefordert zu Schritt 2 zurück, falls es in Schritt 4 zu einer Änderung kommt. Im Beweis zu Lemma 4.25 haben wir bereits festgestellt, dass jeder Schritt des Algorithmus die Länge der Darstellung höchstens verkleinert.

Das nächste Lemma ermöglicht die Anwendung von Induktionsvoraussetzungen im Beweis zu Satz 4.36.

Lemma 4.27. *Unter Benutzung der Notation von Bemerkung 4.22 (oder Bemerkung 4.23) seien r ein verdichtetes Konjugiertes aus $G * H$, T das minimale Baumprodukt von r und σ die Grenzlänge von T. Sei r_i ein verdichtetes Konjugiertes von $a^{-i}ra^i \in \ker(\varphi)$. Schließlich seien T_i das minimale Baumprodukt zu r_i und σ_i die Grenzlänge von T_i. Dann gilt*

$$(||r_i|| - |T_i|, \sigma_i) < (||r|| - |T|, \sigma)$$

bzgl. lexikographischer Ordnung (wobei die erste Komponente höher gewichtet sei).

Beweis. Laut Lemma 4.25 gilt $||r_i|| \leqslant ||r||$. Da T_i für jede Blattgruppe L von T mindestens eine Kopie von L enthalten muss, gilt zudem $|T_i| \geqslant |T|$. Es folgt

$$||r_i|| - |T_i| \geqslant ||r|| - |T| \quad \Leftrightarrow \quad ||r_i|| - |T_i| = ||r|| - |T| \quad \Leftrightarrow \quad (||r_i|| = ||r|| \ \wedge \ |T_i| = |T|).$$

Sei $p = q$ (wobei $p \in A$) die Kantenrelation zur an A angrenzenden Kante von G. Aus $|T_i| = |T|$ schließen wir $T_i = \left(a^{-i}(T \ominus A)a^i\right) *_{q_i = p_i} \widetilde{A}$. In Bemerkung 4.22 (oder Bemerkung 4.23) haben wir nachvollzogen, dass $|p_i|_{\widetilde{A}} < |p|_A$ gilt. Alle anderen Kantenwörter von T_i gehen durch Hinzufügen von Indizes aus den Kantenwörtern von T hervor, so dass die Länge dieser Kantenwörter unverändert bleibt. Insgesamt folgt daher für $||r_i|| - |T_i| = ||r|| - |T|$ die Ungleichung $\sigma_i < \sigma$.

□

Wir beenden diesen Unterabschnitt mit der Definition von Erzeugern mit speziellen Eigenschaften.

Definition 4.28. (Reduktions-, Fächer- und Ankererzeuger) Sei $\varphi\colon G * H \to \mathbb{Z}$ ein Blatthomomorphismus zu r, welcher einen Erzeuger a einer Blattgruppe A von G auf 1 abbildet. Wir benutzen die Schreibweise aus Bemerkung 4.22 und betrachten das Element r als Element r_0 in $\ker(\varphi)$. Falls r_0 Element von $(\widetilde{A} \underset{p_i = q_i}{*} X_i) * \widetilde{H}$ für ein $i \in \mathbb{Z}$ ist, so nennen wir a einen *Reduktionserzeuger* von $r \in G * H$. Andernfalls bezeichnen wir a als *Fächererzeuger* von $r \in G * H$.

Sei b ein Erzeuger einer Blattgruppe B von G, welcher in der Kantenrelation der anliegenden Kante mit Exponentensumme 0, aber in r mit einer Exponentensumme ungleich 0 vorkommt. Dann bezeichnen wir b als *Ankererzeuger* von $r \in G * H$.

4.3. Einbettungssätze

In diesem Abschnitt beweisen wir verschiedene Einbettungssätze, mit deren Hilfe wir schließlich den Freiheitssatz für Baumprodukte (siehe Satz 4.36) beweisen können.

4.3.1. Vorbereitungen

Den Beweis des Freiheitssatzes für freie Gruppen (siehe Satz 0.1) führte W. Magnus simultan zum Beweis eines Lemmas für gestaffelte Präsentationen über freien Gruppen. Mit Korollar 4.31 von Satz 2.11 beweisen wir die Entsprechung dieses Lemmas auch für lokal indizierbare Gruppen. Dafür erweitern wir zunächst die Definition von gestaffelten Präsentationen freier Gruppen (siehe Definition E.4) auf lokal indizierbare Gruppen.

Definition 4.29. (gestaffelte Präsentationen) Seien $\mathcal{I}$, $\mathcal{J} \subset \mathbb{Z}$ Indexmengen, U eine beliebige lokal indizierbare Gruppe, V_i ($i \in \mathcal{I}$) nichttriviale lokal indizierbare Gruppen und r_j ($j \in \mathcal{J}$) zyklisch gekürzte Elemente aus $U * \ast_{i\in\mathcal{I}} V_i$ (bzgl. der Normalform freier Produkte). Weiter sei $W := \ast_{i\in\mathcal{I}} V_i$. Jedes r_j ($j \in \mathcal{J}$) benutze mindestens einen freien Faktor V_k ($k \in \mathcal{I}$). Mit α_j bezeichnen wir den kleinsten und mit ω_j den größten Index $\ell \in \mathcal{I}$, so dass r_j den freien Faktor V_ℓ benutzt. Falls für alle m, $n \in \mathcal{J}$ mit $m < n$ die Ungleichungen $\alpha_m < \alpha_n$ und $\omega_m < \omega_n$ gelten, nennen wir $(U * W)/\langle\langle r_j \mid \mathcal{J}\rangle\rangle$ *gestaffelte Präsentation (über lokal indizierbaren Gruppen).*

Wir bemerken, dass Definition 4.29 mit der Definition gestaffelter Präsentationen über freien Gruppen (siehe Definition E.4) übereinstimmt, wenn man die Gruppen V_i und U als frei voraussetzt. Zu gestaffelten Präsentationen über freien Gruppen bemerken wir Folgendes:

Bemerkung 4.30. Sei $(U * W)/\langle\langle r_j \mid \mathcal{J}\rangle\rangle$ mit $W := \ast_{i\in\mathcal{I}} V_i$ eine gestaffelte Präsentation über freien Gruppen U und V_i. Dann ist $\{r_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ eine Basis von $\langle r_j \mid j \in \mathcal{J}\rangle_{U*W}$. Diese Aussage folgt aus der Tatsache, dass gestaffelte Präsentationen über freien Gruppen laut Satz E.5 asphärisch sind, denn wegen Definition E.3 existieren für asphärische Präsentationen keine nichttrivialen Identitäten zwischen den Relationen der Präsentation.

Korollar 4.31. *Sei U eine beliebige lokal indizierbare Gruppe und $(U * W)/\langle\langle r_j \mid \mathcal{J}\rangle\rangle$ eine gestaffelte Präsentation für $W = \ast_{i\in\mathcal{I}} V_i$ mit lokal indizierbaren Gruppen V_i. Weiter seien w ein nichttriviales Element von $U * W$ und $\alpha, \omega \in \mathcal{I}$ Indizes, so dass w im normalen Abschluss der Elemente r_j ($j \in \mathcal{J}$) in $U * W$ liegt und ausschließlich die freien Faktoren U sowie V_k mit $\alpha \leqslant k \leqslant \omega$ benutzt. Dann liegt w bereits im normalen Abschluss der Elemente r_ℓ mit $\alpha \leqslant \alpha_\ell$ und $\omega_\ell \leqslant \omega$ in $U * W$.*

Beweis. Seien $V_{\leqslant\mu} := \ast_{k\leqslant\mu} V_k$, $V_{\geqslant\mu} := \ast_{k\geqslant\mu} V_k$ und $V_{\mu,\nu} := \ast_{\mu\leqslant k\leqslant\nu} V_k$ für beliebige Indizes $\mu, \nu \in \mathcal{I}$. Wir fixieren ein beliebiges Element $m \in \mathcal{J}$. Als Erstes beweisen wir per Induktion über $n - m$, dass für ein beliebiges Element $n \in \mathcal{J}$ mit $m \leqslant n$ die Isomorphie

$$\begin{aligned} & (U * W) \,/\langle\langle r_k \mid m \leqslant k \leqslant n\rangle\rangle \\ \cong\ & \big((U * V_{\leqslant\omega_{n-1}}) \,/\langle\langle r_k \mid m \leqslant k \leqslant n-1\rangle\rangle\big) \underset{U*V_{\alpha_n,\omega_{n-1}}}{*} \big((U * V_{\geqslant\alpha_n})/\langle\langle r_n\rangle\rangle\big) \end{aligned} \tag{4.4}$$

gilt. Im Induktionsanfang $m = n$ folgt die gewünschte Isomorphie sofort aus Satz 2.11. Für den Induktionsschritt ($n \to n + 1$) bemerken wir, dass $U * V_{\alpha_{n+1},\omega_n}$ wegen Satz 2.11

kanonisch in den Faktor $(U * V_{\geqslant \alpha_n})/\langle\langle r_n \rangle\rangle$ einbettet, welcher laut Induktionsvoraussetzung wiederum in $(U * W) \,/\langle\langle r_k \mid m \leqslant k \leqslant n \rangle\rangle$ einbettet. Da $U * V_{\alpha_{n+1},\omega_n}$ wegen Satz 2.11 auch kanonisch in $(U * V_{\geqslant \alpha_{n+1}})/\langle\langle r_{n+1} \rangle\rangle$ einbettet, folgt schließlich die gewünschte Darstellung

$$\begin{aligned} & (U * W) \,/\langle\langle r_k \mid m \leqslant k \leqslant n+1 \rangle\rangle \\ \cong \; & \big((U * V_{\leqslant \omega_n}) \,/\langle\langle r_k \mid m \leqslant k \leqslant n \rangle\rangle\big) \underset{U * V_{\alpha_{n+1},\omega_n}}{*} \big((U * V_{\geqslant \alpha_{n+1}})/\langle\langle r_{n+1} \rangle\rangle\big). \end{aligned}$$

Dies beendet den Induktionsbeweis der Isomorphie (4.4).

Im Hinblick auf einen Widerspruch sei w ein Element aus $\langle\langle r_j \mid j \in \mathcal{J} \rangle\rangle_{U*W}$, welches Element von $H * \bigcup_{\alpha \leqslant k \leqslant \omega} V_k$ für zwei Indizes α, ω ist, aber nicht im normalen Abschluss $\langle\langle r_\ell \mid \alpha \leqslant \alpha_\ell,\ \omega_\ell \leqslant \omega \rangle\rangle_{U*W}$ liegt. Wir wählen Indizes $m, n \in \mathcal{J}$, so dass w im normalen Abschluss $\langle\langle r_\ell \mid m \leqslant \ell \leqslant n \rangle\rangle_{U*W}$ liegt und $n-m$ minimal mit dieser Eigenschaft ist. Dabei betrachten wir nur den Fall $\omega < \omega_n$, da der Fall $\alpha_m < \alpha$ auf analoge Weise behandelt werden kann. Unter Zuhilfenahme der Isomorphie (4.4) schreiben wir

$$\begin{aligned} & (U * W) \,/\langle\langle r_k \mid m \leqslant k \leqslant n \rangle\rangle \\ \cong \; & \big((U * V_{\leqslant \omega_{n-1}}) \,/\langle\langle r_k \mid m \leqslant k \leqslant n-1 \rangle\rangle\big) \underset{U * V_{\alpha_n,\omega_{n-1}}}{*} \big((U * V_{\geqslant \alpha_n})/\langle\langle r_n \rangle\rangle\big). \end{aligned}$$

Wegen $\omega < \omega_n$ ist w ein Element des linken Faktors dieses amalgamierten Produkts. Da w trivial in $(U*W) \,/\langle\langle r_k \mid m \leqslant k \leqslant n \rangle\rangle$ ist, muss es somit bereits trivial in $(U*V_{\leqslant \omega_{n-1}}) \,/\langle\langle r_k \mid m \leqslant k \leqslant n-1 \rangle\rangle$ sein. Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von $n-m$.

□

Als Nächstes beweisen wir eine einfache Hilfsaussage, welche uns bei den Beweisen der Einbettungssätze den Übergang zu Wurzelbaumprodukten ermöglicht.

Lemma 4.32. *Seien H eine beliebige lokal indizierbare Gruppe, G ein Baumprodukt und $\widetilde{G}$ ein Wurzelbaumprodukt von G, welches durch die Relation $a = \widetilde{a}^k$ für ein $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ und einen Erzeuger a einer Blattgruppe A entsteht. Weiter seien r ein Element von $G * H$ und U eine Untergruppe von G, so dass $U * H$ in $(\widetilde{G} * H)/\langle\langle r \rangle\rangle$ einbettet. Dann bettet $U * H$ auch in $(G * H)/\langle\langle r \rangle\rangle$ ein.*

Beweis. Falls $\langle a \rangle_A$ in $(G * H)/\langle\langle r \rangle\rangle$ einbettet, setzen wir $m = \infty$. Ansonsten sei $m \in \mathbb{N}$ die kleinste Potenz, so dass a^m trivial in $(G * H)/\langle\langle r \rangle\rangle$ ist. Dann folgt die gewünschte Aussage sofort aus

$$(\widetilde{G} * H)/\langle\langle r \rangle\rangle \;\cong\; (G * H)/\langle\langle r \rangle\rangle \underset{a=\widetilde{a}^m}{*} \langle \widetilde{a} \mid \widetilde{a}^{km} = 1 \rangle,$$

denn ein Element aus $U * H$, welches trivial im linken Faktor des amalgamierten Produkts ist, muss auch trivial im amalgamierten Produkt selbst sein.

□

Bei den nächsten zwei Lemmata handelt es sich um weitere kleine Hilfsaussagen, auf die wir für die Beweise der Einbettungssätze wiederholt zurückgreifen.

Lemma 4.33. *Seien G ein Baumprodukt, Z ein äußeres Zweigprodukt von G, $\mathcal{X}$ eine nichtleere Menge von Pfeilererzeugern von Z und H eine beliebige lokal indizierbare Gruppe. Weiter sei r ein Element von $G * H$ mit verdichteten Konjugierten $\widetilde{r}$ und minimalem Baumprodukt T. Schließlich bette $\big((G \ominus Z \ominus \mathcal{X}) \cap T\big) * H$ kanonisch in $(T * H)/\langle\langle \widetilde{r} \rangle\rangle$ ein. Dann bettet auch $(G \ominus Z \ominus \mathcal{X}) * H$ kanonisch in $(G * H)/\langle\langle r \rangle\rangle$ ein.*

Beweis. Zunächst betrachten wir den Fall, dass T im Zweigprodukt Z enthalten ist. Sei $p = q$ ($p \in Z$) die Kantenrelation zur Kante, welche Z mit $G \ominus Z$ verbindet. Dann gilt

$$(G * H)/\langle\langle r, p \rangle\rangle \quad \cong \quad \left(\Big(\big((G \ominus Z \ominus \mathcal{X}) * H \big) * \langle \mathcal{X} \mid \rangle \Big) / \langle\langle p \rangle\rangle \right) * (Z/\langle\langle \widetilde{r}, q \rangle\rangle). \tag{4.5}$$

Laut Satz 2.11 bettet $(G \ominus Z \ominus \mathcal{X}) * H$ kanonisch in $\Big(\big((G \ominus Z \ominus \mathcal{X}) * H \big) * \langle \mathcal{X} \mid \rangle \Big) / \langle\langle p \rangle\rangle$ und somit wegen (4.5) auch in $(G * H)/\langle\langle r, p \rangle\rangle$ ein. Da $(G * H)/\langle\langle r, p \rangle\rangle$ eine Faktorgruppe von $(G * H)/\langle\langle r \rangle\rangle$ ist, erhalten wir folglich die gewünschte Einbettung.

Das minimale Baumprodukt T enthalte also mindestens eine Knotengruppe aus $G \ominus Z$. Wir betrachten alle Zweigprodukte $W^{(i)}$ ($i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$), welche entstehen, wenn man in G die Erzeuger des Teilbaumprodukts T sowie alle Kantenrelationen der an T angrenzenden Kanten löscht. Da $\big((G \ominus Z \ominus \mathcal{X}) \cap T\big) * H$ laut Voraussetzung in $(T * H)/\langle\langle \widetilde{r} \rangle\rangle$ einbettet, enthält T mindestens eine Knotengruppe aus Z oder die mit Z durch eine Kante verbundene Knotengruppe von $G \ominus Z$. Daher liegt jedes Zweigprodukt $W^{(i)}$ ($i \in \{1, 2, \ldots, k\}$) entweder komplett in Z oder komplett in $G \ominus Z$. Seien $U^{(j)}$ ($j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$) alle Zweigprodukte $W^{(i)}$ ($i \in \{1, 2, \ldots, k\}$), welche in Z liegen. Weiter seien $p_j = q_j$ (mit $q_j \in U^{(j)}$) die Kantenrelationen zu den Kanten, welche die Zweigprodukte $U^{(j)}$ mit T verbinden. Wir schreiben

$$P^{(0)} := \big((T * H)/\langle\langle \widetilde{r} \rangle\rangle \big) \underset{\big(T \cap (G \ominus Z \ominus \mathcal{X})\big) * H}{*} \big((G \ominus Z \ominus \mathcal{X}) * H \big), \tag{4.6}$$

wobei die Einbettung der amalgamierten Gruppe in den linken Faktor laut Voraussetzung gilt. Sei $\ell_j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die kleinste Potenz, so dass $p_j^{\ell_j}$ trivial in $(T * H)/\langle\langle \widetilde{r} \rangle\rangle$ ist. Wir beweisen folgende Behauptung.

Für alle $\ell \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ besitzt das Element q_i die Ordnung ℓ in $U_i/\langle\langle q_i^\ell \rangle\rangle$.

Dazu betrachten wir die Faktorgruppe $\widetilde{U}_i$ von U_i, welche durch das Faktorisieren mit dem normalen Abschluss aller von q_i verschiedenen Kantenwörter von U_i sowie q_i^ℓ entsteht. Diese Faktorgruppe $\widetilde{U}_i$ entspricht dem freien Produkt von gestaffelten Präsentationen über freien Gruppen. Sei Q die Knotengruppe von U_i, welche q_i enthält. Wäre nun p_i^λ für ein $\lambda \in \mathbb{N}$ mit $\lambda < \ell$ trivial in $U_i/\langle\langle q_i^\ell \rangle\rangle$, so müsste p_i^λ auch trivial in $\widetilde{U}_i$ sein. Mithilfe des Spezialfalls von Korollar 4.31 für freie Gruppen folgt, dass q_i^λ trivial in $Q/\langle\langle q_i^\ell \rangle\rangle$ sein müsste.

Dies ist wegen Satz 3.44 ein Widerspruch, denn Q ist eine freie Gruppe. Folglich dürfen wir für $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ induktiv

$$P^{(j)} \quad = \quad P^{(j-1)} \underset{p_j = q_j}{*} (U^{(j)} / \langle\langle q_j^{\ell_j} \rangle\rangle)$$

definieren. Es gilt $P^{(m)} = (G * H)/\langle\langle r \rangle\rangle$. Wir haben also $(G * H)/\langle\langle r \rangle\rangle$ durch schrittweise Bildung von amalgamierten Produkten aus der Gruppe $(G \ominus Z \ominus \mathcal{X}) * H$ (siehe (4.6)) konstruiert. Daher bettet $(G \ominus Z \ominus \mathcal{X}) * H$ kanonisch in $(G * H)/\langle\langle r \rangle\rangle$ ein.

□

Lemma 4.34. *Seien G ein Baumprodukt, Z ein äußeres Zweigprodukt von G, x ein Pfeilererzeuger von Z in G und H eine beliebige lokal indizierbare Gruppe. Weiter sei r ein Element von $G * H$ mit verdichtetem Konjugierten $\widetilde{r}$. Das minimale Baumprodukt T zu r enthalte mindestens eine Knotengruppe des Zweigprodukts Z. Falls mindestens ein Kantenwort einer in Z enthaltenen äußeren Blattgruppe von T ein primitives Element ist, so bettet $(G \ominus Z \ominus \{x\}) * H$ kanonisch in $(G * H)/\langle\langle r \rangle\rangle$ ein.*

Beweis. Wegen Lemma 4.33 reicht es aus, den Fall zu betrachten, dass G das minimale Baumprodukt zu r ist. Sei A eine laut Voraussetzung existierende äußere Blattgruppe von Z mit einer Kantenrelation $p = q$, wobei $p \in A$ ein primitives Element sei. Wir erweitern p zu einer Basis von A und ersetzen die alten Basiselemente von A im Erzeugendensystem von G durch die neuen Basiselemente. Da das minimale Baumprodukt zu r die Blattgruppe A enthält und wir alle Erzeuger p in $\widetilde{r}$ mithilfe der Kantenrelation $p = q$ ersetzen können, enthält $\widetilde{r}$ mindestens ein weiteres Basiselement a von A. Im Fall $A = Z$ setzen wir $y := x$. Andernfalls sei y ein beliebiger Pfeilererzeuger von A. Es gilt

$$(G \ominus A)/\langle\langle q \rangle\rangle \quad \cong \quad \big((G \ominus A \ominus \{y\}) * \langle y \mid\rangle\big)/\langle\langle q \rangle\rangle \tag{4.7}$$

$$\text{und} \quad (G * H)/\langle\langle r, p \rangle\rangle \quad \cong \quad \Big((A/\langle\langle p \rangle\rangle) \ * \ (G \ominus A)/\langle\langle q \rangle\rangle\Big)/\langle\langle r \rangle\rangle. \tag{4.8}$$

Mit Satz 2.11 folgern wir wegen (4.7) die Einbettung von $G \ominus A \ominus \{y\}$ in $(G \ominus A)/\langle\langle q \rangle\rangle$ und wegen (4.8) die Einbettung von $(G \ominus A)/\langle\langle q \rangle\rangle$ in $(G * H)/\langle\langle r, p \rangle\rangle$. Insgesamt erhalten wir somit die Einbettung von $G \ominus A \ominus \{y\}$ in $(G * H)/\langle\langle r, p \rangle\rangle$. Daraus folgt sofort die Einbettung von $G \ominus Z \ominus \{x\}$ in $(G * H)/\langle\langle r \rangle\rangle$.

□

4.3.2. Kleiner Freiheitssatz für Baumprodukte

Der folgende Satz bildet eine Vorstufe zum Freiheitssatz für Baumprodukte.

Satz 4.35. (Kleiner Freiheitssatz für Baumprodukte) *Seien G ein Baumprodukt, Z ein äußeres Zweigprodukt von G und x ein Pfeilererzeuger von Z in G. Weiter seien H eine nichttriviale lokal indizierbare Gruppe und r ein verdichtetes Konjugiertes aus $(G * H) \backslash G$. Das minimale Baumprodukt zu r enthalte mindestens eine Knotengruppe des Zweigprodukts Z. Dann bettet $(G \ominus Z \ominus \{x\}) * H$ kanonisch in $(G * H)/\langle\langle r \rangle\rangle$ ein.*

Beweis. O. B. d. A. dürfen wir annehmen, dass r keine echte Potenz ist, da der normale Abschluss eines Elements s größer oder gleich dem normalen Abschluss von s^m für alle $m \in \mathbb{Z}$ ist. Wegen Lemma 4.33 reicht es zudem aus, den Fall zu betrachten, dass G das minimale Baumprodukt zu r ist. Sei σ die Grenzlänge von G. Wir führen den Beweis per Induktion über das Tupel $(||r|| - |Z|, \sigma)$ in lexikografischer Ordnung.

Für den Induktionsanfang betrachten wir die beiden Fälle $||r|| - |Z| \in \mathbb{Z}$, $\sigma = 2$ und $||r|| - |Z| \leqslant 0$, $\sigma \in \mathbb{N}$. Im Fall $|Z| = 1$ sei $A := Z$. Ansonsten wählen wir eine äußere Blattgruppe A von G sowie Z. Im Fall $\sigma = 2$ ist das Kantenwort zu A zwangsläufig ein primitives Element. Somit folgt die gewünschte Einbettung aus Lemma 4.34. Für den Fall $||r|| - |Z| \leqslant 0$ existiert eine Knotengruppe B von Z, so dass r kein Basiselement der Knotengruppe enthält. Die Knotengruppe B kann keine Blattgruppe von G sein, da Z Teil des minimalen Baumprodukts zu r ist. Wir betrachten die Zweigprodukte von G, welche entstehen, wenn man in G alle Erzeuger der Knotengruppe B samt der Kantenrelationen der mit B verbundenen Kanten löscht. Da B keine Blattgruppe ist, existiert mindestens ein Zweigprodukt Y, welches komplett in Z enthalten ist. Das freie Produkt der restlichen Zweigprodukte bezeichnen wir mit R. Die zu B gehörigen Kantenrelationen seien $p_i = q_i$ $(i \in \mathcal{I})$ für eine Indexmenge $\mathcal{I}$ und $p_i \in B$. Da r laut Voraussetzung kein Element von G ist, bettet $Y * R$ wegen Satz 2.11 in $(Y * R * H)/\langle\langle r \rangle\rangle$ ein. Seien $R^{(1)}$, $R^{(2)}, \ldots, R^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$ die freien Faktoren von R. Dann stammen alle q_i aus unterschiedlichen Faktoren des freien Produkts $Y * R^{(1)} * R^{(2)} * \ \ldots \ * R^{(k)}$. Wegen Lemma 4.13 sind alle Faktoren lokal indizierbar und damit insbesondere torsionsfrei. Somit bettet die von $\{q_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ erzeugte freie Gruppe Q in $Y * R$ und folglich auch in $(Y * R * H)/\langle\langle r \rangle\rangle$ ein. Da die Elemente p_i $(i \in \mathcal{I})$ von B laut Definition 4.7 eine verschobene Menge bilden und somit $B/\langle\langle p_i \mid i \in \mathcal{I}\rangle\rangle$ eine gestaffelte Präsentation über freien Gruppen ist, bettet wegen Bemerkung 4.30 auch die von $\{p_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ erzeugte freie Gruppe P in B ein. Es folgt

$$(G * H) \,/\, \langle\langle r \rangle\rangle \quad \cong \quad B \underset{P \cong Q}{*} \big((Y * R * H)/\langle\langle r \rangle\rangle\big).$$

Schließlich bemerken wir, dass $R * H$ laut Satz 2.11 in den rechten Faktor dieses amalgamierten Produkts und damit auch in $(G * H)/\langle\langle r \rangle\rangle$ einbettet. Folglich bettet insbesondere $(G \ominus Z \ominus \{x\}) * H$ in $(G * H)/\langle\langle r \rangle\rangle$ ein.

Für den Induktionsschritt betrachten wir eine äußere Blattgruppe A von Z sowie G und die zu A gehörige Kantenrelation $p = q$ $(p \in A)$. Falls p nur ein Basiselement a von A enthält, so ist wegen Definition 4.7 p gleich $a^{\pm 1}$ und die gewünschte Aussage folgt wie im Induktionsanfang für $\sigma = 2$. Somit dürfen wir voraussetzen, dass p mindestens zwei Basiselemente a, b von A enthält. Wir erinnern an die Notation p_b für die Exponentensumme von $p \in A$ bzgl. b und gehen durch $a = \widetilde{a}^{p_b}$ zum Wurzelbaumprodukt $\widetilde{G} := G *_{a = \widetilde{a}^{p_b}} \langle \widetilde{a} \rangle$ von G über, das wegen $p \neq a^{\pm 1}$ ein Baumprodukt ist. Die dadurch entstehende neue Darstellung $r \in \widetilde{G} * H$ ist ebenfalls ein verdichtetes Konjugiertes mit derselben Länge wie die alte Darstellung $r \in G * H$. Nun wenden wir einen Blattisomorphismus von $\widetilde{G}$ an, welcher

durch $\bar{b} := b\widetilde{a}^{p_a}$ oder $\bar{b} := \widetilde{a}^{p_a}b$ gegeben ist. Laut Bemerkung 4.26 ist das durch Algorithmus 4.24 gegebene verdichtete Konjugierte von r im Bild des Blattisomorphismus kürzer oder genauso lang wie die ursprüngliche Darstellung. Wir bezeichnen das Bild von $\widetilde{G}$ unter dem Blattisomorphismus und das neue verdichtete Konjugierte wieder mit $\widetilde{G}$ und r. Es gilt $p_{\widetilde{a}} = 0$. Wegen Lemma 4.32 reicht es aus, die Einbettung von $G \ominus Z \ominus \{x\} = \widetilde{G} \ominus Z \ominus \{x\}$ in $(\widetilde{G} * H)/\langle\langle r \rangle\rangle$ zu zeigen. Im Fall $A = Z$ setzen wir $y := x$. Andernfalls sei y ein Pfeilererzeuger von A in $\widetilde{G}$. Laut Bemerkung 3.7 ist $r_{\widetilde{a}}$ wegen $p_{\widetilde{a}} = 0$ wohldefiniert, denn p ist das einzige Kantenwort, das den Erzeuger $\widetilde{a}$ verwenden kann. Enthält p nicht den Erzeuger $\widetilde{a}$, so besitzt $\widetilde{G}$ eine echt kleinere Grenzlänge als G und die gewünschte Einbettung folgt laut Induktionsvoraussetzung. Wir dürfen somit annehmen, dass $\widetilde{a}$ in p enthalten ist.

Fall 1: Es gelte $r_{\widetilde{a}} \neq 0$ (d. h. der Erzeuger $\widetilde{a}$ sei ein Ankererzeuger von $r \in \widetilde{G}$).
In diesem Fall verwenden wir den Homomorphismus φ von $\widetilde{G} * H$, welcher die von $\widetilde{a}$ verschiedenen Basiselemente von A auf das triviale Element und alle restlichen Erzeuger von $\widetilde{G} * H$ auf sich selbst abbildet. Wegen $p_{\widetilde{a}} = 0$ folgt

$$\Im(\varphi)/\langle\langle \varphi(r) \rangle\rangle \quad \cong \quad \Big(\langle \widetilde{a} \mid \rangle \; * \; \big(((\widetilde{G} \ominus A)/\langle\langle q \rangle\rangle) * H \big) \Big) / \langle\langle \varphi(r) \rangle\rangle. \tag{4.9}$$

Wir bemerken, dass $(\widetilde{G} \ominus A)/\langle\langle q \rangle\rangle = \big((\widetilde{G} \ominus A \ominus \{y\}) * \langle y \mid \rangle\big)/\langle\langle q \rangle\rangle$ wegen Satz 2.12 eine lokal indizierbare Gruppe ist, da q laut Definition 4.5 und Definition 4.7 zyklisch gekürzt und keine echte Potenz ist. Wegen Satz 2.11, (4.9) und $r_{\widetilde{a}} \neq 0$ bettet daher $((\widetilde{G} \ominus A)/\langle\langle q \rangle\rangle) * H$ in $\Im(\varphi)/\langle\langle \varphi(r) \rangle\rangle$ ein. Satz 2.11 gibt uns zudem die Einbettung von $\widetilde{G} \ominus A \ominus \{y\}$ in $(\widetilde{G} \ominus A)/\langle\langle q \rangle\rangle$. Insgesamt erhalten wir somit die Einbettung von $(\widetilde{G} \ominus A \ominus \{y\}) * H$ in $\Im(\varphi)/\langle\langle \varphi(r) \rangle\rangle$. Schließlich folgt, dass $(\widetilde{G} \ominus Z \ominus \{x\}) * H$ in $(\widetilde{G} * H)/\langle\langle r \rangle\rangle$ einbettet.

Fall 2: Es gelte $r_{\widetilde{a}} = 0$.
Wir betrachten den Blatthomomorphismus $\varphi\colon \widetilde{G} * H \to \mathbb{Z}$ mit $\varphi(\widetilde{a}) = 1$. Sei $\mathcal{A}$ die Basis der Blattgruppe A in G. Dann entspricht $\ker(\varphi)$ laut Bemerkung 4.22 dem freien Produkt der Gruppen $H_\ell := a^{-\ell} H a^\ell$ ($\ell \in \mathbb{Z}$) mit einem Baumprodukt, das auf folgende Weise gebildet werden kann. Wir starten mit einer Knotengruppe

$$\widetilde{A} := \langle \widetilde{\mathcal{A}} \mid \rangle \quad \text{für} \quad \widetilde{\mathcal{A}} := \{ \underbrace{\widetilde{a}^{-\ell} y \widetilde{a}^{\ell}}_{=:y_\ell} \mid y \in \mathcal{A} \backslash \{a\}, \ell \in \mathbb{Z} \}$$

und verknüpfen $\widetilde{A}$ über jeweils eine Kantenrelation $p_\ell = q_\ell$ ($p_\ell \in \widetilde{A}$) mit abzählbar unendlich vielen Kopien $(\widetilde{G} \ominus A)_\ell := a^{-\ell}(\widetilde{G} \ominus A)a^\ell$ ($\ell \in \mathbb{Z}$) von $\widetilde{G} \ominus A$. Es gilt $|p_\ell|_{\widetilde{A}} < |p|_A$ für alle $\ell \in \mathbb{Z}$ (siehe Bemerkung 4.23).

Laut Voraussetzung benutzt das verdichtete Konjugierte $r \in G * H$ den Faktor H. Wir definieren $r_i := a^{-i} r a^i$. Dann bildet $\ker(\varphi)/\langle\langle r_i \mid i \in \mathbb{Z} \rangle\rangle$ eine gestaffelte Präsentation für $V_i = H_i$ (vgl. Definition 4.29). Da alle Elemente von $\widetilde{G} \ominus Z \ominus \{x\}$, welche nicht im Kern von φ liegen, keine Elemente des normalen Abschlusses von r in $\widetilde{G} * H$ sein können, reicht es aus, die Einbettung der Kopie $(\widetilde{G} \ominus Z \ominus \{x\})_0 * H_0 \subseteq (\widetilde{G} \ominus A \ominus \{y\})_0 * H_0$ von $(\widetilde{G} \ominus Z \ominus \{x\}) * H$

in $\ker(\varphi)/\langle\langle r_i \mid i \in \mathbb{Z}\rangle\rangle$ zu zeigen. O. B. d. A. sei r_0 ein Element r_i ($i \in \mathbb{Z}$), welches den freien Faktor H_0 von $\ker(\varphi)$ benutzt. Dann ist ein Element $w \in (\widetilde{G} \ominus Z \ominus \{x\})_0 * H_0$ laut Korollar 4.31 genau dann trivial in $\ker(\varphi)/\langle\langle r_i \mid i \in \mathbb{Z}\rangle\rangle$, wenn es trivial in $\ker(\varphi)/\langle\langle r_0\rangle\rangle$ ist. Durch Algorithmus 4.24 ist laut Lemma 4.25 ein verdichtetes Konjugiertes r^* von r_0 in $\ker(\varphi)$ mit $||r^*||_{\ker(\varphi)} \leqslant ||r||_{G*H}$ gegeben. Wegen Lemma 4.33, angewandt auf das äußere Zweigprodukt $\ker(\varphi) \ominus (\widetilde{G} \ominus Z)_0$ von $\ker(\varphi)$, reicht es, anstelle von $\ker(\varphi)$ die Gruppe $T * \widetilde{H}$ zu betrachten, wobei $\widetilde{H} := *_{i\in\mathbb{Z}} H_i$ gelte und T das minimale Baumprodukt von r_0 in $\ker(\varphi)$ sei. Wir möchten also die Einbettung von $\big((\widetilde{G}\ominus Z\ominus\{x\})_0 \cap T\big) * H_0$ in $(T * \widetilde{H})/\langle\langle r^*\rangle\rangle$ zeigen.

Fall 2.1: Der Erzeuger $\widetilde{a}$ sei ein Reduktionserzeuger von $r \in \widetilde{G}$.
Dann folgt wegen Definition 4.28 $T = \widetilde{A} *_{p_0=q_0} (\widetilde{G} \ominus A)_0$. Wie bereits bemerkt gilt $|p_0|_{\widetilde{A}} < |p|_A$. Somit ist die Grenzlänge von T echt kleiner als die Grenzlänge von G und wir dürfen die Induktionsvoraussetzung anwenden, um die gewünschte Einbettung zu folgern.

Fall 2.2: Der Erzeuger $\widetilde{a}$ sei ein Fächererzeuger von $r \in \widetilde{G}$.
Im Fall $x_0 \notin T$ folgt $(\widetilde{G} \ominus Z)_0 \cap T = \varnothing$, denn das minimale Baumprodukt T kann wegen $|T| \geqslant |G|$ nicht in $(\widetilde{G}\ominus Z)_0$ enthalten sein. Also reduziert sich die in diesem Fall zu zeigende Aussage auf die Einbettung von H_0 in $(T * \widetilde{H})/\langle\langle r^*\rangle\rangle$. Diese Einbettung folgt aus Satz 2.11, denn r^* ist ein verdichtetes Konjugiertes und damit insbesondere nicht in $\widetilde{H}$ enthalten.

Sei also $x_0 \in T$. Wir definieren $Z' := T \ominus ((\widetilde{G} \ominus Z)_0 \cap T)$. Dann bleibt zu beweisen, dass $(T \ominus Z' \ominus \{x_0\}) * H_0$ in $(T * \widetilde{H})/\langle\langle r^*\rangle\rangle$ einbettet. Um die Induktionsvoraussetzung anwenden zu können, reicht es wegen Lemma 4.25 aus, $|Z'| > |Z|$ zu zeigen. Dazu wählen wir $\widetilde{A}$ als Wurzel von T und bemerken, dass für jede Blattgruppe von G mindestens eine Kopie dieser Blattgruppe in T liegt, denn G ist das minimale Baumprodukt zu r und T das minimale Baumprodukt zu r_0. Da jeder verwurzelte Baum Vereinigung aller eindeutig bestimmten Wege von der Wurzel zu den Blättern ist, liegt mindestens eine Kopie jeder Knotengruppe von G in T. Insbesondere enthält T also mindestens eine Kopie jeder Knotengruppe von Z und es folgt $|Z| \leqslant |Z'|$. Da $\widetilde{a}$ ein Fächererzeuger ist, enthält T mindestens zwei Kopien B_0, B_μ der mit A verbundenen (eindeutig bestimmten) Knotengruppe B von G. Falls B eine Knotengruppe von Z ist, so sind B_0 und B_μ Knotengruppen von Z'. Falls B eine Knotengruppe von $G \ominus Z$ ist, so ist nur B_μ eine Knotengruppe von Z'. In beiden Fälle erhalten wir somit eine zusätzliche Knotengruppe und es folgt $|Z| < |Z'|$. Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung für $(||r^*|| - |Z'|, \sigma')$, wobei σ' die Grenzlänge von T sei, erhalten wir die gewünschte Einbettung.

□

4.3.3. Freiheitssatz für Baumprodukte

Mithilfe von Satz 4.35 beweisen wir den folgenden Freiheitssatz, welcher im Gegensatz zu Satz 4.35 auf die Bedingung verzichtet, dass H nichttrivial ist.

Satz 4.36. ***(Freiheitssatz für Baumprodukte)*** *Seien G ein Baumprodukt, Z ein äußeres Zweigprodukt von G, x ein Pfeilererzeuger von Z in G und H eine beliebige lokal indizierbare Gruppe. Weiter sei r ein verdichtetes Konjugiertes von $G * H$, dessen minimales Baumprodukt mindestens eine Knotengruppe aus Z enthalte. Dann bettet $(G \ominus Z \ominus \{x\}) * H$ kanonisch in $(G * H)/\langle\langle r \rangle\rangle$ ein.*

Wir werden den Beweis simultan mit dem Beweis von Proposition 4.40 führen. Zur Formulierung von Proposition 4.40 benötigen wir zunächst einige weitere Notationen und Definitionen.

Definition 4.37. Seien G ein Baumprodukt und A eine äußere Blattguppe. Weiter sei $\mathcal{X}$ die Menge aller Pfeilererzeuger von A in G. Wir definieren

$$A^+ = A * \langle \mathcal{X} \rangle \quad \text{und} \quad G \ominus A^+ = (G \ominus A) \ominus \mathcal{X}.$$

Analog definieren wir für ein äußeres Zweigprodukt Z von G und die Menge $\mathcal{Y}$ aller Pfeilererzeuger von Z in G:

$$Z^+ = Z * \langle \mathcal{Y} \rangle \quad \text{und} \quad G \ominus Z^+ = (G \ominus Z) \ominus \mathcal{Y}$$

Notation 4.38. Seien G ein Baumprodukt, Z ein äußeres Zweigprodukt von G und H eine beliebige lokal indizierbare Gruppe. Weiter sei φ ein Blatthomomorphismus zu einer äußeren Blattgruppe A von $G * H$, welche nicht in Z enthalten ist. Wie in Bemerkung 4.22 beschrieben gehen wir zum Kern $\ker(\varphi) = K * \widetilde{H}$ über.

Im Sonderfall, dass G einen Durchmesser von 2 besitzt, hat das Baumprodukt K von $\ker(\varphi)$ den Durchmesser 3. Wir können daher höchstens $Z_{-\infty}$ und Z_∞ als äußere Zweigprodukte ansehen. Alle anderen Z_i sind keine äußeren Zweigprodukte. Indem wir jedoch für zwei Elemente i, $j \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ alle Erzeuger der Zweigprodukte Z_k mit $k < i$ und $k > j$ entfernen, werden die Zweigprodukte Z_i und Z_j zu äußeren Zweigprodukten des entstehenden Baumprodukts. Falls der Druchmesser von G echt größer als 2 ist, sind alle Z_i ($i \in \mathbb{Z}$) äußere Zweigprodukte von $\ker(\varphi)$. Dies rechtfertigt die folgenden Definitionen. Für i, $j \in \mathbb{Z}$ mit $i \leqslant j$ schreiben wir:

$$K_{-\infty,j} := \ker(\varphi) \ominus \bigcup_{k=j+1}^{\infty} Z_k^+, \qquad K_{i,\infty} := \ker(\varphi) \ominus \bigcup_{k=-\infty}^{i-1} Z_k^+$$

$$\text{und} \quad K_{i,j} := \Big(\ker(\varphi) \ominus \bigcup_{k=-\infty}^{i-1} Z_k^+\Big) \ominus \bigcup_{\ell=j+1}^{\infty} Z_\ell^+$$

Definition 4.39. (α-/ω-Zweiggrenzen) Seien G ein Baumprodukt, Z ein äußeres Zweigprodukt von G und H eine beliebige lokal indizierbare Gruppe. Weiter sei φ ein Blatthomomorphismus zu einer äußeren Blattgruppe A von $G * H$, welche nicht in Z liegt. Mit der Notation aus Bemerkung 4.22 gehen wir zum Kern $\ker(\varphi)$ über. Dann definieren wir für ein beliebiges Element $w \in \ker(\varphi)$ die *α- bzw. ω-Zweiggrenze* (bzgl. Z) als den größten bzw. kleinsten Index ℓ, so dass w ein Element von $K_{\ell,\infty} * \widetilde{H}$ bzw. $K_{-\infty,\ell} * \widetilde{H}$ ist.

Proposition 4.40. *Seien $G * H$ ein Baumprodukt und r ein verdichtetes Konjugiertes aus $G * H$, dessen minimales Baumprodukt mindestens eine Knotengruppe eines äußeren Zweigprodukts Z von $G * H$ enthält. Mit der Notation aus Bemerkung 4.22 bilden wir* $\ker(\varphi)$ *für einen Blatthomomorphismus φ zu einer äußeren Blattgruppe A von $G * H$, welche nicht in Z liegt. Sei u ein Element aus dem normalen Abschluss der verdichteten Konjugierten r_i ($i \in \mathbb{Z}$) in* $\ker(\varphi)$. *Die α-/ω-Zweiggrenzen der Elemente r_i ($i \in \mathbb{Z}$) und u bzgl. Z bezeichnen wir mit α_{r_i}, ω_{r_i} ($i \in \mathbb{Z}$) und α_u, ω_u. Dann liegt u bereits im normalen Abschluss der Elemente r_k, welche $\alpha_u \leqslant \alpha_{r_k}$ und $\omega_{r_k} \leqslant \omega_u$ erfüllen.*

Simultaner Beweis von Satz 4.36 und Proposition 4.40.

Sei σ die Grenzlänge von G. Wir führen den Beweis per Induktion über das Tupel $(||\widetilde{r}|| - |G|, \sigma)$ in lexikographischer Ordnung. Seien T_j ($j \in \mathcal{J}$) die minimalen Baumprodukte der Elemente r_j aus Proposition 4.40. Weiter seien σ_j ($j \in \mathcal{J}$) die Grenzlängen der minimalen Baumprodukte T_j.

Als Erstes beweisen wir, dass für fixierte Werte $(z, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ aus der Gültigkeit von Satz 4.36 für $(||r|| - |G|, \sigma) \leqslant (z, s)$ die Aussage von Proposition 4.40 für $(|T_0| - ||r_0||, \sigma_0) \leqslant (z, s)$ folgt. Dazu sei u ein nichttriviales Element aus dem normalen Abschluss der Elemente r_j ($j \in \mathbb{Z}$) in $G * H$. Seien r_j ($m \leqslant j \leqslant n$) genau diejenigen Elemente r_i, welche $\alpha_u \leqslant \alpha_{r_k}$ und $\omega_{r_k} \leqslant \omega_u$ erfüllen.

Im Hinblick auf einen Widerspruch liege u nicht im normalen Abschluss der Elemente r_j ($m \leqslant j \leqslant n$) in $\ker(\varphi)$. Wir wählen Indizes $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ mit $\mu \leqslant \nu$, so dass u im normalen Abschluss der Elemente r_k ($\mu \leqslant k \leqslant \nu$) in $G * H$ liegt und $\nu - \mu$ minimal mit dieser Eigenschaft ist. Laut Voraussetzung gilt $\mu < m$ oder $n < \nu$. Indem wir alle Indizierungen ggf. invertieren, gelte o. B. d. A. $n < \nu$.

Wir führen den Widerspruchsbeweis per Induktion über $\lambda := \nu - \mu \in \mathbb{N}_0$. Für $\nu - \mu = 0$ liegt u im normalen Abschluss des Elements r_ν in $\ker(\varphi) = K * \widetilde{H}$. Aus $n < \nu$ folgt $\omega_u < \omega_{r_\nu}$. Somit ist u ein Element von $K_{-\infty,\omega_{r_\nu}-1} = K_{-\infty,\omega_{r_\nu}} \ominus Z^+_{\omega_{r_\nu}}$. Wegen Lemma 4.27 dürfen wir mit Satz 4.36 folgern, dass u trivial in $\ker(\varphi)$ ist. Dies ist ein Widerspruch.

Für den Induktionsschritt ($\lambda \to \lambda + 1$) schreiben wir

$$\begin{aligned} & \ker(\varphi) \,/\, \langle\langle r_k \mid \mu \leqslant k \leqslant \nu \rangle\rangle \\ \cong\ & (K_{-\infty,\omega_{r_\nu}-1} * \widetilde{H}) \,/\, \langle\langle r_k \mid \mu \leqslant k \leqslant \nu - 1 \rangle\rangle \underset{K_{\alpha_{r_\nu},\omega_{r_\nu}-1} * \widetilde{H}}{*} (K_{\alpha_{r_\nu},\infty} * \widetilde{H}) \,/\, \langle\langle r_\nu \rangle\rangle. \end{aligned}$$

Dabei folgen die Einbettungen der amalgamierten Untergruppe $K_{\alpha_{r_\nu},\omega_{r_\nu}-1} * \widetilde{H}$ aus der Induktionsvoraussetzung. Da u trivial in $\ker(\varphi) \,/\, \langle\langle r_k \mid \mu \leqslant k \leqslant \nu \rangle\rangle$ ist und in der Untergruppe $K_{-\infty,\omega_{r_\nu}-1} * \widetilde{H}$ liegt, müsste u bereits trivial im linken Faktor $(K_{-\infty,\omega_{r_\nu}-1} * \widetilde{H}) \,/\, \langle\langle r_k \mid \mu \leqslant k \leqslant \nu - 1 \rangle\rangle$ sein. Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von $\nu - \mu$.

Für den Beweis von Satz 4.36 dürfen wir o. B. d. A. annehmen, dass r keine echte Potenz ist, da der normale Abschluss eines Elements s für alle $\ell \in \mathbb{Z}$ größer oder gleich dem normalen Abschluss von s^ℓ ist. Wegen Lemma 4.33 reicht es aus, den Fall zu betrachten, dass G das minimale Baumprodukt zu r und Z der Schnitt des minimalen Baumprodukts von r mit dem ursprünglichen Z ist. Zudem dürfen wir $r \in G$ voraussetzen, da der Fall $r \in (G * H) \backslash G$ bereits durch Satz 4.35 abgedeckt ist. Wir folgern $(G * H)/\langle\langle r \rangle\rangle = (G/\langle\langle r \rangle\rangle) * H$. Es ist daher ausreichend, die Einbettung von $G \ominus Z \ominus \{x\}$ in $G/\langle\langle r \rangle\rangle$ zu zeigen. Für $|Z| = 1$ setzen wir $A := Z$ und $y := x$. Andernfalls sei A eine äußere Blattgruppe von Z sowie G und wir wählen einen beliebigen Pfeilererzeuger y von A in G. Aufgrund der Vorüberlegung steht uns für den Induktionsbeweis von Satz 4.36 in der Induktionsvoraussetzung nicht nur die Aussage von Satz 4.36, sondern auch von Proposition 4.40 zur Verfügung. Zudem zeigt die Vorüberlegung, dass wir mit Satz 4.36 auch Proposition 4.40 beweisen.

Für den Induktionsanfang betrachten wir die Fälle $||r|| - |G| < -1$ und $\sigma = 2$. Für $\sigma = 2$ ist das Kantenwort von A zwangsläufig ein primitives Element und die gewünschte Einbettung folgt aus Lemma 4.34. Im Fall $||r|| - |G| < -1$ existiert eine Knotengruppe B von G, so dass $\widetilde{r}$ kein Basiselement von B enthält und B nicht an A grenzt. Man bemerke, dass B keine Blattgruppe von G, also insbesondere nicht A sein kann, da G das minimale Baumprodukt zu r ist. Wir betrachten die Zweigprodukte von G, welche entstehen, wenn man in G alle Erzeuger der Knotengruppe B samt den Kantenrelationen der mit B verbundenen Kanten löscht. Sei Z_A das Zweigprodukt, welches die Blattgruppe A enthält und R_A das freie Produkt der restlichen Zweigprodukte. Da B nicht mit A verbunden ist, gilt $|Z_A| \geqslant 2$. Wir bemerken, dass $r \in Z_A * R_A$ weder zu einem Element aus Z_A noch R_A konjugiert sein kann, denn G ist das minimale Baumprodukt zu r. Die in G zu B gehörigen Kantenrelationen seien $p_i = q_i$ $(i \in \mathcal{I})$ für eine Indexmenge $\mathcal{I}$ und $p_i \in B$. Indem wir Satz 4.35 auf das Baumprodukt $Z_A * R_A$ und das Element $r \in Z_A * R_A$ anwenden, erhalten wir die Einbettung von $(Z_A \ominus A \ominus \{y\}) * R_A$ in $(Z_A * R_A)/\langle\langle r \rangle\rangle$. Wenn man die freien Faktoren von R_A mit einbezieht, stammen alle q_i aus unterschiedlichen Faktoren von $(Z_A \ominus A \ominus \{y\}) * R_A$. Wir bemerken, dass alle Faktoren wegen Lemma 4.13 lokal indizierbar und daher insbesondere torsionsfrei sind. Somit bettet die von $\{q_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ erzeugte freie Gruppe Q in $(Z_A \ominus A \ominus \{y\}) * R_A$ und folglich auch in $(Z_A * R_A)/\langle\langle r \rangle\rangle$ ein. Laut Definition 4.7 bilden die Elemente p_i $(i \in \mathcal{I})$ eine verschobene Menge von B. Also ist $B/\langle\langle p_i \,|\, i \in \mathcal{I} \rangle\rangle$ eine gestaffelte Präsentation. Wegen Bemerkung 4.30 bettet die von $\{p_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ erzeugte freie Gruppe P in B ein. Es folgt

$$\begin{aligned} G \ominus A \ominus \{y\} &\cong B \underset{P \cong Q}{*} \big((Z_A \ominus A \ominus \{y\}) * R_A\big) \quad \text{sowie} \\ G/\langle\langle r \rangle\rangle &\cong (G \ominus A \ominus \{y\}) \underset{(Z_A \ominus A \ominus \{y\}) * R_A}{*} \big((Z_A * R_A)/\langle\langle r \rangle\rangle\big). \end{aligned}$$

Schließlich lesen wir die Einbettung von $G \ominus A \ominus \{y\}$, also insbesondere von $G \ominus Z \ominus \{x\}$,

in $G/\langle\langle r \rangle\rangle$ ab.

Für den Induktionsschritt betrachten wir die äußere Blattgruppe A und die zu A gehörige Kantenrelation $p = q$, wobei $p \in A$. Falls p nur ein Basiselement a von A enthält, so gilt wegen Definition 4.7 $p = a^{\pm 1}$ und die gewünschte Aussage folgt analog zum Induktionsanfang für $\sigma = 2$. Wir dürfen daher voraussetzen, dass p mindestens zwei Basiselemente a, b von A enthält. Mithilfe der Relation $a = \widetilde{a}^{p_b}$ gehen wir zum Wurzelbaumprodukt $\widetilde{G} := G *_{a=\widetilde{a}^{p_b}} \langle \widetilde{a} \rangle$ von G über, welches wegen $p \neq a^{\pm 1}$ ein Baumprodukt ist. Wir bemerken, dass die dadurch entstehende neue Darstellung $r \in \widetilde{G}$ wieder ein verdichtetes Konjugiertes gleicher Länge ist. Nun wenden wir den Blattisomorphismus von $\widetilde{G}$ an, der durch $\bar{b} := b\widetilde{a}^{r_a}$ oder $\bar{b} := \widetilde{a}^{r_a} b$ gegeben ist, wobei p_a die Exponentensumme $p \in G$ bzgl. a ist. Laut Bemerkung 4.26 ist das durch Algorithmus 4.24 gegebene verdichtete Konjugierte von r im Bild des Blattisomorphismus kürzer oder genauso lang wie die ursprüngliche Darstellung. Wir bezeichnen das Bild von $\widetilde{G}$ unter dem Blattisomorphismus und das neue verdichtete Konjugierte wieder mit $\widetilde{G}$ und r. Es gilt $p_{\widetilde{a}} = 0$ für die Exponentensumme $p_{\widetilde{a}}$ von $p \in \widetilde{G}$ bzgl. $\widetilde{a}$. Wegen Lemma 4.32 ist es ausreichend, die Einbettung von $G \ominus A \ominus \{y\} = \widetilde{G} \ominus A \ominus \{y\}$ in $\widetilde{G}/\langle\langle r \rangle\rangle$ zu zeigen. Für $r_{\widetilde{a}}$ unterscheiden wir zwei Fälle. Dazu bemerken wir, dass $r_{\widetilde{a}}$ wegen $p_{\widetilde{a}} = 0$ wohldefiniert ist, denn p ist das einzige Kantenwort, welches den Erzeuger $\widetilde{a}$ verwenden kann. Enthält p nicht den Erzeuger $\widetilde{a}$, so besitzt $\widetilde{G}$ eine echt kleinere Grenzlänge als G und die gewünschte Einbettung folgt laut Induktionsvoraussetzung. Wir dürfen somit annehmen, dass $\widetilde{a}$ in p enthalten ist.

Fall 1: Es gelte $r_{\widetilde{a}} \neq 0$ (d. h. $\widetilde{a}$ ist ein Ankererzeuger von $r \in \widetilde{G}$).
In diesem Fall verwenden wir den Homomorphismus φ von $\widetilde{G}$, welcher die von $\widetilde{a}$ verschiedenen Basiselemente von A auf das triviale Element und alle restlichen Erzeuger von $\widetilde{G}$ auf sich selbst abbildet. Es gilt

$$\Im(\varphi)/\langle\langle \varphi(r) \rangle\rangle \;\cong\; \big(\langle \widetilde{a} \rangle \;*\; \big((\widetilde{G} \ominus A)/\langle\langle q \rangle\rangle\big)\big)/\langle\langle \varphi(r) \rangle\rangle. \tag{4.10}$$

Wir bemerken, dass $(\widetilde{G} \ominus A)/\langle\langle q \rangle\rangle = \big((\widetilde{G} \ominus A \ominus \{y\}) * \langle y \mid \rangle\big)/\langle\langle q \rangle\rangle$ wegen Satz 2.12 eine lokal indizierbare Gruppe ist, da q laut Definition 4.7 zyklisch gekürzt und keine echte Potenz ist. Laut Satz 2.11 folgt die Einbettung von $\widetilde{G} \ominus A \ominus \{y\}$ in $(\widetilde{G} \ominus A)/\langle\langle q \rangle\rangle$. Wegen Satz 2.11, (4.10) und $r_{\widetilde{a}} \neq 0$ bettet zudem $((\widetilde{G} \ominus A)/\langle\langle q \rangle\rangle)$ in $\Im(\varphi)/\langle\langle \varphi(r) \rangle\rangle$ ein. Insgesamt erhalten wir somit die Einbettung von $\widetilde{G} \ominus A \ominus \{y\}$ in $\Im(\varphi)/\langle\langle \varphi(r) \rangle\rangle$. Schließlich folgt, dass $\widetilde{G} \ominus A \ominus \{y\}$, also insbesondere auch $\widetilde{G} \ominus Z \ominus \{x\}$, in $\widetilde{G}/\langle\langle r \rangle\rangle$ einbettet.

Fall 2: Es gelte $r_{\widetilde{a}} = 0$ (d. h. der Erzeuger $\widetilde{a}$ ist ein Reduktions- oder Fächererzeuger).
Wir betrachten den Blatthomomorphismus $\varphi\colon \widetilde{G} \to \mathbb{Z}$ mit $\varphi(\widetilde{a}) = 1$ und benutzen die Notationen aus Bemerkung 4.22 und Notation 4.38. Um zu zeigen, dass $\widetilde{G} \ominus A \ominus \{y\}$ in $\widetilde{G}/\langle\langle r \rangle\rangle$ einbettet, genügt es zu zeigen, dass die Kopie $(\widetilde{G} \ominus A \ominus \{y\})_0$ von $\widetilde{G} \ominus A \ominus \{y\}$ in $\ker(\varphi)/\langle\langle r_i \mid i \in \mathbb{Z} \rangle\rangle$ einbettet. Dazu sei C eine von A verschiedene äußere Blattgruppe

von $\widetilde{G}$. Wegen Lemma 4.27 und da wir $\widetilde{G}$ o. B. d. A. als minimales Baumprodukt von r vorausgesetzt haben, dürfen wir die Induktionsvoraussetzung für Proposition 4.40 mit C als äußerem Zweigprodukt Z anwenden. Jedes Element aus $(\widetilde{G} \ominus A \ominus \{y\})_0$, welches im normalen Abschluss der Elemente r_i ($i \in \mathbb{Z}$) enthalten ist, liegt bereits im normalen Abschluss eines einzigen Elements r_k, denn $(\widetilde{G} \ominus A \ominus \{y\})_0$ ist eine Untergruppe von $K_{0,0}$ (siehe Notation 4.38). Sei T das minimale Baumprodukt zu r_k in $\ker(\varphi)$. Laut Lemma 4.33 ist es ausreichend, die Einbettung von $T \cap (\widetilde{G} \ominus A \ominus \{y\})_0$ in $T/\langle\langle r_k \rangle\rangle$ zu zeigen. Wir sind in dem Fall, dass $\widetilde{a}$ ein Reduktions- oder Fächererzeuger ist. Ist $\widetilde{a}$ ein Reduktionserzeuger, gilt $T = K_{0,0}$ und wir setzen $D = \widetilde{A}$ sowie $d := y_0$, wobei $\widetilde{A}$ die Gruppe aus Bemerkung 4.22 und y_0 die Kopie von y in $(\widetilde{G} \ominus A)_0$ sei. Falls $\widetilde{a}$ ein Fächererzeuger ist, enthält T mindestens eine äußere Blattgruppe D, welche eine von $\widetilde{A}$ verschiedene Knotengruppe von $K_{j,j} \cap T$ für ein $j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ist. Wir bezeichnen einen beliebigen Pfeilererzeuger dieser äußeren Blattgruppen von T mit d.

Somit dürfen wir wegen Lemma 4.27 die Induktionsvoraussetzung für Satz 4.36 mit D als äußerem Zweigprodukt Z anwenden und erhalten die Einbettung von $T \ominus D \ominus \{d\}$, also insbesondere von $T \cap (\widetilde{G} \ominus A \ominus \{y\})_0$ in $T/\langle\langle r_k \rangle\rangle$.

□

4.4. Beweis des Hauptsatzes und Ausblick

Schließlich sind wir in der Lage, Hauptsatz 4.1 als Korollar aus Satz 4.36 zu folgern.

Beweis von Hauptsatz 4.1.

Sei p der Erzeuger der mit U identifizierten Untergruppe von A. Wir wählen eine Basis $\mathcal{A}$ von A, so dass p zyklisch gekürzt bzgl. dieser Basis ist. Die Möglichkeit einer solchen Wahl haben wir bereits im Anschluss an Beispiel 4.2 bemerkt. Da der Basiswechsel für A keinen Einfluss auf das Vorkommen des Erzeugers x in q oder r hat, bleiben alle Bedingungen von Hauptsatz 4.1 erhalten und wir gewinnen die zusätliche Bedingung, dass die Erzeuger der amalgamierten Untergruppe in ihren Faktoren zyklisch gekürzt sind. Laut Definition 4.7 ist G daher ein Baumprodukt der Größe 2. Wir bemerken, dass jedes Basiselement aus $\mathcal{X}$, also insbesondere auch x, ein Pfeilererzeuger zu A in G oder ein Eremiterzeuger ist. Zudem bemerken wir, dass jede Darstellung eines Konjugats von r in einer Normalform gerader Länge bzgl. des amalgamierten Produkts ein verdichtetes Konjugiertes ist. Im Fall, dass x ein Pfeilererzeuger ist, erhalten wir mit Satz 4.36 die gewünschte Einbettung von $\langle \mathcal{X}\backslash\{x\} \mid\rangle = G \ominus A \ominus \{x\}$ in $G/\langle\langle r \rangle\rangle$. Ist x ein Eremiterzeuger, so gilt

$$G = (A \underset{U}{*} \langle \mathcal{X}\backslash\{x\} \mid\rangle) * \langle x \mid\rangle \tag{4.11}$$

und x ist laut Voraussetzung von Hauptsatz 4.1 in r enthalten. Somit folgt die Einbettung von $\langle \mathcal{X}\backslash\{x\} \mid\rangle$ in $G/\langle\langle r \rangle\rangle$ als Kombination der Einbettung des Faktors $\langle \mathcal{X}\backslash\{x\} \mid\rangle$ in das

wegen Satz 2.12 lokal indizierbare amalgamierte Produkt $A \underset{U}{*} \langle \mathcal{X} \backslash \{x\} \mid \rangle$ und der durch Satz 2.11 sowie (4.11) gegebenen Einbettung von $A \underset{U}{*} \langle \mathcal{X} \backslash \{x\} \mid \rangle$ in $G/\langle\langle r \rangle\rangle$.

□

Die folgende Bemerkung gibt einen Ausblick auf Anwendungsmöglichkeiten der Einbettungssätze dieses Kapitels.

Bemerkung 4.41. Hauptsatz 4.1 und Satz 4.36 stellen nicht nur im Stil des Freiheitssatzes von W. Magnus Einbettungssätze für Baumprodukte dar, sondern bilden auch den ersten Schritt, um Frage 1 aus [BS08] zu beweisen, ob amalgamierte Produkte zweier freier Gruppen über eine maximale zyklische Gruppe in beiden Faktoren die Magnus-Eigenschaft besitzen. Die positive Beantwortung dieser Frage mithilfe eines Induktionsbeweises wie in Satz 4.36 scheitert zurzeit nicht an der Beantwortung von Frage 4.4, sondern am Auffinden eines geeigneten Homomorphismus φ für spezielle Kombinationen von Baumprodukten und Elementen r wie z. B. dem Baumprodukt G und dem Element $r \in G$ aus Frage 4.4. Es ist möglich, mithilfe des Untergruppensatzes von Kurosch zum Kern des Homomorphismus φ überzugehen, welcher b, y auf $1 \in \mathbb{Z}$ und alle anderen Erzeuger des amalgamierten Produkts G aus Frage 4.4 auf $0 \in \mathbb{Z}$ abbildet. Die Gruppe $\ker(\varphi)$ ist ein freies Produkt lokal indizierbarer Gruppen. Der normale Abschluss von r in G entspricht dem normalen Abschluss von Elementen $r_i := b^{-i} r b^i$ $(i \in \mathbb{Z})$ in $\ker(\varphi)$, allerdings erhält $\ker(\varphi)/\langle\langle r_i \mid i \in \mathbb{Z} \rangle\rangle$ nicht die Struktur einer gestaffelten Präsentation über lokal indizierbare Gruppen.

In der Diskussion von Hauptsatz 4.1 haben wir bereits die Frage gestellt, ob unter den Bedingungen von Hauptsatz 4.1 auch der gesamte Faktor X in $G/\langle\langle r \rangle\rangle$ einbettet. Das folgende Lemma beantwortet diese Frage für einen Spezialfall.

Lemma 4.42. *Sei $G := A *_U X$ ein amalgamiertes Produkt, wobei A, X freie Gruppen und U eine maximale zyklische Untergruppe beider Faktoren seien. Weiter sei r ein Element von G mit Länge 2 bzgl. der Normalform amalgamierter Produkte $A *_U X$. Dann betten die Faktoren A und X in $(A *_U X)/\langle\langle r \rangle\rangle$ ein.*

Beweis. Seien $p \in A$ und $q \in X$ die Erzeuger der zu U isomorphen Untergruppen. Wir wählen Basen $\mathcal{A}$ von A und $\mathcal{X}$ von X, so dass $p \in A$ und $q \in X$ zyklisch gekürzt sind (siehe Bemerkung 4.3). Dann ist G laut Definition 4.7 ein Baumprodukt.

Den Beweis dieses Lemmas führen wir als Induktionsbeweis über die Grenzlänge σ von G. Für den Induktionsanfang $|\sigma| = 2$ gilt $p \in \mathcal{A}$ und $q \in \mathcal{X}$. Da r eine Normalform von 2 bzgl. $A *_U X$ hat, existiert neben p noch mindestens ein weiteres Basiselement aus $\mathcal{A}$, welches in r enthalten ist. Wir identifizieren p mit q. Dann erhalten wir die Einbettung von X in $G/\langle\langle r \rangle\rangle$ durch Anwendung des Freiheitssatzes von Magnus (Satz 0.1). Auf analoge Weise erhalten wir auch die Einbettung von A in $G/\langle\langle r \rangle\rangle$.

Für den Induktionsschritt wählen wir - falls vorhanden - ein Basiselement $a \in \mathcal{A}$, welches mit einer Exponentensumme von 0 in p vorkommt. Falls kein solches Element existiert,

wählen wir beliebige Elemente $a, b \in \mathcal{A}$ und gehen mithilfe der Relation $a = \widetilde{a}^{p_b}$ zum Wurzelbaumprodukt $G' := G *_{a=\widetilde{a}^{p_b}} \langle \widetilde{a} \mid \rangle$ von G über, welches wegen $p \neq a^{\pm 1}$ ein Baumprodukt ist. Wir definieren $A' := A *_{a=\widetilde{a}^{p_b}} \langle \widetilde{a} \mid \rangle$. Nun wenden wir den Blattisomorphismus von G' an, der durch $\bar{b} := b\widetilde{a}^{-r_a}$ oder $\bar{b} := \widetilde{a}^{-r_a} b$ gegeben ist, wobei p_a die Exponentensumme $p \in G$ bzgl. a ist. Es gilt $p_{\widetilde{a}} = 0$. Auf die gleiche Art konstruieren wir einen Blatthomomorphismus für X mithilfe eines Erzeugers $\widetilde{x}$, welcher in q mit Exponentensumme 0 vorkommt. Das $\widetilde{a}$ und $\widetilde{x}$ enthaltende Wurzelbaumprodukt von G nennen wir G''. Wegen Lemma 4.32 ist es ausreichend, die Einbettung von X und A in G' oder G'' zu zeigen. Wir betrachten verschiedene Fälle für die Exponentensummen $r_{\widetilde{a}}$ und $r_{\widetilde{x}}$.

Zunächst zeigen wir, dass X in $(A *_U X)/\langle\langle r \rangle\rangle$ einbettet, falls $r_{\widetilde{a}} = 0$ gilt. Die Einbettung von A in $(A *_U X)/\langle\langle r \rangle\rangle$ für $r_{\widetilde{x}} = 0$ kann auf analoge Weise gezeigt werden.

Im Fall $r_{\widetilde{a}} = 0$ ist $\widetilde{a}$ ein Reduktionserzeuger von r. Wir betrachten den Kern des Homomorphismus $\varphi\colon G' \to \mathbb{Z}$, welcher $\widetilde{a}$ auf 1 und alle anderen Erzeuger auf 0 abbildet. Laut Lemma 2.23 entspricht der normale Abschluss von r in G' dem normalen Abschluss der Elemente $r_i = a^{-i} r a^i$ in $\ker(\varphi)$. Die Gruppe $\ker(\varphi)$ besteht wie in Bemerkung 4.22 beschrieben aus einer Knotengruppe $\widetilde{A}' := \langle c_i \mid c \in \mathcal{A}', c \neq a, i \in \mathbb{Z} \}$ und abzählbar unendlich vielen Kopien X_i ($i \in \mathbb{Z}$) von X, welche jeweils durch die Kantenrelation $p_i = q_i$ mit $\widetilde{A}'$ verbunden sind, wobei $p_i := a^{-i} p a^i$ und $q_i := a^{-i} q_i a^i$. Es bleibt, die Einbettung von X_0 in $\ker(\varphi)/\langle\langle r_i \mid i \in \mathbb{Z} \rangle\rangle$ zu beweisen. Da r nur ein Stück aus A' enthält, ist $\widetilde{a}$ ein Reduktionserzeuger von r. Es folgt, dass $\widetilde{A}' *_{p_i = q_i} X_i$ das minimale Baumprodukt von r_i in $\ker(\varphi)$ ist. Wir wenden Proposition 4.40 für die gestaffelte Präsentation $\ker(\varphi)/\langle\langle r_i \mid i \in \mathbb{Z} \rangle\rangle$ über den Blattgruppen X_i ($i \in \mathbb{Z}$) an, um zu folgern, dass X_0 genau dann in $\ker(\varphi)/\langle\langle r_i \mid i \in \mathbb{Z} \rangle\rangle$ einbettet, wenn X_0 in $\ker(\varphi)/\langle\langle r_0 \rangle\rangle$ einbettet. Laut Lemma 4.33 genügt es, die Einbettung von X_0 in $(\widetilde{A}' *_{p_0 = q_0} X_0)/\langle\langle r_0 \rangle\rangle$ zu zeigen. Wegen Bemerkung 4.23 gilt $|p_0| < |p|$. Daher folgt die gewünschte Einbettung nach Induktionsvoraussetzung. Schließlich erhalten wir die Einbettung von X in $G'/\langle\langle r \rangle\rangle$.

Im Fall $r_{\widetilde{a}} \neq 0$ gelte o. B. d. A. $r = vw$ mit $v \in A$ und $w \in X$. Wegen $p_{\widetilde{a}} = 0$ und $v_{\widetilde{a}} \neq 0$ kann die von p und v erzeugte Untergruppe von A keine zyklische Gruppe sein. Daher ist $\langle p, v \rangle_A$ die freie Gruppe $F(p, v)$ mit Basis $\{p, v\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle für $r_{\widetilde{x}}$.

Fall 1: Es gelte $r_{\widetilde{x}} = 0$.
In diesem Fall bettet A, also insbesondere auch $\langle p, v \rangle_A$, aufgrund der Vorüberlegung in $(A *_U X)/\langle\langle r \rangle\rangle$ ein. Um die Einbettung von X zu zeigen, schreiben wir

$$G/\langle\langle r \rangle\rangle \quad \cong \quad A \underset{F(p,v)}{*} \big((F(p, v) \underset{p=q}{*} X)/\langle\langle r \rangle\rangle \big).$$

Somit genügt es, die Einbettung von X in $(F(p, v) \underset{p=q}{*} X)/\langle\langle r \rangle\rangle$ zu beweisen. Dazu bemerken wir, dass

$$F(p, v) \underset{p=q}{*} X \quad = \quad F(v) * X$$

eine freie Gruppe ist. Da r das Basiselement v benutzt, folgt die Einbettung von X aus dem Freiheitssatz von Magnus (Satz 0.1).

Fall 2: Es gelte $r_{\tilde{x}} \neq 0$.
Wegen $q_{\tilde{x}} = 0$ und $w_{\tilde{x}} \neq 0$ kann die von q und w erzeugte Untergruppe von X keine zyklische Gruppe sein. Daher ist $\langle q, w\rangle_X \subset X$ eine freie Gruppe mit Basis $\{p, w\}$. Wir schreiben

$$F(p,v) * F(w) \quad = \quad F(p,v) \underset{p=q}{*} F(q,w) \quad = \quad F(v) * F(q,w).$$

Da r die Erzeuger w und v enthält, betten $F(p,v)$ und $F(q,w)$ in $(F(p,v) \underset{p=q}{*} F(q,w))/\langle\langle r\rangle\rangle$ ein. Es folgt

$$G/\langle\langle r\rangle\rangle \quad \cong \quad A \underset{F(p,v)}{*} \Big((F(p,v) \underset{p=q}{*} F(q,w))/\langle\langle r\rangle\rangle\Big) \underset{F(q,w)}{*} X.$$

Wir lesen die Einbettungen von A und X in $G/\langle\langle r\rangle\rangle$ ab.

□

5. Seifert-Mannigfaltigkeiten und die Magnus-Eigenschaft

In diesem Kapitel möchten wir Fundamentalgruppen bestimmter Seifert-Mannigfaltigkeiten auf Magnus-Eigenschaft überprüfen. Dazu verwenden wir rein algebraische und gruppentheoretische Methoden wie z. B. die Theorie kleiner Kürzungen (engl. „small cancellation theory“, siehe Kapitel D).

Laut [Orl72, S. 91] besitzt jede Fundamentalgruppe G einer orientierbaren Seifert-Mannigfaltigkeit eine Präsentation der Form

$$\begin{aligned} G \;\cong\; & \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, q_1, \ldots, q_r, h \mid a_i h a_i^{-1} = h^{\epsilon_i},\ b_i h b_i^{-1} = h^{\epsilon_i},\ q_j h q_j^{-1} = h, \\ & q_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} = 1,\ q_1 \cdots q_r [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = h^b \ \ (1 \leqslant i \leqslant g,\ 1 \leqslant j \leqslant r) \rangle, \end{aligned} \tag{5.1}$$

wobei $g, r \in \mathbb{N}_0$ gilt und (α_j, β_j) $(1 \leqslant j \leqslant r)$ Paare zueinander koprimer natürlicher Zahlen sind und zudem eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt sei:

(1) Es gilt $\epsilon_i = 1$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots g\}$, $0 < \beta_j < \alpha_j$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots r\}$ und $b \in \mathbb{Z}$.

(2) Es gilt $g \geqslant 1$, $\epsilon_i = -1$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots g\}$, $0 < \beta_j \leqslant \frac{\alpha_j}{2}$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots r\}$ und $b \in \{0, 1\}$. (Falls ein $j \in \{1, 2, \ldots r\}$ mit $\alpha_j = 2$ existiert, so gilt $b = 0$.)

In Unterabschnitt 5.2.2, Fall 4.1.3 bemerken wir, dass die Gruppe G für

$$\begin{aligned} & (g, r, \{\alpha_i \mid 1 \leqslant i \leqslant r\}, \{\beta_i \mid 1 \leqslant i \leqslant r\}, b) \\ \in\ & \{(0, 3, \{3, 3, 3\}, \{1, 1, 1\}, -1),\ (0, 3, \{3, 3, 3\}, \{2, 2, 2\}, -2)\} \end{aligned} \tag{5.2}$$

isomorph zur Gruppe $\langle x, y \mid x^3 = y^3,\ (xy)^3 = x^6 \rangle$ ist. Wir stellen folgende Vermutung auf:

Vermutung 5.1. *Die Gruppe*

$$L \;=\; \langle x, y \mid x^3 = y^3,\ (xy)^3 = x^6 \rangle$$

besitzt die Magnus-Eigenschaft.

Im vorliegenden Kapitel untersuchen wir abgesehen von der Gruppe L aus Vermutung 5.1 alle Fundamentalgruppen von orientierbaren Seifert-Mannigfaltigkeiten mit $r \neq 0$ auf Magnus-Eigenschaft. Das Ergebnis ist folgender Satz, welcher insbesondere die Aussage enthält, dass G wie in (5.1) für $g, r \geqslant 1$ oder $r \geqslant 4$ nicht die Magnus-Eigenschaft besitzt.

Satz 5.2. *Sei G die Fundamentalgruppe einer orientierbaren Seifert-Mannigfaltigkeit mit $r \neq 0$ (siehe (5.1)), deren Invarianten nicht (5.2) erfüllen (d. h. G ist nicht zur Gruppe L aus Vermutung 5.1 isomorph). Wir definieren*

$$\sigma := \mathrm{ggT}(|\alpha_1|, |\alpha_2|), \quad \tau := \mathrm{ggT}(|\beta_1|, |b\alpha_2 + \beta_2|) \quad \textit{und} \quad \Delta := \frac{1}{\sigma\tau}\left|\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\alpha_2 & b\alpha_2 + \beta_2 \end{pmatrix}\right|.$$

Zudem wählen wir zwei Elemente $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $\sigma = p\alpha_1 - q\alpha_2$ und definieren $\zeta := \mathrm{ggT}(|p\beta_1 + q(b\alpha_2 + \beta_2)|, \Delta)$. Die Gruppe G besitzt genau dann die Magnus-Eigenschaft, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) Es gelte $g = 0$, $r = 1$ und $\beta_1 + b\alpha_1 \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6\}$.

(ii) Es gelte $g = 0$, $r = 2$ und eine der folgenden zwei Bedingungen.

(ii.1) Es gelte $p\beta_1 + q(b\alpha_2 + \beta_2) = 0 \mod \tau\Delta$. Zudem gelte $\sigma, \tau \in \{1, 2, 3, 6\}$ oder $\sigma, \tau \in \{1, 2, 4\}$.

(ii.2) Es gelte $p\beta_1 + q(b\alpha_2 + \beta_2) \neq 0 \mod \tau\Delta$ zusammen mit einer der folgenden vier Bedingungen:

(ii.2.1) $\Delta = 0$ und $\mathrm{ggT}(\sigma, \zeta\tau) \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$

(ii.2.2) $\sigma = 1$ mit $\Delta\tau \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ oder $\zeta\tau = 1$ mit $\frac{\Delta}{\zeta}\sigma \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$

(ii.2.3) $\Delta = \zeta$ mit $\frac{\Delta}{\zeta}\sigma, \Delta\tau \in \{1, 2, 3, 6\}$ oder mit $\frac{\Delta}{\zeta}\sigma, \Delta\tau \in \{1, 2, 4\}$

(ii.2.4) $(\frac{\Delta}{\zeta}, \frac{\Delta}{\zeta}\sigma, \Delta\tau) \in \{(2, 4, 4), (2, 6, 6), (3, 6, 6)\}$

(iii) Es gelte $g = 0$ und $r = 3$ zusammen mit einer der folgenden drei Bedingungen:

(iii.1) $\alpha_i = 2$, $\beta_i = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ und $b \in \{-3, -2, -1, 0\}$

(iii.2) $\alpha_i = 2$, $\beta_i = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant 2)$, $\alpha_3 = 3$, $\beta_3 = 2$ und $b = -2$

(iii.3) $\alpha_i = 2$, $\beta_i = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant 2)$, $\alpha_3 = 3$, $\beta_3 = 1$ und $b = -1$

Schließlich möchten wir darauf hinweisen, dass wir in Abschnitt 3.8.2 die Magnus-Eigenschaft von Fundamentalgruppen einiger orientierbarer Seifert-Mannigfaltigkeiten mit $r = 0$ beweisen.

5.1. Vorbereitungen

In diesem Abschnitt beweisen wir allgemeine Hilfsaussagen und führen Notationen ein, die wir für den Beweis von Satz 5.2 nutzen möchten.

Notation 5.3. Für $k, \ell \in \mathbb{N}$ schreiben wir

$$\mathbb{Z} \underset{a^k = b^\ell}{*} \mathbb{Z} := \langle a, b \mid a^k = b^\ell \rangle = \langle a \mid\rangle \underset{a^k = b^\ell}{*} \langle b \mid\rangle \quad \text{und}$$
$$\mathbb{Z} \underset{a^k = b^\ell}{\times} \mathbb{Z} := \langle a, b \mid [a, b] = 1,\, a^k = b^\ell \rangle = \langle a \mid\rangle \underset{a^k = b^\ell}{\times} \langle b \mid\rangle.$$

Laut [Bog05] besitzt unter den Gruppen $\mathbb{Z} *_{a^k=b^\ell} \mathbb{Z}$ (k, $\ell \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$) ausschließlich die Gruppe $\mathbb{Z} *_{a^2=b^2} \mathbb{Z}$ die Magnus-Eigenschaft. Analog zu dieser Aussage formulieren wir folgendes Lemma.

Lemma 5.4. *Eine Gruppe $\mathbb{Z} \times_{a^k=b^\ell} \mathbb{Z}$ mit k, $\ell \in \mathbb{N}$ besitzt genau dann die Magnus-Eigenschaft, wenn* $\mathrm{ggT}(k,\ell)$ *in der Menge* $\{1,2,3,4,6\}$ *enthalten ist.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass die Gruppe $\mathbb{Z} \times_{a^k=b^\ell} \mathbb{Z}$ im Fall $k = 1$ oder $\ell = 1$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist und daher die Magnus-Eigenschaft besitzt.

Seien also k und ℓ zwei beliebige Elemente aus $\mathbb{N}\backslash\{1\}$. Jedes Element

$$w \in G := \langle\, a, b \mid [a,b] = 1,\, a^k = b^\ell \,\rangle \quad \cong \quad \mathbb{Z} \times_{a^k=b^\ell} \mathbb{Z}$$

besitzt eine eindeutige Darstellung der Form $w = a^m b^n$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \{0, 1, \ldots, \ell - 1\}$. Wir nennen diese Form *Normalform* von w bzgl. G.

Sei w ein beliebiges Torsionselement von G mit Normalform $w = a^m b^n$ und Ordnung $p \in \mathbb{N}$. Wir betrachten w als Element von $H := \langle a \,|\rangle \times \langle b \,|\rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dann folgt in H

$$a^{pm} b^{pn} \;=\; (a^m b^n)^p \;=\; w^p \;=\; (a^{-k} b^\ell)^q \;=\; a^{-qk} b^{q\ell} \tag{5.3}$$

für ein $q \in \mathbb{N}$. Die Elemente p und q sind teilerfremd, denn p ist die Ordnung von $w \in G$. Somit ist p ein Teiler von $\mathrm{ggT}(k,\ell)$. Umgekehrt erhalten wir für jeden Teiler d von $\mathrm{ggT}(k,\ell)$ mit $w = a^{-\frac{k}{d}} b^{\frac{\ell}{d}}$ ein Element der Ordnung d in G.

Wir betrachten zwei Elemente r, $s \in G := \mathbb{Z} \times_{a^k=b^\ell} \mathbb{Z}$ mit demselben normalen Abschluss in G. Falls r und damit auch s keine Torsionselemente sind, gilt $\{r^i \mid i \in \mathbb{Z}\} = \{s^j \mid j \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ und wir erhalten $r = s^{\pm 1}$. Es bleibt somit der Fall zu betrachten, dass r und damit auch s von endlicher Ordnung $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sind. Laut Vorbemerkung ist p ein Teiler von $\mathrm{ggT}(k,\ell)$. Es gilt $\langle r \rangle_G = \langle s \rangle_G \cong \mathbb{Z}_p$, wobei $\mathbb{Z}_p$ die zyklische Gruppe der Ordnung p ist. Wegen Lemma A.2 ist der Erzeuger von $\mathbb{Z}_p$ modulo Invertierung genau dann eindeutig bestimmt, wenn $p \in \{1,2,3,4,6\}$ gilt. Für diese Wahlen von p folgt also $r \sim s^{\pm 1}$. In den anderen Fällen können wir Elemente r, s mit $\langle r \rangle_G = \langle s \rangle_G \cong \mathbb{Z}_p$ und $r \not\sim s^{\pm 1}$ finden. Schließlich besitzt G genau dann die Magnus-Eigenschaft, wenn alle Teiler von $\mathrm{ggT}(k,\ell)$ in $\{1,2,3,4,6\}$ enthalten sind.

□

Das nächste Hilfslemma ist eine kleine Folgerung der Aussage, dass die Automorphismengruppe von $\mathbb{Z}_m$ ($m \in \mathbb{N}$) isomorph zu $\mathbb{Z}_m^*$ ist (siehe z. B. [Rob96, Section 1.5]). Zur Vollständigkeit beweisen wir dieses Hilfslemma ausführlich.

Lemma 5.5. *Sei $\mathbb{Z}_m$ die zyklische Gruppe der Ordnung $m \in \mathbb{N}$. Weiter seien $a, b \in \mathbb{Z}_m$ zwei Elemente derselben Ordnung k. Dann existiert ein Automorphismus φ von $\mathbb{Z}_m$ mit $\varphi(a) = b$.*

Beweis. O. B. d. A. dürfen wir voraussetzen, dass a das kleinste Element aus $\{1, 2, \ldots, m\}$ mit Ordnung k in $\mathbb{Z}_m$ ist, d. h. $a = \frac{m}{k}$ gilt. Den Übergang zwischen zwei beliebigen Elementen a', b' der Ordnung k erhalten wir dann als Verknüpfung zweier Automorphismen, wobei der erste a' auf $\frac{m}{k}$ und der zweite $\frac{m}{k}$ auf b' abbilde. Es ist klar, dass für zwei Elemente a, b derselben Ordnung $\mathrm{ggT}(a, m) = \mathrm{ggT}(b, m)$ gilt. Laut Voraussetzung gilt zudem $\mathrm{ggT}(a, m) = a$ und $b = \widetilde{b}a$ für ein $\widetilde{b} \in \mathbb{Z}_m$. Wir benutzen, dass $\mathbb{Z}_m^*$ isomorph zur Automorphismengruppe von $\mathbb{Z}_m$ ist und $\mathbb{Z}_m^* = \{\ell \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{ggT}(\ell, m) = 1\}$ gilt. Gesucht ist ein Element $p \in \mathbb{Z}_m^*$ mit

$$p \cdot a \quad = \quad \widetilde{b} \cdot a \quad \mod \ m, \tag{5.4}$$

denn dann ist der gesuchte Automorphismus durch $\varphi(1) = p$ gegeben. Im Fall $\widetilde{b} \in \mathbb{Z}_m^*$ setzen wir $p = \widetilde{b}$. Andernfalls sei q das Produkt aller Primteiler von m, welche weder in k noch in $\widetilde{b}$ enthalten sind. Wir setzen $p := kq + \widetilde{b}$. Aus $\mathrm{ggT}(b, m) = a$ folgt die Gleichung $\mathrm{ggT}(\widetilde{b}, k) = \mathrm{ggT}(\widetilde{b}, \frac{m}{a}) = 1$. Daher ist jeder Primteiler von m in genau einem Summanden von p enthalten. Somit gilt $\mathrm{ggT}(p, m) = 1$ und folglich $p \in \mathbb{Z}_m^*$. Es bleibt zu zeigen, dass unsere Wahl von p die Gleichung (5.4) erfüllt. Dazu schreiben wir:

$$p \cdot a \quad = \quad (kq + \widetilde{b}) \cdot a \quad = \quad (\frac{m}{a}q + \widetilde{b}) \cdot a \quad = \quad qm + \widetilde{b} \cdot a \quad = \quad \widetilde{b} \cdot a \quad \mod \ m$$

□

Lemma 5.5 motiviert folgende Notation.

Notation 5.6. Seien m, n natürliche Zahlen, k ein Element der Ordnung p in $\mathbb{Z}_m$ und ℓ ein Element der Ordnung p in $\mathbb{Z}_m$. Dann gilt wegen Lemma 5.5

$$\langle a, b \mid a^m = 1,\, b^n = 1,\, a^k = b^\ell \rangle \quad \cong \quad \langle a, b \mid a^m = 1,\, b^n = 1,\, a^{\frac{m}{p}} = b^{\frac{n}{p}} \rangle.$$

Wir bezeichnen einen Repräsentanten dieser Isomorphieklasse von Gruppen mit $\mathbb{Z}_m *_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_n$. Analog bezeichnen wir einen Repräsentanten der Isomorphieklasse

$$\langle a, b \mid [a, b] = 1,\, a^m = 1,\, b^n = 1,\, a^k = b^\ell \rangle \cong \langle a, b \mid [a, b] = 1,\, a^m = 1,\, b^n = 1,\, a^{\frac{m}{p}} = b^{\frac{n}{p}} \rangle$$

mit $\mathbb{Z}_m \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_n$ und nennen diese Konstruktion *direktes Produkt mit Amalgamierung.*

Laut [Fel15] besitzen unter den Gruppen $\mathbb{Z}_m *_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_n$ $(m, n \in \mathbb{Z}$ mit $p \mid m$ und $p \mid n)$ ausschließlich die Gruppen

$$\mathbb{Z}_4 \underset{\mathbb{Z}_2}{*} \mathbb{Z}_4 \quad \text{und} \quad \mathbb{Z}_6 \underset{\mathbb{Z}_3}{*} \mathbb{Z}_6$$

die Magnus-Eigenschaft. Analog dazu formulieren wir folgende Aussage.

Lemma 5.7. *Die Gruppe $G := \mathbb{Z}_m \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_n$ $(m, n \in \mathbb{N},\, p \in \mathbb{N}$ mit $p \mid m$ und $p \mid n)$ besitzt genau dann die Magnus-Eigenschaft, falls eine der folgenden Bedingungen gilt:*

(1) $p = m$ *mit* $n \in \{1,2,3,4,6\}$ $(G \cong \mathbb{Z}_n)$ *oder* $p = n$ *mit* $m \in \{1,2,3,4,6\}$ $(G \cong \mathbb{Z}_m)$

(2) $p = 1$ *mit* $m,n \in \{1,2,3,6\}$ *oder mit* $m,n \in \{1,2,4\}$ $(G \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n)$

(3) $(p,m,n) \in \{(2,4,4),\ (2,6,6),\ (3,6,6)\}$ $(G \cong \mathbb{Z}_4 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_6 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$ *oder* $\mathbb{Z}_6 \times_{\mathbb{Z}_3} \mathbb{Z}_6)$

Beweis. Wir arbeiten mit der Präsentation

$$G := \mathbb{Z}_m \underset{\mathbb{Z}_p}{\times} \mathbb{Z}_n \quad \cong \quad \langle a,b \mid [a,b],\ a^m = 1,\ b^n = 1,\ a^{\frac{m}{p}} = b^{\frac{n}{p}} \rangle.$$

Die Gruppe $\mathbb{Z}_\ell$ $(\ell \in \mathbb{N})$ besitzt genau dann die Magnus-Eigenschaft, wenn ℓ ein Element von $\{1,2,3,4,6\}$ ist (siehe Lemma A.2). Falls also entweder m oder n nicht in $\{1,2,3,4,6\}$ liegen, können wir unterschiedliche, nicht zueinander inverse a- oder b-Potenzen mit demselben normalen Abschluss in $\mathbb{Z}_m \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_n$ finden. Da die Gruppe G abelsch ist, können diese nicht zueinander oder ihren Inversen konjugiert sein. Somit besitzt G nicht die Magnus-Eigenschaft. Sei also $m,n \in \{1,2,3,4,6\}$. Im Fall $p = m$ bzw. $p = n$ folgt $G = \mathbb{Z}_n$ bzw. $G = \mathbb{Z}_m$ für $m,n \in \{1,2,3,4,6\}$ und G besitzt die Magnus-Eigenschaft. Für $p = 1$ besitzt wegen Satz A.5 die Gruppe G genau dann die Magnus-Eigenschaft, wenn $m,n \in \{1,2,3,6\}$ oder $m,n \in \{1,2,4\}$ gilt. Schließlich bleiben noch folgende Fälle zu betrachten:

$$\textbf{(i)}\ \mathbb{Z}_4 \underset{\mathbb{Z}_2}{\times} \mathbb{Z}_4, \quad \textbf{(ii)}\ \mathbb{Z}_4 \underset{\mathbb{Z}_2}{\times} \mathbb{Z}_6, \quad \textbf{(iii)}\ \mathbb{Z}_6 \underset{\mathbb{Z}_2}{\times} \mathbb{Z}_6 \quad \text{und} \quad \textbf{(iv)}\ \mathbb{Z}_6 \underset{\mathbb{Z}_3}{\times} \mathbb{Z}_6$$

Zu (i): Die Gruppe $\mathbb{Z}_4 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_4$ enthält acht Elemente und besitzt die Magnus-Eigenschaft: Um dies zu sehen, bestimmen wir für jedes Element den normalen Abschluss. Dabei verwenden wir die Normalform $w = a^\alpha b^\beta$ $(a \in \{0,1,2,3\},\ b \in \{0,1\})$:

$$\langle\langle a \rangle\rangle = \langle\langle a^3 \rangle\rangle = \{1, a, a^2, a^3\}, \quad \langle\langle a^2 \rangle\rangle = \{1, a^2\}, \quad \langle\langle ab \rangle\rangle = \{1, ab\},$$

$$\langle\langle a^2 b \rangle\rangle = \langle\langle b \rangle\rangle = \{1, a^2 b, a^2, b\}, \quad \langle\langle a^3 b \rangle\rangle = \{1, a^3 b\}$$

Zu (ii): In $\mathbb{Z}_4 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$ gilt $(ab)^7 = a^3 b$ und $(a^3 b)^7 = ab$. Da ab und $a^3 b$ nicht invers zueinander sind, besitzt $\mathbb{Z}_4 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$ nicht die Magnus-Eigenschaft.

Zu (iii): Die Gruppe $\mathbb{Z}_6 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$ enthält 18 Elemente. Wir bestimmen für jedes Element den normalen Abschluss:

$$\langle\langle a \rangle\rangle = \langle\langle a^5 \rangle\rangle = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}, \quad \langle\langle a^2 \rangle\rangle = \langle\langle a^4 \rangle\rangle = \{1, a^2, a^4\}, \quad \langle\langle a^3 \rangle\rangle = \{1, a^3\},$$

$$\langle\langle ab \rangle\rangle = \langle\langle a^2 b^2 \rangle\rangle = \{1, ab, a^2 b^2\}, \quad \langle\langle a^2 b \rangle\rangle = \langle\langle ab^2 \rangle\rangle = \{1, a^2 b, a^4 b^2, a^3, a^5 b, ab^2\},$$

$$\langle\langle a^3 b \rangle\rangle = \langle\langle b^2 \rangle\rangle = \{1, a^3 b, b^2\}, \quad \langle\langle a^4 b \rangle\rangle = \langle\langle a^5 b^2 \rangle\rangle = \{1, a^4 b, a^2 b^2, a^3, ab, a^5 b^2\},$$

$$\langle\langle a^5 b \rangle\rangle = \langle\langle a^4 b^2 \rangle\rangle = \{1, a^5 b, a^4 b^2\}, \quad \langle\langle a^3 b^2 \rangle\rangle = \langle\langle b \rangle\rangle = \{1, a^3 b^2, a^3 b, a^3, b^2, b\},$$

Wir lesen ab, dass $\mathbb{Z}_6 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$ die Magnus-Eigenschaft besitzt.

Zu (iv): Die Gruppe $\mathbb{Z}_6 \times_{\mathbb{Z}_3} \mathbb{Z}_6$ enthält 12 Elemente. Es gilt:

$$\langle\!\langle a \rangle\!\rangle = \langle\!\langle a^5 \rangle\!\rangle = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}, \quad \langle\!\langle a^2 \rangle\!\rangle = \langle\!\langle a^4 \rangle\!\rangle = \{1, a^2, a^4\}, \quad \langle\!\langle a^3 \rangle\!\rangle = \{1, a^3\},$$

$$\langle\!\langle ab \rangle\!\rangle = \langle\!\langle a^3 b \rangle\!\rangle = \{1, ab, a^4, a^5 b, a^2, a^3 b\}, \quad \langle\!\langle a^2 b \rangle\!\rangle = \{1, a^2 b\},$$

$$\langle\!\langle a^4 b \rangle\!\rangle = \langle\!\langle b \rangle\!\rangle = \{1, a^4 b, a^4, a^2 b, a^2, b\}, \quad \langle\!\langle a^5 b \rangle\!\rangle = \{1, a^5 b\}$$

Wir lesen ab, dass $\mathbb{Z}_6 \times_{\mathbb{Z}_3} \mathbb{Z}_6$ die Magnus-Eigenschaft besitzt.

□

Das folgende Lemma stellt Gruppen einer bestimmten Klasse, welche einige Fundamentalgruppen von Seifert-Mannigfaltigkeiten enthält, als direkte Produkte mit Amalgamierung dar.

Lemma 5.8. *Sei G eine Gruppe mit Präsentation*

$$\langle x, y \mid [x, y] = 1,\ x^\alpha y^\beta = 1,\ x^\gamma y^\delta = 1 \rangle \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}).$$

Wir definieren

$$\sigma := \mathrm{ggT}(|\alpha|, |\gamma|), \quad \tau := \mathrm{ggT}(|\beta|, |\delta|) \quad \textit{und} \quad \Delta := \frac{1}{\sigma\tau} \left| \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right|.$$

Zudem wählen wir zwei Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $\sigma = p\alpha + q\gamma$. Im Fall $p\beta + q\delta = 0 \mod \tau\Delta$ gilt:

$$G \quad \cong \quad \langle x, y \mid [x, y] = 1,\ x^\sigma = 1,\ y^\tau = 1 \rangle \quad \cong \quad \mathbb{Z}_\sigma \times \mathbb{Z}_\tau$$

Für $p\beta + q\delta \neq 0 \mod \tau\Delta$ gilt mit $\zeta := \mathrm{ggT}(|p\beta + q\delta|, \Delta)$:

$$G \ \cong\ \langle x, \widetilde{y} \mid [x, \widetilde{y}],\ x^{\frac{\Delta}{\zeta}\sigma} = 1,\ \widetilde{y}^{\Delta\tau} = 1,\ x^\sigma = \widetilde{y}^{\zeta\tau} \rangle \ \cong\ \begin{cases} \mathbb{Z}_{\frac{\Delta}{\zeta}\sigma} \times_{\mathbb{Z}_{\frac{\Delta}{\zeta}}} \mathbb{Z}_{\Delta\tau} & \textit{für } \Delta \neq 0 \\ \mathbb{Z} \times_{x^\sigma = \widetilde{y}^{\zeta\tau}} \mathbb{Z} & \textit{für } \Delta = 0 \end{cases}$$

Beweis. Wir setzen

$$\widetilde{\alpha} := \frac{\alpha}{\sigma}, \quad \widetilde{\beta} := \frac{\beta}{\tau}, \quad \widetilde{\gamma} := \frac{\gamma}{\sigma} \quad \text{und} \quad \widetilde{\delta} := \frac{\delta}{\tau}.$$

Dann gilt $\Delta = |\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta} - \widetilde{\beta}\widetilde{\gamma}|$. Als Erstes zeigen wir, dass $p\beta + q\delta \mod \tau\Delta$ unabhängig von der Wahl der Elemente p, q ist. Sei dazu $(p + p', q + q')$ ein von (p, q) verschiedenes Paar ganzer Zahlen, für welches $\sigma = (p + p')\alpha + (q + q')\gamma$ gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} p'\alpha + q'\gamma = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sigma(p'\widetilde{\alpha} + q'\widetilde{\gamma}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p'\widetilde{\alpha} + q'\widetilde{\gamma} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad p' = -k\widetilde{\gamma} \ \text{ und } \ q' = k\widetilde{\alpha} \ \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir

$$p'\beta + q'\delta \;=\; -k\widetilde{\gamma}\tau\widetilde{\beta} + k\widetilde{\alpha}\tau\delta \;=\; k\tau(\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta} - \widetilde{\beta}\widetilde{\gamma}) \;=\; k\tau\Delta \;=\; 0 \mod \tau\Delta.$$

Als Nächstes betrachten wir den Fall $p\beta + q\delta = 0 \mod \tau\Delta$. Indem wir p, q und damit $k \in \mathbb{Z}$ aus der Vorüberlegung geeignet wählen, können wir o. B. d. A. $p\beta + q\delta = 0$ annehmen. Dann gilt

$$x^\sigma \;=\; x^{p\alpha+q\gamma} \;=\; y^{-(p\beta+q\delta)} \;=\; 1$$

und somit

$$\begin{aligned}
&\langle x, y \mid [x,y] = 1,\ x^\alpha y^\beta = 1,\ x^\gamma y^\delta = 1\rangle \\
=\;& \langle x, y \mid [x,y] = 1,\ x^\alpha y^\beta = 1,\ x^\gamma y^\delta = 1,\ x^\sigma = 1\rangle \\
=\;& \langle x, y \mid [x,y] = 1,\ y^\beta = 1,\ y^\delta = 1,\ x^\sigma = 1\rangle \;=\; \langle x, y \mid [x,y] = 1,\ y^\tau = 1,\ x^\sigma = 1\rangle.
\end{aligned}$$

Für den Fall $p\beta + q\delta \neq 0 \mod \tau\Delta$ beweisen wir zunächst

$$G \cong \langle x, y \mid [x,y] = 1,\ y^{\Delta\tau} = 1,\ x^\sigma = y^{-(p\widetilde{\beta}+q\widetilde{\delta})\tau}\rangle,$$

indem wir die Relationenmengen $\mathcal{M}_1 := \{[x,y] = 1,\ x^\alpha y^\beta = 1,\ x^\gamma y^\delta = 1\}$ und $\mathcal{M}_2 = \{[x,y] = 1,\ y^{\Delta\tau} = 1,\ x^\sigma = y^{-(p\widetilde{\beta}+q\widetilde{\delta})\tau}\}$ ineinander überführen. Mithilfe der Relationen aus $\mathcal{M}_1$ schreiben wir dazu:

$$\begin{aligned}
& x^\gamma y^\delta = 1 \;\Leftrightarrow\; y^{\widetilde{\delta}\tau} = x^{-\widetilde{\gamma}\sigma} \;\Rightarrow\; y^{\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\tau} = x^{-\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}\sigma} \;\Leftrightarrow\; y^{\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\tau} = y^{\widetilde{\beta}\widetilde{\gamma}\tau} \\
\Leftrightarrow\;& y^{(\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}-\widetilde{\beta}\widetilde{\gamma})\tau} = 1 \;\Leftrightarrow\; y^{\Delta\tau} = 1 \\
\text{und}\;\; & x^\sigma \;=\; x^{p\alpha+q\gamma} \;=\; y^{-(p\widetilde{\beta}+q\widetilde{\delta})\tau}
\end{aligned}$$

Um die Relationen von $\mathcal{M}_1$ aus den Relationen von $\mathcal{M}_2$ herzuleiten, bemerken wir zunächst

$$\sigma \;=\; p\alpha + q\gamma \;\Leftrightarrow\; 1 \;=\; p\widetilde{\alpha} + q\widetilde{\gamma} \;\Leftrightarrow\; p\widetilde{\alpha} \;=\; 1 - q\widetilde{\gamma} \;\Leftrightarrow\; q\widetilde{\gamma} \;=\; 1 - p\widetilde{\alpha}.$$

Nun schreiben wir

$$\begin{aligned}
& x^\sigma = y^{-(p\widetilde{\beta}+q\widetilde{\delta})\tau} \;\Leftrightarrow\; x^{\widetilde{\alpha}\sigma} = y^{-\widetilde{\alpha}(p\widetilde{\beta}\tau+q\widetilde{\delta}\tau)} \;\Leftrightarrow\; x^{\widetilde{\alpha}\sigma} = y^{-p\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\tau-q\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\tau} \\
\Leftrightarrow\;& x^\alpha = y^{-(1-q\widetilde{\gamma})\widetilde{\beta}\tau-q\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\tau} \;\Leftrightarrow\; x^\alpha y^\beta = y^{q\widetilde{\gamma}\widetilde{\beta}\tau-q\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\tau} \;\Leftrightarrow\; x^\alpha y^\beta = y^{-q(\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}-\widetilde{\beta}\widetilde{\gamma})\tau} \\
\Leftrightarrow\;& x^\alpha y^\beta = y^{-q\Delta\tau} \;\Leftrightarrow\; x^\alpha y^\beta = 1
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& x^\sigma = y^{-(p\widetilde{\beta}+q\widetilde{\delta})\tau} \;\Leftrightarrow\; x^{\widetilde{\gamma}\sigma} = y^{-\widetilde{\gamma}(p\widetilde{\beta}\tau+q\widetilde{\delta}\tau)} \;\Leftrightarrow\; x^{\widetilde{\gamma}\sigma} = y^{-p\widetilde{\gamma}\widetilde{\beta}\tau-q\widetilde{\gamma}\widetilde{\delta}\tau} \\
\Leftrightarrow\;& x^\gamma = y^{-p\widetilde{\gamma}\widetilde{\beta}\tau-(1-p\widetilde{\alpha})\widetilde{\delta}\tau} \;\Leftrightarrow\; x^\gamma y^\delta = y^{-p\widetilde{\gamma}\widetilde{\beta}\tau+p\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\tau} \;\Leftrightarrow\; x^\gamma y^\delta = y^{p(\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}-\widetilde{\beta}\widetilde{\gamma})\tau} \\
\Leftrightarrow\;& x^\gamma y^\delta = y^{p\Delta\tau} \;\Leftrightarrow\; x^\gamma y^\delta = 1.
\end{aligned}$$

Wir erinnern an die Definition $\zeta := \mathrm{ggT}(|p\beta + q\delta|, \Delta)$ und bemerken, dass $y^{-(p\widetilde{\beta}+q\widetilde{\delta})\tau}$ genau wie $y^{\zeta\tau}$ die Ordnung $\frac{\Delta\tau}{\zeta\tau} = \frac{\Delta}{\zeta}$ in G hat. Mit Lemma 5.5 gilt daher

$$\begin{aligned} G &\cong \langle x, \widetilde{y} \mid [x, \widetilde{y}] = 1,\ \widetilde{y}^{\Delta\tau} = 1,\ x^{\sigma} = \widetilde{y}^{\zeta\tau} \rangle \\ &\cong \langle x, \widetilde{y} \mid [x, \widetilde{y}] = 1,\ \widetilde{x}^{\frac{\Delta}{\zeta}\sigma} = 1,\ \widetilde{y}^{\Delta\tau} = 1,\ x^{\sigma} = \widetilde{y}^{\zeta\tau} \rangle \\ &\cong \mathbb{Z}_{\frac{\Delta}{\zeta}\sigma} \times_{\mathbb{Z}_{\frac{\Delta}{\zeta}}} \mathbb{Z}_{\Delta\tau}. \end{aligned}$$

□

Das nächste Lemma ist ein Hilfsmittel, um in Fall 4.1 von Unterabschnitt 5.2.2 eine Konjugation ausschließen zu können.

Lemma 5.9. *Seien Elemente $k, \ell \in \mathbb{Z}$ gegeben. Wir betrachten die Gruppen*

$$\begin{aligned} G_1 &:= \langle a, b \mid a^3 = b^3,\ (ab)^3 = a^{3k} \rangle \qquad \textit{und} \\ G_2 &:= \langle a, b \mid a^{-3} = b^3,\ (ab)^3 = a^{-3\ell} \rangle. \end{aligned}$$

Dann besitzt das Element a sowohl in G_1 als auch in G_2 unendliche Ordnung.

Beweis. Wir definieren $G := \langle a \rangle *_{a^3=b^3} \langle b \rangle$. Im Hinblick auf einen Widerspruch besitze a die Ordnung $p \in \mathbb{N}$ in G_1. Dann liegt a^p im normalen Abschluss des Elements $a^{-3k}(ab)^3$ in G. Wir bemerken, dass der Homomorphismus $\sigma\colon G \to \mathbb{Z}$, welcher ein Element aus G auf die Summe der Exponentensummen bzgl. a und b abbildet, wohldefiniert ist. Im Fall $k = 2$ ist σ erweiterbar auf G_1 und wir erhalten sofort einen Widerspruch. Sei also $k \neq 2$. Dann gilt $p = |6 - 3k|m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Da a^3 im Zentrum von G liegt und $\sigma((ab)^3) = 6 \neq 0$ gilt, besitzt a somit die endliche Ordnung $6m$ in der Gruppe $G_1' := \langle a, b \mid a^3 = b^3,\ (ab)^3 = 1 \rangle$. Wir betrachten den Homomorphismus $\varphi\colon G_1' \to \mathbb{Z}_3$, welcher durch $\varphi(a) = 0$ und $\varphi(b) = 1$ gegeben ist. Mithilfe des Reidemeister–Schreier-Verfahrens berechnen wir, dass $\ker(\varphi)$ die Erzeuger

$$x := a, \quad y := b^{-1}ab, \quad z := b^{-2}ab^2 \quad \text{und} \quad w := b^3$$

sowie die Relationen

$$x^3 = w, \quad y^3 = w, \quad z^3 = w \quad \text{und} \quad xzyw = 1, \quad yxzw = 1, \quad zyxw = 1$$

besitzt. Es folgt:

$$\begin{aligned} \ker(\varphi) &= \langle x, y, z, w \mid x^3 = y^3 = z^3 = w,\ zyxw = 1 \rangle \\ &= \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^3,\ zyx^4 = 1 \rangle \ = \ \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^3,\ z = x^{-3}(yx)^{-1} \rangle \\ &= \langle x, y \mid x^3 = y^3 = x^{-9}(yx)^{-3} \rangle \ = \ \langle x, y \mid x^3 = y^3,\ (xy)^3 = x^{-12} \rangle \end{aligned}$$

Laut Vorüberlegung zur Gruppe G_1 besitzt x die Ordnung $18m$ in $\ker(\varphi)$. Wegen $x = a$ folgt, dass a auch in G_1' die Ordnung $18m$ besitzt. Dies ist wegen $18m \neq 6m$ ein Widerspruch. Somit besitzt a unendliche Ordnung in G_1.

Durch Anwendung des Isomorphismus von G_2, welcher b auf sich selbst abbildet und a invertiert, gehen wir zur Gruppe $\widetilde{G}_2 = \langle a, b \mid a^3 = b^3, (a^{-1}b)^3 = a^{3\ell} \rangle$ über. Wir bemerken, dass die zu zeigende Aussage im Fall $\ell = 0$ direkt aus der Betrachtung des Homomorphismus folgt, welcher ein Element von $\widetilde{G}_2$ auf die Summe seiner Exponentensummen bzgl. a und b in $\widetilde{G}_2$ abbildet. Sei also $\ell \neq 0$. Analog zur Betrachtung der Gruppe G_1 besitzt a genau dann eine endliche Ordnung in $\widetilde{G}_2$, wenn es in der Gruppe $G_2' := \langle a, b \mid a^3 = b^3, (a^{-1}b)^3 = a^3 \rangle$ von endlicher Ordnung ist. Wir definieren den Homomorphismus $\psi \colon G_2' \to \mathbb{Z}_3$ durch $\psi(a) = 0$ und $\psi(b) = 1$. Mithilfe des Reidemeister–Schreier-Verfahrens berechnen wir, dass $\ker(\psi)$ die Erzeuger

$$x := a, \quad y := b^{-1}ab, \quad z := b^{-2}ab^2 \quad \text{und} \quad w := b^3$$

sowie die Relationen

$$\begin{aligned} x^3 &= w, \quad y^3 = w, \quad z^3 = w \quad \text{und} \\ x^{-1}z^{-1}y^{-1}w &= w, \quad y^{-1}x^{-1}z^{-1}w = w, \quad z^{-1}y^{-1}x^{-1}w = w \end{aligned}$$

besitzt. Es folgt:

$$\begin{aligned} \ker(\psi) &= \langle x, y, z, w \mid x^3 = y^3 = z^3 = w,\ xyz = 1 \rangle \\ &= \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^3,\ z = (xy)^{-1} \rangle \\ &= \langle x, y \mid x^3 = y^3,\ (xy)^3 = x^{-3} \rangle \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $\ker(\psi)$ der Gruppe G_1 mit $k = -1$, $a = x$ und $b = y$ entspricht. Daher besitzt x unendliche Ordnung in $\ker(\psi)$. Es folgt, dass a von unendlicher Ordnung in G_2' und somit in $\widetilde{G}_2$ sowie G_2 ist.

□

Schließlich führen wir ein kleines, aber sehr nützliches Werkzeug zur Untersuchung der Magnus-Eigenschaft ein, das wir im Folgenden an vielen Stellen ohne besondere Erwähnung nutzen werden:

Lemma 5.10. *Gegeben seien drei Gruppen A, B und G sowie zwei Homomorphismen $\varphi : A \to G$ und $\psi : G \to B$. Falls zwei Elemente $r, s \in A$ existieren, so dass $\langle\langle r \rangle\rangle_A = \langle\langle s \rangle\rangle_A$ und $\psi \circ \varphi(r) \not\sim_B (\psi \circ \varphi(s))^{\pm 1}$ gilt, so besitzt G nicht die Magnus-Eigenschaft.*

Beweis. Wegen $\langle\langle r \rangle\rangle_A = \langle\langle s \rangle\rangle_A$ gilt $\langle\langle \varphi(r) \rangle\rangle_G = \langle\langle \varphi(s) \rangle\rangle_G$ und wegen $\psi \circ \varphi(r) \not\sim_B (\psi \circ \varphi(s))^{\pm 1}$ gilt $\varphi(r) \not\sim_G (\varphi(s))^{\pm 1}$.

□

5.2. Orientierbare Seifert-Mannigfaltigkeiten mit $g = 0 \neq r$

Im Folgenden werden wir mit Ausnahme des Falls aus (5.2) Schritt für Schritt alle Fundamentalgruppen orientierbarer Seifert-Mannigfaltigkeiten mit $g = 0$ und $r \neq 0$ auf Magnus-Eigenschaft überprüfen. Dabei unterscheiden wir verschiedene Fälle für r. So erhalten wir

z. B. durch Einsetzen von $g = 0$ und $r = 1$ in (5.1):

$$\begin{aligned} G &\cong \langle q_1, h \mid q_1 h q_1^{-1} = h,\ q_1^{\alpha_1} h^{\beta_1} = 1,\ q_1 = h^b \rangle \\ &= \langle h \mid h^{\beta_1 + b\alpha_1} = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_{\beta_1 + b\alpha_1} \end{aligned}$$

Laut Lemma A.2 besitzt diese Gruppe genau dann die Magnus-Eigenschaft, wenn $\beta_1 + b\alpha_1 \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6\}$ gilt. Die restlichen Fälle für r erfordern wesentlich mehr Arbeit.

5.2.1. Der Fall $r = 2$

Durch Einsetzen von $g = 0$ und $r = 2$ in (5.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} G &\cong \langle q_1, q_2, h \mid q_1 h q_1^{-1} = h,\ q_2 h q_2^{-1} = h,\ q_1^{\alpha_1} h^{\beta_1} = 1,\ q_2^{\alpha_2} h^{\beta_2} = 1,\ q_1 q_2 = h^b \rangle \\ &= \langle q_1, h \mid [q_1, h] = 1,\ q_1^{\alpha_1} h^{\beta_1} = 1,\ q_1^{-\alpha_2} h^{b\alpha_2 + \beta_2} = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass aufgrund der Bedingungen an die Elemente b, α_2 und β_2 in (5.1) stets $b\alpha_2 + \beta_2 \neq 0$ gilt. Sei

$$\sigma := \mathrm{ggT}(|\alpha_1|, |-\alpha_2|), \quad \tau := \mathrm{ggT}(|\beta_1|, |b\alpha_2 + \beta_2|) \quad \text{und} \quad \Delta := \frac{1}{\sigma\tau} \left| \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\alpha_2 & b\alpha_2 + \beta_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Wir wählen zwei Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $\sigma = p\alpha_1 - q\alpha_2$. Im Fall $p\beta_1 + q(b\alpha_2 + \beta_2) = 0 \mod \tau\Delta$ gilt laut Lemma 5.8

$$G \cong \langle q_1, h \mid [q_1, h] = 1,\ q_1^{\sigma} = 1,\ h^{\tau} = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_{\sigma} \times \mathbb{Z}_{\tau}.$$

Wegen Satz A.5 besitzt diese Gruppe genau dann die Magnus-Eigenschaft, wenn $\sigma, \tau \in \{1, 2, 3, 6\}$ oder $\sigma, \tau \in \{1, 2, 4\}$ gilt. Im Fall $p\beta_1 + q(b\alpha_2 + \beta_2) \neq 0 \mod \tau\Delta$ setzen wir

$$\zeta := \mathrm{ggT}(|p\beta_1 + q(b\alpha_2 + \beta_2)|, \Delta).$$

Laut Lemma 5.8 erhalten wir die Darstellung:

$$G \cong \langle q_1, \widetilde{h} \mid [q_1, \widetilde{h}] = 1,\ q_1^{\frac{\Delta}{\zeta}\sigma} = 1,\ \widetilde{h}^{\Delta\tau} = 1,\ q_1^{\sigma} = \widetilde{h}^{\zeta\tau} \rangle \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{\frac{\Delta}{\zeta}\sigma} \times_{\mathbb{Z}_{\frac{\Delta}{\zeta}}} \mathbb{Z}_{\Delta\tau} & \text{für } \Delta \neq 0 \\ \mathbb{Z} \times_{q_1^{\sigma} = \widetilde{h}^{\zeta t}} \mathbb{Z} & \text{für } \Delta = 0 \end{cases}$$

Wegen Lemma 5.4 und Lemma 5.7 besitzt G somit genau dann die Magnus-Eigenschaft, wenn entweder $\Delta = 0$ und $\mathrm{ggT}(\sigma, \zeta\tau) \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ oder eine der folgenden Bedingungen gilt:

(1) $\sigma = 1$ mit $\Delta\tau \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ($G \cong \mathbb{Z}_{\Delta\tau}$) oder $\zeta\tau = 1$ mit $\frac{\Delta}{\zeta}\sigma \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ($G \cong \mathbb{Z}_{\frac{\Delta}{\zeta}\sigma}$)

(2) $\Delta = \zeta$ mit $\frac{\Delta}{\zeta}\sigma, \Delta\tau \in \{1, 2, 3, 6\}$ oder mit $\frac{\Delta}{\zeta}\sigma, \Delta\tau \in \{1, 2, 4\}$ ($G \cong \mathbb{Z}_{\frac{\Delta}{\zeta}\sigma} \times \mathbb{Z}_{\Delta\tau}$)

(3) $(\frac{\Delta}{\zeta}, \frac{\Delta}{\zeta}\sigma, \Delta\tau) \in \{(2, 4, 4), (2, 6, 6), (3, 6, 6)\}$ ($G \cong \mathbb{Z}_4 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_6 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$ oder $\mathbb{Z}_6 \times_{\mathbb{Z}_3} \mathbb{Z}_6$)

5.2.2. Der Fall $r = 3$

Durch Einsetzen von $g = 0$ und $r = 3$ in (5.1) erhalten wir:

$$\begin{aligned} G &= \langle q_1, q_2, q_3, h \mid [q_i, h] = 1,\ q_i^{\alpha_i} h^{\beta_i} = 1\ (1 \leqslant i \leqslant 3),\ q_1 q_2 q_3 = h^b \rangle \\ &\quad\ q_3^{\alpha_3} h^{\beta_3} = 1,\ q_1 q_2 q_3 = h^b \rangle \\ &= \langle q_1, q_2, h \mid [q_1, h] = 1,\ [q_2, h] = 1,\ q_1^{\alpha_1} h^{\beta_1} = 1,\ q_2^{\alpha_2} h^{\beta_2} = 1, \\ &\quad\ (q_1 q_2)^{\alpha_3} = h^{\beta_3 + b \cdot \alpha_3} \rangle \\ \big(&= \langle q_1, q_3, h \mid [q_1, h] = 1,\ [q_3, h] = 1,\ q_1^{\alpha_1} h^{\beta_1} = 1,\ q_3^{\alpha_3} h^{\beta_3} = 1, \\ &\quad\ (q_1 q_3)^{\alpha_2} = h^{\beta_2 + b \cdot \alpha_2} \rangle\ \big) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Zur Untersuchung dieser Gruppe auf Magnus-Eigenschaft führen wir eine Fallunterscheidung für die Variablen α_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) ein.

Fall 1: Sei $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2$.

Wegen der Bedingungen von (5.1) folgt $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$. Wir erhalten:

$$G = \langle q_1, q_2, h \mid [q_1, h] = 1,\ [q_2, h] = 1,\ q_1^2 = h^{-1},\ q_2^2 = h^{-1},\ q_1 q_2 q_1 q_2 = h^{1+2b} \rangle$$

Aus der Relation $q_1 q_2 q_1 q_2 = h^{1+2b}$ ergibt sich durch Konjugation mit q_1 die Relation $q_2 q_1 q_2 q_1 = h^{1+2b}$. Durch Gleichsetzen der linken Seiten beider Relationen erhält man $q_1 q_2 q_1 q_2 q_1^{-1} q_2^{-1} q_1^{-1} q_2^{-1} = 1$ und somit $(q_1 q_2 q_1 q_2)^2 h^4 = 1$. Schließlich folgt $h^{6+4b} = 1$.

Fall 1.1: Sei $b = -3$ oder $b = 0$.
Sowohl für $b = -3$ als auch für $b = 0$ erhalten wir die Gruppe

$$\begin{aligned} G &= \langle q_1, q_2, h \mid [q_1, h] = 1,\ [q_2, h] = 1,\ q_1^2 = q_2^2 = h^{-1},\ q_1 q_2 q_1 q_2 = h,\ h^6 = 1 \rangle \\ &= \langle q_1, q_2 \mid q_1^{12} = 1,\ q_1^2 = q_2^2,\ q_2 q_1 q_2 = q_1^{-3} \rangle. \end{aligned}$$

In dieser Gruppe gilt $q_2 q_1 q_2^{-1} = q_1^{-3} q_2^{-2} = q_1^{-5}$, also $q_2 q_1 = q_1^{-5} q_2$. Mit diesem Wissen können wir jedes Element $w \in G$ in der Form $w = q_1^m q_2^\epsilon$ darstellen, wobei $m \in \mathbb{Z}_{12}$ und $\epsilon \in \{0, 1\}$. Im Folgenden verstehen wir alle Mengen als Teilmengen von G. Wir berechnen:

$$q_1^{-1} q_1^m q_1 = q_1^m, \qquad q_2^{-1} q_1^m q_2 = \begin{cases} q_1^m, & m \text{ gerade} \\ q_1^{m-3} q_2 q_1 q_2 = q_1^{m-6}, & m \text{ ungerade} \end{cases},$$

$$q_1^{-1} q_1^m q_2 q_1 = q_1^{m-6} q_2, \qquad q_2^{-1} q_1^m q_2 q_2 = q_2 q_1^m = \begin{cases} q_1^m q_2, & m \text{ gerade} \\ q_1^{m-6} q_2, & m \text{ ungerade} \end{cases},$$

$$(q_1^m)^{-1} = q_1^{-m}, \qquad (q_1^m q_2)^{-1} = q_2^{-1} q_1^{-m} = \begin{cases} q_1^{-m-2} q_2, & m \text{ gerade} \\ q_1^{-m-8} q_2 = q_1^{-m+4} q_2, & m \text{ ungerade} \end{cases},$$

$$q_1^m q_2 q_1^{m'} q_2 = \begin{cases} q_1^{m+m'+2}, & m, m' \text{ gerade} \\ q_1^{m+m'-4}, & m, m' \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
\langle\!\langle q_1^m \rangle\!\rangle_G &= \begin{cases} \{q_1^{n\cdot m} \mid n \in \mathbb{Z}_{12}\}, & m \text{ gerade} \\ \{q_1^{n\cdot m+6\cdot n'} \mid n, n' \in \mathbb{Z}_{12}\}, & m \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{und} \\
\langle\!\langle q_1^m q_2 \rangle\!\rangle_G &= \{q_1^{m+n\cdot(2m+2)+n'\cdot 6} q_2,\ q_1^{n\cdot(2m+2)+n'\cdot 6} \mid n, n' \in \mathbb{Z}_{12}\}.
\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass die Mengen $\langle\!\langle q_1^{m_1} \rangle\!\rangle_G$ und $\langle\!\langle q_1^{m_2} q_2 \rangle\!\rangle_G$ verschieden sind, denn die Exponentensummen aller Relationen von G bzgl. q_2 sind gerade. Da auch die Exponentensummen aller Relationen von G bzgl. q_1 gerade sind, folgt die Ungleichheit der Mengen $\langle\!\langle q_1^{m_1} \rangle\!\rangle_G$ und $\langle\!\langle q_1^{m_2} \rangle\!\rangle_G$, falls $m_1 - m_2 = 1 \mod 2$ gilt. Dasselbe gilt für die Mengen $\langle\!\langle q_1^{m_1} q_2 \rangle\!\rangle_G$ und $\langle\!\langle q_1^{m_2} q_2 \rangle\!\rangle_G$. Aus der Gleichheit der normalen Abschlüsse zweier verschiedener Elemente $q_1^{m_1} q_2^{\epsilon_1}$ und $q_1^{m_2} q_2^{\epsilon_2}$ folgt somit $\epsilon_1 = \epsilon_2$ und $m_1 - m_2 = 0 \mod 2$. Wir möchten für zwei beliebige Elemente $q_1^{m_1} q_2^{\epsilon_1}$, $q_1^{m_2} q_2^{\epsilon_2} \in G$ mit demselben normalen Abschluss in G zeigen, dass $q_1^{m_1} q_2^{\epsilon_1} \sim (q_1^{m_2} q_2^{\epsilon_2})^{\pm 1}$ gilt.

Zunächst betrachten wir den Fall, dass $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ gilt und m_1, m_2 gerade sind. Unsere Berechnungen haben gezeigt, dass $q_1^m \in G$ für gerade m nur zu sich selbst konjugiert ist. Somit ist $\langle\!\langle q_1^2 \rangle\!\rangle_G = \langle q_1^2 \rangle_G$ wegen der Relation $q_1^{12} = 1$ von G isomorph zu einer Untergruppe von $\mathbb{Z}_6$. Da alle Untergruppen von $\mathbb{Z}_6$ die Magnus-Eigenschaft besitzen, folgt $q_1^{m_1} \sim (q_1^{m_2})^{\pm 1}$.

Als Nächstes betrachten wir den Fall, dass $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ gilt und m_1, m_2 ungerade sind. Ist $\langle q_1 \rangle_G$ isomorph, zu einer Untergruppe von $\mathbb{Z}_6$, so zeigen unsere Berechnungen $\langle\!\langle q_1^m \rangle\!\rangle_G = \langle q_1^m \rangle_G$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und die gewünschte Aussage folgt aus der Magnus-Eigenschaft aller Untergruppen von $\mathbb{Z}_6$. Sei also $\langle q_1 \rangle_G \cong \mathbb{Z}_{12}$. Wir bemerken, dass ein Elemente $q_1^m \in G$ für ungerades m laut unseren Berechnungen nur zu sich selbst und q_1^{m-6} in G konjugiert ist. Es folgt für ungerade m:

$$\langle\!\langle q_1^m \rangle\!\rangle = \begin{cases} \{q_1^n \mid n \in \mathbb{Z}_{12}\}, & m \notin \{3, 9\} \\ \{q_1^{3n} \mid n \in \mathbb{Z}_{12}\}, & m \in \{3, 9\} \end{cases}$$

Wir lesen ab, dass m_1, $m_2 \in \{3, 9\}$ oder m_1, $m_2 \in \{1, 5, 7, 11\}$ gelten muss. Da 3 in $\mathbb{Z}_{12}$ invers zu 9 ist, erhalten wir im ersten Fall $q_1^{m_1} \sim (q_1^{m_2})^{\pm 1}$. Im zweiten Fall bemerken wir, dass q_1 zu q_1^7 und q_1^5 zu q_1^{11} konjugiert ist. O. B. d. A. dürfen wir somit annehmen, dass m_1, m_2 gleich sind oder den Zahlen 1 und 11 entsprechen. Es folgt $q_1^{m_1} \sim (q_1^{m_2})^{\pm 1}$.

Es bleibt der Fall $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ zu betrachten. Wir haben bereits bemerkt, dass $\langle q_1 \rangle_G$ zu einer Untergruppe von $\mathbb{Z}_{12}$ isomorph ist. Da die Summe der Exponentensummen bzgl. q_1 und q_2 in allen Relationen von G jeweils ein Vielfaches von 6 ist, gilt $\langle q_1 \rangle_G \cong \mathbb{Z}_{12}$ oder $\langle q_1 \rangle_G \cong \mathbb{Z}_6$.

Für $\langle q_1 \rangle_G \cong \mathbb{Z}_{12}$ erhalten wir die inversen Paare

$$(q_1^{m_1} q_2, q_1^{m_2} q_2) \quad \text{mit} \quad (m_1, m_2) \in \{(0, 10), (1, 3), (2, 8), (4, 6), (5, 11), (7, 9)\}.$$

Für die Konjugationsklassen der inversen Paare erhalten wir somit laut unseren Berechnungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{q_1^m q_2 \mid m \in \{0,10,4,6\}\}, \quad \mathcal{C}_2 = \{q_1^m q_2 \mid m \in \{1,3,7,9\}\}, \\ \mathcal{C}_3 &= \{q_1^m q_2 \mid m \in \{2,8\}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_4 = \{q_1^m q_2 \mid m \in \{5,11\}\} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Um zu überprüfen, dass die Mengen C_i ($i \in \{1,2,3,4\}$) verschiedene normale Abschlüsse besitzen, berechnen wir $N_i := \langle\langle C_i \rangle\rangle_G$ zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= \{q_1^m q_2, q_1^n \mid m,n \text{ gerade}\}, \quad \mathcal{N}_2 = \{q_1^m q_2, q_1^n \mid m \text{ ungerade}, n \text{ gerade}\} \\ \mathcal{N}_3 &= \{q_1^2 q_2, q_1^8 q_2, q_1^6\}, \quad \mathcal{N}_4 = \{q_1^5 q_2, q_1^{11} q_2, q_1^6\} \end{aligned} \tag{5.7}$$

Somit folgt für $\langle q_1 \rangle_G \cong \mathbb{Z}_{12}$ die gewünschte Aussage. Für $\langle q_1 \rangle_G \cong \mathbb{Z}_6$ lesen wir aus (5.6) und (5.7) ab, dass wir auch in diesem Fall vier verschiedene Konjugationsklassen mit vier verschiedenen normalen Abschlüssen in G erhalten. Insgesamt besitzt schließlich G die Magnus-Eigenschaft.

Fall 1.2: Sei $b = -2$ oder $b = -1$.
Sowohl für $b = -2$ als auch für $b = -1$ erhalten wir die Gruppe

$$\begin{aligned} G &= \langle q_1, q_2, h \mid [q_1,h] = 1,\ [q_2,h] = 1,\ q_1^2 = q_2^2 = h,\ q_1 q_2 q_1 q_2 = h,\ h^2 = 1 \rangle \\ &= \langle q_1, q_2 \mid q_1^4 = 1,\ q_1^2 = q_2^2,\ q_2 q_1 q_2 = q_1 \rangle. \end{aligned}$$

In dieser Gruppe gilt $q_2 q_1 q_2^{-1} = q_1 q_2^{-2} = q_1^{-1} = q_1^3$, also $q_2 q_1 = q_1^3 q_2$. Mit diesem Wissen können wir jedes Element $w \in G$ in der Form $w = q_1^m q_2^\epsilon$ darstellen, wobei $m \in \mathbb{Z}_4$ und $\epsilon \in \{0,1\}$ gilt. Im Folgenden verstehen wir alle Mengen als Teilmengen von G. Wir berechnen:

$$q_1^{-1} q_1^m q_1 = q_1^m, \qquad q_2^{-1} q_1^m q_2 = \begin{cases} q_1^m, & m \text{ gerade} \\ q_1^{m-3} q_2 q_1 q_2 = q_1^{m+2}, & m \text{ ungerade} \end{cases},$$

$$q_1^{-1} q_1^m q_2 q_1 = q_1^{m+2} q_2, \qquad q_2^{-1} q_1^m q_2 q_2 = q_2 q_1^m = \begin{cases} q_1^m q_2, & m \text{ gerade} \\ q_1^{m+2} q_2, & m \text{ ungerade} \end{cases},$$

$$(q_1^m)^{-1} = q_1^{-m}, \qquad (q_1^m q_2)^{-1} = q_2^{-1} q_1^{-m} = \begin{cases} q_1^{-m-2} q_2 = q_1^{-m+2} q_2, & m \text{ gerade} \\ q_1^{-m} q_2, & m \text{ ungerade} \end{cases},$$

$$q_1^m q_2 q_1^{m'} q_2 = \begin{cases} q_1^{m+m'+2}, & m,m' \text{ gerade} \\ q_1^{m+m'+4} = q_1^{m+m'}, & m,m' \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Somit folgt:

$$\langle\langle q_1^m \rangle\rangle = \begin{cases} \{1, q_1^2\}, & m = 2 \\ \{1, q_1, q_1^3\}, & m \in \{1,3\} \end{cases}, \quad \langle\langle q_1^m q_2 \rangle\rangle = \begin{cases} \{1, q_1^2 q_2, q_2, q_1^2\}, & m = 2 \\ \{1, q_1 q_2, q_1^3 q_2, q_1^2\}, & m \in \{1,3\} \end{cases}$$

Unabhängig davon, ob $\langle q_1\rangle_G \cong \mathbb{Z}_4$ oder $\langle q_1\rangle_G \cong \mathbb{Z}_2$ gilt, folgen für zwei beliebige Elemente $q_1^{m_1}q_2^{\epsilon_1}$ und $q_1^{m_2}q_2^{\epsilon_2}$ mit demselben normalen Abschluss in G die Gleichungen $\epsilon_1 = \epsilon_2$ und $m - m' \mod 2 = 0$. Da q_1 invers zu q_1^3 ist und q_1q_2 zu $q_1^3q_2$ konjugiert ist, folgt schließlich $q_1^{m_1}q_2^{\epsilon_1} \sim (q_1^{m_2}q_2^{\epsilon_2})^{\pm 1}$. Also besitzt G die Magnus-Eigenschaft.

Fall 1.3: Sei $b \notin \{-3,-2,-1,0\}$.
In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} G &= \langle q_1, q_2, h \mid [q_1,h]=1,\ [q_2,h]=1,\ q_1^2 = q_2^2 = h^{-1},\ q_1q_2q_1q_2 = h^{1+2b}, h^{6+4b}=1\rangle \\ &= \langle q_1, q_2, h \mid q_1^2 = q_2^2 = h^{-1},\ q_1q_2q_1q_2 = h^{1+2b}, h^{6+4b}=1\rangle \end{aligned}$$

mit $|6+4b| \notin \{0,1,2,3,4,6\}$. Wir möchten zeigen, dass keine kleinere h-Potenz als $|6+4b|$ trivial ist. Durch Betrachtung der Faktorgruppe

$$G/\langle\!\langle [q_1,q_2] \rangle\!\rangle = \langle q_1, q_2 \mid q_1^{6+4b} = 1,\ q_1^2 = q_2^2\rangle$$

erfahren wir, dass h in G die Ordnung $|6+4b|$ oder $|3+2b|$ hat. Für die letztere Möglichkeit definieren wir

$$\widetilde{G} := \langle q_1, q_2, h \mid q_1^2 = q_2^2 = h^{-1},\ q_1q_2q_1q_2 = h^{1+2b}, h^{3+2b}=1\rangle.$$

Wären nun G und $\widetilde{G}$ gleich, so wären auch die beiden Gruppen $G_1 := G/\langle\!\langle h^2\rangle\!\rangle$ und $\widetilde{G}_1 := \widetilde{G}/\langle\!\langle h^2\rangle\!\rangle$ gleich. Da in G die Gleichung $(q_1q_2q_1q_2^{-1}) \cdot q_1^{-1}(q_1q_2q_1q_2^{-1})q_1 = q_1^4$ gilt, erhalten wir:

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle G \mid h^2=1\rangle = \langle q_1,q_2 \mid q_1^2 = q_2^2,\ q_1q_2q_1q_2^{-1}=1,\ q_1^4=1\rangle \\ &= \langle q_1,q_2 \mid q_1^2 = q_2^2,\ q_1q_2q_1 = q_2\rangle \quad \text{und} \\ \widetilde{G}_1 &= \langle \widetilde{G} \mid h^2=1\rangle = \langle q_1,q_2 \mid q_1^2 = q_2^2 = 1,\ q_1q_2q_1q_2=1\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass h die Ordnung $|6+4b|$ in G hat, bleibt die Ungleichheit der Gruppen G_1 und $\widetilde{G}_1$ zu beweisen. Dafür setzen wir $q_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $q_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ und rechnen die Relationen von G_1 nach:

$$\begin{aligned} q_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^2 = q_2^2, \\ q_1q_2q_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = q_2 \end{aligned}$$

Allerdings ist $q_1^2 \neq \mathrm{id}$. Es folgt $G_1 \neq \widetilde{G}_1$.

Da h im Zentrum von G liegt, gilt $\langle\!\langle h\rangle\!\rangle_G = \langle h\rangle_G \cong \mathbb{Z}_{|6+4b|}$. Wir erinnern daran, dass wir uns im Fall $|6+4b| \notin \{0,1,2,3,4,6\}$ befinden. Wegen Lemma A.2 besitzen

$\langle h \rangle_G \subseteq$ Zentrum(G) und damit auch G nicht die Magnus-Eigenschaft.

Fall 2: Seien $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ und $\alpha_3 \neq 2$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} G &= \langle q_1, q_2, q_3, h \mid [q_i, h] = 1 \ (i = 1, 2, 3),\ q_1^2 h = 1,\ q_2^2 h = 1,\ q_3^{\alpha_3} h^{\beta_3} = 1,\ q_1 q_2 q_3 = h^b \rangle \\ &= \langle q_1, q_2, q_3 \mid q_1^2 = q_2^2,\ q_3^{\alpha_3} q_1^{-2\beta_3} = 1, q_3 = (q_1 q_2)^{-1} q_1^{-2b} \rangle \\ &= \langle q_1, q_2 \mid q_1^2 = q_2^2,\ (q_1 q_2)^{\alpha_3} q_1^{2(b\alpha_3+\beta_3)} = 1 \rangle \end{aligned}$$

Zunächst bemerken wir:

$$\begin{aligned} G &\cong H \,/\, \langle\!\langle (q_1 q_2)^{\alpha_3} q_1^{2(b\alpha_3+\beta_3)} \rangle\!\rangle \\ \text{mit}\quad H &:= \langle q_1, q_2 \mid q_1^2 = q_2^2 \rangle = \langle q_1 \mid \rangle \underset{q_1^2 = q_2^2}{*} \langle q_2 \mid \rangle \end{aligned}$$

Somit entspricht jedes triviale Wort in G einem Wort aus dem normalen Abschluss von $(q_1 q_2)^{\alpha_3} q_1^{2(b\alpha_3+\beta_3)}$ im amalgamierten Produkt H. In H und G gilt:

$$(q_1 q_2)^{\alpha_3} q_1^{2(b\alpha_3+\beta_3)} \cdot q_1^{-1} (q_1 q_2)^{\alpha_3} q_1^{2(b\alpha_3+\beta_3)} q_1 = q_1^{4[(b+1)\alpha_3+\beta_3]}$$

Wir ermitteln:

$$\begin{aligned} & \langle\!\langle (q_1 q_2)^{\alpha_3} q_1^{2(b\alpha_3+\beta_3)} \rangle\!\rangle_H \\ = \ & \{ (q_1 q_2)^{m\alpha_3} q_1^{2m(b\alpha_3+\beta_3)+4n[(b+1)\alpha_3+\beta_3]},\ (q_2 q_1)^{m\alpha_3} q_1^{2m(b\alpha_3+\beta_3)+4n[(b+1)\alpha_3+\beta_3]}, \\ & q_1^{4n[(b+1)\alpha_3+\beta_3]} \mid m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ n \in \mathbb{Z} \} \subset H \end{aligned}$$

Es folgt, dass jedes Element von G eine eindeutige Darstellung der Form

$$q_2^{\epsilon} (q_1 q_2)^k q_1^{\ell} \text{ mit } \epsilon \in \{0, 1\},\quad 0 \leqslant k \leqslant \left\lceil \frac{\alpha_3}{2} - \epsilon \right\rceil - 1,\quad 0 \leqslant \ell \leqslant 4\big[(b+1)\alpha_3 + \beta_3\big] - 1 \qquad (5.8)$$

besitzt. Wir bezeichnen diese Form im Folgenden auch als *Normalform* bzgl. G. Insbesondere hat das Element q_1^2 aus dem Zentrum von G die Ordnung $|2[(b+1)\alpha_3 + \beta_3]|$. Für $|2[(b+1)\alpha_3 + \beta_3]| \notin \{1, 2, 3, 4, 6\}$ besitzt G somit nicht die Magnus-Eigenschaft. Wir erinnern an die Voraussetzungen $0 < \beta_3 < \alpha_3 \neq 2$ und ggT$(\alpha_3, \beta_3) = 1$. Die einzigen verbleibenden Fälle sind (für $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$):

b	α_3	β_3	$2(b\alpha_3 + \beta_3)$	$2[(b+1)\alpha_3 + \beta_3]$
-2	2n ($3 \nmid n$)	$\alpha_3 - 3$	$-2(\alpha_3 + 3)$	-6
-2	2n	$\alpha_3 - 1$	$-2(\alpha_3 + 1)$	-2
-2	2n-1	$\alpha_3 - 1$	$-2(\alpha_3 + 1)$	-2
-2	2n-1	$\alpha_3 - 2$	$-2(\alpha_3 + 2)$	-4
-2	2n-1 ($n \neq 2 \mod 3$)	$\alpha_3 - 3$	$-2(\alpha_3 + 3)$	-6
-1	2n	1	$-2(\alpha_3 - 1)$	2
-1	2n ($3 \nmid n$)	3	$-2(\alpha_3 - 3)$	6
-1	2n-1	1	$-2(\alpha_3 - 1)$	2
-1	2n-1	2	$-2(\alpha_3 - 2)$	4
-1	2n-1 ($n \neq 2 \mod 3$)	3	$-2(\alpha_3 - 3)$	6

Es zeigt sich, dass wir jeweils zwei Fälle zusammen betrachten können.

Für $(b, \alpha_3, \beta_3) = (-2, 2n, 2n-3)$ *mit* $3 \nmid n$ *oder* $(b, \alpha_3, \beta_3) = (-1, 2n, 3)$ *mit* $3 \nmid n$ erhalten wir

$$G = \langle q_1, q_2 \mid q_1^2 = q_2^2,\ (q_1 q_2)^{2n} q_1^{-2(2n+3)} = 1,\ q_1^{12} = 1 \rangle \text{ und } \langle\langle q_1^5 q_2 \rangle\rangle = \langle\langle q_1^{11} q_2 \rangle\rangle,$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} (q_1^5 q_2)^{2n+1} &= q_1^{4(2n+1)+4n+7} q_2 = q_1^{11} q_2 \ (= q_1 q_2 q_1^{10}) \text{ und} \\ (q_1^{11} q_2)^{2n+1} &= q_1^{10(2n+1)+4n+7} q_2 = q_1^5 q_2 \ (= q_1 q_2 q_1^4). \end{aligned}$$

Das Elemente $q_1^5 q_2 = q_1 q_2 q_1^4$ ist jedoch nur zu sich selbst und seinem Inversen konjugiert:

$$q_1^{-1} q_1 q_2 q_1^4 q_1 = q_2 q_1^5 = (q_1 q_2 q_1^4)^{-1}, \quad q_2^{-1} q_1 q_2 q_1^4 q_2 = q_2 q_1^5 = (q_1 q_2 q_1^4)^{-1}$$

Also ist $q_1^5 q_2$ weder zu $q_1^{11} q_2$ noch zu $(q_1^{11} q_2)^{-1}$ konjugiert und G besitzt nicht die Magnus-Eigenschaft.

Für $(b, \alpha_3, \beta_3) = (-2, 2n, 2n-1)$ *oder* $(b, \alpha_3, \beta_3) = (-1, 2n, 1)$ *mit* $n \neq 2 \mod 3$ erhalten wir

$$G = \langle q_1, q_2 \mid q_1^2 = q_2^2, (q_1 q_2)^{2n} q_1^{-2(2n+1)} = 1, q_1^4 = 1 \rangle = \langle q_1, q_2 \mid q_1^2 = q_2^2 = (q_1 q_2)^{2n},\ q_1^4 = 1 \rangle$$

Wegen $(q_1 q_2)^{2n+1} = q_1^3 q_2$ und $(q_1^3 q_2)^{2n+1} = q_1^{2(2n+1)+3} q_2 = q_1 q_2$ gilt $\langle\langle q_1 q_2 \rangle\rangle = \langle\langle q_1^3 q_2 \rangle\rangle$ in G. Zudem berechnen wir $q_1^{-1} q_1 q_2 q_1 = q_2 q_1 = (q_1 q_2)^{-1}$ und $q_2^{-1} q_1 q_2 q_2 = q_2 q_1 = (q_1 q_2)^{-1}$. Also ist $q_1^3 q_2$ weder zu $q_1 q_2$ noch zu $(q_1 q_2)^{-1}$ konjugiert. Damit besitzt G in diesem Fall nicht die Magnus-Eigenschaft.

Für $(b, \alpha_3, \beta_3) = (-2, 2n-1, 2n-2)$ *oder* $(b, \alpha_3, \beta_3) = (-1, 2n-1, 1)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} G &= \langle q_1, q_2 \mid q_1^2 = q_2^2,\ (q_1 q_2)^{2n-1} q_1^{-4n} = 1,\ q_1^4 = 1 \rangle \\ &= \langle q_1, q_2 \mid q_1^2 = q_2^2,\ (q_1 q_2)^{2n-1} = 1,\ q_1^4 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Im Spezialfall $n = 2$ besitzt diese Gruppe 12 Elemente. (Es handelt sich um die Dizyklische Gruppe $Dic_3 = \langle a, x \mid a^6 = 1,\ x^2 = a^3,\ x^{-1} a x = a^{-1} \rangle$.)

Zunächst möchten wir alle Konjugationsabschlüsse von G bestimmen. Als *Konjugationsabschluss* eines Elements x einer Gruppe G bezeichnen wir die Menge aller Konjugierten von x und x^{-1} in G. Wir berechnen für unseren Spezialfall $n = 2$:

Element	1	q_1	q_1^2	q_1^3	q_2	q_2^3	$q_1 q_2$	$q_1^3 q_2$	$q_2 q_1$	$q_1^2 q_2 q_1$	$q_1 q_2 q_1$	$q_1^3 q_2 q_1$
Ordnung	1	4	2	4	4	4	3	6	3	6	4	4

$$\begin{aligned}
q_2^{-1}(q_1)q_2 &= q_1^2q_1^{-1}q_2^{-1}q_1^{-1} = q_1q_2q_1,\\
q_1^{-1}(q_1q_2q_1)q_1 &= q_1^2q_2,\ \ q_2^{-1}(q_1q_2q_1)q_2 = q_1^{-2}q_1^{-1} = q_1,\\
q_1^{-1}(q_1^2q_2)q_1 &= q_1q_2q_1,\ \ q_2^{-1}(q_1^2q_2)q_2 = q_1^2q_2,\\
q_2^{-1}(q_1^{-1})q_2 &= q_2^{-1}(q_1^3)q_2 = (q_1q_2q_1)^{-1} = q_1^3q_2q_1,\ \ q_1^{-1}(q_1^3q_2q_1)q_1 = (q_1^2q_2)^{-1} = q_2.
\end{aligned}$$

Daher lautet ein Konjugationsabschluss $K_1 = \{q_1, q_1q_2q_1, q_1^2q_2, q_1^3, q_1^3q_2q_1, q_2\}$. Er besteht aus allen Elementen der Ordnung 4. Wegen

$$\begin{aligned}
q_1^{-1}(q_1q_2)q_1 = q_2q_1 = (q_1q_2)^{-1},\ \ q_2^{-1}(q_1q_2)q_2 = q_2q_1 = (q_1q_2)^{-1} \text{ und}\\
q_1^{-1}(q_1^3q_2)q_1 = q_1^2q_2q_1 = (q_1^3q_2)^{-1},\ \ q_2^{-1}(q_1^3q_2)q_2 = q_1^2q_2q_1 = (q_1^3q_2)^{-1}
\end{aligned}$$

lauten die weiteren nichttrivialen Konjugationsabschlüsse $K_2 = \{q_1^2\}$, $K_3 = \{q_1q_2, q_2q_1\}$ und $K_4 = \{q_1^3q_2, q_1^2q_2q_1\}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\langle\langle k_1\rangle\rangle &= G\ (\forall k_1 \in K_1),\ \ \langle\langle q_1^2\rangle\rangle = \{1, q_1^2\},\ \ \langle\langle k_3\rangle\rangle = K_3 \cup \{1\}\ (\forall k_3 \in K_3),\\
\langle\langle k_4\rangle\rangle &= K_4 \cup K_2 \cup \{1\}\ (\forall k_4 \in K_4)
\end{aligned}$$

Im Fall $n = 2$ besitzt G daher die Magnus-Eigenschaft.

Für $n \geqslant 3$ gilt $\alpha_3 = 2n-1 \notin \{1,2,3,4,6\}$. Zudem haben wir bereits berechnet:

$$q_1^{-1}(q_1q_2)q_1 = q_2q_1 = (q_1q_2)^{-1},\ \ q_2^{-1}(q_1q_2)q_2 = q_2q_1 = (q_1q_2)^{-1}$$

Also gilt $\langle\langle q_1q_2\rangle\rangle \cong \mathbb{Z}_m$ mit $m \notin \{1,2,3,4,6\}$ und G besitzt wegen Lemma A.2 nicht die Magnus-Eigenschaft.

Für $(b, \alpha_3, \beta_3) = (-2, 2n-1, 2n-3)$ *oder* $(b, \alpha_3, \beta_3) = (-1, 2n-1, 2)$ erhalten wir

$$G = \langle q_1, q_2 \mid q_1^2 = q_2^2,\ (q_1q_2)^{2n-1}q_1^{-2(2n+1)} = 1\rangle. \tag{5.9}$$

Wie bereits berechnet gilt in dieser Gruppe $q_1^8 = 1$. Daher besitzen q_1 und q_1^3 denselben normalen Abschluss in G. Es bleibt zu zeigen, dass q_1 weder zu q_1^3 noch q_1^{-3} konjugiert ist. Dazu berechnen wir für $0 \leqslant k \leqslant \left\lceil \frac{2n-1}{2} \right\rceil - 1 = n-1$

$$(q_2q_1)^{-k}q_1(q_2q_1)^k = (q_1q_2)^{2k}q_1^{-4k+1} \quad \text{und} \tag{5.10}$$

$$q_2^{-1}(q_1q_2)^{2k}q_1^{-4k+1}q_2 = (q_2q_1)^{2k+2}q_1^{-4k-3} = q_2(q_1q_2)^{2k+1}q_1^{-4k-2}. \tag{5.11}$$

Die Darstellungen $(q_1q_2)^{2k}q_1^{-4k+1}$ und $q_2(q_1q_2)^{2k+1}q_1^{-4k-2}$ sind im Allgemeinen noch keine Normalformen bzgl. G (siehe (5.8)). Wegen $0 \leqslant k \leqslant n-1$ können wir jedoch durch höchstens eine Umformung

$$\begin{aligned}
(q_1q_2)^\ell &= (q_1q_2)^{-2n+1+\ell}q_1^{2(2n+1)} = (q_2q_1)^{2n-1-\ell}q_1^{2(2n+1)-4(2n-1-\ell)}\\
&= (q_2q_1)^{2n-1-\ell}q_1^{-4n+6+4\ell} = q_2(q_1q_2)^{2n-2-\ell}q_1^{-4n+7+4\ell} \text{ mit } (n \leqslant \ell \leqslant 2n-2),\\
q_2(q_1q_2)^\ell &= q_2(q_1q_2)^{-2n+1+\ell}q_1^{2(2n+1)} = (q_2q_1)^{-2n+2+\ell}q_1^{2(2n+1)-1}\\
&= (q_1q_2)^{2n-2-\ell}q_1^{2(2n+1)-1-4(2n-2-\ell)} = (q_1q_2)^{2n-2-\ell}q_1^{-4n+9+4\ell}\\
&= (q_1q_2)^{2n-2-\ell}q_1^{-4n+1+4\ell} \text{ mit } (n-1 \leqslant \ell \leqslant 2n-3)
\end{aligned}$$

oder $q_2(q_1q_2)^{2n-1} = q_2q_1^{2(2n+1)}$ zur Normalform bzgl. G gelangen. Daher sind alle Konjugierten von q_1 in G ungleich $q_1^{\pm 3}$ und G besitzt nicht die Magnus-Eigenschaft.

Für $(b, \alpha_3, \beta_3) = (-2, 2n-1, 2n-4)$ *mit* $n \neq 2 \mod 3$ *oder* $(b, \alpha_3, \beta_3) = (-1, 2n-1, 3)$ *mit* $n \neq 2 \mod 3$ erhalten wir

$$G = \langle q_1, q_2 \mid q_1^2 = q_2^2,\ (q_1q_2)^{2n-1}q_1^{-4(n+1)} = 1 \rangle. \tag{5.12}$$

In dieser Gruppe gilt wie bereits berechnet $q_1^{12} = 1$. Daher besitzen q_1 und q_1^5 denselben normalen Abschluss in G. Wir möchten $q_1 \not\sim q_1^{\pm 5}$ zeigen. Dazu bemerken wir, dass die in beiden Präsentationen gerade q_1-Potenz der zweiten Relation der einzige Unterschied zwischen G aus (5.9) und (5.12) ist. Ein Blick auf die Argumentation für G aus (5.9) zeigt, dass nur die Terme $(q_1q_2)^m$ und $q_2(q_1q_2)^m$ in den Normalformen von Bedeutung für den Beweis sind. Somit besitzt auch die Gruppe G aus (5.12) nicht die Magnus-Eigenschaft.

Fall 3: Genau ein α_i sei gleich 2.

Fall 3.1: Sei $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ eine Permutation von $(2, 3, 3)$.
Indem wir ggf. mit der Präsentation (5.5) arbeiten und eine Umbenennung vornehmen, können wir o.B.d.A. $\alpha_1 = 2$ annehmen. Dann folgt

$$\begin{aligned}
G &= \langle q_1, q_2, h \mid [q_1, h] = 1,\ [q_2, h] = 1,\ q_1^2 = h^{-1},\ q_2^{\alpha_2}h^{\beta_2} = 1,\\
&\quad (q_1q_2)^{\alpha_3} = h^{\beta_3 + b\cdot\alpha_3}\rangle\\
&= \langle q_1, q_2 \mid [q_1^2, q_2] = 1,\ q_2^3 = q_1^{2\beta_2},\ (q_1q_2)^3q_1^{6b+2\beta_3} = 1\rangle\\
(\ &= \langle q_1, q_2 \mid [q_1^2, q_3] = 1,\ q_3^3 = q_1^{2\beta_3},\ (q_1q_3)^3q_1^{6b+2\beta_2} = 1\rangle\ ).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Bei G handelt es sich um eine endliche Gruppe. Zunächst nutzen wir jedoch nur folgende Relation:

$$\begin{aligned}
&(q_2q_1)^3(q_1q_2)^3 = q_1^{-12b-4\beta_3}\\
\Leftrightarrow\quad &q_2q_1q_2q_1q_2q_1^2q_2q_1q_2q_1q_2 = q_1^{-12b-4\beta_3}\\
\Leftrightarrow\quad &q_1^2q_2q_1q_2 \underbrace{q_1q_2^2q_1}_{q_1^{4+2\beta_2}q_1^{-1}q_2^{-1}q_1^{-1}} q_2q_1q_2 = q_1^{-12b-4\beta_3}\\
\Leftrightarrow\quad &q_1^{6+2\beta_2}q_2q_1q_2 \underbrace{q_1^{-1}q_2^{-1}q_1^{-1}}_{q_1^{6b+2\beta_3}q_2q_1q_2} q_2q_1q_2 = q_1^{-12b-4\beta_3}\\
\Leftrightarrow\quad &q_1^{6(b+1)+2(\beta_2+\beta_3)}q_2 \underbrace{q_1q_2^2q_1q_2^2q_1}_{q_1^{6+4\beta_2}q_1^{-1}q_2^{-1}q_1^{-1}q_2^{-1}q_1^{-1}} q_2 = q_1^{-12b-4\beta_3}\\
\Leftrightarrow\quad &q_1^{6(b+2)+6\beta_2+2\beta_3}q_2 \underbrace{q_1^{-1}q_2^{-1}q_1^{-1}q_2^{-1}q_1^{-1}}_{q_1^{6b+2\beta_3}q_2} q_2 = q_1^{-12b-4\beta_3}\\
\Leftrightarrow\quad &q_1^{12(b+1)+6\beta_2+4\beta_3}q_2^3 = q_1^{-12b-4\beta_3}\\
\Leftrightarrow\quad &q_1^{12(2b+1)+8(\beta_2+\beta_3)} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad q_1^{4(6b+2(\beta_2+\beta_3)+3)} = 1
\end{aligned}$$

Da q_1^2 im Zentrum von G liegt und somit alle Potenzen dieses Elements nur zu sich selbst konjugiert sind, besitzt G wegen Lemma A.2 nicht die Magnus-Eigenschaft, falls die Ordnung von q_1^2 in $\mathbb{Z}\backslash\{0,1,2,3,4,6\}$ liegt. Falls q_1 eine ungerade Ordnung hat, liegt wegen $[q_1^2, q_2] = 1$ jede Potenz von q_1 im Zentrum von G. Insgesamt besitzt G also nicht die Magnus-Eigenschaft, falls die Ordnung von q_1 in $\mathbb{Z}\backslash\{1,2,3,4,6,8,12\}$ liegt.

Wir haben bisher nur eine obere Schranke der Ordnung von q_1 ermittelt. Durch Betrachtung der Faktorgruppe $G/\langle\langle[q_1,q_2]\rangle\rangle = \langle q_1, q_2 \mid [q_1,q_2],\, q_2^3 = q_1^{2\beta_2},\, q_1^{6b+2(\beta_2+\beta_3)+3} = 1\rangle$ erhalten wir die untere Schranke $6b+2(\beta_2+\beta_3)+3$. Alle in Fall 3.4 noch zu betrachtenden Fälle sind somit in der folgenden Tabelle enthalten:

$\beta_2+\beta_3$	b	$6b+2(\beta_2+\beta_3)+3$	$4(6b+2(\beta_2+\beta_3)+3)$
2	-1	1	4
3	-2	-3	-12
3	-1	3	12
4	-2	-1	-4

Fall 3.1.1: Sei $\beta_2 = \beta_3 = 1$ und $b = -1$.
Es gilt

$$\begin{aligned} G &= \langle q_1, q_2 \mid [q_1^2, q_2] = 1,\ q_2^3 = q_1^2,\ (q_1q_2)^3 q_1^{-4} = 1, q_1^4 = 1\rangle. \\ &= \langle q_1, q_2 \mid q_1^4 = 1,\ q_1^2 = q_2^3,\ (q_1q_2)^3 = 1\rangle. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Wegen der Relation $q_2^{-1}q_1^2q_2 = q_1^2$ in G folgt mit [Bog05, Lemma 2.2], dass q_2 und

$$\begin{aligned} r &:= (q_2q_1)^2 q_1^{-1} q_2 q_1^2 (q_2q_1)^{-2} q_1^{-1} = q_2q_1q_2^2q_1q_2^{-1}q_1^{-1}q_2^{-1}q_1^{-1} \\ &= q_2q_1q_2^2q_1^2q_2 = q_1^4q_2q_1 = q_2q_1 \end{aligned}$$

denselben normalen Abschluss in G besitzen. Es bleibt noch auszuschließen, dass r in G zu q_2 oder q_2^{-1} konjugiert ist. Dazu werden wir r Schritt für Schritt mit den Repräsentanten q_1, q_2 und q_2^2 der Nebenklassen des Zentrums von G in G konjugieren. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} q_1^{-1}\cdot q_2q_1\cdot q_1 &= \underline{q_1q_2},\ \ q_2^{-1}\cdot q_2q_1\cdot q_2 = q_1q_2,\ \ q_2^{-2}\cdot q_2q_1\cdot q_2^2 = \underline{q_2^{-1}q_1q_2^2}, \\ q_1^{-1}\cdot q_1q_2\cdot q_1 &= q_2q_1,\ \ q_2^{-1}\cdot q_1q_2\cdot q_2 = q_2^{-1}q_1q_2^2,\ \ q_2^{-2}\cdot q_1q_2\cdot q_2^2 = q_2^{-2}q_1q_2^3 = q_2q_1, \\ q_1^{-1}\cdot q_2^{-1}q_1q_2^2\cdot q_1 &= (q_1^{-1}q_2^{-1})^2q_1 = q_1^2q_2 = \underline{q_2^4},\ \ q_2^{-1}\cdot q_2^{-1}q_1q_2^2\cdot q_2 = q_2q_1, \\ q_2^{-2}\cdot q_2^{-1}q_1q_2^2\cdot q_2^2 &= q_1q_2, \\ q_1^{-1}\cdot q_2^4\cdot q_1 &= \underline{q_1q_2q_1},\ \ q_2^{-1}\cdot q_2^4\cdot q_2 = q_2^4,\ \ q_2^{-2}\cdot q_2^4\cdot q_2^2 = q_2^4, \\ q_1^{-1}\cdot q_1q_2q_1\cdot q_1 &= q_2^4,\ \ q_2^{-1}\cdot q_1q_2q_1\cdot q_2 = q_2^{-2}q_1^{-1} = q_2q_1,\ \ q_2^{-2}\cdot q_1q_2q_1\cdot q_2^2 = q_1q_2, \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass keines dieser ermittelten Elemente gleich q_2 oder q_2^{-1} ist. Durch das Gleichsetzen der Konjugierten mit $q_2^{\pm1}$ ergibt sich jeweils eine der folgenden Relationen:

$$q_1 = 1,\ \ q_1^{-1}q_2^{-1} = 1,\ \ q_1^2 = 1 \ \text{ oder } \ q_2 = 1$$

Für die Gruppe G folgt dann:

$$G \cong \mathbb{Z}_3, \quad G = \langle q_1, q_2 \mid q_1^2 = q_2^3 = (q_1 q_2)^3 = 1 \rangle \text{ oder } G = \{1\}$$

Diese endlichen Gruppen der Ordnung 3, 12 und 1 entsprechen jedoch nicht der endlichen Gruppe (5.14) mit Ordnung 24. Somit besitzt G nicht die Magnus-Eigenschaft. Für die Berechnung der Gruppenordnungen haben wir auf das Computeralgebrasystem Magma zurückgegriffen, welches den Todd-Coxeter Algorithmus verwendet.

Fall 3.1.2: Sei $\beta_2 + \beta_3 = 3$ und $b = -2$.
Indem wir ggf. mit der Präsentation (5.13) arbeiten und eine Umbenennung vornehmen, können wir o.B.d.A. $\beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ annehmen. Es gilt

$$G = \langle q_1, q_2 \mid [q_1^2, q_2] = 1,\ q_2^3 = q_1^2,\ (q_1 q_2)^3 q_1^{-8} = 1,\ q_1^{12} = 1 \rangle$$

Wir gehen über zur Gruppe

$$B := G/\langle\langle q_1^4 \rangle\rangle = \langle q_1, q_2 \mid q_2^3 = q_1^2,\ (q_1 q_2)^3 = 1,\ q_1^4 = 1 \rangle.$$

Dies ist die Gruppe aus Fall 3.1.1. Wir beobachten, dass $q_2^{-1} q_1^2 q_2 = q_1^2$ nicht nur in B, sondern auch in G gilt. Somit kann analog zu Fall 3.1.1 bewiesen werden, dass G nicht die Magnus-Eigenschaft besitzt.

Fall 3.1.3: Sei $\beta_2 + \beta_3 = 3$ und $b = -1$.
Indem wir ggf. mit der Präsentation (5.13) arbeiten und eine Umbenennung vornehmen, können wir o.B.d.A. $\beta_2 = 2, \beta_3 = 1$ annehmen. Es gilt

$$G \quad = \quad \langle q_1, q_2 \mid [q_1^2, q_2] = 1,\ q_2^3 = q_1^4,\ (q_1 q_2)^3 q_1^{-4} = 1,\ q_1^{12} = 1 \rangle.$$

Wir bemerken, dass die Relation $q_2^{-1} q_1^4 q_2 = q_1^4$ in G gilt und betrachten die Faktorgruppe

$$B := G/\langle\langle q_1^4 \rangle\rangle = \langle q_1, q_2 \mid [q_1^2, q_2] = 1,\ q_2^3 = q_1^4 = 1,\ (q_1 q_2)^3 = 1 \rangle.$$

Laut [Bog05, Lemma 2.2] besitzen die Elemente $y := q_2$ und

$$z := (q_2 q_1)^4 q_1^{-1} q_2 q_1^2 (q_2 q_1)^{-4} q_1^{-1} = q_2^2 q_1 q_2^{-1} q_1^{-1} = q_2^{-1} q_1 q_2^{-1} q_1^{-1}$$

denselben normalen Abschluss in G und damit auch in B. Wegen

$$q_2 z q_2^{-1} = q_1 \underbrace{q_2^{-1} q_1^{-1} q_2^{-1}}_{q_1 q_2 q_1} = q_1^2 q_2 q_1 \quad \Rightarrow \quad q_1 q_2 z q_2^{-1} q_1^{-1} = q_1^3 q_2 = q_1^{-1} q_2$$

besitzen auch y und $\tilde{z} := q_1^{-1} q_2$ denselben normalen Abschluss in G und B. Wären sie auch in B zueinander konjugiert, so müsste $\tilde{z}^3 = 1$ in B gelten. Das bedeutet

$$\tilde{z}^3 = q_1^{-1} q_2 q_1^{-1} q_2 q_1^{-1} q_2 = q_1^{-1} \underbrace{q_2 q_1 q_2 q_1 q_2}_{q_1^{-1}} = q_1^2 = 1.$$

Es müsste somit

$$\begin{aligned} B &= \langle q_1, q_2 \mid [q_1^2, q_2] = 1,\ q_2^3 = q_1^4 = 1,\ (q_1q_2)^3 = 1\rangle \\ \cong \widetilde{B} &:= \langle q_1, q_2 \mid q_2^3 = q_1^2 = 1,\ (q_1q_2)^3 = 1\rangle \end{aligned}$$

gelten. Die Ordnung von B ist 24, aber die Ordnung von $\widetilde{B}$ ist gleich 12. Wir erhalten daher einen Widerspruch. Somit besitzt G nicht die Magnus-Eigenschaft. Für die Berechnung der Gruppenordnungen haben wir auf das Computeralgebrasystem Magma zurückgegriffen, welches den Todd-Coxeter Algorithmus verwendet.

Fall 3.1.4: Sei $\beta_2 + \beta_3 = 4$ und $b = -2$.
Es gilt

$$\begin{aligned} G &= \langle q_1, q_2 \mid [q_1^2, q_2] = 1,\ q_2^3 = q_1^4,\ (q_1q_2)^3q_1^{-8} = 1,\ q_1^4 = 1\rangle \\ &= \langle q_1, q_2 \mid [q_1^2, q_2] = 1,\ q_2^3 = q_1^4 = 1,\ (q_1q_2)^3 = 1\rangle. \end{aligned}$$

Dies ist die Gruppe B aus Fall 3.1.3, welche nicht die Magnus-Eigenschaft besitzt.

Fall 3.2: Sei $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ eine Permutation von $(2, 3, 4)$.
Indem wir ggf. mit (5.5) arbeiten und eine Umbenennung vornehmen, dürfen wir o.B.d.A. $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$ und $\alpha_3 = 4$ setzen. Dann gilt die Relation $q_2^{-1}q_1^3q_2 = q_1^3$ in G. Wir betrachten die Faktorgruppe

$$B := G/\langle\langle h\rangle\rangle = \langle q_1, q_2 \mid q_1^3 = 1,\ q_2^2 = 1,\ (q_1q_2)^4 = 1\rangle.$$

Laut [Bog05] besitzen die Elemente $y := q_2$ und

$$z := (q_2q_1)^3q_1^{-1}q_2q_1^2(q_2q_1)^{-3}q_1^{-1} = q_1^{-1}q_2^{-1}q_1^{-1}q_2q_1^2q_2 = q_1^{-1}q_2^{-1}q_1^{-1}q_2^{-1}q_1^{-1}q_2^{-1} = q_2q_1$$

von B denselben normalen Abschluss in B. Wären sie in B zueinander konjugiert, müssten sie dieselbe Ordnung in B besitzen. Dies führt zur Relation $(q_2q_1)^2 = 1$. Mithilfe des Computeralgebrasystems Magma, welches den Todd-Coxeter Algorithmus verwendet, berechnen wir $|B| = 24 \neq 6 = |B/\langle\langle(q_2q_1)^2\rangle\rangle|$. Somit ist z in G nicht zu $y^{\pm 1}$ konjugiert und G besitzt nicht die Magnus-Eigenschaft.

Fall 3.3: Sei $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ eine Permutation von $(2, 3, 5)$.
Indem wir ggf. mit (5.5) arbeiten und eine Umbenennung vornehmen, dürfen wir o.B.d.A. $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$ und $\alpha_3 = 5$ setzen. Wir betrachten somit die Gruppe

$$G = \langle q_1, q_2, h \mid [q_1, h] = 1,\ [q_2, h] = 1,\ q_1^2 = h^{-1},\ q_2^3h^{\beta_2} = 1,\ (q_1q_2)^5 = h^{\beta_3+5b}\rangle.$$

Laut [Bog05] besitzen die Elemente y und $z = (yx)^5x^{-1}yx^2(yx)^{-5}x^{-1}$ für $x := q_1q_2$ und $y := q_1$ denselben normalen Abschluss in G. Wäre nun z in G zu q_1 oder q_1^{-1} konjugiert, so würde $z^2 = 1$ in der Faktorgruppe

$$B := G/\langle\langle h\rangle\rangle = \langle q_1, q_2 \mid q_1^2 = 1,\ q_2^3 = 1,\ (q_1q_2)^5 = 1\rangle$$

gelten. Wir berechnen

$$\begin{aligned} z &= (q_1^2q_2)^5q_2^{-1}q_1^{-1}q_1q_1q_2q_1q_2(q_1^2q_2)^{-5}q_2^{-1}q_1^{-1} \\ &= q_2q_1q_2q_1q_2q_1 = (q_2q_1)^3. \end{aligned}$$

Folglich gilt $z^2 = q_2q_1$ in B. Man berechnet die Ordnung von B zu 60 (z.B. mithilfe des Computeralgebrasystems Magma unter Verwendung des Todd-Coxeter Algorithmus). Wäre nun z^2 trivial in B, so wäre B gleich seiner Faktorgruppe $B' := B/\langle\langle q_2q_1\rangle\rangle = \{1\}$. Dies ist ein Widerspruch. Daher besitzt G nicht die Magnus-Eigenschaft.

Fall 3.4: Sei $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ eine Permutation von $(2, 3, 6)$.
Indem wir ggf. mit (5.5) arbeiten und eine Umbenennung vornehmen, dürfen wir o.B.d.A. $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$ und $\alpha_3 = 6$ setzen. Dann gilt

$$\begin{aligned} G &= \langle q_1, q_2, h \mid [q_1, h] = 1,\ [q_2, h] = 1,\ q_1^2 = h^{-1},\ q_2^3h^{\beta_2} = 1,\ (q_1q_2)^6 = h^{\beta_3+6b}\rangle \\ &= \langle q_1, q_2 \mid [q_1^2, q_2] = 1,\ q_2^3 = q_1^{2\beta_2},\ (q_1q_2)^6 = q_1^{-2(\beta_3+6b)}\rangle. \end{aligned}$$

Wir betrachten den durch $\varphi(q_1) = q_1$ und $\varphi(q_2) = q_2q_1^{2(\beta_2-1)}$ gegebenen Isomorphismus $\varphi\colon G \to G'$ und erhalten wegen $\beta_2 \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} G' &= \langle q_1, q_2 \mid [q_1^2, q_2] = 1,\ q_2^3 = q_1^{2(3-2\beta_2)},\ (q_1q_2)^6 = q_1^{-2(\beta_3+6b)-12(\beta_2-1)}\rangle \\ &= \langle q_1, q_2 \mid q_2^3 = q_1^{2(3-2\beta_2)},\ (q_1q_2)^6 = q_1^{-2(\beta_3+6b)-12(\beta_2-1)}\rangle. \end{aligned}$$

Laut [Bog05, Lemma 2.2] besitzen für $x := q_1$ und $y := q_2$ die Elemente y und $z = (yx)^2x^{-1}yx^2(yx)^{-2}x^{-1}$ denselben normalen Abschluss in G'. Es gilt

$$\begin{aligned} z &= (q_2q_1)^2q_1^{-1}q_2q_1^2(q_2q_1)^{-2}q_1^{-1} = q_2q_1q_2^2q_1q_2^{-1}q_1^{-1}q_2^{-1}q_1^{-1} \\ &= q_1^4q_2^5q_2^{-1}q_1^{-1}q_2^{-1}q_1^{-1}q_2^{-1}q_1^{-1}q_2^{-1}q_1^{-1} = q_1^4q_2^5q_1q_2q_1q_2. \end{aligned}$$

Somit ist z wegen $2(3-2\beta_2) \in \{\pm 2\}$ zu $z' = q_1^6q_2^6q_2 = q_1^{6+4(3-2\beta_2)}q_2 = q_1^{18-8\beta_2}q_2$ konjugiert. Wäre nun z zu $q_2^{\pm 1}$ in G konjugiert, so wäre auch das Elemente $z'^3 = q_1^{18+14\beta_2}$ zu $q_2^{\pm 3} = q_1^{\pm 2}$ oder $q_1^{\mp 2}$ konjugiert. Da z'^3 und $q_1^{\pm 2}$ Zentrumselemente sind, folgt $q_1^{20+14\beta_2} = 1$ oder $q_1^{16+14\beta_2} = 1$. Um diese Gleichungen auszuschließen, benutzen wir die Theorie kleiner Kürzungen (siehe Kapitel D). Sei

$$B' := \langle q_1, q_2 \mid q_1^{2(3-2\beta_2)} = q_2^3\rangle.$$

Dann gilt $G' = B'/\langle\langle(q_1q_2)^6q_1^{-2(6\beta_2+\beta_3+6b-6)}\rangle\rangle$. Wir setzen $\tau := -(6\beta_2 + \beta_3 + 6b - 6)$. Für die von $w = (q_1q_2)^6q_1^{2\tau}$ erzeugte, symmetrisierte Teilmenge $R \subset B'$ gilt:

$$R = \{q_1^{\gamma_1}(q_1q_2)^{\pm 6}q_1^{-\gamma_1}q_1^{2\tau},\ q_2^{\gamma_2}(q_2q_1)^{\pm 6}q_2^{-\gamma_2}q_1^{2\tau} \mid \gamma_1 \in \mathbb{Z}_2, \gamma_2 \in \mathbb{Z}_3\}$$

Die Kürzungsstücke von R lauten

$$q_1^iq_2^{j_1}q_1^{2\sigma} \text{ und } q_2^{j_1}q_1^iq_2^{j_2}q_1^{2\sigma} \text{ mit } i \in \mathbb{Z}_2,\ j_1, j_2 \in \mathbb{Z}_3,\ \sigma \in \mathbb{Z}.$$

Daher erfüllt R die Bedingungen $C(6)$ und $T(3)$. Wir wenden Satz D.5 für $(p,q) = (6,3)$ an und erfahren, dass jedes nichttriviale Elemente aus dem normalen Abschluss von $(q_1q_2)^6q_1^{2\tau}$ in B' einen $i(3)$-Überrest, also ein Teilwort der Form $(q_1q_2q_1q_2q_1)^{\pm 1}$ enthält. Da ein solches Teilwort weder in $q_1^{16+14\beta_2} = 1$ noch in $q_1^{20+14\beta_2} = 1$ enthalten ist, erhalten wir einen Widerspruch. Somit besitzt G nicht die Magnus-Eigenschaft.

Fall 3.5: Sei $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ eine Permutation von $(2,3,c)$, wobei $c \geqslant 7$ gelte.
Indem wir ggf. mit (5.5) arbeiten und eine Umbenennung vornehmen, dürfen wir o.B.d.A. $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$ und $\alpha_3 = c$ setzen. Laut [Bog05, Lemma 2.2] besitzen für $x := q_1$ und $y := q_2q_1$ die Elemente y und $z = (yx)^2x^{-1}yx^2(yx)^{-2}x^{-1}$ denselben normalen Abschluss in G. In $B := G/\langle\langle h \rangle\rangle = \langle q_1, q_2 \mid q_1^2 = 1,\ q_2^3 = 1,\ (q_1q_2)^c = 1\rangle$ gilt

$$z \;=\; (q_2q_1^2)^2q_1^{-1}q_2q_1q_1^2(q_2q_1^2)^{-2}q_1^{-1} \;=\; q_2^2q_1q_2q_1q_2^{-2}q_1 \;=\; q_2^{-1}q_1q_2q_1q_2q_1.$$

Wäre nun z in G zu $y^{\pm 1}$ konjugiert, so würde $z^c = 1$ in B gelten. Um diese Gleichheit auszuschließen, benutzen wir die Theorie kleiner Kürzungen (siehe Kapitel D). Sei $B' := \langle q_1, q_2 \mid q_1^2 = 1,\ q_2^3 = 1\rangle$. Dann gilt $B = B'/\langle\langle (q_1q_2)^c \rangle\rangle$. Für die von $w = (q_1q_2)^c$ erzeugte, symmetrisierte Teilmenge $R \subset B'$ gilt:

$$R = \{q_1^{\gamma_1}(q_1^{\pm 1}q_2)^{\pm c}q_1^{-\gamma_1},\ q_2^{\gamma_2}(q_2q_1^{\pm 1})^{\pm c}q_2^{-\gamma_2} \mid \gamma_1 \in \mathbb{Z}_2,\ \gamma_2 \in \mathbb{Z}_3\}$$

Alle Kürzungsstücke von R lauten $q_2^{j_1}q_1^iq_2^{j_2}$ $(i \in \mathbb{Z}_2,\ j_1, j_2 \in \mathbb{Z}_3)$. Somit erfüllt R die Bedingungen $C(6)$ und $T(3)$. Wir wenden Satz D.5 für $(p,q) = (6,3)$ an. Wäre z^c trivial in B, so müsste z^c laut Satz D.5 in R liegen oder eine semi-gekürzte Darstellung $w^* = u_1s_1 \ldots u_ms_m$ besitzen, wobei jedes s_k ein $i(s_k)$-Überrest ist und die Anzahl m der s_k sowie die Nummer $i(s_k)$ die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{m} \big[4 - i(s_k)\big] \geqslant 6$$

erfüllen. Damit die Summe in einen positiven Bereich kommt, müsste es s_k mit $i(s_k) \leqslant 3$ geben. Alle 3-Überreste enthalten wegen $c \geqslant 7$ ein Teilwort der Form $(q_1q_2q_1q_2q_1q_2q_1)^{\pm 1}$. Da solche Teilwörter in keinem zyklisch gekürzten Konjugierten von $z^c \in B'$ zu finden sind und z^c auch nicht in R liegt, gilt $z^c \neq 1$ in B und z ist nicht in G zu $y^{\pm 1}$ konjugiert. Somit besitzt G nicht die Magnus-Eigenschaft.

Fall 3.6: Sei $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ eine Permutation von $(2,4,4)$.
Indem wir ggf. mit (5.5) arbeiten und eine Umbenennung vornehmen, dürfen wir o.B.d.A. $\alpha_1 = 2$ und $\alpha_2 = \alpha_3 = 4$ setzen. Dann gilt

$$\begin{aligned} G &= \langle q_1, q_2, h \mid [q_1, h] = 1,\ [q_2, h] = 1,\ q_1^2 = h^{-1},\ q_2^4h^{\beta_2} = 1,\ (q_1q_2)^4 = h^{\beta_3+4b}\rangle \\ &= \langle q_1, q_2 \mid [q_1^2, q_2] = 1,\ q_2^4 = q_1^{2\beta_2},\ (q_1q_2)^4 = q_1^{-2(\beta_3+4b)}\rangle. \end{aligned}$$

Wir betrachten den durch $\varphi(q_1) = q_1$ und $\varphi(q_2) = q_2 q_1^{\beta_2 - 1}$ gegebenen Isomorphismus $\varphi\colon G \to G'$ und erhalten wegen $\beta_2 \in \{1, 3\}$

$$\begin{aligned} G' &= \langle q_1, q_2 \mid [q_1^2, q_2] = 1,\ q_2^4 = q_1^{-2\beta_2+4},\ (q_1q_2)^4 = q_1^{-2(\beta_3+6b)-4(\beta_2-1)} \rangle \\ &= \langle q_1, q_2 \mid q_2^4 = q_1^{-2\beta_2+4},\ (q_1q_2)^4 = q_1^{-2(\beta_3+6b)-4(\beta_2-1)} \rangle. \end{aligned}$$

Laut [Bog05, Lemma 2.2] besitzen für $x := q_1$ und $y := q_1q_2$ die Elemente y und $z = (yx)^2x^{-1}yx^2(yx)^{-2}x^{-1}$ denselben normalen Abschluss in G'. Es gilt für $\tau := -2(\beta_3 + 6b) - 4(\beta_2 - 1)$

$$\begin{aligned} z &= (q_1q_2q_1)^2q_1^{-1}q_1q_2q_1^2(q_1q_2q_1)^{-2}q_1^{-1} = q_1^2(q_1q_2^2q_1)q_1^{-1}q_1q_2(q_1^{-1}q_2^{-2}q_1^{-1})q_1^{-1} \\ &= q_1^{-2}q_1q_2^2\underline{q_1q_2q_1}q_2^{-2} = q_1^{-2+\tau}q_1q_2q_1^{-1}q_2^{-1}q_1^{-1}q_2^{-3}. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$q_2^{-3}zq_2^3 = q_1^{-4+\tau}q_2^{-4}\underline{q_2q_1q_2q_1}q_2^{-1}q_1^{-1} = q_1^{-8+2\tau+2\beta_2}q_2^{-1}q_1^{-1} =: z'.$$

Wäre nun z in G' zu $y^{\pm 1}$ konjugiert, so wäre

$$z'^4 = q_1^{-32+7\tau+8\beta_2} \text{ zu } y^{\pm 4} = q_1^{\pm\tau}$$

konjugiert. Es folgt $q_1^{-32+8\tau+8\beta_2} = 1$ oder $q_1^{-32+6\tau+8\beta_2} = 1$. Analog zu Fall 3.4 kann man mithilfe der Theorie kleiner Kürzungen zeigen, dass keine echte q_1-Potenz in G' trivial ist. Daher gilt:

$$\begin{aligned} q_1^{-32+8\tau+8\beta_2} = 1 &\Leftrightarrow 8\tau + 8\beta_2 = 32 \Leftrightarrow \tau + \beta_2 = 4 \quad \text{oder} \\ q_1^{-32+6\tau+8\beta_2} = 1 &\Leftrightarrow 6\tau + 8\beta_2 = 32 \Leftrightarrow 3\tau + 4\beta_2 = 16 \end{aligned}$$

Da τ gerade ist und $\beta_2 \in \{1, 3\}$ gilt, kann der Fall $\tau + \beta_2 = 4$ nicht auftreten. Wir berechnen

$$\begin{aligned} 3\tau + 4\beta_2 = 16 &\Leftrightarrow -\beta_3 - 6b = 2 \quad \text{für } \beta_2 = 1 \text{ und} \\ 3\tau + 4\beta_2 = 16 &\Leftrightarrow -3\beta_3 - 18b = 14 \quad \text{für } \beta_2 = 3. \end{aligned}$$

Wegen $\beta_3 \in \{1, 3\}$ erhalten wir in allen Fällen einen Widerspruch. Daher besitzen G' und damit auch G nicht die Magnus-Eigenschaft.

Fall 3.7: Sei $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ eine Permutation von $(2, c, d)$, wobei $c \geqslant 4$ und $d \geqslant 5$ gelte. Indem wir ggf. mit (5.5) arbeiten und eine Umbenennung vornehmen, dürfen wir o.B.d.A. $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = c$ und $\alpha_3 = d$ setzen. Laut [Bog05, Lemma 2.2] besitzen für $x := q_1$ und $y := q_2q_1$ die Elemente y und $z = (yx)^2x^{-1}yx^2(yx)^{-2}x^{-1}$ denselben normalen Abschluss in G. In $B := G/\langle\langle h \rangle\rangle = \langle q_1, q_2 \mid q_1^2 = 1,\ q_2^c = 1,\ (q_1q_2)^d = 1 \rangle$ gilt

$$z = (q_2q_1^2)^2q_1^{-1}q_2q_1q_1^2(q_2q_1^2)^{-2}q_1^{-1} = q_2^2q_1q_2q_1q_2^{-2}q_1.$$

Wäre nun z in G zu $y^{\pm 1}$ konjugiert, so würde $z^d = 1$ gelten. Um diese Gleichheit auszuschließen, benutzen wir die Theorie kleiner Kürzungen (siehe Kapitel D). Sei $B' :=$

$\langle q_1, q_2 \mid q_1^2 = 1,\, q_2^c = 1\rangle$. Dann gilt $B = B'/\langle\!\langle (q_1q_2)^d \rangle\!\rangle$. Für die von $w = (q_1q_2)^d$ erzeugte, symmetrisierte Teilmenge $R \subset B'$ gilt:

$$R = \{q_1^{\gamma_1}(q_1^{\pm 1}q_2)^{\pm d}q_1^{-\gamma_1},\ q_2^{\gamma_2}(q_2q_1^{\pm 1})^{\pm d}q_2^{-\gamma_2} \mid \gamma_1 \in \mathbb{Z}_2,\ \gamma_2 \in \mathbb{Z}_c\}$$

Alle Kürzungsstücke von R lauten $q_2^{j_1}q_1^iq_2^{j_2}$ ($i \in \mathbb{Z}_2,\ j_1, j_2 \in \mathbb{Z}_c$). Somit erfüllt R die Bedingungen $C(4)$ und $T(4)$. Wir wenden Satz D.5 für $(p, q) = (4, 4)$ an. Wäre z^d trivial in B, so müsste z^d laut Satz D.5 in R liegen oder eine semi-gekürzte Darstellung $w^* = u_1s_1 \dots u_ms_m$ besitzen, wobei jedes s_k ein $i(s_k)$-Überrest ist und die Anzahl m der s_k sowie die Nummer $i(s_k)$ die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{m}\big[3 - i(s_k)\big] \geqslant 4$$

erfüllen. Damit die Summe in einen positiven Bereich kommt, müsste es s_k mit $i(s_k) \leqslant 2$ geben. Alle 2-Überreste enthalten wegen $d \geqslant 5$ ein Teilwort der Form $(q_1q_2q_1q_2q_1)^{\pm 1}$. Da solche Teilwörter in keinem zyklisch gekürzten Konjugierten von $z^d \in B'$ zu finden sind und z^d auch nicht in R liegt, gilt $z^d \neq 1$ in B und z ist nicht in G zu $y^{\pm 1}$ konjugiert. Somit besitzt G nicht die Magnus-Eigenschaft.

Fall 4: Kein α_i sei gleich 2.

Fall 4.1: Sei $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (3, 3, 3)$.

Fall 4.1.1: Mindestens ein β_i ($1 \leqslant i \leqslant 3$) sei gleich 1 und es gelte $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, b) \neq (1, 1, 1, -1)$.
O. B. d. A. gelte $\beta_1 = 1$, indem wir ggf. eine Umbenennung vornehmen. Dann folgt:

$$\begin{aligned} G &= \langle q_1, q_2, h \mid [q_1, h] = 1,\, [q_2, h] = 1,\, q_1^3 = h^{-1},\, q_2^3 = h^{-\beta_2},\, (q_1q_2)^3 = h^{\beta_3+3b}\rangle \\ &= \langle q_1, q_2 \mid [q_1^3, q_2] = 1,\, q_2^3 = q_1^{3\beta_2},\, (q_1q_2)^3 = q_1^{-3(\beta_3+3b)}\rangle \end{aligned}$$

Wir betrachten den durch $\varphi(q_1) = q_1$ und $\varphi(q_2) = q_2q_1^{3(\beta_2-1)}$ gegebenen Isomorphismus $\varphi\colon G \to G'$ und erhalten wegen $\beta_2 \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} G' &= \langle q_1, q_2 \mid [q_1^3, q_2] = 1,\, q_2^3 = q_1^{3\beta_2-9(\beta_2-1)},\, (q_1q_2)^3 = q_1^{-3(\beta_3+3b)-9(\beta_2-1)}\rangle \\ &= \langle q_1, q_2 \mid q_2^3 = q_1^{-6\beta_2+9},\, (q_1q_2)^3 = q_1^{-3(\beta_3+3b)-9(\beta_2-1)}\rangle \end{aligned}$$

Laut [Bog05, Lemma 2.2] besitzen die Elemente y und $z := (yx)^{\alpha_1}x^{-1}yx^2(yx)^{-\alpha_1}x^{-1}$ für $x := q_1$ und $y := q_2^{-1}$ denselben normalen Abschluss in G'. Sei $\tau := -3(\beta_3+3b)-9(\beta_2-1)$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} z &= (q_2^{-1}q_1)^3q_1^{-1}q_2^{-1}q_1^2(q_1^{-1}q_2)^3q_1^{-1} = (q_2^{-1}\underline{q_1})^2\underline{q_2^{-2}q_1q_2}(q_1^{-1}q_2)^2q_1^{-1} \\ &= q_1^{\tau}q_2^{-3}(q_2^{-1}\underline{q_1})\underline{q_2^{-2}q_1^{-2}q_2}(q_1^{-1}q_2)q_1^{-1} = q_1^{2\tau-3}q_2^{-6}\underline{q_2^{-2}q_1^{-2}q_2}q_1^{-1} \\ &= q_1^{3\tau-6}q_2^{-9}q_1^{-1}q_2^{-1}q_1^{-2} = q_1^{-1}\cdot(q_1^{3\tau-9}q_2^{-9}q_2^{-1})\cdot q_1 \\ &= q_1^{-1}\cdot(q_1^{-9(\beta_3+3b)-27(\beta_2-1)-9+18\beta_2-27}q_2^{-1})\cdot q_1 = q_1^{-1}\cdot(q_1^{-9\beta_3-27b-9\beta_2-9}q_2^{-1})\cdot q_1 \end{aligned}$$

Wäre nun z zu y oder y^{-1} konjugiert, so wäre auch $z^3 = q_1^{-27\beta_3-81b-21\beta_2-36}$ gleich $q_1^{\pm(-6\beta_2+9)}$. Man bemerke, dass G' keine Kürzungsbedingung erfüllt, welche die Anwendung von Satz D.5 ermöglicht. Da q_1 in G' laut Lemma 5.9 unendliche Ordnung besitzt, folgt

$$-27\beta_3 - 81b - 21\beta_2 - 36 = -6\beta_2 + 9 \text{ oder } -27\beta_3 - 81b - 21\beta_2 - 36 = 6\beta_2 - 9,$$

also

$$3\beta_3 + 9b + 3\beta_2 + 5 = 0 \text{ oder } \beta_3 + 3b + \beta_2 + 1 = 0.$$

Die erste Gleichung hat keine Lösung und aus der zweiten Gleichung folgt $(\beta_2, \beta_3, b) = (1, 1, -1)$ (wegen $\beta_1, \beta_2 \in \{1, 2\}$). Diesen Fall haben wir hier ausgeschlossen. Somit besitzt G nicht die Magnus-Eigenschaft.

Fall 4.1.2: Es gelte $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 2$ und $b \neq 2$.
Durch den Isomorphismus φ von G, welcher durch $\varphi(q_1) = q_1h^{-1}$ und $\varphi(q_2) = q_2h^{-1}$ gegeben ist, gelangen wir zur Gruppe

$$\begin{aligned} G'' &= \langle q_1, q_2, h \mid [q_1, h] = 1,\ [q_2, h] = 1,\ q_1^3 = h,\ q_2^3 = h,\ (q_1q_2)^3 = h^{8+3b} \rangle \\ &= \langle q_1, q_2 \mid q_1^3 = q_2^3,\ (q_1q_2)^3 = q_1^{24+9b} \rangle. \end{aligned}$$

Wegen $b \neq 2$ folgt analog zu Fall 4.1.1, dass G'' und damit auch G nicht die Magnus-Eigenschaft besitzen.

Fall 4.1.3 (vgl. Vermutung 5.1): Sei $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, b) \in \{(1, 1, 1, -1), (2, 2, 2, -2)\}$.
Dies ist der einizige noch offene Fall für $g \geqslant 1$. Wir führen diesen Fall lediglich auf Vermutung 5.1 zurück.

Für $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, b) = (1, 1, 1, -1)$ gilt

$$\begin{aligned} G &= \langle q_1, q_2, h \mid [q_1, h] = 1,\ [q_2, h] = 1,\ q_1^3h = 1,\ q_2^3h = 1,\ (q_1q_2)^3 = h^{-2} \rangle \\ &= \langle q_1, q_2 \mid q_1^3 = q_2^3,\ (q_1q_2)^3 = q_1^6 \rangle. \end{aligned}$$

Auch im Fall $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, b) = (2, 2, 2, -2)$ erhalten wir durch Einsetzen in die zu G isomorphe Gruppe G'' aus Fall 4.1.2 $G \cong \langle q_1, q_2 \mid q_1^3 = q_2^3,\ (q_1q_2)^3 = q_1^6 \rangle$. Es bleibt somit, die Magnus-Eigenschaft der Gruppe $L = \langle x, y \mid x^3 = y^3,\ (xy)^3 = x^6 \rangle$ aus Vermutung 5.1 zu betrachten. Wir bemerken, dass die addierten Exponentensummen der beiden Relationen von L bzgl. x und y jeweils gleich 0 sind. Daher ist ausgeschlossen, dass die Methoden aus Fall 4.1.1 und Fall 4.1.2 zum Erfolg führen können.

Fall 4.2: Sei $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ eine Permutation von $(3, 3, 4)$.
Indem wir ggf. mit (5.5) arbeiten und eine Umbenennung vornehmen, dürfen wir o.B.d.A. $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 3$ und $\alpha_3 = 3$ voraussetzen. Es folgt:

$$G = \langle q_1, q_2 \mid [q_1, h] = 1,\ [q_2, h] = 1,\ q_1^4 = h^{-\beta_1},\ q_2^3 = h^{-\beta_2},\ (q_1q_2)^3 = h^{\beta_3+3b} \rangle$$

Laut [Bog05, Lemma 2.2] besitzen die Elemente $y := q_2$ und $z := (yx)^4x^{-1}yx^2(yx)^{-4}x^{-1}$ für $x := q_1$ denselben normalen Abschluss in G. Wir betrachten die Faktorgruppe

$$\begin{aligned} B &:= G/\langle\langle h, [q_1^2, q_2]\rangle\rangle \\ &= \langle q_1, q_2 \mid [q_1^2, q_2],\ q_1^4 = 1,\ q_2^3 = 1,\ (q_1q_2)^3 = 1\rangle \end{aligned}$$

und bemerken, dass diese Gruppe die Gruppe B aus Fall 3.1.3 ist. Da auch die Wahl von x und y mit der Wahl in Fall 3.1.3 übereinstimmt, gilt mit dem Beweis von Fall 3.1.3, dass G nicht die Magnus-Eigenschaft besitzt.

Fall 4.3: Sei $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ eine Permutation von $(3, 4, 4)$.
Indem wir ggf. mit (5.5) arbeiten und eine Umbenennung vornehmen, dürfen wir o.B.d.A. $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4$ und $\alpha_3 = 4$ voraussetzen. Laut [Bog05, Lemma 2.2] besitzen für $x := q_1$ die Elemente $y := q_2$ und $z := (yx)^3x^{-1}yx^2(yx)^{-3}x^{-1}$ denselben normalen Abschluss in G. Wir definieren

$$\begin{aligned} B &:= G/\langle\langle h, q_2^2\rangle\rangle \\ &= \langle q_1, q_2 \mid q_1^3 = 1,\ q_2^2 = 1,\ (q_1q_2)^4 = 1\rangle. \end{aligned}$$

Diese Gruppe entspricht der Gruppe B aus Fall 3.2. Im Beweis zu Fall 3.2 haben wir gezeigt, dass z in B nicht zu $y^{\pm 1}$ konjugiert ist. Somit besitzt G nicht die Magnus-Eigenschaft.

Fall 4.4: Sei $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (4, 4, 4)$.
Laut [Bog05, Lemma 2.2] besitzen die Elemente $y := q_2$ und $z := (yx)^2x^{-1}yx^2(yx)^{-2}x^{-1}$ für $x := q_1^2$ denselben normalen Abschluss in G. In der Faktorgruppe

$$B := G/\langle\langle h\rangle\rangle = \langle q_1, q_2 \mid q_1^4 = 1,\ q_2^4 = 1,\ (q_1q_2)^4 = 1\rangle$$

gilt:

$$z = (q_2q_1^2)^2q_1^{-2}q_2q_1^4(q_1^{-2}q_2^{-1})^2q_1^{-2} = q_2q_1^2q_2^2(q_1^{-2}q_2^{-1})^2q_1^{-2} = q_2q_1^2q_2^2q_1^2q_2^{-1}q_1^2q_2^{-1}q_1^2$$

Wäre nun z in G zu $y^{\pm 1}$ konjugiert, so würde in B $z^4 = 1$ gelten. Um diese Gleichheit auszuschließen, benutzen wir die Theorie kleiner Kürzungen (siehe Kapitel D). Sei $B' := \langle q_1, q_2 \mid q_1^4 = 1,\ q_2^4 = 1\rangle$. Dann gilt $B = B'/\langle\langle(q_1q_2)^4\rangle\rangle$. Für die von $w = (q_1q_2)^4$ erzeugte, symmetrisierte Teilmenge $R \subset B'$ gilt:

$$R = \{q_1^{\gamma_1}(q_1q_2)^{\pm 4}q_1^{-\gamma_1},\ q_2^{\gamma_2}(q_2q_1)^{\pm 4}q_2^{-\gamma_2} \mid \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}_4\}$$

Alle Kürzungsstücke von R lauten $q_1^iq_2^j$ und $q_2^jq_1^i$ $(i, j \in \mathbb{Z}_4)$. Somit erfüllt R die Bedingungen $C(4)$ und $T(4)$. Wir wenden Satz D.5 für $(p, q) = (4, 4)$ an. Wäre z^4 trivial in B, so müsste z^4 laut Satz D.5 in R liegen oder eine semi-gekürzte Darstellung

$w^* = u_1 s_1 \dots u_m s_m$ besitzen, wobei jedes s_k ein $i(s_k)$-Überrest ist und die Anzahl m der s_k sowie die Nummer $i(s_k)$ die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{m} \big[3 - i(s_k)\big] \geqslant 4$$

erfüllen. Damit die Summe in einen positiven Bereich kommt, müsste es s_k mit $i(s_k) \leqslant 2$ geben. Alle 2-Überreste enthalten ein Teilwort der Form $(q_1 q_2)^{\pm 1}$. Da solche Teilwörter in keinem zyklisch gekürzten Konjugierten von $z^4 \in B'$ zu finden sind und z^d auch nicht in R liegt, gilt $z^4 \neq 1$ in B und z ist nicht in G zu $y^{\pm 1}$ konjugiert. Somit besitzt G nicht die Magnus-Eigenschaft.

Fall 4.5: Sei $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ eine Permutation von (c, d, e), wobei $c, d \geqslant 3$ und $e \geqslant 5$ gelte. Indem wir ggf. mit (5.5) arbeiten und eine Umbenennung vornehmen, dürfen wir o.B.d.A. $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 3$ und $\alpha_3 \geqslant 5$ voraussetzen. Wir setzen $x := q_2^{-1} q_1^{-1} q_2$ und $y := q_1$. Dann gilt $y^{-1} x^{\alpha_1} y = x^{\alpha_1}$ und somit besitzen laut [Bog05, Lemma 2.2] die Elemente y und $z := (yx)^{\alpha_1} x^{-1} y x^2 (yx)^{-\alpha_1} x^{-1}$ denselben normalen Abschluss in G. Es folgt:

$$\begin{aligned} z &= (q_1 q_2^{-1} q_1^{-1} q_2)^{\alpha_1} (q_2^{-1} q_1^{-1} q_2)^{-1} q_1 (q_2^{-1} q_1^{-1} q_2)^2 (q_1 q_2^{-1} q_1^{-1} q_2)^{-\alpha_1} (q_2^{-1} q_1^{-1} q_2)^{-1} \\ &= (q_1 q_2^{-1} q_1^{-1} q_2)^{\alpha_1 - 1} q_1^2 (q_2^{-1} q_1^{-1} q_2)^2 (q_2^{-1} q_1 q_2 q_1^{-1})^{\alpha_1} q_2^{-1} q_1 q_2 \\ &= (q_1 q_2^{-1} q_1^{-1} q_2)^{\alpha_1 - 1} q_1^2 q_2^{-1} q_1^{-1} q_2 (q_1^{-1} q_2^{-1} q_1 q_2)^{\alpha_1} \end{aligned} \tag{5.15}$$

Wir definieren die Gruppe

$$B := G/\langle\langle h \rangle\rangle = \langle q_1, q_2 \mid q_1^{\alpha_1} = q_2^{\alpha_2} = (q_1 q_2)^{\alpha_3} = 1 \rangle. \tag{5.16}$$

Diese Gruppe ist auch als von Dyck Gruppe $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ bekannt. Sei $\varphi : G \to B$ der kanonische Homomorphismus. Wir bezeichnen die Bilder der Elemente unter φ mit den Namen der Elemente selbst. Wäre nun y in B zu z oder z^{-1} konjugiert, so hätten y und z dieselbe Ordnung in B. Aus (5.16) lesen wir $y^{\alpha_1} = 1$ ab. Wir betrachten das Element z^{α_1} und die Präsentation

$$\begin{aligned} B &= B'/\langle\langle (q_1 q_2)^{\alpha_3} \rangle\rangle \\ \text{mit } B' &:= \langle q_1 \mid q_1^{\alpha_1} = 1 \rangle * \langle q_2 \mid q_2^{\alpha_2} = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Im Folgenden benutzen wir die in Kapitel D eingeführten Begriffe. Für die von $w = (q_1 q_2)^{\alpha_3}$ erzeugte, symmetrisierte Teilmenge $R \subset B'$ gilt:

$$R = \{ q_1^{\gamma_1} (q_1 q_2)^{\pm \alpha_3} q_1^{-\gamma_1},\ q_2^{\gamma_2} (q_2 q_1)^{\pm \alpha_3} q_2^{-\gamma_2} \mid \gamma_1 \in \mathbb{Z}_{\alpha_1},\ \gamma_2 \in \mathbb{Z}_{\alpha_2} \}$$

Alle Kürzungsstücke von R lauten $q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2}$ und $q_2^{\gamma_2} q_1^{\gamma_1}$ ($\gamma_1 \in \mathbb{Z}_{\alpha_1}$, $\gamma_2 \in \mathbb{Z}_{\alpha_2}$). Somit erfüllt R die Bedingungen $C(4)$ und $T(4)$. Wir wenden Satz D.5 für $(p, q) = (4, 4)$ an. Wäre z^{α_1} trivial in B, so müsste z^{α_1} laut Satz D.5 in R liegen oder ein zyklisch gekürztes Konjugiertes von z^{α_1} müsste eine semi-gekürzte Darstellung $w^* = u_1 s_1 \dots u_m s_m$ besitzen,

wobei jedes s_k ein $i(s_k)$-Überrest ist und die Anzahl m der s_k sowie die Nummer $i(s_k)$ die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{m} \big[3 - i(s_k)\big] \geqslant 4$$

erfüllen. Damit die Summe in einen positiven Bereich kommt, müsste es s_k mit $i(s_k) \leqslant 2$ geben. Alle 2-Überreste enthalten wegen $\alpha_3 \geqslant 5$ ein Teilwort der Form $(q_1q_2q_1q_2)^{\pm 1}$ oder $(q_2q_1q_2q_1)^{\pm 1}$. Da solche Teilwörter in keinem zyklisch gekürzten Konjugierten von $z^{\alpha_1} \in B'$ zu finden sind und z^{α_1} auch nicht in R liegt, gilt $z^{\alpha_1} \neq 1$ in B. Somit besitzt G nicht die Magnus-Eigenschaft.

5.2.3. Der Fall $r = 4$

Durch Einsetzen von $g = 0$ und $r = 4$ in (5.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} G &= \langle q_1, q_2, q_3, q_4, h \mid [q_i, h] = 1,\ q_i^{\alpha_i} h^{\beta_i} = 1\ (1 \leqslant i \leqslant 4),\ q_1q_2q_3q_4 = h^b \rangle \\ &= \langle q_1, q_2, q_3, h \mid [q_i, h] = 1,\ q_i^{\alpha_i} h^{\beta_i} = 1\ (1 \leqslant i \leqslant 3),\ (q_1q_2q_3)^{\alpha_4} = h^{b\alpha_4+\beta_4} \rangle. \end{aligned}$$

Fall 1: Es gelte $\alpha_i = 2$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$.
Wir erhalten:

$$\begin{aligned} G &= \langle q_1, q_2, q_3, q_4, h \mid [q_i, h] = 1,\ q_i^2 h = 1\ (1 \leqslant i \leqslant 4),\ q_1q_2q_3q_4 = h^b \rangle \\ &= \langle q_1, q_2, q_3, q_4 \mid q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 = q_4^2,\ q_1q_2q_3q_4 = q_1^{-2b} \rangle \\ &= \langle q_1, q_2, q_3 \mid q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 = q_1^{-4b}(q_1q_2q_3)^{-2} \rangle \\ &= \langle q_1, q_2, q_3 \mid q_1^2 = q_2^2 = q_3^2,\ q_1^{4b+2}(q_1q_2q_3)^2 = 1 \rangle \end{aligned}$$

Aus der Relation $q_1^{4b+2}(q_1q_2q_3)^2 = 1$ von G folgt:

$$q_1^{4b+8}q_1q_2q_3 = q_3q_2q_1, \quad q_1^{4b+8}q_3q_1q_2 = q_2q_1q_3, \quad q_1^{4b+8}q_2q_3q_1 = q_1q_3q_2$$

Unter Nutzung dieser Relationen können wir jedes Element von G in einer der folgenden Formen mit $\ell \in \mathbb{Z}$ und $m, n \geqslant 0$ darstellen:

(i) $q_1^{\ell}(q_1q_2)^m(q_1q_3)^n$, **(ii)** $q_1^{\ell}(q_2q_1)^m(q_3q_1)^n$, **(iii)** $q_1^{\ell}(q_1q_3)^m(q_2q_3)^n$,
(iv) $q_1^{\ell}(q_3q_1)^m(q_3q_2)^n$, **(v)** $q_1^{\ell}(q_1q_2)^m(q_3q_2)^n$, **(vi)** $q_1^{\ell}(q_2q_1)^m(q_2q_3)^n$

Für ungerade $p \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned}
& q_2^{-1}q_1^p q_2 \cdot (q_2q_1)^2 q_3^{-1} q_1^{-p} q_3 (q_2q_1)^{-2} \cdot (q_2q_1)^2 q_3^{-1} q_2^{-1} q_1^p q_2 q_3 (q_2q_1)^{-2} \cdot q_1^{-p} \\
= \; & q_1^{p-3} q_2q_1q_2 \cdot (q_2q_1)^2 q_3^{-1} q_1^{-p} q_3 (q_2q_1)^{-2} \cdot (q_2q_1)^2 q_3^{-1} q_1^{p-3} q_2q_1q_2q_3 (q_2q_1)^{-2} \cdot q_1^{-p} \\
= \; & q_1^{p-3} q_2q_1q_2 \cdot (q_2q_1)^2 q_3^{-1} q_1^{-3} q_2q_1q_2q_3 (q_2q_1)^{-2} \cdot q_1^{-p} \\
= \; & q_1^{p-3} q_2q_1q_2 \cdot (q_2q_1)^2 q_1^{-6} q_3q_1q_2q_1q_2q_3 (q_2q_1)^{-2} \cdot q_1^{-p} \\
= \; & q_1^{p-3} q_2q_1q_2 \cdot (q_2q_1)^2 q_1^{-4b-14} q_2q_1q_3q_1q_2q_3 (q_2q_1)^{-2} \cdot q_1^{-p} \\
= \; & q_1^{p-3} q_2q_1q_2 \cdot (q_2q_1)^2 q_1^{-8b-22} (q_2q_1)^2 q_3^2 (q_2q_1)^{-2} \cdot q_1^{-p} \\
= \; & q_1^{p-3} q_2q_1q_2 \cdot (q_2q_1)^2 q_1^{-8b-20} (q_2q_1)^2 (q_2q_1)^{-2} \cdot q_1^{-p} \quad = \quad q_1^{p+6+1-8b-20} \cdot q_1^{-p} \\
= \; & q_1^{p+6+1-8b-20} \cdot q_1^{-p} \quad = \quad q_1^{-8b-13}
\end{aligned}$$

Somit liegt q_1^{8b+13} für ungerade p im normalen Abschluss von q_1^p in G. Sei $p := 16b+26+1$. Dann folgt $\langle\langle q_1^p \rangle\rangle_G = \langle\langle q_1 \rangle\rangle_G$. Es bleibt zu zeigen, dass q_1 weder zu q_1^p noch zu q_1^{-p} konjugiert ist.

Zunächst zeigen wir, dass $q_1 \neq q_1^{\pm p}$ gilt. Aus $q_1 = q_1^p$ folgt $q_1^{16b+26} = 1$. Diese Gleichung kann jedoch nicht in G gelten, da sie nicht in $G / \langle\langle q_1q_2^{-1}, q_2q_3^{-1} \rangle\rangle \cong \langle q_1 \mid q_1^{4b+8} = 1 \rangle$ gilt. Aus $q_1 = q_1^{-p}$ folgt $q_1^{16b+28} = 1$. Im Fall $b \notin \{-3, -1\}$ erhalten wir ebenfalls einen Widerspruch mit $q_1^{16b+28} \neq 1$ in $G / \langle\langle q_1q_2^{-1}, q_2q_3^{-1} \rangle\rangle$. Für $b = -3$ oder -1 betrachten wir die Faktorgruppe

$$G / \langle\langle [q_1,q_2], [q_1,q_3] \rangle\rangle \cong \langle q_2, q_3 \mid q_2^2 = q_3^2,\, (q_2q_3)^2 = 1,\, q_2^8 = 1 \rangle \underset{q_2^2 = q_1^2}{\times} \langle q_1 \mid q_1^8 = 1 \rangle.$$

Da in dieser Faktorgruppe weder q_1^{-20} noch q_1^{12} trivial sind, gilt Gleiches auch in der Gruppe G.

Schließlich zeigen wir, dass alle Konjugierten von q_1 mit Elementen aus G ungleich $q_1^{\pm p}$ sind. Dafür gehen wir alle Darstellungsformen (i) bis (vi) durch:
Zu (i): Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
& (q_3^{-1}q_1^{-1})^n (q_2^{-1}q_1^{-1})^m \cdot q_1 \cdot (q_1q_2)^m (q_1q_3)^n \\
= \; & q_1^{-4(m+n)} (q_3q_1)^n (q_2q_1)^{m-1} q_2q_1q_2 (q_1q_2)^{m-1} (q_1q_3)^n \\
= \; & q_1^{-4(m+n)} (q_3q_1)^n q_2 (q_1q_2)^{2m-1} (q_1q_3)^n \\
= \; & q_1^{-4(m+n)-n(4b+8)} q_2 (q_1q_3)^n (q_1q_2)^{2m-1} (q_1q_3)^n \\
= \; & q_1^{-4(m+n)-n(4b+8)-(2m-1)n(4b+8)} q_2 (q_1q_2)^{2m-1} (q_1q_3)^{2n} \\
= \; & q_1^{-4(m+n)-(2m-2)n(4b+8)-1} (q_1q_2)^{2m} (q_1q_3)^{2n}
\end{aligned}$$

Zu (ii): Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
& (q_1^{-1}q_3^{-1})^n (q_1^{-1}q_2^{-1})^m \cdot q_1 \cdot (q_2q_1)^m (q_3q_1)^n = q_1^{-4(m+n)} (q_1q_3)^n (q_1q_2)^m q_1 (q_2q_1)^m (q_3q_1)^n \\
= \; & a^{-4(m+n)+1} (q_3q_1)^n (q_2q_1)^{2m} (q_3q_1)^n \quad = \quad q_1^{-4(m+n)+1-2mn(4b+8)} (q_2q_1)^{2m} (q_3q_1)^{2n}
\end{aligned}$$

Zu (iii): Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
&(q_3^{-1}q_2^{-1})^n(q_3^{-1}q_1^{-1})^m\cdot q_1\cdot(q_1q_3)^m(q_2q_3)^n \;=\; q_1^{-4(m+n)}(q_3q_2)^n(q_3q_1)^m q_1(q_1q_3)^m(q_2q_3)^n\\
=\;& q_1^{-4(m+n)+2}(q_3q_2)^n(q_3q_1)^{m-1}q_3q_1q_3(q_1q_3)^{m-1}(q_2q_3)^n\\
=\;& q_1^{-4(m+n)+2}(q_3q_2)^n(q_3q_1)^{2m-1}(q_3q_2)^n q_3\\
=\;& q_1^{-4(m+n)+2-(2m-1)n(4b+8)}(q_3q_1)^{2m-1}(q_3q_2)^{2n}q_3\\
(\;=\;& q_1^{-4n+2+n(4b+8)-1}(q_2q_3)^{2n}\quad\text{für}\quad m=0\;)
\end{aligned}$$

Zu (iv): Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
&(q_2^{-1}q_3^{-1})^n(q_1^{-1}q_3^{-1})^m\cdot q_1\cdot(q_3q_1)^m(q_3q_2)^n \;=\; q_1^{-4(m+n)}(q_2q_3)^n(q_1q_3)^m q_1(q_3q_1)^m(q_3q_2)^n\\
=\;& q_1^{-4(m+n)-2mn(4b+8)}(q_1q_3)^{2m}(q_2q_3)^n q_1(q_3q_2)^n\\
=\;& q_1^{-4(m+n)-2mn(4b+8)-n(4b+8)}(q_1q_3)^{2m}q_1(q_3q_2)^{2n}\\
=\;& q_1^{-4(m+n)-(2m-1)n(4b+8)+1}(q_3q_1)^{2m}(q_3q_2)^{2n}
\end{aligned}$$

Zu (v): Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
&(q_2^{-1}q_3^{-1})^n(q_2^{-1}q_1^{-1})^m\cdot q_1\cdot(q_1q_2)^m(q_3q_2)^n \;=\; q_1^{-4(m+n)}(q_2q_3)^n(q_2q_1)^m q_1(q_1q_2)^m(q_3q_2)^n\\
=\;& q_1^{-4(m+n)+2}(q_2q_3)^n(q_2q_1)^{m-1}q_2q_1q_2(q_1q_2)^{m-1}(q_3q_2)^n\\
=\;& q_1^{-4(m+n)+2}(q_2q_3)^n(q_2q_1)^{2m-1}q_2(q_3q_2)^n\\
=\;& q_1^{-4(m+n)+2+(2m-1)n(4b+8)}(q_2q_1)^{2m-1}(q_2q_3)^{2n}q_2\\
(\;=\;& q_1^{-4n-n(4b+8)+1}(q_3q_2)^{2n}\quad\text{für}\quad m=0\;)
\end{aligned}$$

Zu (vi): Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
&(q_3^{-1}q_2^{-1})^n(q_1^{-1}q_2^{-1})^m\cdot q_1\cdot(q_2q_1)^m(q_2q_3)^n \;=\; q_1^{-4(m+n)}(q_3q_2)^n(q_1q_2)^m q_1(q_2q_1)^m(q_2q_3)^n\\
=\;& q_1^{-4(m+n)}(q_3q_2)^n(q_1q_2)^{2m}q_1(q_2q_3)^n \;=\; q_1^{-4(m+n)+2mn(4b+8)}(q_1q_2)^{2m}(q_3q_2)^n q_1(q_2q_3)^n\\
=\;& q_1^{-4(m+n)+2mn(4b+8)+n(4b+8)}(q_1q_2)^{2m}q_1(q_2q_3)^{2n}\\
=\;& q_1^{-4(m+n)+2m(n+1)(4b+8)+1}(q_2q_1)^{2m}(q_2q_3)^{2n}
\end{aligned}$$

Durch Übergang zu jeweils einer der Faktorgruppen

$$G/\langle\langle q_1^2,q_2^2,q_3^2,q_1q_2^{-1}\rangle\rangle,\quad G/\langle\langle q_1^2,q_2^2,q_3^2,q_1q_3^{-1}\rangle\rangle\ \text{ oder }\ G/\langle\langle q_1^2,q_2^2,q_3^2,q_2q_3^{-1}\rangle\rangle\ \cong\ \mathbb{Z}_2*\mathbb{Z}_2$$

bemerken wir, dass keines der ermittelten Konjugierten $q_1^{\pm p}$ entspricht. Somit besitzt G nicht die Magnus-Eigenschaft.

Fall 2: Mindestens ein α_i sei ungleich 2.
O.B.d.A. sei $\alpha_2\neq 2$. Wir betrachten die Faktorgruppe

$$\begin{aligned}
B \;&:=\; G/\langle\langle h\rangle\rangle = \langle q_1,q_2,q_3 \mid\ q_i^{\alpha_i}=1\ (1\leqslant i\leqslant 3),\ (q_1q_2q_3)^{\alpha_4}=1\rangle\\
&=\; P/\langle\langle (q_1q_2q_3)^{\alpha_4}\rangle\rangle,\\
\text{wobei}\quad P \;&:=\; \overset{3}{\underset{i=1}{*}}\langle q_i \mid q_i^{\alpha_i}=1\rangle.
\end{aligned}$$

Nun wenden wir Satz D.5 auf das freie Produkt P und die von $(q_1q_2q_3)^{\alpha_4}$ erzeugte, symmetrisierte Teilmenge R von P an. Es gilt:

$$R = \{q_i^{-j}(q_iq_{i+1}q_{i+2})^{\pm\alpha_4}q_i^j,\ q_{i+2}^{-j}(q_iq_{i+1}q_{i+2})^{\pm\alpha_4}q_{i+2}^j \mid j \in \mathbb{Z},\ i \in \mathbb{Z}_3\}$$

Die Menge aller Kürzungsstücke von R ermitteln wir zu $\{q_i^j \mid i \in \{1,2,3\},\ j \in \mathbb{Z}_{\alpha_i}\}$. Somit erfüllt R die Bedingungen $C(4)$ und $T(4)$.

Da die Gleichung $q_2^{-1}q_1^{\alpha_1}q_2 = q_1^{\alpha_1}$ in G gilt, besitzen laut [Bog05, Lemma 2.2] die Elemente q_2 und

$$z := (q_2q_1)^{\alpha_1}q_1^{-1}q_2q_1^2(q_2q_1)^{-\alpha_1}q_1^{-1} = (q_2q_1)^{\alpha_1-1}q_2^2q_1q_2^{-1}(q_2q_1)^{-\alpha_1+1}q_1^{-1}$$

denselben normalen Abschluss in G und somit auch in B. Wegen $\alpha_2 \neq 2$ entspricht die letzte Darstellung von z einer Darstellung in Normalform von P. Wäre z zu $q_2^{\pm1}$ konjugiert, müsste $z^{\alpha_3} = 1$ gelten. Eine Darstellung von z^{α_3} in Normalform von P ergibt sich durch Hintereinanderschreibung der Darstellung von z ohne Kürzung. Da z^{α_3} kein Element von R ist, müsste ein zyklisch gekürztes Konjugiertes von z^{α_3} laut Satz D.5 einen 2-Überrest und damit ein Teilwort der Form $(q_iq_{i+1}q_{i+2}q_i)^{\pm1}$ mit $i \in \{1,2,3\}$ enthalten. In z gibt es jedoch keinen Erzeuger q_3. Also besitzt G nicht die Magnus-Eigenschaft.

5.2.4. Der Fall $r \geqslant 5$

Es gilt:

$$G = \langle q_1, q_2, \ldots, q_r, h \mid [q_i, h] = 1,\ q_i^{\alpha_i}h^{\beta_i} = 1\ (1 \leqslant i \leqslant r),\ q_1q_2\ldots q_r = h^b\rangle$$

Wir betrachten die Faktorgruppe

$$\begin{aligned}
B &:= G/\langle\langle h, (q_1q_3)^7\rangle\rangle \\
&= \langle q_1, q_2, \ldots, q_r \mid q_i^{\alpha_i} = 1\ (1 \leqslant i \leqslant r),\ q_1q_2\ldots q_r = 1,\ (q_1q_3)^7\rangle \\
&= \langle q_1, q_2, \ldots, q_{r-1} \mid q_i^{\alpha_i} = 1\ (1 \leqslant i \leqslant r-1),\ (q_1q_2\ldots q_{r-1})^{\alpha_r} = 1,\ (q_1q_3)^7\rangle \\
&= P/\langle\langle (q_1q_2\ldots q_{r-1})^{\alpha_r},\ (q_1q_3)^7\rangle\rangle, \quad \text{wobei} \\
P &:= \mathop{*}_{i=1}^{r-1}\langle q_i \mid q_i^{\alpha_i} = 1\rangle.
\end{aligned}$$

Nun wenden wir Satz D.5 auf das freie Produkt P und die von $(q_1q_2\ldots q_{r-1})^{\alpha_r}$ und $(q_1q_3)^7$ erzeugte, symmetrisierte Teilmenge

$$\begin{aligned}
R := \{\ & q_i^{-j}(q_iq_{i+1}\ldots q_{i+r-2})^{\pm\alpha_r}q_i^j,\quad q_{i+r-2}^{-j}(q_iq_{i+1}\ldots q_{i+r-2})^{\pm\alpha_r}q_{i+r-2}^j \\
& q_1^{-j}(q_1q_3)^{\pm7}q_1^j,\ q_3^{-j}(q_1q_3)^{\pm7}q_3^j \mid\ j \in \mathbb{Z},\quad i \in \mathbb{Z}_{r-1}\ \}
\end{aligned}$$

von P an. Die Menge aller Kürzungstücke lautet

$$\begin{aligned}
\{q_1^{j_1}q_3^{j_2},\ q_3^{j_2}q_1^{j_1},\ q_i^{j_1} \mid 1 \leqslant i \leqslant r-1,\ j_1, j_2 \in \mathbb{Z}\}, &\qquad \text{falls } \alpha_1 \neq 2 \neq \alpha_3,\\
\{q_3^{j_1}q_1^{j_2}q_3^{j_3},\ q_i^{j_1} \mid 1 \leqslant i \leqslant r-1, j_1,\ j_2, j_3 \in \mathbb{Z}\}, &\qquad \text{falls } \alpha_1 \neq 2, \alpha_3 = 2,\\
\{q_1^{j_1}q_3^{j_2}q_1^{j_3},\ q_i^{j_1} \mid 1 \leqslant i \leqslant r-1,\ j_1, j_2, j_3 \in \mathbb{Z}\}, &\qquad \text{falls } \alpha_1 = 2, \alpha_3 \neq 2 \text{ und}\\
\{q_i^{j_1} \mid 1 \leqslant i \leqslant r-1,\ j_1 \in \mathbb{Z}\}, &\qquad \text{falls } \alpha_1 = \alpha_3 = 2.
\end{aligned}$$

Somit erfüllt R die Kürzungsbedingungen $C(4)$ und $T(4)$. Wir bemerken, dass die Relation $(q_1q_3)^{-1}q_2^{\alpha_2}q_1q_3 = q_2^{\alpha_2}$ in G gilt. Laut [Bog05, Lemma 2.2] besitzen die Elemente

$$\begin{aligned}
z &:= (q_1q_3q_2)^{\alpha_2}q_2^{-1}q_1q_3q_2^2(q_1q_3q_2)^{-\alpha_2}q_2^{-1}\\
&= (q_1q_3q_2)^{\alpha_2-1}(q_1q_3)^2q_2q_3^{-1}q_1^{-1}(q_2^{-1}q_3^{-1}q_1^{-1})^{\alpha_2-1}q_2^{-1} \qquad (5.17)
\end{aligned}$$

und q_1q_3 denselben normalen Abschluss in G. Wäre z zu $(q_1q_3)^{\pm 1}$ konjugiert, müsste $z^7 = 1$ gelten. Wir erhalten eine Normalform von z^7 als Element von P, indem wir die Darstellung aus (5.17) ohne Kürzung hintereinander schreiben. Da z^7 kein Element von R ist, müsste ein zyklisch gekürztes Konjugiertes von z^7 laut Satz D.5 einen 2-Überrest und damit den Erzeuger q_4 oder ein Teilwort der Form $(q_1q_3)^3$ enthalten. Dies ist jedoch nicht der Fall, also ist z in G nicht zu $(q_1q_3)^{\pm 1}$ konjugiert und G besitzt nicht die Magnus-Eigenschaft.

5.3. Orientierbare Seifert-Mannigfaltigkeiten mit $g, r \geqslant 1$

Wir betrachten die Faktorgruppe

$$\begin{aligned}
B &:= G/\langle\langle a_2, b_2, a_3, b_3 \ldots a_g, b_g, q_2, \ldots q_r, h\rangle\rangle\\
&= \langle\ q_1, a_1, b_1 \mid q_1^{\alpha_1} = 1,\ q_1[a_1, b_1] = 1\ \rangle = \langle\ a_1, b_1 \mid [a_1, b_1]^{\alpha_1} = 1\ \rangle
\end{aligned}$$

und den zugehörigen kanonischen Homomorphismus $\varphi : G \to B$. Laut [Bog05, Theorem 2.4] besitzt B nicht die Magnus-Eigenschaft. Um zu zeigen, dass G nicht die Magnus-Eigenschaft besitzt, verwenden wir dasselbe Gegenbeispiel wie in [Bog05]: In G gilt die Relation $a_1^{-1}ha_1 = h^{\epsilon_1}$. Daraus folgt die Relation

$$a_1^{-1}h^{\beta_1}a_1 = h^{\epsilon_1\beta_1} \quad \Leftrightarrow \quad a_1^{-1}q_1^{\alpha_1}a_1 = q_1^{\epsilon_1\alpha_1}.$$

Somit besitzen laut [Bog05, Lemma 2.2] die Elemente

$$a_1 \quad \text{und} \quad z := (a_1q_1)^{\alpha_1}q_1^{-1}a_1q_1^2(a_1q_1)^{-\alpha_1}q_1^{-1}$$

denselben normalen Abschluss in G und damit auch in B. Wegen $\varphi(q_1) = [a_1, b_1]^{-1}$ dürfen wir

$$z =_B (a_1[a_1, b_1]^{-1})^{\alpha_1}[a_1, b_1]a_1[a_1, b_1]^{-2}(a_1[a_1, b_1]^{-1})^{-\alpha_1}[a_1, b_1]$$

schreiben. Laut [Bog05, Beweis zu Theorem 2.4 (3), Case 1] ist z weder zu a_1 noch zu a_1^{-1} in B konjugiert. Also besitzt G nicht die Magnus-Eigenschaft.

Anhang

A. Direkte Produkte zyklischer Gruppen und die Magnus-Eigenschaft

Im vorliegenden Abschnitt untersuchen wir alle direkten Produkte zyklischer Gruppen auf Magnus-Eigenschaft. Aus dem Kapitel der Masterarbeit des Autors (siehe [Fel15]) über die Magnus-Eigenschaft direkter Produkte verwenden oder verallgemeinern wir u.a. die folgenden Resultate.

Bemerkung A.1. (siehe [Fel15, Lemma 4.5.1]) Falls ein direktes Produkt mit beliebig vielen Faktoren die Magnus-Eigenschaft besitzt, so besitzt auch jeder Faktor des direkten Produkts die Magnus-Eigenschaft.

Lemma A.2. (siehe [Fel15, Lemma 4.2.1]) *Unter den nichttrivialen, zyklischen Gruppen besitzen ausschließlich $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_6$ und $\mathbb{Z}$ die Magnus-Eigenschaft.*

Zur Formulierung des nächsten Lemmas führen wir eine spezielle Notation ein: Für ein beliebiges Element r eines direkten Produkts $G = \bigtimes_{i=1}^{n} G_i$ schreiben wir $r = (r_i)_{i\in M}$, wobei $M = \{1, \dots, n\}$ und r_i die einzelnen Komponenten aus G_i seien. Mit $\{-1, 1\}^M$ bezeichnen wir die Menge aller Elemente $(a_i)_{i\in M} \in G$ mit $a_i \in \{-1, 1\}$ für alle $i \in M$.

Lemma A.3. [Fel15, Lemma 4.5.2] *Gegeben sei ein direktes Produkt $G = \bigtimes_{i=1}^{n} G_i$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, wobei jede Gruppe G_i die Magnus-Eigenschaft besitze. Wir setzen $M = \{1, \dots, n\}$. Dann besitzt G genau dann die Magnus-Eigenschaft, wenn für jedes Element $(r_i)_{i\in M} \in G$ und alle $\epsilon = (\epsilon_i)_{i\in M} \in \{-1, 1\}^M\backslash\{(-1)_{i\in M}, (1)_{i\in M}\}$ mit der Eigenschaft $\langle\langle (r_i)_{i\in M} \rangle\rangle_G = \langle\langle (r_i^{\epsilon_i})_{i\in M} \rangle\rangle_G$ gilt:*

$$r_i \sim_{G_i} r_i^{-1} \quad \text{für alle } i \text{ mit } \epsilon_i = 1 \text{ oder für alle } i \text{ mit } \epsilon_i = -1$$

Als kleine Anwendungsbeispiele für Lemma A.3 werden in [Fel15] die folgenden Aussagen gezeigt:

Beispiel A.4.

(i) Sei M eine beliebige Gruppe mit der Magnus-Eigenschaft. Dann besitzt auch für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ die Gruppe $G = M \times \bigtimes_{i=1}^{m} \mathbb{Z}_2 \times \bigtimes_{i=1}^{n} (\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2)$ die Magnus-Eigenschaft.

(ii) Die Gruppe $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ besitzt nicht die Magnus-Eigenschaft, obwohl $\mathbb{Z}_4$ und $\mathbb{Z}_6$ die Magnus-Eigenschaft besitzen.

Der folgende Satz beschreibt alle direkten Produkte zyklischer Gruppen, welche die Magnus-Eigenschaft besitzen.

Satz A.5. *Unter allen direkten Produkten nichttrivialer zyklischer Gruppen besitzen nur solche die Magnus-Eigenschaft, die entweder ausschließlich Faktoren*

$$\mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_3,\ \mathbb{Z} \text{ (und damit auch } \mathbb{Z}_6)$$

oder ausschließlich Faktoren

$$\mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}$$

besitzen.

Beweis. Wegen Bemerkung A.1 und Lemma A.2 enthält ein direktes Produkt nichttrivialer zyklischer Gruppen, welches die Magnus-Eigenschaft besitzt, ausschließlich Faktoren $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_6$ oder $\mathbb{Z}$. Diese notwendige Bedingung ist jedoch nicht hinreichend, wie Beispiel A.4 (ii) zeigt. Im Folgenden werden wir jeden Faktor $\mathbb{Z}_6$ mithilfe des chinesischen Restklassensatzes sofort durch $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ersetzen. Wir bemerken, dass wegen $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$ kein direktes Produkt die Magnus-Eigenschaft besitzt, welches sowohl $\mathbb{Z}_3$ als auch $\mathbb{Z}_4$ als Faktor hat. Beispiel A.4 (i) besagt, dass die Magnus-Eigenschaft einer Gruppe invariant unter direkter Produktbildung mit $\mathbb{Z}_2$ ist. Diese Invarianz besteht auch bzgl. direkter Produktbildung mit $\mathbb{Z}$, wie die erste der folgenden drei kleinen Aussagen zeigt.

Aussage 1. Gegeben sei eine abelsche Gruppe M mit der Magnus-Eigenschaft. Dann besitzt $G := \mathbb{Z} \times M$ die Magnus-Eigenschaft.

Beweis. Wegen Lemma A.3 ist es ausreichend, Elemente $(z, x) \in G$ für nichttriviale Elemente $z \in \mathbb{Z}$ und $x \in M$ zu betrachten, welche $\langle\langle (z,x) \rangle\rangle_G = \langle\langle (z,x^{-1}) \rangle\rangle_G$ erfüllen. Da G eine abelsche Gruppe ist, gilt

$$\{(z^k, x^k) \mid k \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle (z,x) \rangle\rangle_G = \langle\langle (z,x^{-k}) \rangle\rangle_G = \{(z^k, x^{-k}) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Es folgt $(z,x) = (z,x^{-1})$. Insbesondere ist x somit zu x^{-1} konjugiert. Laut Lemma A.3 besitzt G daher die Magnus-Eigenschaft.

Es bleibt zu zeigen, dass direkte Produkte, welche ausschließlich Faktoren $\mathbb{Z}_3$ oder ausschließlich Faktoren $\mathbb{Z}_4$ enthalten, die Magnus-Eigenschaft besitzen.

Aussage 2. Alle direkten Produkte $G = \bigtimes_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_3$ mit $n \in \mathbb{N}$ besitzen die Magnus-Eigenschaft.

Beweis. Alle nichttrivialen Elemente in G haben Ordnung 3. Daher gilt $\langle\langle g \rangle\rangle_G = \{1, g, g^{-1}\}$ für alle Elemente $g \in G$. Wir betrachten nun zwei nichttriviale Elemente $r,\ s \in G$ mit

$\langle\langle r \rangle\rangle_G = \langle\langle s \rangle\rangle_G$. Dann folgt insbesondere $r \in \{s, s^{-1}\}$. Somit besitzt G die Magnus-Eigenschaft.

Aussage 3. Alle direkten Produkte $G = \times_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_4$ mit $n \in \mathbb{N}$ besitzen die Magnus-Eigenschaft.

Beweis. Nichttriviale Elemente aus G, die (in additver n-Tupel-Schreibweise) mindestens einen Eintrag 1 oder 3 besitzen, haben Ordnung 4; alle anderen nichttrivialen Elemente haben Ordnung 2. Für ein beliebiges nichttriviales Element $g \in G$ bedeutet dies $\langle\langle g \rangle\rangle_G = \{1, g\}$ oder $\langle\langle g \rangle\rangle_G = \{1, g, g^{-1}, g^2\}$. Damit $\langle\langle r \rangle\rangle_G = \langle\langle s \rangle\rangle_G$ für zwei nichttriviale Elemente $r, s \in G$ erfüllt sein kann, müssen also r, s dieselbe Ordnung haben. Für Ordnung 2 folgt sofort $r = s$ und für Ordnung 4 folgt $r = s$ oder $r = s^{-1}$. Somit besitzt G die Magnus-Eigenschaft.

Dies beendet den Beweis von Satz A.5.

□

B. Amalgamierte Produkte

Bei amalgamierten Produkten handelt es sich um Standardobjekte der Gruppentheorie. Nach Angabe ihrer Definition geben wir in diesem Abschnitt wichtige Eigenschaften wieder und führen Normalformen ein. Darin ist die Betrachtung freier Produkte als Spezialfall amalgamierter Produkte enthalten. Wir behandeln zur Übersichtlichkeit jeweils nur amalgamierte Produkte mit zwei Faktoren. Alle Aussagen können jedoch auf gleiche Weise für amalgamierte Produkte beliebig vieler Faktoren formuliert werden.

Wir starten mit der Definition amalgamierter Produkte.

Definition B.1. (vgl. [Bog08, Chapter 2, Section 11]) Seien G und H Gruppen mit zueinander isomorphen Untergruppen $A \subset G$ und $B \subset H$. Wir fixieren einen Isomorphismus $\varphi\colon A \to B$. Dann bezeichnen wir die Faktorgruppe $(G * H) \,/\, \langle\langle \varphi(a)a^{-1} \mid a \in A \rangle\rangle$ als das *freie Produkt der Gruppen G und H mit Amalgamierung von A und B über den Isomorphismus φ*. Wir bezeichnen diese Faktorgruppe auch kurz als *amalgamiertes Produkt* von G und H über A. Zudem benutzen wir je nach Kontext folgende Notationen:

$$\langle G * H \mid a = \varphi(a)\ a \in A \rangle, \quad G *_{A=B} H \quad \text{und} \quad G *_A H$$

Als Nächstes definieren wir sogenannte A-Normalformen für ein amalgamiertes Produkt $G *_{A=B} H$. Dazu wählen wir ein Repräsentantensystem T_A der rechten Nebenklassen von A in G und ein Repräsentatensystem T_B der rechten Nebenklassen von B in H, welche jeweils das Element 1 enthalten. Dabei bezeichnen wir für einen Repräsentanten $t \in T_A$ die Menge At als rechte Nebenklasse zu t.

Definition B.2. (vgl. [Bog08, Chapter 2, Definition 11.1]) Eine *A-Normalform* ist eine Folge $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$, so dass

1) $x_0 \in A$,

2) $x_i \in T_A \backslash \{1\}$ oder $x_i \in T_B \backslash \{1\}$ für $i \geqslant 1$ und

3) aufeinanderfolgende Elemente x_i, x_{i+1} $(1 \leqslant i \leqslant m-1)$ weder beide in $T_A \backslash \{1\}$ noch beide in $T_B \backslash \{1\}$ liegen.

Der folgende Satz begründet die Bezeichnung „Normalform".

Satz B.3. ***(vgl. [Bog08, Chapter 2, Theorem 11.3])*** *Jedes Element $f \in G *_{A=B} H$ kann eindeutig in der Form $f = x_0 x_1 \ldots x_n$ dargestellt werden, wobei $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine A-Normalform ist.*

Schließlich definieren wir Normalformen bzgl. amalgamierter Produkte.

Definition B.4. Sei p ein Element eines amalgamierten Produkts $P = G *_{A=B} H$. Dann bezeichnen wir eine Darstellung von p in der Form

$$p = y_1 y_2 \cdots y_n$$

als eine *Normalform von p bzgl. des amalgamierten Produkts P*, falls

$$n = 1 \quad \wedge \quad (y_1 \in G \quad \vee \quad y_1 \in H)$$

gilt oder falls $n \geqslant 2$ und die folgenden Bedingungen gelten:

1) Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sei $y_i \in G\backslash A$ oder $y_i \in H\backslash B$.

2) Aufeinanderfolgende Elemente y_i, y_{i+1} $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ liegen weder beide in $G\backslash A$ noch beide in $H\backslash B$.

Wir bezeichnen die Elemente $y_i \in G$ bzw. $y_i \in H$ auch als G- bzw. *H-Stücke* (oder kurz *Stücke*) der Normalform von $p \in P$. Die Zahl n heißt *Länge* der Normalform. Das triviale Element besitze nach Definition die Länge 0.

Wir nennen ein Element p in Normalform *zyklisch gekürzt* bzgl. P, falls $n = 1$ gilt oder y_1 und y_n weder beide in $G\backslash A$ noch beide in $H\backslash B$ liegen.

Wir bemerken, dass jedes Element eines amalgamierten Produkts eine Darstellung in Normalform bzgl. dieses Produkts besitzt. Das folgende Lemma zeigt die Eindeutigkeit der Länge dieser Darstellung und begründet damit die Benutzung der Bezeichnung „Normalform" in Definition B.4.

Lemma B.5. *Sei p ein Element eines amalgamierten Produkts $P = G *_{A=B} H$. Weiter sei $\widetilde{p}$ eine Darstellung von p in Normalform bzgl. des amalgamierten Produkts P. Dann ist die Länge von $\widetilde{p}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Definition B.4 ist unabhängig von der Wahl der Repräsentantensysteme T_A und T_B, jedoch können wir für fest gewählte Systeme T_A und T_B jeder Normalform $p = y_1 y_2 \cdots y_n$ eine eindeutige A-Normalform $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ zuordnen: Als Beispiel finden wir eine A-Normalform zur Normalform $y_1 y_2$ bzgl. P, wobei $y_1 = c_1 t_1$ $(c_1 \in A,\ t_1 \in T_A\backslash\{1\})$ und $y_2 = c_2 t_2$ $(c_2 \in B,\ t_2 \in T_B\backslash\{1\})$ gelte. Dazu bemerken wir zunächst, dass wir zu jedem Element y aus $G\backslash A$ bzw. $H\backslash B$ eindeutig bestimmte Elemente $c \in A$, $t \in T_A\backslash\{1\}$ bzw. $c \in B$, $t \in T_B\backslash\{1\}$ finden können, so dass $y = ct$ gilt. Wir schreiben $y_1 y_2 = c_1 t_1 c_2 t_2$ und fassen c_2 über den Isomorphismus zwischen A und B als Element von A auf. Seien $c_3 \in A$ und $t_3 \in T_A\backslash\{1\}$ die eindeutig bestimmten Elemente mit $c_1 t_1 c_2 = c_3 t_3 \in G$. Dann gilt $y_1 y_2 = c_3 t_3 t_2$ und (c_3, t_3, t_2) ist eine A-Normalform von p. Indem wir dieses Prinzip auf längere Normalformen anwenden (startend mit den beiden letzten Stücken), können

wir für jede Normalform $p = y_1 y_2 \cdots y_n$ eine A-Normalform $p = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bestimmen. Laut Satz B.3 ist diese A-Normalform eindeutig. Insbesondere ist somit auch die Länge n der Normalform bzgl. des amalgamierten Produkts eindeutig.

□

Aus Lemma B.5 lesen wir folgendes Korollar ab.

Korollar B.6. *Die Faktoren G, H eines amalgamierten Produkts $P = G *_{A=B} H$ betten kanonisch in P ein.*

Zudem erhalten wir sofort das folgende bekannte Korollar.

Korollar B.7. *Amalgamierte Produkte torsionsfreier Gruppen sind torsionsfrei.*

Beweis. Seien A, B torsionsfreie Gruppen $G := A *_C B$ ein amalgamiertes Produkt und r ein nichttriviales Element von G dargestellt in Normalform. Da A und B torsionsfrei sind, besitzt r eine Länge ℓ von mindestens 2. Wir zeigen per Induktion über ℓ, dass keine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $r^n = 1$ existiert.

Induktionsanfang ($\ell = 2$): In diesem Fall erhalten wir eine Normalform der Länge $2n$ von r^n, indem wir die Normalform von r n-mal hintereinanderschreiben. Wegen Lemma B.5 kann r^n somit nicht trivial sein.

Induktionsschritt ($\ell \to \ell + 1$): Im Fall, dass ℓ gerade ist, verfahren wir wie beim Induktionsanfang. Für ℓ ungerade sei x das erste Stück der Normalform von r. Wir definieren $r' := x^{-1} r x$. Wegen $r^n = 1$ gilt auch $r'^n = 1$. Da x und das letzte Stück von r aus demselben Faktor des amalgamierten Produkts stammen, ist die Normalform von r' echt kürzer als die Normalform von r. Somit ist die Induktionsvoraussetzung anwendbar.

□

Schließlich beweisen wir das folgende Korollar.

Korollar B.8. *Sei $P = G *_{A=B} H$ ein amalgamiertes Produkt. Weiter sei g ein Element von G, welches nicht in G zu einem Element aus A konjugiert ist. Dann gilt:*

(1) *Das Element g ist genau dann in P zu einem Element x aus G konjugiert, wenn es in G zu x konjugiert ist.*

(2) *Das Element g ist in P zu keinem Element aus H konjugiert.*

Beweis. Zu (1): Ist g in G zu x konjugiert, so ist es insbesondere auch in P zu x konjugiert. Für die umgekehrte Richtung zeigen wir, dass aus $w^{-1} g w = x$ für ein $w \in P$ bereits $w \in G$ folgt. Im Hinblick auf einen Widerspruch sei dazu $w \in P \backslash G$. Weiter sei $w = y_1 y_2 \ldots y_n$ eine Normalform bzgl. P. Es gilt

$$w^{-1} g w \;=\; y_n^{-1} y_{n-1}^{-1} \ldots y_1^{-1} g y_1 y_2 \ldots y_n \;=\; x$$

Falls y_1 ein Element von $H\backslash B$ ist, so erhalten wir sofort einen Widerspruch, da x laut Lemma B.5 als Element von G keine Normalform der Länge $2n+1$ haben kann. Für $y_1 \in G$ folgt $n \geqslant 2$, da w nach Voraussetzung kein Element von G ist. Zudem kann $y_1^{-1}gy_1$ nach Voraussetzung kein Element von A sein. Wir erhalten daher eine Normalform von $x \in G$ der Länge $2n-1 \geqslant 3$. Dies ist ebenfalls ein Widerspruch zu Lemma B.5.

Zu (2): Im Hinblick auf einen Widerspruch sei g in P zu einem Element $h \in H$ konjugiert. Dann existiert ein Element $w = y_1 y_2 \dots y_n \in P$ in Normalform mit $w^{-1}gw = h$. Es gilt

$$w^{-1}gw \;=\; y_n^{-1}y_{n-1}^{-1}\dots y_1^{-1}gy_1y_2\dots y_n \;=\; h.$$

Für $n = 1$ und $y_1 \in H\backslash B$ oder $n \geqslant 2$ erhalten wir eine Normalform von h mit einer Länge von mindestens 3. Dies ist laut Lemma B.5 ein Widerspruch zu $h \in H$. Sei also $n = 1$ und $w \in G$. Nach Voraussetzung ist dann $w^{-1}gw$ ein Element von $G\backslash A$. Dies ist laut Satz B.3 ein Widerspruch zu $w^{-1}gw = h \in H$.

□

C. HNN-Erweiterungen

In diesem Abschnitt betrachten wir sogenannte HNN-Erweiterungen, welche nach den Mathematikern Graham Higman, Bernhard Neumann und Hanna Neumann benannt sind, die sie im Jahr 1949 eingeführt und untersucht haben (siehe [HNN49]).

Definition C.1. (vgl. [Bog08, Chapter 2, Section 14]) Seien G eine Gruppe und A, B zueinander isomorphe Untergruppen von G. Weiter sei $\varphi\colon A \to B$ ein Isomorphismus. Dann bezeichnen wir

$$H := \langle G, t \mid t^{-1}at = \varphi(a)\ (a \in A)\rangle$$

als *HNN-Erweiterung* der Gruppe G relativ zu A, B und φ. Wir bezeichen G als *HNN-Basis* von H, t als *stabilen Buchstaben* von H und A, B als *assoziierte Untergruppen.*

Zur Definition der ersten Normalform für HNN-Erweiterungen, welche wir t-Normalform nennen, fixieren wir zunächst Repräsentantensysteme T_A und T_B der rechten Nebenklassen von A und B in G, die jeweils das Element 1 enthalten.

Definition C.2. (vgl. [Bog08, Chapter 2, Definition 14.1]) Sei H eine HNN-Erweiterung. Wir bezeichnen eine Folge $(g_0, t^{\epsilon_1}, g_1, \ldots, t^{\epsilon_n}, g_n)$ als *t-Normalform*, falls:

(1) g_0 ein beliebiges Element aus G ist,

(2) $\epsilon_i = -1$ für $g_i \in T_A$ gilt,

(3) $\epsilon_i = 1$ für $g_i \in T_B$ gilt und

(4) keine zusammenhängende Teilfolge t^{ϵ}, 1, $t^{-\epsilon}$ $(\epsilon \in \{\pm 1\})$ existiert.

Punkt (2) der folgenden Aussage ist auch als Brittons Lemma bekannt.

Satz C.3. ***(vgl. [Bog08, Chapter 2, Theorem 14.3])*** *Sei $H = \langle G, t \mid t^{-1}at = \varphi(a)\ (a \in A)\rangle$ eine HNN-Erweiterung. Dann gilt:*

(1) Jedes Element $x \in H$ hat eine eindeutige Darstellung der Form $x = g_0 t^{\epsilon_1} g_1 \ldots t^{\epsilon_n} g_n$, wobei $(g_0, t^{\epsilon_1}, g_1, \ldots, t^{\epsilon_n}, g_n)$ eine t-Normalform sei.

(2) Die Gruppe G ist kanonisch in H eingebettet. Zudem gilt $w \neq_H 1$ für jedes Element w der Form $g_0 t^{\epsilon_1} g_1 \ldots t^{\epsilon_n} g_n$ mit $n \geqslant 1$, welches keine Teilwörter der Form $t^{-1} g_i t$ $(g_i \in A)$ oder $t g_j t^{-1}$ $(g_j \in B)$ enthält.

Wir benutzen Satz C.3 (1) zur Definition von Normalformen für Elemente von HNN-Erweiterungen.

Definition C.4. Sei H eine HNN-Erweiterung und x ein Element von H. Dann bezeichnen wir die durch Satz C.3 gegebene eindeutige Darstellung als *Normalform* von x bzgl. der HNN-Erweiterung H.

Schließlich beweisen wir die folgenden bekannten Aussagen, welche direkte Korollare aus Satz C.3 (2) (Brittons Lemma) sind.

Korollar C.5. *Sei H eine HNN-Erweiterung mit HNN-Basis G, stabilem Buchstaben t und assoziierten Untergruppen A, B.*

(1) Falls G torsionsfrei ist, dann ist H ebenfalls torsionsfrei.

(2) Sei x ein Element in G, welches weder zu einem Element aus A noch aus B konjugiert ist. Dann ist x genau dann in H zu einem Element $y \in G$ konjugiert, wenn es in G zu y konjugiert ist.

Beweis. Zu (1): Sei $z = g_0 t^{\epsilon_1} g_1 \dots t^{\epsilon_n} g_n$ ein beliebiges nichttriviales Element aus H, wobei $g_i \in G$ und $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$. Im Hinblick auf einen Widerspruch gelte $z^m = 1$ für ein $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Wir bemerken, dass dann auch $\widetilde{z}^m = 1$ für alle Konjugierten $\widetilde{z}$ von z in H gilt. Falls z Teilwörter der Form

$$t^{-1} g_i t \quad (g_i \in A) \quad \text{bzw.} \quad t g_j t^{-1} \ (g_j \in B) \tag{C.1}$$

enthält (vgl. Satz C.3 (2)), so ersetzen wir diese durch die entsprechenden Elemente aus B bzw. A. Dabei wird die Länge n der Darstellung von z echt kleiner. Anschließend vertauschen wir z zyklisch und ersetzen wieder alle Teilwörter der angegebenen Form. Wir wiederholen den Vorgang so lange, bis wir ein Konjugiertes $\widetilde{z}$ von z mit einer Darstellung erhalten, so dass keine zyklische Vertauschung dieser Darstellung ein Teilwort der Form (C.1) enthält. Dann enthält auch die Darstellung von $\widetilde{z}^m$, welche wir durch m-maliges Hintereinanderschreiben der Darstellung von $\widetilde{z}$ erhalten, kein Teilwort der Form (C.1). Somit gilt laut Korollar C.5 (2), dass $\widetilde{z}^m$ und somit auch z^m nicht trivial ist.

Zu (2): Ist x in G zu y konjugiert, so ist es insbesondere auch in H zu y konjugiert. Für die andere Richtung zeigen wir, dass aus $u^{-1} x u = y$ für ein $u \in H$ bereits $u \in G$ folgt. Wir fixieren Repräsentantensysteme der rechten Nebenklassen von A und B in G, welche jeweils das Element 1 enthalten. Wegen Korollar C.5 und Definition C.4 steht uns dann für jedes Element $u \in H$ eine eindeutig bestimmte Normalform $u = g_0 t^{\epsilon_1} g_1 \dots t^{\epsilon_n} g_n$ zur Verfügung, wobei $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$, g_0 ein Element aus G sei und g_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ Elemente der Repräsentantensysteme seien. Wir wählen ein Element $u \in H$, welches $r = u^{-1} s u$ erfüllt und minimale Länge n unter allen Elementen mit dieser Eigenschaft besitzt. Im Hinblick

auf einen Widerspruch sei $u \notin G$, also $n \geqslant 1$. Es gilt:

$$y = u^{-1}xu \quad \Leftrightarrow \quad z := y^{-1}g_n^{-1}t^{-\epsilon_n} \dots g_1^{-1}t^{-\epsilon_1} \underbrace{g_0^{-1}xg_0}_{=:\widetilde{x}} t^{\epsilon_1}g_1 \dots t^{\epsilon_n}g_n = 1 \tag{C.2}$$

Laut Satz C.3 (2) (Brittons Lemma) kann das Element z aus (C.2) nur dann trivial sein, wenn es entweder ein Teilwort der Form

$$t^{-1}gt \text{ mit } g \in A \quad \text{oder} \quad tgt^{-1} \text{ mit } g \in B$$

enthält. Das Element x ist laut Induktionsvoraussetzung in G weder zu einem Element aus A noch aus B konjugiert ist. Somit kann $\widetilde{x}$ kein Element von A oder B sein. Folglich ist $t^{-\epsilon_1}\widetilde{x}t^{\epsilon_1}$ kein Teilwort der Form (C.1). Da die $g_i^{\pm 1}$ Elemente der fixierten Repräsentantensysteme der rechten Nebenklassen von A und B in G sind, können sie nur dann an Teilwörtern der Form (C.1) beteiligt sein, wenn $g_i = 1$ gilt. Teilwörter der Form $t^{-\epsilon}1t^{\epsilon}$ mit $\epsilon \in \{\pm 1\}$ können jedoch nicht auftreten, da sie wegen Definition C.2 (4) nicht in der Normalform von u auftreten. Wir erhalten einen Widerspruch mit $z = 1$.

□

D. Theorie kleiner Kürzungen

Dieser Abschnitt orientiert sich an [Sch73] sowie Kapitel 5 von [LS01] und soll einen groben Einblick in die Theorie kleiner Kürzungen (engl. „small cancellation theory“) amalgamierter Produkte geben. Unser Hauptziel ist dabei die Formulierung eines zentralen Resultats, welches als Greendlingers Lemma bekannt ist (siehe Satz D.5). Wir behandeln zur Übersichtlichkeit jeweils nur amalgamierte Produkte mit zwei Faktoren. Alle Aussagen können jedoch auf gleiche Weise für amalgamierte Produkte beliebig vieler Faktoren formuliert werden.

Für ein Element r eines amalgamierten Produkts bezeichnen wir in diesem Abschnitt die in Definition B.4 definierte Länge einer Normalform von r mit $|r|$. In Anlehnung an Definition B.4 führen wir folgende Definition ein.

Definition D.1. Sei $P = G *_A H$ ein amalgamiertes Produkt und $p = x_1 x_2 \cdots x_m \in P$ ($m \in \mathbb{N}_0$) ein Element in Normalform bzgl. P. Wir bezeichnen p als *schwach zyklisch gekürzt*, falls $m \leqslant 1$ gilt oder $x_m x_1$ kein Element von A ist. Man bemerke, dass diese Eigenschaft nicht von der gewählten Normalform abhängt.

Sei $q = y_1 y_2 \cdots y_n \in P$ ($n \in \mathbb{N}_0$) ein weiteres Element in Normalform bzgl. P. Falls $x_m y_1 \in A$ gilt, so sagen wir, dass es eine *Kürzung* beim Formen des Produkts pq gibt. Falls x_m, y_1 zwar im selben Faktor von P liegen, aber $x_m y_1 \notin A$ gilt, so sagen wir, dass p und q durch *Fusion* von x_m und y_1 zu einer Normalform pq *vereinigt* werden können.

Auf Definition D.1 aufbauend definieren wir:

Definition D.2. Eine Darstellung $u_1 u_2 \cdots u_k$ ($k \in \mathbb{N}_0$) eines Elements $w \in P$, wobei die u_i ($1 \leqslant i \leqslant k$) beliebige Elemente aus P seien, ist *semi-gekürzt*, falls es keine Kürzungen bei der Bildung von w aus den u_i ($1 \leqslant i \leqslant k$) gibt. (Fusionen sind ausdrücklich erlaubt.) Wir bezeichnen die Darstellung $w = u_1 u_2 \cdots u_k$ als *gekürzt*, wenn es weder Kürzungen noch Fusionen gibt.

Eine Teilmenge R von P bezeichnen wir als *symmetrisiert*, falls jedes Element $r \in R$ schwach zyklisch gekürzt ist und auch jedes schwach zyklisch gekürzte Konjugierte von $r^{\pm 1}$ in R enthalten ist.

Wir nennen ein Element $b \in P$ *Kürzungsstück* bzgl. $R \subseteq P$, falls unterschiedliche Elemente r_1, $r_2 \in R$ mit semi-gekürzten Darstellungen $r_1 = bc_1$ und $r_2 = bc_2$ für Elemente $c_1, c_2 \in P$ existieren.

Im Folgenden sei $R \subseteq P$ eine symmetrisierte Teilmenge.

Definition D.3. Wir bezeichnen ein Element s als *j-Überrest* (bzgl. R), falls ein $r \in R$ mit einer semi-gekürzten Form $r = sb_1b_2 \dots b_j$ existiert, wobei die b_i ($i \in \{1, 2, \dots, j\}$) Kürzungsstücke bzgl. R seien.

In der Theorie kleiner Kürzungen gibt es einige wiederkehrende Bedingungen an R, unter denen Aussagen über Elemente des normalen Abschlusses von R in P getroffen werden. Diese Bedingungen hängen jeweils von einem Parameter ab und werden auf folgende Weise bezeichnet.

Bedingung $C'(\lambda)$: Falls $r \in R$ eine semi-gekürzte Darstellung der Form $r = bc$ besitzt, wobei b ein Kürzungsstück bzgl. R sei, dann gelte $|b| < \lambda|r|$. Zudem gelte $|r| > \frac{1}{\lambda}$ für alle $r \in R$, wobei $|r|$ die Länge der Normalform von r bzgl. P sei.

Bedingung $C(p)$: Kein Element aus R ist ein semi-gekürztes Produkt von weniger als p Kürzungsstücken. Zudem gilt $|r| \geqslant p$ für alle Elemente r von R.

Bedingung $T(q)$: Sei $3 \leqslant h < q$. Weiter seien $r_1, r_2, \dots r_h$ Elemente aus R, so dass keine zwei aufeinanderfolgenden Elemente r_i, r_{i+1} ($i \in \{1, 2, \dots, h-1\}$) invers zueinander sind. Dann ist mindestens eines der Elemente $r_1r_2, r_2r_3, \dots, r_{h-1}r_h, r_hr_1$ semi-gekürzt.

Schließlich zitieren wir die beiden folgenden Resultate.

Satz D.4. (siehe [LS01, Chapter V, Theorem 11.2]) *Sei F ein amalgamiertes Produkt, sei R eine symmetrisierte Teilmenge von F und sei N der normale Abschluss von R in F mit $G = F/N$. Die Teilmenge R erfülle die Bedingung $C'(\lambda)$ für $\lambda \leqslant \frac{1}{6}$. Falls nun w ein nichttriviales Element von N ist, so kann man w in der gekürzten Darstellung $w = usv$ schreiben, wobei ein zyklisch gekürztes Element $r \in R$ mit $r = st$ und $|s| > (1 - 3\lambda)|r|$ existiere.*

Satz D.5. (siehe [Sch73, Theorem 1 (Greendlingers Lemma)]) *Sei F eine freie Gruppe, ein freies Produkt oder ein amalgamiertes Produkt. Weiter sei R eine symmetrisierte Teilmenge von F mit normalem Abschluss N. Man nehme an, dass R die Bedingungen $C(p)$ und $T(q)$ mit $(p, q) = (6, 3)$, $(4, 4)$ oder $(3, 6)$ erfüllt.*
Sei w ein nichttriviales Wort in N. Dann gilt $w \in R$ oder ein zyklisch gekürztes Konjugiertes w^* von w besitzt eine semi-gekürzte Darstellung $w^* = u_1s_1 \dots u_ms_m$, wobei jedes s_k ein $i(s_k)$-Überrest ist. Dabei sei für die Anzahl m der s_k und die Zahlen $i(s_k)$ folgende Bedingung erfüllt:

$$\sum_{k=1}^{m} \left[\frac{p}{q} + 2 - i(s_k)\right] \geqslant p$$

E. Asphärizität

Der Begriff „Asphärizität“ hat bei unterschiedlichen Autoren verschiedene Bedeutungen. Eine detaillierte Beschreibung dieser verschiedenen Arten von Asphärizität sowie ihrer Beziehungen zueinander findet sich in [CCH81]. In der vorliegenden Arbeit verwenden wir den Begriff der Asphärizität von Gruppenpräsentationen im Sinne von R. Lyndon und P. Schupp (siehe [LS01]), welchen wir in diesem Abschnitt skizzieren. Dazu geben wir zunächst einige Definitionen wieder.

Definition E.1. (siehe [LS01, Chapter III, Section 10]) Sei G eine Gruppe und sei $\pi = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ eine Folge von Elementen aus G.

Eine *Pfeiffer-Transformation erster Art* besteht aus dem Ersetzen der Folge π durch $\pi' = (p'_1, p'_2, \ldots, p'_n)$, wobei für ein i mit $1 \leqslant i < n$ entweder

$$\begin{aligned} p'_i = p_{i+1} \quad &\text{und} \quad p'_{i+1} = p_{i+1}^{-1} p_i p_{i+1} \quad \text{oder} \\ p'_i = p_i p_{i+1} p_i^{-1} \quad &\text{und} \quad p'_{i+1} = p_i \end{aligned}$$

sowie $p'_j = p_j$ für $j \neq i, i+1$ gelte.

Eine *Pfeiffer-Transformation zweiter Art* besteht aus dem Ersetzen der Folge π durch $\pi' = (p'_1, p'_2, \ldots, p'_{i-1}, p'_{i+2}, \ldots, p'_n)$, wobei $p_i p_{i+1} = 1$ gelte.

Definition E.2. (siehe [LS01, Chapter III, Section 10]) Sei $G = \langle X \mid R \rangle$ eine Gruppenpräsentation. Weiter seien $p_1, p_2, \ldots, p_n$ Konjugierte von Elementen aus $R \cup R^{-1}$ in $\langle X \rangle$, so dass $p_1 p_2 \cdots p_n = 1$ in $\langle X \rangle$ gilt. Dann nennen wir $\pi = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ eine *Identität unter den Relationen von G*. Wir bezeichnen eine solche Identität als trivial, wenn sie mithilfe von Pfeiffertransformationen (erster und zweiter Art) in die leere Folge überführt werden kann.

Die folgende Definition entspricht in [LS01] einer Proposition, da dort Asphärizität zunächst mithilfe von spherischen Diagrammen eingeführt wird, auf welche wir in dieser Arbeit jedoch nicht eingehen möchten.

Definition E.3. (siehe [LS01, Chapter III, Proposition 10.1]) Sei $G = \langle X \mid R \rangle$ eine Gruppenpräsentation. Falls es keine nichttrivialen Identitäten unter den Relationen von G gibt, so nennen wir die Präsentation G *asphärisch*.

Als Nächstes zitieren wir die auf W. Magnus zurückgehende Definition sogenannter gestaffelter Präsentationen. Mit Definition 4.29 in Kapitel 4 führen wir eine Erweiterung dieser Definition ein.

Definition E.4 (**gestaffelte Präsentationen über freien Gruppen, vgl. [LS01]**). Gegeben seien eine Präsentation $G = \langle X|R\rangle$ und eine Teilmenge $Y = \dot{\bigcup}_{i\in I} Y_i$ von X, wobei $I = \mathbb{Z}$ oder $I = \{1, 2, ..., n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ sei. Dabei gelte $R = \{r_j \mid j \in J\}$ für eine totalgeordnete Indexmenge J und zyklisch gekürzte r_j, die jeweils mindestens ein Element aus Y enthalten. Für jedes r_j bezeichne man mit α_j den kleinsten und mit ω_j den größten Index i, so dass r_j ein Element aus Y_i enthält. Nun heißt die Präsentation $G = \langle X|R\rangle$ *gestaffelt*, falls $j < k$ auch $\alpha_j < \alpha_k$ und $\omega_j < \omega_k$ impliziert.

In der vorliegenden Arbeit möchten wir Asphärizität u. a. dazu benutzen, in einer freien Gruppe $F = \langle X\rangle$ Aussagen über Elemente des normalen Abschlusses eines Elements r in F zu treffen. Wegen $F/\langle\langle r\rangle\rangle = \langle X \mid r\rangle$ sind wir daher an der Asphärizität von einrelationigen Gruppen (engl. „one-relator groups“) interessiert, welche durch folgenden Satz gegeben ist.

Satz E.5. *(vgl. [LS01, Chapter III, Proposition 11.1]) Sei $G = \langle X \mid R\rangle$ eine gestaffelte Präsentation über freien Gruppen. Dann ist die Präsentation G asphärisch. Insbesondere ist G asphärisch, falls R nur aus einer einzigen Relation besteht.*

Wir bemerken, dass es im Allgemeinen ein schwieriges Problem ist, für eine gegebene Präsentation zu entscheiden, ob sie asphärisch ist. Schließlich zitieren wir eine Resultat, welches wir als Werkzeug für Kapitel 2 benötigen.

Satz E.6. *(siehe [LS01, Chapter III, Proposition 10.2]) Sei $G = \langle X \mid R\rangle$ eine asphärische Gruppenpräsentation, wobei kein Element aus R zu einem anderen Element aus R oder seinem Inversen konjugiert sei. Wir setzen $F = \langle X\rangle$ und $N = \langle\langle R\rangle\rangle$. Dann gilt:*

Sei $p_1p_2\cdots p_n = 1$, wobei jedes p_i von der Form $u_i r_i^{\epsilon_i} u_i^{-1}$ für einige Elemente $u_i \in F$, $r_i \in R$ und $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ sei. Dann zerfällt die Menge aller Indizes $\{1, 2, \ldots, n\}$ in Paare (i, j), so dass $r_i = r_j$, $\epsilon_i = -\epsilon_j$ und $u_i \in u_j N C_i$ gilt, wobei C_i der Zentralisator von r_i in F sei.

F. Limesgruppen und elementare Theorie von Gruppen

In diesem Abschnitt betrachten wir u. a. drei äquivalente Definitionen von Limesgruppen. Dies präzisiert die Verwendung des Begriffs der „Limesgruppe“ in Abschnitt 2.1, in welchem wir die Magnus-Eigenschaft für direkte Produkte von beliebig vielen Limesgruppen mit der Magnus-Eigenschaft beweisen (siehe Korollar 2.8).

Als Vorbereitung benötigen wir folgende Definition. Wir erinnern daran, dass wir mit F_k ($k \in \mathbb{N}$) die freie Gruppe vom Rang k bezeichnen.

Definition F.1. ***(siehe [BF09, Definition 1.6])*** Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und $k \in \mathbb{N}$. Eine Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Homomorphismen aus $Hom(G, F_k)$ heißt *stabil*, falls für alle $g \in G$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

(i) Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $f_i(g) = 1$ für alle $i \geqslant N$.

(ii) Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $f_i(g) \neq 1$ für alle $i \geqslant N$.

Wir bezeichnen die Menge $\{g \in G \mid f_i \text{ erfüllt Bedingung (i) für } g\}$ als stabilen Kern $\underrightarrow{Ker}\, f_i$ von $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Nun sind wir in der Lage, die erste Definition von Limesgruppen zu formulieren (welche in der Originalquelle ebenfalls Teil von Definition 1.6 ist).

Definition F.2. ***(siehe [BF09, Definition 1.6])*** Eine endlich erzeugte Gruppe L ist eine *Limesgruppe*, falls eine endlich erzeugte Gruppe G und eine stabile Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $Hom(G, F_k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $L \cong G/\underrightarrow{Ker}\, f_i$ gilt.

Satz F.4 zeigt zwei weitere Möglichkeiten, Limesgruppen äquivalent zu Definition F.2 zu definieren. Zur Formulierung dieses Resultats definieren wir zunächst ω-residuell freie Gruppen sowie die universelle und existenzielle Theorie von Gruppen.

Definition F.3. ***(siehe [BF09, Definition 1.8])*** Eine endlich erzeugte Gruppe G ist *ω-residuell frei*, falls für jede endliche Teilmenge $X \subset G$ ein $k \in \mathbb{N}$ und ein $f \in Hom(G, F_k)$ existieren, so dass f eingeschränkt auf X injektiv ist.

Die folgende kurze Einführung in die elementare und universelle Theorie stammt aus [CG05].

Die sogenannte *Sprache der Gruppen* benutzt folgende Symbole:

- Die Gruppenmultiplikation "$\cdot$", die inverse Funktion "$^{-1}$", die Konstante "1" und die Gleichheitsrelation "$=$",
- *Variablen* aus einer Variablenmenge $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$,
- die logischen Verknüpfungen "$\wedge$" (für *und*), "$\vee$" (für *oder*), "$\neg$" (für *nicht*), die Quantoren "$\forall$" und "$\exists$" sowie die Klammern "(" ")".

Zur Vereinfachung der Schreibweise verzichten wir auf die Benutzung der Symbole "$\cdot$" für die Gruppenverknüpfung und die Klammern "(" ")", falls dadurch keine Missverständnisse enstehen können. Zudem definieren wir $X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$. Wörter im Alphabet $X \cup X^{-1}$ sowie das Einselement nennt man auch *Terme* in der Sprache der Gruppen. Eine Gleichung zweier Terme nennt man *atomare Formel*. Unter Verwendung von Verknüpfungen und Quantoren kann man aus beliebig vielen atomaren Formeln kompliziertere *Formeln* zusammensetzen. Variablen, welche nicht durch einen Quantor eingeführt werden, heißen *freie Variablen*.

Das folgende Beispiel zeigt eine Formel mit freier Variable x_3:

$$\forall x_1 \ ((x_1 x_3 = 1) \ \wedge \ (\exists x_2 \ x_1 x_2 = x_3))$$

Der Name „freie Variable“ erklärt sich dadurch, dass die Gültigkeit dieser Formel im Allgemeinen nicht nur von der Gruppe, in der die Formel betrachtet wird, sondern auch von der Wahl der Variablen x_3 abhängt.

Formeln ohne freie Variablen nennen wir *Sätze* in der Sprache der Gruppen. Als Beispiel eines Satzes betrachte man:

$$\forall x_3 \ \forall x_1 \ ((x_1 x_3 = 1) \ \vee \ (\exists x_2 \ x_1 x_2 = x_3))$$

Schließlich handelt es sich bei der *elementaren Theorie* $\mathrm{Th}(G)$ einer Gruppe G um alle Sätze, die wahr in G sind. Die *existenzielle Theorie* $\mathrm{Th}_\exists(G)$ einer Gruppe G besteht aus allen in G wahren Sätzen der Form

$$\exists x_1 \ \exists x_2 \ \ldots \ \exists x_n \ \ \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{F.1}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Formel ohne Quantoren sei. Analog dazu besteht die *universelle Theorie* $\mathrm{Th}_\forall(G)$ einer Gruppe G aus allen in G wahren Sätzen der Form

$$\forall x_1 \ \forall x_2 \ \ldots \ \forall x_n \ \ \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{F.2}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Formel ohne Quantoren sei.

Wir nennen zwei Gruppen *elementar/existenziell/universell äquivalent*, falls sie dieselbe elementare/existenzielle/universelle Theorie besitzen.

Die Negation eines Satzes aus der existenziellen bzw. universelle Theorie einer Gruppe ist ein Satz der Form (F.2) bzw. (F.1). Durch Negation aller Sätze der existenziellen Theorie

erhalten wir daher alle Sätze der Form (F.2), welche falsch in G sind. Somit besteht die universelle Theorie einer Gruppe aus allen Sätzen der Form (F.2), welche keine Negation eines Satzes aus der existenziellen Theorie der Gruppe sind. Es folgt, dass die existenziellen Theorien zweier Gruppen genau dann gleich sind, wenn ihre universelle Theorien gleich sind. Also entspricht die existenzielle Äquivalenz der universellen Äquivalenz.

Schließlich geben wir folgendes Resultat wieder, in welchem drei äquivalente Methoden der Definition von Limesgruppen zusammengefasst werden.

Satz F.4. (vgl. [CG05, Theorem 1.1]) *Sei L eine endlich erzeugte Gruppe. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) L ist eine Limesgruppe (im Sinne von Definition F.2).

(ii) L ist ω-residual frei (siehe Definition F.3).

(iii) L ist universell äquivalent (alternativ: existenziell äquivalent) zu einer freien abelschen oder freien Gruppe endlichen Rangs.

G. Graphen von Gruppen und ihre Fundamentalgruppen

Graphen von Gruppen sind ein wichtiger Bestandteil der Bass–Serre-Theorie, welche auf Hyman Bass und Jean-Pierre Serre zurückgeht. Der vorliegende Abschnitt orientiert sich stark an [Bog08, Chapter 2, Section 16] und soll nur einen groben Überblick über Graphen von Gruppen sowie deren Fundamentalgruppen geben.

Definition G.1. ***(vgl. [Bog08, Chapter 2, Definition 16.1])*** Ein *Graph von Gruppen* $(\mathbb{G}, Y)$ besteht aus

- einem gerichteten, zusammenhängenden Graphen Y mit Eckenmenge Y^0 und Kantenmenge Y^1, wobei für jede Kante $e \in Y^1$ auch die entgegengesetzt gerichtete Kante $\bar{e}$ in Y^1 enthalten sei,
- der Funktion $\alpha\colon Y^1 \to Y^0$, welche eine Kante auf die Ecke abbildet, in der die Kante beginnt,
- einer *Eckengruppe* G_v für jede Ecke $v \in Y^0$,
- einer *Kantengruppe* G_e für jede Kante $e \in Y^0$ mit $G_e = G_{\bar{e}}$ sowie
- Monomorphismen $\{\alpha_e\colon G_e \to G_{\alpha(e)} \mid e \in Y^1\}$.

Wir bezeichnen $\alpha(\bar{e})$ auch mit $\omega(e)$ und $\alpha_{\bar{e}}$ mit ω_e.

Für die Definition der Fundamentalgruppen von Graphen von Gruppen definieren wir zunächst

$$F(\mathbb{G}, Y) \;:=\; \Big(\big(\mathop{\ast}_{v \in Y^0} G_v\big) * \langle t_e \mid e \in Y^1 \rangle\Big) \,/\, \langle\!\langle t_e^{-1} \alpha_e(g) t_e(\alpha_{\bar{e}}(g)^{-1}),\, t_e t_{\bar{e}} \mid e \in Y^1, g \in G_e \rangle\!\rangle.$$

Definition G.2. Sei $(\mathbb{G}, Y)$ ein Graph von Gruppen und P eine Ecke von Y. Dann ist die *Fundamentalgruppe* $\pi_1(\mathbb{G}, Y, P)$ von $(\mathbb{G}, Y)$ bezüglich P die Untergruppe von $F(\mathbb{G}, Y)$, welche aus allen Elementen der Form $g_0 t_{e_1} g_1 t_{e_2} \dots t_{e_n} g_n$ besteht, wobei $e_1 e_2 \dots e_n$ ein geschlossener Weg in Y mit Anfangs- und Endpunkt P sei und $g_0 \in G_P$, $g_i \in G_{\omega_{e_i}}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ gelte.

Schließlich bemerken wir Folgendes:

Bemerkung G.3. Jede Fundamentalgruppe kann schrittweise als Kombination von amalgamierten Produkten und HNN-Erweiterungen aus ihren Eckengruppen konstruiert werden. Dazu wählen wir einen maximalen Teilbaum T von Y, welcher P enthält. Alle Eckengruppen von T werden über die zwischen ihnen liegenden Kantengruppen amalgamiert. Anschließend bilden wir für jedes nicht in T liegende Kantenpaar $(e, \bar{e})$ aus Y^1 eine HNN-Erweiterung mit t_e als stabilem Buchstaben und $\alpha_e(G_e)$, $\alpha_{\bar{e}}(G_{\bar{e}})$ als assoziierte Untergruppen. Man kann zeigen, dass die Wahl von T die Fundamentalgruppe dabei nur bis auf Isomorphie beeinflusst.

Literaturverzeichnis

[Adi55] S. I. Adian. Algorithmic unsolvability of problems of recognition of certain properties of groups. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 103:533–535, 1955.

[AK13] Yago Antolín and Aditi Kar. One-relator quotients of graph products. *Internat. J. Algebra Comput.*, 23(5):1207–1223, 2013.

[BF09] Mladen Bestvina and Mark Feighn. Notes on Sela's work: limit groups and Makanin-Razborov diagrams. In *Geometric and cohomological methods in group theory*, volume 358 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–29. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.

[Bog05] Oleg Bogopolski. A surface groups analogue of a theorem of Magnus. In *Geometric methods in group theory*, volume 372 of *Contemp. Math.*, pages 59–69. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Bog08] Oleg Bogopolski. *Introduction to group theory*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008. Translated, revised and expanded from the 2002 Russian original.

[BS08] Oleg Bogopolski and Konstantin Sviridov. A Magnus theorem for some one-relator groups. In *The Zieschang Gedenkschrift*, volume 14 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 63–73. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2008.

[CCH81] Ian M. Chiswell, Donald J. Collins, and Johannes Huebschmann. Aspherical group presentations. *Math. Z.*, 178(1):1–36, 1981.

[CG05] Christophe Champetier and Vincent Guirardel. Limit groups as limits of free groups. *Israel J. Math.*, 146:1–75, 2005.

[Col04] D. J. Collins. Intersections of Magnus subgroups of one-relator groups. In *Groups: topological, combinatorial and arithmetic aspects*, volume 311 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 255–296. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[Col08] Donald J. Collins. Intersections of conjugates of Magnus subgroups of one-relator groups. In *The Zieschang Gedenkschrift*, volume 14 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 135–171. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2008.

[Edj89] M. Edjvet. A Magnus theorem for free products of locally indicable groups. *Glasgow Math. J.*, 31(3):383–387, 1989.

[Fel15] Carsten Feldkamp. Magnus-Eigenschaft von Gruppen. *Masterarbeit, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf*, 2015.

[Fel19] Carsten Feldkamp. A Magnus theorem for some amalgamated products. *Comm. Algebra*, 47(12):5348–5360, 2019.

[Hig40] Graham. Higman. The units of group-rings. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 46:231–248, 1940.

[Hig51] Graham Higman. A finitely generated infinite simple group. *J. London Math. Soc.*, 26:61–64, 1951.

[HNN49] Graham Higman, B. H. Neumann, and Hanna Neumann. Embedding theorems for groups. *J. London Math. Soc.*, 24:247–254, 1949.

[How81] James Howie. On pairs of 2-complexes and systems of equations over groups. *J. Reine Angew. Math.*, 324:165–174, 1981.

[How82] James Howie. On locally indicable groups. *Math. Z.*, 180(4):445–461, 1982.

[How04] James Howie. Some results on one-relator surface groups. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)*, 10(Special Issue):255–262, 2004.

[HS09] James Howie and Muhammad Sarwar Saeed. Freiheitssätze for one-relator quotients of surface groups and of limit groups. *Q. J. Math.*, 60(3):313–325, 2009.

[HS10] James Howie and Muhammad Sarwar Saeed. Magnus subgroups of one-relator surface groups. *J. Algebra*, 323(7):1860–1871, 2010.

[Juh06] Arye Juhász. A strengthened Freiheitssatz for one-relator small cancellation free products. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 140(1):15–35, 2006.

[KK16] Benjamin Klopsch and Benno Kuckuck. The Magnus property for direct products. *Arch. Math. (Basel)*, 107(4):379–388, 2016.

[KMS60] A. Karrass, W. Magnus, and D. Solitar. Elements of finite order in groups with a single defining relation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 13:57–66, 1960.

[LS01] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp. *Combinatorial group theory*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1977 edition.

[LT18] Larsen Louder and Nicholas W. M. Touikan. Magnus pairs in, and free conjugacy separability of, limit groups. *Geom. Dedicata*, 196:187–201, 2018.

[Mag30] Wilhelm Magnus. Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation. (Der Freiheitssatz). *J. Reine Angew. Math.*, 163:141–165, 1930.

[Mar51] A. Markov. The impossibility of algorithms for the recognition of certain properties of associative systems. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 77:953–956, 1951.

[Nov58] P. S. Novikov. On the algorithmic insolvability of the word problem in group theory. In *American Mathematical Society Translations, Ser 2, Vol. 9*, pages 1–122. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1958.

[Orl72] Peter Orlik. *Seifert manifolds*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 291. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[Osi10] Denis Osin. Small cancellations over relatively hyperbolic groups and embedding theorems. *Ann. of Math. (2)*, 172(1):1–39, 2010.

[Rab58] Michael O. Rabin. Recursive unsolvability of group theoretic problems. *Ann. of Math. (2)*, 67:172–194, 1958.

[Rob96] Derek J. S. Robinson. *A course in the theory of groups*, volume 80 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1996.

[Rom72] N. S. Romanovskiĭ. A theorem on freeness for groups with one defining relation in varieties of solvable and nilpotent groups of given degrees. *Mat. Sb. (N.S.)*, 89(131):93–99, 166, 1972.

[Sch73] Paul E. Schupp. A survey of small cancellation theory. In *Word problems: decision problems and the Burnside problem in group theory (Conf. on Decision Problems in Group Theory, Univ. California, Irvine, Calif. 1969; dedicated to Hanna Neumann)*, pages 569–589. Studies in Logic and the Foundations of Math., Vol. 71. 1973.