

Die Metrische Dimension spezieller Graphklassen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Duygu Vietz
aus Wuppertal

Düsseldorf, Januar 2020

aus dem Institut für Informatik
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Gedruckt mit der Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent: Prof. Dr. E. Wanke

Korreferent: Prof. Dr. J. Rothe

Tag der mündlichen Prüfung: 13.03.2020

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere an Eides Statt, dass die Dissertation von mir selbständig und ohne unzulässige fremde Hilfe unter Beachtung der „Grundsätze zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf“ erstellt worden ist.

Diese Dissertation wurde bisher keiner anderen Fakultät vorgelegt. Es gab bislang keine erfolglosen oder erfolgreichen Promotionsversuche.

Ort, Datum

Unterschrift

Zusammenfassung

Der Entwurf effizienter Algorithmen für Graphenprobleme spielt in der Informatik eine zentrale Rolle. Viele interessante Probleme lassen sich jedoch nicht effizient für allgemeine Graphen lösen. Oft können gewisse Eigenschaften in der Struktur bestimmter Graphklassen genutzt werden, um solche Probleme effizient, das heißt in polynomieller Zeit, für diese Graphklassen zu lösen. Das Problem METRISCHE DIMENSION ist ein solches NP-schweres Problem. Es wurde von Slater (1975) und Harary und Melter (1976) unabhängig voneinander eingeführt. Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit einer Knotenmenge V und einer Kantenmenge E ist eine *trennende Menge* eine Teilmenge $R \subseteq V$ der Knotenmenge, sodass für jedes Paar $u, v \in V, u \neq v$, ein Knoten $r \in R$ existiert, sodass $d_G(u, r) \neq d_G(v, r)$. Dabei bezeichnet $d_G(u, v)$ die Länge eines kürzesten Weges zwischen den Knoten u, v in dem Graphen G . Die metrische Dimension von G ist die Größe einer kleinsten trennenden Menge für G und wird mit $mdim(G)$ bezeichnet. Das Problem METRISCHE DIMENSION ist die Entscheidung, ob $mdim(G) \leq k$ ist für einen ungerichteten Graphen G und eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Seit der Einführung dieses Problems wurden viele Ergebnisse über die Komplexität der METRISCHEN DIMENSION für verschiedene bekannte Graphklassen, wie Bäume, bipartite Graphen, planare Graphen, außenplanare Graphen, Cographen, Wheels, Intervallgraphen und viele weitere veröffentlicht. Die Ergebnisse umfassen sowohl NP-Vollständigkeitsbeweise als auch effiziente Algorithmen. Aus der Problemstellung METRISCHE DIMENSION sind weitere Varianten entstanden, die unter anderem durch praktische Fragestellungen motiviert sind. Zu diesen Varianten gehören die GEWICHTETE METRISCHE DIMENSION, die LOKALE METRISCHE DIMENSION, die ADJAZENZDIMENSION, die STARKE METRISCHE DIMENSION, die FEHLERTOLERANTE METRISCHE DIMENSION und viele weitere. Auch diese Problemvarianten wurden in vielen verschiedenen Publikationen analysiert.

Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag zu diesem Themengebiet. Nach einer Einführung in die Grundlagen und den aktuellen Stand der Forschung in den Kapiteln 1 bis 3, folgt in Kapitel 4 ein Algorithmus, der eine baumstrukturierte Dekomposition eines Graphen durchführt und anhand dieser Zerlegung die metrische Dimension des Graphen bestimmt. In Kapitel 5 wird ein Linearzeitalgorithmus zur Bestimmung der gewichteten fehlertoleranten metrischen Dimension von Co-Graphen vorgestellt. Kapitel 6 zeigt einen NP-Vollständigkeitsbeweis für das Problem LOKALE METRISCHE DIMENSION für planare

Graphen. Kapitel 7 führt in die Klasse der sogenannten *Sonnengraphen* ein. Es wird ein effizienter Algorithmus zur Bestimmung der gewichteten metrischen Dimension und der fehlertoleranten metrischen Dimension von Sonnengraphen vorgestellt. In Kapitel 8 wird ein effizienter Algorithmus zur Bestimmung der fehlertoleranten metrischen Dimension von Wheels präsentiert. Abschließend wird die starke metrische Dimension in Hinblick auf die praktische Anwendung beim Routing in Sensornetzwerken diskutiert.

Abstract

The design of efficient algorithms for graph theoretical problems plays an important role in the field of computer science. However, many problems are not efficiently solvable for general graphs. Sometimes such problems can be solved efficiently on some restricted graph classes by considering their specific properties. The problem METRIC DIMENSION is such an NP-hard problem. It was introduced independently by Slater (1975) and Harary and Melter (1976). For an undirected graph $G = (V, E)$ with vertex set V and edge set E a subset of vertices $R \subseteq V$ is called a *resolving set*, if for every pair $u, v \in V, u \neq v$, there is a vertex $r \in R$ with $d_G(u, r) \neq d_G(v, r)$. With $d_G(u, v)$ we denote the length of a shortest path between u and v in G . The metric dimension of G is the size of a smallest resolving set for G and is denoted by $mdim(G)$. The problem METRIC DIMENSION is to decide if $mdim(G) \leq k$ for an undirected graph G and a positive integer $k \in \mathbb{N}$.

Many papers concerning the complexity of METRIC DIMENSION for several different graph classes have been published since the first introduction of this problem. These include graph classes such as trees, bipartite graphs, planar graphs, outerplanar graphs, cographs, wheels, interval graphs and many more. In fact, some were shown to be NP-hard, for others efficient algorithms were given. The analysis of the METRIC DIMENSION problem lead to further variants, such as the WEIGHTED METRIC DIMENSION, the LOCAL METRIC DIMENSION, the ADJACENCY DIMENSION, the STRONG METRIC DIMENSION, the FAULT-TOLERANT METRIC DIMENSION and many more. All of these variants have been discussed in various publications.

This doctoral thesis contributes to this field of study. In chapters 1 to 3 it first gives an introduction into graph theoretical basics and the state of research. Chapter 4 presents an algorithm which performs a tree-structured decomposition of a graph that can be used to determine the metric dimension of the graph. Chapter 5 describes a linear time algorithm to determine the weighted fault-tolerant metric dimension of a cograph. Chapter 6 proves the NP-completeness of the problem LOCAL METRIC DIMENSION for planar graphs. Chapter 7 introduces the class of so-called *sun graphs* and gives an efficient algorithm for the computation of their weighted metric dimension and fault-tolerant metric dimension. Chapter 8 presents an efficient algorithm to determine the fault-tolerant metric dimension of wheels. Finally we discuss some properties of the strong metric dimension focusing on the routing in sensor networks.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit ist im Verlauf von vier Jahren entstanden. Wie in jedem größeren Projekt gab es auch in diesen Phasen, die sehr viel Spaß gemacht haben und Phasen, die herausfordernd waren. Ich möchte mich an dieser Stelle bei den Personen bedanken, die mich in diesen vier Jahren und gerade in der anstrengenden Abschlussphase besonders unterstützt haben.

Zunächst gilt mein Dank meinem Doktorvater Prof. Dr. Egon Wanke. In vielen Gesprächen gab er mir die Möglichkeit, fachlich zu wachsen und half mir dabei, eine Wissenschaftlerin zu werden. Er hat durch seine motivierende Betreuung die Entstehung dieser Dissertation maßgeblich beeinflusst. Ich bedanke mich für diese besondere und angenehme Zusammenarbeit in den vergangenen Jahren.

Als nächstes möchte ich mich bei einigen Freundinnen, Kolleginnen und Kollegen bedanken. Meine Freundinnen Martha Tatusch und Nurhan Charour haben mich sowohl in fachlichen als auch in persönlichen Gesprächen sehr unterstützt. Sie waren für mich da, wenn ich Zuhörer zum Sortieren meiner Gedanken brauchte und sind meinen Ausführungen geduldig gefolgt. Meine langjährige liebe Freundin Kathrin und die kleine Fiona Reins haben mich insbesondere in den letzten Wochen der Fertigstellung mehrfach mit motivierenden Postkarten, WhatsApp-Nachrichten und Nervenschokolade versorgt und damit so manche Erschöpfung in einen Ansporn verwandelt. Auch meine liebe Freundin Johanna Wallner hat mich in dieser Zeit mit ihren regelmäßigen Sprachnachrichten am Beginn eines Tages aufgebaut und mir Kraft gegeben. Der Austausch mit meiner Kollegin Lisa Rey hat mir geholfen, am Ball zu bleiben und zu erkennen, dass viele Hürden einfach dazu gehören. Mein Dank geht auch an meinen Freund und Kollegen Felix Lieder und meinen ehemaligen Kollegen Daniel Gaußmann für die vielen anregenden Gespräche und an Melinda Hagedorn für die köstlichen Muffins, die mir meine kleine Feier nach der Promotionsprüfung versüßt haben.

Zu Letzt möchte ich mich bei meiner wundervollen Familie bedanken, die mich in all den Jahren auf jede nur erdenkliche Weise unterstützt hat. Mein besonderer Dank geht an meine Mutter Nurdagül Özmen, die mich gefördert hat, wo sie nur konnte, mir stets mit ihrem guten Rat zur Seite stand und ganz besonders in der Abschlussphase das eine oder mal unsere Küche aufgeräumt hat :-). Ich bedanke mich bei meinem lieben Bruder

Berkant Kaan Özmen und meiner lieben Schwester Aleyna Özmen für ihre aufbauende und fröhliche Art, mit der sie mir gezeigt haben, die Dinge leicht zu nehmen. Ich bedanke mich bei meinem Onkel Zafer Budak für seine Anwesenheit und Unterstützung am Tag meiner Promotionsprüfung. Ich danke meinen lieben Schwiegereltern Monika und Friedhelm Vietz dafür, dass sie an mich geglaubt, mich mit ihrer Anwesenheit bei meiner Prüfung unterstützt und Köstlichkeiten für die Feier danach vorbereitet haben. Und ein ganz besonderer Dank geht an meinem wundervollen Ehemann Matthias. Er hat mehr als jeder andere an mich geglaubt, mich gefördert und aufgebaut. Er hat meine gesamte Dissertation mehrfach Korrektur gelesen und ist geduldig allen meinen Ausführungen gefolgt. Er war mir in all den Jahren eine Stütze und ein Forschungspartner. Er hat mir in der Abschlussphase den Rücken freigehalten und hat die besten Rahmenbedingungen zum Finalisieren meiner Dissertation geschaffen. Ohne dich hätte ich es nicht geschafft, ich danke dir von ganzem Herzen!

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	3
3	Die metrische Dimension und ihre Varianten	7
3.1	Einführung in die metrische Dimension	7
3.2	Stand der Forschung	10
3.2.1	Metrische Dimension	10
3.2.2	Starke metrische Dimension	13
3.2.3	Adjazenzdimension	14
3.2.4	Fehlertolerante und k -metrische Dimension	14
3.2.5	Lokale metrische Dimension	14
4	Berechnung der metrischen Dimension mit einer EBC-Zerlegung	17
4.1	Definitionen	17
4.2	Gate-Knoten und Gate-trennende Mengen	19
4.3	Berechnung des h -Wertes entlang des DEBC-Baumes	26
4.4	Algorithmus und Laufzeit	34
4.5	k -bounded BC Metric Dimension ist NP-vollständig	36
5	Die gewichtete fehlertolerante metrische Dimension von Co-Graphen	39
5.1	Definitionen und Eigenschaften einer 2-adjazent trennenden Menge	39
5.2	Algorithmus	44
6	Die lokale metrische Dimension planarer Graphen	51
6.1	Definitionen und Problemstellung	51
6.2	Planare Lokale Metrische Dimension ist NP-vollständig	52
7	Gewichtete und fehlertolerante metrische Dimension von Sonnengraphen	59
7.1	Die gewichtete metrische Dimension von Sonnengraphen	59
7.1.1	Definitionen und Ergebnisse	59
7.1.2	Analyse der Trenneigenschaften eines Knotens	60
7.1.3	Eigenschaften einer trennenden Menge mit zwei/drei Ankerknoten	73
7.1.4	Berechnung einer trennenden Menge mit zwei/drei Ankerknoten	76

7.2	Die fehlertolerante metrische Dimension von Sonnengraphen	81
7.2.1	Bestimmung der fehlertoleranten metrischen Dimension in Abhängigkeit von der Anzahl der Legs	81
7.2.2	Algorithmus	85
8	Die gewichtete fehlertolerante metrische Dimension vollständiger Wheels	89
8.1	Definitionen und Eigenschaften	89
8.2	Bestimmung der fehlertoleranten metrischen Dimension	91
8.3	Bestimmung der gewichteten fehlertoleranten metrischen Dimension . . .	95
9	Fazit und Ausblick	101
9.1	Fazit	101
9.2	Ausblick	102
10	Anhang	107

1 Einleitung

Das Gebiet der Graphentheorie in der Informatik beschäftigt sich mit sogenannten *Graphen*. Bei einem Graphen handelt es sich um ein Paar (V, E) , wobei V eine endliche Menge ist, deren Elemente wir *Knoten* nennen und E eine endliche Menge von Knotenpaaren ist, deren Elemente wir *Kanten* nennen. Graphenstrukturen lassen sich in nahezu allen Themengebieten zur Modellierung komplexer Sachverhalte verwenden. Zum Beispiel werden in der Informatik Computer- und Sensornetzwerke, in der Chemie Moleküle, in der Biologie Netzwerke von Nervenzellen, in der Physik atomare Strukturen und in der Soziologie Abstammungsmodelle mit Graphen modelliert. Die Graphentheorie untersucht Probleme auf Graphen, analysiert sie hinsichtlich ihrer Komplexität und entwickelt algorithmische Lösungsansätze.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der *metrischen Dimension* von Graphen. Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist die Größe einer kleinsten Knotenmenge $R \subseteq V$, sodass alle Knotenpaare aus V zu mindestens einem Knoten aus R eine unterschiedliche Graphdistanz haben, die metrische Dimension des Graphen. Die Knoten aus R werden auch *Ankerknoten* genannt.

Eine der vielen Motivationen für die Untersuchung der metrischen Dimension von Graphen stammt, ebenso wie der Begriff „Ankerknoten“ selbst, aus dem Bereich der Sensornetzwerke. Ein Sensornetzwerk besteht aus Sensoren, die miteinander kommunizieren können. Dabei kann ein Sensor in der Regel nicht mit allen Sensoren seines Netzwerks kommunizieren, sondern nur mit denjenigen, die in seiner Sendereichweite liegen. Soll ein Sensor s eine Nachricht zu einem Sensor t übermitteln, der nicht in der Sendereichweite von s liegt, so wird das mittels eines sogenannten *Routing*s realisiert. Dabei wird die Nachricht von s an einen Sensor t_1 , der in der Sendereichweite von s liegt, übermittelt. Der Sensor t_1 übermittelt diese Nachricht wiederum weiter an einen Sensor t_2 , der in seiner Sendereichweite liegt, usw., bis die Nachricht beim Sensor t angekommen ist. Die Entscheidung, welcher Sensor in der Sendereichweite die Nachricht erhält, wird anhand eines *Routingprotokolls* getroffen. Für das erfolgreiche Routing in einem Sensornetzwerk ist eine eindeutige Adressierung der Sensoren unerlässlich. Eine solche Adressierung kann beispielsweise über die Hopdistanzen zu einigen ausgezeichneten Sensoren in dem Netzwerk erfolgen. Diese Sensoren werden auch Ankerknoten genannt. Dabei stellt sich die

Frage, wie viele solcher Ankerknoten benötigt werden, und wo sie sich im Netzwerk befinden müssen, um eine eindeutige Adressierung aller Sensoren zu gewährleisten.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Zunächst erfolgt in Kapitel 2 eine Einführung in Grundbegriffe aus der Graphentheorie. Anschließend wird in Kapitel 3 die Problemstellung METRISCHE DIMENSION mit ihren Varianten eingeführt. Es werden die bedeutendsten Ergebnisse zu den entsprechenden Varianten vorgestellt. Anschließend folgen eigene Beiträge zur Bestimmung von Varianten der metrischen Dimension auf speziellen Graphklassen. In Kapitel 4 wird eine baumstrukturierte Dekomposition eines Graphen beschrieben, anhand derer die metrische Dimension bestimmt werden kann. In Kapitel 5 wird ein Linearzeitalgorithmus zur Bestimmung der gewichteten fehlertoleranten metrischen Dimension von Co-Graphen vorgestellt. Kapitel 6 zeigt einen NP-Vollständigkeitsbeweis für das Problem LOKALE METRISCHE DIMENSION für planare Graphen. Kapitel 7 führt in die Graphklasse der sogenannten *Sonnengraphen* ein. Es wird ein effizienter Algorithmus zur Bestimmung der gewichteten metrischen Dimension und der fehlertoleranten metrischen Dimension von Sonnengraphen vorgestellt. In Kapitel 8 wird ein effizienter Algorithmus zur Bestimmung der fehlertoleranten metrischen Dimension von Wheels präsentiert. Abschließend folgt das Fazit mit einem Ausblick.

2 Grundlagen

Zum Verständnis dieser Arbeit werden Grundlagen der Graphen- und Komplexitätstheorie vorausgesetzt. Die folgenden Definitionen dienen der Einführung in die Notationen und eignen sich nur bedingt zum Erlernen graphen- und komplexitätstheoretischer Grundkonzepte. Hiefür sei auf [41] verwiesen.

Definition 2.0.1 (ungerichteter Graph). *Ein ungerichteter Graph G ist ein Tupel (V, E) , wobei V eine endliche Menge von Knoten und $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$ eine endliche Menge von ungerichteten Kanten ist. Die Knoten u, v einer Kante $\{u, v\}$ heißen Endknoten. Zwei Knoten u, v heißen adjazent, wenn die Kante $\{u, v\}$ in E enthalten ist. Ein Knoten u und eine Kante e sind inzident zueinander, wenn $u \in e$ ist. Der Grad $\deg(u)$ eines Knotens u bezeichnet die Anzahl der mit u adjazenten Knoten bzw. inzidenten Kanten. Die offene Nachbarschaft $N(u)$ eines Knotens $u \in V$ ist die Menge der mit u adjazenten Knoten. Die geschlossene Nachbarschaft eines Knotens $u \in V$ ist die Menge $N[u] = N(u) \cup \{u\}$. Wir schreiben auch $V(G)$ für die Knotenmenge von G und $E(G)$ für die Kantenmenge von G .*

Definition 2.0.2 (gerichteter Graph). *Ein gerichteter Graph G ist ein Tupel (V, E) , wobei V eine endliche Menge von Knoten und $E \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in V\}$ eine endliche Menge von gerichteten Kanten ist. Der Knoten u einer Kante (u, v) heißt Startknoten und der Knoten v heißt Endknoten. Der Eingangsgrad $\text{indeg}(u)$ eines Knotens u bezeichnet die Anzahl der in u einlaufenden Kanten, also $|\{(v, u) \in E \mid u, v \in V\}|$ und der Ausgangsgrad $\text{outdeg}(u)$ eines Knotens u bezeichnet die Anzahl der aus u auslaufenden Kanten, also $|\{(u, v) \in E \mid u, v \in V\}|$. Wir schreiben auch $V(G)$ für die Knotenmenge von G und $E(G)$ für die Kantenmenge von G .*

Definition 2.0.3 (Teilgraph). *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Teilgraph von G ist ein Graph $G_1 = (V_1, E_1)$ mit $V_1 \subseteq V$ und $E_1 \subseteq E$. Ein induzierter Teilgraph von G ist ein Teilgraph $G_2 = (V_2, E_2)$ von G mit $V_2 \subseteq V$ und $E_2 = \{\{u, v\} \in E \mid u, v \in V_2\}$, falls G ungerichtet ist und $E_2 = \{(u, v) \in E \mid u, v \in V_2\}$, falls G gerichtet ist. Man sagt auch, G_2 ist der von V_2 induzierte Teilgraph und schreibt $G_2 = G|_{V_2}$.*

Definition 2.0.4 (Weg). *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $u, v \in V$. Ein Weg p der Länge $k \in \mathbb{N}$ von u nach v ist eine Folge von Knoten $p = (u, u_1, u_2, \dots, u_{k-2}, v)$, sodass $\{u, u_1\} \in E$, $\{u_i, u_{i+1}\} \in E$, $\{u_{k-2}, v\} \in E$, $\forall 1 \leq i \leq k-3$, falls G ungerichtet ist*

und $(u, u_1) \in E, (u_i, u_{i+1}) \in E, (u_{k-2}, v) \in E, \forall 1 \leq i \leq k-3$, falls G gerichtet ist. Ein Weg p der Länge $k \in \mathbb{N}$ ist ein kürzester Weg von u nach v , wenn für alle Wege p' der Länge $k' \in \mathbb{N}$ von u nach v gilt: $k \leq k'$. Zwei Wege $p_1 = (u, u_1, u_2, \dots, v)$ und $p_2 = (u, v_1, v_2, \dots, v)$ von u nach v heißen knotendisjunkt, wenn $u_i \neq v_j \forall i, j$.

Definition 2.0.5 (Zusammenhang). Ein Graph $G = (V, E)$ ist zusammenhängend, wenn es zwischen jedem Knotenpaar $u, v \in V$ einen Weg gibt. G ist unzusammenhängend, wenn er nicht zusammenhängend ist.

Definition 2.0.6 (Distanz). Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die Graphdistanz $d_G(u, v)$ zwischen zwei Knoten $u, v \in V$ ist die Länge eines kürzesten Weges von u nach v in G . Gibt es keinen Weg zwischen u und v in G , so benutzen wir die Notation $d_G(u, v) = \infty$. Ist G aus dem Kontext bekannt, sagen wir auch kurz Distanz und schreiben $d(u, v)$.

Definition 2.0.7 (bipartiter Graph). Sei $G = (V, E)$ ein Graph. G heißt bipartit, falls es zwei Teilmengen $V_1, V_2 \subseteq V$ der Knotenmenge V gibt, sodass

1. $V_1 \cup V_2 = V$,
2. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,
3. $\{u, v\} \notin E \quad \forall u, v \in V_1$, falls G ungerichtet ist bzw. $(u, v) \notin E \quad \forall u, v \in V_1$, falls G gerichtet ist,
4. $\{u, v\} \notin E \quad \forall u, v \in V_2$, falls G ungerichtet ist bzw. $(u, v) \notin E \quad \forall u, v \in V_2$, falls G gerichtet ist.

Definition 2.0.8 ($K_n, K_{n,m}, P_n$ und C_n). Der vollständige Graph K_n mit n Knoten ist der ungerichtete Graph (V, E) mit der Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und der Kantenmenge $E = \{\{v_i, v_j\} \mid i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j\}$.

Der vollständig bipartite Graph $K_{n,m}$ mit $n + m$ Knoten ist der ungerichtete Graph (V, E) mit der Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m\}$ und der Kantenmenge $E = \{\{v_i, u_j\} \mid i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\}$.

Der Weg P_n mit n Knoten ist der ungerichtete Graph (V, E) mit der Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und der Kantenmenge $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid i \in \{1, \dots, n-1\}\}$. Die Knoten v_1 und v_n heißen Endknoten.

Der Kreis C_n mit n Knoten ist der ungerichtete Graph (V, E) mit der Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und der Kantenmenge $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid i \in \{1, \dots, n-1\}\} \cup \{\{v_n, v_1\}\}$. Ein Graph heißt kreisfrei, wenn er keinen Kreis als Teilgraphen enthält.

Definition 2.0.9 (Zusammenhangskomponente). Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Zusammenhangskomponente von G ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph.

Definition 2.0.10 (Separationsknoten). Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Knoten $s \in V$ ist ein Separationsknoten, wenn der von $V \setminus \{s\}$ induzierte Teilgraph mehr Zusammenhangskomponenten besitzt als G .

Definition 2.0.11 (2-fach zusammenhängend). Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist 2-fach zusammenhängend, wenn es zwischen jedem Knotenpaar $u, v \in V$ zwei knotendisjunkte Wege p_1 und p_2 gibt.

Korollar 2.0.12. Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist 2-fach zusammenhängend, wenn er keinen Separationsknoten besitzt.

Definition 2.0.13 (2-fache Zusammenhangskomponente). Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Ein Teilgraph $G' = (V', E')$ von G ist eine 2-fache Zusammenhangskomponente, wenn G' maximal und zweifach zusammenhängend ist.

Definition 2.0.14 (Baum). Ein ungerichteter, zusammenhängender und kreisfreier Graph ist ein Baum.

3 Die metrische Dimension und ihre Varianten

3.1 Einführung in die metrische Dimension

Definition 3.1.1 (Trennende Menge und metrische Dimension). Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Eine Menge $R \subseteq V$ ist eine trennende Menge für G , wenn

$$\forall u, v \in V, u \neq v : \exists r \in R : d_G(u, r) \neq d_G(v, r).$$

Die Knoten in R werden Ankerknoten genannt. Eine trennende Menge R ist eine metrische Basis für G , wenn es keine trennende Menge R' für G gibt, sodass $|R'| < |R|$. Die Größe einer metrischen Basis R für G ist die metrische Dimension von G und wird mit $\text{mdim}(G)$ bezeichnet.

In der Literatur werden viele verschiedene Varianten der metrischen Dimension diskutiert. Um Unterschiede und Gemeinsamkeiten herauszustellen, charakterisieren wir jede Variante anhand einer *Trennungseigenschaft* und einer Menge von *Zusatzbedingungen*. Wir unterscheiden zwei verschiedene Trennungseigenschaften: Die *Distanzeigenschaft* und die *Wegeigenschaft*.

Definition 3.1.2. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $u, v, r \in V$, $u \neq v$. Der Knoten r trennt das Knotenpaar u, v bzgl. der Distanzeigenschaft, wenn $d'(u, r) \neq d'(v, r)$, für eine Distanzfunktion $d' : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$. Der Knoten r trennt das Knotenpaar u, v bzgl. der Wegeigenschaft, wenn u auf einem kürzesten Weg von v nach r (kurz: $v-r$ -Weg) in G liegt oder wenn v auf einem kürzesten Weg von u nach r (kurz: $u-r$ -Weg) in G liegt. Eine trennende Menge bzgl. der Distanzeigenschaft (bzgl. der Wegeigenschaft) ist eine Teilmenge $R \subseteq V$, sodass jedes Knotenpaar $u, v \in V$, $u \neq v$, von einem Knoten $r \in R$ bzgl. der Distanzeigenschaft (bzgl. der Wegeigenschaft) getrennt wird.

Für die Trennung bzgl. der Distanzeigenschaft mit der Distanzfunktion $d'(u, v) = d_G(u, v)$ ergibt sich die „klassische“ *Trennung*, wie in Definition 3.1.1 beschrieben. Eine trennende Menge bzgl. dieser Distanzfunktion wird in der Literatur schlicht *trennende Menge* genannt ([1] - [198]). Für die Trennung bzgl. der Distanzeigenschaft mit der Distanzfunktion

$d'(u, v) = \min\{d_G(u, v), k\}$ für eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, ergibt sich eine Trennung der höchstens k -fachen Nachbarschaft eines Ankerknotens. Für $k = 1$ wird in der Literatur von einer *adjazent trennenden Menge* gesprochen ([56], [65], [66]). Die Trennung bzgl. der Wegeigenschaft wird in der Literatur *starke Trennung* genannt. Eine entsprechende trennende Menge heißt *stark trennende Menge* ([172], [156], [127], [135], [117], [130], [165], [118], [142], [133], [134], [131], [115], [151], [46], [137], [53], [139], [116], [168]).

Durch die Definition anderer Distanzfunktionen oder Trennungsbegriffe lassen sich weitere Varianten der Trennung eines Knotenpaares definieren. Naheliegend ist beispielsweise die Distanzfunktion $d'(u, v) = \max\{d_G(u, v), k\}$ für eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, die bisher noch nicht näher untersucht wurde.

Jede dieser verschiedenen trennenden Mengen, die sich über eine Trenneigenschaft definieren, lassen sich mit beliebig vielen Zusatzbedingung kombinieren. Diese Zusatzbedingungen richten sich dabei an die zu trennenden Knotenpaare oder an die trennende Menge selbst. Einige in der Literatur betrachtete Zusatzbedingungen sind die Folgenden:

- Die Einschränkung der zu trennenden Knotenpaare auf die Menge der benachbarten Knotenpaare wird *lokale Trennung* genannt ([157], [15], [164], [16], [14], [65], [168], [124], [17]),
- Die Einschränkung der zu trennenden Knotenpaare auf die Menge der Knotenpaare, die nicht in einer trennenden Menge sind, wird *non-landmark-model (NL-model)* genannt ([2]),
- die Bedingung, dass jedes Knotenpaar von mindestens $k \in \mathbb{N}$ Knoten getrennt werden soll, wird *k-fache Trennung* genannt ([54], [55], [2], [195], [182], [181], [57]),
- Die Bedingung, dass eine trennende Menge bei Herausnahme eines beliebigen Knotens eine trennende Menge bleibt, wird *fehlertolerante Trennung* genannt ([92], [167], [168], [163], [192]),
- Die Zuordnung von positiven Knotengewichten wird *gewichtete Trennung* genannt ([51], [1], [2]),
- Die Bedingung, dass eine trennende Menge auch eine dominierende Menge sein soll, wird *resolving domination* genannt ([30]),
- Die Bedingung, dass eine trennende Menge auch eine unabhängige Menge sein soll, wird *independent resolving* genannt ([44], [185]),

Die Möglichkeiten zur Erzeugung anderer Varianten über weitere Zusatzbedingungen sind endlos. Saenpholphat und Zhang geben in [166] einen schönen Überblick über weitere Varianten, die hier nicht näher diskutiert werden.

Es folgt nun eine formale Definition der Varianten, mit denen sich diese Arbeit genauer befasst, einschließlich der zugehörigen Problemdefinitionen:

Definition 3.1.3 (Adjazenzdimension). Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Sei $d'(u, v) = \min\{d_G(u, v), 1\}$, $u, v \in V$. Eine Menge $R \subseteq V$ ist eine adjazent trennende Menge für G , wenn $\forall u, v \in V, u \neq v$:

$$\exists r \in R : d'(u, r) \neq d'(v, r).$$

Die Größe einer kleinsten adjazent trennenden Menge für G ist die Adjazenzdimension von G und wird mit $\text{adim}(G)$ bezeichnet.

Definition 3.1.4 (lokale metrische Dimension). Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Eine Menge $R \subseteq V$ ist eine lokale trennende Menge für G , wenn $\forall u, v \in V, \{u, v\} \in E, u \neq v$:

$$\exists r \in R : d_G(u, r) \neq d_G(v, r).$$

Die Größe einer kleinsten lokal trennenden Menge für G ist die lokale metrische Dimension von G und wird mit $\text{ldim}(G)$ bezeichnet.

Definition 3.1.5 (fehlertolerante metrische Dimension). Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Eine trennende Menge $R \subseteq V$ ist eine fehlertolerante trennende Menge für G , wenn

$$\forall r \in R : R \setminus \{r\} \text{ eine trennende Menge für } G \text{ ist.}$$

Die Größe einer kleinsten fehlertoleranten trennenden Menge für G ist die fehlertolerante metrische Dimension von G und wird mit $\text{fdim}(G)$ bezeichnet.

Korollar 3.1.6. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Eine Menge $R \subseteq V$ ist genau dann eine fehlertolerante trennende Menge für G , wenn

$$\forall u, v \in V, u \neq v, \exists r_1, r_2 \in R, r_1 \neq r_2 : d_G(u, r_1) \neq d_G(v, r_1) \wedge d_G(u, r_2) \neq d_G(v, r_2).$$

Aus diesen Definitionen ergeben sich die folgenden Entscheidungsprobleme:

METRISCHE DIMENSION

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, $|V| \geq 3$,
und eine natürliche Zahl k .

Frage: Ist $\text{mdim}(G) \leq k$?

ADJAZENZDIMENSION

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, $|V| \geq 3$,
und eine natürliche Zahl k .

Frage: Ist $\text{adim}(G) \leq k$?

LOKALE METRISCHE DIMENSION

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, $|V| \geq 3$,
und eine natürliche Zahl k .

Frage: Ist $\text{ldim}(G) \leq k$?

FEHLERTOLERANTE METRISCHE DIMENSION

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, $|V| \geq 3$,
und eine natürliche Zahl k .

Frage: Ist $\text{fdim}(G) \leq k$?

3.2 Stand der Forschung

Der folgende Abschnitt soll einen Überblick über den Stand der Forschung im Bereich der metrischen Dimension und ihrer Varianten geben.

3.2.1 Metrische Dimension

Blumenthal untersuchte bereits 1953 in [26] die metrische Dimension für allgemeine metrische Räume. Für Graphen wurde das Problem unabhängig voneinander 1975 von Slater in [180] und 1976 von Harary und Melter in [85] eingeführt. Seitdem sind zahlreiche Ergebnisse zur metrischen Dimension und deren Varianten publiziert worden.

Das erste Ergebnis zur Komplexität der metrischen Dimension wurde 1979 von Garey und Johnson in „Compter and Intractability“ ([72]) veröffentlicht. Sie ordneten das Problem

in die Klasse der NP-vollständigen Probleme ein. Ein Beweis dafür wurde jedoch nicht angegeben, lediglich der Hinweis, die Reduktion sei über 3-Dimensionales-Matching (3DM) durchzuführen. Der erste Beweis wurde 17 Jahre nach dem Erscheinen von „Compter and Intractability“ publiziert. 1996 zeigten Khuller et al. in [123] die NP-Vollständigkeit der metrischen Dimension über eine Reduktion von 3-SAT. In der gleichen Arbeit gaben sie eine geschlossene Formel für die metrische Dimension von Bäumen an und zeigten, dass das Problem mit einem Faktor aus $\mathcal{O}(\log(|V|))$ approximiert werden kann. Hauptmann et al. erweiterten dieses Ergebnis und zeigten in [87] und [88], dass sich die metrische Dimension nicht mit einem Faktor von $(1 - \varepsilon) \cdot \log(|V|)$ für ein $\varepsilon > 0$ approximieren lässt und gaben einen $(1 + (1 + o(1)) \cdot \log(|V|))$ -Approximationsalgorithmus an.

In [90] und [91] haben Hernando et al. die Graphen G mit Durchmesser d und Ordnung $mdim(G) + d$ charakterisiert. Chartrand et al. haben in [39] Charakterisierungen der Graphen mit metrischer Dimension 1, $|V| - 2$ und $|V| - 1$ sowie obere und untere Schranken für die metrische Dimension von Graphen mit genau einem Kreis angegeben. Foucaud et al. bestimmten in [69] untere Schranken für die metrische Dimension von (Unit-)Intervallgraphen und Permutationsgraphen und zeigten in [68] und [70] die NP-Vollständigkeit des Problems METRISCHE DIMENSION für Intervall- und Permutationsgraphen. Auch Hallaway et al. untersuchten in [84] die metrische Dimension von Permutationsgraphen. Weitere NP-Vollständigkeitsbeweise folgten: Díaz et al. zeigten in [47] und [48] die NP-Vollständigkeit des Problems für planare Graphen und gaben einen effizienten Algorithmus für außenplanare Graphen an. Epstein et al. zeigten in [50] die NP-Vollständigkeit für Split-Graphen, co-bipartite Graphen und Line-Graphen von bipartiten Graphen. Außerdem untersuchten sie in derselben Arbeit die gewichtete metrische Dimension und entwickelten Polynomialzeitlösungen für Wege, vollständige Graphen, Kreise, Bäume, Bäume mit k zusätzlichen Kanten, Co-Graphen und Wheels. Mit der metrischen Dimension von Wheels und wheelähnlichen Graphen haben sich auch die Publikationen [85], [175], [178], [183] und [183] beschäftigt. Hoffmann und Wanke zeigten in [94], dass das Problem für Gabriel-Unit-Disc-Graphen NP-vollständig ist. In [93] gaben sie außerdem einen Linearzeitalgorithmus für Cactus-Block-Graphen an. In [1] untersuchten Adar und Epstein die gewichtete metrische Dimension von Gittergraphen und in [3] die metrische Dimension von Mesh-Graphen (Gittergraphen mit zusätzlichen Diagonalkanten). Vietz et al. betrachteten in [191] die Berechnung der metrischen Dimension bei einer Dekomposition in sogenannte EBCs. Fernau et al. bestimmten in [64] die metrische Dimension für Chain-Graphen.

Hartung und Nichterlein beschäftigten sich mit der parametrisierten Komplexität der METRISCHEN DIMENSION. Sie zeigten in [86], dass das Problem parametrisiert nach dem Standardparameter $W[2]$ -schwer ist. Ein weiteres Ergebnis folgte von Eppstein. Er gab in [49] einen parametrisierten Algorithmus an, der die metrische Dimension in einer Laufzeit berechnet, die linear in der Graphgröße und der größten Anzahl an Blättern in einem

Spannbaum für den Graphen ist. Belmonte et al. analysierten Graphen mit beschränkter Baumlänge und gaben in [22] und [23] eine FPT-Lösung an. Foucaud et al. entwickelten eine FPT-Lösung für Intervallgraphen [70]. Bonnet und Purohit zeigten in [28], dass die metrische Dimension parametrisiert nach der Baumweite $W[1]$ -schwer ist. Weitere Parametrisierungen werden in [81] behandelt.

Die metrische Dimension des kartesischen Produkts von Graphen wurde von Cáceres et al. in [34] und von Jiang und Polyanskii in [109] untersucht. Yero et al. betrachteten die metrische Dimension von Coronaproduktgraphen [196]. Die metrische Dimension des lexikographischen Produkts von Graphen wurde von Jannesari und Omoomi in [107] und von Saputro et al. in [171] ermittelt. Simanjuntak beschäftigte sich in [179] und Kuziak und Rodríguez-Velázquez in [132] mit der metrischen Dimension von Graphamalgamationen. Iswadi et al. gaben in [106] die metrische Dimension von Verknüpfungen von Kreisen an.

Die metrische Dimension verallgemeinerter Petersen-Graphen wurde von Javaid et al. in [108] und von Imran et al. in [101] und in [104] bestimmt. Manuel et al. untersuchten in [143] die metrische Dimension von Honeycomb-Netzwerken. Die Ergebnisse wurden von Xu und Fan in [193] und von Shao et al. in [176] und in [177] erweitert. Bača et al. bestimmten in [9] die metrische Dimension $(|V| - 2)$ - und $(|V| - 1)$ -regulärer bipartiter Graphen. Imran et al. untersuchten in [102] und [103] die metrische Dimension konvexer Polytope. Die metrische Dimension von Möbiusleitergraphen wurde von Ali et al. in [5], von Munir et al. in [153] und von Imran et al. in [104] behandelt. Die metrische Dimension von Circulant-Graphen wurde von Imran et al. in [99] und in [100], von Grigorious et al. in [78], von Grigorious et al. in [77] und von Vetrík in [189] untersucht.

Feng und Wang betrachteten in [62] Bilinearform-Graphen und Guo et al. in [80] symmetrische Bilinearform-Graphen. Feng et al. untersuchten in [61] die metrische Dimension von Potenzgraphen endlicher Gruppen. Die metrische Dimension von Zufallsgraphen wurde von Bollobás et al. in [27] behandelt. Cáceres et al. beschäftigten sich in [33] mit der metrischen Dimension nicht-endlicher Graphen.

Die metrische Dimension von Grassmann-Graphen wurde von Bailey et al. in [13] und Guo et al. in [79] betrachtet. Manuel und Rajasingh untersuchten in [144] die metrische Dimension von Silicate-Netzwerken, Eroh et al. in [52] die metrische Dimension von Functigraphen, Imran et al. in [105] die metrische Dimension von Gear-Graphen, Akhter und Farooq in [4] die metrische Dimension von Fullerene-Graphen und Liu et al. in [138] die metrische Dimension von Toeplitz-Graphen.

Die metrische Dimension von orientierten und gerichteten Graphen wurde in [43], [58], [155], [156], [63], [159], [24] betrachtet.

Chartrand et al. definierten die *upper dimension* $\dim^+(G)$ und die *resolving number* $\text{res}(G)$ für einen Graphen G . Die *upper dimension* von G ist die Größe einer größten nicht verkleinerbaren trennenden Menge für G . Die *resolving number* von G ist die kleinste Zahl k , sodass jede k -elementige Teilmenge der Knotenmenge von G eine trennende Menge für G ist. In [42] charakterisierten sie die Graphen mit $\dim^+(G) = \text{res}(G) = |V| - 1$ und $\dim^+(G) = \text{res}(G) = 2$. Garijo et al. erweiterten in [73] diese Ergebnisse und charakterisierten die Graphen mit $\text{mdim}(G) = \text{res}(G)$.

3.2.2 Starke metrische Dimension

Sebö und Tannier untersuchten als Erste in [172] die starke metrische Dimension von Graphen. Sie zeigten, dass die Distanzvektoren der Knoten, die sich aus einer stark trennenden Menge ergeben, die Kantenmenge des Graphen eindeutig bestimmen. Außerdem zeigten sie, dass die starke metrische Dimension von Bäumen der Anzahl ihrer Blätter minus 1 entspricht. Ollermann et al. zeigten in [156] die Äquivalenz zwischen dem Finden einer stark trennenden Menge eines Graphen G und dem Finden eines Vertexcovers in einem sogenannten *strong resolving* Graphen von G , woraus unmittelbar die NP-Vollständigkeit der starken metrischen Dimension folgt. In [145] entwickelten May und Oellermann einen Linearzeitalgorithmus zur Berechnung der starken metrischen Dimension für distanzerhaltende Graphen.

DasGupta und Mobasherhi zeigten in [46], dass sich die starke metrische Dimension mit einem Faktor von 2 approximieren lässt. Moravcik et al. verglichen in [151] die metrische Dimension mit der starken metrischen Dimension und zeigten, dass für die starke metrische Dimension von Bäumen keine obere Schranke in Abhängigkeit von der metrischen Dimension angegeben werden kann, die starke metrische Dimension eines Co-Graphen höchstens dreimal so groß ist wie die metrische Dimension, und gaben einen effizienten Algorithmus zur Bestimmung der starken metrischen Dimension von Splitgraphen an.

Kuziak, Rodríguez-Velázquez und Yero haben die starke metrische Dimension verschiedener Produktgraphen untersucht. In [135] betrachteten sie die starke metrische Dimension von Joingraphen und Koronaproduktgraphen. Sie zeigten, dass die starke metrische Dimension des Koronaprodukts zweier Graphen G und H auf das Finden einer größten Clique in H zurückgeführt werden kann. In [130] untersuchten sie die starke metrische Dimension des starken Produkts von Graphen, in [165] die starke metrische Dimension des kartesischen und des direkten Produkts von Graphen, in [133] die starke metrische Dimension der kartesischen Summe zweier Graphen und in [131] die starke metrische Dimension des lexikographischen Produkts von Graphen.

Imran et al. untersuchten in [98] die metrische Dimension rotationssymmetrischer Graphen. Kratica et al. untersuchten in [127] und Salman et al. in [168] die starke metrische

Dimension konvexer Polytope. Ma et al. untersuchten in [139] die starke metrische Dimension von Potenzgraphen. Manuel et al. untersuchten in [142] die metrische Dimension von Tetrahedral-Diamond-Lattice-Graphen.

3.2.3 Adjazenzdimension

Jannesari und Omoomi führten die Adjazenzdimension in [107] ein und charakterisierten die Graphen mit Adjazenzdimension 1 und $|V| - 1$. Fernau und Rodríguez-Velázquez untersuchten in [66] und [65] die (lokale) Adjazenzdimension. Sie zeigten die NP-Vollständigkeit der Adjazenzdimension für allgemeine Graphen durch eine Reduktion von 1-LOCDOM und die NP-Vollständigkeit der lokalen Adjazenzdimension für allgemeine Graphen durch eine Reduktion von 3-SAT. Außerdem zeigten sie, dass die Adjazenzdimension parametrisiert nach dem Standardparameter FPT ist. Estrada-Moreno et al. betrachteten in [56] die 2-metrische Adjazenzdimension für das lexikographische Produkt von Graphen.

3.2.4 Fehlertolerante und k -metrische Dimension

Hernando et al. führten die fehlertolerante metrische Dimension in [92] ein, untersuchten die fehlertolerante metrische Dimension von Bäumen und gaben Schranken in Abhängigkeit von der metrischen Dimension an. Vietz und Wanke gaben in [192] einen effizienten Algorithmus zur Berechnung der fehlertoleranten metrischen Dimension für Co-Graphen an. Salman et al. charakterisierten in [167] die Graphen, deren fehlertolerante metrische Dimension genau um eins größer ist als deren metrische Dimension. Raza et al. untersuchten in [163] die fehlertolerante metrische Dimension konvexer Polytope.

Estrada-Moreno et al. führten in [195] die k -metrische Dimension ein, zeigten deren NP-Vollständigkeit und gaben einen Linearzeitalgorithmus für die k -metrische Dimension von Bäumen an. Adar und Epstein bestimmten in [2] die (gewichtete) k -metrische Dimension von Wegen, vollständigen Graphen, vollständig bipartiten Graphen und vollständiger Wheels. Estrada-Moreno et al. untersuchten in [55] die k -metrische Dimension des lexikographischen Produkts von Graphen. Beardon und Rodríguez-Velázquez betrachteten in [18] die k -metrische Dimension allgemeiner metrischer Räume.

3.2.5 Lokale metrische Dimension

Okamoto et al. führten in [157] die lokale metrische Dimension ein, gaben Schranken für diese an und charakterisierten die Graphen mit lokaler metrischer Dimension 1, $n - 1$

und n . Fernau und Rodríguez-Velázquez zeigten in [65] die NP-Vollständigkeit der lokalen metrischen Dimension für allgemeine Graphen.

Rodríguez-Velázquez et al. untersuchten in [164] und Barragán-Ramírez et al. in [17], wie sich die lokale metrische Dimension von Graphen über die lokale metrische Dimension gewisser Teilgraphen bestimmen lässt. Salman et al. untersuchten in [168] die lokale metrische Dimension konvexer Polytope.

Barragán-Ramírez et al. untersuchten in [15] die lokale metrische Dimension von Coronaproduktgraphen. Barragán-Ramírez et al. untersuchten in [16] die lokale metrische Dimension des starken Produkts von Graphen. Klavzar und Tavakoli untersuchten in [124] die lokale metrische Dimension des hierarchischen Produkts von Graphen.

Weitere interessante Varianten und Ergebnisse werden unter anderem in [40], [30], [44], [187], [38], [29], [126], [32], [188], [149], [150], [7], [8], [60], [160], [74], [158], [147], [148], [10], [197], [136], [161], [194], [162], [115], [14], [169], [190], [174], [21], [137], [53], [120], [97], [19], [114], [83], [119], [11], [121], [116], [59], [198], [170], [117], [118], [129], [185], [154], [25], [184], [96], [12] diskutiert.

Einen schönen Überblick über Ergebnisse zur metrischen Dimension geben die Arbeiten [166], [89] und [128].

Für das Problem METRISCHE DIMENSION wurden in der Literatur eine Vielzahl von verschiedenen Anwendungsgebieten diskutiert. Estrada-Moreno hat in [152] einen sehr umfangreichen Überblick über diese gegeben, die wir hier übernehmen wollen. Es gibt Anwendungen für die metrische Dimension für das Routen in Netzwerken [37], [67], in der Roboternavigation ([122], [123], [140], [141], [175]), in der Chemie ([39], [42], [111], [110], [125]), in der Mustererkennung und Bildverarbeitung ([146]), in Multiprocessor-interconnection Netzwerken ([143]), in der Netzwerkerkennung ([20]), im Mastermind Game ([34], [45], [75], [76], [113]) und im Coin-Weighing-Problem ([6], [31], [34], [35], [36], [71], [82], [172]).

4 Berechnung der metrischen Dimension mit einer EBC-Zerlegung

In diesem Kapitel wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem die metrische Dimension eines Graphen G basierend auf einer baumstrukturierten Zerlegung in *Brücken*, *Legs* und *erweiterte zweifache Zusammenhangskomponenten* (EBCs) berechnet werden kann. Teile hiervon wurden bereits in [191] veröffentlicht.

4.1 Definitionen

Definition 4.1.1. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender ungerichteter Graph.

1. **Leg, Wurzel, Blatt, Hooked-Leg, Ordinary-Leg** Ein Weg $p = (v_1, \dots, v_k)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, in G ist ein Leg, wenn der Knoten v_1 den Grad 1 hat, die Knoten v_2, \dots, v_{k-1} den Grad 2 haben und der Knoten v_k den Grad 3 hat. Der Knoten v_k ist die Wurzel und der Knoten v_1 das Blatt von p . Ein Leg ist ein Hooked-Leg, wenn durch das Entfernen der Wurzel der Graph G in genau zwei zusammenhängende Komponenten zerfällt. Ein Leg ist ein Ordinary-Leg, wenn es kein Hooked-Leg ist.
2. **Brücke** Eine Kante $e \in E$ ist eine Brücke, wenn $H = (V, E \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend und e keine Kante zwischen zwei Knoten ein und desselben Legs ist.
3. **Erweiterte zweifache Zusammenhangskomponente (EBC)** Eine zweifache Zusammenhangskomponente $H = (V_H, E_H)$ von G erweitert um die Teilgraphen von G , die durch die Hooked-Legs mit Wurzel in V_H induziert werden, ist eine erweiterte zweifache Zusammenhangskomponente (EBC) von G .
4. **Komponente** Jede Brücke, jede EBC und jeder durch ein Ordinary-Leg induzierte Teilgraph ist eine Komponente von G .
5. **Amalgamationsknoten** Separationsknoten von G , die zu mindestens zwei Komponenten gehören, heißen Amalgamationsknoten. Das sind alle Separationsknoten in G , bis auf die Knoten vom Grad zwei der Legs und die Wurzeln der Hooked-Legs.

Abbildung 4.1 veranschaulicht diese Definitionen.

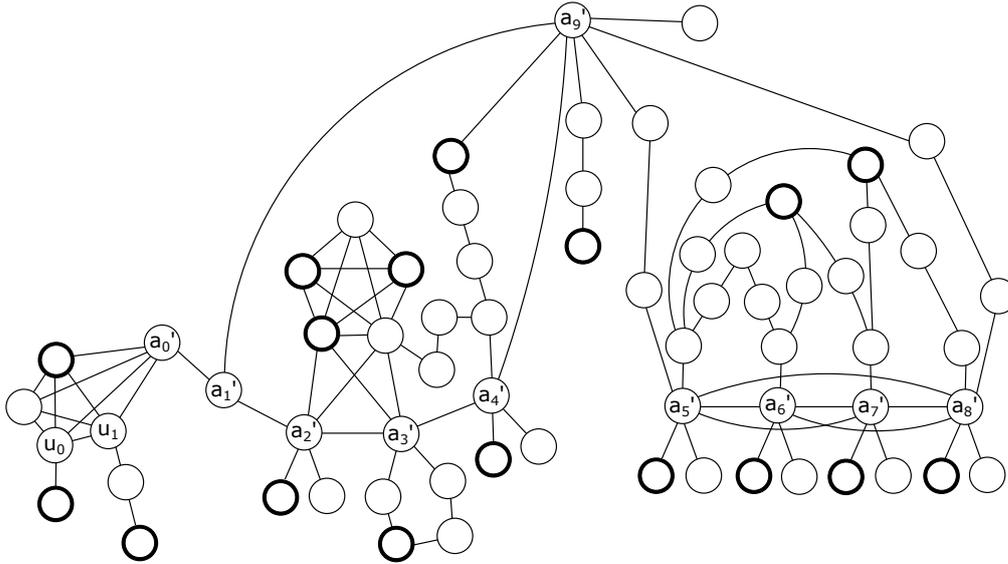


Abb. 4.1: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit zehn Amalgamationsknoten (a'_0, \dots, a'_9), zwei Hooked-Legs (mit Wurzeln u_0 und u_1), 14 Ordinary-Legs (je zwei Legs an den Wurzeln $a'_2, a'_4, a'_5, a'_6, a'_7, a'_8$ und a'_9), einer Brücke ($\{a'_0, a'_1\}$), vier EBCs und 19 Komponenten. Die Menge der fett umrandeten Knoten ist eine kleinste trennende Menge für G . Abbildung 4.2 zeigt einen DEBC-Baum von G .

Jeder ungerichtete Graph G kann in Ordinary-Legs, Brücken und EBCs zerlegt werden. Diese Zerlegung ist eine kantendisjunkte, eindeutige Partitionierung von G .

Definition 4.1.2 (EBC-Baum). Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender ungerichteter Graph. Der EBC-Baum $T = (V_T, E_T)$ von G ist ein Baum mit zwei verschiedenen Knotentypen, den Komponentenknoten und den Verbindungsknoten. T hat einen Komponentenknoten $c \in V_T$ für jede Komponente von G . Mit $[c] \subseteq V$ wird die Knotenmenge der Komponente von G bezeichnet, die durch den Komponentenknoten c repräsentiert wird. T hat einen Verbindungsknoten $a \in V_T$ für jeden Amalgamationsknoten von G . Mit $[a] \subseteq V$ wird der Amalgamationsknoten bezeichnet, der durch a repräsentiert wird. Sei $C \subseteq V_T$ die Menge der Komponentenknoten von T und $A \subseteq V_T$ die Menge der Verbindungsknoten von T . Die Kantenmenge E_T enthält alle Kanten $\{a, c\}$ mit $[a] \subseteq [c]$, $a \in A$, $c \in C$.

In einem EBC-Baum T von G existieren keine Kanten zwischen zwei Komponentenknoten und keine Kanten zwischen zwei Verbindungsknoten. Die Blätter von T sind Komponentenknoten. Die Ordinary-Legs von G sind Blätter von T , die Brücken von G sind innere Knoten von T und die EBCs von G sind Blätter oder innere Knoten von T .

Definition 4.1.3 (DEBC-Baum). Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender ungerichteter Graph.

1. Sei $T = (V_T, E_T)$ der EBC-Baum von G und $r \in V_T$. Der gerichtete EBC-Baum

(DEBC-Baum) $\vec{T} := (V_T, \vec{E}_T)$ von G mit Wurzel r entsteht aus T , indem alle Kanten zur Wurzel r gerichtet werden. Das bedeutet, dass \vec{E}_T eine gerichtete Kante für jede ungerichtete Kante von E_T so enthält, dass für jeden Knoten $u \in V_T$ ein gerichteter Weg zur Wurzel r existiert.

2. Für einen Knoten $u \in V_T$ sei \vec{T}_u der Teilbaum von \vec{T} mit Wurzel u . Das bedeutet, dass \vec{T}_u von den Knoten $v \in V_T$ induziert wird, deren gerichteter Weg zu r den Knoten u enthält.
3. Für einen Teilbaum \vec{T}_u von \vec{T} sei $C_u \subseteq V_T$ die Menge der Komponentenknoten in \vec{T}_u und $[C_u] = \bigcup_{c \in C_u} [c] \subseteq V$ die Vereinigung der Knotenmengen der Komponenten aus G , die durch die Komponentenknoten $c \in C_u$ repräsentiert werden. Mit G_u bezeichnen wir den Teilgraphen von G , der durch die Knotenmengen $[C_u]$ induziert wird.

Abbildung 4.2 veranschaulicht diese Definitionen.

G_u ist der Teilgraph von G , der durch \vec{T}_u repräsentiert wird. Es genügt, den Graphen G_u über die Komponentenknoten in \vec{T}_u zu definieren, denn die Amalgamationsknoten in G , die durch einen Verbindungsknoten in \vec{T}_u repräsentiert werden, werden auch von einem Komponentenknoten in \vec{T}_u repräsentiert.

Für einen Graphen G kann der EBC-Baum und der DEBC-Baum mit Wurzel r in linearer Zeit konstruiert werden. Hierfür eignet sich jeder Linearzeitalgorithmus zur Bestimmung der zweifachen Zusammenhangskomponenten und Brücken eines Graphen.

4.2 Gate-Knoten und Gate-trennende Mengen

Im Folgenden nehmen wir an, dass

1. $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender, aber nicht 2-fach zusammenhängender Graph ist,
2. $\vec{T} = (V_T, \vec{E}_T)$ der DEBC-Baum von G mit Wurzel r ist,
3. C die Menge der Komponentenknoten von \vec{T} und A die Menge der Verbindungsknoten von \vec{T} ist,
4. $r \in A$ ein Verbindungsknoten ist.

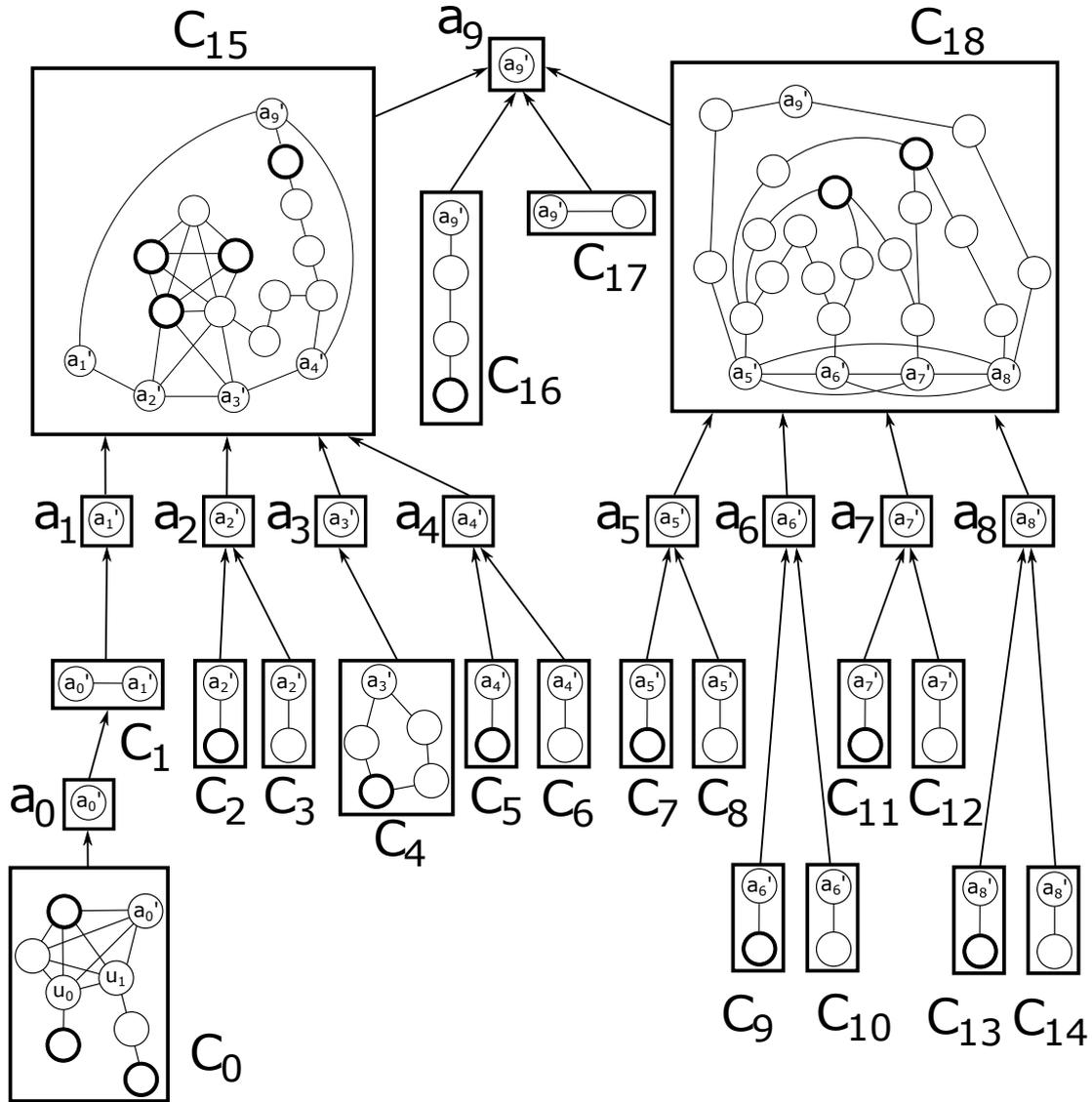


Abb. 4.2: Ein DEBC-Baum $\vec{T} = (V_T, \vec{E}_T)$ für den Graphen $G = (V, E)$ aus Abbildung 4.1 mit 19 Komponentenknoten c_1, \dots, c_{19} und 10 Verbindungsknoten a'_0, \dots, a'_9 . Die Wurzel von \vec{T} ist der Verbindungsknoten a_9 mit $[a_9] = a'_9 \in V$. Die Komponentenknoten c_i enthalten die Knoten aus $[c_i] \subseteq V$, $0 \leq i \leq 18$. Der Anschaulichkeit halber ist hier der Teilgraph von G , der von der Menge $[c_i]$ induziert wird, eingezeichnet. Die Verbindungsknoten a_j enthalten die Amalgamationsknoten $[a_j] = a'_j \in V$, $1 \leq j \leq 10$.

Zunächst wird die Grundidee des Algorithmus beschrieben, der mithilfe einer Dekomposition in Brücken, Legs und EBCs die metrische Dimension eines Graphen G bestimmt. Der Algorithmus basiert auf einer dynamischen Programmierung entlang eines DEBC-Baumes. Für jeden Teilgraphen \vec{T}_u , $u \in V_T$, von \vec{T} wird ein Wert $h(u)$ berechnet, der die folgenden Eigenschaften erfüllt.

Eigenschaften 4.2.1.

1. Für jeden Verbindungsknoten $a \in A$ mit Nachfolgern $c_1, \dots, c_k \in C$, $k \geq 1$, kann der Wert $h(a)$ aus den Werten $h(c_1), \dots, h(c_k)$ berechnet werden.
2. Für jeden Komponentenknoten $c \in C$ mit Nachfolgern $a_1, \dots, a_k \in A$, $k \geq 0$, kann der Wert $h(c)$ aus den Werten $h(a_1), \dots, h(a_k)$ und $G|_{[c]}$ berechnet werden.
3. Die metrische Dimension von $G[r]$ kann aus $h(r)$ berechnet werden.

Mithilfe dieser Eigenschaften lässt sich eine bottom-up Bearbeitung von \vec{T} wie folgt durchführen: Zuerst berechnen wir den Wert $h(c)$ für jedes Blatt c von \vec{T} . Da alle Blätter Komponentenknoten ohne Nachfolger sind, wird zur Berechnung von $h(c)$ nur der Teilgraph $G|_{[c]}$ benötigt. Für jeden inneren Verbindungsknoten a mit Nachfolgern $c_1, \dots, c_k \in C$ berechnen wir $h(a)$ aus $h(c_1), \dots, h(c_k)$. Dafür werden keine Informationen aus dem Graphen G benötigt. Für jeden inneren Komponentenknoten C mit Nachfolgern $a_1, \dots, a_k \in A$ berechnen wir $h(c)$ aus $h(a_1), \dots, h(a_k)$ und $G|_{[c]}$. Zum Schluss berechnen wir die metrische Dimension von G aus $h(r)$.

Definition 4.2.2 (Gate-Knoten, Out-Knoten). Sei $R \subseteq V$ eine Teilmenge der Knotenmenge von G . Ein Knoten $v \in V$ ist ein R -Gate in G , falls es einen Knoten $u \in V \setminus \{v\}$ gibt, sodass für alle $r \in R$ die Gleichung $d_G(u, r) = d_G(u, v) + d_G(v, r)$ gilt. Den Knoten u nennen wir einen Out-Knoten für das R -Gate v .

Intuitiv bedeutet diese Definition, dass v ein R -Gate ist, falls es einen Knoten $u \in V \setminus \{v\}$ gibt, sodass u einen kürzesten Weg zu jedem $r \in R$ besitzt, der den Knoten v enthält. Abbildung 4.3 zeigt ein Beispiel.

Beobachtung 4.2.3. Sei $R \subseteq V$, sei $v \in V$ ein R -Gate in G und seien $u_1, u_2 \in V$ zwei Out-Knoten für v . Ist $d_G(u_1, v) = d_G(u_2, v)$, dann ist R keine trennende Menge für G , denn beide Knoten u_1 und u_2 haben die gleiche Distanz zu v und somit zu allen Knoten aus R . Das bedeutet, wenn R eine trennende Menge für G ist, dann haben alle Out-Knoten paarweise unterschiedliche Distanzen zu v . Genauer: Ist R eine trennende Menge für G , dann liegen alle Out-Knoten für v auf einem kürzesten Weg zwischen v und dem Out-Knoten mit längster Distanz zu v .

Beobachtung 4.2.4. Sei $R \subseteq V$ und $v \in V$ ein R -Gate in G . Dann gibt es einen Out-Knoten $u \in V$ für v , der mit v benachbart ist.

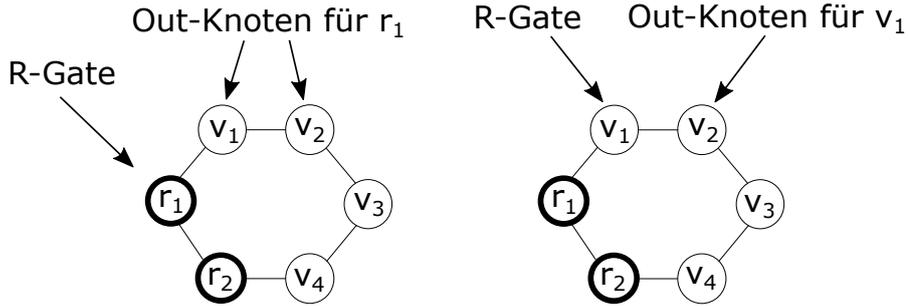


Abb. 4.3: Die Abbildung zeigt zweimal den Graphen $C_6 = (V, E)$ mit der Menge $R = \{r_1, r_2\} \subseteq V$. Der Knoten r_1 ist ein R -Gate in G . Die Out-Knoten für r_1 sind v_1 und v_2 (linke Abbildung). Der Knoten v_1 ist ebenfalls ein R -Gate. Der Out-Knoten für v_1 ist v_2 (rechte Abbildung). Es gibt keinen weiteren Knoten in dem Graphen C_6 , der ein R -Gate ist.

Definition 4.2.5 (v -trennende Menge, non-Gate- v -trennende Menge). Sei $v \in V$.

1. Eine v -trennende Menge für G ist eine trennende Menge R für G , sodass $v \in R$ ist.
2. Eine kleinste v -trennende Menge für G ist eine v -trennende Menge R , sodass es keine v -trennende Menge R' für G gibt mit $|R'| < |R|$.
3. Eine non-Gate- v -trennende Menge für G ist eine v -trennende Menge R für G , sodass v kein R -Gate in G ist.
4. Eine kleinste non-Gate- v -trennende Menge für G ist eine non-Gate- v -trennende Menge R für G , sodass es keine non-Gate- v -trennende Menge R' für G gibt mit $|R'| < |R|$.

Zu beachten ist, dass eine kleinste v -trennende Menge nicht zwangsläufig eine kleinste trennende Menge ist, denn möglicherweise gibt es keine kleinste trennende Menge, die den Knoten v enthält. Ebenso ist eine kleinste non-Gate- v -trennende Menge nicht zwangsläufig eine kleinste v -trennende Menge, denn möglicherweise ist v in jeder kleinsten v -trennenden Menge R ein R -Gate.

Lemma 4.2.6. Sei $v \in V$, $R_1 \subseteq V$ eine kleinste trennende Menge für G , $R_2 \subseteq V$ eine kleinste v -trennende Menge für G und $R_3 \subseteq V$ eine kleinste non-Gate- v -trennende Menge für G . Es gilt $|R_2| \leq |R_1| + 1$ und $|R_3| \leq |R_2| + 1$.

Beweis Wir zeigen, dass $|R_2| \leq |R_1| + 1$ ist. Ist $v \in R_1$, dann ist R_1 eine kleinste v -trennende Menge für G . Gibt es keine kleinste trennende Menge R_1 für G , sodass $v \in R_1$, dann ist $R_1 \cup \{v\}$ eine kleinste v -trennende Menge.

Wir zeigen, dass $|R_3| \leq |R_2| + 1$ ist. Ist v kein R_2 -Gate in G , dann ist R_2 eine kleinste non-Gate- v -trennende Menge für G . Ist v ein R_2 -Gate in G , dann liegen nach Beobachtung

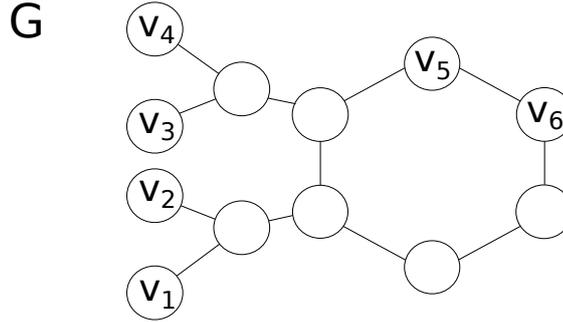


Abb. 4.4: Die Abbildung zeigt den Graphen G . Es gibt vier paarweise verschiedene kleinste trennende Mengen für G , und zwar $\{v_1, v_3\}$, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_2, v_3\}$ und $\{v_2, v_4\}$. Keine dieser Mengen enthält den Knoten v_5 . Daher enthält jede kleinste v_5 -trennende Menge drei Knoten, das sind $\{v_1, v_3, v_5\}$, $\{v_1, v_4, v_5\}$, $\{v_2, v_3, v_5\}$, und $\{v_2, v_4, v_5\}$. In jeder kleinsten v_5 -trennenden Menge R ist Knoten v_5 ein R -Gate. Der Out-Knoten für v_5 ist v_6 . Daher enthält jede kleinste non-Gate- v_5 -trennende Menge vier Knoten, das sind $\{v_1, v_3, v_5, v_6\}$, $\{v_1, v_4, v_5, v_6\}$, $\{v_2, v_3, v_5, v_6\}$, und $\{v_2, v_4, v_5, v_6\}$.

4.2.3 die Out-Knoten u_1, \dots, u_k , $k \geq 1$, für v auf einem kürzesten Weg zwischen v und dem Out-Knoten mit größter Distanz zu v . Daher ist die Menge $R_2 \cup \{u_i\}$ für ein beliebiges $i \in \{1, \dots, k\}$ eine non-Gate- v -trennende Menge für G . \square

Abbildung 4.4 zeigt, dass die oben genannten Schranken scharf sind.

Lemma 4.2.7. Sei $s \in V$ ein Separationsknoten in G und seien V_1, \dots, V_k , $k \geq 2$, die Knotenmengen der Zusammenhangskomponenten von $G|_{V \setminus \{s\}}$. Sei R eine trennende Menge für G . Dann gibt es höchstens ein $i \in \{1, \dots, k\}$, sodass $V_i \cap R = \emptyset$.

Beweis Angenommen es gibt zwei Mengen V_1, V_2 , sodass $V_1 \cap R = \emptyset$ und $V_2 \cap R = \emptyset$. Seien $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ zwei zu s benachbarte Knoten. Für jedes $r \in R$ gilt $d(v_1, r) = d_G(v_1, s) + d_G(s, r) = d_G(v_2, s) + d_G(s, r) = d_G(v_2, r)$. Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass R eine trennende Menge für G ist. \square

Lemma 4.2.8. Sei $s \in V$ ein Separationsknoten in G und seien V_1, \dots, V_k , $k \geq 2$, die Knotenmengen der Zusammenhangskomponenten von $G|_{V \setminus \{s\}}$. Für $k = 2$ sei $V_1 \cap R' \neq \emptyset$ und $V_2 \cap R' \neq \emptyset$ für jede trennende Menge R' für G . Sei $R \subseteq V$ mit $s \in R$. Ist R eine trennende Menge für G , so ist auch $R \setminus \{s\}$ eine trennende Menge für G .

Beweis Wir zeigen, dass zwei Knoten $u, v \in V$, die von s getrennt werden, auch von einem Knoten $r \in R \setminus \{s\}$ getrennt werden.

1. Seien $u, v \in V_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Dann gibt es laut Voraussetzung und Lemma 4.2.7 einen Ankerknoten $r \in R \cap V_j$, $j \neq i$. Da jeder Weg von u bzw. v nach r den Separationsknoten s enthält und s das Knotenpaar u, v trennt, trennt auch r das Knotenpaar u, v .

2. Sei $v_i \in V_i$ und $v_j \in V_j$, $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$. O.B.d.A. sei $d_G(u, s) < d_G(v, s)$.
Ist $V_i \cap R \neq \emptyset$, dann trennt jeder Knoten $r \in V_i \cap R$ das Knotenpaar u, v , denn

$$d_G(u, r) \leq d_G(u, s) + d_G(s, r) < d_G(v, s) + d_G(s, r) = d_G(v, r).$$

Ist $V_i \cap R = \emptyset$, dann hat $G|_{V \setminus \{s\}}$ laut Voraussetzung mindestens drei Zusammenhangskomponenten. Nach Lemma 4.2.7 gibt es höchstens eine Zusammenhangskomponente, in der sich kein Ankerknoten befindet. Das bedeutet, es gibt eine Zusammenhangskomponente V_l , $l \in \{1, \dots, k\}$, $l \neq i$, $l \neq j$, sodass $V_l \cap R \neq \emptyset$. Jeder Knoten $r \in V_l \cap R$ trennt das Knotenpaar u, v , denn

$$d_G(u, r) = d_G(u, s) + d_G(s, r) < d_G(v, s) + d_G(s, r) = d_G(v, r). \quad \square$$

Lemma 4.2.9. *Sei $s \in V$ ein Separationsknoten in G und seien V_1, \dots, V_k , $k \geq 2$, die Knotenmengen der Zusammenhangskomponenten von $G|_{V \setminus \{s\}}$. Für $k = 2$ sei $V_1 \cap R' \neq \emptyset$ und $V_2 \cap R' \neq \emptyset$ für jede trennende Menge R' für G . Sei $G_i := G|_{V_i \cup \{s\}}$.*

Sind die Mengen $R_i \subseteq V_i$ kleinste non-Gate- s -trennende Mengen für G_i , so ist $R = \bigcup_i R_i$ eine kleinste non-Gate- s -trennende Menge für G , $\forall i \in \{1, \dots, k\}$.

Beweis Seien R_i kleinste non-Gate- s -trennende Mengen für G_i , $i \in \{1, \dots, k\}$. Wir zeigen zunächst, dass $R = \bigcup_i R_i$ eine trennende Menge für G ist. Sei $u_i \in V_i$ und $u_j \in V_j$, $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Ist $i = j$, dann wird das Knotenpaar u_i, u_j offensichtlich von einem Knoten $r \in R_i \subset R$ getrennt. Sei daher $i \neq j$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. $d_G(u_i, s) \neq d_G(u_j, s)$: Dann trennt der Knoten $s \in R_i \subset R$ das Knotenpaar u_i, u_j .
2. $d_G(u_i, s) = d_G(u_j, s)$: Da R_i eine non-Gate- s -trennende Menge für G_i ist, gibt es einen Knoten $r \in R_i \subset R$, sodass $d_G(u_i, r) < d_G(u_i, s) + d_G(s, r) = d_G(u_j, r)$.

Es folgt, dass R eine s -trennende Menge für G ist.

Wir zeigen, dass s kein R -Gate ist. Angenommen, s wäre ein R -Gate. Dann gibt es einen Out-Knoten $u \in V_i \subset V$, sodass $\forall r \in R : d_G(u, r) = d_G(u, s) + d_G(s, r)$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Dann wäre s aber ein R_i -Gate in G_i , was ein Widerspruch zur Annahme ist. Es folgt, dass R eine non-Gate- s -trennende Menge für G ist.

Wir zeigen, dass R minimal ist. Angenommen es gäbe eine kleinere non-Gate- s -trennende Menge R' für G . Dann gäbe es ein $i \in \{1, \dots, k\}$, sodass $R'_i = R' \cap V_i \cup \{s\}$ eine s -trennende Menge für G_i ist und $|R'_i| < |R_i|$. Der Knoten s ist ein R'_i -Gate in G_i , da s kein R -Gate in G ist. Dann ist R'_i aber eine non-Gate- s -trennende Menge für G_i und $|R'_i| < |R_i|$, was ein Widerspruch zu der Minimalität von R_i ist. \square

Lemma 4.2.10. *Sei $s \in V$ ein Separationsknoten in G und seien V_1, \dots, V_k , $k \geq 2$, die Knotenmengen der Zusammenhangskomponenten von $G|_{V \setminus \{s\}}$. Für $k = 2$ sei $V_1 \cap R' \neq \emptyset$ und $V_2 \cap R' \neq \emptyset$ für jede trennende Menge R' für G . Sei $G_i := G|_{V_i \cup \{s\}}$. Sei G_1 ein Graph, für den es eine s -trennende Menge gibt, die keine non-Gate- s -trennende Menge ist.*

Ist die Menge $R_1 \subseteq V_1$ eine kleinste s -trennende Menge für G_1 und sind die Mengen $R_j \subseteq V_j$ kleinste non-Gate- s -trennende Mengen für G_j , $\forall j \in \{2, \dots, k\}$, so ist

1. $R = \bigcup_j R_j \cup R_1$ eine kleinste s -trennende Menge für G und
2. $R \setminus \{s\}$ eine kleinste trennende Menge für G .

Beweis

zu 1. Sei R_1 eine kleinste s -trennende Menge für G_1 und seien $R_j \subseteq V_j$ kleinste non-Gate- s -trennende Mengen für G_j , $\forall j \in \{2, \dots, k\}$. Wir zeigen, dass $R = \bigcup_j R_j \cup R_1$ eine kleinste s -trennende Menge für G ist. Wir zeigen zunächst, dass R eine trennende Menge für G ist. Sei $u_i \in V_i$ und $u_j \in V_j$, $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Ist $i = j$, dann wird das Knotenpaar u_i, u_j offensichtlich von einem Knoten $r \in R_i \subset R$ getrennt. Sei daher $i \neq j$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

- a) $d_G(u_i, s) \neq d_G(u_j, s)$: Dann trennt der Knoten $s \in R_i \subset R$ das Knotenpaar u_i, u_j .
- b) $d_G(u_i, s) = d_G(u_j, s)$: O.B.d.A. sei R_i eine non-Gate- s -trennende Menge für G_i . Dann gibt es einen Knoten $r \in R_i \subset R$, sodass $d_G(u_i, r) < d_G(u_i, s) + d_G(s, r) = d_G(u_j, r)$.

Es folgt, dass R eine s -trennende Menge für G ist.

Wir zeigen, dass R minimal ist. Angenommen es gäbe eine kleinere s -trennende Menge R' für G . Dann gäbe es ein $i \in \{1, \dots, k\}$, sodass $R'_i = R' \cap V_i \cup \{s\}$ eine s -trennende Menge für G_i ist und $|R'_i| < |R_i|$. Aus $i = 1$ folgt ein Widerspruch zur Minimalität von R_1 . Sei also $i \geq 2$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- a) s ist ein R'_i -Gate in G_i : Ist s ein R'_i -Gate in G_i , dann gibt es nach Beobachtung 4.2.4 einen Out-Knoten $u_i \in V_i$ für s , der mit s benachbart ist. Da R_1 keine non-Gate- s -trennende Menge für G_i ist, ist s auch ein R_1 -Gate in G_1 . Sei u_1 der Out-Knoten, der mit s benachbart ist. Dann gilt aber $d_G(u_1, r) = d_G(u_1, s) + d_G(s, r) = d_G(u_i, s) + d_G(s, r) = d_G(u_i, r)$, $\forall r \in R$, was ein Widerspruch zur Trennungseigenschaft von R ist. Der Knoten s ist ein R'_i -Gate in G_i , da s kein R -Gate in G ist. Dann ist R'_i aber eine non-Gate- s -trennende Menge für G_i und $|R'_i| < |R_i|$, was ein Widerspruch zu der Minimalität von R_i ist.

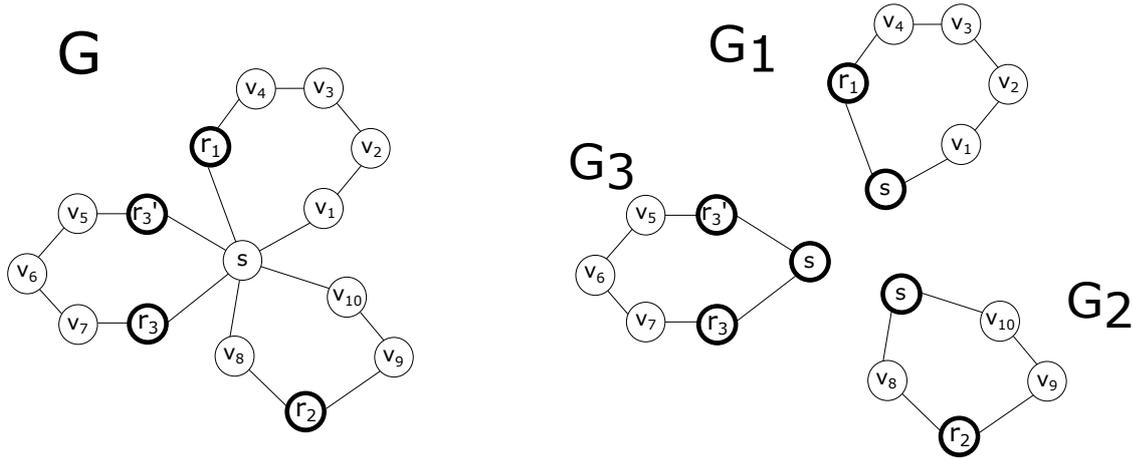


Abb. 4.5: Die Abbildung zeigt den Graphen $G = (V, E)$ mit dem Separationsknoten $s \in V$ (links) und die Graphen G_1, G_2, G_3 (rechts). Für den Graphen G_1 gibt es eine s -trennende Menge, die keine non-Gate- s -trennende Menge für G_1 ist. Die Menge $R_1 = \{r_1, s\}$ ist eine kleinste s -trennende Menge für G_1 , die Mengen $R_2 = \{r_2, s\}$ und $R_3 = \{r_3, r'_3, s\}$ sind kleinste non-Gate- s -trennende Mengen für G_2 bzw. G_3 . Die Menge $R := \bigcup_{i=1}^3 R_i$ ist eine kleinste s -trennende Menge für G und die Menge $R \setminus \{s\}$ ist eine kleinste trennende Menge für G .

- b) s ist kein R'_i -Gate in G_i : Dann ist R'_i eine non-Gate- s -trennende Menge für G_i und es gilt $|R'_i| < |R_i|$, was ein Widerspruch zur Minimalität von R_i ist.

zu 2. Da R eine trennende Menge für G ist, folgt aus Lemma 4.2.8, dass auch $R \setminus \{s\}$ eine trennende Menge ist. Die Minimalität von $R \setminus \{s\}$ folgt aus der Minimalität von R . Angenommen es gäbe eine kleinere trennende Menge R' für G . Dann ist $R' \cup \{s\}$ eine kleinere s -trennende Menge für G , was ein Widerspruch zur Minimalität von R ist. \square

Bei der Existenz mehrerer Teilgraphen G_i von G , für die es eine s -trennende Menge gibt, die keine non-Gate- s -trennende Menge ist, ist die Wahl des Graphen G_1 beliebig, da nach Lemma 4.2.6 die Differenz zwischen einer s -trennenden und einer non-Gate- s -trennenden Menge höchstens eins beträgt. Abbildung 4.5 verdeutlicht Lemma 4.2.10 anhand eines Beispiels.

4.3 Berechnung des h -Wertes entlang des DEBC-Baumes

Nun definieren wir $h(v), v \in V_T$.

Definition 4.3.1.

1. Für einen Verbindungsknoten $a \in A$ sei $h(a) := (\alpha, \beta)$, wobei α die Größe einer kleinsten non-Gate- $[a]$ -trennenden Menge für G_a und β die Größe einer kleinsten $[a]$ -trennenden Menge für G_a ist.

2. Für einen Komponentenknoten $c \in C$ mit Vorgänger $a \in A$ sei $h(c) := (\alpha, \beta)$, wobei α die Größe einer kleinsten non-Gate- $[a]$ -trennenden Menge für G_c und β die Größe einer kleinsten $[a]$ -trennenden Menge für G_c ist.

Um uns mit diesen Definitionen vertraut zu machen, untersuchen wir die kleinstmöglichen Werte für α und β . Für einen beliebigen Knoten $v \in \vec{T}$ mit Vorgänger $w \in \vec{T}$ gilt $h(v) \leq h(w)$ (komponentenweise), da G_v ein Teilgraph von G_w ist. Daher untersuchen wir zunächst die Blätter von \vec{T} , die per Definition Komponentenknoten sind, und anschließend die Vorgänger der Blätter, die per Definition Verbindungsknoten sind.

Für ein Blatt $c \in C$ mit Vorgänger $a \in A$ ist der Graph G_c entweder eine EBC oder ein Ordinary-Leg. Ist G_c ein Ordinary-Leg, dann trennt der Knoten $[a] \in G_c$ alle Knotenpaare in G_c . Daher ist $\beta = 1$. Da $[a]$ ein $\{[a]\}$ -Gate in G_c ist, enthält jede kleinste non-Gate- $[a]$ -trennende Menge einen weiteren Knoten aus G_c . Daher ist $\alpha = 2$. Ist G_c eine EBC, dann enthält jede trennende Menge für G_c mindestens zwei Knoten. Daher ist der kleinstmögliche Wert $h(c) = (2, 2)$.

Für einen Verbindungsknoten $a \in A$, dessen Nachfolger Blätter sind, enthält der Graph G_a EBCs und Legs, die an $[a]$ zusammenhängen. Hat a genau einen Nachfolger $c \in C$, dann ist G_c , aufgrund der Dekomposition in EBCs, Ordinary-Legs und Brücken kein Ordinary-Leg. Somit enthält jede kleinste $[a]$ -trennende Menge für G_a mindestens zwei Knoten. Die kleinsten Werte α, β für einen Verbindungsknoten $a \in A$ sind $h(a) = (2, 2)$.

Beobachtung 4.3.2. Sei R eine kleinste trennende Menge für G . Für jeden Verbindungsknoten $a \in A$ enthält der Teilgraph G_a mindestens einen Ankerknoten $r \in R$, sodass $r \neq [a]$.

Wir zeigen, dass die Definition des h -Wertes die Eigenschaften aus 4.2.1 erfüllt.

Theorem 4.3.3. Für jeden Verbindungsknoten $a \in A$ mit Nachfolgern $c_1, \dots, c_k \in C$, $k \geq 1$, kann $h(a)$ aus $h(c_1), \dots, h(c_k)$ berechnet werden.

Beweis

$k = 1$: Hat $a \in A$ genau einen Nachfolger $c_1 \in C$, dann ist $h(a) = h(c_1)$. Da $[a] \in [c_1]$ und c_1 der einzige Nachfolger von a ist, gilt $G_a = G_{c_1}$. Daher ist eine kleinste non-Gate- $[a]$ -trennende Menge für G_{c_1} auch eine kleinste non-Gate- $[a]$ -trennende Menge für G_a . Das gleiche gilt für eine kleinste $[a]$ -trennende Menge.

$k \geq 2$: Sei $h(c_i) = (\alpha_i, \beta_i)$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Dann ist $h(a) = (\alpha, \beta)$, wobei

- $\alpha = (\sum_{i=1}^k \alpha_i) - (k - 1)$

$$\bullet \beta = \begin{cases} \alpha, & \text{falls } \beta_i = \alpha_i \ \forall i \\ \alpha - 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei R_i^{gate} eine kleinste $[a]$ -trennende Menge für G_{c_i} mit $|R_i^{gate}| = \beta_i$ und R_i^{ngate} eine kleinste non-Gate- $[a]$ -trennende Menge für G_{c_i} mit $|R_i^{ngate}| = \alpha_i$. Dann folgt aus Lemma 4.2.9, dass $R^{ngate} := \bigcup_{j=1}^k R_j^{ngate}$ eine kleinste non-Gate- $[a]$ -trennende Menge für G_a ist und aus Lemma 4.2.10, dass $R^{gate} = \bigcup_{j=2}^k R_j^{ngate} \cup R_1^{gate}$ eine kleinste $[a]$ -trennende Menge für G_a ist.

Da $[a] \in R_i$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$, ist $|R^{ngate}| = \alpha = \sum_i \alpha_i - (k - 1)$. Nach Lemma 4.2.6 gilt die Ungleichung $|R^{ngate}| \leq |R^{gate}| + 1$. Daher ist $\beta = \alpha - 1$, falls es ein $i \in \{1, \dots, k\}$ gibt, sodass $\beta_i < \alpha_i$ ist und $\beta = \alpha$ sonst. \square

Theorem 4.3.4. *Für jeden Komponentenknoten $c \in C$ mit Vorgänger $a \in A$ und Nachfolgern $a_1, \dots, a_k \in A$, $k \geq 0$, kann $h(c)$ aus $h(a_1), \dots, h(a_k)$ und $G|_{[c]}$ berechnet werden.*

Für den Beweis benötigen wir die folgenden Lemmata.

Lemma 4.3.5. *Sei $c \in C$ ein Komponentenknoten mit Vorgänger $a \in A$ und Nachfolgern $a_1, \dots, a_k \in A$, $k \geq 0$. Ist*

1. $R_i \subseteq V(G_{a_i})$ eine kleinste $[a_i]$ -trennende Menge oder eine kleinste non-Gate- $[a_i]$ -trennende Menge für G_{a_i} und
2. $R_0 \subseteq [c]$ mit $[a_i] \in R_0$, $\forall i$, eine (non-Gate-) $[a]$ -trennende Menge für $G|_{[c]}$ und
3. $[a_i]$ kein R_i -Gate in G_{a_i} oder kein R_0 -Gate in $G|_{[c]}$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$,

dann ist die Menge $R = \bigcup_i R_i \cup R_0 \setminus \{[a_i] \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$ eine (non-Gate-) $[a]$ -trennende Menge für G_c .

Beweis Sei $R = \bigcup_i R_i \cup R_0 \setminus \{[a_i] \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$. Offensichtlich ist $[a] \in R$. Wir zeigen, dass die Menge $R = \bigcup_i R_i \cup R_0 \setminus \{[a_i] \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$ eine $[a]$ -trennende Menge für G_c , indem wir zeigen, dass jedes Knotenpaar $u, v \in V(G_c)$ von einem Knoten in R getrennt wird. Wir unterscheiden zwischen den folgenden vier Fällen:

- (a) $u, v \in V(G_{a_i})$, $i \in \{1, \dots, k\}$,
- (b) $u \in V(G_{a_i})$, $v \in V(G_{a_j})$, $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$,
- (c) $u, v \in [c]$,
- (d) $u \in V(G_{a_i})$ und $v \in [c]$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

- zu (a) Seien $u, v \in V(G_{a_i})$. Das Knotenpaar u, v wird in G_{a_i} von einem Ankerknoten $r_i \in R_i$ getrennt. Ist $r_i \neq [a_i]$, dann ist $r_i \in R = \bigcup_i R_i \cup R_0 \setminus \{[a_i] \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$. Das Knotenpaar u, v wird in G von R getrennt. Ist $r_i = [a_i]$, dann trennt der Knoten $[a_i] \in R$ das Knotenpaar u, v in G , siehe Abbildung 4.6.
- zu (b) Sei $u \in V(G_{a_i})$ und $v \in V(G_{a_j})$. Das Knotenpaar u, v wird von einem Ankerknoten $r_i \in R_i \setminus \{[a_i]\} \subseteq R$ oder von einem Ankerknoten $r_j \in R_j \setminus \{[a_j]\} \subseteq R$ getrennt. Das sieht man wie folgt:
 Sei $a := d_{G_c}(u, r_i)$, $b := d_{G_c}(u, [a_i])$, $c := d_{G_c}(r_i, [a_i])$, $a' := d_{G_c}(v, r_j)$, $b' := d_{G_c}(v, [a_j])$, $c' := d_{G_c}(r_j, [a_j])$ und $d := d_{G_c}([a_i], [a_j])$, siehe Abbildung 4.7. Da $[a_i] \neq [a_j]$, folgt $d > 0$. Angenommen weder r_i noch r_j trennen das Knotenpaar u, v , d.h. $a = c + d + b'$ und $a' = b + d + c'$. Aus $a \leq b + c$ und $a' \leq b' + c'$ folgt $c + d + b' \leq b + c$ und $b + d + c' \leq b' + c'$. Daraus folgt $d + b' \leq b' - d$, was $d \leq -d$ und somit $d = 0$ impliziert. Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass $d > 0$ ist.
- zu (c) Seien $u, v \in [c]$. Das Knotenpaar u, v wird in $G|_{[c]}$ von einem Knoten $r \in R_0$ getrennt. Ist $r \notin \{[a_i] \mid i \in \{1, \dots, k\}, k \geq 0\}$, dann ist $r \in R$ und das Knotenpaar u, v wird in G_c von r getrennt. Wird u, v in $G|_{[c]}$ von $[a_i]$, $i \in \{1, \dots, k\}$, getrennt, dann trennt auch jeder Knoten $r_i \in R_i \setminus \{[a_i]\} \subseteq R$ das Knotenpaar u, v in G_c . Die Existenz eines solchen Knotens r_i folgt aus Beobachtung 4.3.2. Abbildung 4.8 zeigt eine Veranschaulichung.
- zu (d) Sei $u \in V(G_{a_i})$ und $v \in [c]$. Dann wird u, v entweder von $r_0 \in R_0$ oder von einem Knoten $r_i \in R_i$ getrennt. Beweis durch Widerspruch: Sei $a := d_{G_c}(u, [a_i])$, $b := d_{G_c}(u, r_i)$, $c := d_{G_c}(r_i, [a_i])$, $a' := d_{G_c}(v, [a_i])$, $b' := d_{G_c}(v, r_0)$ und $c' := d_{G_c}([a_i], r_0)$. Angenommen das Knotenpaar u, v wird weder von r_0 , noch von einem Knoten $r_i \in R_i$ getrennt, d.h. $b = a' + c$ und $b' = a + c'$. Dann folgt aus $b \leq a + c$ und $a' + c'$, dass $a' \leq a$ und $a \leq a'$, also $a' = a$ ist. Daraus folgt, dass $b = a + c$ und $b' = a' + c'$ ist. Das bedeutet, dass in G_{a_i} ein kürzester Weg von u zu einem beliebigen Ankerknoten $r_i \in R_i$ über $[a_i]$ führt und in $G|_{[c]}$ ein kürzester Weg von v zu einem beliebigen Ankerknoten $r_0 \in R_0$ über $[a_i]$ führt. Daraus folgt aber, dass $[a_i]$ ein R_i -Gate in G_{a_i} und ein R_0 -Gate in $G|_{[c]}$ ist, was im Widerspruch zur dritten Voraussetzung steht. Wird u, v von $r_i \neq [a_i]$ getrennt, dann wird u, v von R getrennt, da $r_i \in R$ ist. Wird u, v von $r_i = [a_i]$ getrennt, dann gibt es nach Beobachtung 4.3.2 einen Knoten $r'_i \in R_i$, $r'_i \neq [a_i]$. Wenn $[a_i]$ das Knotenpaar u, v trennt, trennt auch $r'_i \in R$ das Knotenpaar u, v . Wird u, v von $r_0 \notin \{[a_i] \mid i \in \{1, \dots, k\}, k \geq 0\}$ getrennt, dann wird u, v von R getrennt, da $r_0 \in R$ ist. Wird u, v von $r_0 = [a_j]$, $i \in \{1, \dots, k\}$, $j \neq i$, getrennt, dann gibt es nach Beobachtung 4.3.2 einen Knoten $r'_j \in R_j$, $r'_j \neq [a_j]$. Wenn $[a_j]$ das Knotenpaar u, v trennt, trennt auch $r'_j \in R$ das Knotenpaar u, v . Abbildung 4.9 zeigt eine Veranschaulichung.

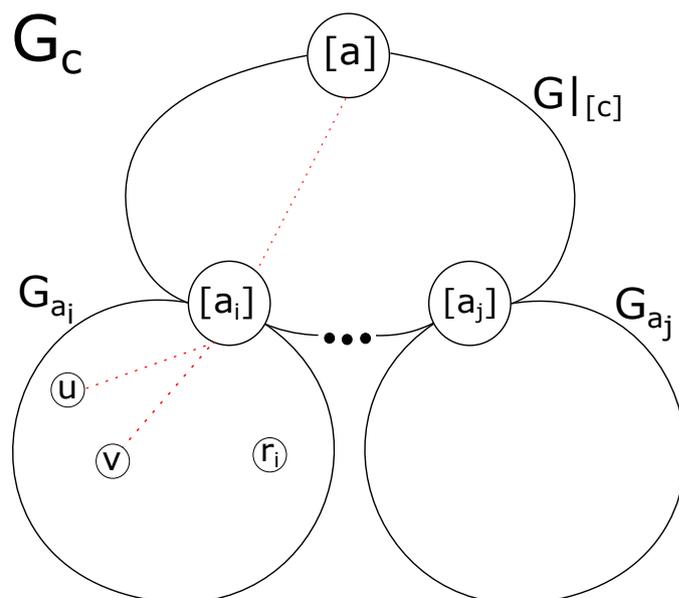


Abb. 4.6: Die Abbildung zeigt den Graphen G_c mit den Teilgraphen $G|_{[c]}$, G_{a_i} und G_{a_j} . Das Knotenpaar $u, v \in V(G_{a_i})$ wird in G_{a_i} von einem Knoten $r_i \in R_i$ getrennt. Ist $r_i \neq [a_i]$, dann ist $r_i \in R = \bigcup_i R_i \cup R_0 \setminus \{[a_i] \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$. Das Knotenpaar u, v wird in G von R getrennt. Ist $r_i = [a_i]$, dann trennt der Knoten $[a] \in R$ das Knotenpaar u, v in G .

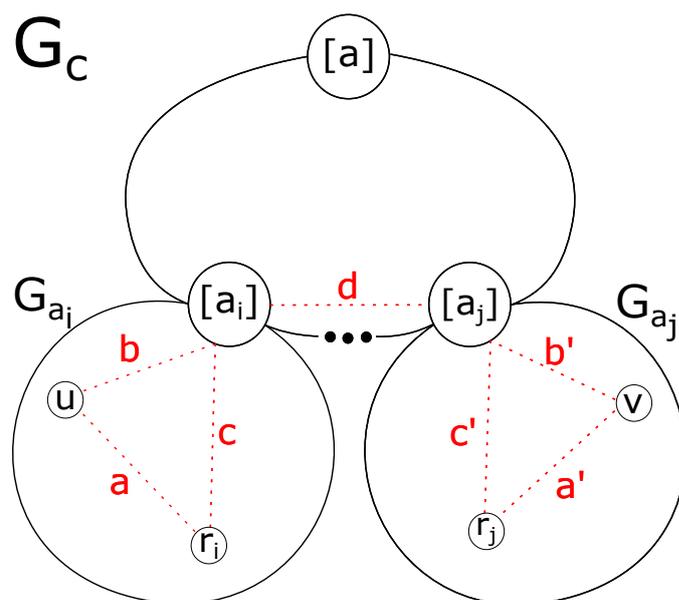


Abb. 4.7: Die Abbildung zeigt den Graphen G_c mit den Teilgraphen $G|_{[c]}$, G_{a_i} und G_{a_j} . Das Knotenpaar u, v mit $u \in V(G_{a_i})$ und $v \in [c]$ wird entweder von r_i oder von r_j getrennt, da die Distanz $d > 0$ ist.

Insgesamt folgt, dass R eine $[a]$ -trennende Menge für G_c ist. Abhängig davon, ob $[a]$ ein R_0 -Gate in $G|_{[c]}$ ist oder nicht, ist R eine $[a]$ -trennende oder eine non-Gate- $[a]$ -trennende Menge für G_c . □

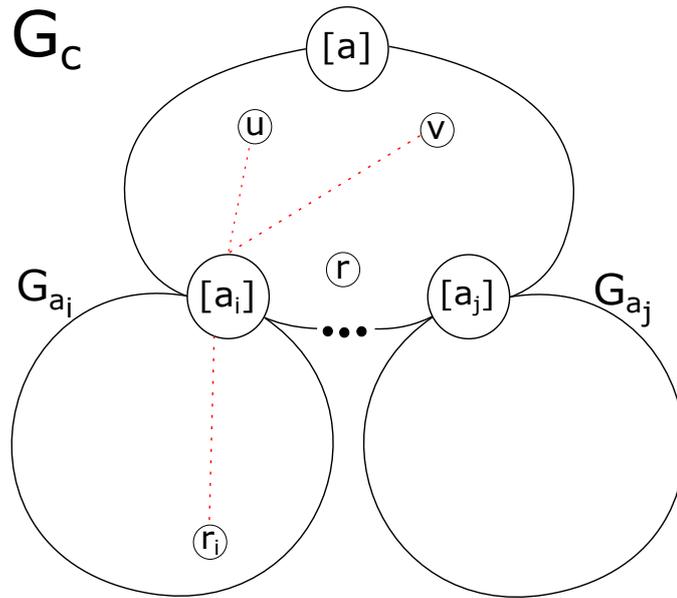


Abb. 4.8: Die Abbildung zeigt den Graphen G_c mit den Teilgraphen $G_{[c]}$, G_{a_i} und G_{a_j} . Das Knotenpaar $u, v \in [c]$ wird in $G_{[c]}$ entweder von einem Knoten $r \in R_0 \setminus \{[a_i] \mid i \in \{1, \dots, k\}, k \geq 0\}$ oder von einem Knoten $[a_i]$, $i \in \{1, \dots, k\}$ getrennt. Wird u, v in $G_{[c]}$ von r getrennt, so wird u, v auch in G_c von r getrennt, da $r \in R$. Wird u, v in $G_{[c]}$ von $[a_i]$ getrennt, dann gibt es einen Knoten $r_i \in R_i \setminus \{[a_i]\}$, der u, v trennt.

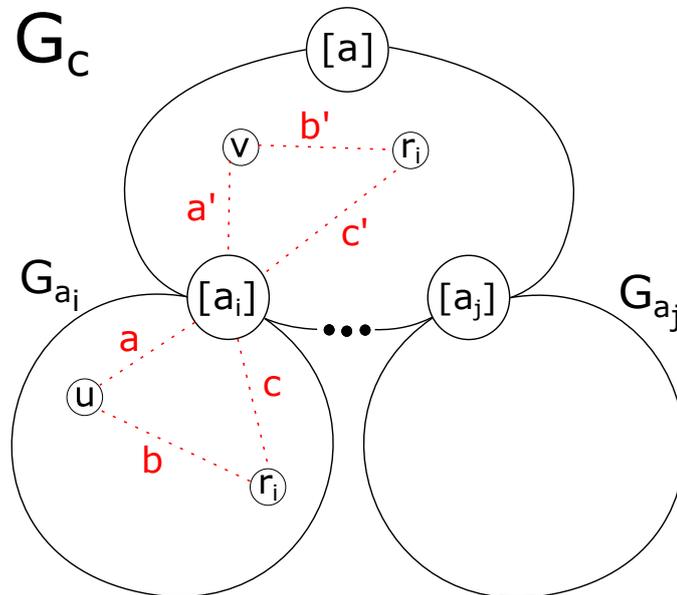


Abb. 4.9: Die Abbildung zeigt den Graphen G_c mit den Teilgraphen $G_{[c]}$, G_{a_i} und G_{a_j} . Das Knotenpaar u, v mit $u \in V(G_{a_i})$ und $v \in [c]$ wird entweder von einem Knoten $r_i \in R_i$ oder von einem Knoten $r_0 \in R_0$ getrennt.

Lemma 4.3.6. *Sei $c \in C$ ein Komponentenknoten mit Vorgänger $a \in A$ und Nachfolgern $a_1, \dots, a_k \in A$, $k \geq 0$. Ist $R \subseteq V(G_c)$ eine kleinste (non-Gate-)[a]-trennende Menge für G_c , dann ist*

1. $R_i = R \cap V(G_{a_i}) \cup \{[a_i]\}$, $i \in \{1, \dots, k\}$, eine kleinste $[a_i]$ -trennende Menge oder eine kleinste non-Gate- $[a_i]$ -trennende Menge für G_{a_i} ,
2. $R_0 = R \cap [c] \cup \{[a_i] \mid 1 \leq i \leq k\}$ eine (non-Gate-)[a]-trennende Menge für $G|_{[c]}$,
3. $[a_i]$ kein R_i -Gate in G_{a_i} oder kein R_0 -Gate in $G|_{[c]}$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$,
4. $[a_i] \notin R, \forall i$.

Beweis Sei R eine kleinste $[a]$ -trennende Menge für G_c .

1. Wir zeigen, dass $R_i = R \cap V(G_{a_i}) \cup \{[a_i]\}$, $i \in \{1, \dots, k\}$, eine kleinste $[a_i]$ -trennende Menge oder eine kleinste non-Gate- $[a_i]$ -trennende Menge für G_{a_i} ist. Dazu zeigen wir zunächst, dass R_i eine (non-Gate-)[a_i]-trennende Menge für G_{a_i} ist. Sei $u, v \in V(G_{a_i})$. Da R eine trennende Menge für G_c ist, gibt es einen Knoten $r \in R$, der u, v trennt. Ist $r \in V(G_{a_i})$, dann ist $r \in R_i$. Ist $r \notin V(G_{a_i})$, dann trennt der Knoten $[a_i] \in R_i$ das Knotenpaar u, v . Je nachdem, ob $[a_i]$ ein R_i -Gate ist oder nicht, folgt, dass R_i eine $[a_i]$ -trennende oder eine non-Gate- $[a_i]$ -trennende Menge für G_{a_i} ist.

Jetzt zeigen wir die Minimalität.

- a) Angenommen R_i ist eine $[a_i]$ -trennende Menge für G_{a_i} und es gibt eine kleinere $[a_i]$ -trennende Menge R'_i für G_{a_i} . O.B.d.A. sei $[a_i]$ ein R_i -Gate in G_{a_i} , ansonsten siehe Fall b). Dann ist $[a_i]$ auch ein R'_i -Gate in G_{a_i} (Beobachtung 4.2.6). Wir zeigen, dass $R' = R \setminus R_i \cup R'_i \setminus \{[a_i]\}$ eine (non-Gate-)[a]-trennende Menge für G_c ist. Da $|R'| < |R|$, folgt daraus ein Widerspruch zur Minimalität von R .

Offensichtlich werden alle Knotenpaare in $V(G_c)$, die von einem Knoten in $R \setminus R_i$ getrennt werden, auch von einem Knoten in R' getrennt. Wir betrachten daher nur solche Knotenpaare $u, v \in V(G_c)$, die von einem Knoten $r_i \in R_i$ getrennt werden.

- i. Seien $u, v \in V(G_{a_i})$. Dann wird u, v per Definition von einem Knoten $r'_i \in R'_i$ getrennt. Ist $r'_i \neq [a_i]$, dann ist $r'_i \in R'$. Ist $r'_i = [a_i]$, dann wird u, v auch von $[a] \in R'$ getrennt.
- ii. Sei $u \in V(G_{a_i})$ und $v \notin V(G_{a_i})$. Da $[a_i]$ ein R_i -Gate in G_{a_i} ist, folgt $r_i = [a_i]$. Dann wird u, v auch von jedem $r'_i \in R'_i \setminus \{[a_i]\} \subseteq R'$ getrennt.

- b) Angenommen R_i ist eine non-Gate- $[a_i]$ -trennende Menge für G_{a_i} und es gibt eine kleinere non-Gate- $[a_i]$ -trennende Menge R'_i für G_{a_i} . Wir zeigen, dass $R' = R \setminus R_i \cup R'_i \setminus \{[a_i]\}$ eine (non-Gate)- $[a]$ -trennende Menge für G_c ist. Da $|R'| < |R|$, folgt daraus ein Widerspruch zur Minimalität von R .

Analog zu Teil a) betrachten wir nur solche Knotenpaare $u, v \in V(G_c)$, die von einem Knoten $r_i \in R_i$ getrennt werden.

- i. Seien $u, v \in V(G_{a_i})$. Analog zu i. in Teil a)
 - ii. Sei $u \in V(G_{a_i})$ und $v \notin V(G_{a_i})$. Ist $r_i = [a_i]$, so trennt auch jeder Knoten $r'_i \in R_i \setminus \{[a_i]\} \subseteq R'$ das Knotenpaar u, v . Ist $r_i \neq [a_i]$, dann ist $d_{G_c}(u, [a_i]) = d_{G_c}(v, [a_i])$. Da R'_i eine non-Gate- $[a_i]$ -trennende Menge für G_{a_i} ist, gibt es einen Knoten $r'_i \in R_i \setminus \{[a_i]\} \subseteq R$, sodass $d_{G_c}(u, r'_i) < d_{G_c}(u, [a_i]) + d_{G_c}([a_i], r'_i) = d_{G_c}(v, [a_i]) + d_{G_c}([a_i], r'_i) = d_{G_c}(v, r'_i)$.
2. Wir zeigen, dass $R_0 = R \cap [c] \cup \{[a_i] \mid 1 \leq i \leq k\}$ eine (non-Gate)- $[a]$ -trennende Menge für $G|_{[c]}$. Sei $u, v \in [c]$. Dann gibt es ein $r \in R$, das das Knotenpaar u, v trennt. Ist $r \in [c]$, dann ist auch $r \in R_0$. Ist $r \notin [c]$, dann trennt auch einer der Knoten $[a_i]$, $i \in \{1, \dots, k\}$ das Knotenpaar u, v .
 3. Folgt aus Beobachtung 4.2.3.
 4. Folgt aus Lemma 4.2.8. □

Nun folgt der Beweis von Theorem 4.3.4.

Beweis Der Graph G_c besteht aus dem Graphen $G|_{[c]}$ und den Graphen G_{a_i} , $i \in \{1, \dots, k\}$. Wir berechnen $h(c) = (\alpha, \beta)$, indem wir mithilfe der Lemmata 4.3.5 und 4.3.6 eine kleinste non-Gate- $[a]$ -trennende Menge R_A mit $|R_A| = \alpha$ und eine kleinste $[a]$ -trennende Menge R_B mit $|R_B| = \beta$ für G_c berechnen.

Sei R_{A_i} eine kleinste non-Gate- $[a_i]$ -trennende Menge und R_{B_i} eine kleinste $[a_i]$ -trennende Menge für G_{a_i} , $i \in \{1, \dots, k\}$. Für die Berechnung der Mengen R_A und R_B , und somit von α und β , gehen wir wie folgt vor:

Jede Teilmenge $W \subseteq [c]$, die die Knoten $[a]$, $[a_1], \dots, [a_k]$ enthält und alle Knotenpaare $u, v \in [c]$ trennt, erweitern wir zu einer trennenden Menge R_W für G_c . Die Menge R_W enthält die Knoten in W und für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ entweder die Knoten in R_{A_i} oder die Knoten in R_{B_i} . Wenn der Knoten $[a_i]$ ein W -Gate in $G|_{[c]}$ ist, dann enthält R_W die Knoten in R_{A_i} , ansonsten die Knoten in R_{B_i} . Nach Lemma 4.3.5 ist die Menge $R'_W := R_W \setminus \{[a_1], \dots, [a_k]\}$ eine $[a]$ -trennende Menge bzw. eine non-Gate- $[a]$ -trennende Menge für G_c , je nachdem, ob $[a]$ ein W -Gate in $G|_{[c]}$ ist oder nicht. Aus Lemma 4.3.6

folgt, dass es ein R'_W gibt, das eine kleinste $[a]$ -trennende Menge bzw. eine kleinste non-Gate- $[a]$ -trennende Menge für G_c ist, d.h.

- $R_A = \min\{R'_W \mid W \subseteq [c] \text{ ist eine trennende Menge für } G|_{[c]} \text{ mit } [a], [a_1], \dots, [a_k] \in W \text{ und } [a] \text{ ist kein } W\text{-Gate in } G|_{[c]}\}$ und $\alpha = |R_A|$
- $R_B = \min\{R'_W \mid W \subseteq [c] \text{ ist eine trennende Menge für } G|_{[c]} \text{ mit } [a], [a_1], \dots, [a_k] \in W\}$ und $\beta = |R_B|$. □

Theorem 4.3.7. *Die metrische Dimension von G_r kann aus $h(r)$ berechnet werden.*

Beweis Sei R_B eine kleinste $[r]$ -trennende Menge für G_r . Aus Lemma 4.2.8 folgt, dass $R'_B := R_B \setminus \{[r]\}$ eine trennende Menge für G_r ist und aus Lemma 4.2.6 folgt, dass R'_B eine kleinste trennende Menge für G_r ist. Ist also $h(r) = (\alpha, \beta)$, dann ist $\beta - 1$ die metrische Dimension von G_r . □

4.4 Algorithmus und Laufzeit

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter zusammenhängender Graph mit n Knoten und m Kanten. Um die metrische Dimension für G zu berechnen, bestimmen wir den DEBC-Baum $\vec{T} := (V_T, \vec{E}_T)$ für G . Dies kann mithilfe eines beliebigen Linearzeitalgorithmus zur Bestimmung der zweifachen Zusammenhangskomponenten und Brücken von G in $\mathcal{O}(n+m)$ Schritten realisiert werden. In dem DEBC-Baum \vec{T} berechnen wir für jedes Blatt $c \in V_T$ mit Vorgänger $a \in V_T$ den Wert $h(c) = (\alpha, \beta)$. Dazu überprüfen wir für jede Teilmenge $W \subseteq [c]$, ob $W' := W \cup \{[a]\}$ eine trennende Menge für G_c ist. Wir wählen die Größe einer kleinsten solchen Menge W' für β und die Größe einer kleinsten solchen Menge W' , sodass $[a]$ kein W' -Gate in G_c ist, für α . Dafür benötigen wir $\mathcal{O}(2^n \cdot n \cdot (n+m))$ Schritte. Wir testen $\mathcal{O}(2^n)$ Teilmengen daraufhin, ob sie eine trennende Menge für G_c sind. Für einen ungerichteten zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ und eine Menge $U \subseteq V$ kann in $\mathcal{O}(|U| \cdot (|V| + |E|))$ Schritten getestet werden, ob U eine trennende Menge für G ist (Lemma 2.3 in [93]). Der Test, ob $[a]$ ein W' -Gate in G_c ist, erfolgt in $\mathcal{O}(n)$ Schritten. Aus der Überprüfung der Trennungseigenschaft von W' ergeben sich für jeden Knoten in $[c]$ Vektoren mit den Distanzen zu den Knoten aus W . Der Knoten $[a]$ ist ein W' -Gate in G_c , wenn es einen Nachbarn gibt, dessen Distanzvektor in jedem Eintrag um genau eins größer ist als der entsprechende Eintrag des Vektors für $[a]$.

Anschließend berechnen wir h für jeden inneren Knoten von \vec{T} . Aus Theorem 4.3.3 und 4.3.4 folgt, dass diese Berechnung in $\mathcal{O}(n)$ Schritten für Verbindungsknoten und in $\mathcal{O}(2^n \cdot n \cdot (n+m))$ Schritten für Komponentenknoten durchgeführt werden kann. Insgesamt liegt die Laufzeit in $\mathcal{O}(2^n \cdot n \cdot (n+m))$.

Definition 4.4.1. Ein ungerichteter Graph G ist (minimum-) k -EBC-beschränkt für ein $k \in \mathbb{N}$, wenn es eine (kleinste) trennende Menge R für G gibt, sodass jede EBC von G höchstens k Knoten aus R enthält. Die Menge R ist eine (kleinste) k -EBC-beschränkte trennende Menge für G . Seien \mathcal{G}_k und \mathcal{G}_k^{\min} für ein $k \in \mathbb{N}$ die Klassen der Graphen, die k -EBC-beschränkt bzw. minimum- k -EBC-beschränkt sind.

Korollar 4.4.2. Die folgenden Probleme können für eine feste Zahl $k \in \mathbb{N}$ in polynomialer Zeit gelöst werden:

1. Gegeben ein ungerichteter Graph G . Ist $G \in \mathcal{G}_k$?
2. Gegeben ein ungerichteter Graph $G \in \mathcal{G}_k$. Bestimme die kleinste Zahl $k' \in \mathbb{N}$, sodass $G \in \mathcal{G}_{k'}$.
3. Gegeben ein ungerichteter Graph $G \in \mathcal{G}_k$. Berechne eine kleinste k -EBC-beschränkte trennende Menge für G .
4. Gegeben ein ungerichteter Graph $G \in \mathcal{G}_k^{\min}$. Berechne eine kleinste trennende Menge für G und somit die metrische Dimension von G .

Die Probleme aus Korollar 4.4.2 lassen sich mit wenigen Modifikationen des vorgestellten Algorithmus lösen. Für die Probleme 1., 3. und 4. überprüfen wir nur Teilmengen mit höchstens k Knoten. Für das Problem 2. führen wir unseren Algorithmus für $k = 1$ durch und erhöhen k sukzessive bis eine trennende Menge gefunden wird. Mit diesen Modifikationen liegt die Laufzeit des Algorithmus in $\mathcal{O}(n^k \cdot n \cdot (n + m))$.

Für jeden Graphen $G \in \mathcal{G}_k^{\min}$ gilt offensichtlich $G \in \mathcal{G}_k$. Das heißt ein Graph, der minimum- k -EBC-beschränkt ist, ist auch k -EBC-beschränkt. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Abbildung 4.10 zeigt einen Graphen G , der 2-EBC-beschränkt ist, für den es jedoch kein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass G minimum- k -EBC-beschränkt ist.

Die Komplexität der folgenden Probleme bleibt offen.

1. Gegeben ein ungerichteter Graph $G \in \mathcal{G}_k$, $k \in \mathbb{N}$. Gibt es ein $k' \in \mathbb{N}$, sodass $G \in \mathcal{G}_{k'}^{\min}$?
2. Gegeben ein ungerichteter Graph G , sodass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $G \in \mathcal{G}_k^{\min}$. Bestimme die metrische Dimension von G .

Wir haben gezeigt, dass die metrische Dimension für Graphen, die eine kleinste trennende Menge mit einer konstanten Anzahl von Ankerknoten in jeder Komponente besitzen, effizient berechnet werden kann. Im Folgenden wird gezeigt, dass das Bestimmen der metrischen Dimension für Graphen, die eine kleinste trennende Menge mit einer konstanten Anzahl von Ankerknoten in jeder zweifachen Zusammenhangskomponente besitzen, nicht effizient möglich ist.

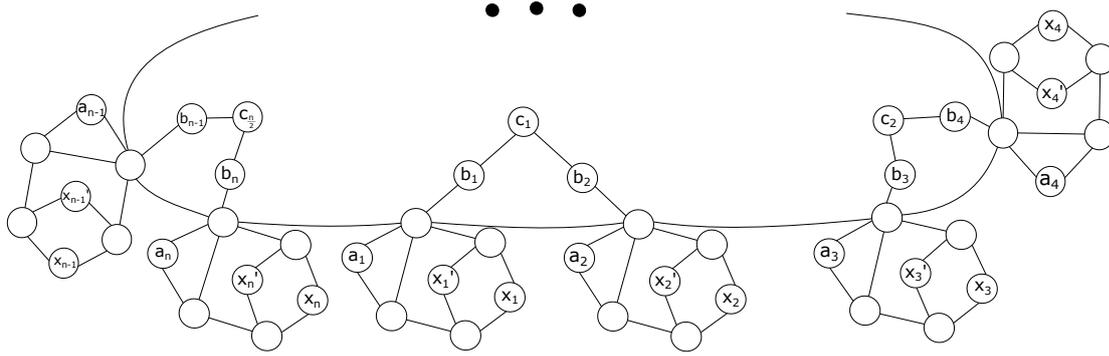


Abb. 4.10: Die Abbildung zeigt den Graphen G_n mit $n+1$ EBCs, $n \in \mathbb{N}$ gerade. Es gilt $G_n \in \mathcal{G}_2$, $\forall n$. Jede trennende Menge für G_n enthält einen der Knoten x_i, x'_i , $1 \leq i \leq n$, da das Knotenpaar x_i, x'_i von keinem anderen Knoten getrennt werden kann. Die einzigen Knotenpaare, die nicht von x_i oder x'_i getrennt werden, sind die Paare a_i, b_i . Wählen wir die Knoten a_i als Ankerknoten, werden alle Knotenpaare getrennt. Wir erhalten eine 2-EBC-beschränkte trennende Menge mit $2 \cdot n$ Knoten (jede EBC bis auf eine enthält zwei Ankerknoten) und es gibt keine 2-EBC-beschränkte trennende Menge mit weniger Knoten. Trotzdem enthält eine kleinste trennende Menge weniger Knoten. Werden die Knoten c_i statt der Knoten a_i als Ankerknoten gewählt, erhält man eine trennende Menge mit $\frac{3}{2} \cdot n$ Knoten. In diesem Fall enthält eine EBC $\frac{1}{2} \cdot n$ Ankerknoten und die übrigen EBCs enthalten einen Ankerknoten.

4.5 k -bounded BC Metric Dimension ist NP-vollständig

k -BOUNDED BC METRIC DIMENSION

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, sodass es eine kleinste trennende Menge mit höchstens $k \in \mathbb{N}$ Ankerknoten in jeder zweifachen Zusammenhangskomponente für G gibt, und eine Zahl $t \in \mathbb{N}$.

Frage: Ist $mdim(G) \leq t$?

Theorem 4.5.1. k -BOUNDED BC METRIC DIMENSION ist selbst für $k = 1$ NP-vollständig.

Beweis Wir erweitern den NP-Vollständigkeitsbeweis von Khuller et al. in [123], in dem die NP-Vollständigkeit der METRISCHEN DIMENSION durch eine Reduktion von 3-SAT gezeigt wurde. Es folgt eine kurze Skizze dieses Beweises in [123]. Für eine gegebene 3-SAT-Instanz $F = (X, C)$ mit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ und $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ wird in dem Klausel-Variablen-Graphen jeder Variablenknoten durch das Variablen-gadget in Abbildung 4.11 und jeder Klauselknoten durch das Klausel-gadget in Abbildung 4.12 ersetzt. Ist die Variable x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, ein positives Literal in c_j , $j \in \{1, \dots, m\}$, werden die Kanten $\{T_i, c_j^1\}$, $\{F_i, c_j^1\}$ und $\{F_i, c_j^3\}$ eingefügt. Ist die Variable x_i ein negatives Literal in

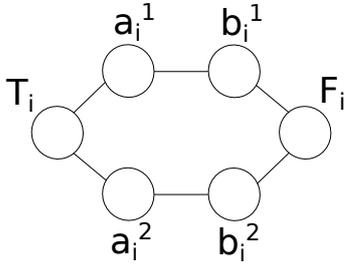


Abb. 4.11: Gadget für eine Variable in F

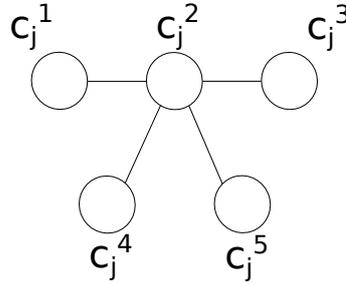


Abb. 4.12: Gadget für eine Klausel in F

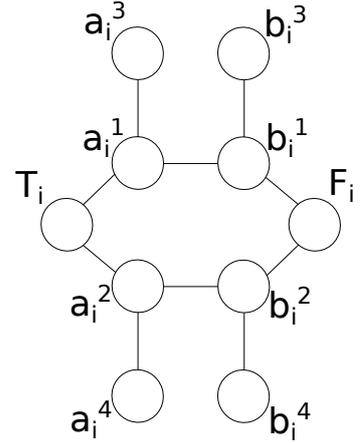


Abb. 4.13: Modifiziertes Variabलगadget

c_j , werden die Kanten $\{T_i, c_j^1\}$, $\{F_i, c_j^1\}$ und $\{T_i, c_j^3\}$ eingefügt, siehe Abbildung 4.14 für ein Beispiel. Der so entstandene Graph H_F ist die Instanz für METRISCHE DIMENSION. Es wird beobachtet, dass in jeder trennenden Menge für H_F mindestens einer der Knoten $a_i^1, a_i^2, b_i^1, b_i^2$ und mindestens einer der Knoten c_j^4, c_j^5 , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ enthalten ist. Anschließend wird gezeigt, dass F genau dann erfüllbar ist, wenn H_F die metrische Dimension $n + m$ hat.

Wir modifizieren das Variabलगadget wie in Abbildung 4.13 dargestellt. Dann gilt mit der gleichen Argumentation wie in [123], dass F genau dann erfüllbar ist, wenn H_F die metrische Dimension $n + m$ hat. Alle Ankerknoten einer kleinsten trennenden Menge für H_F sind in den Legs, woraus die NP-Vollständigkeit von k -BOUNDED BC METRIC DIMENSION folgt. \square

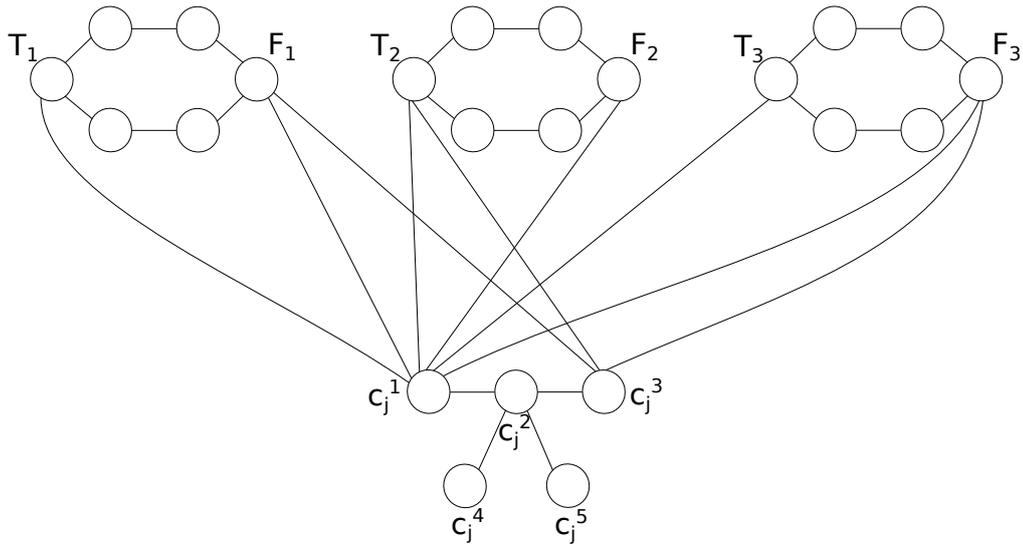


Abb. 4.14: Klausel $C_j = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$

5 Die gewichtete fehlertolerante metrische Dimension von Co-Graphen

In dem folgenden Kapitel wird ein Linearzeitalgorithmus für die Berechnung der fehlertoleranten metrischen Dimension von Co-Graphen vorgestellt. Die Ergebnisse wurden auf der FCT 2019 vorgestellt [192].

5.1 Definitionen und Eigenschaften einer 2-adjazent trennenden Menge

Definition 5.1.1 (Co-Graph). *Ein ungerichteter Graph G ist ein Co-Graph, wenn*

- $G = (\{u\}, \emptyset)$ oder
- $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ für zwei Co-Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ oder
- $G = \overline{H}$ für einen Co-Graphen H .

Ein Co-Graph enthält keinen induzierten P_4 , daher ist der Durchmesser eines zusammenhängenden Co-Graphen höchstens zwei. Das heißt, für einen Co-Graphen $G = (V, E)$ und zwei Knoten $u, v \in V$ gilt $d_G(u, v) \in \{0, 1, 2\}$. Co-Graphen wurden unabhängig voneinander von Jung [112], Seinsche [173] und Sumner [186] eingeführt.

Definition 5.1.2. *Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ und $u, v \in V$, $u \neq v$, sei $N(u) \Delta N(v) = (N(u) \cup N(v)) \setminus (N(u) \cap N(v))$ die symmetrische Differenz von u und v . Für eine Menge $R \subseteq V$ sei*

$$h_R : V \times V \longrightarrow \mathbb{N}, \quad h_R(u, v) = |(N(u) \Delta N(v) \cup \{u, v\}) \cap R|.$$

$h_R(u, v)$ ist die Anzahl der Knoten in R , die u oder v oder ein Nachbar von u , aber nicht von v oder ein Nachbar von v , aber nicht von u sind.

Lemma 5.1.3. *Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Die Menge $R \subseteq V$ ist genau dann eine adjazent trennende Menge für G , wenn $h_R(u, v) \geq 1, \forall u, v \in V$.*

Beweis „ \Rightarrow “: Sei R eine adjazent trennende Menge für G , d.h. $\forall u, v \in V \exists r \in R : d'(u, r) \neq d'(v, r)$, wobei $d'(u, v) = \min\{d_G(u, v), 1\}$. Wir zeigen, dass $h_R(u, v) \geq 1$, $\forall u, v \in V$. Sei $u, v \in V$ und $r \in R$ ein Knoten, der das Knotenpaar u, v adjazent trennt. Dann ist $d_G(u, r) = 0$ und $d_G(v, r) \neq 0$ oder $d_G(v, r) = 0$ und $d_G(u, r) \neq 0$. In beiden Fällen ist $h_R(u, v) \geq 1$.

„ \Leftarrow “: Sei $R \subseteq V$, sodass $h_R(u, v) \geq 1, \forall u, v \in V$. Wir zeigen, dass R eine adjazent trennende Menge für G ist. Sei $u, v \in V$. Aus $h_R(u, v) \geq 1$ folgt

1. $u \in R$, bzw. $v \in R$ oder
2. $\exists r \in R : r \in N(u) \wedge r \notin N(v)$ bzw. $\exists r \in R : r \in N(v) \wedge r \notin N(u)$

In beiden Fällen ist R offensichtlich eine adjazent trennende Menge für G . □

Definition 5.1.4 (2-adjazent trennend). Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $R \subseteq V$. Die Menge R ist eine 2-adjazent trennende Menge für G , wenn für jedes Knotenpaar $u, v \in V, u \neq v, h_R(u, v) \geq 2$ gilt.

Für einen Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge $R \subseteq V$ eine 2-adjazent trennende Menge, wenn

- $u, v \in R$ oder
- für jedes Knotenpaar $u, v \in V \setminus R$ mindestens zwei Knoten aus R existieren, die jeweils mit genau einem der Knoten u, v benachbart sind oder
- für jedes Knotenpaar u, v mit $u \in R$ und $v \notin R$ mindestens ein Knoten aus R existiert, der mit genau einem der Knoten u, v benachbart ist.

Lemma 5.1.5. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Co-Graph und $R \subseteq V$. Die Menge R ist eine fehlertolerante trennende Menge für G genau dann, wenn R eine 2-adjazent trennende Menge für G ist.

Beweis „ \Rightarrow “: Sei R eine fehlertolerante trennende Menge für G . Zu zeigen ist, dass R eine 2-adjazent trennende Menge für G ist. Sei $u, v \in V$ und seien $r_1, r_2 \in R$ zwei Ankerknoten, die das Knotenpaar u, v trennen.

1. Sind $u, v \in R$, dann ist $h_R(u, v) \geq 2$.
2. Ist $u \in R$ und $v \notin R$, dann ist $h_R(u, v) \geq 1$. O.B.d.A. sei $u \neq r_1$. Da r_1 das Knotenpaar u, v trennt und der Durchmesser von G höchstens zwei ist, ist r_1 zu genau einem der beiden Knoten u, v benachbart und es gilt $h_R(u, v) \geq 2$.

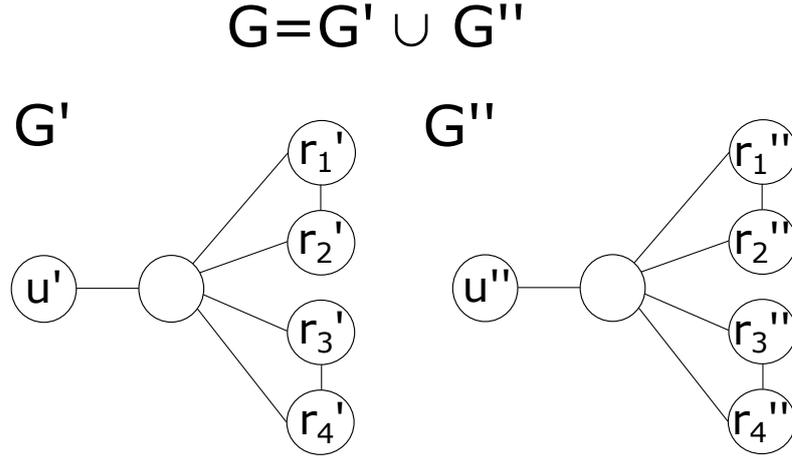


Abb. 5.1: Die Abbildung zeigt einen unzusammenhängenden Co-Graphen $G = G' \cup G''$, der aus der Vereinigung der beiden zusammenhängenden Co-Graphen G' und G'' entsteht. Sei $R = R' \cup R''$ mit $R' = \{r'_1, \dots, r'_4\}$ und $R'' = \{r''_1, \dots, r''_4\}$. R' bzw. R'' ist eine 2-adjazent trennende und fehlertolerante trennende Menge für G' bzw. G'' . R ist eine fehlertolerante trennende Menge, aber keine 2-adjazent trennende Menge für G , da $h_R(u', u'') = 0$. R ist keine fehlertolerante trennende Menge für \bar{G} , da u' und u'' in \bar{G} mit jedem Knoten aus R benachbart sind.

3. Sind $u, v \notin R$, dann gilt $u, v \neq r_1$ und $u, v \neq r_2$. Da r_1 und r_2 das Knotenpaar u, v trennen und der Durchmesser von G höchstens zwei ist, sind r_1 und r_2 jeweils zu genau einem der Knoten u, v benachbart und es gilt $h_R(u, v) \geq 2$.

„ \Leftarrow “: Sei R eine 2-adjazent trennende Menge für G . Zu zeigen ist, dass es für jedes Knotenpaar $u, v \in V$ zwei Knoten in R gibt, die u, v trennen.

1. Sind $u, v \in R$, dann wird u, v offensichtlich durch zwei Knoten in R getrennt.
2. Ist $u \in R$ und $v \in V \setminus R$, dann trennt u das Knotenpaar u, v . Da $h_R(u, v) \geq 2$ ist, gibt es einen weiteren Knoten $r \in R$, der zu genau einem der beiden Knoten u, v benachbart ist. Dieser Knoten r trennt das Knotenpaar u, v .
3. Sind $u, v \in V \setminus R$, dann ist $|\{u, v\} \cap R| = 0$. Da $h_R(u, v) \geq 2$ ist, folgt, dass es zwei Knoten $r_1, r_2 \in R$ gibt, die beide zu genau einem der Knoten u, v benachbart sind. Diese Knoten r_1 und r_2 trennen das Knotenpaar u, v . \square

Die Äquivalenz aus Lemma 5.1.5 gilt nicht für Co-Graphen, die unzusammenhängend sind, siehe Abbildung 5.1.

Lemma 5.1.6. Sei $G = (V, E)$ ein Co-Graph und $R \subseteq V$. Ist R eine 2-adjazent trennende Menge für G , dann ist R auch eine 2-adjazent trennende Menge für \bar{G} .

Beweis Sei $R \subseteq V$ eine 2-adjazent trennende Menge für $G = (V, E)$. Dann ist $h_R(u, v) = |(N(u) \Delta N(v) \cup \{u, v\}) \cap R| \geq 2$ in G für alle Knotenpaare $u, v \in V$, $u \neq v$. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

1. $u, v \in (N(u) \Delta N(v) \cup \{u, v\}) \cap R$: Dann gilt auch $u, v \in (N(u) \Delta N(v) \cup \{u, v\}) \cap R$ in \bar{G} und somit $h_R(u, v) \geq 2$ in \bar{G} .
2. $u \in (N(u) \Delta N(v) \cup \{u, v\}) \cap R$ und $v \notin (N(u) \Delta N(v) \cup \{u, v\}) \cap R$: Da $h_R(u, v) \geq 2$ in G gibt es einen Knoten $w \in N(u) \Delta N(v) \cap R$. Daraus folgt, dass w entweder ein Nachbar von u oder von v ist. O.B.d.A. sei w ein Nachbar von u . Im Graphen \bar{G} ist w kein Nachbar von u , aber ein Nachbar von v . Also gibt es zwei Knoten $u, w \in (N(u) \Delta N(v) \cup \{u, v\}) \cap R$ in \bar{G} .
3. $u, v \notin (N(u) \Delta N(v) \cup \{u, v\}) \cap R$: Da $h_R(u, v) \geq 2$ in G , gibt es zwei Knoten $w_1, w_2 \in N(u) \Delta N(v) \cap R$. Daraus folgt, dass w_1 und w_2 jeweils zu genau einem der beiden Knoten u, v benachbart sind. In \bar{G} sind w_1 und w_2 auch zu genau einem der beiden Knoten u, v benachbart und es gilt $w_1, w_2 \in (N(u) \Delta N(v) \cup \{u, v\}) \cap R$ in \bar{G} . □

Da in zusammenhängenden Co-Graphen eine 2-adjazent trennende Menge zu einer fehlertoleranten trennenden Menge äquivalent ist, gilt die folgende Beobachtung.

Beobachtung 5.1.7. *Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Co-Graph und $R \subseteq V$. Ist R eine fehlertolerante trennende Menge für G , dann ist R auch eine fehlertolerante trennende Menge für den unzusammenhängenden Co-Graphen \bar{G} .*

Eine fehlertolerante trennende Menge für einen unzusammenhängenden Co-Graphen G ist im Allgemeinen keine fehlertolerante trennende Menge für \bar{G} , siehe Abbildung 5.1 für ein Beispiel.

Lemma 5.1.8. *Seien $G' = (V', E')$ und $G'' = (V'', E'')$ zwei zusammenhängende Co-Graphen mit mindestens zwei Knoten und sei $G = (V, E)$ mit $V = V' \cup V''$ und $E = E' \cup E''$ die disjunkte Vereinigung von G' und G'' . Sei R' eine fehlertolerante trennende Menge für G' und sei R'' eine fehlertolerante trennende Menge für G'' . Dann ist $R = R' \cup R''$ eine fehlertolerante trennende Menge für G .*

Beweis Wir zeigen, dass jedes Knotenpaar $u, v \in V$ von zwei Ankerknoten in R getrennt wird. Sind $u, v \in V_1$ bzw. $u, v \in V_2$, wird das Knotenpaar u, v offensichtlich von zwei Ankerknoten in $R_1 \subseteq R$ bzw. $R_2 \subseteq R$ getrennt. Ist $u \in V_1$ und $v \in V_2$, wird das Knotenpaar u, v von zwei beliebigen Ankerknoten $r_1, r_2 \in R$ getrennt, da entweder u oder v die Distanz ∞ zu r_1 und r_2 haben. □

Abbildung 5.1 zeigt, dass R keine 2-adjazent trennende Menge sein muss.

Definition 5.1.9. *Sei $G = (V, E)$ ein Co-Graph und $R \subseteq V$ eine fehlertolerante trennende Menge für G . Ein Knoten $v \in V$ ist ein k -Knoten bezüglich R , wenn $|N[v] \cap R| = k$, $k \in \mathbb{N}$.*

Ist R aus dem Kontext bekannt, schreiben wir kurz k -Knoten.

Lemma 5.1.10. *Seien $G' = (V', E')$ und $G'' = (V'', E'')$ zwei zusammenhängende Co-Graphen mit mindestens zwei Knoten und sei $G = (V, E)$ mit $V = V' \cup V''$ und $E = E' \cup E''$ der Graph, der aus der disjunkten Vereinigung von G' und G'' hervorgeht. Sei R' bzw. R'' eine 2-adjazent trennende Menge für G' bzw. G'' . Die Knotenmenge $R = R' \cup R''$ ist genau dann eine 2-adjazent trennende Menge für G , wenn*

1. *es höchstens einen 0-Knoten $v \in V$ bezüglich R gibt, d.h. es gibt keinen 0-Knoten $v' \in V'$ bezüglich R' oder es gibt keinen 0-Knoten $v'' \in V''$ bezüglich R'' und*
2. *es keinen 0-Knoten $v' \in V'$ bezüglich R' gibt, wenn es einen 1-Knoten $v'' \in V''$ bezüglich R'' gibt und*
3. *es keinen 1-Knoten in $v' \in V'$ bezüglich R' gibt, wenn es einen 0-Knoten $v'' \in V''$ bezüglich R'' gibt.*

Beweis „ \Rightarrow “: Angenommen R ist eine 2-adjazent trennende Menge für G .

1. Wir zeigen, dass es höchstens einen 0-Knoten bezüglich R in V gibt. Angenommen es gäbe zwei 0-Knoten $u, v \in V$ bezüglich R , d.h. $|N[u] \cap R| = 0$ und $|N[v] \cap R| = 0$. Dann gilt $h_R(u, v) = 0$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.
2. Wir zeigen, dass es keinen 0-Knoten in $v' \in V'$ bezüglich R' gibt, wenn es einen 1-Knoten $v'' \in V''$ bezüglich R'' gibt. Angenommen es gäbe einen 0-Knoten $v' \in V'$ bezüglich R' und einen 1-Knoten in $v'' \in V''$ bezüglich R'' . Dann gilt $h_R(v', v'') = 1$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.
3. analog zu 2.

„ \Leftarrow “: Angenommen die Bedingungen 1., 2. und 3. gelten. Wir zeigen, dass R eine 2-adjazent trennende Menge für G ist. Dazu zeigen wir, dass $h_R(u, v) \geq 2$ ist $\forall u, v \in V$. Für $u, v \in V'$ gilt $h_{R'}(u, v) \geq 2$ und daher auch $h_R(u, v) \geq 2$. Diese Ungleichungen gelten auch für $u, v \in V''$. Sei nun $v' \in V'$ und $v'' \in V''$. Es gilt $h_R(v', v'') < 2$ genau dann, wenn $|N[v'] \cap R| + |N[v''] \cap R| < 2$, d.h. wenn

1. $|N[v'] \cap R| = 0$ und $|N[v''] \cap R| = 0$ oder
2. $|N[v'] \cap R| = 0$ und $|N[v''] \cap R| = 1$ oder
3. $|N[v'] \cap R| = 1$ und $|N[v''] \cap R| = 0$.

Aus den Voraussetzungen folgt, dass keiner dieser Fälle gilt. □

5.2 Algorithmus

Theorem 5.2.1. *Sei $G = (V, E)$ ein Co-Graph und $c : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Knotengewichtsfunktion. Die gewichtete fehlertolerante metrische Dimension von G kann in $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ Schritten bestimmt werden.*

Beweis Wir beschreiben einen Linearzeitalgorithmus für die Berechnung der gewichteten fehlertoleranten metrischen Dimension eines zusammenhängenden Co-Graphen. Für unzusammenhängende Co-Graphen wenden wir unseren Algorithmus für jede Zusammenhangskomponente mit mindestens zwei Knoten an. Gibt es mehr als einen isolierten Knoten in G , ist in jeder fehlertoleranten trennenden Menge für G jeder isolierte Knoten enthalten. Die gewichtete fehlertolerante metrische Dimension eines unzusammenhängenden Co-Graphen bestimmt sich aus der Summe der Gewichte aller isolierten Knoten, wenn es mindestens zwei gibt, und der gewichteten fehlertoleranten metrischen Dimensionen aller Zusammenhangskomponenten mit mindestens zwei Knoten.

Um die gewichtete fehlertolerante metrische Dimension eines zusammenhängenden Co-Graphen $G = (V, E)$ zu berechnen, reicht es aus, eine 2-adjazent trennende Menge mit minimalen Kosten für G zu bestimmen (Lemma 5.1.5). Um eine 2-adjazent trennende Menge mit kleinstem Gewicht für G zu bestimmen, führen wir eine Berechnung mittels dynamischer Programmierung entlang des Co-Baums $T = (V_T, E_T)$ von G durch. Der Co-Baum T von G ist ein Baum, der die Vereinigung und Komplementierung von Co-Graphen beschreibt. Die inneren Knoten von T sind entweder Komplementierungsknoten oder Vereinigungsknoten. Jeder Komplementierungsknoten hat genau einen Nachfolger und jeder Vereinigungsknoten hat genau zwei Nachfolger. Die Blätter von T sind die Knoten von G .

Für jeden inneren Knoten von T berechnen wir bottom-up verschiedene Typen von kleinsten gewichteten 2-adjazent trennenden Mengen für die entsprechenden Teilgraphen von G . Zu Beginn bestimmen wir diese Typen von kleinsten 2-adjazent trennenden Mengen für die Vorgänger der Blätter. Für die übrigen inneren Knoten berechnen wir die Mengen aus den Mengen aller direkten Nachfolger. Das kleinste Gewicht aller Mengen an der Wurzel r von T ist die gewichtete fehlertolerante metrische Dimension von G . Aus Lemma 5.1.6 folgt, dass eine 2-adjazent trennende Menge für einen Co-Graphen G auch eine 2-adjazent trennende Menge für \bar{G} ist. Die Vereinigung von zwei fehlertoleranten trennenden Mengen für zwei zusammenhängende Co-Graphen G_1 und G_2 ist eine fehlertolerante trennende Menge für $G = G_1 \cup G_2$ (Lemma 5.1.8). Die Vereinigung von zwei 2-adjazent trennenden Mengen für G_1 und G_2 ist im Allgemeinen keine 2-adjazent trennende Menge für G . Lemma 5.1.10 gibt die Bedingungen an, die erfüllt sein müssen, damit die Vereinigung von zwei 2-adjazent trennenden Mengen für G_1 und G_2 eine 2-adjazent trennende Menge für G ist. Wir merken uns bei der Berechnung der 2-adjazent

trennenden Mengen, ob es 0- bzw. 1-Knoten gibt. Da ein 0- bzw. 1-Knoten bzgl. einer Menge R ein $|R|$ oder $(|R| - 1)$ -Knoten im Komplementgraphen ist, merken wir uns auch die $|R|$ - bzw. $(|R| - 1)$ -Knoten.

Daraus ergeben sich 16 Typen von kleinsten gewichteten 2-adjazent trennenden Mengen $R_{a,b,c,d}$, $a, b, c, d \in \{0,1\}$ für einen Co-Graphen $G = (V, E)$. Für

- $a = 1$ ($a = 0$) berechnen wir eine kleinste gewichtete 2-adjazent trennende Menge R für G , sodass es einen (keinen) 0-Knoten bzgl. R in G gibt.
- $b = 1$ ($b = 0$) berechnen wir eine kleinste gewichtete 2-adjazent trennende Menge R für G , sodass es einen (keinen) 1-Knoten bzgl. R in G gibt.
- $c = 1$ ($c = 0$) berechnen wir eine kleinste gewichtete 2-adjazent trennende Menge R für G , sodass es einen (keinen) $(|R| - 1)$ -Knoten bzgl. R in G gibt.
- $d = 1$ ($d = 0$) berechnen wir eine kleinste gewichtete 2-adjazent trennende Menge R für G , sodass es einen (keinen) $|R|$ -Knoten bzgl. R in G gibt.

Sei $r_{a,b,c,d}$ das Gewicht der Menge $R_{a,b,c,d}$, d.h. die Summe der Knotengewichte in $R_{a,b,c,d}$. Wenn es für eine Belegung von a, b, c, d keine solche 2-adjazent trennende Menge $R_{a,b,c,d}$ gibt, verwenden wir die Notation $r_{a,b,c,d} = \infty$ und $R_{a,b,c,d} = \text{undefined}$.

Für $a = b = 1$ ist $r_{1,1,c,d} = \infty$ und $R_{1,1,c,d} = \text{undefined}$, $\forall c, d$ (die symmetrische Differenz eines 0-Knotens und eines 1-Knotens enthält weniger als zwei Ankerknoten). Also sind nur 12 Mengen zu berechnen.

Bei der Komplementierung des Graphen G , werden 0-Knoten zu $|R|$ -Knoten bzgl. R und 1-Knoten werden zu $(|R| - 1)$ -Knoten bzgl. R . Daraus folgt, dass $R_{a,b,c,d}$ für G $R_{d,c,b,a}$ für \bar{G} ist. Bei der Vereinigung zweier Co-Graphen G_1 und G_2 unterscheiden wir zwischen den folgenden drei Fällen:

1. G_1 und G_2 bestehen beide aus einem isolierten Knoten.
2. G_1 besteht aus einem isolierten Knoten und G_2 aus mindestens zwei Knoten.
3. G_1 und G_2 bestehen beide aus mindestens zwei Knoten.

Es folgt eine Beschreibung, wie die Mengen $R_{a,b,c,d}$ für diese drei Fälle berechnet werden können.

zu 1. Sei $G_1 = (\{v_1\}, \emptyset)$ und $G_2 = (\{v_2\}, \emptyset)$. Dann gibt es genau eine 2-adjazent trennende Menge für $G = G_1 \cup G_2$, und zwar $R = \{v_1, v_2\}$. Dann gibt es keinen 0-Knoten, zwei 1-Knoten, zwei $(|R| - 1)$ -Knoten und keinen $|R|$ -Knoten bzgl. R in G . Somit ist $R_{0,1,1,0} = \{v_1, v_2\}$ und $r_{0,1,1,0} = c(v_1) + c(v_2)$. Für $a \neq 0 \vee b \neq 1 \vee c \neq 1 \vee d \neq 0$ gilt $R_{a,b,c,d} = \text{undefined}$ und $r_{a,b,c,d} = \infty$, siehe Tabelle 5.1.

zu 2. Sei $G_1 = (\{v_1\}, \emptyset)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ ein Co-Graph mit $|V_2| \geq 2$. Sei $R''_{a,b,c,d}$ eine kleinste gewichtete 2-adjazent trennende Menge für G_2 und $r''_{a,b,c,d}$ ihr Gewicht, $a, b, c, d \in \{0,1\}$. Sei $G = G_1 \cup G_2$.

Es gilt $R_{0,0,c,d} = \text{undefined}$ und $r_{0,0,c,d} = \infty$, da v_1 entweder ein 0-Knoten ist (wenn v_1 nicht in der 2-adjazent trennenden Menge enthalten ist) oder ein 1-Knoten ist (wenn v_1 in der 2-adjazent trennenden Menge enthalten ist), $\forall c, d$.

Des Weiteren ist $R_{0,1,c,1} = \text{undefined}$ und $r_{0,1,c,1} = \infty$, $\forall c$. Der Knoten v_1 ist in jeder 2-adjazent trennenden Menge, in der es keinen 0-Knoten gibt, enthalten. Da v_1 ein isolierter Knoten in G ist, gibt es keinen Knoten, der mit allen Ankerknoten benachbart ist.

In $R_{0,1,0,0}$ und $R_{0,1,1,0}$ gibt es keinen 0-Knoten. Daher ist v_1 ein Ankerknoten. Daraus folgt, dass v_1 ein 1-Knoten ist. Es gilt

$$r_{0,1,0,0} = c(v_1) + \min\{r''_{0,0,0,0}, r''_{0,0,1,0}, r''_{0,1,0,0}, r''_{0,1,1,0}\}$$

und somit $R_{0,1,0,0} = \{v_1\} \cup R_m$, wobei R_m die Menge mit kleinstem Gewicht aus der Menge $\{R''_{0,0,0,0}, R''_{0,0,1,0}, R''_{0,1,0,0}, R''_{0,1,1,0}\}$ ist.

In $R_{0,1,1,0}$ gibt es einen $|R_{0,1,1,0}|$ -Knoten in G_2 . Daher gilt

$$r_{0,1,1,0} = c(v_1) + \min\{r''_{0,0,0,1}, r''_{0,0,1,1}, r''_{0,1,0,1}, r''_{0,1,1,1}\}$$

und somit $R_{0,1,1,0} = \{v_1\} \cup R_m$, wobei R_m die Menge mit kleinstem Gewicht aus der Menge $\{R''_{0,0,0,1}, R''_{0,0,1,1}, R''_{0,1,0,1}, R''_{0,1,1,1}\}$ ist.

In $R_{1,0,c,d}$ ist v_1 kein Ankerknoten, da ansonsten v_1 ein 1-Knoten ist $\forall c, d$. Daraus folgt

- $r_{1,0,0,0} = r''_{0,0,0,0}$ und somit $R_{1,0,0,0} = R''_{0,0,0,0}$,
- $r_{1,0,0,1} = r''_{0,0,0,1}$ und somit $R_{1,0,0,1} = R''_{0,0,0,1}$,
- $r_{1,0,1,0} = r''_{0,0,1,0}$ und somit $R_{1,0,1,0} = R''_{0,0,1,0}$,
- $r_{1,0,1,1} = r''_{0,0,1,1}$ und somit $R_{1,0,1,1} = R''_{0,0,1,1}$.

Siehe Tabelle 5.2.

1. Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ zwei Co-Graphen mit $|V_1| \geq 2$ und $|V_2| \geq 2$ und $G = G_1 \cup G_2$. Sei $R'_{a,b,c,d}$ eine kleinste gewichtete 2-adjazent trennende Menge für G_1 und $R''_{a,b,c,d}$ eine kleinste gewichtete 2-adjazent trennende Menge für G_2 , $a, b, c, d \in \{0,1\}$. Seien $r'_{a,b,c,d}$ und $r''_{a,b,c,d}$ die entsprechenden Gewichte.

Es gilt $R_{a,b,c,1} = \text{undefined}$ und $R_{a,b,1,d} = \text{undefined}$, und somit $r_{a,b,c,1} = \infty$ und $r_{a,b,1,d} = \infty$, da G_1 und G_2 jeweils mindestens zwei Ankerknoten aus jeder 2-adjazent trennenden Menge für G enthalten, $\forall a, b, c, d$.

Es bleiben noch die drei Mengen $R_{0,0,0,0}$, $R_{0,1,0,0}$, $R_{1,0,0,0}$ zu betrachten. Es gilt

- $r_{0,0,0,0} = \min\{r'_{0,0,c,d} \mid c, d \in \{0,1\}\} + \min\{r''_{0,0,c,d} \mid c, d \in \{0,1\}\}$ und somit $R_{0,0,0,0} = R'_m \cup R''_m$, wobei R'_m die Menge mit kleinstem Gewicht aus der Menge $\{R'_{0,0,c,d} \mid c, d \in \{0,1\}\}$ ist und R''_m die Menge mit kleinstem Gewicht aus der Menge $\{R''_{0,0,c,d} \mid c, d \in \{0,1\}\}$ ist,
- $r_{0,1,0,0} = \min\{r'_{0,0,c,d} + r''_{0,1,c',d'}, r'_{0,1,c,d} + r''_{0,0,c',d'}, r'_{0,1,c,d} + r''_{0,1,c',d'} \mid c, d, c', d' \in \{0,1\}\}$ und somit $R_{0,1,0,0} = \min\{R'_{m_0} \cup R''_{m_1}, R'_{m_1} \cup R''_{m_0}, R'_{m_1} \cup R''_{m_1}\}$, wobei R'_{m_0} die Menge mit kleinstem Gewicht aus der Menge $\{R'_{0,0,c,d} \mid c, d \in \{0,1\}\}$ ist, R'_{m_1} die Menge mit kleinstem Gewicht aus der Menge $\{R'_{0,1,c,d} \mid c, d \in \{0,1\}\}$ ist, R''_{m_0} die Menge mit kleinstem Gewicht aus der Menge $\{R''_{0,0,c,d} \mid c, d \in \{0,1\}\}$ ist und R''_{m_1} die Menge mit kleinstem Gewicht aus der Menge $\{R''_{0,1,c,d} \mid c, d \in \{0,1\}\}$ ist,
- $r_{1,0,0,0} = \min\{r'_{1,0,c,d} + r''_{0,0,c',d'}, r'_{0,0,c,d} + r''_{1,0,c',d'} \mid c, d, c', d' \in \{0,1\}\}$ und somit $R_{1,0,0,0} = \min\{R'_{m_1} \cup R''_{m_0}, R'_{m_0} \cup R''_{m_1}\}$, wobei R'_{m_0} die Menge mit kleinstem Gewicht aus der Menge $\{R'_{0,0,c,d} \mid c, d \in \{0,1\}\}$ ist, R'_{m_1} die Menge mit kleinstem Gewicht aus der Menge $\{R'_{1,0,c,d} \mid c, d \in \{0,1\}\}$ ist, R''_{m_0} die Menge mit kleinstem Gewicht aus der Menge $\{R''_{0,0,c,d} \mid c, d \in \{0,1\}\}$ ist und R''_{m_1} die Menge mit kleinstem Gewicht aus der Menge $\{R''_{1,0,c,d} \mid c, d \in \{0,1\}\}$ ist.

Siehe Tabelle 5.3.

Für jeden Knoten des Co-Baums T können die 12 kleinsten gewichteten 2-adjazent-trennenden Mengen für die entsprechenden Teilgraphen von G in einer konstanten Anzahl von Schritten berechnet werden. Da die Anzahl der Knoten in T linear zur Anzahl der Knoten des Co-Graphen ist, ist die Laufzeit des vorgestellten Algorithmus linear in der Anzahl der Knoten im Co-Graphen. \square

	$G_1 = (\{v_1\}, \emptyset) \cup G_2 = (\{v_2\}, \emptyset)$
$r_{0,0,0,0}$	∞
$r_{0,0,0,1}$	∞
$r_{0,0,1,0}$	∞
$r_{0,0,1,1}$	∞
$r_{0,1,0,0}$	∞
$r_{0,1,0,1}$	∞
$r_{0,1,1,0}$	$c(v_1) + c(v_2)$
$r_{0,1,1,1}$	∞
$r_{1,0,0,0}$	∞
$r_{1,0,0,1}$	∞
$r_{1,0,1,0}$	∞
$r_{1,0,1,1}$	∞
$r_{1,1,0,0}$	∞
$r_{1,1,0,1}$	∞
$r_{1,1,1,0}$	∞
$r_{1,1,1,1}$	∞

Tab. 5.1: Berechnung von $r_{a,b,c,d}$ für die Vereinigung zweier isolierter Knoten

	$G_1 = (\{v_1\}, \emptyset) \cup G_2 = (V_2, E_2)$
$r_{0,0,0,0}$	∞
$r_{0,0,0,1}$	∞
$r_{0,0,1,0}$	∞
$r_{0,0,1,1}$	∞
$r_{0,1,0,0}$	$c(v_1) + \min \begin{Bmatrix} r''_{0,0,0,0}, \\ r''_{0,0,1,0}, \\ r''_{0,1,0,0}, \\ r''_{0,1,1,0} \end{Bmatrix}$
$r_{0,1,0,1}$	∞
$r_{0,1,1,0}$	$c(v_1) + \min \begin{Bmatrix} r''_{0,0,0,1}, \\ r''_{0,0,1,1}, \\ r''_{0,1,0,1}, \\ r''_{0,1,1,1} \end{Bmatrix}$
$r_{0,1,1,1}$	∞
$r_{1,0,0,0}$	$r''_{0,0,0,0}$
$r_{1,0,0,1}$	$r''_{0,0,0,1}$
$r_{1,0,1,0}$	$r''_{0,0,1,0}$
$r_{1,0,1,1}$	$r''_{0,0,1,1}$
$r_{1,1,0,0}$	∞
$r_{1,1,0,1}$	∞
$r_{1,1,1,0}$	∞
$r_{1,1,1,1}$	∞

Tab. 5.2: Berechnung von $r_{a,b,c,d}$ für die Vereinigung eines isolierten Knotens und eines Co-Graphen mit mindestens zwei Knoten

	$G_1 = (V_1, E_1) \cup G_2 = (V_2, E_2)$
$r_{0,0,0,0}$	$\min\{r'_{0,0,c,d} \mid c, d \in \{0,1\}\} + \min\{r''_{0,0,c,d} \mid c, d \in \{0,1\}\}$
$r_{0,0,0,1}$	∞
$r_{0,0,1,0}$	∞
$r_{0,0,1,1}$	∞
$r_{0,1,0,0}$	$\min \left\{ \begin{array}{l} r'_{0,0,c,d} + r''_{0,1,c',d'}, \\ r'_{0,1,c,d} + r''_{0,0,c',d'}, \\ r'_{0,1,c,d} + r''_{0,1,c',d'} \end{array} \middle c, d, c', d' \in \{0,1\} \right\}$
$r_{0,1,0,1}$	∞
$r_{0,1,1,0}$	$c(v_1) + c(v_2)$
$r_{0,1,1,1}$	∞
$r_{1,0,0,0}$	$\min \left\{ \begin{array}{l} r'_{1,0,c,d} + r''_{0,0,c',d'}, \\ r'_{0,0,c,d} + r''_{1,0,c',d'} \end{array} \middle c, d, c', d' \in \{0,1\} \right\}$
$r_{1,0,0,1}$	∞
$r_{1,0,1,0}$	∞
$r_{1,0,1,1}$	∞
$r_{1,1,0,0}$	∞
$r_{1,1,0,1}$	∞
$r_{1,1,1,0}$	∞
$r_{1,1,1,1}$	∞

Tab. 5.3: Berechnung von $r_{a,b,c,d}$ für die Vereinigung zweier Co-Graphen mit mindestens zwei Knoten

6 Die lokale metrische Dimension planarer Graphen

Díaz et al. zeigten in [48] die NP-Vollständigkeit der metrischen Dimension für planare Graphen. In dem Beweis wird von der NP-vollständigen 3-SAT-Variante 1-NEGATIVE PLANAR 3-SAT reduziert. Es folgt eine kurze Beweisskizze. In 1-NEGATIVE PLANAR 3-SAT kommt jede Variable in der Klauselmenge genau einmal negativ und ein- oder zweimal positiv vor. Jede Klausel enthält zwei oder drei verschiedene Variablen. Wenn eine Klausel drei verschiedene Variablen enthält, ist genau eine Variable negativ. Der Klausel-Variablen-Graph ist planar. In der Reduktion wird in dem Klausel-Variablen-Graphen jeder Klauselknoten durch ein Klauselgadget und jeder Variablenknoten durch ein Variablen-gadget so ersetzt, dass die Planarität erhalten bleibt. Anschließend wird gezeigt, dass der Klausel-Variablen-Graph genau dann die metrische Dimension $4 \cdot n$ hat, wobei n die Anzahl der Variablen ist, wenn eine erfüllende Belegung für die Instanz existiert.

Im Folgenden wird erläutert, wie das Vorgehen aus [48] erweitert werden kann, um die NP-Vollständigkeit der lokalen metrischen Dimension von planaren Graphen zu zeigen.

6.1 Definitionen und Problemstellung

Definition 6.1.1. Sei X eine Menge von Variablen. Ein Literal ist eine Variable $x \in X$ (positives Literal) oder die Negation $\neg x$ einer Variable $x \in X$ (negatives Literal). Eine Klausel c ist eine Menge von Literalen. Eine Belegung für X ist eine Abbildung $t : X \rightarrow \{\text{True}, \text{False}\}$. Eine Klausel c wird von einer Belegung t für X erfüllt, wenn c mindestens ein Literal enthält, das mit True belegt ist. Eine Menge von Klauseln über X ist erfüllbar, wenn es eine Belegung t für X gibt, die jede Klausel erfüllt.

Definition 6.1.2 (Klausel-Variablen-Graph). Sei $F = (X, C)$, wobei X eine Menge von Variablen und C eine Menge von Klauseln ist. Der Klausel-Variablen-Graph G_F ist der Graph $(X \cup C, \{\{x, c\} \mid x \in X, c \in C, x \in c \vee \neg x \in c\})$.

1-NEGATIVE PLANAR 3-SAT

Gegeben: $F = (X, C)$, wobei X eine Menge von Variablen und C eine Menge von Klauseln ist, sodass

1. jede Klausel zwei oder drei verschiedene Literale enthält,
2. jede Variable genau einmal negativ und ein- oder zweimal positiv vorkommt,
3. jede Klausel, die drei verschiedene Literale enthält, genau eine negative Variable enthält,
4. der Klausel-Variablen-Graph G_F planar ist.

Frage: Gibt es eine Belegung der Variablen, die alle Klauseln in C erfüllt?

Theorem 6.1.3. 1-NEGATIVE PLANAR 3-SAT ist NP-Vollständig [48].

6.2 Planare Lokale Metrische Dimension ist NP-vollständig

PLANARE LOKALE METRISCHE DIMENSION

Gegeben: Ein planarer Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Ist $ldim(G) \leq k$?

Theorem 6.2.1. PLANARE LOKALE METRISCHE DIMENSION ist NP-vollständig.

Beweis Wir erweitern die Beweisidee in [48] und geben eine Reduktion von 1-NEGATIVE PLANAR 3-SAT an.

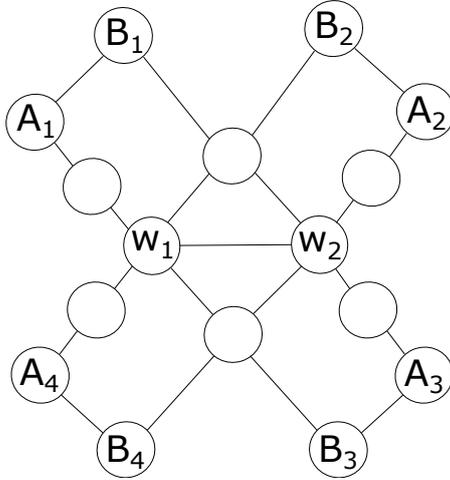


Abb. 6.1: Klauselgadget g_c

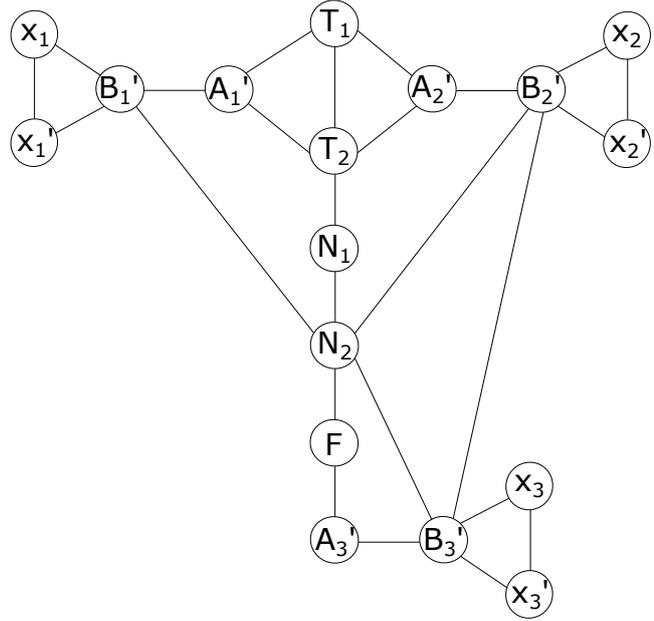


Abb. 6.2: Variablen gadget g_x

Sei g_c das *Klauselgadget* in Abbildung 6.1 und g_x das *Variablen gadget* in Abbildung 6.2. Die beiden Knotenpaare A'_1, B'_1 und A'_2, B'_2 des Variablen gadgets nennen wir *True-Ausgänge*. Das Knotenpaar A'_3, B'_3 des Variablen gadgets nennen wir *False-Ausgang*. Die Knotenpaare $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4$ eines Klauselgadgets nennen wir *Klausel-eingänge*. Sei $F = (X, C)$ eine 1-NEGATIVE PLANAR 3-SAT-Instanz. Wir erzeugen eine PLANARE LOKALE METRISCHE DIMENSION-Instanz H_F , indem wir in dem Klausel-Variablen-Graphen G_F jeden Klauselknoten c durch ein Klauselgadget g_c , jeden Variablenknoten x durch ein Variablen gadget g_x , jede Kante $\{x, c\}$ durch zwei Kanten $\{A'_i, A_j\}, \{B'_i, B_j\}$, $i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, ersetzen und anschließend Kantenkontraktionen durchführen. Um zu zeigen, dass H_F planar ist, geben wir eine planare Einbettung an. Dazu bestimmen wir eine planare Einbettung von G_F und führen die beschriebenen Ersetzungen so durch, dass die Planarität erhalten bleibt.

Sei $\varphi(G_F)$ eine planare Einbettung von G_F . Eine solche Einbettung kann in linearer Zeit gefunden werden [95]. Wir ersetzen in $\varphi(G_F)$ jeden Klauselknoten durch ein Klauselgadget und betten es wie in Abbildung 6.1 dargestellt ein. Wir ersetzen jeden Variablenknoten durch ein Variablen gadget, betten es wie in Abbildung 6.2 dargestellt ein und orientieren es wie folgt: Sei x eine Variable und c eine Klausel, sodass x in c als negatives Literal vorkommt. Dann wird das Variablen gadget für x so rotiert, dass der False-Ausgang in die Richtung des Klauselgadgets für c zeigt (d.h. wir rotieren das Variablen gadget so, dass die euklidische Distanz von dem Knoten A'_3 in dem Variablen gadget zum Schwerpunkt des Klauselgadgets minimal ist). Da die Klausel- und Variablen gadgets planar sind, ist auch der Graph mit den beschriebenen Ersetzungen planar. Es fehlt noch zu zeigen,

dass die Gadgets in geeigneter Weise durch Kanten verbunden werden können, ohne die Planarität zu zerstören. Jede Kante $e = \{x, c\}$ in G_F wird ersetzt durch zwei Kanten $a_e = \{A'_i, A_j\}$ und $b_e = \{B'_i, B_j\}$, $i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2,3,4\}$, die einen True- bzw. False-Ausgang eines Variablengadgets mit einem Klauselzugang verbinden. Dabei soll für alle Kanten e_1, e_2 gelten, dass $a_{e_1} \cap a_{e_2} = \emptyset$ und $b_{e_1} \cap b_{e_2} = \emptyset$. Da jede Kante e in $E(G_F)$ ohne Kantenkreuzung eingebettet ist, können die Kanten a_e und b_e genau dann kreuzungsfrei eingebettet werden, wenn es eine Einbettung gibt, in der sich a_e und b_e gegenseitig nicht kreuzen.

Wir ersetzen zuerst die Kanten $e = \{x, c\}$, sodass x als positives Literal in c vorkommt. Ist $i = 1$, so ist eine kreuzungsfreie Einbettung von a_e und b_e genau dann möglich, wenn $j = 1$ oder $j = 3$. Ist $i = 2$, so ist eine kreuzungsfreie Einbettung von a_e und b_e genau dann möglich, wenn $j = 2$ oder $j = 4$. Da jede Klausel höchstens zwei positive Literale enthält und für jeden True-Ausgang zwei Klauselzugänge existieren, die eine kreuzungsfreie Einbettung von a_e und b_e erlauben, können alle Kanten e , sodass x als positives Literal in c vorkommt, geeignet durch zwei Kanten a_e, b_e ersetzt werden, ohne die Planarität zu zerstören.

Es bleibt zu zeigen, dass auch die Kanten $e = \{x, c\}$, sodass x als negatives Literal in c vorkommt, geeignet durch zwei Kanten a_e, b_e ersetzt werden können. Ist $i = 3$, so ist eine kreuzungsfreie Einbettung von a_e und b_e genau dann möglich, wenn $j = 1$ oder $j = 3$. Sind beide Klauselzugänge A_1, B_1 und A_3, B_3 bereits mit True-Ausgängen von Variablengadgets verbunden, so spiegeln wir das Variablengadget an der Geraden durch die Knoten T_1, A'_3 und ersetzen alle Kanten $\{A'_1, A_j\}, \{B'_1, B_j\}$ durch $\{A'_2, A_j\}, \{B'_2, B_j\}$ und alle Kanten $\{A'_2, A_j\}, \{B'_2, B_j\}$ durch $\{A'_1, A_j\}, \{B'_1, B_j\}$, $j \in \{1,2,3,4\}$. Durch die Kantenersetzungen bleibt die Einbettung nach der Spiegelung planar. In dem gespiegelten Variablengadget ist eine kreuzungsfreie Einbettung der Kanten a_e und b_e für $i = 3$ möglich, wenn $j = 2$ oder $j = 4$ ist.

Abschließend kontrahieren wir alle Kanten $\{A'_i, A_j\}$ und $\{B'_i, B_j\}$, $i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2,3,4\}$, zu einem Knoten A_i bzw. B_i . Der so konstruierte planare Graph H_F ist unsere PLANARE LOKALE METRISCHE DIMENSION-Instanz. Die Abbildungen 6.3 - 6.6 zeigen die Konstruktion an einem Beispiel. Abbildung 6.3 zeigt den Klausel-Variablen-Graphen G_F für $F = \{c_1 = \{\neg x_1, x_2, x_5\}, c_2 = \{x_1, \neg x_2, x_3\}, c_3 = \{x_2, \neg x_3, x_4\}, c_4 = \{x_3, \neg x_4, x_5\}\}$ mit $X = \{x_1, \dots, x_5\}$ und $C = \{c_1, \dots, c_4\}$. Abbildung 6.4 zeigt den Graphen H_F ohne Kanten, der dadurch entsteht, dass die Klausel- und Variablenknoten durch Klausel- und Variablengadgets ersetzt werden. Abbildung 6.5 zeigt den Graphen H_F mit den True-Kanten und Abbildung 6.6 zeigt den finalen Graphen H_F .

In jeder lokal trennenden Menge für H_F ist einer der Knoten x_1, x'_1 , einer der Knoten x_2, x'_2 und einer der Knoten x_3, x'_3 aus jedem Variablengadget enthalten, da diese

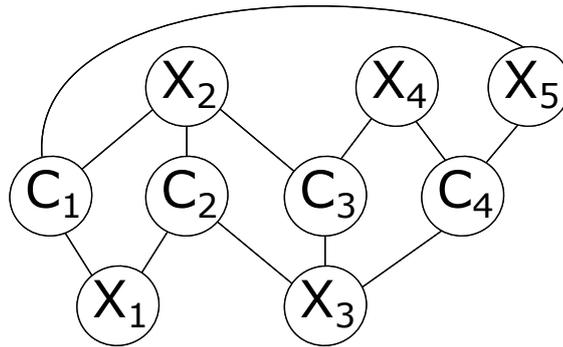


Abb. 6.3: Die Abbildung zeigt den Klausel-Variablen-Graphen G_F für $F = \{c_1 = \{\neg x_1, x_2, x_5\}, c_2 = \{x_1, \neg x_2, x_3\}, c_3 = \{x_2, \neg x_3, x_4\}, c_4 = \{x_3, \neg x_4, x_5\}\}$

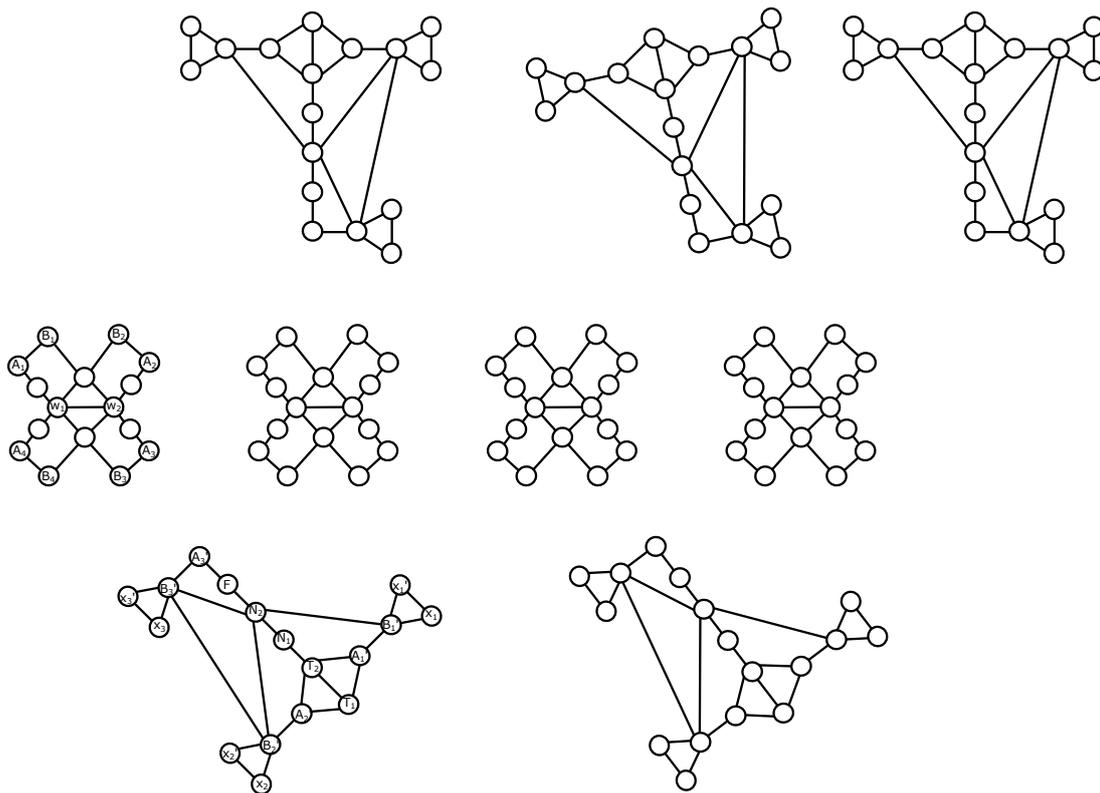


Abb. 6.4: Die Abbildung zeigt den Graphen H_F ohne Kanten, der dadurch entsteht, dass die Klausel- und Variablenknoten in dem Graphen 6.3 durch die entsprechenden Klausel- und Variablengadgets ersetzt werden. Die False-Ausgänge der Variablengadgets sind in Richtung der Klauselgadgets rotiert, in denen die Variable negiert vorkommt.

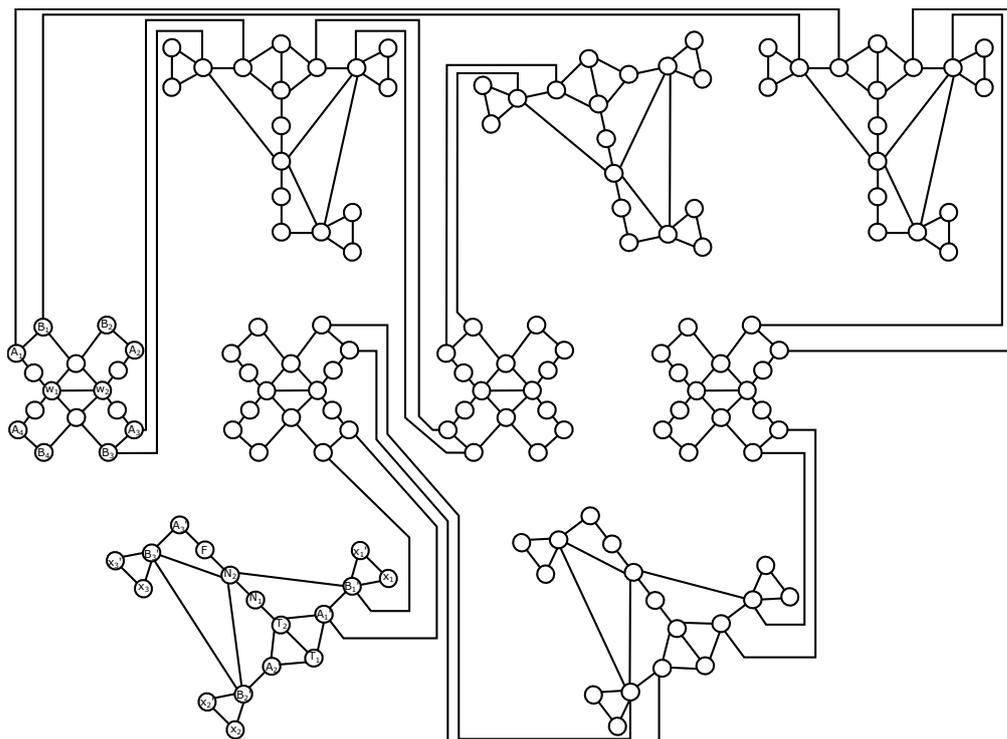


Abb. 6.5: Die Abbildung zeigt den Graphen H_F aus Abbildung 6.4 nach dem Einfügen der True-Kanten.

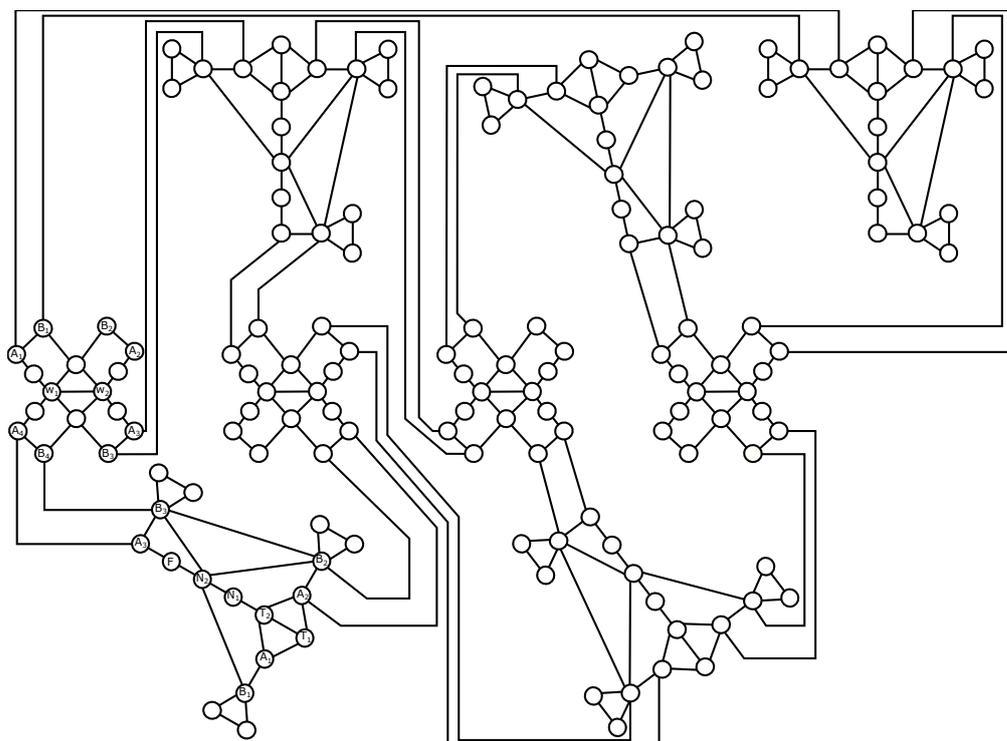


Abb. 6.6: Die Abbildung zeigt den Graphen H_F aus Abbildung 6.5 nach dem Einfügen der False-Kanten. Da in der Klausel c_1 die beiden Eingänge A_1, B_1 und A_3, B_3 bereits mit True-Ausgängen von Variablengadgets verbunden sind, wird das Variablengadget der Variable x_1 gespiegelt.

Knotenpaare jeweils die gleiche Nachbarschaft besitzen und von keinem anderen Knoten getrennt werden können. Diese Ankerknoten nennen wir *fixe* Ankerknoten. Es folgt $ldim(H_F) \geq 3 \cdot n$, wobei n die Anzahl der Variablen ist. Die fixen Ankerknoten trennen jedes benachbarte Knotenpaar im eigenen Variablengadget, bis auf das Knotenpaar T_1, T_2 , und jedes benachbarte Knotenpaar in einem benachbarten Klauselgadget, bis auf das Knotenpaar w_1, w_2 . Das Knotenpaar T_1, T_2 hat zu den Knoten $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ und somit auch zu jedem Knoten in einem Klauselgadget oder einem anderen Variablengadget die gleiche Distanz. Daher können T_1, T_2 nur von einem Knoten im eigenen Variablengadget, und zwar von einem der Knoten T_1, T_2, N_1, N_2, F , getrennt werden. Daraus folgt, dass $ldim(H_F) \geq 4 \cdot n$. Wir zeigen, dass $ldim(H_F) = 4 \cdot n$ genau dann, wenn es eine erfüllende Belegung für F gibt.

„ \Leftarrow “: Sei eine erfüllende Belegung für F gegeben. Wir zeigen, dass $ldim(H_F) = 4 \cdot n$ ist. Konstruiere H_F wie beschrieben. In jedem Variablengadget in H_F wählen wir die drei fixen Ankerknoten. Zusätzlich wählen wir den Knoten T_1 , wenn die entsprechende Variable mit True belegt ist und den Knoten F , wenn die entsprechende Variable mit False belegt ist. Aus den vorangegangenen Überlegungen ergibt sich, dass jedes benachbarte Knotenpaar in einem Variablengadget und jedes benachbarte Knotenpaar in einem Klauselgadget, bis auf das Paar w_1, w_2 , getrennt wird. Es ist also noch zu zeigen, dass auch das Knotenpaar w_1, w_2 getrennt wird. Das Knotenpaar w_1, w_2 wird genau dann von dem Knoten T_1 eines benachbarten Variablengadgets g_x getrennt, wenn einer der beiden True-Ausgänge von g_x mit einem Eingang des Klauselgadgets verbunden wurde und es wird genau dann von dem Knoten F eines benachbarten Variablengadgets g_x getrennt, wenn der False-Ausgang von g_x mit einem Eingang des Klauselgadgets verbunden wurde. Daher trennt der Knoten T_1 bzw. F in dem Variablengadget der Variable, die die Klausel erfüllt, das Knotenpaar w_1, w_2 . Da in jedem Variablengadget vier trennende Knoten gewählt wurden, ist $ldim(H_F) = 4 \cdot n$.

„ \Rightarrow “: Sei $ldim(H_F) = 4 \cdot n$. Wir konstruieren eine erfüllende Belegung für F . In jedem Variablengadget ist einer der Knoten T_1, T_2, N_1, N_2, F ein Ankerknoten. Ist T_1 oder T_2 ein Ankerknoten, so wird die entsprechende Variable mit True belegt. Ist F ein Ankerknoten, so wird die entsprechende Variable mit False belegt. Sind N_1 oder N_2 Ankerknoten, so wird die entsprechende Variable entweder mit True oder mit False belegt. Diese Belegung ist genau dann erfüllend, wenn es für jedes Knotenpaar w_1, w_2 eines Klauselgadgets einen Ankerknoten in einem benachbarten Variablengadget gibt, das w_1, w_2 trennt. Offensichtlich trennt weder N_1 , noch N_2 das Knotenpaar w_1, w_2 in einem benachbarten Klauselgadget. Zu zeigen ist also, dass das Knotenpaar w_1, w_2 auch nicht durch einen Ankerknoten in einem Variablengadget, das nicht benachbart ist, getrennt wird. Das Knotenpaar w_1, w_2 wird genau dann von einem Ankerknoten r getrennt, wenn es keinen kürzesten Weg von r nach w_1 oder w_2 gibt, der einen Knoten B_j , $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, aus dem eigenen Klauselgadget enthält. Ein kürzester Weg von einem Ankerknoten aus einem

nicht benachbarten Variablen- und Klauselgadgets enthält Knoten aus mindestens zwei verschiedenen Variablen- und Klauselgadgets, d.h. ein kürzester Weg von einem Ankerknoten aus einem nicht benachbarten Variablen- und Klauselgadget „durchläuft“ mindestens zwei Variablen- und Klauselgadgets. Für das Durchlaufen eines Klauselgadgets gilt: Es gibt einen kürzesten Weg durch das Klauselgadget, der einen Knoten B_j enthält. Für das Durchlaufen eines Variablengadgets gilt: Wenn das Variablengadget durch einen Knoten B_j „betreten“ wird, wird das Variablengadget auch durch einen Knoten B_i , $i \neq j$, „verlassen“. Daraus folgt, dass es für jeden Ankerknoten einen kürzesten Weg zu einem Knotenpaar w_1, w_2 eines nicht benachbarten Klauselgadgets gibt, der einen Knoten B_j des entsprechenden Klauselgadgets enthält und somit w_1, w_2 nicht trennt. \square

7 Gewichtete und fehlertolerante metrische Dimension von Sonnengraphen

Dieses Kapitel behandelt die Graphklasse der sogenannten *Sonnengraphen*. Im ersten Teil untersuchen wir die gewichtete metrische Dimension von Sonnengraphen. Auch Epstein et al. haben sich mit diesem Problem beschäftigt, allerdings unter der Bezeichnung „hairy cycle“. In [51] stellen sie einen Algorithmus mit einer Laufzeit aus $\mathcal{O}(|V|^4)$ zur Bestimmung der gewichteten metrischen Dimension von Sonnengraphen vor. Wir verbessern dieses Ergebnis, indem wir einen Algorithmus mit einer Laufzeit aus $\mathcal{O}(|V|^2)$ angeben. Im zweiten Teil dieses Kapitel untersuchen wir die fehlertolerante metrische Dimension von Sonnengraphen und stellen einen Linearzeitalgorithmus für ihre Berechnung vor.

7.1 Die gewichtete metrische Dimension von Sonnengraphen

7.1.1 Definitionen und Ergebnisse

Notation 7.1.1. Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Abbildungen

$$\oplus_n : \{1, \dots, n\}^2 \longrightarrow \{1, \dots, n\}, \quad (i, j) \mapsto (i + j - 1 \pmod n) + 1$$

$$\ominus_n : \{1, \dots, n\}^2 \longrightarrow \{1, \dots, n\}, \quad (i, j) \mapsto (i - j - 1 \pmod n) + 1$$

Ist n aus dem Kontext bekannt, schreiben wir kurz $i \oplus j$ bzw. $i \ominus j$, statt $\oplus_n(i, j)$ bzw. $\ominus_n(i, j)$.

Definition 7.1.2 (Sonnengraph). Ein Sonnengraph S_{m_1, m_2, \dots, m_n} mit $n, m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, ist der Graph (V, E) mit der Knotenmenge

$$V = \{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,m_1}, \quad v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{2,m_2}, \dots, \quad v_{n,1}, v_{n,2}, \dots, v_{n,m_n}\}$$

und der Kantenmenge

$$E = \{\{v_{i,1}, v_{i \oplus 1, 1}\} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{\{v_{i,j}, v_{i,j+1}\} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < m_i\}$$

Die Knoten $v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{n,1}$ induzieren einen Kreis und heißen Kreisknoten. Die Knoten $v_{i,2}, v_{i,3}, \dots, v_{i,m_i}$ induzieren einen Weg mit $m_i - 1$ Knoten, den wir Leg (am Knoten $v_{i,1}$) nennen. Diese Knoten heißen Legknoten (am Knoten $v_{i,1}$).

Sei im Folgenden $S := S_{m_1, m_2, \dots, m_n}$, mit $n, m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Lemma 7.1.3. *Sei $S = (V, E)$ ein Sonnengraph und sei $R \subseteq V$ eine kleinste trennende Menge für S . Dann gilt $\nexists i \in \{1, \dots, n\} : v_{i,j} \in R \wedge v_{i,j'} \in R, \quad j, j' \in \{1, \dots, m_i\}, j \neq j'$ [51].*

In einer kleinsten trennenden Menge für einen Sonnengraphen S gibt es keine zwei trennenden Knoten, die auf demselben Leg liegen. Dieses Lemma gilt auch für eine kleinste gewichtete trennende Menge [51].

Lemma 7.1.4. [93] *Sei S ein Sonnengraph.*

1. *Es gibt keine trennende Menge für S mit genau einem Knoten.*
2. *Für $n = 4$ gibt es eine trennende Menge für S mit zwei Knoten.*
3. *Für $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1$ gibt es eine trennende Menge für S mit zwei Knoten.*
4. *Für ein ungerades n gibt es eine trennende Menge für S mit zwei Knoten.*
5. *Für ein gerades n gibt es eine trennende Menge für S mit drei Knoten.*
6. *Für ein gerades n mit $m_1, m_2, \dots, m_n > 1$ gibt es keine trennende Menge für S mit zwei Knoten.*

7.1.2 Analyse der Trenneigenschaften eines Knotens

Notation 7.1.5. *Sei $S = (V, E)$ ein Sonnengraph und $v_{i,i'} \in V$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $i' \in \{1, \dots, m_i\}$. Sei*

$$L(v_{i,i'}) = \left\{ \{v_{p,p'}, v_{q,q'}\} \mid \begin{array}{l} d(v_{i,i'}, v_{p,p'}) = d(v_{i,i'}, v_{q,q'}), \\ p, q \in \{1, \dots, n\}, p' \in \{2, \dots, m_p\}, q' \in \{2, \dots, m_q\} \end{array} \right\}$$

die Menge der Legknotenpaare, die von $v_{i,i'}$ nicht getrennt werden. Sei

$$LK(v_{i,i'}) = \left\{ \{v_{p,p'}, v_{q,q'}\} \mid \begin{array}{l} d(v_{i,i'}, v_{p,p'}) = d(v_{i,i'}, v_{q,q'}), \\ p, q \in \{1, \dots, n\}, p' = 1, q' \in \{2, \dots, m_q\} \end{array} \right\}$$

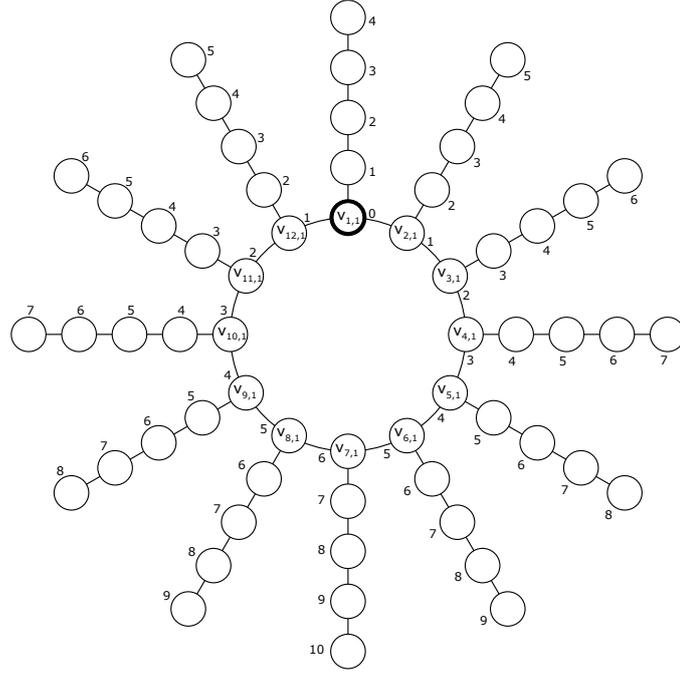


Abb. 7.1: Die Abbildung zeigt den Sonnengraphen S mit den 12 Kreisknoten $v_{1,1}, \dots, v_{12,1}$. Die Zahlenwerte an den Knoten geben den Abstand zum Knoten $v_{1,1}$ an. Knoten mit dem gleichen Zahlenwert werden nicht von $v_{1,1}$ getrennt. Diese Knotenpaare sind in der Menge $T(v_{1,1})$ enthalten.

die Menge der Knotenpaare, die von $v_{i,i'}$ nicht getrennt werden, sodass der eine Knoten ein Legknoten und der andere Knoten ein Kreisknoten ist. Sei

$$K(v_{i,i'}) = \left\{ \{v_{p,p'}, v_{q,q'}\} \mid \begin{array}{l} d(v_{i,i'}, v_{p,p'}) = d(v_{i,i'}, v_{q,q'}), \\ p, q \in \{1, \dots, n\}, p' = q' = 1 \end{array} \right\}$$

die Menge der Kreisknotenpaare, die von $v_{i,i'}$ nicht getrennt werden. Sei $T(v_{i,i'}) = L(v_{i,i'}) \cup LK(v_{i,i'}) \cup K(v_{i,i'})$ die Menge der Knotenpaare, die nicht von $v_{i,i'}$ getrennt werden. Die Abbildungen 7.1 - 7.4 zeigen jeweils ein Beispiel für diese Mengen.

Lemma 7.1.6. Sei $S = (V, E)$ ein Sonnengraph und $v_{i,i'}, v_{j,j'} \in V$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i' \in \{1, \dots, m_i\}$, $j' \in \{1, \dots, m_j\}$. Sei $\{v_{p,p'}, v_{q,q'}\} \in L(v_{i,i'})$, $p, q \in \{1, \dots, n\}$, $p \neq q$, $1 < p' \leq q' \leq m_q$. Trennt $v_{j,j'}$ das Knotenpaar $\{v_{p,1}, v_{q,q'-p'+1}\} \in LK(v_{i,i'}) \cup K(v_{i,i'})$, dann trennt $v_{j,j'}$ auch das Knotenpaar $\{v_{p,p'}, v_{q,q'}\} \in L(v_{i,i'})$.

Beweis Wir zeigen: Trennt $v_{j,j'}$ das Paar $\{v_{p,1}, v_{q,q'-p'+1}\} \in LK(v_{i,i'}) \cup K(v_{i,i'})$ so wird auch das Paar $\{v_{p,p'}, v_{q,q'}\} \in L(v_{i,i'})$ getrennt.

Ist $j \neq \{p, q\}$, dann verläuft jeder Weg von $v_{p,p'}$ zu $v_{j,j'}$ über $v_{p,1}$ und jeder Weg von $v_{q,q'}$ zu $v_{j,j'}$ verläuft über $v_{q,q'-p'+1}$. Da $d(v_{p,p'}, v_{p,1}) = d(v_{q,q'}, v_{q,q'-p'+1})$, trennt $v_{j,j'}$ das Knotenpaar $\{v_{p,p'}, v_{q,q'}\}$, wenn es das Paar $\{v_{p,1}, v_{q,q'-p'+1}\}$ trennt.

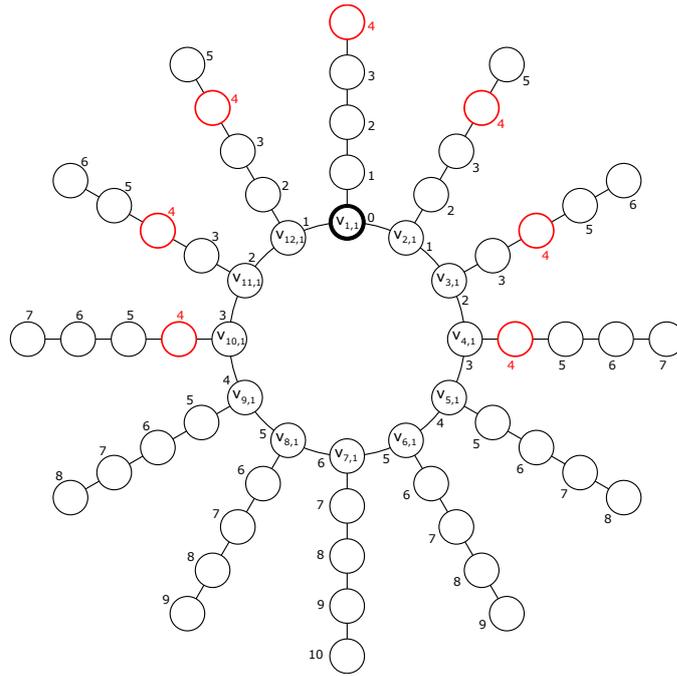


Abb. 7.2: Die Abbildung zeigt den Sonnengraphen S mit den 12 Kreisknoten $v_{1,1}, \dots, v_{12,1}$. Die Zahlenwerte an den Knoten geben den Abstand zum Knoten $v_{1,1}$ an. Die Menge $L(v_{1,1})$ enthält die Legknotenpaare, deren Zahlenwerte gleich sind. In S gibt es sieben Legknoten, deren Abstand zu $v_{1,1}$ vier ist. Diese Knoten sind in der Abbildung rot markiert. Für diese sieben Knoten enthält die Menge $L(v_{1,1})$ 21 Knotenpaare.

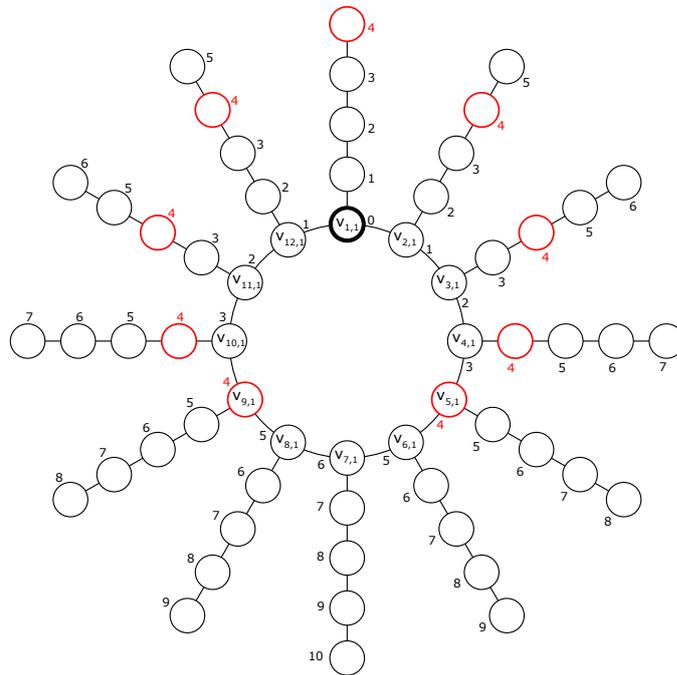


Abb. 7.3: Die Abbildung zeigt den Sonnengraphen S mit den 12 Kreisknoten $v_{1,1}, \dots, v_{12,1}$. Die Zahlenwerte an den Knoten geben den Abstand zum Knoten $v_{1,1}$ an. Die Menge $LK(v_{1,1})$ enthält die Leg-Kreis-Knotenpaare, deren Zahlenwerte gleich sind. In S gibt es sieben Legknotenpaare und zwei Kreisknoten, deren Abstand zu $v_{1,1}$ vier ist. Diese Knoten sind in der Abbildung rot markiert. Für diese neun Knoten enthält die Menge $LK(v_{1,1})$ 14 Knotenpaare.

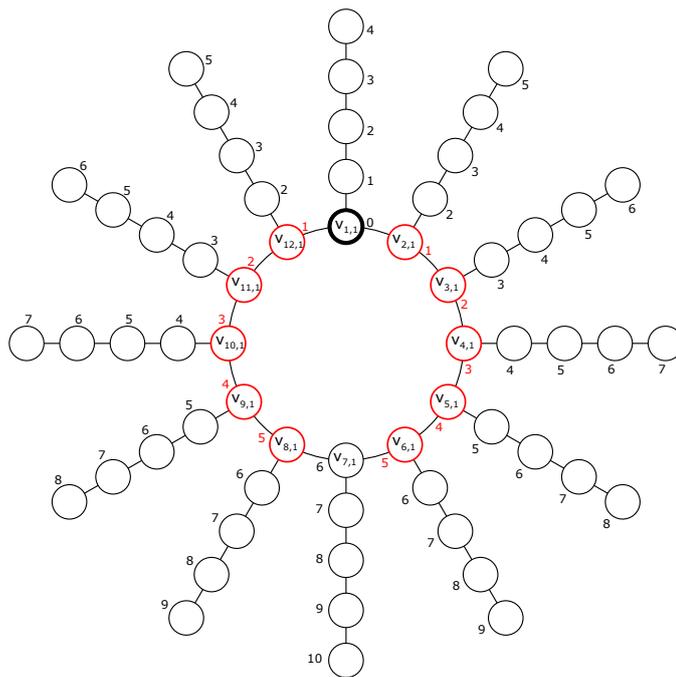


Abb. 7.4: Die Abbildung zeigt den Sonnengraphen S mit den 12 Kreisknoten $v_{1,1}, \dots, v_{12,1}$. Die Zahlenwerte an den Knoten geben den Abstand zum Knoten $v_{1,1}$ an. Die Menge $K(v_{1,1})$ enthält die Kreisknotenpaare, deren Zahlenwerte gleich sind. In S gibt es je zwei Kreisknoten mit den Abständen 1,2,3,4 und 5 zu $v_{1,1}$. Diese Knoten sind in der Abbildung rot markiert. Für diese Knoten enthält die Menge $L(v_{1,1})$ genau 5 Knotenpaare.

Ist $j = p$, so trennt offensichtlich jeder Knoten $v_{j,j'}$ mit $j' \geq p'$ das Knotenpaar $\{v_{p,p'}, v_{q,q'}\}$.
Ist $j' < p'$, dann trennt $v_{j,j'}$, da $p' \leq q'$ ist.

Ist $j = q$, so trennt offensichtlich jeder Knoten $v_{j,j'}$ mit $j' \geq q'$ das Knotenpaar $\{v_{p,p'}, v_{q,q'}\}$.
Ist $j' < q'$, so ist $d(v_{p,p'}, v_{j,j'}) = d(v_{p,p'}, v_{p,1}) + d(v_{p,1}, v_{j,j'}) \neq d(v_{p,p'}, v_{p,1}) + d(v_{q,q'-p'+1}, v_{j,j'})$
 $= d(v_{q,q'}, v_{q,q'-p'+1}) + d(v_{q,q'-p'+1}, v_{j,j'}) = d(v_{q,q'}, v_{j,j'})$. \square

Bemerkung 7.1.7. Für ein Knotenpaar $\{v_{p,p'}, v_{q,q'}\} \in L(v_{i,i'})$ gilt $i = p$. Dann trennt jeder Knoten $v_{j,j'}$ mit $v_{j,j'} \neq v_{i,i'}$ das Knotenpaar $\{v_{p,p'}, v_{q,q'}\}$.

Lemma 7.1.8. Sei $S = (V, E)$ ein Sonnengraph und $v_{i,i'}, v_{j,j'} \in V$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i' \in \{1, \dots, m_i\}$, $j' \in \{1, \dots, m_j\}$. Der Knoten $v_{j,j'}$ trennt die Knotenpaare in $K(v_{i,i'})$ genau dann, wenn $j \neq i$ und $j \neq i \oplus \frac{n}{2}$.

Beweis „ \Rightarrow “: Sei $v_{j,j'} \in V$ ein Knoten, der die Paare in $K(v_{i,i'})$ trennt. Offensichtlich ist $j \neq i$, da ansonsten $K(v_{i,i'}) = K(v_{j,j'})$. Ist $j = i \oplus \frac{n}{2}$, so ist n gerade und $K(v_{j,j'}) = \{\{v_{i \oplus \frac{n}{2} \oplus k, 1}, v_{i \oplus \frac{n}{2} \ominus k, 1}\} \mid k \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}\} = K(v_{i,i'})$.

„ \Leftarrow “: Sei $j \neq i$ und $j \neq i \oplus \frac{n}{2}$. Dann trennt offensichtlich jeder Knoten $v_{j,1}$ die Paare in $K(v_{i,i'})$. Da $v_{j,1}$ trennt, trennt auch jeder Knoten $v_{j,j'}$ mit $j' > 1$. \square

Korollar 7.1.9. Sei $S = (V, E)$ ein Sonnengraph. Die Menge $R = \{v_{i,i'}, v_{j,j'}\} \subseteq V$ ist eine trennende Menge für S , wenn $j \neq i$ und $j \neq i \oplus \frac{n}{2}$ und $v_{j,j'}$ die Knotenpaare aus $LK(v_{i,i'})$ trennt.

Im Folgenden werden die Knotenpaare in $LK(v_{i,i'})$ für ein $v_{i,i'} \in V$ genauer analysiert.

Definition 7.1.10. Sei $S = (V, E)$ ein Sonnengraph. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ sei

$$NL(i) = \{\{v_{i \ominus 1,1}, v_{i,2}\}, \{v_{i \ominus 2,1}, v_{i,3}\}, \dots, \{v_{i \ominus \min\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, m_i - 1\}}, v_{i,1 + \min\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, m_i - 1\}}\}\}$$

die Menge der linken Normpaare zur Position i und

$$NR(i) = \{\{v_{i,2}, v_{i \oplus 1,1}\}, \{v_{i,3}, v_{i \oplus 2,1}\}, \dots, \{v_{i,1 + \min\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, m_i - 1\}}, v_{i \oplus \min\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, m_i - 1\},1}\}\}$$

die Menge der rechten Normpaare zur Position i .

Das Knotenpaar $\{v_{i \ominus 1,1}, v_{i,2}\} \in NL(i)$ heißt linksprimär (zur Position i). Das Knotenpaar $\{v_{i,2}, v_{i \oplus 1,1}\} \in NR(i)$ heißt rechtsprimär (zur Position i).

Sei $DL(i) :=$

$$\begin{aligned} & \{\{v_{i \ominus 2,1}, v_{i \oplus 1,2}\}, \{v_{i \ominus 3,1}, v_{i \oplus 1,3}\}, \dots, \{v_{i \ominus \min\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus 1, m_{i \oplus 1} - 1\}}, v_{i \oplus 1,1 + \min\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus 1, m_{i \oplus 1} - 1\}}\}, \\ & \{v_{i \ominus 3,1}, v_{i \oplus 2,2}\}, \{v_{i \ominus 4,1}, v_{i \oplus 2,3}\}, \dots, \{v_{i \ominus 2 \min\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus 2, m_{i \oplus 2} - 1\}}, v_{i \oplus 2,1 + \min\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus 2, m_{i \oplus 2} - 1\}}\}, \\ & \dots, \\ & \{v_{i \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1}, v_{i \oplus (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1), 2}\} \end{aligned}$$

die Menge der linken Diagonalpaare zur Position i und sei $DR(i) :=$

$$\begin{aligned} & \{\{v_{i \ominus 1,2}, v_{i \oplus 2,1}\}, \{v_{i \ominus 1,3}, v_{i \oplus 3,1}\}, \dots, \{v_{i \ominus 1,1 + \min\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus 1, m_{i \oplus 1} - 1\}}, v_{i \oplus 1 \ominus \min\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus 1, m_{i \oplus 1} - 1\},1}\}, \\ & \{v_{i \ominus 2,2}, v_{i \oplus 3,1}\}, \{v_{i \ominus 2,3}, v_{i \oplus 4,1}\}, \dots, \{v_{i \ominus 2,1 + \min\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus 2, m_{i \oplus 2} - 1\}}, v_{i \oplus 2 \ominus \min\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus 2, m_{i \oplus 2} - 1\},1}\}, \\ & \dots, \\ & \{v_{i \ominus (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1), 2}, v_{i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1}\} \end{aligned}$$

die Menge der rechten Diagonalpaare zur Position i .

Die Abbildungen 7.5 - 7.8 veranschaulichen diese Definitionen anhand eines Beispiels für jede der oben definierten Mengen.

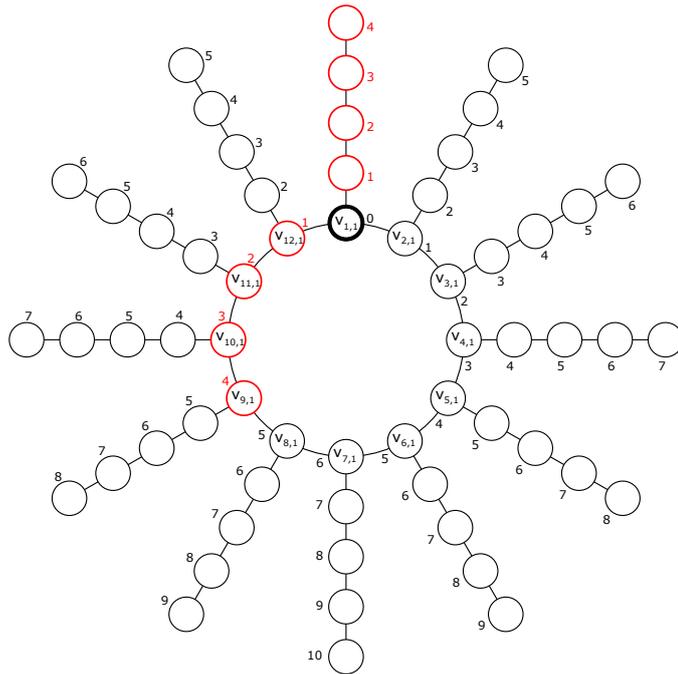


Abb. 7.5: Die Abbildung zeigt den Sonnengraphen S mit den 12 Kreisknoten $v_{1,1}, \dots, v_{12,1}$. Die rot markierten Knoten mit gleichem Zahlenwert sind die Knotenpaare aus der Menge $NL(1)$.

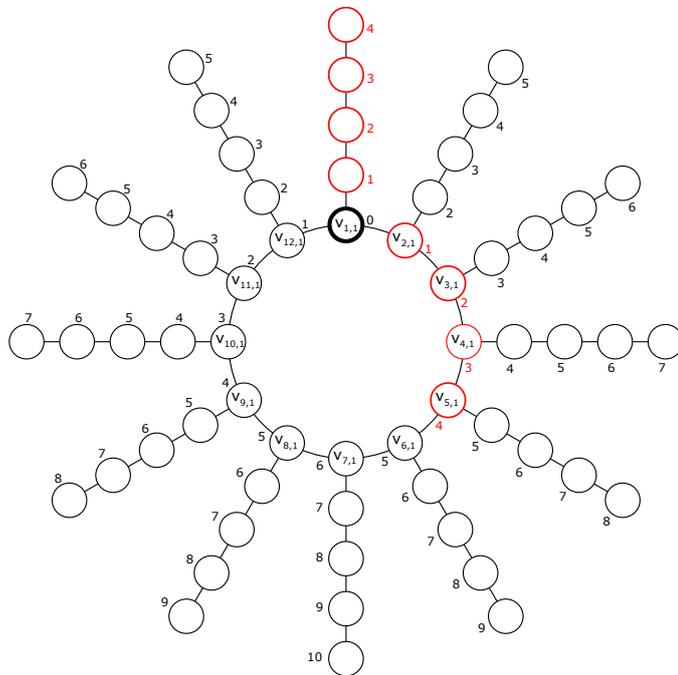


Abb. 7.6: Die Abbildung zeigt den Sonnengraphen S mit den 12 Kreisknoten $v_{1,1}, \dots, v_{12,1}$. Die rot markierten Knoten mit gleichem Zahlenwert sind die Knotenpaare aus der Menge $NR(1)$.

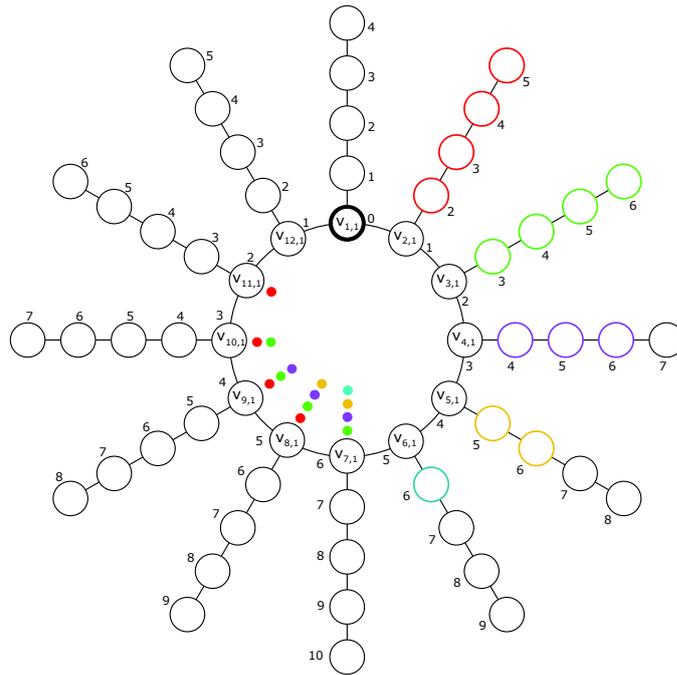


Abb. 7.7: Die Abbildung zeigt den Sonnengraphen S mit den 12 Kreisknoten $v_{1,1}, \dots, v_{12,1}$. Die Knoten mit gleichem Zahlenwert und gleicher farblicher Markierung sind die Knotenpaare aus der Menge $DL(1)$. Die farbigen Punkte an einem Knoten bedeuten eine mehrfache farbliche Markierung des entsprechenden Knotens.

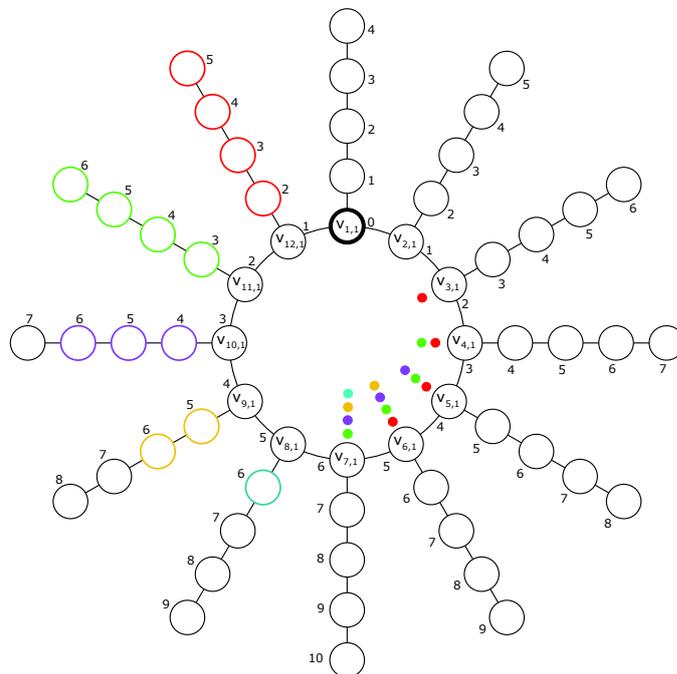


Abb. 7.8: Die Abbildung zeigt den Sonnengraphen S mit den 12 Kreisknoten $v_{1,1}, \dots, v_{12,1}$. Die Knoten mit gleichem Zahlenwert und gleicher farblicher Markierung sind die Knotenpaare aus der Menge $DR(1)$. Die farbigen Punkte an einem Knoten bedeuten eine mehrfache farbliche Markierung des entsprechenden Knotens.

Lemma 7.1.11. Sei $S = (V, E)$ ein Sonnengraph und $v_{i,i'} \in V$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $i' \in \{1, \dots, m_i\}$.

1. Ist $i' = 1$, so ist

$$\begin{aligned} LK(v_{i,i'}) &= NL(i) \cup NL(i \ominus 1) \cup \dots \cup NL(i \ominus (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)) \cup \\ &\quad NR(i) \cup NR(i \oplus 1) \cup \dots \cup NR(i \oplus (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)) \cup \\ &\quad DL(i) \cup DR(i). \end{aligned}$$

2. Ist $i' > 1$, so ist

$$\begin{aligned} LK(v_{i,i'}) &= NL(i \ominus 1) \cup \dots \cup NL(i \ominus (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)) \cup \\ &\quad NR(i \oplus 1) \cup \dots \cup NR(i \oplus (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)) \cup \\ &\quad DL(i) \cup DR(i) \cup Q(i), \end{aligned}$$

wobei

$$Q(i) = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } m_i - i' < i' - 1 \\ \{v_{i,2i'-1}, v_{i,1}\}, \\ \{v_{i,2i'}, v_{i \ominus 1, 1}\}, \{v_{i,2i'}, v_{i \oplus 1, 1}\}, \\ \{v_{i,2i'+1}, v_{i \ominus 2, 1}\}, \{v_{i,2i'+1}, v_{i \oplus 2, 1}\}, \\ \dots \\ \{v_{i,2i'+\min\{2i'-m_i, i \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}}, v_{i \ominus \min\{2i'-m_i, i \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}, 1}\}, \\ \{v_{i,2i'+\min\{2i'-m_i, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}}, v_{i \oplus \min\{2i'-m_i, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}, 1}\}, & \text{falls } m_i - i' \geq i' - 1 \end{cases}$$

Beweis Für die Knotenpaare $\{v_{p,p'}, v_{q,q'}\} \in LK(v_{i,i'})$ gilt entweder

- $p, q \in \{i, i \ominus 1, \dots, i \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, $p' = 1, q' > 1$ oder
- $p, q \in \{i, i \oplus 1, \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, $p' = 1, q' > 1$ oder
- $p \in \{i, i \ominus 1, \dots, i \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, $q \in \{i, i \oplus 1, \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, $p' = 1, q' > 1$ oder
- $p \in \{i, i \ominus 1, \dots, i \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, $q \in \{i, i \oplus 1, \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, $q' = 1, p' > 1$.

Sei $i' = 1$. Dann sind die Knotenpaare $\{v_{p,p'}, v_{q,q'}\} \in LK(v_{i,i'})$ mit $p, q \in \{i, i \ominus 1, \dots, i \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ genau die Knotenpaare in $NL(i) \cup NL(i \ominus 1) \cup \dots \cup NL(i \ominus (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1))$, siehe Abbildung 7.9. Analog dazu sind die Knotenpaare $\{v_{p,p'}, v_{q,q'}\} \in LK(v_{i,i'})$ mit $p, q \in \{i, i \oplus 1, \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ genau die Knotenpaare in $NR(i) \cup NR(i \oplus 1) \cup \dots \cup NR(i \oplus (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1))$. Abbildung 7.10 zeigt die Knotenpaare $\{v_{p,p'}, v_{q,q'}\} \in LK(v_{i,i'})$ mit $p \in \{i, i \ominus 1, \dots, i \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, $q \in$

$\{i, i \oplus 1, \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ und $p' = 1, q' > 1$. Es sind genau die Knotenpaare in $DL(i)$. Analog dazu sind die Knotenpaare mit $q' = 1$ und $p' > 1$ in der Menge $DL(i)$ enthalten.

Sei $i' > 1$. Dann sind die Knotenpaare $\{v_{p,p'}, v_{q,q'}\} \in LK(v_{i,i'})$ mit $p \in \{i, i \oplus 1, \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, $q \in \{i, i \oplus 1, \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ und $p' = 1, q' > 1$ bzw. $q' = 1, p' > 1$ die gleichen Knotenpaare, wie in dem Fall $i' = 1$ und somit ebenfalls genau die Knotenpaare aus $DL(i)$ bzw. aus $DR(i)$ enthalten, siehe Abbildung 7.11. Die Abbildung 7.12 zeigt die Knotenpaare $\{v_{p,p'}, v_{q,q'}\} \in LK(v_{i,i'})$ mit $p, q \in \{i, i \oplus 1, \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, $p' = 1$ und $q' > 1$. Alle diese Knotenpaare sind in $NL(i \ominus 1) \cup \dots \cup NL(i \ominus (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)) \cup Q(i)$ enthalten. Analog dazu sind alle Knotenpaare $\{v_{p,p'}, v_{q,q'}\} \in LK(v_{i,i'})$ mit $p, q \in \{i, i \oplus 1, \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ in der Menge $NR(i \oplus 1) \cup \dots \cup NR(i \oplus (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)) \cup Q(i)$ enthalten. \square

Lemma 7.1.12. *Sei $S = (V, E)$ ein Sonnengraph und $v_{j,j'} \in V$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $j' \in \{1, \dots, m_j\}$.*

1. *Trennt $v_{j,j'}$ das linksprimäre Knotenpaar $\{v_{i \oplus 1, 1}, v_{i, 2}\} \in NL(i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, so trennt $v_{j,j'}$ jedes Knotenpaar in $NL(i)$.*
2. *Trennt $v_{j,j'}$ das rechtsprimäre Knotenpaar $\{v_{i, 2}, v_{i \oplus 1, 1}\} \in NR(i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, so trennt $v_{j,j'}$ jedes Knotenpaar in $NR(i)$.*

Beweis

1. Sei $v_{j,j'}$ ein Knoten, der das linksprimäre Knotenpaar $\{v_{i \oplus 1, 1}, v_{i, 2}\} \in NL(i)$ trennt. Dann ist $j \in \{i, i \oplus 1, \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. Betrachte den von der Knotenmenge

$$\{v_{i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1}, \dots, v_{i \oplus 1, 1}, v_{i, 1}, v_{i, 2}, v_{i, 3}, \dots, v_{i, m_i}\}$$

induzierten Weg P . Alle Knotenpaare in $NL(i)$ liegen auf P . Für jedes Knotenpaar auf P gibt es höchstens einen Knoten in P , der das Knotenpaar nicht trennt. Der Knoten $v_{i, 1}$ trennt keines der Knotenpaare in $NL(i)$. Liegt $v_{j,j'}$ also auf dem Weg P und trennt das Knotenpaar $\{v_{i \oplus 1, 1}, v_{i, 2}\}$, so werden auch alle übrigen Knotenpaare in $NL(k)$ getrennt. Liegt $v_{j,j'}$ nicht auf dem Weg P und trennt das Knotenpaar $\{v_{i \oplus 1, 1}, v_{i, 2}\}$, dann liegt $v_{j,j'}$ auf einem Leg an einem der Knoten aus der Menge $M = \{v_{i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1}, \dots, v_{i \oplus 2, 1}, v_{i \oplus 1, 1}\}$. Da jeder Kreisknoten in M die Knotenpaare in $NL(i)$ trennt, trennt auch jeder Legknoten an einem Kreisknoten aus M die Knotenpaare in $NL(i)$.

2. Analog. \square

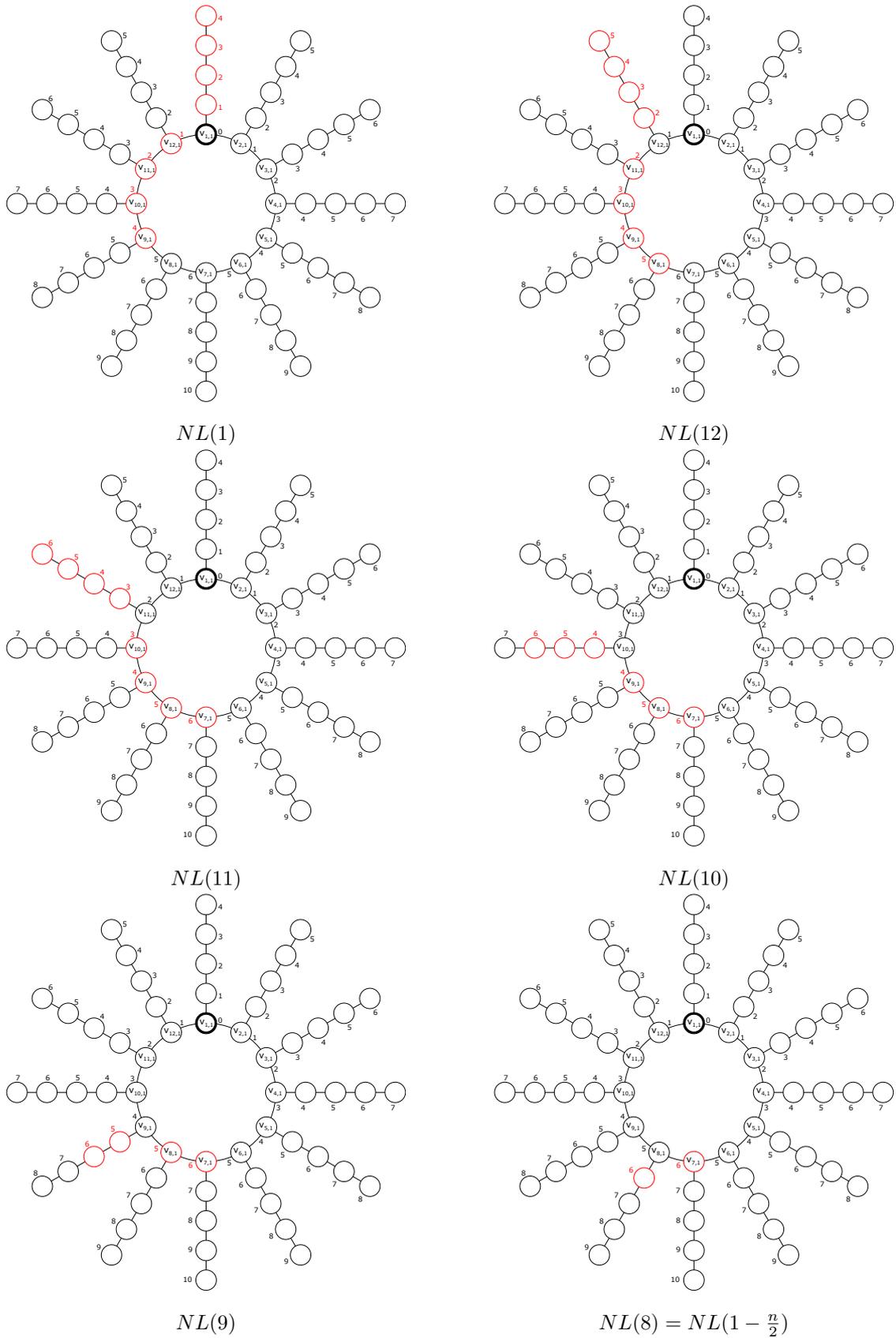


Abb. 7.9: Die Abbildungen zeigen den Sonnengraphen S mit 12 Knoten. Die Zahlenwerte an den Knoten geben den Abstand zum Knoten $v_{i,i'} = v_{1,1}$ an. Die Graphen veranschaulichen alle Knotenpaare $\{v_{p,p'}, v_{q,q'}\} \in LK(v_{i,i'})$ mit $p, q \in \{i, i \ominus 1, \dots, i \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. Das sind genau die Knotenpaare aus $NL(1) \cup NL(12) \cup NL(11) \cup NL(10) \cup NL(9) \cup NL(8)$.

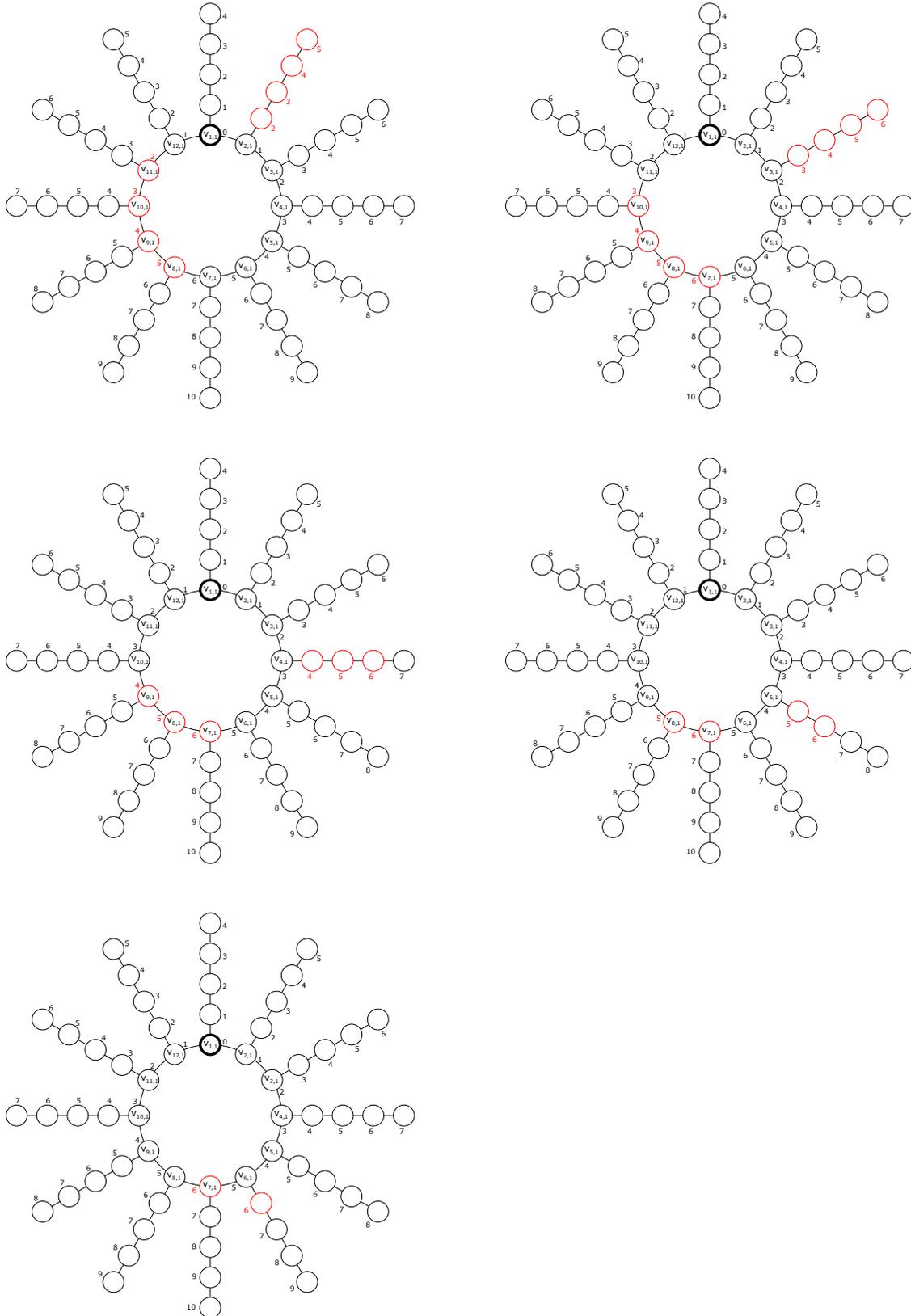


Abb. 7.10: Die Abbildungen zeigen den Sonnengraphen S mit 12 Knoten. Die Zahlenwerte an den Knoten geben den Abstand zum Knoten $v_{i,i'} = v_{1,1}$ an. Die Graphen veranschaulichen alle Knotenpaare $\{v_{p,p'}, v_{q,q'}\} \in LK(v_{i,i'})$ mit $p \in \{i, i \ominus 1, \dots, i \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, $q \in \{i, i \oplus 1, \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ und $p' = 1, q' > 1$. Das sind genau die Knotenpaare aus $DL(i)$.

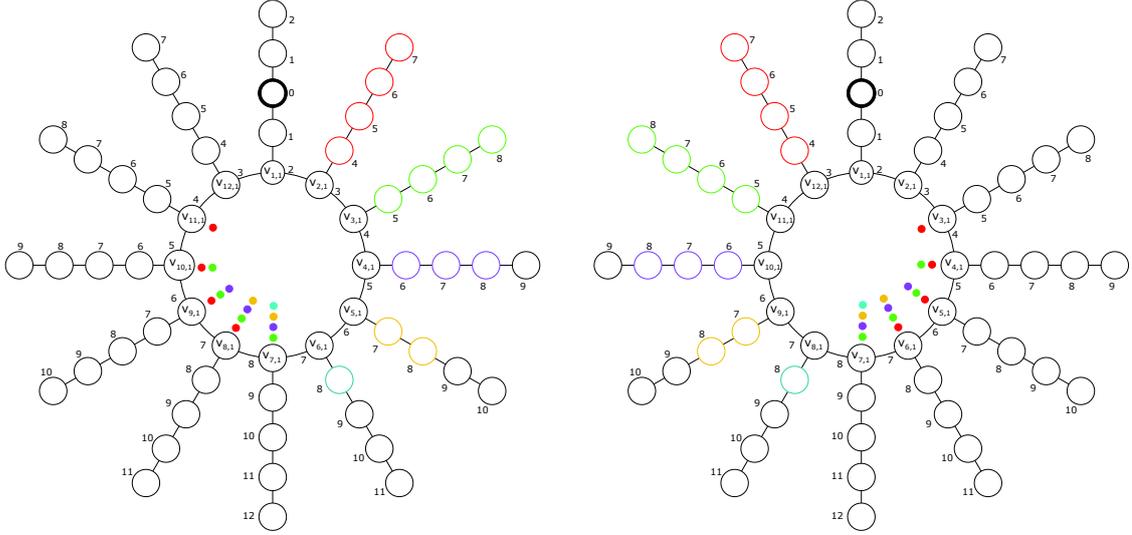


Abb. 7.11: Die Abbildung zeigt zweimal den Sonnengraphen S mit 12 Knoten. Die Zahlenwerte an den Knoten geben den Abstand zum Knoten $v_{i,i'} = v_{1,3}$ an. In dem linken Graphen sind die Knotenpaare $\{v_{p,p'}, v_{q,q'}\} \in LK(v_{i,i'})$ mit $p \in \{i, i \ominus 1, \dots, i \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, $q \in \{i, i \oplus 1, \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ und $p' = 1, q' > 1$ und in dem dem rechten Graphen mit $q' = 1, p' > 1$ farblich dargestellt. Jedes Knotenpaar mit gleicher farblicher Markierung und gleichem Zahlenwert ist in der Menge $LK(v_{i,i'})$ enthalten. Die farbigen Punkte an einem Knoten bedeuten eine mehrfache farbliche Markierung des entsprechenden Knotens. Die Knotenpaare aus $LK(v_{i,i'})$, die in dem linken Graphen dargestellt sind, sind genau die Knotenpaare aus $DL(i)$ und die Knotenpaare aus $LK(v_{i,i'})$, die in dem rechten Graphen dargestellt sind, sind genau die Knotenpaare aus $DR(i)$.

Notation 7.1.13. Sei $S = (V, E)$ ein Sonnengraph und $v_{i,i'} \in V$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $i' \in \{1, \dots, m_i\}$. Sei

$$PL(v_{i,i'}) = \begin{cases} \{\{v_{k \ominus 1, 1}, v_{k, 2}\} \mid k \in \{i, i \ominus 1, \dots, i \ominus (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)\}\}, & \text{falls } i' = 1 \\ \{\{v_{k \ominus 1, 1}, v_{k, 2}\} \mid k \in \{i \ominus 1, \dots, i \ominus (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)\}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

die Menge aller linksprimären Knotenpaare in $LK(v_{i,i'})$ und sei

$$PR(v_{i,i'}) = \begin{cases} \{\{v_{k, 2}, v_{k \oplus 1, 1}\} \mid k \in \{i, i \oplus 1, \dots, i \oplus (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)\}\}, & \text{falls } i' = 1 \\ \{\{v_{k, 2}, v_{k \oplus 1, 1}\} \mid k \in \{i \oplus 1, \dots, i \oplus (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)\}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

die Menge aller rechtsprimären Knotenpaare in $LK(v_{i,i'})$.

Lemma 7.1.14. Sei $S = (V, E)$ ein Sonnengraph und $v_{i,i'}, v_{j,j'} \in V$, $v_{i,i'} \neq v_{j,j'}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i' \in \{1, \dots, m_i\}$, $j' \in \{1, \dots, m_j\}$. Trennt $v_{j,j'}$ die Knotenpaare in $PL(v_{i,i'}) \cup PR(v_{i,i'}) \cup DL(i) \cup DR(i)$, so trennt $v_{j,j'}$ alle Knotenpaare in $LK(v_{i,i'})$.

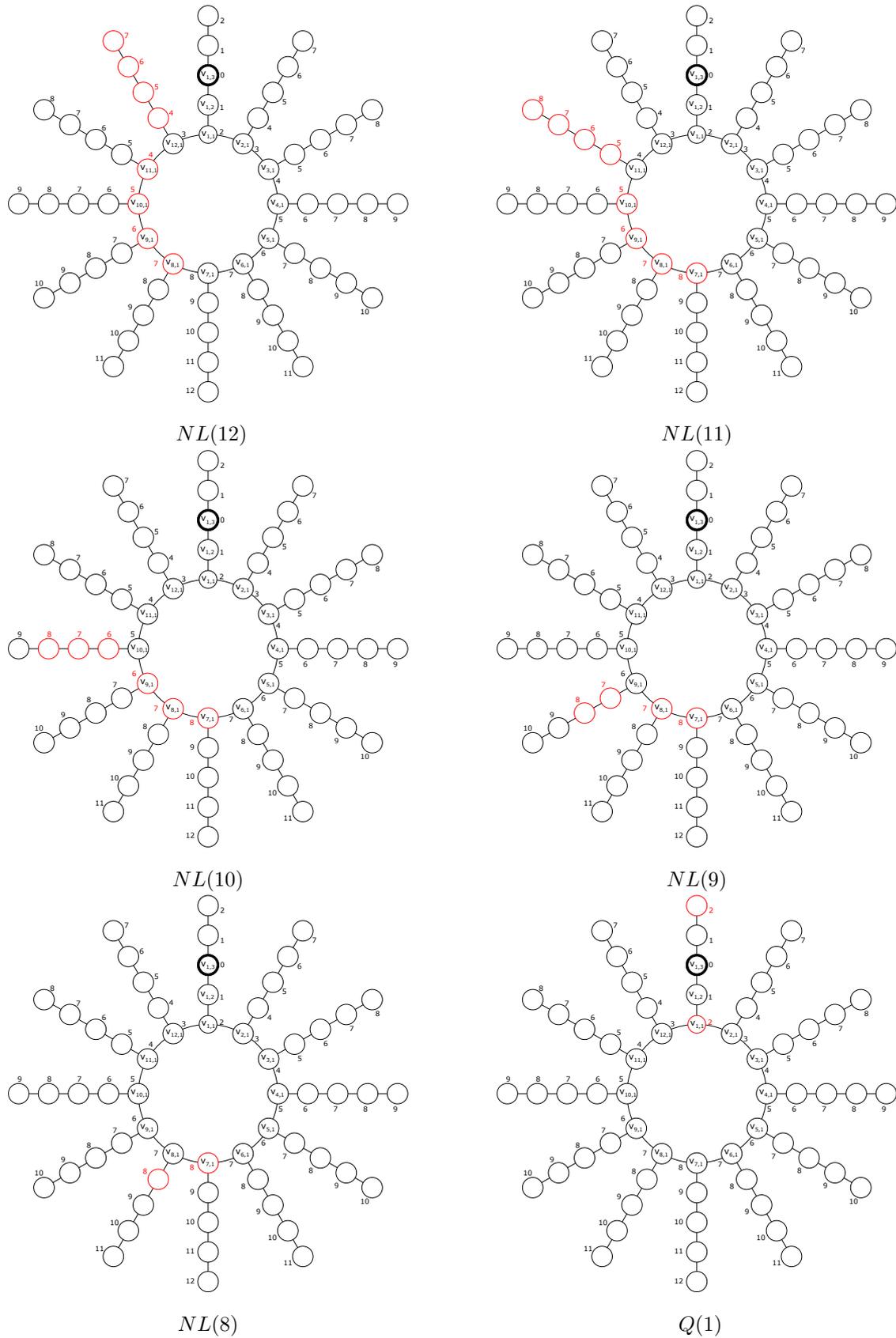


Abb. 7.12: Die Abbildungen zeigen den Sonnengraphen S mit 12 Knoten. Die Zahlenwerte an den Knoten geben den Abstand zum Knoten $v_{i,i'} = v_{1,3}$ an. Die Graphen veranschaulichen alle Knotenpaare $\{v_{p,p'}, v_{q,q'}\} \in LK(v_{i,i'})$ mit $p, q \in \{i, i \ominus 1, \dots, i \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. Das sind genau die Knotenpaare aus $NL(12) \cup NL(11) \cup NL(10) \cup NL(9) \cup NL(8) \cup Q(1)$.

Beweis Sei $i' = 1$, dann folgt die Aussage aus Lemma 7.1.12. Ist $i' > 1$, dann ist noch zu zeigen, dass die Knotenpaare aus der Menge $Q(i)$ getrennt werden. Ist $m_i - i' < i' - 1$, dann ist die Menge $Q(i)$ leer. Ist $m_i - i' \geq i' - 1$, dann ist

$$\begin{aligned} Q(i) = & \{ \{v_{i,2i'}, v_{i,1}\}, \{v_{i,2i'+1}, v_{i\ominus 1,1}\}, \{v_{i,2i'+1}, v_{i\oplus 1,1}\}, \\ & \{v_{i,2i'+2}, v_{i\ominus 2,1}\}, \{v_{i,2i'+2}, v_{i\oplus 2,1}\}, \\ & \dots, \\ & \{v_{i,2i'+\min\{2i'-m_i, i\ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}}, v_{i\ominus \min\{2i'-m_i, i\ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}, 1}\}, \\ & \{v_{i,2i'+\min\{2i'-m_i, i\oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}}, v_{i\oplus \min\{2i'-m_i, i\oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}, 1}\} \end{aligned}$$

Offensichtlich trennt jeder Knoten $v_{j,j'} \neq v_{i,i'}$ die Knotenpaare in $Q(i)$. \square

7.1.3 Eigenschaften einer trennenden Menge mit zwei/drei Ankerknoten

Lemma 7.1.15. Sei $S = (V, E)$ ein Sonnengraph. Die Menge $R = \{v_{i,i'}, v_{j,j'}\} \subseteq V$, $j \ominus i \leq \frac{n}{2}$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i' \in \{1, \dots, m_i\}$, $j' \in \{1, \dots, m_j\}$, ist eine trennende Menge für S genau dann, wenn

1. $j \neq i \oplus \frac{n}{2}$
2. $PL(v_{i,i'}) \cap PL(v_{j,j'}) = \emptyset$
3. $PR(v_{i,i'}) \cap PR(v_{j,j'}) = \emptyset$
4. $DL(i) \cap DR(j) = \emptyset$

Beweis „ \Rightarrow “: Sei R eine trennende Menge für S . Sei $T(v_{i,i}) = L(v_{i,i'}) \cup LK(v_{i,i'}) \cup K(v_{i,i'})$ die Menge der Knotenpaare, die von $v_{i,i'}$ nicht getrennt werden und $T(v_{j,j'}) = L(v_{j,j'}) \cup LK(v_{j,j'}) \cup K(v_{j,j'})$ die Menge der Knotenpaare, die von $v_{j,j'}$ nicht getrennt werden. Da R eine trennende Menge ist, ist $T(v_{i,i'}) \cap T(v_{j,j'}) = \emptyset$. Es gilt $PL(v_{i,i'}), PR(v_{i,i'}), DL(i) \subseteq T(v_{i,i'})$ und $PL(v_{j,j'}), PR(v_{j,j'}), DL(i) \subseteq T(v_{j,j'})$. Daraus folgen die Aussagen 2. - 4. Die erste Aussage folgt aus $K(v_{i,i'}) \cap K(v_{j,j'}) = \emptyset$.

„ \Leftarrow “: Wir zeigen, dass $v_{j,j'}$ alle Knotenpaare in $T(v_{i,i}) = L(v_{i,i'}) \cup LK(v_{i,i'}) \cup K(v_{i,i'})$ trennt, wenn die Aussagen 1. - 4. gelten. Nach Korollar 7.1.9 reicht es zu zeigen, dass $v_{j,j'}$ die Knotenpaare in $LK(v_{i,i'})$ trennt. Nach Lemma 7.1.14 reicht es zu zeigen, dass

$v_{j,j'}$ die Knotenpaare in $PL(v_{i,i'}) \cup PR(v_{i,i'}) \cup DL(i) \cup DR(i)$ trennt, d.h.

$$\begin{aligned} T(v_{j,j'}) \cap (PL(v_{i,i'}) \cup PR(v_{i,i'}) \cup DL(i) \cup DR(i)) &= \emptyset \\ \Leftrightarrow LK(v_{j,j'}) \cap (PL(v_{i,i'}) \cup PR(v_{i,i'}) \cup DL(i) \cup DR(i)) &= \emptyset \\ \Leftrightarrow (PL(v_{j,j'}) \cup PR(v_{j,j'})) \cap (PL(v_{i,i'}) \cup PR(v_{i,i'})) &= \emptyset \wedge \\ (DL(j) \cup DR(j)) \cap (DL(i) \cup DR(i)) &= \emptyset \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $DL(j) \cap DL(i) = \emptyset$ und $DR(j) \cap DR(i) = \emptyset$ für alle $j \neq i$. Daraus folgt, dass $v_{j,j'}$ die Knotenpaare in $LK(v_{i,i'})$ trennt, wenn $PL(v_{j,j'}) \cap PL(v_{i,i'}) = \emptyset \wedge PR(v_{j,j'}) \cap PR(v_{i,i'}) = \emptyset \wedge DL(j) \cap DR(i) = \emptyset$. \square

Korollar 7.1.16. Sei $S = (V, E)$ ein Sonnengraph und $v_{i,i'}, v_{j,j'} \in V$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i' \in \{1, \dots, m_i\}$, $j' \in \{1, \dots, m_j\}$, $i \neq j \neq i \oplus \frac{n}{2}, j \ominus i \leq \frac{n}{2}$.

1. Für $i' = 1$ ist $PL(v_{i,i'}) \cap PL(v_{j,j'}) = \emptyset \Leftrightarrow (m_{j \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1} = m_{j \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 2} = \dots = m_i = 1)$.
Für $i' \neq 1$ ist $PL(v_{i,i'}) \cap PL(v_{j,j'}) = \emptyset \Leftrightarrow (m_{j \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1} = m_{j \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 2} = \dots = m_{i \oplus 1} = 1)$.
2. Für $i' = 1$ ist $PR(v_{i,i'}) \cap PR(v_{j,j'}) = \emptyset \Leftrightarrow (m_{i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1} = m_{i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 2} = \dots = m_j = 1)$.
Für $i' = 1$ ist $PR(v_{i,i'}) \cap PR(v_{j,j'}) = \emptyset \Leftrightarrow (m_{i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1} = m_{i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 2} = \dots = m_{j \oplus 1} = 1)$.
3. $DL(i) \cap DR(j) = \emptyset \Leftrightarrow n$ ist ungerade oder $(m_{i \oplus 1} \leq \frac{n}{2} - (j \ominus i) \wedge m_{i \oplus 2} \leq \frac{n}{2} - (j \ominus i) \wedge \dots \wedge m_{j \ominus 1} \leq \frac{n}{2} - (j \ominus i))$.

Lemma 7.1.17. Sei $S = (V, E)$ ein Sonnengraph. Sei $R' = \{v_{i,i'}, v_{j,j'}\} \subseteq V$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i' \in \{1, \dots, m_i\}$, $j' \in \{1, \dots, m_j\}$, $j \ominus i \leq \frac{n}{2}$, $i \neq j$, keine trennende Menge für S . Die Menge $R = R' \cup \{v_{k,k'}\} \subseteq V$, $k \in \{j \oplus 1, j \oplus 2, \dots, i \ominus 2, i \ominus 1\}$, $i \neq k \neq j$, ist eine trennende Menge für S genau dann, wenn

1. $PL(v_{i,i'}) \cap PL(v_{j,j'}) \cap PL(v_{k,k'}) = \emptyset$
2. $PR(v_{i,i'}) \cap PR(v_{j,j'}) \cap PR(v_{k,k'}) = \emptyset$

Beweis „ \Rightarrow “: Sei R eine trennende Menge für S . Dann ist $T(v_{i,i'}) \cap T(v_{j,j'}) \cap T(v_{k,k'}) = \emptyset$. Da $PL(v_{l,l'}), PR(v_{l,l'}) \subseteq T(v_{l,l'})$, $l \in \{i, j, k\}$, $l' \in \{i', j', k'\}$, folgen die Aussagen 1. und 2.

„ \Leftarrow “: Wir zeigen, dass $v_{k,k'}$ alle Knotenpaare in $T(v_{i,i'}) \cap T(v_{j,j'}) \neq \emptyset$ trennt, wenn die Aussagen 1. und 2. gelten. $T(v_{i,i'}) \cap T(v_{j,j'}) \neq \emptyset \Leftrightarrow$

1. $K(v_{i,i'}) \cap K(v_{j,j'}) \neq \emptyset$ oder

2. $LK(v_{i,i'}) \cap LK(v_{j,j'}) \neq \emptyset$ oder

3. $L(v_{i,i'}) \cap L(v_{j,j'}) \neq \emptyset$

Ist $K(v_{i,i'}) \cap K(v_{j,j'}) \neq \emptyset$, dann ist $j = i \oplus \frac{n}{2}$. Da $i \neq k \neq j$, trennt $v_{k,k'}$ nach Lemma 7.1.8 die Knotenpaare in $K(v_{i,i'}) \cap K(v_{j,j'})$.

Trennt $v_{k,k'}$ die Knotenpaare in $LK(v_{i,i'}) \cap LK(v_{j,j'})$, dann werden nach Lemma 7.1.6 auch die Knotenpaare $L(v_{i,i'}) \cap L(v_{j,j'})$ getrennt. Wir zeigen daher: Wenn

1. $PL(v_{i,i'}) \cap PL(v_{j,j'}) \cap PL(v_{k,k'}) = \emptyset$ und

2. $PR(v_{i,i'}) \cap PR(v_{j,j'}) \cap PR(v_{k,k'}) = \emptyset$,

dann trennt $v_{k,k'}$ die Knotenpaare in $LK(v_{i,i'}) \cap LK(v_{j,j'})$. Nach Lemma 7.1.14 reicht es zu zeigen, dass $v_{k,k'}$ die Knotenpaare in $(PL(v_{i,i'}) \cup PR(v_{i,i'}) \cup DL(i) \cup DR(i)) \cap (PL(v_{j,j'}) \cup PR(v_{j,j'}) \cup DL(j) \cup DR(j))$ trennt. Nach der gleichen Argumentation wie im Beweis von Lemma 7.1.15 folgt, dass $v_{k,k'}$ die Knotenpaare in $LK(v_{i,i'}) \cap LK(v_{j,j'})$ trennt, wenn

1. $PL(v_{i,i'}) \cap PL(v_{j,j'}) \cap PL(v_{k,k'}) = \emptyset$

2. $PR(v_{i,i'}) \cap PR(v_{j,j'}) \cap PR(v_{k,k'}) = \emptyset$ □

Korollar 7.1.18. Sei $S = (V, E)$ ein Sonnengraph. Seien $v_{i,i'}, v_{j,j'}, v_{k,k'} \in V$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \{j \oplus 1, j \oplus 2, \dots, i \ominus 2, i \ominus 1\}$, $j \ominus i \leq \frac{n}{2}$, $i \neq j \neq k \neq i$, $i' \in \{1, \dots, m_i\}$, $j' \in \{1, \dots, m_j\}$, $k' \in \{1, \dots, m_k\}$.

1. Ist $k \in \{i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1, \dots, j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, dann ist $PL(v_{i,i'}) \cap PL(v_{j,j'}) \cap PL(v_{k,k'}) = \emptyset$ und $PR(v_{i,i'}) \cap PR(v_{j,j'}) \cap PR(v_{k,k'}) = \emptyset$.

2. Ist $k \in \{j \oplus 1, j \oplus 2, \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus 1\}$, dann ist

$$\begin{aligned} & PR(v_{i,i'}) \cap PR(v_{j,j'}) \cap PR(v_{k,k'}) = \emptyset \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m_k = m_{k \oplus 1} = \dots = m_{i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus 1} = 1, & \text{falls } k' = 1 \\ m_{k \oplus 1} = \dots = m_{i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus 1} = 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & PL(v_{i,i'}) \cap PL(v_{j,j'}) \cap PL(v_{k,k'}) = \emptyset \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m_{k \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1} = m_{k \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 2} = \dots = m_i = 1, & \text{falls } i' = 1 \\ m_{k \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1} = m_{k \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 2} = \dots = m_{i \ominus 1} = 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

3. Ist $k \in \{i \ominus 1, i \ominus 2, \dots, j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1\}$, dann ist

$$\begin{aligned} & PL(v_{i,i'}) \cap PL(v_{j,j'}) \cap PL(v_{k,k'}) = \emptyset \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m_k = m_{k \ominus 1} = \dots = m_{j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1} = 1, & \text{falls } k' = 1 \\ m_{k \ominus 1} = \dots = m_{j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1} = 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & PR(v_{i,i'}) \cap PR(v_{j,j'}) \cap PR(v_{k,k'}) = \emptyset \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m_{k \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus 1} = m_{k \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus 2} = \dots = m_j = 1, & \text{falls } j' = 1 \\ m_{k \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus 1} = m_{k \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus 2} = \dots = m_{j \oplus 1} = 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

4. Ist $k \in \{i, i \oplus 1, \dots, j \oplus 1, j\}$, dann ist

$$PR(v_{i,i'}) \cap PR(v_{j,j'}) \cap PR(v_{k,k'}) \neq \emptyset.$$

Bemerkung 7.1.19. Aus Korollar 7.1.18, 1., folgt, dass für $R = \{v_{i,i'}, v_{j,j'}\} \subseteq V$ mit $j = i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, die Menge $R \cup \{v_{k,k'}\}$ für ein $v_{k,k'} \in V, k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, $k' \in \{1, \dots, m_k\}$, eine trennende Menge für S ist.

7.1.4 Berechnung einer trennenden Menge mit zwei/drei Ankerknoten

Lemma 7.1.20. Sei $S = (V, E)$ ein Sonnengraph, $mdim(S) = 2$ und $c : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Knotengewichtsfunktion. Eine trennende Menge $R = \{v_{i,i'}, v_{j,j'}\}$ mit kleinstem Gewicht kann in $\mathcal{O}(|V|^2)$ Schritten berechnet werden, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i' \in \{1, \dots, m_i\}$, $j' \in \{1, \dots, m_j\}$.

Beweis Um die Menge R zu berechnen, testen wir für jedes Knotenpaar $v_{i,i'}, v_{j,j'} \in V$, ob die Bedingungen in Korollar 7.1.16 erfüllt werden. Wir zeigen, dass diese Überprüfung in einer konstanten Anzahl von Schritten erfolgt. Daraus folgt die Behauptung.

In einem Vorverarbeitungsschritt wird eine *Leglängenmatrix* \mathcal{L} der Größe $n \times n$ aufgebaut. Der Eintrag $\mathcal{L}[i, j]$ gibt die Länge eines längsten Legs an, der sich an den Kreisknoten $v_{i,1}, v_{i \oplus 1,1}, \dots, v_{j,1}$ befindet. Die Matrix \mathcal{L} kann wie folgt rekursiv berechnet werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[i, i] &= m_i, \\ \mathcal{L}[i, i \oplus 1] &= \max\{\mathcal{L}[i, i], \mathcal{L}[i \oplus 1, i \oplus 1]\}, \\ \mathcal{L}[i, i \oplus k] &= \max\{\mathcal{L}[i, i \oplus k \ominus 1], \mathcal{L}[i \oplus k \ominus 1, i \oplus k]\}, \end{aligned}$$

wobei $i \in \{1, \dots, n\}, k \in \{2, \dots, n-1\}$. Die Matrix \mathcal{L} kann in $\mathcal{O}(n^2)$ Schritten berechnet werden. O.B.d.A. sei $j \ominus i \leq \frac{n}{2}$. Aus den Bedingungen in Korollar 7.1.16 folgt, dass die Menge $R = \{v_{i,i'}, v_{j,j'}\}$ mit $i' = 1$ eine trennende Menge für S ist, wenn

1. $j \neq i$ und $j \neq i \oplus \frac{n}{2}$
2. $\mathcal{L}[j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1, i] = 1$
3. $\mathcal{L}[i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus 1, j] = 1$
4. $\mathcal{L}[i \oplus 1, j \ominus 1] \leq \frac{n}{2} - (j \ominus i)$, falls n gerade

und die Menge $\{v_{i,i'}, v_{j,j'}\}$ mit $i' > 1$ eine trennende Menge für S ist, wenn

1. $j \neq i$ und $j \neq i \oplus \frac{n}{2}$
2. $\mathcal{L}[j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1, i \ominus 1] = 1$
3. $\mathcal{L}[i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus 1, j \oplus 1] = 1$
4. $\mathcal{L}[i \oplus 1, j \ominus 1] \leq \frac{n}{2} - (j \ominus i)$, falls n gerade

Eine Menge $\{v_{i,i}, v_{j,j'}\}$ mit minimalem Gewicht, die diese Bedingungen erfüllt, ist die Menge R . □

Lemma 7.1.21. *Sei $S = (V, E)$ ein Sonnengraph und $c : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Knotengewichtsfunktion. Das Gewicht einer gewichtsminimalen trennenden Menge $R = \{v_{i,i'}, v_{j,j'}, v_{k,k'}\}$ kann in $\mathcal{O}(|V|^2)$ Schritten berechnet werden, $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, $i' \in \{1, \dots, m_i\}$, $j' \in \{1, \dots, m_j\}$, $k' \in \{1, \dots, m_k\}$.*

Beweis Um die Menge R zu berechnen, bestimmen wir für jedes $v_{i,i'}, v_{j,j'} \in V$, $j \ominus i \leq \frac{n}{2}$, ein $v_{k,k'} \in V$ mit kleinstem Gewicht, sodass die Menge $\{v_{i,i'}, v_{j,j'}, v_{k,k'}\}$ eine trennende Menge für S ist. Sei $W(v_{i,i'}, v_{j,j'}) \subseteq V$ die Menge der Knoten, die die Menge $\{v_{i,i'}, v_{j,j'}\}$ zu einer trennenden Menge für S erweitert, d.h. $W(v_{i,i'}, v_{j,j'})$ ist eine Menge von Knoten, sodass für alle $v_{k,k'} \in W(v_{i,i'}, v_{j,j'})$ gilt: $\{v_{i,i'}, v_{j,j'}, v_{k,k'}\}$ ist eine trennende Menge für S . Wir berechnen die Menge $W(v_{i,i'}, v_{j,j'})$ mithilfe von Lemma 7.1.17 und Korollar 7.1.18.

Sei

$$\begin{aligned} A(i, j) &= \{v_{k,k'} \mid k \in \{j \oplus 1, j \oplus 2, \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1\}, k' \in \{1, \dots, m_k\}\}, \\ B(i, j) &= \{v_{k,k'} \mid k \in \{i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1, \dots, j \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, j \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}, k' \in \{1, \dots, m_k\}\}, \\ C(i, j) &= \{v_{k,k'} \mid k \in \{j \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1, \dots, i \oplus 2, i \oplus 1\}, k' \in \{1, \dots, m_k\}\}. \end{aligned}$$

Dann folgt aus Korollar 7.1.18, dass $W(v_{i,i'}, v_{j,j}) \subseteq A(i, j) \cup B(i, j) \cup C(i, j)$ und $B(i, j) \subseteq W(v_{i,i'}, v_{j,j})$. Um die Menge $A'(v_{i,i'}) = A(i, j) \cap W(v_{i,i'}, v_{j,j})$ zu berechnen, bestimmen wir für jede Position $i \in \{1, \dots, n\}$ einen Wert

$$h^-(i) = \begin{cases} 0, & \text{falls } m_i > 1 \\ \max\{l \mid m_{i \ominus l} = 1 \wedge m_{i \ominus l \oplus 1} = 1 \wedge \dots \wedge m_i = 1\} + 1, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist

$$A'(v_{i,i'}) = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } i' = 1 \wedge m_i > 1 \\ \{v_{l,1}, \dots, v_{l,m_l} \mid \\ l \in \{i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus h^-(i-1) \oplus 1, \\ i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus h^-(i-1), \\ \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1\}\}, & \text{falls } h^-(i \ominus 1) < h^-(i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1) \\ \{v_{l,1}, \dots, v_{l,m_l} \mid \\ l \in \{i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus h^-(i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1), \\ i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus h^-(i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1) \oplus 1, \\ \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1\}\} \\ \cup \\ \{v_{l',2}, \dots, v_{l',m_{l'}} \mid \\ l' = i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus h^-(i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1) \oplus 1\}, & \text{falls } h^-(i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1) \leq h^-(i \ominus 1) \end{cases}.$$

Dabei sei die Menge $\{v_{l,1}, \dots, v_{l,m_l} \mid l \in \{i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus m_{h^-(i)}, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ominus m_{h^-(i)} \oplus 1, \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1\}\} = \emptyset$, falls $m_{h^-(i)} = 0$. Um die Menge $C'(v_{j,j}) = C(i, j) \cap W(v_{i,i'}, v_{j,j})$ zu berechnen, bestimmen wir für jede Position $j \in \{1, \dots, n\}$ einen Wert

$$h^+(j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } m_j > 1 \\ \max\{l \mid m_{j \oplus l} = 1 \wedge m_{j \oplus l \oplus 1} = 1 \wedge \dots \wedge m_j = 1\} + 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist

$$C'(v_{j,j}) = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } j' = 1 \wedge m_j > 1 \\ \{v_{l,1}, \dots, v_{l,m_l} \mid \\ l \in \{j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus h^+(j \oplus 1) \oplus 1, \\ j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus h^+(j \oplus 1) \ominus 1, \\ \dots, j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1\} \}, & \text{falls } h^+(j \oplus 1) < h^+(j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1) \\ \{v_{l,1}, \dots, v_{l,m_l} \mid \\ l \in \{j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus h^+(j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1), \\ j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus h^+(j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1) \ominus 1, \\ \dots, j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1\} \} \\ \cup \\ \{v_{l',2}, \dots, v_{l',m_{l'}} \mid \\ l' = j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus h^+(j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1) \oplus 1\}, & \text{falls } h^+(j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1) \leq h^+(j \oplus 1) \end{cases}.$$

Dabei sei $\{v_{l,1}, \dots, v_{l,m_l} \mid l \in \{j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus h^+(j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1), j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus h^+(j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1) \ominus 1, \dots, j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1\} = \emptyset$, falls $h^+(j \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 1) = 0$. Die Werte h^- und h^+ beschreiben die Größen der beiden angrenzenden maximalen „legfreien“ Bereiche. Abbildung 7.13 erläutert diese Werte und Mengen anhand eines Beispiels.

Für die Berechnung der Werte h^+ , h^- , m_{h^-} , m_{h^+} und somit der Mengen $A'(i)$ und $C'(j)$ und letztendlich der Menge $W(v_{i,i'}, v_{j,j'})$ werden offensichtlich höchstens $\mathcal{O}(n^2)$ Schritte benötigt. Um das kleinste Knotengewicht in der Menge $W(v_{i,i'}, v_{j,j'})$ in konstanter Zeit bestimmen zu können, berechnen wir in einem Vorverarbeitungsschritt eine *Gewichtsmatrix* \mathcal{G} der Größe $n \times n$. Der Eintrag $\mathcal{G}[i, j]$ enthält das kleinste Knotengewicht der Knoten in der Menge $\{v_{i,2}, \dots, v_{i,m_i}, v_{i \oplus 1,1}, \dots, v_{i \oplus 1, m_{i \oplus 1}}, \dots, v_{j \ominus 1,1}, \dots, v_{j \ominus 1, m_{j \ominus 1}}, v_{j,2}, \dots, v_{j, m_j}\}$.

Die Matrix \mathcal{G} kann wie folgt rekursiv in $\mathcal{O}(n^2)$ Schritten berechnet werden.

$$\mathcal{G}[i, i] = \min\{v_{i,2}, \dots, v_{i,m_i}\},$$

$$\mathcal{G}[i, i \oplus 1] = \min\{\mathcal{G}[i, i], v_{i \oplus 1,2}, \dots, v_{i \oplus 1, m_{i \oplus 1}}\},$$

$$\mathcal{G}[i, i \oplus k] = \min\{\mathcal{G}[i, i \oplus (k \ominus 1)], v_{i \oplus (k \ominus 1),1}, v_{i \oplus k,2}, \dots, v_{i \oplus k, m_{i \oplus k}}\},$$

wobei $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \{2, \dots, n-1\}$. Mithilfe der Gewichtsmatrix lässt sich in konstanter Zeit das Gewicht des gewichtsminimalen Knotens in der errechneten Menge $W(v_{i,i'}, v_{j,j'})$ bestimmen.

Somit lässt sich das Gewicht einer gewichtsminimalen trennenden Menge mit drei paarweise verschiedenen Knoten insgesamt in $\mathcal{O}(|V|^2)$ Schritten bestimmen. \square

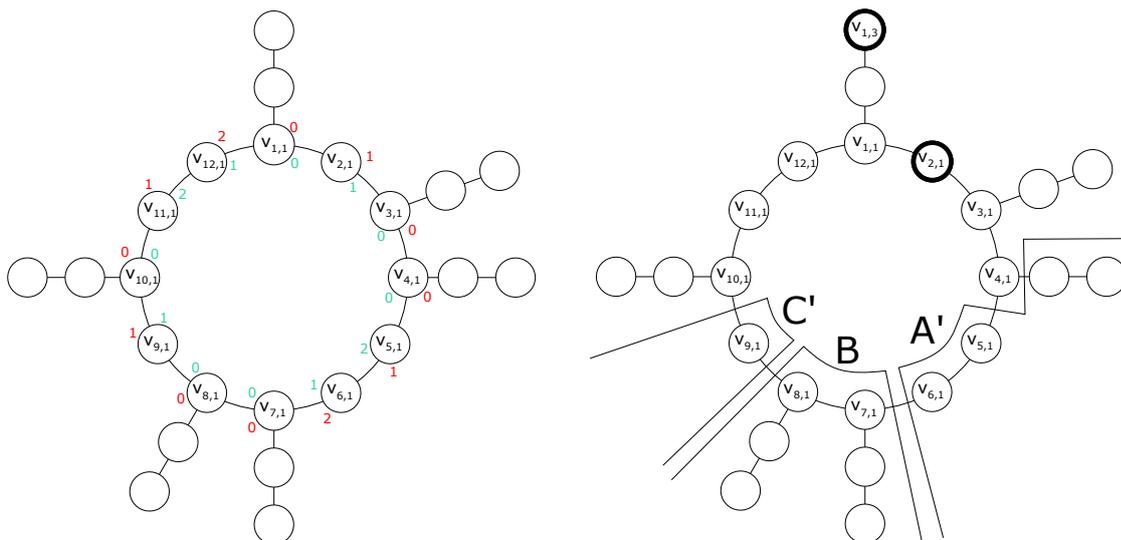


Abb. 7.13: Die Abbildung zeigt zweimal den Sonnengraphen S mit 12 Kreisknoten. In der linken Abbildung geben die roten Zahlenwerte die h^- - und die blauen Zahlenwerte die h^+ -Werte der entsprechenden Positionen an. In der rechten Abbildung werden die Mengen A' , B , C' für die beiden Ankerknoten $v_{1,3}$, $v_{2,1}$ dargestellt. Jeder Knoten in der Menge $A' \cup B \cup C'$ erweitert $\{v_{1,3}, v_{2,1}\}$ zu einer trennenden Menge.

Lemma 7.1.22. Sei $S = (V, E)$ ein Sonnengraph und sei $R \subseteq V$ eine trennende Menge für S mit $|R| \geq 4$. Dann existiert eine trennende Menge $R' \subset R$ mit $|R'| \leq 3$ für S .

Beweis Sei $R = \{v_{i,i'}, v_{j,j'}, v_{k,k'}, v_{l,l'}\} \subseteq V$ eine trennende Menge für S mit vier paarweise verschiedenen Knoten. Nach Lemma 7.1.3 sind i, j, k, l paarweise verschieden. Sei o.B.d.A. $k \in \{i \oplus 1, \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, $j \in \{i \oplus 1, \dots, k \ominus 1\}$, $l \in \{k \oplus 1, \dots, i \ominus 1\}$. Analog zur Beweisidee von Lemma 7.1.17, gilt, dass R genau dann eine trennende Menge für S ist, wenn $PL(v_{i,i'}) \cap PL(v_{j,j'}) \cap PL(v_{k,k'}) \cap PL(v_{l,l'}) = \emptyset$ und $PR(v_{i,i'}) \cap PR(v_{j,j'}) \cap PR(v_{k,k'}) \cap PR(v_{l,l'}) = \emptyset$.

Wir zeigen, dass, wenn R eine trennende Menge für S ist, dann auch $R \setminus \{v_{j,j'}\}$ eine trennende Menge für S ist.

1. Sei $k = i \oplus \frac{n}{2}$. Nach Bemerkung 7.1.19 ist $\{v_{i,i'}, v_{k,k'}, v_{l,l'}\}$ eine trennende Menge.
2. Sei $k < i \oplus \frac{n}{2}$. Da $j \in \{i \oplus 1, \dots, k \ominus 1\}$ ist, ist $PL(v_{j,j'}) \subseteq PL(v_{i,i'}) \cap PL(v_{k,k'})$. Daher ist $PL(v_{i,i'}) \cap PL(v_{j,j'}) \cap PL(v_{k,k'}) \cap PL(v_{l,l'}) = \emptyset$, wenn $PL(v_{i,i'}) \cap PL(v_{k,k'}) \cap PL(v_{l,l'}) = \emptyset$. Analog dazu ist $PR(v_{i,i'}) \cap PR(v_{j,j'}) \cap PR(v_{k,k'}) \cap PR(v_{l,l'}) = \emptyset$, wenn $PR(v_{i,i'}) \cap PR(v_{k,k'}) \cap PR(v_{l,l'}) = \emptyset$. \square

Theorem 7.1.23. Sei $S = (V, E)$ ein Sonnengraph und $c : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Knotengewichtsfunktion. Die gewichtete metrische Dimension $w\dim(S)$ kann in $\mathcal{O}(|V|^2)$ Schritten berechnet werden.

Beweis Um die gewichtete metrische Dimension eines Sonnengraphen zu berechnen, bestimmen wir mithilfe von 7.1.20 das kleinste Gewicht c_1 einer kleinsten trennenden Menge für S , die genau zwei Knoten enthält, falls eine solche trennende Menge für S existiert. Mithilfe von Lemma 7.1.21 bestimmen wir das kleinste Gewicht c_2 einer kleinsten trennenden Menge für S , die genau drei Knoten enthält. Nach Lemma 7.1.22 müssen kleinste trennende Mengen mit mindestens vier Knoten nicht betrachtet werden. Dann ist $sdim(S) = \min\{c_1, c_2\}$. Die Laufzeit folgt aus den Laufzeiten für die Berechnung von c_1 und c_2 . \square

7.2 Die fehlertolerante metrische Dimension von Sonnengraphen

7.2.1 Bestimmung der fehlertoleranten metrischen Dimension in Abhängigkeit von der Anzahl der Legs

Lemma 7.2.1. *Sei S ein Sonnengraph. Dann ist $3 \leq fdim(S) \leq 4$.*

Beweis Die fehlertolerante metrische Dimension eines Graphen G ist größer als die metrische Dimension von G . Da $2 \leq mdim(S) \leq 3$, gilt die untere Schranke. Die obere Schranke folgt aus folgender Überlegung. Die Menge

$$F = \{v_{i,m_i}, v_{i \oplus \lfloor \frac{n}{4} \rfloor, m_{i \oplus \lfloor \frac{n}{4} \rfloor}}, v_{i \ominus \lfloor \frac{n}{4} \rfloor, m_{i \ominus \lfloor \frac{n}{4} \rfloor}}, v_{i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, m_{i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}\} \subseteq V, i \in \{1, \dots, n\},$$

ist eine fehlertolerante trennende Menge für S , da für die drei Knoten in $F \setminus \{v\}$, $v \in F$, die Bemerkung 7.1.19 gilt. \square

Lemma 7.2.2. *Sei S ein Sonnengraph und $F = \{v_{i,i'}, v_{j,j'}, v_{k,k'}\} \subseteq V$ eine kleinste fehlertolerante trennende Menge für S , $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, $i' \in \{1, \dots, m_i\}$, $j' \in \{1, \dots, m_j\}$, $k' \in \{1, \dots, m_k\}$, $v_{i,i'} \neq v_{j,j'} \neq v_{k,k'} \neq v_{i,i'}$. Dann gilt*

1. $i \neq j \neq k \neq i$,
2. $j \neq i \oplus \frac{n}{2} \neq k$ und $k \neq j \oplus \frac{n}{2}$, falls n gerade ist.

Beweis

1. Sei o.B.d.A. $i = j$, dann ist $F' = \{v_{i,i'}, v_{j,j'}\}$ keine trennende Menge für S , da das Knotenpaar $\{v_{i \ominus 1,1}, v_{i \oplus 1,1}\}$ nicht getrennt wird.

2. Angenommen n ist gerade und o.B.d.A. gilt $j = i \oplus \frac{n}{2}$. Dann ist $F' = \{v_{i,i'}, v_{j,j'}\}$ keine trennende Menge für S , da das Knotenpaar $\{v_{i \ominus 1, 1}, v_{i \oplus 1, 1}\}$ nicht getrennt wird. \square

Lemma 7.2.3. Sei S ein Sonnengraph und $F = \{v_{i,i'}, v_{j,j'}, v_{k,k'}\} \subseteq V$ eine kleinste fehlertolerante trennende Menge für S , $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, $i' \in \{1, \dots, m_i\}$, $j' \in \{1, \dots, m_j\}$, $k' \in \{1, \dots, m_k\}$, $i \neq j \neq k \neq i$. Sei $i' < m_i$. Dann ist auch $F' = \{v_{i,m_i}, v_{j,j'}, v_{k,k'}\} \subseteq V$ eine kleinste fehlertolerante trennende Menge für S .

Beweis Alle Knotenpaare, die von $v_{i,i'}$ getrennt werden, werden auch von v_{i,m_i} getrennt, da alle kürzesten Wege zu v_{i,m_i} den Knoten $v_{i,i'}$ enthalten. \square

Notation 7.2.4. Sei S ein Sonnengraph und $i \in \{1, \dots, n\}$. Mit $\mathcal{L}(i)$ bezeichnen wir das Leg am Knoten $v_{i,1}$. Ist $m_i = 1$, dann sei $\mathcal{L}(i) = \emptyset$ und ist $m_i > 1$, dann sei $\mathcal{L}(i) = \{v_{i,2}, \dots, v_{i,m_i}\}$. Mit $\mathcal{L}(S) = \{\mathcal{L}(i) \mid i \in \{1, \dots, n\}, m_i > 1\}$ bezeichnen wir die Menge aller Legs im Sonnengraphen S .

Lemma 7.2.5. Sei S ein Sonnengraph mit $n \neq 4$ und $|\mathcal{L}(S)| \leq 1$. Dann ist $\text{fdim}(S) = 3$.

Beweis Ist $|\mathcal{L}(S)| = 0$, so ist S ein Kreis. Drei beliebige benachbarte Knoten bilden eine kleinste fehlertolerante trennende Menge für S . Ist $|\mathcal{L}(S)| = 1$, so ist die Menge $\{v_{i \ominus 1, 1}, v_{i,m_i}, v_{i \oplus 1, 1}\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $m_i > 1$, eine kleinste fehlertolerante trennende Menge für S . \square

Notation 7.2.6. Sei S ein Sonnengraph und $\mathcal{L}(p)$, $p \in \{1, \dots, n\}$, $m_p > 1$ ein Leg in S . Sei

- $L_{\mathcal{L}(p)} = \mathcal{L}(p) \cup \{v_{k,k'} \mid k \in \{p \ominus 1, p \ominus 2, \dots, p \ominus \lceil \frac{n}{2} \rceil\}, k' \in \{1, \dots, m_k\}\} \subseteq V$
- $R_{\mathcal{L}(p)} = \mathcal{L}(p) \cup \{v_{k,k'} \mid k \in \{p \oplus 1, p \oplus 2, \dots, p \oplus \lceil \frac{n}{2} \rceil\}, k' \in \{1, \dots, m_k\}\} \subseteq V$
- $M_{\mathcal{L}(p)} = L_{\mathcal{L}(p)} \cap R_{\mathcal{L}(p)} = \mathcal{L}(p) \cup \{v_{k,k'} \mid k \in \{p \oplus \lceil \frac{n}{2} \rceil, p \ominus \lceil \frac{n}{2} \rceil\}, k' \in \{1, \dots, m_k\}\}$

Lemma 7.2.7. Sei S ein Sonnengraph und $F = \{v_{i,i'}, v_{j,j'}, v_{k,k'}\} \subseteq V$ eine kleinste fehlertolerante trennende Menge für S , $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, $i' \in \{1, \dots, m_i\}$, $j' \in \{1, \dots, m_j\}$, $k' \in \{1, \dots, m_k\}$, $i \neq j \neq k \neq i$. Dann gilt für alle Legs $\mathcal{L}(p)$, $p \in \{1, \dots, n\}$, $m_p > 1$

1. $v_{i,i'} \in L_{\mathcal{L}(p)}$
2. $v_{j,j'} \in R_{\mathcal{L}(p)}$
3. $v_{k,k'} \in M_{\mathcal{L}(p)}$

Beweis In jeder fehlertoleranten trennenden Menge gibt es zwei Ankerknoten, die das Knotenpaar $v_{p \oplus 1, 1}, v_{p, 2}$ trennen. Offensichtlich wird das Knotenpaar $v_{p \oplus 1, 1}, v_{p, 2}$ nur von Knoten in der Menge $L_{\mathcal{L}(p)}$ getrennt. In jeder fehlertoleranten trennenden Menge gibt es zwei Ankerknoten, die das Knotenpaar $v_{p \oplus 1, 1}, v_{p, 2}$ trennen. Offensichtlich wird das Knotenpaar $v_{p \oplus 1, 1}, v_{p, 2}$ nur von Knoten in der Menge $R_{\mathcal{L}(p)}$ getrennt. Daraus folgt, dass mindestens ein Ankerknoten in der Menge $L_{\mathcal{L}(p)} \cap R_{\mathcal{L}(p)} = M_{\mathcal{L}(p)}$ ist. \square

Lemma 7.2.8. *Sei S ein Sonnengraph, n gerade und $|\mathcal{L}(S)| \geq 7$. Dann ist $fdim(S) = 4$.*

Beweis Angenommen $|\mathcal{L}(S)| \geq 7$ und $fdim(S) = 3$. Dann gilt nach Lemma 7.2.7, dass in jeder kleinsten fehlertoleranten trennenden Menge für S mindestens ein Ankerknoten aus der Menge $M_{\mathcal{L}(p)}$ ist, $\forall p \in \{1, \dots, n\}, m_p > 1$. Für n gerade ist $M_{\mathcal{L}(p)} = \mathcal{L}(p) \cup \{v_{p \oplus \frac{n}{2}, 1}, \dots, v_{p \oplus \frac{n}{2}, m_{p \oplus \frac{n}{2}}}\}$. Daraus folgt, dass Bedingung 3 aus Lemma 7.2.7 für höchstens sechs Legs erfüllt werden kann. Ist also $fdim(S) = 3$, so folgt daraus $|\mathcal{L}(S)| \leq 6$. \square

Lemma 7.2.9. *Sei S ein Sonnengraph, n ungerade und $|\mathcal{L}(S)| \geq 10$. Dann ist $fdim(S) = 4$.*

Beweis Angenommen $|\mathcal{L}(S)| \geq 10$ und $fdim(S) = 3$. Dann gilt nach Lemma 7.2.7, dass in jeder kleinsten fehlertoleranten trennenden Menge für S mindestens ein Ankerknoten aus der Menge $M_{\mathcal{L}(p)}$ ist, $\forall p \in \{1, \dots, n\}, m_p > 1$. Für n ungerade ist $\mathcal{L}(p) \cup \{v_{k, k'} \mid k \in \{p \oplus \lceil \frac{n}{2} \rceil, p \ominus \lceil \frac{n}{2} \rceil\}, k' \in \{1, \dots, m_k\}\}$. Daraus folgt, dass Bedingung 3 aus Lemma 7.2.7 für höchstens neun Legs erfüllt werden kann. Ist also $fdim(S) = 3$, so folgt daraus $|\mathcal{L}(S)| \leq 9$. \square

Definition 7.2.10. *Sei S ein Sonnengraph und seien $\mathcal{L}(i), \mathcal{L}(j) \in \mathcal{L}(S)$, $\mathcal{L}(i), \mathcal{L}(j) \neq \emptyset$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, zwei Legs. $\mathcal{L}(i)$ und $\mathcal{L}(j)$ liegen gegenüber, wenn $j = i \oplus \lceil \frac{n}{2} \rceil$ oder $j = i \ominus \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Lemma 7.2.11. *Sei S ein Sonnengraph und $|\mathcal{L}(S)| = 2$. Seien $\mathcal{L}(i), \mathcal{L}(j) \in \mathcal{L}(S)$, $\mathcal{L}(i), \mathcal{L}(j) \neq \emptyset$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist $fdim(S) = 4$ genau dann, wenn*

1. n gerade ist,
2. $\mathcal{L}(i)$ und $\mathcal{L}(j)$ gegenüber liegen,
3. $m_i > \frac{n}{2} - 2$ und $m_j > \frac{n}{2} - 2$

Beweis „ \Leftarrow “: Angenommen n ist gerade, $\mathcal{L}(i)$ und $\mathcal{L}(j)$ liegen gegenüber, und $m_i > \frac{n}{2} - 2$ und $m_j > \frac{n}{2} - 2$. Wir zeigen, dass $fdim(S) = 4$. Nach Lemma 7.2.7, Bedingung 3, gilt für $\mathcal{L}(i)$, dass in jeder fehlertoleranten trennenden Menge $F = \{v_{x, x'}, v_{y, y'}, v_{z, z'}\} \subseteq V$ für S ein Ankerknoten aus der Menge $\mathcal{L}(i) \cup \mathcal{L}(j) \cup \{v_{j, 1}\}$ ist. O.B.d.A. sei $v_{x, x'} \in \mathcal{L}(i) \cup$

$\mathcal{L}(j) \cup \{v_{j,1}\}$. Nach Lemma 7.2.7, Bedingung 1 und 2, ist ein weiterer Ankerknoten aus der Menge $L_{\mathcal{L}(i)}$ und ein weiterer Ankerknoten aus der Menge $R_{\mathcal{L}(i)}$. O.B.d.A. sei $v_{y,y'} \in L_{\mathcal{L}(i)}$ und $v_{z,z'} \in R_{\mathcal{L}(i)}$. Nach Lemma 7.2.2 gilt $v_{y,y'}, v_{z,z'} \notin \mathcal{L}(i) \cup \mathcal{L}(j) \cup \{v_{j,1}\}$, daher ist $y \in \{i \ominus 1, i \ominus 2, \dots, i \ominus \frac{n}{2} \oplus 1\}$ und $y' = 1$, und $z \in \{i \oplus 1, i \oplus 2, \dots, i \oplus \frac{n}{2} \ominus 1\}$ und $z' = 1$.

Ist $y \in \{i \ominus 1, i \ominus 2, \dots, i \ominus \lfloor \frac{n}{4} \rfloor\}$ und $z \in \{i \oplus 1, i \oplus 2, \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{4} \rfloor\}$, dann folgt aus $m_i > \frac{n}{2} - 2$, dass $d_S(v_{i,i'}, v_{y,1}), d_S(v_{i,i'}, v_{z,1}) \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 2 + \lfloor \frac{n}{4} \rfloor\}$, $i' \in \{1, \dots, m_i\}$. Weiterhin gilt $d_S(v_{j,1}, v_{y,1}), d_S(v_{j,1}, v_{z,1}) \in \{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor, \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$. Daraus folgt, dass es ein $i' \in \{1, \dots, m_i\}$ gibt, sodass $d_S(v_{j,1}, v_{y,1}) = d_S(v_{i,i'}, v_{y,1})$ und es ein $i'' \in \{1, \dots, m_i\}$ gibt, sodass $d_S(v_{j,1}, v_{z,1}) = d_S(v_{i,i''}, v_{z,1})$. Daraus folgt, dass $L' = L \setminus \{v_{x,x'}\}$ keine trennende Menge für S ist.

Ist $y \in \{i \ominus 1, i \ominus 2, \dots, i \ominus \lfloor \frac{n}{4} \rfloor\}$ und $z \in \{i \oplus \lfloor \frac{n}{4} \rfloor, i \oplus \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1, \dots, j \ominus 1\}$, dann folgt aus $m_i > \frac{n}{2} - 2$, dass $d_S(v_{i,i'}, v_{y,1}) \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 2 + \lfloor \frac{n}{4} \rfloor\}$, $i' \in \{1, \dots, m_i\}$ und aus $m_j > \frac{n}{2} - 2$, dass $d_S(v_{j,j'}, v_{z,1}) \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 2 + \lfloor \frac{n}{4} \rfloor\}$, $j' \in \{1, \dots, m_j\}$. Weiterhin gilt $d_S(v_{j,1}, v_{y,1}) \in \{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor, \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$ und $d_S(v_{i,1}, v_{z,1}) \in \{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor, \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$. Daraus folgt, dass es ein $i' \in \{1, \dots, m_i\}$ gibt, sodass $d_S(v_{j,1}, v_{y,1}) = d_S(v_{i,i'}, v_{y,1})$ und es ein $j' \in \{1, \dots, m_j\}$ gibt, sodass $d_S(v_{i,1}, v_{z,1}) = d_S(v_{j,j'}, v_{z,1})$. Daraus folgt, dass $L' = L \setminus \{v_{x,x'}\}$ keine trennende Menge für S ist.

Die Argumentation für die Fälle $y \in \{i \ominus \lfloor \frac{n}{4} \rfloor, i \ominus \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1, \dots, j \ominus 1\}$ und $z \in \{i \oplus 1, i \oplus 2, \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{4} \rfloor\}$ bzw. $y \in \{i \ominus \lfloor \frac{n}{4} \rfloor, i \ominus \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1, \dots, j \ominus 1\}$ und $z \in \{i \oplus \lfloor \frac{n}{4} \rfloor, i \oplus \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1, \dots, j \ominus 1\}$ verläuft analog.

„ \Rightarrow “: Wir zeigen: Wenn n ungerade ist, oder $\mathcal{L}(i), \mathcal{L}(j)$ nicht gegenüber liegen oder $m_i \leq \frac{n}{2} - 2$ oder $m_j \leq \frac{n}{2} - 2$, dann ist $fdim(S) = 3$. Sei o.B.d.A. $j \ominus i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

1. Sei n ungerade. Dann ist $F = \{v_{i,m_i}, v_{j,m_j}, v_{j \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1}\}$ eine fehlertolerante trennende Menge für S , da die Mengen $F \setminus \{v_{i,m_i}\}$, $F \setminus \{v_{j \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1}\}$ und $F \setminus \{v_{j,m_j}\}$ nach Lemma 7.1.15 und Korollar 7.1.16 trennende Mengen für S sind.
2. Seien $\mathcal{L}(i), \mathcal{L}(j) \in \mathcal{L}(S)$ zwei Legs, die nicht gegenüber liegen und n gerade. Ist $j = i \oplus 1$, dann ist $F = \{v_{i,m_i}, v_{j \oplus \frac{n}{2}, 1}, v_{i \oplus 2, 1}\}$ eine fehlertolerante trennende Menge für S , da die Mengen $F \setminus \{v_{i,m_i}\}$, $F \setminus \{v_{j \oplus \frac{n}{2}, 1}\}$ und $F \setminus \{v_{i \oplus 2, 1}\}$ nach Lemma 7.1.15 und Korollar 7.1.16 trennende Mengen für S sind.
Ist $j > i \oplus 1$, dann ist die Menge $F = \{v_{i,m_i}, v_{j,m_j}, v_{i \oplus \lfloor \frac{j \ominus i}{2} \rfloor \oplus \frac{n}{2}, 1}\}$ eine fehlertolerante trennende Menge für S , da die Mengen $F \setminus \{v_{i,m_i}\}$, $F \setminus \{v_{j,m_j}\}$ und $F \setminus \{v_{i \oplus \lfloor \frac{j \ominus i}{2} \rfloor \oplus \frac{n}{2}, 1}\}$ nach Lemma 7.1.15 und Korollar 7.1.16 trennende Mengen für S sind.
3. O.B.d.A. sei $m_i \leq \frac{n}{2} - 2$, n gerade und $\mathcal{L}(i), \mathcal{L}(j)$ liegen gegenüber. Dann ist $F = \{v_{i,m_i}, v_{i \ominus 1, 1}, v_{i \oplus 1, 1}\}$ eine fehlertolerante trennende Menge für S , da nach Lemma 7.1.15 und Korollar 7.1.16 die Mengen $F \setminus \{v_{i,m_i}\}$, $F \setminus \{v_{i \ominus 1, 1}\}$ und $F \setminus \{v_{i \oplus 1, 1}\}$

trennende Mengen für S sind. Die Argumentation für $m_j \leq \frac{n}{2} - 2$, n gerade und $\mathcal{L}(i), \mathcal{L}(j)$ liegen gegenüber verläuft analog. \square

Lemma 7.2.12. *Sei S ein Sonnengraph und $|\mathcal{L}(S)| = 3$. Ist n ungerade, so ist $fdim(S) = 3$.*

Beweis Seien $\mathcal{L}(i), \mathcal{L}(j), \mathcal{L}(k) \in \mathcal{L}(S)$, $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j \neq k \neq i$, $\mathcal{L}(i), \mathcal{L}(j), \mathcal{L}(k) \neq \emptyset$. O.B.d.A. sei $j \ominus i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ und $k \in \{j \oplus 1, j \oplus 2, \dots, i \ominus 1\}$.

Ist $k \in \{j \oplus 1, \dots, i \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, dann ist $F = \{v_{i,m_i}, v_{j \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, m_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}, v_{k,m_k}\}$ eine fehlertolerante trennende Menge für S , da nach Lemma 7.1.15 und Korollar 7.1.16 die Mengen $F \setminus \{v_{i,m_i}\}$, $F \setminus \{v_{j \oplus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, m_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}\}$ und $F \setminus \{v_{k,m_k}\}$ trennende Mengen für S sind.

Ist $k \in \{i \ominus 1, \dots, i \ominus \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, dann ist $F = \{v_{i,m_i}, v_{j,m_j}, v_{k,m_k}\}$ eine fehlertolerante trennende Menge für S , da nach Lemma 7.1.15 und Korollar 7.1.16 die Mengen $F \setminus \{v_{i,m_i}\}$, $F \setminus \{v_{j,m_j}\}$ und $F \setminus \{v_{k,m_k}\}$ trennende Mengen für S sind. \square

7.2.2 Algorithmus

Theorem 7.2.13. *Sei S ein Sonnengraph. Die fehlertolerante metrische Dimension von S kann in $\mathcal{O}(n)$ Schritten bestimmt werden.*

Beweis

1. Sei $n = 4$. Dann ist $fdim(S) = 4$.
2. Sei $n \neq 4$ und gerade. Dann gilt nach Lemma 7.2.8, dass $fdim(S) = 4$, falls $|\mathcal{L}(S)| \geq 7$ und nach Lemma 7.2.5, dass $fdim(S) = 3$, falls $|\mathcal{L}(S)| \leq 1$. Ist $|\mathcal{L}(S)| = 2$, so können die Bedingungen aus Lemma 7.2.11 in einer konstanten Anzahl von Schritten überprüft werden, um zu entscheiden, ob $fdim(S) = 3$. Sei also $|\mathcal{L}(S)| \in \{4, 6\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.
 - a) Seien $\mathcal{L}(i), \mathcal{L}(j), \mathcal{L}(k) \in \mathcal{L}(S)$ drei Legs in S , die nicht gegenseitig gegenüber liegen, d.h. $j \neq i \oplus \frac{n}{2} \neq k \neq j \oplus \frac{n}{2}$. Ist $fdim(S) = 3$, dann folgt nach Lemma 7.2.7, Bedingung 3, und Lemma 7.2.2, dass es eine fehlertolerante trennende Menge $F = \{v_{x,x'}, v_{y,y'}, v_{z,z'}\} \subseteq V$ gibt, sodass $v_{x,x'} \in \{v_{i,m_i}, v_{i \oplus \frac{n}{2}, m_{i \oplus \frac{n}{2}}}\}$, $v_{y,y'} \in \{v_{j,m_j}, v_{j \oplus \frac{n}{2}, m_{j \oplus \frac{n}{2}}}\}$ und $v_{z,z'} \in \{v_{k,m_k}, v_{k \oplus \frac{n}{2}, m_{k \oplus \frac{n}{2}}}\}$. Insgesamt gibt es acht mögliche Mengen F , für die wir überprüfen, ob F eine fehlertolerante trennende Menge für S ist. Für diese Überprüfung untersuchen wir mithilfe von Korollar 7.1.16 die Mengen $F' = F \setminus \{v\}$, $v \in F$ daraufhin, ob sie eine trennende Menge für S sind. Da die Anzahl der Legs höchstens sechs ist, kann

die Überprüfung der Bedingungen aus 7.1.16 in einer konstanten Anzahl von Schritten erfolgen.

- b) Seien die Legs in S so gelegen, dass für jede Auswahl von drei paarweise verschiedenen Legs mindestens zwei Legs gegenüber liegen, d.h. für alle $\mathcal{L}(i), \mathcal{L}(j), \mathcal{L}(k) \in \mathcal{L}(S)$ mit $i \neq j \neq k \neq i$ gilt $j = i \oplus \frac{n}{2}$ oder $k = i \oplus \frac{n}{2}$ oder $k = j \oplus \frac{n}{2}$. O.B.d.A. seien $\mathcal{L}(i), \mathcal{L}(j)$ zwei Legs, die nicht gegenüber liegen und $j \ominus i < \frac{n}{2}$. Ist $fdim(S) = 3$, dann folgt nach Lemma 7.2.7, Bedingung 3, und Lemma 7.2.2, dass es eine fehlertolerante trennende Menge $F = \{v_{x,x'}, v_{y,y'}, v_{z,z'}\} \subseteq V$ gibt, sodass $v_{x,x'} \in \{v_{i,m_i}, v_{i \oplus \frac{n}{2}, m_{i \oplus \frac{n}{2}}}\}$ und $v_{y,y'} \in \{v_{j,m_j}, v_{j \oplus \frac{n}{2}, m_{j \oplus \frac{n}{2}}}\}$. Nach der ersten und zweiten Bedingung von Lemma 7.2.7 und nach Lemma 7.2.2 und 7.2.3 sei $v_{z,z'} \in \{v_{p,m_p} \mid p \in \{i \ominus \frac{n}{2} \oplus 1, i \ominus \frac{n}{2} \oplus 2, \dots, j \oplus \frac{n}{2} \ominus 1\}\}$. Insgesamt gibt es höchstens $4 \cdot (\frac{n}{2} - 3)$ mögliche Belegungen für $v_{x,x'}, v_{y,y'}, v_{z,z'}$. Für jede dieser Belegungen überprüfen wir, wie in a) beschrieben, ob F eine fehlertolerante trennende Menge für S ist.

3. Sei n ungerade. Dann gilt nach Lemma 7.2.9, dass $fdim(S) = 4$, falls $|\mathcal{L}(S)| \geq 10$ und nach Lemma 7.2.5, 7.2.11 und 7.2.12, dass $fdim(S) = 3$, falls $|\mathcal{L}(S)| \leq 3$. Sei also $|\mathcal{L}(S)| \in \{5, 7, 9\}$.

- a) Seien $\mathcal{L}(i), \mathcal{L}(j), \mathcal{L}(k) \in \mathcal{L}(S)$ drei Legs in S , die nicht gegenseitig gegenüber liegen, d.h. $j \neq i \oplus \frac{n}{2} \neq k \neq j \oplus \frac{n}{2}$. Ist $fdim(S) = 3$, dann folgt nach Lemma 7.2.7, Bedingung 3, dass es eine fehlertolerante trennende Menge $F = \{v_{x,x'}, v_{y,y'}, v_{z,z'}\} \subseteq V$ für S gibt, sodass

$$\begin{aligned} v_{x,x'} &\in \{v_{i,m_i}, v_{i \ominus \lceil \frac{n}{2} \rceil, m_{i \ominus \lceil \frac{n}{2} \rceil}}, v_{i \oplus \lceil \frac{n}{2} \rceil, m_{i \oplus \lceil \frac{n}{2} \rceil}}\} \\ v_{y,y'} &\in \{v_{j,m_j}, v_{j \ominus \lceil \frac{n}{2} \rceil, m_{j \ominus \lceil \frac{n}{2} \rceil}}, v_{j \oplus \lceil \frac{n}{2} \rceil, m_{j \oplus \lceil \frac{n}{2} \rceil}}\} \\ v_{z,z'} &\in \{v_{k,m_k}, v_{k \ominus \lceil \frac{n}{2} \rceil, m_{k \ominus \lceil \frac{n}{2} \rceil}}, v_{k \oplus \lceil \frac{n}{2} \rceil, m_{k \oplus \lceil \frac{n}{2} \rceil}}\}. \end{aligned}$$

Insgesamt gibt es 27 mögliche Mengen F , für die wir überprüfen, ob F eine fehlertolerante trennende Menge für S ist. Diese Überprüfung erfolgt wie in 2.

a) beschrieben in einer konstanten Anzahl von Schritten.

- b) Seien die Legs in S so gelegen, dass für jede Auswahl von drei paarweise verschiedenen Legs mindestens zwei Legs gegenüber liegen, d.h. für alle $\mathcal{L}(i), \mathcal{L}(j), \mathcal{L}(k) \in \mathcal{L}(S)$ mit $i \neq j \neq k \neq i$ gilt $j = i \oplus \frac{n}{2}$ oder $k = i \oplus \frac{n}{2}$ oder $k = j \oplus \frac{n}{2}$. O.B.d.A. seien $\mathcal{L}(i), \mathcal{L}(j)$ zwei Legs, die nicht gegenüber liegen und $j \ominus i < \frac{n}{2}$. Ist $fdim(S) = 3$, dann folgt nach Lemma 7.2.7, Bedingung 3, und Lemma 7.2.2, dass es eine fehlertolerante trennende Menge $F = \{v_{x,x'}, v_{y,y'}, v_{z,z'}\} \subseteq V$ gibt, sodass $v_{x,x'} \in \{v_{i,m_i}, v_{i \ominus \lceil \frac{n}{2} \rceil, m_{i \ominus \lceil \frac{n}{2} \rceil}}, v_{i \oplus \lceil \frac{n}{2} \rceil, m_{i \oplus \lceil \frac{n}{2} \rceil}}\}$ und $v_{y,y'} \in \{v_{j,m_j}, v_{j \ominus \lceil \frac{n}{2} \rceil, m_{j \ominus \lceil \frac{n}{2} \rceil}}, v_{j \oplus \lceil \frac{n}{2} \rceil, m_{j \oplus \lceil \frac{n}{2} \rceil}}\}$. Nach der ersten und zweiten

Bedingung von Lemma 7.2.7 und nach Lemma 7.2.3 sei $v_{z,z'} \in \{v_{p,m_p} \mid p \in \{i \ominus \lceil \frac{n}{2} \rceil, i \ominus \lceil \frac{n}{2} \rceil \oplus 1, \dots, j \oplus \lceil \frac{n}{2} \rceil\}\}$. Insgesamt gibt es höchstens $9 \cdot (\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1)$ mögliche Mengen F , für die wir überprüfen, ob F eine fehlertolerante trennende Menge für S ist. Diese Überprüfung erfolgt wie in 2. a) beschrieben in einer konstanten Anzahl von Schritten. \square

8 Die gewichtete fehlertolerante metrische Dimension vollständiger Wheels

In [2] wurde die gewichtete k -metrische Dimension von Wegen, von vollständigen und vollständig bipartiten Graphen und von vollständigen Wheels untersucht. In dem folgenden Kapitel wird ein alternativer Algorithmus vorgestellt, mit dem die gewichtete fehlertolerante metrische Dimension von vollständigen Wheels effizient berechnet werden kann.

8.1 Definitionen und Eigenschaften

Definition 8.1.1 (Wheel). *Ein (vollständiges) Wheel $W_n = (V, E)$ mit $n \geq 4$ Knoten ist ein ungerichteter Graph mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $E = \{\{v_i, v_{i+1}\}, \{v_{n-1}, v_1\} \mid 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{\{v_n, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$. Die Knoten v_1, \dots, v_{n-1} heißen Kreisknoten und der Knoten v_n heißt Nabe. Die Kanten $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_1\}$ heißen Kreiskanten und die Kanten $\{v_n, v_i\}$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$, heißen Speichen.*

Alle Distanzen zwischen zwei Knoten in einem Wheel sind eins oder zwei. Der Abstand zwischen einem Kreisknoten und der Nabe ist eins und der Abstand zwischen zwei Kreisknoten ist eins, wenn sie benachbart sind, und zwei, wenn sie nicht benachbart sind. Abbildung 8.1 zeigt ein Beispiel.

Lemma 8.1.2. *Sei $W_n = (V, E)$ ein Wheel mit $n \geq 8$ Knoten. Dann ist $mdim(W_n) = \lfloor \frac{2}{5}n \rfloor$ [175].*

Notation 8.1.3. *Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Abbildungen*

$$\oplus_n : \{1, \dots, n\}^2 \longrightarrow \{1, \dots, n\}, \quad (i, j) \mapsto (i + j - 1 \pmod n) + 1$$

$$\ominus_n : \{1, \dots, n\}^2 \longrightarrow \{1, \dots, n\}, \quad (i, j) \mapsto (i - j - 1 \pmod n) + 1$$

Ist n aus dem Kontext bekannt, schreiben wir kurz $i \oplus j$ bzw. $i \ominus j$, statt $\oplus_n(i, j)$ bzw. $\ominus_n(i, j)$.

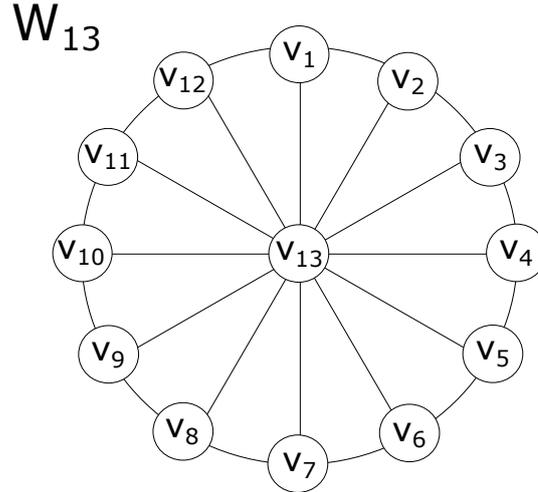


Abb. 8.1: Das Wheel W_{13} mit Kreisknoten v_1, \dots, v_{12} und Nabe v_{13} .

Lemma 8.1.4. Sei $W_n = (V, E)$ ein Wheel mit $n \geq 10$ Knoten. Es existiert keine kleinste fehlertolerante trennende Menge R für W_n , die die Nabe v_n enthält.

Beweis Beweis durch Widerspruch. Angenommen es gäbe eine kleinste fehlertolerante trennende Menge R für W_n mit $v_n \in R$. Da alle Kreisknoten zu v_n adjazent sind, trennt v_n nur sich selbst von einem Kreisknoten. Da eine kleinste fehlertolerante trennende Menge größer ist als eine kleinste trennende Menge für W_n , folgt aus Lemma 8.1.2, dass $|R| \geq 5$, d.h. es gibt mindestens vier Ankerknoten in R , die Kreisknoten sind. Das heißt, dass es für jeden Kreisknoten v_i , $i \in \{1, \dots, n-1\}$, zwei Ankerknoten gibt, die nicht mit v_i benachbart sind und somit das Knotenpaar v_i, v_n ebenfalls trennen. Daraus folgt, dass $R' = R \setminus \{v_n\}$ ebenfalls eine fehlertolerante trennende Menge für W_n ist und $|R'| < |R|$, was der Minimalität von R widerspricht. \square

Definition 8.1.5 (Gap). Sei $W_n = (V, E)$ ein Wheel mit n Knoten, $R \subseteq V$ und $v_i \in R$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Die Mengen $gap_+(v_i)$ und $gap_-(v_i)$ bzgl. R sind wie folgt definiert.

1. $gap_+(v_i) = \{v_{i \oplus 1}, v_{i \oplus 2}, \dots, v_k \mid v_{i \oplus 1}, v_{i \oplus 2}, \dots, v_k \notin R, v_{k \oplus 1} \in R\}$
2. $gap_-(v_i) = \{v_{i \ominus 1}, v_{i \ominus 2}, \dots, v_k \mid v_{i \oplus 1}, v_{i \oplus 2}, \dots, v_k \notin R, v_{k \ominus 1} \in R\}$

Die Mengen $gap_+(v)$ und $gap_-(v)$ für einen Knoten $v \in R$ nennen wir die Gaps von v und $l_v := |gap_+(v)| + |gap_-(v)|$ die Gaplänge von v . Jeder Knoten $v \in R$ hat genau zwei Gaps. Für zwei adjazente Knoten $v_i, v_{i \oplus 1} \in R$ gilt $gap_+(v_i) = gap_-(v_{i \oplus 1}) = \emptyset$.

8.2 Bestimmung der fehlertoleranten metrischen Dimension

Lemma 8.2.1. *Sei $W_n = (V, E)$ ein Wheel mit $n \geq 10$ Knoten. Eine Menge $R \subseteq V$ ist genau dann eine fehlertolerante trennende Menge für W_n , wenn*

1. für jeden Knoten $v \in R$ die Gaplänge von v höchstens zwei ist und
2. für zwei adjazente Knoten $v_i, v_{i \oplus 1} \in R$ die Summe der Gaplängen von v_i und v_{i+1} höchstens zwei ist.

Beweis „ \Rightarrow “ Sei $R \subseteq V$ eine fehlertolerante trennende Menge für W_n . Da alle Kreisknoten zur Nabe benachbart sind, wird ein Paar von Kreisknoten nur von einem Kreisknoten getrennt.

1. Wir zeigen, dass für jeden Knoten $v \in R$ gilt $l_v \leq 2$. Angenommen es gäbe einen Ankerknoten $v_i \in R$, $i \in \{1, \dots, n\}$, sodass $l_{v_i} > 2$. Sei $|gap_-(v_i)| \geq 2$ und $|gap_+(v_i)| \geq 1$. Dann gibt es einen Knoten $v_{i \ominus 1} \in gap_-(v_i)$ und einen Knoten $v_{i \oplus 1} \in gap_+(v_i)$. Da beide Knoten mit v_i benachbart sind, trennt v_i das Knotenpaar $v_{i \ominus 1}, v_{i \oplus 1}$ nicht. Da $gap_-(v_i) \geq 2$ ist, hat der Knoten $v_{i \ominus 1}$ keinen weiteren Ankerknoten in der Nachbarschaft, d.h. $\forall u \in R \setminus \{v_i\} : d(v_{i \ominus 1}, u) = 2$. Wenn $|gap_+(v_i)| = 1$ ist, dann wird das Knotenpaar $v_{i \ominus 1}, v_{i \oplus 1}$ von genau einem Ankerknoten getrennt (nämlich von $v_{i \oplus 2}$), und wenn $|gap_+(v_i)| > 1$ ist, dann wird das Knotenpaar $v_{i \ominus 1}, v_{i \oplus 1}$ von keinem Ankerknoten getrennt, siehe Abbildung 8.2. Die Argumentation für den Fall $|gap_-(v_i)| \geq 1$ und $|gap_+(v_i)| \geq 2$ verläuft analog.
2. Wir zeigen, dass für zwei adjazente Knoten $v_i, v_{i \oplus 1} \in R$ gilt $l_{v_i} + l_{v_{i \oplus 1}} \leq 2$. Angenommen es gibt zwei adjazente Ankerknoten $v_i, v_{i \oplus 1} \in R$, sodass $l_{v_i} + l_{v_{i \oplus 1}} > 2$. Sei $|gap_-(v_i)| \geq 2$ und $|gap_+(v_{i \oplus 1})| \geq 1$. Dann haben $v_{i \ominus 1}$ und $v_{i \oplus 1}$ genau einen Ankerknoten in der Nachbarschaft, nämlich v_i . Daher ist der Abstand zu jedem anderen Ankerknoten zwei und nur der Ankerknoten $v_{i \oplus 1}$ trennt das Knotenpaar $v_i, v_{i \oplus 1}$, siehe Abbildung 8.3. Die Argumentation für den Fall Sei $|gap_-(v_i)| \geq 1$ und $|gap_+(v_{i \oplus 1})| \geq 2$ verläuft analog.

„ \Leftarrow “: Angenommen $R \subseteq V$ erfüllt die beiden Bedingungen 1. und 2. Wir zeigen, dass R eine fehlertolerante trennende Menge für W_n ist. Nach Lemma 8.1.4 ist $v_n \notin R$. Da W_n mindestens zehn Knoten enthält und eine fehlertolerante trennende Menge größer als jede kleinste trennende Menge für W_n ist, gilt $|R| \geq 5$ nach Lemma 8.1.2. Daher gibt es mindestens zwei Ankerknoten, die die Nabe von einem beliebigen Kreisknoten trennen. Es muss also nur noch gezeigt werden, dass zwei Kreisknoten $v_i, v_j \in V$ von mindestens zwei Ankerknoten getrennt werden, $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$, $i \neq j$.

1. Angenommen $v_i, v_j \in R$. Dieser Fall ist klar.

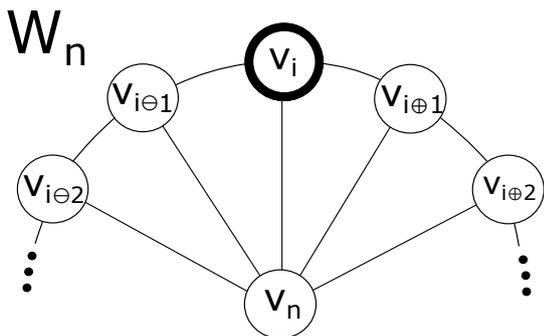


Abb. 8.2: Die Abbildung zeigt das Wheel W_n . Eine Teilmenge der Knotenmenge R mit $v_i \in R$ und $v_{i\ominus 2}, v_{i\ominus 1}, v_{i\oplus 1} \notin R$ ist keine fehlertolerante trennende Menge für W_n . Das Knotenpaar $v_{i\ominus 1}, v_{i\oplus 1}$ wird von keinem Ankerknoten in $R \setminus \{v_{i\oplus 2}\}$ getrennt.

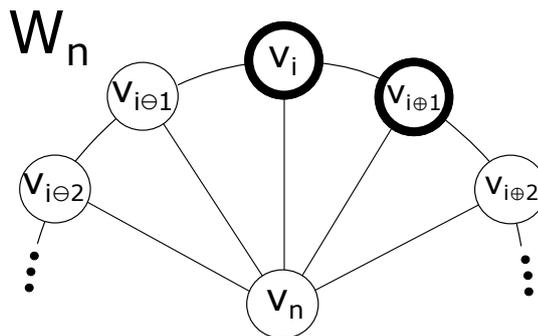


Abb. 8.3: Die Abbildung zeigt das Wheel W_n . Eine Teilmenge der Knotenmenge R mit $v_i, v_{i\oplus 1} \in R$ und $v_{i\ominus 2}, v_{i\ominus 1}, v_{i\oplus 2} \notin R$ ist keine fehlertolerante trennende Menge für W_n . Das Knotenpaar $v_{i\ominus 1}, v_{i\oplus 1}$ wird von keinem Ankerknoten in $R \setminus \{v_{i\oplus 1}\}$ getrennt.

2. Angenommen $v_i \in R$ und $v_j \in V \setminus R$. Knoten v_j ist mit mindestens einem Ankerknoten adjazent, ansonsten ist $l_{v_j} \geq 3$.

a) v_j ist adjazent zu zwei Ankerknoten:

Ist v_j zu zwei Ankerknoten $v_{j\ominus 1}, v_{j\oplus 1} \in R$ adjazent, dann ist $d(v_j, v_{j\ominus 1}) = d(v_j, v_{j\oplus 1}) = 1$ und entweder $d(v_i, v_{j\ominus 1}) \neq 1$ oder $d(v_i, v_{j\oplus 1}) \neq 1$. Daher trennt mindestens einer der Knoten $v_{j\ominus 1}, v_{j\oplus 1}$ das Knotenpaar v_i, v_j . Da $v_i \in R$, trennt v_i ebenfalls das Knotenpaar v_i, v_j , siehe Abbildung 8.4.

b) v_j ist adjazent zu genau einem Ankerknoten:

O.B.d.A. sei $v_{j\oplus 1} \in R$. Dann gibt es zwei interessante Fälle (in allen anderen Fällen trennen v_i und $v_{j\oplus 1}$ das Knotenpaar v_i, v_j):

i. $v_{j\oplus 1} = v_i$:

Ist $v_{j\oplus 1} = v_i$, dann ist $v_{i\oplus 1}$ ein Ankerknoten, ansonsten wird die erste Bedingungen verletzt. Daher trennen die beiden Ankerknoten v_i und $v_{i\oplus 1}$ das Knotenpaar v_i, v_j , siehe Abbildung 8.5.

ii. $d(v_{j\oplus 1}, v_i) = 1$:

Ist v_i ebenfalls mit $v_{j\oplus 1}$ benachbart, dann ist $v_{j\oplus 3}$ ein Ankerknoten, ansonsten wird die zweite Bedingungen verletzt. Daher trennen die beiden Ankerknoten v_i und $v_{j\oplus 3}$ das Knotenpaar v_i, v_j , siehe Abbildung 8.6.

3. Angenommen $v_i, v_j \in V \setminus R$. Wir unterscheiden zwischen den folgenden zwei Fällen:

a) $d(v_j, v) = 2 \forall v \in R$.

Hat v_j keinen Ankerknoten in der Nachbarschaft, dann bilden die Knoten $v_{j\ominus 1}, v_j, v_{j\oplus 1}$ ein Gap der Größe mindestens drei, was die erste Bedingung verletzt.

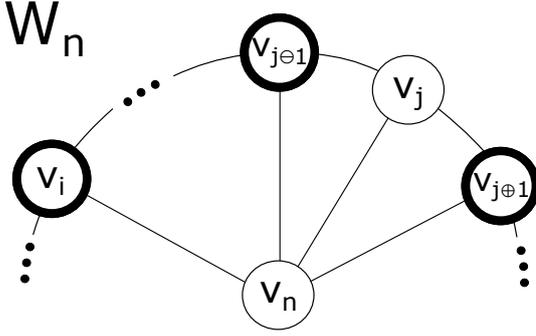


Abb. 8.4: Die Abbildung zeigt das Wheel W_n mit dem Knotenpaar $v_i \in R, v_j \notin R$. Zu zeigen ist, dass v_i, v_j von mindestens zwei Ankerknoten getrennt werden. Der Knoten v_j ist adjazent zu zwei Ankerknoten. Ist v_i weder zu $v_{j\oplus 1}$ noch zu $v_{j\ominus 1}$ adjazent, wird das Knotenpaar von $v_i, v_{j\oplus 1}$ und $v_{j\ominus 1}$ getrennt. Ist v_i adjazent zu $v_{j\oplus 1}$, wird das Knotenpaar von v_i und $v_{j\oplus 1}$ getrennt. Ist v_i adjazent zu $v_{j\ominus 1}$, wird das Knotenpaar von v_i und $v_{j\oplus 1}$ getrennt. Da $n \geq 10$, ist v_i nicht zu beiden Knoten $v_{j\oplus 1}$ und $v_{j\ominus 1}$ adjazent.

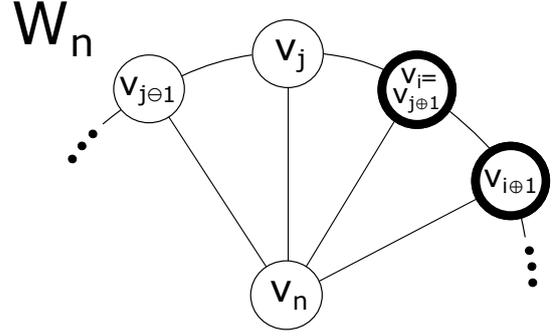


Abb. 8.5: Die Abbildung zeigt das Wheel W_n mit dem Knotenpaar $v_i \in R, v_j \notin R$. Zu zeigen ist, dass v_i, v_j von mindestens zwei Ankerknoten getrennt werden. Der Knoten v_j ist zu genau einem Ankerknoten $v_{i\oplus 1} \in R$ adjazent und es gilt $v_{i\oplus 1} = v_i$. Da $v_{j\oplus 1}$ kein Ankerknoten ist, gilt $v_{i\oplus 1} \in R$ (erste Bedingung). Daher trennen die beiden Ankerknoten v_i und $v_{i\oplus 1}$ das Knotenpaar v_i, v_j .

b) $\exists v \in R : d(v_j, v) = 1$.

O.B.d.A. sei $v_{j\oplus 1} \in R$. Ist v_i ebenfalls adjazent zu $v_{j\oplus 1}$, d.h. ist $v_i = v_{j\oplus 2}$, dann sind beide Knoten v_i und v_j jeweils zu einem weiteren Ankerknoten adjazent. Anderenfalls wird die erste Bedingung verletzt. Daraus folgt, dass die Ankerknoten $v_{j\oplus 1}, v_{j\oplus 3} \in R$ das Knotenpaar v_i, v_j trennen, siehe Abbildung 8.7. Ist v_i nicht mit $v_{j\oplus 1}$ benachbart, dann trennt der Ankerknoten $v_{j\oplus 1}$ das Knotenpaar v_i, v_j . Der Knoten v_i ist zu einem Ankerknoten adjazent, ansonsten wird die erste Bedingung verletzt. O.B.d.A. sei $v_{i\oplus 1} \in R$ dieser Ankerknoten. Der einzige Fall, in dem der Ankerknoten $v_{i\oplus 1}$ das Knotenpaar v_i, v_j nicht trennt, ist der Fall, in dem $v_{i\oplus 1} = v_{j\oplus 1}$ ist. In diesem Fall ist $v_{i\oplus 1}$ ein Ankerknoten, ansonsten wird die erste Bedingung verletzt. In beiden Fällen gibt es zwei Ankerknoten, die das Knotenpaar v_i, v_j trennen, siehe Abbildung 8.8 für den ersten Fall und Abbildung 8.9 für den zweiten Fall. \square

Das folgende Theorem folgt direkt aus Lemma 8.2.1.

Theorem 8.2.2. Sei $W_n = (V, E)$ ein Wheel mit $n \geq 10$ Knoten. Dann ist $fdim(W) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Beweis Aus den Bedingungen 1 und 2 aus Lemma 8.2.1) folgt, dass $|R| \geq \frac{n-1}{2}$. Wählt man $R = \{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}\}$, dann ist R eine fehlertolerante trennende Menge für W_n . Daraus folgt $|R| \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ und insgesamt $fdim(W_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. \square

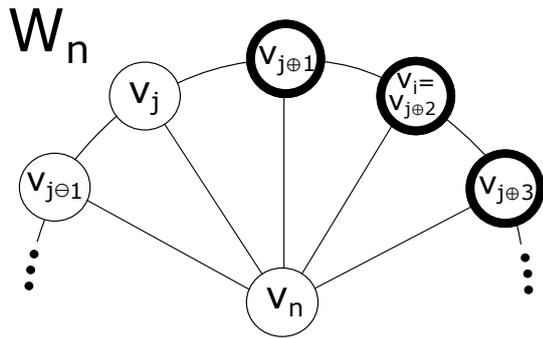


Abb. 8.6: Die Abbildung zeigt das Wheel W_n mit dem Knotenpaar $v_i \in R, v_j \notin R$. Zu zeigen ist, dass v_i, v_j von mindestens zwei Ankerknoten getrennt werden. Der Knoten v_j ist zu genau einem Ankerknoten $v_{j\oplus 1} \in R$ adjazent und es gilt $d(v_{j\oplus 1}, v_i) = 1$. Da $v_{j\oplus 1}$ kein Ankerknoten ist, gilt $v_{j\oplus 3} \in R$ (zweite Bedingung). Daher trennen die beiden Ankerknoten v_i und $v_{j\oplus 3}$ das Knotenpaar v_i, v_j .

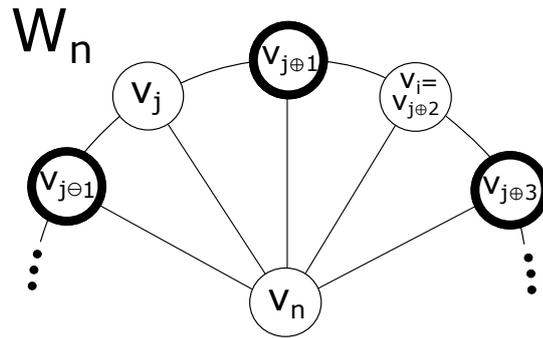


Abb. 8.7: Die Abbildung zeigt das Wheel W_n mit dem Knotenpaar $v_i, v_j \notin R$. Zu zeigen ist, dass v_i, v_j von mindestens zwei Ankerknoten getrennt werden. Die Knoten v_i und v_j sind beide mit dem Ankerknoten $v_{j\oplus 1}$ benachbart. Da $v_i, v_j \notin R$, sind $v_{j\oplus 1}, v_{j\oplus 3} \in R$ (erste Bedingung). Daher trennen die Ankerknoten $v_{j\oplus 1}$ und $v_{j\oplus 3}$ das Knotenpaar v_i, v_j .

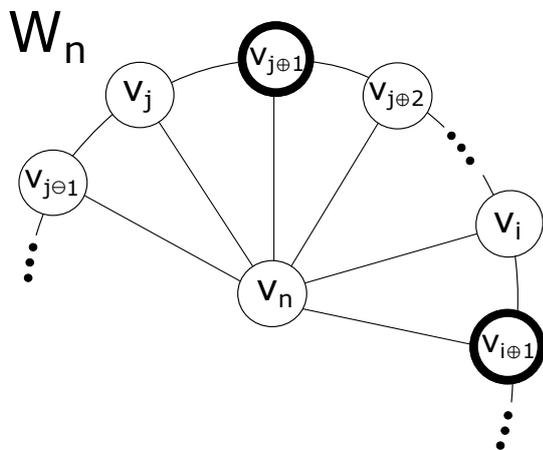


Abb. 8.8: Die Abbildung zeigt das Wheel W_n mit dem Knotenpaar $v_i, v_j \notin R$. Zu zeigen ist, dass v_i, v_j von mindestens zwei Ankerknoten getrennt werden. Der Knoten v_j ist zu genau einem Ankerknoten $v_{j\oplus 1} \in R$ adjazent. Der Knoten v_i ist nicht adjazent zu $v_{j\oplus 1}$ und hat einen Ankerknoten $v_{i\oplus 1} \in R$ in der Nachbarschaft (erste Bedingung). Es gilt $v_{i\oplus 1} \neq v_{j\oplus 1}$. Die beiden Ankerknoten $v_{j\oplus 1}$ und $v_{i\oplus 1}$ trennen das Knotenpaar v_i, v_j .

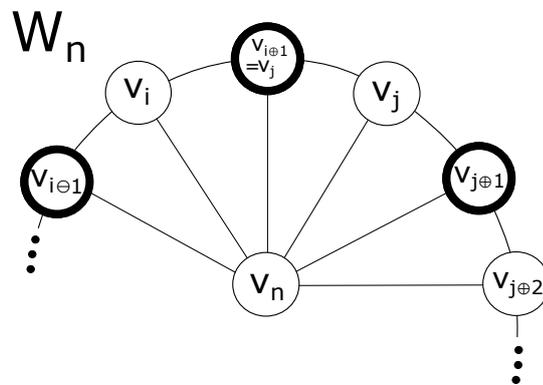


Abb. 8.9: Die Abbildung zeigt das Wheel W_n mit dem Knotenpaar $v_i, v_j \notin R$. Zu zeigen ist, dass v_i, v_j von mindestens zwei Ankerknoten getrennt werden. Der Knoten v_j ist zu genau einem Ankerknoten $v_{j\oplus 1} \in R$ adjazent. Der Knoten v_i ist nicht adjazent zu $v_{j\oplus 1}$ und hat einen Ankerknoten $v_{i\oplus 1} \in R$ in der Nachbarschaft (erste Bedingung). Es gilt $v_{i\oplus 1} = v_{j\oplus 1}$. Dann ist Knoten $v_{i\oplus 1} \in R$ (erste Bedingung) und die beiden Ankerknoten $v_{j\oplus 1}$ und $v_{i\oplus 1}$ trennen das Knotenpaar v_i, v_j .

8.3 Bestimmung der gewichteten fehlertoleranten metrischen Dimension

Lemma 8.3.1. *Sei $W_n = (V, E)$ ein Wheel mit $n \geq 10$ Knoten und sei $c : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Knotengewichtsfunktion. Sei $R \subseteq V$ eine fehlertolerante trennende Menge für W_n mit minimalem Gewicht. In sieben aufeinanderfolgenden Kreisknoten $v_i, v_{i \oplus 1}, \dots, v_{i \oplus 6} \in V$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$, gibt es mindestens einen Knoten, der nicht in R ist.*

Beweis Angenommen in einer fehlertoleranten trennenden Menge R für W_n mit minimalem Gewicht gäbe es sieben aufeinanderfolgende Kreisknoten $v_i, v_{i \oplus 1}, \dots, v_{i \oplus 6} \in R$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Dann ist die Menge $R' = R \setminus \{v_{i \oplus 3}\}$ ebenfalls eine fehlertolerante trennende Menge für W_n , da die Gap-längen aller Ankerknoten in R' höchstens zwei sind und die Summe der Gap-längen zweier benachbarter Ankerknoten ebenfalls höchstens zwei ist. Da die Knotengewichte positiv sind, ist das Gewicht der Menge R' kleiner als das Gewicht von R , was ein Widerspruch zur Minimalität von R ist. \square

Theorem 8.3.2. *Sei $W_n = (V, E)$ ein Wheel mit $n \geq 4$ Knoten und $c : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Knotengewichtsfunktion. Die gewichtete fehlertolerante metrische Dimension von W_n kann in $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ Schritten berechnet werden.*

Beweis Es wird ein Linearzeitalgorithmus vorgestellt, mit dem die gewichtete fehlertolerante metrische Dimension eines Wheels W_n , $n \geq 10$, bestimmt werden kann. Für $4 \leq n \leq 9$ kann die gewichtete fehlertolerante metrische Dimension von W_n offensichtlich in konstanter Zeit bestimmt werden. Die Grundidee des Algorithmus basiert darauf, mittels dynamischer Programmierung gewichtsm minimale fehlertolerante trennende Mengen für W_n mit verschiedenen Startbedingungen aufzubauen. Diese Mengen werden im Folgenden *Lösung* genannt.

Zu Beginn werden zwei adjazente Kreisknoten $v_i, v_{i \oplus 1}$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$, gewählt, sodass in der Lösung, die wir berechnen, v_i ein Ankerknoten und $v_{i \oplus 1}$ kein Ankerknoten ist. Ein solches Knotenpaar $v_i, v_{i \oplus 1}$ existiert nach Lemma 8.3.1 in sieben beliebigen aufeinanderfolgenden Kreisknoten. Zur einfacheren Beschreibung sei o.B.d.A. $v_i = v_{n-1}$ und $v_{i \oplus 1} = v_1$. Wir bauen eine Lösung für W_n sukzessive aus Teillösungen entlang der Kreisknoten auf. Für jeden Kreisknoten v_j , $j \in \{2, \dots, n-1\}$, berechnen wir Gewichte von Teillösungen für W_n , in denen v_j ein Ankerknoten ist. Die Gewichte der Teillösungen berechnen sich aus der Summe der Ankerknotengewichte auf dem Weg (v_1, \dots, v_j) in einer Teillösung für W_n . Für jedes v_j berechnen wir diese Gewichte aus den Gewichtswerten der Knoten $v_{j \oplus 1}, v_{j \oplus 2}$ und $v_{j \oplus 3}$. Das Minimum aller berechneten Gewichtswerte am Knoten v_{n-1} ist die gewichtete metrische Dimension von W_n . Es folgt die Beschreibung des Algorithmus.

Sei $h_{\alpha,\beta}(v_j)$ die Summe der Ankerknotengewichte auf dem Weg (v_1, \dots, v_j) in einer Lösung für W_n , sodass v_j ein Ankerknoten ist, $gap_-(v_j)$ die Länge α hat und $gap_-(v_{j'})$ die Länge β hat. Dabei ist $v_{j'}$ der Ankerknoten mit $gap_+(v_{j'}) = gap_-(v_j)$. Wenn es keine Lösung mit diesen Eigenschaften gibt, setzen wir $h_{\alpha,\beta}(v_j) = \infty$. Wie in Lemma 8.2.1 beschrieben, ist in jeder gültigen Lösung $\alpha + \beta < 3$. Daher berechnen wir für jeden Knoten v_j die sechs Werte $h_{0,0}(v_j)$, $h_{0,1}(v_j)$, $h_{0,2}(v_j)$, $h_{1,0}(v_j)$, $h_{1,1}(v_j)$, $h_{2,0}(v_j)$ wie folgt.

1. Für $h_{0,0}(v_j)$ gilt $gap_-(v_j) = 0$ und $gap_-(v_{j'}) = 0$. Ist $gap_-(v_j) = 0$, dann ist $v_{j'} = v_{j-1}$, d.h. $gap_-(v_{j-1}) = 0$, siehe Abbildung 8.10. Andere Gaps sind für eine Lösung nicht relevant. Daher gilt

$$h_{0,0}(v_j) = \min\{h_{0,0}(v_{j-1}), h_{0,1}(v_{j-1}), h_{0,2}(v_{j-1})\} + c(v_j).$$

2. Für $h_{0,1}(v_j)$ gilt $gap_-(v_j) = 0$ und $gap_-(v_{j'}) = 1$. Wieder ist $v_{j'} = v_{j-1}$, d.h. $gap_-(v_{j-1}) = 1$, siehe Abbildung 8.11. Andere Gaps sind für eine Lösung nicht relevant. Daher gilt

$$h_{0,1}(v_j) = \min\{h_{1,0}(v_{j-1}), h_{1,1}(v_{j-1})\} + c(v_j).$$

3. Für $h_{0,2}(v_j)$ gilt $gap_-(v_j) = 0$ und $gap_-(v_{j'}) = 2$. Wieder ist $v_{j'} = v_{j-1}$, d.h. $gap_-(v_{j-1}) = 2$. In einer gültigen Lösung ist $gap_-(v_{j-4}) = 0$, siehe Abbildung 8.12. Daher gilt

$$h_{0,2}(v_j) = h_{2,0}(v_{j-1}) + c(v_j).$$

4. Für $h_{1,0}(v_j)$ gilt $gap_-(v_j) = 1$ und $gap_-(v_{j'}) = 0$. Ist $gap_-(v_j) = 1$, dann ist $v_{j'} = v_{j-2}$, d.h. $gap_-(v_{j-2}) = 0$. In einer gültigen Lösung ist $gap_-(v_{j-3}) < 2$, siehe Abbildung 8.13. Daher gilt

$$h_{1,0}(v_j) = \min\{h_{0,0}(v_{j-2}), h_{0,1}(v_{j-2})\} + c(v_j).$$

5. Für $h_{1,1}(v_j)$ gilt $gap_-(v_j) = 1$ und $gap_-(v_{j'}) = 1$. Wieder ist $v_{j'} = v_{j-2}$, d.h. $gap_-(v_{j-2}) = 1$. In einer gültigen Lösung ist $gap_-(v_{j-4}) < 2$, siehe Abbildung 8.14. Daher gilt

$$h_{1,1}(v_j) = \min\{h_{1,0}(v_{j-2}), h_{1,1}(v_{j-2})\} + c(v_j).$$

6. Für $h_{2,0}(v_j)$ gilt $gap_-(v_j) = 2$ und $gap_-(v_{j'}) = 0$. Ist $gap_-(v_j) = 2$, dann ist $v_{j'} = v_{j-3}$, d.h. $gap_-(v_{j-3}) = 0$. In einer gültigen Lösung ist $gap_-(v_{j-4}) = 0$, siehe Abbildung 8.15. Daher gilt

$$h_{2,0}(v_j) = h_{0,0}(v_{j-3}) + c(v_j).$$

Im Folgenden werden die Startwerte für den Algorithmus festgelegt. Nach Voraussetzung ist v_{n-1} ein Ankerknoten und v_1 ist kein Ankerknoten. Somit ist in jeder gültigen Lösung mindestens einer der beiden Knoten v_2, v_3 ein Ankerknoten, siehe Lemma 8.2.1. Wir unterscheiden zwischen den folgenden zwei Fällen:

1. Knoten v_2 ist kein Ankerknoten.

Ist v_2 kein Ankerknoten, so ist in jeder gültigen Lösung der Knoten v_3 ein Ankerknoten. Aus den Bedingungen in Lemma 8.2.1 folgt, dass die Knoten v_{n-2} und v_{n-3} Ankerknoten sind, siehe Abbildung 8.16. Daher setzen wir $h_{\alpha,\beta}(v_2) = \infty \forall \alpha, \beta \in \{0,1,2\}$ und $h_{2,0}(v_3) = c(v_3)$ und $h_{\alpha,\beta}(v_3) = \infty$ für $\alpha \neq 2 \vee \beta \neq 0$. Das Gewicht einer fehlertoleranten trennenden Menge mit kleinstem Gewicht mit diesen Anfangsbedingungen ist $h_{0,0}(v_{n-1})$.

2. Knoten v_2 ist ein Ankerknoten.

Ist v_2 ein Ankerknoten, unterscheiden wir zwei Fälle:

- a) Knoten v_{n-2} ist ein Ankerknoten.

Ist v_{n-2} ein Ankerknoten, dann ist in jeder gültigen Lösung entweder v_{n-3} ein Ankerknoten oder v_{n-3} ist kein Ankerknoten und v_{n-4} ist ein Ankerknoten, siehe Abbildung 8.17. In beiden Fällen sind die Anfangsbedingungen $h_{1,0}(v_2) = c(v_2)$ und $h_{\alpha,\beta}(v_3) = \infty$ für $\alpha \neq 1 \vee \beta \neq 0$. Das Gewicht einer fehlertoleranten trennenden Menge mit kleinstem Gewicht mit diesen Anfangsbedingungen ist $\min\{h_{0,0}(n-1), h_{0,1}(n-1)\}$.

- b) Knoten v_{n-2} ist kein Ankerknoten.

Ist v_{n-2} kein Ankerknoten, ist in jeder gültigen Lösung der Knoten v_{n-3} ein Ankerknoten. Entweder ist v_{n-4} oder v_{n-5} ein Ankerknoten, siehe Abbildung 8.18. In beiden Fällen sind die Anfangsbedingungen $h_{1,1}(v_2) = c(v_2)$ und $h_{\alpha,\beta}(v_3) = \infty$ für $\alpha \neq 1 \vee \beta \neq 1$. Das Gewicht einer fehlertoleranten trennenden Menge mit kleinstem Gewicht mit diesen Anfangsbedingungen ist $\min\{h_{1,0}(n-1), h_{1,1}(n-1)\}$.

Für die Berechnung der gewichteten fehlertoleranten metrischen Dimension eines Wheels bestimmen wir für sechs aufeinanderfolgende Kreisknoten die h -Werte für die drei Anfangsbedingungen. Insgesamt ergeben sich daraus 18 Lösungswerte. Das Minimum dieser 18 Werte ist die gewichtete fehlertolerante metrische Dimension des Graphen. Da sich die h -Werte in $\mathcal{O}(n)$ Schritten berechnen lassen, hat der beschriebene Algorithmus eine Gesamtlaufzeit aus $\mathcal{O}(|V| + |E|)$. □

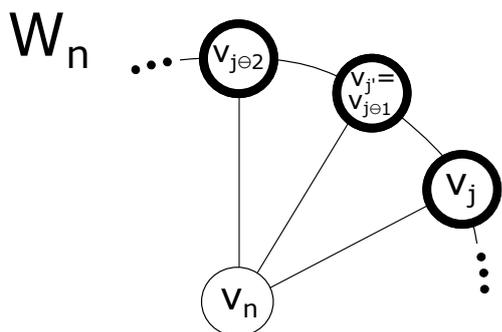


Abb. 8.10: In einer $h_{0,0}(v_j)$ -Lösung, sind v_j , $v_{j'} = v_{j\ominus 1}$ und $v_{j'\ominus 1} = v_{j\ominus 2}$ Ankerknoten.

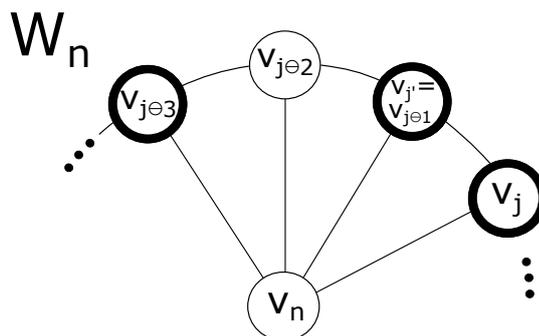


Abb. 8.11: In einer $h_{0,1}(v_j)$ -Lösung sind v_j , $v_{j'} = v_{j\ominus 1}$ und $v_{j'\ominus 2} = v_{j\ominus 3}$ Ankerknoten.

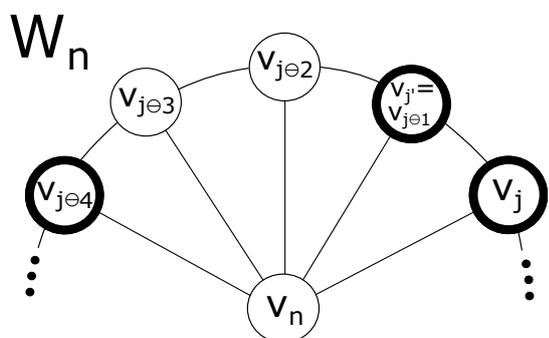


Abb. 8.12: In einer $h_{0,2}(v_j)$ -Lösung sind v_j , $v_{j'} = v_{j\ominus 1}$ und $v_{j'\ominus 3} = v_{j\ominus 4}$ Ankerknoten.

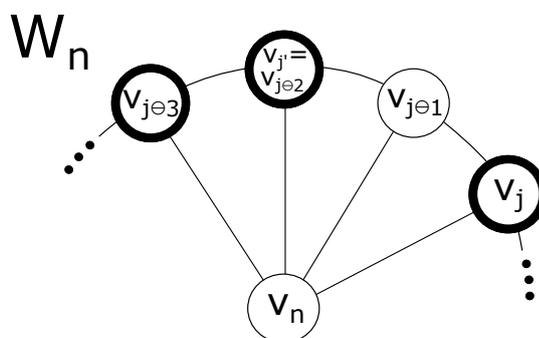


Abb. 8.13: In einer $h_{1,0}(v_j)$ -Lösung sind v_j , $v_{j'} = v_{j\ominus 2}$ und $v_{j'\ominus 1} = v_{j\ominus 3}$ Ankerknoten.

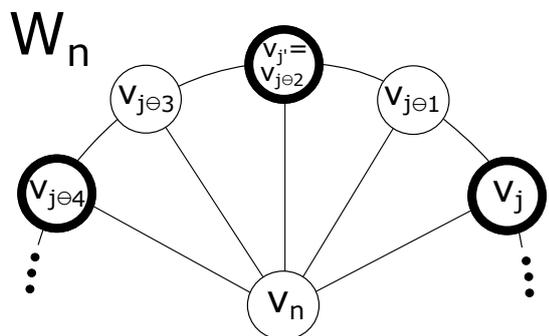


Abb. 8.14: In einer $h_{1,1}(v_j)$ -Lösung sind v_j , $v_{j'} = v_{j\ominus 2}$ und $v_{j'\ominus 2} = v_{j\ominus 4}$ Ankerknoten.

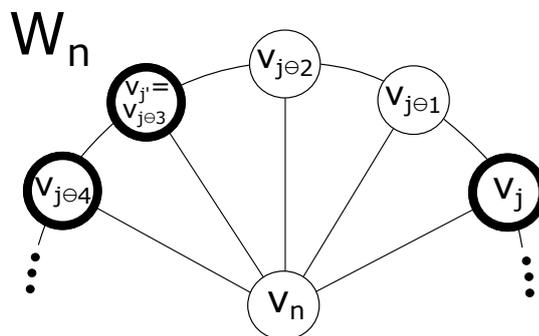


Abb. 8.15: In einer $h_{2,0}(v_j)$ -Lösung sind v_j , $v_{j'} = v_{j\ominus 3}$ und $v_{j'\ominus 1} = v_{j\ominus 4}$ Ankerknoten.

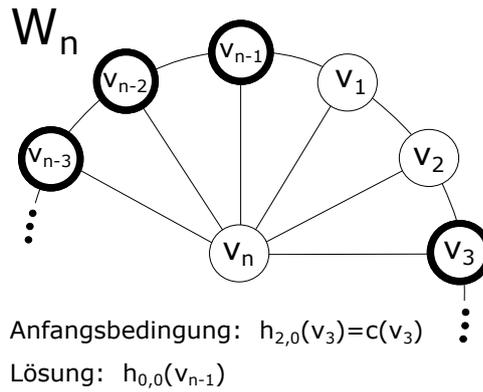


Abb. 8.16: Die Abbildung zeigt die Anfangsbedingungen, wenn v_2 kein Ankerknoten ist. Dann sind die Knoten v_{n-1} , v_{n-2} und v_{n-3} Ankerknoten und der Anfangswert ist $h_{2,0}(v_3) = c(v_3)$. Die Lösung ist $h_{0,0}(v_{n-1})$.

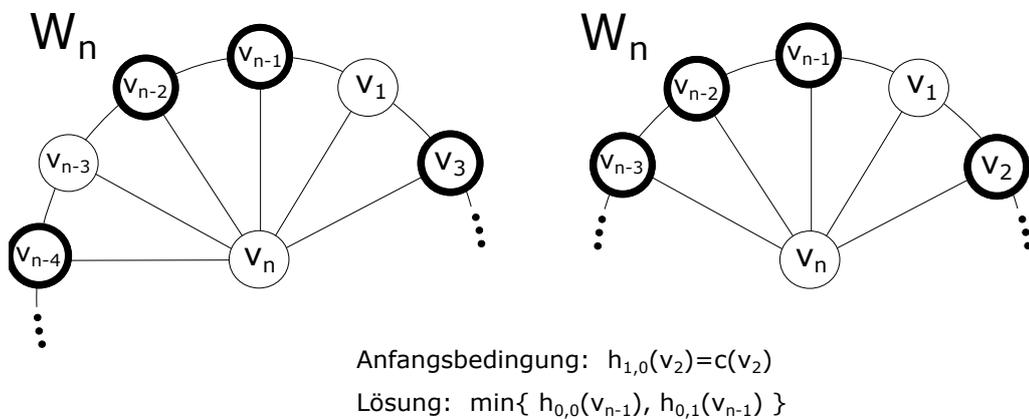


Abb. 8.17: Die Abbildung zeigt die Anfangsbedingungen, wenn v_2 und v_{n-2} Ankerknoten sind. Dann ist entweder v_{n-3} (rechte Abbildung) oder v_{n-4} (linke Abbildung) ein Ankerknoten. In beiden Fällen ist der Anfangswert $h_{1,0}(v_2) = c(v_2)$ und die Lösung ist $\min\{h_{0,0}(n-1), h_{0,1}(n-1)\}$.

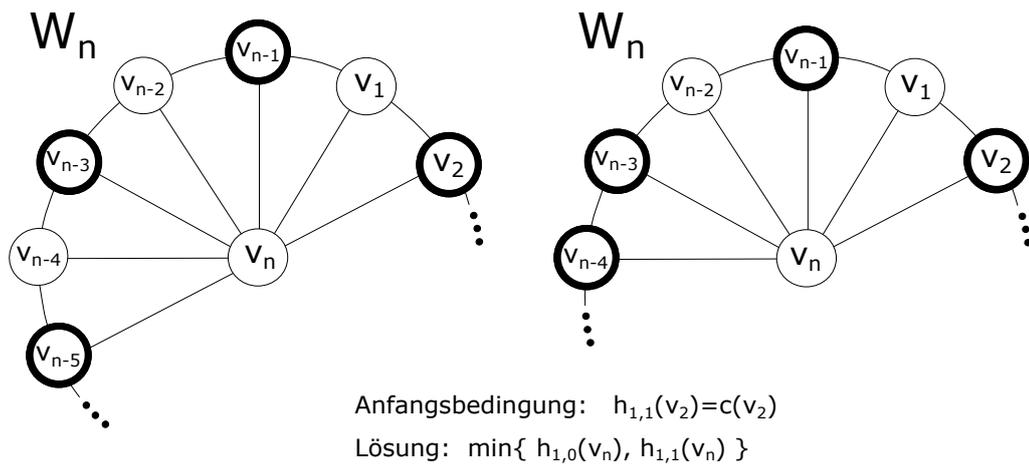


Abb. 8.18: Die Abbildung zeigt die Anfangsbedingungen, wenn v_2 ein Ankerknoten und v_{n-2} kein Ankerknoten ist. Dann ist v_{n-3} ein Ankerknoten und entweder v_{n-4} (rechte Abbildung) oder v_{n-5} (linke Abbildung) ein Ankerknoten. In beiden Fällen ist der Anfangswert $h_{1,1}(v_2) = c(v_2)$ und die Lösung ist $\min\{h_{1,0}(n-1), h_{1,1}(n-1)\}$.

9 Fazit und Ausblick

9.1 Fazit

In dieser Arbeit wurde das Graphenproblem METRISCHE DIMENSION untersucht. Bei der metrischen Dimension eines Graphen $G = (V, E)$ handelt es sich um die Größe einer kleinsten trennenden Menge für G . Eine trennende Menge für G ist eine Teilmenge $R \subseteq V$ der Knotenmenge von G , sodass jedes Knotenpaar $u, v \in V, u \neq v$, eine unterschiedliche Distanz zu einem Knoten $r \in R$ besitzt. Für einen Graphen G und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ ist das Problem zu entscheiden, ob die metrische Dimension von G höchstens k ist, NP-vollständig.

In den Kapiteln 1 bis 3 wurde in die Problemstellung mit ihren Varianten eingeführt. Dabei wurden Unterschiede und Gemeinsamkeiten der verschiedenen Problemvarianten erläutert. Anschließend folgte ein Überblick über den aktuellen Stand der Forschung in diesem Gebiet.

In Kapitel 4 wurde eine Graphdekomposition beschrieben, mit deren Hilfe die metrische Dimension eines Graphen aus der Größe bestimmter trennender Mengen für die einzelnen Komponenten der Dekomposition berechnet werden kann. Diese baumstrukturierte Dekomposition zerlegt den Graphen eindeutig in sogenannte Brücken, Legs und EBCs. Eine EBC eines Graphen G ist eine zweifache Zusammenhangskomponente H von G erweitert um die Hooked-Legs von G mit Wurzel in H . Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ und einen Parameter $k \in \mathbb{N}$ berechnet der Algorithmus entlang des Dekompositionsbaumes bottom-up zwei Werte, mit deren Hilfe an der Wurzel eine kleinste trennende Menge für G mit höchstens k Ankerknoten aus jeder Komponente bestimmt werden kann, wenn eine solche trennende Menge existiert. Die Laufzeit dieses Algorithmus ist aus $\mathcal{O}(|V|^k \cdot |V| \cdot (|V| + |E|))$. Mithilfe einer solchen Zerlegung kann das Problem METRISCHE DIMENSION für die Klasse der Graphen, für die es eine kleinste trennende Menge mit höchstens $k \in \mathbb{N}$ Ankerknoten aus jeder Komponente gibt, effizient gelöst werden. Dieses Ergebnis ist besonders beachtlich, da das Problem für die Klasse der Graphen, für die es eine kleinste trennende Menge mit höchstens $k \in \mathbb{N}$ Ankerknoten aus jeder zweifachen Zusammenhangskomponente gibt, selbst für $k = 1$ NP-vollständig ist. Der entsprechende NP-Vollständigkeitsbeweis wurde am Ende des Kapitels angegeben.

In Kapitel 5 wurde die gewichtete fehlertolerante metrische Dimension von Co-Graphen untersucht. Bei Co-Graphen handelt sich um die Klasse der Graphen, die keinen induzierten P_4 enthalten. Es wurde ein Linearzeitalgorithmus zur Berechnung der gewichteten fehlertoleranten metrischen Dimension von Co-Graphen vorgestellt. Dieser Algorithmus ist der erste publizierte zur Lösung dieses Problems und wurde auf der Konferenz „Fundamentals of Computation Theory (FCT)“ 2019 in Kopenhagen vorgestellt.

In Kapitel 6 wurde die von Fernau und Rodríguez-Velázquez in [65] formulierte offene Frage nach der Komplexität des Problems LOKALE METRISCHE DIMENSION für planare Graphen beantwortet. Es wurde die NP-Vollständigkeit des Problems mithilfe einer Reduktion von 1-NEGATIVE PLANAR 3-SAT gezeigt. Die Beweisidee erweitert den in [48] vorgestellten Beweis für die NP-Vollständigkeit der metrischen Dimension von planaren Graphen.

In Kapitel 7 wurden die gewichtete metrische Dimension und die fehlertolerante metrische Dimension von Sonnengraphen untersucht. Bei Sonnengraphen handelt es sich um Kreisgraphen, deren Knoten um höchstens einen Weg beliebiger Länge erweitert werden. Es wurde ein Algorithmus zur Berechnung der gewichteten metrischen Dimension von Sonnengraphen vorgestellt. Dieser hat eine Laufzeit, die quadratisch in der Instanzgröße ist und verbessert die Laufzeit des bisher besten bekannten Algorithmus zur Lösung dieses Problems. Der bisher beste bekannte Algorithmus wurde von Epstein et al. in [51] vorgestellt und hat eine Laufzeit aus $\mathcal{O}(|V|^4)$. Weiterhin wurde in Kapitel 7 ein Algorithmus zur Berechnung der fehlertoleranten metrischen Dimension von Sonnengraphen vorgestellt. Dieser hat eine Laufzeit, die linear in der Instanzgröße ist.

In Kapitel 8 wurde ein Linearzeitalgorithmus zur Berechnung der fehlertoleranten metrischen Dimension von Wheels vorgestellt. Wheels sind Kreisgraphen, in denen alle Kreis-knoten mit einem zusätzlichen Knoten, der Nabe, verbunden sind. Adar und Epstein stellen in [2] ebenfalls einen Linearzeitalgorithmus zur Berechnung der fehlertoleranten metrischen Dimension von Wheels vor. Der in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Algorithmus ist unabhängig von [2] entstanden und beschreibt eine alternative Lösungsstrategie für dieses Problem.

9.2 Ausblick

Im Gebiet der metrischen Dimension von Graphen gibt es eine Vielzahl noch ungelöster Probleme. Das wohl am meisten untersuchte noch immer offene Problem ist die Frage nach der Komplexität der metrischen Dimension für baumweitebeschränkte Graphen. Selbst für Graphen mit Baumweite zwei gibt es bisher keine Ergebnisse. Die leeren Felder

in den Tabellen 9.1 bis 9.3 geben eine Übersicht über die noch ungelösten Problemvarianten für einige interessante Graphklassen.

Abseits von der Untersuchung von Problemvarianten für verschiedene Graphklassen ist es durchaus sinnvoll, das Problem METRISCHE DIMENSION mit einem stärkeren Bezug auf eine praktische Anwendbarkeit beim Routing in Sensornetzwerken zu betrachten. Beim Beacon-Vector-Routing beispielsweise erhalten Sensorknoten eindeutige virtuelle Adressen, die sich über die Distanzen zu den Ankerknoten einer trennenden Menge ergeben. Als Abstandsmaß für das Routen zwischen zwei Sensorknoten wird die Hammingdistanz der virtuellen Adressen gewählt. Beim Routen von einem Startknoten s zu einem Zielknoten t wird greedy zu dem Nachbarn von s geroutet, der näher am Ziel t liegt, d.h. dessen Hammingdistanz zur virtuellen Adresse von t kleiner ist. Dieses Vorgehen führt jedoch nicht immer zum Ziel, da Knotenpaare mit kleiner Hammingdistanz eine große Graphdistanz zueinander haben können. Werden die Sensorknoten allerdings über die Abstände zu den Knoten einer stark trennenden Menge adressiert, geht die Distanz zwischen s und t aus der Adressierung hervor. Das wird durch folgende Überlegung deutlich. In einer stark trennenden Menge gibt es einen Ankerknoten r , sodass s auf einem kürzesten $t-r$ -Weg oder t auf einem kürzesten $s-r$ -Weg liegt. O.B.d.A. liege t auf einem kürzesten $s-r$ -Weg. Sei d der Vektor, der sich aus der Differenz der virtuellen Adressen von s und t ergibt. Dann ist offensichtlich einer der Einträge aus d die Graphdistanz zwischen s und t . Durch eine genauere Analyse ergibt sich, dass das Maximum der Einträge aus d die Graphdistanz zwischen s und t ist. Daraus folgt, dass ein Greedy-Routing von s nach t stets optimal ist. Diese Überlegungen zeigen das Potenzial der starken metrischen Dimension und auch anderer Varianten der metrischen Dimension in Hinblick auf die Anwendbarkeit beim Routing in Netzwerken und könnte im Rahmen eines zukünftigen Forschungsprojekts näher untersucht werden.

Graphen	$mdim$	$mdim$ parametrisiert
Allgemeine	NP-Vollständig [72]	$W[2]$ -schwer für Standardparameter [86]; FPT für Parameter Max-Leaf-Number [49]; $W[1]$ -schwer für Parameter Baumweite [28]; FPT für Parameter Baumlänge [23]
Vollständige	geschlossene Formel [39]	
Kreise	geschlossene Formel [85]	
Bäume	geschlossene Formel [123]	
k -edge-augmented Bäume	$\mathcal{O}(n^{\mathcal{O}(k)})$ [51]	
Vollständige Wheels	geschlossene Formel [51]	
Wheels	$\mathcal{O}(n^4)$ [51]	
Planare	NP-vollständig [47]	
Außenplanare	$\mathcal{O}(n^{\mathcal{O}(k)})$ [47]	
Vollständig bipartite	$\mathcal{O}(n)$ [39]	
Bipartite	NP-vollständig [51]	
Co-Bipartite	NP-vollständig [51]	
Sonnengraphen	$\mathcal{O}(n)$ [93]	
Intervall	NP-vollständig [69]	FPT für Standardparameter [69]
Permutations	NP-vollständig [69]	
Co-Graphen	$\mathcal{O}(n)$ [51]	
Unit-Disc	NP-vollständig [94]	
Split	NP-vollständig [51]	
Chain	$\mathcal{O}(n)$ [64]	
Coronaprodukt	NP-vollständig [65][66]	
Cactus-Block	$\mathcal{O}(n)$ [93]	
Distanzerhaltende beschränkte Baumweite		
beschränkte Baumlänge	$\mathcal{O}(n^{\mathcal{O}(1)})$ (folgt aus FPT)	

Tab. 9.1: Übersicht der Ergebnisse für (parametrisierte) $mdim$

Graphen	<i>wdim</i>	<i>ldim</i>	<i>adim</i>
Allgemeine Graphen	NP-vollständig (folgt aus <i>mdim</i>)	NP-vollständig [66]	NP-vollständig [66]
Vollständige	geschlossene Formel [51]	geschlossene Formel	
Kreise	geschlossene Formel [51]	geschlossene Formel	
Bäume	geschlossene Formel [51]	geschlossene Formel (folgt aus bipartit)	
<i>k</i> -edge-augmented Bäume	$\mathcal{O}(n^{\mathcal{O}(k)})$ [51]		
Vollständige Wheels	$\mathcal{O}(n)$ [51]	geschlossene Formel	
Wheels	$\mathcal{O}(n^4)$ [51]		
Planare	NP-vollständig (folgt aus <i>mdim</i>)	erste Ansätze	NP-vollständig [66]
Außenplanare			
Vollständig bipartite	geschlossene Formel	geschlossene Formel (folgt aus bipartit)	
Bipartite	NP-vollständig (folgt aus <i>mdim</i>)	geschlossene Formel [157]	
Co-Bipartite	NP-vollständig (folgt aus <i>mdim</i>)		
Sonnengraphen	$\mathcal{O}(n^4)$ [51]		
Intervall	NP-vollständig (folgt aus <i>mdim</i>)		
Permutations	NP-vollständig (folgt aus <i>mdim</i>)		
Co-Graphen	$\mathcal{O}(n)$ [51]		
Unit-Disc	NP-vollständig (folgt aus <i>mdim</i>)		
Split	NP-vollständig (folgt aus <i>mdim</i>)		
Chain			
Coronaprodukt	NP-vollständig (folgt aus <i>mdim</i>)	NP-vollständig [66]	NP-vollständig [66]
Kaktus-Block			
Distanzerhaltende			
beschränkte Bamweite			
beschränkte Baumlänge			

Tab. 9.2: Übersicht der Ergebnisse für *wdim*, *ldim* und *adim*

Graphen	$sdim$	$fdim$	$kdim$
Allgemeine Graphen	NP-vollständig [156]	NP-vollständig (Beweis nicht korrekt) [195]	NP-vollständig (Beweis nicht korrekt) [195]
Vollständige	geschlossene Formel [165]	geschlossene Formel [167]	geschlossene Formel [2]
Kreise	geschlossene Formel [172]	geschlossene Formel	
Bäume	geschlossene Formel [172]	geschlossene Formel [92]	$\mathcal{O}(n)$ [195]
k -edge-augmented Bäume			
Vollständige Wheels		$\mathcal{O}(n)$ [2]	geschlossene Formel für $k \leq 4$, keine Lösung für $k \geq 5$ [2]
Wheels			
Planare			
Außenplanare			
Vollständig bipartite		ungewichtet: geschlossene Formel gewichtet: $\mathcal{O}(n)$ [2]	Keine Lösung für $k \geq 3$ [2]
Bipartite			
Co-Bipartite			
Sonnengraphen			
Intervall			
Permutations			
Co-Graphen		$\mathcal{O}(n)$ [192]	
Unit-Disc			
Split			
Chain			
Coronaprodukt			
Cactus-Block			
Distanzerhaltende	$\mathcal{O}(n)$ [145]		
beschränkte Baumweite			
beschränkte Baumlänge			

Tab. 9.3: Übersicht der Ergebnisse für $sdim$, $fdim$ und $kdim$

10 Anhang

In diese Dissertation wurden die Ergebnisse der folgenden Publikationen eingearbeitet.

- [191] Duygu Vietz, Stefan Hoffmann, and Egon Wanke. Computing the metric dimension by decomposing graphs into extended biconnected components - (extended abstract). In Gautam K. Das, Partha Sarathi Mandal, Krishnendu Mukhopadhyaya, and Shin-Ichi Nakano, editors, *WALCOM: Algorithms and Computation - 13th International Conference, WALCOM 2019, Guwahati, India, February 27 - March 2, 2019, Proceedings*, volume 11355 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 175-187. Springer, 2019.
- [192] Duygu Vietz and Egon Wanke. The fault-tolerant metric dimension of cographs. In Leszek Antoni Gasieniec, Jesper Jansson, and Christos Levcopoulos, editors, *Fundamentals of Computation Theory - 22nd International Symposium, FCT 2019, Copenhagen, Denmark, August 12-14, 2019, Proceedings*, volume 11651 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 350-364. Springer, 2019.

Die in der Publikation [191] vorgestellten Ideen und Konzepte wurden von allen Autoren zu gleichen Teilen entwickelt. Die Formalisierung und Formulierung dieser Arbeit stammt weitestgehend von mir. Die Publikation [192] wurde von mir entwickelt, formalisiert und formuliert. Mein Co-Autor hat wertvolle Hinweise geliefert und bei der Finalisierung der Arbeit mitgewirkt.

Abbildungsverzeichnis

4.1	Ein Graph mit vier EBCs, 14 Ordinary-Legs und einer Brücke	18
4.2	Ein DEBC-Baum für den Graphen in Abbildung 4.1	20
4.3	Beispiel für Gate- und Out-Knoten	22
4.4	Beispiel für die Schranken aus Lemma 4.2.6	23
4.5	Beispiel für Lemma 4.2.10	26
4.6	Veranschaulichung von Teil (a) des Beweises von Lemma 4.3.5	30
4.7	Veranschaulichung von Teil (b) des Beweises von Lemma 4.3.5	30
4.8	Veranschaulichung von Teil (c) des Beweises von Lemma 4.3.5	31
4.9	Veranschaulichung von Teil (d) des Beweises von Lemma 4.3.5	31
4.10	Eine Graphklasse $G_n \in \mathcal{G}_2$, für die es kein $k \in \mathbb{N}$ mit $G_n \in \mathcal{G}_k^{min}$ gibt . . .	36
4.11	Gadget für eine Variable in F	37
4.12	Gadget für eine Klausel in F	37
4.13	Modifiziertes Variablengadget	37
4.14	Klausel $C_j = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$	37
5.1	Fehlertolerante trennende Menge, die nicht 2-adjazent-trennend ist	41
6.1	Klauselgadget g_c	53
6.2	Variablengadget g_x	53
6.3	G_F	55
6.4	H_F ohne Kanten	55
6.5	H_F mit True-Kanten	56
6.6	H_F mit False-Kanten	56
7.1	Beispiel für die Menge $T(v_{i,i'})$	61
7.2	Beispiel für die Menge $L(v_{i,i'})$	62
7.3	Beispiel für die Menge $LK(v_{i,i'})$	62
7.4	Beispiel für die Menge $K(v_{i,i'})$	63
7.5	Beispiel für die Menge $NL(i)$	65
7.6	Beispiel für die Menge $NR(i)$	65
7.7	Beispiel für die Menge $DL(i)$	66
7.8	Beispiel für die Menge $DR(i)$	66
7.9	Zusammenhang zwischen $LK(v_{i,i'})$ und $NL(i)$ für $i' = 1$	69

7.10	Zusammenhang zwischen $LK(v_{i,i'})$ und $DL(i)$ für $i' = 1$	70
7.11	Zusammenhang zwischen $LK(v_{i,i'})$, $DL(i)$ und $DR(i)$ für $i' > 1$	71
7.12	Zusammenhang zwischen $LK(v_{i,i'})$ und $NL(i)$ für $i' > 1$	72
7.13	h^- - und h^+ -Werte und die Mengen A' und C'	80
8.1	Wheel W_{13}	90
8.2	Wheel W_n mit Ankerknoten v_i und $l_{v_i} \geq 3$	92
8.3	Wheel W_n mit Ankerknoten $v_i, v_{i \oplus 1}$ und $l_{v_i} + l_{v_{i \oplus 1}} \geq 3$	92
8.4	Beweis von Lemma 8.2.1, 2.	93
8.5	Beweis von Lemma 8.2.1, 2.	93
8.6	Beweis von Lemma 8.2.1, 2.	94
8.7	Beweis von Lemma 8.2.1, 3.	94
8.8	Beweis von Lemma 8.2.1, 3.	94
8.9	Beweis von Lemma 8.2.1, 3.	94
8.10	Ankerknoten in einer $h_{0,0}$ -Lösung	98
8.11	Ankerknoten in einer $h_{0,1}$ -Lösung	98
8.12	Ankerknoten in einer $h_{0,2}$ -Lösung	98
8.13	Ankerknoten in einer $h_{1,0}$ -Lösung	98
8.14	Ankerknoten in einer $h_{1,1}$ -Lösung	98
8.15	Ankerknoten in einer $h_{2,0}$ -Lösung	98
8.16	Anfangsbedingung $h_{2,0}(v_3) = c(v_3)$	99
8.17	Anfangsbedingung $h_{1,0}(v_2) = c(v_2)$	99
8.18	Anfangsbedingung $h_{1,1}(v_2) = c(v_2)$	99

Tabellenverzeichnis

5.1	Berechnung von $r_{a,b,c,d}$ für die Vereinigung zweier isolierter Knoten	48
5.2	Berechnung von $r_{a,b,c,d}$ für die Vereinigung eines isolierten Knotens und eines Co-Graphen mit mindestens zwei Knoten	48
5.3	Berechnung von $r_{a,b,c,d}$ für die Vereinigung zweier Co-Graphen mit mindestens zwei Knoten	49
9.1	Übersicht der Ergebnisse für (parametrisierte) $mdim$	104
9.2	Übersicht der Ergebnisse für $wdim$, $ldim$ und $adim$	105
9.3	Übersicht der Ergebnisse für $sdim$, $fdim$ und $kdim$	106

Literaturverzeichnis

- [1] Ron Adar and Leah Epstein. An algorithm for the weighted metric dimension of two-dimensional grids. *Computing Research Repository (CoRR)*, abs/1602.05899, 2016.
- [2] Ron Adar and Leah Epstein. The k-metric dimension. *Journal of Combinatorial Optimization*, 34(1):1–30, 2017.
- [3] Ron Adar and Leah Epstein. The metric dimension of two-dimensional extended meshes. *Acta Cybernetica*, 23(3):761–772, 2018.
- [4] Shehnaz Akhter and Rashid Farooq. Metric dimension of fullerene graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 7(1):91–103, 2019.
- [5] Murtaza Ali, Gohar Ali, Muhammad Imran, Abdul Qudair Baig, and Muhammad Kashif Shafiq. On the metric dimension of mobius ladders. *Ars Combinatoria*, 105:403–410, 2012.
- [6] Noga Alon, Dimitry N. Kozlov, and Van H. Vu. The geometry of coin-weighing problems. In *Proceedings of 37th Conference on Foundations of Computer Science*, pages 524–532, 1996.
- [7] S. Arumugam and Varughese Mathew. The fractional metric dimension of graphs. *Discrete Mathematics*, 312(9):1584–1590, 2012.
- [8] S. Arumugam, Varughese Mathew, and Jian Shen. On fractional metric dimension of graphs. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 5(4), 2013.
- [9] Martin Bača, Edy Tri Baskoro, A. N. M. Salman, Suhadi Widodo Saputro, and Djoko Suprijanto. The metric dimension of regular bipartite graphs. *Bulletin mathématiques de la Société des sciences mathématiques de Roumanie*, 54(1):15–28, 2011.
- [10] Robert F. Bailey. The metric dimension of small distance-regular and strongly regular graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, 62:18–34, 2015.
- [11] Robert F. Bailey. On the metric dimension of incidence graphs. *Discrete Mathematics*, 341(6):1613–1619, 2018.

- [12] Robert F. Bailey and Peter J. Cameron. Base size, metric dimension and other invariants of groups and graphs. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 43(2):209–242, 2011.
- [13] Robert F. Bailey and Karen Meagher. On the metric dimension of grassmann graphs. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 13(4):97–104, 2011.
- [14] Gabriel A. Barragán-Ramírez, Alejandro Estrada-Moreno, Yunior Ramírez-Cruz, and Juan A. Rodríguez-Velázquez. The simultaneous local metric dimension of graph families. *Symmetry*, 9(8):132, 2017.
- [15] Gabriel A. Barragán-Ramírez, Carlos García Gómez, and Juan Alberto Rodríguez-Velázquez. Closed formulae for the local metric dimension of corona product graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 46:27–34, 2014.
- [16] Gabriel A. Barragán-Ramírez and Juan A. Rodríguez-Velázquez. The local metric dimension of strong product graphs. *Graphs and Combinatorics*, 32(4):1263–1278, 2016.
- [17] Gabriel A. Barragán-Ramírez, Rinovia Simanjuntak, Saladin Uttunggadewa, and Suhadi Wido Saputro. Local metric dimension of subgraph-amalgamation of graphs. In Ekrem Duman and Ali Fuat Alkaya, editors, *13th Cologne Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization, Istanbul, Turkey, May 26-28, 2015*, pages 285–288, 2015.
- [18] Alan F. Beardon and Juan Alberto Rodríguez-Velázquez. On the k -metric dimension of metric spaces. *Ars Mathematica Contemporanea*, 16(1):25–38, 2019.
- [19] Laurent Beaudou, Peter Dankelmann, Florent Foucaud, Michael A. Henning, Arnaud Mary, and Aline Parreau. Bounding the order of a graph using its diameter and metric dimension: A study through tree decompositions and VC dimension. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 32(2):902–918, 2018.
- [20] Zuzana Beerliova, Felix Eberhard, Thomas Erlebach, Alexander Hall, Michael Hoffmann, Matúš Mihaľák, and L. Shankar Ram. Network discovery and verification. In Dieter Kratsch, editor, *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, pages 127–138. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [21] Ali Behtoei, Akbar Davoodi, Mohsen Jannesari, and Behnaz Omoomi. A characterization of some graphs with metric dimension two. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 9(2):1–15, 2017.

-
- [22] Rémy Belmonte, Fedor V. Fomin, Petr A. Golovach, and M. S. Ramanujan. Metric dimension of bounded width graphs. In Giuseppe F. Italiano, Giovanni Pighizzini, and Donald Sannella, editors, *Mathematical Foundations of Computer Science 2015 - 40th International Symposium, MFCS 2015, Milan, Italy, August 24-28, 2015, Proceedings, Part II*, volume 9235 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 115–126. Springer, 2015.
- [23] Rémy Belmonte, Fedor V. Fomin, Petr A. Golovach, and M. S. Ramanujan. Metric dimension of bounded tree-length graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 31(2):1217–1243, 2017.
- [24] Julien Bensmail, Fionn Mc Inerney, and Nicolas Nisse. Metric dimension: from graphs to oriented graphs. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 346:111–123, 2019.
- [25] Julien Bensmail, Dorian Mazauric, Fionn Mc Inerney, Nicolas Nisse, and Stéphane Pérennes. Sequential metric dimension. In Leah Epstein and Thomas Erlebach, editors, *Approximation and Online Algorithms - 16th International Workshop, WAOA 2018, Helsinki, Finland, August 23-24, 2018, Revised Selected Papers*, volume 11312 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 36–50. Springer, 2018.
- [26] L.M. Blumenthal. *Theory and applications of distance geometry*. Clarendon Press, 1953.
- [27] Béla Bollobás, Dieter Mitsche, and Pawel Pralat. Metric dimension for random graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 20(4):P1, 2013.
- [28] Édouard Bonnet and Nidhi Purohit. Metric dimension parameterized by treewidth. *Computing Research Repository (CoRR)*, abs/1907.08093, 2019.
- [29] Debra L. Boutin. Determining sets, resolving sets, and the exchange property. *Graphs and Combinatorics*, 25(6):789–806, 2009.
- [30] Robert C. Brigham, Gary Chartrand, Ronald D. Dutton, and Ping Zhang. Resolving domination in graphs. *Mathematica Bohemica*, 128(1):25–36, 2003.
- [31] Peter S. Buczkowski, Gary Chartrand, Christopher Poisson, and Ping Zhang. On k -dimensional graphs and their bases. *Periodica Mathematica Hungarica*, 46:9–15, 2003.
- [32] José Cáceres, Delia Garijo, María Luz Puertas, and Carlos Seara. On the determining number and the metric dimension of graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 17(1), 2010.

- [33] José Cáceres, M. Carmen Hernando, Mercè Mora, Ignacio M. Pelayo, and María Luz Puertas. On the metric dimension of infinite graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 160(18):2618–2626, 2012.
- [34] José Cáceres, M. Carmen Hernando, Mercè Mora, Ignacio M. Pelayo, María Luz Puertas, Carlos Seara, and David R. Wood. On the metric dimension of cartesian products of graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 21(2):423–441, 2007.
- [35] David G. Cantor. Determining a set from the cardinalities of its intersections with other sets. *Canadian Journal of Mathematics*, 16:94–97, 1964.
- [36] David G. Cantor and W. H. Mills. Determination of a subset from certain combinatorial properties. *Canadian Journal of Mathematics*, 18:42–48, 1966.
- [37] Antonio Caruso, Stefano Chessa, Swades De, and A. Urpi. GPS free coordinate assignment and routing in wireless sensor networks. In *INFOCOM 2005. 24th Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies, 13-17 March 2005, Miami, FL, USA*, pages 150–160. IEEE, 2005.
- [38] Glenn G. Chappell, John G. Gimbel, and Chris Hartman. Bounds on the metric and partition dimensions of a graph. *Ars Combinatoria*, 88, 2008.
- [39] Gary Chartrand, Linda Eroh, Mark A. Johnson, and Ortrud R. Oellermann. Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 105(1-3):99–113, 2000.
- [40] Gary Chartrand, David Erwin, Michael E. Raines, and Ping Zhang. The decomposition dimension of graphs. *Graphs and Combinatorics*, 17(4):599–605, 2001.
- [41] Gary Chartrand and Linda M. Lesniak. *Graphs and digraphs*. Wadsworth & Brooks / Cole mathematics series. Wadsworth, 1986.
- [42] Gary Chartrand, Christopher Poisson, and Ping Zhang. Resolvability and the upper dimension of graphs. *Computers and Mathematics with Applications*, 39(12):19–28, 2000.
- [43] Gary Chartrand, Michael Raines, Ping Zhang, and Kalamazoo. The directed distance dimension of oriented graphs. *Mathematica Bohemica*, 125(02):155–168, 2000.
- [44] Gary Chartrand, Varaporn Saenpholphat, and Ping Zhang. The independent resolving number of a graph. *Mathematica Bohemica*, 128(4):379–393, 2003.
- [45] V. Chvátal. Mastermind. *Combinatorica*, 3(3):325–329, 1983.

-
- [46] Bhaskar DasGupta and Nasim Mobasher. On optimal approximability results for computing the strong metric dimension. *Discrete Applied Mathematics*, 221:18–24, 2017.
- [47] Josep Díaz, Olli Pottonen, Maria J. Serna, and Erik Jan van Leeuwen. On the complexity of metric dimension. In Leah Epstein and Paolo Ferragina, editors, *Algorithms - ESA 2012 - 20th Annual European Symposium, Ljubljana, Slovenia, September 10-12, 2012. Proceedings*, volume 7501 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 419–430. Springer, 2012.
- [48] Josep Díaz, Olli Pottonen, Maria J. Serna, and Erik Jan van Leeuwen. Complexity of metric dimension on planar graphs. *Journal of Computer and System Sciences*, 83(1):132–158, 2017.
- [49] David Eppstein. Metric dimension parameterized by max leaf number. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 19(1):313–323, 2015.
- [50] Leah Epstein, Asaf Levin, and Gerhard J. Woeginger. The (weighted) metric dimension of graphs: Hard and easy cases. In Martin Charles Golumbic, Michal Stern, Avivit Levy, and Gila Morgenstern, editors, *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science - 38th International Workshop, WG 2012, Jerusalem, Israel, June 26-28, 2012, Revised Selected Papers*, volume 7551 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 114–125. Springer, 2012.
- [51] Leah Epstein, Asaf Levin, and Gerhard J. Woeginger. The (weighted) metric dimension of graphs: Hard and easy cases. *Algorithmica*, 72(4):1130–1171, 2015.
- [52] Linda Eroh, Cong X. Kang, and Eunjeong Yi. On metric dimension of functigraphs. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 5(4), 2013.
- [53] Ehsan Estaji and Juan Alberto Rodríguez-Velázquez. The strong metric dimension of generalized sierpiński graphs with pendant vertices. *Ars Mathematica Contemporanea*, 12(1):127–134, 2017.
- [54] Alejandro Estrada-Moreno, Juan Alberto Rodríguez-Velázquez, and Ismael González Yero. The k-metric dimension of a graph. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 9(6):2829–2840, 2015.
- [55] Alejandro Estrada-Moreno, Ismael González Yero, and Juan A. Rodríguez-Velázquez. The k-metric dimension of the lexicographic product of graphs. *Discrete Mathematics*, 339(7):1924–1934, 2016.

- [56] Alejandro Estrada-Moreno, Ismael González Yero, and Juan A. Rodríguez-Velázquez. Relationships between the 2-metric dimension and the 2-adjacency dimension in the lexicographic product of graphs. *Graphs and Combinatorics*, 32(6):2367–2392, 2016.
- [57] Alejandro Estrada-Moreno, Ismael González Yero, and Juan Alberto Rodríguez-Velázquez. The k-metric dimension of corona product graphs. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 39(1):135–156, 2016.
- [58] Melodie Fehr, Shonda Gosselin, and Ortrud R. Oellermann. The metric dimension of cayley digraphs. *Discrete Mathematics*, 306(1):31–41, 2006.
- [59] Min Feng and Qian Kong. On the fractional metric dimension of corona product graphs and lexicographic product graphs. *Ars Combinatoria*, 138:249–260, 2018.
- [60] Min Feng, Benjian Lv, and Kaishun Wang. On the fractional metric dimension of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 170:55–63, 2014.
- [61] Min Feng, Xuanlong Ma, and Kaishun Wang. The structure and metric dimension of the power graph of a finite group. *European Journal of Combinatorics*, 43:82–97, 2015.
- [62] Min Feng and Kaishun Wang. On the metric dimension of bilinear forms graphs. *Discrete Mathematics*, 312(6):1266–1268, 2012.
- [63] Min Feng, Min Xu, and Kaishun Wang. On the metric dimension of line graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 161(6):802–805, 2013.
- [64] Henning Fernau, Pinar Heggernes, Pim van 't Hof, Daniel Meister, and Reza Saei. Computing the metric dimension for chain graphs. *Information Processing Letters*, 115(9):671–676, 2015.
- [65] Henning Fernau and Juan A. Rodríguez-Velázquez. On the (adjacency) metric dimension of corona and strong product graphs and their local variants: Combinatorial and computational results. *Discrete Applied Mathematics*, 236:183–202, 2018.
- [66] Henning Fernau and Juan Alberto Rodríguez-Velázquez. Notions of metric dimension of corona products: Combinatorial and computational results. In Edward A. Hirsch, Sergei O. Kuznetsov, Jean-Éric Pin, and Nikolay K. Vereshchagin, editors, *Computer Science - Theory and Applications - 9th International Computer Science Symposium in Russia, CSR 2014, Moscow, Russia, June 7-11, 2014. Proceedings*, volume 8476 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 153–166. Springer, 2014.

-
- [67] Rodrigo Fonseca, Sylvia Ratnasamy, Jerry Zhao, Cheng Tien Ee, David E. Culler, Scott Shenker, and Ion Stoica. Beacon vector routing: Scalable point-to-point routing in wireless sensor networks. In Amin Vahdat and David Wetherall, editors, *2nd Symposium on Networked Systems Design and Implementation (NSDI 2005), May 2-4, 2005, Boston, Massachusetts, USA, Proceedings*. USENIX, 2005.
- [68] Florent Foucaud, George B. Mertzios, Reza Naserasr, Aline Parreau, and Petru Valicov. Algorithms and complexity for metric dimension and location-domination on interval and permutation graphs. In Ernst W. Mayr, editor, *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science - 41st International Workshop, WG 2015, Garching, Germany, June 17-19, 2015, Revised Papers*, volume 9224 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 456–471. Springer, 2015.
- [69] Florent Foucaud, George B. Mertzios, Reza Naserasr, Aline Parreau, and Petru Valicov. Identification, location-domination and metric dimension on interval and permutation graphs. i. bounds. *Theoretical Computer Science*, 668:43–58, 2017.
- [70] Florent Foucaud, George B. Mertzios, Reza Naserasr, Aline Parreau, and Petru Valicov. Identification, location-domination and metric dimension on interval and permutation graphs. II. algorithms and complexity. *Algorithmica*, 78(3):914–944, 2017.
- [71] Peter Frank and Robert Silverman. Remarks on detection problems. *The American Mathematical Monthly*, 74(2):171–173, 1967.
- [72] Michael Randolph Garey and David Stifler Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979.
- [73] Delia Garijo, Antonio González Herrera, and Alberto Márquez. On the metric dimension, the upper dimension and the resolving number of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 161(10-11):1440–1447, 2013.
- [74] Delia Garijo, Antonio González Herrera, and Alberto Márquez. The difference between the metric dimension and the determining number of a graph. *Applied Mathematics and Computation*, 249:487–501, 2014.
- [75] W. Goddard. Static mastermind. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 47:225–236, 2003.
- [76] W. Goddard. Mastermind revisited. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 51:215–220, 2004.
- [77] Cyriac Grigorious, Thomas Kalinowski, Joe Ryan, and Sudeep Stephen. The metric dimension of the circulant graph $C(n, \pm\{1, 2, 3, 4\})$. *Australian Journal of Combinatorics*, 69:417–441, 2017.

- [78] Cyriac Grigorious, Paul D. Manuel, Mirka Miller, Bharati Rajan, and Sudeep Stephen. On the metric dimension of circulant and harary graphs. *Applied Mathematics and Computation*, 248:47–54, 2014.
- [79] Jun Guo, Kaishun Wang, and Fenggao Li. Metric dimension of some distance-regular graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, 26(1):190–197, 2013.
- [80] Jun Guo, Kaishun Wang, and Fenggao Li. Metric dimension of symplectic dual polar graphs and symmetric bilinear forms graphs. *Discrete Mathematics*, 313(2):186–188, 2013.
- [81] Gregory Z. Gutin, M. S. Ramanujan, Felix Reidl, and Magnus Wahlström. Alternative parameterizations of metric dimension. *Theoretical Computer Science*, In press, 2019.
- [82] Richard K. Guy and Richard J. Nowakowski. Coin-weighing problems. *The American Mathematical Monthly*, 102(2):164–167, 1995.
- [83] Anni Hakanen and Tero Laihonen. On $\{\ell\}$ -metric dimensions in graphs. *Fundamenta Informaticae*, 162(2-3):143–160, 2018.
- [84] Michael Hallaway, Cong X. Kang, and Eunjeong Yi. On metric dimension of permutation graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, 28(4):814–826, 2014.
- [85] Frank Harary and Robert A. Melter. On the metric dimension of a graph. *Ars Combinatoria*, 2:191–195, 1976.
- [86] Sepp Hartung and André Nichterlein. On the parameterized and approximation hardness of metric dimension. In *Proceedings of the 28th Conference on Computational Complexity, CCC 2013, K.lo Alto, California, USA, 5-7 June, 2013*, pages 266–276. IEEE Computer Society, 2013.
- [87] Mathias Hauptmann, Richard Schmied, and Claus Viehmann. On approximation complexity of metric dimension problem. In Costas S. Iliopoulos and William F. Smyth, editors, *Combinatorial Algorithms - 21st International Workshop, IWOCA 2010, London, UK, July 26-28, 2010, Revised Selected Papers*, volume 6460 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 136–139. Springer, 2010.
- [88] Mathias Hauptmann, Richard Schmied, and Claus Viehmann. Approximation complexity of metric dimension problem. *Journal of Discrete Algorithms*, 14:214–222, 2012.
- [89] M. Carmen Hernando, Mercè Mora, Ignacio M. Pelayo, Carlos Seara, José Cáceres, and María Luz Puertas. On the metric dimension of some families of graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 22:129–133, 2005.

-
- [90] M. Carmen Hernando, Mercè Mora, Ignacio M. Pelayo, Carlos Seara, and David R. Wood. Extremal graph theory for metric dimension and diameter. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 29:339–343, 2007.
- [91] M. Carmen Hernando, Mercè Mora, Ignacio M. Pelayo, Carlos Seara, and David R. Wood. Extremal graph theory for metric dimension and diameter. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 17(1), 2010.
- [92] M. Carmen Hernando, Mercè Mora, Peter J. Slater, and David R. Wood. Fault-tolerant metric dimension of graphs. *Convexity in Discrete Structures*, 5:81–85, 2008.
- [93] Stefan Hoffmann, Alina Elterman, and Egon Wanke. A linear time algorithm for metric dimension of cactus block graphs. *Theoretical Computer Science*, 630:43–62, 2016.
- [94] Stefan Hoffmann and Egon Wanke. Metric dimension for gabriel unit disk graphs is np-complete. In Amotz Bar-Noy and Magnús M. Halldórsson, editors, *Algorithms for Sensor Systems, 8th International Symposium on Algorithms for Sensor Systems, Wireless Ad Hoc Networks and Autonomous Mobile Entities, ALGOSENSORS 2012, Ljubljana, Slovenia, September 13-14, 2012. Revised Selected Papers*, volume 7718 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 90–92. Springer, 2012.
- [95] John Edward Hopcroft and Robert Endre Tarjan. Efficient planarity testing. *Journal of the ACM*, 21(4):549–568, 1974.
- [96] Yufei Huang, Bo Hou, Wen Liu, Lidong Wu, Stephen Rainwater, and Suogang Gao. On approximation algorithm for the edge metric dimension problem. In Ding-Zhu Du, Lian Li, Xiaoming Sun, and Jialin Zhang, editors, *Algorithmic Aspects in Information and Management - 13th International Conference, AAIM 2019, Beijing, China, August 6-8, 2019, Proceedings*, volume 11640 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 142–148. Springer, 2019.
- [97] Zafar Hussain, Mobeen Munir, Maqbool Chaudhary, and Shin Min Kang. Computing metric dimension and metric basis of 2d lattice of alpha-boron nanotubes. *Symmetry*, 10(8):300, 2018.
- [98] Muhammad Imran, Abdul Qudair Baig, and Syed Ahtsham Ul Haq Bokhary. On the metric dimension of rotationally-symmetric graphs. *Ars Combinatoria*, 124:111–128, 2016.
- [99] Muhammad Imran, Abdul Qudair Baig, Syed Ahtsham Ul Haq Bokhary, and Imran Javaid. On the metric dimension of circulant graphs. *Applied Mathematics Letters*, 25(3):320–325, 2012.

- [100] Muhammad Imran, Abdul Qudair Baig, Saima Rashid, and Andrea Semanicová-Fenovčíková. On the metric dimension and diameter of circulant graphs with three jumps. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 10(1):1–17, 2018.
- [101] Muhammad Imran, Abdul Qudair Baig, Muhammad Kashif Shafiq, and Ioan Tomescu. On metric dimension of generalized Petersen graphs $p(n, 3)$. *Ars Combinatoria*, 117:113–130, 2014.
- [102] Muhammad Imran, Syed Ahtsham Ul Haq Bokhary, and Abdul Qudair Baig. On families of convex polytopes with constant metric dimension. *Computers & Mathematics with Applications*, 60(9):2629–2638, 2010.
- [103] Muhammad Imran, Syed Ahtsham Ul Haq Bokhary, Abdul Qudair Baig, and Ioan Tomescu. On metric dimension of convex polytopes with pendant edges. *Ars Combinatoria*, 125:433–447, 2016.
- [104] Muhammad Imran, Muhammad Kamran Siddiqui, and Rishi Naeem. On the metric dimension of generalized Petersen multigraphs. *IEEE Access*, 6:74328–74338, 2018.
- [105] Shahid Imran, Muhammad Kamran Siddiqui, Muhammad Imran, Muhammad Husain, Hafiz Muhammad Bilal, Imran Zulfiqar Cheema, Ali Tabraiz, and Zeeshan Saleem. Computing the metric dimension of gear graphs. *Symmetry*, 10(6):209, 2018.
- [106] H. Iswadi, Edy Tri Baskoro, A.N.M. Salman, and Rinovia Simanjuntak. The metric dimension of amalgamation of cycles. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 41(1):19–31, 2010.
- [107] Mohsen Jannesari and Behnaz Omoomi. The metric dimension of the lexicographic product of graphs. *Discrete Mathematics*, 312(22):3349–3356, 2012.
- [108] Imran Javaid, Shabbir Ahmad, and Muhammad Naeem Azhar. On the metric dimension of generalized Petersen graphs. *Ars Combinatoria*, 105:171–182, 2012.
- [109] Zilin Jiang and Nikita Polyanskii. On the metric dimension of Cartesian powers of a graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 165:1–14, 2019.
- [110] M. Johnson. Browseable structure-activity datasets. In Ramón Carbó-Dorca and P. G. Mezey, editors, *Advances in molecular similarity*, chapter 8, pages 153–171. JAI Press Inc., 100 Prospect Street, Stamford, Connecticut, 06904-0811, 1998.
- [111] Mark Johnson. Structure-activity maps for visualizing the graph variables arising in drug design. *Journal of Biopharmaceutical Statistics*, 3(2):203–236, 1993.
- [112] Heinz Adolf Jung. On a class of posets and the corresponding comparability graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 24(2):125–133, 1978.

-
- [113] G. Kabatianski, V. Lebedev, and J. Thorpe. The mastermind game and the rigidity of the hamming space. In *2000 IEEE International Symposium on Information Theory*, page 375, 2000.
- [114] Gregory A. Kabatiansky and Vladimir S. Lebedev. On metric dimension of nonbinary hamming spaces. *Problems of Information Transmission*, 54(1):48–55, 2018.
- [115] Cong X. Kang. On the fractional strong metric dimension of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 213:153–161, 2016.
- [116] Cong X. Kang, Ismael González Yero, and Eunjeong Yi. The fractional strong metric dimension in three graph products. *Discrete Applied Mathematics*, 251:190–203, 2018.
- [117] Cong X. Kang and Eunjeong Yi. The fractional strong metric dimension of graphs. In Peter Widmayer, Yinfeng Xu, and Binhai Zhu, editors, *Combinatorial Optimization and Applications - 7th International Conference, COCOA 2013, Chengdu, China, December 12-14, 2013, Proceedings*, volume 8287 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 84–95. Springer, 2013.
- [118] Cong X. Kang and Eunjeong Yi. A comparison between the zero forcing number and the strong metric dimension of graphs. In Zhao Zhang, Lidong Wu, Wen Xu, and Ding-Zhu Du, editors, *Combinatorial Optimization and Applications - 8th International Conference, COCOA 2014, Wailea, Maui, HI, USA, December 19-21, 2014, Proceedings*, volume 8881 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 356–365. Springer, 2014.
- [119] Cong X. Kang and Eunjeong Yi. Bounds on the sum of domination number and metric dimension of graphs. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 10(5):1850066, 2018.
- [120] Aleksander Kelenc, Dorota Kuziak, Andrej Taranenko, and Ismael González Yero. Mixed metric dimension of graphs. *Applied Mathematics and Computation*, 314:429–438, 2017.
- [121] Aleksander Kelenc, Niko Tratnik, and Ismael González Yero. Uniquely identifying the edges of a graph: The edge metric dimension. *Discrete Applied Mathematics*, 251:204–220, 2018.
- [122] Samir Khuller, Balaji Raghavachari, and Azriel Rosenfeld. Localization in graphs. Technical report, 1994.
- [123] Samir Khuller, Balaji Raghavachari, and Azriel Rosenfeld. Landmarks in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 70(3):217–229, 1996.

- [124] Sandi Klavzar and Mostafa Tavakoli. Local metric dimension of graphs: Generalized hierarchical products and some applications. *Applied Mathematics and Computation*, 364, 2020.
- [125] Douglas J. Klein and Eunjeong Yi. A comparison on metric dimension of graphs, line graphs, and line graphs of the subdivision graphs. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 5(3):302–316, 2012.
- [126] Jozef Kratica, Vera Kovacevic-Vujcic, and Mirjana Cangalovic. Computing the metric dimension of graphs by genetic algorithms. *Computational Optimization and Applications*, 44(2):343–361, 2009.
- [127] Jozef Kratica, Vera Kovacevic-Vujcic, Mirjana Cangalovic, and Milica Stojanovic. Minimal doubly resolving sets and the strong metric dimension of some convex polytopes. *Applied Mathematics and Computation*, 218(19):9790–9801, 2012.
- [128] Jozef Kratica, Vera Kovačević-Vuččić, Mirjana Cangalovic, and Nenad Mladenovic. Strong metric dimension: A survey. *Yugoslav Journal of Operations Research*, 24(2):187–198, 2014.
- [129] Daniel A. Krismanto and Suhadi Wido Saputro. Fractional metric dimension of tree and unicyclic graph. In Rinovia Simanjuntak, Edy Tri Baskoro, and Mirka Miller, editors, *The 2nd International Conference of Graph Theory and Information Security, ICGTIS 2015, Bandung, Indonesia, 21-23 September 2015*, volume 74 of *Procedia Computer Science*, pages 47–52. Elsevier, 2015.
- [130] Dorota Kuziak, Juan Alberto Rodríguez-Velázquez, and Ismael González Yero. On the strong metric dimension of product graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 46:169–176, 2014.
- [131] Dorota Kuziak, Juan Alberto Rodríguez-Velázquez, and Ismael González Yero. Closed formulae for the strong metric dimension of lexicographic product graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 36(4):1051–1064, 2016.
- [132] Dorota Kuziak, Juan Alberto Rodríguez-Velázquez, and Ismael González Yero. Computing the metric dimension of a graph from primary subgraphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 37(1):273–293, 2017.
- [133] Dorota Kuziak, Ismael González Yero, and Juan A. Rodríguez-Velázquez. On the strong metric dimension of cartesian sum graphs. *Fundamenta Informaticae*, 141(1):57–69, 2015.
- [134] Dorota Kuziak, Ismael González Yero, and Juan A. Rodríguez-Velázquez. Strong metric dimension of rooted product graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, 93(8):1265–1280, 2016.

-
- [135] Dorota Kuziak, Ismael González Yero, and Juan Alberto Rodríguez-Velázquez. On the strong metric dimension of corona product graphs and join graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 161(7-8):1022–1027, 2013.
- [136] Tero Laihonen. The metric dimension for resolving several objects. *Information Processing Letters*, 116(11):694–700, 2016.
- [137] R. Lenin, Kumarappan Kathiresan, and Martin Baca. The forcing strong metric dimension of a graph. *Contributions to Discrete Mathematics*, 12(2), 2017.
- [138] Jia-Bao Liu, Muhammad Faisal Nadeem, Hafiz Muhammad Afzal Siddiqui, and Wajiha Nazir. Computing metric dimension of certain families of toeplitz graphs. *IEEE Access*, 7:126734–126741, 2019.
- [139] Xuanlong Ma, Min Feng, and Kaishun Wang. The strong metric dimension of the power graph of a finite group. *Discrete Applied Mathematics*, 239:159–164, 2018.
- [140] R. Manjusha and A. Sunny Kuriakose. An application of g_d -metric spaces and metric dimension of graphs. *International Journal on Applications of Graph Theory In wireless Ad Hoc Networks And sensor Networks*, 7:01–10, 2015.
- [141] R. Manjusha and A. Sunny Kuriakose. Metric dimension and uncertainty of traversing robots in a network. *International Journal on Applications of Graph Theory in Wireless Ad hoc Networks and Sensor Networks*, 7(2/3):1–09, 2015.
- [142] Paul D. Manuel, Bharati Rajan, Cyriac Grigorious, and Sudeep Stephen. On the strong metric dimension of tetrahedral diamond lattice. *Mathematics in Computer Science*, 9(2):201–208, 2015.
- [143] Paul D. Manuel, Bharati Rajan, Indra Rajasingh, and Chris Monica M. On minimum metric dimension of honeycomb networks. *Journal of Discrete Algorithms*, 6(1):20–27, 2008.
- [144] Paul D. Manuel and Indra Rajasingh. Minimum metric dimension of silicate networks. *Ars Combinatoria*, 98:501–510, 2011.
- [145] Teresa R. May and Ortrud R. Oellermann. The strong dimension of distance-hereditary graphs. *JCMCC-Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 76:59, 2011.
- [146] Robert A. Melter and Ioan Tomescu. Metric bases in digital geometry. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 25(1):113–121, 1984.
- [147] Dieter Mitsche and Juanjo Rué. On the limiting distribution of the metric dimension for random forests. *European Journal of Combinatorics*, 49:68–89, 2015.

- [148] Dieter Mitsche and Juanjo Rué. Corrigendum to “On the limiting distribution of the metric dimension for random forests” [european j. combin. 49(2015) 68-89]. *European Journal of Combinatorics*, 67:275–277, 2018.
- [149] Nenad Mladenovic, Jozef Kratica, Vera Kovacevic-Vujcic, and Mirjana Cangalovic. Variable neighborhood search for metric dimension and minimal doubly resolving set problems. *European Journal of Operational Research*, 220(2):328–337, 2012.
- [150] Nenad Mladenovic, Jozef Kratica, Vera Kovacevic-Vujcic, and Mirjana Cangalovic. Variable neighborhood search for the strong metric dimension problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 39:51–57, 2012.
- [151] Gaia Moravcik, Ortrud R. Oellermann, and Samuel Yusim. Comparing the metric and strong dimensions of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 220:68–79, 2017.
- [152] Alejandro Estrada Moreno. *On the (k, t) -metric dimension of a graph*. PhD thesis, 2016.
- [153] Mobeen Munir, Abdul Rauf Nizami, Zaffar Iqbal, and Huma Saeed. Metric dimension of the mobius ladder. *Ars Combinatoria*, 135:249–256, 2017.
- [154] Danang Triantoro Murdiansyah and Adiwijaya. Computing the metric dimension of hypercube graphs by particle swarm optimization algorithms. In Tutut Herawan, Rozaida Ghazali, Nazri Mohd Nawi, and Mustafa Mat Deris, editors, *Recent Advances on Soft Computing and Data Mining - The Second International Conference on Soft Computing and Data Mining (SCDM-2016), Bandung, Indonesia, August 18-20, 2016, Proceedings*, volume 549 of *Advances in Intelligent Systems and Computing*, pages 171–178. Springer, 2016.
- [155] Ortrud R. Oellermann, Charlene D. Pawluck, and Anna Stokke. The metric dimension of cayley digraphs of abelian groups. *Ars Combinatoria*, 81, 2006.
- [156] Ortrud R. Oellermann and Joel Peters-Fransen. The strong metric dimension of graphs and digraphs. *Discrete Applied Mathematics*, 155(3):356–364, 2007.
- [157] Futaba Okamoto, Bryan Phinezy, and Ping Zhang. The local metric dimension of a graph. *Mathematica Bohemica*, 135(3):239–255, 2010.
- [158] Mikhail I. Ostrovskii and David Rosenthal. Metric dimensions of minor excluded graphs and minor exclusion in groups. *International Journal of Algebra and Computation*, 25(4):541–554, 2015.
- [159] Bharati Rajan, Indra Rajasingh, Jude Annie Cynthia, and Paul D. Manuel. Metric dimension of directed graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, 91(7):1397–1406, 2014.

-
- [160] Bharati Rajan, Indra Rajasingh, P. Venugopal, and Chris Monica M. Minimum metric dimension of illiac networks. *Ars Combinatoria*, 117:95–103, 2014.
- [161] Yuniór Ramírez-Cruz, Alejandro Estrada-Moreno, and Juan Alberto Rodríguez-Velázquez. The simultaneous metric dimension of families composed by lexicographic product graphs. *Graphs and Combinatorics*, 32(5):2093–2120, 2016.
- [162] Yuniór Ramírez-Cruz, Ortrud R. Oellermann, and Juan A. Rodríguez-Velázquez. The simultaneous metric dimension of graph families. *Discrete Applied Mathematics*, 198:241–250, 2016.
- [163] Hassan Raza, Sakander Hayat, and Xiang-Feng Pan. On the fault-tolerant metric dimension of convex polytopes. *Applied Mathematics and Computation*, 339:172–185, 2018.
- [164] Juan Alberto Rodríguez-Velázquez, Carlos García Gómez, and Gabriel A. Barragán-Ramírez. Computing the local metric dimension of a graph from the local metric dimension of primary subgraphs. *International Journal of Computer Mathematics*, 92(4):686–693, 2015.
- [165] Juan Alberto Rodríguez-Velázquez, Ismael González Yero, Dorota Kuziak, and Ortrud R. Oellermann. On the strong metric dimension of cartesian and direct products of graphs. *Discrete Mathematics*, 335:8–19, 2014.
- [166] Varaporn Saenpholphat and Ping Zhang. Conditional resolvability in graphs: a survey. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2004(38):1997–2017, 2004.
- [167] Muhammad Salman, Imran Javaid, and Muhammad Chaudhry. Fault-tolerant metric and partition dimension of graphs. *Utilitas Mathematica*, 83:187–199, 11 2010.
- [168] Muhammad Salman, Imran Javaid, and Muhammad Anwar Chaudhry. Minimum fault-tolerant, local and strong metric dimension of graphs. *Ars Combinatoria*, 138:333–353, 2018.
- [169] Suhadi Wido Saputro. On the metric dimension of biregular graph. *Journal of Information Processing*, 25:634–638, 2017.
- [170] Suhadi Wido Saputro, Rinovia Simanjuntak, Saladin Uttunggadewa, Hilda Assiyatun, Edy Tri Baskoro, and A. N. M. Salman. On graph of order- n with the metric dimension $n-3$. In Ludovica Adacher, Marta Flamini, Gianmaria Leo, Gaia Nicosia, Andrea Pacifici, and Veronica Piccialli, editors, *Proceedings of the 10th Cologne-Twente Workshop on graphs and combinatorial optimization. Extended Abstracts, Villa Mondragone, Frascati, Italy, June 14-16, 2011*, pages 239–243, 2011.

- [171] Suhadi Widodo Saputro, Rinovia Simanjuntak, Saladin Uttunggadewa, Hilda Assiyatun, Edy Tri Baskoro, A. N. M. Salman, and Martin Bača. The metric dimension of the lexicographic product of graphs. *Discrete Mathematics*, 313(9):1045–1051, 2013.
- [172] András Sebő and Eric Tannier. On metric generators of graphs. *Mathematics of Operations Research*, 29(2):383–393, 2004.
- [173] D. Seinsche. On a property of the class of n -colorable graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 16(2):191–193, 1974.
- [174] A. T. Shahida and M. S. Sunitha. On the metric dimension of join of a graph with empty graph(op). *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 63:435–445, 2017.
- [175] B. Shanmukha, B. Sooryanarayana, and K.S. Harinath. Metric dimension of wheels. *Far East Journal of Applied Mathematics*, 8(3):217–229, 2002.
- [176] Zehui Shao, Pu Wu, Enqiang Zhu, and Lanxiang Chen. Metric dimension and robot navigation in specific sensor networks. In *International Conference on Cyber-Enabled Distributed Computing and Knowledge Discovery, CyberC 2018, Zhengzhou, China, October 18-20, 2018*. IEEE, 2018.
- [177] Zehui Shao, Pu Wu, Enqiang Zhu, and Lanxiang Chen. On metric dimension in some hex derived networks. *Sensors*, 19(1):94, 2019.
- [178] Hafiz Muhammad Afzal Siddiqui and Muhammad Imran. Computing the metric dimension of wheel related graphs. *Applied Mathematics and Computation*, 242:624–632, 2014.
- [179] Rinovia Simanjuntak, Saladin Uttunggadewa, and Suhadi Widodo Saputro. Metric dimension for amalgamations of graphs. In Jan Kratochvíl, Mirka Miller, and Dalibor Fronček, editors, *Combinatorial Algorithms - 25th International Workshop, IWOCA 2014, Duluth, MN, USA, October 15-17, 2014, Revised Selected Papers*, volume 8986 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 330–337. Springer, 2014.
- [180] Peter J. Slater. Leaves of trees. *Congressum Numerantium*, 14:549–559, 1975.
- [181] Badekara Sooryanarayana and K.N. Geetha. On the k -metric dimension of graphs. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 4:861–878, 2014.
- [182] Badekara Sooryanarayana, S. Kunikullaya, and NN Swamy. k -metric dimension of a graph. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 4:18–127, 2016.
- [183] Badekara Sooryanarayana, Shreedhar Kunikullaya, and Narahari Narasimha Swamy. Metric dimension of generalized wheels. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 25(2):131–144, 2019.

-
- [184] Brunella Spinelli, L. Elisa Celis, and Patrick Thiran. How many sensors to localize the source? the double metric dimension of random networks. In *56th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing, Allerton 2018, Monticello, IL, USA, October 2-5, 2018*, pages 1036–1043. IEEE, 2018.
- [185] B. Suganya and S. Arumugam. Independent resolving number of convex polytopes. In S. Arumugam, Jay S. Bagga, Lowell W. Beineke, and B. S. Panda, editors, *Theoretical Computer Science and Discrete Mathematics - First International Conference, ICTCSDM 2016, Krishnankoil, India, December 19-21, 2016, Revised Selected Papers*, volume 10398 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 401–408. Springer, 2016.
- [186] David Sumner. Dacey graphs. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 18:492 – 502, 12 1974.
- [187] Ioan Tomescu. Discrepancies between metric dimension and partition dimension of a connected graph. *Discrete Mathematics*, 308(22):5026–5031, 2008.
- [188] Ioan Tomescu and Muhammad Imran. Metric dimension and R -sets of connected graphs. *Graphs and Combinatorics*, 27(4):585–591, 2011.
- [189] Tomas Vetrık. On the metric dimension of circulant graphs with 4 generators. *Contributions to Discrete Mathematics*, 12(2), 2017.
- [190] Tomas Vetrık and Ali Ahmad. Computing the metric dimension of the categorical product of some graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, 94(2):363–371, 2017.
- [191] Duygu Vietz, Stefan Hoffmann, and Egon Wanke. Computing the metric dimension by decomposing graphs into extended biconnected components - (extended abstract). In Gautam K. Das, Partha Sarathi Mandal, Krishnendu Mukhopadhyaya, and Shin-Ichi Nakano, editors, *WALCOM: Algorithms and Computation - 13th International Conference, WALCOM 2019, Guwahati, India, February 27 - March 2, 2019, Proceedings*, volume 11355 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 175–187. Springer, 2019.
- [192] Duygu Vietz and Egon Wanke. The fault-tolerant metric dimension of cographs. In Leszek Antoni Gasieniec, Jesper Jansson, and Christos Levcopoulos, editors, *Fundamentals of Computation Theory - 22nd International Symposium, FCT 2019, Copenhagen, Denmark, August 12-14, 2019, Proceedings*, volume 11651 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 350–364. Springer, 2019.
- [193] Dacheng Xu and Jianxi Fan. On the metric dimension of HDN. *Journal of Discrete Algorithms*, 26:1–6, 2014.

- [194] Ismael González Yero. Vertices, edges, distances and metric dimension in graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 55:191–194, 2016.
- [195] Ismael González Yero, Alejandro Estrada-Moreno, and Juan A. Rodríguez-Velázquez. Computing the k-metric dimension of graphs. *Applied Mathematics and Computation*, 300:60–69, 2017.
- [196] Ismael González Yero, Dorota Kuziak, and Juan Alberto Rodríguez-Velázquez. On the metric dimension of corona product graphs. *Computers & Mathematics with Applications*, 61(9):2793–2798, 2011.
- [197] Sabina Zejnilovic, Dieter Mitsche, João Pedro Gomes, and Bruno Sinopoli. Extending the metric dimension to graphs with missing edges. *Theoretical Computer Science*, 609:384–394, 2016.
- [198] Enqiang Zhu, Andrej Taranenko, Zehui Shao, and Jin Xu. On graphs with the maximum edge metric dimension. *Discrete Applied Mathematics*, 257:317–324, 2019.