

Einige algorithmische Probleme über Automorphismen von freien Gruppen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Thomas Leßmann
aus Wickede (Ruhr)

Düsseldorf, Mai 2016

Aus dem Mathematischen Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Gedruckt mit der Genehmigung
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent: Prof. Dr. Oleg Bogopolski

Korreferent: Prof. i. R. Dr. Wilhelm Singhof

Tag der mündlichen Prüfung: 19.07.2016

Kurzfassung

Im ersten Kapitel entwickeln wir einen elementaren Algorithmus, mit dem sich für zwei endlich erzeugte Untergruppen U, H der freien Gruppe F_2 entscheiden lässt, ob es einen Automorphismus $\alpha : F_2 \rightarrow F_2$ mit $\alpha(U) \leq H$ gibt. Ein nicht-elementarer Algorithmus ist in [SW10, Theorem 2.6] beschrieben. Für den Fall, dass U zyklisch ist, wird dieses Problem ebenfalls elementar in [SW10] gelöst, wobei unsere Lösung effizienter ist.

In den weiteren Kapiteln untersuchen wir die Nielsenwege einer Homotopieäquivalenz $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ auf einem endlichen Graphen Γ (dies sind Wege, die nach Anwendung von f und anschließender Reduktion unverändert bleiben). Die Nielsenwege lassen sich hierbei nach [Tur95, Theorem B] durch einen von R. Z. Goldstein und E. C. Turner in [GT86] eingeführten Überlagerungsgraphen D_f beschreiben: Die Projektion eines reduzierten Weges zwischen zwei der endlich vielen „toten“ Punkte in D_f ist ein Nielsenweg und jeder Nielsenweg entsteht eindeutig auf diese Weise.

Zur Untersuchung von Wegen in D_f sind sogenannte bevorzugte Kanten entscheidend. Diese werden ebenfalls in [GT86] definiert und erfüllen die folgenden bekannten Eigenschaften:

- Mit Ausnahme der endlich vielen Kanten, die einen toten Punkt enthalten, ist von jedem Paar zueinander inverser Kanten in D_f genau eine bevorzugt.
- Für jeden nicht-toten Knoten in D_f ist genau eine der ausgehenden Kanten bevorzugt.
- Für einen reduzierten Weg γ in D_f , dessen Projektion ein irreduzibler Nielsenweg ist, gibt es eine Zerlegung $\gamma = \gamma_1\gamma_2$, so dass die Kanten von γ_1 und von $\overline{\gamma_2}$ jeweils ab der zweiten Kante bevorzugt sind.

Wir werden eine neue Definition von bevorzugten Wegen entwickeln, welche die bekannte Definition in natürlicher Weise auf beliebige Wege in D_f , die keine Kantenwege sein müssen, erweitert. Für den obigen Weg $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ erhalten wir dann, dass γ_1 und $\overline{\gamma_2}$ bevorzugt sind. Zusätzlich erhalten wir mit Hilfe dieser neuen Definition eine explizite und nur von f abhängige obere Schranke für die Länge des Schnittpunktes von γ_1 und $\overline{\gamma_2}$ (die Knoten in D_f sind bestimmte Wege in Γ).

Hierauf aufbauend konstruieren wir einen Graphen, welcher die irreduziblen Nielsenwege von f beschreibt. Wir werden zeigen, dass diese Konstruktion algorithmisch durchgeführt werden kann, falls $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine relative Train-Track Abbildung ist. Wir erklären außerdem, wie die hierbei entwickelten Techniken benutzt werden können, um einige Schritte des in [BM16] angegebenen Algorithmus von O. Bogopolski und O. Maslakova zur Berechnung von $\text{Fix}(\alpha)$ für einen Automorphismus α von F_n effizienter zu machen. Zusätzlich finden wir für relative Train-Track Abbildungen eine neue obere Schranke für die Länge von irreduziblen Nielsenwegen exponentieller Höhe.

Abstract

In the first chapter, we develop an elementary algorithm that decides, given two finitely generated subgroups U and H of the free group F_2 , whether or not there is an automorphism $\alpha : F_2 \rightarrow F_2$ such that $\alpha(U) \leq H$. We note that another more complicated algorithm was given in [SW10, Theorem 2.6]. For the special case, when U is cyclic, the problem was also solved elementary by P.V. Silva and P. Weil in [SW10]. In this particular case the solution presented here is more efficient.

In the remaining two chapters, we investigate the Nielsen paths of a homotopy equivalence $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ on a finite graph Γ (up to reductions, these are the paths that are invariant under f).

By [Tur95, Theorem B], the Nielsen paths of f can be described through the covering graph D_f introduced by R. Z. Goldstein and E. C. Turner in [GT86]. The projection of any reduced path between two of the finitely many ‘dead’ points in D_f is a Nielsen path, and every Nielsen path can be uniquely obtained in this way.

For the study of paths in D_f , the so-called preferable edges play a crucial role. These edges were also defined in [GT86] and satisfy the following known properties:

- With the exception of the finitely many edges that contain a dead point, each pair of mutually inverse edges in D_f contains exactly one edge which is preferable.
- For each non-dead vertex in D_f , exactly one of the outgoing edges is preferable.
- For a reduced path γ in D_f whose projection is an irreducible Nielsen path, there is a decomposition $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ so that all edges of γ_1 and $\overline{\gamma_2}$ are preferable except for the first edge of each path.

We introduce a new definition of preferable paths that generalizes the known definition in a natural way to arbitrary paths in the topological space D_f . For the path $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ written above, we get that γ_1 and $\overline{\gamma_2}$ are preferable. Moreover, with the help of this new definition we get an explicit upper bound in terms of f for the length of the point, where γ_1 and $\overline{\gamma_2}$ meet (note that the vertices of D_f are certain paths in Γ).

Following this way, we construct a graph that represents the irreducible Nielsen paths of f . We show that this construction can be carried out algorithmically if f is a relative train track map. We also explain how one can use the developed techniques in order to make more efficient some steps of O. Bogopolski’s and O. Maslakova’s algorithm for finding the fixed point set of an automorphism α of F_n [BM16].

Finally, we find a new upper bound for the length of irreducible Nielsen paths of exponential height for a relative train track map.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	vii
1 Zwei Orbit-Probleme in F_n	1
1.1 Grundlagen	1
1.2 Bahn einer Untergruppe in F_2 unter Automorphismen	2
1.3 Potenzen eines primitiven Elementes in einer Untergruppe	26
2 Nielsenwege	33
2.1 Homotopieäquivalenzen $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$	33
2.2 Ein Überlagerungsgraph D_f , welcher die Nielsenwege von f kodiert	36
2.3 Eine Schranke für den Schnittpunkt von bevorzugten Wegen in D_f , welche in toten Punkten beginnen	40
2.4 Struktur der irreduziblen Nielsenwege	46
2.5 Relative Train-Track Abbildungen	53
2.6 Eine Schranke für die Länge von irreduziblen Nielsenwegen exponentieller Höhe	59
3 Struktur des Graphen D_f für relative Train-Track Abbildungen $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$	69
3.1 Grundlegendes	69
3.2 Der polynomielle Fall	71
3.3 Der exponentielle Fall	80
Literaturverzeichnis	100
Abkürzungsverzeichnis	103
Index	104

Einleitung

Sei F_n eine freie Gruppe vom Rang $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die folgenden zwei Probleme, welche in dieser allgemeinen Formulierung bis heute ungelöst sind:

- (F1) Gegeben seien ein Element $x \in F_n$ und eine endlich erzeugte Untergruppe $U \leq F_n$. Wie lässt sich algorithmisch entscheiden, ob es einen Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(F_n)$ mit $\alpha(x) \in U$ gibt?
- (F2) Gegeben seien zwei endlich erzeugte Untergruppe $H, U \leq F_n$. Wie lässt sich algorithmisch entscheiden, ob es einen Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(F_n)$ mit $\alpha(H) \leq U$ gibt?

Wir betrachten in diesem Absatz die freie Gruppe F_2 . Für diese wird in [SW10, Theorem 2.6] bewiesen, dass das Problem (F2) algorithmisch entscheidbar ist. Dieses Resultat basiert auf den komplizierten Arbeiten [Mak82], [Mak84] und [Raz84] über die Entscheidbarkeit des Problems, ob ein endliches Gleichungssystem in einer freien Gruppen mit rationalen Zusatzbedingungen lösbar ist. Es ist bekannt, dass das zuletzt genannte Problem PSPACE-vollständig ist (siehe [DGH05]). Zusätzlich geben die Autoren für (F1) eine elementare Lösung an. Im ersten Kapitel werden wir diese Lösung so weiterentwickeln, dass sie effizienter wird und sich auch auf das Problem (F2) anwenden lässt.

Nun betrachten wir einige verwandte Probleme. In [Whi36] hat J. H. C. Whitehead einen Algorithmus für folgende Frage entwickelt:

Gibt es zu gegebenen Elementen $x, y \in F_n$ einen Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(F_n)$ mit $\alpha(x) = y$?

Ebenfalls ist hier der Algorithmus von S. M. Gersten (siehe [Ger84]) zu erwähnen, der die analoge Fragestellung für zwei endlich erzeugte Untergruppe von F_n beantwortet:

Gibt es zu gegebenen endlich erzeugten Untergruppen $U, H \leq F_n$ einen Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(F_n)$ mit $\alpha(U) = H$?

Die Beweise in dem Artikel [Ger84] werden nur skizziert; eine geschlossene, erweiterte Form wurde bis heute nicht publiziert.

Für eine freie Gruppe F_n von beliebigem endlichen Rang $n \in \mathbb{N}$ wird das Problem (F1) von A. Clifford und R. Z. Goldstein im Artikel [CG10] für den Fall gelöst, dass x ein primitives Element ist.

Hierauf aufbauend werden wir im Abschnitt 1.3 zeigen, wie sich die folgenden zwei Fragestellungen für eine gegebene, endlich erzeugte Untergruppe $U \leq F_n$ entscheiden lassen:

- (a) Gegeben seien ein primitives Element $x \in F_n$ und ein Exponent $k \in \mathbb{N}$. Existiert ein Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(F_n)$ mit $\alpha(x^k) \in U$?
- (b) Gegeben sei ein primitives Element $x \in F_n$. Existieren ein Exponent $k \in \mathbb{N}$ und ein Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(F_n)$ mit $\alpha(x^k) \in U$?

Für die Lösung von (a) werden wir die Menge $\text{Rad}_k(U) := \{y \in F_n \mid y^k \in U\}$ als (in einigen Fällen unendliche) Vereinigung von endlich erzeugten Untergruppen darstellen und zeigen, wie sich das Problem, ob es einen Automorphismus α mit $\alpha(x) \in \text{Rad}_k(U)$ gibt, auf das in [CG10] gelöste Problem reduzieren lässt.

Im zweiten und dritten Kapitel untersuchen wir die Nielsenwege einer Homotopieäquivalenz $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$, wobei Γ ein endlicher, zusammenhängender Graph ist: Dabei heißt ein Weg ρ in Γ *Nielsenweg*, falls $[f(\rho)] = \rho$ gilt, wobei $[f(\rho)]$ der eindeutig reduzierte Weg zu $f(\rho)$ sei.

Nielsenwege sind zur Beschreibung der Fixpunktuntergruppe

$$\text{Fix}(\alpha) = \{x \in F_n \mid \alpha(x) = x\}$$

eines Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(F_n)$ hilfreich.

Im Artikel [GT86] haben R. Z. Goldstein und E. C. Turner bewiesen, dass die Untergruppe $\text{Fix}(\alpha)$ für einen Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(F_n)$ endlich erzeugt ist.

Dazu haben sie einen Graphen D_α definiert, dessen Fundamentalgruppe an einem der endlich vielen *toten Punkte*¹ (vgl. Definition 2.2.2) isomorph zu $\text{Fix}(\alpha)$ ist.

Zur Untersuchung der Wege zwischen toten Punkten sind dann sogenannte bevorzugte Kanten in D_α wichtig (siehe [GT86]). Sie sind so definiert, dass die folgende Eigenschaft gilt:

Für jeden nicht-toten Knoten ist genau eine der ausgehenden Kanten bevorzugt.

Wir bezeichnen mit S die Menge der Kanten in D_α , die in einem toten Punkt beginnen. Zu einer Kante E in S kann nun ein Weg γ_E definiert werden: Beginne mit der Kante E und folge dem Weg der bevorzugten Kanten. Falls dieser Weg zu einem toten Punkt führt, so ende er dort. Hiermit gilt die bekannte wichtige Eigenschaft:

Für jeden reduzierten Weg γ , der zwei tote Punkte in D_f verbindet und keine toten Punkte im Inneren besitzt, gibt es Kanten $E, F \in S$ und Anfangswege γ_1 von γ_E sowie γ_2 von γ_F mit $\gamma = \gamma_1 \overline{\gamma_2}$.

Mit Hilfe dieser Eigenschaft wird im Artikel [GT86] gezeigt, dass sich das Problem der Bestimmung einer Basis von $\text{Fix}(\alpha)$ auf die Lösung der folgenden zwei Probleme reduzieren lässt:

¹Im Unterschied zu Knoten können Punkte auch im Inneren einer Kante liegen.

- (P1) Entscheide für $E \in S$, ob der Weg γ_E zu einem toten Punkt führt, in eine Schleife läuft oder einen unendlichen Pfad (mit paarweise verschiedenen Knoten) beschreibt.
- (P2) Gegeben seien zwei unendliche Pfade γ_E, γ_F mit $E, F \in S$. Entscheide, ob sich diese schneiden.

Im Allgemeinen ist jedoch unklar, wie diese Probleme allein durch Betrachtung des Graphen D_α zu lösen sind.

In [BH92] führen M. Bestvina und M. Handel relative Train-Track Abbildungen (vgl. Definition 2.5.4) ein. Dies sind Homotopieäquivalenzen $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$, mit welchen sich äußere Automorphismen von F_n „gut“ darstellen lassen. Hierbei ist Γ ein endlicher, zusammenhängender Graph. Es wird in [BH92] gezeigt, dass sich zu jedem äußeren Automorphismus eine relative Train-Track Abbildung konstruieren lässt. Mit Hilfe dieser relativen Train-Track Abbildungen lösen die Autoren die Scott-Vermutung, dass

$$\text{Rang}(\text{Fix}(\alpha)) \leq n$$

für jeden Automorphismus $\alpha : F_n \rightarrow F_n$ erfüllt ist.

Einen Spezialfall von relativen Train-Track Abbildungen stellen die ebenfalls in [BH92] definierten Train-Track Abbildungen dar. Diese besitzen noch bessere Eigenschaften, existieren jedoch nicht für alle äußeren Automorphismen.

Im Artikel [Tur95] wird gezeigt, wie sich die irreduziblen Nielsenwege von $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ bestimmen lassen, falls f eine Train-Track Abbildung ist.

Dazu wird ähnlich zum oben erwähnten Graphen D_α ein Graph D_f definiert. Die irreduziblen Nielsenwege entsprechen dann reduzierten Wegen zwischen toten Punkten, die im Inneren keine toten Punkte besitzen. In diesem Kontext genügt es wieder, die Probleme (P1) und (P2) zu lösen.

Wir bemerken, dass die Knoten im Graphen D_f speziellen Kantenwegen in Γ entsprechen. Zur Lösung von Problem (P2) zeigt Turner, dass die Anzahl der Kanten von den Knoten auf den Wegen γ_E und γ_F für $E, F \in S$ jeweils monoton wachsend ist. Zusätzlich wird dann ein weiterer Graph $D_{f,g}$ mit bevorzugten Kanten benötigt, wobei g homotopie-invers zu f ist.

Wir zeigen für eine beliebige Homotopieäquivalenz $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$, dass es eine nur von f abhängige Schranke T gibt, die sich explizit berechnen lässt und die folgende Eigenschaft besitzt (siehe Satz 2.3.8): Für zwei in toten Punkten beginnende und bevorzugte Wege in D_f ist die Länge des Schnittpunktes (die Punkte in D_f sind Wege in Γ) kleiner gleich T . Wir bemerken, dass sich dies z.B. zur Lösung von (P2) für Train-Track Abbildungen anwenden lässt: Berechne für $E, F \in S$ die Wege γ_E und γ_F jeweils so lange, bis ein Knoten in D_f mit mehr als T Kanten in Γ gefunden wird. Falls es bis hierhin keinen Schnittpunkt von γ_E und γ_F gibt, so schneiden sich γ_E und γ_F nicht.

Wir bemerken, dass hierbei die entscheidende Monotonie der Längen der Knoten auf den Wegen γ_E und γ_F für alle Train-Track Abbildungen, jedoch nicht für alle relativen Train-Track Abbildungen, erfüllt ist.

Sei $\alpha \in \text{Aut}(F_n)$. Selbst wenn sich der äußere Automorphismus durch eine Train-Track Abbildung $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ darstellen lässt, genügt die Berechnung der Nielsenwege im Allgemeinen nicht, um $\text{Fix}(\alpha)$ zu bestimmen: Hierfür müsste nämlich nicht der zu α gehörige äußere Automorphismus, sondern α selbst dargestellt werden.

In [BM16] zeigen O. Bogopolski und O. Maslakova, wie eine relative Train-Track Abbildung für einen äußeren Automorphismus zu einer relativen Train-Track Abbildung des Automorphismus selbst erweitert werden kann². Zudem zeigen die Autoren, wie die Probleme (P1) und (P2) für relative Train-Track Abbildungen gelöst werden können. Hierdurch erhalten sie einen Algorithmus zur Bestimmung einer Basis von $\text{Fix}(\alpha)$ für einen Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(F_n)$.

Ähnlich wie bei Train-Track Abbildungen werden wir einige Schritte dieser Lösung vereinfachen und den Algorithmus dadurch effizienter machen (siehe Bemerkung 3.3.22). Zusätzlich werden wir hierbei einen genauen Einblick in die Struktur des Graphen D_f bekommen (siehe Satz 3.2.7 und Satz 3.3.10).

Wir definieren einen beschrifteten Graphen \mathcal{G} , der die irreduziblen Nielsenwege einer beliebigen Homotopieäquivalenz $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ repräsentiert (siehe Definition 2.4.2 und Satz 2.4.3). Falls die Probleme (P1) und (P2) in D_f lösbar sind (insbesondere also für relative Train-Track Abbildungen), lässt sich \mathcal{G} algorithmisch berechnen.

Im Folgenden verwenden wir die üblichen Begriffe und Bezeichnungen für relative Train-Track Abbildungen (siehe Abschnitt 2.5). Für eine im Sinne von [BH92] stabile relative Train-Track Abbildung (vgl. Definition 2.6.2) zeigen M. Bestvina und M. Handel, dass die Länge für jeden irreduziblen Nielsenweg ρ der exponentiellen Höhe r durch

$$L_r(\rho) = 2 \sum_{E \in \mathcal{E}_+(\Gamma)} L_r(E)$$

gegeben ist. Wir zeigen (siehe Satz 2.6.1), dass ohne Voraussetzung der Stabilität noch die Ungleichung

$$L_r(\rho) \leq 2 \sum_{E \in \mathcal{E}_+(\Gamma)} L_r(E)$$

erfüllt ist. Dadurch verbessern wir die für diesen Fall bekannte Schranke [DV96, Lemma IV.3.5]

$$L_r(\rho) \leq 2 \frac{\lambda_r}{\lambda_r - 1} \sum_{E \in \mathcal{E}_+(\Gamma)} L_r(E),$$

wobei $\lambda_r > 1$ der Perron-Frobenius Eigenwert zum r -ten Stratum ist.

²Wendet man diese Konstruktion auf eine Train-Track Abbildung an, so entsteht im Allgemeinen keine Train-Track Abbildung.

Danksagung: *Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Oleg Bogopolski für das interessante Thema und die ausgezeichnete Betreuung meiner Arbeit. Herrn Prof. i. R. Dr. Wilhelm Singhof danke ich dafür, dass er sich bereit erklärt hat, das Zweitgutachten zu erstellen. Des Weiteren möchte ich dem gesamten Kollegium des Mathematischen Instituts für ein stets angenehmes Arbeitsumfeld danken. Insbesondere seien hierbei Christian Axler und Carsten Feldkamp erwähnt, die mir auch Tipps zur Darstellung der Arbeit gegeben haben. Nicht zuletzt gilt mein Dank meiner Familie und meinen Freunden, die mich während der Erstellung dieser Arbeit stets unterstützt haben.*

1 Zwei Orbit-Probleme in F_n

1.1 Grundlagen

Notation 1.1.1 (Graphen und Wege). Ein Graph G setzt sich aus einer Knotenmenge $\mathcal{V}(G)$, einer Kantenmenge $\mathcal{E}(G)$ sowie zwei Abbildungen $\bar{\cdot} : \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{E}(G)$ und $o : \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{V}(G)$ zusammen, so dass $\bar{\bar{E}} \neq E$ und $\bar{\bar{E}} = E$ für alle $E \in \mathcal{E}(G)$ gilt. Für $E \in \mathcal{E}(G)$ bezeichnen wir \bar{E} als die inverse Kante und $o(E)$ als den Startknoten (engl. origin) von E . Den Knoten $t(E) := o(\bar{E})$ nennen wir den Endknoten (engl. terminal) der Kante E .

Wir wählen in jedem Graphen eine Menge positiver Kanten $\mathcal{E}_+(G)$, so dass von jedem Paar zueinander inverser Kanten in G genau eine Kante positiv ist.

Ein Teilgraph H von G besteht aus einer Knotenmenge $\mathcal{V}(H) \subset \mathcal{V}(G)$ und einer Kantenmenge $\mathcal{E}(H) \subset \mathcal{E}(G)$, so dass $\bar{E} \in \mathcal{E}(H)$ und $o(E) \in \mathcal{V}(H)$ für alle $E \in \mathcal{E}(H)$ gilt. Als positive Kanten in einem Teilgraphen H von G wählen wir stets $\mathcal{E}_+(H) = \mathcal{E}_+(G) \cap \mathcal{E}(H)$. Für einen Teilgraphen H von G sei $\mathcal{P}(H)$ die Menge der Wege in H . Für zwei Wege α, β schreiben wir $\alpha \preceq \beta$, wenn α ein Anfangsweg von β ist, d.h. wenn es einen Weg γ mit $\alpha\gamma = \beta$ gibt. Ist hierbei α ein echter Anfangsweg, d.h. $\alpha \neq \beta$, so schreiben wir $\alpha \prec \beta$. Die Anzahl der Kanten in einem Weg γ notieren wir mit $|\gamma|$.

Definition 1.1.2 (Fundamentalgruppen und beschriftete Graphen). Sei G ein Graph und γ, ω zwei Wege in G . Wir bezeichnen diese Wege als homotop, wenn es Wege $\gamma = \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n = \omega$ gibt, so dass γ_i aus γ_{i-1} für $1 \leq i \leq n$ durch Einfügen oder Entfernen eines Teilweges der Form $E\bar{E}$ mit einer Kante $E \in \mathcal{E}(G)$ entsteht. In diesem Fall gilt $o(\gamma) = o(\omega)$ und $t(\gamma) = t(\omega)$. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{P}(G)$. Jede Äquivalenzklasse enthält genau einen Weg, bei dem keine Kürzungen möglich sind. Für diesen Weg schreiben wir $[\gamma]$.

Für jeden Knoten $P \in \mathcal{V}(G)$ wird die Fundamentalgruppe von G an dem Knoten P durch

$$\pi_1(G, P) := \{[\gamma] \mid \gamma \in \mathcal{P}(G) \text{ mit } o(\gamma) = t(\gamma) = P\}$$

definiert. Diese ist mit der Verknüpfung $[\gamma][\omega] = [\gamma\omega]$ eine Gruppe. Ist F_n eine freie Gruppe mit der Basis $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, so bezeichnen wir einen Graphen G zusammen mit einer Abbildung $\ell : \mathcal{E}(G) \rightarrow X \cup X^{-1}$ als *beschrifteten Graphen über X* , falls $\ell(\bar{E}) = \ell(E)^{-1}$ für alle $E \in \mathcal{E}(G)$ gilt. Ist die Menge X aus dem Kontext bekannt, so nennen wir G einfach einen beschrifteten Graphen.

Die Abbildung ℓ kann durch

$$E_1 E_2 \dots E_k \mapsto \ell(E_1) \ell(E_2) \dots \ell(E_k)$$

zu einer Abbildung von $\ell : \mathcal{P}(G) \rightarrow F_n$ erweitert werden und wird für $P \in \mathcal{V}(G)$ durch

$$\ell : \pi_1(G, P) \rightarrow F_n, [\gamma] \mapsto \ell(\gamma)$$

auch auf der Fundamentalgruppe definiert.

Ein beschrifteter Graph heißt *reduziert*, falls in jedem Knoten weder zwei verschiedene Kanten mit der gleichen Beschriftung beginnen noch enden.

Eine gute Einführung in die Theorie dieser beschrifteten Graphen findet sich in [KM02]. Dort wird auch eine spezielle Konstruktion angegeben, die jeder endlich erzeugten Untergruppe $U \leq F_n$ einen endlichen, beschrifteten und reduzierten Graphen $\Gamma(U)$ zuordnet, so dass $U = \ell(\pi_1(G, P))$ für einen Knoten $P \in \mathcal{V}(G)$ gilt.¹ Dieser Graph heißt *Stallings-Graph* von U .

1.2 Bahn einer Untergruppe in F_2 unter Automorphismen

Wir wollen in diesem Abschnitt einen Algorithmus finden, welcher für zwei gegebene endlich erzeugte Untergruppen $H, U \leq F_2$ entscheidet, ob es einen Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(F_2)$ mit $\alpha(H) \leq U$ gibt. Als Basis der freien Gruppe F_2 wählen wir a, b und bezeichnen einen Automorphismus $\varphi : F_2 \rightarrow F_2$ mit $\varphi_{x,y}$, wobei $x = \varphi(a)$ und $y = \varphi(b)$ ist.

Zur Lösung werden wir einen Zerlegungssatz für Automorphismen in F_2 verwenden. Als Vorbereitung für diesen Satz benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 1.2.1 (Zerlegungssatz für $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$). *Definiere die folgenden Matrizen und Teilmengen von $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$:*

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$M_{\mathcal{C}} = \{C_1 C_2 \dots C_k \mid k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } C_1, \dots, C_k \in \{Z_1, Z_2\}\}$$

$$\text{und } M_{\mathcal{D}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$

wobei in $M_{\mathcal{B}}$ auch verschiedene Vorzeichen zulässig seien. Dann lässt sich jede Matrix $A \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ in der Form

$$A = BCD$$

mit $B \in M_{\mathcal{B}}, C \in M_{\mathcal{C}}$ und $D \in M_{\mathcal{D}}$ darstellen.

¹Die Idee, eine Untergruppe so darzustellen, stammt von J. R. Stallings, siehe [Sta83].

Beweis. Wir werden die folgenden zwei Aussagen überprüfen:

- (1) Jede Matrix $C \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, deren Einträge alle größer oder gleich Null sind, lässt sich als endliches Produkt der Matrizen Z_1 und Z_2 darstellen.
- (2) Zu $A \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ gibt es Matrizen $B \in M_{\mathcal{B}}$ und $D \in M_{\mathcal{D}}$, so dass die Matrix $C = B^{-1}AD^{-1}$ in $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ liegt und nur Einträge größer oder gleich Null besitzt.

Indem wir auf die Matrix $C = B^{-1}AD^{-1}$ aus Aussage (2) die Aussage (1) anwenden und anschließend nach A auflösen, erhalten wir die Aussage des Lemmas.

Zu Aussage (1): Wir beweisen diese Aussage durch eine Induktion über die Summe S der Einträge in der Matrix C . Für $S = 2$ liegt die Einheitsmatrix und für $S = 3$ entweder Z_1 oder Z_2 vor. Hier ist die Aussage erfüllt.

Für den Induktionsschritt sei $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Matrix mit $a, b, c, d \geq 0$ und $S = a + b + c + d \geq 4$. Dann ist einer der Einträge von C mindestens 2.

Da die anderen Fälle analog verlaufen, werden wir im Folgenden nur den Fall untersuchen, bei dem a ein maximaler Eintrag von C ist. Aus

$$1 = ad - bc \geq ad - ba = a(d - b)$$

und $a > 1$ folgt dann $b \geq d$. Nach Induktionsvoraussetzung können wir somit

$$C' = \begin{pmatrix} a - c & b - d \\ c & d \end{pmatrix}$$

als endliches Produkt der Matrizen Z_1 und Z_2 darstellen und mit $C = Z_1 C'$ ergibt sich eine solche Darstellung für C .

Zu Aussage (2): Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$. Für eine passend gewählte Matrix $B_1 \in M_{\mathcal{B}}$ hat dann die Matrix $B_1^{-1}A$ in der ersten Spalte keine negativen Einträge. Falls in der ersten Spalte eine Null steht, so können wir zusätzlich erreichen, dass die Einträge in der zweiten Spalte entweder beide größer gleich oder beide kleiner gleich Null sind. Diese zusätzliche Eigenschaft folgt im Fall, dass beide Einträge der ersten Spalte von Null verschieden sind, aus $\det(B_1^{-1}A) \in \{-1, 1\}$.

Also können wir mit einer Matrix $D \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\}$ erreichen, dass alle Einträge von $B_1^{-1}AD^{-1}$ nicht negativ sind. Nun wählen wir $B_2 \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, so dass $\det(B_2^{-1}B_1^{-1}AD^{-1}) = 1$ gilt. Dann sind die verlangten Eigenschaften mit $B = B_1 B_2$ und D erfüllt. \square

Satz 1.2.2 (Zerlegungssatz für $\text{Aut}(F_2)$). *Seien die folgenden Teilmengen von $\text{Aut}(F_2)$ definiert:*

$$\begin{aligned} \text{Inn}(F_2) &= \{\lambda_w \mid w \in F_2\}, \text{ wobei } \lambda_w : F_2 \rightarrow F_2, x \mapsto wxw^{-1}, \\ N_{\mathcal{B}} &= \{\varphi_{ae,bf} \mid e, f \in \{-1, 1\}\} \cup \{\varphi_{be,af} \mid e, f \in \{-1, 1\}\}, \\ N_{\mathcal{C}} &= \{\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_k \mid k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \gamma_1, \dots, \gamma_k \in \{\varphi_{ab,b}, \varphi_{a,ba}\}\} \\ \text{und } N_{\mathcal{D}} &= \{\varphi_{a,b}, \varphi_{a,b^{-1}}\}. \end{aligned}$$

Dann lässt sich jeder Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(F_2)$ in der Form

$$\alpha = \beta\lambda_w\gamma\delta$$

schreiben, wobei $\beta \in N_{\mathcal{B}}$, $\gamma \in N_{\mathcal{C}}$, $\delta \in N_{\mathcal{D}}$ und $\lambda_w \in \text{Inn}(F_2)$ ist.

Beweis. Sei $\psi : \text{Aut}(F_2) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ der Homomorphismus, der einem Automorphismus seine Abelisierung zuordnet. In [Nie17] zeigt J. Nielsen² die Identität

$$\text{Kern}(\psi) = \text{Inn}(F_2). \quad (1.1)$$

Sei $\alpha \in \text{Aut}(F_2)$ und $A := \psi(\alpha)$. Nach Lemma 1.2.1 gibt es eine Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ und Matrizen $B \in M_{\mathcal{B}}$, $C_1, \dots, C_k \in \{Z_1, Z_2\}$ und $D \in M_{\mathcal{D}}$ mit

$$A = BC_1 \dots C_k D. \quad (1.2)$$

Sei $\gamma \in N_{\mathcal{C}}$ der Automorphismus, der aus $C_1 \dots C_k$ entsteht, indem Z_1 durch $\varphi_{a,ba}$ und Z_2 durch $\varphi_{ab,b}$ ersetzt wird. Weiter sei $\beta \in N_{\mathcal{B}}$ der Automorphismus mit $\psi(\beta) = B$ und $\delta \in N_{\mathcal{D}}$ der Automorphismus mit $\psi(\delta) = D$. Dann gilt $\psi(\beta\gamma\delta) = \psi(\alpha)$ und somit

$$\psi(\beta^{-1}\alpha\delta^{-1}\gamma^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach (1.1) existiert ein $w \in F_2$ mit $\lambda_w = \beta^{-1}\alpha\delta^{-1}\gamma^{-1}$ und es folgt $\alpha = \beta\lambda_w\gamma\delta$. \square

Im Artikel [SW10], mit welchem sich für ein Element v und eine Untergruppe U in F_2 entscheiden lässt, ob $\alpha(v) \in U$ für einen Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(F_2)$ gilt, wird im Theorem 3.4 der folgende Zerlegungssatz für Automorphismen bewiesen.

Jeder Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(F_2)$ lässt sich darstellen als

$$\alpha = \beta\varphi_{a,ba}^{-k}\lambda_w\gamma\delta, \quad (1.3)$$

wobei $\beta \in \{\varphi_{a,b}, \varphi_{a^{-1},b}\}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\lambda_w \in \text{Inn}(F_2)$, $\gamma \in N_{\mathcal{C}}$ und $\delta \in M_{\mathcal{B}}$.³ Durch Vertauschung der Rollen von a und b sowie von β und δ zeigt unser Satz 1.2.2 die stärkere Aussage, dass eine Zerlegung wie in Gleichung (1.3) sogar mit $k = 0$ möglich ist.

²Dieses Resultat ist auch in Proposition 4.5 von Kapitel 1 in „Combinatorial Group Theory“ von R. Lyndon und P. Schupp [LS01] zu finden.

³Die hier angegebene Formulierung entsteht, indem die Aussage des Theorems auf α^{-1} angewendet und anschließend $\varphi_{b^{-1},a^{-1}}\varphi_{a,ba}\varphi_{b^{-1},a^{-1}} = \lambda_b \circ \varphi_{ab,b}$ benutzt wird.

Reduktion 1.2.3. Für zwei Untergruppen $H, U \leq F_2$ gilt nach Satz 1.2.2 die folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned}
& \exists \alpha \in \text{Aut}(F_2) : \alpha(H) \leq U. \\
\Leftrightarrow & \exists \alpha \in \text{Aut}(F_2) : \alpha^{-1}(H) \leq U. \\
\Leftrightarrow & \exists \beta \in N_{\mathcal{B}}, \gamma \in N_{\mathcal{C}}, \delta \in N_{\mathcal{D}}, w \in F_2 : (\delta^{-1}\gamma^{-1}\lambda_w^{-1}\beta^{-1})(H) \leq U. \\
\Leftrightarrow & \exists \beta \in N_{\mathcal{B}}, \gamma \in N_{\mathcal{C}}, \delta \in N_{\mathcal{D}}, w \in F_2 : \beta^{-1}(H) \leq \lambda_w(\gamma(\delta(U))).
\end{aligned}$$

Da es für β nur acht und für δ nur zwei Möglichkeiten gibt, können wir entscheiden, ob es solch einen Automorphismus gibt, wenn wir das folgende Problem lösen können: Entscheide für $H, U \leq F_2$, ob es ein Wort $w \in F_2$ und einen Automorphismus $\gamma \in N_{\mathcal{C}}$ mit $H \leq \lambda_w(\gamma(U))$ gibt.

Ersetzen wir hierbei H durch eine konjugierte Untergruppe, so bleibt das Resultat unverändert. Deshalb können wir im Folgenden ohne Einschränkung voraussetzen, dass einer der Erzeuger von H zyklisch reduziert ist.

Bevor wir im Lemma 1.2.5 den Fall untersuchen, bei dem γ die Identität ist, führen wir noch einige Notationen ein, die im Laufe dieses Abschnitts wichtig sein werden.

Notation 1.2.4 (Quellen, Senken und Coregraphen). Sei G ein reduzierter und mit a, b, a^{-1}, b^{-1} beschrifteter Graph. Als positive Kanten $\mathcal{E}_+(G)$ wählen wir stets solche, deren Beschriftung a oder b ist. Wir werden in allen Abbildungen lediglich diese positiven Kanten zeichnen und nur im Hinterkopf behalten, dass es zu jeder solchen Kante noch ihre inverse Kante gibt. Die Kanten mit Beschriftung a (bzw. b) bezeichnen wir als a -Kanten (bzw. b -Kanten).

Wir definieren den *Grad* eines Knotens $P \in \mathcal{V}(G)$ als

$$\text{deg}(P) = |\{F \in \mathcal{E}_+(G) \mid o(F) = P\}| + |\{F \in \mathcal{E}_+(G) \mid t(F) = P\}|.$$

Ein Knoten P wird als *Quelle* (bzw. *Senke*)⁴ bezeichnet, wenn es eine a -Kante und eine b -Kante gibt, die in P beginnen (bzw. enden). Wir bemerken, dass 4 der maximale Grad eines Knotens ist und dass ein Knoten von diesem Grad zugleich Quelle und Senke ist.

Für unseren endlichen Graphen G definieren wir den *Coregraphen* von G als den Graphen, welcher aus G durch sukzessives Entfernen von Grad-1-Knoten mit zugehörigen Kanten entsteht. Zum Beispiel ist der linke Graph in Abbildung 1.1 der Coregraph des rechten Graphen. Wir schreiben hierfür $\text{Core}(G)$ und nennen G selbst einen Coregraphen, wenn $\text{Core}(G) = G$ gilt.

Für eine endlich erzeugte Untergruppe $U \leq F_2$ werden wir neben dem Stallings-Graphen $\Gamma(U)$ noch den Coregraphen $\text{Core}(\Gamma(U))$ benötigen. Für diesen schreiben wir $\Gamma_0(U)$.

Das folgende Lemma ist in ähnlicher Form in [KM02, Korollar 7.13] zu finden.

⁴Diese Begriffe werden in diesem Zusammenhang auch im Artikel [SW10] eingeführt.

Lemma 1.2.5 (Untergruppen und Konjugation). *Seien $H = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ und U endlich erzeugte Untergruppen der freien Gruppe F_n , wobei v_1 nicht-trivial und zyklisch reduziert sei. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (1) *Es existiert ein Element $w \in F_n$ mit $H \leq w^{-1}Uw$.*
- (2) *Es existiert ein Knoten $Q \in \mathcal{V}(\Gamma_0(U))$, so dass v_1, \dots, v_k die Beschriftungen von geschlossenen Wegen in $\Gamma_0(U)$ an den Knoten Q sind.*

Beweis. Sei $H \leq w^{-1}Uw$ und U durch den Stallings-Graphen $\Gamma(U)$ mit Basispunkt P repräsentiert.

Wir wählen eine Zerlegung $w = w_1w_2$ mit maximalem w_1 , so dass ein in P beginnender Weg mit Beschriftung w_1 existiert und bezeichnen mit Q den Endknoten dieses Weges. Sei Γ' der Graph, der aus $\Gamma(U)$ durch Einfügen eines in Q beginnenden Weges γ mit Beschriftung w_2 entsteht, und $R := t(\gamma)$ (siehe Abbildung 1.1).

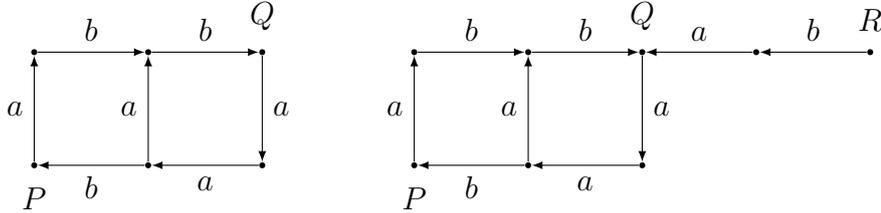


Abbildung 1.1: Die Graphen Γ und Γ' für $U = \langle aba^{-1}b, ab^2a^2b \rangle$ und $w = aba^{-4}b^{-1}$

Aus der Maximalität von w_1 folgt, dass Γ' reduziert ist. Es ist leicht zu verstehen, dass

$$H \leq w^{-1}Uw = w^{-1}\ell(\pi_1(\Gamma, P))w = \ell(\pi_1(\Gamma', R)) \quad (1.4)$$

gilt. Also sind die Wörter v_1, \dots, v_k Beschriftungen von geschlossenen und reduzierten Wegen in Γ' an den Knoten R . Da v_1 zyklisch reduziert ist, folgt $R = Q \in V(\Gamma_0(U))$ und $\Gamma' = \Gamma(U)$. Aus (1.4) können wir nun

$$H \leq \ell(\pi_1(\Gamma(U), Q)) = \ell(\pi_1(\Gamma_0(U), Q))$$

folgern und haben somit die Aussage (2) bewiesen.

Setzen wir nun voraus, dass die Aussage (2) gilt, so folgt

$$H \leq \ell(\pi_1(\Gamma(U), Q)).$$

Wir wählen in $\Gamma(U)$ einen Weg γ von P nach Q und definieren $w := \ell(\gamma)$. Dann gilt

$$H \leq \ell(\pi_1(\Gamma(U), Q)) = w^{-1} \underbrace{\ell(\pi_1(\Gamma(U), P))}_{=U} w$$

und wir haben die Aussage (1) bewiesen. □

Für ein gegebenes $\gamma \in N_C$ können wir jetzt die Existenz eines $w \in F_2$ mit $H \leq \lambda_w(\gamma(U))$ prüfen, wenn wir den Coregraphen $\Gamma_0(\gamma(U))$ kennen. Da γ ein endliches Produkt der Automorphismen $\varphi_{a,ba}$ und $\varphi_{ab,b}$ ist, analysieren wir zunächst, wie sich der Coregraph bei Anwendung des Automorphismus $\varphi_{a,ba}$ ändert. Aus Symmetriegründen verstehen wir dann auch den Einfluss von $\varphi_{ab,b}$ auf den Coregraphen. Späteres Ziel ist es dann, uns auf endlich viele $\gamma \in N_C$ beschränken zu können.

Um aus dem Graphen $\Gamma_0(U)$ den Graphen $\Gamma_0(\varphi_{a,ba}(U))$ zu bekommen, wird im Artikel [SW10] die folgende Methode erklärt: Ersetze in einem ersten Schritt jede Kante mit Beschriftung x durch einen Kantenzug mit Beschriftung $\varphi_{a,ba}(x)$. Die mit a beschrifteten Kanten bleiben hierbei unverändert und jede Kante $P \xrightarrow{b} Q$ wird nach Einfügen eines neuen Knotens R und einer neuen Kante durch $P \xrightarrow{b} R \xrightarrow{a} Q$ ersetzt. In einem zweiten Schritt werden nun Stallings-Faltungen durchgeführt, bis ein reduzierter Graph entsteht. Der Coregraph hiervon ist dann gleich $\Gamma_0(\varphi_{a,ba}(U))$.

Indem analysiert wird, welche Faltungen hierbei möglich sind, geben die Autoren in Fakt 4.3 eine direkte Konstruktion von $\Gamma_0(\varphi_{a,ba}(U))$ aus $\Gamma_0(U)$ an. Wir geben eine Umformulierung hiervon unter Benutzung des Faktes 4.4(i) im folgenden Lemma wieder.⁵

Lemma 1.2.6 (Konstruktion von $\varphi_{a,ba}(G)$). *Für eine endlich erzeugte Untergruppe U von F_2 entsteht der Graph $\Gamma_0(\varphi_{a,ba}(U))$ aus $\Gamma_0(U)$, indem für jede b -Kante E mit $o(E) = P$ und $t(E) = Q$ die folgende Umformung durchgeführt wird (zur Verdeutlichung der Fälle siehe auch Abbildung 1.2 und Beispiel 1.2.7):*

Fall 1 (Q ist keine Senke): „Einfügen neuer a -Kante“

Es wird ein neuer Knoten R und eine neue a -Kante F mit $o(F) = R$ und $t(F) = t(E)$ hinzugefügt. Anschließend wird der Endknoten der Kante E auf R gesetzt.

Fall 2 (Q ist eine Senke vom Grad 2): „Löschen der a -Kante“

Sei F die a -Kante mit $t(F) = Q$ und $R = o(F)$. Dann wird der Endknoten von E auf R gesetzt und F und Q entfernt.

Fall 3 (Q ist eine Senke vom Grad 3 oder 4): „Umbiegen der b -Kante“

Sei R der Anfangsknoten derjenigen a -Kante, welche in Q endet. Dann wird der Endknoten von E auf R gesetzt.

⁵Im angegebenen Artikel wird zugelassen, dass der Basispunkt den Grad 1 hat. Diese Eigenschaft wird allerdings nicht im dortigen Beweis benutzt, so dass die gleiche Aussage für Coregraphen richtig ist.

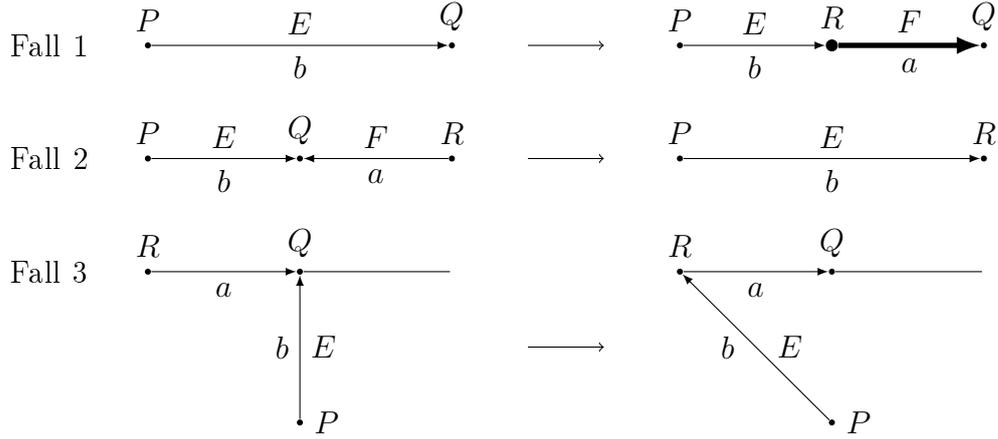


Abbildung 1.2: Die drei Fälle zur Konstruktion von $\Gamma_0(\varphi_{a,ba}(U))$. Nur in Fall 1 entsteht ein neuer Knoten und eine neue Kante. Diese sind fett dargestellt.

Es ergeben sich direkt die folgenden Eigenschaften:

- (1) Eine a -Kante in $\Gamma_0(U)$ verschwindet genau dann, wenn ihr Endknoten eine Senke vom Grad 2 ist. Alle anderen a -Kanten bleiben beim Übergang zu $\Gamma_0(\varphi_{a,ba}(U))$ unverändert, d.h. sie behalten ihren ursprünglichen Anfangs- und Endknoten.
- (2) Die b -Kanten in $\Gamma_0(U)$ und in $\Gamma_0(\varphi_{a,ba}(U))$ entsprechen sich eins zu eins. Der Anfangsknoten einer solchen b -Kante bleibt unverändert. Ist Q der Endknoten einer solchen Kante in $\Gamma_0(U)$ und Q' der Endknoten in $\Gamma_0(\varphi_{a,ba}(U))$, so ist entweder Q' ein neuer Knoten (Fall 1) oder es gibt in $\Gamma_0(U)$ eine a -Kante von Q' nach Q (Fall 2 und 3).
- (3) Sind $P, Q \in \mathcal{V}(\Gamma_0(U))$ beides keine Senken vom Grad 2 und ist ρ ein Weg von P nach Q , so gibt es in $\Gamma_0(\varphi_{a,ba}(U))$ einen Weg von P nach Q mit der Beschriftung $\varphi_{a,ba}(\ell(\rho))$ (Diese Eigenschaft ergibt sich direkt für Wege der Länge 1 und Wege der Länge 2, die über eine Senke vom Grad 2 laufen und überträgt sich dann auf den allgemeinen Fall.).

Wir können diese Konstruktion auf einen beliebigen beschrifteten und reduzierten Graphen G anwenden und schreiben $\varphi_{a,ba}(G)$ für den resultierenden Graphen. Es gilt also

$$\varphi_{a,ba}(\Gamma_0(U)) = \Gamma_0(\varphi_{a,ba}(U)).$$

Beispiel 1.2.7. Für $U = \langle a^3ba^{-1}bab, a^2b^2ab, a^{-1}baba^{-2}b^2 \rangle$ erhalten wir die in Abbildung 1.3 dargestellten Graphen $\Gamma_0(U)$ und $\Gamma_0(\varphi_{a,ba}(U))$. Hierbei sind neue a -Kanten und neue Knoten fett gezeichnet.

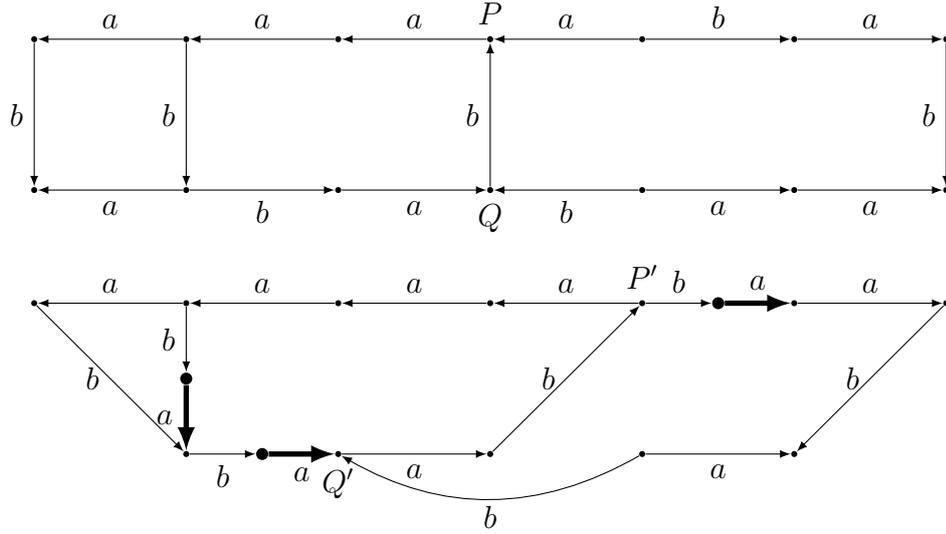


Abbildung 1.3: Die Graphen $\Gamma_0(U)$ und $\Gamma_0(\varphi_{a,ba}(U))$ für
 $U = \langle a^3ba^{-1}bab, a^2b^2ab, a^{-1}baba^{-2}b^2 \rangle = \pi_1(\Gamma_0(U), P)$

Definition 1.2.8 (Brücke und Brückenzug). Wir nennen einen Weg β in einem endlichen, beschrifteten und reduzierten Graphen G einen *Brückenzug*⁶, wenn er die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (1) Jeder innere Knoten von β besitzt den Grad 2.
- (2) Der Weg β durchläuft jede Kante von G höchstens einmal.

Falls die Zusammenhangskomponente von G , welche β enthält, kein Kreis ist, so folgt hierbei die zweite aus der ersten Eigenschaft.

Ist der Weg β zusätzlich gerichtet, d.h., dass seine Kanten nur mit a und b oder nur mit a^{-1} und b^{-1} beschriftet sind, so nennen wir β eine *Brücke*. Ein Brückenzug setzt sich somit aus einzelnen Brücken zusammen.

Der Graph G kann als Vereinigung seiner maximalen Brückenzüge aufgefasst werden. Diese Vereinigung ist bezüglich der Kanten disjunkt, falls keine Zusammenhangskomponente von G ein Kreis ist.

Idee 1.2.9 (Lange Brückenzüge entfernen). Nach der Reduktion 1.2.3 und dem Lemma 1.2.5 müssen wir für endlich erzeugte Untergruppen $U, H = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ entscheiden können, ob es einen Automorphismus $\gamma \in N_{\mathcal{C}}$ und einen Knoten P im Graphen $\Gamma_0(\gamma(U))$ gibt, so dass $v_1, \dots, v_k \in \ell(\pi_1(\Gamma_0(\gamma(U)), P))$ gilt.

Als Beispiel betrachten wir $H = \langle v \rangle \leq F_2$, wobei $v = ab^2a^{-1}ba$ sei, zusammen mit der schon im letzten Beispiel verwendete Untergruppe $U = \langle a^3ba^{-1}bab, a^2b^2ab, a^{-1}baba^{-2}b^2 \rangle$.

⁶Dieser Begriff wurde in Anlehnung an den im Folgenden definierten Begriff Brücke gewählt, welcher im Artikel [SW10] eingeführt wird.

Wir fragen uns, ob es einen Automorphismus $\gamma \in N_C$ und einen *geschlossenen* Weg ρ in $\Gamma_0(\gamma(U))$ gibt, der mit $ab^2a^{-1}ba$ beschriftet ist.

Sei β der mit $a^{-1}baba^{-2}b$ beschriftete Brückenweg von P nach Q (siehe Abbildung 1.3). Für $\gamma = \text{id}$ kann so ein Weg ρ die Kanten aus β nicht benutzen, da die Länge von β größer als die Länge von v ist.

Wenn wir nun schrittweise die Automorphismen $\varphi_{a,ba}$ und $\varphi_{ab,b}$ auf den Graphen $\Gamma_0(U)$ anwenden und der rechte Brückenweg hierbei immer eine Länge von mindestens 7 besitzt, so werden wir sehen, dass wir den Brückenweg β anfangs entfernen und so das Problem vereinfachen können. Dadurch, dass wir analysieren, wie sich die Länge von Brückenwegen ändern kann und wann solche Vereinfachungen möglich sind, werden wir das allgemeine Problem schließlich lösen.

Obiges Beispiel zeigt schon, dass die Länge von Brückenwegen auch fallen kann. Zum Beispiel besitzt β die Länge 7 und der rechte Brückenweg von P' nach Q' in $\Gamma_0(\varphi_{a,ba}(U))$ nur die Länge 6.

Wir werden in der Definition 1.2.10 die Begriffe *sichere* und *unsichere* Kante mit dem Ziel definieren, dass die Anzahl der sicheren Kanten in einem Brückenweg nicht fallen kann. Im obigen Beispiel würde es dann für eine Vereinfachung genügen, wenn der Brückenweg 7 sichere Kanten hat. Diese Definition motivieren wir durch die drei in Abbildung 1.4 dargestellten Beispiele, wobei jeweils ein Brückenweg in P bzw. P' starte, nach rechts verlaufe und in Q ende. Der in P startende Brückenweg sei jeweils mit β bezeichnet. In allen drei Beispielen wird die erste a -Kante von β nach der Definition 1.2.10 unsicher sein.

Im ersten Beispiel verringert sich die Anzahl der a -Kanten am Anfang des Brückenweges bei Anwendung von $\varphi_{a,ba}$ um eins.

Im zweiten Beispiel bleibt die erste Kante von β bei Anwendung von $\varphi_{a,ba}$ erhalten. Es bewegt sich lediglich der Endknoten von der nach oben zeigenden b -Kante um eins nach rechts. Nach dreifacher Anwendung von $\varphi_{a,ba}$ wird der Endknoten dieser b -Kante gleich P' , wodurch der Brückenweg seine erste Kante verliert.

Im dritten Beispiel besitzt β die Beschriftung ab^{-1} . Bei Anwendung von $\varphi_{a,ba}$ wird die erste Kante von β gelöscht und der Endknoten von der nach oben gerichteten b -Kante einen Knoten nach links verschoben. Der rechte Brückenweg ist wieder mit ab^{-1} beschriftet. Wendet man den Automorphismus $\varphi_{a,ba}$ jedoch drei Mal auf den ursprünglichen Graphen an, so verschwindet die erste a -Kante aus dem rechten Brückenweg.

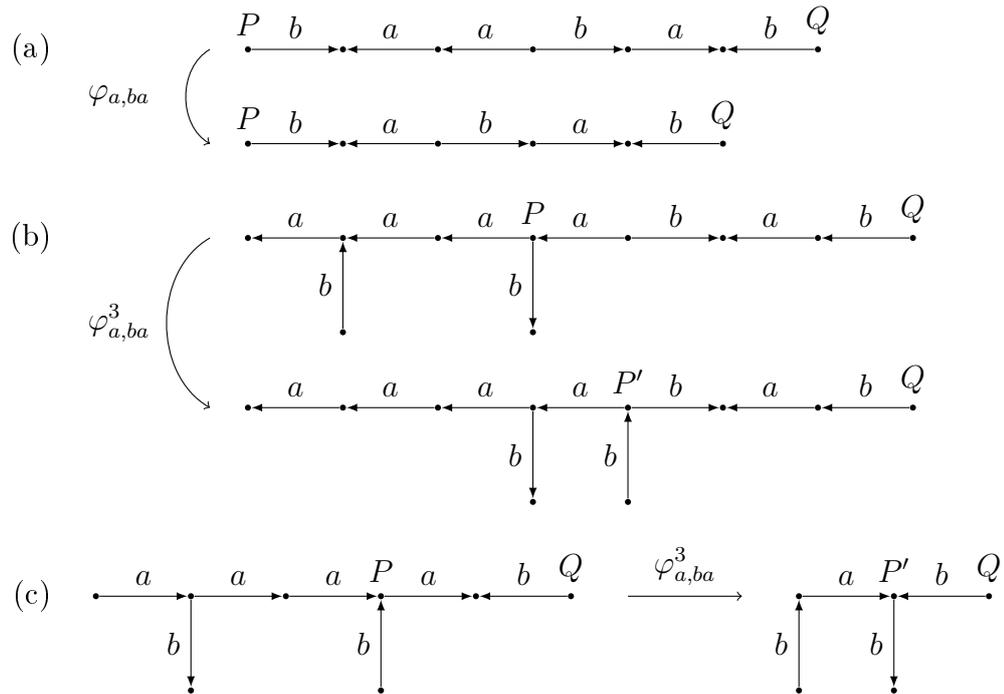


Abbildung 1.4: Beispiele von Brückenzügen, die bei der Anwendung von $\varphi_{a,ba}$ bzw. $\varphi_{a,ba}^3$ kürzer werden.

Definition 1.2.10 (sichere und unsichere Kanten). Wir nennen eine a -Kante E in einem beschrifteten und reduzierten Graphen G *unsicher*, wenn die folgenden zwei Bedingungen (siehe auch Abbildung 1.5) erfüllt sind:

- (B1) Es gibt ein $k \in \mathbb{N}_0$ und einen mit a^k beschrifteten Weg, der in $t(E)$ beginnt und in einer Senke von G endet.
- (B2) Es gibt ein $l \in \mathbb{N}_0$ und einen mit a^l beschrifteten Weg, der in einer Quelle von G beginnt und in $o(E)$ endet.

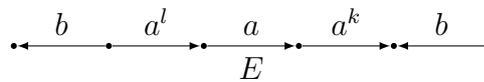


Abbildung 1.5: In der dargestellten Situation ist die a -Kante E unsicher. Hierbei können an allen Knoten noch weitere, nicht dargestellte Kanten in G vorhanden sein.

Mit anderen Worten ist eine a -Kante E unsicher, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ und einen reduzierten Weg mit Beschriftung $b^{-1}a^m b^{-1}$ gibt, welcher über E führt. Die anderen a -Kanten von G nennen wir *sicher*. Analog führen wir diese Bezeichnung für b -Kanten ein, indem wir die Rollen von a -Kanten und b -Kanten vertauschen.

Satz 1.2.11 (Anzahl unsicherer Kanten fällt monoton). *Für einen beschrifteten und reduzierten Graphen G und $\gamma \in N_C$ (siehe Satz 1.2.2) ist die Anzahl der unsicheren Kanten in $\gamma(G)$ kleiner oder gleich deren Anzahl in G .*

Beweis. Es genügt, die Aussage für den Automorphismus $\varphi_{a,ba}$ zu zeigen, da sie dann aus Symmetriegründen auch für $\varphi_{ab,b}$ gilt und sich direkt auf endliche Produkte dieser Automorphismen überträgt.

Wir beweisen zunächst, dass die Anzahl der unsicheren b -Kanten in dem Graphen⁷ $G'' := \varphi_{a,ba}(G)$ kleiner als deren Anzahl in G ist.

Da beim Übergang von G zu G'' keine neuen b -Kanten entstehen, genügt es zu zeigen, dass jede unsichere b -Kante in G'' auch unsicher in G ist. Sei hierfür F eine unsichere b -Kante in G'' . Wenn wir diese Kante in dem Graphen G betrachten, in welchem sie einen anderen Endknoten besitzt, schreiben wir hierfür E .

Wir beweisen, dass E nicht nach Fall 1 von Lemma 1.2.6 umgeformt wird: Nehmen wir an, dass dies doch der Fall wäre, so hätten wir in G'' die Situation $P \xrightarrow[F]{b} R \xrightarrow{a} Q$, wobei $\deg(R) = 2$ wäre. Dies ist ein Widerspruch, da F dann nicht die Bedingung (B1) für b -Kanten erfüllen würde und somit sicher wäre.

Die Kante E wird also mit Fall 2 oder 3 umgeformt. Daher ist $t(E)$ eine Senke und somit die Bedingung (B1) für E mit $k = 0$ erfüllt.

Da F als eine unsichere b -Kante gewählt wurde, erfüllt sie die Bedingung (B2). Es gibt somit ein $l \in \mathbb{N}_0$ und einen mit b^l beschrifteten Weg, der in einer Quelle R beginnt und in $o(F)$ endet. Diese Situation wird in der Abbildung 1.6 dargestellt.

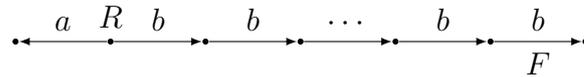


Abbildung 1.6: Bedingung (B2) für die b -Kante F in G''

Für $l = 0$ ist die linke Kante keine neue a -Kante, d.h. nicht im Fall 1 von Lemma 1.2.6 entstanden. Diese a -Kante bildet dann zusammen mit E schon in G eine Quelle und zeigt, dass E auch hier die Bedingung (B2) erfüllt.

Ist $l > 0$, so betrachten wir in G'' die Kante F und die b -Kante, die in $o(F)$ endet. Diese müssen in G wie in Abbildung 1.7 dargestellt verbunden sein und E erfüllt wieder die Bedingung (B2) in G .

⁷Nach dem Beweis dieses Satzes werden wir den Graphen $\varphi_{a,ba}(G)$ mit einem Zwischenschritt aus dem Graphen G konstruieren. Um eine mit dieser Konstruktion konsistente Bezeichnung zu haben, benutzen wir hier schon die Bezeichnung G'' .

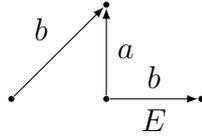


Abbildung 1.7: Bedingung (B2) für die b -Kante E in G

Nun beweisen wir, dass die Anzahl der unsicheren a -Kanten in G'' ebenfalls kleiner oder gleich deren Anzahl in G ist. Da neue a -Kanten die Bedingung (B2) nicht erfüllen und somit sicher sind, müssen alle unsicheren a -Kanten in G'' auch schon in G vorhanden sein. Wir werden nun die folgende Aussage beweisen:

Ist F eine unsichere a -Kante in G'' , so ist diese Kante in G betrachtet ebenfalls unsicher. (1.5)

Sei F eine unsichere a -Kante in G'' . Wenn wir diese in G betrachten, bezeichnen wir sie wieder mit E . Da F unsicher ist, gibt es $k, l \in \mathbb{N}_0$, so dass wir in G'' die in Abbildung 1.8 dargestellte Situation haben.

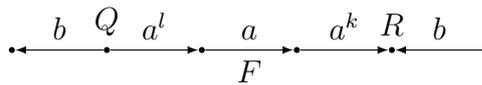


Abbildung 1.8: F ist unsichere Kante in $G'' = \varphi_{a,ba}(G)$

Da in dem Anfangsknoten einer neuen a -Kante weder eine a -Kante endet noch eine b -Kante beginnt, müssen alle auftretenden a -Kanten schon in G vorhanden sein. Da sich der Anfangsknoten von b -Kanten nicht ändert, folgt die Bedingung (B2) für die Kante E .

Wir betrachten nun die b -Kante, die im Knoten R endet. Da R eine Senke ist, wurde diese b -Kante mit Fall 2 oder Fall 3 umgeformt. In G liegt also die in Abbildung 1.9 dargestellte Situation vor

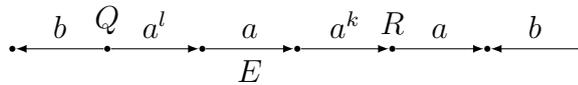


Abbildung 1.9: E ist unsichere Kante in G

und E erfüllt auch die Bedingung (B1). □

Sei β ein maximaler Brückenzug mit s sicheren Kanten. Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, dass der zu β gehörige Brückenzug in $\varphi_{a,ba}(G)$ mindestens s sichere Kanten besitzt. Hierfür müssen wir zunächst definieren, was wir genau unter dem zu β gehörigen Brückenzug verstehen. In den allermeisten Fällen ist anschaulich klar, was hierunter zu verstehen ist.

In Abbildung 1.3 sollte zum Beispiel zum rechten Brückenzug von P nach Q der rechte Brückenzug von P' nach Q' gehören. Für kleine Brückenzüge wie in Abbildung 1.10 ist diese Situation nicht immer so offensichtlich.

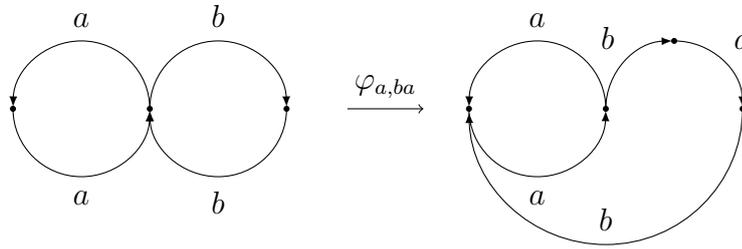


Abbildung 1.10: Im linken Graphen G betrachten wir den maximalen Brückenzug β mit Beschriftung a^2 . Nach der Definition 1.2.12 wird der zu β gehörige Brückenzug in dem Graphen $\varphi_{a,ba}(G)$ aus der oberen a -Kante bestehen. Mit dieser Definition setzt sich der rechte Graph dann aus diesem Brückenzug und dem Teilgraphen $\varphi_{a,ba}(G \setminus \beta)$ zusammen.

Die Definition und die spätere Analyse wären einfacher, wenn der Graph $\varphi_{a,ba}(G)$ durch Zusammensetzen von $\varphi_{a,ba}(G \setminus \beta)$ und $\varphi_{a,ba}(\beta)$ entstehen würde, wenn also die Umformungen in beiden Teilgraphen unabhängig durchgeführt werden könnten. Dies ist jedoch im Allgemeinen nicht der Fall. Betrachten wir zum Beispiel in Abbildung 1.3 den rechten Weg von P nach Q als β und die b -Kante von Q nach P , dann wird diese b -Kante nach Fall 3 umgeformt; würden wir sie jedoch nur in dem Graphen ohne β betrachten, müssten wir Fall 1 anwenden. Bei allen b -Kanten, die nicht in $P = o(\beta)$ oder $Q = t(\beta)$ enden, ist die Umformung in beiden Teilgraphen jeweils unabhängig von dem anderen Teilgraphen.

Definition 1.2.12 (Der zu β gehörige Brückenzug). Sei G ein endlicher, beschrifteter und reduzierter Graph. Sei β ein maximaler Brückenzug in G . Die β enthaltende Zusammenhangskomponente von G sei kein Kreis. Wir betrachten in G die beiden Teilgraphen $G \setminus \beta$ und β .

Bei der Konstruktion von $\varphi_{a,ba}(G)$ führen wir einen Zwischenschritt G' hinzu, so dass die Umformungen bis zu diesem Zwischenschritt in den Teilgraphen $\varphi_{a,ba}(G \setminus \beta)$ und β jeweils unabhängig durchgeführt werden können: Alle b -Kanten, die nicht in $o(\beta)$ oder in $t(\beta)$ enden, werden wie üblich umgeformt. Eine b -Kante, die in $o(\beta)$ oder in $t(\beta)$ endet, müsste wegen der Maximalität von β entweder mit Fall 1 oder Fall 3 umgeformt werden. Diese Kanten werden wir für die Konstruktion von G' mit Fall 1 umformen.

Wir bemerken, dass eine Umformung nach Fall 3 dadurch realisiert werden kann, dass zunächst Fall 1 angewendet und anschließend ein Paar von a -Kanten gefaltet wird. Falls wir nun in dem Graphen G' die maximal zwei möglichen Faltungen durchführen, so entsteht genau der Graph $\varphi_{a,ba}(G)$.

Sei β' der Brückenzug in G' , der aus den Kanten von β hervorgeht. Wir führen nun die ggf. möglichen Faltungen durch, um aus G' den Graphen $G'' := \varphi_{a,ba}(G)$ zu erhalten und

wollen den zugehörigen Brückenzug β'' in G'' definieren. Die Veränderungen am Ende von β' werden in der folgenden Fallunterscheidung beschrieben:

Fall 1: Die letzte Kante von β' ist mit a beschriftet und es gibt noch eine weitere a -Kante in G' , die in $t(\beta')$ endet.

Dann streiche die letzte Kante von β' . Diese Situation wird unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass die letzte Kante von β die Beschriftung a besitzt, in Abbildung 1.11 skizziert. Die Situation, dass diese Kante mit b beschriftet ist, ist analog.



Abbildung 1.11: Links ist ein Ausschnitt des Graphen G' zu sehen. Falls an einem der dargestellten Knoten weitere Kanten vorhanden sein können, werden diese durch eine gestrichelte Linie angedeutet. Nach der Faltung der a -Kanten entsteht der rechts dargestellte Graph $\varphi_{a,ba}(G)$.

Fall 2: In $t(\beta')$ enden zwei a -Kanten, wobei keine hiervon gleich der letzten Kante von β' ist und $\deg(t(\beta')) = 3$ gilt.

Dann wird der Knoten $t(\beta')$ nach der Faltung den Grad 2 besitzen und wir können β' um eine Kante mit der Beschriftung a^{-1} erweitern.

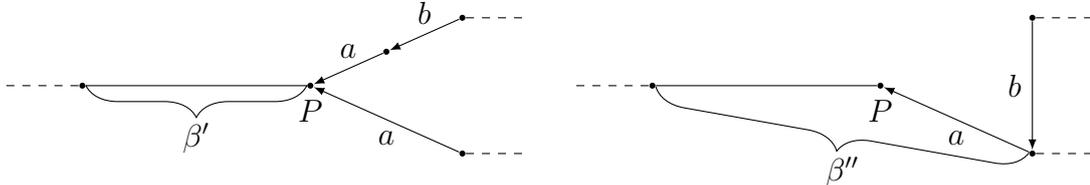


Abbildung 1.12: Links ist ein Ausschnitt des Graphen G' für den Fall 2 zu sehen. Der Brückenzug β' kann hier nach dem Übergang zu $\varphi_{a,ba}(G)$ um eine Kante am Ende verlängert werden.

In allen anderen Fällen bleibt β' am Ende unverändert.

Den Anfang von β' werden wir analog behandeln und erhalten so einen Brückenzug β'' , welchen wir als den zu β gehörigen Brückenzug in G'' bezeichnen.

Für den Fall, dass die Zusammenhangskomponente Z von G , welche β enthält, ein Kreis ist, definieren wir β'' als den Kreis $\varphi_{a,ba}(Z)$.

Satz 1.2.13 (Zusammenhang von $\varphi_{a,ba}(G)$, $\varphi_{a,ba}(G \setminus \beta)$ und β''). *Sei G ein endlicher, beschrifteter und reduzierter Graph, β ein maximaler Brückenzug in G und β'' der nach Definition 1.2.12 zugehörige Brückenzug. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein.*

- (1) Der Graph $\varphi_{a,b}(G)$ setzt sich aus den beiden Teilgraphen $\varphi_{a,b}(G \setminus \beta)$ und β'' zusammen.
- (2) Der Graph $\varphi_{a,b}(G)$ setzt sich aus den beiden Teilgraphen $\varphi_{a,b}(G \setminus \beta)$, β'' und einer verbindenden a -Kante zusammen. Hierbei liegt einer der Endknoten der verbindenden a -Kante nur in β'' und der andere nur in $\varphi_{a,b}(G \setminus \beta)$.

Der zweite Fall tritt genau dann auf, wenn β ein geschlossener Brückenzug an einen Knoten P vom Grad größer gleich 3 ist und P entweder eine Senke in dem Teilgraphen $G \setminus \beta$ oder eine Senke in dem Teilgraphen β ist.

Beweis. Falls die Endknoten von β keine Senken in G sind, so ist der Graph G' aus der Definition 1.2.12 gleich $\varphi_{a,b}(G)$ und dieser setzt sich nach Konstruktion genau aus dem Brückenzug $\beta'' = \beta'$ und $\varphi_{a,b}(G \setminus \beta)$ zusammen.

Wir untersuchen als nächstes die Situation, dass β geschlossen ist oder dass nur der Endknoten P von β eine Senke in G ist. Hier unterscheiden wir die vier Fälle, ob die in P eingehende a -Kante und die in P eingehende b -Kante zu β oder zu $G \setminus \beta$ gehören.

Fall 1(a): Die beiden Kanten gehören zu $G \setminus \beta$ und β ist geschlossen.

Dieser Fall wird in Abbildung 1.13 dargestellt. Betrachten wir die in P endende b -Kante nur in $G \setminus \beta$, so müssten wir sie nach Fall 2 umformen. Die dargestellte a -Kante im rechten Graphen $\varphi_{a,b}(G)$ gehört deshalb nicht zu $\varphi_{a,b}(G \setminus \beta)$.

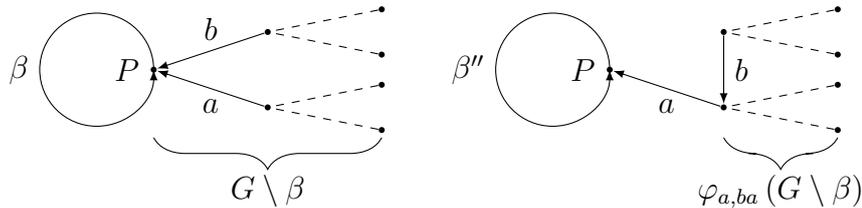


Abbildung 1.13: Die Graphen G und $\varphi_{a,b}(G)$ für den Fall, dass β ein geschlossener Brückenzug und $P = o(\beta)$ eine Senke in $G \setminus \beta$ ist. In diesem Fall ist $\beta' = \beta''$ und der Graph $\varphi_{a,b}(G)$ setzt sich aus $\varphi_{a,b}(G \setminus \beta)$, β'' und einer verbindenden a -Kante zusammen.

Fall 1(b): Die beiden Kanten gehören zu $G \setminus \beta$ und β ist nicht geschlossen.

Hier wird β' um die zusätzliche a -Kante, die im Fall 1(a) die verbindende Kante ist, verlängert, siehe Abbildung 1.12. In diesem Fall besteht $\varphi_{a,b}(G)$ dann aus β'' und $\varphi_{a,b}(G \setminus \beta)$.

Die weiteren Fälle können analog bewiesen werden.

Ist β nicht geschlossen und sind beide Endknoten von β Senken, so tritt an beiden Endknoten keine verbindende a -Kante auf und $\varphi_{a,b}(G)$ besteht wieder aus $\varphi_{a,b}(G \setminus \beta)$ und β'' . \square

Satz 1.2.14 (Anzahl sicherer Kanten in einem Brückenzug). *Sei G ein endlicher, beschrifteter und reduzierter Graph und β ein maximaler Brückenzug in G mit s sicheren Kanten, für den die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:*

- Die Endknoten $o(\beta)$ und $t(\beta)$ haben nicht den Grad 1.
- Falls die Zusammenhangskomponente von G , welche β enthält, ein Kreis ist und mindestens eine b -Kante enthält, so beginnt in $o(\beta)$ eine b -Kante.

Dann besitzt der zu β gehörige Brückenzug β'' in $G'' = \varphi_{a,ba}(G)$ (siehe Definition 1.2.12) mindestens s sichere Kanten.

Beweis. Sei $\beta = P_0 \xrightarrow{E_1} P_1 \xrightarrow{E_2} P_2 \xrightarrow{E_3} \dots \xrightarrow{E_{m-1}} P_{m-1} \xrightarrow{E_m} P_m$ ein maximaler Brückenzug in G .

Wir zerteilen β an jedem Knoten P_i mit $1 < i < m$, an welchem eine b -Kante beginnt. Sei $\beta_1 \dots \beta_k$ die so erhaltene Zerlegung. Die Teilwege β_i für $1 \leq i \leq k$ nennen wir die *Blöcke* von β . Jedes β_i besitzt eine der wie folgt definierten *Blockformen* $B(j, l)$:

$$\begin{aligned} B(1, l) &:= \xrightarrow{b} \xrightarrow{a^l} \xleftarrow{b}, l > 0, & B(2, l) &:= \xrightarrow{b} \xleftarrow{a^l} \xleftarrow{b}, l > 0, \\ B(3, l) &:= \xrightarrow{b} \xrightarrow{a^l}, l \geq 0, & B(4, l) &:= \xrightarrow{b} \xleftarrow{a^l}, l > 0, \\ B(5, l) &:= \xrightarrow{a^l} \xleftarrow{b}, l \geq 0, & B(6, l) &:= \xleftarrow{a^l} \xleftarrow{b}, l > 0, \\ B(7, l) &:= \xrightarrow{a^l}, l > 0, & B(8, l) &:= \xleftarrow{a^l}, l > 0. \end{aligned}$$

Die Konstruktion von β' kann in jedem Block getrennt vorgenommen werden, da die Verbindungsknoten keine Senken sind. Es gilt $\beta' = \beta'_1 \beta'_2 \dots \beta'_k$, wobei jedes β'_i für $1 \leq i \leq k$ wie folgt aus β_i hervorgeht:

$$\begin{aligned} B(1, l) &\rightarrow B(1, l), & B(2, l) &\rightarrow B(2, l), \\ B(3, l) &\rightarrow B(3, l + 1), & B(4, l) &\rightarrow \begin{cases} B(4, l - 1) & \text{für } l > 1, \\ B(3, 0) & \text{für } l = 1, 6 \end{cases} \\ B(5, l) &\rightarrow \begin{cases} B(5, l - 1) & \text{für } l > 0, \\ B(6, 1) & \text{für } l = 0, \end{cases} & B(6, l) &\rightarrow B(6, l + 1), \\ B(7, l) &\rightarrow B(7, l) & B(8, l) &\rightarrow B(8, l). \end{aligned}$$

Nun benutzen wir die Fallunterscheidung vom Ende der Definition 1.2.12 um

$$\beta'' = \beta''_1 \beta''_2 \dots \beta''_k$$

zu bekommen, wobei $\beta''_i = \beta'_i$ für $1 < i < k$ gilt und sich β''_1 (bzw. β''_k) von β'_1 (bzw. β'_k) um jeweils maximal eine Kante unterscheiden.

Da für jedes $1 \leq i \leq k$ die b -Kanten in β_i beim Übergang zu β'_i und weiter zu β''_i erhalten bleiben und wir im Beweis des Satzes 1.2.11 gesehen haben, dass eine sichere b -Kante in G auch in G'' sicher ist, ist die Anzahl der sicheren b -Kanten in β'' mindestens so groß wie deren Anzahl in β .

- Wir analysieren als nächstes die a -Kanten in den Blöcken β_i mit $1 < i < k$. Sei dazu β_i ein Block der Form $B(j, l)$. Wir wollen zunächst verstehen, dass die a -Kanten in β_i genau dann unsicher sind, wenn $j \in \{4, 5\}$ gilt. Zum Beispiel sind die a -Kanten für $j = 7$ sicher: Da β an dem Knoten $t(\beta_i)$ geteilt wurde, beginnt in $t(\beta_i)$ eine b -Kante. Auf die gleiche Weise ergeben sich die anderen Fälle.

Da die Anzahl der a -Kanten nur in den Fällen $j = 4$ und $j = 5$ fällt, können wir folgern, dass die Anzahl der sicheren a -Kanten in β_i'' mindestens so groß ist, wie derer Anzahl in β_i .

- Wir betrachten nun den Fall, dass die β enthaltende Zusammenhangskomponente von G ein Kreis ist. Besteht dieser nur aus a -Kanten, so ist die Aussage des Satzes trivial. Ansonsten ist die Analyse für die Blöcke β_i mit $1 < i < k$ auch für die Blöcke β_1 und β_k gültig und die Aussage bewiesen.

- Jetzt betrachten wir den Fall, dass die β enthaltende Zusammenhangskomponente von G kein Kreis ist. Wegen der Maximalität von β sind die folgenden Ungleichungen erfüllt:

$$\deg(o(\beta)) > 2 \text{ und } \deg(t(\beta)) > 2. \quad (1.6)$$

Wir analysieren nun β_k und zeigen, dass die Anzahl der sicheren a -Kanten in β_k'' mindestens so groß wie in β_k ist. Hierbei können wir voraussetzen, dass es mindestens eine sichere a -Kante in β_k gibt und folgern hieraus:

$$\text{Alle } a\text{-Kanten in } \beta_k \text{ sind sicher.} \quad (1.7)$$

Sei β_k von der Blockform $B(j, l)$. Dann ist l die Anzahl der sicheren a -Kanten in β_k . Die Anzahl der sicheren a -Kanten in β' (bzw. β'') bezeichnen wir mit l' (bzw. l''). Im Fall $j \in \{1, 2\}$ gilt $l'' \geq l' = l$ und für $j = 3$ ist $l'' \geq l' - 1 = l$.

Fall $j = 4$: In diesem Fall beginnt in $t(\beta)$ wegen (1.7) keine b -Kante. Da dieser Knoten wegen Ungleichung (1.6) dann den Grad 3 besitzen muss, gibt es hier eine endende a -Kante E und eine endende b -Kante (siehe Abbildung 1.14).

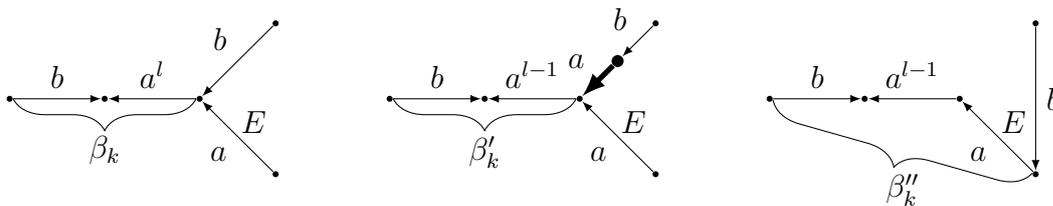


Abbildung 1.14: Die Blöcke β_k, β'_k und β''_k im Fall $j = 4$

Wir bemerken, dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (1) Alle dargestellten a -Kanten erfüllen die Bedingung (B1). Diese a -Kanten sind also genau dann sicher, wenn sie (B2) nicht erfüllen.

- (2) In den Graphen G und G'' erfüllen jeweils entweder alle oder gar keine der in Abbildung 1.14 dargestellten a -Kanten die Bedingung (B2), da an den Knoten, welche zwischen zwei solchen a -Kanten liegen, keine b -Kanten beginnen. In diesen Graphen sind also entweder alle dargestellten a -Kanten sicher oder alle unsicher.

Nach der Eigenschaft (2) und (1.7) ist E eine sichere a -Kante in G . Nach (1.5) ist E dann auch in G'' sicher. Mit Eigenschaft (2) folgt, dass alle a -Kanten von β_k'' sicher sind. Es gilt also $l'' = l$.

Fall $j = 5$: Wegen Voraussetzung (1.7) muss hier $k = 1$ gelten. Dieser Fall ist dann symmetrisch zum Fall $k = 1$ und $j = 4$.

Fall $j = 6$: Für $k = 1$ erhalten wir einen symmetrischen Fall zu $j = 3$ und $k = 1$ und für $k > 1$ gilt $l'' \geq l' = l + 1$.

Fall $j = 7$: Für $k > 1$ können wir aus unserer Voraussetzung (1.7), welche besagt, dass alle a -Kanten in β_k sicher sind, folgern, dass in $t(\beta_k)$ keine b -Kante endet. Damit kann β_k' beim Übergang zu β_k'' keine Kante verlieren und es gilt $l = l' = l''$.

Da die Ungleichung $l'' \geq l$ für $k = 1$ offensichtlich ist, falls in $t(\beta_k)$ keine b -Kante endet, können wir für den Rest von Fall $j = 7$ voraussetzen, dass $k = 1$ gilt und in $t(\beta_k)$ eine b -Kante endet. In $o(\beta_k)$ kann dann keine b -Kante beginnen. Unter Beachtung von (1.6) liegt dann eine der in Abbildung 1.15 dargestellten Situationen vor und es gilt $l'' = l$.

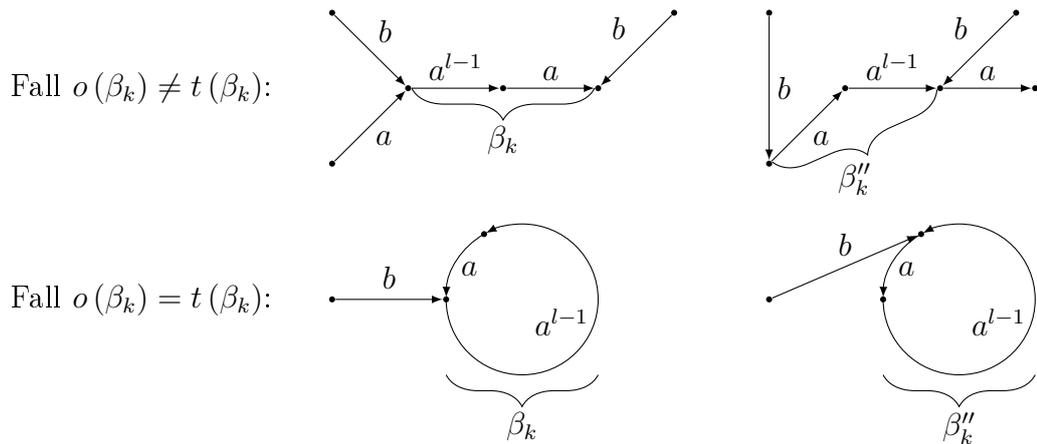


Abbildung 1.15: Die Blöcke β_k und β_k'' im Fall $j = 7$

Fall $j = 8$: Für $k > 1$ bleiben alle a -Kanten bestehen und es folgt $l'' \geq l$. Für $k = 1$ ist die Situation symmetrisch zu $j = 7$ und $k = 1$. \square

Seien U und $H = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ endlich erzeugte Untergruppen von F_2 , wobei $1 \neq v_1$ zyklisch reduziert sei. Um zu entscheiden, ob es einen Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(F_2)$ mit $\alpha(H) \leq U$ gibt, genügt es in Bezug auf Reduktion 1.2.3 und Lemma 1.2.5, wenn wir für einen gegebenen endlichen, beschrifteten und reduzierten Graphen G entscheiden können, ob es einen Automorphismus $\gamma \in N_{\mathcal{C}}$ und einen Knoten $P \in \mathcal{V}(G)$ mit $H \subseteq$

$\ell(\pi_1(\gamma(G), P))$ gibt. Für den Algorithmus, der dieses Problem löst, benötigen wir noch die folgende Vorbereitung.

Vorbereitung zur Formulierung des Algorithmus 1.2.15. Sei G ein endlicher, beschrifteter und reduzierter Graph und $H = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \leq F_2$ mit $1 \neq v_1$ zyklisch reduziert. Wir definieren

$$L_H := \max \{|v_1|, \dots, |v_k|\}.$$

Für einen endlichen, beschrifteten und reduzierten Graphen Γ betrachten wir die folgenden zwei Transformationen.

(T1) Entferne eine oder mehrere Kanten aus Γ , welche nicht zum Coregraphen gehören.

(T2) Entferne einen Brückenzug aus Γ , welcher mehr als L_H sichere Kanten besitzt.

Durch Anwendung endlich vieler dieser Transformationen auf Γ können wir einen Graphen Γ' bekommen, welcher ein Coregraph ist und bei dem jeder Brückenzug höchstens L_H sichere Kanten besitzt. Wir werden im Lemma 1.2.17 zeigen, dass Γ' hierbei eindeutig durch Γ bestimmt ist. Für ein $\gamma \in \{\varphi_{a,ba}, \varphi_{ab,b}\}$ definieren wir $\gamma'(\Gamma) := (\gamma(\Gamma))'$.

Sei \mathfrak{M} die Menge aller beschrifteten Graphen Γ , die sich als $\Gamma = \varphi'_k(\dots \varphi'_1(G') \dots)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \{\varphi_{a,ba}, \varphi_{ab,b}\}$ darstellen lassen. Für $\Gamma \in \mathfrak{M}$ definieren wir den *Radius*

$$r(\Gamma) = \min \{k \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \varphi_1, \dots, \varphi_k \in \{\varphi_{a,ba}, \varphi_{ab,b}\} : \Gamma = \varphi'_k(\dots \varphi'_1(G') \dots)\}.$$

Wir definieren für $n \in \mathbb{N}_0$ die Mengen:

$$S_n := \{G \in \mathfrak{M} \mid r(G) = n\} \text{ und } B_n := S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_n.$$

In Lemma 1.2.18 werden wir zeigen, dass \mathfrak{M} endlich ist. Daraus folgt, dass es einen Index N mit $S_{N+1} = \emptyset$ gibt. Dann gilt $S_n = \emptyset$ für alle $n \geq N + 1$ und $\mathfrak{M} = B_N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} S_n$.

Algorithmus 1.2.16.

Mit den folgenden Schritten lässt sich entscheiden, ob es einen Automorphismus $\gamma \in N_C$ und einen Knoten $P \in \mathcal{V}(\gamma(G))$ mit $H \leq \ell(\pi_1(\gamma(G), P))$ gibt:

Schritt 1: Berechne unter Verwendung von $S_0 = \{G'\}$ und

$$S_n = (\varphi'_{a,ba}(S_{n-1}) \cup \varphi'_{ab,b}(S_{n-1})) \setminus B_{n-1}$$

sukzessiv die Mengen S_n und B_n , bis ein Index N mit $S_{N+1} = \emptyset$ gefunden wird.

Schritt 2: Prüfe für jeden Graphen $\Gamma \in B_N$, ob es einen Knoten $P \in \mathcal{V}(\Gamma)$ mit $H \leq \ell(\pi_1(\Gamma, P))$ gibt. Falls ein Graph Γ und ein Knoten P mit $H \leq \ell(\pi_1(\Gamma, P))$ gefunden wird, so gib JA zurück, ansonsten NEIN.

Beweis. Für einen beschrifteten Graphen G kürzen wir die Aussage, dass es einen Knoten $P \in \mathcal{V}(G)$ mit $H \leq \ell(\pi_1(G, P))$ gibt, mit der Bezeichnung $H \hookrightarrow G$ ab.

Für den Beweis der Korrektheit benutzen wir die folgende Behauptung, die wir dann im Anschluss beweisen werden.

Behauptung: Sei G ein endlicher, beschrifteter und reduzierter Graph. Dann sind die folgenden Aussagen erfüllt.

(a) Es gilt

$$H \hookrightarrow G \Leftrightarrow H \hookrightarrow G'.$$

(b) Es gilt $\varphi'_{a,ba}(G') = \varphi'_{a,ba}(G)$.

(c) Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \{\varphi_{a,ba}, \varphi_{ab,b}\}$ gilt

$$\varphi'_k \circ \dots \circ \varphi'_1(G') = (\varphi_k \circ \dots \circ \varphi_1(G))'.$$

Mit Hilfe dieser Behauptung folgt die Korrektheit des Algorithmus dann aus dem Lemma 1.2.18 und der Äquivalenz der folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned} & \exists \varphi_1, \dots, \varphi_k \in \{\varphi_{a,ba}, \varphi_{ab,b}\} : H \hookrightarrow \varphi_k \circ \dots \circ \varphi_1(G) \\ \stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} & \exists \varphi_1, \dots, \varphi_k \in \{\varphi_{a,ba}, \varphi_{ab,b}\} : H \hookrightarrow (\varphi_k \circ \dots \circ \varphi_1(G))' \\ \stackrel{(c)}{\Leftrightarrow} & \exists \varphi_1, \dots, \varphi_k \in \{\varphi_{a,ba}, \varphi_{ab,b}\} : H \hookrightarrow \varphi'_k \circ \dots \circ \varphi'_1(G') \\ \Leftrightarrow & \exists \Gamma \in \mathfrak{M} : H \hookrightarrow \Gamma \end{aligned}$$

Beweis der Behauptung.

• Zu (a): Seien $G = G^{(0)}, G^{(1)}, \dots, G^{(k)} = G'$ Graphen, so dass $G^{(i+1)}$ für $0 \leq i < k$ aus $G^{(i)}$ entweder durch Übergang zum Coregraphen oder durch Weglassen eines Brückenzuges mit mehr als L_H sicheren Kanten entstehe. Es genügt, die Äquivalenz von $H \hookrightarrow G^{(i)}$ und $H \hookrightarrow G^{(i+1)}$ für $i < k$ zu zeigen. Hierfür verwenden wir die folgende Fallunterscheidung:

Fall 1: Es gilt $G^{(i+1)} = \text{Core}(G^{(i)})$.

Sei $H \hookrightarrow G^{(i)}$. Dann wählen wir einen Knoten $P \in \mathcal{V}(G^{(i)})$ mit $H \leq \ell(\pi_1(G^{(i)}, P))$. Da v_1 zyklisch reduziert ist, folgt $P \in \mathcal{V}(\text{Core}(G^{(i)}))$. Hieraus erhalten wir

$$H \leq \ell(\pi_1(G^{(i)}, P)) = \ell(\pi_1(\text{Core}(G^{(i)}), P)) = \ell(\pi_1(G^{(i+1)}, P)).$$

und haben somit der Implikationen bewiesen. Die andere Implikation ist offensichtlich.

Fall 2: Es gilt $G^{(i+1)} = G^{(i)} \setminus \beta$ für einen Brückenzug β mit mehr als L_H sicheren Kanten. Sei $P \in \mathcal{V}(G^{(i)})$ mit $H \leq \ell(\pi_1(G^{(i)}, P))$ und ρ_i für $1 \leq i \leq k$ der geschlossene Weg an P mit $\ell(\rho_i) = v_i$. Da v_1 zyklisch reduziert ist, ist ρ_1 zyklisch reduziert. Würde P ein innerer Knoten von β sein, so müsste ρ_1 also alle Kanten von β (in mindestens einer Orientierung) benutzen und wir erhielten den Widerspruch $|v_1| \geq |\beta| > L_H$. Also gilt $P \in \mathcal{V}(G^{(i)} \setminus \beta)$. Würde nun ein ρ_i mindestens eine Kante von β benutzen, so müsste

dieses ρ_i alle Kanten von β durchlaufen und wir erhielten den gleichen Widerspruch. Damit folgt $H \leftrightarrow G^{(i+1)}$. Die andere Implikation ist wieder offensichtlich.

• Zu (b): Wenn wir in G schrittweise maximale Brückenzüge entfernen, die entweder mehr als L_H sichere Kanten oder einen Endknoten vom Grad 1 besitzen, so entsteht der Graph G' . Wir wählen Graphen $G = G^{(0)}, G^{(1)}, \dots, G^{(k)} = G'$, so dass $G^{(i+1)}$ aus $G^{(i)}$ für $i < k$ durch Entfernen eines solchen maximalen Brückenzuges β_i entsteht.

Die Aussage folgt, wenn wir zeigen, dass für alle $i < k$ die folgende Gleichung gilt:

$$\varphi'_{a,ba}(G^{(i)}) = \varphi'_{a,ba}(\underbrace{G^{(i)} \setminus \beta_i}_{=G^{(i+1)}}).$$

Hierfür werden wir die folgende Tatsache benutzen, welche sich direkt aus der Wohldefiniertheit der Konstruktion von Γ' ergibt, die wir im Lemma 1.2.17 beweisen werden: Sind Γ_1 und Γ_2 zwei Graphen, so dass Γ_2 durch die Transformationen (T1) und (T2) aus Γ_1 hervorgeht, so gilt $\Gamma'_1 = \Gamma'_2$. Es genügt also, wenn wir solche Transformationen finden, mit denen $\varphi_{a,ba}(G^{(i)})$ zu $\varphi_{a,ba}(G^{(i)} \setminus \beta_i)$ überführt wird.

Fall 1: Die Endknoten von β_i besitzt einen Grad größer gleich 3.

Nach Satz 1.2.13 setzt sich der Graph $\varphi_{a,ba}(G^{(i)})$ aus dem Graphen $\varphi_{a,ba}(G^{(i)} \setminus \beta_i)$, dem Brückenzug β''_i und ggf. einer verbindenden a -Kante zusammen. Da β''_i nach Satz 1.2.14 ebenfalls mehr als L_H sichere Kanten besitzt, können wir in $\varphi_{a,ba}(G^{(i)})$ zunächst mit (T2) den Brückenzug β''_i und anschließend mit (T1) die ggf. vorhandene, verbindende a -Kante entfernen, um den Graphen $\varphi_{a,ba}(G^{(i)} \setminus \beta_i)$ zu erhalten.

Fall 2: Der Brückenzug β_i besitzt einen Endknoten vom Grad 1.

Wir setzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraus, dass der Anfangsknoten von β_i den Grad 1 besitzt. Mit den Bezeichnungen aus Definition 1.2.12 besitzt der Anfangsknoten von β'_i ebenfalls den Grad 1. Beim Übergang von β'_i zu β''_i bleibt β'_i entweder unverändert oder wird am Ende um eine Kante verlängert oder verkürzt.

Der Graph $\varphi_{aba}(G^{(i)} \setminus \beta_i)$ setzt sich aus $\varphi_{a,ba}(G^{(i)} \setminus \beta_i)$ und β''_i zusammen. Ist β''_i trivial, so ist nichts zu zeigen. Ansonsten besitzt β''_i wieder einen Anfangsknoten vom Grad 1 und kann mit der Transformation (T1) gelöscht werden.

Fall 3: Der Brückenzug β_i ist geschlossen.

In diesem Fall besitzt β_i mehr als L_H sichere Kanten. Durch zyklische Vertauschung von β_i können wir die Voraussetzungen von Satz 1.2.14 erfüllen, wobei weiterhin $G^{(i+1)} = G^{(i)} \setminus \beta_i$ erfüllt bleibt. Der Rest von Fall 3 verläuft dann analog zu Fall 1.

• Zu (c): Wir beweisen diese Aussage über eine Induktion nach $k \in \mathbb{N}$. Analog zu (b) gilt für einen endlichen, beschrifteten und reduzierten Graphen G auch

$$\varphi'_{ab,b}(G') = \varphi'_{ab,b}(G).$$

Damit ist der Induktionsanfang erfüllt. Für den Induktionsschritt wenden wir zunächst den Induktionsanfang und dann die Induktionsvoraussetzung an und folgern, dass

$$\varphi'_{k+1} \circ \dots \circ \varphi'_2 \circ \varphi'_1(G') = \varphi'_{k+1} \circ \dots \circ \varphi'_2(\varphi_1(G)') = (\varphi_{k+1} \circ \dots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(G))'$$

gilt. □

Lemma 1.2.17. *Sei Γ ein endlicher, beschrifteter und reduzierter Graph und seien Γ_1 und Γ_2 zwei Graphen, welche aus Γ durch Anwendung der Transformationen (T1) und (T2) entstehen. Falls sich auf Γ_1 und Γ_2 keine weiteren Transformationen anwenden lassen, so gilt $\Gamma_1 = \Gamma_2$.*

Beweis. Wir betrachten Γ_1 und Γ_2 als Teilgraphen von Γ und zeigen $\mathcal{E}(\Gamma_1) \subset \mathcal{E}(\Gamma_2)$. Aus Symmetriegründen gilt dann auch $\mathcal{E}(\Gamma_2) \subset \mathcal{E}(\Gamma_1)$ und damit die Gleichheit von Γ_1 und Γ_2 .

Wir wählen Graphen $\Gamma = \Gamma^{(0)}, \Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(k)} = \Gamma_2$, so dass für jedes $0 \leq i < k$ der Graph $\Gamma^{(i+1)}$ aus $\Gamma^{(i)}$ durch eine der Transformationen (T1) oder (T2) entsteht.

Nehmen wir an $\mathcal{E}(\Gamma_1) \not\subset \mathcal{E}(\Gamma_2)$. Dann sei i der maximale Index mit

$$\mathcal{E}(\Gamma_1) \subset \mathcal{E}(\Gamma^{(i)}) \tag{1.8}$$

und $E \in \mathcal{E}(\Gamma_1) \setminus \mathcal{E}(\Gamma^{(i+1)})$. Die Kante E wird also beim Übergang von $\Gamma^{(i)}$ zu $\Gamma^{(i+1)}$ gelöscht.

Fall 1: $\Gamma^{(i+1)}$ entsteht aus $\Gamma^{(i)}$ mit Hilfe einer Transformation vom Typ (T1).

Dann gilt $E \notin \text{Core}(\Gamma^{(i)})$. Wegen (1.8) liegt E dann nicht in $\text{Core}(\Gamma_1) = \Gamma_1$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von E .

Fall 2: $\Gamma^{(i+1)}$ entsteht aus $\Gamma^{(i)}$ mit Hilfe einer Transformation vom Typ (T2).

Dann ist $\Gamma^{(i+1)} = \Gamma^{(i)} \setminus \beta$ für einen Brückenzug β in $\Gamma^{(i)}$, der mehr als L_H sichere Kanten besitzt.

Wir bemerken, dass der Coregraph Γ_1 wegen (1.8) entweder alle oder gar keine Kanten von β enthalten muss. Da β die Kante $E \in \mathcal{E}(\Gamma_1)$ enthält, liegen also alle Kanten aus β in dem Graphen Γ_1 . Da die Kanten von β in $\Gamma^{(i)}$ sicher sind, sind sie auch in dem Teilgraphen Γ_1 sicher und wir erhalten den Widerspruch, dass Γ_1 einen Brückenzug mit mehr als L_H sicheren Kanten besitzt. \square

Lemma 1.2.18. *Für einen endlichen, beschrifteten und reduzierten Graphen ist die in der Vorbereitung 1.2.15 definierte Menge*

$$\mathfrak{M} = \{\varphi'_l \circ \dots \circ \varphi'_1(G') \mid l \in \mathbb{N}_0, \varphi_1, \dots, \varphi_l \in \{\varphi_{a,ba}, \varphi_{ab,b}\}\}$$

endlich.

Beweis. Wir definieren eine Abbildung ψ , die einem Graphen $\Gamma \in \mathfrak{M}$ auf die folgende Weise einen unbeschrifteten Graphen zuordnet: Ist Z eine Zusammenhangskomponente von Γ , die kein Kreis ist, so setzt sich diese aus ihren maximalen Brückenzügen zusammen, welche zwischen den Knoten mit einem Grad größer gleich 3 verlaufen. In so einer Zusammenhangskomponente werden die maximalen Brückenzüge jeweils durch eine Kante ersetzt. Die Zusammenhangskomponenten, die Kreise sind, werden jeweils durch die Rose R_1 , also den Graphen mit einem Knoten und einer positiven Kante, ersetzt.

Wir beweisen das Lemma, indem wir die folgenden zwei Aussagen verifizieren.

- (1) Das Bild von ψ ist endlich.

(2) Das Urbild jedes Graphen aus $\text{Bild}(\psi)$ ist endlich.

Zu (1): Wir bezeichnen mit $\mu(G)$ die zyklomatische Zahl⁸ eines Graphen, d.h.

$$\mu(G) = |\mathcal{E}_+(G)| - |\mathcal{V}(G)| + |\kappa(G)|,$$

wobei $\kappa(G)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G sei. Hierfür ergeben sich direkt die folgenden Eigenschaften:

- Für $\Gamma \in \mathfrak{M}$ gilt $\mu(\Gamma) \leq \mu(G')$.
- Für $\Gamma \in \mathfrak{M}$ gilt $\mu(\Gamma) = \mu(\psi(\Gamma))$.

Seien $\Gamma \in \mathfrak{M}$ und Z_1, \dots, Z_r die Zusammenhangskomponenten von $\psi(\Gamma)$. Sei Z_i eine der Zusammenhangskomponenten, die ungleich der Rose R_1 ist. Dann besitzen alle Knoten von Z_i einen Grad größer gleich 3 und es folgt

$$|\mathcal{V}(Z_i)| \leq \frac{2}{3} |\mathcal{E}_+(Z_i)|.$$

Durch Einsetzen dieser Ungleichung in $\mu(Z_i) = |\mathcal{E}_+(Z_i)| - |\mathcal{V}(Z_i)| + 1$ folgt

$$|\mathcal{E}_+(Z_i)| \leq 3\mu(Z_i) - 3.$$

Ist Z_i gleich der Rose R_1 , so gilt $|\mathcal{E}_+(Z_i)| = 1 = \mu(Z_i)$. Es folgt

$$|\mathcal{E}_+(\psi(\Gamma))| = \sum_{i=1}^r |\mathcal{E}_+(Z_i)| \leq 3 \sum_{i=1}^r \mu(Z_i) = 3\mu(\psi(\Gamma)) \leq 3\mu(G').$$

Damit besitzen alle Graphen aus dem Bild von ψ höchstens $3\mu(G')$ viele Kanten und es folgt die Aussage (1).

Zu (2): Sei S die Anzahl der unsicheren Kanten in G' . Da eine sichere Kante beim Weglassen von anderen Kanten sicher bleibt, folgt aus Satz 1.2.11, dass alle Graphen aus \mathfrak{M} höchstens S unsichere Kanten besitzen. Nun benutzen wir noch, dass ein Brückenzug eines Graphen aus \mathfrak{M} nach Konstruktion höchstens L_H sichere Kanten enthält. Damit ist die Länge jedes Brückenzugs durch $L_H + S$ beschränkt.

Ist H ein Graph im Bild von ψ , so entsteht also ein beliebiger Graph aus $\psi^{-1}(H)$, indem jede Kante durch einen Brückenzug mit höchstens $L_H + S$ Kanten ersetzt wird. Da es für einen solchen Brückenzug nur endlich viele Möglichkeiten gibt, folgt die Aussage (2). \square

Beispiel 1.2.19. Wir betrachten $H = \langle ab^2a^{-1}ba \rangle$ und den schon im Beispiel 1.2.7 untersuchten Graphen

$$G = \Gamma_0 (\langle a^3ba^{-1}bab, a^2b^2ab, a^{-1}baba^{-2}b^2 \rangle).$$

⁸Besteht G aus den Zusammenhangskomponenten Z_1, \dots, Z_r , so ist $\mu(G) = \sum_{i=1}^r \text{rang}(\pi_1(Z_i, P_i))$, wobei P_i ein Knoten aus Z_i sei.

Wir wollen mit unserem Algorithmus untersuchen, ob es ein $k \in \mathbb{N}_0$ und Automorphismen $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \{\varphi_{a,ba}, \varphi_{ab,b}\}$ gibt, so dass $H \leq L(\pi_1(\varphi_k \circ \dots \circ \varphi_1(G), P))$ für einen passenden Knoten P gilt.

Der Erzeuger von H ist bereits zyklisch reduziert und die im Algorithmus eingeführte maximale Länge eines Erzeugers ist $L_H = 6$.

Die Graphen G , G' , $\varphi_{a,ba}(G')$ und $\varphi_{ab,b}(G')$ sind in Abbildung 1.16 dargestellt. Hierbei werden Brückenzüge durch eine Kante mit entsprechender Beschriftung dargestellt und unsichere Kanten durch unterstrichene Buchstaben gekennzeichnet.

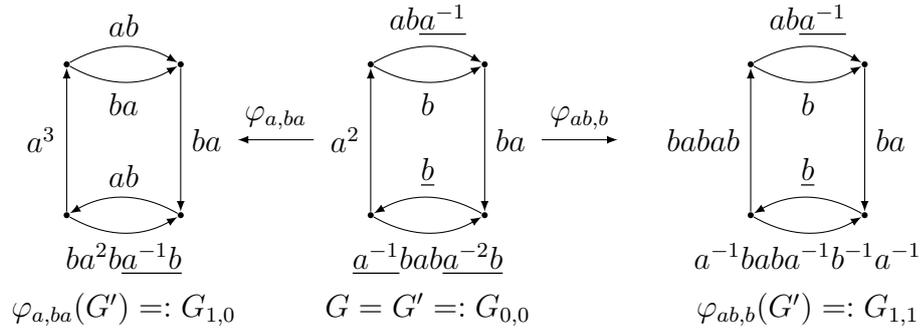


Abbildung 1.16: Die Graphen $\varphi_{a,ba}(G')$, G' und $\varphi_{ab,b}(G')$, wobei der erste Index den Radius angibt.

Dann gilt $S_0 = \{G_{0,0}\}$ und $G'_{1,0} = G_{1,0}$. Bei der Berechnung von $G'_{1,1}$ kann zunächst der untere Brückenzug β mit der Beschriftung $a^{-1}baba^{-1}b^{-1}a^{-1}$ entfernt werden, da er 7 sichere Kanten besitzt. Der untere Brückenzug in $G_{1,1}$ mit der Beschriftung b liegt nach Entfernung von β in einem maximalen und mit $babbabab$ beschrifteten Brückenzug, wobei nun alle Kanten hiervon sicher sind. Wird dieser Brückenzug ebenfalls entfernt, so entsteht der links in Abbildung 1.17 dargestellte Graph $G'_{1,1}$.

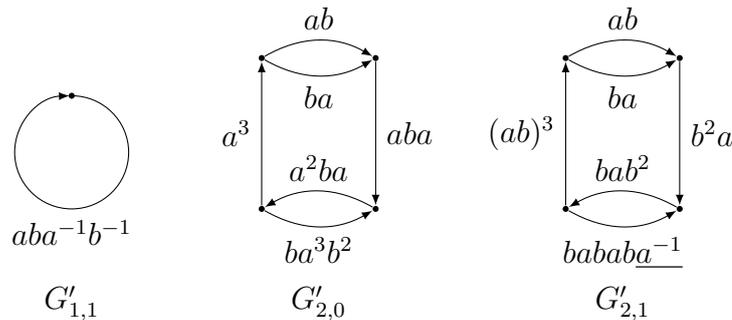


Abbildung 1.17: Die Graphen $G'_{1,1}$, $G'_{2,0}$ und $G'_{2,1}$

Hiermit haben wir $S_1 = \{G'_{1,0}, G'_{1,1}\}$ berechnet. Auf die gleiche Weise erhalten wir die in Abbildung 1.18 dargestellten Zusammenhänge, wobei die Graphen $G'_{2,0}$ und $G'_{2,1}$ in Abbildung 1.17 gezeichnet sind.

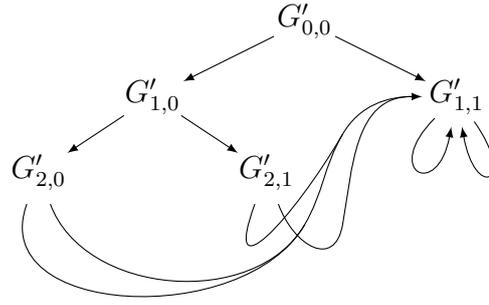


Abbildung 1.18: Die Graphen aus der Menge B_2 . Die linke (bzw. rechte) Kante, die von einem Graphen ausgeht, steht hierbei für die Anwendung von $\varphi'_{a,ba}$ (bzw. $\varphi'_{ab,b}$).

Es folgt $S_2 = \{G'_{2,0}, G'_{2,1}\}$ und $S_3 = \emptyset$. Indem wir nun prüfen, dass v nicht die Beschriftung eines geschlossenen Weges in einem der fünf Graphen aus

$$B_2 = \{G'_{0,0}, G'_{1,0}, G'_{1,1}, G'_{2,0}, G'_{2,1}\}$$

ist, können wir schließen, dass die anfangs gestellte Frage mit nein zu beantworten ist. Wir bemerken, dass die Menge der zu betrachteten Graphen mit dem Algorithmus aus [SW10] größer ist: In diesem Beispiel lassen sich mit dem dortigen Algorithmus Brücken (und nicht wie bei uns Brückenzüge) entfernen, wenn sie mindestens 17 Kanten besitzen (siehe [SW10, Beweis von Theorem 4.1]). Außerdem muss am Ende für jeden Graphen G geprüft werden, ob eines von $\text{kgV}(1, 2, \dots, 8)$ Wörtern eine Schleife in G beschriftet (hier mussten wir dies nur für v selbst prüfen).

1.3 Potenzen eines primitiven Elementes in einer Untergruppe

Sei F_n die freie Gruppe mit der Basis x_1, x_2, \dots, x_n .

Definition 1.3.1 (primitives Element). Ein Element $y_1 \in F_n$ heißt *primitiv*, wenn es Elemente $y_2, y_3, \dots, y_n \in F_n$ gibt, so dass y_1, y_2, \dots, y_n eine Basis von F_n bilden. Dies ist äquivalent dazu, dass es einen Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(F_n)$ mit $\alpha(x_1) = y_1$ gibt: Ist y_1 primitiv und y_1, y_2, \dots, y_n eine Basis von F_n , so gibt es einen Automorphismus α mit $\alpha(x_i) = y_i$ für alle $1 \leq i \leq n$, speziell also mit $\alpha(x_1) = y_1$. Ist umgekehrt $\alpha \in \text{Aut}(F_n)$, so ist $y_1 = \alpha(x_1)$ primitiv, da $\alpha(x_1), \alpha(x_2), \dots, \alpha(x_n)$ eine Basis von F_n bilden.

Sei U eine endlich erzeugte Untergruppe von F_n . Wir wollen in diesem Abschnitt erklären, wie die folgenden zwei Probleme algorithmisch gelöst werden können:

(P1) Entscheide zu gegebenem primitiven $x \in F_n$ und $k \in \mathbb{N}$, ob es einen Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(F_n)$ mit $\alpha(x^k) \in U$ gibt.

(P2) Entscheide zu gegebenem primitiven $x \in F_n$, ob es ein $k \in \mathbb{N}$ und einen Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(F_n)$ mit $\alpha(x^k) \in U$ gibt.

Für den Fall $k = 1$ wird (P1) in [CG10] gelöst. Mit obiger Definition bedeutet dies gerade, dass sich das folgende Problem algorithmisch lösen lässt:

(P3) Prüfe, ob eine gegebene endlich erzeugte Untergruppe von F_n ein primitives Element besitzt.

Wir werden (P1) und (P2) lösen, indem wir sie auf das Problem (P3) reduzieren.

Idee 1.3.2. Für das erste Problem benutzen wir die folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned} & \exists \alpha \in \text{Aut}(F_n) \text{ mit } \alpha(x^k) \in U. \\ \Leftrightarrow & \exists \alpha \in \text{Aut}(F_n) \text{ mit } \alpha(x)^k \in U. \\ \Leftrightarrow & \text{Es gibt ein primitives Element, dessen } k\text{-te Potenz in } U \text{ liegt.} \\ \Leftrightarrow & \text{Rad}_k(U) := \{y \in F_n \mid y^k \in U\} \text{ besitzt ein primitives Element.} \end{aligned}$$

Im anschließenden Beispiel werden wir zeigen, dass $\text{Rad}_k(U)$ im Allgemeinen keine Untergruppe von F_n ist. Um zu entscheiden, ob $\text{Rad}_k(U)$ ein primitives Element besitzt, lässt sich die Lösung von (P3) also nicht direkt anwenden.

Deshalb werden wir endlich viele endlich erzeugte Untergruppen in F_n finden, so dass $\text{Rad}_k(U)$ genau dann ein primitives Element besitzt, wenn einer dieser Untergruppen ein primitives Element besitzt. Indem wir erklären, wie sich endliche Erzeugendensysteme von diesen Untergruppen finden lassen, können wir das Problem (P1) hierdurch auf (P3) zurückführen.

Für die Lösung von Problem (P2) benutzen wir im ersten Schritt, dass es genau dann ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\alpha(x^k) \in U$ gibt, wenn

$$\text{Rad}_\infty(U) := \{y \in F_n \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } y^k \in U\} \text{ ein primitives Element enthält.}$$

Dies werden wir dann analog zum ersten Problem weiter behandeln.

Beispiel 1.3.3. Sei F_2 die freie Gruppe mit Basis x_1, x_2 und U die von x_1^2, x_2^2 erzeugte Untergruppe. Dann gilt $x_1, x_2 \in \text{Rad}_2(U)$, aber $x_1x_2 \notin \text{Rad}_2(U)$. $\text{Rad}_2(U)$ ist also keine Untergruppe von F_2 .

Definition 1.3.4 (Bedeutung von $h(P, x)$ und die Mengen M_k). Sei Γ ein beschrifteter und reduzierter Graph. Ist $P \in \mathcal{V}(\Gamma)$ und $x \in F_n$ die Beschriftung eines Weges, der in P startet, so bezeichnen wir mit $h(P, x)$ dessen Endpunkt. Ein solcher Weg muss nicht für alle x und P existieren. Falls wir eine Gleichung $h(P, x) = Q$ aufstellen, so meinen wir hiermit immer, dass die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

- Es gibt einen mit x beschrifteten Weg ρ in Γ mit $o(\rho) = P$.
- Der Weg ρ endet in dem Knoten Q .

Anstelle von $h(P, x) = Q$ werden wir auch die Schreibweise $P \xrightarrow{x} Q$ benutzen.

Ist $U \leq F_n$ eine endlich erzeugte Untergruppe und $\Gamma = \Gamma(U)$ der U darstellende Graph mit Basispunkt $S \in \mathcal{V}(\Gamma)$, so gilt mit dieser Bezeichnung die Gleichung

$$U = \{x \in F_n \mid h(S, x) = S\}.$$

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir die folgenden leicht zu prüfenden Eigenschaften benutzen:

- (1) Für $x \in F_n$ und $P, Q \in \mathcal{V}(\Gamma)$ gilt $h(P, x) = Q$ genau dann, wenn $h(Q, x^{-1}) = P$ ist.
- (2) Aus $h(P, x) = h(Q, x)$ mit $x \in F_n$ und $P, Q \in \mathcal{V}(\Gamma)$ folgt $P = Q$.
- (3) Es gilt $h(P, xy) = h(h(P, x), y)$ für alle $P \in \mathcal{V}(\Gamma)$ und $x, y \in F_n$, für die das Produkt xy reduziert ist.

Sei $w \in F_n$ und $l \in \mathbb{N}$. Wir nennen ein Tupel $(v_0, v_1, \dots, v_{l-1}) \in \mathcal{V}(\Gamma)^l$ einen w -Zykel der Länge l , falls

$$h(v_i, w) = v_{i+1 \pmod{l}}$$

für alle $0 \leq i < l$ gilt. Ein Zykel heißt disjunkt, falls $v_i \neq v_j$ für alle $i \neq j$.

Im nächsten Satz werden wir die folgenden endlichen Mengen von disjunkten Zyklen benötigen. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$M_k = \bigcup_{l|k} \left\{ v \in \mathcal{V}(\Gamma)^l \mid \exists w \in F_n : v \text{ ist disjunkter } w\text{-Zykel} \right\} \text{ und}$$

$$M_\infty = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \left\{ v \in \mathcal{V}(\Gamma)^l \mid \exists w \in F_n : v \text{ ist disjunkter } w\text{-Zykel} \right\}.$$

Satz 1.3.5 (Struktur von $\text{Rad}_k(U)$). *Sei $U \leq F_n$ endlich erzeugt und $\Gamma = \Gamma(U)$ mit Basispunkt $S \in \mathcal{V}(\Gamma)$. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Für jeden Knoten $P \in \mathcal{V}(\Gamma)$ sei $g_P \in F_n$ ein Element mit $h(S, g_P) = P$. Weiter sei $w_v \in F_n$ für jeden Zykel $v = (v_0, v_1, \dots, v_{l-1}) \in M_k$ ein Element, so dass v ein w_v Zykel ist und N_v die Untergruppe*

$$N_v := \ell(\pi_1(\Gamma, v_0)) \cap \dots \cap \ell(\pi_1(\Gamma, v_{l-1})).$$

Dann gilt

$$\text{Rad}_k(U) = \bigcup_{u \in U, v \in M_k} u g_{v_0} \langle w_v, N_v \rangle g_{v_0}^{-1} u^{-1}$$

und $\langle w_v, N_v \rangle = \{w_v^z n \mid z \in \mathbb{Z}, n \in N_v\}$ für alle $v \in M_k$.

Beweis. Da der Beweis für $k = \infty$ analog verläuft, werden wir im folgenden Beweis $k \in \mathbb{N}$ voraussetzen.

Sei $x \in \text{Rad}_k(U)$. Wir schreiben $x = g w g^{-1}$ mit minimalem g , so dass w zyklisch reduziert ist. Dann ist $x^k = g w^k g^{-1}$, wobei die rechte Seite reduziert ist. Definiere für

$0 \leq i \leq k$ den Knoten $v_i := h(S, gw^i)$ (siehe Abbildung 1.19). Aus $x^k \in U$ erhalten wir, dass

$$h(v_0, g^{-1}) = S = h(S, x^k) = h(v_k, g^{-1})$$

gilt. Hieraus folgt $v_0 = v_k$.

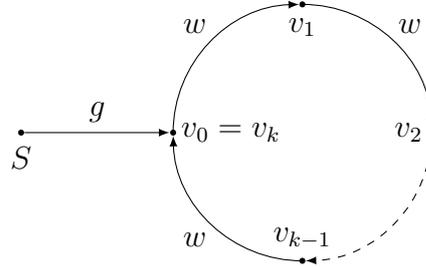


Abbildung 1.19: Der geschlossene Weg mit der Beschriftung $gw^k g^{-1}$ an S

Sei $0 < l \leq k$ minimal mit $v_0 = v_l$. Um zu zeigen, dass $v := (v_0, v_1, \dots, v_{l-1})$ in M_k liegt, genügt es die folgenden zwei Aussagen zu prüfen:

- (i) Die Knoten v_0, \dots, v_{l-1} sind paarweise verschieden.
- (ii) Die Zahl l ist ein Teiler von k .

Zu (i): Wären $v_i = v_j$ mit $0 \leq i < j < l$, so wäre $v_0 = h(v_i, w^{-i}) = h(v_j, w^{-i}) = v_{j-i}$, im Widerspruch zur Wahl von l .

Zu (ii): Wir schreiben $k = ql + r$ mit $0 \leq r < l$. Aus $h(v_0, w^l) = v_0 = h(v_0, w^k)$ folgt $v_r = h(v_0, w^r) = h(v_0, w^{k-ql}) = v_0$ und aus der Wahl von l somit $r = 0$.

Es gilt $S = h(S, gg_{v_0}^{-1})$ und somit $u := gg_{v_0}^{-1} \in U$. Außerdem ist $h(v_i, w_v^{-1}w) = v_i$ für alle $0 \leq i < l$ und somit $w_v^{-1}w =: n \in N_v$ (siehe Abbildung 1.20).

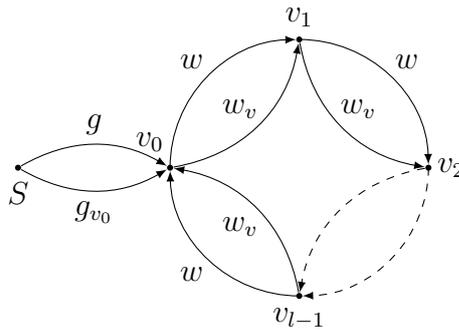


Abbildung 1.20: Veranschaulichung von $u = gg_{v_0}^{-1} \in U$ und $n = w_v^{-1}w \in N_v$

Hiermit ergibt sich

$$x = gw g^{-1} = gw_v n g^{-1} = u g_{v_0} w_v n g_{v_0}^{-1} u^{-1}$$

und wir haben die erste Inklusion bewiesen.

Um die andere Inklusion zu beweisen, sei $x = ug_{v_0}yg_{v_0}^{-1}u^{-1}$ mit $u \in U$, $v \in M_k$ und $y \in \langle w_v, N_v \rangle$. Dann gibt es eine Darstellung von y in der Form

$$y = n_0w_v^{\epsilon_1}n_1w_v^{\epsilon_2}n_2 \dots n_{r-1}w_v^{\epsilon_r}n_r,$$

wobei $r \in \mathbb{N}_0$, $n_0, \dots, n_r \in N_v$ und $\epsilon_1, \dots, \epsilon_r \in \{-1, 1\}$. Mit $e := \sum_{i=1}^r \epsilon_i$ folgt dann aus den Gleichungen

$$h(S, ug_{v_0}) = h(S, g_{v_0}) = v_0, \quad h(v_i, w_v^\epsilon) = v_{i+\epsilon \pmod{l}} \quad \text{und} \quad h(v_i, n_j) = v_i$$

für alle $0 \leq i < l$, $0 \leq j \leq r$ und $\epsilon \in \{-1, 1\}$, dass

$$\begin{aligned} h(S, x^l) &= h(S, ug_{v_0}y^l g_{v_0}^{-1}u^{-1}) = h(v_0, y^l g_{v_0}^{-1}u^{-1}) \\ &= h(v_{e \pmod{l}}, y^{l-1} g_{v_0}^{-1}u^{-1}) = \dots = h(v_{l-e \pmod{l}}, g_{v_0}^{-1}u^{-1}) \\ &= h(v_0, g_{v_0}^{-1}u^{-1}) = S. \end{aligned}$$

Also ist $x^l \in U$. Da l nach Definition von M_k ein Teiler von k ist, erhalten wir hieraus, dass x ein Element von $\text{Rad}_k(U)$ ist.

Für den zweiten Teil des Satzes genügt es zu beweisen, dass N_v ein Normalteiler in $\langle w_v, N_v \rangle$ ist. Dies gilt, da wir für $n \in N_v$ aus

$$h(v_i, w_v n w_v^{-1}) = h(v_{i+1 \pmod{l}}, n w_v^{-1}) = h(v_{i+1 \pmod{l}}, w_v^{-1}) = v_i$$

für alle $0 \leq i < l$ folgern können, dass $w_v n w_v^{-1} \in N_v$ gilt. □

Korollar 1.3.6 ($\text{Rad}_K(U)$ als Vereinigung von Untergruppen). *Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Mit den Bezeichnungen aus Satz 1.3.5 sind die folgenden zwei Bedingungen äquivalent:*

- (1) $\text{Rad}_k(U)$ enthält ein primitives Element.
- (2) $M := \bigcup_{v \in M_k} \langle w_v, N_v \rangle$ enthält ein primitives Element.

Beweis. Sei x ein primitives Element in $\text{Rad}_k(U)$. Dann gibt es nach Satz 1.3.5 eine Darstellung $x = ug_{v_0}yg_{v_0}^{-1}u^{-1}$ mit $v \in M_k$, $u \in U$ und $y \in \langle w_v, N_v \rangle$. Da eine Konjugation primitive Elemente auf primitive Element abbildet, enthält M das primitive Element y . Für die andere Implikation sei y ein primitives Element in M . Nach Satz 1.3.5 enthält $\text{Rad}_k(U)$ dann das primitive Element $g_{v_0}yg_{v_0}^{-1}$. □

Um das Korollar anwenden zu können, müssen wir noch die folgenden drei Schritte erklären:

- (S1) Wie lässt sich die Menge M_k berechnen?
- (S2) Wie lässt sich für $v \in M_k$ ein Element $w_v \in F_n$ finden, so dass v ein w_v -Zykel ist?

(S3) Wie lässt sich für $v \in M_k$ eine Basis von N_v berechnen?

Den dritten Schritt können wir mit Hilfe eines bekannten Algorithmus (siehe etwa [Bog08, Kapitel 23]) lösen, der eine Basis des Schnittes von zwei endlich erzeugten Untergruppen einer freien Gruppe berechnet. Wir haben diesen Teil im folgenden Lemma integriert, da dies kaum zusätzlichen Aufwand benötigt.

Lemma 1.3.7. *Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und l eine mögliche Zykellänge (d.h. $l \leq |\mathcal{V}(\Gamma)|$ und zusätzlich $l \mid k$ falls $k \in \mathbb{N}$). Definiere den Graphen G_l mit Knotenmenge $\mathcal{V}(G_l) = \mathcal{V}(\Gamma)^l$, bei dem es genau dann eine Kante $v \xrightarrow{x_j^{\pm 1}} w$ gibt, wenn $v_i \xrightarrow{x_j^{\pm 1}} w_i$ für alle $i = 0, 1, \dots, l-1$ gilt. Dann sind die folgenden Aussagen erfüllt.*

- (1) *Ein Element $v = (v_0, v_1, \dots, v_{l-1}) \in \mathcal{V}(\Gamma)^l$ mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ liegt genau dann in M_k , wenn v und $v' = (v_1, v_2, \dots, v_{l-1}, v_0)$ in der gleichen Zusammenhangskomponente in G_l liegen. Ist ρ in diesem Fall ein Weg von v nach v' und $w_v = \ell(\rho)$, so ist v ein w_v -Zykel.*
- (2) *Es gilt $N_v = \ell(\pi_1(G_l, v))$.*

Beweis. Zu (1): Sei $v = (v_0, \dots, v_{l-1}) \in M_k$. Dann existiert ein $w \in F_n$ mit $v_i \xrightarrow{w} v_{i+1 \pmod{l}}$ für alle $0 \leq i < l$. Damit gilt $v \xrightarrow{w} v'$ in G_l und die Knoten v, v' liegen in der gleichen Zusammenhangskomponente.

Sind umgekehrt v und v' in der gleichen Zusammenhangskomponente von G_l , ρ ein beliebiger Weg von v nach v' und $w_v = \ell(\rho)$. Dann gilt $v \xrightarrow{w_v} v'$ und somit $v_i \xrightarrow{w_v} v_{i+1 \pmod{l}}$ für alle $0 \leq i < l$, d.h. v ist ein w_v Zykel.

Zu (2): Es gilt $x \in N_v$ genau dann, wenn $v_i \xrightarrow{x} v_i$ für alle $0 \leq i < l$ und dies ist äquivalent dazu, dass $v \xrightarrow{x} v$, d.h. zu $x \in \ell(\pi_1(G_l, v))$. \square

2 Nielsenwege

2.1 Homotopieäquivalenzen $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$

Definition 2.1.1 (Homotopieäquivalenzen von Graphen). Seien G, H zwei zusammenhängende Graphen. Wir nennen eine Abbildung $f : G \rightarrow H$ einen *Homomorphismus*, falls f die Knoten von G auf Knoten von H und die Kanten von G auf reduzierte Kantenwege in H abbildet und mit den Abbildungen o, t und $\bar{\cdot}$ verträglich ist.

Ist $f : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus und $P \in \mathcal{V}(G)$ ein Knoten, dann induziert f eine Abbildung $f_* : \pi_1(G, P) \rightarrow \pi_1(H, f(P))$ durch $f_*([\gamma]) = [f(\gamma)]$. Wir nennen f eine *Homotopieäquivalenz*¹ zwischen G und H , wenn f_* für jeden Knoten P ein Isomorphismus ist. Äquivalent hierzu ist, dass es einen Knoten P gibt, für den f_* ein Isomorphismus ist. In dieser Arbeit setzen wir für eine Homotopieäquivalenz $f : G \rightarrow H$ zusätzlich stets implizit voraus, dass G und H endlich sind und dass der Weg $f(E)$ für jede Kante $E \in \mathcal{E}(G)$ nicht-trivial ist.

Die Aussage des folgenden Satzes findet sich im Lemma 6.0.6 des Artikels [BFH00].²

Satz 2.1.2 (Automorphismus auf invarianter Untergruppe). Sei $\alpha : F_n \rightarrow F_n$ ein Automorphismus und $H \leq F_n$ eine endlich erzeugte α -invariante Untergruppe. Dann ist $\alpha|_H : H \rightarrow H$ ein Automorphismus.

Lemma 2.1.3 (Urbilder von Wegen mit vorgegebenen Endpunkten).

- (a) Seien G, H zusammenhängende Graphen, $f : G \rightarrow H$ eine Homotopieäquivalenz, P, Q zwei Knoten in G und v ein reduzierter Weg von $f(P)$ nach $f(Q)$. Dann gibt es genau einen reduzierten Weg u von P nach Q mit $[f(u)] = v$.
- (b) Sei G ein zusammenhängender Graph und $f : G \rightarrow G$ eine Homotopieäquivalenz. Weiter sei H ein f -invarianter (nicht notwendig zusammenhängender) Teilgraph. Sind P und Q zwei periodische Punkte in H mit den Perioden k, l und v ein reduzierter Weg von P nach Q in H . Dann gibt es genau einen reduzierten Weg u in H mit $o(u) = f^{k-1}(P)$, $t(u) = f^{l-1}(Q)$ und $[f(u)] = v$.

Beweis. Wir beweisen zunächst Aussage (a). Sei u_0 ein beliebig gewählter Weg von P nach Q . Dann ist $[\overline{f(u_0)v}] \in \pi_1(H, f(Q))$. Da sich jeder reduzierte Weg u von P nach Q

¹Dies ist äquivalent dazu, dass es einen Homomorphismus $g : H \rightarrow G$ gibt, so dass $f \circ g$ und $g \circ f$ jeweils homotop zur Identität sind, siehe [Bog08, Proposition 3.5].

²Dieses Lemma, welches in [BFH00] mit Hilfe eines Resultates von Peter Scott bewiesen wird, wird dort Peter Scott zugeschrieben.

eindeutig in der Form $u = [u_0h]$ mit einem Weg $h \in \pi_1(G, Q)$ darstellen lässt, müssen wir nur noch zeigen, dass es genau einen solchen Weg h gibt, für den $[f(u_0h)] = v$ gilt. Dies ist äquivalent zu $[f(h)] = \overline{[f(u_0)v]}$ und hier ergibt sich die Existenz und Eindeutigkeit von h aus der Tatsache, dass f einen Isomorphismus von $\pi_1(G, Q)$ nach $\pi_1(H, f(Q))$ induziert.

Die Eindeutigkeitsaussage in (b) folgt aus Teil (a). Wir beweisen nun die Existenz von u . Sei m das kleinste gemeinsame Vielfache von k und l und $g := f^m$. Dann ist $g_* : \pi_1(G, P) \rightarrow \pi_1(G, P)$ ein Automorphismus. Da $\pi_1(H, P)$ eine endlich erzeugte und g -invariante Untergruppe von $\pi_1(G, P)$ ist, existiert nach Satz 2.1.2 ein $h \in \pi_1(H, P)$ mit $[g(h)] = \overline{[vg(v)]} \in \pi_1(H, P)$. Damit folgt $[g(hv)] = v$ und $u := [f^{m-1}(hv)]$ erfüllt das Verlangte. \square

Das Beispiel 3.2.8 kann als Beispiel für die folgende Definition dienen. Dort werden zunächst ein Automorphismus $\alpha : \pi_1(R_4, \cdot) \rightarrow \pi_1(R_4, \cdot)$ und Homotopieäquivalenzen $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ und $h : R_4 \rightarrow \Gamma$ angegeben, so dass α im Sinne der folgenden Definition von f (und h) repräsentiert wird.

Definition 2.1.4 (topologischer Repräsentant, vgl. [BH92, §1] und [BM16, Theorem 4.4]). Den Graphen mit einem Knoten und n positiven Kanten E_1, \dots, E_n bezeichnen wir als *Rose* und schreiben hierfür R_n . Wir betrachten die freie Gruppe F_n als $\pi_1(R_n, \cdot)$. In Kapitel 1 haben wir Graphen G betrachtet, bei denen wir die positiven Kanten mit Basiselementen einer freien Gruppe beschriftet haben. Wenn wir die freie Gruppe F_n mit $\pi_1(R_n, \cdot)$ identifizieren, entspricht diese Beschriftung einer Abbildung, welche eine Kante von G auf eine Kante von R_n abbildet.

In diesem Kapitel werden wir verallgemeinernd zulassen, dass die Beschriftung $\ell(E)$ einer Kante in $E \in \mathcal{E}(G)$ ein reduzierter Weg in einem anderen, fest gewählten, Graphen H ist. Diese Beschriftung lässt sich durch

$$\ell(E_1 E_2 \dots E_k) = \ell(E_1) \ell(E_2) \dots \ell(E_k)$$

wieder auf Wege $E_1 E_2 \dots E_k$ in G verallgemeinern.

Sei $\alpha \in \text{Aut}(F_n)$ ein Automorphismus. Weiter sei Γ ein endlicher und zusammenhängender Graph. Wir bezeichnen eine Homotopieäquivalenz $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ zusammen mit einer Homotopieäquivalenz $h : R_n \rightarrow \Gamma$ als *topologischen Repräsentanten* für α , wenn

$$[h(\alpha(\omega))] = [f(h(\omega))]$$

für alle $\omega \in \pi_1(R_n, \cdot)$ gilt. Letzteres bedeutet, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(R_n, \cdot) & \xrightarrow{\alpha_*} & \pi_1(R_n, \cdot) \\ h_* \downarrow & & \downarrow h_* \\ \pi_1(\Gamma, P) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(\Gamma, P) \end{array}$$

kommutiert, wobei P das h -Bild des Knotens in R_n sei.

Sei

$$\Phi : \text{Aut}(F_n) \rightarrow \text{Out}(F_n) = \text{Aut}(F_n)/\text{Inn}(F_n)$$

die Projektion von $\text{Aut}(F_n)$ auf die Gruppe der äußeren Automorphismen. Dann bezeichnen wir $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ zusammen mit $h : R_n \rightarrow \Gamma$ als *topologischen Repräsentanten* für $\Phi(\alpha)$, falls es einen Weg $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ mit $o(\gamma) = P$ und $t(\gamma) = f(P)$ gibt, so dass

$$[h(\alpha(\omega))] = [\gamma f(h(\omega))\bar{\gamma}]$$

für alle $\omega \in F_N$ gilt.

Bemerkung 2.1.5 (kombinatorische und topologische Graphen). Zum Verständnis einiger Sätze in den Abschnitten 2.2 und 2.3 ist es hilfreich, wenn wir unsere kombinatorische Sichtweise von Graphen erweitern. Wir werden hier zusätzlich Graphen betrachten, bei denen die Kanten jeweils durch $[0, 1]$ parametrisiert sind. Diese Parametrisierung liefert eine Topologie auf solchen Graphen, weshalb wir sie hier als *topologische Graphen* bezeichnen. Die in Notation 1.1.1 definierten Graphen nennen wir *kombinatorische Graphen*.

Wir definieren zu dem kombinatorischen Graphen Γ auf die folgende Weise einen topologischen Graphen Γ_T : Die Knotenmenge von Γ_T ist gleich der Knotenmenge von Γ . Für jedes Paar E, \bar{E} zueinander inverser Kanten von Γ , wobei E positiv sei, fügen wir eine Kante E zu Γ_T hinzu, siehe Abbildung 2.1.



Abbildung 2.1: Links: Kantenpaar E, \bar{E} von Γ

Rechts: Kante E in Γ_T mit Parametrisierung e

Als *Weg* in einem topologischen Graphen werden wir nur stückweise lineare Abbildungen zulassen. Genauer gelte für einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Gamma_T$: Sei

$$[0, 1] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{k-1}, a_k]$$

mit $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k = 1$ die Zerlegung von dem Intervall $[0, 1]$ an den Stellen $0 < t < 1$, für die $\gamma(t) \in \mathcal{V}(\Gamma_T)$ gilt. Dann ist γ eingeschränkt auf die Teilintervalle jeweils eine lineare Abbildung. Im Gegensatz zu Wegen in kombinatorischen Graphen müssen die Endknoten eines Weges in Γ_T keine Knoten sein.

Hiermit lassen sich in natürlicher Weise die Fundamentalgruppe von Γ_T an einem Punkt P , Anfangsweg eines Weges, Beschriftungen von Γ_T und Homotopieäquivalenzen $f_T : \Gamma_T \rightarrow \Gamma_T$ definieren. Wir bemerken, dass aus unserer Einschränkung, dass Wege stückweise lineare Abbildung sind, die folgende wichtige Eigenschaft folgt:

$$\text{Ist } E \text{ keine Fixkante, so gibt es keine nicht-triviale Teilkante von } E, \text{ die von } f \text{ fixiert wird.} \quad (2.1)$$

Wir können zu jeder kombinatorischen Abbildung $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ einfach eine zugehörige Abbildung $f_T : \Gamma_T \rightarrow \Gamma_T$ definieren, indem wir z.B. die äquidistante Zerlegung $a_j = j/k$ für $|f(E)| = k$ wählen.

Wir lassen ab jetzt den Index T weg, schreiben also die Homotopieäquivalenz $f_T : \Gamma_T \rightarrow \Gamma_T$ ebenfalls als $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$. Bis zur Bemerkung 2.3.4 meinen wir immer die topologische Sichtweise. Danach sind alle Aussagen, falls nicht anders angegeben, für beide Interpretationen richtig.

2.2 Ein Überlagerungsgraph D_f , welcher die Nielsenwege von f kodiert

In diesem Abschnitt sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ stets eine Homotopieäquivalenz.

Definition 2.2.1 (Nielsenwege, vgl. [BFH00, Definition 5.1.1]). Ein *Nielsenweg* ist ein Weg $\rho \in \mathcal{P}(\Gamma)$ mit $[f(\rho)] = \rho$. Insbesondere sind dann $o(\rho)$ und $t(\rho)$ Fixpunkte von f , welche nicht in $\mathcal{V}(\Gamma)$ liegen müssen. Für jeden Fixpunkt von f ist der konstante Weg in diesem Punkt ein Nielsenweg. Wir bezeichnen solche Nielsenwege als *trivial*. Ein nicht-trivialer Nielsenweg ρ heißt *reduzibel*, wenn es eine Zerlegung $\rho = \rho_1\rho_2$ gibt, so dass ρ_1 und ρ_2 ebenfalls nicht-triviale Nielsenwege sind. Falls es eine solche Zerlegung nicht gibt, bezeichnen wir ρ als *irreduziblen* Nielsenweg. Ein *periodischer* Nielsenweg ist ein Weg $\rho \in \mathcal{P}(\Gamma)$, für den es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $[f^k(\rho)] = \rho$ gilt.

Wir werden nun einen topologischen Graphen D_f einführen. Eine kombinatorische Version dieses Graphen für Automorphismen von freien Gruppen wird in [GT86] eingeführt (siehe auch [CL89] und [IKT90]). In [Tur95] wird diese Konstruktion auf Homotopieäquivalenzen verallgemeinert.

Zusätzlich werden wir für f -invariante Teilgraphen G von Γ den Teilgraphen $D_f(G)$ von D_f definieren.

Diese Graphen werden für den Rest der Arbeit von zentraler Rolle sein. Im Satz 2.2.4 werden wir sehen, dass spezielle Wege in dem Graphen D_f genau den irreduziblen Nielsenwegen entsprechen.

Definition 2.2.2 (Die Graphen D_f und $D_f(G)$). Wir nennen $\mu \in \mathcal{P}(\Gamma)$ einen *f -Weg*, wenn $f(o(\mu)) = t(\mu)$ gilt. Sei μ ein f -Kantenweg und $E \in \mathcal{E}(\Gamma)$ eine Kante mit $o(E) = o(\mu)$. Ist $e : [0, 1] \rightarrow E$ die Parametrisierung der Kante E , $t \in [0, 1]$ und $E_t := e([0, t])$ ein Anfangsstück von E , so ist

$$[\overline{E_t}\mu f(E_t)]$$

ebenfalls ein f -Weg.

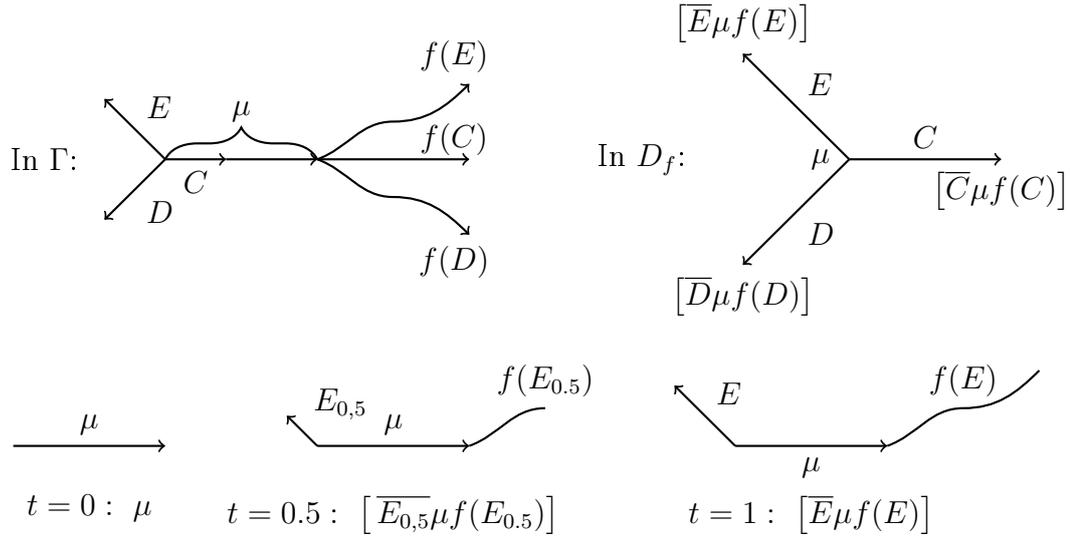


Abbildung 2.2: Oben links: Ein f -Kantenweg μ in Γ , an dessen Anfangsknoten die Kanten C, D, E beginnen.
 Oben rechts: μ als Knoten in D_f zusammen mit den drei in μ ausgehenden Kante, die mit C, D und E beschriftet sind.
 Unten: Der erste, mittlere und letzte Punkt auf der mit E beschrifteten Kante von μ nach $[\overline{E}\mu f(E)]$ in D_f .

Die Menge der reduzierten f -Kantenwege in Γ bildet die Knotenmenge von D_f . Für jeden f -Kantenweg μ und jede Kante E mit $o(E) = o(\mu)$ bildet die Parametrisierung (siehe Abbildung 2.2)

$$t \mapsto [\overline{E}_t \mu f(E_t)]$$

eine Kante in D_f , die die Knoten μ und $[\overline{E}\mu f(E)] \in \mathcal{V}(D_f)$ verbindet (die Punkte dieser Kante sind also f -Wege in Γ). Wir beschriften diese Kante mit E . Diese Beschriftung lässt sich auf natürliche Weise auf beliebige Wege in D_f verallgemeinern (so dass sie auf den Kanten von D_f 2.1.5 linear ist). Wir notieren sie mit $\ell : \mathcal{P}(D_f) \rightarrow \mathcal{P}(\Gamma)$.

Mit 1_P bezeichnen wir den konstanten Weg an einen Punkt P in Γ . Dieser Punkt kann entweder in $\mathcal{V}(\Gamma)$ oder im Inneren einer Kante von Γ liegen. Der Weg 1_P ist genau dann ein f -Weg, wenn P ein Fixpunkt ist. Wir nennen 1_P in diesem Fall einen *toten Punkt* in D_f . Ist G ein f -invarianter Teilgraph von Γ , so sei $D_f(G)$ der Graph, der entsteht, wenn wir obige Konstruktion auf die Einschränkung $f|_G : G \rightarrow G$ anwenden. Es gelte also

$$\mathcal{V}(D_f(G)) = \mathcal{V}(D_f) \cap \mathcal{P}(G) \text{ und}$$

$$\mathcal{E}(D_f(G)) = \{t \mapsto [\overline{E}_t \mu f(E_t)] \mid E \in \mathcal{E}(G), \mu \in \mathcal{V}(D_f(G)) \text{ mit } o(E) = o(\mu)\}.$$

Bemerkung 2.2.3. Der Graph D_f erfüllt die folgenden, leicht zu prüfenden Eigenschaften:

- (a) Sei ω ein Weg in Γ . Dann sind zwei Punkte μ und ν in D_f genau dann durch einen mit ω beschrifteten Weg verbunden, wenn

$$[\overline{\omega} \mu f(\omega)] = \nu$$

und $o(\mu) = o(\omega)$ gelten.

(b) Die Abbildung $p : D_f \rightarrow \Gamma$, $\mu \mapsto o(\mu)$ ist eine Überlagerungsabbildung.

Satz 2.2.4 (Irreduzible Nielsenwege entsprechen reduzierten Wegen zwischen toten Punkten, vgl. [Tur95, Theorem B]). *Für einen reduzierten Weg $\rho \in \mathcal{P}(\Gamma)$ sind die folgenden zwei Aussagen äquivalent:*

(a) ρ ist ein Nielsenweg.

(b) Die Punkte $o(\rho)$ und $t(\rho)$ sind Fixpunkte und die beiden f -Wege $1_{o(\rho)}$ und $1_{t(\rho)}$ sind durch einen mit ρ beschrifteten Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow D_f$ verbunden.

Dabei ist ein nicht-trivialer Nielsenweg ρ genau dann irreduzibel, wenn für den in (b) definierten Weg γ gilt, dass $\gamma(t)$ für alle $0 < t < 1$ kein toter Punkt ist.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Äquivalenz der Aussagen (a) und (b). Der Weg ρ ist genau dann ein Nielsenweg, wenn $o(\rho)$ und $t(\rho)$ Fixpunkte sind und $[\bar{\rho}1_{o(\rho)}f(\rho)] = 1_{t(\rho)}$. Dies ist äquivalent zu Aussage (b).

Nun beweisen wir die zweite Äquivalenz. Sei ρ ein Nielsenweg und γ der zugehörige Weg in D_f . Falls $\rho = \rho_1\rho_2$ eine nicht-triviale Zerlegung von ρ in Nielsenwege ρ_1, ρ_2 ist, so führt der Weg γ nach obiger Äquivalenz angewendet auf ρ_1 über den toten Punkt $1_{t(\rho_1)}$. Ist umgekehrt $\gamma(t)$ für ein $0 < t < 1$ ein toter Punkt, so zerteilt dieser Punkt γ in zwei Teilwege $\gamma = \gamma_1\gamma_2$. Seien ρ_1, ρ_2 die Beschriftungen von γ_1, γ_2 . Dann erhalten wir eine Zerlegung $\rho = \rho_1\rho_2$ in nicht-triviale Nielsenwege ρ_1, ρ_2 und damit die Reduzibilität von ρ . \square

Wir wollen die irreduziblen Nielsenwege untersuchen, indem wir die reduzierten Wege zwischen toten Punkten in dem Graphen D_f analysieren, welche im Inneren über keinen toten Punkt führen. Hierzu geben wir zunächst an, auf welchen Kanten von D_f tote Punkte liegen. Insbesondere zeigen wir hierdurch, dass es nur endliche viele solche Kanten gibt.

Satz 2.2.5 (tote Punkte auf Kanten, vgl. [CL89, §3]). *Es gelten die folgenden Eigenschaften:*

(a) Ist $P \xrightarrow{E} Q$ eine Fixkante von f , so besteht die mit E beschriftete Kante $1_P \xrightarrow{E} 1_Q$ in D_f nur aus toten Punkten.

(b) Alle Kanten in D_f , die nicht wie in (a) aus einer Fixkante von Γ entstehen, besitzen jeweils maximal einen toten Punkt.

(c) Ist $E \in \mathcal{E}(\Gamma)$ eine Kante und $f(E) = \bar{\mu}E\nu$ mit nicht-trivialen Kantenwegen μ und ν . Dann gibt es in D_f eine Kante e mit $o(e) = \mu$, $t(e) = \nu$ und $\ell(e) = E$, die einen toten Punkt 1_P im Inneren besitzt, siehe Abbildung 2.3.

- (d) Ist $E \in \mathcal{E}(\Gamma)$ und $f(E) = \bar{\mu}' \bar{E} \nu'$ mit Kantenwegen μ', ν' . Mit $\mu := E\mu'$ und $\nu := \bar{E}\nu'$ gibt es dann in D_f eine Kante e mit $o(e) = \mu$, $t(e) = \nu$ und $\ell(e) = E$, die einen toten Punkt 1_P im Inneren besitzt.
- (e) Ist e eine Kante in D_f , die nicht wie in (a), (c) oder (d) entsteht, so besitzt e keinen toten Punkt im Inneren.

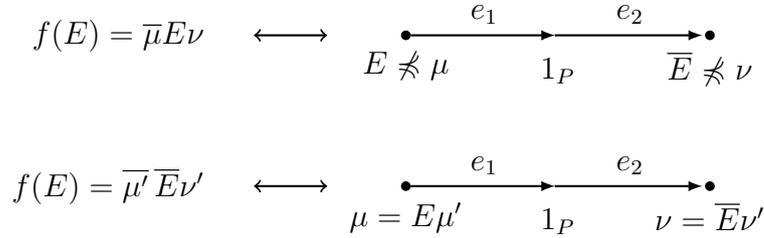


Abbildung 2.3: Korrespondenz zwischen Vorkommen von den Kanten E, \bar{E} in dem Weg $f(E)$ und mit E beschrifteten Kanten $e = e_1 e_2$ in D_f mit totem Punkt

Beweis. Zu (a): Sei $P \xrightarrow{E} Q$ eine Fixkante. Dann besteht die mit E beschriftete Kante, die in D_f in dem Knoten 1_P beginnt, aus den Punkten der Form $[\bar{E}_1 1_P f(E_1)] = 1_{t(E_1)}$, wobei E_1 ein Anfangskantenstück von E ist.

Zu (b): Sei e eine Kante in D_f , die mehr als einen Fixpunkt besitzt. Dann gibt es eine Zerlegung $e = e_1 e_2 e_3$, so dass e_2 nicht-trivial ist und die Punkte $1_P := o(e_2)$ und $1_Q := t(e_2)$ tot sind. Die Punkte P und Q zerteilen die Kante E in $E_1 E_2 E_3$, so dass $\ell(e_i) = E_i$ für $i = 1, 2, 3$ gilt. Es folgt $1_Q = t(e_2) = [\bar{E}_2 o(e_2) f(E_2)] = [\bar{E}_2 f(E_2)]$, d.h. $f(E_2) = E_2$. Zusammen mit (2.1) folgt hieraus, dass E eine Fixkante ist.

Hieraus folgt $o(e) = [E_1 1_P f(\bar{E}_1)] = 1_{o(E)}$ und $t(e) = [\bar{E} 1_{o(E)} f(E)] = 1_{t(E)}$. Die Kante e entsteht also wie in (a) aus der Fixkante E .

Zu (c): Es sei $f(E) = \bar{\mu} E \nu$ mit nicht-trivialen Wegen μ, ν . Die Gleichungen

$$f(o(\mu)) = f(o(E)) = o(\bar{\mu}) = t(\mu) \quad \text{und} \quad f(o(\nu)) = f(t(E)) = t(\nu)$$

zeigen, dass μ und ν beide f -Wege sind. Durch Umformung der Voraussetzung erhalten wir

$$\nu = [\bar{E} \mu f(E)].$$

Also sind die Knoten μ und ν in D_f durch eine mit E beschriftete Kante e verbunden. Aufgrund der Stetigkeit von f und der Voraussetzung $f(E) = \bar{\mu} E \nu$ können wir die Kante E zu $E_1 E_2$ mit $f(E_1) = \bar{\mu} E_1$ zerteilen. Damit liegt der tote Punkt $[\bar{E}_1 \mu f(E_1)] = 1_{t(E_1)}$ auf e .

Zu (d): Es sei $f(E) = \bar{\mu}' \bar{E} \nu'$, $\mu = E\mu'$ und $\nu = \bar{E}\nu'$. Wegen

$$f(o(\mu)) = f(o(E)) = o(\bar{\mu}') = t(\mu) \quad \text{und} \quad f(o(\nu)) = f(t(E)) = t(\nu)$$

sind μ und ν beide f -Wege. Aus der Voraussetzung folgt, dass

$$\nu = \bar{E}\nu' = \bar{E} [E\mu' f(E)] = [\bar{E} \mu f(E)]$$

gilt. Also sind die Knoten μ und ν in D_f durch eine mit E beschriftete Kante e verbunden. Aufgrund der Stetigkeit von f und der Voraussetzung, können wir die Kante E zu E_1E_2 zerteilen, so dass $f(E_1) = \overline{\mu'}\overline{E_2}$ gilt. Auf der Kante e liegt somit der tote Punkt

$$[\overline{E_1}\mu f(E_1)] = [E_2\mu' f(E_1)] = 1_{t(E_1)}.$$

Zu (e): Sei e eine Kante mit einem toten Punkt 1_P im Inneren, welche nicht nach (a) entsteht. Dann sind die f -Wege $\mu = o(e)$ und $\nu = t(e)$ nach (b) nicht tot. Wir zerteilen die Kanten e und $E := \ell(e)$ an dem Punkt 1_P bzw. P zu $e = e_1e_2$ und $E = E_1E_2$.

Aus $\nu = [\overline{E}\mu f(E)]$ und $1_P = [\overline{E_1}\mu f(E_1)]$ folgt

$$f(E) = [\overline{\mu}E\nu] \text{ und } f(E_1) = [\overline{\mu}E_1]. \quad (2.2)$$

Fall 1: Es gilt $E \not\prec \mu$.

In diesem Fall folgern wir aus der rechten Gleichung in (2.2), dass

$$\overline{\mu}E_1 = f(E_1) \prec f(E)$$

gilt. Deshalb darf sich die Kante E in der linken Gleichung von (2.2) nicht mit ν wegkürzen. Es gilt also $f(E) = \overline{\mu}E\nu$ und die Kante e entsteht wie in (c).

Fall 2: Es gilt $E \preccurlyeq \mu$.

Wir schreiben $\mu = E\mu'$. Aus (2.2) folgern wir, dass

$$f(E) = [\overline{\mu'}\nu] \text{ und } f(E_1) = \overline{\mu'}\overline{E_2} \prec f(E)$$

gelten. Da $f(E)$ ein Kantenweg ist, folgt weiter

$$\overline{\mu'}\overline{E} \preccurlyeq f(E) \text{ und somit } f(E) = \overline{\mu'}\nu.$$

Der Weg ν muss also mit \overline{E} beginnen. Schreiben wir $\nu = \overline{E}\nu'$, so erhalten wir

$$f(E) = \overline{\mu'}\overline{E}\nu'$$

und die Kante e entsteht wie in (d). □

2.3 Eine Schranke für den Schnittpunkt von bevorzugten Wegen in D_f , welche in toten Punkten beginnen

In diesem Abschnitt sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ stets eine Homotopieäquivalenz. Unser Ziel ist Satz 2.3.8 zu beweisen, der eine obere Schranke für den Schnittpunkt zweier bevorzugter Wege in D_f angibt, welche in toten Punkten beginnen. Hierfür werden wir zunächst eine neue Definition von bevorzugten Wegen einführen. Mit dieser Definition wird auch für in toten Punkten beginnende Kanten sinnvoll definiert, ob sie bevorzugt sind oder nicht.

Bemerkung 2.3.1 (Heuristische Motivation für bevorzugte Weg). Für einen nicht-toten Knoten μ in D_f und eine Kante $E \in \mathcal{E}(\Gamma)$ führt die mit E beschriftete Kante von μ zu dem Knoten

$$\nu := [\overline{E}\mu f(E)].$$

Falls hierbei keine Kürzungen auftreten wird μ auf beiden Seiten verlängert. Da wir Wege zwischen toten Punkten suchen, wollen wir nicht, dass die Länge der Knoten stark wächst. Hierbei sind die Kürzungen auf der rechten Seite schwer zu überblicken (wenn nicht nur der nächste Knoten ν sondern auch die weiteren Knoten betrachtet werden). Also wählen wir die Kante E so, dass auf der linken Seite eine Kürzung stattfindet, d.h. als erste Kante von μ .

Mit der Idee, dass es auf der linken Seite Kürzungen geben sollte, definieren wir nun, wann ein beliebiger Weg γ in D_f bevorzugt heißt.

Einen Weg $w : [0, 1] \rightarrow \Gamma$, der über $E_1 E_2 \dots E_n$ mit Kanten E_2, \dots, E_n und Kanten bzw. Teilkanten E_1, E_n führt, stellen wir uns in der folgenden Definition einfach als $E_1 E_2 \dots E_n$ vor. Wir werden also die Parametrisierung des Weges vernachlässigen.

Definition 2.3.2 (bevorzugte Wege). Sei γ ein reduzierter Weg in D_f und $\mu := o(\gamma)$. Wir nennen γ *bevorzugt*, wenn für jeden Anfangsweg $\gamma_1 \preceq \gamma$ gilt, dass $w := \ell(\gamma_1)$ ein Anfangsweg von $[\mu f(w)]$ ist. Dies kann kurz wie folgt dargestellt werden:

$$w \preceq \ell(\gamma) \Rightarrow w \preceq [\mu f(w)]. \quad (2.3)$$

Dies bedeutet, dass w bei der Berechnung von $t(\gamma_1) = [\overline{w}[\mu f(w)]]$ vollständig gekürzt wird.

Besonders wichtig sind in D_f reduzierte Wege, die in toten Punkten beginnen. Ein solcher Weg γ mit Beschriftung g ist nach (2.3) genau dann bevorzugt, wenn er die folgende Bedingung erfüllt:

$$w \preceq g \Rightarrow w \preceq [f(g)].$$

Mit dem folgenden Lemma geben wir ein Kriterium für bevorzugte Wege an. Dieses wird unter anderem in Beispiel 2.4.4 angewendet werden, um die bevorzugten Kanten eines Teilgraphen von D_f zu finden.

Lemma 2.3.3 (Eigenschaften von bevorzugten Wegen und Kanten).

- (a) Ein reduzierter Weg $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$ in D_f ist genau dann bevorzugt, wenn die Wege γ_1 und γ_2 bevorzugt sind.
- (b) Sei μ ein f -Kantenweg in Γ und $E \in \mathcal{E}(\Gamma)$ eine Kante mit $o(E) = o(\mu)$. Dann ist die Kante von μ nach $\nu := [\overline{E}\mu f(E)]$ in D_f genau dann bevorzugt, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:
 - (1) Der f -Weg μ ist tot oder beginnt mit E .
 - (2) Der f -Weg ν beginnt nicht mit \overline{E} .

Beweis. Um Aussage (a) zu beweisen, werden wir die folgende, leicht zu zeigende Behauptung benutzen: Seien ρ_1, ρ_2, ρ_3 drei Wege in Γ , so dass ρ_1, ρ_2 und $\rho_1\rho_2$ reduziert sind und ρ_2 nicht-trivial ist. Dann gilt

$$\rho_2 \preceq [\rho_3] \Leftrightarrow \rho_1\rho_2 \preceq [\rho_1\rho_3]. \quad (2.4)$$

Sei nun $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ ein reduzierter Weg, $\mu = o(\gamma)$, $g_1 = \ell(\gamma_1)$ und

$$\mu_1 := t(\gamma_1) = [\overline{g_1}\mu f(g_1)]. \quad (2.5)$$

Wir setzen zunächst voraus, dass γ bevorzugt ist. Aus der Definition ergibt sich sofort, dass γ_1 ebenfalls bevorzugt ist. Um zu zeigen, dass dies auch für γ_2 gilt, sei w ein nicht-trivialer Anfangsweg von $\ell(\gamma_2)$. Wir wenden die Voraussetzung, dass γ bevorzugt ist, auf den reduzierten Weg $g_1w \preceq \ell(\gamma)$ an und erhalten zusammen mit (2.5)

$$g_1w \preceq [\mu f(g_1w)] = [g_1\mu_1 f(w)]. \quad (2.6)$$

Durch Anwenden von (2.4) auf (2.6) folgt nun

$$w \preceq [\mu_1 f(w)].$$

Da dies auch für $w = 1_{o(\gamma_2)}$ erfüllt ist, haben wir gezeigt, dass auch γ_2 bevorzugt ist.

Wir setzen nun voraus, dass γ_1 und γ_2 bevorzugt sind und zeigen, dass γ bevorzugt ist. Sei dazu $w \preceq \ell(\gamma)$.

Fall 1: Es gilt $w \preceq g_1$.

In diesem Fall folgt $w \preceq [\mu f(w)]$ aus der Voraussetzung, dass γ_1 bevorzugt ist.

Fall 2: Es gilt $w \not\preceq g_1$.

Dann beginnt w mit g_1 und wir zerlegen $w = g_1w'$ mit einem passenden, nicht-trivialen Weg w' . Da γ_2 bevorzugt ist, gilt mit $w' \preceq \ell(\gamma_2)$ auch

$$w' \preceq [\mu_1 f(w')].$$

Mit Hilfe von (2.4) und (2.5) erhalten wir hieraus die zu zeigende Bedingung

$$w = g_1w' \preceq [g_1\mu_1 f(w')] = [\mu f(w)].$$

Nun beweisen wir die erste Implikation von (b) und setzen hierfür voraus, dass die mit E beschriftete Kante von μ nach $\nu = [\overline{E}\mu f(E)]$ bevorzugt ist. Durch Anwenden der Voraussetzung auf den Weg $E \preceq E$ in (2.3) erhalten wir

$$E \preceq [\mu f(E)] = [E\nu].$$

Dies zeigt, dass der Weg ν nicht mit \overline{E} beginnen kann und wir haben die Bedingung (2) geprüft.

Um die Bedingung (1) zu verifizieren, sei μ nicht tot und F die erste Kante von $f(E)$. Weiter sei $E_1 \preceq E$ mit $f(E_1) = F$.

Da die mit E beschriftete Kante von μ nach ν bevorzugt ist, gilt $E_1 \preceq [\mu f(E_1)] = [\mu F]$. Hierbei ist $[\mu F]$ ein Kantenweg, so dass $E \preceq [\mu F]$ folgt. Weil μ nicht tot ist, lässt sich hieraus ableiten, dass $E \preceq \mu$ gilt.

Seien nun die Bedingungen (1) und (2) erfüllt.

Fall 1: Es ist $E \preceq \mu$.

Angenommen es gibt einen Weg $E_1 \preceq E$ mit $E_1 \not\preceq [\mu f(E_1)]$. Dann folgt $\bar{\mu} \preceq f(E)$ und wir können einen Weg ν' mit $\bar{\mu}\nu' = f(E)$ wählen. Da $E \preceq \mu$ gilt und $\bar{\mu}\nu'$ reduziert ist, erhalten wir $E \not\preceq \nu'$ und somit

$$\nu = [\bar{E}\mu f(E)] = [\bar{E}\nu'] = \bar{E}\nu',$$

ein Widerspruch zu Bedingung (2).

Fall 2: Der f -Weg μ ist tot.

Dann gilt $\nu = [\bar{E}f(E)]$. Mit Bedingung (2) folgt hieraus $E \preceq f(E)$. Für $E_1 \preceq E$ ergibt sich nun $E_1 \preceq [\mu f(E_1)] = f(E_1)$ daraus, dass f nach Bemerkung 2.1.5 stückweise linear ist, wobei die Steigungen auf den Teilintervallen mindestens 1 sind. \square

Bemerkung 2.3.4 (Zerteilungen, vgl. [BH92, Beweis von Proposition 6.3]). Sei $E \in \mathcal{E}(\Gamma)$ und P ein Punkt im Inneren der Kante E , für den entweder $f(P) \in \mathcal{V}(\Gamma)$ oder $f(P) = P$ gilt. Dann definieren wir einen Graphen Γ' , der aus Γ hervorgeht, indem P in die Knotenmenge aufgenommen wird und die Kante E wie in Abbildung 2.4 durch zwei neue Kanten E_1 und E_2 ersetzt wird.



Abbildung 2.4: Zerlegung der Kante E in zwei Teilkanten E_1E_2 .

Die Homotopieäquivalenz $f' : \Gamma' \rightarrow \Gamma'$ sei auf natürliche Weise definiert. Wir sagen, dass $f' : \Gamma' \rightarrow \Gamma'$ durch eine *Zerteilung* aus $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ hervorgeht.

Sei $f(E) = \bar{\mu}E\nu$ für eine Kante $E \in \mathcal{E}(\Gamma)$ und nicht-triviale Wege μ, ν . Weiter sei $E = E_1E_2$ mit $f(E_1) = \bar{\mu}E_1$, $f(E_2) = E_2\nu$ und e die nach Satz 2.2.5(c) zugehörige Kante in D_f mit totem Punkt 1_P . Beim Übergang von f zu der an P zerteilten Homotopieäquivalenz f' wird die Kante e aus D_f in die zwei Teilkanten $\mu \xrightarrow{e_1} 1_P$ und $1_P \xrightarrow{e_2} \nu$ in $D_{f'}$ zerteilt (vgl. Abbildung 2.3). Da die Definition von bevorzugten Wegen unabhängig von Zerteilungen ist, sind hierbei nach Lemma 2.3.3(b) die Wege \bar{e}_1 und e_2 bevorzugt. Analoge Aussagen gelten für den Fall, dass $f(E) = \bar{\mu}'\bar{E}\nu'$ ist. Hier sind die Wege e_1 und \bar{e}_2 bevorzugt.

Sei nun $f'' : \Gamma'' \rightarrow \Gamma''$ die Homotopieäquivalenz, die entsteht, wenn wir f an allen solchen Fixpunkten zerteilen, die keine Knoten von Γ sind und nicht auf Fixkanten liegen (nach Satz 2.2.5 sind dies nur endlich viele). Dann sind alle Fixpunkte von f'' ,

die auf keiner Fixkante liegen, Knoten in Γ'' . Eine solche Abbildung nennen wir eine *zerteilte Homotopieäquivalenz*.

Ist e eine Kante in $D_{f''}$, die (wie in Satz 2.2.5(a)) zu einer Fixkante gehört, so sind e und \bar{e} bevorzugt. Mit Ausnahme dieser Kanten besitzt jede Kante in $D_{f''}$ keinen toten Punkt im Inneren. Für eine solche Kante e folgt aus der Bedingung (2) für bevorzugte Kanten die Bedingung (1), siehe Satz 2.2.5. Ist $o(e)$ ein nicht-trivialer Weg in Γ , so sind die Bedingungen (1) und (2) sogar äquivalent. Unsere Definition stimmt hier mit der üblichen Definition³ von bevorzugten Kanten überein.

Lemma 2.3.5 (Wegen in bevorzugte Teilwege zerlegen). *Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine zerteilte Homotopieäquivalenz und γ ein reduzierter Kantenweg in D_f , der im Inneren keinen toten Punkt besitzt. Dann gibt es eine Zerlegung $\gamma = \gamma_1\bar{\gamma}_2$, so dass γ_1 und γ_2 bevorzugte Kantenwege sind.*

Beweis. Wir nehmen an, dass γ ein reduzierter Kantenweg sei, für den es keine solche Zerlegung gäbe. Dann schreiben wir $\gamma = e_1e_2 \dots e_k$ mit Kanten $e_1, \dots, e_k \in \mathcal{E}(D_f)$.

Wegen unserer Annahme gibt es einen maximalen Index $0 \leq i < k$, für den $e_1e_2 \dots e_i$ bevorzugt ist. Dann ist $\overline{e_{i+1}}$ bevorzugt und es gibt einen maximalen Index $i < j < k$, so dass $\overline{e_{i+1}e_{i+2} \dots e_j}$ bevorzugt ist. Da j maximal gewählt wurde, beginnen in dem inneren Knoten $t(e_j)$ die zwei bevorzugten Kanten e_{j+1} und \bar{e}_j . Da dieser Knoten dann nach Lemma 2.3.3(b) tot sein muss, erhalten wir einen Widerspruch zur Voraussetzung des Lemmas. \square

Für eine Homotopieäquivalenz $f : R_n \rightarrow R_n$ haben M. Grayson und W. Thurston gezeigt (siehe [Coo87]), dass es eine nur von f abhängige Konstante C^* mit der folgenden Eigenschaft gibt: Sind α, β zwei Kantenwege, so dass $t(\alpha) = t(\beta)$ gilt und der Weg $\alpha\bar{\beta}$ reduziert ist. Dann besitzt der maximale gemeinsame Endweg z von $[f(\alpha)]$ und $[f(\beta)]$ höchstens C^* Kanten, siehe Abbildung 2.5.

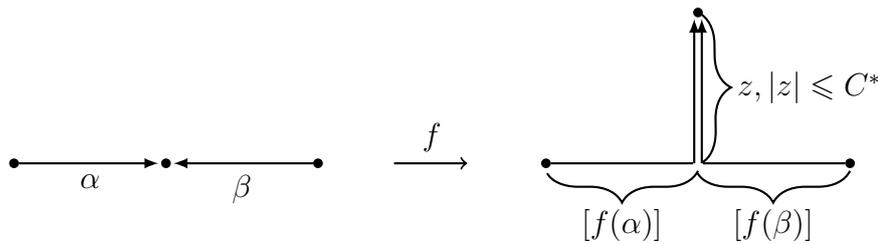


Abbildung 2.5: Die Kürzung zwischen den Wegen $[f(\alpha)]$ und $[f(\bar{\beta})]$ ist durch C^* beschränkt.

Anders ausgedrückt gilt für α und β die Ungleichung

$$|[f(\alpha)]| + |[f(\beta)]| - |[f(\alpha\bar{\beta})]| \leq 2C^*. \quad (2.7)$$

³Eine Kante ohne toten Punkt ist nach der üblichen Definition bevorzugt, wenn die Bedingung (1) gilt.

Nach Lemma 3.1 kann dies auf beliebige Homotopieäquivalenzen $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ erweitert werden. Zusätzlich wird in diesem Lemma gezeigt, wie die Konstante C^* hierbei gewählt werden kann. Ist $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine Homotopieäquivalenz, so gilt die Ungleichung (2.7) zum Beispiel für

$$C^* = |\mathcal{E}_+(\Gamma)| \cdot \max \{|f(E)| \mid E \in \mathcal{E}(\Gamma)\}.$$

Zur Abschätzung der Länge von z können den Kanten von Γ aber auch verschiedene Längen (inklusive 0) zugewiesen werden. Als Vorbereitung hierfür benötigen wir:

Definition 2.3.6 (Längenfunktion für Kantenwege). Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine Homotopieäquivalenz. Wir bezeichnen eine Funktion $L : \mathcal{P}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ als *Längenfunktion* auf Γ , wenn es einen f -invarianten Teilgraphen G von Γ gibt, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(a) Für jeden Kantenweg $E_1 \dots E_m$ in Γ gilt

$$L(E_1 \dots E_m) = L(E_1) + \dots + L(E_m).$$

(b) Es gilt $L(E) = L(\overline{E})$ für alle $E \in \mathcal{E}(\Gamma)$.

(c) Es gilt $L(E) = 0$ für alle $E \in \mathcal{E}(\Gamma) \setminus \mathcal{E}(G)$.

(d) Ist $E \in \mathcal{E}(G)$ eine Kante mit $L(E) = 0$ und $f(E) = F_1 F_2 \dots F_m$. Dann gilt $L(F_i) = 0$ für alle $1 \leq i \leq m$.

(e) Es gibt eine Kante $E \in \mathcal{E}(G)$ mit $L(E) > 0$.

Der folgende Satz 2.3.7 entspricht dem Lemma 3.1 aus [BFH97]. Eine Formulierung, die näher an unser Formulierung ist, findet sich in [DV96, Lemma II.2.4.]⁴.

Satz 2.3.7 (Beschränkte Kürzungen). Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine Homotopieäquivalenz, G ein f -invarianter Teilgraph und L eine Längenfunktion auf Γ mit $L(E) = 0$ für alle $E \in \mathcal{E}(\Gamma) \setminus \mathcal{E}(G)$. Weiter seien w_1 und w_2 zwei Kantenwege in $\mathcal{P}(G)$ mit $t(w_1) = o(w_2)$, für die $w_1 w_2$ reduziert ist. Dann gilt mit den Bezeichnungen

$$\text{Vol}(\Gamma) := \sum_{E \in \mathcal{E}_+(\Gamma)} L(E) \text{ und}$$

$$\text{Lip}(f) := \max \left\{ \frac{L(f(E))}{L(E)} \mid E \in \mathcal{E}(\Gamma) \text{ mit } L(E) > 0 \right\}$$

die Abschätzung

$$L([f(w_1)]) + L([f(w_2)]) - L([f(w_1 w_2)]) \leq 2 \cdot \text{Vol}(\Gamma) \cdot \text{Lip}(f).$$

⁴Dieses Lemma muss auf $f_G : G \rightarrow G$ angewendet werden.

Ist ρ ein irreduzibler Nielsenweg, $P = o(\rho)$ und $Q = t(\rho)$, so gibt es nach Satz 2.2.4 einen reduzierten und mit ρ beschrifteten Weg γ von 1_P nach 1_Q , der im Inneren keinen toten Punkt besitzt. Nach Lemma 2.3.5 können wir γ zu $\gamma = \gamma_1 \bar{\gamma}_2$ zerlegen, so dass γ_1 und γ_2 bevorzugt sind. Der folgende Satz gibt nun eine Schranke für die Länge von $t(\gamma_1)$ an.

Satz 2.3.8. *Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine zerteilte Homotopieäquivalenz, G ein f -invarianter Teilgraph und L eine Längenfunktion auf Γ mit $L(E) = 0$ für alle $E \in \mathcal{E}(\Gamma) \setminus \mathcal{E}(G)$. Weiter sei $\gamma_1 \bar{\gamma}_2$ ein reduzierter Weg in $D_f(G)$, dessen Endknoten beide tot sind und für den γ_1 und γ_2 bevorzugt sind. Dann gilt*

$$L(t(\gamma_1)) \leq \text{Vol}(\Gamma) \cdot \text{Lip}(f).$$

Beweis. Sei $z = t(\gamma_1)$, $\alpha = \ell(\gamma_1)$ und $\beta = \ell(\gamma_2)$. Aus $z = [\bar{\alpha}1_{o(\gamma_1)}f(\alpha)]$ folgt

$$[f(\alpha)] = [\alpha z]. \quad (2.8)$$

Da γ_1 bevorzugt ist, gilt $\alpha \preceq [f(\alpha)]$ (siehe Bedingung (2.3) in Definition 2.3.2). Deswegen ist der Weg αz in (2.8) reduziert. Analog folgt $[f(\beta)] = \beta z$. Demnach ist $[f(\alpha\bar{\beta})] = \alpha\bar{\beta}$ und mit Satz 2.3.7 für $w_1 = \alpha$ und $w_2 = \bar{\beta}$ folgt

$$L(\alpha z) + L(\bar{z}\bar{\beta}) - L(\alpha\bar{\beta}) = 2L(z) \leq 2 \cdot \text{Vol}(\Gamma) \cdot \text{Lip}(f).$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

2.4 Struktur der irreduziblen Nielsenwege

In [BH92, §6] wird ein Graph definiert, der die Nielsenwege einer stabilen relativen Train-Track Abbildung darstellt (relative Train-Track Abbildungen und den Begriff der Stabilität werden wir in Definition 2.5.4 und Definition 2.6.2 einführen).

Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, dass $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine beliebige zerteilte Homotopieäquivalenz ist und definieren einen Graphen \mathcal{G} , welcher die irreduziblen Nielsenwege von f beschreibt. Zusätzlich geben wir an, unter welchen Voraussetzungen der Graph \mathcal{G} algorithmisch konstruiert werden kann. Wir bemerken, dass sich die Nielsenwege nach Satz 2.2.4 aus irreduziblen Nielsenwegen und Fixkanten (das erste und letzte Kantenstück eines Nielsenweges kann auch eine Teilkante einer Fixkante sein) zusammensetzen, so dass die irreduziblen Nielsenwege eine zentrale Rolle für die Beschreibung aller Nielsenwege spielen.

Als Vorbereitung für die Konstruktion von \mathcal{G} benötigen wir zunächst die folgende Definition.

Definition 2.4.1 (Die Menge \mathcal{S} und die Wege y_E). Wir definieren die Menge

$$\mathcal{S} := \{E \in \mathcal{E}(\Gamma) \mid E \prec f(E)\}.$$

Wir bemerken, dass $1_{o(E)}$ für jede Kante $E \in \mathcal{S}$ ein toter Punkt in D_f ist. Für jede Kante $E \in \mathcal{S}$ können wir einen Weg γ_E in D_f definieren, der in dem toten Punkt $1_{o(E)}$ in die mit E beschriftete Richtung startet und dann immer der bevorzugten Richtung folgt. Falls dieser Weg zu einem toten Punkt führt, ende er hier. Ansonsten können wir der bevorzugten Richtung immer weiter folgen. In diesem Fall kann der Weg wie ein Strahl verlaufen, d.h. keinen Knoten zweimal durchlaufen, oder in eine Schleife laufen und diese dann immer wieder durchlaufen.

Hierdurch können wir \mathcal{S} als disjunkte Vereinigung der folgenden Mengen $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ aufschreiben:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &:= \{E \in \mathcal{S} \mid \gamma_E \text{ endet in einem toten Punkt}\}, \\ \mathcal{S}_2 &:= \{E \in \mathcal{S} \mid \gamma_E \text{ beschreibt einen unendlichen Strahl}\}, \\ \mathcal{S}_3 &:= \{E \in \mathcal{S} \mid \gamma_E \text{ durchläuft einen Schleife unendlich oft}\}.\end{aligned}$$

Für $E \in \mathcal{S}_3$ bemerken wir, dass die zugehörige Schleife keinen toten Punkt enthalten kann, da γ_E sonst hier stoppen würde. Der Weg γ_E beginnt also außerhalb der Schleife.

Wir werden nun in Definition 2.4.2 den Graphen \mathcal{G} konstruieren. Die Eigenschaften dieses Graphen fassen wir im Satz 2.4.3 zusammen und geben im Anschluss an diesen Satz ein Beispiel zur Konstruktion von \mathcal{G} an. Dieser Graph wird dabei algorithmisch konstruierbar sein, wenn wir voraussetzen, dass die folgenden zwei Probleme in dem Graphen D_f algorithmisch lösbar sind:

- (P1) Entscheide für $E \in \mathcal{S}$, ob der Weg γ_E in einem toten Punkt endet, einen Strahl bildet oder in eine Schleife läuft.
- (P2) Entscheide für jedes Paar $E, F \in \mathcal{S}_2$ mit $E \neq F$, ob sich die Strahlen γ_E und γ_F schneiden.

In [BM16] wird gezeigt, wie diese Probleme für relative Train-Track Abbildungen (siehe Definition 2.5.4) gelöst werden können. Wir lösen diese Probleme für diese Abbildungen ebenfalls im Kapitel 3. Deswegen kann der Graph \mathcal{G} für solche Abbildungen algorithmisch konstruiert werden.

Definition 2.4.2. Wir betrachten auf \mathcal{S}_3 die Äquivalenzrelation, bei der zwei Kanten $E, F \in \mathcal{S}_3$ äquivalent heißen, wenn γ_E und γ_F in die gleiche Schleife führen. Sei

$$\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_{3,1} \cup \dots \cup \mathcal{S}_{3,r}$$

die Zerlegung von \mathcal{S}_3 in die zugehörigen Äquivalenzklassen. Für jedes $i \in \{1, \dots, r\}$ wählen wir nun in D_f

- einen Knoten P_i in der gemeinsamen Schleife der Wege γ_E mit $E \in \mathcal{S}_{3,i}$,
- einen Weg σ_i mit $o(\sigma_i) = t(\sigma_i) = P_i$, der die gemeinsame Schleife genau einmal durchläuft, und

- den minimalen Anfangsweg α_E von y_E mit $t(\alpha_E) = P_i$ für jede Kante $E \in \mathcal{S}_{3,i}$.

Wir definieren die disjunkten Mengen

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &:= \{1_P \mid P \in \mathcal{V}(\Gamma) \text{ und } f(P) = P\}, \\ \mathcal{B} &:= \{P_1, P_2, \dots, P_r\}.\end{aligned}$$

und einen Graphen \mathcal{G} mit der endlichen Knotenmenge

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) := \mathcal{A} \cup \mathcal{B},$$

bei dem wir wie folgt Kanten einfügen:

- (1) Für jede Kante $E \in \mathcal{S}_1$ fügen wir eine mit $\ell(y_E)$ beschriftete Kante ein, die $o(y_E) \in \mathcal{A}$ mit $t(y_E) \in \mathcal{A}$ verbindet.
- (2) Für $E, F \in \mathcal{S}_2$ mit $E \neq F$, für welche sich y_E und y_F schneiden, sei $y_{E,F}$ der Weg, welcher y_E vom Anfang bis zum ersten Schnittpunkt folgt und von hieraus auf dem Weg y_F rückwärts zum Anfang von y_F führt. Wir fügen für jeden solchen Weg $y_{E,F}$ eine mit $\ell(y_{E,F})$ beschriftete Kante von $o(y_E) \in \mathcal{A}$ nach $o(y_F) \in \mathcal{A}$ ein ($y_{E,F}$ und $y_{F,E}$ bilden dann zusammen ein Paar zueinander inverser Kanten.).
- (3) Für jede Kante $E \in \mathcal{S}_3$ fügen wir eine mit $\ell(\alpha_E)$ beschriftete Kante A_E von $o(\alpha_E) \in \mathcal{A}$ nach $P_i \in \mathcal{B}$ ein, wobei i der Index mit $E \in \mathcal{S}_{3,i}$ sei.
- (4) Für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ fügen wir eine mit $\ell(\sigma_i)$ beschriftete Kante B_i von $P_i \in \mathcal{B}$ nach P_i ein.

Sei $\ell_{\mathcal{G}} : \mathcal{P}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{P}(\Gamma)$ die auf $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ erweiterte Beschriftung.

Satz 2.4.3. *Mit den Notationen aus Definition 2.4.2 gelten die folgenden Eigenschaften:*

- Verschiedene Knoten aus \mathcal{B} sind in \mathcal{G} nicht durch eine Kante verbunden und zu jedem Knoten $P \in \mathcal{B}$ gibt es eine bis auf Orientierung eindeutige Kante, die in P beginnt und endet.*
- Sei γ ein reduzierter Weg in \mathcal{G} , der zwei Knoten aus \mathcal{A} verbindet und die folgende Eigenschaft besitzt: Falls γ mehr als eine Kante besitzt, so seien alle inneren Knoten von γ in \mathcal{B} (diese Knoten stimmen dann nach (a) überein). Dann ist $[\ell_{\mathcal{G}}(\gamma)]$ ein irreduzibler Nielsenweg.*
- Jeder irreduzible Nielsenweg von f lässt sich wie in (b) darstellen.*

Bevor wir diesen Satz beweisen, geben wir ein Beispiel zur Konstruktion von \mathcal{G} an und formulieren ein für den Beweis benötigtes Lemma.

Beispiel 2.4.4. Wir betrachten die in Abbildung 2.6 definierte Homotopieäquivalenz $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$. Für diese ist $\mathcal{S} = \{\bar{b}_1, b_2, c, d\}$.

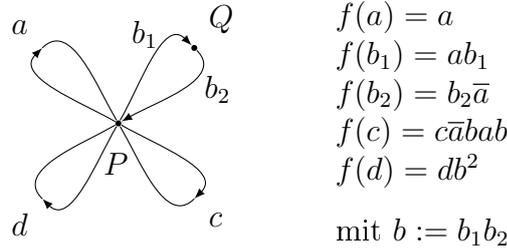


Abbildung 2.6: Die Homotopieäquivalenz $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$. Hierbei entsteht Γ aus der Rose R_4 durch Einfügen eines Knotens.

Der Knoten Q sorgt hierbei dafür, dass f eine zerteilte Homotopieäquivalenz (vgl. Bemerkung 2.3.4) ist. Der wesentliche Teil des Graphen D_f , an welchem sich die Wege y_E mit $E \in \mathcal{S}$ ablesen lassen, ist in Abbildung 2.7 zu sehen.

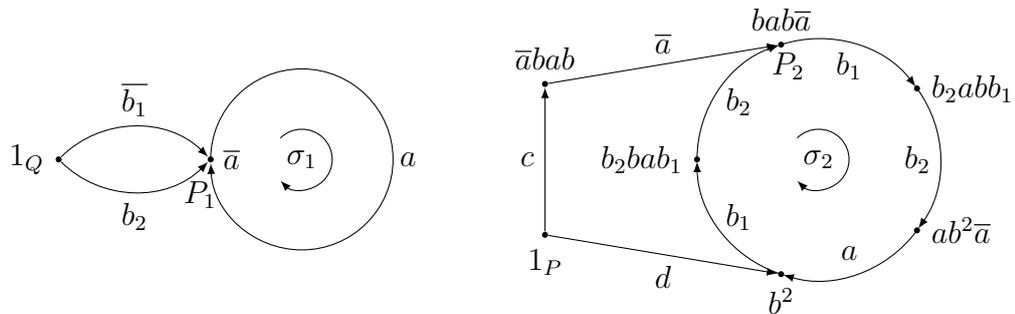


Abbildung 2.7: Der wesentliche Teil des Graphen D_f . Mit Ausnahme von 1_Q gibt es an jedem Knoten noch weitere, nicht dargestellte Kanten. Von jedem Paar zueinander inverser Kanten wird hierbei jeweils die bevorzugte Kante dargestellt.

Damit ist

$$\mathcal{S}_1 = \emptyset, \mathcal{S}_2 = \emptyset \text{ und } \mathcal{S}_3 = \underbrace{\{\bar{b}_1, b_2\}}_{=: \mathcal{S}_{3,1}} \cup \underbrace{\{c, d\}}_{=: \mathcal{S}_{3,2}}.$$

Wir wählen $P_1 = \bar{a}$, $P_2 = bab\bar{a}$, σ_1 als die mit a beschriftete Schleife an P_1 und σ_2 als die mit bab beschriftete Schleife an P_2 . Dann ist

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \underbrace{\{1_P, 1_Q\}}_{=A} \cup \underbrace{\{P_1, P_2\}}_{=B}$$

und wir erhalten den in Abbildung 2.8 dargestellten Graphen \mathcal{G} , welcher aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht.

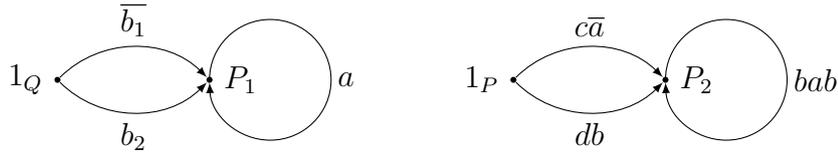


Abbildung 2.8: Der Graph \mathcal{G}

Die irreduziblen Nielsenwege von f sind also genau die Wege

$$\begin{aligned} \bar{b}_1 a^k b_1, & \quad \bar{b}_1 a^l \bar{b}_2, & \quad b_2 a^l b_1, & \quad b_2 a^k \bar{b}_2, \\ \bar{c}a (bab)^k a \bar{c}, & \quad \bar{c}a (bab)^l \bar{b} \bar{d}, & \quad db (bab)^l a \bar{c}, & \quad db (bab)^k \bar{b} \bar{d} \end{aligned}$$

mit $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ und $l \in \mathbb{Z}$.

Wir formulieren nun ein allgemeines Lemma. Dieses hilft uns gewisse zusammenhängende Teilgraphen von D_f zu untersuchen. Wir werden es sowohl für den Beweis von Satz 2.4.3 als auch im letzten Kapitel dieser Arbeit benutzen.

Lemma 2.4.5 (Graphentheoretisches Lemma). *Sei Z ein zusammenhängender Graph und $k : \mathcal{V}(Z) \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Funktion. Weiter sei eine Teilmenge der Kanten gewählt. Diese Kanten nennen wir bevorzugt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- (1) *Von jedem Paar $E, \bar{E} \in \mathcal{E}(Z)$ mit $k(o(E)) > 0$ oder $k(t(E)) > 0$ ist genau eine Kante bevorzugt.*
- (2) *Ist $P \in \mathcal{V}(Z)$ mit $k(P) > 0$, so gibt es genau eine bevorzugte Kante, welche in P beginnt.*
- (3) *Für jede bevorzugte Kante E gilt*

$$k(o(E)) \geq k(t(E)).$$

Für $P \in \mathcal{V}(Z)$ bezeichnen wir $k(P)$ als die Komplexität von P und k als Komplexitätsfunktion. Wir notieren mit

$$m := \min \{k(P) \mid P \in \mathcal{V}(Z)\}$$

die minimale Komplexität der Knoten in Z und definieren M als den Teilgraph mit

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(M) &:= \{P \in \mathcal{V}(Z) \mid k(P) = m\}, \\ \mathcal{E}(M) &:= \{E \in \mathcal{E}(Z) \mid k(o(E)) = k(t(E)) = m\}, \end{aligned}$$

welcher aus den Knoten minimaler Komplexität gebildet wird. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) *Der Graph M ist zusammenhängend.*

- (b) Der Graph Z entsteht aus M durch Anheften von Bäumen (siehe Abbildung 2.9), d.h. für jeden Knoten $P \in \mathcal{V}(M)$ gilt

$$\pi_1(Z, P) = \pi_1(M, P).$$

- (c) Von jedem Knoten aus $\mathcal{V}(Z) \setminus \mathcal{V}(M)$ gibt es einen Weg zu einem Knoten aus M , welcher nur aus bevorzugten Kanten besteht.

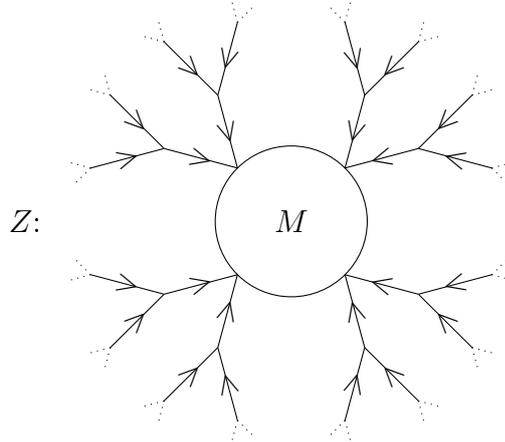


Abbildung 2.9: Der zusammenhängende Graph Z setzt sich aus dem als Kreis dargestellten Teilgraphen M und anhängenden Bäumen zusammen. Über den Teilgraphen M ist nur bekannt, dass er zusammenhängend ist. Die Pfeilrichtungen geben hierbei die bevorzugten Richtungen an.

Beweis. Sei $Q \in \mathcal{V}(Z) \setminus \mathcal{V}(M)$. Wir zeigen zunächst die Aussage (c). Da Z zusammenhängend ist, gibt es einen reduzierten Weg

$$Q = Q_0 \xrightarrow{E_1} Q_1 \xrightarrow{E_2} Q_2 \dots Q_{l-1} \xrightarrow{E_l} Q_l, \quad (2.9)$$

mit $Q_0, Q_1, \dots, Q_{l-1} \in \mathcal{V}(Z) \setminus \mathcal{V}(M)$ und $Q_l \in \mathcal{V}(M)$. Wir zeigen die stärkere Aussage, dass für jeden solchen Weg die Kanten E_1, \dots, E_l bevorzugt sein müssen:

Da Q_{l-1} nicht in M liegt, ist $k(Q_{l-1}) > k(Q_l)$. Nach (3) kann dann $\overline{E_l}$ nicht bevorzugt sein, so dass nach (1) die Kante E_l bevorzugt ist. Da Q_{l-1} nicht die Komplexität 0 besitzt und bereits eine ausgehende bevorzugte Kante E_l hat, kann die Kante $\overline{E_{l-1}}$ von Q_{l-1} nach Q_{l-2} wegen (2) nicht bevorzugt sein. Damit ist die Kante E_{l-1} bevorzugt. Induktiv folgt, dass auch die Kanten E_{l-2}, \dots, E_1 bevorzugt sind.

Zu (a): Wäre M nicht zusammenhängend, so gäbe es zwei Knoten in M und einen reduzierten Verbindungsweg zwischen diesen, der durch mindestens einen Knoten $Q \notin \mathcal{V}(M)$ führt. Von diesem Knoten gäbe es nun zwei verschiedene Wege, die wie in (2.9) jeweils zu einem Knoten aus M führten und somit nach obiger Überlegung bevorzugt sein müssten. Dies ist ein Widerspruch, da ein bevorzugter Weg von Q außerhalb von M nach (2) eindeutig ist.

Zu (b): Sei γ ein reduzierter Weg in $\pi_1(Z, P)$. Würde dieser über einen Knoten $Q \notin \mathcal{V}(M)$ führen, so bekämen wir wie im Beweis zu (a) einen Widerspruch. Also gilt $\pi_1(Z, P) = \pi_1(M, P)$. \square

Beweis von Satz 2.4.3. Die Eigenschaft (a) ergibt sich direkt aus der Konstruktion.

Zu (b): Sei γ ein reduzierter Weg in \mathcal{G} , der zwei Knoten Knoten aus \mathcal{A} verbindet und ansonsten nur über Knoten aus \mathcal{B} führt. Falls γ nur aus einer Kante besteht, welche zu (1) oder zu (2) gehört, so ist γ nach Satz 2.2.4 mit einem irreduziblen Nielsenweg beschriftet.

Ansonsten ist $\gamma = A_E B_i^k \overline{A_F}$ mit $i \in \{1, \dots, r\}$, $E, F \in \mathcal{S}_{3,i}$ und $k \in \mathbb{Z}$, wobei E und F für $k = 0$ verschieden sind. Der Weg γ ist also mit

$$\ell_{\mathcal{G}}(\gamma) = \ell(\alpha_E \sigma_i^k \overline{\alpha_F})$$

beschriftet. Der Weg $\alpha_E \sigma_i^k \overline{\alpha_F}$ führt hierbei nicht über einen toten Punkt. Dies gilt auch für den reduzierten Weg, so dass

$$[\ell_{\mathcal{G}}(\gamma)] = \ell([\alpha_E \sigma_i^k \overline{\alpha_F}])$$

nach Satz 2.2.4 ein irreduzibler Nielsenweg ist.

Zu (c): Sei ρ ein irreduzibler Nielsenweg und γ der nach Satz 2.2.4 zugehörige Weg in D_f . Aufgrund von Lemma 2.3.5 können wir $\gamma = \gamma_1 \overline{\gamma_2}$ mit bevorzugten Kantenwegen γ_1, γ_2 schreiben. Falls γ_1 nicht-trivial ist, sei E die erste Kante der Beschriftung von γ_1 . Da nur der Anfangspunkt von γ_E tot und γ_E bevorzugt ist, gilt $E \prec f(E)$ und somit $E \in \mathcal{S}$. Da bevorzugte Wege außerhalb von toten Punkten eindeutig sind, gilt $\gamma_1 \preceq \gamma_E$. Analog gilt $\gamma_2 \preceq \gamma_F$, wobei F die erste Kante von $\ell(\gamma_2)$ sei, falls γ_2 nicht-trivial ist.

Fall 1: Eine der Wege γ_1, γ_2 ist trivial.

Ohne Einschränkung sei γ_1 nicht-trivial. Dann gilt $E \in \mathcal{S}_1$ und $\gamma = \gamma_E$. Nach (1) existiert eine mit ρ beschriftete Kante in \mathcal{G} .

In den anderen Fällen schneiden sich γ_E und γ_F (in $t(\gamma_1) = t(\gamma_2)$). Die Kanten E, F liegen also entweder beide in \mathcal{S}_2 oder beide in einer Menge $\mathcal{S}_{3,i}$ mit einem Index $1 \leq i \leq r$.

Fall 2: Es gilt $E, F \in \mathcal{S}_2$.

Dann gilt $\gamma = \gamma_{E,F}$ und nach (2) existiert eine mit ρ beschriftete Kante in \mathcal{G} .

Fall 3: Es gilt $E, F \in \mathcal{S}_{3,i}$ für ein $i \in \{1, \dots, r\}$.

Wir betrachten in D_f alle Kantenwege, welche in P_i beginnen und über keinen toten Punkt führen (auch der Endpunkt dieser Weg darf nicht tot sein). Sei Z der zusammenhängende Teilgraph von D_f , der von allen solchen Wegen gebildet wird. Wir bemerken, dass die Wege α_E und γ_1 mit der gleichen Kanten beginnen und mit Ausnahme dieser ersten Kante in Z verlaufen. Das Gleiche gilt für die Wege α_F und γ_2 . Damit ist

$$[\overline{\alpha_E} \gamma_1 \overline{\gamma_2} \alpha_F] \in \pi_1(Z, P_i).$$

Unten beweisen wir, dass die Gruppe $\pi_1(Z, P_i)$ für $i \in \{1, \dots, r\}$ von σ_i erzeugt wird. Hiernach gibt es dann ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$\gamma = \gamma_1 \overline{\gamma_2} = [\alpha_E \sigma_i^k \overline{\alpha_F}].$$

Dann folgt weiter die Gültigkeit von (c) aus der Gleichung

$$\rho = \ell(\gamma) = [\ell_{\mathcal{G}}(A_E B_i^k \overline{A_F})].$$

Es bleibt also zu zeigen, dass σ_i die Gruppe $\pi_1(Z, P_i)$ erzeugt. Sei M der Teilgraph von Z , welcher von σ_i gebildet wird. Wir definieren die Funktion $\text{dist}_M : \mathcal{V}(Z) \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit

$$\text{dist}_M(Q) = \min \left\{ l \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \text{ in } Z \text{ ein Weg } Q = Q_l \xrightarrow{E_l} \dots \xrightarrow{E_1} Q_0 \text{ mit } Q_0 \in \mathcal{V}(M) \right\}.$$

Nun prüfen wir, dass dist_M die Voraussetzungen einer Komplexitätsfunktion aus Lemma 2.4.5 erfüllt. Da Z keine toten Punkte enthält, sind die Bedingungen (1) und (2) dieses Lemmas erfüllt. Für die Bedingung (3) müssen wir noch prüfen, dass eine Kante $D \in \mathcal{E}(Z)$ mit

$$\text{dist}_M(o(D)) < \text{dist}_M(t(D)) \tag{2.10}$$

nicht bevorzugt sein kann. Für eine Kante $D \in \mathcal{E}(Z)$ mit (2.10) ist

$$l := \text{dist}_M(o(D)) = \text{dist}_M(t(D)) - 1.$$

Wir wählen einen Weg

$$o(D) = Q_l \xrightarrow{E_l} Q_{l-1} \xrightarrow{E_{l-1}} Q_{l-2} \xrightarrow{E_{l-2}} \dots \xrightarrow{E_1} Q_0$$

mit $Q_0 \in M$ (siehe Abbildung 2.10).

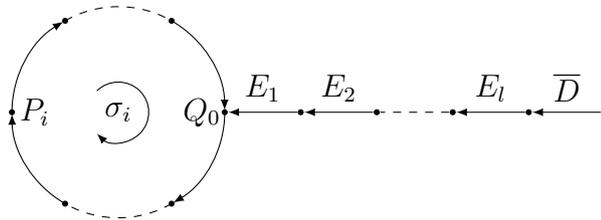


Abbildung 2.10: Der Weg von der Kante D zu dem von σ_i gebildeten Kreis M .

Nun folgt schrittweise, dass E_1, E_2, \dots, E_l und \overline{D} bevorzugt sind. Die Kante D kann also nicht bevorzugt sein und Lemma 2.4.5(b) liefert, dass $\pi_1(Z, P_i)$ von σ_i erzeugt wird. \square

2.5 Relative Train-Track Abbildungen

In diesem Abschnitt führen wir relative Train-Track Abbildungen ein.

Für diese finden wir im Abschnitt 2.6 eine obere Schranke für die Länge von irreduziblen Nielsenwegen exponentieller Höhe (siehe Definition 2.5.3).

Der folgende Satz ist bekannt (siehe [DV96, Lemma II.1.3] und [BH92, Seite 5]).

Satz 2.5.1 (irreduzible Matrizen). Sei A eine $n \times n$ -Matrix, deren Einträge nicht-negative ganze Zahlen sind. Wir ordnen der Matrix A den folgenden gerichteten Graphen⁵ G mit der Knotenmenge $\mathcal{V}(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ zu. Dabei werden die Knoten i und j genau dann durch eine gerichtete Kante verbunden, wenn $a_{ij} > 0$ ist.

Dann sind für A die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a) Es gibt keine Permutationsmatrix P und natürliche Zahlen r, s mit $n = r + s$, so dass

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

ist, wobei B eine $r \times r$ und D eine $s \times s$ -Matrix ist.

- (b) Für alle Indizes $1 \leq i, j \leq n$ existiert ein Exponent $e(i, j) \in \mathbb{N}_0$, so dass der Eintrag von $A^{e(i, j)}$ an der Stelle i, j größer als Null ist.
- (c) Zu je zwei verschiedenen Knoten $i, j \in \mathcal{V}(G)$ gibt es einen gerichteten Weg, der von i nach j führt.

Eine Matrix, die diese Bedingungen erfüllt, wird irreduzibel genannt. Eine nicht irreduzible Matrix heißt reduzibel. Man beachte, dass die 1×1 Nullmatrix irreduzibel ist.

Satz 2.5.2 (Perron-Frobenius Eigenwert). Sei A eine $n \times n$ -Matrix, deren Einträge nicht-negative ganze Zahlen sind. Falls A irreduzibel ist, dann besitzt A einen reellen Eigenwert λ , so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (a) Es gilt $\lambda = 0$ oder $\lambda \geq 1$.
- (b) Für jeden Eigenwert $\mu \in \mathbb{C}$ mit $\mu \neq \lambda$ gilt $|\mu| \leq \lambda$.
- (c) Die Dimension des Eigenraumes zum Eigenwert λ ist gleich 1.
- (d) Es gibt einen positiven linken Eigenvektor v (d.h. es gelte $v_i > 0$ für alle i) zum Eigenwert λ .

Dieser Eigenwert wird Perron-Frobenius Eigenwert von A genannt.

Es gelten die zusätzlichen Eigenschaften:

- (1) Falls A irreduzibel ist und den Perron-Frobenius Eigenwert 1 besitzt, so ist A eine Permutationsmatrix.
- (2) Ist A eine irreduzible $n \times n$ -Matrix und w ein linker Eigenvektor mit $w_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$, so ist w ein Eigenvektor zum Perron-Frobenius Eigenwert von A .
- (3) Ist v ein positiver linker Eigenvektor zum Perron-Frobenius Eigenwert λ , so gilt

$$\frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \cdot \min \{v_k \mid 1 \leq k \leq n\} \geq \sum_{k=1}^n v_k.$$

⁵Im Gegensatz zu den in Notation 2.1.1 eingeführten Graphen muss es zu einer Kante in einem gerichteten Graphen keine inverse Kante in dem Graphen geben.

Beweis. Für die Existenz eines Eigenwertes mit den Eigenschaften (a) bis (d) verweisen wir auf [Sen06, Theorem 1.5].

Zu (1): Siehe [DV96, Proposition II.1.10].

Zu (2): Sei λ der Perron-Frobenius Eigenwert von A und $wA = \mu w$. Nach [DV96, Lemma II.1.4] gilt dann $\lambda \leq \mu$ und mit (2) folgt $\mu = \lambda$.

Zu (3): Sei v ein positiver linker Eigenvektor zum Perron-Frobenius Eigenwert λ . Durch die Substitution von A mit $P^{-1}AP$ und v mit vP für eine passend gewählte Permutationsmatrix P können wir ohne Einschränkung voraussetzen, dass $v_i \leq v_{i+1}$ für $1 \leq i < n$ gilt.

Sei $1 \leq k < n$ ein Index. Wir wollen zunächst $\lambda v_k \geq v_{k+1}$ zeigen. Da A irreduzibel ist, gibt es Indizes $j \leq k < i$ mit $a_{ij} \geq 1$. Aus $\lambda v = vA$ folgt dann

$$\lambda v_k \geq \lambda v_j = \sum_{l=1}^n v_l a_{lj} \geq v_i a_{ij} \geq v_i \geq v_{k+1}.$$

Hieraus schließen wir, dass $\lambda^{k-1} v_1 \geq v_k$ für alle $1 \leq k \leq n$ gilt. Durch Summierung dieser Ungleichungen erhalten wir die Gültigkeit von (7). \square

Definition 2.5.3 (Filtrierung, Strata und Höhe, vgl. [BH92, §5]). Seien G_0, G_1, \dots, G_m Teilgraphen von Γ mit

$$\emptyset = G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \dots \subsetneq G_m = \Gamma.$$

Wir sagen, dass diese Teilgraphen eine *Filtrierung* für $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ bilden, falls sie f -invariant sind, d.h. wenn für jeden Index $0 < r < m$ und jede Kante $E \in \mathcal{E}(G_r)$ der Weg $f(E)$ in G_r verläuft.

Für $0 < r \leq m$ schreiben wir H_r für den Teilgraphen, der von den Kanten aus $\mathcal{E}(G_r) \setminus \mathcal{E}(G_{r-1})$ aufgespannt wird. Die Graphen H_1, \dots, H_m bezeichnen wir als die *Strata* der Filtrierung.

Eine Filtrierung heißt *maximal*, wenn es für alle $1 \leq r \leq m$ keinen f -invarianten Teilgraphen G mit $G_{r-1} \subsetneq G \subsetneq G_r$ gibt.

Zu jedem Stratum H_r können wir die wie folgt definierte *Übergangsmatrix* $M_f(H_r)$ betrachten: Sind E_1, E_2, \dots, E_k die positiven Kanten in H_r , so ist der Eintrag an der Stelle i, j von $M_f(H_r)$ gleich der Anzahl der Vorkommen von E_j und $\overline{E_j}$ in $f(E_i)$.

Eine Filtrierung ist genau dann maximal, wenn die Übergangsmatrizen $M_f(H_r)$ für $1 \leq r \leq m$ irreduzibel sind: Die Filtrierung ist genau dann nicht maximal, wenn es einen Index $1 \leq r \leq m$ und einen f -invarianten Teilgraphen G mit $G_{r-1} \subsetneq G \subsetneq G_r$ gibt. Dies ist äquivalent dazu, dass nach einer passenden Permutation der Kanten die Matrix $M_f(H_r)$ die Form $\begin{pmatrix} M_f(H) & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ besitzt, wobei H der Teilgraph zum neu eingefügten Stratum sei. Dies ist nach Satz 2.5.1 dazu äquivalent, dass einer der Matrizen $M_f(H_r)$ reduzibel ist.

Es ist leicht zu verstehen, dass die Strata einer maximalen Filtrierung den starken Zusammenhangskomponenten des in Satz 2.5.1 definierten gerichteten Graphen G entsprechen. Zwei maximale Filtrierungen können sich also nur in der Reihenfolge der Strata unterscheiden.

Wir werden im Folgenden häufig voraussetzen, dass die betrachtete Filtrierung maximal ist. Nach Satz 2.5.2 können wir dann jedem Stratum H_r den Perron-Frobenius Eigenwert λ_r von $M_f(H_r)$ zuordnen. Wir bezeichnen ein Stratum H_r als *Nullstratum*, wenn $\lambda_r = 0$ ist. In diesem Fall besteht H_r nur aus einer Kante. Für $\lambda_r = 1$ bezeichnen wir H_r als *polynomielles Stratum*. In diesem Fall ist $M_f(H_r)$ eine Permutationsmatrix. Ist $\lambda_r > 1$, so nennen wir H_r ein *exponentielles Stratum*.

Ist γ ein reduzierter und nicht-trivialer Weg in Γ , so bezeichnen wir das minimale r , für das γ in G_r verläuft, als die Höhe von γ und schreiben hierfür $\text{Höhe}(\gamma)$. Die Höhe eines trivialen Weges definieren wir als 0. Falls γ die Höhe r besitzt und H_r ein exponentielles (bzw. polynomiell) ist, so sagen wir, dass γ von exponentieller (bzw. polynomieller) Höhe ist.

Wir definieren nun relative Train-Track Abbildungen. Diese werden in [BH92] im Anschluss zu Korollar 5.6 eingeführt.

Definition 2.5.4 (Relative Train-Track Abbildungen). Sei Γ ein endlicher Graph und $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine Homotopieäquivalenz, die jede Kante auf einen nicht-trivialen, reduzierten Kantenzug abbildet. Weiter sei $\emptyset = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_m = \Gamma$ eine maximale Filtrierung.

Wir nennen $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine *relative Train-Track* Abbildung, wenn die Bedingungen (RTT-1), (RTT-2) und (RTT-3) für jedes exponentielle Stratum der maximalen Filtrierung erfüllt sind:

- (RTT-1)** Für jede Kante $E \in \mathcal{E}(H_r)$ beginnt und endet $f(E)$ mit einer Kante aus H_r .
- (RTT-2)** Falls γ ein reduzierter und nicht-trivialer Kantenzug in G_{r-1} ist, dessen Endpunkte in H_r liegen, so ist $[f(\gamma)]$ ebenfalls nicht-trivial.
- (RTT-3)** Für jede Kante E in H_r und jeden Exponenten $k \in \mathbb{N}$ werden bei der Berechnung von $[f^k(E)]$ keine Kanten aus H_r gekürzt.

In Definition 2.3.6 haben wir Längen von Wegen definiert, indem wir den Kanten gewisse Längen zugeordnet haben. Ist H_r ein exponentielles Stratum einer maximalen Filtrierung, so kann mit Hilfe eines positiven linken Eigenvektor von $M_f(H_r)$ eine spezielle solche Längenfunktion L_r definiert werden, die für relative Train-Track Abbildungen besonders nützlich ist.

Definition 2.5.5 (Längenfunktion für exponentielle Strata, vgl. [BH92, Lemma 5.10]). Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine Homotopieäquivalenz und H_r ein exponentielles Stratum einer maximalen Filtrierung von f . Seien E_1, E_2, \dots, E_k die positiven Kanten von H_r und v ein positiver linker Eigenvektor von $M_f(H_r)$ zum Perron-Frobenius Eigenwert von $M_f(H_r)$.

Dann definieren wir die Längenfunktion $L_r : \mathcal{P}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$L_r(E_i) = v_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq k \text{ und } L_r(D) = 0 \text{ für alle } D \in \mathcal{E}(\Gamma) \setminus \mathcal{E}(H_r).$$

Wir sagen, dass L_r die zum Eigenvektor v gehörige *Längenfunktion* ist. Sie ist nach Satz 2.5.2(c) bis auf einen positiven Skalar eindeutig.

Wir definieren nun r -legale Wege. Diese werden in [BH92] vor Definition 5.8 eingeführt.

Definition 2.5.6 (r -legale Wege). Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine Homotopieäquivalenz. Wir definieren eine Abbildung $T_f : \mathcal{E}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{E}(\Gamma)$, die eine Kante E auf die erste Kante von $f(E)$ abbildet. Diese Abbildung erweitern wir auf Kantenwege aus zwei Kanten, indem wir

$$T_f(E_1 E_2) = \overline{T_f(\overline{E_1})} T_f(E_2)$$

für $E_1, E_2 \in \mathcal{E}(\Gamma)$ mit $t(E_1) = o(E_2)$ definieren. Der Weg $T_f(E_1 E_2)$ besteht also aus der letzten Kante von $f(E_1)$ und der ersten Kante von $f(E_2)$.

Sei nun H_r ein exponentielles Stratum einer maximalen Filtrierung von f , welches die Bedingungen (RTT-1), (RTT-2) und (RTT-3) erfüllt. Wegen (RTT-1) gilt hierbei $T_f(E) \in \mathcal{E}(H_r)$ für alle $E \in \mathcal{E}(H_r)$.

Für einen Kantenweg

$$\gamma = P_0 \xrightarrow{E_1} P_1 \xrightarrow{E_2} \dots \xrightarrow{E_{k-1}} P_k$$

in G_r , bei dem keine Kanten Kürzungen zwischen zwei aufeinander folgenden Kanten aus G_{r-1} möglich sind, nennen wir einen inneren Knoten P_i mit $0 < i < k$ einen r -legalen Punkt, falls einer der anliegenden Kanten E_{i-1} oder E_i in G_{r-1} liegt oder falls $(Tf)^k(E_{i-1}E_i)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ reduziert ist. Der Kantenweg γ heißt r -legal, falls alle seine inneren Knoten r -legal sind. Einen beliebigen Weg γ , bei dem keine Kürzungen zwischen Kanten aus G_{r-1} möglich sind, nennen wir r -legal, wenn dies auf den minimalen, γ enthaltenden Kantenweg zutrifft.

Im nächsten Lemma sehen wir, wie sich die Eigenschaft (RTT-3) für Kanten aus H_r auf r -legale Wege überträgt, falls H_r auch die Bedingungen (RTT-1) und (RTT-2) erfüllt. Außerdem zeigt es wichtige Eigenschaften der in Definition 2.5.5 eingeführten Längenfunktion. Zum besseren Verständnis der Definitionen geben wir dieses bekannte Lemma inklusive Beweis an.

Lemma 2.5.7 (r -legale Wege und die Längenfunktion, vgl. [BH92, Lemma 5.10]). Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine Homotopieäquivalenz und H_r ein exponentielles Stratum einer maximalen Filtrierung, für welches die Eigenschaften (RTT-1), (RTT-2) und (RTT-3) erfüllt sind. Dann gelten für jeden Kantenweg γ in G_r die Eigenschaften:

- (a) Der Weg γ ist genau dann r -legal, wenn bei der Berechnung von $[f^k(\gamma)]$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ keine Kürzungen mit H_r -Kanten auftreten.
- (b) Sei λ_r der Perron-Frobenius Eigenwert von $M_f(H_r)$ und L_r eine zugehörige Längenfunktion. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$L_r(f^k(\gamma)) = \lambda_r^k L_r(\gamma).$$

(c) Ist γ zusätzlich r -legal, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$L_r([f^k(\gamma)]) = \lambda_r^k L_r(\gamma).$$

Beweis. Zu (a): Es genügt hier den Fall zu verstehen, dass γ genau zwei Kanten aus H_r besitzt. Sei also

$$\gamma = \omega_0 E \omega_1 F \omega_2$$

mit $E, F \in \mathcal{E}(H_r)$ und reduzierten Wegen $\omega_0, \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{P}(G_{r-1})$, deren Höhe kleiner gleich $r - 1$ ist.

Setzen wir zunächst voraus, dass γ nicht r -legal ist. Dann muss ω_1 trivial sein und es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $T_f^k(EF) = C\bar{C}$ für eine Kante $C \in \mathcal{E}(H_r)$ gilt. Dann ist in dem Produkt

$$f^k(\gamma) = f^k(\omega_0) f^k(E) f^k(F) f^k(\omega_2)$$

die letzte Kante von $f^k(E)$ gleich C und \bar{C} die erste Kante von $f^k(F)$, so dass bei der Berechnung von $[f^k(\gamma)]$ mindestens ein Kantenpaar aus H_r gekürzt wird.

Für die andere Implikation sei γ ein r -legaler Weg und $k \in \mathbb{N}$. Nach (RTT-3) werden bei der Reduktion von $f^k(\gamma)$ zu

$$[f^k(\omega_0)] [f^k(E)] [f^k(\omega_1)] [f^k(F)] [f^k(\omega_2)] \quad (2.11)$$

keine Kanten aus H_r gekürzt. Wir zeigen nun, dass dieser Ausdruck bereits vollständig reduziert ist.

Fall 1: Der Weg ω_1 ist nicht-trivial.

In diesem Fall ist $[f^k(\omega_1)]$ wegen (RTT-2) ein nicht-trivialer Weg in G_{r-1} . Da die Wege $[f^k(E)]$ und $[f^k(F)]$ wegen (RTT-1) und (RTT-3) mit Kanten aus H_r beginnen und enden, ist der Weg in (2.11) reduziert.

Fall 2: Der Weg ω_1 ist trivial.

In diesem Fall bilden die letzte Kante von $[f^k(E)]$ und die erste Kante von $[f^k(F)]$ den reduzierten Weg $T_f^k(EF)$, so dass (2.11) auch in diesem Fall reduziert ist.

Zu (b): Seien E_1, E_2, \dots, E_n die positiven Kanten, zu denen wir die Übergangsmatrix aufgestellt haben und v der zu L_r gehörige positive linke Eigenvektor von $M_f(H_r)$.

Für einen Kantenweg $\omega \in \mathcal{P}(G_r)$ definieren wir den Spaltenvektor $S(\omega) \in \mathbb{N}_0^n$, dessen i -ter Eintrag zählt, wie oft der Weg γ über die Kante E_i bzw. \bar{E}_i läuft. Nach Definition der Längenfunktion gilt also

$$L_r(\omega) = vS(\omega).$$

Hiermit ergibt sich

$$L_r(f(\omega)) = vS(f(\omega)) = vM_f(H_r)S(\omega) = \lambda_r vS(\omega) = \lambda_r L_r(\omega).$$

Zu (c): Dies ist ein Korollar aus (a) und (b). □

2.6 Eine Schranke für die Länge von irreduziblen Nielsenwegen exponentieller Höhe

Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist Satz 2.6.1. Hier wird für eine Homotopieäquivalenz $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ mit einer maximalen Filtrierung

$$\emptyset = G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \dots \subsetneq G_m = \Gamma$$

eine obere Schranke für die Länge irreduzibler Nielsenwege einer exponentiellen Höhe r beweisen.

Durch die Voraussetzung, dass f zerteilt ist, verlangen wir hierbei implizit, dass der Nielsenweg ein Kantenweg ist. Das ist keine Einschränkung, da wir dies durch Einfügen weiterer Knoten erfüllen können. Alternativ könnten wir die Längenfunktion auch auf beliebige Wege verallgemeinern, so dass die relevanten Eigenschaften weiterhin erfüllt sind (siehe [BM16, Lemma 3.4]), und diese Voraussetzung streichen.

Satz 2.6.1 (L_r -Länge von irreduziblen Nielsenwegen). *Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine zerteilte Homotopieäquivalenz. Weiter sei H_r ein exponentielles Stratum einer maximalen Filtrierung, welches die Bedingungen (RTT-1), (RTT-2) und (RTT-3) erfüllt, L_r eine nach Definition 2.5.5 zugehörige Längenfunktion⁶ und ρ ein irreduzibler Nielsenweg der Höhe r . Dann gilt*

$$L_r(\rho) \leq 2 \cdot \sum_{E \in \mathcal{E}_+(H_r)} L_r(E).$$

Wir verschieben den Beweis von Satz 2.6.1 auf das Ende dieses Abschnittes.

Dies verbessert die bekannte Abschätzung (vgl. Lemma 2.6.9(a))

$$L_r(\rho) \leq 2 \cdot \frac{\lambda_r}{\lambda_r - 1} \cdot \sum_{E \in \mathcal{E}_+(H_r)} L_r(E).$$

In [BH92] werden *stabile* relative Train-Track Abbildungen eingeführt (vgl. folgende Definition 2.6.2). Für eine stabile relative Train-Track Abbildung $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ mit einem irreduziblen Nielsenweg ρ von exponentieller Höhe wird dann gezeigt (siehe [BH92, Theorem 5.15]), dass

$$L_r(\rho) = 2 \cdot \sum_{E \in \mathcal{E}_+(H_r)} L_r(E)$$

gilt. Für eine konkrete relative Train-Track Abbildung lässt sich dieser Satz jedoch nur schwer anwenden, da unklar ist, wie die Voraussetzung der Stabilität geprüft werden kann. Außerdem ist unklar, wie man einen stabilen relativen Train-Track für $\psi(\alpha)$ bzw. für α mit $\alpha \in \text{Aut}(F_n)$ konstruieren kann.

⁶Diese ist nach Satz 2.5.2(c) bis auf einen positiven Skalar eindeutig.

Definition 2.6.2 (stabile relative Train-Track Abbildung, vgl. [BH92, Seite 42]). Zu einer relativen Train-Track Abbildung mit maximaler Filtrierung

$$\emptyset = G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \dots \subsetneq G_m = \Gamma$$

bilden wir das Tupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ der Perron-Frobenius Eigenwerte. Dann streichen wir hier alle Eigenwerte die 0 oder 1 sind und erhalten ein Tupel $\Lambda(f)$. Eine relative Train-Track Abbildung $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$, welche ein topologischer Repräsentant für die äußere Klasse $\Phi(\alpha)$ eines Automorphismus $\alpha : \pi_1(R_n, \cdot) \rightarrow \pi_1(R_n, \cdot)$ ist (siehe Definition 2.1.4), heißt nun *stabil*, wenn sie die folgenden zwei Bedingungen erfüllt.

- Für jede andere relative Train-Track Abbildung $f' : \Gamma' \rightarrow \Gamma'$ für $\Phi(\alpha)$ und jede Wahl einer maximalen Filtrierung gilt $\Lambda(f) \leq \Lambda(f')$ bzgl. der lexikographischen Ordnung.
- Unter allen relativen Train-Track Abbildungen $f' : \Gamma' \rightarrow \Gamma'$ für $\Phi(\alpha)$, welche $\Lambda(f) = \Lambda(f')$ erfüllen, besitzt f eine minimale Anzahl an irreduziblen Nielsenwegen exponentieller Höhe.

Wie im Beweis von [BH92, Theorem 5.15] werden wir zum Beweis von Satz 2.6.1 eine Faltung des irreduziblen Nielsenweges definieren und dann die Homotopieäquivalenz unter einer iterierten Faltung des Nielsenweges untersuchen.

Definition 2.6.3 (Elementare Faltung, vgl. [Sta83, 3.2]). Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine Homotopieäquivalenz und seien $E, F \in \mathcal{E}(\Gamma)$ zwei Kanten mit $o(E) = o(F)$ und $f(E) = f(F)$. Unten definieren wir eine Homotopieäquivalenz, die durch eine *elementare Faltung* der Kanten E und F entsteht, zusammen mit einer *Projektion* $p : \Gamma \rightarrow \Gamma'$, die $[(p(f(\omega)))] = [f'(p(\omega))]$ für alle $\omega \in \mathcal{P}(\Gamma)$ erfüllt.

Nach Lemma 2.1.3 ist höchstens einer der beiden Kanten eine Schleife. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass F keine Schleife ist und definieren den in Abbildung 2.11 dargestellten Graphen Γ' durch

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\Gamma') &= \mathcal{V}(\Gamma) \setminus \{t(F)\}, \\ \mathcal{E}(\Gamma') &= \mathcal{E}(\Gamma) \setminus \{F, \bar{F}\} \text{ und} \\ o'(D) &= \begin{cases} o(D) & \text{falls } o(D) \neq t(F), \\ t(E) & \text{sonst} \end{cases} \text{ für } D \in \mathcal{E}(\Gamma'). \end{aligned}$$

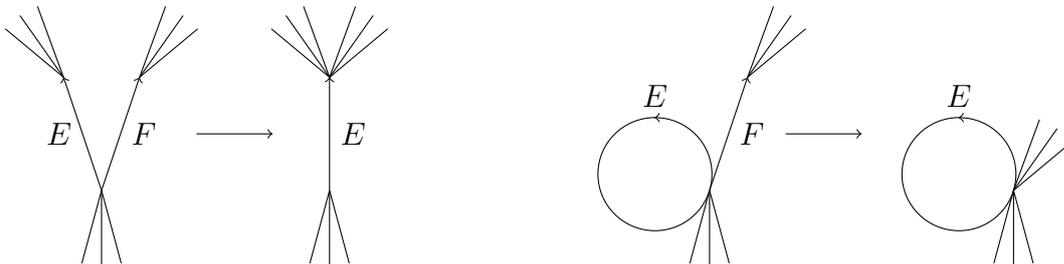


Abbildung 2.11: Die zwei Fälle für eine elementare Faltung: Rechts ist einer der Kanten eine Schleife und links nicht.

Wir definieren die Projektion $p : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ durch $p(F) = E$, $p(\overline{F}) = \overline{E}$ und $p(D) = D$ für jede Kante $D \in \mathcal{E}(\Gamma) \setminus \{F, \overline{F}\}$. Für $D \in \mathcal{E}(\Gamma')$ sei $f'(D) = [p(f(D))]$ der Weg, der aus $f(D)$ entsteht, indem F durch E und \overline{F} durch \overline{E} ersetzt und anschließend reduziert wird.

Lemma 2.6.4 (Eigenschaften elementarer Faltungen, vgl. [BH92, Lemma 1.15]). *Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ eine Homotopieäquivalenz mit einer maximalen Filtrierung*

$$\emptyset = G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \dots \subsetneq G_m = \Gamma.$$

Weiter sei H_r ein exponentielles Stratum mit Perron-Frobenius Eigenwert λ_r , für welches die Bedingungen (RTT-1) und (RTT-3) erfüllt sind, und $E, F \in \mathcal{E}(H_r)$ zwei Kanten mit $o(E) = o(F)$ und $f(E) = f(F)$.

Dann erfüllt die Homotopieäquivalenz $f' : \Gamma' \rightarrow \Gamma'$, welche durch eine elementare Faltung der Kanten E und F entsteht, die folgenden Eigenschaften:

- (a) Die Kanten $\mathcal{E}(H_r) \setminus \{F, \overline{F}\}$ bilden ein exponentielles Stratum H'_r jeder maximalen Filtrierung von f' . Dieses Stratum besitzt den Perron-Frobenius Eigenwert λ_r und erfüllt die Bedingungen (RTT-1) und (RTT-3).
- (b) Sei $n = |\mathcal{E}_+(H_r)|$. Ohne Einschränkung seien E und F positive Kanten. Wir nummerieren die Kanten aus $\mathcal{E}_+(H_r)$ so, dass die Kante E den Index $n - 1$ und die Kante F den Index n besitzt. Die Kanten aus $\mathcal{E}_+(H'_r)$ nummerieren wir so, dass $p(E) = p(F)$ den Index $n - 1$ hat und die weiteren Kanten aus $\mathcal{E}_+(H'_r)$ den gleichen Index wie in $\mathcal{E}_+(H_r)$ besitzen.

Dann entsteht $M_{f'}(H'_r)$ aus $M_f(H_r)$ durch Addition der letzten Zeile zur vorletzten Zeile und anschließendem Streichen der letzten Spalte und der letzten Zeile. Ist v ein positiver linker Eigenvektor von $M_f(H_r)$, so ist $v_{n-1} = v_n$ und

$$v' := (v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$$

ein positiver linker Eigenvektor von $M_{f'}(H'_r)$.

- (c) Ist σ ein r -legaler Weg in G_r , so ist $p(\sigma)$ ebenfalls r -legal.

Beweis. Zu (a): Wir argumentieren zunächst, dass H'_r ein Stratum jeder maximalen Filtrierung von $f' : \Gamma' \rightarrow \Gamma'$ ist. Da $p(G_{r-1})$ und $p(G_r) = p(G_{r-1}) \cup H'_r$ jeweils f' -invariant sind, genügt es hierfür zu beweisen, dass es für zwei Kanten $C', D' \in \mathcal{E}(H'_r)$ einen Exponenten $k \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass der Weg $f'^k(C')$ über die Kante D' (bzw. \overline{D}') läuft. Seien $C, D \in \mathcal{E}(H_r)$ mit $p(C) = C'$ und $p(D) = D'$ und $k \in \mathbb{N}_0$, so dass $f^k(C)$ über die Kante D (bzw. \overline{D}) führt. Wegen (RTT-3) gilt dies dann auch für $[f^k(C)]$ und der Weg

$$[f'^k(C')] = [f'^k(p(C))] = [p(f^k(C))]$$

führt über die Kante D' (bzw. \overline{D}').

Da die Bedingung (RTT-1) offensichtlich für H'_r erfüllt ist, beweisen wir nun, dass auch (RTT-3) gilt. Sei dazu $C' = p(C)$ eine Kante aus H'_r und $k \in \mathbb{N}$. Würden bei der Berechnung von $[f^{k+1}(C')] = [p(f^k(C))]$ zwei Kanten aus H'_r gekürzt, so müsste der Weg $f^k(C)$ über \overline{EF} oder über \overline{FE} führen. Wegen $f(E) = f(F)$ erhielten wir den Widerspruch, dass bei der Berechnung von $[f^{k+1}(C)]$ zwei Kanten aus H_r gekürzt werden.

Dass das Stratum H'_r den Perron-Frobenius Eigenwert λ_r besitzt, folgt mit Satz 2.5.2(2), da v' nach (b) ein positiver linker Eigenvektor von $M_{f'}(H'_r)$ zum Eigenwert λ_r ist.

Zu (b): Dieser Teil kann analog zu [BH92, Lemma 1.15] bewiesen werden.

Zu (c): Sei σ ein r -legaler Weg. Nach Lemma 2.5.7 müssen wir für $k \in \mathbb{N}$ zeigen, dass sich bei der Berechnung von $[f'^k(p(\sigma))]$ keine Kanten aus H'_r kürzen. Dieser Beweis ist analog zum Beweis der Eigenschaft (RTT-3) in (a). \square

Für eine Homotopieäquivalenz $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ mit einem exponentiellen Stratum H_r , welches die Bedingungen (RTT-1) und (RTT-3) erfüllt, definieren wir noch eine weitere Faltung. Sind $E, F \in \mathcal{E}(H_r)$ zwei Kanten mit $f(E) \prec f(F)$, so wollen wir E mit dem ersten Teil von F falten, so dass das zu H_r gehörige Stratum in der gefalteten Homotopieäquivalenz $f' : \Gamma' \rightarrow \Gamma'$ weiterhin (RTT-1) und (RTT-3) erfüllt.

Definition 2.6.5 (Erweiterte Faltung, vgl. [BH92, Beweis von Proposition 5.15]). Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine Homotopieäquivalenz und H_r ein exponentielles Stratum einer maximalen Filtrierung, welches die Bedingungen (RTT-1) und (RTT-3) erfüllt. Weiter seien $E, F \in \mathcal{E}(H_r)$ zwei Kanten mit $o(E) = o(F)$ und $f(E) \prec f(F)$. Wir schreiben $f(F) = f(E)\omega$ mit $\omega \in \mathcal{P}(G_r)$ und bemerken, dass die letzte Kante von ω nach (RTT-3) in H_r liegt.

Fall 1: Die erste Kante von ω liegt in H_r .

Durch Einfügen eines neuen Knotens zerteilen wir F zu F_1F_2 mit $f(F_1) = f(E)$ und $f(F_2) = \omega$. Nun entstehe $f' : \Gamma' \rightarrow \Gamma'$ durch eine elementare Faltung der Kanten E und F_1 . Die Graphen Γ und Γ' haben hierbei die gleiche Anzahl an Kanten.

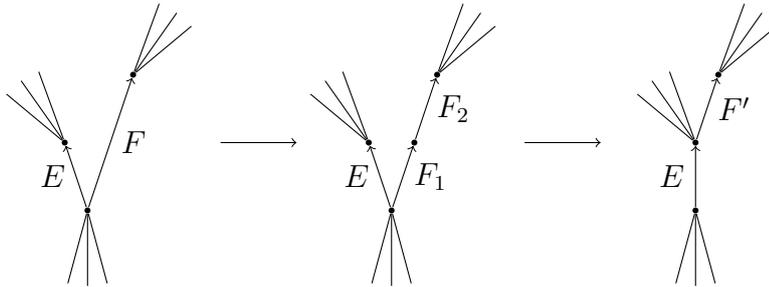


Abbildung 2.12: Erweiterte Faltung der Kanten E und F , falls $f(E) \prec f(F)$ und nach $f(E)$ in $f(F)$ eine Kante aus H_r folgt.

Fall 2: Die erste Kante von ω liegt in G_{r-1} .

Sei $\omega = \omega_1\omega_2$, wobei ω_1 ein maximaler Anfangsweg von ω ist, welcher in G_{r-1} verläuft. Durch Einfügen von zwei neuen Knoten zerteilen wir F zu F_1NF_2 mit $f(F_1) = f(E)$,

$f(N) = \omega_1$ und $f(F_2) = \omega_2$. Nun entstehe $f' : \Gamma' \rightarrow \Gamma'$ durch eine elementare Faltung der Kanten E und F_1 .

Wir bemerken, dass N nach dieser Zerteilung ein neues Nullstratum von f' bildet, welches in der Filtrierung direkt vor H_r eingegliedert werden kann, und dass $f(F_2)$ mit einer Kante aus H_r beginnt und endet.

Wir sagen in beiden Fällen, dass die so entstehende Homotopieäquivalenz $f' : \Gamma' \rightarrow \Gamma'$ durch eine *erweiterte Faltung* aus $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ hervorgeht.

Es ist klar, dass $H'_r := p(H_r)$ in $f' : \Gamma' \rightarrow \Gamma'$ wieder die Bedingung (RTT-1) erfüllt.

Bemerkung 2.6.6. Auch wenn H_r die Bedingung (RTT-2) erfüllt, kann sie nach einer elementaren Faltung zweier Kanten $E, F \in \mathcal{E}(H_r)$ verloren gehen: Nehmen wir an, dass zwei Wege $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{P}(G_{r-1})$ mit $o(\alpha_1) = o(\alpha_2) \in \mathcal{V}(H_r)$, $t(\alpha_1) = t(E)$, $t(\alpha_2) = t(F)$ und $[f(\alpha_1)] = [f(\alpha_2)]$ existieren. Seien α'_1 und α'_2 die Bilder von α_1 und α_2 nach der Faltung $p : \Gamma \rightarrow \Gamma'$. Dann ist $[\alpha'_1 \alpha'_2]$ ein nicht-trivialer Weg in $\mathcal{P}(G'_{r-1})$, dessen Endpunkte in $\mathcal{V}(H'_r)$ liegen und für den $f'([\alpha'_1 \alpha'_2])$ trivial ist.

Das Gleiche gilt für erweiterte Faltungen nach Fall 2. Gibt es hier einen Weg $\alpha_1 \in \mathcal{P}(G_{r-1})$ mit $o(\alpha_1) \in \mathcal{V}(H_r)$, $t(\alpha_1) = t(E)$ und $[f(\alpha_1)] = f(\overline{N}) = \overline{\omega_2}$ (siehe Definition 2.6.5), so zeigt die Projektion des Weges $\alpha_1 N$, dass die Bedingung (RTT-2) nach der Faltung nicht erfüllt ist.

Im Lemma 2.6.7 erklären wir, dass zusätzlich zur Bedingung (RTT-1) auch die Bedingung (RTT-3) bei einer erweiterten Faltung erhalten bleibt und wie die Längenfunktion L_r eine Längenfunktion für den gefalteten Graphen induziert. Anschließend zeigen wir dann, wie die Bedingung (RTT-2) für den gefalteten Graphen hergestellt werden kann.

Lemma 2.6.7 (Eigenschaften erweiterter Faltungen). *In der Situation von Definition 2.6.5 gelten die folgenden Eigenschaften:*

- (a) *Die Kanten $H'_r := \mathcal{E}(H_r) \setminus \{F, \overline{F}\} \cup \{F_2, \overline{F_2}\}$ bilden ein exponentielles Stratum jeder maximalen Filtrierung von f' . Dieses Stratum besitzt wieder den Perron-Frobenius Eigenwert λ_r und erfüllt die Bedingungen (RTT-1) und (RTT-3).*
- (b) *Sei $n = |\mathcal{E}_+(H_r)|$. Ohne Einschränkung seien E und F positive Kanten. Wir wählen eine Nummerierung der Kanten aus $\mathcal{E}_+(H_r)$. Sei k der Index von E und l der Index von F . Weiter seien die Kanten aus $\mathcal{E}_+(H'_r)$ so nummeriert, dass F_2 den Index l besitzt und die weiteren Kanten aus $\mathcal{E}_+(H'_r)$ den gleichen Index wie in $\mathcal{E}(H_r)$ besitzen.*

Dann gilt

$$M_{f'}(H'_r) = S_{kl}(1) M_f(H_r) S_{kl}(1)^{-1}, \quad (2.12)$$

wobei $S_{kl}(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ die $n \times n$ -Matrix beschreibt, die aus der Einheitsmatrix hervorgeht, indem der Eintrag an der Stelle k, l zu x geändert wird.

Ist v ein positiver linker Eigenvektor von $M_f(H_r)$, so gilt $v_k < v_l$ und

$$v' := v S_{kl}(1)^{-1}$$

ist ein positiver linker Eigenvektor von $M_{f'}(H'_r)$.

(c) Ist σ ein r -legaler Weg in G_r , so ist $p(\sigma)$ ebenfalls r -legal.

Beweis. Wir beweisen das Lemma nur für eine erweiterte Faltung nach Fall 2, da die Aussagen für eine erweiterte Faltung nach Fall 1 dann analog gezeigt werden können.

Zu (a) Wie im Beweis von Lemma 2.6.4 genügt es für die Irreduzibilität von H'_r zu zeigen, dass es für alle Kanten $C, D \in \mathcal{E}(H'_r)$ einen Exponenten $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $f'^k(C)$ über D (bzw. \overline{D}) führt. Da die vier Fälle, ob C und D jeweils eine der Kanten aus $\{F_2, \overline{F_2}\}$ oder aus $\mathcal{E}(H'_r) \setminus \{F_2, \overline{F_2}\}$ ist, analog gezeigt werden können, untersuchen wir nur den Fall $C = F_2$ und $D \in \mathcal{E}(H'_r) \setminus \{F_2, \overline{F_2}\}$.

Sei $B \in \mathcal{E}(H_r)$ die letzte Kante von $f(F_2)$. Wähle einen Index $k \in \mathbb{N}$, so dass $f^k(B)$ über D (bzw. \overline{D}) läuft. Dann gilt dies auch für $f^{k+1}(F_2)$. Im Beweis von (b) werden wir sehen, dass damit auch $f'^{k+1}(F_2)$ über D (bzw. \overline{D}) führt.

Das dieses Stratum den Perron-Frobenius Eigenwert λ_r besitzt, folgt mit Satz 2.5.2(2) wieder daraus, dass v' nach (b) ein positiver Eigenvektor zum Eigenwert λ_r ist.

Zu (b): Für eine Kante $D \in \mathcal{E}(H_r) \setminus \{F, \overline{F}\}$ entsteht $f'(D)$ aus $f(D)$, indem F durch ENF_2 (und \overline{F} durch $\overline{F_2} \overline{N} \overline{E}$) ersetzt wird: Da $f(D)$ ein r -legaler Weg ist und somit $\overline{E}F$ und $\overline{F}E$ nicht als Teilweg besitzt, treten nach dieser Substitution keine Kürzungen auf.

In der zu D gehörenden Spalte der Übergangsmatrix wird also der l -te Eintrag zum k -ten Eintrag addiert. Diese Überlegung zeigt, dass die Gleichung (2.12) für alle Spalten i mit $i \neq l$ erfüllt ist.

Die Gültigkeit dieser Gleichung für die l -te Spalte ergibt sich daraus, dass $f'(F_2)$ aus $f(F)$ entsteht, indem zunächst der Anfang $f(E)\omega$ gestrichen wird und F anschließend wie oben substituiert wird.

Offensichtlich ist v' ein linker Eigenvektor von $M_{f'}(H'_r)$ zum Eigenwert λ_r . Es genügt nun $v_k < v_l$ zu zeigen, da v' hiermit auch positiv ist.

Sei $M_f(H_r) = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Aus der Gleichung $vM = \lambda_r v$ erhalten wir

$$v_k = \frac{1}{\lambda_r} \sum_{i=1}^n v_i m_{ik} \quad \text{und} \quad v_l = \frac{1}{\lambda_r} \sum_{i=1}^n v_i m_{il}.$$

Hierbei gilt $m_{ik} \leq m_{il}$ für alle $1 \leq i \leq n$, da $f(E) \prec f(F)$ ist. Da die letzte Kante von ω in H_r liegt, wobei $f(F) = f(E)\omega$ gelte, ist hierbei für mindestens ein Index i die Ungleichung $m_{ik} < m_{il}$ erfüllt und es folgt $v_k < v_l$.

Zu (c): Dies lässt sich wieder analog zum Beweis der Eigenschaft (RTT-3) in (a) beweisen. □

Bemerkung 2.6.8 (Reparatur von (RTT-2)). In dem Artikel [BH92] wird ein Algorithmus skizziert, mit dem zu einem äußeren Automorphismus ein relativer Train-Track konstruiert werden kann. Falls die Eigenschaft (RTT-1) erfüllt ist, wird hierzu unter anderem gezeigt, wie durch Zerteilungen und elementare Faltungen von Kanten in G_{r-1}

erreicht werden kann, dass (RTT-2) gilt (siehe [BH92, Lemma 5.14]). Bei dem Bild einer Kante aus H_r werden hierbei nur die Kantenwege aus G_{r-1} verändert. Speziell bleibt H_r hierbei das Stratum einer maximalen Filtrierung mit der gleichen Übergangsmatrix.

Für unsere Zwecke müssen wir noch prüfen, dass auch die Eigenschaft (RTT-3) erhalten bleibt. Offensichtlich ist dies für eine Zerteilung einer Kante aus G_{r-1} der Fall. Wir untersuchen nun, dass dies auch für eine elementare Faltung zweier Kanten aus G_{r-1} zutrifft.

Seien also $E, F \in \mathcal{E}(G_{r-1})$ mit $f(E) = f(F)$, $f' : \Gamma' \rightarrow \Gamma'$ die Homotopieäquivalenz, die durch eine elementare Faltung aus $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ entsteht, und $p : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ die Projektionsabbildung. Angenommen es gäbe eine Kante $p(C) \in \mathcal{E}(H'_r)$ und einen Exponenten $k \in \mathbb{N}_0$, so dass bei der Berechnung von $[f'^k(p(C))] = [p(f^k(C))]$ Kanten aus H'_r gekürzt würden. Dann müsste es in $f^k(C)$ einen Teilweg der Form $D\omega\bar{D}$ mit $D \in \mathcal{E}(H_r)$ und einem Weg ω mit $[p(\omega)] = 1$ und $\text{Höhe}(\omega) < r$ geben. Da p eine Homotopieäquivalenz und ω geschlossen ist, müsste ω dann trivial sein. Dies wäre ein Widerspruch zu (RTT-3) für H_r bzgl. $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$.

Durch Anwendung von [BFH00, Lemma 4.2.6] und [BFH00, Lemma 4.2.5] erhalten wir die Aussagen (b) und (c) sowie den Zusatz nach (d) des folgenden Lemmas. Die Aussage (d) wird für stabile relative Train-Track Abbildungen in [BH92, Lemma 5.17] gezeigt. Da im dortigen Beweis die Stabilität explizit benutzt wird, geben wir für diese Eigenschaft einen anderen Beweis an. Die Beweisidee beruht hierbei auf den Beweis von [BH92, Lemma 3.8].

Lemma 2.6.9 (Eigenschaften irreduzibler Nielsenwege). *Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine zerteilte Homotopieäquivalenz und $\emptyset = G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \dots \subsetneq G_m = \Gamma$ eine maximale Filtrierung mit einem exponentiellen Stratum H_r , welches die Bedingungen (RTT-1), (RTT-2) und (RTT-3) erfüllt. Weiter sei ρ ein irreduzibler Nielsenweg der Höhe r . Dann gibt es eine Zerlegung $\rho = \alpha\bar{\beta}$ mit den folgenden Eigenschaften.*

- (a) *Es gilt $0 < L_r(\alpha) = L_r(\beta) \leq \frac{\lambda_r}{\lambda_r - 1} \cdot \text{Vol}_r(\Gamma)$.*
- (b) *Die Wege α und β beginnen und enden mit einer Kante aus H_r .*
- (c) *Die Wege α und β sind r -legal.*
- (d) *Falls α und β jeweils nicht nur aus einer Kante bestehen, und E die erste Kante von $\bar{\alpha}$ und F die erste Kante von $\bar{\beta}$ ist, so gilt $f(E) = f(F)$, $f(E) \prec f(F)$ oder $f(F) \prec f(E)$.*

Umgekehrt ist jeder Nielsenweg ρ der Höhe r , welcher sich als $\rho = \alpha\bar{\beta}$ mit r -legalen Wegen α und β schreiben lässt und dessen erste und letzte Kante in H_r liegen, ein irreduzibler Nielsenweg.

Beweis. Zu (a): Siehe [DV96, Lemma IV.3.5].

Zu (d): Sei $\rho = \alpha\bar{\beta}$ ein irreduzibler Nielsenweg mit r -legalen Wegen α, β , die jeweils nicht nur aus einer Kante bestehen. Wir schreiben $\alpha = \alpha'\bar{E}$ und $\beta = \beta'\bar{F}$, wobei E die erste Kante von $\bar{\alpha}$ und F die erste Kante von $\bar{\beta}$ sei. Da die erste Kante des nicht-trivialen Weges von α' nach (b) die Höhe r besitzt, gilt $L_r(\alpha') > 0$.

Sei z der maximale gemeinsame Endweg von $[f(\alpha)]$ und $[f(\bar{\beta})]$. Dann gilt

$$[f(\alpha)] = \alpha z \text{ und } [f(\beta)] = \bar{z}\beta. \quad (2.13)$$

Da f die Bedingungen (RTT-1), (RTT-2) und (RTT-3) erfüllt, folgt

$$[f(\alpha)] = [f(\alpha'\bar{E})] = [f(\alpha')] [f(\bar{E})].$$

Zusammen mit (2.13) gilt also

$$[f(\alpha')] [f(\bar{E})] = \alpha'\bar{E}z. \quad (2.14)$$

Da hierbei $[f(\alpha')]$ ein Anfangskantenweg von $\alpha'\bar{E}z$ mit

$$L_r(f(\alpha')) = \lambda_r L_r(\alpha') > L_r(\alpha')$$

ist, gibt es eine Zerlegung $z = z_1 z_2$ (z_1 darf hierbei ein trivialer Weg sein) mit $f(\alpha') = \alpha'\bar{E}z_1$. Mit (2.14) folgt $f(\bar{E}) = z_2$ und somit

$$f(E) \preceq \bar{z}.$$

Analog ist $f(F) \preceq \bar{z}$. Da nun $f(E)$ und $f(F)$ Anfangswege eines gemeinsamen Weges sind, haben wir (d) bewiesen. \square

Beweis von Satz 2.6.1. Wir definieren

$$\text{Vol}_r(\Gamma) := \sum_{E \in \mathcal{E}_+(H_r)} L_r(E).$$

und nehmen an, ρ sei ein irreduzibler Nielsenweg der Höhe r mit

$$d := L_r(\rho) - 2 \cdot \text{Vol}_r(\Gamma) > 0.$$

Es bezeichne λ_r den Perron-Frobenius Eigenwert zu H_r . Für $i \in \mathbb{N}$ wollen wir nun die folgende Objekte rekursiv definieren:

- (1) Eine Homotopieäquivalenz $f^{(i)} : \Gamma^{(i)} \rightarrow \Gamma^{(i)}$.
- (2) Ein exponentielles Stratum $H_r^{(i)}$ von $f^{(i)}$ mit $n^{(i)} := \left| H_r^{(i)} \right| \leq \left| H_r^{(1)} \right|$, welches die Bedingungen (RTT-1), (RTT-2) und (RTT-3) erfüllt und den Perron-Frobenius Eigenwert λ_r besitzt.
- (3) Einen positiven linken Eigenvektor $v^{(i)}$ von $M_{f^{(i)}}(H_r^{(i)})$ mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Vol}_r^{(i)}(\Gamma^{(i)}) = 0.$$

(4) Einen irreduziblen Nielsenweg $\rho^{(i)}$, für den

$$L_r^{(i)}(\rho^{(i)}) = 2 \cdot \text{Vol}_r^{(i)}(\Gamma^{(i)}) + d$$

gilt.

Wir zeigen nun zunächst, wie sich hieraus ein Widerspruch ergibt und werden anschließend die rekursiven Definitionen angeben. Aus (3) und (4) folgt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{L_r^{(i)}(\rho^{(i)})}{2 \cdot \text{Vol}_r^{(i)}(\Gamma^{(i)})} = \infty.$$

Dies ist ein Widerspruch dazu, dass nach Lemma 2.6.9(a) die Ungleichung

$$L_r^{(i)}(\rho^{(i)}) \leq 2 \frac{\lambda_r}{\lambda_r - 1} \cdot \text{Vol}_r^{(i)}(\Gamma^{(i)})$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Nun geben wir die rekursive Definition für (1)–(4) an. Für $i = 1$ wählen wir die Homotopieäquivalenz $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$, das Stratum $H_r^{(1)} = H_r$, den zu L_r gehörigen linken Eigenvektor von $M_f(H_r)$ als $v^{(1)}$ und den irreduziblen Nielsenweg $\rho^{(1)} = \rho$.

Setzen wir jetzt voraus, dass die Konstruktion bis zum Index i durchgeführt ist. Nach Lemma 2.6.9 können wir $\rho^{(i)} = \alpha^{(i)}\overline{\beta^{(i)}}$ mit r -legalen Wegen $\alpha^{(i)}$ und $\beta^{(i)}$ schreiben, wobei die erste Kante $E^{(i)}$ (bzw. $F^{(i)}$) von $\alpha^{(i)}$ (bzw. $\beta^{(i)}$) in $H_r^{(i)}$ liegt. Nach Lemma 2.6.9(a) und Eigenschaft (4) gilt hierbei $L_r^{(i)}(\alpha^{(i)}) = L_r^{(i)}(\beta^{(i)}) > \text{Vol}_r^{(i)}(\Gamma^{(i)})$. Daraus folgt, dass $\alpha^{(i)}$ und $\beta^{(i)}$ jeweils nicht nur aus einer Kante bestehen können. Nach eventueller Vertauschung von $\alpha^{(i)}$ mit $\beta^{(i)}$ folgt $f^{(i)}(E^{(i)}) \preceq f^{(i)}(F^{(i)})$ mit Lemma 2.6.9(d).

Für $f^{(i)}(E^{(i)}) = f^{(i)}(F^{(i)})$ führen wir nun eine elementare Faltung und im anderen Fall eine erweiterte Faltung der Kanten $E^{(i)}$ und $F^{(i)}$ durch. Anschließend stellen wir mit Bemerkung 2.6.8 die Bedingung (RTT-2) her.

Sei $f^{(i+1)} : \Gamma^{(i+1)} \rightarrow \Gamma^{(i+1)}$ die so entstehende Homotopieäquivalenz. Nach Lemma 2.6.4, Lemma 2.6.7 und Bemerkung 2.6.8 liefert uns dies ein exponentielles Stratum $H_r^{(i+1)}$ mit Perron-Frobenius Eigenwert λ_r und einen linken positiven Eigenvektor $v_r^{(i+1)}$, so dass die Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind.

Zu (3): Es ist

$$\text{Vol}_r^{(i)}(\Gamma^{(i)}) = \sum_{j=1}^{n^{(i)}} v_j^{(i)}.$$

Für eine elementare Faltung entsteht $v^{(i+1)}$ aus $v^{(i)}$ durch Weglassen eines Eintrages und für eine erweiterte Faltung, indem ein Eintrag um einen anderen Eintrag verringert wird. In beiden Fällen gibt es also einen Index $1 \leq j \leq n^{(i)}$ mit

$$\text{Vol}_r^{(i+1)}(\Gamma^{(i+1)}) = \text{Vol}_r^{(i)}(\Gamma^{(i)}) - v_j^{(i)}. \quad (2.15)$$

Aus Satz 2.5.2(3) und $n^{(i)} \leq n^{(1)} =: n$ folgt

$$v_j^{(i)} \geq \frac{\lambda - 1}{\lambda^n - 1} \cdot \text{Vol}_r(\Gamma^{(i)})$$

und wir erhalten

$$\text{Vol}_r^{(i+1)}(\Gamma^{(i+1)}) \leq \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda^n - 1}\right)}_{=: q < 1} \cdot \text{Vol}_r(\Gamma^{(i)}).$$

Also gilt $\text{Vol}_r^{(i)}(\Gamma^{(i)}) \leq q^{i-1} \cdot \text{Vol}_r^{(1)}(\Gamma^{(1)})$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und wir haben (3) bewiesen.

Zu (4): Sei $p : \Gamma^{(i)} \rightarrow \Gamma^{(i+1)}$ die Projektion von $\Gamma^{(i)}$ nach $\Gamma^{(i+1)}$. Für diese gilt

$$[(p \circ f^{(i)})(\sigma)] = [(f^{(i+1)} \circ p)(\sigma)] \quad (2.16)$$

für alle Wege $\sigma \in \mathcal{P}(\Gamma^{(i)})$. Durch Projektion von $\rho^{(i)} = \alpha^{(i)}\overline{\beta^{(i)}}$ und anschließende Reduktion entstehe der Weg $\rho^{(i+1)}$.

Einsetzen des Nielsenweges $\rho^{(i)}$ in die Gleichung (2.16) zeigt, dass $\rho^{(i+1)}$ wieder ein Nielsenweg ist.

Im Hinblick auf Gleichung (2.15) müssen für die Gleichung in (4) zeigen, dass

$$L_r^{(i+1)}(\rho^{(i+1)}) = L_r^{(i)}(\rho^{(i)}) - 2v_j^{(i)}$$

gilt. Wir müssen also zeigen, dass bei der Reduktion von $p(\alpha^{(i)}\overline{\beta^{(i)}})$ zu $\rho^{(i+1)}$ ein Weg mit der L_r -Länge $2v_j^{(i)}$ gekürzt wird.

Hierzu unterscheiden wir, ob $\Gamma^{(i+1)}$ durch eine elementare Faltung, eine erweiterte Faltung nach Fall 1 oder eine erweiterte Faltung nach Fall 2 aus $\Gamma^{(i)}$ hervorgegangen ist. Da die Beweise in allen drei Fällen analog verlaufen, betrachten wir nur den Fall einer erweiterten Faltung nach Fall 1.

Die Differenz $v_j^{(i)}$ von $\text{Vol}_r^{(i)}(\Gamma^{(i)})$ und $\text{Vol}_r^{(i+1)}(\Gamma^{(i+1)})$ ist hier gleich $L_r(E^{(i)})$. Wir erinnern daran, dass die Projektion die Kante $F^{(i)}$ durch $E^{(i)}F_2^{(i)}$ ersetzt und die Kanten aus $H_r^{(i)} \setminus \{F^{(i)}, \overline{F^{(i)}}\}$ identisch abbildet, wobei $F^{(i)}$ zu den Kanten $F_1^{(i)}F_2^{(i)}$ zerteilt wurde und anschließend die Kanten $E^{(i)}$ und $F_1^{(i)}$ gefaltet wurden.

Da $\alpha^{(i)}$ ein r -legaler Weg ist, welcher mit $\overline{E^{(i)}}$ endet, ist der Weg $p(\alpha^{(i)})$ ein reduzierter Weg, dessen letzte Kante gleich $\overline{E^{(i)}}$ ist und dessen vorletzte Kante ungleich $\overline{F^{(i)}}$ ist.

Analog ist $p(\overline{\beta^{(i)}})$ ein reduzierter Weg. Dieser beginnt mit $E^{(i)}F^{(i)}$.

Es wird also genau der Teilweg $\overline{E^{(i)}}E^{(i)}$ gekürzt, dessen L_r -Länge gleich $2v_j^{(i)}$ ist.

Die Irreduzibilität von $\rho^{(i+1)}$ folgt schließlich mit Lemma 2.6.9, da sich $\rho^{(i+1)}$ nach Lemma 2.6.4(c) bzw. Lemma 2.6.7(c) aus zwei r -legalen Wegen zusammensetzt und die erste und letzte Kante von $\rho^{(i+1)}$ in $H_r^{(i+1)}$ liegt. \square

3 Struktur des Graphen D_f für relative Train-Track Abbildungen $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$

In dem Abschnitt 2.4 haben wir gezeigt, wie sich die irreduziblen Nielsenwege von einer zerteilten Homotopieäquivalenz durch einen Graphen \mathcal{G} beschreiben lassen. Der Graph \mathcal{G} konnte hierbei algorithmisch konstruiert werden, falls die Probleme (P1) und (P2) algorithmisch lösbar sind:

- (P1) Entscheide für $E \in \mathcal{S}$, ob der Weg γ_E in einem toten Punkt endet, einen Strahl bildet oder in eine Schleife läuft.
- (P2) Entscheide für jedes Paar $E, F \in \mathcal{S}_2$ mit $E \neq F$, ob sich die Strahlen γ_E und γ_F schneiden.

Diese Probleme werden in [BM16] für relative Train-Track Abbildungen gelöst. Wir werden in diesem Kapitel einige Schritte dieser Lösung effizienter machen. So wird unsere Lösung z.B. ohne die Überprüfung auf Normalität (vgl. [BM16, Definition 5.11]) auskommen.

Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine relative Train-Track Abbildung und μ ein f -Weg mit $r := \text{Höhe}(\mu)$ bzgl. einer maximalen Filtrierung

$$\emptyset = G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \dots \subsetneq G_m = \Gamma. \tag{3.1}$$

Dann werden wir zusätzlich einen genauen Einblick in die Struktur der μ enthaltenden Zusammenhangskomponente von $D_f(G_r)$ bekommen.

3.1 Grundlegendes

In diesem Abschnitt sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine zerteilte relative Train-Track Abbildung mit einer maximalen Filtrierung wie in (3.1).

Definition 3.1.1 (von $\hat{f}(\mu)$ und $\gamma(\mu)$). Für einen reduzierten f -Weg μ in Γ definieren wir (analog zur Definition 2.4.1 von γ_E für $E \in \mathcal{S}$) einen Weg $\gamma(\mu)$ in D_f , welcher in μ beginnt und von dort der bevorzugten Richtung folgt. Falls dieser Weg auf einen toten Punkt trifft, ende er hier.

Ist μ ein nicht-trivialer, reduzierter f -Kantenweg in Γ , so bezeichnen wir mit $\hat{f}(\mu)$ den nächsten Knoten auf dem Weg $\gamma(\mu)$. Ist E die erste Kante von μ , so gilt also

$$\hat{f}(\mu) = [\overline{E}\mu f(E)].$$

Falls für $i \in \mathbb{N}_0$ der Weg $\gamma(\mu)$ noch i weitere Knoten enthält, so sei $\hat{f}^i(\mu)$ der Knoten, der durch i -fache Anwendung von \hat{f} auf μ entsteht.

Wir bemerken, dass der Weg γ_E mit der Kante

$$1_{o(E)} \xrightarrow{E} [\overline{E}f(E)]$$

beginnt. Da wir die Höhe eines trivialen Weges als 0 definiert haben, steigt die Höhe hier also. Folgen wir dem Weg γ_E weiter, so muss die Höhe jedoch wegen der f -Invarianz der Graphen G_0, G_1, \dots, G_m monoton fallen.

Die wesentlichen Schritte zur Lösung von (P1) und (P2) fassen wir vorab in der folgenden Bemerkung zusammen. Der wesentliche Aufbau entspricht hierbei dem Vorgehen in [BM16].

Bemerkung 3.1.2 (Vorgehen).

- (a) Definiere \mathbb{A} -perfekte, \mathbb{B} -perfekte¹ und \mathbb{E} -perfekte Punkte.
- (b) Zeige, dass für jeden Weg γ_E mit $E \in \mathcal{S}_2$ genau einer der folgenden drei Fälle auftritt:
 - Fall 1: γ_E enthält einen \mathbb{A} -perfekten Punkt.
 - Fall 2: γ_E enthält einen \mathbb{B} -perfekten Punkt.
 - Fall 3: γ_E enthält einen \mathbb{E} -perfekten Punkt.
- (c) Erkläre, wie man für $E \in \mathcal{S}$ einen toten Punkt, eine Schleife oder einen perfekten (d.h. \mathbb{A} -, \mathbb{B} - oder \mathbb{E} -perfekten) Punkt in γ_E finden kann. Hierzu genügt es, wenn wir für einen f -Weg μ in γ_E entweder einen perfekten Punkt oder einen Punkt mit geringerer Höhe finden. Im zweiten Fall führt dann eine Rekursion zum Ziel.
- (d) Zur Lösung von (P1) können wir nun nach (c) voraussetzen, dass wir einen perfekten Punkt in dem Weg γ_E gefunden haben. Falls dieser Punkt \mathbb{B} -perfekt ist, werden wir zeigen, dass γ_E einen unendlichen Strahl bildet. Für einen \mathbb{E} -perfekten oder \mathbb{A} -perfekten Punkt, werden wir (P1) mit Hilfe von Lemma 3.1.3 lösen.
- (e) Seien nun $E, F \in \mathcal{S}_2$. Dann können wir nach (c) jeweils einen perfekten Punkt μ in γ_E und ν in γ_F finden. Die Wege γ_E und γ_F können sich nur dann schneiden, wenn sie den gleichen Fall bzgl. (b) besitzen. Sind μ und ν beide \mathbb{B} -perfekt, so werden wir (P2) mit Hilfe von Satz 2.3.8 lösen. In den anderen Fällen werden wir zeigen, dass die Strahlen $\gamma(\mu)$ und $\gamma(\nu)$ entweder disjunkt sind oder einer in dem anderen enthalten ist. Wir müssen also entscheiden können, ob $\gamma(\mu)$ über ν oder $\gamma(\nu)$ über μ läuft. Dies werden wir wieder mit Hilfe von Lemma 3.1.3 lösen.

¹Diese werden in [BM16] als r -perfekt bezeichnet.

In [Bri10] wird die Bahn eines Elements in F_n unter wiederholter Anwendung eines festen Automorphismus untersucht. In [Bri10, Theorem 0.1] wird gezeigt, wie sich entscheiden lässt, ob diese Bahn ein vorgegebenes weiteres Element enthält.

In [BM16][Korollar 12.2] wird dies auf Homotopieäquivalenzen verallgemeinert. Die Aussage dieses Korollars geben wir in folgendem Lemma wieder.

Lemma 3.1.3 (Die Bahn eines Weges unter f). *Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine Homotopieäquivalenz und seien μ, ν zwei Kantenwege. Dann lässt sich algorithmisch entscheiden, ob es einen Exponenten $k \in \mathbb{N}_0$ mit*

$$[f^k(\mu)] = \nu$$

gibt.

3.2 Der polynomielle Fall

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, wie wir für $E \in \mathcal{S}$ und einen f -Kantenweg μ einer polynomiellen Höhe r auf γ_E einen f -Kantenweg μ' auf $\gamma(\mu)$ finden können, der entweder \mathbb{E} -perfekt ist (mit Ausnahme von $o(\gamma_E)$ wird r in diesem Fall die minimale Höhe der Punkte auf γ_E sein) oder eine geringere Höhe als μ besitzt.

Außerdem werden wir zeigen, wie die Probleme (P1) und (P2) für $E \in \mathcal{S}$ (bzw. für $E, F \in \mathcal{S}$ mit $E \neq S$) gelöst werden können, falls bereits ein \mathbb{E} -perfekter Punkt auf γ_E (bzw. auf γ_E und auf γ_F) gefunden wurde.

Für einen \mathbb{E} -perfekten Punkt μ wird es eine Zerlegung $B_1 B_2 \dots B_k$ geben, so dass unter anderem die folgende Eigenschaft erfüllt ist:

Der Weg $\gamma(\mu)$ führt genau dann in eine Schleife,
wenn B_1, \dots, B_k jeweils f -periodisch sind.

Hierdurch kann das Problem (P1) gelöst werden, da wir die Periodizität von B_1, \dots, B_k nach Lemma 3.1.3 überprüfen können. Diese Zerlegung wird auf ähnliche Weise helfen, das Problem (P2) zu lösen.

Wir definieren zunächst eine zusätzliche Bedingung² für polynomielle Strata.

Definition 3.2.1 (Pol-Bedingung). Wir sagen, dass ein polynomielles Stratum H_r die *Pol-Bedingung* erfüllt, wenn es möglich ist von jedem Paar zueinander inverser Kanten eine auszuwählen und diese zu indizieren, so dass für die so erhaltenen Kanten E_1, \dots, E_n die Gleichungen

$$f(E_i) = E_{i+1}c_i \text{ für } i = 1, \dots, n-1 \text{ und } f(E_n) = E_1c_n$$

erfüllt sind, wobei c_1, \dots, c_n jeweils passende Kantenwege in G_{r-1} oder trivial sind. Falls diese Bedingung erfüllt ist, werden wir stets eine solche Auswahl an Kanten als die positiven Kanten in H_r treffen.

²Diese Bedingung ist schwächer als die Bedingung ne-(ii) in [BFH00, Theorem 5.15]. Um diese stärkere Bedingung zu erfüllen müssten wir f jedoch im Allgemeinen durch eine Potenz von f ersetzen.

In der Bemerkung 3.2.2 werden wir zeigen, wie sich die Pol-Bedingung für ein polynomielles Stratum erfüllen lässt.

Im Beispiel 3.2.8 werden wir das Problem (P1) für eine explizite Homotopieäquivalenz lösen. Hierzu werden wir im ersten Schritt dafür sorgen, dass die Pol-Bedingung erfüllt ist. Dieser Schritt stellt ein Beispiel für die in der nächsten Bemerkung angegebene Konstruktion dar.

Bemerkung 3.2.2 (Pol-Bedingung erfüllbar). Sei H_r ein polynomielles Stratum einer maximalen Filtrierung, welches die Pol-Bedingung nicht erfüllt. Die Abbildung f induziert auf den Kanten von H_r eine Permutation (siehe Satz 2.5.2(1)). Wegen der Maximalität der Filtrierung ist der minimale Exponent n , für welchen $[f^n(E)]$ über die Kante E oder die Kante \overline{E} führt, gleich $|\mathcal{E}_+(H_r)|$. Wir wollen nun die Kanten aus H_r mit dem Ziel zerteilen, dass die zerteilten Kanten die Pol-Bedingung erfüllen.

Fall 1: Der Weg $[f^n(E)]$ durchläuft E in positiver Richtung.

Wir definieren $E_0, \dots, E_n \in \mathcal{E}(H_r)$ und Kantenwege $c_0, \dots, c_{n-1}, d_0, \dots, d_{n-1}$, die jeweils in G_{r-1} liegen oder trivial sind, durch

$$E_0 = E \text{ und } f(E_i) = c_i E_{i+1} d_i \text{ für } 0 \leq i < n.$$

Dann gilt $E_n = E_0$ und

$$H_r = \{E_i \mid 0 \leq i < n\} \cup \{\overline{E_i} \mid 0 \leq i < n\}.$$

Wir identifizieren die Kanten E_0, E_1, \dots, E_{n-1} jeweils mit dem Intervall $[0, 1]$. Nun definieren wir sukzessive Intervalle I_n, I_{n-1}, \dots, I_0 . Es sei $I_n = [0, 1]$ und I_j für $j = n-1, n-2, \dots, 0$ der Bereich der Kante E_j , welcher durch f auf den Bereich I_{j+1} in $f(E_j) = c_j E_{j+1} d_j$ abgebildet wird.

Da H_r die Pol-Bedingung nicht erfüllt, ist jeweils mindestens einer der Kantenwege c_1, \dots, c_n und d_1, \dots, d_n nicht-trivial. Damit beginnt I_0 nicht in 0 und endet nicht in 1. Wegen der Stetigkeit von f gibt es dann einen n -periodischen Punkt P im Inneren von E . Ähnlich zu Bemerkung³ 2.3.4 zerteilen wir die Kanten E_0, E_1, \dots, E_{n-1} nun an den Punkten $P, f(P), \dots, f^{n-1}(P)$ zu $E_i = \overline{E_{i,1}} E_{i,2}$ für $i = 0, \dots, n-1$.

Hierdurch erhalten wir eine Homotopieäquivalenz $f' : \Gamma' \rightarrow \Gamma'$ bzgl. der die Kanten $E_{0,1}, \dots, E_{n-1,1}$ und $E_{0,2}, \dots, E_{n-1,2}$ jeweils die positiven Kanten eines polynomiellen Stratums bilden, für welches die Pol-Bedingung erfüllt ist.

Fall 2: Der Weg $[f^n(E)]$ durchläuft E in negativer Richtung.

Analog zu Fall 1 definieren wir die Intervalle I_0, \dots, I_n . Es existiert dann wieder ein periodischer Punkt P auf der Kante E . Im Gegensatz zu Fall 1 ist hierbei auch $I_0 = [0, 1]$ möglich. Da f^n das Intervall I_0 nun rückwärts auf I_n abbildet, muss P jedoch wieder im Inneren von E liegen. Mit den Bezeichnungen von Fall 1 bilden dann

$$E_{0,1}, E_{1,1}, \dots, E_{n-1,1}, E_{0,2}, E_{1,2}, \dots, E_{n-1,2}$$

³Die dort definierte Zerteilung an einem Fixpunkt wird hier auf eine Zerteilung an periodischen Punkten verallgemeinert.

die positiven Kanten eines polynomiellen Stratums der Homotopieäquivalenz $f' : \Gamma' \rightarrow \Gamma'$, welche durch eine Zerteilung an den periodischen Punkten $P, f(P), \dots, f^{n-1}(P)$ aus $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ entsteht.

Definition 3.2.3 (Die Längenfunktion L_r). Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine zerteilte Homotopieäquivalenz und H_r ein polynomielles Stratum einer Filtrierung von f . Wir definieren in diesem Fall die Längenfunktion $L_r : \mathcal{P}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$, bei der alle Kanten aus H_r die Länge 1 und alle weiteren Kanten die Länge 0 besitzen.

Im folgenden Lemma wird gezeigt, dass die Voraussetzung von Lemma 2.4.5 mit L_r als Komplexitätsfunktion in jedem zusammenhängenden Teilgraphen Z von $D_f(G_r)$ erfüllt sind. Für einen Knoten μ in Z gibt das Lemma zusätzlich ein Kriterium an, wie weit wir dem Weg $\gamma(\mu)$ folgen müssen, um zu einem Knoten mit minimaler Komplexität zu gelangen. Dieser Knoten besitzt dann nach Lemma 2.4.5 eine minimale Komplexität in ganz Z .

Lemma 3.2.4 (L_r als Komplexitätsfunktion, vgl. [BM16, Proposition 13.2]). Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine Homotopieäquivalenz und H_r ein polynomielles Stratum einer maximalen Filtrierung von f . Weiter sei Z eine Zusammenhangskomponente des Graphen $D_f(G_r)$. Dann gelten die folgenden Eigenschaften:

(a) Für jeden nicht-toten f -Kantenweg $\mu \in \mathcal{P}(G_r)$ gilt die Ungleichung

$$L_r(\hat{f}(\mu)) \leq L_r(\mu).$$

(b) Die Funktion L_r ist eine Komplexitätsfunktion (siehe Lemma 2.4.5) auf Z .

(c) Sei $\mu = E_1 b_1 \dots b_{k-1} E_k b_k \in \mathcal{P}(G_r)$ ein f -Kantenweg, wobei $k \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_k \in \mathcal{E}(H_r)$ und b_1, \dots, b_k jeweils trivial oder Kantenwege in G_{r-1} sind. Weiter gelte

$$L_r(\hat{f}(\mu)) = L_r(\mu).$$

Dann folgt

$$L_r(\mu) = \min \{L_r(\nu) \mid \nu \in \mathcal{V}(Z)\}. \quad (3.2)$$

(d) Falls μ die Bedingung (3.2) erfüllt und μ_1 ein Anfangskantenweg von μ ist, so werden bei der Berechnung von $[\mu f(\mu_1)]$ keine Kanten aus H_r gekürzt.

Beweis. **Zu (a):** Sei

$$\mu = b_0 E_1 b_1 \dots b_{k-1} E_k b_k,$$

ein f -Kantenweg, wobei E_1, \dots, E_k Kanten in H_r und b_0, \dots, b_k jeweils trivial oder Kantenwege in G_{r-1} seien. Falls b_0 kein trivialer Weg ist, so gilt $L_r(\hat{f}(\mu)) = L_r(\mu)$. Ansonsten ist

$$\hat{f}(\mu) = [b_1 E_2 b_2 \dots b_{k-1} E_k b_k f(E_1)].$$

Dabei besitzt $f(E_1)$ genau eine Kante aus H_r . Wenn sich diese in obigem Produkt wegekürzt, gilt $L_r(\hat{f}(\mu)) = L_r(\mu) - 2$. Im anderen Fall ist $L_r(\hat{f}(\mu)) = L_r(\mu)$.

Zu (b): Dies ist ein Korollar aus (a).

Zu (c): Sei $\mu = E_1 b_1 E_2 b_2 \dots E_k b_k$ ein f -Kantenweg mit den in (c) angegebenen Voraussetzungen. Weiter sei $f(E_1) = cFd$ mit $F \in \mathcal{E}(H_r)$. Nach Voraussetzung kürzen sich in dem Produkt

$$\mu' := \hat{f}^{1+|b_1|}(\mu) = [E_2 b_2 \dots E_k b_k c F d f(b_1)]$$

die Kanten E_k und F nicht. Wir zeigen, dass $L_r(\hat{f}(\mu')) = L_r(\mu')$ gilt. Sukzessive folgt dann, dass alle Knoten in $\gamma(\mu)$ den gleichen L_r -Wert besitzen und nach Lemma 2.4.5(b) ist dies der minimale L_r -Wert der Knoten in dem Graphen Z .

Fall 1: Es gilt $E_2 \neq \overline{E_1}$.

In diesem Fall sind die letzten beiden H_r -Kanten von

$$\hat{f}(\mu') = [b_2 \dots E_k b_k c F d f(b_1) f(E_2)]$$

verschieden, so dass $L_r(\hat{f}(\mu')) = L_r(\mu')$ folgt.

Fall 2: Es gilt $E_2 = \overline{E_1}$. Dann ist

$$\hat{f}(\mu') = [b_2 \dots E_k b_k c F d f(b_1) \overline{d} \overline{F} \overline{c}].$$

Da γ_1 ein nicht-trivialer und geschlossener Weg ist, ist $[f(\gamma_1)]$ und somit $[df(\gamma_1)\overline{d}]$ ebenfalls nicht-trivial. Hieraus folgt $L_r(\hat{f}(\mu')) = L_r(\mu')$.

Zu (d): Wir können ohne Einschränkung voraussetzen, dass μ mit einer H_r -Kante beginnt. Sei also $\mu = E_1 b_1 \dots E_k b_k$ mit $E_1, \dots, E_k \in \mathcal{E}(H_r)$ und Wegen b_1, \dots, b_k , deren Höhe jeweils kleiner als r sei.

Da sich bei der Berechnung von $[f(\mu_1)]$ keine Kanten aus H_r kürzen, genügt es den Fall $\mu_1 = E_1$ zu untersuchen. Für $k > 1$ kürzt sich die H_r -Kante von $f(E_1)$ in dem Weg $[\mu f(E_1)]$ wegen der Minimalität des L_r -Wertes nicht. Für $k = 1$ würde die H_r -Kante genau dann gekürzt, wenn $\overline{b_1} \overline{E_1} \preccurlyeq f(E_1)$ gilt. Dies ist jedoch unmöglich, da f eine zerteilte Homotopieäquivalenz ist (siehe Satz 2.2.5(d)). \square

Für einen f -Weg μ in G_r lässt sich also leicht prüfen, ob die μ enthaltende Zusammenhangskomponente von $D_f(G_r)$ einen Knoten enthält, für den die L_r -Länge 0 ist. In diesem Fall besteht die Zusammenhangskomponente Z von μ in $D_f(G_r)$ nach Lemma 2.4.5 aus einem zusammenhängenden Teilgraphen M , welcher genau die Punkte mit L_r -Länge 0 enthält, und anhängenden Bäumen, deren Kanten in Richtung M bevorzugt sind. Um die Struktur von M selbst zu verstehen, müssen wir dann induktiv die Höhe $r - 1$ analysieren. Falls kein Knoten aus Z die L_r -Länge 0 besitzt, so werden wir die Struktur der Zusammenhangskomponente Z in Satz 3.2.7 angeben.

Als Vorbereitung für diesen Satz benötigen wir die Definition eines \mathbb{E} -perfekten Punktes. Die Bezeichnung ist in Anlehnung an die in [BM16] definierten \mathbb{E} -perfekten Punkte

gewählt. Der einzige Unterschied zu dieser Definition ist, dass der Weg dort mit einer Kante aus H_r beginnen muss. Diese Forderung haben wir durch die Bedingung ersetzt, dass der f -Weg mit einem gewissen periodischen Punkt beginnt.

Definition 3.2.5 (Blockzerlegung und \mathbb{E} -perfekte Punkte). Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine Homotopieäquivalenz und H_r ein polynomielles Stratum, welches die Pol-Bedingung erfüllt. Wir zerlegen den Weg $\mu = b_0 E_1 b_1 \dots b_k E_k b_{k+1}$ an solchen inneren Knoten, für welche die nächste Kante eine positive H_r -Kante oder die vorherige Kante eine negative H_r -Kante ist (siehe Abbildung 3.1). Wir bemerken, dass diese inneren Knoten periodisch sind.

Sei $\mu = B_1 B_2 \dots B_k$ die so erhaltene Zerlegung. Wir bezeichnen diese als *Blockzerlegung*⁴ von μ und B_1, \dots, B_k als die *Blöcke* dieser Zerlegung. Jeder der Blöcke besitzt eine der folgenden vier *Blockformen*

$$(1) \ EbF, \quad (2) \ Eb, \quad (3) \ bF, \quad (4) \ b,$$

mit positiven H_r -Kanten E und F sowie einem Weg b mit $\text{Höhe}(b) < r$.

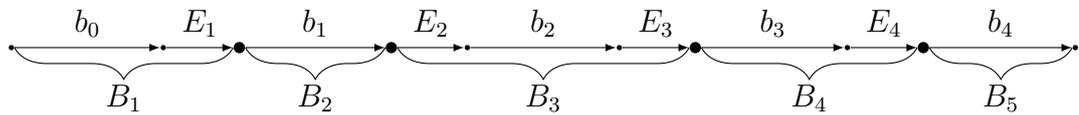


Abbildung 3.1: Der f -Weg μ im Fall $k = 4$. Hierbei seien $\overline{E_1}, \overline{E_2}, \overline{E_3}, \overline{E_4}$ positive Kanten. Die Anfangspunkte dieser positiven Kanten sind fett dargestellt. Falls b_4 trivial ist, gibt es B_5 nicht und μ erfüllt die Bedingung (2) unten.

Wir nennen den f -Kantenweg μ der Höhe r einen \mathbb{E} -perfekten Punkt in D_f , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Der L_r -Wert von μ ist der minimale L_r -Wert der Knoten in $\gamma(\mu)$.
- (2) Der Kantenweg μ beginnt mit einer positiven H_r -Kante oder endet mit einer negativen H_r -Kante.
- (3) Der Weg μ beginnt in einem periodischen Punkt.

Falls μ mit einer positiven H_r -Kante beginnt, ist die Bedingung (3) automatisch erfüllt. Ansonsten ist diese Bedingung äquivalent zu

$$o(\mu) = f^{|\mathcal{E}_+(H_r)|-1}(t(\mu)),$$

da μ ein f -Weg und $t(\mu)$ ein periodischer Punkt ist, dessen Periode die Zahl $|\mathcal{E}_+(H_r)|$ teilt.

⁴Die Zerlegung ist analog zu der im Beweis von Satz 1.2.14 eingeführten Blockzerlegung, wobei die positiven H_r -Kanten den dortigen b -Kanten entsprechen.

Für einen \mathbb{E} -perfekten Punkt μ mit der Blockzerlegung $\mu = B_1 \dots B_k$ definieren wir

$$\tilde{f}(\mu) := \hat{f}^{|B_1|}(\mu).$$

Für $i \in \mathbb{N}_0$ schreiben wir $\tilde{f}^i(\mu)$ für den Weg, welcher durch i -fache Anwendung von \tilde{f} auf μ entsteht. Diese Definition ist wohldefiniert, da wir in Satz 3.2.6(a) sehen werden, dass mit μ auch $\tilde{f}(\mu)$ ein \mathbb{E} -perfekter Punkt ist.

Die Aussagen (c) und (d) in Satz 3.2.6 zeigen zusammen mit Lemma 3.1.3, wie (P1) und (P2) gelöst werden können, falls bereits \mathbb{E} -perfekte Punkte gefunden wurden. In Bezug auf (P1) ist hierbei zu beachten, dass der Weg γ_E mit $E \in \mathcal{S}$ nicht in einem toten Punkt enden kann, falls er einen \mathbb{E} -perfekten Punkt enthält.

In [BM16, Proposition 13.3] wird für zwei \mathbb{E} -Punkte μ, ν gezeigt, wie sich prüfen lässt, ob $\gamma(\mu)$ über ν läuft. Um zu prüfen, ob sich die Wege $\gamma(\mu)$ und $\gamma(\nu)$ schneiden, wird dann zusätzlich noch jeweils ein sogenannter normaler Punkt (siehe [BM16, §5]) in $\gamma(\mu)$ und in $\gamma(\nu)$ benötigt. Diese normalen Punkte werden bei unserer Lösung nicht benötigt. Ähnliches gilt für die Lösung von (P1). Entscheidend für diese Vereinfachung ist die Aussage (b) des folgenden Satzes.

Satz 3.2.6 (Eigenschaften \mathbb{E} -perfekter Punkte, vgl. [BM16, Proposition 13.2] und [BM16, Proposition 13.3]). *In der Situation von Definition 3.2.5 sei μ ein \mathbb{E} -perfekter Punkt mit der Blockzerlegung*

$$\mu = B_1 B_2 \dots B_k.$$

Wir definieren B_i für $i > k$ rekursiv durch $B_i := [f(B_{i-k})]$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) *Die \mathbb{E} -perfekten Punkte in $\gamma(\mu)$ sind genau die Punkte*

$$\tilde{f}^i(\mu) = B_{1+i} B_{2+i} \dots B_{k+i}$$

für $i \in \mathbb{N}_0$.

- (b) *Für jeden \mathbb{E} -perfekten Punkt μ existiert genau ein \mathbb{E} -perfekter Punkt ν in G_r mit $\tilde{f}(\nu) = \mu$.*

- (c) *Der Weg $\gamma(\mu)$ führt genau dann in eine Schleife, wenn die Wege B_1, \dots, B_k jeweils f -periodisch sind.*

- (d) *Ist ν ein weiterer \mathbb{E} -perfekter Punkt in G_r , so schneiden sich $\gamma(\mu)$ und $\gamma(\nu)$ genau dann, wenn $L_r(\mu) = L_r(\nu)$ gilt und es Exponenten $i \in \mathbb{N}_0$ und $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ gibt, für welche*

$$\left[f^i(\tilde{f}^j(\mu)) \right] = \nu \quad \text{oder} \quad \left[f^i(\tilde{f}^j(\nu)) \right] = \mu \tag{3.3}$$

gilt. Eine notwendige Bedingung hierfür ist, dass $L_r(\mu) = L_r(\nu)$ gilt.

Beweis. Zu (a): Da μ mit einer positiven H_r -Kante beginnt oder mit einer H_r -Kante endet, gilt $[\mu f(B_1)] = \mu [f(B_1)]$ nach Lemma 3.2.4. Damit ist der Weg γ in $D_f(G_r)$, welcher in μ beginnt und mit B_1 beschriftet ist, ein bevorzugter Weg. Dieser endet in

$$t(\gamma) = [\overline{B_1} \mu f(B_1)] = B_2 \dots B_k [f(B_1)].$$

Wir bemerken, dass $[f(B_1)]$ die gleiche Blockform wie B_1 besitzt. Es lässt sich nun leicht verstehen, dass $t(\gamma)$ der nächste \mathbb{E} -perfekte Punkt in $\gamma(\mu)$ ist und die Behauptung in (a) folgt durch eine Induktion.

Zu (b): Nach Lemma 2.1.3(b) gibt es genau einen nicht-trivialen und reduzierten Weg B_0 in G_r mit $o(B_0) = f^{|\mathcal{E}+(H_r)|-1}(o(B_k))$, $t(B_0) = o(B_1)$ und

$$[f(B_0)] = B_k.$$

Wir definieren

$$\nu := B_0 B_1 \dots B_{k-1}.$$

Es lässt sich nun leicht verstehen, dass B_0 die gleiche Blockform wie B_k besitzt. Daraus folgen die Bedingungen (1) und (2) für ν . Wegen

$$f(o(\nu)) = f^{|\mathcal{E}+(H_r)|}(o(B_k)) = o(B_k) = t(\nu)$$

ist ν ein f -Kantenweg. Da die Bedingung (3) nach Konstruktion erfüllt ist, ist ν ein \mathbb{E} -perfekter Punkt. Für diesen gilt $\tilde{f}(\nu) = \mu$.

Zu (c): Setzen wir zunächst voraus, dass μ in eine Schleife führt. Dann folgt mit (b), dass μ selbst in dieser Schleife liegt. Nach (a) gibt es dann ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{f}^i(\mu) = \mu$. Indem wir i durch ein passendes Vielfaches ersetzen, können wir ohne Einschränkung voraussetzen, dass es ein $q \in \mathbb{N}$ mit $i = qk$ gibt. Wir erhalten

$$B_1 \dots B_k = \tilde{f}^{qk}(B_1 \dots B_k) = B_{qk+1} \dots B_{qk+k} = [f^q(B_1)] \dots [f^q(B_k)].$$

Hieraus folgt die Periodizität von B_1, \dots, B_k .

Die andere Implikation ist ein Korollar aus (a).

Zu (d): Seien μ, ν zwei \mathbb{E} -perfekte Punkte in G_r , so dass sich $\gamma(\mu)$ und $\gamma(\nu)$ schneiden. Dann existieren $r, s \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\tilde{f}^r(\mu) = \tilde{f}^s(\nu) \tag{3.4}$$

Falls $r, s > 0$, so bleibt die Gleichung (3.4) nach (b) gültig, wenn wir r und s jeweils um 1 verringern. Hierdurch können wir $r = 0$ oder $s = 0$ voraussetzen.

Im Fall $s = 0$ schreiben wir $r = ik + j$ mit $i \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq j < k$ und erhalten

$$\left[f^i(\tilde{f}^j(\mu)) \right] = \left[\tilde{f}^{ik+j}(\mu) \right] = \nu.$$

Der Fall $r = 0$ ist analog.

Die andere Implikation ist offensichtlich erfüllt. Da jeder Knoten von $\gamma(\mu)$ (bzw. $\gamma(\nu)$) die gleiche L_r -Länge wie μ (bzw. wie ν) besitzt, ist $L_r(\mu) = L_r(\nu)$ eine notwendige Bedingung dafür, dass sich $\gamma(\mu)$ und $\gamma(\nu)$ schneiden. \square

Satz 3.2.7 (Struktur einer Zusammenhangskomponente von $D_f(G_r)$ mit \mathbb{E} -perfekten Punkten). Sei $f : \Gamma$ eine zerteilte Homotopieäquivalenz und H_r ein polynomielles Stratum, welches die Pol-Bedingung erfüllt. Weiter sei Z eine Zusammenhangskomponente von $D_f(G_r)$, in der es einen \mathbb{E} -perfekten Punkt der Höhe r gibt. Dann gibt es einen Teilgraphen M' von Z mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) M' enthält alle \mathbb{E} -perfekten Punkte in Z .
- (b) M' ist entweder ein Kreis oder ein beidseitig unendlicher Pfad.
- (c) Der Graph Z entsteht aus M' durch Anheften von Bäumen, dessen Kanten in Richtung M' bevorzugt sind (die Struktur des Graphen im Kreisfall entspricht also dem in Abbildung 2.9 dargestellten Graphen).

Beweis. Wir definieren M' als Vereinigung aller Wege $\gamma(\nu)$, wobei ν über die \mathbb{E} -perfekten Punkte in Z laufe. Damit ist die Aussage (a) erfüllt.

Aus Satz 3.2.6(d) folgt, dass M' zusammenhängend ist. Zusammen mit Satz 3.2.6(b) erhalten wir die Eigenschaft (b).

Die Eigenschaft (c) folgt analog zum Beweis von Satz 2.4.3 durch Anwendung von Lemma 2.4.5 auf die Komplexitätsfunktion $\text{dist}_{M'} : \mathcal{V}(Z) \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit

$$\text{dist}_{M'}(\nu) = \min \{l \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \text{ in } Z \text{ ein Weg } \nu = \nu_l \rightarrow \dots \rightarrow \nu_0 \text{ mit } \nu_0 \in \mathcal{V}(M')\}.$$

□

Beispiel 3.2.8 (mit langen irreduziblen Nielsenwegen). Wir betrachten die Rose R_4 mit Basispunkt P und den Schleifen x_1, x_2, x_3, x_4 sowie den Automorphismus $\alpha : \pi_1(R_4, P) \rightarrow \pi_1(R_4, P)$ mit

$$\begin{aligned} \alpha(x_1) &= x_1 x_3^2 x_4^{-1} x_1^{-1}, & \alpha(x_2) &= x_1 x_3 x_1^{-1}, \\ \alpha(x_3) &= x_1 x_2^{-1} x_4 x_1^{-1}, & \alpha(x_4) &= x_1 x_4^{-1} x_2^{-3}. \end{aligned}$$

Eine relative Train-Track Abbildung für α ist auf dem Graphen Γ

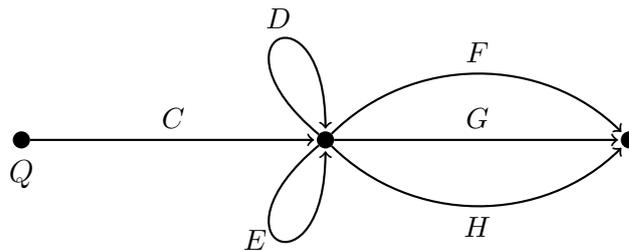


Abbildung 3.2: Der Graph Γ

durch die Homotopieäquivalenz $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ mit

$$\begin{aligned} f(C) &= CD^2 F \bar{H} & f(D) &= E \\ f(E) &= \bar{D} F \bar{G} & f(F) &= G \\ f(G) &= H & f(H) &= F \end{aligned}$$

und die Homotopieäquivalenz $h : R_4 \rightarrow \Gamma$ mit

$$\begin{aligned} h(x_1) &= CD^2F\overline{H}\overline{C} & h(x_2) &= CDC\overline{C} \\ h(x_3) &= CEC\overline{C} & h(x_4) &= CFG\overline{C} \end{aligned}$$

gegeben (hierzu ist $[f(h(x_i))] = [h(\alpha(x_i))]$ für $1 \leq i \leq 4$ zu prüfen). Die maximale Filtrierung ist durch die polynomiellen Strata H_1, H_2, H_3 mit

$$\mathcal{E}_+(H_1) = \{F, G, H\}, \quad \mathcal{E}_+(H_2) = \{D, E\} \quad \text{und} \quad \mathcal{E}_+(H_3) = \{C\}$$

gegeben. Wir bemerken, dass f bereits eine zerteilte Homotopieäquivalenz ist. Das Stratum H_2 erfüllt jedoch nicht die Pol-Bedingung, da hierbei im Bild einer positiven H_r -Kante nur eine positive H_r -Kante auftreten dürfte und so $f^2(D) = \overline{DFG}$ (unabhängig davon, ob D positiv oder negativ ist) unmöglich wäre.

Wie in Abbildung 3.3 dargestellt zerlegen wir D zu $\overline{D_1}D_2$ und E zu $\overline{E_1}E_2$ mit

$$f(D_1) = E_1, \quad f(D_2) = E_2, \quad f(E_1) = D_2 \quad \text{und} \quad f(E_2) = D_1\overline{FG}.$$

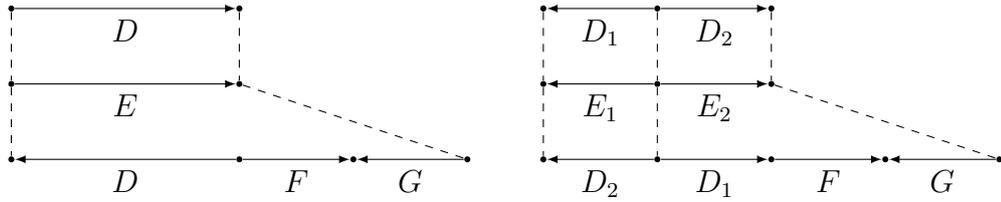


Abbildung 3.3: Die Wege $D, f(D), f^2(D)$ vor und nach der Zerteilung. Um die Abbildung auf den Teilkanten zu definieren, genügt es zu wissen, dass die zwei periodischen Zerteilungspunkte im Inneren der Kanten D und E liegen.

Die Kanten D_1, D_2, E_1, E_2 bilden nun die positiven Kanten eines polynomiellen Stratum, welches wir wieder mit H_2 bezeichnen.

Wir bemerken, dass $C \prec f(C)$ gilt und dass es keine weiteren Kanten in Γ mit dieser Eigenschaft gibt. Um die irreduziblen Nielsenwege von f beschreiben zu können, müssen wir also lediglich prüfen, ob γ_C in einem toten Punkt endet, in eine Schleife führt oder einen unendlichen Strahl bildet (siehe Abschnitt 2.4). Nach dem Anfangsknoten sind die nächsten zwei Knoten in γ_C

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \overline{C}f(C) = \overline{D_1}D_2\overline{D_1}D_2F\overline{H} \in \mathcal{P}(G_2) \quad \text{und} \\ \mu_2 &= [D_1\mu_1f(\overline{D_1})] = D_2\overline{D_1}D_2F\overline{H}\overline{E_1}. \end{aligned}$$

Da $L_r(\mu_1) = L_r(\mu_2) = 4$ gilt und μ_2 mit einer positiven H_2 -Kante beginnt, ist μ_2 nach Lemma 3.2.4(c) ein \mathbb{E} -perfekter Punkt. Dieser besitzt die Blockzerlegung

$$\mu_2 = B_1B_2 \quad \text{mit} \quad B_1 = D_2\overline{D_1} \quad \text{und} \quad B_2 = D_2F\overline{H}\overline{E_1}.$$

Wir prüfen nun die f -Periodizität von D_1 (wegen $f(D_1) = E_1$, $f^2(D_1) = D_2$ und $f^3(F\overline{H}) = F\overline{H}$ sind dann B_1 und B_2 jeweils f -periodisch). Hierzu brauchen wir nur die durch 4 teilbaren Exponenten zu betrachten:

$$\begin{aligned} [f^4(D_1)] &= D_1 F \overline{G}, & [f^8(D_1)] &= [(D_1 F \overline{G})(G\overline{H})] = D_1 F \overline{H}, \\ [f^{12}(D_1)] &= [(D_1 F \overline{G})(G\overline{E})] = D_1 F \overline{E}, & [f^{16}(D_1)] &= [(D_1 F \overline{G})(G\overline{F})] = D_1. \end{aligned}$$

Der Weg γ_C führt also nach Satz 3.2.6(c) in eine Schleife und wir haben (P1) gelöst. Nun können wir dem Weg γ_C bis zur ersten Knotenwiederholung folgen und so die irreduziblen Nielsenwege von f finden. Auf diese Weise erhalten wir, dass der folgenden Weg ein kürzester irreduzibler, nicht-trivialer Nielsenweg ist (wobei wir D (bzw. E) als Abkürzung für $\overline{D_1 D_2}$ (bzw. $\overline{E_1 E_2}$) verwenden):

$$\begin{aligned} \rho := & CD^2 F \overline{H} E^2 G \overline{F} (\overline{D} F \overline{G})^2 H \overline{G} (\overline{E} G \overline{H})^2 F \overline{H} \\ & (G \overline{F} D H \overline{F})^2 G \overline{F} (H \overline{G} E F \overline{G})^2 H \overline{G} \\ & (F \overline{H} \overline{D} F \overline{H})^2 F \overline{H} (G \overline{F} \overline{E} G \overline{F})^2 G \overline{F} \\ & (H \overline{F} D H \overline{G})^2 H \overline{G} (F \overline{G} E F \overline{H})^2 F \overline{H} \\ & (G \overline{H} \overline{D})^2 G \overline{F} (H \overline{F} \overline{E})^2 H \overline{G} \overline{C}. \end{aligned}$$

Der Nielsenweg ρ besitzt bezüglich der nicht zerteilten Homotopieäquivalenz die Länge 114. Die Menge aller irreduziblen Nielsenweg von f ist

$$\{[\rho^i] \mid i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

Da ρ ein geschlossener Nielsenweg an den Basispunkt Q ist, beschreibt er einen Fixpunkt von dem Automorphismus α . Durch Berechnung der Abbildung h_*^{-1} lässt sich dieser finden. Er besitzt die Länge 158 und erzeugt die hier zyklische Gruppe $\text{Fix}(\alpha)$. Dieses Beispiel kann verallgemeinert werden, indem jeder auftretende Exponent 2 in α , h , f und ρ durch ein festes $n \in \mathbb{N}$ ersetzt wird. Der Nielsenweg ρ besitzt dann die Länge $44n + 26$. Der zugehörige Fixpunkt von α hat hier die Länge $62n + 34$.

3.3 Der exponentielle Fall

In diesem Abschnitt sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ stets eine zerteilte relative Train-Track Abbildung mit einer maximalen Filtrierung

$$\emptyset = G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \dots \subsetneq G_m = \Gamma$$

und H_r ein exponentielles Stratum dieser Filtrierung. Wir setzen zusätzlich voraus, dass jedes polynomielle Stratum die Pol-Bedingung erfüllt.

Wie im polynomiellen Fall, möchten wir zunächst eine Komplexitätsfunktion definieren. Betrachten wir die Homotopieäquivalenz f aus Beispiel 3.3.11 und die f -Wege

$$\mu := \overline{ED}, \quad \mu_1 := \hat{f}(\mu) = \overline{DE\overline{D}} \quad \text{und} \quad \mu_2 := \hat{f}(\mu_1) = \overline{ECDED}.$$

Dann ist die Anzahl der 1-illegalen Punkte von μ, μ_1, μ_2 in dieser Reihenfolge gleich 1, 0, 1 (siehe (3.7) in Beispiel 3.3.11). Diese Anzahl eignet sich also nicht als eine Komplexitätsfunktion. Der 1-illegale Punkt in μ wird nach Anwendung von \hat{f} an den Anfang geschoben und ist in μ_1 ein „zyklisch 1-illegaler“ Punkt. Dieser wird durch die nun eingeführte Funktion N_{zykl} mitgezählt. Mit dieser Definition wird

$$N_{\text{zykl}}(\mu) = N_{\text{zykl}}(\mu_1) = N_{\text{zykl}}(\mu_2) = 1$$

gelten.

Definition 3.3.1 (Die Funktion N_{zykl}). Sei μ ein Weg in G_r und $[\mu]_{r-1}$ der Weg, bei dem von μ ausgehend alle möglichen Kürzungen von Kanten bis zur Höhe $r - 1$ durchgeführt werden. Wir bezeichnen mit $N(\mu)$ die Anzahl der r -illegalen Punkte in dem Weg $[\mu]_{r-1}$. Für einen f -Weg μ in G_r definieren wir nun $N_{\text{zykl}}(\mu)$: Für $\text{Höhe}(f(\mu)) < r$ sei

$$N_{\text{zykl}}(\mu) = N(\mu).$$

Ansonsten sei α ein beliebiger r -legaler Anfangsweg und β ein beliebiger r -legaler Endweg von μ mit $\text{Höhe}(f(\alpha)) = \text{Höhe}(\beta) = r$. Definiere in diesem Fall

$$N_{\text{zykl}}(\mu) := N(\mu) + N(\beta f(\alpha)).$$

Wir bemerken, dass der zweite Summand 1 ist, falls bei der Berechnung von $[\beta f(\alpha)]$ Kanten bzw. Teilkanten aus H_r gekürzt werden oder dieser Weg einen r -illegalen Punkt besitzt. Ansonsten ist dieser Summand gleich 0. Da α und β nach Voraussetzung r -legale Wege sind, ist diese Definition unabhängig von der konkreten Wahl von α und β .

Bemerkung 3.3.2. Es ist leicht zu verstehen, dass für einen f -Weg μ in G_r die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (a) Es gilt $N([\mu]) \leq N(\mu)$.
- (b) Es gilt $N([f(\mu)]) \leq N(f(\mu)) = N(\mu)$.

Lemma 3.3.3 (N_{zykl} ist Komplexitätsfunktion). Sei γ ein bevorzugter Weg in $D_f(G_r)$, so dass für $\mu = o(\gamma)$ und $\nu = t(\gamma)$ die Bedingung $t(\mu), t(\nu) \in \mathcal{V}(G_r)$ erfüllt ist. Dann gilt

$$N_{\text{zykl}}(\nu) \leq N_{\text{zykl}}(\mu). \tag{3.5}$$

Ist Z ein zusammenhängender Teilgraph von $D_f(G_r)$, so ist N_{zykl} zusätzlich eine Komplexitätsfunktion auf Z .

Beweis. Es genügt die Ungleichung (3.5) zu zeigen, da hiermit insbesondere die dritte Voraussetzung für eine Komplexitätsfunktion erfüllt ist. Die anderen beiden Voraussetzungen für eine Komplexitätsfunktion gelten offensichtlich.

Das f -Bild der Beschriftung von γ ist ein Kantenweg in G_r . Indem wir γ entsprechend zerteilen, können wir also zusätzlich voraussetzen, dass die Beschriftung von γ ein Kantenstück E mit $f(E) \in \mathcal{E}(G_r)$ ist. Sei

$$\mu \xrightarrow{E} [\overline{E}\mu f(E)] = \nu$$

so eine bevorzugte Teilkante in $D_f(G_r)$.

Fall 1: Es gilt $\text{Höhe}(E) < r$ oder $\text{Höhe}(\mu) < r$.

Fall 1.1: Es gilt $\text{Höhe}(E) < r$.

Für $\text{Höhe}(\mu) < r$ gilt $N_{\text{zykl}}(\mu) = N_{\text{zykl}}(\nu) = 0$. Ansonsten seien α, β zwei r -legale Wege mit $\text{Höhe}(f(\alpha)) = \text{Höhe}(\beta) = r$,

$$\alpha \preceq \mu \text{ und } \bar{\beta} \preceq \bar{\mu}.$$

Dann sind $\alpha' := [\bar{E}\alpha]$ und $\beta' := [\beta f(E)]$ entsprechende Wege für

$$\nu = [\bar{E}\mu f(E)]$$

und wir erhalten wegen $[\beta f(\alpha)]_{r-1} = [\beta' f(\alpha')]_{r-1}$ (siehe Definition 3.3.1) die Gleichung

$$N_{\text{zykl}}(\mu) = N(\mu) + N(\beta f(\alpha)) = N(\nu) + N(\beta' f(\alpha')) = N_{\text{zykl}}(\nu).$$

Fall 1.2: Es gilt $\text{Höhe}(E) = r$ und $\text{Höhe}(\mu) < r$.

Wäre μ nicht tot, so könnte $\mu \xrightarrow{E} \nu$ wegen $\text{Höhe}(E) = r$ und $\text{Höhe}(\mu) < r$ nicht bevorzugt sein. Der Weg μ ist also tot und es muss $E \prec f(E)$ gelten. Zusammen mit $\nu = [\bar{E}\mu f(E)]$ folgt hieraus

$$f(E) = E\nu.$$

Somit besitzt der Weg ν die Höhe r und erfüllt wegen (RTT-3) die Gleichung $N(\nu) = 0$.

Um $N_{\text{zykl}}(\nu) = 0$ zu zeigen, muss zusätzlich noch $N(\nu f(\nu)) = 0$ erfüllt sein. Dies gilt, da $\nu f(\nu)$ ein Teilweg des folgenden r -legalen Weges ist:

$$f^2(E) = E\nu f(\nu).$$

Damit ist Fall 1 abgeschlossen. Da wir die Höhe eines trivialen Weges als 0 definiert haben, ist μ in den weiteren Fällen nicht tot. Also muss in diesen Fällen $E \preceq \mu$ gelten.

Wir definieren hier μ' durch

$$\mu = E\mu'.$$

Fall 2: Es gilt $\text{Höhe}(E) = \text{Höhe}(\mu) = r$ und $\mu f(E)$ ist reduziert.

Fall 2.1: Es gilt $\text{Höhe}(\mu') = r$.

Wir wählen einen r -legalen Anfangsweg α und einen r -legalen Endweg β von μ' mit $\text{Höhe}(f(\alpha)) = \text{Höhe}(\beta) = r$, siehe Abbildung 3.4.

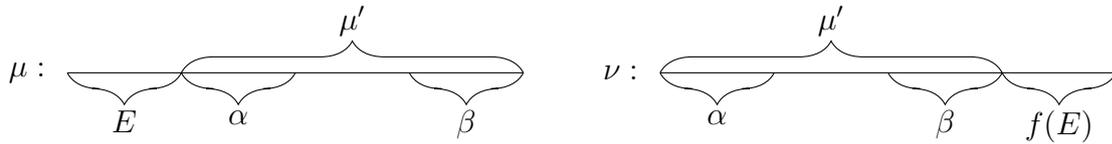


Abbildung 3.4: Die f -Wege μ und ν .

Damit erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}
N_{\text{zykl}}(\mu) &= N(\mu) + N(\beta f(E)) \\
&= N(\mu') + N(E\alpha) + N(\beta f(E)) \\
&\stackrel{3.3.2(b)}{=} N(\mu') + N(\beta f(E)) + N(f(E)f(\alpha)) \\
&= N(\nu) + N(f(E)f(\alpha)) = N_{\text{zykl}}(\nu).
\end{aligned}$$

Fall 2.2: Es gilt $\text{Höhe}(\mu') < r$.

Wegen $\mu f(E) = E\nu$ ist in diesem Fall

$$\begin{aligned}
N_{\text{zykl}}(\mu) &= N(\mu) + N(\mu f(E)) \\
&= 0 + N(\mu f(E)) = 0 + N(E\nu) \\
&= N(\nu) + N(f(E)f(\nu)) = N_{\text{zykl}}(\nu).
\end{aligned}$$

Fall 3: Es gilt $\text{Höhe}(E) = \text{Höhe}(\mu) = r$ und $\mu f(E)$ ist nicht reduziert.

In diesem Fall muss $f(E) \preceq \overline{\mu'}$ oder $\overline{\mu} \preceq f(E)$ gelten (siehe Abbildung 3.5): Da $f(E)$ eine Kante ist, kann diese den Weg $\overline{\mu}$ nicht im Inneren verlassen und auch nicht innerhalb der Teilkante \overline{E} enden.

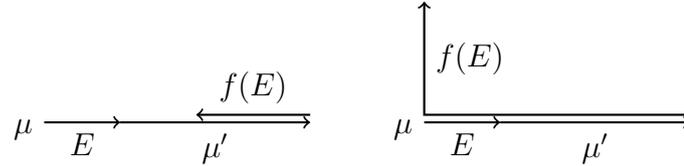


Abbildung 3.5: Der Weg $\mu = E\mu'$ und die Kante $f(E)$: links für $f(E) \preceq \overline{\mu'}$ und rechts für $\overline{\mu} \preceq f(E)$

Zusätzlich können wir auch $\overline{\mu'}\overline{E} = \overline{\mu} \preceq f(E)$ ausschließen, da es sonst einen toten Punkt im Inneren der Teilkante $\mu \xrightarrow{E} \nu$ in $D_f(G_r)$ geben würde (vgl. Beweis von Satz 2.2.5(d)). Es gilt also $f(E) \preceq \overline{\mu'}$. Zusammen mit $\nu = [\overline{E}\mu f(E)]$ folgt die Gleichung

$$\mu = E\nu f(\overline{E}).$$

Hieraus erhalten wir

$$N_{\text{zykl}}(\mu) = N(\mu) + 1 \geq N(\nu) + 1 \geq N_{\text{zykl}}(\nu).$$

□

Definition 3.3.4 (\mathbb{A} -perfekte und \mathbb{B} -perfekte Punkte, vgl. [BM16, Definition 10.1] und [BM16, Definition 10.3]). Sei μ ein reduzierter f -Weg der Höhe r . Wir nennen μ einen \mathbb{B} -perfekten Punkt in $D_f(G_r)$, falls μ ein f -Kantenweg ist und $N_{\text{zykl}}(\mu) = 0$ gilt.

Als \mathbb{A} -perfekt bezeichnen wir μ , wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Zerlegung

$$\mu = A_1 b_1 A_2 b_2 \dots A_k b_k$$

gibt (dies muss keine Zerlegung in Kantenwege sein), so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (a) Die Wege A_1, \dots, A_k sind irreduzible periodische Nielsenwege der Höhe r .
- (b) Es gilt $N_{\text{zykl}}(\mu) = k$.

Insbesondere sind die Wege b_1, \dots, b_k dann r -legal.

Aus dem Beweis von [BM16, Proposition 14.4] ergibt sich direkt das folgende Lemma. Die stärkere Voraussetzung in unserer Definition von \mathbb{A} -perfekten Punkten, nach welcher die A -Bereiche periodische Nielsenwege sind, ist hierbei nach [BFH00, Lemma 4.2.5] und [BM16, Proposition 10.4] erfüllbar. Dieses Lemma besagt insbesondere, dass der Weg γ_E für jede Kante $E \in \mathcal{S}_2$ mindestens einen perfekten Punkt enthält.

Lemma 3.3.5 (Existenz von perfekten Punkten). *Sei μ ein f -Weg in Γ , so dass der Weg $\gamma(\mu)$ einen unendlichen Pfad bildet. Dann läuft $\gamma(\mu)$ mindestens über einen perfekten Punkt.*

Am Ende dieses Kapitels werden wir für $E \in \mathcal{S}$ zeigen, wie sich in γ_E ein toter Punkt, eine Schleife oder ein perfekter Punkt finden lässt.

Zunächst entwickeln wir nun Lösungen von (P1) und (P2) unter der Voraussetzung, dass wir solche Punkte schon gefunden haben, wobei wir bei \mathbb{E} -perfekten Punkten zusätzlich voraussetzen, dass die irreduziblen periodischen Nielsenwege der Höhe r hier drin bekannt sind. Da wir (P1) für \mathbb{E} -perfekte Punkte bereits mit Satz 3.2.6(c) gelöst haben, können wir bei der Lösung von (P1) für $E \in \mathcal{S}$ dann voraussetzen, dass bereits ein \mathbb{A} -perfekter oder \mathbb{B} -perfekter Punkt μ in γ_E gefunden wurde.

Wir bemerken, dass sich die Wege γ_E und γ_F für $E, F \in \mathcal{S}_2$ nicht schneiden können, wenn sie perfekte Punkte von verschiedenem Typ enthalten: Ist zum Beispiel μ ein \mathbb{A} -perfekter Punkt in γ_E und ν ein \mathbb{B} -perfekter Punkt in γ_F , so besitzen nach Lemma 3.3.3 und Satz 3.3.9(a) alle Punkte aus $\gamma(\mu)$ einen N_{zykl} -Wert größer 0 und alle Punkte aus $\gamma(\nu)$ den N_{zykl} -Wert 0.

Unter der Voraussetzung, dass wir bereits jeweils einen perfekte Punkte auf γ_E und γ_F gefunden haben, können wir also bei der Lösung von (P2) voraussetzen, dass diese entweder beide \mathbb{A} -perfekte oder beide \mathbb{B} -perfekt sind und die gleiche Höhe besitzen.

Lösung von (P1) und (P2) für \mathbb{B} -perfekte Punkte

Satz 3.3.6 ((P1) für \mathbb{B} -perfekte Punkte, vgl. [BM16, Proposition 10.2]). *Sei μ ein \mathbb{B} -perfekter Punkt. Dann ist die Anzahl der H_r -Kanten der Punkte*

$$\mu_0 := \mu, \mu_1 := \hat{f}(\mu_0), \mu_2 := \hat{f}(\mu_1), \dots$$

monoton steigend und unbeschränkt. Lläuft γ_E für $E \in \mathcal{S}$ über einen \mathbb{B} -perfekten Punkt, so gilt insbesondere $E \in \mathcal{S}_2$.

Beweis. Sei E_0 die erste Kante von μ_0 . Falls $E_0 \in \mathcal{E}(G_{r-1})$ gilt, so stimmt die Anzahl der H_r -Kanten von μ_0 und μ_1 überein. Ist $\text{Höhe}(E_0) = r$, so folgt aus der \mathbb{B} -Perfektheit von μ_0 die Gleichung

$$\mu_1 = [\overline{E_0\mu_0}] f(E_0). \tag{3.6}$$

Der f -Kantenweg μ_1 besitzt also mindestens so viele H_r -Kanten wie μ_0 . Nach Lemma 3.3.3 ist μ_1 damit ein \mathbb{B} -perfekter Punkt. Wir können nun induktiv folgern, dass die Anzahl der H_r -Kanten in μ_0, μ_1, \dots monoton steigend ist und alle Punkte dieser Folge \mathbb{B} -perfekt sind.

Zusätzlich folgt aus (3.6) die Gleichung

$$L_r(\mu_1) = L_r(\mu_0) + (\lambda_r - 1)L_r(E_0).$$

Induktiv erhalten wir für $i \in \mathbb{N}$ weiter

$$L_r(\mu_i) = L_r(\mu_0) + \sum_{j=0}^{i-1} (\lambda_r - 1)L_r(E_j).$$

Hieraus ergibt sich

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_r(\mu_k) = \infty,$$

so dass die Anzahl der H_r -Kanten in der Folge μ_0, μ_1, \dots unbeschränkt sein muss. \square

Algorithmus 3.3.7 ((P2) für \mathbb{B} -perfekte Punkte). Seien $E, F \in \mathcal{S}$ mit $E \neq F$, so dass γ_E und γ_F jeweils einen \mathbb{B} -perfekten Punkt enthalten. Dann geben die folgenden Schritte einen Algorithmus an, welcher entscheidet, ob sich die Wege γ_E und γ_F schneiden:

Schritt 1: Finde den ersten \mathbb{B} -perfekten Punkt μ in γ_E und den ersten \mathbb{B} -perfekten Punkt ν in γ_F . Falls μ und ν nicht die gleiche Höhe besitzen, gib NEIN zurück. Ansonsten definiere $r := \text{Höhe}(\mu) = \text{Höhe}(\nu)$.

Schritt 2: Falls $\mu = \nu$ gilt, so gib JA zurück. Ansonsten definiere

$$s := \max \{ \text{Höhe}(E), \text{Höhe}(F) \}$$

und berechne

$$C^* = |\mathcal{E}_+(G_s)| \cdot \max \{ |f(E)| \mid E \in \mathcal{E}_+(G_s) \}.$$

Schritt 3: Falls $\mu \neq \nu$ ist und mindestens einer dieser Wege mehr als C^* viele Kanten aus H_r besitzt, so gib NEIN zurück. Ansonsten berechne die Folge

$$\mu_0 = \mu, \mu_1 = \hat{f}(\mu), \mu_2 = \hat{f}^2(\mu), \dots$$

bis der erste Index $k \in \mathbb{N}$ gefunden wird, für den μ_k mehr als C^* viele Kanten aus H_r besitzt. Berechne auf die gleiche Weise $\nu_0 = \nu, \nu_1 = \hat{f}(\nu), \dots, \nu_l = \hat{f}^l(\nu)$, so dass l der minimale Index ist, für den ν_l mehr als C^* Kanten aus H_r hat.

Schritt 4: Falls $\mu_{k-1} = \nu_{l-1}$ gilt, so gib JA zurück. Ansonsten gib NEIN zurück.

Beweis. Nach Satz 3.3.6 ist die Anzahl der H_r -Kanten in den Folgen μ_0, μ_1, \dots und $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots$ jeweils monoton steigend und unbeschränkt. Dies gewährleistet insbesondere, dass im Schritt 3 nur endliche viele Folgenglieder berechnet werden.

Wir beweisen nun die Korrektheit. Der Algorithmus gibt nur dann JA zurück, wenn wirklich ein gemeinsamer Schnittpunkt gefunden wurde. Falls sich die Wege γ_E und γ_F also nicht schneiden, so ist das Ergebnis des Algorithmus korrekt. Wir zeigen nun, dass die Antwort des Algorithmus ebenfalls korrekt ist, falls sich die Wege γ_E und γ_F schneiden.

Fall 1: Der erste gemeinsame Schnittpunkt von γ_E und γ_F ist nicht \mathbb{B} -perfekt.

Wir bemerken, dass die Punkte bis zu diesem Schnittpunkt dann nach Lemma 3.3.3 ebenfalls nicht \mathbb{B} -perfekt sind. Der erste \mathbb{B} -perfekte Punkt von γ_E und der erste \mathbb{B} -perfekte Punkt von γ_F stimmen somit überein und der Algorithmus gibt im Schritt 2 JA zurück.

Fall 2: Der erste gemeinsame Schnittpunkt von γ_E und γ_F ist \mathbb{B} -perfekt.

Wir bemerken, dass die Wege γ_E und γ_F in $D_f(G_s)$ verlaufen. Wir definieren die Längenfunktion $L : \mathcal{P}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$, bei der die Kanten aus G_s die Länge 1 und die weiteren Kanten die Länge 0 besitzen. Nach Satz 2.3.8 ist die L -Länge des Schnittpunktes kleiner oder gleich C^* . Insbesondere ist dann die Anzahl der H_r -Kanten dieses Schnittpunktes durch C^* beschränkt.

Da die Anzahl der H_r -Kanten in den Wegen $\gamma(\mu)$ und $\gamma(\nu)$ monoton wachsend ist, gibt es Indizes $0 \leq i < k$ und $0 \leq j < l$ (l und k wurden Schritt 3 definiert), so dass $\mu_i = \nu_j$ dieser Schnittpunkt ist.

Die Folgen in Schritt 3 verlaufen dann ab diesem Knoten gleich, so dass die Knoten μ_{k-1} und ν_{l-1} übereinstimmen. Der Algorithmus gibt somit in Schritt 4 JA zurück. \square

Durch Anwendung von [BFH00, Lemma 4.2.6] und [BFH00, Lemma 4.2.5] erhalten wir die folgende Bemerkung:

Bemerkung 3.3.8 (Eigenschaften irreduzibler periodischer Nielsenwege). Sei ρ ein irreduzibler periodischer Nielsenweg der Höhe r . Dann gelten die folgenden Eigenschaften:

- (a) Es ist $N(\rho) = 1$.
- (b) Ist $\rho = \alpha\beta$ die Zerlegung von ρ in r -legale Wege α, β , so ist die Höhe der ersten und letzten Kante bzw. Teilkante von α und von β gleich r . Außerdem gilt $t(\alpha) = o(\beta) \in \mathcal{V}(G_r)$.
- (c) Ist $w \in \mathcal{P}(G_r)$ ein Weg mit $N(w) = 1$, so gibt es maximal einen Teilweg von w , welcher ein irreduzibler periodischer Nielsenweg der Höhe r ist.

Lösung von (P1) und (P2) für \mathbb{A} -perfekte Punkte

Im Satz 3.3.9 geben wir nun insbesondere eine Lösung von (P1) und (P2) für den Fall an, dass bereits \mathbb{A} -perfekte Punkte gefunden wurden und die periodischen Nielsenwege

hier drin jeweils bekannt sind. Dieser Satz ist analog zu Satz 3.2.6 für \mathbb{E} -perfekte Punkte. Die Aussage (a) entspricht hierbei [BM16, Proposition 10.4]. Wie im polynomiellen Fall werden zur Lösung keine normalen Punkte benötigt.

Satz 3.3.9 (Eigenschaften \mathbb{A} -perfekter Punkte). *Sei $\mu = A_1 b_1 \dots A_k b_k$ ein \mathbb{A} -perfekter Punkt mit Wegen b_1, \dots, b_k in G_r , $N_{\text{zykl}}(\mu) = k$ und irreduziblen periodischen Nielsenwege A_1, \dots, A_k der Höhe r . Wir definieren*

$$\tilde{f}(\mu) = [\overline{A_1 b_1} \mu f(A_1 b_1)].$$

Weiter sei $\tilde{f}^i(\mu)$ für $i \in \mathbb{N}_0$ der Weg, der durch i -fache Anwendung von \tilde{f} auf μ entsteht. Die Wege B_1, B_2, \dots sein rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} B_i &:= A_i b_i \text{ für } 1 \leq i \leq k \text{ und} \\ B_i &:= [f(B_{i-k})] \text{ für } i > k. \end{aligned}$$

Dann sind die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(a) Falls A_1, \dots, A_k Kantenwege sind, so ist

$$\tilde{f}(\mu) = \hat{f}^{|B_1|}(\mu).$$

Zudem sind die \mathbb{A} -perfekten Punkte in $\mathfrak{y}(\mu)$ genau die Punkte

$$\tilde{f}^i(\mu) = B_{1+i} B_{2+i} \dots B_{k+i}$$

für $i \in \mathbb{N}_0$.

(b) Ist μ' ein weiterer \mathbb{A} -perfekter Punkt in G_r mit $\tilde{f}(\mu) = \tilde{f}(\mu')$, so folgt $\mu = \mu'$.

(c) Der Weg $\mathfrak{y}(\mu)$ durchläuft genau dann eine Schleife unendlich oft, wenn die Wege b_1, \dots, b_k jeweils f -periodisch sind.

(d) Ist ν ein weiterer \mathbb{A} -perfekter Punkt der Höhe r , so schneiden sich $\mathfrak{y}(\mu)$ und $\mathfrak{y}(\nu)$ genau dann, wenn es Exponenten $i \in \mathbb{N}_0$ und $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ gibt, für welche

$$[f^i(\tilde{f}^j(\mu))] = \nu \text{ oder } [f^i(\tilde{f}^j(\nu))] = \mu$$

gilt. Eine notwendige Bedingung hierfür ist $\text{Höhe}(\mu) = \text{Höhe}(\nu)$ und $N_{\text{zykl}}(\mu) = N_{\text{zykl}}(\nu)$.

Beweis. Die Aussagen (a) und (d) lassen sich analog zu den entsprechenden Aussagen in Satz 3.2.6 beweisen.

Zu (b): Sei $\mu' \in \mathcal{P}(G_r)$ ein weiterer \mathbb{A} -perfekter Punkt mit $\tilde{f}(\mu) = \tilde{f}(\mu')$. Dann muss $N_{\text{zykl}}(\mu') = k$ gelten. Wir schreiben

$$\mu' = A'_1 b'_1 \dots A'_k b'_k$$

mit irreduziblen periodischen Nielsenwegen A'_1, \dots, A'_k der Höhe r und Wegen b'_1, \dots, b'_k in G_r . Die Bedingung $\tilde{f}(\mu) = \tilde{f}(\mu')$ bedeutet, dass die folgende Gleichung gilt:

$$A_2 b_2 \dots A_k b_k [f(A_1)] [f(b_1)] = A'_2 b'_2 \dots A'_k b'_k [f(A'_1)] [f(b'_1)].$$

Mit Hilfe von Bemerkung 3.3.8(c) folgt $A_i = A'_i$ und $b_i = b'_i$ für $i = 2, \dots, k$. Da A_1 und A'_1 periodische Nielsenwege sind, deren f -Bilder gleich sind, folgt ebenfalls $A_1 = A'_1$. Da b_1 und b'_1 nun zwei Wege mit gleichen Endpunkten und gleichen f -Bildern sind, folgt schließlich $b_1 = b'_1$.

Zu (c): Analog zu Satz 3.2.6(c) lässt sich beweisen, dass μ genau dann eine Schleife unendlich oft durchläuft, wenn B_1, \dots, B_k periodisch sind. Dies ist wiederum dazu äquivalent, dass b_1, \dots, b_k periodisch sind. \square

Satz 3.3.10 (Struktur einer Zusammenhangskomponente von $D_f(G_r)$ mit \mathbb{A} -perfekten Punkten). *Sei Z eine Zusammenhangskomponente von $D_f(G_r)$, in der es einen \mathbb{A} -perfekten Punkt der Höhe r gibt. Dann gibt es einen Teilgraphen M' von Z mit den folgenden Eigenschaften:*

- (a) M' enthält alle \mathbb{A} -perfekten Punkte in Z .
- (b) Der Graph M' ist ein Kreis oder ein einseitig oder beidseitig unendlicher Pfad.
- (c) Der Graph Z entsteht aus M' durch Anheften von Bäumen, dessen Kanten in Richtung M' bevorzugt sind.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 3.2.7. \square

Das folgende Beispiel zeigt, dass M' in der Situation von Satz 3.3.10 im Gegensatz zum \mathbb{E} -perfekten Fall ein einseitig unendlicher Pfad sein kann.

Beispiel 3.3.11. Wir betrachten die Rose R_3 mit drei positiven Kanten C, D, E und die Homotopieäquivalenz $f : R_3 \rightarrow R_3$ mit

$$f(C) = DC, \quad f(D) = DCDED \quad \text{und} \quad f(E) = DE.$$

Diese ist eine zerteilte relative Train-Track Abbildung. Die maximale Filtrierung wird durch ein einziges, exponentielles Stratum gebildet. Die in Definition 2.5.6 definierte Abbildung $T_f : \mathcal{E}(R_3) \rightarrow \mathcal{E}(R_3)$ bildet hierbei die Kanten C und E auf die Kante D ab. Alle weiteren Kanten werden identisch abgebildet. Die 1-illegalen Kantenwege der Länge 2 sind also genau die Wege

$$\overline{CD}, \overline{CE}, \overline{DE} \quad \text{und} \quad \overline{DC}, \overline{EC}, \overline{ED}. \quad (3.7)$$

Mit dem irreduziblen Nielsenweg $A_1 = \overline{CE}$ und $b_1 = E$ ist $\mu = A_1 b_1 = \overline{CEE}$ ein \mathbb{A} -perfekter Punkt. Nehmen wir an, es gäbe einen \mathbb{A} -perfekten Punkt ν mit $\tilde{f}(\nu) = \mu$. Dann müsste $\nu = A_1 b_0$ und $N_{\text{zykl}}(\nu) = 1$ gelten. Da der Anfangspunkt und der Endpunkt von

b_0 dann der Basispunkt der Rose sein müsste und $[f(b_0)] = b_1$ gelten würde, würde sich $b_0 = \overline{DC EE}$ ergeben. Dies ist ein Widerspruch, da

$$N_{\text{zykl}}(A_1 b_0) = N_{\text{zykl}}(\overline{CE \overline{DC EE}}) = 2$$

gilt. Wir haben somit gezeigt, dass die Menge M' aus Satz 3.3.10 in diesem Beispiel kein Kreis und kein beidseitig unendlicher Pfad sein kann.

Für $E \in \mathcal{S}$ wissen wir, dass es in dem Weg γ_E entweder einen perfekten Punkt gibt oder dieser Weg in eine Schleife oder zu einem toten Punkt führt. Wir können γ_E kantenweise berechnen und leicht prüfen, ob bis zu dem berechneten Anfangsweg bereits ein \mathbb{B} -perfekter, \mathbb{E} -perfekter, toter Punkt oder eine Schleife gefunden wurde.

Das Problem bilden hier die \mathbb{A} -perfekten Punkte. Einerseits müssen diese im Allgemeinen keine Kantenwege sein. Andererseits müssen wir selbst unter der Voraussetzung, dass diese Kantenwege sind, die irreduziblen periodischen Nielsenwege der Höhe r hier drin finden, um Satz 3.3.9 anwenden zu können.

In [BM16] werden diese zwei Probleme gelöst, indem zunächst die endliche Menge aller möglichen A -Bereiche berechnet wird und f anschließend an den zugehörigen Endpunkten zerteilt wird. Die Laufzeit für die Berechnung dieser Menge ist

$$\mathcal{O}\left(|\mathcal{E}(H_r)|^C\right),$$

wobei C eine obere Schranke für die Anzahl der H_r -Kanten eines solchen A -Bereiches ist.

Wir werden hier zeigen, wie sich \mathbb{A} -perfekte Punkte auf γ_E finden lassen, wenn nur die Existenz eines solchen Punktes vorausgesetzt wird. Die Berechnung der möglichen A -Bereiche entfällt bei dieser Lösung. Hierzu werden wir zunächst eine Art verschobene \mathbb{A} -perfekte Punkte definieren, welche wir \mathbb{A}' -perfekt nennen werden. Diese sind unter anderem dadurch einfacher aufzufinden, dass sie in einem Knoten enden. Der Anfangspunkt eines solchen Weges muss dann in der endlichen Menge $f^{-1}(V(G_r))$ liegen.

Zur Implementierung kann zum Beispiel die Homotopieäquivalenz $f' : \Gamma' \rightarrow \Gamma'$ definiert werden, die aus $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ entsteht, indem f an jedem Punkt aus $f^{-1}(\mathcal{V}(\Gamma))$ zerteilt wird. Die f -Wege, die in Γ in einem Knoten enden, sind dann Kantenwege in Γ' und können daher gut verarbeitet werden.

Bemerkung 3.3.12 (Motivation von \mathbb{A}' -perfekten Punkten). Sei $\mu = A_1 b_1 \dots A_k b_k$ ein \mathbb{A} -perfekter Punkt mit Wegen b_1, \dots, b_k in G_r , irreduziblen periodischen Nielsenwegen A_i der Höhe r und $N_{\text{zykl}}(\mu) = k$.

Wir definieren für $e \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq i \leq k$ die Wege

$$A_i^{(e)} = [f^e(A_i)] \quad \text{und} \quad b_i^{(e)} := [f^e(b_i)]$$

und schreiben

$$A_i^{(e)} = \alpha_i^{(e)} \beta_i^{(e)}$$

mit r -legalen Wegen $\alpha_i^{(e)}, \beta_i^{(e)}$. Dann gibt es Wege $z_i^{(e)}$, so dass

$$\left[f(\alpha_i^{(e)}) \right] = \alpha_i^{(e+1)} z_i^{(e)} \quad \text{und} \quad \left[f(\beta_i^{(e)}) \right] = \overline{z_i^{(e)}} \beta_i^{(e+1)}$$

für alle $e \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq i \leq k$ gilt. Wir schreiben $\beta_i^{(e)} = \beta_{i,1}^{(e)} \beta_{i,2}^{(e)}$ mit

$$\left[f(\beta_{i,1}^{(e)}) \right] = \overline{z_i^{(e)}} \quad \text{und} \quad \left[f(\beta_{i,2}^{(e)}) \right] = \beta_i^{(e+1)}.$$

Nun betrachten wir in $\gamma(\mu)$ die f -Wege

$$\begin{aligned} \mu' &:= \left[\overline{\alpha_1^{(0)}} \mu f(\alpha_1^{(0)}) \right] = \beta_1^{(0)} b_1^{(0)} \alpha_2^{(0)} \beta_2^{(0)} b_2^{(0)} \dots \alpha_k^{(0)} \beta_k^{(0)} b_k^{(0)} \left[f(\alpha_1^{(0)}) \right] \\ &= \beta_1^{(0)} b_1^{(0)} \alpha_2^{(0)} \beta_2^{(0)} b_2^{(0)} \dots \alpha_k^{(0)} \beta_k^{(0)} b_k^{(0)} \alpha_1^{(1)} z_1^{(0)} \end{aligned}$$

und

$$\mu'' := \left[\overline{\beta_{1,1}^{(0)}} \mu' f(\beta_{1,1}^{(0)}) \right] = \underbrace{\beta_{1,2}^{(0)} b_1^{(0)} \alpha_2^{(0)}}_{=: C_1} \underbrace{\beta_2^{(0)} b_2^{(0)} \alpha_3^{(0)}}_{=: C_2} \dots \underbrace{\beta_k^{(0)} b_k^{(0)} \alpha_1^{(1)}}_{=: C_k}.$$

Wir bemerken, dass $t(\mu'')$ nach Bemerkung 3.3.8(b) in $\mathcal{V}(G_r)$ liegt. Der Punkt μ'' ist dann im Sinne der folgenden Definition ein \mathbb{A}' -perfekter Punkt.

Definition 3.3.13 (\mathbb{A}' -perfekt). Sei μ ein reduzierter f -Weg in G_r mit $t(\mu) \in \mathcal{V}(G_r)$. Diesen Weg zerlegen wir an allen r -illegalen Punkten zu

$$\mu = C_1 C_2 \dots C_k.$$

Wir bezeichnen μ als \mathbb{A}' -perfekt, wenn es Zerlegungen

$$C_1 = \sigma b_1 \alpha_2, \quad C_i = \beta_i b_i \alpha_{i+1} \quad \text{für } 1 < i < k \quad \text{und} \quad C_k = \beta_k b_k \tau$$

gibt, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Für $i = 2, 3, \dots, k$ ist $\alpha_i \beta_i$ ein irreduzibler periodischer Nielsenweg der Höhe r .
- (2) Der Weg $\tau[f(\sigma)]$ ist ein reduzierter und irreduzibler periodischer Nielsenweg der Höhe r .

Um \mathbb{A}' -perfekte Punkte zu finden, geben wir zunächst eine wichtige *notwendige Bedingung* für solche Punkte an. Die Gültigkeit dieser notwendigen Bedingung ergibt sich direkt mit Hilfe von Bemerkung 3.3.8.

Bemerkung 3.3.14 (notwendige Bedingung für \mathbb{A}' -perfekte Punkte). Jeder \mathbb{A}' -perfekte Punkt erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Es gilt $t(\mu) \in \mathcal{V}(G_r)$.
- Ist E das erste Kantenstück von μ mit $f(E) \in \mathcal{E}(G_r)$, so besitzt $f(E)$ die Höhe r und der Weg $\mu f(E)$ ist reduziert.

- Es gilt $N_{\text{zykl}}(\mu) = N(\mu) + 1$

Diese drei Eigenschaften werden wir zusammen als notwendige Bedingung für \mathbb{A}' -Punkte verwenden. Wir bemerken, dass diese Eigenschaften implizieren, dass die letzte Kante (bzw. Teilkante) von μ die Höhe r besitzt.

Lemma 3.3.15 (\mathbb{A}' -perfekt Punkte und die notwendige Bedingung). *Es gelten die folgenden Eigenschaften:*

- Sei μ ein f -Weg in G_r mit $t(\mu) \in \mathcal{V}(G_r)$ und $N_{\text{zykl}}(\mu) > 0$. Dann gibt es in $\gamma(\mu)$ einen Punkt ν , der die notwendige Bedingung für \mathbb{A}' -perfekte Punkte aus Bemerkung 3.3.14 oder die Ungleichung $N_{\text{zykl}}(\nu) < N_{\text{zykl}}(\mu)$ erfüllt. Den ersten solchen Punkt in $\gamma(\mu)$ bezeichnen wir mit $\varphi(\mu)$.
- Sei μ ein \mathbb{A} -perfekter Punkt und μ'' wie in Bemerkung 3.3.12 gegeben. Dann gibt es auf dem Anfangsweg γ von $\gamma(\mu)$, der von μ zum nächsten \mathbb{A} -perfekten Punkt $\tilde{f}(\mu)$ führt, genau einen f -Weg, welcher die notwendige Bedingung für \mathbb{A}' -perfekte Punkte erfüllt. Dieser Punkt ist der \mathbb{A}' -perfekte Punkt $\mu'' = \varphi(\mu)$.
- Ist μ ein \mathbb{A}' -perfekter Punkt wie in Definition 3.3.13, so ist $[\overline{\sigma b_1} \mu f(\sigma b_1)]$ ein \mathbb{A} -perfekter Punkt in $\gamma(\mu)$.
- Sei μ ein \mathbb{A} -perfekter Punkt und $\varphi(\mu) = \mu''$ (wie in Bemerkung 3.3.12). Dann gilt

$$\varphi([f(\mu)]) = \varphi([f(\mu'')]).$$

Beweis. Zu (a): Sei μ ein f -Weg in G_r mit $t(\mu) \in \mathcal{V}(G_r)$ und $N_{\text{zykl}}(\mu) > 0$. Wir können voraussetzen, dass der N_{zykl} -Wert von μ minimal auf dem Weg $\gamma(\mu)$ ist, da die Eigenschaft (a) sonst trivialer Weise erfüllt ist.

Fall 1: Es gilt $N_{\text{zykl}}(\mu) = N(\mu) + 1$.

Wir definieren die Folgen $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$ von Punkten auf $\gamma(\mu)$ rekursiv durch $\mu_0 := \mu$ und

$$\mu_{i+1} = [\overline{E_i} \mu_i f(E_i)], \quad (3.8)$$

wobei E_i das erste Kantenstück von μ_i mit $f(E_i) \in \mathcal{E}(G_r)$ sei.

Für jeden Index $i \in \mathbb{N}_0$ können wir μ_i an den Punkten aus $f^{-1}(\mathcal{V}(G))$ in Kantenstücke zerteilen. Sei n_i für $i \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Kantenstücke in μ_i , welche die Höhe r besitzen.

Wir nehmen nun an dass die notwendige Bedingung für keinen der Punkte $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \dots$ erfüllt ist. Dann gilt für alle $i \in \mathbb{N}_0$ die Rekursionsgleichung

$$n_{i+1} = \begin{cases} n_i, & \text{falls Höhe}(E_i) < r, \\ n_i - 1, & \text{falls Höhe}(E_i) = r \text{ und Höhe}(f(E_i)) < r, \\ n_i - 1 - |f(E_i)|, & \text{falls Höhe}(E_i) = r \text{ und Höhe}(f(E_i)) = r: \end{cases}$$

Beachte im letzten Fall, dass die Kante $f(E_i)$ aus $|f(E_i)|$ Kantenstücken besteht und in (3.8) gekürzt wird.

Die Folge n_0, n_1, \dots ist also monoton fallend. Falls für $i \in \mathbb{N}$ die ersten $t-1$ Kantenstücke von μ_i eine kleinere Höhe als r besitzen und das t -te Kantenstück die Höhe r hat, so gilt außerdem

$$n_{i+t} < n_i.$$

Dies zeigt, dass die Folge n_0, n_1, \dots nicht konstant werden kann. Dies ist ein Widerspruch, da n_0, n_1, \dots eine Folge in \mathbb{N} ist.

Fall 2: Es gilt $N_{\text{zykl}}(\mu) = N(\mu)$.

Sei $k := N(\mu)$. Wir schreiben $\mu = D_1 D_2 \dots D_{k+1}$ mit r -legalen Wegen D_1, D_2, \dots, D_{k+1} und definieren den Punkt

$$\mu' = [\overline{D_1} \mu f(D_1)] = D_2 \dots D_{k+1} [f(D_1)].$$

Dieser Punkt liegt auf $\gamma(\mu)$. Wegen der vorausgesetzten Minimalität der N_{zykl} -Werte auf $\gamma(\mu)$ und der Voraussetzung von Fall 2 erhalten wir die Gleichungskette

$$N_{\text{zykl}}(\mu') = N_{\text{zykl}}(\mu) = N(\mu). \quad (3.9)$$

Da $D_{k+1} [f(D_1)]$ ein r -legaler Weg ist gilt

$$N(\mu') = N(\mu) - 1. \quad (3.10)$$

Aus (3.9) und (3.10) erhalten wir nun

$$N_{\text{zykl}}(\mu') = N(\mu') + 1$$

und die Existenz von einem passenden Weg ν folgt durch Anwendung von Fall 1 auf den Weg μ' , der auf $\gamma(\mu)$ liegt.

Zu (b): Sei $\mu = A_1 b_1 \dots A_k b_k$ ein \mathbb{A} -perfekter Punkt und μ', μ'' wie in Bemerkung 3.3.12. Der Punkt μ'' liegt auf γ , und erfüllt die notwendige Bedingung für \mathbb{A}' -perfekte Punkte. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, sei ν ein Punkt auf γ mit $t(\nu) \in \mathcal{V}(G_r)$. Wir bemerken, dass $N_{\text{zykl}}(\nu) = N_{\text{zykl}}(\mu) =: k$ gilt.

Fall (1) Der Punkt ν liegt in γ vor μ' .

Von μ ausgehend wird dann links nur ein echter Anfangsweg von $\alpha_1^{(0)}$ (siehe Bemerkung 3.3.12) gelöscht. Alle r -illegalen Punkte von μ sind also auch in ν vorhanden. Zusammen mit $N_{\text{zykl}}(\nu) = k$, folgt bereits $N_{\text{zykl}}(\mu) = N(\mu) = k$, so dass ν nicht die notwendige Bedingung für \mathbb{A}' -perfekte Punkte erfüllen kann.

Fall (2) Fall μ liegt auf γ hinter μ'' .

In diesem Fall argumentiert man analog zu Fall 1.

Fall (3) Falls ν nicht vor μ' aber vor μ'' liegt, so gilt $N(\nu) = k - 1$.

Sei E das erste Kantenstück von ν mit $f(E) \in \mathcal{E}(G_r)$ ist. In diesem Fall ist $\text{Höhe}(f(E)) < r$ oder der Weg $\mu f(E)$ nicht reduziert. Hier ist die notwendige Bedingung für \mathbb{A}' -perfekte Punkte also auch nicht erfüllt.

Damit ist die Eindeutigkeit gezeigt. Die Aussagen (c) und (d) sind leicht zu prüfen. Für die Aussage (d) kann hierzu die in Bemerkung 3.3.12 eingeführte Notation benutzt werden. \square

Wir geben nun zunächst das weitere Vorgehen an:

Bemerkung 3.3.16 (Vorgehen). Sei μ ein f -Weg in G_r mit $t(\mu) \in \mathcal{V}(G_r)$, welcher die notwendige Bedingung für \mathbb{A}' -perfekte Punkte erfüllt. Insbesondere gelte also $k := N_{\text{zykl}}(\mu) > 0$. Der wesentliche verbleibende Schritt ist der folgende: Erkläre wie unter der Voraussetzung, dass auf $\gamma(\mu)$ ein \mathbb{A} -perfekter Punkt ν mit $N_{\text{zykl}}(\nu) = k$ liegt, ein solcher \mathbb{A} -perfekter Punkt zusammen mit den dort enthaltenen irreduziblen periodischen Nielsenwegen der Höhe r gefunden werden kann.

Hierzu werden wir die durch Folge $\mu_0 := \mu$ und

$$\mu_{l+1} := \varphi([f(\mu_l)])$$

für $l \in \mathbb{N}$ rekursiv definierte Folge betrachten.

Zunächst werden wir in Lemma 3.3.17 zeigen, dass (unter obiger Voraussetzung) alle Punkte dieser Folge auf $\gamma(\mu)$ liegen. Anschließend werden wir in Lemma 3.3.18 zeigen, dass es zwei Indizes $0 \leq i < j$ gibt, so dass μ_i und μ_j zwei \mathbb{A}' -perfekte Punkte mit den gleichen irreduziblen periodischen Nielsenwegen der Höhe r sind. Des Weiteren zeigen wir in Algorithmus 3.3.20, wie sich für zwei Indizes $0 \leq i < j$ entscheiden lässt, ob sie ein solches Paar bilden.

Hierauf aufbauend geben wir schließlich einen Algorithmus an, welcher für $E \in \mathcal{S}$, welcher entweder zeigt, dass γ_E in einem toten Punkt endet bzw. in eine Schleife führt oder einen perfekten Punkt in γ_E findet. Im \mathbb{A} -perfekten Fall werden hierbei zusätzlich die enthaltenen irreduziblen periodischen Nielsenwege der Höhe r gefunden.

Lemma 3.3.17 (Weg nach $\varphi([f(\mu)])$). Sei μ ein f -Weg in G_r , der die notwendige Bedingung für \mathbb{A}' -perfekte Punkte erfüllt. Weiter sei γ der mit μ beschriftete Weg von μ nach $[f(\mu)]$ in $D_f(G_r)$. Dann trifft mindestens einer der folgenden zwei Aussagen zu:

- (a) Der Weg γ ist ein Anfangsweg von $\gamma(\mu)$ und der Weg $\gamma(\mu)$ enthält den Punkt $\varphi([f(\mu)])$.
- (b) Auf dem gemeinsamen Anfangsweg von γ und $\gamma(\mu)$ gibt es einen Punkt ν mit $N_{\text{zykl}}(\nu) < N_{\text{zykl}}(\mu)$.

Beweis. **Fall 1:** Der Weg γ ist nicht bevorzugt.

Wegen der notwendigen Bedingung für \mathbb{A}' -perfekte Punkte gilt für jeden r -legalen Anfangsweg $w \preceq \mu$ die Bedingung

$$\mu \preceq [\mu f(w)]. \quad (3.11)$$

Diese kann jedoch nicht für alle $w \preceq \mu$ gelten (da γ sonst nach Definition 2.3.2 bevorzugt wäre). Es gibt also mindestens einen nicht-trivialen Anfangsweg $w \preceq \mu$, für den $[f(w)] = 1_{t(\mu)}$ gilt.

Wir zerlegen $\mu = \mu_1 \mu_2$, so dass μ_1 ein minimaler, nicht-trivialer Anfangsweg von μ mit $[f(\mu_1)] = 1_{t(\mu)}$ ist.

Dann muss $N(\mu_1) \geq 1$ und somit $N(\mu_2) < N(\mu)$ gelten. Für den Punkt

$$[\overline{\mu_1} \mu f(\mu_1)] = \mu_2,$$

der auf dem Weg gemeinsamen Anfangsweg von γ und $\gamma(\mu)$ liegt, gilt dann

$$N_{\text{zykl}}(\mu_2) \leq 1 + N(\mu_2) < 1 + N(\mu) = N_{\text{zykl}}(\mu).$$

Fall 2: Der Weg γ ist bevorzugt und besitzt im Inneren einen toten Punkt.

In diesem Fall sei ν der erste tote Punkt im Inneren von γ . Dann endet $\gamma(\mu)$ in dem Punkt ν und die Bedingung (b) ist erfüllt.

Fall 3: Der Weg γ ist bevorzugt und besitzt im Inneren keinen toten Punkt.

Hier ist γ ein Anfangsweg von $\gamma(\mu)$. Damit enthält $\gamma(\mu)$ den Punkt $[f(\mu)]$ und somit auch den Punkt $\varphi([f(\mu)])$. \square

Lemma 3.3.18 (Existenz von zwei \mathbb{A}' -Punkte mit gleichen irreduziblen periodischen Nielsenwegen). *Sei μ ein f -Weg in G_r der neben der notwendigen Bedingung für \mathbb{A}' -perfekte Punkte noch die folgende Eigenschaften hat:*

Es gibt keinen Punkt ν auf $\gamma(\mu)$ mit $N_{\text{zykl}}(\nu) < N_{\text{zykl}}(\mu)$.

Weiter definieren $k := N_{\text{zykl}}(\mu)$ und die Folge μ_0, μ_1, \dots rekursiv durch $\mu_0 := \mu$ und $\mu_{l+1} := \varphi([f(\mu_l)])$. Für $i \in \mathbb{N}_0$ schreiben wir

$$\mu_i = C_1^{(i)} C_2^{(i)} \dots C_k^{(i)}$$

mit r -legalen Wegen $C_1^{(i)}, \dots, C_k^{(i)}$.

Dann existieren zwei Indizes $i < j$, so dass μ_i und μ_j zwei \mathbb{A}' -perfekte Punkte mit den (im zyklischen Sinne) gleichen irreduziblen periodischen Nielsenwegen der Höhe r sind (d.h. der irreduzible periodische Nielsenweg der Höhe r von $C_k^{(i)} [f(C_1^{(i)})]$ und von $C_k^{(j)} [f(C_1^{(j)})]$ sowie von $C_{l-1}^{(i)} C_l^{(i)}$ und von $C_{l-1}^{(j)} C_l^{(j)}$ für alle $2 \leq l \leq k$ stimmen überein).

Beweis. Sei μ ein f -Weg in G_r , der die angegebenen Voraussetzungen erfüllt. Nach Lemma 3.3.17 liegen alle Punkte der Folge μ_1, μ_2, \dots auf $\gamma(\mu)$. Nach Lemma 3.3.5 enthält $\gamma(\mu)$ dann \mathbb{A} -perfekte Punkte. Sei i ein Index, so dass auf $\gamma(\mu)$ vor μ_i ein \mathbb{A} -perfekter Punkt liegt. Dann sei ν der letzte \mathbb{A} -perfekte Punkt vor μ_i . nächste \mathbb{A} -perfekte Punkte zu μ_i , der vor μ_i liegt. Es gilt also $\varphi(\nu) = \mu_i$.

Wir definieren s als das kleinste gemeinsame Vielfache der Perioden von den irreduziblen periodischen Nielsenwegen der Höhe r in ν . Nach Lemma 3.3.15(d) gilt $\varphi([f^s(\nu)]) = \mu_{i+s}$. Induktiv erhalten wir die Gleichung

$$\varphi([f^s(\nu)]) = \mu_{i+s}.$$

Da die irreduziblen periodischen Nielsenwege von ν und $[f^s(\nu)]$ übereinstimmen, gilt dies auch für $\varphi(\nu) = \mu_i$ und $\varphi([f^s(\nu)]) = \mu_{i+s}$. \square

Das nächste Lemma wird für den Algorithmus 3.3.20, der \mathbb{A}' -perfekte Punkte erkennt, relevant.

Lemma 3.3.19 (periodische Nielsenwege erkennen).

Gegeben seien (siehe Abbildung 3.6)

- zwei r -legale Wege C, D der Höhe r mit $t(C) = o(D)$,
- eine natürliche Zahl s und
- ein reduzierte Teilweg $C^{(s)}D^{(s)}$ von $[f^s(CD)]$ mit $N(C^{(s)}D^{(s)}) = 1$ und r -legalen Wegen $C^{(s)}$ und $D^{(s)}$.

Wir definieren

- den maximalen gemeinsame Endweg von $[f^s(C)]$ und $[f^s(\bar{D})]$ als z ,
- den maximalen gemeinsamen Endweg von C und $C^{(s)}$, welcher mit einer Kante aus H_r beginnt, als u und analog
- den maximalen gemeinsamen Anfangsweg von D und $D^{(s)}$, welcher mit einer Kante aus H_r endet, als v .

Dann sind die folgenden zwei Aussagen äquivalent:

- (1) Die Wege CD und $C^{(s)}D^{(s)}$ enthalten einen gemeinsamen irreduziblen periodischen Nielsenweg der Höhe r , dessen Periode ein Teiler von s ist.
- (2) Die Kantenwege u, v, z sind nicht-trivial und es gilt

$$\bar{z}u \preceq [f^s(\bar{u})] \quad \text{sowie} \quad \bar{z}v \preceq [f^s(v)].$$

Im Fall, dass ein solcher Nielsenweg existiert, ist er eindeutig und kann in dem Sinne algorithmisch gefunden werden, dass f an den periodischen Endpunkten und deren f -Bildern zerteilt⁵ und der Nielsenweg dann als Kantenweg angegeben wird.

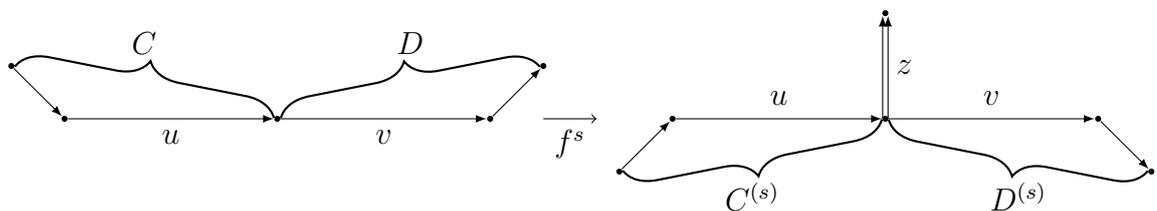


Abbildung 3.6: Die Wege C, D und $[f^s(C)], [f^s(D)]$ im Fall $C^{(s)}D^{(s)} = [f^s(CD)]$

⁵Wir müssen f auch den f -Bildern dieses Punktes zerteilen, damit die zerteilte Homotopieäquivalenz wieder Knoten auf Knoten abbildet.

Beweis. Wir setzen zunächst voraus, dass die Aussage (2) erfüllt ist. Dann gibt es einen minimalen Anfangsweg $\beta \preceq v$ mit

$$[f^s(\beta)] = \bar{z}v.$$

Dieser Weg muss kein Kantenweg sein. Er ist nicht trivial und besitzt die Höhe r . Analog gibt es einen minimalen Endweg α von u mit

$$[f^s(\alpha)] = \alpha z.$$

Da s, u, v und z gegeben sind, können α und β gefunden und an den Endpunkten sowie deren f -Bildern zerteilt werden.

Wir erhalten $[f^s(\alpha\beta)] = \alpha\beta$. Somit ist $\alpha\beta$ ein periodischer Nielsenweg in CD , der die Höhe r besitzt und dessen Periode ein Teiler von s ist. Es bleibt zu zeigen, dass $\alpha\beta$ irreduzibel ist. Wegen der Minimalität der Wahl von α und β beginnt und endet $\alpha\beta$ mit einer Kante bzw. einem Kantenstück aus H_r . Falls sich $\alpha\beta$ in zwei nicht-triviale periodische Nielsenwege zerlegen lassen würde, so hätten beide Teile die Höhe r und wir erhielten einen Widerspruch zu Bemerkung 3.3.8(a). Damit ist die Aussage (1) bewiesen.

Für die andere Implikation setzen wir nun voraus, dass in CD und in $C^{(s)}D^{(s)}$ ein gemeinsamer irreduzibler periodischer Nielsenweg der Höhe r liegt. Diesen können wir als $\alpha\beta$ mit r -legalen Wegen α, β schreiben, wobei $\bar{\alpha} \preceq \bar{C}$ und $\beta \preceq D$ gilt. Indem wir f gegebenenfalls an den periodischen Endpunkten und deren f -Bildern zerteilen, können wir ohne Einschränkung voraussetzen, dass $\alpha\beta$ ein Kantenweg ist.

Da $\beta \preceq D$ und $\beta \preceq D^{(s)}$ gelten und β mit einer Kante bzw. einem Kantenstück aus H_r endet, erhalten wir aus der Definition von v die Eigenschaft

$$\beta \preceq v.$$

Analog gilt $\bar{\alpha} \preceq \bar{u}$. Damit sind die Wege u, v und z nicht trivial.

Wir zeigen nun $\bar{z}v \preceq [f^s(v)]$. Da $v \preceq D$ gilt, D ein r -legaler Weg ist und v mit einer Kante aus H_r endet, folgt

$$[f^s(v)] \preceq [f^s(D)].$$

Da $\bar{z}v$ ebenfalls ein Anfangsweg von $[f^s(D)]$ ist, erhalten wir

$$\bar{z}v \preceq [f^s(v)] \text{ oder } [f^s(v)] \prec \bar{z}v.$$

Um Letzteres auszuschließen betrachten wir die folgende Ungleichung, wobei λ_r den Perron-Frobenius Eigenwert zu H_r bezeichne:

$$\begin{aligned} L_r([f^s(v)]) &= \lambda_r^s L_r(v) = \lambda_r^s L_r(\beta) + \lambda_r^s (L_r(v) - L_r(\beta)) \\ &\geq L_r([f^s(\beta)]) + 1 \cdot (L_r(v) - L_r(\beta)) \\ &= L_r(\bar{z}\beta) + L_r(v) - L_r(\beta) = L_r(\bar{z}v). \end{aligned}$$

Analog gilt $\bar{z}\bar{u} \preceq [f^s(\bar{u})]$ und wir haben die Aussage (2) bewiesen. \square

Der folgende Algorithmus soll uns ermöglichen, für zwei Punkte μ_i, μ_j (mit $i < j$) unserer Folge μ_0, μ_1, \dots (siehe Bemerkung 3.3.16) zu entscheiden, ob μ_i und μ_j ein Paar von \mathbb{A}' -perfekten Punkten bildet, dessen periodische Nielsenwege der Höhe r übereinstimmen. In diesem Fall muss das kleinste gemeinsame Vielfache der Perioden dieser Nielsenwege ein Teiler von $j - i$ sein.

Algorithmus 3.3.20 (\mathbb{A}' -perfekte Punkte erkennen). Sei μ ein f -Weg mit Höhe r , der die notwendige Bedingung für \mathbb{A}' -perfekte Punkte erfüllt, $k := N_{\text{zykl}}(\mu)$ und die Folge μ_0, μ_1, \dots wie in Bemerkung 3.3.16 definiert. Weiter seien zwei Indizes $i < j$ vorgegeben. Falls $N_{\text{zykl}}(\mu_j) < k$, so ist μ_i kein \mathbb{A}' -perfekter Punkt. Ansonsten sei

$$\mu_t = C_1^{(t)} C_2^{(t)} \dots C_k^{(t)}$$

für $t \in \{i, j\}$ die Zerlegung von μ_t in r -legale Wege. In diesem Fall kann mit dem folgenden Algorithmus entschieden werden, ob μ_i und μ_j ein Paar von \mathbb{A}' -perfekten Punkten bildet, deren irreduzible periodische Nielsenwege der Höhe r übereinstimmen.

Schritt 1: Prüfe für $l = 2, \dots, k$ mit Hilfe von Lemma 3.3.19, ob es in $C_{l-1}^{(i)} C_l^{(i)}$ und in $C_{l-1}^{(j)} C_l^{(j)}$ einen gemeinsamen irreduziblen periodischen Nielsenweg der Höhe r gibt, dessen Periode ein Teiler von $s := j - i$ ist. Falls ein solcher existiert, zerteile f an den Endpunkten und deren f -Bildern und schreibe den gefundenen Nielsenweg als $\alpha_i \beta_i$ mit r -legalen Wegen α_i, β_i .

Schritt 2: Prüfe, ob es in $C_k^{(i)} [f(C_1^{(i)})]$ und in $C_k^{(j)} [f(C_1^{(j)})]$ einen gemeinsamen irreduziblen periodischen Nielsenweg der Höhe r gibt, dessen Periode ein Teiler von s ist. Falls ein solcher existiert, zerteile f an den Endpunkten und deren f -Bildern und schreibe diesen als $\tau \sigma'$ mit r -legalen Wegen τ, σ' und definiere σ als minimalen Anfangsweg von $C_1^{(i)}$ mit $f(\sigma) = \sigma'$.

Schritt 3: Falls einer der periodischen Nielsenwege in Schritt 1 oder Schritt 2 nicht existiert, so gib NEIN zurück. Ansonsten gib JA zurück, falls es Wege b_1, \dots, b_k mit

$$\mu_i = \sigma b_1 \alpha_2 \beta_2 b_2 \alpha_3 \dots \beta_k b_k \tau$$

gibt (d.h. wenn sich die gefundenen Wege in μ nicht überlappen). Falls es solche Wege b_1, \dots, b_k nicht gibt, so gib NEIN zurück.

Wir fassen einige Resultate der letzten beiden Abschnitte in folgendem Algorithmus zusammen. Da dieser Algorithmus rekursiv definiert wird, verlangen wir hierbei nicht, dass der Weg μ eine exponentielle Höhe besitzt.

Algorithmus 3.3.21 (zum Finden eines perfekten Punktes). Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ eine zerteilte relative Train-Track Abbildung bezüglich einer maximalen Filtrierung

$$\emptyset = G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \dots \subsetneq G_m = \Gamma.$$

Weiter erfülle jedes polynomielle Stratum die Pol-Bedingung.

Sei μ ein f -Weg der Höhe r mit $t(\mu) \in \mathcal{V}(G_r)$. Unser Ziel ist es, einen Algorithmus zu definieren, der in $\gamma(\mu)$ einen perfekten Punkt, einen toten Punkt oder eine Schleife findet.

Wenn wir hierbei einen neuen Knoten ν in $\gamma(\mu)$ berechnen, werden wir stets prüfen, ob dieser eine der folgenden Eigenschaften besitzt:

- Der Weg ν besitzt eine exponentielle Höhe und ist \mathbb{B} -perfekt.
- Zusammen mit dem Knoten ν wird bereits eine Schleife gebildet.
- Es gilt $\text{Höhe}(\nu) < r$.
- Es gilt $\text{Höhe}(\nu) = \text{Höhe}(\mu) = r$ und $N_{\text{zykl}}(\nu) < N_{\text{zykl}}(\mu)$.

Diese Eigenschaften werden wir zusammenfassend als *Sonderfall* bezeichnen. Falls wir auf einen solchen Knoten ν treffen, können wir den Algorithmus mit entsprechender Ausgabe beenden, wobei wir in den letzten beiden Fällen den Algorithmus hierfür zunächst rekursiv mit ν aufrufen.

Indem wir μ gegebenenfalls durch den ersten Knoten auf $\gamma(\mu)$ ersetzen, können wir voraussetzen, dass μ ein f -Kantenweg ist. Wir bemerken:

- Falls die Höhe von μ zu einem Nullstratum gehört, kann die Höhe von μ nicht die minimale Höhe der Knoten auf $\gamma(\mu)$ sein, so dass dies zum dritten Sonderfall führt.
- Falls μ eine polynomielle Höhe besitzt, so können wir mit Lemma 3.2.4 einen Punkt ν in $\gamma(\mu)$ finden, welcher entweder \mathbb{E} -perfekt ist oder eine geringere Höhe als μ besitzt.
- Falls μ eine exponentielle Höhe besitzt und $N_{\text{zykl}}(\mu) = 0$ gilt, so ist μ ein \mathbb{B} -perfekter Punkt.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir uns also auf den Fall konzentrieren, bei dem μ eine exponentielle Höhe besitzt und $k := N_{\text{zykl}}(\mu) > 0$ gilt. Für diesen Fall benutzen wir den folgenden Algorithmus:

Schritt 1: Berechne den Weg $\gamma(\mu)$ bis zu dem Punkt $\varphi(\mu) =: \mu_0$. Prüfe, ob bis hierhin einer der Sonderfälle eintritt.

Schritt 2: Bestimme sukzessive die Punkte der durch

$$\mu_{l+1} := \varphi([f(\mu_l)]) \text{ für } l \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierten Folge. Nach jedem neu bestimmten Punkt, berechne den Weg $\gamma(\mu)$ bis zu diesem Punkt. Falls bis hierhin ein Sonderfall auftritt, beende den Algorithmus entsprechend.

Prüfe mit Algorithmus 3.3.20 nach jedem neu gefundenen Punkt μ_l , ob es bereits Indizes $0 \leq i < j \leq l$ gibt, so dass μ_i und μ_j zwei \mathbb{A}' -perfekte Punkte mit

den gleichen irreduziblen periodischen Nielsenwegen der Höhe r sind. Falls solche Indizes gefunden werden, wende Lemma 3.3.15(b) auf den \mathbb{A}' -Punkt μ_i an und finde auf diese Weise einen \mathbb{A} -perfekten Punkt in $y(\mu)$. Nach Lemma 3.3.18 werden irgendwann solche Indizes i und j gefunden.

Bemerkung 3.3.22 (Zusammenfassung der Ergebnisse aus Kapitel 3). Wir haben im Abschnitt 2.4 einen Graphen \mathcal{G} definiert, der die irreduziblen Nielsenwege einer Homotopieäquivalenz $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ beschreibt. Diese Konstruktion konnte algorithmisch durchgeführt werden, wenn die Probleme (P1) und (P2) in D_f lösbar sind.

Für relative Train-Track Abbildungen haben O. Bogopolski und O. Maslakova diese Probleme in [BM16] gelöst. Hierzu musste zunächst ein perfekter Punkte auf dem Weg y_E für $E \in \mathcal{S}$ gefunden werden. Zum Auffinden von \mathbb{A} -perfekten Punkten der Höhe r wird in [BM16] zunächst die Menge der möglichen A -Bereiche bestimmt. Die Laufzeit für die Berechnung dieser Menge ist

$$\mathcal{O}\left(|\mathcal{E}(H_r)|^C\right),$$

wobei C eine obere Schranke für die Anzahl der H_r -Kanten eines solchen A -Bereiches ist. Wir haben gesehen (siehe Algorithmus 3.3.21), wie wir \mathbb{A} -perfekte Punkte finden können, ohne vorher die Menge der möglichen A -Bereiche zu bestimmen.

Außerdem haben wir gezeigt, wie die weitere Lösung von (P1) und (P2) ohne Verwendung der in [BM16] benötigten normalen Punkte durchgeführt werden kann. Für \mathbb{B} -perfekte Punkte haben wir hierfür unsere Schranke für den Schnittpunkt von in toten Punkten beginnenden, bevorzugten Wegen aus Satz 2.3.8 verwendet. Für \mathbb{E} -perfekte (bzw. \mathbb{A} -perfekte) Punkte war hierfür unser Aussage (b) in Satz 3.2.6 (bzw. Satz 3.2.6) entscheidend.

Literaturverzeichnis

- [BFH97] BESTVINA, Mladen ; FEIGN, Mark ; HANDEL, Michael: Laminations, trees, and irreducible automorphisms of free groups. In: *Geometric & Functional Analysis GAFA* 7 (1997), Nr. 2, S. 215–244
- [BFH00] BESTVINA, Mladen ; FEIGN, Mark ; HANDEL, Michael: The Tits alternative for Out (Fn) I: Dynamics of exponentially-growing automorphisms. In: *Annals of Mathematics-Second Series* 151 (2000), Nr. 2, S. 517–624
- [BH92] BESTVINA, Mladen ; HANDEL, Michael: Train tracks and automorphisms of free groups. In: *Annals of Mathematics* (1992), S. 1–51
- [BM16] BOGOPOLSKI, Oleg ; MASLAKOVA, Olga: An algorithm for finding a basis of the fixed point subgroup of an automorphism of a free group. In: *International Journal of Algebra and Computation* 26 (2016), Nr. 01, S. 29–67
- [Bog08] BOGOPOLSKI, Oleg: *Introduction to group theory*. European Mathematical Society, 2008
- [Bri10] BRINKMANN, Peter: Detecting automorphic orbits in free groups. In: *Journal of Algebra* 324 (2010), Nr. 5, S. 1083–1097
- [CG10] CLIFFORD, A. ; GOLDSTEIN, R. Z.: Subgroups of free groups and primitive elements. In: *Journal of Group Theory* 13 (2010), Nr. 4, S. 601–611
- [CL89] COHEN, Marshall M. ; LUSTIG, Martin: On the dynamics and the fixed subgroup of a free group automorphism. In: *Inventiones mathematicae* 96 (1989), Nr. 3, S. 613–638
- [Coo87] COOPER, Daryl: Automorphisms of free groups have finitely generated fixed point sets. In: *Journal of Algebra* 111 (1987), Nr. 2, S. 453–456
- [DGH05] DIEKERT, Volker ; GUTIERREZ, Claudio ; HAGENAH, Christian: The existential theory of equations with rational constraints in free groups is PSPACE-complete. In: *Information and Computation* 202 (2005), Nr. 2, S. 105–140
- [DV96] DICKS, Warren ; VENTURA, Enric: *The group fixed by a family of injective endomorphisms of a free group*. American Mathematical Soc., 1996 (195)
- [Ger84] GERSTEN, S. M.: On Whitehead’s algorithm. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 10 (1984), Nr. 2, S. 281–284

- [GT86] GOLDSTEIN, Richard Z. ; TURNER, Edward C.: Fixed subgroups of homomorphisms of free groups. In: *Bulletin of the London Mathematical Society* 18 (1986), Nr. 5, S. 468–470
- [IKT90] IMRICH, W. ; KRSTIĆ, S. ; TURNER, E. C.: On the rank of fixed point sets of automorphisms of free groups. In: *Cycles and Rays*. Springer, 1990, S. 113–122
- [KM02] KAPOVICH, Ilya ; MYASNIKOV, Alexei: Stallings foldings and subgroups of free groups. In: *Journal of Algebra* 248 (2002), Nr. 2, S. 608–668
- [LS01] LYNDON, Roger C. ; SCHUPP, Paul E.: *Combinatorial Group Theory*. Bd. 89. Springer Science & Business Media, 2001
- [Mak82] MAKANIN, G. S.: Equations in a free group. In: *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 46 (1982), Nr. 6, S. 1199–1273. – Englische Übersetzung in: *Mathematics of the USSR-Izvestiya* 21 (1983), Nr. 1, S. 483–546
- [Mak84] MAKANIN, G. S.: Decidability of the universal and positive theories of a free group. In: *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 67 48 (1984), Nr. 4, S. 735–749. – Englische Übersetzung in: *Mathematics of the USSR-Izvestiya* 25 (1985), Nr. 1, S. 75–88
- [Nie17] NIELSEN, Jakob: Die Isomorphismen der allgemeinen, unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden. In: *Mathematische Annalen* 78 (1917), Nr. 1, S. 385–397
- [Raz84] RAZBOROV, Alexander A.: On systems of equations in a free group. In: *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math.* 48 (1984), Nr. 1, S. 779–83267. – Englische Übersetzung in: *Mathematics of the USSR-Izvestiya* 25 (1985), Nr. 1, S. 115–162
- [Sen06] SENETA, Eugene: *Non-negative matrices and Markov chains*. Springer Science & Business Media, 2006
- [Sta83] STALLINGS, John R.: Topology of finite graphs. In: *Inventiones mathematicae* 71 (1983), Nr. 3, S. 551–565
- [SW10] SILVA, Pedro V. ; WEIL, Pascal: Automorphic orbits in free groups: words versus subgroups. In: *International Journal of Algebra and Computation* 20 (2010), Nr. 04, S. 561–590
- [Tur95] TURNER, Edward C.: Finding indivisible Nielsen paths for a train track map. In: *Combinatorial and Geometric Group Theory: Proceedings of a Workshop*, 1995, S. 300–313
- [Whi36] WHITEHEAD, J. H. C.: On equivalent sets of elements in a free group. In: *Annals of Mathematics* (1936), S. 782–800

Abkürzungsverzeichnis

$o(w), t(w)$	Anfangs- und Endknoten einer Kante oder eines Weges w	1
\bar{w}	Inverse einer Kante oder eines Weges w	1
$\mathcal{V}(G)$	Knotenmenge eines Graphen G	1
$\mathcal{E}(G)$	Kantenmenge eines Graphen G	1
$\mathcal{E}_+(G)$	Menge der positiven Kanten eines Graphen G	1
$ \omega $	Die Anzahl der Kanten in dem Weg ω	1
$\Gamma(U)$	Der Stallings-Graph zu U	2
$\Gamma_0(U)$	Der Coregraph von $\Gamma(U)$	5
$\varphi_{x,y}$	Automorphismus, der die Basis a, b auf x, y abbildet	2
R_n	Die Rose mit n Schleifen	34
$\mathcal{S}, \mathcal{S}_i$	Diese Kantenmengen werden für $1 \leq i \leq 3$ in Definition 2.4.1 eingeführt	46
γ_E	Bevorzugter Weg in D_f , der in Definition 2.4.1 für $E \in \mathcal{S}$ eingeführt wird	47
$\gamma(\mu)$	Bevorzugter Weg in D_f , welcher in μ beginnt, siehe Definition 3.1.1	69
$\hat{f}(\mu)$	nächster Knoten in $\gamma(\mu)$	69
1_P	Konstanter Weg an den Punkt P	37
$\mathcal{P}(G)$	Die Menge der Wege in dem Graphen G	1
$\alpha \preceq \beta$	α ist ein Anfangsweg von β	1
$\alpha \prec \beta$	α ist ein echter Anfangsweg von β	1
$N(\mu)$	Anzahl der r -illegalen Punkte in μ	81
$N_{\text{zykl}}(\mu)$	Anzahl der r -illegalen Punkte in μ , zyklisch gezählt	81
$\pi_1(G, P)$	Fundamentalgruppe von G am Knoten P	1
$[\omega]$	Der zu ω gehörende reduzierte Weg	1
f_*	Auf Fundamentalgruppe induzierte Abbildung, siehe Definition 2.1.1	33
$\ell(\omega)$	Beschriftung eines Weges ω	1
H_r, G_r	Ein Stratum und ein Graph der Filtrierung $G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \dots \subsetneq G_m$	55
$M(H_r)$	Die Matrix zum Stratum H_r , siehe Definition 2.5.4	55
λ_r	Der Perron-Frobenius Eigenwert vom Stratum H_r	56
L_r	Diese Längenfunktion wird in Definition 2.5.5 eingeführt	57
D_f	Der Graph D_f wird einer Homotopieäquivalenz $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ zugeordnet	36

Index

- Brückenzug, 9
- Der Graph D_f , 36
 - \mathbb{A} -perfekte Punkte, 83
 - \mathbb{A}' -perfekte Punkte, 90
 - \mathbb{E} -perfekte Punkte, 75
 - \mathbb{B} -perfekte Punkte, 83
 - f -Wege, 36
 - bevorzugte Wege, 41
 - tote Punkte, 37
- Filtrierung, 55
 - exponentielles Stratum, 56
 - r -legale Wege, 57
 - r -legaler Punkt, 57
 - Höhe eines Weges, 56
 - maximale, 55
 - Nullstratum, 56
 - polynomielles Stratum, 56
 - Pol-Bedingung, 71
 - Stratum, 55
 - Übergangsmatrix, 55
- Graphen, 1
 - beschriftete, 1
 - reduzierte, 2
 - Coregraphen, 5
 - Komplexitätsfunktionen, 50
 - Wege, 35
- Homotopieäquivalenz, 33
 - elementare Faltung, 60
 - erweiterte Faltung, 63
 - topologischer Repräsentant, 34
 - zerteilte, 44
 - Zerteilung, 43
- irreduzible Matrix, 54
 - Perron-Frobenius Eigenwert, 54
- Längenfunktion, 45
 - für exponentielle Strata, 57
 - für polynomielle Strata, 73
- Nielsenwege
 - Definition, 36
 - periodische, 36
 - reduzible und irreduzible, 36
 - triviale, 36
- primitives Element, 26
- Quellen und Senken, 5
- relative Train-Track Abbildungen, 56
 - stabile, 60
- sichere/unsichere Kanten, 11