

Zusammenfassung

Die Modulgruppe $\Gamma := \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ der 2×2 -Matrizen über $\mathbb{Z}$ mit Determinante 1 operiert auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$. Der Bahnenraum $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ ist eine nicht kompakte Riemannsche Fläche und läßt sich durch Hinzunahme der parabolischen Fixpunkte $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ kompaktifizieren. Bezüglich der in dieser Arbeit betrachteten Untergruppen $\Delta < \Gamma$ von endlichem Index zerfällt die projektive Gerade in $r < \infty$ Spitzenklassen, so daß wir Δ einen Spitzenvektor $S(\Delta) := [s_1, \dots, s_r] \in (\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))^r$ als vollständiges Repräsentantensystem der Spitzenklassen zuordnen können und einen kompakten Bahnenraum $\Delta \backslash \mathbb{H} \cup \{s_1, \dots, s_r\}$ erhalten. Zu jedem Stabilisator $\Delta(s_i)$ eines Repräsentanten $s_i \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ mit Spitzenbreite $w_i := [\Gamma(s_i) : \Delta(s_i)]$ existieren Matrizen $g_i \in \Gamma$ mit $g_i \infty = s_i$ und $g_i^{-1} \Delta(s_i) g_i \subset \Gamma(\infty)$, bzw. $h_i \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ mit $h_i \infty = s_i$ und $h_i^{-1} \Delta(s_i) h_i = \Gamma(\infty)$. Jedem Repräsentanten s_i ordnen wir eine Eisensteinreihe zu:

$$E_i(z, s) := \sum_{\delta \in \Delta(s_i) \backslash \Delta} \text{Im}(h_i^{-1} \delta z)^s,$$

die für $\text{Re } s > 1$ absolut konvergiert und Δ -automorph ist. Jede dieser Eisensteinreihen $E_i(z, s)$ besitzt eine Fourierentwicklung in der Spitze s_j für $1 \leq i, j \leq r$, deren konstante Terme:

$$\varphi_{ij}(s) := \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{c \in \mathbb{N}} \frac{1}{(w_i w_j)^s c^{2s}} \left| \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ c & * \end{pmatrix} \in g_i^{-1} \Delta(s_i) g_i \setminus g_i^{-1} \Delta g_j / g_j^{-1} \Delta(s_j) g_j \right\} \right|$$

der Streumatrix $\Phi(\Delta, s) := (\varphi_{ij}(s))_{1 \leq i, j \leq r}$ zusammengefasst werden. Im Rahmen dieser Arbeit in GAP entwickelte Programme berechnen zu einer Untergruppe $\Delta <_f \Gamma$ Repräsentanten der Spitzenklasse, die Spitzenbreiten und die Anzahlen b_{ij} der Doppelnebenklassen.

Für Gruppen $\Delta < \Lambda < \Gamma$ führen wir den Begriff der relativen Spitzenbreite einer Spitze s_i^j von Δ in Λ ein und konstruieren die Streumatrix von Λ aus der Streumatrix von Δ .

Diese Überlegungen ermöglichen ein weites Feld von Anwendungen: Zum Einen erhalten wir die Streumatrix einer Kongruenzuntergruppe Δ aus der Streumatrix ihrer Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(n)$. Daher bestimmen wir zunächst für $\Gamma(p)$ die Struktur der Streumatrix und geben die Einträge in sehr expliziter Form an, bevor wir die Ergebnisse so weit wie möglich auf beliebige Hauptkongruenzuntergruppen $\Gamma(n)$ übertragen.

Zum Anderen können wir auch für solche Nichtkongruenzuntergruppen Δ , die Untergruppen einer Kongruenzuntergruppe Λ sind und eine oder mehrere übereinstimmende Spitzenklassen haben, die Einträge der Streumatrix zumindest teilweise bestimmen. Dann ergeben sich die zu diesen Spitzenrepräsentanten gehörenden Einträge der Streumatrix von Δ aus der Streumatrix von Λ .

Kenntnisse der Struktur der Streumatrix von $\Gamma(p)$ ermöglichen uns auch, die Determinante $\det \Phi(\Gamma(p), s)$ als Quotient von Produkten aus der Riemannschen ζ -Funktion und Dirichletschen L -Reihen zu bestimmen.

