

Zur
Existenz und Regularität
von Minimierern
quasikonvexer Variationsintegrale
mit (p, q) -Wachstum

I n a u g u r a l - D i s s e r t a t i o n

zur
Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Thomas Schmidt

aus Mettmann

8. Januar 2007

Aus dem Mathematischen Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Gedruckt mit der Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent: Prof. Dr. K. Steffen

Koreferent: Prof. Dr. F. Jarre

Tag der mündlichen Prüfung: 14. 12. 2006

„In der Welt geschieht nichts, worin man nicht den Sinn eines bestimmten Maximums oder Minimums erkennen könnte.“
(LEONHARD EULER)

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	I
Einleitung	III
Danksagung	XI
1 Stand der Forschung	1
1.1 Konvexe Integranden mit p -Wachstum	1
1.1.1 Unterhalbstetigkeit und Existenzsätze	2
1.1.2 Partielle Regularität	5
1.2 Quasikonvexe Integranden mit p -Wachstum	7
1.2.1 Polykonvexität und Beispiele	8
1.2.2 Unterhalbstetigkeit und Existenzsätze	9
1.2.3 Partielle Regularität	10
1.3 Nichtquasikonvexe Integranden mit p -Wachstum	13
1.3.1 Die quasikonvexe Hülle	13
1.3.2 Relaxation	13
1.4 Konvexe Integranden mit (p, q) -Wachstum	14
1.4.1 Partielle Regularität	15
2 Quasikonvexe Integranden mit (p, q)-Wachstum	17
2.1 Stärkere Voraussetzungen: $W^{1,p}$ -Quasikonvexität	22
2.1.1 Polykonvexe Beispiele	23
2.1.2 Unterhalbstetigkeit und Existenzsätze	24
2.1.3 Partielle Regularität	25
2.2 Schwächerer Minimiererbegriff: Relaxierte Funktionale	27
2.2.1 Definitionen und einfache Eigenschaften	27
2.2.2 Unterhalbstetigkeit und Existenzsätze	29
2.2.3 Maßdarstellung	31
2.2.4 Integraldarstellung	32
2.2.5 Partielle Regularität	35
3 Offene Probleme	39

4	Beweis von Hauptsatz 2.16	43
4.1	Die Cacciopoli-Ungleichung	44
4.2	Approximative \mathcal{A} -Harmonizität	52
4.3	Exzess-Abschätzungen	54
4.4	Partielle Regularität	60
5	Beweis von Hauptsatz 2.45	63
5.1	Die Euler-Gleichung	63
5.2	Einige technische Lemmata	65
5.3	Die Cacciopoli-Ungleichung	70
5.4	Partielle Regularität	75
6	Technisches	77
6.1	Abschätzungen für V_μ	77
6.2	Abschätzungen für $e_{p,1}$	79
6.3	Glätten mit variablem Radius	80
6.4	Ein Iterationslemma	84
6.5	\mathcal{A} -harmonische Approximation	84
6.6	Eine Poincaré-Ungleichung für Ringgebiete	88
6.7	Der Lebesguesche Zerlegungssatz	88
6.8	Schwache Konvergenz und Mittelwerte	89
A	Beweis von Satz 2.9	91
B	Ein Beispiel	93
C	Quasimonotone Systeme	103
C.1	Die Cacciopoli-Ungleichung	105
C.2	Approximative \mathcal{A} -Harmonizität	106
C.3	Partielle Regularität	107
	Notation	109
	Literatur	113

Einleitung

In vielen Situationen in den Naturwissenschaften, insbesondere in der Physik und der Chemie, läßt sich einem System eine Energie, eine charakteristische Größe, zuschreiben. Eine solche Energie ist eine einzige Zahl, die den Zustand des - möglicherweise sehr komplexen - Systems partiell beschreibt. Ein fundamentales Naturgesetz besagt, daß jedes System dazu tendiert, die zugehörige Energie zu minimieren. Daher sind Zustände minimaler Energie in den Naturwissenschaften von großem Interesse.

Mathematisch läßt sich die Energie eines Systems häufig durch **Variationsintegrale** beschreiben. Genauer modelliert man die verschiedenen Zustände des Systems durch Funktionen u , aus denen man die zugehörige Energie $\mathcal{F}[u; \Omega]$ durch einen Integrationsprozeß erhält. Konkret untersuchen wir in dieser Arbeit den wichtigen **Modellfall autonomer Variationsintegrale erster Ordnung**

$$\mathcal{F}[u; O] := \int_O f(Du(x)) dx \quad \text{für } O \in \mathcal{O}_\Omega \text{ und differenzierbare } u : O \rightarrow \mathbb{R}^N.$$

Dabei seien die Dimensionen $n, N \in \mathbb{N}$ und eine beschränkte, offene und nicht-leere Teilmenge Ω von \mathbb{R}^n in dieser Arbeit stets fixiert und \mathcal{O}_Ω bezeichne das System aller nichtleeren offenen Teilmengen von Ω . Der Integrand f ist eine glatte Funktion $\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei \mathbb{M} den Raum der $(N \times n)$ -Matrizen bezeichnet.

Die Zustände minimaler Energie entsprechen den Funktionen u , die bzgl. vorgegebener Randwerte Minimalstellen von $\mathcal{F}[-; \Omega]$ sind. Derartige Funktionen nennen wir Lösungen des zu \mathcal{F} gehörigen Variationsproblems oder **Minimierer** von \mathcal{F} .

Im Jahr 1900 stellte D. HILBERT eine Liste von 23 offenen Problemen aus allen Bereichen der Mathematik vor. Diese Probleme haben die Mathematik des zwanzigsten Jahrhunderts stark geprägt. Bei der Erläuterung seines 20. Problems formulierte HILBERT die Frage

, [...], ob nicht jedes reguläre Variationsproblem eine Lösung besitzt, sobald hinsichtlich der gegebenen Grenzbedingungen gewisse Annahmen [...] erfüllt sind und nötigenfalls der Begriff der Lösung eine sinngemäße Erweiterung erfährt.' (D. HILBERT, [Hi])

Das 19. Problem trägt die Überschrift

„Sind die Lösungen regulärer Variationsprobleme stets notwendig analytisch?“ (D. HILBERT, [Hi])

Dies sind im wesentlichen die klassischen Fragen nach der **Existenz** und den **Regularitätseigenschaften** von Minimierern, die ältesten und grundlegendsten Fragen der Variationsrechnung.

Die Frage nach der Existenz von Minimierern bildet dabei natürlich die Grundlage für alle weiteren Fragen.

Die Regularitätsfrage beschäftigt sich mit dem Nachweis, daß jeder Minimierer automatisch gewissen Glattheitseigenschaften, wie beispielsweise Stetigkeit und Differenzierbarkeit, genügt. Solche Eigenschaften sind eine prinzipielle Voraussetzung für einen numerischen Zugang zur Berechnung von Minimierern. Desweiteren beinhalten sie auch eine Information über Eigenschaften des modellierten Systems.

Unzählige Autoren haben sich in den letzten 100 Jahren mit diesen Fragen beschäftigt (vgl. beispielsweise [Bi], [Bu], [D2], [Gia], [Giu] und [Mi] für weitere Referenzen) und es hat sich herausgestellt, daß HILBERTs Grundfragen zu vage formuliert sind, um eine konkrete Antwort zu erlauben. Nur unter verschiedenen Zusatzvoraussetzungen lassen sich Existenz- und Regularitätssätze beweisen (vgl. Kapitel 1). Auch heute verbleiben jedoch noch Situationen, in denen ungeklärt ist, welche Existenz- und Regularitätssätze gelten (vgl. Kapitel 2 und 3).

Ein fundamentales Hilfsmittel ist ein notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines Minimierers, das dem Ableitungskriterium der klassischen Extremalrechnung entspricht: Die Ableitung des Funktionals \mathcal{F} kann als Differentialoperator verstanden werden und jeder Minimierer u von \mathcal{F} erfüllt eine schwache Formulierung des zugehörigen homogenen Systems

$$\operatorname{div}_x Df(Du(x)) = 0$$

von N Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Dieses System heißt das **Euler-Lagrange-System** von \mathcal{F} (vgl. Satz 0.3). Im Falle $n = 1$ handelt es sich um ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, während im Falle $n \geq 2$ partielle Differentialgleichungen vorliegen. Die in diesen beiden Fällen auftretenden Probleme sind daher von ganz verschiedener Art. Wir betreiben hier nur mehrdimensionale Variationsrechnung, d.h. wir werden im folgenden immer $n \geq 2$ annehmen.

Wir gehen jetzt kurz auf einige bekannte Existenz- und Regularitätsergebnisse ein; eine ausführlichere Darstellung findet man in Kapitel 1. Wie oben bereits erwähnt, müssen wir zunächst weitere Voraussetzungen machen: Klassische Hypothesen sind, daß f strikt konvex ist und wächst wie die p -te Potenz, d.h.

$$\gamma|A|^p \leq f(A) \leq \Gamma(1 + |A|^p) \quad \text{für alle } A \in \mathbb{M} \quad (0.1)$$

mit Konstanten $0 < \gamma \leq \Gamma < \infty$ und einem Wachstumsexponenten $1 < p < \infty$. Unter derartigen Voraussetzungen ist bekannt, daß es zu vorgegebenen Randwerten stets einen eindeutig bestimmten Minimierer gibt. Diese Existenzaussage

beweist man mit einer naheliegenden Methode, der sogenannten direkten Methode der Variationsrechnung. Außerdem ist der Minimierer glatt, genauer beliebig oft klassisch differenzierbar, auf einer offenen Teilmenge von Ω , deren Komplement Dimension kleiner als $n - 2$ hat. Es handelt sich hier um einen sogenannten partiellen Regularitätssatz, der Singularitäten des Minimierers in einer kleinen Ausnahmemenge zuläßt. Im Falle $N \geq 2$ zeigen Beispiele, daß solche Singularitäten in der Tat auftreten können. Das Regularitätsresultat liegt tiefer als der Existenzsatz; es sind verschiedene technisch aufwendige Beweismethoden entwickelt worden. Der entscheidende Schritt besteht dabei stets in der Herleitung gewisser Integralabschätzungen, die es erlauben, auf Hölder-Stetigkeit der ersten Ableitungen des Minimierers zu schließen.

In seiner berühmten Arbeit [Mo] zeigte C. B. MORREY 1952, daß sich die Existenz von Minimierern auch noch beweisen läßt, wenn man die Konvexität von f abschwächt zu einer dort neu eingeführten Bedingung, der sogenannten **Quasikonvexität** (Definition 1.12). Diese Bedingung, obwohl in ihrer Natur technisch und schwer zugänglich, erwies sich in den folgenden Jahrzehnten als fundamental, sowohl für theoretische Belange wie Unterhalbstetigkeits- und Existenzsätze (vgl. z.B. [Mo]) als auch für Anwendungen der Variationsrechnung in der Elastizitätstheorie (vgl. z.B. [Ba1] und [Ba2]). Viele Arbeiten haben sich seitdem mit dem Quasikonvexitätsbegriff beschäftigt, dennoch verbleiben in diesem Zusammenhang immer noch fundamentale offene Fragen. L. C. EVANS zeigte 1986 in [Ev], daß Quasikonvexität nicht nur in der Existenztheorie sondern auch in der Regularitätstheorie eine sinnvolle Voraussetzung ist, die es erlaubt, Glattheit von Minimierern außerhalb einer \mathcal{L}^n -Nullmenge zu zeigen.

Auch in anderer Richtung wurden die obigen Hypothesen verallgemeinert. Ausgehend von mehreren Arbeiten von P. MARCELLINI aus den 90er Jahren wurden die sogenannten **(p, q)-Wachstumsbedingungen** eingeführt, die erlauben, daß das Wachstum von f zwischen zwei Potenzen liegt, also

$$\gamma|A|^p \leq f(A) \leq \Gamma(1 + |A|^q) \quad \text{für alle } A \in \mathbb{M} \quad (0.2)$$

mit Konstanten $0 < \gamma \leq \Gamma < \infty$ und zwei Wachstumsexponenten $1 < p \leq q < \infty$. Solche Wachstumsbedingungen treten in verschiedenen Anwendungen, besonders bei der Modellierung anisotroper Systeme, auf. Ein bekanntes Beispiel ist die Theorie elektrorheologischer Flüssigkeiten (vgl. [R], [AM2]). Für konvexe f ist die Erweiterung der Existenztheorie auf diesen Fall trivial. Die Erweiterung der Regularitätstheorie dagegen ist in etlichen Arbeiten, zunächst im skalaren Fall $N = 1$, später auch im allgemeinen vektorwertigen Fall (vgl. z.B. [PS], [BF1]), untersucht worden; sie gelingt unter gewissen Einschränkungen an den Abstand von p und q .

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Fragestellung, ob auch beide oben beschriebenen Verallgemeinerungen zugleich noch den Beweis von Existenz- und Regularitätssätzen zulassen. Wir untersuchen also Minimierer von Variationsintegralen \mathcal{F} , deren Integrand f quasikonvex ist und (0.2) genügt.

Typische Beispiele solcher Integranden, die auch in der Elastizitätstheorie von Interesse sind (vgl. [Ba1], [Ba2], [Mar2]), sind gegeben durch

$$\begin{aligned} f(A) &:= |A|^p + h(\det A) \\ f(A) &:= (1 + |A|^2)^{\frac{p}{2}} + h(\det A) \end{aligned} \quad \text{für } A \in \mathbb{M} \quad (0.3)$$

mit $n = N$ und einem konvexen $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, das wächst wie die $\frac{q}{n}$ -te Potenz.

Die erste Schwierigkeit liegt darin, daß ein Existenzbeweis mit der direkten Methode auf sequentieller Unterhalbstetigkeit von $\mathcal{F}[-; \Omega]$ bzgl. der schwachen Topologie des Sobolevraums $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ beruht, während der Unterhalbstetigkeitssatz aus [AF1] diese Eigenschaft nur mit dem Exponenten q anstelle von p garantiert. Für konvexe f tritt dieses Problem nicht auf, da die zugehörigen Unterhalbstetigkeitssätze nicht an die Wachstumsexponenten gekoppelt sind. In [FMal] und [Kri] wurde gezeigt, daß $\mathcal{F}[-; \Omega]$ auch für quasikonvexe f unter $q < \frac{n}{n-1}p$ noch unterhalbstetig ist bzgl. schwacher $W^{1,p}$ -Konvergenz von $W^{1,q}$ -Funktionen; wir stellen dieses Resultat in Kapitel 2 dar (Satz 2.2). Aus diesem Satz läßt sich eine Existenzaussage (Satz 2.4) ableiten, die jedoch unvollständig erscheint.

Insbesondere sind keine auf diesem Resultat aufbauenden Regularitätsaussagen bekannt. Dies ist ein naheliegendes, doch bisher ungelöstes Problem in der Regularitätstheorie für Minimierer, das auch in der Einleitung von [AM1] erwähnt wird. Wir verfolgen in dieser Arbeit zwei Ansätze, die zu einer verbesserten Existenztheorie und einer dazu passenden Regularitätstheorie führen und diese Lücke weitgehend schließen:

Der erste Ansatz beruht auf der Beobachtung, daß die in [FMal] entwickelten Methoden für $q < \frac{n}{n-1}p$ unter Voraussetzung eines in [BM] eingeführten verschärften Quasikonvexitätsbegriffs auch den Beweis sequentieller schwacher Unterhalbstetigkeit auf $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ erlauben (Satz 2.12). Dies führt sofort zu einer vollständigen Existenztheorie (Satz 2.13). Das erste Hauptresultat dieser Arbeit ist ein auf dieser Situation aufbauendes partielles Regularitätsresultat (Hauptsatz 2.16) für $q < p + \frac{1}{n}$. Es handelt sich um das erste Regularitätsresultat, das quasikonvexe Integranden mit (p, q) -Wachstum, beispielsweise die zweiten Integranden in (0.3) mit $p \geq n$, erfaßt.

Der Schlüssel zum Beweis von Hauptsatz 2.16 ist der Beweis einer neuartigen Cacciopoli-Ungleichung (Lemma 2.15), auf deren rechter Seite zusätzliche Störterme auftreten. Anschließend lassen sich im wesentlichen Standardmethoden der Regularitätstheorie anwenden, um Exzess-Abschätzungen und partielle $C^{1,\alpha}$ -Regularität herzuleiten: Wir verwenden dazu im Rahmen dieser Arbeit die in [DSt] und Nachfolgearbeiten entwickelte Methode der \mathcal{A} -harmonischen Approximation. Die wesentlichen neuen Ideen in diesem Regularitätsbeweis bestehen in der Verwendung der (auch in [FMal] benutzten) Glättungsoperatoren des Lemmas 6.12 zur Konstruktion geeigneter Testfunktionen für den Beweis der Cacciopoli-Ungleichung und in der Behandlung der oben erwähnten Störterme.

Der zweite Ansatz benutzt das relaxierte Funktional

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; O] := \inf \left\{ \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; O] : \begin{array}{l} u_k \in W_{\text{lok}}^{1,q}(O; \mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N), \\ u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u \text{ schwach in } W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N) \end{array} \right\}, \quad (0.4)$$

das in [FMal] eingeführt wurde. Die Verwendung derartiger Funktionale in der Variationsrechnung hat eine lange Tradition: Da $\mathcal{F}[-; O]$ unterhalbstetig ist bzgl. der in (0.4) auftretenden Konvergenz, kann $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ als das größte bzgl. eben dieser Konvergenz unterhalbstetige Funktional interpretiert werden, das auf $W_{\text{lok}}^{1,q}$ -Funktionen nie größer ist als das ursprüngliche Funktional \mathcal{F} . Somit kann man $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ als eine alternative Möglichkeit verstehen, das Funktional \mathcal{F} von $W_{\text{lok}}^{1,q}$ -Funktionen auf allgemeine $W^{1,p}$ -Funktionen so fortzusetzen, daß die Unterhalbstetigkeitseigenschaft erhalten bleibt. Es handelt sich bei dieser Fortsetzung um eine Variante der klassischen Lebesgue-Serrin-Erweiterung, die u.a. auf [Se1] und [Se2] zurückgeht.

Mit simplen Argumenten läßt sich einsehen, daß $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[-; \Omega]$ sogar sequentiell schwach unterhalbstetig auf $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ ist (Satz 2.23; gilt selbst, wenn f nicht quasikonvex ist). Dies führt sofort zu einem Existenzsatz für Minimierer von $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ (Satz 2.28).

Das Funktional $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ ist allerdings zunächst nur ein abstraktes Objekt und schwer handhabbar. Daher sind Darstellungssätze für $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ von Interesse: In [FMal] wurde gezeigt, daß sich $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ für $q < \frac{n}{n-1}p$ wie ein Radon-Maß im zweiten Argument verhält (Satz 2.33) und auf $W^{1,q}$ -Funktionen sogar wie ein Integral (Lemma 2.38). Einen schwierigeren Integraldarstellungssatz wurde in [BFM] bewiesen (Satz 2.40). Diese Sätze machen einerseits die Betrachtung von $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ als Fortsetzung von \mathcal{F} erst sinnvoll, andererseits erlauben sie auch den Beweis des zweiten Hauptresultats dieser Arbeit (Hauptsatz 2.45), eines partiellen Regularitätsresultats für $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ -Minimierer unter $q < p + \frac{1}{n}$. Dieses Ergebnis erfaßt auch den Fall $p < n$ in (0.3).

Der Beweis benutzt alle zuvor erwähnten Methoden und Resultate; im Vergleich zum Beweis von Hauptsatz 2.16 treten zusätzliche technische Schwierigkeiten auf, die größtenteils daher kommen, daß $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ sich nicht komplett durch ein Integral beschreiben läßt. Darüber hinaus enthält der Regularitätsbeweis die folgenden neuen Ideen: Erstens folgt aus den Integraldarstellungssätzen, daß $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ -Minimierer dem Euler-Lagrange-System des ursprünglichen Funktionals \mathcal{F} genügen (Lemma 2.43). Dies erlaubt uns, mit üblichen linearen Vergleichssystemen zu arbeiten. Zweitens impliziert die Unterhalbstetigkeitseigenschaft von $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ eine abstrakte Variante der verschärften Quasikonvexitätsbedingung aus dem ersten Ansatz (Lemma 2.44). Diese erlaubt zusammen mit den Darstellungssätzen den Beweis derselben neuen Cacciopoli-Ungleichung, die schon beim ersten Ansatz verwendet wurde.

Wir fassen jetzt noch einmal die grundlegenden Annahmen dieser Arbeit zusammen und konkretisieren fundamentale Begriffe:

Für den Rest der Arbeit gelten die folgenden **Grundannahmen**:

Annahme 0.1.

Stets seien $n, N \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Ω ein **beschränkte, offene und nichtleere** Teilmenge von \mathbb{R}^n und $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ eine **von unten beschränkte und stetige** Funktion. Das zu f gehörige Variationsfunktional \mathcal{F} sei durch

$$\mathcal{F}[u; O] := \int_O f(Du) \, dx \quad \text{für } O \in \mathcal{O}_\Omega \text{ und } u \in W_{\text{lok}}^{1,1}(O; \mathbb{R}^N) \quad (0.5)$$

gegeben.

Somit existiert $\mathcal{F}[u; O]$ stets in $] - \infty, \infty]$.

Bei allen folgenden Ergebnissen konzentrieren wir uns auf den Fall $N \geq 2$. Zwar gelten alle diese Ergebnisse auch im skalaren Fall $N = 1$, doch lassen sich dann mit geringerem Aufwand stärkere Ergebnisse beweisen (vgl. z.B. [Bi], [Gia], [Giu]). Wir bemerken für $N = 1$ insbesondere, daß sich Quasikonvexität zu Konvexität reduziert, und, daß sich Regularität von Minimierern auf ganz Ω und nicht nur partielle Regularität beweisen läßt.

Der Begriff des Minimierers ist nur sinnvoll, wenn man sich auf Funktionen beschränkt, die gewissen vorgegebenen Randbedingungen genügen. Hier betrachten wir stets Minimierer von \mathcal{F} bei **Dirichlet-Randbedingungen**, die also $\mathcal{F}[-; \Omega]$ minimieren unter allen Funktionen mit gleichen Werten auf dem Rand von Ω :

Definition 0.2 (Minimierer). Seien $p \geq 1$ und $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$.

u heißt ein $W^{1,p}$ -Minimierer von \mathcal{F} auf Ω genau dann, wenn $f(Du) \in L^1(\Omega)$ und

$$\int_\Omega f(Du) \, dx \leq \int_\Omega f(Du + D\varphi) \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$$

gelten. Im folgenden Text werden wir solche u kurz als **Minimierer** von \mathcal{F} auf Ω oder \mathcal{F} -minimierend auf Ω bezeichnen, wobei der zugehörige Exponent stets p heißen wird.

Die wichtigste Verbindung zu nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen ergibt sich durch das bereits erwähnte notwendige Kriterium für Minimierer, das Euler-Lagrange-System von \mathcal{F} . Unter schwachen Voraussetzungen läßt sich dieses Kriterium folgendermaßen konkretisieren:

Satz 0.3 (Euler-Lagrange-System). $f \in C_{\text{lok}}^1(\mathbb{M})$ genüge

$$\limsup_{|A| \rightarrow \infty} \frac{|Df(A)|}{|A|^{q-1}} < \infty$$

für ein $q \in [1, \infty[$ und $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ sei ein Minimierer von \mathcal{F} mit $q - 1 \leq p \in [1, \infty]$, dann genügt u der folgenden schwachen Formulierung des partiellen Divergenzform-Systems $\operatorname{div} Df(Du) = 0$ auf Ω :

$$\int_{\Omega} Df(Du) D\varphi \, dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^N) \quad (0.6)$$

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ fixiert. Die Funktion

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \int_{\Omega} f(Du + tD\varphi) \, dx$$

nimmt ein Minimum in 0 an. Die notwendige Bedingung für lokale Extrema besagt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_{\Omega} f(Du + tD\varphi) \, dx = 0.$$

Unter Verwendung der oberen Schranke für die Ableitung Df können wir die Differentiation unter dem Integral ausführen und erhalten mit der Kettenregel die äquivalente Gleichung

$$\int_{\Omega} Df(Du) D\varphi \, dx = 0.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Insbesondere im Hinblick auf die Regularitätseigenschaften von Minimierern wird das System (0.6) im folgenden ein wichtiges Hilfsmittel sein.

Abschließend bemerken wir an dieser Stelle, daß etliche der später beschriebenen Ergebnisse für wesentlich allgemeinere als die hier behandelten Funktionale des Typs (0.5) bekannt sind. Die Hauptresultate dieser Arbeit sind jedoch selbst in diesem einfachen Modellfall zuvor nicht bewiesen worden. Die Behandlung allgemeinerer Funktionale ist von Interesse, doch lassen sich nicht alle verwendeten Methoden ohne weiteres übertragen; man vergleiche dazu auch Kapitel 3.

Diese Arbeit ist folgendermaßen gegliedert:

In Kapitel 1 beschreiben wir den Stand der Forschung im Bezug auf Existenz- und Regularitätssätze für Minimierer. Unter anderem betrachten wir die beiden oben beschriebenen Verallgemeinerungen, Quasikonvexität und (p, q) -Wachstum, jedoch nicht beide zugleich.

In Kapitel 2 konzentrieren wir uns auf die Grundsituation dieser Arbeit, Variationsfunktionale mit quasikonvexen Integranden und mit (p, q) -Wachstum im Sinne von (0.2). Wir geben bekannte Ergebnisse (insbesondere aus [BM], [FMal] und [BFM]) an und erläutern einige illustrative Beweise. Darüber hinaus diskutieren wir Beispiele quasikonvexer Integranden mit (0.2) und stellen die neuen Ergebnisse der Arbeit dar. Die zentralen Resultate sind die Existenzsätze 2.13 und 2.28 und die zugehörigen Regularitätssätze 2.16 und 2.45

Kapitel 3 beschreibt kurz einige ungelöste Fragen, die am Rande dieser Arbeit auftreten.

Kapitel 4 enthält den Beweis von Hauptsatz 2.16 inklusive der Cacciopoli-Ungleichung und weiterer vorbereitender Lemmata.

Kapitel 5 beinhaltet mehrere Lemmata, die zum Beweis von Hauptsatz 2.45 führen.

In Kapitel 6 schließlich findet man technische Resultate, die in den vorausgehenden Beweisen benötigt wurden.

Eine Übersicht über die im folgenden Text verwendeten Notationen findet man am Ende dieser Arbeit.

Danksagung

Mein aufrichtiger Dank gilt meiner Familie und meinen Freunden, die mich in den Jahren, in denen diese Arbeit entstanden ist, stets unterstützt haben, insbesondere meinen Eltern MONIKA und FRANZ-HERMANN SCHMIDT.

Besonderen Dank möchte ich meinem Lehrer PROF. DR. KLAUS STEFFEN für unzählige Gespräche und Hinweise aussprechen. Er machte mich auf dieses Thema aufmerksam, bekundete stets Interesse, begutachtete mehrere Versionen dieser Arbeit und hat dieses Projekt entscheidend mitgeprägt.

Weiterhin danke ich DR. ANDREAS GASTEL und DR. CHRISTOPH SCHEVEN für viele Diskussionen und Anregungen.

Außerdem gilt mein Dank der Gründerstiftung für Forschung und wissenschaftlichen Nachwuchs an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf (Düsseldorf Entrepreneurs Foundation), die mich im Rahmen eines Promotionsstipendiums bei der Fertigstellung dieser Arbeit unterstützt hat.

Ohne sie alle wäre diese Arbeit nicht entstanden.

Kapitel 1

Stand der Forschung

1.1 Konvexe Integranden mit p -Wachstum

Wir diskutieren zunächst die wohlbekanntesten Sätze über Existenz, Eindeutigkeit und Regularität von Minimierern im simpelsten Fall der mehrdimensionalen Variationsrechnung. Die sog. isotropen, Standard- oder p -Wachstumsbedingungen an f bestehen aus der Wachstumsbedingung

$$f(A) \leq \Gamma(1 + |A|^p) \quad \text{für alle } A \in \mathbb{M} \quad (1.1)$$

und der Koerzivitätsbedingung

$$f(A) \geq \gamma|A|^p - c \quad \text{für alle } A \in \mathbb{M} \quad (1.2)$$

mit Konstanten $\Gamma, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$, $c \in \mathbb{R}$ und einem Wachstumsexponenten $\mathbf{1} \leq \mathbf{p} < \infty$. Wichtige Beispiele von Integranden, die diesen Bedingungen genügen, sind die **p -Energiedichte**

$$e_p : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \frac{1}{p}|A|^p$$

und ihre nichtdegenerierte Variante

$$e_{p,1} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \frac{1}{p}(1 + |A|^2)^{\frac{p}{2}}.$$

Unter (1.2) gilt für am Rand glatte $O \in \mathcal{O}_\Omega$ und $u \in W_{\text{lok}}^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^N)$

$$\mathcal{F}[u; O] < \infty \implies u \in W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N), \quad (1.3)$$

daher macht es Sinn, \mathcal{F} nur auf $W^{1,p}$ -Funktionen betrachten.

1.1.1 Unterhalbstetigkeit und Existenzsätze

Zu geeignet vorgegebenen Randwerten gibt es bei konvexem f stets einen Minimierer:

Satz 1.1 (Existenz). *f sei **konvex** und genüge (1.2) mit $p > 1$. Dann gibt es zu jedem $u_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ mit $\mathcal{F}[u_0; \Omega] < \infty$ einen Minimierer $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ von \mathcal{F} auf Ω . Ist f sogar strikt konvex, so ist u durch u_0 eindeutig bestimmt.*

Diesen Existenzsatz beweist man mit der direkten Methode der Variationsrechnung, einer Verallgemeinerung des Extremalsatzes:

Satz 1.2 (Direkte Methode der Variationsrechnung). *(X, τ) sei ein topologischer Raum und $F : X \rightarrow]-\infty, \infty]$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *F ist **sequentiell τ -unterhalbstetig**, d.h. für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X gilt:*

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\tau} x \text{ in } X \implies F(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(x_k)$$

(II) *F ist **sequentiell τ -koerziv**, d.h. für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X gilt:*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} F(x_k) < \infty \implies (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ subkonvergiert bzgl. } \tau$$

(III) *Es gilt $F \not\equiv \infty$.*

Dann gibt es eine Minimalstelle von F in X mit endlichem Funktionswert.

Beweis. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Minimalfolge für F in X . Gemäß (II) besitzt $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine τ -konvergente Teilfolge; ihr Grenzwert sei x . Gemäß (I) folgt:

$$F(x) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = \inf_X F < \infty$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Um Satz 1.1 mit Satz 1.2 zu beweisen, muß man auf $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ eine Topologie finden, bzgl. der $\mathcal{F}[-; \Omega]$ sowohl sequentiell unterhalbstetig als auch sequentiell koerziv ist. Wir werden sehen, daß die schwache $W^{1,p}$ -Topologie beiden Anforderungen genügt.

Wir wenden uns zunächst den Unterhalbstetigkeitseigenschaften von $\mathcal{F}[-; \Omega]$ zu:

Bemerkung 1.3. *Gemäß dem Lemma von Fatou ist $\mathcal{F}[-; \Omega]$ stark (d.h. bzgl. der Normtopologie) unterhalbstetig auf $W_{\text{lok}}^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^N)$.*

Ein klassischer Satz der Variationsrechnung garantiert allgemeiner sequentielle schwache Unterhalbstetigkeit von \mathcal{F} :

Satz 1.4 (Unterhalbstetigkeit). f sei **konvex**, dann ist $\mathcal{F}[-; \Omega]$ sequentiell schwach unterhalbstetig auf $W_{\text{lok}}^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^N)$.

Der Beweis benutzt folgende funktionalanalytische Konsequenz des Satzes von Hahn-Banach:

Lemma 1.5 (von Mazur). Sei E ein normierter Raum und $x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$ schwach in E . Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$ und

$$\left\| x - \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j \right\|_E \leq \varepsilon.$$

Man kann folglich x in der Norm von E durch Konvexkombinationen der x_k approximieren.

Für einen Beweis des Lemmas vergleiche man [Y, Chapter V.1, Theorem 2].

Bemerkung 1.6. Eine Umformulierung des Lemmas lautet:

Sei K eine konvexe Teilmenge eines normierten Raumes E , dann gilt:

$$K \text{ abgeschlossen in } E \iff K \text{ schwach folgenabgeschlossen in } E$$

1. Beweis von Satz 1.4. Sei $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$ schwach in $W_{\text{lok}}^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ und zunächst $O \in \mathbb{K}_\Omega$ (d.h. $O \in \mathcal{O}_\Omega$ und $O \subset\subset \Omega$) fixiert. Wir setzen $M := \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; O] \in]-\infty, \infty]$. Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben, durch Teilfolgenübergang läßt sich

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}[u_k; O] \leq M + \varepsilon \tag{1.4}$$

erreichen. Bemerkung 1.3 und Lemma 1.5 ermöglichen uns, ein $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$ und

$$\mathcal{F}[u; O] \leq \mathcal{F}\left[\sum_{j=1}^m \alpha_j u_j; O\right] + \varepsilon$$

zu finden. Mit der Konvexität von f und (1.4) sehen wir

$$\mathcal{F}[u; O] \leq M + 2\varepsilon$$

und mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt

$$\mathcal{F}[u; O] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; O] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; \Omega].$$

Ausschöpfen von Ω mit solchen $O \in \mathbb{K}_\Omega$ führt auf

$$\mathcal{F}[u; \Omega] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; \Omega]$$

und die Behauptung ist bewiesen. \square

2. *Beweis von Satz 1.4.* Sei $O \in \mathbb{K}_\Omega$ fixiert. Nach Bemerkung 1.3 ist $\mathcal{F}[-; O]$ stark unterhalbstetig auf $W^{1,1}(O; \mathbb{R}^N)$. Äquivalent ist, daß der Epigraph

$$\Sigma(\mathcal{F}[-; O]) := \{(u, t) \in W^{1,1}(O; \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R} : \mathcal{F}[u; O] \leq t\}$$

(stark) abgeschlossen ist in $W^{1,1}(O; \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}$ bzgl. der Produktnorm. Gemäß Bemerkung 1.6 ist $\Sigma(\mathcal{F}[-; O])$ auch folgenabgeschlossen bzgl. der schwachen Topologie von $W^{1,1}(O; \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}$. Man überlegt sich leicht, daß diese schwache Topologie die Produkttopologie der schwachen Topologie von $W^{1,1}(O; \mathbb{R}^N)$ und der Standardtopologie von \mathbb{R} ist; daher ergibt sich, daß $\mathcal{F}[-; O]$ sequentiell schwach unterhalbstetig ist auf $W^{1,1}(O; \mathbb{R}^N)$. Die Behauptung folgt jetzt genau wie im ersten Beweis durch Ausschöpfen von Ω mit $O \in \mathbb{K}_\Omega$. \square

Bemerkung 1.7. *In Verallgemeinerung von Bemerkung 1.6 gilt für eine konvexe Teilmenge K eines normierten Raumes E (vgl. [DSch, Chapter V.3, Theorem 13]):*

$$K \text{ abgeschlossen in } E \iff K \text{ schwach abgeschlossen in } E$$

Damit läßt sich zeigen, daß in der Situation von Satz 1.4 sogar schwache Unterhalbstetigkeit gilt.

Der Nachweis der Koerzivität verläuft folgendermaßen:

Lemma 1.8. *Es sei $u_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ und f genüge (1.2) für ein $p > 1$. Dann ist $\mathcal{F}[-; \Omega]$ sequentiell koerziv auf $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, versehen mit der schwachen $W^{1,p}$ -Topologie.*

Beweis. Sei $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ mit $\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}[u_k; \Omega] < \infty$, dann folgt aus (1.2) sofort $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|Du_k\|_{p; \Omega} < \infty$. Mit der Poincaré-Ungleichung bei Nullrandwerten sieht man, daß $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt bleibt in $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ und der Auswahlssatz für reflexive Räume zeigt, daß $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ subkonvergiert bzgl. der schwachen Topologie von $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Da $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ schwach folgenabgeschlossen ist, liegt auch der Grenzwert in $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. \square

Beweis von Satz 1.1. Wir zeigen zunächst die Existenz eines Minimierers: Dazu wenden wir Satz 1.2 auf $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, versehen mit der schwachen $W^{1,p}$ -Topologie, und $\mathcal{F}[-; \Omega]$ an. Es bleiben nur die Voraussetzungen des Satzes nachzuprüfen: Gemäß Satz 1.4 und Lemma 1.8 sind (I) und (II) erfüllt. Die Voraussetzung $\mathcal{F}[u_0; \Omega] < \infty$ schließlich garantiert (III).

Der Eindeutigkeitsanteil des Satzes folgt aus der Tatsache, daß $\mathcal{F}[-; \Omega]$ strikt konvex ist. \square

Somit sind die Existenz- und Eindeutigkeitsfrage zufriedenstellend beantwortet, es verbleibt das Regularitätsproblem.

1.1.2 Partielle Regularität

Es gibt etliche Resultate, die unter schwachen Voraussetzungen Hölder- oder Lipschitz-Regularität von u oder vergleichbare Regularitätseigenschaften garantieren; wir beschränken uns jedoch in der folgenden Darstellung auf Ergebnisse, die mindestens Stetigkeit von Du beinhalten. Diese liegt jedoch i.a. nicht auf ganz Ω vor. Daher macht es Sinn, Ω folgendermaßen zu zerlegen:

Definition 1.9 (Reguläre und singuläre Menge). Sei $u \in L^1_{\text{lok}}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, dann heißt

$$\text{Reg}(u) := \left\{ x \in \Omega : \text{Es gibt ein } \varrho \in \mathbb{R}_{>0} \text{ mit } u|_{U_\varrho^n(x)} \in C^1(U_\varrho^n(x); \mathbb{R}^N). \right\}$$

die **reguläre Menge** von u und

$$\text{Sing}(u) := \Omega \setminus \text{Reg}(u)$$

die **singuläre Menge** von u .

Die Aufgaben der Regularitätstheorie sind nun, die Regularitätseigenschaften von u auf $\text{Reg}(u)$ genauer zu untersuchen und die Größe von $\text{Sing}(u)$ einzuschränken. $\text{Sing}(u) = \emptyset$ läßt sich dabei nur im skalaren Fall $N = 1$ zeigen. Im allgemeinen Fall, den wir hier untersuchen, gilt nur partielle Regularität, d.h. Regularität außerhalb einer \mathcal{L}^n -Nullmenge.

Um derartige Regularitätsaussagen zu erhalten, benötigt man eine quantitative nichtdegenerierte Version der strikten Konvexität von f , die sich an der nichtdegenerierten Energiedichte $e_{p,1}$ orientiert:

$$\begin{aligned} f &\in C^2_{\text{lok}}(\mathbb{M}) \\ D^2 f(A)(B, B) &\geq \lambda(1 + |A|^2)^{\frac{p-2}{2}} |B|^2 \quad \text{für alle } A, B \in \mathbb{M} \end{aligned} \quad (1.5)$$

mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir halten fest, daß (1.5) die Koerzivitätsbedingung (1.2) impliziert. Es gilt folgender Satz:

Satz 1.10 (Partielle Regularität). f genüge (1.1) und (1.5) für ein $p > 1$ und $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ sei ein Minimierer von \mathcal{F} auf Ω . Dann ist $\text{Reg}(u) \in \mathcal{O}_\Omega$, $u \in C^{1,\alpha}_{\text{lok}}(\text{Reg}(u); \mathbb{R}^N)$ für jedes $\alpha \in]0, 1[$ und $\mathcal{L}^n(\text{Sing}(u)) = 0$.

Zum Beweis des Regularitätssatzes lassen sich verschiedene Beweismethoden der Regularitätstheorie verwenden: Die indirekte Blow-Up-Methode, ein direkter Zugang, basierend auf höherer Integrität des Minimierers und die Technik der \mathcal{A} -harmonischen Approximation. Alle drei Methoden beinhalten als ersten fundamentalen Schritt den Beweis einer sog. Cacciopoli- oder umgekehrten Poincaré-Ungleichung der Form

$$\int_{U_{\varrho/2}^n(x_0)} \left| V^{\frac{p}{2}}(Du - A) \right|^2 dx \leq \text{const} \int_{U_\varrho^n(x_0)} \left| V^{\frac{p}{2}} \left(\frac{u(x) - \zeta - Ax}{\varrho} \right) \right|^2 dx \quad (1.6)$$

für den Minimierer u . Dabei sind eine offene Kugel $U_\varrho^n(x_0) \subset \Omega$, $A \in \mathbb{M}$ und $\zeta \in \mathbb{R}^N$ beliebig und die Funktionen $V^{\frac{p}{2}}$ sind in Definition 6.1 erklärt. Diese Ungleichung verwendet man anschließend, um durch Vergleich mit einem linearen System Abschätzungen für das Verhalten des sog. Exzesses

$$\Phi_p(u, x_0, \varrho, A) := \int_{U_\varrho^n(x_0)} \left| V^{\frac{p}{2}}(Du - A) \right|^2 dx$$

bei $\varrho \searrow 0$ zu erhalten. Diese Abschätzungen implizieren dann partielle Hölder-Stetigkeit von Du .

In [EG1] wurde eine Variante der Blow-Up-Methode eingeführt, die keinerlei Cacciopoli-Ungleichung verwendet, und es ermöglicht, nur mit direkten Vergleichsargumenten Exzess-Abschätzungen herzuleiten. Auch diese Methode läßt sich hier anwenden.

Alle obigen Methoden zeigen über die Größe der singulären Menge zunächst nur $\mathcal{L}^n(\text{Sing}(u)) = 0$. Unter der zusätzlichen Wachstumsbedingung

$$|D^2 f(A)| \leq \Lambda(1 + |A|^2)^{\frac{p-2}{2}} \quad \text{für alle } A \in \mathbb{M}$$

mit Konstante $\Lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ läßt sich jedoch mit der sog. Differenzenquotientenmethode globale höhere Differenzierbarkeit

$$V^{\frac{p}{2}}(Du) \in W_{\text{lok}}^{1,2}(\Omega; \mathbb{M}) \quad \text{bzw.} \quad u \in W_{\text{lok}}^{2, \min\{2,p\}}(\Omega; \mathbb{R}^N) \quad (1.7)$$

einsehen. Standardargumente führen dann zur Abschätzung $\dim_{\mathcal{H}}(\text{Sing}(u)) < n - 2$ für die Hausdorff-Dimension von $\text{Sing}(u)$. Nebenbei erhält man hier mit der Sobolev-Einbettung globale höhere Integrierbarkeit von Du :

$$\begin{aligned} V^{\frac{p}{2}}(Du) &\in L_{\text{lok}}^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega; \mathbb{M}) & \text{bzw.} & \quad u \in W_{\text{lok}}^{1, \frac{np}{n-2}}(\Omega; \mathbb{R}^N) & \text{für } n > 2 \\ V^{\frac{p}{2}}(Du) &\in \bigcap_{s \in [1, \infty[} L_{\text{lok}}^s(\Omega; \mathbb{M}) & \text{bzw.} & \quad u \in \bigcap_{s \in [1, \infty[} W_{\text{lok}}^{1,s}(\Omega; \mathbb{R}^N) & \text{für } n = 2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Besitzt f höhere Ableitungen, so läßt sich auch höhere Regularität des Minimierers beweisen:

Korollar 1.11 (Höhere Regularität). *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 1.10 sei $f \in C_{\text{lok}}^\infty(\mathbb{M})$, dann gilt $u \in C_{\text{lok}}^\infty(\text{Reg}(u))$.*

Beweisskizze. Wir skizzieren nun einen Beweis des Korollars, der in der hiesigen Situation etwas komplizierter als notwendig ist, sich dafür aber später problemlos auf allgemeinere Situationen übertragen läßt:

u erfüllt die schwache Formulierung (0.6) des Euler-Lagrange-Systems von \mathcal{F} . Gemäß der partiellen $C_{\text{lok}}^{1,\alpha}$ -Startregularität aus Satz 1.10 und (1.5) genügt dieses System lokal auf $\text{Reg}(u)$ gewissen Beschränktheits- und Elliptizitätsbedingungen,

die es erlauben, die Differenzenquotientenmethode wie in [Giu, Proposition 8.1, Remark 8.2] zu verwenden, um höhere Differenzierbarkeit $u \in W_{\text{lok}}^{2,2}(\text{Reg}(u); \mathbb{R}^N)$ zu zeigen. Unter erneuter Verwendung der Euler-Gleichung erhalten wir für alle $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\int_{\Omega} \mathcal{A}(x)(D\partial_k u(x), D\varphi(x)) dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^N) \quad (1.9)$$

mit

$$\mathcal{A}(x) := D^2 f(Du(x)) \in \text{Bil}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}).$$

Somit sind auch die $\partial_k u$ schwache Lösungen eines linearen elliptischen partiellen Differentialgleichungssystems mit Hölder-stetigen Koeffizienten auf $\text{Reg}(u)$ und wir können die sog. Riesz-Schauder-Theorie [Giu, Theorem 10.12] auf das System (1.9) anwenden, um $D\partial_k u \in C_{\text{lok}}^{1,\alpha}(\text{Reg}(u); \mathbb{M})$ zu erhalten. Also ist $u \in C_{\text{lok}}^{2,\alpha}(\text{Reg}(u); \mathbb{R}^N)$. Dies bedeutet auch höhere Regularität der Koeffizientenmatrix \mathcal{A} . Daher läßt sich die Riesz-Schauder-Theorie iterieren und wir erhalten induktiv $u \in C_{\text{lok}}^{\infty}(\text{Reg}(u); \mathbb{R}^N)$. \square

Somit ist auch die Regularitätsfrage für konvexe f mit p -Wachstum weitgehend beantwortet.

Verschiedene Probleme haben in den letzten Jahrzehnten das Interesse auf Integranden gelenkt, die obige Bedingungen nicht erfüllen. Wir beschreiben daher nun einige Verallgemeinerungen der obigen Sätze:

1.2 Quasikonvexe Integranden mit p -Wachstum

In [Mo] wurde folgende Verallgemeinerung des Konvexitätsbegriffs eingeführt:

Definition 1.12 (Quasikonvexität). f heißt quasikonvex, wenn für alle $A \in \mathbb{M}$ und alle $\varphi \in \mathcal{D}(U^n; \mathbb{R}^N)$ gilt:

$$\int_{U^n} f(A + D\varphi) dx \geq f(A) \quad (1.10)$$

Dabei bezeichnet $U^n = U_1^n(0)$ die offene Einheitskugel in \mathbb{R}^n .

Die Ungleichung (1.10) überträgt sich auf alle $A \in \mathbb{M}$, $O \in \mathbb{K}_{\mathbb{R}^n}$ und $\varphi \in W_0^{1,\infty}(O; \mathbb{R}^N)$ in folgender Form:

$$\int_O f(A + D\varphi) dx \geq f(A)$$

Gemäß der Jensenschen Ungleichung ist Quasikonvexität eine Abschwächung des Konvexitätsbegriffs; im vektorwertigen Fall $N \geq 2$ handelt es sich um eine echte Abschwächung, während im skalaren Fall $N = 1$ Konvexität und Quasikonvexität äquivalent sind (vgl. Satz 1.20).

1.2.1 Polykonvexität und Beispiele

Wir geben zunächst eine reichhaltige Klasse von Beispielen quasikonvexer Funktionen an, ehe wir auf Existenz und Regularität eingehen:

Definition 1.13 (Polykonvexität). Für $A \in \mathbb{M}$ und $k \in \{1, 2, \dots, \min\{n, N\}\}$ sei $\text{adj}_k A \in \mathbb{R}^{\psi(k)}$ das Tupel aller k -Minoren der Matrix A , wobei $\psi(k) \in \mathbb{N}$ die Anzahl der k -Minoren bezeichnet. Wir vereinbaren die Konventionen $\psi(0) := 1$ und $\text{adj}_0 A := 1 \in \mathbb{R}$. Weiter seien $\Psi(k) := \sum_{j=0}^k \psi(j)$,

$$\text{Adj}_k(A) := (1, A, \text{adj}_2 A, \text{adj}_3 A \dots, \text{adj}_k A) \in \mathbb{R}^{\Psi(k)},$$

$\Psi := \Psi(\min\{n, N\})$ und

$$\text{Adj}(A) := \text{Adj}_{\min\{n, N\}}(A) \in \mathbb{R}^{\Psi}.$$

f heißt **polykonvex vom Rang k** , wenn es eine konvexe Funktion $g : \mathbb{R}^{\Psi(k)} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(A) = g(\text{Adj}_k(A)) \quad \text{für alle } A \in \mathbb{M}$$

und **polykonvex**, wenn es polykonvex vom Rang $\min\{n, N\}$ ist.

Trivialerweise sind konvexe f auch polykonvex. Der entscheidende Zusammenhang zwischen den neuen Konvexitätsbegriffen wird im folgenden Satz formuliert:

Satz 1.14. Ist f polykonvex, so ist f auch quasikonvex.

Der Beweis des Satzes beruht auf folgendem Lemma:

Lemma 1.15. Seien $A \in \mathbb{M}$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, dann gilt:

$$\int_{\Omega} \text{Adj}(A + D\varphi) dx = \text{Adj}(A) \quad \text{in } \mathbb{R}^{\Psi}$$

Das Lemma läßt sich mit Induktion, partieller Integration und elementaren Eigenschaften von Determinanten beweisen oder alternativ mit dem Gaußschen Satz und dem Differentialformenkalkül. Der Beweis wird z.B. in [D2, Chapter 4.3.2, Theorem 3.2] und [Giu, S. 146] ausgeführt.

Beweis von Satz 1.14. Sei f polykonvex und $g : \mathbb{R}^{\Psi} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex mit $f = g \circ \text{Adj}$, dann erhalten wir aus der Jensenschen Ungleichung und Lemma 1.15 für alle $A \in \mathbb{M}$ und $\varphi \in \mathcal{D}(U^n; \mathbb{R}^N)$:

$$\begin{aligned} \int_{U^n} f(A + D\varphi) dx &= \int_{U^n} g(\text{Adj}(A + D\varphi)) dx \\ &\geq g\left(\int_{U^n} \text{Adj}(A + D\varphi) dx\right) = g(\text{Adj}(A)) = f(A) \end{aligned}$$

Also ist f quasikonvex. □

Somit lassen sich für $p \geq 2$ viele explizite Beispiele nicht konvexer, aber quasikonvexer Funktionen mit p -Wachstum angeben. Typische Beispiele im Falle $p \geq n = N$, die auch in der Elastizitätstheorie von Interesse sind, sind $A \mapsto e_p(A) + |\det A|$ und $A \mapsto e_{p,1}(A) + \sqrt{1 + |\det A|^2}$. Für $1 < p < 2$ gibt es offensichtlich keine polykonvexen Beispiele dieser Art, es wurden jedoch in [Sv] einige weniger explizite Beispiele nicht konvexer, aber quasikonvexer Funktionen mit Wachstumsexponent $1 < p < 2$ konstruiert (vgl. auch [Zh]).

1.2.2 Unterhalbstetigkeit und Existenzsätze

Die enorme Bedeutung des Quasikonvexitätsbegriffs für die direkte Methode der Variationsrechnung liegt darin, daß Quasikonvexität in vielen Situationen eine **hinreichende und notwendige Bedingung** für sequentielle schwache Unterhalbstetigkeit ist. Konvexität dagegen ist hinreichend (vgl. Satz 1.4), jedoch für $N \geq 2$ nicht notwendig.

Erste Sätze über die Äquivalenz von Quasikonvexität und sequentieller schwacher Unterhalbstetigkeit wurden bereits in [Mo] und [Me] gezeigt. Nur unter der Voraussetzung (1.1) gilt folgender jüngerer Satz:

Satz 1.16 (Unterhalbstetigkeit, [AF1], [Mar1]).

f genüge (1.1) für ein $p \geq 1$, dann gilt:

f quasikonvex

$$\iff \mathcal{F}[-; \Omega] \text{ sequentiell schwach unterhalbstetig auf } W_{\text{lok}}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$$

Wir verzichten an dieser Stelle auf einen Beweis, da wir später – zumindest für $p > 1$ – allgemeinere Resultate beweisen werden (vgl. Satz 2.2, Satz 2.11, Lemma 2.44 und Lemma 5.12). Kombiniert man Satz 1.16 mit Lemma 1.8 und der direkten Methode Satz 1.2, so folgt sofort:

Satz 1.17 (Existenz). *f sei **quasikonvex** und genüge (1.1) und (1.2) für ein $p > 1$, dann gibt es zu jedem $u_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ einen Minimierer $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ von \mathcal{F} auf Ω .*

Eindeutigkeit des Minimierers kann man in der quasikonvexen Situation allerdings i.a. nicht erwarten.

Wir betonen, daß man – im Gegensatz zur konvexen Situation der Sätze 1.1 und 1.4 – in den Sätzen 1.16 und 1.17 i.a. nicht auf (1.1) verzichten kann. Wir werden dies später an Beispielen belegen; vergleiche (2.12), Satz 2.11 und [BM].

1.2.3 Partielle Regularität

Unter Voraussetzung strikter nichtdegenerierter Quasikonvexität (siehe Definition 6.1 für $V_\mu^{\frac{p}{2}}$)

$$\int_{U^n} f(A + D\varphi) dx \geq f(A) + \lambda \int_{U^n} \left| V_{\sqrt{1+|A|^2}}^{\frac{p}{2}}(D\varphi) \right|^2 dx \quad (1.11)$$

für alle $A \in \mathbb{M}$ und $\varphi \in \mathcal{D}(U^n; \mathbb{R}^N)$ mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt folgender Regularitätssatz:

Satz 1.18 (Partielle Regularität, [Ev], [AF2], [CFM]). $f \in C_{\text{lok}}^2(\mathbb{M})$ genüge (1.1) und (1.11) für ein $p > 1$ und $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ sei ein Minimierer von \mathcal{F} auf Ω . Dann ist $\text{Reg}(u) \in \mathcal{O}_\Omega$, $u \in C_{\text{lok}}^{1,\alpha}(\text{Reg}(u); \mathbb{R}^N)$ für jedes $\alpha \in]0, 1[$ und $\mathcal{L}^n(\text{Sing}(u)) = 0$.

Alle zuvor aufgeführten Beweismethoden funktionieren auch hier: Die Cacciopoli-Ungleichung (1.6) für diese Situation und der Satz für $p \geq 2$ wurden zuerst in [Ev] unter Verwendung der Blow-Up-Methode und unter der gegenüber (1.1) etwas stärkeren Voraussetzung

$$|D^2 f(A)| \leq \Lambda(1 + |A|^2)^{\frac{p-2}{2}} \quad \text{für alle } A \in \mathbb{M}$$

gezeigt. Diese Voraussetzung wurde dann in [AF2] eliminiert und der Fall $1 < p < 2$ wurde erstmals in [CFM] behandelt. Beide Arbeiten verwenden die in [EG1] eingeführte Variante der Blow-Up-Methode ohne Cacciopoli-Ungleichung, die auch in [EG1] schon auf den quasikonvexen Fall angewandt wurde. Wir geben weitere Referenzen für die verschiedenen Beweismethoden an: Verschiedene Varianten und Verallgemeinerungen des Satzes wurden in [GM2] unter Verwendung direkter Methoden, basierend auf umgekehrten Hölder-Ungleichungen und dem Gehring-Lemma, in [FH1], [AF3] und [CM] mittels Blow-Up und in [DK] und [DGK] unter Einsatz \mathcal{A} -harmonischer Approximation bewiesen.

Bei allen Methoden ist der Vergleich mit einem linearen elliptischen System fundamental. Im konvexen Fall folgte die Elliptizität dieses Systems direkt aus der quantitativen Version der Konvexität von f . Wir skizzieren nun noch, wie man eine geeignete Elliptizitätsbedingung auch im quasikonvexen Fall nachweist. Dazu benötigen wir zunächst einen weiteren Begriff:

Definition 1.19 (Rang-1-Konvexität). f heißt **Rang-1-konvex**, wenn für alle $A, B \in \mathbb{M}$ mit $\text{Rang } B \leq 1$ gilt:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(A + tB) \text{ ist konvex.}$$

Satz 1.20. Ist f quasikonvex, so ist f auch Rang-1-konvex.

Einen einfachen Beweis findet man in [Giu, Proposition 5.2]. Für eine stärkere Version des Satzes verweisen wir auf [D2, Chapter 4.1.1.1, Theorem 1.1].

Lemma 1.21 (Legendre-Hadamard-Bedingung). $f \in C_{\text{lok}}^2(\mathbb{M})$ genüge (1.11), dann gilt für alle $A, B \in \mathbb{M}$ mit $\text{Rang } B \leq 1$:

$$D^2 f(A)(B, B) \geq 2\lambda(1 + |A|^2)^{\frac{p-2}{2}} |B|^2 \quad (1.12)$$

Beweis. Seien $A \in \mathbb{M}$ und zunächst auch $\varphi \in \mathcal{D}(U^n; \mathbb{R}^N)$ fixiert. Die Funktion

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \int_{U^n} \left[f(A + tD\varphi) - f(A) - \lambda(1 + |A|^2 + |tD\varphi|^2)^{\frac{p-2}{2}} |tD\varphi|^2 \right] dx$$

besitzt ein Minimum in 0. Durch zweimaliges Differenzieren an dieser Stelle folgt:

$$\int_{U^n} \left[D^2 f(A)(D\varphi, D\varphi) - 2\lambda(1 + |A|^2)^{\frac{p-2}{2}} |D\varphi|^2 \right] dx \geq 0$$

Somit ist die quadratische Funktion

$$\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}, B \mapsto D^2 f(A)(B, B) - 2\lambda(1 + |A|^2)^{\frac{p-2}{2}} |B|^2$$

quasikonvex und gemäß Satz 1.20 auch Rang-1-konvex. Dies impliziert die Behauptung. \square

Die Bedeutung einer solchen Legendre-Hadamard-Bedingung für die Theorie der linearen Vergleichssysteme liegt in der folgenden Ungleichung:

Satz 1.22 (Gårdingsche Ungleichung der L^2 -Theorie). Sei \mathcal{A} ein linearer homogener partieller Differentialoperator zweiter Ordnung in Divergenzform für Funktionen $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$. Wir fassen \mathcal{A} als Funktion $\Omega \rightarrow \text{Bil}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M})$ auf. \mathcal{A} genüge der gleichmäßigen Legendre-Hadamard-Bedingung

$$\mathcal{A}(x)(B, B) \geq \lambda|B|^2 \quad \text{für alle } x \in \Omega \text{ und } B \in \mathbb{M} \text{ mit } \text{Rang } B \leq 1$$

mit Elliptizitätskonstante $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Ist \mathcal{A} gleichmäßig stetig auf Ω , so gibt es Konstanten $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\mu \in \mathbb{R}$, so daß für alle $w \in W_0^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ gilt:

$$\int_{\Omega} \mathcal{A}(x)(Dw(x), Dw(x)) dx \geq \tilde{\lambda} \|Dw\|_{2;\Omega}^2 - \mu \|w\|_{2;\Omega}^2$$

Dabei bezeichnet $\| \cdot \|_{p;\Omega}$ die L^p -Norm auf Ω .

Beweisidee. Wir beweisen die Ungleichung im Falle eines Differentialoperators mit konstanten Koeffizienten, also für konstantes \mathcal{A} . Dazu setzen wir w durch 0 zu einer $W^{1,2}$ -Funktion auf ganz \mathbb{R}^n fort und stellen \mathcal{A} als Multimatrix $(a_{i,j}^{\alpha,\beta})_{i,j=1,\dots,n}^{\alpha,\beta=1,\dots,N}$ dar. Mit $\widehat{(\cdot)}$ notieren wir die Fouriertransformation auf \mathbb{R}^n . Mit dem Satz von

Plancherel bzw. der Parsevalschen Gleichung und elementaren Eigenschaften der Fouriertransformation erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mathcal{A}(Dw, Dw) dx &= \Re \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha,\beta=1}^N a_{i,j}^{\alpha,\beta} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i w_{\alpha} \overline{\partial_j w_{\beta}} dx \\
&= \Re \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha,\beta=1}^N a_{i,j}^{\alpha,\beta} \int_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{i}\xi_i \widehat{w}_{\alpha}(\xi) \overline{\mathfrak{i}\xi_j \widehat{w}_{\beta}(\xi)} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} [\mathcal{A}(\Re(\widehat{w}(\xi))\xi^T, \Re(\widehat{w}(\xi))\xi^T) + \mathcal{A}(\Im(\widehat{w}(\xi))\xi^T, \Im(\widehat{w}(\xi))\xi^T)] d\xi \\
&\geq \lambda \int_{\mathbb{R}^n} [|\Re(\widehat{w}(\xi))\xi^T|^2 + |\Im(\widehat{w}(\xi))\xi^T|^2] d\xi = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{w}(\xi)\xi^T|^2 d\xi \\
&= \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} |\mathfrak{i}\xi_i \widehat{w}_{\alpha}(\xi)|^2 d\xi = \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_i w_{\alpha}|^2 dx = \lambda \int_{\Omega} |Dw|^2 dx
\end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung (mit $\tilde{\lambda} = \lambda$ und $\mu = 0$). Der Beweis des allgemeinen Falls erfolgt nun mit Zerlegung der Eins auf Ω und Einfrieren der Koeffizientenfunktionen von \mathcal{A} , vgl. beispielsweise [Giu, Theorem 10.1]. \square

Globale höhere Differenzierbarkeit von Minimierern u und eine (nichttriviale) Abschätzung für $\dim_{\mathcal{H}}(\text{Sing}(u))$ sind in der quasikonvexen Situation bisher nicht bewiesen worden. Auch globale höhere Integrierbarkeit betreffend ist nur $Du \in L^{p+\delta_0}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ mit einer kleinen Konstanten $\delta_0 > 0$ aus dem Gehring-Lemma bekannt, also wesentlich weniger als im konvexen Fall. Kürzlich wurde jedoch für $p \geq 2$ und solche Minimierer u , die per Voraussetzung schon in $W_{\text{lok}}^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ liegen, in [KM] die Abschätzung $\dim_{\mathcal{H}}(\text{Sing}(u)) < n$ gezeigt.

Höhere Regularität von Minimierern beweist man i.w. wie im konvexen Fall:

Korollar 1.23 (Höhere Regularität). *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 1.18 sei $f \in C_{\text{lok}}^{\infty}(\mathbb{M})$, dann gilt $u \in C_{\text{lok}}^{\infty}(\text{Reg}(u))$.*

Beweisskizze. Wir folgen dem Beweis von Korollar 1.11: Genau wie dort läßt sich die Differenzenquotientenmethode lokal auf $\text{Reg}(u)$ auf das Euler-Lagrange-System (0.6) von \mathcal{F} anwenden und zeigt $u \in W_{\text{lok}}^{2,2}(\text{Reg}(u))$. Dabei läßt sich allerdings die Elliptizität (1.12) der Gleichung nicht mehr direkt ausnutzen wie zuvor (1.5), sondern nur unter Verwendung von Satz 1.22; die in Satz 1.22 vorausgesetzte gleichmäßige Stetigkeit erhält man lokal auf $\text{Reg}(u)$ aus der $C_{\text{lok}}^{1,\alpha}$ -Startregularität des Satzes 1.18. Der restliche Beweis bleibt unverändert. \square

1.3 Nichtquasikonvexe Integranden mit p -Wachstum

Wir gehen jetzt kurz auf nichtquasikonvexe Integranden ein, da wir die im folgenden entwickelten Methoden später noch benötigen werden.

1.3.1 Die quasikonvexe Hülle

Ist f nicht quasikonvex, so kann man keine schwache Unterhalbstetigkeitseigenschaft von \mathcal{F} und keine Existenzsätze für \mathcal{F} -Minimierer erwarten, daher ersetzt man f durch einen quasikonvexen Integranden:

Definition 1.24 (Quasikonvexe Hülle). Die *quasikonvexe Hülle* Qf von f ist die größte quasikonvexe Funktion $\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$, die nirgends größer als f ist, also

$$Qf(A) := \sup\{g(A) : g : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R} \text{ quasikonvex mit } g \leq f \text{ auf } \mathbb{M}\} \quad \text{für } A \in \mathbb{M}.$$

Das zugehörige Funktional ist gegeben durch

$$Q\mathcal{F}[u; O] := \int_O Qf(Du) dx \in]-\infty, \infty] \quad (1.13)$$

für $O \in \mathcal{O}_\Omega$ und $u \in W_{\text{lok}}^{1,1}(O; \mathbb{R}^N)$.

Bemerkung 1.25. Für alle $A \in \mathbb{M}$ und $O \in \mathbb{K}_{\mathbb{R}^n}$ gilt:

$$Qf(A) = \inf \left\{ \int_O f(A + D\varphi) dx : \varphi \in \mathcal{D}(O; \mathbb{R}^N) \right\}$$

Für einen Beweis der Bemerkung verweisen wir auf [D2, Chapter 5.1.1.2, Theorem 1.1]. Dort findet man auch weitere Eigenschaften der quasikonvexen Hülle.

Satz 1.26 (Existenz). f genüge (1.1) und (1.2) für ein $p > 1$, dann gibt es zu jedem $u_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ einen $Q\mathcal{F}$ -Minimierer $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ auf Ω .

Beweis. Genügt f (1.1) und (1.2), so folgt aus der Definition von Qf sofort, daß Qf denselben Wachstumsbedingungen genügt. Daher können wir Satz 1.17 auf $Q\mathcal{F}$ anwenden. \square

1.3.2 Relaxation

Es verbleibt das Problem, einen Zusammenhang zwischen dem Minimieren von \mathcal{F} und $Q\mathcal{F}$ herzustellen. Dazu führen wir für $p \in [1, \infty[$, $O \in \mathcal{O}_\Omega$ und $u \in$

$W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ die relaxierten Funktionale

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{F}^p}[u; O] &:= \inf \left\{ \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; O] : u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u \text{ schwach in } W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N) \right\} \\ \overline{\mathcal{F}_0^p}[u; O] &:= \inf \left\{ \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; O] : u_k - u \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \text{ schwach in } W_0^{1,p}(O; \mathbb{R}^N) \right\}\end{aligned}$$

ein. Wir werden diese Definitionen später verallgemeinern (Definition 2.17).

Satz 1.27 (Relaxation, [AF1], [D1]). *f* genüge (1.1) mit $p \geq 1$, dann ist

$$Q\mathcal{F}[-; \Omega] = \overline{\mathcal{F}^p}[-; \Omega] = \overline{\mathcal{F}_0^p}[-; \Omega]$$

das größte sequentielle schwach unterhalbstetige Funktional $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$, das nirgendwo größer als $\mathcal{F}[-; \Omega]$ ist.

In [AF1] wird zunächst eine $W^{1,\infty}$ -Version dieses Satzes bewiesen, aus der die hier angegebene Aussage folgt. Die wesentlichen Argumente eines Beweises im $W^{1,p}$ -Kontext findet man in [Bu], auch wenn die Behauptung dort nicht als eigenständige Aussage formuliert wird. Eine Variante des Satzes findet man außerdem in [D1] und [D2, Chapter 5.2.1.1, Theorem 2.1].

Korollar 1.28. *f* genüge (1.1), dann gilt für jedes $u_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$:

$$\inf_{u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)} Q\mathcal{F}[-; \Omega] = \inf_{u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)} \mathcal{F}[-; \Omega]$$

Beweis. „ \leq “ gilt trivial. Gemäß Satz 1.27 reicht es, „ \geq “ mit $\overline{\mathcal{F}_0^p}$ anstelle von $Q\mathcal{F}$ zu zeigen. Dies folgt sofort aus der Definition von $\overline{\mathcal{F}_0^p}$. \square

Bemerkung 1.29. *In der Situation von Satz 1.26 besagt Korollar 1.28, daß der $Q\mathcal{F}$ -Minimierer u folgende Minimiereigenschaft bzgl. \mathcal{F} besitzt:*

$$Q\mathcal{F}[u; \Omega] = \inf_{u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)} \mathcal{F}[-; \Omega]$$

In gewisser Weise haben wir somit das Minimierungsproblem für \mathcal{F} gelöst.

1.4 Konvexe Integranden mit (p, q) -Wachstum

Etwa seit Mitte der 80er Jahre werden auch Variationsfunktionale untersucht, die nur verallgemeinerten Wachstumsbedingungen, sog. anisotropen oder Nichtstandardwachstumsbedingungen, genügen. Wir konzentrieren uns im folgenden auf (p, q) -Wachstumsbedingungen an den Integranden f , bestehend aus der Wachstumsbedingung

$$f(A) \leq \Gamma(1 + |A|^q) \quad \text{für alle } A \in \mathbb{M} \quad (1.14)$$

und der Koerzivitätsbedingung

$$f(A) \geq \gamma|A|^p - c \quad \text{für alle } A \in \mathbb{M} \quad (1.15)$$

mit Konstanten $\Gamma, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}, c \in \mathbb{R}$ und **zwei Wachstumsexponenten** $1 < p \leq q < \infty$. Die wesentliche Schwierigkeit im Umgang mit solchen Wachstumsbedingungen liegt darin, daß man bei Abschätzungen nach oben und nach unten ganz verschiedene Terme erhält. Dies unterscheidet die (p, q) -Wachstumsbedingungen von allen anderen anisotropen Wachstumsbedingungen. Typische Beispiele von Integranden, die (1.14) und (1.15) genügen, sind z.B. $A \mapsto e_{p,1}(A) + |\text{Spur } A|^q$ sowie $A \mapsto e_p(A) + |\det A|^\alpha$ (mit $n = N$ und $1 \leq \alpha \leq \frac{q}{n}$).

Der Existenzsatz 1.1 wurde so formuliert, daß er neben Konvexität von f nur die Koerzivitätsbedingung (1.15) voraussetzt. Daher beantwortet er auch für konvexe Integranden mit (p, q) -Wachstum die Fragen nach der Existenz und der Eindeutigkeit von Minimierern.

1.4.1 Partielle Regularität

In der Regularitätstheorie allerdings treten unter (p, q) -Wachstumsbedingungen zusätzliche Schwierigkeiten auf. Man benötigt Techniken, die es erlauben, die Lücke zwischen p und q zu überbrücken: Zuerst wurde dies im skalaren Fall $N = 1$ unter Verwendung der Moserschen Iterationstechnik und ähnlicher Methoden durchgeführt. Derartige Techniken lassen sich jedoch nicht auf den allgemeineren vektorwertigen Fall, den wir hier behandeln, übertragen.

Unter der Konvexitätsbedingung

$$f \in C_{\text{lok}}^2(\mathbb{M}) \quad (1.16)$$

$$D^2 f(A)(B, B) \geq \lambda(1 + |A|^2)^{\frac{p-2}{2}} |B|^2 \quad \text{für alle } A, B \in \mathbb{M}$$

wurde mit den Glättungsoperatoren aus Lemma 6.12 der erste Regularitätssatz im vektorwertigen Fall bewiesen:

Satz 1.30 (Partielle Regularität, [PS]). *f genüge (1.14) und (1.16) mit*

$$1 < p \leq q < \min \left\{ p + 1, \frac{n}{n-1} p \right\}$$

und $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ sei ein Minimierer von \mathcal{F} auf Ω . Dann ist $\text{Reg}(u) \in \mathbb{O}_\Omega$, $u \in C_{\text{lok}}^{1,\alpha}(\text{Reg}(u); \mathbb{R}^N)$ für jedes $\alpha \in]0, 1[$ und $\mathcal{L}^n(\text{Sing}(u)) = 0$.

Zum Beweis wurde in [PS] die Blow-Up-Methode ohne Cacciopoli-Ungleichung für den Exzess

$$\Phi_p(u, x_0, \varrho, A) := \int_{U_\varrho^n(x_0)} \left| V^{\frac{p}{2}}(Du - A) \right|^2 dx$$

verwendet. Wir werden später eine Cacciopoli-Ungleichung zeigen, die ebenfalls einen Beweis dieses Satzes erlaubt (mit Blow-Up oder \mathcal{A} -harmonischer Approximation).

Setzt man zusätzlich die Wachstumsbedingung

$$|D^2 f(A)| \leq \Lambda(1 + |A|^2)^{\frac{q-2}{2}} \quad \text{für alle } A \in \mathbb{M} \quad (1.17)$$

mit Konstante $\Lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ voraus, so ist folgende Verbesserung bekannt:

Satz 1.31 (Partielle Regularität, [BF1]). *f genüge (1.16) und (1.17) mit*

$$1 < p \leq q < \frac{n+2}{n}p \quad (1.18)$$

und $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ sei ein Minimierer von \mathcal{F} auf Ω . Dann ist $\text{Reg}(u) \in \mathcal{O}_\Omega$, $u \in C_{\text{lok}}^{1,\alpha}(\text{Reg}(u); \mathbb{R}^N)$ für jedes $\alpha \in]0, 1[$ und $\mathcal{L}^n(\text{Sing}(u)) = 0$.

Zum Beweis verwendet man zunächst die Differenzenquotientenmethode. Man erhält die Resultate (1.7) und (1.8) aus dem isotropen Fall; insbesondere bedeutet dies wegen (1.18)

$$u \in W_{\text{lok}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N) \quad (1.19)$$

mit einer zugehörigen Abschätzung, die es erlaubt, die Lücke zwischen p und q zu überbrücken. Nun wird in [BF1] die Blow-Up-Methode ohne Cacciopoli-Ungleichung für den Exzess

$$\Phi_q(u, x_0, \varrho, A) := \int_{U_\varrho^n(x_0)} \left| V^{\frac{q}{2}}(Du - A) \right|^2 dx$$

verwendet. Die verbesserte Bedingung (1.18) an die Exponenten erhält man u.a. durch die Verwendung des Exzesses Φ_q anstelle von Φ_p . Wir bemerken, daß die Verwendung von Φ_q erst durch das Resultat (1.19) ermöglicht wird.

In der Situation von Satz 1.31 erhält man aus (1.7), der zu (1.19) gehörigen Abschätzung und Standardargumenten die Schranke $\dim_{\mathcal{H}}(\text{Sing}(u)) \leq n - 2$ (vgl. Abschnitt 1.1.2). Jedoch wurde dieses Resultat bisher in der Literatur nicht explizit formuliert.

Ist partielle $C_{\text{lok}}^{1,\alpha}$ -Regularität gezeigt, so werden die Wachstumsbedingungen an f und seine Ableitungen lokal auf $\text{Reg}(u)$ irrelevant, und höhere Regularität folgt genau wie im isotropen Fall:

Korollar 1.32 (Höhere Regularität). *f genüge den Voraussetzungen von Satz 1.30 oder Satz 1.31. Zusätzlich sei $f \in C_{\text{lok}}^\infty(\mathbb{M})$, dann gilt $u \in C_{\text{lok}}^\infty(\text{Reg}(u))$.*

Kapitel 2

Quasikonvexe Integranden mit (p, q) -Wachstum

Annahme 2.1. *Von nun an seien stets Exponenten $1 < p \leq q < \infty$ fixiert.*

Es stellt sich nun die Frage nach Existenz- und Regularitätssätzen unter allgemeineren Voraussetzungen, die sowohl die Sätze des Abschnitts 1.2 als auch des Abschnitts 1.4 als Spezialfälle enthalten. Wir betrachten dazu quasikonvexe Integranden mit (p, q) -Wachstum; konkret handelt es sich um folgende Voraussetzungen an f :

(f1) q -Wachstum:

Es gelte

$$f(A) \leq \Gamma(1 + |A|^q)$$

für alle $A \in \mathbb{M}$ mit einer Schranke $\Gamma \in \mathbb{R}_{>0}$.

(f2) p -Koerzivität:

Es gelte

$$f(A) \geq \gamma|A|^p - c$$

für alle $A \in \mathbb{M}$ mit einer Koerzivitätskonstanten $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ und einer Schranke $c \in \mathbb{R}$.

(f3) Quasikonvexität:

f sei quasikonvex, d.h.

$$\int_{U^n} f(A + D\varphi) dx \geq f(A)$$

für alle $A \in \mathbb{M}$ und $\varphi \in \mathcal{D}(U^n; \mathbb{R}^N)$.

Wesentlich für Existenzbeweise mit der direkten Methode ist sequentielle schwache Unterhalbstetigkeit von $\mathcal{F}[-; \Omega]$ auf $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, dem Sobolev-Raum, der zum Exponenten p in der Koerzivitätsbedingung paßt. Aus Satz 1.16 ergeben

sich aber nur Unterhalbstetigkeitsaussagen auf $W^{1,q}$, da dieser Satz an die Wachstumsbedingung geknüpft ist. Im Gegensatz zum konvexen Fall stellen also im quasikonvexen Fall (p, q) -Wachstumsbedingungen schon in der Existenztheorie eine Schwierigkeit dar. Folgendes Unterhalbstetigkeitsresultat, das auf den Glättungsoperatoren aus Lemma 6.12 beruht, ist allerdings bekannt:

Satz 2.2 (Unterhalbstetigkeit, [FMal], [Kri]). *f genüge **(f1)** und **(f3)** mit $q < \frac{np}{n-1}$, dann gelten für $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$:*

$$\left. \begin{array}{l} u_k \in W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N), \\ u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u \text{ schwach in } W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N) \end{array} \right\} \implies \mathcal{F}[u; \Omega] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; \Omega]$$

und

$$\left. \begin{array}{l} u_k \in W_{\text{lok}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N), \\ u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u \text{ schwach in } W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N) \end{array} \right\} \implies \mathcal{F}[u; \Omega] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; \Omega]$$

Eine etwas schwächere Version des Satzes unter der stärkeren Voraussetzung $q < \min\{\frac{n+1}{n}p, p+1\}$ wurde bereits in [Mar2] bewiesen; im wesentlichen wurde dort nur die Sobolev-Einbettung verwendet, um die Lücke zwischen p und q zu schließen. Mit einer Verfeinerung der Methode aus [Mar2] läßt sich unter einer zusätzlichen technischen Voraussetzung an f Satz 2.2 auch unter der Bedingung $q \leq p+1$ an die Exponenten beweisen; man vergleiche [FMar] für $q < p+1$ und [Mal2] für den Grenzfall $q = p+1$.

Auch für polykonvexe Integranden f ohne explizite Wachstumsbedingungen sind die Unterhalbstetigkeitseigenschaften von \mathcal{F} ausführlich untersucht worden: Im wesentlichen wurde die Unterhalbstetigkeitseigenschaft aus Satz 2.2 für $q = n = N$ und $p > n-1$ in [DM] gezeigt (zuvor bereits in [Mar2] für $p > \frac{n^2}{n+1}$). Für verschiedene Verallgemeinerungen, beispielsweise auf den Grenzfall $p = n-1$, verweisen wir auf [CD], [DS], [FLM], [FH3], [Ga] und [Mal1].

Da sowohl das Resultat des Satzes 2.2 als auch die in [FMal] verwendeten Techniken fundamental für das Folgende sind, führen wir den Beweis aus [FMal] hier aus:

Lemma 2.3. *f genüge **(f1)** und **(f3)**, dann gilt für alle $A \in \mathbb{M}$, $O \in \mathbb{K}_{\mathbb{R}^n}$ und $\varphi \in W_0^{1,q}(O; \mathbb{R}^N)$:*

$$\int_O f(A + D\varphi) dx \geq f(A)$$

Beweis. Für $\varphi \in \mathcal{D}(O; \mathbb{R}^N)$ gilt die Behauptung gemäß Abschnitt 1.2. Wegen **(f1)** läßt sie sich mit einem simplen Approximationsargument auf allgemeine $\varphi \in W_0^{1,q}(O; \mathbb{R}^N)$ übertragen. \square

Beweis von Satz 2.2. Wir beginnen mit dem Beweis der ersten Aussage. Dazu nehmen wir o.E. an, daß $f \geq 0$ auf \mathbb{M} gilt und $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; \Omega]$ existiert und endlich ist. Wir gehen in zwei Schritten vor:

Schritt 1. Sei $\Omega = U^n$ und $u(x) = Ax$ für \mathcal{L}^n -fast-alle $x \in U$ mit einem $A \in \mathbb{M}$. Mit dem Satz von Rellich erhalten wir nach Teilfolgenübergang

$$\|u_k - u\|_{p;U} \leq \frac{1}{k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Sei nun $r \in]0, 1[$ und $s := \frac{r+1}{2}$. Wir setzen $\omega_k := |Du_k|^p + |Du|^p + \left(\frac{k|u_k - u|}{1-r}\right)^p$ und wählen $j_k \in \{1, 2, \dots, k\}$ so, daß für $r_k := r + (j_k - 1)\frac{s-r}{k}$ und $s_k := r + j_k\frac{s-r}{k}$ gilt:

$$\int_{U_{s_k} \setminus B_{r_k}} \omega_k dx \leq \frac{1}{k} \int_{U_s \setminus B_r} \omega_k dx \quad (2.2)$$

Als nächstes wählen wir Radien $r_k \leq \tilde{r}_k < \tilde{s}_k \leq s_k$ wie in Lemma 6.14 bzgl.

$$\Xi_k(t) := \int_{U_t} \omega_k dx$$

und eine Abschneidefunktion $\eta_k \in \mathcal{D}(U)$ mit $\eta_k \equiv 1$ auf $U_{\tilde{r}_k}$, $\text{spt } \eta_k \subset U_{\tilde{s}_k}$ und $0 \leq \eta_k \leq 1$, $|\nabla \eta_k| \leq \frac{2}{\tilde{s}_k - \tilde{r}_k}$ auf U . Jetzt definieren wir mit dem Operator aus Lemma 6.12:

$$\varphi_k := T_{\tilde{r}_k, \tilde{s}_k}[\eta_k(u_k - u)] \in W_0^{1,q}(U; \mathbb{R}^N)$$

Es gilt (beachte (6.19)):

$$\left| D[\eta_k(u_k - u)] \right|^p \leq \text{const}(p)\omega_k \quad (2.3)$$

Gemäß Lemma 2.3 können wir die Quasikonvexität **(f3)** mit den φ_k testen. Zusammen mit (6.8), **(f1)**, (6.16), (2.3), (6.19), (6.18) und (2.2) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u; U] &= \mathcal{L}^n(U)f(A) \leq \int_U f(A + D\varphi_k) dx \\ &\leq \mathcal{F}[u_k; U] + \text{const}(q)\Gamma \int_{U \setminus B_{\tilde{r}_k}} (1 + |A|^q + |D\varphi_k|^q) dx \\ &\leq \mathcal{F}[u_k; U] + \text{const}(n, q, A)\Gamma \left[\int_{U_{\tilde{s}_k} \setminus B_{\tilde{r}_k}} |D\varphi_k|^q dx + (1-r) \right] \\ &\leq \mathcal{F}[u_k; U] + \text{const}(n, p, q, A)\Gamma \left[(s_k - r_k)^{n - n\frac{q}{p}} \left(\int_{U_{s_k} \setminus B_{r_k}} \omega_k dx \right)^{\frac{q}{p}} + (1-r) \right] \\ &\leq \mathcal{F}[u_k; U] + \text{const}(n, p, q, A)\Gamma \left[\frac{(1-r)^{n - n\frac{q}{p}}}{k^{n - (n-1)\frac{q}{p}}} \left(\int_{U_s \setminus B_r} \omega_k dx \right)^{\frac{q}{p}} + (1-r) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Aus $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|Du_k\|_{p;U} < \infty$ und (2.1) folgt

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{U_s \setminus B_r} \omega_k dx < \infty.$$

Aufgrund der Voraussetzung $q < \frac{np}{n-1}$ erhalten wir also durch Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ in (2.4):

$$\int_U f(Du) dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U f(Du_k) dx + \text{const}(n, p, q, A) \Gamma(1-r)$$

Mit $r \nearrow 1$ ergibt sich die Behauptung.

Schritt 2. Jetzt behandeln wir den allgemeinen Fall: Mit dem Auswahlssatz für die schwache $*$ -Konvergenz erreichen wir durch Teilfolgenübergang, daß die Folgen $\left(f(Du_k) \cdot \mathcal{L}^n|_{\Omega}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ und $\left(|Du_k|^p \cdot \mathcal{L}^n|_{\Omega}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ bzgl. der schwachen $*$ -Topologie auf $RM(\Omega)$ gegen endliche (nichtnegative) Radon-Maße μ und ν konvergieren. Außerdem können wir gemäß dem Rellichschen Satz $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$ stark in $L^p_{\text{lok}}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ annehmen. Nun betrachten wir ein $x_0 \in \Omega$ mit (vgl. Definition 6.31 und Satz 6.32)

$$\frac{d\mu}{d\mathcal{L}^n}(x_0) < \infty \quad (2.5)$$

$$\frac{d\nu}{d\mathcal{L}^n}(x_0) < \infty \quad (2.6)$$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{U_{\varepsilon}(x_0)} |u(x) - u_{x_0, \varepsilon} - Du(x_0)(x - x_0)| dx = 0. \quad (2.7)$$

Dabei haben wir die Abkürzung $u_{x_0, \varepsilon} := \int_{U_{\varepsilon}(x_0)} u dx$ verwendet. Bekanntlich sind (2.5) und (2.6) für \mathcal{L}^n -fast-alles $x_0 \in \Omega$ erfüllt (vgl. Satz 6.31) und (2.7) gilt gemäß der Poincaré-Ungleichung für jeden Lebesgue-Punkt x_0 von Du . Daher erfüllen \mathcal{L}^n -fast-alles $x_0 \in \Omega$ diese Bedingungen. Weiter wählen wir eine Folge von $\varepsilon_l \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\lim_{l \rightarrow \infty} \varepsilon_l = 0$, $B_{\varepsilon_l}(x_0) \subset \Omega$, $\mu(S_{\varepsilon_l}(x_0)) = 0$ und $\nu(S_{\varepsilon_l}(x_0)) = 0$. Als nächstes blasen wir die u_k bei x_0 und $u(x_0)$ auf:

$$v_{k,l}(x) := \frac{u_k(x_0 + \varepsilon_l x) - u_{x_0, \varepsilon_l}}{\varepsilon_l} \quad \text{für } x \in U$$

Die $v_{k,l}$ liegen in $W^{1,q}(U; \mathbb{R}^N)$ und aus (2.5) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{d\mathcal{L}^n}(x_0) &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\mu(U_{\varepsilon_l}(x_0))}{\mathcal{L}^n(U_{\varepsilon_l}(x_0))} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{U_{\varepsilon_l}(x_0)} f(Du_k) dx = \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U f(Dv_{k,l}) dx \quad (2.8) \end{aligned}$$

Ähnliche Rechnungen zeigen unter Verwendung von (2.6) und (2.7)

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \|Dv_{k,l}\|_{p;U} = \mathcal{L}^n(U) \frac{d\nu}{d\mathcal{L}^n}(x_0) < \infty \quad (2.9)$$

und

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_{k,l} - u_0\|_{1;U} = 0 \quad (2.10)$$

mit der linearen Funktion $u_0(x) := Du(x_0)x$. Mit Diagonal- und Teilfolgenargumenten läßt sich ausgehend von (2.8), (2.9), (2.10) und der Poincaré-Ungleichung leicht einsehen, daß es eine Folge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $W^{1,q}(U; \mathbb{R}^N)$ gibt mit

$$\frac{d\mu}{d\mathcal{L}^n}(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U f(Dv_k) dx \quad \text{und} \quad v_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u_0 \text{ schwach in } W^{1,p}(U; \mathbb{R}^N).$$

Gemäß Schritt 1 erhalten wir daraus sofort:

$$\frac{d\mu}{d\mathcal{L}^n}(x_0) \geq \int_{U^n} f(Du_0) dx = f(Du(x_0))$$

Somit haben wir $\frac{d\mu}{d\mathcal{L}^n} \geq f(Du)$ \mathcal{L}^n -fast-überall auf Ω gezeigt. Jetzt können wir mit der schwachen $*$ -Konvergenz der $f(Du_k) \cdot \mathcal{L}^n|_{\Omega}$, Satz 6.32 und der vorigen Ungleichung schließen:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; \Omega] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[f(Du_k) \cdot \mathcal{L}^n|_{\Omega} \right] (\Omega) \geq \mu(\Omega) \geq \int_{\Omega} \frac{d\mu}{d\mathcal{L}^n} dx \geq \mathcal{F}[u; \Omega]$$

Dies ist die Behauptung.

Die zweite Aussage folgt durch Approximation von Ω mit Mengen $O \in \mathbb{K}_{\Omega}$. \square

Dieser Satz erlaubt den Beweis des folgenden Existenzsatzes:

Satz 2.4. *f* genüge **(f1)**, **(f2)** und **(f3)** mit $q < \frac{np}{n-1}$, dann gibt es zu jedem $u_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ ein $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ mit

$$\mathcal{F}[u; \Omega] \leq \mathcal{F}[v; \Omega] \quad \text{für alle } v \in W_{\text{lok}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap [u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)].$$

Beweis. Die Behauptung folgt mit einer Variante von Satz 1.2 und Lemma 1.8 aus Satz 2.2. \square

Aus Lemma 6.18 folgt $W_{\text{lok}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap [u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)] \neq \emptyset$ für alle $u_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Somit besitzen die u aus Satz 2.4 eine eingeschränkte Minimiereigenschaft.

Es sind jedoch keine Regularitätssätze bekannt, die sich auf diese eingeschränkten Minimierer anwenden lassen. Wir verfolgen nun zwei Ansätze, die zu einer verbesserten Existenztheorie und einer Regularitätstheorie unter **(f1)**, **(f2)** und **(f3)** führen:

2.1 Stärkere Voraussetzungen: $W^{1,p}$ -Quasikonvexität

Die folgende Verschärfung des Quasikonvexitätsbegriffs wurde in [BM] eingeführt.

Definition 2.5 ($W^{1,s}$ -Quasikonvexität). Sei $s \in [1, \infty]$.

f heißt **$W^{1,s}$ -quasikonvex**, wenn für alle $A \in \mathbb{M}$ und alle $\varphi \in W_0^{1,s}(U^n; \mathbb{R}^N)$ gilt:

$$\int_{U^n} f(A + D\varphi) dx \geq f(A)$$

Dieser Begriff hat ähnliche Eigenschaften wie der Quasikonvexitätsbegriff aus Abschnitt 1.2. $W^{1,\infty}$ -Quasikonvexität entspricht diesem zuvor eingeführten Quasikonvexitätsbegriff. Außerdem bemerken wir:

Lemma 2.6 ([BM]). f genüge **(f1)**, dann gilt für alle $s \in [q, \infty]$:

$$f \text{ } W^{1,q}\text{-quasikonvex} \iff f \text{ } W^{1,s}\text{-quasikonvex} \iff f \text{ quasikonvex}$$

Beweis. Dies ist eine Umformulierung von Lemma 2.3. □

Lemma 2.7 ([BM]). f genüge **(f2)**, dann gilt für alle $s \in [1, p]$:

$$f \text{ } W^{1,1}\text{-quasikonvex} \iff f \text{ } W^{1,s}\text{-quasikonvex} \iff f \text{ } W^{1,p}\text{-quasikonvex}$$

Beweis. Unter Verwendung von Eigenschaften des Spurooperators überlegt man sich $W_0^{1,1}(U^n; \mathbb{R}^N) \setminus W_0^{1,p}(U^n; \mathbb{R}^N) = W_0^{1,1}(U^n; \mathbb{R}^N) \setminus W^{1,p}(U^n; \mathbb{R}^N)$ Für alle $A \in \mathbb{M}$ und $\varphi \in W_0^{1,1}(U^n; \mathbb{R}^N) \setminus W^{1,p}(U^n; \mathbb{R}^N)$ gilt aber gemäß (1.3)

$$\int_{U^n} f(A + D\varphi) dx = \infty. \quad \square$$

Die vorausgehenden Lemmata zeigen insbesondere, daß für Integranden mit Standardwachstum alle Quasikonvexitätsbegriffe zusammenfallen.

Wir interessieren uns unter (p, q) -Wachstumsbedingungen besonders für $W^{1,p}$ -Quasikonvexität mit dem Exponenten p aus **(f2)**:

(f3') $W^{1,p}$ -Quasikonvexität:

f sei $W^{1,p}$ -quasikonvex, d.h.

$$\int_{U^n} f(A + D\varphi) dx \geq f(A)$$

für alle $A \in \mathbb{M}$ und $\varphi \in W_0^{1,p}(U^n; \mathbb{R}^N)$.

2.1.1 Polykonvexe Beispiele

Um Beispiele von Integranden mit $(\mathbf{f3}')$ zu erhalten, klassifizieren wir zunächst die polykonvexen f genauer:

Satz 2.8. *f sei polykonvex vom Rang $k \in \{1, 2, \dots, \min\{n, N\}\}$ und $p \geq k$. Dann ist f $W^{1,p}$ -quasikonvex.*

Beweis. Mit einem einfachen Approximationsargument erhält man aus Lemma 1.15:

$$\int_U \text{Adj}_k(A + D\varphi) dx = \text{Adj}_k(A) \quad \text{in } \mathbb{R}^{\Psi(k)}$$

für alle $A \in \mathbb{M}$ und $\varphi \in W_0^{1,k}(U; \mathbb{R}^N)$. Somit zeigt das Argument aus dem Beweis von Satz 1.14 auch hier die Behauptung. \square

Dies zeigt, daß vom Rang k polykonvexe f auch $(\mathbf{f3}')$ genügen, falls $p \geq k$ gilt. Typische Beispiele solcher Integranden mit $(\mathbf{f1})$, $(\mathbf{f2})$ und $(\mathbf{f3}')$ sind

$$\begin{aligned} A &\mapsto e_p(A) + h(\det A) \\ &\text{und} \\ A &\mapsto e_{p,1}(A) + h(\det A) \end{aligned} \tag{2.11}$$

mit $N = n \leq p$, $\alpha \geq 1$ und einem konvexen $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $h(d) \leq \Gamma_q(1 + |d|^\alpha)$ für $d \in \mathbb{R}$.

Wir werden im aktuellen Abschnitt 2.1 eine Existenztheorie, die derartige Integranden erfaßt, und eine zugehörige Regularitätstheorie, die zumindest das zweite Beispiel für glatte h abdeckt, entwickeln. Wir betonen, daß unser Interesse an diesen Beispielen hauptsächlich dem Fall $p < \alpha n$ gilt, da sie andernfalls Standardwachstumsbedingungen genügen.

Ist dagegen $p < k$, so werden vom Rang k polykonvexe f im allgemeinen $(\mathbf{f3}')$ nicht erfüllen, wie der nächste Satz zeigt:

Satz 2.9. *Sei $k \in \{2, 3, \dots, \min\{n, N\}\}$ und $f = \tilde{f} + g \circ \text{adj}_k$ mit $g : \mathbb{R}^{\psi(k)} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Weiter sei $p < k$ und*

$$|\tilde{f}(A)| \leq \Gamma_p(1 + |A|^p) \quad \text{für alle } A \in \mathbb{M}$$

mit einer Konstanten $\Gamma_p \in \mathbb{R}_{>0}$. Außerdem sei eine der beiden folgenden Zusatzvoraussetzungen erfüllt:

(I) *Es gilt $n = k$.*

(II) *Es gibt Konstanten $q < \frac{k^2}{k-1}$ und $\Gamma_q \in \mathbb{R}_{>0}$ mit*

$$g(D) \leq \Gamma_q(1 + |D|^{\frac{q}{k}}) \quad \text{für alle } D \in \mathbb{R}^{\psi(k)}.$$

Ist nun f $W^{1,p}$ -quasikonvex, so ist g konstant.

Der Fall $N = n = k$ wurde bereits in [BM, Theorem 4.5.(II)] bewiesen. Unter (II) ist das Resultat neu; wir skizzieren einen Beweis in Anhang A. Naheliegend ist nun:

Vermutung 2.10. Die Folgerung von Satz 2.9 gilt auch ohne eine der beiden Zusatzvoraussetzungen.

Insbesondere genügen gemäß Satz 2.9

$$A \mapsto e_p(A) + h(\det A)$$

und

$$A \mapsto e_{p,1}(A) + h(\det A) \tag{2.12}$$

mit $p < n = N$, $\alpha \geq 1$ und

einer konvexen, nicht-konstanten Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$h(d) \leq \Gamma_q(1 + |d|^\alpha) \quad \text{für } d \in \mathbb{R}.$$

zwar **(f1)**, **(f2)** und **(f3)**, jedoch nicht **(f3')**, und werden daher von der Theorie des aktuellen Abschnitts nicht erfaßt. Wir werden jedoch in Abschnitt 2.2 Sätze beweisen, die auch dieses und ähnliche Beispiele einschließen.

Von besonderer Bedeutung (vgl. [Ba1], [Ba2], [Mar2]) ist der Fall $\alpha = 1$, den wir auch in Anhang B noch betrachten werden.

2.1.2 Unterhalbstetigkeit und Existenzsätze

Einen Hinweis auf die Bedeutung der Voraussetzung **(f3')** in der Existenztheorie gibt folgender Satz:

Satz 2.11 (Notwendiges Kriterium für Unterhalbstetigkeit, [BM]).

Sei $\mathcal{F}[-; \Omega]$ sequentiell schwach unterhalbstetig auf $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, dann genügt f der $W^{1,p}$ -Quasikonvexitätsbedingung **(f3')**.

Wir verzichten hier auf einen Beweis, werden aber später eine allgemeinere Aussage (Lemma 5.12) zeigen. Also ist die $W^{1,p}$ -Quasikonvexitätsbedingung an f notwendig für Unterhalbstetigkeit von $\mathcal{F}[-; \Omega]$.

Ob diese Bedingung auch hinreichend ist, ist (meines Wissens) nicht komplett geklärt; in [BM] wurde dies vermutet. Wir zeigen, daß diese Vermutung zumindest unter gewissen Wachstumseinschränkungen zutrifft:

Satz 2.12 (Unterhalbstetigkeit). f genüge **(f1)** und **(f3')** mit $q < \frac{np}{n-1}$, dann gilt:

$$u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u \text{ schwach in } W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N) \implies \mathcal{F}[u; \Omega] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; \Omega]$$

Beweis. Wir argumentieren genau wie im Beweis von Satz 2.2: Zwar sind die Funktionen, mit denen die Quasikonvexität von f dort getestet wird jetzt nur noch in $W^{1,p}$ statt $W^{1,q}$, doch erlaubt die $W^{1,p}$ -Quasikonvexität von f ja gerade solche Testfunktionen. \square

Satz 2.13 (Existenz von Minimierern). f genüge **(f1)**, **(f2)** und **(f3')** mit $q < \frac{np}{n-1}$, dann gibt es zu jedem $u_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ mit $\mathcal{F}[u_0; \Omega] < \infty$ einen Minimierer $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ von \mathcal{F} auf Ω .

Beweis. Dies folgt aus Satz 1.2, Satz 2.12 und Lemma 1.8. \square

Der Vollständigkeit halber halten wir noch fest, daß unter einer weitergehenden, extrem technischen Verschärfung des Quasikonvexitätsbegriffs sogar auf Wachstumsbedingungen verzichtet werden kann:

(f3'') abgeschlossene $W^{1,p}$ -Quasikonvexität:

f sei abgeschlossen $W^{1,p}$ -quasikonvex, d.h. die Jensensche Ungleichung

$$\int_{\mathbb{M}} f \, d\nu \geq f \left(\int_{\mathbb{M}} A \, d\nu(A) \right)$$

gelte für alle homogenen $W^{1,p}$ -Young-Maße ν auf \mathbb{M} .

Satz 2.14 (Existenz ohne Wachstumsbedingung, [Pe2]). Die Aussagen der Sätze 2.12 und 2.13 bleiben auch ohne die Wachstumsbedingung **(f1)** richtig, wenn man statt **(f3')** stärker **(f3'')** voraussetzt.

Für weitere Details zur Bedingung **(f3'')** konsultiere man [Pe1] und [Pe2].

2.1.3 Partielle Regularität

Wir beschreiben nun eine Regularitätstheorie für \mathcal{F} -Minimierer, die auf der zuvor dargestellten Existenztheorie und der $W^{1,p}$ -Quasikonvexität **(f3')** fußt:

Wie zuvor benötigen wir auch hier im Regularitätsbeweis eine strikte Version der Quasikonvexität von f . Sie lautet:

(f3's) strikte $W^{1,p}$ -Quasikonvexität:

f sei strikt nichtdegeneriert $W^{1,p}$ -quasikonvex, d.h.

$$\int_{U^n} f(A + D\varphi) \, dx \geq f(A) + \lambda \int_{U^n} \left| V_{\sqrt{1+|A|^2}}^{\frac{p}{2}}(D\varphi) \right|^2 \, dx$$

für alle $A \in \mathbb{M}$ und $\varphi \in W_0^{1,p}(U^n; \mathbb{R}^N)$ mit einer Konvexitätskonstanten $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$.

Obwohl Regularitätsmethoden ohne Cacciopoli-Ungleichung bei konvexen Integranden mit (p, q) -Wachstum sehr erfolgreich angewendet wurden, sehe ich im quasikonvexen Fall z.Z. (aus sehr technischen Gründen) keine Möglichkeit, eine solche Methode zu verwenden. Daher ist folgende neue Variante einer Cacciopoli-Ungleichung mit Störterm der Schlüssel zu einem neuen Regularitätsresultat:

Lemma 2.15 (Cacciopoli-Ungleichung). *Es sei $2 \leq p \leq q < p + \frac{1}{n}$ oder $p \leq 2$, $q < \frac{2n+1}{2n}p$, $f \in C_{\text{lok}}^2(\mathbb{M})$ genüge **(f1)** und **(f3's)** und $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ sei ein Minimierer von \mathcal{F} auf Ω . Dann gilt für alle $\zeta \in \mathbb{R}^N$, $A \in \mathbb{M}$ und jede Kugel $U_\varrho^n(x_0) \subset \Omega$:*

$$\begin{aligned} & \int_{U_{\varrho/2}^n(x_0)} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 dx \\ & \leq \text{const} \left[h \left(\int_{U_\varrho(x_0)} \left| V^{\frac{p}{2}} \left(\frac{v}{\varrho} \right) \right|^2 dx \right) + \left(\int_{U_\varrho(x_0)} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 dx \right)^{\frac{q}{p}} \right] \end{aligned}$$

Dabei ist $h(t) := t + t^{\frac{q}{p}}$ und $v(x) := u(x) - \zeta - A(x - x_0)$.

Einen Beweis führen wir in Abschnitt 4.1. Unter Verwendung dieses Lemmas läßt sich ein Regularitätssatz beweisen, der zur Situation des Existenzsatzes 2.13 paßt:

Hauptsatz 2.16 (Partielle Regularität). *Es sei $2 \leq p \leq q < p + \frac{1}{n}$ oder $p \leq 2$, $q < \frac{2n+1}{2n}p$, $f \in C_{\text{lok}}^2(\mathbb{M})$ genüge **(f1)** und **(f3's)** und $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ sei ein Minimierer von \mathcal{F} auf Ω . Dann ist $\text{Reg}(u) \in \mathcal{O}_\Omega$, $u \in C_{\text{lok}}^{1,\alpha}(\text{Reg}(u); \mathbb{R}^N)$ für jedes $\alpha \in]0, 1[$ und $\mathcal{L}^n(\text{Sing}(u)) = 0$.*

Wir geben in Kapitel 4 einen Beweis mittels \mathcal{A} -harmonischer Approximation. Auch ein Beweis mittels Blow-Up ist möglich.

Wir werden in Bemerkung 4.7 zeigen, daß Konvexität von f es ermöglicht, in diesen Beweisen die schwächere Voraussetzung $q < \min \{p + 1, \frac{n}{n-1}p\}$ für die Exponenten anzunehmen. Dies bedeutet, daß unsere Methoden auch einen Beweis von Satz 1.30 erlauben.

Insbesondere erfaßt der Regularitätssatz 2.16 die zweiten Integranden in (2.11) für glatte h und $\alpha < \frac{p}{n} + \frac{1}{n^2}$. Wir vergleichen dies mit den bekannten Ergebnissen für diese wichtigen Beispielintegranden. Im Fall $\alpha \leq \frac{p}{n}$ von Standardwachstumsbedingungen greift bereits Satz 1.18. Im Fall $\frac{p}{n} < \alpha < \frac{p}{n} + \frac{1}{n^2}$ dagegen sind solche Integranden in der Regularitätstheorie bisher nicht behandelt worden. Allerdings sind einige partielle $C^{1,\alpha}$ -Regularitätsresultate für polykonvexe Integranden mit Standardwachstum in den Minoren bekannt. Diese erfassen die Integranden (2.11) in einem völlig anderen Fall, nämlich im Fall $\alpha = p > n - 1$. Derartige Ergebnisse findet man u.a. in [FH2], [EM], [Gu] und [Ha4]. Einige weitere spezielle Regularitätsaussagen für ähnliche polykonvexe Integranden, die sich nur eingeschränkt vergleichen lassen, wurden beispielsweise in [FR] und [Pa] bewiesen.

2.2 Schwächerer Minimiererbegriff: Relaxierte Funktionale

Wie oben demonstriert gibt es interessante Beispiele von quasikonvexen Integranden, die der $W^{1,p}$ -Quasikonvexitätsbedingung des vorigen Abschnitts nicht genügen. Für diese Integranden ist $\mathcal{F}[-; \Omega]$ i.a. nicht sequentiell schwach unterhalbstetig auf $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Daher geht man zu relaxierten Funktionalen über, die diese Unterhalbstetigkeitseigenschaft besitzen und den Beweis verbesserter Existenzsätze erlauben:

2.2.1 Definitionen und einfache Eigenschaften

Motiviert durch die in der Einleitung schon erläuterte Idee der Lebesgue-Serrin-Erweiterung relaxiert man \mathcal{F} bezüglich der Unterhalbstetigkeitseigenschaft aus Satz 2.2. Unter (p, q) -Wachstumsbedingungen wurde diese Vorgehensweise bereits in [Mar2] und [FMal] untersucht.

Definition 2.17. Für $O \in \mathcal{O}_\Omega$ und $u \in W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ definieren wir:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}^{q,p}}[u; O] &:= \inf \left\{ \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; O] : \begin{array}{l} u_k \in W^{1,q}(O; \mathbb{R}^N), \\ u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u \text{ schwach in } W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N) \end{array} \right\} \\ \overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}^{q,p}}[u; O] &:= \inf \left\{ \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; O] : \begin{array}{l} u_k \in W_{\text{lok}}^{1,q}(O; \mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N), \\ u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u \text{ schwach in } W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N) \end{array} \right\} \\ \overline{\mathcal{F}_0^{q,p}}[u; O] &:= \inf \left\{ \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; O] : \begin{array}{l} u_k \in W_{\text{lok}}^{1,q}(O; \mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N), \\ u_k - u \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \text{ schwach in } W_0^{1,p}(O; \mathbb{R}^N) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Die Indizes q, p werden wir im folgenden meist weglassen; dann sind stets die fixierten Exponenten der Annahme 2.1 gemeint, also die Wachstumsexponenten von f .

Mit der Konvention $\overline{\mathcal{F}^p} = \overline{\mathcal{F}^{p,p}}$ verallgemeinert dies die Definitionen des Abschnitts 1.3.

Bemerkung 2.18. Eine Folge, wie sie in der Definition von $\overline{\mathcal{F}}[u; O]$ auftritt, muß es i.a. nicht geben. In diesem Falle setzen wir $\overline{\mathcal{F}}[u; O] := \infty$. Ist allerdings der Rand von O glatt, so zeigen $W^{1,p}$ -Fortsetzung und Glättung, daß dieser Fall nicht auftreten kann.

Folgen wie in der Definition von $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}[u; O]$ und $\overline{\mathcal{F}_0}[u; O]$ gibt es dagegen immer, wie man mit der Glättungstechnik aus Lemma 6.18 einsehen kann.

Direkt aus den Definitionen erhalten wir:

Bemerkung 2.19.

Ist $f \geq 0$ auf \mathbb{M} , so sind $\overline{\mathcal{F}}$ und $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ monoton nichtfallend im zweiten Argument bzgl. der Inklusionsordnung auf \mathcal{O}_Ω .

Bemerkung 2.20. Seien $O \in \mathcal{O}_\Omega$ und $u \in W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$, dann gilt:

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; O] \leq \min\{\overline{\mathcal{F}}[u; O], \overline{\mathcal{F}}_0[u; O]\}$$

Ist außerdem $f \geq 0$ auf \mathbb{M} und $\tilde{O} \in \mathcal{O}_\Omega$ mit $\tilde{O} \subset\subset O$ so gilt:

$$\overline{\mathcal{F}}[u; \tilde{O}] \leq \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; O]$$

Durch Vergleich mit der konstanten Folge $(u)_{k \in \mathbb{N}}$ sehen wir außerdem:

Bemerkung 2.21. Sei $O \in \mathcal{O}_\Omega$. Für $u \in W^{1,q}(O; \mathbb{R}^N)$ gilt

$$\overline{\mathcal{F}}[u; O] \leq \mathcal{F}[u; O]$$

und für $u \in W_{\text{lok}}^{1,q}(O; \mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ noch

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; O] \leq \overline{\mathcal{F}}_0[u; O] \leq \mathcal{F}[u; O].$$

Satz 1.27 besagt, daß im Falle $p = q$ unter **(f1)** stets $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}} = \overline{\mathcal{F}}_0$ gilt. Ob dies auch für $p < q$ richtig bleibt, ist nicht bekannt. In einem speziellen Fall werden wir dies allerdings in Lemma 5.7 beweisen.

Das nächste Lemma wird in den folgenden Beweisen gelegentlich nützlich sein:

Lemma 2.22. f genüge **(f2)**.

Die Infima in den Definitionen von $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; O]$ und $\overline{\mathcal{F}}_0[u; O]$ sind tatsächlich Minima und werden auf einer Folge angenommen.

Dasselbe gilt auch für $\overline{\mathcal{F}}[u; O]$, wenn es überhaupt eine Folge mit den in der Definition geforderten Eigenschaften gibt, also insbesondere, wenn $\overline{\mathcal{F}}[u; O] < \infty$.

Beweis. Wir geben nur den Beweis für $\overline{\mathcal{F}}$, die anderen gehen analog. Wir können o.E. $\overline{\mathcal{F}}[u; O] < \infty$ annehmen, dann finden wir zu jedem $l \in \mathbb{N}$ eine Folge $W^{1,q}(O; \mathbb{R}^N) \ni u_k^l \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$ schwach in $W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k^l; O] \leq \overline{\mathcal{F}}[u; O] + \frac{1}{l}.$$

Wir nehmen für die Mittelwerte o.E. an, daß $(u_k^l)_O = u_O$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$ gilt. Gemäß dem Satz von Rellich können wir zu jedem $l \in \mathbb{N}$ ein $k(l) \in \mathbb{N}$ wählen mit

$$\|u_{k(l)}^l - u\|_{p; O_l} \leq \frac{1}{l} \tag{2.13}$$

für $O_l := \{x \in O : \text{dist}(x, \partial O) > \frac{1}{l}\}$ und

$$\mathcal{F}[u_{k(l)}^l; O] \leq \overline{\mathcal{F}}[u; O] + \frac{2}{l}.$$

Aus **(f2)** erhalten wir $\sup_{l \in \mathbb{N}} \|Du_{k(l)}^l\|_{p;O} < \infty$. Mit der Poincaré-Ungleichung bei Mittelwert Null und dem Auswahlssatz folgt, daß die $u_{k(l)}^l$ bei $l \rightarrow \infty$ schwach in $W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ konvergieren. Gemäß (2.13) kann ihr Grenzwert nur u sein. Es folgt die Behauptung. \square

2.2.2 Unterhalbstetigkeit und Existenzsätze

Lemma 2.23 (Unterhalbstetigkeit). *f genüge (f2). Dann sind $\overline{\mathcal{F}}[-; \Omega]$ und $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[-; \Omega]$ sequentiell schwach unterhalbstetig auf $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ und $\overline{\mathcal{F}}_0[-; \Omega]$ auf $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ für jedes $u_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$.*

Beweis. Der Beweis ähnelt dem Beweis von Lemma 2.22. Wir führen ihn für $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ aus: Sei $u^l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} u$ schwach in $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ mit $\sup_{l \in \mathbb{N}} \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u^l; \Omega] < \infty$. Mit Lemma 2.22 finden wir zu jedem $l \in \mathbb{N}$ eine Folge $(u_k^l)_{k \in \mathbb{N}}$ in $W_{\text{lok}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ mit $u_k^l \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u^l$ schwach in $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k^l; \Omega] = \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u^l; \Omega]$. Gemäß dem Rellichschen Satz finden wir zu jedem $l \in \mathbb{N}$ ein $k(l) \in \mathbb{N}$ mit

$$\|u_{k(l)}^l - u^l\|_{p;\Omega_l} \leq \frac{1}{l}$$

für $\Omega_l := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{l}\}$ und

$$\mathcal{F}[u_{k(l)}^l; \Omega] \leq \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u^l; \Omega] + \frac{1}{l}.$$

Ähnlich wie im Beweis von Lemma 2.22 können wir mit **(f2)** auf $u_{k(l)}^l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} u$ schwach in $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ schließen. Mit der Vergleichsfolge $(u_{k(l)}^l)_{l \in \mathbb{N}}$ erhalten wir aus Definition 2.17:

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; \Omega] \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_{k(l)}^l; \Omega] \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u^l; \Omega]$$

Dies zeigt die Behauptung. \square

Lemma 2.24. *f genüge (f2). Dann sind $\overline{\mathcal{F}}[-; \Omega]$, $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[-; \Omega]$ und $\overline{\mathcal{F}}_0[-; \Omega]$ sequentiell koerziv auf $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, versehen mit der schwachen $W^{1,p}$ -Topologie.*

Beweis. Aus **(f2)** entnimmt man sofort, daß $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ in folgendem Sinne p -koerziv ist:

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[w; \Omega] \geq \gamma \int_{\Omega} |Dw|^p dx - c\mathcal{L}^n(\Omega) \quad \text{für alle } w \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$$

Gemäß Bemerkung 2.20 genügen $\overline{\mathcal{F}}[-; \Omega]$ und $\overline{\mathcal{F}}_0[-; \Omega]$ derselben Bedingung. Nun folgt die Behauptung aus der Poincaré-Ungleichung bei Nullrandwerten und dem Auswahlssatz für reflexive Räume. \square

Bevor wir den zugehörigen Existenzsatz angeben, präzisieren wir zunächst den Begriff des $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ -Minimierers:

Definition 2.25 (Abstraktes Funktional). Sei $W^{1,p}(\mathbb{O}_\Omega; \mathbb{R}^N) := \{(u, O) : O \in \mathbb{O}_\Omega, u \in W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)\}$. Ein **abstraktes Funktional** auf $W^{1,p}(\mathbb{O}_\Omega; \mathbb{R}^N)$ nennen wir eine Abbildung $\mathcal{I} : W^{1,p}(\mathbb{O}_\Omega; \mathbb{R}^N) \rightarrow]-\infty, \infty]$ mit $\mathcal{I}[u; O] \geq -c\mathcal{L}^n(O)$ für alle $(u, O) \in W^{1,p}(\mathbb{O}_\Omega; \mathbb{R}^N)$ und ein $c \in \mathbb{R}$.

\mathcal{F} , $\overline{\mathcal{F}}$, $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ und $\overline{\mathcal{F}}_0$ sind Beispiele abstrakter Funktionale auf $W^{1,p}(\mathbb{O}_\Omega; \mathbb{R}^N)$. Die untere Schranke c erhält man dabei aus der unteren Schranke für f . Sie wird uns im folgenden erlauben, $\mathcal{I} \geq 0$ auf $W^{1,p}(\mathbb{O}_\Omega; \mathbb{R}^N)$ anzunehmen.

Definition 2.26 (Abstraktes Integral). Als ein **abstraktes Integral** auf $W^{1,p}(\mathbb{O}_\Omega; \mathbb{R}^N)$ bezeichnen wir ein abstraktes Funktional \mathcal{I} , so daß für jedes $O \in \mathbb{O}_\Omega$ und $u \in W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ mit $\mathcal{I}[u; O] < \infty$ stets $\mathcal{I}[u; -]$ durch ein endliches signiertes Radon-Maß auf O repräsentiert werden kann. Dieses Radon-Maß ist dann stets eindeutig bestimmt.

Trivialerweise ist \mathcal{F} ein abstraktes Integral auf $W^{1,p}(\mathbb{O}_\Omega; \mathbb{R}^N)$, außerdem werden wir sehen, daß $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ ein abstraktes Integral ist (Bemerkung 2.35).

Definition 2.27 (Minimierer). Sei \mathcal{I} ein abstraktes Integral auf $W^{1,p}(\mathbb{O}_\Omega; \mathbb{R}^N)$ und $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. u heißt ein **Minimierer** von \mathcal{I} auf Ω oder \mathcal{I} -**minimierend** auf Ω genau dann, wenn $\mathcal{I}[u; \Omega] < \infty$ und

$$\mathcal{I}[u; \Omega] \leq \mathcal{I}[u + \varphi; \Omega] \quad \text{für alle } \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$$

gelten.

Satz 2.28 (Existenz). f genüge **(f2)**, dann gibt es zu jedem $u_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ mit $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u_0; \Omega] < \infty$ einen Minimierer $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ von $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ auf Ω .

Beweis. Die Behauptung folgt mit Satz 1.2 aus Lemma 2.23 und Lemma 2.24. \square

Diesselben Argumente zeigen auch Existenzsätze für $\overline{\mathcal{F}}$ und $\overline{\mathcal{F}}_0$:

Bemerkung 2.29. f genüge **(f2)**, dann gibt es zu jedem $u_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ mit $\overline{\mathcal{F}}[u_0; \Omega] < \infty$ ein $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ mit

$$\overline{\mathcal{F}}[u; \Omega] \leq \overline{\mathcal{F}}[v; \Omega] \quad \text{für alle } v \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

Ein analoges Resultat gilt für $\overline{\mathcal{F}}_0$.

2.2.3 Maßdarstellung

Wir beschreiben Darstellungsergebnisse für $\overline{\mathcal{F}}$ und $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ aus [FMal]:

Definition 2.30 ([FMal]). *Sei $\mathcal{S} : \mathcal{O}_\Omega \rightarrow [0, \infty]$ eine Mengenfunktion. Für ein (äußeres) Maß $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ auf Ω vereinbaren wir:*

$$\mu \text{ repräsentiert } \mathcal{S} \text{ (stark)} \iff \mu|_{\mathcal{O}_\Omega} = \mathcal{S}$$

Weiter definieren wir für ein (äußeres) Maß $\mu : \mathcal{P}(\overline{\Omega}) \rightarrow [0, \infty]$ auf $\overline{\Omega}$:

$$\mu \text{ repräsentiert } \mathcal{S} \text{ schwach} \iff \mu(O) \leq \mathcal{S}(O) \leq \mu(\overline{O}) \text{ für alle } O \in \mathcal{O}_\Omega$$

Dabei bezeichnet \overline{O} den Abschluß von O in \mathbb{R}^n .

Satz 2.31 (Maßdarstellung für $\overline{\mathcal{F}}$, [FMal]). *Sei $f \geq 0$ auf \mathbb{M} . Außerdem genüge f (**f1**) mit $q < \frac{np}{n-1}$. Dann gibt es zu jedem $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ mit $\overline{\mathcal{F}}[u; \Omega] < \infty$ ein Radon-Maß $\mu_{u;\Omega}$ auf $\overline{\Omega}$, das $\overline{\mathcal{F}}[u; -]$ schwach repräsentiert.*

Der Beweis in [FMal] benutzt u.a. eine allgemeinere Version der Glättungsoperatoren des Lemmas 6.12. μ_u wird mit Hilfe des schwachen *-Limes der Maße $f(Du_k)\mathbb{1}_\Omega \cdot \mathcal{L}^n|_{\overline{\Omega}}$ in $RM(\overline{\Omega})$ bei $k \rightarrow \infty$ konstruiert. Dabei ist $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge, auf der das Infimum in der Definition von $\overline{\mathcal{F}}$ für eine Regularisierung von \mathcal{F} angenommen wird. Diese Argumente zeigen außerdem:

Bemerkung 2.32. *In Satz 2.31 läßt sich zusätzlich $\mu_{u;\Omega}(\overline{\Omega}) = \overline{\mathcal{F}}[u; \Omega]$ erreichen.*

Besser ist die Situation bei $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$:

Satz 2.33 (Maßdarstellung für $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$, [FMal]). *Sei $f \geq 0$ auf \mathbb{M} . Außerdem genüge f (**f1**) mit $q < \frac{np}{n-1}$. Dann gibt es zu jedem $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ mit $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; \Omega] < \infty$ genau ein endliches Radon-Maß λ_u auf Ω , das $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; -]$ repräsentiert.*

Zum Beweis wurde in [FMal], aufbauend auf den Argumenten aus dem Beweis von Satz 2.31, eine weitere Konstruktion mit Glättungsoperatoren verwendet.

Bemerkung 2.34 ([FMal]). *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.31 erfüllt. Für die Maße aus den Sätzen 2.31 und Satz 2.33 gilt dann:*

$$\lambda_u = \mu_{u;\Omega}|_\Omega$$

Beweis. Seien $O_1, O_2 \in \mathcal{O}_\Omega$ mit $O_1 \subset\subset O_2$, dann gilt gemäß Bemerkung 2.20:

$$\lambda_u(O_1) \leq \mu_{u;\Omega}(O_1) \leq \lambda_u(O_2)$$

Daraus erhält man problemlos die Behauptung. \square

Bemerkung 2.35. *f genüge (**f1**) mit $q < \frac{np}{n-1}$. Aus Satz 2.33 folgt, daß $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ ein abstraktes Integral ist.*

2.2.4 Integraldarstellung

Wir suchen nun nach einer Integraldarstellung für $\overline{\mathcal{F}}$ und $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$. Es liegt nahe, einen Zusammenhang zur quasikonvexen Hülle $Q\mathcal{F}$ zu vermuten.

Eine untere Schranke erhalten wir sofort aus den Unterhalbstetigkeitseigenschaften von $Q\mathcal{F}$:

Korollar 2.36 ([FMal]). *f genüge (f1) mit $q < \frac{np}{n-1}$, dann gilt für $O \in \mathcal{O}_\Omega$ und $u \in W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$:*

$$Q\mathcal{F}[u; O] \leq \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; O]$$

Beweis. Die Ungleichung folgt problemlos aus Satz 2.2. \square

Auf $W^{1,q}$ -Funktionen liefert der Relaxationssatz aus Abschnitt 1.3 auch eine obere Schranke:

Lemma 2.37. *f genüge (f1), dann gelten für $O \in \mathcal{O}_\Omega$ und $u \in W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$:*

$$\begin{aligned} u \in W^{1,q}(O; \mathbb{R}^N) &\implies Q\mathcal{F}[u; O] \geq \max\{\overline{\mathcal{F}}[u; O], \overline{\mathcal{F}}_0[u; O]\} \\ u \in W_{\text{lok}}^{1,q}(O; \mathbb{R}^N), \mathcal{F}[u; O] < \infty &\implies Q\mathcal{F}[u; O] \geq \overline{\mathcal{F}}_0[u; O] \\ u \in W_{\text{lok}}^{1,q}(O; \mathbb{R}^N), q < \frac{np}{n-1} &\implies Q\mathcal{F}[u; O] \geq \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; O] \end{aligned}$$

Die erste Aussage dieses Lemmas stammt i.w. aus [FMal].

Beweis. Wir nehmen o.E. $f \geq 0$ auf \mathbb{M} an.

Sei zunächst $u \in W^{1,q}(O; \mathbb{R}^N)$, dann erhalten wir aus Satz 1.27

$$Q\mathcal{F}[u; O] = \overline{\mathcal{F}}_0^q[u; O].$$

Offensichtlich gilt außerdem

$$\overline{\mathcal{F}}_0^q[u; O] \geq \max\{\overline{\mathcal{F}}[u; O], \overline{\mathcal{F}}_0[u; O]\}$$

und es folgt die erste Behauptung.

Sei jetzt $u \in W_{\text{lok}}^{1,q}(O; \mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ mit $\mathcal{F}[u; O] < \infty$. Zu gegebenem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ wählen wir ein $\tilde{O} \in \mathbb{K}_O$ mit $\int_{O \setminus \tilde{O}} f(Du) dx \leq \varepsilon$. Fortsetzung jeder Folge in der Definition von $\overline{\mathcal{F}}_0[u; \tilde{O}]$ durch die Werte von u zeigt

$$\overline{\mathcal{F}}_0[u; O] \leq \overline{\mathcal{F}}_0[u; \tilde{O}] + \varepsilon.$$

Zusammen mit dem schon bewiesenen Teil erhalten wir

$$\overline{\mathcal{F}}_0[u; O] \leq Q\mathcal{F}[u; O] + \varepsilon$$

und Grenzübergang $\varepsilon \searrow 0$ zeigt die zweite Behauptung.

Zuletzt sei $u \in W_{\text{lok}}^{1,q}(O; \mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ und $q < \frac{np}{n-1}$, dann folgt aus dem ersten Teil und Bemerkung 2.20

$$Q\mathcal{F}[u; O] \geq \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; \tilde{O}]$$

für jedes $\tilde{O} \in \mathbb{K}_O$. Ausschöpfen von O mit solchen \tilde{O} 's zeigt unter Verwendung von Satz 2.33 die dritte Behauptung. \square

Korollar 2.38 ([FMal]). f genüge **(f1)** mit $q < \frac{np}{n-1}$, dann gilt für $O \in \mathbb{O}_\Omega$ und $u \in W^{1,q}(O; \mathbb{R}^N)$ stets:

$$Q\mathcal{F}[u; O] = \overline{\mathcal{F}}[u; O] = \overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}[u; O] = \overline{\mathcal{F}_0}[u; O]$$

Ist nur $u \in W_{\text{lok}}^{1,q}(O; \mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$, so gilt noch

$$Q\mathcal{F}[u; O] = \overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}[u; O].$$

Beweis. Man kombiniere Bemerkung 2.20, Korollar 2.36 und Lemma 2.37. \square

Bemerkung 2.39. f genüge **(f1)** und **(f2)** mit $q < \frac{np}{n-1}$. Der $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}$ -Minimierer u aus Satz 2.28 hat auch die folgende Minimiereigenschaft bzgl. $Q\mathcal{F}$:

$$Q\mathcal{F}[u; \Omega] \leq Q\mathcal{F}[v; \Omega] \quad \text{für alle } v \in W_{\text{lok}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap [u + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)]$$

Genügt f auch **(f3)**, so ist dies gerade die Minimiereigenschaft aus Satz 2.4.

Beweis. Satz 2.28, Korollar 2.36 und Korollar 2.38. \square

Auf $W^{1,q}$ -Funktionen ist das Verhalten der relaxierten Funktionale mit Korollar 2.38 vollständig geklärt. Als nächstes untersuchen wir eine weitergehende Beschreibung:

Satz 2.40 (Absolutstetiger Anteil von $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}$, [BFM]). Sei $f \geq 0$ auf M . Weiter genüge f **(f1)** mit $q < \frac{np}{n-1}$, es sei $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ mit $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}[u; \Omega] < \infty$ und λ_u sei das Radon-Maß aus Satz 2.33. Dann ist der absolutstetige Anteil von λ_u bzgl. $\mathcal{L}^n|_\Omega$ gerade

$$Qf(Du) \cdot \mathcal{L}^n|_\Omega,$$

d.h.

$$\frac{d\lambda_u}{d\mathcal{L}^n|_\Omega} = Qf(Du) \quad \mathcal{L}^n\text{-fast-überall auf } \Omega.$$

Der in [BFM] gegebene Beweis ist aufwendig und benutzt die vorausgehenden Resultate, insbesondere Korollar 2.36.

Satz 2.40 beschreibt den absolutstetigen Anteil der relaxierten Funktionale auf allgemeinen $W^{1,p}$ -Funktionen. Eine Beschreibung des singulären Anteils ist bisher nicht bekannt. Anhand eines Beispiels untersuchen wir dieses Verhalten genauer in Anhang B.

Als letztes halten wir fest, daß sich in einem einfachen Fall $\overline{\mathcal{F}}$, $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}$ und $\overline{\mathcal{F}_0}$ doch vollständig durch $Q\mathcal{F}$ beschreiben lassen:

Satz 2.41 ([FMal]). f genüge **(f1)** und Qf sei konvex, dann gilt für alle $O \in \mathbb{O}_\Omega$ und $u \in W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ stets:

$$Q\mathcal{F}[u; O] \leq \overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}[u; O]$$

Läßt sich u als $W^{1,p}$ -Funktion auf ganz \mathbb{R}^n fortsetzen, so gilt sogar:

$$Q\mathcal{F}[u; O] = \overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}[u; O] = \overline{\mathcal{F}_0}[u; O] = \overline{\mathcal{F}}[u; O]$$

Beweisskizze. Aus Satz 1.4 erhalten wir sofort

$$Q\mathcal{F}[u; O] \leq \overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}[u; O]. \quad (2.14)$$

Daher können wir zum Beweis der restlichen Behauptungen o.E. $Q\mathcal{F}[u; O] < \infty$ annehmen. Zunächst setzen wir außerdem voraus, daß f und somit auch Qf (**f2**) genügen. Seien $u_\varepsilon \in C^\infty(O; \mathbb{R}^N)$ die üblichen Glättungen von u . Da Qf konvex ist, läßt sich mit der Jensenschen Ungleichung schließen, daß

$$\limsup_{\varepsilon \searrow 0} Q\mathcal{F}[u_\varepsilon; O] \leq Q\mathcal{F}[u; O]$$

gilt. Gemäß Satz 1.27 können wir zu jedem $0 < \varepsilon \ll 1$ eine Folge von $u_{\varepsilon, k} \in u_\varepsilon + W_0^{1,q}(O; \mathbb{R}^N)$ wählen mit $u_{\varepsilon, k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u_\varepsilon$ schwach in $W^{1,q}(O; \mathbb{R}^N)$ und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_{\varepsilon, k}; O] = Q\mathcal{F}[u_\varepsilon; O].$$

Mit der Koerzivitätsbedingung (**f2**) läßt sich eine Diagonalfolge $u_{\varepsilon, k(\varepsilon)}$ auswählen mit

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon, k(\varepsilon)} &\xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{} u && \text{schwach in } W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N) \\ \mathcal{F}[u_{\varepsilon, k(\varepsilon)}; O] &\leq Q\mathcal{F}[u_\varepsilon; O] + \varepsilon && \text{für } 0 < \varepsilon \ll 1. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\max\{\overline{\mathcal{F}}[u; O], \overline{\mathcal{F}_0}[u; O]\} \leq Q\mathcal{F}[u; O]. \quad (2.15)$$

Als nächstes zeigen wir, daß (2.15) auch ohne die zusätzliche Voraussetzung (**f2**) richtig bleibt. Dazu setzen wir für $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit e_p aus Definition 6.9:

$$f^\delta := f + \delta e_p : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

Mit $Q\mathcal{F}^\delta$ bezeichnen wir das zum Integranden $Q(f^\delta)$ gehörige Funktional. Da f^δ (**f2**) genügt, erhalten wir aus dem bereits Bewiesenen

$$\max\{\overline{\mathcal{F}}[u; O], \overline{\mathcal{F}_0}[u; O]\} \leq Q\mathcal{F}^\delta[u; O]. \quad (2.16)$$

Aus Bemerkung 1.25 erhalten wir außerdem für alle $\delta, M \in \mathbb{R}_{>0}$ und $A \in \mathbb{M}$:

$$Qf^\delta(A) \leq \inf \left\{ \int_U f(A + D\varphi) dx : \varphi \in \mathcal{D}(U; \mathbb{R}^N), \max_U |D\varphi| \leq M \right\} + \frac{\delta}{p} (|A| + M)^p$$

Jetzt führen wir zuerst den Grenzübergang $\delta \searrow 0$ und dann $M \rightarrow \infty$ durch. Wir erhalten unter erneuter Verwendung von Bemerkung 1.25:

$$\limsup_{\delta \searrow 0} Qf^\delta(A) \leq Qf(A)$$

Da $Qf^\delta \geq Qf$ auf \mathbb{M} trivial gilt, folgt:

$$Qf^\delta \xrightarrow{\delta \searrow 0} Qf \quad \text{punktweise auf } \mathbb{M}$$

Mit monotoner oder dominierter Konvergenz sehen wir sofort

$$\lim_{\delta \searrow 0} Q\mathcal{F}^\delta[u; O] = Q\mathcal{F}[u; O]$$

und zusammen mit (2.16) erhalten wir (2.15) auch im allgemeinen Fall. Kombinieren wir dies mit (2.14) und Bemerkung 2.20, so bekommen wir die Behauptung. \square

Dies bedeutet, daß sich Existenz- und Regularitätssätze für Minimierer von $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ für konvexe f im wesentlichen auf die Sätze des Kapitels 1.4 reduzieren. Nahe liegt:

Vermutung 2.42. *Eine Variante von Satz 2.41 bleibt gültig, wenn Qf nur $W^{1,p}$ -quasikonvex statt konvex ist.*

Ein Beweis der Vermutung würde implizieren, daß die Ergebnisse des Kapitels 2.2 für $W^{1,p}$ -quasikonvexe f im wesentlichen mit denen des Kapitels 2.1 übereinstimmen. Insbesondere wäre dann Hauptsatz 2.16 zumindest unter **(f2)** ein Spezialfall von Hauptsatz 2.45.

2.2.5 Partielle Regularität

Die folgenden neuartigen Ergebnisse dieser Arbeit beschäftigen sich mit der Regularität der Minimierer aus Satz 2.28. Die Idee, Regularitätstheorie für Minimierer solcher relaxierter Funktionale zu betreiben, findet sich auch in [ELM]. Allerdings wird dort höhere Integrabilität von Minimierern im Zusammenhang mit nichtautonomen, konvexen Integranden und dem Lavrentiev-Phänomen untersucht und die dort verwendeten Methoden unterscheiden sich stark von den hier benutzten. Wir geben zunächst einen Überblick über unsere Methoden und Resultate: Im folgenden setzen wir **(f1)**, **(f2)** und die folgende strikte Version von **(f3)** voraus:

(f3s) strikte p -Quasikonvexität:

f sei strikt nichtdegeneriert p -quasikonvex, d.h.

$$\int_{U^n} f(A + D\varphi) dx \geq f(A) + \lambda \int_{U^n} \left| V^{\frac{p}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+|A|^2}}(D\varphi) \right|^2 dx$$

für alle $A \in \mathbb{M}$ und $\varphi \in \mathcal{D}(U^n; \mathbb{R}^N)$ mit einer Konvexitätskonstanten $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$.

Ein wichtiges Hilfsmittel im Regularitätsbeweis ist das Euler-Lagrange-System von \mathcal{F} . Wir beobachten zunächst, daß auch $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}$ -Minimierer diesem System genügen:

Lemma 2.43 (Euler-Gleichung). $f \in C^1_{\text{lok}}(\mathbb{M})$ genüge **(f1)**, **(f2)** und **(f3)** mit $q < \min\{\frac{np}{n-1}, p+1\}$ und $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ sei ein Minimierer von $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}$ auf Ω . Dann gilt:

$$\int_{\Omega} Df(Du)D\varphi \, dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^N)$$

Dieses Resultat beruht i.w. auf den Sätzen 2.33 und 2.40 und darauf, daß in der Herleitung der Euler-Gleichung nur Differenzen von $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}$ -Termen auftreten, deren singuläre Anteile sich aufheben. Wir führen die Details in Abschnitt 5.1 aus.

Der nächste Schritt ist der Beweis einer Cacciopoli-Ungleichung. Dazu zeigen wir, motiviert durch Satz 2.11 und Lemma 2.23, in Abschnitt 5.3 zuerst:

Lemma 2.44. f genüge **(f1)** und **(f2)** mit $q < \frac{np}{n-1}$, dann ist $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}$ in folgendem abstrakten Sinne $W^{1,p}$ -quasikonvex: Für jedes $O \in \mathcal{O}_{\Omega}$, jedes $A \in \mathbb{M}$ und jedes $\varphi \in W^{1,p}_{\text{kpt}}(O; \mathbb{R}^N)$ gilt:

$$\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}[u_A + \varphi; O] \geq \overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}[u_A; O]$$

mit der linearen Funktion $u_A(x) := Ax$.

Diese $W^{1,p}$ -Quasikonvexitätsbedingung erlaubt uns, ähnlich wie im Beweis von Lemma 2.15 zu argumentieren. Die Argumentation wird allerdings dadurch verkompliziert, daß wir nicht $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}$ als Lebesgue-Integral darstellen können, sondern nur seinen absolutstetigen Anteil im Sinne von Satz 2.40. Sphären müssen bzgl. der zu \mathcal{F}_{lok} gehörigen Maße i.a. keine Nullmengen sein; dies führt zu technischen Problemen bei der Wahl von Radien. Wir bewältigen diese Probleme in Abschnitt 5.2, erneut unter Verwendung der Glättungsoperatoren aus Lemma 6.12. Schließlich werden wir die Cacciopoli-Ungleichung in Abschnitt 5.3 beweisen; es folgt mit denselben Techniken wie zuvor:

Hauptsatz 2.45 (Partielle Regularität). Es sei $2 \leq p \leq q < p + \frac{1}{n}$ oder $p \leq 2$, $q < \frac{2n+1}{2n}p$, $f \in C^2_{\text{lok}}(\mathbb{M})$ genüge **(f1)**, **(f2)** und **(f3s)** und $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ sei ein Minimierer von $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}$ auf Ω . Dann ist $\text{Reg}(u) \in \mathcal{O}_{\Omega}$, $u \in C^{1,\alpha}_{\text{lok}}(\text{Reg}(u); \mathbb{R}^N)$ für jedes $\alpha \in]0, 1[$ und $\mathcal{L}^n(\text{Sing}(u)) = 0$.

Wir deuten den Beweis in Abschnitt 5 an.

Wichtige Beispiele, die Satz 2.45 erfaßt, sind die zweiten Integranden in (2.12) mit glattem h . Für einen Vergleich von Satz 2.45 mit den bekannten Regularitätsresultaten für polykonvexe Integranden anhand dieser Beispiele verweisen wir auf die Diskussion nach Hauptsatz 2.16.

Zuletzt halten wir fest, daß sich Hauptsatz 2.45 unter gewissen Voraussetzungen auch auf Minimierer des ursprünglichen Funktionals \mathcal{F} anwenden läßt:

Bemerkung 2.46. *Unter denselben Voraussetzungen an f gelten die Folgerungen von Hauptsatz 2.45 auch für einen Minimierer $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ von \mathcal{F} auf Ω , falls dieser Minimierer der Gleichung*

$$\mathcal{F}[u; \Omega] = \overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}[u; \Omega] \quad (2.17)$$

genügt.

Beweis. Ist (2.17) erfüllt, so ist gemäß Korollar 2.36 u auch ein $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}$ -Minimierer und wir können Hauptsatz 2.45 anwenden. \square

Einige Bedingungen, die (2.17) implizieren, sind in Korollar 2.38, Satz 2.41 und Vermutung 2.42 enthalten.

Kapitel 3

Offene Probleme

Wir erwähnen eine Reihe von (nach meinem gegenwärtigen Kenntnisstand) offenen Problemen, die mit den zuvor geschilderten Ergebnissen zusammenhängen. Die folgende Auflistung enthält Fragen von unterschiedlicher Bedeutung und verschiedenem Schwierigkeitsgrad:

- **Die $W^{1,p}$ -Quasikonvexität polykonvexer Funktionen:**

Die in Abschnitt 2.1 vorgestellten Existenz- und Regularitätssätze beruhen auf $W^{1,p}$ -Quasikonvexität des Integranden. Viele wichtige Beispiele von Integranden sind jedoch polykonvex. Dies lenkt das Interesse auf Kriterien, die entscheiden, ob ein gegebener polykonvexer Integrand mit (p, q) -Wachstum $W^{1,p}$ -quasikonvex ist oder nicht. Wir haben in Abschnitt 2.1 mit den Sätzen 2.8 und 2.9 zwei solche Kriterien vorgestellt. Diese Sätze geben allerdings noch keine zufriedenstellende Antwort auf die obige Fragestellung; eine genaue Klassifikation der $W^{1,p}$ -Quasikonvexitätseigenschaften polykonvexer Funktionen ist bisher nicht bekannt. Ein Schritt in diese Richtung wäre ein Beweis von Vermutung 2.10.

- **Die Hausdorff-Dimension der singulären Menge:**

Ist partielle Regularität außerhalb einer \mathcal{L}^n -Nullmenge gezeigt, so gehört es zu den wichtigsten Aufgaben der Regularitätstheorie, darauf aufbauende Abschätzungen für die Größe, meist die Hausdorff-Dimension, der singulären Menge zu beweisen. Dennoch ist für quasikonvexe Integranden, selbst in der Standardsituation des Abschnitts 1.2, keine nichttriviale Abschätzung dieser Art bekannt. Dies ist eins der großen offenen Probleme in der Variationsrechnung. Wie oben bereits erwähnt, wurde für $p \geq 2$ und Minimierer, die a priori Lipschitz-stetig sind, ein erstes Resultat in [KM] erzielt. Es stellt sich die Frage, ob sich dieses Resultat auch auf den Fall $p < 2$ oder auf die (p, q) -Wachstumsbedingungen des Abschnitts 2 übertragen läßt.

- **Welche Bedingungen an p und q sind scharf?**

Unter (p, q) -Wachstumsbedingungen treten sowohl in der Existenztheorie als auch in der Regularitätstheorie Voraussetzungen der Form $q < c(n, p)$ mit einer Konstanten $c(n, p) > p$ auf. Typischerweise ist $\lim_{n \rightarrow \infty} c(n, p) = p$. Die in Kapitel 2 dieser Arbeit beschriebene Existenztheorie benutzt die Bedingung $q < \frac{n}{n-1}p$. Verschiedene Beispiele in der Literatur zeigen, daß diese Bedingung zumindest in speziellen Situationen nicht verbessert werden kann.

Bezüglich der Bedingungen $q < \min \{p + 1, \frac{n}{n-1}p\}$ und $q < \frac{n+2}{n}p$ aus der Regularitätstheorie des Kapitels 1.4 und der Bedingung $q < \min \{p + \frac{1}{n}, \frac{2n+1}{2n}p\}$ aus der Regularitätstheorie des Kapitels 2 dieser Arbeit sind meines Wissens keinerlei Beispiele bekannt, die demonstrieren, daß die Regularitätssätze ohne diese Voraussetzungen nicht mehr gelten. Weil hier so viele verschiedene Bedingungen an die Exponenten auftreten, wären jedoch Beispiele, die die Optimalität dieser Bedingungen untermauern, von Interesse.

- **$W^{1,q}$ -Integrabilität:**

In der konvexen Situation des Satzes 1.31 gilt für \mathcal{F} -Minimierer u stets $u \in W_{\text{lok}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Dieses Resultat beruht jedoch wie vorne erläutert auf der Differenzenquotientenmethode und ist in der quasikonvexen Situation des Abschnitts 2 nicht bekannt. Könnte man diese $W^{1,q}$ -Integrabilität auch im quasikonvexen Fall beweisen, so würde sie vermutlich zu einer stark vereinfachten und verbesserten Regularitätstheorie führen.

- **Wie verhält sich $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}$ für $W^{1,p}$ -quasikonvexe Integranden?**

Die Untersuchung relaxierter Funktionale wie $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}$ erscheint nur sinnvoll, wenn \mathcal{F} selbst nicht sequentiell schwach unterhalbstetig in $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ ist und Existenzbeweise für \mathcal{F} -Minimierer daran scheitern. Daher sollte $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}} = \mathcal{F}$ gelten, wenn \mathcal{F} selbst diese Unterhalbstetigkeitseigenschaft aufweist, wenn also der Integrand f $W^{1,p}$ -quasikonvex ist. Dies haben wir bereits in Vermutung 2.42 formuliert und für konvexe f in Satz 2.41 bewiesen. Zumindest sollte sich auch im allgemeineren $W^{1,p}$ -quasikonvexen Fall irgendeine Beziehung zwischen den Minimierern von $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}$ und \mathcal{F} herstellen lassen. In diesem Zusammenhang sind explizite Beispiele von Interesse; man vgl. mit dem nächsten Punkt.

- **Was ist eigentlich $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}$?**

In Anhang B erhalten wir für spezielle polykonvexe Integranden eine recht explizite Darstellung von $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}[u; -]$ für eine $W^{1,p}$ -Funktion u , die i.a. nicht in $W_{\text{lok}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ liegt. Allerdings umfaßt diese Beispielklasse nur sehr wenige Funktionen f und u . Weitere Beispiele, insbesondere auch mit $W^{1,p}$ -quasikonvexen Integranden, sind meines Wissens zur Zeit nicht bekannt,

wären jedoch hilfreich um einen tieferen Einblick in die Eigenschaften von \mathcal{F}_{lok} zu gewinnen.

- **Degeneriertes und singuläres Verhalten:**

Das wichtige Beispiel der p -Energiedichte

$$e_p : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \frac{1}{p}|A|^p$$

wird zwar von der Existenztheorie, jedoch nicht von der Regularitätstheorie des Abschnitts 1.1 erfaßt, da die Konvexität von e_p nahe dem Ursprung degeneriert im Sinne von $D^2e_p(0_{\mathbb{M}}) = 0_{\text{Bil}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M})}$ für $p > 2$. Für $p < 2$ besitzt D^2e_p sogar eine Singularität im Ursprung. Dies hat zur Einführung der allgemeineren Wachstumsbedingungen

$$\begin{aligned} f &\in C_{\text{lok}}^2(\mathbb{M}) \\ |D^2f(A)| &\leq \Lambda(\mu^2 + |A|^2)^{\frac{p-2}{2}} \\ D^2f(A)(B, B) &\geq \lambda(\mu^2 + |A|^2)^{\frac{p-2}{2}}|B|^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

mit einer zusätzlichen Konstanten $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geführt. Für $\mu > 0$ reduzieren sich diese Bedingungen im wesentlichen zu den oben behandelten nichtdegenerierten p -Wachstumsbedingungen, die dem Fall $\mu = 1$ entsprechen. Dagegen läßt der Fall $\mu = 0$ andere Integranden wie beispielsweise e_p zu. Unter (3.1) für $p \geq 2$ und der Strukturbedingung

$$f(A) = g(|A|^2) \quad \text{für alle } A \in \mathbb{M} \quad (3.2)$$

mit einem $g : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ wurde in [U] ein fundamentaler $C^{1,\alpha}$ -Regularitätssatz auf ganz Ω bewiesen, der den Fall der p -Energie umfaßt (vgl. auch [GM1] und [AF4], [Ha1] für $p < 2$). Ein zentraler Punkt dabei ist, daß (3.2) die Anwendung von Techniken aus dem skalaren Fall erlaubt (Moser-Iteration). Allerdings erreicht man nicht jedes $\alpha \in]0, 1[$ wie im nichtdegenerierten Fall, sondern nur eine Konstante $\alpha(n, N, p) \in]0, 1[$. Der exakte Wert des optimalen Hölderexponenten α ist nicht bekannt.

Sind allgemeiner zwei Skalarprodukte, eines auf \mathbb{R}^n und eines auf \mathbb{R}^N , gegeben, so läßt sich (3.2) durch die analoge Bedingung mit der zum induzierten Skalarprodukt auf \mathbb{M} gehörigen Norm ersetzen. Ob der Regularitätssatz auch noch gilt, wenn man ein beliebiges Skalarprodukt auf \mathbb{M} zuläßt ist ein tiefes und weit offenes Problem.

In [DM2] wurde mit der p -harmonischen Approximationstechnik aus [DM1] gezeigt, daß sich (3.2) zu einer asymptotischen Bedingung nahe $0_{\mathbb{M}}$ abschwächen läßt, die noch den Beweis partieller Regularität zuläßt. Dieser Zugang erfaßt auch quasikonvexe Integranden.

Auch die obigen (p, q) -Wachstumsbedingungen besitzen degenerierte Varianten. Zwar sind Degeneration und (p, q) -Wachstum nur schwach gekoppelt, da sich Degeneration in der Nähe und (p, q) -Wachstum weit weg von $0_{\mathbb{M}}$ abspielt, doch sind viele Fragen über Integranden mit (p, q) -Wachstum im degenerierten Fall noch unbeantwortet. Insbesondere ist unklar, welches die richtigen Bedingungen an die Exponenten p und q sind, und, ob alle Regularitätsmethoden auch im degenerierten Fall problemlos funktionieren. Einige Resultate in dieser Richtung findet man in [C] und [Bi]; sie basieren auf (3.2). Unter einer nur asymptotischen Bedingung nahe $0_{\mathbb{M}}$ ist keine Regularität bekannt.

- **x - und u -Abhängigkeit:**

Es stellt sich die Frage, welche der obigen Existenz- und Regularitätssätze sich unter natürlichen Voraussetzungen auf allgemeinere Funktionale erster Ordnung

$$\mathcal{F}[u; O] := \int_O f(x, u(x), Du(x)) dx$$

mit Integranden $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ übertragen lassen. Diese Frage ist für Integranden mit p -Wachstum weitgehend beantwortet. Für Integranden mit (p, q) -Wachstum dagegen ist die Regularitätsfrage selbst für konvexe Integranden, die zwar von x , jedoch nicht von u abhängen, nur unvollständig beantwortet worden; für weitere Details verweisen wir auf [CGM], [ELM] und [BF2]. Es verbleiben hier, sowohl die Existenz als auch die Regularität von Minimierern betreffend, etliche offene Fragen.

- **Quasimonotone Systeme**

Wir wenden die Methoden dieser Arbeit in Anhang C auf quasimonotone Systeme partieller Differentialgleichungen mit (p, q) -Wachstum an; allerdings sind die in diesem Kontext erzielten Resultate bisher noch unvollständig. Auch die Frage nach der Existenz von schwachen Lösungen solcher Systeme ist bisher noch ungeklärt. Für weitere Details vgl. man Anhang C.

Kapitel 4

Beweis von Hauptsatz 2.16

Stets seien die Annahmen 0.1 und 2.1 erfüllt.

Wir halten zuerst einige nützliche Eigenschaften Rang-1-konvexer und quasikonvexer Funktionen fest:

Definition 4.1. f heißt **separat konvex**, wenn es eine Orthogonalbasis e_1, e_2, \dots, e_{nN} von \mathbb{M} gibt, so daß für jedes $A \in \mathbb{M}$ und jedes $k \in \{1, 2, \dots, nN\}$ gilt:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(A + te_k) \text{ ist konvex.}$$

Trivialerweise sind Rang-1-konvexe Funktionen auch separat konvex.

Lemma 4.2. f sei separat konvex, dann ist f lokal Lipschitz-stetig auf \mathbb{M} . Genügt f zusätzlich **(f1)**, so gilt:

$$|f(A) - f(B)| \leq \text{const}(n, N, q) \Gamma(1 + |A|^{q-1} + |B|^{q-1}) |A - B| \quad \text{für alle } A, B \in \mathbb{M}$$

Ist außerdem noch $f \in C_{\text{lok}}^1(\mathbb{M})$, so folgt:

$$|Df(A)| \leq \text{const}(n, N, q) \Gamma(1 + |A|^{q-1}) \quad \text{für alle } A \in \mathbb{M}$$

Das Lemma ist implizit in [Mar1] enthalten. Der elementare Beweis beruht auf den Monotonieeigenschaften der Differenzenquotienten konvexer Funktionen in einer Variablen, vgl. [D2, Chapter 2.2.1.2, Theorem 2.3] und [Giu, Lemma 5.2].

Bemerkung 4.3. Insbesondere haben auch quasikonvexe und Rang-1-konvexe f die Eigenschaften aus Lemma 4.2.

Für den Rest dieses Abschnitts sei

$$\Lambda_M := \sup_{B_{M+2}^{\mathbb{M}}} |D^2 f|. \quad (4.1)$$

Das nächste Lemma erlaubt uns anstelle einer expliziten q -Wachstumsbedingung für die zweite Ableitung von f nur die lokalen Schranken Λ_M zu verwenden.

Lemma 4.4 ([AF2]). $f \in C_{\text{lok}}^2(\mathbb{M})$ genüge **(f1)** und **(f3)** und es seien $A, B \in \mathbb{M}$ mit $|A| \leq M + 1$. Dann gelten:

$$\begin{aligned} |f(A+B) - f(A) - Df(A)B| &\leq \text{const}(n, N, q, \Gamma, M, \Lambda_M) |V^{\frac{q}{2}}(B)|^2 \\ |Df(A+B) - Df(A)| &\leq \text{const}(n, N, q, \Gamma, M, \Lambda_M) |V^{q-1}(B)| \end{aligned}$$

Die hier auftretenden Funktionen $V^{\frac{q}{2}}$ und V^{q-1} sind in Definition 6.1 erklärt.

Beweis. Aus Lemma 4.2 und Bemerkung 4.3 entnehmen wir

$$|Df(C)| \leq \text{const}(n, N, q) \Gamma (1 + |C|^{q-1}) \quad \text{für alle } C \in \mathbb{M}$$

Sei jetzt $|B| \geq 1$, dann folgt:

$$|Df(A+B) - Df(A)| \leq \text{const}(n, N, q, M) \Gamma |B|^{q-1} \leq \text{const}(n, N, q, M) \Gamma |V^{q-1}(B)|$$

Für $|B| \leq 1$ dagegen erhalten wir:

$$\begin{aligned} |Df(A+B) - Df(A)| &= \left| \int_0^1 D^2 f(A+tB) dt B \right| \leq \Lambda_M |B| \leq \text{const}(q) \Lambda_M |V^{q-1}(B)| \end{aligned}$$

Somit ist die zweite Ungleichung bewiesen. Die erste Ungleichung erhält man durch Integration der zweiten oder mit einem analogen Argument. \square

4.1 Die Cacciopoli-Ungleichung

Wir beweisen nun Lemma 2.15. Zunächst präzisieren wir dazu die Formulierung des Lemmas:

Lemma 4.5 (Cacciopoli-Ungleichung). *Es sei $2 \leq p \leq q < p + \frac{1}{n}$ oder $p \leq 2$, $q < \frac{2n+1}{2n}p$. Außerdem sei $M \in \mathbb{R}_{>0}$, $f \in C_{\text{lok}}^2(\mathbb{M})$ genüge **(f1)** und **(f3's)** und $u \in W^{1,p}(U_\varrho^n(x_0); \mathbb{R}^N)$ sei \mathcal{F} -minimierend auf $U_\varrho^n(x_0)$. Dann gilt für alle $\zeta \in \mathbb{R}^N$ und $A \in \mathbb{M}$ mit $|A| \leq M + 1$:*

$$\begin{aligned} &\int_{U_{\varrho/2}^n(x_0)} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 dx \\ &\leq c_1 \left[h \left(\int_{U_\varrho(x_0)} \left| V^{\frac{p}{2}} \left(\frac{v}{\varrho} \right) \right|^2 dx \right) + \left(\int_{U_\varrho(x_0)} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 dx \right)^{\frac{q}{p}} \right] \quad (4.2) \end{aligned}$$

Dabei ist $c_1(n, N, p, q, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M) \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Konstante, $h(t) := t + t^{\frac{q}{p}}$ und $v(x) := u(x) - \zeta - A(x - x_0)$.

Beweis von Lemma 4.5 für $p \geq 2$. O.E. sei $x_0 = 0$, weiter seien $\frac{\rho}{2} \leq r < s \leq \rho$. Wir setzen

$$\Xi(t) := \int_{U_t} \left[|Dv|^p + \left| \frac{v}{s-r} \right|^p \right] dx$$

und finden $r \leq \tilde{r} < \tilde{s} \leq s$ mit den Eigenschaften aus Lemma 6.14. Jetzt wählen wir eine Abschneidefunktion $\eta \in \mathcal{D}(U_\rho)$ mit $\eta \equiv 1$ auf einer Umgebung von $B_{\tilde{r}}$, $\text{spt } \eta \subset U_{\tilde{s}}$ und $0 \leq \eta \leq 1$, $|\nabla \eta| \leq \frac{2}{\tilde{s}-\tilde{r}}$ auf U_ρ . Mit dem in Lemma 6.12 konstruierten Operator setzen wir:

$$\begin{aligned} \psi &:= T_{\tilde{r}, \tilde{s}}[(1-\eta)v] \\ \varphi &:= v - \psi \end{aligned}$$

Gemäß (6.8) ist $\varphi \in W_0^{1,p}(U_{\tilde{s}}; \mathbb{R}^N)$ mit $\varphi = v$ auf $U_{\tilde{r}}$ und

$$Du - A = Dv = D\varphi + D\psi \quad \text{auf } U_\rho.$$

Wir finden mit (**f3's**):

$$\begin{aligned} &\lambda \int_{U_{\tilde{r}}} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 dx \\ &\leq \lambda \int_{U_{\tilde{s}}} |V^{\frac{p}{2}}_{\sqrt{1+|A|^2}}(D\varphi)|^2 dx \\ &\leq \int_{U_{\tilde{s}}} [f(A + D\varphi) - f(A)] dx \\ &= \int_{U_{\tilde{s}}} [f(Du - D\psi) - f(Du)] dx + \int_{U_{\tilde{s}}} [f(Du) - f(Du - D\varphi)] dx \\ &\quad + \int_{U_{\tilde{s}}} [f(A + D\psi) - f(A)] dx \end{aligned}$$

Mit der \mathcal{F} -Minimalität von u und Lemma 4.4 erhalten wir daraus:

$$\begin{aligned} &\lambda \int_{U_{\tilde{r}}} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 dx \\ &\leq \int_{U_{\tilde{s}}} \left[\int_0^1 \left(Df(A) - Df(Du - \tau D\psi) \right) d\tau D\psi \right. \\ &\quad \left. + f(A + D\psi) - f(A) - Df(A)D\psi \right] dx \\ &\leq \text{const}(n, N, q, \Gamma, M, \Lambda_M) \int_{U_{\tilde{s}}} \left[\int_0^1 |V^{q-1}(Dv - \tau D\psi)| d\tau |D\psi| + |V^{\frac{q}{2}}(D\psi)|^2 \right] dx \end{aligned}$$

Mit $\psi \equiv 0$ auf $U_{\tilde{r}}$ gemäß (6.8), (6.3) und (6.4) folgt:

$$\begin{aligned}
& \int_{U_r} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 dx \\
& \leq \text{const}(n, N, q, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M) \left[\int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} |V^{\frac{q}{2}}(D\psi)|^2 dx + \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} |V^{q-1}(Dv)| |D\psi| dx \right] \\
& =: \text{const}(n, N, q, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M) [(I) + (II)]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Wir führen jetzt die Abkürzung

$$\Psi := \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_r} \left[\left| V^{\frac{p}{2}}(Dv) \right|^2 + \left| V^{\frac{p}{2}} \left(\frac{v}{s-r} \right) \right|^2 \right] dx$$

ein. Mit Bemerkung 6.3, (6.12), (6.16) (benutzt $q < \frac{n}{n-1}p$), (6.19) und (6.18) sehen wir:

$$\begin{aligned}
(I) & \leq \text{const}(q) \left[\int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} |D\psi|^2 dx + \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} |D\psi|^q dx \right] \\
& \leq \text{const}(n, p, q) \left[\int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} |D[(1-\eta)v]|^2 dx \right. \\
& \quad \left. + (\tilde{s} - \tilde{r})^n \left(\sup_{t \in]\tilde{r}, \tilde{s}[} \frac{(\tilde{s} - \tilde{r})^{1-n}}{t - \tilde{r}} \int_{U_t \setminus B_{\tilde{r}}} |D[(1-\eta)v]|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \right. \\
& \quad \left. + (\tilde{s} - \tilde{r})^n \left(\sup_{t \in]\tilde{r}, \tilde{s}[} \frac{(\tilde{s} - \tilde{r})^{1-n}}{\tilde{s} - t} \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_t} |D[(1-\eta)v]|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \right] \\
& \leq \text{const}(n, p, q) \left[\Psi + (s-r)^n \left((s-r)^{1-n} \sup_{t \in]\tilde{r}, \tilde{s}[} \frac{\Xi(t) - \Xi(\tilde{r})}{t - \tilde{r}} \right)^{\frac{q}{p}} \right. \\
& \quad \left. + (s-r)^n \left((s-r)^{1-n} \sup_{t \in]\tilde{r}, \tilde{s}[} \frac{\Xi(\tilde{s}) - \Xi(t)}{\tilde{s} - t} \right)^{\frac{q}{p}} \right] \\
& \leq \text{const}(n, p, q) \left[\Psi + (s-r)^n \left(\frac{\Psi}{(s-r)^n} \right)^{\frac{q}{p}} \right]
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Zuletzt behandeln wir nun mit $q < p+1$, $q < p + \frac{1}{n}$, der Hölderschen Ungleichung

und ähnlichen Abschätzungen den Term (II):

$$\begin{aligned}
(II) &\leq \text{const}(q) \int_{U_{\bar{s}} \setminus B_{\bar{r}}} (|Dv||D\psi| + |Dv|^{q-1}|D\psi|) dx \\
&\leq \text{const}(q) \left[\left(\int_{U_{\bar{s}} \setminus B_{\bar{r}}} |Dv|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{U_{\bar{s}} \setminus B_{\bar{r}}} |D\psi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_{U_{\bar{s}} \setminus B_{\bar{r}}} |Dv|^p dx \right)^{\frac{q-1}{p}} \left(\int_{U_{\bar{s}} \setminus B_{\bar{r}}} |D\psi|^{\frac{p}{p+1-q}} dx \right)^{\frac{p+1-q}{p}} \right] \\
&\leq \text{const}(n, p, q) \left[\Psi + (s-r)^n \left(\frac{\Psi}{(s-r)^n} \right)^{\frac{q}{p}} \right] \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Zusammen ergeben die Abschätzungen (4.3), (4.4) und (4.5):

$$\int_{U_r} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 dx \leq c_2 \left[\Psi + (s-r)^n \left(\frac{\Psi}{(s-r)^n} \right)^{\frac{q}{p}} \right]$$

mit einer Konstanten $c_2(n, N, p, q, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M) \in \mathbb{R}_{>0}$. Jetzt addiert man auf beiden Seiten $c_2 \int_{U_r} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 dx$ und dividiert anschließend durch $1+c_2$. So schließt man:

$$\begin{aligned}
&\int_{U_r} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 dx \\
&\leq \frac{c_2}{1+c_2} \int_{U_s} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 dx + \int_{U_\varrho} \left| V^{\frac{p}{2}} \left(\frac{v}{s-r} \right) \right|^2 dx \\
&\quad + (s-r)^n \left(\frac{1}{(s-r)^n} \int_{U_\varrho} \left[\left| V^{\frac{p}{2}}(Dv) \right|^2 + \left| V^{\frac{p}{2}} \left(\frac{v}{s-r} \right) \right|^2 \right] dx \right)^{\frac{q}{p}}
\end{aligned}$$

Das Iterationslemma 6.19 und Division durch ϱ^n liefern uns nun:

$$\begin{aligned}
&\int_{U_{\varrho/2}} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 dx \\
&\leq \text{const}(n, N, p, q, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M) \\
&\quad \left[\int_{U_\varrho} \left| V^{\frac{p}{2}} \left(\frac{v}{\varrho} \right) \right|^2 dx + \left(\int_{U_\varrho} \left[\left| V^{\frac{p}{2}}(Dv) \right|^2 + \left| V^{\frac{p}{2}} \left(\frac{v}{\varrho} \right) \right|^2 \right] dx \right)^{\frac{q}{p}} \right]
\end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung. \square

Beweis von Lemma 4.5 für $p \leq 2$. Wir verwenden die Bezeichnungen aus dem Fall $p \geq 2$ bis auf die folgende Abänderung:

$$\Xi(t) := \int_{U_t} \left[\left| V^{\frac{p}{2}}(Dv) \right|^2 + \left| V^{\frac{p}{2}} \left(\frac{v}{s-r} \right) \right|^2 \right] dx$$

Wir erhalten genau wie zuvor:

$$\begin{aligned} & \lambda \int_{U_r} |V^{\frac{p}{2}} \sqrt{1+|A|^2} (Dv)|^2 dx \\ & \leq \text{const}(n, N, q, \Gamma, M, \Lambda_M) \int_{U_{\tilde{s}}} \left[\int_0^1 |V^{q-1}(Dv - \tau D\psi)| d\tau |D\psi| + |V^{\frac{q}{2}}(D\psi)|^2 \right] dx \end{aligned}$$

Mit $|A| \leq M + 1$ und Lemma 6.4 folgt:

$$\begin{aligned} & \int_{U_r} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 dx \\ & \leq \text{const}(n, N, p, q, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M) \left[\int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} |V^{\frac{q}{2}}(D\psi)|^2 dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} (1 + |Dv|^2 + |D\psi|^2)^{\frac{q-2}{2}} (|Dv| + |D\psi|) |D\psi| dx \right] \quad (4.6) \\ & =: \text{const}(n, N, p, q, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M) [(I) + (II)] \end{aligned}$$

Mit Bemerkung 6.6 erhalten wir für (I):

$$\begin{aligned} (I) & \leq \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} \left(1 + |V^{\frac{p}{2}}(D\psi)|^2\right)^{\frac{q-p}{p}} |V^{\frac{p}{2}}(D\psi)|^2 dx \\ & \leq \text{const}(p, q) \left[\int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} |V^{\frac{p}{2}}(D\psi)|^2 dx + \underbrace{\int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} |V^{\frac{p}{2}}(D\psi)|^{\frac{2q}{p}} dx}_{=: (III)} \right] \quad (4.7) \end{aligned}$$

Den zweiten Term in (4.7) können wir mit (6.20), (6.15) (benutzt $q < \frac{n}{n-1}p$), (6.19) und (6.18) folgendermaßen behandeln:

$$\begin{aligned} (III) & \leq \text{const}(n, p, q) \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} \left(T_{\tilde{r}, \tilde{s}} \left[|V^{\frac{p}{2}}(D[(1-\eta)v])|^{\frac{2}{p}} \right] \right)^q dx \\ & \leq \text{const}(n, p, q) (\tilde{s} - \tilde{r})^n \left(\sup_{t \in]\tilde{r}, \tilde{s}[} \frac{(\tilde{s} - \tilde{r})^{1-n}}{t - \tilde{r}} \int_{U_t \setminus B_{\tilde{r}}} |V^{\frac{p}{2}}(D[(1-\eta)v])|^2 dx \right. \\ & \quad \left. + \sup_{t \in]\tilde{r}, \tilde{s}[} \frac{(\tilde{s} - \tilde{r})^{1-n}}{\tilde{s} - t} \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_t} |V^{\frac{p}{2}}(D[(1-\eta)v])|^2 dx \right)^{\frac{q}{p}} \\ & \leq \text{const}(n, p, q) (s - r)^{n - (n-1)\frac{q}{p}} \left(\sup_{t \in]\tilde{r}, \tilde{s}[} \frac{\Xi(t) - \Xi(\tilde{r})}{t - \tilde{r}} + \sup_{t \in]\tilde{r}, \tilde{s}[} \frac{\Xi(\tilde{s}) - \Xi(t)}{\tilde{s} - t} \right)^{\frac{q}{p}} \\ & \leq \text{const}(n, p, q) (s - r)^n \left(\frac{\Psi}{(s - r)^n} \right)^{\frac{q}{p}} \end{aligned}$$

Der erste Term in (4.7) läßt sich mit (6.20) und (6.11) ähnlich, aber etwas leichter durch Ψ abschätzen. Also gilt

$$(I) \leq \text{const}(n, p, q) \left[\Psi + (s-r)^n \left(\frac{\Psi}{(s-r)^n} \right)^{\frac{q}{p}} \right]. \quad (4.8)$$

Für den Term (II) sehen wir mit Bemerkung 6.6 unter mehrfacher Verwendung der Youngschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} (II) &\leq \text{const}(p, q) \left[\int_{U_{\bar{s}} \setminus B_{\bar{r}}} (1 + |Dv|^2 + |D\psi|^2)^{\frac{p-2}{2}} (|Dv| + |D\psi|) |D\psi| dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{U_{\bar{s}} \setminus B_{\bar{r}}} (1 + |Dv|^2 + |D\psi|^2)^{(p-2)\frac{q}{2p}} \right. \\ &\quad \left. (|Dv|^2 + |D\psi|^2)^{\frac{q-p}{p}} (|Dv| + |D\psi|) |D\psi| dx \right] \\ &\leq \text{const}(p, q) \left[\int_{U_{\bar{s}} \setminus B_{\bar{r}}} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 dx + \int_{U_{\bar{s}} \setminus B_{\bar{r}}} |V^{\frac{p}{2}}(D\psi)|^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\int_{U_{\bar{s}} \setminus B_{\bar{r}}} |V^{\frac{p}{2}}(D\psi)|^{\frac{2q}{p}} dx}_{=(III)} + \underbrace{\int_{U_{\bar{s}} \setminus B_{\bar{r}}} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^{\frac{2q}{p}-1} |V^{\frac{p}{2}}(D\psi)| dx}_{=:(IV)} \right] \end{aligned}$$

Die ersten beiden Terme in der letzten Ungleichung lassen sich problemlos durch $\text{const}(n, p, q) \Psi$ kontrollieren und der Term (III) wurde bereits behandelt; man vergleiche dazu weiter oben. Die Höldersche Ungleichung liefert wegen $q < \frac{3}{2}p$ für den Term (IV):

$$(IV) \leq \left(\int_{U_{\bar{s}} \setminus B_{\bar{r}}} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 dx \right)^{\frac{2q-p}{2p}} \left(\int_{U_{\bar{s}} \setminus B_{\bar{r}}} |V^{\frac{p}{2}}(D\psi)|^{\frac{2p}{3p-2q}} dx \right)^{\frac{3p-2q}{2p}}$$

Der erste Faktor auf der rechten Seite der vorigen Ungleichung läßt sich wieder durch $\Psi^{\frac{2q-p}{2p}}$ abschätzen, den zweiten kann man unter Verwendung von $q < \frac{3}{2}p$ und $q < \frac{2n+1}{2n}p$ genau wie (III) behandeln. Wir erhalten:

$$(IV) \leq \text{const}(n, p, q) (s-r)^n \left(\frac{\Psi}{(s-r)^n} \right)^{\frac{q}{p}}$$

Also

$$(II) \leq \text{const}(n, p, q) \left[\Psi + (s-r)^n \left(\frac{\Psi}{(s-r)^n} \right)^{\frac{q}{p}} \right] \quad (4.9)$$

und (4.6), (4.8) und (4.9) zusammen bedeuten:

$$\int_{U_r} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 dx \leq \text{const}(n, N, p, q, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M) \left[\Psi + (s-r)^n \left(\frac{\Psi}{(s-r)^n} \right)^{\frac{q}{p}} \right]$$

Nun verläuft der restliche Beweis genau wie im Falle $p \geq 2$. \square

Bemerkung 4.6. Die Beweise zeigen, daß (4.2) im Falle $q = p$ auch ohne den zweiten Summanden auf der rechten Seite gilt. Für $q > p$ werden wir später sehen, daß dieser Term in geeigneter Weise beliebig klein wird. Dies rechtfertigt den Namen „Cacciopoli-Ungleichung“ (vgl. (1.6)).

Bemerkung 4.7. Ist statt (**f3's**) f **konvex** mit (**f3s**), insbesondere, wenn

$$D^2 f(A)(B, B) \geq \lambda(1 + |A|^2)^{\frac{p-2}{2}} |B|^2 \quad \text{für alle } A, B \in \mathbb{M}$$

gilt, so zeigt die folgende Variante der obigen Beweise die Ungleichung (4.2) auch unter der schwächeren Bedingung $q < \frac{np}{n-1}$ an die Exponenten. Diese Variante der Cacciopoli-Ungleichung erlaubt den Beweis (einer geringfügigen Verallgemeinerung) des Regularitätssatzes aus [PS].

Beweis. Die Konvexität von f erlaubt es uns, zunächst aus (**f3s**) auf (**f3's**) zu schließen: Dazu nehmen wir o.E. $f \geq 0$ auf \mathbb{M} an. Weiter seien $A \in \mathbb{M}$ und $\varphi \in W_0^{1,p}(U^n; \mathbb{R}^N)$ mit $\int_U f(A + D\varphi) dx < \infty$. Wir setzen φ durch 0 auf ganz \mathbb{R}^n fort. Damit erhalten wir für Glättungen $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(U_{1+\varepsilon}; \mathbb{R}^N)$ von φ unter Verwendung von (**f3s**), der Jensenschen Ungleichung und Standardargumenten für Glättungen:

$$\begin{aligned} f(A) \mathcal{L}^n(U_{1+\varepsilon}) + \lambda \int_U (1 + |A|^2 + |D\varphi_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}} |D\varphi_\varepsilon|^2 dx \\ \leq \int_{U_{1+\varepsilon}} f(A + D\varphi_\varepsilon) dx \leq \int_{U_{1+\varepsilon}} [f(A + D\varphi)]_\varepsilon dx \leq \int_{U_{1+2\varepsilon}} f(A + D\varphi) dx \end{aligned}$$

Wegen $\varphi_\varepsilon \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi$ stark in $W_{\text{lok}}^{1,p}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^N)$ folgt durch Grenzübergang $\varepsilon \searrow 0$ in der vorausgehenden Ungleichung:

$$f(A) + \lambda \int_U (1 + |A|^2 + |D\varphi|^2)^{\frac{p-2}{2}} |D\varphi|^2 dx \leq \int_U f(A + D\varphi) dx$$

Dies zeigt, daß f (**f3's**) genügt.

Wir folgen nun den Bezeichnungen und den Argumenten im Beweis von Lemma 4.5, führen aber zusätzlich folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &:= T_{\tilde{r}, \tilde{s}}[\eta v] \in W_0^{1,p}(U_{\tilde{s}}; \mathbb{R}^N) \\ w &:= T_{\tilde{r}, \tilde{s}} v \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$w = \tilde{\varphi} + \psi \quad \text{auf } U_\varrho$$

Ähnlich wie zuvor erhalten wir mit (**f3's**):

$$\begin{aligned} & \lambda \int_{U_{\tilde{r}}} |V^{\frac{p}{2}} \sqrt{1+|A|^2} (Dv)|^2 dx \\ & \leq \int_{U_{\tilde{s}}} [f(A + D\tilde{\varphi}) - f(A)] dx \\ & = \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} [f(A + D\tilde{\varphi}) - f(Du)] dx + \int_{U_{\tilde{s}}} [f(Du) - f(Du - D\varphi)] dx \\ & \quad + \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} [f(A + D\psi) - f(A)] dx \end{aligned}$$

Aus der Konvexität von f entnehmen wir:

$$f(Du) \geq f(A) + Df(A)Dv \quad \text{auf } U_\varrho$$

Die beiden letzten Ungleichungen ergeben zusammen mit der Minimiereigenschaft von u und $v - w \in W_0^{1,p}(U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}; \mathbb{R}^N)$:

$$\begin{aligned} \lambda \int_{U_{\tilde{r}}} |V^{\frac{p}{2}} \sqrt{1+|A|^2} (Dv)|^2 dx & \leq \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} [f(A + D\tilde{\varphi}) - f(A) - Df(A)Dv] dx \\ & \quad + \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} [f(A + D\psi) - f(A)] dx \\ & = \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} [f(A + D\tilde{\varphi}) - f(A) - Df(A)Dw] dx \\ & \quad + \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} [f(A + D\psi) - f(A)] dx \\ & = \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} [f(A + D\tilde{\varphi}) - f(A) - Df(A)D\tilde{\varphi}] dx \\ & \quad + \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} [f(A + D\psi) - f(A) - Df(A)D\psi] dx \end{aligned}$$

Mit Lemma 4.4 und $|A| \leq M + 1$ folgt:

$$\begin{aligned} & \int_{U_r} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 dx \\ & \leq \text{const}(n, N, p, q, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M) \left[\int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} |V^{\frac{q}{2}}(D\psi)|^2 dx + \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} |V^{\frac{q}{2}}(D\tilde{\varphi})| dx \right] \\ & =: \text{const}(n, N, p, q, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M)[(I) + (II)] \end{aligned}$$

Der Term (I) ist nun derselbe wie in den Beweisen des Lemmas 4.5 und kann genau wie dort abgeschätzt werden, der Term (II) allerdings ist besser als dort und läßt sich nun ganz analog zu (I) abschätzen, nur unter der Bedingung $q < \frac{np}{n-1}$ an die Exponenten. \square

4.2 Approximative \mathcal{A} -Harmonizität

Nach der Herleitung einer Cacciopoli-Ungleichung besteht ein weiterer fundamentaler Beweisschritt bei der Methode der \mathcal{A} -harmonischen Approximation im Nachweis, daß der Minimierer ein lineares Vergleichssystem approximativ löst. Dieser Schritt benutzt Stetigkeitseigenschaften von D^2f .

Bemerkung 4.8. Sei $f \in C_{\text{lok}}^2(\mathbb{M})$, dann gibt es zu jedem $M \in \mathbb{R}_{>0}$ einen Stetigkeitsmodul $\nu_M : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\lim_{\omega \searrow 0} \nu_M(\omega) = 0$, so daß für $A, B \in \mathbb{M}$ gilt:

$$|A| \leq M + 1, |B| \leq M + 2 \implies |D^2f(A) - D^2f(B)| \leq \nu_M(|A - B|^2) \quad (4.10)$$

ν_M kann so gewählt werden, daß folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (I) ν_M ist nichtfallend.
- (II) ν_M^2 ist konkav.
- (III) $\nu_M^2(\omega) \geq \omega$ gilt für alle $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Definition 4.9 (Exzess). Für $u \in W^{1,p}(U_\varrho^n(x_0); \mathbb{R}^N)$ und $A \in \mathbb{M}$ setzen wir:

$$\Phi_p(u, x_0, \varrho, A) := \int_{U_\varrho^n(x_0)} \left| V^{\frac{p}{2}}(Du - A) \right|^2 dx$$

Lemma 4.10 (Approximative \mathcal{A} -Harmonizität). Es sei $q \leq p + 1$, $f \in C_{\text{lok}}^2(\mathbb{M})$ genüge **(f1)** und **(f3)** und $u \in W^{1,p}(U_\varrho^n(x_0); \mathbb{R}^N)$ sei eine schwache Lösung der Euler-Gleichung

$$\int_{U_\varrho^n(x_0)} Df(Du) D\varphi dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(U_\varrho^n(x_0); \mathbb{R}^N) \quad (4.11)$$

von \mathcal{F} auf $U_\varrho^n(x_0)$. Dann gilt für alle $M \in \mathbb{R}_{>0}$, alle $A \in \mathbb{M}$ mit $|A| \leq M + 1$ und alle $\varphi \in \mathcal{D}(U_\varrho^n(x_0); \mathbb{R}^N)$:

$$\left| \int_{U_\varrho^n(x_0)} D^2f(A)(Du - A, D\varphi) dx \right| \leq \text{const}(n, N, p, q, \Gamma, M, \Lambda_M) \sqrt{\Phi_p} \nu_M(\Phi_p) \sup_{U_\varrho^n(x_0)} |D\varphi|$$

Dabei wurde $\Phi_p(u, x_0, \varrho, A)$ mit Φ_p abgekürzt.

Beweis. O.E. seien $x_0 = 0$ und $\sup_{U_\varrho} |D\varphi| = 1$. Wir setzen $v(x) := u(x) - Ax$ und finden mit (4.11):

$$\begin{aligned} & \left| \int_{U_\varrho} D^2 f(A)(Dv, D\varphi) dx \right| \\ & \leq \int_{U_\varrho} \left| D^2 f(A)(Dv, D\varphi) + Df(A)D\varphi - Df(Du)D\varphi \right| dx \quad (4.12) \end{aligned}$$

Wir schätzen nun den Integranden in der letzten Zeile weiter ab: Auf $\{x \in U_\varrho : |Dv| \leq 1\}$ erhalten wir mit Bemerkung 4.8:

$$\begin{aligned} & \left| D^2 f(A)(Dv, D\varphi) + Df(A)D\varphi - Df(Du)D\varphi \right| \\ & \leq \int_0^1 \left| D^2 f(A) - D^2 f(A + tDv) \right| dt |Dv| \\ & \leq \nu_M(|Dv|^2) |Dv| \quad (4.13) \\ & \leq \text{const}(p) \nu_M \left(\left| V^{\frac{p}{2}}(Dv) \right|^2 \right) \left| V^{\frac{p}{2}}(Dv) \right| \end{aligned}$$

Auf $\{x \in U_\varrho : |Dv| \geq 1\}$ dagegen zeigt Lemma 4.4:

$$\begin{aligned} & \left| D^2 f(A)(Dv, D\varphi) + Df(A)D\varphi - Df(Du)D\varphi \right| \\ & \leq \Lambda_M |Dv| + \text{const}(n, N, q, \Gamma, M, \Lambda_M) |V^{q-1}(Dv)| \\ & \leq \text{const}(n, N, q, \Gamma, M, \Lambda_M) |Dv|^{\max\{q-1, 1\}} \quad (4.14) \\ & \leq \text{const}(n, N, p, q, \Gamma, M, \Lambda_M) \left| V^{\frac{p}{2}}(Dv) \right|^2 \end{aligned}$$

(4.12), (4.13) und (4.14) zeigen gemeinsam mit der Eigenschaft (III) aus Bemerkung 4.8:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{U_\varrho} D^2 f(A)(Dv, D\varphi) dx \right| \\ & \leq \text{const}(n, N, p, q, \Gamma, M, \Lambda_M) \int_{U_\varrho} \nu_M \left(\left| V^{\frac{p}{2}}(Dv) \right|^2 \right) \left| V^{\frac{p}{2}}(Dv) \right| dx \end{aligned}$$

Mit den Ungleichungen von Cauchy-Schwarz und Jensen nebst der Konkavität von ν_M^2 läßt sich daraus auf

$$\left| \int_{U_\varrho} D^2 f(A)(Dv, D\varphi) dx \right| \leq \text{const}(n, N, p, q, \Gamma, M, \Lambda_M) \sqrt{\Phi_p} \nu_M(\Phi_p)$$

schließen. Der Beweis ist vollständig. \square

Weitere Referenzen zur \mathcal{A} -harmonischen Approximationsmethode und ähnlichen Lemmata findet man in Abschnitt 6.5.

4.3 Exzess-Abschätzungen

Definition 4.11 (Exzess). Für $u \in W^{1,p}(U_\varrho^n(x_0); \mathbb{R}^N)$ setzen wir

$$\Phi_p(u, x_0, \varrho) := \Phi_p(u, x_0, \varrho, (Du)_{x_0, \varrho})$$

mit der Abkürzung $(Du)_{x_0, \varrho} := \int_{U_\varrho^n(x_0)} Du \, dx$.

Wir leiten nun Abschätzungen für das Verhalten des Exzesses $\Phi_p(u, x_0, \varrho)$ bei $\varrho \searrow 0$ her. Die Beweise folgen dabei weitgehend bekannten Methoden (vgl. Abschnitt 6.5 für Referenzen). Insbesondere werden Kleinheitsannahmen an den Exzess Φ_p gemacht. Neu ist in diesem Abschnitt die Behandlung der Störterme auf der rechten Seite der Cacciopoli-Ungleichung (4.2): Diese sind jedoch im wesentlichen von der Form $(\Phi_p)^{\frac{q}{p}}$ und stellen sich somit unter diesen Kleinheitsannahmen als besser als Φ_p selbst heraus. Wir formalisieren nun diese Idee:

Lemma 4.12 (Monotonieeigenschaft). Für $u \in W^{1,p}(U_\varrho^n(x_0); \mathbb{R}^N)$ und $r \in]0, \varrho]$ gilt:

$$\Phi_p(u, x_0, r) \leq \text{const}(p) \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n \Phi_p(u, x_0, \varrho) \quad (4.15)$$

Beweis. O.E. sei $x_0 = 0$. Aus Lemma 6.8 erhalten wir:

$$\int_{U_r} \left| V^{\frac{p}{2}}(Du - (Du)_r) \right|^2 dx \leq \text{const}(p) \int_{U_r} \left| V^{\frac{p}{2}}(Du - (Du)_\varrho) \right|^2 dx$$

Zusammen mit

$$\int_{U_r} \left| V^{\frac{p}{2}}(Du - (Du)_\varrho) \right|^2 dx \leq \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n \int_{U_\varrho} \left| V^{\frac{p}{2}}(Du - (Du)_\varrho) \right|^2 dx$$

ergibt sich die Behauptung. □

Wir erinnern an Lemma 1.21:

Lemma 4.13 (Legendre-Hadamard-Bedingung).

$f \in C_{\text{lok}}^2(\mathbb{M})$ genüge **(f3s)**, dann gilt für alle $A, B \in \mathbb{M}$ mit $\text{Rang } B \leq 1$:

$$D^2 f(A)(B, B) \geq 2\lambda(1 + |A|^2)^{\frac{p-2}{2}} |B|^2$$

Als nächstes beweisen wir mit \mathcal{A} -harmonischer Approximation eine sog. „excess improvement“-Abschätzung:

Proposition 4.14. Es seien $2 \leq p \leq q < p + \frac{1}{n}$ oder $p \leq 2$, $q < \frac{2n+1}{2n}p$, $M \in \mathbb{R}_{>0}$, $\alpha \in]0, 1[$, $f \in C_{\text{lok}}^2(\mathbb{M})$ genüge **(f1)** und **(f3's)** und $u \in W^{1,p}(U_\varrho^n(x_0); \mathbb{R}^N)$ sei \mathcal{F} -minimierend auf $U_\varrho^n(x_0)$. Dann gibt es ein $\varepsilon_0(n, N, p, q, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M, \nu_M, \alpha) \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein $\theta(n, N, p, q, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M, \alpha) \in]0, 1[$, so daß die Kleinheitsbedingungen

$$\Phi_p(u, x_0, \varrho) \leq \varepsilon_0 \quad \text{und} \quad |(Du)_{x_0, \varrho}| \leq M \quad (4.16)$$

die Abschätzung

$$\Phi_p(u, x_0, \theta \varrho) \leq \theta^{2\alpha} \Phi_p(u, x_0, \varrho)$$

implizieren.

Beweis. O.E. sei $x_0 = 0$, außerdem sei $A := (Du)_{\varrho}$ mit $|A| \leq M$. Die ersten beide Argumente von Φ_p werden wir in diesem Beweis weglassen, sie sind immer als u und 0 zu verstehen. Ist nun $\Phi_p(\varrho) = 0$, so ist Du konstant auf U_{ϱ} und die Behauptung ist trivial. Sei also jetzt $\Phi_p(\varrho) \neq 0$. Zudem sei

$$w(x) := u(x) - Ax$$

und

$$s := \sqrt{\Phi_p(\varrho)} = \left[\int_{U_{\varrho}} |V^{\frac{p}{2}}(Dw)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Wir werden nun w \mathcal{A} -harmonisch approximieren mit

$$\mathcal{A} := D^2 f(A).$$

Aus (4.1) folgt

$$|\mathcal{A}| \leq \Lambda_M.$$

Gemäß Lemma 4.13 gilt außerdem

$$\mathcal{A}(B, B) \geq \lambda_M |B|^2 \quad \text{für alle } B \in \mathbb{M} \text{ mit } \text{Rang } B \leq 1$$

mit

$$\lambda_M := \begin{cases} 2\lambda & \text{für } p \geq 2 \\ 2(1 + M^2)^{\frac{p-2}{2}} \lambda & \text{für } p \leq 2 \end{cases}$$

und gemäß Lemma 4.10

$$\left| \int_{U_{\varrho}} \mathcal{A}(Dw, D\varphi) dx \right| \leq s c_3 \nu_M(\Phi_p(\varrho)) \sup_{U_{\varrho}} |D\varphi| \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(U_{\varrho}; \mathbb{R}^N)$$

mit einem $c_3(n, N, p, q, \Gamma, M, \Lambda_M) \in \mathbb{R}_{>0}$. Für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, das erst später festgelegt wird, sei nun $\delta(n, N, p, \lambda_M, \Lambda_M, \varepsilon)$ die Konstante aus Lemma 6.24. Unter den zusätzlichen Kleinheitsannahmen

$$c_3 \nu_M(\Phi_p(\varrho)) \leq \delta \tag{4.17}$$

$$s = \sqrt{\Phi_p(\varrho)} \leq 1 \tag{4.18}$$

läßt sich nun die V -Version des \mathcal{A} -harmonischen Approximationslemmas, Lemma 6.24, anwenden. Das Lemma sichert die Existenz einer \mathcal{A} -harmonischen Funktion $h \in W^{1,2}(U_\varrho; \mathbb{R}^N)$ mit

$$\begin{aligned} \sup_{U_{\varrho/2}} |Dh| + \varrho \sup_{U_{\varrho/2}} |D^2h| &\leq \text{const}(n, N, p, \lambda_M, \Lambda_M) \\ \int_{U_{\varrho/2}} \left| V^{\frac{p}{2}} \left(\frac{w - sh}{\varrho} \right) \right|^2 dx &\leq s^2 \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Sei nun $\theta \in]0, \frac{1}{4}]$ fixiert. Der Satz von Taylor mit der Lagrange-Abschätzung liefert:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in U_{2\theta\varrho}} |h(x) - h(0) - Dh(0)x| &\leq \frac{1}{2} (2\theta\varrho)^2 \sup_{U_{\varrho/2}} |D^2h| \\ &\leq \text{const}(n, N, p, \lambda_M, \Lambda_M) \theta^2 \varrho \end{aligned}$$

(6.2), (6.4), (4.19) und die letzte Ungleichung ermöglichen nun die weitere Abschätzung:

$$\begin{aligned} \int_{U_{2\theta\varrho}} \left| V^{\frac{p}{2}} \left(\frac{w(x) - sh(0) - sDh(0)x}{2\theta\varrho} \right) \right|^2 dx \\ \leq \text{const}(n, p) \left[\theta^{-n-\max\{2,p\}} \int_{U_\varrho} \left| V^{\frac{p}{2}} \left(\frac{w - sh}{\varrho} \right) \right|^2 dx \right. \\ \left. + \int_{U_{2\theta\varrho}} \left| V^{\frac{p}{2}} \left(s \frac{h(x) - h(0) - Dh(0)x}{2\theta\varrho} \right) \right|^2 dx \right] \\ \leq \text{const}(n, N, p, \lambda_M, \Lambda_M) \left[\theta^{-n-\max\{2,p\}} s^2 \varepsilon + |V^{\frac{p}{2}}(\theta s)|^2 \right] \\ \leq \text{const}(n, N, p, \lambda_M, \Lambda_M) \left[\theta^{-n-\max\{2,p\}} s^2 \varepsilon + \theta^2 s^2 \right] \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir $\varepsilon := \theta^{n+2+\max\{2,p\}}$ und sehen mit den Definitionen von w und s :

$$\begin{aligned} \int_{U_{2\theta\varrho}} \left| V^{\frac{p}{2}} \left(\frac{u(x) - Ax - s(h(0) + Dh(0)x)}{2\theta\varrho} \right) \right|^2 dx \\ \leq \text{const}(n, N, p, \lambda_M, \Lambda_M) \theta^2 \Phi_p(\varrho) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Aus (4.19) entnehmen wir

$$|sDh(0)|^2 \leq c_4 \Phi_p(\varrho) \quad (4.21)$$

mit einer Konstanten $c_4(n, N, p, \lambda_M, \Lambda_M) \in \mathbb{R}_{>0}$ und schließen mit (6.2) und

(4.18):

$$\begin{aligned}
& \int_{U_{2\theta e}} |V^{\frac{p}{2}}(Du - A - sDh(0))|^2 dx \\
& \leq \text{const}(p) \left[(2\theta)^{-n} \int_{U_e} |V^{\frac{p}{2}}(Du - A)|^2 dx + |V^{\frac{p}{2}}(sDh(0))|^2 \right] \\
& \leq \text{const}(n, N, p, \lambda_M, \Lambda_M) \theta^{-n} \Phi_p(\varrho) \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Als nächstes kombiniert man (4.20) und (4.22) mit der Cacciopoli-Ungleichung (4.2) (mit $\zeta = sh(0)$ und $A + sDh(0)$ anstelle von A), um zu schließen:

$$\begin{aligned}
& \int_{U_{\theta e}} |V^{\frac{p}{2}}(Du - (A + sDh(0)))|^2 dx \\
& \leq \text{const}(n, N, p, q, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M) \left[\theta^2 \Phi_p(\varrho) + \theta^{\frac{2q}{p}} \Phi_p(\varrho)^{\frac{q}{p}} + \theta^{-n\frac{q}{p}} \Phi_p(\varrho)^{\frac{q}{p}} \right] \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Dabei ist die Voraussetzung $|A + sDh(0)| \leq M + 1$ aus Lemma 4.5 erfüllt gemäß (4.21) in Verbindung mit der zusätzlichen Kleinheitsannahme

$$c_4 \Phi_p(\varrho) \leq 1. \quad (4.24)$$

Im Falle $q > p$ erhalten wir mit den Kleinheitsannahmen (4.18),

$$\theta^{-n\frac{q}{p}} \Phi_p(\varrho)^{\frac{q-p}{p}} \leq \theta^2 \quad (4.25)$$

und $\theta \leq 1$:

$$\int_{U_{\theta e}} |V^{\frac{p}{2}}(Du - (A + sDh(0)))|^2 dx \leq \text{const}(n, N, p, q, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M) \theta^2 \Phi_p(\varrho)$$

Im Falle $q = p$ dagegen ist die letzte Ungleichung auch ohne weitere Annahmen offensichtlich, da der letzte Term auf der rechten Seite von (4.23) gemäß Bemerkung 4.6 nicht auftritt. Mit der Mittelwerteigenschaft aus Lemma 6.8 läßt sich die vorausgehende Ungleichung umschreiben in

$$\int_{U_{\theta e}} |V^{\frac{p}{2}}(Du - (Du)_{\theta e})|^2 dx \leq \text{const}(n, N, p, q, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M) \theta^2 \Phi_p(\varrho).$$

Dies bedeutet:

$$\Phi_p(\theta\varrho) \leq c_5 \theta^2 \Phi_p(\varrho) \quad (4.26)$$

für eine Konstante $c_5(n, N, p, q, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M) \in \mathbb{R}_{>0}$. Abschließend wählt man nun $\theta \in]0, \frac{1}{4}]$ hinreichend klein, so daß

$$c_5 \theta^2 \leq \theta^{2\alpha} \quad (4.27)$$

gilt. Somit hängen θ , δ und ε nur von n , N , p , q , Γ , λ , M , Λ_M und α ab. Nun läßt sich ε_0 nur abhängig von n , N , p , q , Γ , λ , M , Λ_M , ν_M , δ , s , t und θ so wählen, daß die Kleinheitsbedingungen (4.17), (4.18), (4.24) und (4.25) aus dem ersten Teil der Voraussetzung (4.16) folgen. Zwecks späterer Verwendung nehmen wir außerdem an, daß

$$\varepsilon_0 \leq \theta^n (1 - \theta^\alpha)^2 \left(\frac{M}{2} \right)^2 \quad (4.28)$$

im Falle $p \geq 2$ und

$$\varepsilon_0 \leq \min \left\{ 1, \frac{\theta^{\frac{2n}{p}} (1 - \theta^\alpha)^2 \left(\frac{M}{2} \right)^2}{2^{\frac{2+p}{p}}} \right\} \quad (4.29)$$

im Falle $p \leq 2$ gelten. Eliminiert man abhängige Größen, so folgt die behauptete Abhängigkeit von ε_0 . Unter Berücksichtigung von (4.26) und (4.27) ist die Proposition somit vollständig bewiesen. \square

Iteration von Proposition 4.14 führt zu einer sog. „excess decay“- Abschätzung:

Lemma 4.15. *Es seien $2 \leq p \leq q < p + \frac{1}{n}$ oder $p \leq 2$, $q < \frac{2n+1}{2n}p$, $M \in \mathbb{R}_{>0}$, $\alpha \in]0, 1[$, $f \in C_{\text{lok}}^2(\mathbb{M})$ genüge **(f1)** und **(f3's)** und $u \in W^{1,p}(U_\varrho^n(x_0); \mathbb{R}^N)$ sei \mathcal{F} -minimierend auf $U_\varrho^n(x_0)$. Dann gibt es ein $c_6(n, N, p, q, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M, \alpha) \in \mathbb{R}_{>0}$, so daß die Kleinheitsbedingungen*

$$\Phi_p(u, x_0, \varrho) \leq \varepsilon_0 \quad \text{und} \quad |(Du)_{x_0, \varrho}| \leq \frac{M}{2} \quad (4.30)$$

mit der Konstanten ε_0 aus Proposition 4.14 die Wachstumsbedingung

$$\Phi_p(u, x_0, r) \leq c_6 \left(\frac{r}{\varrho} \right)^{2\alpha} \Phi_p(u, x_0, \varrho) \quad \text{für alle } r \in]0, \varrho]$$

implizieren.

Beweis. O.E. sei $x_0 = 0$ und $\Phi_p(\varrho) \neq 0$. Wir zeigen durch Induktion nach $j \in \mathbb{N}_0$:

$$\Phi_p(\theta^j \varrho) \leq \theta^{2\alpha j} \Phi_p(\varrho) \quad (4.31)$$

$$\Phi_p(\theta^j \varrho) \leq \varepsilon_0 \quad \text{und} \quad |(Du)_{\theta^j \varrho}| \leq M \quad (4.32)$$

Dabei ist θ die Konstante aus Proposition 4.14. Der Induktionsanfang für $j = 0$ ist klar gemäß den Kleinheitsbedingungen (4.30). Also zum Induktionsschluß: Seien (4.31) und (4.32) erfüllt für alle $j \in \{1, 2, \dots, l\}$. Gemäß der Induktionsvoraussetzung (4.32) können wir Proposition 4.14 auf der Kugel $U_{\theta^l \varrho}$ anwenden: Zusammen mit den Induktionsvoraussetzungen (4.31) und (4.32) nebst $\theta \leq 1$ erhalten wir:

$$\Phi_p(\theta^{l+1} \varrho) \leq \theta^{2\alpha} \Phi_p(\theta^l \varrho) \leq \theta^{2\alpha(l+1)} \Phi_p(\varrho) \leq \varepsilon_0 \quad (4.33)$$

Unter Verwendung der Induktionsvoraussetzungen (4.31) und (4.32) und von (4.28) finden wir im Falle $p \geq 2$:

$$\begin{aligned}
& |(Du)_{\theta^{l+1}\varrho} - (Du)_\varrho| \\
& \leq \sum_{j=0}^l |(Du)_{\theta^{j+1}\varrho} - (Du)_{\theta^j\varrho}| \leq \sum_{j=0}^l \left(\int_{U_{\theta^{j+1}\varrho}} |Du - (Du)_{\theta^j\varrho}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \theta^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^l \sqrt{\Phi_p(\theta^j\varrho)} \leq \theta^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^l \theta^{\alpha j} \sqrt{\Phi_p(\varrho)} \leq \frac{\theta^{-\frac{n}{2}}}{1 - \theta^\alpha} \sqrt{\varepsilon_0} \leq \frac{M}{2}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Als nächstes werden wir nun ein zu (4.34) analoges Argument für $p \leq 2$ angeben: Dazu bemerken wir zunächst, daß aus (4.29) und (4.32) $\Phi_p(\theta^j\varrho) \leq 1$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ folgt. Außerdem sieht man mit der Fallunterscheidung $|A| \leq / \geq 1$ leicht, daß

$$|A| \leq 2^{\frac{2-p}{2p}} \left[|V^{\frac{p}{2}}(A)| + |V^{\frac{p}{2}}(A)|^{\frac{2}{p}} \right] \quad \text{für alle } A \in \mathbb{M}$$

gilt. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
|(Du)_{\theta^{l+1}\varrho} - (Du)_\varrho| & \leq \sum_{j=0}^l \int_{U_{\theta^{j+1}\varrho}} |Du - (Du)_{\theta^j\varrho}| dx \\
& \leq 2^{\frac{2-p}{2p}} \sum_{j=0}^l \left[\left(\int_{U_{\theta^{j+1}\varrho}} |V^{\frac{p}{2}}(Du - (Du)_{\theta^j\varrho})|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_{U_{\theta^{j+1}\varrho}} |V^{\frac{p}{2}}(Du - (Du)_{\theta^j\varrho})|^2 dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
& \leq 2^{\frac{2-p}{2p}} \sum_{j=0}^l \left[\theta^{-\frac{n}{2}} \Phi_p(\theta^j\varrho)^{\frac{1}{2}} + \theta^{-\frac{n}{p}} \Phi_p(\theta^j\varrho)^{\frac{1}{p}} \right] \leq 2^{\frac{2+p}{2p}} \theta^{-\frac{n}{p}} \sum_{j=0}^l \sqrt{\Phi_p(\theta^j\varrho)}
\end{aligned}$$

Die Forderung (4.29) wurde gerade so gewählt, daß sich genau wie zuvor im Falle $p \geq 2$ jetzt auch im Falle $p \leq 2$ auf

$$|(Du)_{\theta^{l+1}\varrho} - (Du)_\varrho| \leq \frac{M}{2} \tag{4.35}$$

schließen läßt.

Wir kehren nun zum allgemeinen Fall zurück. Aus (4.34) bzw. (4.35) entnehmen wir mit dem zweiten Teil von (4.30):

$$|(Du)_{\theta^{l+1}\varrho}| \leq M \tag{4.36}$$

(4.33) und (4.36) enthalten alle Induktionsbehauptungen, daher ist die Induktion abgeschlossen.

Nun fixiert man ein $j \in \mathbb{N}_0$ mit $\theta^{j+1}\varrho < r \leq \theta^j\varrho$ und bekommt unter Verwendung von (4.15) und (4.31) mit

$$\begin{aligned}\Phi_p(r) &\leq \text{const}(p) \left(\frac{\theta^j\varrho}{r}\right)^n \Phi_p(\theta^j\varrho) \\ &\leq \text{const}(p)\theta^{2\alpha j-n}\Phi_p(\varrho) \\ &\leq \text{const}(p)\theta^{-2\alpha-n} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2\alpha} \Phi_p(\varrho)\end{aligned}$$

die Behauptung. □

4.4 Partielle Regularität

Da wir lokale Regularitätseigenschaften untersuchen, greift unsere Theorie nicht nur für Minimierer, sondern sogar für lokale Minimierer im Sinne der folgenden Definition:

Definition 4.16 (lokale Minimierer). Sei $u \in W_{\text{lok}}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. u heißt ein lokaler Minimierer von \mathcal{F} auf Ω oder lokal \mathcal{F} -minimierend auf Ω genau dann, wenn es zu jedem $x \in \Omega$ eine Umgebung von x in Ω gibt, auf der u \mathcal{F} -minimierend ist.

Ausgehend von Lemma 4.15 zeigen Standardargumente (vgl. [Ev] und [CFM]), basierend auf Campanatos klassischer Integral-Charakterisierung der Hölder-Stetigkeit, die folgende Verallgemeinerung von Hauptsatz 2.16:

Satz 4.17 (Partielle Regularität). Es sei $2 \leq p \leq q < p + \frac{1}{n}$ oder $p \leq 2$, $q < \frac{2n+1}{2n}p$, $f \in C_{\text{lok}}^2(\mathbb{M})$ genüge (**f1**) und (**f3's**) und $u \in W_{\text{lok}}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ sei ein lokaler Minimierer von \mathcal{F} auf Ω . Dann ist $\text{Reg}(u) \in \mathcal{O}_\Omega$, $u \in C_{\text{lok}}^{1,\alpha}(\text{Reg}(u); \mathbb{R}^N)$ für jedes $\alpha \in]0, 1[$ und $\mathcal{L}^n(\text{Sing}(u)) = 0$.

Genauer ist dabei $\text{Sing}(u) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ mit

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &:= \left\{ x_0 \in \Omega : \liminf_{\varrho \searrow 0} \Phi_p(u, x_0, \varrho) > 0 \right\} \\ \Sigma_2 &:= \left\{ x_0 \in \Omega : \limsup_{\varrho \searrow 0} |(Du)_{x_0, \varrho}| = \infty \right\}.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.18. Eine Analyse des Beweises von Satz 4.17 zeigt:

- (I) Zu jedem $\alpha \in]0, 1[$ und $x_0 \in \text{Reg}(u)$ gibt es ein $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$, so daß Du auf $U_\sigma^n(x_0)$ Hölder-stetig ist mit Exponent α und einer nur von $n, N, p, q, \Gamma, \lambda, M := 1 + 2 \limsup_{\varrho \searrow 0} |(Du)_{x_0, \varrho}|, \Lambda_M, \nu_M$ und α abhängigen Hölder-Konstanten.

(II) Die Voraussetzung **(f3's)** läßt sich zu folgender Variante abschwächen, die eine gewisse Degeneration der Elliptizität bei $\infty_{\mathbb{M}}$ erlaubt:

Zu jedem $M \in \mathbb{R}_{>0}$ gebe es ein $\lambda_M \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\int_{U^n} f(A + D\varphi) dx \geq f(A) + \lambda_M \int_{U^n} \left| V_{\sqrt{1+|A|^2}}^{\frac{p}{2}}(D\varphi) \right|^2 dx$$

für alle $A \in \mathbb{M}$ mit $|A| \leq M + 1$ und alle $\varphi \in W_0^{1,p}(U^n; \mathbb{R}^N)$.

Insbesondere kann daher in der Voraussetzung **(f3's)** der Term $V_{\sqrt{1+|A|^2}}^{\frac{p}{2}}(D\varphi)$ durch $V^{\frac{p}{2}}(D\varphi)$ ersetzt werden.

Mit den in Abschnitt 1 beschriebenen Methoden erhält man problemlos:

Korollar 4.19 (Höhere Regularität). *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 4.17 sei $f \in C_{\text{lok}}^\infty(\mathbb{M})$, dann folgt $u \in C_{\text{lok}}^\infty(\text{Reg}(u))$. \square*

Kapitel 5

Beweis von Hauptsatz 2.45

Stets seien die Annahmen 0.1 und 2.1 erfüllt.

Auch in diesem Abschnitt verwenden wir die Abkürzung

$$\Lambda_M := \sup_{B_{M+2}^M} |D^2 f|. \quad (5.1)$$

5.1 Die Euler-Gleichung

Lemma 5.1. $f \in C_{\text{lok}}^1(\mathbb{M})$ genüge **(f2)** und der Wachstumsbedingung

$$\limsup_{|A| \rightarrow \infty} \frac{|Df(A)|}{|A|^{q-1}} < \infty \quad (5.2)$$

mit $q < \min\{\frac{np}{n-1}, p+1\}$. Es seien $O \in \mathcal{O}_\Omega$, $u \in W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ mit $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}[u; O] < \infty$ und $\varphi \in W^{1, \frac{p}{p+1-q}}(O; \mathbb{R}^N)$, dann gilt:

$$\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}[u + \varphi; O] - \overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}[u; O] = \int_O [Qf(Du + D\varphi) - Qf(Du)] dx$$

Beweis. O.E. sei $f \geq 0$ auf \mathbb{M} . Aus (5.2) folgt insbesondere **(f1)**. Seien $\lambda_{u+\varphi}$ und λ_u die Radon-Maße aus Satz 2.33, die $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}[u + \varphi; -]|_O$ und $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}[u; -]|_O$ repräsentieren. Außerdem seien $u_k \in W_{\text{lok}}^{1,q}(O; \mathbb{R}^N)$ mit $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$ schwach in $W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; O] = \overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}[u; O]$ (Lemma 2.22) und $O \supset \Delta \in \mathcal{O}_\Omega$ mit $\lambda_u(\partial\Delta \cap O) = 0$. Dann folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; \Delta] = \lambda_u(\Delta)$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \lambda_{u+\varphi}(\Delta) - \lambda_u(\Delta) &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\mathcal{F}[u_k + \varphi; \Delta] - \mathcal{F}[u_k; \Delta] \right) \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_\Delta \int_0^1 Df(Du_k + tD\varphi) dt D\varphi dx \leq \int_\Delta h_1 D\varphi dx \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, daß $\int_0^1 Df(Du_k + tD\varphi) dt$ beschränkt ist in $L^{\frac{p}{q-1}}(O; \mathbb{R}^N)$ gemäß der Wachstumsbedingung (5.2) und h_1 bezeichnet den schwachen Grenz-

wert einer Teilfolge. Außerdem haben wir verwendet, daß φ in $W^{1, \frac{p}{p+1-q}}(O; \mathbb{R}^N)$ liegt. Wir bemerken hier noch kurz, daß $\overline{\mathcal{F}_{\text{lok}}}[u + \varphi; O] < \infty$ mit $\Delta = O$ aus der letzten Gleichung folgt. Dies rechtfertigt nachträglich die Anwendung von Satz 2.33 auf $u + \varphi$. Mit den Regularitätseigenschaften von $\lambda_{u+\varphi}$ und λ_u läßt sich auf

$$\lambda_{u+\varphi}(\Delta) - \lambda_u(\Delta) \leq \int_{\Delta} h_1 D\varphi \, dx \quad \text{für alle } \mathcal{L}^n\text{-meßbaren Teilmengen } \Delta \text{ von } O$$

schließen. Ganz ähnliche Argumente zeigen

$$\lambda_u(\Delta) - \lambda_{u+\varphi}(\Delta) \leq \int_{\Delta} h_2 D\varphi \, dx \quad \text{für alle } \mathcal{L}^n\text{-meßbaren Teilmengen } \Delta \text{ von } O$$

mit einem $h_2 \in L^{\frac{p}{q-1}}(O; \mathbb{R}^N)$. Dies bedeutet, daß das signierte Radon-Maß $\lambda_{u+\varphi} - \lambda_u$ absolutstetig ist bzgl. $\mathcal{L}^n|_O$. Mit Satz 2.40 und Satz 6.29 erhalten wir

$$\lambda_{u+\varphi}(\Delta) - \lambda_u(\Delta) = \int_{\Delta} [Qf(Du + D\varphi) - Qf(Du)] \, dx$$

für alle \mathcal{L}^n -meßbaren Teilmengen Δ von O , insbesondere für $\Delta = O$. \square

Der Minimiererbegriff für abstrakte Integrale überträgt sich i.a. nicht auf Teilmengen, daher verwenden wir folgende leichte Abschwächung:

Definition 5.2 (schwache Minimierer).

Sei \mathcal{I} ein abstraktes Integral auf $W^{1,p}(\mathbb{O}_{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ und $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. u heißt ein **schwacher Minimierer** von \mathcal{I} auf Ω oder schwach \mathcal{I} -minimierend auf Ω genau dann, wenn $\mathcal{I}[u; \Omega] < \infty$ und

$$\mathcal{I}[u; \Omega] \leq \mathcal{I}[u + \varphi; \Omega] \quad \text{für alle } \varphi \in W_{\text{kpt}}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$$

gelten.

Definition 5.3 (lokale Minimierer).

Sei \mathcal{I} ein abstraktes Integral auf $W^{1,p}(\mathbb{O}_{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ und $u \in W_{\text{lok}}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. u heißt ein **lokaler Minimierer** von \mathcal{I} auf Ω oder lokal \mathcal{I} -minimierend auf Ω genau dann, wenn es zu jedem $x \in \Omega$ eine Umgebung von x in Ω gibt, auf der u schwach \mathcal{I} -minimierend ist.

Es läßt sich leicht einsehen, daß diese Definition für $\mathcal{I} = \mathcal{F}$ mit Definition 4.16 zusammenfällt.

Mit der Maßdarstellung aus der Definition abstrakter Integrale erhalten wir:

Bemerkung 5.4.

Sei \mathcal{I} ein abstraktes Integral auf $W^{1,p}(\mathbb{O}_{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ und $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} u \text{ } \mathcal{I}\text{-minimierend auf } \Omega &\implies u \text{ schwach } \mathcal{I}\text{-minimierend auf } \Omega \\ &\implies u \text{ schwach } \mathcal{I}\text{-minimierend auf jedem } O \in \mathbb{O}_{\Omega} \\ &\implies u \text{ lokal } \mathcal{I}\text{-minimierend auf } \Omega \end{aligned}$$

Wir beweisen jetzt in Verallgemeinerung von Lemma 2.43:

Lemma 5.5 (Euler-Gleichung). $f \in C^1_{\text{lok}}(\mathbb{M})$ genüge **(f1)**, **(f2)** und **(f3)** mit $q < \min\{\frac{np}{n-1}, p+1\}$ und $u \in W^{1,p}_{\text{lok}}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ sei ein lokaler $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ -Minimierer auf Ω . Dann erfüllt u die Euler-Gleichung

$$\int_{\Omega} Df(Du)D\varphi \, dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^N)$$

von \mathcal{F} auf Ω .

Beweis. Sei $x \in \Omega$ und $O \in \mathbb{K}_{\Omega}$ eine Umgebung von x in Ω , auf der u schwach $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ -minimierend ist. Sei weiter $\varphi \in \mathcal{D}(O; \mathbb{R}^N)$. Dann gelten $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; O] < \infty$ und

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; O] \leq \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u + t\varphi; O] \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Gemäß Lemma 4.2 und Bemerkung 4.3 ist (5.2) erfüllt; daher zeigt Lemma 5.1, daß

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \int_O f(Du + tD\varphi) \, dx$$

ein absolutes Minimum bei 0 annimmt. Durch Differenzieren an der Stelle 0 sehen wir:

$$\int_O Df(Du)D\varphi \, dx = 0$$

Die Behauptung folgt mit der C^{∞} -Zerlegung der Eins. \square

Bemerkung 5.6. Die Lemmata 5.1 und 5.5 gelten ohne die Voraussetzung **(f2)**.

Beweisskizze. Dies läßt sich einsehen, indem man im Beweis von Lemma 5.1 die Anwendung von Lemma 2.22 vermeidet. Dazu verwendet man statt der Folge, auf der das Infimum in Definition 2.17 angenommen wird, Folgen, die dieses Infimum nur approximieren. \square

$\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ -Minimierer erfüllen also die Euler-Gleichung des ursprünglichen Funktionals \mathcal{F} . Dies ist ein Schlüssel zur Regularitätstheorie für $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ -Minimierer.

5.2 Einige technische Lemmata

Lemma 5.7. f genüge **(f1)** und **(f2)** mit $q < \frac{np}{n-1}$, U sei eine offene Kugel in \mathbb{R}^n und $u \in W^{1,p}(U; \mathbb{R}^N)$ genüge der Randregularitätsbedingung

$$\limsup_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{-\tau} \int_{\{x \in U : \text{dist}(x, \partial U) < \varepsilon\}} |Du|^p \, dx < \infty \quad (5.3)$$

mit einem $\tau \in]n\frac{q-p}{q}, 1]$. Ist nun $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; U] < \infty$, so gibt es eine Folge $w_k \in W^{1,q}(U; \mathbb{R}^N) \cap [u + W_0^{1,p}(U; \mathbb{R}^N)]$ mit $w_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$ schwach in $W^{1,p}(U; \mathbb{R}^N)$ und

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; U] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[w_k; U].$$

Dies bedeutet

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; U] = \overline{\mathcal{F}}_0[u; U] = \overline{\mathcal{F}}[u; U]. \quad (5.4)$$

Beweis. O.E. sei $f \geq 0$ auf \mathbb{M} und U die Kugel U_s mit Mittelpunkt 0 und Radius s . Gemäß Lemma 2.22 gibt es eine Folge $u_k \in W_{\text{lok}}^{1,q}(U_s; \mathbb{R}^N)$ mit $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$ schwach in $W^{1,p}(U_s; \mathbb{R}^N)$ und

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; U_s] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; U_s].$$

$(Du_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt in $L^p(U_s; \mathbb{M})$, daher können wir gemäß dem Auswahlssatz für die schwache *-Konvergenz und dem Satz von Rellich durch Teilfolgenübergang $|Du_k|^p \cdot \mathcal{L}^n \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{*} \mu$ schwach-* in $RM(U_s)$ und $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$ stark in $L^p(U_s; \mathbb{R}^N)$ erreichen mit einem nichtnegativen Radon-Maß μ auf U_s . Wir zeigen zunächst die folgende

Zwischenbehauptung. Zu jedem vorgegebenen $\delta \in]0, s[$ gibt es ein $v \in W^{1,q}(U_s; \mathbb{R}^N)$ mit $v - u \in W_0^{1,p}(U_s; \mathbb{R}^N)$, $\|v - u\|_{p; U_{s-\delta}} \leq \delta$ und

$$\int_{U_s} f(Dv) dx \leq \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; U_s] + \delta. \quad (5.5)$$

Dazu betrachten wir Radien $\frac{s}{2} \leq r \leq R < S \leq \frac{R+s}{2}$, die wir später fixieren werden, und setzen

$$\tilde{u} := T_{R,s}u$$

mit dem Operator aus Lemma 6.12. Dann gelten gemäß (6.8) und (6.9):

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u && \text{auf } U_R \\ \tilde{u} &\in u + W_0^{1,p}(U_s; \mathbb{R}^N) \end{aligned}$$

Weiter definieren wir

$$\Xi_k(t) := \int_{U_t} |Du_k|^p + \left| \frac{u_k - \tilde{u}}{S-R} \right|^p dx \quad \text{für } t \in [r, s]$$

und finden Radien $R \leq \tilde{R}_k < \tilde{S}_k \leq S$ mit den Eigenschaften aus Lemma 6.14 bzgl. Ξ_k . Als nächstes wählen wir eine Abschneidefunktion $\eta_k \in \mathcal{D}(U_s)$ mit $0 \leq \eta_k \leq 1$, $|\nabla \eta_k| \leq \frac{2}{\tilde{S}_k - \tilde{R}_k}$ auf U_s , $\eta_k \equiv 1$ auf $U_{\tilde{R}_k}$ und $\text{spt } \eta_k \subset U_{\tilde{S}_k}$. Erneut mit dem Operator aus Lemma 6.12 konstruieren wir

$$v_k := \eta_k (T_{\tilde{R}_k, \tilde{S}_k} u_k) + (1 - \eta_k) (T_{\tilde{R}_k, \tilde{S}_k} \tilde{u})$$

mit (vgl. (6.8))

$$\begin{aligned} v_k &= u_k && \text{auf } U_{\tilde{R}_k} \\ v_k &= \tilde{u} && \text{auf } U_s \setminus B_{\tilde{S}_k} \\ |Dv_k| &\leq |DT_{\tilde{R}_k, \tilde{S}_k} u_k| + |DT_{\tilde{R}_k, \tilde{S}_k} \tilde{u}| + 2 \left| \frac{T_{\tilde{R}_k, \tilde{S}_k}(u_k - \tilde{u})}{\tilde{S}_k - \tilde{R}_k} \right| && \text{auf } U_s. \end{aligned}$$

Wir verwenden diese Beobachtungen zusammen mit **(f1)** und (6.12) aus Lemma 6.12 in der folgenden Abschätzung:

$$\begin{aligned} \int_{U_s} [f(Dv_k) - f(Du_k)] dx &\leq \Gamma \int_{U_s \setminus B_{\tilde{R}_k}} (1 + |Dv_k|^q) dx \\ &\leq \Gamma \left[\mathcal{L}^n(U_s \setminus B_r) + \int_{U_s \setminus B_R} |D\tilde{u}|^q dx + \int_{U_{\tilde{S}_k} \setminus B_{\tilde{R}_k}} |Dv_k|^q dx \right] \\ &\leq \text{const}(n, q) \Gamma \left[\mathcal{L}^n(U_s \setminus B_r) + \int_{U_s \setminus B_R} |D\tilde{u}|^q dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{U_{\tilde{S}_k} \setminus B_{\tilde{R}_k}} \left(|DT_{\tilde{R}_k, \tilde{S}_k} u_k|^q + \left| \frac{T_{\tilde{R}_k, \tilde{S}_k}(u_k - \tilde{u})}{\tilde{S}_k - \tilde{R}_k} \right|^q \right) dx \right] \\ &=: \text{const}(n, q) \Gamma [\mathcal{L}^n(U_s \setminus B_r) + (I) + (II)] \end{aligned} \tag{5.6}$$

Aus (6.16), (6.15), Lemma 6.14, Lemma 6.25 und (6.13) erhalten wir für (II):

$$\begin{aligned} (II) &\leq \text{const}(n, p, q) (S - R)^{n - n \frac{q}{p}} \left[\int_{U_s \setminus B_R} \left(|Du_k|^p + \left| \frac{u_k - \tilde{u}}{S - R} \right|^p \right) dx \right]^{\frac{q}{p}} \\ &\leq \text{const}(n, p, q) (S - R)^{n - n \frac{q}{p}} \left[\int_{U_s \setminus B_R} \left(|Du_k|^p + \left| \frac{u_k - u}{S - R} \right|^p + \left| \frac{u - \tilde{u}}{S - R} \right|^p \right) dx \right]^{\frac{q}{p}} \\ &\leq \text{const}(n, p, q) (S - R)^{n - n \frac{q}{p}} \\ &\quad \left[\int_{U_s \setminus B_R} \left(|Du_k|^p + \left| \frac{u_k - u}{S - R} \right|^p + |Du|^p + |D\tilde{u}|^p \right) dx \right]^{\frac{q}{p}} \\ &\leq \text{const}(n, p, q) (S - R)^{n - n \frac{q}{p}} \\ &\quad \left[\int_{U_s \setminus B_R} \left(|Du_k|^p + \left| \frac{u_k - u}{S - R} \right|^p \right) dx + \int_{U_{2S-R} \setminus B_R} |Du|^p dx \right]^{\frac{q}{p}} \end{aligned} \tag{5.7}$$

Mit (6.17) aus Bemerkung 6.13 sehen wir für (I):

$$(I) \leq \text{const}(n, p, q, \tau)(s-r)^{n-(n-\tau)\frac{q}{p}} \left[\sup_{t \in]R, s[} \frac{\Xi^p(t) - \Xi^p(R)}{(t-R)^\tau} + \sup_{t \in]R, s[} \frac{\Xi^p(s) - \Xi^p(t)}{(s-t)^\tau} \right]^{\frac{q}{p}} \quad (5.8)$$

Dabei ist

$$\Xi^p(t) := \int_{U_t} |Du|^p dx \quad \text{für } t \in [r, s].$$

Aus der Randregularitätsbedingung (5.3) und dem Extremalsatz erhalten wir

$$\sup_{t \in]r, s[} \frac{\Xi^p(s) - \Xi^p(t)}{(s-t)^\tau} \leq \sup_{t \in]0, s[} (s-t)^{-\tau} \int_{U_s \setminus B_t} |Du|^p dx \leq \text{const}(p, \tau, s, Du) \quad (5.9)$$

Als nächstes fixieren wir die Radien: Zunächst wählen wir $r \in]\frac{s}{2}, s[$ so groß, daß gelten:

$$s - r \leq \delta \quad (5.10)$$

$$(s-r)^{n-(n-\tau)\frac{q}{p}} \leq \delta \quad (5.11)$$

$$\mathcal{L}^n(U_s \setminus B_r) \leq \delta \quad (5.12)$$

Sei weiter

$$\Xi^\mu(t) := \mu(U_t) \quad \text{für } t \in [r, s]$$

und N sei die Menge aller Stellen in $]r, s[$, an denen entweder Ξ^μ oder Ξ^p nicht differenzierbar ist. Dann ist N eine \mathcal{L}^1 -Nullmenge. Aus Lemma 6.15 erhalten wir ein $R \in]\frac{r+s}{2}, s[\setminus N$ mit

$$\sup_{t \in]R, s[} \frac{\Xi^p(t) - \Xi^p(R)}{t-R} \leq 4 \frac{\Xi^p(s) - \Xi^p(\frac{r+s}{2})}{s - \frac{r+s}{2}} \quad (5.13)$$

Mit (5.9) folgt

$$\sup_{t \in]R, s[} \frac{\Xi^p(t) - \Xi^p(R)}{(t-R)^\tau} \leq \text{const}(p, \tau, s, Du). \quad (5.14)$$

Man beachte insbesondere, daß die Konstante in der vorigen Abschätzung nicht von r abhängt. Als nächstes fixieren wir $S \in]R, \frac{R+s}{2}[$ so nahe an R , daß gelten:

$$(S-R)^{n-(n-1)\frac{q}{p}} \left[\frac{1}{S-R} \mu(B_S \setminus U_R) \right]^{\frac{q}{p}} \leq \delta \quad (5.15)$$

$$(S-R)^{n-(n-1)\frac{q}{p}} \left[\frac{1}{S-R} \int_{U_{2S-R} \setminus B_R} |Du|^p dx \right]^{\frac{q}{p}} \leq \delta \quad (5.16)$$

Die beiden vorigen Bedingungen lassen sich erreichen, da wir $R \notin N$ gewählt haben. Damit sind alle Radien fixiert und wir können abschließend $k \in \mathbb{N}$ ausreichend groß wählen, daß gelten:

$$\|u_k - u\|_{p;U_\tau} \leq \delta \quad (5.17)$$

$$\int_{U_s} f(Du_k) dx \leq \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; U_s] + \delta \quad (5.18)$$

$$(S - R)^{n-(n-1)\frac{q}{p}} \left[\frac{1}{S - R} \int_{U_S \setminus B_R} \left| \frac{u_k - u}{S - R} \right|^p dx \right]^{\frac{q}{p}} \leq \delta \quad (5.19)$$

$$(S - R)^{n-(n-1)\frac{q}{p}} \left\{ \left[\frac{1}{S - R} \int_{U_S \setminus B_R} |Du_k|^p dx \right]^{\frac{q}{p}} - \left[\frac{1}{S - R} \mu(B_S \setminus U_R) \right]^{\frac{q}{p}} \right\} \leq \delta \quad (5.20)$$

Nun kombinieren wir die Ungleichungen (5.6), (5.7), (5.8), (5.9), (5.11), (5.12), (5.14), (5.15), (5.16), (5.18), (5.19) und (5.20). Wir erhalten

$$\int_{U_s} f(Dv_k) dx \leq \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; U_s] + c_7 \delta$$

mit einer Konstanten $c_7(n, p, q, \tau, \Gamma, s, Du) \in \mathbb{R}_{>0}$. Falls nötig ersetzen wir nun δ durch $\frac{\delta}{c_7}$ und erhalten (5.5) für v_k . Gemäß (5.10) und (5.17) gilt $\|v_k - u\|_{p;U_{s-\delta}} \leq \delta$ und auch die restlichen Eigenschaften aus der Zwischenbehauptung verifiziert man für v_k problemlos. Somit ist die Zwischenbehauptung bewiesen.

Es folgt der Beweis des Lemmas: Gemäß der Zwischenbehauptung finden wir eine Folge $w_k \in W^{1,q}(U_s; \mathbb{R}^N)$ mit $w_k - u \in W_0^{1,p}(U_s; \mathbb{R}^N)$,

$$\|w_k - u\|_{p;U_{s-\frac{1}{k}}} \leq \frac{1}{k} \quad (5.21)$$

und

$$\int_{U_s} f(Dw_k) dx \leq \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; U_s] + \frac{1}{k}.$$

Aus der Koerzivitätsbedingung **(f2)** entnehmen wir, daß $(Dw_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist in $L^p(U_s; \mathbb{R}^N)$, daher können wir gemäß der Poincaré-Ungleichung nach Teilfolgenübergang annehmen, daß $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ schwach in $W^{1,p}(U_s; \mathbb{R}^N)$ konvergiert. Der schwache Grenzwert kann gemäß (5.21) nur u sein. Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Lemma 5.8. *f genüge **(f1)** und **(f2)** mit $q < \frac{np}{n-1}$, $U \in \mathbb{K}_\Omega$ sei eine Kugel und $u \in W^{1,p}(\Omega \setminus \overline{U}; \mathbb{R}^N)$ genüge der Randregularitätsbedingung*

$$\limsup_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{-\tau} \int_{\{x \in \Omega : 0 < \text{dist}(x, U) < \varepsilon\}} |Du|^p dx < \infty \quad (5.22)$$

mit einem $\tau \in]n\frac{q-p}{q}, 1]$. Ist $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; \Omega \setminus \overline{U}] < \infty$, so gibt es eine Folge $w_k \in W_{\text{lok}}^{1,q}(\Omega \setminus \overline{U}; \mathbb{R}^N)$ mit $w_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$ schwach in $W^{1,p}(\Omega \setminus \overline{U}; \mathbb{R}^N)$ und

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; \Omega \setminus \overline{U}] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[w_k; \Omega \setminus \overline{U}],$$

so daß die w_k auf ∂U die Randwerte von u annehmen.

Der Beweis verläuft ganz analog dem Beweis des Lemmas 5.7. Eine Analyse des Beweises zeigt sogar:

Bemerkung 5.9. In der Situation des Lemmas 5.8 läßt sich zusätzlich erreichen, daß $w_k \in W^{1,q}(O \setminus \overline{U}; \mathbb{R}^N)$ für jedes $O \in \mathbb{K}_\Omega$ gilt.

Lemma 5.10. f genüge **(f1)** und **(f2)** mit $q < \frac{np}{n-1}$, $U \in \mathbb{K}_\Omega$ sei eine Kugel und $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ genüge der Randregularitätsbedingung

$$\limsup_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{-\tau} \int_{\{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial U) < \varepsilon\}} |Du|^p dx < \infty. \quad (5.23)$$

mit einem $\tau \in]n\frac{q-p}{q}, 1]$. Dann gilt:

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; \Omega] = \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; U] + \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; \Omega \setminus \overline{U}] \quad (5.24)$$

Beweis. „ \geq “ folgt elementar aus der Definition von $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$. Für „ \leq “ nehmen wir o.E. an, daß die rechte Seite von (5.24) endlich ist. Somit folgt „ \leq “ aus den Lemmata 5.7 und 5.8 nebst Bemerkung 5.9 durch Aneinandersetzen der dort konstruierten Folgen mittels Spursätzen. \square

Bemerkung 5.11. Die Gleichung (5.4) in Lemma 5.7, eine entsprechende Variante von Lemma 5.8 und Lemma 5.10 gelten auch ohne **(f2)**.

Beweisskizze. Analog zu Bemerkung 5.6 läßt sich die Verwendung von Lemma 2.22 vermeiden. Außerdem benötigt man im Beweis von Lemma 5.7 eine Abschätzung für $\int_{U_s} |Dv_k|^p dx$. Die dabei auftretenden Terme lassen sich ähnlich, aber wesentlich leichter als die Terme in (5.6) behandeln. \square

5.3 Die Cacciopoli-Ungleichung

Das folgende Lemma ist eine Verallgemeinerung von Satz 2.11 auf abstrakte Integrale. Auch sein Beweis orientiert sich am Beweis von Satz 2.11, ist aber technisch aufwendiger.

Lemma 5.12. Sei \mathcal{I} ein abstraktes Integral auf $W^{1,p}(\mathbb{O}_\Omega; \mathbb{R}^N)$ mit folgenden Eigenschaften:

(I) \mathcal{I} hängt nicht von der unabhängigen Variablen x ab, d.h. für $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $O \in \mathcal{O}_\Omega$ mit $x_0 + O \subset \Omega$ und $u \in W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ gilt

$$\mathcal{I}[u; O] = \mathcal{I}[\tilde{u}; x_0 + O]$$

mit $\tilde{u}(x) := u(x - x_0)$.

(II) \mathcal{I} hängt nicht von der abhängigen Variablen u ab, d.h. für $O \in \mathcal{O}_\Omega$, $u \in W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ und $c \in \mathbb{R}^N$ gilt

$$\mathcal{I}[u; O] = \mathcal{I}[u + c; O].$$

(III) \mathcal{I} skaliert wie ein Integral der ersten Ableitung, d.h. für $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $O \in \mathcal{O}_\Omega$ mit $\frac{1}{r}O \subset \Omega$ und $u \in W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ gilt

$$\mathcal{I}[u; O] = r^n \mathcal{I}\left[\tilde{u}; \frac{1}{r}O\right]$$

mit $\tilde{u}(x) := \frac{u(rx)}{r}$.

(IV) Für jedes $O \in \mathcal{O}_\Omega$ ist $\mathcal{I}[-, O]$ sequentiell schwach unterhalbstetig auf $W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$.

Dann ist \mathcal{I} in folgendem abstrakten Sinne $W^{1,p}$ -quasikonvex: Für jedes $O \in \mathcal{O}_\Omega$, jedes $A \in \mathbb{M}$ und jedes $\varphi \in W_{\text{kpt}}^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ gilt:

$$\mathcal{I}[u_A + \varphi; O] \geq \mathcal{I}[u_A; O]$$

mit der linearen Funktion $u_A(x) := Ax$.

Beweis. O.E. sei $\mathcal{I} \geq 0$ auf $W^{1,p}(\mathcal{O}_\Omega; \mathbb{R}^N)$. Mit Hilfe der Eigenschaften (I) und (III) können wir \mathcal{I} auf

$$W^{1,p}(\mathbb{K}_{\mathbb{R}^n}; \mathbb{R}^N) := \{(u, O) : O \in \mathbb{K}_{\mathbb{R}^n}, u \in W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)\}$$

so fortsetzen, daß entsprechende Varianten von (I)-(IV) und der Maßdarstellung gültig bleiben. Wir führen die Details dieser Rechnungen hier nicht weiter aus.

Sei nun $A \in \mathbb{M}$. Aus (I), (II) und (III) entnehmen wir für $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und jede nichtleere, offene und beschränkte Teilmenge O von \mathbb{R}^n :

$$\mathcal{I}[u_A; O] = \mathcal{I}[u_A; x_0 + O] \tag{5.25}$$

$$\mathcal{I}[u_A; O] = r^n \mathcal{I}\left[u_A; \frac{1}{r}O\right] \tag{5.26}$$

Ist nun $\mathcal{I}[u_A; O] < \infty$, so sei μ_O das Radon-Maß auf O , das $\mathcal{I}[u_A; -]|_O$ repräsentiert. Wohlbekannte Argumente aus der Maßtheorie zeigen ausgehend von

(5.25), (5.26) und den Regularitätseigenschaften von μ_O , daß $\mu_O = r \cdot \mathcal{L}^n|_O$ für ein $r \in \mathbb{R}$ gelten muß.

Ist dagegen $\mathcal{S}[u_A; O] = \infty$, so läßt sich elementar $\mathcal{S}[u_A; -]|_O \equiv \infty$ auf O_Ω einsehen und wir setzen $\mu_O := \infty \cdot \mathcal{L}^n|_O$.

Außerdem seien $O \in \mathcal{O}_{]0,1[^n}$ und $\varphi \in W_{\text{kpt}}^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$. Wir setzen φ durch Null auf $]0,1[^n$ und dann $]0,1[^n$ -periodisch auf ganz \mathbb{R}^n zu $\tilde{\varphi} \in W_{\text{lok}}^{1,p}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^N)$ fort und definieren $u \in W_{\text{lok}}^{1,p}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^N)$ durch $u(x) := Ax + \varphi(x)$. Weiter definieren wir $u_k \in W_{\text{lok}}^{1,p}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^N)$ als $u_k(x) := \frac{u(kx)}{k}$. Aus Lemma 6.35 entnehmen wir $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u_A$ schwach in $W^{1,p}(]0,1[^n; \mathbb{R}^N)$ und gemäß (IV) folgt:

$$\mathcal{S}[u_A;]0,1[^n] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{S}[u_k;]0,1[^n]$$

Mit ν bezeichnen wir im Falle $\mathcal{S}[u;]0,k[^n] < \infty$ das Radon-Maß auf $]0,k[^n$, das $\mathcal{S}[u; -]|_{]0,k[^n}$ repräsentiert, und im Falle $\mathcal{S}[u;]0,k[^n] = \infty$ das Maß $\infty \cdot \mathcal{L}^n|_{]0,k[^n}$. Es folgt mit (III), (I) und der Periodizität:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[u_k;]0,1[^n] &= k^{-n} \mathcal{S}[u;]0,k[^n] \\ &= k^{-n} \left[\nu(\text{spt}(\tilde{\varphi})) + \mathcal{S}[u;]0,k[^n \setminus \text{spt}(\tilde{\varphi})] \right] \\ &= k^{-n} \left[\nu(\text{spt}(\tilde{\varphi})) + \mu_{]0,k[^n}(]0,k[^n \setminus \text{spt}(\tilde{\varphi})) \right] \\ &= k^{-n} \left[\nu(\text{spt}(\tilde{\varphi})) + \mu_{]0,k[^n} \left(\left\{ \bigcup_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^k \prod_{j=1}^n]i_j, i_j - 1[\right\} \setminus \text{spt}(\tilde{\varphi}) \right) \right] \\ &= k^{-n} \nu \left(\bigcup_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^k \prod_{j=1}^n]i_j, i_j - 1[\right) \\ &= k^{-n} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^k \mathcal{S} \left[u; \prod_{j=1}^n]i_j, i_j - 1[\right] \\ &= \mathcal{S}[u;]0,1[^n] \end{aligned}$$

Also gilt

$$\mathcal{S}[u_A;]0,1[^n] \leq \mathcal{S}[u;]0,1[^n].$$

Mit ähnlichen Argumenten wie zuvor, basierend auf der Maßdarstellung, folgern wir daraus:

$$\mathcal{S}[u_A; O] \leq \mathcal{S}[u_A + \varphi, O]$$

Mittels (I) und (III) läßt sich die letzte Ungleichung auf jedes $O \in \mathbb{K}_{\mathbb{R}^n}$ übertragen. \square

Bemerkung 5.13. Lemma 2.44 ist ein Spezialfall von Lemma 5.12, denn unter den Voraussetzungen von Lemma 2.44 ist $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ ein abstraktes Integral (Bemerkung 2.35) und genügt den Voraussetzungen (I), (II), (III) und (IV): Die Eigenschaften (I), (II) und (III) übertragen sich dabei problemlos von \mathcal{F} auf $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ und (IV) ist gemäß Lemma 2.23 erfüllt.

Lemma 5.14 (Cacciopoli-Ungleichung). Es sei $2 \leq p \leq q < p + \frac{1}{n}$ oder $p \leq 2$, $q < \frac{2n+1}{2n}p$, außerdem $M \in \mathbb{R}_{>0}$, $f \in C_{\text{lok}}^2(\mathbb{M})$ genüge **(f1)**, **(f2)** und **(f3s)** und $u \in W^{1,p}(U_\varrho^n(x_0); \mathbb{R}^N)$ sei ein schwacher Minimierer von $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ auf $U_\varrho^n(x_0)$. Dann gilt für alle $\zeta \in \mathbb{R}^N$, $A \in \mathbb{M}$ mit $|A| \leq M + 1$:

$$\begin{aligned} & \int_{U_{\varrho/2}^n(x_0)} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 dx \\ & \leq c_8 \left[h \left(\int_{U_\varrho(x_0)} \left| V^{\frac{p}{2}} \left(\frac{v}{\varrho} \right) \right|^2 dx \right) + \left(\int_{U_\varrho(x_0)} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 dx \right)^{\frac{q}{p}} \right] \end{aligned} \quad (5.27)$$

Dabei ist $c_8(n, p, q, \gamma, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M) \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Konstante, $h(t) := t + t^{\frac{q}{p}}$ und $v(x) := u(x) - \zeta - A(x - x_0)$.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall $p \geq 2$, der Fall $p \leq 2$ läßt sich mit den im Beweis von Lemma 4.5 entwickelten Argumenten ähnlich behandeln. O.E. seien $x_0 = 0$ und $2^{\frac{p-2}{2}}\lambda < c_{13}\gamma$ mit der Konstanten c_{13} aus Lemma 6.10. Wir setzen zunächst (vgl. Definition 6.9)

$$g(A) := f(A) - \frac{\lambda}{c_{13}} e_{p,1}(A) \quad \text{für } A \in \mathbb{M}.$$

Aus **(f3s)**, Lemma 6.10, **(f1)** und **(f2)** entnehmen wir, daß g quasikonvex ist mit

$$\left(\gamma - \frac{2^{\frac{p-2}{2}}\lambda}{c_{13}} \right) |A|^p - c - \frac{2^{\frac{p-2}{2}}\lambda}{c_{13}} \leq g(A) \leq \Gamma(1 + |A|^q) \quad \text{für } A \in \mathbb{M}.$$

Zur Vereinfachung nehmen wir im folgenden o.E. $g \geq 0$ auf \mathbb{M} an. Wir definieren für $O \in \mathcal{O}_\Omega$ und $w \in W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ die Funktionale

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[w; O] & := \int_O g(Dw) dx \\ \overline{\mathcal{G}}_{\text{lok}}[w; O] & := \inf \left\{ \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{G}[w_k; O] : \begin{array}{l} w_k \in W_{\text{lok}}^{1,q}(O; \mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N), \\ w_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} w \text{ schwach in } W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.22 finden wir eine Folge $w_k \in W_{\text{lok}}^{1,q}(O; \mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ mit $w_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} w$ schwach in $W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[w_k; O] = \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[w; O]$. Gemäß

der Definition von $\overline{\mathcal{G}}_{\text{lok}}$ und der schwachen Unterhalbstetigkeit konvexer Funktionale folgt damit:

$$\overline{\mathcal{G}}_{\text{lok}}[w; O] \leq \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[w; O] - \frac{\lambda}{c_{13}} \int_O e_{p,1}(Dw) dx \quad (5.28)$$

Als nächstes weisen wir nach, daß $\overline{\mathcal{G}}_{\text{lok}}$ den Voraussetzungen von Lemma 5.12 genügt: Simple Argumente zeigen, daß \mathcal{G} und als Folge auch $\overline{\mathcal{G}}_{\text{lok}}$ abstrakte Funktionale sind, die den Voraussetzungen (I), (II) und (III) genügen. Gemäß Satz 2.33 ist $\overline{\mathcal{G}}_{\text{lok}}$ ein abstraktes Integral und gemäß Lemma 2.23 ist auch (IV) erfüllt. Also genügt $\overline{\mathcal{G}}_{\text{lok}}$ der abstrakten $W^{1,p}$ -Quasikonvexitätsbedingung aus Lemma 5.12. Wir wählen nun r, s, Ξ, \tilde{r} und \tilde{s} wie im Beweis von Lemma 4.5. Allerdings verwenden wir zur Wahl von \tilde{r} und \tilde{s} Lemma 6.15 anstelle von Lemma 6.14 und können so zusätzlich $\tilde{r}, \tilde{s} \notin N$ und strikte Ungleichungen zwischen den Radien erreichen, wobei N die \mathcal{L}^1 -Nullmenge der Nichtdifferenzierbarkeitsstellen von $t \mapsto \int_{U_t} |Du|^p dx$ bezeichnet. Weiter wählen wir η, ψ und φ wie im Beweis von Lemma 4.5. Dann gilt

$$\varphi \in W_0^{1,p}(U_{\tilde{s}}; \mathbb{R}^N) \subset W_{\text{kpt}}^{1,p}(U_{\varrho}; \mathbb{R}^N).$$

Aus den Abschätzungen des Lemmas 6.12 zusammen mit $q < p + \frac{1}{n}$ und den Wahlen von \tilde{r} und \tilde{s} (vgl. auch den Beweis von Lemma 4.5) erhalten wir

$$\psi \in W^{1, \frac{p}{p+1-q}}(U_{\tilde{s}}; \mathbb{R}^N) \subset W^{1,q}(U_{\tilde{s}}; \mathbb{R}^N).$$

Aus der Wahl $\tilde{s} \notin N$ mit Lemma 6.15 entnehmen wir

$$\limsup_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial U_{\tilde{s}}) < \varepsilon\}} |Du|^p dx < \infty.$$

Als Konsequenz aus (6.14) genügen mit u auch v und $T_{\tilde{r}, \tilde{s}}v$ dieser Bedingung und wegen $\varphi = v - T_{\tilde{r}, \tilde{s}}v$ nahe $\partial U_{\tilde{s}}$ auch φ und $u - \varphi$. Insbesondere genügen alle diese Funktionen auch (5.23) mit $\tau = 1$ bzgl. der Kugel $U_{\tilde{s}}$. Wir kombinieren nun die $W^{1,p}$ -Quasikonvexitätsbedingung aus Lemma 5.12, die Additivitätseigenschaft aus Lemma 5.10, Korollar 2.38 und (5.28):

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{\mathcal{G}}_{\text{lok}}[u_A + \varphi; U_{\varrho}] - \overline{\mathcal{G}}_{\text{lok}}[u_A; U_{\varrho}] \\ &= \overline{\mathcal{G}}_{\text{lok}}[u_A + \varphi; U_{\tilde{s}}] + \overline{\mathcal{G}}_{\text{lok}}[u_A; U_{\varrho} \setminus B_{\tilde{s}}] - \overline{\mathcal{G}}_{\text{lok}}[u_A; U_{\varrho}] \\ &= \overline{\mathcal{G}}_{\text{lok}}[u_A + \varphi; U_{\tilde{s}}] + \mathcal{G}[u_A; U_{\varrho} \setminus B_{\tilde{s}}] - \mathcal{G}[u_A; U_{\varrho}] \\ &\leq \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u_A + \varphi; U_{\tilde{s}}] - \frac{\lambda}{c_{13}} \int_{U_{\tilde{s}}} e_{p,1}(A + D\varphi) dx - \int_{U_{\tilde{s}}} f(A) dx + \frac{\lambda}{c_{13}} \int_{U_{\tilde{s}}} e_{p,1}(A) dx \end{aligned} \quad (5.29)$$

Da u schwach $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ -minimierend ist auf U_{ϱ} , gilt $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; U_{\varrho}] < \infty$ und

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; U_{\varrho}] \leq \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u - \varphi; U_{\varrho}].$$

Somit erlaubt uns Lemma 5.10 auf

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; U_{\bar{s}}] \leq \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u - \varphi; U_{\bar{s}}] = \int_{U_{\bar{s}}} f(A + D\psi) dx < \infty$$

zu schließen. Dabei haben wir noch Lemma 2.38 benutzt, um die Integraldarstellung der rechten Seite zu erhalten. Wegen $\psi \in W^{1, \frac{p}{p+1-q}}(U_{\bar{s}}; \mathbb{R}^N)$ können wir mit Lemma 5.1 auf

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u - \psi; U_{\bar{s}}] - \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; U_{\bar{s}}] = \int_R [f(Du - D\psi) - f(Du)] dx$$

mit der Abkürzung $R := U_{\bar{s}} \setminus B_{\bar{r}}$ schließen. Dabei ist die Voraussetzung (5.2) von Lemma 5.1 gemäß **(f1)**, Lemma 4.2 und Bemerkung 4.3 erfüllt. Wir erinnern an

$$Du - A = Dv = D\varphi + D\psi \quad \text{auf } U_{\varrho}.$$

Mit (5.29), Lemma 6.10 und den letzten drei (Un-)Gleichungen bekommen wir:

$$\begin{aligned} & \int_{U_{\bar{r}}} \left| V^{\frac{p}{2}}(Dv) \right|^2 dx \\ & \leq \text{const}(p, \lambda) \left(\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u_A + \varphi; U_{\bar{s}}] - \int_{U_{\bar{s}}} f(A) dx \right) \\ & = \text{const}(p, \lambda) \left(\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u - \psi; U_{\bar{s}}] - \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; U_{\bar{s}}] + \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; U_{\bar{s}}] - \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u - \varphi; U_{\bar{s}}] \right. \\ & \quad \left. + \int_{U_{\bar{s}}} [f(A + D\psi) - f(A)] dx \right) \\ & \leq \text{const}(p, \lambda) \left(\int_R [f(Du - D\psi) - f(Du)] dx + \int_R [f(A + D\psi) - f(A)] dx \right) \end{aligned} \tag{5.30}$$

Ausgehend von (5.30) gelangt man nun genau wie im Beweis des Lemmas 4.5 zur Behauptung. \square

5.4 Partielle Regularität

Lemma 5.5 ermöglicht die Anwendung von Lemma 4.10 auf schwache $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ -Minimierer. Ausgehend von den Lemmata 4.10 und 5.14 lassen sich nun auch für schwache $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ -Minimierer genau wie in Abschnitt 4.3 die Exzess-Abschätzungen aus Proposition 4.14 und Lemma 4.15 beweisen. Wir erhalten mit Campanatos Integral-Charakterisierung der Hölder-Stetigkeit einen zum Existenzsatz 2.28 passenden partiellen Regularitätssatz, der hier etwas allgemeiner fomuliert wird als Hauptsatz 2.45:

Satz 5.15 (Partielle Regularität). *Es sei $2 \leq p \leq q < p + \frac{1}{n}$ oder $p \leq 2$, $q < \frac{2n+1}{2n}p$, f genüge **(f1)**, **(f2)** und **(f3s)** und u sei ein lokaler Minimierer von \mathcal{F}_{lok} . Dann ist $\text{Reg}(u) \in \mathcal{O}_\Omega$, $u \in C_{\text{lok}}^{1,\alpha}(\text{Reg}(u); \mathbb{R}^N)$ für jedes $\alpha \in]0, 1[$ und $\mathcal{L}^n(\text{Sing}(u)) = 0$.*

Genauer ist dabei $\text{Sing}(u) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ mit

$$\Sigma_1 := \left\{ x_0 \in \Omega : \liminf_{\varrho \searrow 0} \Phi_p(u, x_0, \varrho) > 0 \right\}$$

$$\Sigma_2 := \left\{ x_0 \in \Omega : \limsup_{\varrho \searrow 0} |(Du)_{x_0, \varrho}| = \infty \right\}.$$

□

Bemerkung 5.16. *Bemerkung 4.18 gilt in der Situation von Hauptsatz 5.15 analog. Allerdings hängt die Hölder-Konstante in Teil (I) zusätzlich von γ ab und Teil (II) führt zu geringen Veränderungen im Beweis. Wir skizzieren diese Veränderungen:*

Beweisskizze. Wir deuten an, wie der Beweis der Caccioppoli-Ungleichung Lemma 5.14 unter der abgeschwächten Quasikonvexitätsvoraussetzung verläuft:

Wir definieren ähnlich wie zuvor

$$g_M(A) := f(A) - \frac{\lambda_M}{c_{13}} e_{p,1}(A) \quad \text{für } A \in \mathbb{M}$$

mit den zugehörigen Funktionalen \mathcal{G}_M , $Q\mathcal{G}_M$ und $\overline{(\mathcal{G}_M)_{\text{lok}}}$. Dann ist g_M zwar nicht mehr quasikonvex, doch zeigt Bemerkung 1.25 zumindest noch

$$g_M = Qg_M \quad \text{auf } B_{M+1}^{\mathbb{M}}.$$

Dies erlaubt zusammen mit Korollar 2.38 für $A \in \mathbb{M}$ mit $|A| \leq M + 1$ den Schluß

$$\overline{(\mathcal{G}_M)_{\text{lok}}}[u_A; -] = Q\mathcal{G}_M[u_A; -] = \mathcal{G}_M[u_A; -].$$

Unter Verwendung dieser Gleichheit verläuft der restliche Beweis wie zuvor. □

Wie üblich erhalten wir unter Verwendung der Euler-Gleichung des Lemmas 5.5:

Korollar 5.17 (Höhere Regularität). *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 5.15 sei $f \in C_{\text{lok}}^\infty(\mathbb{M})$, dann folgt $u \in C_{\text{lok}}^\infty(\text{Reg}(u))$.* □

Bemerkung 5.18. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.33 erfüllt und λ_u sei das endliche Radon-Maß aus Satz 2.33 auf Ω . Mit $(\lambda_u)_s$ bezeichnen wir den singulären Anteil von λ_u bzgl. $\mathcal{L}^n|_\Omega$. Gemäß Korollar 2.38 und Satz 2.40 liegt der Träger von $(\lambda_u)_s$ in $\text{Sing}(u)$. In der Situation von Satz 5.15 erhalten wir somit aus der Charakterisierung $\text{Sing}(u) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ auch eine Information über $(\lambda_u)_s$.*

Kapitel 6

Technisches

6.1 Abschätzungen für V_μ

Sei in diesem Abschnitt stets $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Definition 6.1. Sei $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$, wir definieren

$$\begin{aligned} V_\mu^\gamma &: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}, A \mapsto (\mu^2 + |A|^2)^{\frac{\gamma-1}{2}} A \\ W_\mu^\gamma &: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}, A \mapsto (\mu + |A|)^{\gamma-1} A. \end{aligned}$$

Dabei sind $V_\mu^\gamma(0)$ und $W_\mu^\gamma(0)$ auch für $\mu = 0$ und $\gamma \leq 1$ als 0 zu verstehen. Wir setzen $V^\gamma := V_1^\gamma$ und $W^\gamma := W_1^\gamma$.

Wir halten nun etliche Ungleichungen für diese Funktionen fest:

Bemerkung 6.2. Sei $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$, dann gibt es eine Konstante $c_9(\gamma) \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$c_9^{-1} |V_\mu^\gamma(A)| \leq |W_\mu^\gamma(A)| \leq c_9 |V_\mu^\gamma(A)| \quad \text{für alle } A \in \mathbb{M}.$$

Bemerkung 6.3. Sei $2 \leq p < \infty$, dann gibt es eine Konstante $c_{10}(p) \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$c_{10}^{-1} |V_\mu^{\frac{p}{2}}(A)|^2 \leq \mu^{p-2} |A|^2 + |A|^p \leq c_{10} |V_\mu^{\frac{p}{2}}(A)|^2 \quad \text{für alle } A \in \mathbb{M}.$$

Lemma 6.4 ([AF4]). Sei $1 < p < \infty$, dann gibt es eine Konstante $c_{11}(p) \in \mathbb{R}_{>0}$, so daß für alle $A, B \in \mathbb{M}$ mit $\mu^2 + |A|^2 + |B|^2 \neq 0$ gilt:

$$c_{11}^{-1} \leq \frac{\int_0^1 (\mu^2 + |A + tB|^2)^{\frac{p-2}{2}} dt}{(\mu^2 + |A|^2 + |B|^2)^{\frac{p-2}{2}}} \leq c_{11}$$

Den Beweis des Lemmas findet man in [AF4, Lemma 2.1].

Lemma 6.5 (Diverse Ungleichungen). *Sei $1 \leq p < \infty$, dann gibt es eine Konstante $c_{12}(p) \in \mathbb{R}_{>0}$, so daß für alle $A, B \in \mathbb{M}$ gelten:*

$$|V_\mu^{p-1}(A)| |B| \leq |V_\mu^{\frac{p}{2}}(A)|^2 + |V_\mu^{\frac{p}{2}}(B)|^2 \quad (6.1)$$

$$|V_\mu^{\frac{p}{2}}(A+B)|^2 \leq c_{12} \left(|V_\mu^{\frac{p}{2}}(A)|^2 + |V_\mu^{\frac{p}{2}}(B)|^2 \right) \quad (6.2)$$

$$|V_\mu^{p-1}(A+B)| \leq c_{12} (|V_\mu^{p-1}(A)| + |V_\mu^{p-1}(B)|) \quad (6.3)$$

$$\min\{t^2, t^p\} |V_\mu^{\frac{p}{2}}(A)|^2 \leq |V_\mu^{\frac{p}{2}}(tA)|^2 \leq \max\{t^2, t^p\} |V_\mu^{\frac{p}{2}}(A)|^2 \quad \text{für } t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (6.4)$$

Alle Ungleichungen gelten analog mit W_μ anstelle von V_μ .

Für einen Beweis des Lemmas vgl. man [AM2, Lemma 2.3] und [CFM, Lemma 2.1].

Bemerkung 6.6. *Sei $1 \leq p \leq 2$. Für alle $A, B \in \mathbb{M}$ gelten:*

$$\begin{aligned} (\mu^2 + |A|^2)^{\frac{p}{2}} &\leq \mu^p + |V_\mu^{\frac{p}{2}}(A)|^2 \\ (\mu^2 + |A|^2 + |B|^2)^{\frac{p}{2}} &\leq \mu^p + (\mu^2 + |A|^2 + |B|^2)^{\frac{p-2}{2}} (|A|^2 + |B|^2) \end{aligned}$$

Lemma 6.7. *Sei $1 \leq p < \infty$, dann gelten:*

- $\left| V_\mu^{\frac{p}{2}} \right|^2$ ist konvex genau dann, wenn $p \geq \frac{18}{17}$ oder $\mu = 0$ gilt.
- $\left| W_\mu^{\frac{p}{2}} \right|^2$ ist konvex.
- $\left| W_\mu^{\frac{p}{2}} \right|^{\frac{2}{p}}$ ist konvex genau dann, wenn $p \leq 2$ oder $\mu = 0$ gilt.

Außerdem hängen $|V_\mu^\gamma|$ und $|W_\mu^\gamma|$ für alle $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ nichtfallend von der Euklidischen Norm ihrer Argumente ab.

Beweis. Für $t \in \mathbb{R}_{>0}$ gelten:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[(\mu^2 + t^2)^{\frac{p-2}{2}} t^2 \right] &= (pt^2 + 2\mu^2)(\mu^2 + t^2)^{\frac{p-4}{2}} t \\ \frac{d^2}{dt^2} \left[(\mu^2 + t^2)^{\frac{p-2}{2}} t^2 \right] &= [p(p-1)t^4 + (5p-6)\mu^2 t^2 + 2\mu^4] (\mu^2 + t^2)^{\frac{p-6}{2}} \end{aligned}$$

Mit der Rotationssymmetrie von $V_\mu^{\frac{p}{2}}$ folgt sofort, daß $\left| V_\mu^{\frac{p}{2}} \right|^2$ radial nichtfallend und für $p \geq \frac{6}{5}$ oder $\mu = 0$ konvex ist. Durch Lösen quadratischer Ungleichungen sieht man

$$p(p-1)t^4 + (5p-6)\mu^2 t^2 + 2\mu^4 \geq 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_{>0} \iff p \geq \frac{18}{17} \quad \text{oder } \mu = 0.$$

Dies zeigt die Behauptung über die Konvexität von $\left| V_\mu^{\frac{p}{2}} \right|^2$. Die restlichen Aussagen des Lemmas weist man analog nach. \square

Lemma 6.8. Sei $1 \leq p < \infty$ und $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, dann gilt für alle $A \in \mathbb{M}$:

$$\int_{\Omega} |V_{\mu}^{\frac{p}{2}}(Du - (Du)_{\Omega})|^2 dx \leq \text{const}(p) \int_{\Omega} |V_{\mu}^{\frac{p}{2}}(Du - A)|^2 dx$$

Beweis. Gemäß Lemma 6.7 ist $|W_{\mu}^{\frac{p}{2}}|^2$ konvex und gemäß (6.2) gilt für alle $B_1, B_2 \in \mathbb{M}$:

$$|W_{\mu}^{\frac{p}{2}}(B_1 - B_2)|^2 \leq \text{const}(p) \left[|W_{\mu}^{\frac{p}{2}}(B_1)|^2 + |W_{\mu}^{\frac{p}{2}}(B_2)|^2 \right]$$

Daher folgt mit der Jensenschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |W_{\mu}^{\frac{p}{2}}(Du - (Du)_{\Omega})|^2 dx \\ \leq \text{const}(p) \left[\int_{\Omega} |W_{\mu}^{\frac{p}{2}}(Du - A)|^2 dx + |W_{\mu}^{\frac{p}{2}}((Du)_{\Omega} - A)|^2 \right] \\ \leq \text{const}(p) \int_{\Omega} |W_{\mu}^{\frac{p}{2}}(Du - A)|^2 dx \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt jetzt aus Lemma 6.2. Im Falle $p \geq \frac{18}{17}$ oder $\mu = 0$ funktioniert das obige Argument gemäß Lemma 6.7 auch mit V_{μ} anstelle von W_{μ} . \square

6.2 Abschätzungen für $e_{p,1}$

Definition 6.9. Für $1 \leq p < \infty$ und $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ vereinbaren wir:

$$\begin{aligned} e_{p,\mu} : \mathbb{M} &\rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \frac{1}{p}(\mu^2 + |A|^2)^{\frac{p}{2}} \\ e_p &:= e_{p,0} \end{aligned}$$

Lemma 6.10 (Quasikonvexität und Wachstum von $e_{p,1}$). Sei $1 < p < \infty$. Für alle $A \in \mathbb{M}$, $O \in \mathcal{O}_{\Omega}$ und $\varphi \in W_0^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ gilt

$$c_{13}^{-1} \int_O |V_{\xi}^{\frac{p}{2}}(D\varphi)|^2 dx \leq \int_O [e_{p,1}(A + D\varphi) - e_{p,1}(A)] dx \leq c_{13} \int_O |V_{\xi}^{\frac{p}{2}}(D\varphi)|^2 dx$$

mit $\xi := \sqrt{1 + |A|^2}$ und einer Konstanten $c_{13}(p) \in \mathbb{R}_{>0}$.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_O [e_{p,1}(A + D\varphi) - e_{p,1}(A)] dx \\ = \int_O [e_{p,1}(A + D\varphi) - e_{p,1}(A) - De_{p,1}(A)D\varphi] dx \\ = \int_O \int_0^1 \int_0^1 D^2 e_{p,1}(A + stD\varphi) ds t dt (D\varphi, D\varphi) dx \end{aligned} \quad (6.5)$$

Aus

$$D^2 e_{p,1}(B)(C, C) = (p-2)(1+|B|^2)^{\frac{p-4}{2}} |B \bullet C|^2 + (1+|B|^2)^{\frac{p-2}{2}} |C|^2$$

schließen wir außerdem

$$\text{const}(p)(1+|B|^2)^{\frac{p-2}{2}} |C|^2 \leq D^2 e_{p,1}(B)(C, C) \leq \text{const}(p)(1+|B|^2)^{\frac{p-2}{2}} |C|^2 \quad (6.6)$$

für alle $B, C \in \mathbb{M}$. Die Behauptung folgt aus (6.5), (6.6) und Lemma 6.4. \square

6.3 Glätten mit variablem Radius

Die folgenden Lemmata sind i.w. Spezialfälle entsprechender Resultate in [FMal]. Sie wurden dort bereits zum Beweis der vorne angegebenen Unterhalbstetigkeits- und Maßdarstellungsresultate verwendet (Sätze 2.2, 2.31 und 2.33). In der Regularitätstheorie von Funktionalen mit (p, q) -Wachstum wurde diese Technik ebenfalls schon verwendet und zwar in [PS] zum Beweis von Satz 1.30.

Lemma 6.11 ([FMal]). *Seien $0 < \varrho \leq s$ und $f : U_{s+\varrho}^n(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ eine nichtnegative \mathcal{L}^n -meßbare Funktion, dann gilt:*

$$\int_{S_s^{n-1}(x_0)} \int_{U_\varrho(z)} f \, dx \, d\mathcal{H}^{n-1}(z) \leq \text{const}(n) \varrho^{n-1} \int_{U_{s+\varrho}(x_0) \setminus B_{s-\varrho}(x_0)} f \, dx$$

Einen Beweis mit der Koflächenformel findet man in [FMal, Lemma 2.1].

Lemma 6.12 ([FMal]). *Seien $0 < r < s$ und $U_s^n(x_0) \subset \Omega$, wir definieren einen beschränkten linearen Glättungsoperator*

$$T_{x_0; r, s} : W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^N) \rightarrow L^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$$

durch

$$\begin{aligned} Tu(x) &:= \int_{U^n} u(x + \vartheta(x)y) \, dy \\ \text{mit } \vartheta(x) &:= \frac{1}{2} \min\{|x - x_0| - r, s - |x - x_0|\} \\ \text{für } u &\in W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^N) \text{ und } \mathcal{L}^n\text{-fast-alle } x \in \Omega. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Im Falle $x_0 = 0$ schreiben wir im folgenden $T_{r,s}$ statt $T_{x_0; r, s}$. Dann gelten für alle

$1 < p \leq q < \frac{n}{n-1}p$ und alle $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$:

$$T_{x_0;r,s}u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$$

$$u = T_{x_0;r,s}u \quad \mathcal{L}^n\text{-fast-überall auf } (\Omega \setminus B_s^n(x_0)) \cup U_r^n(x_0) \quad (6.8)$$

$$T_{x_0;r,s}u \in u + W_0^{1,p}(U_s^n(x_0) \setminus B_r^n(x_0); \mathbb{R}^N) \quad (6.9)$$

$$|DT_{x_0;r,s}u| \leq \text{const}(n)T_{x_0;r,s}|Du| \quad \mathcal{L}^n\text{-fast-überall auf } \Omega \quad (6.10)$$

$$\|T_{x_0;r,s}u\|_{p;U_s^n(x_0) \setminus B_r^n(x_0)} \leq \text{const}(n,p)\|u\|_{p;U_s^n(x_0) \setminus B_r^n(x_0)} \quad (6.11)$$

$$\|DT_{x_0;r,s}u\|_{p;U_s^n(x_0) \setminus B_r^n(x_0)} \leq \text{const}(n,p)\|Du\|_{p;U_s^n(x_0) \setminus B_r^n(x_0)} \quad (6.12)$$

$$\|DT_{x_0;r,s}u\|_{p;U_\varrho^n(x_0) \setminus B_r^n(x_0)} \leq \text{const}(n,p)\|Du\|_{p;U_{2\varrho-r}^n(x_0) \setminus B_r^n(x_0)} \quad \text{für } r \leq \varrho \leq \frac{r+s}{2} \quad (6.13)$$

$$\|DT_{x_0;r,s}u\|_{p;U_s^n(x_0) \setminus B_\varrho^n(x_0)} \leq \text{const}(n,p)\|Du\|_{p;U_s^n(x_0) \setminus B_{2\varrho-s}^n(x_0)} \quad \text{für } \frac{r+s}{2} \leq \varrho \leq s \quad (6.14)$$

$$\|T_{x_0;r,s}u\|_{q;U_s^n(x_0) \setminus B_r^n(x_0)}$$

$$\leq \text{const}(n,p,q)(s-r)^{\frac{n}{q}-\frac{n-1}{p}} \left[\sup_{t \in]r,s[} \frac{\tilde{\Xi}(t) - \tilde{\Xi}(r)}{t-r} + \sup_{t \in]r,s[} \frac{\tilde{\Xi}(s) - \tilde{\Xi}(t)}{s-t} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (6.15)$$

$$\|DT_{x_0;r,s}u\|_{q;U_s^n(x_0) \setminus B_r^n(x_0)}$$

$$\leq \text{const}(n,p,q)(s-r)^{\frac{n}{q}-\frac{n-1}{p}} \left[\sup_{t \in]r,s[} \frac{\Xi(t) - \Xi(r)}{t-r} + \sup_{t \in]r,s[} \frac{\Xi(s) - \Xi(t)}{s-t} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (6.16)$$

Dabei ist

$$\tilde{\Xi}(t) := \|u\|_{p;U_t^n(x_0)}^p \quad \text{und} \quad \Xi(t) := \|Du\|_{p;U_t^n(x_0)}^p.$$

Das Lemma ist eine Variante von [FMal, Lemma 2.2]. Alle Abschätzungen lassen sich, aufbauend auf Lemma 6.11, genau wie dort beweisen; man vergleiche auch [PS].

Eine Analyse des Beweises zeigt die folgende Verallgemeinerung von (6.16):

Bemerkung 6.13. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 6.12 gilt*

$$\|DT_{x_0;r,s}u\|_{q;U_s^n(x_0) \setminus B_r^n(x_0)}$$

$$\leq \text{const}(n,p,q,\tau)(s-r)^{\frac{n}{q}-\frac{n-\tau}{p}} \left[\sup_{t \in]r,s[} \frac{\Xi(t) - \Xi(r)}{(t-r)^\tau} + \sup_{t \in]r,s[} \frac{\Xi(s) - \Xi(t)}{(s-t)^\tau} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (6.17)$$

für alle $\tau \in]n\frac{q-p}{q}, 1]$.

Zur weiteren Abschätzung der Terme auf der rechten Seite von (6.15) und (6.16) dient folgendes Lemma:

Lemma 6.14. Seien $-\infty < r < s < \infty$ und $\Xi : [r, s] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, nichtfallende Funktion, dann gibt es $\tilde{r} \in [r, \frac{2r+s}{3}]$ und $\tilde{s} \in [\frac{r+2s}{3}, s]$ mit

$$\begin{aligned} \frac{\Xi(t) - \Xi(\tilde{r})}{t - \tilde{r}} &\leq 3 \frac{\Xi(s) - \Xi(r)}{s - r} \\ \frac{\Xi(\tilde{s}) - \Xi(t)}{\tilde{s} - t} &\leq 3 \frac{\Xi(s) - \Xi(r)}{s - r} \end{aligned} \quad \text{für alle } t \in]\tilde{r}, \tilde{s}[. \quad (6.18)$$

Insbesondere ist

$$\frac{s - r}{3} \leq \tilde{s} - \tilde{r} \leq s - r. \quad (6.19)$$

Der Beweis ist elementar; er wird in [FMal] ausgeführt.

Wir benötigen die folgende Verfeinerung des Lemmas, die es erlaubt \tilde{r} und \tilde{s} außerhalb einer Nullmenge zu wählen:

Lemma 6.15. Seien $-\infty < r < s < \infty$, $\Xi : [r, s] \rightarrow \mathbb{R}$ eine absolutstetige, nichtfallende Funktion und N eine \mathcal{L}^1 -Nullmenge in \mathbb{R} , dann gibt es $\tilde{r} \in]r, \frac{2r+s}{3}[\setminus N$ und $\tilde{s} \in]\frac{r+2s}{3}, s[\setminus N$ mit

$$\begin{aligned} \frac{\Xi(t) - \Xi(\tilde{r})}{t - \tilde{r}} &\leq 4 \frac{\Xi(s) - \Xi(r)}{s - r} \quad \text{für alle } t \in]\tilde{r}, s[\\ \frac{\Xi(\tilde{s}) - \Xi(t)}{\tilde{s} - t} &\leq 4 \frac{\Xi(s) - \Xi(r)}{s - r} \quad \text{für alle } t \in [r, \tilde{s}[. \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\frac{s - r}{3} < \tilde{s} - \tilde{r} < s - r.$$

Beweis. Wir nehmen o.E. $\Xi(s) > \Xi(r)$ an. Sei $\mathcal{G} : [r, s] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, \Xi(t))$ die Graphenabbildung von Ξ und $\tilde{N} := \mathcal{G}(N \cap [r, s]) \subset \mathbb{R}^2$. Aus der Absolutstetigkeit von Ξ entnehmen wir (beispielsweise mit einem elementaren Überdeckungsargument) $\mathcal{H}^1(\tilde{N}) = 0$. Sei weiter $m := 4 \frac{\Xi(s) - \Xi(r)}{s - r} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dann ist auch die orthogonale Projektion von \tilde{N} auf die Gerade $\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ eine \mathcal{H}^1 -Nullmenge. Dies erlaubt uns ein $y \in]\Xi(s) - m \frac{2r+s}{3}, \Xi(r) - mr[$ derart zu wählen, daß $\frac{y}{m^2+1} \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht in dieser Projektion liegt, also so, daß \tilde{N} den Graph der linearen Funktion $l_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto mt + y$ nicht schneidet. Insbesondere ist $l_y(r) < \Xi(r)$ und $l_y(\frac{2r+s}{3}) > \Xi(s)$, daher existiert

$$\tilde{r} := \min\{t \in [r, s] : l \geq \Xi \text{ auf } [t, s]\}$$

und liegt in $]r, \frac{2r+s}{3}[$. Aus Stetigkeitsgründen ist $l_y(\tilde{r}) = \Xi(\tilde{r})$, folglich gilt für alle $t \in]\tilde{r}, s[$:

$$\frac{\Xi(t) - \Xi(\tilde{r})}{t - \tilde{r}} \leq \frac{l_y(t) - l_y(\tilde{r})}{t - \tilde{r}} = m$$

Dies zeigt die Behauptungen über \tilde{r} , analog findet man \tilde{s} . \square

Das Zusammenspiel des Glättungsoperators mit den Funktionen V_μ aus Abschnitt 6.1 regelt das folgende Lemma:

Lemma 6.16. *Seien $1 \leq p \leq 2$, $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $0 < r < s$, $U_s^n(x_0) \subset \Omega$ und $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, dann gilt*

$$\left| V_\mu^{\frac{p}{2}}(DT_{x_0;r,s}u) \right|^{\frac{2}{p}} \leq \text{const}(n,p) T_{x_0;r,s} \left[\left| V_\mu^{\frac{p}{2}}(Du) \right|^{\frac{2}{p}} \right] \quad \mathcal{L}^n\text{-fast-überall auf } \Omega \quad (6.20)$$

mit dem Operator $T_{x_0;r,s}$ aus Lemma 6.12.

Beweis. O.E. sei $x_0 = 0$. Es reicht nach Lemma 6.2, die Behauptung mit W_μ anstelle von V_μ nachzuweisen. Gemäß Lemma 6.7 ist $|W_\mu^{\frac{p}{2}}|^{\frac{2}{p}}$ nichtfallend und konvex. Daher erhalten wir mit (6.10), (6.7) und der Jensenschen Ungleichung:

$$\left| W_\mu^{\frac{p}{2}}(DT_{r,s}u) \right|^{\frac{2}{p}} \leq \text{const}(n,p) \left| W_\mu^{\frac{p}{2}}(T_{r,s}|Du|) \right|^{\frac{2}{p}} \leq \text{const}(n,p) T_{r,s} \left[\left| W_\mu^{\frac{p}{2}}(Du) \right|^{\frac{2}{p}} \right]$$

Die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 6.17. *Wir geben nun noch einen abstrakteren, aber weniger expliziten Zugang zu den Lemmata 6.12 und 6.14 an: Sei $u \in W^{1,p}(U^n; \mathbb{R}^N)$, dann ist die Spur von u auf der Sphäre S_r^{n-1} in $W^{1,p}(S_r^{n-1}; \mathbb{R}^N)$ für \mathcal{L}^1 -fast-alle $r \in]0, 1]$. Andererseits ist für $r \in]0, 1]$ das Bild des Spuoperators auf $W^{1,q}(U_r^n; \mathbb{R}^N)$ gerade $W^{1-\frac{1}{q},q}(S_r^{n-1}; \mathbb{R}^N)$. Die Sobolev-Einbettung $W^{1,p}(S_r^{n-1}; \mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{1-\frac{1}{q},q}(S_r^{n-1}; \mathbb{R}^N)$ gilt aber gerade unter der Bedingung $q \leq \frac{np}{n-1}$. Daher gibt es dann für \mathcal{L}^1 -fast-alle $r \in]0, 1]$ eine $W^{1,q}(U_r^n; \mathbb{R}^N)$ -Funktion, die auf S_r^{n-1} dieselbe Spur hat wie u .*

Dies ist ein Indiz dafür, daß die Abschätzungen des Lemmas 6.12 für $q > \frac{np}{n-1}$ nicht gelten.

Zuletzt glätten wir in ähnlicher Weise auf beliebigen Bereichen in \mathbb{R}^n :

Lemma 6.18. *Seien $1 \leq p < \infty$, $O \in \mathbb{K}_{\mathbb{R}^n}$ und $u \in W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$. Weiter seien*

$$\vartheta : O \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto \frac{1}{2} \text{dist}(x, \partial O)$$

und $0 \leq \eta \in \mathcal{D}(U^n; \mathbb{R}^N)$ ein glättender Kern mit $\int_{U^n} \eta(y) dy = 1$. Dann liegen die Glättungen

$$u_\varepsilon : O \rightarrow \mathbb{R}^N, x \mapsto \int_{U^n} \eta(y) u(x + \varepsilon \vartheta(x)y) dy = \frac{1}{(\varepsilon \vartheta(x))^n} \int_O \eta\left(\frac{y-x}{\varepsilon \vartheta(x)}\right) u(y) dy$$

in $W_{\text{lok}}^{1,\infty}(O; \mathbb{R}^N) \cap (u + W_0^{1,p}(O; \mathbb{R}^N))$ und es gilt:

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u \quad \text{stark in } W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$$

Der Beweis der Konvergenzaussage benutzt dieselben Argumente wie der Beweis der analogen Aussage für die üblichen Glättungen, erfordert allerdings geringfügig mehr Rechenaufwand. $u_\varepsilon \in u + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ zeigt man durch Approximation von u_ε mit den Funktionen

$$x \mapsto \int_{U^n} \eta(y) u(x + \varepsilon \max\{\vartheta(x) - \delta, 0\} y) dy$$

bei $\delta \searrow 0$.

6.4 Ein Iterationslemma

Eine Variante des bekannten Iterationslemmas [Gia, Chapter V, Lemma 3.1] wurde in [CFM, Lemma 2.7] angegeben. Wir verwenden eine allgemeinere Variante, die sich ganz analog elementar beweisen läßt:

Lemma 6.19 (Iterationslemma). *Seien $p \in [1, \infty[$, $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R}$, $0 \leq R < S < \infty$, $v \in L^p(U_S^n(x_0); \mathbb{R}^N)$, $g : [R, S] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschränkt und für gewisse $G, H, K \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\theta \in [0, 1[$ und alle $R \leq r < s \leq S$ gelte:*

$$g(r) \leq \theta g(s) + G(s-r)^{\kappa_1} + H \int_{U_S^n(x_0)} \left| V_\mu^{\frac{p}{2}} \left(\frac{v}{s-r} \right) \right|^2 dx \\ + K(s-r)^{\kappa_2} \left(\int_{U_S^n(x_0)} \left| V_\mu^{\frac{p}{2}} \left(\frac{v}{s-r} \right) \right|^2 dx \right)^{\kappa_3}$$

Dann gilt auch

$$g(R) \leq \text{const}(p, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \theta) \left[G(S-R)^{\kappa_1} + H \int_{U_S^n(x_0)} \left| V_\mu^{\frac{p}{2}} \left(\frac{v}{S-R} \right) \right|^2 dx \right. \\ \left. + K(S-R)^{\kappa_2} \left(\int_{U_S^n(x_0)} \left| V_\mu^{\frac{p}{2}} \left(\frac{v}{S-R} \right) \right|^2 dx \right)^{\kappa_3} \right].$$

6.5 \mathcal{A} -harmonische Approximation

Wir betrachten homogene lineare partielle Differentialoperatoren zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für Funktionen $\mathbb{R}^n \supset \rightarrow \mathbb{R}^N$. Diese Operatoren werden wir stets mit Elementen von $\text{Bil}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M})$ identifizieren.

Definition 6.20. *Sei $\mathcal{A} \in \text{Bil}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M})$.*

\mathcal{A} heißt **Rang-1-elliptisch** mit Elliptizitätskonstante $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, wenn für alle $B \in \mathbb{M}$ mit $\text{Rang } B \leq 1$ gilt:

$$\mathcal{A}(B, B) \geq \lambda |B|^2$$

$\Lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ heißt eine obere Schranke für \mathcal{A} , wenn $|\mathcal{A}| \leq \Lambda$ gilt.

Definition 6.21. Sei $\mathcal{A} \in \text{Bil}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M})$.

$h \in W_{\text{lok}}^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ heißt (schwach) **\mathcal{A} -harmonisch** auf Ω , wenn

$$\int_{\Omega} \mathcal{A}(Dh, D\varphi) dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^N)$$

gilt.

Ist \mathcal{A} das Euklidische Skalarprodukt \bullet auf \mathbb{M} , so sind die \mathcal{A} -harmonischen Funktionen gerade die klassischen \mathbb{R}^N -wertigen (schwach) harmonischen Funktionen; dies motiviert diese Terminologie.

\mathcal{A} -harmonische Funktionen sind nützliche Vergleichsfunktionen in der Regularitätstheorie, da sie C_{lok}^{∞} -regulär sind:

Lemma 6.22. Sei $\mathcal{A} \in \text{Bil}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M})$ Rang-1-elliptisch mit Elliptizitätskonstante λ und oberer Schranke Λ und $h \in W^{1,1}(U_{\varrho}^n(x_0); \mathbb{R}^N)$ \mathcal{A} -harmonisch auf $U_{\varrho}^n(x_0)$, dann gilt $h \in C_{\text{lok}}^{\infty}(U_{\varrho}^n(x_0); \mathbb{R}^N)$ nebst der Standardabschätzung

$$\sup_{U_{\varrho/2}^n(x_0)} |Dh| + \varrho \sup_{U_{\varrho/2}^n(x_0)} |D^2h| \leq \text{const}(n, N, \lambda, \Lambda) \int_{U_{\varrho}^n(x_0)} |Dh| dx.$$

Die Regularitätstheorie für $W^{1,2}$ -Lösungen linearer Systeme mit konstanten Koeffizienten ist klassisch, doch betrachten wir hier $W^{1,1}$ -Lösungen. Daher ist ein Beweis von Lemma 6.22 erst in neuerer Literatur zu finden; wir verweisen auf [DGK, Lemma 5] und [CFM, Proposition 2.10].

Die Beweismethode der \mathcal{A} -harmonischen Approximation basiert auf dem folgenden Lemma:

Lemma 6.23 (\mathcal{A} -harmonische Approximation, [DSt]). Seien $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben, dann existiert ein $\delta(n, N, \lambda, \Lambda, \varepsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$ mit folgender Eigenschaft:

Ist $\mathcal{A} \in \text{Bil}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M})$ Rang-1-elliptisch mit Elliptizitätskonstante λ und oberer Schranke Λ und ist $u \in W^{1,2}(U_{\varrho}^n(x_0); \mathbb{R}^N)$ mit

$$\int_{U_{\varrho}^n(x_0)} |Du|^2 dx \leq 1$$

approximativ \mathcal{A} -harmonisch auf $U_{\varrho}^n(x_0)$ im Sinne von

$$\left| \int_{U_{\varrho}^n(x_0)} \mathcal{A}(Du, D\varphi) dx \right| \leq \delta \sup_{U_{\varrho}^n(x_0)} |D\varphi| \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(U_{\varrho}^n(x_0); \mathbb{R}^N),$$

so gibt es eine \mathcal{A} -harmonische Funktion $h \in W^{1,2}(U_{\varrho}^n(x_0); \mathbb{R}^N)$ mit

$$\int_{U_{\varrho}^n(x_0)} |Dh|^2 dx \leq 1,$$

die u in $L^2(U_\varrho^n(x_0); \mathbb{R}^N)$ approximiert im Sinne von

$$\varrho^{-2} \int_{U_\varrho^n(x_0)} |u - h|^2 dx \leq \varepsilon.$$

Den Spezialfall $\mathcal{A} = \bullet$ des Lemmas, also den Fall des Laplace-Operators, findet man in [Si]. Der allgemeine Fall wurde in [DSt] mit einem einfachem Widerspruchargument bewiesen.

Zur Anwendung des Lemmas in der Regularitätstheorie verweisen wir beispielsweise auf [DGG], [DG], [DGK], [DGSt], [DK], [DM1], [DM2] und [DSt].

Die oben angegebene Form des Lemmas läßt sich allerdings nur für Wachstums-exponenten $p \geq 2$ anwenden, im Falle $1 < p < 2$ benötigt man eine Variante des Lemmas, die auch für $p \geq 2$ nützlich ist:

Lemma 6.24 (V-Version, [DGK]). *Seien $1 < p < \infty$, $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben, dann existiert ein $\delta(n, N, p, \lambda, \Lambda, \varepsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$ mit folgender Eigenschaft:*

Ist $s \in]0, 1]$ und $\mathcal{A} \in \text{Bil}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M})$ Rang-1-elliptisch mit Elliptizitätskonstante λ und oberer Schranke Λ und ist $u \in W^{1,p}(U_\varrho^n(x_0); \mathbb{R}^N)$ mit

$$\int_{U_\varrho^n(x_0)} |V^{\frac{p}{2}}(Du)|^2 dx \leq s^2 \tag{6.21}$$

approximativ \mathcal{A} -harmonisch auf $U_\varrho^n(x_0)$ im Sinne von

$$\left| \int_{U_\varrho^n(x_0)} \mathcal{A}(Du, D\varphi) dx \right| \leq s\delta \sup_{U_\varrho^n(x_0)} |D\varphi| \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(U_\varrho^n(x_0); \mathbb{R}^N),$$

so gibt es eine \mathcal{A} -harmonische Funktion $h \in C_{\text{lok}}^\infty(U_\varrho^n(x_0); \mathbb{R}^N)$ mit

$$\sup_{U_{\varrho/2}^n(x_0)} |Dh| + \varrho \sup_{U_{\varrho/2}^n(x_0)} |D^2h| \leq \text{const}(n, N, p, \lambda, \Lambda),$$

die u approximiert im Sinne von

$$\int_{U_{\varrho/2}^n(x_0)} \left| V^{\frac{p}{2}} \left(\frac{u - sh}{\varrho} \right) \right|^2 dx \leq s^2 \varepsilon.$$

In [DGK, Lemma 6] (vgl. auch [DM2, Lemma 4]) wurde eine stärkere Version des Lemmas für $1 < p \leq 2$ bewiesen; der Beweis ist wesentlich aufwendiger als der Beweis von Lemma 6.23. Unsere Version folgt für $p \leq 2$ sofort aus [DGK, Lemma 6] und Lemma 6.22. Für $p > 2$ ist diese Version des Lemmas neu; wir geben hier einen einfachen Beweis an:

Beweis von Lemma 6.24 für $p \geq 2$. Gemäß einem einfachen Skalierungsargument können wir $x_0 = 0$ und $\varrho = 1$ annehmen. Sei zunächst $\delta(n, N, \lambda, \Lambda, \varepsilon)$ die Konstante aus Lemma 6.23 und s, \mathcal{A}, u wie oben, dann erfüllt $w := \frac{u}{s}$

$$\int_U |Dw|^2 \leq 1$$

und

$$\left| \int_U \mathcal{A}(Dw, D\varphi) dx \right| \leq \delta \sup_U |D\varphi| \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(U; \mathbb{R}^N).$$

Daher zeigt Lemma 6.23 die Existenz eines \mathcal{A} -harmonischen $h \in W^{1,2}(U; \mathbb{R}^N)$ mit

$$\int_U |Dh|^2 dx \leq 1$$

und

$$\int_U |w - h|^2 dx \leq \varepsilon.$$

Wir können o.E. $(w - h)_{1/2} = 0$ annehmen (ansonsten ersetzen wir h durch $h + (w - h)_{1/2}$ und ε durch $2^{n+2}\varepsilon$). Zusammen mit Lemma 6.22 folgt

$$\sup_{U_{1/2}} |Dh| + \sup_{U_{1/2}} |D^2h| \leq \text{const}(n, N, p, \lambda, \Lambda).$$

Sei jetzt p^* ein nur von n und p abhängiger Exponent größer als p , für den die Sobolev-Einbettung $W^{1,p} \hookrightarrow L^{p^*}$ gilt. Es gibt ein $t \in [0, 1[$ mit $\frac{1}{p} = \frac{1-t}{2} + \frac{t}{p^*}$, daher können wir mit der L^p -Interpolationsungleichung, der Sobolev-Poincaré-Ungleichung bei Mittelwert Null und (6.21) abschätzen:

$$\begin{aligned} & \int_{U_{1/2}} |u - sh|^p dx \\ & \leq \left(\int_{U_{1/2}} |u - sh|^2 dx \right)^{(1-t)\frac{p}{2}} \left(\int_{U_{1/2}} |u - sh|^{p^*} dx \right)^{\frac{tp}{p^*}} \\ & \leq \text{const}(n, p)(s^2\varepsilon)^{(1-t)\frac{p}{2}} \left(\int_{U_{1/2}} |Du|^p dx + s^p \int_{U_{1/2}} |Dh|^p dx \right)^t \\ & \leq \text{const}(n, N, p, \lambda, \Lambda)(s^2\varepsilon)^{(1-t)\frac{p}{2}} (s^2 + s^p)^t \\ & \leq \text{const}(n, N, p, \lambda, \Lambda) s^2 \varepsilon^{(1-t)\frac{p}{2}} \end{aligned}$$

Man beachte, daß mit $w - h$ auch $u - sh$ den Mittelwert 0 besitzt auf $U_{1/2}$. Dies erst ermöglicht die obige Anwendung der Sobolev-Poincaré-Ungleichung. Eine geeignete Ersetzung von ε liefert die Behauptung. \square

6.6 Eine Poincaré-Ungleichung für Ringgebiete

Lemma 6.25 (Poincaré-Ungleichung auf Ringen). Seien $1 \leq p < \infty$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < R < S < \infty$ und $u \in W^{1,p}(U_S^n(x_0); \mathbb{R}^N)$ mit $u \equiv 0$ \mathcal{L}^n -fast-überall auf $U_R^n(x_0)$, dann gilt

$$\int_{U_S(x_0) \setminus B_R(x_0)} \left| \frac{u}{S-R} \right|^p dx \leq \frac{1}{p} \left(\frac{S}{R} \right)^{n-1} \int_{U_S(x_0) \setminus B_R(x_0)} \left| Du(x) \frac{x}{|x|} \right|^p dx.$$

Beweis. O.E. sei $x_0 = 0$. Gemäß Glättungsargumenten können wir außerdem o.E. $u \in C_{\text{lok}}^\infty(U_S)$ annehmen. Für jedes $x \in U_S$ erhalten wir mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$u(x) = u(x) - u\left(R \frac{x}{|x|}\right) = \int_R^{|x|} Du\left(t \frac{x}{|x|}\right) \frac{x}{|x|} dt$$

Integrieren wir dies über $U_S \setminus B_R$, so erhalten wir mit der Koflächenformel und der Hölderschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \int_{U_S \setminus B_R} |u|^p dx &= \int_R^S \int_{S_\varrho} \left| \int_R^\varrho Du\left(t \frac{x}{\varrho}\right) \frac{x}{\varrho} dt \right|^p d\mathcal{H}^{n-1}(x) d\varrho \\ &\leq \int_R^S (\varrho - R)^{p-1} \int_R^\varrho \int_{S_\varrho} \left| Du\left(t \frac{x}{\varrho}\right) \frac{x}{\varrho} \right|^p d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt d\varrho \\ &= \int_R^S (\varrho - R)^{p-1} \int_R^\varrho \left(\frac{\varrho}{t}\right)^{n-1} \int_{S_t} \left| Du(x) \frac{x}{t} \right|^p d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt d\varrho \\ &\leq \left(\frac{S}{R}\right)^{n-1} \int_R^S (\varrho - R)^{p-1} d\varrho \int_R^S \int_{S_t} \left| Du(x) \frac{x}{t} \right|^p d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt \\ &= \frac{1}{p} \left(\frac{S}{R}\right)^{n-1} (S-R)^p \int_{U_S \setminus B_R} \left| Du(x) \frac{x}{|x|} \right|^p dx \end{aligned}$$

Division durch $(S-R)^p$ ergibt die Behauptung. \square

6.7 Der Lebesguesche Zerlegungssatz

Seien in diesem Abschnitt stets $\Omega \in \mathbb{K}_{\mathbb{R}^n}$, μ ein endliches (nichtnegatives) Radon-Maß auf Ω und ν ein endliches signiertes Radon-Maß auf Ω . Wir formulieren in dieser Situation einige klassische Sätze der allgemeinen Maßtheorie:

Definition 6.26. ν heißt **absolutstetig** bzgl. μ , i.Z. $\nu \ll \mu$, wenn für jede Teilmenge N von Ω gilt:

$$\mu(N) = 0 \implies \nu(N) = 0$$

Definition 6.27. ν heißt **vollständig singulär** zu μ , i.Z. $\nu \perp \mu$, wenn es eine Teilmenge M von Ω gibt mit

$$\mu(M) = 0 \quad \text{und} \quad \nu(\Omega \setminus M) = 0.$$

Satz 6.28 (von Radon-Nikodym). Es gilt:

$$\nu \ll \mu \iff \nu = g \cdot \mu \text{ für ein } g \in L^1(\Omega; \mu)$$

Dabei ist g μ -fast-überall eindeutig durch ν bestimmt.

Satz 6.29 (Lebesguescher Zerlegungssatz). Es gibt eindeutig bestimmte endliche signierte Radon-Maße ν_a und ν_s auf Ω mit

$$\begin{aligned} \nu &= \nu_a + \nu_s \\ \nu_a &\ll \mu \\ \nu_s &\perp \mu. \end{aligned}$$

ν_a heißt **absolutstetiger Anteil** und ν_s **singulärer Anteil** von ν bzgl. μ .

Bemerkung 6.30. Ist ν nichtnegativ, so sind auch die Maße ν_a und ν_s aus Satz 6.29 nichtnegativ.

Definition 6.31 (Maßableitung). Für $x \in \Omega$ definieren wir

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\nu(U_\varepsilon^n(x))}{\mu(U_\varepsilon^n(x))}.$$

Satz 6.32 (Lebesguescher Differentiationsatz). $\frac{d\nu}{d\mu}$ ist μ -fast-überall wohldefiniert und endlich und liegt in $L^1(\Omega; \mu)$. Außerdem gilt für die Maße aus Satz 6.29:

$$\nu_a = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \mu$$

Für weiteres verweisen wir auf [El] und [EG2].

6.8 Schwache Konvergenz und Mittelwerte

Definition 6.33. Sei Q ein offener Quader in \mathbb{R}^n und E ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum. $u \in L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}^n; E)$ heißt **Q -periodisch**, wenn für je zwei Ecken v und w von Q stets gilt:

$$u(x + v - w) = u(x) \quad \text{für } \mathcal{L}^n\text{-fast-alle } x \in \mathbb{R}^n$$

Bemerkung 6.34. Die Definition ist invariant unter Translation von Q .

Das nächste Lemma enthält ein Standardbeispiel einer schwach konvergenten Folge von Sobolev-Funktionen.

Lemma 6.35.

Seien $p \in [1, \infty]$, Q ein offener Quader in \mathbb{R}^n und $u \in W_{\text{lok}}^{1,p}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^N)$. Ist Du Q -periodisch, so gilt für die $u_k \in W_{\text{lok}}^{1,p}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^N)$ zu $u_k(x) := \frac{u(kx)}{k}$:

$$u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u_A \quad \text{schwach in } W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N) \quad \left(u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{*} u_A \text{ für } p = \infty \right)$$

für jedes $O \in \mathbb{K}_{\mathbb{R}^n}$. Dabei ist die lineare Funktion u_A gegeben durch $u_A(x) := Ax$ mit $A = \int_Q Du \, dx$.

Einen Beweis findet man z.B. in [BM, Corollary A.2].

Anhang A

Beweis von Satz 2.9

Wir verallgemeinern den in [BM] für den Fall $N = n = k$ gegebenen Beweis:

Beweis von Satz 2.9. Sei zunächst die Voraussetzung (II) erfüllt. Wir fassen den \mathbb{R}^n als $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ auf und jedes $x \in \mathbb{R}^n$ als Paar (x_1, x_2) mit $x_1 \in \mathbb{R}^k$ und $x_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$. Seien weiter $t, R \in \mathbb{R}_{>0}$,

$$A := t^{\frac{1}{k}} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_k & 0_{\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n-k}, \mathbb{R}^k)} \\ \hline 0_{\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{N-k})} & 0_{\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n-k}, \mathbb{R}^{N-k})} \end{array} \right)$$

mit der Einheitsmatrix \mathbb{I}_k in $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^k)$ und $\eta \in \mathcal{D}(U_{R+1}^{n-k})$ eine Abschneidefunktion mit $\eta \equiv 1$ auf U_R^{n-k} und $0 \leq \eta \leq 1$, $|\nabla \eta| \leq 2$ auf U_{R+1}^{n-k} . Wir definieren

$$u(x) := t^{\frac{1}{k}} \left(\eta(x_2) \frac{x_1}{|x_1|} + (1 - \eta(x_2))x_1, 0_{\mathbb{R}^{N-k}} \right) \in \mathbb{R}^N$$

für \mathcal{L}^n -fast-alle $x \in U^k \times U_{R+1}^{n-k}$. Es läßt sich nun zeigen, daß $u \in u_A + W_0^{1,p}(U^k \times U_{R+1}^{n-k}; \mathbb{R}^N)$ gilt mit der linearen Funktion $u_A(x) := Ax$. Weiter erhält man

$$Du(x) = t^{\frac{1}{k}} \left(\begin{array}{c|c} \eta(x_2) \frac{|x_1|^2 \mathbb{I}_k - x_1 x_1^T}{|x_1|^3} + (1 - \eta(x_2)) \mathbb{I}_k & \frac{x_1}{|x_1|} \nabla \eta(x_2) - x_1 \nabla \eta(x_2) \\ \hline 0_{\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{N-k})} & 0_{\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n-k}, \mathbb{R}^{N-k})} \end{array} \right).$$

Wegen

$$\det \left(\eta(x_2) \frac{|x_1|^2 \mathbb{I}_k - x_1 x_1^T}{|x_1|^3} + (1 - \eta(x_2)) \mathbb{I}_k \right) = (1 - \eta(x_2)) \left(1 - \eta(x_2) + \frac{\eta(x_2)}{|x_1|} \right)^{k-1}$$

ist

$$|\text{adj}_k Du(x)| \leq \text{const}(n, N)t \left(1 + \frac{1}{|x_1|^{k-1}} \right)$$

und (wegen $q < \frac{k^2}{k-1}$)

$$\int_{U^k \times [U_{R+1}^{n-k} \setminus B_R^{n-k}]} |\text{adj } Du|^{\frac{q}{k}} dx \leq \text{const}(n, N, q) t^{\frac{q}{k}} [(R+1)^{n-k} - R^{n-k}]$$

und

$$\text{adj}_k Du \equiv 0_{\mathbb{R}^{\psi(k)}} \quad \text{auf } U^k \times U_R^{n-k}.$$

Außerdem sehen wir

$$|Du(x)| \leq \text{const}(n, N) t^{\frac{1}{k}} \left(1 + \frac{1}{|x_1|}\right)$$

und (wegen $p < k$)

$$\int_{U^k \times U_{R+1}^{n-k}} |Du|^p dx \leq \text{const}(n, N, p) t^{\frac{p}{k}}.$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun die $W^{1,p}$ -Quasikonvexität von f mit u testen: Wir erhalten mit den obigen Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(A) + g(t, 0, \dots, 0) &\leq \int_{U^k \times U_{R+1}^{n-k}} \left[\tilde{f}(Du) + g(\text{adj}_k Du) \right] dx \\ &\leq \text{const}(n, N, p) \Gamma_p(1 + t^{\frac{p}{k}}) + \left(\frac{R}{R+1} \right)^{n-k} g(0_{\mathbb{R}^{\psi(k)}}) \\ &\quad + \text{const}(n, N, q) \Gamma_q(1 + t^{\frac{q}{k}}) \left[1 - \left(\frac{R}{R+1} \right)^{n-k} \right] \end{aligned}$$

Mit $|\tilde{f}(A)| \leq \text{const}(k) \Gamma_p(1 + t^{\frac{p}{k}})$ und $R \rightarrow \infty$ folgt

$$g(t, 0, \dots, 0) \leq \text{const}(n, N, p, \Gamma_p, \tilde{f}, g)(1 + t^{\frac{p}{k}}).$$

Dasselbe Argument mit umgekehrtem Vorzeichen in einer Komponente zeigt auch

$$g(-t, 0, \dots, 0) \leq \text{const}(n, N, p, \Gamma_p, \tilde{f}, g)(1 + t^{\frac{p}{k}}).$$

Da g konvex ist mit $p < k$, läßt sich daraus schließen, daß $g(-, 0, \dots, 0)$ konstant ist. Durch Koordinatenpermutation folgt dasselbe auch für die anderen Argumente von g . Unter erneuter Verwendung der Konvexität von g erhalten wir schließlich Konstanz von g auf ganz $\mathbb{R}^{\psi(k)}$.

Ist die Voraussetzung (I) erfüllt, so wird in obigem Beweis die Abschneidefunktion η überflüssig und es gilt $\text{adj}_k Du \equiv 0_{\mathbb{R}^{\psi(k)}}$ auf ganz U^n . Daher funktioniert eine geringfügige Modifikation des obigen Beweises dann auch ohne Wachstumsbedingung für g . \square

Anhang B

Ein Beispiel

Wir bestimmen nun in einem einfachen Beispielfall die relaxierten Funktionale aus Definition 2.17 konkret. Einige Grundideen dieses Beispiels findet man schon in [Ba1], [Ba2], [BM] und [Mar2]. Die wesentlichen Sätze B.1 und B.5 gehen größtenteils auf [FMal] zurück, doch wurden dort keine Beweise gegeben. Einige schwierigere Beweisteile (Behauptung 2 im Beweis von Satz B.1 und Beweis von Satz B.5) findet man in [AD], wo eine ähnliches Beispiel für das Flächenfunktional mit Methoden aus der geometrischen Maßtheorie ausgearbeitet wurde.

Seien hier stets

$$1 < p < q = n = N \in \mathbb{N}, \quad \Omega \in \mathbb{K}_{\mathbb{R}^n} \quad (\text{B.1})$$

und

$$u(x) = \frac{x}{|x|} \quad \text{für } x \in \Omega. \quad (\text{B.2})$$

Dann ist

$$u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap W_{\text{lok}}^{1,q}(\Omega \setminus \{0\}; \mathbb{R}^N). \quad (\text{B.3})$$

Wir betrachten den nach Satz 1.14 quasikonvexen, jedoch nach Satz 2.9 nicht $W^{1,p}$ -quasikonvexen Integranden

$$f(A) = |A|^p + |\det A| \quad \text{für } A \in \mathbb{M} \quad (\text{B.4})$$

mit (p, q) -Wachstum.

Wir werden sehen, daß das Verhalten der relaxierten Funktionale $\overline{\mathcal{F}}$ und $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ stark davon abhängt, ob die Bedingung $q < \frac{np}{n-1}$, die hier mit $\mathbf{p} > \mathbf{n} - \mathbf{1}$ äquivalent ist, erfüllt ist oder nicht.

Eine Variante des hier dargestellten Beispiels ist in [FMar] enthalten: Dort werden etwas allgemeinere f und u von ähnlicher Struktur betrachtet, doch wird nur der Fall $p > n - 1$ mit der Einheitskugel als Integrationsbereich untersucht.

Da u radial konstant ist, gilt $\det Du \equiv 0$ \mathcal{L}^n -fast-überall auf Ω und folglich

$$\mathcal{F}[u; O] = \int_O |Du|^p dx < \infty \quad \text{für alle } O \in \mathcal{O}_\Omega. \quad (\text{B.5})$$

Aus Korollar 2.36 kennen wir die untere Schranke

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; O] \geq \mathcal{F}[u; O] \quad \text{für alle } O \in \mathcal{O}_\Omega \quad (\text{B.6})$$

für $p > n-1$. Aufgrund der speziellen Struktur von f und u bleibt (B.6) jedoch für alle p richtig, wie man mit den Unterhalbstetigkeitseigenschaften der p -Energie (vgl. Satz 1.4) folgendermaßen einsieht: Für jede Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $W_{\text{lok}}^{1,q}(O; \mathbb{R}^N)$ mit $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$ schwach in $W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ gilt

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; O] \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_O |Du_k|^p dx \geq \int_O |Du|^p dx = \mathcal{F}[u; O]$$

und es folgt (B.6).

Aus Bemerkung 2.20 und Lemma 2.37 entnehmen wir unter Beachtung von (B.3) und (B.5) die obere Schranke:

$$\begin{aligned} 0 \notin O &\implies \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; O] \leq \mathcal{F}[u; O] \\ 0 \notin \overline{O} &\implies \overline{\mathcal{F}}[u; O] \leq \mathcal{F}[u; O] \end{aligned} \quad \text{für alle } O \in \mathcal{O}_\Omega \quad (\text{B.7})$$

Gemäß (B.6) und Bemerkung 2.20 tritt in (B.7) sogar stets Gleichheit ein.

Aus (B.6) und (B.7) folgt, daß jedes Radon-Maß auf $\overline{\Omega}$, das $\overline{\mathcal{F}}$ oder $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ schwach repräsentiert schon von der Form

$$f(Du) \cdot \mathcal{L}^n \Big|_{\overline{\Omega}} + m\delta_0 \Big|_{\overline{\Omega}} \quad (\text{B.8})$$

mit $m \in [0, \infty]$ ist. Im Rest dieses Abschnitts werden wir untersuchen, welche Werte m annimmt.

Als nächstes werden wir eine obere Schranke für $\overline{\mathcal{F}}[u; O]$ angeben, die für alle $O \in \mathcal{O}_\Omega$ gültig ist, selbst wenn $0 \in O$ ist: Wir wählen eine monotone nichtfallende Funktion $\eta \in C^\infty([0, \infty[)$ mit $0 \notin \text{spt } \eta$ und $\eta \equiv 1$ auf $[1, \infty[$. Damit definieren wir $u_k \in C^\infty(O; \mathbb{R}^N)$ durch

$$u_k(x) := \eta(k|x|)u(x).$$

Es läßt sich leicht nachprüfen, daß gilt:

$$\begin{aligned} &\int_O \left(|u_k - u|^p + |Du_k - Du|^p \right) dx \\ &\leq 2^{p-1} \left[\int_{O \cap U_{1/k}} \left(1 + |Du|^p \right) dx + \omega_n k^{p-n} \max_{[0, \infty[} \eta' \right] \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

Dabei haben wir entscheidend $p < n$ benutzt. Mit dieser Vergleichsfolge erhalten wir:

$$\overline{\mathcal{F}}[u; O] \leq \int_O |Du|^p dx + \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_O |\det Du_k| dx$$

Offensichtlich ist $u_k(O) \subset U^n$ und alle nichtkritischen Werte von u_k werden mit Vielfachheit 1 angenommen, daher können wir mit der Transformationsformel auf $\int_O |\det Du_k| dx \leq \omega_n$ schließen. Mit (B.5) erhalten wir die Schranke

$$\overline{\mathcal{F}}[u; O] \leq \mathcal{F}[u; O] + \omega_n \quad \text{für alle } O \in \mathcal{O}_\Omega. \quad (\text{B.9})$$

Wir werden mit den nächsten beiden Sätzen eine recht vollständige Beschreibung von $\overline{\mathcal{F}}$ und $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ in den beiden Fällen $p > n - 1$ und $p \leq n - 1$ beweisen, die über die Grundeigenschaften (B.6), (B.7) und (B.9) hinausgeht:

Satz B.1. *Seien (B.1), (B.2) und (B.4) erfüllt mit $p > n - 1$.*

- (I) *Es gilt $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; \Omega] < \infty$ und das endliche Radon-Maß λ_u aus Satz 2.33, das $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; -]$ repräsentiert, ist $f(Du) \cdot \mathcal{L}^n|_\Omega + \omega_n \delta_0|_\Omega$.*
- (II) *Es gilt $\overline{\mathcal{F}}[u; \Omega] < \infty$ und ein Radon-Maß, das $\overline{\mathcal{F}}[u; -]$ wie in Satz 2.31 schwach repräsentiert, ist $f(Du) \cdot \mathcal{L}^n|_{\overline{\Omega}} + \omega_n \delta_0|_{\overline{\Omega}}$.*
- (III) *Genauer gilt für $O \in \mathcal{O}_\Omega$:
Ist $\mathcal{H}^{n-1}(U_\varepsilon^n \cap O^c) = 0$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so gilt $\overline{\mathcal{F}}[u; O] = \mathcal{F}[u; O] + \omega_n$.
Enthält O^c allerdings eine Umgebung der 0 oder einen offenen Kegel mit Spitze in 0, so gilt $\overline{\mathcal{F}}[u; O] = \mathcal{F}[u; O]$.*

Bemerkung B.2. *Satz B.1 zeigt:*

- (I) $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$ stimmt i.a. nicht mit \mathcal{F} überein.
- (II) $\overline{\mathcal{F}}[u; -]$ kann i.a. nicht stark durch ein Maß repräsentiert werden.

Beim Beweis von Satz B.1 wird das folgende topologische Lemma nützlich sein:

Lemma B.3. *Seien $0 \leq \varepsilon < 1$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $v : B_r^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung mit $\max_{S_r} |v - u| \leq \varepsilon$. Dann gilt $U_{1-\varepsilon}^n \subset v(U_r^n)$.*

Für $\varepsilon = 0$ und $r = 1$ reduziert sich das Lemma i.w. auf den bekannten Satz, daß S^{n-1} kein Retrakt von B^n ist. Der allgemeine Fall läßt sich durch leichtes Verschieben der Randwerte und Skalieren darauf zurückführen.

Beweisskizze zu Satz B.1. Sei $O \in \mathcal{O}_\Omega$. Wir argumentieren in mehreren Schritten:

$$\text{Behauptung 1.} \quad 0 \in O \implies \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; O] \geq \mathcal{F}[u; O] + \omega_n$$

Seien $U_\varrho \subset O$ und $u_k \in W^{1,q}(O; \mathbb{R}^N)$ mit $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$ schwach in $W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; O] = \overline{\mathcal{F}}[u; O]$. Wir können o.E. $u_k \in C_{\text{lok}}^\infty(O; \mathbb{R}^N)$ annehmen. Es läßt sich nun zeigen, daß für \mathcal{L}^1 -fast-alles $r \in]0, \varrho[$ eine Teilfolge von $u_k|_{S_r}$ schwach in $W^{1,p}(S_r^{n-1}; \mathbb{R}^N)$ gegen $u|_{S_r}$ konvergiert. Fixieren wir nun ein solches

r . Wegen $p > n - 1$ folgt starke Konvergenz der zugehörigen Teilfolge $(u_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ in $C^0(S_r^{n-1}; \mathbb{R}^N)$. Daher gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ stets ein $l_0(r, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\max_{S_r} |u_{k_l} - u| \leq \varepsilon$ für $l \geq l_0$. Für $\varepsilon < 1$ entnehmen wir aus Lemma B.3 $U_{1-\varepsilon} \subset u_{k_l}(U_r)$. Mit der Transformationsformel sehen wir für $l \geq l_0$

$$\int_{U_\varepsilon} |\det Du_{k_l}| dx \geq \mathcal{L}^n(u_{k_l}(U_r)) \geq (1 - \varepsilon)^n \omega_n.$$

Folglich gilt

$$\liminf_{l \rightarrow \infty} \int_{U_\varepsilon} |\det Du_{k_l}| dx \geq \omega_n$$

und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}[u; O] &= \lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_{k_l}; O] \\ &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_O |Du_k|^p dx + \liminf_{l \rightarrow \infty} \int_{U_\varepsilon} |\det Du_{k_l}| dx \\ &\geq \int_O |Du|^p + \omega_n = \mathcal{F}[u; O] + \omega_n \end{aligned}$$

Mit Bemerkung 2.20 erhält man Behauptung 1 durch Ausschöpfen von O mit Mengen $\tilde{O} \in \mathbb{K}_O$.

Behauptung 2.

$$O^C \text{ enthält einen offenen Kegel mit Spitze in } 0 \implies \overline{\mathcal{F}}[u; O] \leq \mathcal{F}[u; O]$$

Wir verwenden das Polarkoordinatensystem

$$\begin{aligned} \Xi &= (R, Y, \Theta) : (\mathbb{R}_{\neq 0})^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \times S^{n-2} \times]0, \pi[, \\ x &\mapsto \left(|x|, \frac{(x_1, \dots, x_{n-1})}{|(x_1, \dots, x_{n-1})|}, \arccos \frac{x_n}{|x|} \right) \end{aligned}$$

mit der zugehörigen Parametrisierung

$$X : \mathbb{R}_{>0} \times S^{n-2} \times]0, \pi[\rightarrow (\mathbb{R}_{\neq 0})^{n-1} \times \mathbb{R}, (r, y, \vartheta) \mapsto (ry \sin \vartheta, r \cos \vartheta).$$

Diese Koordinaten lassen sich auch auf $\{0\}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\neq 0}$ noch sinnvoll verwenden, auch wenn y dort nicht mehr eindeutig bestimmt ist. Wir nehmen nun nach einer geeigneten Drehung o.E. an, daß O^C den Kegel $\Gamma_{\vartheta_0} := \{\Theta \geq \vartheta_0\}$ enthält mit einem $\vartheta_0 \in]0, \pi[$. Es gilt:

$$u = (Y \sin \Theta, \cos \Theta)$$

In Analogie definieren wir nun

$$u_k := (Y \sin((f_k \circ R)\Theta), \cos((f_k \circ R)\Theta))$$

mit den Abschneidefunktionen

$$f_k : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, r \mapsto \begin{cases} \frac{r}{r_k} & \text{für } r \leq r_k \\ 1 & \text{für } r \geq r_k \end{cases}.$$

Dabei ist $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge in $\mathbb{R}_{>0}$. Wegen $\Gamma_{\theta_0} \subset O^C$ läßt sich zeigen, daß die u_k Lipschitz-stetig sind auf O , insbesondere also in $W^{1,q}(O; \mathbb{R}^N)$ liegen. Außerdem ist $u_k(O) \subset S^{n-1}$ und es gelten folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned} (u_k - u) \circ X &= 0 && \text{auf } \{r_k < R\} \\ \left| (u_k - u) \circ X \right| &\leq 2 && \text{auf } \{0 < R < r_k\} \\ \left| \frac{\partial}{\partial r} [(u_k - u) \circ X] \right| &\leq \frac{\pi}{r_k} && \text{auf } \{0 < R < r_k\} \\ \left| \frac{\partial}{\partial y} [(u_k - u) \circ X] \right| &\leq \text{const}(n) \Theta && \text{auf } \{0 < R < r_k\} \\ \left| \frac{\partial}{\partial \vartheta} [(u_k - u) \circ X] \right| &\leq 2 && \text{auf } \{0 < R < r_k\} \end{aligned}$$

Aus den letzten drei Ungleichungen entnehmen wir

$$\left| (Du_k - Du) \circ X \right|^2 \leq \text{const}(n) \left[\left(\frac{\pi}{r_k} \right)^2 + \left(\frac{\Theta}{R \sin \Theta} \right)^2 + \left(\frac{2}{R} \right)^2 \right]$$

auf $\{0 < R < r_k\}$. Durch Integration in Polarkoordinaten erhalten wir folglich

$$\int_O |u_k - u|^p dx \leq 2^p \omega_n r_k^n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

und

$$\begin{aligned} \int_O |Du_k - Du|^p dx &\leq \text{const}(n, p) \int_{O \cap U_{r_k}} \left[r_k^{-p} + \left(\frac{\Theta}{R \sin \Theta} \right)^p + R^{-p} \right] dx \\ &\leq \text{const}(n, p) \left[r_k^{n-p} + \int_0^{r_k} \int_0^{\vartheta_0} r^{n-1-p} \vartheta^p (\sin \vartheta)^{n-2-p} d\vartheta dr + \int_0^{r_k} r^{n-1-p} dr \right] \\ &\leq \text{const}(n, p, \vartheta_0) r_k^{n-p} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Daher konvergiert $u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u$ in $W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ und mit dieser Vergleichsfolge sehen wir:

$$\overline{\mathcal{F}}[u; O] \leq \int_O |Du|^p + \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_O |\det Du_k| dx$$

Wegen $u_k(O) \subset S^{n-1}$ ist $\det Du_k = 0$ \mathcal{L}^n -fast-überall auf O . Wir erhalten also

$$\overline{\mathcal{F}}[u; O] \leq \int_O |Du|^p = \mathcal{F}[u; O]$$

und Behauptung 2 ist nachgewiesen.

Wir beweisen nun die Aussagen des Satzes:

Aus Bemerkung 2.20, (B.5) und (B.9) entnehmen wir $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; \Omega] \leq \overline{\mathcal{F}}[u; \Omega] < \infty$. Sei jetzt λ_u das endliche Radon-Maß aus Satz 2.33 auf Ω . Aus (B.7) und der darauf folgenden Bemerkung erhalten wir $\lambda_u(O) = \left(f(Du) \cdot \mathcal{L}^n|_{\Omega} \right) (O)$ für $0 \notin O$, aus Behauptung 1 folgt $\lambda_u(O) \geq \left(f(Du) \cdot \mathcal{L}^n|_{\Omega} + \omega_n \delta_0|_{\Omega} \right) (O)$ für $0 \in O$ und aus Bemerkung 2.20 und (B.9) bekommen wir $\lambda_u(O) \leq \left(f(Du) \cdot \mathcal{L}^n|_{\Omega} + \omega_n \delta_0|_{\Omega} \right) (O)$ für alle $O \in \mathcal{O}_{\Omega}$. Mit den Regularitätseigenschaften der beteiligten Radon-Maße folgt (I).

(II) folgt aus (I) und Bemerkung 2.20.

Bleibt (III) zu zeigen: Ist $\mathcal{H}^{n-1}(U_{\varepsilon} \cap O^C) = 0$, so liefert die ACM-Charakterisierung schwacher Differenzierbarkeit die Gleichheiten $W^{1,q}(O; \mathbb{R}^N) = W^{1,q}(O \cup U_{\varepsilon}; \mathbb{R}^N)$ und $W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N) = W^{1,p}(O \cup U_{\varepsilon}; \mathbb{R}^N)$. Daher ist $\overline{\mathcal{F}}[u; O] = \overline{\mathcal{F}}[u; O \cup U_{\varepsilon}]$ und der erste Teil von (III) folgt aus (B.9) und Behauptung 1. Der zweite Teil von (III) wurde mit (B.6), (B.7) und Behauptung 2 bereits gezeigt. \square

Einen alternativen Beweis von Behauptung 1 im vorausgehenden Beweis findet man in [FMar]. Wir skizzieren nun unter einer stärkeren Bedingung an p noch einen dritten Zugang zu Behauptung 1:

Bemerkung B.4. Seien (B.1), (B.2) und (B.4) erfüllt mit $p > \frac{n^2}{n+1}$. Es läßt sich zeigen, daß die in [Ba1] eingeführte Distributionsdeterminante von Du auf Ω das Radon-Maß

$$\text{Det } Du := \omega_n \delta_0|_{\Omega}$$

ist. Sei nun $O \in \mathcal{O}_{\Omega}$. Die Eigenschaften der Distributionsdeterminante garantieren unter Verwendung von $p > \frac{n^2}{n+1}$ für jede Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $W_{\text{lok}}^{1,n}(O; \mathbb{R}^N)$ mit $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$ schwach in $W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ stets

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\det Du_k) = \text{Det } Du \quad \text{im Distributionssinne auf } O.$$

Aus der Identität

$$\|\mu\|_{RM(O)} = \sup \left\{ \int_O \varphi d\mu : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \|\varphi\|_{\infty; O} \leq 1 \right\} \quad \text{für } \mu \in RM(O)$$

sieht man, daß die Norm von $RM(O)$ unterhalbstetig ist bzgl. Konvergenz im Distributionssinne, folglich gilt:

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; O] \geq \mathcal{F}[u; O] + \omega_n \delta_0(O)$$

Zusammen mit (B.7) und (B.9) folgen die Aussagen (I) und (II) von Satz B.1 für $p > \frac{n^2}{n+1}$.

Satz B.5. Seien (B.1), (B.2) und (B.4) erfüllt mit $1 < p \leq n-1$ und $O \in \mathbb{O}_\Omega$.

(I) Ist O enthalten in der Kugel U_ϱ^n , so ist die Abschätzung

$$\overline{\mathcal{F}}[u; O] \leq \mathcal{F}[u; O] + \text{const}(n)\varrho$$

erfüllt.

(II) Ist $p < n-1$, so gilt $\overline{\mathcal{F}}[u; O] \leq \mathcal{F}[u; O]$.

(III) Ist $p = n-1$, so gibt ein $\varrho_0(n) \in \mathbb{R}_{>0}$, so daß gilt:

$$B_{\varrho_0}^n \subset O \implies \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; O] > \mathcal{F}[u; O]$$

Bemerkung B.6. Satz B.5 zeigt:

(I) Im Grenzfall $p = n-1$, also $q = \frac{np}{n-1}$, kann i.a. weder $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; -]$ noch $\overline{\mathcal{F}}[u; -]$ schwach durch ein Radon-Maß repräsentiert werden. Dies ergibt sich unter Berücksichtigung von (B.8).

(II) Für $p < n-1$ gilt $\overline{\mathcal{F}}[u; -] = \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; -] = \mathcal{F}[u; -]$ auf \mathbb{O}_Ω .

Beweisskizze zu Satz B.5. Der Beweis von (I) und (II) verläuft ähnlich zum Beweis von Behauptung 2 in der Beweisskizze von Satz B.1: Insbesondere verwenden wir die dort eingeführten Koordinaten und die Bezeichnungen r_k und f_k .

Seien $O \subset U_\varrho$ und $(\vartheta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $]0, \pi[$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \vartheta_k = \pi$ und mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_k}{\pi - \vartheta_k} = 0$. Wir setzen $\Gamma_{\theta_k} := \{\Theta \geq \vartheta_k\}$ und definieren weiter:

$$g_k : [0, \pi] \rightarrow [0, \pi[, \vartheta \mapsto \begin{cases} \vartheta & \text{für } \vartheta \leq \vartheta_k \\ \frac{\vartheta_k}{\pi - \vartheta_k}(\pi - \vartheta) & \text{für } \vartheta \geq \vartheta_k \end{cases}$$

$$u_k := \left(Y \sin[(f_k \circ R)(g_k \circ \Theta)], \cos[(f_k \circ R)(g_k \circ \Theta)] \right)$$

Außerhalb von Γ_{θ_k} stimmt diese Definition von u_k mit der früher gemachten überein. Es gelten wieder $u_k(O) \subset S^{n-1}$ und $\det Du_k = 0$ \mathcal{L}^n -fast-überall auf O und wir bekommen

$$\begin{aligned} (u_k - u) \circ X &= 0 && \text{auf } \{r_k < R\} \setminus \Gamma_{\vartheta_k} \\ \left| (u_k - u) \circ X \right| &\leq 2 && \text{auf } \{0 < R < r_k\} \cup \Gamma_{\vartheta_k} \\ \left| \frac{\partial}{\partial r} [(u_k - u) \circ X] \right| &= 0 && \text{auf } \{r_k < R\} \end{aligned}$$

wie zuvor. Außerdem lassen sich die r -Ableitung auf $\{0 < R < r_k\}$ und die y - und die ϑ -Ableitung außerhalb von Γ_{ϑ_k} wie früher abschätzen. Zusätzlich erhalten wir

folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial y} [(u_k - u) \circ X] \right| &\leq \text{const}(n) \frac{\pi - \Theta}{\pi - \vartheta_k} \\ \left| \frac{\partial}{\partial \vartheta} [(u_k - u) \circ X] \right| &\leq \frac{\pi}{\pi - \vartheta_k} \end{aligned} \quad \text{auf } \Gamma_{\vartheta_k}$$

Integration zeigt wie zuvor $\int_O |u_k - u|^p dx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ und mit den neuen Abschätzungen

$$\begin{aligned} &\int_O |Du_k - Du|^p dx \\ &\leq \text{const}(n, p) \left[r_k^{n-p} + \int_0^{r_k} \int_0^{\vartheta_k} r^{n-1-p} \vartheta^p (\sin \vartheta)^{n-2-p} d\vartheta dr + \int_0^{r_k} r^{n-1-p} dr \right. \\ &\quad + \int_0^{\varrho} \int_{\vartheta_k}^{\pi} r^{n-1-p} \left(\frac{\pi - \vartheta}{\pi - \vartheta_k} \right)^p (\sin \vartheta)^{n-2-p} d\vartheta dr \\ &\quad \left. + \left(\frac{\pi}{\pi - \vartheta_k} \right)^p \int_0^{\varrho} \int_{\vartheta_k}^{\pi} r^{n-1-p} (\sin \vartheta)^{n-2} d\vartheta dr \right] \\ &\leq \text{const}(n, p) \left[r_k^{n-p} + r_k^{n-p} (\pi - \vartheta_k)^{n-2-p} + \varrho^{n-p} (\pi - \vartheta_k)^{n-1-p} \right]. \end{aligned}$$

Durch Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_O |Du_k - Du|^p dx \begin{cases} \leq \text{const}(n) \varrho & \text{für } p = n - 1 \\ = 0 & \text{für } p < n - 1 \end{cases}$$

Jedenfalls können wir auf $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$ schwach in $W^{1,p}(O; \mathbb{R}^N)$ schließen und mit der Vergleichsfolge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ folgen (I) und (II).

Der Beweis von (III) benötigt ein zusätzliches Lemma.

Lemma B.7 ([AD]). *Sei $n = N \in \mathbb{N}$ und $u(x) := \frac{x}{|x|}$ für $x \in \mathbb{R}^n$, dann gibt es eine Konstante $\varrho_0(n) \in \mathbb{R}_{>0}$ mit folgender Eigenschaft: Für jede Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $L^1(U_{\varrho_0}^n; \mathbb{R}^N) \cap C_{\text{lok}}^1(U_{\varrho_0}^n; \mathbb{R}^N)$ mit $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$ stark in $L^1(U_{\varrho_0}^n; \mathbb{R}^N)$ gilt stets*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{U_{\varrho_0}^n} |\text{Adj}(Du_k)| dx \geq \int_{U_{\varrho_0}^n} |\text{Adj}(Du)| dx + \omega_n.$$

Dabei bezeichnet $\text{Adj}(A) \in \mathbb{R}^\Psi$ den Vektor aller Minoren (inklusive des einzigen 0-Minor, der per Definition 1 ist) der Matrix $A \in \mathbb{M}$.

Bemerkung B.8. $\int_{U_{\varrho_0}^n} |\text{Adj}(Du_k)| dx$ ist das n -dimensionale Hausdorff-Maß des Graphen von u_k . $\int_{U_{\varrho_0}^n} |\text{Adj}(Du)| dx + \omega_n$ kann man anschaulich als Maß des Graphen von u interpretieren.

Der Beweis von Lemma B.7 in [AD] ist aufwendig und benutzt Argumente aus der geometrischen Maßtheorie. Wir verzichten hier auf eine genauere Diskussion.

Beweisskizze von Satz B.5 (Fortsetzung). Wir beweisen Teil (III) von Satz B.5. Seien $p = n-1$ und ϱ_0 die Konstante aus Lemma B.7. Sei weiter $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $W^{1,q}(U_{\varrho_0}; \mathbb{R}^N)$ mit $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$ schwach in $W^{1,p}(U_{\varrho_0}; \mathbb{R}^N)$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_k; U_{\varrho_0}] = \overline{\mathcal{F}}[u; U_{\varrho_0}]$. Wir nehmen o.E. $u_k \in C_{\text{lok}}^1(U_{\varrho_0}; \mathbb{R}^N)$ an. Angenommen es gilt nun $\overline{\mathcal{F}}[u; U_{\varrho_0}] \leq \mathcal{F}[u; U_{\varrho_0}]$, dann bedeutet dies

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{U_{\varrho_0}} |Du_k|^p dx + \int_{U_{\varrho_0}} |\det Du_k| dx \right) \leq \int_{U_{\varrho_0}} |Du|^p dx.$$

Wegen der schwachen Unterhalbstetigkeit der p -Energie folgen $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$ stark in $W^{1,p}(U_{\varrho_0}; \mathbb{R}^N)$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{U_{\varrho_0}} |\det Du_k| dx = 0$. Wir schließen weiter

$$\begin{aligned} \int_{U_{\varrho_0}} |\text{Adj}(Du_k)| dx &\leq \int_{U_{\varrho_0}} |\text{Adj}_p(Du_k)| dx + \int_{U_{\varrho_0}} |\det Du_k| dx \\ &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int_{U_{\varrho_0}} |\text{Adj}_p(Du)| dx = \int_{U_{\varrho_0}} |\text{Adj}(Du)| dx. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu Lemma B.7, also gilt

$$\overline{\mathcal{F}}[u; U_{\varrho_0}] > \mathcal{F}[u; U_{\varrho_0}]. \quad (\text{B.10})$$

Sei nun $B_{\varrho_0} \subset O$. Man überprüft leicht, daß

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; O] \geq \overline{\mathcal{F}}[u; U_{\varrho_0}] + \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; O \setminus B_{\varrho_0}]$$

gilt. Kombinieren wir dies mit (B.6) und (B.10), so erhalten wir

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}[u; O] > \mathcal{F}[u; O].$$

Damit ist der Beweis vollständig. \square

Als letztes geben wir eine partielle Beschreibung von $\overline{\mathcal{F}}_0[u; -]$ an:

Korollar B.9. *Seien (B.1), (B.2) und (B.4) erfüllt.*

(I) (B.6), (B.7) und (B.9) gelten auch mit $\overline{\mathcal{F}}_0$ anstelle von $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$.

(II) Ist $p > n - 1$, so gilt für $O \in \mathcal{O}_\Omega$:

$$\begin{aligned} 0 \notin O &\implies \overline{\mathcal{F}}_0[u; O] = \mathcal{F}[u; O] \\ 0 \in O &\implies \overline{\mathcal{F}}_0[u; O] = \mathcal{F}[u; O] + \omega_n \end{aligned}$$

Beweis. Die Argumente, die zu (B.6), (B.7) und (B.9) geführt haben, funktionieren auch mit $\overline{\mathcal{F}}_0$ anstelle von $\overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}$. Die letzte Behauptung folgt jetzt aus Bemerkung 2.20 und Satz B.1. \square

Anhang C

Quasimonotone Systeme

Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $N \in \mathbb{N}$, $\Omega \in \mathbb{K}_{\mathbb{R}^n}$ und $a : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ stetig. Wir verallgemeinern die Regularitätstheorie des Abschnitts 4 auf Lösungen $u \in W_{\text{lok}}^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ der schwachen Formulierung

$$\int_{\Omega} a(Du) \bullet D\varphi \, dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^N) \quad (\text{C.1})$$

des nichtlinearen homogenen Divergenzform-Systems $\text{div } a(Du) = 0_{\mathbb{R}^N}$. Das Analogon der Quasikonvexitätsbedingung ist:

Definition C.1 (Quasimonotonie). a heißt quasimonoton, wenn für alle $A \in \mathbb{M}$ und alle $\varphi \in \mathcal{D}(U^n; \mathbb{R}^N)$ gilt:

$$\int_{U^n} a(A + D\varphi) \bullet D\varphi \, dx \geq 0$$

Dieser Begriff hat ähnliche Eigenschaften wie die Quasikonvexität.

Außerdem folgt aus Quasimonotonie von Df die Quasikonvexität von f . Jedoch wird (C.1) i.a. keine Variationsstruktur besitzen.

Wir fixieren Wachstumsexponenten $1 < p \leq q < \infty$ und stellen folgende Forderungen an a :

(a1) q -Wachstum:

Es gelte

$$|a(A)| \leq \Gamma(1 + |A|^{q-1})$$

für alle $A \in \mathbb{M}$ mit einer Schranke $\Gamma \in \mathbb{R}_{>0}$.

(a2) p -Koerzivität:

Es gelte

$$a(A) \bullet A \geq \gamma |A|^p$$

für alle $A \in \mathbb{M}$ mit einer Koerzivitätskonstanten $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$.

(a3) Quasimonotonie:

a sei quasimonoton, d.h.

$$\int_{U^n} a(A + D\varphi) \bullet D\varphi \, dx \geq 0$$

für alle $A \in \mathbb{M}$ und alle $\varphi \in \mathcal{D}(U^n; \mathbb{R}^N)$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$.

Für schwache Lösungen quasimonotoner Systeme sind meines Wissens bisher keine Existenzsätze bekannt, nicht einmal im Falle $p = q$. Konkret wäre hier ein Existenzsatz von Interesse, der auf den Voraussetzungen **(a1)**, **(a2)** und **(a3)** beruht. Verlangt man von a statt Quasimonotonie stärker Monotonie, so gibt es zumindest im Falle $p = q$ solche Existenzsätze, die auf der Theorie nichtlinearer monotoner Operatoren auf reflexiven Banachräumen und der sog. Galerkin-Methode fußen. Eine ausführliche Darstellung dieser Theorie findet man in [Ze]. Eine Verallgemeinerung dieser Existenzsätze scheint jedoch schwierig zu sein und würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Die Regularität schwacher Lösungen quasimonotoner Systeme mit p -Wachstum ist trotz fehlender Existenzsätze bereits behandelt worden; man vergleiche [F], [Ha2] und [Ha3]. Wir beschränken uns darauf, die Verallgemeinerung dieser Theorie auf Systeme mit (p, q) -Wachstum zu skizzieren, die durch die oben entwickelten Methoden ermöglicht wird.

Wir benötigen die folgende verschärfte Quasimonotoniebedingung:

(a3s) strikte p -Quasimonotonie:

a sei strikt nichtdegeneriert p -quasimonoton, d.h.

$$\int_{U^n} a(A + D\varphi) \bullet D\varphi \, dx \geq \lambda \int_{U^n} \left| V_{\sqrt{1+|A|^2}}^{\frac{p}{2}}(D\varphi) \right|^2 \, dx$$

für alle $A \in \mathbb{M}$ und alle $\varphi \in \mathcal{D}(U^n; \mathbb{R}^N)$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$.

In diesem Abschnitt sei stets

$$\Lambda_M := \sup_{B_{M+2}^{\mathbb{M}}} |Da|.$$

Wir halten fest:

Lemma C.2. $a \in C_{\text{lok}}^1(\mathbb{M}; \mathbb{M})$ genüge **(a1)** und es seien $A, B \in \mathbb{M}$ mit $|A| \leq M + 1$. Dann gilt:

$$|a(A + B) - a(A)| \leq \text{const}(q, \Gamma, M, \Lambda_M) |V^{q-1}(B)|$$

Beweis. Man argumentiert genau wie im Beweis von Lemma 4.4. □

C.1 Die Cacciopoli-Ungleichung

Lemma C.3 (Cacciopoli-Ungleichung). *Es sei $2 \leq p \leq q < p + \frac{1}{n}$ oder $p \leq 2$, $q < \frac{2n+1}{2n}p$, $M \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \in C_{\text{lok}}^1(\mathbb{M}; \mathbb{M})$ genüge **(a1)** und **(a3s)** und*

$$u \in W^{1,q}(U_\varrho^n(x_0); \mathbb{R}^N) \quad (\text{C.2})$$

erfülle

$$\int_{U_\varrho^n(x_0)} a(Du) \bullet D\varphi \, dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(U_\varrho^n(x_0); \mathbb{R}^N). \quad (\text{C.3})$$

Dann gilt für alle $\zeta \in \mathbb{R}^N$ und $A \in \mathbb{M}$ mit $|A| \leq M + 1$:

$$\begin{aligned} & \int_{U_{\varrho/2}^n(x_0)} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 \, dx \\ & \leq c_{14} \left[h \left(\int_{U_\varrho(x_0)} \left| V^{\frac{p}{2}} \left(\frac{v}{\varrho} \right) \right|^2 \, dx \right) + \left(\int_{U_\varrho(x_0)} |V^{\frac{p}{2}}(Dv)|^2 \, dx \right)^{\frac{q}{p}} \right] \end{aligned}$$

Dabei ist $c_{14}(n, N, p, q, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M) \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Konstante, $h(t) := t + t^{\frac{q}{p}}$ und $v(x) := u(x) - \zeta - A(x - x_0)$.

Beweis. Wir orientieren uns eng an den Beweisen von Lemma 4.5, verwenden aber die zusätzliche Bezeichnung

$$\tilde{\varphi} := T_{\tilde{r}, \tilde{s}}[\eta v] \in W_0^{1,q}(U_{\tilde{s}}; \mathbb{R}^N).$$

Mit einem Approximationsargument erhalten wir aus (C.2) und (C.3):

$$\int_{u_{\tilde{s}}} a(Du) \bullet D\tilde{\varphi} \, dx = 0$$

Kombinieren wir dies mit **(a3s)** und $A + D\tilde{\varphi} = Du$ auf $U_{\tilde{r}}$, so folgt:

$$\lambda \int_{U_{\tilde{r}}} |V^{\frac{p}{2}}_{\sqrt{1+|A|^2}}(Dv)|^2 \, dx \leq \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} [a(A + D\tilde{\varphi}) - a(Du)] \bullet D\tilde{\varphi} \, dx$$

Aus Lemma C.2 entnehmen wir die Abschätzungen

$$\int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} [a(A + D\tilde{\varphi}) - a(A)] \bullet D\tilde{\varphi} \, dx \leq \text{const}(q, \Gamma, M, \Lambda_M) \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} |V^{\frac{q}{2}}(D\tilde{\varphi})|^2 \, dx$$

und

$$\int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} [a(A) - a(Du)] \bullet D\tilde{\varphi} \, dx \leq \text{const}(q, \Gamma, M, \Lambda_M) \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} |V^{q-1}(Dv)| |D\tilde{\varphi}| \, dx.$$

Kombinieren wir die letzten drei Ungleichungen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \int_{U_r} |V^{\frac{q}{2}}(Dv)|^2 dx \\ & \leq \text{const}(q, \Gamma, \lambda, M, \Lambda_M) \int_{U_{\tilde{s}} \setminus B_{\tilde{r}}} \left[|V^{\frac{q}{2}}(D\tilde{\varphi})|^2 + |V^{q-1}(Dv)| |D\tilde{\varphi}| \right] dx \quad (\text{C.4}) \end{aligned}$$

Im Falle $p \leq 2$ benutzen wir jetzt für den zweiten Term auf der rechten Seite von (C.4) die Ungleichung

$$|V^{q-1}(Dv)| \leq \text{const}(q)(1 + |Dv|^2 + |D\tilde{\varphi}|^2)^{\frac{q-2}{2}}(|Dv| + |D\tilde{\varphi}|),$$

die aus Lemma 6.7 folgt. Nun lassen sich die Terme auf der rechten Seite von (C.4) genau wie die Terme (I) und (II) in den Beweisen von Lemma 4.5 abschätzen. Auch der weitere Beweis verläuft genau wie für Lemma 4.5. \square

C.2 Approximative \mathcal{A} -Harmonizität

Bemerkung C.4. Sei $a \in C_{\text{lok}}^1(\mathbb{M}; \mathbb{M})$, dann gibt es zu jedem $M \in \mathbb{R}_{>0}$ einen Stetigkeitsmodul $\nu_M : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\lim_{\omega \searrow 0} \nu_M(\omega) = 0$, so daß für $A, B \in \mathbb{M}$ gilt:

$$|A| \leq M + 1, |B| \leq M + 2 \implies |Da(A) - Da(B)| \leq \nu_M(|A - B|^2)$$

ν_M kann so gewählt werden, daß folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (I) ν_M ist nichtfallend.
- (II) ν_M^2 ist konkav.
- (III) $\nu_M^2(\omega) \geq \omega$ gilt für alle $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Lemma C.5 (Approximative \mathcal{A} -Harmonizität). Es sei $q \leq p + 1$, $a \in C_{\text{lok}}^1(\mathbb{M}; \mathbb{M})$ genüge **(a1)** und $u \in W^{1,p}(U_\varrho^n(x_0); \mathbb{R}^N)$ erfülle

$$\int_{U_\varrho^n(x_0)} a(Du) \bullet D\varphi dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(U_\varrho^n(x_0); \mathbb{R}^N).$$

Dann gilt für alle $M \in \mathbb{R}_{>0}$, alle $A \in \mathbb{M}$ mit $|A| \leq M + 1$ und alle $\varphi \in \mathcal{D}(U_\varrho^n(x_0); \mathbb{R}^N)$:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{U_\varrho^n(x_0)} Da(A)(Du - A) \bullet D\varphi dx \right| \\ & \leq \text{const}(p, q, \Gamma, M, \Lambda_M) \sqrt{\Phi_p} \nu_M(\Phi_p) \sup_{U_\varrho^n(x_0)} |D\varphi| \end{aligned}$$

Dabei wurde $\Phi_p(u, x_0, \varrho, A)$ mit Φ_p abgekürzt.

Beweis. Dies läßt sich genau wie Lemma 4.10 herleiten. \square

C.3 Partielle Regularität

Lemma C.6 (Legendre-Hadamard-Bedingung). $a \in C_{\text{lok}}^1(\mathbb{M}; \mathbb{M})$ genüge **(a3s)**, dann gilt für alle $A, B \in \mathbb{M}$ mit $\text{Rang } B \leq 1$:

$$Da(A)B \bullet B \geq \lambda(1 + |A|^2)^{\frac{p-2}{2}}|B|^2$$

Beweis. Seien $A \in \mathbb{M}$ und zunächst auch $\varphi \in \mathcal{D}(U^n; \mathbb{R}^N)$ fixiert. Die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \int_{U^n} \left[a(A + tD\varphi) \bullet D\varphi - \lambda(1 + |A|^2 + |tD\varphi|^2)^{\frac{p-2}{2}} t |D\varphi|^2 \right] dx$$

besitzt ein Minimum in 0. Durch einseitiges Differenzieren in 0 folgt:

$$\int_{U^n} \left[Da(A)D\varphi \bullet D\varphi - \lambda(1 + |A|^2)^{\frac{p-2}{2}} |D\varphi|^2 \right] dx \geq 0$$

Jetzt können wir genau wie im Beweis von Lemma 1.21 argumentieren. \square

Ausgehend von den Lemmata C.3, C.5 und C.6 läßt sich u genau wie im Beweis von Proposition 4.14 \mathcal{A} -harmonisch approximieren mit der von $Da(A)$ induzierten Bilinearform \mathcal{A} auf \mathbb{M} . Wir erhalten dieselben Exzess-Abschätzungen wie in Proposition 4.14 und Lemma 4.15 und es folgt:

Satz C.7 (Partielle Regularität). *Es sei $2 \leq p \leq q < p + \frac{1}{n}$ oder $p \leq 2$, $q < \frac{2n+1}{2n}p$, $a \in C_{\text{lok}}^1(\mathbb{M}; \mathbb{M})$ genüge **(a1)** und **(a3s)** und*

$$u \in W_{\text{lok}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^N)$$

löse (C.1). Dann ist $\text{Reg}(u) \in \mathcal{O}_\Omega$, $u \in C_{\text{lok}}^{1,\alpha}(\text{Reg}(u); \mathbb{R}^N)$ für jedes $\alpha \in]0, 1[$ und $\mathcal{L}^n(\text{Sing}(u)) = 0$.

Dabei ist wieder $\text{Sing}(u) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ mit

$$\Sigma_1 := \left\{ x_0 \in \Omega : \liminf_{\varrho \searrow 0} \Phi_p(u, x_0, \varrho) > 0 \right\}$$

$$\Sigma_2 := \left\{ x_0 \in \Omega : \limsup_{\varrho \searrow 0} |(Du)_{x_0, \varrho}| = \infty \right\}.$$

Ist zusätzlich $a \in C_{\text{lok}}^\infty(\mathbb{M}; \mathbb{M})$, so ist auch $u \in C_{\text{lok}}^\infty(\text{Reg}(u))$. \square

Notation

Wir identifizieren $(N \times n)$ -Matrizen mit den (bzgl. der kanonischen Basen) zugehörigen linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$. Elemente von \mathbb{R}^n betrachten wir als Spaltenvektoren, also als $(n \times 1)$ -Matrizen. Gradienten sind als Linearformen zu verstehen (vgl. unten). Ist kein Verknüpfungszeichen gesetzt, so ist stets das Produkt dieser Objekte gemäß der üblichen Matrizenmultiplikation bzw. die Komposition oder Anwendung linearer Abbildungen gemeint. Beispielsweise bezeichnet $x^T y$ das euklidische Skalarprodukt und $x \zeta^T$ das dyadische Produkt für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\zeta \in \mathbb{R}^N$. Gelegentlich werden wir auf $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ (vgl. unten) das Euklidische Skalarprodukt $A \bullet B := \text{Spur}(A^T B)$ für $A, B \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ verwenden.

Die Bedeutung der Betragsstriche $|\cdot|$ variiert mit dem eingesetzten Argument: Auf \mathbb{R}^n und $(\mathbb{R}^n)^*$ verwenden wir stets die Euklidische, auf $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ die vom Skalarprodukt \bullet induzierte Norm. Auf anderen Räumen wie z.B. $\text{Bil}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M})$ bezeichnen wir so die Operatornorm und $|\beta|$ für einen Multiindex β wird in der folgenden Tabelle definiert.

Integrale sind, falls kein anderes Maß angegeben ist, stets als Integrale bzgl. des Lebesgue-Maßes der richtigen Dimension zu verstehen. Wir verwenden das Zeichen \int für Mittelwertintegrale.

Weitere Notationen finden sich in der folgenden Tabelle: Dabei sind stets $n, N \in \mathbb{N}$, V ein \mathbb{R} -Vektorraum, A eine Matrix, $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, \infty]$, $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $z \in \mathbb{C}$, Ω eine offene, Σ eine beliebige Teilmenge von \mathbb{R}^n , $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varrho \in \mathbb{R}_{>0}$, $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\varphi, u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen bzw. Fastfunktionen, μ ein nichtnegatives, ν ein signiertes Radon-Maß auf Ω , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex und $\alpha \in]0, 1[$.

Bezeichnung	Bedeutung
$\text{const}(\dots)$	positive Konstante, die nur von \dots abhängt
$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$	Raum der $(N \times n)$ -Matrizen bzw. der \mathbb{R} -linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$
$\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$	$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

Bezeichnung	Bedeutung
\mathbb{M}	$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$
V^*	Raum der \mathbb{R} -Linearformen auf V , Dualraum von V
$\text{Bil}_{\mathbb{R}}(V)$	Raum der \mathbb{R} -Bilinearformen auf V
A^T	Transponierte von A
$\det A$	Determinante von A für $n = N$
Spur A	Spur von A für $n = N$
Rang A	Rang von A
u_A	Lineare Funktion, gegeben durch $u_A(x) = Ax$
\mathbb{I}_n	Einheitsmatrix in $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$
e_p	p -Energiedichte $\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \frac{1}{p} A ^p$ für $p < \infty$
$e_{p,\mu}$	$\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \frac{1}{p}(\mu^2 + A ^2)^{\frac{p}{2}}$ für $p < \infty$
$\Re(z)$	Realteil von z
$\Im(z)$	Imaginärteil von z
i	imaginäre Einheit
$\mathbb{1}_{\Sigma}$	Charakteristische Abbildung von Σ
$\partial\Sigma$	topologischer Rand von Σ in \mathbb{R}^n
$\overline{\Sigma}$	topologischer Abschluß von Σ in \mathbb{R}^n
$\Sigma \subset\subset \Omega$	$\overline{\Sigma}$ ist kompakt und $\overline{\Sigma} \subset \Omega$
\mathcal{O}_{Ω}	Menge aller nichtleeren, offenen Teilmengen von Ω
\mathbb{K}_{Ω}	Menge aller $O \in \mathcal{O}_{\Omega}$ mit $O \subset\subset \Omega$
$\text{dist}(x, \Sigma)$	$\inf\{ x - y : y \in \Sigma\}$
$U_{\varrho}^n(x_0), U_{\varrho}(x_0)$	offene Kugel um x_0 mit Radius ϱ in \mathbb{R}^n
$B_{\varrho}^n(x_0), B_{\varrho}(x_0)$	abgeschlossene Kugel um x_0 mit Radius ϱ in \mathbb{R}^n
$S_{\varrho}^{n-1}(x_0), S_{\varrho}(x_0)$	Sphäre um x_0 mit Radius ϱ in \mathbb{R}^n
$U_{\varrho}^n, U_{\varrho}$	offene Kugel um 0 mit Radius ϱ in \mathbb{R}^n
$B_{\varrho}^n, B_{\varrho}$	abgeschlossene Kugel um 0 mit Radius ϱ in \mathbb{R}^n
$B_{\varrho}^{\mathbb{M}}$	Kugel $\{B \in \mathbb{M} : B \leq \varrho\}$ in \mathbb{M}
$S_{\varrho}^{n-1}, S_{\varrho}$	Sphäre um 0 mit Radius ϱ in \mathbb{R}^n
U^n, U	offene Einheitskugel in \mathbb{R}^n
B^n, B	abgeschlossene Einheitskugel in \mathbb{R}^n
S^{n-1}, S	Einheitssphäre in \mathbb{R}^n
ω_n	$\mathcal{L}^n(U^n)$
u_{Ω}	$\int_{\Omega} u \, dx$
$u_{x_0, \varrho}$	$u_{U_{\varrho}(x_0)}$
u_{ϱ}	$u_{0, \varrho}$
δ_{x_0}	Dirac-Maß zur Stelle x_0 auf \mathbb{R}^n
\mathcal{L}^n	n -dimensionales Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^n
\mathcal{H}^s	s -dimensionales Hausdorff-Maß auf \mathbb{R}^n
$\dim_{\mathcal{H}}(\Sigma)$	Hausdorff-Dimension von Σ
$\eta \cdot \mu$	signiertes Maß mit der μ -Dichte η

Bezeichnung	Bedeutung
$\frac{d\nu}{d\mu}$	Maßableitung von ν bzgl. μ , vgl. Definition 6.31
$\text{spt } \varphi$	Träger von φ , Abschluß von $\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}$ in \mathbb{R}^n für Funktionen φ
$\text{spt } \varphi$	Durchschnitt aller $\text{spt } \tilde{\varphi}$ mit Repräsentanten $\tilde{\varphi}$ von φ für Fastfunktionen φ
$\text{esssup}_\Omega \eta$	wesentliches Supremum von η auf Ω
$\partial_i u$	i -te partielle Ableitung von u
$\partial_\beta u$	$\partial_{\beta_1} \partial_{\beta_2} \dots \partial_{\beta_n} u$
$\nabla \eta$	Gradient $(\partial_1 \eta \ \partial_2 \eta \ \dots \ \partial_n \eta) \in (\mathbb{R}^n)^*$ von η
Du	totale Ableitung von u
$D^k u$	k -te totale Ableitung von u
div	Divergenzoperator
$\ u\ _{p;\Omega}$	$\begin{cases} (\int_\Omega u ^p dx)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p < \infty \\ \text{esssup}_\Omega u & \text{für } p = \infty \end{cases}$
$ \beta $	$\sum_{i=1}^n \beta_i$
$\ u\ _{W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)}$	$\begin{cases} \left(\sum_{ \beta \leq k} \ \partial_\beta u\ _{p;\Omega}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p < \infty \\ \sum_{ \beta \leq k} \ \partial_\beta u\ _{p;\Omega} & \text{für } p = \infty \end{cases}$
$C_{\text{lok}}^k(\Omega; \mathbb{R}^N)$	Raum aller k -fach stetig differenzierbaren Funktionen $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$
$C_{\text{lok}}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$	$\bigcap_{k=0}^\infty C_{\text{lok}}^k(\Omega; \mathbb{R}^N)$
$C^k(\Omega; \mathbb{R}^N)$	Raum aller $u \in C_{\text{lok}}^k(\Omega; \mathbb{R}^N)$ mit $\ u\ _{W^{k,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)} < \infty$
$C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$	$\bigcap_{k=0}^\infty C^k(\Omega; \mathbb{R}^N)$
$C_{\text{kpt}}^k(\Omega; \mathbb{R}^N)$	Raum aller $u \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^N)$ mit $\text{spt } u \subset \Omega$
$\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^N), C_{\text{kpt}}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$	Raum aller $u \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ mit $\text{spt } u \subset \Omega$
$C^{k,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^N)$	Raum aller $u \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^N)$, deren k -te Ableitungen auf Ω einer Hölder-Bedingung mit Exponent α genügen
$C_{\text{lok}}^{k,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^N)$	Raum aller $u \in C_{\text{lok}}^k(\Omega; \mathbb{R}^N)$ mit $u _O \in C^{k,\alpha}(O; \mathbb{R}^N)$ für alle $O \in \mathbb{K}_\Omega$
$L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$	Raum aller Lebesgue-meßbaren $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $\ u\ _{p;\Omega} < \infty$
$L_{\text{lok}}^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$	Raum aller Lebesgue-meßbaren $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $u _O \in L^p(O; \mathbb{R}^N)$ für alle $O \in \mathbb{K}_\Omega$
$W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$	Raum aller k -fach schwach differenzierbaren $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $\ u\ _{W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)} < \infty$
$W_{\text{lok}}^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$	Raum aller k -fach schwach differenzierbaren $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $u _O \in W^{k,p}(O; \mathbb{R}^N)$ für alle $O \in \mathbb{K}_\Omega$
$W_0^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$	Normabschluß von $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ in $W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$ für $p < \infty$

Bezeichnung	Bedeutung
$W_0^{k,\infty}$	Folgenabschluß von $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ in $W^{k,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ bzgl. simultaner Konvergenz schwach-* und fast-überall
$W_{\text{kpt}}^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$	Raum aller $u \in W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ mit $\text{spt } u \subset \Omega$
$RM(\Omega)$	Raum aller endlichen signierten Radon-Maße auf Ω .
$V_\mu^\gamma, W_\mu^\gamma, V^\gamma, W^\gamma$	Vgl. Definition 6.1
V^γ, W^γ	V_1^γ bzw. W_1^γ
Φ_p	Vgl. Definitionen 4.9 und 4.11
$\text{adj}_k, \text{Adj}_k, \text{Adj}$	Vgl. Definition 1.13
$\psi(k), \Psi(k), \Psi$	Vgl. Definition 1.13
$\text{Reg}(u), \text{Sing}(u)$	Vgl. Definition 1.9
$n, N, \Omega, f, \mathcal{F}$	Vgl. Einleitung, (0.5) und Annahme 0.1
p, q	Vgl. Einleitung und Annahme 2.1
$\overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{F}}_{\text{lok}}, \overline{\mathcal{F}}_0$	Vgl. Definition 2.17
μ_u, λ_u	Vgl. Sätze 2.31 und 2.33
$Qf, Q\mathcal{F}$	Vgl. Definition 1.24
Λ_M	Vgl. (4.1) und (5.1)
ν_M	Vgl. Bemerkung 4.8

Wird bei einem der obigen Funktionenräume das zweite Argument \mathbb{R}^N weggelassen, so ist stets $N = 1$ gemeint.

Literaturverzeichnis

- [AD] EMILIO ACERBI UND GIANNI DAL MASO, *New Lower Semicontinuity Results for Polyconvex Integrals*, Calc. Var. Partial Differ. Equ. **2** (1994), 329-371
- [AF1] EMILIO ACERBI UND NICOLA FUSCO, *Semicontinuity Problems in the Calculus of Variations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **86** (1984), 125-145
- [AF2] EMILIO ACERBI UND NICOLA FUSCO, *A Regularity Theorem for Minimizers of Quasiconvex Integrals*, Arch. Ration. Mech. Anal. **99** (1987), 261-281
- [AF3] EMILIO ACERBI UND NICOLA FUSCO, *Local Regularity for Minimizers of Non Convex Integrals*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. **16** (1989), 603-636
- [AF4] EMILIO ACERBI UND NICOLA FUSCO, *Regularity for Minimizers of Non-Quadratic Functionals: The Case $1 < p < 2$* , Math. Anal. Appl. **140** (1989), 115-135
- [AM1] EMILIO ACERBI UND GIUSEPPE MINGIONE, *Regularity Results for a Class of Quasiconvex Functionals with Nonstandard Growth*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. **30** (2001), 311-339
- [AM2] EMILIO ACERBI UND GIUSEPPE MINGIONE, *Regularity Results for Stationary Electro-Rheological Fluids*, Arch. Ration. Mech. Anal. **164** (2002), 213-259
- [Ba1] JOHN M. BALL, *Convexity Conditions and Existence Theorems in Nonlinear Elasticity*, Arch. Ration. Mech. Anal. **63** (1977), 337-403
- [Ba2] JOHN M. BALL, *Discontinuous Equilibrium Solutions and Cavitation in Nonlinear Elasticity*, Philos. Trans. R. Soc. Lond., A **306** (1982), 557-611
- [BM] JOHN M. BALL UND FRANÇOIS MURAT, *$W^{1,p}$ -Quasiconvexity and Variational Problems for Multiple Integrals*, J. Funct. Anal. **58** (1984), 225-253

- [Bi] MICHAEL BILDHAUER, *Convex Variational Problems, Lecture Notes in Mathematics 1818*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2003
- [BF1] MICHAEL BILDHAUER UND MARTIN FUCHS, *Partial Regularity for Variational Integrals with (s, μ, q) -Growth*, Calc. Var. Partial Differ. Equ. **13** (2001), 537-560
- [BF2] MICHAEL BILDHAUER UND MARTIN FUCHS, *$C^{1,\alpha}$ -Solutions to Non-Autonomous Anisotropic Variational Problems*, Calc. Var. Partial Differ. Equ. **24** (2005), 309-340
- [BFM] GUY BOUCHITTÉ, IRENE FONSECA UND JAN MALÝ, *The Effective Bulk Energy of the Relaxed Energy of Multiple Integrals below the Growth Exponent*, Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math. **128** (1998), 463-479
- [Bu] GIUSEPPE BUTTAZZO, *Semicontinuity, Relaxation and Integral Representation in the Calculus of Variations, Pitman Research Notes in Mathematics Series 207*, Longman Scientific & Technical, 1989
- [C] HI JUN CHOE, *Interior Behaviour of Minimizers for Certain Functionals with Nonstandard Growth*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. **19** (1992), 933-945
- [CFM] MENITA CAROZZA, NICOLA FUSCO UND GIUSEPPE MINGIONE, *Partial Regularity of Minimizers of Quasiconvex Integrals with Subquadratic Growth*, Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser. **175** (1998), 141-164
- [CM] MENITA CAROZZA UND GIUSEPPE MINGIONE, *Partial Regularity of Minimizers of Quasiconvex Integrals with Subquadratic Growth: The General Case*, Ann. Pol. Math. **77** (2001), 219-243
- [CD] PIETRO CELADA UND GIANNI DAL MASO, *Further Remarks on the Lower Semicontinuity of Polyconvex Integrals*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire **11** (1994), 661-691
- [CGM] GIOVANNI CUPINI, MARCELLO GUIDORZI UND ELVIRA MASCOLO, *Regularity of Minimizers of Vectorial Integrals with p - q Growth*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. **54** (2003), 591-616
- [D1] BERNARD DACOROGNA, *Quasiconvexity and Relaxation of Nonconvex Problems in the Calculus of Variations*, J. Funct. Anal. **46** (1982), 102-118
- [D2] BERNARD DACOROGNA, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1989

-
- [DM] BERNARD DACOROGNA UND PAOLO MARCELLINI, *Semicontinuité pour des Intégrandes Polyconvexes sans Continuité des Déterminants*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I **311** (1990), 393-396
- [DS] GIANNI DAL MASO UND CARLO SBORDONE, *Weak Lower Semicontinuity of Polyconvex Integrals: A Borderline Case*, Math. Z. **218** (1995), 603-609
- [DSch] NELSON DUNFORD UND JACOB T. SCHWARTZ, *Linear Operators, Part I, Pure and Applied Mathematics, Volume VII*, Interscience Publishers, New York, 1958
- [DGG] FRANK DUZAAR, ANDREAS GASTEL UND JOSEPH F. GROTOWSKI, *Partial Regularity for Almost Minimizers of Quasi-Convex Integrals*, SIAM J. Math. Anal. **32** (2000), 665-687
- [DG] FRANK DUZAAR UND JOSEPH F. GROTOWSKI, *Optimal Interior Partial Regularity for Nonlinear Elliptic Systems: The Method of A-Harmonic Approximation*, Manuscr. Math. **103** (2000), 267-298
- [DGK] FRANK DUZAAR, JOSEPH F. GROTOWSKI UND MANFRED KRONZ, *Regularity of Almost Minimizers of Quasi-Convex Variational Integrals with Subquadratic Growth*, Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser. **184** (2005), 421-448
- [DGSt] FRANK DUZAAR, JOSEPH F. GROTOWSKI UND KLAUS STEFFEN, *Optimal Regularity Results via A-Harmonic Approximation*, in: Stefan Hildebrandt et al., *Geometric Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*, Springer Verlag, Berlin, 2003
- [DK] FRANK DUZAAR UND MANFRED KRONZ, *Regularity of ω -Minimizers of Quasi-Convex Variational Integrals with Polynomial Growth*, Differ. Geom. Appl. **17** (2002), 139-152
- [DM1] FRANK DUZAAR UND GIUSEPPE MINGIONE, *The p -Harmonic Approximation and the Regularity of p -Harmonic Maps*, Calc. Var. Partial Differ. Equ. **20** (2004), 235-256
- [DM2] FRANK DUZAAR UND GIUSEPPE MINGIONE, *Regularity for Degenerate Elliptic Problems via p -Harmonic Approximation*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire **21** (2004), 735-766
- [DSt] FRANK DUZAAR UND KLAUS STEFFEN, *Optimal Interior and Boundary Regularity for Almost Minimizers to Elliptic Variational Integrals*, J. Reine Angew. Math. **546** (2002), 73-138

- [ELM] LUCA ESPOSITO, FRANCESCO LEONETTI UND GIUSEPPE MINGIONE, *Sharp Regularity for Functionals with (p, q) Growth*, J. Differ. Equations **204** (2004), 5-55
- [EM] LUCA ESPOSITO UND GIUSEPPE MINGIONE, *Partial Regularity for Minimizers of Degenerate Polyconvex Energies*, J. Convex Anal. **8** (2001), 1-38
- [El] JÜRGEN ELSTRODT, *Maß- und Integrationstheorie*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2002
- [Ev] LAWRENCE C. EVANS, *Quasiconvexity and Partial Regularity in the Calculus of Variations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **95** (1986), 227-252
- [EG1] LAWRENCE C. EVANS UND RONALD F. GARIEPY, *Blowup, Compactness and Partial Regularity in the Calculus of Variations*, Ind. Univ. Math. J. **36** (1987), 361-371
- [EG2] LAWRENCE C. EVANS UND RONALD F. GARIEPY, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992
- [FLM] IRENE FONSECA, GIOVANNI LEONI UND JAN MALÝ, *Weak Continuity and Lower Semicontinuity Results for Determinants*, Arch. Ration. Mech. Anal. **178** (2005), 411-448
- [FMal] IRENE FONSECA UND JAN MALÝ, *Relaxation of Multiple Integrals below the Growth Exponent*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire **14** (1997), 309-338
- [FMar] IRENE FONSECA UND PAOLO MARCELLINI, *Relaxation of Multiple Integrals in Subcritical Sobolev Spaces*, J. Geom. Anal. **7** (1997), 57-81
- [F] MARTIN FUCHS, *Regularity Theorems for Nonlinear Systems of Partial Differential Equations under Natural Ellipticity Conditions*, Analysis **7** (1987), 83-93
- [FR] MARTIN FUCHS UND JÜRGEN REULING, *Partial Regularity for Certain Classes of Polyconvex Functionals Related to Nonlinear Elasticity*, Manuscr. Math. **87** (1995), 13-26
- [FH1] NICOLA FUSCO UND JOHN HUTCHINSON, *$C^{1,\alpha}$ Partial Regularity of Functions Minimising Quasiconvex Integrals*, Manuscr. Math. **54** (1986), 121-143
- [FH2] NICOLA FUSCO UND JOHN HUTCHINSON, *Partial Regularity in Problems Motivated by Nonlinear Elasticity*, SIAM J. Math. Anal. **22** (1991), 1516-1551

-
- [FH3] NICOLA FUSCO UND JOHN HUTCHINSON, *A Direct Proof for Lower Semicontinuity of Polyconvex Functionals*, *Manuscr. Math.* **87** (1995), 35-50
- [Ga] WILFRID GANGBO, *On the Weak Lower Semicontinuity of Energies with Polyconvex Integrands*, *J. Math. Pures Appl.*, IX. Sér. **73** (1994), 455-469
- [Gia] MARIANO GIAQUINTA, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems*, Princeton University Press, Princeton, 1983
- [GM1] MARIANO GIAQUINTA UND GIUSEPPE MODICA, *Remarks on the Regularity of the Minimizers of Certain Degenerate Functionals*, *Manuscr. Math.* **57** (1986), 55-99
- [GM2] MARIANO GIAQUINTA UND GIUSEPPE MODICA, *Partial Regularity of Minimizers of Quasiconvex Integrals*, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire* **3** (1986), 185-208
- [Giu] ENRICO GIUSTI, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, World Scientific Publishing Co., New York, 2003
- [Gu] MARCELLO GUIDORZI, *Partial Regularity in Non-Linear Elasticity*, *Manuscr. Math.* **107** (2002), 25-41
- [Ha1] CHRISTOPH HAMBURGER, *Regularity of Differential Forms Minimizing Degenerate Elliptic Functionals*, *J. Reine Angew. Math.* **431** (1992), 7-64
- [Ha2] CHRISTOPH HAMBURGER, *Quasimonotonicity, Regularity and Duality for Nonlinear Systems of Partial Differential Equations*, *Ann. Mat. Pura Appl.*, IV. Ser. **169** (1995), 321-354
- [Ha3] CHRISTOPH HAMBURGER, *Partial Regularity of Solutions of Nonlinear Quasimonotone Systems*, *Hokkaido Math. J.* **32** (2003), 291-316
- [Ha4] CHRISTOPH HAMBURGER, *Partial Regularity of Minimizers of Polyconvex Variational Integrals*, *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* **18** (2003), 221-241
- [Hi] DAVID HILBERT, *Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris 1900.*, *Gött. Nachr.* 1900, 253-297

- [Kri] JAN KRISTENSEN, *Lower Semicontinuity in Sobolev Spaces below the Growth Exponent of the Integrand*, Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math. **127** (1997), 797-817
- [KM] JAN KRISTENSEN UND GIUSEPPE MINGIONE, *The Singular Set of Lipschitzian Minima of Multiple Integrals*, to appear
- [Mal1] JAN MALÝ, *Weak Lower Semicontinuity of Polyconvex Integrals*, Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A **123** (1993), 681-691
- [Mal2] JAN MALÝ, *Lower Semicontinuity of Quasiconvex Integrals*, Manuscr. Math. **85** (1994), 419-428
- [Mar1] PAOLO MARCELLINI, *Approximation of Quasiconvex Functions and Lower Semicontinuity of Multiple Integrals*, Manuscr. Math. **51** (1985), 1-28
- [Mar2] PAOLO MARCELLINI, *On the Definition and the Lower Semicontinuity of Certain Quasiconvex Integrals*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire **3** (1986), 391-409
- [Me] NORMAN G. MEYERS, *Quasi-Convexity and Lower Semi-Continuity of Multiple Variational Integrals of Any Order*, Trans. Am. Math. Soc. **119** (1965), 125-149
- [Mi] GIUSEPPE MINGIONE, *Regularity of Minima: An Invitation to the Dark Side of the Calculus of Variations*, to appear in: Appl. Math., Praha **51** (2006)
- [Mo] CHARLES B. MORREY JR., *Quasiconvexity and the Lower Semicontinuity of Multiple Integrals*, Pac. J. Math. **2** (1952), 25-53
- [Pa] ANTONIA PASSARELLI DI NAPOLI, *A Regularity Result for a Class of Polyconvex Functionals*, Ric. Mat. **48** (1999), 379-393
- [PS] ANTONIA PASSARELLI DI NAPOLI UND FRANCESCO SIEPE, *A Regularity Result for a Class of Anisotropic Systems*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **28** (1996), 13-31
- [Pe1] PABLO PEDREGAL, *Jensen's Inequality in the Calculus of Variations*, Differ. Integral Equ. **7** (1994), 57-72
- [Pe2] PABLO PEDREGAL, *Variational Methods in Nonlinear Elasticity*, SIAM, Philadelphia, 2000
- [R] MICHAEL RŮŽIČKA, *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory, Lecture Notes in Mathematics 1748*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2000

-
- [Se1] JAMES SERRIN, *A New Definition of the Integral for Non-Parametric Problems in the Calculus of Variations*, Acta Math. **102** (1959), 23-32
- [Se2] JAMES SERRIN, *On the Definition and Properties of Certain Variational Integrals*, Trans. Am. Math. Soc. **101** (1961), 139-167
- [Si] LEON SIMON, *Theorems on Regularity and Singularity of Energy Minimizing Maps*, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin, 1996
- [Sv] VLADIMIR SVERÁK, *Quasiconvex Functions with Subquadratic Growth*, Proc. R. Soc. Lond., Ser. A **433** (1991), 723-725
- [U] KAREN UHLENBECK, *Regularity for a Class of Nonlinear Elliptic Systems*, Acta Math. **138** (1977), 219-240
- [Y] KÔSAKU YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1974
- [Ze] EBERHARD ZEIDLER, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, II/B: Nonlinear Monotone Operators*, Springer Verlag, New York, 1990
- [Zh] KEWEI ZHANG, *On Some Quasiconvex Functions with Linear Growth*, J. Convex Anal. **5** (1998), 133-146

Die hier vorgelegte Dissertation habe ich eigenhändig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt. Die Dissertation wurde in der vorgelegten oder in ähnlicher Form noch bei keiner anderen Institution eingereicht. Ich habe bisher keine erfolglosen Promotionsversuche unternommen.

Düsseldorf, den 8. Januar 2007

(Thomas Schmidt)