



HEINRICH HEINE  
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF  
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät

# **Portfoliooptimierung Strategischer-Asset-Allokationen bei Sachversicherungen**

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades  
doctor rerum politicarum (Dr. rer. pol.)

Dipl.-Math. Manuel Herbst

---

Vorgelegt im Oktober 2014

am Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre, insb. Finanzdienstleistungen

Betreuung: Professor Dr. Christoph J. Börner

Oktober 2014

Diese Arbeit wurde als Dissertation von der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf angenommen.

Erstgutachter: Professor Dr. Christoph J. Börner

Zweitgutachter: Professor Dr. Albrecht F. Michler

## Vorwort

Zu Beginn meiner beruflichen Tätigkeit im Asset-Liability-Management eines großen deutschen Versicherungsunternehmens lernte ich die Markowitz-Optimierung kennen, die mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms durchgeführt wurde. Dieses Optimierungstool wurde aufgrund seiner Ausrichtung für lineare Instrumente im Wesentlichen für Aktienportfolios eingesetzt.

Die jährliche Aufstellung der strategischen Portfolios des Versicherungsunternehmens wird unter der Fragestellung des Risikokapitalkonsums gesteuert. Zur Berechnung des Risikokapitals wird ein Maß verwendet, das die Risikoarten Markt- und Kreditrisiko simultan unter Annahme einer gewissen Korrelation berücksichtigt. Dadurch ergab sich der Vorschlag ein Optimierungstool einzusetzen, das den Risikokapitalkonsum der Portfolios entsprechend dieses Risikomaßes berechnet. Auf Grundlage der Veröffentlichung von Stanislav Uryasev<sup>1</sup> zur Optimierung des Conditional-Value-at-Risks wurde ein Verfahren vorgeschlagen, das es ermöglicht, das gewünschte Risikomaß zu optimieren. Meine Aufgabe bestand in der Umsetzung und Weiterentwicklung des Verfahrens in der Programmiersprache MATLAB.

Aufgrund meiner Faszination für diese die Betriebswirtschaftslehre, Mathematik und Informatik verbindende, praxisorientierte Thematik, schlug ich Herrn Professor Dr. Börner vor, dieses Optimierungsthema im Rahmen einer Dissertation theoretisch zu vertiefen. Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf die betriebswirtschaftlichen und mathematischen Aspekte des Optimierungsmodells mit dem Ziel, in einer umfassenden Darstellung die unterschiedlichen Teilaspekte beider Fachrichtungen zu vereinen.

Innerhalb dieser Darstellung wird das Optimierungsmodell nicht isoliert betrachtet, sondern als Gesamtkonzept in den Rahmen des Asset-Liability-Managements eines Sachversicherungsunternehmens eingebettet. Aus dieser Einordnung ergeben sich die Anforderungen an eine Optimierung der Strategischen-Asset-Allokation ebenso wie der notwendige operative Prozess. Anhand eines umfassenden Optimierungsbeispiels wird dieser Prozess anschaulich nachvollzogen und dem Leser Einblick in die Funktionsweise des Optimierers gegeben.

---

<sup>1</sup> Uryasev [2000].

In das Gesamtkonzept zur Optimierung der Strategischen-Asset-Allokation fließen einige bekannte wirtschaftswissenschaftliche Konzepte wie das Capital-Asset-Pricing-Model oder das Black-Litterman-Verfahren ein. Die mathematischen Schwerpunkte der Dissertation liegen in der Ausarbeitung des oben genannten Artikels von Stanislav Uryasev und dem darauf basierenden mathematischen Aufbau des Verfahrens und seiner Nebenbedingungen. Getrieben wurde die Einbindung der unterschiedlichen Nebenbedingungen stets von konkreten betriebswirtschaftlichen Fragestellungen, die sich aus der Praxis ergaben. Die Entwicklung erfolgte zunächst in Formeln auf Papier gefolgt von einer anschließenden Programmierung in MATLAB.

Die Zielsetzung dieser Arbeit ist die Erläuterung des theoretischen Konzepts des Optimierungsverfahrens sowie die Vermittlung seiner praktischen Anwendbarkeit in Form von konkreten Implementierungsvorschlägen. Dabei wird der Versuch gewagt, die Balance zwischen betriebswirtschaftlicher Konzeptionalisierung und einer sich daran orientierenden mathematischen Modellbildung herzustellen.

*Mein persönlicher Dank richtet sich an meinen Betreuer Herrn Professor Dr. Christoph J. Börner, der mir vertrauensvoll die Möglichkeit zur Promotion im Bereich der Wirtschaftswissenschaften gegeben hat. Seine Begleitung meiner Arbeit an der Dissertation in Form von regelmäßigen fachspezifischen Gesprächen war stets gewinnbringend.*

*Herrn Professor Dr. Albrecht F. Michler danke ich herzlich für die bereitwillige Übernahme des Zweitgutachtens trotz seiner vielfältigen Verpflichtungen.*

*Darüber hinaus möchte ich mich bei allen anderen bedanken, die mich während meiner Promotion fachlich begleitet haben. Dazu gehören u. a. mein Vorgesetzter Herr Dr. Ingo Kraus, der mir im Rahmen meiner beruflichen Tätigkeit die technische Entwicklung des Modells ermöglichte, sowie meine Arbeitskollegen Herr Dr. Ulrich Moosbrugger und Herr Dr. Oleksandr Khomenko, deren fachliche Anmerkungen in gemeinsamen Diskussionen bereichernd waren. Ohne die Korrekturen von Herrn Alexander Finke befänden sich eine Vielzahl weiterer Rechtschreibfehler in dieser Arbeit. Für den persönlichen Beistand während der gesamten Promotionszeit gehört meiner Familie ein besonderer Dank.*

# Inhaltsverzeichnis

|                                                             |           |
|-------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Vorwort</b>                                              | 3         |
| Tabellenverzeichnis                                         | 6         |
| Abbildungsverzeichnis                                       | 7         |
| Symbolverzeichnis                                           | 8         |
| <b>Einleitung</b>                                           | 9         |
| <b>1 Risikomaße</b>                                         | <b>13</b> |
| 1.1 Typisierung von Risikomaßen                             | 15        |
| 1.2 Mathematische Definition von Risikomaßen                | 16        |
| 1.3 Kohärente Risikomaße                                    | 16        |
| 1.4 Volatilität (als Maß des Typus I)                       | 18        |
| 1.5 Value-at-Risk (als Maß des Typus II)                    | 20        |
| 1.6 Ansätze zur Kalkulation des Value-at-Risks              | 24        |
| 1.7 Conditional-Value-at-Risk (als Maß des Typus II)        | 28        |
| <b>2 Portfoliooptimierung nach Risikomaßen</b>              | <b>32</b> |
| 2.1 Klassische Portfolioselektion nach Markowitz            | 32        |
| 2.1.1 Minimum-Varianz-Portfolio                             | 35        |
| 2.1.2 Risiko-Rendite-Diagramm: Darstellung des Lösungsraums | 37        |
| 2.1.3 Effizienz & Diversifikation                           | 40        |
| 2.1.4 Markowitz - allgemeiner Fall                          | 43        |
| 2.1.5 Lösung mithilfe der Lagrangefunktion                  | 45        |
| 2.1.6 Kritische Diskussion                                  | 50        |
| 2.2 Conditional-Value-at-Risk-Portfolioselektion            | 52        |
| 2.2.1 CVaR-Optimierung nach S.Uryasev                       | 52        |
| 2.2.2 Lineare CVaR-Optimierung mithilfe von Szenarien       | 59        |
| 2.2.3 Darstellung als allgemeines lineares Programm         | 60        |

|          |                                                                       |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.2.4    | Generierung von Szenarien mit der Monte-Carlo-Methode . . . . .       | 64         |
| <b>3</b> | <b>Konzeption, Aufbau und Implementierung des Optimierungsmodells</b> | <b>68</b>  |
| 3.1      | Asset-Liability-Management . . . . .                                  | 69         |
| 3.2      | Anforderungen an die Optimierung einer SAA . . . . .                  | 72         |
| 3.3      | Operativer Optimierungsprozess . . . . .                              | 75         |
| 3.4      | Darstellung der Liabilities als Portfolio . . . . .                   | 77         |
| 3.5      | Darstellung des Asset-Liability-Mismatch-Risikos . . . . .            | 85         |
| 3.6      | Anforderungen an Szenarien . . . . .                                  | 94         |
| 3.6.1    | Marktszenarien . . . . .                                              | 94         |
| 3.6.2    | Kreditszenarien . . . . .                                             | 97         |
| 3.7      | Modularisierung der Programmstruktur . . . . .                        | 102        |
| 3.8      | Forderung einer Mindestrendite . . . . .                              | 105        |
| 3.9      | Generierung erwarteter Renditen . . . . .                             | 107        |
| 3.9.1    | Capital-Asset-Pricing-Model . . . . .                                 | 108        |
| 3.9.2    | Generierung von Renditeerwartungen . . . . .                          | 112        |
| 3.9.3    | Black-Litterman-Verfahren . . . . .                                   | 116        |
| 3.10     | Integration von Nebenbedingungen in die Optimierung . . . . .         | 121        |
| 3.11     | Einbindung von Transaktionskosten . . . . .                           | 125        |
| 3.12     | Abbildung eines Fonds innerhalb des Assetuniversums . . . . .         | 128        |
| 3.13     | Abbildung von Devisentermingeschäften . . . . .                       | 134        |
| <b>4</b> | <b>Praktische Optimierungsbeispiele</b>                               | <b>143</b> |
| 4.1      | Vorbereitung der Input-Daten . . . . .                                | 143        |
| 4.2      | Long-only-Optimierung ohne Nebenbedingungen . . . . .                 | 151        |
| 4.3      | Einbindung von Transaktionskosten . . . . .                           | 157        |
| 4.4      | Optimierung unter Nebenbedingungen . . . . .                          | 163        |
| 4.5      | Auswertung der Optimierungsergebnisse . . . . .                       | 177        |
| <b>5</b> | <b>Ergebnisanalyse, Implikationen und Ausblick</b>                    | <b>182</b> |
| 5.1      | Zusammenfassung . . . . .                                             | 182        |
| 5.2      | Kritische Analyse und Verbesserungsmöglichkeiten . . . . .            | 184        |
| 5.3      | Modellerweiterungen - ein Ausblick . . . . .                          | 187        |
| 5.4      | Fazit . . . . .                                                       | 188        |

---

|                                                                   |            |
|-------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>6 Anhang</b>                                                   | <b>190</b> |
| 6.1 Inverse Optimierung zur Gewinnung von Risikoprämien . . . . . | 190        |
| <b>Literaturverzeichnis</b>                                       | <b>195</b> |

# Tabellenverzeichnis

|      |                                                                            |     |
|------|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1  | Cashflow-Matching-Instrumente . . . . .                                    | 82  |
| 3.2  | Liability-Cashflows . . . . .                                              | 83  |
| 3.3  | Barwerte und Durationen der Liabilities . . . . .                          | 83  |
| 3.4  | Durationsadjustierung . . . . .                                            | 84  |
| 3.5  | Portfolio der Passivseite . . . . .                                        | 85  |
| 3.6  | Matrix A in Tabellenform . . . . .                                         | 87  |
| 3.7  | Matrix $A_{ALMR}$ . . . . .                                                | 92  |
| 3.8  | ALMR-Block . . . . .                                                       | 103 |
| 3.9  | ALMR-Block in der Nebenbedingungsmatrix A . . . . .                        | 103 |
| 3.10 | Nebenbedingungsmatrix mit Modul „Mindestrendite“ . . . . .                 | 107 |
| 3.11 | Nebenbedingungsmatrix mit Modul „Mindestrendite“ in Blockansicht . . . . . | 107 |
| 3.12 | Nebenbedingungen an einzelne Assets . . . . .                              | 122 |
| 3.13 | Nebenbedingungsmatrix mit Modul „GruppenNB“ . . . . .                      | 124 |
| 3.14 | Nebenbedingungsmatrix mit TAK-Modul . . . . .                              | 128 |
| 3.15 | Fondszusammenstellung . . . . .                                            | 128 |
| 3.16 | Nebenbedingungsmatrix A inkl. Fonds Version 1 . . . . .                    | 130 |
| 3.17 | Beispielmodul Fonds Version 1 . . . . .                                    | 130 |
| 3.18 | Beispielmodul Fonds Version 2 . . . . .                                    | 132 |
| 3.19 | Nebenbedingungsmatrix A inkl. Fonds Version 2 . . . . .                    | 133 |
| 3.20 | Risiko-Rendite-Profile von FX-Investments . . . . .                        | 137 |
| 3.21 | Beispielmodul für das Naive Währungs-Hedging . . . . .                     | 140 |
| 3.22 | Beispielmodul für Optimales-Währungs-Hedging . . . . .                     | 141 |
| 3.23 | Nebenbedingungsmatrix A inkl. DTG-Modul . . . . .                          | 142 |
| 4.1  | Instrumente zur Darstellung der Passivseite . . . . .                      | 144 |
| 4.2  | Cashflow-Matching für die EUR-Liabilities . . . . .                        | 145 |

---

|      |                                                                                                      |     |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.3  | Cashflow-Matching für die USD-Liabilities . . . . .                                                  | 145 |
| 4.4  | Ergebnis des Cashflow-Matchings . . . . .                                                            | 146 |
| 4.5  | Risikoneutrales Portfolio (RNPF) . . . . .                                                           | 147 |
| 4.6  | Allokationsuniversum . . . . .                                                                       | 148 |
| 4.7  | Aktuelles SAA-Portfolio . . . . .                                                                    | 149 |
| 4.8  | Kennzahlen der Portfolios P8 bis P15 . . . . .                                                       | 155 |
| 4.9  | Auslastung der Gruppennebenbedingungen . . . . .                                                     | 166 |
| 4.10 | Auslastung der Gruppennebenbedingungen nach der 2. Optimierung . . . .                               | 170 |
| 4.11 | Erweiterung des Allokationsuniversums um Derivate-Cash-Klassen . . . . .                             | 172 |
| 4.12 | Auslastung der Gruppennebenbedingungen der 3. Optimierung inkl. DTGs                                 | 174 |
| 4.13 | Auslastung der Nebenbedingungen der 3. (abgesicherten) Optimierung zwi-<br>schen P3 und P4 . . . . . | 180 |
| 6.1  | Inverse Optimierung aus dem Marktportfolio . . . . .                                                 | 191 |
| 6.2  | Kovarianzmatrix zur inversen Optimierung . . . . .                                                   | 192 |

# Abbildungsverzeichnis

|      |                                                                        |     |
|------|------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.1  | Zwei Verteilungsdichten mit identischem VaR . . . . .                  | 28  |
| 2.1  | Risiko-Rendite-Diagramm für ausgewählte Assetklassen . . . . .         | 37  |
| 2.2  | Effizienzlinie in Abhängigkeit von der Korrelation $\rho$ . . . . .    | 39  |
| 2.3  | Effizienzlinie für $-1 < \rho < 1$ . . . . .                           | 40  |
| 2.4  | Effizienzlinie . . . . .                                               | 41  |
| 3.1  | ALM-Bilanz . . . . .                                                   | 70  |
| 3.2  | Optimierungsprozess . . . . .                                          | 75  |
| 3.3  | Barwertkurve . . . . .                                                 | 80  |
| 3.4  | Zinskurven vom 9. Juni 2014 . . . . .                                  | 96  |
| 3.5  | Szenariomatrix der Risikotreiber . . . . .                             | 97  |
| 3.6  | Übersicht Kreditrisikodaten . . . . .                                  | 98  |
| 3.7  | Ratingklassen verschiedener Agenturen . . . . .                        | 99  |
| 3.8  | 1-Jahres-Übergangsmatrix von Standard&Poors . . . . .                  | 100 |
| 3.9  | Verteilungsdichte und Ratings . . . . .                                | 101 |
| 3.10 | Effizienzlinie mit Mindestreturanforderung . . . . .                   | 105 |
| 3.11 | Kombinierte Effizienzlinie . . . . .                                   | 110 |
| 3.12 | Inverse Markowitz-Optimierung . . . . .                                | 114 |
| 3.13 | Schema des Black-Litterman-Verfahrens . . . . .                        | 119 |
| 3.14 | Gruppennebenbedingungen in tabellarischer Form . . . . .               | 123 |
| 3.15 | Darstellung eines Devisenforwards . . . . .                            | 135 |
| 4.1  | Ergebnisse der Optimierung ohne Nebenbedingungen und ohne TAK . . . .  | 153 |
| 4.2  | Darstellung der Anlagegruppen bei höheren Renditeanforderungen . . . . | 156 |
| 4.3  | RoRaC-Werte der Portfolios P1 bis P15 . . . . .                        | 156 |
| 4.4  | Ergebnisse der Optimierung ohne Nebenbedingungen mit TAK . . . . .     | 159 |

---

|      |                                                                                             |     |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.5  | Ergebnisse der 2. Optimierung ohne Nebenbedingungen mit TAK . . . . .                       | 161 |
| 4.6  | Effizienzlinien der Optimierungen ohne Nebenbedingungen . . . . .                           | 162 |
| 4.7  | Nebenbedingungen lbx/ubx . . . . .                                                          | 163 |
| 4.8  | Gruppennebenbedingungen . . . . .                                                           | 165 |
| 4.9  | Ergebnisse der 1. Optimierung mit Nebenbedingungen . . . . .                                | 167 |
| 4.10 | Nebenbedingungen lbx/ubx (2. Optimierung mit NB) . . . . .                                  | 169 |
| 4.11 | Gruppennebenbedingungen (2. Optimierung mit NB) . . . . .                                   | 169 |
| 4.12 | Ergebnisse der 2. Optimierung mit Nebenbedingungen . . . . .                                | 171 |
| 4.13 | Gruppennebenbedingungen inkl. Absicherungen (3. Optimierung mit NB) .                       | 173 |
| 4.14 | Ergebnisse der 3. Optimierung mit Nebenbedingungen und DTGs . . . . .                       | 175 |
| 4.15 | Ergebnisse der 3. Optimierung mit Nebenbedingungen und DTGs zwischen<br>P3 und P4 . . . . . | 179 |

# Symbolverzeichnis

|                                                                |                                                   |
|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\subset$                                                      | Teilmenge                                         |
| $x^t$                                                          | Vektor $x$ transponiert                           |
| $\max_{1 \leq i \leq n} A_i$                                   | maximales Element der Menge $\{A_1, \dots, A_n\}$ |
| $\min_{1 \leq i \leq n} A_i$                                   | minimales Element der Menge $\{A_1, \dots, A_n\}$ |
| $\mathbb{N}$                                                   | Menge der natürlichen Zahlen                      |
| $\mathbb{N}_0$                                                 | Menge der natürlichen Zahlen inkl. der Zahl Null  |
| $\mathbb{R}$                                                   | Menge der reellen Zahlen                          |
| $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ | Abschluss von $\mathbb{R}$                        |
| $\mathbb{R}^n$                                                 | reeller Vektorraum der Dimension $n$              |
| $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$                                     | reelle Folge                                      |
| $\{\cdot\}$                                                    | Mengenklammer                                     |
| $(\cdot, \cdot)$                                               | offenes Intervall                                 |
| $[\cdot, \cdot]$                                               | kompaktes Intervall                               |
| $\geq_R$                                                       | binäre Risikoordnungsrelation                     |
| $\inf(X)$                                                      | größte untere Schranke der Menge $X$              |
| $\sup(X)$                                                      | kleinste obere Schranke der Menge $X$             |
| $\sum$                                                         | Summenzeichen                                     |
| $\int$                                                         | Integral                                          |
| $\frac{\partial}{\partial x}$                                  | Differentialoperator (nach $x$ )                  |
| $\mathbb{1}_{\{A\}}$                                           | Indikatorfunktion der Menge $A$                   |
| $\limsup, \liminf$                                             | Limes superior, Limes inferior                    |
| $\mathcal{L}$                                                  | Lösungsmenge                                      |
| $\in$                                                          | Element aus                                       |
| $\lim$                                                         | Grenzwert                                         |
| $\Leftrightarrow$                                              | Äquivalenzzeichen                                 |

# Einleitung

Die Suche nach einem optimalen Portfolio ist die zentrale Frage der Portfoliotheorie. Als Begründer der modernen Portfoliotheorie gilt der Ökonom Harry Markowitz, der für seine Arbeiten 1990 den Nobelpreis erhielt. 1952 veröffentlichte er seine Arbeit zur Portfolioselektion und sorgte durch die Quantifizierung des Diversifikationseffektes sowie den Begriff des effizienten Portfolios für ein neues Verständnis von Kapitalanlagestrategien.

Unter dem Begriff der *Strategischen-Asset-Allokation* versteht man die Bündelung von Kapitalanlagestrategien in Form einer optimalen Aufteilung des zur Verfügung stehenden Kapitals auf verschiedene Anlageklassen.<sup>2</sup> Die Granularität der Einteilung von Wertpapieren in Anlageklassen kann sehr unterschiedlich ausfallen. So kann es sich bei dieser beispielsweise um grobe Kategorien wie Aktien, Anleihen etc. oder um feinere Einteilungen wie Aktienklassen aufgeteilt nach Ländern und Anleiheklassen gegliedert nach Regionen und Laufzeitbereichen (z. B. Staatsanleihen Europa der Laufzeiten 1-3 Jahre) handeln. Die Gesamtheit aller Anlage- bzw. Assetklassen wird als *Anlage- oder Allokationsuniversum* bezeichnet.

Im Rahmen der Strategischen-Asset-Allokation muss sich ein Versicherungsunternehmen unterschiedlichen Herausforderungen stellen. Die Aufteilung der Assets sollte sich an der Passivseite der Unternehmensbilanz orientieren, um zukünftige Zahlungsverpflichtungen gegenüber den Kunden bedienen zu können. Zusätzlich erhofft sich der Aktionär eine bestmögliche Verzinsung seines eingesetzten Kapitals.

Die damit verbundene Steuerung von Aktiva und Passiva ist die Kernaufgabe des Asset-Liability-Managements, das den übergeordneten Kontext zur Asset-Allokation bildet.

---

<sup>2</sup> In der Literatur wird der Begriff der Strategischen-Asset-Allokation ebenfalls für den Findungsprozess einer optimalen Kapitalallokation verwendet.

Passend zu einem sequentiellen Asset-Liability-Management-Ansatz, dessen Grundlage die zu einem bestimmten Stichtag festgehaltenen Passiva darstellen, wird in der vorliegenden Arbeit ein Modell präsentiert, das die Assets gegenüber einer statischen Passivseite optimiert. Eine von den Aktiva dynamisch abhängende Passivseite, wie sie im Lebensversicherungsgeschäft besteht, wird in diesem Optimierungsmodell nicht erfasst. Daher beschränkt sich die Arbeit auf die Optimierung im Sachversicherungsumfeld.

Die dieser Arbeit zugrunde liegende Fragestellung umfasst die Konstruktion eines Optimierungsprogramms, das unter Beachtung der vielfältigen Rahmenbedingungen einer Strategischen-Asset-Allokation die bestmögliche Kapitalallokation liefert. Es sollen viele unterschiedliche Zusammenhänge (Diversifizierungseffekte, Zusammenspiel verschiedener Risikoarten, rechtliche Vorgaben, Transaktionskosten, Absicherungskonzepte etc.) in Form von komplexen Nebenbedingungen für ein großes Anlageuniversum berücksichtigt werden, die mithilfe der klassischen Markowitz-Optimierung nicht erfassbar wären.

Als Ergebnis wird ein in sich geschlossenes Optimierungsmodell vorgestellt, das die bereits genannten Anforderungen sowie weiterführende Fragestellungen einbezieht. Ein solches Modell kann zu einem unverzichtbaren Impulsgeber für die Erstellung einer Strategischen-Asset-Allokation werden.

Im ersten Kapitel werden die für diese Arbeit relevanten Risikomaße eingeführt. Zu Beginn werden die Maße anhand der Einteilung von Albrecht [2004] in zwei Typen eingeteilt, bevor die mathematische Definition vorgestellt wird. Dieser folgt das zentrale Axiomensystem für Risikomaße, das betriebswirtschaftliche Anforderungen an die Risikomaße mathematisch zusammenfasst und unter dem Begriff der *Kohärenz* bekannt ist. Auf dieser Grundlage werden die Risikomaße Volatilität, Value-at-Risk und Conditional-Value-at-Risk eingeführt und ihre Vor- und Nachteile besprochen. Die Prüfung auf Kohärenz zeigt, dass lediglich der Conditional-Value-at-Risk im Fall einer stetigen Verteilung die geforderten Axiome erfüllt.

Die Einführung der Risikomaße bildet die Grundlage für die im zweiten Kapitel vorgestellten Methoden zur Portfoliooptimierung. Zunächst wird der klassische Ansatz von Markowitz vorgestellt. Die ausführliche Darstellung der Markowitz-Optimierung dient der Einführung in die Thematik und schafft eine Basis für die zweite Optimierungsmethode (Optimierung des Conditional-Value-at-Risks) sowie für das auf dieser Methode aufbauende dritte Kapitel. Markowitz führt prägende wirtschaftsmathematische Begriffe wie

das Minimum-Varianz-Portfolio oder Effizienz und Diversifikation ein, die in der weiteren Arbeit eine wichtige Rolle spielen. Anschließend wird die Methodik der Conditional-Value-at-Risk-Optimierung nach Uryasev [2000] eingeführt. Dieses schwierige Unterfangen gelingt Uryasev durch die Konstruktion einer Ersatzfunktion, deren Ableitung der des Conditional-Value-at-Risks gleicht. In Ermangelung eines ausgeführten Beweises dieser bedeutsamen Gleichheit im Artikel von Uryasev [2000], wird ein solcher Beweis in Abschnitt 2.2.1 explizit vorgeführt.

Die Optimierungsmethode von Uryasev ermöglicht die insbesondere für Versicherungsunternehmen vorteilhafte Optimierung mithilfe von Szenarien, die in der Regel zur Risiko(kapital)berechnung verwendet werden. Der Optimierungsansatz wird detailliert erläutert und bildet die Grundlage für das in dieser Arbeit vorgestellte Optimierungsmodell. Das Optimierungsproblem wird in Abschnitt 2.2.3 als sogenanntes *lineares Optimierungsprogramm* formuliert, das im nächsten Kapitel sukzessiv erweitert wird. Der letzte Absatz des zweiten Kapitels gibt eine mathematische Einführung in die Erstellung von Szenarien.

Das dritte Kapitel beschreibt das auf eine Strategische-Asset-Allokation zugeschnittene Optimierungsmodell, das betriebswirtschaftlich und mathematisch auf dem linearen Optimierungsprogramm aus Kapitel 2 aufbaut. Zur Einführung des Modells werden Anforderungen an eine Strategische-Asset-Allokation im Rahmen des Asset-Liability-Managements diskutiert. Hierbei wird ein möglicher operativer Prozess zur Optimierung vorgeschlagen. Die weiteren Abschnitte beschäftigen sich mit der Zusammenstellung des Modells aus verschiedenen Bausteinen, die sich aus den besprochenen Anforderungen ergeben. Dabei wird das zu optimierende Risikomaß (Asset-Liability-Mismatch-Risiko) eingeführt, das aufsichtsrechtliche Anforderungen umsetzt. Es bildet, neben der Einbeziehung der Passivseite in die Optimierung und den Renditen, die Basis des Optimierungsprogramms. Aus der Theorie des Capital-Asset-Pricing-Modells wird die Idee des Marktportfolios aufgegriffen, um aus diesem mittels einer Rückwärtsoptimierung (Gleichgewichts-)Renditen zu gewinnen.

Auf dieser Grundlage werden weitere Bausteine in Form von Nebenbedingungen einbezogen. Diese sogenannten Module dienen der Umsetzung von Vorgaben und Anforderungen verschiedenster Art. Sie werden in Abschnitt 3.10 vorgestellt.

Nach der theoretischen Einführung folgt im vierten Kapitel eine umfangreiche Beispieloptimierung, in welcher der Optimierungsprozess durchlaufen wird und die einzelnen Bausteine

des Modells analysiert werden. Dabei werden die Auswirkungen einzelner Nebenbedingungen auf die Ergebnisse interpretiert, um auf diese Weise ein Gefühl für die Funktionsweise des Optimierungsprogramms zu vermitteln.

Das fünfte Kapitel verschafft dem Leser einen Überblick über die in der Arbeit gewonnenen Erkenntnisse und zeigt ihre Implikationen auf. Es folgt eine kritische Auseinandersetzung mit dem Optimierungsmodell. Nach einem Ausblick auf mögliche Erweiterungen des Modells schließt die Arbeit mit einem Fazit.

# Kapitel 1

## Risikomaße

Die Betrachtung und Messung von Risiken zielt in der Regel auf die Auswahl von einer aus mehreren Handlungsalternativen ab, d. h. auf das Treffen einer Entscheidung. In der Entscheidungstheorie wird grundsätzlich differenziert, ob Entscheidungen *unter Sicherheit* oder *unter Unsicherheit* getroffen werden. Bei Entscheidungen unter Sicherheit liegt ein deterministisches Entscheidungsmodell vor, das bedeutet, dass die eintretenden Umweltzustände bekannt sind. Bei den für diese Arbeit relevanten Entscheidungen unter Unsicherheit unterscheidet man darüber hinaus zwischen *Entscheidungen unter Risiko*, bei denen ein stochastisches Modell zugrunde liegt, und *Entscheidungen unter Ungewissheit*, bei denen zwar die möglichen Zustände bekannt sind, nicht jedoch deren Eintrittswahrscheinlichkeiten.

Trifft man Entscheidungen unter Risiko, so ist es sinnvoll, die Alternativen anhand ihres Risikogehalts mithilfe einer (binären) Risikoordnungsrelation  $\geq_R$  zu ordnen. Dadurch lassen sich Aussagen folgender Art treffen:

Sind  $A_1, A_2$  zwei Handlungsalternativen mit der Relation  $A_1 \geq_R A_2$  gegeben, so birgt  $A_1$  mindestens genau so viel (oder mehr) Risiko wie  $A_2$ .<sup>1</sup>

Risikomaße sind ein Hilfsmittel zur Quantifizierung einer solchen Risikoordnungsrelation auf der Grundlage eines unterstellten wahrscheinlichkeitstheoretischen Modells. Für ein Risikomaß  $R$  sollte gelten:

$$A_1 \geq_R A_2 \Leftrightarrow R(X_{A_1}) \geq R(X_{A_2}), \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup> Vgl. z. B. Albrecht [2004], Seite 6.

wobei  $X_{A_1}, X_{A_2}$  diejenigen Zufallsvariablen sind, welche die (in der Regel in Geldeinheiten bewerteten) Konsequenzen der Handlungsalternativen  $A_1$  und  $A_2$  darstellen.

Durch die Quantifizierung ihres Risikogehalts mithilfe eines Risikomaßes erhalten die Alternativen eine numerische Ordnung.

Unabhängig von einer Ordnung der Alternativen gemäß ihres Risikogehalts kann die Ordnung gemäß der Präferenzen des Entscheiders sein. Diese wird durch eine Präferenzordnung  $\geq_P$  gegeben, welche die Einstellung des Entscheiders zu den Konsequenzen der Alternativen widerspiegelt.<sup>2</sup> Letztendlich führt diese zu einer Präferenzfunktion  $\Phi$ , durch welche die verschiedenen Präferenzen des Entscheiders abgebildet werden. Zu diesen Präferenzen gehört beispielsweise die Risikopräferenz, die Aufschluss über den Grad der Risikoaversion des Entscheiders gibt. In mathematischen Modellen hat der Entscheider häufig die Möglichkeit, seine Risikopräferenz durch einen Parameter anzugeben, z. B. den Parameter  $\tau$  im Rahmen der allgemeinen Portfolio-Selektion nach Markowitz in Kapitel 2.1.4.

Aus den verschiedenen Präferenzen des Entscheiders resultieren unterschiedliche Ziele. Das führt in der Regel zu einem sogenannten Zielkonflikt. Dies bedeutet, dass keine Alternative existiert, die bezüglich aller Präferenzen am Besten abschneidet, d. h., es existiert keine allgemein optimale Alternative.<sup>3</sup> Im Rahmen dieser Arbeit wird dem Entscheider eine grundsätzliche **Risikoaversion** unterstellt.

Dieses erste Kapitel der Arbeit stellt eine Einführung in die Thematik der Risikomaße dar. Im ersten Abschnitt findet eine Unterteilung der Risikomaße in die zwei Gruppen Typus I und Typus II statt. Nach einer mathematischen Definition von Risikomaßen folgt die Betrachtung des Axiomensystems für kohärente Risikomaße nach Artzner, Delbaen, Eber und Heath<sup>4</sup>, welches betriebswirtschaftlich sinnvolle Anforderungen an Risikomaße umfasst. Anschließend werden die drei relevanten Risikomaße (Volatilität, Value-at-Risk und Conditional-Value-at-Risk) für die weitere Arbeit vorgestellt.

<sup>2</sup> Vgl. Eisenführ et al. [2010], Abschnitt 2.5.1, Satz 1 folgende.

<sup>3</sup> Zur Vertiefung siehe bei Eisenführ et al. [2010], Kapitel 2.5 sowie Kapitel 3.

<sup>4</sup> Artzner et al. [1999].

## 1.1 Typisierung von Risikomaßen

Risikomaße dienen der Ordnung von Alternativen entsprechend ihres Risikogehalts. Albrecht unterscheidet Risikomaße anhand ihrer Darstellung des Risikos in zwei Typen:<sup>5</sup>

I Risiko als Ausmaß der möglichen Abweichungen von einer Zielgröße (Typus 1) und

II Risiko als notwendiges (Risiko-)Kapital, bzw. notwendige Prämie (Typus 2).

Hinter dem Typus II stehen die sogenannten *lageabhängigen Risikomaße*, die von der Höhe des Erwartungswerts abhängig sind. Die lageabhängigen Risikomaße lassen sich durch die Zentrierung der Zufallsvariable in lageunabhängige Risikomaße umformulieren<sup>6</sup>.

Zum Typus der lageunabhängigen Risikomaße (Typus I) gehört als bekanntester Vertreter die Standardabweichung, welche die Volatilität misst. Diese wird in Kapitel 1.4 vorgestellt. Die lageunabhängigen Maße werden in der Literatur (z. B. bei Hull [2010]) auch als *momentbasierte Risikomaße* bezeichnet. Sie messen die Abweichungen von einer erwarteten Zielgröße (in der Regel dem Erwartungswert) in beide Richtungen. Das bedeutet, dass diese Maße Abweichungen von der Zielgröße *neutral* behandeln, d. h., es spielt keine Rolle, ob es sich um eine positive (z. B. ein Gewinn) oder eine negative (z. B. Verlust) Verfehlung der Zielgröße handelt. Mit anderen Worten wird eine Über- oder Unterschreitung des Erwartungswerts gleichermaßen bestraft. Daher werden die Risikomaße des Typus I auch als *zweiseitige Risikomaße* bezeichnet.

Wird Risiko gemäß des Typus II als bereitzustellendes Risikokapital aufgefasst, so spricht man von einer einseitigen Risikomessung. Ein einseitiges Risikomaß misst nur die aus Sicht des Entscheiders negative Entwicklung und dient ihm zur Einschätzung potenzieller Verluste.

Am Ende führt die Risikomessung zu einer Bewertung möglicher Chancen im Verhältnis zu den damit verbundenen Risiken, denn jede mögliche Chance ist mit einem gewissen Risiko verbunden, das es abzuwägen gilt. Mit der Betrachtung von Ertrag als Chance und Volatilität als Risiko liefert Harry Markowitz im Rahmen seiner Portfolioselektion (Kapitel 2.1) ein klassisches Modell dazu.

---

<sup>5</sup> Albrecht [2004], Seite 8.

<sup>6</sup> Hierzu berechnet man anstelle des Risikomaßes von  $X$  das Risikomaß von  $X - E[X]$ .

## 1.2 Mathematische Definition von Risikomaßen

Nach der betriebswirtschaftlichen Einführung der Risikomaße folgt die abstrakte mathematische Definition des Risikomaßes, die insbesondere für die Definition des Kohärenzbegriffs benötigt wird.

Sei dazu  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  und einem Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$ .  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Omega, \mathbb{R}^k)$  bezeichne den Raum der  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -messbaren Abbildungen, d. h. der  $\mathbb{R}^k$ -wertigen Zufallsvariablen  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^k, \mathcal{B})$ ,  $\omega \mapsto X(\omega)$ .

Kriele und Wolf [2012] definieren ein Risikomaß folgendermaßen:

**Definition 1.1** (Risikomaß)

Ein **Risikomaß** ist eine Abbildung

$$\rho : \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \rho(X),$$

wobei  $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Omega, \mathbb{R})$  ein (von  $\rho$  abhängiger) geeigneter Vektorunterraum ist.<sup>7</sup>

Die Autoren Kriele und Wolf vermerken, dass populäre Risikomaße nur auf Teilräumen von  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Omega, \mathbb{R})$  definiert sind, sodass die Einschränkung des Maßes nicht nur notwendig ist, sondern auch von dem jeweiligen Risikomaß abhängt.<sup>8</sup>

## 1.3 Kohärente Risikomaße

Die Autoren Artzner, Delbaen, Eber und Heath veröffentlichten im Juli 1999 das Paper „Coherent Measures of Risk“<sup>9</sup>, indem sie vier Axiome vorstellen, die eine sinnvolle interpretatorische Grundlage für Risikomaße darstellen sollen. Erfüllt ein Risikomaß alle vier Axiome, so bezeichnen es die Autoren als *kohärent*. Der Begriff der „Kohärenz“ leitet sich aus dem Lateinischen *cohaerentia* (Zusammenhang) bzw. *cohaereo* „einen Zusammenhang haben“ ab. Zunächst werden die vier mathematischen Axiome, die nach Artzner et al. [1999] für ein kohärentes Risikomaß verlangt werden, vorgestellt.<sup>10</sup> Anschließend erfolgt eine betriebswirtschaftliche Interpretation der Axiome im Kontext der Portfoliotheorie.

<sup>7</sup> Kriele und Wolf [2012], Seite 19, Definition 2.1.

<sup>8</sup> Kriele und Wolf [2012], Seite 20, Anmerkung 2.1.

<sup>9</sup> Artzner et al. [1999].

<sup>10</sup> Vergleiche dazu Artzner et al. [1999], Seite 209 und 210.

**Definition 1.2** (Kohärenz)

Sei  $X \in \mathcal{M}(\Omega, R^k)$  eine Zufallsvariable und  $\rho$  ein Risikomaß gemäß Definition (1.1) innerhalb des Kontexts des vorherigen Abschnitts 1.2 (Mathematische Definition von Risikomaßen). Ein Risikomaß, das die folgenden vier Axiome erfüllt, bezeichnet man als **kohärent**:

- **Axiom T** (Translationsinvarianz)

Für alle Skalare  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:  $\rho(X + \lambda) = \rho(X) - \lambda$ .

- **Axiom S** (Subadditivität)

Für  $k$  Zufallsvariablen  $X_i \in \mathcal{M}_B(\Omega, R^k)$  mit  $i = 1, \dots, k$  gilt die Bedingung:

$$\rho\left(\sum_{i=1}^k X_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \rho(X_i).$$

- **Axiom PH** (Positive Homogenität)

Für Skalare  $\lambda \geq 0$  gilt:  $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ .

- **Axiom M** (Monotonie)

Für zwei Zufallsvariablen  $X, Y \in \mathcal{M}_B(\Omega, R^k)$  mit der Eigenschaft  $X \leq Y$  folgt:  $\rho(Y) \leq \rho(X)$ .

Die vier Axiome beschreiben in mathematischer Sprache betriebswirtschaftliche Anforderungen an die Messung von Risiken. Fügt man einem beliebigen (riskanten) Portfolio  $X$  sicheres Kapital  $\lambda$  hinzu, so verringert sich der aus dem Portfolio  $X$  resultierende Risikokapitalbedarf  $\rho(X)$  genau um den Betrag  $\lambda$  (Axiom der Translationsinvarianz).

Das Axiom der Subadditivität spiegelt den Diversifikationsgedanken eines Investors wider: Von der Zusammenführung verschiedener Portfolios  $X_1, \dots, X_k$  erhofft sich der Investor Diversifikationseffekte, sodass das Risiko des zusammengesetzten Gesamtportfolios  $\rho(\sum_{i=1}^k X_i)$  gegenüber der Summe der Risiken der einzelnen Portfolios  $\sum_{i=1}^k \rho(X_i)$  kleiner oder schlimmstenfalls gleich groß ist.

Das Axiom der positiven Homogenität bedeutet: Wird ein Portfolio um einen Faktor  $\lambda$  skaliert (und nicht in seinem Zusammensetzungsverhältnis verändert), so wird sein Risiko um denselben Faktor skaliert.

Etwas schwieriger zu interpretieren ist das Axiom der Monotonie. Gilt für zwei Zufallsvariablen  $X, Y$ , dass  $X \leq Y$  ist, so bedeutet dies in der Portfoliodenkweise, dass für jedes mögliche Portfolio  $w_x \in X$  ein jedes Portfolio  $w_y \in Y$  einen höheren (besseren) Wert aufweist und somit weniger riskant sein sollte. Hull formuliert dies betriebswirtschaftlich präzise: „Wenn ein Portfolio ( $X$ ) für jeden Umweltzustand ( $w_x \in X$ ) ein schlechteres Resultat liefert als ein anderes (Portfolio  $Y$ ), so soll auch sein Risikomaß ( $\rho(Y) \leq \rho(X)$ ) größer sein.“<sup>11</sup>

Die vier Kohärenzaxiome stellen eine betriebswirtschaftlich sinnvolle Grundlage für Risikomaße dar. Allerdings erfüllen viele Risikomaße diese Kriterien nicht. Im Folgenden werden die für diese Arbeit relevanten Risikomaße vorgestellt und auf Kohärenz geprüft. Begonnen wird mit der Standardabweichung als Volatilitätsmaß, welches Einzug in die Portfoliotheorie nach Markowitz (Kapitel 2.1) findet.

## 1.4 Volatilität (als Maß des Typus I)

Betrachtet man Risiko als Abweichung von einer Erwartung, so bietet die Standardabweichung als zweiseitiges Risikomaß eine Möglichkeit dieses Risiko zu messen.

Formuliert man die Standardabweichung

$$\sigma(X) = \sqrt{E[X^2] - E^2[X]} = \sqrt{Var(X)}$$

als Risikomaß gemäß Definition 1.1, so erhält sie folgende verallgemeinerte Gestalt:

**Definition 1.3** (Standardabweichung als Risikomaß)

*Zu gegebenen Parametern  $a$  und  $b$  aus  $\mathbb{R}$  definiert die Standardabweichung  $\sigma(X)$  durch*

$$\rho_{a,b} : \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, X \longmapsto a \cdot E[X] + b \cdot \sigma(X)$$

*ein Risikomaß. Für die Wahl  $a = 0$  und  $b = 1$  erhält man  $\rho_{0,1}(X) = \sigma(X)$ .*

Um festzustellen, ob es sich bei der Volatilität um ein kohärentes Risikomaß handelt, werden die einzelnen Kohärenzaxiome überprüft. Die Wahl der Variablen erfolgt dabei entsprechend der Definition des Kohärenzbegriffs<sup>12</sup>.

<sup>11</sup> Vgl. Hull [2010], Seite 193, [1.].

<sup>12</sup> Definition 1.2.

- Axiom T ist **nicht** erfüllt, denn

$$\sigma(X + \lambda) = \sqrt{\text{Var}(X + \lambda)} = \sqrt{\text{Var}(X)} \neq \sigma(X) - \lambda.$$

- Axiom S ist erfüllt, denn

$$\text{für Varianzen gilt } \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt für Kovarianzen, d. h.

$$|\text{Cov}(X, Y)|^2 \leq \text{Cov}(X, X) \cdot \text{Cov}(Y, Y),$$

bzw. umformuliert

$$\text{Cov}(X, Y) \leq \sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}.$$

Für die Standardabweichung gilt

$$\sigma(X + Y) = \sqrt{\text{Var}(X + Y)} = \sqrt{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)}.$$

Setzt man die Ungleichung ein, erhält man die Subadditivität

$$\begin{aligned} \sigma(X + Y) &\leq \sqrt{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2(\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)})} \\ &= \sqrt{(\sqrt{\text{Var}(X)} + \sqrt{\text{Var}(Y)})^2} = \sigma(X) + \sigma(Y). \end{aligned}$$

- Axiom PH ist erfüllt, denn

$$\sigma(\lambda X) = \sqrt{\text{Var}(\lambda X)} = \sqrt{\lambda^2 \text{Var}(X)} = \lambda \sqrt{\text{Var}(X)} = \lambda \sigma(X).$$

- Axiom M ist **nicht** erfüllt, denn

$$\text{sowohl für } X \leq Y \text{ als auch } X + \lambda \geq Y \text{ gilt } \text{Var}(X + \lambda) = \text{Var}(X) \leq \text{Var}(Y).$$

Es lässt sich also festhalten, dass die Standardabweichung als Risikomaß nicht kohärent ist, da sie nicht translationsinvariant ist und darüber hinaus das Axiom der Monotonie verletzt. Die fehlende Translationsinvarianz verdeutlicht, dass eine Interpretation der Ergebnisse als Risikokapital nicht sinnvoll ist, da das Hinzufügen (oder Wegnehmen) von sicherem Kapital keinen Einfluss auf die Quantifizierung des in einem Portfolio enthaltenen Risikos hat. Weiterhin wird im Kontext wirtschaftlicher Fragestellungen der Begriff des Risikos in der Regel mit einer *unerwünschten* Abweichung verwendet, sodass die Abweichung lediglich in eine Richtung betrachtet werden soll. Auch in diesem Fall ist die Standardabweichung als zweiseitiges Risikomaß kein geeignetes Maß, da sie alle Abweichungen gleichermaßen

berücksichtigt. Kriele und Wolf<sup>13</sup> schlagen für die Messung von Verlusten die Darstellung einer einseitigen Standardabweichung vor:

$$\sigma_+ = \sqrt{E[\max(0, X - E[X])]^2}.$$

Trotz gewisser Nachteile ist die Standardabweichung als Volatilität nach wie vor eins der wichtigsten und beliebtesten Risikomaße. Lange bevor Ende der 1990er Jahre der Begriff der Kohärenz geprägt wurde, fand die Volatilität in den 1950er Jahren Einzug in die Portfoliotheorie nach Markowitz, welche in Kapitel 2.1 besprochen wird.

## 1.5 Value-at-Risk (als Maß des Typus II)

Historisch gesehen hat die Investmentbank J.P. Morgan den Value-at-Risk durch die Veröffentlichung ihres Value-at-Risk-Modells 1994 zu einem weltweit verbreiteten Risikomaß gemacht. Um der Forderung des damaligen Vorstandsvorsitzenden (Dennis Weatherstone) nach einer einfachen Übersicht über das Gesamtexposure des Unternehmens nachzukommen, wurde der Value-at-Risk in Anlehnung an die Portfoliotheorie von Markowitz entwickelt.<sup>14</sup>

Die Stärke des Value-at-Risks liegt darin, ein Abbild des Gesamtrisikos eines Exposures in einer einzelnen Kennzahl zu schaffen. Hull beschreibt den Value-at-Risk durch die folgende, allgemein gern getätigte Aussage:

*„Ich bin zu  $p$  Prozent sicher, dass wir im Zeitraum von  $t$  Tagen nicht mehr als  $x = \text{VaR}$  Dollar verlieren werden.“*<sup>15</sup>

Der Value-at-Risk wird also in Abhängigkeit von einem Konfidenzniveau, welches im Folgenden als  $\alpha = 1 - p$  notiert wird, sowie einer Zeitperiode  $T$  berechnet. Während man mit  $\alpha$  das Konfidenzniveau bezeichnet, nennt man  $p = (1 - \alpha)$  auch *Sicherheitsniveau*. Formuliert man obigen Satz im Sinn des Solvenzgedankens, so lautet er:

*Die Höhe des Value-at-Risks entspricht genau dem Eigenkapital, welches ein Unternehmen innerhalb einer Periode  $T$  mindestens vorhalten muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von  $(1 - \alpha)$  nicht verzehrt zu werden.*

Mathematisch genügt der Value-at-Risk der folgenden Definition.

<sup>13</sup> Kriele und Wolf [2012], Abschnitt 2.2.1.1, letzter Satz.

<sup>14</sup> Vgl. Hull [2010], Seite 188 f.

<sup>15</sup> Hull [2010], Seite 189 Mitte.

**Definition 1.4** (Value-at-Risk)

Sei  $F_X$  die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen  $X \in \mathcal{M}_B(\Omega, \mathbb{R}^k)$  und  $\alpha \in (0, 1)$  ein gegebenes Konfidenzniveau. Dann ist der **Value-at-Risk** durch

$$\rho_\alpha : \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, X \longmapsto \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > \alpha\} \quad (1.2)$$

definiert.<sup>16</sup> Schreibe  $\text{VaR}_{(1-\alpha)}(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > \alpha\}$ .

**Bemerkung 1.5**

Artzner et al. [1999] beschreiben den Value-at-Risk als das Risikokapital, das ein Portfolio gemäß der jeweiligen Value-at-Risk Berechnung benötigt, und betonen dies mit ihrer Vorzeichenwahl:

Sei  $\alpha \in (0, 1)$  ein gegebenes Konfidenzniveau,  $R$  ein Referenzinstrument und  $P$  das Wahrscheinlichkeitsmaß von  $X$ . Dann ist der Value-at-Risk definiert als

$$\text{VaR}_{(1-\alpha)}(X) = -\inf\{x | P[X \leq xR] > \alpha\}.$$
<sup>17</sup>

Letztendlich hängt das Vorzeichen von der Definition der Zufallsvariablen oder des Risikomaßes ab und wird in der Literatur unterschiedlich gehandhabt. Bei der Verwendung von Definition 1.4 wird davon ausgegangen, dass die Verteilung der Zufallsvariablen eine *Verlustverteilung* ist, sodass der Value-at-Risk positive Ergebnisse liefert. Dann gilt: Je höher der Value-at-Risk ausfällt, desto größer ist der potentielle Verlust.

Die folgende Aufzählung fasst einige wichtige Eigenschaften des Value-at-Risks zusammen:

- (1) Der Value-at-Risk gehört zu den Quantilsrisikomaßen, da er gemäß obiger Definition das  $(1 - \alpha)$ -Quantil, d. h. das negative Quantil, der Verteilung von  $X$  darstellt.
- (2) Es gibt Fälle in denen der Value-at-Risk für bestimmte (große)  $\alpha$  negativ ist, sodass der negative Wert des „Verlust-Risikomaßes“ folglich einem Gewinn entspräche.<sup>18</sup>
- (3) Ist die Verteilungsfunktion von  $X$  invertierbar, so gilt:  $\text{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$ .

<sup>16</sup> Vgl. Kriele und Wolf [2012], Seite 22, Definition 2.2.

<sup>17</sup> Vgl. Artzner et al. [1999], Definition 3.3.

<sup>18</sup> Vgl. Kriele und Wolf [2012], Seite 22, Anmerkung 2.2.

Als Risikomaß ist der Value-at-Risk von zentraler Bedeutung für die wertorientierte Risikosteuerung im Zusammenhang mit Eigenkapitalvorschriften. So wurde er im Rahmen von „Solvency II“ als Risikomaß festgelegt. Das sogenannte *Solvency Capital Requirement (SCR)*

$$\text{SCR} = \text{VaR}_\alpha(X) - E[X]$$

zentriert den VaR, wodurch sich ein lageunabhängiges Maß ergibt. Als  $\alpha$ -Quantil wurde der Wert 0,05 festgelegt, aus dem sich ein Sicherheitsniveau von 99,5% ergibt. Man spricht vom VaR99.5.

Der Value-at-Risk weist als Risikomaß neben seinen zahlreichen positiven Eigenschaften zwei entscheidende Mängel auf:

- (1) Der Value-at-Risk ist im Allgemeinen kein kohärentes Risikomaß nach Definition 1.2, wie die Prüfung der Axiome zeigt.

- Axiom T ist erfüllt, denn

$$\begin{aligned} \text{VaR}(X + \lambda) &= -\inf\{x \in \mathbb{R} | P[X + \lambda \leq x] > \alpha\} \\ &= -\inf\{x \in \mathbb{R} | P[X \leq x - \lambda] > \alpha\} \\ &= -\inf\{x + \lambda \in \mathbb{R} | P[X \leq x + \lambda - \lambda] > \alpha\} \\ &= -\inf\{x \in \mathbb{R} | P[X \leq x] > \alpha\} - \lambda \\ &= \text{VaR}(X) - \lambda. \end{aligned}$$

- Axiom PH ist erfüllt, denn

$$\begin{aligned} \text{VaR}(\lambda X) &= -\inf\{x \in \mathbb{R} | P[\lambda X \leq x] > \alpha\} \\ &= -\inf\{x \in \mathbb{R} | P[X \leq \frac{1}{\lambda}x] > \alpha\} \\ &= -\inf\{\lambda x \in \mathbb{R} | P[X \leq \lambda \frac{1}{\lambda}x] > \alpha\} \\ &= -\lambda \inf\{x \in \mathbb{R} | P[X \leq x] > \alpha\} \\ &= \lambda \text{VaR}(X). \end{aligned}$$

- Axiom M ist erfüllt, denn zu  $X \leq Y$  ist die Ungleichung  $F_X(x) \leq F_Y(x)$  äquivalent, sodass die Menge  $\{x \in \mathbb{R} \mid F_Y(x) > \alpha\}$  eine Teilmenge von  $\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) > \alpha\}$  ist. Daraus folgt

$$\text{VaR}(X) = -\inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_Y(x) > \alpha\} \leq -\inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) > \alpha\} = \text{VaR}(Y).^{19}$$

- Axiom S ist jedoch **nicht** erfüllt, wie das folgende Gegenbeispiel beweist.

Man betrachte zwei Optionen auf zwei *unterschiedliche, unabhängige* Aktien (Underlyings). Sei  $O_1$  eine Option auf Aktie  $A_1$  und sei  $O_2$  Option auf Aktie  $A_2$ . Die (Verlust-)Verteilungen haben folgende Gestalt:

$$O_1 := \begin{cases} 0, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,91 \\ -100, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,09. \end{cases}$$

$$O_2 := \begin{cases} 0, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,91 \\ -100, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,09. \end{cases}$$

Die Berechnung der Value-at-Risks zu  $\alpha = 0,1$  ergibt

$$\text{VaR}_{90\%}(O_1) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P[O_1 \leq x] > 0,1\} = 0$$

sowie

$$\text{VaR}_{90\%}(O_2) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P[O_2 \leq x] > 0,1\} = 0.$$

Betrachtet man anschließend die Summe  $O_1 + O_2$ , so ergibt sich analog

$$O_1 + O_2 := \begin{cases} 0, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } (0,91)^2 = 0,8281 \\ -100, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 2 \cdot (0,09 \cdot 0,91) = 0,1638 \\ -200, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } (0,09)^2 = 0,0081, \end{cases}$$

und ein Value-at-Risk von

$$\text{VaR}_{90\%}(O_1 + O_2) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P[O_1 + O_2 \leq x] > 0,1\} = 100,$$

sodass die Subadditivitätsbedingung nicht erfüllt ist, denn

$$\text{VaR}_{90\%}(O_1 + O_2) \not\leq \text{VaR}_{90\%}(O_1) + \text{VaR}_{90\%}(O_2).$$

<sup>19</sup>Nguyen [2008], Seite 138.

Damit ist der Value-at-Risk kein kohärentes Risikomaß nach Definition 1.2. Das bedeutet, dass der Value-at-Risk nicht in der Lage ist den Gedanken der Risikostreuung widerzuspiegeln, da der VaR eines Portfolios größer sein kann als die Summe der VaR-Werte der Einzeltitel. (Der VaR ist ausschließlich unter Normalverteilungsannahme und mit einer Wahl  $\alpha < 0,5$  subadditiv<sup>20</sup>.)

- (2) Der Value-at-Risk gibt den minimalen Verlust an, mit dem man im  $\alpha$ -Prozent-Fall rechnen muss. Viel interessanter oder wichtiger wäre häufig die Frage, wie hoch der tatsächlich *erwartete Verlust* im  $\alpha$ -Prozent-Fall ausfällt.

Der im nächsten Kapitel 1.7 beschriebene Conditional-Value-at-Risk beantwortet nicht nur die Frage nach der erwarteten Verlusthöhe, sondern greift auch die Problematik der fehlenden Subadditivität des Value-at-Risks auf.

Zunächst folgt jedoch eine kurze Betrachtung der unterschiedlichen Herangehensweisen an die praktische Berechnung des Value-at-Risks.

## 1.6 Ansätze zur Kalkulation des Value-at-Risks

Dieser Abschnitt bietet einen kurzen Überblick über die Methodik der VaR-Berechnung. Als Gemeinsamkeit der vorgestellten Methoden wird zunächst das Konfidenzniveau  $\alpha$  sowie der Zeithorizont  $T$  (in der Regel in Tagen) festgelegt. Gängige Werte für die Marktrisikoberechnung sind beispielsweise ein  $\alpha$  von 0,005 oder 0,01, die umgangssprachlich einem „VaR99.5“ bzw. „VaR99“ entsprechen.<sup>21</sup> Als Zeithorizont werden zum Beispiel 501 Tage verwendet, aus denen genau 500 Szenarien resultieren.<sup>22</sup>

Cremer [1999] stellt ein 4-Fragen-Konzept zur Berechnung vor, mit dem er den konkreten Rahmen zur Berechnung des Value-at-Risks festlegt. Sein Fragenkonzept führt zu folgenden Entscheidungen:

- (1) Gegenstand der Modellierung - Risikofaktoren oder Risikotreiber?
- (2) Modellgröße (Preise, Renditen) - absolut oder relativ?

<sup>20</sup> Siehe Artzner et al. [1999], Definition 3.3, Remark 1.

<sup>21</sup> Vgl. Hull [2010], Kapitel 12.

<sup>22</sup> Vgl. Hull [2010], Seite 298, Abschnitt 12.1.

- (3) Verteilung der Modellgrößen - empirisch oder parametrisch?
- (4) Wahl des Kalkulationsverfahrens für den Value-at-Risk der Modellgrößen?

Der erste Punkt spezifiziert, ob Finanztitel als Risikofaktoren modelliert werden oder einzelne Risikotreiber, die anschließend anhand einer Bewertungsfunktion zu Faktoren (Instrumenten) zusammengestellt werden. Risikotreiber können beispielsweise Zinsen, Währungen, Aktien u. ä. sein.

Eine Modellgröße (Zufallsvariable) ist meistens ein Wert, Preis oder eine Rendite und kann absolut oder relativ angegeben werden. Ihre Verteilung wird entweder bereits vorgegeben und parametrisiert oder aus der Vergangenheit empirisch festgelegt.

Drei sehr verbreitete Verfahren zur Berechnung des Value-at-Risks sind der Varianz-Kovarianz-Ansatz, der Monte-Carlo-Ansatz sowie die historische Simulation.

- **Varianz-Kovarianz-Ansatz**

Dieser analytische Ansatz basiert auf der Portfoliotheorie von Markowitz<sup>23</sup> und gibt eine Normalverteilung als Wahrscheinlichkeitsverteilung vor, d. h., es wird angenommen, dass die Veränderungen der Wertpapiere einer Normalverteilung folgen. Diese Veränderungen werden aus historischen Daten (Zeitreihen) zusammengetragen und anschließend verwendet, um eine multivariate Normalverteilung zu kalibrieren, d. h. zur Schätzung des Erwartungsvektors der Renditen  $\mu$  sowie der Kovarianzmatrix  $C$  als Parameter einer mehrdimensionalen Normalverteilung. In einer Kovarianzmatrix sind insbesondere die Korrelationen zwischen den Finanztiteln enthalten, sodass mögliche Diversifikationseffekte berücksichtigt werden. Zur Kalibrierung der Wertpapiere werden im Wesentlichen zwei Methoden unterschieden.

- Delta-Normal-Methode

Man unterstellt ein lineares Modell für die gemeinsame Verteilung (multivariate Normalverteilung) der Änderungen in den Marktvariablen. Dieser Ansatz funktioniert für lineare (symmetrische) Finanzmarktprodukte (Aktien, Anleihen, Rohstoffe und ähnliche) im Allgemeinen gut. Für Optionen und andere unsymmetrische Finanztitel stellt das Modell nur einen Approximationsversuch dar, da das Modell das Portfoliogamma nicht berücksichtigt.<sup>24</sup>

---

<sup>23</sup> Siehe dazu Kapitel 2.1.

<sup>24</sup> Vgl. Hull [2010], Kapitel 12 und 13.

Das Delta  $\Delta$  beschreibt die Sensitivität eines Finanzderivats auf Veränderungen seines Basiswerts (Underlying) durch die Formel

$$\Delta = \frac{\partial \text{Finanzderivat}}{\partial \text{Basiswert}}. \quad (1.3)$$

Der Begriff des unsymmetrischen Finanztitels soll an dieser Stelle das Bild des nicht proportionalen Gewinn-Verlust-Verhaltens veranschaulichen. Eine Option ist plötzlich „im Geld“ oder völlig wertlos, bzw. steigt oder fällt überproportional. Für Optionen und andere nicht lineare Produkte eignet sich der Delta-Gamma-Ansatz besser.

– Delta-Gamma-Ansatz

Der Delta-Gamma-Ansatz berücksichtigt das „Gamma“ eines Portfolios. Dies ist für nichtlineare, unsymmetrische Finanzmarktprodukte essentiell. Das Gamma berechnet sich als zweite Ableitung in Richtung des Basiswerts und ist ein Sensitivitätsmaß für das Portfoliodelta.

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \text{Finanzderivat}}{\partial (\text{Basiswert})^2}. \quad (1.4)$$

Je größer das Gamma ausfällt, desto sensibler reagiert das Finanzderivat auf den Basiswert.

• **Monte-Carlo-Simulation**

Unter dem Begriff „Monte-Carlo-Simulation“ versteht man verschiedene Verfahren zur Generierung von Realisationen speziell verteilter Zufallsvariablen, anhand derer man anschließend den Value-at-Risk berechnen kann. Als Basis werden zunächst gleichverteilte Zufallszahlen von einem Generator produziert. Da die speziellen Verteilungen der Modellgrößen als Grundlage für die stochastische Simulation genutzt werden sollen, findet anschließend eine Transformation der Zufallszahlen in Realisationen einer Zufallsvariablen mit der gewünschten Zielverteilung statt. Betrachtet man  $n$  Zufallsvariablen gleichzeitig, so bildet jedes  $n$ -Tupel mit Realisierungen in der Zielverteilung ein Szenario.

Diese Methode ist eine der verbreitetsten und wird auch zur Erstellung der Szenarien für die in dieser Arbeit beschriebenen Optimierung verwendet. Eine detailliertere Beschreibung der Methodik erfolgt in Kapitel 2.2.4 „Generierung von Szenarien“.

Sind die Szenarien generiert, wird aus diesen der gewünschte Quantilswert ausgewählt. Betrachtet man beispielsweise 10.000 Szenarien zur Berechnung des VaR<sub>99.5</sub>, so sortiert man die Realisierungen der Größe nach und sucht den fünfzig-schlechtesten Wert heraus, der dem 99.5-Quantil entspricht. Sollte sich in anderen Fällen ein VaR-Wert aufgrund einer zu geringen Szenarienzahl (z. B. 500 Szenarien) nicht direkt bestimmen lassen, kann ein Zwischenwert durch entsprechende Gewichtung von zwei Szenariowerten ermittelt werden. (Bei 500 Szenarien entspräche der VaR<sub>99.5</sub> dem Wert  $\frac{1}{2}(\text{Realisation } 497 + \text{Realisation } 498)$ .)

- **Historische Simulation**

Der Begriff der Simulation als solcher ist an dieser Stelle irreführend. Das Verfahren blickt zurück auf historische Zeitreihen und verwendet diese, um eine zukünftige Entwicklung zu prognostizieren. Der Value-at-Risk wird dann direkt auf einer gegebenen Anzahl von Daten „abgelesen“, sodass das Verfahren ohne Parametrisierung einer Verteilung auskommt. Das Ablesen beinhaltet eine Sortierung der Datenwerte und ein anschließendes Heraussuchen des VaR-Werts entsprechend des vorgegebenen Konfidenzlevels, analog zur Vorgehensweise bei den oben beschriebenen Monte-Carlo-Szenarien.

## 1.7 Conditional-Value-at-Risk (als Maß des Typus II)

Ein wesentliches Ziel bei der Entwicklung des Value-at-Risks bestand darin, die Risiken von Portfolios mit einer einzelnen Kennzahl vergleichen zu können. Bei der Betrachtung der folgenden beiden Verteilungsdichten, die zu demselben VaR-Wert führen, wird die Problematik des Risikomaßes deutlich: Der VaR bietet keine Information darüber, wie hoch ein möglicher Verlust letztendlich ausfallen könnte. Auf diese Weise können zwei vollkommen unterschiedliche Verteilungsdichten, wie in Abbildung 1.1, denselben VaR-Wert liefern, ohne dass dieser dabei die möglichen Verluste an den Außenrändern, d. h. die sogenannten *tail events*, berücksichtigt.

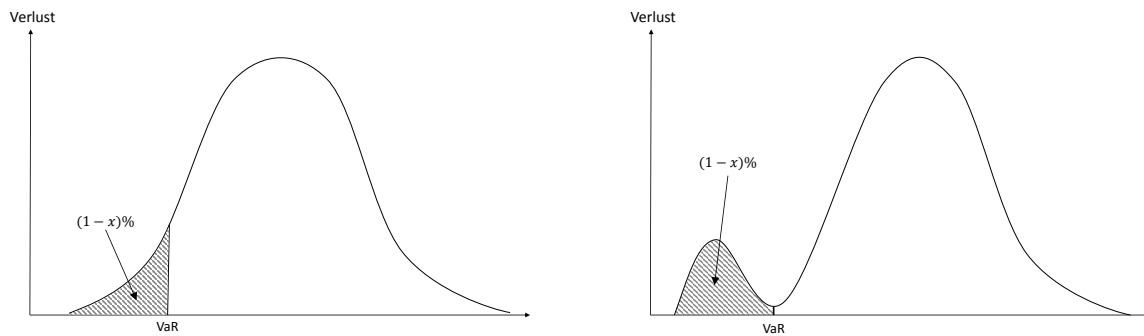


Abbildung 1.1: Zwei Verteilungsdichten mit identischem VaR<sup>25</sup>

An dieser Stelle kommt die Frage auf, mit welcher durchschnittlichen Verlusthöhe ein Investor in gewissen Fällen rechnen muss. Der *Conditional-Value-at-Risk (CVaR)* ermittelt den mittleren erwarteten Verlust bei Überschreitung eines vorgegeben VaR-Werts, der sich mathematisch mithilfe des folgenden bedingten Erwartungswerts beschreiben lässt.

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = E[X|X \geq \text{VaR}_\alpha(X)].^{26} \quad (1.5)$$

Für stetige Verteilungen ist der CVaR identisch mit dem Risikomaß *Expected-Shortfall (ES)*, welches als

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_\alpha(X) d\alpha \quad (1.6)$$

definiert ist.<sup>27</sup>

<sup>25</sup> Aus Hull [2009], Abbildungen 20.1 und 20.2.

<sup>26</sup> Albrecht und Maurer [2008], Seite 892.

<sup>27</sup> Vgl. Albrecht [2004], Abschnitt 7.2. sowie Acerbi und Tasche [2001], Seite 1498.

Unter Annahme einer stetigen Verteilungsfunktion wird für spätere Zwecke diese Integral-schreibweise des CVaR verwendet und

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_\alpha(X) d\alpha \quad (1.7)$$

gesetzt.

Betriebswirtschaftlich lässt sich formulieren: Der CVaR enthält zusätzlich zum VaR noch einen Sicherheitspuffer für den durchschnittlich erwarteten Verlust im Falle der Überschreitung des VaRs. Dieser Sicherheitspuffer wird in der Literatur auch als *Excess-Reserve* bezeichnet und kann mathematisch als bedingter Erwartungswert  $E[X - \text{VaR}_\alpha(X) | X \geq \text{VaR}_\alpha(X)]$  dargestellt werden<sup>28</sup>, sodass sich der CVaR in die beiden Teile Value-at-Risk und Excess-Reserve zerlegen lässt:

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(X) + E[X - \text{VaR}_\alpha(X) | X \geq \text{VaR}_\alpha(X)].$$

Aus dieser Gleichung folgt die wichtige Erkenntnis, dass der CVaR stets größer oder gleich dem Value-at-Risk ist:

$$\text{CVaR}_\alpha(X) \geq \text{VaR}(X). \quad (1.8)$$

Abschließend werden die Axiome der Kohärenz geprüft:

- Axiom T und Axiom PH sind erfüllt, denn aus den Eigenschaften des VaRs folgt

$$\text{CVaR}_\alpha(cX + \lambda) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_\alpha(cX + \lambda) d\alpha \quad (1.9)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_\alpha(cX) - \lambda d\alpha \quad (1.10)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha c \text{VaR}_\alpha(X) d\alpha - \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \lambda d\alpha \quad (1.11)$$

$$= \frac{c}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_\alpha(X) d\alpha - \frac{1}{\alpha} \alpha \lambda \quad (1.12)$$

$$= c \cdot \text{CVaR}_\alpha(X) - \lambda. \quad (1.13)$$

- Axiom S ist erfüllt, der Beweis dazu ist allerdings umfangreich.

Bei zugrunde liegender stetiger Verteilung ist der CVaR mit dem Expected-Shortfall

<sup>28</sup> Vgl. Albrecht und Koryciorz [2003], Seite 2, Folgerung.

identisch.<sup>29</sup> Für diesen zeigen Acerbi und Tasche [2001] die Äquivalenz<sup>30</sup> von

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = ES_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_\alpha(X) d\alpha = -\frac{1}{\alpha} E[X \cdot \mathbb{1}_{\{X < \text{VaR}_\alpha(X)\}}^{(\alpha)}], \quad (1.14)$$

wobei

$$\mathbb{1}_{\{X \leq x\}}^{(\alpha)} := \begin{cases} \mathbb{1}_{\{X \leq x\}}, & \text{falls } P[X = x] = 0 \\ \mathbb{1}_{\{X \leq x\}} + \mathbb{1}_{\{X = x\}} \frac{\alpha - P[X \leq x]}{P[X = x]}, & \text{falls } P[X = x] > 0. \end{cases}$$

Für die CVaR-Identität  $-\frac{1}{\alpha} E[X \cdot \mathbb{1}_{\{X < \text{VaR}_\alpha(X)\}}^{(\alpha)}]$  zeigen die Autoren die Subadditivität, siehe Acerbi und Tasche [2001], Proposition A.1.

- Axiom M ist erfüllt, denn gemäß der Eigenschaften des VaRs gilt für  $X \leq Y$ , dass  $\text{VaR}_\alpha(X) = -\inf\{x \in \mathbb{R} | F_Y(x) > \alpha\} \leq -\inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) > \alpha\} = \text{VaR}_\alpha(Y)$ . Daraus folgt

$$\text{CVaR}(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_\alpha(X) d\alpha \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_\alpha(Y) d\alpha = \text{CVaR}(Y).$$

Somit ist der CVaR unter der Annahme einer stetigen Verteilung ein kohärentes Risikomaß nach Definition 1.2.

### Bemerkung 1.6

Sowohl der CVaR als auch der Expected-Shortfall gehören zur Gruppe der *Shortfall-Risikomaße*. Wie der Beweis zeigt, ist der Expected-Shortfall stets ein kohärentes Risikomaß. Der CVaR ist dies nur bei stetigen Verteilungen, denn für diskrete Verteilungen unterscheiden sich die beiden Maße. In der Literatur findet man viele weitere Shortfall-Risikomaße, die sich oft nur geringfügig (z. B. in Spezialfällen) unterscheiden. Sehr ähnliche Maße lauten Tail-Conditional-Expectation, Tail-Mean oder Worst-Conditional-Expectation und werden in der Literatur z. B. bei Acerbi und Tasche [2001] erläutert. Desweiteren wird bei Shortfall-Risikomaßen zwischen bedingten Maßen (wie dem CVaR oder dem Expected-Shortfall) und unbedingten Maßen (z. B. Lower Partial Moments) unterschieden. Letztere berücksichtigen keine Überschreitungswahrscheinlichkeit zu einer definierten Schranke, wie es beispielsweise beim CVaR in Form eines bestimmten VaR-Werts der Fall ist.

<sup>29</sup> Acerbi und Tasche [2001], Korollar 4.3.

<sup>30</sup> Der Vorzeichenunterschied zwischen Gleichung (3.7) in Verbindung mit der Definition 2.6 (Expected-Shortfall) aus der Arbeit von Acerbi und Tasche [2001] und der Gleichung 1.14 entsteht durch das verschiedene Vorzeichen innerhalb der Definitionen des VaRs. Das Vorzeichen hat Auswirkung darauf, ob ein negativer Gewinn oder ein positiver Verlust ausgewiesen wird - der Betrag der VaRs ist identisch.

Nachdem in diesem Kapitel die wesentlichen Risikomaße für die weitere Arbeit vorgestellt worden sind, werden im nächsten Kapitel zwei wichtige Optimierungsmethoden erläutert: Die grundlegende Portfolioselektion nach Markowitz und die weiterführende CVaR-Optimierung nach Uryasev, welche wiederum die Basis für das dritte Kapitel darstellt.

Im Rahmen der CVaR-Optimierung wird ausgeführt, wie der CVaR berechnet und optimiert wird. Für den VaR wurden bereits in Abschnitt 1.6 Ansätze zur Kalkulation vorgestellt, von denen der Ansatz der Monte-Carlo-Simulation zur CVaR-Berechnung aufgegriffen wird. Ein wesentlicher Grund für die Verwendung dieser Methode ist die Möglichkeit der freien Verteilungswahl.

## Kapitel 2

# Portfoliooptimierung nach Risikomaßen

Nach der Einführung der Risikomaße Volatilität sowie VaR und CVaR werden in diesem Kapitel zwei Optimierungsansätze präsentiert. Beginnend mit der klassischen Mean-Variance-Optimierung nach Markowitz (2.1) werden die Prinzipien der Portfoliooptimierung erläutert, welche die Grundlage für die weitere Arbeit bilden. Dabei werden zentrale Begriffe wie Diversifikation und Effizienz, das Minimum-Varianz-Portfolio oder die Anschauung des Risiko-Return-Diagramms eingeführt, die sich später auf die Optimierung des Conditional-Value-at-Risks übertragen lassen. Die CVaR-Optimierung wird in Abschnitt 2.2.1 nach der Methode von Stanislav Uryasev aus dem Jahr 2000 vorgestellt. Dem Autor ist es gelungen, die CVaR-Optimierung als lineares Optimierungsproblem zu formulieren, das in Abschnitt 2.2.3 in eine für diese Arbeit angepasste Form überführt wird. Das resultierende allgemeine lineare Programm stellt die Ausgangsbasis für das im dritten Kapitel vorgeschlagene szenariobasierte Optimierungsmodell dar. Am Ende des zweiten Kapitels erhält der Leser eine Einführung in die Thematik der Szenariogenerierung.

### 2.1 Klassische Portfolioselektion nach Markowitz<sup>1</sup>

Harry M. Markowitz gilt als einer der Mitbegründer der *modernen Portfoliotheorie* und prägt sie mit seinen Aussagen über Portfolioeffizienz und Diversifikation. Die moderne Portfoliotheorie fußt auf zwei wesentlichen Annahmen<sup>2</sup>:

<sup>1</sup> In Anlehnung an Albrecht und Maurer [2008] und Spremann [2008].

<sup>2</sup> Vgl. Spremann [2008], Seite 59, 1.) und 2.).

- A Die Renditen der Anlagen sind Zufallsvariablen<sup>3</sup>. Sie werden durch die ersten beiden Momente, Erwartungswert und Varianz, sowie ihre Korrelationen zueinander beschrieben. Die Renditen werden als *gemeinsam normalverteilt* angenommen.<sup>4</sup>
- B Die Präferenzen des Entscheiders (Investor) beziehen sich auf die erwartete Rendite und deren Volatilität (Standardabweichung). Es wird davon ausgegangen, dass der Entscheider eine vergleichsweise hohe Rendite bei geringer Volatilität des Portfolios präferiert.

Der Entscheider konzentriert sich bei seiner Wahl nur auf die finanziellen Aspekte Rendite und Risiko. Für ihn ist eine höhere Volatilität gleichbedeutend mit mehr Risiko, so dass an dieser Stelle die Standardabweichung<sup>5</sup> als Risikomaß Verwendung findet. Albrecht und Maurer bezeichnen diesen Entscheider deshalb auch als „Erwartungswert-Varianz-Investor“<sup>6</sup>.

Der Investor agiert grundsätzlich risikoavers: Weisen zwei Portfolios die gleiche erwartete Rendite auf, so bevorzugt der Investor das Portfolio mit der geringeren Varianz. Bei identischer Varianz wird er sich für das Portfolio mit der höheren Renditeerwartung entscheiden. Da sich die Portfoliotheorie auf die beiden Verteilungsparameter konzentriert, spricht man auch von *Mean-Variance-Analysis*.

Weitere Rahmenbedingungen der Portfoliotheorie lauten:

- Es wird ein diskretes Einperiodenmodell mit zwei Zeitpunkten  $t_0$  und  $t_1$  betrachtet. Dabei stellen die beiden Zeitpunkte Periodenanfang und Periodenende dar.
- Anlagetitel sind beliebig teilbar.
- Transaktionskosten bleiben unberücksichtigt oder werden als in den Kaufpreisen enthalten angenommen.

Für eine detailliertere Auseinandersetzung wird das folgende mathematische Setting von Albrecht und Maurer [2008]<sup>7</sup> übernommen.

<sup>3</sup> In diesem Fall wird bewusst ein großes  $R$  verwendet.

<sup>4</sup> Vgl. Spremann [2008], Seite 175, 7.1.3 Dritte Säule der MPT: Normalverteilung.

<sup>5</sup> Die Standardabweichung gilt als *das* klassische Investmentrisikomaß.

<sup>6</sup> Albrecht und Maurer [2008], Seite 258, Charakterisierung der Investoren.

<sup>7</sup> Albrecht und Maurer [2008], Seite 261 f.

Zu zwei Aktien  $A_1, A_2$  seien für  $i = 1, 2$  gegeben:

$w_1 \in [0, 1]$ , das Portfoliogewicht der ersten Aktie

$R_i$ , die Renditen der beiden Aktien

$\mu_i = E[R_i]$ , der jeweilige Erwartungswert der Renditen

$\sigma_i = \sigma(R_i)$ , die Standardabweichung der Renditen

$\mu = E[R]$  und  $\sigma = \sigma(R)$ , Erwartungswert und Standardabweichung des Portfolios

$\rho = \rho(R_1, R_2)$  die Korrelation der beiden Aktienrenditen

Aus diesem Setting lassen sich die folgenden Größen direkt ableiten:

Die Portfoliorendite  $R$  des Portfolios aus den beiden Aktien  $A_1, A_2$  beträgt gemäß der Portfolioeigenschaft<sup>8</sup>

$$R = w_1 R_1 + (1 - w_1) R_2. \quad (2.1)$$

Die erwartete Portfoliorendite beträgt dementsprechend

$$\mu = E[R] = w_1 \mu_1 + (1 - w_1) \mu_2 = w_1 (\mu_1 - \mu_2) + \mu_2. \quad (2.2)$$

Dann lässt sich die Varianz der Portfoliorendite angeben

$$\sigma^2 = \text{Var}(R) = w_1^2 \sigma_1^2 + (1 - w_1)^2 \sigma_2^2 + 2\rho \cdot w_1 (1 - w_1) \sigma_1 \sigma_2 \quad (2.3)$$

und der Lösungsraum aller  $\mu$ - $\sigma$  Kombinationen lautet

$$\mathbb{L} = \{(\mu, \sigma) \mid \mu = E[R], \sigma = \sqrt{\text{Var}(R)}\}. \quad (2.4)$$

### Bemerkung 2.1

Die Gestalt des Lösungsraums  $\mathbb{L}$  hängt wesentlich von der Korrelation  $\rho$  ab, wie in Abbildung 2.1 (Abschnitt 2.1.2) anschaulich dargestellt wird.

Der Korrelationskoeffizient  $\rho$  liegt in der Regel<sup>9</sup> im Intervall  $[0, 1]$ .

<sup>8</sup> „Portfolioeigenschaft: Die Portfoliorendite errechnet sich als gewichtetes arithmetisches Mittel der Renditen der Komponenten.“ Spremann [2008], Seite 75 unten.

<sup>9</sup> Man kann z. B. auch Kreditaufnahmen betrachten, sodass der Korrelationskoeffizient über dem Wert 1 liegt. In dieser Arbeit wird allerdings von der Konvention  $\rho \in [0, 1]$  ausgegangen.

### 2.1.1 Minimum-Varianz-Portfolio

Das *Minimum-Varianz-Portfolio* ist innerhalb der Portfoliotheorie von zentraler Bedeutung, da es das risikominimale Portfolio darstellt. Dies bedeutet, es ist das Portfolio mit der kleinsten Standardabweichung innerhalb des Lösungsraums und weist somit das geringste Risiko unter allen zulässigen Portfolios auf.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie man das Minimum-Varianz-Portfolio sowie dessen Rendite und Varianz bestimmt. Dies dient der graphischen Darstellung des Lösungsraums, die im nächsten Abschnitt vorgestellt wird.

Zur Bestimmung des Minimum-Varianz-Portfolios sucht man das Minimum der Varianz als Funktion des Portfoliogewichts  $w_1$ . Durch die Verwendung des resultierenden Gewichts lassen sich anschließend das Minimum-Varianz-Portfolio sowie dessen Rendite und Varianz berechnen. Dazu setzt man die Ableitung der Varianzfunktion (2.3) nach  $w_1$  gleich Null und löst diese nach  $w_1$  auf:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^2}{dw_1} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2w_1\sigma_1^2 - 2(1-w_1)\sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 - 4\rho w_1\sigma_1\sigma_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow w_{1\text{MVP}} &= \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Durch Einsetzen des Gewichts  $w_{1\text{MVP}}$  in die Gleichungen (2.2) und (2.3) ergibt sich die entsprechende  $\sigma$ - $\mu$ -Kombination des Minimum-Varianz-Portfolios  $(\sigma_{\text{MVP}}, \mu_{\text{MVP}})$ .

$$\mu_{\text{MVP}} = \underbrace{\frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}}_{=: \lambda} (\mu_1 - \mu_2) + \mu_2 \quad (2.6)$$

Zur Erleichterung der weiteren Rechnungen definiere den Nenner des Bruchs als  $\lambda := \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$ .

Aus der Formel (2.3) für die Varianz

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= w_1^2\sigma_1^2 + (1-w_1)^2\sigma_2^2 + 2\rho \cdot w_1(1-w_1)\sigma_1\sigma_2 \\ &= w_1^2 \cdot \underbrace{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)}_{\lambda} + w_1(2\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2) + \sigma_2^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

ergibt sich die Varianz des Minimum-Varianz-Portfolios durch Einsetzen des Gewichts  $w_{1\text{MVP}}$  für  $w_1$  folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{MVP}}^2 &= \left( \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1^2\sigma_2^2}{\lambda} \right)^2 \lambda + \left( \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1^2\sigma_2^2}{\lambda} \right) (2\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2) + \sigma_2^2 \\
&= \frac{1}{\lambda} \left[ (\sigma_2^4 + \rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2^3) + (2\rho\sigma_1\sigma_2^3 - 2\sigma_2^4 - 2\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2^3) \right] + \sigma_2^2 \\
&= \frac{1}{\lambda} \left[ -\sigma_2^4 - \rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2^3 \right] + \sigma_2^2 \\
&= \frac{\sigma_2^2}{\lambda} \left[ -\sigma_2^2 - \rho^2\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \lambda \right] \\
&= \frac{\sigma_2^2}{\lambda} \left[ -\sigma_2^2 - \rho^2\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2) \right] \\
&= \frac{\sigma_2^2}{\lambda} \left[ \sigma_1^2(1 - \rho^2) \right] = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\lambda} \cdot (1 - \rho^2). \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Dazu betrachte man folgendes Beispiel.

### Beispiel 2.2

Betrachtet man den einfachen Fall, dass die beiden Aktien  $A_1, A_2$  unkorreliert sind, d. h.  $\rho = 0$ , so vereinfacht sich das Gewicht  $w_1$  nach Gleichung (2.5) zu

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \tag{2.9}$$

Durch Einsetzen von  $w_1$  in (2.8) erhält man die Varianz des Minimum-Varianz-Portfolios.

$$\sigma_{\text{MVP}}^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \text{ bzw. } \sigma_{\text{MVP}} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}. \tag{2.10}$$

Nach (2.2) lautet die erwartete Rendite des Minimum-Varianz-Portfolios

$$\mu_{\text{MVP}} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \mu_1 + \left(1 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right) \mu_2 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \cdot (\mu_1 - \mu_2) + \mu_2. \tag{2.11}$$

### 2.1.2 Risiko-Rendite-Diagramm: Darstellung des Lösungsraums

Zur Veranschaulichung des abstrakten Lösungsraums  $\mathbb{L}$  wird standardmäßig ein *Risiko-Rendite-Diagramm* genutzt. Jeder Anlagetitel kann in Bezug auf seine erwartete Rendite und die daraus berechnete Standardabweichung im Koordinatensystem positioniert werden. Dies führt allgemein zu einer Darstellung wie sie Abbildung 2.1 zeigt.

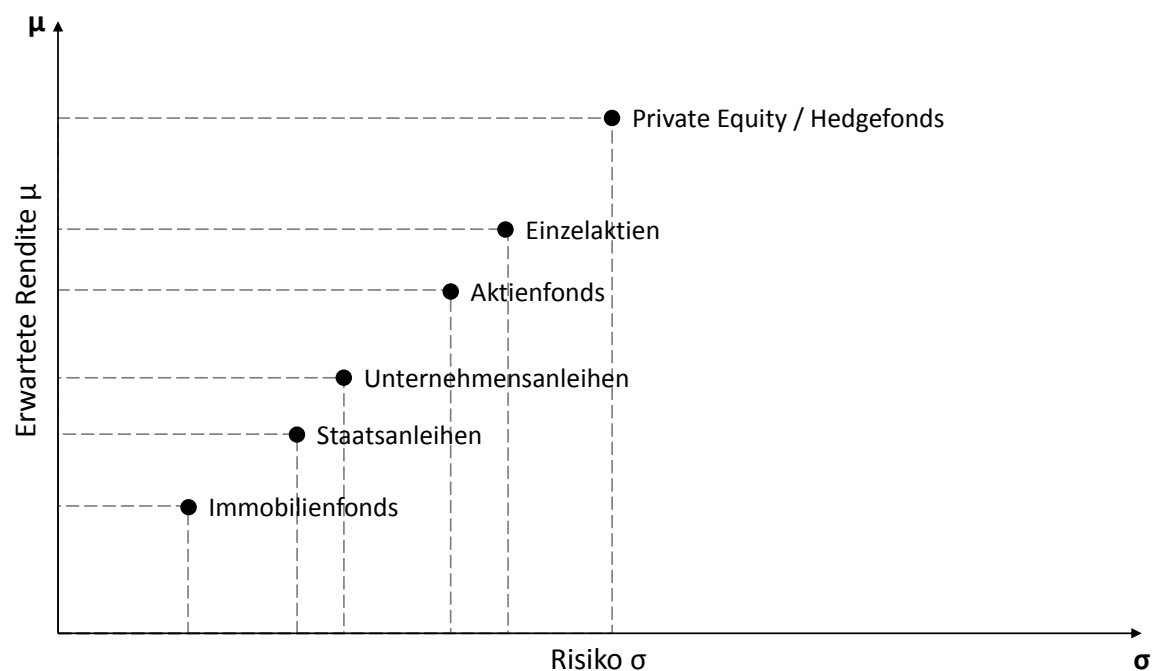


Abbildung 2.1: Risiko-Rendite-Diagramm für ausgewählte Assetklassen

Die Darstellung eines Lösungsraums beinhaltet neben den einzelnen Risiko/Rendite-Punkten, kurz  $(\sigma, \mu)$ -Punkte, für jeden der Anlagetitel auch alle möglichen Kombinationen (Portfolios), die sich aus den Einzeltiteln zusammenstellen lassen. Dazu stellt man die Rendite als Funktion des Risikos dar und plottet diese Funktion anschließend in ein entsprechendes Koordinatensystem als Risiko-Rendite-Diagramm. Das Risiko wird auf der Abszisse (x-Achse), die Rendite auf der Ordinate (y-Achse) abgetragen.

Um den Lösungsraum darzustellen, der sich aus Kombination der beiden Anlagetitel  $A_1, A_2$  aus dem vorherigen Abschnitt ergibt, wird die erwartete Rendite  $\mu$  als Funktion der Standardabweichung  $\sigma$  dargestellt. Diese Funktion beschreibt den Rand der Lösungsmenge  $\mathbb{L}$ .

Dazu substituiert man das Gewicht  $w_1$  in der Formel (2.2) für die Portfoliorendite mithilfe der Formel (2.7) für die Varianz, die zunächst nach  $w_1$  aufgelöst werden muss.

$$\sigma^2 = w_1^2 \lambda + w_1(2\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2) + \sigma_2^2 \Leftrightarrow 0 = w_1^2 \lambda + w_1(2\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2) + \sigma_2^2 - \sigma^2. \quad (2.12)$$

Mittels der allgemeinen Lösungsformel für Polynome zweiten Grades erhält man

$$\begin{aligned} w_{1,1/2} &= -\frac{1}{2\lambda}(2\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\lambda}(2\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2)\right)^2 + \frac{1}{\lambda}(\sigma^2 - \sigma_2^2)} \\ &= -\frac{1}{\lambda}(\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2) \pm \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{1}{4}(2\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2)^2 + \lambda(\sigma^2 - \sigma_2^2)} \\ &= \frac{1}{\lambda}\left[\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 \pm \sqrt{(\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)^2 + \lambda(\sigma^2 - \sigma_2^2)}\right] \\ &= \frac{1}{\lambda}\left[\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 \pm \sqrt{\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_2^4 - 2\rho\sigma_1\sigma_2^3 + \lambda\sigma^2 - \lambda\sigma_2^2}\right] \\ &= \frac{1}{\lambda}\left[\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 \pm \sqrt{\sigma_2^2(\rho^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 - \underbrace{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)}_{\lambda}) + \lambda\sigma^2}\right] \\ &= \frac{1}{\lambda}\left[\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 \pm \sqrt{\sigma_2^2(\rho^2 - 1)^2\sigma_1^2 + \lambda\sigma^2}\right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Setzt man  $w_{1,1/2}$  in Gleichung (2.2)  $\mu = w_1(\mu_1 - \mu_2) + \mu_2$  ein, so folgt

$$\mu(\sigma, \rho) = \frac{1}{\lambda}\left[\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 \pm \sqrt{\sigma_2^2(\rho^2 - 1)^2\sigma_1^2 + \lambda\sigma^2}\right](\mu_1 - \mu_2) + \mu_2. \quad (2.14)$$

Sehr anschaulich kann man  $\mu$  mithilfe der Erwartung des Minimum-Varianz-Portfolios (Gleichung 2.6)  $\mu_{\text{MVP}} = \frac{1}{\lambda}(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)(\mu_1 - \mu_2) + \mu_2$  darstellen:

$$\mu(\sigma, \rho) = \mu_{\text{MVP}} \pm \frac{1}{\lambda}\sqrt{\sigma_2^2(\rho^2 - 1)^2\sigma_1^2 + \lambda\sigma^2} \cdot (\mu_1 - \mu_2). \quad (2.15)$$

Eine konkrete Darstellung des Graphen im Fall von zwei Aktien hängt von der Korrelation  $\rho$  ab. Daraus ergibt sich folgende anschauliche Charakterisierung:

- $\rho = -1$

Das Minimum-Varianz-Portfolio liegt genau auf der Ordinate, sodass sich das Risiko vollständig diversifizieren lässt. Der Graph besteht aus den beiden Geraden durch das Minimum-Varianz-Portfolio und die beiden Aktien(punkte)  $A_1, A_2$ .

- $-1 < \rho < 1$

In der Regel liegt  $\rho$  zwischen  $-1$  und  $1$  und der Graph bildet den rechten Ast einer Hyperbel.

- $\rho = 1$

Im Fall, dass die Korrelation zwischen beiden Aktien genau  $1$  beträgt, stellt der Graph eine einfache Gerade durch die beiden Aktien dar.

Zur Visualisierung dieser Zusammenhänge eignet sich die folgende Abbildung<sup>10</sup> aus Albrecht und Maurer [2008].

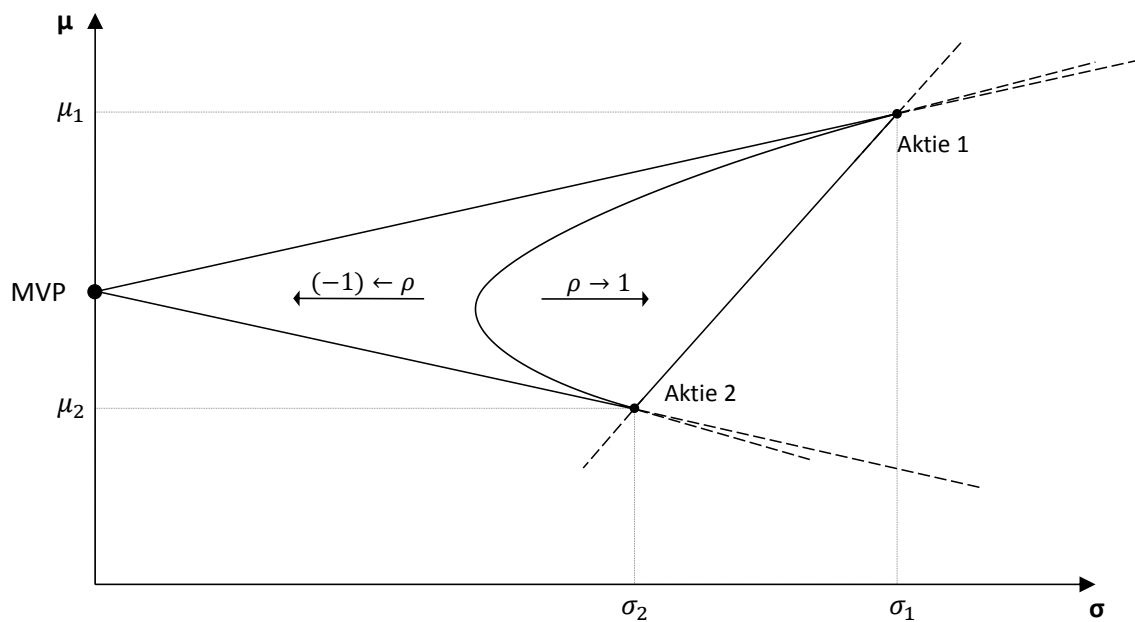
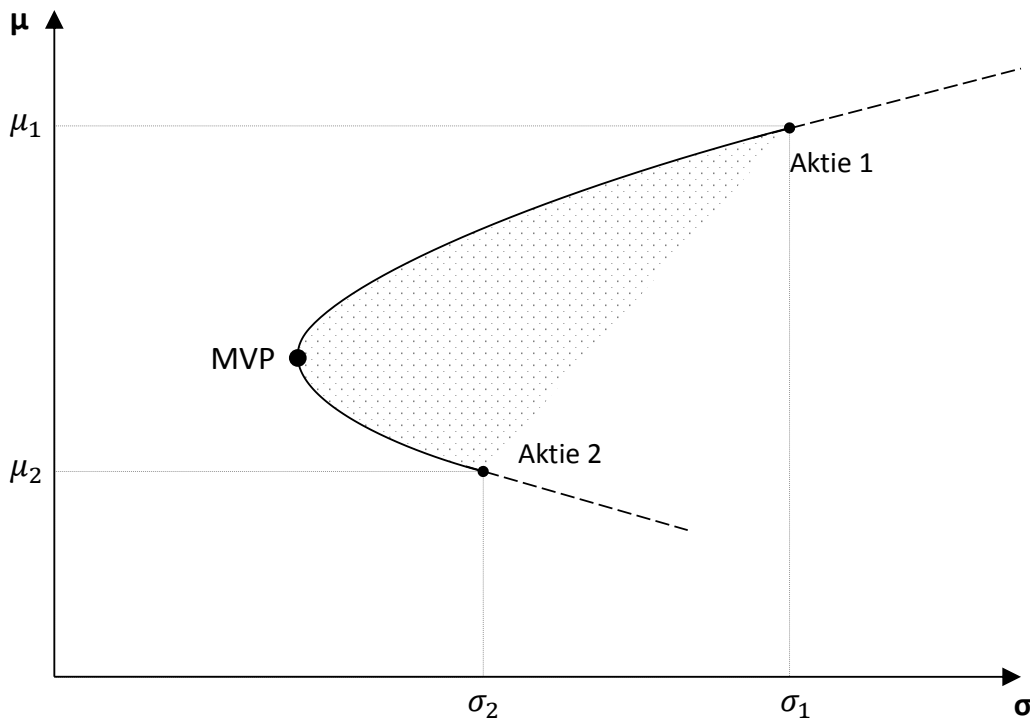


Abbildung 2.2: Effizienzlinie in Abhängigkeit von der Korrelation  $\rho$

Der Graph bildet den linken Rand der Lösungsmenge  $\mathbb{L}$ , sodass alle möglichen Portfoliozusammenstellungen auf dem Rand selber sowie rechts davon liegen.

Da in der Praxis meist ausschließlich der Fall  $-1 < \rho < 1$  relevant ist, ist die folgende Darstellung der Lösungsmenge die gebräuchlichste.

<sup>10</sup> Albrecht und Maurer [2008], Abb. 6.7.

Abbildung 2.3: Effizienzlinie für  $-1 < \rho < 1$ 

### 2.1.3 Effizienz & Diversifikation

Zwei weitere zentrale Begriffe der Markowitzschen Theorie lauten *Effizienz* und *Diversifikation*. Ihre Definition und Veranschaulichung anhand des Risiko-Rendite-Diagramms sind für diese Arbeit wesentlich.

Der Effizienzbegriff nach Markowitz wird über das *Portfoliodominanzprinzip* eingeführt.

**Definition 2.3** (Portfoliodominanz)

Ein(e) Portfolio(zusammenstellung)  $P_1 \in \mathbb{L}$  mit Rendite  $\mu_{P_1}$  und Standardabweichung  $\sigma_{P_1}$  **dominiert** ein anderes Portfolio  $P_2 \in \mathbb{L}$  mit Rendite  $\mu_{P_2}$  und Standardabweichung  $\sigma_{P_2}$ , wenn es entweder:

a) ein geringeres Risiko bei mindestens gleich großer Rendite, d. h.

$$\mu_{P_1} \geq \mu_{P_2} \text{ und } \sigma_{P_1} < \sigma_{P_2},$$

oder

b) eine höhere Rendite bei gleichem Risiko, d. h.  $\mu_{P_1} > \mu_{P_2}$  und  $\sigma_{P_1} = \sigma_{P_2}$ ,

aufweist.

Anhand der Portfoliodominanz definiert Markowitz effiziente Portfolios folgendermaßen.

**Definition 2.4** (Markowitz-Effizienz)

Ein Portfolio  $P_1 \in \mathbb{L}$  heißt effizient nach Markowitz, wenn kein Portfolio  $P \in \mathbb{L}$  existiert, das  $P_1$  dominiert.

Die effizienten Portfolios liegen auf dem Rand der Lösungsmenge oberhalb des Minimum-Varianz-Portfolios. Sie bilden den oberen Ast der Hyperbel. Daher wird dieser Teil als *Effizienzlinie* bezeichnet.

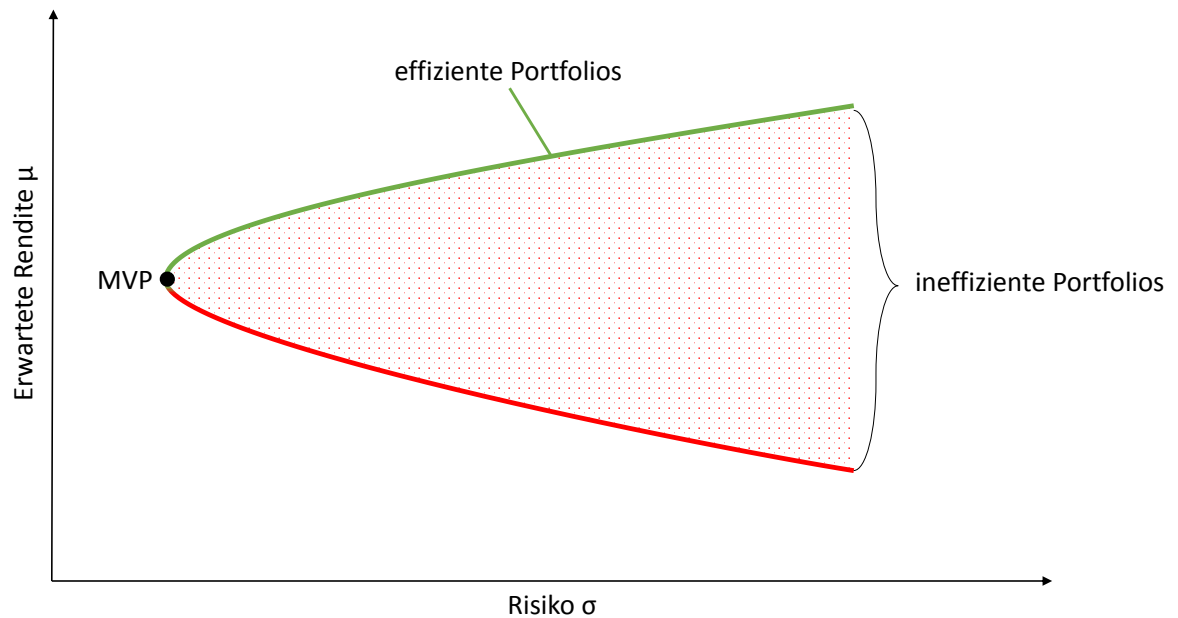


Abbildung 2.4: Effizienzlinie

Unter (Risiko-)Diversifikation versteht man im Kontext von Kapitalanlageentscheidungen die Aufteilung des zur Verfügung stehenden Anlagekapitals auf unterschiedliche, möglichst wenig korrelierte Investments.<sup>11</sup>

Das Ziel des Diversifikationsgedankens nach Markowitz ist es, durch die geschickte Zusammenstellung eines Portfolios  $P$  aus  $N$  Einzeltiteln  $A_i$ , ( $1 \leq i \leq N$ ), das Gesamtrisiko  $\sigma(P)$  so zu minimieren, dass es kleiner als die Summe aus den Einzelrisiken  $\sigma(A_i)$  ist.

$$\sigma(P) < \sum_{i=1}^N \sigma(A_i). \quad (2.16)$$

<sup>11</sup> Vgl. Büschgen [2012], Seite 303 ff. und Mühlbradt [2004], Begriff: Diversifikation.

In welchen Fällen dieser Diversifikationseffekt zu erzielen ist, untersuchen Albrecht und Maurer [2008] am sogenannten „Zwei-Aktienfall“, d. h. an einem aus zwei Aktien bestehenden Portfolio. Angenommen es liegen zwei Aktien mit unterschiedlicher Volatilität vor, so bezeichne  $\sigma_1$  die größere der beiden, sodass

$$\sigma_1 > \sigma_2$$

sei. Liegt ein Diversifikationseffekt vor, so lässt sich dieser im Minimum-Varianz-Portfolio nachweisen, da dieses Portfolio das geringste Risiko beinhaltet. Daher seien  $w_{1MVP}, w_{2MVP}$  die Gewichte des Minimum-Varianz-Portfolios. Ist eins der beiden Gewichte gleich 1, so liegt kein Diversifikationseffekt vor, da vollständig in die Aktie mit dem kleineren Risiko investiert wird (und in die andere Aktie folglich 0%). Anschaulich muss mindestens ein Portfolio links von allen Aktienpunkten liegen.

Für den Fall, dass beide Gewichte echt kleiner 1 sind, also  $0 < w_{1MVP}, w_{2MVP} < 1$ , lautet das erste Gewicht des Minimum-Varianz-Portfolios gemäß der Formel (2.5)

$$w_{1MVP} = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\lambda}.$$

Ist  $w_{1MVP}$  echt größer Null, so bedeutet das

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\lambda} &\Leftrightarrow 0 < \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 \\ &\Leftrightarrow \rho < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \end{aligned}$$

Also bleibt abschließend festzuhalten:

### Bemerkung 2.5

Die Erzielung eines Risikodiversifikationseffekts ist im Zwei-Titel-Fall stets möglich, wenn die Relation  $\rho < \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$  gilt.

### 2.1.4 Markowitz - allgemeiner Fall

Dieses Kapitel dient der Verallgemeinerung des Zwei-Titel-Falls auf eine Vielzahl von  $n$  Titeln. Der Abschnitt orientiert sich an der (wesentlich detaillierteren) Lektüre von Albrecht und Maurer [2008], Kapitel 6.3.2.3 sowie Anhang 6A.2.

Betrachtet man Portfolios aus  $n$ -Titeln mit  $n$  Renditen zusammengefasst als Spaltenvektor  $R = (R_1, \dots, R_n)^t$  und  $n$  Gewichten als Spaltenvektor  $w = (w_1, \dots, w_n)^t$ , so gilt für die Portfoliorendite

$$R(P) = w^t \cdot R = \sum_{i=1}^n w_i R_i. \quad (2.17)$$

Weiterhin ergeben sich

- Erwartungswert der Portfoliorendite

$$\mu_p = E[R] = w^t \cdot \mu = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i, \quad (2.18)$$

- Erwartungswert der Portfoliovarianz

$$\sigma_p^2 = Var(R_p) = w^t Cov(R) w = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j, \quad (2.19)$$

wobei  $Cov(R) = Cov(R_i, R_j) = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  die Kovarianzmatrix der Renditen ist und  $\rho_{ij}$  für  $i, j = 1, \dots, n$  die Korrelation zwischen den Renditen  $R_i$  und  $R_j$  zweier Anlagetitel  $A_i, A_j$  darstellt.

Zur Bestimmung der Effizienzlinie im mehrdimensionalen Fall führt der folgende Ansatz: Minimiere die Portfoliovarianz unter den Bedingungen, dass die Summe der Portfoliogewichte 1 (also 100%) beträgt und die Rendite  $r$  erzielt wird. Dieser Sachverhalt wird mathematisch durch das folgende Optimierungsprogramm widerspiegelt.

$$\min_w \sigma_p^2 = \min_w w^t Cov(R) w \Leftrightarrow \min_w \frac{1}{2} \sigma_p^2 = \min_w \frac{1}{2} w^t Cov(R) w \quad \text{unter} \quad (2.20)$$

$$\mu_p = r, \quad (2.21)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1. \quad (2.22)$$

Dabei ist  $w^t \text{Cov}(R)w =: Z(w)$  die Zielfunktion, die unter Einhaltung der Nebenbedingungen (2.21) und (2.22) minimiert wird. Die zweite Nebenbedingung charakterisiert die Menge der möglichen Portfolios und führt zu der Lösungsmenge  $\mathbb{L} = \{(\mu_p, \sigma_p) \mid w^t e = 1 \text{ mit } w, e \in \mathbb{R}^n\}$ , bzw. kurz  $\mathbb{L} = \{w \in \mathbb{R}^n : w^t e = 1\}$ , wobei  $e = (1, \dots, 1)^t$  dem Einheitsvektor im  $\mathbb{R}^n$  entspricht.

Das Hinzufügen des Faktors  $\frac{1}{2}$  zur Zielfunktion dient der Formulierung des Problems als *quadratisches Optimierungsprogramm* und hat keinen Einfluss auf das Optimierungsergebnis. Das Ergebnis der Minimierung ist ein optimales Portfolio, charakterisiert durch den Gewichtsvektor  $w^* = (w_1^*, \dots, w_n^*)$ .

Dazu seien die folgenden mathematischen Anmerkungen erlaubt.

### Bemerkung 2.6

- (1) Die Zielfunktion  $Z(w) = w^t \text{Cov}(R)w$  ist stetig in  $w$  und besitzt nach dem *Satz von Weierstraß* genau dann ein globales Minimum, wenn die Lösungsmenge kompakt ist. Dies wird durch die Nebenbedingung (2.22) erfüllt, wenn entweder die Gewichte beschränkt sind, z. B. durch eine Nichtnegativitätsbedingung  $w_i \geq 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  (also für *Long-only-Portfolios*) oder die Kovarianzmatrix positiv definit ist. Es folgt, dass  $Z(w)$  ein globales Minimum besitzt.<sup>12</sup>
- (2) Besitzt  $Z(w)$  ein globales Minimum, so existiert eine optimale Lösung, wenn die Nebenbedingung (2.21) sichergestellt ist. Dies ist der Fall, wenn die geforderte Rendite  $r$  der Gleichung

$$\min_{1 \leq i \leq n} \mu_i < r < \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i$$

genügt.<sup>13</sup>

- (3) Sind alle  $w_i \geq 0$ , (für  $1 \leq i \leq n$ ), liegt ein konvexes Optimierungsprogramm vor, sodass jedes lokale Minimum auch ein globales ist.

Der sich anschließende Abschnitt 2.1.5 zeigt die Lösung des konvexen Optimierungsproblems und richtet sich an den mathematisch interessierten Leser. Auch die für diese Arbeit wesentliche Optimierung des Conditional-Value-at-Risks (Kapitel 2.2) ist konvex, sodass sich die Erkenntnisse übertragen lassen. Das mathematische Vorgehen besteht aus der Findung des optimalen Portfoliogewichts  $w^*$  sowie der Berechnung von Rendite  $\mu^*$  und Risiko  $\sigma^*$  zur Darstellung der Effizienzlinie.

<sup>12</sup> Vgl. Albrecht und Maurer [2008], Seite 328, Argumentation zu Anmerkung 1.

<sup>13</sup> Vgl. Albrecht und Maurer [2008], Seite 328, Anmerkung 1.

### 2.1.5 Lösung mithilfe der Lagrangefunktion

Im Rahmen konvexer Optimierungsprobleme ist die sogenannte *Lagrangefunktion* ein wichtiges Lösungsinstrument. Jarre und Stoer [2003] motivieren die Lagrangefunktion folgendermaßen.<sup>14</sup> Sei

$$\inf\{f(x) \mid f_1(x) \leq 0\} \quad (2.23)$$

ein konvexes Optimierungsproblem im  $\mathbb{R}^1$  zu dem

$$\inf\{f(x) + \lambda f_1(x) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad (2.24)$$

ein Hilfsproblem darstellt, wobei der Parameter  $\lambda$  die Nebenbedingung  $f_1$  gewichtet. Angenommen das Hilfsproblem besitzt für jedes  $\lambda \geq 0$  eine optimale Lösung, so ergibt sich ein sinnvolles Lösungsverfahren durch ein sukzessives Vergrößern von  $\lambda$  ausgehend von  $\lambda = 0$ . Bei der Betrachtung optimaler Lösungen  $x^*(\lambda)$  in Abhängigkeit von  $\lambda$  sucht man dasjenige  $\lambda^*$ , für das

$$f_1(x^*(\lambda^*)) = 0$$

gilt. Dann löst  $x^*(\lambda^*)$  auch das Ausgangsproblem (2.23). Die Zielfunktion des Hilfsproblems bildet die *Lagrangefunktion* zu (2.23), die zu einem *allgemeinen Optimierungsprogramm* definiert wird.

**Definition 2.7** (Allgemeines Optimierungsprogramm<sup>15</sup>)

Sei ein Optimierungsproblem der Form

$$\begin{aligned} \inf \quad & f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n : \quad & f_i(x) \leq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq p, \\ & f_j(x) = 0 \text{ für } p+1 \leq j \leq m, \end{aligned} \quad (2.25)$$

mit  $m$  Nebenbedingungen<sup>16</sup> gegeben. Sei

$$\mathbb{L} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix} \leq 0, \begin{pmatrix} f_{p+1}(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = 0 \right\} \quad (2.26)$$

<sup>14</sup> Jarre und Stoer [2003], Abschnitt 8.3, Beispiel.

<sup>15</sup> Vgl. Jarre und Stoer [2003], Seite 224, Optimierungsproblem (8.1.4) sowie Erläuterungen.

<sup>16</sup> Von den  $m$  Nebenbedingungen sind die ersten  $p$  als Ungleichungen und die restlichen  $(m-p)$  als Gleichungen dargestellt.

die Lösungsmenge, d. h. die **Menge zulässiger Lösungen** (kurz: zulässige Menge) des Optimierungsproblems 2.25.

Die insgesamt  $m$  Nebenbedingungen von (2.25) werden aufgeteilt in  $p$  Ungleichheitsbedingungen (Ungleichungen) und  $m - p$  Gleichheitsbedingungen (Gleichungen). Zu diesem allgemeinen Optimierungsprogramm definiert man die Lagrangefunktion folgendermaßen:

**Definition 2.8** (Lagrangefunktion<sup>17</sup>)

Sei  $D := \{\lambda_i \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_i \geq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq m\}$ . Dann wird die **Lagrangefunktion**  $L : \mathbb{R}^n \times D \rightarrow \mathbb{R}$  zum Optimierungsproblem 2.25 durch

$$L(x, \lambda) := f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) \quad (2.27)$$

definiert.

Die Menge  $D$  definiert die  $\lambda$ -Parameter für die Nebenbedingungen, welche auch *Lagrange-multiplikatoren* genannt werden. Die Frage nach einer optimalen Lösung beantwortet der nachfolgende Satz<sup>18</sup> in Verbindung mit folgenden Definitionen<sup>19</sup>.

**Definition 2.9** (Sattelpunkt<sup>20</sup>)

Ein Paar  $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$  heißt **Sattelpunkt** von  $L(x, \lambda)$  auf  $\mathbb{R}^n \times D$ , falls

$$L(x, \tilde{\lambda}) \geq L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) \geq L(\tilde{x}, \lambda)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda \in D$ .

**Definition 2.10** (Konvexes Optimierungsprogramm<sup>21</sup>)

Das Optimierungsprogramm 2.25 heißt **konvex**, wenn die Funktionen

- $f_i : \mathbb{R}^n \Rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  für  $1 \leq i \leq p$  konvex,
- $f_j : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$  für  $p + 1 \leq j \leq m$  affin

und reellwertige, stetige Funktionen für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  sind.<sup>22</sup> Dann ist auch die Menge zulässiger Lösungen  $\mathbb{L}$  konvex und man spricht von einem konvexen Optimierungsproblem.

<sup>17</sup> Vgl. Jarre und Stoer [2003], Definition 8.3.3. zum Optimierungsproblem (8.1.4).

<sup>18</sup> Vgl. dazu Jarre und Stoer [2003], Satz 8.3.4 (1) von Karush, Kuhn und Tucker.

<sup>19</sup> Vgl. Jarre und Stoer [2003], Definition 8.3.3 (1).

<sup>20</sup> Vgl. Jarre und Stoer [2003], Definition 8.3.3 (2).

<sup>21</sup> Vgl. Jarre und Stoer [2003], Voraussetzung 8.1.6 (2) und (3).

<sup>22</sup> Vgl. dazu Jarre und Stoer [2003], Voraussetzung 8.1.6 (2) und (3).

*Beweis.* Zu zeigen:

$$\mathbb{L} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix}}_{:=F(x)} \leq 0, \underbrace{\begin{pmatrix} f_{p+1}(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}}_{:=G(x)} = 0\} \quad (2.28)$$

ist konvex, wenn  $F(x)$  konvex und  $G(x)$  affin sind.

Dazu muss nachgewiesen werden, dass  $(1-t)x_1 + tx_2$  für beliebige  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  und  $t \in [0, 1]$  in der Menge  $\mathbb{L}$  liegt.

$$F((1-t)x_1 + tx_2) \leq \underbrace{(1-t)}_{\geq 0} \underbrace{F(x_1)}_{\leq 0} + \underbrace{t}_{\geq 0} \underbrace{F(x_2)}_{\leq 0} \leq \mathbf{0}, \quad (2.29)$$

$$G((1-t)x_1 + tx_2) = a((1-t)x_1 + tx_2) + b = (1-t)ax_1 + tax_2 + b \quad (2.30)$$

$$= (1-t)ax_1 + tax_2 + (1-t)b + tb = \underbrace{(1-t)}_{\geq 0} \underbrace{G(x_1)}_{=0} + \underbrace{t}_{\geq 0} \underbrace{G(x_2)}_{=0} = \mathbf{0}. \quad (2.31)$$

Damit gilt  $(1-t)x_1 + tx_2 \in \mathbb{L}$  und  $\mathbb{L}$  ist konvex. □

Mithilfe dieser beiden Definitionen kann der nachfolgende Satz, der als Teil des Satzes von Karush, Kuhn und Tucker zur Lösung konvexer Optimierungsprogramme bekannt ist, formuliert werden. Er bildet die Grundlage zur Lösung des Markowitzschen Optimierungsprogramms (2.20).

**Satz 2.11** (für konvexe Optimierungsprobleme<sup>23</sup>)

*Sei ein konvexes Optimierungsprogramm gemäß Definition 2.10 mit dazugehöriger Lagrangefunktion gegeben.*

*Falls  $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$  Sattelpunkt der Lagrangefunktion auf  $\mathbb{R}^n \times D$  ist, dann ist  $\tilde{x}$  optimal für das Optimierungsprogramm (2.25) und es gilt  $\tilde{\lambda}_i f_i(\tilde{x}) = 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$ , d. h.*

$$L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) = f(\tilde{x}).$$

*Beweis.* Den entsprechenden Beweis dazu findet man bei Jarre und Stoer [2003], Kapitel 8.3, Seite 232. □

<sup>23</sup> Jarre und Stoer [2003], Satz 8.3.4 (1).

Albrecht und Maurer [2008] lösen anstelle des Optimierungsprogramms (2.20) das folgende äquivalente Programm

$$\max_{w \in \mathbb{L}} Z(w) = \max_{w \in \mathbb{L}} \tau \cdot E[R_p] - \frac{1}{2} w^t C w,^{24} \quad (2.32)$$

wobei  $\tau \in \mathbb{R}^{>0}$  und  $\mathbb{L} = \{w \in \mathbb{R}^n : w^t e = 1\}$  ist. Das heißt, an dieser Stelle wird zur Verallgemeinerung auf die *Long-only*-Beschränkung verzichtet. Der Lagrangemultiplikator  $\tau > 0$  kann als Ausprägung der Risikoaversion des Investors interpretiert werden. Mit steigendem  $\tau$  nimmt das Risiko zu. Die Renditen der einzelnen Instrumente sollen linear unabhängig voneinander sein.

Sei die Kovarianzmatrix  $C := \text{Cov}(R)$  invertierbar (regulär), dann lautet die Lagrange-funktion  $L(w, \lambda)$  zu dem Optimierungsproblem (2.32)

$$L(w, \lambda) = \tau w^t \mu - \frac{1}{2} w^t C w - \lambda (w^t e - 1). \quad (2.33)$$

Minimiere  $L(w, \lambda)$  bzgl.  $w$ .

$$(I) \quad L_w = \frac{dL(w, \lambda)}{dw} = 0 \quad (2.34)$$

$$\Leftrightarrow \tau \mu - C w - \lambda e = 0 \quad (2.35)$$

$$\Leftrightarrow w = C^{-1} \tau \mu - C^{-1} \lambda e \quad (2.36)$$

und

$$(II) \quad L_\lambda = \frac{dL(w, \lambda)}{d\lambda} = 0 \quad (2.37)$$

$$\Leftrightarrow -w^t e + 1 = 0 \Leftrightarrow w^t e = 1 \Leftrightarrow e^t w = 1. \quad (2.38)$$

Setze aus (I)  $w = C^{-1} \tau \mu - C^{-1} \lambda e$  in (II) ein.

$$e^t (C^{-1} \tau \mu - C^{-1} \lambda e) = 1 \quad (2.39)$$

$$\Leftrightarrow e^t C^{-1} \tau \mu - \lambda e^t C^{-1} e = 1 \quad (2.40)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 + e^t C^{-1} \tau \mu}{e^t C^{-1} e}. \quad (2.41)$$

<sup>24</sup> Albrecht und Maurer [2008], Seite 327, (6A.4a).

Daraus erhält man das optimale Portfoliogewicht in linearer Abhängigkeit von  $\tau$  durch Einsetzen in (2.36):

$$w^*(\tau) = C^{-1}\tau\mu - C^{-1}\left(\frac{1 - e^t C^{-1}\tau\mu}{e^t C^{-1}e}\right)e \quad (2.42)$$

$$= \frac{-C^{-1}e}{e^t C^{-1}e} + \tau \cdot C^{-1}\left(\mu + \frac{e^t C^{-1}\mu e}{e^t C^{-1}e}\right). \quad (2.43)$$

Die Darstellung im Risk-Return-Diagramm als Punkt  $(\sigma_p^*, \mu_p^*)$  ergibt sich aus:

$$\mu^*(\tau) = w^*(\tau)^t \cdot \mu, \quad (2.44)$$

$$\sigma^*(\tau)^2 = w^*(\tau)^t C w^*(\tau). \quad (2.45)$$

Für  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma^*(\tau) = \sigma^*(0) = \sigma_{\text{MVP}}^*$  ergibt sich das globale Minimum-Varianz-Portfolio mit dem Gewicht

$$w_{\text{MVP}}^* = \frac{-C^{-1}e}{e^t C^{-1}e}, \quad (2.46)$$

sodass sich das optimale Portfoliogewicht  $w^*(\tau)$  auch als

$$w^*(\tau) = w_{\text{MVP}}^* + \tau \cdot C^{-1}\left(\mu + \frac{e^t C^{-1}\mu e}{e^t C^{-1}e}\right) \quad (2.47)$$

schreiben lässt. Für  $\tau \geq 0$  ergeben sich aus diesem Gewichtsvektor alle effizienten Portfolios. Der effiziente Rand ist gegeben durch die Menge

$$\{(\sigma, \mu) : \mu = \mu^*(\tau), \sigma^2 = \sigma^*(\tau)^2\}. \quad (2.48)$$

### Bemerkung 2.12

Bedingt durch die Long-only-Bedingung  $w \geq 0$  treten in der Lösung sehr häufig Gewichte  $w_i^* = 0$  auf, während ohne diese Bedingung meist alle Anlagetitel in einer Lösung vertreten sind, d. h.  $w_i \neq 0$  für viele  $i$ .

Für die Menge effizienter Portfolios gilt: Die Forderung nach einer höheren Rendite bedeutet die Inkaufnahme eines höheren Risikos und damit auch mehr Unsicherheit, diese Rendite zu erreichen und vice versa.

Das Portfolio mit der höchsten Rendite beinhaltet auch das höchste Risiko und vice versa.

### 2.1.6 Kritische Diskussion

Harry Markowitz erhielt 1990 den Nobelpreis für seine Verdienste im Bereich der Portfoliotheorie. Er übersetzte den Diversifikationsgedanken in mathematische Formeln. Seine Modellkonstruktion basiert auf der Annahme eines Aktienportfolios. Für andere Anlageformen (nicht lineare Wertpapiere) eignet es sich im Allgemeinen nicht, da alle Renditen des Modells der Normalverteilungsannahme unterliegen. Die Volatilität ist für die meisten Kapitalanleger ein zentrales Risikomaß, jedoch aus der Sicht eines investierenden Versicherungsunternehmens rückt es bedingt durch die Entwicklung finanzaufsichtsrechtlicher Anforderungen in den Schatten des Value-at-Risk-Konzepts. Dieser Anforderung wird in der vorliegenden Arbeit Rechnung getragen und im nächsten Abschnitt die Optimierung des Conditional-Value-at-Risks eingeführt. Diese bedingt gleichzeitig eine Minimierung des Value-at-Risks, wie später gezeigt wird. Die Gedanken und Erkenntnisse der Markowitzoptimierung können dabei weitestgehend übertragen werden.

Neben diesen zentralen Punkten zeigen Studien zur Markowitz Optimierung, wie sensibel die optimalen Portfolios auf Änderungen der Inputdaten reagieren. Ein wesentlicher Inputparameter ist der geschätzte Renditevektor  $\mu = E[R]$ . Kleine Änderungen einzelner Positionen  $\mu_i$  verändern die Ergebnisportfolios mitunter gravierend, d. h., die  $i$ -te Position verschwindet zum Beispiel im Ergebnisportfolio vollständig oder sticht innerhalb des optimalen Portfolios sehr dominant hervor. Die Autoren Chopra und Ziemba veröffentlichen 1993 den Artikel „The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice“ und schreiben:

„Misspecification of the parameters of the return distribution, however, does make a significant difference. Specifically, errors in means are about ten times as important as errors in variances and covariances.”<sup>25</sup>

Das bedeutet, dass Veränderungen oder Fehlschätzungen des Renditevektors deutlich massivere Auswirkungen auf die Ergebnisse haben (um einen Faktor 10) als Veränderungen oder Fehler bei den Kovarianzschätzungen. Die Autoren führen weiter aus, dass mit steigendem Risikoparameter (in diesem Kontext  $t$ ) auch die Sensibilität der Renditen im Verhältnis zu Varianz- und Kovarianzdaten steigt. Demnach hat die Kovarianz den geringsten Einfluss auf die Optimierung. Die Sensitivität der Varianzen auf die Kovarianzen schätzen die Autoren ungefähr auf den Faktor 2. (Diese Faktoren basieren auf einem Risikotoleranzwert von  $t = 50$ ).

<sup>25</sup> Chopra und Ziemba [1993], Seite 7, 1. und 2. Satz.

Werden Renditen geschätzt, so ist es im bisherigen Konzept nicht möglich, für jeden einzelnen Finanztitel einen Grad der Schätzgenauigkeit anzugeben. Die Frage nach der Konfidenz einer Schätzung wird in Abschnitt 3.9.3 im Zusammenhang mit dem *Black-Litterman-Verfahren* wieder aufgegriffen.

## 2.2 Conditional-Value-at-Risk-Portfoliosselektion

Das in diesem Abschnitt vorgestellte Optimierungsverfahren für den Conditional-Value-at-Risk bildet die Grundlage des im dritten Kapitel ausgearbeiteten Optimierungsmodells. Das Verfahren basiert auf der Veröffentlichung von Uryasev [2000], die im Folgenden vorgestellt wird.

### 2.2.1 CVaR-Optimierung nach S.Uryasev<sup>26</sup>

Die meisten Methoden zur Berechnung des VaRs basieren auf linearer Risikoapproximation und nehmen eine multivariate Normalverteilung der Marktparameter bzw. Underlyings an. Im vorherigen Kapitel wurden der Value-at-Risk (VaR) sowie der Conditional-Value-at-Risk (CVaR) eingeführt. Trotz der weitaus größeren Popularität des VaRs weist er gegenüber dem Conditional-VaR einige eklatante Mängel auf:

- Fehlende Subadditivität:  
Führt man zwei Portfolios zu einem großen zusammen, ist es möglich, dass das Risiko des Gesamtportfolios größer ist, als die Summe aus den Risiken der Einzelportfolios.<sup>27</sup>
- Der VaR besitzt multiple lokale Extrema.
- Er ist als Funktion im Allgemeinen nicht hinreichend glatt für eine Optimierung.
- Darüber hinaus ist er nicht konvex.
- Eine (szenariobasierte) Optimierung gestaltet sich daher schwierig.

Im Gegensatz dazu ist der Conditional-VaR für stetige Verteilungen sowohl subadditiv als auch konvex, was für die Optimierung einen bedeutenden Vorteil darstellt. Uryasev [2000] hat bereits gezeigt, dass der Conditional-VaR mithilfe von Linearen Optimierungsprogrammen unter Verwendung nicht glatter Algorithmen optimierbar ist. Dies ermöglicht die Verwendung großer Anzahlen an Finanzinstrumenten und Szenarien.

Des Weiteren haben die Autoren Rockafellar und Uryasev [2000] in numerischen Experimenten nachgewiesen, dass eine Minimierung des Conditional-VaRs nahezu optimale VaR-Lösungen bedingt.<sup>28</sup> Die Tatsache, dass eine Minimierung des CVaRs auch eine Minimierung des VaRs nach sich zieht, folgt aus der Ungleichung

$$\text{CVaR} \geq \text{VaR}.$$

<sup>26</sup> Nach dem Paper von Uryasev [2000].

<sup>27</sup> Siehe auch Kapitel 1.5.

<sup>28</sup> Vgl. Rockafellar und Uryasev [2000].

Zunächst wird gezeigt, wie Uryasev den Conditional-VaR und damit gleichzeitig den VaR minimiert:

Es liege ein Anlageuniversum von  $n$  Instrumenten mit (aktuellen) Preisen  $x_1, \dots, x_n$  zugrunde. Dazu seien  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$  ein Vektor mit Portfoliogewichten aus der Menge möglicher Portfolios  $W$  sowie  $x = (x_1, \dots, x_n)$  der Preisvektor zu den Portfoliogewichten. Sei  $Y = (Y_1, \dots, Y_n) \in \mathbb{R}^n$  der Zufallsvektor der erwarteten zukünftigen Preise in der nächsten Periode. An dieser Stelle nimmt Uryasev an, dass die zugrunde liegende Verteilung  $P$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho$  besitzt. Uryasev weist darauf hin, dass ein analytischer Ausdruck von  $\rho$  für unsere Zwecke nicht notwendig ist.<sup>29</sup>

Werden Shortpositionen nicht erlaubt, d. h.  $w \geq 0$ , so erhält der Lösungsraum  $\mathbb{L}$  die Form

$$\mathbb{L} = \{(w_1, \dots, w_n) : w_1, \dots, w_n \geq 0\} \subseteq W.$$

Die Verlustfunktion ist in diesem Fall der erwartete Portfoliopreis in der kommenden Periode abzüglich des aktuellen Portfoliowerts:

$$f(w, Y) = wY^t - wx^t = w(Y - x)^t.$$

Sei  $\rho$  die Dichte von  $Y$  und sei  $\Psi(w, \alpha)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $f(w, Y)$  den Wert  $\alpha$  nicht überschreitet.

$$\Psi(w, \alpha) := P[f(w, Y) \leq \alpha] = \int \mathbb{1}_{\{f(w, \cdot) \leq \alpha\}} \circ Y dP = \int_{f(w, y) \leq \alpha} \rho(y) dy.$$

Dann sind der VaR als

$$\text{VaR}_\beta = \inf\{\alpha(w, \beta) : \Psi(w, \alpha(w, \beta)) = \beta\} = \inf\{\alpha(w, \beta) : P[f(w, Y) \leq \alpha(w, \beta)] = \beta\}$$

und der Conditional-VaR als

$$\text{CVaR}_\beta(w) = \frac{1}{1 - \beta} \int_{\{f(w, y) > \alpha(w, \beta)\}} f(w, y) \rho(y) dy$$

definiert.

Es wird also die Verlustfunktion gerade über den Bereich integriert, wo sie anschaulich hinter dem Value-at-Risk  $\alpha(w, \beta)$  liegt, d. h., der Verlust größer als der Value-at-Risk ist. Das Integral wird mit dem Faktor  $(1 - \beta)^{-1}$  gemittelt, da das hinter dem Value-at-Risk

<sup>29</sup> Vgl. dazu auch Rockafellar und Uryasev [2000].

liegende Quantil dem Wert  $(1 - \beta)$  entspricht. Die Schwierigkeit der Behandlung dieser CVaR-Funktion liegt in der darin enthaltenen VaR-Funktion - es sei denn, man verfügt über eine analytische Repräsentation des VaRs. Der Kernpunkt der Veröffentlichung von Uryasev liegt in seiner Idee, eine einfachere Funktion zu suchen, die anstelle der CVaR-Funktion optimiert werden kann. Als Ergebnis präsentiert er in seinem Artikel die Funktion

$$F_\beta(w, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1 - \beta} \int_{f(w, y) > \alpha} (f(w, y) - \alpha) \rho(y) dy.$$

$F_\beta$  soll folgende Eigenschaften besitzen:

- (1) Die Funktion  $F_\beta(w, \alpha)$  ist konvex in  $\alpha$ .
- (2) Der VaR ist **eines** der Minima von  $F_\beta(w, \alpha)$  bezüglich  $\alpha$ .
- (3) Die Minimierung von  $F_\beta(w, \alpha)$  bezüglich  $\alpha$  ergibt den Conditional-VaR:

$$\text{CVaR}(w) = F_\beta(w, \alpha(w, \beta)) = \min_{\alpha} F_\beta(w, \alpha).$$

In Ermangelung eines Beweises zu dem für diese Arbeit zentralen Resultat innerhalb des Artikels von Uryasev, wird ein solcher im Folgenden eigenständig durchgeführt.

*Beweis.* (3) Sei eine Folge  $\Delta_n \rightarrow 0$  mit  $\Delta_n \neq 0$  gegeben, die in zwei disjunkte Teilfolgen  $\Delta_n > 0$  (positiver Anteil) und  $\Delta_n < 0$  (negativer Anteil) zerlegt werden kann.

Betrachte den Fall  $\Delta_n > 0$ . Die Ableitung von  $F_\beta(w, \alpha)$  nach  $\alpha$  lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} F_\beta(w, \alpha) &= \lim_{\Delta_n \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta_n} \left[ F_\beta(w, \alpha + \Delta_n) - F_\beta(w, \alpha) \right] \\ &= \lim_{\Delta_n \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta_n} \left[ \alpha + \Delta_n \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1 - \beta} \int \mathbb{1}_{\{f(w, y) - \alpha - \Delta_n > 0\}} (f(w, y) - \alpha - \Delta_n) \rho(y) dy \right. \\ &\quad \left. - \left( \alpha + \frac{1}{1 - \beta} \int \mathbb{1}_{\{f(w, y) - \alpha > 0\}} (f(w, y) - \alpha) \rho(y) dy \right) \right] \\ &= 1 + \frac{1}{1 - \beta} \lim_{\Delta_n \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta_n} \left[ \right. \\ &\quad \left. \int \mathbb{1}_{\{f(w, y) - \alpha - \Delta_n > 0\}} (f(w, y) - \alpha - \Delta_n) \rho(y) dy \right. \\ &\quad \left. - \int \mathbb{1}_{\{f(w, y) - \alpha > 0\}} (f(w, y) - \alpha) \rho(y) dy \right] = \circledast. \end{aligned}$$

Für  $\Delta_n > 0$  gilt die Gleichung

$$\mathbb{1}_{\{f(w,y) - \alpha - \Delta_n > 0\}} = \mathbb{1}_{\{f(w,y) - \alpha > 0\}} - \mathbb{1}_{\{0 < f(w,y) - \alpha \leq \Delta_n\}}. \quad (2.49)$$

Setze  $A(\alpha) = \{0 < f(w,y) - \alpha \leq \Delta_n\}$ , dann folgt weiterhin:

$$\begin{aligned} \circledast &= 1 + \frac{1}{1-\beta} \lim_{\Delta_n \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta_n} \left[ \left( \int \mathbb{1}_{\{f(w,y) - \alpha > 0\}} (f(w,y) - \alpha - \Delta_n) \rho(y) dy \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int \mathbb{1}_{A(\alpha)} (f(w,y) - \alpha - \Delta_n) \rho(y) dy \right) \right. \\ &\quad \left. - \int \mathbb{1}_{\{f(w,y) - \alpha > 0\}} (f(w,y) - \alpha) \rho(y) dy \right] \\ &= 1 + \frac{1}{1-\beta} \lim_{\Delta_n \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta_n} \left[ \int \mathbb{1}_{\{f(w,y) - \alpha > 0\}} (-\Delta_n) \rho(y) dy \right. \\ &\quad \left. - \int \mathbb{1}_{A(\alpha)} (f(w,y) - \alpha - \Delta_n) \rho(y) dy \right] \\ &= 1 + \frac{1}{1-\beta} \int \mathbb{1}_{\{f(w,y) - \alpha > 0\}} (-1) \rho(y) dy \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{1-\beta} \lim_{\Delta_n \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta_n} \int \mathbb{1}_{A(\alpha)} (f(w,y) - \alpha - \Delta_n) \rho(y) dy}_{=0}, \end{aligned}$$

denn auf der Menge  $A(\alpha)$  gilt, dass  $0 < f(w,y) - \alpha - \Delta_n \leq \Delta_n$  ist und somit

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\Delta_n \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta_n} \int \mathbb{1}_{A(\alpha)} \underbrace{(f(w,y) - \alpha - \Delta_n)}_{\leq \Delta_n \text{ auf } A(\alpha)} \rho(y) dy \\ &\leq \lim_{\Delta_n \rightarrow 0} \frac{\Delta_n}{\Delta_n} \int \mathbb{1}_{A(\alpha)} \rho(y) dy \\ &= \lim_{\Delta_n \rightarrow 0} \int \mathbb{1}_{\{f(w,y) - \alpha > 0\}} \rho(y) dy - \int \mathbb{1}_{\{f(w,y) - \alpha - \Delta_n > 0\}} \rho(y) dy = 0, \end{aligned}$$

gemäß Gleichung 2.49 und unter Anwendung des Satzes zur majorisierten Konvergenz<sup>30</sup>, aus dem durch die Wahl der konstanten Funktion 1 als Majorante folgt, dass

$\mathbb{1}_{\{f(w,y) - \alpha - \Delta_n > 0\}}$  gegen  $\mathbb{1}_{\{f(w,y) - \alpha > 0\}}$  konvergiert.

<sup>30</sup>Vgl. z. B. Klenke [2008], Korollar 6.26.

Daraus ergibt sich für die Ableitung von  $F_\beta(w, \alpha)$  nach  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha} F_\beta(w, \alpha) &= 1 + \frac{1}{1-\beta} \int \mathbb{1}_{\{f(w, y) - \alpha > 0\}} (-1) \rho(y) dy \\
&= 1 - \frac{1}{1-\beta} \int_{\{f(w, y) > \alpha\}} dP^Y \\
&= 1 - \frac{1}{1-\beta} (P[f(w, Y) > \alpha]) \\
&= 1 - \frac{1}{1-\beta} (1 - \underbrace{P[f(w, Y) \leq \alpha]}_{\Psi(w, \alpha)}) \\
&= 1 + \frac{1}{1-\beta} (\Psi(w, \alpha) - 1).
\end{aligned}$$

Der Fall  $\Delta_n < 0$  kann analog dazu betrachtet werden, sodass für beide Teilfolgen gilt

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} F_\beta(w, \alpha) = 1 + \frac{1}{1-\beta} (\Psi(w, \alpha) - 1)$$

und somit auch für die ganze Folge  $\Delta_n \rightarrow 0$ .

(2) Setzt man die Ableitung aus (1) gleich Null, so erhält man als Minimum:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha} F_\beta(w, \alpha) &= 0 \\
\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{1-\beta} (\Psi(w, \alpha) - 1) &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{1}{1-\beta} (1 - \Psi(w, \alpha)) &= 1 \\
\Leftrightarrow (1 - \Psi(w, \alpha)) &= (1 - \beta) \\
\Leftrightarrow \Psi(w, \alpha) &= \beta.
\end{aligned}$$

Somit minimiert der VaR gerade die (konvexe) Funktion  $F_\beta$ , denn gemäß vorheriger Definition gilt:  $\text{VaR}_\beta = \inf\{\alpha(w, \beta) : \Psi(w, \alpha(w, \beta)) = \beta\}$ .

(1)  $F_\beta(w, \alpha)$  ist konvex in  $\alpha$ , wenn für  $\lambda \in [0, 1]$  und  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  die Ungleichung

$$F_\beta(w, (1-\lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2) \leq (1-\lambda)F_\beta(w, \alpha_1) + \lambda F_\beta(w, \alpha_2) \quad (2.50)$$

erfüllt ist. Für die linke Seite der Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}
& F_\beta(w, (1-\lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2) \\
&= [(1-\lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2] \\
&\quad + \frac{1}{1-\beta} \int \mathbb{1}_{\{f(w,y) - (1-\lambda)\alpha_1 - \lambda\alpha_2 > 0\}} (f(w,y) - (1-\lambda)\alpha_1 - \lambda\alpha_2) \rho(y) dy.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite lässt sich als

$$\begin{aligned}
& (1-\lambda)F_\beta(w, \alpha_1) + \lambda F_\beta(w, \alpha_2) \\
&= (1-\lambda) \left[ \alpha_1 + \frac{1}{1-\beta} \int \mathbb{1}_{\{f(w,y) > \alpha_1\}} (f(w,y) - \alpha_1) \rho(y) dy \right] \\
&\quad + \lambda \left[ \alpha_2 + \frac{1}{1-\beta} \int \mathbb{1}_{\{f(w,y) > \alpha_2\}} (f(w,y) - \alpha_2) \rho(y) dy \right] \\
&= (1-\lambda)\alpha_1 + \frac{1}{1-\beta} \int \mathbb{1}_{\{f(w,y) > \alpha_1\}} (1-\lambda)(f(w,y) - \alpha_1) \rho(y) dy \\
&\quad + \lambda\alpha_2 + \frac{1}{1-\beta} \int \mathbb{1}_{\{f(w,y) > \alpha_2\}} \lambda(f(w,y) - \alpha_2) \rho(y) dy \\
&= [(1-\lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2] \\
&\quad + \frac{1}{1-\beta} \int \mathbb{1}_{\{f(w,y) > \alpha_1\}} (1-\lambda)(f(w,y) - \alpha_1) + \mathbb{1}_{\{f(w,y) > \alpha_2\}} \lambda(f(w,y) - \alpha_2) \rho(y) dy
\end{aligned}$$

schreiben. Die Funktion  $F_\beta(w, \alpha)$  erfüllt die Ungleichung (2.50), wenn für alle  $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{1}_{\{f(w,y) - (1-\lambda)\alpha_1 - \lambda\alpha_2 > 0\}} (f(w,y) - (1-\lambda)\alpha_1 - \lambda\alpha_2) \\
& \leq \mathbb{1}_{\{f(w,y) > \alpha_1\}} (1-\lambda)(f(w,y) - \alpha_1) + \mathbb{1}_{\{f(w,y) > \alpha_2\}} \lambda(f(w,y) - \alpha_2)
\end{aligned} \tag{2.51}$$

gilt. Um (2.51) zu zeigen, betrachte folgende drei Fälle:

(a)  $f(w, y) \leq \alpha_1, \alpha_2$ :

Alle Indikatorfunktionen sind gleich Null, sodass die Ungleichung (2.51) trivialerweise erfüllt ist.

(b)  $f(w, y) > \alpha_1, \alpha_2$ :

Alle Indikatorfunktionen sind gleich eins, sodass für (2.51) folgt:

$$f(w, y) - (1-\lambda)\alpha_1 - \lambda\alpha_2 = (1-\lambda)(f(w, y) - \alpha_1) + \lambda(f(w, y) - \alpha_2).$$

(c)  $\alpha_2 < f(w, y) \leq \alpha_1$ :

In diesem Fall sind  $\mathbb{1}_{\{f(w, y) > \alpha_1\}} = 0$  und  $\mathbb{1}_{\{f(w, y) > \alpha_2\}} = 1$ .

Für die dritte Indikatorfunktion ergibt sich die Fallunterscheidung:

(c1) Falls  $\mathbb{1}_{\{f(w, y) - (1 - \lambda)\alpha_1 - \lambda\alpha_2\}} = 1$  ist, gilt für Ungleichung (2.51):

$$\begin{aligned} f(w, y) - (1 - \lambda)\alpha_1 - \lambda\alpha_2 &\leq \lambda(f(w, y) - \alpha_2) \\ \Leftrightarrow f(w, y) - \lambda f(w, y) - (1 - \lambda)\alpha_1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (1 - \lambda) \underbrace{(f(w, y) - \alpha_1)}_{\leq 0, \text{ da } \alpha_1 \leq f(w, y)} &\leq 0. \end{aligned}$$

(c2) Falls  $\mathbb{1}_{\{f(w, y) - (1 - \lambda)\alpha_1 - \lambda\alpha_2\}} = 0$  ist, gilt für Ungleichung (2.51):

$$0 \leq \lambda \underbrace{(f(w, y) - \alpha_2)}_{> 0, \text{ da } \alpha_2 < f(w, y)}.$$

Somit ist die Ungleichung (2.51) nachgewiesen, sodass  $F_\beta(w, \alpha)$  die Konvexitätsbedingung (2.50) erfüllt, d.h. konvex bzgl.  $\alpha$  ist.

□

Verwendet man die Funktion  $F_\beta(w, \alpha)$  für die Optimierung des Conditional-VaRs, so erhält man gleichzeitig auch den entsprechenden VaR des optimalen Portfolios. Das Optimierungsproblem dazu lautet

$$\min_{w \in \mathbb{L}} \text{CVaR}(w) = \min_{w \in \mathbb{L}, \alpha} F_\beta(w, \alpha). \quad (2.52)$$

Ist  $(w^*, \alpha^*)$  eine Lösung dieses Problems (2.52), so sind

- $F_\beta(w^*, \alpha^*)$  ein optimaler Conditional-VaR,
- $w^*$  das risikominimale Portfolio dazu und
- $\alpha^*$  der dazugehörige VaR, welcher im Allgemeinen nicht optimal ist.

Uryasev zeigt unter recht allgemeinen Bedingungen, dass  $F_\beta(w, \alpha)$  für die Optimierung hinreichend glatt ist. Darüber hinaus ist  $F_\beta(w, \alpha)$  konvex in  $w$ , falls die Verlustfunktion  $f(w, \alpha)$  konvex in  $w$  ist. Liegt eine konvexe Lösungsmenge  $\mathbb{L}$  möglicher Portfolios vor, so liegt ein konvexes (hinreichend glattes) Optimierungsproblem vor.

Eine Lösung konvexer Optimierungsprobleme wurde im Rahmen der Markowitz-Theorie in Abschnitt 2.1.5 präsentiert. Der nächste Abschnitt zeigt die Umsetzung einer szenariobasierten Optimierung des Optimierungsproblems (2.52), wie sie im dritten Kapitel verwendet wird.

### 2.2.2 Lineare CVaR-Optimierung unter Einsatz von Szenarien<sup>31</sup>

In der Praxis verwendet man anstelle der Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho$  in der Regel Szenarien als Realisierungen (Sample/Stichprobe) des im vorherigen Abschnitt eingeführten Zufallsvektors  $Y$ . Die Gründe hierfür sind vielfältig: Beispielsweise fehlt eine analytische Darstellung der Dichte oder es bestehen unternehmensinterne Konsistenzgründe, sodass z. B. bereits vorhandene Szenarien aus einem anderen Modell zur Kennzahlenberechnung in der Optimierung verwendet werden sollen. Die Verteilungen der einzelnen Zufallsvariablen können anhand historischer Daten geschätzt und kalibriert werden, um mit ihrer Hilfe anschließend die gewünschte Anzahl an Szenarien zu generieren. Auf die Vorgehensweise zur Generierung von Szenarien wird in Abschnitt 2.2.4 eingegangen.

Zur Verwendung eines sogenannten Szenario-Sets anstelle der Dichte  $\rho(y)$  im Optimierungsprogramm (2.52) benötigt man eine diskrete Version der Funktion  $F_\beta(w, \alpha)$ . Dazu seien  $J$  Szenarien  $y_1, \dots, y_J$  als Realisierungen des Zufallsvektors  $Y$  gegeben. Diese Realisierungen sind als Preise zu verstehen und könnten zum Beispiel aus einer Monte-Carlo-Simulation stammen.

Um die Szenarien anstelle der Dichte  $\rho$  zu verwenden, diskretisiert Uryasev die Funktion  $F_\beta(w, \alpha)$  zu

$$\tilde{F}_\beta(w, \alpha) = \alpha + \frac{1}{J(1-\beta)} \sum_{j=1}^J \max(f(w, y_j) - \alpha, 0). \quad (2.53)$$

Zur Anwendung der nachfolgenden linearen Optimierungsmethoden müssen drei Voraussetzungen erfüllt sein:

- (1)  $f(w, \alpha)$  ist linear in  $w$ .
- (2)  $f(w, \alpha)$  ist konvex in  $w$ .
- (3) Die Lösungsmenge  $\mathbb{L}$  ist konvex.

Aus der zweiten Voraussetzung folgt zusammen mit den Resultaten des vorherigen Abschnitts die Konvexität von  $\tilde{F}_\beta(w, \alpha)$ .

<sup>31</sup>Vgl. Uryasev [2000], Abschnitt 2.

Zur Formulierung des Optimierungsproblems als Lineares Programm ersetzt man  $\max(f(w, y_j) - \alpha, 0)$  durch die Schlupfvariable  $z_j$  mit der Bedingung

$$z_j \geq f(w, y_j) - \alpha \text{ mit } z_j \geq 0.$$

Dies ermöglicht das Optimierungsproblem als lineares Programm zu formulieren:

$$\min\left(\alpha + \frac{1}{J(1-\beta)} \sum_{j=1}^J z_j\right) \quad (2.54)$$

$$w \in \mathbb{L}$$

$$z_j \geq f(w, y_j) - \alpha \text{ mit } z_j \geq 0 \text{ und } j = 1, \dots, J.$$

Zur Umsetzung der CVaR-Optimierung wird dieses Optimierungsproblem im folgenden Abschnitt für unsere Zwecke aufbereitet.

### 2.2.3 Darstellung als allgemeines lineares Programm

Zur späteren Lösung des Optimierungsprogramms (2.54), wird dieses zunächst in die allgemeine lineare Form

$$\min c^t x \text{ unter} \quad (2.55)$$

$$lbA \leq Ax \leq ubA$$

$$lbx \leq x \leq ubx.$$

umformuliert. Eine solche Darstellung als allgemeines lineares Programm ermöglicht später die Umsetzung der Optimierung mithilfe der Programmiersprache MATLAB<sup>32</sup> in Verbindung mit der Optimierungszusatzsoftware mosek<sup>33</sup>.

Möchte man das Programm (2.54) auf die Form (2.55) bringen, so bedeutet dies zum einen eine Anpassung der Zielfunktion  $\alpha + \frac{1}{J(1-\beta)} \sum_{j=1}^J z_j$  und zum anderen die Unterbringung aller anderen (Un-)Gleichungen in der Form  $lbA \leq Ax \leq ubA$ , d. h. mithilfe der sogenannten *Nebenbedingungsmatrix*  $A$ .

<sup>32</sup> „MATLAB® ist eine höhere Programmiersprache und interaktive Umgebung für numerische Berechnungen, Visualisierung und Programmierung. MATLAB dient zur Datenanalyse, Algorithmen-Entwicklung und zur Erstellung von Modellen und Anwendungen.“, <http://www.mathworks.de/products/matlab/index.html>.

<sup>33</sup> <http://mosek.com/products/product-overview/mosek/matlab-toolbox/>.

Die Zielfunktion  $c^t x$  besteht aus dem Koeffizientenvektor  $c = (c_1, \dots, c_n)$  und dem Zielvektor  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Die Zielfunktion soll den Conditional-Value-at-Risk zurück geben, d. h., es soll

$$(*) \quad c^t x = \text{CVaR}$$

gelten.

Dazu wird dem Zielvektor eine Position  $x_{\text{CVaR}}$  hinzugefügt, die den Conditional-Value-at-Risk widerspiegeln soll; beispielsweise die Position  $n + 1$ , d. h.  $x_{n+1} = x_{\text{CVaR}}$ , sodass der Zielvektor nun  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{\text{CVaR}})$  lautet. Gleichzeitig wähle  $c = (\underbrace{0, \dots, 0}_n, 1)$ , um die Bedingung  $(*)$  zu erfüllen.

Da anstelle des Conditional-Value-at-Risks die Funktion  $\tilde{F}_\beta$  verwendet werden soll, muss zunächst der Aufbau des Zielvektors  $x$  genauer spezifiziert werden, um auf diese Weise die Funktion  $\tilde{F}_\beta$  abbilden zu können. Dazu legt man die Positionen von  $x$  fest und ordnet z. B. die ersten  $n$  Positionen den Portfoliogewichten  $w_1, \dots, w_n$  (für  $n$  verschiedene Finanzprodukte) zu, fügt an Position  $n + 1$  den Conditional-Value-at-Risk an, gefolgt von dem Value-at-Risk  $\alpha = x_{\text{VaR}}$  und den  $J$  Schlupfvariablen  $z_1, \dots, z_J$  für jedes einzelne der  $J$  Szenarien  $y_1 = (y_{11}, \dots, y_{1n}), \dots, y_J = (y_{J1}, \dots, y_{Jn})$ , die im vorherigen Abschnitt eingeführt worden sind. Auf diese Weise erhält  $x$  die folgende Gestalt:

$$x = (w_1, \dots, w_n, x_{\text{CVaR}}, x_{\text{VaR}}, z_1, \dots, z_J)^t.$$

In der ersten Zeile der Nebenbedingungsmatrix  $A$  wird die Zielfunktion des Optimierungsprogramms 2.54 abgebildet und für den CVaR die Funktion  $\tilde{F}_\beta$  entsprechend der Gleichung

$$x_{\text{CVaR}} = \left( \alpha + \frac{1}{J(1-\beta)} \sum_{j=1}^J z_j \right), \quad (2.56)$$

eingesetzt, um das Optimierungsprogramm 2.54 zu konstruieren. Setze  $\lambda := \frac{1}{J(1-\beta)}$  und  $\alpha = \text{VaR}_\beta = x_{\text{VaR}}$ . Dann lautet die erste Zeile der Nebenbedingungsmatrix  $A$

$$A(1.\text{Zeile}) = \begin{pmatrix} w_1 \dots w_n & \text{CVaR} & \text{VaR} & z_1 \dots z_J \\ 0 \dots 0 & -1 & 1 & \lambda \dots \lambda \end{pmatrix}.$$

Die Zeilen der Matrix bilden die Koeffizienten des Gleichungssystems ab, das sich durch die Multiplikation mit dem Zielvektor  $x$  ergibt. Daher muss die Reihenfolge der Spalten der Matrix  $A$  exakt mit dem Aufbau des Zielvektors  $x$  übereinstimmen.

Für jede Zeile der Matrix  $A$  müssen außerdem eine Untergrenze (lower bound)  $lbA$  sowie eine Obergrenze (upper bound)  $ubA$  definiert werden, um dem Format  $lbA \leq Ax \leq ubA$  gerecht zu werden. Für die erste Zeile von  $A$  wähle  $lbA = ubA = 0$ , um die gewünschte Gleichheit in (2.56) zu erlangen. Zur Verdeutlichung des Prinzips rechnet man leicht nach, dass

$$\begin{aligned}
 & 0 \leq A(1.Zeile) \cdot x \leq 0 \\
 \Leftrightarrow & 0 \leq \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & -1 & 1 & \lambda \dots \lambda \end{pmatrix} \cdot (w_1, \dots, w_n, x_{CVaR}, x_{VaR}, z_1, \dots, z_J)^t \leq 0 \\
 \Leftrightarrow & 0 \cdot (w_1 + \dots + w_n) - x_{CVaR} + x_{VaR} + \lambda z_1 + \dots + \lambda z_J = 0 \\
 \Leftrightarrow & x_{VaR} + \lambda \sum_{j=1}^J z_j = x_{CVaR}
 \end{aligned}$$

genau der gewünschten Zielfunktion (2.56) entspricht.

Zur Vervollständigung des Optimierungsprogramms (2.54) fehlen noch die Ungleichungen für die Schlupfvariablen  $z_j \geq f(w, y_j) - x_{VaR}$  sowie die Forderung, dass alle  $z_j \geq 0$  (für  $1 \leq j \leq J$ ) sein sollen. Um die Ungleichungen für die Schlupfvariablen darzustellen, benötigt man zunächst einmal  $J$  Szenarien für jedes der  $n$  Finanzinstrumente, d. h., zu einem Finanzinstrument mit dem Gewicht  $w_i$  betrachtet man  $J$  Realisierungen  $y_{1i}, \dots, y_{Ji}$  der Zufallsvariablen der erwarteten Renditen  $E[R_i]$ .

Am besten lassen sich die Szenarien in Matrixform darstellen.

$$SZ := \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{J1} & \dots & y_{J(n-1)} & y_{Jn} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Anzahl Finanzinstrumente 1 bis } n \\ \text{Anzahl Szenarien 1 bis } J \end{matrix} \quad (2.57)$$

Die Matrix  $SZ$  enthält die Szenarien aller  $n$  Finanzprodukte und wird im weiteren Verlauf als *Szenariomatrix* bezeichnet.

Sie lässt sich als Teilmatrix in die Nebenbedingungsmatrix  $A$  integrieren. Man kann die Nebenbedingungen  $z_j \geq f(w, y_j) - x_{VaR}$  zu  $0 \geq f(w, y_j) - x_{VaR} - z_j$  umformen und durch Auffüllen der jeweiligen Szenariozeile abbilden. Dann sieht die Integration der ersten Zeile

der Szenariomatrix in die Nebenbedingungsmatrix  $A$  folgendermaßen aus.

$$A(2.Zeile) = \begin{pmatrix} w_1 \dots w_n & \text{CVaR} & \text{VaR} & z_1 & z_2 \dots z_J \\ y_{11} \dots y_{1n} & 0 & -1 & -1 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}.$$

Sie bildet die zweite Zeile in der Nebenbedingungsmatrix  $A$ . Um die Ungleichungen für die Schlupfvariablen korrekt abzubilden, müssen die Grenzen  $lbA = -\infty$  und  $ubA = 0$  gewählt werden. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass man die geforderte Ungleichung erhält:

$$\begin{aligned} -\infty &\leq \begin{pmatrix} y_{11} \dots y_{1n} & 0 & -1 & -1 & 0 \dots 0 \end{pmatrix} \cdot (w_1, \dots, w_n, x_{\text{CVaR}}, x_{\text{VaR}}, z_1, \dots, z_J)^t \leq 0 \\ \Leftrightarrow &\quad (y_{11}w_1 + \dots + y_{1n}w_n) + 0 \cdot x_{\text{CVaR}} - x_{\text{VaR}} - z_1 + 0 \cdot z_2 + \dots + 0 \cdot z_J \leq 0 \\ \Leftrightarrow &\quad \underbrace{\sum_{i=1}^n y_{1i}w_i}_{\text{entspricht } f(w, y_1)} - x_{\text{VaR}} \leq z_1. \end{aligned}$$

Vervollständigt man auf diese Weise sukzessiv die restlichen Zeilen, so erhält die Nebenbedingungsmatrix die Form

$$A = \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_n & \text{CVaR} & \text{VaR} & z_1 & z_2 & \dots & z_J \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ y_{11} & \dots & y_{1n} & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ y_{21} & \dots & y_{2n} & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \dots 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ y_{J1} & \dots & y_{Jn} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Die dazugehörigen Grenzvektoren  $lbA$  und  $ubA$  haben die Länge „Zeilenanzahl von  $A$ “ und lauten:

$$lbA = (0 \quad \overbrace{-\infty \dots -\infty}^{\text{Anzahl Szenarien}})^t, \quad ubA = (0 \quad \overbrace{0 \dots 0}^{\text{Anzahl Szenarien}})^t. \quad (2.59)$$

Anschließend müssen noch die Grenzen an den Vektor  $x = (w_1, \dots, w_n, x_{\text{CVaR}}, x_{\text{VaR}}, z_1, \dots, z_J)^t$  zusammengefasst werden: Der Conditional-Value-at-Risk  $x_{\text{CVaR}}$  sowie die Portfoliogewichte  $w_i$  bleiben unbeschränkt, d. h., sie dürfen aus dem Intervall  $[-\infty, \infty]$  sein.

Der Value-at-Risk  $x_{\text{VaR}}$  sowie die Schlupfvariablen  $z_j$  sollen größergleich Null sein.

$$\begin{aligned} lbx &= \left( \underbrace{-\infty \dots -\infty}_{\text{Anzahl Finanzinstrumente}} \underbrace{-\infty}_{\text{CVaR}} \underbrace{0}_{\text{VaR}} \underbrace{0 \dots 0}_{\text{Anzahl Szenarien}} \right)^t, \\ ubx &= \left( \underbrace{\infty \dots \infty}_{\text{Anzahl Finanzinstrumente}} \underbrace{\infty}_{\text{CVaR}} \underbrace{\infty}_{\text{VaR}} \underbrace{\infty \dots \infty}_{\text{Anzahl Szenarien}} \right)^t. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Eine Forderung  $w \in \mathbb{L}$ , wie sie im Optimierungsprogramm (2.54) formuliert worden ist, lässt sich durch Beschränkungen der Grenzen  $lbx$  und  $ubx$  an die Gewichte  $w_1$  bis  $w_n$ , d. h. die ersten  $n$ -Positionen, umsetzen.

Damit ist das Optimierungsprogramm vollständig spezifiziert. Als Optimierungsergebnis erhält man ein risikominimales Portfolio mit den Gewichten  $w^{opt} = (w_1^{opt}, \dots, w_n^{opt})$  sowie einen (mit der Funktion  $\tilde{F}_\beta$  approximierten) optimalen Conditional-Value-at-Risk  $x_{\text{CVaR}}^{opt}$ . Als Nebenprodukt erhält man mit  $x_{\text{VaR}}$  auch eine Annäherung an den minimalen Value-at-Risk.

Im dritten Kapitel wird dieses Optimierungsprogramm zur Portfoliooptimierung einer Strategischen-Asset-Allokation eines Versicherungsunternehmens genutzt. Es wird durch Nebenbedingungen sukzessiv erweitert und auf die Bedürfnisse eines Versicherungsunternehmens angepasst.

## 2.2.4 Generierung von Szenarien mit der Monte-Carlo-Methode<sup>34</sup>

Dieser letzte Abschnitt des zweiten Kapitels gibt eine kurze Einführung in die Vorgehensweise der Zufallszahlengenerierung und gewährt einen kurzen mathematisch-technischen Einblick in die Thematik.

Die Verfahren zur Generierung von Szenarien starten mit einem geeigneten Zufallszahlengenerator, der „deterministisch Zufallszahlen“ auf einem vorgegebenen Intervall generiert, die man als *Pseudozufallszahlen* bezeichnet. Die angesprochene Deterministik gewährleistet bei gleichen Inputparametern die Reproduzierbarkeit der generierten Zufallszahlen<sup>35</sup>. Die Reproduzierbarkeit ist ein zentraler Aspekt, da ohne sie keine Nachvollziehbarkeit der Simulationsprozesse gewährleistet werden kann. Beispielsweise stelle man sich einen

<sup>34</sup> Als Literaturgrundlage zu diesem Kapitel dienen das Vorlesungsskript von Buchholz [2011] sowie das Buch von Müller-Gronbach et al. [2012].

<sup>35</sup> Daher stammt der Begriff der *Pseudozufallszahlen*.

Softwareentwickler vor, der mit der Entwicklung eines Programms betraut ist, in dem Zufallszahlen verwendet werden sollen. Bei der Verwendung „echter“ Zufallszahlen<sup>36</sup> hat der Softwareentwickler keinerlei Möglichkeit seine Ergebnisse während der Programmierung fortlaufend zu kontrollieren. Dieser sogenannte *Debugging*-Prozess<sup>37</sup> dient dem Softwareentwickler als ständige Kontrolle während der Programmierphase und soll die korrekte Umsetzung des Programmiervorhabens sicherstellen. Idealtypischer Weise sollten die aus dem Algorithmus gewonnenen Pseudozufallszahlen für einen externen Betrachter von echten Realisierungen der entsprechenden Zufallsvariablen nicht zu unterscheiden sein.

Durch die Programmierung eines deterministischen Algorithmus zur Generierung von Pseudozufallszahlen wird also zu jedem Zeitpunkt eine Reproduzierbarkeit der Ergebnisse gewährleistet. Dies erleichtert auch die Kommunikation fertiger Ergebnisse innerhalb eines Unternehmens sowie das Reporting nach außen.

Die Güte einer Simulation hängt maßgeblich von der Güte der generierten Pseudozufallszahlen ab. Im Wesentlichen besteht die Simulation aus zwei Schritten:

- (1) Generierung gleichverteilter Pseudozufallszahlen.
- (2) Transformation der Zufallszahlen in die gewünschte Zielverteilung.

Zur (Pseudo-)Zufallszahlengenerierung gibt es viele unterschiedliche Algorithmen, bei denen jeweils ein Startwert (*Initialisierung, seed*)  $s_1$  vorgegeben wird, der durch eine Funktion  $f$  in einen nachfolgenden Wert  $s_2$  transformiert wird. Daraus entsteht eine Zahlenfolge  $(s_i)_{i \in I}$  mit  $I = 1, \dots, n$  der Länge  $n$ . Diese rekursiv definierte Zahlenfolge liefert zu jeder Initialisierung  $s_1$  stets dieselbe endliche Zahlenfolge. Gilt für zwei Zahlenfolgen  $(s_{1,i})_{i \in I}$ ,  $(s_{2,j})_{j \in J}$ , dass ein  $s_{1,i} = s_{2,j}$  ist, so gilt

$$s_{1,i+k} = s_{2,j+k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N},$$

was bedeutet, dass auch alle nachfolgenden Glieder der Zahlenfolge identisch sind.

<sup>36</sup> Echte Zufallszahlen können aus der Beobachtung physikalischer Abläufe (z. B. dem Prozess des radioaktiven Zerfalls) oder aus einem einfachen Münzwurfsperiment gewonnen werden. Jedes Experiment hat einen anderen, nicht nachvollziehbaren Verlauf. Das Experiment, d. h. die daraus resultierende Stichprobe, kann lediglich auf Wahrscheinlichkeitstheoretische Aspekte überprüft werden.

<sup>37</sup> Ein sogenannter **Debugger** ist ein softwaretechnisches Hilfsmittel zum Auffinden und Beseitigen von Fehlern in Softwareprogrammen. Eine der wichtigsten Funktionen des Debuggers ist das Setzen von Haltepunkten, um an einer beliebigen Stelle des Programms anzuhalten. Ohne Debugger sind größere Programmprojekte in der Praxis kaum umsetzbar.

**Beispiel 2.13** (Midsquare Method)

Als Initialwert (seed)  $s_0$  gibt man einen mindestens vierstelligen, ganzzahligen Wert vor, der aus einer geraden Anzahl von  $k$  Ziffern besteht. Dieser wird quadriert und anschließend selektiert man aus diesem quadrierten Initialwert die "mittleren  $k$  Ziffern". Sollte das Quadrat aus einer ungeraden Anzahl Ziffern bestehen, füge man eine „0“ hinten an. Die selektierten Ziffern bilden die erste Zufallszahl  $s_1$ , die als Ausgangswert für die nächste Zufallszahl  $s_2$  dient.

Sei beispielsweise  $s_0 = 2345$  ein vierstelliger Initialwert, so ist die siebenstellige Zahl  $(s_0)^2 = 5499025$  sein Quadrat. Unter Hinzufügen einer Null ergibt sich die Zahlenfolge 54990250, deren mittlere vier Stellen die erste Zufallszahl  $s_1 = 9902$  bilden. Aus  $(s_1)^2 = 98049604$  folgt dann weiter  $s_2 = 0496$ . Also

$$\begin{array}{lll} s_0 = 2345 & \rightarrow & (s_0)^2 = 5499025 \\ s_1 = 9902 & \rightarrow & (s_1)^2 = 98049604 \\ s_2 = 0496 & \rightarrow & (s_2)^2 = 246016 \\ s_3 = 4601 & \rightarrow & (s_3)^2 = 21169201 \\ s_4 = 1692 & \rightarrow & (s_4)^2 = 2862864 \end{array}$$

...usw.

Häufig möchte man Zufallszahlen innerhalb des Intervalls  $[0, 1]$  erhalten. Dazu kann man  $s_1, s_2, \dots$  auf die Dezimalzahlen  $\tilde{s}_1 = 0,9902, \tilde{s}_2 = 0,0496, \tilde{s}_3 = 0,4601, \tilde{s}_4 = 0,1692$  usw. abbilden.

Dieser Pseudozufallszahlengenerator ist zwar anschaulich und leicht verständlich, leider jedoch nicht besonders gut. Zum Testen der Güte solcher Generatoren haben Pierre L'Ecuyer und Richard Simard im August 2007 eine Testsuite für Pseudozufallszahlengeneratoren unter dem Namen „TestU01“ aufgesetzt. Der in MATLAB implementierte *Mersenne Twister* besteht fast alle vorgeschlagenen Tests.<sup>38</sup>

Nach der Generierung einer unabhängigen Folge gleichverteilter Zufallszahlen werden diese

<sup>38</sup> Siehe auch: ACM (Association of Computing Machinery) Transactions on Mathematical Software (TOMS), Volume 33 Issue 4, August 2007.

durch eine Transformation auf die gewünschte Zielverteilung  $F$  abgebildet. Hierzu sind die Verwerfungs- und die Inversionsmethode sicherlich die bekanntesten Methoden. Die Inversionsmethode basiert auf der Erzeugung der inversen Verteilung  $F^{-1}$  zu der gewünschten Zielverteilung  $F$ . Anschließend werden die Pseudozufallszahlen  $s_1, \dots, s_n$  eingesetzt und ergeben die entsprechenden Realisierungen  $x_1, \dots, x_n$  der Zielverteilung:

$$x_i = F^{-1}(s_i), 1 \leq i \leq n.$$

Die Schwierigkeit liegt bei einigen Verteilungen in der Berechnung der Inversen  $F^{-1}$ . Ist eine Verteilungsfunktion nicht in geschlossener Form darstellbar, wie es beispielsweise bei der Normalverteilung der Fall ist, so ist die Inversionsmethode aufgrund ihres hohen Aufwands eher ungeeignet.

Die Verwerfungsmethode ist dagegen schon besser geeignet, jedoch nicht sehr effizient. Für Details zu diesen und weiteren Methoden siehe Müller-Gronbach et al. [2012].

## Kapitel 3

# Konzeption, Aufbau und Implementierung des Optimierungsmodells

Aufbauend auf der im zweiten Kapitel vorgestellten Optimierungsmethode für den Conditional-Value-at-Risk von Uryasev wird im dritten Kapitel das Modell für die Optimierung der Strategischen-Asset-Allokation eines Sachversicherungsunternehmens entwickelt. Dazu wird das Optimierungsprogramm 2.55 als Grundlage verwendet und sukzessiv erweitert.

Zu Beginn werden in Abschnitt 3.1 die Grundlagen des Asset-Liability-Managements beschrieben, in dessen Rahmen die Asset-Allokation eingeordnet wird. Der zweite Abschnitt beschreibt die grundsätzlichen Anforderungen, die an eine Strategische-Asset-Allokation gestellt werden und im Rahmen einer Optimierung Berücksichtigung finden sollen. Das Zusammenlaufen der unterschiedlichen Anforderungen aus verschiedenen Bereichen wird anhand des operativen Prozesses in Abschnitt 3.3 beschrieben.

Die darauf folgenden Abschnitte umfassen die betriebswirtschaftliche und mathematische Beschreibung des Optimierungsmodells. Zunächst werden die Grundprinzipien dieser Optimierung vorgestellt: Die Optimierung gegenüber der Passivseite (3.4), Einführung des neuen ALM-Risikomaßes (3.5) sowie Anforderungen an die dazu benötigten Szenarien (3.6), der modulare Aufbau des Optimierungsprogramms (3.7) und die Forderung einer Mindestrendite (3.8), welche die optimalen Portfolios erwirtschaften sollen. Die Generierung zukünftig erwarteter Renditen ist dabei ein wichtiges Thema, denn bereits im Rahmen der Markowitz Optimierung wurde deutlich, wie sensibel Optimierungsergebnisse auf die Ren-

reiten reagieren.<sup>1</sup> Daher wird die Idee zur Findung von Gleichgewichtsrenditen aus einem Marktportfolio sowie deren spätere Anpassung mithilfe eines Black-Litterman-Ansatzes ausführlich in Abschnitt 3.9 behandelt.

Anschließend wird das Optimierungsprogramm schrittweise um weitere Nebenbedingungen gemäß der in Abschnitt 3.7 eingeführten modularen Programmstruktur erweitert. Neben den einfachen linearen Nebenbedingungen, die in 3.10 formuliert werden, gehören vor allem der Einbezug von Transaktionskosten (3.11) und die Absicherung von Fremdwährungsgeschäften (3.13) zu den wesentlichen Bausteinen der Optimierung.

### 3.1 Asset-Liability-Management

„Asset-Liability-Management (ALM) beinhaltet im Kern die zielgerichtete Koordination der Steuerung der Aktiva und Passiva, der Abstimmung der Anlageportfolios (Assets) mit den durch die Versicherungsprodukte induzierten versicherungstechnischen Verpflichtungen (Liabilities).“<sup>2</sup> Das ALM verfolgt das Ziel der Finanzstabilisierung durch permanenten Abgleich von Assets und Liabilities. Dies beinhaltet auch die Optimierung von vergangenen sowie zukünftigen Rendite- und Risikopositionen des Unternehmens.

Die Kapitalanlagen (Aktivseite, Assets) werden entsprechend der Verbindlichkeiten (Passivseite, Liabilities) gesteuert. In der Literatur werden dazu zwei Ansätze diskutiert:

- (1) Sequentieller Ansatz und
- (2) Simultaner Ansatz.

Der simultane Ansatz geht von einer gleichzeitigen Dynamik beider Bilanzseiten aus. Dieser Ansatz wird dem Gedanken gerecht, dass das Asset-Liability-Management einen fortlaufenden Prozess darstellt, indem ein ständiges Austarieren beider Bilanzseiten praktiziert wird.

Zur Optimierung eignet sich der traditionelle sequentielle ALM-Ansatz deutlich besser, da er von einer zu einem bestimmten Zeitpunkt (Stichtag) fixierten Passivseite ausgeht. Auf Grundlage der festgehaltenen Passivseite können die Assets mithilfe der Optimierung bestmöglich an die Verbindlichkeiten angepasst bzw. an diesen ausgerichtet werden.

<sup>1</sup> Vgl. Kapitel 2.1.6.

<sup>2</sup> Springer, Gabler Wirtschaftslexikon, Begriff: ALM, <http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/asset-liability-management-alm.html>.

Die Verbindlichkeiten beinhalten sämtliche Fremdkapitalposten der Bilanz. Durch Abschluss eines Versicherungsvertrags entsteht ein Anspruch des Kunden gegenüber der Versicherung, der aus den Prämienzahlungen des Versicherungsnehmers (VN) gedeckt werden soll. Die Ansprüche werden in der Bilanz des Versicherungsunternehmens als versicherungstechnische Rückstellung (versicherungstechnisches Fremdkapital) dargestellt. Diese Leistungsverpflichtungen bezeichnet man auch als *Liabilities*. Die Liabilities werden von Aktuaren durch die Methoden der sogenannten Versicherungstechnik geschätzt. Das Ergebnis ist eine Schätzung aller erwarteten Auszahlungen über die zukünftigen Perioden in Form von Cash-Flows. Auf der Aktivseite werden die Prämieinnahmen der Versicherung im Zuge der Asset-Allokation so am Kapitalmarkt investiert, dass die passivseitigen Cash-Flows stets bedient werden können.

Dieses Vorgehen führt zu der allgemeinen Bilanzstruktur eines Versicherungsunternehmens, die im Gesamtzusammenhang in Abbildung 3.1 grafisch dargestellt wird. Dabei ist der Begriff des *Surplus* als „Assets - Liabilities“ definiert.

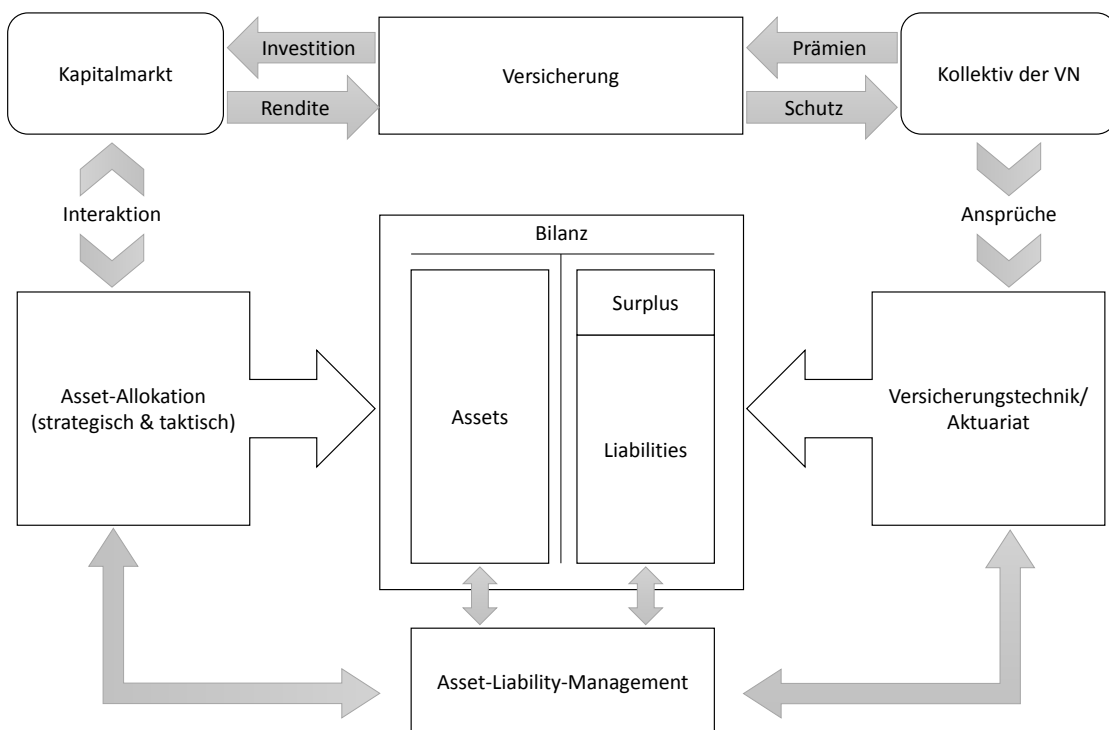


Abbildung 3.1: ALM-Bilanz

Das Ziel der Optimierung der Asset-Allokation ist eine Optimierung der Assets gegenüber den zu einem Stichtag festgehaltenen Liabilities (sequenzieller Ansatz), d. h. eine Minimierung des sogenannten *Mismatches* zwischen Aktiva und Passiva<sup>3</sup>. Um eine Vergleichbarkeit zwischen den beiden Bilanzseiten herzustellen, versucht man die abstrakten Verbindlichkeiten als Investmentportfolio auf Grundlage des zur Optimierung gewählten Asset-Universums darzustellen. Geeignete Verfahren zur Darstellung der Passivseite werden in Kapitel 3.4 besprochen. Ist die Passivseite als Portfolio fixiert, soll zu ihr mithilfe des Optimierungsalgorithmus ein unter gewissen Rahmenbedingungen optimales Aktivportfolio gefunden werden, d. h. die sogenannte *Asset-Allokation*. Zu solchen Rahmenbedingungen gehören

- gesetzliche Vorschriften (z. B. VVG, VAG, Solvency II, InvG, InvStG etc.),
- Managementvorgaben zur Investmentstrategie (z. B. Strategische Investitionen in Unternehmen, Investition in spezielle Assetklassen oder Wirtschaftsregionen, Ausschluß gewisser Assetklassen aufgrund der Unternehmensphilosophie),
- Investmentziele (Forderung einer Mindestrendite, Auf- oder Abbau bestimmter Assetklassen),
- Einhaltung von Risikobudgets (bedingt durch Risikokapitalanforderungen)
- Risikoverhalten des Investors und/oder des Managements.

Diese Aspekte werden im Abschnitt 3.2 detailliert vorgestellt.

Bei der Asset-Allokation unterscheidet man zwischen Strategischer-Asset-Allokation (SAA) und Taktischer-Asset-Allokation (TAA). Während die SAA eine mittel- bis langfristige Sichtweise auf die Kapitalanlage einnimmt, versucht man innerhalb der TAA mithilfe von Anpassungen, den sogenannten taktischen Maßnahmen, die Kapitalanlage auf kurzfristige Kapitalmarkttrends einzustellen. Im Gegensatz dazu verfolgt die SAA das Ziel, über längere Zeiträume durchschnittlich erwartete Renditen unter Einhaltung gewisser Risikovorgaben sowie der Berücksichtigung der Liabilities zu verdienen. Die TAA baut letztendlich auf dieser längerfristigen strategischen Kapitalmarktsicht auf und versucht durch leichte Abweichungen von ihr aktuellen Trends zu folgen. So könnte die SAA über mehrere Perioden eine konstante Aktienquote von 5% vorgeben, an der sich die TAA orientieren soll. In gut laufenden Aktienmärkten könnte innerhalb der TAA entschieden werden, diese Quote

<sup>3</sup> Alternativ könnte man die Optimierung als Surplus-Maximierung betrachten.

für eine gewisse Zeit um einige Prozentpunkte anzuheben (oder in schlecht laufenden Aktienmärkten vice versa). In der Regel wird bereits zusammen mit der SAA ein Rahmen für die taktischen Abweichungen festgelegt. Eine Vorgabe könnte der TAA eine Abweichung von der Aktienquote um  $\pm 3\%$  erlauben. Die Qualität der TAA wird ex post anhand ihrer Performance gegenüber der SAA gemessen, d. h., durch eine TAA sollte ein Renditeüberschuss nach Kosten gegenüber der SAA erwirtschaftet werden, ansonsten lohnt sie sich nicht.

Das in dieser Arbeit vorgestellte Optimierungsprogramm kann grundsätzlich sowohl für eine SAA-Optimierung als auch für eine Optimierung der TAA verwendet werden. Die Unterschiede liegen dabei in den Anforderungen an die jeweilige Optimierung, die sich in den Inputdaten für das Optimierungsprogramm widerspiegeln. Diese Arbeit konzentriert sich auf die Optimierung einer SAA.

## 3.2 Anforderungen an die Optimierung einer SAA

An eine Assetallokation werden diverse Forderungen gestellt, die das optimale Ergebnis stark beeinflussen. Im vorherigen Abschnitt wurden bereits einige Rahmenbedingungen der Optimierung vorgestellt, die in diesem Abschnitt ergänzt und diskutiert werden. In den folgenden Abschnitten wird die genaue Umsetzung der Forderungen innerhalb des Optimierungsprogramms erläutert.

Die Optimierung stellt ein Ausbalancieren der Renditeerwartungen der Shareholder (welche bewusst ein Risiko eingehen) gegenüber den Bestrebungen der Stakeholder dar, die ein Interesse am gesunden Fortbestand des Versicherungsunternehmens haben (und daher Risiken vermeiden möchten). Unter den Stakeholdern ist die Gruppe der Versicherungsnehmer (Policyholder) sicherlich die relevante. Darüber hinaus gehören zu den Stakeholdern alle anderen Profiteure des Unternehmens (z. B. Beschäftigte, Kommunen etc.). Um die Ansprüche seiner Stakeholder zu befriedigen, muss das Versicherungsunternehmen immer in der Lage sein, seine Verbindlichkeiten zu bedienen. Daher ist die Beachtung der Passivseite in der Optimierung eine zentrale Forderung. Realisiert wird dies durch die Darstellung der Passivseite als investierbares Portfolio<sup>4</sup>, zu welchem sich Rendite und Risiko berechnen lassen. Dieses Portfolio kann anschließend in Relation zu Rendite und Risiko der Aktivseite

---

<sup>4</sup> Siehe Abschnitt 3.4.

(den Assets) gesetzt werden. Die Zielsetzung lautet dann bei geringst möglichem Risiko mit den Aktiva eine Überrendite gegenüber der Passivseite zu erwirtschaften. Das heißt, es werden sowohl die Rendite als auch das Risiko der Größe „Aktivportfolio abzüglich Passivportfolio“ gemessen. Dazu wird ein neues Risikomaß in Abschnitt 3.5 eingeführt, das unter anderem genau diese Anforderung erfüllt. Dieses Risikomaß vereint die Messung von Markt- und Kreditrisiko und eignet sich zur Verwendung von Szenarien aus einem internen Risikobewertungsmodell. Es misst den aufsichtsrechtlich geforderten Value-at-Risk (99,5% Quantil). Sinnvolle Anforderungen an Markt- und Kreditszenarien werden in 3.6 vorgestellt. Dabei ist die Konsistenz zur Risikomessung des Versicherungsunternehmens von großer Bedeutung, da Portfolioallokationen unternehmensinterne Risikobudgetvorgaben erfüllen müssen.

Neben dem Risiko ist die Rendite die zweite wichtige Größe innerhalb der Portfoliooptimierung. Um eine Angabe zur möglichen Rendite eines Portfolios machen zu können, benötigt man eine Zukunftsprognose, eine sogenannte Schätzung der zukünftigen Renditen des zur Verfügung stehenden Allokationsuniversums. Zur Findung solcher Renditen gibt es viele Verfahren. Ein Ausgewähltes wird ausführlich in Abschnitt 3.9 beschrieben. Dieses Verfahren strebt langfristig orientierte Renditen, die den strategischen Gedanken aufgreifen, an. Dazu wird die Theorie des *Capital-Asset-Pricing-Models*<sup>5</sup> aufgegriffen. Die resultierenden Gleichgewichtsrenditen können durch Einsatz des bekannten Verfahrens von Black und Litterman (Abschnitt 3.9.3) angepasst werden. Gründe für eine solche Anpassung können beispielsweise abweichende Meinungen eines Investors für einzelne Assetklassen oder das Einfließen taktischer Überlegungen sein. Mittels der Renditeschätzungen ist es dann möglich eine bestimmte Mindestrendite zu fordern, welche die Investmentziele des Unternehmens widerspiegelt und die ein optimales Portfolio nach Möglichkeit erwirtschaften soll. Da die Rendite ebenso wie das Risiko relativ zur Passivseite gemessen wird, bedeutet eine Renditeforderung von Null, dass die Rendite der Passivseite am Kapitalmarkt verdient werden soll. Eine Renditeforderung größer Null bedeutet eine Überrendite gegenüber der Passivseite, die das Versicherungsunternehmen bei Erwirtschaftung verdienen würde. Die Ausgestaltung einer solchen Mindestrenditeanforderung innerhalb des Optimierungsalgorithmus beschreibt Abschnitt 3.8.

---

<sup>5</sup> Siehe Abschnitt 3.9.1.

Innerhalb der Renditebetrachtungen gibt es noch eine weitere wichtige Größe: die Transaktionskosten. Als Ausgangspunkt einer Optimierung dient in der Regel das aktuell vorhandene (SAA-)Portfolio. Bei einer Umschichtung zu einem optimierten Portfolio entstehen in der Regel Transaktionskosten für Kauf und Verkauf von Wertpapieren, welche die Rendite schmälern. Um diese Kosten in der Optimierung zu berücksichtigen, ist es sinnvoll die Transaktionskosten in die Mindestrenditeforderung einzubeziehen, sodass der Optimierer die Rendite letztendlich als „Rendite nach Transaktionskosten“ berechnet. Dies geschieht in Abschnitt 3.11.

Zu den bisher genannten Anforderungen kommen die Investmentvorgaben des Investors, die als lineare Nebenbedingungen eingebunden werden. Zu diesen Vorgaben gehören Beschränkungen von Assetklassen, Erfüllung von Mindestquoten, Ausschluß von Assetklassen aus der Optimierung und die Fixierung fester Quoten (z. B. für strategische Beteiligungen). Dies kann für einzelne Assetklassen oder beliebige Gruppen von Assetklassen umgesetzt werden. Auf diese Weise kann z. B. ein Fremdwährungsraum beschränkt werden. Diese Nebenbedingungen lassen sich leicht in Form von Tabellen darstellen und ermöglichen dadurch eine einfache Einbindung in die Optimierung. Sie werden in Abschnitt 3.10 besprochen.

Speziellere Anforderungen, die nicht in einfachen Tabellen darstellbar sind, werden in weiteren Nebenbedingungen an die Optimierung untergebracht. Dazu gehören beispielsweise die Abbildung von Fonds (Abschnitt 3.12) oder Devisentermingeschäften (Abschnitt 3.13). Die komplexeren Nebenbedingungen erfordern in den meisten Fällen einigen Programmieraufwand.

Die unterschiedlichen Anforderungen und Nebenbedingungen werden im Optimierungsprogramm als Module integriert. Die Module fungieren als Programmbausteine, die wahlweise in einer Optimierung verwendet werden können. Diese Form der Programmarchitektur wird als *modular* bezeichnet und in Abschnitt 3.7 eingeführt. Während das 3. Kapitel die Module wirtschaftsmathematisch beschreibt, wird ihre praktische Umsetzung in Kapitel 4 erläutert.

Im nachfolgenden Abschnitt wird der operative Prozess beschrieben, der die Zulieferung der für die Optimierung benötigten Daten verdeutlicht.

### 3.3 Operativer Optimierungsprozess

Als SAA-Prozess wird das operative Vorgehen zur Findung eines optimalen strategischen Portfolios bezeichnet. Dabei könnte eine sinnvolle Frequenz für den Prozess eine jährliche Anpassung zu einem festgelegten Stichtag sein. Die Entscheidung über das strategische Portfolio trifft ein Investor oder ein Investmentkomitee. Die Optimierung kann dabei als wertvolle Entscheidungshilfe dienen. Das Optimierungsergebnis hängt maßgeblich von dem Zusammenspiel und der Güte der Inputdaten ab, die aus verschiedenen Bereichen des Versicherungsunternehmens kommen. Die Koordination des Optimierungsprozesses und die Beschaffung der Inputdaten übernimmt in der Regel das Investmentkomitee.

Die nachfolgende Grafik gibt eine Übersicht über den Optimierungsprozess sowie über die für die Optimierung benötigten Daten und deren typische Herkunft.

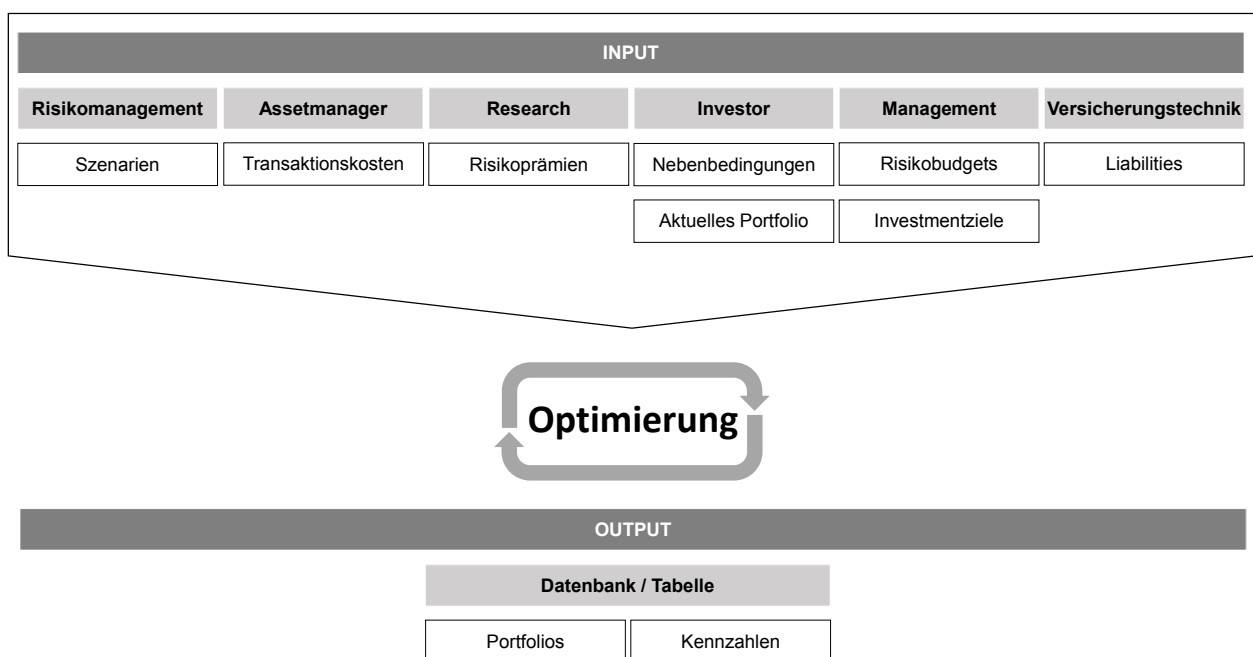


Abbildung 3.2: Optimierungsprozess

Am Anfang des gesamten Investitionsprozesses steht die Festlegung des *Anlageuniversums*, welches die Wertpapiere und Assetklassen beinhaltet, in die investiert werden kann. In die Entscheidung sind in erste Linie das Management (Vorstand), der Investor sowie das Assetmanagement eingebunden. Während der Investor (oder ein Investmentkomitee) im

Wesentlichen die strategische Kapitalanlage verantwortet, liegt die Zuständigkeit des (ggf. externen) Assetmanagements beim direkten Handel am Markt.

Das Anlageuniversum ist maßgeblich für den Optimierungsprozess, da es als Basis für die Generierung der Inputdaten und Festlegung der Optimierungsparameter dient. Daher können die verschiedenen Zulieferer die Inputdaten erst nach der Einigung auf ein Anlageuniversum erstellen.

Die Szenarien für die offizielle Risikomessung eines Versicherungsunternehmens generiert das Risikomanagement. Um Konsistenz mit der internen Risikomessung zu gewährleisten, sollten für die Optimierung dieselben Szenarien verwendet werden.

Die Transaktionskosten für die einzelnen Wertpapiere und Assetklassen stellt der Assetmanager zusammen. Das Assetmanagement verantwortet in der Regel auch die taktische Kapitalanlage (TAA), die als eigener Bereich von der strategischen Kapitalanlage zu trennen ist. Auf diese Weise kann ein Versicherungsunternehmen ein externes Unternehmen mit dem Management seiner Kapitalanlage betrauen.

Die Generierung von Renditeerwartungen (Risikoprämien) obliegt einem Researchteam. Research kann entweder im Unternehmen selber betrieben oder extern (beispielsweise von dem Assetmanagement) eingekauft werden. Üblicherweise möchte das Investmentkomitee hierbei seine Belange mit einfließen lassen. Dies geschieht entweder auf direktem Wege durch Kommunikation mit dem Researchteam oder indirekt durch Anpassung der fertigen Renditen mit dem Black-Litterman-Verfahren<sup>6</sup>.

Die Darstellung der Verbindlichkeiten wird von der Versicherungstechnik in Form eines großen Auszahlungsprofils erstellt. Dies erfolgt im Wesentlichen durch eine Schätzung der aus den Versicherungsverträgen resultierenden erwarteten Zahlungsströme. Diese Cashflows werden anschließend in ein Investmentportfolio übersetzt, um der Wertpapierseite als Benchmark zu dienen. Das Portfolio muss als Bedingung stets die Verbindlichkeit bedienen können. Dies bezeichnet man auch als *Asset-Liability-Matching*. Erfüllt ein Portfolio diese Anforderung nicht, kann dies unter Umständen zur Insolvenz des Unternehmens führen. Entsteht eine Lücke zwischen Aktiv- und Passivseite, so bezeichnet man diese als *Asset-Liability-Mismatch*.

---

<sup>6</sup> Siehe Abschnitt 3.9.3.

Das Management des Unternehmens wird über die Erfüllung der Verbindlichkeiten hinaus einen Gewinn erwirtschaften wollen. Dazu gibt es dem Investmentkomitee konkrete Investmentziele vor sowie gewisse Risikobudgets, die nicht überschritten werden dürfen. Unter Verwendung des Risikomaßes, das in Abschnitt 3.5 eingeführt wird, soll das Risikokapital innerhalb der Optimierung berechnet und minimiert werden.

Das Investmentkomitee (Investor) stellt das aktuelle Portfolio zur Transaktionskostenberechnung zusammen und sammelt weitere Nebenbedingungen<sup>7</sup>, die das neue strategische Portfolio erfüllen soll.

Sind alle Inputdaten zusammengetragen, kann das Optimierungsprogramm gestartet werden. Der Optimierer liefert ein optimales Portfolio, zu dem anschließend gewisse Kennzahlen wie die Rendite, der Verbrauch von Risikokapital oder die Sharpe Ratio des Portfolios berechnet werden können. Alle Portfolios und Ergebnisse sollten nach der Optimierung entweder in einer Datenbank gespeichert und organisiert oder als Ergebnistabelle ausgegeben werden.

### 3.4 Darstellung der Liabilities als Portfolio

Die Liabilities, die auch als versicherungstechnische Verpflichtungen bezeichnet werden, stellen die Zahlungsverpflichtungen des Versicherungsunternehmens gegenüber den Versicherungsnehmern dar. Diese sollen aus den Prämieinzahlungen sowie deren erwarteter Verzinsung bedient werden. Für die Optimierung benötigt man eine Darstellung der Liabilities, die mit der Darstellung der Assets vergleichbar ist. Dazu stellt man diese mithilfe eines sogenannten Matchingverfahrens (Cashflow-Matching) als Investmentportfolio dar. Dieses Portfolio soll, unter Berücksichtigung von Zins- und Tilgungseffekten, eine exakte Deckung der Zahlungsverpflichtungen des Unternehmens ergeben. Durch die vollständige Deckung gibt es keine Wiederanlageprämie und das Portfolio unterliegt keinem Zinsänderungsrisiko.

Die Liabilities des Versicherungsunternehmens werden in Form eines erwarteten Auszahlungsprofils (Best-Estimate-Cashflows) von Aktuaren kalkuliert. Dieses Profil beinhaltet die versicherungstechnische Projektion der Cashflows für die kommenden Perioden (i. d. R.

<sup>7</sup> Für weitere Details zu den Nebenbedingungen siehe Abschnitt 3.10.

in Jahren), basierend auf einer aktuariellen Schätzung. Zur Deckung der Cashflow muss das Anlageuniversum Instrumente zur Verfügung stellen, die sich zur Darstellung der Liabilities eignen (z. B. Bonds oder Swaps).

Seien dazu  $m$  Instrumente  $I_j$  mit den Kursen  $K_j$  für  $1 \leq j \leq m$  vorhanden. Definiere den Zahlungsrückfluss (Tilgung, Kupon) des  $j$ -ten Titels in der Periode  $t$  als Cash-Return  $CR_{j,t}$  für  $1 \leq t \leq T$  und bezeichne die Cashflows der Liabilities als  $L_t$  für  $1 \leq t \leq T$ .

Zu jedem Zeitpunkt  $t \in T$  muss eine ausreichende Liquidität zur Begleichung der Verpflichtungen gewährleistet sein, d. h., die Summe der Rückflüsse  $CR_{j,t}$  muss die Verbindlichkeit  $L_t$  bedienen können.

Neben dieser Bedingung soll der Kaufpreis des Portfolios so gering wie möglich sein. Dazu sei  $a_j \in \mathbb{N}_0$  für  $j = 1, \dots, m$  die Stückzahl des  $j$ -ten Instruments, sodass als Zielfunktion die Summe  $\sum_{j=1}^m a_j K_j$  minimiert werden soll. Das führt zu folgendem linearen Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^m a_j K_j \quad \text{unter} \\ & \sum_{j=1}^m a_j CR_{j,t} \geq L_t \quad \text{für } 1 \leq t \leq T \quad \text{und} \quad a_j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Durch die Anforderung der Ganzzahligkeit an die  $a_j$  gilt in der Regel  $\sum_{j=1}^m a_j C_{j,t} > L_t$ . Für die Darstellung der Passivseite ist die Ganzzahligkeitsbedingung nicht von Wichtigkeit, da das Portfolio nicht real gekauft wird, sondern als Benchmarkportfolio in der Optimierung verwendet wird.

Als Ergebnis erhält man ein Portfolio gegeben durch die Gewichte

$$\frac{a_j}{\sum_{j=1}^m a_j}.$$

Über dieses einfache Cashflow-Matching hinaus, soll das Portfolio auch das Zinsänderungsrisiko der Passivseite berücksichtigen. Dazu wird die *Duration* als Zinssensitivitätskennzahl über den Barwertansatzes eingeführt:

Anstelle der konkreten Liabilities oder Cash>Returns betrachtet man zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine allgemeine Zahlungsreihe  $Z_t$  für  $1 \leq t \leq T$  für die kommenden  $T$  Perioden. Zu den Zeitpunkten  $t = 1, \dots, T$  seien durch  $r_1, \dots, r_T$  Zinsen gegeben, demzufolge sich der

sogenannte *Barwert*  $P_0$  der Zahlungsreihe  $(Z_t)_{1 \leq t \leq T}$  durch

$$P_0(r_1, \dots, r_T) = \sum_{t=1}^T Z_t (1 + r_t)^{-t} \quad (3.2)$$

ergibt. Dabei bezeichnet man  $(1 + r_t)^{-t}$  als Diskontierungsfaktor zum Zeitpunkt  $t$ . Bildet die Zahlungsreihe ein festverzinsliches Wertpapier ab, so bezeichnet man den Barwert als den *fairen Preis* des Wertpapiers.

Zur Betrachtung von Sensitivitätskennzahlen sei vorausgesetzt, dass

- die Zinskurve konstant ist, d. h.  $r := r_1 = \dots = r_T$ , und
- eine einmalige Zinsänderung um  $\Delta r$  (*Zins-Shift*) zum Zeitpunkt  $t = 0$  stattfindet.

**Definition 3.1** (Duration)

Als *Zinssensitivitätsmaße* seien

(a) die **absolute Duration** (*dollar duration*) als

$$D_{abs}(r) := -\frac{\partial P_0(r)}{\partial r} = \frac{1}{1+r} \sum_{t=1}^T t \cdot Z_t (1+r)^{-t} \quad (3.3)$$

(b) sowie die **modifizierte Duration** (*modified duration*) als

$$D_{mod}(r) := \frac{D_{abs}(r)}{P_0(r)} \quad (3.4)$$

definiert.<sup>8</sup>

Anmerkungen zur Definition:

- (1) Die Duration gibt die Auswirkungen einer Zinsveränderung auf den Kurs eines Wertpapiers an. Je größer die Duration ist, desto größer sind die Auswirkungen auf den Wert.
- (2) Die absolute Duration entspricht der Steigung des Barwerts in Zinsrichtung. Aus einer Zinsveränderung um  $\Delta r$ , d. h.  $r_{neu} = r + \Delta r$ , ergibt sich eine absolute Barwertverände-

<sup>8</sup> Vgl. Albrecht und Maurer [2008], Abschnitt 8.5.2.2.1.

rung um  $\Delta P(r) := P(r_{neu}) - P(r)$ , die sich mittels der Duration durch Multiplikation mit  $\Delta r$  approximieren lässt. Das heißt, es gilt in etwa

$$\Delta P(r) \approx -D_{abs}(r) \cdot \Delta r.$$

- (3) Die Messung der Auswirkung einer Zinsveränderung auf den Barwert anhand des Durationskonzepts entspricht mathematisch einer Taylorapproximation ersten Grades.

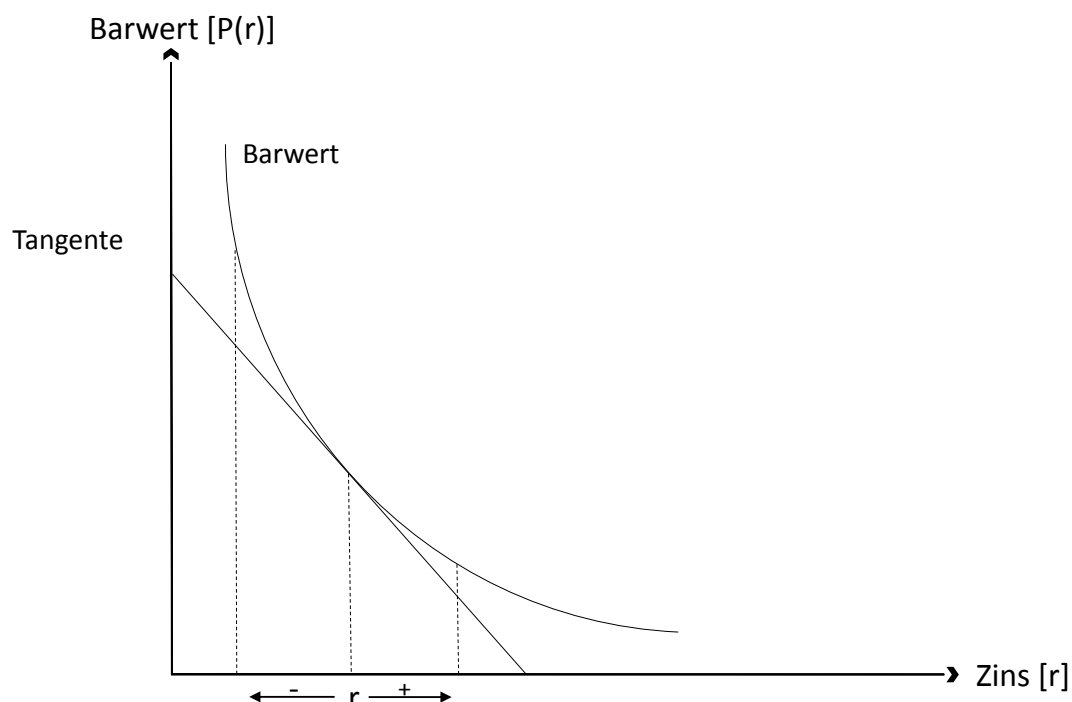


Abbildung 3.3: Barwertkurve

Anschaulich wird die Veränderung durch das Anlegen einer Tangente an die Barwertkurve im Punkt  $(r|P(r))$  approximiert.

Umso weiter man sich von dem ursprünglichen Zinsniveau  $r$  entfernt, desto schlechter wird die Approximation der Barwertkurve durch die Tangente. Der Abstand zwischen der Tangente und der Barwertkurve entspricht dem Approximationsfehler. Dieser wird umso größer, je stärker die Barwertkurve gekrümmt ist.

- (4) Die modifizierte Duration gibt die prozentuale Veränderung des Preises bezogen auf eine 1%ige Zinsveränderung an. Das heißt, eine Duration  $D_{mod}(r) = 3$  bedeutet, dass

sich der Barwert des Wertpapiers bei einer Zinsbewegung von  $+1\%$ , d. h.  $\Delta r = 0,01$ , um  $-3\%$  verschlechtert (relative Barwertveränderung). Daraus ergibt sich eine absolute Barwertveränderung von etwa

$$\Delta P(r) \approx -D_{mod}(r) \cdot P(r) \cdot \Delta r.$$

- (5) Für die Duration eines Portfolios aus Einzeltiteln mit den Gewichten  $w_i$  für  $1 \leq i \leq n$  gilt:

$$D_{mod}^P(r) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot D_{mod}(r, w_i). \quad (3.5)$$

Sei zu jedem der  $m$  Instrumente mit Kurs  $K_j$  die modifizierte Duration durch  $D_{mod}^j$  gegeben. Weiterhin sei  $D_{mod}^{L_t}$  die Duration der Liabilities für  $1 \leq t \leq T$ . Das gesuchte Portfolio soll die Duration der Liabilities bestmöglich treffen, d. h., es soll

$$\sum_{j=1}^m a_j D_{mod}^j = \sum_{t=1}^T D_{mod}^{L_t}, \text{ mit } a_j \in \mathbb{N}_0 \quad (3.6)$$

gelten. Da dies in der Regel nicht mit Gleichheit erfüllt werden kann, sucht man die optimale Durationsanpassung mithilfe des folgenden Optimierungsproblems.

$$\begin{aligned} \min \sum_{j=1}^m a_j D_{mod}^j - \sum_{t=1}^T D_{mod}^{L_t} \text{ unter} \\ \sum_{j=1}^m a_j CR_{j,t} \geq L_t \text{ für } 1 \leq t \leq T \text{ und } a_j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Als Voraussetzung zur Lösbarkeit des Problems müssen Instrumente vorhanden sein, die es ermöglichen, die Durationsbedingung zu erfüllen. Das bedeutet, dass die höchste Liability-Duration nicht größer als die höchste Instrumentenduration und analog die kleinste Liability-Duration nicht kleiner als die geringste Duration unter den verfügbaren Instrumenten sein darf, d. h.

$$\max(\{D_{mod}^{L_t} \mid 1 \leq t \leq T\}) \leq \max(\{D_{mod}^j \mid 1 \leq j \leq m\}), \quad (3.8)$$

$$\min(\{D_{mod}^{L_t} \mid 1 \leq t \leq T\}) \geq \min(\{D_{mod}^j \mid 1 \leq j \leq m\}). \quad (3.9)$$

### Einfaches Durations-Matching-Verfahren

Eine einfache Vorgehensweise bei Verwendung von Instrumenten ohne Kupons (Zero-Coupons) ist die direkte Zuweisung der Liabilities zu einem solchen Instrument anhand ihrer Laufzeiten in Verbindung mit einer anschließenden Durationsanpassung. Dazu geht man folgendermaßen vor:

- (1) Weise jeden Liability-Cashflow  $L_t^{FX}$  einem Instrument  $I_j$  nach den Kriterien Währung  $[FX]$  und Laufzeit  $[t]$  zu.
- (2) Adjustiere die Duration des Instruments  $I_j$  mit Cash der entsprechenden Währung  $[FX]$  so, dass die Duration des Liability-Cashflows getroffen wird, d. h.

$$a_j D_{mod}^j + (1 - a_j) D_{mod}^{Cash [FX]} = D_{mod}^{L_t^{FX}},$$

wobei  $a_j \in [0, 1]$  ist.

Die zur Verfügung gestellten Instrumente müssen nicht „real“ sein, dies bedeutet, sie müssen am Kapitalmarkt nicht liquide oder verfügbar sein, da sie nur zur Bewertung der Passivseite dienen.

Zur Veranschaulichung des Verfahrens diene folgendes Beispiel.

#### Beispiel 3.2

Für das Matching-Verfahren stehen auf der Aktivseite folgende Instrumente zur Verfügung.

| Instrumente $I_t$ | mit $D_{mod}$ | Laufzeitenzuteilung |
|-------------------|---------------|---------------------|
| EUR-Cash          | 0,25          | Cash                |
| EUR-Zero-Swap     | 2             | $t < 3,5$           |
| EUR-Zero-Swap     | 5             | $3,5 \leq t < 7,5$  |
| EUR-Zero-Swap     | 10            | $7,5 \leq t < 20$   |
| EUR-Zero-Swap     | 30            | $20 \leq t$         |

Tabelle 3.1: Cashflow-Matching-Instrumente

In der Spalte Laufzeitenzuteilung wurde festgelegt, welche Liability-Cashflows welchem Instrument zugeordnet werden.

Seien die Liabilities eines Versicherungsunternehmens in Euro gegeben. Die Zahlungsverpflichtungen werden geschätzt zur Jahresmitte ausgezahlt, dadurch ergeben sich die in der Tabelle 3.2 notierten Zeitpunkte  $t$  zum Stichtag 31.12.2014.

| Liability   | t   | Nominal | Zuweisung zu  | mit $D_{mod}$ | und Laufzeitband   |
|-------------|-----|---------|---------------|---------------|--------------------|
| EUR30062015 | 0,5 | 100     | EUR-Zero-Swap | 2             | $t < 3,5$          |
| EUR30062016 | 1,5 | 10      | EUR-Zero-Swap | 2             | $t < 3,5$          |
| EUR30062017 | 2,5 | 12      | EUR-Zero-Swap | 2             | $t < 3,5$          |
| EUR30062018 | 3,5 | 9       | EUR-Zero-Swap | 5             | $3,5 \leq t < 7,5$ |
| EUR30062019 | 4,5 | 5       | EUR-Zero-Swap | 5             | $3,5 \leq t < 7,5$ |

Tabelle 3.2: Liability-Cashflows

Die Liabilities wurden in der Tabelle 3.2 direkt einem Instrument entsprechend der Laufzeitenzuteilung aus Tabelle 3.1 zugewiesen.

Im zweiten Schritt findet die Durationsanpassung statt. Dazu müssen zunächst die Barwerte und Durationen der Liabilities gemäß der entsprechenden Formeln berechnet werden. Dazu wird ein konstanter Zins von  $r = 2\%$  angenommen.

| Liability   | $t$ | $Z_t$ | $P[r]$ | $D_{abs}$ | $D_{mod}$ |
|-------------|-----|-------|--------|-----------|-----------|
| EUR30062015 | 0,5 | 100   | 99,01  | 48,54     | 0,49      |
| EUR30062016 | 1,5 | 10    | 9,71   | 14,28     | 1,47      |
| EUR30062017 | 2,5 | 12    | 11,42  | 27,99     | 2,45      |
| EUR30062018 | 3,5 | 9     | 8,40   | 28,81     | 3,43      |
| EUR30062019 | 4,5 | 5     | 4,57   | 20,18     | 4,41      |
| Gesamt      |     |       | 133,11 |           | 1,05      |

Tabelle 3.3: Barwerte und Durationen der Liabilities

Die Bedingungen (3.8) und (3.9) sind erfüllt, denn alle Liability-Durationen liegen zwischen der kleinsten (EUR-Cash mit  $D_{mod}^{Cash}$  von 0,25) und größten Instrumentenduration (EUR-Zero-Swap mit  $D_{mod}$  von 30):

$$\max(\{D_{mod}^{L_t} \mid 1 \leq t \leq T\}) = 4,41 \leq \max(\{D_{mod}^j \mid 1 \leq j \leq m\}) = 30,$$

$$\min(\{D_{mod}^{L_t} \mid 1 \leq t \leq T\}) = 0,49 \geq \min(\{D_{mod}^j \mid 1 \leq j \leq m\}) = 0,25.$$

Die Durationsadjustierung erfolgt unter Verwendung der zur Verfügung stehenden Cash-Assetklasse „EUR-Cash“ mit einer Duration von  $D_{mod}^{Cash} = 0,25$ .

Der relative Cashanteil  $a_j$  folgt aus der Gleichung  $a_j D_{mod}^{I_j} + (1 - a_j) D_{mod}^{Cash} = D_{mod}^{L_t}$  aus Schritt (2) durch

$$a_j = \frac{D_{mod}^{L_t} - D_{mod}^{I_j}}{D_{mod}^{Cash} - D_{mod}^{I_j}}. \quad (3.10)$$

Die absoluten Investitionsbeträge für Cash und die Instrumente ergeben sich durch Multiplikation der relativen Anteile mit dem Barwert  $P[R]$ .

| t             | P[r]   | $D_{mod}^{L_t}$ | $D_{mod}^{I_j}$ | Anteil Cash<br>$a_j$ in % | Anteil Instr. $I_j$<br>$(1 - a_j)$ in % | Cash<br>absolut      | Instr.<br>absolut    |
|---------------|--------|-----------------|-----------------|---------------------------|-----------------------------------------|----------------------|----------------------|
| 0,5           | 99,01  | 0,49            | 2               | 86,27%                    | 13,73%                                  | 85,42                | 13,59                |
| 1,5           | 9,71   | 1,47            | 2               | 30,25%                    | 69,75%                                  | 2,94                 | 6,77                 |
| 2,5           | 11,42  | 2,45            | 2               | -25,77%                   | 125,77%                                 | -2,94                | 14,36                |
| 3,5           | 8,40   | 3,43            | 5               | 33,02%                    | 66,98%                                  | 2,77                 | 5,62                 |
| 4,5           | 4,57   | 4,41            | 5               | 12,38%                    | 87,62%                                  | 0,57                 | 4,01                 |
| <b>Gesamt</b> | 133,11 | 1,05            |                 |                           | <b><math>D_{mod}</math></b>             | 88,76<br><b>0,25</b> | 44,36<br><b>2,65</b> |

Tabelle 3.4: Durationsadjustierung

Anschließend lässt sich die modifizierte Duration der Gesamtheit der Instrumente als

$$\begin{aligned}
 D_{mod}(Instr.) &= \frac{1}{\sum_j P[r]} \sum_j D_{mod}^{I_j} \cdot P[r] \cdot (1 - a_j) \\
 &= \frac{1}{133,11} \cdot [2 \cdot (99,01 \cdot 0,1373 + 9,71 \cdot 0,6975 + 11,42 \cdot 1,2577) \\
 &\quad + 5 \cdot (8,4 \cdot 0,6698 + 4,57 \cdot 0,8762)] \\
 &= 2,65
 \end{aligned}$$

bestimmen. Analog ergibt sich für die Duration des Gesamt-Cashs exakt die Cash-Duration  $D_{mod}^{Cash}$  von 0,25. Die Gesamtduration nach dem Cashflow-Mapping errechnet sich dann aus diesen beiden Teildurationen durch

$$\begin{aligned}
 D_{mod}(\text{Portfolio}) &= \frac{D_{mod}^{Cash} \cdot \text{Gesamtsumme Cash} + D_{mod}^{Instr} \cdot \text{Gesamtsumme Instr.}}{\text{Gesamtsumme Cash} + \text{Gesamtsumme Instr.}} \\
 &= \frac{0,25 \cdot 88,76 + 2,65 \cdot 44,36}{88,76 + 44,36} = 1,05.
 \end{aligned}$$

Somit entspricht die Gesamtduration nach dem Mapping der Gesamtduration der Liabilities vor dem Mapping aus Tabelle 3.3. Dieses einfache Cashflow-Mapping-Verfahren liefert als Ergebnis folgendes Portfolio.

| Instrument    | $D_{mod}^{I_j}$ | Gewicht | Investitionsbetrag |
|---------------|-----------------|---------|--------------------|
| EUR-Cash      | 0,25            | 66,68%  | 88,76              |
| EUR-Zero-Swap | 2               | 26,09%  | 34,72              |
| EUR-Zero-Swap | 5               | 7,24%   | 9,63               |
| Gesamt        | 1,05            | 100,00% | 133,11             |

Tabelle 3.5: Portfolio der Passivseite

### 3.5 Darstellung des Asset-Liability-Mismatch-Risikos

Um Markt- und Kreditrisiken simultan in die Optimierung einzubinden, können die beiden Risiken mithilfe der Korrelationsformel

$$\sqrt{\text{VaR}_{\text{Markt}}^2 + \text{VaR}_{\text{Kredit}}^2 + 2\rho \cdot \text{VaR}_{\text{Markt}} \text{VaR}_{\text{Kredit}}}$$

aneinander gekoppelt werden, wobei  $\rho$  die Korrelation zwischen Markt- und Kreditrisiko widerspiegelt.

Als weitere Anforderung sollen die Risiken relativ zur Passivseite (den Liabilities) gemessen werden, sodass man den Markt-Value-at-Risk (kurz:  $\text{VaR}_M$ ) in Relation zum risikoneutralen Portfolio (RNPF) setzt. Der Kredit-Value-at-Risk (kurz:  $\text{VaR}_K$ ) bleibt davon unter der Voraussetzung, dass die Passivseite eines Versicherers im eigentlichen Sinn nicht ausfallen kann (sie beinhaltet ein Kreditrisiko von Null), unberührt. Daraus ergibt sich das Risikomaß

$$\text{ALMR}_{\text{VaR}} = \sqrt{\text{VaR}_M^2(A - L) + \text{VaR}_K^2(A) + 2\rho \text{VaR}_M(A - L) \text{VaR}_K(A)}, \quad (3.11)$$

wobei die Variablen  $A$  für die Aktivseite (Assets) und  $L$  für die Passivseite (Liabilities) stehen.

Aufgrund der im vorherigen Kapitel erläuterten Schwierigkeiten bei der Optimierung des Value-at-Risks sowie der Erkenntnisse von Uryasev zur CVaR-Optimierung<sup>9</sup>, wird der VaR

<sup>9</sup> Vgl. Abschnitt 2.2.1.

durch den CVaR in der ALMR-Formel 3.11 ersetzt, d. h.

$$\text{ALMR}_{\text{CVaR}} = \sqrt{\text{CVaR}_M^2(A - L) + \text{CVaR}_K^2(A) + 2\rho \text{CVaR}_M(A - L) \text{CVaR}_K(A)}. \quad (3.12)$$

Im weiteren Verlauf wird dieses auf dem Conditional-Value-at-Risk basierende Risikomaß gemäß ALMR-Formel (3.12) verwendet und als *Asset-Liability-Mismatch-Risiko (ALMR)* bezeichnet. Statt  $\text{ALMR}_{\text{CVaR}}$  wird kurz ALMR notiert.

Um die Gleichung (3.12) innerhalb des Optimierungsprogramms abzubilden, werden weitere Komponenten (Variablen) im Zielvektor  $x$  benötigt. Führe für das ALMR die Variable  $x_{\text{ALMR}}$  und für die Unterteilung in Markt- und Kreditrisiko die Variablen  $x_{\text{CVaR}^M}$  und  $x_{\text{CVaR}^K}$  sowie  $x_{\text{VaR}^M}$  und  $x_{\text{VaR}^K}$  ein.

Darüber hinaus werden zwei Szenariomatrizen verwendet, eine für das Marktrisiko, genannt  $SZ_{\text{Markt}}$ , und eine für das Kreditrisiko, die als  $SZ_{\text{Kredit}}$  bezeichnet wird. Beide Matrizen gleichen dem Aufbau aus Definition (2.57) aus Kapitel 2.

Die Anzahl der Szenarien für die Markt- und Kreditrisikomessung darf dabei durchaus unterschiedlich sein, denn gerade für die Messung von Ausfallrisiken, die am Rand der Verteilung gemessen werden, kann eine größere Anzahl an Szenarien sinnvoll sein. Es gibt allerdings auch Verfahren zur Verbesserung der Güte von Monte-Carlo-Szenarien, sodass man mit einer geringen Anzahl von Kreditszenarien bereits gute Ergebnisse erzielen kann. Zu diesen Verfahren gehört z. B. das Importance Sampling Verfahren.<sup>10</sup>

Sei also  $J_M$  die Anzahl der Marktszenarien, die als  $y_1^M, \dots, y_{J_M}^M$  bezeichnet werden, und  $J_K$  die Anzahl der Kreditszenarien mit der Bezeichnung  $y_1^K, \dots, y_{J_K}^K$ . So lassen sich die Matrizen kurz als

$$SZ_{\text{Markt}} = (y_{ji}^M)_{1 \leq i, j \leq J_M} \quad (3.13)$$

$$SZ_{\text{Kredit}} = (y_{ji}^K)_{1 \leq i, j \leq J_K} \quad (3.14)$$

notieren. Dadurch erhält die Nebenbedingungsmatrix  $A$  folgende Gestalt:

<sup>10</sup> Siehe Müller-Gronbach et al. [2012], Kapitel 5.

$$\begin{pmatrix}
w_1 & \dots & w_n & \text{CVaR}_M & \text{CVaR}_K & \text{VaR}_M & \text{VaR}_K & z_1^M & z_2^M & \dots & z_{J_M}^M & z_1^K & z_2^K & \dots & z_{J_K}^K \\
0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\
y_{11}^M & \dots & y_{1n}^M & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
y_{21}^M & \dots & y_{2n}^M & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
y_{J_M 1}^M & \dots & y_{J_M n}^M & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
- & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu & \mu & \dots & \mu \\
y_{11}^K & \dots & y_{1n}^K & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\
y_{21}^K & \dots & y_{2n}^K & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 \dots 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
y_{J_K 1}^K & \dots & y_{J_K n}^K & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & -1
\end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Dabei seien  $\lambda := \frac{1}{(1-\beta) \cdot J_M}$  und  $\mu := \frac{1}{(1-\beta) \cdot J_K}$ , wobei  $\beta$  das vorgegebene Konfidenzniveau ist. Eine übersichtlichere Ansicht bietet die Darstellung der Matrix 3.15 als Tabelle 3.6.

| Matrix<br>A        | $w_1 \dots w_n$<br>(n Sp) | CVaR <sub>M</sub><br>(1Sp) | CVaR <sub>K</sub><br>(1Sp) | VaR <sub>M</sub><br>(1Sp) | VaR <sub>K</sub><br>(1Sp) | $z_1^M \dots z_{J_M}^M$<br>(J <sub>M</sub> Sp) | $z_1^K \dots z_{J_K}^K$<br>(J <sub>K</sub> Sp) |
|--------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| (1Z)               | 0 .. 0                    | -1                         | 0                          | 1                         | 0                         | $\lambda \dots \lambda$                        | 0 .. 0                                         |
| (J <sub>M</sub> Z) | [SZ <sub>Markt</sub> ]    | (0)                        | (0)                        | (-1)                      | (0)                       | [-E]                                           | [0 .. 0]                                       |
| (1Z)               | 0 .. 0                    | 0                          | -1                         | 0                         | 1                         | 0                                              | $\mu \dots \mu$                                |
| (J <sub>K</sub> Z) | [SZ <sub>Kredit</sub> ]   | (0)                        | (0)                        | (0)                       | (-1)                      | [0]                                            | [-E]                                           |

Tabelle 3.6: Matrix A in Tabellenform

Innerhalb der Tabelle markieren runde ( )-Klammern Spaltenvektoren und eckige [ ]-Klammern Matrizen. Die Beschriftung der Tabelle gibt neben den Spaltennamen auch die Breite der Spalten in Klammern „(Sp)“, bzw. die Zeilenanzahl in Klammern „(Z)“ an, um die Größenverhältnisse wiederzugeben. Die Variable  $E$  kennzeichnet stets eine quadratische Einheitsmatrix entsprechend der Größe des Blocks, in dem sie eingebettet ist.

Analog müssen die Grenzvektoren  $lbA$  und  $ubA$  entsprechend der neuen Zeilenanzahl der Nebenbedingungsmatrix angepasst werden.

$$lbA = (0 \quad \overbrace{-\infty \dots -\infty}^{\text{Anzahl Marktszenarien}} \quad 0 \quad \overbrace{-\infty \dots -\infty}^{\text{Anzahl Kreditszenarien}})^t, \quad (3.16)$$

$$ubA = (0 \quad \overbrace{0 \dots 0}^{\text{Anzahl Marktszenarien}} \quad 0 \quad \overbrace{0 \dots 0}^{\text{Anzahl Kreditszenarien}})^t. \quad (3.17)$$

Darüber hinaus werden die Grenzen an den erweiterten Zielvektor

$$x = (w_1, \dots, w_n, x_{\text{CVaR}^M}, x_{\text{CVaR}^K}, x_{\text{VaR}^M}, x_{\text{VaR}^K}, z_1^M, \dots, z_{J_M}^M, z_1^K, \dots, z_{J_K}^K)^t$$

angepasst:

$$\begin{aligned} lbx &= \left( \overbrace{-\infty \dots -\infty}^{\text{Anzahl Finanzinstrumente}} \quad -\infty \quad -\infty \quad 0 \quad 0 \quad \overbrace{0 \dots 0}^{\text{Anzahl Marktszenarien}} \quad \overbrace{0 \dots 0}^{\text{Anzahl Kreditszenarien}} \right)^t, \\ ubx &= \left( \overbrace{\infty \dots \infty}^{\text{Anzahl Finanzinstrumente}} \quad \infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty \quad \overbrace{\infty \dots \infty}^{\text{Anzahl Marktszenarien}} \quad \overbrace{\infty \dots \infty}^{\text{Anzahl Kreditszenarien}} \right)^t. \end{aligned}$$

Details zum grundsätzlichen Aufbau der verschiedenen Grenzen wurden in Kapitel 2.2.3 erläutert.

Kehrt man zurück zu dem Ausgangsproblem der Darstellung der Formel (3.12) für das Asset-Liability-Mismatch-Risiko, so soll die ALMR-Formel

$x_{\text{ALMR}} = \sqrt{x_{\text{CVaR}_M}^2 + x_{\text{CVaR}_K}^2 + 2\rho \cdot x_{\text{CVaR}_M} x_{\text{CVaR}_K}}$  mithilfe des erweiterten Nebenbedingungssettings<sup>11</sup> als Zielfunktion in das neue Optimierungsprogramm integriert werden.

Durch Quadrieren der ALMR-Formel erhält man mit

$$x_{\text{ALMR}}^2 = x_{\text{CVaR}_M}^2 + x_{\text{CVaR}_K}^2 + 2\rho x_{\text{CVaR}_M} x_{\text{CVaR}_K} \quad (3.18)$$

eine quadratische Zielfunktion. Quadratische Zielfunktionen lassen sich in Verbindung mit konvexen Optimierungsprogrammen optimieren. Ein einfaches konvex-quadratisches Optimierungsprogramm besitzt die Form

$$\min x^t Q x \text{ unter} \quad (3.19)$$

$$lbA \leq Ax \leq ubA$$

$$lbx \leq x \leq ubx,$$

wobei  $Q$  eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix ist.

Um die quadrierte ALMR-Formel als Zielfunktion in der Form  $x^t Q x$  darzustellen, wählt

<sup>11</sup> Dies wurde durch die Erweiterung der Matrix  $A$  um Markt- und Kreditrisikoszenarien und die Einführung der entsprechenden neuen Variablen realisiert.

man  $x = (x_{\text{CVaR}_M}, x_{\text{CVaR}_K})^t$  und  $Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$ . Dann ergibt

$$\begin{aligned} x^t Q x &= (x_{\text{CVaR}_M}, x_{\text{CVaR}_K}) \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} (x_{\text{CVaR}_M}, x_{\text{CVaR}_K})^t \\ &= q_{11} x_{\text{CVaR}_M}^2 + q_{12} x_{\text{CVaR}_K} x_{\text{CVaR}_M} + q_{21} x_{\text{CVaR}_M} x_{\text{CVaR}_K} + q_{22} x_{\text{CVaR}_K}^2 \\ &= q_{11} x_{\text{CVaR}_M}^2 + (q_{12} + q_{21}) x_{\text{CVaR}_K} x_{\text{CVaR}_M} + q_{22} x_{\text{CVaR}_K}^2. \end{aligned}$$

Damit  $x^t Q x = x_{\text{ALMR}}^2$  gilt, müssen  $q_{11} = 1$ ,  $q_{22} = 1$  und  $q_{12} + q_{21} = 2\rho$  sein. Daraus resultiert

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

womit die Zielfunktion entsprechend des Programms (3.19) dargestellt werden kann.

Um konvex-quadratische Optimierungsprobleme wie dieses mit einem effizienten Algorithmus zu lösen, kann man diese in ein sogenanntes *konisches* Optimierungsprogramm umformulieren, welches eine Verallgemeinerung linearer Optimierungsprogramme darstellt. Für konische Optimierungsprogramme existieren sehr effiziente Lösungsalgorithmen, wie sie beispielsweise von Mosek Aps als Zusatzpaket **mosek**<sup>12</sup> für die Software MATLAB zur Verfügung gestellt werden.

Zur Nutzung eines effizienten Algorithmus dieser Art, wird das konvex-quadratische Problem (3.19) in ein konisches Optimierungsprogramm gemäß der folgenden Definition 3.3 umgeschrieben.

**Definition 3.3** (Konisches Optimierungsprogramm<sup>13</sup>)

*Sei  $E$  ein  $n$ -dimensionaler, reellwertiger Vektorraum. Ein allgemeines konisches Programm hat die Form*

$$\min c^t x \text{ unter}$$

$$x \in (b + \mathcal{L}) \cap K,$$

*wobei  $\mathcal{L} \subseteq E$  ein Unterraum,  $K \subseteq E$  ein nicht-leerer, konvexer und abgeschlossener Kegel und  $b, c \in E$  sind.*

<sup>12</sup> [www.mosek.com](http://www.mosek.com).

<sup>13</sup> Vgl. Davi [2012], Kapitel 1 sowie Nesterov und Nemirovskii [1994], Kapitel 4.1.1.

Um zu einer gewohnten Darstellung zu gelangen, kann man den Unterraum  $\mathcal{L}$  durch eine Abbildung  $\mathcal{A} : E \rightarrow \overline{E}$ , wobei  $\dim(\overline{E}) \geq \dim(E)$  ist, als

$$\mathcal{L} = \{x \in E \mid \mathcal{A}(x) = 0\}.$$

spezifizieren. Dann lässt sich das konische Programm in der Form

$$\mathbf{\min} \ c^t x \text{ unter} \tag{3.21}$$

$$x \in K$$

$$\mathcal{A}(x) = \hat{b},$$

wobei  $\mathcal{A}(b) = \hat{b}$  gilt, schreiben.<sup>14</sup>

Zur Umformulierung des quadratischen Optimierungsproblems (3.19) in ein konisches Programm der Form (3.21) nutzt man aus, dass sich jede positiv semidefinite Matrix via *Cholesky-Zerlegung* faktorisieren lässt, sodass man die Matrix  $Q$  als

$$Q = F^t \cdot F,$$

notiert, wobei  $F$  den Cholesky-Faktor von  $Q$  darstellt, d. h.  $F = \text{Cholesky}(Q)$ . Dies ermöglicht die Zielfunktion als

$$x^t Q x = x^t F^t F x = (F x)^t \underbrace{F x}_{:= y} = y^t y$$

zu schreiben, wobei die Substitution  $y := Fx$  eine Nebenbedingung darstellt.

Dadurch lässt sich das Optimierungsprogramm zunächst als

$$\mathbf{\min} \ x_{\text{ALMR}} = y^t \cdot y \text{ unter}$$

$$lb x \leq x \leq ub x \quad \text{und} \quad lb A \leq Ax \leq ub A$$

$$y = Fx$$

formulieren, wobei  $F = \text{Chol}(Q)$  der Cholesky-Faktor ist.

Dazu werden einige wichtige Anmerkungen zusammengefasst.

<sup>14</sup> Vgl. Davi [2012], Kapitel 1.1, erster Abschnitt.

**Bemerkung 3.4**

- (1) Die Wahl der Darstellung des Optimierungsprogramms erscheint an dieser Stelle vielleicht nicht sehr intuitiv und komplizierter als nötig. Die Motivation dieser Darstellung liegt in der dadurch ermöglichten praktischen Umsetzung mithilfe des `mosek`-Algorithmus.
- (2) Auf die Cholesky-Zerlegung einer positiv semidefiniten Matrix wird in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen. Es genügt an dieser Stelle das Wissen um ihre Existenz und die Tatsache, dass sich der gesuchte Cholesky-Faktor  $F$  innerhalb der MATLAB-Software durch den Aufruf des Befehls `Chol(Q)` gewinnen lässt. Für den  $2 \times 2$ -Fall lautet die Rechenregel für die Cholesky-Zerlegung:

$$\text{Chol} \left( \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \sqrt{q_{11}} & \frac{q_{12}}{\sqrt{q_{11}}} \\ 0 & \sqrt{q_{22} - \frac{q_{12}^2}{q_{11}}} \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Für die getroffene Wahl von  $Q$  nach (3.20) ergibt sich somit

$$F := \text{Chol}(Q) = \text{Chol} \left( \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ 0 & \sqrt{1 - \rho^2} \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

- (3) Die Zielfunktion in Vektorschreibweise  $y^t \cdot y$  ist gleichbedeutend mit der Summe  $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_N^2$ . Da man als Zielfunktion das Asset-Liability-Mismatch-Risiko erhalten möchte, benötigt  $y$  nur zwei Komponenten  $y = (y_1, y_2)^t$ , sodass  $x_{\text{ALMR}} = y^t y = y_1^2 + y_2^2$  ist. Die Komponenten  $y_1$  und  $y_2$  ergeben sich aus dem Produkt

$$F \cdot x = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{\text{CVaR}_M} \\ x_{\text{CVaR}_K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}x_{\text{CVaR}_M} + f_{12}x_{\text{CVaR}_K} \\ f_{21}x_{\text{CVaR}_M} + f_{22}x_{\text{CVaR}_K} \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

sodass  $y_1 = f_{11}x_{\text{CVaR}_M} + f_{12}x_{\text{CVaR}_K}$  und  $y_2 = f_{21}x_{\text{CVaR}_M} + f_{22}x_{\text{CVaR}_K}$  sind.

In Form der Komponentendarstellung mit  $y_1$  und  $y_2$  lässt sich nun die Nebenbedingung  $Fx = y$  in der Nebenbedingungsmatrix  $A$  unterbringen. Durch Einsetzen der Komponenten des Cholesky-Faktors  $F$  aus (3.23) in die Gleichungen für  $y_1$  und  $y_2$  aus Bemerkung 3.4 (3), folgt  $y_1 = x_{\text{CVaR}_M} + \rho x_{\text{CVaR}_K}$  und  $y_2 = \sqrt{1 - \rho^2} x_{\text{CVaR}_K}$ . Umformuliert lauten die

beiden Gleichungen dann

$$0 \leq x_{\text{CVaR}_M} + \rho \cdot x_{\text{CVaR}_K} - y_1 \leq 0, \quad (3.25)$$

$$0 \leq \sqrt{1 - \rho^2} \cdot x_{\text{CVaR}_K} - y_2 \leq 0. \quad (3.26)$$

Diese beiden Gleichungen werden durch jeweils zwei neue Zeilen und zwei neue Spalten in die Nebenbedingungsmatrix  $A$  integriert. Die resultierende Matrix wird im Folgenden als  $A_{\text{ALMR}}$  bezeichnet.<sup>15</sup>

| Matrix<br><b>A</b> | $w_1 \dots w_n$<br>( $n$ Sp) | $\text{CVaR}_M$<br>(1Sp) | $\text{CVaR}_K$<br>(1Sp) | $\text{VaR}_M$<br>(1Sp) | $\text{VaR}_K$<br>(1Sp) | $z_1^M \dots z_{J_M}^M$<br>( $J_M$ Sp) | $z_1^K \dots z_{J_K}^K$<br>( $J_K$ Sp) | $y_1$<br>(1Sp) | $y_2$<br>(1Sp) | ALMR<br>(1Sp) |
|--------------------|------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------|----------------|---------------|
| (1Z)               | 0 .. 0                       | -1                       | 0                        | 1                       | 0                       | $\lambda \dots \lambda$                | 0 .. 0                                 | 0              | 0              | 0             |
| ( $J_M$ Z)         | $[SZ_{\text{Markt}}]$        | (0)                      | (0)                      | (-1)                    | (0)                     | $[-E]$                                 | $[0 \dots 0]$                          | (0)            | (0)            | (0)           |
| (1Z)               | 0 .. 0                       | 0                        | -1                       | 0                       | 1                       | 0                                      | $\mu \dots \mu$                        | 0              | 0              | 0             |
| ( $J_K$ Z)         | $[SZ_{\text{Kredit}}]$       | (0)                      | (0)                      | (0)                     | (-1)                    | $[0]$                                  | $[-E]$                                 | (0)            | (0)            | (0)           |
| (1Z)               | 0 .. 0                       | 1                        | $\rho$                   | 0                       | 0                       | 0                                      | 0 .. 0                                 | -1             | 0              | 0             |
| (1Z)               | 0 .. 0                       | 0                        | $\sqrt{1 - \rho^2}$      | 0                       | 0                       | 0                                      | 0 .. 0                                 | 0              | -1             | 0             |

Tabelle 3.7: Matrix  $A_{\text{ALMR}}$

Zur Vervollständigung des Optimierungsprogramms werden die zu den neuen zwei Zeilen gehörenden Grenzen der Vektoren  $lbA$  und  $ubA$  auf den Wert 0 gesetzt, wie es die obigen Gleichungen (3.25) und (3.26) fordern.

$$lbA = (0 \quad \overbrace{-\infty \dots -\infty}^{\text{Anzahl Marktszenarien}} \quad 0 \quad \overbrace{-\infty \dots -\infty}^{\text{Anzahl Kreditszenarien}} \quad 0 \ 0)^t, \quad (3.27)$$

$$ubA = (0 \quad \overbrace{0 \dots 0}^{\text{Anzahl Marktszenarien}} \quad 0 \quad \overbrace{0 \dots 0}^{\text{Anzahl Kreditszenarien}} \quad 0 \ 0)^t. \quad (3.28)$$

Für die letztendlich noch fehlende Variable  $x_{\text{ALMR}}$  wird lediglich eine leere, d. h. mit Nullen besetzte Spalte, hinzugefügt. Diese Variable wird ausschließlich in der Zielfunktion benötigt und ist in keiner Nebenbedingung vorhanden. Aus diesem Grund enthält die Matrix  $A$  keine Einträge in der ALMR-Spalte.

Der Zielvektor ist damit für dieses Optimierungsprogramm vollständig und lautet

$$x = (w_1, \dots, w_n, x_{\text{CVaR}_M}, x_{\text{CVaR}_K}, x_{\text{VaR}_M}, x_{\text{VaR}_K}, z_1^M, \dots, z_{J_M}^M, z_1^K, \dots, z_{J_K}^K, y_1, y_2, x_{\text{ALMR}})^t,$$

<sup>15</sup> Die Bezeichnung dient zur Unterscheidung der modularen Erweiterungen in den folgenden Kapiteln. Dies wird in Kapitel 3.7 erläutert.

entsprechend der Spaltenbezeichnung in der obigen Matrixtabelle.

Die Begrenzungen  $lbx/ubx$  für den Zielvektor  $x$  werden ebenfalls um drei Positionen erweitert. Die Variablen  $y_1$  und  $y_2$  bleiben unbeschränkt, das Asset-Liability-Mismatch-Risiko  $x_{\text{ALMR}}$  wird auf das Intervall  $[0, \infty]$  beschränkt, sodass es stets größergleich Null ist.

$$\begin{aligned} lbx &= ( \overbrace{-\infty \dots -\infty}^{\# \text{ Finanzinstrumente}} \quad -\infty \quad -\infty \quad 0 \quad 0 \quad \overbrace{0 \dots 0}^{\# \text{ Marktszenarien}} \quad \overbrace{0 \dots 0}^{\# \text{ Kreditszenarien}} \quad -\infty \quad -\infty \quad 0 )^t, \\ ubx &= ( \overbrace{\infty \dots \infty}^{\# \text{ Finanzinstrumente}} \quad \infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty \quad \overbrace{\infty \dots \infty}^{\# \text{ Marktszenarien}} \quad \overbrace{\infty \dots \infty}^{\# \text{ Kreditszenarien}} \quad \infty \quad \infty \quad \infty )^t. \end{aligned}$$

Zu guter Letzt fehlt noch die Spezifizierung der Zielfunktion  $x_{\text{ALMR}} = y^t y$ . Zur Umsetzung bietet mosek verschiedene Konen an, mit deren Hilfe man die Zielfunktion darstellen kann. Für das hier beschriebene Problem eignet sich die Wahl des quadratischen Konus<sup>16</sup>

$$C := \{x \in \mathbb{R}^N : x_k \geq \sqrt{\sum_{i \in I} (x_i^2)} \text{ für } k \in \{1, \dots, N\} \text{ und } I \subseteq \{1, \dots, N\} \setminus \{k\}\}. \quad (3.29)$$

Das bedeutet, man kann einzelne Komponenten des Zielvektors  $x$  der konischen Nebenbedingung  $x_k \geq \sqrt{\sum_{i \in I} (x_i^2)}$  zuordnen. Dabei sind  $x_k$  und die  $x_i$  aus der Indexmenge  $I$  aus allen Komponenten frei wählbar, jedoch darf keine Komponente mehrfach innerhalb des Konus verwendet werden. Dies stellen die beiden Bedingungen  $k \in \{1, \dots, N\}$  und  $I \subseteq \{1, \dots, N\} \setminus \{k\}$  zusammen sicher.

Für den hier vorgestellten Fall sieht der recht komplexe Konus relativ einfach aus. Es werden dafür die Komponenten  $x_{\text{ALMR}}, y_1$  und  $y_2$  des Zielvektors verwendet, sodass man als Zielfunktion

$$x_{\text{ALMR}} \geq \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \quad (3.30)$$

erhält.

Dann ist das Optimierungsproblem vollständig spezifiziert und lautet

$$\min c^t x = x_{\text{ALMR}} \text{ mit} \quad (3.31)$$

$$x \in C := \{x \in \mathbb{R}^N : x_{\text{ALMR}} \geq \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\} \text{ unter}$$

$$lbA \leq Ax \leq ubA$$

$$lbx \leq x \leq ubx,$$

<sup>16</sup>Vgl. mosek toolbox documentation, Seite 30 und 31 (<http://docs.mosek.com/7.0/toolbox.pdf>).

wobei  $x = (w_1, \dots, w_n, x_{\text{CVaR}^M}, x_{\text{CVaR}^K}, x_{\text{VaR}^M}, x_{\text{VaR}^K}, z_1^M, \dots, z_{J_M}^M, z_1^K, \dots, z_{J_K}^K, y_1, y_2, x_{\text{ALMR}})^t$  und  $c = (0, \dots, 0, 1)$  sind. Die Gleichung  $y = Fx$  ist nun in der Nebenbedingungsmatrix  $A$  untergebracht.

Als Ergebnis dieses Optimierungsprogramms erhält man ein optimales  $x$ , genannt  $x^{\text{opt}}$  oder  $x^*$ . Dieses beinhaltet neben dem minimalen Asset-Liability-Mismatch-Risiko vor allem das optimale Portfolio aus den  $n$  verschiedenen Assetklassen, dargestellt durch die Portfoliogewichte  $w_1^{\text{opt}}, \dots, w_n^{\text{opt}}$ . Das optimale Portfolio  $w^{\text{opt}} = (w_1^{\text{opt}}, \dots, w_n^{\text{opt}})$  ist stets das risikominimale Portfolio bezüglich des Asset-Liability-Mismatch-Risikos und unter den gegebenen Nebenbedingungen.

Ziel des Investors ist es allerdings das Risiko gegenüber der möglichen Rendite zu betrachten. Der Investor nimmt ein gewisses Risiko in Kauf, um im Gegenzug die von ihm erwartete Rendite realisieren zu können. Diese erwartete Rendite wird als Renditeanforderung im Abschnitt 3.8 implementiert.

## 3.6 Anforderungen an Szenarien

Szenarien beschreiben zukünftige Kapitalmarktzustände. In diesem Kapitel werden Möglichkeiten zur Erstellung von Szenarien beschrieben, wie sie auch für die Beispieloptimierung im vierten Kapitel verwendet worden sind.

Für die in dieser Arbeit vorgestellte Optimierung werden einperiodige Szenarien zur Berechnung des ALM-Risikos benötigt. Dabei werden für Marktrisiko und Kreditrisiko getrennte Szenario-Sets verwendet. Auf diese Weise gelingt es, beide Risikoarten sowohl inhaltlich als auch mathematisch voneinander abzugrenzen. Die inhaltliche Trennung ermöglicht einen separaten Ausweis der Risiken, um finanzaufsichtsrechtliche Anforderungen zu erfüllen. Die mathematische Trennung erlaubt die Verwendung spezialisierter Tools für die unterschiedlichen Anforderungen der Risikoarten.

### 3.6.1 Marktszenarien

Anhand der Szenarien für das Marktrisiko soll die zukünftige Marktdynamik abgebildet werden. Zunächst werden die Verteilungen der Risikotreiber sowie deren gemeinsame Verteilung bestimmt und kalibriert. Dies geschieht in der Regel anhand historischer Zeitreihen, aus denen die Parameter für die unterschiedlichen Verteilungen geschätzt werden.

In Kapitel 1.6 wurden mit der Delta-Normal-Methode und dem Delta-Gamma-Ansatz bereits zwei klassische Ansätze zur Modellierung von Instrumenten vorgestellt.

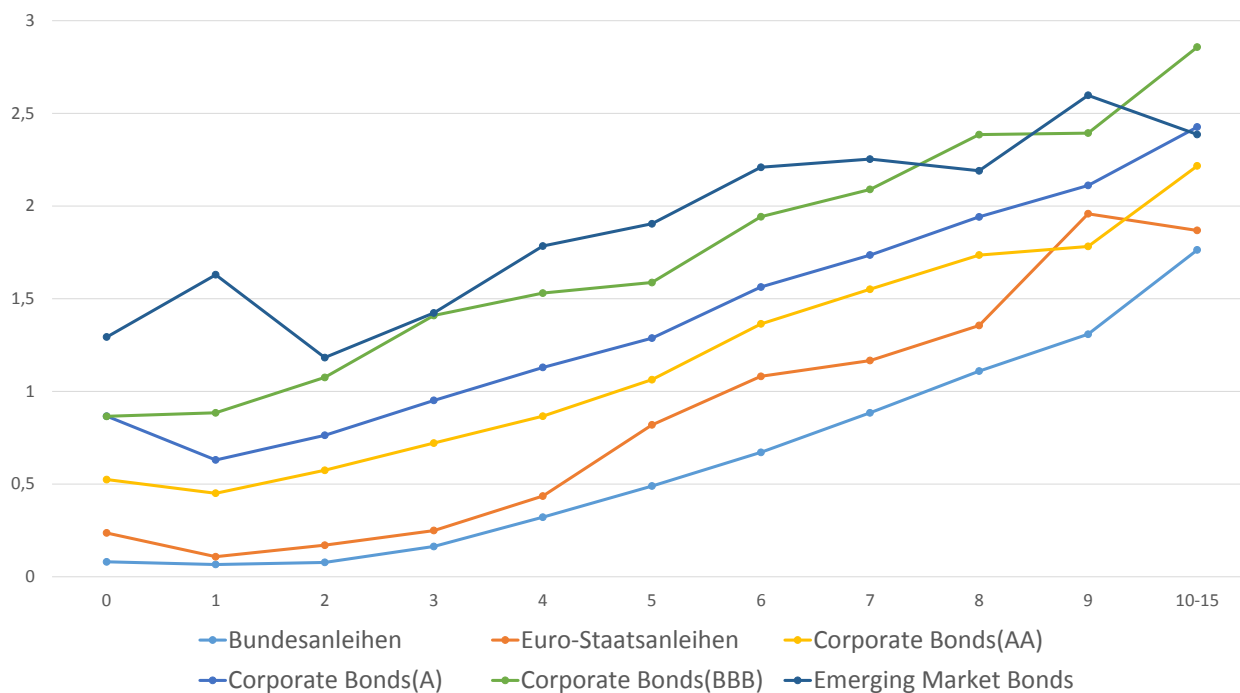
Für die Beispieloptimierung wird ein erweiterter Ansatz verfolgt, der im Folgenden qualitativ erläutert wird. Basierend auf dem gewählten Allokationsuniversum werden die *Risikotreiber* für die einzelnen Assetklassen identifiziert und analysiert. Diese Analyse liefert für jede Assetklasse ihre Zusammensetzung aus einem oder mehreren Risikotreibern sowie deren Zusammenwirken. Zu jeder Assetklasse wird eine Bewertungsfunktion formuliert, die dieses Zusammenspiel als funktionalen Zusammenhang wiedergibt. So kann eine Bewertungsfunktion für US-Dollar Aktien aus einem Risikotreiber „USD Aktienindex“ und einem Risikotreiber für das Währungsrisiko zusammengesetzt sein. Außerdem ist es möglich, passend dazu eine implizite Volatilität zu modellieren, um die Auswirkung einer Kursveränderung der Aktie auf die implizite Volatilität der dazugehörigen Option (falls im Allokationsuniversum vorhanden) abzubilden.

Für jeden Risikotreiber kann eine separate Verteilung und Kalibrierung bestimmt werden. Die Risikotreiber werden in Kategorien wie Aktien, Zinsen, Spreads, Inflation, implizite Volatilität, Immobilien, Währungen u. a. eingeteilt.

Zur Zinsmodellierung betrachtet man Zinsstrukturkurven und modelliert diese auf festgelegten Stützstellen, zwischen denen anschließend interpoliert wird. Diese Stützstellen sind gewisse Zeitpunkte (z. B.  $\frac{1}{2}$ , 1, 3, 5, 10, 15, 20 Jahre), die anschließend eine Zinsstrukturkurve ergeben.

In der Abbildung 3.4 sind reale Zinskurven<sup>17</sup> für die Anlageklassen Staatsanleihen (Deutschland, Europa allgemein, Emerging-Markets) und Unternehmensanleihen (unterteilt nach Ratings) zum 9. Juni 2014 dargestellt, welche auf den Stützstellen 0, 1, ..., 9 Jahre sowie der aggregierten Stützstelle „10-15 Jahre“ abgebildet wurden. Deutlich zu erkennen ist, dass die deutschen Staatsanleihen zum 9. Juni 2014 die geringste Rendite bieten, daher sollten sie auch das geringste Risiko beinhalten. Die besten Renditen bringen Unternehmensanleihen des Ratings BBB sowie Emerging Market Anleihen, die vermutlich auch das höchste Ausfallrisiko beinhalten.

<sup>17</sup> Dargestellt sind Durchschnittsrenditen per Laufzeit aus Daten der Börse Stuttgart.

Abbildung 3.4: Zinskurven vom 9. Juni 2014<sup>18</sup>

Versicherungsunternehmen müssen im Rahmen ihrer Offenlegungsverpflichtung gegenüber der Finanzdienstleistungsaufsicht die verwendeten risikolosen Zinskurven und Spreadkurven<sup>19</sup> separat ausweisen. Als risikoloser Zins werden Kurven von Staatsleihen oder Swap-Kurven verwendet - je nach Entscheidung des Managements. Als mathematisches Modell können entweder Short- und Forward-Rate-Modelle oder Marktmodelle genutzt werden. Aktien werden häufig mit einer geometrischen Brownschen Bewegung modelliert. Die Preise werden als logarithmisch-normalverteilt angenommen, die logarithmierten Renditen sind dann normalverteilt.

Zusätzlich zu der Modellierung der einzelnen Risikotreiber sollten die Abhängigkeiten der Risikotreiber untereinander als Gesamtverteilung modelliert werden. Hierzu wird häufig eine multivariate Normalverteilung verwendet, sodass man die Abhängigkeiten in Form einer Kovarianzmatrix darstellen kann. Dazu sind in der Literatur verschiedene Verfahren unter dem Namen *Varianz-Kovarianz-Ansatz*<sup>20</sup> zu finden, der durch Markowitz an Popularität gewonnen hat. Durch den Eingang der Brownschen Bewegung in die Risikotreiber-

<sup>18</sup> Quelle: <https://www.boerse-stuttgart.de/de/toolsandservices/zinsstrukturkurve/zinsstrukturkurve.html> zum 9. Juni 2014.

<sup>19</sup> Spreadkurven enthalten den Risikoaufschlag auf den risikolosen Zins.

<sup>20</sup> Siehe Kapitel 1.6.

modelle<sup>21</sup> kann man den Einfluss der gemeinsamen Verteilung (und somit der Korrelationen) aller Risikotreiber nachprüfen.

Nach der Kalibrierung der Verteilungen, können die Simulationen gestartet werden. Für jeden Risikotreiber werden dann gemäß der ihm zugedachten Verteilung sowie der Gesamtverteilung eine möglichst große Anzahl Zufallszahlen generiert, die in einer Szenariomatrix zusammengefasst werden. Dabei bildet jede Zeile der Matrix ein Szenario.

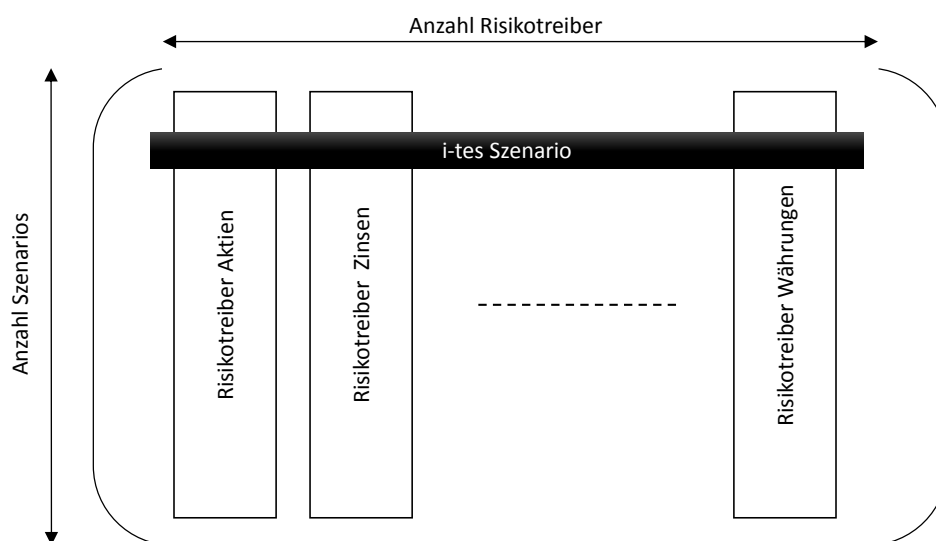


Abbildung 3.5: Szenariomatrix der Risikotreiber

Zuletzt wird unter Verwendung der Bewertungsfunktionen für die Instrumente des Allokationsuniversums aus der Szenariomatrix der Risikotreiber die Szenariomatrix für die Instrumente ( $SZ_{Markt}$ ) konstruiert. Diese wird dann, wie in Kapitel 3.5 beschrieben, für die Implementierung im Optimierungsprogramm oder auch für das interne Risikomodell eines Versicherungsunternehmens verwendet.

### 3.6.2 Kreditszenarien

Unter den Begriff des Kreditrisikos fallen alle Arten von (Rück-)Zahlungsausfällen. Zu der Bemessung von Kreditrisiken verwendet man ein Zusammenspiel verschiedenster Daten, die in Abbildung 3.6 zusammengefasst worden sind.

<sup>21</sup> Das heißt, auch bei der Zinsmodellierung geht die Brownsche Bewegung in den erwähnten Modellen ein.

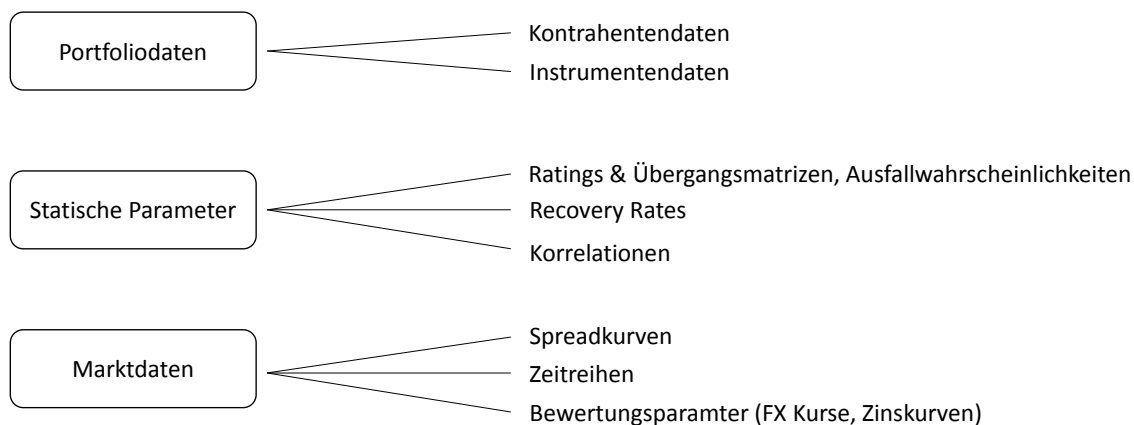


Abbildung 3.6: Übersicht Kreditrisikodaten

Die Portfoliodaten enthalten alle relevanten Informationen zu den Instrumenten (z. B. Laufzeit, Kupon, Währung) und ihren Emittenten. Zu Letzteren gehören unter anderem Rating, Reports oder das Gewicht des systematischen Risikos. Auf den Risikofaktor wird mithilfe des systematischen Risikos das Kontrahentenrisiko abgebildet.

Die statischen Parameter enthalten sowohl instrumentenspezifische Daten, die berechnet oder geschätzt werden müssen (z. B. die Korrelationen), als auch Daten für Gruppen von Instrumenten (z. B. Übergangswahrscheinlichkeiten für Ratings oder Recovery-Rates). Im Anschluß an die Erläuterungen zur Abbildung 3.6 wird auf die Vorgehensweise zur Einbindung von Ratings sowie Recovery-Rates eingegangen.

Unter die Marktdaten fallen einerseits Daten für die Modellierung der gemeinsamen Verteilung aller Instrumente sowie zur Modellierung von Zinskurven, andererseits Spreadkurven und Währungskurse oder andere Zeitreihen, die benötigt werden. Die Beschaffung solcher Daten erfolgt aus einem entsprechenden Datensystem für Finanzmarktdaten. Analog zu den Marktszenarien wird bei den Kreditszenarien eine Kovarianzmatrix aus entsprechenden Kapitalmarktdaten berechnet, mit der die gemeinsame Verlustverteilung der Kreditrisikotreiber modelliert wird. Sie spiegelt die Abhängigkeiten der ausfallgefährdeten Instrumente wider. Zinskurven werden mittels mathematischer Modelle (*interest rate models*) häufig mit sogenannten *Schocks* kalibriert. Ein Schock simuliert eine plötzliche (meist negative) Zinsveränderung und deren Auswirkungen. Spreadkurven (*credit spreads*) stellen den Risikoaufschlag dar, den ein Schuldner für die Ausfallgefährdung seines Wertpapiers zahlen muss. Auch mangelnde Liquidität oder eine negative Marktmeinung tragen zur Erhöhung der Spreads bei, da ein potenzieller Investor das Wertpapier schwieriger veräu-

bern kann. Die Credit-Spreads werden als Differenz aus der betrachteten Anleihe und der jeweiligen risikofreien Zinskurve berechnet.

## Ratings und Übergangsmatrizen

Die Ratings von Emittenten werden von großen Agenturen wie Standard&Poors, Moodys, Fitch u. a. veröffentlicht. Die Agenturen teilen die Emittenten in Ratingklassen ein, die Aufschluss über die Bonität des Emittenten geben. Die Bezeichnungen der Ratingklassen unterscheiden sich jedoch bei den einzelnen Agenturen, wie die Abbildung 3.7 zeigt.

|                   | Ratingagenturen und Ratingklassen |        |       |                   |                 |       |            | Bonitätseinstufung /<br>Klassenbeschreibung                                                                                                                               |
|-------------------|-----------------------------------|--------|-------|-------------------|-----------------|-------|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                   | S&P                               | Moodys | Fitch | Credit-<br>reform | Euler<br>Hermes | Scope | GBB RATING |                                                                                                                                                                           |
| Investmentgrade   | AAA                               | Aaa    | AAA   | AAA               | AAA             | AAA   | AAA        | <b>Sehr gut</b><br>Höchste Bonität, praktisch kein Ausfallrisiko.                                                                                                         |
|                   | AA+                               | Aa1    | AA+   | AA+               | AA+             | AA+   | AA+        | <b>Sehr gute bis gute Bonität</b>                                                                                                                                         |
|                   | AA                                | Aa2    | AA    | AA                | AA              | AA    | AA         | Hohe Zahlungswahrscheinlichkeit.                                                                                                                                          |
|                   | AA-                               | Aa3    | AA-   | AA-               | AA-             | AA-   | AA-        |                                                                                                                                                                           |
|                   | A+                                | A1     | A+    | A+                | A+              | A+    | A+         | <b>Gute bis befriedigende Bonität</b>                                                                                                                                     |
|                   | A                                 | A2     | A     | A                 | A               | A     | A          | Angemessene Deckung von Zins und Tilgung. Viele gute Investmentattribute aber auch Elemente, die sich bei Veränderung der wirtschaftlichen Lage negativ auswirken können. |
|                   | A-                                | A3     | A-    | A-                | A-              | A-    | A-         |                                                                                                                                                                           |
|                   | BBB+                              | Baa1   | BBB+  | BBB+              | BBB+            | BBB+  | BBB+       | <b>Befriedigende Bonität</b>                                                                                                                                              |
|                   | BBB                               | Baa2   | BBB   | BBB               | BBB             | BBB   | BBB        | Angemessene Deckung von Zins und Tilgung aber auch spekulative Charakteristika oder mangelnder Schutz gegen wirtschaftliche Veränderungen.                                |
| Spekulative Grade | BBB-                              | Baa3   | BBB-  | BBB-              | BBB-            | BBB-  | BBB-       |                                                                                                                                                                           |
|                   | BB+                               | Ba1    | BB+   | BB+               | BB+             | BB+   | BB+        | <b>Ausreichende Bonität</b>                                                                                                                                               |
|                   | BB                                | Ba2    | BB    | BB                | BB              | BB    | BB         | Sehr mäßige Deckung von Zins und Tilgung, auch in gutem wirtschaftlichen Umfeld.                                                                                          |
|                   | BB-                               | Ba3    | BB-   | BB-               | BB-             | BB-   | BB-        |                                                                                                                                                                           |
|                   | B+                                | B1     | B+    | B+                | B+              | B+    | B+         | <b>Mangelhafte Bonität</b>                                                                                                                                                |
|                   | B                                 | B2     | B     | B                 | B               | B     | B          | Geringe Sicherung von Zins und Tilgung.                                                                                                                                   |
|                   | B-                                | B3     | B-    | B-                | B-              | B-    | B-         |                                                                                                                                                                           |
|                   | CCC+                              | Caa1   | CCC+  | CCC               | CCC             | CCC   | CCC+       | <b>Ungenügende Bonität</b>                                                                                                                                                |
|                   | CCC                               | Caa2   | CCC   | CC                | CC              | CC    | CCC        | Niedrigste Qualität, geringster Anlegerschutz. In akuter Gefahr eines Zahlungsverzuges.                                                                                   |
|                   | CCC-                              | Caa3   | CCC-  | C                 | C               | C     | CCC-       |                                                                                                                                                                           |

Abbildung 3.7: Ratingklassen verschiedener Agenturen<sup>22</sup>

<sup>22</sup> Siehe <https://www.boerse-stuttgart.de/de/boersenportal/segmente-und-initiativen/bondm/ratings/>.

Zur Kreditrisikomessung werden Übergangswahrscheinlichkeiten bestimmt, die angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich die Ratingklasse eines Emittenten und damit seine Bonität ändert. Dieses Risiko wird auch als *Migrationsrisiko* bezeichnet. Aus den Übergangswahrscheinlichkeiten ergibt sich eine (stochastische) Migrationsmatrix (Übergangsmatrix), wie sie in Abbildung 3.8 zu sehen ist.

**Sovereign Foreign-Currency Average One-Year Transition Rates (1975-2010)\***

(nach Rating)

|              | Ratings as of Jan. 1 | #   | AAA   | AA    | A     | BBB   | BB    | B     | CCC/CC | SD    | NR   |
|--------------|----------------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|------|
| (von Rating) | AAA                  | 450 | 97.78 | 2.22  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00   | 0.00  | 0.00 |
|              | AA                   | 267 | 3.37  | 93.63 | 2.25  | 0.00  | 0.37  | 0.37  | 0.00   | 0.00  | 0.00 |
|              | A                    | 278 | 0.00  | 3.60  | 92.81 | 3.60  | 0.00  | 0.00  | 0.00   | 0.00  | 0.00 |
|              | BBB                  | 237 | 0.00  | 0.00  | 6.75  | 89.03 | 3.38  | 0.84  | 0.00   | 0.00  | 0.00 |
|              | BB                   | 293 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 6.14  | 88.05 | 4.10  | 1.02   | 0.68  | 0.00 |
|              | B                    | 264 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 7.20  | 86.36 | 3.41   | 1.89  | 1.14 |
|              | CCC/CC               | 22  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 31.82 | 31.82  | 36.36 | 0.00 |

\*Implied senior debt ratings through 1995; sovereign credit ratings thereafter. Source: <http://creditpro.standardandpoors.com>.

Abbildung 3.8: 1-Jahres-Übergangsmatrix von Standard&Poors<sup>23</sup>

In der abgebildeten Tabelle wurden die neunzehn Ratingklassen aus Abbildung 3.7 zu sieben Klassen zusammengefasst. Die Matrix enthält die prozentualen Wahrscheinlichkeiten der Übergänge von den Ratingklassen aus der ersten Spalte in die Ratingklassen in der ersten Zeile. So liegt die Wahrscheinlichkeit **innerhalb von einem Jahr** von AAA auf AA herabgestuft zu werden bei 2,22% sowie die Wahrscheinlichkeit von AA nach A abgestuft zu werden bei 2,25%. Die Wahrscheinlichkeiten gelten für einen festgelegten Zeitraum (in diesem Fall ein Jahr), in dem der Übergang stattfindet. Im Rahmen der Optimierung wird ebenfalls ein 1-Jahres-Horizont betrachtet.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten für Ratings werden anhand von historischen Daten geschätzt (für die Matrix aus Abbildung 3.8 z. B. über den Zeitraum von 1975-2010). Dazu bieten Agenturen wahlweise unterschiedliche Kalibrierungen an. Auf diese Weise kann man spezielle Übergangsmatrizen für Staatsanleihen, Unternehmensanleihen, Pfandbriefe etc. in verschiedenen Währungsräumen verwenden und diese mit einer individuellen Historie kalibrieren.

<sup>23</sup> Siehe <http://www.standardandpoors.com/ratings/articles/en/us/?assetID=1245302231824>. SD = Selective-Default; NR = Not Rated.

### Recovery-Rates

Die sogenannten *Recovery-Rates* geben Aufschluss über die Höhe möglicher Rückzahlungen aus ausgefallenen Kreditpapieren. Die Ausfallwahrscheinlichkeit entnimmt man der entsprechenden Spalte (SD für Selective-Default) der Übergangsmatrix. Recovery-Rate und Ausfallwahrscheinlichkeit geben zusammen Aufschluss über das Ausfallrisiko.

### Kalibrierung und Simulation

Analog zu den Marktszenarien werden Kreditrisikotreiber identifiziert, zu denen anhand von Zeitreihen die Kovarianzen zueinander berechnet werden. Die Risikotreiber werden den Instrumenten des Allokationsuniversums zugeordnet. Mithilfe einer Regression kann der Erklärungsgehalt der Risikotreiber auf den Emittenten ( $E$ ) geschätzt werden, z. B.

$$\Delta E = \beta \cdot \Delta \text{Risikotreiber} + \epsilon,$$

wobei  $\epsilon$  den Regressionsfehler beschreibt. Dieser wird in der Regel als normalverteilt angenommen.

Jedem Emittenten wird eine Migrationsmatrix zugeordnet, aus welcher anhand seines Ratings die entsprechende Zeile mit den Übergangswahrscheinlichkeiten ausgewählt wird. Sie enthält ausgehend von dem aktuellen Rating des Emittenten die spezifischen Übergangswahrscheinlichkeiten, die auf die kalibrierte Verteilung übertragen werden können.

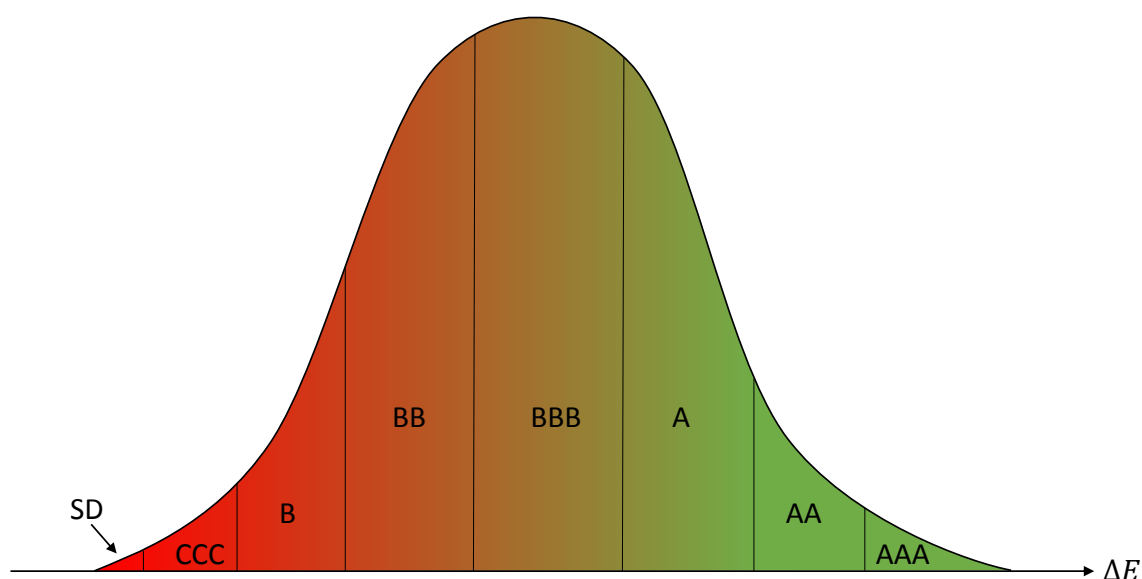


Abbildung 3.9: Verteilungsdichte und Ratings

Dazu setzt man innerhalb der Verteilungsdichte Schwellen für die Ratings, sodass die abgetrennten Flächen den Übergangswahrscheinlichkeiten der ausgewählten Matrixzeile entsprechen, wie beispielhaft in der Abbildung 3.9 dargestellt. Dabei entspricht die Ratingklasse SD dem Ausfall und die dazugehörige Fläche der Ausfallwahrscheinlichkeit.

Nach der Kalibrierung der Verteilungen können die Risikotreiber in Bezug auf Ausfall- und Migrationsrisiken sowie ihre Fehlerterme  $\epsilon$  simuliert werden. Anhand der Wertveränderung des Emittenten werden die neuen Ratings der Risikotreiber ermittelt. Anschließend bewertet man die Anleihen mit den entsprechenden aktuellen Ratingkurven (risikofreie Zinskurven zuzüglich Spreadkurven) und Recovery-Rates. Als Ergebnis erhält man eine Matrix, deren Aufbau der Marktrisikomatrix nach Abbildung 3.5 ähnlich ist.

### 3.7 Modularisierung der Programmstruktur

Unter einer *modularen Struktur* oder auch *Produktarchitektur*<sup>24</sup> wird im Zusammenhang mit dieser Arbeit ein Aufbau des Optimierungsprogramms aus Einzelkomponenten (den *Modulen*) verstanden, die zur Effizienzsteigerung des Algorithmus den Anforderungen des Investors entsprechend flexibel eingesetzt werden können. Das bedeutet, wird ein Modul nicht benötigt, wird es nicht in den Programmablauf integriert, sodass der Optimierungsalgorithmus keinen unnötigen Programmcode durchläuft. Um dies zu ermöglichen, müssen die Schnittstellen der einzelnen Module präzise definiert werden. Diese Standardisierung der Schnittstellen zwischen den Modulen ermöglicht gleichzeitig eine gewisse Flexibilität innerhalb jedes einzelnen Moduls, denn die Veränderungen innerhalb eines Moduls ziehen keine Anpassung des gesamten Programms nach sich.

Die modulare Produktarchitektur wird durch die direkte Zuordnung jeder Programmkomponente zu ihrer Funktion charakterisiert (sog. 1:1 Zuordnung), d. h., die Module übernehmen jeweils eine konkrete Funktion innerhalb des Optimierungsprogramms. Ist diese klare Zuordnung nicht gegeben, so spricht man von einer *integralen* Architektur (m:n Zuordnung mit  $m, n \in \mathbb{N}$ )<sup>25</sup>.

Das hier vorgestellte Optimierungsprogramm besteht aus einer Mischung von integralen und modularen Komponenten, die man als *hybride* Produktarchitektur bezeichnet.<sup>26</sup>

---

<sup>24</sup> Burr [2004] erläutert den Begriff der modularen Produktarchitektur.

<sup>25</sup> Vgl. Burr [2004], Seite 449 f. sowie Abbildung 1.

<sup>26</sup> Vgl. Burr [2004], Seite 450, Satz 1.

Dabei fungiert das Optimierungsprogramm (3.31) als Basiskomponente unseres Programms und stellt eine integrale Komponente dar, die innerhalb des Programmcodes nicht ausgelassen werden darf. Auf ihr aufbauend wird das Programm mit verschiedenen Komponenten erweitert. Sofern möglich, wird der Versuch unternommen, diese Erweiterungen modular vorzunehmen, sodass es in der Praxis möglich ist, die Basisversion sowohl mit verschiedenen Kombinationen von Modulen als auch *stand alone* zu verwenden.

Die einzelnen Module werden durch eindeutige Subskripte (oder ggf. auch Indizes) kenntlich gemacht. Die Nebenbedingungsmatrix  $A$  aus dem vorherigen Kapitel stellt das Basismodul (Basismatrix) für alle Optimierungen dar. Die Spalten der Matrix entsprechen dem Aufbau des Vektors  $x$ . Die ersten  $n$  Spalten stehen für die Portfoliogewichte  $w_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Diese Spalten werden in fast allen weiteren Modulen ebenfalls belegt. Die folgenden Spalten  $\text{CVaR}_M$ ,  $\text{CVaR}_K$ ,  $\text{VaR}_M$ ,  $\text{VaR}_K$ ,  $z_1^M, \dots, z_{J_M}^M$ ,  $z_1^K, \dots, z_{J_K}^K$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ , und ALMR werden ausschließlich für die Asset-Liability-Mismatch-Risikomessung verwendet und bleiben von den später folgenden Erweiterungsmodulen unberührt. Daher werden diese Spalten aus Gründen der Übersichtlichkeit zu einem Block aus insgesamt  $(7 + J_M + J_K)$  Spalten zusammengefasst.

| <b>Matrix<br/>A</b> | $w_1 \dots w_n$<br>( $n$ Sp) | $\text{CVaR}_M$<br>(1Sp) | $\text{CVaR}_K$<br>(1Sp) | $\text{VaR}_M$<br>(1Sp) | $\text{VaR}_K$<br>(1Sp) | $z_1^M \dots z_{J_M}^M$<br>( $J_M$ Sp) | $z_1^K \dots z_{J_K}^K$<br>( $J_K$ Sp) | $y_1$<br>(1Sp) | $y_2$<br>(1Sp) | ALMR<br>(1Sp) |
|---------------------|------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------|----------------|---------------|
| (1Z)                | 0 .. 0                       | -1                       | 0                        | 1                       | 0                       | $\lambda \dots \lambda$                | 0 .. 0                                 | 0              | 0              | 0             |
| ( $J_M$ Z)          | $[SZ_{Markt}]$               | (0)                      | (0)                      | (-1)                    | (0)                     | $[-E]$                                 | $[0 \dots 0]$                          | (0)            | (0)            | (0)           |
| (1Z)                | 0 .. 0                       | 0                        | -1                       | 0                       | 1                       | 0                                      | $\mu \dots \mu$                        | 0              | 0              | 0             |
| ( $J_K$ Z)          | $[SZ_{Kredit}]$              | (0)                      | (0)                      | (0)                     | (-1)                    | $[0]$                                  | $[-E]$                                 | (0)            | (0)            | (0)           |
| (1Z)                | 0 .. 0                       | 1                        | $\rho$                   | 0                       | 0                       | 0                                      | 0 .. 0                                 | -1             | 0              | 0             |
| (1Z)                | 0 .. 0                       | 0                        | $\sqrt{1 - \rho^2}$      | 0                       | 0                       | 0                                      | 0 .. 0                                 | 0              | -1             | 0             |

Tabelle 3.8: ALMR-Block

Dieser wird als *ALMR-Block* oder  $A_{ALMR}$  bezeichnet. Auf diese Weise erhält die Matrix eine sehr übersichtliche Darstellung, in die sich neue Module leicht integrieren lassen:

| <b>Matrix<br/>A</b> | $w_1 \dots w_n$<br>( $n$ Sp) | ALMR-Block<br>( $7 + J_M + J_K$ )Sp |
|---------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| $(3 + J_M + J_K)Z$  |                              |                                     |
| Bsp. neues Modul 1  |                              |                                     |

Tabelle 3.9: ALMR-Block in der Nebenbedingungsmatrix A

Neue Module vergrößern die Matrix und werden als Erweiterung unterhalb der letzten Matrixzeile angefügt (siehe „Bsp. neues Modul 1“), wodurch sie die Zeilenanzahl der Ne-

benbedingungsmatrix verlängern. Grundsätzlich können zwei Arten von Modulen unterschieden werden: diejenigen, die eine Erweiterung des Zielvektors  $x$  zur Folge haben und solche, die ihn unverändert lassen.

Werden durch ein Modul Nebenbedingungen ohne Erweiterung des Zielvektors, d. h. ohne Einführung neuer Variablen, eingeführt, so hat dies lediglich Auswirkungen auf die Nebenbedingungsmatrix  $A$  und ihre Grenzvektoren  $lbA$  und  $ubA$ . In diesem Fall werden der Matrix  $A$  die für das neue Modul erforderlichen Zeilen angefügt und an entsprechender Stelle jeweils Positionen innerhalb der Grenzen  $lbA/ubA$  ergänzt. Dies wurde bereits bei dem Zusammenfügen der Szenariomatrizen  $SZ_M$  und  $SZ_K$  für Markt- und Kreditrisiko zur Matrix (3.6) vorgeführt. Dort wurden ebenfalls entsprechend die Grenzvektoren ( $lbA/ubA$ ) erweitert. Der Zielvektor  $x$  sowie seine Grenzen  $lbx$  und  $ubx$  bleiben unverändert.

Werden dem Zielvektor  $x$  durch ein neues Modul Positionen hinzugefügt, so müssen auch die Grenzen des Zielvektors  $lbx/ubx$  entsprechend ergänzt werden. Außerdem wird die Nebenbedingungsmatrix  $A$  um eine Spalte für jede zusätzliche Variable im Zielvektor erweitert. Dies ist bei der Erweiterung der Matrix in Tabelle (3.6) zu der Matrix in Tabelle (3.7) in Abschnitt 3.5 geschehen. Zusätzlich werden, wie im obigen Fall, die für das Modul benötigten Zeilen an die Matrix  $A$  hinzugefügt und entsprechende Positionen bei den Grenzen  $lbA/ubA$  ergänzt.

### Kennzeichnung von Modulen

Die Module werden durch Subskripte (z. B. Namen oder Abkürzungen der Module) an den entsprechenden Vektoren und Matrizen gekennzeichnet. Auf diese Weise lassen sich die Komponenten am Ende identifizieren und wieder zu einem Ganzen (Nebenbedingungsmatrix, Grenzvektoren etc.) zusammensetzen.

$$A = (A_{\text{Modul1}}, A_{\text{Modul2}}, \dots), \quad lbA = (lbA_{\text{Modul1}}, lbA_{\text{Modul2}}, \dots), \quad \text{usw.}$$

Während des Zusammensetzens der verschiedenen Komponenten werden „leere“ Matrixeinträge (Spalten, Zeilen) durch Nullen ergänzt, um die verschiedenen Blöcke aneinander anzugleichen. Damit sich in der praktischen Umsetzung (Programmierung) bei diesem Schritt keine Fehler einschleichen, müssen die Schnittstellen zwischen den Modulen exakt definiert sein.

### 3.8 Forderung einer Mindestrendite

Das Optimierungsprogramm (3.31) liefert ein risikominimales Portfolio im Sinne des Asset-Liability-Mismatch-Risikomaßes. In der Denkweise der Portfoliooptimierung nach Markowitz entspricht das gefundene Portfolio einer Art Minimum-Varianz-Portfolio<sup>27</sup>. Dieses optimale Portfolio wird daher als *Minimum-ALMR-Portfolio* oder allgemeiner als *Portfolio minimalen Risikos* bezeichnet, d. h., man befindet sich im Scheitelpunkt des (rechten) Hyperbelastes auf der Effizienzlinie.<sup>28</sup>

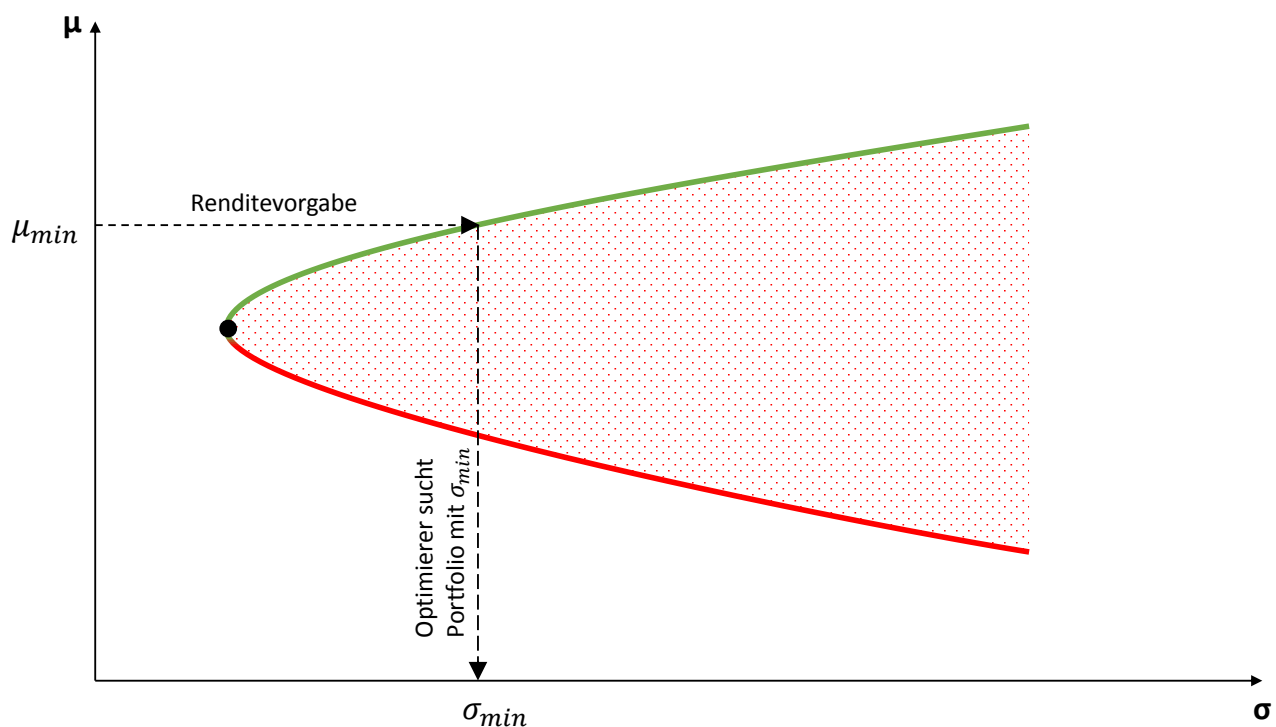


Abbildung 3.10: Effizienzlinie mit Mindestreturnanforderung

Fordert der Investor eine gewisse Rendite, die das optimierte Gesamtportfolio liefern soll, so wird diese als *Minimalrendite*  $\mu_{\min}$  bezeichnet. Dies bedeutet, man wandert von dem risikominimalen Portfolio auf der Effizienzlinie nach *rechts-oben*, auf der Suche nach dem effizienten Portfolio, das die Minimalrendite liefert (und zu der geforderten Rendite das geringste Risiko beinhaltet). Berechnet man mehrere optimale Portfolios zu unterschied-

<sup>27</sup> Im Fall ausschließlich normalverteilter Assets entspräche das CVaR-minimale Portfolio dem Markowitz-optimalen Portfolio.

<sup>28</sup> Vgl. dazu Abbildung 2.4 und Erläuterungen.

lichen Mindestrenditen, erhält man zu jeder Mindestrendite  $\mu_{\min}$  ein Portfolio auf der Effizienzlinie.

Die Forderung nach einer Mindestrendite  $\mu_{\min}$  bedeutet, dass die erwartete Portfoliorendite  $\mu_P$  mindestens so groß wie die Mindestrendite sein soll. Das heißt, es wird gefordert, dass

$$\mu_P \geq \mu_{\min}. \quad (3.32)$$

Dabei wird der Erwartungswert der Portfoliorendite, wie in dem einführenden Kapitel 2.1.4 durch Gleichung 2.18 definiert, als

$$\mu_P = E[R] = w^t \cdot \mu = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i$$

berechnet, wobei  $\mu_i = E[R_i]$  die Renditeerwartungen zu den einzelnen Assetklassen darstellen. Die Generierung von Renditeerwartungen ist von zentraler Bedeutung für die gesamte Optimierung. Ein Vorschlag zur Erstellung von Renditeschätzungen wird im nächsten Kapitel vorgestellt.

### Implementierung der Mindestrendite in das Optimierungssetting

Zur Integration der Mindestrenditeanforderung in das Optimierungsprogramm (3.31) wird die Mindestrendite als Nebenbedingung durch Hinzufügen einer weiteren Zeile innerhalb der Nebenbedingungsmatrix  $A$  implementiert. Dazu wird die Gleichung (3.32) durch die Summenschreibweise der Portfoliorendite aus Gleichung (2.18) als

$$\mu_{\min} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n w_i \mu_i}_{\text{Portfoliorendite } \mu_P} \leq \infty \quad (3.33)$$

dargestellt.

Als untere Schranke wird die geforderte Mindestrendite  $\mu_{\min}$  verwendet. Nach oben bleibt die Rendite  $\mu_P$  unbeschränkt, sodass die Vektoren entsprechend ergänzt werden:

$$lbA = (0 \quad \overbrace{-\infty \dots -\infty}^{\text{Anzahl Marktszenarien}} \quad 0 \quad \overbrace{-\infty \dots -\infty}^{\text{Anzahl Kreditszenarien}} \quad 0 \quad 0 \quad \mu_{\min})^t, \quad (3.34)$$

$$ubA = (0 \quad \overbrace{0 \dots 0}^{\text{Anzahl Marktszenarien}} \quad 0 \quad \overbrace{0 \dots 0}^{\text{Anzahl Kreditszenarien}} \quad 0 \quad 0 \quad \infty)^t. \quad (3.35)$$

Der Nebenbedingungsmatrix  $A$  wird eine Zeile mit den erwarteten Renditen  $\mu_i$  hinzugefügt, um die Gleichung (3.33) nachzubilden.

| <b>Matrix<br/>A</b> | $w_1 \dots w_n$<br>( $n$ Sp) | CVaR <sub>M</sub><br>(1Sp) | CVaR <sub>K</sub><br>(1Sp) | VaR <sub>M</sub><br>(1Sp) | VaR <sub>K</sub><br>(1Sp) | $z_1^M \dots z_{J_M}^M$<br>( $J_M$ Sp) | $z_1^K \dots z_{J_K}^K$<br>( $J_K$ Sp) | $y_1$<br>(1Sp) | $y_2$<br>(1Sp) | ALMR<br>(1Sp) |
|---------------------|------------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------|----------------|---------------|
| (1Z)                | 0 .. 0                       | -1                         | 0                          | 1                         | 0                         | $\lambda \dots \lambda$                | 0 .. 0                                 | 0              | 0              | 0             |
| ( $J_M$ Z)          | $[SZ_{Markt}]$               | (0)                        | (0)                        | (-1)                      | (0)                       | $[-E]$                                 | $[0 \dots 0]$                          | (0)            | (0)            | (0)           |
| (1Z)                | 0 .. 0                       | 0                          | -1                         | 0                         | 1                         | 0                                      | $\mu \dots \mu$                        | 0              | 0              | 0             |
| ( $J_K$ Z)          | $[SZ_{Kredit}]$              | (0)                        | (0)                        | (0)                       | (-1)                      | $[0]$                                  | $[-E]$                                 | (0)            | (0)            | (0)           |
| (1Z)                | 0 .. 0                       | 1                          | $\rho$                     | 0                         | 0                         | 0                                      | 0 .. 0                                 | -1             | 0              | 0             |
| (1Z)                | 0 .. 0                       | 0                          | $\sqrt{1 - \rho^2}$        | 0                         | 0                         | 0                                      | 0 .. 0                                 | 0              | -1             | 0             |
| (1Z)                | $\mu_1 \dots \mu_n$          | 0                          | 0                          | 0                         | 0                         | 0                                      | 0 .. 0                                 | 0              | 0              | 0             |

Tabelle 3.10: Nebenbedingungsmatrix mit Modul „Mindestrendite“

Entsprechend des vorherigen Kapitels wird die Matrix in Kurzschreibweise dargestellt.

| <b>Matrix<br/>A</b>   | $w_1 \dots w_n$<br>( $n$ Sp) | ALMR-Block<br>( $7 + J_M + J_K$ )Sp |
|-----------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| ALMR Markt            | 0 .. 0                       |                                     |
| -    -                | $[SZ_{Markt}]$               |                                     |
| ALMR Kredit           | 0 .. 0                       |                                     |
| -    -                | $[SZ_{Kredit}]$              |                                     |
| <b>Mindestrendite</b> | $\mu_1 \dots \mu_n$          | <b>0 .. 0</b>                       |

Tabelle 3.11: Nebenbedingungsmatrix mit Modul „Mindestrendite“ in Blockansicht

Die Nebenbedingung zur Mindestrendite ist ein modularer Baustein, sodass sie auch in jedes andere Optimierungsprogramm durch Hinzufügen der Zeile in der Nebenbedingungsmatrix sowie der entsprechenden oberen und unteren Grenze integriert werden kann. Die einzelnen Module werden optisch in der Tabelle voneinander getrennt.

### 3.9 Generierung erwarteter Renditen

Die Generierung bzw. Schätzung zukünftig erwarteter Renditen ist ein zentrales Thema innerhalb der Portfoliooptimierung, da die aus ihr gewonnenen Risikoprämien großen Einfluss auf die Optimierungsergebnisse haben. Üblicherweise hat jeder Investor seine eigene Vorstellung, wie die Zukunft des Kapitalmarkts aussieht. Leider folgt der Kapitalmarkt selten genau dieser Vorstellung. Statt geschätzte Renditen zu verwenden, könnte sich die Optimierung auf eine reine Risikobetrachtung beschränken, in der man implizit

die Renditen aller Anlageklassen gleichsetzen würde. Jedoch sind die Renditeschätzungen zur Unterscheidung des Ertrags, den eine Anlageform oder Assetklasse möglicherweise erwirtschaftet, wünschenswert und ein wichtiges Entscheidungskriterium für Investoren. Leider sind gerade die eingehenden Renditeschätzungen besonders sensible Inputparameter für die Optimierung. Chopra und Ziemba [1993] bescheinigen ihnen im Kontext der Mean-Variance-Optimierung einen zehnfach so starken Einfluss auf die Optimierungsergebnisse wie den Schätzungen für (Ko-)Varianzen.<sup>29</sup> In der Literatur findet man zahlreiche Vorschläge für die Schätzung von Renditen. Die verschiedenen Verfahren beruhen auf Schätzungen anhand historischer Daten, Expertenmeinungen sowie analytischer Berechnungsverfahren. In diesem Kapitel wird die Idee eines Verfahrens vorgestellt, die an die Theorie des *Capital-Asset-Pricing-Models (CAPM)* anknüpft, das zunächst erläutert wird.

### 3.9.1 Capital-Asset-Pricing-Model

In Anlehnung an Albrecht und Maurer [2008]<sup>30</sup> wird das Capital-Asset-Pricing-Model als Single-Indexmodell vorgestellt, dessen sogenannter Marktfaktor einen Marktindex darstellt. Ein Marktfaktor ist „die zentrale marktbeeinflussende Größe, der die Renditen und Risiken der Titel des Marktes treibt“<sup>31</sup>. Verwendet man als Faktor einen Marktindex, so spricht man auch von einem *Marktindexmodell*. Grundsätzlich sei die Rendite eines linearen Finanztitels  $i \in \{1, \dots, n\}$  (z. B. einer Aktie) durch

$$R_i = a_i + b_i R_{MI} + \epsilon_i \quad (3.36)$$

beschrieben. Hierbei seien für  $1 \leq i \leq n$

- $R_i$ , die einperiodige Rendite des Finanztitels  $i$ ,
- $R_{MI}$ , die einperiodige Rendite des Marktindex (Marktindexportfolio),
- $\epsilon_i$ , das Residuum<sup>32</sup>, welches den durch den Marktindex nicht erklärbaren Teil, d. h. die Schwankungen um den Marktindex, enthält. Für  $\epsilon_i$  gelten folgende Annahmen:

(a)  $\epsilon_i$  habe Erwartungswert  $E[\epsilon_i] = 0$  und Varianz  $Var[\epsilon_i] = E[\epsilon_i^2] = \sigma^2$ .

(b) Weiterhin soll gelten:  $Cov[\epsilon_i, R_{MI}] = 0$  und  $Cov[\epsilon_i, \epsilon_j] = 0$ ,  $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ .

<sup>29</sup> Vgl. Chopra und Ziemba [1993], Seite 7, Satz 1.

<sup>30</sup> Vgl. Albrecht und Maurer [2008], Kapitel 6.3.5.4 sowie folgende.

<sup>31</sup> Albrecht und Maurer [2008], Seite 295, 2. Absatz, vorletzter Satz.

<sup>32</sup> Das Residuum wird in der Literatur auch (Regressions-)Fehler, Störterm (Störung) oder Fehlerterm genannt.

Aus (a) und (b) folgen durch

$$\begin{aligned}
 Cov(R_i, R_{MI}) &= Cov(a + b_i R_{MI} + \epsilon_i, R_{MI}) \\
 &= \underbrace{Cov(a, R_{MI})}_{=0} + Cov(b_i R_{MI}, R_{MI}) + \underbrace{Cov(\epsilon_i, R_{MI})}_{=0} \\
 &= b_i \cdot Var(R_{MI})
 \end{aligned}$$

für den sogenannten Betafaktor  $b_i$

$$b_i = \frac{Cov(R_i, R_{MI})}{Var(R_{MI})} = \frac{\text{systematisches Risiko des i-ten Finanztitels}}{\text{Marktrisiko}}. \quad (3.37)$$

Die Variable  $a_i$  stellt den Teil der (erwarteten) Rendite des Finanztitels dar, der unabhängig von dem Marktindex ist, denn  $E[R_i] = a_i + b_i E[R_{MI}] + E[\epsilon_i] \stackrel{(a)}{=} a_i + b_i E[R_{MI}]$ . Als Steigungskoeffizient spiegelt  $b_i$  die Sensitivität der Rendite gegenüber dem Marktindex wider. Somit lässt sich anhand von  $b_i$  die Abhängigkeit der Rendite von dem Marktindex ablesen. Bildet das Marktindexportfolio die Struktur des gesamten Marktes ab, so spricht man von dem sogenannten *Marktportfolio*. Das bedeutet, das Marktportfolio beinhaltet sämtliche am Markt verfügbaren, risikobehafteten Anlagemöglichkeiten mit einer dem Gesamtbild des Marktes gerecht werdenden Gewichtung. Dabei wird angenommen, dass sich der Markt im Gleichgewicht befindet, d. h., am Markt herrscht die Situation, dass das Angebot an Investitionen exakt die Nachfrage abdeckt. Man bezeichnet einen solchen Markt auch als *geräumt*. Das Marktportfolio spielt die zentrale Rolle im Capital-Asset-Pricing-Model (kurz: CAPM). Seine Rendite wird als  $R_M$  notiert.

Während der Term  $b_i R_M$  als das *systematische Risiko* bezeichnet wird, bezeichnet man den Fehlerterm  $\epsilon_i$  als das *unsystematische Risiko* im CAPM. Letzteres kann in ausreichend großen Portfolios wegdiversifiziert werden, mathematisch ausgedrückt durch die oben genannte Bedingung (a)  $E[\epsilon_i] = 0$ . Dann lautet die erwartete Rendite

$$\mu = E[R] = a + b \underbrace{E[R_M]}_{\mu_M} + \underbrace{E[\epsilon_i]}_{=0} = a + b\mu_M. \quad (3.38)$$

Das Modell wird um einen *risikolosen*<sup>33</sup> Zinssatz  $r_f$  (z. B. Zinsen am Geldmarkt) erweitert, zu welchem unbegrenzte Geldanlage und Geldaufnahme möglich sind. Wie in der Portfolio-

<sup>33</sup> Risikolos heißt insbesondere, dass das gewählte Risikomaß (hier die Varianz) diesem Zins den Wert 0 zuordnet.

theorie üblich, sind die Investoren risikoavers und präferieren stets effiziente  $\mu$ - $\sigma$ -Portfolios. Durch die Hinzunahme der risikofreien Investitionsmöglichkeit verändert sich die Effizienzlinie, die im Rahmen der Markowitzschen Portfoliotheorie (Kapitel 2.1) eingeführt wurde, maßgeblich. Der Punkt I wird erreicht, wenn der Anteil  $\beta_I$  in das Marktportfolio (M) und der Anteil  $(1 - \beta_I)$  in die risikolose Anlage mit der Verzinsung  $r_f$  investiert wird. Für Portfolio J wird ein Kredit in Höhe des  $(\beta_J - 1)$ -fachen Investitionsbetrags aufgenommen und der anschließende Gesamtbetrag in das Marktportfolio angelegt.

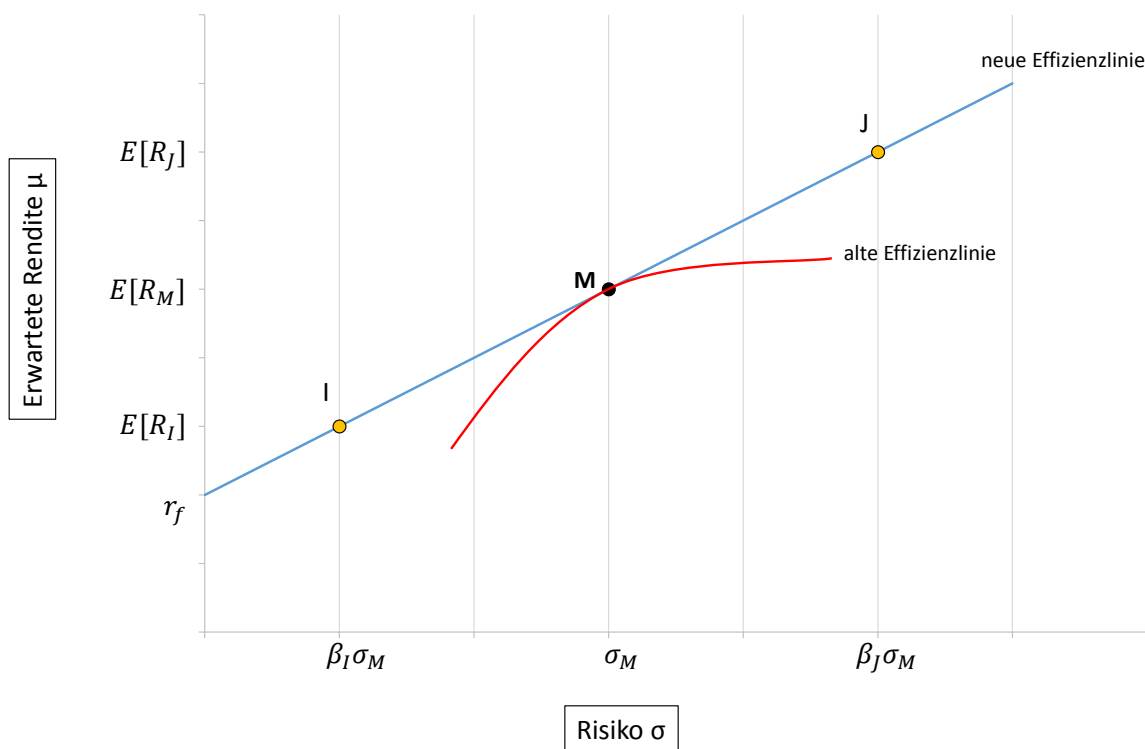


Abbildung 3.11: Kombinierte Effizienzlinie<sup>34</sup>

Durch Mischung des risikobehafteten Marktportfolios  $M$  mit der risikolosen Anlage zum Zins  $r_f$  ergibt sich die *erwartete Gesamtrendite*  $\mu = E[R]$  der Investition aus

$$\mu = \beta \cdot \mu_M + (1 - \beta) \cdot r_f = r_f + \beta \cdot (\mu_M - r_f), \quad (3.39)$$

wobei  $\beta$  den Anteil der risikobehafteten Investition darstellt, sodass der verbleibende Anteil  $(1 - \beta)$  zum risikolosen Zinssatz angelegt wird. Dies ist die zentrale Gleichung des CAPMs.

<sup>34</sup> Vgl. Hull [2010], Abbildung 1.4.

Sie besagt, dass die erwartete Rendite des Gesamtportfolios die  $\beta$ -fache Überrendite des Marktportfolios zuzüglich des risikolosen Zinssatzes ist.

Die Varianz der Gesamtportfoliorendite beträgt

$$\sigma^2 = \text{Var}(\beta R_M + (1 - \beta)r_f) = \beta^2 \sigma_M^2. \quad (3.40)$$

Substituiert man den risikobehafteten Investitionsanteil  $\beta$  innerhalb der Gleichung für die erwartete Gesamrendite  $\mu$  durch Umstellung der Varianzgleichung zu  $\beta = \frac{\sigma}{\sigma_M}$ , so erhält man die im  $(\sigma, \mu)$ -Diagramm dargestellte Geradengleichung als Funktion der Varianz

$$\mu(\sigma) = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M} \cdot \sigma. \quad (3.41)$$

Diese Gerade wird in der Literatur als *Kapitalmarktklinie* oder engl. *Capital-Market-Line* bezeichnet. Ihre Steigung ist auch bekannt als die *Sharpe-Ratio*, die allgemein für ein Portfolio  $P$  als

$$SR(P) = \frac{E[R_P] - r_f}{\sigma[R_P]} = \frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P} \quad (3.42)$$

definiert wird. Es wird also die erwartete Überrendite (Excess-Return) zur Volatilität, d. h. Ertrag zu Risiko, ins Verhältnis gesetzt. Das Marktportfolio weist die höchste Sharpe-Ratio unter allen Portfolios auf und bildet somit das optimale<sup>35</sup> Portfolio ab. Das bedeutet, dass alle (rational agierenden) Investoren das Marktportfolio kaufen würden, da sie gemäß der Portfoliotheorie nur nach den Kriterien Rendite versus Risiko entscheiden.<sup>36</sup> Das Risikoverhalten der Investoren drückt sich in dem Mischungsverhältnis von risikoloser und risikobehafteter Anlage in das Marktportfolio aus, d. h., alle optimalen Portfolios liegen auf der oben beschriebenen Geraden.

Das  $\beta$  gibt demnach das Maß der Risikoaversion an. Eine vollkommen risikofreie Anlage ergibt sich durch die Wahl  $\beta = 0$ , während ein  $\beta$  von 1 eine vollständige Investition in das Marktportfolio bedeutet. Im Prinzip ist es auch möglich  $\beta > 1$  zu wählen. In diesem Fall interpretiert man die Situation als Geldaufnahme zum risikolosen Zinssatz (da dann  $(1 - \beta)r_f < 0$  ist), die zusätzlich in das Marktportfolio investiert wird. Auf diese Weise ergibt sich in Abbildung 3.9.1 der Geradenabschnitt oberhalb des Marktportfolios.

<sup>35</sup> Bezogen auf eine Optimierung ohne weitere Restriktionen.

<sup>36</sup> Siehe Kapitel 2.1.

Weitere Details, Annahmen und Konklusionen werden zusammengefasst<sup>37</sup>:

- (1) Den Investoren werden *homogene* Erwartungen unterstellt. Das bedeutet auch, dass die Investoren gleiche Schätzer für Rendite- und Risikokennzahlen sowie die daraus resultierenden (Ko-)Varianzen, bzw. Korrelationen verwenden.
- (2) Implizit wird analog zur Portfoliotheorie von normalverteilten Renditen aller am Markt erhältlichen Finanztitel ausgegangen.
- (3) Darüber hinaus sollen die Fehlerterme  $\epsilon$  für alle Finanztitel unabhängig voneinander (und identisch) verteilt sein.
- (4)  $r_f$  wird als risikoloser Zinssatz für unbegrenzte Geldanlage sowie Geldaufnahme angenommen.
- (5) Der Markt ist geräumt. (Es herrscht Marktgleichgewicht.)
- (6) Man bezeichnet die Überrendite des  $i$ -ten Finanztitels ( $\mu_i - r_f$ ) als *Risikoprämie* ( $RP_i$ ) (*excess return, risk premium*). Die Risikoprämie ist laut Gleichung (3.39)

$$RP_i := \beta_i \cdot (\mu_M - r_f). \quad (3.43)$$

- (7) Das CAPM ist ein Marktmodell<sup>38</sup> der Form  $\mu = a + b\mu_M$  mit  $b = \beta$ ,  $a = r_f \cdot (1 - \beta)$ .
- (8) Nach Gleichung (3.37) gilt für den Betafaktor  $\beta = \frac{Cov(R, R_M)}{\sigma^2(R)} = \rho(R, R_M) \frac{\sigma(R)}{\sigma(R_M)}$ , wobei  $\rho$  die Korrelation der Anlage zum Marktportfolio ist.

### 3.9.2 Generierung von Renditeerwartungen

Ein einfacher Weg aus der Theorie des Capital-Asset-Pricing-Models erwartete Renditen zu gewinnen, ist die Schätzung des Betafaktors aus Vergangenheitsdaten z. B. mittels Regression. In Verbindung mit der Beobachtung der aktuellen Marktrendite  $R_M$  (hier gibt es ebenfalls eine Reihe von Verfahren) könnte man die erwartete Rendite eines Finanztitels oder Portfolios als

$$E[R] = r_f + \hat{\beta} \cdot (R_M - r_f)$$

schätzen.

<sup>37</sup> Vgl. dazu Hull [2010], Kapitel 1.3 ff., sowie Kapitel 6.4.2 ff. aus Albrecht und Maurer [2008].

<sup>38</sup> Entsprechend der Ausgangsgleichung (3.36) sowie der Forderung  $E[\epsilon_i] = 0$ .

Ein nicht auf historischen Daten beruhender Ansatz ist die Diskontierung erwarteter Renditen aus Analystenschätzungen mithilfe eines Dividendendiskontierungsmodells oder dem speziellen Residual-Income-Modell nach Ohlson (1995).<sup>39</sup> In der Praxis bereitet es jedoch Schwierigkeiten Einschätzungen von Analysten für das vordefinierte strategische Allokationsuniversum zu finden und diese in einheitlicher Weise in ein konsistentes Modell einzubinden. Im Rahmen der Betrachtung des CAPMs wurde gezeigt, dass die erwarteten Renditen der optimalen Portfolios maßgeblich<sup>40</sup> von dem Marktportfolio abhängen. Verbindet man diese Einsicht mit den Erkenntnissen der Markowitzschen Theorie über das Zusammenspiel von optimalen Portfolios und Renditeerwartungen, so ergibt sich eine neue Möglichkeit zur Renditeschätzung. Anstelle der direkten Schätzung von Renditen, kann man diese mittels einer inversen Optimierung aus dem Marktportfolio des strategischen Allokationsuniversums gewinnen. Doch welche Anforderungen soll das Marktportfolio erfüllen?

Das Marktportfolio ist auf dem Anlageuniversum definiert und enthält sämtliche darin enthaltenen Finanztitel sowie Assetklassen. Es soll diesen Markt bestmöglich abbilden. Daher geht es bei diesem Ansatz nicht um eine Outperformance des Marktes durch Renditeschätzungen, sondern um ein Abbild des Marktes und seiner Renditen im Zustand des Marktgleichgewichts. Daher werden die aus dem Verfahren resultierenden erwarteten Renditen auch als *Gleichgewichtsrenditen* oder *equilibrium returns*<sup>41</sup> bezeichnet. Grundsätzlich wird das Marktportfolio in dieser Arbeit als langfristiges Gleichgewichtsportfolio verstanden, das zum Gedanken der Strategischen-Asset-Allokation, die im Gegensatz zur Taktischen-Asset-Allokation in längeren Zeiträumen denkt, passt. Daher soll das Marktportfolio über mehrere Perioden eine gewisse Konstanz aufweisen, d. h., sich nicht in jeder Periode grundlegend ändern. Dadurch entsteht eine gewisse Spannung zwischen exakter Abbildung des aktuellen Marktes und einer strategisch-langfristigen Marktsicht.

An dieser Stelle wird angenommen, dass das geschätzte Marktportfolio als Gleichgewichtsportfolio gemäß des Capital-Asset-Pricing-Models den geräumten Markt widerspiegelt. Hat man das Marktportfolio zusammengestellt, so nutzt man die Markowitz-Optimierung in die umgekehrte Richtung (Inverse Markowitz-Optimierung, Abbildung 3.12) zur Gewinnung der Gleichgewichtsrenditen aus dem Marktportfolio und einer entsprechenden Kovarianz-

<sup>39</sup> Vgl. Hagemeister [2010], Seite 1, 3. Absatz.

<sup>40</sup> *Maßgeblich*, da davon ausgegangen wird, dass man das  $\epsilon$  wegdiversifizieren kann.

<sup>41</sup> Vgl. Idzorek [2005], Abschnitt 1.1.

matrix (Cov). Als wesentliche Annahme geht an dieser Stelle ein, dass das Marktportfolio effizient ist, d. h., als optimales Portfolio  $w^*$  in die inverse Markowitz-Optimierung Eingang findet. Dementsprechend sollte großer Wert auf die Qualität des Marktportfolios gelegt werden.

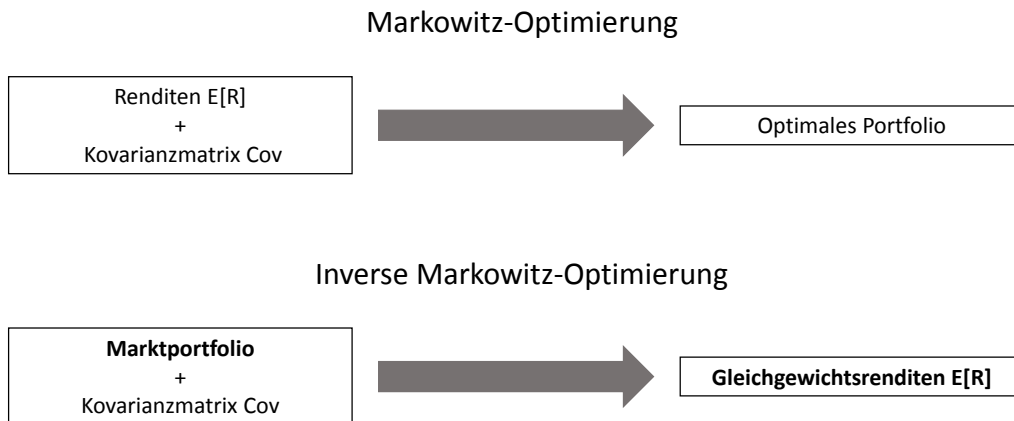


Abbildung 3.12: Inverse Markowitz-Optimierung

Um ein solches Marktportfolio aufzustellen, kann man das Allokationsuniversum in verschiedene Gruppen (Teilportfolios) unterteilen, z. B. Aktien, zinssensitive Wertpapiere, inflationssensitive Wertpapiere, Währungen etc., und für diese Teilportfolios den Gesamtmarkt untersuchen. Auf diese Weise könnte man sich bei Aktien an großen Indizes (z. B. Betrachtung der MSCI World) orientieren. Bei anderen Gruppen ist dies bereits schwieriger. Bei zinssensitiven Wertpapieren bieten sich Vergleiche von Laufzeitstrukturen anderer großer Portfolios (z. B. von Portfoliomanagern) an oder die Ausrichtung an der Duration der eigenen Passivseite (in erster Linie bei Versicherungen). Folgende Vorschläge können zu einem Gesamtbild der Marktsituation beitragen und dadurch für die Zusammenstellung eines Marktportfolios sinnvoll sein:

- Analyse von Portfolios anderer Portfoliomanager.
- Einholen von Analystenmeinungen und/oder eigenes Research betreiben, um eine Marktmeinung zu bilden, die in den Prozess einfließt.
- Betrachtung der Marktkapitalisierung des entsprechenden Marktes (z. B. MSCI World als Weltmarkt oder EuroStoxx für die Eurozone).

- Für zinssensitive Finanztitel (Anleihen) kann man eine Adjustierung der Duration des Marktportfolios vornehmen. Dadurch kann die Duration des Marktportfolios an der unternehmenseigenen passivseitigen Duration ausgerichtet werden. Dies ist insbesondere im Kontext von Versicherungsunternehmen sinnvoll, da die Passivseite als Benchmark innerhalb der Optimierung verwendet wird.<sup>42</sup>

Ist das Marktportfolio zusammengestellt, so erhält man durch die folgende einfache Gleichung<sup>43</sup> die impliziten Risikoprämien des Marktportfolios (Marktrisikoprämien).

$$RP[w_M] = \lambda \cdot C \cdot w_M, \quad (3.44)$$

wobei  $\lambda$  der Risikoaversionsfaktor<sup>44</sup> und  $C$  die Kovarianzmatrix sind. Die Marktrisikoprämien beschreiben in erster Linie die Rendite-Verhältnisse der einzelnen Assets und Assetklassen zueinander. Dies sollte man bei einem direkten Vergleich mit anderen Schätzungen berücksichtigen, da durch die Wahl von  $\lambda$  eine Skalierung vorgenommen wird. Nach der Definition der Risikoprämien (3.43) erhält man die Gleichgewichtsrenditen durch Addition des risikolosen Zinses  $r_f$ , d. h.

$$E[w_M] = r_f + RP[w_M] = r_f + \lambda C w_M. \quad (3.45)$$

Ein Vorteil dieses Verfahrens kann die objektive und nachvollziehbare Aufstellung des Marktportfolios sein, das als strategischer Ausgangspunkt für die Optimierung dient. Die aus dem Prozess resultierenden Renditen sollten stets kritisch hinterfragt werden, da sich diese auch bei gleichbleibendem Marktportfolio durch den Einfluss einer aktualisierten Kovarianzmatrix ändern. Eine solche Aktualisierung der Kovarianzen muss zu jedem neuen Optimierungstichtag vorgenommen werden, sofern die Matrix die aktuell am Markt herrschenden Korrelationen widerspiegeln soll.

Eine Kovarianzmatrix kann aus einem konstanten historischen Zeitraum (z. B. 3/5/10 Jahre) oder einer sich stets vergrößernden Zeitspanne (z. B. beginnend ab einem bestimmten Jahr) errechnet werden. Außerdem hat man die Möglichkeit, die zur Berechnung der Kovarianzen verwendeten Zeitreihen zu gewichten, um so beispielsweise der jüngeren Vergangenheit ein höheres Gewicht als der weiter entfernten zuzuteilen.

<sup>42</sup> Außerdem bietet die Durationsadjustierung die Möglichkeit, die Zielduration der Aktivseite zu beeinflussen. So könnte man beispielsweise durch eine Durationsverlängerung im Marktportfolio auf eine Verlängerung der Aktivseite hoffen, die sich in den optimierten Portfolios widerspiegelt.

<sup>43</sup> Vgl. Idzorek [2005], Gleichung (1).

<sup>44</sup> Der Risikoaversionsfaktor  $\lambda$  stellt einen reinen Skalierungsfaktor der Risikoprämien dar. In dieser Arbeit wird auf eine Skalierung verzichtet und  $\lambda = 1$  gesetzt.

Die Gleichgewichtsrenditen stellen einen guten Ausgangspunkt für die Optimierung der Strategischen-Asset-Allokation dar. In der Praxis tritt häufig der Fall auf, dass der Investor den Renditen einzelner Finanztitel wenig Glauben schenkt und daher gerne in den Renditegenerierungsprozess manuell „eingreifen“ möchte. Ein konsistentes Verfahren für solche Renditeanpassungen bietet das eingangs erwähnte Modell von Black und Litterman. Hiermit lassen sich die fertigen Gleichgewichtsrenditen auch für taktische Zwecke kurzfristig anpassen.

### 3.9.3 Black-Litterman-Verfahren

Das Black-Litterman-Verfahren bietet die Möglichkeit, bereits vorhandene Renditeerwartungen konsistent an eigene Renditeeinschätzungen anzupassen. Im Folgenden wird der Ansatz nach Idzorek [2005] erläutert.

Das Verfahren bietet dem Investor die Möglichkeit seine Einschätzungen in Form von absoluten oder relativen Renditeangaben auszudrücken. Zu jeder seiner Einschätzungen gibt der Investor die eigene Konfidenz zwischen 0% und 100% als Maß für den Glauben an die eigene Aussage an. Die Renditeaussagen des Investors haben die folgende Form:

- (a) Absolute Aussage: „Die Assetklasse A wird eine Risikoprämie von  $p\%$  erwirtschaften.“ Der Investor tätigt seine Aussage mit einer Konfidenz von  $q\%$ .
- (b) Relative Aussage: „Die Assetklassen A und B werden  $x$  Basispunkte<sup>45</sup> mehr Rendite erwirtschaften als die Assetklasse C.“ Der Investor ist sich zu  $q\%$  sicher.

Auf diese Weise ist es möglich, eine oder mehrere Assetklassen innerhalb des Anlageuniversums mit einer eigenen Einschätzung zu versehen. Eine Bedingung kann nur bei einer relativen Formulierung (b) mehr als eine Assetklasse beinhalten.

Jede Schätzung  $j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) des Investors enthält eine Performanceangabe<sup>46</sup>  $Q_j$  zusammen mit einer dazugehörigen Konfidenz  $conf_j$  als Maß seiner Sicherheit bezüglich der eigenen Schätzung. Daraus ergeben sich die Vektoren

$$Q := \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_k \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Conf := \begin{pmatrix} conf_1 \\ \vdots \\ conf_k \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Dabei enthält  $Q$  entweder die absoluten oder relativen Angaben des Investors.

<sup>45</sup> Ein Basispunkt entspricht einem Hunderstel Prozentpunkt, d. h.  $1bp = 0,01\%$ .

<sup>46</sup> Diese entspricht bei einer absoluten Aussage der Risikoprämie für ein Asset oder bei einer relativen Aussage, einer Performanceangabe für zwei oder mehrere Assets.

Einen weiteren Parameter des Black-Litterman-Verfahrens stellt das  $\tau \in \mathbb{R}$  dar. Der Skalar  $\tau$  kann als ein Maß für das Vertrauen in die Kovarianzmatrix (und somit auch in das Marktportfolio) interpretiert werden. Dieser Parameter wird je nach Version des Black-Litterman-Verfahrens sehr unterschiedlich interpretiert und kalibriert.<sup>47</sup> Innerhalb der hier vorgestellten Version spielt das  $\tau$  für das Endergebnis allerdings keine Rolle, da es sich am Ende des Verfahrens herauskürzt. Daher kann  $\tau$  in dieser Version beliebig gewählt werden, z. B.  $\tau = 1$ .

Die Anpassung der Renditen unter Anwendung des Black-Litterman-Verfahrens erfolgt durch folgende drei Schritte:

- (1) Zu jeder der  $k$  Einschätzungen des Investors wird ein  $1 \times n$ -Positionsvektor  $P_j$  konstruiert, der passend zu den Assetklassen, die Gegenstand seiner Schätzung sind, an den entsprechenden Stellen Einträge enthält. Dadurch entsteht am Ende eine Matrix  $P$  mit  $k$  Zeilen und  $n$  Spalten. Zu unterscheiden ist dabei die Vorgehensweise bei (a) absoluten und (b) relativen Schätzungen.

- a) Die absolute Schätzung bezüglich des  $i$ -ten Assets generiert an der Vektorposition  $i$  einen Eintrag mit dem Wert 1. Alle restlichen Einträge sind gleich Null. Die  $j$ -te Zeile der Matrix  $P$  lautet demnach

$$P_j = \begin{cases} 1, & \text{an der Stelle } i \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.47)$$

- b) Die relativen Schätzungen generieren ebenfalls Einträge an den entsprechenden Vektorpositionen, jedoch müssen sich diese zu Null addieren. Da hierbei zwei oder mehr Assets involviert sind, teilt man die verschiedenen Assets in die Gruppen Outperformer und Underperformer ein. Anschließend werden die einzelnen Assets (bzw. Assetklassen) innerhalb dieser beiden Gruppen gewichtet. Die Summe der Assetgewichte innerhalb der Outperformer muss den Wert 1 ergeben, während die Summe der Underperformer den Wert  $(-1)$  ergeben soll. Für die Gewichtung der Assets innerhalb der Gruppen gibt es unterschiedliche Ansätze. Ein naheliegender Ansatz ist die Gleichgewichtung<sup>48</sup> der Assets, d. h., gibt es beispielsweise zwei Assets, die laut Einschätzung des Investors drei andere Assets outperformen, so

<sup>47</sup> Der Autor Jay Walters beschäftigt sich in seiner Arbeit „The Factor Tau in the Black-Litterman Model“ ausführlich mit der Problematik des Parameters  $\tau$  und seiner Verwendung in unterschiedlichen Versionen des Black-Litterman-Verfahrens. Siehe Walters [2013].

<sup>48</sup> Diese wird beispielsweise bei Satchell und Scowcroft [2000] vorgeschlagen.

erhalten die beiden Outperformer das Gewicht  $1/2$  und die drei Underperformer jeweils das Gewicht  $-1/3$ .

Idzorek [2005] schlägt vor, die Assets innerhalb der jeweiligen Gruppe gemäß ihrer Marktkapitalisierung zu gewichten. Dazu teilt er die Marktkapitalisierung des einzelnen Assets durch die Gesamtkapitalisierung der Gruppe und erhält auf diese Weise ebenfalls Einzelgewichte, deren Summe den Wert 1 (bzw.  $-1$  für die Underperformer) ergibt.

Bei beiden Vorgehensweisen werden die Assetgewichte am Ende an die entsprechenden Positionen des Vektors  $P_j$  gesetzt, alle restlichen Positionen sind gleich Null. Die Matrix  $P$  besteht aus den  $k$  Zeilenvektoren  $P_j$ .

- (2) Der zweite wesentliche Input ist die Diagonalmatrix  $\Omega$ . Auf ihrer Diagonalen befinden sich die Fehlervarianzen der Schätzungen, welche die Unsicherheit des Investors widerspiegeln. Je kleiner die Konfidenz des Investors ausfällt, desto größer wird die resultierende Fehlervarianz. So entspricht ein Konfidenzniveau von 100% einer Fehlervarianz von Null.<sup>49</sup> Die Diagonale von  $\Omega$  errechnet sich als Diagonale eines Matrixprodukts. Es gilt

$$\text{diag}(\Omega) = \text{diag}\left(\tau \cdot \frac{1 - \text{Conf}}{\text{Conf}} \cdot P^t C P\right). \quad (3.48)$$

- (3) Anschließend wird der neue Risikoprämienvektor durch Einsetzen von  $P$  und  $\Omega$  berechnet.

$$RP_{neu} = RP[w_M]^t + \tau C \cdot P(\tau P^t C P + \Omega)^{-1}(Q^t - P^t RP[w_M]^t). \quad (3.49)$$

Aus den neuen Risikoprämien lässt sich auch das dazugehörige (Markt-)Portfolio gewinnen.

$$w_M^{adj} = \frac{C^{-1} \cdot RP_{neu}}{|C^{-1} \cdot RP_{neu}|}. \quad (3.50)$$

Die Abbildung<sup>50</sup> 3.13 zeigt schematisch den Ablauf des Black-Litterman-Verfahrens und verdeutlicht die Wirkung der Schätzungen des Investors auf die Verteilung der Risikoprämien vorher (prior) und nachher (posterior).

<sup>49</sup> In diesem Fall wäre  $\Omega$  eine Nullmatrix.

<sup>50</sup> Vgl. Idzorek [2005], figure 1.

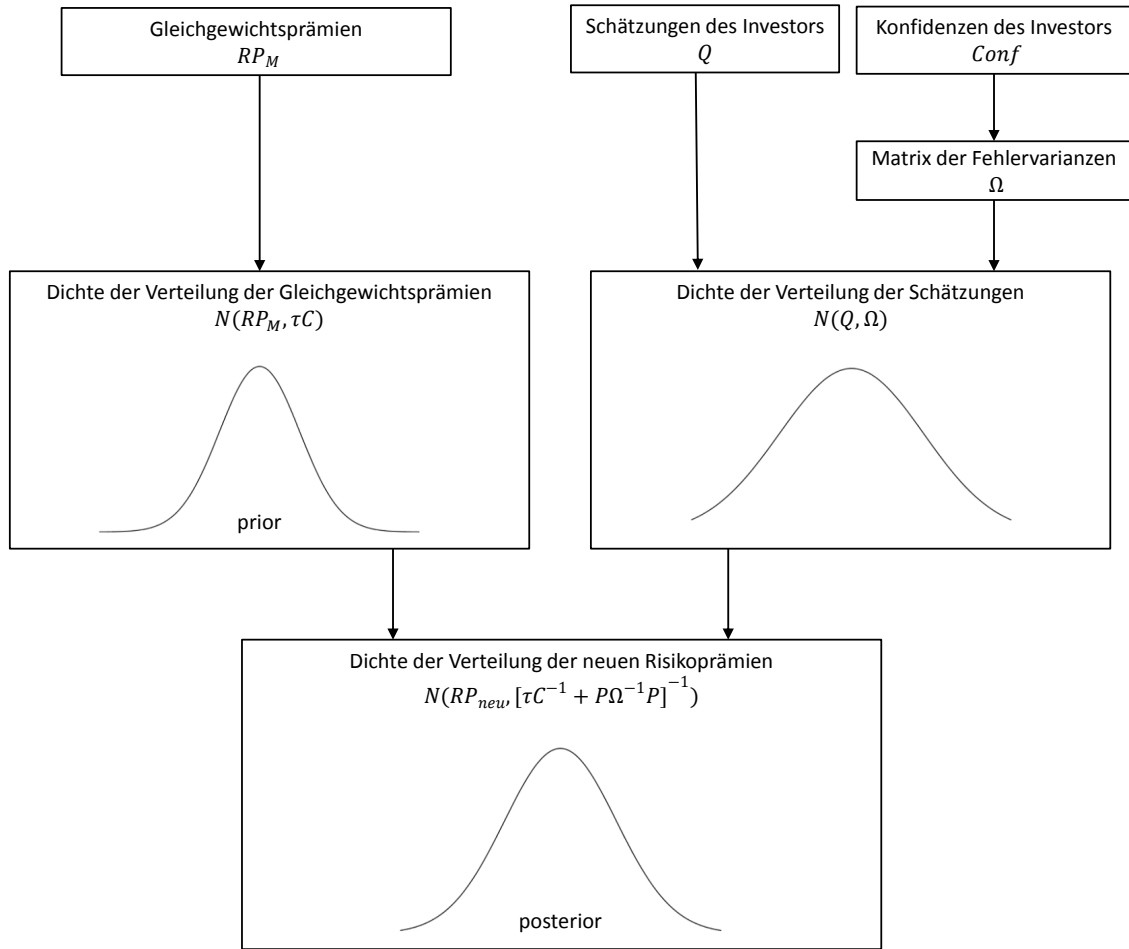


Abbildung 3.13: Schema des Black-Litterman-Verfahrens

Nach der Findung der neuen Renditen kann man die *implizite Konfidenz* der einzelnen Schätzungen berechnen. Sie gibt an, mit welcher Konfidenz die Schätzungen tatsächlich innerhalb des Modells integriert worden sind. Mitunter können die Abweichungen bedingt durch den Einfluss der Kovarianzen sehr deutlich ausfallen. Die implizite Konfidenz wird als Quotient aus der Differenz zwischen neuem Portfolio  $w_M^{adj}$  und altem Marktportfolio  $w_M$  im Zähler sowie der Differenz aus dem theoretischen 100%-Konfidenz-Portfolio  $w_{100\%}$  und dem alten Marktportfolio im Nenner berechnet, d. h.

$$imConf = \frac{w_M^{adj} - w_M}{w_{100\%} - w_M}. \quad (3.51)$$

Die auftretende Abweichung von der in das Verfahren eingehenden Konfidenz zu der am Ende ermittelten impliziten Konfidenz, ist zwar mathematisch begründbar, jedoch kei-

nesfalls intuitiv. Um diese Problematik zu umgehen, kann die vom Investor mitgegebene Konfidenz durch Umstellung der Gleichung (3.51) direkt als implizite Konfidenz verwendet werden. Auf diese Weise wird das neue Portfolio folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned}
 imConf &= \frac{w_M^{adj} - w_M}{w_{100\%} - w_M} \\
 \Leftrightarrow w_M^{adj} &= imConf \cdot (w_{100\%} - w_M) + w_M \\
 &= imConf \cdot (C^{-1}RP[w_{100\%}] - w_M) + w_M \\
 &= imConf \cdot (C^{-1} \underbrace{[RP[w_M]^t + \tau C \cdot P(\tau P^t C P)^{-1}(Q^t - P^t RP[w_M]^t)]}_{RP[w_{100\%}] \text{ entspricht } RP_{neu} \text{ nach Formel (3.49) mit } \Omega = 0} - w_M) + w_M \\
 &= imConf \cdot (C^{-1} \tau C \cdot P(\tau P^t C P)^{-1}(Q^t - P^t RP[w_M]^t)) + w_M \\
 &= imConf \cdot (P(P^t C P)^{-1}(Q^t - P^t RP[w_M]^t)) + w_M.
 \end{aligned}$$

Anschließend erhält man die neuen Risikoprämien mithilfe der Gleichung (3.44) durch

$$RP_{neu} = RP[w_M^{adj}] = \lambda \cdot C \cdot w_M^{adj}.$$

### Bemerkungen

- Die Möglichkeit der direkten Verwendung der impliziten Konfidenzen ist eine gute Anpassung des Idzorek-Ansatzes und ermöglicht den anschließenden Nachweis, dass die vorgegebene Selbsteinschätzung des Investors (in Form der Konfidenz) auch umgesetzt worden ist. Es sei darauf hingewiesen, dass diese Modifikation eine deutliche Veränderung der Ergebnisse gegenüber dem ursprünglichen Idzorek-Verfahren zur Folge haben kann. Das Auftreten einer massiven Abweichung bedeutet jedoch umgekehrt, dass in diesem Fall das Verfahren nach Idzorek die vorgegebene Konfidenz des Investors deutlich verfehlt.
- Die Wahl von  $\lambda$  kann genutzt werden, um die Risikoprämien zu skalieren. Auf diese Weise kann die Rendite einer ausgewählten Assetklasse stets auf einen bestimmten Wert festgelegt werden, um eine bessere Vergleichbarkeit mit den Risikoprämien der anderen Assetklassen zu ermöglichen.
- Bei zu großen oder zu vielen Anpassungen mit dem Black-Litterman-Verfahren verliert man durch die Auswirkungen der Kovarianzen den intuitiven Zugang zu den Er-

gebissen. Daher sollte gut überlegt werden, an welcher Stelle Anpassungen wirklich Sinn ergeben und Ergebnisse sollten keinesfalls unesehen weiterverwendet werden.

### 3.10 Integration von Nebenbedingungen in die Optimierung

Die Nebenbedingungen für die Optimierung können ganz unterschiedlicher Herkunft sein. Es kann sich um rechtliche Bestimmungen unterschiedlicher Länder sowie Vorgaben des Managements oder des Investors handeln. Die meisten Nebenbedingungen lassen sich ohne großen Aufwand in Tabellen darstellen, was die Einbindung in den Optimierer unter Verwendung von Tabellenkalkulationsprogrammen ermöglicht. Eine übersichtliche Form der Darstellung erleichtert auch die Kommunikation der Nebenbedingungen (z. B. gegenüber dem Management).

Die linearen Nebenbedingungen werden in die Varianten „Nebenbedingungen an einzelne Assets (bzw. Assetklassen)“ und „Nebenbedingungen an Gruppen von Assets (bzw. Assetklassen)“ unterteilt.

#### (a) Nebenbedingungen an einzelne Assets (oder Assetklassen)

Diese Restriktionen werden im Optimierungsprogramm als Ungleichung

$$lbx \geq x \geq ubx$$

in Vektorform dargestellt. Der Vektor  $lbx$  enthält für jedes Asset die Investitionsuntergrenze, d. h. die Vorgabe des Mindestanteils, den der Optimierer in dieses Asset investieren soll. Entsprechend enthält der Vektor  $ubx$  die Investitionsobergrenzen für die einzelnen Assets. Durch Festlegung dieser Grenzen lassen sich verschiedene Nebenbedingungen abbilden. Beispielsweise könnten folgende Nebenbedingungen formuliert worden sein (Tabelle 3.12):

- Die Automobil-Aktie wird auf ein Gewicht von 5% bezogen auf das Gesamtportfolio beschränkt.
- Beteiligung 1 stellt eine strategische Beteiligung von 2% dar, die gehalten werden soll. Auch wenn diese Position durch die Optimierung nicht verändert werden kann, wird ihr Risiko/Return-Verhalten in den Gesamtzusammenhang der Optimierung mit einbezogen.
- Beteiligung 2 stellt eine strategische Beteiligung dar, die zu mindestens 3% gehalten werden soll, nach oben jedoch unbeschränkt bleibt.

| Assetklasse     | lbx   | ubx  |
|-----------------|-------|------|
| Automobil-Aktie | 0%    | 5%   |
| Beteiligung 1   | 2%    | 2%   |
| Beteiligung 2   | 3%    | 100% |
| FX-Short        | -100% | 0%   |
| EUR-Cash        | 30%   | 100% |
| Derivate        | 0%    | 0%   |
| Sonstige        | 0%    | 100% |

Tabelle 3.12: Nebenbedingungen an einzelne Assets

- FX Short ist eine Shortposition in einer Fremdwährung. Das Thema Währungsabsicherung wird detailliert in Abschnitt 3.13 behandelt.
- Innerhalb der Euro-Cash-Position wird eine Minimalquote von 30% festgelegt, um eine ausreichende Liquidität in der Währung zu gewährleisten.
- Derivate werden in der Optimierung komplett ausgeschlossen. Zur Sperrung einer Assetklasse werden ihre Unter- und Obergrenze gleich Null gesetzt.
- Für alle anderen Assetklassen wird die sogenannte *Long-only-Bedingung* gefordert, d. h., es werden keine Shortpositionen erlaubt.

#### (b) Nebenbedingungen an Gruppen von Assets (oder Assetklassen)

Die Restriktionen, die mehr als eine Assetklasse betreffen (Gruppenbedingungen), werden als Modul  $A_{Neb}$  in der Nebenbedingungsmatrix  $A$  untergebracht und erfüllen die Ungleichung

$$lbA_{Neb} \geq A_{Neb} \cdot x \geq ubA_{Neb}.$$

Dabei enthält jede Zeile von  $A_{Neb}$  die Koeffizienten für eine Gruppennebenbedingung und die Vektoren  $lbA$  und  $ubA$  die dazugehörigen Unter- und Obergrenzen. Die folgende Abbildung 3.14 zeigt beispielhaft einige Gruppennebenbedingungen in tabellarischer Form.

Jede Tabellenzeile beinhaltet eine Nebenbedingung bestehend aus Unter- und Obergrenze ( $lbA/ubA$ ) sowie den Koeffizienten (hier alle 1). Mithilfe der Koeffizienten werden die in die Nebenbedingung involvierten Assetklassen ausgewählt. Es werden vier Assetklassen in den Währungsräumen Euro, Britische Pfund sowie US-Dollar betrachtet.

|                        | lbA | Aktien |     |     | Anleihen |     |     | Beteiligungen |     |     | Cash |     |     | ubA  |
|------------------------|-----|--------|-----|-----|----------|-----|-----|---------------|-----|-----|------|-----|-----|------|
|                        |     | EUR    | GBP | USD | EUR      | GBP | USD | EUR           | GBP | USD | EUR  | GBP | USD |      |
| Aktienquote            | 0%  | 1      | 1   | 1   |          |     |     |               |     |     |      |     |     | 5%   |
| WährungsNB Alle FX     | 0%  |        | 1   | 1   |          | 1   | 1   |               | 1   | 1   |      | 1   | 1   | 20%  |
| WährungsNB GBP         | 5%  |        | 1   |     |          | 1   |     |               | 1   |     |      | 1   |     | 13%  |
| WährungsNB USD         | 7%  |        |     | 1   |          |     | 1   |               |     | 1   |      |     | 1   | 15%  |
| LiquiditätsNB (global) | 40% |        |     |     |          |     |     |               |     |     | 1    | 1   | 1   | 100% |

$A_{Neb}$

Abbildung 3.14: Gruppennebenbedingungen in tabellarischer Form

- Für die Einstellung einer Aktienquote von maximal 5% werden alle Assetklassen „Aktien“ ausgewählt und die Grenzen entsprechend festgelegt.
- Die zweite Restriktion legt eine Obergrenze von 20% für das gesamte Fremdwährungsexposure fest. Daher erhalten alle Assetklassen, deren Währung **nicht** Euro ist, den Eintrag 1.
- Die Gruppennebenbedingung „WährungsNB GBP“ legt fest, dass mindestens 5% und maximal 13% des Gesamtportfolios in Britische Pfund investiert werden müssen. Ergänzend dazu werden in der Gruppenrestriktion für US-Dollar als Unter- und Obergrenze 7% bzw. 15% festgesetzt. Durch diese Wahl bleibt die Nebenbedingung an das Gesamtfremdwährungsexposure erfüllbar.
- Die globale Liquiditätsbedingung sichert über alle Cash-Positionen eine Liquiditätsquote von mindestens 40% und kann, wie unter (a) für die Euro-Cash-Position gezeigt, durch Liquiditätsbedingungen an einzelne Cash-Assetklassen ergänzt werden.

Es gibt Nebenbedingungen, die man sowohl über Gruppennebenbedingungen als auch durch Restriktionen an einzelne Assetklassen formulieren kann. Auf diese Weise kann die Sperrung der Derivate<sup>51</sup> entweder durch Setzen der entsprechenden Grenzen  $lbx = ubx = 0$  oder durch eine Gruppenbedingung unter Auswahl aller Derivate mit den Grenzen  $lbA = ubA = 0$  erreicht werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit empfiehlt es sich, Sperrungen nur auf eine Art vorzunehmen. Dies geschieht am einfachsten über die Gewichtsgrenzen  $lbx/ubx$ .

<sup>51</sup> Siehe (a) Nebenbedingungen an einzelne Assets.

Die Einträge der Matrix  $A_{Neb}$  sind nicht auf die Werte 0 oder 1 beschränkt, sodass sich durch Gruppenrestriktionen auch komplexere Nebenbedingungen abbilden lassen. Ein Beispiel dafür ist die Abbildung eines Fonds (Abschnitt 3.12), der aus verschiedenen Assets oder Assetklassen des Allokationsuniversums besteht. Dabei werden mithilfe von Koeffizienten Verhältnisse von Assets zueinander ausgedrückt. Ähnlich verhält es sich mit Absicherungen<sup>52</sup>, bei denen der Kauf bestimmter Assets an Shortpositionen für den Hedge gekoppelt werden.

### Implementierung der Nebenbedingungen in das Optimierungssetting

(a) Die Implementierung der Nebenbedingungen an Einzelassets erfolgt über die direkte Anpassung der Ober- und Untergrenzen für die Portfoliogewichte  $w_i$  für  $i = 1, \dots, n$ , welche die ersten  $n$  Positionen innerhalb des Zielvektors  $x$  belegen, d. h.

$$lbx = (lbx_{w_1}, \dots, lbx_{w_n}, \dots) \quad (3.52)$$

$$ubx = (ubx_{w_1}, \dots, ubx_{w_n}, \dots). \quad (3.53)$$

(b) Die Gruppennebenbedingungen werden als Matrixmodul  $A_{Neb}$  in die Nebenbedingungsmatrix  $A$  integriert. Die Spalten des ALMR-Blocks werden mit Nullen aufgefüllt, sodass die Matrix  $A$  die folgende Gestalt annimmt.

| <b>Matrix<br/>A</b> | <b><math>w_1 \dots w_n</math><br/>(<math>n</math> Sp)</b> | <b>ALMR-Block<br/>(<math>7 + J_M + J_K</math>)Sp</b> |
|---------------------|-----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| ALMR Markt          | 0 .. 0                                                    |                                                      |
| -    -              | $[SZ_{Markt}]$                                            |                                                      |
| ALMR Kredit         | 0 .. 0                                                    |                                                      |
| -    -              | $[SZ_{Kredit}]$                                           |                                                      |
| Mindestrendite      | $\mu_1 \dots \mu_n$                                       | 0 .. 0                                               |
| <b>GruppenNB</b>    | <b><math>[A_{Neb}]</math></b>                             | <b><math>[0 \dots 0]</math></b>                      |

Tabelle 3.13: Nebenbedingungsmatrix mit Modul „GruppenNB“

Anschließend müssen die Grenzen  $lbA$  und  $ubA$  um die Beschränkungen der Gruppenbedingungen  $lbA_{Neb} / ubA_{Neb}$  ergänzt werden. Diese werden in der korrekten Reihenfolge

<sup>52</sup> Siehe Abschnitt 3.13 über Devisentermingeschäfte.

hinten an die Grenzvektoren angefügt, d. h.

$$lbA_{neu} = (lbA_{alt}, lbA_{Neb})^t, \quad (3.54)$$

$$ubA_{neu} = (ubA_{alt}, ubA_{Neb})^t. \quad (3.55)$$

### 3.11 Einbindung von Transaktionskosten<sup>53</sup>

Zur mathematischen Berücksichtigung der Transaktionskosten innerhalb der Optimierung wird für jedes Instrument  $i$  der entsprechende Transaktionskostensatz  $TAK_i$  benötigt. Die einzelnen Kostensätze werden als Transaktionskostenvektor  $TAK := (TAK_1, \dots, TAK_n)$  zusammengefasst. Weiterhin seien

- $w = (w_1, \dots, w_n)$  mit  $w_i \in [0, 1]$ , Vektor der Portfoliogewichte,
- $w^{SAA} = (w_1^{SAA}, \dots, w_n^{SAA})$  mit  $w_i^{SAA} \in [0, 1]$ , Vektor der Portfoliogewichte des Ausgangsportfolios, das hier das SAA-Portfolio ist,
- $R = (R_1, \dots, R_n)$ , die Renditen und
- $\mu_i = E[R_i]$ , der jeweilige Erwartungswert der  $i$ -ten Einzelrendite  $R_i$ ,
- $\mu = E[R]$  und  $\sigma = \sigma(R)$ , Erwartungswert und Standardabweichung des Portfolios.

Zur Berechnung von Transaktionskosten wird das aktuelle Ausgangsportfolio für die Optimierung benötigt. Dies ist im Kontext dieser Arbeit das bereits vorhandene Portfolio der Strategischen-Asset-Allokation<sup>54</sup>, das im Folgenden als SAA-Portfolio mit den Portfoliogewichten  $w_i^{SAA}$  bezeichnet wird, d. h.

$$w^{SAA} = (w_1^{SAA}, \dots, w_n^{SAA}).$$

Dann berechnen sich die Transaktionskosten zu einem neuen Portfolio aus dem komponentenweisen Betrag der Abweichung der (neuen) Portfoliogewichte  $w$  zu den Portfoliogewichten der SAA:

$$\text{Relative TAK} := |w^{SAA} - w|^t \cdot TAK.$$

Der absolute Wert der Transaktionskosten (in Geldeinheiten) ergibt sich durch die Multiplikation mit dem Portfoliovolumen.

<sup>53</sup> Vgl. dazu Uryasev et al. [2002], Abschnitt 7.3.

<sup>54</sup> Sollte ein solches nicht existieren, können die TAK gegen ein „Null-Portfolio“ gemessen werden.

Die Einbindung der Transaktionskosten in die Optimierung erfolgt direkt innerhalb der Anforderung an die Mindestrendite.

$$\underbrace{\sum_{1 \leq i \leq n} \mu_i w_i}_{\text{Portfolio-Return}} - \underbrace{\sum_{1 \leq i \leq n} |w_i - w_i^{\text{SAA}}| \cdot \text{TAK}_i}_{\text{Relative TAK}} \geq \text{Mindestreturn.} \quad (3.56)$$

Auf diese Weise wird garantiert, dass ein vom Investor geforderter Mindestreturn nicht bereits von den Transaktionskosten aufgezehrt wird. Für die mathematische Optimierung stellt die Betragsfunktion allerdings ein Problem dar, da diese nicht einfach als lineare Nebenbedingung dargestellt werden kann. Dazu wird der folgende Trick angewandt:

Ziel ist es, die TAK-Nebenbedingung auf die Form  $lbA \leq Ax \leq ubA$  zu bringen. Dazu geht man davon aus, dass für jedes einzelne Portfoliogewicht  $w_i$  entweder ein Zukauf  $u_i^+ \geq 0$  oder ein Verkauf  $u_i^- \geq 0$  vorgenommen wird, d.h.

$$u_i^+ \geq 0 \quad \text{und} \quad u_i^- \geq 0. \quad (3.57)$$

An dieser Stelle wird die Variable  $u_i^-$  bewusst positiv gewählt, um später die Transaktionskosten korrekt berechnen zu können.

Es ergeben sich drei Fälle, in die man den Betrag  $|w_i - w_i^{\text{SAA}}|$  aufspalten kann:

- (a) Zukauf, d. h.  $w_i > w_i^{\text{SAA}}$ , sodass  $u_i^+ = w_i - w_i^{\text{SAA}} > 0$  und  $u_i^- = 0$ ,
- (b) Verkauf, d. h.  $w_i < w_i^{\text{SAA}}$ , sodass  $u_i^- = w_i^{\text{SAA}} - w_i > 0$  und  $u_i^+ = 0$ ,
- (c) Weder Zu- noch Verkauf, d. h.  $w_i = w_i^{\text{SAA}}$  und  $w_i - w_i^{\text{SAA}} = 0$ , sodass  $u_i^+ = u_i^- = 0$ .

Aus (a),(b) und (c) ergibt sich zusammenfassend, dass  $u_i^+ \in \{w_i - w_i^{\text{SAA}}, 0\}$  und  $u_i^- \in \{w_i^{\text{SAA}} - w_i, 0\}$  sind, d. h., dass  $u_i^+$  und  $u_i^-$  jeweils nur diese beiden Werte annehmen. Dann kann man die Betragsfunktion als Summe von Zukäufen und Verkäufen darstellen:

$$|w_i - w_i^{\text{SAA}}| = u_i^+ + u_i^-, \quad (3.58)$$

wobei  $u_i^+ := \max(w_i - w_i^{\text{SAA}}, 0)$  und  $u_i^- := \max(w_i^{\text{SAA}} - w_i, 0)$  sind.

Um sich der Betragsstriche zu entledigen, ersetzt man  $u_i^-$  durch  $-u_i^-$ , sodass die folgende Gleichung Gültigkeit erlangt.

$$w_i - w_i^{\text{SAA}} = u_i^+ - u_i^-. \quad (3.59)$$

**Dann setzt sich die Nebenbedingung für die Transaktionskosten aus der Bedingung (3.57) und der Gleichung (3.59) zusammen.**

Durch das Ersetzen der Maximumbildung in den Definitionen von  $u_i^+$  und  $u_i^-$  durch die Gleichungen (3.59) und (3.57) sind die beiden Variablen zwar nicht mehr eindeutig bestimmt, jedoch bleibt die für die Optimierung entscheidende Differenz  $u_i^+ - u_i^-$  in Gleichung (3.59) identisch. Diese in der Optimierung typische Vorgehensweise wird z. B. bei Jarre und Stoer [2003] detailliert erläutert<sup>55</sup>.

### Implementierung der TAK-Bedingungen in das Optimierungssetting

Bedingung (3.57) kann direkt übernommen werden. Die Variablen  $u_i^+, u_i^-$  dienen als Hilfsvariablen und werden dem Zielvektor  $x$  hinzugefügt. Dadurch erweitert sich dieser zu

$$x = (w_1, \dots, w_n, x_{\text{CVaR}^M}, x_{\text{CVaR}^K}, x_{\text{VaR}^M}, x_{\text{VaR}^K}, z_1^M, \dots, z_{J_M}^M, z_1^K, \dots, z_{J_K}^K, y_1, y_2, x_{\text{ALMR}}, u^+, u^-)^t.$$

Die Grenzen  $lbx$  und  $ubx$  werden um die Bedingungen  $0 \leq u^\pm \leq \infty$  ergänzt, d. h.

$$lbx_{u^+} = lbx_{u^-} = 0 \quad \text{und} \quad ubx_{u^+} = ubx_{u^-} = \infty, \quad (3.60)$$

und am Ende an die Grenzvektoren  $lbx/ubx$  angefügt:

$$lbx = (\dots, lbx_{u^+}, lbx_{u^-})^t \quad \text{und} \quad ubx = (\dots, ubx_{u^+}, ubx_{u^-})^t.$$

Die Gleichung (3.59) wird als

$$w_i - w_i^{\text{SAA}} = u_i^+ - u_i^- \Leftrightarrow w_i^{\text{SAA}} = u_i^+ - u_i^- - w_i$$

umformuliert, um zur Darstellung

$$w_i^{\text{SAA}} \leq u_i^+ - u_i^- - w_i \leq w_i^{\text{SAA}} \quad (3.61)$$

für das Optimierungsprogramm zu gelangen. Aus dieser Gleichung ergibt sich für die Nebenbedingungsmatrix  $A$  ein Block in Form einer Einheitsmatrix  $E$  für die Portfoliogewichtsspalten sowie jeweils ein Spaltenvektor der Länge  $n$  mit den Einträgen  $-1$  in der Spalte  $u^-$  und den Einträgen  $1$  in der Spalte  $u^+$ .

<sup>55</sup>Vgl. Jarre und Stoer [2003], Seite 14, unten.

| <b>Matrix<br/>A</b> | $w_1 \dots w_n$<br>(n Sp) | ALMR-Block<br>(7 + $J_M$ + $J_K$ )Sp | $u^-$<br>(1Sp) | $u^+$<br>(1Sp) |
|---------------------|---------------------------|--------------------------------------|----------------|----------------|
| ALMR Markt          | 0 .. 0                    |                                      |                |                |
| -    -              | $[SZ_{Markt}]$            |                                      |                |                |
| ALMR Kredit         | 0 .. 0                    |                                      |                |                |
| -    -              | $[SZ_{Kredit}]$           |                                      |                |                |
| Mindestrendite      | $\mu_1 \dots \mu_n$       | 0 .. 0                               |                |                |
| GruppenNB           | $[A_{Neb}]$               | [0 .. 0]                             |                |                |
| <b>TAK</b> (n Z)    | $[E]$                     | [0 .. 0]                             | <b>(-1)</b>    | <b>(1)</b>     |

Tabelle 3.14: Nebenbedingungsmatrix mit TAK-Modul

Abschließend werden die Grenzen für die Matrix  $A$  so gesetzt, dass sie der Gleichung (3.61) gerecht werden, d. h.

$$lbA_{TAK} = ubA_{TAK} = w^{SAA}. \quad (3.62)$$

### 3.12 Abbildung eines Fonds innerhalb des Assetuniversums

Möchte der Investor einige Assetklassen ausschließlich in einem vorgegebenen Verhältnis kaufen, so entspricht dies der Bildung eines (Investment-)Fonds. Häufig ist das zur Optimierung vorgegebene Assetuniversum nicht uneingeschränkt erweiterbar, sodass der Investor sogar einen real verfügbaren Fonds innerhalb seines Universums nachbilden möchte. Ein möglicher Grund dafür kann sein, dass gewisse Konzernstandards eine Erweiterung nicht ermöglichen, z. B. durch feste Vereinbarungen mit dem Assetmanager oder einen zu hohen Aufwand bei der Erweiterung der Szenarien. Angenommen es steht ein Allokationsuniversum von fünf Assetklassen zur Verfügung und der Investor möchte die Assetklassen 2, 3 und 5 in einem Fonds mit den folgenden Verhältnissen integrieren.

| <b>Assetklasse</b> | <b>Fondszusammensetzung</b> |
|--------------------|-----------------------------|
| 1                  | 0%                          |
| 2                  | 30%                         |
| 3                  | 20%                         |
| 4                  | 0%                          |
| 5                  | 50%                         |
| $\Sigma$           | <b>100%</b>                 |

Tabelle 3.15: Fondszusammenstellung

Die einzelnen Verhältnisse der Assetklassen zueinander müssen nun innerhalb des Optimierers fixiert werden, damit der Optimierungsalgorithmus beim Kauf einer der drei im Fonds enthaltenen Assetklassen in die anderen beiden Assetklassen im entsprechenden Verhältnis mitinvestiert. Die Fixierung der Verhältnisse erfolgt paarweise für die Portfoliogewichte der drei Assetklassen. Zur Vereinfachung der Darstellung werden alle Verhältnisse in Bezug auf das erste im Fonds verwendete Gewicht  $w_2$  dargestellt:

$$(I) \quad w_2 = \frac{0,3}{0,2} w_3 \quad (3.63)$$

$$(II) \quad w_2 = \frac{0,3}{0,5} w_5. \quad (3.64)$$

Dadurch ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, das die Gewichtsverhältnisse zueinander bestimmt. Um die Investmentgrenzen für die Fondszusammenstellung anzugeben, wird die Gleichung

$$(III) \quad lb_F \leq w_2 + w_3 + w_5 \leq ub_F \quad (3.65)$$

hinzugefügt, wobei  $lb_F$  und  $ub_F$  die Ober- und Untergrenze für das Investment in den Fonds darstellen.

Die drei Gleichungen (I), (II) und (III) können als mehrzeiliges Modul in die Nebenbedingungsmatrix eingebaut werden und bilden die einfachste Form der Abbildung eines Fonds, die als **Fonds Version 1** bezeichnet wird.

### Implementierung der Version 1 in das Optimierungssetting

Die drei Gleichungen (I), (II) und (III) können als mehrzeiliges Modul an die Nebenbedingungsmatrix  $A$  angefügt werden, wozu (I) und (II) als

$$(I) \quad 0 \leq \frac{0,3}{0,2} w_3 - w_2 \leq 0 \quad \text{und} \quad (II) \quad 0 \leq \frac{0,3}{0,5} w_5 - w_2 \leq 0$$

notiert werden.

Pro Ungleichung wird eine Zeile eingefügt, deren Einträge lediglich in den  $n$  Spalten für die Gewichte  $w_1, \dots, w_n$  Koeffizienten aufweist. Das sich daraus ergebende Modul wird mit  $A_{FondsV1}$  bezeichnet. Die Anzahl der Zeilen des Moduls entspricht der Anzahl der im Fonds enthaltenen Assetklassen und wird in der Tabelle mit  $|F|$  notiert.

| <b>Matrix<br/>A</b>               | $w_1 \dots w_n$<br>( $n$ Sp) | ALMR-Block<br>( $7 + J_M + J_K$ )Sp | $u^-$<br>(1Sp) | $u^+$<br>(1Sp) |
|-----------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|----------------|----------------|
| ALMR Markt                        | 0 .. 0                       |                                     | 0              | 0              |
| -    -                            | $[SZ_{Markt}]$               |                                     | (0)            | (0)            |
| ALMR Kredit                       | 0 .. 0                       |                                     | 0              | 0              |
| -    -                            | $[SZ_{Kredit}]$              |                                     | (0)            | (0)            |
| Mindestrendite                    | $\mu_1 \dots \mu_n$          | 0 .. 0                              | 0              | 0              |
| GruppenNB                         | $[A_{Neb}]$                  | [0 .. 0]                            | (0)            | (0)            |
| TAK ( $n$ Z)                      | [ $E$ ]                      | [0 .. 0]                            | (-1)           | (1)            |
| <b>Fonds Version 1</b> ( $ F $ Z) | $[A_{FondsV1}]$              | [0 .. 0]                            | (0)            | (0)            |

Tabelle 3.16: Nebenbedingungsmatrix A inkl. Fonds Version 1

Betrachtet man nur die Spalten der Gewichte, so ergibt sich für obiges Beispiel mit fünf Gewichten  $w_1$  bis  $w_5$  folgende Darstellung:

| <b>A-Fonds V1</b> | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$             | $w_4$ | $w_5$             |
|-------------------|-------|-------|-------------------|-------|-------------------|
| (I)               | 0     | -1    | $\frac{0,2}{0,3}$ | 0     | 0                 |
| (II)              | 0     | -1    | 0                 | 0     | $\frac{0,2}{0,5}$ |
| (III)             | 0     | 1     | 1                 | 0     | 1                 |

Tabelle 3.17: Beispielmodul Fonds Version 1

Mit diesem Prinzip ist jedes Verhältnis von Assetklassen zueinander abbildbar. Großer Nachteil dieser einfachen Darstellung ist die Tatsache, dass in diejenigen Assetklassen, die in den Fonds einbezogen werden, nicht außerhalb des Fonds investiert werden kann. Dies bedeutet, sollte der Optimierer in die Assetklasse Nr. 2 investieren wollen, so ist dies ausschließlich im Rahmen einer gleichzeitigen Investition in die Assetklassen Nr. 3 und Nr. 5 möglich. Sollte sich eine der Assetklassen Nr. 3 und Nr. 5 als besonders schlecht erweisen, weil sie beispielsweise viel Risiko beinhaltet oder hohe Transaktionskosten verursacht, so wird der Optimierer kaum oder gar nicht in den Fonds investieren und folglich auch nicht einzeln in die „gute“ Assetklasse Nr. 2.

Der große Vorteil dieser Version ist ihre einfache Implementierung, da lediglich entsprechende Zeilen an die Nebenbedingungsmatrix  $A$  angefügt werden müssen. Leider hat sie für die Praxis die oben genannten Nachteile, daher wird eine Erweiterung der Version 1 vorgeschlagen.

### Fonds Version 2

Durch eine Erweiterung des obigen Konzepts wird die Problematik der ersten Version auf Kosten einer komplexeren Version behoben. Als Ziele der Version 2

- soll es möglich sein auch außerhalb des Fonds in die in ihm enthaltenen Assetklassen zu investieren,
- und diese Option soll für jede Assetklasse separat wählbar sein.

Zur Lösung dieses Problems wird das Hilfgewicht  $w_F$  in den Zielvektor  $x$  eingefügt, das die Funktion einer (Fonds-)Assetklasse übernimmt. Mit anderen Worten kann die Fondszusammenstellung auf dieses Hilfgewicht abgebildet werden. In Bezug auf den Beispielfonds aus Version 1 können die Verhältnisgleichungen nun mithilfe von  $w_F$  formuliert werden:

$$0,2w_F = w_2, \quad 0,3w_F = w_3 \quad \text{und} \quad 0,5w_F = w_5. \quad (3.66)$$

Die Gleichungen geben an, welche Anteile der jeweiligen Assetklassengewichte im Fonds enthalten sind. So besteht der Fonds zur Hälfte aus Assetklasse Nr. 5, zu  $\frac{1}{5}$  aus Assetklasse Nr. 2 und zu 30% aus Assetklasse Nr. 3. Durch die Hilfsvariable  $w_F$  ist eine weitere Gleichung hinzugekommen. Dieses Prinzip der Fondsabbildung lässt sich gut verallgemeinern.

### Allgemeine Darstellung

Sei ein Fonds durch die einzelnen Fondsanteile  $f_i$ ,  $i \in I_F \subseteq \{1, \dots, n\}$ , verschiedener Assetklassen aus dem vorgegebenen Allokationsuniversum gegeben. Der Fonds besitzt die Eigenschaft, dass sich die Fondsanteile zu 100 % kumulieren, d. h.

$$\sum_{i \in I_F} f_i = 1.$$

Dann generiert jeder Fondsanteil  $f_i$  eine Verhältnisgleichung zu dem Fondsgewicht  $w_F$ , die

$$f_i \cdot w_F = w_i \quad (i \in I_F) \quad (3.67)$$

lautet. Diese Verallgemeinerung von (3.66) bietet die Möglichkeit, dem Optimierungsalgorithmus zu erlauben, in eine oder mehrere Assetklassen komplett unabhängig vom Fonds zu investieren. Dazu ersetzt man das „=“ durch ein „≤“ in der Gleichung (3.67). Dann werden alle Assetklassen  $i \in I_F$ , in die ausschließlich innerhalb des Fonds investiert werden darf, mit der Gleichung (3.67) und alle Assetklassen  $j \in I_F$ , in die auch außerhalb des

Fonds investiert werden darf, mit der Ungleichung

$$f_j \cdot w_F \leq w_j \quad j \in I_F \quad (3.68)$$

dargestellt.<sup>56</sup>

Verallgemeinert man anschließend noch die Gleichung (III) aus dem vorherigen Abschnitt durch

$$(III') \quad lb_F \leq \sum_{i \in I_F} f_i \leq ub_F, \quad (3.69)$$

so erhält man ein allgemeines lineares Gleichungssystem für die Abbildung eines Fonds analog zur Version 1.

Die Gleichung (III') kann auch durch die Forderung

$$lb \leq w_F \leq ub \quad (3.70)$$

ersetzt werden. Dies spart in der Implementierung eine nicht zwingend notwendige Matrixzeile innerhalb der Nebenbedingungsmatrix  $A$ .

### Implementierung der Version 2 in das Optimierungssetting

In der Tabelle 3.18 wird das bereits bekannte Fondsbeispiel in der Version 2 dargestellt. Dazu werden das Modul sowie die Nebenbedingungsmatrix  $A$  um die Spalte  $w_F$  ergänzt. Der Zielvektor  $x$  muss ebenfalls angepasst werden. In den ersten drei Zeilen befinden sich die Gleichungen nach (3.67), in der letzten Zeile ist beispielhaft Ungleichung (III') angefügt, die in unserem Setting jedoch durch die Bedingung (3.70) ersetzt wird.

| <b>A-Fonds V2</b> | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_F$ |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                   | 0     | -1    | 0     | 0     | 0     | 0,2   |
|                   | 0     | 0     | -1    | 0     | 0     | 0,3   |
|                   | 0     | 0     | 0     | 0     | -1    | 0,5   |
| (III')            | 0     | 1     | 1     | 0     | 1     | 0     |

Tabelle 3.18: Beispielmodul Fonds Version 2

<sup>56</sup> Dies ist einer der wesentlichen Kritikpunkte an der Version 1, da bei dieser das Öffnen von Assetklassen nicht ohne Weiteres möglich ist.

Verallgemeinert man dieses Prinzip, so muss für jede im Fonds enthaltene Assetklasse eine Zeile, in die Matrix eingefügt werden. Die Anzahl der Zeilen entspricht der Anzahl an Elementen der Menge  $I_F$ , d. h. der Anzahl an Assetklassen im Fonds.<sup>57</sup> Man schreibt für die Anzahl mathematisch kurz  $|I_F|$ .

| <b>Matrix<br/>A</b>                 | $w_1 \dots w_n$<br>( $n$ Sp) | $w_F$<br>(1Sp) | ALMR-Block<br>( $7 + J_M + J_K$ )Sp | $u^-$<br>(1Sp) | $u^+$<br>(1Sp) |
|-------------------------------------|------------------------------|----------------|-------------------------------------|----------------|----------------|
| ALMR Markt                          | $0 \dots 0$                  | 0              |                                     | 0              | 0              |
| -    -                              | $[SZ_{Markt}]$               | (0)            |                                     | (0)            | (0)            |
| ALMR Kredit                         | $0 \dots 0$                  | 0              |                                     | 0              | 0              |
| -    -                              | $[SZ_{Kredit}]$              | (0)            |                                     | (0)            | (0)            |
| Mindestrendite                      | $\mu_1 \dots \mu_n$          | 0              | $0 \dots 0$                         | 0              | 0              |
| GruppenNB                           | $[A_{Neb}]$                  | (0)            | $[0 \dots 0]$                       | (0)            | (0)            |
| TAK ( $n$ Z)                        | $[E]$                        | (0)            | $[0 \dots 0]$                       | (-1)           | (1)            |
| <b>Fonds Version 2</b> ( $ I_F $ Z) | $[A_{FondsV2}]$              |                | $[0 \dots 0]$                       | <b>(0)</b>     | <b>(0)</b>     |

Tabelle 3.19: Nebenbedingungsmatrix A inkl. Fonds Version 2

Da dem Zielvektor mit dem Fondsgewicht  $w_F$  eine neue Komponente zugefügt wurde, müssen auch eine Ober- und Untergrenze für  $w_F$  festgelegt werden. Diese entsprechen bei Verwendung der Forderung (3.70) genau der Investitionsunter- und obergrenze, die der Investor in den Fonds allokalieren möchte, d. h.

$$lb_{x_{w_F}} = \text{Mindestinvestition in den Fonds, } ub_{x_{w_F}} = \text{Investitionsobergrenze.}^{58}$$

Die Wahl der Grenzen  $lbA$  und  $ubA$  richtet sich danach, ob gemäß Gleichung (3.68) für die jeweilige Assetklasse ein Investment außerhalb des Fonds erlaubt werden soll oder gemäß Ungleichung (3.67) ausschließlich im Rahmen des Fonds in diese Assetklasse investiert werden darf.

Zur Verwendung von Gleichung (3.67) für eine Assetklasse  $i \in I_F$  wird

$$lbA_F := 0 \text{ und } ubA_F := 0 \quad (3.71)$$

<sup>57</sup> Dies gilt, sofern auf die Verwendung der Gleichung (III') verzichtet wird. Ansonsten beträgt die Anzahl  $|I_F| + 1$ .

<sup>58</sup> Für den Fall, dass bei der Implementierung jedoch die Gleichung (III') verwendet wird, werden die Grenzen auf  $lb_{x_{w_F}} = -\infty$  und  $ub_{x_{w_F}} = \infty$  gesetzt.

und für die Verwendung von Ungleichung (3.68) für eine Assetklasse  $i \in I_F$

$$lbA_F := -\infty \text{ und } ubA_F := 0 \quad (3.72)$$

gesetzt, da (3.68) umgeformt  $-\infty \leq f_i \cdot w_F - w_i \leq 0$  entspricht.

### 3.13 Abbildung von Devisentermingeschäften

Im Rahmen von Investmententscheidungen können Investitionen in Fremdwährungen interessante Möglichkeiten bieten. Häufig weisen sie eine geringe Korrelation zu den inländischen Wertpapieren auf oder bieten in Zeiten geringer Returnerwartungen im eigenen Währungsraum bessere Renditechancen. Gleichzeitig wird allerdings auch ein weiteres Risiko in das Portfolio mit aufgenommen: das Währungsrisiko.<sup>59</sup> Ist dem Investor das Währungsrisiko, welches in seinem Portfolio durch die Entwicklung eines Wechselkurses<sup>60</sup> entstehen könnte, zu hoch, so kann er diesem Risiko durch *Devisentermingeschäfte* entgegenwirken.

Devisentermingeschäfte (DTGs) dienen der Absicherung von Fremdwährungsexposure. Sie zielen auf den Kauf oder Verkauf von Kapital in Fremdwährung ab und sind durch das zeitliche Auseinanderfallen von Verpflichtungs- und Erfüllungsgeschäft charakterisiert.<sup>61</sup> Sie werden an sogenannten Devisenmärkten<sup>62</sup> (Foreign-Exchange-Markets) gehandelt. In Anlehnung an die Literatur von Albrecht und Maurer<sup>63</sup> wird der Mechanismus der Devisentermingeschäfte vorgestellt.

Möchte ein Investor aus dem Euroraum ein Wertpapier außerhalb des europäischen Währungsraums kaufen, so tauscht er entsprechend des Kaufbetrags des Finanztitels, die eigene Währung in die ausländische Währung um. Fremdwährungen werden im Folgenden als *FX* gekennzeichnet. Verkauft er den erworbenen Fremdwährungstitel in der darauffolgenden Periode, wird der aus dem Verkauf resultierende Betrag zurück in Euro getauscht. Dadurch besteht die Rendite des  $i$ -ten Finanztitels aus zwei Komponenten, zum einen der Rendite

<sup>59</sup> Weitere damit verbundene Risiken können beispielsweise aus Politik, Kultur oder den Finanzmarkttransaktionen im Ausland resultieren.

<sup>60</sup> Ein Wechselkurs wird auch als *Devisenkassakurs* bezeichnet.

<sup>61</sup> Vgl. Albrecht und Maurer [2008], Abschnitt 13.3.3.1, 2. Satz.

<sup>62</sup> Devisenmärkte werden weiter in Devisenterminmärkte (langfristige Geschäfte  $> 3$  Tage) und Devisenkassamärkte (kurzfristige Geschäfte bis 2 Tage) unterteilt.

<sup>63</sup> Albrecht und Maurer [2008], Kapitel 13.3.2 ff.

des Titels in ausländischer Währung ( $R_i^{FX}$ ) und zum anderen aus der Währungsrendite, die sich durch die Wechselkurse (WK) ergibt.

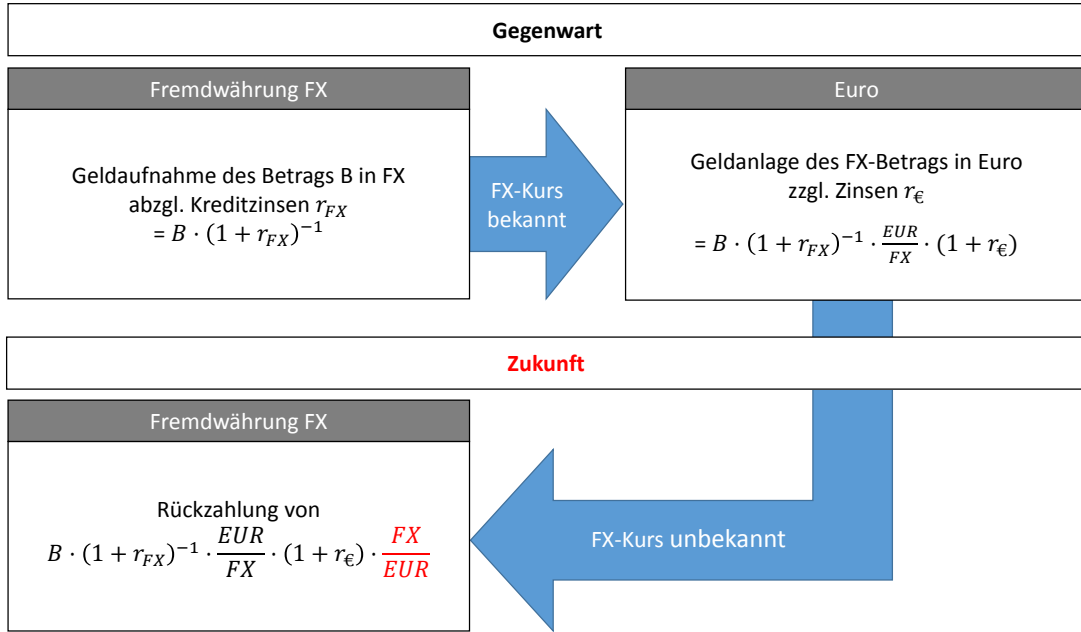


Abbildung 3.15: Darstellung eines Devisenforwards

Die Rendite in Euro für die  $i$ -te Assetklasse lautet dann

$$R_i^{EUR} = \frac{KP_{i,t+1}^{FX} WK_{i,t+1} - KP_{i,t}^{FX} WK_{i,t}}{KP_{i,t}^{FX} WK_{i,t}}, \quad (3.73)$$

wobei  $KP_{i,t}^{FX}$  der Kaufpreis des Finanztitels in Fremdwährung zum Zeitpunkt  $t$  und  $WK_{i,t}$  der entsprechende Währungskurs Euro/FX ist, der zu dem Währungsraum des Finanztitels gehört.

Durch entsprechendes Umformen lässt sich  $R_i^{EUR}$  als

$$R_i^{EUR} = R_i^{FX} + R_i^{WK} + R_i^{FX} \cdot R_i^{WK} \approx R_i^{FX} + R_i^{WK} \quad (3.74)$$

schreiben, wobei

$$R_i^{EUR} = \frac{KP_{i,t+1}^{FX} - KP_{i,t}^{FX}}{KP_{i,t}^{FX}} \quad \text{und} \quad R_i^{WK} = \frac{WK_{i,t+1} - WK_{i,t}}{WK_{i,t}}$$

die Assetklassenrendite in Fremdwährung und die Wechselkursrendite in Euro sind.

Durch Eingehen eines Devisentermingeschäfts kann sich der Investor gegen den unsicheren Verlauf des Wechselkurses absichern, d. h., die Wechselkursrendite innerhalb seines Portfolios beeinflussen. Der Investor bildet eine Shortposition in der Fremdwährung, d. h., er verkauft zu einem festen Termin einen von seinem Fremdwährungsinvestment abhängigen Fremdwährungsbetrag und erhält im Gegenzug einen festen Eurobetrag dafür. Auf diese Weise muss er sich keine weiteren Gedanken um den möglichen zukünftigen Wechselkurs  $WK_{i,t+1}$  machen. Im Gegenzug trägt der Investor die Kosten  $k_i$  für das Devisentermingeschäft, die seine Rendite negativ beeinflussen. Darüber hinaus entsteht für den Investor eine terminliche Abhängigkeit durch das Eingehen des Termingeschäfts, denn zum Zeitpunkt der Erfüllung wird der Investor unter Umständen eine erneute Entscheidung bezüglich des gekauften Wertpapiers und seiner Absicherung treffen: Sollte sich der Wertpapierkurs nicht nach seiner Vorstellung entwickelt haben, könnte er auf den Verkauf des Titels verzichten und ggf. erneut ein Absicherungsgeschäft eingehen.

Die Rendite des FX-Investments lautet in Abhängigkeit der Absicherungsquote<sup>64</sup>  $s_i \in [0, 1]$

$$R_i^{EUR}(s_i) = R_i^{FX} + R_i^{WK} + R_i^{FX} \cdot R_i^{WK} + s_i(k_i - R_i^{WK}), \quad (3.75)$$

was approximativ  $\approx R_i^{FX} + (1 - s_i)R_i^{WK} + s_i k_i$  entspricht. Die Kosten des Devisenforwards (Forwardprämie)  $k_i$  können mit dem Zinsparitätentheorem<sup>65</sup> berechnet werden.

$$k_i = \frac{1 + r_{EUR}}{1 + r_{FX}} - 1. \quad (3.76)$$

Hierbei sind  $r_{EUR}$  und  $r_{FX}$  die der Laufzeit des Forwards entsprechenden risikolosen Zinssätze im jeweiligen Währungsraum.

Für eine vollständige Absicherungsrate von 100% entspricht die Rendite

$$R_i^{EUR}(s_i) = R_i^{FX} + R_i^{FX} \cdot R_i^{WK} + k_i \approx R_i^{FX} + s_i k_i, \quad (3.77)$$

sodass noch eine Restunsicherheit bzgl. des Währungsrisikos durch den Mischterm  $R_i^{FX} \cdot R_i^{WK}$  verbleibt, die nach Albrecht/Maurer in der Regel ausreichend gering ausfällt, um sie zu vernachlässigen.<sup>66</sup>

<sup>64</sup> Die Absicherungsquote wird auch *hedge ratio* genannt und liegt zwischen 0% und 100%.

<sup>65</sup> Siehe dazu Albrecht und Maurer [2008], Kapitel 10.3.5 ff.

<sup>66</sup> Vgl. Albrecht und Maurer [2008], Seite 787, vorletzter Abschnitt, letzter Satz.

Die Autoren vergleichen die Risiko-Rendite-Profile zwischen vollständig ungesicherten ( $s_i = 0$ ) und gesicherten ( $s_i = 1$ ) FX-Investments.

|                   | $s_i = 0$                                                  | $s_i = 1$              |
|-------------------|------------------------------------------------------------|------------------------|
| Rendite           | $R_i^{FX} + R_i^{WK}$                                      | $R_i^{FX} + k_i$       |
| Erwartete Rendite | $E[R_i^{FX}] + E[R_i^{WK}]$                                | $E[R_i^{FX}] + E[k_i]$ |
| Varianz           | $Var[R_i^{FX}] + Var[R_i^{WK}] + 2Cov[R_i^{FX}, R_i^{WK}]$ | $Var[R_i^{FX}]$        |

Tabelle 3.20: Risiko-Rendite-Profile von FX-Investments

Die Annahme, dass die Forwardprämie  $k_i$  einen annähernd unverzerrten Schätzer für die erwartete Wechselkursrendite darstellt, also  $k_i \approx E[R_i^{WK}]$ ,<sup>67</sup> bildet die Grundlage der theoretischen Argumentation für den Einsatz dieser Instrumente und führt bei Abwesenheit einer taktischen Währungseinschätzung in der Regel zu einem systematisch besseren Rendite-Risiko-Profil gesicherter Investitionen gegenüber ungesicherter.<sup>68</sup>

An dieser Stelle wird sich auf die Darstellung der Absicherung im Kontext der Portfolio-Optimierung beschränkt. Dazu werden zwei gängige Varianten vorgestellt. Zum einen die einfache Absicherung durch eine vom Investor festgelegte Absicherungsquote  $s_i$  (*Naives Währungs-Hedging*), anhand derer die Portfoliogewichte optimiert werden, sowie die Variante des *optimalen Währungs-Hedgings*, bei der im Rahmen der Optimierung gleichzeitig auch die optimale Absicherungsquote  $s_i$  ermittelt wird.<sup>69</sup>

Ganz allgemein wird der Devisenforward durch eine Short- und eine Longposition abgebildet. Dabei ist das zu sichernde Fremdwährungsvolumen die Shortposition und die Longposition ist derselbe Betrag als „Cash“ in der eigenen Währung (z.B. Euro-Cash). Seien also

- $v_k^{FX} \leq 0$ , die Shortposition des zu sichernden Fremdwährungsvolumens<sup>70</sup> der  $k$ -ten Fremdwährung und
- $v_k^{EUR} \geq 0$ , die Gegenposition in Euro-Cash,

<sup>67</sup> Vgl. Albrecht und Maurer [2008], Seite 789, 1. Abschnitt, Satz 2.

<sup>68</sup> Zur Vertiefung der Pro/Kontra-Diskussion, siehe Albrecht und Maurer [2008], Seite 789.

<sup>69</sup> Vgl. Albrecht und Maurer [2008], Seite 788 unten sowie Seite 789 oben.

<sup>70</sup> Die Abkürzung FX steht für Foreign Exchange (Devisen).

so sollen sich die beiden Beträge gegenseitig aufheben<sup>71</sup>, d. h., es wird gefordert, dass

$$v_k^{FX} + v_k^{EUR} = 0. \quad (3.78)$$

Das Fremdwährungsvolumen  $v_k^{FX}$  setzt sich in der Regel aus mehreren Assetklassen-Positionen zusammen. Wäre die  $k$ -te Fremdwährung beispielsweise US-Dollar, so könnte das vorgegebene Assetuniversum die Assetklassen Aktien, Staatsanleihen, Immobilien und Covered Bonds in US-Dollar enthalten. Es soll dem Investor möglich sein zu jeder Fremdwährung eine separate Quote für die Währungsabsicherung vorzugeben.

Allgemein sei  $I_k^{FX} \subseteq \{1, \dots, n\}$  die *Indexmenge aller Assetklassen  $i$  in der  $k$ -ten Währung* innerhalb des vorgegebenen Assetuniversums. Zur Darstellung eines einfachen Währungshedges bestimmt der Investor zu jeder Währung  $k$  eine *Absicherungsquote*  $s_k$  zwischen 0% und 100%, d. h.

$$0 \leq s_k \leq 1.$$

Dann beträgt das Fremdwährungsvolumen, das der Investor in der  $k$ -ten Währung absichern möchte

$$s_k \sum_{i \in I_k^{FX}} w_i.$$

Dementsprechend lautet die einzugehende Shortposition zur Absicherung der  $k$ -ten Währung FX

$$v_k^{FX} = -s_k \sum_{i \in I_k^{FX}} w_i \leq 0. \quad (3.79)$$

Die eingegangene Shortposition wird zur Betrachtung des Kaufzeitpunkts durch die Gegenposition in Euro aufgehoben. Daher gilt für die Euro-Longposition nach Forderung (3.78) und Gleichung (3.79):

$$v_k^{EUR} = -v_k^{FX} = \sum_{i \in I_k^{FX}} s_i w_i \geq 0. \quad (3.80)$$

Der Gesamtbetrag der Euro-Longpositionen über alle  $k$  Währungen lautet

$$v^{EUR} = \sum_k v_k^{EUR} \geq 0,$$

wobei für diejenigen Währungen, zu denen keine Absicherung existiert,  $v_k^{EUR} = 0$  gilt. Die

<sup>71</sup> Dies ist nur zum Zeitpunkt des Kaufs der Fall.

Gesamtposition  $v^{EUR}$  sollte in einer separaten (zusätzlichen) Assetklasse „Euro-Cash für Absicherung“, die als sogenannte *Cash-Leg-Position*<sup>72</sup> bezeichnet wird, zusammengefasst werden.

Die Gesamtposition aller Shortpositionen für die  $k$  Fremdwährungen wird durch

$$v^{FX} = - \sum_k v_k^{FX} = - \sum_k \sum_{i \in I_k^{FX}} s_i w_i \leq 0 \quad (3.81)$$

abgebildet.

Abschließend kann man die Forderung (3.78) über alle Währungen formulieren:

$$v^{EUR} + v^{FX} = 0 \text{ mit } v^{EUR} \geq 0 \text{ und } v^{FX} \leq 0. \quad (3.82)$$

### Implementierung in das Optimierungssetting

Die Implementierung der Absicherung mit Devisenforwards erfolgt durch Einbindung der Gleichung (3.82) für das Gesamtabsicherungsvolumen, das mit  $v^{EUR}$  erfasst wird, sowie einer Gleichung (3.79) für jede der  $k$  Fremdwährungen, zu denen Absicherungen vorgesehen sind.

Es werden zusätzliche Cash-Assetklassen für die Absicherungen eingeführt, die als Cash-Leg-Positionen für die jeweilige Währung bezeichnet werden. Sei  $w_{CL}^{EUR}$  das Gewicht der EUR-Cash-Leg-Position innerhalb der Assetklassen  $\{1, \dots, n\}$ , das der Longposition  $v^{EUR}$  entspricht, d. h.

$$w_{CL}^{EUR} = v^{EUR} \text{ mit } w_{CL}^{EUR} \geq 0. \quad (3.83)$$

Ebenso sollten Cash-Leg-Positionen für die  $k$  Fremdwährungen zur Verfügung stehen, welche den Shortpositionen  $v_k^{FX}$  entsprechen. Das Gewicht des Cash-Legs der  $k$ -ten Währung lautet

$$w_{CL}^k = v_k^{FX} \text{ mit } w_{CL}^k \leq 0. \quad (3.84)$$

Zur Implementierung in das Optimierungsprogramm werden zu den Gewichten  $w_{CL}^{EUR}$  und  $w_{CL}^k$  die entsprechenden Grenzen

$$lbw_{CL}^{EUR} = 0 \text{ und } ubw_{CL}^{EUR} = \infty \text{ sowie} \quad (3.85)$$

$$lbw_{CL}^k = -\infty \text{ und } ubw_{CL}^k = 0 \quad (3.86)$$

<sup>72</sup> Als *Cash-Leg-Position* wird in dieser Arbeit die entsprechende Geldseite einer aus zwei (Geld-)Positionen kombinierten Option bezeichnet.

hinzugefügt. Dann schreibe (3.82) als

$$0 \leq w_{CL}^{EUR} + \sum_k w_{CL}^k \leq 0 \quad (3.87)$$

und (3.79) als

$$0 \leq w_{CL}^k + \sum_{0 \leq i \leq n} s_i w_i \leq 0 \quad \text{mit} \quad s_i := \begin{cases} s_k, & i \in I_k^{FX} \text{ und } w_i \neq w_{CL}^k \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.88)$$

Sowohl die Grenzen zu (3.87) als auch zu (3.88) sind  $lbA = ubA = 0$ .

Ist  $I_{DTG} = \{ k \mid s_k \neq 0 \}$  die Menge aller Währungen  $k$ , zu denen eine Absicherungsquote existiert, so besteht das DTG-Modul aus  $(|I_{DTG}| + 1)$  Gleichungen.

### Beispiel 3.5

Zur Veranschaulichung des Moduls wird die folgende Situation betrachtet. Ein Investor gibt für die zwei Fremdwährungen USD und GBP Sicherungsquoten von 30% und 80% vor. In der Tabelle sind in den Spalten verschiedene Assetklassen der Währungen USD, GBP und EUR zu finden. In der ersten Zeile ist die Gleichung (3.87) notiert, in den darauffolgenden beiden Zeilen die Gleichung (3.88) jeweils für die Währungen USD und GBP.

|        | $w_1^{USD}$ | $w_2^{GBP}$ | $w_3^{EUR}$ | ...  | $w_{CL}^{EUR}$ | $w_{CL}^{USD}$ | $w_{CL}^{GBP}$ | ...  | $w_{n-10}^{USD}$ | $w_{n-9}^{USD}$ | ...  | $w_n^{EUR}$ |
|--------|-------------|-------------|-------------|------|----------------|----------------|----------------|------|------------------|-----------------|------|-------------|
| (3.87) | 0           | 0           | 0           | 0..0 | 1              | 1              | 1              | 0..0 | 0                | 0               | 0..0 | 0           |
| (3.88) | 0,3         | 0           | 0           | 0..0 | 0              | 1              | 0              | 0..0 | 0,3              | 0,3             | 0..0 | 0           |
| (3.88) | 0           | 0,8         | 0           | 0..0 | 0              | 0              | 1              | 0..0 | 0                | 0               | 0..0 | 0           |

Tabelle 3.21: Beispielmodul für das Naive Währungs-Hedging

Die Grenzen an die Nebenbedingungsmatrix  $A$  lauten  $lbA_{DTG} = ubA_{DTG} = 0$  für jede der drei angefügten Zeilen.

### Optimales-Währungs-Hedging

Bisher ist mit den obigen Formeln eine recht simple Absicherung implementiert: der Investor gibt eine feste Absicherungsquote vor und der Optimierungsalgorithmus entscheidet, ob sich eine Investition in Verbindung mit diesem Absicherungsniveau lohnt. Durch den Einsatz des Optimalen-Währungs-Hedgings besteht die Möglichkeit den Optimierer über die Absicherung entscheiden zu lassen, sodass dieser im Optimierungsergebnis die optimalen

Absicherungsquoten direkt mitliefert. Zu diesem Zweck wird dem Optimierungsalgorithmus offen gelassen, ob er die Shortpositionen in (3.79) als Währungs-Hedge nutzt oder darauf verzichtet. Dazu wird die Gleichung (3.79) durch die Ungleichung

$$v_k^{FX} \geq - \sum_{i \in I_k^{FX}} w_i \quad (v_k^{FX} \leq 0) \quad (3.89)$$

für die  $k$ -te Shortposition ersetzt. Die Ungleichung erlaubt dem Optimierer bis zu 100%<sup>73</sup> des  $k$ -ten Fremdwährungsvolumens abzusichern. Die vom Optimierer tatsächlich gewählte Absicherungsquote der  $k$ -ten Fremdwährung ergibt sich aus dem Optimierungsergebnis als Quotient des in der Cash-Assetklasse der Fremdwährung  $k$  allokierten Betrags und dem Gesamtinvestment in der  $k$ -ten Fremdwährung. Als Formel bedeutet dies

$$s_k = \frac{v_k^{FX}}{- \sum_{i \in I_k^{FX}} w_i} \in [0, 1]. \quad (3.90)$$

### Beispiel 3.6

Der Investor des vorherigen Beispiels 3.5 beschließt nun den Optimierer für die erste Fremdwährung USD den optimalen Währungs-Hedge finden zu lassen. Zu diesem Zweck wird die Zeile für die Festlegung der ersten Fremdwährungs-Cash-Klasse angepasst: die Sicherungsquote  $s_1 = 0,3$  wird durch die Zahl 1 ersetzt und die Grenze  $ub_{DTG}$  wird auf  $\infty$  gesetzt, sodass die Gleichung (3.89) folgende Form erhält:

$$0 \leq v_k^{FX} + \sum_{i \in I_k^{FX}} w_i \leq \infty. \quad (3.91)$$

Die 80%-Absicherung für USD aus Beispiel 3.5 wird beibehalten. Dann lautet das DTG-Modul für das Optimale-Währungs-Hedging

|        | $w_1^{USD}$ | $w_2^{GBP}$ | $w_3^{EUR}$ | ...  | $w_{CL}^{EUR}$ | $w_{CL}^{USD}$ | $w_{CL}^{GBP}$ | ...  | $w_{n-10}^{USD}$ | $w_{n-9}^{USD}$ | ...  | $w_n^{EUR}$ |
|--------|-------------|-------------|-------------|------|----------------|----------------|----------------|------|------------------|-----------------|------|-------------|
| (3.87) | 0           | 0           | 0           | 0..0 | 1              | 1              | 1              | 0..0 | 0                | 0               | 0..0 | 0           |
| (3.91) | 1           | 0           | 0           | 0..0 | 0              | 1              | 0              | 0..0 | 1                | 1               | 0..0 | 0           |
| (3.88) | 0           | 0,8         | 0           | 0..0 | 0              | 0              | 1              | 0..0 | 0                | 0               | 0..0 | 0           |

Tabelle 3.22: Beispielmodul für Optimales-Währungs-Hedging

zusammen mit den Grenzen  $lb_{DTG} = (0, 0, 0)^t$  und  $ub_{DTG} = (0, \infty, 0)^t$  zu den drei Zeilen der Nebenbedingungsmatrix  $A$ .

<sup>73</sup> 100% Absicherungsquote ergeben sich bei Gleichheit in (3.89).

Das DTG-Modul hat im Rahmen der Darstellung in der Nebenbedingungsmatrix  $A$  für beide Varianten die gleiche Gestalt:

| <b>Matrix<br/>A</b>                   | $w_1 \dots w_n$<br>( $n$ Sp) | $w_F$<br>(1Sp) | $w_{CL}^1 \dots w_{CL}^k$<br>( $k$ Sp) | ALMR-Block<br>( $7 + J_M + J_K$ )Sp | $u^-$<br>(1Sp) | $u^+$<br>(1Sp) |
|---------------------------------------|------------------------------|----------------|----------------------------------------|-------------------------------------|----------------|----------------|
| ALMR Markt                            | 0 .. 0                       | 0 .. 0         | 0                                      |                                     | 0              | 0              |
| -    -                                | $[SZ_{Markt}]$               | (0)            | [0]                                    |                                     | (0)            | (0)            |
| ALMR Kredit                           | 0 .. 0                       | 0              | 0 .. 0                                 |                                     | 0              | 0              |
| -    -                                | $[SZ_{Kredit}]$              | (0)            | [0]                                    |                                     | (0)            | (0)            |
| Mindestrendite                        | $\mu_1 \dots \mu_n$          | 0              | 0 .. 0                                 | 0 .. 0                              | 0              | 0              |
| GruppenNB                             | $[A_{Neb}]$                  | (0)            | [0]                                    | [0 .. 0]                            | (0)            | (0)            |
| TAK ( $n$ Z)                          | [ $E$ ]                      | (0)            | [0]                                    | [0 .. 0]                            | (-1)           | (1)            |
| Fonds Version 2 ( $ I_F $ Z)          | $[A_{FondsV2}]$              |                | [0]                                    | [0 .. 0]                            | (0)            | (0)            |
| <b>DTG-Modul</b> ( $ I_{DTG}  + 1$ Z) | $[A_{DTG..}]$                | (0)            | $[..A_{DTG}]$                          | [0 .. 0]                            | (0)            | (0)            |

Tabelle 3.23: Nebenbedingungsmatrix A inkl. DTG-Modul

Zusätzlich zu den  $|I_{DTG}| + 1$  Zeilen müssen  $k$  Spalten für die Cash-Leg-Positionen aller Währungen in die Matrix  $A$  eingefügt werden.<sup>74</sup>

<sup>74</sup> Mathematisch reichen bereits  $|I_{DTG}|$  Spalten, wobei  $|I_{DTG}| \leq k$  ist, da für nicht zur Absicherung freigegebene Währungen keine Cash-Legs benötigt werden. Jedoch ist in der Praxis ein Spaltenumbau innerhalb der Matrix  $A$  aufwendig, sodass sinnvoller Weise direkt alle potenziell benötigten Cash-Leg-Positionen eingebaut werden sollten.

## Kapitel 4

# Praktische Optimierungsbeispiele

In diesem vierten Kapitel wird die Funktionsweise des im vorherigen Kapitel beschriebenen Optimierungsprogramms anhand eines umfangreichen Beispiels vorgeführt. Dabei werden entsprechend des vorgestellten Optimierungsprozesses zunächst die nötigen Inputdaten für die Optimierung aufbereitet. Nach einem Basislauf ohne Restriktionen wird das Optimierungsprogramm sukzessiv um Nebenbedingungen erweitert, um auf diese Weise ihre Wirkung auf die Ergebnisportfolios zu analysieren.

### 4.1 Vorbereitung der Input-Daten

Für eine beispielhafte Optimierung wird ein Sachversicherungskonzern bestehend aus einer deutschen Muttergesellschaft und einem kleinen amerikanischen Tochterunternehmen betrachtet. Beide Unternehmen lassen ihre Liabilities aktuariell schätzen, um diese anschließend mithilfe eines Cashflow-Matching-Verfahrens als Portfolio darzustellen.

#### **Darstellung des risikoneutralen Portfolios**

Zur Darstellung der Passivseite stehen die in Tabelle 4.1 dargestellten Instrumente in den Währungen EUR und USD zur Verfügung. Sowohl für die Euro-Liabilities als auch für die US-Dollar-Liabilities wird ein separates Cashflow-Matching durchgeführt. Der risikofreie Zins, der in die Barwertberechnung eingeht, wird mit 1% angenommen.

| Instrumente       | Währung | Kategorie | MDur  | LZ-Zuteilung         |
|-------------------|---------|-----------|-------|----------------------|
| EUR-Cash 0-1      | EUR     | M         | 0,36  | Cash                 |
| EUR-Zero-Swap 2Y  | EUR     | F         | 1,99  | $t < 3,5$            |
| EUR-Zero-Swap 5Y  | EUR     | F         | 4,95  | $3,5 \leq t < 7,5$   |
| EUR-Zero-Swap 10Y | EUR     | F         | 9,82  | $7,5 \leq t < 12,5$  |
| EUR-Zero-Swap 15Y | EUR     | F         | 14,67 | $12,5 \leq t < 17,5$ |
| EUR-Zero-Swap 20Y | EUR     | F         | 19,52 | $17,5 \leq t$        |
| USD-Cash 0-1      | USD     | M         | 0,42  | Cash                 |
| USD-Zero-Swap 2Y  | USD     | F         | 1,99  | $t < 3,5$            |
| USD-Zero-Swap 5Y  | USD     | F         | 4,95  | $3,5 \leq t < 7,5$   |
| USD-Zero-Swap 10Y | USD     | F         | 9,80  | $7,5 \leq t$         |

Tabelle 4.1: Instrumente zur Darstellung der Passivseite

Die Tabelle 4.2 (auf der nächsten Seite) enthält in den ersten drei Spalten mit der Überschrift „Input“ die Euro-Liabilities mit ihren Fälligkeiten und Nominalen. Dazu werden die Barwerte  $P[r]$  sowie die modifizierten Durationen berechnet, aus denen sich die Barwertsumme von 82.000 Euro sowie eine Gesamtduration von 4,09 ergibt.

Anschließend werden die einzelnen Liabilities den Euro-Instrumenten aus der Tabelle 4.1 gemäß der Spalte „LZ-Zuteilung“ zugewiesen. Das Cashflow-Matching wird mittels der im Abschnitt „Ein einfaches Verfahren“ (Kapitel 3.4) vorgestellten Methodik durchgeführt. Als Ergebnis erhält man für jede Liability die Aufteilung in den Cashanteil und den verbleibenden Investitionsanteil in das ihr zugeordnete Instrument - beides sowohl relativ als auch absolut in Euro.

Für die Euro-Liabilities ergibt sich am Ende die Gesamtduration aus der Multiplikation von der Cashgesamtduration und der Instrumentengesamtduration mit ihren jeweiligen prozentualen Anteilen. Sie beträgt

$$36,59\% \cdot 0,36 + 63,41\% \cdot 6,25 = 4,09$$

und entspricht wie gewünscht der eingehenden Gesamtduration der EUR-Liabilities.

Analog wird das Cashflow-Matching-Verfahren für die USD-Liabilities und die entsprechenden Instrumente in der Währung USD durchgeführt (Tabelle 4.3).

| INPUT       |      |               |               |             |                   |          | Aufteilung          |            | Aufteilung des P[r] |                 |
|-------------|------|---------------|---------------|-------------|-------------------|----------|---------------------|------------|---------------------|-----------------|
| Liability   | t    | Nominal       | P[r]          | Mdur        | Zuweisung zu      | mit Mdur | Cash                | Instrument | P[r] Cash           | P[r] Instrument |
| EUR30062015 | 0,5  | 24.353,72     | 24.232,86     | 0,50        | EUR-Swap-Rate 2Y  | 1,99     | 91,78%              | 8,22%      | 22.240,10           | 1.992,76        |
| EUR30062016 | 1,5  | 16.692,31     | 16.445,02     | 1,49        | EUR-Swap-Rate 2Y  | 1,99     | 31,04%              | 68,96%     | 5.104,21            | 11.340,81       |
| EUR30062017 | 2,5  | 5.269,33      | 5.139,87      | 2,48        | EUR-Swap-Rate 2Y  | 1,99     | -29,70%             | 129,70%    | -1.526,57           | 6.666,43        |
| EUR30062018 | 3,5  | 5.689,26      | 5.494,54      | 3,47        | EUR-Swap-Rate 5Y  | 4,95     | 32,42%              | 67,58%     | 1.781,15            | 3.713,38        |
| EUR30062019 | 4,5  | 8.175,76      | 7.817,76      | 4,46        | EUR-Swap-Rate 5Y  | 4,95     | 10,86%              | 89,14%     | 849,15              | 6.968,60        |
| EUR30062020 | 5,5  | 4.120,32      | 3.900,89      | 5,45        | EUR-Swap-Rate 5Y  | 4,95     | -10,69%             | 110,69%    | -417,13             | 4.318,01        |
| EUR30062022 | 7,5  | 10.352,22     | 9.607,79      | 7,43        | EUR-Swap-Rate 10Y | 9,82     | 25,34%              | 74,66%     | 2.435,06            | 7.172,72        |
| EUR30062025 | 10,5 | 2.959,78      | 2.666,15      | 10,40       | EUR-Swap-Rate 10Y | 9,82     | -6,04%              | 106,04%    | -161,13             | 2.827,28        |
| EUR30062030 | 15,5 | 5.568,72      | 4.772,81      | 15,35       | EUR-Swap-Rate 15Y | 14,67    | -4,76%              | 104,76%    | -227,19             | 5.000,00        |
| EUR30062035 | 20,5 | 2.357,31      | 1.922,33      | 20,30       | EUR-Swap-Rate 20Y | 19,52    | -4,04%              | 104,04%    | -77,67              | 2.000,00        |
|             |      | <b>Gesamt</b> | <b>82.000</b> | <b>4,09</b> |                   |          | <b>Gesamt</b>       |            | <b>30.000</b>       | <b>52.000</b>   |
|             |      |               |               |             |                   |          | <b>Mdur</b>         |            | <b>0,36</b>         | <b>6,25</b>     |
|             |      |               |               |             |                   |          | <b>Anteil Instr</b> |            | <b>36,59%</b>       | <b>63,41%</b>   |

Tabelle 4.2: Cashflow-Matching für die EUR-Liabilities

| INPUT       |     |               |              |             |                   |          | Aufteilung          |            | Aufteilung des P[r] |                 |
|-------------|-----|---------------|--------------|-------------|-------------------|----------|---------------------|------------|---------------------|-----------------|
| Liability   | t   | Nominal       | P[r]         | Mdur        | Zuweisung zu      | mit Mdur | Cash                | Instrument | P[r] Cash           | P[r] Instrument |
| EUR30062015 | 0,5 | 3.213,60      | 3.197,65     | 0,50        | USD-Swap-Rate 2Y  | 1,99     | 95,23%              | 4,77%      | 3.045,02            | 152,63          |
| EUR30062016 | 1,5 | 2.768,02      | 2.727,02     | 1,49        | USD-Swap-Rate 2Y  | 1,99     | 32,26%              | 67,74%     | 879,64              | 1.847,37        |
| EUR30062020 | 5,5 | 952,92        | 902,17       | 5,45        | USD-Swap-Rate 5Y  | 4,95     | -10,84%             | 110,84%    | -97,83              | 1.000,00        |
| EUR30062023 | 8,5 | 1.276,71      | 1.173,17     | 8,42        | USD-Swap-Rate 10Y | 9,80     | 14,76%              | 85,24%     | 173,17              | 1.000,00        |
|             |     | <b>Gesamt</b> | <b>8.000</b> | <b>2,55</b> |                   |          | <b>Gesamt</b>       |            | <b>4.000</b>        | <b>4.000</b>    |
|             |     |               |              |             |                   |          | <b>Mdur</b>         |            | <b>0,42</b>         | <b>4,68</b>     |
|             |     |               |              |             |                   |          | <b>Anteil Instr</b> |            | <b>50,00%</b>       | <b>50,00%</b>   |

Tabelle 4.3: Cashflow-Matching für die USD-Liabilities

Alle Beträge werden stets in Euro ausgewiesen. Auch hier ergibt die Gesamtduration bei einem Investitionsbetrag von 8.000 Euro in USD die gewünschte eingehende Duration von 2,55 durch

$$50\% \cdot 0,42 + 50\% \cdot 4,68 = 2,55.$$

Als Gesamtergebnis erhält man das in der Tabelle 4.4 zusammengefasste Portfolio für die Passivseite. Es ergibt sich ein Gesamtinvestitionsbetrag von 90.000 Euro sowie eine Portfolio-Duration von 3,96, die sich aus den beiden Gesamtdurationen für Euro- und US-Dollar-Liabilities wie folgt berechnet:

$$\frac{82.000}{90.000} \cdot 4,09 + \frac{8.000}{90.000} \cdot 2,55 = 3,96.$$

| Instrumente       | Währung | MDUR        | LZ-Zuteilung         | absolut       | %           |
|-------------------|---------|-------------|----------------------|---------------|-------------|
| EUR-Cash 0-1      | EUR     | 0,36        | Cash                 | 30.000        | 33,33%      |
| EUR-Zero-Swap 2Y  | EUR     | 1,99        | $t < 3,5$            | 20.000        | 22,22%      |
| EUR-Zero-Swap 5Y  | EUR     | 4,95        | $3,5 \leq t < 7,5$   | 15.000        | 16,67%      |
| EUR-Zero-Swap 10Y | EUR     | 9,82        | $7,5 \leq t < 12,5$  | 10.000        | 11,11%      |
| EUR-Zero-Swap 15Y | EUR     | 14,67       | $12,5 \leq t < 17,5$ | 5.000         | 5,56%       |
| EUR-Zero-Swap 20Y | EUR     | 19,52       | $17,5 \leq t$        | 2.000         | 2,22%       |
| USD-Cash 0-1      | USD     | 0,42        | Cash                 | 4.000         | 4,44%       |
| USD-Zero-Swap 2Y  | USD     | 1,99        | $t < 3,5$            | 2.000         | 2,22%       |
| USD-Zero-Swap 5Y  | USD     | 4,95        | $3,5 \leq t < 7,5$   | 1.000         | 1,11%       |
| USD-Zero-Swap 10Y | USD     | 9,80        | $7,5 \leq t$         | 1.000         | 1,11%       |
|                   |         | <b>3,96</b> |                      | <b>90.000</b> | <b>100%</b> |

Tabelle 4.4: Ergebnis des Cashflow-Matchings

Die Assets des Unternehmens weisen ein Gesamtvolumen von 100.000 Euro auf. Der Surplus berechnet sich als Differenz des Assetvolumens abzüglich des Liabilityvolumens und beträgt in diesem Beispiel  $100.000 \text{ Euro} - 90.000 \text{ Euro} = 10.000 \text{ Euro}$ . Diese Differenz wird dem Ergebnis des Cashflow-Matchings als *Cash-Auffüllung* in Euro hinzugefügt, d. h., die Position „EUR-Cash 0-1“ erhöht sich um die 10.000 Euro von 30.000 Euro auf 40.000 Euro. Aus dieser Cash-Auffüllung ergibt sich eine veränderte Portfolioduration von

$$\frac{90.000}{100.000} \cdot 3,96 + \frac{10.000}{100.000} \cdot 0,36 = 3,60.$$

Als Ergebnis erhält man das in Tabelle 4.5 gezeigte *risikoneutrale Portfolio (RNPF)* als Input für die Optimierung. Es wird mit einer Returnerwartung von 0,02% über dem risikofreien Zins<sup>1</sup> bewertet und dient der Optimierung als Benchmark, so dass es die Nullposition bezüglich des Asset-Liability-Mismatch-Risikos darstellt.

| RNPF              |         |             |                   |             |
|-------------------|---------|-------------|-------------------|-------------|
| Instrumente       | Währung | MDUR        | absolut           | %           |
| EUR-Cash 0-1      | EUR     | 0,36        | 40.000            | 40%         |
| EUR-Zero-Swap 2Y  | EUR     | 1,99        | 20.000            | 20%         |
| EUR-Zero-Swap 5Y  | EUR     | 4,95        | 15.000            | 15%         |
| EUR-Zero-Swap 10Y | EUR     | 9,82        | 10.000            | 10%         |
| EUR-Zero-Swap 15Y | EUR     | 14,67       | 5.000             | 5%          |
| EUR-Zero-Swap 20Y | EUR     | 19,52       | 2.000             | 2%          |
| USD-Cash 0-1      | USD     | 0,42        | 4.000             | 4%          |
| USD-Zero-Swap 2Y  | USD     | 1,99        | 2.000             | 2%          |
| USD-Zero-Swap 5Y  | USD     | 4,95        | 1.000             | 1%          |
| USD-Zero-Swap 10Y | USD     | 9,80        | 1.000             | 1%          |
|                   |         | <b>3,60</b> | <b>100.000,00</b> | <b>100%</b> |

Tabelle 4.5: Risikoneutrales Portfolio (RNPF)

### Allokationsuniversum

Unabhängig von den Instrumenten zur Bewertung der Passivseite wird für die Beispieloptimierung ein vereinfachtes Allokationsuniversum bestehend aus Aktien, Staatsanleihen und Cash verwendet. Für den Eurowährungsraum findet man DAX und EURO STOXX 50 (SX5E) als Aktienvertreter, deutsche Staatsanleihen unterschiedlicher Laufzeitbänder als Euro-Core-Vertreter sowie spanische Staatsanleihen mittlerer Laufzeit (Duration 4,97) als Euro-Non-Core-Vertreter. In der Währung US-Dollar sind ebenfalls Staatsanleihen unterschiedlicher Laufzeitklassen verfügbar sowie eine allgemeine Assetklasse für US-Aktien. Darüber hinaus enthält das Allokationsuniversum eine Aktienklasse und eine Staatsanleihenklasse mittlerer Laufzeit (Duration 3,85) in russischen Rubel als Emerging-Markets-Vertreter. Ergänzend dazu steht in jeder der drei Währungen eine Cash-Assetklasse zur Verfügung.

<sup>1</sup> Dieser wurde mit 1% zur Berechnung des RNPFs angenommen.

In der folgenden Übersicht (Tabelle 4.6) über das Allokationsuniversum sind unter anderem die modifizierten Durationen, die Transaktionskosten (TAK) und die Risikoprämien (RP) für die Assetklassen zusammengefasst. Die Transaktionskosten liefert in der Regel das Assetmanagement. Die Risikoprämien werden mit dem in Kapitel 3.9 vorgestellten Verfahren der inversen Optimierung aus einem Marktportfolio hergeleitet. Beispielhaft wird dies in Anhang 6.1 mit den hier vorgestellten Risikoprämien durchgeführt.

| Nr | Assetklasse           | FX  | Kat.   | MDur  | TAK    | RP    |
|----|-----------------------|-----|--------|-------|--------|-------|
| 1  | DAX                   | EUR | Equity | 0,00  | 0,250% | 5,43% |
| 2  | SX5E                  | EUR | Equity | 0,00  | 0,250% | 5,78% |
| 3  | EM-Aktien             | RUB | Equity | 0,00  | 0,250% | 9,35% |
| 4  | USD-Aktien            | USD | Equity | 0,00  | 0,250% | 5,00% |
| 5  | EUR-Cash 0-1          | EUR | Cash   | 0,36  | 0,060% | 0,03% |
| 6  | RUB-Cash 0-1          | RUB | Cash   | 0,25  | 0,100% | 0,24% |
| 7  | USD-Cash 0-1          | USD | Cash   | 0,42  | 0,010% | 0,20% |
| 8  | Germany 1-3           | EUR | Bonds  | 1,80  | 0,020% | 0,29% |
| 9  | Germany 3-5           | EUR | Bonds  | 3,69  | 0,030% | 0,77% |
| 10 | Germany 5-7           | EUR | Bonds  | 5,49  | 0,030% | 1,12% |
| 11 | Germany 7-10          | EUR | Bonds  | 7,61  | 0,050% | 1,42% |
| 12 | Germany 10-30         | EUR | Bonds  | 14,22 | 0,140% | 2,53% |
| 13 | Spanien (allg.)       | EUR | Bonds  | 4,97  | 0,300% | 3,46% |
| 14 | EM-Government (allg.) | RUB | Bonds  | 3,85  | 0,350% | 0,91% |
| 15 | USD-Government 1-3    | USD | Bonds  | 1,90  | 0,010% | 0,41% |
| 16 | USD-Government 3-5    | USD | Bonds  | 3,87  | 0,015% | 1,09% |
| 17 | USD-Government 5-7    | USD | Bonds  | 5,74  | 0,015% | 1,50% |
| 18 | USD-Government 7-10   | USD | Bonds  | 7,79  | 0,020% | 1,92% |
| 19 | USD-Government 10-20  | USD | Bonds  | 10,84 | 0,040% | 2,33% |

Tabelle 4.6: Allokationsuniversum

### SAA-Portfolio

Das Assetmanagement liefert das derzeit bestehende SAA-Portfolio des Versicherungskonzerns zum Stichtag der Optimierung (Tabelle 4.7). Es enthält auf der Grundlage des obigen Allokationsuniversums alle Wertpapiere, die der Konzern derzeit hält. Das SAA-Portfolio dient als Ausgangsbasis zur Berechnung der TAK. Durch eine Einbindung der TAK als Nebenbedingung wird das SAA-Portfolio zum Ausgangsportfolio für die Optimierung, sodass dadurch eine Abhängigkeit der Optimierungsergebnisse vom SAA-Portfolio

entsteht. Es stellt in diesem Fall das zu optimierende Portfolio dar. Eine Optimierung ohne Berücksichtigung von Transaktionskosten ist vom SAA-Portfolio unabhängig.

| Nr            | Assetklasse           | FX  | Kat.   | SAA-Portfolio  |              |
|---------------|-----------------------|-----|--------|----------------|--------------|
|               |                       |     |        | absolut        | relativ      |
| 1             | DAX                   | EUR | Aktien | <b>2000</b>    | <b>2,0%</b>  |
| 2             | SX5E                  | EUR | Aktien | <b>1000</b>    | <b>1,0%</b>  |
| 3             | EM-Aktien             | RUB | Aktien |                |              |
| 4             | USD-Aktien            | USD | Aktien | <b>1000</b>    | <b>1,0%</b>  |
| 5             | EUR-Cash 0-1          | EUR | Cash   | <b>40000</b>   | <b>40,0%</b> |
| 6             | RUB-Cash 0-1          | RUB | Cash   |                |              |
| 7             | USD-Cash 0-1          | USD | Cash   | <b>6000</b>    | <b>6,0%</b>  |
| 8             | Germany 1-3           | EUR | Bonds  | <b>12000</b>   | <b>12,0%</b> |
| 9             | Germany 3-5           | EUR | Bonds  | <b>10000</b>   | <b>10,0%</b> |
| 10            | Germany 5-7           | EUR | Bonds  | <b>8000</b>    | <b>8,0%</b>  |
| 11            | Germany 7-10          | EUR | Bonds  | <b>5000</b>    | <b>5,0%</b>  |
| 12            | Germany 10-30         | EUR | Bonds  | <b>5000</b>    | <b>5,0%</b>  |
| 13            | Spanien (allg.)       | EUR | Bonds  |                |              |
| 14            | EM-Government (allg.) | RUB | Bonds  |                |              |
| 15            | USD-Government 1-3    | USD | Bonds  | <b>4000</b>    | <b>4,0%</b>  |
| 16            | USD-Government 3-5    | USD | Bonds  | <b>3000</b>    | <b>3,0%</b>  |
| 17            | USD-Government 5-7    | USD | Bonds  | <b>2000</b>    | <b>2,0%</b>  |
| 18            | USD-Government 7-10   | USD | Bonds  | <b>1000</b>    | <b>1,0%</b>  |
| 19            | USD-Government 10-20  | USD | Bonds  |                |              |
| <b>Gesamt</b> |                       |     |        | <b>100.000</b> | <b>100%</b>  |

Tabelle 4.7: Aktuelles SAA-Portfolio

Mithilfe der Risikoprämien aus Tabelle 4.6 lässt sich eine erwartete Überrendite des SAA-Portfolios von 0,7% errechnen. Dies ist eine Überrendite (Excess-Return) gegenüber dem risikoneutralen Portfolio (RNPF) **und** dem risikofreien Zins. Das bedeutet, für die Rendite-Angaben in dieser Arbeit gilt

$$\text{Total Return} = \text{Excess-Return} + \text{Return(RNPF)} + \text{risikofr. Zins}, \quad (4.1)$$

wobei der Excess-Return aus den Portfolios mittels der geschätzten Risikoprämien abzüglich des RNPF>Returns berechnet wird.

Anhand der Durationen der Assetklassen (aus Tabelle 4.6) ergibt sich für das SAA-Portfolio eine Duration von 2,67.

### Konfidenz des ALM-Risikos

Das Optimierungsprogramm rechnet das Risiko gemäß der Formel (3.12) für das Asset-Liability-Mismatch-Risiko (ALMR) unter Verwendung von Szenarien aus. Dazu wird ein entsprechendes Konfidenzlevel für den CVaR vorgegeben.

Dabei könnte in der Praxis folgendes Problem auftreten: Ziel der Optimierung soll eine VaR99.5-Optimierung entsprechend einer vorgeschriebenen Risikokapitalberechnung sein. Der Optimierer optimiert jedoch den Conditional-VaR anstelle des VaRs zu demselben Konfidenzniveau und stellt sich damit bezüglich des Risikokapitals konservativer, d. h., es wird ein höherer Risikokapitalbedarf durch das CVaR basierte ALM-Risikomaß ausgegeben, als es mit der VaR-basierten Variante der Fall wäre.

Um dieser Problematik entgegen zu wirken, kann das gewünschte VaR-Konfidenzlevel in ein äquivalentes CVaR-Konfidenzlevel umgerechnet werden. Auf diese Weise „verschiebt“ man den CVaR auf den VaR. Diese Umrechnung erfolgt in zwei Schritten:

- (1) Zu einem gegebenen Konfidenzniveau  $\alpha$  und einer (invertierbaren) Verteilung errechne den VaR-Wert zu  $\alpha$  durch Invertierung, d. h.  $\text{VaR}_\alpha = N_{(0,1)}^{-1}(\alpha)$ .
- (2) Finde  $\beta$ , sodass  $\text{CVaR}_\beta = \text{VaR}_\alpha$ .

Man beachte: Das umgerechnete Konfidenzlevel hängt von der gewählten Verteilung ab.

Für die Wahl einer Standardnormalverteilung  $N_{(0,1)}$  lautet das zu dem VaR99.5 äquivalente CVaR-Konfidenzniveau  $\beta = 98,7$ . Die Umrechnung stimmt nur für die gewählte Verteilung. In der Regel verwendet man unterschiedliche Verteilungen zur Kalibrierung der Assetklassen (bzw. Risikotreiber), sodass man bei der Konfidenzlevelumrechnung einen Fehler in Kauf nehmen muss. Die Größe dieses Fehlers hängt von der Unterschiedlichkeit der jeweiligen Verteilungen ab, sodass die Umrechnung des Konfidenzlevels in einem solchen Fall nur eine Näherung an das gewünschte VaR-Level darstellt.

## 4.2 Long-only-Optimierung ohne Nebenbedingungen

In einem ersten Optimierungslauf wird eine Optimierung ohne Nebenbedingungen durchgeführt. Die Optimierung findet zu einem CVaR-Konfidenzniveau von 98,7 statt, welches bei Standardnormalverteilung einem VaR<sub>99.5</sub> entspricht.<sup>2</sup> Für diese und alle folgenden Optimierungen werden jeweils ein Szenario-Set für Marktrisiko und Kreditrisiko zur Berechnung des ALM-Risikos gemäß Abschnitt 3.5 verwendet. Zwischen den beiden Risikoarten wird eine Korrelation von  $\rho = 0,5$  angenommen. Die Szenarien sind zentriert, d. h., das ALM-Risiko wird als  $\text{ALMR}(X - E[X])$  berechnet. Dies ermöglicht eine Vergleichbarkeit der Risikokapitalbeträge zwischen unterschiedlichen Optimierungen, da man durch die Zentrierung ein lageunabhängiges Risikomaß erhält.

Die Optimierung stellt eine ALM-Risiko-Minimierung unter Forderung von Mindestreturns dar. Unter Vorgabe von acht Returnanforderungen von 0%, 0,5%, 1%, .., 3,5% gibt der Optimierer acht Ergebnisportfolios P1,...,P8 aus. Gefordert wird, dass alle Portfoliogewichte größergleich Null sind, das bedeutet, dass der Optimierer keine Shortpositionen eingehen darf.<sup>3</sup> Transaktionskosten werden zunächst nicht berücksichtigt, d. h., sie sind nicht als Nebenbedingung enthalten und haben daher keinen Einfluss auf die Ergebnisportfolios.

### Erläuterungen zur Ausgabe der Ergebnisse

Die Ergebnisse dieses und aller in diesem Kapitel folgenden Optimierungsläufe werden in einer dreiteiligen Übersicht, wie sie in Abbildung 4.1 zu sehen ist, zusammengefasst. Die obere Tabelle der Übersicht enthält verschiedene Kennzahlen zu allen acht optimierten Portfolios sowie zu den in die Optimierung eingehenden Portfolios RNPF (risikoneutrales Portfolio) und SAA-Portfolio, das (später) als Ausgangsbasis zur Transaktionskostenberechnung dient. In der ersten Zeile ist der für die Portfolios geforderte Mindestreturn in aufsteigender Reihenfolge angegeben. Dies ermöglicht die Veränderungen der Portfolios bei steigenden Renditeanforderungen zu betrachten.

In den nächsten drei Zeilen werden verschiedene Return-Kennzahlen ausgewiesen:

- „Excess-Return ohne TAK“ ist die Portfolio-Excess-Rendite (ggü. RNPF und risikofreiem Zins) ohne Berücksichtigung der Transaktionskosten, die ausgehend vom SAA-Portfolio entstehen würden.

<sup>2</sup> Für nähere Erläuterungen dazu, siehe vorheriger Abschnitt.

<sup>3</sup> Dies bedeutet für die Grenzen:  $lbx = 0$  und  $ubx = \infty$ .

- „Excess-Return inkl. TAK“ berücksichtigt die Transaktionskosten, die in der Zeile „TAK“ zu finden sind.
- „Return inkl. RNPF-Return“ entspricht der Größe „Excess-Return inkl. TAK“ zuzüglich des Returns des risikoneutralen Portfolios und stellt somit eine Portfolio-Excess-Rendite gegenüber dem risikofreien Zins dar.

In der Zeile „ALM-Risiko“ wird das Risiko entsprechend Formel 3.12 in Relation zum risikoneutralen Portfolio angegeben. Der *Return-on-Risk-adjusted-Capital (RoRaC)* ist eine Größe, die Rendite und Risiko ins Verhältnis setzt:

$$\text{RoRaC} = \frac{\text{Risikoadjustiertes Nettoergebnis}}{\text{Risiko}} = \frac{\text{Excess-Return (inkl. TAK)}}{\text{ALM-Risiko}}. \quad (4.2)$$

Im Zähler steht die Excess-Rendite gegenüber der Passivseite. Ebenso befindet sich im Nenner mit dem ALM-Risiko eine Größe, die gegenüber der Passivseite gemessen wird. Die Portfoliotransaktionskosten werden im Zähler einbezogen (d. h., von der Risikoprämie des jeweiligen Portfolios abgezogen), um im Zähler ein Nettoergebnis zu erhalten.<sup>4</sup>

Man erhält mit dem RoRaC eine Kennzahl, die den Gewinn der Kapitalanlage zu dem eingesetzten Risikokapital ins Verhältnis setzt. Je riskanter ein Versicherungsunternehmen seine Kapitalanlage gestaltet, desto mehr Risikokapital muss es vorhalten. Ein größerer RoRaC bedeutet ein besseres Verhältnis von der erwarteten Rendite zu dem einzugehenden Risiko. Sie gleicht in ihrem Wesen als Rendite/Risiko-Kennzahl der Sharpe Ratio<sup>5</sup>, die anstelle des ALM-Risikos als Risikogröße die Volatilität verwendet.

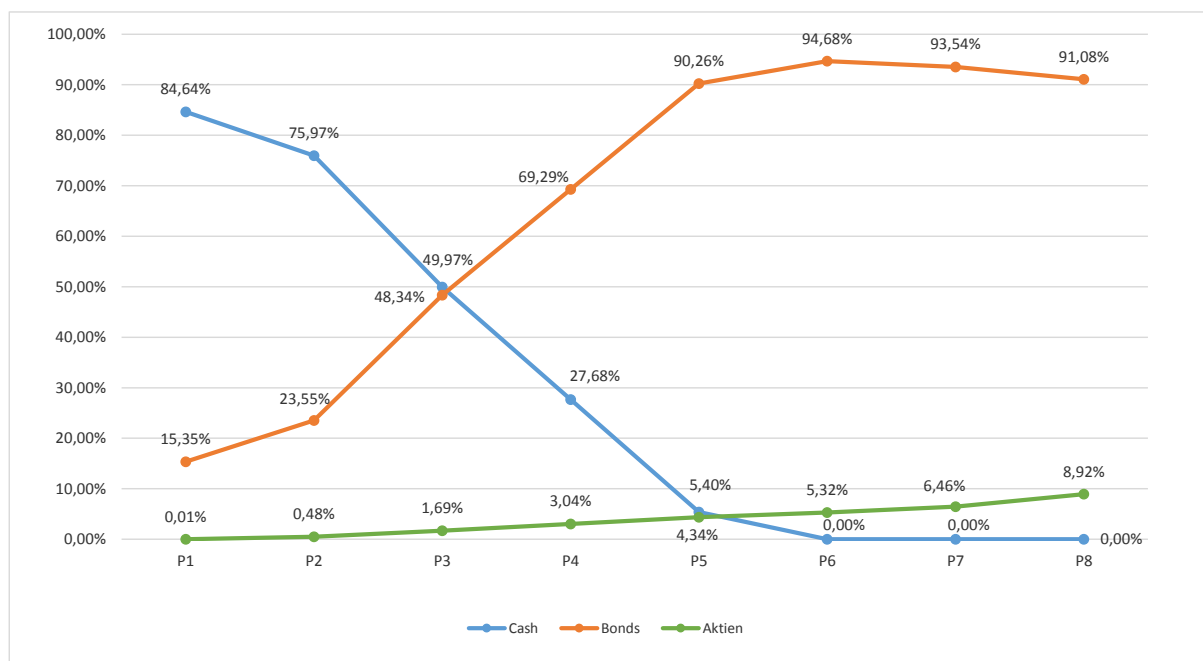
Das Diagramm unterhalb der Tabelle veranschaulicht die Gewichtungen der Assetklassenkategorien Aktien, Bonds und Cash innerhalb der optimierten Portfolios zueinander. Unterhalb des Diagramms ist die detaillierte Zusammensetzung der Portfolios aus den verschiedenen Assetklassen tabellarisch aufgeführt.

Es folgt die Betrachtung der Ergebnisse der Long-only-Optimierung ohne Nebenbedingungen und ohne TAK.

<sup>4</sup> Bei einer Optimierung ohne Transaktionskosten könnte im Zähler auch eine Rendite ohne TAK-Berücksichtigung verwendet werden.

<sup>5</sup> Siehe Definition der Sharpe Ratios 3.42.

| Kennzahl                      | RNPF  | SAA          | P1           | P2           | P3           | P4           | P5           | P6           | P7           | P8           |
|-------------------------------|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Mindest-Return (gefordert)    |       |              | 0,0%         | 0,5%         | 1,0%         | 1,5%         | 2,0%         | 2,5%         | 3,0%         | 3,5%         |
| Return (inkl. RNPF-Return)    | 0,02% | 0,72%        | 0,29%        | 0,47%        | 0,95%        | 1,41%        | 1,86%        | 2,32%        | 2,78%        | 3,25%        |
| Excess-Return inkl. TAK       |       | 0,70%        | 0,27%        | 0,45%        | 0,93%        | 1,39%        | 1,84%        | 2,30%        | 2,76%        | 3,23%        |
| <b>Excess-Return ohne TAK</b> |       |              | <b>0,32%</b> | <b>0,50%</b> | <b>1,00%</b> | <b>1,50%</b> | <b>2,00%</b> | <b>2,50%</b> | <b>3,00%</b> | <b>3,50%</b> |
| TAK                           |       |              | 0,05%        | 0,05%        | 0,07%        | 0,11%        | 0,16%        | 0,20%        | 0,24%        | 0,27%        |
| <b>ALM-Risiko</b>             |       | <b>3,35%</b> | <b>1,27%</b> | <b>1,37%</b> | <b>2,18%</b> | <b>3,29%</b> | <b>4,56%</b> | <b>5,90%</b> | <b>7,32%</b> | <b>8,86%</b> |
| RoRaC                         |       | 20,89%       | 20,99%       | 32,56%       | 42,62%       | 42,21%       | 40,26%       | 38,91%       | 37,73%       | 36,47%       |
| Duration                      | 3,60  | 2,67         | 2,00         | 2,44         | 3,45         | 4,34         | 5,22         | 6,01         | 6,78         | 6,83         |



| Nr | Assetklasse           | FX  | Kat.   | P1     | P2     | P3     | P4     | P5     | P6     | P7     | P8     |
|----|-----------------------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1  | DAX                   | EUR | Aktien | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 2  | SX5E                  | EUR | Aktien | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,08%  | 0,19%  | 0,44%  | 0,56%  | 0,66%  |
| 3  | EM-Aktien             | RUB | Aktien | 0,00%  | 0,05%  | 0,65%  | 1,12%  | 1,75%  | 2,09%  | 2,70%  | 5,95%  |
| 4  | USD-Aktien            | USD | Aktien | 0,01%  | 0,43%  | 1,05%  | 1,84%  | 2,40%  | 2,79%  | 3,20%  | 2,32%  |
| 5  | EUR-Cash 0-1          | EUR | Cash   | 80,87% | 75,97% | 49,97% | 27,68% | 5,40%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 6  | RUB-Cash 0-1          | RUB | Cash   | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 7  | USD-Cash 0-1          | USD | Cash   | 3,77%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 8  | Germany 1-3           | EUR | Bonds  | 0,00%  | 0,00%  | 14,33% | 24,98% | 35,21% | 25,13% | 7,79%  | 0,00%  |
| 9  | Germany 3-5           | EUR | Bonds  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 10 | Germany 5-7           | EUR | Bonds  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,86%  | 0,00%  | 0,22%  | 2,93%  | 0,00%  |
| 11 | Germany 7-10          | EUR | Bonds  | 4,12%  | 4,40%  | 2,23%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 12 | Germany 10-30         | EUR | Bonds  | 6,89%  | 8,07%  | 11,06% | 12,74% | 14,36% | 16,91% | 19,43% | 17,46% |
| 13 | Spanien (allg.)       | EUR | Bonds  | 0,00%  | 2,95%  | 12,29% | 22,17% | 32,08% | 43,37% | 53,82% | 61,89% |
| 14 | EM-Government (allg.) | RUB | Bonds  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 15 | USD-Government 1-3    | USD | Bonds  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 16 | USD-Government 3-5    | USD | Bonds  | 0,00%  | 4,97%  | 3,68%  | 1,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 17 | USD-Government 5-7    | USD | Bonds  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 18 | USD-Government 7-10   | USD | Bonds  | 2,25%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,89%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 19 | USD-Government 10-20  | USD | Bonds  | 2,10%  | 3,16%  | 4,73%  | 6,64%  | 8,60%  | 9,06%  | 9,57%  | 11,73% |

Abbildung 4.1: Ergebnisse der Optimierung ohne Nebenbedingungen und ohne TAK

## Optimierungsergebnisse

Betrachtet man die grafische Darstellung von links nach rechts in Richtung der steigenden Mindestreturnanforderungen, so folgen die Veränderungen innerhalb der Portfolios der Intuition: Je höher die geforderte Rendite ist, umso stärker fällt die Cashquote der Portfolios zugunsten der risikoreicheren Anlageklassen Bonds und Aktien. Die Bondquote steigt dabei zunächst deutlich stärker als die Aktienquote, da die Staatsanleihen weniger Risiko beinhalten als die Aktien. Im 6. Portfolio (P6) ist die Cashquote auf 0% gesunken, sodass ab diesem Portfolio die Aktien aufgrund ihrer höheren Risikoprämie die Bonds aus den Portfolios verdrängen. Im achten Portfolio (P8) beträgt der Aktienanteil circa 9% bei einer Anleihenquote von 91%.

Eine Analyse der Zusammensetzungen der einzelnen Portfolios zeigt, wie sich die Assetklassen untereinander verhalten. Innerhalb der Aktiengruppe liefern die Emerging-Markets den höchsten Return, beinhalten auf der anderen Seite aber auch ein hohes Risiko. Dennoch sind sie attraktiv zur Erzielung der geforderten Mindestrendite, sodass der Optimierer sie unter den Aktien bevorzugt auswählt. Im Gegensatz dazu bieten die US-Aktien zwar die geringste Risikoprämie unter den Aktien, jedoch diversifizieren sie das Risiko im Portfolio, sodass sie ebenfalls bevorzugt ausgewählt werden. Dagegen scheinen die DAX-Aktien vollkommen unattraktiv. Trotz etwas höherer Risikoprämie und der Tatsache, dass sie keine Währungsrisiken beinhalten, werden sie in kein Portfolio aufgenommen.

Das Halten von Cash in den Fremdwährungen US-Dollar und Rubel ist in dieser Form ebenfalls unattraktiv. Hier können die Gründe bei dem Wechselkursrisiko liegen, das der Optimierer aufgrund der geringen Cash>Returns meidet. Stattdessen investiert der Optimierer in Staatsanleihen. Dabei bevorzugt er lange Laufzeiten, die bei der zugrunde liegenden leicht steigenden Zinskurve (normalen Zinsstruktur) mehr Rendite erwirtschaften. Spanien weist trotz mittlerer Laufzeit die mit Abstand höchste Rendite unter den Staatsanleihen auf. Betrachtet man die Zusammensetzung der Portfolios P3 bis P5, so findet man hohe Anteile bei kurzen deutschen Staatsanleihen als Gegenpol zu den spanischen. Die deutschen Staatsanleihen beinhalten unter den Bonds das geringste Risiko. Durch längere Laufzeiten steigt zwar das Zinsrisiko, jedoch ebenso die Risikoprämie der Anleihen des hier verwendeten Allokationsuniversums. Auf diese Weise gelangen Papiere mit langen Laufzeiten erst bei steigenden Renditeansprüchen verstärkt in die Portfolios. Im achten Portfolio P8 sind keine kurzen Laufzeiten mehr zu finden. Auch die mittleren

Laufzeitbänder sind bis auf die spanischen Anleihen verschwunden. Diese dominieren das Portfolio P8 mit circa 62%.

Eine Erhöhung der Returnanforderungen über die 3,5% des achten Portfolios hinaus, zwingt den Optimierer in stets riskantere Assetklassen. Zur Veranschaulichung dieses Sachverhalts werden die Returnanforderungen in einem ergänzenden Optimierungslauf bis zum Maximalwert von 9,35%, welcher der höchsten erwarteten Rendite innerhalb des Allokationsuniversums entspricht, angehoben.

Die Tabelle 4.8 zeigt die Auswirkungen einer solchen Anhebung der Renditeforderungen auf das ALM-Risiko und die RoRaC-Werte. Als Ausgangspunkt wurde das bereits bekannte Portfolio P8 verwendet. Die Renditen wurden für weitere Portfolios P9 bis P15 in Prozentschritten bis zum Maximum erhöht. Bei Portfolio P15 entspricht die Renditeanforderung von 9,35% der maximal verfügbaren Risikoprämie innerhalb des Allokationsuniversums und hat eine vollständige Investition in die dazugehörige Assetklasse „EM-Aktien“ zur Folge. Ab Portfolio P9 steigt das ALM-Risiko mit jedem geforderten Prozentpunkt Rendite um etwa 10% an und steht am Ende bei fast 60%.

| Kennzahl          | P8     | P9     | P10    | P11    | P12    | P13    | P14    | P15    |
|-------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Returnanforderung | 3,5%   | 4%     | 5%     | 6%     | 7%     | 8%     | 9%     | 9,35%  |
| ALM-Risiko        | 8,86%  | 11,79% | 19,51% | 27,97% | 36,80% | 46,32% | 56,31% | 59,16% |
| RoRaC             | 36,47% | 31,55% | 24,04% | 20,35% | 18,17% | 16,59% | 15,44% | 15,24% |

Tabelle 4.8: Kennzahlen der Portfolios P8 bis P15

Die nachfolgende Abbildung 4.2 verdeutlicht, wie sich die Erhöhung der Rendite auf die Zusammensetzung der Portfolios auswirkt: Der Optimierer baut die langlaufenden Bonds aus P8 zugunsten von renditeträchtigen Aktien ab. Durch stark steigende Aktienanteile erhöht sich auch das ALM-Risiko der Portfolios massiv. Cash spielt in diesen Portfolios keine Rolle mehr.

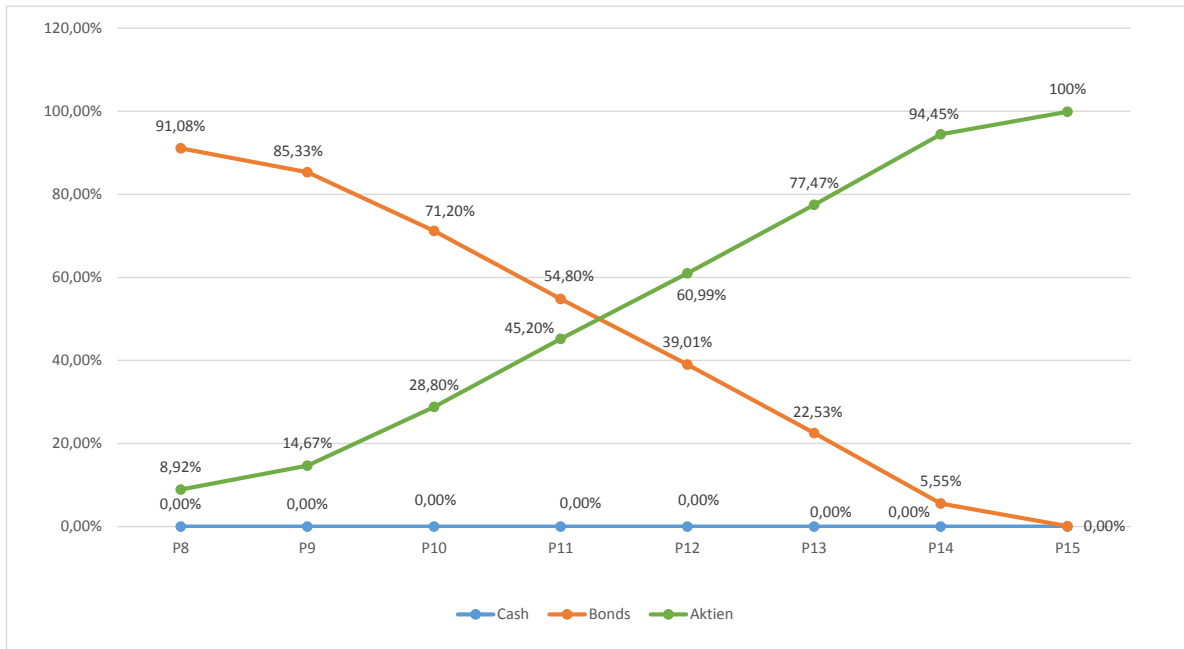


Abbildung 4.2: Darstellung der Anlagegruppen bei höheren Renditeanforderungen

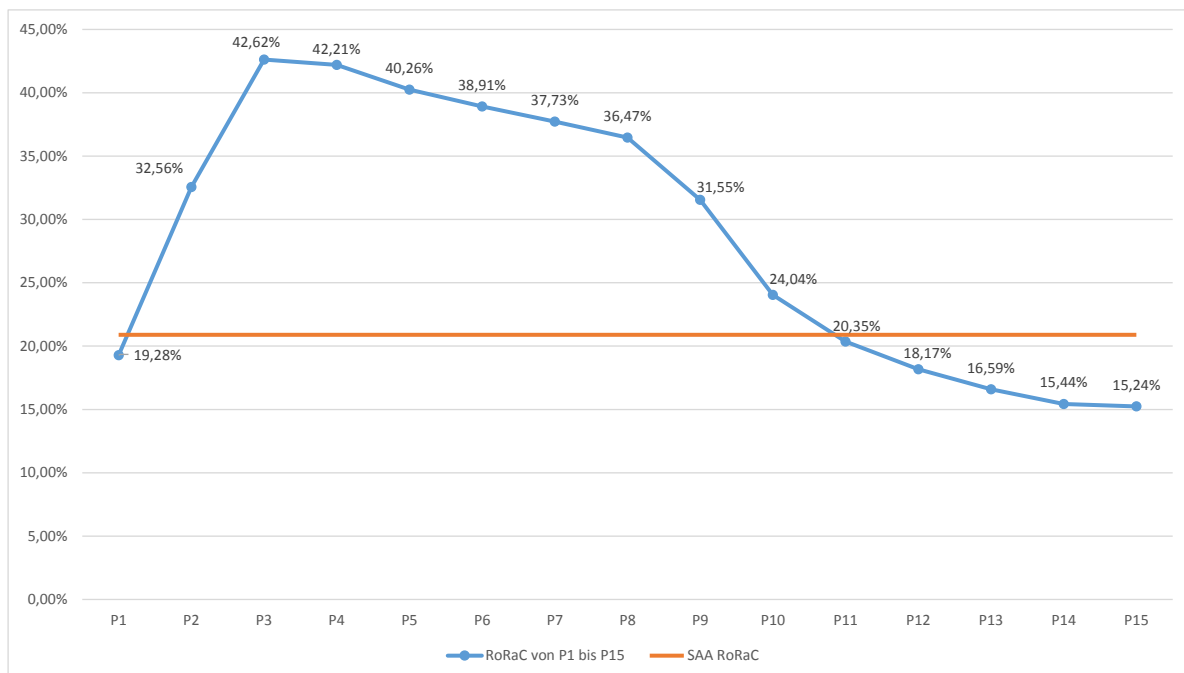


Abbildung 4.3: RoRaC-Werte der Portfolios P1 bis P15

Die Visualisierung der RoRaC-Werte aller fünfzehn Portfolios liefert das in Abbildung 4.3 dargestellte Diagramm. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Portfolios P3 bis P8 die besten RoRaC-Werte unter den fünfzehn Portfolios aufweisen, d. h., sie zeigen die besten Return-Risiko-Verhältnisse in diesem Optimierungslauf. Daher liegt es nahe, für die weiteren Optimierungen den Bereich um die Portfolios P3 bis P8 zu untersuchen.

Betrachtet man im Vergleich zu den Ergebnisportfolios das aktuelle SAA-Portfolio, so liefert dieses lediglich einen RoRaC von 20,89% (orange Linie). Vergleicht man ALM-Risiko und Excess-Return des SAA-Portfolios beispielsweise mit Portfolio P3, so wird bei letzterem trotz einer um 20 Basispunkte höheren Renditeerwartung ein deutlich geringeres ALM-Risiko gemessen. Portfolio P4 weist zwar ein ähnliches Risiko wie das SAA-Portfolio aus, jedoch fällt der erwartete Return fast doppelt so hoch aus. Demnach ließe sich gemäß der Optimierung eine deutliche Verbesserung gegenüber dem aktuellen SAA-Portfolio erzielen.

Transaktionskosten wurden in dieser Optimierung nicht berücksichtigt. Dennoch sind in der Kennzahlentabelle die TAK, die zwischen dem SAA-Portfolio und den optimierten Portfolios anfallen würden, angegeben. Dies dient insbesondere dem Vergleich mit der folgenden TAK-Optimierung.

Trotz ihrer Realitätsferne aufgrund fehlender TAK zeigt diese erste Optimierung, wie sich die Portfolios mit steigenden Renditeanforderungen ohne Nebenbedingungen verändern. Eine erste zentrale Erweiterung der Optimierung ist die Einbindung der Transaktionskostenberechnung in die Bedingung an den Mindestreturn.

## 4.3 Einbindung von Transaktionskosten

Die Einbindung von Transaktionskosten (TAK) in die Optimierung verändert die Effizienzlinie und somit die einzelnen optimalen Portfolios. Es gibt mehrere Möglichkeiten die Optimierung ohne TAK mit einer Optimierung unter Berücksichtigung der Transaktionskosten zu vergleichen.

Um die Effekte der Transaktionskostennebenbedingung innerhalb einer Optimierung bestmöglich zu isolieren, wird die Überrendite „Excess-Return inkl. TAK“ der Portfolios P1 bis P8 aus dem Ergebnis der Optimierung ohne TAK als Mindest-Return-Anforderung für

die Transaktionskosten-Optimierung eingesetzt.<sup>6</sup> Dieses Vorgehen ermöglicht eine Analyse der Veränderungen der optimalen Portfolios durch die Transaktionskostennebenbedingung, da die Forderung nach identischen Werten für den „Excess-Return inkl. TAK“ insgesamt ähnliche Kennzahlen bedingt.

### Optimierungsergebnisse

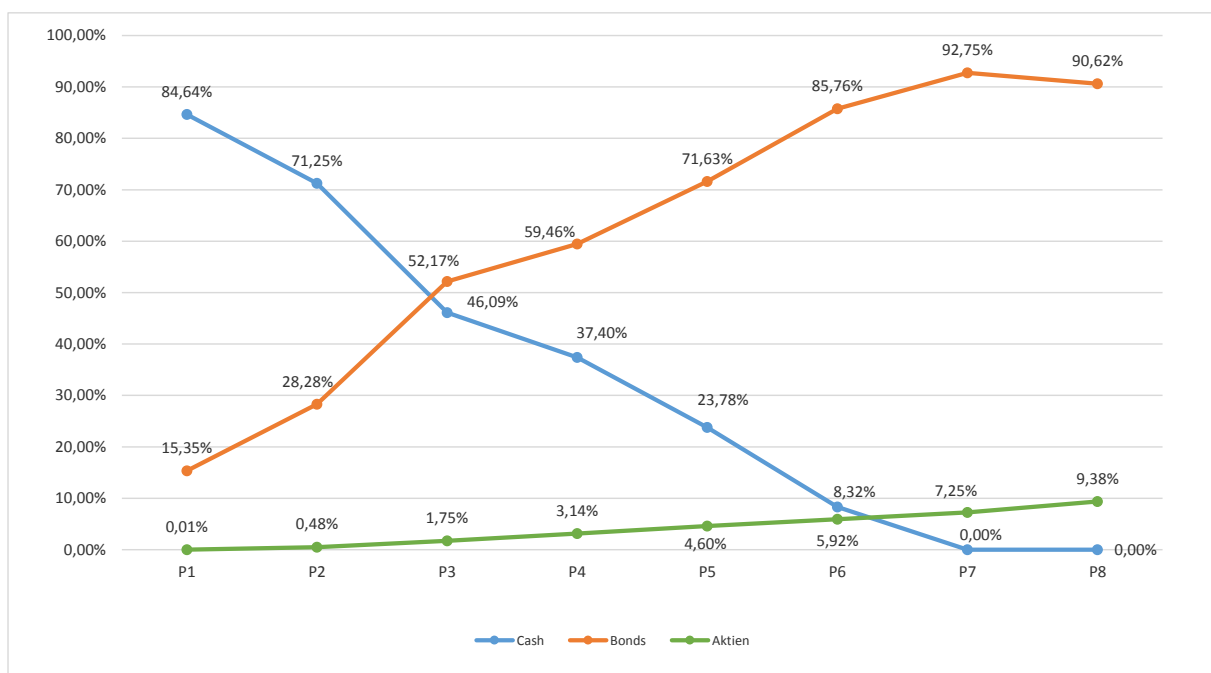
In der unteren Tabelle der Ergebnisabbildung 4.4 sind neben der Zusammensetzung der Portfolios, die Transaktionskosten sowie das Startportfolio (SAA-Portfolio), von dem die Transaktionskosten ausgehend berechnet werden, aufgeführt. Die Transaktionskosten sind in Basispunkten<sup>7</sup> (bp) angegeben. Die TAK für Aktien liegen einheitlich bei 25bp, bei Cash und Bonds sind diese dagegen sehr unterschiedlich. Während für USD-Cash nur ein Basispunkt an TAK verlangt wird, liegen die TAK bei RUB-Cash bereits bei 10bp. Auch bei den Staatsanleihen ist der Handel mit Emerging-Markets am teuersten. Dort werden TAK in Höhe von 35bp verlangt. Die spanischen Bonds sind im Verhältnis zu USD- und EUR-Bonds mit 30bp TAK ebenfalls relativ teuer im Handel.

Betrachtet man im Diagramm das Zusammenspiel der drei Gruppen Cash, Bonds und Aktien, zeigt sich, dass der Abbau von Cash durch die Transaktionskostenbelastung verlangsamt wird. So enthält Portfolio P6 noch über 8% Cash, während bei der TAK-freien Optimierung in P6 bereits kein Cash mehr im Portfolio vorhanden war. Dafür ist der Anteil an Staatsanleihen um circa 9%-Punkte gegenüber der vorherigen Optimierung gesunken. Diese fehlenden 9%-Punkte kommen im Wesentlichen durch –3%-Punkte Spanien (allg.) und eine Verschiebung der prozentualen Aufteilung innerhalb der deutschen Staatsanleihen zustande. Vergleicht man P6 mit dem SAA-Portfolio, so hält der Optimierer die Positionen Germany 1-3 und Germany 7-10. Hier lohnt es sich unter Transaktionskostenaspekten nicht mehr, die Papiere gegen andere Laufzeiten oder andere Anlageklassen einzutauschen, wie es bei der Optimierung ohne TAK der Fall war. (Ohne TAK waren die kurzen Laufzeiten (Germany 1-3) sowie die langen (Germany 10-30) bevorzugt ausgewählt worden.) Die gleichen Tendenzen lassen sich in abgeschwächter Form auch bei den USD-Bonds erkennen. Die spanischen Bonds bleiben dominierend, auch wenn sie durch ihre hohen TAK anteilig etwas zurückgedrängt werden. Davon profitieren die Aktien, die

<sup>6</sup> Im ersten Optimierungslauf sind die potenziell anfallenden Transaktionskosten für die optimierten Portfolios zwar ausgewiesen worden, jedoch nicht in die Optimierung als Nebenbedingung eingeflossen. Das heißt, sie haben das Optimierungsergebnis nicht beeinflusst.

<sup>7</sup> Ein Basispunkt entspricht einem Hunderstel Prozentpunkt, d. h.  $1bp = 0,01\%$ .

| Kennzahl                       | RNPF  | SAA          | P1           | P2           | P3           | P4           | P5           | P6           | P7           | P8           |
|--------------------------------|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Mindest-Return (gefordert)     |       |              | 0,24%        | 0,45%        | 0,93%        | 1,39%        | 1,84%        | 2,30%        | 2,76%        | 3,23%        |
| Return (inkl. RNPF-Return)     | 0,02% | 0,72%        | 0,29%        | 0,47%        | 0,95%        | 1,41%        | 1,86%        | 2,32%        | 2,78%        | 3,25%        |
| <b>Excess-Return inkl. TAK</b> |       | <b>0,70%</b> | <b>0,27%</b> | <b>0,45%</b> | <b>0,93%</b> | <b>1,39%</b> | <b>1,84%</b> | <b>2,30%</b> | <b>2,76%</b> | <b>3,23%</b> |
| Excess-Return ohne TAK         |       |              | 0,32%        | 0,50%        | 0,99%        | 1,48%        | 1,98%        | 2,48%        | 2,98%        | 3,49%        |
| TAK                            |       |              | 0,05%        | 0,05%        | 0,06%        | 0,09%        | 0,14%        | 0,18%        | 0,22%        | 0,26%        |
| <b>ALM-Risiko</b>              |       | <b>3,35%</b> | <b>1,27%</b> | <b>1,36%</b> | <b>2,18%</b> | <b>3,28%</b> | <b>4,54%</b> | <b>5,89%</b> | <b>7,26%</b> | <b>8,84%</b> |
| RoRaC                          |       | 20,89%       | 20,99%       | 32,99%       | 42,71%       | 42,44%       | 40,49%       | 39,06%       | 37,99%       | 36,53%       |
| Duration                       | 3,60  | 2,67         | 2,00         | 2,48         | 3,47         | 4,27         | 5,11         | 5,99         | 6,78         | 6,95         |



| Nr | Assetklasse           | TAK | SAA    | P1     | P2     | P3     | P4     | P5     | P6     | P7     | P8     |
|----|-----------------------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1  | DAX                   | 25  | 2,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,23%  | 0,55%  | 0,76%  |
| 2  | SX5E                  | 25  | 1,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,18%  | 0,73%  | 0,78%  | 1,00%  | 1,00%  | 1,00%  |
| 3  | EM-Aktien             | 25  | 0,00%  | 0,00%  | 0,07%  | 0,57%  | 1,06%  | 1,64%  | 2,34%  | 2,81%  | 5,88%  |
| 4  | USD-Aktien            | 25  | 1,00%  | 0,01%  | 0,41%  | 1,00%  | 1,34%  | 2,18%  | 2,35%  | 2,90%  | 1,74%  |
| 5  | EUR-Cash 0-1          | 6   | 40,00% | 80,87% | 71,25% | 46,09% | 37,40% | 23,78% | 8,32%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 6  | RUB-Cash 0-1          | 10  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 7  | USD-Cash 0-1          | 1   | 6,00%  | 3,77%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 8  | Germany 1-3           | 2   | 12,00% | 0,00%  | 4,95%  | 17,59% | 12,00% | 12,00% | 12,00% | 5,54%  | 0,00%  |
| 9  | Germany 3-5           | 3   | 10,00% | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 10 | Germany 5-7           | 3   | 8,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 1,11%  | 1,76%  | 4,21%  | 3,96%  | 0,00%  |
| 11 | Germany 7-10          | 5   | 5,00%  | 4,12%  | 4,71%  | 5,00%  | 5,00%  | 5,00%  | 5,00%  | 5,00%  | 0,00%  |
| 12 | Germany 10-30         | 14  | 5,00%  | 6,89%  | 7,79%  | 9,41%  | 11,25% | 13,11% | 14,86% | 17,38% | 18,29% |
| 13 | Spanien (allg.)       | 30  | 0,00%  | 0,00%  | 2,71%  | 11,78% | 21,26% | 30,90% | 40,33% | 50,82% | 59,56% |
| 14 | EM-Government (allg.) | 35  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 15 | USD-Government 1-3    | 1   | 4,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 16 | USD-Government 3-5    | 1,5 | 3,00%  | 0,00%  | 5,03%  | 2,99%  | 1,06%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 17 | USD-Government 5-7    | 1,5 | 2,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 18 | USD-Government 7-10   | 2   | 1,00%  | 2,25%  | 0,00%  | 0,57%  | 1,97%  | 1,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  |
| 19 | USD-Government 10-20  | 4   | 0,00%  | 2,10%  | 3,09%  | 4,82%  | 5,81%  | 7,86%  | 9,36%  | 10,05% | 12,77% |

Abbildung 4.4: Ergebnisse der Optimierung ohne Nebenbedingungen mit TAK

in Summe etwas stärker vertreten sind als in der vorherigen TAK-freien Optimierung. Grund hierfür sind ihre gute Rendite und etwas geringeren TAK gegenüber den spanischen Anleihen. Damit tragen sie anstelle der spanischen Bonds zur Erreichung der geforderten Mindestrenditen bei.

Bedingt durch Diversifikationseffekte sind die europäischen Aktien in dieser Optimierung etwas stärker vertreten und auch der DAX wird in den hinteren Portfolios P6 bis P8 vom Optimierer in kleinen Mengen gekauft.

Das erste Portfolio P1 ist bei beiden Optimierungen das risikominimale Portfolio und daher in seiner Zusammensetzung identisch. Die Kennzahlen der Portfolios verändern sich durch die Transaktionskosteneinbindung wenig. Das ALM-Risiko fällt in den meisten Portfolios etwas geringer aus. Dies ist eine Folge der Berücksichtigung der TAK, die durch ihre Mitoptimierung geringer ausfallen als in der vorherigen Optimierung. Da die Zielgröße „Excess-Return inkl. TAK“ durch die Renditeanforderungen gleich bleibt, reduziert sich ebenfalls der „Excess-Return ohne TAK“ aufgrund des einfachen Zusammenhangs

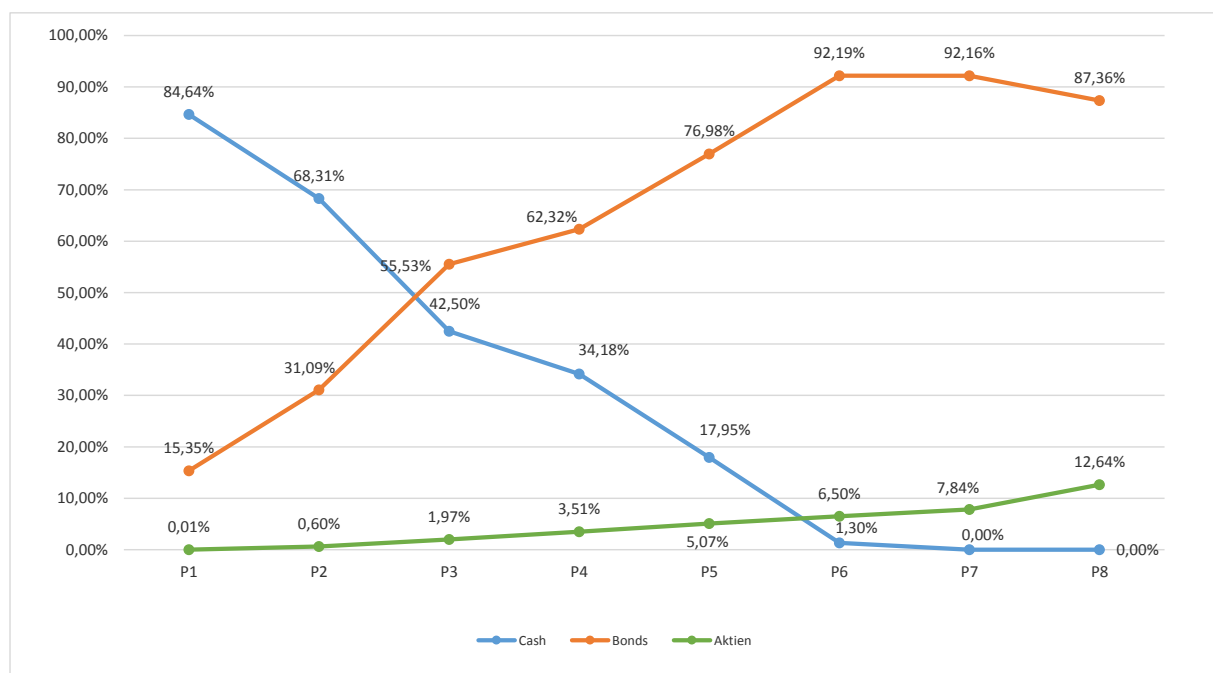
$$\text{Excess-Return inkl. TAK} = \text{Excess-Return ohne TAK} - \text{TAK}$$

im gleichen Maß wie die TAK. Folglich muss der Optimierer weniger Risiko eingehen, um die geforderten Returns zu erzielen.

In einem **zweiten Optimierungslauf unter TAK-Berücksichtigung** wird der „Excess-Return inkl. TAK“ mit dem „Excess-Return ohne TAK“ aus der TAK-freien Optimierung gleichgesetzt. Dieser Vergleich zeigt die Auswirkung der TAK-Nebenbedingung auf das ALM-Risiko und damit auf das benötigte Risikokapital. Der Optimierer wird gezwungen höhere Risiken einzugehen, da er die TAK zusätzlich verdienen muss, sodass die Risiko-Rendite-Profile der Portfolios aus den genannten beiden Optimierungen nicht miteinander vergleichbar sind. Betriebswirtschaftlich formuliert beantwortet diese Optimierung dem Investor die Frage, wie sich seine Risikoposition durch die Notwendigkeit des Hinzuverdienens der TAK gegenüber seinem Startportfolio (hier das SAA-Portfolio) verändert.

Die dazugehörigen Ergebnisse in der Abbildung 4.5 zeigen einen Anstieg des ALM-Risikos, das mit zunehmender Returnanforderung überproportional zunimmt. Darunter leiden die RoRaC-Werte, da die Optimierung in den meisten Portfolios ein schlechteres Verhältnis von Rendite zu Risiko liefert. Bei steigender Renditeanforderung werden die Bonds in längere Laufzeiten gedrängt, wodurch die Portfoliodurationen steigen.

| Kennzahl                       | RNPF  | SAA          | P1           | P2           | P3           | P4           | P5           | P6           | P7           | P8            |
|--------------------------------|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|
| Mindest-Return (gefordert)     |       |              | 0,0%         | 0,5%         | 1,0%         | 1,5%         | 2,0%         | 2,5%         | 3,0%         | 3,5%          |
| Return (inkl. RNPF-Return)     | 0,02% | 0,72%        | 0,29%        | 0,52%        | 1,02%        | 1,52%        | 2,02%        | 2,52%        | 3,02%        | 3,52%         |
| <b>Excess-Return inkl. TAK</b> |       | <b>0,70%</b> | <b>0,27%</b> | <b>0,50%</b> | <b>1,00%</b> | <b>1,50%</b> | <b>2,00%</b> | <b>2,50%</b> | <b>3,00%</b> | <b>3,50%</b>  |
| Excess-Return ohne TAK         |       |              | 0,32%        | 0,55%        | 1,07%        | 1,60%        | 2,15%        | 2,70%        | 3,24%        | 3,77%         |
| TAK                            |       |              | 0,05%        | 0,05%        | 0,07%        | 0,10%        | 0,15%        | 0,20%        | 0,24%        | 0,27%         |
| <b>ALM-Risiko</b>              |       | <b>3,35%</b> | <b>1,27%</b> | <b>1,42%</b> | <b>2,36%</b> | <b>3,57%</b> | <b>5,01%</b> | <b>6,46%</b> | <b>7,96%</b> | <b>10,33%</b> |
| RoRaC                          |       | 20,89%       | 20,99%       | 35,23%       | 42,40%       | 42,03%       | 39,94%       | 38,71%       | 37,71%       | 33,89%        |
| Duration                       | 3,60  | 2,67         | 2,00         | 2,60         | 3,62         | 4,47         | 5,41         | 6,37         | 7,11         | 6,45          |



| Nr | Assetklasse           | FX  | Kat.   | P1            | P2            | P3            | P4            | P5            | P6            | P7            | P8            |
|----|-----------------------|-----|--------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 1  | DAX                   | EUR | Aktien | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,31%         | 0,85%         | 0,00%         |
| 2  | SX5E                  | EUR | Aktien | 0,00%         | 0,00%         | 0,25%         | 0,67%         | 1,00%         | 1,00%         | <b>1,00%</b>  | <b>1,00%</b>  |
| 3  | EM-Aktien             | RUB | Aktien | 0,00%         | 0,15%         | 0,72%         | <b>1,25%</b>  | <b>1,85%</b>  | <b>2,58%</b>  | <b>3,22%</b>  | <b>10,24%</b> |
| 4  | USD-Aktien            | USD | Aktien | 0,01%         | 0,46%         | <b>1,00%</b>  | <b>1,58%</b>  | <b>2,22%</b>  | <b>2,62%</b>  | <b>2,77%</b>  | <b>1,40%</b>  |
| 5  | EUR-Cash 0-1          | EUR | Cash   | <b>80,87%</b> | <b>68,31%</b> | <b>42,50%</b> | <b>34,18%</b> | <b>17,95%</b> | <b>1,30%</b>  | 0,00%         | 0,00%         |
| 6  | RUB-Cash 0-1          | RUB | Cash   | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         |
| 7  | USD-Cash 0-1          | USD | Cash   | <b>3,77%</b>  | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         |
| 8  | Germany 1-3           | EUR | Bonds  | 0,00%         | <b>6,75%</b>  | <b>19,27%</b> | <b>12,00%</b> | <b>12,00%</b> | <b>12,00%</b> | 0,00%         | 0,00%         |
| 9  | Germany 3-5           | EUR | Bonds  | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         |
| 10 | Germany 5-7           | EUR | Bonds  | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | <b>1,53%</b>  | <b>3,34%</b>  | <b>5,44%</b>  | 0,46%         | 0,00%         |
| 11 | Germany 7-10          | EUR | Bonds  | <b>4,12%</b>  | <b>4,41%</b>  | <b>5,00%</b>  | <b>5,00%</b>  | <b>5,00%</b>  | <b>5,00%</b>  | <b>5,00%</b>  | 0,00%         |
| 12 | Germany 10-30         | EUR | Bonds  | <b>6,89%</b>  | <b>8,24%</b>  | <b>9,96%</b>  | <b>11,37%</b> | <b>13,36%</b> | <b>15,61%</b> | <b>19,12%</b> | <b>14,38%</b> |
| 13 | Spanien (allg.)       | EUR | Bonds  | 0,00%         | <b>3,54%</b>  | <b>12,84%</b> | <b>23,60%</b> | <b>34,07%</b> | <b>44,55%</b> | <b>56,85%</b> | <b>59,70%</b> |
| 14 | EM-Government (allg.) | RUB | Bonds  | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         |
| 15 | USD-Government 1-3    | USD | Bonds  | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         |
| 16 | USD-Government 3-5    | USD | Bonds  | 0,00%         | <b>4,85%</b>  | <b>2,91%</b>  | 0,71%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         |
| 17 | USD-Government 5-7    | USD | Bonds  | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         |
| 18 | USD-Government 7-10   | USD | Bonds  | <b>2,25%</b>  | 0,00%         | 0,86%         | <b>1,00%</b>  | 0,82%         | 0,00%         | 0,00%         | 0,00%         |
| 19 | USD-Government 10-20  | USD | Bonds  | <b>2,10%</b>  | <b>3,31%</b>  | <b>4,70%</b>  | <b>7,11%</b>  | <b>8,40%</b>  | <b>9,59%</b>  | <b>10,72%</b> | <b>13,27%</b> |

Abbildung 4.5: Ergebnisse der 2. Optimierung ohne Nebenbedingungen mit TAK

Die Zusammensetzungen der Portfolios P1 bis P8 zeigen einen ähnlichen Verlauf wie bei der ersten TAK-Optimierung. Sie bewegen sich allerdings ein Stück weiter oben auf der (gleichen) Effizienzlinie. In der nachfolgenden Abbildung 4.6 werden die Effizienzlinien für die drei bisher durchgeführten Optimierungsläufe gezeigt. Die einzelnen Punkte auf den Effizienzlinien markieren die Portfolios P1 bis P8 jeweils von links nach rechts. Die Linien der beiden TAK-Optimierungen liegen übereinander.

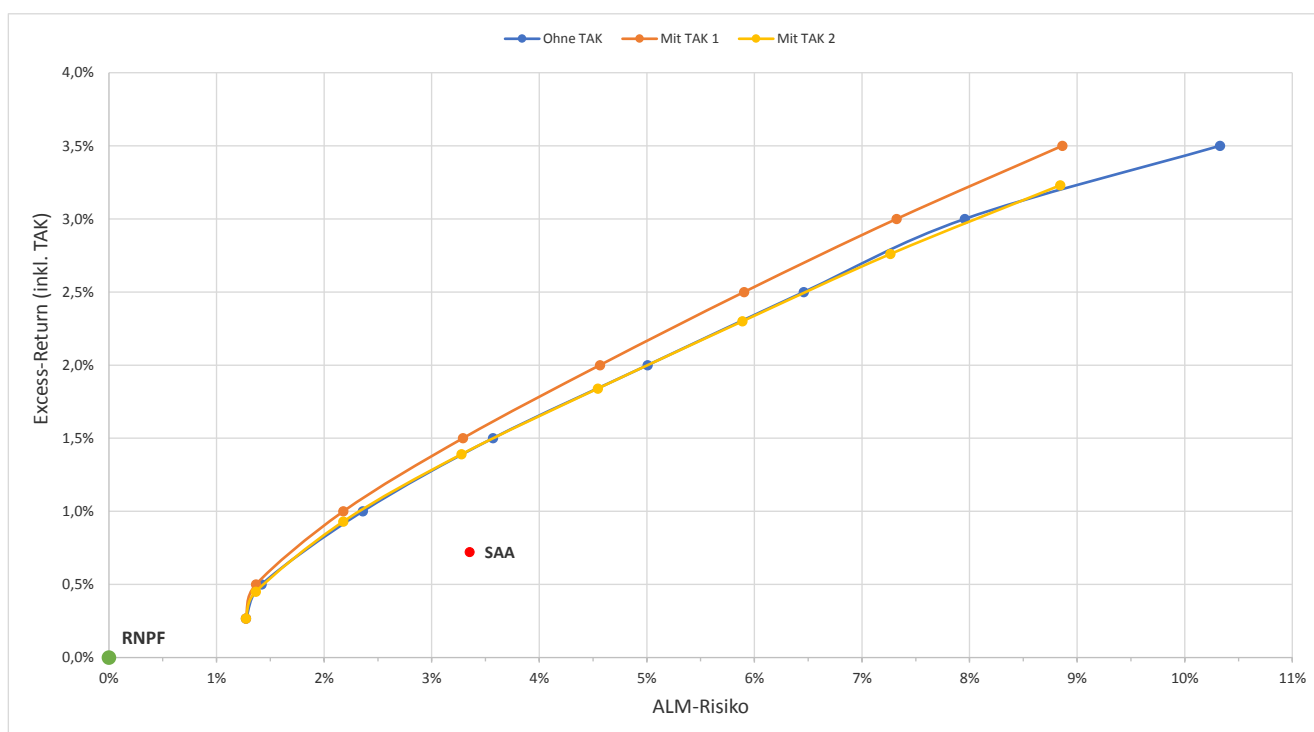


Abbildung 4.6: Effizienzlinien der Optimierungen ohne Nebenbedingungen

Im Ursprung liegt das risikoneutrale Portfolio (RNPF), das die Nullposition sowohl für den Excess-Return (inkl. TAK) als auch für das ALM-Risiko darstellt. Das aktuelle SAA-Portfolio liegt unterhalb aller Effizienzlinien und befindet sich somit in der Menge der ineffizienten Portfolios. Das Hinzufügen weiterer wirksamer Nebenbedingungen wird die Effizienzlinie weiter nach unten beugen, sodass die Lösungsmenge  $\mathbb{L}$  stetig kleiner wird.

## 4.4 Optimierung unter Nebenbedingungen

In diesem Abschnitt wird das Optimierungsbeispiel neben der Transaktionskostenbedingung um weitere Nebenbedingungen ergänzt.

### 1. Optimierung mit Nebenbedingungen

Auf Grundlage der Optimierungsergebnisse aus Abbildung 4.5 beschließt das Investmentkomitee, dass das Verhältnis von spanischen Staatsanleihen zu deutschen Staatsanleihen maximal 1 zu 4 betragen soll. Des Weiteren sollen die Investments in Emerging-Markets keinesfalls 10% des Portfoliovolumens überschreiten. Zum Ausgleich der Einschränkungen bei spanischen Staatsanleihen und Emerging-Markets soll der Optimierer nicht zu stark in Aktien ausweichen können, sodass die Aktienquote auf 15% begrenzt wird. Außerdem hält die Versicherung eine strategische Beteiligung an einem DAX-Konzern, die einem prozentualen Anteil von 1,5% am Portfolio entspricht. Shortpositionen sollen weiterhin nicht erlaubt werden.

| Nr | Assetklasse           | FX  | Kat.   | lbx   | ubx     |
|----|-----------------------|-----|--------|-------|---------|
| 1  | DAX                   | EUR | Aktien | 1,50% | 100,00% |
| 2  | SX5E                  | EUR | Aktien | 0,00% | 100,00% |
| 3  | EM-Aktien             | RUB | Aktien | 0,00% | 100,00% |
| 4  | USD-Aktien            | USD | Aktien | 0,00% | 100,00% |
| 5  | EUR-Cash 0-1          | EUR | Cash   | 0,00% | 100,00% |
| 6  | RUB-Cash 0-1          | RUB | Cash   | 0,00% | 100,00% |
| 7  | USD-Cash 0-1          | USD | Cash   | 0,00% | 100,00% |
| 8  | Germany 1-3           | EUR | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 9  | Germany 3-5           | EUR | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 10 | Germany 5-7           | EUR | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 11 | Germany 7-10          | EUR | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 12 | Germany 10-30         | EUR | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 13 | Spanien (allg.)       | EUR | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 14 | EM-Government (allg.) | RUB | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 15 | USD-Government 1-3    | USD | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 16 | USD-Government 3-5    | USD | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 17 | USD-Government 5-7    | USD | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 18 | USD-Government 7-10   | USD | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 19 | USD-Government 10-20  | USD | Bonds  | 0,00% | 100,00% |

Abbildung 4.7: Nebenbedingungen lbx/ubx

Um diese Restriktionen an den Optimierer zu übergeben, müssen unterschiedliche Nebenbedingungen eingefügt werden. Die einfachste Anpassung stellt dabei die strategische Beteiligung dar, da hier lediglich die Untergrenze *lbx* des DAXgewichts von 0% auf 1,5% angehoben wird. Alle anderen Positionen der Grenzvektoren *lbx/ubx* bleiben unverändert.

Die verbleibenden drei Anforderungen werden als Gruppennebenbedingungen dargestellt. Dies geschieht entsprechend der Ausführungen in Kapitel 3.10. Für jede neue Nebenbedingung wird (mindestens) eine neue Zeile zur Nebenbedingungsmatrix  $A$  hinzugefügt.

- **Aktienbegrenzung auf 15%**

Hierzu lautet die Gleichung

$$0 \leq \underbrace{\sum_{i=1}^4 w_i}_{\text{Summe der Aktiengewichte}} \leq 0,15,$$

wobei die Nummerierung der Gewichte den Nummern der Assetklassen entspricht. Somit wird für alle vier Aktiengewichte (1 DAX, 2 SX5E, 3 EM-Aktien, 4 USD-Aktien) als Matrixeinträge der Wert 1 (Koeffizienten der  $w_i$ 's) eingetragen. Die Grenzen zu der Nebenbedingungszeile lauten  $lbA_{Neb} = 0$  und  $ubA_{Neb} = 0,15$ .

- **Begrenzung der Emerging-Markets auf 10%**

Analog zu der Aktienrestriktion lautet die Gleichung für die Emerging-Markets

$$0 \leq w_3 + w_6 + w_{14} \leq 0,1,$$

wobei die Assetklassen 3 (EM-Aktien), 6 (RUB-Cash) und 14 (EM-Government) die Vertreter der Emerging-Markets sind. Die dazugehörigen Grenzen lauten  $lbA_{Neb} = 0$  und  $ubA_{Neb} = 0,1$ .

- **Relative Einschränkung spanischer Staatsanleihen**

Die Darstellung von Relationen verschiedener Assetklassen zueinander ist nicht immer einfach umzusetzen. Beispiele dafür sind die Fondsabbildung aus Kapitel 3.12 und die Absicherung mit Devisentermingeschäften (Kapitel 3.13).

Bei der gewünschten Nebenbedingung sollen die spanischen Staatsanleihen (13 Spanien (allg.)) nicht mehr als ein Viertel der im Portfolio enthaltenen deutschen Staatsanleihen (Assetklassen Nr. 8, 9, 10, 11, 12) ausmachen, d. h.

$$\underbrace{w_{13}}_{\text{Spanien (allg.)}} \leq \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\sum_{i=8}^{12} w_i}_{\text{Summe deutscher Staatsanleihen}}$$

Wie üblich muss die lineare Ungleichung in der Form

$$-\infty \leq w_{13} - \sum_{i=8}^{12} \frac{1}{4} w_i \leq 0 \quad (4.3)$$

dargestellt werden.

Da das Optimierungsprogramm eine numerische Zahl als Untergrenze  $lbA$  verlangt, kann entweder das Minimum von  $\min(w_{13} - \sum_{i=8}^{12} \frac{1}{4} w_i) = \frac{1}{4}$  genommen oder ein besonders kleiner Wert, z. B.  $lbA = -(10^{10})$ , angegeben werden. Die konsequente Verwendung eines solchen speziell ausgezeichneten Werts bietet den Vorteil der Wiedererkennung eines mathematischen “ $\pm\infty$ ” innerhalb des Optimierungsprogramms.

Die drei Gruppennebenbedingungen sind in Abbildung 4.8 in tabellarischer Form dargestellt.<sup>8</sup>

|         |                       |     |        | Spanien Anteil       | Emerging Markets | Aktien |
|---------|-----------------------|-----|--------|----------------------|------------------|--------|
| lbA_Neb |                       |     |        | -(10 <sup>10</sup> ) | 0                | 0      |
| ubA_Neb |                       |     |        | 0                    | 0,1              | 0,15   |
| Nr      | Assetklasse           | FX  | Kat.   |                      |                  |        |
| 1       | DAX                   | EUR | Aktien | 0,00                 | 0                | 1      |
| 2       | SX5E                  | EUR | Aktien | 0,00                 | 0                | 1      |
| 3       | EM-Aktien             | RUB | Aktien | 0,00                 | 1                | 1      |
| 4       | USD-Aktien            | USD | Aktien | 0,00                 | 0                | 1      |
| 5       | EUR-Cash 0-1          | EUR | Cash   | 0,00                 | 0                | 0      |
| 6       | RUB-Cash 0-1          | RUB | Cash   | 0,00                 | 1                | 0      |
| 7       | USD-Cash 0-1          | USD | Cash   | 0,00                 | 0                | 0      |
| 8       | Germany 1-3           | EUR | Bonds  | -0,25                | 0                | 0      |
| 9       | Germany 3-5           | EUR | Bonds  | -0,25                | 0                | 0      |
| 10      | Germany 5-7           | EUR | Bonds  | -0,25                | 0                | 0      |
| 11      | Germany 7-10          | EUR | Bonds  | -0,25                | 0                | 0      |
| 12      | Germany 10-30         | EUR | Bonds  | -0,25                | 0                | 0      |
| 13      | Spanien (allg.)       | EUR | Bonds  | 1,00                 | 0                | 0      |
| 14      | EM-Government (allg.) | RUB | Bonds  | 0,00                 | 1                | 0      |
| 15      | USD-Government 1-3    | USD | Bonds  | 0,00                 | 0                | 0      |
| 16      | USD-Government 3-5    | USD | Bonds  | 0,00                 | 0                | 0      |
| 17      | USD-Government 5-7    | USD | Bonds  | 0,00                 | 0                | 0      |
| 18      | USD-Government 7-10   | USD | Bonds  | 0,00                 | 0                | 0      |
| 19      | USD-Government 10-20  | USD | Bonds  | 0,00                 | 0                | 0      |

Abbildung 4.8: Gruppennebenbedingungen

<sup>8</sup> Die inhaltliche Darstellung gleicht der Darstellung in Tabelle 3.14, wurde jedoch aus Platzgründen anders aufgeteilt.

### Optimierungsergebnisse

Bei der Betrachtung der Ergebnisse dieses Optimierungslaufs (Abbildung 4.9 auf der nächsten Seite) zeigt sich, dass die Returnanforderung von 3,5% für Portfolio P8 unter den gegebenen Nebenbedingungen nicht mehr erfüllbar ist, infolgedessen es kein Lösungsportfolio zu dieser Anforderung gibt.

In Portfolio P7 ist, wie im Diagramm ersichtlich, die Obergrenze von 15% für Aktieninvestments erreicht worden, sodass ein Renditezugewinn durch einen weiteren Aktienaufbau nicht möglich ist. Ebenso sind die spanischen Anleihen, die unter den Bonds die höchste Rendite bieten, an ihrer maximalen Grenze von 25%, anteilig an den deutschen Staatsanleihen gemessen, angekommen.<sup>9</sup> (Diese Grenze wird ebenfalls in den Portfolios P3 bis P6 erreicht.)

Auch die Grenze der dritten Gruppennebenbedingung greift in Portfolio P7: Die Auslastung der 10%-Obergrenze für Emerging-Markets-Titel wird durch die Assetklasse „EM-Aktien“ erreicht. Eine Zusammenfassung der Auslastung der Gruppenrestriktionen zeigt die folgende Tabelle 4.9.

| GruppenNB | Grenzen |     | P1           | P2           | P3            | P4            | P5            | P6            | P7            |
|-----------|---------|-----|--------------|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| Aktien    | 1,5%    | 15% | <b>1,50%</b> | <b>1,50%</b> | 2,76%         | 5,17%         | 9,59%         | 14,09%        | <b>15,00%</b> |
| EM        | 0%      | 10% | 0,00%        | 0,00%        | 0,52%         | 1,90%         | 4,14%         | 6,20%         | <b>10,00%</b> |
| Spanien   | 0%      | 25% | 0,00%        | 12,41%       | <b>25,00%</b> | <b>25,00%</b> | <b>25,00%</b> | <b>25,00%</b> | <b>25,00%</b> |

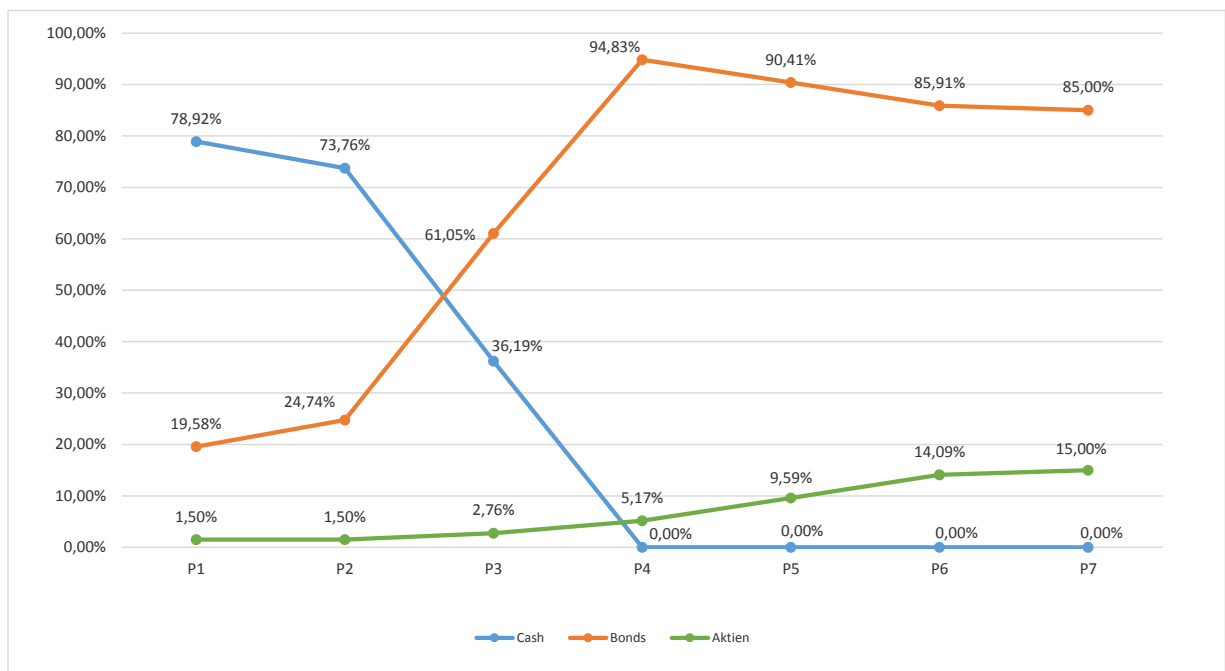
Tabelle 4.9: Auslastung der Gruppennebenbedingungen

Durch die erzwungene Investition von 1,5% in den DAX aufgrund der strategischen Beteiligung, verändert sich das risikominimale Portfolio P1 und damit auch die Effizienzlinie gegenüber der vorherigen Optimierung. Bis einschließlich Portfolio P6 hält der Optimierer diese Untergrenze für den DAX ein, in Portfolio P7 wird der DAX-Anteil um 30bp erhöht. Dies zeigt, dass die strategische Beteiligung zunächst einmal keine Einschränkung für das Erreichen höherer Renditen darstellt.

<sup>9</sup> Die Summe der deutschen Staatsanleihen beträgt 62,46%, wovon 25% genau den 15,615% spanischer Bonds in P7 entsprechen.

| Kennzahl                       | RNPF  | SAA          | P1           | P2           | P3           | P4           | P5           | P6           | P7            | P8   |
|--------------------------------|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|------|
| Mindest-Return (gefordert)     |       |              | 0,0%         | 0,5%         | 1,0%         | 1,5%         | 2,0%         | 2,5%         | 3,0%          | 3,5% |
| Return (inkl. RNPF-Return)     | 0,02% | 0,72%        | 0,43%        | 0,52%        | 1,02%        | 1,52%        | 2,02%        | 2,52%        | 3,02%         |      |
| <b>Excess-Return inkl. TAK</b> |       | <b>0,70%</b> | <b>0,41%</b> | <b>0,50%</b> | <b>1,00%</b> | <b>1,50%</b> | <b>2,00%</b> | <b>2,50%</b> | <b>3,00%</b>  |      |
| Excess-Return ohne TAK         |       |              | 0,45%        | 0,55%        | 1,06%        | 1,61%        | 2,12%        | 2,64%        | 3,17%         |      |
| TAK                            |       |              | 0,04%        | 0,05%        | 0,06%        | 0,11%        | 0,12%        | 0,14%        | 0,17%         |      |
| <b>ALM-Risiko</b>              |       | <b>3,35%</b> | <b>1,52%</b> | <b>1,59%</b> | <b>2,42%</b> | <b>3,87%</b> | <b>5,83%</b> | <b>8,18%</b> | <b>10,91%</b> |      |
| RoRaC                          |       | 20,89%       | 26,71%       | 31,45%       | 41,32%       | 38,76%       | 34,33%       | 30,55%       | 27,49%        |      |
| Duration                       | 3,60  | 2,67         | 2,28         | 2,55         | 3,74         | 4,84         | 6,03         | 7,21         | 9,45          |      |

Keine Lösung



| Nr | Assetklasse           | FX  | Kat.   | P1     | P2     | P3     | P4     | P5     | P6     | P7     | P8    |
|----|-----------------------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
| 1  | DAX                   | EUR | Aktien | 1,50%  | 1,50%  | 1,50%  | 1,50%  | 1,50%  | 1,50%  | 1,80%  | 0,00% |
| 2  | SX5E                  | EUR | Aktien | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,12%  | 1,00%  | 2,82%  | 2,20%  | 0,00% |
| 3  | EM-Aktien             | RUB | Aktien | 0,00%  | 0,00%  | 0,52%  | 1,90%  | 4,14%  | 6,20%  | 10,00% | 0,00% |
| 4  | USD-Aktien            | USD | Aktien | 0,00%  | 0,00%  | 0,74%  | 1,65%  | 2,95%  | 3,57%  | 1,00%  | 0,00% |
| 5  | EUR-Cash 0-1          | EUR | Cash   | 77,92% | 73,76% | 36,19% | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00% |
| 6  | RUB-Cash 0-1          | RUB | Cash   | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00% |
| 7  | USD-Cash 0-1          | USD | Cash   | 1,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00% |
| 8  | Germany 1-3           | EUR | Bonds  | 0,00%  | 0,54%  | 25,32% | 46,55% | 26,19% | 3,59%  | 0,00%  | 0,00% |
| 9  | Germany 3-5           | EUR | Bonds  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00% |
| 10 | Germany 5-7           | EUR | Bonds  | 0,00%  | 0,00%  | 1,48%  | 7,37%  | 16,68% | 28,92% | 7,13%  | 0,00% |
| 11 | Germany 7-10          | EUR | Bonds  | 4,88%  | 5,84%  | 5,00%  | 5,00%  | 5,00%  | 5,00%  | 5,00%  | 0,00% |
| 12 | Germany 10-30         | EUR | Bonds  | 7,28%  | 7,85%  | 10,12% | 10,57% | 18,20% | 25,32% | 50,33% | 0,00% |
| 13 | Spanien (allg.)       | EUR | Bonds  | 0,00%  | 1,77%  | 10,48% | 17,37% | 16,52% | 15,71% | 15,62% | 0,00% |
| 14 | EM-Government (allg.) | RUB | Bonds  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00% |
| 15 | USD-Government 1-3    | USD | Bonds  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00% |
| 16 | USD-Government 3-5    | USD | Bonds  | 3,15%  | 4,53%  | 3,00%  | 0,21%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00% |
| 17 | USD-Government 5-7    | USD | Bonds  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00% |
| 18 | USD-Government 7-10   | USD | Bonds  | 0,00%  | 0,38%  | 0,04%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00% |
| 19 | USD-Government 10-20  | USD | Bonds  | 4,27%  | 3,84%  | 5,61%  | 7,74%  | 7,82%  | 7,36%  | 6,92%  | 0,00% |

Abbildung 4.9: Ergebnisse der 1. Optimierung mit Nebenbedingungen

Alle acht Portfolios verzeichnen einen Anstieg des ALM-Risikos, der im Wesentlichen auf das erzwungene DAX-Investment zurückzuführen ist.<sup>10</sup> Dementsprechend sind auch die RoRaC-Werte gegenüber der letzten Optimierung gesunken, da die Renditen aufgrund identischer Anforderungen gleich geblieben sind.

Bei der Betrachtung der Grafik in Abbildung 4.9 fällt der rasante Anstieg der Bonds zwischen P2 und P4 ins Auge. Dieser ist der Nebenbedingung für spanische Anleihen geschuldet, da der Optimierer nun vermehrt in andere Staatsanleihen investieren muss, um den Renditeansprüchen gerecht zu werden. Insbesondere wird der Optimierer gezwungen, mindestens viermal so viele deutsche Staatsanleihen zu kaufen, wie er spanische Anleihen ins Portfolio aufnimmt. Dies fördert bei ansteigender Returnerwartung auch den Zukauf deutscher Staatsanleihen mit mittleren bis langen Laufzeiten.

## 2. Optimierung mit Nebenbedingungen

Nach Betrachtung der Optimierungsergebnisse bespricht das Investmentteam, dass für die Steuergröße „Duration“ eine allzu große Differenz von der Duration des risikoneutralen Portfolios (RNPF) nicht wünschenswert ist. Daher wird entschieden, dass eine Duration von 4 nicht überschritten werden soll.

Darüber hinaus möchte man nicht auf eine gewisse Liquidität verzichten, um einen etwaigen finanziellen Handlungsspielraum zu erhalten. Daher wird eine Gesamtliquidität von mindestens 10%, aufgeteilt in 8% EUR-Cash und 2% USD-Cash, beschlossen.

Um die Liquidität zu realisieren, werden die entsprechenden Untergrenzen  $lbx$  für die Cashpositionen in Euro (5 EUR-Cash) und US-Dollar (7 USD-Cash) angehoben, wie in der nachfolgenden Abbildung 4.10 zu sehen ist.

---

<sup>10</sup> Dies fällt bereits beim Vergleich der risikominimalen Portfolios P1 der beiden Optimierungsläufe auf.

| Nr | Assetklasse           | FX  | Kat.   | lbx   | ubx     |
|----|-----------------------|-----|--------|-------|---------|
| 1  | DAX                   | EUR | Aktien | 1,50% | 100,00% |
| 2  | SX5E                  | EUR | Aktien | 0,00% | 100,00% |
| 3  | EM-Aktien             | RUB | Aktien | 0,00% | 100,00% |
| 4  | USD-Aktien            | USD | Aktien | 0,00% | 100,00% |
| 5  | EUR-Cash 0-1          | EUR | Cash   | 8,00% | 100,00% |
| 6  | RUB-Cash 0-1          | RUB | Cash   | 0,00% | 100,00% |
| 7  | USD-Cash 0-1          | USD | Cash   | 2,00% | 100,00% |
| 8  | Germany 1-3           | EUR | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 9  | Germany 3-5           | EUR | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 10 | Germany 5-7           | EUR | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 11 | Germany 7-10          | EUR | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 12 | Germany 10-30         | EUR | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 13 | Spanien (allg.)       | EUR | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 14 | EM-Government (allg.) | RUB | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 15 | USD-Government 1-3    | USD | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 16 | USD-Government 3-5    | USD | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 17 | USD-Government 5-7    | USD | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 18 | USD-Government 7-10   | USD | Bonds  | 0,00% | 100,00% |
| 19 | USD-Government 10-20  | USD | Bonds  | 0,00% | 100,00% |

Abbildung 4.10: Nebenbedingungen lbx/ubx (2. Optimierung mit NB)

Die Nebenbedingung an die Duration stellt dagegen eine Gruppennebenbedingung dar, die als lineare Ungleichung formuliert werden muss.

|         |                       |     |        | Spanien Anteil | Emerging Markets | Aktien | Duration |
|---------|-----------------------|-----|--------|----------------|------------------|--------|----------|
| lbA_Neb |                       |     |        | -(10*10)       | 0                | 0      | 0        |
| ubA_Neb |                       |     |        | 0              | 0,1              | 0,15   | 4        |
| Nr      | Assetklasse           | FX  | Kat.   |                |                  |        |          |
| 1       | DAX                   | EUR | Aktien | 0,00           | 0                | 1      | 0,00     |
| 2       | SX5E                  | EUR | Aktien | 0,00           | 0                | 1      | 0,00     |
| 3       | EM-Aktien             | RUB | Aktien | 0,00           | 1                | 1      | 0,00     |
| 4       | USD-Aktien            | USD | Aktien | 0,00           | 0                | 1      | 0,00     |
| 5       | EUR-Cash 0-1          | EUR | Cash   | 0,00           | 0                | 0      | 0,36     |
| 6       | RUB-Cash 0-1          | RUB | Cash   | 0,00           | 1                | 0      | 0,25     |
| 7       | USD-Cash 0-1          | USD | Cash   | 0,00           | 0                | 0      | 0,42     |
| 8       | Germany 1-3           | EUR | Bonds  | -0,25          | 0                | 0      | 1,80     |
| 9       | Germany 3-5           | EUR | Bonds  | -0,25          | 0                | 0      | 3,69     |
| 10      | Germany 5-7           | EUR | Bonds  | -0,25          | 0                | 0      | 5,49     |
| 11      | Germany 7-10          | EUR | Bonds  | -0,25          | 0                | 0      | 7,61     |
| 12      | Germany 10-30         | EUR | Bonds  | -0,25          | 0                | 0      | 14,22    |
| 13      | Spanien (allg.)       | EUR | Bonds  | 1,00           | 0                | 0      | 4,97     |
| 14      | EM-Government (allg.) | RUB | Bonds  | 0,00           | 1                | 0      | 3,85     |
| 15      | USD-Government 1-3    | USD | Bonds  | 0,00           | 0                | 0      | 1,90     |
| 16      | USD-Government 3-5    | USD | Bonds  | 0,00           | 0                | 0      | 3,87     |
| 17      | USD-Government 5-7    | USD | Bonds  | 0,00           | 0                | 0      | 5,74     |
| 18      | USD-Government 7-10   | USD | Bonds  | 0,00           | 0                | 0      | 7,79     |
| 19      | USD-Government 10-20  | USD | Bonds  | 0,00           | 0                | 0      | 10,84    |

Abbildung 4.11: Gruppennebenbedingungen (2. Optimierung mit NB)

Gemäß der Gleichung 3.5 für die Duration eines Portfolios soll gelten

$$0 \leq \sum_{i=1}^{19} w_i \cdot D_{mod}^i \leq 4,$$

wobei  $D_{mod}^i$  die modifizierte Duration der  $i$ -ten Assetklasse ist. Diese sind in der Tabelle 4.6 des Allokationsuniversums zu finden. Die Durationsbedingung ergänzt die Tabelle der Gruppennebenbedingungen wie in Abbildung 4.11 gezeigt ist.

### Optimierungsergebnisse

Als Ergebnis der Optimierung erhält man nur noch für fünf Portfolios P1 bis P5 Lösungen, wie in Abbildung 4.12 dargestellt. Ab Portfolio P6 sind die Renditeanforderungen unter den gegebenen Nebenbedingungen nicht mehr erfüllbar. Hierfür verantwortlich ist die Durationsschranke<sup>11</sup>, die in den Portfolios P4 und P5 bereits greift.

| GruppenNB        | Grenzen |     | P1           | P2           | P3            | P4            | P5            |
|------------------|---------|-----|--------------|--------------|---------------|---------------|---------------|
| Aktien           | 1,5%    | 15% | <b>1,50%</b> | <b>1,50%</b> | 2,72%         | 7,05%         | 13,81%        |
| Emerging-Markets | 0%      | 10% | 0,00%        | 0,00%        | 0,52%         | 3,44%         | 7,66%         |
| Spanien          | 0%      | 25% | 0,00%        | 14,19%       | <b>25,00%</b> | <b>25,00%</b> | <b>25,00%</b> |
| Duration         | 0       | 4   | 2,27         | 2,53         | 3,74          | <b>4,00</b>   | <b>4,00</b>   |

Tabelle 4.10: Auslastung der Gruppennebenbedingungen nach der 2. Optimierung

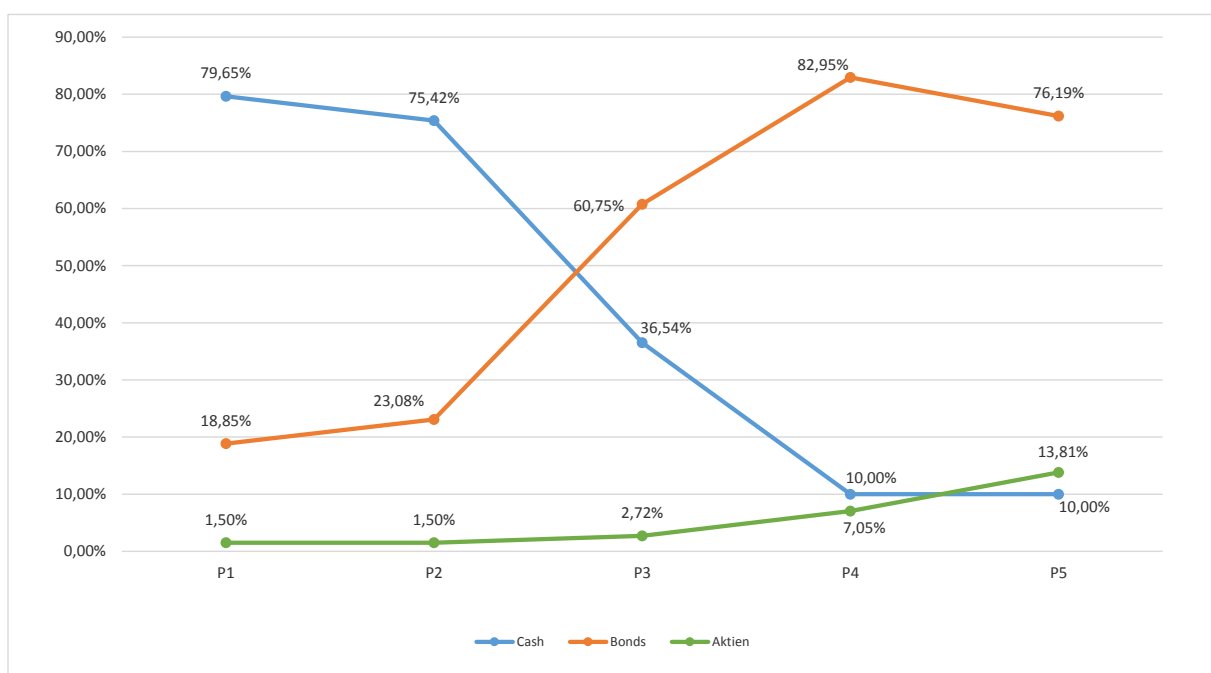
Die Betrachtung der Auslastungstabelle 4.10 für die einzelnen Nebenbedingungen zeigt, dass die Anteile von Aktien und Emerging-Markets in den fünf Portfolios weiter gestiegen sind. Die obere Grenze wird jedoch bei beiden nicht erreicht.<sup>12</sup> Die Anteile spanischer Anleihen bleiben gegenüber der vorangegangenen Optimierung hingegen fast unverändert.

In der grafischen Darstellung in Abbildung 4.12 erkennt man die Veränderungen in den Anlagegruppen bei den Portfolios P4 und P5 als Folge der Liquiditätsuntergrenze von 10%. Das restliche Bild gleicht dem Verlauf der vorherigen Optimierung.

<sup>11</sup> Es konnte nachgewiesen werden, dass das Optimierungsproblem für P6 bis P8 auch ohne die Liquiditätsanforderungen nicht lösbar ist.

<sup>12</sup> Dies war bei der 1. Optimierung mit Nebenbedingungen auch erst ab Portfolio P6 der Fall.

| Kennzahl                       | RNPF  | SAA          | P1           | P2           | P3           | P4           | P5           | P6   | P7   | P8   |
|--------------------------------|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|------|------|------|
| Mindest-Return (gefordert)     |       |              | 0,0%         | 0,5%         | 1,0%         | 1,5%         | 2,0%         | 2,5% | 3,0% | 3,5% |
| Return (inkl. RNPF-Return)     | 0,02% | 0,72%        | 0,43%        | 0,52%        | 1,02%        | 1,52%        | 2,02%        |      |      |      |
| <b>Excess-Return inkl. TAK</b> |       | <b>0,70%</b> | <b>0,40%</b> | <b>0,50%</b> | <b>1,00%</b> | <b>1,50%</b> | <b>2,00%</b> |      |      |      |
| Excess-Return ohne TAK         |       |              | 0,45%        | 0,55%        | 1,06%        | 1,59%        | 2,10%        |      |      |      |
| TAK                            |       |              | 0,04%        | 0,05%        | 0,06%        | 0,09%        | 0,10%        |      |      |      |
| <b>ALM-Risiko</b>              |       | <b>3,35%</b> | <b>1,53%</b> | <b>1,57%</b> | <b>2,45%</b> | <b>4,34%</b> | <b>7,13%</b> |      |      |      |
| RoRaC                          |       | 20,89%       | 26,44%       | 31,79%       | 40,88%       | 34,54%       | 28,03%       |      |      |      |
| Duration                       | 3,60  | 2,67         | 2,27         | 2,53         | 3,74         | 4,00         | 4,00         |      |      |      |



| Nr | Assetklasse           | FX  | Kat.   | P1     | P2     | P3     | P4     | P5     | P6    | P7    | P8    |
|----|-----------------------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| 1  | DAX                   | EUR | Aktien | 1,50%  | 1,50%  | 1,50%  | 1,50%  | 1,50%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 2  | SX5E                  | EUR | Aktien | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,96%  | 1,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 3  | EM-Aktien             | RUB | Aktien | 0,00%  | 0,00%  | 0,52%  | 3,44%  | 7,66%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 4  | USD-Aktien            | USD | Aktien | 0,00%  | 0,00%  | 0,69%  | 1,15%  | 3,65%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 5  | EUR-Cash 0-1          | EUR | Cash   | 77,65% | 73,42% | 34,54% | 8,00%  | 8,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 6  | RUB-Cash 0-1          | RUB | Cash   | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 7  | USD-Cash 0-1          | USD | Cash   | 2,00%  | 2,00%  | 2,00%  | 2,00%  | 2,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 8  | Germany 1-3           | EUR | Bonds  | 0,00%  | 0,00%  | 26,66% | 39,36% | 21,53% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 9  | Germany 3-5           | EUR | Bonds  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,53%  | 10,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 10 | Germany 5-7           | EUR | Bonds  | 0,00%  | 0,00%  | 1,39%  | 9,97%  | 14,47% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 11 | Germany 7-10          | EUR | Bonds  | 5,16%  | 6,27%  | 5,00%  | 5,00%  | 5,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 12 | Germany 10-30         | EUR | Bonds  | 7,26%  | 7,97%  | 10,16% | 5,00%  | 4,08%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 13 | Spanien (allg.)       | EUR | Bonds  | 0,00%  | 2,02%  | 10,80% | 14,96% | 13,77% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 14 | EM-Government (allg.) | RUB | Bonds  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 15 | USD-Government 1-3    | USD | Bonds  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 16 | USD-Government 3-5    | USD | Bonds  | 1,69%  | 2,03%  | 0,27%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 17 | USD-Government 5-7    | USD | Bonds  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 18 | USD-Government 7-10   | USD | Bonds  | 0,72%  | 1,70%  | 0,71%  | 1,00%  | 1,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 19 | USD-Government 10-20  | USD | Bonds  | 4,02%  | 3,10%  | 5,75%  | 7,12%  | 6,34%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |

Abbildung 4.12: Ergebnisse der 2. Optimierung mit Nebenbedingungen

Bei der Analyse der Portfoliozusammensetzungen stellt man fest, dass die Laufzeiteinteilung unter den deutschen Staatsanleihen in den letzten beiden Portfolios gegenüber den vorangegangenen Optimierungen gleichmäßiger geworden ist. Durch die Umverteilung aus den langen Laufzeiten in die mittleren und kürzeren Laufzeiten wird eine niedrigere Portfolioduration erreicht. Weiterhin wird auch bei US-Staatsanleihen die Laufzeit 7-10 Jahre hinzugenommen und der Anteil spanischer Anleihen, deren Duration bei 4,97 liegt, sinkt insgesamt.

Der Aktienanteil ist dagegen etwas gestiegen. Bei Portfolio P5 haben die Emerging-Markets-Aktien circa 3%-Punkte und die USD-Aktien etwa 0,7%-Punkte zusätzlich allokiert bekommen.

### 3. Optimierung mit Nebenbedingungen und Devisenabsicherung

In einem dritten Optimierungslauf soll der Einfluss von Währungsabsicherungen auf die Fremdwährungen US-Dollar und Rubel untersucht werden. Hier wird das Verfahren des „Optimalen Währungs-Hedgings“ aus Kapitel 3.13 angewandt. Bei diesem Verfahren entscheidet der Optimierer über die Sinnhaftigkeit und Höhe der Absicherungen, d.h., er bestimmt die optimalen Absicherungsquoten.

Gemäß der im Kapitel 3.13 vorgeschlagenen Implementierung muss das Allokationsuniversum um eine Euro-, US-Dollar- und Rubel-Cash-Leg-Position erweitert werden. Diese Asset-Klassen werden als Derivate-Cash (DCash) kategorisiert.

| Nr | Assetklasse   | FX  | Kat.  | MDUR | TAK | RP | lbx   | ubx  |
|----|---------------|-----|-------|------|-----|----|-------|------|
| 20 | EUR-Cash-Legs | EUR | Dcash | 0,25 | 0%  | 0% | 0%    | 100% |
| 21 | RUB-Cash-Legs | RUB | Dcash | 0,25 | 0%  | 0% | -100% | 0%   |
| 22 | USD-Cash-Legs | USD | Dcash | 0,25 | 0%  | 0% | -100% | 0%   |

Tabelle 4.11: Erweiterung des Allokationsuniversums um Derivate-Cash-Klassen

Für die Cash-Leg-Positionen müssen die Grenzen  $lbx$  und  $ubx$  den Angaben in der Tabelle entsprechend angepasst werden. Diese Grenzen resultieren aus den Ungleichungen (3.83)  $w_{CL}^{EUR} > 0$  und (3.84)  $w_{CL}^{FX} < 0$ , wobei  $FX = \text{RUB oder USD}$  ist.

Die Absicherung wird wie in Beispiel 3.6 durch drei Ungleichungen umgesetzt, die als Gruppennebenbedingungen dargestellt werden. Für die beiden Währungsabsicherungen werden gemäß Optimal-Hedging keine Absicherungsquoten festgelegt, da der Optimierer diese bestimmt. Daher wird sowohl für Rubel als auch für US-Dollar die Gleichung (3.91)

verwendet. Für Rubel lautet diese

$$0 \leq w_{CL}^{RUB} + \sum_{i \in I^{RUB}} w_i \leq \infty,$$

wobei  $I^{RUB} = \{3, 6, 14\}$  die Indexmenge aller Assetklassen in Rubel ist. Analog wird die Gleichung für US-Dollar formuliert. Als drittes wird die Summengleichung nach (3.87)

$$0 \leq w_{CL}^{EUR} + w_{CL}^{RUB} + w_{CL}^{USD} \leq 0$$

über alle Cash-Legs benötigt.

Die drei (Un-)Gleichungen zur Währungssicherung werden den bisherigen Gruppennebenbedingungen hinzugefügt. Die Lösbarkeit der Gleichungen wird durch die Festlegung der Grenzen  $lbx/ubx$  in Tabelle 4.11 für die Derivate-Cash-Assetklassen gewährleistet.

|         |                       |     |        | Spanien<br>Anteil | Emerging<br>Markets | Aktien | Duration | FX-Anteil | DTG USD<br>Absicherung | DTG RUB<br>Absicherung | DTG Summe |
|---------|-----------------------|-----|--------|-------------------|---------------------|--------|----------|-----------|------------------------|------------------------|-----------|
| lbA_Neb |                       |     |        | -(10^10)          | 0                   | 0      | 0        | 0         | 0                      | 0                      | 0         |
| ubA_Neb |                       |     |        | 0                 | 0,1                 | 0,15   | 4        | 0,3       | (10^10)                | (10^10)                | 0         |
| Nr      | Assetklasse           | FX  | Kat.   |                   |                     |        |          |           |                        |                        |           |
| 1       | DAX                   | EUR | Aktien | 0,00              | 0                   | 1      | 0,00     | 0         | 0                      | 0                      | 0         |
| 2       | SX5E                  | EUR | Aktien | 0,00              | 0                   | 1      | 0,00     | 0         | 0                      | 0                      | 0         |
| 3       | EM-Aktien             | RUB | Aktien | 0,00              | 1                   | 1      | 0,00     | 1         | 0                      | 1                      | 0         |
| 4       | USD-Aktien            | USD | Aktien | 0,00              | 0                   | 1      | 0,00     | 1         | 1                      | 0                      | 0         |
| 5       | EUR-Cash 0-1          | EUR | Cash   | 0,00              | 0                   | 0      | 0,36     | 0         | 0                      | 0                      | 0         |
| 6       | RUB-Cash 0-1          | RUB | Cash   | 0,00              | 1                   | 0      | 0,25     | 1         | 0                      | 1                      | 0         |
| 7       | USD-Cash 0-1          | USD | Cash   | 0,00              | 0                   | 0      | 0,42     | 1         | 1                      | 0                      | 0         |
| 8       | Germany 1-3           | EUR | Bonds  | -0,25             | 0                   | 0      | 1,80     | 0         | 0                      | 0                      | 0         |
| 9       | Germany 3-5           | EUR | Bonds  | -0,25             | 0                   | 0      | 3,69     | 0         | 0                      | 0                      | 0         |
| 10      | Germany 5-7           | EUR | Bonds  | -0,25             | 0                   | 0      | 5,49     | 0         | 0                      | 0                      | 0         |
| 11      | Germany 7-10          | EUR | Bonds  | -0,25             | 0                   | 0      | 7,61     | 0         | 0                      | 0                      | 0         |
| 12      | Germany 10-30         | EUR | Bonds  | -0,25             | 0                   | 0      | 14,22    | 0         | 0                      | 0                      | 0         |
| 13      | Spanien (allg.)       | EUR | Bonds  | 1,00              | 0                   | 0      | 4,97     | 0         | 0                      | 0                      | 0         |
| 14      | EM-Government (allg.) | RUB | Bonds  | 0,00              | 1                   | 0      | 3,85     | 1         | 0                      | 1                      | 0         |
| 15      | USD-Government 1-3    | USD | Bonds  | 0,00              | 0                   | 0      | 1,90     | 1         | 1                      | 0                      | 0         |
| 16      | USD-Government 3-5    | USD | Bonds  | 0,00              | 0                   | 0      | 3,87     | 1         | 1                      | 0                      | 0         |
| 17      | USD-Government 5-7    | USD | Bonds  | 0,00              | 0                   | 0      | 5,74     | 1         | 1                      | 0                      | 0         |
| 18      | USD-Government 7-10   | USD | Bonds  | 0,00              | 0                   | 0      | 7,79     | 1         | 1                      | 0                      | 0         |
| 19      | USD-Government 10-20  | USD | Bonds  | 0,00              | 0                   | 0      | 10,84    | 1         | 1                      | 0                      | 0         |
| 20      | EUR-Cash-Legs         | EUR | Dcash  | 0,00              | 0                   | 0      | 0,00     | 0         | 0                      | 0                      | 1         |
| 21      | RUB-Cash-Legs         | RUB | Dcash  | 0,00              | 0                   | 0      | 0,00     | 0         | 0                      | 1                      | 1         |
| 22      | USD-Cash-Legs         | USD | Dcash  | 0,00              | 0                   | 0      | 0,00     | 0         | 1                      | 0                      | 1         |

Abbildung 4.13: Gruppennebenbedingungen inkl. Absicherungen (3. Optimierung mit NB)

Zusätzlich zu den Absicherungsbedingungen soll das Fremdwährungsexposure nicht mehr als 30% des Portfoliovolumens ausmachen, sodass eine weitere Nebenbedingung unter dem

Namen „FX-Anteil“ hinzugefügt wird. Bei dieser werden alle Assetklassen, die nicht in Euro notieren, ausgewählt und in Summe auf 30% begrenzt. Damit ist das Optimierungssetting vollständig.

### Optimierungsergebnisse

In Abbildung 4.14 sind die Ergebnisse des Optimierungslaufs zusammengefasst.

Die Cash-Leg-Assetklassen wurden in der Portfoliodarstellung unten angefügt und durch rote Zahlen dargestellt. Sie tragen nur indirekt zur Zusammensetzung eines Portfolios bei, da sie sich gemäß Gleichung (3.87) zu Null aufaddieren. Ihre Gewichte geben Aufschluss über den Grad der Absicherung, der nach Gleichung (3.90) berechnet wird. Diese Absicherungsquoten sind in der Tabelle 4.12 angegeben.

Im Gegensatz zur USD-Absicherung schlägt der Optimierer für die Absicherung der Währung Rubel stets eine Quote von 100% vor.<sup>13</sup> Bei den US-Dollar-Absicherungen variieren die Quoten deutlich. So wählt der Optimierer in Portfolio P2 eine Quote von fast 72%, hingegen in Portfolio P1 lediglich eine Quote von 16,29%.

| GruppenNB        | Grenzen          |      | P1      | P2     | P3      | P4      | P5      |
|------------------|------------------|------|---------|--------|---------|---------|---------|
| Aktien           | 1,5%             | 15%  | 1,50%   | 1,50%  | 2,71%   | 6,92%   | 13,24%  |
| Emerging-Markets | 0%               | 10%  | 13,29%  | 0,00%  | 0,43%   | 3,92%   | 8,45%   |
| Spanien          | 0%               | 25%  | 0,00%   | 5,00%  | 25,00%  | 25,00%  | 25,00%  |
| Duration         | 0                | 4    | 2,28    | 2,42   | 3,73    | 4,00    | 4,00    |
| FX-Anteil        | 2% <sup>14</sup> | 30%  | 23,33%  | 30,00% | 30,00%  | 30,00%  | 30,00%  |
| davon USD        |                  |      | 10,04%  | 30,00% | 29,57%  | 26,08%  | 21,55%  |
| davon RUB        |                  |      | 13,29%  | 0,00%  | 0,43%   | 3,92%   | 8,45%   |
| Absicherung RUB  | 0%               | 100% | 100,00% | 0%     | 100,00% | 100,00% | 100,00% |
| Absicherung USD  | 0%               | 100% | 16,29%  | 71,66% | 67,79%  | 55,82%  | 37,89%  |

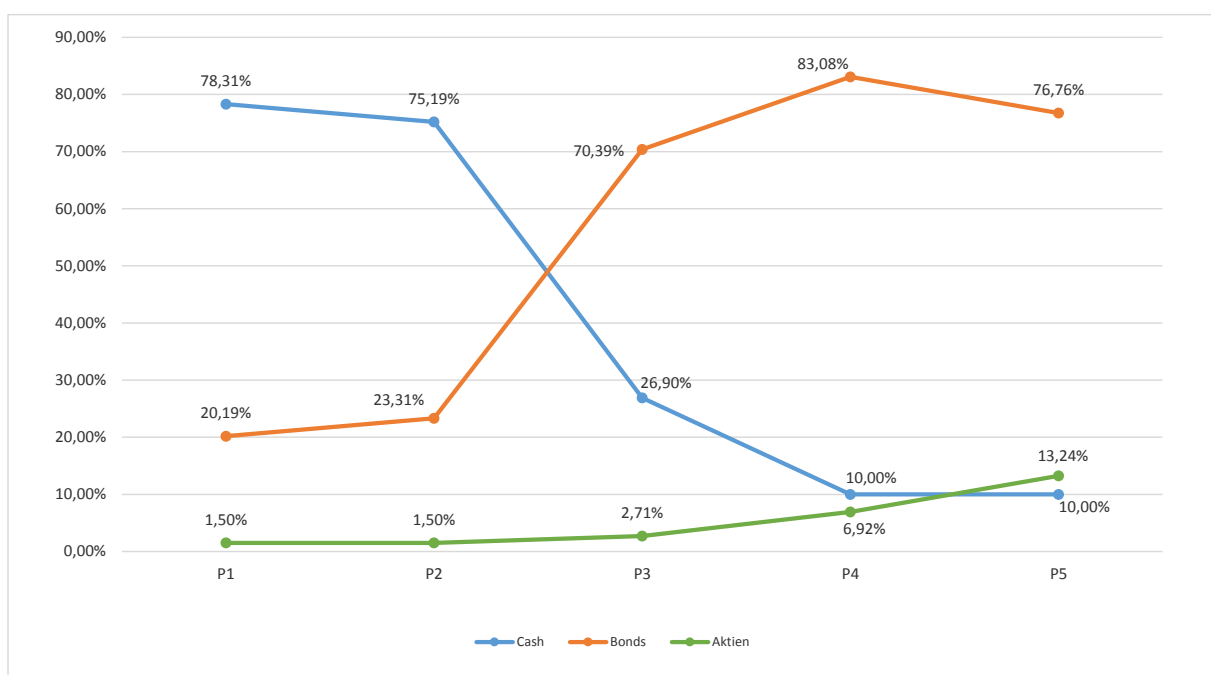
Tabelle 4.12: Auslastung der Gruppennebenbedingungen der 3. Optimierung inkl. DTGs

Die hohe USD-Absicherungsquote im zweiten Portfolio sichert neben den US-Staatsanleihen die große USD-Cashposition ab. In den vorherigen Optimierungen ohne Absicherungen war die USD-Cash-Assetklasse für den Optimierer unattraktiv. Erst eine Entschärfung des Währungsrisikos gestaltet diese Position für den Optimierer attraktiver. Ebenso verhält es sich mit der Rubel-Cash-Position in Portfolio P1.

<sup>13</sup> In Portfolio P2 wurde nicht in RUB investiert, daher ist die Quote dort 0%.

<sup>14</sup> Hier ist der USD-Cash-Anteil aus der Liquiditätsbedingung mit einbezogen.

| Kennzahl                       | RNPF  | SAA          | P1           | P2           | P3           | P4           | P5           | P6   | P7   | P8   |
|--------------------------------|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|------|------|------|
| Mindest-Return (gefordert)     |       |              | 0,0%         | 0,5%         | 1,0%         | 1,5%         | 2,0%         | 2,5% | 3,0% | 3,5% |
| Return (inkl. RNPF-Return)     | 0,02% | 0,72%        | 0,43%        | 0,52%        | 1,02%        | 1,52%        | 2,02%        |      |      |      |
| <b>Excess-Return inkl. TAK</b> |       | <b>0,70%</b> | <b>0,41%</b> | <b>0,50%</b> | <b>1,00%</b> | <b>1,50%</b> | <b>2,00%</b> |      |      |      |
| Excess-Return ohne TAK         |       |              | 0,45%        | 0,53%        | 1,06%        | 1,58%        | 2,09%        |      |      |      |
| TAK                            |       |              | 0,05%        | 0,03%        | 0,06%        | 0,08%        | 0,09%        |      |      |      |
| <b>ALM-Risiko</b>              |       | <b>3,35%</b> | <b>1,53%</b> | <b>1,56%</b> | <b>2,35%</b> | <b>3,93%</b> | <b>6,51%</b> |      |      |      |
| RoRaC                          |       | 20,89%       | 26,54%       | 32,14%       | 42,62%       | 38,21%       | 30,72%       |      |      |      |
| Duration                       | 3,60  | 2,67         | 2,28         | 2,42         | 3,73         | 4,00         | 4,00         |      |      |      |



| Nr | Assetklasse           | FX  | Kat.   | P1      | P2      | P3      | P4      | P5     | P6    | P7    | P8    |
|----|-----------------------|-----|--------|---------|---------|---------|---------|--------|-------|-------|-------|
| 1  | DAX                   | EUR | Aktien | 1,50%   | 1,50%   | 1,50%   | 1,50%   | 1,50%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 2  | SX5E                  | EUR | Aktien | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,10%   | 1,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 3  | EM-Aktien             | RUB | Aktien | 0,00%   | 0,00%   | 0,43%   | 3,92%   | 8,45%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 4  | USD-Aktien            | USD | Aktien | 0,00%   | 0,00%   | 0,78%   | 1,40%   | 2,29%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 5  | EUR-Cash 0-1          | EUR | Cash   | 63,02%  | 55,21%  | 24,90%  | 8,00%   | 8,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 6  | RUB-Cash 0-1          | RUB | Cash   | 13,29%  | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 7  | USD-Cash 0-1          | USD | Cash   | 2,00%   | 19,98%  | 2,00%   | 2,00%   | 2,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 8  | Germany 1-3           | EUR | Bonds  | 0,00%   | 0,00%   | 19,68%  | 30,32%  | 23,26% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 9  | Germany 3-5           | EUR | Bonds  | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 3,97%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 10 | Germany 5-7           | EUR | Bonds  | 0,00%   | 0,00%   | 0,66%   | 8,00%   | 12,66% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 11 | Germany 7-10          | EUR | Bonds  | 4,87%   | 5,02%   | 5,00%   | 5,00%   | 5,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 12 | Germany 10-30         | EUR | Bonds  | 7,28%   | 7,64%   | 9,55%   | 5,00%   | 2,70%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 13 | Spanien (allg.)       | EUR | Bonds  | 0,00%   | 0,63%   | 8,72%   | 12,08%  | 11,90% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 14 | EM-Government (allg.) | RUB | Bonds  | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 15 | USD-Government 1-3    | USD | Bonds  | 0,00%   | 0,00%   | 8,97%   | 0,00%   | 0,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 16 | USD-Government 3-5    | USD | Bonds  | 3,82%   | 6,44%   | 14,88%  | 14,30%  | 0,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 17 | USD-Government 5-7    | USD | Bonds  | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 18 | USD-Government 7-10   | USD | Bonds  | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 5,83%   | 17,26% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 19 | USD-Government 10-20  | USD | Bonds  | 4,21%   | 3,58%   | 2,94%   | 2,55%   | 0,00%  | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 20 | EUR-Cash-Legs         | EUR | Dcash  | 14,93%  | 21,50%  | 20,48%  | 18,48%  | 16,61% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 21 | RUB-Cash-Legs         | RUB | Dcash  | -13,29% | 0,00%   | -0,43%  | -3,92%  | -8,45% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 22 | USD-Cash-Legs         | USD | Dcash  | -1,63%  | -21,50% | -20,05% | -14,56% | -8,17% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |

Abbildung 4.14: Ergebnisse der 3. Optimierung mit Nebenbedingungen und DTGs

Innerhalb der Gruppe der US-Staatsanleihen findet eine Verschiebung in die kurzen bis mittleren Laufzeiten statt. So erreichen 3-5 jährige US-Bonds in den Portfolios P3 und P4 Gewichte von über 14%, ebenso die 7-10 jährigen US-Bonds in Portfolio P5.

Mit Ausnahme des ersten Portfolios erreicht der Fremdwährungsanteil in allen Portfolios die vorgegebene 30%-Grenze. Die Aufteilung auf die beiden Fremdwährungen ist ebenfalls der Tabelle 4.12 zu entnehmen. Es wird deutlich, dass Investments in US-Dollar attraktiver sind als in den Emerging-Markets-Vertreter Rubel. Dennoch sind die Aktienanteile in EM-Aktien durch die Absicherungen gegenüber der vorherigen Optimierung leicht gestiegen.

Die Verhältnisse der drei Assetklassengruppen (Aktien, Bonds, Cash) zueinander haben sich wenig geändert. Lediglich bei Portfolio P3 erkennt man einen stärkeren Einbruch der Cash-Position in Euro zugunsten von US-Staatsanleihen.

## 4.5 Auswertung der Optimierungsergebnisse

Die Investitionsentscheidung eines Versicherungsunternehmens wird maßgeblich von dem zur Verfügung stehenden Risikokapital beeinflusst. Angenommen der Investor verfügt in diesem Beispiel über ein Risikokapitalbudget von 4%. Dies würde für den Optimierungslauf **ohne** DTG-Absicherungen (Abbildung 4.12) bedeuten, dass das zur Verfügung stehende Risikokapital für die Portfolios P4 mit 4,34% und P5 mit 7,13% ALM-Risiko nicht ausreicht. Bei der Optimierung **mit** DTG-Absicherungen (Abbildung 4.14) liegt das Portfolio P4 mit 3,93% ALM-Risiko gerade noch unterhalb der Risikobudgetgrenze von 4%.

Betrachtet man die RoRaC-Werte der Portfolios, welche die erwartete Rendite ins Verhältnis zu dem Risikokapitalbedarf setzen, so weist das Portfolio P3 bei beiden Optimierungsläufen (mit und ohne Devisenabsicherungen) den höchsten RoRaC auf und ist somit das Ergebnisportfolio mit dem besten Rendite-Risiko-Verhältnis. Darüber hinaus zeigt es mit 2,45% (ohne Devisenabsicherungen) einen deutlich niedrigeren Risikokapitalkonsum als das aktuelle SAA-Portfolio (mit 3,35%) und bietet gleichzeitig eine um 30bp höhere erwartete Rendite von 1,0%. Daher ist zu dem gegebenen Optimierungs-Setting das Portfolio P3 die naheliegende Wahl für einen Investor.

Allerdings gibt es auch andere Kriterien, von denen die Entscheidung des Investors abhängen könnte. Vergleicht man die Duration des SAA-Portfolios mit der des RNPFs, so zeigt sich eine Durationslücke zwischen RNPF und SAA-Portfolio in der Größenordnung des Werts 1. Diese würde mit einer Umschichtung auf das Portfolio P3 geschlossen werden, sofern das Unternehmen das Ziel der Schließung der Durationslücke verfolgt. Es ist jedoch möglich, dass der Investor die folgende *Zinswette* eingegangen ist: Bewegt sich das Versicherungsunternehmen in einem Niedrigzinsumfeld, könnte der Investor auf steigende Zinsen hoffen. Er würde versuchen die Portfolioduration möglichst kurz zu halten, zum einen, um zum Zeitpunkt des Zinsanstiegs keine Abwertung seines Anleihebestands zu erleiden, und zum anderen, um zu einem günstigeren Zeitpunkt längerfristige Anleihen mit gestiegenen Kupons zur Schließung der Durationslücke in sein Portfolio aufzunehmen.

Verfolgt der Investor eine solche Strategie, wäre Portfolio P3 aufgrund seiner höheren Duration von +1,06 gegenüber dem aktuellen SAA-Portfolios keine gute Wahl, sodass er sich in Richtung Portfolio P2 orientieren müsste. Diese Rückorientierung reduziert jedoch die Renditeerwartung unter das Niveau des SAA-Portfolios. Bevor eine solche Entscheidung

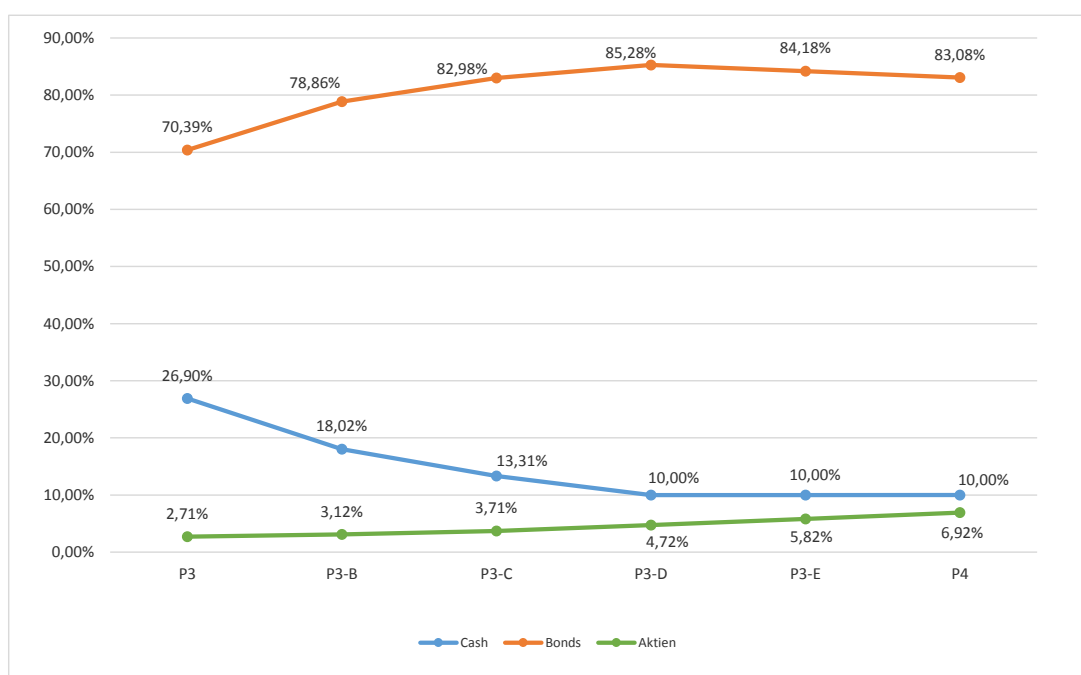
getroffen wird, sollte daher sinnvoller Weise ein weiterer Optimierungslauf durchgeführt werden, der den Bereich zwischen den Portfolios P2 und P3 detaillierter abbildet. Dabei ist eine Optimierung inklusive Devisenabsicherungen von Vorteil, da diese das Verhältnis von kleiner Duration zu höherer Rendite verbessern, wie die letzten Ergebnisse zeigen. Würden die Renditeanforderungen zwischen 0,5% (Renditeanforderung von P2) und 1,0% (Renditeanforderung von P3) gewählt werden, so würde man den Teil der Effizienzlinie zwischen P2 und P3 genauer untersuchen.

Alternativ kann man eine neue Optimierung mit einer Nebenbedingung, welche die Duration auf einen gewünschten Bereich oder sogar einen exakten Wert festlegt, durchführen. Unter dieser Fragestellung sucht man eigentlich ein Portfolio, das unter gleichzeitiger Vorgabe einer Duration **und** einem ALM-Risiko die beste erwartete Rendite liefert. In diesem Fall würden als Vorgabewerte die Duration und das Risiko des SAA-Portfolios gewählt. Ebenso gut könnte man das optimale (returnmaximale) Portfolio unter einer vollständigen Ausnutzung des Risikobudgets fordern. Um anstelle der Risikominimierung eine Returnmaximierung durchzuführen, müsste das Optimierungsproblem umformuliert werden. Diese Form der Umstellung wird im nächsten Kapitel als mögliche Erweiterung vorgestellt.

Es wird angenommen, dass der Investor auf die oben beschriebene Zinswette verzichtet, da das Management auf eine Steigerung der Kapitalmarkterträge gegenüber dem Vorjahr hofft und daher auch das gegenüber der SAA erhöhte Risikokapitalbudget von 4% genehmigt hat. Daher fokussiert sich die Entscheidung des Investors auf die Portfolios P3 und P4, die beide auch deutlich bessere RoRaC-Werte als Portfolio P2 aufweisen.

Neben der Analyse der Kennzahlen kann auch die Zusammensetzung der einzelnen Portfolios zu einer Entscheidung führen. Zwischen den möglicherweise für den Investor relevanten Portfolios P3 und P4 zeigen sich in der Portfoliozusammensetzung deutliche Unterschiede. Die Aktienquote steigt zwischen P3 und P4 um mehr als 100%, die Cashquote wird fast gedrittelt und auch die Anleihequote verändert sich deutlich. Bedingt durch diese Unterschiede erscheint es empfehlenswert, eine detaillierte Optimierung zwischen den relevanten Portfolios P3 und P4 durchzuführen. Zu diesem Zweck entscheidet sich der Investor für eine abgesicherte Optimierung gemäß Optimal-Hedging, da er das Währungsrisiko insbesondere bei weiteren Investitionen in US-Staatsanleihen begrenzen möchte. Die sechs Ergebnisportfolios dieser Detail-Optimierung sind in Abbildung 4.15 zu sehen. Zum Vergleich wurde das derzeitige SAA-Portfolio der unteren Tabelle hinzugefügt.

| Kennzahl                       | RNPF  | SAA          | P3           | P3-B         | P3-C         | P3-D         | P3-E         | P4           |
|--------------------------------|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Mindest-Return (gefordert)     |       |              | 1,0%         | 1,1%         | 1,2%         | 1,3%         | 1,4%         | 1,5%         |
| Return (inkl. RNPF-Return)     | 0,02% | 0,72%        | 1,02%        | 1,12%        | 1,22%        | 1,32%        | 1,42%        | 1,52%        |
| <b>Excess-Return inkl. TAK</b> |       | <b>0,70%</b> | <b>1,00%</b> | <b>1,10%</b> | <b>1,20%</b> | <b>1,30%</b> | <b>1,40%</b> | <b>1,50%</b> |
| Excess-Return ohne TAK         |       |              | 1,06%        | 1,17%        | 1,28%        | 1,38%        | 1,48%        | 1,58%        |
| TAK                            |       |              | 0,06%        | 0,07%        | 0,08%        | 0,08%        | 0,08%        | 0,08%        |
| <b>ALM-Risiko</b>              |       | <b>3,35%</b> | <b>2,35%</b> | <b>2,56%</b> | <b>2,86%</b> | <b>3,18%</b> | <b>3,51%</b> | <b>3,93%</b> |
| RoRaC                          |       | 20,89%       | 42,62%       | 42,93%       | 41,96%       | 40,83%       | 39,89%       | 38,21%       |
| Duration                       | 3,60  | 2,67         | 3,73         | 3,92         | 4,00         | 4,00         | 4,00         | 4,00         |



| Nr | Assetklasse           | FX  | SAA | P3      | P3-B    | P3-C    | P3-D    | P3-E    | P4      |
|----|-----------------------|-----|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1  | DAX                   | EUR | 2%  | 1,50%   | 1,50%   | 1,50%   | 1,50%   | 1,50%   | 1,50%   |
| 2  | SX5E                  | EUR | 1%  | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,10%   |
| 3  | EM-Aktien             | RUB | 0%  | 0,43%   | 0,62%   | 1,15%   | 1,84%   | 2,83%   | 3,92%   |
| 4  | USD-Aktien            | USD | 1%  | 0,78%   | 1,00%   | 1,05%   | 1,38%   | 1,50%   | 1,40%   |
| 5  | EUR-Cash 0-1          | EUR | 40% | 24,90%  | 16,02%  | 10,66%  | 8,00%   | 8,00%   | 8,00%   |
| 6  | RUB-Cash 0-1          | RUB | 0%  | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   |
| 7  | USD-Cash 0-1          | USD | 6%  | 2,00%   | 2,00%   | 2,66%   | 2,00%   | 2,00%   | 2,00%   |
| 8  | Germany 1-3           | EUR | 12% | 19,68%  | 27,00%  | 31,55%  | 32,30%  | 30,74%  | 30,32%  |
| 9  | Germany 3-5           | EUR | 10% | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   |
| 10 | Germany 5-7           | EUR | 8%  | 0,66%   | 0,41%   | 0,98%   | 4,77%   | 7,66%   | 8,00%   |
| 11 | Germany 7-10          | EUR | 5%  | 5,00%   | 5,00%   | 5,00%   | 5,00%   | 5,00%   | 5,00%   |
| 12 | Germany 10-30         | EUR | 5%  | 9,55%   | 9,57%   | 8,75%   | 6,33%   | 5,00%   | 5,00%   |
| 13 | Spanien (allg.)       | EUR | 0%  | 8,72%   | 10,50%  | 11,57%  | 12,10%  | 12,10%  | 12,08%  |
| 14 | EM-Government (allg.) | RUB | 0%  | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   |
| 15 | USD-Government 1-3    | USD | 4%  | 8,97%   | 6,61%   | 0,98%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   |
| 16 | USD-Government 3-5    | USD | 3%  | 14,88%  | 17,05%  | 21,65%  | 20,81%  | 17,46%  | 14,30%  |
| 17 | USD-Government 5-7    | USD | 2%  | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   |
| 18 | USD-Government 7-10   | USD | 1%  | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 0,00%   | 1,80%   | 5,83%   |
| 19 | USD-Government 10-20  | USD | 0%  | 2,94%   | 2,72%   | 2,51%   | 3,97%   | 4,41%   | 2,55%   |
| 20 | EUR-Cash-Legs         | EUR | 0%  | 20,48%  | 20,09%  | 19,51%  | 19,15%  | 18,64%  | 18,48%  |
| 21 | RUB-Cash-Legs         | RUB | 0%  | -0,43%  | -0,62%  | -1,15%  | -1,84%  | -2,83%  | -3,92%  |
| 22 | USD-Cash-Legs         | USD | 0%  | -20,05% | -19,47% | -18,36% | -17,30% | -15,82% | -14,56% |

Abbildung 4.15: Ergebnisse der 3. Optimierung mit Nebenbedingungen und DTGs zwischen P3 und P4

Bereits von Portfolio P3 nach Portfolio P3-B verändern sich die Gewichte merklich. Der EUR-Cash-Anteil sinkt um fast 9%-Punkte und wandert überwiegend in die kurzen deutschen Staatsanleihen. Auch spanische Anleihen profitieren vom Cash-Abbau. Bei den US-Staatsanleihen gehen aus der Assetklasse der kurzen 1-3 jährigen Laufzeiten circa 2%-Punkte in die Assetklasse der 3-5 jährigen Bonds über. Außerdem werden die außereuropäischen Aktien leicht aufgebaut. Dieser Trend setzt sich im Wesentlichen bis Portfolio P3-D fort, in dem die EUR-Cashquote an ihrer Untergrenze von 8% angelangt ist. Die Portfolios P3-D bis P4 erwirtschaften den Renditezuwachs über längere Laufzeiten bei den Staatsanleihen sowie weitere Aktienzukäufe.

Die Auslastung der Nebenbedingungen ergibt ein ähnliches Bild wie bei der vorherigen Optimierung. Die oberen Grenzen werden bei den Investments in spanische Staatsanleihen sowie in Fremdwährungen erreicht. Mit wachsender Renditeanforderung findet eine Verschiebung innerhalb der Fremdwährungen von USD nach RUB statt, die sich hauptsächlich durch einen Abbau von US-Staatsanleihen zugunsten von EM-Aktien äußert. Dabei sichert der Optimierer die Währung Rubel vollständig ab, während die Absicherungsquote von USD-Investments stetig von 67,79% (P3) auf 55,82% (P4) sinkt.

| GruppenNB        | Grenzen |      | P3      | P3-B    | P3-C    | P3-D    | P3-E    | P4      |
|------------------|---------|------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Aktien           | 2%      | 15%  | 2,71%   | 3,12%   | 3,71%   | 4,72%   | 5,82%   | 6,92%   |
| Emerging-Markets | 0%      | 10%  | 0,43%   | 0,62%   | 1,15%   | 1,84%   | 2,83%   | 3,92%   |
| Spanien          | 0%      | 25%  | 25,00%  | 25,00%  | 25,00%  | 25,00%  | 25,00%  | 25,00%  |
| Duration         | 0       | 4    | 3,73    | 3,92    | 4,00    | 4,00    | 4,00    | 4,00    |
| FX-Anteil        | 0%      | 30%  | 30,00%  | 30,00%  | 30,00%  | 30,00%  | 30,00%  | 30,00%  |
| davon USD        |         |      | 29,57%  | 29,38%  | 28,85%  | 28,16%  | 27,17%  | 26,08%  |
| davon RUB        |         |      | 0,43%   | 0,62%   | 1,15%   | 1,84%   | 2,83%   | 3,92%   |
| Absicherung RUB  | 0%      | 100% | 100,00% | 100,00% | 100,00% | 100,00% | 100,00% | 100,00% |
| Absicherung USD  | 0%      | 100% | 67,79%  | 66,26%  | 63,65%  | 61,45%  | 58,21%  | 55,82%  |

Tabelle 4.13: Auslastung der Nebenbedingungen der 3. (abgesicherten) Optimierung zwischen P3 und P4

Nach der Analyse der Ergebnisse könnte sich der Investor zwischen den Portfolios P3 bis P3-C entscheiden. Sie weisen die besten RoRaC-Werte auf und zeigen bei dieser Kennzahl eine deutliche Verbesserung gegenüber dem aktuellen SAA-Portfolio. Zur Entscheidungsfindung könnte sich der Investor folgende Gedanken machen:

Portfolio P3 schließt am besten die Durationslücke zum risikoneutralen Portfolio (RNPF), jedoch möchte der Investor den Cashanteil in Euro weiter reduzieren, um diesen in Wertpapiere zu investieren. Der Cashanteil von Portfolio P3-C ist eventuell schon zu nah an der Untergrenze von 8%. Die Cashposition von Portfolio P3-B ließe noch etwas Spielraum für taktische Abweichungen innerhalb der TAA. Außerdem würde eine Position von über 10% in spanischen Staatsleihen auf Gegenwehr aus dem Risikomanagement stoßen. Den aktuellen Anteil an USD-Aktien im SAA-Portfolio von einem Prozent möchte der Investor ungern reduzieren, da das amerikanische Tochterunternehmen auf diese Veränderung, trotz des massiven Positionsaufbaus in US-Staatsanleihen, aufgrund persönlicher Befindlichkeiten mit Unmut reagieren könnte. Daher entscheidet sich der Investor dafür, das Portfolio P3-B als Musterportfolio für die neue SAA im Investmentkomitee vorzuschlagen.<sup>15</sup>

Im fünften und letzten Kapitel dieser Arbeit werden die gewonnenen Erkenntnisse zusammengefasst und kritisch gewürdigt.

---

<sup>15</sup> Alternativ könnte ein weiterer Optimierungslauf durchgeführt werden, der die genannten Entscheidungskriterien als Nebenbedingungen beinhaltet.

## Kapitel 5

# Ergebnisanalyse, Implikationen und Ausblick

Dieses abschließende fünfte Kapitel bietet dem Leser im ersten Abschnitt 5.1 einen Überblick über das in der Arbeit beschriebene Optimierungsmodell. Es folgt eine kritische Auseinandersetzung mit dem Modell in Abschnitt 5.2 unter Anbringung von konkreten Verbesserungsvorschlägen. In Form eines kurzen Ausblicks werden in Abschnitt 5.3 mögliche Erweiterungen angedacht, bevor die Arbeit mit einem Fazit schließt.

### 5.1 Zusammenfassung

Als Ausgangspunkt für das in dieser Arbeit präsentierte einperiodische Optimierungsmodell dient die in Abschnitt 2.2 vorgestellte Methode von Stanislav Uryasev zur Optimierung des CVaRs. Die Methode basiert auf der von Uryasev gefundenen Ersatzfunktion  $F_\beta$ , deren Ableitung der des CVaRs entspricht. Da Uryasev zu dem für diese Arbeit entscheidenden Resultat keinen konkreten Beweis angibt, wird dieser in Kapitel 2.2.1 eigenständig durchgeführt. Zur Verwendung von Szenarien (anstelle einer Dichtefunktion) in der Optimierung diskretisiert Uryasev die Funktion  $F_\beta$  zu  $\tilde{F}_\beta$ , die als Teil der Zielfunktion für das in dieser Arbeit präsentierte Optimierungsmodell verwendet wird.

Die tatsächliche Zielfunktion des Optimierungsmodells bildet das in Abschnitt 3.5 eingeführte ALM-Risikomaß, das sich aus Markt- und Kreditrisiko gemäß der Formel (3.12)

$$\text{ALMR} = \sqrt{\text{CVaR}_M(\text{A-RNPF}) + \text{CVaR}_K(\text{A}) + 2\rho \cdot \text{CVaR}_M(\text{A-RNPF}) \text{CVaR}_K(\text{A})}$$

berechnet. Davon ausgehend, dass die Passivseite keine Ausfallrisiken beinhaltet, wird nur

das Marktrisiko relativ zur Passivseite gemessen. Aufgrund der guten Eigenschaften konischer Optimierungsprogramme wird das ALM-Risikomaß in die Zielfunktion eines solchen umgeformt. Das daraus resultierende Optimierungsproblem (3.31)

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x = x_{\text{ALMR}} \text{ mit Konus} \\ x \in C := & \{x \in \mathbb{R}^n : x_{\text{ALMR}} \geq \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\} \text{ unter} \\ & lbx \leq x \leq ubx \\ & lbA \leq Ax \leq ubA \end{aligned}$$

wird als Basis für das Optimierungsmodell verwendet, wobei das ALMR-Risiko durch  $\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ , wie in Abschnitt 3.5 beschrieben, als Konus dargestellt wird.<sup>1</sup>

Innerhalb dieses Optimierungsprogramms können zwei Arten von Nebenbedingungen einfließen: Zum einen Beschränkungen an einzelne Assetklassen (bzw. Positionen des Zielvektors  $x$ ) über die Ungleichung  $lbx \leq x \leq ubx$ , zum anderen Restriktionen an Gruppen von Assetklassen über die Formulierung bestimmter linearer Ungleichungen. Diese sind von der Form  $lbA \leq Ax \leq ubA$  und werden in der Nebenbedingungsmatrix  $A$  untergebracht. Durch die Beschränkungen an den Zielvektor  $x$  können Unter- und Obergrenzen für die Investitionen in einzelne Assetklassen gesetzt oder Assetklassen sogar ganz gesperrt werden. Mittels Gruppenrestriktionen lassen sich dagegen komplizierte Nebenbedingungen konstruieren. Darunter fallen neben strukturell einfachen Anwendungen wie die Beschränkung von Aktien- oder Währungsgruppen auch komplexere, wie die Forderung der Mindestrendite, Berücksichtigung der Transaktionskosten, Verwendung von Währungsabsicherungen, Abbildung eines Fonds oder die Beschränkung der Portfolioduration.

Die zentralen Inputdaten, die zur Optimierung benötigt werden, sind die Risikoprämien für die Assetklassen und die in Abschnitt 3.6 beschriebenen Markt- und Kreditszenarien. Während die Szenarien häufig bereits im Unternehmen vorhanden sind oder extern eingekauft werden, müssen die Renditeschätzungen meistens selbst entwickelt werden. In Abschnitt 3.9.2 wird ein ausgewähltes Verfahren zur Gewinnung von Gleichgewichtsrenditen aus einem Marktportfolio vorgeschlagen. Dieses Verfahren bietet Transparenz und eine gewisse Objektivität<sup>2</sup>. Die in Abschnitt 3.9.3 gezeigte Version des Black-Litterman-

<sup>1</sup> Dabei werden  $y_1$  und  $y_2$  so gewählt, dass  $\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$  die Formel des ALM-Risikos (3.12) ergibt.

<sup>2</sup> Die Objektivität soll durch die Rückwärtsoptimierung aus einem Marktportfolio, das den Markt neutral abbildet, gewahrt werden.

Verfahrens bietet darüber hinaus die Möglichkeit, subjektive Einschätzungen des Investors bezüglich einzelner Risikoprämien in die Gleichgewichtsrenditen einfließen zu lassen.

Das Optimierungsmodell wird in den Kontext des Asset-Liability-Managements eines Versicherungsunternehmens gerückt und aus der Sicht eines strategischen Investors betrachtet. In diesem Zusammenhang wird auch der operative Prozess, der für die Optimierung notwendig ist, beleuchtet. Das in Kapitel 4 durchgeführte Optimierungsbeispiel orientiert sich an diesem Prozess und vermittelt dem Leser einen Einblick in das Funktionsprinzip des Optimierungsprogramms und seiner Nebenbedingungen. Neben vielen positiven Aspekten offenbart das Beispiel auch die Grenzen des Optimierers.

## 5.2 Kritische Analyse und Verbesserungsmöglichkeiten

Wie bereits das Beispiel zeigte, tritt in der Praxis häufig die Frage nach dem risikominimalen Portfolio zu einem vorgegebenen Risikobudget auf. Diese Fragestellung lässt sich mit dem vorliegenden Optimierungsprogramm nur indirekt durch das Ausprobieren verschiedener Returnanforderungen beantworten. Zur direkten Beantwortung dieser Frage führt eine Umstellung des Optimierungsprogramms zur Returnmaximierung:

**max (E[R] - TAK) unter**

$$x_{\text{ALMR}} \leq S \text{ mit } x \in C := \{x \in \mathbb{R}^n : x_{\text{ALMR}} \geq \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\}$$

$$lbx \leq x \leq ubx$$

$$lbA \leq Ax \leq ubA.$$

Hierbei wird der Portfolioreturn unter Berücksichtigung von Transaktionskosten maximiert. Anstelle der Forderung eines Mindestreturns gibt es bei dieser Optimierung eine Anforderung an das ALM-Risiko, das eine gewählte Schranke  $S$  nicht überschreiten darf.<sup>3</sup> Diese Schranke stellt das Risikobudget dar. Die Umstellung des Optimierungsmodus beeinflusst die Bedingungen an den Return und an das ALM-Risiko, alle anderen Restriktionen können beibehalten werden. Vorsicht ist jedoch beim Aufbau der Nebenbedingungsmatrix geboten, hier müssen Zeilenanordnung und Zielvektor zueinander passen.

<sup>3</sup> Die Anforderung an das ALM-Risiko wird als konische Nebenbedingung implementiert.

Unabhängig von der Wahl des Optimierungsmodus „Returnmaximierung“ oder „ALMR-Minimierung“ sollte beachtet werden, dass das Optimierungsprogramm stets ein CVaR-basiertes Risikomaß beinhaltet. Zur Berechnung des Risikokapitals nach aufsichtsrechtlichen Kriterien wird (in Deutschland) jedoch eine VaR-basierte Risikokapitalberechnung verlangt. Eine Lösung ist in diesem Fall die Berechnung des CVaRs mit einem dem VaR99.5 angepassten CVaR-Konfidenzlevel, wie sie in der Beispielloptimierung vorgeschlagen wird, und einer zusätzlichen Ausgabe des Risikokapitals, gerechnet im Sinne eines VaR99.5-Maßes. Auf diese Weise optimiert man zwar den CVaR<sup>4</sup>, erhält jedoch gleichzeitig eine Näherung an den optimalen VaR99.5. Man nimmt an dieser Stelle jedoch einen Fehler durch die Umrechnung der Konfidenzlevel in Kauf.<sup>5</sup>

Da das Quantil zum Sicherheitslevel von 99,5% sehr weit im Tail der Verteilung liegt, ist eine bestmögliche Modellierung dieses Bereichs der Verteilung (bzw. eine ausreichend große Anzahl an Szenarien) wichtig. Als Vergleich zu einer Optimierung mit einem sehr großen Sicherheitslevel kann es durchaus sinnvoll sein, eine Optimierung zu einem kleineren Level durchzuführen (z. B. 90% oder 95%). Auf diese Weise kann anhand der verschiedenen Ergebnisse abgeschätzt werden, wie stark die Optimierung vom Tail der Verteilung getrieben wird.

Bei einer großen Anzahl an Szenarien kann eine Effizienzsteigerung durch varianzreduzierende Verfahren<sup>6</sup> (z. B. *Importance Sampling*) erwirkt werden, die eine Reduzierung der Szenarienzahl ermöglicht. Dies führt im Rahmen der technischen Umsetzung der Optimierung zu einer Verbesserung der Performance.

Die Qualität der Optimierungsergebnisse hängt in erster Linie von der Qualität der Szenarien und der Renditen ab. Bei der Vorbereitung der Input-Daten ist die Generierung der Renditen aus verschiedenen Gründen der schwierigste Teil. Da die zukünftigen Renditen unbekannt sind, müssen sie auf irgendeine Art und Weise geschätzt werden. Das dazu in Abschnitt 3.9.2 präsentierte Verfahren der Rückwärtsoptimierung soll Objektivität und Transparenz bieten. Die Qualität der daraus gewonnenen Renditen hängt jedoch von der Qualität des aufgestellten Marktportfolios ab. Objektivität kann nur durch einen transpa-

<sup>4</sup> Bei einem Ziel-VaR zum Sicherheitslevel 99.5 wurde die Umrechnung auf ein äquivalentes CVaR-Konfidenzlevel in Kapitel 4 vorgeführt.

<sup>5</sup> Details dazu wurden im Rahmen der Einführung der CVaR-Optimierung in Kapitel 2 und des Beispiels in Kapitel 4 besprochen.

<sup>6</sup> Für Details zu varianzreduzierenden Verfahren siehe Müller-Gronbach et al. [2012], Kapitel 5.

renten Prozess zur Gewinnung dieses Marktportfolios gewährleistet werden. Die Erstellung eines Marktportfolios ist in der Regel mit hohem Aufwand verbunden, da zu diesem Zweck Research und Analyse zu einem unter Umständen umfangreichen Allokationsuniversum, wie es im Rahmen einer realen Asset-Allokation zur Verfügung steht, betrieben werden muss.

Neben dem Marktportfolio ist die Kovarianzmatrix für die Rückwärtsoptimierung die zweite wesentliche Komponente. Für langfristige Renditen kann zur Kalibrierung der Kovarianzen ein langer Zeitraum von beispielsweise 10 Jahren gewählt oder aber die Ansicht vertreten werden, dass für die Risikoprämien einer einperiodischen Optimierung lediglich die letzten 3 Jahre Relevanz haben.<sup>7</sup>

Hat man Renditen aus diesem oder einem anderen Verfahren gewonnen, können diese mit dem Black-Litterman-Verfahren an die eigenen subjektiven Einschätzungen angepasst werden. Dabei wird wiederholt darauf hingewiesen, dass die Optimierungsergebnisse sehr sensibel auf Veränderungen der Renditen reagieren.

Einen weiteren wesentlichen Einflussfaktor stellen die Korrelationen zwischen den Assetklassen dar, die durch die Kovarianzmatrix in die Szenarien eingehen. Die Kovarianzen für die Szenarien können von der Kovarianzstruktur, die zur Generierung der Renditen verwendet wird, vollkommen unabhängig sein. Aufgrund des Umstands, dass Kovarianzstrukturen bei einer großen Anzahl von Assetklassen schwer zu verstehen sind, ist auch ihre Wirkung auf die Optimierungsergebnisse intransparent. Sie sind mitunter ein Einflussfaktor, der sich nur schwer erklären lässt und somit die Interpretation von Ergebnissen schwierig gestaltet.

Eine weitere mit der Kovarianzstruktur verbundene Problematik ist die Ausgliederung von einzelnen Investitionsideen aus einem Optimierungslauf. Das Ergebnisportfolio einer Optimierung ist immer das Resultat einer Gesamtbetrachtung des Optimierungsproblems unter Berücksichtigung der Diversifizierungseffekte zwischen den Assetklassen. Filtert man aus verschiedenen Optimierungen einzelne Ideen heraus und setzt diese in einem neuen, entsprechend restringierten Optimierungslauf zusammen, so wird das Ergebnisportfolio im Vergleich zu den vorherigen Portfolios häufig ineffizient sein. Daher sollten Portfoliozusammenstellungen, die durch ein solches Vorgehen entstehen, stets sorgfältig geprüft werden.

<sup>7</sup> Für die Beispieloptimierung wurde eine 3-jährige, gleichgewichtete Historie verwendet.

### 5.3 Modellerweiterungen - ein Ausblick

Es gibt viele denkbare Erweiterungen des Modells, die sich in das Optimierungsprogramm einbauen lassen. Eine durchaus sinnvolle Erweiterung ist die Umstellung des Optimierungsprogramms zur Maximierung des Portfolioreturns unter Einhaltung eines Risikobudgets und wurde bereits im vorherigen Abschnitt 5.2 erläutert. Sie schafft den Vorteil, dass der Anwender unter Angabe von Risikokapitalvorgaben direkt die dazugehörigen, risikominimalen Portfolios erhält.

Davon ausgehend, dass die Volatilität für einen klassischen Aktionär das wichtigste Risikomaß ist, wird mit dem ALM-Risiko aus seiner Sicht das falsche Risikomaß optimiert. Das ALM-Risikomaß betrachtet der Aktionär als Maß des Versicherungskunden, dessen Interesse der Fortbestand des Versicherungsunternehmens ist. Der Aktionär ist jedoch in erster Linie an der Rendite seines eingesetzten Kapitals interessiert und schaut auf die Volatilität als Maß. Ist diese zu hoch, sorgt er sich um seine Rendite oder investiert erst gar nicht in das dazugehörige Unternehmen.

Um diesem möglichen Interessenkonflikt entgegen zu wirken, kann das Optimierungsmodell um die Volatilität als zweites Risikomaß erweitert werden. Auf diese Weise gelingt es, beide Sichtweisen gleichermaßen in die Optimierung zu integrieren. Technisch kann die Volatilität als Nebenbedingung in das bestehende Optimierungsprogramm eingefügt werden. Dies ist sowohl bei der ALM-Risikominimierung als auch bei einer Returnmaximierung möglich. Dann würden die beiden Optimierungsprogramme wie folgt lauten:

„Minimiere das ALM-Risiko unter Forderung eines Mindestreturns und Einhaltung einer Volatilitätsgrenze (aufgrund einer Kovarianzmatrix)“, bzw.

„Maximiere den Return (inkl. TAK) unter Einhaltung eines ALM-Risikobudgets und einer Volatilitätsgrenze“.

Als dritte Möglichkeit wäre auch eine Volatilitätsminimierung unter Einhaltung eines ALM-Risikos und der Forderung eines Mindestreturns denkbar. Dies würde eine Annäherung an die Markowitz-Optimierung bedeuten.

Eine weitere sinnvolle Erweiterung ist die Optimierung aus einer Nachsteuersicht. Da die Besteuerung verschiedener Assetklassen sehr unterschiedlich ausfallen kann, erhält man in der Regel ein ganz anderes Optimierungsergebnis als bei einer Optimierung ohne Einbezug von Steuern. Die Berechnung der Steuern pro Assetklasse sollte zusätzlich zu den

Transaktionskosten in die Berechnung der Renditen einfließen. Dies kann beispielsweise in Form von Nachsteuerfaktoren der Form  $(1 - \text{Steuersatz})$  pro Assetklasse geschehen, die in einem Nachsteuervektor zusammengefasst werden.

## 5.4 Fazit

Das in dieser Arbeit vorgestellte Optimierungsverfahren auf Basis der CVaR-Optimierung, bietet dem Anwender vielfältige Möglichkeiten zur Portfoliooptimierung. Dies wurde in Kapitel 3 durch die Vielfalt an einsetzbaren Nebenbedingungen deutlich. Die eingeführten linearen Nebenbedingungen entstanden aus praxisnahen Fragestellungen, sodass sie dem Modell Realitätsnähe verleihen. Trotz der Ausrichtung auf die Optimierung eines SAA-Portfolios, ist das Modell vielseitig verwendbar und kann durch kleine Änderungen des Optimierungsprogramms auch für andere Zwecke eingesetzt werden. Beispielsweise ist die Verwendung des Modells für kurzfristige Überlegungen im Rahmen einer TAA realisierbar, indem die Gleichgewichtsrenditen mit dem Black-Litterman-Verfahren anhand taktischer Einschätzungen angepasst werden.

Nicht zuletzt zeigt auch der Ausblick in Abschnitt 5.3 die Wandlungsfähigkeit des Optimierungsprogramms, die es ermöglicht, auf unterschiedliche Fragestellungen Antworten zu geben. Das Modell liefert dem versierten Anwender Ideen und Anregungen für die Gestaltung einer Asset-Allokation. Die Berücksichtigung vieler komplexer Zusammenhänge wie der Diversifikation zwischen Assetklassen, das Zusammenspiel von Markt- und Kreditrisiko zur Berechnung von Risikokapital oder die simultane Beachtung komplizierter Nebenbedingungen sind ohne ein solches Modell kaum vereinbar. Hinzu kommen rechtliche Vorgaben, Transaktionskosten oder auch persönliche Präferenzen, die durch das Modell berücksichtigt werden können. All das vermag die Optimierung zu einem unverzichtbaren Ratgeber für die Erstellung einer Asset-Allokation machen.

In der Praxis ergibt sich nach einer ersten Optimierung aus der Betrachtung der Ergebnisse meistens ein Prozess des Hinzufügens weiterer Nebenbedingungen. Angestoßen wird dieser Prozess durch die Nichtumsetzbarkeit eines Ergebnisportfolios, d. h., die Notwendigkeit die Lösungsportfolios weiter einzuschränken. Die Gründe für die Nichtumsetzbarkeit können dabei unterschiedlich sein. Vielleicht ist dem Investor die vom Optimierer vorgeschlagene Allokation zu extrem, d. h., es werden zu viele Nebenbedingungsgrenzen simultan

ausgereizt, oder es wurden im Vorhinein bestimmte Aspekte nicht bedacht, die das Optimierungsergebnis hervorbringt. Dieser Prozess gehört zu dem Lernprozess im Umgang mit dem Optimierer und wurde im Rahmen der Beispielloptimierung durch die verschiedenen, aufeinander aufbauenden Optimierungsläufe durchlebt.

Die Schwierigkeiten im Umgang mit dem Optimierungsmodell, die sich in der Beispielloptimierung gezeigt haben, bzw. zum Teil bereits in den vorherigen Kapiteln erwähnt wurden, sind in der kritischen Analyse im Abschnitt 5.2 zusammengefasst. Besondere Sorgfalt gilt bei der Erstellung und dem Umgang mit den Risikoprämien und Szenarien, denn die Qualität der Optimierungsergebnisse hängt von der Qualität der Inputs ab. Jedes Ergebnis sollte kritisch hinterfragt werden - auch oder gerade dann, wenn es den eigenen Erwartungen entspricht.

Dem Leser wird ein praxistaugliches Optimierungsmodell an die Hand gegeben, das sich mithilfe der im dritten Kapitel gezeigten Implementierungsvorschläge praktisch umsetzen lässt. Das Modell kann interessante Impulse für eine Asset-Allokation liefern, wenn Parameter und Inputdaten gut aufeinander abgestimmt sind. Denn letztendlich stellt die Optimierung eine Empfehlung aufgrund einer in der Modellwelt vereinfachten Realität dar, welche die Vorstellungen, Meinungen und Zukunftsprognosen des Anwenders im Rahmen der Möglichkeiten dieses Modells widerspiegelt.

# Kapitel 6

## Anhang

### 6.1 Inverse Optimierung zur Gewinnung von Risikoprämien

Die im Optimierungsbeispiel vorgestellten Risikoprämien können gemäß der Methodik aus Kapitel 3.9.2 aus einem Marktportfolio gewonnen werden. In der folgenden Tabelle 6.1 ist ein mögliches Marktportfolio angeführt. Durch Multiplikation mit der Kovarianzmatrix (Tabelle 6.2) erhält man zunächst die „rohen“ Risikoprämien. Diese kann man mit einem beliebigen Faktor skalieren, ohne dadurch Einfluss auf die Ergebnisportfolios zu nehmen. Hier wurde der Skalierungsfaktor so gewählt, dass die Assetklasse der US-Aktien eine Rendite von 5% ausweist. Eine solche Wahl könnte der Investor treffen, da er die US-Aktienrendite besonders gut versteht und hofft, auf diese Weise ein besseres Gefühl für die Renditeverhältnisse der verschiedenen Assetklassen zueinander zu bekommen.

Sollte der Investor anschließend feststellen, dass einige der Gleichgewichtsrenditen zu stark von seiner eigenen Vorstellung abweichen, bietet ihm das Black-Litterman-Verfahren (Kapitel 3.9.3) die Möglichkeit auf die Gleichgewichtsrisikoprämien Einfluss zu nehmen.

Zu den hier berechneten Risikoprämien wird nach der Optimierung noch der risikofreie Zins (in der Beispielloptimierung 1%) hinzu addiert, um absolute Renditen zu erhalten.

| Nr | Assetklasse           | MarktPF     | RP roh | RP skaliert  |
|----|-----------------------|-------------|--------|--------------|
| 1  | DAX                   | 0,15%       | 0,08%  | 5,43%        |
| 2  | SX5E                  | 0,61%       | 0,08%  | 5,78%        |
| 3  | EM-Aktien             | 0,31%       | 0,13%  | 9,35%        |
| 4  | USD-Aktien            | 1,27%       | 0,07%  | <b>5,00%</b> |
| 5  | EUR-Cash 0-1          | 0,00%       | 0,00%  | 0,03%        |
| 6  | RUB-Cash 0-1          | 0,00%       | 0,00%  | 0,24%        |
| 7  | USD-Cash 0-1          | 0,00%       | 0,00%  | 0,20%        |
| 8  | Germany 1-3           | 10,18%      | 0,00%  | 0,29%        |
| 9  | Germany 3-5           | 12,37%      | 0,01%  | 0,77%        |
| 10 | Germany 5-7           | 3,86%       | 0,02%  | 1,12%        |
| 11 | Germany 7-10          | 0,12%       | 0,02%  | 1,42%        |
| 12 | Germany 10-30         | 0,06%       | 0,04%  | 2,53%        |
| 13 | Spanien (allg.)       | 4,54%       | 0,05%  | 3,46%        |
| 14 | EM-Government (allg.) | 1,22%       | 0,01%  | 0,91%        |
| 15 | USD-Government 1-3    | 41,58%      | 0,01%  | 0,41%        |
| 16 | USD-Government 3-5    | 19,77%      | 0,02%  | 1,09%        |
| 17 | USD-Government 5-7    | 2,83%       | 0,02%  | 1,50%        |
| 18 | USD-Government 7-10   | 1,08%       | 0,03%  | 1,92%        |
| 19 | USD-Government 10-20  | 0,05%       | 0,03%  | 2,33%        |
|    | <b>Gesamt</b>         | <b>100%</b> |        |              |

Tabelle 6.1: Inverse Optimierung aus dem Marktportfolio

|    | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        | 6       | 7       | 8        | 9        | 10       | 11       | 12       | 13       | 14       | 15       | 16       | 17       | 18       |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1  | 0,06680  | 0,05436  | 0,05664  | 0,03942  | -0,00004 | 0,00003 | 0,00003 | -0,00069 | -0,00157 | -0,00246 | -0,00314 | -0,00297 | 0,00563  | 0,00325  | -0,00028 | -0,00054 | -0,00094 | -0,00072 |
| 2  | 0,05436  | 0,06536  | 0,05446  | 0,03902  | -0,00003 | 0,00004 | 0,00003 | -0,00079 | -0,00194 | -0,00296 | -0,00376 | -0,00388 | 0,00904  | 0,00335  | -0,00037 | -0,00068 | -0,00110 | -0,00070 |
| 3  | 0,05664  | 0,05446  | 0,15552  | 0,04786  | -0,00003 | 0,00011 | 0,00009 | -0,00068 | -0,00163 | -0,00236 | -0,00274 | -0,00392 | 0,00338  | 0,00460  | -0,00011 | 0,00016  | 0,00004  | 0,00079  |
| 4  | 0,03942  | 0,03902  | 0,04786  | 0,04211  | -0,00003 | 0,00004 | 0,00003 | -0,00051 | -0,00118 | -0,00171 | -0,00207 | -0,00213 | 0,00413  | 0,00260  | -0,00022 | -0,00048 | -0,00110 | -0,00070 |
| 5  | -0,00004 | -0,00003 | -0,00003 | -0,00003 | 0,00000  | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000  | 0,00001  | 0,00001  | 0,00001  | 0,00002  | -0,00003 | -0,00003 | 0,00001  | 0,00001  | 0,00001  | 0,00001  |
| 6  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00004 | 0,00003 | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  |
| 7  | -0,00003 | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003 | 0,00003 | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  | 0,00003  |
| 8  | -0,00069 | -0,00079 | -0,00068 | -0,00051 | 0,00000  | 0,00000 | 0,00000 | 0,00009  | 0,00015  | 0,00020  | 0,00023  | 0,00030  | -0,00017 | -0,00003 | -0,00017 | -0,00020 | -0,00026 | -0,00032 |
| 9  | -0,00157 | -0,00194 | -0,00163 | -0,00118 | 0,00001  | 0,00001 | 0,00001 | 0,00015  | 0,00047  | 0,00061  | 0,00073  | 0,00097  | 0,00041  | -0,00004 | 0,00006  | -0,00004 | 0,00026  | 0,00032  |
| 10 | -0,00246 | -0,00296 | -0,00236 | -0,00171 | 0,00001  | 0,00001 | 0,00001 | 0,00020  | 0,00061  | 0,00107  | 0,00125  | 0,00170  | -0,00057 | -0,00001 | 0,00009  | 0,00023  | 0,00042  | 0,00053  |
| 11 | -0,00314 | -0,00376 | -0,00207 | -0,00207 | 0,00001  | 0,00002 | 0,00002 | 0,00023  | 0,00073  | 0,00125  | 0,00205  | 0,00271  | -0,00059 | -0,00001 | 0,00011  | 0,00029  | 0,00057  | 0,00070  |
| 12 | -0,00297 | -0,00388 | -0,00392 | -0,00213 | 0,00002  | 0,00004 | 0,00003 | 0,00030  | 0,00097  | 0,00170  | 0,00271  | 0,00753  | 0,01236  | 0,00010  | 0,00017  | 0,00052  | 0,00092  | 0,00130  |
| 13 | 0,00563  | 0,00904  | 0,00338  | 0,00413  | 0,00001  | 0,00000 | 0,00000 | -0,00017 | -0,00041 | -0,00057 | -0,00059 | -0,00016 | 0,01236  | 0,00090  | -0,00016 | -0,00020 | -0,00026 | 0,00008  |
| 14 | -0,00325 | 0,00335  | 0,00460  | 0,00260  | 0,00001  | 0,00000 | 0,00000 | 0,00003  | -0,00004 | -0,00001 | -0,00001 | 0,00010  | 0,00090  | 0,00390  | -0,00002 | -0,00005 | -0,00009 | -0,00014 |
| 15 | -0,00028 | -0,00037 | -0,00011 | -0,00022 | 0,00000  | 0,00001 | 0,00001 | 0,00003  | 0,00006  | 0,00009  | 0,00011  | 0,00017  | -0,00016 | -0,00002 | 0,00008  | 0,00011  | 0,00014  | 0,00014  |
| 16 | -0,00054 | -0,00068 | 0,00016  | -0,00048 | 0,00001  | 0,00002 | 0,00002 | 0,00007  | 0,00016  | 0,00023  | 0,00029  | 0,00052  | -0,00020 | -0,00005 | 0,00011  | 0,00039  | 0,00045  | 0,00050  |
| 17 | -0,00094 | -0,00110 | 0,00004  | -0,00072 | 0,00001  | 0,00002 | 0,00002 | 0,00010  | 0,00026  | 0,00042  | 0,00057  | 0,00092  | -0,00026 | -0,00009 | 0,00014  | 0,00045  | 0,00093  | 0,00103  |
| 18 | -0,00072 | -0,00070 | 0,00079  | -0,00035 | 0,00001  | 0,00003 | 0,00002 | 0,00012  | 0,00032  | 0,00053  | 0,00070  | 0,00130  | 0,00008  | -0,00014 | 0,00014  | 0,00050  | 0,00103  | 0,00193  |

Tabelle 6.2: Kovarianzmatrix zur inversen Optimierung

# Literaturverzeichnis

- C. Acerbi und D. Tasche. On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking and Finance*, 26:1487–1503, 2001.
- P. Albrecht. Zur Messung von Finanzrisiken. *Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie, Portfoliomanagement und Versicherungswirtschaft Nr. 143 (erweiterte deutsche Version)*, 2004.
- P. Albrecht und S. Koryciorz. Bestimmung des Conditional Value-at-Risk (CVaR) bei Normal- bzw. Lognormalverteilung. *Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie, Portfoliomanagement und Versicherungswirtschaft Nr. 142*, 2003.
- P. Albrecht und R. Maurer. *Investment- und Risikomanagement: Modelle, Methoden, Anwendungen*. Schäffer-Poeschel Verlag, 2008. ISBN 9783791028279.
- P. Artzner, F. Delbaen, J. M. Eber, und D. Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 3., 1999.
- C. Bruns und F. Meyer-Bullerdiek. *Professionelles Portfoliomanagement: Aufbau, Umsetzung und Erfolgskontrolle strukturierter Anlagestrategien (überarbeitete und erweiterte Auflage)*. Schäffer-Poeschel, 2013. ISBN 9783791031552.
- P. Buchholz. Modellgestützte Analyse und Optimierung. *Script zur Informatik IV, VL an der Technischen Universität Dortmund (13. April 2011)*, 2011.
- W. Burr. Modularisierung als Prinzip der Ressourcenorganisation aus Sicht der ökonomischen Theorie. *DBW*, H. 4, S. 448-470., 2004.
- H.E. Büschgen. *Das kleine Börsenlexikon (überarbeitete und erweiterte Auflage)*. Verlag: Schäffer-Poeschel, 23 edition, 2012. ISBN 9783791031125.

- K.V. Chopra und W.T. Ziemba. The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice. *The Journal of Portfolio Management*, Winter 1993, Vol. 19, No. 2: pp. 6-11, 1993.
- H. Cremer. Value-at-Risk-Konzepte für Marktrisiken. *Hochschule für Bankwirtschaft, Frankfurt am Main, Arbeitspapier, Nr. 17, ISSN 1436-9753*, 1999.
- T. Davi. Lösung großer konischer Programme mit Hilfe primal-dualer Methoden. *HHU Düsseldorf, Dissertationsschrift*, 2012.
- F. Eisenführ, M. Weber, und T. Langer. *Rationales Entscheiden*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2010. ISBN 9783642028489.
- M.M. Hagemeister. *Die Schätzung erwarteter Renditen in der modernen Kapitalmarkttheorie: Implizit erwartete Renditen und ihr Einsatz in Kapitalmarktmodell-Tests und Portfoliooptimierung*. Gabler research. Gabler, 2010. ISBN 9783834984975.
- J.C. Hull. *Optionen, Futures und andere Derivate*. Pearson Studium, 2009. ISBN 9783827372819.
- J.C. Hull. *Risikomanagement: Banken, Versicherungen und andere Finanzinstitutionen*. Pearson Studium - Economic BWL, 2010. ISBN 9783868940435.
- T.M. Idzorek. A step-by-step guide to the Black-Litterman Model. *Zephyr Associates Inc. Working Paper*, 2005.
- F. Jarre und J. Stoer. *Optimierung*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag GmbH, 2003. ISBN 9783540435754.
- T. Jasić. Wirksame Verlustbegrenzung durch Portfoliooptimierung mit Hilfe des Conditional Value at Risk (CVaR). *Köln : Bank-Verl. Medien*, 25/26 (10.12.), p. 62-67, 2009.
- Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- M. Kriele und J. Wolf. *Wertorientiertes Risikomanagement von Versicherungsunternehmen*. Springer-Lehrbuch Masterclass. Springer, 2012. ISBN 9783642258053.
- F.W. Mühlbradt. *Wirtschaftslexikon: Daten, Fakten und Zusammenhänge*. Cornelsen Scriptor. Cornelsen Scriptor, 2004. ISBN 9783589220779.

- T. Müller. *Finanzrisiken in der Assekuranz: Moderne Finanz- und Risikokonzepte in der Versicherungswirtschaft*. Studienbücher Wirtschaftsmathematik. Springer Verlag, 2012. ISBN 9783834819062.
- Th. Müller-Gronbach, E. Novak, und K. Ritter. *Monte Carlo-Algorithmen*. Springer-Lehrbuch Masterclass. Springer, 2012. ISBN 9783540891413.
- Y. Nesterov und A. Nemirovskii. *Interior Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. Studies in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. ISBN 9780898715156.
- T. Nguyen. *Handbuch der wert- und risikoorientierten Steuerung von Versicherungsunternehmen*. Verlag Versicherungswirtschaft, 2008. ISBN 9783899523447.
- R.T. Rockafellar und S. Uryasev. Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of risk*, 2:21–42, 2000.
- S. Satchell und A. Scowcroft. Demystification of the Black-Litterman Model: Managing Quantitative and Traditional Construction. *Journal of Asset Management*, p. 138-150, 2000.
- K. Spremann. *Portfoliomanagement*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2008. ISBN 9783486587791.
- S. Uryasev. Conditional Value-at-Risk: Optimization Algorithms and Applications. *Financial Engineering News*, Issue 14, 2000.
- S. Uryasev, P. Krokmal, und J. Palmquist. Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints. *Journal of Risk*, 2002.
- J. Walters. The Factor Tau in the Black-Litterman Model. *SSRN*: <http://ssrn.com/abstract=1701467> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1701467>, 2013.



