

Testen statistischer Funktionale für Zweistichprobenprobleme

I n a u g u r a l - D i s s e r t a t i o n

zur

Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Vladimir Ostrovski

aus Moskau

Düsseldorf 2006

Aus dem Mathematischen Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Gedruckt mit der Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent:	Prof. Dr. A. Janssen, Düsseldorf
Korreferenten:	Prof. Dr. K. Janßen, Düsseldorf
	Prof. Dr. F. Liese, Rostock

Tag der mündlichen Prüfung: 26.01.2006

Inhaltsverzeichnis

Einführung	1
1 Grundlagen	5
1.1 L_2 -Differenzierbarkeit und Tangentialräume	5
1.2 Differenzierbare statistische Funktionale	8
1.3 L_2 -Differenzierbarkeit und Tangentialräume der Produktmaße	10
1.4 Asymptotisches Vergleichen der Testfolgen	12
2 Differentiation statistischer Funktionale für das Zweistich-	15
probenproblem	
3 Testen impliziter Alternativen im Zweistichprobenkontext	27
3.1 Zweistichprobenprobleme beim Testen statistischer Funktio-	
nale und Teststatistiken	27
3.2 Lokale asymptotische Normalität der Produktexperimente . .	30
3.3 Asymptotisches Verhalten der Teststatistik	36
3.4 Asymptotische Eigenschaften der einseitigen Tests	39
3.5 Asymptotische Eigenschaften der zweiseitigen Tests	59
4 Asymptotisch optimales Testen statistischer Funktionale	65
4.1 Konvergenz gegen unendlich-dimensionale Gauß-Shift Experi-	
mente	65
4.2 Hauptsatz der asymptotischen Testtheorie und obere Schran-	
ken für die asymptotischen Gütefunktionen	70
4.3 Asymptotisch optimales Testen statistischer Funktionale bei	
Einstichprobenproblemen	73
4.3.1 Asymptotisch optimale einseitige Tests	74
4.3.2 Asymptotisch optimale zweiseitige Tests	81
4.4 Asymptotisch optimales Testen statistischer Funktionale bei	
Zweistichprobenproblemen	89
4.4.1 Asymptotisch optimale einseitige Tests	94
4.4.2 Asymptotisch optimale zweiseitige Tests	96
5 Anwendungen und Beispiele	99

Anhang	121
Symbol <i>o</i>	121

Einführung

Viele Testprobleme der parametrischen und nichtparametrischen Statistik lassen sich mit Hilfe der reellwertigen statistischen Funktionale formulieren. In dieser Arbeit werden die Probleme des Testens statistischer Funktionale im Zweistichprobenkontext betrachtet. Es wird stets vorausgesetzt, dass die beiden Stichproben stochastisch unabhängig sind und die Zufallsvariablen in jeder Stichprobe unabhängig identisch verteilt sind. Seien $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}_1(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ zwei nichtleere Mengen von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Wir betrachten die Familie $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} := \{P \otimes Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$ von Produktmaßen, die das kanonische Modell für die Zweistichprobenprobleme darstellt. Jede Abbildung $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ wird dann als reellwertiges statistisches Funktional bezeichnet. Viele einseitige und zweiseitige Testprobleme aus der Praxis lassen sich dann in der Form

$$\{P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) \leq 0\} \text{ gegen } \{P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) > 0\} \quad (1)$$

beziehungsweise

$$\{P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) = 0\} \text{ gegen } \{P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) \neq 0\} \quad (2)$$

darstellen. An einer beliebigen aber fest gewählten Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ mit $k(P_0 \otimes Q_0) = 0$ werden diese Testprobleme mit Hilfe der $L_2(P_0 \otimes Q_0)$ -differenzierbaren Kurven von Wahrscheinlichkeitsmaßen parametrisiert. Weiterhin betrachtet man ein an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ differenzierbares statistisches Funktional $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$. Die an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ differenzierbaren statistischen Funktionale lassen sich lokal entlang der $L_2(P_0 \otimes Q_0)$ -differenzierbaren Kurven linearisieren. Dementsprechend werden die einseitigen und zweiseitigen Testprobleme (1) und (2) lokal an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ als lineare Testprobleme in einem Hilbertraum $H \subset L_2(P_0 \otimes Q_0)$ aufgefasst. Mit dem Übergang zur Asymptotik im Rahmen der modernen Theorie von Le Cam erhält man dann die linearen Testprobleme für die Limesexperimente. Die geeignete Lokalisierung führt dabei zu den unendlich-dimensionalen Gauß-Shift Experimenten als Limesexperimente. Die linearen Testprobleme lassen sich für die Gauß-Shift Experimente optimal lösen. Man findet also für die Limesexperimente die optimalen Tests für die gegebenen linearen Testprobleme. Mit Hilfe der Theorie von Le Cam und insbesondere des

Hauptsatzes der Testtheorie führt das zu oberen Schranken für die asymptotischen Gütefunktionen der Testfolgen für die Testprobleme (1) und (2). Diese oberen Schranken gelten dann für die asymptotischen Gütefunktionen aller Testfolgen, die einige für das jeweilige Testproblem sinnvolle Nebenbedingungen erfüllen. Die Testfolgen, deren asymptotische Gütefunktionen die obere Schranke erreichen, werden als asymptotisch optimal bezeichnet.

In Kapitel 1 wird an die L_2 -differenzierbaren Kurven von Wahrscheinlichkeitsmaßen erinnert. Danach werden die differenzierbaren statistischen Funktionale und ihre kanonischen Gradienten vorgestellt. Der Tangentialraum und der Tangentenkegel eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $P_0 \in \mathcal{P}$ bezüglich einer Familie $\mathcal{P}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen werden eingeführt. Insbesondere wird auf die Struktur der Tangentialräume und Tangentenkegel der Familien von Produktmaßen eingegangen. Die Kenntnis dieser Struktur ist der Schlüssel zum Testen der differenzierbaren statistischen Funktionale im Zweistichprobenkontext. Als Letztes werden in diesem Kapitel die Hilfsmittel vorgestellt, die zum asymptotischen Vergleich der verschiedenen Testfolgen benötigt werden.

In Kapitel 2 wird zuerst ein Darstellungssatz für den kanonischen Gradienten eines an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ differenzierbaren statistischen Funktionals $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ bewiesen. Danach werden die kanonischen Gradienten für einige wichtige Funktionale im Zweistichprobenkontext ausgerechnet. Unter anderem werden die kanonischen Gradienten für das Wilcoxon Funktional und für die von Mises Funktionale berechnet. Anschließend wird die Differenzierbarkeit zusammengesetzter statistischer Funktionale untersucht und mit einigen wichtigen Beispielen begleitet.

Mit n_i wird der Umfang der i -ten Stichprobe für $i = 1, 2$ bezeichnet. Der gesamte Stichprobenumfang ist dann $n = n_1 + n_2$. Als Modell für die unabhängigen Stichproben und die unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen in jeder Stichprobe betrachtet man das statistische Experiment

$$E_n = (\Omega_1^{n_1} \otimes \Omega_2^{n_2}, \mathcal{A}_1^{n_1} \otimes \mathcal{A}_2^{n_2}, \{P^{n_1} \otimes Q^{n_2} : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}).$$

Seien nun $(n_1)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(n_2)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen von natürlichen Zahlen mit $n_1 + n_2 = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_2}{n} = d$ für ein $d \in (0, 1)$. In Kapitel 3 wird die Teststatistik T_n , die auf dem kanonischen Gradienten eines an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ differenzierbaren statistischen Funktionals $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ beruht, motiviert und begründet. Die Zweistichproben-U-Statistik U_{n_1, n_2} mit dem kanonischen Gradienten als Kern besitzt im Vergleich zu den allgemeinen U-Statistiken eine besonders einfache Gestalt. Die Teststatistik T_n erhält man dann aus U_{n_1, n_2} durch $T_n := \sqrt{n} U_{n_1, n_2}$. Danach wird an die lokale asymptotische Normalität (LAN) erinnert. Die lokale asymptotische Normalität der Familien von Produktmaßen wird untersucht und die zentrale Folge X_n wird vorgestellt. Außerdem wird die gemeinsame asymptotische Verteilung der Teststatistik T_n und der zentralen Folge X_n unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}$ berechnet. In den letzten zwei Abschnitten von Kapitel

3 werden die einseitigen und zweiseitigen Tests auf Basis der Teststatistik T_n entwickelt. Die asymptotische Gütefunktion der Testfolgen der einseitigen und zweiseitigen Tests wird berechnet. Es wird außerdem gezeigt, dass die Folge der einseitigen Tests eine asymptotische Maximin- α -Testfolge in der Menge aller asymptotisch Niveau α ähnlichen Testfolgen ist. Der asymptotisch optimale relative Stichprobenumfang $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_2}{n}$ wird für die Folge der einseitigen Tests bestimmt.

In Kapitel 4 werden die unendlich-dimensionalen Gauß-Shift Experimente mit einem Hilbertraum als Parameterraum vorgestellt. Danach wird die schwache Konvergenz von Experimenten eingeführt. Die lokale asymptotische Normalität wird dann als schwache Konvergenz gegen ein Gauß-Shift Experiment verallgemeinert. Mit diesen Mitteln werden einige Ergebnisse aus [30], [31] und [33] für die Folgen der einseitigen Tests im Einstichprobenkontext erneut bewiesen. Zusätzlich wird die asymptotische Optimalität der Folgen der zweiseitigen Tests unter den analogen Voraussetzungen nachgewiesen. Mit Hilfe der Approximation in dem Limesexperiment wird die asymptotische Optimalität der Testfolgen auf Basis des kanonischen Gradienten für die einseitigen und zweiseitigen Testprobleme unter schwachen Voraussetzungen an den Tangentenkegel gezeigt. Anschließend wird die verallgemeinerte Theorie der lokalen asymptotischen Normalität auf die Folgen der Experimente, die als Modelle für die zwei unabhängigen Stichproben dienen, übertragen. Das Problem des Testens statistischer Funktionale im Zweistichprobenkontext lässt sich elegant behandeln, indem man das Skalarprodukt in dem Tangentialraum wechselt und dann auf die Lösung der entsprechenden Einstichprobenprobleme zurückgreift. Die am Anfang des Kapitels gezeigte Ergebnisse für das Testen der differenzierbaren statistischen Funktionale im Einstichprobenkontext lassen sich auf die Situation der Zweistichproben übertragen.

Kapitel 5 widmet sich der Anwendung der Theorie des Testens statistischer Funktionale für die Zweistichprobenprobleme. Auf die Stärken und Schwierigkeiten der Anwendung wird hingewiesen. Der Begriff der asymptotischen Äquivalenz der Testfolgen wird eingeführt. Anhand der Beispiele werden die Techniken und Methoden vorgestellt, die bei dem Nachweis der asymptotischen Äquivalenz der Testfolgen besonders hilfreich und nützlich sind. Für das Wilcoxon Funktional wird gezeigt, dass der wohl bekannte Wilcoxon-Rangsummentest bereits der asymptotisch optimale Test ist, falls man die Nullhypothese auf die Produktmaße P^2 mit dem stetigen Wahrscheinlichkeitsmaß $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ einschränkt. Das Testen der Erwartungswerte zweier unabhängigen Stichproben führt zur Betrachtung der Summen zweier von Mises Funktionale. Das Problem des Testens des Erwartungswertes einer randomisierten Summe kann als Motivation zur Betrachtung des Produktes zweier von Mises Funktionale dienen. Deswegen werden die Summe und das Produkt zweier von Mises Funktionale ausführlich behan-

delt. Die letzte Anwendung widmet sich wieder dem Testen des Wilcoxon Funktional. Es gibt sehr umfangreiche Literatur zu diesem für die Praxis wichtigen Testproblem, vgl. insbesondere [17], [22], [28], [30], [33] und [55]. Hier wird die allgemeine Fragestellung ohne üblichen Einschränkungen der Nullhypothese betrachtet. Es werden berechenbare asymptotisch optimale Testfolgen für das einseitige und zweiseitige Testproblem hergeleitet. Die asymptotische Optimalität wird mit Hilfe der in dieser Arbeit entwickelten Theorie und der funktionellen Delta Methode bewiesen. Das besondere Augenmerk gilt der Bestimmung des kritischen Wertes. Die entwickelten Tests beruhen im Unterschied zu dem Wilcoxon-Rangsummentest auf den Vergleichen der Realisierungen der reellwertigen Zufallsvariablen.

Mein herzlicher Dank gilt meinem Lehrer Prof. Dr. Arnold Janssen sowohl für viele anregende Gespräche als auch für das interessante und herausfordernde Thema und die ausgezeichnete Betreuung. Ein herzlicher Dank gebührt Herrn Prof. Dr. K. Janßen und Herrn Prof. Dr. F. Liese für die Übernahme und Erstellung der weiteren Gutachten. Ich bedanke mich bei den anderen Mitarbeitern des Mathematischen Instituts der HHU Düsseldorf für Ihre Unterstützung. Mein tiefer Dank gilt meiner Frau, meinen Eltern und meinen Großeltern für die Liebe, Unterstützung und Zuneigung, die sie mir in meinem Leben zuteil werden ließen.

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel wird zunächst die L_2 -Differenzierbarkeit der Kurven von Wahrscheinlichkeitsmaßen eingeführt. Der Tangentenkegel und der Tangentialraum eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $P \in \mathcal{P}$ bzgl. der Familie $\mathcal{P}$ werden vorgestellt. Danach wird der Differentialkalkül für statistische Funktionale entwickelt. Dabei steht der kanonische Gradient eines statistischen Funktionals im Mittelpunkt. Anschließend werden die Tangentenkegel und die Tangentialräume der Familien der Produktmaße untersucht. Im letzten Abschnitt werden die Hilfsmittel zum asymptotischen Vergleich der Testfolgen bereitgestellt.

1.1 L_2 -Differenzierbarkeit und Tangentialräume

Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Jede nichtleere Teilmenge $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ heißt nichtparametrische Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen.

Definition 1.1 (Dichtequotient)

Seien $P, Q \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ Wahrscheinlichkeitsmaße. Jede messbare Funktion $L : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, \overline{\mathcal{B}}|_{\mathbb{R}_{\geq 0}})$ mit

$$P(A) = \int_A L dQ + P(A \cap \{L = \infty\})$$

für alle $A \in \mathcal{A}$ und $Q(L < \infty) = 1$ heißt ein Dichtequotient von P bzgl. Q .

Bemerkung 1.2

Sei μ ein σ -endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $P, Q \ll \mu$. Setze $f_P = \frac{dP}{d\mu}$ und $f_Q = \frac{dQ}{d\mu}$. Dann ist

$$L := \frac{f_P}{f_Q} \mathbf{1}_{\{f_Q > 0\}} + \infty \mathbf{1}_{\{f_Q = 0, f_P > 0\}} \quad (1.1)$$

eine Version des Dichtequotienten von P bzgl. Q .

Bemerkung 1.3

Der Dichtequotient von P bzgl. Q ist $(P + Q)$ -f.ü. eindeutig bestimmt (vgl. [52], Seite 112, Satz 1.110). Deswegen wird die Notation $\frac{dP}{dQ}$ für den Dichtequotient von P bzgl. Q verwendet.

Definition 1.4 (L_2 -Differenzierbarkeit)

Es seien $\varepsilon > 0$ und $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ eine nichtleere Teilmenge. Eine Abbildung $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{P}, t \mapsto P_t$ heißt eine $L_2(P_0)$ -differenzierbare Kurve in $\mathcal{P}$ mit Tangente $g \in L_2(P_0)$, falls für $t \rightarrow 0$ gilt

$$\left\| 2 \left(\left(\frac{dP_t}{dP_0} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) - tg \right\|_{L_2(P_0)} = o(|t|) \quad (1.2)$$

und

$$P_t \left(\left\{ \frac{dP_t}{dP_0} = \infty \right\} \right) = o(t^2). \quad (1.3)$$

Zu (1.2) und (1.3) sind äquivalent

$$\left\| 2 \left(\left(\frac{dP_t}{d\mu} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{dP_0}{d\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right) - tg \left(\frac{dP_0}{d\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_2(\mu)} = o(|t|) \quad (1.4)$$

und

$$\int \mathbf{1}_{\left\{ \frac{dP_t}{dP_0} = \infty \right\}} \frac{dP_t}{d\mu} d\mu = o(t^2), \quad (1.5)$$

falls die Familie $\{P_t : |t| < \varepsilon\}$ durch ein σ -endliches Maß μ dominiert ist.

Bemerkung 1.5 a) Die Eigenschaft der $L_2(P_0)$ -Differenzierbarkeit ist unabhängig von der speziellen Version des Dichtequotienten von P_t bzgl. P_0 .

b) Die Tangente $g \in L_2(P_0)$ ist P_0 -f.ü. eindeutig bestimmt. Jede Version von g bezeichnet man deshalb als Tangente an die $L_2(P_0)$ -differenzierbare Kurve $t \mapsto P_t$ in $\mathcal{P}$.

c) Aus der $L_2(P_0)$ -Differenzierbarkeit folgen die $L_1(P_0)$ -Stetigkeit und die $L_2(P_0)$ -Stetigkeit, d.h. die Gültigkeit von $\left\| \frac{dP_t}{dP_0} - 1 \right\|_{L_1(P_0)} = o(1)$ und $\left\| \left(\frac{dP_t}{dP_0} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\|_{L_2(P_0)} = o(1)$ für $t \rightarrow 0$.

d) Zur Abkürzung wird es häufig $L_2(0)$ anstelle von $L_2(P_0)$ geschrieben, falls aus dem Zusammenhang klar ist, welches Wahrscheinlichkeitsmaß gemeint ist.

Bemerkung 1.6

In der Literatur findet man gelegentlich die Definition der einseitig $L_2(P_0)$ -differenzierbaren Kurven $[0, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{P}$, $t \mapsto P_t$ für ein $\varepsilon > 0$, vgl. [49]. Es wird hier auf die Betrachtung der einseitig differenzierbaren Kurven verzichtet, weil es für die Modellbildung in dieser Arbeit nicht erforderlich ist. Eine einseitig $L_2(P_0)$ -differenzierbare Kurve $[0, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{P}$, $t \mapsto P_t$ lässt sich außerdem in $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ so fortsetzen, dass eine zweiseitig $L_2(P_0)$ -differenzierbare Kurve $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$, $t \mapsto P_t$ entsteht.

Umfangreiche und ausführliche Informationen zur L_2 -Differenzierbarkeit (auch allgemeiner zur L_r -Differenzierbarkeit für $r \geq 1$) findet man in [52] und [48].

Bemerkung 1.7 (Tangentenraum)

Sei $P \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Sei $t \mapsto P_t$ eine $L_2(P_0)$ -differenzierbare Kurve mit Tangente $g \in L_2(P_0)$ und $P_0 = P$. Es gilt dann $\int g dP_0 = 0$ (zum Beweis vgl. [52], Satz 1.190 und Hilfssatz 1.178). Der Vektorraum

$$L_2^{(0)}(P) := \left\{ h \in L_2(P) : \int h dP = 0 \right\}$$

wird deswegen als Tangentenraum bezeichnet. Der Vektorraum $L_2^{(0)}(P)$ ist ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums $L_2(P)$.

Sei $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ eine nichtparametrische Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen.

Satz 1.8 (lineare Transformation)

Sei $t \mapsto P_t$ eine $L_2(P_0)$ -differenzierbare Kurve in $\mathcal{P}$ mit Tangente g . Für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist dann die Kurve $t \mapsto P_{at}$ ebenfalls $L_2(P_0)$ -differenzierbar und zwar mit Tangente ag .

Beweis. Wegen $\int ag dP_0 = a \int g dP_0 = 0$ gilt $ag \in L_2^{(0)}(P_0)$. Die Bedingung (1.2) ist erfüllt, denn es gilt $P_{at} \left(\left\{ \frac{dP_{at}}{dP_0} = \infty \right\} \right) = o((at)^2) = o(t^2)$. Es reicht die Bedingung (1.3) für die Kurve $t \mapsto P_{at}$ mit der Tangente ag nachzuweisen. Mit der Substitution $s := at$ erhält man

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{2}{t} \left(\left(\frac{dP_{at}}{dP_0} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) - ag \right\|_{L_2(P_0)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} |a| \left\| \frac{2}{at} \left(\left(\frac{dP_{at}}{dP_0} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) - g \right\|_{L_2(P_0)} \\ &= |a| \lim_{s \rightarrow 0} \left\| \frac{2}{s} \left(\left(\frac{dP_s}{dP_0} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) - g \right\|_{L_2(P_0)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Bemerkung 1.9

Sei $P \in \mathcal{P}$ beliebig aber fest gewählt. Die Kurve $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}, t \mapsto P_t$ ist offensichtlich $L_2(0)$ -differenzierbar mit der Tangente $0 \in L_2^{(0)}(P)$.

Definition 1.10 (Tangentenkegel)

Die Menge der Tangenten eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $P \in \mathcal{P}$ bzgl. der Familie $\mathcal{P}$ wird definiert als $K(P, \mathcal{P}) := \{g \in L_2^{(0)}(P) : \text{es existiert eine } L_2(P_0)\text{-differenzierbare Kurve } t \mapsto P_t \text{ in } \mathcal{P} \text{ mit Tangente } g \text{ und } P_0 = P\}$.

Mit Hilfe von Satz 1.8 und Bemerkung 1.9 sieht man, dass $K(P, \mathcal{P})$ ein Kegel ist. Die Menge $K(P, \mathcal{P})$ wird deshalb als Tangentenkegel des Wahrscheinlichkeitsmaßes P bzgl. der Familie $\mathcal{P}$ bezeichnet.

Definition 1.11 (Tangentialraum)

Der $L_2(P)$ -Abschluss der linearen Hülle eines Tangentenkegels $K(P, \mathcal{P})$ wird mit $T(P, \mathcal{P}) := \overline{\text{lin } K(P, \mathcal{P})}$ notiert. Man bezeichnet $T(P, \mathcal{P})$ als Tangentialraum des Wahrscheinlichkeitsmaßes P bzgl. der Familie $\mathcal{P}$.

Der Tangentialraum spiegelt die lokale Struktur eines statistischen Experiments wider. Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $P \in \mathcal{P}$ ist der Tangentialraum $T(P, \mathcal{P})$ ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums $L_2(P)$.

1.2 Differenzierbare statistische Funktionale

Sei $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ eine nichtparametrische Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Jede Abbildung $k : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto k(P)$ wird als statistisches Funktional bezeichnet. Man interessiert sich für die statistischen Funktionale, die sich entlang der L_2 -differenzierbaren Kurven differenzieren lassen. Viele nichtparametrischen Testprobleme lassen sich zum Beispiel mit Hilfe solcher Funktionale mathematisch exakt formulieren.

Definition 1.12 (differenzierbares statistisches Funktional)

Ein statistisches Funktional $k : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar an einer Stelle $P \in \mathcal{P}$ mit einem Gradienten $\dot{k} = \dot{k}(P) \in L_2^{(0)}(P)$, falls für jede $L_2(P_0)$ -differenzierbare Kurve $t \mapsto P_t$ in $\mathcal{P}$ mit Tangente g und $P_0 = P$ gilt

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (k(P_t) - k(P_0)) = \int \dot{k} g dP_0. \quad (1.6)$$

Bemerkung 1.13

Der einseitige Grenzwert in (1.6) stellt keine Einschränkung dar. Es seien k ein statistisches an einer Stelle $P \in \mathcal{P}$ differenzierbares Funktional, $t \mapsto P_t$ eine $L_2(P_0)$ -differenzierbare Kurve in $\mathcal{P}$ mit Tangente g und $P_0 = P$.

Die Kurve $t \mapsto P_{-t}$ ist nach Satz 1.8 ebenfalls $L_2(P_0)$ -differenzierbar mit Tangente $-g$ und $P_0 = P$. Für die Kurve $t \mapsto P_{-t}$ gilt also

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (k(P_{-t}) - k(P_0)) = - \int \dot{k} g dP \quad (1.7)$$

nach Definition 1.12. Aus (1.7) ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow 0} \frac{1}{t} (k(P_t) - k(P_0)) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{(-t)} (k(P_{-t}) - k(P_0)) \\ &= - \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (k(P_{-t}) - k(P_0)) \\ &= \int \dot{k} g dP. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Bemerkung 1.14

Ist ein statistisches Funktional $k : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar an einer Stelle $P \in \mathcal{P}$, so impliziert (1.6) eine Linearisierung von k an der Stelle P entlang der $L_2(P_0)$ -differenzierbaren Kurven in $\mathcal{P}$ mit $P_0 = P$.

Bemerkung 1.15

Ist ein statistisches Funktional $k : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar an einer Stelle $P \in \mathcal{P}$, so ist der Gradient von k im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Beispiel 1.16

Sei $P \in \mathcal{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\{0\} \neq T(P, \mathcal{P}) \neq L_2^{(0)}(P)$. Sei $k : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ ein an der Stelle P differenzierbares statistisches Funktional mit einem Gradienten $\dot{k} \in L_2^{(0)}(P)$.

Mit $T(P, \mathcal{P})^\perp$ wird der Orthogonalraum von $T(P, \mathcal{P})$ in $L_2^{(0)}(P)$ bezeichnet. Aus $L_2^{(0)}(P) = T(P, \mathcal{P}) \oplus T(P, \mathcal{P})^\perp$ folgt $T(P, \mathcal{P})^\perp \neq \{0\}$ wegen Voraussetzung $\{0\} \neq T(P, \mathcal{P}) \neq L_2^{(0)}(P)$. Für jedes $h \in T(P, \mathcal{P})^\perp$ und für jede $L_2(P_0)$ -differenzierbare Kurve $t \mapsto P_t$ in $\mathcal{P}$ mit Tangente g und $P_0 = P$ gilt dann

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (k(P_t) - k(P_0)) = \int \dot{k} g dP = \int \dot{k} g dP + \int h g dP = \int (\dot{k} + h) g dP.$$

Hieraus folgt, dass die Funktion $\dot{k} + h$ für jedes $h \in T(P, \mathcal{P})^\perp$ ein Gradient von k an der Stelle P ist.

Satz 1.17 (kanonischer Gradient)

Ein statistisches Funktional $k : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar an einer Stelle $P \in \mathcal{P}$. Es existiert ein eindeutiger Gradient $\tilde{k} \in T(P, \mathcal{P})$, der die kleinste Norm innerhalb der Menge aller Gradienten von k an der Stelle P besitzt. Man bezeichnet $\tilde{k}$ als kanonischen Gradienten von k an der Stelle P .

Beweis. vgl. [29], Seite 185 oder [40], Seite 51, Satz 4.13. ■

Bemerkung 1.18

Ist $\dot{k}$ ein Gradient von $k : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $P \in \mathcal{P}$, so lässt sich der kanonische Gradient $\tilde{k}$ an der Stelle P als die orthogonale Projektion von $\dot{k}$ in den Tangentialraum $T(P, \mathcal{P})$ berechnen, vgl. [29], Seite 185 oder [41], Seite 119.

1.3 L_2 -Differenzierbarkeit und Tangentialräume der Produktmaße

Die Produktmaße spielen bei Zweistichprobenproblemen der Statistik eine besondere Rolle, weil die beiden Stichproben meistens als stochastisch unabhängig angesehen werden. Die Tangentialräume der Familien der Produktmaße besitzen eine besondere Struktur, die sich als Schlüssel zum Testen der differenzierbaren statistischen Funktionale für Zweistichprobenprobleme erweist. Eine ausführliche Information über die Tangentialräume und L_2 -Differenzierbarkeit der Familien der Produktmaße findet man in [41], [52], [47] und [40]. Allgemeinere Ergebnisse über die Struktur der Tangenten bei gegebenen Randverteilungen und gemeinsamer Verteilung zweier Zufallsvariablen findet man in [34] und [43].

Satz 1.19 (L_2 -Differenzierbarkeit der Produktmaße)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Es seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ Messräume und $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{M}_1(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ nichtparametrische Familien von Wahrscheinlichkeitsmaßen für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Die Familie der Produktmaße wird definiert als $\mathcal{P} := \left\{ \bigotimes_{i=1}^n P_i : P_i \in \mathcal{P}_i \right\}$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Eine Kurve $t \mapsto P_t = \bigotimes_{i=1}^n P_{i,t}$ in $\mathcal{P}$ ist $L_2(0)$ -differenzierbar.
2. Die Kurven $t \mapsto P_{i,t}$ sind $L_2(0)$ -differenzierbar für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ sei g_i die Tangente zu der Kurve $t \mapsto P_{i,t}$ an der Stelle 0. Die Abbildung

$$\times_{i=1}^n \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}, (\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \sum_{i=1}^n g_i(\omega_i)$$

ist dann die Tangente zu der Kurve $t \mapsto P_t = \bigotimes_{i=1}^n P_{i,t}$ an der Stelle 0.

Beweis. **1. $\Rightarrow$ 2.** Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Die i -te kanonische Projektion

$$\pi_i : \times_{i=1}^n \Omega_i \rightarrow \Omega_i, (\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \omega_i$$

ist eine messbare Abbildung. Die Kurve $t \mapsto P_t^{\pi_i} = P_{i,t}$ ist $L_2(0)$ -differenzierbar nach [52], Seite 178, Satz 1.193.

2. $\Rightarrow$ 1. Diese Implikation entspricht [52], Seite 176, Satz 1.191. ■

Bemerkung 1.20

Sei $t \mapsto P_t$ eine $L_2(P_0)$ -differenzierbare Kurve in $\mathcal{P}$ mit Tangente $g \in L_2^{(0)}(P_0)$. Sei $S : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ eine Zufallsvariable. Die Kurve $t \mapsto P_t^S$ ist dann $L_2(P_0^S)$ -differenzierbar mit Tangente

$$h(s) = E_{P_0}(g | S = s).$$

Zum Beweis vergleiche [52], Seite 176, Satz 1.191.

Satz 1.21

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ sei $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{M}_1(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ eine nichtparametrische Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Die Familie der Produktmaße $\mathcal{P}$ sei definiert wie in Satz 1.19. Für jedes $P = \bigotimes_{i=1}^n P_i \in \mathcal{P}$ gilt dann:

1. Der Tangentenkegel $K(P, \mathcal{P})$ ist die Menge der Abbildungen $(\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \sum_{i=1}^n g_i(\omega_i)$ mit $g_i \in K(P_i, \mathcal{P}_i)$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$.
2. Der Tangentialraum $T(P, \mathcal{P})$ ist die Menge der Abbildungen $(\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \sum_{i=1}^n g_i(\omega_i)$ mit $g_i \in T(P_i, \mathcal{P}_i)$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$.

Beweis. Es ist leicht zu zeigen, dass die Menge der Abbildungen

$$(\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \sum_{i=1}^n g_i(\omega_i)$$

mit $g_i \in T(P_i, \mathcal{P}_i)$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ein bzgl. der $L_2(\bigotimes_{i=1}^n P_i)$ -Norm abgeschlossener Vektorraum ist. Die erste Aussage ergibt sich dann unmittelbar aus Satz 1.19. Mit Hilfe von Definition 1.11 folgt die zweite Aussage. ■

Bemerkung 1.22

Sei $g \in T(\bigotimes_{i=1}^n P_i, \mathcal{P})$ eine Tangente. Dann existieren eindeutige Abbildungen $g_i \in T(P_i, \mathcal{P}_i)$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $g = \sum_{i=1}^n g_i \circ \pi_i$. Die Existenz folgt unmittelbar aus Satz 1.21. Die Eindeutigkeit ist zu zeigen. Es gelte

$$g = \sum_{i=1}^n g_i \circ \pi_i = \sum_{i=1}^n \tilde{g}_i \circ \pi_i$$

mit $g_i, \tilde{g}_i \in T(P_i, \mathcal{P}_i)$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Man erhält zunächst

$$0 = \int \left(\sum_{i=1}^n g_i \circ \pi_i - \sum_{i=1}^n \tilde{g}_i \circ \pi_i \right)^2 d \bigotimes_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n \int (g_i - \tilde{g}_i)^2 dP_i,$$

weil $T(P_i, P_i) \subset L_2^{(0)}(P_i)$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Hieraus folgt $g_i = \tilde{g}_i$ P_i -f.s. für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

1.4 Asymptotisches Vergleichen der Testfolgen

In der Statistik stellt sich häufig die Frage, wie man zwei Testfolgen für ein Testproblem vergleichen kann. Es wird zum Beispiel oft gezeigt, dass zwei Testfolgen die gleiche asymptotische Güte besitzen. Solche Testfolgen nennt man asymptotisch äquivalent. In diesem Abschnitt werden verschiedene Hilfsmittel zur Lösung dieser Probleme vorgestellt.

Definition 1.23 (Norm der totalen Variation)

Es seien P und Q zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$. Außerdem sei μ ein σ -endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $P, Q \ll \mu$. Dann heißt

$$\|P - Q\| := \frac{1}{2} \int \left| \frac{dP}{d\mu} - \frac{dQ}{d\mu} \right| d\mu$$

die Norm der totalen Variation.

Bemerkung 1.24

Die Norm der totalen Variation $\|P - Q\|$ ist unabhängig von dem speziellen dominierenden Maß μ . Insbesondere kann das Maß $P + Q$ als dominierendes Maß gewählt werden.

Bemerkung 1.25

Für alle Wahrscheinlichkeitsmaße P, Q auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ gilt

$$\|P - Q\| = \sup_{B \in \mathcal{A}} |P(B) - Q(B)|.$$

Zum Beweis vergleiche [52], Seite 136.

Hilfssatz 1.26

Seien $P_n, Q_n \in \mathcal{M}_1(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ zwei Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - Q_n\| = 0.$$

Sei $\varphi_n : (\Omega_n, \mathcal{A}_n) \rightarrow ([0, 1], \mathcal{B}_{[0, 1]})$ eine Testfolge, so dass der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{P_n}(\varphi_n)$ existiert. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{P_n}(\varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_{Q_n}(\varphi_n)$.

Beweis. Sei μ_n ein σ -endliches Maß mit $P_n, Q_n \ll \mu_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |E_{P_n}(\varphi_n) - E_{Q_n}(\varphi_n)| &\leq \int \left| \varphi_n \frac{dP_n}{d\mu_n} - \varphi_n \frac{dQ_n}{d\mu_n} \right| d\mu_n \\ &= \int \varphi_n \left| \frac{dP_n}{d\mu_n} - \frac{dQ_n}{d\mu_n} \right| d\mu_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int \left| \frac{dP_n}{d\mu_n} - \frac{dQ_n}{d\mu_n} \right| d\mu_n \\
&= 2 \|P_n - Q_n\| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

■

Satz 1.27 (asymptotisch äquivalente Testfolgen)

Sei $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge der Wahrscheinlichkeitsmaße. Es seien $(T_{1n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(T_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen der Teststatistiken, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\{|T_{1n} - T_{2n}| > \varepsilon\}) = 0$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt. Außerdem seien $(\varphi_{in})_{n \in \mathbb{N}}$ Testfolgen für $i = 1, 2$ mit

$$\varphi_{in} = \begin{cases} 1 & > \\ \gamma_{in} & T_{in} = c_{in} \\ 0 & < \end{cases}.$$

Es gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{in} = c$ für $i = 1, 2$ und $c \in \mathbb{R}$. Die Verteilung $P_n^{T_{1n}}$ konvergiere schwach gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ . Ist $\mu(\{c\}) = 0$, so folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{P_n}(|\varphi_{1n} - \varphi_{2n}|) = 0.$$

Beweis. vgl. [29], Seite 96 oder [53], Seite 58. ■

Beim Nachweis der asymptotischen Äquivalenz der Testfolgen für die Familien von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist der Begriff der Benachbarkeit unverzichtbar.

Definition 1.28

Es seien $P_n, Q_n \in \mathcal{M}_1(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ zwei Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Die Folge $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt benachbart zu $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn für alle Folgen $A_n \in \mathcal{A}_n$ von Mengen aus $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(A_n) = 0$ bereits $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(A_n) = 0$ folgt. Die Benachbarkeit von $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird mit $Q_n \triangleleft P_n$ notiert.

Ausführliche Informationen zur Benachbarkeit findet man in [46], [17], [51] und [25]. Die asymptotische Äquivalenz der Testfolgen wird häufig zuerst nur für eine Folge $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen gezeigt, vgl. Satz 1.27. Diese Aussage lässt sich dann unter schwachen Voraussetzungen auf jede zu $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ benachbarte Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen übertragen.

Lemma 1.29

Es seien $P_n, Q_n \in \mathcal{M}_1(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ zwei Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen mit $Q_n \triangleleft P_n$. Außerdem seien $(\varphi_{in})_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Testfolgen für $i = 1, 2$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{P_n}(|\varphi_{1n} - \varphi_{2n}|) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{Q_n}(|\varphi_{1n} - \varphi_{2n}|) = 0.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Aus der Konvergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{P_n}(|\varphi_{1n} - \varphi_{2n}|) = 0$ folgt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\{|\varphi_{1n} - \varphi_{2n}| > \varepsilon\}) = 0$. Die Benachbarkeit $Q_n \triangleleft P_n$ impliziert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(\{|\varphi_{1n} - \varphi_{2n}| > \varepsilon\}) = 0.$$

Man erhält außerdem die Abschätzung

$$\begin{aligned} & E_{Q_n}(|\varphi_{1n} - \varphi_{2n}|) \\ &= \int |\varphi_{1n} - \varphi_{2n}| \mathbf{1}_{\{|\varphi_{1n} - \varphi_{2n}| > \varepsilon\}} dQ_n + \int |\varphi_{1n} - \varphi_{2n}| \mathbf{1}_{\{|\varphi_{1n} - \varphi_{2n}| \leq \varepsilon\}} dQ_n \\ &\leq Q_n(\{|\varphi_{1n} - \varphi_{2n}| > \varepsilon\}) + \varepsilon Q_n(\{|\varphi_{1n} - \varphi_{2n}| \leq \varepsilon\}) \\ &\leq Q_n(\{|\varphi_{1n} - \varphi_{2n}| > \varepsilon\}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_{Q_n}(|\varphi_{1n} - \varphi_{2n}|) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(\{|\varphi_{1n} - \varphi_{2n}| > \varepsilon\}) + \varepsilon = \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$. Hieraus folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{Q_n}(|\varphi_{1n} - \varphi_{2n}|) = 0$. ■

Kapitel 2

Differentiation statistischer Funktionale für das Zweistichprobenproblem

In diesem Abschnitt werden die Differenzierbarkeitseigenschaften statistischer Funktionale für das Zweistichprobenproblem untersucht. Die besondere Aufmerksamkeit wird auf die Struktur der Tangentialräume und des kanonischen Gradienten gerichtet. Es werden leistungsfähige Werkzeuge entwickelt, mit deren Hilfe die Differenzierbarkeit eines statistischen Funktionals und die Gestalt des kanonischen Gradienten bestimmt werden können. Außerdem werden die kanonischen Gradienten für viele wichtige statistische Funktionale ausgerechnet.

Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ Messräume, $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}_1(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ nichtparametrische Familien von Wahrscheinlichkeitsmaßen.

Definition 2.1

Die Familie der Produktmaße $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \subset \mathcal{M}_1(\Omega_1 \otimes \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ wird definiert als $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} := \{P \otimes Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$. Die Abbildungen $\pi_1 : \Omega_1 \otimes \Omega_2 \rightarrow \Omega_1, (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1$ und $\pi_2 : \Omega_1 \otimes \Omega_2 \rightarrow \Omega_2, (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_2$ bezeichnen die kanonischen Projektionen.

Satz 2.2 (Struktur eines kanonischen Gradienten)

Sei $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ein statistisches Funktional, das an einer Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ differenzierbar ist. Es seien $\dot{k} \in L_2(P_0 \otimes Q_0)$ ein Gradient von k an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ und $\tilde{k} \in L_2^{(0)}(P_0 \otimes Q_0)$ der kanonische Gradient von k an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$. Dann gilt:

1. Die statistischen Funktionale $k_1 : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto k(P \otimes Q_0)$ und $k_2 : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}, Q \mapsto k(P_0 \otimes Q)$ sind differenzierbar an der Stelle P_0 bzw. Q_0 .
2. Die Abbildung $\dot{k}_1 : \omega_1 \mapsto \int \dot{k}(\omega_1, \omega_2) dQ_0(\omega_2)$ ist ein Gradient von k_1

an der Stelle P_0 und die Abbildung $\dot{k}_2 : \omega_2 \mapsto \int \dot{k}(\omega_1, \omega_2) dP_0(\omega_1)$ ist ein Gradient von k_2 an der Stelle Q_0 .

3. Die Abbildung $\tilde{k}_1 : \omega_1 \mapsto \int \tilde{k}(\omega_1, \omega_2) dQ_0(\omega_2)$ ist der kanonische Gradient von k_1 an der Stelle P_0 . Die Abbildung $\tilde{k}_2 : \omega_2 \mapsto \int \tilde{k}(\omega_1, \omega_2) dP_0(\omega_1)$ ist der kanonische Gradient von k_2 an der Stelle Q_0 . Außerdem gilt $\tilde{k} = \tilde{k}_1 \circ \pi_1 + \tilde{k}_2 \circ \pi_2$.

Beweis. Sei $t \mapsto P_t \otimes Q_t$ eine $L_2(0)$ -differenzierbare Kurve in $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ mit Tangente $h \in L_2^{(0)}(P_0 \otimes Q_0)$. Nach Satz 1.21 existieren die Tangenten $h_1 \in L_2^{(0)}(P_0)$ und $h_2 \in L_2^{(0)}(Q_0)$ mit $h = h_1 \circ \pi_1 + h_2 \circ \pi_2$. Die Kurven $t \mapsto P_t$ und $t \mapsto Q_t$ sind dann $L_2(0)$ -differenzierbar mit Tangenten h_1 und h_2 . Mit erneuter Anwendung von Satz 1.21 erhält man, dass die Kurve $t \mapsto P_t \otimes Q_0$ ebenfalls $L_2(0)$ -differenzierbar ist und zwar mit Tangente $h_1 \circ \pi_1 \in L_2^{(0)}(P_0 \otimes Q_0)$. Es gilt somit

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (k_1(P_t) - k_1(P_0)) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (k(P_t \otimes Q_0) - k(P_0 \otimes Q_0)) \\ &= \int h_1(\omega_1) \dot{k}(\omega_1, \omega_2) dP_0 \otimes Q_0(\omega_1, \omega_2) \\ &= \int h_1(\omega_1) \underbrace{\left[\int \dot{k}(\omega_1, \omega_2) dQ_0(\omega_2) \right]}_{=: \dot{k}_1(\omega_1)} dP_0(\omega_1). \end{aligned}$$

Es bleibt $\dot{k}_1 \in L_2(P_0)$ zu zeigen. Die Jensensche Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} \int \dot{k}_1^2 dP_0 &= \int \left[\int \dot{k}(\omega_1, \omega_2) dQ_0(\omega_2) \right]^2 dP_0(\omega_1) \\ &\leq \int \int \dot{k}(\omega_1, \omega_2)^2 dQ_0(\omega_2) dP_0(\omega_1) \\ &= \int \dot{k}^2 dP_0 \otimes Q_0 < \infty. \end{aligned}$$

Somit sind Teile 1 und 2 dieses Satzes bewiesen.

Der kanonische Gradient $\tilde{k} \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ besitzt nach Satz 1.21 die Darstellung $\tilde{k} = g_1 \circ \pi_1 + g_2 \circ \pi_2$, wobei $g_1 \in T(P_0, \mathcal{P})$ und $g_2 \in T(Q_0, \mathcal{Q})$ nach Bemerkung 1.22 eindeutig sind. Hieraus folgt

$$\tilde{k}_1(\omega_1) = \int (g_1(\omega_1) + g_2(\omega_2)) dQ_0(\omega_2) = g_1(\omega_1).$$

Nach Teil 2 dieses Satzes ist die Funktion $\tilde{k}_1 = g_1$ ein Gradient von k_1 an der Stelle P_0 . Nach Satz 1.17 und Bemerkung 1.18 folgt, dass die Abbildung $\tilde{k}_1 = g_1 \in T(P_0, \mathcal{P})$ bereits der kanonische Gradient von k_1 an der Stelle P_0 ist. ■

Bemerkung 2.3

Die Abbildung $\tilde{k}_i$ in Satz 2.2 ergibt sich als bedingte Erwartung

$$\tilde{k}_i = E_{P_0 \otimes Q_0} \left(\tilde{k} \mid \pi_i \right)$$

für $i = 1, 2$.

Definition 2.4

Eine nichtparametrische Familie $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen heißt voll, wenn $T(P, \mathcal{P}) = L_2^{(0)}(P)$ für alle $P \in \mathcal{P}$ gilt.

Bemerkung 2.5

Sei μ ein σ -endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Die Familie

$$\mathcal{P}_\mu := \{P \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A}) : P \ll \mu\}$$

ist voll. Zum Beweis vergleiche Satz 4.5 oder [40], Korollar 4.17.

Beispiel 2.6 (von Mises Funktional)

Sei $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}, P \otimes Q \mapsto \int h dP \otimes Q$ ein statistisches an einer Stelle $P_0 \otimes Q_0$ differenzierbares Funktional und sei $\dot{k} = h - \int h dP_0 \otimes Q_0$ ein Gradient von k in $P_0 \otimes Q_0$. Dies tritt zum Beispiel dann auf, wenn h eine beschränkte Funktion ist, vgl. [52], Seite 164, Satz 1.179. Allgemeinere Funktionale mit $h \in L_2(P_0 \otimes Q_0)$ sind mit Hilfe von Lemma 2.10 zu untersuchen. Nach Satz 2.2 gilt dann

$$\begin{aligned} \dot{k}_1(\omega_1) &= \int \left[h(\omega_1, \omega_2) - \int h(\omega_1, \omega_2) dP_0 \otimes Q_0(\omega_1, \omega_2) \right] dQ_0(\omega_2) \\ &= \int h(\omega_1, \omega_2) dQ_0(\omega_2) - \int h(\omega_1, \omega_2) dP_0 \otimes Q_0(\omega_1, \omega_2), \\ \dot{k}_2(\omega_2) &= \int \left[h(\omega_1, \omega_2) - \int h(\omega_1, \omega_2) dP_0 \otimes Q_0(\omega_1, \omega_2) \right] dP_0(\omega_1) \\ &= \int h(\omega_1, \omega_2) dP_0(\omega_1) - \int h(\omega_1, \omega_2) dP_0 \otimes Q_0(\omega_1, \omega_2). \end{aligned}$$

Sind die Familien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ voll, dann folgt $\tilde{k}_1 = \dot{k}_1 \in T(P_0, \mathcal{P})$ und $\tilde{k}_2 = \dot{k}_2 \in T(Q_0, \mathcal{Q})$ nach Satz 1.17 und Bemerkung 1.18. Der kanonische Gradient des Funktionals k an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ ergibt sich dann als

$$\tilde{k}(\omega_1, \omega_2) = \int h(\omega_1, \omega_2) dQ_0(\omega_2) + \int h(\omega_1, \omega_2) dP_0(\omega_1) - 2k(P_0 \otimes Q_0).$$

Anwendung 2.7 (Wilcoxon Funktional)

Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) = (\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $h := 1_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}}$. Die Familien $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ seien voll. Das statistische Funktional

$k : P \otimes Q \mapsto \int h dP \otimes Q$ ist dann differenzierbar an jeder Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ mit dem kanonischen Gradienten

$$\begin{aligned}\tilde{k}(x, y) &= \int 1_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}} dQ_0(y) + \int 1_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}} dP_0(x) \\ &\quad - 2k(P_0 \otimes Q_0) \\ &= Q_0((-\infty, x]) + P_0([y, +\infty)) - 2k(P_0 \otimes Q_0) \\ &= F_{Q_0}(x) + 1 - F_{P_0}^-(y) - 2k(P_0 \otimes Q_0),\end{aligned}$$

wobei F_P^- die linksseitige Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P bezeichnet.

Bemerkung 2.8

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ Messräume für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Die Familie der Produktmaße wird definiert als $\mathcal{P} = \{\otimes_{i=1}^n P_i : P_i \in \mathcal{P}_i\}$, wobei $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{M}_1(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ eine nichtparametrische Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist. Der Satz 2.2 lässt sich dann analog auf die statistischen Funktionale $k : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ verallgemeinern.

Beispiel 2.9 (invariante Funktionale)

Seien $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Die statistischen Funktionale der Form

$$k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}, P \otimes Q \mapsto \int h(F_Q(x)) dP(x) \quad (2.1)$$

finden eine breite Anwendung in der Praxis, wobei h eine $\mathcal{B}$ -messbare Funktion ist und F_Q die Verteilungsfunktion von Q bezeichnet. Insbesondere ist das Wilcoxon Funktional von diesem Typ für $h = \text{Id}_{\mathbb{R}}$. Die statistischen Funktionale der Form (2.1) sind invariant unter streng isotonen Transformationen im folgenden Sinne. Sei $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng isotone Abbildung. Für alle $P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ gilt dann

$$\begin{aligned}k(P^T \otimes Q^T) &= \int h(F_{Q^T}(x)) dP^T(x) \\ &= \int h\left(\int 1_{(-\infty, x]}(y) dQ^T(y)\right) dP^T(x) \\ &= \int h\left(\int 1_{(-\infty, T(x)]}(T(y)) dQ(y)\right) dP(x) \\ &= \int h\left(\int 1_{(-\infty, x]}(y) dQ(y)\right) dP(x) \\ &= k(P \otimes Q).\end{aligned}$$

Die $\mathcal{B}$ -messbare Abbildung $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar mit beschränkter Ableitung, d.h. $|\dot{h}(t)| \leq c$ für alle $t \in [0, 1]$ und ein $c \in (0, +\infty)$.

Hieraus folgt, dass die Abbildung h ebenfalls beschränkt ist. Es wird nun gezeigt, dass das statistische Funktional k dann an jeder Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ differenzierbar ist und die Abbildung

$$\begin{aligned} \dot{k}(x, y) &= h(F_{Q_0}(x)) + \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) 1_{[y, +\infty)}(s) dP_0(s) \\ &\quad - k(P_0 \otimes Q_0) - \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) F_{Q_0}(s) dP_0(s) \end{aligned}$$

ein Gradient von k an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ ist.

Sei $t \mapsto P_t \otimes Q_t$ eine $L_2(0)$ -differenzierbare Kurve in $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ mit Tangente $g \in L_2^{(0)}(P_0 \otimes Q_0)$. Nach Satz 1.19 sind die Kurven $t \mapsto P_t$ und $t \mapsto Q_t$ ebenfalls $L_2(0)$ -differenzierbar mit Tangenten $g_1 \in L_2^{(0)}(P_0)$ und $g_2 \in L_2^{(0)}(Q_0)$. Es gilt außerdem $g = g_1 \circ \pi_1 + g_2 \circ \pi_2$. Zuerst erhält man mit den einfachen Umformungen

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t} (k(P_t \otimes Q_t) - k(P_0 \otimes Q_0)) \\ &= \frac{1}{t} \left(\int h(F_{Q_t}(x)) dP_t(x) - \int h(F_{Q_0}(x)) dP_0(x) \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(\int h(F_{Q_t}(x)) dP_t(x) - \int h(F_{Q_0}(x)) dP_t(x) \right) \\ &\quad + \frac{1}{t} \left(\int h(F_{Q_0}(x)) dP_t(x) - \int h(F_{Q_0}(x)) dP_0(x) \right). \end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden ergibt sich

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int h(F_{Q_0}(x)) dP_t(x) - \int h(F_{Q_0}(x)) dP_0(x) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \int h(F_{Q_0}(x)) dP_t(x) \Big|_{t=0} \\ &= \int h(F_{Q_0}(x)) g_1(x) dP_0(x) \end{aligned}$$

nach [52], Seite 164, Satz 1.179, weil h eine beschränkte Funktion ist. Es bleibt den Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int h(F_{Q_t}(x)) dP_t(x) - \int h(F_{Q_0}(x)) dP_t(x) \right)$$

für den ersten Summanden zu bestimmen. Sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge. Es existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ mit $P_0 \ll \mu$ und $P_{t_n} \ll \mu$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man erhält dann

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t_n} \left(\int h(F_{Q_{t_n}}(x)) dP_{t_n}(x) - \int h(F_{Q_0}(x)) dP_{t_n}(x) \right) \\ &= \int \frac{1}{t_n} (h(F_{Q_{t_n}}(x)) - h(F_{Q_0}(x))) dP_{t_n}(x) \end{aligned}$$

$$= \int \frac{1}{t_n} (h(F_{Q_{t_n}}(x)) - h(F_{Q_0}(x))) \frac{dP_{t_n}}{d\mu}(x) d\mu(x).$$

Um den Grenzwertübergang unter dem Integral zu rechtfertigen, wird der Integrand

$$f_n(x) := \frac{1}{t_n} (h(F_{Q_{t_n}}(x)) - h(F_{Q_0}(x))) \frac{dP_{t_n}}{d\mu}(x)$$

zunächst abgeschätzt. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung erhält man

$$\frac{1}{t_n} (h(F_{Q_{t_n}}(x)) - h(F_{Q_0}(x))) = \frac{1}{t_n} (F_{Q_{t_n}}(x) - F_{Q_0}(x)) \dot{h}(\xi_n)$$

für ein $\xi_n \in [0, 1]$. Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{t_n} (F_{Q_{t_n}}(x) - F_{Q_0}(x)) \right| \\ &= \left| \frac{d}{dt} \int \mathbf{1}_{(-\infty, x]} dQ_t \right|_{t=0} \\ &= \left| \int \mathbf{1}_{(-\infty, x]} g_2 dQ_0 \right| \\ &\leq \int \mathbf{1}_{(-\infty, x]} |g_2| dQ_0 \\ &\leq \int |g_2| dQ_0 \end{aligned}$$

nach [52], Seite 164, Satz 1.179. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left| \frac{1}{t_n} (F_{Q_{t_n}}(x) - F_{Q_0}(x)) \right| \leq \int |g_2| dQ_0 + \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ gilt. Insgesamt erhält man für alle $n \geq n_0$ die Majorante

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left| \frac{1}{t_n} (h(F_{Q_{t_n}}(x)) - h(F_{Q_0}(x))) \right| \frac{dP_{t_n}}{d\mu}(x) \\ &= \left| \frac{1}{t_n} (F_{Q_{t_n}}(x) - F_{Q_0}(x)) \dot{h}(\xi_n) \right| \frac{dP_{t_n}}{d\mu}(x) \\ &\leq \left| \frac{1}{t_n} (F_{Q_{t_n}}(x) - F_{Q_0}(x)) \right| \frac{dP_{t_n}}{d\mu}(x) \max_{\xi \in [0, 1]} |\dot{h}(\xi)| \\ &\leq \left(\int |g_2| dQ_0 + \varepsilon \right) \max_{\xi \in [0, 1]} |\dot{h}(\xi)| \frac{dP_{t_n}}{d\mu}(x) \\ &=: g_n(x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Es gilt außerdem $\frac{dP_{t_n}}{d\mu} \rightarrow \frac{dP_0}{d\mu}$ für $n \rightarrow \infty$ in $L_1(\mu)$ -Norm nach Bemerkung 1.5, weil die $L_2(P_0)$ -Differenzierbarkeit der Kurve $t \mapsto P_t$ insbesondere die

Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto \frac{dP_t}{dP_0}$ an der Stelle $t = 0$ bzgl. der $L_1(P_0)$ -Norm impliziert, vgl. [52], Seite 174. Hieraus folgt

$$g_n(x) \rightarrow \left(\int |g_2| dQ_0 + \varepsilon \right) \max_{\xi \in [0,1]} \left| \dot{h}(\xi) \right| \frac{dP_0}{d\mu}(x) \quad (2.3)$$

in $L_1(\mu)$ -Norm für $n \rightarrow \infty$. Außerdem gilt

$$\int g_n(x) d\mu(x) = \left(\int |g_2| dQ_0 + \varepsilon \right) \max_{\xi \in [0,1]} \left| \dot{h}(\xi) \right|. \quad (2.4)$$

Mit (2.2), (2.3) und (2.4) erhält man nach dem Satz von Pratt die Konvergenz

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{1}{t_n} (h(F_{Q_{t_n}}(x)) - h(F_{Q_0}(x))) \frac{dP_{t_n}}{d\mu}(x) d\mu(x) \\ &= \int \dot{h}(F_{Q_0}(x)) \left[\int \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(y) g_2(y) dQ_0(y) \right] \frac{dP_0}{d\mu}(x) d\mu(x) \\ &= \int \dot{h}(F_{Q_0}(x)) \left[\int \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(y) g_2(y) dQ_0(y) \right] dP_0(x), \end{aligned}$$

vgl. [9], Seite 258-259. Mit dem Satz von Fubini ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int \dot{h}(F_{Q_0}(x)) \left[\int \mathbf{1}_{(-\infty, x]} g_2 dQ_0 \right] dP_0(x) \\ &= \int \left[\int \dot{h}(F_{Q_0}(x)) \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(y) g_2(y) dQ_0(y) \right] dP_0(x) \\ &= \int \left[\int \dot{h}(F_{Q_0}(x)) \mathbf{1}_{[y, +\infty)}(x) g_2(y) dP_0(x) \right] dQ_0(y) \\ &= \int g_2(y) \left[\int \dot{h}(F_{Q_0}(x)) \mathbf{1}_{[y, +\infty)}(x) dP_0(x) \right] dQ_0(y). \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (k(P_t \otimes Q_t) - k(P_0 \otimes Q_0)) \\ &= \int h(F_{Q_0}(x)) g_1(x) dP_0(x) \\ & \quad + \int \left[\int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) \mathbf{1}_{[y, +\infty)}(s) dP_0(s) \right] g_2(y) dQ_0(y) \\ &= \int (g_1(x) + g_2(y)) \hat{k}(x, y) dP_0 \otimes Q_0(x, y), \end{aligned}$$

wobei $\hat{k}(x, y) := h(F_{Q_0}(x)) + \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) \mathbf{1}_{[y, +\infty)}(s) dP_0(s)$ ist. Das statistische Funktional k ist also differenzierbar an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ mit dem

Gradienten $\dot{k} := \widehat{k} - E_{P_0 \otimes Q_0}(\widehat{k})$ nach Definition 1.12. Mit dem Satz von Fubini erhält man dann

$$\begin{aligned}
\dot{k}(x, y) &= h(F_{Q_0}(x)) + \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) 1_{[y, +\infty)}(s) dP_0(s) \\
&\quad - \int \left(h(F_{Q_0}(x)) + \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) 1_{[y, +\infty)}(s) dP_0(s) \right) dP_0 \otimes Q_0(x, y) \\
&= h(F_{Q_0}(x)) + \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) 1_{[y, +\infty)}(s) dP_0(s) \\
&\quad - \int h(F_{Q_0}(x)) dP_0(x) - \int \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) 1_{[y, +\infty)}(s) dP_0(s) dQ_0(y) \\
&= h(F_{Q_0}(x)) + \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) 1_{[y, +\infty)}(s) dP_0(s) \\
&\quad - k(P_0 \otimes Q_0) - \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) \left[\int 1_{(-\infty, s]}(y) dQ_0(y) \right] dP_0(s) \\
&= h(F_{Q_0}(x)) + \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) 1_{[y, +\infty)}(s) dP_0(s) \\
&\quad - k(P_0 \otimes Q_0) - \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) F_{Q_0}(s) dP_0(s).
\end{aligned}$$

Der kanonische Gradient $\tilde{k}$ an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ lässt sich mit Satz 2.2 berechnen, falls die Tangentialräume $T(P_0, \mathcal{P})$ und $T(Q_0, \mathcal{Q})$ bekannt sind.

Das nachfolgende Lemma liefert eine hinreichende Bedingung für die Differenzierbarkeit der von Mises Funktionale, die einen breiten Einzug in die Theorie der asymptotischen Statistik gefunden hat, vgl. [5], [20], [49] und [52]. Die Voraussetzungen des Lemmas sind hinreichend schwach und meistens leicht nachzuprüfen.

Lemma 2.10

Sei $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ eine nichtparametrische Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Es seien $t \mapsto P_t$ eine $L_2(P_0)$ -differenzierbare Kurve in $\mathcal{P}$ mit Tangente $g \in L_2^{(0)}(P_0)$ und $T : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ eine Statistik mit $E_{P_0}(T^2) < \infty$.

Falls $\limsup_{t \downarrow 0} E_{P_t}(T^2) < \infty$ gilt, so ist die Abbildung $t \mapsto E_{P_t}(T)$ reitseitig differenzierbar an der Stelle 0 und es gilt

$$\left. \frac{d}{dt} E_{P_t}(T) \right|_{t=0+} = E_{P_0}(Tg) \tag{2.5}$$

(vgl. [20], Seite 73, Theorem 7.3. oder [5], Seite 457, Proposition 2).

Beweis. vgl. [49], Seite 167, Lemma 5.21 oder [40], Seite 11, Lemma 2.1. ■

Zur Anwendung des obigen Lemmas in der nichtparametrischen Situation braucht man eine mit der L_2 -Differenzierbarkeit verträgliche Metrik auf

$\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$, d.h. eine $L_2(0)$ -differenzierbare Kurve $t \mapsto P_t$ in $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ ist dann bereits stetig an der Stelle 0 bzgl. dieser Metrik. Die Hellingerdistanz ist eine solche Metrik, die sich für die nichtparametrischen Untersuchungen in der Statistik gut eignet.

Definition 2.11 (Hellingerdistanz)

Seien P und Q Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $P, Q \ll \nu$ für ein σ -endliches Maß ν . Dann heißt

$$d(P, Q) = \left(\frac{1}{2} \int \left(\left(\frac{dP}{d\nu} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{dQ}{d\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 d\nu \right)^{\frac{1}{2}}$$

die Hellingerdistanz von P und Q .

Mit Hilfe der Hellingerdistanz kann man die Voraussetzungen von Lemma 2.10 für die nichtparametrischen Familien von Wahrscheinlichkeitsmaßen formulieren. Im nachfolgenden Satz werden drei äquivalente Möglichkeiten gegeben, wie man die für die Differenzierbarkeit hinreichende Voraussetzung aus Lemma 2.10 im nichtparametrischen Kontext ausdrücken kann.

Satz 2.12 (topologische Äquivalenz)

Es seien $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ eine nichtparametrische Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen und $T : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ eine Statistik mit $E_{P_0}(T^2) < \infty$ für ein $P_0 \in \mathcal{P}$. Es sind folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Für alle Folgen $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{P}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} d(P_n, P_0) = 0$ gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_{P_n}(T^2) < \infty.$$

(b) Es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft

$$\sup \{ E_P(T^2) : P \in \mathcal{P} \text{ mit } d(P, P_0) < \varepsilon \} < \infty.$$

(c) Es existieren ein $\varepsilon > 0$ und ein $K > 0$, so dass

$$E_P(T^2) < K$$

für alle $P \in \mathcal{P}$ mit $d(P, P_0) < \varepsilon$ gilt.

Beweis. Die Äquivalenz zwischen (b) und (c) ist leicht zu zeigen.

(a) $\Rightarrow$ (b) Angenommen, die Aussage (b) ist falsch. Dann existiert eine Folge $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} d(P_n, P_0) = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{P_n}(T^2) = \infty$. Hieraus folgt $\limsup_{n \rightarrow \infty} E_{P_n}(T^2) = \infty$. Dies ist ein Widerspruch zu (a).

(b) $\Rightarrow$ (a) Sei $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} d(P_n, P_0) = 0$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $d(P_n, P_0) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Man erhält somit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_{P_n}(T^2) < \sup \{E_P(T^2) : P \in \mathcal{P} \text{ mit } d(P, P_0) < \varepsilon\} < \infty.$$

■

Es seien $k_1 : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ und $k_2 : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ statistische Funktionale. Oft verwendet man die zusammengesetzten statistischen Funktionale von der Form

$$\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}, P \otimes Q \mapsto f(k_1(P), k_2(Q)), \quad (2.6)$$

wobei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung ist. Die Differenzierbarkeit der zusammengesetzten statistischen Funktionale der Form (2.6) wird nun untersucht.

Satz 2.13

Sei $k_1 : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ ein statistisches an einer Stelle $P_0 \in \mathcal{P}$ differenzierbares Funktional mit einem Gradienten $\dot{k}_1 \in L_2^{(0)}(P_0)$ und dem kanonischen Gradienten $\tilde{k}_1 \in T(P_0, \mathcal{P})$. Sei $k_2 : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls ein statistisches an einer Stelle $Q_0 \in \mathcal{Q}$ differenzierbares Funktional mit einem Gradienten $\dot{k}_2 \in L_2^{(0)}(Q_0)$ und dem kanonischen Gradienten $\tilde{k}_2 \in T(Q_0, \mathcal{Q})$. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge mit $\{k_1(P) : P \in \mathcal{P}\} \times \{k_2(Q) : Q \in \mathcal{Q}\} \subset U$. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine an der Stelle $(k_1(P_0), k_2(Q_0))$ differenzierbare Funktion. Es bezeichne

$$c_1 = \left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right|_{(x, y) = (k_1(P_0), k_2(Q_0))}$$

und

$$c_2 = \left. \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right|_{(x, y) = (k_1(P_0), k_2(Q_0))}.$$

Das statistische Funktional $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}, P \otimes Q \mapsto f(k_1(P), k_2(Q))$ ist dann differenzierbar an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ und die Abbildung

$$\dot{k} : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}, (\omega_1, \omega_2) \mapsto c_1 \dot{k}_1(\omega_1) + c_2 \dot{k}_2(\omega_2)$$

ist ein Gradient von k an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$. Die Abbildung

$$\tilde{k} : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}, (\omega_1, \omega_2) \mapsto c_1 \tilde{k}_1(\omega_1) + c_2 \tilde{k}_2(\omega_2)$$

ist der kanonische Gradient von k an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$.

Beweis. Sei $t \mapsto P_t \otimes Q_t$ eine $L_2(0)$ -differenzierbare Kurve in $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ mit Tangente $g \in L_2^{(0)}(P_0 \otimes Q_0)$. Nach Satz 1.19 sind die Kurven $t \mapsto P_t$ in $\mathcal{P}$ und $t \mapsto Q_t$ in $\mathcal{Q}$ ebenfalls $L_2(0)$ -differenzierbar mit Tangenten $g_1 \in L_2^{(0)}(P_0)$

und $g_2 \in L_2^{(0)}(Q_0)$. Es gilt außerdem $g = g_1 \circ \pi_1 + g_2 \circ \pi_2$. Nach der Kettenregel der Differentialrechnung (vgl. [19], Seite 267) erhält man

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{d}{dt} k(P_t \otimes Q_t) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} f(k_1(P_t), k_2(Q_t)) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right|_{(x,y)=(k_1(P_0), k_2(Q_0))} \left. \frac{d}{dt} k_1(P_t) \right|_{t=0} \\
&\quad + \left. \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right|_{(x,y)=(k_1(P_0), k_2(Q_0))} \left. \frac{d}{dt} k_2(Q_t) \right|_{t=0} \\
&= c_1 \int g_1 \dot{k}_1 dP_0 + c_2 \int g_2 \dot{k}_2 dQ_0 \\
&= \int (g_1 \circ \pi_1 + g_2 \circ \pi_2) (c_1 \dot{k}_1 \circ \pi_1 + c_2 \dot{k}_2 \circ \pi_2) dP_0 \otimes Q_0 \\
&= \int g \dot{k} dP_0 \otimes Q_0.
\end{aligned}$$

Das statistische Funktional $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ist somit differenzierbar an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ und die Abbildung $\dot{k}$ ist ein Gradient von k . Insbesondere ist die Abbildung $\tilde{k}$ ein Gradient von k an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$. Nach Satz 1.21 ergibt sich $\tilde{k} \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$, weil $c_1 \tilde{k}_1 \in T(P_0, \mathcal{P})$ und $c_2 \tilde{k}_2 \in T(Q_0, \mathcal{Q})$ sind. Nach Satz 1.17 und Bemerkung 1.18 erhält man nun, dass die Abbildung $\tilde{k}$ der kanonische Gradient von k an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ ist. ■

Beispiel 2.14

Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 2.13.

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$. Das statistische Funktional

$$k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}, P \otimes Q \mapsto k_1(P) + k_2(Q)$$

ist dann differenzierbar an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ mit dem kanonischen Gradienten $\tilde{k} = \tilde{k}_1 \circ \pi_1 + \tilde{k}_2 \circ \pi_2$. Die Abbildung $\dot{k} = \dot{k}_1 \circ \pi_1 + \dot{k}_2 \circ \pi_2$ ist ein Gradient von k an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$.

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$. Das statistische Funktional

$$k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}, P \otimes Q \mapsto k_1(P) k_2(Q)$$

ist differenzierbar an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ mit dem kanonischen Gradienten

$$\tilde{k} = k_2(Q_0) \tilde{k}_1 \circ \pi_1 + k_1(P_0) \tilde{k}_2 \circ \pi_2.$$

Die Abbildung $\dot{k} = k_2(Q_0) \dot{k}_1 \circ \pi_1 + k_1(P_0) \dot{k}_2 \circ \pi_2$ ist ein Gradient von k an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$.

3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$. Das statistische Funktional

$$k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}, P \otimes Q \mapsto \frac{k_1(P)}{k_2(Q)}$$

ist differenzierbar an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ mit dem kanonischen Gradienten

$$\tilde{k} = \frac{1}{k_2(Q_0)} \tilde{k}_1 \circ \pi_1 - \frac{k_1(P_0)}{k_2(Q_0)^2} \tilde{k}_2 \circ \pi_2.$$

Die Abbildung $\dot{k} = \frac{1}{k_2(Q_0)} \dot{k}_1 \circ \pi_1 - \frac{k_1(P_0)}{k_2(Q_0)^2} \dot{k}_2 \circ \pi_2$ ist ein Gradient von k an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$.

Kapitel 3

Testen impliziter Alternativen im Zweistichprobenkontext

3.1 Zweistichprobenprobleme beim Testen statistischer Funktionale und Teststatistiken

Es seien $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$, $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}_1(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ nichtparametrische Familien von Wahrscheinlichkeitsmaßen und $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} := \{P \otimes Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$ eine Familie von Produktmaßen. Für viele Anwendungen kann die statistische Aufgabe als ein Testproblem bzgl. eines statistischen Funktionals $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ formuliert werden. Man interessiert sich unter anderem für die einseitigen Testprobleme

$$H = \{P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) = a\}$$

$$\text{gegen } K_1 = \{P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) > a\}$$

für eine Zahl $a \in \mathbb{R}$. Häufig betrachtet man die erweiterte Hypothese

$$H_1 = \{P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) \leq a\}$$

für das einseitige Testproblem. Die zweiseitigen Testprobleme

$$H = \{P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) = a\}$$

$$\text{gegen } K_2 = \{P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) \neq a\}$$

sind ebenfalls von großer Bedeutung. Für die analogen Einstichprobenprobleme ist es bekannt (vgl. [30], [31] und [33]), dass die Teststatistiken, die auf dem kanonischen Gradienten beruhen, zu den asymptotisch optimalen Testfolgen führen. Für die Zweistichprobenprobleme bietet es sich an, die Zweistichproben-U-Statistiken mit dem kanonischen Gradienten als Kern zu betrachten. Umfangreiche Informationen zu den allgemeinen U-Statistiken und insbesondere auch zu den Zweistichproben-U-Statistiken findet man in [26], [37], [52] und [54].

Ein statistisches Funktional $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar an einer Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in H$ mit dem kanonischen Gradienten $\tilde{k} \in L_2^{(0)}(P_0 \otimes Q_0)$. Mit n_i wird der Umfang der i -ten Stichprobe für $i = 1, 2$ bezeichnet, wobei n der gesamte Stichprobenumfang ist. Es seien $(n_1)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ und $(n_2)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ zwei Folgen mit $n_1 + n_2 = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_2}{n} = d \quad (3.1)$$

für ein $d \in (0, 1)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$E_n = (\Omega_1^{n_1} \times \Omega_2^{n_2}, \mathcal{A}_1^{n_1} \otimes \mathcal{A}_2^{n_2}, \{P^{n_1} \otimes Q^{n_2} : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\})$$

ein statistisches Experiment. Man erhält dann

$$\begin{aligned} U_{n_1, n_2} : \Omega_1^{n_1} \times \Omega_2^{n_2} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (\omega_{1,1}, \dots, \omega_{1,n_1}, \omega_{2,1}, \dots, \omega_{2,n_2}) &\mapsto \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{k}(\omega_{1,i}, \omega_{2,j}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

als die Zweistichproben-U-Statistik für das Experiment E_n mit dem kanonischen Gradienten $\tilde{k}$ als Kern. Diese Statistik lässt sich wesentlich vereinfachen, weil der kanonische Gradient $\tilde{k} \in L_2^{(0)}(P_0 \otimes Q_0)$ eine besonders einfache Struktur besitzt. Nach Satz 2.2 existieren $\tilde{k}_1 \in L_2^{(0)}(P_0)$ und $\tilde{k}_2 \in L_2^{(0)}(Q_0)$ mit

$$\tilde{k} : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}, (\omega_1, \omega_2) \mapsto \tilde{k}_1(\omega_1) + \tilde{k}_2(\omega_2).$$

Für die Zweistichproben-U-Statistik U_{n_1, n_2} ergibt sich somit

$$\begin{aligned} &U_{n_1, n_2}(\omega_{1,1}, \dots, \omega_{1,n_1}, \omega_{2,1}, \dots, \omega_{2,n_2}) \\ &= \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{k}(\omega_{1,i}, \omega_{2,j}) \\ &= \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} (\tilde{k}_1(\omega_{1,i}) + \tilde{k}_2(\omega_{2,j})) \\ &= \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \tilde{k}_1(\omega_{1,i}) + \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{k}_2(\omega_{2,j}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Beispiel 3.1 (Wilcoxon Funktional)

Das Wilcoxon-Funktional $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \mapsto \int 1_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}} dP \otimes Q(x, y)$ aus Anwendung 2.7 ist differenzierbar an jeder Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$. Die Familien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ seien voll, vgl. Definition 2.4. Nach Anwendung 2.7 erhält man dann den kanonischen Gradienten $\tilde{k}$ an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ als

$$\tilde{k}(x, y) = Q_0((-\infty, x]) + P_0([y, +\infty)) - 2k(P_0 \otimes Q_0).$$

Nach Satz 2.2 erhält man außerdem $\tilde{k}_1(x) = Q_0((-\infty, x]) - k(P_0 \otimes Q_0)$ und $\tilde{k}_2(y) = P_0([y, +\infty)) - k(P_0 \otimes Q_0)$. Die Statistik U_{n_1, n_2} zu dem kanonischen Gradienten $\tilde{k}$ an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ ergibt sich als

$$\begin{aligned} U_{n_1, n_2}(x_1, \dots, x_{n_1}, y_1, \dots, y_{n_2}) &= \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} Q_0((-\infty, x_i]) \\ &\quad + \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} P_0([y_j, +\infty)) - 2k(P_0 \otimes Q_0). \end{aligned}$$

Beispiel 3.2 (von Mises Funktional)

Das von Mises Funktional $k : P \otimes Q \mapsto \int h(\omega_1, \omega_2) dP \otimes Q(\omega_1, \omega_2)$ aus Beispiel 2.6 sei differenzierbar an einer Stelle $P_0 \otimes Q_0$ mit dem kanonischen Gradienten

$$\tilde{k}(\omega_1, \omega_2) = \int h(\omega_1, \omega_2) dQ_0(\omega_2) + \int h(\omega_1, \omega_2) dP_0(\omega_1) - 2k(P_0 \otimes Q_0).$$

Es gilt außerdem $\tilde{k}_1(\omega_1) = \int h(\omega_1, \omega_2) dQ_0(\omega_2) - k(P_0 \otimes Q_0)$ und $\tilde{k}_2(\omega_2) = \int h(\omega_1, \omega_2) dP_0(\omega_1) - k(P_0 \otimes Q_0)$ nach Satz 2.2. Die Statistik U_{n_1, n_2} ergibt sich dann als

$$\begin{aligned} U_{n_1, n_2}(\omega_{1,1}, \dots, \omega_{1,n_1}, \omega_{2,1}, \dots, \omega_{2,n_2}) &= \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \int h(\omega_{1,i}, \omega_2) dQ_0(\omega_2) \\ &\quad + \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \int h(\omega_1, \omega_{2,j}) dP_0(\omega_1) \\ &\quad - 2k(P_0 \otimes Q_0). \end{aligned}$$

Beispiel 3.3 (invariante Funktionale)

Sei $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung mit beschränkter Ableitung. Ein invariantes Funktional $k : P \otimes Q \mapsto \int h(F_Q(x)) dP(x)$ ist dann differenzierbar an jeder Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ nach Beispiel 2.9. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \dot{k}(x, y) &= h(F_{Q_0}(x)) + \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) 1_{[y, +\infty)}(s) dP_0(s) \\ &\quad - k(P_0 \otimes Q_0) - \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) F_{Q_0}(s) dP_0(s) \end{aligned}$$

ist ein Gradient des Funktionals k an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$. Es gelte $T(P_0, \mathcal{P}) = L_2^{(0)}(P_0)$ und $T(Q_0, \mathcal{Q}) = L_2^{(0)}(Q_0)$. Nach Satz 2.2 erhält man dann

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1(x) &= \int \dot{k}(x, y) dQ_0(y) \\ &= h(F_{Q_0}(x)) + \int \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) 1_{[y, +\infty)}(s) dP_0(s) dQ_0(y) \\ &\quad - k(P_0 \otimes Q_0) - \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) F_{Q_0}(s) dP_0(s) \end{aligned}$$

$$= h(F_{Q_0}(x)) - k(P_0 \otimes Q_0)$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{k}_2(y) &= \int \dot{k}(x, y) dP_0(x) \\ &= \int h(F_{Q_0}(x)) dP_0(x) + \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) 1_{[y, +\infty)}(s) dP_0(s) \\ &\quad - k(P_0 \otimes Q_0) - \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) F_{Q_0}(s) dP_0(s) \\ &= \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) 1_{[y, +\infty)}(s) dP_0(s) - \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) F_{Q_0}(s) dP_0(s). \end{aligned}$$

Die von dem kanonischen Gradienten erzeugte Statistik U_{n_1, n_2} ergibt sich als

$$\begin{aligned} U_{n_1, n_2}(x_1, \dots, x_{n_1}, y_1, \dots, y_{n_2}) &= \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} h(F_{Q_0}(x_i)) \\ &\quad + \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) 1_{[y_j, +\infty)}(s) dP_0(s) \\ &\quad - k(P_0 \otimes Q_0) - \int \dot{h}(F_{Q_0}(s)) F_{Q_0}(s) dP_0(s). \end{aligned}$$

3.2 Lokale asymptotische Normalität der Produktexperimente

Die lokale asymptotische Normalität (kurz: LAN) kann man als zentralen Grenzwertsatz für Experimente betrachten, der eine Grundlage für die Untersuchungen der lokalen asymptotischen Optimalität der Test- und Schätzverfahren bildet. Umfangreiche Informationen zu der lokalen asymptotischen Normalität findet man in [46], [25] und [54]. An dieser Stelle wird kurz an die Definition der lokalen asymptotischen Normalität erinnert. Für die nicht-parametrischen Untersuchungen der asymptotischen Optimalität in diesem Abschnitt reicht die eindimensionale Version der LAN aus.

Definition 3.4 (LAN)

Sei $E_n = (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \{P_{n, \vartheta} : \vartheta \in \Theta_n\})$ eine Folge von Experimenten mit $0 \in \Theta_n \subset \mathbb{R}$ und $\Theta_n \uparrow \Theta$ für $n \rightarrow \infty$. Die Folge E_n heißt *lokal asymptotisch normal (LAN)*, wenn es Folgen von Zufallsvariablen $X_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$ und $R_{n, \vartheta} : \Omega_n \rightarrow [-\infty, \infty]$ gibt, so dass für ein $\sigma > 0$ gilt:

- (1) $\log \frac{dP_{n, \vartheta}}{dP_{n, 0}} = \vartheta X_n - \frac{1}{2} \vartheta^2 \sigma^2 + R_{n, \vartheta},$
- (2) $\mathcal{L}(X_n \mid P_{n, 0}) \rightarrow N(0, \sigma^2)$ für $n \rightarrow \infty,$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,0}(\{|R_{n,\vartheta}| > \varepsilon\}) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$ und für alle $\vartheta \in \Theta$.

Die Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ werden als zentrale Folge bezeichnet.

Bemerkung 3.5

Häufig sind $P_{n,\vartheta} := P_{\vartheta_0 + \frac{\vartheta}{\sqrt{n}}}^n$ Produktmaße, wobei ϑ_0 als globaler Parameter und ϑ als lokaler Parameter bezeichnet werden. Der globale Parameter $\vartheta_0 \in \Theta$ wird festgehalten. Der lokale Parameter ϑ kann beliebige Werte aus $\left\{ \vartheta \in \mathbb{R} : \vartheta_0 + \frac{\vartheta}{\sqrt{n}} \in \Theta_n \right\}$ annehmen, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine parametrische Familie $\left\{ P_{\vartheta_0 + \frac{\vartheta}{\sqrt{n}}}^n : \vartheta_0 + \frac{\vartheta}{\sqrt{n}} \in \Theta_n \right\}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen entsteht.

Bemerkung 3.6

Eine Folge $E_n = (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \{P_{n,\vartheta} : \vartheta \in \Theta_n\})$ von Experimenten sei LAN. Dann gilt

$$P_{n,\vartheta} \triangleleft P_{n,0} \quad \text{und} \quad P_{n,0} \triangleleft P_{n,\vartheta}.$$

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus dem ersten Lemma von Le Cam, vgl. [17], Seite 251, [54], Seite 331 oder [29], Seite 113. ■

Bemerkung 3.7

Eine Folge $E_n = (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \{P_{n,\vartheta} : \vartheta \in \Theta_n\})$ von Experimenten sei LAN. Es seien $(\varphi_{in})_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Testfolgen für $i = 1, 2$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |\varphi_{1n} - \varphi_{2n}| dP_{n,0} = 0$. Nach Lemma 1.29 ergibt sich dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |\varphi_{1n} - \varphi_{2n}| dP_{n,\vartheta} = 0$$

für alle $\vartheta \in \Theta$.

Beim Testen statistischer Funktionale ist es nützlich, wenn eine verschärfte Version der LAN-Bedingung zur Verfügung steht. Dann kann man die lokale Trenngeschwindigkeit $n^{-\frac{1}{2}}$ durch eine Folge t_n mit $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} t_n = 1$ ersetzen. Man betrachtet dann das asymptotische Verhalten der Experimente

$$E_n = (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \{P_{\vartheta_0 + t_n \vartheta}^n : \vartheta_0 + t_n \vartheta \in \Theta_n\})$$

für einen fest gewählten globalen Parameter $\vartheta_0 \in \Theta$. Aus diesem Grund wird eine gleichmäßige LAN-Bedingung angegeben, die in der Literatur ULAN-Bedingung heißt.

Definition 3.8 (ULAN)

Sei $E_n = (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \{P_{n,\vartheta} : \vartheta \in \Theta_n\})$ eine LAN-Folge von Experimenten. Die Folge E_n heißt ULAN, falls für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}$ und für alle $\varepsilon > 0$ folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\vartheta \in K \cap \Theta_n} P_{n,0}(\{|R_{n,\vartheta}| > \varepsilon\}) = 0. \quad (3.4)$$

Die äquivalente Bedingung an die Restglieder $R_{n,\vartheta}$ ist die Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,0}(\{|R_{n,\vartheta_n}| > \varepsilon\}) = 0 \quad (3.5)$$

für alle konvergenten Folgen $\vartheta_n \rightarrow \vartheta$ und für alle $\varepsilon > 0$.

Für die Zweistichprobenprobleme braucht man zusätzliche Hilfsmittel, die die Arbeit mit der LAN für die Familien der Produktmaße erleichtern. Sind zwei Folgen von Experimenten gegeben, so interessiert man sich für die lokalen asymptotischen Eigenschaften der Folge der Experimenten, die auf Familien der Produktmaße beruhen. Eine umfassende Antwort auf diese Fragestellung wird in Satz 3.10 gegeben.

Definition 3.9 (Produktexperiment)

Es seien $(n_1)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ und $(n_2)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ zwei Folgen mit $n_1 + n_2 = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_2}{n} = d \in (0, 1)$. Es seien $E_{1,n} = (\Omega_{1,n}, \mathcal{A}_{1,n}, \{P_{n,\vartheta} : \vartheta \in \Theta_n\})$ und $E_{2,n} = (\Omega_{2,n}, \mathcal{A}_{2,n}, \{Q_{n,\vartheta} : \vartheta \in \Theta_n\})$ zwei Folgen von Experimenten. Das Produktexperiment wird definiert als

$$E_n = (\Omega_{1,n_1} \times \Omega_{2,n_2}, \mathcal{A}_{1,n_1} \otimes \mathcal{A}_{2,n_2}, \{P_{n_1,\vartheta} \otimes Q_{n_2,\vartheta} : \vartheta \in \Theta_n\}). \quad (3.6)$$

Satz 3.10 (LAN von Produktexperimenten)

Die Voraussetzungen aus Definition 3.9 seien erfüllt. Es gelte außerdem $0 \in \Theta_n \subset \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\Theta_n \uparrow \Theta$ für $n \rightarrow \infty$. Die Folge $(E_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ von Experimenten sei LAN mit $X_{i,n}$ als zentrale Folge für $i = 1, 2$. Dann ist die Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Produktexperimente LAN mit

$$\begin{aligned} X_n : \Omega_{1,n_1} \times \Omega_{2,n_2} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (\omega_{1,n_1}, \omega_{2,n_2}) &\mapsto X_{1,n_1}(\omega_{1,n_1}) + X_{2,n_2}(\omega_{2,n_2}) \end{aligned}$$

als zentrale Folge.

Beweis. Nach Definition 3.4 existieren Folgen $(R_{n,\vartheta})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{R}_{n,\vartheta})_{n \in \mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen für jedes $\vartheta \in \Theta$, so dass gilt:

- (1) $\log \frac{dP_{n,\vartheta}}{dP_{n,0}} = \vartheta X_{1,n} - \frac{1}{2} \vartheta^2 \sigma_1^2 + R_{n,\vartheta}$ und $\log \frac{dQ_{n,\vartheta}}{dQ_{n,0}} = \vartheta X_{2,n} - \frac{1}{2} \vartheta^2 \sigma_2^2 + \tilde{R}_{n,\vartheta}$,
- (2) $\mathcal{L}(X_{1,n} \mid P_{n,0}) \rightarrow N(0, \sigma_1^2)$ und $\mathcal{L}(X_{2,n} \mid Q_{n,0}) \rightarrow N(0, \sigma_2^2)$ in Verteilung für $n \rightarrow \infty$,
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,0}(\{|R_{n,\vartheta}| > \varepsilon\}) = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{n,0}(\{|\tilde{R}_{n,\vartheta}| > \varepsilon\}) = 0$ für alle $\vartheta \in \Theta$ und alle $\varepsilon > 0$.

Man erhält zunächst

$$\begin{aligned} &\log \frac{dP_{n_1,\vartheta} \otimes Q_{n_2,\vartheta}}{dP_{n_1,0} \otimes Q_{n_2,0}}(\omega_{1,n_1}, \omega_{2,n_2}) \\ &= \log \left(\frac{dP_{n_1,\vartheta}}{dP_{n_1,0}}(\omega_{1,n_1}) \frac{dQ_{n_2,\vartheta}}{dQ_{n_2,0}}(\omega_{2,n_2}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \log \left(\frac{dP_{n_1, \vartheta}}{dP_{n_1, 0}} (\omega_{1, n_1}) \right) + \log \left(\frac{dQ_{n_2, \vartheta}}{dQ_{n_2, 0}} (\omega_{2, n_2}) \right) \\
&= \vartheta X_{1, n_1} (\omega_{1, n_1}) - \frac{1}{2} \vartheta^2 \sigma_1^2 + R_{n_1, \vartheta} (\omega_{1, n_1}) \\
&\quad + \vartheta X_{2, n_2} (\omega_{2, n_2}) - \frac{1}{2} \vartheta^2 \sigma_2^2 + \tilde{R}_{n_2, \vartheta} (\omega_{2, n_2}) \\
&= \vartheta (X_{1, n_1} (\omega_{1, n_1}) + X_{2, n_2} (\omega_{2, n_2})) - \frac{1}{2} \vartheta^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \\
&\quad + R_{n_1, \vartheta} (\omega_{1, n_1}) + \tilde{R}_{n_2, \vartheta} (\omega_{2, n_2}).
\end{aligned}$$

Für die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen erhält man unmittelbar

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(X_n \mid P_{n_1, 0} \otimes Q_{n_2, 0}) &= \mathcal{L}(X_{1, n_1} \mid P_{n_1, 0}) * \mathcal{L}(X_{2, n_2} \mid Q_{n_2, 0}) \\
&\rightarrow N(0, \sigma_1^2) * N(0, \sigma_2^2) \\
&= N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)
\end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$, weil $\mathcal{L}(X_{1, n_1} \mid P_{n_1, 0})$ und $\mathcal{L}(X_{2, n_2} \mid Q_{n_2, 0})$ stochastisch unabhängig sind. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt außerdem

$$\begin{aligned}
&P_{n_1, 0} \otimes Q_{n_2, 0} \left(\left\{ \left| R_{n_1, \vartheta} + \tilde{R}_{n_2, \vartheta} \right| > \varepsilon \right\} \right) \\
&\leq P_{n_1, 0} \otimes Q_{n_2, 0} \left(\left\{ \left| R_{n_1, \vartheta} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right) + P_{n_1, 0} \otimes Q_{n_2, 0} \left(\left\{ \left| \tilde{R}_{n_2, \vartheta} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right) \\
&= \underbrace{P_{n_1, 0} \left(\left\{ \left| R_{n_1, \vartheta} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{Q_{n_2, 0} \left(\left\{ \left| \tilde{R}_{n_2, \vartheta} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right)}_{\rightarrow 0}
\end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$. Somit ist alles bewiesen. ■

Satz 3.11 (ULAN von Produktexperimenten)

Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 3.10. Die Folgen $E_{1, n}$ und $E_{2, n}$ von Experimenten seien ULAN. Die Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Produkterperimente ist dann ebenfalls ULAN.

Beweis. Nach Satz 3.10 reicht es die Bedingung (3.5) nachzuweisen. Sei $(\vartheta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\vartheta_n \in \Theta_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \mathbb{N}} \vartheta_n = \vartheta$ für ein $\vartheta \in \Theta$. Man erhält dann für jedes $\varepsilon > 0$ die Konvergenz

$$\begin{aligned}
&P_{n_1, 0} \otimes Q_{n_2, 0} \left(\left\{ \left| R_{n_1, \vartheta_n} + \tilde{R}_{n_2, \vartheta_n} \right| > \varepsilon \right\} \right) \\
&\leq \underbrace{P_{n_1, 0} \left(\left\{ \left| R_{n_1, \vartheta_n} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{Q_{n_2, 0} \left(\left\{ \left| \tilde{R}_{n_2, \vartheta_n} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right)}_{\rightarrow 0}
\end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$. Die Bedingung (3.5) ist somit erfüllt. ■

Definition 3.12

Sei $\Theta \subset \mathbb{R}$ mit $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \Theta$ für ein $\varepsilon > 0$. Ein Experiment $E(\Omega, \mathcal{A}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$

heißt $L_2(P_0)$ -differenzierbar mit Tangente $g \in L_2^{(0)}(P_0)$, falls die Kurve $\vartheta \mapsto P_\vartheta$ $L_2(P_0)$ -differenzierbar mit Tangente $g \in L_2^{(0)}(P_0)$ ist.

Die L_2 -Differenzierbarkeit eines Experimentes ist eine Glattheitseigenschaft. Der folgende Satz von Le Cam verifiziert LAN für die geeigneten Folgen von $L_2(0)$ -differenzierbaren Experimenten und zeigt dabei die zentrale Rolle der Tangente an der Stelle 0.

Satz 3.13 (von Le Cam)

Sei $E = (\Omega, \mathcal{A}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$ ein $L_2(0)$ -differenzierbares Experiment mit Tangente $g \in L_2^{(0)}(P_0)$ und $g \neq 0$. Sei $\left((c_{n,i})_{1 \leq i \leq n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Dreiecksschema von Regressionskoeffizienten mit

$$(i) \quad \max_{1 \leq i \leq n} |c_{n,i}| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^n c_{n,i}^2 \rightarrow c^2 > 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Sei $E_n = \left(\Omega^n, \mathcal{A}^n, \left\{\bigotimes_{i=1}^n P_{c_{n,i}\vartheta} : \vartheta \in \Theta_n\right\}\right)$ eine Folge von Experimenten mit $\Theta_n \subset \{\vartheta : c_{n,i}\vartheta \in \Theta \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}\}$. Dann erfüllt $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die LAN-Bedingung und die Folge

$$X_n(\omega_1, \dots, \omega_n) := \sum_{i=1}^n c_{n,i} g(\omega_i)$$

von Zufallsvariablen ist eine zentrale Folge. Außerdem gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int X_n^2 dP_0^n = c^2 \int g^2 dP_0.$$

Beweis. vgl. [54], Seite 317, Satz 6.130 oder [29], Seite 126, Satz 14.8. ■

Satz 3.14

Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 3.13. Die Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Experimente aus Satz 3.13 ist dann ULAN.

Beweis. vgl. [29], Seite 138, Beispiel 14.18 oder [54], Seite 317, Satz 6.130. ■

Anwendung 3.15

Seien $E_1 = (\Omega_1, \mathcal{A}_1, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$ und $E_2 = (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \{Q_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$ zwei $L_2(0)$ -differenzierbare Experimente mit Tangenten $g_1 \in L_2^{(0)}(P_0)$ und $g_2 \in L_2^{(0)}(Q_0)$. Außerdem gelte $g_1 \neq 0$ und $g_2 \neq 0$. Seien $\left((c_{n,i})_{1 \leq i \leq n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \subset$

$\mathbb{R}$ und $\left((\tilde{c}_{n,i})_{1 \leq i \leq n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ zwei Dreiecksschemata von Regressionskoeffizienten, die den Bedingungen (i) und (ii) aus Satz 3.13 entsprechen. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_{n,i}^2 = c_1^2 > 0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \tilde{c}_{n,i}^2 = c_2^2 > 0.$$

Die Folgen $E_{1,n} = \left(\Omega_1^n, \mathcal{A}_1^n, \left\{\bigotimes_{i=1}^n P_{c_{n,i}\vartheta} : \vartheta \in \Theta_n\right\}\right)$ und $E_{2,n} = \left(\Omega_2^n, \mathcal{A}_2^n, \left\{\bigotimes_{i=1}^n Q_{\tilde{c}_{n,i}\vartheta} : \vartheta \in \Theta_n\right\}\right)$ von Experimenten erfüllen die ULAN-Bedingung nach Satz 3.13. Seien $(n_1)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ und $(n_2)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ zwei Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_2}{n} = d \in (0, 1)$ und $n_1 + n_2 = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge E_n der Produktexperimente erfüllt dann nach Satz 3.10 die ULAN-Bedingung mit

$$X_n(\omega_{1,1}, \dots, \omega_{1,n_1}, \omega_{2,1}, \dots, \omega_{2,n_2}) = \sum_{i=1}^{n_1} c_{n_1,i} g_1(\omega_{1,i}) + \sum_{i=1}^{n_2} \tilde{c}_{n_2,i} g_2(\omega_{2,i})$$

als zentrale Folge. Es gilt außerdem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}_{P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}}(X_n) = c_1^2 \int g_1^2 dP_0 + c_2^2 \int g_2^2 dQ_0.$$

Die Regressionskoeffizienten können zum Beispiel als

$$c_{n_1,i} := \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{und} \quad \tilde{c}_{n_2,i} := \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (3.7)$$

gewählt werden. Man erhält dann $c_1^2 = 1 - d$ und $c_2^2 = d$. Hieraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}_{P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}}(X_n) = (1 - d) \int g_1^2 dP_0 + d \int g_2^2 dQ_0.$$

Die Abbildung $g : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}, (\omega_1, \omega_2) \mapsto g_1(\omega_1) + g_2(\omega_2)$ ist die Tangente zu der $L_2(0)$ -differenzierbaren Kurve $\vartheta \mapsto P_\vartheta \otimes Q_\vartheta$ an der Stelle 0, vgl. Satz 1.19. Die Tangente g und die Regressionskoeffizienten bestimmen also die asymptotischen Eigenschaften der Produktexperimente $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3.3 Asymptotisches Verhalten der Teststatistik

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden die lokalen asymptotischen Eigenschaften der Teststatistik

$$T_n := \sqrt{n}U_{n_1, n_2}$$

analysiert, wobei U_{n_1, n_2} die von dem kanonischen Gradient $\tilde{k}$ erzeugte Zweistichproben-U-Statistik ist, vgl. (3.2). Mit (3.3) ergibt sich zunächst

$$T_n(\omega_{1,1}, \dots, \omega_{1,n_1}, \omega_{2,1}, \dots, \omega_{2,n_2}) = \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \tilde{k}_1(\omega_{1,i}) + \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{k}_2(\omega_{2,j}), \quad (3.8)$$

wobei $\tilde{k} : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}, (\omega_1, \omega_2) \mapsto \tilde{k}_1(\omega_1) + \tilde{k}_2(\omega_2)$ der kanonische Gradient eines statistischen Funktionals $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ ist, vgl. Satz 2.2.

Satz 3.16 (Asymptotisches Verhalten von T_n unter $P_0 \otimes Q_0$)

Seien $(n_1)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ und $(n_2)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ zwei Folgen mit $n_1 + n_2 = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_2}{n} = d \in (0, 1)$. Dann gilt

$$\mathcal{L}(T_n | P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}) \rightarrow N\left(0, \frac{1}{1-d} \|\tilde{k}_1\|_{L_2(P_0)}^2 + \frac{1}{d} \|\tilde{k}_2\|_{L_2(Q_0)}^2\right)$$

für $n \rightarrow \infty$, wobei $\|\tilde{k}_1\|_{L_2(P_0)}^2 = \int \tilde{k}_1^2 dP_0$ und $\|\tilde{k}_2\|_{L_2(Q_0)}^2 = \int \tilde{k}_2^2 dQ_0$ sind.

Beweis. Die i -te kanonische Projektion wird mit π_i bezeichnet. Nach dem zentralen Grenzwertsatz von Lindeberg-Feller (vgl. [1], Satz 28.3) erhält man unmittelbar die Konvergenz

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \tilde{k}_1 \circ \pi_i \middle| P_0^{n_1}\right) \rightarrow N\left(0, \frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0\right)$$

und

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{k}_2 \circ \pi_j \middle| Q_0^{n_2}\right) \rightarrow N\left(0, \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0\right)$$

für $n \rightarrow \infty$, weil $\tilde{k}_1 \in L_2^{(0)}(P_0)$ und $\tilde{k}_2 \in L_2^{(0)}(Q_0)$ sind. Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(T_n | P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}) &= \mathcal{L}\left(\frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \tilde{k}_1 \circ \pi_i + \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{k}_2 \circ \pi_{n_1+j} \middle| P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}\right) \\ &\rightarrow N\left(0, \frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0\right) \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$, weil $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_2}{n} = d \in (0, 1)$ nach Voraussetzung gilt und die Verteilungen $\mathcal{L} \left(\frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \tilde{k}_1 \circ \pi_i \middle| P_0^{n_1} \right)$ und $\mathcal{L} \left(\frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{k}_2 \circ \pi_j \middle| Q_0^{n_2} \right)$ stochastisch unabhängig sind. ■

Zur Anwendung der asymptotischen Testtheorie bleibt noch die gemeinsame asymptotische Verteilung der zentralen Folge

$$X_n = \sum_{i=1}^{n_1} c_{n_1,i} g_1 \circ \pi_i + \sum_{i=n_1+1}^n \tilde{c}_{n_2,i} g_2 \circ \pi_i \quad (3.9)$$

und der Statistik T_n zu untersuchen.

Satz 3.17 (gemeinsame asymptotische Verteilung)

Seien $(n_1)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ und $(n_2)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ zwei Folgen mit $n_1 + n_2 = n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_2}{n} = d \in (0, 1)$. Die Regressionskoeffizienten $\left((c_{n,i})_{1 \leq i \leq n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $\left((\tilde{c}_{n,i})_{1 \leq i \leq n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ der zentralen Folge X_n seien allgemein gewählt und erfüllen die Bedingungen aus Satz 3.13. Außerdem existieren die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n c_{n,i} = a_1 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n \tilde{c}_{n,i} = a_2.$$

Dann gilt

$$\mathcal{L} \left((T_n, X_n)^t \middle| P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} \right) \rightarrow N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

für $n \rightarrow \infty$. Die Einträge der Kovarianzmatrix ergeben sich als

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0, \\ \sigma_2^2 &= c_1^2 \int g_1^2 dP + c_2^2 \int g_2^2 dQ, \\ \sigma_{12} &= a_1 \frac{1}{\sqrt{1-d}} \int \tilde{k}_1 g_1 dP_0 + a_2 \frac{1}{\sqrt{d}} \int \tilde{k}_2 g_2 dQ_0. \end{aligned}$$

Beweis. Nach dem Cramér-Wold-Device (vgl. [13], Seite 357) reicht es für alle $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ zu zeigen, dass

$$\mathcal{L}(\lambda_1 T_n + \lambda_2 X_n \middle| P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}) \rightarrow N(0, \lambda_1^2 \sigma_1^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \sigma_{12} + \lambda_2^2 \sigma_2^2)$$

für $n \rightarrow \infty$ konvergiert. Man erhält zuerst

$$\begin{aligned} \lambda_1 T_n + \lambda_2 X_n &= \lambda_1 \left(\frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \tilde{k}_1 \circ \pi_i + \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{k}_2 \circ \pi_{n_1+j} \right) \\ &\quad + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{n_1} c_{n_1,i} g_1 \circ \pi_i + \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{c}_{n_2,j} g_2 \circ \pi_{n_1+j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n_1} \left(\lambda_1 \frac{\sqrt{n}}{n_1} \tilde{k}_1 \circ \pi_i + \lambda_2 c_{n_1,i} g_1 \circ \pi_i \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n_2} \left(\lambda_1 \frac{\sqrt{n}}{n_2} \tilde{k}_2 \circ \pi_{n_1+j} + \lambda_2 \tilde{c}_{n_2,j} g_2 \circ \pi_{n_1+j} \right).
\end{aligned}$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz von Lindeberg-Feller (vgl. [1], Satz 28.3) ergibt sich die Konvergenz

$$\mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left(\lambda_1 \frac{\sqrt{n}}{n_1} \tilde{k}_1 \circ \pi_i + \lambda_2 c_{n_1,i} g_1 \circ \pi_i \right) \middle| P_0^{n_1} \right) \rightarrow N(0, v_1^2)$$

und

$$\mathcal{L} \left(\sum_{j=1}^{n_2} \left(\lambda_1 \frac{\sqrt{n}}{n_2} \tilde{k}_2 \circ \pi_j + \lambda_2 \tilde{c}_{n_2,j} g_2 \circ \pi_j \right) \middle| Q_0^{n_2} \right) \rightarrow N(0, v_2^2)$$

für $n \rightarrow \infty$, weil $\tilde{k}_1, g_1 \in L_2^{(0)}(P_0)$ und $\tilde{k}_2, g_2 \in L_2^{(0)}(Q_0)$ sind. Die Varianzen v_1^2 und v_2^2 erhält man als folgende Grenzwerte:

$$\begin{aligned}
v_1^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}_{P_0^{n_1}} \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left(\lambda_1 \frac{\sqrt{n}}{n_1} \tilde{k}_1 \circ \pi_i + \lambda_2 c_{n_1,i} g_1 \circ \pi_i \right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{n_1} \text{Var}_{P_0^{n_1}} \left(\lambda_1 \frac{\sqrt{n}}{n_1} \tilde{k}_1 \circ \pi_i + \lambda_2 c_{n_1,i} g_1 \circ \pi_i \right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{n_1} \text{Var}_{P_0^{n_1}} \left(\lambda_1 \frac{\sqrt{n}}{n_1} \tilde{k}_1 \circ \pi_i \right) + \sum_{i=1}^{n_1} \text{Var}_{P_0^{n_1}} (\lambda_2 c_{n_1,i} g_1 \circ \pi_i) \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^{n_1} \text{Cov}_{P_0^{n_1}} \left(\lambda_1 \frac{\sqrt{n}}{n_1} \tilde{k}_1 \circ \pi_i, \lambda_2 c_{n_1,i} g_1 \circ \pi_i \right) \right) \\
&= \lambda_1^2 \text{Var}_{P_0}(\tilde{k}_1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n_1} \right) + \lambda_2^2 \text{Var}_{P_0}(g_1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{n_1} c_{n_1,i}^2 \right) \\
&\quad + 2\lambda_1 \lambda_2 \text{Cov}_{P_0}(\tilde{k}_1, g_1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n_1}} \frac{1}{\sqrt{n_1}} \sum_{i=1}^{n_1} c_{n_1,i} \right) \\
&= \lambda_1^2 \frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \lambda_2^2 c_1^2 \int g_1^2 dP_0 + 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{1}{\sqrt{1-d}} a_1 \int \tilde{k}_1 g_1 dP_0
\end{aligned}$$

und

$$v_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}_{Q_0^{n_2}} \left(\sum_{j=1}^{n_2} \left(\lambda_1 \frac{\sqrt{n}}{n_2} \tilde{k}_2 \circ \pi_j + \lambda_2 \tilde{c}_{n_2,j} g_2 \circ \pi_j \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_1^2 \text{Var}_{Q_0}(\tilde{k}_2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n_2} \right) + \lambda_2^2 \text{Var}_{Q_0}(g_2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^{n_2} \tilde{c}_{n_2,j}^2 \right) \\
&\quad + 2\lambda_1 \lambda_2 \text{Cov}_{Q_0}(\tilde{k}_2, g_2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n_2}} \frac{1}{\sqrt{n_2}} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{c}_{n_2,j} \right) \\
&= \lambda_1^2 \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 + \lambda_2^2 c_2^2 \int g_2^2 dQ_0 + 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{1}{\sqrt{d}} a_2 \int \tilde{k}_2 g_2 dQ_0.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(\lambda_1 T_n + \lambda_2 X_n | P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}) \\
&= \mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left(\lambda_1 \frac{\sqrt{n}}{n_1} \tilde{k}_1 \circ \pi_i + \lambda_2 c_{n_1,i} g_1 \circ \pi_i \right) | P_0^{n_1} \right) \\
&\quad * \mathcal{L} \left(\sum_{j=1}^{n_2} \left(\lambda_1 \frac{\sqrt{n}}{n_2} \tilde{k}_2 \circ \pi_j + \lambda_2 \tilde{c}_{n_2,j} g_2 \circ \pi_j \right) | Q_0^{n_2} \right) \\
&\rightarrow N(0, v_1^2) * N(0, v_2^2) \\
&= N(0, v_1^2 + v_2^2),
\end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$, weil die Verteilungen $\mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left(\lambda_1 \frac{\sqrt{n}}{n_1} \tilde{k}_1 \circ \pi_i + \lambda_2 c_{n_1,i} g_1 \circ \pi_i \right) | P_0^{n_1} \right)$ und $\mathcal{L} \left(\sum_{j=1}^{n_2} \left(\lambda_1 \frac{\sqrt{n}}{n_2} \tilde{k}_2 \circ \pi_j + \lambda_2 \tilde{c}_{n_2,j} g_2 \circ \pi_j \right) | Q_0^{n_2} \right)$ stochastisch unabhängig sind. Die Varianz $v_1^2 + v_2^2$ erhält man als

$$\begin{aligned}
v_1^2 + v_2^2 &= \lambda_1^2 \frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \lambda_2^2 c_1^2 \int g_1^2 dP_0 + 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{1}{\sqrt{1-d}} a_1 \int \tilde{k}_1 g_1 dP_0 \\
&\quad + \lambda_1^2 \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 + \lambda_2^2 c_2^2 \int g_2^2 dQ_0 + 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{1}{\sqrt{d}} a_2 \int \tilde{k}_2 g_2 dQ_0 \\
&= \lambda_1^2 \left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right) \\
&\quad + \lambda_2^2 \left(c_1^2 \int g_1^2 dP_0 + c_2^2 \int g_2^2 dQ_0 \right) \\
&\quad + 2\lambda_1 \lambda_2 \left(a_1 \frac{1}{\sqrt{1-d}} \int \tilde{k}_1 g_1 dP_0 + a_2 \frac{1}{\sqrt{d}} \int \tilde{k}_2 g_2 dQ_0 \right).
\end{aligned}$$

Somit ist alles bewiesen. ■

3.4 Asymptotische Eigenschaften der einseitigen Tests

Die Ergebnisse aus Satz 3.17 werden nun zum asymptotisch optimalen Testen der statistischen Funktionale angewandt. Dies erfordert allerdings noch einige Vorbereitungen.

Eine Folge $E_n = (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \{P_{n,\vartheta} : \vartheta \in \Theta_n\})$ von Experimenten sei LAN mit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als zentrale Folge. Man betrachtet die Folge der einseitigen Testprobleme

$$H_{1,n} = \{\vartheta \in \Theta_n : \vartheta \leq 0\} \quad \text{gegen} \quad K_{1,n} = \{\vartheta \in \Theta_n : \vartheta > 0\}.$$

Die gebräuchlichen Tests sind von der Gestalt

$$\varphi_n = \begin{cases} 1 & > \\ \lambda_n & S_n = c_n \\ 0 & < \end{cases},$$

die durch die Nebenbedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{P_{n,0}}(\varphi_n) = \alpha \quad (3.10)$$

festgelegt sind.

Definition 3.18

Eine Testfolge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt asymptotisch $\{0\}$ - α -ähnlich, falls die Bedingung (3.10) erfüllt ist.

Derartige Testfolgen lassen sich mit Hilfe der Theorie von Le Cam vergleichen. Die Vorgehensweise von Le Cam führt dann zu den wichtigen Ergebnissen der asymptotischen Testtheorie. Insbesondere kann die asymptotische Gütefunktion einer asymptotisch $\{0\}$ - α -ähnlichen Testfolge berechnet werden.

Satz 3.19 (asymptotische Gütefunktion)

Sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine asymptotisch $\{0\}$ - α -ähnliche Testfolge. Außerdem gelte

$$\mathcal{L}((S_n, X_n)^t | P_{n,0}) \rightarrow N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$$

für $n \rightarrow \infty$. Für jedes $\vartheta \in \Theta$ gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{P_{n,\vartheta}}(\varphi_n) = \Phi\left(\vartheta \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} - u_{1-\alpha}\right),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet und $u_{1-\alpha} := \Phi^{-1}(1-\alpha)$ das $(1-\alpha)$ -Quantil von Φ ist.

Beweis. vgl. [29], Seite 147, Satz 15.2. oder [17], Chapter 7. ■

Für die einseitigen Testprobleme

$$\begin{aligned} H_1 &= \{P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) \leq a\} \\ \text{gegen} \quad K_1 &= \{P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) > a\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

wird eine lokale Parametrisierung des Testproblems in Abhängigkeit von einem statistischen Funktional $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht.

Ein statistisches Funktional $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ mit dem kanonischen Gradienten $\tilde{k} \in L_2^{(0)}(P_0 \otimes Q_0)$. Außerdem gelte

$$\|\tilde{k}\|_{L_2(P_0 \otimes Q_0)}^2 \neq 0.$$

Sei $t \mapsto P_t \otimes Q_t$ eine $L_2(0)$ -differenzierbare Kurve in $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ mit Tangente $g \in L_2^{(0)}(P_0 \otimes Q_0)$. Ferner gilt $g = g_1 \circ \pi_1 + g_2 \circ \pi_2$ für die Tangenten $g_1 \in L_2^{(0)}(P_0)$ und $g_2 \in L_2^{(0)}(Q_0)$, vgl. Satz 1.19. Eine lokale Parametrisierung des Testproblems (3.11) erhält man zum Beispiel durch

$$H_n^p = \{P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}\} \quad \text{gegen} \quad K_n^p = \left\{P_{\frac{t}{\sqrt{n}}}^{n_1} \otimes Q_{\frac{t}{\sqrt{n}}}^{n_2}\right\} \quad (3.12)$$

für ein $t > 0$, wobei die Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k\left(P_{\frac{t}{\sqrt{n}}} \otimes Q_{\frac{t}{\sqrt{n}}}\right) - k(P_0 \otimes Q_0)}{n^{-\frac{1}{2}}} > 0 \quad (3.13)$$

für alle $t > 0$ vorausgesetzt wird, vgl. [30] und [31]. Die Bedingung (3.13) impliziert insbesondere

$$\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 > 0$$

wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k\left(P_{\frac{t}{\sqrt{n}}} \otimes Q_{\frac{t}{\sqrt{n}}}\right) - k(P_0 \otimes Q_0)}{n^{-\frac{1}{2}}} = t \int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0.$$

Die Nullhypothese H_n^p lässt sich ebenfalls erweitern. Sei $s \mapsto P_s \otimes Q_s$ eine weitere $L_2(0)$ -differenzierbare Kurve in $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ mit Tangente $h \in L_2(P_0 \otimes Q_0)$. Außerdem gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k\left(P_{\frac{s}{\sqrt{n}}} \otimes Q_{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right) - k(P_0 \otimes Q_0)}{n^{-\frac{1}{2}}} \leq 0 \quad (3.14)$$

für alle $s > 0$. Die erweiterte Nullhypothese $H_n^{p,e}$ ergibt sich dann als

$$H_n^{p,e} = \left\{P_{\frac{s}{\sqrt{n}}}^{n_1} \otimes Q_{\frac{s}{\sqrt{n}}}^{n_2}\right\} \quad (3.15)$$

für ein $s > 0$. Sowohl für das Testproblem (3.12) als auch für das erweiterte Testproblem

$$H_n^{p,e} \quad \text{gegen} \quad K_n^p$$

eignet sich die Testfolge

$$\psi_n = \begin{cases} 1 & T_n > c \\ 0 & T_n \leq c \end{cases}, \quad (3.16)$$

wobei T_n die Teststatistik wie in (3.8) ist. Der kritische Wert

$$c := u_{1-\alpha} \left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{\frac{1}{2}}$$

wird unabhängig von n gewählt. Es ist zu beachten, dass

$$\|\tilde{k}\|_{L_2(P_0 \otimes Q_0)}^2 = \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \neq 0$$

nach Voraussetzung gilt.

Die impliziten Alternativen aus (3.12) und die impliziten Hypothesen (3.15) lassen sich noch etwas verallgemeinern, indem man die lokalen Parameter $\frac{t}{\sqrt{n}}$ durch die geeigneten Nullfolgen $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ersetzt, vgl. [30] und [31]. Die Parametrisierung ist dann durch die lokalen Werte des Funktionals gegeben. Für ein $\vartheta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei $(t_n(\vartheta))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, welche die Bedingung

$$k(P_{t_n(\vartheta)} \otimes Q_{t_n(\vartheta)}) = k(P_0 \otimes Q_0) + n^{-\frac{1}{2}}\vartheta + o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (3.17)$$

für $n \rightarrow \infty$ erfüllt. Die Folge $(P_{t_n(\vartheta)} \otimes Q_{t_n(\vartheta)})_{n \in \mathbb{N}}$ der Wahrscheinlichkeitsmaße wird für $\vartheta > 0$ als implizite Alternative und für $\vartheta < 0$ als implizite Hypothese bezeichnet. Es sei zusätzlich vorausgesetzt, dass $\int \tilde{k}g dP_0 \otimes Q_0 \neq 0$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \vartheta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(P_{t_n(\vartheta)} \otimes Q_{t_n(\vartheta)}) - k(P_0 \otimes Q_0)}{n^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(P_{t_n(\vartheta)} \otimes Q_{t_n(\vartheta)}) - k(P_0 \otimes Q_0)}{t_n(\vartheta)} \frac{t_n(\vartheta)}{n^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \left(\int \tilde{k}g dP_0 \otimes Q_0 \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{1}{2}} t_n(\vartheta) \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Die Folge

$$\tilde{t}_n(\vartheta) = n^{-\frac{1}{2}}\vartheta \left(\int \tilde{k}g dP_0 \otimes Q_0 \right)^{-1}$$

erfüllt somit die Bedingung (3.17) nach Konstruktion. Für alle $\vartheta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert also eine Nullfolge $(t_n(\vartheta))_{n \in \mathbb{N}}$, die der Bedingung (3.17) genügt. Seien $(n_1)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ und $(n_2)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ zwei Folgen mit $n_1 + n_2 = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_2}{n} = d \in (0, 1)$. Die Folge

$$E_n = \left(\Omega_1^{n_1} \times \Omega_2^{n_2}, \mathcal{A}_1^{n_1} \otimes \mathcal{A}_2^{n_2}, \left\{ P_{\tilde{t}_n(\vartheta)}^{n_1} \otimes Q_{\tilde{t}_n(\vartheta)}^{n_2} : \vartheta \in \Theta_n \right\} \right)$$

der Produktexperimente ist dann ULAN nach Anwendung 3.15.

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{t}_n(\vartheta)}{t_n(\vartheta)} = 1$ folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| P_{t_n(\vartheta)}^{n_1} \otimes Q_{t_n(\vartheta)}^{n_2} - P_{\tilde{t}_n(\vartheta)}^{n_1} \otimes Q_{\tilde{t}_n(\vartheta)}^{n_2} \right\| = 0$$

nach [29], Satz 14.17, weil die Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Experimenten ULAN ist. Man erhält somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{t_n(\vartheta)}^{n_1} \otimes Q_{t_n(\vartheta)}^{n_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{\tilde{t}_n(\vartheta)}^{n_1} \otimes Q_{\tilde{t}_n(\vartheta)}^{n_2} \quad (3.19)$$

für jede Testfolge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach Hilfssatz 1.26, falls einer der Grenzwerte existiert. Man sagt, dass alle Testfolgen unter $P_{t_n(\vartheta)}^{n_1} \otimes Q_{t_n(\vartheta)}^{n_2}$ und $P_{\tilde{t}_n(\vartheta)}^{n_1} \otimes Q_{\tilde{t}_n(\vartheta)}^{n_2}$ die gleiche asymptotische Güte besitzen. Die asymptotischen Eigenschaften der Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ werden nun mit Hilfe der Theorie von Le Cam untersucht.

Satz 3.20 (asymptotische Gütefunktion)

Seien $(n_1)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ und $(n_2)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ zwei Folgen mit $n_1 + n_2 = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_2}{n} = d \in (0, 1)$. Es gelte

$$\int \tilde{k}^2 dP_0 \otimes Q_0 \neq 0 \quad (3.20)$$

und

$$\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 \neq 0.$$

Außerdem sei $(P_{t_n} \otimes Q_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$k(P_{t_n} \otimes Q_{t_n}) = k(P_0 \otimes Q_0) + n^{-\frac{1}{2}} \vartheta + o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

für ein $\vartheta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist dann asymptotisch $\{0\}$ - α -ähnlich und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} = \Phi \left(\vartheta \left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{-\frac{1}{2}} - u_{1-\alpha} \right). \quad (3.21)$$

Insbesondere hält die Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ asymptotisch das Niveau α für $\vartheta < 0$ ein.

Beweis. Wegen (3.19) reicht es, den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2}$$

für

$$\tilde{t}_n(\vartheta) = n^{-\frac{1}{2}} \vartheta \left(\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 \right)^{-1}$$

zu berechnen. Die Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist asymptotisch $\{0\}$ - α -ähnlich wegen

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} (\{T_n > c\}) \\
&= N \left(0, \left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right) \right) ((c, +\infty)) \\
&= 1 - \Phi \left(\frac{u_{1-\alpha} \left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)}{\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0} \right) \\
&= \alpha.
\end{aligned}$$

Nach Satz 3.11 und Anwendung 3.15 erhält man, dass die Folge der Experimente

$$E_n = \left(\Omega_1^{n_1} \times \Omega_2^{n_2}, \mathcal{A}_1^{n_1} \otimes \mathcal{A}_2^{n_2}, \left\{ P_{\tilde{t}_n(\vartheta)}^{n_1} \otimes Q_{\tilde{t}_n(\vartheta)}^{n_2} : \vartheta \in \Theta_n \right\} \right)$$

ULAN ist. Eine zentrale Folge ist dann

$$X_n = \sum_{i=1}^{n_1} c_{n_1,i} g_1 \circ \pi_i + \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{c}_{n_2,j} g_2 \circ \pi_{j+n_1},$$

wobei die Koeffizienten $c_{n_1,i}$ und $\tilde{c}_{n_2,j}$ für alle $i \in \{1, \dots, n_1\}$ und $j \in \{1, \dots, n_2\}$ durch

$$c_{n_1,i} := n^{-\frac{1}{2}} \left(\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 \right)^{-1},$$

$$\tilde{c}_{n_2,j} := n^{-\frac{1}{2}} \left(\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 \right)^{-1}$$

gegeben sind. Nach Satz 3.17 ergibt sich die Konvergenz

$$\mathcal{L}((T_n, X_n)^t | P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}) \rightarrow N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

für $n \rightarrow \infty$. Als Einträge der Kovarianzmatrix erhält man

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0,$$

$$\sigma_2^2 = c_1^2 \int g_1^2 dP + c_2^2 \int g_2^2 dQ,$$

$$\sigma_{12} = a_1 \frac{1}{\sqrt{1-d}} \int \tilde{k}_1 g_1 dP_0 + a_2 \frac{1}{\sqrt{d}} \int \tilde{k}_2 g_2 dQ_0.$$

Die Werte a_1 und a_2 sind nun zu bestimmen. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned}
a_1 &= \lim_{n_1 \rightarrow \infty} n_1^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n_1} c_{n_1, i} \\
&= \lim_{n_1 \rightarrow \infty} n_1^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \left(\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 \right) \\
&= \sqrt{(1-d)} \left(\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 \right)^{-1}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
a_2 &= \lim_{n_2 \rightarrow \infty} n_2^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n_2} \tilde{c}_{n_2, i} \\
&= \lim_{n_2 \rightarrow \infty} n_2^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \left(\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 \right)^{-1} \\
&= \sqrt{d} \left(\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Für die Kovarianz σ_{12} ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\sigma_{12} &= a_1 \frac{1}{\sqrt{1-d}} \int \tilde{k}_1 g_1 dP_0 + a_2 \frac{1}{\sqrt{d}} \int \tilde{k}_2 g_2 dQ_0 \\
&= \int \tilde{k}_1 g_1 dP_0 \left(\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 \right)^{-1} + \int \tilde{k}_2 g_2 dQ_0 \left(\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 \right)^{-1} \\
&= \left(\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 \right)^{-1} \left(\int \tilde{k}_1 g_1 dP_0 + \int \tilde{k}_2 g_2 dQ_0 \right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Nach Satz 3.19 erhält man die asymptotische Güte als

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{\tilde{t}_n(\vartheta)}^{n_1} \otimes Q_{\tilde{t}_n(\vartheta)}^{n_2} \\
&= \Phi \left(\vartheta \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} - u_{1-\alpha} \right) \\
&= \Phi \left(\vartheta \left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{-\frac{1}{2}} - u_{1-\alpha} \right).
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 3.21

Die asymptotische Gütefunktion wird durch $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_2}{n}$, die Normen $\|\tilde{k}_1\|_{L_2(P_0)}$

und $\|\tilde{k}_2\|_{L_2(Q_0)}$ der Komponenten des kanonischen Gradienten $\tilde{k}$ und die lokalen Werte ϑ vollständig beschrieben. Es ist bemerkenswert, dass die asymptotische Gütefunktion von der Tangente $g \in L_2(P_0 \otimes Q_0)$ unabhängig ist. Die $L_2(0)$ -differenzierbaren Kurven sind daher als mathematische Konstruktionen anzusehen, die asymptotisch wieder eliminiert werden, vgl. [30] und [29].

Satz 3.22

Es seien $t \mapsto P_t \otimes Q_t$ eine $L_2(0)$ -differenzierbare Kurve in $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ mit Tangente $g = 0 \in L_2(P_0 \otimes Q_0)$ und $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Testfolge mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n dP_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} = \alpha.$$

Für jede Nullfolge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \sqrt{n} > 0$ gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} = \alpha.$$

Beweis. Die Kurven $t \mapsto P_t$ in $\mathcal{P}$ und $t \mapsto Q_t$ in $\mathcal{Q}$ sind nach Satz 1.19 und Bemerkung 1.20 beide $L_2(0)$ -differenzierbar mit Tangenten $0 \in L_2(P_0)$ und $0 \in L_2(Q_0)$. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \sqrt{n} > 0$ erhält man dann

$$\begin{aligned} \|P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} - P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}\| &\leq \|P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} - P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}\| \\ &\quad + \|P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} - P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}\| \\ &= \|Q_{t_n}^{n_2} - Q_0^{n_2}\| + \|P_{t_n}^{n_1} - P_0^{n_1}\| \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$ nach [46], Seite 386, Theorem 75.8. Nach Hilfssatz 1.26 gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n dP_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} = \alpha.$$

■

Satz 3.23 (asymptotisch unverfälschte Testfolge)

Es gelte $\int \tilde{k}^2 dP_0 \otimes Q_0 \neq 0$. Sei $P_0 \otimes Q_0 = \tilde{P}_0 \otimes \tilde{Q}_0 \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$. Es seien $t \mapsto P_t \otimes Q_t$ und $s \mapsto \tilde{P}_s \otimes \tilde{Q}_s$ zwei $L_2(0)$ -differenzierbare Kurven mit Tangenten $g \in L_2^{(0)}(P_0 \otimes Q_0)$ und $h \in L_2^{(0)}(\tilde{P}_0 \otimes \tilde{Q}_0)$. Es gelten außerdem die Bedingungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(P_{t_n} \otimes Q_{t_n}) - k(P_0 \otimes Q_0)}{n^{-\frac{1}{2}}} > 0 \quad (3.22)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(\tilde{P}_{s_n} \otimes \tilde{Q}_{s_n}) - k(\tilde{P}_0 \otimes \tilde{Q}_0)}{n^{-\frac{1}{2}}} \leq 0, \quad (3.23)$$

für alle Nullfolgen $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \sqrt{n} > 0$ und alle Nullfolgen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \sqrt{n} > 0$. Die Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für die Testprobleme

$$H_n^{p,e} = \left\{ \tilde{P}_{s_n}^{n_1} \otimes \tilde{Q}_{s_n}^{n_2} \right\} \quad \text{gegen} \quad K_n^p = \left\{ P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} \right\} \quad (3.24)$$

ist dann asymptotisch unverfälscht zum Niveau α .

Beweis. Man setze zuerst

$$\begin{aligned} \vartheta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(P_{t_n} \otimes Q_{t_n}) - k(P_0 \otimes Q_0)}{n^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{n^{-\frac{1}{2}}} \frac{k(P_{t_n} \otimes Q_{t_n}) - k(P_0 \otimes Q_0)}{t_n} \\ &= t \int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

wobei $t := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{n^{-\frac{1}{2}}}$ ist. Unmittelbar aus Voraussetzung (3.22) folgt dann $\vartheta > 0$ und $\int \tilde{k} g dP_0 \neq 0$. Mit Hilfe von Satz 3.20 erhält man

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} \\ &= \Phi \left(\underbrace{\vartheta \left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{-\frac{1}{2}}}_{>0} - u_{1-\alpha} \right) \\ &> \Phi(-u_{1-\alpha}) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Es gelte nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(\tilde{P}_{s_n} \otimes \tilde{Q}_{s_n}) - k(\tilde{P}_0 \otimes \tilde{Q}_0)}{n^{-\frac{1}{2}}} < 0.$$

Der Parameter $\tilde{\vartheta}$ wird durch

$$\tilde{\vartheta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(\tilde{P}_{s_n} \otimes \tilde{Q}_{s_n}) - k(\tilde{P}_0 \otimes \tilde{Q}_0)}{n^{-\frac{1}{2}}} = s \int \tilde{k} h dP_0 \otimes Q_0$$

bestimmt, wobei $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n n^{\frac{1}{2}}$ ist. Hieraus folgt $\tilde{\vartheta} < 0$ und $\int \tilde{k} h dP_0 \otimes Q_0 \neq 0$ nach Voraussetzung. Nach Satz 3.20 ergibt sich

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{s_n}^{n_1} \otimes Q_{s_n}^{n_2} \\ &= \Phi \left(\underbrace{\tilde{\vartheta} \left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{-\frac{1}{2}}}_{<0} - u_{1-\alpha} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \Phi(-u_{1-\alpha}) \\
&= \alpha.
\end{aligned}$$

Sei nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(\tilde{P}_{s_n} \otimes \tilde{Q}_{s_n}) - k(\tilde{P}_0 \otimes \tilde{Q}_0)}{n^{-\frac{1}{2}}} = 0.$$

Das impliziert $\int \tilde{k} h dP_0 \otimes Q_0 = 0$. Ohne Einschränkung sei $\int h^2 dP_0 \otimes Q_0 \neq 0$, denn sonst gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{s_n}^{n_1} \otimes Q_{s_n}^{n_2} = \alpha$$

nach Satz 3.22. Sei $m \in \mathbb{N}$, so dass $\tilde{P}_{s_n} \otimes \tilde{Q}_{s_n} \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ für alle $n > m$ gilt. Es sei wieder $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n n^{\frac{1}{2}}$. Die Folge $\left(\left\{ \tilde{P}_{s_n}^{n_1} \otimes \tilde{Q}_{s_n}^{n_2} \right\} \right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, m\}}$ ist nach Anwendung 3.15 ULAN mit der zentralen Folge

$$X_n = \sum_{i=1}^{n_1} s_n h_1 \circ \pi_i + \sum_{j=1}^{n_2} s_n h_2 \circ \pi_{j+n_1}.$$

Nach Satz 3.17 erhält man

$$\mathcal{L} \left((T_n, X_n)^t \middle| \tilde{P}_0^{n_1} \otimes \tilde{Q}_0^{n_2} \right) \rightarrow N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

für $n \rightarrow \infty$. Es gilt außerdem

$$\sigma_1^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int T_n dP_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} = \frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 > 0.$$

Für die Koeffizienten a_1 und a_2 aus Satz 3.17 ergibt sich

$$a_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n_1^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n_1} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_1^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} s_n n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(1-d)} s$$

und

$$a_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n_2^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n_2} s_n = \sqrt{d} s.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\sigma_{12} &= \frac{1}{\sqrt{1-d}} a_1 \int \tilde{k}_1 h_1 dP_0 + \frac{1}{\sqrt{d}} a_2 \int \tilde{k}_2 h_2 dQ_0 \\
&= s \int \tilde{k}_1 h_1 dP_0 + s \int \tilde{k}_2 h_2 dQ_0 \\
&= s \int \tilde{k} h dP_0 \otimes Q_0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nach Satz 3.19 erhält man nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n d\tilde{P}_{s_n}^{n_1} \otimes \tilde{Q}_{s_n}^{n_2} = \Phi \left(\underbrace{\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1}}_{=0} - u_{1-\alpha} \right) = \Phi(-u_{1-\alpha}) = \alpha.$$

■

Definition 3.24

Die Menge $\mathcal{F}_2$ enthalte alle Folgen $(P_{t_n} \otimes Q_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Die Nullfolge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \sqrt{n} > 0$.
2. Es existieren ein $\varepsilon > 0$ und eine $L_2(P_0 \otimes Q_0)$ -differenzierbare Kurve $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$, $t \mapsto P_t \otimes Q_t$, so dass $f(t_n) = P_{t_n} \otimes Q_{t_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Definition 3.25

Die Menge $\mathcal{K}_1$ aller impliziten Alternativen für das Testproblem H_1 gegen K_1 ist definiert durch

$$\mathcal{K}_1 := \left\{ (P_{t_n} \otimes Q_{t_n})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (k(P_{t_n} \otimes Q_{t_n}) - k(P_0 \otimes Q_0)) > 0 \right\}.$$

Die Menge $\mathcal{H}_1$ aller impliziten Hypothesen für das Testproblem H_1 gegen K_1 ist gegeben durch

$$\mathcal{H}_1 := \left\{ (P_{t_n} \otimes Q_{t_n})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (k(P_{t_n} \otimes Q_{t_n}) - k(P_0 \otimes Q_0)) \leq 0 \right\}.$$

Bemerkung 3.26

Die Statistik T_n setzt sich aus zwei Teilen $\frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \tilde{k}_1 \circ \pi_i$ und $\frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{i=n_1+1}^n \tilde{k}_2 \circ \pi_i$ zusammen, die jeweils nur von einer der beiden Stichproben abhängen. Es stellt sich die Frage, ob eine gewichtete Summe dieser beiden Anteile eine geeignete Teststatistik für das Testproblem $\mathcal{H}_1$ gegen $\mathcal{K}_1$ darstellt. Es wird hier jedoch gezeigt, dass die Testfolgen auf Basis der gewichteten Summe der beiden Anteile von T_n im Allgemeinen asymptotisch verfälscht sind und das Niveau α asymptotisch nicht einhalten. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ zwei Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ und $a \neq b$. Außerdem seien $\int \tilde{k}_1^2 dP_0 \neq 0$ und $\int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \neq 0$. Die Teststatistik S_n wird durch

$$S_n = a_n \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \tilde{k}_1 \circ \pi_i + b_n \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{i=n_1+1}^n \tilde{k}_2 \circ \pi_i$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert. Als gemeinsame asymptotische Verteilung von S_n und X_n erhält man

$$\mathcal{L}((S_n, X_n)^t | P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}) \rightarrow N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$$

für $n \rightarrow \infty$. Die Einträge der Kovarianzmatrix ergeben sich als

$$\sigma_1^2 = a^2 \frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + b^2 \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0,$$

$$\sigma_2^2 = c_1^2 \int g_1^2 dP + c_2^2 \int g_2^2 dQ,$$

$$\sigma_{12} = \left(a \int \tilde{k}_1 g_1 dP_0 + b \int \tilde{k}_2 g_2 dQ_0 \right) \left(\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 \right)^{-1}.$$

Die Testfolge

$$\phi_n = \begin{cases} 1 & > \\ 0 & \leq \end{cases} S_n \quad u_{1-\alpha} \sigma_1^2$$

ist asymptotisch $\{0\}$ - α -ähnlich, d.h. es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n dP_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} = \alpha.$$

Die Voraussetzungen aus Satz 3.20 seien erfüllt. Analog wie in Satz 3.20 erhält man dann die asymptotische Gütefunktion

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} \\ &= \Phi \left(\vartheta \frac{a \int \tilde{k}_1 g_1 dP_0 + b \int \tilde{k}_2 g_2 dQ_0}{\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 \left(a^2 \frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + b^2 \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{\frac{1}{2}}} - u_{1-\alpha} \right), \end{aligned}$$

wobei

$$\vartheta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(P_{t_n} \otimes Q_{t_n}) - k(P_0 \otimes Q_0)}{n^{-\frac{1}{2}}} = \int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} t_n$$

ist. Falls der Tangentenkegel $K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ reichhaltig genug ist, so existiert eine Tangente $g \in K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ mit

$$\int \tilde{k}_1 g_1 dP_0 + \int \tilde{k}_2 g_2 dQ_0 = \int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 > 0$$

und

$$a \int \tilde{k}_1 g_1 dP_0 + b \int \tilde{k}_2 g_2 dQ_0 < 0,$$

wobei $g = g_1 \circ \pi_1 + g_2 \circ \pi_2$ mit $g_1 \in L_2^{(0)}(P_0)$ und $g_2 \in L_2^{(0)}(Q_0)$ nach Satz 1.19 gilt. Es seien $t \mapsto P_t \otimes Q_t$ eine $L_2(0)$ -differenzierbare Kurve mit Tangente g und $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \sqrt{n} > 0$. Die Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Tests ist asymptotisch verfälscht zum Niveau α für die implizite Alternative $(P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2})_{n \in \mathbb{N}}$. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} \\ &= \Phi \left(\vartheta \frac{a \int \tilde{k}_1 g_1 dP_0 + b \int \tilde{k}_2 g_2 dQ_0}{\underbrace{\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 \left(a^2 \frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + b^2 \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{\frac{1}{2}}}_{<0}} - u_{1-\alpha} \right) \\ &< \Phi(-u_{1-\alpha}) \\ &= \alpha, \end{aligned}$$

wobei

$$\vartheta = \int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} t_n > 0$$

ist. Analog erhält man implizite Hypothesen, so dass die Testfolge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das Niveau α asymptotisch nicht einhält.

Als Nächstes werden asymptotische Optimalitätseigenschaften der Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus (3.16) untersucht. Die Neyman-Pearson Tests spielen dabei die Rolle der Vergleichsobjekte, weil sie die optimale Gütefunktion besitzen. Deswegen wird im nächsten Lemma die asymptotische Gütefunktion für eine Folge der Neyman-Pearson Tests berechnet.

Lemma 3.27

Es seien $(P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_1$ eine implizite Alternative und $t \mapsto P_t \otimes Q_t$ die zugehörige $L_2(P_0 \otimes Q_0)$ -differenzierbare Kurve in $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ mit Tangente $g \in L_2^{(0)}(P_0 \otimes Q_0)$. Die Tangente g besitzt dann die eindeutige Darstellung $g = g_1 \circ \pi_1 + g_2 \circ \pi_2$ mit $g_1 \in L_2^{(0)}(P_0)$ und $g_2 \in L_2^{(0)}(Q_0)$. Sei $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, 1)$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$. Es bezeichne φ_n den Neyman-Pearson Test für $P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}$ gegen $P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2}$ zum Niveau α_n . Die asymptotische Gütefunktion der Testfolge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ergibt sich dann als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} = \Phi(t\sigma - u_{1-\alpha}),$$

wobei $t = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} t_n$ und $\sigma = ((1-d) \int g_1^2 dP_0 + d \int g_2^2 dQ_0)^{\frac{1}{2}}$ sind.

Beweis. Der Parameter ϑ wird durch

$$\vartheta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(P_{t_n} \otimes Q_{t_n}) - k(P_0 \otimes Q_0)}{n^{-\frac{1}{2}}}$$

definiert. Nach Voraussetzung gilt dann $\vartheta > 0$. Wie in Satz 3.23 erhält man

$$\vartheta = t \int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0. \quad (3.26)$$

Die LAN-Eigenschaften der Produktexperimente implizieren

$$\log \left(\frac{dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2}}{dP_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}} \right) = \vartheta X_n - \frac{1}{2} \vartheta \sigma_2^2 + R_{n,\vartheta},$$

wobei

$$X_n = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{t_n}{\vartheta} g_1 \circ \pi_i + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{t_n}{\vartheta} g_2 \circ \pi_{i+n_1}$$

und $\sigma_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int X_n^2 dP_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}$ sind. Für σ_2^2 ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t_n^2}{\vartheta^2} n_1 \int g_1^2 dP_0 + \frac{t_n^2}{\vartheta^2} n_2 \int g_2^2 dQ_0 \right) \\ &= \frac{1}{\vartheta^2} \int g_1^2 dP_0 \lim_{n \rightarrow \infty} n t_n^2 \frac{n_1}{n} + \frac{1}{\vartheta^2} \int g_2^2 dQ_0 \lim_{n \rightarrow \infty} n t_n^2 \frac{n_2}{n} \\ &= \frac{1}{\vartheta^2} t^2 (1-d) \int g_1^2 dP_0 + \frac{1}{\vartheta^2} t^2 d \int g_2^2 dQ_0 \\ &= \frac{1}{\vartheta^2} t^2 \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \left(\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 \right)^{-2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Sei $S_n := \log \left(\frac{dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2}}{dP_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}} \right) + \frac{1}{2} \vartheta \sigma_2^2$ die Teststatistik des Neyman-Pearson Tests φ_n . Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} (|\vartheta X_n - S_n| > \varepsilon) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} (|R_{n,\vartheta}| > \varepsilon) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Den Test $\tilde{\varphi}_n$ erhält man aus dem Neyman-Pearson Test φ_n , indem die Teststatistik S_n durch ϑX_n ersetzt wird. Nach Satz 1.27 gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |\varphi_n - \tilde{\varphi}_n| dP_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} = 0.$$

Nach Bemerkung 3.7 ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |\varphi_n - \tilde{\varphi}_n| dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \tilde{\varphi}_n dP_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} = \alpha$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \tilde{\varphi}_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2}.$$

Somit reicht es, den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \tilde{\varphi}_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2}$ zu bestimmen. Die gemeinsame asymptotische Verteilung von ϑX_n und X_n ergibt sich unmittelbar als

$$\mathcal{L}((\vartheta X_n, X_n)^t | P_{n,0}) \rightarrow N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vartheta^2 \sigma_2^2 & \vartheta \sigma_2^2 \\ \vartheta \sigma_2^2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$$

für $n \rightarrow \infty$. Mit Satz 3.19 erhält man nun

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \tilde{\varphi}_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} &= \Phi\left(\vartheta \frac{\vartheta \sigma_2^2}{\vartheta \sigma_2} - u_{1-\alpha}\right) \\ &= \Phi(\vartheta \sigma_2 - u_{1-\alpha}) \\ &= \Phi(t\sigma - u_{1-\alpha}) \end{aligned}$$

mit Hilfe von (3.26) und (3.27). ■

Definition 3.28

Die Menge $K^+(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}) \subset K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ wird definiert durch

$$K^+(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}) := \left\{ g \in K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}) : \int g \tilde{k} dP_0 \otimes Q_0 > 0 \right\}.$$

Satz 3.29 (Maximin- α -Testfolge)

Der Kegel $K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ sei konvex. Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 3.23. Dann ist die Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus (3.16) eine asymptotische Maximin- α -Testfolge für die Folge $(P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2})_{n \in \mathbb{N}}$ der Hypothesen gegen die impliziten Alternativen $(P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_1$ mit einem fest gewählten impliziten Parameter $\vartheta > 0$, d.h. es gilt

$$\inf_{\mathcal{K}_1} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} = \max_{\phi_n} \inf_{\mathcal{K}_1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2}.$$

Das Infimum wird über alle impliziten Alternativen $(P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_1$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(P_{t_n} \otimes Q_{t_n}) - k(P_0 \otimes Q_0)}{n^{-\frac{1}{2}}} = \vartheta \quad (3.28)$$

gebildet. Das Maximum wird über alle asymptotisch $\{0\}$ - α -ähnlichen Testfolgen gebildet, vgl. Definition 3.18.

Beweis. Sei $(P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_1$ eine implizite Alternative. Dann existiert eine zugehörige $L_2(0)$ -differenzierbare Kurve $t \mapsto P_t \otimes Q_t$ in $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ mit Tangente $g \in L_2^{(0)}(P_0 \otimes Q_0)$. Die Tangente g besitzt nach Satz 1.19 die Darstellung $g = g_1 \circ \pi_1 + g_2 \circ \pi_2$ mit $g_1 \in L_2^{(0)}(P_0)$ und $g_2 \in L_2^{(0)}(Q_0)$. Wie in Satz 3.23 ergibt sich

$$\vartheta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(P_{t_n} \otimes Q_{t_n}) - k(P_0 \otimes Q_0)}{n^{-\frac{1}{2}}} = t \int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0,$$

wobei $t = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{n^{-\frac{1}{2}}}$ ist. Sei $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine asymptotisch $\{0\}$ - α -ähnliche Testfolge. Es bezeichne φ_n den Neyman-Pearson Test für $P_0^n \otimes Q_0^n$ gegen $P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2}$ zum Niveau $\max(\alpha, \int \phi_n dP_0^n \otimes Q_0^n)$. Wegen des Neyman-Pearson Lemma (vgl. [52], Seite 196, Satz 2.7) folgt dann

$$\int \phi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} \leq \int \varphi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2}.$$

Nach Lemma 3.27 ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} &= \Phi \left(t \left((1-d) \int g_1^2 dP_0 + d \int g_2^2 dQ_0 \right)^{\frac{1}{2}} - u_{1-\alpha} \right) \\ &= \Phi \left(\vartheta \frac{((1-d) \int g_1^2 dP_0 + d \int g_2^2 dQ_0)^{\frac{1}{2}}}{\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0} - u_{1-\alpha} \right). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} &\limsup_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} \\ &= \Phi \left(\vartheta \frac{((1-d) \int g_1^2 dP_0 + d \int g_2^2 dQ_0)^{\frac{1}{2}}}{\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0} - u_{1-\alpha} \right). \end{aligned}$$

Nun wird das Infimum über alle impliziten Alternativen $(P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2})_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{K}_1$, die die Bedingung (3.28) erfüllen, gebildet. Man erhält dann

$$\begin{aligned} &\inf_{\mathcal{K}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} \\ &\leq \inf_{g \in K^+(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})} \Phi \left(\vartheta \frac{((1-d) \int g_1^2 dP_0 + d \int g_2^2 dQ_0)^{\frac{1}{2}}}{\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0} - u_{1-\alpha} \right). \end{aligned}$$

Die asymptotische Güte

$$\Phi \left(\vartheta \frac{((1-d) \int g_1^2 dP_0 + d \int g_2^2 dQ_0)^{\frac{1}{2}}}{\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0} - u_{1-\alpha} \right) \quad (3.29)$$

der Folge der Neyman-Pearson Tests wird mit der asymptotischen Güte

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} \\ &= \Phi \left(\vartheta \left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{-\frac{1}{2}} - u_{1-\alpha} \right) \end{aligned}$$

der Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verglichen. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhält man zunächst

$$\begin{aligned} & \int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 \\ &= \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-d}} \tilde{k}_1 + \frac{1}{\sqrt{d}} \tilde{k}_2 \right) \left(\sqrt{(1-d)} g_1 + \sqrt{d} g_2 \right) dP_0 \otimes Q_0 \\ &\leq \left(\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-d}} \tilde{k}_1 + \frac{1}{\sqrt{d}} \tilde{k}_2 \right)^2 dP_0 \otimes Q_0 \int \left(\sqrt{(1-d)} g_1 + \sqrt{d} g_2 \right)^2 dP_0 \otimes Q_0 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left((1-d) \int g_1^2 dP_0 + d \int g_2^2 dQ_0 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} & \vartheta \left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\leq \vartheta \frac{\left((1-d) \int g_1^2 dP_0 + d \int g_2^2 dQ_0 \right)^{\frac{1}{2}}}{\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

In dieser Ungleichung erhält man das Gleichheitszeichen, falls auf beiden Seiten das Infimum über $g \in K^+(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ gebildet wird. Der Tangentenkegel $K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ ist bereits ein Vektorraum, weil er nach Voraussetzung konvex ist. Der Vektorraum $K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ liegt deshalb dicht in $T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ nach Definition 1.11. Wegen $\tilde{k} \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ existiert also eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\tilde{k} - g_n \right)^2 dP_0 \otimes Q_0 = 0.$$

Die Tangente g_n besitzt nach Satz 1.21 die Darstellung $g_n = g_{1n} \circ \pi_1 + g_{2n} \circ \pi_2$ mit $g_{1n} \in K(P_0, \mathcal{P})$ und $g_{2n} \in K(Q_0, \mathcal{Q})$. Man erhält somit

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\tilde{k} - g_n \right)^2 dP_0 \otimes Q_0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\tilde{k}_1 - g_{1n} \right)^2 dP_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\tilde{k}_2 - g_{2n} \right)^2 dQ_0. \end{aligned}$$

Die Tangente h_n ist durch

$$h_n = \frac{1}{1-d} g_{1n} \circ \pi_1 + \frac{1}{d} g_{2n} \circ \pi_2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert. Es gilt $h_n \in K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Satz 1.21. Wegen $\int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 > 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n \tilde{k} dP_0 \otimes Q_0 &= \frac{1}{1-d} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \tilde{k}_1 g_{1n} dP_0 + \frac{1}{d} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \tilde{k}_2 g_{2n} dQ_0 \\ &= \frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\int h_n \tilde{k} dP_0 \otimes Q_0 > 0$ und somit $h_n \in K^+(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Die obere Schranke

$$\inf_{g \in K^+(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})} \Phi \left(\vartheta \frac{((1-d) \int g_1^2 dP_0 + d \int g_2^2 dQ_0)^{\frac{1}{2}}}{\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0} - u_{1-\alpha} \right)$$

kann nun exakt berechnet werden. Setze $h_{1n} = \frac{1}{1-d} g_{1n}$ und $h_{2n} = \frac{1}{d} g_{2n}$. Man erhält einerseits

$$\begin{aligned} &\inf_{g \in K^+(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})} \Phi \left(\vartheta \frac{((1-d) \int g_1^2 dP_0 + d \int g_2^2 dQ_0)^{\frac{1}{2}}}{\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0} - u_{1-\alpha} \right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi \left(\vartheta \frac{((1-d) \int h_{1n}^2 dP_0 + d \int h_{2n}^2 dQ_0)^{\frac{1}{2}}}{\int \tilde{k} h_n dP_0 \otimes Q_0} - u_{1-\alpha} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi \left(\frac{\left(\frac{1}{1-d} \int g_{1n}^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int g_{2n}^2 dQ_0 \right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{1-d} \int g_{1n} \tilde{k}_1 dP_0 + \frac{1}{d} \int g_{2n} \tilde{k}_2 dQ_0} - u_{1-\alpha} \right) \\ &= \Phi \left(\vartheta \frac{\left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0} - u_{1-\alpha} \right) \\ &= \Phi \left(\vartheta \left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{-\frac{1}{2}} - u_{1-\alpha} \right), \end{aligned}$$

andererseits gilt

$$\begin{aligned} &\inf_{g \in K^+(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})} \Phi \left(\vartheta \frac{((1-d) \int g_1^2 dP_0 + d \int g_2^2 dQ_0)^{\frac{1}{2}}}{\int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0} - u_{1-\alpha} \right) \\ &\geq \Phi \left(\vartheta \left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{-\frac{1}{2}} - u_{1-\alpha} \right) \end{aligned}$$

wegen der Ungleichung (3.30). Somit ist alles bewiesen. ■

Bemerkung 3.30

Die zum Satz 3.29 analoge Aussage für die Einstichprobenprobleme findet man in [30] und [29]. Der wesentliche Unterschied zu [30] besteht darin, dass sowohl die Testfolgen als auch die impliziten Alternativen bei den Zweistichprobenproblemen von denen bei Einstichprobenproblemen abweichen.

Bemerkung 3.31 (Optimierung des Parameters d)

Der Parameter d wird meistens durch die praktischen Gegebenheiten bestimmt. Man kann sich allerdings die Frage stellen, wie dieser Parameter am günstigsten gewählt werden kann. Das führt zum Optimierungsproblem für die Funktion

$$\begin{aligned} g : (0, 1) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ s &\mapsto \Phi \left(\vartheta \left(\frac{1}{1-s} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{s} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{-\frac{1}{2}} - u_{1-\alpha} \right), \end{aligned}$$

wobei $\vartheta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist. Da Φ streng isoton ist, reicht es, das Argument

$$\begin{aligned} f : (0, 1) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ s &\mapsto \vartheta \left(\frac{1}{1-s} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{s} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{-\frac{1}{2}} - u_{1-\alpha} \end{aligned}$$

zu maximieren. Es seien $\int \tilde{k}_1^2 dP_0 \neq 0$ und $\int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \neq 0$. Man erhält zunächst

$$\frac{d}{ds} f(s) = -\frac{1}{2} \vartheta h(s) \left(\frac{1}{(1-s)^2} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 - \frac{1}{s^2} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right),$$

wobei

$$h(s) := \left(\frac{1}{1-s} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{s} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{-\frac{3}{2}}$$

ist. Nun ist die Gleichung $\frac{d}{ds} f(s) = 0$ zu lösen. Es ist leicht zu sehen, dass $h(s) > 0$ für alle $s \in (0, 1)$ gilt. Man erhält somit für alle $s \in (0, 1)$ folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} f(s) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \vartheta h(s) \left(\frac{1}{(1-s)^2} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 - \frac{1}{s^2} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{(1-s)^2} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 - \frac{1}{s^2} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{s^2}{(1-s)^2} = \frac{\int \tilde{k}_2^2 dQ_0}{\int \tilde{k}_1^2 dP_0} \\ &\Leftrightarrow \frac{s}{1-s} = \pm \sqrt{\frac{\int \tilde{k}_2^2 dQ_0}{\int \tilde{k}_1^2 dP_0}}. \end{aligned}$$

Sei

$$p := \sqrt{\frac{\int \tilde{k}_2^2 dQ_0}{\int \tilde{k}_1^2 dP_0}} = \frac{\|\tilde{k}_2\|_{L_2(Q_0)}}{\|\tilde{k}_1\|_{L_2(P_0)}}.$$

Es gilt $p > 0$ nach Voraussetzung. Die Lösung

$$\frac{s}{1-s} = -p$$

wird wegen $\frac{s}{1-s} > 0$ für $s \in (0, 1)$ verworfen. Aus $\frac{s}{1-s} = p$ folgt $s = \frac{p}{1+p}$. Daher existiert eine eindeutige Lösung $\frac{p}{1+p} \in (0, 1)$ der Gleichung $\frac{d}{ds}f(s) = 0$ in dem Intervall $(0, 1)$. Für eine Optimalitätsaussage muss noch das Vorzeichenverhalten der Ableitung $\frac{d}{ds}f(s)$ in dem Intervall $(0, 1)$ untersucht werden.

Für $s \in \left(0, \frac{p}{1+p}\right)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}f(s) &= -\frac{1}{2}\vartheta h(s) \left(\frac{1}{(1-s)^2} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 - \frac{1}{s^2} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right) \\ &= -\frac{1}{2}\vartheta h(s) \frac{1}{(1-s)^2} \frac{1}{s^2} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 \left(s^2 - (1-s)^2 \frac{\int \tilde{k}_2^2 dQ_0}{\int \tilde{k}_1^2 dP_0} \right) \\ &= -\frac{1}{2}\vartheta h(s) \frac{1}{(1-s)^2} \frac{1}{s^2} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 \left(s^2 - (1-s)^2 p^2 \right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\vartheta h(s) \frac{1}{(1-s)^2} \frac{1}{s^2} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 (s-p+sp)(s+(1-s)p) \\ &= -\frac{1}{2}\vartheta h(s) \underbrace{\frac{1}{(1-s)^2} \frac{1}{s^2} \int \tilde{k}_1^2 dP_0}_{>0} \underbrace{\left(\underbrace{s(1+p)-p}_{<p} \right)}_{<0} \underbrace{(s+(1-s)p)}_{>0}. \end{aligned}$$

Für $s \in \left(\frac{p}{1+p}, 1\right)$ erhält man analog

$$\frac{d}{ds}f(s) = -\frac{1}{2}\vartheta \underbrace{h(s) \frac{1}{(1-s)^2} \frac{1}{s^2} \int \tilde{k}_1^2 dP_0}_{>0} \underbrace{\left(\underbrace{s(1+p)-p}_{>p} \right)}_{>0} \underbrace{(s+(1-s)p)}_{>0}.$$

Das Vorzeichenverhalten der Ableitung $\dot{f}(s) := \frac{d}{ds}f(s)$ und die Bedeutung der Stelle $\frac{p}{1+p}$ werden nun in der nachfolgenden Tabelle dargestellt:

	$s \in \left(0, \frac{p}{1+p}\right)$	$s \in \left(\frac{p}{1+p}, 1\right)$	$\frac{p}{1+p}$
$\vartheta > 0$	$\dot{f}(s) > 0$	$\dot{f}(s) < 0$	globale Maximumstelle
$\vartheta < 0$	$\dot{f}(s) < 0$	$\dot{f}(s) > 0$	globale Minimumstelle

Der Wert

$$d_{\text{opt}} := \frac{p}{1+p} = \frac{\|\tilde{k}_2\|_{L_2(Q_0)}}{\|\tilde{k}_1\|_{L_2(P_0)} + \|\tilde{k}_2\|_{L_2(Q_0)}} \quad (3.31)$$

des Parameters d optimiert die asymptotische Gütefunktion (3.21) für alle $\vartheta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gleichmäßig. Es ist bemerkenswert, dass d_{opt} an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ nur von den Werten $\|\tilde{k}_1\|_{L_2(P_0)}$ und $\|\tilde{k}_2\|_{L_2(Q_0)}$ abhängt.

3.5 Asymptotische Eigenschaften der zweiseitigen Tests

Es werden zunächst die Hilfsmittel vorgestellt, die zur asymptotischen Behandlung der zweiseitigen Tests benötigt werden. Es seien $\Theta_n \subset \mathbb{R}$ eine Folge von Mengen mit $0 \in \Theta_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\Theta_n \uparrow \Theta$ für $n \rightarrow \infty$. Sei $E_n = (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \{P_{n,\vartheta} : \vartheta \in \Theta_n\})$ eine Folge von Experimenten, die LAN-Bedingung mit einer zentralen Folge X_n erfüllt. Es wird das zweiseitige Testproblem $H = \{\vartheta \in \Theta : \vartheta = 0\}$ gegen $K = \{\vartheta \in \Theta : \vartheta \neq 0\}$ betrachtet. Die gebräuchlichen Tests, die auf einer Teststatistik S_n beruhen, sind dann von der Gestalt

$$\varphi_n = \begin{cases} 1 & > \\ \lambda_n & |S_n| = c_n \\ 0 & < \end{cases} \quad (3.32)$$

mit $\lambda_n \in [0, 1]$ und $c_n \geq 0$, die durch die Nebenbedingungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{P_{n,0}}(\varphi_n) = \alpha \quad (3.33)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{P_{n,\vartheta}}(\varphi_n) \geq \alpha \quad (3.34)$$

festgelegt sind.

Satz 3.32 (asymptotische Gütefunktion)

Eine Testfolge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei von der Form (3.32) und erfülle die Bedingung (3.33). Außerdem sei

$$\mathcal{L}((S_n, X_n)^t | P_{n,0}) \rightarrow N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$$

für $n \rightarrow \infty$. Für jedes $\vartheta \in \Theta$ gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{P_{n,\vartheta}}(\varphi_n) = \Phi\left(\frac{\vartheta \sigma_{12}}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + \Phi\left(-\frac{\vartheta \sigma_{12}}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Beweis. Setze $\Lambda_n = \log \frac{dP_{n,\vartheta}}{dP_{n,0}}$. Die LAN-Bedingung impliziert

$$\Lambda_n = \vartheta X_n - \frac{1}{2} \vartheta^2 \sigma_2^2 + R_{n,\vartheta}.$$

Nach der Voraussetzung ergibt sich nun

$$\mathcal{L}((S_n, \Lambda_n)^t | P_{n,0}) \rightarrow N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \vartheta^2 \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \vartheta \sigma_{12} \\ \vartheta \sigma_{12} & \vartheta^2 \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$$

für $n \rightarrow \infty$. Man erhält somit

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} E_{P_{n,0}}(\varphi_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n P_{n,0}(|S_n| = c_n) + P_{n,0}(S_n > c_n) + P_{n,0}(S_n < -c_n)) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n}{\sigma_1}\right) + \Phi\left(-\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n}{\sigma_1}\right) \\ &= 2 - 2\Phi\left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n}{\sigma_1}\right). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \sigma_1 u_{1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (3.35)$$

Das dritte Lemma von Le Cam (vgl. [17], Seite 257) liefert

$$\mathcal{L}(S_n | P_{n,\vartheta}) \rightarrow N(\vartheta \sigma_{12}, \sigma_1^2)$$

für $n \rightarrow \infty$. Mit (3.35) erhält man die Konvergenz

$$\begin{aligned} E_{P_{n,\vartheta}}(\varphi_n) &= \lambda_n P_{n,\vartheta}(|S_n| = c_n) + P_{n,\vartheta}(S_n > c_n) + P_{n,\vartheta}(S_n < -c_n) \\ &= \lambda_n P_{n,\vartheta}(|S_n| = c_n) + P_{n,\vartheta}\left(\frac{S_n - \vartheta \sigma_{12}}{\sigma_1} < \frac{-c_n - \vartheta \sigma_{12}}{\sigma_1}\right) \\ &\quad + P_{n,\vartheta}\left(\frac{S_n - \vartheta \sigma_{12}}{\sigma_1} > \frac{c_n - \vartheta \sigma_{12}}{\sigma_1}\right) \\ &\rightarrow \Phi\left(\frac{\vartheta \sigma_{12}}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + \Phi\left(-\frac{\vartheta \sigma_{12}}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$. ■

Wir kehren nun zu dem zweiseitigen Zweistichprobenproblem

$$H_2 = \{P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) = a\}$$

gegen

$$K_2 = \{P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) \neq a\},$$

das beim Testen statistischer Funktionale häufig auftritt, zurück. Zur Lösung dieses Testproblems wird eine geeignete lokale Parametrisierung vorgestellt, die analog wie in Abschnitt 3.4 begründet werden kann. Ein statistisches Funktional $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar an einer Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in H_2$ mit dem kanonischen Gradienten $\tilde{k} \in L_2^{(0)}(P_0 \otimes Q_0)$. Außerdem gelte

$$\int \tilde{k}^2 dP_0 \otimes Q_0 \neq 0. \quad (3.36)$$

Definition 3.33

Die Menge $\mathcal{H}_2$ der impliziten Hypothesen ist definiert durch

$$\mathcal{H}_2 := \left\{ (P_{t_n} \otimes Q_{t_n})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (k(P_{t_n} \otimes Q_{t_n}) - k(P_0 \otimes Q_0)) = 0 \right\}.$$

Die Menge $\mathcal{K}_2$ der impliziten Alternativen ist gegeben durch

$$\mathcal{K}_2 := \left\{ (P_{t_n} \otimes Q_{t_n})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (k(P_{t_n} \otimes Q_{t_n}) - k(P_0 \otimes Q_0)) \neq 0 \right\}.$$

Die Testfolge

$$\psi_n = \begin{cases} 1 & > \\ |T_n| & c \\ 0 & \leq \end{cases} \quad (3.37)$$

eignet sich für das zweiseitige Testproblem H_2 gegen K_2 , wobei

$$T_n(\omega_{1,1}, \dots, \omega_{1,n_1}, \omega_{2,1}, \dots, \omega_{2,n_2}) = \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \tilde{k}_1(\omega_{1,i}) + \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{k}_2(\omega_{2,j})$$

die Teststatistik wie in (3.8) ist. Der kritische Wert

$$c := u_{1-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist unabhängig von n . Es ist zu beachten, dass

$$\left\| \tilde{k} \right\|_{L_2(P_0 \otimes Q_0)}^2 = \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \neq 0$$

vorausgesetzt wird.

Satz 3.34

Sei $(P_{t_n} \otimes Q_{t_n})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_2$. Der Parameter ϑ sei durch

$$\vartheta := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (k(P_{t_n} \otimes Q_{t_n}) - k(P_0 \otimes Q_0))$$

gegeben. Außerdem seien $(n_1)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ und $(n_2)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ zwei Folgen mit $n_1 + n_2 = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_2}{n} = d \in (0, 1)$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} = \Phi \left(\frac{\vartheta}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) + \Phi \left(-\frac{\vartheta}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right), \quad (3.38)$$

wobei

$$\sigma_1 := \left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis. Es wird zuerst gezeigt, dass die Folge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Bedingung (3.33) erfüllt. Nach Satz 3.16 ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} (\{T_n > c\}) + P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} (\{T_n < -c\})) \\ &= N(0, \sigma_1^2)((c, +\infty)) + N(0, \sigma_1^2)((-\infty, -c)) \\ &= N(0, \sigma_1^2)\left(\left(u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_1, +\infty\right)\right) \\ &\quad + N(0, \sigma_1^2)\left(\left(-\infty, -u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_1\right)\right) \\ &= 1 - \Phi\left(u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + \Phi\left(-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Für den Parameter ϑ erhält man

$$\begin{aligned} \vartheta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (k(P_{t_n} \otimes Q_{t_n}) - k(P_0 \otimes Q_0)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \sqrt{n} \frac{(k(P_{t_n} \otimes Q_{t_n}) - k(P_0 \otimes Q_0))}{t_n} \\ &= t \int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0, \end{aligned}$$

wobei $t := \lim_{n \rightarrow \infty} t_n n^{\frac{1}{2}}$ ist. Sei $(P_{t_n} \otimes Q_{t_n})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{H}_2$ mit der zugehörigen Tangente $g \in L_2(P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2})$. Angenommen, es gilt $\int g^2 dP_0 \otimes Q_0 = 0$. Nach Satz 3.22 folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} = \alpha$$

und die Behauptung (3.38) gilt wegen

$$\vartheta = t \int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 = 0.$$

Es sei nun $\int g^2 dP_0 \otimes Q_0 \neq 0$. Nach Satz 1.19 existieren $g_1 \in L_2^{(0)}(P_0)$ und $g_2 \in L_2^{(0)}(Q_0)$ mit $g = g_1 \circ \pi_1 + g_2 \circ \pi_2$. Die Folge $(P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2})_{n \in \mathbb{N}}$ der

Wahrscheinlichkeitsmaße ist LAN nach Satz 3.10 mit der zentralen Folge

$$X_n = \sum_{i=1}^{n_1} t_n g_1 \circ \pi_i + \sum_{i=n_1+1}^n t_n g_2 \circ \pi_i$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}_{P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}} \left(\sum_{i=1}^{n_1} t_n g_1 \circ \pi_i + \sum_{i=n_1+1}^n t_n g_2 \circ \pi_i \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} t_n^2 n \left(\frac{n_1}{n} \int g_1^2 dP_0 + \frac{n_2}{n} \int g_2^2 dQ_0 \right) \\ &= t^2 \left((1-d) \int g_1^2 dP_0 + d \int g_2^2 dQ_0 \right). \end{aligned}$$

Nach Satz 3.17 erhält man die Konvergenz

$$\mathcal{L}((T_n, X_n)^t | P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}) \rightarrow N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

für $n \rightarrow \infty$ mit

$$\sigma_{12} = a_1 \frac{1}{\sqrt{1-d}} \int \tilde{k}_1 g_1 dP_0 + a_2 \frac{1}{\sqrt{d}} \int \tilde{k}_2 g_2 dQ_0.$$

Für die Koeffizienten a_1 und a_2 ergibt sich

$$a_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n_1^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n_1} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n_1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} t_n = t\sqrt{1-d}$$

und

$$a_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n_2^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n_2} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n_2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} t_n = t\sqrt{d}.$$

Hieraus folgt

$$\sigma_{12} = t \int \tilde{k}_1 g_1 dP_0 + t \int \tilde{k}_2 g_2 dQ_0 = t \int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0.$$

Mit Hilfe von Satz 3.32 erhält man nun

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} &= \Phi \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) + \Phi \left(-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \\ &= \Phi \left(\frac{\vartheta}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) + \Phi \left(-\frac{\vartheta}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right). \end{aligned}$$

■

Korollar 3.35

Die Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist asymptotisch unverfälscht für $\mathcal{K}_2$ gegen $\mathcal{H}_2$.

Beweis. Wegen $\vartheta = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (k(P_{t_n} \otimes Q_{t_n}) - k(P_0 \otimes Q_0))$ reicht es zu zeigen, dass die asymptotische Gütefunktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1), \quad \vartheta \mapsto \Phi\left(\frac{\vartheta}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + \Phi\left(-\frac{\vartheta}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

ihr globales Minimum an der Stelle $\vartheta = 0$ annimmt. Man erhält zunächst

$$\frac{d}{d\vartheta} g(\vartheta) = \frac{1}{\sigma_1} f\left(\frac{\vartheta}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \frac{1}{\sigma_1} f\left(-\frac{\vartheta}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right),$$

wobei $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ die Lebesgue-Dichte der Standardnormalverteilung ist. Es gelten nun folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vartheta} g(\vartheta) &= 0 \\ \Leftrightarrow f\left(\frac{\vartheta}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - f\left(-\frac{\vartheta}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{\vartheta}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2\right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \exp\left(2u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\vartheta}{\sigma_1}\right) &= 1 \\ \Leftrightarrow 2u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\vartheta}{\sigma_1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vartheta &= 0. \end{aligned}$$

Außerdem gilt $\frac{d}{d\vartheta} g(\vartheta) < 0$ für $\vartheta < 0$ und $\frac{d}{d\vartheta} g(\vartheta) > 0$ für $\vartheta > 0$. Man erhält somit, dass $\vartheta = 0$ die globale Minimumstelle ist. Somit ist alles bewiesen. ■

Bemerkung 3.36

In dem nächsten Kapitel wird unter anderem gezeigt, dass $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unter schwachen Voraussetzungen an den Tangentenkegel $K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ eine asymptotisch optimale unverfälschte Testfolge für das Testproblem $\mathcal{K}_2$ gegen $\mathcal{H}_2$ ist.

Kapitel 4

Asymptotisch optimales Testen statistischer Funktionale

4.1 Konvergenz gegen unendlich-dimensionale Gauß-Shift Experimente

In diesem Abschnitt werden die für weitere Untersuchungen benötigten Kenntnisse über unendlich-dimensionale Gauß-Shift Experimente bereitgestellt. Ausführliche Informationen und viele Beispiele zu diesem Thema findet man in [46], [45], [25] und [24].

Definition 4.1 (Standard-Gaußprozess)

Es seien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $(\Omega, \mathcal{A}, P_0)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine lineare Abbildung $L : H \rightarrow L_2(P_0)$ heißt Standard-Gaußprozess, wenn

$$\mathcal{L}(L(h) | P_0) = N\left(0, \|h\|^2\right)$$

für alle $h \in H$ gilt.

Definition 4.2 (Gauß-Shift)

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Ein Experiment $E = (\Omega, \mathcal{A}, \{P_h : h \in H\})$ heißt Gauß-Shift auf H , wenn

$$\frac{dP_h}{dP_0} = \exp\left(L(h) - \frac{1}{2}\|h\|^2\right)$$

für alle $h \in H$ gilt, wobei $L : H \rightarrow L_2(P_0)$ ein Standard-Gaußprozess ist.

Der nachfolgende Satz zeigt die Verbindung zwischen dem Hilbertraum H und der Topologie der Familie $\{P_h : h \in H\}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen bzgl. der Hellingerdistanz. Dieser Zusammenhang überträgt sich dann ebenfalls auf die Norm der totalen Variation.

Satz 4.3

Sei $E = (\Omega, \mathcal{A}, \{P_h : h \in H\})$ ein Gauß-Shift. Die Hellingerdistanz zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsmaßen des Gauß-Shift Experimentes E ergibt sich als

$$d^2(P_{h_1}, P_{h_2}) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{8}\|h_1 - h_2\|^2\right)$$

für alle $h_1, h_2 \in H$.

Beweis. vgl. [46], Seite 346, Remarks 69.8. ■

Korollar 4.4

Sei $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n - h\| = 0$ für ein $h \in H$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} d(P_h, P_{h_n}) = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{h_n} - P_h\| = 0$.

Beweis. Mit Hilfe von Satz 4.3 ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d^2(P_h, P_{h_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{8}\|h_1 - h_2\|^2\right)\right) = 0.$$

Für alle Wahrscheinlichkeitsmaße $P, Q \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ gilt

$$d^2(P, Q) \leq \|P - Q\| \leq \sqrt{2}d(P, Q)$$

nach [52], Seite 136, Hilfssatz 1.142. Man erhält somit

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{h_n} - P_h\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2}d(P_h, P_{h_n}) = 0.$$
■

Sei nun $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ eine nichtparametrische Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Sei $P_0 \in \mathcal{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Die lokalen Eigenschaften der Familie $\mathcal{P}$ an der Stelle P_0 werden mit Hilfe des Tangentenkegels $K(P_0, \mathcal{P})$ und des Tangentialraums $T(P_0, \mathcal{P})$ beschrieben. Um die Theorie der Gauß-Shift Experimente anzuwenden fehlt jedoch die Zuordnung zwischen den Wahrscheinlichkeitsmaßen aus $\mathcal{P}$ und Tangenten aus $T(P_0, \mathcal{P})$, weil im Allgemeinen $K(P_0, \mathcal{P}) \neq T(P_0, \mathcal{P})$ gilt. Deswegen wird eine semiparametrische Familie $\tilde{\mathcal{P}}(P_0)$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen konstruiert, die lokal an der Stelle P_0 den gleichen Tangentialraum $T(P_0, \mathcal{P})$ besitzt. Die Konstruktion der $L_2(0)$ -differenzierbaren Kurven entspricht dem Master-Modell aus [36].

Satz 4.5 (Konstruktion $L_2(0)$ -differenzierbarer Kurven)

Es seien $P \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und $g \in L_2^{(0)}(P)$ eine Tangente. Dann existiert eine $L_2(0)$ -differenzierbare Kurve

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A}), t \mapsto P_{tg}$$

mit der Tangente g und $P_0 = P$. Außerdem gilt $P_{tg} \ll P_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Die Funktion $f_{tg} := \left(1 + \frac{1}{2}tg\right)^2 c(tg)^{-1}$ mit $c(tg) := \int \left(1 + \frac{1}{2}tg\right)^2 dP$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ wohldefiniert, weil

$$c(tg) = \int \left(1 + \frac{1}{2}tg\right)^2 dP = 1 + \frac{t^2}{4} \int g^2 dP \geq 1$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Man erhält außerdem

$$\left. \frac{d}{dt} c(tg) \right|_{t=0} = \left. \frac{t}{2} \int g^2 dP \right|_{t=0} = 0.$$

Durch $P_{tg} := f_{tg}P$ wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert, da die Bedingungen $f_{tg} \geq 0$ und $\int f_{tg}dP = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $g \in L_2^{(0)}(P)$ erfüllt sind. Insbesondere erhält man $P_0 = f_0P = P$.

Es ist zu zeigen, dass die Kurve $t \mapsto P_t$ $L_2(P_0)$ -differenzierbar mit der Tangente g ist. Die Bedingung (1.3) ist wegen $P_{tg} \ll P_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Es bleibt also die Bedingung (1.2) nachzuweisen. Wegen $g \in L_2(P_0)$ gilt $P(\{g = \infty\}) = 0$. Für alle $\omega \in \Omega \setminus \{g = \infty\}$ erhält man zunächst

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{t} \left(\left| 1 + \frac{1}{2}tg(\omega) \right| - 1 \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{t} \left(1 + \frac{1}{2}tg(\omega) - 1 \right) = g(\omega).$$

Hieraus folgt die Konvergenz $\frac{2}{t} (|1 + \frac{1}{2}tg| - 1) \rightarrow g$ P -f.s. für $t \rightarrow 0$. Mit der Dreiecksungleichung $||a| - |b|| \leq |a - b|$ erhält man die Majorante

$$\left| \frac{2}{t} \left(\left| 1 + \frac{1}{2}tg \right| - 1 \right) \right| \leq \frac{2}{|t|} \left| 1 + \frac{1}{2}tg - 1 \right| = |g|.$$

Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz ergibt sich nun

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{2}{t} \left(\left| 1 + \frac{1}{2}tg \right| - 1 \right) - g \right\|_{L_2(P_0)} = 0, \quad (4.1)$$

vgl. [9], Seite 259, Satz 5.3. Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{c(tg)^{-\frac{1}{2}} - 1}{t} &= \left. \frac{d}{dt} c(tg)^{-\frac{1}{2}} \right|_{t=0} \\ &= -\frac{1}{2} c(tg)^{-\frac{3}{2}} \left. \frac{d}{dt} c(tg) \right|_{t=0} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Mit (4.1) und (4.2) erhält man insgesamt

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{2}{t} \left(\left(\frac{dP_{tg}}{dP_0} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) - g \right\|_{L_2(P_0)} \\ &= \left\| \frac{2}{t} \left(\left| 1 + \frac{1}{2}tg \right| c(tg)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) - g \right\|_{L_2(P_0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| c(tg)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{t} \left(\left| 1 + \frac{t}{2}g \right| - 1 \right) - g \right) + \frac{2}{t} \left(c(tg)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + g \left(c(tg)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \right\|_{L_2(P_0)} \\
&\leq c(tg)^{-\frac{1}{2}} \left\| \frac{2}{t} \left(\left| 1 + \frac{1}{2}tg \right| - 1 \right) - g \right\|_{L_2(P_0)} + \left| \frac{2}{t} \left(c(tg)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \right| \\
&\quad + \|g\|_{L_2(P_0)} \left| c(tg)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right| \\
&\rightarrow 0
\end{aligned}$$

für $t \rightarrow 0$. Somit ist alles bewiesen. ■

Definition 4.6 (semiparametrische Familie)

Die semiparametrische Familie $\tilde{\mathcal{P}}(P_0)$ wird definiert durch

$$\tilde{\mathcal{P}}(P_0) := \{P_{tg} \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A}) : g \in T(P_0, \mathcal{P}), t \in \mathbb{R}\},$$

wobei $t \mapsto P_{tg}$ eine $L_2(0)$ -differenzierbare Kurve mit Tangente g ist. Die Wahrscheinlichkeitsmaße P_{tg} sind durch den Dichtequotient

$$\frac{dP_{tg}}{dP_0} = \left(1 + \frac{1}{2}tg \right)^2 c(tg)^{-1}$$

mit $c(tg) = \int \left(1 + \frac{1}{2}tg \right)^2 dP_0$ für alle $g \in T(P_0, \mathcal{P})$ und $t \in \mathbb{R}$ gegeben, vgl. Satz 4.5.

Bemerkung 4.7

Es gilt

$$\tilde{\mathcal{P}}(P_0) = \{P_g \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A}) : g \in T(P_0, \mathcal{P})\},$$

weil $T(P_0, \mathcal{P})$ ein Vektorraum ist.

Im Folgenden wird die schwache Konvergenz von Experimenten kurz vorgestellt. Dies führt dann zu der Verallgemeinerung der lokalen asymptotischen Normalität, die sich als schwache Konvergenz gegen ein Gauß-Shift Experiment neu definieren lässt (vgl. [46], [25] und [24]).

Definition 4.8 (schwache Konvergenz von Experimenten)

Es seien Θ eine nichtleere Menge und $(\Theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge der Teilmengen von Θ mit $\Theta_n \uparrow \Theta$ für $n \rightarrow \infty$. Eine Folge von Experimenten $E_n = (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \{P_{n,h} : h \in \Theta_n\})$, $n \in \mathbb{N}$ konvergiert schwach gegen ein Experiment $E = (\Omega, \mathcal{A}, \{P_h : h \in \Theta\})$, wenn

$$\mathcal{L} \left(\left(\frac{dP_{n,h}}{dP_{n,s}} \right)_{h \in Z} \middle| P_{n,s} \right) \rightarrow \mathcal{L} \left(\left(\frac{dP_h}{dP_s} \right)_{h \in Z} \middle| P_s \right)$$

für alle endliche Teilmengen $Z \subset \Theta$ und für jedes $s \in \Theta$ gilt.

Definition 4.9 (LAN)

Es seien H ein Hilbertraum und $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge der Teilmengen von H mit $H_n \uparrow H$ für $n \rightarrow \infty$. Eine Folge $E_n = (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \{P_{n,h} : h \in H_n\})$, $n \in \mathbb{N}$ von Experimenten heißt lokal asymptotisch normal, falls sie schwach gegen ein Gauß-Shift Experiment auf H konvergiert.

Bemerkung 4.10

Die Definition 4.9 ist verträglich mit der eindimensionalen Version von LAN, vgl. Definition 3.4.

Satz 4.11 (Hinreichendes und notwendiges Kriterium für LAN)

Eine Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Experimenten ist genau dann lokal asymptotisch normal, wenn der stochastische Prozess

$$L_n(h) := \log \left(\frac{dP_{n,h}}{dP_{n,0}} \right) + \frac{1}{2} \|h\|^2$$

die nachfolgenden Bedingungen erfüllt:

1. Es gilt $\mathcal{L}(L_n(h) | P_{n,0}) \rightarrow N(0, \|h\|^2)$ für $n \rightarrow \infty$.
2. Für jedes $\varepsilon > 0$, für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und für alle $h_1, h_2 \in H$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,0}(|aL_n(h_1) + bL_n(h_2) - L_n(ah_1 + bh_2)| > \varepsilon) = 0.$$

Beweis. vgl. [46], Seite 409, Theorem 80.2. ■

Satz 4.12

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $g \in T(P_0, \mathcal{P})$ sei $P_{n,g} := P_{\frac{1}{\sqrt{n}}g}^n$ mit $P_{\frac{1}{\sqrt{n}}g} \in \tilde{\mathcal{P}}(P_0)$. Außerdem sei $E_n := (\Omega^n, \mathcal{A}^n, \{P_{n,g} : g \in T(P_0, \mathcal{P})\})$. Die Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Experimente ist dann lokal asymptotisch normal.

Beweis. Zum Beweis wird Satz 4.11 angewandt. Nach Satz 3.13 gilt

$$\log \left(\frac{dP_{n,h}}{dP_{n,0}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n h \circ \pi_i - \frac{1}{2} \int h^2 dP_0 + R_{n,h},$$

wobei $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,0}(|R_{n,h}| > \varepsilon) = 0$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt. Hieraus folgt

$$L_n(h) = \log \left(\frac{dP_{n,h}}{dP_{n,0}} \right) + \frac{1}{2} \int h^2 dP_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n h \circ \pi_i + R_{n,h}.$$

Man erhält die schwache Konvergenz

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(L_n(h) | P_{n,0}) &= \mathcal{L} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n h \circ \pi_i + R_{n,h} \middle| P_{n,0} \right) \\ &\rightarrow N \left(0, \int h^2 dP_0 \right) \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$ nach dem Zentralen Grenzwertsatz und nach dem Lemma von Slutsky (vgl. [54], Seite 76). Die Bedingung 1 aus Satz 4.11 ist somit erfüllt. Es bleibt die Bedingung 2 nachzuweisen. Für jedes $\varepsilon > 0$, für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und für alle $h_1, h_2 \in T(P_0, \mathcal{P})$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
& P_{n,0}(|aL_n(h_1) + bL_n(h_2) - L_n(ah_1 + bh_2)| > \varepsilon) \\
&= P_{n,0}(|aR_{n,h_1} + bR_{n,h_2} - R_{n,ah_1+bh_2}| > \varepsilon) \\
&\leq P_{n,0}\left(|aR_{n,h_1} + bR_{n,h_2}| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P_{n,0}\left(|R_{n,ah_1+bh_2}| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&\leq P_{n,0}\left(|aR_{n,h_1}| > \frac{\varepsilon}{4}\right) + P_{n,0}\left(|bR_{n,h_2}| > \frac{\varepsilon}{4}\right) + P_{n,0}\left(|R_{n,ah_1+bh_2}| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&\rightarrow 0
\end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$. Somit ist alles bewiesen. ■

Bemerkung 4.13

Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 4.12. Die Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Experimente konvergiert dann schwach gegen ein Gauß-Shift Experiment E . Das Limesexperiment $E = (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \{Q_h : h \in T(P_0, \mathcal{P})\})$ wird nur von dem Tangentialraum $T(P_0, \mathcal{P})$ bestimmt. Die spezielle Konstruktion der $L_2(P_0)$ -differenzierbaren Kurven $t \mapsto P_{th}$ in der Familie $\tilde{\mathcal{P}}(P_0)$ spielt also keine Rolle für das Limesexperiment E . Insbesondere gibt es keinen Unterschied zwischen den $L_2(P_0)$ -differenzierbaren Kurven, die in $\mathcal{P}$ liegen und deren Tangenten dann entsprechend im Tangentenkegel $K(P_0, \mathcal{P})$ enthalten sind, und den konstruierten $L_2(P_0)$ -differenzierbaren Kurven mit den Tangenten aus $T(P_0, \mathcal{P})$. Man kann die $L_2(P_0)$ -differenzierbaren Kurven in $\tilde{\mathcal{P}}(P_0)$ als Hilfskonstruktionen betrachten, die asymptotisch wieder eliminiert werden.

4.2 Hauptsatz der asymptotischen Testtheorie und obere Schranken für die asymptotischen Gütefunktionen

Der folgende Satz stellt ein mächtiges Mittel zur Herleitung der oberen Schranken für die asymptotische Gütefunktion dar, vgl. [45] und [46].

Satz 4.14 (Hauptsatz der asymptotischen Testtheorie)

Es seien Θ eine nichtleere Menge und $(\Theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge der Teilmengen von Θ mit $\Theta_n \uparrow \Theta$ für $n \rightarrow \infty$. Eine Folge von Experimenten $E_n = (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \{P_{n,h} : h \in \Theta_n\})$, $n \in \mathbb{N}$ konvergiere schwach gegen ein Limesexperiment $E = (\Omega, \mathcal{A}, \{P_h : h \in \Theta\})$. Außerdem seien $H, K \subset \Theta$ nichtleere Teilmengen mit $H \cup K = \Theta$ und $H \cap K = \emptyset$. Sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Testfolge für das Testproblem H gegen K . Zu jeder Teilfolge $(\varphi_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ existiert ein Test φ

für E , so dass gilt:

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \int \varphi_{n_j} dP_{n_j, h} \leq \int \varphi dP_h \quad \text{für alle } h \in K$$

und

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \int \varphi_{n_j} dP_{n_j, h} \geq \int \varphi dP_h \quad \text{für alle } h \in H.$$

Beweis. vgl. [45], Seite 87, Satz 11.8. oder [46], Seite 310, Theorem 62.5. ■

Korollar 4.15

Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 4.14. Es seien

$$\Phi_\alpha(E_n) := \left\{ \varphi : \Omega_n \rightarrow [0, 1], \int \varphi dP_{n, h} \leq \alpha \quad \text{für alle } h \in H \cap \Theta_n \right\}$$

die Menge der Niveau α -Tests für E_n und

$$\Phi_{\alpha, u}(E_n) := \left\{ \varphi \in \Phi_\alpha(E_n) : \int \varphi dP_{n, h} \geq \alpha \quad \text{für alle } h \in K \cap \Theta_n \right\}$$

die Menge der unverfälschten Niveau α -Tests für E_n . Sei $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, 1)$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \in (0, 1)$. Dann gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\varphi_n \in \Phi_{\alpha_n}(E_n)} \int \varphi_n dP_{n, h} \leq \sup_{\psi \in \Phi_\alpha(E)} \int \psi dP_h \quad (4.3)$$

und

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\varphi_n \in \Phi_{\alpha_n, u}(E_n)} \int \varphi_n dP_{n, h} \leq \sup_{\psi \in \Phi_{\alpha, u}(E)} \int \psi dP_h \quad (4.4)$$

für alle $h \in K$.

Beweis. Zuerst wird die Ungleichung (4.3) bewiesen. Sei $g \in K$ fest gewählt. Sei $(\phi_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge der Tests mit $\phi_{n_j} \in \Phi_{\alpha_{n_j}}(E_{n_j})$ und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int \phi_{n_j} dP_{n_j, g} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\varphi_n \in \Phi_{\alpha_n}(E_n)} \int \varphi_n dP_{n, g}.$$

Nach Satz 4.14 existiert ein Test $\phi \in \Phi_\alpha(E)$ mit $\liminf_{j \rightarrow \infty} \int \phi_{n_j} dP_{n_j, h} \leq \int \phi dP_h$ für alle $h \in K$ und $\limsup_{j \rightarrow \infty} \int \phi_{n_j} dP_{n_j, h} \geq \int \phi dP_h$ für alle $h \in H$. Hieraus folgt $\phi \in \Phi_\alpha(E)$. Man erhält somit

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\varphi_n \in \Phi_{\alpha_n}(E_n)} \int \varphi_n dP_{n, g} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int \phi_{n_j} dP_{n_j, g} \\ &= \liminf_{j \rightarrow \infty} \int \phi_{n_j} dP_{n_j, g} \\ &\leq \int \phi dP_g \\ &\leq \sup_{\psi \in \Phi_\alpha(E)} \int \psi dP_g. \end{aligned}$$

Die Ungleichung (4.4) beweist man analog. ■

Liegt ein Gauß-Shift Experiment als Limesexperiment vor, so kann man für einige wichtige Testprobleme die oberen Schranken für die asymptotische Gütefunktion exakt ausrechnen. Es seien H ein Hilbertraum mit der zugehörigen Norm $\|\cdot\| : H \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Funktion. Sei $E = (\Omega, \mathcal{A}, \{P_h : h \in H\})$ ein Gauß-Shift Experiment. Wir interessieren uns für das einseitige Testproblem

$$H_1^l = \{h \in H : f(h) \leq 0\} \quad \text{gegen} \quad K_1^l = \{h \in H : f(h) > 0\} \quad (4.5)$$

und für das zweiseitige Testproblem

$$H_2^l = \{h \in H : f(h) = 0\} \quad \text{gegen} \quad K_2^l = \{h \in H : f(h) \neq 0\}. \quad (4.6)$$

Definition 4.16

Ein Test φ zum Niveau α für das einseitige Testproblem (4.5) heißt Niveau α -ähnlich, falls $\int \varphi dP_h = \alpha$ für alle $h \in H$ mit $f(h) = 0$ gilt.

Satz 4.17

Sei φ ein Niveau α -ähnlicher Test für H_1^l gegen K_1^l . Dann gilt

$$\int \varphi dP_h \leq \Phi \left(\frac{f(h)}{\|f\|} - u_{1-\alpha} \right) \quad \text{für alle } h \in K_1^l$$

und

$$\int \varphi dP_h \geq \Phi \left(\frac{f(h)}{\|f\|} - u_{1-\alpha} \right) \quad \text{für alle } h \in H_1^l.$$

Beweis. vgl. [46], Seite 357, Lemma 71.1. ■

Satz 4.18

Sei φ ein unverfälschter Niveau α -Test für H_2^l gegen K_2^l . Für alle $h \in H$ gilt dann

$$\int \varphi dP_h \leq \Phi \left(\frac{f(h)}{\|f\|} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) + \Phi \left(-\frac{f(h)}{\|f\|} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right).$$

Beweis. vgl. [46], Seite 358, Lemma 71.5. ■

Definition 4.19

Eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Tests für das Testproblem H_1^l gegen K_1^l heißt asymptotisch Niveau α -ähnlich, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{n,h} = \alpha$$

für alle $h \in H$ mit $f(h) = 0$ gilt.

Definition 4.20

Es seien $\hat{H}$ und $\hat{K}$ zwei nichtleere Teilmengen von H mit $H = \hat{H} + \hat{K}$. Eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Tests für das Testproblem $\hat{H}$ gegen $\hat{K}$ heißt asymptotisch unverfälscht zum Niveau α , falls

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{n,h} \leq \alpha \text{ für alle } h \in \hat{H}$$

und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{n,h} \geq \alpha \text{ für alle } h \in \hat{K}.$$

Bemerkung 4.21

Jede asymptotisch unverfälschte Niveau α -Testfolge für H_1^l gegen K_1^l ist ebenfalls asymptotisch Niveau α -ähnlich (vgl. [46], Seite 429, Definition 82.5).

Satz 4.22

Sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine asymptotisch Niveau α -ähnliche Testfolge für das Testproblem H_1^l gegen K_1^l . Dann gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{n,h} \leq \Phi \left(\frac{f(h)}{\|f\|} - u_{1-\alpha} \right) \text{ für alle } h \in K_1^l$$

und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{n,h} \geq \Phi \left(\frac{f(h)}{\|f\|} - u_{1-\alpha} \right) \text{ für alle } h \in H_1^l.$$

Beweis. vgl. [46], Seite 429, Lemma 82.6. ■

Satz 4.23

Eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Tests für das Testproblem H_2^l gegen K_2^l sei asymptotisch unverfälscht zum Niveau α . Für alle $h \in H$ gilt dann

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{n,h} \leq \Phi \left(\frac{f(h)}{\|f\|} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) + \Phi \left(-\frac{f(h)}{\|f\|} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right).$$

Beweis. vgl. [46], Seite 431, Lemma 82.12. ■

4.3 Asymptotisch optimales Testen statistischer Funktionale bei Einstichprobenproblemen

Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ eine nichtparametrische Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen und $k : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ ein statistisches Funktional. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine Zahl. Die einseitigen Testprobleme

$$H_3 = \{P \in \mathcal{P} : k(P) \leq a\} \quad \text{gegen} \quad K_3 = \{P \in \mathcal{P} : k(P) > a\} \quad (4.7)$$

und die zweiseitigen Testprobleme

$$H_4 = \{P \in \mathcal{P} : k(P) = a\} \quad \text{gegen} \quad K_4 = \{P \in \mathcal{P} : k(P) \neq a\} \quad (4.8)$$

sind von großer Bedeutung, weil viele Testprobleme aus der Praxis sich auf diese Gestalt bringen lassen. Das statistische Funktional $k : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar an einer Stelle $P_0 \in H_4$ mit $k(P_0) = a$. Der kanonische Gradient $\tilde{k} \in L_2^{(0)}(P_0)$ des Funktionals k an der Stelle P_0 erfülle

$$\int \tilde{k}^2 dP_0 \neq 0. \quad (4.9)$$

Die Parametrisierung der Testprobleme (4.7) und (4.8) erfolgt dann wie in Abschnitten 3.4 und 3.5. Die ausführliche Darstellung der Parametrisierung findet man außerdem in [29], [30] und [31].

4.3.1 Asymptotisch optimale einseitige Tests

Definition 4.24

Die Menge $\mathcal{F}_1$ enthalte alle Folgen $(P_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$, die den folgenden Bedingungen genügen:

1. Die Nullfolge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \sqrt{n} > 0$.
2. Es existieren ein $\varepsilon > 0$ und eine $L_2(P_0)$ -differenzierbare Kurve $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{P}$, $t \mapsto P_t$, so dass $f(t_n) = P_{t_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Definition 4.25

Die Menge $\mathcal{K}_3$ der impliziten Alternativen für das Testproblem (4.7) ist definiert durch

$$\mathcal{K}_3 := \left\{ (P_{t_n}^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_1 : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (k(P_{t_n}) - k(P_0)) > 0 \right\}.$$

Die Menge $\mathcal{H}_3$ der impliziten Hypothesen für das Testproblem (4.7) ist gegeben durch

$$\mathcal{H}_3 := \left\{ (P_{t_n}^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_1 : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (k(P_{t_n}) - k(P_0)) \leq 0 \right\}.$$

Bemerkung 4.26

In Definition 4.25 reicht es wohl, wenn eine Folge $(P_{t_n}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}$ liegt. Die zugehörige $L_2(P_0)$ -differenzierbare Kurve $t \mapsto P_t$ braucht dann nicht in $\mathcal{P}$ zu liegen. Hier wird jedoch die bewährte elegante Formulierung mit Hilfe des Tangentenkegels $K(P_0, \mathcal{P})$ gewählt. Der Tangentenkegel $K(P_0, \mathcal{P})$ beschreibt in diesem Fall die lokalen Eigenschaften der Mengen aller impliziten Alternativen $\mathcal{K}_3$ und aller impliziten Hypothesen $\mathcal{H}_3$. Auf die Verallgemeinerung von Definition 4.25 wird deswegen verzichtet. Außerdem ist der Unterschied unwesentlich, weil die Familie $\mathcal{P}$ in der nichtparametrischen Statistik meistens nicht genau genug festgelegt ist. Die Modellbildung kann viel mehr mit Hilfe des Tangentenkegels $K(P_0, \mathcal{P})$ geschehen.

Sei $\alpha \in (0, 1)$. Für das einseitige Testproblem H_3 gegen K_3 eignet sich die asymptotisch $\{0\}$ - α -ähnliche Testfolge

$$\varphi_n = \begin{cases} 1 & > \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \tilde{k} \circ \pi_i & u_{1-\alpha} \left\| \tilde{k} \right\|_{L_2(P_0)} \\ 0 & \leq \end{cases} \quad (4.10)$$

mit $\left\| \tilde{k} \right\|_{L_2(P_0)} = \left(\int \tilde{k}^2 dP_0 \right)^{\frac{1}{2}}$. Ausführliche Informationen über diese Testfolge findet man in [30], [29] und [46].

Satz 4.27

Die Voraussetzung (4.9) sei erfüllt. Dann sind folgende Aussagen gültig:

1. Für jede Folge $(P_{t_n}^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_1$ gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{t_n}^n = \Phi \left(\frac{\vartheta}{\left\| \tilde{k} \right\|_{L_2(P_0)}} - u_{1-\alpha} \right),$$

wobei $\vartheta = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (k(P_{t_n}) - k(P_0))$ ist.

2. Die Testfolge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist asymptotisch unverfälscht zum Niveau α für $\mathcal{H}_3$ gegen $\mathcal{K}_3$.

Beweis. vgl. Satz 3.20 und Satz 3.23 oder [30], Theorem 3.1. ■

Definition 4.28

Eine Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $\mathcal{H}_3$ gegen $\mathcal{K}_3$ heißt asymptotisch Niveau α -ähnlich, falls für alle implizite Hypothesen $(P_{t_n}^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}_3$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (k(P_{t_n}) - k(P_0)) = 0$$

bereits

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{t_n}^n = \alpha$$

gilt.

Satz 4.29

Es gelte

$$K(P_0, \mathcal{P}) = T(P_0, \mathcal{P}). \quad (4.11)$$

Die Voraussetzung (4.9) sei erfüllt. Die Testfolge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist dann asymptotisch optimal in der Menge aller Testfolgen für $\mathcal{H}_3$ gegen $\mathcal{K}_3$, die asymptotisch Niveau α -ähnlich sind.

Beweis. Es seien $(P_{t_n}^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_1$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen und $t \mapsto P_t$ die zugehörige $L_2(P_0)$ -differenzierbare Kurve in $\mathcal{P}$ mit Tangente $h \in K(P_0, \mathcal{P})$. Wie in (3.18) erhält man dann

$$\vartheta = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (k(P_{t_n}) - k(P_0)) = t \int h \tilde{k} dP_0 \quad (4.12)$$

mit $t = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{\frac{1}{2}} t_n)$. Es gilt außerdem $t > 0$. Die Testfolge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist asymptotisch Niveau α -ähnlich, denn aus Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (k(P_{t_n}) - k(P_0)) = 0$$

folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{t_n}^n = \alpha$ nach Satz 4.27. Die Folge $(P_{t_n}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist ULAN nach Satz 3.14. Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-\frac{1}{2}} t}{t_n} = 1$$

folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| P_{t_n}^n - P_{n^{-\frac{1}{2}} t}^n \right\| = 0$$

nach [29], Satz 14.17. Man erhält somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{t_n}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n^{-\frac{1}{2}} t}^n \quad (4.13)$$

für jede Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach Hilfssatz 1.26, falls einer der Grenzwerte existiert.

Die Abbildung $f : T(P_0, \mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}, h \mapsto \int h \tilde{k} dP_0$ ist linear und stetig. Es gilt

$$\|f\| = \left(\int \tilde{k}^2 dP_0 \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \tilde{k} \right\|_{L_2(P_0)}.$$

Aus (4.12) ergeben sich folgende zwei Äquivalenzen:

$$(P_{t_n}^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_3 \Leftrightarrow \int h \tilde{k} dP_0 > 0,$$

$$(P_{t_n}^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}_3 \Leftrightarrow \int h \tilde{k} dP_0 \leq 0.$$

Sei $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine asymptotisch Niveau α -ähnliche Testfolge für $\mathcal{H}_3$ gegen $\mathcal{K}_3$. Wegen (4.13), (4.11) und Bemerkung 4.7 erhält man dann, dass ψ_n ein Test für das einseitige Testproblem

$$H_1^l = \{h \in T(P_0, \mathcal{P}) : f(h) \leq 0\} \quad \text{gegen} \quad K_1^l = \{h \in T(P_0, \mathcal{P}) : f(h) > 0\}$$

für das Experiment $E_n = (\Omega^n, \mathcal{A}^n, \{P_{n,h} : h \in T(P_0, \mathcal{P})\})$ aus Satz 4.12 ist. Beachte, dass an dieser Stelle die Voraussetzung (4.11) eine wichtige Rolle spielt. Die Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Experimente konvergiert schwach gegen ein Gauß-Shift Experiment $E = (\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \{Q_h : h \in T(P_0, \mathcal{P})\})$ nach Satz 4.12. Die Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist somit eine asymptotisch Niveau α -ähnliche Testfolge für das Testproblem H_1^l gegen K_1^l . Nach Satz 4.22 ergibt sich dann

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,h} \leq \Phi \left(\frac{\int h \tilde{k} dP_0}{\|\tilde{k}\|_{L_2(P_0)}} - u_{1-\alpha} \right) \text{ für alle } h \in K_1^l$$

und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,h} \geq \Phi \left(\frac{\int h \tilde{k} dP_0}{\|\tilde{k}\|_{L_2(P_0)}} - u_{1-\alpha} \right) \text{ für alle } h \in H_1^l.$$

Falls $(P_{t_n}^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_3$ eine implizite Alternative ist, so erhält man

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{t_n}^n &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{\frac{1}{\sqrt{n}}t}^n \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,th} \\ &\leq \Phi \left(\frac{t \int h \tilde{k} dP_0}{\|\tilde{k}\|_{L_2(P_0)}} - u_{1-\alpha} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{t_n}^n. \end{aligned}$$

Ist $(P_{t_n}^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}_3$ eine implizite Hypothese, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{t_n}^n &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{\frac{1}{\sqrt{n}}t}^n \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,th} \\ &\geq \Phi \left(\frac{t \int h \tilde{k} dP_0}{\|\tilde{k}\|_{L_2(P_0)}} - u_{1-\alpha} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{t_n}^n. \end{aligned}$$

Somit ist alles bewiesen. ■

Die Voraussetzung $K(P_0, \mathcal{P}) = T(P_0, \mathcal{P})$ von Satz 4.29 kann noch abgeschwächt werden. Der Vektorraum

$$N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P}) := \left\{ h \in T(P_0, \mathcal{P}) : \int \tilde{k} h dP_0 = 0 \right\}$$

ist das orthogonale Komplement des kanonischen Gradienten $\tilde{k}$ in dem Tangentialraum $T(P_0, \mathcal{P})$. Der Vektorraum $N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P})$ ist somit ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums $T(P_0, \mathcal{P})$.

Satz 4.30

Die Voraussetzung (4.9) sei erfüllt. Gilt $N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P}) \subset K(P_0, \mathcal{P})$, so ist $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine asymptotisch optimale Testfolge in der Menge aller asymptotisch Niveau α -ähnlichen Testfolgen für $\mathcal{H}_3$ gegen $\mathcal{K}_3$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass jede asymptotisch Niveau α -ähnliche Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $\mathcal{H}_3$ gegen $\mathcal{K}_3$ bereits eine asymptotisch Niveau α -ähnliche Testfolge für das Testproblem $H_1^l = \left\{ h \in T(P_0, \mathcal{P}) : \int h \tilde{k} dP_0 \leq 0 \right\}$ gegen $K_1^l = \left\{ h \in T(P_0, \mathcal{P}) : \int h \tilde{k} dP_0 > 0 \right\}$ ist. Die Behauptung folgt dann analog wie im Beweis von Satz 4.29. Sei $h \in N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P})$ beliebig. Wegen Voraussetzung $N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P}) \subset K(P_0, \mathcal{P})$ existiert eine $L_2(P_0)$ -differenzierbare Kurve $t \mapsto P_t$ in $\mathcal{P}$ mit der Tangente h . Man erhält nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,h} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^n = \alpha$$

für jede asymptotisch Niveau α -ähnliche Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $\mathcal{H}_3$ gegen $\mathcal{K}_3$. Somit ist alles bewiesen. ■

Die Voraussetzungen aus Satz 4.30 lassen sich weiter abschwächen. Dafür braucht man ein Ergebnis aus [50], welches in Satz 4.31 vorgestellt wird.

Satz 4.31

Es seien Θ eine beliebige nichtleere Menge und $E_n = (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \{P_{n,\vartheta} : \vartheta \in \Theta\})$ eine Folge von Experimenten, die schwach gegen ein dominiertes Limesexperiment $E = (\Omega, \mathcal{A}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$ konvergiert. Sei $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge der Tests für die Experimente $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Die Folge der Gütefunktionen

$$f_n : \Theta \rightarrow [0, 1], \vartheta \mapsto \int \phi_n dP_{n,\vartheta}$$

konvergiere punktweise gegen eine Funktion $f : \Theta \rightarrow [0, 1]$, d.h. für alle $\vartheta \in \Theta$ gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n dP_{n,\vartheta} = f(\vartheta).$$

Dann existiert ein Test ϕ für das Limesexperiment E mit der Gütefunktion f , d.h. $\int \phi dP_\vartheta = f(\vartheta)$ gilt für alle $\vartheta \in \Theta$.

Beweis. vgl. [50], Theorem 7.1. ■

Satz 4.32

Die Voraussetzung (4.9) sei erfüllt. Es existiere eine Teilmenge

$$D \subset K(P_0, \mathcal{P}) \cap N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P}),$$

die bzgl. der $L_2(P_0)$ -Norm dicht in $N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P})$ liegt. Die Testfolge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist dann asymptotisch optimal in der Menge aller asymptotisch Niveau α -ähnlichen Testfolgen für $\mathcal{H}_3$ gegen $\mathcal{K}_3$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass jede asymptotisch Niveau α -ähnliche Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $\mathcal{H}_3$ gegen $\mathcal{K}_3$ bereits eine asymptotisch Niveau α -ähnliche Testfolge für das Testproblem H_1^l gegen K_1^l ist. Es muss also gezeigt werden, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,h} = \alpha \quad (4.14)$$

für alle $h \in N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P})$ gilt. Die Bedingung (4.14) ist für alle $h \in D$ nach Voraussetzung erfüllt.

Sei $g \in N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P}) \setminus D$ beliebig aber fest gewählt. Nach Voraussetzung existiert eine konvergente Folge $(g_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset D$ mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|g - g_m\|_{L_2(P_0)} = 0.$$

Die Folge der Experimente

$$E_n = (\Omega^n, \mathcal{A}^n, \{P_{n,h} : h \in T(P_0, \mathcal{P})\}), \quad n \in \mathbb{N}$$

konvergiert nach Satz 4.12 schwach gegen ein Gauß-Shift Experiment

$$E = (\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \{P_h : h \in T(P_0, \mathcal{P})\}).$$

Für das Limesexperiment E ergibt sich dann

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_{g_m} - P_g\| = 0 \quad (4.15)$$

nach Korollar 4.4. Im Folgenden zieht man sich auf eine geeignete Folge der Telexperimente zurück. Sei $(\psi_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int \psi_{n_i} dP_{n_i,g} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,g}.$$

Sei $\Theta^g = \{g_m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{g\}$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ definiere

$$E_i^{g,\sup} = (\Omega^{n_i}, \mathcal{A}^{n_i}, \{P_{n_i,h} : h \in \Theta^g\}).$$

Die Folge $(E_i^{g,\sup})_{i \in \mathbb{N}}$ der Experimente konvergiert dann schwach gegen das Limesexperiment

$$E^{g,\sup} = (\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{A}}, \{P_h : h \in \Theta^g\}).$$

Die Familie $\{P_h : h \in \Theta^g\}$ der Wahrscheinlichkeitsmaße ist dominiert. Die Folge

$$f_i^{g,\sup} : \Theta^g \rightarrow [0, 1], h \mapsto \int \psi_{n_i} dP_{n_i,h}$$

der Gütefunktionen konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f^{g,\sup} : \Theta^g \rightarrow [0, 1]$ wegen $\lim_{i \rightarrow \infty} \int \psi_{n_i} dP_{n_i,g_m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,g_m} = \alpha$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\lim_{i \rightarrow \infty} \int \psi_{n_i} dP_{n_i,g} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,g}$.

Nach Satz 4.31 existiert ein Test $\psi^{\sup}$ für das Limesexperiment $E^{g,\sup}$ mit der Gütefunktion

$$\int \psi^{\sup} dP_h = f^{g,\sup}(h)$$

für alle $h \in \Theta^g$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ergibt sich somit

$$\int \psi^{\sup} dP_{g_m} = f^{g,\sup}(g_m) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int \psi_{n_i} dP_{n_i,g_m} = \alpha.$$

Wegen (4.15) erhält man nun

$$\int \psi^{\sup} dP_g = \lim_{m \rightarrow \infty} \int \psi^{\sup} dP_{g_m} = \alpha$$

mit Hilfe von Lemma 1.26. Hieraus folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,g} = \lim_{i \rightarrow \infty} \int \psi_{n_i} dP_{n_i,g} = f^{g,\sup}(g) = \int \psi^{\sup} dP_g = \alpha. \quad (4.16)$$

Sei nun $(\psi_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_{n_j} dP_{n_j,g} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,g}.$$

Für jedes $j \in \mathbb{N}$ definiere

$$E_j^{g,\inf} = (\Omega^{n_j}, \mathcal{A}^{n_j}, \{P_{n_j,h} : h \in \Theta^g\}).$$

Die Folge $(E_j^{g,\inf})_{j \in \mathbb{N}}$ der Experimente konvergiert schwach gegen das dominierte Limesexperiment $E^{g,\inf} = (\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{A}}, \{P_h : h \in \Theta^g\})$. Die Folge

$$f_j^{g,\inf} : \Theta^g \rightarrow [0, 1], h \mapsto \int \psi_{n_j} dP_{n_j,h}$$

der Gütefunktionen konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f^{g,\text{inf}} : \Theta^g \rightarrow [0, 1]$. Nach Satz 4.31 existiert ein Test ψ^{inf} für das Limesexperiment $E^{g,\text{inf}}$ mit der Gütefunktion $f^{g,\text{inf}}$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\int \psi^{\text{inf}} dP_{g_m} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_{n_j} dP_{n_j, g_m} = \alpha.$$

Wegen (4.15) und Lemma 1.26 ergibt sich

$$\int \psi^{\text{inf}} dP_g = \lim_{m \rightarrow \infty} \int \psi^{\text{inf}} dP_{g_m} = \alpha.$$

Man erhält somit

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,g} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_{n_j} dP_{n_j,g} = \int \psi^{\text{inf}} dP_g = \alpha. \quad (4.17)$$

Aus (4.16) und (4.17) folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,g} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,g} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,g} = \alpha.$$

Somit ist alles bewiesen. ■

Bemerkung 4.33

Ist der Tangentenkegel $K(P_0, \mathcal{P})$ ein Vektorraum, so ist die Voraussetzung der Existenz einer Menge $D \subset K(P_0, \mathcal{P}) \cap N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P})$, die bzgl. der $L_2(P_0)$ -Norm dicht in $N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P})$ liegt, bereits erfüllt. Zum Beweis vergleiche Bemerkung 4.41.

4.3.2 Asymptotisch optimale zweiseitige Tests

Zur Behandlung der zweiseitigen Testprobleme

$$H_4 = \{P \in \mathcal{P} : k(P) = a\} \quad \text{gegen} \quad K_4 = \{P \in \mathcal{P} : k(P) \neq a\} \quad (4.18)$$

wird zuerst eine geeignete Parametrisierung vorgestellt. Analog zu den einseitigen Testproblemen wird die nachfolgende Definition begründet:

Definition 4.34

Die Menge $\mathcal{K}_4$ der impliziten Alternativen für das Testproblem (4.18) ist definiert durch

$$\mathcal{K}_4 := \left\{ (P_{t_n}^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_1 : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (k(P_{t_n}) - k(P_0)) \neq 0 \right\}.$$

Die Menge $\mathcal{H}_4$ der impliziten Hypothesen für das Testproblem (4.18) ist gegeben durch

$$\mathcal{H}_4 := \left\{ (P_{t_n}^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_1 : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (k(P_{t_n}) - k(P_0)) = 0 \right\}.$$

Bemerkung 4.35

Definition 4.34 lässt sich analog wie Definition 4.25 verallgemeinern. Allerdings treten die gleichen Schwierigkeiten auf und der Vorteil der Verallgemeinerung ist aus der Sicht der nichtparametrischen Statistik gering, vgl. Bemerkung 4.26.

Für das zweiseitige Testproblem (4.18) sind die Tests

$$\varphi_n = \begin{cases} 1 & \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \tilde{k} \circ \pi_i \right| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \|\tilde{k}\|_{L_2(P_0)} \\ 0 & \leq \end{cases}$$

geeignet. Zunächst wird die asymptotische Gütefunktion der Testfolge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ berechnet. Dann werden die Optimalitätseigenschaften dieser Testfolge unter verschiedenen Voraussetzungen an den Tangentenkegel $K(P_0, \mathcal{P})$ untersucht.

Satz 4.36

Sei $t \mapsto P_t$ eine $L_2(P_0)$ -differenzierbare Kurve in $\mathcal{P}$ mit Tangente $g = 0 \in L_2(P_0)$. Außerdem sei $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Testfolge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n dP_0^n = \alpha$. Für jede Nullfolge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \sqrt{n} > 0$ gilt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n dP_{t_n}^n = \alpha$.

Beweis. Nach [46], Seite 386, Theorem 75.8 erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{t_n}^n - P_0^n\| = 0.$$

Nach Hilfssatz 1.26 gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n dP_{t_n}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n dP_0^n = \alpha.$$

■

Satz 4.37

Die Voraussetzung (4.9) sei erfüllt. Für jede Folge $(P_{t_n}^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_1$ gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{t_n}^n = \Phi \left(\vartheta \|\tilde{k}\|_{L_2(P_0)}^{-1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) + \Phi \left(-\vartheta \|\tilde{k}\|_{L_2(P_0)}^{-1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right), \quad (4.19)$$

wobei $\vartheta = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (k(P_{t_n}) - k(P_0))$ ist.

Beweis. Es wird zunächst gezeigt, dass die Bedingung (3.33) erfüllt ist. Der Zentrale Grenzwertsatz impliziert die schwache Konvergenz

$$\mathcal{L} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \tilde{k} \circ \pi_i \middle| P_0^n \right) \rightarrow N \left(0, \|\tilde{k}\|_{L_2(P_0)}^2 \right)$$

für $n \rightarrow \infty$. Man erhält somit

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_0^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_0^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \tilde{k} \circ \pi_i > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \left\| \tilde{k} \right\|_{L_2(P_0)} \right) \\
&\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} P_0^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \tilde{k} \circ \pi_i < -u_{1-\frac{\alpha}{2}} \left\| \tilde{k} \right\|_{L_2(P_0)} \right) \\
&= 1 - \Phi \left(u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) + \Phi \left(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \\
&= \alpha.
\end{aligned}$$

Es seien $(P_{t_n}^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_1$ eine beliebige aber fest gewählte Folge und $g \in L_2^{(0)}(P_0)$ die zugehörige Tangente. Angenommen, es gilt $\int g^2 dP_0 = 0$. Nach Satz 4.36 ergibt sich dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{t_n}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_0^n = \alpha.$$

Mit (4.12) erhält man außerdem

$$\vartheta = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (k(P_{t_n}) - k(P_0)) = \int \tilde{k} g dP_0 \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} t_n = 0.$$

Hieraus folgt die Gültigkeit von (4.19), falls $\int g^2 dP_0 = 0$ ist.

Sei nun $\int g^2 dP_0 \neq 0$. Die Folge $(P_{t_n}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Wahrscheinlichkeitsmaße ist dann LAN mit der zentralen Folge

$$X_n = \sum_{i=1}^n t_n g \circ \pi_i.$$

Man erhält zunächst

$$\sigma_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}_{P_0^n}(X_n) = \|g\|_{L_2(P_0)}^2 \lim_{n \rightarrow \infty} n t_n^2 = t^2 \|g\|_{L_2(P_0)}^2,$$

wobei $t := \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} t_n$ ist. Mit Hilfe des Cramér-Wold-Device und des Zentralen Grenzwertsatzes ergibt sich

$$\mathcal{L} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \tilde{k} \circ \pi_i, X_n \right) \middle| P_0^n \right) \rightarrow N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

für $n \rightarrow \infty$ mit $\sigma_1 = \left\| \tilde{k} \right\|_{L_2(P_0)}$. Mit (4.12) erhält man

$$\begin{aligned}
\sigma_{12} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cov}_{P_0^n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \tilde{k} \circ \pi_i, \sum_{i=1}^n t_n g \circ \pi_i \right) \\
&= \text{Cov}_{P_0}(\tilde{k}, g) \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} t_n \\
&= t \int \tilde{k} g dP_0 \\
&= \vartheta.
\end{aligned}$$

Nach Satz 3.19 folgt nun

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{t_n}^n &= \Phi \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) + \Phi \left(-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \\ &= \left(\vartheta \left\| \tilde{k} \right\|_{L_2(P_0)}^{-1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) + \Phi \left(-\vartheta \left\| \tilde{k} \right\|_{L_2(P_0)}^{-1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right).\end{aligned}$$

■

Korollar 4.38

Die Voraussetzung (4.9) sei erfüllt. Die Testfolge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist dann asymptotisch unverfälscht zum Niveau α für das Testproblem $\mathcal{H}_4$ gegen $\mathcal{K}_4$.

Beweis. Die Aussage folgt aus Satz 4.37 mit Hilfe von (4.12). ■

Satz 4.39

Die Voraussetzung (4.9) sei erfüllt. Es gelte $K(P_0, \mathcal{P}) = T(P_0, \mathcal{P})$. Die Testfolge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist dann asymptotisch optimal in der Menge aller Testfolgen für das Testproblem $\mathcal{H}_4$ gegen $\mathcal{K}_4$, die zum Niveau α asymptotisch unverfälscht sind.

Beweis. Betrachte die lineare Funktion $f : T(P_0, \mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}, h \mapsto \int \tilde{k} h dP_0$. Analog zum Beweis von Satz 4.29 zeigt man, dass jede asymptotisch unverfälschte Niveau α Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für das Testproblem $\mathcal{H}_4$ gegen $\mathcal{K}_4$ bereits eine asymptotisch unverfälschte Niveau α Testfolge für das Testproblem $H_2^l = \{h \in T(P_0, \mathcal{P}) : f(h) = 0\}$ gegen $K_2^l = \{h \in T(P_0, \mathcal{P}) : f(h) \neq 0\}$ ist. Nach Satz 4.23 ergibt sich

$$\begin{aligned}&\limsup_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,h} \\ &\leq \Phi \left(\frac{f(h)}{\|f\|} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) + \Phi \left(-\frac{f(h)}{\|f\|} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \\ &= \Phi \left(\int \tilde{k} h dP_0 \left\| \tilde{k} \right\|_{L_2(P_0)}^{-1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) + \Phi \left(-\int \tilde{k} h dP_0 \left\| \tilde{k} \right\|_{L_2(P_0)}^{-1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)\end{aligned}$$

für alle $h \in T(P_0, \mathcal{P})$. Es seien $(P_{t_n}^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_1$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen und $t \mapsto P_t$ die zugehörige $L_2(P_0)$ -differenzierbare Kurve in $\mathcal{P}$ mit Tangente $h \in L_2^{(0)}(P_0)$. Mit (4.13) und (4.12) erhält man nun

$$\begin{aligned}&\limsup_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{t_n}^n \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{\frac{t}{\sqrt{n}}}^n \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,th} \\ &\leq \Phi \left(t \int \tilde{k} h dP_0 \left\| \tilde{k} \right\|_{L_2(P_0)}^{-1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) + \Phi \left(-t \int \tilde{k} h dP_0 \left\| \tilde{k} \right\|_{L_2(P_0)}^{-1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi \left(\vartheta \left\| \tilde{k} \right\|_{L_2(P_0)}^{-1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) + \Phi \left(-\vartheta \left\| \tilde{k} \right\|_{L_2(P_0)}^{-1} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{t_n}^n,
\end{aligned}$$

wobei $t = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} t_n$ und $\vartheta = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (k(P_{t_n}) - k(P_0))$ sind. Somit ist alles bewiesen. $\blacksquare$

Die Voraussetzung $K(P_0, \mathcal{P}) = T(P_0, \mathcal{P})$ aus Satz 4.39 kann noch abgeschwächt werden.

Satz 4.40

Die Voraussetzung (4.9) sei erfüllt. Der Tangentenkegel $K(P_0, \mathcal{P})$ liege bzgl. der $L_2(P_0)$ -Norm dicht in $T(P_0, \mathcal{P})$. Außerdem sei vorausgesetzt, dass die Menge $K(P_0, \mathcal{P}) \cap N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P})$ bzgl. der $L_2(P_0)$ -Norm dicht in $N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P})$ liegt. Die Testfolge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist dann asymptotisch optimal in der Menge aller Testfolgen für das Testproblem $\mathcal{H}_4$ gegen $\mathcal{K}_4$, die asymptotisch unverfälscht zum Niveau α sind.

Beweis. Sei $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige asymptotisch unverfälschte Testfolge zum Niveau α für das Testproblem $\mathcal{H}_4$ gegen $\mathcal{K}_4$. Wie im Beweis von Satz 4.39 reicht es zu zeigen, dass die Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dann bereits asymptotisch unverfälscht zum Niveau α für das Testproblem H_2^l gegen K_2^l ist. Die Behauptung folgt dann analog wie in Satz 4.39.

An dieser Stelle sei daran erinnert, dass die Folge der Experimente $E_n = (\Omega^n, \mathcal{A}^n, \{P_{n,h} : h \in T(P_0, \mathcal{P})\})$ nach Satz 4.12 schwach gegen ein Gauß-Shift Experiment $E = (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \{P_h : h \in T(P_0, \mathcal{P})\})$ konvergiert. Sei $t \mapsto P_t$ eine $L_2(P_0)$ -differenzierbare Kurve in $\mathcal{P}$ mit Tangente $g \in K(P_0, \mathcal{P})$. Nach Voraussetzung gilt dann

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,g} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^n \geq \alpha \quad (4.20)$$

für alle $g \in K(P_0, \mathcal{P}) \cap K_2^l$ und

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,g} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^n \leq \alpha \quad (4.21)$$

für alle $g \in K(P_0, \mathcal{P}) \cap H_2^l$, weil die Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ asymptotisch unverfälscht zum Niveau α für das Testproblem $\mathcal{H}_4$ gegen $\mathcal{K}_4$ ist.

Sei nun $h \in K_2^l \setminus K(P_0, \mathcal{P})$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert dann eine Folge $(h_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset K(P_0, \mathcal{P})$ mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|h - h_m\|_{L_2(P_0)} = 0.$$

Wegen $\int h\tilde{k} dP_0 \neq 0$ existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\int h_m\tilde{k} dP_0 \neq 0$ für alle $m \geq m_0$ gilt. Deswegen wird es ohne Einschränkung angenommen, dass $\int h_m\tilde{k} dP_0 \neq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt. Diese Annahme ist äquivalent zu $(h_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset K(P_0, \mathcal{P}) \cap K_2^I$. Für das Gauß-Shift Experiment E ergibt sich

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_h - P_{h_m}\| = 0$$

nach Korollar 4.4. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest gewählt. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\|P_h - P_{h_k}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $(\psi_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge, so dass

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,h} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_{n_j} dP_{n_j,h} \quad (4.22)$$

gilt und der Grenzwert

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_{n_j} dP_{n_j,h_k} \quad (4.23)$$

existiert. Die Existenz einer Teilfolge mit (4.22) und (4.23) ist folgendermaßen gesichert. Wähle zunächst eine Teilfolge $(\psi_n)_{n \in N}$, $N \subset \mathbb{N}$ von $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass die Bedingung (4.22) erfüllt ist. Danach wähle eine weitere Teilfolge $(\psi_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ der Folge $(\psi_n)_{n \in N}$, so dass der Grenzwert (4.23) existiert. Die erste Bedingung (4.22) bleibt dabei erfüllt, weil alle Teilfolgen der Folge $(\psi_n)_{n \in N}$ die Bedingung (4.22) ebenfalls erfüllen.

Die Folge $E_j^{h,\varepsilon} := (\Omega^{n_j}, \mathcal{A}^{n_j}, \{P_{n_j,h}, P_{n_j,h_k}\})$ der Experimente konvergiert schwach gegen das Limesexperiment $E^{h,\varepsilon} = (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \{P_h, P_{h_k}\})$. Nach Satz 4.31 existiert dann ein Test ψ für das Experiment $E^{h,\varepsilon}$, so dass

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_{n_j} dP_{n_j,h} = \int \psi dP_h$$

und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_{n_j} dP_{n_j,h_k} = \int \psi dP_{h_k}$$

gelten. Einerseits erhält man

$$\int \psi dP_{h_k} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_{n_j} dP_{n_j,h_k} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,h_k} \geq \alpha, \quad (4.24)$$

andererseits gilt

$$\left| \int \psi dP_h - \int \psi dP_{h_k} \right| \leq 2 \|P_h - P_{h_k}\| \leq \varepsilon. \quad (4.25)$$

Die Ungleichung (4.25) wird nun genau analysiert. Es sei zuerst angenommen, dass $\int \psi dP_h \geq \int \psi dP_{h_k}$ gilt. Man erhält dann unmittelbar

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,h} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_{n_j} dP_{n_j,h} = \int \psi dP_h \geq \int \psi dP_{h_k} \geq \alpha.$$

Es gelte nun $\int \psi dP_{h_k} > \int \psi dP_h$. Aus Ungleichung (4.25) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \int \psi dP_{h_k} - \int \psi dP_h &\leq \varepsilon \\ \Leftrightarrow \int \psi dP_{h_k} &\leq \int \psi dP_h + \varepsilon. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\int \psi dP_h + \varepsilon \geq \int \psi dP_{h_k} \geq \alpha,$$

vgl. (4.24). Man erhält somit $\int \psi dP_h \geq \alpha$, weil $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann. Insgesamt ergibt sich

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,h} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_{n_j} dP_{n_j,h} = \int \psi dP_h \geq \alpha$$

für alle $h \in K_2^l$.

Sei nun $h \in H_2^l \setminus K(P_0, \mathcal{P})$ beliebig aber fest gewählt. Nach Voraussetzung existiert eine Folge $(h_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset K(P_0, \mathcal{P}) \cap N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P})$ mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|h - h_m\|_{L_2(P_0)} = 0.$$

Es gilt insbesondere $(h_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset K(P_0, \mathcal{P}) \cap H_2^l$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest gewählt. Wegen $\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_h - P_{h_m}\| = 0$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\|P_h - P_{h_k}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Sei nun $(\psi_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge, so dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n,h} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_{n_j} dP_{n_j,h}$$

gilt und der Grenzwert

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_{n_j} dP_{n_j, h_k}$$

existiert. Nach Satz 4.31 existiert ein Test ψ für das Experiment $E^{h, \varepsilon} = (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \{P_h, P_{h_k}\})$ mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_{n_j} dP_{n_j, h} = \int \psi dP_h$$

und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_{n_j} dP_{n_j, h_k} = \int \psi dP_{h_k}.$$

Es gilt außerdem

$$\int \psi dP_{h_k} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_{n_j} dP_{n_j, h_k} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n, h_k} \leq \alpha$$

wegen $h_k \in K(P_0, \mathcal{P}) \cap H_2^l$, vgl. (4.21). Analog wie in (4.25) ergibt sich $|\int \psi dP_h - \int \psi dP_{h_k}| \leq \varepsilon$. Wäre $\int \psi dP_h > \int \psi dP_{h_k}$, so würde man

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n, h} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_{n_j} dP_{n_j, h} = \int \psi dP_h \leq \int \psi dP_{h_k} \leq \alpha.$$

unmittelbar erhalten. Angenommen, es gilt $\int \psi dP_h > \int \psi dP_{h_k}$. Es ergibt sich dann

$$\int \psi dP_h \leq \varepsilon + \int \psi dP_{h_k} \leq \varepsilon + \alpha.$$

Hieraus folgt $\int \psi dP_h \leq \alpha$, weil $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann. Insgesamt erhält man

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{n, h} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_{n_j} dP_{n_j, h} = \int \psi dP_h \leq \alpha$$

für alle $h \in H_2^l$. Die Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also asymptotisch unverfälscht zum Niveau α für das Testproblem H_2^l gegen K_2^l . Somit ist alles bewiesen. ■

Bemerkung 4.41

Die Voraussetzungen aus Satz 4.40 bzgl. des Tangentenkegels $K(P_0, \mathcal{P})$ sind erfüllt, falls $K(P_0, \mathcal{P})$ ein Vektorraum ist.

Ist der Tangentenkegel $K(P_0, \mathcal{P})$ ein Vektorraum, so liegt er dicht in dem Tangentialraum $T(P_0, \mathcal{P})$ bzgl. der $L_2(P_0)$ -Norm nach Definition 1.11. Es bleibt zu zeigen, dass die Menge

$$W := K(P_0, \mathcal{P}) \cap N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P})$$

bzgl. der $L_2(P_0)$ -Norm dicht in $N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P})$ liegt. Die Menge W ist ein Vektorraum, weil die Menge $N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P})$ und der Tangentenkegel $K(P_0, \mathcal{P})$ jeweils Vektorräume sind. Sei $h \in N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P})$ beliebig aber fest gewählt. Dann existiert eine Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $K(P_0, \mathcal{P})$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h - h_n\|_{L_2(P_0)} = 0. \quad (4.26)$$

Wegen $\int h \tilde{k} dP_0 = 0$ erhält man insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n \tilde{k} dP_0 = 0. \quad (4.27)$$

Besitzt die Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine weitere Teilfolge, die in dem Vektorraum W enthalten ist, so ist die Behauptung bereits bewiesen. Es sei also angenommen, dass $h_n \notin W$ für schließlich alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ohne Einschränkung sei $h_1 \notin W$, das bedeutet $\int h_1 \tilde{k} dP_0 \neq 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$\hat{h}_n := h_n - h_1 \frac{\int h_n \tilde{k} dP_0}{\int h_1 \tilde{k} dP_0}.$$

Man erhält $\hat{h}_n \in W$ für alle $n \in \mathbb{N}$, weil $K(P_0, \mathcal{P})$ ein Vektorraum ist und

$$\int \hat{h}_n \tilde{k} dP_0 = \int h_n \tilde{k} dP_0 - \int h_1 \tilde{k} dP_0 \frac{\int h_n \tilde{k} dP_0}{\int h_1 \tilde{k} dP_0} = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für die Folge $(\hat{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erhält man mit Hilfe von (4.26) und (4.27) die Konvergenz

$$\begin{aligned} \|\hat{h}_n - h\|_{L_2(P_0)} &= \left\| h_n - h_1 \frac{\int h_n \tilde{k} dP_0}{\int h_1 \tilde{k} dP_0} - h \right\|_{L_2(P_0)} \\ &\leq \|h_n - h\|_{L_2(P_0)} + \left\| h_1 \frac{\int h_n \tilde{k} dP_0}{\int h_1 \tilde{k} dP_0} \right\|_{L_2(P_0)} \\ &= \|h_n - h\|_{L_2(P_0)} + \|h_1\|_{L_2(P_0)} \left| \frac{\int h_n \tilde{k} dP_0}{\int h_1 \tilde{k} dP_0} \right| \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$. Somit ist alles bewiesen.

Bemerkung 4.42

Der Tangentenkegel $K(P_0, \mathcal{P})$ ist genau dann ein Vektorraum, wenn er konvex ist.

4.4 Asymptotisch optimales Testen statistischer Funktionale bei Zweistichprobenproblemen

In diesem Abschnitt kehren wir zu den Zweistichprobenproblemen beim Testen statistischer Funktionale zurück, vgl. Abschnitt 3.1. Im Folgenden seien $(n_1)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(n_2)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_2}{n} = d \in (0, 1)$ und $n_1 + n_2 = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dabei bezeichnet n_i den Umfang der i -ten Stichprobe für $i = 1, 2$. Ein statistisches Funktional $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar an einer Stelle $P_0 \otimes Q_0$ mit dem kanonischen Gradienten $\tilde{k} \in L_2^{(0)}(P_0 \otimes Q_0)$. Nach Satz 2.2 existieren dann eindeutige $\tilde{k}_1 \in L_2^{(0)}(P_0)$ und $\tilde{k}_2 \in L_2^{(0)}(Q_0)$

mit $\tilde{k} = \tilde{k}_1 \circ \pi_1 + \tilde{k}_2 \circ \pi_2$. Es wird weiterhin immer vorausgesetzt, dass die Bedingung

$$\left\| \tilde{k} \right\|_{L_2(P_0 \otimes Q_0)} \neq 0 \quad (4.28)$$

erfüllt ist. Für das einseitige Testproblem wurde eine lokale Parametrisierung an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ entwickelt, die sich aus der Mengen der lokalen impliziten Alternativen $\mathcal{K}_1$ und der lokalen impliziten Hypothesen $\mathcal{H}_1$ zusammensetzt, vgl. Definition 3.25. Für das zweiseitige Testproblem findet man in Abschnitt 3.5 eine lokale Parametrisierung in $P_0 \otimes Q_0$, die entsprechend aus der lokalen impliziten Alternativen $\mathcal{K}_2$ und aus der lokalen impliziten Hypothesen $\mathcal{H}_2$ besteht.

Um die Optimalitätseigenschaften der in Abschnitten 3.4 und 3.5 vorgestellten Testfolgen nachzuweisen, benötigt man einige Vorbereitungen. Zuerst wird ein neues Skalarprodukt auf dem Tangentialraum $T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ eingeführt.

Satz 4.43

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_d : T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (g_1 \circ \pi_1 + g_2 \circ \pi_2, h_1 \circ \pi_1 + h_2 \circ \pi_2) &\mapsto (1-d) \int g_1 h_1 dP_0 + d \int g_2 h_2 dQ_0 \end{aligned}$$

ist ein Skalarprodukt zum Parameter $d \in (0, 1)$, wobei $g_1, h_1 \in T(P_0, \mathcal{P})$ und $g_2, h_2 \in T(Q_0, \mathcal{Q})$ sind.

Beweis. Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$ ist wohl definiert, weil die Darstellung $g = g_1 \circ \pi_1 + g_2 \circ \pi_2$ mit $g_1 \in T(P_0, \mathcal{P})$ und $g_2 \in T(Q_0, \mathcal{Q})$ für jedes $g \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ nach Bemerkung 1.22 eindeutig ist.

Die Symmetrie $\langle h, g \rangle_d = \langle g, h \rangle_d$ ist für alle $h, g \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ leicht zu sehen. Es seien nun $h, f \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ und $r, s \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann existieren eindeutige $h_1, f_1 \in T(P_0, \mathcal{P})$ und $h_2, f_2 \in T(Q_0, \mathcal{Q})$ mit $h = h_1 \circ \pi_1 + h_2 \circ \pi_2$ und $f = f_1 \circ \pi_1 + f_2 \circ \pi_2$. Man erhält zunächst

$$\begin{aligned} \langle rh + sf, g \rangle_d &= (1-d) \int (rh_1 + sf_1) g_1 dP_0 + d \int (rh_2 + sf_2) g_2 dQ_0 \\ &= r \left((1-d) \int h_1 g_1 dP_0 + d \int h_2 g_2 dQ_0 \right) \\ &\quad + s \left((1-d) \int f_1 g_1 dP_0 + d \int f_2 g_2 dQ_0 \right) \\ &= r \langle h, g \rangle_d + s \langle f, g \rangle_d. \end{aligned}$$

Es ist somit gezeigt, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$ eine symmetrische bilineare Abbildung ist.

Es gilt außerdem

$$\begin{aligned}
& \langle g, g \rangle_d = 0 \\
& \Leftrightarrow (1-d) \int g_1^2 dP_0 + d \int g_2^2 dQ_0 = 0 \\
& \Leftrightarrow \int g_1^2 dP_0 = 0 \quad \text{und} \quad \int g_2^2 dQ_0 = 0 \\
& \Leftrightarrow g_1 = 0 \quad P_0\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad g_2 = 0 \quad Q_0\text{-f.s.} \\
& \Leftrightarrow g = 0 \quad P_0 \otimes Q_0\text{-f.s.}
\end{aligned}$$

■

Die von dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$ erzeugte Norm wird mit

$$\|\cdot\|_d : T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad g \mapsto \sqrt{\langle g, g \rangle_d}$$

bezeichnet.

Korollar 4.44

Der Tangentialraum $T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ ist ein Hilbertraum bzgl. des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$.

Beweis. Sei $g_0 \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ beliebig. Dann existiert eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_0 - g_n\|_{L_2(P_0 \otimes Q_0)} = 0.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt die Tangente g_n die eindeutige Darstellung $g_n = g_{n1} \circ \pi_1 + g_{n2} \circ \pi_2$ mit $g_{n1} \in T(P_0, \mathcal{P})$ und $g_{n2} \in T(Q_0, \mathcal{Q})$. Man erhält somit

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_0 - g_n\|_{L_2(P_0 \otimes Q_0)}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_{01} - g_{n1}\|_{L_2(P_0)}^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_{02} - g_{n2}\|_{L_2(Q_0)}^2.$$

Hieraus folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_{01} - g_{n1}\|_{L_2(P_0)}^2 = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_{02} - g_{n2}\|_{L_2(Q_0)}^2 = 0$. Es ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_0 - g_n\|_d^2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g_0 - g_n, g_0 - g_n \rangle_d \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left((1-d) \int (g_{01} - g_{n1})^2 dP_0 + d \int (g_{02} - g_{n2})^2 dQ_0 \right) \\
&= (1-d) \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_{01} - g_{n1}\|_{L_2(P_0)}^2 + d \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_{02} - g_{n2}\|_{L_2(Q_0)}^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Der Hilbertraum $T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ bzgl. des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$ wird zur Abkürzung mit H_d bezeichnet.

Sei $g \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ beliebig aber fest gewählt. Für die Konstruktion einer $L_2(P_0 \otimes Q_0)$ -differenzierbaren Kurve in $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ mit Tangente g lässt sich das Master-Modell aus [36] verwenden, vgl. also Satz 4.5. Die Tangente g besitzt die eindeutige Darstellung $g = g_1 \circ \pi_1 + g_2 \circ \pi_2$ mit $g_1 \in T(P_0, \mathcal{P})$ und $g_2 \in T(Q_0, \mathcal{Q})$. Nach Satz 4.5 existieren dann eine $L_2(P_0)$ -differenzierbare Kurve $t \mapsto P_t$ in $\mathcal{M}_1(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ mit Tangente g_1 und eine $L_2(Q_0)$ -differenzierbare Kurve $t \mapsto Q_t$ in $\mathcal{M}_1(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ mit Tangente g_2 . Die Kurve $t \mapsto P_t \otimes Q_t$ ist $L_2(P_0 \otimes Q_0)$ -differenzierbar mit Tangente g nach Satz 1.19. Für jedes $g \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ und alle $n \in \mathbb{N}$ definiert man ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P_{n,g}$ durch

$$P_{n,g} := P_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{n_1} \otimes Q_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{n_2},$$

wobei $t \mapsto P_t \otimes Q_t$ eine $L_2(P_0 \otimes Q_0)$ -differenzierbare Kurve mit Tangente g ist. Es wird nun die Folge

$$E_{d,n} = (\Omega_1^{n_1} \times \Omega_2^{n_2}, \mathcal{A}_1^{n_1} \otimes \mathcal{A}_2^{n_2}, \{P_{n,g} : g \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})\})$$

der statistischen Experimente betrachtet, die der Modellbildung durch implizite Alternativen und Hypothesen bei Zweistichprobenproblemen entspricht. Außerdem sei

$$E_d = (\Omega, \mathcal{A}, \{P_h : h \in H_d\})$$

ein Gauß-Shift Experiment bzgl. des Hilbertraums H_d .

Satz 4.45

Die Folge $(E_{d,n})_{n \in \mathbb{N}}$ der Experimente konvergiert schwach gegen ein Gauß-Shift Experiment E_d und ist somit lokal asymptotisch normal.

Beweis. Es reicht die zwei Voraussetzungen von Satz 4.11 nachzuweisen. Sei $g \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ beliebig. Die Tangente g besitzt die eindeutige Darstellung $g = g_1 \circ \pi_1 + g_2 \circ \pi_2$. Man berechnet zunächst

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}_{P_{n,0}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{n_1} g_1 \circ \pi_i + \sum_{i=n_1+1}^n g_2 \circ \pi_i \right) \right) \\ &= (1-d) \int g_1^2 dP + d \int g_2^2 dQ \\ &= \|g\|_d^2. \end{aligned}$$

Nach Satz 3.10 und Anwendung 3.15 ergibt sich

$$\log \left(\frac{dP_{n,g}}{dP_{n,0}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{n_1} g_1 \circ \pi_i + \sum_{i=n_1+1}^n g_2 \circ \pi_i \right) - \frac{1}{2} \|g\|_d^2 + R_{n,g},$$

wobei $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,0}(|R_{n,g}| > \varepsilon) = 0$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt. Hieraus folgt

$$L_n(g) = \log \left(\frac{dP_{n,g}}{dP_{n,0}} \right) + \frac{1}{2} \|g\|_d^2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{n_1} g_1 \circ \pi_i + \sum_{i=n_1+1}^n g_2 \circ \pi_i \right) + R_{n,h}.$$

Man erhält somit die schwache Konvergenz

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(L_n(g) | P_{n,0}) &= \mathcal{L} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{n_1} g_1 \circ \pi_i + \sum_{i=n_1+1}^n g_2 \circ \pi_i \right) + R_{n,h} \middle| P_{n,0} \right) \\ &\rightarrow N(0, \|g\|_d^2) \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$ nach dem Zentralen Grenzwertsatz und nach dem Lemma von Slutsky. Die 1. Bedingung von Satz 4.11 ist somit erfüllt. Die 2. Bedingung von Satz 4.11 lässt sich genauso nachweisen wie im Beweis von Satz 4.12. ■

Es wird nun die bzgl. der $L_2(P_0 \otimes Q_0)$ -Norm stetige lineare Funktion

$$\begin{aligned} f : T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto \int g \tilde{k} dP_0 \otimes Q_0 \end{aligned}$$

betrachtet. Sei $g = g_1 \circ \pi_1 + g_2 \circ \pi_2$ mit $g_1 \in L_2^{(0)}(P_0)$ und $g_2 \in L_2^{(0)}(Q_0)$. Für die Funktion f findet man leicht die Darstellung

$$\begin{aligned} f(g) &= \int (g_1 \circ \pi_1 + g_2 \circ \pi_2) (\tilde{k}_1 \circ \pi_1 + \tilde{k}_2 \circ \pi_2) dP_0 \otimes Q_0 \\ &= \int g_1 \tilde{k}_1 dP_0 + \int g_2 \tilde{k}_2 dQ_0 \\ &= \left\langle g_1 \circ \pi_1 + g_2 \circ \pi_2, \frac{1}{1-d} \tilde{k}_1 \circ \pi_1 + \frac{1}{d} \tilde{k}_2 \circ \pi_2 \right\rangle_d \\ &= \langle g, \hat{k} \rangle_d, \end{aligned} \tag{4.29}$$

wobei $\hat{k} = \frac{1}{1-d} \tilde{k}_1 \circ \pi_1 + \frac{1}{d} \tilde{k}_2 \circ \pi_2$ ist. Die Funktion $f : T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}) \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich also als Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$ mit $\hat{k}$ darstellen. Man erhält außerdem

$$\|f\|_d^2 = \|\hat{k}\|_d^2 = \frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0.$$

Die schwache Konvergenz der Folge $(E_{d,n})_{n \in \mathbb{N}}$ der Experimente gegen das Gauß-Shift Experiment E_d und die Darstellung (4.29) der linearen Funktion f ermöglichen eine elegante Behandlung der Zweistichprobenprobleme beim Testen statistischer Funktionale. Analog wie in Abschnitt 4.3 lässt sich die asymptotische Optimalität der in Kapitel 3 entwickelten Testfolgen für die einseitigen und zweiseitigen Zweistichprobenprobleme nachweisen.

4.4.1 Asymptotisch optimale einseitige Tests

Die Testfolge

$$\psi_n = \begin{cases} 1 & > \\ T_n & u_{1-\alpha} \|\widehat{k}\|_d \\ 0 & \leq \end{cases}$$

mit

$$T_n = \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \tilde{k}_1 \circ \pi_i + \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{i=n_1+1}^n \tilde{k}_2 \circ \pi_i$$

eignet sich für das Testproblem $\mathcal{H}_1$ gegen $\mathcal{K}_1$, vgl. Abschnitt 3.4. Unter den schwachen Voraussetzungen an den Tangentenkegel $K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ lässt sich die asymptotische Optimalität der Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nachweisen.

Definition 4.46

Eine Testfolge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $\mathcal{H}_1$ gegen $\mathcal{K}_1$ heißt *asymptotisch Niveau α -ähnlich*, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} = \alpha$$

für alle impliziten Hypothesen $(P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}_1$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (k(P_{t_n} \otimes Q_{t_n}) - k(P_0 \otimes Q_0)) = 0$$

gilt.

Satz 4.47

Es gelte $K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}) = T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$. Die Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist dann *asymptotisch optimal innerhalb der Menge aller asymptotisch Niveau α -ähnlichen Testfolgen* für $\mathcal{H}_1$ gegen $\mathcal{K}_1$.

Beweis. Sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine asymptotisch Niveau α -ähnliche Testfolge für $\mathcal{H}_1$ gegen $\mathcal{K}_1$. Analog wie im Beweis von Satz 4.29 zeigt man, dass $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bereits eine asymptotisch Niveau α -ähnliche Testfolge für das Testproblem

$$H_1^l = \{h \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}) : f(h) \leq 0\}$$

gegen

$$K_1^l = \{h \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}) : f(h) > 0\}$$

ist. Nach Satz 4.22 ergibt sich

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{n,h} \leq \Phi \left(\frac{f(h)}{\|f\|_d} - u_{1-\alpha} \right)$$

für alle $h \in K_1^l$ und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{n,h} \geq \Phi \left(\frac{f(h)}{\|f\|_d} - u_{1-\alpha} \right)$$

für alle $h \in H_1^l$. Sei $(P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_1$ eine implizite Alternative mit der zugehörigen Tangente $h \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$. Außerdem sei $t = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} t_n$. Man erhält dann

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{n,th} \\
&\leq \Phi \left(\frac{f(th)}{\|f\|_d} - u_{1-\alpha} \right) \\
&= \Phi \left(\frac{t \int h \tilde{k} dP_0 \otimes Q_0}{\left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{\frac{1}{2}}} - u_{1-\alpha} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2}.
\end{aligned}$$

Für eine implizite Hypothese $(P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}_1$ mit der zugehörigen Tangente $h \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{n,th} \\
&\geq \Phi \left(\frac{f(th)}{\|f\|_d} - u_{1-\alpha} \right) \\
&= \Phi \left(\frac{t \int h \tilde{k} dP_0 \otimes Q_0}{\left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{\frac{1}{2}}} - u_{1-\alpha} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2}.
\end{aligned}$$

Somit ist alles bewiesen. ■

Satz 4.48

Es gelte $N(\tilde{k}, P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}) \subset K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$. Die Folge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Tests ist dann asymptotisch optimal in der Menge aller asymptotisch Niveau α -ähnlichen Testfolgen für $\mathcal{H}_1$ gegen $\mathcal{K}_1$.

Beweis. vgl. Beweis von Satz 4.30. ■

Satz 4.49

Liegt die Menge $N(\tilde{k}, P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}) \cap K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ dicht in dem Vektorraum $N(\tilde{k}, P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ bzgl. der $L_2(P_0 \otimes Q_0)$ -Norm, so ist die Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ asymptotisch optimal innerhalb der Menge aller asymptotisch Niveau α -ähnlichen Testfolgen für $\mathcal{H}_1$ gegen $\mathcal{K}_1$.

Beweis. vgl. Beweis von Satz 4.32. ■

Bemerkung 4.50

Ist der Tangentenkegel $K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ ein Vektorraum, so ist die Voraussetzung, dass die Menge $N(\tilde{k}, P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}) \cap K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ dicht in dem Vektorraum $N(\tilde{k}, P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ liegt, bereits erfüllt (vgl. Bemerkung 4.41). Der Tangentenkegel $K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ ist seinerseits genau dann ein Vektorraum, wenn die Tangentenkegel $K(P_0, \mathcal{P})$ und $K(Q_0, \mathcal{Q})$ beide Vektorräume sind.

Bemerkung 4.51

Im Allgemeinen liegt die Menge $N(\tilde{k}, P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}) \cap K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ bzgl. der $L_2(P_0 \otimes Q_0)$ -Norm dicht in $N(\tilde{k}, P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ genau dann, wenn die Menge $N(\tilde{k}_1, P_0, \mathcal{P}) \cap K(P_0, \mathcal{P})$ bzgl. der $L_2(P_0)$ -Norm dicht in $N(\tilde{k}_1, P_0, \mathcal{P})$ und die Menge $N(\tilde{k}_2, Q_0, \mathcal{Q}) \cap K(Q_0, \mathcal{Q})$ bzgl. der $L_2(Q_0)$ -Norm dicht in $N(\tilde{k}_2, Q_0, \mathcal{Q})$ liegen.

4.4.2 Asymptotisch optimale zweiseitige Tests

Für das zweiseitige Testproblem $\mathcal{H}_2$ gegen $\mathcal{K}_2$ eignet sich die Testfolge

$$\psi_n = \begin{cases} 1 & > \\ |T_n| & u_{1-\frac{\alpha}{2}} \|\hat{k}\|_d \\ 0 & \leq \end{cases},$$

die in Abschnitt 3.5 entwickelt wurde. Analog zum Abschnitt 4.3.2 wird nun gezeigt, dass die Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unter den schwachen Voraussetzungen an den Tangentenkegel $K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ innerhalb der Menge aller zum Niveau α asymptotisch unverfälschten Testfolgen für das Testproblem $\mathcal{H}_2$ gegen $\mathcal{K}_2$ optimal ist.

Satz 4.52

Es gelte $K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}) = T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$. Die Testfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist dann asymptotisch optimal innerhalb der Menge aller zum Niveau α asymptotisch unverfälschten Testfolgen für das Testproblem $\mathcal{H}_2$ gegen $\mathcal{K}_2$.

Beweis. Eine Testfolge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $\mathcal{H}_2$ gegen $\mathcal{K}_2$ sei asymptotisch unverfälscht zum Niveau α . Analog wie im Beweis von Satz 4.29 zeigt man, dass $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dann bereits eine zum Niveau α asymptotisch unverfälschte Testfolge für das Testproblem

$$H_2^l = \{h \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}) : f(h) = 0\}$$

gegen

$$K_2^l = \{h \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}) : f(h) \neq 0\}$$

ist. Nach Satz 4.23 erhält man zunächst

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{n,h} \leq \Phi \left(\frac{f(h)}{\|f\|_d} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) + \Phi \left(-\frac{f(h)}{\|f\|_d} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)$$

für alle $h \in K_2^l$ und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{n,h} \geq \Phi \left(\frac{f(h)}{\|f\|_d} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) + \Phi \left(-\frac{f(h)}{\|f\|_d} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)$$

für alle $h \in H_2^l$. Sei $(P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_2$ eine implizite Alternative mit der zugehörigen Tangente $h \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$. Außerdem sei $t = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} t_n$. Nach Satz 3.34 ergibt sich

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{n,th} \\ &\leq \Phi \left(\frac{f(th)}{\|f\|_d} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) + \Phi \left(-\frac{f(th)}{\|f\|_d} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2}. \end{aligned}$$

Für eine implizite Hypothese $(P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}_2$ mit der zugehörigen Tangente $h \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ erhält man

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{n,th} \\ &\geq \Phi \left(\frac{f(th)}{\|f\|_d} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) + \Phi \left(-\frac{f(th)}{\|f\|_d} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2}. \end{aligned}$$

Somit ist alles bewiesen. ■

Satz 4.53

Der Tangentenkegel $K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ liege bzgl. der $L_2(P_0 \otimes Q_0)$ -Norm dicht in dem Tangentialraum $T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$. Die Menge

$$K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}) \cap N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P})$$

liege bzgl. der $L_2(P_0 \otimes Q_0)$ -Norm dicht in $N(\tilde{k}, P_0, \mathcal{P})$. Die Testfolge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist dann asymptotisch optimal innerhalb der Menge aller zum Niveau α asymptotisch unverfälschten Testfolgen für das Testproblem $\mathcal{H}_2$ gegen $\mathcal{K}_2$.

Beweis. vgl. Beweis von Satz 4.40. ■

Bemerkung 4.54

Die Voraussetzungen von Satz 4.53 sind erfüllt, falls der Tangentenkegel $K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ ein Vektorraum ist (vgl. Bemerkung 4.41).

Bemerkung 4.55

Im Allgemeinen erfüllt der Tangentenkegel $K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ die Voraussetzungen von Satz 4.53 genau dann, wenn die Tangentenkegel $K(P_0, \mathcal{P})$ und $K(Q_0, \mathcal{Q})$ die Voraussetzungen von Satz 4.40 erfüllen.

Kapitel 5

Anwendungen und Beispiele

In diesem Kapitel werden die Anwendungen der Theorie des Testens statistischer Funktionale für die Zweistichprobenprobleme dargestellt. Es werden einige praxisrelevante Beispiele vorgestellt und ausführlich erklärt. Auf die Vorteile und die Schwierigkeiten der Anwendung im nichtparametrischen Kontext wird hingewiesen.

Seien $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}_1(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ zwei nichtparametrische Familien von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Es seien $(n_1)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ und $(n_2)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ zwei Folgen mit $n_1 + n_2 = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_2}{n} = d$ für ein $d \in (0, 1)$. Mit n_i wird der Umfang der i -ten Stichprobe für $i = 1, 2$ bezeichnet. Der gesamte Stichprobenumfang ist dann $n = n_1 + n_2$. Sei $\pi_i : \Omega_1^{n_1} \otimes \Omega_2^{n_2} \rightarrow \Omega_1 \cup \Omega_2, (\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \omega_i$ die i -te kanonische Projektion.

Außerdem wird die Bezeichnung $X_i := \pi_i$ für $i \in \{1, \dots, n_1\}$ und $Y_i := \pi_{i+n_1}$ für $i \in \{1, \dots, n_2\}$ verwendet. Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_{n_1}$ und $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ sind stochastisch unabhängig bzgl. $P^{n_1} \otimes Q^{n_2}$ auf $\Omega_1^{n_1} \otimes \Omega_2^{n_2}$. Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_{n_1}$ sind identisch verteilt gemäß P für ein $P \in \mathcal{P}$, denn es gilt $\mathcal{L}(X_i | P^{n_1} \otimes Q^{n_2}) = P$ für alle $i \in \{1, \dots, n_1\}$. Die Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ sind identisch verteilt gemäß $Q \in \mathcal{Q}$, weil $\mathcal{L}(Y_i | P^{n_1} \otimes Q^{n_2}) = Q$ für alle $j \in \{1, \dots, n_2\}$ gilt. Die erste Stichprobe wird durch die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_{n_1}$ modelliert und die Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ entsprechen der zweiten Stichprobe.

Seien $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ein statistisches Funktional und $a \in \mathbb{R}$ eine Zahl. Wir beschäftigen uns weiter mit dem einseitigen Testproblem

$$\begin{aligned} H_1 &= \{P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) \leq a\} \\ \text{gegen } K_1 &= \{P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) > a\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

und dem zweiseitigen Testproblem

$$\begin{aligned} H_2 &= \{P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) = a\} \\ \text{gegen } K_2 &= \{P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) \neq a\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Es wird stets vorausgesetzt, dass das statistische Funktional $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ an jeder Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in H_2$ differenzierbar ist und der kanonische Gradient $\tilde{k} = \tilde{k}(P_0 \otimes Q_0)$ an jeder Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in H_2$ die Voraussetzung

$$\|\tilde{k}\|_{L_2(P_0 \otimes Q_0)} \neq 0 \quad (5.3)$$

erfüllt. Nach Satz 2.2 und Bemerkung 1.22 besitzt der kanonische Gradient $\tilde{k}$ die eindeutige Darstellung $\tilde{k} = \tilde{k}_1 \circ \pi_1 + \tilde{k}_2 \circ \pi_2$ mit $\tilde{k}_1 \in T(P_0, \mathcal{P})$ und $\tilde{k}_2 \in T(Q_0, \mathcal{Q})$.

Die Testfolgen (3.16) und (3.37), die in Kapitel 3 entwickelt worden sind, lösen die Testprobleme (5.1) und (5.2) lokal für ein fest gewähltes Wahrscheinlichkeitsmaß $P_0 \otimes Q_0 \in H_2$. Die Testfolge (3.16) ist zur Erinnerung durch

$$\varphi_{1n} = \begin{cases} 1 & > \\ T_n & c_1 \\ 0 & \leq \end{cases} \quad (5.4)$$

mit dem kritischen Wert

$$c_1 = u_{1-\alpha} \left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.5)$$

gegeben, wobei

$$T_n = \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \tilde{k}_1 \circ X_i + \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} \tilde{k}_2 \circ Y_i$$

die Teststatistik (3.8) ist. Die Testfolge (3.37) ist durch

$$\varphi_{2n} = \begin{cases} 1 & > \\ |T_n| & c_2 \\ 0 & \leq \end{cases} \quad (5.6)$$

mit dem kritischen Wert

$$c_2 = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.7)$$

definiert. In Kapitel 4 wurde gezeigt, dass die Testfolgen (3.16) und (3.37) unter der schwachen Voraussetzungen an den Tangentenkegel $K(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ asymptotisch optimal an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ sind, vgl. Satz 4.49 und Satz 4.53. Wir können stets annehmen, dass die Voraussetzungen von Satz 4.49 und Satz 4.53 erfüllt sind. Aus der Sicht der nichtparametrischen Statistik ist diese Annahme berechtigt, vgl. die Bemerkungen 4.50, 4.51, 4.54 und 4.55. Die Testfolgen (3.16) und (3.37) sind dann asymptotisch optimal an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $P_0 \otimes Q_0$ wird in diesem Fall

als Fußpunkt bezeichnet und kann als unbekannter Parameter angesehen werden.

Zur Ausführung der Tests aus (3.16) und (3.37) ist es allerdings nicht erforderlich, das Wahrscheinlichkeitsmaß $P_0 \otimes Q_0$ zu kennen, sondern man braucht nur die Abbildungen $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$ zu bestimmen und die Werte $\|\tilde{k}_1\|_{L_2(P_0)}$ und $\|\tilde{k}_2\|_{L_2(Q_0)}$ zu schätzen. Die Abbildungen $\tilde{k}_1 \in T(P_0, \mathcal{P})$ und $\tilde{k}_2 \in T(Q_0, \mathcal{Q})$ hängen im Allgemeinen von dem Wahrscheinlichkeitsmaß $P_0 \otimes Q_0$ ab. Da die Tangentialräume $T(P_0, \mathcal{P})$ und $T(Q_0, \mathcal{Q})$ in der nichtparametrischen Statistik in der Regel unendlichdimensional sind, können die Abbildungen $\tilde{k}_1$ und $\tilde{k}_2$ als unbekannte unendlichdimensionale Parameter angesehen werden. Falls die Abbildungen $\tilde{k}_1$ und $\tilde{k}_2$ eine besonders günstige Gestalt besitzen, so kann die Teststatistik T_n anhand der Realisierungen von Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_{n_1}$ und $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ ausgewertet werden. In manchen Fällen findet man eine Teststatistik $\hat{T}_n$, die anhand der Realisierungen von Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_{n_1}$ und $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ berechenbar ist und die Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(T_n | P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\hat{T}_n | P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2})$$

erfüllt, d.h. die Teststatistiken T_n und $\hat{T}_n$ besitzen die gleiche asymptotische Verteilung unter $P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}$. Außerdem braucht man ausreichend gute Schätzer für die unbekannte Werte $\|\tilde{k}_1\|_{L_2(P_0)}$ und $\|\tilde{k}_2\|_{L_2(Q_0)}$. Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so kann man die Testfolgen (3.16) und (3.37) mit der Teststatistik T_n oder $\hat{T}_n$ und geschätzten Werten $\|\tilde{k}_1\|_{L_2(P_0)}$, $\|\tilde{k}_2\|_{L_2(Q_0)}$ ausführen. Dabei erhält man eine Testfolge, die asymptotisch äquivalent zu der Testfolge (3.16) bzw. (3.37) für das Testproblem (5.1) bzw. (5.2) ist.

Definition 5.1 (lokale asymptotische Äquivalenz)

Sei $P_0 \otimes Q_0 \in H_2$ beliebig aber fest gewählt. Zwei Testfolgen $(\hat{\varphi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißen lokal asymptotisch äquivalent für das Testproblem (5.1) bzw. (5.2) an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \hat{\varphi}_n dP_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2}$$

für jede Folge $(P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_2$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen gilt.

Bemerkung 5.2

Sind zwei Testfolgen $(\hat{\varphi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lokal asymptotisch äquivalent an einer Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in H_2$, so besitzen sie die gleiche asymptotische Gütefunktion entlang der impliziten Alternativen und Hypothesen an der Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in H_2$. Insbesondere ist die Testfolge $(\hat{\varphi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lokal asymptotisch optimal an der Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in H_2$ in einer Menge Ψ der Testfolgen, falls die

Testfolge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der Menge Ψ der Testfolgen lokal asymptotisch optimal an der Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in H_2$ ist.

Definition 5.3 (asymptotische Äquivalenz)

Zwei Testfolgen $(\widehat{\varphi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißen asymptotisch äquivalent für das Testproblem (5.1) bzw. (5.2), falls sie an jeder Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in H_2$ lokal asymptotisch äquivalent für das Testproblem (5.1) bzw. (5.2) sind.

Beispiel 5.4 (Summe zweier von Mises Funktionale)

Seien $k_1 : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, $P \mapsto \int f_1 dP$ und $k_2 : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, $Q \mapsto \int f_2 dQ$ zwei von Mises Funktionale. Für jedes $P_0 \in \mathcal{P}$ existiere ein $\varepsilon > 0$ und ein $K > 0$, so dass $0 < \int f_1^2 dP < K$ für alle $P \in \mathcal{P}$ mit $d(P_0, P) < \varepsilon$ gilt. Nach Lemma 2.10 und Satz 2.12 ist das statistische Funktional k_1 differenzierbar an jeder Stelle $P_0 \in \mathcal{P}$ mit der Abbildung $f_1 - E_{P_0}(f_1)$ als Gradient. Außerdem sei $f_1 - E_{P_0}(f_1) \in T(P_0, \mathcal{P})$ für alle $P_0 \in \mathcal{P}$. Die Abbildung $f_1 - E_{P_0}(f_1)$ ist dann der kanonische Gradient von k_1 an der Stelle $P_0 \in \mathcal{P}$. Das statistische Funktional k_2 erfülle die analogen Voraussetzungen, so dass k_2 an jeder Stelle $Q_0 \in \mathcal{Q}$ differenzierbar mit dem kanonischen Gradienten $f_2 - E_{Q_0}(f_2)$ ist. Nach Beispiel 2.14 ist das statistische Funktional

$$k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}, P \otimes Q \mapsto k_1(P) + k_2(Q)$$

differenzierbar mit dem kanonischen Gradienten

$$\widetilde{k} : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}, (\omega_1, \omega_2) \mapsto f_1(\omega_1) - E_{P_0}(f_1) + f_2(\omega_2) - E_{Q_0}(f_2)$$

an jeder Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in \mathcal{P}$. Man erhält insbesondere $\widetilde{k}_1 = f_1 - E_{P_0}(f_1)$ und $\widetilde{k}_2 = f_2 - E_{Q_0}(f_2)$. Sei nun $P_0 \otimes Q_0 \in H_2$, das bedeutet

$$k(P_0 \otimes Q_0) = E_{P_0}(f_1) + E_{Q_0}(f_2) = a.$$

Für die Teststatistik T_n ergibt sich dann

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \widetilde{k}_1 \circ X_i + \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} \widetilde{k}_2 \circ Y_i \\ &= \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} f_1 \circ X_i + \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} f_2 \circ Y_i - \sqrt{n}(E_{P_0}(f_1) + E_{Q_0}(f_2)) \\ &= \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} f_1 \circ X_i + \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} f_2 \circ Y_i - \sqrt{n}a. \end{aligned}$$

Es bezeichne $\bar{f}_{1,n} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} f_1 \circ X_i$ und $\bar{f}_{2,n} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} f_2 \circ Y_i$. Außerdem seien

$$\widehat{\sigma}_n(f_1)^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (f_1 \circ X_i - \bar{f}_{1,n})^2$$

und

$$\hat{\sigma}_n(f_2)^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (f_2 \circ Y_i - \bar{f}_{2,n})^2$$

die kanonischen Schätzer für $\text{Var}_{P_0}(f_1)$ und $\text{Var}_{Q_0}(f_2)$. Die Testfolge $(\hat{\varphi}_{1n})_{n \in \mathbb{N}}$ wird definiert durch

$$\hat{\varphi}_{1n} = \begin{cases} 1 & > \\ T_n & \hat{c}_{1,n} \\ 0 & \leq \end{cases} \quad (5.8)$$

mit dem kritischen Wert

$$\hat{c}_{1,n} = u_{1-\alpha} \left(\frac{n}{n_1} \hat{\sigma}_n(f_1)^2 + \frac{n}{n_2} \hat{\sigma}_n(f_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.9)$$

Die Testfolgen (5.4) und (5.8) sind asymptotisch äquivalent für das einseitige Testproblem (5.1). Zum Beweis betrachte ein beliebiges aber fest gewähltes Wahrscheinlichkeitsmaß $P_0 \otimes Q_0 \in H_2$. Die Testfolgen (5.4) und (5.8) werden zunächst folgendermaßen äquivalent umgeformt:

$$\hat{\varphi}_{1n} = \begin{cases} 1 & > \\ T_n - \hat{c}_{1,n} & 0 \\ 0 & \leq \end{cases} \quad \text{und} \quad \varphi_{1n} = \begin{cases} 1 & > \\ T_n - c_1 & 0 \\ 0 & \leq \end{cases}.$$

Die beiden Testfolgen (5.4) und (5.8) bestehen aus den nicht randomisierten Tests. Nach Lemma 1.29 und Bemerkung 3.7 reicht es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |\hat{\varphi}_{1n} - \varphi_{1n}| dP_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} = 0$$

nachzuweisen. Nach Lemma 1.27 genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} (\{|\hat{c}_{1,n} - c_1| > \varepsilon\}) = 0$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt. Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen ergibt sich die fast sichere Konvergenz $\hat{\sigma}_n(f_1)^2 \rightarrow \text{Var}_{P_0}(f_1)$ und $\hat{\sigma}_n(f_2)^2 \rightarrow \text{Var}_{Q_0}(f_2)$ für $n \rightarrow \infty$, weil $f_1 \in L_2(P_0)$ und $f_2 \in L_2(Q_0)$ nach Voraussetzung sind. Es gilt außerdem

$$\int \tilde{k}_1^2 dP_0 = \text{Var}_{P_0}(\tilde{k}_1) = \text{Var}_{P_0}(f_1 - E_{P_0}(f_1)) = \text{Var}_{P_0}(f_1),$$

$$\int \tilde{k}_2^2 dQ_0 = \text{Var}_{Q_0}(\tilde{k}_2) = \text{Var}_{Q_0}(f_2 - E_{Q_0}(f_2)) = \text{Var}_{Q_0}(f_2).$$

Hieraus folgt die fast sichere Konvergenz

$$\left(\frac{n}{n_1} \hat{\sigma}_n(f_1)^2 + \frac{n}{n_2} \hat{\sigma}_n(f_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \left(\frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.10)$$

für $n \rightarrow \infty$. Für alle $\varepsilon > 0$ erhält man insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} (\{|\hat{c}_{1,n} - c_1| > \varepsilon\}) = 0.$$

Die Testfolge $(\hat{\varphi}_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ für das zweiseitige Problem (5.2) wird definiert durch

$$\hat{\varphi}_{2n} = \begin{cases} 1 & > \\ |T_n| & \hat{c}_{2,n} \\ 0 & \leq \end{cases} \quad (5.11)$$

mit dem kritischen Wert

$$\hat{c}_{2,n} = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{n}{n_1} \hat{\sigma}_n(f_1)^2 + \frac{n}{n_2} \hat{\sigma}_n(f_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.12)$$

Mit (5.10) ergibt sich $\lim_{n \rightarrow \infty} P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} (\{|\hat{c}_{2,n} - c_2| > \varepsilon\}) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 1.27, Lemma 1.29 und Bemerkung 3.7 folgt nun analog, dass die Testfolgen (5.6) und (5.11) für das zweiseitige Testproblem (5.2) asymptotisch äquivalent sind.

Anwendung 5.5 (Testen der Erwartungswerte)

Es gelten die Voraussetzungen aus Beispiel 5.4. Außerdem seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) = (\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $f_1 = -f_2 = \text{Id}_{\mathbb{R}}$. Für die Testprobleme (5.1) und (5.2) erhält man dann

$$H_1 = \{E_P(\text{Id}_{\mathbb{R}}) - E_Q(\text{Id}_{\mathbb{R}}) \leq a\} \text{ gegen } K_1 = \{E_P(\text{Id}_{\mathbb{R}}) - E_Q(\text{Id}_{\mathbb{R}}) > a\} \quad (5.13)$$

und

$$H_2 = \{E_P(\text{Id}_{\mathbb{R}}) - E_Q(\text{Id}_{\mathbb{R}}) = a\} \text{ gegen } K_2 = \{E_P(\text{Id}_{\mathbb{R}}) - E_Q(\text{Id}_{\mathbb{R}}) \neq a\}, \quad (5.14)$$

wobei $\{E_P(\text{Id}_{\mathbb{R}}) - E_Q(\text{Id}_{\mathbb{R}}) \leq a\}$ die kurze Schreibweise für

$$\{P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : E_P(\text{Id}_{\mathbb{R}}) - E_Q(\text{Id}_{\mathbb{R}}) \leq a\}$$

ist. Es bezeichne $\bar{X}_{n_1} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i$ und $\bar{Y}_{n_2} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i$. Die Testfolge $(\hat{\varphi}_{1n})_{n \in \mathbb{N}}$ für das einseitige Testproblem (5.13) ist durch die Teststatistik

$$T_n = \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i - \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i - \sqrt{n}a = \sqrt{n} (\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2} - a)$$

und den kritischen Wert

$$\hat{c}_{1,n} = u_{1-\alpha} \left(\frac{n}{n_1} \hat{\sigma}_{1,n}^2 + \frac{n}{n_2} \hat{\sigma}_{2,n}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

gegeben, wobei

$$\hat{\sigma}_{1,n}^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X}_{n_1})^2 \text{ und } \hat{\sigma}_{2,n}^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y}_{n_2})^2$$

sind. Die Testfolge $(\hat{\varphi}_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ für das zweiseitige Testproblem (5.14) ist ebenfalls durch die Teststatistik T_n und den kritischen Wert

$$\hat{c}_{2,n} = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{n}{n_1} \hat{\sigma}_{1,n}^2 + \frac{n}{n_2} \hat{\sigma}_{2,n}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

festgelegt. Es ist zu beachten, dass diese Testfolgen das Niveau α nur asymptotisch einhalten. Für den endlichen Stichprobenumfang gibt es bereits für zwei parametrische Familien $\mathcal{P} := \{N(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in (0, +\infty)\}$ und $\mathcal{Q} := \mathcal{P}$ der Normalverteilungen nur triviale exakte Niveau α -Tests für das Testproblem (5.1) bzw. (5.2), vgl. Behrens-Fisher Testproblem, [22], Seite 304.

Anwendung 5.6 (Testen von Verteilungsfunktionen)

Es gelten die Voraussetzungen aus Beispiel 5.4. Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) = (\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $f_1 = -f_2 = \mathbf{1}_{(-\infty, q]}$ für ein $q \in \mathbb{R}$. Die Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ wird mit F_P bezeichnet. Für die Testprobleme (5.1) und (5.2) ergibt sich

$$H_1 = \{F_P(q) - F_Q(q) \leq a\} \text{ gegen } K_1 = \{F_P(q) - F_Q(q) > a\} \quad (5.15)$$

und

$$H_2 = \{F_P(q) - F_Q(q) = a\} \text{ gegen } K_2 = \{F_P(q) - F_Q(q) \neq a\}. \quad (5.16)$$

Als Teststatistik erhält man dann

$$T_n = \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{1}_{(-\infty, q]}(X_i) - \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} \mathbf{1}_{(-\infty, q]}(Y_i) - \sqrt{n}a.$$

Der Test $\hat{\varphi}_{1n}$ für das einseitige Testproblem (5.15) ist durch den kritischen Wert $\hat{c}_{1,n} = u_{1-\alpha} \left(\frac{n}{n_1} \hat{\sigma}_{1,n}^2 + \frac{n}{n_2} \hat{\sigma}_{2,n}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ gegeben, wobei

$$\hat{\sigma}_{1,n}^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} \left(\mathbf{1}_{(-\infty, q]}(X_i) - \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} \mathbf{1}_{(-\infty, q]}(X_j) \right)^2$$

und

$$\hat{\sigma}_{2,n}^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} \left(\mathbf{1}_{(-\infty, q]}(Y_i) - \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \mathbf{1}_{(-\infty, q]}(Y_j) \right)^2$$

sind. Der Test $\hat{\varphi}_{2n}$ für das zweiseitige Testproblem (5.16) wird durch den kritischen Wert $\hat{c}_{2,n} = u_{1-\alpha} \left(\frac{n}{n_1} \hat{\sigma}_{1,n}^2 + \frac{n}{n_2} \hat{\sigma}_{2,n}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ festgelegt.

Beispiel 5.7 (Wilcoxon Test)

Sei $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) = (\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Es wird vorausgesetzt, dass die nichtparametrischen Familien $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ nur die stetigen Wahrscheinlichkeitsmaße enthalten. Es bezeichne $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, $P \otimes Q \mapsto \int 1_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}} dP \otimes Q$ das Wilcoxon Funktional. Für jedes stetiges Wahrscheinlichkeitsmaß $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ gilt $k(P \otimes P) = \frac{1}{2}$. Anstelle der Testprobleme (5.1) und (5.2) betrachtet man häufig das einseitige Testproblem mit der verkleinerten Hypothese

$$\tilde{H}_2 = \left\{ P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) = \frac{1}{2} \text{ und } P = Q \right\}$$

gegen K_1 und das zweiseitige Testproblem $\tilde{H}_2$ gegen K_2 . Wir beschränken uns auf das einseitige Testproblem $\tilde{H}_2$ gegen K_1 . Das zweiseitige Testproblem $\tilde{H}_2$ gegen K_2 kann analog behandelt werden. Das Wilcoxon Funktional ist differenzierbar an jeder Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ und die Abbildung

$$\tilde{k}(P_0 \otimes Q_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto Q_0([x, +\infty)) + P_0((-\infty, y]) - 2k(P_0 \otimes Q_0)$$

ist ein Gradient von k an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$, vgl. Anwendung 2.7. Es wird außerdem vorausgesetzt, dass $\tilde{k}(P_0 \otimes Q_0)$ bereits der kanonische Gradient von k an jeder Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in \tilde{H}_2$ ist, d.h. es gilt $\tilde{k}(P_0 \otimes Q_0) \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ für alle $P_0 \otimes Q_0 \in \tilde{H}_2$. Sei nun $P_0 \otimes Q_0 \in \tilde{H}_2$ beliebig aber fest gewählt. Für die Teststatistik T_n erhält man nach Beispiel 3.1

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} Q_0((-\infty, X_i]) + \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} P_0([Y_j, +\infty)) - 2\sqrt{n}k(P_0 \otimes Q_0) \\ &= \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} F_{Q_0}(X_i) + \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} (1 - F_{P_0}(Y_j)) - \sqrt{n} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} F_{Q_0}(X_i) - \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} F_{P_0}(Y_j). \end{aligned}$$

Unter der Hypothese $\tilde{H}_2$ gilt die Gleichheit $F_{P_0} = F_{Q_0}$ nach Voraussetzung. Die Verteilungsfunktion F_{P_0} stellt einen unbekannten unendlichdimensionalen Parameter dar. Durch den Übergang zu den Rängen wird dieser Parameter eliminiert, vgl. [17], [30], [28] und [33]. Sei $(Z_1, \dots, Z_n) = (X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2})$ die gesamte Stichprobe. Mit $R_n = (R_{n,1}, \dots, R_{n,n})$ werden die gemeinsamen Ränge von Zufallsvariablen $(Z_1, \dots, Z_n)$ bezeichnet. Die unbekannte Verteilungsfunktion $F_{P_0} = F_{Q_0}$ wird durch die empirische Verteilungsfunktion

$$\hat{F}(Z_i) = \frac{1}{n} R_{n,i}$$

ersetzt. Die lineare Rangstatistik $\hat{T}_n$ wird durch

$$\hat{T}_n = \frac{1}{n_1\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n_1} R_{n,i} - \frac{1}{n_2\sqrt{n}} \sum_{j=1+n_1}^n R_{n,j}$$

definiert. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(T_n - \hat{T}_n\right)^2 dP_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(T_n - \hat{T}_n\right)^2 dP_0^n = 0$$

nach [29], Satz 9.3 oder [17], Section 6.1. Hieraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} \left(\left| T_n - \hat{T}_n \right| > \varepsilon \right) = 0$$

für alle $\varepsilon > 0$. Sei S_n die symmetrische Gruppe, d.h. die Gruppe aller Permutationen auf der Menge $\{1, \dots, n\}$. Sei nun

$$\hat{\varphi}_{1n} = \begin{cases} 1 & > \\ \hat{\gamma}_n & \hat{T}_n = \hat{c}_{1,n}(\alpha) \\ 0 & < \end{cases} \quad (5.17)$$

der Rangtest zum Niveau α , wobei $\hat{c}_{1,n}(\alpha)$ das $(1-\alpha)$ -Quantil der Verteilung der Statistik

$$S_n \rightarrow \mathbb{R}, \pi \mapsto \frac{1}{n_1\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n_1} \pi(i) - \frac{1}{n_2\sqrt{n}} \sum_{j=1+n_1}^n \pi(j)$$

unter der Gleichverteilung auf der symmetrischen Gruppe S_n ist. Man erhält die stochastische Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} (|\hat{c}_{1,n}(\alpha) - c_1| > \varepsilon) = 0$$

für alle $\varepsilon > 0$ nach [29], Satz 11.1 und Lemma 11.3, vgl. ebenfalls [28] und [30]. Nach Satz 11.1 aus [29] folgt außerdem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} (\{\hat{\varphi}_{1n} \in (0, 1)\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} \left(\left\{ \hat{T}_n = \hat{c}_{1,n}(\alpha) \right\} \right) = 0.$$

Nach Lemma 1.29 und Bemerkung 3.7 ergibt sich nun, dass die Testfolgen (5.17) und (5.4) an jeder Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in \tilde{H}_2$ lokal asymptotisch äquivalent sind. Die Teststatistik $\hat{T}_n$ lässt sich folgendermaßen äquivalent umformen:

$$\begin{aligned} \hat{T}_n &= \frac{1}{n_1\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n_1} R_{n,i} - \frac{1}{n_2\sqrt{n}} \sum_{j=1+n_1}^n R_{n,j} \\ &= \frac{1}{n_1\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n_1} R_{n,i} - \frac{1}{n_2\sqrt{n}} \left(\frac{n(n+1)}{2} - \sum_{i=1}^{n_1} R_{n,i} \right) \\ &= \left(\frac{1}{n_1\sqrt{n}} + \frac{1}{n_2\sqrt{n}} \right) \sum_{i=1}^{n_1} R_{n,i} - \frac{n(n+1)}{2n_2\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Durch die äquivalente Transformation erhält man

$$\widehat{\varphi}_{1n} = \begin{cases} 1 & > \\ \widetilde{\gamma}_n & \sum_{i=1}^{n_1} R_{n,i} = \\ 0 & < \end{cases} \widetilde{c}_{1,n}(\alpha)$$

für geeignete $\widetilde{\gamma}_n$ und $\widetilde{c}_{1,n}(\alpha)$. Der kritische Wert $\widetilde{c}_{1,n}(\alpha)$ lässt sich außerdem als der $(1 - \alpha)$ -Quantil der Verteilung der Statistik

$$S_n \rightarrow \mathbb{R}, \pi \mapsto \sum_{i=1}^{n_1} \pi(i)$$

unter der Gleichverteilung auf der symmetrischen Gruppe S_n bestimmen. Der Test $\widehat{\varphi}_{1n}$ ist also der übliche Zweistichproben-Wilcoxon-Test. Es gibt studentisierte Versionen des Wilcoxon-Tests, die unter der allgemeinen Nullhypothese $H_2 = \{P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) = \frac{1}{2}\}$ als Permutationstests ausgeführt werden, vgl. [17], [28] und [30].

Es bezeichne $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$. Seien $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathbb{N}))$ zwei Familien von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Man betrachte die randomisierte Summe

$$S = \sum_{i=1}^{Y_1} X_i.$$

Es gilt dann $E(S) = E(X_1) E(Y_1) = E_P(\text{Id}_{\mathbb{R}}) E_Q(\text{Id}_{\mathbb{N}})$. Die einseitigen und zweiseitigen Testprobleme für das statistische Funktional $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, $P \otimes Q \mapsto E_P(\text{Id}_{\mathbb{R}}) E_Q(\text{Id}_{\mathbb{N}})$ motivieren das nachfolgende Beispiel.

Beispiel 5.8 (Produkt zweier von Mises Funktionale)

Seien $k_1 : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, $P \mapsto \int f_1 dP$ und $k_2 : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, $Q \mapsto \int f_2 dQ$ zwei von Mises Funktionale. Die Voraussetzungen aus Beispiel 5.4 seien erfüllt. Das Funktional k_1 ist dann differenzierbar an jeder Stelle $P_0 \in \mathcal{P}$ mit dem kanonischen Gradienten $f_1 - E_{P_0}(f_1)$ und das Funktional k_2 ist differenzierbar an jeder Stelle $Q_0 \in \mathcal{Q}$ mit dem kanonischen Gradienten $f_2 - E_{Q_0}(f_2)$. Nach Beispiel 2.14 ist das statistische Funktional

$$k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}, P \otimes Q \mapsto k_1(P) k_2(Q)$$

differenzierbar an jeder Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ mit dem kanonischen Gradienten

$$\widetilde{k} : (\omega_1, \omega_2) \mapsto E_{Q_0}(f_2)(f_1(\omega_1) - E_{P_0}(f_1)) + E_{P_0}(f_1)(f_2(\omega_2) - E_{Q_0}(f_2)).$$

Hieraus folgt $\widetilde{k}_1 = E_{Q_0}(f_2)(f_1 - E_{P_0}(f_1))$ und $\widetilde{k}_2 = E_{P_0}(f_1)(f_2 - E_{Q_0}(f_2))$. Die Testprobleme (5.1) und (5.2) für $a \neq 0$ werden betrachtet. Es bezeichne

wieder $\bar{f}_{1,n} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} f_1 \circ X_i$ und $\bar{f}_{2,n} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} f_2 \circ Y_i$. Sei $P_0 \otimes Q_0 \in H_2$ beliebig aber fest gewählt. Dann gilt $a = k(P_0 \otimes Q_0) = E_{P_0}(f_1) E_{Q_0}(f_2)$. Für die Teststatistik T_n erhält man nun

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} E_{Q_0}(f_2) (f_1(X_i) - E_{P_0}(f_1)) \\ &\quad + \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} E_{P_0}(f_1) (f_2(Y_i) - E_{Q_0}(f_2)) \\ &= E_{Q_0}(f_2) \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} f_1(X_i) - \sqrt{n} E_{P_0}(f_1) E_{Q_0}(f_2) \\ &\quad + E_{P_0}(f_1) \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} f_2(Y_i) - \sqrt{n} E_{P_0}(f_1) E_{Q_0}(f_2) \\ &= \sqrt{n} E_{Q_0}(f_2) \bar{f}_{1,n} + \sqrt{n} E_{P_0}(f_1) \bar{f}_{2,n} - 2\sqrt{n}a. \end{aligned}$$

Die Werte $E_{P_0}(f_1)$ und $E_{Q_0}(f_2)$ sind unbekannt und werden durch $\bar{f}_{1,n}$ und $\bar{f}_{2,n}$ geschätzt. Die Teststatistik $\hat{T}_n$ mit geschätzten Erwartungswerten ist durch

$$\hat{T}_n = \sqrt{n} \bar{f}_{1,n} \bar{f}_{2,n} - \sqrt{n}a$$

definiert. Die Teststatistik $\hat{T}_n$ lässt sich auch mit Hilfe der kanonischen Zweistichproben-U-Statistik für das statistische Funktional k herleiten. Die Zufallsvariable $X_1 Y_1$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für k . Für die Zweistichproben-U-Statistik mit der Abbildung $\psi : (x, y) \mapsto xy$ als Kern erhält man dann

$$\frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} X_i Y_j = \left(\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i \right) \left(\frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} Y_j \right) = \bar{f}_{1,n} \bar{f}_{2,n}.$$

Die asymptotische Verteilung der Teststatistik $\hat{T}_n$ lässt sich mit Delta Methode bestimmen, vgl. [51], Seite 26, Theorem 3.1 oder [54], Seite 107, Satz 5.107 (Cramér). Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen ergibt sich die fast sichere Konvergenz $(\bar{f}_{1,n}, \bar{f}_{2,n}) \rightarrow (E_{P_0}(f_1), E_{Q_0}(f_2))$ für $n \rightarrow \infty$. Mit Cramér-Wold-Device zeigt man die schwache Konvergenz

$$\begin{aligned} &\mathcal{L} \left(\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \bar{f}_{1,n} \\ \bar{f}_{2,n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E_{P_0}(f_1) \\ E_{Q_0}(f_2) \end{pmatrix} \right) \middle| P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} \right) \\ &\rightarrow N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{1-d} \text{Var}_{P_0}(f_1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \text{Var}_{Q_0}(f_2) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$. Die Abbildung $H_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$ ist differenzierbar in $\mathbb{R}^2$ mit der Jacobi-Matrix

$$JH_1(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Mit Delta Methode erhält man für $n \rightarrow \infty$ die schwache Konvergenz

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L} \left(\widehat{T}_n \middle| P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} \right) \\
&= \mathcal{L} \left(\sqrt{n} \bar{f}_{1,n} \bar{f}_{2,n} - \sqrt{n} E_{P_0}(f_1) E_{Q_0}(f_2) \middle| P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} \right) \\
&= \mathcal{L} \left(\sqrt{n} (H_1(\bar{f}_{1,n}, \bar{f}_{2,n}) - H_1(E_{P_0}(f_1), E_{Q_0}(f_2))) \middle| P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} \right) \\
&\rightarrow N \left(0, E_{Q_0}(f_2)^2 \frac{1}{1-d} \text{Var}_{P_0}(f_1) + E_{P_0}(f_1)^2 \frac{1}{d} \text{Var}_{Q_0}(f_2) \right) \\
&= N \left(0, \frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \right).
\end{aligned}$$

Die Testfolgen

$$\tilde{\varphi}_{1n} = \begin{cases} 1 & > \\ \widehat{T}_n & \\ 0 & \leq \end{cases} c_1 \quad (5.18)$$

und

$$\tilde{\varphi}_{2n} = \begin{cases} 1 & > \\ |\widehat{T}_n| & \\ 0 & \leq \end{cases} c_2 \quad (5.19)$$

erfüllen dann die Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \tilde{\varphi}_{in} dP_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} = \alpha$ für $i = 1, 2$. Die kritischen Werte c_1 und c_2 sind in (5.5) und (5.7) definiert. Es wird nun bewiesen, dass die Testfolgen (5.18) und (5.4) bzw. (5.19) und (5.6) lokal asymptotisch äquivalent für das Testproblem (5.1) bzw. (5.2) an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ sind. Sei $t \mapsto P_t \otimes Q_t$ eine $L_2(P_0 \otimes Q_0)$ -differenzierbare Kurve in $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ mit Tangente $g \in L_2^{(0)}(P_0 \otimes Q_0)$. Sei $\int g^2 dP_0 \otimes Q_0 \neq 0$ ohne Einschränkung, sonst folgt die Behauptung nach Satz 3.22. Die Tangente g besitzt nach Satz 1.19 die Darstellung $g = g_1 \circ \pi_1 + g_2 \circ \pi_2$ mit $g_1 \in L_2^{(0)}(P_0)$ und $g_2 \in L_2^{(0)}(Q_0)$. Sei

$$\Lambda_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{n_1} g_1(X_i) + \sum_{i=1}^{n_2} g_2(Y_i) \right).$$

Die asymptotische Gütefunktion der Testfolgen (5.4) und (5.6) entlang der impliziten Alternativen und Hypothesen $(P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_2$ ist eindeutig bestimmt durch die gemeinsame asymptotische Verteilung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}((T_n, \Lambda_n) \middle| P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2})$$

von T_n und Λ_n . Die asymptotische Gütefunktion der Testfolgen (5.18) und (5.19) entlang der impliziten Alternativen und Hypothesen $(P_{t_n}^{n_1} \otimes Q_{t_n}^{n_2})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_2$ ist ebenfalls eindeutig bestimmt durch die gemeinsame asymptotische Verteilung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}((\widehat{T}_n, \Lambda_n) \middle| P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2})$$

von $\widehat{T}_n$ und Λ_n , vgl. Abschnitte 3.4 und 3.5, insbesondere Satz 3.19 und Satz 3.32. Es reicht also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}((T_n, \Lambda_n) | P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}\left(\left(\widehat{T}_n, \Lambda_n\right) \middle| P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}\right) \quad (5.20)$$

nachzuweisen. Nach Satz 3.17 erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}\left(\left(\begin{pmatrix} T_n \\ \Lambda_n \end{pmatrix} \middle| P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right), \quad (5.21)$$

wobei

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{1}{1-d} \int \tilde{k}_1^2 dP_0 + \frac{1}{d} \int \tilde{k}_2^2 dQ_0 \\ &= \frac{1}{1-d} E_{Q_0}(f_2)^2 \text{Var}_{P_0}(f_1) + \frac{1}{d} E_{P_0}(f_1)^2 \text{Var}_{Q_0}(f_2), \\ \sigma_2^2 &= (1-d) \int g_1^2 dP_0 + d \int g_2^2 dQ_0 = (1-d) \text{Var}_{P_0}(g_1) + d \text{Var}_{Q_0}(g_2), \\ \sigma_{12} &= \int \tilde{k} g dP_0 \otimes Q_0 = E_{Q_0}(f_2) \text{Cov}_{P_0}(f_1, g_1) + E_{P_0}(f_1) \text{Cov}_{Q_0}(f_2, g_2) \end{aligned}$$

sind. Die asymptotische Verteilung von $(\widehat{T}_n, \Lambda_n)$ unter $P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}$ wird mit Delta Methode bestimmt. Es bezeichne

$$Y_n = \left(\bar{f}_{1,n}, \bar{f}_{2,n}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_1} g_1(X_i), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_2} g_2(Y_i) \right).$$

Es gilt dann

$$E(Y_n) = (E_{P_0}(f_1), E_{Q_0}(f_2), 0, 0).$$

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen ergibt sich die fast sichere Konvergenz $Y_n \rightarrow (E_{P_0}(f_1), E_{Q_0}(f_2), 0, 0)$ für $n \rightarrow \infty$. Mit Cramér-Wold-Device erhält man die schwache Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\sqrt{n}(Y_n - E(Y_n)) | P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}) = N(0, \Sigma).$$

Die Kovarianzmatrix Σ ergibt sich als

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-d} \text{Var}_{P_0}(f_1) & 0 & \text{Cov}_{P_0}(f_1, g_1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \text{Var}_{Q_0}(f_2) & 0 & \text{Cov}_{Q_0}(f_2, g_2) \\ \text{Cov}_{P_0}(f_1, g_1) & 0 & (1-d) \text{Var}_{P_0}(g_1) & 0 \\ 0 & \text{Cov}_{Q_0}(f_2, g_2) & 0 & d \text{Var}_{Q_0}(g_2) \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung $H_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 x_2, x_3 + x_4)$ ist differenzierbar in $\mathbb{R}^4$ mit der Jacobi-Matrix

$$JH_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei $B := JH_2((E_{P_0}(f_1), E_{Q_0}(f_2), 0, 0))$. Nach Delta Methode ergibt sich die schwache Konvergenz

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L} \left(\left(\hat{T}_n, \Lambda_n \right) \middle| P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L} \left(\sqrt{n} (H_2(Y_n) - H_2(E(Y_n))) \middle| P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} \right) \\ &= N(0, B \Sigma B^t). \end{aligned}$$

Man erhält außerdem $B \Sigma B^t = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$, vgl. (5.21). Die Gleichheit (5.20) ist somit bewiesen. Die Werte c_1 und c_2 sind unbekannt und müssen geschätzt werden. Die Schätzer $\bar{f}_{1,n}$, $\bar{f}_{2,n}$, $\hat{\sigma}_n(f_1)^2$ und $\hat{\sigma}_n(f_2)^2$ seien wie in Beispiel 5.4 definiert. Die geschätzten kritischen Werte $\hat{c}_{1,n}$ und $\hat{c}_{2,n}$ sind definiert durch

$$\hat{c}_{1,n} = u_{1-\alpha} \left(\frac{n}{n_1} (\bar{f}_{2,n})^2 \hat{\sigma}_n(f_1)^2 + \frac{n}{n_2} (\bar{f}_{1,n})^2 \hat{\sigma}_n(f_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

und

$$\hat{c}_{1,n} = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{n}{n_1} (\bar{f}_{2,n})^2 \hat{\sigma}_n(f_1)^2 + \frac{n}{n_2} (\bar{f}_{1,n})^2 \hat{\sigma}_n(f_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nach Lemma 1.27, Lemma 1.29 und Bemerkung 3.7 sind die Testfolgen

$$\hat{\varphi}_{1n} = \begin{cases} 1 & > \\ \hat{T}_n & \hat{c}_{1,n} \\ 0 & \leq \end{cases} \quad \text{und} \quad \hat{\varphi}_{2n} = \begin{cases} 1 & > \\ |\hat{T}_n| & \hat{c}_{2,n} \\ 0 & \leq \end{cases}$$

asymptotisch äquivalent zu den Testfolgen $\tilde{\varphi}_{1n}$ und $\tilde{\varphi}_{2n}$ für das Testproblem (5.1) bzw. (5.2), weil $\hat{c}_{1,n} \rightarrow c_1$ und $\hat{c}_{2,n} \rightarrow c_2$ für $n \rightarrow \infty$ fast sicher konvergieren, vgl. Beispiel 5.4. Die Testfolge $\hat{\varphi}_{1n}$ ist also asymptotisch äquivalent zu der Testfolge (5.4) für das Testproblem (5.1) und die Testfolge $\hat{\varphi}_{2n}$ ist asymptotisch äquivalent zu der Testfolge (5.6) für das Testproblem (5.2).

Anwendung 5.9 (Testen des Wilcoxon Funktional)

In dieser Anwendung kehren wir zu dem Wilcoxon Funktional $k : \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, $P \otimes Q \mapsto \int 1_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}} dP \otimes Q$ zurück. Es gilt $k(P \otimes Q) = \int F_Q dP$. Sei $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) = (\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Im Gegensatz zu Beispiel 5.7 wird nicht vorausgesetzt, dass die nichtparametrischen Familien $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ nur stetige Wahrscheinlichkeitsmaße enthalten. Es werden das einseitige Testproblem

$$H_1 = \left\{ P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) \leq \frac{1}{2} \right\}$$

gegen

$$K_1 = \left\{ P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) > \frac{1}{2} \right\} \quad (5.22)$$

und das zweiseitige Testproblem

$$H_2 = \left\{ P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) = \frac{1}{2} \right\}$$

gegen

$$K_2 = \left\{ P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} : k(P \otimes Q) \neq \frac{1}{2} \right\} \quad (5.23)$$

betrachtet. Aus der Anwendung 2.7 ist es bereits bekannt, dass das Wilcoxon Funktional an jeder Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ differenzierbar ist und die Abbildung

$$\tilde{k}(P_0 \otimes Q_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto Q_0((-\infty, x]) + P_0([y, +\infty)) - 2k(P_0 \otimes Q_0)$$

ein Gradient von k an der Stelle $P_0 \otimes Q_0$ ist. Es wird vorausgesetzt, dass $\tilde{k}(P_0 \otimes Q_0)$ der kanonische Gradient von k an jeder Stelle $P_0 \otimes Q_0 \in H_2$ ist, d.h. es gilt $\tilde{k}(P_0 \otimes Q_0) \in T(P_0 \otimes Q_0, \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})$ für alle $P_0 \otimes Q_0 \in H_2$. Diese Voraussetzung besagt, dass das Modell hinreichend groß ist. Sei nun $P_0 \otimes Q_0 \in H_2$ beliebig aber fest gewählt. Nach Beispiel 3.1 liegt die Teststatistik

$$T_n = \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} Q_0((-\infty, X_i]) + \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} P_0([Y_j, +\infty)) - 2\sqrt{n}k(P_0 \otimes Q_0)$$

den asymptotisch optimalen Testfolgen (5.4) und (5.6) zugrunde. Wegen $k(P_0 \otimes Q_0) = \frac{1}{2}$ erhält man unter H_2

$$T_n = \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} Q_0((-\infty, X_i]) + \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} P_0([Y_j, +\infty)) - \sqrt{n}.$$

Im Folgenden wird eine adaptive Methode vorgestellt, mit der die unbekannten Fußpunkte P_0 und Q_0 eliminiert werden können. Die Werte $Q_0((-\infty, X_i])$ und $P_0([Y_j, +\infty))$, die in die Teststatistik T_n hineingehen, sind unbekannt und müssen geschätzt werden. Für $t \in \mathbb{R}$ wird $Q_0((-\infty, t])$ durch

$$\frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} \mathbf{1}_{(-\infty, t]}(Y_i)$$

geschätzt. Der Wert $P_0([s, +\infty))$ wird für $s \in \mathbb{R}$ durch

$$\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{1}_{[s, +\infty)}(X_i)$$

geschätzt. Man erhält somit die neue Teststatistik

$$\begin{aligned}\hat{T}_n &= \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \mathbf{1}_{(-\infty, X_i]}(Y_j) + \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{1}_{[Y_j, +\infty)}(X_i) - \sqrt{n} \\ &= 2 \frac{\sqrt{n}}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \mathbf{1}_{(-\infty, X_i]}(Y_j) - \sqrt{n}.\end{aligned}$$

Weiterhin wird die Teststatistik $\tilde{T}_n = \frac{1}{2} \hat{T}_n$ betrachtet. Es bezeichne

$$\mathbb{F}_{n_1, P_0}(t) = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{1}_{(-\infty, t]}(X_i)$$

die empirische Verteilungsfunktion von P_0 und

$$\mathbb{F}_{n_2, Q_0}(t) = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} \mathbf{1}_{(-\infty, t]}(Y_i)$$

die empirische Verteilungsfunktion von Q_0 . Mit diesen Bezeichnungen erhält man

$$\begin{aligned}\tilde{T}_n &= \frac{\sqrt{n}}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \mathbf{1}_{(-\infty, X_i]}(Y_j) - \frac{1}{2} \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n} \int \mathbb{F}_{n_2, Q_0} d\mathbb{F}_{n_1, P_0} - \frac{1}{2} \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n} \left(\int \mathbb{F}_{n_2, Q_0} d\mathbb{F}_{n_1, P_0} - \int F_{Q_0} dP_0 \right).\end{aligned}$$

Die asymptotische Verteilung von $\tilde{T}_n$ unter $P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}$ wird nun untersucht.

Lemma 5.10

Für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} \left(|T_n - \tilde{T}_n| > \varepsilon \right) = 0.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}& \sqrt{n} \left(\int \mathbb{F}_{n_2, Q_0} d\mathbb{F}_{n_1, P_0} - \int F_{Q_0} dP_0 \right) \\ &= \sqrt{n} \int (\mathbb{F}_{n_2, Q_0} - F_{Q_0}) dP_0 - \sqrt{n} \int (\mathbb{F}_{n_1, P_0} - F_{P_0})_- dQ_0 + R_n\end{aligned}$$

mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} (|R_n| > \varepsilon) = 0 \quad (5.24)$$

für alle $\varepsilon > 0$ nach der starken Version der funktionellen Delta Methode, vgl. [51], Seite 299, Example 20.11. Mit $(\mathbb{F}_{n_1, P_0} - F_{P_0})_-$ wird die linksseitig stetige Version der Abbildung $t \mapsto \mathbb{F}_{n_1, P_0}(t) - F_{P_0}(t)$ bezeichnet. Mit den äquivalenten Umformungen erhält man

$$\begin{aligned}
& \sqrt{n} \int (\mathbb{F}_{n_1, P_0} - F_{P_0})_- dQ_0 \\
&= \sqrt{n} \int \left(\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{1}_{(-\infty, t]}(X_i) - P_0((-\infty, t]) \right) dQ_0(t) \\
&= \sqrt{n} \int \left(\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{1}_{(-\infty, t)}(X_i) - P_0((-\infty, t)) \right) dQ_0(t) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \left(\int \mathbf{1}_{(-\infty, t)}(X_i) dQ_0(t) - \int P_0((-\infty, t)) dQ_0(t) \right) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \left(\int \mathbf{1}_{(X_i, +\infty)}(t) dQ_0(t) - 1 + k(P_0 \otimes Q_0) \right) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (Q_0((X_i, +\infty)) - 1 + k(P_0 \otimes Q_0)) \\
&= -\frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (Q_0((-\infty, X_i]) - k(P_0 \otimes Q_0)),
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\int P_0((-\infty, t)) dQ_0(t) &= \int \left(\int \mathbf{1}_{(-\infty, t)}(x) dP_0(x) \right) dQ_0(t) \\
&= \int \mathbf{1}_{\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}} dP_0 \otimes Q_0 \\
&= 1 - \int \mathbf{1}_{\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}} dP_0 \otimes Q_0 \\
&= 1 - k(P_0 \otimes Q_0)
\end{aligned}$$

gilt. Analog ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \sqrt{n} \int (\mathbb{F}_{n_2, Q_0} - F_{Q_0}) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \int (\mathbf{1}_{(-\infty, t]}(Y_j) - F_{Q_0}(t)) dP_0(t) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \left(\int \mathbf{1}_{[Y_j, +\infty)}(t) dP_0(t) - \int F_{Q_0}(t) dP_0(t) \right) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} (P_0([Y_j, +\infty)) - k(P_0 \otimes Q_0)).
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned}
& \sqrt{n} \int (\mathbb{F}_{n_2, Q_0} - F_{Q_0}) dP_0 - \sqrt{n} \int (\mathbb{F}_{n_1, P_0} - F_{P_0})_- dQ_0 \\
&= \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} (P_0([Y_j, +\infty)) - k(P_0 \otimes Q_0)) \\
&\quad + \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (Q_0((-\infty, X_i]) - k(P_0 \otimes Q_0)) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} Q_0((-\infty, X_i]) + \frac{\sqrt{n}}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} P_0([Y_j, +\infty)) - 2\sqrt{n}k(P_0 \otimes Q_0) \\
&= T_n.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_n &= \int \mathbb{F}_{n_2, Q_0} d\mathbb{F}_{n_1, P_0} - \int F_{Q_0} dF_{P_0} \\
&= \sqrt{n} \int (\mathbb{F}_{n_2, Q_0} - F_{Q_0}) dP_0 - \sqrt{n} \int (\mathbb{F}_{n_1, P_0} - F_{P_0})_- dQ_0 + R_n \\
&= T_n + R_n.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Aus (5.24) und (5.25) folgt die Behauptung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2} \left(|T_n - \tilde{T}_n| > \varepsilon \right) = 0$$

für alle $\varepsilon > 0$. ■

Man kann bei den asymptotisch optimalen Testfolgen (5.4) und (5.6) die Teststatistik T_n durch $\tilde{T}_n$ ersetzen. Dabei erhält man die Testfolgen, die zu der asymptotisch optimalen Testfolgen (5.4) und (5.6) für das entsprechende Testproblem asymptotisch äquivalent sind.

Zur Berechnung des kritischen Wertes für die Tests (5.4) und (5.6) braucht man die asymptotische Varianz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}_{P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}} (\tilde{T}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}_{P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}} (T_n).$$

Mit Beispiel 2.7 und Satz 3.16 ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}_{P_0^{n_1} \otimes Q_0^{n_2}} (\tilde{T}_n) \\
&= \frac{1}{1-d} \int \left(\int 1_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x \geq y\}} dQ_0(y) - k(P_0 \otimes Q_0) \right)^2 dP_0(x) \\
&\quad + \frac{1}{d} \int \left(\int 1_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x \geq y\}} dP_0(x) - k(P_0 \otimes Q_0) \right)^2 dQ_0(y),
\end{aligned}$$

wobei $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_2}{n}$ ist. Die Werte

$$w_1 = \int \left(\int 1_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x \geq y\}} dQ_0(y) - k(P_0 \otimes Q_0) \right)^2 dP_0(x)$$

und

$$w_2 = \int \left(\int 1_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x \geq y\}} dP_0(x) - k(P_0 \otimes Q_0) \right)^2 dQ_0(y)$$

sind unbekannt und müssen geschätzt werden. Es reicht die konsistenten und erwartungstreuen Schätzer $\hat{w}_{1,n}$ und $\hat{w}_{2,n}$ für w_1 und w_2 zu finden. Die Testfolgen mit den geschätzten Werten von w_1 und w_2 sind dann asymptotisch äquivalent zu den Testfolgen mit den exakten Werten von w_1 und w_2 , vgl. Beispiel 5.4 zum Beweis. Dieses Schätzproblem wird nun in einer verallgemeinerten Form gelöst, die eine Anwendung beim Testen der von Mises Funktionale ermöglicht, vgl. Beispiel 2.6.

Lemma 5.11

Sei $P \otimes Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ beliebig aber fest gewählt. Sei $h : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ eine Zufallsvariable mit $\int h^4 dP \otimes Q < \infty$ und $\int h dP \otimes Q = 0$. Die Zufallsvariable

$$S_n = \frac{1}{n_1 n_2 (n_2 - 1)} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_2} h(X_i, Y_k) h(X_i, Y_j)$$

ist dann ein erwartungstreuer und konsistenter Schätzer für den Wert

$$\int \left(\int h(x, y) dQ(y) \right)^2 dP(x). \quad (5.26)$$

Beweis. Die Zufallsvariable S_n ist ein erwartungstreuer Schätzer für den Wert (5.26), denn es gilt

$$\begin{aligned} & E_{P^{n_1} \otimes Q^{n_2}}(S_n) \\ &= \frac{1}{n_1 n_2 (n_2 - 1)} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_2} \int h(x_i, y_k) h(x_i, y_j) dP \otimes Q^2(x_i, y_k, y_j) \\ &= \frac{1}{n_1 n_2 (n_2 - 1)} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_2} \int \left(\int h(x, y) dQ(y) \right)^2 dP(x) \\ &= \int \left(\int h(x, y) dQ(y) \right)^2 dP(x) \end{aligned}$$

nach dem Satz von Fubini. Es wird nun gezeigt, dass der Schätzer S_n für den Wert (5.26) konsistent ist. Es reicht zu zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}_{P^{n_1} \otimes Q^{n_2}}(S_n) = 0 \quad (5.27)$$

gilt. Es seien

$$I_n = \{(i, j, k) : i \in \{1, \dots, n_1\} \text{ und } j, k \in \{1, \dots, n_2\} \text{ und } k \neq j\}$$

die Indexmenge und

$$z_n = n_1 n_2 (n_2 - 1)$$

die Anzahl der Elemente von I_n . Es bezeichne $f_s = h(X_i, Y_k) h(X_i, Y_j)$ für ein $s = (i, j, k) \in I_n$. Man erhält zunächst

$$\begin{aligned} & \text{Var}_{P^{n_1} \otimes Q^{n_2}}(S_n) \\ &= \text{Var}_{P^{n_1} \otimes Q^{n_2}} \left(\frac{1}{z_n} \sum_{s \in I_n} f_s \right) \\ &= \frac{1}{z_n^2} \sum_{s \in I_n} \text{Var}_{P^{n_1} \otimes Q^{n_2}}(f_s) + \frac{1}{z_n^2} \sum_{s \in I_n} \sum_{t \in I_n \setminus \{s\}} \text{Cov}_{P^{n_1} \otimes Q^{n_2}}(f_s, f_t). \end{aligned}$$

Für die Summe der Varianzen ergibt sich somit

$$\frac{1}{z_n^2} \sum_{s \in I_n} \text{Var}_{P^{n_1} \otimes Q^{n_2}}(f_s) = \frac{1}{z_n} \text{Var}_{P^{n_1} \otimes Q^{n_2}}(f_{(1,1,2)}) \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$, weil

$$\begin{aligned} \text{Var}_{P^{n_1} \otimes Q^{n_2}}(f_{(1,1,2)}) &= \int (h(x_1, y_1) h(x_1, y_2))^2 dP \otimes Q^2(x_1, y_1, y_2) \\ &= \int \left(\int h(x_1, y_1)^2 dQ(y_1) \right)^2 dP(x_1) \\ &\leq \int \left(\int h(x_1, y_1)^4 dQ(y_1) \right) dP(x_1) \\ &= \int h^4 dP \otimes Q \\ &< \infty \end{aligned} \tag{5.28}$$

nach Voraussetzung gilt. Es bleibt die Summe

$$\frac{1}{z_n^2} \sum_{s \in I_n} \sum_{t \in I_n \setminus \{s\}} \text{Cov}_{P^{n_1} \otimes Q^{n_2}}(f_s, f_t) \tag{5.29}$$

der Kovarianzen zu betrachten. Mit der Abschätzung (5.28) erhält man

$$|\text{Cov}_{P^{n_1} \otimes Q^{n_2}}(f_s, f_t)| \leq (\text{Var}_{P^{n_1} \otimes Q^{n_2}}(f_s) \text{Var}_{P^{n_1} \otimes Q^{n_2}}(f_t))^{\frac{1}{2}} \leq \int h^4 dP \otimes Q < \infty. \tag{5.30}$$

Es bezeichne $s = (s_1, s_2, s_3)$ und $t = (t_1, t_2, t_3)$. Es gilt

$$\text{Cov}_{P^{n_1} \otimes Q^{n_2}}(f_s, f_t) = 0,$$

falls $s_k \neq t_k$ für alle $k \in \{1, 2, 3\}$ sind. Insgesamt gibt es also mindestens

$$n_2 (n_2 - 1) n_1 (n_2 - 2) (n_2 - 3) (n_1 - 1) = z_n (n_2 - 2) (n_2 - 3) (n_1 - 1)$$

verschiedene Kovarianzen $\text{Cov}_{P^{n_1} \otimes Q^{n_2}}(f_s, f_t)$ in der Summe (5.29), die gleich Null sind. Man erhält somit die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{z_n^2} \sum_{s \in I_n} \sum_{t \in I_n \setminus \{s\}} \text{Cov}_{P^{n_1} \otimes Q^{n_2}}(f_s, f_t) \right| \\ & \leq \frac{1}{z_n^2} (z_n (z_n - 1) - z_n (n_2 - 2) (n_2 - 3) (n_1 - 1)) \int h^4 dP \otimes Q \\ & = \frac{1}{z_n} (z_n - 1 - (n_2 - 2) (n_2 - 3) (n_1 - 1)) \int h^4 dP \otimes Q \\ & = \frac{n_2 (n_2 - 1) n_1 - (n_2 - 2) (n_2 - 3) (n_1 - 1) - 1}{n_2 (n_2 - 1) n_1} \int h^4 dP \otimes Q \\ & \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$. Somit ist die Konvergenz (5.27) gezeigt. ■

Beispiel 5.12

Speziell für das Wilcoxon Funktional mit $h = 1_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x \geq y\}} - \frac{1}{2}$ erhält man den erwartungstreuen und konsistenten Schätzer

$$\hat{w}_{1,n} = \frac{1}{n_1 n_2 (n_2 - 1)} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_2} \left(\mathbf{1}_{\{X_i \leq Y_k\}} - \frac{1}{2} \right) \left(\mathbf{1}_{\{X_i \leq Y_j\}} - \frac{1}{2} \right)$$

für w_1 . Analog ergibt sich der erwartungstreue und konsistente Schätzer

$$\hat{w}_{2,n} = \frac{1}{n_2 n_1 (n_1 - 1)} \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_1} \left(\mathbf{1}_{\{X_j \leq Y_i\}} - \frac{1}{2} \right) \left(\mathbf{1}_{\{X_k \leq Y_i\}} - \frac{1}{2} \right)$$

für w_2 . Insgesamt erhält man die asymptotisch optimale Folge

$$\tilde{\varphi}_{1n} = \begin{cases} 1 & > \\ \tilde{T}_n & u_{1-\alpha} \left(\frac{n}{n_1} \hat{w}_{1,n} + \frac{n}{n_2} \hat{w}_{2,n} \right)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & \leq \end{cases}$$

der einseitigen Tests für das Testproblem (5.22) und die asymptotisch optimale Folge

$$\tilde{\varphi}_{2n} = \begin{cases} 1 & > \\ |\tilde{T}_n| & u_{1-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{n}{n_1} \hat{w}_{1,n} + \frac{n}{n_2} \hat{w}_{2,n} \right)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & \leq \end{cases}$$

der zweiseitigen Tests für das Testproblem (5.23).

Anhang

Symbol o

Symbol o für Folgen

Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen von reellen Zahlen.
Das Symbol $a_n \in o(b_n)$ bedeutet, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ist.

Symbol o für Funktionen

Es seien M ein metrischer Raum und $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Abbildungen. Das
Symbol $f \in o(g)$ für $x \rightarrow x_0$ in M bedeutet dann, dass $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ gilt.

Literaturverzeichnis

- [1] Bauer, H., (1991). "*Wahrscheinlichkeitstheorie*", 4. Auflage, Walter de Gruyter.
- [2] Bauer, H. (1990). "*Maß- und Integrationstheorie*", Walter de Gruyter.
- [3] Baringhaus, L., Franz, C., (2004). "*On a new multivariate two-sample test*", Journal of Multivariate Analysis 88, 190-206.
- [4] Beyersmann, J., Janssen, A., Mayer, C.-D., (2004). "*Efficient rank tests for semiparametric competing risk models*", Metrika 60, 73-91.
- [5] Bickel, P., Klaassen, C.A.J., Ritov, Y., Wellner, J.A. (1993). "*Efficient and Adaptive Estimation for Semiparametric Models*", Johns Hopkins Series of Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore.
- [6] Bolthausen, E., Perkins, E., van der Vaart, A. (2002). "*Lectures on Probability Theory and Statistics. Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour XXIX* ", Saint-Flour, France, Juli 8-24, 1999, Springer.
- [7] Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A. (1991). "*Taschenbuch der Mathematik*", 25. Auflage, Verlag Harri Deutsch.
- [8] Deshpande, V.J., Sengupta, D. (1995). "*Testing the hypothesis of proportional hazards in two populations*", Biometrika, 82, 2, 251-61.
- [9] Elstrodt, J. (2002). "*Maß- und Integrationstheorie*", 3. Auflage, Springer.
- [10] Ferger, D., (2000). "*Optimal Tests for the General Two-Sample Problem*", Journal of Multivariate Analysis 74, 1-35.
- [11] Ferger, D., (2004). "*Maximal asymptotic power and efficiency of two-sample tests based on generalized U-Statistics*", Metrika 60, 33-57.
- [12] Good, P., (1994). "*Permutation Tests*", Springer-Verlag.
- [13] Gänssler, P., Stute, W., (1977). "*Wahrscheinlichkeitstheorie*", Springer-Verlag.

- [14] Gill, R. D., (1989). "*Non- and Semi-parametric Maximum Likelihood Estimators and the von Mises Method (Part 1)*", Scand J Statist, 16, 97-128.
- [15] Gill, R. D., van der Vaart, A.W., (1993). "*Non- and Semi-parametric Maximum Likelihood Estimators and the von Mises Method (Part 2)*", Scand J Statist, 20, 271-288.
- [16] Groeneboom, P., Wellner, J.A. (1992). "*Information Bounds and Non-parametric Maximum Likelihood Estimation*", Birkhäuser Verlag.
- [17] Hájek, J., Sidak, Z., Sen, K. P. (1999) "*Theory of rank tests*", Academic Press.
- [18] Heuser, H. (1990). "*Lehrbuch der Analysis*", Teil 1, 7. Auflage, B.G. Teubner.
- [19] Heuser, H. (1993). "*Lehrbuch der Analysis*", Teil 2, 8. Auflage, B.G. Teubner.
- [20] Ibragimov, I.A., Has'minskii R.Z. (1981). "*Statistical Estimation*", Springer.
- [21] Ledoux, M., Talagrand, M. (1991). "*Probability in Banach Spaces*", Springer.
- [22] Lehmann, E.L. (1986). "*Testing Statistical Hypotheses*", Second Edition, Springer.
- [23] Lehmann, E.L. (1983). "*Theory of Point Estimation*", John Wiley & Sons.
- [24] Le Cam, L. (1986). "*Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory*", Springer.
- [25] Le Cam, L., Yang, G.L. (2000). "*Asymptotics in Statistics: Some Basic Concepts*", Second Edition, Springer.
- [26] Lee, A.J. (1990). "*U-Statistics, Theory and Practice*", Marcel Decker.
- [27] Janssen, A., (1991). "*Asymptotically linear and mixed normal sequences of statistical experiments*", Sankhya: The Indian Journal of Statistics 53, 1-26.
- [28] Janssen, A., (1997). "*Studentized permutation tests for non-i.i.d. hypotheses and the generalized Behrens-Fisher problem*", Statistics & Probability Letters 36, 9-21.
- [29] Janssen, A., (1998). "*Zur Asymptotik nichtparametrischer Tests*", Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 29, Münster.

- [30] Janssen, A., (1999). "*Testing nonparametric statistical functionals with applications to rank tests*", Journal of Statistical Planning and Inference 81, 71-93, Erratum (2001), 92, 297.
- [31] Janssen, A., (1999). "*Nonparametric symmetry tests for statistical functionals*", Mathematical Methods of Statistics, Vol. 8, No. 3, 320-343.
- [32] Janssen, A., (2000). "*Nonparametric bioequivalence tests for statistical functionals and their efficient power functions*", Statistics & Decisions 18, 49-78.
- [33] Janssen, A., (2000). "*Global power functions of goodness of fit tests*", The Annals of Statistics, Vol. 28, No. 1, 239-253.
- [34] Janssen, A., Rahnenführer, J. (2002). "*A Hazard-based approach to dependence tests for bivariate censored models*", Mathematical methods of statistics, Vol. 11, No. 3, 297-322.
- [35] Janssen, A., Werft, W., (2004). "*A survey about the efficiency of two-sample survival tests for randomly censored data*", Mitteilungen aus dem Mathematischen Seminar Giessen, Heft 254, 1-47.
- [36] Janssen, A. (2004). "*Asymptotic relative efficiency of tests at the boundary of regular statistical models*", Journal of Statistical Planning and Inference 126, 461-477.
- [37] Korolyuk, V.S., Borovskikh, Yu.V. (1994). "*Theory of U-statistics*", Kluwer Academic Publishers.
- [38] Morgenstern, D., (2001). "*Proof of a conjecture by Walter Deuber concerning the distances between points of two types in $\mathbb{R}^d$* ", Discrete Math. 226, 347-349.
- [39] Meise, R., Vogt, D. (1992). "*Einführung in die Funktionalanalysis*", Verlag Vieweg.
- [40] Ostrovski, V., (2004). "*Zur Cramér-Rao Ungleichung*", Universität Düsseldorf, Diplomarbeit.
- [41] Pfanzagl, J., Wefelmeyer, W., (1985). "*Asymptotic Expansions for General Statistical Models*", Lecture Notes in Statistics, 31, Springer-Verlag.
- [42] Pfanzagl, J. (1994). "*Parametric Statistical Theorie*", Walter de Gruyter.
- [43] Rahnenführer, J., (1999). "*Tests auf Unabhängigkeit in bivariaten Hazardmodellen mit zensierten Daten*", dissertation.de, Verlag im Internet.
- [44] Romano, P.J., (2005). "*Optimal testing of equivalence hypotheses*", The Annals of Statistics, Vol. 33, No. 3, 1036-1047.

- [45] Strasser, H., (1985). "*Einführung in die lokale asymptotische Theorie der Statistik*", Bayreuther Mathematische Schriften, Heft 19.
- [46] Strasser, H., (1985). "*Mathematical Theory of Statistics*", Walter de Gruyter.
- [47] Strasser, H., (1989). "*Tangent vectors for models with independent but not identically distributed observations*", Statistics & Decisions 7, 127-152.
- [48] Strasser, H., (1998). "*Differentiability of statistical experiments*", Statistics & Decisions, 16, 113-130.
- [49] van der Vaart, A.W. (1988). "*Statistical Estimation in Large Parameter Spaces*", CWI Tract, Vol. 44, Center for Mathematics and Computer Science, Amsterdam.
- [50] van der Vaart, A.W. (1991). "*An asymptotic representation theorem*", International Statistical Review, 59, 1, 97-121.
- [51] van der Vaart, A.W. (1998). "*Asymptotic Statistics*", Cambridge University Press.
- [52] Witting, H., (1985). "*Mathematische Statistik I*", B.G. Teubner.
- [53] Witting, H., Nölle, G., (1970). "*Angewandte Mathematische Statistik*", B.G. Teubner.
- [54] Witting, H., Müller-Funk, U., (1995). "*Mathematische Statistik II*", B.G. Teubner.
- [55] Xie, J., Priebe, C.E., (2002). "*A weighted generalization of the Mann-Whitney-Wilcoxon statistic*", Journal of Statistical Planning and Inference, 102, 441-466.

Die hier vorgelegte Dissertation habe ich eigenständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt. Die Dissertation wurde in der vorgelegten oder in ähnlicher Form noch bei keiner anderen Institution eingereicht. Ich habe bisher keine erfolglosen Promotionsversuche unternommen.

Düsseldorf, den 17.02.2006
Vladimir Ostrovski.