Lösende Operatoren für lineare Differentialgleichungssysteme auf Gevrey-Klassen und Phragmén-Lindelöf Bedingungen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung des Doktorgrades der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Marcus-Bernhard Hermanns

aus Ratingen

Ratingen 2005

Gedruckt mit Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Düsseldorf

1. Referent: Prof. Dr. R. Meise
2. Referent: Prof. Dr. D. Vogt

Tag der mündlichen Prüfung: 27. Januar 2005

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In den 50er Jahren warf Schwartz die Frage auf, für welche offenen Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und welche $p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ der lineare, partielle Differentialoperator $p(D) : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ bzw. $p(D) : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ eine stetige, lineare Rechtsinverse besitzt; das ist eine stetige, lineare Abbildung R für die

$$p(D)R(g) = g \quad \text{für alle } g \in C^\infty(\Omega) \text{ bzw. alle } g \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Grothendieck bewies (siehe [**40**]), dass elliptische Differentialoperatoren für $n \geq 2$ keine stetige, lineare Rechtsinverse besitzen; weitere negative Antworten von Cohoon und D. Vogt finden sich in [**14**], [**15**], [**41**] und [**42**].

In [**28**], [**29**] und [**33**] lösten R. Meise, B. A. Taylor und D. Vogt das von L. Schwartz gestellte Problem. Für offene, konvexe Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ charakterisierten sie unter anderem diejenigen $p(D) : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ (bzw. $\mathcal{D}'(\Omega)$ statt $C^\infty(\Omega)$), welche eine stetige, lineare Rechtsinverse haben, durch eine Phragmén-Lindelöf-Bedingung $\mathbf{PL}(\boldsymbol{\Omega}, \log)$ (siehe 1.7) an die Varietät $V(p)$.

Weiterhin verallgemeinerten sie ihre Ergebnisse in [**30**] auf Räume von ultradifferenzierbaren Funktionen $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$ und zugehörigen Ultradistributionen $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ und $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega)$, wie sie in Braun, Meise, Taylor [**11**] (und hier in 1.3, 1.4) als Verallgemeinerung der Gevrey-Klassen eingeführt werden.

V.P. Palamodov betrachtete lineare Differentialgleichungssyteme mit konstanten Koeffizienten, also für eine $s_1 \times s$-Matrix p mit Werten in $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$

$$p(D)f = g \quad \text{für } f \in C^\infty(\Omega)^s \text{ und } g \in C^\infty(\Omega)^{s_1} \text{ (bzw. } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ statt } C^\infty(\Omega)), \tag{1}$$

$p(D)$ muss offenbar nicht mehr surjektiv sein, aber für offenes, konvexes Ω gilt nach [**37**] Chapter VII, §7, No. 1, Def.1 und No.3, Corollary 2

$$p(D)C^\infty(\Omega)^s = \mathrm{Kern}(p_1(D) : C^\infty(\Omega)^{s_1} \to C^\infty(\Omega)^{s_2}) \quad \text{(bzw. } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ statt } C^\infty(\Omega)), \tag{2}$$

wenn man $s_2 \in \mathbb{N}$ und p_1 als $s_2 \times s_1$-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ so wählt, dass

$$p_1^t\, \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^{s_2} = \mathrm{Kern}(p^t : \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^{s_1} \to \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^s). \tag{3}$$

Palamodov gelang in [**36**] die Charakterisierung der Operatoren mit einer stetigen, linearen Rechtsinversen auf Bild $p(D)$ im Fall der C^∞-Funktionen und der Schwartzschen Distributionen durch Phragmén-Lindelöf-Bedingungen $\mathbf{PL}(\boldsymbol{\Omega}, \log)$ an die zur Matrix p assoziierten Varietäten $V(P_\gamma)$ (siehe 1.5 und Kapitel 8).

In einem allgemeineren Rahmen erabeiteten P. Domański und D. Vogt in [**16**] (Example 3.3 und Theorem 5.2) und [**17**] (Theorem 1 und Theorem 3) für Systeme wie (1) eine äquivalente Bedingung zur Existenz von stetigen, linearen Rechtsinversen, welche dort „strikte Graduiertheit“ bzw. „Striktheit“ genannt wird. Diese Bedingung fordert, dass zu jedem vorgegebenen Kompaktum K in Ω, ein weiteres Kompaktum K' existiert, so dass jede

Nulllösung auf K' auf jedes größere Kompaktum K'' in Ω so fortsetzbar ist, dass sie auf K unverändert bleibt (vergleiche mit 2.2). Für offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ untersuchte D. Vogt in [**43**] unter anderem Systeme von $C^\infty(\Omega)$-Funktionen. Er gab in [**43**] 7.4(2) eine ,,duale Charakterisierung" für die Existenz von stetigen, linearen Rechtsinversen an, die für konvexes Ω zu den von Palamodov gefundenen PL-Bedingungen an assoziierte Varietäten äquivalent ist. Liegt eine Differentialgleichung und eine offene Menge Ω vor, entspricht die ,,duale Charakterisierung" der Bedingung ,,p-Konvexität mit Schranken" aus [**29**] Lemma 2.5, die äquivalent ist zur Existenz von stetigen, linearen Rechtsinversen.

In der vorliegenden Arbeit wird Palamodovs Ergebnis von $C^\infty(\Omega)$ auf die Räume $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$ und von $\mathcal{D}'(\Omega)$ auf $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$, $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega)$ (siehe 1.12, 1.13) übertragen. Auch die Bedingung $\mathbf{PL}(\mathbf{\Omega}, \log)$ verallgemeinert sich zu einer von ω abhängigen Bedingung $\mathbf{PL}(\mathbf{\Omega}, \omega)$. Wir gehen ähnlich wie Palamodov in [**36**] vor, jedoch ersetzen wir größere Teile der von Palamodov verwendeten homologischen Algebra (freie Auflösung, Spalten, Stratifikation sowie Garben) hier durch für Analytiker zugänglichere Argumente. Desweiteren bestimmen wir die assoziierten Primideale P_γ (siehe 1.5) für viele Fälle in Kapitel 8 konkret. Eine wichtige Rolle im Beweis für Systeme nehmen die Noether-Operatoren ein, die hier nicht wie in Palamodov's Buch [**37**], sondern gemäß Hansen [**20**] benutzt werden. Viele technische Kniffe in Bezug auf Gewichtsfunktionen sind aus Meise, Taylor, Vogt [**27**], [**30**] und [**31**] übernommen; im Umgang mit Phragmén-Lindelöf-Bedingungen waren Meise, Taylor, Vogt [**32**] und [**34**] hilfreich.

Für den Fall einer Differentialgleichung ist seit langem bekannt, dass $p(D)$ auf $C^\infty(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$ bzw. den ultradifferenzierbaren Funktionen und Ultradistributionen auf konvexem Ω surjektiv ist. Im Roumieu-Fall ist jedoch der Operator $p(D) : \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega) \to \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$ im allgemeinen nicht surjektiv. Piccinini zeigte 1971 nach einer Vermutung von Cattabriga und De Giorgi, dass der Operator der Wärmeleitungsgleichung auf den reell-analytischen Funktionen in $\mathbb{R}^3$, welche $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^3)$ für $\omega(t) := t$ entsprechen, nicht surjektiv ist.

Im Jahr 1973 charakterisierte Hörmander [**22**] die surjektiven, partiellen Differentialoperatoren auf den reell-analytischen Funktionen auf einem konvexen Gebiet in $\mathbb{R}^n$ durch Bedingungen, die er wegen der Ähnlichkeit zu einem klassichen Satz als Phragmén-Lindelöf-Bedingungen bezeichnete. Andreotti und Nacinovich [**1**] übertrugen Hörmanders Ergebnis auf Systeme von Differentialgleichungen auf reell-analytischen Funktionen. Cattabriga und Zampieri zeigten, dass für die Gevrey-Klassen $\Gamma^d(\Omega)$, welche vom Typ $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$ sind, die Surjektivität eines Operators vom Exponenten d (bzw. vom Gewicht ω) abhängen kann.

Braun, Meise und Vogt [**12**] gaben für $\Omega = \mathbb{R}^n$ und dann Braun [**8**] für jede offene, konvexe Menge Ω eine Charakterisierung für die surjektiven Differentialoperatoren auf nicht quasianalytischen Roumieu-Klassen $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$ durch $(\mathbf{PL})_{\{\omega\}}(\mathbf{\Omega})$ (siehe 1.7 und [**8**] 4.1.2) an. Ebenfalls für nicht quasianalytische Roumieu-Klassen gelang Langenbruch [**26**] die Charakterisierung der surjektiven Operatoren $p(D)$ auf $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$ für alle offenen Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ durch eine Bedingung, die die Existenz von geeigneten Fundamentallösungen von $p(D)$ fordert. Schließlich zeigte Rösner [**39**] für offenes und konvexes Ω, dass Brauns Ergebnis auch für quasianalytische Roumieu-Klassen richtig ist.

In der vorliegenden Arbeit wird Rösners Ergebnis auf Systeme von Differentialgleichungen übertragen (siehe 1.15). Wir erhalten, dass für jede Gewichtsfunktion ω genau dann

$$p(D)\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^s = \mathrm{Kern}(p_1(D) : \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^{s_1} \to \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^{s_2})$$

gilt, wenn die Phragmén-Lindelöf-Bedingung $(\mathbf{PL})_{\{\omega\}}(\mathbf{\Omega})$ für alle zu p assoziierten Varietäten $V(P_\gamma)$ (siehe 1.5) erfüllt ist.

Die Arbeit ist so aufgebaut, dass die oben beschriebenen drei Hauptsätze 1.12, 1.13 und 1.15 im ersten Kapitel vorangestellt werden.

Die ersten beiden Hauptsätze werden durch das Erabeiten von äquivalenten Bedingungen in den Kapiteln zwei bis sechs bewiesen.

Im Einzelnen sehen wir dabei in Kapitel 2 mit der Theorie des projektiven Funktors ein, dass die Existenz einer stetigen, linearen Rechtsinversen für $p(D)$ (wie in [**29**] Lemma 2.1) äquivalent zu einer „Fortsetzbarkeits"-Bedingung ist, welche besagt, dass man Nulllösungen von $p(D)$ auf einem Kompaktum K' zu Nulllösungen auf grösseren Kompakta K'' mittels eines stetigen, linearen Operators fortsetzen kann, so dass sie auf einem vorgegebenen kleineren Kompaktum K unverändert bleiben. Dass diese „Fortsetzbarkeits"-Bedingung auch hinreichend für die Existenz einer stetigen, linearen Rechtsinversen ist, wird wie in [**36**] mit Hilfe des Satzes von Palamodov und dem Verschwinden von proj^1 für ein geeignetes Spektrum von Vektorräumen gezeigt.

P. Domański und D. Vogt erarbeiteten in [**16**] (Example 3.3 und Theorem 5.2) und [**17**] (Theorem 1 und Theorem 3) ebenfalls eine äquivalente Bedingung zur Existenz von stetigen, linearen Rechtsinversen, welche dort „strikte Graduiertheit" beziehungsweise „Striktheit" genannt wird. Diese Bedingung fordert auch, daß eine „Fortsetzung" wie in der obigen „Fortsetzbarkeits"-bedingung möglich ist; jedoch muß diese „Fortsetzung" nicht durch einen stetigen Operator geschehen.

Im folgenden betrachte man den Kern von $p(D)$ auf $K \subset\subset \Omega$. Dabei bedeutet diese Schreibweise, dass K konvex, kompakt mit nichtleerem Inneren ist. Man erhält in Kapitel 3 mittels Dualisierung und Fourier-Laplace-Transformation

$$\begin{aligned}(\mathrm{Kern}(p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(K)^s \to \mathcal{E}_{(\omega)}(K)^{s_1}))' &\cong \mathcal{E}_{(\omega)}(K)'^s / p^t(-D)\mathcal{E}_{(\omega)}(K)'^{s_1} \\ &\cong \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^s / p^t \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_1},\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{A}_{(\omega)}(K)$ ganze Funktionen mit bestimmten Wachstumseigenschaften sind. Dies gilt entsprechend auch für $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}(K)$ und $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(K)$. Im Fall der ultradifferenzierbaren Funktionen $\mathcal{E}_{(\omega)}(K)$ und $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)$ induziert ein Differentialoperator mit Polynomkoeffizienten N, ein sogenannter Noetheroperator zu p, einen Isomorphismus

$$\mathcal{A}_{(\omega)}(K)^s / p^t \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_1} \cong \mathcal{H}_{(\omega)}(K) \quad \text{(entsprechend für den Fall } \mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)),$$

wobei $\mathcal{H}_{(\omega)}(K)$ (siehe 4.19) bestimmte holomorphe Funktionen auf den zu p assoziierten Varietäten sind, die lokal als Bild des Noetheroperators N geschrieben werden können. Im Fall der Ultradistributionen $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ und $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega)$ findet man nicht wie im vorigen Fall Isomorphismen, wenn die Gewichtsfunktion nicht stark (siehe 1.2) ist. Durch schlechtere Abschätzungen gegen plurisubharmonische Funktionen (siehe 4.32) erhält man hier nur Äquivalenz der Spektren $(\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)^s / p^t \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)^{s_1})_{K \subset\subset \Omega}$ und $(\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K))_{K \subset\subset \Omega}$ (entsprechend für den Fall $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(K)$). Insgesamt folgt, dass die „Fortsetzbarkeits"-Bedingung aus Kapitel 2 äquivalent ist zu folgender Bedingung (vergleiche mit 4.20)

Zu jedem $K \subset\subset \Omega$, existiert ein $K' \subset\subset \Omega$ mit $\mathring{K}' \supset K$, so dass für alle $K'' \subset\subset \Omega$ mit $\mathring{K}'' \supset K'$ eine stetige, lineare Fortsetzung b der Inklusion

$$\mathcal{H}_{(\omega)}(K) \hookrightarrow \mathcal{H}_{(\omega)}(K')$$

auf $\mathcal{H}_{(\omega)}(K'')$ existiert (entsprechend für $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ und $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega)$).

In Kapitel 5 ermöglichen die schwachen Phragmén-Lindelöf-Bedingungen die Konstruktion der besagten Operatoren b. Dabei wird die Nuklearität der Räume $\mathcal{H}_{(\omega)}(K)$ von holomorphen Funktionen auf Varietäten zusammen mit den schwachen Phragmén-Lindelöf-Bedingungen benutzt, um eine Inklusion als nuklear zu identifizieren und damit eine stetige, lineare Fortsetzung b_0 (bzw. b_1) zu finden (siehe 5.3, 5.4). Schließlich konstruiert man b aus dieser Fortsetzung mittels Integration in Räumen von holomorphen Funktionen auf Varietäten (siehe 5.11, 5.12).

Existieren Operatoren b zwischen Räumen von holomorphen Funktionen auf den zu p assoziierten Varietäten wie in Kapitel 4, dann wird in Kapitel 6 mit Hilfe dieser Operatoren und der speziellen Eigenschaften des Noetheroperators N aus 6.1 gezeigt, dass diese Varietäten die Phragmén-Lindelöf-Bedingungen erfüllen.

In Kapitel 7 wird der dritte Hauptsatz 1.15 unter Rückgriff auf Ergebnisse der vorherigen Kapitel mit der Theorie des proj-Funktors bewiesen. Dazu wird wie bei Roesner [**39**] die äquivalente Bedingung $(\mathbf{P_2})^*$ (siehe 7.6) aus [**45**] 3.10 benutzt.

Im achten Kapitel zeigen wir zunächst, dass die assoziierten Varietäten einer regulären, quadratischen Matrix gerade die Nullstellenmengen aller irreduziblen Faktoren von $\det p$ sind (siehe 8.5). Da diese Varietäten 1-codimensional sind, kann man im Fall $\Omega = \mathbb{R}^3$ nach einem in [**10**] beschriebenen Algorithmus entscheiden, ob das quadratische System eine stetige, lineare Rechtsinverse besitzt.

Desweiteren gibt es zu jeder Menge von irreduziblen Varietäten eine Matrix p, die genau diese als assoziierte Varietäten hat. Für unterbestimmte Systeme läßt sich zeigen, dass eine Rechtsinverse existiert, wenn nur der größte gemeinsame Teiler aller m-Minoren von p als Differentialoperator eine Rechtsinverse auf $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ (bzw. $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\omega)$ oder $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega)$) besitzt. Wir erhalten daraus, dass der Operator einer Gleichung mit s Unbekannten

$$\sum_{i=1}^{s} a_i(D) f_i = g$$

genau dann eine stetige, lineare Rechtsinverse hat, wenn $\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n)(D)$ eine hat. Schließlich wenden wir die gewonnen Erkenntnisse zur Untersuchung einiger konkreten Operatoren aus Physik und Mathematik an.

An dieser Stelle möchte ich mich recht herzlich bei Prof. Dr. Meise für das interessante und herausfordernde Thema und die ausgezeichnete Betreuung bedanken.

KAPITEL 1

Formulierung der Hauptsätze

1.1. **Bezeichnungen.** Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ seien $\mathcal{P} := \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir setzen für $z \in \mathbb{C}^n$

$$|z| := \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\operatorname{Im} z := (\operatorname{Im} z_i)_{i=1,\ldots,n}$$
$$\langle x, z \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i z_i, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$K \subset\subset \Omega$ bedeute, dass K eine nichtleere, kompakte Teilmenge von Ω ist. Wir definieren

$$C^\infty(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist beliebig oft differenzierbar } \}$$
$$D(\Omega) := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{Supp}(f) \text{ kompakt in } \Omega \}$$
$$D(K) := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{Supp}(f) \subset K \},$$

wobei $\operatorname{Supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}$. $C^\infty(\Omega)$ wird mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz von f und allen seinen Ableitungen auf den kompakten Teilmengen von Ω zu einem Fréchetraum. Für die genaue Konstruktion, die zugehörige Metrik beziehungsweise ein zugehöriges Halbnormensystem sei auf [**35**] 5.18(4) verwiesen. Man bezeichnet einen Fréchetraum, welcher ein Schwartzraum (siehe [**35**] Definition vor 24.17) beziehungsweise ein nuklearer Raum (siehe [**35**] §28) ist, als *(FS)-Raum* beziehungsweise *(FN)-Raum* und dessen Dualraum (versehen mit der starken Topologie) mit *(DFS)-Raum* beziehungsweise *(DFN)-Raum*.

Die folgenden Definitionen sind aus [**11**] 1.1, 1.3, 3.1 und 4.1 übernommen, wobei hier $\omega(0) > 0$ ist. In [**11**] wird $\omega|_{[0,1]} \equiv 0$ gefordert. Eine Abänderung der Werte von ω in $[0, 1]$ bewirkt keine Veränderung der später definierten ultradifferenzierbaren Funktionen und Ultradistributionen in 1.3 und 1.4; daher ist dies zulässig.

1.2. **Definition.** Für eine stetige, monoton wachsende Funktion $\omega : [0, \infty[\to]0, \infty[$ definieren wir die Bedingungen

(α) Es gibt ein $C \geq 1$, so dass für alle $t \geq 0$: $\quad \omega(2t) \leq C(1 + \omega(t))$,
(β) $\int_1^\infty \frac{\omega(t)}{1+t^2}\, dt < \infty$,
(γ) $\log(1 + t) = o(\omega(t))$, d.h. $\lim_{t\to\infty} \frac{\log(1+t)}{\omega(t)} = 0$
(δ) $\varphi_\omega : [0, \infty[\to [0, \infty[,\ \varphi_\omega(t) := \omega(e^t)$ ist konvex.
(ε) $\omega(t) = O(t)$, d.h. $\exists c,\ d > 0,\ \forall t \geq d : \quad \omega(t) \leq ct$
(σ) Es gibt ein $K > 0$ mit $\int_1^\infty \frac{\omega(yt)}{t^2}\, dt \leq K\omega(y) + K$ für alle $y > 0$.

ω heißt *Gewichtsfunktion*, wenn die Bedingungen (α), (γ), (δ) und (ε) erfüllt sind. Eine Gewichtsfunktion ω heißt *nicht quasianalytisch*, falls (β) erfüllt ist. Ansonsten heißt sie *quasianalytisch*. Eine Gewichtsfunktion heißt *stark*, falls (σ) erfüllt ist. Offenbar ist jede starke Gewichtsfunktion nicht quasianalytisch.

Für $z \in \mathbb{C}^n$ schreiben wir kurz $\omega(z)$ für $\omega(\sum_{j=1}^n |z_j|)$. Zu φ_ω aus (δ) definieren wir die *Young-Konjugierte* $\varphi_\omega^* : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_\omega^*(y) := \sup_{x \geq 0}(xy - \varphi_\omega(x))$$

1.3. **Definition.** Sei ω eine Gewichtsfunktion und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definierten für $K \subset\subset \Omega$ mit $K = \overline{\overset{\circ}{K}} \neq \emptyset$ und $\lambda > 0$, wenn $f \in C^\infty(K)$ (siehe [**35**] 5.16(6)):

$$p_{K,\lambda,\omega}(f) := \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0 \\ x \in K}} |f^{(\alpha)}(x)| e^{-\lambda \varphi_\omega^*(\frac{|\alpha|}{\lambda})}$$

Wir setzen

$$\mathcal{E}_{(\omega)}(K) := \{f \in C^\infty(K) \mid \forall m \in \mathbb{N} : \ p_{K,m,\omega}(f) < \infty\},$$

wobei die Halbnormen $(p_{K,m,\omega})_{m \in \mathbb{N}}$ die Topologie induzieren. Der Raum

$$\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K) := \{f \in C^\infty(K) \mid \exists m \in \mathbb{N} : \ p_{K,\frac{1}{m},\omega}(f) < \infty\}.$$

sei versehen mit der induktiven Limestopologie. Ferner definieren wir:

$$\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \forall K \subset\subset \Omega, \forall m \in \mathbb{N} : \ p_{K,m,\omega}(f) < \infty\}.$$

und

$$\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \forall K \subset\subset \Omega, \exists m \in \mathbb{N} : \ p_{K,\frac{1}{m},\omega}(f) < \infty\}$$

Die Topologie von $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ wird durch die Halbnormen $p_{K,m,\omega}$ gegeben, wobei K in Ω kompakt und $m \in \mathbb{N}$. Man erhält die Topologie von $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$, indem zunächst der induktiven Limes über $m \in \mathbb{N}$, und dann der projektiven Limes über alle Kompakta K in Ω gebildet wird. Die Elemente von $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$ heißen *ω-ultradifferenzierbare Funktionen vom Roumieu-Typ* auf Ω, die Elemente von $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ nennt man *ω-ultradifferenzierbare Funktionen vom Beurling-Typ* auf Ω.

1.4. **Definition.** Sei ω eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion.

(a) Für $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ definieren wir den Banachraum

$$\mathcal{D}_{\lambda,\omega}(K) := \left\{ f \in \mathcal{D}(K) \;\middle|\; \|f\|_{\lambda,\omega} := \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)| e^{\lambda\omega(x)} \, d\lambda^n(x) < \infty \right\}$$

wobei $\hat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle x,y \rangle} d\lambda^n(y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, die Fouriertransformierte von f ist.

(b) Wir setzen

$$\mathcal{D}_{\{\omega\}}(K) := \operatorname{ind}_{\lambda \to 0} \mathcal{D}_{\lambda,\omega}(K), \qquad \mathcal{D}_{(\omega)}(K) := \operatorname{proj}_{\lambda \to \infty} \mathcal{D}_{\lambda,\omega}(K)$$

und versehen den ersten Raum mit der induktiven Limestopologie und den zweiten mit der projektiven Limestopologie.

(c) Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir ferner

$$\mathcal{D}_{\{\omega\}}(\Omega) := \operatorname{ind}_{K \subset\subset \Omega} \mathcal{D}_{\{\omega\}}(K), \qquad \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) := \operatorname{ind}_{K \subset\subset \Omega} \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$$

Beide Räume tragen die zugehörigen induktiven Limestopologien. Die Elemente des ersten Raums nennt man *Testfunktionen vom Roumieu-Typ*, die Elemente des zweiten heißen *Testfunktionen vom Beurling-Typ*. Die Elemente von $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega)$ (bzw. $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$) heißen *$\omega$-Ultradistributionen vom Roumieu-Typ* (bzw. *Beurling-Typ*). Wir werden auch $\mathcal{D}'_{(\omega)}(K)$ für kompaktes $K \subset \Omega$ betrachten. Man versieht diese Dualräume mit der starken Topologie.

1.5. **Definition und Bemerkung.** Sei M ein endlich erzeugter Modul über einem noetherschen Ring B. Für $x \in M$ sei

$$\operatorname{Ann} x := \{b \in B \mid bx = 0\}.$$

Die Menge der *zu M assoziierten Primideale* sei definiert als

$$\operatorname{Ass}_B(M) := \{\operatorname{Ann} x \subset B \mid x \in M, \operatorname{Ann} x \text{ ist Primideal}\}.$$

Die Menge $\operatorname{Ass}_B(M)$ ist endlich nach [**7**] chap. IV, §1, no.4, corollaire de théorème 2, weil M ein endlich erzeugter Modul über dem noetherschen Ring B ist. Ferner gilt nach [**7**] chap. IV, §1, no.1, corollaire 1,

$$\operatorname{Ass}_B(M) = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad M = \{0\}.$$

Für eine $s_1 \times s$-Matrix p in $\mathcal{P}$ heißen die Elemente von $\operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^s/p^t\mathcal{P}^{s_1})$ die *zu p assoziierten Primideale.*

In Kapitel 8 bestimmen wir für wichtige Beispiele die assoziierten Primideale.

1.6. **Definition.** Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $u : G \to [-\infty, \infty[$ heißt *subharmonisch*, falls

(1) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$: $f^{-1}([-\infty, \alpha[)$ ist offen (f halbstetig von oben),
(2) Für jedes $K \subset G$ kompakt und für jede stetige Funktion $h : K \to \mathbb{R}$, welche harmonisch in $\mathring{K}$ ist, mit $u \leq h$ auf ∂K gilt $u \leq h$ auf K.

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ offen, $v : G \to [-\infty, \infty[$ heißt *plurisubharmonisch*, falls

(1) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$: $f^{-1}([-\infty, \alpha[)$ ist offen (f halbstetig von oben),
(2) Für jedes $z, w \in \mathbb{C}^n$ ist die Funktion $\tau \mapsto v(z + \tau w)$ subharmonisch in dem Teil von $\mathbb{C}$, in dem sie definiert ist.

Eine algebraische Varietät W in $\mathbb{C}^n$ heißt *irreduzibel*, falls ein Primideal $Q \subset \mathcal{P}$ existiert mit $W = V(Q) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \forall g \in Q : g(z) = 0\}$. Im weiteren werden wir nur irreduziblen Varietäten sprechen, da alle auftretenden Varietäten algebraisch sind.

Eine von oben halbstetige Funktion $u : W \to [-\infty, \infty[$ heißt *plurisubharmonisch auf W*, falls für alle regulären Punkte $z \in W$ die Funktion

$$u \circ f : U \to [-\infty, \infty[$$

plurisubharmonisch auf U ist, für eine Karte $f : U \to W$ von z auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}^k$. Da die Klasse der plurisubharmonischen Funktionen invariant unter biholomorphen Abbildungen ist, hängt diese Definition nicht von der Wahl der speziellen Karte ab und stimmt für $W = \mathbb{C}^n$ mit der obigen Definition überein. Wir setzen daher

$$PSH(W) := \{u : W \to [-\infty, \infty[\mid u \text{ ist plurisubharmonisch auf } W\}.$$

Die holomorphen Funktionen auf W sind gegeben durch

$$H(W) := \{f : W \to \mathbb{C} \mid \forall w \in W, \exists U \ni w \text{ offen}, F \text{ holomorph auf } U : F|_{U \cap W} = f|_{U \cap W}\}$$

(Nach [20] 3.14, lassen sich diese zu ganzen Funktionen auf $\mathbb{C}^n$ fortsetzen)

1.7. **Definition.**
Das Stützfunktional eines Kompaktums $K \subset \Omega$ definieren wir durch

$$h_K(y) := \sup_{x\in K} \langle x, y\rangle \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n.$$

Eine irreduzible Varietät W erfüllt die Phragmén-Lindelöf-Bedingung $\mathbf{PL}(\boldsymbol{\Omega}, \omega)$, falls:

> Für jedes $K \subset\subset \Omega$ gibt es ein $K' \subset\subset \Omega$, so dass für alle $K'' \subset\subset \Omega$ ein $r > 0$ existiert, so dass für alle $u \in PSH(W)$:
>
> $$(a) \text{ und } (b) \quad \Rightarrow \quad (c)$$
>
> wobei
>
> $$\begin{array}{lll} (a) & \forall z \in W: & u(z) \le h_K(\operatorname{Im} z) + O(\omega(z)), \\ (b) & \forall z \in W: & u(z) \le h_{K''}(\operatorname{Im} z), \\ (c) & \forall z \in W: & u(z) \le h_{K'}(\operatorname{Im} z) + r\omega(z). \end{array}$$

Die schwächere Bedingung $\mathbf{WPL}(\boldsymbol{\Omega}, \omega)$ wird definiert, indem man (a) ersetzt durch

$$(a_0) \quad \forall z \in W: \quad u(z) \le h_K(\operatorname{Im} z) + O(1),$$

Die Bedingungen $\mathbf{APL}(\boldsymbol{\Omega}, \omega)$ und $\mathbf{AWPL}(\boldsymbol{\Omega}, \omega)$ sind so definiert, dass obige Aussagen nur für alle u von der Form $u = \log|f|$, $f \in H(\mathbb{C}^n)$ gelten müssen. Für eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion ω setzen wir

$$S_\omega := \left\{ \sigma \;\middle|\; \sigma \text{ nicht quasianalytische Gewichtsfunktion in } o(\omega), \text{ d.h. } \lim_{t\to\infty} \frac{\sigma(t)}{\omega(t)} = 0 \right\}.$$

Weiterhin sagen wir, W erfüllt die Bedingung $\mathbf{PL}(\boldsymbol{\Omega}, \{\omega\})$, wenn

> Für jedes $K \subset\subset \Omega$ gibt es ein $K' \subset\subset \Omega$, so dass für alle $K'' \subset\subset \Omega$ ein $\sigma \in S_\omega$ existiert, so dass für alle $u \in PSH(W)$:
>
> $$(\alpha) \text{ und } (\beta) \quad \Rightarrow \quad (\gamma)$$
>
> wobei
>
> $$\begin{array}{lll} (\alpha) & \forall z \in W: & u(z) \le h_K(\operatorname{Im} z) + o(\omega(z)), \\ (\beta) & \forall z \in W: & u(z) \le h_{K''}(\operatorname{Im} z), \\ (\gamma) & \forall z \in W: & u(z) \le h_{K'}(\operatorname{Im} z) + \sigma(z). \end{array}$$

$\mathbf{APL}(\boldsymbol{\Omega}, \{\omega\})$ ist für W erfüllt, wenn $\mathbf{PL}(\boldsymbol{\Omega}, \{\omega\})$ für alle u von der Form $\log|f|$ mit $f \in H(\mathbb{C}^n)$ gilt. Für ein Kompaktum $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ sei

$$PSH(W, \omega, K) := \{u \in PSH(W) \mid \forall \delta > 0: \sup_{z\in W} |u(z)| - h_K(\operatorname{Im} z) - \delta\omega(z) < \infty\},$$
$$A(W, \omega, K) := \{f \in H(W) \mid \log|f| \in PSH(W, \omega, K)\}.$$

Wir definieren die Bedingung $(\mathbf{PL})_{\{\omega\}}(\boldsymbol{\Omega})$ durch

> Für jedes $K \subset\subset \Omega$ gibt es $\delta > 0$ und $Q \subset\subset \Omega$, so dass für alle $\varepsilon > 0$ und $L \subset\subset \Omega$ Zahlen $\eta, c > 0$ existieren, so dass für alle $u \in PSH(V, \omega, K)$:
>
> $$(\alpha) \text{ und } (\beta) \quad \Rightarrow \quad (\gamma)$$
>
> wobei

(α) $\forall z \in V:$ $u(z) \le h_K(\operatorname{Im} z) + \delta\omega(z)$,
(β) $\forall z \in V:$ $u(z) \le h_L(\operatorname{Im} z) + \eta\omega(z)$,
(γ) $\forall z \in V:$ $u(z) \le h_Q(\operatorname{Im} z) + \varepsilon\omega(z) + c$.

V genügt $(\mathbf{APL})_{\{\omega\}}(\mathbf{\Omega})$, falls $(\mathbf{PL})_{\{\omega\}}(\mathbf{\Omega})$ für alle $u = \log|f|$ mit $f \in A(V,\omega,K)$ erfüllt ist.

1.8. **Bemerkung.** Man darf die Bedingung $\mathbf{PL}(\mathbf{\Omega},\omega)$ (bzw. $\mathbf{APL}(\mathbf{\Omega},\omega)$) (a) statt auf V auch auf $\mathbb{C}^n$ fordern und dabei zu Funktionen $u \in PSH(\mathbb{C}^n)$ übergehen. Dies wird nach dem Theorem 2.3 in [**32**] und in der Bemerkung nach Definition 2.5 in [**34**] festgestellt.

1.9. **Bemerkung.** Aufgrund von [**32**] Theorem 6.2 sind $\mathbf{PL}(\mathbf{\Omega},\omega)$ und $\mathbf{APL}(\mathbf{\Omega},\omega)$ äquivalent. Ferner sind $\mathbf{PL}(\mathbf{\Omega},\omega)$ und $\mathbf{WPL}(\mathbf{\Omega},\omega)$ äquivalent nach [**34**] Proposition 2.8 a.). Ersetzt man im Beweis von [**34**] Proposition 6.2 (1) $\Rightarrow$ (3) u durch $\log|f|$, $f \in H(V)$, dann folgt aus $\mathbf{APL}(\mathbf{\Omega},\{\omega\})$ die Bedingung $\mathbf{APL}(\mathbf{\Omega},\kappa)$ für ein $\kappa \in S_\omega$. Also gilt $\mathbf{PL}(\mathbf{\Omega},\kappa)$ und damit nach [**34**] Proposition 6.2 auch $\mathbf{PL}(\mathbf{\Omega},\{\omega\})$. Folglich sind $\mathbf{PL}(\mathbf{\Omega},\{\omega\})$ und $\mathbf{APL}(\mathbf{\Omega},\{\omega\})$ äquivalent.

1.10. **Bemerkung.** Braun zeigt in [**8**] 4.2.2 für jedes offene und konvexe $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und jede nicht quasianalytische Gewichtsfunktion ω (siehe 1.2) unter Benutzung von [**32**] 5.1, dass die Bedingungen $(\mathbf{APL})_{\{\omega\}}(\mathbf{\Omega})$ und $(\mathbf{PL})_{\{\omega\}}(\mathbf{\Omega})$ für eine n-1 dimensionale algebraische Varietät äquivalent sind. Zunächst geht nur $\omega = O(t)$ in diesen Beweis ein, weshalb wir diese Äquivalenz auch für alle Gewichtsfunktionen erhalten. Schließlich gilt der benutzte Satz [**32**] 5.1 für beliebige algebraische Varietäten und der Beweis [**8**] 4.2.2 läßt sich analog auf eine beliebige algebraische Varietät verallgemeinern. Also sind $(\mathbf{APL})_{\{\omega\}}(\mathbf{\Omega})$ und $(\mathbf{PL})_{\{\omega\}}(\mathbf{\Omega})$ äquivalent.

1.11. **Definition.** Sei p eine $s_1 \times s$-Matrix mit Einträgen in $\mathcal{P}$ und $D := (i\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,i\frac{\partial}{\partial x_n})$. Sei X einer der Räume aus 1.3 oder 1.4. Eine *stetige, lineare Rechtsinverse* zu

$$p(D): X^s \to X^{s_1}, \quad p(D)u := \Big(\sum_{j=1}^{s} p_{i,j}\Big(i\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,i\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)u_j\Big)_{i=1,\ldots,s_1}$$

auf $\operatorname{Bild} p(D)$ ist eine stetige, lineare Abbildung $R : \operatorname{Bild} p(i\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,i\frac{\partial}{\partial x_n}) \to X^s$ mit

$$p(D) \circ R = \mathrm{Id}_{\operatorname{Bild} p(D)}\,.$$

1.12. **Hauptsatz.** *Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, p eine $s_1 \times s$-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]$ und $D := (i\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,i\frac{\partial}{\partial x_n})$. Mit den Bezeichungen aus Definition 1.5 sei*

$$\operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^s/p^t\mathcal{P}^{s_1}) = (P_\gamma)_{\gamma=1,\ldots,\Gamma} \quad \text{und} \quad V(P_\gamma) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \forall q \in P_\gamma : q(z) = 0\}.$$

Dann sind für jede nicht quasianalysiche Gewichtsfunktion ω äquivalent:

$(\mathbf{I})_{\mathcal{E}_{(\omega)}}$ $p(D): \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^{s_1}$ *hat eine stetige, lineare Rechtsinverse auf* $\operatorname{Bild} p(D)$

$(\mathbf{I})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$ $p(D): \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)^s \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)^{s_1}$ *hat eine stetige, lineare Rechtsinverse auf* $\operatorname{Bild} p(D)$

$(\mathbf{II})$ $\forall\gamma = 1,\ldots,\Gamma$ *: $V(P_\gamma)$ erfüllt* $\mathbf{APL}(\mathbf{\Omega},\omega)$ *(bzw.* $\mathbf{PL}(\mathbf{\Omega},\omega)$ *oder* $\mathbf{WPL}(\mathbf{\Omega},\omega)$*)*

$(\mathbf{II})_{\mathbf{W}}$ $\forall\gamma = 1,\ldots,\Gamma$ *: $V(P_\gamma)$ erfüllt* $\mathbf{AWPL}(\mathbf{\Omega},\omega)$.

Bemerkung. *In den folgenden Kapiteln werden diese Äquivalenzen schrittweise bewiesen. Für eine Aufzählung der benötigten Sätze siehe Korollar 6.11. Es werden äquivalente Bedingungen* $(\mathbf{IV})_{\mathbf{F}}$, $(\mathbf{V})_{\mathbf{F}}$, $(\mathbf{VI})_{\mathbf{F}}$ *und* $(\mathbf{VII})_{\mathbf{F}}$ *für $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$ und $F = \mathcal{D}'_{(\omega)}$ definiert (siehe Definition 2.2, 3.5 und 4.20). In Kapitel 2 wird die Äquivalenz von* $(\mathbf{I})_{\mathbf{F}}$ *zu* $(\mathbf{V})_{\mathbf{F}}$ *gezeigt.*

Die Äquivalenz von $(\mathbf{V})_{\mathbf{F}}$ *zu* $(\mathbf{VI})_{\mathbf{F}}$ *wird in Kapitel 3 und die Äquivalenz von* $(\mathbf{VI})_{\mathbf{F}}$ *zu* $(\mathbf{VII})_{\mathbf{F}}$ *in Kapitel 4 gezeigt. In Kapitel 5 folgern wir* $(\mathbf{VII})_{\mathbf{F}}$ *für* $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$ *und* $F = \mathcal{D}'_{(\omega)}$ *aus* $(\mathbf{II})_{\mathbf{W}}$. $(\mathbf{II})$ *folgt in Kapitel 6 aus* $(\mathbf{VII})_{\mathcal{E}_{(\omega)}}$ *beziehungsweise* $(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$. *Dann ist der Hauptsatz bewiesen, da offenbar* $(\mathbf{II})_{\mathbf{W}}$ *aus* $(\mathbf{II})$ *folgt. In Kapitel 8 wird darauf eingegangen, wie man in wichtigen Fällen die assoziierten Primideale* $(P_\gamma)_{\gamma=1,\ldots,\Gamma}$ *einer Polynommatrix erhält und welche Folgerungen sich für die Existenz einer stetigen, linearen Rechtsinverse für* $p(D)$ *ziehen lassen.*

1.13. **Hauptsatz.** *Unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes 1.12 sind für jede nicht quasianalytische Gewichtsfunktion* ω *äquivalent:*

$(\mathbf{I})_{\mathcal{E}_{\{\omega\}}}$ $p(D) : \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^s \to \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^{s_1}$ *hat eine stetige, lineare Rechtsinverse auf* $\operatorname{Bild} p(D)$

$(\mathbf{I})_{\mathcal{D}'_{\{\omega\}}}$ $p(D) : \mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega)^s \to \mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega)^{s_1}$ *hat eine stetige, lineare Rechtsinverse auf* $\operatorname{Bild} p(D)$

$(\mathbf{III})$ $\forall \gamma = 1, \ldots, \Gamma : V(P_\gamma)$ *erfüllt* $\mathbf{APL}(\boldsymbol{\Omega}, \{\omega\})$ *(bzw.* $\mathbf{PL}(\boldsymbol{\Omega}, \{\omega\})$*)* .

Bemerkung. *Dieser zweite Haupsatz wird parallel zum ersten bewiesen. Die benötigten Sätze sind in 6.12 zitiert. In Kapitel 5 und 6 tritt dabei* $(\mathbf{III})$ *and die Stelle der Bedingungen* $(\mathbf{II})$ *und* $(\mathbf{II})_{\mathbf{W}}$ *des ersten Haupsates 1.12.*

1.14. **Bezeichnung.** Sei p die $s_1 \times s$-Matrix in $\mathcal{P}$ aus dem Hauptsatz 1.12 . Der Kern der Matrixmultiplikation $p^t : \mathcal{P}^{s_1} \to \mathcal{P}^s$ (als $\mathcal{P}$-Modul) ist nach [**19**] Definition 2.1.27 und Proposition 2.1.29 endlich erzeugt. Also gibt es ein $s_2 \in \mathbb{N}$ und eine $s_2 \times s_1$-Matrix p_1 mit Einträgen in $\mathcal{P}$, so dass

$$p_1^t \mathcal{P}^{s_2} = \operatorname{Kern} p^t. \tag{4}$$

Dies impliziert, dass

$$p_1(D) \circ p(D) = (p_1 \cdot p)(D) = (p^t \cdot p_1^t)^t(D) = 0. \tag{5}$$

1.15. **Hauptsatz.** *Unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes 1.12 sind mit den Bezeichnungen aus 1.14 für jede Gewichtsfunktion* ω *äquivalent:*

$(\mathbf{A})$ $p(D)\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^s = \operatorname{Kern}(p_1(D) : \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^{s_1} \to \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^{s_2})$

$(\mathbf{B})$ $\forall \gamma = 1, \ldots, \Gamma :$ $V(P_\gamma)$ *erfüllt* $(\mathbf{APL})_{\{\omega\}}(\boldsymbol{\Omega})$ *(bzw.* $(\mathbf{PL})_{\{\omega\}}(\boldsymbol{\Omega})$*)* .

Bemerkung. *Dieser dritte Hauptsatz wird in Kapitel 7 im Satz 7.6 bewiesen.*

1.16. **Korollar.** *Mit den Bezeichnungen der Hauptsätze 1.12 und 1.13 sind äquivalent:*

(a) $(\mathbf{I})_{\mathcal{E}_{\{\omega\}}}$
(b) $(\mathbf{I})_{\mathcal{D}'_{\{\omega\}}}$
(c) $\exists \kappa \in S_\omega$: $(\mathbf{I})_{\mathcal{E}_{(\kappa)}}$
(d) $\exists \kappa \in S_\omega$: $(\mathbf{I})_{\mathcal{D}'_{(\kappa)}}$

Ferner gilt für jede nicht quasianalytische Gewichtsfunktion σ *mit* $\sigma \geq \omega$:

$$(\mathbf{I})_{\mathcal{E}_{(\omega)}} \Rightarrow (\mathbf{I})_{\mathcal{E}_{(\sigma)}}$$

Dies gilt auch, wenn man $(\mathbf{I})_{\mathcal{E}_{(\omega)}}$ *(und entsprechend* $(\mathbf{I})_{\mathcal{E}_{(\sigma)}}$*) durch* $(\mathbf{I})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$, $(\mathbf{I})_{\mathcal{E}_{\{\omega\}}}$ *oder* $(\mathbf{I})_{\mathcal{D}'_{\{\omega\}}}$ *ersetzt. Weiterhin gilt im Fall der Existenz einer stetigen, linearen Rechtsinversen für* $p(D)$ *und* $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ *und* $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$

$$p(D)F(\Omega)^s = \operatorname{Kern}(p_1(D) : F(\Omega)^{s_1} \to F(\Omega)^{s_2})$$

für die in 1.14 erklärte Polynommatrix p_1.

Beweis. Die erste Äquivalenz folgt aus den Hauptsätzen 1.12 und 1.13 zusammen mit [**34**] Proposition 6.2 . Die zweite Aussage gilt nach [**34**] Corollary 2.9 . Die letzte Identität folgt aus 2.21. □

KAPITEL 2

Äquivalenz zu einer „Fortsetzbarkeits"-Bedingung

In diesem Kapitel ist ω stets eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion im Sinne von 1.2 und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex.

Notwendigkeit der „Fortsetzbarkeits"-Bedingung $(IV)_F$

2.1. **Bezeichnungen.** Wir wählen eine Folge $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ kompakter, konvexer Mengen in $\mathbb{R}^n$ mit nichtleerem Inneren und folgenden Eigenschaften:

(1) $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i = \Omega$,
(2) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ gelte: $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$,

Wir definieren für p aus dem Hauptsatz 1.12

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kern}_i(\mathcal{E}_{(\omega)}) &:= \mathrm{Kern}(p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)^s \to \mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)^{s_1}) \\
\mathrm{Kern}_i(\mathcal{D}'_{(\omega)}) &:= \mathrm{Kern}(p(D) : \mathcal{D}'_{(\omega)}(K_i)^s \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(K_i)^{s_1}) \\
\mathrm{Kern}_i(\mathcal{D}'_{\{\omega\}}) &:= \mathrm{Kern}(p(D) : \mathcal{D}'_{\{\omega\}}(K_i)^s \to \mathcal{D}'_{\{\omega\}}(K_i)^{s_1}) \\
\mathrm{Kern}_i(\mathcal{E}_{\{\omega\}}) &:= \mathrm{Kern}(p(D) : \mathcal{E}_{\{\omega\}}(K_i)^s \to \mathcal{E}_{\{\omega\}}(K_i)^{s_1}),
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Definition ω auch eine Gewichtsfunktion sein darf (wird erst in den Kapiteln 3 und 4 im Hinblick auf Kapitel 7 benötigt). Die Einschränkung von K_j auf K_i heiße für $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ bzw. $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$ und $r \in \mathbb{N}$

$$\iota_j^i : F(K_j)^r \to F(K_i)^r, \quad f \mapsto (f_k|_{K_i})_{k=1,\ldots,r},$$

(dabei ist im Distributionsfall die Einschränkung auf $\mathcal{D}_{(\omega)}(K_i)$ bzw. $\mathcal{D}_{\{\omega\}}(K_i)$ gemeint). Ferner definiert man für zwei lokalkonvexe Räume X, Y den Vektorraum

$$L(X,Y) := \{\varphi : X \to Y \mid \varphi \text{ ist linear und stetig}\}.$$

2.2. **Definition.** Für $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ bzw. $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$ und $j \geq i$ setzt man $t_i^j := (\iota_j^i|_{\mathrm{Kern}_j(F)})'$ und definiert folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{(IV)_F} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \exists j \geq i, \forall k \geq j, \exists e \in L(\mathrm{Kern}_j(F), \mathrm{Kern}_k(F)) : \iota_k^i \circ e = \iota_j^i|_{\mathrm{Kern}_j(F)} \\
&\mathbf{(V)_F} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \exists j \geq i, \forall k \geq j, \exists b \in L(\mathrm{Kern}_k(F)', \mathrm{Kern}_j(F)') : b \circ t_i^k = t_i^j.
\end{aligned}$$

Die Bedingung $\mathbf{(IV)_F}$ besagt, man kann Nulllösungen von $p(D)$ auf K_j mit einem stetigem Operator so zu Nulllösungen auf K_k „fortsetzen", dass sie auf K_i unverändert bleiben.

Im folgenden soll gezeigt werden, dass $\mathcal{E}_{(\omega)}(K)$ für jedes konvexe Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ mit nichtleerem Inneren nuklear ist. Dazu passen wir im folgenden den Beweis von [**25**] Proposition 2.4. an.

2.3. **Definition.** Seien E und F Banachräume und $T : E \to F$ eine lineare Abbildung. T heißt *nuklear*, falls es Folgen $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in E' und $(d_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in F mit

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \|c_j\|_E \; \|d_j\|_F < \infty \tag{6}$$

gibt, so dass

$$T(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j(x) d_j \qquad \text{für alle } x \in E.$$

2.4. **Lemma.** *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren. Mit den Bezeichnungen aus 1.3 ist für $q > 0$*

$$\mathcal{E}_{(\omega)}(K, q) := \{f \in C^\infty(K) \mid p_{K,q,\omega}(f) < \infty\}$$

ein Banachraum. Ferner gibt es zu jedem $q > 0$ ein $m > q$, so dass die Inklusion

$$(\mathcal{E}_{(\omega)}(K, m), p_{K,m,\omega}) \hookrightarrow (\mathcal{E}_{(\omega)}(K, q), p_{K,q,\omega})$$

nuklear ist.

Beweis. Die erste Aussage folgt leicht mit der Vollständigkeit von $C^\infty(K)$ und punktweiser Betrachtung einer beliebigen Cauchy-Folge in $(\mathcal{E}_{(\omega)}(K, q), p_{K,q,\omega})$. Für φ_ω aus 1.2 kann man nach 1.2(α) wegen $e^{x+1} \le 2(2e^x)$ ein $L > 1$ mit $\varphi_\omega(x + 1) \le L(1 + \varphi_\omega(x))$ für alle $x \ge 0$ finden. Daher kann man nach [**11**] 1.4 Lemma $y_0 > 0$ zu L wählen, sodass für $\frac{|\alpha|}{q} \ge y_0$ und $r := qL$ nach [**11**]1.4 (mit $y = \frac{|\alpha|}{q}$) gilt:

$$\begin{aligned} |\alpha| + r\varphi^*_\omega\left(\frac{|\alpha|}{r}\right) &= q\left(\frac{|\alpha|}{q} + L\varphi^*_\omega\left(\frac{|\alpha|}{qL}\right)\right) \\ &\le q\left(\varphi^*_\omega\left(\frac{|\alpha|}{q}\right) + L\right). \end{aligned}$$

Da die linke Seite für $\frac{|\alpha|}{q} \le y_0$ beschränkt ist, gilt diese Gleichung für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, wenn wir eine Konstante $c > 0$ zur rechten Seite addieren. Hieraus folgt mit der Konvexität von φ^* (siehe [**11**] 1.3) für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$\begin{aligned} 2r\varphi^*_\omega\left(\frac{|\alpha| + n + 1}{2r}\right) &= 2r\varphi^*_\omega\left(\frac{1}{2}\frac{|\alpha|}{r} + \frac{1}{2}\frac{n+1}{r}\right) \overset{\varphi^*_\omega \text{ konvex}}{\le} r\varphi^*_\omega\left(\frac{|\alpha|}{r}\right) + r\varphi^*_\omega\left(\frac{n+1}{r}\right) \\ &\le q\left(\varphi^*_\omega\left(\frac{|\alpha|}{q}\right) + L\right) - |\alpha| + r\varphi^*_\omega\left(\frac{n+1}{r}\right) + c. \end{aligned} \tag{7}$$

Um die zweite Aussage für $m := 2r$ zu beweisen, reicht es nach [**38**] 3.2.3 und Theorem in 3.2 nachzuweisen, dass es eine Folge von Linearformen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}_{(\omega)}(K, m)'$ gibt mit

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|a_k\|_{\mathcal{E}_{(\omega)}(K,m)'} < \infty \qquad \text{und} \qquad \forall f \in \mathcal{E}_{(\omega)}(K, m) : \; p_{K,q,\omega}(f) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k(f)|.$$

Zunächst gibt es nach [**25**] Lemma 2.3, da K als konvexes Kompaktum regulär ist, sowie [**38**] 3.2.3 und der Proposition nach 3.2.5 eine Folge $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $C^{n+1}(K)'$ mit

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \|v_j\|_{C^{n+1}(K)'} < \infty \qquad \text{und} \qquad \forall g \in C^{n+1}(K) : \; \|g\|_{C(K)} \le \sum_{j\in\mathbb{N}} |v_j(g)|. \tag{8}$$

Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $j \in \mathbb{N}$ definiere $a_{\alpha,j} : \mathcal{E}_{(\omega)}(K,m) \to \mathbb{C}$ durch

$$a_{\alpha,j}(f) := v_j(f^{(\alpha)})e^{-q\varphi_\omega^*(\frac{|\alpha|}{q})}.$$

Dann gilt für $f \in \mathcal{E}_{(\omega)}(K,m)$:

$$\begin{aligned}|a_{\alpha,j}(f)| &= |v_j(f^{(\alpha)})|e^{-q\varphi_\omega^*(\frac{|\alpha|}{q})}\\ &\le \|v_j\|_{C^{n+1}(K)'}\|f^{(\alpha)}\|_{C^{n+1}(K)}e^{-q\varphi_\omega^*(\frac{|\alpha|}{q})}\\ &\le \|v_j\|_{C^{n+1}(K)'}p_{K,2r,\omega}(f)\sup_{0\le k\le n+1} e^{2r\varphi_\omega^*(\frac{|\alpha|+k}{2r})-q\varphi_\omega^*(\frac{|\alpha|}{q})}\\ &\overset{(7)}{\le} \|v_j\|_{C^{n+1}(K)'}p_{K,m,\omega}(f)e^{c+qL+r\varphi_\omega^*(\frac{n+1}{r})}e^{-|\alpha|}.\end{aligned}$$

Aus dieser Abschätzung folgt, dass $a_{\alpha,j} \in \mathcal{E}_{(\omega)}(K,m)'$ und

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ j\in\mathbb{N}}} \|a_{\alpha,j}\|_{\mathcal{E}_{(\omega)}(K,m)'} \le e^{c+qL+r\varphi_\omega^*(\frac{n+1}{r})}\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}\|v_j\|_{C^{n+1}(K)'}\right)\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} e^{-|\alpha|}\right) < \infty,$$

$$\text{weil} \quad \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} e^{-|\alpha|} = \sum_{l\in\mathbb{N}_0}\frac{(l+n-1)\dots(l+1)}{(n-1)!}e^{-l} \le \sum_{l\in\mathbb{N}_0}\frac{(l+n-1)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-l} < \infty.$$

Schließlich gilt nach Wahl von $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ für $f \in \mathcal{E}_{(\omega)}(K,m)$:

$$p_{K,q,\omega}(f) = \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}\|f^{(\alpha)}\|_{C(K)}e^{-q\varphi_\omega^*(\frac{|\alpha|}{q})} \overset{(8)}{\le} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}\sum_{j\in\mathbb{N}}|v_j(f^{(\alpha)})|e^{-q\varphi_\omega^*(\frac{|\alpha|}{q})} = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ j\in\mathbb{N}}}|a_{\alpha,j}(f)|,$$

was zu zeigen blieb. □

2.5. **Lemma.** *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren. Dann ist $\mathcal{E}_{(\omega)}(K)$ ein nuklearer Fréchetraum.*

Beweis. Für jedes $q > 0$ ist $\overline{\mathcal{E}_{(\omega)}(K)}^{\mathcal{E}_{(\omega)}(K,q)}$, versehen mit der Norm $p_{K,q,\omega}$, ein lokaler Banachraum von $\mathcal{E}_{(\omega)}(K)$. Sei $q > 0$, dann gibt es nach Lemma 2.4 ein $m > q$, so dass die Inklusion $(\mathcal{E}_{(\omega)}(K,m), p_{K,m,\omega}) \hookrightarrow (\mathcal{E}_{(\omega)}(K,q), p_{K,q,\omega})$ nuklear ist. Damit ist auch die Einschränkung auf den lokalen Banachraum $\overline{\mathcal{E}_{(\omega)}(K)}^{\mathcal{E}_{(\omega)}(K,m)} \hookrightarrow (\mathcal{E}_{(\omega)}(K,q), p_{K,q,\omega})$ nuklear, insbesondere quasinuklear nach [**38**] Proposition nach 3.2.5 . Nach [**38**] 3.2.3 und 3.2.4 ist dann auch $\overline{\mathcal{E}_{(\omega)}(K)}^{\mathcal{E}_{(\omega)}(K,m)} \hookrightarrow \overline{\mathcal{E}_{(\omega)}(K)}^{\mathcal{E}_{(\omega)}(K,q)}$ quasinuklear und damit nuklear nach [**38**] Theorem in 3.2 . Also ist $\mathcal{E}_{(\omega)}(K)$ nach [**35**] 28.4 nuklear. □

2.6. **Satz.** *Es gilt für $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ bzw. $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$ (siehe Definition 2.2):*

$$\mathbf{(IV)_F} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{(V)_F}.$$

Beweis. $\mathcal{D}_{(\omega)}(K_i)$ ist nach [**11**] 3.6(2) und $\mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)$ nach Lemma 2.5 (FN)-Raum. Aufgrund von [**35**] 28.7(1) sind auch $\mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)^s$ und $\mathcal{D}_{(\omega)}(K_i)^s$ nukleare Fréchetträume. Der abgeschlossene Unterraum $\mathrm{Kern}_i(\mathcal{E}_{(\omega)}) \subset \mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)^s$ (siehe 2.1) ist nuklearer Fréchetraum, also reflexiv, was aus [**35**] 28.5., 23.23 und 24.24 (a),(b) folgt. Genauso folgt, dass $\mathrm{Kern}_i(\mathcal{D}'_{\{\omega\}})$ reflexiv ist, da $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(K_i)$ nach [**11**] 3.6(1) ein (FN)-Raum ist. $\mathcal{D}'_{(\omega)}(K_i)^s$ ist nach obiger Argumentation und 28.5. (DFS)-Raum. Damit ist auch der abgeschlossene Unterraum

$\text{Kern}_i(\mathcal{D}'_{(\omega)})$ (DFS)-Raum nach [**35**] §26 Aufgabe 4)a) , insbesondere also reflexiv. Ebenso folgt die Reflexivität von $\text{Kern}_i(\mathcal{E}_{\{\omega\}})$ aus der Tatsache, dass $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K_i)$ nach [**39**] 1.16 (DFS)-Raum ist. Daher folgt die Behauptung durch Dualisierung. □

2.7. **Satz.** *Es gilt mit den Bezeichnungen aus Hauptsatz 1.12 und Definition 2.2:*

$$(\mathbf{I})_{\mathcal{E}_{(\omega)}} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{IV})_{\mathcal{E}_{(\omega)}}.$$

Beweis. Sei $i \in \mathbb{N}$ gegeben und R eine nach Voraussetzung existierende stetige, lineare Rechtsinverse zu $p(D)$. Dann existieren aufgrund der Stetigkeit von R und 1.3 ein $j \geq i$, $m \in \mathbb{N}$ und $c > 0$, so dass für alle $h \in p(D)\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s$ (siehe 1.3):

$$\max_{r=1,\dots,s} p_{K_i,1,\omega}(R(h)_r) \leq c \max_{l=1,\dots,s_1} p_{K_{j-1},m,\omega}(h_l). \tag{9}$$

Ist $\chi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathring{K}_j)$, $0 \leq \chi \leq 1$ mit $\chi|_{K_{j-1}} \equiv 1$, dann sind nach [**11**] 4.4

$$Q : \mathcal{E}_{(\omega)}(K_j)^s \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s, \quad Q(f) := x \mapsto \begin{cases} (\chi(x)f_r(x))_{r=1,\dots,s} & x \in K_j \\ 0 & x \in \Omega \setminus K_j \end{cases}$$

und

$$E : \mathcal{E}_{(\omega)}(K_j)^s \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s, \quad f \mapsto (Q(f) - R(p(D)Q(f)))$$

linear und stetig mit $p(D) \circ E = 0$. Es gilt für $f \in \text{Kern}_j(\mathcal{E}_{(\omega)})$ nach Wahl von χ:

$$p(D)Q(f)|_{K_{j-1}} = p(D)f|_{K_{j-1}} = 0 \quad \overset{(9)}{\Rightarrow} \quad R(p(D)Q(f))|_{K_i} = 0.$$

Für jedes $k \geq j$ ist demnach für $e : \text{Kern}_j(\mathcal{E}_{(\omega)}) \to \text{Kern}_k(\mathcal{E}_{(\omega)})$, $e(f) := E(f)|_{K_k}$:

$$\iota_k^i(e(f)) = e(f)|_{K_i} = Q(f)|_{K_i} = f|_{K_i} = \iota_j^i(f).$$

□

2.8. **Satz.** *Es gilt mit den Bezeichnungen aus Hauptsatz 1.13 und Definition 2.2:*

$$(\mathbf{I})_{\mathcal{E}_{\{\omega\}}} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{IV})_{\mathcal{E}_{\{\omega\}}}.$$

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus Definition 1.3 und 1.7 ist $(p_{K,1,\sigma})_{K\subset\subset\Omega,\ \sigma\in S_\omega}$ nach [**30**] 3.2. ein Fundamentalsystem von Halbnormen für $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$. Daher erhält man für eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion $\tau \in S_\omega$ aus der Existenz einer stetigen, linearen Rechtsinversen R für $p(D)$, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $j \geq i$, eine weitere nicht quasianalytische Gewichtsfunktion $\sigma \in S_\omega$ und $c > 0$ existieren, so dass

$$\max_{r=1,\dots,s} p_{K_i,1,\tau}(R(h)_r) \leq c \max_{l=1,\dots,s_1} p_{K_{j-1},1,\sigma}(h_l). \tag{10}$$

Der Rest des Beweises verläuft analog zu 2.7, wobei wir statt (9) die Abschätzung (10) verwenden. □

Um den entsprechenden Sachverhalt für $F = \mathcal{D}'_{(\omega)}$ bzw. $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$ zu zeigen, beweisen wir :

2.9. **Lemma.** *Sei $K \subset \Omega$ kompakt, konvex mit nichtleerem Inneren und $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nach 2.1 gewählt, dann gilt:*

(a) *Es gibt eine beschränkte Menge $B \subset \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ mit $\overline{\text{span}\, B} = \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$.*
(b) *Ist $C \subset \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ beschränkt, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $C \subset \mathcal{D}_{(\omega)}(K_m)$ beschränkt.*

(c) *Ist $C \subset \mathcal{D}_{\{\omega\}}(\Omega)$ beschränkt, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $C \subset \mathcal{D}_{\{\omega\}}(K_m)$ beschränkt.*

(d) *Es gibt eine beschränkte Menge $B \subset \mathcal{D}_{\{\omega\}}(K)$, so dass für jede Funktion $\psi \in \mathcal{D}_{\{\omega\}}(\mathring{K})$ eine Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\operatorname{span} B$ existiert, welche in $\mathcal{D}_{\{\omega\}}(\Omega)$ gegen ψ konvergiert.*

Beweis. zu (a): Nach [**11**] 3.6(2) ist $\mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ ein nuklearer Fréchetraum und damit nach [**35**] Corollar 29.9 isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum eines seperablen Fréchetraumes. Nach [**35**] 4.7(1) ist somit auch $\mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ separabel. Man wähle eine in $\mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ dichte Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, fixiere ein abzählbares Fundamentalsystem von Halbnormen $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ für $\mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ und setze

$$B := (\lambda_k f_k)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad \lambda_k := (\max\{\max_{n\le k} p_n(f_k), 1\})^{-1} > 0.$$

Dann ist die lineare Hülle von B offenbar dicht in $\mathcal{D}_{(\omega)}(K)$. B ist auch beschränkt, denn für $n \in \mathbb{N}$ und $k \ge n$:

$$p_n(\lambda_k f_k) = \lambda_k p_n(f_k) \le 1.$$

zu (b): Nach [**11**] 5.6, 3.6(2) und [**35**] 28.8(2) ist $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ reflexiv und nuklear. Also liegt nach [**35**] 28.5 und 24.19 die beschränkte Menge C in einer absolutkonvexen, kompakten Menge $M \subset \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$. Nach 23.14 ist $\operatorname{span} M$ versehen mit dem Minkowski-Funktional $\|.\|_M$ (siehe [**35**] 6.7) ein Banachraum. Wegen der Beschränktheit von M, sowie [**35**] 24.10(3) und 24.13 ist die Inklusion $\operatorname{span} M \hookrightarrow \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) = \operatorname{ind}_{q\to} \mathcal{D}_{(\omega)}(K_q)$ stetig. Aus dem Grothendieckschen Faktorisierungssatz [**35**] 24.33 mit $F := (\operatorname{span} M, \|.\|_M)$, $F_n := \mathcal{D}_{(\omega)}(K_n)$ und den Einbettungen in $E := \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ als Abbildungen folgt, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Inklusion $(\operatorname{span} M, \|.\|_M) \hookrightarrow \mathcal{D}_{(\omega)}(K_m)$ stetig ist. Hieraus folgt, dass $C \subset \mathcal{D}_{(\omega)}(K_m)$ beschränkt ist.

zu (c): Dies folgt, da nach [**11**] 5.6 $\mathcal{D}_{\{\omega\}}(\Omega)$ (DFN)-Raum ist, aus [**35**] 25.20 und 25.19(2).

zu (d): Mit den Bezeichnungen aus 1.4 ist die Menge

$$B := \left\{ f \in \mathcal{D}_{\{\omega\}}(K) \;\middle|\; \|f\|_{1,\omega} = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}| e^{\omega} d\lambda^n \le 1 \right\}$$

beschränkt in $\mathcal{D}_{\{\omega\}}(K)$. Sei $\tau \ge \omega$ nicht quasianalytische Gewichtsfunktion mit $\omega = o(\tau)$ (existiert nach 4.22). Sei $\psi \in \mathcal{D}_{\{\omega\}}(\mathring{K})$ und $K_1 := \operatorname{Supp}\psi \subset \mathring{K}$, dann gilt $\psi \in \mathcal{D}_{\{\omega\}}(K_1)$. Nach [**11**] 3.8 existiert eine Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}_{\{\tau\}}(K)$ mit $\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi$ in $\mathcal{D}_{\{\omega\}}(K)$, also auch in $\mathcal{D}_{\{\omega\}}(\Omega)$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ ist $\psi_n \in \mathcal{D}_{\{\tau\}}(K)$, weshalb nach [**11**] 3.4(1)(c) und $\omega = o(\tau)$ Konstanten C, D, $\varepsilon > 0$ existieren, so dass für alle $z \in \mathbb{C}^n$

$$|\widehat{\psi_n}(z)| \le C \exp(h_K(\operatorname{Im} z) - \varepsilon\tau(z)) \le D \exp(h_K(\operatorname{Im} z) - (n+2)\omega(z)).$$

Deshalb ist $\|\psi_n\|_{1,\omega} < \infty$ nach 1.2 (γ). Damit gilt $\psi_n \in \operatorname{span} B$, was zu zeigen blieb. □

2.10. **Satz.** *Es gilt mit den Bezeichungen aus Hauptsatz 1.12 und Definition 2.2:*

$$(\mathbf{I})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{IV})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}.$$

Beweis. Sei $i \in \mathbb{N}$ gegeben. Die nach Lemma 2.9 (a) zu K_i gewählte Menge B ist natürlich auch beschränkt in $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$, weshalb folgende Halbnorm auf $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)^s$ stetig ist:

$$\|g\|_B := \max_{r=1,\dots,s} \sup_{\varphi \in B} |g_r(\varphi)|.$$

Die Stetigkeit der nach $(\mathbf{I})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$ existierenden stetigen, linearen Rechtsinversen R zu $p(D)$ impliziert, dass es $c > 0$ und für $m = 1, \dots, s_1$ beschränkte Mengen $C_m \subset \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ gibt, so dass für alle $h \in p(D)\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)^s$:

$$\|R(h)\|_B \leq c \max_{m=1,\dots,s_1} \sup_{\psi \in C_m} |h_m(\psi)|. \tag{11}$$

Nach Lemma 2.9 (b) gibt es $j > i$, sodass

$$C := \bigcup_{m=1}^{s_1} C_m \subset \mathcal{D}_{(\omega)}(K_{j-1}) \text{ beschränkt ist.} \tag{12}$$

Sei $\chi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\overset{\circ}{K}_j)$, $0 \leq \chi \leq 1$ mit $\chi \equiv 1$ auf K_{j-1}. Die Abbildung

$$Q : \mathcal{D}'_{(\omega)}(K_j)^s \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)^s, \quad T \to (\chi T_r)_{r=1,\dots,s}$$

ist linear und stetig, denn $\mathcal{D}'_{(\omega)}(K_j) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$, $S \mapsto \chi S$, ist die Transponierte des stetigen Operators $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}_{(\omega)}(K_j)$, $\varphi \mapsto \chi\varphi$. Für festes $k \geq j$ ist die Einschränkung $|_{K_k}$: $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)^s \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(K_k)^s$, $T \mapsto (T_r|_{\mathcal{D}_{(\omega)}(K_k)})_{r=1,\dots,s}$ linear und stetig und somit ist auch folgende lineare Abbildung stetig:

$$E : \mathcal{D}'_{(\omega)}(K_j)^s \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(K_k)^s, \quad E(T) := [Q(T) - R(p(D)Q(T))]|_{K_k}$$

mit $p(D) \circ E = 0$.Wir setzen $e := E|_{\mathrm{Kern}_j(\mathcal{D}'_{(\omega)})} : \mathrm{Kern}_j(\mathcal{D}'_{(\omega)}) \to \mathrm{Kern}_k(\mathcal{D}'_{(\omega)})$, dann gilt nach der Wahl von χ für $T \in \mathrm{Kern}_j(\mathcal{D}'_{(\omega)})$:

$$p(D)Q(T)|_{K_{j-1}} = p(D)T|_{K_{j-1}} = 0,$$

was mit (11), (12) und der Wahl von B nun $R(p(D)Q(T))|_{K_i} = 0$ impliziert. Also gilt

$$\iota_k^i(e(T)) = e(T)|_{K_i} = Q(T)|_{K_i} = T|_{K_i} = \iota_j^i(T).$$

□

2.11. **Satz.** *Es gilt mit den Bezeichnungen aus Hauptsatz 1.13 und Definition 2.2:*

$$(\mathbf{I})_{\mathcal{D}'_{\{\omega\}}} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{IV})_{\mathcal{D}'_{\{\omega\}}}.$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu dem von 2.10, wobei man hier B aus 2.9 (d) für $K = K_{i+1}$ wählt und 2.9(c) statt (b) benutzt. Man erhält auch $R(p(D)Q(f))|_B = 0$, woraus mit 2.9(d), folgt, dass schon $R(p(D)Q(f))|_{\overset{\circ}{K}_{i+1}} = 0$ ist. Wegen $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$, folgt dann wie in 2.10 die Behauptung. □

Hinlänglichkeit der „Fortsetzbarkeits"-Bedingung $(IV)_F$

Um die Rückrichtungen der Sätze 2.7, 2.8, 2.10 und 2.11 zeigen zu können, brauchen wir noch einige Vorbereitungen.

2.12. **Definition.** Ein *projektives Spektrum* von Vektorräumen ist definiert als eine Folge $\mathcal{X} = (X_i, \iota_{i+1}^i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Vektorräumen und linearen Abbildungen $\iota_{i+1}^i : X_{i+1} \to X_i$.
Es wird $\iota_i^i := \mathrm{Id}_{X_i}$ und für $m > i$: $\iota_m^i := \prod_{j=i}^{m-1} \iota_{j+1}^j$ gesetzt. Ferner definiert man die Abbildung

$$\sigma : \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \to \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i, \quad (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \to (\iota_{i+1}^i x_{i+1} - x_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

proj und proj^1 von Spektren von Vektorräumen sind dann so definiert:

$$\mathrm{proj}(\mathcal{X}) := \mathrm{Kern}\,\sigma \quad \text{und} \quad \mathrm{proj}^1(\mathcal{X}) := \left(\textstyle\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i\right)/\,\mathrm{Bild}\,\sigma.$$

Sind zusätzlich Teilräume $U_i \subset X_i$ mit $\iota_{i+1}^i(U_{i+1}) \subset U_i$ gegeben, so ist $(U_i, \iota_{i+1}^i|_{U_{i+1}})_{i\in\mathbb{N}}$ ebenfalls ein projektives (Teil-) Spektrum.

2.13. **Definition.** Ein projektives Spektrum $\mathcal{X} = (X_i, \iota_{i+1}^i)_{i\in\mathbb{N}}$ von lokalkonvexen Vektorräumen heißt *reduziert*, falls die kanonischen Projektionen $\pi_k : \mathrm{proj}(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \to X_k$, $k \in \mathbb{N}$ dichtes Bild haben.

2.14. **Definition.** Seien $\mathcal{X} := (X_i, \iota_{i+1}^i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $\mathcal{Y} := (Y_i, j_{i+1}^i)_{i\in\mathbb{N}}$ projektive Spektren, dann heißt eine Folge $\Phi := (\varphi_{k(i)}^i : X_{k(i)} \to Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von linearen Abbildungen ein *Morphismus zwischen den projektiven Spektren* $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ genau dann, wenn eine Folge $(k(i))_{i\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen existiert, die monoton wachsend und unbeschränkt ist, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\varphi_{k(i)}^i \circ \iota_{k(i+1)}^{k(i)} = j_{i+1}^i \circ \varphi_{k(i+1)}^{i+1}. \tag{13}$$

Für einen weiteren Morphismus zwischen projektiven Spektren $\Psi : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ mit $\Psi = (\psi_{l(i)}^i)_{i\in\mathbb{N}}$ wird die Verknüpfung mit Φ definiert als $\Psi \circ \Phi := (\psi_{l(i)}^i \varphi_{k(l(i))}^{l(i)})_{i\in\mathbb{N}}$. Eine Sequenz von projektiven Spektren

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{Y} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{Z}$$

heißt *exakt in* $\mathcal{Y}$ genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) $\forall i \in \mathbb{N}, \exists m \geq l(i) : \psi_{l(i)}^i \circ j_m^{l(i)} \circ \varphi_{k(m)}^m = 0$,
(2) $\forall m \in \mathbb{N}, \exists i \in \mathbb{N}$ mit $m \leq l(i) : j_{l(i)}^m \mathrm{Kern}\ \psi_{l(i)}^i \subset \mathrm{Bild}\ \varphi_{k(m)}^m$.

Eine allgemeine Sequenz von projektiven Spektren heißt *exakt*, wenn sie an jeder Stelle exakt ist.

2.15. **Bemerkung.** Der Satz von Palamodov besagt, dass zu jeder exakten Sequenz von projektiven Spektren

$$0 \to \mathcal{X} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{Y} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{Z} \to 0$$

eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{proj}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\mathrm{proj}(\Phi)} \mathrm{proj}(\mathcal{Y}) \xrightarrow{\mathrm{proj}(\Psi)} \mathrm{proj}(\mathcal{Z}) \xrightarrow{\delta^*} \mathrm{proj}^1(\mathcal{X}) \to \mathrm{proj}^1(\mathcal{Y}) \to \mathrm{proj}^1(\mathcal{Z}) \to 0$$

existiert, wobei für $f \in \mathrm{proj}(\mathcal{X})$: $\mathrm{proj}(\Phi)(f) := (\varphi_{k(m)}^m(f_{k(m)}))_{m\in\mathbb{N}}$. Für eine Definition von δ^* und der weiteren Abbildungen sei auf [**44**] Corollary 3.1.5. verwiesen.

2.16. **Definition.** Für den Rest des Kapitels sei p_1 aus Bezeichnung 1.14 gemeint und für $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ bzw. $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$:

$$X_F := \mathrm{Kern}(p_1(D) : F(\Omega)^{s_1} \to F(\Omega)^{s_2}).$$

Mit den Bezeichnungen aus 2.1 definieren wir

$$\mathcal{F}(r) := (L(X_F, F(K_i)^r), \nu^i_{i+1})_{i\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad \nu^i_{i+1}(\varphi) := \iota^i_{i+1} \circ \varphi$$

ein projektives Spektrum und wir setzen $\mathcal{F} := \mathcal{F}(1)$. Wegen $\mathrm{Kern}_i(F) \subset F(K_i)^s$ kann man die Räume $L(X_F, \mathrm{Kern}_i(F))$ als Teilräume von $L(X_F, F(K_i)^s)$ auffassen. Diese bilden ein projektives Teilspektrum

$$\mathcal{K} := (L(X_F, \mathrm{Kern}_i(F)), \nu^i_{i+1}|_{L(X_F,\mathrm{Kern}_{i+1}(F))})_{i\in\mathbb{N}}$$

von $\mathcal{F}(s)$. Genauso ist

$$\mathcal{Q} := (\mathrm{Kern}[p_1(D) : L(X_F, F(K_i)^{s_1}) \to L(X_F, F(K_i)^{s_2})])_{i\in\mathbb{N}}$$

ein projektives Teilspektrum von $\mathcal{F}(s_1)$.

2.17. **Bemerkung.** Es gilt für $r \in \mathbb{N}$ und $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ bzw. $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$:

$$\mathrm{proj}(\mathcal{F}(r)) = L(X_F, F(\Omega)^r).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass

$$F(\Omega) = \mathrm{proj}(F(K_i))_{i\in\mathbb{N}} \quad \text{als lokalkonvexe Räume.}$$

Im Fall $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$ bzw. $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ folgt dies direkt aus den Definitionen in 1.3.

Im Fall $F = \mathcal{D}'_{(\omega)}$ ist die Transponierte $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(K_i)$ der Inklusion $\mathcal{D}_{(\omega)}(K_i) \hookrightarrow \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ linear und stetig. Die zugehörige Abbildung $\psi : \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathrm{proj}_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{D}'_{(\omega)}(K_i)$ ist linear und stetig. Um zu zeigen, dass auch ψ^{-1} stetig ist, beachte zunächst, dass die Mengen $U_B := \{T \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega) \mid \sup_{\varphi\in B} |T(\varphi)| \le 1\}$ mit $B \subset \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ beschränkt eine Nullumgebungsbasis von $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ bilden. Nach Lemma 2.9 (b) gibt es zu $B \subset \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ beschränkt ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $B \subset \mathcal{D}_{(\omega)}(K_m)$ beschränkt ist. Daher ist $V_B := \{T \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(K_m) \mid \sup_{\varphi\in B} |T(\varphi)| \le 1\}$ Nullumgebung und wegen der Stetigkeit von $\pi_m : \mathrm{proj}_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{D}'_{(\omega)}(K_i) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(K_m)$ ist auch $\pi_m^{-1}(V_B) = \psi(U_B)$ Nullumgebung in $\mathrm{proj}_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{D}'_{(\omega)}(K_i)$. Demnach ist auch ψ^{-1} stetig, was zu zeigen blieb.

Im Fall $F = \mathcal{D}'_{\{\omega\}}$ folgt dies so wie für $F = \mathcal{D}'_{(\omega)}$, nur dass man in Lemma 2.9 (c) statt (b) benutzt. Also ist die Zwischenbehauptung gezeigt. Hiermit folgt, dass

$$\Phi : \mathrm{proj}\,\mathcal{F} \to L(X_F, F(\Omega)), \quad \Phi((f_i)_{i\in\mathbb{N}}) := x \mapsto (f_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$$

ein Vektorraumisomorphismus von $\mathrm{proj}\,\mathcal{F}$ und $L(X_F, F(\Omega))$ ist. Weil $L(X_F, F(\Omega)^r) = L(X_F, F(\Omega))^r$ ist, bleibt zu zeigen, dass

$$\mathrm{proj}(\mathcal{F}(r)) = (\mathrm{proj}\,\mathcal{F})^r. \tag{14}$$

Ist $f_i \in L(X_F, F(K_i)^r)$ und $f_{i,j}(x)$ für $x \in X_F$ die j-te Komponente von $f_i(x) \in F(K_i)^r$, so ist

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} L(X_F, F(K_i)^r) \to \Big(\prod_{i\in\mathbb{N}} L(X_F, F(K_i))\Big)^r, \quad (f_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto ((f_{i,j})_{i\in\mathbb{N}})_{j=1,\dots,r}$$

ein Vektorraumisomorphismus. Der nach Definition 2.12 zugehörige Endomorphismus von $\prod_{i\in\mathbb{N}} L(X_F, F(K_i)^r)$ ist

$$\sigma_r((f_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (\iota^i_{i+1} \circ f_{i+1} - f_i)_{i\in\mathbb{N}} = ((\iota^i_{i+1} \circ f_{i+1,j} - f_{i,j})_{j=1,\ldots,r})_{i\in\mathbb{N}}$$

und entspricht via obigem Isomorphismus der Abbildung

$$(\sigma_1)^r[((f_{i,j})_{i\in\mathbb{N}})_{j=1,\ldots,r}] = ((\iota^i_{i+1} \circ f_{i+1,j} - f_{i,j})_{i\in\mathbb{N}})_{j=1,\ldots,r}.$$

Dies zeigt nach Definition 2.12: $\operatorname{proj}(\mathcal{F}(r)) = (\operatorname{proj}\mathcal{F})^r$. □

Das folgende Lemma besagt grob, dass man für $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ bzw. $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$ eine stetige, lineare Abbildung zwischen den Sequenzen

$$0 \to \operatorname{Kern}_i(F) \hookrightarrow F(K_i)^s \overset{p(D)}{\to} F(K_i)^{s_1} \to 0$$

findet, welche bis auf den Verlust einer Stufe eine Rechtsinverse für $p(D)$ ist.

2.18. **Lemma.** *Zu $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ bzw. $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$ und jedem $i \in \mathbb{N}$ gibt es eine stetige, lineare Abbildung $q_i : F(K_{i+1})^{s_1} \to F(K_i)^s$, so dass mit den Bezeichnungen von Definition 2.1 und Bezeichung 1.14:*

$$p(D) \circ q_i(f) = \iota^i_{i+1}(f) \quad \text{für alle } f \in \operatorname{Kern}(p_1(D) : F(K_{i+1})^{s_1} \to F(K_{i+1})^{s_2}).$$

Der Beweis dieses Lemmas erfolgt erst in 5.20, da die dazu notwendigen Begriffe erst in den kommenden Kapiteln eingeführt werden.

2.19. **Lemma.** *Seien $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ bzw. $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$, sowie p_1 und p wie in Bezeichung 1.14. Mit den Bezeichnungen aus 2.16 gilt*

$$\operatorname{proj}\mathcal{Q} = \operatorname{Kern}(p_1(D) : L(X_F, F(\Omega)^{s_1}) \to L(X_F, F(\Omega)^{s_2})); \tag{15}$$

wobei für $\varphi \in L(X_F, F(\Omega)^{s_1}) : p_1(D)\varphi := p_1(D) \circ \varphi$. Ferner ist die folgende Sequenz von Spektren exakt im Sinne von Definition 2.14:

$$0 \to \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{F}(s) \overset{p(D)}{\to} \mathcal{Q} \to 0,$$

wobei für $f = (f_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(s)$: $\quad p(D)((f_i)_{i\in\mathbb{N}}) := (p(D)f_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Beweis. Man macht sich

$$\operatorname{proj}\mathcal{Q} = \operatorname{Kern}(p_1(D) : \operatorname{proj}(\mathcal{F}(s_1)) \to \operatorname{proj}(\mathcal{F}(s_2)))$$

klar, indem man für $(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \operatorname{proj}(\mathcal{F}(s_1))$ beachtet:

$$\begin{aligned} &\forall i \in \mathbb{N} : f_i \in \operatorname{Kern}(p_1(D) : L(X_F, F(K_i)^{s_1}) \to L(X_F, F(K_i)^{s_2})) \\ \Leftrightarrow \quad & p_1(D)((f_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (p_1(D)f_i)_{i\in\mathbb{N}} = 0. \end{aligned}$$

Dann folgt (15) mittels Bemerkung 2.17. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist die Sequenz

$$0 \to L(X_F, \operatorname{Kern}_i(F)) \hookrightarrow L(X_F, F(K_i)^s) \overset{p(D)}{\to}$$

$$\overset{p(D)}{\to} \operatorname{Kern}(p_1(D) : L(X_F, F(K_i)^{s_1}) \to L(X_F, F(K_i)^{s_2}))$$

an den ersten zwei Stellen exakt, da für $\varphi \in L(X_F, F(K_i)^s)$:

$$p(D) \circ \varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in L(X_F, \operatorname{Kern}_i(F)).$$

Nach Definition 2.14 ist also

$$0 \to \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{F}(s) \overset{p(D)}{\to} \mathcal{Q} \to 0$$

an den ersten zwei Stellen exakt. Um die Exaktheit dieser Sequenz an der dritten Stelle nachzuweisen, reicht es nach Definition 2.14 zu zeigen, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$:

$$\nu^i_{i+1}(\mathrm{Kern}[p_1(D) : L(X_F, F(K_{i+1})^{s_1}) \to L(X_F, F(K_{i+1})^{s_2})]) \subset p(D)L(X_F, F(K_i)^s). \quad (16)$$

Sei also $\varphi \in L(X_F, F(K_{i+1})^{s_1})$ mit $p_1(D) \circ \varphi = 0$, dann wähle gemäß Lemma 2.18 $q_i \in L(F(K_{i+1})^{s_1}, F(K_i)^s)$ und setze $\psi := q_i \circ \varphi \in L(X_F, F(K_i)^s)$. Wegen $\varphi(x) \in \mathrm{Kern}(p_1(D) : F(K_{i+1})^{s_1} \to F(K_{i+1})^{s_2})$ für alle $x \in X_F$, gilt dann:

$$(p(D)\psi)(x) = p(D)(q_i(\varphi(x))) \overset{2.18}{=} \iota^i_{i+1}\varphi(x) = (\nu^i_{i+1}\varphi)(x).$$

Damit folgt (16). □

2.20. **Satz.** *Es gilt mit den Bezeichnungen aus Hauptsatz 1.12, 1.13 und Definition 2.2 für* $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ *bzw.* $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$

$$(\mathbf{IV})_\mathbf{F} \;\Rightarrow\; (\mathbf{I})_\mathbf{F}.$$

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass für $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ bzw. $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$

$$(\mathbf{IV})_\mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{proj}^1\,\mathcal{K} = 0. \quad (17)$$

Wir wählen $j_0 := 1$ und für $k \in \mathbb{N}$ induktiv $j_k > j_{k-1}$ zu $i := j_{k-1}$ gemäß $(\mathbf{IV})_\mathbf{F}$. Aus [**44**] Definition 3.1.6 und Proposition 3.1.7. folgt $\mathrm{proj}^1\,\mathcal{K} \cong \mathrm{proj}^1(L(X_F, \mathrm{Kern}_{j_k}(F)))_{k\in\mathbb{N}}$, wobei $v^k_{k+1} : \varphi \mapsto \iota^{j_k}_{j_{k+1}} \circ \varphi$ die verbindenden Abbildungen des Spektrums auf der rechten Seite sind. Nach Definition 2.12 folgt also (17), wenn wir zeigen:

$$\forall f \in \prod_{k\in\mathbb{N}} L(X_F, \mathrm{Kern}_{j_k}(F)), \exists g \in \prod_{k\in\mathbb{N}} L(X_F, \mathrm{Kern}_{j_k}(F)), \forall m \in \mathbb{N} : v^m_{m+1} g_{m+1} - g_m = f_m.$$

Nach Wahl von $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists e^{k+1}_k \in L(\mathrm{Kern}_{j_k}(F), \mathrm{Kern}_{j_{k+1}}(F)) \text{ mit } \iota^{j_{k-1}}_{j_{k+1}} \circ e^{k+1}_k = \iota^{j_{k-1}}_{j_k}|_{\mathrm{Kern}_{j_k}(F)},$$

was für $m \geq 2$ und $\varphi \in L(X_F, \mathrm{Kern}_{j_m}(F))$ impliziert, dass

$$v^{m-1}_{m+1}(e^{m+1}_m \circ \varphi) = v^{m-1}_m(\varphi). \quad (18)$$

Wir setzen $e^k_k := \mathrm{Id}$, $e^m_k := \prod_{j=1}^{m-k} e^{m-j+1}_{m-j}$ für $m > k$ und definieren für $m \in \mathbb{N}$ und $f \in \prod_{k\in\mathbb{N}} L(X_F, \mathrm{Kern}_{j_k}(F))$:

$$h_m := \sum_{k=1}^{m-1} e^m_k \circ f_k \in L(X_F, \mathrm{Kern}_{j_m}(F))$$
$$g_m := v^m_{m+1}(h_{m+1}) - f_m \in L(X_F, \mathrm{Kern}_{j_m}(F)).$$

Dann ist für $m \geq 2$:

$$v^{m-1}_m(v^m_{m+1}h_{m+1} - h_m) = \sum_{k=1}^{m} v^{m-1}_{m+1} e^{m+1}_m e^m_k f_k - \sum_{k=1}^{m-1} v^{m-1}_m e^m_k f_k \overset{(18)}{=} v^{m-1}_m(f_m).$$

Da v^{m-1}_m linear ist, folgt, dass $v^{m-1}_m(g_m) = v^{m-1}_m(h_m)$. Damit gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$v^m_{m+1}(g_{m+1}) - g_m = v^m_{m+1}(h_{m+1}) - g_m = f_m,$$

was zum Beweis von (17) zu zeigen war. Wendet man nun auf die exakte Sequenz von Lemma 2.19 den Satz von Palamodov (siehe Bemerkung 2.15) an, erhält man unter Beachtung von (17) eine exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{proj} \mathcal{K} \hookrightarrow \operatorname{proj} \mathcal{F}(s) \stackrel{p(D)}{\to} \operatorname{proj} \mathcal{Q} \to 0.$$

Dies impliziert für $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$ bzw. $\mathcal{D}'_{(\omega)}$

$$\operatorname{proj} \mathcal{Q} = p(D) \operatorname{proj} \mathcal{F}(s) \stackrel{2.17}{=} p(D)L(X_F, F(\Omega)^s). \tag{19}$$

Betrachte die Inklusion $j \in L(X_F, F(\Omega)^{s_1})$, also $j(x) := x$ für $x \in X_F$. Wegen $p_1(D)j = p_1(D) \circ j = 0$ ist nach (15) $j \in \operatorname{proj} \mathcal{Q}$. Es gibt nach (19) eine Abbildung $R \in L(X_F, F(\Omega)^s)$ mit

$$j = p(D)R = p(D) \circ R. \tag{20}$$

Hieraus folgt $X_F \subset p(D)F(\Omega)^s$. Aus (5) folgt $p(D)F(\Omega)^s \subset X_F$, also ist $X_F = p(D)F(\Omega)^s$. Somit ist R nach (20) eine stetige, lineare Rechtsinverse zu $p(D)$. Also ist $(\mathbf{I})_\mathbf{F}$ erfüllt. □

2.21. **Bemerkung.** Zusammen mit 2.7, 2.8, 2.10 und 2.11 folgt aus 2.20 die Äquivalenz von $(\mathbf{I})_\mathbf{F}$ und $(\mathbf{IV})_\mathbf{F}$ für $F = \mathcal{E}_{(\omega)}, \mathcal{E}_{\{\omega\}}, \mathcal{D}'_{(\omega)}$ und $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$. Aus dem Beweis von 2.20 folgt ferner, dass im Fall der Existenz einer stetigen, linearen Rechtsinversen für $p(D)$ gilt

$$p(D)F(\Omega)^s = \operatorname{Kern}(p_1(D) : F(\Omega)^{s_1} \to F(\Omega)^{s_2}).$$

KAPITEL 3

Äquivalenz zu $(\mathrm{VI})_{\mathrm{F}}$ mittels Fourier-Laplace-Transformation

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass $\mathrm{Kern}_i(F)'$ (für $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ bzw. $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$) – die Dualräume der Kerne von $p(D)$ – mittels Fourier-Laplace-Transformation isomorph sind zu Quotienten von Räumen von holomorphen Funktionen mit besonderen Wachstumseigenschaften. Aus Hörmanders Buch [**23**] 1.7 übernehmen wir die folgenden Definitionen:

3.1. **Definition.** Die *Fouriertransformierte* einer Funktion $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als

$$\hat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-i\langle x,y\rangle}\, d\lambda^n(y).$$

Die *schnell fallenden Funktionen* auf $\mathbb{R}^n$ sind definiert als

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{h \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall k \in \mathbb{N}_0 : \varrho_k(h) < \infty\},$$

wobei $\varrho_k(h) := \sup_{|\alpha|\le k,\, x\in\mathbb{R}^n} |h^{(\alpha)}(x)|(1+|x|^2)^{k/2}$ als Halbnormensystem die Topologie induzieren. Die duale Abbildung von

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad h \mapsto \hat{h}$$

ist die *Fouriertransformation auf den temperierten Distributionen* $\hat{}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Sie stimmt auf $L_1(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$ mit der obigen Definition der Fouriertransformation überein.

3.2. **Definition und Bemerkung.** Die *Fourier-Laplace-Transformierte* einer Distribution T in $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^n)'$ ist (siehe [**11**] 7.1) definiert durch:

$$\mathcal{F}(T)(z) := T(x \to e^{-i\langle x,z\rangle}) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^n.$$

Für $j \in \{1,\dots,n\}$ prüft man leicht nach, dass mit $D := i(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n})$

$$\mathcal{F}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}T\Big) = iz_j\mathcal{F}(T) \quad \Rightarrow \quad \forall q \in \mathcal{P} : \mathcal{F}(q(-D)T) = q\mathcal{F}(T). \tag{21}$$

3.3. **Definition und Bemerkung.** Seien ω eine Gewichtsfunktion (siehe 1.2) und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex mit nichtleerem Inneren. Für $f \in H(\mathbb{C}^n)^r$, $r \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$ definiert man (siehe 1.7)

$$\|f\|_{K,q,\omega} := \sup_{z\in\mathbb{C}^n} |f(z)|\, e^{-h_K(\operatorname{Im} z)+q\omega(z)}. \tag{22}$$

Dann sind die Räume

$$\mathcal{A}_{(\omega)}(K,q) := \{f \in H(\mathbb{C}^n) \mid \|f\|_{K,q,\omega} < \infty\}$$

Banachräume (beachte: Eine Cauchy-Folge in $\mathcal{A}_{(\omega)}(K,q)$ konvergiert in $H(\mathbb{C}^n)$; leicht folgt dann die Konvergenz in $\mathcal{A}_{(\omega)}(K,q)$). Mit den Inklusionen als verbindenden Abbildungen setzen wir

$$\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K) := \operatorname{proj}_{q\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{(\omega)}(K,-\tfrac{1}{q}).$$

Nach [**39**] 2.19 ist $\mathcal{F}\circ\iota_K'$ – wobei $\iota_K:\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K),\ f\mapsto f|_K$ – ein linearer topologischer Isomorphismus von $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)'$ nach $\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)$, welches nach [**39**] 1.16 ein Fréchet-Schwartz-Raum ist. Ist ω eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion so definieren wir

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{(\omega)}(K) &:= \operatorname{ind}_{q\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_{(\omega)}(K,-q),\\ \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K) &:= \operatorname{proj}_{q\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_{(\omega)}(K,q)\\ \mathcal{A}_{\{\omega\}}(K) &:= \operatorname{ind}_{q\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_{(\omega)}(K,\tfrac{1}{q}).\end{aligned}$$

Ist $\varrho_K:\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{E}_{(\omega)}(K), f\mapsto f|_K$, so ist nach [**27**] 3.6 Proposition die Abbildung $\mathcal{F}\circ\varrho_K'$ ein linearer topologischer Isomorphismus von $\mathcal{E}_{(\omega)}(K)'$ (mit der starken Topologie) und $\mathcal{A}_{(\omega)}(K)$. $\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)$ ist Fréchetraum unter dem Halbnormensystem $(\|f\|_{K,q,\omega})_{q\in\mathbb{N}_0}$. Nach [**11**] 3.5(1) ist $\mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ mittels Fourier-Laplace-Transformation $\mathcal{F}$ isomorph zu $\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)$ als lokalkonvexer Raum. $\mathcal{D}_{\{\omega\}}(K)$ ist nach [**11**] 3.5(1) und 3.6(1) mittels Fourier-Laplace-Transformation $\mathcal{F}$ isomorph zu $\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K)$ und ein (DFN)-Raum.

Wir halten also fest:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\circ\varrho_K'(\mathcal{E}_{(\omega)}(K)') &= \mathcal{A}_{(\omega)}(K),\\ \mathcal{F}(\mathcal{D}_{(\omega)}(K)) &= \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K),\\ \mathcal{F}(\mathcal{D}_{\{\omega\}}(K)) &= \mathcal{A}_{\{\omega\}}(K),\\ \mathcal{F}\circ\iota_K'(\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)') &= \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K).\end{aligned}\tag{23}$$

Dabei haben wir die ersten drei Identitäten nur für nicht quasianalytische Gewichtsfunktionen (siehe 1.2) gezeigt.

3.4. **Lemma.** *Sei p die $s\times s_1$-Matrix in $\mathcal{P}$ aus dem Hauptsatz 1.12 und $i\in\mathbb{N}$. Mit den Bezeichnungen aus 2.1 gilt:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Kern}_i(\mathcal{E}_{(\omega)})' &\cong \mathcal{A}_{(\omega)}(K_i)^s/\overline{p^t\mathcal{A}_{(\omega)}(K_i)^{s_1}}\\ \mathrm{Kern}_i(\mathcal{D}'_{(\omega)})' &\cong \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^s/\overline{p^t\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^{s_1}}\\ \mathrm{Kern}_i(\mathcal{D}'_{\{\omega\}})' &\cong \mathcal{A}_{\{\omega\}}(K_i)^s/\overline{p^t\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K_i)^{s_1}}\\ \mathrm{Kern}_i(\mathcal{E}_{\{\omega\}})' &\cong \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K_i)^s/\overline{p^t\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K_i)^{s_1}}.\end{aligned}$$

Dabei zeigen wir die ersten drei Identitäten nur für nicht quasianalytische Gewichtsfunktionen (siehe 1.2).

Beweis. Sei $F=\mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ bzw. $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$. Die zur Inklusion $j:\mathrm{Kern}_i(F)\to F(K_i)^s$ transponierte Abbildung $j':F(K_i)'^s\to\mathrm{Kern}_i(F)'$ ist nach dem Satz von Hahn-Banach [**35**] 22.12 a) surjektiv. Man rechnet leicht nach, dass $p^t(-D):F(K_i)'^{s_1}\to F(K_i)'^s$ die Transponierte von $p(D):F(K_i)^s\to F(K_i)^{s_1}$ ist. Nun gilt wegen [**35**] 23.31, der Reflexivität von $F(K_i)$ (siehe Beweis von 2.6) und dem Bipolarensatz [**35**] 22.13:

$$\mathrm{Kern}\, j' = (\mathrm{Bild}\, j)^\circ = \mathrm{Kern}_i(F)^\circ = ((p^t(-D)F(K_i)'^{s_1})^\circ)^\circ = \overline{p^t(-D)F(K_i)'^{s_1}}.\tag{24}$$

$\mathrm{Kern}_i(G)$ und $G(K_i)^s$ sind für $G=\mathcal{E}_{(\omega)}$ bzw. $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$ (FS)-Räume (siehe Beweis von Satz 2.6) und damit sind $\mathrm{Kern}_i(G)'$ und $G(K_i)'^s$ (DFS)-Räume, also nach [**35**] 25.20 insbesondere (LF)-Räume. Nach dem Beweis von Satz 2.6 ist $\mathcal{D}'_{(\omega)}(K_i)^s$ (DFS)-Raum und mit 3.3 folgt, dass $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K_i)$ (DFS)-Raum ist. $\mathrm{Kern}_i(G)$ und $G(K_i)^s$ sind mithin für $G=\mathcal{D}'_{(\omega)}$

bzw. $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ (DFS)-Räume (siehe [**35**] §26 Übungsaufg. (4)). Also sind $\mathrm{Kern}_i(G)'$ und $G(K_i)'^s$ Fréchetr äume. Daher folgt unter Verwendung des Satzes von der offenen Abbildung für Fréchetr äume bzw. (LF)-Räume (siehe [**35**] 8.5. bzw. [**35**] 24.30, 24.29, 24.28 und 24.8, sowie 24.15 und 24.16):

$$\mathrm{Kern}_i(F)' \cong F(K_i)'^s / \overline{p^t(-D)F(K_i)'^{s_1}}. \tag{25}$$

Die Fourier-Laplace-Transformation wandelt Differentiation in Multiplikation mit Monomen um, wie in (21) bemerkt. Daher gilt, wenn im folgenden $\mathcal{F}^s$ die komponentenweise Anwendung der Fourier-Laplace-Transformation sein soll, wegen (23)

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\circ\varrho_K')^s(p^t(-D)\mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)'^{s_1}) &= p^t\mathcal{A}_{(\omega)}(K_i)^{s_1}\\ \mathcal{F}^s(p^t(-D)\mathcal{D}_{(\omega)}(K_i)^{s_1}) &= p^t\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^{s_1}\\ \mathcal{F}^s(p^t(-D)\mathcal{D}_{\{\omega\}}(K_i)^{s_1}) &= p^t\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K_i)^{s_1}\\ (\mathcal{F}\circ\iota_K')^s(p^t(-D)\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K_i)'^{s_1}) &= p^t\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K_i)^{s_1},\end{aligned}$$

dabei gelten die ersten drei Identitäten nur für nicht quasianalytische Gewichtsfunktionen (siehe 1.2). Hieraus folgt mit (25) und (23) die Behauptung. □

3.5. **Definition.** Seien ω eine Gewichtsfunktion und $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus 2.1. Wir setzen

$$\mathcal{A}^F_{(\omega)}(K) := \begin{cases}\mathcal{A}_{(\omega)}(K) & \text{für } F=\mathcal{E}_{(\omega)}\\ \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K) & \text{für } F=\mathcal{D}'_{(\omega)}\\ \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K) & \text{für } F=\mathcal{E}_{\{\omega\}}\\ \mathcal{A}_{\{\omega\}}(K) & \text{für } F=\mathcal{D}'_{\{\omega\}}\end{cases}.$$

und

$$Q_{F,i} := \mathcal{A}^F_{(\omega)}(K_i)^s / \overline{p^t\mathcal{A}^F_{(\omega)}(K_i)^{s_1}}.$$

Wir definieren für $i\le j$ die kanonische Abbildung:

$$\tau_i^j : Q_{F,i}\to Q_{F,j},\quad \tau_i^j(f+\overline{p^t\mathcal{A}^F_{(\omega)}(K_i)^{s_1}}) := f+\overline{p^t\mathcal{A}^F_{(\omega)}(K_j)^{s_1}}$$

und die Bedingung

$$(\mathbf{VI})_{\mathbf{F}}\quad \forall i\in\mathbb{N},\exists j\ge i,\forall k\ge j,\exists B\in L(Q_{F,k},Q_{F,j}):$$
$$B\circ\tau_i^k=\tau_i^j$$

3.6. **Satz.** *Mit den Bezeichungen aus Definition 2.2 gilt für jede nicht quasianalytische Gewichtsfunktion ω und $F=\mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ bzw. $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$:*

$$(\mathbf{V})_{\mathbf{F}}\quad\Leftrightarrow\quad(\mathbf{VI})_{\mathbf{F}}$$

Beweis. Nach (25) ist

$$\nu_i : \mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)'^s/\overline{p^t(-D)\mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)'^{s_1}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kern}_i(\mathcal{E}_{(\omega)})',$$

$$\nu_i(T+\overline{p^t(-D)\mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)'^{s_1}}) := T|_{\mathrm{Kern}_i(\mathcal{E}_{(\omega)})}$$

ein Isomorphismus lokalkonvexer Räume. Die Fouriertransformation $(\mathcal{F}\circ\varrho'_{K_i})^s$ zwischen $\mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)'^s/\overline{p^t(-D)\mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)'^{s_1}}$ und $\mathcal{A}_{(\omega)}(K_i)^s/\overline{p^t\mathcal{A}_{(\omega)}(K_i)^{s_1}}$ ist ebenfalls Isomorphismus. Im

Fall $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$ reicht es somit zu zeigen, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ das Diagramm (mit den Bezeichnungen aus 2.2 und 2.1)

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Kern}_i(\mathcal{E}_{(\omega)})' & \xrightarrow{t_i^{i+1}} & \mathrm{Kern}_{i+1}(\mathcal{E}_{(\omega)})' \\
{\scriptstyle \nu_i}\Big\uparrow & & {\scriptstyle \nu_{i+1}}\Big\uparrow \\
\mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)'^s/\overline{p^t(-D)\mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)'^{s_1}} & \xrightarrow{\sigma_i^{i+1}} & \mathcal{E}_{(\omega)}(K_{i+1})'^s/\overline{p^t(-D)\mathcal{E}_{(\omega)}(K_{i+1})'^{s_1}} \\
{\scriptstyle (\mathcal{F}\circ\varrho'_{K_i})^s}\Big\downarrow & & {\scriptstyle (\mathcal{F}\circ\varrho'_{K_{i+1}})^s}\Big\downarrow \\
\mathcal{A}_{(\omega)}(K_i)^s/\overline{p^t\mathcal{A}_{(\omega)}(K_i)^{s_1}} & \xrightarrow{\tau_i^{i+1}} & \mathcal{A}_{(\omega)}(K_{i+1})^s/\overline{p^t\mathcal{A}_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}}
\end{array}$$

kommutiert, wobei $\sigma_i^{i+1}(T+\overline{p^t(-D)\mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)'^{s_1}}) := T\circ\iota_{i+1}^i + \overline{p^t(-D)\mathcal{E}_{(\omega)}(K_{i+1})'^{s_1}}$. Der obere Teil des Diagramms kommutiert, denn für $T \in \mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)'^s$ und $f \in \mathrm{Kern}_{i+1}(\mathcal{E}_{(\omega)})$ ist:

$$\begin{aligned}
t_i^{i+1}(\nu_i(T+\overline{p^t(-D)\mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)'^{s_1}}))(f) &= T|_{\mathrm{Kern}_i(\mathcal{E}_{(\omega)})}(\iota_{i+1}^i(f)) \\
&= \nu_{i+1}(T\circ\iota_{i+1}^i + \overline{p^t(-D)\mathcal{E}_{(\omega)}(K_{i+1})'^{s_1}})(f) \\
&= \nu_{i+1}(\sigma_i^{i+1}(T+\overline{p^t(-D)\mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)'^{s_1}}))(f).
\end{aligned}$$

Der untere Teil kommutiert, denn für $T \in \mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)'^s$ ist:

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{F}\circ\varrho'_{K_{i+1}})^s(\sigma_i^{i+1}(T+\overline{p^t(-D)\mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)'^{s_1}})) \\
&\qquad = (\mathcal{F}\circ\varrho'_{K_{i+1}})^s(T\circ\iota_{i+1}^i + \overline{p^t(-D)\mathcal{E}_{(\omega)}(K_{i+1})'^{s_1}}) \\
&\qquad = (\mathcal{F}(T_j\circ\iota_{i+1}^i\circ\varrho_{K_{i+1}}))_{j=1,\ldots,s} + \overline{p^t\mathcal{A}_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}} \\
&\qquad = (\mathcal{F}(T_j\circ\varrho_{K_i}))_{j=1,\ldots,s} + \overline{p^t\mathcal{A}_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}} \\
&\qquad = \tau_i^{i+1}((\mathcal{F}\circ\varrho'_{K_i})^s(T+\overline{p^t(-D)\mathcal{E}_{(\omega)}(K_i)'^{s_1}})).
\end{aligned}$$

Also ist $(\mathbf{V})_{\mathcal{E}_{(\omega)}} \Leftrightarrow (\mathbf{VI})_{\mathcal{E}_{(\omega)}}$ gezeigt. Man zeigt $(\mathbf{V})_{\mathcal{E}_{\{\omega\}}} \Leftrightarrow (\mathbf{VI})_{\mathcal{E}_{\{\omega\}}}$ genauso.
Im Fall $F = \mathcal{D}'_{(\omega)}$ ist nach Lemma 3.4

$$\nu_i : \mathcal{D}_{(\omega)}(K_i)^s/\overline{p^t(-D)\mathcal{D}_{(\omega)}(K_i)^{s_1}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kern}_i(\mathcal{D}'_{(\omega)})',$$

$$\nu_i(f+\overline{p^t(-D)\mathcal{D}_{(\omega)}(K_i)^{s_1}}) := f|_{\mathrm{Kern}_i(\mathcal{D}'_{(\omega)})}$$

ein Isomorphismus lokalkonvexer Räume. Mittels Fouriertransformation $\mathcal{F}^s$ ist der lokalkonvexe Raum $\mathcal{D}_{(\omega)}(K_i)^s/\overline{p^t(-D)\mathcal{D}_{(\omega)}(K_i)^{s_1}}$ isomorph zu $\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^s/\overline{p^t\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^{s_1}}$ nach dem Beweis von 3.4. Dann reichts es wie im anderen Fall zu zeigen, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Kern}_i(\mathcal{D}'_{(\omega)})' & \xrightarrow{t_i^{i+1}} & \operatorname{Kern}_{i+1}(\mathcal{D}'_{(\omega)})' \\
\nu_i \big\uparrow & & \nu_{i+1} \big\uparrow \\
\mathcal{D}_{(\omega)}(K_i)^s / \overline{p^t(-D)\mathcal{D}_{(\omega)}(K_i)^{s_1}} & \xrightarrow{\sigma_i^{i+1}} & \mathcal{D}_{(\omega)}(K_{i+1})^s / \overline{p^t(-D)\mathcal{D}_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}} \\
\mathcal{F}^s \big\downarrow & & \mathcal{F}^s \big\downarrow \\
\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^s / \overline{p^t \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^{s_1}} & \xrightarrow{\tau_i^{i+1}} & \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_{i+1})^s / \overline{p^t \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}},
\end{array}$$

wobei hier $\sigma_i^{i+1}(f + \overline{p^t(-D)\mathcal{D}_{(\omega)}(K_i)^{s_1}}) := f + \overline{p^t(-D)\mathcal{D}_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}}$. Der obere Teil des Diagramms kommutiert, denn für $f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K_i)^s$ und $T \in \operatorname{Kern}_{i+1}(\mathcal{D}'_{(\omega)})$ ist:

$$\begin{aligned}
t_i^{i+1}(\nu_i(f + \overline{p^t(-D)\mathcal{D}_{(\omega)}(K_i)^{s_1}}))(T) &= f|_{\operatorname{Kern}_i(\mathcal{D}'_{(\omega)})}(\iota_{i+1}^i(T)) \\
&= \nu_{i+1}(f + \overline{p^t(-D)\mathcal{D}_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}})(T) \\
&= \nu_{i+1}(\sigma_i^{i+1}(f + \overline{p^t(-D)\mathcal{D}_{(\omega)}(K_i)^{s_1}}))(T).
\end{aligned}$$

Der untere Teil kommutiert, denn für $f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K_i)^s$ ist:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^s(\sigma_i^{i+1}(f + \overline{p^t(-D)\mathcal{D}_{(\omega)}(K_i)^{s_1}})) &= \mathcal{F}^s(f + \overline{p^t(-D)\mathcal{D}_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}}) \\
&= \mathcal{F}^s(f) + \overline{p^t \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}} \\
&= \tau_i^{i+1}(\mathcal{F}^s(f + \overline{p^t(-D)\mathcal{D}_{(\omega)}(K_i)^{s_1}})).
\end{aligned}$$

Also ist $(\mathbf{V})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}} \Leftrightarrow (\mathbf{VI})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$ gezeigt. Man zeigt $(\mathbf{V})_{\mathcal{D}'_{\{\omega\}}} \Leftrightarrow (\mathbf{VI})_{\mathcal{D}'_{\{\omega\}}}$ genauso. $\square$

KAPITEL 4

Äquivalenz von $(\mathbf{VI})_{\mathbf{F}}$ zu $(\mathbf{VII})_{\mathbf{F}}$

In diesem Kapitel möchten wir die Aussage $(\mathbf{VI})_{\mathbf{F}}$ aus 3.5 von Quotienten von Räumen holomorpher Funktionen mit Hilfe von Isomorphie bzw. Äquivalenz von Spektren auf Räume von holomorphen Funktionen auf Varietäten (siehe 4.18) übertragen. Ein wesentliches Hilfsmittel hierfür wird der Noetheroperator $(N_\gamma, V_\gamma)_{\gamma=1}^\Gamma$ zu $p^t\mathcal{P}^{s_1}$ sein, ein besonderer Differentialoperator mit Polynomkoeffizienten, für den folgende Sequenz exakt ist:

$$\mathcal{P}^{s_2} \xrightarrow{p_1^t} \mathcal{P}^{s_1} \xrightarrow{p^t} \mathcal{P}^{s} \xrightarrow{(N_\gamma,V_\gamma)_{\gamma=1}^\Gamma} \prod_{\gamma=1}^{\Gamma} (\mathcal{P}/I(V_\gamma))^{l_\gamma}$$

Im Fall der ultradifferenzierbaren Funktionen erhält man hieraus mit Hilfe von [**20**] 3.11, 3.12 und 3.14 eine exakte Sequenz

$$\mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_2} \xrightarrow{p_1^t} \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_1} \xrightarrow{p^t} \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s} \xrightarrow{N} \mathcal{H}_{(\omega)}(K) \to 0$$

(bzw. $\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}$, $\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}$ statt $\mathcal{A}_{(\omega)}$, $\mathcal{H}_{(\omega)}$), die einem dann den gewünschten Isomorphismus liefert. Im Fall der Ultradistributionen ist dies, wenn ω keine starke Gewichtsfunktionen (siehe 1.2) ist, nicht so einfach möglich. Da die Gewichtsfunktionen, mit denen $\mathcal{A}^0_{(\omega)}$ und $\mathcal{A}_{\{\omega\}}$ definiert werden, nicht plurisubharmonisch sind, müssen wir bei den Abschätzungen von K zu $K+B$ übergehen, wobei B eine Nullumgebung ist. So werden wir eine Äquivalenz der in 3.5 und 4.20 beschriebenen Spektren erreichen.

Im folgenden sei ω immer eine Gewichtsfunktion (siehe 1.2).

Differentialoperatoren mit Polynomkoeffizienten

4.1. **Definition.** Für einen Differentialoperator $T = \sum_{|\alpha|\le m} p_\alpha \partial^\alpha \in \mathcal{P}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}]$ sei $\operatorname{grad} T$ der Grad von T als Polynom über $\mathcal{P}$, also gleich m, falls $p_\alpha \neq 0$ für ein $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = m$. Ist $i = 1, \ldots, n$, so wird für die linearen Monome $z_i \in \mathcal{P}$ der Kommutator mit T definiert durch

$$\operatorname{ad}(z_i)T := Tz_i - z_iT.$$

Er ist $\mathcal{P}$-linear in T und für $i, j = 1, \ldots, n$, ist $\operatorname{ad}(z_i)\operatorname{ad}(z_j)T = \operatorname{ad}(z_j)\operatorname{ad}(z_i)T$. Daher ist für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ folgende Definition sinnvoll:

$$\operatorname{ad}(z)^\alpha T := \Big(\prod_{i=1}^{n} \operatorname{ad}(z_i)^{\alpha_i}\Big)T.$$

Analog definiert man für eine Matrix $C = (c_{j,k})_{\substack{j=1,\ldots,r\\k=1,\ldots,s}}$ mit Einträgen in $\mathcal{P}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}]$ den Grad mittels

$$\operatorname{grad} C := \max_{\substack{j=1,\ldots,r\\k=1,\ldots,s}} \operatorname{grad} c_{j,k}$$

und den Kommutator durch

$$\operatorname{ad}(z_i)C := Cz_i - z_iC = (\operatorname{ad}(z_i)c_{j,k})_{\substack{j=1,\dots,r\\k=1,\dots,s}}. \tag{26}$$

4.2. **Bemerkung.** Für jeden Differentialoperator $T \in \mathcal{P}[\frac{\partial}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial}{\partial z_n}]$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i > \operatorname{grad} T$ gilt:

$$\operatorname{ad}(z)^\alpha T = 0.$$

Beweis. Es reicht die Aussage für $|\alpha| = \operatorname{grad} T + 1$ zu zeigen. Wir wenden eine Ordnungsinduktion nach $\operatorname{grad} T$ an. Für $\operatorname{grad} T = 0$ ist die Aussage trivial. Für den Induktionsschritt sei nun $T \in \mathcal{P}[\frac{\partial}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial}{\partial z_n}]$ gegeben und $|\alpha| = \operatorname{grad} T + 1$. Da $\operatorname{ad}(z_i)$ $\mathcal{P}$-linear ist, ist $\operatorname{ad}(z)^\alpha$ auch $\mathcal{P}$-linear; ferner verschwinden die Terme niedrigerer Ordnung bei Anwendung von $\operatorname{ad}(z)^\alpha$ nach Induktionsvoraussetzung. Ohne Einschränkung sei also

$$T = \partial^\beta := \prod_{i=1}^n \frac{\partial^{\beta_i}}{(\partial z_i)^{\beta_i}} \qquad \text{wobei } \beta \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\beta| = \operatorname{grad} T.$$

Sei $i = 1,\dots,n$ mit $\alpha_i \neq 0$ fixiert. Nach der Leibniz-Formel ist

$$\operatorname{ad}(z_i)T(\,.\,) := T(z_i\cdot\,.\,) - z_iT(\,.\,) = \sum_{\substack{\tau\in\mathbb{N}_0^n\\0<\tau\leq\beta}} \binom{\beta}{\tau}\partial^\tau(z_i)\partial^{\beta-\tau}(\,.\,) + \partial^0(z_i)\partial^\beta(\,.\,) - z_iT(\,.\,),$$

wobei „ . “ für eine hinreichend oft differenzierbare Funktion stehe. Die Ordnung von $\operatorname{ad}(z_i)T$ ist höchstens $|\beta|-1 = \operatorname{grad} T - 1$, weil sich die letzten beiden Summanden zu Null addieren. Nach Induktionsvoraussetzung verschwindet also $\operatorname{ad}(z_i)T$ bei Anwendung von $\operatorname{ad}(z)^{\alpha-e_i}$ wegen $|\alpha - e_i| = \operatorname{grad} T$. Damit ist die Bemerkung gezeigt. $\square$

4.3. **Lemma** (Spezielle Produktregel)**.** *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen. Für $h \in H(\mathbb{C}^n)$ gilt die Formel:*

$$T(hg) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{h^{(\alpha)}}{\alpha!}(\operatorname{ad}(z)^\alpha T)g$$

für alle $T \in \mathcal{P}[\frac{\partial}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial}{\partial z_n}]$ und $g \in H(U)$, wobei $H(U)$ die holomorphen Funktionen auf U bezeichnet.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass die Summe auf der rechten Seite nach der Bemerkung 4.2 immer endlich ist. Die obenstehende Formel läßt sich für $h \equiv 1$ und $h = z_i \in \mathcal{P}$ leicht verifizieren:

$$T(z_ig) = z_iTg + Tz_ig - z_iTg = z_iTg + \operatorname{ad}(z_i)Tg.$$

Gilt die obige Formel für $h_1, h_2 \in H(\mathbb{C}^n)$ und alle $T \in \mathcal{P}[\frac{\partial}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial}{\partial z_n}]$ und $g \in H(U)$, dann gilt sie auch für $h_1 + h_2$. Wegen $\operatorname{ad}(z)^\beta T \in \mathcal{P}[\frac{\partial}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial}{\partial z_n}]$ und der Leibniz-Regel gilt die Formel dann auch für $h := h_1h_2$, denn

$$\begin{aligned} T(hg) &= T(h_1(h_2g)) \\ &= \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^n} \frac{h_1^{(\beta)}}{\beta!}(\operatorname{ad}(z)^\beta T)(h_2g) \qquad = \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^n} \frac{h_1^{(\beta)}}{\beta!} \sum_{\tau\in\mathbb{N}_0^n} \frac{h_2^{(\tau)}}{\tau!} \operatorname{ad}(z)^\tau(\operatorname{ad}(z)^\beta T)g \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{\alpha,\beta,\tau\in\mathbb{N}_0^n \\ \beta+\tau=\alpha}} \frac{\alpha!}{\beta!\tau!} \frac{h_1^{(\beta)} h_2^{(\tau)}}{\alpha!} (\mathrm{ad}(z)^{\tau+\beta} T) g \;=\; \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{h^{(\alpha)}}{\alpha!} (\mathrm{ad}(z)^{\alpha} T) g.$$

Demnach gilt die Formel für alle $h \in \mathcal{P}$. Da $\mathcal{P}$ in $H(\mathbb{C}^n)$ dicht ist und die rechte Summe endlich, ist die Formel nun richtig für alle $h \in H(\mathbb{C}^n)$, wenn man die Stetigkeit von T auf $H(\mathbb{C}^n)$ beachtet. $\square$

4.4. **Korollar** (Produktregel)**.** *Die Produktregel in Lemma 4.3 gilt nach* (26) *auch dann, wenn* T *eine* $l \times k$*-Matrix* ($k, l \in \mathbb{N}$) *in* $\mathcal{P}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}]$ *und* $g \in H(U)^k$ *ist, wobei dann* $hg := (hg_j)_{j=1,\dots,k}$ *für* $h \in H(\mathbb{C}^n)$.

Noetheroperatoren

4.5. **Definition.** Seien $l, k \in \mathbb{N}$, C eine $l \times k$-Matrix mit Einträgen in $\mathcal{P}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}]$ und $W \subset \mathbb{C}^n$ eine irreduzible Varietät (siehe 1.7). Wir definieren

$$I(W) := \{g \in \mathcal{P} \mid \forall w \in W : g(w) = 0\}$$
$$(C, W) : \mathcal{P}^k \to (\mathcal{P}/I(W))^l, \quad q \mapsto Cq + I(W)^l.$$

Offenbar ist

$$\mathrm{Kern}(C, W) = \{f \in \mathcal{P}^k \mid Cf \in I(W)^l\}$$

und ein $\mathbb{C}$-Modul, im allgemeinen jedoch kein $\mathcal{P}$-Modul.

4.6. **Definition** (Primäre Noetheroperatoren)**.** Für $l, k \in \mathbb{N}$ sei C eine $l \times k$-Matrix mit Einträgen in $\mathcal{P}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}]$ und $W \subset \mathbb{C}^n$ eine irreduzible Varietät (siehe 1.7). Gibt es für jedes $r = 1, \dots, n$ eine $l \times l$-Matrix Q_r in $\{0, 1\}$ mit höchstens einer 1 in jeder Zeile, so dass mit der Bezeichnung aus Definition 4.5

$$(\mathrm{ad}(z_r)C, W) = (Q_r C, W), \tag{27}$$

dann nennen wir (C, W) einen *primären Noetheroperator auf* $\mathcal{P}^k$ mit zugehörigem Modul $\mathrm{Kern}(C, W)$. $\mathrm{Kern}(C, W)$ ist ein $\mathcal{P}$-Modul, da (27) impliziert, dass $\mathrm{Kern}(C, W)$ abgeschlossen ist unter Multiplikation mit Monomen. Dabei ist zu beachten, dass

$$\forall q \in \mathrm{Kern}(C, W) : (C, W) z_r q = (\mathrm{ad}(z_r)C, W)q + (z_r C, W)q = (Q_r C, W)q + 0 = 0.$$

4.7. **Bemerkung.** Diese Definition von primären Noetheroperatoren ist aus Hansen [**20**] 1.2 und 1.22, übernommen mit dem Unterschied, dass die dort definierte Menge von Zeilenoperatoren hier zu Matrizen zusammengefaßt werden. Hansen fordert, dass zu jeder Zeile c_i ($i = 1, \dots, l$) von C eine weitere Zeile $c_{j(i,r)}$ ($j(i, r) \in \{1, \dots, l\}$) in C existiert, so dass

$$(ad(z_r)c_i, W) = (c_{j(i,r)}, W). \tag{28}$$

Ist $Q_r := (\delta_{k,j(i,r)})_{i,k=1,\dots,n}$, so ist $c_{j(i,r)} = (Q_r C)_i$. Daher entspricht Hansens Bedingung (28) der obigen Bedingung (27), wenn man fordert, dass Q_r genau eine 1 in jeder Zeile hat. Betrachten wir den Fall einer Zeile c_i mit $(ad(z_r)c_i, W) = 0$. Nach (28) müsste es dann weitere Zeile in C geben mit $(c_{j(i,r)}, W) = 0$. Da es unnötig ist, eine Zeile in C zu fordern die faktisch $=0$ ist, erlauben wir, dass Q_r Nullzeilen (hier in der i-ten Zeile) haben darf. Daher die Forderung in 4.6, dass Q_r hoechstens eine 1 in jeder Zeile hat.

4.8. **Bemerkung.** (a) Für einen Differentialoperator $T \in \mathcal{P}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}]$ und eine Varietät $W \subset \mathbb{C}^n$ gilt $(T, W) = 0$ (siehe 4.5) genau dann, wenn $T \in I(W)[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}]$. Die Hinlänglichkeit von $(T, W) = 0$ sieht man ein, indem man sich klar macht, dass der Wert des Koeffizienten von $\partial^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial z_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial z_n^{\alpha_n}}$ des Operators T an der Stelle $w \in W$ dem Ausdruck

$$\frac{1}{\alpha!}\, T\Big(\prod_{i=1}^{n}(z_i - w_i)^{\alpha_i}\Big)\Big|_{z=w}$$

entspricht.

(b) Ist B eine Matrix in $\mathcal{P}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}]$, so folgt aus $(B, W) = 0$ nach dem Gezeigten, dass B eine Matrix mit Einträgen in $I(W)[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}]$ ist. Daher kann man statt (27) auch fordern:

$$\mathrm{ad}(z_r)C - Q_r C \text{ hat nur Einträge in } I(W)[\tfrac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial z_n}]. \tag{29}$$

4.9. **Bemerkung.** Aus (29) folgt induktiv, dass für einen primären Noetheroperator (C, W) wie in Definition 4.6 und jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ eine konstante $l \times l$-Matrix Q_α in $\mathbb{C}$ existiert, so dass

$$\mathrm{ad}(z)^\alpha C - Q_\alpha C$$

eine Matrix mit Einträgen in $I(W)[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}]$ ist. Für den Induktionsschluß beachte man, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(z_j)\,\mathrm{ad}(z)^\alpha C - Q_\alpha Q_j C &= \mathrm{ad}(z_j)(\mathrm{ad}(z)^\alpha C - Q_\alpha C) + \mathrm{ad}(z_j) Q_\alpha C - Q_\alpha Q_j C \\ &= \mathrm{ad}(z_j)(\mathrm{ad}(z)^\alpha C - Q_\alpha C) + Q_\alpha(\mathrm{ad}(z_j)C - Q_j C) \end{aligned}$$

wieder eine Matrix in $I(W)[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}]$ ist.

4.10. **Definition.** Ein endliches Tupel $\mathcal{C} := (C_i, W_i)_{i=1,\dots,m}$ von primären Noetheroperatoren auf $\mathcal{P}^k$ heißt *Noetheroperator auf* $\mathcal{P}^k$. $\mathcal{C}$ ordnet man

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}} := \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{Kern}(C_i, W_i)$$

als *zugehörigen $\mathcal{P}$-Modul* zu. Ferner sei mit der Bezeichnung in (26)

$$\mathrm{grad}\, \mathcal{C} := \max_{i=1,\dots,m} \mathrm{grad}\, C_i.$$

4.11. **Beispiel.** *Sei $p \in \mathcal{P} \setminus \mathbb{C}$ quadratfrei, also $p = \prod_{\gamma=1,\dots,\Gamma} q_\gamma$ mit irreduziblen, paarweise teilerfremden Elementen q_γ. Dann gilt für $(1, V(q_\gamma)) : \mathcal{P} \to \mathcal{P}/q_\gamma\mathcal{P}$, $g \mapsto g + q_\gamma\mathcal{P}$:*

$$p\mathcal{P} = \bigcap_{\gamma=1}^{\Gamma} q_\gamma \mathcal{P} = \bigcap_{\gamma=1}^{\Gamma} \mathrm{Kern}(1, V(q_\gamma)).$$

Es folgt, dass $(1, V(q_\gamma))_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$ ein Noetheroperator für $p\mathcal{P}$ ist.

Eine Verallgemeinerung dieses Beispiels auf ein beliebiges Polynome in $p \in \mathcal{P} \setminus \mathbb{C}$ mit Primfaktorzerlegung $p = \prod_{\gamma=1,\dots,\Gamma} q_\gamma^{r_\gamma}$ steht in [**20**] 1.5 (i). Wenn $n \in \mathbb{C}^n$ ein Vektor ist, auf dem der Hauptteil von p nicht verschwindet, erhält als Noetheroperator für $p\mathcal{P}$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \langle n, \operatorname{grad}\rangle \\ \vdots \\ \langle n, \operatorname{grad}\rangle^{r_\gamma - 1} \end{pmatrix}, V(q_\gamma)\right)_{\gamma=1,\dots,\Gamma}.$$

4.12. **Beispiel.** *Die Matrix p^t aus Hauptsatz 1.12 mit Einträgen in $\mathcal{P}$ ist primärer Noetheroperator mit irreduzibler Varietät $W := \mathbb{C}^n$ zu* Kern $p^t = p_1^t\mathcal{P}^{s_2}$ *(siehe 1.14), denn* (27) *ist erfüllt, da jeder Eintrag von p^t als Differentialoperator den Grad 0 hat und daher nach Bemerkung 4.2 die Kommutatoren verschwinden.*

Im folgenden wird die schwierigere Aufgabe in Angriff genommen, einen Noetheroperator mit zugehörigem Modul $p^t\mathcal{P}^{s_1}$ zu finden. Es gibt Beispiele, die zeigen, dass für diese Aufgabe wirklich Differentialoperatoren mit Polynomkoeffizienten gebraucht werden (siehe [**20**] 1.5(iii)).

4.13. **Definition.** Sei W ein endlich erzeugter Modul über einem noetherschen Ring B. Eine *reduzierte Lasker-Noether-Zerlegung* eines Untermoduls M in W sind Untermoduln $(W_r)_{r=1,\dots,R}$ von W und Primideale $(Q_r)_{r=1,\dots,R}$ in B, welche folgende Bedingungen erfüllen:

(1) $\bigcap_{r=1}^{R} W_r = M$,

(2) $\bigcap_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{R} W_r \neq M \;, \quad \forall j = 1,\dots,R$,

(3) $\operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(W/W_r) = \{Q_r\}, \quad \forall r = 1,\dots,R.$ ($\operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}$ definiert in 1.5)

Diese Zerlegung existiert nach [**7**] chap. IV, §2, no.3, Théorème 1 und prop. 4, und es gilt

$$\operatorname{Ass}_B(W/M) = \{Q_r \mid r = 1,\dots,R\}.$$

Aus [**20**] zweiter Beweis von 1.10 übernehmen wir die folgende Definition:

4.14. **Definition.** Ein Untermodul L von $\mathcal{P}^k$ heißt *primär*, wenn für alle $f \in \mathcal{P}^k, g \in \mathcal{P}$ mit $gf \in L$ folgt: $f \in L$ oder es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $g^m\mathcal{P}^k \subset L$.

4.15. **Definition und Bemerkung.** Nach Definition 4.13 gibt es zu $B = \mathcal{P}$, $W = \mathcal{P}^s$, $M = p^t\mathcal{P}^{s_1}$ und $\operatorname{Ass}_B(W/M) = (P_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$ wie im Hauptsatz 1.12 Untermoduln $(M_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$ von $\mathcal{P}^s$, welche im folgenden fest gewählt sein sollen. Die Moduln $(M_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$ sind primär.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{P}^s \backslash M_\gamma$ und $g \in \mathcal{P}$ mit $gf \in M_\gamma$. Es gilt also $f + M_\gamma \neq 0$ und $gf + M_\gamma = 0$; das bedeutet, dass der Endomorphismus $v \mapsto gv$ auf $\mathcal{P}^s/M_\gamma$ nicht injektiv ist. Nach Wahl von M_γ gilt $\operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^s/M_\gamma) = P_\gamma$. Daher ist wegen [**7**] chap.IV, §2, no.1, Prop. 1, die Abbildung $v \to gv$ fast nilpotent, was nilpotent impliziert, weil $\mathcal{P}^s/M_\gamma$ endlich erzeugt ist. Also gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$g^m(\mathcal{P}^s/M_\gamma) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g^m\mathcal{P}^s \subset M_\gamma.$$

Daher ist M_γ primär. ☐

4.16. **Definition.** Sei $\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^s/p^t\mathcal{P}^{s_1}) = (P_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$ wie im Haupsatz 1.12. Im Fall $p^t\mathcal{P}^{s_1} \neq \mathcal{P}^s$ ist $\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^s/p^t\mathcal{P}^{s_1}) \neq \emptyset$ nach 1.5, dann setze $V_\gamma := V(P_\gamma)$ für $\gamma = 1, \dots, \Gamma$. Ist hingegen $p^t\mathcal{P}^{s_1} = \mathcal{P}^s$, dann ist $\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^s/p^t\mathcal{P}^{s_1}) = \emptyset$; in diesem Fall definiere $V_1 := \{0\}$ und $\Gamma := 1$.

4.17. **Lemma.** *Seien $(V_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$ die Varietäten aus Definition 4.16.*

Im Fall $p^t\mathcal{P}^{s_1} = \mathcal{P}^s$ ist $\mathcal{N} := (N_1, V_1) := (0, \{0\})$ ein Noetheroperator auf $\mathcal{P}^s$ mit zugehörigem Modul $\mathcal{P}^s = p^t\mathcal{P}^{s_1}$.

Im Fall $p^t\mathcal{P}^{s_1} \neq \mathcal{P}^s$ kann man einen Noetheroperator $\mathcal{N} := (N_\gamma, V_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$ auf $\mathcal{P}^s$ finden mit

(1) $p^t\mathcal{P}^{s_1} = \bigcap_{\gamma=1}^{\Gamma} \mathrm{Kern}(N_\gamma, V_\gamma)$,

(2) $\forall \gamma = 1, \dots, \Gamma : p^t\mathcal{P}^{s_1} \subsetneq \bigcap_{\substack{\mu=1,\dots,\Gamma \\ \mu\neq\gamma}} \mathrm{Kern}(N_\mu, V_\mu)$,

(3) $\forall \gamma = 1, \dots, \Gamma : p^t\mathcal{P}^{s_1} \subsetneq \mathrm{Kern}(\widetilde{N}_\gamma, V_\gamma) \cap \bigcap_{\substack{\mu=1,\dots,\Gamma \\ \mu\neq\gamma}} \mathrm{Kern}(N_\mu, V_\mu)$,

wobei $\widetilde{N}_\gamma$ definiert ist durch

$$\widetilde{N}_\gamma := \begin{pmatrix} \mathrm{ad}(z_1)N_\gamma \\ \vdots \\ \mathrm{ad}(z_n)N_\gamma \end{pmatrix}.$$

Ferner definiere l_γ als die Anzahl der Zeilen der Matrix N_γ. (N_γ ist also $l_\gamma \times s$-Matrix.)

Beweis. Man prüft leicht die Aussage für den Fall $p^t\mathcal{P}^{s_1} = \mathcal{P}^s$. Im anderen Fall benutzen wir [**20**] 1.23, wo gezeigt wird, dass ein Modul $L \subset \mathcal{P}^s$ genau dann primär ist, wenn es einen primären Noetherschen Operator auf $\mathcal{P}^s$ gibt, dessen zugehöriger Modul L ist. Somit existieren nach 4.15 primäre Noetheroperatoren $(N_\gamma, W_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$ auf $\mathcal{P}^s$ mit $M_\gamma = \mathrm{Kern}(N_\gamma, W_\gamma)$, wobei N_γ eine Matrix in $\mathcal{P}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}]$ und W_γ eine irreduzible Varietät in $\mathbb{C}^n$ ist. Nach dem Beweis von [**20**] 1.23 ist

$$I(W_\gamma) = \mathrm{Rad}(M_\gamma) := \{g \in \mathcal{P} \mid \exists m \in \mathbb{N} : g^m\mathcal{P}^s \subset M_\gamma\}. \tag{30}$$

$\mathcal{P}^s/M_\gamma$ ist endlich erzeugter Modul mit $\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^s/M_\gamma) = \{P_\gamma\}$ nach 4.15 und 4.13(3). Daher besagt [**7**] chap. IV, §2, no.1, proposition 1, dass P_γ genau die Elemente p aus $\mathcal{P}$ enthält, für die die Abbildung $m \mapsto pm$ auf $\mathcal{P}^s/M_\gamma$ nilpotent ist. Zusammen mit (30) gilt

$$\begin{aligned} P_\gamma &= \{g \in \mathcal{P} \mid \exists m \in \mathbb{N} : g^m(\mathcal{P}^s/M_\gamma) = 0\} \\ &= \{g \in \mathcal{P} \mid \exists m \in \mathbb{N} : g^m\mathcal{P}^s \subset M_\gamma\} \\ &= I(W_\gamma). \end{aligned}$$

Also ist für jedes $\gamma = 1, \dots, \Gamma : W_\gamma = V(I(W_\gamma)) = V(P_\gamma) = V_\gamma$ mit den Bezeichnungen aus Definition 4.16. Die Bedingungen (1) und (2) sind erfüllt nach 4.15 und Definition 4.13 (1) und (2). Um induktiv die Bedingungen in (3) zu erfüllen, sei $\delta \in \{1, \dots, \Gamma\}$ und die Bedingung (3) für $\gamma \in \{1, \dots, \delta - 1\}$ erfüllt. Um die Bedingung (3) auch für $\gamma = \delta$ zu erfüllen, beachte man, dass $(\widetilde{N}_\delta, V_\delta)$ ebenfalls ein primärer Noetheroperator auf $\mathcal{P}^s$ ist, da für r, $i = 1, \ldots, n$:

$$(\operatorname{ad}(z_r)\operatorname{ad}(z_i)N_\delta, W) = (\operatorname{ad}(z_i)\operatorname{ad}(z_r)N_\delta, W) = (\operatorname{ad}(z_i)Q_r N_\delta, W) = (Q_r \operatorname{ad}(z_i)N_\delta, W).$$

Da (N_δ, V_δ) die Bedingung (27) erfüllt, ist

$$\operatorname{Kern}(N_\delta, V_\delta) \subset \operatorname{Kern}(\widetilde{N}_\delta, V_\delta). \tag{31}$$

Für $Y_\delta := \operatorname{Kern}(\widetilde{N}_\delta, V_\delta) \cap \big(\bigcap_{\substack{\mu=1,\ldots,\Gamma \\ \mu\neq\delta}} \operatorname{Kern}(N_\mu, V_\mu)\big)$ gilt also

$$p^t\mathcal{P}^{s_1} = \bigcap_{\mu=1}^{\Gamma} \operatorname{Kern}(N_\mu, V_\mu) \subset Y_\delta.$$

Ist (3) für $\gamma = \delta$ nicht erfüllt, so ist $p^t\mathcal{P}^{s_1} = Y_\delta$. Daher bleibt (1) und wegen (31) auch (2) und (3) für $\gamma < \delta$ erfüllt, wenn man N_δ durch $\widetilde{N}_\delta$ ersetzt. Solange (3) für $\gamma = \delta$ nicht erfüllt ist, kann man induktiv weiter N_δ durch $\widetilde{N}_\delta$ ersetzen unter Erhaltung von (1), (2) und (3) für $\gamma < \delta$. Dieser Prozeß kommt zu einem Ende, denn nach Bemerkung 4.2 ist nach endlich vielen Schritten $\widetilde{N}_\delta = 0$ und (3) für $\gamma = \delta$ folgt in diesem Fall aus (2). Also sind schließlich (1), (2) und die Bedingung (3) für $\gamma \leq \delta$ erfüllt und mit Induktion folgt die Behauptung. □

Die Räume $\mathcal{H}_{(\omega)}(K)$, $\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K)$, $\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K)$ und $\mathcal{H}_{\{\omega\}}(K)$

4.18. **Definition.** Wir definieren mit den Bezeichnungen aus 4.17 für $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ mit $K \neq \emptyset$ und $q \in \mathbb{R}$:

$$X_{K,q,\omega} := \{(F_\gamma : V_\gamma \to \mathbb{C}^{l_\gamma})_{\gamma=1,\ldots,\Gamma} \mid |F|_{K,q,\omega} < \infty\},$$

wobei

$$|F|_{K,q,\omega} := \max_{\gamma=1}^{\Gamma} \sup_{z\in V_\gamma} |F_\gamma(z)|e^{-h_K(\operatorname{Im} z)+q\omega(z)}.$$

die Norm des Raumes $X_{K,q,\omega}$ sei. Für $F \in X_{K,q,\omega}$ erklären wir folgende Bedingung

$$\forall z \in \bigcup_{\mu=1}^{\Gamma} V_\mu,\ \exists U \text{ Umgeb. von } z,\ G \in H(U)^s, \forall \gamma = 1, \ldots, \Gamma : F_\gamma|_{U\cap V_\gamma} = (N_\gamma G)|_{U\cap V_\gamma} \tag{32}$$

Der Unterraum der Funktionen in $X_{K,q,\omega}$, die diese Bedingung erfüllen, sei definiert als

$$\mathcal{H}_{(\omega)}(K, q) := \{g \in X_{K,q,\omega} \mid g \text{ erfüllt } (32)\}.$$

und ebenfalls mit der Norm $|\,.\,|_{K,q,\omega}$ versehen.

4.19. **Definition.** Für kompaktes $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ definieren wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{(\omega)}(K) &:= \operatorname{ind}_{q\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_{(\omega)}(K, -q)\\
\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K) &:= \operatorname{proj}_{q\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_{(\omega)}(K, q)\\
\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K) &:= \operatorname{proj}_{q\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_{(\omega)}(K, -\tfrac{1}{q})\\
\mathcal{H}_{\{\omega\}}(K) &:= \operatorname{ind}_{q\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_{(\omega)}(K, \tfrac{1}{q}).
\end{aligned}$$

mit den Inklusionen als verbindende Abbildungen. Die induktiven Limestopologien existieren nach [**35**] 24.6, da die Norm

$$|||f||| := \max_{\gamma=1}^{\Gamma} \sup_{z\in V_\gamma} |f_\gamma(z)|\, e^{-h_K(\operatorname{Im} z)-e^{\omega(z)}}$$

auf $\mathcal{H}_{(\omega)}(K) = \bigcup_{q\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_{(\omega)}(K,-q)$ (bzw. $\mathcal{H}_{\{\omega\}}(K)$) eine lokalkonvexe Topologie induziert, unter der die Inklusionen $\mathcal{H}_{(\omega)}(K,-q) \hookrightarrow \mathcal{H}_{(\omega)}(K)$ (bzw. $\mathcal{H}_{(\omega)}(K,\frac{1}{q}) \hookrightarrow \mathcal{H}_{\{\omega\}}(K)$) stetig werden.

4.20. **Definition.** Seien $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ die Kompakta aus 2.1. Wir definieren mit den Bezeichnungen aus 4.19 für $i \le j$ die kanonische Abbildung

$$a_i^j : \mathcal{H}_{(\omega)}(K_i) \hookrightarrow \mathcal{H}_{(\omega)}(K_j), \quad a_i^j(f) := f$$

und die Bedingungen

$$(\mathbf{VII})_{\mathcal{E}_{(\omega)}} \quad \forall i\in\mathbb{N}, \exists j\ge i, \forall k\ge j, \exists b\in L(\mathcal{H}_{(\omega)}(K_k), \mathcal{H}_{(\omega)}(K_j)) : \\ b\circ a_i^k = a_i^j$$

$$(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}} \quad \forall i\in\mathbb{N}, \exists j\ge i, \forall k\ge j, \exists b\in L(\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_k), \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_j)) : \\ b\circ a_i^k|_{\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_i)} = a_i^j|_{\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_i)}.$$

$$(\mathbf{VII})_{\mathcal{E}_{\{\omega\}}} \quad \forall i\in\mathbb{N}, \exists j\ge i, \forall k\ge j, \exists b\in L(\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_k), \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_j)) : \\ b\circ a_i^k|_{\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i)} = a_i^j|_{\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i)}.$$

$$(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{\{\omega\}}} \quad \forall i\in\mathbb{N}, \exists j\ge i, \forall k\ge j, \exists b\in L(\mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_k), \mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_j)) : \\ b\circ a_i^k|_{\mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_i)} = a_i^j|_{\mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_i)}.$$

Plurisubharmonische Gewichtsfunktionen

4.21. **Lemma.** *Ist $K\subset\mathbb{R}^n$ kompakt, $K\ne\emptyset$, so ist für jedes $q\ge 0$*

$$z\mapsto h_K(\operatorname{Im} z) + q\omega(z) \quad \textit{für alle } z\in\mathbb{C}^n$$

plurisubharmonisch.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass

$$\omega:\mathbb{C}^n\to\mathbb{R},\ \omega(z) := \omega\left(\sum_{i=1}^n |z_i|\right) \quad \text{plurisubharmonisch ist.} \tag{33}$$

Dies zeigen wir nach Definition 1.6 und fixieren dazu z, $w\in\mathbb{C}^n$. Die Funktion $\tau\mapsto\log(|z_i+\tau w_i|)$ ist subharmonisch auf $\mathbb{C}$ für $i=1,\dots,n$. Also ist nach [**21**] 1.6.8 auch $\tau\mapsto\log(\sum_{k=1}^n |z_i+\tau w_i|)$ subharmonisch auf $\mathbb{C}$. Schließlich ist φ_ω (siehe 1.2) konvex und wachsend, weshalb nach [**21**] 1.6.7

$$\tau\mapsto\varphi_\omega\left(\log\left(\sum_{k=1}^n |z_i+\tau w_i|\right)\right) \quad \text{subharmonisch auf } \mathbb{C} \text{ ist.}$$

Also ist (33) gezeigt.

Für $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist $z \mapsto \langle \xi, z \rangle$ holomorph auf $\mathbb{C}^n$ und $v \mapsto \operatorname{Im} v$ harmonisch auf $\mathbb{C}$ (insbesondere subharmonisch). Daher ist wiederum nach [**21**] Theorem 2.6.4 die Abbildung $z \mapsto \langle \xi, \operatorname{Im} z \rangle = \operatorname{Im} \langle \xi, z \rangle$, plurisubharmonisch. Somit ist

$$h_K(\operatorname{Im} z) = \sup_{\xi \in K} \langle \xi, \operatorname{Im} z \rangle$$

als Supremum plurisubharmonischer Funktionen plurisubharmoisch, weil $z \mapsto h_K(\operatorname{Im} z)$ auch stetig ist. Insgesamt folgt also die Behauptung, da $q \geq 0$. □

Die Funktion in Lemma 4.21 ist im allgemeinen für $q < 0$ keine plurisubharmonische Funktion. Ferner gibt es nur für den Fall, dass ω eine starke Gewichtsfunktion (siehe 1.2) ist, eine Abschätzung der Form $-\omega(z) \leq v(z) \leq -C\omega(z)$ mit einer Konstante $C \in]0,1[$ und einer plurisubharmonischen Funktion v auf $\mathbb{C}^n$. Dies wird im folgenden zu einer unterschiedlichen Behandlung der Fälle $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ und $F = \mathcal{D}'_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$ führen, denn bei der späteren Anwendung des globalen Divisions- und Interpolationssatzes in Hansen ([**20**] 3.11, 3.12, 3.14) benötigen wir plurisubharmonische Funktionen mit geeigneten Abschätzungen.

Folgendes Lemma ist eine Anpassung von [**4**] Lemma 4.4 mit Hilfe von [**11**] Lemma 1.6:

4.22. **Lemma.** *Sei ω eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion im Sinne von 1.2 und $h : [0,\infty[\to [0,\infty[$ mit $\lim_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{h(t)} = 0$. Dann gibt es eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion σ mit*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{\sigma(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sigma(t)}{h(t)} = 0.$$

Beweis. Wir wählen induktiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,\infty[$ mit $x_1 = 0$ und den folgenden Eigenschaften für alle $n \in \mathbb{N}$:

(i) $\int_{x_n}^{\infty} \frac{\omega(t)}{1+t^2}\, dt \leq \frac{1}{n^3}$,
(ii) $x_n \geq 2x_{n-1}$,
(iii) $\omega(x_n) \geq 2^{n-i}\omega(x_i) \quad 1 \leq i \leq n-1$,
(iv) $h(x) \geq n^2\omega(x)$ für alle $x \geq x_n$.

Wir definieren dann $\sigma : [0,\infty[\to]0,\infty[$ durch

$$\sigma(x) := n\omega(x) - \sum_{i=1}^{n} \omega(x_i) \quad \text{für alle } x \in [x_n, x_{n+1}[$$

Offenbar ist σ stetig und erfüllt 1.2 (δ). Für $n \geq 2$ und $x \in [x_n, x_{n+1}[$ gilt nach (*iii*):

$$\sigma(x) = \left(n - \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega(x_i)}{\omega(x)} \right) \omega(x) \geq \left(n - \sum_{i=1}^{n} 2^{i-n} \right) \omega(x) \geq (n-2)\omega(x), \tag{34}$$

also ist $\frac{\omega(x)}{\sigma(x)} \leq \frac{1}{n-2}$ für $x \in [x_n, x_{n+1}[$ und $n \geq 2$. Hiermit ist $\lim_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{\sigma(t)} = 0$ und σ erfüllt 1.2 (γ). Aus (*iv*) und der Definition von σ folgt:

$$\sigma(x) \leq n\omega(x) \leq \frac{1}{n} h(x) \quad \text{für alle } x \geq x_n,$$

also ist $\lim_{t\to\infty}\frac{\sigma(t)}{h(t)}=0$. Aus (i) und der Definition von σ folgt:

$$\int_0^\infty \frac{\sigma(t)}{1+t^2}\,dt=\sum_{n=1}^\infty\int_{x_n}^{x_{n+1}}\frac{\sigma(t)}{1+t^2}\,dt\le\sum_{n=1}^\infty\int_{x_n}^\infty\frac{n\omega(t)}{1+t^2}\,dt\le\sum_{n=1}^\infty n\frac{1}{n^3}<\infty,$$

weshalb σ 1.2 (β) erfüllt. Um zu zeigen, dass σ 1.2 (α) erfüllt, bemerke zunächst, dass $L:=\sup_{x\ge x_3}\omega(2x)/\omega(x)<\infty$, da 1.2 (α) für ω gilt. Nach (ii) muss für $x\ge x_3$ einer der folgenden zwei Fälle vorliegen:

- Fall 1 : $x_n\le x<2x<x_{n+1}$: Dann folgt aus (34)

$$\sigma(2x)-\sigma(x)=n(\omega(2x)-\omega(x))\le n(L-1)\omega(x)\overset{(34)}{\le}\frac{n}{n-2}(L-1)\sigma(x)$$

- Fall 2 : $x_n\le x<x_{n+1}\le 2x<x_{n+2}$: Dann ist

$$\begin{aligned}\sigma(2x)-\sigma(x)&=(n+1)\omega(2x)-n\omega(x)-\omega(x_{n+1})\\&\le(n+1)\omega(2x)-(n+1)\omega(x)\le\frac{n+1}{n-2}(L-1)\sigma(x)\end{aligned}$$

Also genügt σ auch 1.2 (α), was zu zeigen blieb. □

Isomorphie von $\mathcal{A}_{(\omega)}(K)^s/\overline{p^t\mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_1}}$ zu $\mathcal{H}_{(\omega)}(K)$

4.23. **Lemma.** *Sei $(N_\gamma,V_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$ der Noetheroperator aus 4.17, wobei N_γ eine $l_\gamma\times s$-Matrix in $\mathcal{P}[\frac{\partial}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial}{\partial z_n}]$ und $(V_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$ die irreduziblen Varietäten aus 4.16 sind. $K\subset\mathbb{R}^n$ sei kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren. Für jedes $r\in\mathbb{R}$ und $\varepsilon>0$ ist*

$$N:\mathcal{A}_{(\omega)}(K,r)^s\to\mathcal{H}_{(\omega)}(K,C^{-\operatorname{sign}(r)\operatorname{grad}N}r-\varepsilon),\quad f\mapsto(N_\gamma f|_{V_\gamma})_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$$

wohldefiniert und stetig ($\operatorname{grad}N$ *definert in 4.10). Ferner sind die linearen Abbildungen*

$$\begin{aligned}N:\mathcal{A}_{(\omega)}(K)^s&\to\mathcal{H}_{(\omega)}(K),\quad f\mapsto(N_\gamma f|_{V_\gamma})_{\gamma=1,\dots,\Gamma}\\N|_{\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)^s}:\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)^s&\to\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K),\quad f\mapsto(N_\gamma f|_{V_\gamma})_{\gamma=1,\dots,\Gamma}\\N|_{\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^s}:\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^s&\to\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K),\quad f\mapsto(N_\gamma f|_{V_\gamma})_{\gamma=1,\dots,\Gamma}\\N|_{\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K)^s}:\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K)^s&\to\mathcal{H}_{\{\omega\}}(K),\quad f\mapsto(N_\gamma f|_{V_\gamma})_{\gamma=1,\dots,\Gamma}\end{aligned}$$

wohldefiniert und stetig.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\Gamma=1$.

(i) Sei $q\ge0$ fixiert. Aus [**11**] 1.2. erhalten wir für alle z, $v\in\mathbb{C}^n$ mit der Konstante $C\ge1$ aus 1.2 (α) (die zweite Gleichung erhält man durch $x:=z+v$, $y:=-v$ und Auflösen):

$$\omega(z+v)\le C(1+\omega(z)+\omega(v))\tag{35}$$

$$-\omega(z+v)\le-\frac{1}{C}\omega(z)+1+\omega(v).$$

Für $f \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K,q)$ gilt nach der Cauchyschen Integralformel mit $z \in \mathbb{C}^n$ und $U := \{v \in \mathbb{C}^n \mid \forall k = 1,\dots,n: \ |v_k| = 1\}$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial z_j} f(z)\right| &= \left|\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{z+U}\frac{\partial}{\partial z_j}\frac{f(\xi)}{\prod_{k=1}^n(z_k-\xi_k)}\,d\xi_1\dots d\xi_n\right| \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{z+U}\left|-\frac{1}{z_j-\xi_j}\ \frac{f(\xi)}{\prod_{k=1}^n(z_k-\xi_k)}\right| d\xi_1\dots d\xi_n, \\
&\leq \sup_{v\in U}|f(z+v)| \\
&\leq \sup_{v\in U}\left(|f(z+v)|e^{-h_K(\operatorname{Im}(z+v))+q\omega(z+v)}\ e^{h_K(\operatorname{Im}(z+v))-q\omega(z+v)}\right) \\
&\overset{(35)}{\leq} \|f\|_{K,q}\sup_{v\in U}\left(e^{h_K(\operatorname{Im} v)+q\omega(v)+q}\right)\ e^{h_K(\operatorname{Im} z)-\frac{q}{C}\omega(z)}.
\end{aligned}$$

Also ist $\frac{\partial}{\partial z_j} : \mathcal{A}_{(\omega)}(K,q) \to \mathcal{A}_{(\omega)}(K,\frac{q}{C})$ stetig. Wiederholt man diese Abschätzung, wobei man q durch $-q$ ersetzt und in (35) die erste Gleichung benutzt, erhält man:

$$\left|\frac{\partial}{\partial z_j} f(z)\right| \leq \ldots \leq \|f\|_{K,-q,\omega}\sup_{v\in U}\left(e^{h_K(\operatorname{Im} v)+Cq\omega(v)+Cq}\right)\ e^{h_K(\operatorname{Im} z)+Cq\omega(z)}$$

Also ist $\frac{\partial}{\partial z_j} : \mathcal{A}_{(\omega)}(K,-q) \to \mathcal{A}_{(\omega)}(K,-Cq)$ stetig. Insgesamt ist für alle $r \in \mathbb{R}$ die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial z_j} : \mathcal{A}_{(\omega)}(K,r) \to \mathcal{A}_{(\omega)}(K, C^{-\operatorname{sign}(r)}r)$$

stetig.

(ii) Sei $r \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ beliebig, dann gibt es nach 1.2 (γ) ein $c_\delta > 0$, so dass für alle $t \geq 0$: $\log(1+t) \leq c_\delta + \delta\omega(t)$. Also ist für alle $z \in \mathbb{C}^n$ und $j \in \{1,\dots,n\}$:

$$\begin{aligned}
|z_j f(z)|e^{-h_K(\operatorname{Im} z)+(r-\delta)\omega(z)} &\leq |f(z)|e^{-h_K(\operatorname{Im} z)+(r-\delta)\omega(z)+\log(1+\sum_{i=1}^n|z_i|)} \\
&\leq e^{c_\delta}|f(z)|e^{-h_K(\operatorname{Im} z)+r\omega(z)}.
\end{aligned}$$

Durch Übergang zum Supremum erhält man die Stetigkeit von

$$z_j : \mathcal{A}_{(\omega)}(K,r) \to \mathcal{A}_{(\omega)}(K,r-\delta), \quad f \mapsto z_j f.$$

(iii) Aus (i) und (ii) folgt mit Definition 4.1, dass für $T \in \mathcal{P}[\frac{\partial}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial}{\partial z_n}]$ und $\varepsilon' > 0$ beliebig die Abbildung $T : \mathcal{A}_{(\omega)}(K,r) \to \mathcal{A}_{(\omega)}(K, C^{-\operatorname{sign}(r)\operatorname{grad}(T)}r - \varepsilon')$ stetig ist.

(iv) Aus (iii) folgt mit Definition 4.1 für jedes $\varepsilon > 0$ die Stetigkeit von

$$N_1 : \mathcal{A}_{(\omega)}(K,r)^s \to \mathcal{A}_{(\omega)}(K, C^{-\operatorname{sign}(r)\operatorname{grad} N_1}r - \varepsilon)^{l_1}.$$

(v) Die komponentenweise Einschränkung einer Funktion $f \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K,q)^{l_1}$ für $q \in \mathbb{R}$ sei definiert durch $\varrho(f) := (f|_{V_i})_{i=1,\dots,l_1}$. Dann ist

$$\varrho : \mathcal{A}_{(\omega)}(K,q)^{l_1} \to X_{K,q,\omega}, \quad f \mapsto \varrho(f)$$

stetig, wobei man beachtet, dass $X_{K,q,\omega}$ auf $\mathcal{H}_{(\omega)}(K,q)$ die Topologie induziert. Daher folgt aus (iv), dass

$$N_1 : \mathcal{A}_{(\omega)}(K,r)^s \to \mathcal{H}_{(\omega)}(K, C^{-\operatorname{sign}(r)\operatorname{grad} N_1}r - \varepsilon) \tag{36}$$

stetig ist, womit die erste Behauptung gezeigt ist.

(vi) Aus den Stetigkeitsabschätzungen der Normen in (36) für $r \geq 0$ erhält man die Stetigkeit von $N_1 : \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)^s \to \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K)$. Analog erhält man aus diesen Abschätzungen für $r = -\varepsilon = -\frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$ die Stetigkeit von $N_1 : \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^s \to \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K)$. $N_1 : \mathcal{A}_{(\omega)}(K,r)^s \to \mathcal{H}_{(\omega)}(K)$ ist stetig nach Definition des induktiven Limes [**35**] vor 24.6 für jedes $r \leq 0$. Damit ist nach [**35**] 24.7 auch $N_1 : \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^s \to \mathcal{H}_{(\omega)}(K)$ stetig. Ebenso folgt aus der Stetigkeit von $N_1 : \mathcal{A}_{(\omega)}(K,r)^s \to \mathcal{H}_{\{\omega\}}(K)$ für jedes $r > 0$ die Stetigkeit von $N_1 : \mathcal{A}_{\{\omega\}}(K)^s \to \mathcal{H}_{\{\omega\}}(K)$, was noch zu zeigen war. □

Im folgenden geht es darum, mit Hilfe der Exaktheit der Sequenz (siehe 4.17)

$$\mathcal{P}^{s_2} \xrightarrow{p_1^t} \mathcal{P}^{s_1} \xrightarrow{p^t} \mathcal{P}^s \xrightarrow{(N_\gamma,V_\gamma)_{\gamma=1}^\Gamma} \prod_{\gamma=1}^{\Gamma} (\mathcal{P}/I(V_\gamma))^{l_\gamma}$$

die Exaktheit der Sequenz lokalkonvexer Räume

$$\mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_2} \xrightarrow{p_1^t} \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_1} \xrightarrow{p^t} \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^s \xrightarrow{N} \mathcal{H}_{(\omega)}(K) \to 0$$

herzuleiten.

4.24. **Lemma.** *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren. Mit den Bezeichnungen aus 1.2, 1.14 und 4.23 gilt: Es gibt ein $m > 0$, so dass für alle $q \geq 0$ ein $C_q > 0$ existiert und es für alle $f \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K,-q)^s \cap \operatorname{Kern} N$ ein $\nu \in \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{A}_{(\omega)}(K,-Cq-\varepsilon)^{s_1}$ gibt mit $p^t\nu = f$ und*

$$|\nu(z)| \leq C_q \|f\|_{K,-q,\omega}\, e^{h_K(\operatorname{Im} z)+Cq\omega(z)+m\log(2+|z|^2)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^n$$

Insbesondere gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $C_{q,\delta} > 0$, so dass für alle f und ν wie oben gilt:

$$\|\nu\|_{K,-Cq-\delta,\omega} \leq C_{q,\delta} \|f\|_{K,-q,\omega}.$$

Ferner gilt

$$\operatorname{Kern}(N : \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^s \to \mathcal{H}_{(\omega)}(K)) = p^t \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_1}$$
$$\operatorname{Kern}(p^t : \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_1} \to \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^s) = p_1^t \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_2}.$$

Beweis. (i) Weil nach Bezeichnung 4.17 $p^t\mathcal{P}^{s_1}$ für jedes $\gamma = 1, \ldots, \Gamma$ enthalten ist in $\operatorname{Kern}(N_\gamma, V_\gamma)$, gilt nach 4.5 für $j = 1, \ldots, s_1$ und $e_j := (\delta_{i,j})_{i=1,\ldots,s_1}$:

$$N_\gamma p^t(e_j) \in I(V_\gamma)^{l_\gamma} \quad \Rightarrow \quad N_\gamma p^t(e_j)|_{V_\gamma} = 0.$$

Nach Bemerkung 4.9 kann man für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ eine konstante $l_\gamma \times l_\gamma$-Matrix $Q_{\gamma,\alpha}$ finden, so dass

$$\operatorname{ad}(z)^\alpha N_\gamma - Q_{\gamma,\alpha} N_\gamma$$

eine Matrix in $I(V_\gamma)[\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}]$ ist. Dies impliziert, dass

$$(\operatorname{ad}(z)^\alpha N_\gamma - Q_{\gamma,\alpha} N_\gamma) p^t(e_j) \in I(V_\gamma)^{l_\gamma},$$

also ist auch $(\operatorname{ad}(z)^\alpha N_\gamma) p^t(e_j)|_{V_\gamma} = 0$. Für $f \in H(\mathbb{C}^n)^{s_1}$ gilt nach Korollar 4.4:

$$N_\gamma(p^t f)|_{V_\gamma} = N_\gamma\Big(\sum_{j=1}^{s_1} f_j p^t(e_j)\Big)\Big|_{V_\gamma} = \sum_{j=1}^{s_1} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{f_j^{(\alpha)}}{\alpha!} (\operatorname{ad}(z)^\alpha N_\gamma) p^t(e_j)|_{V_\gamma} = 0. \tag{37}$$

Man erhält also insbesondere

$$p^t \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_1} \subset \operatorname{Kern} N.$$

(ii) Um die andere Inklusion zu zeigen benutzen wir [**20**] 3.11 (Globaler Divisionssatz), welcher für unseren Fall ($\mathbb{C}^n$ als pseudokonvexes Gebiet) und mit Noetheroperatoren in Matrixform so lautet:

> Sei $\mathcal{C} = (C_i, W_i)_{i=1,\dots,R}$ ein Noetheroperator auf $\mathcal{P}^k$, dessen zugehöriger $\mathcal{P}$-Modul $M_\mathcal{C} \subset \mathcal{P}^k$ erzeugt ist von $P_1, \dots, P_l \in M_\mathcal{C}$. Sei ψ eine plurisubharmonische Funktion auf $\mathbb{C}^n$. Dann gibt es zu jedem $f \in H(\mathbb{C}^n)^k$ mit
>
> $$C_i f|_{W_i} = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, R$$
>
> ein $\nu \in H(\mathbb{C}^n)^l$ mit
>
> $$f = \sum_{j=1}^{l} \nu_j P_j$$
>
> und
>
> $$\sup_{z\in\mathbb{C}^n} |\nu(z)| e^{-\psi_m(z)} \le \sup_{z\in\mathbb{C}^n} |f(z)| e^{-\psi(z)}. \tag{38}$$
>
> Hierbei ist $m > 0$ eine von ψ und f unabhängige Konstante und
>
> $$\psi_m : z \mapsto \sup_{|v|\le m} \psi(z+v) + m \log\left(2 + \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Wir fixieren $q \ge 0$. Die Funktion $\psi : z \mapsto h_K(\operatorname{Im} z) + q\omega(z)$ ist plurisubharmonisch auf $\mathbb{C}^n$ nach Lemma 4.21. Sei $f \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K, -q)^s$ mit $N_\gamma f|_{V_\gamma} = 0$ für alle $\gamma = 1, \dots, \Gamma$. Wir wenden den zitierten globalen Divisionssatz auf f an mit $\mathcal{N} = (N_\gamma, V_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$ als Noetheroperator und $M_\mathcal{N} = p^t\mathcal{P}^{s_1}$ (siehe Bezeichung 4.17 (1) und Definition 4.10), welcher erzeugt ist von $p^t(e_1), \dots, p^t(e_{s_1})$. Dann gibt es ein Tupel $\nu \in H(\mathbb{C}^n)^{s_1}$ mit

$$f = \sum_{j=1}^{s_1} \nu_j p^t(e_j) = p^t(\nu), \tag{39}$$

welches (38) erfüllt. Für $z, v \in \mathbb{C}^n$ ist wegen $\omega(z+v) \le C(1 + \omega(z) + \omega(v))$ (siehe [**11**] 1.2):

$$\begin{aligned} \psi(z+v) &= h_K(\operatorname{Im}(z+v)) + q\omega(z+v) \\ &\le h_K(\operatorname{Im} z) + Cq\omega(z) + h_K(\operatorname{Im} v) + Cq\omega(v) + Cq. \end{aligned} \tag{40}$$

Nach 1.2 (γ) gibt es für jedes $\delta > 0$ eine Konstante $d_\delta > 0$ mit

$$\begin{aligned} \log\left(2 + \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right) &\le \log\left(2(1 + (\sum_{i=1}^{n} |z_i|)^2)\right) \le \log\left(2\left(1 + \sum_{i=1}^{n} |z_i|\right)^2\right) \\ &= \log 2 + 2\log\left(1 + \sum_{i=1}^{n} |z_i|\right) \le \log 2 + \frac{\delta}{m}\omega(z) + d_\delta \end{aligned}$$

Zusammen mit (40) findet man durch Supremumsbildung über $\{v \in \mathbb{C}^n \mid |v| \leq m\}$ Konstanten C_q und $D_{q,\delta} > 0$, so dass

$$\begin{aligned}\psi_m(z) &= \sup_{|v|\leq m} \psi(z+v) + m\log\left(2+\sum_{i=1}^n |z_i|^2\right)\\ &\leq h_K(\operatorname{Im} z) + Cq\omega(z) + m\log\left(2+\sum_{i=1}^n |z_i|^2\right) + \log(C_q) \qquad (41)\\ &\leq h_K(\operatorname{Im} z) + (Cq+\delta)\omega(z) + D_{q,\delta}.\end{aligned}$$

Daher folgt nach (38) die erste Abschätzung und es gilt mit einer von f unabhängigen Konstanten $C_{q,\delta} > 0$:

$$\|\nu\|_{K,-Cq-\delta,\omega} \leq C_{q,\delta}\|f\|_{K,-q,\omega}. \qquad (42)$$

Die rechte Seite ist endlich wegen $f \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K,-q)^s \cap \operatorname{Kern} N$. Damit ist $\nu \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K,-Cq-\delta)^{s_1}$ und es gilt für alle $q \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{Kern} N \cap \mathcal{A}_{(\omega)}(K,-q)^s \subset p^t\mathcal{A}_{(\omega)}(K,-Cq-\delta)^{s_1}. \qquad (43)$$

Durch Vereinigung über alle $q \in \mathbb{N}$ folgt nach Definition von $\mathcal{A}_{(\omega)}(K)$:

$$\operatorname{Kern} N \subset p^t\mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_1},$$

womit zusammen mit (i) die erste behauptete Identität gezeigt ist.

(iii) Um die letzte Identität zu zeigen, bemerken wir, dass die für alle $f \in H(\mathbb{C}^n)^{s_2}$ zu (37) analoge Aussage

$$p^t(p_1^t f) = p^t\Big(\sum_{j=1}^{s_2} f_j p_1^t(e_j)\Big) = \sum_{j=1}^{s_2}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{f_j^{(\alpha)}}{\alpha!}(\operatorname{ad}(z)^\alpha p^t)p_1^t(e_j) = 0$$

aufgrund von $\operatorname{ad}(z)^\alpha p^t = 0$ für $\alpha \neq 0$ und der Wahl von p_1 in 1.14 gilt. Die andere Inklusion $\operatorname{Kern}(p^t : \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_1} \to \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^s) \subset p_1^t\mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_2}$ zeigt man genauso wie in Teil (ii), indem man N durch p^t und p^t durch p_1^t ersetzt. Denn in dem Beweis wurde nur benutzt, dass $(N_\gamma, V_\gamma)_{\gamma=1,\ldots,\Gamma}$ ein Noetheroperator für $p^t\mathcal{P}^{s_1}$ ist; und nach 4.12 ist $(p^t, \mathbb{C}^n)$ ein Noetheroperator für $p_1^t\mathcal{P}^{s_2}$. □

4.25. **Lemma.** *Seien $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren, N die Abbildung aus Lemma 4.23 und p^t die $s \times s_1$-Matrix aus 1.12. Es gibt ein $r > 0$, so dass für alle $q \geq 0$ ein $d_q > 0$ existiert und es für alle $h \in \mathcal{H}_{(\omega)}(K,-q)$ ein $f \in \bigcap_{\varepsilon>0}\mathcal{A}_{(\omega)}(K,-Cq-\varepsilon)^s$ gibt mit $Nf = h$ und*

$$|f(z)| \leq d_q|h|_{K,-q,\omega}\, e^{h_K(\operatorname{Im} z)+Cq\omega(z)+r\log(2+|z|^2)} \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C}^n.$$

Insbesondere gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $d_{q,\delta} > 0$, so dass für alle h und f wie oben gilt:

$$\|f\|_{K,-Cq-\delta,\omega} \leq d_{q,\delta}|h|_{K,-q,\omega}.$$

Insbesondere gilt

$$N(\mathcal{A}_{(\omega)}(K)^s) = \mathcal{H}_{(\omega)}(K).$$

Beweis. Wir werden [**20**] 3.14 zusammen mit [**20**] 3.12 (Globaler Interpolationssatz) anwenden. Für unseren Fall ($\mathbb{C}^n$ als pseudokonvexes Gebiet) und mit Noetheroperatoren in Matrixform besagen diese Sätze zusammen:

Sei $\mathcal{N} = (N_\gamma, V_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$ ein Noetheroperator auf $\mathcal{P}^s$, ψ eine plurisubharmonische Funktion auf $\mathbb{C}^n$. Seien stetige Funktionen $h_\gamma : V_\gamma \to \mathbb{C}^{l_\gamma}$, $\gamma = 1,\dots,\Gamma$, gegeben. Es gebe ferner eine offene Überdeckung $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{C}^n$ und $f_j \in H(U_j)^s$ mit

$$N_\gamma f_j|_{V_\gamma\cap U_j} = h_\gamma|_{U_j} \quad \text{für alle } \gamma = 1,\dots,\Gamma \text{ und } j \in \{1,\dots,s\}.$$

Dann gibt es ein $f \in H(\mathbb{C}^n)^s$ mit

$$N_\gamma f|_{V_\gamma} = h_\gamma \quad \text{für alle } \gamma = 1,\dots,\Gamma$$

und

$$\sup_{z\in\mathbb{C}^n} |f(z)|e^{-\psi_r(z)} \leq \max_{\gamma=1}^{\Gamma} \sup_{z\in V_\gamma} |h_\gamma(z)|e^{-\psi(z)}. \tag{44}$$

Hierbei ist $r > 0$ eine von φ und f unabhängige Konstante und

$$\psi_r : z \mapsto \sup_{|v|\leq r} \psi(z+v) + r\log\left(2 + \sum_{i=1}^n |z_i|^2\right), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Für festes $q > 0$ sei $h = (h_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma} \in \mathcal{H}_{(\omega)}(K,-q)$. Dann gilt nach Definition von $\mathcal{H}_{(\omega)}(K,-q)$ in 4.18:

$$\forall z \in \mathbb{C}^n, \exists U_z \ni z \text{ offen }, f_z \in H(U_z)^s, \forall\gamma = 1,\dots,\Gamma : N_\gamma f_z|_{U_z\cap V_\gamma} = h_\gamma|_{U_z\cap V_\gamma},$$

(Ist $z \in \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{\gamma=1}^{\Gamma} V_\gamma$, so wählt man $U_z \subset \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{\gamma=1}^{\Gamma} V_\gamma$). Man kann die offene Überdeckung $(U_z)_{z\in\mathbb{C}^n}$ von $\mathbb{C}^n$ reduzieren auf eine abzählbare offene Überdeckung $(U_{z_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{C}^n$. (Für jedes z wähle man einen Polyzylinder in U_z mit rationalem Radius und Mittelpunkt mit nur rationalem Real- und Imaginärteil in allen Koordinaten, der z enthält.) Wir wählen $\psi(z) := h_K(\operatorname{Im} z) + q\omega(z)$ (siehe 4.21) mit $q \geq 0$ und wenden den zitierten Satz an. Dabei erhalten wir zu h eine Funktion $f \in H(\mathbb{C}^n)^s$, welche (44) erfüllt, so dass

$$N_\gamma f|_{V_\gamma} = h_\gamma \quad \text{und damit} \quad N(f) = h. \tag{45}$$

Aus (44) folgt analog zum Beweis von (42) die erste Abschätzung und

$$||f||_{K,-Cq-\delta,\omega} \leq d_{q,\delta}|h|_{K,-q,\omega} \tag{46}$$

mit einer von h unabhängigen Konstanten $d_{q,\delta} > 0$. Also gilt

$$\mathcal{H}_{(\omega)}(K,-q) \subset N(\mathcal{A}_{(\omega)}(K,-Cq-\delta)^s). \tag{47}$$

Durch Vereinigung über alle $q \in \mathbb{N}$ folgt dann $\mathcal{H}_{(\omega)}(K) \subset N(\mathcal{A}_{(\omega)}(K)^s)$, wonach wegen Lemma 4.23 die zweite Behauptung gezeigt ist. □

4.26. **Lemma.** *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren, dann ist für jedes $q \geq 0$ der Raum $\mathcal{H}_{(\omega)}(K,-q)$ (siehe 4.18) ein Banachraum.*

Beweis. Sei $q \geq 0$ fixiert. Ist $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}_{(\omega)}(K,-q)$, so kann man durch Übergang zu einer Teilfolge erreichen, dass

$$\sum_{j=1}^{\infty} |h_{j+1} - h_j|_{K,-q,\omega} < \infty.$$

Wir setzen $h_0 := 0$. Nach Lemma 4.25 existieren für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ Funktionen $f_j \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K, -Cq-1)^s$ mit $N(f_j) = h_{j+1} - h_j$ und

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_{K,-Cq-1,\omega} \leq d_{q,1} \sum_{j=0}^{\infty} |h_{j+1} - h_j|_{K,-q,\omega} < \infty.$$

Die Reihe $\sum f_j$ ist als Cauchy-Folge konvergent im Banachraum $\mathcal{A}_{(\omega)}(K, -Cq-1)^s$ gegen $f := \sum_{j=0}^{\infty} f_j$. Es gilt für $h := N(f) \in \mathcal{H}_{(\omega)}(K, -C^{\operatorname{grad} N}(-Cq-1)-1)$

$$h_{k+1} = \sum_{j=0}^{k} (h_{j+1} - h_j) = \sum_{j=0}^{k} N(f_j) = N\Bigg(\sum_{j=0}^{k} f_j\Bigg) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} N(f),$$

wobei die Konvergenz nach Lemma 4.23 in $\mathcal{H}_{(\omega)}(K, -C^{\operatorname{grad} N}(-Cq-1)-1)$ erfolgt. Insbesondere konvergiert $(h_j)_\gamma$ punktweise für jedes $\gamma = 1, \ldots, \Gamma$ gegen h_γ. Nach der Cauchy-Eigenschaft von $(h_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein M, so dass für alle $\gamma = 1, \ldots, \Gamma$, $z \in V_\gamma$ und $j \geq M$

$$\begin{aligned} |h_\gamma(z) - (h_j)_\gamma(z)| &= \lim_{k\to\infty} |(h_k)_\gamma(z) - (h_j)_\gamma(z)| \\ &\leq \lim_{k\to\infty} |h_k - h_j|_{K,-q,\omega} e^{h_K(\operatorname{Im} z)+q\omega(z)} \leq \varepsilon e^{h_K(\operatorname{Im} z)+q\omega(z)}, \end{aligned} \tag{48}$$

daher ist dann

$$|h|_{K,-q,\omega} \leq |h_j|_{K,-q,\omega} + |h - h_j|_{K,-q,\omega} < \infty.$$

Damit ist $h \in \mathcal{H}_{(\omega)}(K, -q)$ und nach (48) erfolgt die Konvergenz auch in $\mathcal{H}_{(\omega)}(K, -q)$. $\square$

4.27. **Satz.** *Sei ω eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion. Es gilt für jedes $K \subset \Omega$ kompakt, konvex mit nichtleerem Inneren, dass*

$$\mathcal{A}_{(\omega)}(K)^s / \overline{p^t \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_1}} \cong \mathcal{H}_{(\omega)}(K)$$

Ferner gilt mit den Bezeichnungen aus 3.5 und 4.20:

$$(\mathbf{VI})_{\mathcal{E}_{(\omega)}} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{VII})_{\mathcal{E}_{(\omega)}}.$$

Beweis. $\mathcal{H}_{(\omega)}(K)$ ist nach Definition und Lemma 4.26 als induktives Spektrum von Banachräumen ein (LF)-Raum. Lemma 4.23, 4.24 und 4.25 implizieren, dass die lineare Abbildung

$$N : \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^s / \overline{p^t \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_1}} \to \mathcal{H}_{(\omega)}(K)$$

eine stetige Bijektion ist. Somit ist diese Abbildung nach dem Satz von der offenen Abbildung für (LF)-Räume ([**35**] 24.30, 24.29, 24.28 und 24.8, sowie 24.15 und 24.16) auch ein Isomorphismus lokalkonvexer Räume. Mit den Definitionen in 3.5 und 4.20 kommutiert offenbar das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{(\omega)}(K_i)^s / \overline{p^t \mathcal{A}_{(\omega)}(K_i)^{s_1}} & \xrightarrow{\tau_i^{i+1}} & \mathcal{A}_{(\omega)}(K_{i+1})^s / \overline{p^t \mathcal{A}_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}} \\ {\scriptstyle N}\big\downarrow & & {\scriptstyle N}\big\downarrow \\ \mathcal{H}_{(\omega)}(K_i) & \xrightarrow{a_i^{i+1}} & \mathcal{H}_{(\omega)}(K_{i+1}). \end{array}$$

Hieraus folgt leicht die Behauptung, denn ist $E_i := \mathcal{A}_{(\omega)}(K_i)^s/\overline{p^t\mathcal{A}_{(\omega)}(K_i)^{s_1}}$ und nach $(\mathbf{VI})_{\mathcal{E}_{(\omega)}}$ $B : E_k \to E_j$ gegeben, dann wähle $b := N|_{E_j} \circ B \circ (N|_{E_k})^{-1}$. Ist andererseits b nach $(\mathbf{VII})_{\mathcal{E}_{(\omega)}}$ gegeben, so wähle $B := (N|_{E_j})^{-1} \circ b \circ N|_{E_k}$. □

Isomorphie von $\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^s/\overline{p^t\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^{s_1}}$ zu $\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K)$

Wir zeigen auch hier wie in 4.24 und 4.25, dass die Sequenz lokalkonvexer Räume

$$\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^{s_2} \overset{p_1^t}{\to} \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^{s_1} \overset{p^t}{\to} \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^{s} \overset{N}{\to} \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K) \to 0$$

exakt ist. Die Idee hierzu stammt aus [**12**] 2.4 Proposition.

4.28. **Lemma.** *Seien N aus 4.23 und $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, kompakt mit nichtleerem Inneren, dann gilt mit den Bezeichnungen aus 3.3 und 4.19:*

(i) $\mathrm{Kern}(N : \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^s \to \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K)) = p^t\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^{s_1}$
(ii) $\mathrm{Kern}(p^t : \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^{s_1} \to \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^{s}) = p_1^t\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^{s_2}$
(iii) $N(\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^s) = \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K)$

Ferner gilt: Ist $M \subset \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K)$ beschränkt, so existiert eine Gewichtsfunktion σ in $o(\omega)$, so dass $M \subset \mathcal{H}_{(\sigma)}(K, -1)$ beschränkt ist.

Beweis. zu (i):
"$\supset$": klar nach (37).
"$\subset$": Sei $f \in \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^s$ mit $Nf = 0$, dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}^n$ und $m \in \mathbb{N}$:

$$|f(z)|e^{-h_K(\operatorname{Im} z) - \frac{\omega(z)}{m}} \le \|f\|_{K, -\frac{1}{m}, \omega}$$

Mit einer Konstante $C_m > 0$ gilt daher für $t \ge 0$, wenn $\log^+ := \max\{\log, 0\}$:

$$g(t) := \sup_{\|z\|_1 \le t} \log^+(|f(z)|e^{-h_K(\operatorname{Im} z)}) \le \frac{\omega(t)}{m} + C_m \tag{49}$$

Dividiert man durch $\omega(t)$ und bildet den Grenzwert $t \to \infty$, so folgt: $\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{\omega(t)} = 0$. Der Satz [**11**] 1.7 läßt sich analog für alle Gewichtsfunktionen beweisen, denn im Beweis von [**11**] 1.7 geht 1.2 (β) nicht ein, sondern überträgt sich schlicht mit [**11**] 1.7(ii) auf σ. Also gibt es eine Gewichtsfunktion σ mit

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sigma(t)}{\omega(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{\sigma(t)} = 0, \tag{50}$$

Es existiert wegen der Monotonie von g ein $A > 1$, so dass für $t \ge 0$: $\sigma(t) \ge g(t) - \log(A)$, weshalb für $z \in \mathbb{C}^n$ folgt:

$$|f(z)|e^{-h_k(\operatorname{Im} z) - \sigma(z)} \le \frac{|f(z)|e^{-h_K(\operatorname{Im} z)}}{e^{g(\|z\|_1)}} A \overset{\text{Def. von } g}{\le} A.$$

Also ist $f \in \mathcal{A}_{(\sigma)}(K, -1)^s \subset \mathcal{A}_{(\sigma)}(K)^s$ mit $Nf = 0$. Nach 4.24 existiert ein $\nu \in \mathcal{A}_{(\sigma)}(K)^{s_1}$ mit $p^t\nu = f$, insbesondere gibt es ein $q > 0$ mit $\nu \in \mathcal{A}_{(\sigma)}(K, -q)^{s_1}$. Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es nach (50) ein $D_m > 0$, so dass für $t \geq D_m : \omega(t) \geq qm\sigma(t)$. Daher folgt nun für $z \in \mathbb{C}^n$ mit $\|z\|_1 \geq D_m$:

$$|\nu(z)|e^{-h_K(\operatorname{Im} z)-\frac{\omega(z)}{m}} \leq |\nu(z)|e^{-h_K(\operatorname{Im} z)-q\sigma(z)} \leq \|\nu\|_{K,-q,\sigma} < \infty$$

Also gilt $\nu \in \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^{s_1}$ mit $p^t\nu = f$, was (i) zeigt.

zu (ii):

Dies folgt wieder wie (i), nur dass man die zweite Identität in 4.24 statt der ersten benutzt (und p^t, N durch p^t_1, p^t ersetzt).

zu (iii):

Da $N : \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^s \to \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K)$ nach 4.23 wohldefiniert ist, bleibt zu zeigen $\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K) \subset N(\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^s)$. Sei dazu $h \in \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K)$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}^n$ und $m \in \mathbb{N}$:

$$\max_{\gamma=1}^{\Gamma} |h_\gamma(z)|e^{-h_K(\operatorname{Im} z)-\frac{\omega(z)}{m}} \leq |h|_{K,-\frac{1}{m},\omega}$$

Der weitere Beweis verläuft analog zu Teil (i): Man definiere g aus (49) nun so

$$g(t) := \sup_{\|z\|_1 \leq t} \log^+(\max_{\gamma=1}^{\Gamma} |h_\gamma(z)|e^{-h_K(\operatorname{Im} z)})$$

und erhält wie oben σ mit den Eigenschaften (50). Aus $h \in \mathcal{H}_{(\sigma)}(K,-1) \subset \mathcal{H}_{(\sigma)}(K)$ erhält man diesmal mit 4.25 ein $f \in \mathcal{A}_{(\sigma)}(K,-C-1)^s$ mit $Nf = h$, und es stellt sich wieder mit (50) heraus, dass $f \in \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^s$.

Die letze Aussage des Lemmas folgt wie in (iii), indem man $M \subset \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K)$ beschränkt, statt einem beliebigen $h \in \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K)$ betrachtet und

$$g(t) := \sup_{\|z\|_1 \leq t,\ h \in M} \log^+(\max_{\gamma=1}^{\Gamma} |h_\gamma(z)|e^{-h_K(\operatorname{Im} z)})$$

setzt. □

4.29. **Korollar.** *Die Abbildung N aus 4.23 induziert einen Isomorphismus lokalkonvexer Räume:*

$$\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^s / \overline{p^t\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^{s_1}} \cong \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K).$$

Beweis. $p^t\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^{s_1}$ ist abgeschlossen nach 4.28 und der Stetigkeit von N (siehe 4.23). Aus 4.28 folgt dann mit dem Banachschen Isomorphiesatz die Behauptung, da $\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)$ und $\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K)$ nach 3.3, 4.19 und 4.26 Frécheträume sind. □

4.30. **Lemma.** *Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sind die Räume* $\operatorname{Kern}_i(\mathcal{E}_{\{\omega\}})'$ *und* $\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i)$ *isomorph als lokalkonvexe Räume. Weiterhin kommutiert mit den Bezeichnungen aus 2.1, 2.2, 3.5 und*

4.20 das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Kern}_i(\mathcal{E}_{\{\omega\}})' & \xrightarrow{t_i^{i+1}} & \mathrm{Kern}_{i+1}(\mathcal{E}_{\{\omega\}})' \\
\nu_i \big\uparrow & & \nu_{i+1} \big\uparrow \\
\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K_i)'^s/\overline{p^t(-D)\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K_i)'^{s_1}} & & \mathcal{E}_{\{\omega\}}(K_{i+1})'^s/\overline{p^t(-D)\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K_{i+1})'^{s_1}} \\
\overline{\mathcal{F}^s} \big\downarrow & & \overline{\mathcal{F}^s} \big\downarrow \\
\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K_i)^s/\overline{p^t\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K_i)^{s_1}} & \xrightarrow{\tau_i^{i+1}} & \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K_{i+1})^s/\overline{p^t\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K_{i+1})^{s_1}} \\
N \big\downarrow & & N \big\downarrow \\
\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i) & \xrightarrow{a_i^{i+1}|_{\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i)}} & \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_{i+1}),
\end{array}$$

wobei $\overline{\mathcal{F}^s}$ bzw. N die von der Fourier-Laplace-Transformation bzw. vom Noetheroperator aus 4.23 induzierten Isomorphismen (siehe 4.29) sind. $(\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i)', (a_i^{i+1})')_{i\in\mathbb{N}}$ ist ferner ein reduziertes Spektrum aus (DFS)-Räumen (siehe Definition 2.13).

Beweis. Die Isomorphie folgt, da ν_i, $\overline{\mathcal{F}^s}$ und N aus dem Diagramm Isomorphismen sind (siehe Beweis von 3.4 und 4.29). Der obere Teil des Diagramms kommutiert nach dem Beweis von 3.6. Der untere Teil kommutiert, denn für $f \in \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K_i)^s$ ist:

$$N(\tau_i^{i+1}(T + \overline{p^t\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K_i)^{s_1}})) = N(T) = a_i^{i+1}(N(T + \overline{p^t\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K_i)^{s_1}})).$$

Um die letze Aussage zu zeigen, beachte, dass nach dem Gezeigten Isomorphismen φ_i und eine Abbildung φ existieren, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Kern}_i(\mathcal{E}_{\{\omega\}})' & \xrightarrow{(\iota^s_{K_i})'} & (\mathrm{proj}_{k\to} \mathrm{Kern}_k(\mathcal{E}_{\{\omega\}}))' \\
\varphi_i \big\downarrow & & \varphi \big\downarrow \\
\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i) & \longrightarrow & \mathrm{ind}_{k\to} \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_k),
\end{array}$$

kommutiert. Aus der Injektivität von φ_i und der Inklusion $\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i) \hookrightarrow \mathrm{ind}_{k\to} \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_k)$ folgt die Injektivität von $(\iota^s_{K_i})'$. Damit hat die kanonische Projektion $\iota^s_{K_i}$ dichtes Bild, weshalb das Spektrum $(\mathrm{Kern}_i(\mathcal{E}_{\{\omega\}})', t_i^{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$ nach 2.13 reduziert und nach dem Beweis von 2.6 (DFS)-Spektrum ist. Also ist nach dem kommutativen Diagramm in der obigen Aussage auch $(\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i)', (a_i^{i+1})')_{i\in\mathbb{N}}$ reduziertes (DFS)-Spektrum. □

4.31. **Satz.** *Sei ω eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion. Mit der Bezeichnung aus 3.5 und 4.20 gilt:*

$$(\mathbf{VI})_{\mathcal{E}_{\{\omega\}}} \quad \Leftrightarrow (\mathbf{VII})_{\mathcal{E}_{\{\omega\}}}.$$

Beweis. Dies zeigt man mit 4.30 genauso wie 4.27. □

Äquivalenz von $(\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^s/\overline{p^t\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^{s_1}})_{i\in\mathbb{N}}$ zu $(\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_i))_{i\in\mathbb{N}}$

Hier lassen sich im allgemeinen scheinbar nicht wie im vorangegangenen Fall Isomorphismen finden, wenn es sich nicht um starke Gewichtsfunktionen (siehe 1.2) handelt. Als Ersatz werden wir stetige, lineare Abbildungen R_i benutzen, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^s/\overline{p^t\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^{s_1}} \arrow[r, "\tau_i^{i+1}"] \arrow[d, "N"'] & \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_{i+1})^s/\overline{p^t\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}} \arrow[d, "N"'] \\
\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_i) \arrow[r, "a_i^{i+1}|_{\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_i)}"'] \arrow[ur, "R_i"] & \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_{i+1})
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Diese 'Äquivalenz' der Spektren $(\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^s/\overline{p^t\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^{s_1}})_{i\in\mathbb{N}}$ und $(\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_i))_{i\in\mathbb{N}}$ impliziert, dass die Bedingung $(\mathbf{VI})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$ (siehe 3.5) zu $(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$ (siehe 4.20) äquivalent ist. Die Idee hierzu stammt aus [**31**] Lemma 3.6 bis Lemma 3.8. Das anschließende Lemma erlaubt uns die Gewichte für die Definition der Räume $\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)$ bzw. $\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K)$ gegen eine plurisubharmonische Funktion u abzuschätzen. Allerdings zu dem Preis von einem Term $\delta|\operatorname{Im} z|$, was in den Abschätzungen eine Verdickung des Kompaktums K um eine kleine Nullumgebung nach sich zieht.

4.32. **Lemma.** *Zu jeder nicht quasianalytischen Gewichtsfunktion σ und jedem $\delta > 0$ gibt es ein $c > 1$ und eine plurisubharmonische Funktion u auf $\mathbb{C}^n$, so dass*

$$-c\sigma(z) \leq u(z) \leq \delta|\operatorname{Im} z| - \sigma(z) \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C}^n.$$

Beweis. Für jede Gewichtsfunktion ω folgt aus [**9**] Proposition 5 nach einer trivialen Abschätzung, dass mit einer Konstanten $D > 0$ und einer subharmonische Funktion $\tilde{u}$ auf $\mathbb{C}$ für alle $v \in \mathbb{C}$

$$-D\omega(v) \leq \tilde{u}(v) \leq |\operatorname{Im} v| - \omega(v).$$

Aus [**11**] 1.2 folgt, dass es eine Zahl $d > 1$ gibt, so dass für alle $z \in \mathbb{C}^n$

$$\omega(z) = \omega\left(\sum_{i=1}^n |z_i|\right) \leq d\left(1 + \sum_{i=1}^n \omega(|z_i|)\right).$$

Hieraus folgt

$$\sum_{i=1}^n \tilde{u}(z_i) - 1 \leq \sum_{i=1}^n |\operatorname{Im} z_i| - \left(1 + \sum_{i=1}^n \omega(z_i)\right) \leq n|\operatorname{Im} z| - \frac{\omega(z)}{d} \tag{51}$$

$$\sum_{i=1}^n \tilde{u}(z_i) - 1 \geq -D\sum_{i=1}^n \omega(z_i) - \frac{\omega(z)}{\omega(0)} \geq -\left(Dn + \frac{1}{\omega(0)}\right)\omega(z)$$

Wählt man $\omega := \frac{nd}{\delta}\sigma$, dann folgt durch Multiplikation von (51) mit $\frac{\delta}{n}$ die Aussage mit $c := -d(Dn + \frac{1}{\omega(0)})$ und $u(z) := \frac{\delta}{n}(\sum_{i=1}^n \tilde{u}(z_i) - 1)$ für $z \in \mathbb{C}^n$. $\square$

4.33. **Lemma.** *Sei $K \subset \Omega$ kompakt, konvex mit nichtleerem Inneren, σ eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion, $\varepsilon > 0$ und $B_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq \varepsilon\}$.*

(i) Dann gibt es $D \geq 1$ und $d > 0$, so dass für jedes $f \in H(\mathbb{C}^n)^s$ mit $N(f) = 0$ und

$$|f(z)| \leq e^{h_K(\operatorname{Im} z) - \sigma(z)} \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C}^n$$

ein $\nu \in H(\mathbb{C}^n)^{s_1}$ existiert mit $p^t\nu = f$ und

$$|\nu(z)| \leq De^{h_{K+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) - d\sigma(z)} \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C}^n$$

(ii) Ebenso gibt es $D' \geq 1$ und $d' > 0$, so dass für jedes $g \in \mathcal{H}_{(\sigma)}(K, 1)$ (siehe 4.18) mit

$$|g_\gamma(z)| \leq e^{h_K(\operatorname{Im} z) - \sigma(z)} \quad \textit{für alle } \gamma = 1, \ldots, \Gamma \textit{ und } z \in V_\gamma,$$

ein $f \in H(\mathbb{C}^n)^s$ existert mit $Nf = g$ und

$$|f(z)| \leq D'e^{h_{K+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) - d'\sigma(z)} \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C}^n.$$

Beweis. Zu (i): Sei f wie in der Voraussetzung gegeben. Nach 4.32 gibt es zu $\delta := \frac{\varepsilon}{C+1}$ ein $u \in PSH(\mathbb{C}^n)$ und $c > 1$, so dass insbesondere für alle $z \in \mathbb{C}^n$:

$$|f(z)| \leq e^{h_K(\operatorname{Im} z) + c^{-1}u(z)}. \tag{52}$$

Wir wenden den im Beweis von Lemma 4.24 Teil (ii) zitierten Satz [**20**] 3.11 (Globaler Divisionssatz) an, und erhalten zunächst zum Operator N die Konstante m, welche unabhängig von der plurisubharmonischen Funktion φ und f ist. Ferner gibt es mit $\psi(z) := h_K(\operatorname{Im} z) + c^{-1}u(z)$ für $z \in \mathbb{C}^n$ ein $\nu \in H(\mathbb{C}^n)^{s_1}$ mit $p^t\nu = f$, welches (38) erfüllt. Aufgrund von (41) (hier für c^{-1} statt q und u statt ω) gilt für $z \in \mathbb{C}^n$

$$\psi_m(z) \leq h_K(\operatorname{Im} z) + (C_{c^{-1}} + 1)u(z) + C_{c^{-1}}.$$

Daher ist nach (38):

$$|\nu(z)|e^{-h_K(\operatorname{Im} z) - (\frac{C}{c}+1)u(z) - C_{c^{-1}}} \leq |\nu(z)|e^{-\psi_m(z)} \leq |f(z)|e^{-\psi(z)} \overset{(52)}{\leq} 1$$

Man beachte

$$-(\frac{C}{c} + 1)u(z) \overset{(4.32)}{\geq} -(C+1)\delta|\operatorname{Im} z| + (\frac{C}{c} + 1)\sigma(z) = -\varepsilon|\operatorname{Im} z| + (\frac{C}{c} + 1)\sigma(z),$$

die Wahl von δ und

$$h_K(\operatorname{Im} z) + \varepsilon|\operatorname{Im} z| = h_{K+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z), \tag{53}$$

dann erhält man (i) mit $D := e^{C_{c^{-1}}}$ und $d := (\frac{C}{c} + 1)$.

Zu (ii): Sei g wie in der Voraussetzung gegeben. Nach 4.32 gibt es zu $\delta := \frac{\varepsilon}{C+1}$ ein $u \in PSH(\mathbb{C}^n)$ und $c > 1$, so dass insbesondere

$$|g_\gamma(z)| \leq e^{h_K(\operatorname{Im} z) + c^{-1}u(z)} \quad \text{für alle } \gamma = 1, \ldots, \Gamma \text{ und } z \in V_\gamma. \tag{54}$$

Wir wenden den im Beweis von Lemma 4.25 zitierten Globalen Interpolationssatz an, und erhalten ein $r > 0$, welches unabhängig von der plurisubharmonischen Funktion ψ ist. Mit $\psi(z) := h_K(\operatorname{Im} z) + c^{-1}u(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, erhalten wir ein $f \in H(\mathbb{C}^n)^s$ mit $Nf = g$, wobei hier nach (44) und (41) (hier für c^{-1} statt q, u statt ω und r statt m):

$$|f(z)|e^{-h_K(\operatorname{Im} z) - (\frac{C}{c}+1)u(z) - C_{c^{-1}}} \leq |f(z)|e^{-\psi_r(z)} \leq \max_{\gamma=1}^{\Gamma} |g_\gamma(z)|e^{-\psi(z)} \overset{(54)}{\leq} 1$$

Man beachte wieder $-(\frac{C}{c} + 1)u(z) \overset{4.32}{\geq} -(C+1)\delta|\operatorname{Im} z| + (\frac{C}{c} + 1)\sigma(z)$, die Wahl von δ sowie (53) und erhält (ii) mit $D' := e^{C_{c^{-1}}}$ und $d' := (\frac{C}{c} + 1)$. □

4.34. **Lemma.** *Seien ω eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion, $K \subset \Omega$ eine kompakte, konvex Menge mit nichtleerem Inneren und $B_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq \varepsilon\}$ für $\varepsilon > 0$. Dann gilt*

$$\operatorname{Kern} N|_{\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)^s} \subset p^t \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K + B_\varepsilon)^{s_1}.$$

Ferner gibt es zu jeder beschränkten Menge $B \subset \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K)$ eine beschränkte Menge $M \subset \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K + B_\varepsilon)^s$, so dass für alle $g \in B$ ein $f \in M$ existiert mit $Nf = g$.

Beweis. (i) Sei $f \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)^s$ mit $Nf = 0$. Wir wählen $\alpha > 0$, so dass $\omega(t) - \log \|f\|_{\mathcal{A}_{(\omega)}(K,1)^s} > 1$ für alle $t > \alpha$ und setzen $h|_{[0,\alpha]} \equiv 1$ und für $t > \alpha$:

$$h(t) := -\sup\{\log|f(z)| - h_K(\operatorname{Im} z) \mid z \in \mathbb{C}^n,\ \|z\|_1 = t\}.$$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}^n$ gilt $|f(z)|e^{-h_K(\operatorname{Im} z) + m\omega(z)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}_{(\omega)}(K,m)^s}$, somit ist

$$\sup_{z \in \mathbb{C}^n, \|z\|_1 = t} \log|f(z)| - h_K(\operatorname{Im} z) \leq -m\omega(t) + \log\|f\|_{\mathcal{A}_{(\omega)}(K,m)^s}. \tag{55}$$

Für $m = 1$ sieht man, dass aufgrund der Wahl von α: $h \geq 1$. Ferner folgt aus (55), dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und $t > \alpha$

$$h(t) \geq m\omega(t) - \log\|f\|_{\mathcal{A}_{(\omega)}(K,m)^s} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m} + \frac{\log\|f\|_{\mathcal{A}_{(\omega)}(K,m)^s}}{mh(t)} \geq \frac{\omega(t)}{h(t)}$$

Wegen $\lim_{t\to\infty} h(t) \geq \lim_{t\to\infty} \omega(t) - \log\|f\|_{\mathcal{A}_{(\omega)}(K,1)^s} = \infty$ muss $\lim_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{h(t)} = 0$ sein. Daher gibt es nach 4.22 eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion σ mit $\lim_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{\sigma(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sigma(t)}{h(t)} = 0$. Insbesondere gibt es ein $L \geq 1$, sodass für alle $t > 0$: $\sigma(t) \leq h(t) + L$. Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}^n$:

$$|f(z)| = e^{h_K(\operatorname{Im} z) + \log|f(z)| - h_K(\operatorname{Im} z)} \leq e^{h_K(\operatorname{Im} z) - h(\|z\|_1)} \leq e^{h_K(\operatorname{Im} z) - \sigma(z) + L},$$

also gibt es nach Lemma 4.33 (i) Konstanten D, d sowie ein $\nu \in H(\mathbb{C}^n)^{s_1}$ mit $p^t\nu = f$ und

$$|\nu(z)| \leq De^{h_{K+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) - d\sigma(z) + L}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Ist $m \in \mathbb{N}$ und $\|z\|_1$ hinreichend groß, so ist nach Wahl von σ: $\frac{\omega(z)}{\sigma(z)} \leq \frac{1}{m}$ und somit $-\sigma(z) \leq -m\omega(z)$. Daher gilt $\nu \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K + B_\varepsilon)^{s_1}$. Also ist

$$\operatorname{Kern} N|_{\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)^s} \subset p^t \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K + B_\varepsilon)^{s_1}.$$

(ii) Sei $B \subset \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K)$ beschränkt. Dann ist für jedes $m \in \mathbb{N}$: $C_m := \sup_{g \in B} |g|_{K,m,\omega} < \infty$. Wir wählen hier $\alpha > 0$, so dass $\omega(t) - \log C_1 \geq 1$ für alle $t > \alpha$. Es sei $h|_{[0,\alpha]} \equiv 1$ und für $t > \alpha$:

$$h(t) := -\sup\{\log|g_\gamma(z)| - h_K(\operatorname{Im} z) \mid g \in B, \gamma = 1, \ldots, \Gamma,\ z \in V_\gamma,\ \|z\|_1 = t\}.$$

Für alle $m \in \mathbb{N}$, $\gamma = 1, \ldots, \Gamma$ und $z \in V_\gamma$ gilt $|g_\gamma(z)|e^{-h_K(\operatorname{Im} z) + m\omega(z)} \leq C_m$ und daher

$$\sup_{z \in \mathbb{C}^n, \|z\|_1 = t} \log|g_\gamma(z)| - h_K(\operatorname{Im} z) \leq -m\omega(t) + \log C_m. \tag{56}$$

Für $m = 1$ sieht man, dass aufgrund der Wahl von α: $h \geq 1$. Ferner folgt aus (56), dass für alle $m \in \mathbb{N}$

$$h(t) \geq m\omega(t) - \log C_m \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m} + \frac{\log C_m}{mh(t)} \geq \frac{\omega(t)}{h(t)}$$

Wegen $\lim_{t\to\infty} h(t) \geq \lim_{t\to\infty} \omega(t) - \log C_1 = \infty$ muss $\lim_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{h(t)} = 0$ sein. Daher gibt es nach 4.22 eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion σ mit $\lim_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{\sigma(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sigma(t)}{h(t)} = 0$. Insbesondere gibt es ein $L' \geq 1$, sodass für alle $t > 0$: $\sigma(t) \leq h(t) + L'$. Es gilt für alle $\gamma = 1, \ldots, \Gamma$ und $z \in V_\gamma$:

$$|g_\gamma(z)| = e^{h_K(\operatorname{Im} z)+\log|g_\gamma(z)|-h_K(\operatorname{Im} z)} \leq e^{h_K(\operatorname{Im} z)-h(\|z\|_1)} \leq e^{h_K(\operatorname{Im} z)-\sigma(z)+L'}.$$

Also gibt es nach Lemma 4.33 (ii) Konstanten D', d' sowie ein $f \in H(\mathbb{C}^n)^s$ mit $Nf = g$ und

$$|f(z)| \leq D' e^{h_{K+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z)-d'\sigma(z)+L'} \quad \forall z \in \mathbb{C}^n. \tag{57}$$

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ folgt wie in (i) $-\sigma(z) \leq -m\omega(z)$ für $\|z\|_1$ hinreichend gross und damit, dass $f \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K + B_\varepsilon)^s$ ist. Die Menge M aller Funktionen in $\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K + B_\varepsilon)^s$, welche die Abschätzung (57) erfüllen, ist eine beschränkte Menge in $\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K + B_\varepsilon)^s$ und erfüllt die geforderte Bedingung. □

Die anschließende Bemerkung wird im zweiten Teil von Kapitel 5 gebraucht:

4.35. **Bemerkung.** Unter den Voraussetzungen von 4.34 gilt

$$\operatorname{Kern}(p^t : \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)^{s_1} \to \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)^s) \subset p_1^t \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K + B_\varepsilon)^{s_2}.$$

Um dies zu zeigen, mache man sich zunächst klar, dass im Beweis von 4.33(i) nur benutzt wurde, dass $(N_\gamma)_{\gamma=1,\ldots,\Gamma}$ ein Noetheroperator für $p^t\mathcal{P}^{s_1}$ ist. Da $(p^t, \mathbb{C}^n)$ ein Noetheroperator für $p_1^t\mathcal{P}^{s_2}$ ist, kann man 4.33(i) für p^t, p_1^t statt N, p^t formulieren und damit wie im Beweis von 4.34(i) die Inklusion beweisen.

4.36. **Lemma.** *Seien ω eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion, $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus 2.1. Für jedes konvexe Kompaktum K in $\mathbb{R}^n$ mit nichtleerem Inneren sei*

$$N : \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)^s/\overline{p^t\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)^{s_1}} \to \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K), \quad f + \overline{p^t\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)^{s_1}} \mapsto Nf.$$

Dann gibt es zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein $R_i \in L(\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_i), \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_{i+1})^s/\overline{p^t\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}})$ mit

$$R_i N(f + \overline{p^t\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^{s_1}}) = f + \overline{p^t\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}}$$
$$NR_i(g) = g$$

für alle $f \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^s$ und $g \in \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_i)$.

Beweis. Sei $i \in \mathbb{N}$ fixiert, $Q_i := \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^s/\overline{p^t\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^{s_1}}$ und $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $K_i + B_{2\varepsilon} \subset K_{i+1}$ für $B_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq \varepsilon\}$. Wir definieren $U_i := \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i + B_\varepsilon)^s \cap N^{-1}(\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_i))$ und

$$\overline{N} : U_i/\operatorname{Kern} N|_{U_i} \to \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_i),$$
$$\overline{N}(f + \operatorname{Kern} N|_{U_i}) := Nf.$$

Die zweite Aussage in Lemma 4.34 besagt, dass $\overline{N}$ surjektiv ist. Da $\overline{N}$ nach Konstruktion injektiv ist, gibt es eine Umkehrabbildung $T := \overline{N}^{-1}$. Ferner definieren wir

$$j : U_i/\operatorname{Kern} N|_{U_i} \to Q_{i+1},$$
$$j(f + \operatorname{Kern} N|_{U_i}) := f + \overline{p^t\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}}$$

Diese lineare Abbildung ist wohldefiniert nach der ersten Aussage in Lemma 4.34 mit $K := K_i + B_\varepsilon$, da $K_i + 2B_\varepsilon \subset K_{i+1}$. Wir setzen

$$R_i := j \circ T : \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_i) \to Q_{i+1}$$

Dann ist R_i linear und es gilt für $f \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^s \subset U_i$:

$$R_i(N(f + \overline{p^t \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^{s_1}})) = j(T(Nf)) = j(f + \operatorname{Kern} N|_{U_i}) = f + \overline{p^t \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}}$$

Sei $g \in \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_i)$ beliebig, dann gibt es $F \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K_i + B_\varepsilon)^s$ mit $T(g) = F + \operatorname{Kern} N|_{U_i}$ und es gilt:

$$N(R_i(g)) = N(j(T(g)) = NF = \overline{N}(T(g)) = g.$$

Also bleibt nur noch die Stetigkeit von R_i zu zeigen. Sei dazu $B \subset \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_i)$ beschränkt. Dann wählen wir gemäß Lemma 4.34 $M \subset \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i + B_\varepsilon)^s$ beschränkt. Sei nun h eine stetige Halbnorm auf Q_{i+1}, dann gibt es eine stetige Halbnorm q auf $\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_{i+1})^s$, so dass für alle $f \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_{i+1})^s$:

$$h(f + \overline{p^t \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}}) \le \inf_{v \in \overline{p^t \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}}} q(f + v) \tag{58}$$

Da M auch in $\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_{i+1})^s$ beschränkt ist, ist $D := \sup_{f \in M} q(f) < \infty$. Sei nun $R_i(g) \in R_i(B)$ beliebig, dann gibt es nach Wahl von M ein $f \in M$ mit $Nf = g$. Es gibt ein $F \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i + B_\varepsilon)^s$ mit $T(g) = F + \operatorname{Kern} N|_{U_i}$. Wegen $NF = \overline{N}(T(g)) = g = Nf$ folgt $F - f \in \operatorname{Kern}|_{\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i+B_\varepsilon)^s} \subset \overline{p^t \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}}$ nach Lemma 4.34. Also ist $R_i(g) = F + \overline{p^t \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}} = f + \overline{p^t \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}}$ und somit gilt nach (58):

$$h(R_i(g)) = h(f + \overline{p^t \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_{i+1})^{s_1}}) \overset{\textit{Quotientenhalbnorm}}{\le} q(f) \le D$$

Da h eine beliebige Halbnorm auf Q_{i+1} war, zeigt dies, dass $R_i(B)$ beschränkt in Q_{i+1} ist. Da $\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_i)$ ein metrischer Raum, also nach [**35**] 24.13 bornologisch ist, folgt hiermit nach [**35**] 24.10 (3) die Stetigkeit von R_i. □

4.37. **Satz.** *Sei ω eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion. Mit den Bezeichnungen aus 3.5 und 4.20 gilt:*

$$(\mathbf{VI})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$$

Beweis. Im folgenden schreiben wir der Übersichtlichkeit halber a_i^j statt $a_i^j|_{\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K)}$. Für $i \in \mathbb{N}$ sei $Q_i := \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^s / \overline{p^t \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^{s_1}}$, dann gilt mit den Bezeichnungen aus den Definitionen 3.5 und 4.20 und Lemma 4.36:

$$\begin{aligned} R_{i-1} \circ N|_{Q_{i-1}} &= \tau^i_{i-1} \\ N|_{Q_i} \circ R_{i-1} &= a^i_{i-1}, \end{aligned} \tag{59}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} N|_{Q_i} \circ \tau^i_{i-1} &= a^i_{i-1} \circ N_{Q_{i-1}} \\ R_i \circ a^i_{i-1} &= R_i \circ N|_{Q_i} \circ R_{i-1} = \tau^{i+1}_i \circ R_{i-1}, \end{aligned}$$

was schließlich impliziert, dass

$$\begin{aligned} N|_{Q_k} \circ \tau_i^k &= a_i^k \circ N|_{Q_i} \\ R_k \circ a_i^k &= \tau_{i+1}^{k+1} \circ R_i. \end{aligned} \tag{60}$$

Sei nun $(\mathbf{VI})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$ erfüllt und $i' \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben. Dann wählen wir gemäß $(\mathbf{VI})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$ j zu $i := i' + 1$ und setzen $j' := j$. Ist $k' \geq j'$, dann setzen wir $k := k' + 1 \geq j$ und wählen $B \in L(Q_k, Q_j)$ gemäß $(\mathbf{VI})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$. Wir definieren

$$b := N|_{Q_j} \circ B \circ R_{k-1} : \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_{k'}) \to \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_{j'}),$$

dann gilt nach (60) und (59):

$$\begin{aligned} b \circ a_{i'}^{k'} &= N|_{Q_j} \circ B \circ R_{k-1} \circ a_{i-1}^{k-1} \\ &= N|_{Q_j} \circ B \circ \tau_i^k \circ R_{i-1} \\ &= N|_{Q_j} \circ \tau_i^j \circ R_{i-1} \\ &= a_i^j \circ N|_{Q_i} \circ R_{i-1} \\ &= a_i^j \circ a_{i-1}^i = a_{i'}^{j'}. \end{aligned}$$

Also folgt $(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$. Sei nun $(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$ vorausgesetzt und $i' \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben. Dann wählen wir gemäß $(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$ j zu $i := i'$ und setzen $j' := j + 1$. Ist $k' \geq j'$, dann setzen wir $k := k' \geq j$ und wählen $b \in L(\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_k), \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_j))$ gemäß $(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$. Wir definieren

$$B := R_j \circ b \circ N|_{Q_k} : Q_{k'} \to Q_{j'},$$

dann gilt nach (60) und (59):

$$\begin{aligned} B \circ \tau_{i'}^{k'} &= R_j \circ b \circ N|_{Q_k} \circ \tau_i^k \\ &= R_j \circ b \circ a_i^k \circ N|_{Q_i} \\ &= R_j \circ a_i^j \circ N|_{Q_i} \\ &= \tau_{i+1}^{j+1} \circ R_i \circ N|_{Q_i} \\ &= \tau_{i+1}^{j+1} \circ \tau_i^{i+1} = \tau_{i'}^{j'}. \end{aligned}$$

Also folgt $(\mathbf{VI})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$. Hiermit ist die Äquivalenz von $(\mathbf{VI})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$ zu $(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$ gezeigt. □

Wir halten noch für das folgende Kapitel fest:

4.38. **Lemma.** *Seien ω eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren, dann ist $\mathcal{H}_{(\omega)}(K,q)$ (siehe 4.18) für $q \geq 0$ ein Banachraum. Ferner ist $\mathcal{H}_{\{\omega\}}(K)$ ein (DFS)-Raum.*

Beweis. Wir können die gleiche Argumentation wie im Beweis von Lemma 4.26 anwenden, wenn wir statt dem dort zitierten Lemma 4.25 folgende noch zu zeigende Aussage benutzen:

$$\begin{aligned} &\exists q', D' > 0, \forall h \in \mathcal{H}_{(\omega)}(K,q), \exists f \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K + B_\varepsilon, q')^s : \\ &\qquad N f = h \quad \text{und} \quad \|f\|_{K+B_\varepsilon,q',\omega} \leq D' |h|_{K,q,\omega} \end{aligned} \tag{61}$$

wobei hier $\varepsilon > 0$, so gewählt ist, dass $K + B_\varepsilon \subset \Omega$. Um diese Aussage zu zeigen, sei $h \in \mathcal{H}_{(\omega)}(K, q)$ beliebig, $\sigma := q\omega$ und $g := \frac{h}{|h|_{K,1,\sigma}}$. Wir wenden Lemma 4.33 (ii) an und erhalten $F \in H(\mathbb{C}^n)^s$ mit

$$NF = g \quad \text{ und } \quad |F(z)| \leq D' e^{h_{K+B_\varepsilon}(\mathrm{Im}(z)) - d'\sigma(z)}.$$

Für $f := F|h|_{K,1,\sigma} = F|h|_{K,q,\omega}$ gilt dann (61), wobei $q' := d'q$ und D' unabhängig von h sind. Um zu zeigen, dass $\mathcal{H}_{\{\omega\}}(K) = \mathrm{ind}_{n\to} \mathcal{H}_{(\omega)}(K, \frac{1}{n})$ ein (DFS)-Raum ist, reichts es wegen [**35**] 25.20 nachzuweisen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Inklusion $\mathcal{H}_{(\omega)}(K, \frac{1}{n}) \hookrightarrow \mathcal{H}_{(\omega)}(K, \frac{1}{n+1})$ kompakt ist (siehe [**35**] Definition vor 15.1). Sei dazu

$$U := \{g \in \mathcal{H}_{(\omega)}(K, \tfrac{1}{n}) \mid |g|_{K,\frac{1}{n},\omega} \leq 1\}$$

und $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in U. Ohne Einschränkung sei $\Gamma = 1$ und $l_1 = 1$ (ansonsten gehe man im folgenden für jede Varietät und jede Komponente zu konvergentenTeilfolgen über). Nach 4.33 (ii) gibt es $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}_{(\omega)}(K + B_\varepsilon, \frac{d'}{n})^s$ beschränkt mit $Nf_m = g_m$. Daher wird durch $G_m := Nf_m$, $m \in \mathbb{N}$, eine beschränkte Folge in $H(\mathbb{C}^n)$ definiert. Nach dem Satz von Montel konvergiert eine Teilfolge $(G_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf jedem Kompaktum gegen eine Funktion $G \in H(\mathbb{C}^n)$. Für $z \in V_1$ gilt

$$|G(z)| = \lim_{k\to\infty} |g_{m_k}(z)| \leq e^{h_K(\mathrm{Im}\, z) - \frac{\omega(z)}{n}}.$$

Ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, gilt daher

$$\begin{aligned}|g_{m_k}(z) - G(z)| &\leq |g_{m_k}(z) - G(z)| e^{-h_K(\mathrm{Im}\, z) + \frac{\omega(z)}{n}} e^{h_K(\mathrm{Im}\, z) - \frac{\omega(z)}{n+1} + \omega(z)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)} \\ &\leq 2e^{h_K(\mathrm{Im}\, z) - \frac{\omega(z)}{n+1} - \frac{\omega(z)}{n(n+1)}} \leq \varepsilon e^{h_K(\mathrm{Im}\, z) - \frac{\omega(z)}{n+1}}\end{aligned}$$

wenn $z \in V_1 \setminus Q$ und $Q \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und hinreichend groß gewählt ist. Ferner folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von $(G_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ auf Q gegen G, dass es ein N gibt, so dass für alle $k > N$:

$$\sup_{z\in Q\cap V_1} |g_{m_k}(z) - G(z)| e^{-h_K(\mathrm{Im}\, z) + \frac{\omega(z)}{n+1}} \leq \varepsilon$$

Da $\mathcal{H}_{(\omega)}(K, \frac{1}{n+1}) \subset X_{K,\frac{1}{n+1},\omega}$ ein Banachraum ist, konvergiert $(g_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $G|_{V_1}$ in $\mathcal{H}_{(\omega)}(K, \frac{1}{n+1})$, was zu zeigen war. $\square$

Äquivalenz von $(\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K_i)^s/\overline{p^t\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K_i)^{s_1}})_{i\in\mathbb{N}}$ zu $(\mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_i))_{i\in\mathbb{N}}$

Wie im vorherigen Abschnitt konstruieren wir hier stetige, lineare Abbildungen R_i, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K_i)^s/\overline{p^t\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K_i)^{s_1}} \arrow[r, "\tau_i^{i+1}"] \arrow[d, "N"'] & \mathcal{A}_{\{\omega\}}(K_{i+1})^s/\overline{p^t\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K_{i+1})^{s_1}} \arrow[d, "N"'] \\
\mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_i) \arrow[r, "a_i^{i+1}|_{\mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_i)}"'] \arrow[ur, "R_i"] & \mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_{i+1})
\end{tikzcd}$$

kommutiert, um die Aussage zu zeigen.

4.39. **Lemma.** *Seien ω eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion, $K \subset \Omega$ eine kompakte, konvex Menge mit nichtleerem Inneren und $B_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq \varepsilon\}$ für $\varepsilon > 0$. Dann gilt*

$$\operatorname{Kern} N|_{\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K)^s} \subset p^t\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K+B_\varepsilon)^{s_1}$$
$$\operatorname{Kern} p^t|_{\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K)^{s_1}} \subset p_1^t\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K+B_\varepsilon)^{s_2}.$$

Ferner gibt es zu jedem $q > 0$ und jeder beschränkten Menge $B \subset \mathcal{H}_{(\omega)}(K,q)$, eine beschränkte Menge $M \subset \mathcal{A}_{\{\omega\}}(K+B_\varepsilon)^s$, so dass für alle $g \in B$ ein $f \in M$ existiert mit $Nf = g$.

Beweis. (i) Sei $f \in \mathcal{A}_{\{\omega\}}(K)^s \setminus \{0\}$ mit $Nf = 0$. Dann gibt es $q > 0$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}^n$:

$$\frac{|f(z)|}{\|f\|_{K,q,\omega}} \leq e^{h_K(\operatorname{Im} z) - q\omega(z)}$$

Also folgt mit 4.33 (i), dass ein $d > 0$ und $\nu \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K+B_\varepsilon, dq)^{s_1}$ existiert mit $p^t\nu = f$. Die Inklusion folgt nun wegen $\mathcal{A}_{(\omega)}(K+B_\varepsilon, dq)^{s_1} \subset \mathcal{A}_{\{\omega\}}(K+B_\varepsilon)^{s_1}$. Die zweite Inklusion folgt analog zu 4.35.

(ii)Wir dürfen annehmen, dass B die Einheitskugel des Banachraums $\mathcal{H}_{(\omega)}(K,q)$ ist. Nach 4.33 (ii) gilt für

$$M := \{f \in H(\mathbb{C}^n)^s \mid \|f\|_{K+B_\varepsilon, d'q,\omega} \leq D'\}$$

$B \subset N(M)$. Ferner ist M beschränkt in $\mathcal{A}_{(\omega)}(K+B_\varepsilon, d'q)^s$, also auch in $\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K+B_\varepsilon)^s$. □

4.40. **Lemma.** *Seien ω eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion, $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus 2.1. Für jedes kompakte, konvexe $K \subset \mathbb{R}^n$ mit nichtleerem Inneren sei*

$$N : \mathcal{A}_{\{\omega\}}(K)^s/\overline{p^t\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K)^{s_1}} \to \mathcal{H}_{\{\omega\}}(K), \quad f + \overline{p^t\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K)^{s_1}} \mapsto Nf.$$

Dann gibt es zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein $R_i \in L(\mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_i), \mathcal{A}_{\{\omega\}}(K_{i+1})^s/\overline{p^t\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K_{i+1})^{s_1}})$ mit

$$R_iN(f + \overline{p^t\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K_i)^{s_1}}) = f + \overline{p^t\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K_{i+1})^{s_1}}$$
$$NR_i(g) = g$$

für alle $f \in \mathcal{A}_{\{\omega\}}(K_i)^s$ und $g \in \mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_i)$.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von 4.36. Man benutzt 4.39 statt 4.34 und zeigt beim Stetigkeitsbeweis für jedes $q > 0$ die Stetigkeit von

$$R_i|_{\mathcal{H}_{(\omega)}(K_i,q)} : \mathcal{H}_{(\omega)}(K_i,q) \to \mathcal{A}_{\{\omega\}}(K_{i+1})^s/\overline{p^t\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K_{i+1})^{s_1}},$$

woraus mit [**35**] 24.7 die Stetigkeit von R_i auf $\mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_i)$ folgt. □

4.41. **Satz.** *Sei ω nicht quasianalytische Gewichtsfunktion. Mit den Bezeichnungen aus 3.5 und 4.20 gilt:*

$$(\mathbf{VI})_{\mathcal{D}'_{\{\omega\}}} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{\{\omega\}}}$$

Beweis. Dies zeigt man mit 4.40 genauso wie 4.37. □

KAPITEL 5

Hinlänglichkeit der PL-Bedingungen und ein Beweisnachtrag

Hinlänglichkeit der PL-Bedingungen in $(II)_W$ und (III)

Hier zeigen wir, wie aus den schwachen PL-Bedingungen $(\mathbf{II})_\mathbf{W}$ im Hauptsatz 1.12 die zur Existenz einer stetigen, linearen Rechtsinversen äquivalenten Aussagen $(\mathbf{VII})_{\mathcal{E}_{(\omega)}}$ und $(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$ (siehe 4.20) folgen. Analog wird $(\mathbf{III})$ in Haupsatz 1.13 die Bedingung $(\mathbf{VII})_{\mathcal{E}_{\{\omega\}}}$ und $(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{\{\omega\}}}$ implizieren. Falls nichts anderes gefordert wird, soll ω eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion (siehe 1.2) sein.

5.1. **Bemerkung.** Sei $T : E \to F$ nuklear wie in Definition 2.3, so ist auch die transponierte Abbildung $T' : F' \to E'$ nuklear. Denn für $\psi \in F'$ und $x \in E$ ist

$$T'(\psi)(x) = \psi(T(x)) = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j(x)\psi(d_j) = \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} d_j(\psi)c_j\Big)(x),$$

wobei $d_j \in F \subset F''$. (6) ist erfüllt, da die kanonische Einbettung $F \hookrightarrow F''$ isometrisch ist.

5.2. **Lemma.** *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex mit nichtleerem Inneren und $d \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}$, $r > d$, so dass die Einbettung*

$$a_{-d}^{-r} : \mathcal{H}_{(\omega)}(K, -d) \hookrightarrow \mathcal{H}_{(\omega)}(K, -r), \quad f \mapsto f$$

nuklear ist.

Beweis. $\mathcal{E}_{(\omega)}(K)^s$ ist (FN)-Raum nach 2.5. $\mathcal{A}_{(\omega)}(K)^s \cong \mathcal{E}_{(\omega)}(K)'^s$ ist somit (DFN)-Raum, insbesondere ein (DFS)-Raum. Also ist nach [**35**] §26, Übungsaufgabe (4)(b)

$$(\mathcal{A}_{(\omega)}(K)^s/\overline{p^t\mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_1}})' \cong \overline{(p^t\mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_1})}^o \subset (\mathcal{A}_{(\omega)}(K)^s)'$$

als abgeschlossener Unterraum eines (FN)-Raums ein (FN)-Raum. Folglich ist nach 4.27 $\mathcal{H}_{(\omega)}(K) \cong \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^s/\overline{p^t\mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_1}}$ ein (DFN)-Raum. Wir setzen $E := \mathcal{H}_{(\omega)}(K)'$. Nach [**35**] 24.5 (a) ist $E = \operatorname{proj}_{k\in\mathbb{N}} E_k$ mit Banachräumen E_k, so dass die Abbildung $\iota_k : E \to E_k$ ein dichtliegendes Bild hat. Dabei können die Räume E_k $(k \in \mathbb{N})$ mit den Normen $\|\,.\,\|_k$ so gewählt werden, dass für ein wachsendes Fundamentalsystem $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Halbnormen auf E gilt: $p_k(x) = \|\iota_k(x)\|_k$ für alle $x \in E$ und $k \in \mathbb{N}$. Da E ein (FN)-Raum ist, kann man wegen [**35**] 28.4(4) o.B.d.A annehmen, dass $\iota_{k+1}^k : E_{k+1} \to E_k$ nuklear ist. Damit ist auch $(\iota_{k+1}^k)'$ nuklear nach Lemma 5.1. Sei $f \in E'$, so gilt für ein $k \in \mathbb{N}$, $c > 0$ und alle $x \in E$: $|f(x)| \le c\, p_k(x)$. Dann wird durch $g(\iota_k(x)) := f(x)$ für $x \in E$ eine wohldefinierte Abbildung g auf $\iota_k(E)$ definiert für die

$$|g(\iota_k(x))| = |f(x)| \le c\, p_k(x) = c\, \|\iota_k(x)\|_k \quad \text{für alle } x \in E.$$

Wegen $\overline{\iota_k(E)} = E_k$ läßt sich g nach [**35**] 22.19 fortsetzen zu einer stetigen, linearen Abbildung G auf E_k mit $f = G \circ \iota_k = (\iota_k)'(G) \subset (\iota_k)'E_k'$. Dies zeigt, dass

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\iota_k)'E_k' = E'.$$

Aus $\overline{\iota_k(E)} = E_k$ folgt nach [**35**] 23.31, dass $(\iota_k)'$ injektiv ist. Deswegen kann man nach [**35**] 24.34 (2) wieder o.B.d.A annehmen, dass $(\iota_k)' : E_k' \to E'$ ein Einbettungsspektrum ist, dessen induzierte Topologie mit der von E' übereinstimmt. Da $E' = \operatorname{ind}_{q \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{(\omega)}(K, -q)$ ein weiteres Einbettungsspektrum aus Fréchetträumen ist, folgt die Behauptung mit der Äquivalenz von (LF)-Einbettungsspektren in [**35**] 24.35 und [**35**] 28.3(c). $\square$

Die schwachen Phragmén-Lindelöf-Bedingungen werden in folgendem Lemma benutzt, um einen stetigen Operator b_0 zu erhalten, mit dem dann in Lemma 5.11 der Operator b aus $(\mathbf{VII})_\mathbf{F}$ für $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ bzw. $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$ konstruiert werden kann.

5.3. **Lemma.** *Es gelte* $(\mathbf{II})_\mathbf{W}$ *für die Varietäten aus dem Hauptsatz 1.12 und sei* $K \subset \Omega$ *kompakt, konvex mit nichtleerem Inneren. Dann gibt es* $K' \subset \Omega$ *kompakt, konvex mit* $K' \supset K$, *so dass für jedes Kompaktum* $L \subset \Omega$ *mit* $L \supset K'$ *eine Konstante* $r > 0$ *und* $b_0 \in L(\mathcal{H}_{(\omega)}(L, 0), \mathcal{H}_{(\omega)}(K', -r))$ *existieren mit* $b_0(g) = g$ *für alle* $g \in \mathcal{H}_{(\omega)}(K, 0)$.

Beweis. Für ein (später definiertes) $r > 0$ sollen in dem folgenden Diagramm alle Abbildungen bis auf b_0 für kanonische Einbettungen stehen:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}_{(\omega)}(K', -d) & \xrightarrow{a_{-d}^{-r}} & \mathcal{H}_{(\omega)}(K', -r) \\
\iota \Big\uparrow & & \Big\uparrow \exists b_0 \\
\mathcal{H}_{(\omega)}(K, 0) & \longrightarrow & \mathcal{H}_{(\omega)}(L, 0),
\end{array}$$

dann ist zu zeigen, dass eine stetige, lineare Abbildung $b_0 : \mathcal{H}_{(\omega)}(L, 0) \to \mathcal{H}_{(\omega)}(K', -r)$, mit $b_0|_{\mathcal{H}_{(\omega)}(K,0)} = a_{-d}^{-r} \circ \iota$ existiert. Für $\gamma = 1, \ldots, \Gamma$ erhält man aus $\mathbf{AWPL}(\mathbf{\Omega}, \omega)$ für V_γ (siehe 1.7) zu $K \subset \Omega$ kompakt, kompakte Mengen K'_γ. Sei $K' \supset \bigcup_{\gamma=1,\ldots,\Gamma} K'_\gamma$ in Ω kompakt und konvex mit $K' \supset K$. Zu $L \supset K'$ kompakt in Ω und definieren wir

$$U := \{g \in \mathcal{H}_{(\omega)}(L, 0) \mid |g|_{L,0,\omega} \leq 1\} \cap \mathcal{H}_{(\omega)}(K, 0) \text{ (siehe Definition 4.18).}$$

Da jedes $g \in U$ in $\mathcal{H}_{(\omega)}(L) = N(\mathcal{A}_{(\omega)}(L))^s$ (siehe 4.25) ist, ist jede Komponente von g_γ Einschränkung einer ganzen Funktion und damit eine zulässige Funktion für die Bedingung $\mathbf{AWPL}(\mathbf{\Omega}, \omega)$. Für $g \in U$ erfüllen die Komponenten von g_γ (b) in $\mathbf{AWPL}(\mathbf{\Omega}, \omega)$ (mit $K'' = L$) wegen $|g|_{L,0,\omega} \leq 1$ und (a_0) in der Bedingung $\mathbf{AWPL}(\mathbf{\Omega}, \omega)$ für V_γ wegen $g \in \mathcal{H}_{(\omega)}(K, 0)$. Aufgrund der vorausgesetzten Gültigkeit von $(\mathbf{II})_\mathbf{W}$ gilt für die j-te Komponente von g_γ $(j = 1, \ldots, l_\gamma)$ die zugehörige Aussage (c) in $\mathbf{AWPL}(\mathbf{\Omega}, \omega)$ für V_γ und $r_{\gamma,j}$. Demnach folgt aus dieser komponentenweisen Betrachtung für $d := \max_{\gamma=1}^{\Gamma} \max_{j=1}^{l_\gamma} r_{\gamma,j}$, dass $\iota(U)$ in $\mathcal{H}_{(\omega)}(K', -d)$ durch 1 beschränkt ist. Ist τ_L die von $\mathcal{H}_{(\omega)}(L, 0)$ induzierte Topologie, dann ist die Inklusion

$$\iota : (\mathcal{H}_{(\omega)}(K, 0), \tau_L) \to \mathcal{H}_{(\omega)}(K', -d), \quad g \mapsto g,$$

auf U, der Einheitskugel des Definitionsbereichs, beschränkt, also stetig. Nach Lemma 5.2 ist a_{-d}^{-r} nuklear, also gibt es nach Definition 2.3 Linearformen $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}_{(\omega)}(K', -d)'$ und

Elemente $(d_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}_{(\omega)}(K',-r)$, welche (6) erfüllen, so dass

$$a_{-d}^{-r}(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j(x)d_j \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}_{(\omega)}(K',-d).$$

Demnach ist

$$a_{-d}^{-r} \circ \iota(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j \circ \iota(x)d_j \quad \text{für alle } x \in (\mathcal{H}_{(\omega)}(K,0),\tau_L),$$

wobei $c_j \circ \iota$ stetig ist auf $(\mathcal{H}_{(\omega)}(K,0),\tau_L)$. Daher lassen sich die Funktionale $c_j \circ \iota$ nach Hahn-Banach (siehe [**35**] 6.9) zu stetigen und linearen Funktionalen $C_j \in \mathcal{H}_{(\omega)}(L,0)'$ fortsetzen unter Erhaltung der zugehörigen Operatornorm, also $\|C_j\| = \|c_j \circ \iota\|$. Unter Beachtung von (6) in Definition 2.3 und $\|c_j \circ \iota\| \leq \|c_j\|\,\|\iota\|$ definiert

$$b_0(x) := \sum_{j\in\mathbb{N}} C_j(x)d_j \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}_{(\omega)}(L,0)$$

die gewünschte stetige, lineare Fortsetzung von $a_{-d}^{-r} \circ \iota$ auf $\mathcal{H}_{(\omega)}(L,0)$. □

Der vorangegangene Beweis zeigt, dass die schwachen Phragmén-Lindelöf-Bedingungen $\mathbf{(II)_W}$ gebraucht werden, damit für ein bestimmtes d die Inklusion

$$\iota : (\mathcal{H}_{(\omega)}(K,0),\tau_L) \hookrightarrow \mathcal{H}_{(\omega)}(K',-d)$$

stetig ist.

5.4. **Lemma.** *Es gelte* (**III**) *für die Varietäten aus dem Hauptsatz 1.13 und sei $K \subset \Omega$ kompakt, konvex mit nichtleerem Inneren. Dann gibt es $K' \subset \Omega$ kompakt, konvex mit $K' \supset K$, so dass für jedes Kompaktum $L \subset \Omega$ mit $L \supset K'$ eine Abbildung $b_1 \in L(\mathcal{H}_{(\omega)}(L,0),\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K'))$ existiert mit $b_1(g) = g$ für $g \in \mathcal{H}_{(\omega)}(K,0)$.*

Beweis. Für ein (später definiertes) $\sigma \in S_\omega$ sollen in dem folgenden Diagramm mit r zu $d = 1$ aus 5.2 alle Abbildungen bis auf b_1 für kanonische Einbettungen stehen:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_{(\sigma)}(K',-1) \arrow[r, "a_{-1}^{-r}"] & \mathcal{H}_{(\sigma)}(K',-r) \arrow[r] & \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K') \\
\mathcal{H}_{(\omega)}(K,0) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r] & \mathcal{H}_{(\omega)}(L,0), \arrow[ur, "\exists b_1"'] &
\end{tikzcd}$$

dann ist zu zeigen, dass eine stetige, lineare Abbildung $b_1 : \mathcal{H}_{(\omega)}(L,0) \to \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K')$, mit $b_1|_{\mathcal{H}_{(\omega)}(K,0)} = a_{-1}^{-r} \circ \iota$ existiert. Für jedes $\gamma = 1,\ldots,\Gamma$ erhält man aus $\mathbf{AWPL(\Omega},\{\omega\})$ für V_γ (siehe 1.7) zu $K \subset \Omega$ kompakt, kompakte Mengen K'_γ. Sei $K' \supset \bigcup_{\gamma=1,\ldots,\Gamma} K'_\gamma$ in Ω kompakt mit $K' \supset K$. Zu $L \supset K'$ kompakt in Ω und definieren wir

$$U := \{g \in \mathcal{H}_{(\omega)}(L,0) \mid |g|_{L,0,\omega} \leq 1\} \cap \mathcal{H}_{(\omega)}(K,0) \text{ (siehe Definition 4.18)} .$$

Da jedes $g \in U$ in $\mathcal{H}_{(\omega)}(L) = N(\mathcal{A}_{(\omega)}(L)^s)$ (siehe 4.25) ist, ist jede Komponente von g_γ Einschränkung einer ganzen Funktion und damit eine zulässige Funktion für die Bedingung $\mathbf{AWPL(\Omega},\{\omega\})$. Für $g \in U$ erfüllen die Komponenten von g_γ (β) in $\mathbf{AWPL(\Omega},\{\omega\})$ (mit $K'' = L$) wegen $|g|_{L,0,\omega} \leq 1$. (α) in der Bedingung $\mathbf{AWPL(\Omega},\{\omega\})$ für V_γ gilt wegen $g \in \mathcal{H}_{(\omega)}(K,0)$. Aufgrund der vorausgesetzten Gültigkeit von (**III**) gilt für die j-te Komponente von g_γ ($j = 1, \dots, l_\gamma$) die zugehörige Aussage (γ) in $\mathbf{AWPL}(\boldsymbol{\Omega}, \{\omega\})$ für V_γ und $\sigma_{\gamma,j} \in S_\omega$. Nach [**11**] 1.9 gibt es $\sigma \in S_\omega$ mit $\sigma_{\gamma,j} \le \sigma$ für alle $\gamma = 1, \dots, \Gamma$ und $j = 1, \dots, l_\gamma$. Es folgt, dass $\iota(U)$ in $\mathcal{H}_{(\sigma)}(K', -1)$ durch 1 beschränkt ist. Ist τ_L die von $\mathcal{H}_{(\omega)}(L, 0)$ induzierte Topologie, dann ist die Inklusion

$$\iota : (\mathcal{H}_{(\omega)}(K, 0), \tau_L) \to \mathcal{H}_{(\omega)}(K', -1), \quad g \mapsto g,$$

auf U, der Einheitskugel des Definitionsbereichs, beschränkt, also stetig. Wie im Beweis von Lemma 5.3 folgt aus der Stetigkeit von ι, der Nuklearität von a_{-1}^{-r} (siehe 5.2) und der Stetigkeit der Einbettung $\mathcal{H}_{(\sigma)}(K', -r) \hookrightarrow \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K')$ (beachte $\sigma = o(\omega)$) die Existenz von b_1 mit den gewünschten Eigenschaften. $\square$

5.5. **Bezeichnung.** Nach Bemerkung 4.9 existiert zu jedem N_γ ($\gamma = 1, \dots, \Gamma$) (siehe Bezeichnung 4.17) und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ eine konstante $l_\gamma \times l_\gamma$-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{C}$, welche mit $Q_{\gamma,\alpha}$ bezeichnet sein soll, so dass die $l_\gamma \times s$-Matrix

$$\operatorname{ad}(z)^\alpha N_\gamma - Q_{\gamma,\alpha} N_\gamma \text{ nur Einträge in } I(V_\gamma)[\tfrac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial z_n}] \text{ hat.} \tag{62}$$

Dabei kann

$$Q_{\gamma,0} := \operatorname{Id}_{l_\gamma} \tag{63}$$

gewählt werden, wobei $\operatorname{Id}_{l_\gamma}$ die Einheitsmatrix ist.

5.6. **Definition.** Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $f \in H(\mathbb{C}^n)$ setzt man

$$\tau_x f(z) := f(z - x) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^n.$$

Wir definieren im folgenden eine Art Glättungsoperator $m_{f,x}$. Seine wesentliche Eigenschaft steht in (66).

5.7. **Lemma.** *Seien W, $B \subset \mathbb{R}^n$ konvexe Kompakta mit nichtleerem Inneren, $x \in \mathbb{R}^n$ und $f \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(B_\varepsilon)$. Mit den Bezeichnungen aus 5.5 wird für jedes $q \in \mathbb{R}$ durch*

$$m_{f,x} : \mathcal{H}_{(\omega)}(W, q) \to \mathcal{H}^0_{(\omega)}(W + B), \quad m_{f,x}(g) := \Bigg(\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \le \operatorname{grad} N_\gamma}} \frac{\partial^\alpha (\tau_x f)}{\alpha!} Q_{\gamma,\alpha} g_\gamma \Bigg)_{\gamma = 1, \dots, \Gamma}$$

ein stetiger Operator definiert. Für jedes $v \in \mathbb{R}$ existieren von x unabhängige Konstanten c_v, $c'_v > 0$, so dass für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ und $g \in \mathcal{H}_{(\omega)}(W, q)$ mit $[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda) y \mid \lambda \in [0, 1]\}$ gilt

$$|m_{f,x}(g)|_{W+B, q+v, \omega} \le c_v |g|_{W,q,\omega}\, e^{C^{\operatorname{sign}(v)} v \omega(x)}, \tag{64}$$

$$|m_{f,x}(g) - m_{f,y}(g)|_{W+B, q+v, \omega} \le c'_v |g|_{W,q,\omega} \max_{\xi \in [x,y]} e^{C^{\operatorname{sign}(v)} v \omega(\xi)} \|x - y\|_\infty. \tag{65}$$

Beweis. Sei $g \in \mathcal{H}_{(\omega)}(W, q) \subset \mathcal{H}_{(\omega)}(W)$. Wir weisen zunächst die Bedingung (32) für $m_{f,x} g$ nach. Nach Lemma 4.25 existiert eine holomorphe Funktion $G \in \mathcal{A}_{(\omega)}(W)^s$, so dass

$$N_\gamma G|_{V_\gamma} = g_\gamma|_{V_\gamma} \quad \text{für alle } \gamma = 1, \dots, \Gamma.$$

Nach (62) ist für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$(\operatorname{ad}(z)^\alpha N_\gamma - Q_{\gamma,\alpha} N_\gamma) G|_{V_\gamma} = 0,$$

also gilt nach Korollar 4.4 und Lemma 4.2 für alle $\gamma = 1, \ldots, \Gamma$:

$$\begin{aligned}
N_\gamma((\tau_x f)G)|_{V_\gamma} &= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\le \operatorname{grad} N_\gamma}} \frac{\partial^\alpha(\tau_x f)}{\alpha!}(\operatorname{ad}(z)^\alpha N_\gamma)G|_{V_\gamma} \\
&= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\le \operatorname{grad} N_\gamma}} \frac{\partial^\alpha(\tau_x f)}{\alpha!} Q_{\gamma,\alpha} N_\gamma G|_{V_\gamma} \\
&= (m_{f,x} NG)_\gamma|_{V_\gamma} \\
&= (m_{f,x} g)_\gamma|_{V_\gamma},
\end{aligned}$$

Hiermit ist (32) nachgewiesen, insbesondere ist

$$m_{f,x} NG = N((\tau_x f)G). \tag{66}$$

Zunächst zeigen wir, dass für $z \in \mathbb{C}^n$ mit $C \ge 1$ aus 1.2 (α) folgt

$$v\omega(z) \le C|v|\omega(z-x) + C|v| + C^{\operatorname{sign}(v)} v\omega(x). \tag{67}$$

Ist $v \ge 0$, dann gilt nach [**11**] Lemma 1.2: $\omega(z) \le C(1 + \omega(z-x) + \omega(x))$, woraus nach Multiplikation mit $v = |v|$ (67) folgt. Ist hingegen $v < 0$, dann gilt $\omega(x) \le C(1 + \omega(x - z) + \omega(z))$ und somit

$$\omega(z) \ge C^{-1}\omega(x) - 1 - \omega(x-z) \ge C^{-1}\omega(x) - C - C\omega(z-x),$$

woraus wieder mit Multiplikation mit $v = -|v|$ (67) folgt. Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ folgt aus dem Beweis von Lemma 4.23 Abschnitt (i), dass $\partial^\alpha f \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(B)$ ist. Daher gibt es eine Konstante $c_{\alpha,v} > 0$, so dass für $z \in \mathbb{C}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|\partial^\alpha(\tau_x f)(z)| = |\partial^\alpha f(z-x)| \le c_{\alpha,v} e^{h_B(\operatorname{Im} z) - C|v|\omega(z-x)}, \tag{68}$$

Nach Definition 4.18 ist für $\gamma = 1, \ldots, \Gamma$ und $z \in V_\gamma$:

$$|g_\gamma(z)| \le |g|_{W,q,\omega}\ e^{h_W(\operatorname{Im} z) - q\omega(z)}. \tag{69}$$

Nach Konstruktion von $m_{f,x}g$ und (68) sowie (69) gibt es eine Konstante $d_v > 0$, welche von g und x unabhängig ist, so dass für alle $z \in V_\gamma$:

$$\begin{aligned}
|(m_{f,x}g)_\gamma(z)| &\overset{(68),(69)}{\le} d_v\ (e^{h_B(\operatorname{Im} z) - C|v|\omega(z-x)})(|g|_{W,q,\omega}\ e^{h_W(\operatorname{Im} z) - q\omega(z)}) \\
&\le d_v\ |g|_{W,q,\omega}\ e^{h_{W+B}(\operatorname{Im} z) + v\omega(z) - C|v|\omega(z-x) - (q+v)\omega(z)} \\
&\overset{(67)}{\le} d_v e^{C|v|}\ |g|_{W,q,\omega}\ e^{h_{W+B}(\operatorname{Im} z) - (q+v)\omega(z) + C^{\operatorname{sign}(v)} v\omega(x)}.
\end{aligned}$$

Damit ist (64) mit $c_v := d_v e^{C|v|}$ bewiesen.

Um die zweite Ungleichung zu zeigen, beachte, dass für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ nach dem Abschätzungssatz eine Konstanten $D_\alpha, C_\alpha > 0$ existieren, so dass

$$\begin{aligned}
|f^{(\alpha)}(z-x) - f^{(\alpha)}(z-y)| &\le D_\alpha \max_{\substack{j=1,\ldots,n \\ \xi\in[x,y]}} |f^{(\alpha+e_j)}(z-\xi)|\ \|x-y\|_\infty \\
&\overset{(68)}{\le} C_\alpha \max_{\xi\in[x,y]} e^{h_B(\operatorname{Im} z) - C|v|\omega(z-\xi)}\ \|x-y\|_\infty \qquad (70) \\
&\overset{(67)}{\le} C_\alpha\, e^{C|v|} \max_{\xi\in[x,y]} e^{h_B(\operatorname{Im} z) - v\omega(z) + C^{\operatorname{sign}(v)} v\omega(\xi)}\ \|x-y\|_\infty,
\end{aligned}$$

Daher gibt es eine von x, y und g unabhängige Konstante $c'_v > 0$, so dass zusammen mit (69) folgt:

$$\begin{aligned}
|(m_{f,x}g - m_{f,y}g)_\gamma(z)| &= \Bigg| \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\le \operatorname{grad} N_\gamma}} \frac{(\tau_x f^{(\alpha)} - \tau_y f^{(\alpha)})(z)}{\alpha!} Q_{\gamma,\alpha} g_\gamma(z) \Bigg| \\
&\overset{(70),(69)}{\le} c'_v \big(e^{h_B(\operatorname{Im} z) - v\omega(z)} \max_{\xi\in[x,y]} e^{C^{\operatorname{sign}(v)} v\omega(\xi)} \|x-y\|_\infty\big) \\
&\qquad \big(|g|_{W,q,\omega} e^{h_W(\operatorname{Im} z) - q\omega(z)}\big) \\
&\le c'_v\, |g|_{W,q,\omega} e^{h_{W+B}(\operatorname{Im} z) - (q+v)\omega(z)} \max_{\xi\in[x,y]} e^{C^{\operatorname{sign}(v)} v\omega(\xi)} \|x-y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt (65). □

Für den zweiten Teil dieses Kapitels benötigen wir folgendes zu 5.7 analoge Lemma:

5.8. **Lemma.** *Seien W, $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren, $f \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(B)$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann wird für $q \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{N}$ durch*

$$n_{f,x} : \mathcal{A}_{(\omega)}(W,q)^r \to \mathcal{A}^0_{(\omega)}(W+B)^r, \quad n_{f,x}(g) := z \mapsto f(z-x)g(z)$$

eine stetige, lineare Abbildung definiert. Für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ gibt es von x unabhängige Konstanten c_v und c'_v, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ und jedes $g \in \mathcal{A}_{(\omega)}(W,q)^r$:

$$\begin{aligned}
\|n_{f,x}(g)\|_{W+B,q+v,\omega} &\le c_v \|g\|_{W,q,\omega} e^{C^{\operatorname{sign}(v)} v\omega(x)} \\
\|n_{f,x}(g) - n_{f,y}(g)\|_{W+B,q+v,\omega} &\le c'_v\, \|g\|_{W,q,\omega} \max_{\xi\in[x,y]} e^{C^{\operatorname{sign}(v)} v\omega(\xi)} \|x-y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Beweis. Es gelten weiterhin (68) und (70), welche hier nur für $\alpha = 0$ benötigt werden, sowie folgende zu (69) analoge Aussage

$$|g(z)| \le \|g\|_{W,q,\omega} e^{h_W(\operatorname{Im} z) - q\omega(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^n.$$

Genauso wie in Lemma 5.7 mittels (68), (69) und (70) die zwei Stetigkeitsabschätzungen bewiesen wurden, zeigt man hier die behaupteten Abschätzungen, wobei $|\,.\,|_{W,q,\omega}$ und $|\,.\,|_{W+B,q+v,\omega}$ durch $\|\,.\,\|_{W,q,\omega}$ und $\|\,.\,\|_{W+B,q+v,\omega}$ zu ersetzen sind. □

5.9. **Lemma.** *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex mit nichtleerem Inneren und $F \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(B)$, dann gilt für jedes $z \in \mathbb{C}^n$:*

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \int F(z-x)\, d\lambda^n(x) = \int \frac{\partial}{\partial z_i} F(z-x)\, d\lambda^n(x), \tag{71}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x)\, d\lambda^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x+z)\, d\lambda^n(x). \tag{72}$$

Beweis. Aus $\omega(x) \le C(1 + \omega(x-w) + \omega(w))$ (siehe [**11**] 1.2) für alle $w \in \mathbb{C}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ folgt

$$-C(n+1)\omega(w-x) \le -(n+1)\omega(x) + C(n+1)(1+\omega(w)) \tag{73}$$

Für $v \in \mathbb{C}$ mit $|v| \leq 1$ sei $\gamma(t) := tv$ für $t \in [0,1]$ und $c := \|F\|_{B,C(n+1),\omega} e^{h_B(1)}$. Es folgt wegen $\frac{\partial F}{\partial z_i} \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(B)$ (siehe 4.23 (i))

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{v}(F(z-x+e_iv)-F(z-x))\right| &= \left|\frac{1}{v}\int_\gamma \frac{\partial F}{\partial z_i}(z-x+e_iw)\,dw\right| \\ &\leq \sup_{|\tau|\leq 1}\left|\frac{\partial F}{\partial z_i}(z-x+e_i\tau v)\right| \\ &\leq \left\|\frac{\partial F}{\partial z_i}\right\|_{B,C(n+1),\omega} \sup_{|\tau|\leq 1} e^{h_B(\operatorname{Im}(z+e_i\tau v))-C(n+1)\omega(z+e_i\tau v-x)} \\ &\overset{(73),|v|\leq 1}{\leq} c\, e^{h_B(\operatorname{Im} z)-(n+1)\omega(x)} \sup_{|\varrho|\leq 1} e^{C(n+1)(1+\omega(z+e_i\varrho))}.\end{aligned}$$

Nach 1.2 (γ) gilt $\log(1+t) \leq \omega(t)+D$ für ein $D>0$ und alle $t>0$; daher ist die rechte Seite der Ungleichung in x über $\mathbb{R}^n$ integrierbar. Nach dem Lebesgueschen Grenzwertsatz folgt (71). Das erste Integral in (72) existiert, da $F \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(B) \subset \mathcal{A}_{(\omega)}(B, n+1)$. Nach dem Transformationssatz und dem Cauchyschen Integralsatz gilt für $r>0$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} F(x)\,d\lambda^n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} F(x+\operatorname{Re}(z))\,d\lambda^n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \lim_{r\to\infty}\left(\int_{-r}^{r} F(x+\operatorname{Re}(z)+e_1(t+i\operatorname{Im}(z_1)))\,dt\right. \\ &\qquad + \int_0^{\operatorname{Im} z_1} F(x+\operatorname{Re}(z)+e_1(-r+it))\,dt \\ &\qquad \left.+ \int_{\operatorname{Im} z_1}^{0} F(x+\operatorname{Re}(z)+e_1(r+it))\,dt\right) dx_2\ldots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F(x+\operatorname{Re}(z)+e_1 i\operatorname{Im}(z_1))\,d\lambda^n(x),\end{aligned}$$

wegen

$$\sup_{t\in[0,\operatorname{Im} z_1]} |F(x+\operatorname{Re}(z)+e_1(r+it))| \leq \sup_{t\in[0,\operatorname{Im} z_1]} d e^{h_B(te_1)-\omega(x+\operatorname{Re}(z)+e_1(r+it))} \longrightarrow 0$$

für $r\to\infty$ und $r\to-\infty$. Induktiv folgt so (72). □

5.10. **Bemerkung.** Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex mit nichtleerem Inneren, so gibt es $f \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(B)$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\lambda^n = 1.$$

Beweis. Zunächst gibt es nach 6.6 $F \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(B)$ mit $F \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$ und $F>0$ auf einer Nullumbebung in $\mathbb{R}^n$. Da $F^2 \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(2B)$ ist, ist $F^2|_{\mathbb{R}^n}$ nach 5.9 integrierbar. Daher erhält man f durch Normierung von F. □

Man erhält aus Lemma 5.3 $b_0 : \mathcal{H}_{(\omega)}(L,0) \to \mathcal{H}_{(\omega)}(K',-r)$ als stetige, lineare Fortsetzung der Inklusion $\mathcal{H}_{(\omega)}(K,0) \hookrightarrow \mathcal{H}_{(\omega)}(K',-r)$ (wobei $L \supset K' \supset K$ geeignet). Aus dieser erhalten wir mit den Glättungen $m_{f,x}$ und Integration über x zu geeigneten Kompakta $Q \subset K \subset K''$ einen stetigen Operator $b : \mathcal{H}_{(\omega)}(K'') \to \mathcal{H}_{(\omega)}(K')$, welcher eine Fortsetzung der Inklusion

$\mathcal{H}_{(\omega)}(Q) \hookrightarrow \mathcal{H}_{(\omega)}(K')$ ist. Ferner wird die Einschränkung $b|_{\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K'')} : \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K'') \to \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K')$ auch stetig werden, so dass diese Abbildung b die geforderten Bedingungen in $(\mathbf{VII})_{\mathcal{E}_{(\omega)}}$ und $(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$ (siehe 4.20) bei geeigneter Wahl der Kompakta erfüllen wird.

5.11. **Lemma.** *Sei* $(\mathbf{II})_\mathbf{W}$ *(siehe 1.12) erfüllt und* $Q \subset \Omega$ *kompakt, konvex mit nichtleerem Inneren. Dann wähle*

- $K \subset \Omega$ *kompakt, konvex mit* $Q \subset \mathring{K}$
- $K' \subset \Omega$ *kompakt gemäß 5.3 zu* K
- $K'' \subset \Omega$ *kompakt, konvex mit* $K' \subset \mathring{K}''$
- $0 < \varepsilon < \min\{\mathrm{dist}_{\|.\|_\infty}(Q, \mathbb{R}^n \setminus \mathring{K}), \mathrm{dist}_{\|.\|_\infty}(K'', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)\}$
- *zu* K, K', $L := K'' + B_\varepsilon$ *die Abbildung* $b_0 \in L(\mathcal{H}_{(\omega)}(L, 0), \mathcal{H}_{(\omega)}(K', -r))$ *gemäß 5.3*
- $f \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(B_\varepsilon)$ *mit* $\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\lambda^n = 1$.

(i) Setzt man für $g \in \mathcal{H}_{(\omega)}(K'')$ *und* $\gamma = 1, \ldots, \Gamma$

$$b(g)_\gamma : V_\gamma \to \mathbb{C}^{l_\gamma},\ b(g)_\gamma(z) := \int_{\mathbb{R}^n} (m_{f,x}(b_0(m_{f,x}g)))_\gamma(z)\ d\lambda^n(x),$$

dann ist für alle $q \in \mathbb{R}$ *und jedes* $\delta > 0$ *mit* $q' := C^{-2\,\mathrm{sign}(q)}q - \delta - r$

$$b|_{\mathcal{H}_{(\omega)}(K'',q)} : \mathcal{H}_{(\omega)}(K'', q) \to \mathcal{H}_{(\omega)}(K' + B_\varepsilon, q')$$

stetig.

(ii) Für $g \in \mathcal{H}_{(\omega)}(Q)$ *ist* $b(g) = g$.

Beweis. Zu (i): Man erhält wegen $C \geq 1$ durch Unterscheidung der Fälle $q < 0$ und $q \geq 0$:

$$n_q := C^{\mathrm{sign}(C^{-2\,\mathrm{sign}(q)}q-\delta)}(C^{-2\,\mathrm{sign}(q)}q - \delta) - C^{-\,\mathrm{sign}(q)}q < 0. \tag{74}$$

Für $g \in \mathcal{H}_{(\omega)}(K'', q)$ ist nach (64) mit $W = K'$, $q = -r$,$v = q' + r$ bzw. $W = K''$, $v = -q$ wegen $L = K'' + B$ (schreibe $|\ |_{K,q}$ statt $|\ |_{K,q,\omega}$):

$$\begin{aligned} |m_{f,x}(b_0(m_{f,x}g))|_{K'+B_\varepsilon,q'} &\overset{(64)}{\leq} c_{q'+r}\,|b_0(m_{f,x}g)|_{K',-r}e^{C^{\mathrm{sign}(q'+r)}(q'+r)\omega(x)} \\ &\leq c_{q'+r}\,C_{b_0}\,|m_{f,x}g|_{L,0}e^{C^{\mathrm{sign}(q'+r)}(q'+r)\omega(x)} \\ &\overset{(64),q'\text{ Wahl}}{\leq} c_{q'+r}\,C_{b_0}\,c_{-q}\,|g|_{K'',q}e^{n_q\omega(x)} \\ &\overset{1.2(\gamma),(74)}{\leq} c_{q'+r}\,C_{b_0}\,c_{-q}\,|g|_{K'',q}e^{-(n+1)\log(1+\sum_{i=1}^n|x_i|)+D}, \end{aligned} \tag{75}$$

wobei die Konstanten D, $c_{q'+r}$, c_{-q} und C_{b_0} von g und x unabhängige Konstanten sind. Ferner ist für $m \in \mathbb{N}$ und x, $y \in [-m, m]^n$ nach (64) und (65) wieder mit obigen Wahlen für W, q und v:

$$|m_{f,x}(b_0(m_{f,x}(g))) - m_{f,y}(b_0(m_{f,y}(g)))|_{K'+B_\varepsilon,q'}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |(m_{f,x}-m_{f,y})(b_0(m_{f,x}(g)))|_{K'+B_\varepsilon,q'} + |m_{f,y}(b_0((m_{f,x}-m_{f,y})(g)))|_{K'+B_\varepsilon,q'} \\
&\overset{(65),(64)}{\leq} c'_{q'+r}\,(C_{b_0}|m_{f,x}(g)|_{L,0}) \max_{\xi\in[x,y]} e^{C^{\operatorname{sign}(q'+r)}(q'+r)\omega(\xi)}\|x-y\|_\infty \\
&\qquad + c_{q'+r}\,(C_{b_0}|(m_{f,x}-m_{f,y})(g)|_{L,0})e^{C^{\operatorname{sign}(q'+r)}(q'+r)\omega(y)} \\
&\overset{(64),(65)}{\leq} c'_{q'+r}\,C_{b_0}c_{-q}|g|_{K'',q} \max_{\xi\in[x,y]} e^{C^{\operatorname{sign}(q'+r)}(q'+r)\omega(\xi)-C^{\operatorname{sign}(-q)}q\omega(x)}\|x-y\|_\infty \\
&\qquad + c_{q'+r}\,C_{b_0}\,c'_{-q}|g|_{K'',q} \max_{\xi\in[x,y]} e^{C^{\operatorname{sign}(q'+r)}(q'+r)\omega(y)-C^{\operatorname{sign}(-q)}q\omega(\xi)}\|x-y\|_\infty \\
&\leq d_{m,q}|g|_{K'',q}\|x-y\|_\infty, \qquad (76)
\end{aligned}$$

mit einer von g und x, y unabhängigen Konstanen $d_{m,q}$, da x, $y\in[-m,m]^n$. Sei

$$h_x(g) := m_{f,x}(b_0(m_{f,x}g)),$$

dann ist nach der Definition in (i) (aus (75) folgt die Integrierbarkeit)

$$b(g) = (b(g)_\gamma)_{\gamma=1,\ldots,\Gamma} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} h_x(g)_\gamma d\lambda^n(x)\right)_{\gamma=1,\ldots,\Gamma}.$$

Wir zeigen $b(g)\in\mathcal{H}_{(\omega)}(K'+B_\varepsilon,q')$, indem wir beweisen, dass mit $t_{\alpha,m} := -m+2\alpha m$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} h_x(g)d\lambda^n(x) &\overset{(a)}{=} \lim_{m\to\infty}\int_{[-m,m]^n} h_x(g)d\lambda^n(x) \\
&\overset{(b)}{=} \lim_{m\to\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{k} h_{(t_{\frac{j_1}{k},m},\ldots,t_{\frac{j_n}{k},m})}(g)\lambda^n\left(\prod_{i=1}^n\left[t_{\frac{j_i-1}{k},m},t_{\frac{j_i}{k},m}\right]\right), \qquad (77)
\end{aligned}$$

wobei die Konvergenz bezüglich $|\ |_{K'+B_\varepsilon,q',\omega}$ erfolgt. Da $\mathcal{H}_{(\omega)}(K'+B_\varepsilon,q')$ nach 4.26 und 4.38 Banachraum ist, folgt dann $b(g)\in\mathcal{H}_{(\omega)}(K'+B_\varepsilon,q')$. Die Identität (a) folgt aus (75), denn mit einer Konstanten $d_q>0$ gilt:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n\setminus[-m,m]^n} h_x(g)_\gamma(z)d\lambda^n(x)\right| \leq d_q e^{h_{K'+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z)-q'\omega(z)}|g|_{K'',q}\int_{\mathbb{R}^n\setminus[-m,m]^n}\frac{dx}{(1+\|x\|_1)^{n+1}} \quad (78)$$

Nach Division durch $e^{h_{K'+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z)-q'\omega(z)}$ und Supremumsbildung erhält man:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n\setminus[-m,m]^n} h_x(g)d\lambda^n(x)\right|_{K'+B_\varepsilon,q'} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Um (b) zu zeigen, beachte man $[-m,m]^n = \bigcup_{j_1,\ldots,j_n=1}^k\prod_{i=1}^n\left[t_{\frac{j_i-1}{k},m},t_{\frac{j_i}{k},m}\right]$ für $m\in\mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{k}\int_{\prod_{i=1}^n[t_{\frac{j_i-1}{k},m},t_{\frac{j_i}{k},m}]} h_x(g)_\gamma(z) - h_{(t_{\frac{j_1}{k},m},\ldots,t_{\frac{j_n}{k},m})}(g)_\gamma(z)d\lambda^n(x)\right| \\
&\overset{(76)}{\leq} d_{m,q}e^{h_{K'+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z)-q'\omega(z)}|g|_{K'',q}\sup_{\substack{x,y\in[-m,m]^n\\ \|x-y\|_\infty\leq\frac{2m}{k}}}\|x-y\|_\infty\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{k}\lambda^n\left(\prod_{i=1}^n\left[t_{\frac{j_i-1}{k},m},t_{\frac{j_i}{k},m}\right]\right) \\
&\leq d_{m,q}e^{h_{K'+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z)-q'\omega(z)}|g|_{K'',q}\frac{2m}{k}(2m)^n.
\end{aligned}$$

Dividiert man wiederum durch $e^{h_{K'+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z)-q'\omega(z)}$ und bildet das Supremum über $\mathbb{C}^n$, dann folgt für $k \to \infty$ die Aussage (b). Also haben wir (77) gezeigt und insbesondere auch, dass $b(\mathcal{H}_{(\omega)}(K'',q)) \subset \mathcal{H}_{(\omega)}(K'+B_\varepsilon,q')$ ist. Die Stetigkeit von b folgt aus der Abschätzung (78), wenn man $\mathbb{R}^n \setminus [-m,m]^n$ durch $\mathbb{R}^n$ ersetzt, was insgesamt (i) zeigt.

Um (ii) zu zeigen, sei $g \in \mathcal{H}_{(\omega)}(Q)$. Dann ist $g \in \mathcal{H}_{(\omega)}(Q,q)$ für ein $q \in \mathbb{R}$, also $m_{f,x}g \subset \mathcal{H}^0_{(\omega)}(Q+B_\varepsilon) \subset \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K) \subset \mathcal{H}_{(\omega)}(K,0)$. Daher folgt nach Lemma 5.3 für alle $x \in \mathbb{R}^n$, wenn $G \in \mathcal{A}_{(\omega)}(Q)^s$ mit $NG = g$ nach 4.25, dass

$$m_{f,x}(b_0(m_{f,x}g)) = m_{f,x}(m_{f,x}g) \overset{(66)}{=} m_{f,x}N(\tau_x f)G \overset{(66)}{=} N(\tau_x f)^2 G \overset{(66)}{=} m_{f^2,x}g, \qquad (79)$$

Wegen $f^2 \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(2B_\varepsilon)$ ist nach Beweis von Lemma 4.23 Abschnitt (i), $\partial^\alpha f^2 \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(2B_\varepsilon)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Wegen (79) gilt dann für $\gamma = 1,\dots,\Gamma$ und $z \in V_\gamma$:

$$\begin{aligned}
b(g)_\gamma(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} (m_{f^2,x}(g))_\gamma(z)\, d\lambda^n(x) \\
&\overset{5.7}{=} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\le \operatorname{grad} N_\gamma}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^\alpha(\tau_x f^2)(z)}{\alpha!}\, d\lambda^n(x)\, Q_{\gamma,\alpha} g_\gamma(z) \\
&\overset{(71)}{=} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\le \operatorname{grad} N_\gamma}} \frac{\partial^\alpha\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z-x)^2 d\lambda^n(x)\right)}{\alpha!} Q_{\gamma,\alpha} g_\gamma(z) \\
&\overset{\text{Wahl von } f,\ (72)}{=} Q_{\gamma,0} g_\gamma(z) \overset{(63)}{=} g_\gamma(z),
\end{aligned}$$

was (ii) beweist. □

5.12. **Lemma.** *Sei* (**III**) *(siehe 1.13) erfüllt und $Q \subset \Omega$ kompakt, konvex mit nichtleerem Inneren. Dann wähle*

- *$K \subset \Omega$ kompakt, konvex mit $Q \subset \mathring{K}$*
- *$K' \subset \Omega$ kompakt gemäß 5.4 zu K*
- *$K'' \subset \Omega$ kompakt, konvex mit $K' \subset \mathring{K}''$*
- $0 < \varepsilon < \min\{\operatorname{dist}_{\|.\|_\infty}(Q, \mathbb{R}^n \setminus \mathring{K}), \operatorname{dist}_{\|.\|_\infty}(K'', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)\}$
- *zu K, K', $L := K'' + B_\varepsilon$ die Abbildung $b_1 \in L(\mathcal{H}_{(\omega)}(L,0), \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K'))$ gemäß 5.4*
- *$f \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(B_\varepsilon)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\lambda^n = 1$.*

(i) Setzt man für $g \in \mathcal{H}_{(\omega)}(K'')$ und $\gamma = 1,\dots,\Gamma$

$$b(g)_\gamma : V_\gamma \to \mathbb{C}^{l_\gamma},\ b(g)_\gamma(z) := \int_{\mathbb{R}^n} (m_{f,x}(b_1(m_{f,x}g)))_\gamma(z)\ d\lambda^n(x),$$

dann ist für alle $q \in \mathbb{R}$ und jedes $\delta > 0$ mit $q' := C^{-2\operatorname{sign}(q)}q - 2\delta$

$$b : \mathcal{H}_{(\omega)}(K'',q) \to \mathcal{H}_{(\omega)}(K'+B_\varepsilon, q')$$

stetig.

(ii) Für $g \in \mathcal{H}_{(\omega)}(Q)$ ist $b(g) = g$.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu dem von 5.11, mit dem Unterschied, das hier

$$b_1 \in L(\mathcal{H}_{(\omega)}(L,0), \operatorname{proj}_{0<\varrho\to 0} \mathcal{H}_{(\omega)}(K',-\varrho)) \quad \text{statt} \quad b_0 \in L(\mathcal{H}_{(\omega)}(L,0), \mathcal{H}_{(\omega)}(K',-r))$$

zur Konstruktion von b benutzt wird. Daher verbessert sich zu gegebenem $q \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$

$$q' = C^{-2\,\mathrm{sign}(q)}q - \delta - r \quad \text{zu} \quad q' = C^{-2\,\mathrm{sign}(q)}q - 2\delta.$$

□

Für den zweiten Teil dieses Kapitels brauchen wir ein analog zu 5.11 definiertes Integral:

5.13. **Lemma.** *Seien $W \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex mit nichtleerem Inneren und $q \in \mathbb{R}$. Ist $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le \varepsilon\}$, $f \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(B_\varepsilon)$ und $\varphi \in L(\mathcal{A}_{(\omega)}(W + B_\varepsilon, 0)^s, \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(W + B_\varepsilon)^{s_1})$, so definieren wir für $g \in \mathcal{A}_{(\omega)}(W, q)^s$ ($n_{f,x}$ aus 5.8 mit $B := B_\varepsilon$)*

$$r(g)[z] := \int_{\mathbb{R}^n} n_{f,x}(\varphi(n_{f,x}(g)))[z]d\lambda^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(z - x)\varphi(f(. - x)(g))[z]d\lambda^n(x).$$

Für jedes $\delta > 0$ und $q' := C^{-2\,\mathrm{sign}(q)}q - 2\delta$ ist

$$r|_{\mathcal{A}_{(\omega)}(W,q)^s} : \mathcal{A}_{(\omega)}(W, q)^s \to \mathcal{A}_{(\omega)}(W + 2B_\varepsilon, q')^{s_1} \tag{80}$$

stetig.

Beweis. Man beweist dies analog wie 5.12 und 5.11, wobei man $m_{f,x}$ durch $n_{f,x}$ ersetzt und dabei statt den Abschätzungen aus Lemma 5.7 diejenigen aus Lemma 5.8 benutzt. Ferner ersetzt man $b_1 \in L(\mathcal{H}_{(\omega)}(K', 0), \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K'))$ durch die Funktion $\varphi \in L(\mathcal{A}_{(\omega)}(W + B_\varepsilon, 0)^s, \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(W + B_\varepsilon)^{s_1})$. Statt der Ungleichung (75) erhält man

$$\|n_{f,x}(\varphi(n_{f,x}(g)))\|_{W+2B_\varepsilon,q',\omega} \le c_{q'+l}C_\varphi c_{-q}\|g\|_{W,q,\omega}e^{-(n+1)\log(1+\sum_{j=1}^n |x_i|)+D}$$

und statt der Ungleichung (76) erhält man eine Konstante $d'_{m,q}$, so dass für $x, y \in [-m, m]^n$:

$$\|n_{f,x}(\varphi(n_{f,x}(g))) - n_{f,y}(\varphi(n_{f,y}(g)))\|_{W+2B_\varepsilon,q',\omega} \le d'_{m,q}\|g\|_{W,q,\omega}\|x - y\|_\infty.$$

Hiermit zeigt man nun wie im Beweis von 5.11 zu (77) und (78) analoge Aussagen und damit die Stetigkeit von

$$r|_{\mathcal{A}_{(\omega)}(W,q)^s} : \mathcal{A}_{(\omega)}(W, q)^s \to \mathcal{A}_{(\omega)}(W + 2B_\varepsilon, q')^{s_1}.$$

□

5.14. **Satz.** *Es gilt mit den Bezeichnungen aus 1.12 und 4.20:*

$$\mathbf{(II)_W} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(VII)}_{\mathcal{E}_{(\omega)}} \quad \textit{und} \quad \mathbf{(VII)}_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}.$$

Beweis. Sei $i \in \mathbb{N}$ gegeben und $Q := K_i$. Zu Q seien K, K' gemäß Lemma 5.11 und $\varepsilon' > 0$ mit $Q + B_{\varepsilon'} \subset K$ gewählt und $j > i$ mit $K' + B_{\varepsilon'} \subset K_j$. Für $k \ge j$ setzen wir $K'' := K_k$. Wir verkleinern ε' zu $\varepsilon > 0$, welches nach 4.11 geeignet gewählt werden kann. Dann ist nach Lemma 5.11 (i) für jedes $q \in \mathbb{R}$ und $q' := C^{-2\,\mathrm{sign}(q)}q - 1 - r$ die dort definierte Abbildung

$$b|_{\mathcal{H}_{(\omega)}(K_k,q)} : \mathcal{H}_{(\omega)}(K_k, q) \to \mathcal{H}_{(\omega)}(K' + B_\varepsilon, q') \hookrightarrow \mathcal{H}_{(\omega)}(K_j, q') \tag{81}$$

stetig. Da auch die Inklusion $\mathcal{H}_{(\omega)}(K_j, q') \hookrightarrow \mathcal{H}_{(\omega)}(K_j)$ stetig ist, folgt mit [**35**] 24.7 die Stetigkeit von

$$b : \mathcal{H}_{(\omega)}(K_k) \to \mathcal{H}_{(\omega)}(K_j).$$

Die Stetigkeit von $b|_{\mathcal{H}_{(\omega)}(K_k)}$ in (81) zeigt nach Wahl von q', dass auch

$$b|_{\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_k)} : \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_k) \to \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_j)$$

stetig ist. Schließlich gilt nach Lemma 5.11 (ii) für jedes $g \in \mathcal{H}_{(\omega)}(K_i) = \mathcal{H}_{(\omega)}(Q)$:

$$b(a_i^k(g)) = b(g) = g = a_i^j(g).$$

Daher sind $(\mathbf{VII})_{\mathcal{E}_{(\omega)}}$ und $(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$ erfüllt. □

5.15. **Satz.** *Es gilt mit den Bezeichnungen aus 1.13 und 4.20:*

$$(\mathbf{III}) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{VII})_{\mathcal{E}_{\{\omega\}}} \quad \textit{und} \quad (\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{\{\omega\}}}.$$

Beweis. Sei $i \in \mathbb{N}$ gegeben und $Q := K_i$. Zu Q seien K, K' gemäß Lemma 5.12 und $\varepsilon' > 0$ mit $Q + B_{\varepsilon'} \subset K$ gewählt und $j > i$ mit $K' + B_{\varepsilon'} \subset K_j$. Für $k \geq j$ setzen wir $K'' := K_k$. Wir verkleinern ε' zu $\varepsilon > 0$, welches nach 4.11 geeignet gewählt werden kann. Dann ist nach Lemma 5.12 (i) für jedes $q \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ und $q' := C^{-2\,\mathrm{sign}(q)}q - 2\delta$ die dort definierte Abbildung

$$b|_{\mathcal{H}_{(\omega)}(K_k,q)} : \mathcal{H}_{(\omega)}(K_k, q) \to \mathcal{H}_{(\omega)}(K' + B_\varepsilon, q') \hookrightarrow \mathcal{H}_{(\omega)}(K_j, q')$$

stetig. Betrachtet man für $q := -2\delta := -\frac{1}{m}$ und $m \in \mathbb{N}$ diese Stetigkeitsabschätzungen, so folgt die Stetigkeit von

$$b|_{\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_k)} : \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_k) \to \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_j)$$

Für jedes $q > 0$ und $2\delta < C^{-2}q$ ist $b|_{\mathcal{H}_{(\omega)}(K_k,q)} : \mathcal{H}_{(\omega)}(K_k, q) \to \mathcal{H}_{(\omega)}(K_j, q') \hookrightarrow \mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_j)$ stetig. Daher ist nach [**35**] 24.7

$$b|_{\mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_k)} : \mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_k) \to \mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_j)$$

stetig. Schließlich gilt nach Lemma 5.12 (ii) für jedes $g \in \mathcal{H}_{(\omega)}(K_i) = \mathcal{H}_{(\omega)}(Q)$:

$$b(a_i^k(g)) = b(g) = g = a_i^j(g).$$

Wegen $\mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_i) \subset \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i) \subset \mathcal{H}_{(\omega)}(K_i)$ sind daher $(\mathbf{VII})_{\mathcal{E}_{\{\omega\}}}$ und $(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{\{\omega\}}}$ erfüllt. □

Nachtrag des Beweises von Lemma 2.19

Um den Beweis von Lemma 2.18 zu führen, benötigen wir noch einige Vorbereitungen.

5.16. **Lemma.** *Seien ω eine Gewichtsfunktion und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex mit nichtleerem Inneren, dann gilt:*

$$\mathrm{Kern}(p_1(D) : \mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)^{s_1} \to \mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)^{s_2}) = p(D)\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)^s$$

Beweis. Nach 4.28 (ii) gilt:

$$\mathrm{Kern}(p^t : \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^{s_1} \to \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^s) = p_1^t \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^{s_2}.$$

Mittels Fourier-Laplace-Transformation (siehe 3.3) erhält man

$$\mathrm{Kern}(p^t(-D) : \mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)'^{s_1} \to \mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)'^{s}) = p_1^t(-D)\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)'^{s_2}.$$

Mit dem Bipolarensatz [**35**] 22.13 und zweimaliger Anwendung von [**35**] 23.31 folgt unter Beachtung von $p(D)' = p^t(-D)$:

$$\begin{aligned}\overline{p(D)\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)^s} &= ((p(D)\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)^s)^\circ)^\circ = (\mathrm{Kern}[p^t(-D) : \mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)'^{s_1} \to \mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)'^{s}])^\circ \\ &= (p_1^t(-D)(\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)')^{s_2})^\circ = \mathrm{Kern}[p_1(D) : \mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)^{s_1} \to \mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)^{s_2}]. \qquad (82)\end{aligned}$$

(i) von 4.28 besagt, dass

$$p^t\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^{s_1} = \mathrm{Kern}(N : \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^s \to \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K)).$$

Da N stetig ist (siehe 4.23) folgt die Abgeschlossenheit von $p^t\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^{s_1}$ und damit mittels Fourier-Laplace-Transformation die von $p^t(-D)\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)'^{s_1}$. Nun ist $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)'$ ein reflexiver Fréchetraum (siehe 3.3), daher folgt die Abgeschlossenheit von $p(D)\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)^s$ aus der von $p^t(-D)\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K)'^{s_1}$ mit Hilfe des Satzes vom abgeschlossenen Wertebereich für Fréchetr äume (siehe [**35**] 26.3(1)(3)). Also impliziert (82) die Behauptung. □

5.17. **Lemma.** *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex mit nichtleerem Inneren. Mit den Bezeichnungen aus 1.14 und $B_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq \varepsilon\}$ gilt für $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ bzw. $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$:*

$$\mathrm{Kern}(p_1(D) : F(K + B_\varepsilon)^{s_1} \to F(K + B_\varepsilon)^{s_2}) \subset \overline{p(D)F(K)^s},$$

wobei „$\subset$" nach Einschränkung auf K zu verstehen ist.

Beweis. Lemma 4.24 besagt unter anderem, dass

$$\mathrm{Kern}(p^t : \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_1} \to \mathcal{A}_{(\omega)}(K)^s) = p_1^t\mathcal{A}_{(\omega)}(K)^{s_2} \subset p_1^t\mathcal{A}_{(\omega)}(K + B_\varepsilon)^{s_2}$$

und nach 4.35 und 4.39 ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Kern}(p^t : \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)^{s_1} \to \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)^s) &\subset p_1^t\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K + B_\varepsilon)^{s_2}\\ \mathrm{Kern}(p^t : \mathcal{A}_{\{\omega\}}(K)^{s_1} \to \mathcal{A}_{\{\omega\}}(K)^s) &\subset p_1^t\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K + B_\varepsilon)^{s_2}.\end{aligned}$$

Mittels Fourier-Laplace-Transformation folgt somit aus (23) und (21) für $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}$ bzw. $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$.

$$\mathrm{Kern}(p^t(-D) : (F(K)')^{s_1} \to (F(K)')^s) \subset p_1^t(-D)(F(K + B_\varepsilon)')^{s_2}.$$

Mit dem Bipolarensatz [**35**] 22.13 und zweimaliger Anwendung von [**35**] 23.31 folgt unter Beachtung von $p(D)' = p^t(-D)$:

$$\begin{aligned}\overline{p(D)F(K)^s} &= ((p(D)F(K)^s)^\circ)^\circ = (\mathrm{Kern}[p^t(-D) : (F(K)')^{s_1} \to (F(K)')^s])^\circ\\ &\supset (p_1^t(-D)(F(K + B_\varepsilon)')^{s_2})^\circ = \mathrm{Kern}(p_1(D) : F(K + B_\varepsilon)^{s_1}) \to F(K + B_\varepsilon)^{s_2}.\end{aligned}$$

Im Fall $F = \mathcal{E}_{\{\omega\}}$ folgt die Aussage aus 5.16. □

5.18. **Definition und Bemerkung.** Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex mit nichtleerem Inneren sowie $t \leq 0$, dann definieren wir

$$\mathcal{B}_{(\omega)}(K, t) := \{f \in H(\mathbb{C}^n) \mid |||f|||_{K,t,\omega} := \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2h_K(\operatorname{Im} z) + 2t\omega(z)}\, d\mu(z)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\},$$

wobei μ das Lebesguemaß auf $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{C}^n} f(z)\overline{g(z)}e^{-2h_K(\operatorname{Im} z) + 2t\omega(z)}\, d\mu(z) \quad \text{für } f, g \in \mathcal{B}_{(\omega)}(K, t)$$

induziert die Norm $|||\,.\,|||_{K,t,\omega}$ unter der $\mathcal{B}_{(\omega)}(K, t)$ zum Hilbertraum wird. Ferner sind für jedes $\delta > 0$ die Einbettungen

$$\mathcal{A}_{(\omega)}(K, t + \delta) \hookrightarrow \mathcal{B}_{(\omega)}(K, t) \hookrightarrow \mathcal{A}_{(\omega)}(K, Ct)$$

(mit C aus 1.2) stetig.

Beweis. Für $f,\, g \in \mathcal{B}_{(\omega)}(K,t)$ sieht man $|\langle f,g\rangle| < \infty$, indem man das Integrationsgebiet in die Bereiche, wo $|f| \leq |g|$ und $|f| > |g|$ ist, aufteilt. Untersuche zunächst die Stetigkeit der Einbettungen. Sei $f \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K,t+\delta)$, dann gibt es $D > 0$ mit

$$\begin{aligned} |||f|||^2_{K,t,\omega} &= \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2h_K(\operatorname{Im} z)+(2t+2\delta)\omega(z)} e^{-2\delta\omega(z)}\, d\mu(z) \\ &\overset{1.2(\gamma)}{\leq} \|f\|^2_{K,t+\delta,\omega} \int_{\mathbb{C}^n} e^{-(2n+1)\log(1+\sum_{i=1}^n |z_i|)+D}\, d\mu(z), \end{aligned}$$

und damit ist die erste Einbettung stetig. Nach der Mittelwertseigenschaft für holomorphe Funktionen ist für $g \in H(C^n)$, $z \in \mathbb{C}^n$ und $U := \{w \in \mathbb{C}^n \mid |w| \leq 1\}$:

$$g(z) = \frac{1}{\mu(U)} \int_U g(z+w)\, d\mu(w).$$

Daher gilt für $f \in \mathcal{B}_{(\omega)}(K,t)$ und $c_0 := \left(\inf_{w\in U} e^{-2h_K(\operatorname{Im} w)+2Ct(1+\omega(w))}\right)^{-1}$ wegen [**11**] 1.2:

$$\begin{aligned} |f(z)^2| &= \left|\frac{1}{\mu(U)} \int_U f(z+w)^2\, d\mu(w)\right| \\ &\leq \frac{c_0}{\mu(U)} \int_U |f(z+w)|^2 e^{-2h_K(\operatorname{Im} w)+2Ct(1+\omega(w))}\, d\mu(w) \\ &\leq \frac{c_0}{\mu(U)} \int_U |f(z+w)|^2 e^{-2h_K(\operatorname{Im}(z+w))+2Ct(1+\omega(w)+\omega(z))}\, d\mu(w)\, e^{2h_K(\operatorname{Im} z)-2Ct\omega(z)} \\ &\overset{t<0}{\leq} \frac{c_0}{\mu(U)} \int_U |f(z+w)|^2 e^{-2h_K(\operatorname{Im}(z+w))+2t\omega(z+w)}\, d\mu(w) e^{2h_K(\operatorname{Im} z)-2Ct\omega(z)} \\ &\leq \frac{c_0}{\mu(U)} |||f|||^2_{K,t,\omega} e^{2h_K(\operatorname{Im} z)-2Ct\omega(z)} \end{aligned}$$

Nach Wurzelziehen folgt hieraus: $\|f\|_{K,Ct,\omega} \leq (\frac{c_0}{\mu(U)})^{\frac{1}{2}}\, |||f|||_{K,t,\omega}$; also ist auch die zweite Einbettung stetig. Um die Vollständigkeit von $\mathcal{B}_{(\omega)}(K,t)$ zu zeigen, sei $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{B}_{(\omega)}(K,t)$. Aufgrund der zweiten stetigen Einbettung konvergiert diese Folge in $\mathcal{A}_{(\omega)}(K,Ct)$ – insbesondere punktweise – gegen eine Funktion $f \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K,Ct)$. Da $L_2(\mu)$ ein Hilbertraum ist, konvergiert die $L_2(\mu)$-Cauchyfolge $g_j : z \mapsto f_j(z)e^{-h_K(\operatorname{Im} z)+t\omega(z)}$ gegen eine Funktion $g \in L_2(\mu)$. Wegen der Bemerkung nach [**35**] 13.5 gibt es eine Teilfolge von $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$, welche μ-fast überall gegen g punktweise konvergiert. Daher muss $g = fe^{-h_K(\operatorname{Im} .)+t\omega(.)}$ μ-fast überall gelten und damit

$$\|(f_j - f)e^{-h_K(\operatorname{Im} .)+t\omega(.)}\|_{L_2(\mu)} = \|g_j - g\|_{L_2(\mu)} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad |||f_j - f|||_{K,t,\omega} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

5.19. **Lemma.** *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex mit nichtleerem Inneren und p aus 1.12, dann gibt es eine stetige, lineare Abbildung $\varphi : \mathcal{A}_{(\omega)}(K,0)^s \to \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K)^{s_1}$ mit*

$$p^t\varphi(p^t h) = p^t h \quad \textit{für alle } h \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)^{s_1}.$$

Beweis. Sei $\delta > 0$ beliebig und $\delta' := \frac{\delta}{C(2+C^2)}$. Nach der letzen Aussage in Lemma 4.24 gibt es eine Konstante $d_\delta > 0$ und eine Zuordnung

$$\operatorname{Kern} N \cap \mathcal{A}_{(\omega)}(K, -C\delta')^s \dashrightarrow \mathcal{A}_{(\omega)}(K, -C^2\delta' - \delta')^{s_1},$$

welche jedem $f \in \operatorname{Kern} N \cap \mathcal{A}_{(\omega)}(K, -C\delta')^s$ ein $\nu \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K, -C^2\delta' - \delta')^{s_1}$ zuordnet, so dass $p^t\nu = f$ und

$$\|\nu\|_{K,-C^2\delta'-\delta',\omega} \leq d_\delta \|f\|_{K,-C\delta',\omega}. \tag{83}$$

Aufgrund der Stetigkeit der Einbettungen in 5.18 sind $Q_0 := \operatorname{Kern} N \cap \mathcal{B}_{(\omega)}(K, -\delta')^s$ und $Q_1 := \operatorname{Kern} p^t \cap \mathcal{B}_{(\omega)}(K, -(2 + C^2)\delta')^{s_1}$ abgeschlossene Unterräume von Hilberträumen. Daher gibt es orthogonale Projektionen

$$\pi_0 \in L(\mathcal{B}_{(\omega)}(K, -\delta')^s, \mathcal{B}_{(\omega)}(K, -\delta')^s) \text{ auf } Q_0$$

$$\pi_1 \in L(\mathcal{B}_{(\omega)}(K, -(2 + C^2)\delta')^{s_1}, \mathcal{B}_{(\omega)}(K, -(2 + C^2)\delta')^{s_1}) \text{ auf } Q_1^\perp.$$

Wir definieren φ als Verknüpfung folgender Abbildungen (siehe 5.18) und der obigen Zuordnung:

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{A}_{(\omega)}(K, 0)^s &\hookrightarrow \mathcal{B}_{(\omega)}(K, -\delta')^s \xrightarrow{\pi_0} Q_0 \hookrightarrow \\ &\hookrightarrow \operatorname{Kern} N \cap \mathcal{A}_{(\omega)}(K, -C\delta')^s \dashrightarrow \mathcal{A}_{(\omega)}(K, -C^2\delta' - \delta')^{s_1} \hookrightarrow \\ &\hookrightarrow \mathcal{B}_{(\omega)}(K, -(2 + C^2)\delta')^{s_1} \xrightarrow{\pi_1} Q_1^\perp \hookrightarrow \mathcal{A}_{(\omega)}(K, -\delta)^{s_1}.\end{aligned}$$

φ ist wohldefiniert, denn ist $f \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K, 0)^s$ und $g_1,\ g_2 \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K, -(1 + C^2)\delta')^{s_1}$, welche $p^t g_i = \pi_0(f)$ und die Abschätzung (83) für $i = 1, 2$ erfüllen, dann folgt aus $g_1 - g_2 \in \operatorname{Kern} p^t$, dass $\pi_1(g_1) - \pi_1(g_2) = \pi_1(g_1 - g_2) = 0$. Die Stetigkeit von φ folgt aus der Stetigkeit der orthogonalen Projektionen und der Einbettungen (siehe 5.18) sowie (83). Um die Linearität nachzuweisen, seien $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K, 0)^s$, $\lambda \in \mathbb{C}$, sowie $g_1, g_2, g, h \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K, -(1 + C^2)\delta')^{s_1}$, welche $p^t g_i = \pi_0(f_i)$, $p^t g = \pi_0(f_1 + f_2)$, $p^t h = \pi_0(\lambda f_1)$ und jeweils (83) erfüllen. Dann impliziert $g_1 + g_2 - g,\ \lambda g_1 - h \in \operatorname{Kern} p^t$, dass $\pi_1(g_1 + g_2 - g) = 0 = \pi_1(\lambda g_1 - h)$. Nach Definition von φ folgt nun die Linearität von φ so:

$$\begin{aligned}\varphi(f_1 + f_2) = \pi_1(g) = \pi_1(g_1) + \pi_1(g_2) = \varphi(f_1) + \varphi(f_2)\\ \varphi(\lambda f_1) = \pi_1(h) = \lambda\pi_1(g_1) = \lambda\varphi(f_1).\end{aligned}$$

Um die behauptete Identität zu zeigen, sei $h \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)^{s_1}$ und zu $f := p^t h \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)^s \subset \mathcal{A}_{(\omega)}(K, 0)^s$ sei $g \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K, -(1 + C^2)\delta')^{s_1}$ mit $p^t g = \pi_0(f)$ gewählt, so dass (83) erfüllt ist. Wegen $f \in p^t\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K)^{s_1} \subset \operatorname{Kern} N$ (siehe Lemma 4.24) ist $p^t g = \pi_0(f) = f$. Ferner ist $\pi_1(g - \pi_1(g)) = \pi_1(g) - \pi_1^2(g) = 0$, also $g - \pi_1(g) \in \operatorname{Kern} \pi_1 = \operatorname{Kern} p^t \cap \mathcal{B}_{(\omega)}(K, -(2+C^2)\delta')$. Da φ wohldefiniert ist, gilt nach Wahl von g, dass $\pi_1(g) = \varphi(f)$ ist, und somit folgt aus dem bisher gezeigten:

$$p^t h = f = p^t g = p^t((g - \pi_1(g)) + \pi_1(g)) = p^t\pi_1(g) = p^t\varphi(f) = p^t\varphi(p^t h).$$

$\square$

5.20. **Bemerkung.** Wir wollen nun das Lemma 2.18 beweisen, dessen Aussage so lautete:

Zu $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ bzw. $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}$ und jedem $i \in \mathbb{N}$ gibt es eine stetige, lineare Abbildung $q_i : F(K_{i+1})^{s_1} \to F(K_i)^s$, so dass mit den Bezeichnungen von Definition 2.1 und Bezeichung 1.14:

$$p(D) \circ q_i(f) = \iota^i_{i+1}(f) \quad \text{für alle } f \in \operatorname{Kern}(p_1(D) : F(K_{i+1})^{s_1} \to F(K_{i+1})^{s_2}).$$

Beweis. Zu $i \in \mathbb{N}$ wähle $\varepsilon > 0$, so dass $K_i + 3B_\varepsilon \subset K_{i+1}$, dann folgt aus Lemma 5.17 für $Q := K_i + 2B_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Kern}(p_1(D) : F(K_{i+1})^{s_1} \to F(K_{i+1})^{s_2})|_Q &\subset \operatorname{Kern}(p_1(D) : F(Q + B_\varepsilon)^{s_1}) \to F(Q + B_\varepsilon)^{s_2}|_Q \\ &\subset \overline{p(D)F(Q)^s}\end{aligned}$$

Ist $\iota : F(Q)^{s_1} \to F(K_i)^{s_1}$ die Einschränkung von Q auf K_i, so reicht es aufgrund der Stetigkeit von $p(D)$ und $F(K_{i+1})^{s_1} \to F(Q)^{s_1},\ f \mapsto f|_Q$ zu zeigen, dass

$$\exists q_i \in L(F(Q)^{s_1}, F(K_i)^s) :\ p(D)q_i p(D) = \iota \circ p(D) \quad \text{ auf } F(Q)^s.$$

Äquivalent dazu ist wegen der Reflexivität der Räume (siehe Beweis von Satz 2.6)

$$\exists q_i' \in L((F(K_i)')^s, (F(Q)')^{s_1}) :\ p^t(-D)q_i' p^t(-D) = p^t(-D)\iota' \quad \text{ auf } (F(K_i)')^{s_1}.$$

Die Fouriertransformation liefert einen Isomorphismus von $F(K_i)'$ und $\mathcal{A}^F_{(\omega)}(K_i)$ (siehe 3.5 und (23)) und $\mathcal{F}(T \circ \iota) = \mathcal{F}(T)$ für jedes $T \in F(K_i)'$ (beachte Definition 3.2 und 3.1). Daher ist die letzte Aussage unter Beachtung von (21) wiederum äquivalent zu:

$$\exists r_i \in L\big(\mathcal{A}^F_{(\omega)}(K_i)^s, \mathcal{A}^F_{(\omega)}(Q)^{s_1}\big) :\ p^t r_i p^t g = p^t g \quad \text{ für alle } g \in \mathcal{A}^F_{(\omega)}(K_i)^{s_1}. \tag{84}$$

Um r_i zu konstruieren sei $f \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(B_\varepsilon)$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \, d\lambda^n = 1. \tag{85}$$

φ sei gemäß Lemma 5.19 zu $K := K_i + B_\varepsilon$ gewählt. Dann definieren wir wie in Lemma 5.13 mit $W = K_i$ für $z \in \mathbb{C}^n$ und $g \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K_i)^s$

$$r(g)[z] := \int_{\mathbb{R}^n} f(z - x)\ \varphi(f(\,.\,- x)g)(z)\, d\lambda^n(x).$$

Für jedes $q \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ und $q' := C^{-2\operatorname{sign}(q)}q - \delta$ ist nach 5.13

$$r|_{\mathcal{A}_{(\omega)}(K_i,q)^s} : \mathcal{A}_{(\omega)}(K_i, q)^s \to \mathcal{A}_{(\omega)}(Q, q')^{s_1}$$

stetig. Also sind (analog zum Beweis von 4.23 (vi))

$$\begin{aligned} r : \mathcal{A}_{(\omega)}(K_i)^s &\to \mathcal{A}_{(\omega)}(Q)^{s_1} \\ r|_{\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^s} : \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^s &\to \mathcal{A}^0_{(\omega)}(Q)^{s_1} \\ r|_{\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K_i)^s} : \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K_i)^s &\to \mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(Q)^{s_1} \\ r|_{\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K_i)^s} : \mathcal{A}_{\{\omega\}}(K_i)^s &\to \mathcal{A}_{\{\omega\}}(Q)^{s_1} \end{aligned}$$

stetig. Ist $g \in \mathcal{A}_{(\omega)}(K_i)^s$, dann gilt $f(\,.-x)g \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i+B_\varepsilon)^s$ (siehe Lemma 5.8) und somit ist nach 5.19

$$\begin{aligned}
p^t r(p^t g)(z) &= p^t(z)\int_{\mathbb{R}^n} f(z-x)\varphi(f(\,.-x)p^t g)(z)\,d\lambda^n(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z-x)(p^t\varphi p^t(f(\,.-x)g))(z)\,d\lambda^n(x)\\
&\overset{5.19}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(z-x)(p^t(f(\,.-x)g))(z)\,d\lambda^n(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z-x)^2\,d\lambda^n(x)\,(p^t g)(z)\\
&\overset{(85),(72)}{=} (p^t g)(z).
\end{aligned}$$

Damit ist (84) mit

$$\begin{aligned}
r_i &:= r && \text{im Fall } F = \mathcal{E}_{(\omega)},\\
r_i &:= r|_{\mathcal{A}^0_{(\omega)}(K_i)^s} && \text{im Fall } F = \mathcal{D}'_{(\omega)},\\
r_i &:= r|_{\mathcal{A}^0_{\{\omega\}}(K_i)^s} && \text{im Fall } F = \mathcal{E}_{\{\omega\}},\\
r_i &:= r|_{\mathcal{A}_{\{\omega\}}(K_i)^s} && \text{im Fall } F = \mathcal{D}'_{\{\omega\}}.
\end{aligned}$$

bewiesen, was zu zeigen blieb. □

KAPITEL 6

Notwendigkeit der PL-Bedingungen

Notwendigkeit der PL-Bedingungen im Fall $F = \mathcal{E}_{(\omega)}$ und $F = \mathcal{E}_{\{\omega\}}$

6.1. **Lemma.** *Seien $(N_\gamma, V_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$ und $(l_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$ wie in Lemma 4.17. Im Fall $p^t\mathcal{P}^{s_1} \neq \mathcal{P}^s$ existieren Vektoren $(h_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$ in $\mathcal{P}^s$, so dass*

$$\begin{array}{lll}(1) & \forall \gamma, \mu = 1,\dots,\Gamma \textit{ mit } \gamma \neq \mu : & N_\mu h_\gamma|_{V_\mu} = 0, \\ (2) & \forall \gamma = 1,\dots,\Gamma : & N_\gamma h_\gamma|_{V_\gamma} \neq 0, \\ (3) & \forall \gamma = 1,\dots,\Gamma, \forall f \in H(\mathbb{C}^n) : & N_\gamma(fh_\gamma)|_{V_\gamma} = f(N_\gamma h_\gamma)|_{V_\gamma}.\end{array}$$

Beweis. Nach Bemerkung 4.17(3) gibt es für jedes $\gamma = 1,\dots,\Gamma$ ein

$$h_\gamma \in \left(\mathrm{Kern}(\widetilde{N}_\gamma, V_\gamma) \cap \Big(\bigcap_{\substack{\mu=1,\dots,\Gamma \\ \mu\neq\gamma}} \mathrm{Kern}(N_\mu, V_\mu)\Big)\right) \backslash p^t\mathcal{P}^{s_1}$$

Aus $h_\gamma \in \bigcap_{\substack{\mu=1,\dots,\Gamma \\ \mu\neq\gamma}} \mathrm{Kern}(N_\mu, V_\mu)$ folgt die Bedingung (1). Wegen Bemerkung 4.17 (1) kann h_γ nicht in $\mathrm{Kern}(N_\gamma, V_\gamma)$ liegen, woraus die Bedingung (2) folgt. $h_\gamma \in \mathrm{Kern}(\widetilde{N}_\gamma, V_\gamma)$ impliziert für $i = 1,\dots,n : \mathrm{ad}(z_i)N_\gamma h_\gamma|_{V_\gamma} = 0$. Damit folgt nach Bezeichnung 5.5 für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n\backslash\{0\}$, wenn $j \in \{1,\dots,n\}$ mit $\alpha_j \neq 0$:

$$\mathrm{ad}(z)^\alpha N_\gamma h_\gamma|_{V_\gamma} = \mathrm{ad}(z_j)\,\mathrm{ad}(z)^{\alpha-e_j} N_\gamma h_\gamma|_{V_\gamma} = Q_{\gamma,\alpha-e_j}\ \mathrm{ad}(z_j)N_\gamma h_\gamma|_{V_\gamma} = 0$$

und damit nach Korollar 4.4

$$N_\gamma(fh_\gamma)|_{V_\gamma} = \frac{f^{(0)}}{0!}(N_\gamma h_\gamma)|_{V_\gamma} + \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\backslash\{0\}} \frac{f^{(\alpha)}}{\alpha!}(\mathrm{ad}(z)^\alpha N_\gamma)h_\gamma|_{V_\gamma} = f(N_\gamma h_\gamma)|_{V_\gamma}.$$

Also ist auch Bedingung (3) erfüllt. □

6.2. **Lemma.** *Seien ω eine Gewichtsfunktion, $K \subset \Omega$ kompakt, konvex mit nichtleerem Inneren, $V \subset \mathbb{C}^n$ eine irreduzible, algebraische Varietät (siehe 1.7), $U \subset H(\mathbb{C}^n)$, und d, $q \geq 0$. Ist $w \in \mathcal{P}$ mit $w|_V \neq 0$ und gilt*

$$\forall f \in U, z \in V : \quad |f(z)w(z)| \leq de^{h_K(\mathrm{Im}\, z)+q\omega(z)},$$

so gibt es ein $c > 0$, so dass mit C aus 1.2 gilt:

$$\forall f \in U, z \in V : \qquad |f(z)| \leq e^{h_K(\mathrm{Im}\, z)+(C+1)q\omega(z)+c}.$$

Insbesondere gibt es $r > 0$, so dass:

$$\forall f \in U, z \in V : \qquad |f(z)| \leq e^{h_K(\mathrm{Im}\, z)+r\omega(z)},$$

Ist ω eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion und ist $0 \le \varepsilon < 1$, so folgt mit $B_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \le \varepsilon\}$ aus

$$\forall f \in U, z \in V: \quad |f(z)w(z)| \le d e^{h_K(\operatorname{Im} z) - q\omega(z)},$$

die Existenz von $\tilde{c} > 0$, so dass gilt

$$\forall f \in U, z \in V: \quad |f(z)| \le e^{h_{K+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) + \tilde{c}}.$$

Beweis. Wir benötigen den globalen Interpolationssatz [**20**] 3.12, welcher so lautet :

> Sei $\mathcal{C} = (C_r, W_r)_{r=1,\ldots,R}$ ein Noetheroperator auf $\mathcal{P}^k$, ψ eine plurisubharmonische Funktion auf $\mathbb{C}^n$. Dann gibt es zu jedem $F \in H(\mathbb{C}^n)^k$ ein $G \in H(\mathbb{C}^n)^k$ mit
>
> $$(C_r F - C_r G)|_{W_r} = 0 \quad \text{für alle } r = 1, \ldots, R$$
>
> und
>
> $$\sup_{z \in \mathbb{C}^n} |G(z)|\, e^{-\psi_m(z)} \le \max_{r=1,\ldots,R} \sup_{z \in W_r} |C_r F(z)|\, e^{-\psi(z)}. \tag{86}$$
>
> Hierbei ist $m > 0$ eine von ψ und f unabhängige Konstante und
>
> $$\psi_m : z \mapsto \sup_{|w| \le m} \psi(z + w) + m \log\left(2 + \sum_{i=1}^n |z_i|^2\right) \quad \text{auf } \mathbb{C}^n.$$

Hier wenden wir diesen Satz auf den primären Noetheroperator $\mathcal{C} := (w, V)$ auf $\mathcal{P}$ und $\psi : z \mapsto h_K(\operatorname{Im} z) + q\omega(z)$ auf $\mathbb{C}^n$ (beachte Lemma 4.21) an und finden $G \in H(\mathbb{C}^n)$ mit $w(f - G)|_V = 0$. Es gibt wegen 1.2(γ) eine Konstante $D > 0$ mit

$$\begin{aligned} \log\left(2 + \sum_{i=1}^n |z_i|^2\right) &\le \log\left(2\left(1 + \sum_{i=1}^n |z_i|\right)^2\right) \\ &= \log 2 + 2\log\left(1 + \sum_{i=1}^n |z_i|\right) \le \log 2 + \frac{q}{m}\omega(z) + D \end{aligned}$$

Nach (40) und (86) finde eine von f unabhängige Konstante $d' > 0$, so dass insbesondere für $z \in V$:

$$\begin{aligned} |G(z)|\, e^{-h_K(\operatorname{Im} z) - (C+1)q\omega(z) - d'} &\le \sup_{v \in V} |w(v)f(v)|\, e^{-\psi(v)} \overset{\text{Voraussetzung}}{\le} d \\ \Rightarrow \log|G(z)| &\le h_K(\operatorname{Im} z) + (C+1)q\omega(z) + d' + \log d \end{aligned}$$

Zunächst erfüllt also $G|_V$ die geforderte Abschätzung mit $c := d' + \log d$. Nun ist wegen $w(f - G)|_V = 0$ auch $f - G|_{V \setminus V(w)} = 0$. Da $w \notin I(V)$ und V irreduzible Varietät ist, ist $V \setminus V(w)$ dicht in V und damit ist aufgrund der Stetigkeit von $f - G$ auch $(f - G)|_V = 0$. Also gilt die behauptete Abschätzung auch für f. Die zweite Aussage folgt leicht wegen $\omega(0) > 0$, wenn man $r := (C+1)q + \frac{c}{\omega(0)}$ setzt.

In der letzten Aussage ist ω nicht quasianalytische Gewichtsfunktion, also folgt aus 4.32, dass zu jedem $\delta > 0$, ein $0 < c' < 1$ und eine plurisubharmonische Funktion u auf $\mathbb{C}^n$ existiert, sodass

$$-\sigma(z) \le u(z) \le \delta|\operatorname{Im} z| - c'\sigma(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^n. \tag{87}$$

Wir wählen zu $\delta := \frac{\varepsilon}{C+1}$ und $\sigma := q\omega$ nach (87) u und c', dann gilt

$$\forall f \in U, z \in V : \quad |f(z)w(z)| \leq de^{h_K(\operatorname{Im} z)+u(z)},$$

Also gibt es nach der schon gezeigten ersten Aussage ein $c > 0$ mit

$$\forall f \in U, z \in V : \quad |f(z)| \leq e^{h_K(\operatorname{Im} z)+(C+1)u(z)+c} \overset{(87)}{\leq} e^{h_K(\operatorname{Im} z)+\varepsilon|\operatorname{Im} z|-c'(C+1)q\omega(z)+c},$$

woraus wegen $\omega > 0$ und $\varepsilon|\operatorname{Im} z| = h_{B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z)$ die letzte Behauptung folgt. □

6.3. **Satz.** *Für die in Definition 4.20 und im Hauptsatz 1.12 erklärten Bedingungen gilt:*

$$(\mathbf{VII})_{\mathcal{E}_{(\omega)}} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{II}).$$

Beweis. O.B.d.A. sei $p^t\mathcal{P}^{s_1} \neq \mathcal{P}^s$, da sonst nach 1.5 $\operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^s/p^t\mathcal{P}^{s_1}) = \emptyset$ und $(\mathbf{II})$ als leere Aussage trivialerweise erfüllt ist. Sei $\gamma = 1, \ldots, \Gamma$ fixiert und $h_\gamma \in \mathcal{P}^s$ gemäß Lemma 6.1 gewählt. Um $\mathbf{APL}(\boldsymbol{\Omega}, \omega)$ für V_γ zu zeigen, sei $K \subset \Omega$ kompakt. Dann existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_i$. Wir wählen $j \geq i$ gemäß $(\mathbf{VII})_{\mathcal{E}_{(\omega)}}$ und setzen $K' := K_j$. Ist $K'' \subset \Omega$ kompakt und ohne Einschränkung $K'' \supset K'$, dann sei $k \in \mathbb{N}$ mit $K'' \subset K_k$. Wir definieren

$$U := \{f \in H(\mathbb{C}^n) \mid f \text{ erfüllt (a) und (b) aus } \mathbf{APL}(\boldsymbol{\Omega}, \omega)\}.$$

Für $f \in U$ setzen wir

$$R(f) := N(fh_\gamma) = (N_\mu(fh_\gamma)|_{V_\mu})_{\mu=1,\ldots,\Gamma}$$

Mit Hilfe von Korollar 4.4 und Bezeichnung 5.5 folgt für $\mu \neq \gamma$:

$$R(f)_\mu = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{f^{(\alpha)}}{\alpha!} Q_{\mu,\alpha} N_\mu h_\gamma|_{V_\mu} \overset{6.1(1)}{=} 0 \quad \text{und} \quad R(f)_\gamma = N_\gamma(fh_\gamma)|_{V_\gamma} \overset{6.1(3)}{=} f(N_\gamma h_\gamma)|_{V_\gamma}. \tag{88}$$

Wenn d definiert ist als das Maximum der Grade der Polynome $(N_\gamma h_\gamma)_i \in \mathcal{P}$ $(i = 1, \ldots, l_\gamma)$, dann gibt es C_0, $D_0 > 0$, so dass mit (a) in $\mathbf{APL}(\boldsymbol{\Omega}, \omega)$ folgt:

$$\|f(z)N_\gamma h_\gamma(z)\|_\infty \leq e^{h_K(\operatorname{Im} z)+c_f\omega(z)} C_0 \left(1 + \sum_{i=1}^n |z_i|\right)^d \overset{1.2(\gamma)}{\leq} C_0 e^{h_K(\operatorname{Im} z)+(c_f+d)\omega(z)+D_0}.$$

Damit ist nach (88): $R(U) \subset \mathcal{H}_{(\omega)}(K) \subset \mathcal{H}_{(\omega)}(K_i)$. Aus (b) in $\mathbf{APL}(\boldsymbol{\Omega}, \omega)$ folgt für $z \in V_\gamma$:

$$\|f(z)N_\gamma h_\gamma(z)\|_\infty \leq e^{h_{K''}(\operatorname{Im} z)} C_0 \left(1 + \sum_{i=1}^n |z_i|\right)^d \overset{1.2(\gamma)}{\leq} C_0 e^{h_{K''}(\operatorname{Im} z)+d\omega(z)+D_0}. \tag{89}$$

Damit ist $R(U)$ beschränkt in $\mathcal{H}_{(\omega)}(K'', -d)$, also auch in $\mathcal{H}_{(\omega)}(K'')$. Folglich ist wegen der Stetigkeit von b aus $(\mathbf{VII})_{\mathcal{E}_{(\omega)}}$

$$R(U) = a_i^j(R(U)) = b(a_i^k(R(U)) = b(R(U)) \tag{90}$$

beschränkt in $\mathcal{H}_{(\omega)}(K_j) = \mathcal{H}_{(\omega)}(K')$. Im Beweis von Lemma 5.2 wurde $\mathcal{H}_{(\omega)}(K')$ als (DFN)-Raum erkannt. Daher liegt $R(U)$ nach [**35**] 28.5, 25.20 und 25.19(2) für ein $q \geq 0$ in $\mathcal{H}_{(\omega)}(K', -q)$ und ist dort beschränkt. Also gibt es eine von $f \in U$ unabhängige Konstante $D > 1$, so dass für alle $z \in V_\gamma$ wegen (88) gilt

$$\|f(z)(N_\gamma h_\gamma)(z)\|_\infty \leq D\, e^{h_{K'}(\operatorname{Im} z)+q\omega(z)}. \tag{91}$$

Nach Lemma 6.1 (2) gibt es ein $i \in \{1, \dots, l_\gamma\}$ mit $w := (N_\gamma h_\gamma)_i|_{V_\gamma} \neq 0$, also ist für alle $z \in V_\gamma$:

$$|f(z)w(z)| \leq D\, e^{h_{K'}(\operatorname{Im} z)+q\omega(z)}.$$

Nach Lemma 6.2 erfüllt f (c) in $\mathbf{APL}(\mathbf{\Omega}, \omega)$ mit einer von f unabhängigen Konstanten $r > 0$. Da $\gamma = 1, \dots, \Gamma$ beliebig war, ist für jedes V_γ $\mathbf{APL}(\mathbf{\Omega}, \omega)$ und folglich (**II**) gezeigt. □

6.4. **Satz.** *Für die in Definition 4.20 und im Hauptsatz 1.13 erklärten Bedingungen gilt:*

$$(\mathbf{VII})_{\mathcal{E}_{\{\omega\}}} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{III}).$$

Beweis. O.B.d.A. sei $p^t\mathcal{P}^{s_1} \neq \mathcal{P}^s$, da sonst nach 1.5 $\operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^s/p^t\mathcal{P}^{s_1}) = \emptyset$ und (**III**) als leere Aussage trivialerweise erfüllt ist. Sei $\gamma = 1, \dots, \Gamma$ fixiert und $h_\gamma \in \mathcal{P}^s$ gemäß Lemma 6.1 gewählt. Um $\mathbf{APL}(\mathbf{\Omega}, \{\omega\})$ für V_γ zu zeigen, sei $K \subset \Omega$ kompakt. Dann existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_i$. Wir wählen $j \geq i$ gemäß $(\mathbf{VII})_{\mathcal{E}_{\{\omega\}}}$ und setzen $K' := K_j$. Ist $K'' \subset \Omega$ kompakt und ohne Einschränkung $K'' \supset K'$, dann sei $k \geq j$ mit $K'' \subset K_k$. Wir definieren

$$U := \{f \in H(\mathbb{C}^n) \mid f \text{ erfüllt } (\alpha) \text{ und } (\beta) \text{ aus } \mathbf{APL}(\mathbf{\Omega}, \{\omega\})\}.$$

Wenn d definiert ist als das Maximum der Grade der Polynome $(N_\gamma h_\gamma)_i \in \mathcal{P}$ $(i = 1, \dots, l_\gamma)$, dann gibt es für jedes $\delta > 0$ Konstanten $C_{\delta,f}$, $D_\delta > 0$, so dass mit (a) in $\mathbf{APL}(\mathbf{\Omega}, \{\omega\})$ folgt:

$$\|f(z)N_\gamma h_\gamma(z)\|_\infty \leq e^{h_K(\operatorname{Im} z)+\delta\omega(z)} C_{\delta,f} \left(1 + \sum_{i=1}^n |z_i|\right)^d \overset{1.2(\gamma)}{\leq} C_{\delta,f} e^{h_K(\operatorname{Im} z)+2\delta\omega(z)+D_\delta}.$$

Damit ist nach (88): $R(U) \subset \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K) \subset \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i)$. Aus (β) in $\mathbf{APL}(\mathbf{\Omega}, \{\omega\})$ folgt für $\delta > 0$ und $z \in V_\gamma$ mit einer Konstanten $C_0 > 0$

$$\|f(z)N_\gamma h_\gamma(z)\|_\infty \leq e^{h_{K''}(\operatorname{Im} z)} C_0 \left(1 + \sum_{i=1}^n |z_i|\right)^d \overset{1.2(\gamma)}{\leq} C_0 e^{h_{K''}(\operatorname{Im} z)+\delta\omega(z)+D_\delta}.$$

Damit ist $R(U)$ für jedes $\delta > 0$ beschränkt in $\mathcal{H}_{(\omega)}(K'', -\delta)$, also auch in $\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K'') \subset \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_k)$. Folglich ist wegen der Stetigkeit von b aus $(\mathbf{VII})_{\mathcal{E}_{\{\omega\}}}$

$$R(U) = a_i^j(R(U)) = b(a_i^k(R(U)) = b(R(U))$$

beschränkt in $\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_j) = \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K')$. Nach der letzen Aussage in 4.28 ist $R(U)$ beschränkt in $\mathcal{H}_{(\sigma)}(K', -1)$ für ein $\sigma \in S_\omega$ (siehe 1.7). Also gibt es eine von $f \in U$ unabhängige Konstante $D > 1$, so dass für $z \in V_\gamma$ wegen (88)

$$\|f(z)(N_\gamma h_\gamma)(z)\|_\infty \leq D\, e^{h_{K'}(\operatorname{Im} z)+\sigma(z)}. \tag{92}$$

Wegen Lemma 6.1 (2) gibt es ein $i \in \{1, \dots, l_\gamma\}$ mit $w := (N_\gamma h_\gamma)_i|_{V_\gamma} \neq 0$. Nach 6.2 - angewandt auf dieses w - folgt aus (92), dass

$$|f(z)| \leq e^{h_{K'}(\operatorname{Im} z)+r\sigma(z)}.$$

Also erfüllt f (γ) in $\mathbf{APL}(\mathbf{\Omega}, \{\omega\})$ für V_γ und $\sigma' := r\sigma \in S_\omega$ (r und σ sind von $f \in U$ unabhängig). Da $\gamma = 1, \dots, \Gamma$ beliebig war, ist (**III**) gezeigt. □

Notwendigkeit der PL-Bedingungen im Fall $F = \mathcal{D}'_{(\omega)}$ und $F = \mathcal{D}'_{\{\omega\}}$

6.5. **Definition.** Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$U_k := \left\{ z \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \|z\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |z_i| \le k \right\}.$$

6.6. **Lemma.** *Seien ω eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion und $W \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Nullumgebung. Dann gibt es $F \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(W)$ mit $F \ge 0$ auf $\mathbb{R}^n$ und $F > 0$ auf einer kompakten Nullumgebung $U \subset U_2 \cap \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es ferner ein F_k in $\mathcal{A}^0_{(\omega)}(W)$ ohne Nullstelle in U_k.*

Beweis. Wir wählen $\varepsilon > 0$, so dass $B_{2\varepsilon} := [-2\varepsilon, 2\varepsilon]^n \subset W$. Nach [**11**] 2.6 Corollary gibt es ein $H \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_\varepsilon) \setminus \{0\}$. Dann gilt $\operatorname{Re} H \ne 0$ oder $\operatorname{Im} H \ne 0$, ohne Einschränkung sei $\operatorname{Re} H \ne 0$. Es ist $\operatorname{Re} H \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_\varepsilon)$ nach [**11**] 3.4(2)(b).

•Fall 1: $\operatorname{Re} H$ ist nicht ungerade

$h(x) := (\operatorname{Re} H(x) + \operatorname{Re} H(-x))^2$ für $x \in \mathbb{R}^n$ definiert eine Funktion in $\mathcal{D}_{(\omega)}(B_\varepsilon) \setminus \{0\}$ wegen [**11**] 4.4, 3.4(2)(b), sowie $\operatorname{Supp}(x \mapsto \operatorname{Re} H(x) + \operatorname{Re} H(-x)) \subset B_\varepsilon$. h ist gerade und nichtnegativ, daher ist für $y \in \mathbb{R}^n$ wegen 3.1 und 3.2

$$\mathcal{F}(h)(y) = \hat{h}(y) \overset{h \text{ gerade}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \cos\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) d\lambda^n(x) \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}(h)(0) \overset{0 \ne h \text{ nichtnegativ}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} h d\lambda^n > 0 \tag{93}$$

Nun gilt $0 \ne h * h \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_{2\varepsilon}) \subset \mathcal{D}_{(\omega)}(W)$, und damit ist $F := \mathcal{F}(h * h) = \mathcal{F}(h)^2$ in $\mathcal{A}^0_{(\omega)}(W) \setminus \{0\}$ nach (23). Ferner ist $F \ge 0$ auf $\mathbb{R}^n$ und $F > 0$ auf einer kompakten Nullumgebung $U \subset U_2 \cap \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ aufgrund von (93).

•Fall 2: $\operatorname{Re} H$ ist ungerade

Dann definieren wir $h := (\operatorname{Re} H)^2$ und argumentieren sonst genauso.

Es gibt nun ein $m \in \mathbb{N}$, so dass F keine Nullstelle in $U_{\frac{1}{m}}$ hat. Ferner kann man leicht mit Induktion wegen [**11**] 1.2 zeigen, dass für alle $v \in \mathbb{C}^n$:

$$\omega(rv) \le C^{r-1}((r-1) + r\omega(v)) \quad \text{für alle } r \in \mathbb{N}$$

Hieraus folgt für $k \in \mathbb{N}$, $v := \frac{z}{mk}$ und $r := mk$:

$$(1 - mk) + C^{1-mk}\omega(z) \le mk\omega\left(\frac{z}{mk}\right). \tag{94}$$

Daher gilt für die Funktion $F_k(z) := F(\frac{z}{mk})$, $z \in \mathbb{C}^n$ und jedes $q > 0$:

$$|F_k(z)| = \left| F\left(\frac{z}{mk}\right) \right| \le \|F\|_{W,q,\omega} e^{h_W(\frac{\operatorname{Im} z}{mk}) - q\omega(\frac{z}{mk})}$$

$$\overset{(94), km \ge 1}{\le} \|F\|_{W,q,\omega} e^{h_W(\operatorname{Im} z) - \frac{q}{mk}(1 - mk + C^{1-mk}\omega(z))}$$

Folglich ist $F_k \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(W)$. Da F ohne Nullstelle in $U_{\frac{1}{m}}$ war, hat F_k keine Nullstelle in U_k. □

6.7. **Lemma.** *Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Nullumgebung mit $W = -W$ und für jede beschränkte Menge $G \subset \mathcal{A}_{\{\omega\}}(W)$ sei eine Zahl $C(G) \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gibt es $\sigma \in S_\omega$ (siehe 1.7), so dass für alle $z \in \mathbb{C}^n$:*

$$J(z) := \inf_{\substack{G \subset \mathcal{A}_{\{\omega\}}(W) \\ G \text{ beschränkt}}} \inf_{g \in G} (C(G) - \log|g(z)|) \leq h_W(\operatorname{Im} z) + \sigma(z).$$

Beweis. Sei

$$Q(z) := \frac{J(z) - h_W(\operatorname{Im} z)}{\omega(z)} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^n.$$

Dann ist die Aussage des Lemmas äquivalent zu

$$\lim_{|z| \to \infty} Q(z) = 0, \tag{95}$$

denn ist dies erfüllt, so existiert nach [**11**] 1.7 ein geeignetes $\sigma \in S_\omega$. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen daher an, (95) gilt nicht. Dann gibt es $\varrho > 0$ und eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften für alle $k \in \mathbb{N}$

(i) $\|z_1\|_1 > 2$ und $\omega(z_1) \geq 1$,
(ii) $\|z_{k+1}\|_1 > 2\|z_k\| + 2$,
(iii) $Q(z_k) > \varrho$, also $J(z_k) - h_W(\operatorname{Im} z_k) > \varrho\omega(z_k)$.

Insbesondere ist wegen $\lim_{k\to\infty} \omega(z_k) = \infty$

$$(J(z_k) - h_W(\operatorname{Im} z_k))_{k\in\mathbb{N}} \text{ unbeschränkt.} \tag{96}$$

Wir definieren

$$a : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2}(J(z_1) - h_W(\operatorname{Im} z_1)) & \text{für } 0 \leq t < 2\|z_1\|_1 \\ -\frac{1}{2}(J(z_k) - h_W(\operatorname{Im} z_k)) & \text{für } 2\|z_{k-1}\|_1 \leq t < 2\|z_k\|_1,\ k \geq 2 \end{cases}$$

dann ist a aufgrund der Wahl von $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt durch $-\varrho/2$. Sei $t > 2\|z_1\|_1$, dann gibt es genau ein $k \in \mathbb{N}$ mit $2\|z_{k-1}\|_1 \leq t < 2\|z_k\|_1$. Nach Wahl von a und $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt dann

$$\begin{aligned} a(t) &= -\frac{1}{2}(J(z_k) - h_W(\operatorname{Im} z_k)) \leq -\frac{\varrho}{2}\omega(z_k) \\ &= -\frac{\varrho}{4C} C(1 + \omega(\|z_k\|_1) + \omega(\|z_k\|_1)) + \frac{\varrho}{4} \\ &\leq -\frac{\varrho}{4C}\omega(2\|z_k\|_1) + \frac{\varrho}{4} \leq -\frac{\varrho}{4C}\omega(t) + \frac{\varrho}{4}. \end{aligned} \tag{97}$$

Wir wählen $F \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(W)$ mit $F \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$ und $F > 0$ auf einer kompakten Nullumgebung $U \subset U_2 \cap \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ gemäß Lemma 6.6. Für $v \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die Funktionen

$$g_v : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad g_v(z) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{a(\|x - iv\|_1)} F(z + iv - x)\, d\lambda^n(x).$$

Wegen $e^a \leq e^{-\varrho/2}$ kann man wie im Beweis von (71) zeigen, dass g_v holomorph ist. Für $v,\ x \in \mathbb{R}^n$ und $z \in \mathbb{C}^n$ folgt aus [**11**] 1.2, dass

$$\begin{aligned} \omega(z) = \omega((z + iv - x) + (x - iv)) &\leq C(1 + \omega(z + iv - x) + \omega(x - iv)) \\ \Rightarrow \omega(z + iv - x) &\geq -1 + C^{-1}\omega(z) - \omega(x - iv) \end{aligned} \tag{98}$$

Es gilt für $z \in \mathbb{C}^n$ und eine Konstante $D > 0$

$$\begin{aligned}
|g_v(z)| &\leq e^{h_W(\operatorname{Im}(z+iv))} \|F\|_{W,\frac{\varrho}{8C},\omega} \int_{\mathbb{R}^n} e^{a(\|x-iv\|_1)}\ e^{-\frac{\varrho}{8C}\omega(z+iv-x)}\, d\lambda^n(x) \\
&\overset{(97),(98)}{\leq} e^{h_W(v+\operatorname{Im}(z))} \|F\|_{W,\frac{\varrho}{8C},\omega} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\varrho}{4C}\omega(\|x-iv\|_1)+\frac{\varrho}{4}+\frac{\varrho}{8C}\omega(x-iv)-\frac{\varrho}{8C^2}\omega(z)+\frac{\varrho}{8C}}\, d\lambda^n(x) \\
&\overset{(1.2)(\gamma)}{\leq} \|F\|_{W,\frac{\varrho}{8C},\omega}\, e^{h_W(v)+\frac{\varrho}{4}+\frac{\varrho}{8C}}\ e^{h_W(\operatorname{Im} z)-\frac{\varrho}{8C^2}\omega(z)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(n+1)\log(1+\|x-iv\|_1)+D} d\lambda^n(x).
\end{aligned}$$

Wegen $\|x - iv\|_1 \geq \|x\|_1$ gibt es $D > 0$ mit $\|e^{-h_W(v)} g_v\|_{W,\frac{\varrho}{8C^2},\omega} \leq \|F\|_{W,\frac{\varrho}{8C},\omega} D$, weshalb

$$G := \{e^{-h_W(v)} g_v \mid v \in \mathbb{R}^n\} \tag{99}$$

in $\mathcal{A}_{(\omega)}(W, \frac{\varrho}{8C^2})$, also auch in $\mathcal{A}_{\{\omega\}}(W)$ beschränkt ist. Für $x \in U \subset U_2,\ k \in \mathbb{N}$ (siehe 6.6) gilt nach Wahl von $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $z_0 := 0$

$$\begin{aligned}
\|z_k - x\|_1 &\leq \|z_k\|_1 + \|x\|_1 \overset{\|z_k\|>2}{<} 2\|z_k\|_1 \\
\|z_k - x\|_1 &\geq \|z_k\|_1 - \|x\|_1 > \|z_k\|_1 - 2 \geq 2\|z_{k-1}\|_1.
\end{aligned} \tag{100}$$

Wir setzen $c := \lambda^n(U) \inf_{y\in U} F(y) > 0$, dann gilt wegen $F \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
g_{-\operatorname{Im} z_k}(z_k) &\geq \int_{\operatorname{Re} z_k - U} e^{a(\|x+i\operatorname{Im} z_k\|_1)} F(\operatorname{Re} z_k - x)\, d\lambda^n(x) \\
&\geq \inf_{y\in U} F(y) \int_U e^{a(\|z_k-x\|_1)}\, d\lambda^n(x) \\
&\overset{(100)}{=} \inf_{y\in U} F(y) \int_U e^{-\frac{1}{2}(J(z_k)-h_W(\operatorname{Im} z_k))}\, d\lambda^n(x) \\
&\geq c\, e^{-\frac{1}{2}(J(z_k)-h_W(\operatorname{Im} z_k))}.
\end{aligned}$$

Somit ist nach (99) mit $v := -\operatorname{Im} z_k$:

$$\begin{aligned}
J(z_k) &\leq C(G) - \log\left|e^{-h_W(-\operatorname{Im} z_k)} g_{-\operatorname{Im} z_k}(z_k)\right| \\
&\overset{W=-W}{\leq} C(G) + h_W(\operatorname{Im} z_k) - \log c + \frac{1}{2}(J(z_k) - h_W(\operatorname{Im} z_k)).
\end{aligned}$$

Also ist $\frac{J(z_k)-h_W(\operatorname{Im} z_k)}{2} \leq C(G) - \log c$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit $(J(z_k) - h_W(\operatorname{Im} z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt, was einen Widerspruch zu (96) darstellt. Folglich ist die anfängliche Annahme widerlegt und damit das Lemma bewiesen. □

6.8. **Lemma.** *Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Nullumgebung mit $W = -W$ und für jede beschränkte Menge $G \subset \mathcal{A}^0_{(\omega)}(W)$ eine Zahl $C(G) \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gibt es eine Konstante $r > 0$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}^n$:*

$$I(z) := \inf_{\substack{G\subset\mathcal{A}^0_{(\omega)}(W) \\ G \text{ beschränkt}}} \inf_{g\in G} (C(G) - \log|g(z)|) \leq h_W(\operatorname{Im} z) + r\omega(z).$$

Beweis. Angenommen, die Aussage des Lemmas gilt nicht. Wir setzen für $z \in \mathbb{C}^n$

$$Q(z) := \frac{I(z) - h_W(\operatorname{Im} z)}{\omega(z)},$$

dann gilt:

$$\sup_{z\in\mathbb{C}^n} Q(z) = \infty. \tag{101}$$

Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es nach Lemma 6.6 ein F_k in $\mathcal{A}^0_{(\omega)}(W)$ ohne Nullstelle in U_k (siehe 6.5). Deshalb ist $I \le C(\{F_k\}) - \log|F_k|$ nach oben beschränkt auf U_k. Also gilt

$$s_k := \sup_{z\in U_k} Q(z) < \infty.$$

Demnach gibt es $z_1 \in \mathbb{C}^n\backslash U_2$ mit $Q(z_1) > s_1$ und wir wählen induktiv $z_{k+1} \in \mathbb{C}^n\backslash U_2$ mit $\|z_{k+1}\|_1 > 2\|z_k\|_1 + 2$, so dass $Q(z_{k+1}) > \max(Q(z_k), s_{k+1})$. Wegen $\omega(z_k) \le \omega(z_{k+1})$ und $Q(z_k) < Q(z_{k+1})$ ist die Folge $(I(z_k) - h_W(\operatorname{Im} z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Wegen $Q(z_k) \ge s_k$ ist sie ferner unbeschränkt und es gilt

$$I(z_k) - h_W(\operatorname{Im} z_k) \ge s_k\omega(z_k). \tag{102}$$

Wir definieren

$$a : [0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2}(I(z_1) - h_W(\operatorname{Im} z_1)) & \text{für } 0 \le t < 2\|z_1\|_1 \\ -\frac{1}{2}(I(z_k) - h_W(\operatorname{Im} z_k)) & \text{für } 2\|z_{k-1}\|_1 \le t < 2\|z_k\|_1,\ k \ge 2 \end{cases}$$

dann ist a monoton fallend. Ferner ist für $q > 0,\ k \ge 2$ und $2\|z_{k-1}\|_1 \le t < 2\|z_k\|_1$ nach [**11**] 1.2 Lemma:

$$\begin{aligned} a(t) + q\omega(t) &\overset{(102)}{\le} -\frac{s_k}{2}\omega(z_k) + q\omega(2\|z_k\|_1) \le -\frac{s_k}{2}\omega(z_k) + Cq(1 + \omega(\|z_k\|_1) + \omega(\|z_k\|_1)) \\ &\le \Big(2Cq - \frac{s_k}{2}\Big)\omega(z_k) + Cq. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} s_k = \infty$ (siehe (101)) gilt also

$$\forall q \in \mathbb{N}, \exists d_q > 0, \forall t \ge d_q :\ a(t) \le -q\omega(t). \tag{103}$$

Wir definieren für $q > 0$ und $v \in \mathbb{R}^n$:

$$C_q(v) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{a(\|x-iv\|_1)+q\omega(x-iv)} d\lambda^n(x).$$

Es gilt für $\|v\|_1 \ge d_{q+n+1}$, da $\|x - iv\|_1 \ge \|v\|_1 \ge d_{q+n+1}$:

$$C_q(v) \overset{(103)}{\le} \int_{\mathbb{R}^n} e^{(-q-n-1)\omega(x-iv)} e^{q\omega(x-iv)}\, d\lambda^n(x) \overset{\omega(x)\le\omega(x+i(-v))}{\le} \int_{\mathbb{R}^n} e^{(-n-1)\omega(x)}\, d\lambda^n(x), \tag{104}$$

also ist $C_q(v) < \infty$ nach 1.2 (γ). Ist $\|v\|_1 \le d_{q+n+1}$ so folgt wegen $\omega(x - iv) \le C(1 + \omega(x) + \omega(v))$ (siehe [**11**] 1.2) und der Monotonie von a

$$C_q(v) \le \int_{\mathbb{R}^n} e^{a(\|x\|_1)} e^{Cq+q\omega(x)+q\omega(v)}\, d\lambda^n(x) \le e^{Cq+q\omega(d_{q+n+1})} \int_{\mathbb{R}^n} e^{a(\|x\|_1)} e^{q\omega(x)}\, d\lambda^n(x), \tag{105}$$

wobei das letze Integral aufgrund von (103) und 1.2 (γ) existiert. Also gibt es nach (104) und (105) eine von v unabhängige Konstante D_q mit

$$C_q(v) \le D_q \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n \text{ und } q > 0. \tag{106}$$

Wir wählen $F \in \mathcal{A}^0_{(\omega)}(W)$ mit $F \ge 0$ auf $\mathbb{R}^n$ und $F > 0$ auf einer kompakten Nullumgebung $U \subset U_2 \cap \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ gemäß Lemma 6.6. Dann definiere für $v \in \mathbb{R}^n$ die Funktionen

$$g_v : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad g_v(z) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{a(\|x-iv\|_1)} F(z + iv - x)\, d\lambda^n(x).$$

Wegen $e^a \le e^{a(0)}$ kann man wie im Beweis von (71) zeigen, dass g_v holomorph ist. Demnach gilt für $z \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned}
|g_v(z)| &\le e^{h_W(\operatorname{Im}(z+iv))}\|F\|_{W,q,\omega} \int_{\mathbb{R}^n} e^{a(\|x-iv\|_1)}\, e^{-q\omega(z+iv-x)}\, d\lambda^n(x) \\
&\overset{(98)}{\le} e^{h_W(v+\operatorname{Im}(z))+q} e^{-C^{-1}q\omega(z)} \|F\|_{W,q,\omega} \int_{\mathbb{R}^n} e^{a(\|x-iv\|_1)} e^{q\omega(x-iv)}\, d\lambda^n(x) \\
&\overset{(106)}{\le} \|F\|_{W,q,\omega}\, D_q\, e^{h_W(v)+q}\, e^{h_W(\operatorname{Im} z)} e^{-C^{-1}q\omega(z)}.
\end{aligned}$$

Also ist $\|e^{-h_W(v)} g_v\|_{W,\frac{q}{C}} \le \|F\|_{W,q,\omega}\, D_q e^q$ und damit ist

$$G := \{e^{-h_W(v)} g_v \mid v \in \mathbb{R}^n\} \tag{107}$$

in $\mathcal{A}^0_{(\omega)}(W)$ beschränkt. Wir setzen $c := \lambda^n(U) \inf_{y\in U} F(y) > 0$, dann gilt wegen $F \ge 0$ auf $\mathbb{R}^n$ und der Monotonie von a für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
g_{-\operatorname{Im} z_k}(z_k) &\ge \int_{\operatorname{Re} z_k - U} e^{a(\|x+i\operatorname{Im} z_k\|_1)}\, F(\operatorname{Re} z_k - x)\, d\lambda^n(x) \\
&\ge \inf_{y\in U} F(y) \int_U e^{a(\|z_k - x\|_1)}\, d\lambda^n(x) \\
&\overset{(100)}{=} \inf_{y\in U} F(y) \int_U e^{-\frac{1}{2}(I(z_k)-h_W(\operatorname{Im} z_k))}\, d\lambda^n(x) \\
&\ge c\, e^{-\frac{1}{2}(I(z_k)-h_W(\operatorname{Im} z_k))}.
\end{aligned}$$

Somit ist nach (107) mit $v := -\operatorname{Im} z_k$:

$$\begin{aligned}
I(z_k) &\le C(G) - \log\left|e^{-h_W(-\operatorname{Im} z_k)} g_{-\operatorname{Im} z_k}(z_k)\right| \\
&\overset{W=-W}{\le} C(G) + h_W(\operatorname{Im} z_k) - \log c + \frac{1}{2}(I(z_k) - h_W(\operatorname{Im} z_k)).
\end{aligned}$$

Also ist $\frac{I(z_k)-h_W(\operatorname{Im} z_k)}{2} \le C(G) - \log c$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit $(I(z_k) - h_W(\operatorname{Im} z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt im Widerspruch zu (102). Folglich ist die anfängliche Annahme widerlegt und damit das Lemma bewiesen. □

6.9. **Satz.** *Für die in Definition 4.20 und im Hauptsatz 1.13 erklärten Bedingungen gilt:*

$$(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{\{\omega\}}} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{III}).$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $p^t\mathcal{P}^{s_1} \ne \mathcal{P}^s$, denn sonst ist $\operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^s/p^t\mathcal{P}^{s_1}) = \emptyset$ nach 1.5 und (**III**) als leere Aussage trivialerweise erfüllt. Sei $\gamma = 1, \dots, \Gamma$ fixiert und $h_\gamma \in \mathcal{P}^s$ gemäß Lemma 6.1 gewählt. Um $\mathbf{APL}(\mathbf{\Omega}, \{\omega\})$ für V_γ zu zeigen, sei $K \subset \Omega$ kompakt und $\varepsilon'' > 0$, so dass $K + B_{\varepsilon''}$ noch in Ω liegt. Dann existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $K + B_{\varepsilon''} \subset K_i$. Wir wählen $j \ge i$ gemäß $(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{\{\omega\}}}$ und $\varepsilon' > 0$, so dass $K' := K_j + B_{2\varepsilon'} \subset \Omega$. Sei $K'' \subset \Omega$ kompakt und ohne Einschränkung $K'' \supset K'$. Schließlich sei $0 < \varepsilon \le \min\{\varepsilon', \varepsilon''\}$, so dass $K'' + B_\varepsilon \subset \Omega$ und $k \ge j$ mit $K'' + B_\varepsilon \subset K_k$. Wir definieren

$$U := \{f \in H(V_\gamma) \mid f \text{ erfüllt } (\alpha) \text{ und } (\beta) \text{ aus } \mathbf{APL}(\mathbf{\Omega}, \{\omega\})\}$$

und für $G \subset \mathcal{A}_{\{\omega\}}(B_\varepsilon)$ beschränkt:

$$G \cdot U := \{g|_{V_\gamma} f \mid g \in G, f \in U\}.$$

Da $\mathcal{A}_{\{\omega\}}(B_\varepsilon)$ nach 3.3 ein (DFS)-Raum ist, gibt es aufgrund von [**35**] 25.20, 25.19(2) ein $q > 0$, so dass $G \subset \mathcal{A}_{(\omega)}(B_\varepsilon, q)$ beschränkt. Es existiert also $c > 0$, so dass für alle $g \in G$ und $z \in \mathbb{C}^n$:

$$\log|g(z)| \leq c + h_{B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) - q\omega(z). \tag{108}$$

Wenn d definiert ist als das Maximum der Grade der Polynome $(N_\gamma h_\gamma)_i \in \mathcal{P}$ $(i = 1, \ldots, l_\gamma)$, dann gibt es C_0, $D > 0$, so dass wegen (α) in $\mathbf{APL}(\mathbf{\Omega}, \{\omega\})$ für $f \in U$ ein $D_f > 0$ existiert, so dass für alle $g \in G$ und $z \in V_\gamma$:

$$\log|f(z)| \leq h_K(\operatorname{Im} z) + \frac{q}{3}\omega(z) + D_f$$

$$\|N_\gamma h_\gamma(z)\|_\infty \leq \log C_0 + d \log\left(1 + \sum_{i=1}^n |z_i|\right) \overset{1.2(\gamma)}{\leq} \frac{q}{3}\omega(z) + D, \tag{109}$$

weshalb

$$\begin{aligned}
\log\|R(gf)_\gamma(z)\|_\infty &\overset{(88)}{=} \log\|(gfN_\gamma h_\gamma)(z)\|_\infty \\
&\leq \log|f(z)| + \log|g(z)| + \log(\|(N_\gamma h_\gamma)(z)\|_\infty) \\
&\overset{(108),(109)}{\leq} h_{K+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) + \left(\frac{q}{3} - q + \frac{q}{3}\right)\omega(z) + c + D_f + D.
\end{aligned}$$

Da die anderen Komponenten von $R(G \cdot U)$ nach (88) verschwinden, ist $R(G \cdot U) \subset \mathcal{H}_{(\omega)}(K + B_\varepsilon, \frac{q}{3}) \subset \mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_i)$. Nach der Bedingung (β) von $\mathbf{APL}(\mathbf{\Omega}, \{\omega\})$ gilt analog für $z \in V_\gamma$:

$$\begin{aligned}
\log\|R(gf)_\gamma(z)\|_\infty &\overset{(88)}{=} \log\|(gfN_\gamma h_\gamma)(z)\|_\infty \\
&\overset{(108),(109)}{\leq} h_{K''+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) + \left(-q + \frac{q}{3}\right)\omega(z) + c + D.
\end{aligned}$$

Da die rechte Seite nicht von f und g abhängt, ist $R(G \cdot U)$ in $\mathcal{H}_{(\omega)}(K'' + B_\varepsilon, \frac{2q}{3})$ und damit auch in $\mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_k)$ beschränkt. Wie in (90) folgt, dass $R(G \cdot U)$ nach $(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{\{\omega\}}}$ in $\mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_j)$ beschränkt ist. Da $\mathcal{H}_{\{\omega\}}(K_j) = \operatorname{ind}_{q \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{(\omega)}(K_j, \frac{1}{q})$ nach 4.38 ein (DFS)-Raum ist, ist nach [**35**] 25.20, 25.19(2) $R(G \cdot U)$ in $\mathcal{H}_{(\omega)}(K_j, \delta)$ für ein $\delta > 0$ beschränkt. Also gibt es $M > 0$, so dass für alle $f \in U$, $g \in G$, und $z \in V_\gamma$ nach (88)

$$\|gfN_\gamma h_\gamma(z)\|_\infty \leq M\, e^{h_{K_j}(\operatorname{Im} z) - \delta\omega(z)}.$$

Nach Lemma 6.1 (2) gibt es ein $i \in \{1, \ldots, l_\gamma\}$ mit $w := (N_\gamma h_\gamma)_i|_{V_\gamma} \neq \emptyset$. Es folgt für alle $h \in G \cdot U$ und $z \in V_\gamma$:

$$|h(z)w(z)| \leq Me^{h_{K_j}(\operatorname{Im} z) - \delta\omega(z)}$$

Hieraus folgt mit der letzen Aussage aus Lemma 6.2, dass eine nur von G (und U, was hier jedoch fest ist) abhängige Konstante $C(G) > 0$ existiert, so dass für alle $f \in U$ und $g \in G$:

$$|g(z)f(z)| \leq e^{h_{K_j + B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) + C(G)}$$

woraus

$$\log|f(z)| - h_{K_j + B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) \leq C(G) - \log|g(z)|$$

folgt. Da $G \subset \mathcal{A}_{\{\omega\}}(B_\varepsilon)$ beschränkt und $g \in G$ beliebig waren, folgt:

$$\log|f(z)| - h_{K_j + B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) \leq \inf_{\substack{G \subset \mathcal{A}_{\{\omega\}}(B_\varepsilon) \\ G \text{ beschränkt}}} \inf_{g \in G} (C(G) - \log|g(z)|).$$

Hieraus folgt nach Lemma 6.7 für $W = B_\varepsilon$, dass eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion $\sigma \in S_\omega$ (unabhängig von $f \in U$) existiert, so dass für alle $f \in U$ und $z \in V_\gamma$

$$\log|f(z)| \le h_{K_j+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) + h_{B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) + \sigma(z) = h_{K'}(\operatorname{Im} z) + \sigma(z).$$

Somit ist die Bedingung (γ) in $\mathbf{APL}(\boldsymbol{\Omega}, \{\omega\})$ erfüllt. Da $\gamma = 1, \ldots, \Gamma$ beliebig war, folgt somit (**III**). ☐

6.10. **Satz.** *Für die in Definition 4.20 und im Hauptsatz 1.12 erklärten Bedingungen gilt:*

$$(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{II}).$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $p^t\mathcal{P}^{s_1} \neq \mathcal{P}^s$, denn sonst ist $\operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^s/p^t\mathcal{P}^{s_1}) = \emptyset$ nach 1.5 und (**II**) als leere Aussage trivialerweise erfüllt. Sei $\gamma = 1, \ldots, \Gamma$ fixiert und $h_\gamma \in \mathcal{P}^s$ gemäß Lemma 6.1 gewählt. Um $\mathbf{APL}(\boldsymbol{\Omega}, \omega)$ für V_γ zu zeigen, sei $K \subset \Omega$ kompakt und $\varepsilon'' > 0$, so dass $K + B_{\varepsilon''}$ noch in Ω liegt. Dann existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $K + B_{\varepsilon''} \subset K_i$. Wähle $j \ge i$ gemäß $(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$ und $\varepsilon' > 0$, so dass $K' := K_j + B_{2\varepsilon'} \subset \Omega$. Sei $K'' \subset \Omega$ kompakt und ohne Einschränkung $K'' \supset K'$. Schließlich sei $0 < \varepsilon \le \min\{\varepsilon', \varepsilon''\}$, so dass $K'' + B_\varepsilon \subset \Omega$ und $k \ge j$ mit $K'' + B_\varepsilon \subset K_k$. Wir definieren

$$U := \{f \in H(V_\gamma) \mid f \text{ erfüllt (a) und (b) aus } \mathbf{APL}(\boldsymbol{\Omega}, \omega)\}$$

und für $G \subset \mathcal{A}^0_{(\omega)}(B_\varepsilon)$ beschränkt:

$$G \cdot U := \{g|_{V_\gamma} f \mid g \in G, f \in U\}.$$

Zu jedem $q > 0$ gibt es ein $c_q > 0$, so dass für alle $g \in G$ und $z \in \mathbb{C}^n$:

$$\log|g(z)| \le c_q + h_{B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) - q\omega(z). \tag{110}$$

Wenn d definiert ist als das Maximum der Grade der Polynome $(N_\gamma h_\gamma)_i \in \mathcal{P}$ $(i = 1, \ldots, l_\gamma)$, dann gibt es C_0, $D > 0$, so dass mit (a) in $\mathbf{APL}(\boldsymbol{\Omega}, \omega)$ für $f \in U$, $g \in G$, $q > 0$ und $z \in V_\gamma$ folgt:

$$\begin{aligned} \log\|R(gf)_\gamma(z)\|_\infty &\overset{(88)}{=} \log\|(gfN_\gamma h_\gamma)(z)\|_\infty \\ &\le \log|f(z)| + \log|g(z)| + \log C_0 + d\log\left(1 + \sum_{i=1}^n |z_i|\right) \\ &\overset{1.2(\gamma),(110)}{\le} h_{K+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) + (d + c_f - q)\omega(z) + (c_q + \log C_0 + D). \end{aligned}$$

Da die anderen Komponenten von $R(G\cdot U)$ nach (88) verschwinden, ist $R(G\cdot U) \subset \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K + B_\varepsilon) \subset \mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_i)$. Nach der Bedingung (b) von $\mathbf{APL}(\boldsymbol{\Omega}, \omega)$ gilt analog für $z \in V_\gamma$:

$$\begin{aligned} \log\|R(gf)_\gamma(z)\|_\infty &\overset{(88)}{=} \log\|(gfN_\gamma h_\gamma)(z)\|_\infty \\ &\overset{1.2(\gamma),(110)}{\le} h_{K''+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) + (d - q)\log\omega(z) + c_q + \log C_0 + D. \end{aligned}$$

Da die rechte Seite nicht von f und g abhängt, ist $R(G \cdot U)$ in $\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K'' + B_\varepsilon)$ und damit auch in $\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_k)$ beschränkt. Wie in (90) folgt, dass $R(G \cdot U)$ nach $(\mathbf{VII})_{\mathcal{D}'_{(\omega)}}$ in $\mathcal{H}^0_{(\omega)}(K_j)$ beschränkt ist. Insbesondere gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass wegen (88) für alle $f \in U$, $g \in G$ und $z \in V_\gamma$:

$$\|gfN_\gamma h_\gamma(z)\|_\infty \le M\, e^{h_{K_j}(\operatorname{Im} z) - \omega(z)}.$$

Nach Lemma 6.1 (2) gibt es ein $i \in \{1, \ldots, l_\gamma\}$ mit $w := (N_\gamma h_\gamma)_i|_{V_\gamma} \neq 0$. Es folgt für alle $h \in G \cdot U$ und $z \in V_\gamma$:

$$|h(z)w(z)| \leq Me^{h_{K_j}(\operatorname{Im} z) - \omega(z)}$$

Hieraus folgt mit der letzen Aussage aus Lemma 6.2, dass eine nur von G (und U, was hier jedoch fest ist) abhängige Konstante $C(G) > 0$ existiert, so dass für alle $f \in U$, $g \in G$:

$$|g(z)f(z)| \leq e^{h_{K_j+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) + C(G)}$$

woraus

$$\log |f(z)| - h_{K_j+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) \leq C(G) - \log |g(z)|$$

folgt. Da $G \subset \mathcal{A}^0_{(\omega)}(B_\varepsilon)$ beschränkt und $g \in G$ beliebig waren, folgt:

$$\log |f(z)| - h_{K_j+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) \leq \inf_{\substack{G \subset \mathcal{A}^0_{(\omega)}(B_\varepsilon) \\ G \text{ beschränkt}}} \inf_{g \in G} (C(G) - \log |g(z)|).$$

Hieraus folgt nach Lemma 6.8 für $W = B_\varepsilon$ mit einer Konstanten $r > 0$:

$$\log |f(z)| \leq h_{K_j+B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) + h_{B_\varepsilon}(\operatorname{Im} z) + r\omega(z) \leq h_{K'}(\operatorname{Im} z) + r\omega(z).$$

Somit ist die Bedingung (c) in $\mathbf{APL}(\boldsymbol{\Omega}, \omega)$ erfüllt. Da $\gamma = 1, \ldots, \Gamma$ beliebig war, folgt somit (**II**). $\square$

6.11. **Korollar.** *Mit den Sätzen 2.7, 2.10, 2.20, 2.6, 3.6, 4.27, 4.37, 5.14, 6.3 und 6.10 ist der Hauptsatz 1.12 nun bewiesen, da* (**II**) *offensichtlich* $(\mathbf{II})_{\mathbf{W}}$ *impliziert.*

6.12. **Korollar.** *Mit den Sätzen 2.8, 2.11, 2.20, 2.6, 3.6, 4.31, 4.41, 5.15, 6.4 und 6.9 ist der Hauptsatz 1.13 nun bewiesen.*

KAPITEL 7

Surjektivität von $p(D)$ auf $\operatorname{Kern} p_1(D)$ im Roumieu-Fall

In diesem Kapitel betrachten wir für eine Gewichtsfunktion ω (siehe 1.2) die ultradifferenzierbaren Funktionen vom Roumieu-Typ $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^s$ auf einer offenen, konvexen Menge Ω in $\mathbb{R}^n$. Hier arbeiten wir eine Bedingung für die Surjektivität von $p(D)$ auf $\operatorname{Kern} p_1(D)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex aus. Dies Idee zu diesem Vorgehen stammt aus [**12**] und [**39**]. In diesem Kapitel sei ω stets eine Gewichtsfunktion und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex.

7.1. **Definition.** Für $r \in \mathbb{N}$ definieren wir ein projektives Spektrum mittels der kompakten Ausschöpfung $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus 2.1 durch

$$\mathcal{E}^{\Omega}_{\{\omega\}}(r) := (\mathcal{E}_{\{\omega\}}(K_i)^r)_{i\in\mathbb{N}}, \quad \mathcal{E}^{\Omega}_{\{\omega\}} := \mathcal{E}^{\Omega}_{\{\omega\}}(1),$$

mit den kanonischen Einschränkungen von Funktionen als verbindende Abbildungen. Ferner sei $\mathcal{K}(\Omega,\omega)$ als Unterspektrum von $\mathcal{E}^{\Omega}_{\{\omega\}}(s)$ definiert durch

$$\mathcal{K}(\Omega,\omega) := (\operatorname{Kern}[p(D) : \mathcal{E}_{\{\omega\}}(K_i)^s \to \mathcal{E}_{\{\omega\}}(K_i)^{s_1}])_{i\in\mathbb{N}} \overset{2.1}{=} (\operatorname{Kern}_i(\mathcal{E}_{\{\omega\}}))_{i\in\mathbb{N}}$$

und

$$\mathcal{K}(\Omega,\omega)_1 := (\operatorname{Kern}[p_1(D) : \mathcal{E}_{\{\omega\}}(K_i)^{s_1} \to \mathcal{E}_{\{\omega\}}(K_i)^{s_2}])_{i\in\mathbb{N}}$$

7.2. **Bemerkung.** Für $r \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\operatorname{proj} \mathcal{E}^{\Omega}_{\{\omega\}}(r) = \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^r, \quad \operatorname{proj}^1 \mathcal{E}^{\Omega}_{\{\omega\}}(r) = 0, \quad \text{und}$$

$$\operatorname{proj} \mathcal{K}(\Omega,\omega)_1 = \operatorname{Kern}(p_1(D) : \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^{s_1} \to \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^{s_2}).$$

Beweis. Sei $\mathcal{X} := (X_i, \iota^i_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$ ein projektives Spektrum und $\sigma_r : \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i^r \to \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i^r$, $\sigma_r(x) := (\iota^i_{i+1}(x_{i+1}) - x_i)$. Dann gilt

$$\operatorname{Kern} \sigma_r = (\operatorname{Kern} \sigma_1)^r \quad \text{und} \quad \operatorname{Bild} \sigma_r = (\operatorname{Bild} \sigma_1)^r,$$

weshalb aus 2.12 $\operatorname{proj}^j (X_i^r)_{i\in\mathbb{N}} = (\operatorname{proj}^j \mathcal{X})^r$ für $j = 0, 1$ folgt. Nach [**39**] 3.3 und 3.25 folgen also die ersten zwei Identitäten. Da $\mathcal{K}(\Omega,\omega)_1$ ein Unterspektrum von $\mathcal{E}^{\Omega}_{\{\omega\}}(s_1)$ ist, folgt mit der ersten Identität $\operatorname{proj} \mathcal{K}(\Omega,\omega)_1 \subset \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^{s_1}$. Für $f \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^{s_1}$ gilt $p_1(D)f = 0$, genau dann, wenn für alle $i \in \mathbb{N}$: $p_1(D)f|_{K_i} = 0$. Also gilt auch die dritte Identität. $\square$

7.3. **Satz.** *Es gilt mit den Bezeichnungen aus 1.15 und 7.1:*

$$(\mathbf{A}) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{proj}^1 \mathcal{K}(\Omega,\omega) = 0.$$

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus 7.1 betrachten wir die folgende Sequenz projektiver Spektren

$$0 \to \mathcal{K}(\Omega,\omega) \hookrightarrow \mathcal{E}^{\Omega}_{\{\omega\}}(s) \overset{p(D)}{\to} \mathcal{K}(\Omega,\omega)_1 \to 0,$$

wobei $p(D)(f_i)_{i\in\mathbb{N}} := (p(D)f_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Aufgrund der Wahl von $\mathcal{K}(\Omega,\omega)$ ist diese Sequenz nach 2.14 exakt an den ersten zwei Stellen. Wegen 5.16 ist die Sequenz auch an der dritten Stelle exakt. Nach dem Satz von Palamodov 2.15 und 7.2 ist die folgende Sequenz exakt

$$0 \to \operatorname{proj} \mathcal{K}(\Omega,\omega) \to \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^s \overset{p(D)}{\to} (\operatorname{Kern}[p_1(D) : \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^{s_1} \to \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^{s_2}]) \to$$
$$\to \operatorname{proj}^1(\mathcal{K}(\Omega,\omega)) \to 0.$$

Also gilt (**A**) in 1.15 genau dann, wenn $\operatorname{proj}^1(\mathcal{K}(\Omega,\omega)) = 0$. □

7.4. **Korollar.** *Es gilt mit den Bezeichnungen von 7.1, 4.18 und 4.20*

$$\operatorname{proj}^1 \mathcal{K}(\Omega,\omega) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{proj}^1(\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i)', (a_i^{i+1}|_{\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i)})')_{i\in\mathbb{N}} = 0$$

Beweis. Zunächst beachte man, dass die nach 4.30 isomorphen Räume $\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i)$ und $\operatorname{Kern}_i(\mathcal{E}_{\{\omega\}})'$ als Fréchet-Schwartzräume (siehe Beweis von 2.6) reflexiv sind. Mit 4.30 folgt, dass $t_i^{i+1} = (\iota_{i+1}^i|_{\operatorname{Kern}_{i+1}(\mathcal{E}_{\{\omega\}})})'$ zur Inklusion $a_i^{i+1}|_{\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i)}$ korrespondiert. Also sind die Spektren $(\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i)', (a_i^{i+1}|_{\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i)})')_{i\in\mathbb{N}}$ und $\mathcal{K}(\Omega,\omega)$ im Sinne von [**44**] 3.1.6 äquivalent. Die Behauptung folgt aus [**44**] 3.1.7. □

7.5. **Lemma.** *Seien $(N_\gamma, V_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$ der Noetheroperator aus 4.17 für p und $p^t\mathcal{P}^{s_1} \neq \mathcal{P}^s$. Für festes $\gamma = 1,\dots,\Gamma$ und $\varrho > 0$, gibt es $w \in \mathcal{P}^{l_\gamma}$ mit $w|_{V_\gamma} \neq 0$,*

$$\forall z \in V_\gamma : \quad \|w(z)\|_\infty \le e^{\varrho\omega(z)},$$

und $((f\cdot w)\delta_{\mu,\gamma})_{\mu=1,\dots,\Gamma} \in \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K)$ für alle $f \in A(V_\gamma,\omega,K)$, wobei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex mit nichtleerem Inneren.

Beweis. Wähle $h_\gamma \in \mathcal{P}^s$ aus 6.1, dann gilt für $v := N_\gamma h_\gamma \in \mathcal{P}^{l_\gamma}$, dass $v|_{V_\gamma} \neq 0$. Da v ein Tupel aus Polynomen ist, gibt es $d > 0$ und $m \in \mathbb{N}$, so dass zu jedem $q > 0$ eine Konstante $d_q > 0$ existiert mit

$$\forall z \in V_\gamma : \quad \|v(z)\|_\infty \le d e^{m\log(1+\sum_{i=1}^n |z_i|)} \overset{1.2(\gamma)}{\le} d_q e^{q\omega(z)} \tag{111}$$

Sei $f \in A(V_\gamma,\omega,K)$ und $F \in H(\mathbb{C}^n)$ Fortsetzung von f (existiert nach [**20**] 3.14 mit $(A,V) := (\mathrm{Id}, V_\gamma)$), dann gilt nach 6.1:

$$N(Fh_\gamma) \overset{4.23}{=} (N_\mu F h_\gamma|_{V_\mu})_{\mu=1,\dots,\Gamma} \overset{6.1}{=} ((fN_\gamma h_\gamma)\delta_{\mu,\gamma})_{\mu=1,\dots,\Gamma} = ((fv)\delta_{\mu,\gamma})_{\mu=1,\dots,\Gamma} \in \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K)$$

nach (111) und Definition 4.18 und 4.19. Daher hat $w := \frac{v}{d_\varrho}$ die geforderten Eigenschaften. □

7.6. **Satz.** *Hier wird der dritte Hauptsatz 1.15 bewiesen.*

Beweis. Nach Satz 7.3 und Korollar 7.4 gilt

$$(\mathbf{A}) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{proj}^1(\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i)')_{i\in\mathbb{N}} = 0$$

Sei $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die kompakte Ausschöpfung aus 2.1 und $\|.\|_{j,m}$ die Normen $|.|_{K_j,-\frac{1}{m},\omega}$ auf $\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_j)$. Aus [**13**] Corollary 11 (bzw. [**45**] 3.10) folgt, da $(\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i)')_{i\in\mathbb{N}}$ nach 4.30 reduziertes (DFS)-Spektrum ist:

$$\operatorname{proj}^1(\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_i)')_{i\in\mathbb{N}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{P_2})^*$$

wobei

$(\mathbf{P_2})^*$ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existieren N, $k \in \mathbb{N}$, so dass es für alle m, $q \in \mathbb{N}$ Zahlen $M \in \mathbb{N}$, $S > 0$ existieren, so dass für alle $f \in \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_n)$:

$$\|f\|_{k,q} \leq S \max\{\|f\|_{m,M}, \|f\|_{n,N}\}$$

Daher reicht es nach 7.3 und 7.4 zu zeigen, dass $(\mathbf{B})$ aus 1.15 und $(\mathbf{P_2})^*$ äquivalent sind. Zunächst soll $p^t\mathcal{P}^{s_1} \neq \mathcal{P}^s$ sein, denn ansonsten gilt nach 1.5 $(P_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma} = \emptyset$ und nach 4.17 $N = 0$, also insbesondere $\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_n) = 0$ und die Aussage ist erfüllt. Ohne Einschränkung sei der Übersichtlichkeit halber $\Gamma = 1$, $l_1 = 1$, ansonsten müssen die folgenden Argumente für jede vorkommende Varietät und jede vorkommende Komponente einer Funktion in $\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_n)$ angewendet werden. Wir setzen $V := V_1$.

V erfüllt $(\mathbf{APL})_{\{\omega\}}(\mathbf{\Omega}) \Rightarrow (\mathbf{P_2})^*$:

Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Zu $K := K_n$ gibt es $\delta > 0$ und $Q \subset\subset K$ gemäß $(\mathbf{APL})_{\{\omega\}}(\mathbf{\Omega})$. Wir wählen N, $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} \leq \delta$ und $Q \subset K_k$. Sind dann m, $q \in \mathbb{N}$, so existieren zu $\varepsilon := \frac{1}{q}$ und $L := K_m$ ein $\eta > 0$ und $c > 0$. Es sei $M \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{M} \leq \eta$ und $S := e^c$. Nun sei $f \in \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_n)$ beliebig und $\lambda := \max\{\|f\|_{m,M}, \|f\|_{n,N}\}$. Ohne Einschränkung sei $\lambda \in]0, \infty[$, sonst ist nichts zu zeigen. Es gilt $\lambda^{-1} f \in A(V, \omega, K_n)$ nach Definition von $\mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_n)$ und unseren Annahmen. Ferner implizieren $\|\lambda^{-1} f\|_{n,N} \leq 1$ und $\|\lambda^{-1} f\|_{m,M} \leq 1$ für alle $z \in V$:

$$\log|\lambda^{-1} f(z)| \leq h_{K_n}(\operatorname{Im} z) + \frac{\omega(z)}{N} \leq h_K(\operatorname{Im} z) + \delta\omega(z),$$
$$\log|\lambda^{-1} f(z)| \leq h_{K_m}(\operatorname{Im} z) + \frac{\omega(z)}{M} \leq h_L(\operatorname{Im} z) + \eta\omega(z),$$

Da V die Bedingung $(\mathbf{APL})_{\{\omega\}}(\mathbf{\Omega})$ erfüllt, folgt für alle $z \in V$

$$\log|\lambda^{-1} f(z)| \leq h_Q(\operatorname{Im} z) + \varepsilon\omega(z) + c \leq h_{K_k}(\operatorname{Im} z) + \frac{\omega(z)}{q} + c,$$

also auch

$$|f(z)| e^{-h_{K_k}(\operatorname{Im} z) - \frac{\omega(z)}{q}} \leq e^c \max\{\|f\|_{m,M}, \|f\|_{n,N}\}$$

für alle $z \in V$. Daher gilt $(\mathbf{P_2})^*$.

$(\mathbf{P_2})^* \Rightarrow V$ erfüllt $(\mathbf{APL})_{\{\omega\}}(\mathbf{\Omega})$:

Ist $K \subset\subset \Omega$ gegeben, so wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_n$ und N, $k \in \mathbb{N}$ nach $(\mathbf{P_2})^*$. Wir setzen $\delta := \frac{1}{2N}$ und $Q := K_k$. Seien $\varepsilon > 0$ und $L \subset\subset \Omega$ gegeben. Wir wählen $q \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{q} \leq \frac{\varepsilon}{C+1}$ (C aus 1.2) und m mit $L \subset K_m$ und finden $M \in \mathbb{N}$, $S > 0$ nach $(P_2)^*$. Nun sei $w \in \mathcal{P}$ aus Lemma 7.5 mit $\varrho := \min\{\frac{1}{2N}, \frac{1}{2M}\}$. Sei c aus 6.2 angewandt mit $U = H(V)$, $K = K_k$, $q = \frac{\varepsilon}{C+1}$, $d = S$. Schließlich setze $\eta := \frac{1}{2M}$, dann gilt für $f \in A(V, \omega, K)$, welches (α) und (β) in $(\mathbf{APL})_{\{\omega\}}(\mathbf{\Omega})$ erfüllt, und alle $z \in V$

$$\log|f(z)w(z)| \overset{7.5}{\leq} h_K(\operatorname{Im} z) + \delta\omega(z) + \varrho\omega(z) \leq h_{K_n}(\operatorname{Im} z) + \frac{1}{N}\omega(z)$$
$$\log|f(z)w(z)| \leq h_L(\operatorname{Im} z) + \eta\omega(z) + \varrho\omega(z) \leq h_{K_m}(\operatorname{Im} z) + \frac{1}{M}\omega(z)$$

Nach Lemma 7.5 ist $f \cdot w \in \mathcal{H}^0_{\{\omega\}}(K_n)$, also gilt nun $\|fw\|_{m,M},\ \|fw\|_{n,N} \leq 1$. Folglich gilt nach $(\mathbf{P_2})^*$ für alle $z \in V$

$$\log|f(z)w(z)| \leq h_{K_k}(\operatorname{Im} z) + \frac{1}{q}\omega(z) + \log(S) \leq h_{K_k}(\operatorname{Im} z) + \frac{\varepsilon}{C+1}\omega(z) + \log(S)$$

Die Anwendung von Lemma 6.2 mit den oben gewählten Größen liefert:

$$\log|f(z)| \leq h_{K_k}(\operatorname{Im} z) + \varepsilon\omega(z) + c = h_Q(\operatorname{Im} z) + \varepsilon\omega(z) + c$$

Also folgt (γ) in $(\mathbf{APL})_{\{\omega\}}(\mathbf{\Omega})$, was zu beweisen war. $\square$

KAPITEL 8

Assoziierte Primideale

In diesem Kapitel geht es um die Beschreibung der assoziierten Primideale $(P_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$ aus den Hauptsätzen 1.12, 1.13 und 1.15 in wichtigen Fällen. Für eine quadratische Polynommatrix p in $\mathcal{P} = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ mit nichtverschwindender Determinante wird sich zeigen, dass die assoziierten Primideale gerade die Ideale sind, die von den irreduziblen Teilern von $\det p$ erzeugt sind. Dies führt zu der Folgerung, dass die Matrix $p(D)$ genau dann eine stetige, lineare Rechtsinverse besitzt, wenn $\det p(D)$ eine besitzt. Wir zeigen weiterhin, dass zu jeder Menge von Primidealen eine Matrix existiert, welche genau diese Primideale als assoziierte Primideale besitzt. Es können also im allgemeinen beliebige assoziierte Varietäten in den Hauptsätzen 1.12, 1.13 und 1.15 auftreten, insbesondere auch von verschiedener Dimension. Es folgt ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer stetigen, linearen Rechtsinversen für unterbestimmte Systeme, das besagt, dass es für eine $m \times s$ Matrix p mit $m < s$ von vollem Rang hinreichend ist, dass der ggT aller m-Minoren eine stetige, lineare Rechtsinverse auf $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ besitzt. Dies Kriterium ist für $m = 1$ sogar notwendig. Wir behandeln kurz noch singuläre 2×2-Matrizen und gehen dann zu konkreten Beispieloperatoren z.B. aus der Physik über. Wir formulieren die Aussagen für $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$; nach den Hauptsätzen 1.12 und 1.13 kann man diese auch mit $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$, $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$ bzw. $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega)$ formulieren.

Reguläre quadratische Systeme

8.1. **Definition.** $\mathcal{P} := \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ seien die Polynome in n Variablen mit komplexwertigen Koeffizienten.

8.2. **Lemma.** *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und p eine $s \times s$-Matrix in $\mathcal{P}$ mit $\det p \neq 0$, so ist $p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s$ surjektiv. Insbesondere ist für $m < s$ und jede $m \times s$ Matrix $q \in \mathcal{P}$ mit vollem Rang $q(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^m$ surjektiv. Gleiches, gilt wenn man $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ durch $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ ersetzt.*

Beweis. Nach der Cramerschen Regel gilt für die adjungierte Matrix

$$p_{ad} := ((-1)^{j+k} \det(p_{k,j}))_{j,k=1,\dots,s},$$

dass

$$p\, p_{ad} = \det p \cdot E_s, \quad (E_s \text{ ist die } s \times s\text{-Einheitsmatrix}).$$

Der Operator $(\det p \cdot E_s)(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s, \quad f \mapsto ((\det p)(D) f_i)_{i=1,\dots,s}$ ist surjektiv, denn $\det p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ ist (weil Ω offen und konvex) surjektiv nach [**5**] 2.6(4) und Teil (b) der Bemerkung vor 2.2. Also ist auch der Operator $p(D) \circ p_{ad}(D)$ und damit $p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s$ surjektiv. Ebenso argumentiert man im Fall $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$, da der Operator $\det p(D) : \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ surjektiv ist nach [**18**] 3.10, 4.9 und der Bemerkung vor 2.11. $\square$

8.3. **Bemerkung.** Es gilt für jede $m \times s$-Matrix p in $\mathcal{P}$ mit $M := \mathcal{P}^s/p^t\mathcal{P}^m$ und $x \in \mathcal{P}^s$:

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}(x + p^t\mathcal{P}^m) = \{g \in \mathcal{P} \mid gx \in p^t\mathcal{P}^m\} \subset \mathcal{P}.$$

Die Annulatoren, welche zugleich Primideale sind, bilden dann die Menge der assoziierten Primideale $Ass_{\mathcal{P}}(M)$.

8.4. **Definition.** Sei B ein kommutativer Ring, $Q \subset B$ ein Primideal und N ein B-Modul, dann wird auf der Menge $\{\frac{x}{b} \mid x \in N,\ b \in B\backslash Q\}$ durch

$$\frac{x_1}{b_1} \sim \frac{x_2}{b_2} \quad :\Leftrightarrow \quad \exists c \in B\backslash Q :\ c(b_2x_1 - b_1x_2) = 0.$$

eine Äquivalenzrelation definiert. Die Menge der Äquivalenzklassen dieser Relation ist ein B-Modul und heiße N_Q, in Zeichen:

$$N_Q := \left\{\frac{x}{b}\ \middle|\ x \in N,\ b \in B\backslash Q\right\}/\sim .$$

8.5. **Satz.** *Seien p eine $s \times s$-Matrix in $\mathcal{P}$ mit $\det p \neq 0$ und $\det p = \lambda \prod_{i=1,\ldots,l} q_i^{r_i}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $l \in \mathbb{N}_0$, irreduziblen, paarweise teilerfremden Elementen q_i $(i = 1, \ldots, l)$ aus $\mathcal{P}$ und $r_i \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^s/p^t\mathcal{P}^s) = \{q_i\mathcal{P} \mid i = 1, \ldots, l\}.$$

Beweis. Offenbar läßt sich $\det p$ wie oben angegeben zerlegen. Es sei $M := \mathcal{P}^s/p^t\mathcal{P}^s$ und $(p^t)_{ad} := ((-1)^{j+k} \det p_{j,k})_{j,k=1,\ldots,s}$, wobei die Matrix $p_{j,k}$ durch Streichen der j-ten Reihe und k-ten Spalte aus p hervorgeht (für $s = 1$: $p_{1,1} := 1$). Dann gilt nach der Cramerschen Regel, wenn E_s die $s \times s$ Einheitsmatrix ist:

$$p^t\ (p^t)_{ad} = \det p^t \cdot E_s = \det p \cdot E_s. \tag{112}$$

Um die Aussage $\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(M) \subset \{q_i\mathcal{P} \mid i = 1, ..., l\}$ zu beweisen, sei $\mathrm{Ann}(v + p^t\mathcal{P}^s) \in \mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(M)$ beliebig und $I := \mathrm{Ann}(v + p^t\mathcal{P}^s)$. Aus (112) folgt $(\det p)v \in p^t\mathcal{P}^s$, und damit $\det p \in I$. Da I ein Primideal ist, gilt für ein $j \in \{1, \ldots, l\}$: $q_j \in I$, also $q_j\mathcal{P} \subset I$.

Annahme: $I \neq q_j\mathcal{P}$.

Dann existiert ein $g \in I\backslash q_j\mathcal{P}$. Nach Wahl von I und 8.3 gibt es also Elemente w_1, $w_2 \in \mathcal{P}^s$ mit $q_jv = p^tw_1$ und $gv = p^tw_2$. Wegen $\det p^t = \det p \neq 0$ ist die $\mathcal{P}_{(0)}$-lineare Abbildung $p^t : \mathcal{P}^s_{(0)} \to \mathcal{P}^s_{(0)}$ injektiv ($\mathcal{P}_{(0)}$ ist der Quotientenkörper von $\mathcal{P}$), also ist $p^t : \mathcal{P}^s \to \mathcal{P}^s$ injektiv. Aus $p^t(gw_1) = gq_jv = p^t(q_jw_2)$ folgt somit, dass $gw_1 = q_jw_2$. q_j ist irreduzibel, somit auch prim ($\mathcal{P}$ ist faktorieller Ring) und teilt g nicht. Also teilt q_j alle Komponenten von w_1 und es gibt folglich ein $w \in \mathcal{P}^s$ mit $w_1 = q_jw$. Aus $q_jv = p^tw_1 = q_jp^tw$, folgt $v \in p^t\mathcal{P}^s$ und damit $I = \mathcal{P}$ im Widerspruch dazu, dass I ein Primideal ist. Dies widerlegt obige Annahme, also ist $I = q_j\mathcal{P}$.

Es folgt $\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(M) \subset \{q_i\mathcal{P} \mid i = 1, \ldots l\}$. Sei nun $j = 1, \ldots, l$ fixiert und $I := q_j\mathcal{P}$. Dann ist $\det p^t = \det p = \lambda \prod_{i=1,\ldots,l} q_i^{r_i}$ in $\mathcal{P}_I$ nicht invertierbar (denn es existieren keine Elemente $a \in \mathcal{P},\ c \in \mathcal{P}\backslash q_j\mathcal{P}$ mit $a \det p^t = c$). Also kann $p^t : \mathcal{P}^s_I \to \mathcal{P}^s_I$ nicht bijektiv sein (sonst wäre $1 = \det(p^t(p^t)^{-1}) = (\det p^t)(\det(p^t)^{-1})$). Da p^t auf $\mathcal{P}^s_I$ wegen $\det p^t \neq 0$ injektiv ist, muss also $p^t\mathcal{P}^s_I \neq \mathcal{P}^s_I$ gelten. $M_I \cong \mathcal{P}^s_I/p^t\mathcal{P}^s_I$ (via $\frac{x+p^t\mathcal{P}^s}{b} \mapsto \frac{x}{b} + p^t\mathcal{P}^s_I$) impliziert:

$$I \in \mathrm{Supp}\, M := \{Q \subset \mathcal{P} \mid Q \text{ ist Primideal, } M_Q \neq 0\}.$$

I enthält somit ein Element von $\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(M) \subset \{q_i\mathcal{P} \mid i = 1, \ldots l\}$ nach [**7**] chap IV, §1, Proposition 7, (ii). Da die Polynome q_i $(i = 1, \ldots, l)$ paarweise teilerfremd sind, kann dies Element nur $q_j\mathcal{P}$ sein. Daher gilt $q_j\mathcal{P} \in \mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(M)$. Also ist

$$\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(M) = \{q_i\mathcal{P} \mid i = 1, \ldots l\}.$$

□

8.6. **Korollar.** *Im Fall $s = 1$ besagt Satz 8.5 zusammen mit dem Hauptsatz 1.12, dass $p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ genau dann eine stetige lineare Rechtsinverse auf $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ besitzt, wenn die Varietäten aller irreduziblen Teiler von p eine PL-Bedingung erfüllen. Ist $s \geq 2$, so hat nach diesem Satz $p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s$ genau dann eine stetige lineare Rechtsinverse auf $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s$ (siehe Lemma 8.2), wenn die Varietäten aller irreduziblen Teiler von $\det p$ eine PL-Bedingung erfüllen. Dies ist aber nach voriger Überlegung äquivalent dazu, dass $(\det p)(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ eine stetige, lineare Rechtsinverse auf $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ besitzt. Für $s \times s$-Matrizen p in $\mathcal{P}$ mit nichtverschwindender Determinate hat also $p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s$ eine stetige, lineare Rechtsinverse genau dann, wenn $(\det p)(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ eine besitzt. Man kann sogar die Rechtsinverse für $p(D)$ aus der von $\det p(D)$ konstruieren. Ist nämlich $R : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ eine stetige, lineare Rechtsinverse zu $\det p(D)$, so ist analog zu (112):*

$$p(D) \circ p_{ad}(D) = \det p(D) \circ E_s$$

Also ist $p_{ad}(D) \circ (R \cdot E_s)$ eine stetige, lineare Rechtsinverse zu $p(D)$ auf $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s$, weil

$$p(D) \circ p_{ad}(D) \circ (R \cdot E_s) = (\det p(D) E_s)(R \cdot E_s) = (\det p(D) \circ R) E_s = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s}.$$

Mögliche assoziierte Varietäten

Jede endliche Menge von vorgegebenen irreduziblen Varietäten kann als Menge der zu einer Matrix p assoziierten Varietäten vorkommen. Um dies zu zeigen, benötigen wir noch folgendes Lemma:

8.7. **Lemma.** *Es seien paarweise verschiedene Primideale $(P_\gamma)_{\gamma=1,\ldots,\Gamma} \subset \mathcal{P}$ gegeben. Dann gilt*

$$\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^\Gamma/(P_1 \times \ldots \times P_\Gamma)) = \{P_\gamma \mid \gamma = 1, \ldots, \Gamma\}$$

Beweis. Sei $I \subset \{1, \ldots, \Gamma\}$, dann gilt

$$\bigcap_{i\in I} P_i \in \{P_j \mid j \in I\} \quad \text{oder} \quad \bigcap_{i\in I} P_i \text{ ist kein Primideal,} \tag{113}$$

denn nehmen wir an, die erste Aussage gilt nicht, dann gibt es für jedes $j \in I$ ein $q_j \in P_j \setminus \bigcap_{I\ni i\neq j} P_i$; nun ist $\prod_{j\in I} q_j \in \bigcap_{i\in I} P_i$ und $q_j \notin \bigcap_{i\in I} P_i$ für jedes $j \in I$, weshalb $\bigcap_{i\in I} P_i$ kein Primideal sein kann. Sei $a \in \mathcal{P}^\Gamma$ beliebig, dann setze $I := \{i \in \{1, \ldots, \Gamma\} \mid a_i \notin P_i\}$. Es gilt für $q \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned} q \cdot a \in P_1 \times \ldots \times P_\Gamma \quad &\Leftrightarrow \quad qa_i \in P_i \quad \text{für alle } i \in I \\ \overset{P_i \text{ Primideal}}{\Leftrightarrow} q \in P_i \quad \text{für alle } i \in I \quad &\Leftrightarrow \quad q \in \bigcap_{i\in I} P_i \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}(a + (P_1 \times \ldots \times P_\Gamma)) = \bigcap_{i \in I} P_i$ und daher gleich einem P_j $(j \in I)$ oder nach (113) kein Primideal. Folglich ist

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^\Gamma/(P_1 \times \ldots \times P_\Gamma)) = \\
&\qquad = \{\mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}(a + (P_1 \times \ldots \times P_\Gamma)) \mid a \in \mathcal{P}^\Gamma,\ \mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}(a + (P_1 \times \ldots \times P_\Gamma)) \text{ Primideal}\} \\
&\qquad \subset \{P_\gamma \mid \gamma = 1, \ldots, \Gamma\}
\end{aligned}$$

Andererseits ist nach obiger Äquivalenzkette für $a := (\delta_{i,\gamma})_{i=1,\ldots,\Gamma} \in \mathcal{P}^\Gamma$:

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}(a + (P_1 \times \ldots \times P_\Gamma)) = P_\gamma.$$

Also gilt auch

$$\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^\Gamma/(P_1 \times \ldots \times P_\Gamma)) \supset \{P_\gamma \mid \gamma = 1, \ldots, \Gamma\}$$

und damit folgt die Behauptung. □

8.8. **Beispiel.** *Seien paarweise verschiedene Primideale $(P_\gamma)_{\gamma=1,\ldots,\Gamma}$ und für diese Erzeuger $a_{\gamma,m}$, $m = 1, \ldots, n_\gamma$ gegeben, also $P_\gamma = \sum_{m=1}^{n_\gamma} a_{\gamma,m}\mathcal{P}$. Dann definieren wir $N := \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} n_\gamma$ und $p := (p_{i,\gamma})_{i=1,\ldots,N;\gamma=1,\ldots,\Gamma}$ folgendermaßen: Für $\gamma \in \{1, \ldots, \Gamma\}$ setzen wir $p_{i,\gamma} := a_{\gamma,m}$, wenn $i = m + \sum_{r=1}^{\gamma-1} n_r$ mit $m \in \{1, \ldots, n_\gamma\}$, und sonst $p_{i,\gamma} = 0$. p hat also folgende Gestalt (mit Nullen aufzufüllen)*

$$p = \begin{pmatrix}
a_{1,1} & & & \\
\vdots & & & \\
a_{1,n_1} & & & \\
& a_{2,1} & & \\
& \vdots & & \\
& a_{2,n_2} & & \\
& & \ddots & \\
& & & a_{\Gamma,1} \\
& & & \vdots \\
& & & a_{\Gamma,n_\Gamma}
\end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^\Gamma/p^t\mathcal{P}^N) = \{P_\gamma \mid \gamma = 1, \ldots, \Gamma\}.$$

Beweis. Offenbar ist $p^t\mathcal{P}^N = P_1 \times \ldots \times P_\Gamma$, daher folgt mit Lemma 8.7

$$\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^\Gamma/p^t\mathcal{P}^N) = \mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^\Gamma/(P_1 \times \ldots \times P_\Gamma)) = \{P_\gamma \mid \gamma = 1, \ldots, \Gamma\}.$$

□

Unterbestimmte Systeme mit vollem Rang

Als nächstes formulieren wir ein hinreichendes Kriterium, wann für eine $m \times s$-Matrix p in $\mathcal{P}$ mit $m < s$ und vollem Rang, der Operator $p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^m$ eine stetige, lineare Rechtsinverse auf $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^m$ (beachte 8.2) besitzt. Und zwar stellt sich heraus, dass es genügt, wenn der größte gemeinsame Teiler der Determinanten aller $m \times m$-Untermatrizen von p als Differentialoperator eine stetige, lineare Rechtsinverse besitzt.

8.9. **Lemma.** *Seien $m,\, s \in \mathbb{N}$ mit $m < s$ und $p = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,s}}$ eine Matrix in $\mathcal{P}$. Ist M eine $m \times m$-Untermatrix von p mit $\det M \neq 0$, dann gilt*

$$\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^s/p^t\mathcal{P}^m) \subset \{(0)\} \cup \mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^m/M^t\mathcal{P}^m).$$

Beweis. Für M wie in der Voraussetzung gibt es $r \in \{1,\ldots,s\}^m$ mit $1 \le r_1 < r_2 < \ldots < r_m \le s$, so dass $M = (a_{i,r_j})_{1\le i,j\le m}$. Sei $\mathcal{P}_{(0)}$ der Quotientenkörper von $\mathcal{P}$. Wir zeigen nun:

$$p^t\mathcal{P}^m = (p^t\mathcal{P}^m_{(0)}) \cap \{y \in \mathcal{P}^s \mid (y_{r_j})_{j=1,\ldots,m} \in M^t\mathcal{P}^m\} \tag{114}$$

„$\subset$" Ist $y := p^t x$ für $x \in \mathcal{P}^m$, dann gilt $y_{r_j} = \sum_{i=1}^m a_{i,r_j}x_i = (M^t x)_j$ für $j = 1,\ldots,m$.

„$\supset$" Ist $y := p^t z$ für $z \in \mathcal{P}^m_{(0)}$ mit $(y_{r_j})_{j=1,\ldots,m} \in M^t\mathcal{P}^m$, dann gibt es $x \in \mathcal{P}^m$ mit

$$M^t x = (y_{r_j})_{j=1,\ldots,m} = \left(\sum_{i=1}^n a_{i,r_j} z_i\right)_{j=1,\ldots,m} = M^t z$$

Da die Abbildung $M^t : \mathcal{P}^m_{(0)} \to \mathcal{P}^m_{(0)}$ wegen $\det M \neq 0$ injektiv ist, folgt $z = x \in \mathcal{P}^m$ und somit $y = p^t z \in p^t\mathcal{P}^m$. Also ist (114) gezeigt.

Sei $\mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}(u + p^t\mathcal{P}^m) \in \mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^s/p^t\mathcal{P}^m)$ beliebig ($u \in \mathcal{P}^s$).

•Fall 1: $u \notin p^t\mathcal{P}^m_{(0)}$

Dann ist auch für alle $g \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$: $gu \notin p^t\mathcal{P}^m_{(0)} \supset p^t\mathcal{P}_m$. Nach Bemerkung 8.3 folgt $\mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}(u + p^t\mathcal{P}^m) = (0)$.

•Fall 2: $u \in p^t\mathcal{P}^m_{(0)}$

Für $g \in \mathcal{P}$ gilt nach (114):

$$gu \in p^t\mathcal{P}^m \quad \Leftrightarrow \quad g(u_{r_j})_{j=1,\ldots,m} \in M^t\mathcal{P}^m$$

Daher gilt nach Bemerkung 8.3:

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}(u + p^t\mathcal{P}^m) = \mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}((u_{r_j})_{j=1,\ldots,m} + M^t\mathcal{P}^m) \in \mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^m/M^t\mathcal{P}^m),$$

denn nach Wahl war $\mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}(u + p^t\mathcal{P}^m)$ ein Primideal. □

8.10. **Lemma.** *$\mathbb{C}^n$ erfüllt für jede nicht quasianalytische Gewichtsfunktion ω und jede Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex die Bedingung $\mathbf{PL}(\mathbf{\Omega}, \omega)$ aus 1.7.*

Beweis. Nach [**34**] Theorem 3.3 (4) reicht es zu zeigen, dass für jedes $K \subset \Omega$ kompakt, konvex eine kompakte, konvexe Menge $K' \subset \Omega$ existiert, so dass für jede Funktion $u \in PSH(\mathbb{C}^n)$ (siehe 1.6) gilt: (a) und (b) $\Rightarrow$ (c), wobei

(a) $\forall z \in \mathbb{C}^n :\quad u(z) \le h_K(\mathrm{Im}\, z) + 1$
(b) $\forall x \in \mathbb{R}^n :\quad u(x) \le 0$
(c) $\forall z \in \mathbb{C}^n :\quad u(z) \le h_{K'}(\mathrm{Im}\, z)$

Ist $K \subset \Omega$ kompakt, konvex gegeben – ohne Einschränkung mit $0 \in K$ –, dann wählen wir $K' := K$. Sei $u \in PSH(\mathbb{C}^n)$, so dass (a) und (b) erfüllt sind. Es reicht (c) auf $\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$ zu zeigen. Sei $z_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$ fixiert, dann gilt $h_K(\mathrm{Im}\, z_0) \neq 0$ und die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to [-\infty, \infty[, \quad f(\lambda) := u(\mathrm{Re}\, z_0 + \lambda\, \mathrm{Im}\, z_0)$$

ist nach Definition der plurisubharmonischen Funktionen subharmonisch auf $\mathbb{C}$. Ferner lautet das klassische Phragmén-Lindelöf-Theorem, wofür ein Beweis in [**31**] Theorem 4.1 steht, so: Für jede plurisubharmonische Funktion $v : \mathbb{C} \to [-\infty, \infty[$, welche ($\alpha$) und ($\beta$) erfüllt, gilt auch ($\gamma$), wobei

$$\begin{array}{lll} (\alpha) & \forall z \in \mathbb{C}: & v(z) \leq |z| + o(|z|) \\ (\beta) & \forall x \in \mathbb{R}: & v(x) \leq 0 \\ (\gamma) & \forall z \in \mathbb{C}: & v(z) \leq |\operatorname{Im} z|. \end{array}$$

Aufgrund von (a) gilt für $\lambda \in \mathbb{C}$ wegen $\operatorname{Im}(\lambda \operatorname{Im} z_0) = \operatorname{Im}(\lambda) \operatorname{Im} z_0$:

$$f(\lambda) = u(\operatorname{Re} z_0 + \lambda \operatorname{Im} z_0) \leq h_K(\operatorname{Im}(\lambda) \operatorname{Im} z_0) + 1 = |\operatorname{Im}(\lambda)| h_K(\operatorname{Im} z_0) + 1.$$

Daher erfüllt $v := \frac{f}{h_K(\operatorname{Im} z_0)}$ (α) und ebenfalls (β), da (b) für u gilt. Wir erhalten (γ), also

$$f(\lambda) \leq |\operatorname{Im} \lambda| h_K(\operatorname{Im} z_0) = h_K(\operatorname{Im}(\lambda \operatorname{Im} z_0)).$$

Setzt man nun $\lambda := i$, so erhält man $u(z_0) \leq h_K(\operatorname{Im} z_0)$, also folgt ($c$). Dies war zu zeigen. □

8.11. **Korollar.** *Seien $m, s \in \mathbb{N}$ mit $m < s$, $p = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,s}}$ eine Matrix in $\mathcal{P}$ mit vollem Rang, und*

$$g := \operatorname{ggT}\{\det M \mid M \textit{ ist } m \times m\textit{-Untermatrix von } p,\ \det M \neq 0\}.$$

Dann gilt:

$$\operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^s / p^t \mathcal{P}^m) \subset \{(0)\} \cup \{q\mathcal{P} \mid q \textit{ ist irreduzibler Teiler von } g\}.$$

Ferner hat $p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^m$ eine stetige, lineare Rechtsinverse auf $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^m$, wenn $g(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ eine stetige, lineare Rechtsinverse auf $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ besitzt.

Beweis. Ist M eine $m \times m$-Untermatrix von p mit $\det M \neq 0$, so gilt nach Satz 8.5

$$\operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^m / M^t \mathcal{P}^m) = \{q\mathcal{P} \mid q \text{ ist irreduzibler Teiler von } \det M\}.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} &\bigcap \{\operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^m / M^t \mathcal{P}^m) \mid M \text{ eine } m \times m\text{-Untermatrix von } p \text{ mit } \det M \neq 0\} \\ &= \{q\mathcal{P} \mid q \text{ ist irreduzibler Teiler von } \det M, \text{ für jede } m \times m\text{-Untermatrix } M \text{ von } p\} \\ &= \{q\mathcal{P} \mid q \text{ ist irreduzibler Teiler von } g\} \end{aligned}$$

Die behauptete Inklusion folgt durch Durchschnittbildung in der Inklusionsaussage in Satz 8.9. Hat nun $g(D)$ eine stetige, lineare Rechtsinverse, so erfüllen nach 1.12 alle Primideale $q\mathcal{P}$, wobei q ein Teiler von g ist, eine Phragmén-Lindelöf Bedingung. Nach 8.10 erfüllt auch $\mathbb{C}^n = V(0)$ eine. Also hat nach dem Hauptsatz 1.12 und der gezeigten Inklusion auch $p(D)$ eine stetige, lineare Rechtsinverse. □

Ist $m = 1$, liegt also nur eine Gleichung vor, so ist es auch notwendig, dass der in Korollar 8.11 definierte ggT eine stetige, lineare Rechtsinverse besitzt.

8.12. **Satz.** *Seien $a_1, \ldots a_s \in \mathcal{P}$ nicht alle $= 0$, $g := \operatorname{ggT}\{a_1, \ldots, a_s\}$, sowie*

$$p := (a_1, \ldots, a_s).$$

Dann hat der Differentialoperator $p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ genau dann eine stetige, lineare Rechtsinverse, wenn $g(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ eine besitzt.

Beweis. Für $b_i := \frac{a_i}{g}$, $i = 1, \dots, s$ betrachte

$$b(D) := (b_1(D), \dots, b_s(D)) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega).$$

Hat $p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ eine stetige, lineare Rechtsinverse $\varphi : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s$ (d.h. $p(D) \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)}$), so gilt

$$g(D) \circ (b(D) \circ \varphi) = p(D) \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)} .$$

Also ist $(b(D) \circ \varphi) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ eine stetige, lineare Rechtsinverse für $g(D)$. Hat $g(D)$ hingegen eine stetige, lineare Rechtsinverse, so besagt Korollar 8.11, dass auch $p(D)$ eine besitzt. □

Einspaltenmatrizen und singuläre 2×2-Matrizen

Für 2×2-Matrizen p mit $\det p \neq 0$, ist nach 8.6 $\det p$ maßgebend dafür, ob $p(D)$ eine stetige, lineare Rechtsinverse hat. Für 2×2-Matrizen p mit $\det p = 0$, ist der Einspaltenoperator aus den größten gemeinsamen Teilern der Zeilen entscheidend für die Existenz einer stetigen, linearen Rechtsinversen.

8.13. **Bezeichnung.** Seien $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{P}$, dann setzen wir

$$I(a_1, \dots, a_m) := \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \;\middle|\; i = 1, \dots, m, \lambda_i \in \mathcal{P} \right\} \subset \mathcal{P}$$

8.14. **Bemerkung.** Seien $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{P}$ und

$$p := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Dann gibt es nach 4.13 zu $I := I(a_1, \dots, a_m)$ primäre Ideale (siehe 4.14) $(I_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$ und Primideale $(Q_\gamma)_{\gamma=1,\dots,\Gamma}$ in $\mathcal{P}$ mit

(1) $\displaystyle\bigcap_{\gamma=1}^{\Gamma} I_\gamma = I,$

(2) $\displaystyle\bigcap_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma\neq j}}^{\Gamma} I_\gamma \neq I \;, \quad \forall j = 1, \dots, \Gamma,$

(3) $\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}/I_\gamma) = \{Q_\gamma\}, \quad \forall \gamma = 1, \dots, \Gamma.$

(4) $\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}/I) = \{Q_\gamma \mid \gamma = 1, \dots \Gamma\}.$

Also ist

$$\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}/p^t\mathcal{P}^m) = \{Q_\gamma \mid \gamma = 1, \dots \Gamma\}.$$

Die hier erwähnte Primärzerlegung eines Ideals kann von Computeralgebraprogrammen (z.B. Singular) berechnet werden.

8.15. **Lemma.** *Sei*

$$p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine Matrix in $\mathcal{P}\setminus\{0\}$ *mit* $\det p = ad-bc=0$. *Wir setzen* $a' := \frac{a}{\mathrm{ggT}(a,b)} \in \mathcal{P}$ *(wobei* $\mathrm{ggT}(a,b)$ *der größte gemeinsame Teiler von* a *und* b *ist). Dann gilt mit der Bezeichnung aus 8.13*

$$\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^2/p^t\mathcal{P}^2) = \{(0)\} \cup \{\mathrm{Ann}(f+I(a,c)) \mid f \in a'\mathcal{P}, \mathrm{Ann}(f+I(a,c)) \textit{ ist Primideal}\}$$

Beweis. Wir setzen

$$T := p^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Nach Voraussetzung gilt $ad = bc \Rightarrow d = \frac{bc}{a} \in \mathcal{P}$. Somit gilt:

$$T\mathcal{P}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda a + \mu c \\ \lambda b + \mu \frac{bc}{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{P}^2 \middle| \lambda, \mu \in \mathcal{P} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{P}^2 \middle| u \in I(a,c),\ av = bu \right\} \tag{115}$$

Um

$$\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^2/T\mathcal{P}^2) \subset \{(0)\} \cup \{\mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}(f+I(a,c)) \mid f \in a'\mathcal{P},\ \mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}(f+I(a,c)) \text{ ist Primideal}\} \tag{116}$$

zu zeigen, sei

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + T\mathcal{P}^2\right) \in \mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^2/T\mathcal{P}^2)$$

beliebig (insbesondere ist dieser Annulator ein Primideal).

•Fall 1: $av \neq bu$

In diesem Fall ist für alle $g \in \mathcal{P}\setminus\{0\}$ auch $a(gv) \neq b(gu)$ und nach (115):

$$g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \notin T\mathcal{P}^2.$$

Also ist $\mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + T\mathcal{P}^2\right) = (0)$.

•Fall 2: $av = bu$

In diesem Fall ist $\mathcal{P} \ni v = \frac{b}{a}u = \frac{b}{\mathrm{ggT}(a,b)}\frac{u}{a'}$. Da a' und $\frac{b}{\mathrm{ggT}(a,b)}$ wegen $a, b \neq 0$ teilerfremd sind, folgt $u \in a'\mathcal{P}$. Für $g \in \mathcal{P}$ ist nach (115)

$$g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in T\mathcal{P}^2 \quad \Leftrightarrow \quad gu \in I(a,c).$$

Also erhält man nach Definition der Annulatoren

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + T\mathcal{P}^2\right) = \mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}(u + I(a,c)),$$

und der linke Annulator war ein Primideal. Damit ist (116) gezeigt. Nun zeigen wir

$$\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^2/T\mathcal{P}^2) \supset \{(0)\} \cup \{\mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}(f+I(a,c)) \mid f \in a'\mathcal{P},\ \mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}(f+I(a,c)) \text{ ist Primideal}\}. \tag{117}$$

Es gibt wegen $a, b \neq 0$ offenbar $(u,v) \in \mathcal{P}^2$ mit $av \neq bu$. Nach dem eben behandelten Fall 1 ist dann

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + T\mathcal{P}^2\right) = (0) \in \mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^2/T\mathcal{P}^2),$$

Sei wiederum $a = a' \operatorname{ggT}(a,b)$ und $f \in a'\mathcal{P}$ gewählt, so dass $\operatorname{Ann}_{\mathcal{P}}(f + I(a,c))$ Primideal ist. Dann setze $h := \frac{b}{a} f = \frac{b}{\operatorname{ggT}(a,b)} \frac{f}{a'} \in \mathcal{P}$. Es gilt dann für $g \in \mathcal{P}$ immer $a(gh) = b(gf)$, sowie

$$g \in \operatorname{Ann}_{\mathcal{P}}(f + I(a,c)) \quad \overset{8.3}{\Leftrightarrow} \quad gf \in I(a,c) \quad \overset{(115)}{\Leftrightarrow} \quad g \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in T\mathcal{P}^2$$

Also ist nach Definition des Annulators

$$\operatorname{Ann}_{\mathcal{P}}(f + I(a,c)) = \operatorname{Ann}_{\mathcal{P}} \left(\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} + T\mathcal{P}^2 \right).$$

Da die linke Menge ein Primideal war, folgt nun (117). □

8.16. **Satz.** *Seien* $a, b, c, d \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ *und*

$$p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $\det p = ad - bc = 0$. *Für* $g := \operatorname{ggT}(a,b)$ *und* $h := \operatorname{ggT}(c,d)$ *gilt*

$$\operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^2/p^t\mathcal{P}^2) = \{(0)\} \cup \operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}/I(g,h)).$$

Also hat $p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^2 \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^2$ *genau dann eine stetige, lineare Rechtsinverse auf* $\operatorname{Bild} p(D)$, *falls der Operator*

$$\begin{pmatrix} g(D) \\ h(D) \end{pmatrix} : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^2$$

eine stetige, lineare Rechtsinverse auf seinem Bild hat.

Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn $I(g,h) = \mathcal{P}$ *ist.*

Beweis. Man setze $a' := \frac{a}{\operatorname{ggT}(a,b)}$ und $b' := \frac{b}{\operatorname{ggT}(a,b)}$. Dann gilt

$$ad = bc \quad \Rightarrow \quad d = \frac{bc}{a} = \frac{b'c}{a'} \quad \Rightarrow \quad \exists r \in \mathcal{P}: \; c = a'r.$$

Hieraus folgt $d = \frac{b'c}{a'} = b'r$ und somit gilt $r = \operatorname{ggT}(c,d) = h$. Also ist

$$p = \begin{pmatrix} a'g & b'g \\ a'h & b'h \end{pmatrix}.$$

Für jedes $r \in \mathcal{P}$ ist

$$\operatorname{Ann}_{\mathcal{P}}(r + I(g,h)) = \operatorname{Ann}_{\mathcal{P}}(a'r + I(a,c)),$$

denn für jedes $q \in \mathcal{P}$ ist

$$qr \in I(g,h) \quad \Leftrightarrow \quad qa'r \in I(a'g, a'h) = I(a,c).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^2/p^t\mathcal{P}^2) &\overset{8.15}{=} \{(0)\} \cup \{\operatorname{Ann}_{\mathcal{P}}(f + I(a,c)) \mid f \in a'\mathcal{P}, \operatorname{Ann}_{\mathcal{P}}(f + I(a,c)) \text{ ist Primideal}\} \\ &= \{(0)\} \cup \{\operatorname{Ann}_{\mathcal{P}}(r + I(g,h)) \mid r \in \mathcal{P}, \operatorname{Ann}_{\mathcal{P}}(r + I(g,h)) \text{ ist Primideal}\} \\ &= \{(0)\} \cup \operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}/I(g,h)). \end{aligned}$$

□

Konkrete Beispiele

8.17. **Definition und Bemerkung.** Ein Polynom $q \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ vom Grad $m \in \mathbb{N}$ heißt *elliptisch*, falls der Hauptteil q_m (die Monome m-ten Grades) in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ kein Nullstelle hat. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, so hat $q_m(D)$ keine stetige, lineare Rechtsinverse auf $C^\infty(\Omega)$ aufgrund von [**40**] Theorem C.1 . Daher erfüllt $V_h := V(q_m)$ nach [**29**] 4.5 und Definition 2.8 nicht $\mathbf{PL}(\boldsymbol{\Omega}) := \mathbf{PL}(\boldsymbol{\Omega}, \log)$. Also genügt $V := V(q)$ nach [**34**] 4.1 nicht $\mathbf{PL}(\boldsymbol{\Omega}, \omega)$. Nach [**30**] 5.4. und Definition 2.11 hat $q(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ keine stetige, lineare Rechtsinverse auf $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$.

Das erste Beispiel wird in [**36**] angesprochen:

8.18. **Beispiel.** *Wir betrachten für $s = 2$ (und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ konvex und offen) den Differentialoperator*

$$p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^2 \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^2, \quad p(D)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix},$$

dessen Kern bis auf die Identifizierung von $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ einen Unterraum der holomorphen Funktionen auf Ω bildet. Dann ist

$$p = i^{-1}\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

und somit $\det p = -(x^2 + y^2)$. *Dieses Polynom ist nach 8.17 elliptisch; also hat $q(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ keine stetige, lineare Rechtsinverse auf $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$. Nach Korollar 8.6 hat $p(D)$ keine stetige, lineare Rechtsinverse auf $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^2$*

Für das folgende Beispiel brauchen wir noch diese Definition:

8.19. **Definition** (hyperbolische Polynome)**.** Ist $p \in \mathcal{P}$, so heißt p *hyperbolisch*, wenn ein $\theta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\tau_0 \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \tau < \tau_0 : \quad p(x + i\tau\theta) \neq 0$$

8.20. **Bemerkung.** Ist $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ hyperbolisch, so folgt aus [**24**] 12.5.1. und der Definition in [**30**] 4.1, dass p auch (ω)-hyperbolisch ist. Mit [**30**] Proposition 4.4 (1), Definition 2.11 und [**34**] 2.11 folgt, dass $p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^n)$ eine stetige, lineare Rechtsinverse auf $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^n)$ hat.

Aus der Weyl-Gleichung für die Wellenfunktion eines Neutrino-Antineutrino-Paars in der Quatentheorie stammt folgender Differentialoperator:

8.21. **Beispiel.** *Gegeben sei*

$$p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^4)^2 \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^4)^2,$$

$$p(D)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \\ & \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \\ & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & -i\frac{\partial}{\partial y} \\ i\frac{\partial}{\partial y} & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \\ & -\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

mit

$$p = i^{-1}\begin{pmatrix} t + x + z & -iy \\ iy & t + x - z \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\det p = -(t+x)^2 + z^2 + y^2$. *Dieses Polynom ist hyperbolisch bzgl.* $(0,0,0,1)$ *(siehe 8.19), denn für* $\tau < 0$ *und* $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ *gilt:*

$$0 = \det p(x,y,z,t+i\tau) = -(t+x+i\tau)^2 + z^2 + y^2 = -(t+x)^2 + z^2 + y^2 + \tau^2 - 2i\tau(t+x)$$
$$\Rightarrow t + x = 0$$

und somit $0 = z^2+y^2+\tau^2$ *mit Widerspruch zu* $\tau \neq 0$. *Also hat* $p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^4)^2 \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^4)^2$ *eine stetige, lineare Rechtsinverse auf* $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^4)$ *nach 8.20.*

8.22. **Beispiel.** *Folgendes Beispiel stammt aus der Bildverarbeitung (Denoising):*

$$p(D) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} & \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial^2}{(\partial y)^2} \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass $\det p(D) = 0$ *ist. Der Operator* $p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^2 \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^2$ *hat eine stetige, lineare Rechtsinverse auf* $\operatorname{Bild} p(D)$.

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus 8.16 ist $a = -x^2$, $b = c = -xy$, $d = -y^2$, $g = x$ und $h = y$. Nach 8.16 ist also

$$\operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^2/p^t\mathcal{P}^2) = \{(0)\} \cup \operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}/I(x,y)) = \{(0)\} \cup \{I(x,y)\}.$$

Nach dem Hauptsatz 1.12 hat wegen $V(0) = \mathbb{C}^n$ und $V(I(x,y)) = \{0\}$, $p(D)$ eine stetige, lineare Rechtsinverse auf $\operatorname{Bild} p(D)$. Man kann sogar eine stetige, lineare Rechtsinverse für diesen Fall angeben. Sind $(g_1, g_2) \in \operatorname{Bild} p(D)$, so rechnet man leicht nach, dass

$$R(g_1,g_2)(x,y) := \begin{pmatrix} \int_0^x \left(\int_0^{x'} g_1(t,y)dt + \int_0^y g_2(0,t)dt \right) dx' \\ 0 \end{pmatrix} \quad x, y \in \mathbb{R},$$

eine stetige, lineare Rechtsinverse für $p(D)$ definiert. Dabei beachte man, dass $\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial x}$. □

8.23. **Beispiel.** *Es sei* $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x,y,z]$, *dann ist die Matrix*

$$p = \begin{pmatrix} x^4 + x^2y^2 & x^2z^2 + y^2z^2 \\ x^6 - x^2y^4 & x^4z^2 - y^4z^2 \end{pmatrix}$$

singulär. $p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^2 \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^2$ *hat keine stetige, lineare Rechtsinverse auf* $\operatorname{Bild} p(D)$.

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus 8.16 ist $a = x^4 + x^2y^2$, $b = x^2z^2 + y^2z^2$, $c = x^6 - x^2y^4$, $d = x^4z^2 - y^4z^2$, $g = x^2 + y^2$ und $h = x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)g$. Nach 8.16 ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^2/p^t\mathcal{P}^2) &= \{(0)\} \cup \operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}/I(g,h)) = \{(0)\} \cup \operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}/g\mathcal{P}) \\ &= \{(0), (x+iy)\mathcal{P}, (x-iy)\mathcal{P}\},\end{aligned}$$

denn $g\mathcal{P} = (x+iy)\mathcal{P} \cap (x-iy)\mathcal{P}$ ist offenbar eine Primärzerlegung von gP. Da $V(x+iy) \cap \mathbb{R}^3$ von niedrigerer Dimension ist als $V(x+iy)$, erfüllt diese Varietät nach [**34**] 3.11, 3.13 und 4.1 nicht $\mathbf{PL}(\mathbb{R}^3, \omega)$. Damit erfüllt $V(x+iy)$ nach [**34**] 2.11 auch nicht $\mathbf{PL}(\boldsymbol{\Omega}, \omega)$, woraus nach dem Hauptsatz 1.12 die Behauptung folgt. □

8.24. **Beispiel.** *Es sei* $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x,y,z]$, *dann hat der von der Matrix*

$$p := \begin{pmatrix} x^2 - z^2 & 0 & x^2 - y^2 \\ 0 & x^2 + z^2 & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

induzierte Differentialoperator eine stetige, lineare Rechtsinverse auf $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^2$. *Jede* 2×2-*Untermatrix von* p *induziert jedoch einen Diffenrentialoperator, der keine stetige, lineare Rechtsinverse besitzt.*

Beweis. Die 2×2 Untermatrizen von p sind

$$M_{1,2} := \begin{pmatrix} x^2 - z^2 & 0 \\ 0 & x^2 + z^2 \end{pmatrix},$$

$$M_{1,3} := \begin{pmatrix} x^2 - z^2 & x^2 - y^2 \\ 0 & x^2 + y^2 \end{pmatrix},$$

$$M_{2,3} := \begin{pmatrix} 0 & x^2 - y^2 \\ x^2 + z^2 & x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

Da die Determinanrten

$$\det M_{1,2} = (x^2 - z^2)(x^2 + z^2),$$
$$\det M_{1,3} = (x^2 - z^2)(x^2 + y^2),$$
$$\det M_{2,3} = -(x^2 - y^2)(x^2 + z^2).$$

jeweils einen elliptischen Anteil besitzen (siehe 8.17), haben $M_{1,2}(D)$, $M_{1,3}(D)$ und $M_{2,3}(D)$ nach 8.6 keine stetige, lineare Rechtsinverse. Andererseits gilt

$$\mathrm{ggT}(\det M_{1,2}, \det M_{1,3}, \det M_{2,3}) = 1,$$

also hat $p(D)$ nach 8.11 eine stetige, lineare Rechtsinverse auf $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^2$. □

8.25. **Definition.** Sei

$$r := i^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}, \quad d := i^{-1}(x, y, z), \quad g := i^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad q := -(x^2 + y^2 + z^2)$$

und $\mathrm{rot} := r(D)$, $\mathrm{div} := d(D)$, $\mathrm{grad} := g(D)$ sowie $\Delta := q(D) = d(D) \circ g(D)$ (wobei $D := i(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$).

8.26. **Beispiel.** *(i)* $\mathrm{rot} : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^3 \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^3$ *hat eine stetige, lineare Rechtsinverse auf* Bild rot

(ii) $\mathrm{div} : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^3 \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ *hat eine stetige, lineare Rechtsinverse auf* $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$

(iii) $\mathrm{grad} : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^3$ *hat eine stetige, lineare Rechtsinverse auf* Bild grad

(iv) $\mathrm{grad} \circ \mathrm{div} : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^3 \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^3$ *hat eine stetige, lineare Rechtsinverse auf* Bild grad

(v) $\Delta : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ *hat* keine *stetige, lineare Rechtsinverse auf* $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$.

Obwohl $\Delta = \mathrm{div} \circ \mathrm{grad}$, *impliziert hier, die Existenz von stetigen, linearen Rechtsinversen für* div *und* grad *nicht, dass* Δ *eine auf* $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ *besitzt. Der Grund dafür ist, dass die stetige, lineare Rechtsinverse für* grad *nur auf* Bild grad $\subsetneq \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^3$ *definiert ist.*

Beweis. zu (i): Hierzu möchte ich beweisen, dass $\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^3/r^t\mathcal{P}^3) = \{(0)\}$ ist, wobei hier $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x, y, z]$. Wir zeigen zunächst

$$r^t\mathcal{P}^3 = \{u \in \mathcal{P}^3 \mid xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0\} \tag{118}$$

„$\subset$": Gilt, da $(x, y, z) \cdot r^t = 0$.

„$\supset$": Sei $u \in \mathcal{P}^3$ mit

$$xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0. \tag{119}$$

Da u_1 (bzw. u_2) kein Monom aus $\mathbb{C}[x]$ (bzw. $\mathbb{C}[y]$) enthalten darf, muss $u_1 \in I(y,z)$ und $u_2 \in I(x,z)$ sein. Also gibt es $g_i \in \mathbb{C}[x,y]$, $h_i \in \mathbb{C}[x,y,z]$ für $i = 1,2$, so dass

$$u_1 = yg_1 + zh_1, \quad u_2 = xg_2 + zh_2. \tag{120}$$

Nach (119) ist

$$0 = x(yg_1 + zh_1) + y(xg_2 + zh_2) + zu_3 = (g_1 + g_2)xy + (xh_1 + yh_2 + u_3)z \quad \Rightarrow \quad g_1 = -g_2.$$

Wir setzen $v^t := i(-h_2, h_1, -g_1) = i(-h_2, h_1, g_2)$, dann gilt

$$r^t v = \begin{pmatrix} zh_1 + yg_1 \\ zh_2 + xg_2 \\ -yh_2 - xh_1 \end{pmatrix} = u, \quad \text{denn} \quad u_3 \overset{(119)}{=} \frac{-1}{z}(xu_1 + yu_2) \overset{(120)}{=} -xh_1 - yh_2.$$

Also ist (118) gezeigt.

Sei nun zur Bestimmung von $\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^3/r^t\mathcal{P}^3)$ ein $w \in \mathcal{P}^3$ gegeben.

Fall 1: $w \in r^t\mathcal{P}^3$

dann ist $\mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}(w + r^t\mathcal{P}^3) = \mathcal{P}$ kein Primideal.

Fall 2: $w \in \mathcal{P}^3 \setminus r^t\mathcal{P}^3$

dann gilt nach (118) für alle $\lambda \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$: $x\lambda w_1 + y\lambda w_2 + z\lambda w_3 \neq 0$, also ist $\lambda w \notin r^t\mathcal{P}^3$. Demnach ist

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{P}}(w + r^t\mathcal{P}^3) = (0).$$

Da $r^t : \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^3$ nicht surjektiv ist, gilt

$$\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^3/r^t\mathcal{P}^3) = \{(0)\}.$$

Damit ist die einzige zu rot assoziierte Varietät $V(0) = \mathbb{C}^3$, welche nach nach 8.10 $\mathbf{PL}(\mathbf{\Omega}, \omega)$ erfüllt. Der Hauptsatz 1.12 impliziert, dass rot eine stetige, lineare Rechtsinverse auf Bild rot hat.

(ii) folgt nach 8.12, da $\mathrm{ggT}(i^{-1}x, i^{-1}y, i^{-1}z) = 1$.

(iii) folgt nach 8.7, da nach diesem Satz $\mathrm{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}/g^t\mathcal{P}^3) = I(x,y,z)$ und $V(I(x,y,z)) = \{0\}$.

(iv) div besitzt eine stetige, lineare Rechtsinverse R_{div} auf $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ und grad eine stetige, lineare Rechtsinverse R_{grad} auf Bild grad. $R_{\mathrm{div}} \circ R_{\mathrm{grad}}$ ist eine stetige, lineare Rechtsinverse für grad $\circ$ div auf Bild grad $=$ Bild grad $\circ$ div.

(v) Dies folgt nach 8.17, da q ein elliptisches Polynom ist. $\square$

8.27. **Beispiel** (Maxwell Gleichungen). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ offen und konvex. Mit den Bezeichnungen aus 8.25 sei für $B,\ E \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^3$ und Konstanten $\alpha,\ \beta,\ \gamma > 0$:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} B &= \alpha E + \beta \frac{d}{dt} E \\
\operatorname{rot} E &= \frac{d}{dt} B \\
\operatorname{div} B &= 0 \\
\operatorname{div} E &= \gamma.
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem (Maxwell Gleichungen) ist äquivalent zu $p(D)\begin{pmatrix} B \\ E \end{pmatrix} = \gamma e_8$ ($e_8 = (\delta_{8,i})_{i=1,\dots,8}$) mit

$$p := i^{-1}\begin{pmatrix}
0 & -z & y & -(\alpha i + \beta t) & 0 & 0 \\
z & 0 & -x & 0 & -(\alpha i + \beta t) & 0 \\
-y & x & 0 & 0 & 0 & -(\alpha i + \beta t) \\
-t & 0 & 0 & 0 & -z & y \\
0 & -t & 0 & z & 0 & -x \\
0 & 0 & -t & -y & x & 0 \\
x & y & z & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x & y & z.
\end{pmatrix}$$

Der Operator $p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^6 \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^8$ ($D := i(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t})$) hat keine *stetige, lineare Rechtsinverse auf* $\operatorname{Bild} p(D)$.

Beweis. Zunächst definieren wir

$$r := x^2 + y^2 + z^2 + \beta t^2 + \alpha i t \quad \text{und}$$

$$K := \begin{pmatrix}
1 & 0 \\
\frac{y}{x} & 0 \\
\frac{z}{x} & 0 \\
0 & -\frac{x}{t} \\
0 & -\frac{y}{t} \\
0 & -\frac{z}{t} \\
0 & 1 \\
\frac{\alpha i + \beta t}{x} & 0
\end{pmatrix}.$$

(1) Zeige:

$$\operatorname{Kern}(p^t : \mathcal{P}_{(0)}^8 \to \mathcal{P}_{(0)}^6) = K\mathcal{P}_{(0)}^2 \quad (\mathcal{P}_{(0)} \text{ Quotientenkörper von } \mathcal{P}) \tag{121}$$

Man rechnet leicht nach, dass p^t vollen Rang hat, also ist $p^t : \mathcal{P}_{(0)}^8 \to \mathcal{P}_{(0)}^6$ surjektiv und damit hat der Kern dieser Abbildung Dimension zwei. Aufgrund von $p^t K = 0$ folgt, dass der Kern von den Spalten von K aufgespannt wird.

(2) Zeige:

$$\operatorname{Ann}_{\mathcal{P}}(te_1 + p^t\mathcal{P}^8) = r \cdot \mathcal{P}. \tag{122}$$

Zunächst gilt für

$$h := i \begin{pmatrix} 0 \\ zt \\ -yt \\ -(x^2 + \alpha it + \beta t^2) \\ -yx \\ -zx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$p^t \frac{1}{r} h = te_1$. Daher folgt $r(te_1) \in p^t \mathcal{P}^8$, also $r \cdot \mathcal{P} \subset \operatorname{Ann}(te_1 + p^t \mathcal{P}^8)$. Um die andere Inklusion zu zeigen, sei $q \in \operatorname{Ann}(te_1 + p^t \mathcal{P}^8)$ beliebig. Also gibt es ein $v \in \mathcal{P}^8$ mit $p^t v = qte_1 = \frac{q}{r} p^t h$. Nach (1) gibt es also $c, d \in \mathcal{P}_{(0)}$ mit

$$v = \frac{q}{r} h + c \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y}{x} \\ \frac{z}{x} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\alpha i + \beta t}{x} \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{x}{t} \\ \frac{y}{t} \\ \frac{z}{t} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der ersten und siebten Zeile folgt $c, d \in \mathcal{P}$. Die achte Gleichung impliziert $(\alpha i + \beta t)c = v_8 x$, also gibt es $w \in \mathcal{P}$ mit $c = wx$. Die zweite Gleichung besagt nun $v_2 = \frac{q}{r} zt + wy$, daher ist $qzt = (v_2 - wy)r$. Da r irreduzibel ist und nicht zt teilt, teilt r das Polynom q. Also ist $q \in r \cdot \mathcal{P}$ und damit (122) gezeigt.

(3) Da r irreduzibel ist, gilt $r \cdot \mathcal{P} \in \operatorname{Ass}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^6 / p^t \mathcal{P}^8)$ aufgrund von (2). Also ist $V(r)$ eine zu p assoziierte Varietät. Andererseits ist nach 8.17 r elliptisch und $V(r)$ erfüllt daher für kein ω die Bedingung $\mathbf{PL}(\boldsymbol{\Omega}, \omega)$. Nach Hauptsatz 1.12 hat also $p(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^6 \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^8$ keine stetige, lineare Rechtsinverse auf $\operatorname{Bild} p(D)$. $\square$

Symbolverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] Andreotti A., Nacinovich M., *Analytic convexity and the principle of Phragmén-Lindelöf*, Scuola Norm. Sup. Pisa, (1980).

[2] Beurling A., *Quasi-analyticity and general distributions*, Lectures 4. and 5. AMS Summer Institute, Stanford (1961).

[3] Björck G., *Linear partial differential operators and generalized distributions* Ark. Mat. **6** (1965), 351-407.

[4] Bonet J., Braun R. W., Meise R., Taylor B.A., *Whitney's extension theorem for non-quasianalytic classes of ultradifferentiable functions*, Studia Math. **99**, 155-184 (1991).

[5] Bonet J., Galbis A., Meise R., *On the range of convolution operators on non-quasianalytic ultradifferentiable functions*, Studia Mathematica, **126 (2)**, (1997)

[6] Bonet J., Meise R., Taylor B. Alan, *Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Roumieu type* Proc. R. Ir. Acad. **89A**, 53-66 (1989).

[7] Bourbaki H., *Algébre commutative*, Paris Hermann 1972.

[8] Braun R. W., *Surjektivität partieller Differentialoperatoren auf Roumieu-Klassen*, Habilitationsschrift, Düsseldorf, 1993.

[9] Braun R. W., Meise R., *Generalized Fourier expansions for zero-solutions of surjective convolution operators on* $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^n)$, Arch. Math. **55** (1990), 55-63.

[10] Braun R. W., Meise R., Taylor B.A., *Characterization of the linear partial differential equations that admit solution operators on gevrey classes*, preprint Jan. 2004

[11] Braun R. W., Meise R., Taylor B.A., *Ultradifferentiable functions and Fourier analysis*, Results in Mathematics Vol. **17** (1990), 206-237.

[12] Braun R. W., Meise R., Vogt D., *Characterization of the linear partial differential operators with constant coefficients which are surjective on non-quasianalytic classes of Roumieu type on* $\mathbb{R}^n$, Math. Nachr. **168**, 19-54 (1994).

[13] Braun R. W., Vogt D., *A sufficient condition for* $\mathrm{proj}^1 \mathcal{X} = 0$, Mich. Math. J. **44** (1997), 149-156.

[14] Cohoon D.K., *Nonexistence of a continuous right inverse for parabolic differential operators* J. Diff. Eq. **6** (1969), 503-511.

[15] Cohoon D.K., *Nonexistence of a continuous right inverse for partial differential operators with constant coefficients*, Math. Scand. **29** (1971), 337-342.

[16] Domański P., Vogt D., *A splitting theorem for the space of smooth functions*, Journal of Functional Analysis, Vol. **153**, No 2, March 10, 1998.

[17] Domański P., Vogt D., *Distributional complexes split for positive dimensions*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Walter de Gruyter Berlin, New York, 2000.

[18] Fischer M., *Der Funktor Proj und die Charakterisierung surjektiver Differentialoperatoren auf* $\mathcal{D}'(\Omega)$, Diplomarbeit, Düsseldorf, 1999.

[19] Greuel G.-M., Pfister G., *A Singular introduction to commutative algebra*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2002

[20] Hansen S., *Das Fundamentalprinzip für Systeme linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten*, Paderborn, Dezember 1982.

[21] Hörmander L., *An introduction to complex analysis in several variables*, North-Holland Publishing Company 1973.

[22] Hörmander L., *On the existence of real analytic solutions of partial differential equations with constant coefficients*, Invent. Math. **21** (1973), 151-183.

[23] Hörmander L., *The analysis of linear partial differential operators I*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983, 1990.

[24] Hörmander L. *The analysis of linear partial differential operators II*, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo 1983

[25] Komatsu, *Ultradistributions I, Structure theorems and a characterization*, J. Fac. Sci. Tokyo, Sect. IA Math. **20** (1973), 25-105.

[26] Langenbruch M., *Surjective partial differential operators on spaces of ultradifferentiable functions of Roumieu Type*, Results in Mathematics, Vol. **29**, (1996)

[27] Meise R., Taylor B.A., *Witney´s extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type*, Arkiv för matematik, Vol. **26** (1988), No 2.

[28] Meise R., Taylor B.A., Vogt D., *Caracterisation des opérateurs linéaires aux dérivées partielles avec coefficients constants sur $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ admettant un inverse à droits qui est linéaire et continu*, C.R. Acad. Sci. Paris **307**, Ser. I (1988), 239-242.

[29] Meise R., Taylor B.A., Vogt D., *Characterization of the linear partial differential operators with constant coefficients that admit a continuous linear right inverse*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **40**, 1 (1990), 619-655.

[30] Meise R., Taylor B.A., Vogt D., *Continuous linear right inverses for partial differential operators on non-quasianalytic classes and on ultradistributions*, Math. Nachr., **180**, 213-242 (1996).

[31] Meise R., Taylor B.A., Vogt D., *Continuous linear right inverses for partial differential operators with constant coefficients and Phragmén-Lindelöf conditions* in 'Functional Analysis', K.D.Bierstedt, A.Pietsch, W.Ruess, D.Vogt (Eds), Marcel Dekker, 357-389 (1993).

[32] Meise R., Taylor B.A., Vogt D., *Equivalence of Analytic and Plurisubharmonic Phragmén-Lindelöf Conditions*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume **52** (1991), Part 3.

[33] Meise R., Taylor B.A., Vogt D., *Partial differential operators with continuous linear right inverse*, Terzioğlu T. (Ed.), NATO ASI Series C **287** (Kluwer) 1989.

[34] Meise R., Taylor B.A., Vogt D., *Phragmén-Lindelöf-principles on algebraic varieties*, J. of the Amer. Math. Soc. **11**, 1-39, (1998).

[35] Meise R., Vogt D., *Einführung in die Funktionalanalysis*, Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1992.

[36] Palamodov V.P., *A Criterion for splitness of differential complexes with constant coefficients, in „Geometrical and Algebraical Aspects in Several Complex Variables"*, C.A.Berenstein and D.C.Struppa (Eds.), EditEL (1991), pp. 265-291.

[37] Palamodov V.P., *Linear differential operators with constant coefficients*, Springer 1970. (Russian edition: Nauka, 1967).

[38] Pietsch A., *Nuclear locally convex spaces*, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1972.

[39] Roesner T., *Surjektivität partieller Differentialoperatoren auf quasianalytischen Roumieu-Klassen*, Inaugural-Dissertation, Düsseldorf, 1997.

[40] Treves F., *Locally convex spaces and linear partial differential equations*, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1967.

[41] Vogt D., *On the solvability of $P(D)f = g$ for vector valued functions* R.I.M.S. Kokyoroku, **508**, 168-182.

[42] Vogt D., *Some results on the continuous linear maps between Fréchet spaces*, 349-381 in *Functional Analysis: Surveys and recent results III*, North Holland Mathematics Studies **90** (1984).

[43] Vogt D., *Splitting of exakt sequences of Fréchet spaces in the absence of continuous norms*, J. Math. Anal. Appl., **297**, (2004), 812-832.

[44] Wengenroth J., *Derived Functors in Functional Analysis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003.

[45] Wengenroth J., *Retractive (LF) spaces*, Dissertation, Trier, 1995.

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Dissertation selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Ratingen, den 27. Januar 2005

Marcus Hermanns

Kurzfassung

Auf einer offenen Menge Ω im $\mathbb{R}^n$ seien wie in Braun, Meise, Taylor [**11**] Räume von ultradifferenzierbaren Funktionen $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ und $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$ und Ultradistributionen $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ und $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega) \supset \mathcal{D}'(\Omega)$ erklärt. Gegeben sei ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten aus s_1 Gleichungen und s variablen Funktionen, das durch eine $s_1 \times s$-Matrix p mit Werten in $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ und $D := i(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ so dargestellt werden kann:

$$p(D)f = g \quad \text{für } f \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s \text{ und } g \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^{s_1}. \tag{122}$$

Hier und im folgenden betrachten wir statt $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ auch $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ oder $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega)$; in jedem Fall soll ω dabei eine nicht quasianalytische Gewichtsfunktion (siehe 1.2) sein.

Wir untersuchen, wann es eine stetige, lineare Abbildung $R : p(D)\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s$ gibt mit

$$p(D)R(g) = g, \quad \text{für alle } g \in p(D)\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)^s.$$

Und zwar gibt es eine solche stetige, lineare Rechtsinverse R genau dann (siehe 1.12 und 1.13), wenn alle Nullstellenmengen $(V(P_\gamma))_{\gamma=1,\ldots,\Gamma}$ der zu p assoziierten Primideale $(P_\gamma)_{\gamma=1,\ldots,\Gamma}$ (siehe 1.5) die Phragmén-Lindelöf-Bedingung $\mathbf{PL}(\mathbf{\Omega}, \omega)$ (siehe 1.7) erfüllen. Im achten Kapitel bestimmen wir für wichtige Fälle diese assoziierten Primideale.

Die oben vorgestellte Charakterisierung der Existenz von stetigen linearen Rechtsinversen wird vom zweiten bis sechten Kapitel (ähnlich wie in Palamodov [**36**]) schrittweise durch äquivalente Bedingungen hergeleitet. Dazu wenden wir den projektiven Funktor, Dualitätstheorie, Fouriertransformation und die Theorie des Noetheroperators aus Hansen [**20**] an.

Die Surjektivität einer Differentialgleichung $p(D) : \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega) \to \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$ ist selbst für konvexes Ω im Gegensatz zum Fall von $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ und $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ im allgemeinen nicht gegeben. Ein Beispiel hierfür liefern die reell analytischen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^n)$ für $\omega(t) := t$ entsprechen. Für ein System wie in (8) untersucht man stattdessen, wann für eine beliebige Gewichtsfunktion ω (siehe 1.2)

$$p(D)\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^s = \mathrm{Kern}(p_1(D) : \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^{s_1} \to \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)^{s_2})$$

gilt, wobei $s_2 \in \mathbb{N}$ und p_1 als $s_2 \times s_1$-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ so gewählt sind, dass

$$p_1^t\, \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]^{s_2} = \mathrm{Kern}(p^t : \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]^{s_1} \to \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]^s).$$

Dies ist genau dann der Fall (siehe 1.15), wenn alle Varietäten $(V(P_\gamma))_{\gamma=1,\ldots,\Gamma}$ die Phragmén-Lindelöf-Bedingung $(\mathbf{PL})_{\{\omega\}}(\mathbf{\Omega})$ (siehe 1.5) erfüllen.

Im siebten Kapitel wird dies mit Hilfe der Theorie des projektiven Funktors und Resultaten aus dem dritten und vierten Kapitel bewiesen.

Die vorliegende Dissertation baut auf Ergebnissen von Braun, Meise, Taylor, Vogt ([**28**], [**29**], [**33**], [**30**], [**12**] und [**8**]), Palamodov [**36**], Hansen [**20**] und Rösner [**39**] auf.