Zur Regularitätstheorie stationärer harmonischer Abbildungen mit freier Randbedingung

I n a u g u r a l - D i s s e r t a t i o n

zur
Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Christoph Scheven

aus Haan

Düsseldorf 2004

Gedruckt mit der Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent: Prof. Dr. K. Steffen
Koreferent: Prof. Dr. W. Singhof
Tag der mündlichen Prüfung: 15. Juli 2004

Einleitung

Einem universellen Prinzip der Physik zufolge strebt nahezu jedes physikalische System einen Zustand minimaler Energie an. Da die in der Natur auftretenden Systeme stets begrenzt sind, ist es für das Verständnis der dort beobachteten Phänomene unerlässlich, das Verhalten am Rand eines Systems in die Überlegungen mit einzubeziehen. Tatsächlich sind die Randwerte demselben Prinzip der Energieminimierung unterworfen, so dass sie sich innerhalb eines vorgegebenen Rahmens frei bewegen werden, bis sie einen energetisch möglichst günstigen Zustand eingenommen haben. Ein besonders leicht zu visualisierendes Beispiel ist ein Seifenfilm, der in einer gebogenen Drahtkonstruktion eingespannt ist. Der Film wird sich frei längs des Drahtes bewegen, bis er den Zustand minimaler Energie, in diesem Fall kleinster Fläche, eingenommen hat. Ein solches Phänomen hat man vor Augen, wenn man sogenannte *freie Randbedingungen* betrachtet. Diese Form der Randwerte sind die natürlichsten Bedingungen, die man bei einem physikalisch oder geometrisch motivierten Minimierungsproblem stellen kann.

Die mathematische Modellierung physikalischer Systeme wie oben erfolgt mithilfe von Abbildungen $u : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$. Die oben angedeutete freie Randbedingung entspricht der Forderung, dass die Randwerte $u(\partial\mathcal{M})$ in einer Untermannigfaltigkeit $\Gamma \subset \mathcal{N}$ liegen. Unter der *Energie* einer solchen Abbildung versteht man das Integral $E(u) := \int_{\mathcal{M}} |Du|^2 d\mu$. Der natürliche Funktionenraum, auf dem dieses Funktional definiert ist, ist der Sobolev-Raum $H^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Daher werden nur Abbildungen u aus diesem Raum in die Betrachtung einbezogen.

In diesem Modell interessiert man sich nun für diejenigen Abbildungen, die die Energie in der Klasse der Abbildungen mit der gleichen Randbedingung $u(\partial\mathcal{M}) \subset \Gamma$ minimieren. Einem Standardverfahren der Variationsrechnung folgend, betrachtet man für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ Variationen $u_t \in H^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ des Energieminimierers $u = u_0$, wobei man für jede Abbildung u_t die besagte freie Randbedingung verlangt. Hierfür gilt dann $\frac{d}{dt}E(u_t)\big|_{t=0} = 0$, falls diese Ableitung existiert. Abbildungen u, die diese Eigenschaft für eine gewisse Klasse von Variationen erfüllen, werden *stationäre harmonische Abbildungen mit freier Randbedingung* genannt. Stationäre harmonische Abbildungen stellen also eine Verallgemeinerung von energieminimierenden Abbildungen dar. Solche allgemeineren Abbildungen sind etwa in der Physik interessant, weil nicht jeder stabile Zustand eines Systems notwendigerweise eine absolute Minimumstelle der Energie darstellt. Es kommen auch lokale Minima vor, bei denen ein System zwar nicht den energetisch günstigsten Zustand annimmt, aber jede Verkleinerung der Energie zunächst einen großen Energieaufwand nötig macht. Durch stationäre harmonische Abbildungen werden auch solche Fälle abgedeckt.

Die Frage, der sich die vorliegende Arbeit widmet, ist die nach der Regularität von stationären harmonischen Abbildungen. Sogar energieminimierende Abbildungen sind im Allgemeinen nicht auf dem gesamten Definitionsbereich stetig. Das einfachste Gegenbeispiel ist die Retraktion $u : B^n \to S^{n-1}$, $u(x) := \frac{x}{|x|}$ für $n \geq 3$ ([Li2]). Daher kann man höchstens noch erwarten, die Größe der Singularitätenmenge beschränken zu können. Im Folgenden wird kurz zusammengefasst, welche Resultate hierzu beim Verfassen dieser Dissertation bereits vorlagen.

Für jede stationäre harmonische Abbildung $u \in H^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ von einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ohne Rand in eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ verschwindet das $(n-2)$-dimensionale Maß der Singularitätenmenge, in Formeln $\mathcal{H}^{n-2}(\mathrm{sing}(u)) = 0$. Hierbei bezeichnet $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Dimension der Ausgangsmannigfaltigkeit $\mathcal{M}$. Dieses Resultat wurde von Schoen und Uhlenbeck in [SU] für Energieminimierer bewiesen und konnte erst mehr als ein Jahrzehnt später von Bethuel in dem Artikel [B] auf den Fall stationärer harmonischer Abbildungen verallgemeinert werden. Beide Arbeiten treffen allerdings keine Aussagen über die Singularitäten in Randpunkten. Unter einer freien Randbedingung wurde die entsprechende Aussage am Rand bisher nur im Spezialfall einer energieminimierenden Abbildung bewiesen, und zwar sowohl in [DS1] als auch mit einer gänzlich anderen Herangehensweise in [HL]. Für allgemeine stationäre harmonische Abbildungen mit freier Randbedingung konnte das Resultat bisher nicht bewiesen werden. Diese Lücke schließt das Theorem 3.1 der vorliegenden Arbeit.

Für energieminimierende Abbildungen lassen sich über das oben beschriebene Regularitätsresultat hinausgehende Eigenschaften zeigen. Die Hausdorff-Dimension der Singularitätenmenge ist nämlich in diesem Fall höchstens $n-3$. Dieser Satz ist im Fall eines leeren Randes in der bereits zitierten Arbeit [SU] von Schoen und Uhlenbeck enthalten, im Fall einer freien Randbedingung wurde der Beweis unabhängig voneinander in [DS2] und [HL] geführt. Für stationäre harmonische Abbildungen erweist sich das Problem als härter. Der Grund hierfür ist die fehlende Kompaktheit in der H^1-Normtopologie von Folgen stationärer harmonischer Abbildungen $u_i \in H^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ mit beschränkter Energie $\sup_i E(u_i) < \infty$. Die Dimensionsabschätzung der Singularitätenmenge einer energieminimierenden Abbildung benutzt nämlich das Dimensionsreduktionsverfahren von Federer und beruht daher wesentlich auf der Existenz von Tangentenabbildungen, die wiederum energieminimierend sind. Für stationäre harmonische Abbildungen kann man aber wegen der fehlenden Kompaktheitseigenschaft im Allgemeinen keine starke Konvergenz gegen die Tangentenabbildungen nachweisen, so dass nach aktuellem Kenntnisstand nicht gewährleistet ist, dass die Tangentenabbildung die Stationarität von der Ausgangsabbildung erbt. Daher ist das Dimensionsreduktionsverfahren im allgemeinen Fall nicht anwendbar. Unter gewissen Einschränkungen an die Zielmannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ lässt sich das Problem aber beheben. Zu diesem Zweck konnte F.H. Lin in [Li] diejenigen Mannigfaltigkeiten $\mathcal{N}$ charakterisieren, für die besagte Kompaktheitseigenschaft stationärer harmonischer Abbildungen aus $H^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ gilt. Es handelt sich nämlich genau um diejenigen Mannigfaltigkeiten, für die keine nichtkonstante, glatte, harmonische Abbildung $S^2 \to \mathcal{N}$ existiert. Mit dieser Voraussetzung an den Bildbereich lässt sich dann für stationäre harmonische Abbildungen u im Fall $\partial\mathcal{M} = \emptyset$ sogar die Dimensionsreduktion $\dim(\mathrm{sing}(u)) \leq n-4$ beweisen. Die im Vergleich zu oben verbesserte Abschätzung resultiert dabei aus der Nichtexistenz nichtkonstanter harmonischer 2-Sphären und war für Energieminimierer in solche spezielle Bildmannigfaltigkeiten ebenfalls aus [SU] bekannt. Im Fall eines freien Randes scheiterte die Dimensionsreduktion bisher schon daran, dass die partielle Regularität $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing}(u)) = 0$ in diesem Fall unbekannt war.

Die vorliegende Arbeit hat es sich zur Aufgabe gemacht, die Regularitätstheorie stationärer harmonischer Abbildungen mit freier Randbedingung, die bisher kaum entwickelt war, auf denselben Stand zu bringen, der im Fall eines leeren Randes bereits erreicht war. Das gesteckte Ziel konnte tatsächlich mit den Theoremen 3.1 und 5.5 vollständig erreicht werden. Das wesentliche Argument für den Beweis des erstgenannten Theorems ist eine Spiegelungskonstruktion. Dazu kann man sich zunächst durch Lokalisieren auf den Fall beschränken, dass die stationäre harmonische Abbildung u auf einer Halbkugel $B_1^+ \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert ist und auf dem Randabschnitt $B_1^{n-1} \times \{0\}$ eine freie Randbedingung erfüllt. Diese Abbildung möchte man nun durch geodätische Spiegelung an der Untermannigfaltigkeit $\Gamma \subset \mathcal{N}$, die die Randwerte trägt, zu einer Abbildung der Vollkugel fortsetzen, so dass man eine mit dem inneren Fall vergleichbare Situation vorliegen hat. Das grundlegende Problem hierbei ist, dass die Funktionswerte der Abbildung u von vornherein nicht in der Nähe der Stützmannigfaltigkeit Γ liegen müssen. Ist aber ein Funktionswert sehr weit von dieser entfernt, so wird es im Allgemeinen nicht möglich sein, zu diesem in sinnvoller Weise einen nächsten Punkt auf Γ zu definieren. Somit wäre die geodätische Spiegelung der Funktionswerte nicht möglich. Ein Schlüsselergebnis dieser Arbeit ist daher der bisher unbekannte Satz 2.1, der unter der Voraussetzung von hinreichend kleiner Energie sicherstellt, dass die Werte von u wie gewünscht in einer kleinen Umgebung von Γ liegen. Diese Tatsache macht mit der Spiegelungskonstruktion einen neuen und sehr natürlichen Zugang zu dem Problem einer freien Randbedingung möglich. Tatsächlich lässt sich mit Kenntnis dieses Ergebnisses im Fall eines Energieminimierers auch der bereits genannte Beweis aus [DS1] wesentlich kürzer und durchsichtiger fassen.

Da die geodätische Spiegelung an der Stützmannigfaltigkeit Γ im Allgemeinen keine Isometrie ist, ist es nicht sinnvoll, für die gespiegelten Funktionswerte die gegebene Metrik auf $\mathcal{N}$ zugrundezulegen. Um die vorhandene Struktur der stationären harmonischen Abbildung auszunutzen, wird stattdessen die durch die Spiegelungsabbildung transportierte Metrik verwendet. Es werden also auf der oberen und auf der unteren Halbkugel unterschiedliche Metriken betrachtet. Anders aufgefasst misst man auf dem Tangentialraum $\mathrm{T}_{u(x)}\mathcal{N}$ mit einem von $x \in B_1$ abhängigen Skalarprodukt $h(x)$, was einer H^1-Metrik h auf $u^* \mathrm{T}\mathcal{N}$ entspricht. Unter Ausnutzung der Symmetrie der durch Spiegelung fortgesetzten Abbildung u leitet man für diese eine Differentialgleichung der folgenden Form her.

$$\int_{B_1} Du \cdot_h \nabla^h V d\mu = 0 \tag{$*$}$$

für alle längs u tangentialen Vektorfelder $V \in L^\infty \cap H^1(B_1, \mathrm{T}\mathcal{N})$ mit kompaktem Träger in B_1. Hierbei sind das Skalarprodukt $' \cdot_h '$ und der Zusammenhang ∇^h durch das Skalarproduktfeld h induziert. Für Einzelheiten vergleiche man Abschnitt 2.2. Die obige Differentialgleichung hat eine ähnliche Struktur wie die Differentialgleichung für Harmonizität (1.10).

Die weitere Vorgehensweise besteht nun in der Anpassung des tiefliegenden Beweises aus [B] auf die allgemeinere Differentialgleichung ($*$). Es zeigt sich, dass sich dies in großer Allgemeinheit für H^1-Skalarproduktfelder h wie oben bewerkstelligen lässt. Der erste Schritt hierfür ist die Konstruktion eines geeigneten Bezugssystems $e_i(x) \in \mathrm{T}_{u(x)}\mathcal{N}$ für $1 \leq i \leq \dim \mathcal{N}$. Dies erreicht man durch Minimieren des Funktionals $\sum_i \int |\nabla^h e_i|_h^2 d\mathcal{L}^n$, wobei der Zusammenhang ∇^h und das Skalarproduktfeld h wie in der besagten Differentialgleichung gegeben sind. Die Eulergleichung dieses Minimierers, die $\mathrm{div}(\nabla^h e_i \cdot_h e_j) \equiv 0$ für $1 \leq i, j \leq \dim \mathcal{N}$ lautet, geht an wesentlicher Stelle in den Beweis ein, um zu zeigen, dass gewisse kritische Terme im Hardy-Raum $\mathcal{H}_a(\mathbb{R}^n)$ liegen. Der Übergang zu Basisvektorfeldern, die diese Eulergleichung erfüllen, entspricht einer Coulomb-Eichung des Zusammenhanges ∇^h. In Verbindung mit harmonischen Abbildungen wurde dieses Verfahren erstmals in [H] benutzt.

Der verbleibende, tiefliegenste Teil des Beweises des partiellen Regularitätssatzes benutzt eine Hodge-de Rham-Zerlegung und die Hardy-BMO-Ungleichung, die eine Konsequenz der berühmten Dualität des Hardy-Raumes und des Raumes BMO nach Fefferman und Stein ist. Der Raum BMO kommt hier ins Spiel, weil jede stationäre harmonische Abbildung $u \in H^1(B_1^+, \mathcal{N})$ mit freier Randbedingung auf $B_1^{n-1} \times \{0\}$ eine lokale BMO-Bedingung der Form

$$\sup_{x \in B_{1/2}^+,\ 0<\rho<1/2} \fint_{B_\rho^+(x)} |u - u_{\rho,x}| d\mathcal{L}^n < \infty$$

erfüllt, wobei $u_{\rho,x} := \fint_{B_\rho^+(x)} u \, d\mathcal{L}^n$ gesetzt ist. Diese Eigenschaft ist eine Folgerung aus der Energiemonotonie von stationären harmonischen Abbildungen (vgl. Satz 1.10).

Um das angesprochene Verfahren zur Dimensionsreduktion der Singularitätenmenge am freien Rand durchführen zu können, muss man zunächst das Problem der Kompaktheit von Folgen stationärer harmonischer Abbildungen $u_i \in H^1(B_1^+, \mathcal{N})$ mit freier Randbedingung $u_i(B_1^{n-1} \times \{0\}) \subset \Gamma$ und beschränkter Energie $\sup_i E(u_i) < \infty$ lösen. Im inneren Fall wurde dies von F.H. Lin in [Li] erreicht, falls die Zielmannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ keine nichtkonstanten harmonischen S^2 trägt. Im Fall einer freien Randbedingung muss man zusätzlich zu dieser Bedingung noch voraussetzen, dass $\mathcal{N}$ keine nichtkonstanten harmonischen Halbsphären $v : S_+^2 \to \mathcal{N}$ mit freier Randbedingung $v(\partial S_+^2) \subset \Gamma$ zulässt. Innerhalb dieser Einleitung sei der Einfachheit halber angenommen, dass für jede der Abbildungen u_i die Euklidische Metrik zugrundegelegt ist. Mithilfe des oben diskutierten partiellen Regularitätssatzes lässt sich herleiten, dass diejenigen Punkte des Definitionsbereiches, an denen keine Konvergenz in der H^1-Norm gegeben ist, genau die der *Energiekonzentrationsmenge*

$$\left\{ x \in B_1^+ : \liminf_{\rho \searrow 0} \liminf_{i \to \infty} \rho^{2-n} \int_{B_\rho^+(x)} |Du_i|^2 d\mathcal{L}^n \geq \varepsilon_0 \right\}$$

sind, falls $\varepsilon_0 > 0$ hinreichend klein gewählt ist. Zur Analyse dieser Menge lassen sich Ergebnisse der geometrischen Maßtheorie anwenden. Hierzu beobachtet man, dass für eine Grenzabbildung $u \in H^1(B_1^+, \mathcal{N})$ die Konvergenz $u_i \to u$ in der H^1-Norm äquivalent mit der Maßkonvergenz $\mathcal{L}^n \llcorner |Du_i|^2 \rightharpoonup \mathcal{L}^n \llcorner |Du|^2$ bei $i \to \infty$ ist. Hierbei sind mit der Schreibweise $\mathcal{L}^n \llcorner |Du_i|^2$ die mit den Energiedichten $|Du_i|^2$ gewichteten Lebesgue-Maße gemeint. Falls die Konvergenz in H^1 nicht gilt, besitzt das Grenzmaß $\mu := \text{w-lim}_{i\to\infty} \mathcal{L}^n \llcorner |Du_i|^2$ einen singulären Anteil ν, der nicht zum Lebesgue-Maß absolutstetig ist. Der Träger dieses sogenannten *Defektmaßes* ν ist die Energiekonzentrationsmenge. Zur Analyse Letzterer kann man sich daher auf die Untersuchung des Maßes

μ beschränken, in dem alle Informationen über diese Menge kodiert sind. Falls dieses Maß einen singulären Anteil besitzt, sichert ein allgemeiner maßtheoretischer Satz die Existenz eines $(n-2)$-flachen Tangentenmaßes der Form $C\mathcal{H}^{n-2} \llcorner V$ mit einem $(n-2)$-dimensionalen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$ und einer Konstanten $0 < C < \infty$. Dies entspricht dem Fall, dass die Energiekonzentrationsmenge ein linearer Unterraum ist. Existiert also eine Folge stationärer harmonischer Abbildungen mit freier Randbedingung, deren Energiekonzentrationsmenge nichttrivial ist, so gibt es auch eine Folge $u_i \in H^1(B_1^+, \mathcal{N})$ solcher Abbildungen, für die diese Menge dem Unterraum $\mathbb{R}^{n-2} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ entspricht. Einer ausgefeilten Konstruktion aus [Li] folgend, bläst man die Abbildungen u_i um Punkte p_i aus der Nähe der Energiekonzentrationsmenge $\mathbb{R}^{n-2} \times \{0\}$ auf und geht zum Grenzwert $i \to \infty$ über. Dabei ist große Sorgfalt geboten, da zu große Nähe der Punkte p_i zur Energiekonzentrationsmenge die Energie der skalierten Abbildungen zu groß werden lässt, so dass sich keine Konvergenz einstellt, und auf der anderen Seite eine zu große Entfernung von besagter Menge die Energie in der Grenze verschwinden lässt, was in einer konstanten Grenzabbildung resultiert. Stellt man aber alle Parameter richtig ein, so erhält man entweder eine harmonische Abbildung $\hat{v} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{N}$ oder eine harmonische Abbildung $\hat{v} : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathcal{N}$ mit freier Randbedingung $\hat{v}(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \subset \Gamma$, und in beiden Fällen ist die Grenzabbildung nichtkonstant und von endlicher Energie. Mithilfe der linearen Struktur der Energiekonzentrationsmenge $\mathbb{R}^{n-2} \times \{0\}$ lässt sich bei sorgfältiger Konstruktion außerdem erreichen, dass die Abbildung $\hat{v}$ längs dieses Unterraumes konstant ist. Daher liefert $\hat{v}$ entweder eine nichtkonstante harmonische Abbildung $v : S^2 \to \mathcal{N}$ oder eine nichtkonstante harmonische Abbildung $v : S^2_+ \to \mathcal{N}$ mit freier Randbedingung $v(\partial S^2_+) \subset \Gamma$. Beides widerspricht den erwähnten Voraussetzungen an die Bildmannigfaltigkeit $\mathcal{N}$. Für solche Mannigfaltigkeiten müssen daher alle Energiekonzentrationsmengen trivial sein, so dass alle der eingangs beschriebenen Folgen eine in H^1 konvergente Teilfolge besitzen.

Diese Kompaktheitseigenschaft ermöglicht die Anwendung des bekannten Dimensionsreduktionsverfahrens von Federer auf die Singularitätenmenge am freien Rand, falls die Zielmannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ keine nichttrivialen harmonischen 2-Sphären oder 2-Halbsphären mit freier Randbedingung trägt. In diesem Fall ist die Dimension der Singularitätenmenge einer stationären harmonischen Abbildung mit freier Randbedingung höchstens $n-4$. Falls darüber hinaus auch keine höherdimensionalen nichtkonstanten harmonischen Sphären oder Halbsphären mit freier Randbedingung existieren, lässt sich diese Abschätzung noch verbessern. Beispiele für Mannigfaltigkeiten, auf denen solche Sphären und Halbsphären nicht existieren, werden in Abschnitt 5.3 gegeben.

Alle bisher am freien Rand diskutierten Fragen lassen sich auch unter anderen Randbedingungen stellen. Die am häufigsten betrachteten Randwerte, die allerdings aus geometrischer Sicht weniger natürlich sind als die freien Randwerte, werden *feste* oder *Dirichlet-Randwerte* genannt. Dabei verlangt man für eine vorgegebene Randabbildung $g \in C^2(\partial\mathcal{M}, \mathcal{N})$, dass die stationäre harmonische Abbildung u auf dem Rand mit dieser übereinstimmt, dass also $u|_{\partial\mathcal{M}} = g|_{\partial\mathcal{M}}$ gilt. Zwischen freien und festen Randwerten kann man sich aber noch ein breites Spektrum allgemeinerer Randbedingungen vorstellen, bei denen für jedes $x \in \partial\mathcal{M}$ eine Stützmannigfaltigkeit $\Gamma(x) \subset \mathcal{N}$ gegeben ist und man $u(x) \in \Gamma(x)$ für $x \in \partial\mathcal{M}$ verlangt. Solche Randwerte enthalten im Fall von einpunktigen Mannigfaltigkeiten $\Gamma(x) = \{g(x)\}$ die Dirichlet-Randwerte und in dem Fall, dass $\Gamma(x)$ vom Parameter x unabhängig ist, die freien Randbedingungen. Durch Analyse dieser größeren Klasse von Randproblemen erhält man unter anderem einheitliche Beweise für freie und für Dirichlet-Randwerte, die bisher immer getrennt voneinander abgehandelt werden mussten. Darüber hinaus konnte für stationäre harmonische Abbildungen mit Dirichlet-Randwerten ein neues Resultat zur vollen Randregularität solcher Abbildungen formuliert werden.

Bei stationären harmonischen Abbildungen mit allgemeinen Randwerten wie oben ist es vor allem problematisch, eine Energiemonotonieformel herzuleiten, wie sie am freien Rand gilt. Eine solche Formel geht an zentralen Punkten in alle Beweise der vorliegenden Arbeit ein. Tatsächlich ist für wie üblich definierte stationäre harmonische Abbildungen mit Dirichlet-Randwerten keine Energiemonotonie bekannt. Dies ist darin begründet, dass bei der Definition solcher Abbildungen nur Variationen als zulässig erklärt werden, die kompakten Träger im Inneren des Definitionsbereiches besitzen. Ausgehend von dieser gängigen Definition kann man nur wenige Aussagen über das Randverhalten der Abbildung erwarten, weshalb diese Begriffsbildung nicht sehr sinnvoll erscheint. Die vorliegende Arbeit wählt eine natürlichere Herangehensweise und lässt für stationäre harmonische Abbildungen mit fester oder allgemeiner Randbedingung eine größere Klasse von Variationen zu. Dieser Schritt wird auch dadurch legitimiert, dass alle diese Variationen für Abbildungen zulässig sind, die das Energiefunktional in der Klasse von Abbildungen der gleichen Randbedingung minimieren, also für Abbildungen, die den Prototypen für stationäre harmonische Abbildungen darstellen. Mit dem derart gefassten Begriff von allgemeinen Randbedingungen im Zusammenhang mit stationären harmonischen Abbildungen ist es dann in Satz 6.9 möglich, für solche eine Energiemonotonieformel herzuleiten. Ist diese erst einmal bewiesen, lassen sich alle am freien Rand durchgeführten Argumente relativ problemlos verallgemeinern. So konnten alle bei freier Randbedingung erzielten Resultate auf den allgemeinen Randfall $u(x) \in \Gamma(x)$ für $x \in \partial\mathcal{M}$ erweitert werden.

Von besonderem Interesse hierbei sind die Dirichlet-Randbedingungen. Es stellt sich heraus, dass sich für im obigen Sinne stationäre harmonische Abbildungen mit Dirichlet-Randwerten stärkere Aussagen treffen lassen, als dies unter einer freien Randbedingung möglich ist. Der Grund hierfür ist, dass es auf keiner Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ nichtkonstante harmonische Halbsphären $v : S^l_+ \to \mathcal{N}$ für $l \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gibt, für die $v|_{\partial S^l_+}$ konstant ist. Solche Halbsphären übernehmen hier die Rolle der harmonischen Halbsphären mit freier Randbedingung, die man am freien Rand ausschließen musste, um höhere Regularität zu garantieren. Da sie hier von Natur aus nicht existieren, kann man im Fall von Dirichlet-Randbedingungen in einer sehr allgemeinen Situation starke Regularitätsaussagen herleiten. Genauer ist jede stationäre harmonische Abbildung mit Dirichlet-Randwerten in einer vollen Randumgebung glatt, wenn nur die Zielmannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ keine nichtkonstanten harmonischen S^2 trägt, man vergleiche Theorem 6.27. Ein ähnliches Resultat war bisher nur für den Spezialfall von Energieminimierern aus [SU2] bekannt.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert.

Das erste Kapitel stellt bekannte Eigenschaften von stationären harmonischen Abbildungen zusammen.

Im zweiten Kapitel wird das oben erwähnte Schlüsselergebnis dieser Arbeit bewiesen, das die Fortsetzung einer stationären harmonischen Abbildung durch geodätische Spiegelung ermöglicht. Diese Konstruktion und die resultierende Differentialgleichung $(*)$ für die fortgesetzte Abbildung werden hier ausführlich erläutert.

Mit der Vorarbeit des vorangehenden Kapitels ist es im dritten Kapitel möglich, das partielle Regularitätsresultat $\mathcal{H}^{n-2}(\operatorname{sing}(u)) = 0$ für stationäre harmonische Abbildungen u mit freier Randbedingung zu beweisen, indem die Methoden aus [B] auf eine sehr viel größere Klasse von Problemen verallgemeinert werden.

Das vierte Kapitel widmet sich dem Beweis eines Kompaktheitssatzes für Folgen stationärer harmonischer Abbildungen mit freier Randbedingung in spezielle Zielmannigfaltigkeiten.

Im folgenden fünften Kapitel wird dieses Resultat genutzt, um mithilfe des Dimensionsreduktionsverfahrens von Federer optimale Dimensionsabschätzungen für die Singularitätenmenge der Abbildungen aus Kapitel vier zu erhalten.

Das sechste und letzte Kapitel behandelt schließlich alle am freien Rand betrachteten Themen unter allgemeineren Randbedingungen und vereinheitlicht so die Theorie von freien und von Dirichlet-Randbedingungen. Für stationäre harmonische Abbildungen mit letzteren Randwerten wird außerdem das angesprochene Ergebnis zur vollen Randregularität hergeleitet.

Die wichtigsten in dieser Arbeit benutzten Notationen sind zur Verbesserung der Lesbarkeit in einem Symbolverzeichnis zusammengestellt.

Mein herzlicher Dank gilt meinem Lehrer Prof. Dr. Klaus Steffen sowohl für viele anregende Gespräche, die ich als sehr hilfreich empfunden habe, als auch für das intensive Studium des Manuskriptes, womit er ebenso sein Interesse für meine Arbeit bekundete. Die ihm eigene Begeisterung für Mathematik hat mein Studium vom ersten Tag an entscheidend geprägt.

Darüber hinaus danke ich der Düsseldorf Entrepreneurs Foundation für die Ermöglichung eines einjährigen Auslandsaufenthaltes, der mich in fachlicher, aber auch in persönlicher Hinsicht sehr vorangebracht hat. In diesem Zusammenhang bedanke ich mich ebenso bei dem Courant Institute of Mathematical Sciences in New York, insbesondere bei Prof. Fanghua Lin, für die mir erwiesene Gastfreundschaft im Rahmen der Anfertigung dieser Dissertation. Die dort verbrachte Zeit wird mir immer in unvergesslicher Erinnerung bleiben.

Mein tiefer Dank gilt meinen Eltern für die Liebe und Unterstützung, die sie mir in meinem Leben zuteil werden ließen und ohne die diese Dissertation nicht entstanden wäre.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung in die Theorie harmonischer Abbildungen

1.1 Das Energiefunktional

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Abbildungen $u : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$. Dabei ist $\mathcal{M}$ eine glatte, kompakte Mannigfaltigkeit mit nichtleerem Rand der Dimension $n \geq 2$ und $\mathcal{N}$ eine glatte, kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand. Da die in dieser Arbeit bewiesenen Regularitätsaussagen von u lokale Eigenschaften sind, kann man sich auf die Betrachtung eines Kartenbereiches von $\mathcal{M}$ beschränken, also annehmen, dass u auf einem glatten, beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ definiert ist. Damit ist hier und in der gesamten Arbeit gemeint, dass Ω bezüglich der Relativtopologie von $\mathbb{R}^n_+$ offen ist, so dass die Menge $\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ im Allgemeinen nicht leer ist. Weiter werden im Folgenden die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n_+ &:= \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_n \geq 0\}, \\ B_r^+(x) &:= \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r,\ y_n \geq 0\} \end{aligned}$$

benutzt und auch $B_r^+ := B_r^+(0)$ sowie $B_r^{n+}(x) := B_r^+(x)$ notiert.
Auf $\mathcal{N}$ kann man nicht wie auf $\mathcal{M}$ lokalisieren, da die betrachteten Abbildungen nicht von vorneherein stetig sind, also ihr Bild nicht in einem Kartenbereich liegen muss. Der Einfachheit halber kann man aber annehmen, dass $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ ist und dass die Metrik auf $\mathcal{N}$ der von der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^N$ induzierten Metrik entspricht. Diese Annahme ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, weil laut dem Einbettungssatz von Nash eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit immer isometrisch in einen Euklidischen Raum eingebettet werden kann.
Auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ werden für $0 < \alpha < 1$ Riemannsche Metriken $\gamma \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^{n*})$ betrachtet, die mit Konstanten $G \geq 1$ und $G' \geq 0$ die folgenden Eigenschaften erfüllen:

$$\|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq G' \quad \text{sowie} \tag{1.1}$$

$$G^{-2}|\xi|^2 \leq \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \gamma_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta \leq G^2|\xi|^2 \tag{1.2}$$

für alle $x \in \overline{\Omega}$ und $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$. Diese Voraussetzungen sind wegen der Kompaktheit von $\overline{\Omega}$ für jede $C^{1,\alpha}$-Metrik mit geeigneten Konstanten $G \geq 1$ und $G' \geq 0$ erfüllt. Es stellt sich heraus, dass es sinnvoll ist, eine Voraussetzung an die Struktur von γ am Rand zu stellen. Man kann von der Riemannschen Metrik fordern, dass

$$\gamma_{in} \equiv 0 \quad \text{auf } \overline{\Omega} \cap \partial\mathbb{R}^n_+ \text{ für alle } 1 \leq i \leq n-1 \tag{1.3}$$

gilt, denn eine hinreichend kleine Randumgebung auf einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ lässt sich immer so parametrisieren, dass die Koordinatenlinien orthogonal auf $\partial\mathcal{M}$ auftreffen. Allerdings muss man auf $\mathcal{M}$ eine $C^{2,\alpha}$-Metrik voraussetzen, damit γ in solchen Koordinaten von der Klasse $C^{1,\alpha}$ ist. Die Eigenschaft (1.3) von γ wird hauptsächlich für das Spiegelungsargument in Abschnitt 2.2 benutzt, erleichtert aber auch die Notation bei der Betrachtung von Halbellipsoiden wie in Abschnitt 1.3. Die Menge von Metriken wie oben wird in dieser Arbeit mit

$$\mathfrak{M}_G := \mathfrak{M}_G(\Omega) := \{\gamma \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^{n*}) : \gamma \text{ erfüllt (1.1) bis (1.3)}\}$$

notiert. Diese Menge hängt natürlich auch von der Wahl der Konstanten $G' \geq 0$ ab, aber zur besseren Lesbarkeit wird das Subskript G' unterdrückt. Die Menge der Metriken aus $\mathfrak{M}_G$, die außerdem noch für $l \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $0 < \alpha \leq 1$ in der Klasse $C^{l,\alpha}$ liegen, wird mit $\mathfrak{M}^{l,\alpha}_G$ bezeichnet.

Das von einer Riemannschen Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(\Omega)$ induzierte *Riemannsche Maß* auf Ω ist

$$\mu_\gamma := \mathcal{L}^n \llcorner \sqrt{\gamma} \quad \text{mit } \sqrt{\gamma(x)} := \sqrt{\det(\gamma_{\alpha\beta}(x))} \text{ für } x \in \Omega,$$

wobei $\mathcal{L}^n$ das n-dimensionale Lebesgue-Maß ist und allgemein für ein Borel-Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ und eine Borel-messbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ das gewichtete Maß $\mu \llcorner f$ definiert ist als

$$\mu \llcorner f(A) := \int_A f d\mu \quad \text{für alle Borelmengen } A \subset \mathbb{R}^n.$$

Ist $f = \mathbb{1}_B$ die charakteristische Funktion einer Borelmenge $B \subset \mathbb{R}^n$, so schreibt man auch

$$\mu \llcorner B(A) := \mu \llcorner \mathbb{1}_B(A) = \mu(B \cap A).$$

Die Bedingung (1.2) liefert

$$G^{-n}\mathcal{L}^n \leq \mu_\gamma \leq G^n \mathcal{L}^n,$$

in diesem Sinne ist das Riemannsche Maß zum Lebesgue-Maß äquivalent.

Als punktweise Norm der totalen Ableitung $Du(x) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ einer Abbildung $u : \Omega \to \mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$ im Punkt $x \in \Omega$ benutzt man die *Hilbert-Schmidt-Norm*, die definiert ist durch $|L|^2_{\gamma(x)} := \mathrm{Spur}(L^*L)$ für alle $L \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$. Die Adjungierte L^* ist dabei bezüglich des Skalarproduktes $\gamma(x)$ auf $\mathbb{R}^n$ und des Euklidischen Skalarproduktes $'\cdot'$ auf $\mathbb{R}^N$ zu bilden. Das bedeutet mit der Standardbasis $(e_\alpha)_{1\leq\alpha\leq n}$ von $\mathbb{R}^n$

$$|L|^2_{\gamma(x)} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \gamma^{\alpha\beta}(x) L(e_\alpha) \cdot L(e_\beta),$$

wobei $(\gamma^{\alpha\beta}(x))_{\alpha,\beta}$ die inverse Matrix zur Koeffizientenmatrix $(\gamma_{\alpha\beta}(x))_{\alpha,\beta}$ der Riemannschen Metrik bezeichne. Das zugehörige *Hilbert-Schmidt-Skalarprodukt* ist analog für $K, L \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ definiert als

$$K \cdot_{\gamma(x)} L := \mathrm{Spur}(K^*L) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \gamma^{\alpha\beta}(x) K(e_\alpha) \cdot L(e_\beta).$$

Ist γ die Euklidische Metrik auf Ω, so werden die Subskripte γ auch weggelassen. Bedingung (1.2) stellt sicher, dass die Normen $|\cdot|_{\gamma(x)}$ und $|\cdot|$ äquivalent sind im Sinne von

$$G^{-1}|L| \leq |L|_{\gamma(x)} \leq G|L| \quad \text{für alle } L \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N).$$

Mit diesen Definitionen kann man nun das *Energiefunktional* einführen, das der Begriffsbildung der harmonischen Abbildungen zugrundeliegt. Es ist definiert als

$$E(u) := E_\gamma(u) := \int_\Omega |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \quad \text{für } u \in H^1(\Omega, \mathcal{N}). \tag{1.4}$$

Die Koordinatendarstellung des Energieintegrals ist

$$E_\gamma(u) = \int_\Omega \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha u \cdot \partial_\beta u \sqrt{\gamma} d\mathcal{L}^n.$$

Der Funktionenraum, auf dem die Energie definiert und endlich ist, ist der Sobolevraum

$$H^1(\Omega, \mathcal{N}) := \{u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^N) : u(x) \in \mathcal{N} \text{ für } \mathcal{L}^n\text{-fast alle } x \in \Omega\}.$$

Daher werden im Folgenden nur noch Abbildungen $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ betrachtet.

1.2 Harmonische Abbildungen mit freier Randbedingung

Man interessiert sich für Minimierer des Energiefunktionals oder allgemeiner für Abbildungen $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$, die im Sinne der Variationsrechnung stationär bezüglich des Energieintegrals sind. Das bedeutet

$$\frac{d}{dt} E_\gamma(u_t)\bigg|_{t=0} = 0 \tag{1.5}$$

für eine gewisse Klasse von Variationen u_t von u, die $u_0 = u$ erfüllen. Dies führt auf den Begriff der *harmonischen Abbildungen.* Minimiert man E unter allen Abbildungen mit einer *freien Randbedingung* $u(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$ für eine Untermannigfaltigkeit $\Gamma \subset \mathcal{N}$, so ist für die Minimierer u die Gleichung (1.5) mit Variationen u_t erfüllt, die dieselbe Randbedingung erfüllen. Dabei ist die Bedingung $u(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$ im Sinne der Spur $\mathcal{H}^{n-1}$-fast überall zu verstehen, wenn $\mathcal{H}^m$ für $m \in \mathbb{N}$ das m-dimensionale Hausdorff-Maß bezeichnet. Obige Überlegung führt zur folgenden

Definition 1.1 (Schwach harmonische Abbildung mit freier Randbedingung). *Sei $\Gamma \subset \mathcal{N}$ eine Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ ein Gebiet mit einer Riemannschen Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(\Omega)$. Eine Abbildung $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ heißt bezüglich der Metrik γ* schwach harmonisch zur freien Randbedingung *$u(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$, wenn die Gleichung (1.5) für alle C^1-Variationen $u_t \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ mit den folgenden Eigenschaften erfüllt ist. Es gelte $u_0 = u$, es gebe eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ mit $u_t|_{\Omega\setminus K} = u|_{\Omega\setminus K}$ für alle t und es gelte die Randbedingung $u_t(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$. Außerdem gebe es $W \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ und eine Konstante C mit*

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} Du_t(x)\right| \leq W(x) \quad \textit{für alle } x \in \Omega,\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \tag{1.6}$$

$$\textit{und} \quad \left|\frac{\partial u_t}{\partial t}\right| \leq C \quad \textit{für alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon). \tag{1.7}$$

Bemerkung 1.2. Die Forderungen (1.6) und (1.7) sind dadurch motiviert, dass für Variationen u_t wie in obiger Definition und $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$ gilt

$$\frac{d}{dt}E(u_t) \quad = \quad 2\int_\Omega Du \cdot_\gamma \frac{\partial}{\partial t} Du_t \, d\mu_\gamma = 2\int_\Omega Du \cdot_\gamma D\frac{\partial u_t}{\partial t}\, d\mu_\gamma, \tag{1.8}$$

also lautet (1.5) mit dem Variationsvektorfeld $V := \frac{\partial u_t}{\partial t}\big|_{t=0}$

$$\int_\Omega Du \cdot_\gamma DV d\mu_\gamma = 0.$$

In dem Fall, dass u glatt ist, ist die Gültigkeit dieser Gleichung für alle hier erfassten Vektorfelder V äquivalent zur Harmonizität von u.
Die beiden Bedingungen (1.6) und (1.7) sind aber doch sehr einschränkend. In der Tat stellte es sich heraus, dass die Begriffsbildung der schwach harmonischen Abbildung zumindest vom Standpunkt der Regularitätstheorie die falsche ist. Denn in [R] konstruierte Rivière eine schwach harmonische Abbildung $B^3 \to S^2$, die überall unstetig ist. Folglich kann man außer im Fall $n = 2$ keinerlei Regularitätsaussagen für schwach harmonische Abbildungen machen. Der nahe liegende Ausweg ist, eine größere Klasse von Variationen zuzulassen, wie es weiter unten bei der Definition der stationären harmonischen Abbildungen getan wird.

Zum Nachweis der schwachen Harmonizität benutzt man meist nicht obige Definition, sondern das folgende Kriterium.

Lemma 1.3 (Differentialgleichung für Harmonizität bei freier Randbedingung). *Sei $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$ eine kompakte, isometrisch eingebettete Untermannigfaltigkeit sowie $\Gamma \subset \mathcal{N}$ eine Untermannigfaltigkeit hiervon. Eine Abbildung $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ ist genau dann schwach harmonisch zur freien Randbedingung $u(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$, wenn die Differentialgleichung*

$$\int_\Omega Du \cdot_\gamma DV d\mu_\gamma = 0 \tag{1.9}$$

für alle längs u tangentialen Vektorfelder $V \in L^\infty \cap H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit kompaktem Träger in Ω gilt, die die Randbedingung $V(x) \in \mathrm{T}_{u(x)}\Gamma$ für $\mathcal{L}^{n-1}$-fast alle $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ erfüllen. Die Formulierung 'längs u tangential' bedeutet dabei $V(x) \in \mathrm{T}_{u(x)}\mathcal{N}$ für $\mathcal{L}^n$-fast alle $x \in \Omega$. Wenn man V statt als ein $\mathbb{R}^N$-wertiges Vektorfeld als einen Schnitt in $u^*\mathrm{T}\mathcal{N}$ auffasst, bedeutet obige Gleichung

$$\int_\Omega Du \cdot_\gamma \nabla^{\mathcal{N}} V d\mu_\gamma = 0, \tag{1.10}$$

wobei $\nabla^{\mathcal{N}}$ der Levi-Civita-Zusammenhang auf $\mathcal{N}$ ist.

Beweis. Sei zunächst $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ eine Abbildung, die die Differentialgleichung (1.9) für alle Testvektorfelder V wie im Lemma erfüllt und u_t eine Variation wie in Definition 1.1. Das zugehörige Variationsvektorfeld $V := \frac{\partial u_t}{\partial t}\big|_{t=0}$ erfüllt die Voraussetzungen aus dem Lemma. Mit der Rechnung (1.8) folgt $\frac{d}{dt}E_\gamma(u_t)\big|_{t=0} = 0$, also ist u schwach harmonisch. Sei umgekehrt eine zur freien Randbedingung schwach harmonische Abbildung $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ gegeben sowie ein Vektorfeld V wie im Lemma. Sei $\pi_\mathcal{N}$ die auf einer Umgebung von $\mathcal{N}$ in $\mathbb{R}^N$ definierte nächste-Punkt-Retraktion auf $\mathcal{N}$. Die Variation $\tilde{u}_t := \pi_\mathcal{N}(u + tV)$ erfüllt alle Voraussetzungen aus Definition 1.1 für

$W := C(|Du|+|DV|)|V|+C|DV|$ mit Ausnahme der Randbedingung. Gesucht sind nun Vektorfelder $U_t \in L^\infty \cap H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit $\frac{\partial U_t}{\partial t}\big|_{t=0} \equiv 0 \equiv U_0$, für die $u_t := \pi_{\mathcal{N}}(u+tV+U_t)$ alle Anforderungen aus Definition 1.1 erfüllt. Zur Konstruktion dieser Vektorfelder sei Γ_δ die δ-Umgebung von Γ in $\mathbb{R}^N$ und für hinreichend kleines $\delta > 0$ sei $\pi_\Gamma : \Gamma_\delta \to \Gamma$ die nächste-Punkt-Retraktion. Mit der Notation $\pi_\Gamma^\perp := \pi_\Gamma - \mathrm{id}$ zerlegt man nun auf $u^{-1}(\Gamma_\delta)$

$$\begin{aligned} u &= u^\top + u^\perp := \pi_\Gamma \circ u - \pi_\Gamma^\perp \circ u \\ \text{sowie} \quad V &= V^\top + V^\perp := (D\pi_\Gamma \circ u)V - (D\pi_\Gamma^\perp \circ u)V. \end{aligned}$$

Aufgrund der Randbedingungen von u und V besitzt diese Zerlegung in allen Randpunkten $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ die Eigenschaften $u^\perp(x) = 0 = V^\perp(x)$. Mit einer Abschneidefunktion $\zeta \in C^\infty_{kpt}(\Gamma_\delta, [0,1])$, die $\zeta \equiv 1$ auf $\Gamma_{\delta/2}$ erfüllt, setzt man nun

$$U_t(x) := \zeta(u(x))\, \pi_\Gamma^\perp\big(u^\top(x) + tV^\top(x)\big)$$

für $|t| << 1$ und alle $x \in \Omega$. Hierfür berechnet man wegen $\pi_\Gamma^\perp \circ \pi_\Gamma \equiv 0$

$$\frac{\partial U_t}{\partial t}\bigg|_{t=0} = (\zeta \circ u)(D\pi_\Gamma^\perp \circ u^\top)V^\top = 0$$

auf dem gesamten Definitionsbereich Ω. Die durch $u_t := \pi_{\mathcal{N}}(u + tV + U_t)$ definierten Variationen erfüllen dann $\frac{\partial u_t}{\partial t}\big|_{t=0} = V$. Da auf $\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ gilt $u = u^\top$ und $V = V^\top$ sowie $\zeta \circ u \equiv 1$, erfüllt u_t auf dieser Menge die Randbedingung

$$u_t = \pi_{\mathcal{N}}\big(u + tV + \pi_\Gamma^\perp(u + tV)\big) = \pi_\Gamma(u + tV) \in \Gamma.$$

Daher erfüllt u_t alle Voraussetzungen aus der Definition 1.1 und nach (1.8) ist

$$\int Du \cdot_\gamma DV \, d\mu_\gamma = \frac{1}{2}\, \frac{d}{dt} E_\gamma(u_t)\bigg|_{t=0} = 0.$$

Die Gleichung (1.10) ist deshalb äquivalent zu (1.9), weil im vorliegenden Fall, dass $\mathcal{N}$ eine isometrisch in $\mathbb{R}^N$ eingebettete Untermannigfaltigkeit ist, der Levi-Civita-Zusammenhang die Form $\Pi(u(x)) \circ D$ hat, wenn $\Pi(u(x)) : \mathbb{R}^N \to \mathrm{T}_{u(x)}\mathcal{N}$ die orthogonale Projektion ist. □

Wie bereits angedeutet wird nun ein stärkerer Begriff von Harmonizität eingeführt, bei dem mehr Variationen als bisher zugelassen werden. Es stellt sich heraus, dass es ausreicht, Variationen im Definitionsbereich hinzuzunehmen.

Definition 1.4 (Stationäre harmonische Abbildung mit freier Randbedingung). *Eine Abbildung $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ heißt* stationär mit freier Randbedingung, *wenn $\frac{d}{dt} E_\gamma(u_t)\big|_{t=0} = 0$ für alle Variationen der Form $u_t := u \circ \phi_t$ gilt. Hierbei sollen die Abbildungen $\phi_t : \Omega \to \Omega$ eine differenzierbare 1-Parameter-Familie von C^∞-Diffeomorphismen bilden, für die auch $\frac{\partial \phi_t}{\partial t}$ von der Klasse C^∞ ist. Weiter sollen sie $\phi_0 = \mathrm{id}_\Omega$ und $\phi_t|_{\Omega\setminus K} = \mathrm{id}_{\Omega\setminus K}$ für eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ erfüllen sowie die Randbedingung $\phi_t(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$.*
Eine schwach harmonische Abbildung zur freien Randbedingung $u(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$, die stationär mit freier Randbedingung ist, bezeichnet man als stationär harmonisch zur freien Randbedingung $u(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$.

Bemerkung 1.5. Die wichtigste Folgerung aus der Stationarität ist die Energiemonotonie, siehe Satz 1.10. In der Tat wird in dieser Arbeit die Stationarität nur noch an einer anderen Stelle benutzt, nämlich auf Seite 57 im Beweis des Kompaktheitssatzes 4.14.

Bemerkung 1.6. Die am Anfang dieses Abschnittes erwähnten energieminimierenden Abbildungen mit freier Randbedingung sind insbesondere auch stationär harmonisch, da die Variationen $u \circ \phi_t$ aus der Definition zulässige Vergleichsabbildungen sind.

Bemerkung 1.7. Eine glatte Abbildung $u \in C^2(\Omega, \mathcal{N})$, die schwach harmonisch zur freien Randbedingung $u(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$ ist, heißt *harmonisch* zu dieser freien Randbedingung. Glatte harmonische Abbildungen sind automatisch stationär harmonisch, weil die Variationsvektorfelder $V := \frac{d}{dt}(u \circ \phi_t)\big|_{t=0} = Du\, \frac{d}{dt}\phi_t\big|_{t=0}$ die Voraussetzungen aus Lemma 1.3 erfüllen, so dass gilt $\frac{d}{dt}E_\gamma(u \circ \phi_t)\big|_{t=0} = 2\int Du \cdot_\gamma DV d\mu_\gamma = 0$.

Lemma 1.8 (Differentialgleichung für Stationarität). *Sei $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$ eine isometrisch eingebettete kompakte Untermannigfaltigkeit und $\gamma \in \mathfrak{M}_G(\Omega)$ eine Riemannsche Metrik auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$. Eine Abbildung $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ ist genau dann stationär zur freien Randbedingung, wenn für alle Testvektorfelder $\xi \in C^\infty_{kpt}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, für die die Randbedingung $\xi(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$ gilt, die Gleichung*

$$\partial E_\gamma(u, \xi) := \int_\Omega \left[2(Du\nabla^\Omega\xi) \cdot_\gamma Du - |Du|^2_\gamma \mathrm{div}_\gamma\xi\right] d\mu_\gamma = 0 \tag{1.11}$$

erfüllt ist. Hierbei ist ∇^Ω die kovariante Ableitung auf (Ω, γ), $\mathrm{div}_\gamma\xi = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_\alpha(\sqrt{\gamma}\xi^\alpha)$ die Riemannsche Divergenz, $\cdot_\gamma$ das durch γ und das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^N$ festgelegte Hilbert-Schmidt-Skalarprodukt auf $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ und $|\cdot|_\gamma$ die hierdurch induzierte Norm. In Koordinatendarstellung lautet die Gleichung

$$\partial E_\gamma(u, \xi) = \int_\Omega \left[2\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \cdot \partial_\nu u \partial_\beta\xi^\nu - \gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \cdot \partial_\beta u\, \partial_\nu\xi^\nu + \omega \cdot \xi\right] d\mu_\gamma = 0, \tag{1.12}$$

wobei die Norm von $\omega(x) \in \mathbb{R}^n$ für $x \in \Omega$ durch $C(n, G)\|D\gamma\|_\infty |Du(x)|^2$ beschränkt ist. Die Funktion $\|\cdot\|_\infty$ bezeichnet hier und im Folgenden die L^∞-Norm.

Beweis. Die verwendeten Beweistechniken stammen aus [KGB]. Dort wird allerdings nicht der Fall einer freien Randbedingung abgedeckt. Sei $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ und ϕ_t wie in Definition 1.4. Dann besitzt $\xi := \frac{\partial}{\partial t}\phi_t\big|_{t=0}$ die Eigenschaften aus dem Lemma. Zu berechnen ist $\frac{\partial}{\partial t}E_\gamma(u \circ \phi_t)\big|_{t=0}$. Dazu sieht man zunächst mit einer Parametertransformation

$$\begin{aligned}
&E_\gamma(u \circ \phi_t)\\
&= \int_\Omega \gamma^{\alpha\beta}[(\partial_\mu u \circ \phi_t)\partial_\alpha\phi^\mu_t] \cdot [(\partial_\nu u \circ \phi_t)\partial_\beta\phi^\nu_t]\sqrt{\gamma} d\mathcal{L}^n\\
&= \int_\Omega (\gamma^{\alpha\beta} \circ \phi_t^{-1})[\partial_\mu u(\partial_\alpha\phi^\mu_t \circ \phi_t^{-1})] \cdot [\partial_\nu u(\partial_\beta\phi^\nu_t \circ \phi_t^{-1})]\sqrt{\gamma \circ \phi_t^{-1}} \det(D\phi_t^{-1}) d\mathcal{L}^n\\
&=: \int_\Omega f(t, x) d\mathcal{L}^n(x).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Man kann nun unter dem Integral nach t differenzieren, denn da bei der Berechnung von $\frac{\partial}{\partial t}f(t, x)$ nur C^1-Terme abgeleitet werden, ist $\frac{\partial}{\partial t}f(t, x)$ auf dem kompakten Träger

durch $C|Du|^2$ majorisiert, unabhängig von $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
Um die weitere Rechnung übersichtlicher zu gestalten, werden für ein festes $x \in \Omega$ von erster Ordnung Euklidische Koordinaten mit Zentrum in diesem Punkt eingeführt, d.h. es wird $\gamma_{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta}$ und $\partial_\nu \gamma_{\alpha\beta}(x) = 0$ für alle $1 \leq \alpha, \beta, \nu \leq n$ angenommen. Damit und mit $\phi_0 = \mathrm{id}_\Omega$ berechnet man

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\Big|_{t=0} = 2\, \frac{\partial}{\partial t}(\partial_\alpha \phi_t^\mu \circ \phi_t^{-1}(x))\Big|_{t=0} \partial_\mu u(x) \cdot (\partial_\nu u(x) \delta_{\alpha\nu}) \\ +\partial_\alpha u(x) \cdot \partial_\alpha u(x)\, \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{det} D\phi_t^{-1}(x))\Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Dabei ist nach Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\partial_\alpha \phi_t^\mu \circ \phi_t^{-1}(x))\Big|_{t=0} &= \partial_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t}\phi_t^\mu(x)\right)\Big|_{t=0} + \underbrace{\partial_\nu \partial_\alpha \phi_0^\mu(x)}_{=0}\, \frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^{-1})^\nu(x)\Big|_{t=0} \\ &= \partial_\alpha \xi^\mu(x). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Im Folgenden seien die $(m-1) \times (m-1)$-Minoren einer Matrix $(x_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$ abgekürzt als $\mathrm{ad}_{\mu\nu}(x_{\alpha\beta}) := (-1)^{\mu+\nu}\mathrm{det}(x_{\alpha\beta})_{\alpha\neq\mu,\beta\neq\nu}$. Für alle fixierten $1 \leq \mu, \nu \leq n$ berechnet man damit nach Laplaceschem Entwicklungssatz $\mathrm{det}(x_{\alpha\beta}) = x_{\mu\nu}\mathrm{ad}_{\mu\nu}(x_{\alpha\beta})$ + Terme unabhängig von $x_{\mu\nu}$. Daher ist $\frac{\partial}{\partial x_{\mu\nu}}\mathrm{det}(x_{\alpha\beta}) = \mathrm{ad}_{\mu\nu}(x_{\alpha\beta})$ und unter Benutzung von $\mathrm{ad}_{\mu\nu}(\mathrm{id}) = \delta_{\mu\nu}$ schließt man mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{det} D\phi_t^{-1})\Big|_{t=0} &= \mathrm{ad}_{\mu\nu}(D\phi_0^{-1})\, \frac{\partial}{\partial t}\partial_\nu(\phi_t^{-1})^\mu\Big|_{t=0} \\ &= \partial_\nu\, \frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^{-1})^\nu\Big|_{t=0} \\ &= -\partial_\nu \xi^\nu, \end{aligned} \tag{1.15}$$

wobei bei der letzten Gleichheit benutzt wurde, dass

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^{-1} \circ \phi_t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\phi_t^{-1}\Big|_{t=0} + \partial_\nu(\phi_0^{-1})\frac{\partial}{\partial t}\phi_t^\nu\Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial t}\phi_t^{-1}\Big|_{t=0} + \xi. \tag{1.16}$$

Zusammen erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\Big|_{t=0} = 2\partial_\alpha \xi^\mu(x)\partial_\mu u(x) \cdot \partial_\alpha u(x) - |Du(x)|^2 \mathrm{div}\, \xi(x).$$

Da im Punkt x von erster Ordnung Euklidische Koordinaten vorliegen, bedeutet dies

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\Big|_{t=0} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \Big(2(Du(x)\nabla^\Omega \xi(x)) \cdot_\gamma Du(x) - |Du(x)|_\gamma^2 \mathrm{div}_\gamma \xi(x)\Big)\sqrt{\gamma}(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Durch Rücktransformieren auf beliebige Koordinaten erhält man (1.17) für alle $x \in \Omega$, da der Ausdruck invariant unter Koordinatentransformationen ist. Damit ist gezeigt

$$\frac{\partial}{\partial t} E_\gamma(u \circ \phi_t)\Big|_{t=0} = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\Big|_{t=0} d\mathcal{L}^n(x) = \partial E_\gamma(u, \xi).$$

Demzufolge ist jede Abbildung $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$, die $\partial E_\gamma(u,\xi) = 0$ für alle Testvektorfelder ξ wie im Lemma erfüllt, stationär mit freier Randbedingung. Sei umgekehrt eine zum freien Rand stationäre Abbildung $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ gegeben sowie ein $\xi \in C^\infty_{kpt}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\xi(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$. Dann erfüllt die durch $\phi_t(x) := x + t\xi(x)$ definierte Familie von Diffeomorphismen die Voraussetzungen der Definition 1.4 für hinreichend kleine Werte von $|t|$, also gilt $\partial E_\gamma(u,\xi) = \frac{d}{dt} E_\gamma(u \circ \phi_t)\big|_{t=0} = 0$.
Für die Äquivalenz der Gleichungen (1.11) und (1.12) benutzt man

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}_\gamma \xi &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_\nu(\sqrt{\gamma}\xi^\nu) = \partial_\nu \xi^\nu + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \xi^\nu \partial_\nu \sqrt{\gamma} = \partial_\nu \xi^\nu + O\left(\|D\gamma\|_\infty |\xi|\right), \\
(\nabla^\Omega_{e_\beta} \xi)^\nu &= \partial_\beta \xi^\nu + \Gamma_{\beta\alpha}^{\ \nu}\, \xi^\alpha = \partial_\beta \xi^\nu + O\left(\|D\gamma\|_\infty |\xi|\right)
\end{aligned}
$$

mit den Christoffelsymbolen $\Gamma_{\beta\alpha}^{\ \nu}$ auf (Ω, γ), wobei die O-Terme nur noch von den Konstanten n und G abhängen. □

Um für glatte harmonische Abbildungen eine Differentialgleichung im klassischen Sinne herzuleiten, wird der *Laplace-Beltrami-Operator* Δ_γ zu einer Riemannschen Metrik γ eingeführt als der Operator, der

$$
\int_\Omega D\psi \cdot_\gamma D\phi \, d\mu_\gamma = -\int_\Omega \Delta_\gamma \psi \cdot \phi \, d\mu_\gamma \quad \text{für alle } \psi, \phi \in C^\infty_{kpt}(\Omega, \mathbb{R}^N)
$$

erfüllt, also $\Delta_\gamma \psi = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_\alpha(\sqrt{\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta \psi)$. Insbesondere ist im Fall der Euklidischen Metrik $\Delta_{(\delta_{\alpha\beta})} = \Delta$ der komponentenweise angewandte Laplaceoperator aus der klassischen Analysis.

Lemma 1.9. *Auf Ω sei eine Riemannsche $C^{1,\alpha}$-Metrik γ mit der Eigenschaft (1.3) gegeben. Eine Abbildung $u \in C^2(\Omega \setminus \partial\mathbb{R}^n_+, \mathcal{N}) \cap C^1(\Omega, \mathcal{N})$ ist genau dann harmonisch zur freien Randbedingung $u(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$, wenn gilt*

$$
\Delta_\gamma u \perp \mathcal{N} \ \textit{auf } \Omega \setminus \partial\mathbb{R}^n_+ \quad \textit{und} \quad \tfrac{\partial u}{\partial x_n} \perp \Gamma \ \textit{auf } \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+. \tag{1.18}
$$

Die erste Bedingung ist dabei äquivalent zu

$$
\Delta_\gamma u = \gamma^{\alpha\beta}(I\!I \circ u)(\partial_\alpha u, \partial_\beta u) \quad \textit{auf } \Omega \setminus \partial\mathbb{R}^n_+ \tag{1.19}
$$

mit der zweiten Fundamentalform $I\!I$ von $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$. Die Differentialgleichung (1.19) ist auch für schwach harmonische Abbildungen $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ im Distributionssinne erfüllt.

Beweis. Nach Definition des Laplace-Beltrami-Operators gilt für alle $V \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit kompaktem Träger in Ω

$$
\int_\Omega Du \cdot_\gamma DV d\mu_\gamma = -\int_\Omega \Delta_\gamma u \cdot V d\mu_\gamma - \int_{\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{\gamma_{nn}} \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot V \sqrt{\gamma} d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{1.20}
$$

Hierbei wurde benutzt, dass γ die Bedingung (1.3) erfüllt und $-e_n$ äußerer Normalenvektor an $\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ ist. Ein kleines technisches Problem ist, dass das erste Integral der rechten Seite von vornherein nicht unbedingt definiert sein muss. Dies folgt erst, nachdem man (1.19) zeigen konnte. Für den Moment wird das Integral daher als Grenzwert $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta_\gamma u \cdot V d\mu_\gamma$ aufgefasst, wobei $\Omega_\varepsilon := \Omega \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times (\varepsilon, \infty))$ sei. Die Existenz dieses Grenzwertes sieht man ein, indem man die Gleichung (1.20) mit dem Gebiet Ω_ε

anstelle von Ω benutzt.
Mit einem Approximationsargument sieht man, dass (1.20) auch für alle Vektorfelder $V \in L^\infty \cap H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit kompaktem Träger in Ω gilt, wenn man im Randintegral die Spur von V einsetzt. Laut Lemma 1.3 ist die Harmonizität von u zur freien Randbedingung nun äquivalent dazu, dass der Term in (1.20) für alle V wie oben verschwindet, die außerdem $V(x) \in \mathrm{T}_{u(x)}\mathcal{N}$ für $\mathcal{L}^n$-fast alle $x \in \Omega$ und $V(x) \in \mathrm{T}_{u(x)}\Gamma$ für $\mathcal{L}^{n-1}$-fast alle $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ erfüllen. Durch geeignete Wahlen von V sieht man, dass dies äquivalent zu $\Delta_\gamma u(x) \perp \mathrm{T}_{u(x)}\mathcal{N}$ für $x \in \Omega \setminus \partial\mathbb{R}^n_+$ und $\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \perp \mathrm{T}_{u(x)}\Gamma$ für $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ ist.
Für die Herleitung der Differentialgleichung benutzt man, dass die zweite Fundamentalform von $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$ für $y \in \mathcal{N}$ und $v, w \in \mathrm{T}_y\mathcal{N}$ definiert ist durch die orthogonale Zerlegung

$$\partial_v W(y) = \nabla^{\mathcal{N}}_v W(y) + I\!I(y)(v, w)$$

für ein zu $\mathcal{N}$ tangentiales Vektorfeld $W \in C^1(\mathcal{N}, \mathbb{R}^N)$ mit $W(y) = w$. Für eine detailliertere Ausführung vergleiche man [KN], Kap. VII.3, S. 10, 13. Für ein längs u tangentiales Vektorfeld $W \in C^1(\Omega \setminus \partial\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^N)$ bedeutet obige Gleichung

$$\partial_\alpha W = \nabla^{\mathcal{N}}_{e_\alpha} W + (I\!I \circ u)(\partial_\alpha u, W)$$

für $1 \le \alpha \le n$. Setzt man in diese Gleichung $W_\alpha := \sqrt{\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta u$ ein, so folgt für den orthogonalen Anteil des Laplace-Beltrami-Operators einer beliebigen Abbildung $u \in C^2(\Omega \setminus \partial\mathbb{R}^n_+, \mathcal{N})$

$$(\Delta_\gamma u)^\perp = \tfrac{1}{\sqrt{\gamma}}(I\!I \circ u)(\partial_\alpha u, W_\alpha) = \gamma^{\alpha\beta}(I\!I \circ u)(\partial_\alpha u, \partial_\beta u)$$

und damit die Gleichung (1.19). Die Distributionsformulierung der letzten Gleichung ist mit der Zerlegung $W = W^\top + W^\perp$ in den zu $\mathcal{N}$ tangentialen und den orthogonalen Anteil

$$\int_\Omega Du \cdot_\gamma DW d\mu_\gamma = \int_\Omega Du \cdot_\gamma DW^\top d\mu_\gamma + \int_\Omega \gamma^{\alpha\beta}(I\!I \circ u)(\partial_\alpha u, \partial_\beta u) \cdot W^\perp d\mu_\gamma$$

für alle Vektorfelder $W \in L^\infty \cap H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit kompaktem Träger. Mit einem Approximationsargument sieht man, dass die letzte Gleichung allgemeiner für beliebige Abbildungen $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ erfüllt ist. Ist u außerdem schwach harmonisch, so verschwindet das erste Integral auf der rechten Seite. Im zweiten Integral kann man $W^\perp$ auch durch W ersetzen, da $I\!I$ nach Definition orthogonal auf $\mathcal{N}$ steht. Das beweist die letzte Behauptung des Lemmas. □

1.3 Energiemonotonie und Folgerungen

Der Hauptgrund, warum es nützlich ist, den Begriff einer schwach harmonischen Abbildung zu dem einer stationären harmonischen Abbildung zu verschärfen, ist der, dass für stationäre Abbildungen eine Energiemonotonieformel wie im folgenden Satz gilt. Diese Energiemonotonie spielt eine tragende Rolle in der gesamten vorliegenden Arbeit.

Satz 1.10 (Energiemonotonie). *Der Punkt $z \in \mathbb{R}^n_+$ und der Radius $R > 0$ seien so gewählt, dass entweder $B^+_R(z) = B_R(z) \subset \mathbb{R}^n_+$ eine Vollkugel ist oder $z \in \partial\mathbb{R}^n_+$, so dass $B^+_R(z)$ eine Halbkugel ist. Es liege eine Riemannsche Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(B^+_R(z))$ zugrunde, die im Mittelpunkt Euklidisch ist, also $\gamma_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta}$ für $1 \le \alpha, \beta \le n$ erfüllt. Dann gibt es Konstanten $0 \le \chi = C'(n, G)\|D\gamma\|_\infty$ und $D = D(n, R, G, \|D\gamma\|_\infty) \ge 1$, so dass jede* *stationäre Abbildung* $u \in H^1(B_R^+(z), \mathcal{N})$*, im Fall* $z \in \partial\mathbb{R}^n_+$ *mit freier Randbedingung, die folgende Eigenschaft besitzt. Die skalierte Energie*

$$SE(\rho) := e^{\chi\rho}\rho^{2-n}\int_{B_\rho^+(z)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \tag{1.21}$$

ist monoton nichtfallend in $0 < \rho < R$ *und genauer gilt für* $0 < \sigma < \rho < R$

$$SE(\rho) - SE(\sigma) \geq \frac{2}{D}\int_{B_\rho^+(z)\setminus B_\sigma^+(z)} e^{\chi r} r^{2-n}\left|\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|^2 d\mu_\gamma, \tag{1.22}$$

wobei $\vec{n}(x) := \frac{x-z}{|x-z|}$*,* $r(x) := |x-z|$ *und* $|\cdot|$ *die Euklidische Norm auf* $\mathbb{R}^N$ *bezeichnet.*

Bemerkung 1.11. Die Bedingung $\gamma_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta}$ kann man immer mit einer affinen Transformation erreichen. Dafür wählt man zu einer beliebigen Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(\Omega)$ eine Basistransformation $T \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ mit $T^t(\gamma_{\alpha\beta}(z))T = (\delta_{\alpha\beta})$ und setzt

$$T_z(x) = T_z^\gamma(x) := z + T(x-z) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.23}$$

Im Fall $z \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ kann man wegen der Voraussetzung (1.3) an γ die Basistransformation T so wählen, dass $T_z(\partial\mathbb{R}^n_+) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$ und $T_z(\mathbb{R}^n_+) \subset \mathbb{R}^n_+$ gilt. Ist eine zur Metrik γ stationäre Abbildung $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ mit freier Randbedingung gegeben, so ist $\tilde{u} := u \circ T_z$ stationär mit freier Randbedingung auf $\widetilde{\Omega} := T_z^{-1}\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ bezüglich der transformierten Metrik $\tilde{\gamma} := T_z^*\gamma$. Das ist der Fall, weil für jede zulässige Variation $\tilde{u}_t$ von $\tilde{u}$ die Variation $u_t := \tilde{u}_t \circ T_z^{-1}$ zulässig für u ist mit $E_{\tilde{\gamma}}(\tilde{u}_t) = E_\gamma(u_t)$. Da $\tilde{\gamma}$ die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, gilt für $\tilde{u}$ also die Energiemonotonieformel. Daher erfüllt u mit der Konstanten χ zur Metrik $\tilde{\gamma}$ wie in obigem Satz die Energiemonotonie auf Halbellipsoiden $E_\rho^+(z) = E_\rho^{\gamma+}(z) := T_z B_\rho^+(z) \subset \mathbb{R}^n_+$ bzw. auf Vollellipsoiden $E_\rho(z) = E_\rho^\gamma(z) := T_z B_\rho(z)$. Diese Aussage ist genauer im folgenden Korollar festgehalten.

Korollar 1.12. *Auf* $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ *liege eine beliebige Metrik* $\gamma \in \mathfrak{M}_G(\Omega)$ *vor. Hierfür gibt es eine Konstante* $0 \leq \chi = C'(n,G)\|D\gamma\|_\infty$*, so dass jede stationäre Abbildung* $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ *mit freier Randbedingung die zwei folgenden Monotonieeigenschaften erfüllt. Im Randfall* $z \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ *ist die skalierte Energie auf Halbellipsoiden*

$$e^{\chi\rho}\rho^{2-n}\int_{E_\rho^+(z)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \tag{1.24}$$

monoton in $\rho > 0$*, solange* ρ *klein genug ist, um* $E_\rho^+(z) \subset \Omega$ *sicherzustellen. Analog ist im inneren Fall, also* $z \in \Omega \setminus \partial\mathbb{R}^n_+$*, der gleiche Ausdruck mit Vollellipsoiden*

$$e^{\chi\rho}\rho^{2-n}\int_{E_\rho(z)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \tag{1.25}$$

monoton in $\rho > 0$*, soweit* $E_\rho(z) \subset \Omega$ *erfüllt ist.*

Beweis des Satzes. Der Beweis orientiert sich an [Sim2, §2.4]. Da dort weder der Fall einer freien Randbedingung noch der Fall einer allgemeinen Riemannschen Metrik γ behandelt wird, wird der Beweis hier ausgeführt. Man benutzt die Differentialgleichung für Stationarität (1.12) mit Testvektorfeldern $\xi(x) := x - z$ für $x \in \overline{B_r^+(z)}$. Dabei ist wesentlich, dass diese Vektorfelder im Fall $z \in \partial\mathbb{R}^n_+$ die Randbedingung $\xi(\partial\mathbb{R}^n_+) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$

erfüllen. Im inneren Fall $z \in \Omega \setminus \partial\mathbb{R}^n_+$ und $B_R(z) \subset \mathbb{R}^n_+$ ist diese Bedingung leer. Da ξ auf dem übrigen Teil des Randes, also auf $S_r^+(z) := S_r(z) \cap \mathbb{R}^n_+$, nicht verschwindet, treten Randterme auf, und zwar

$$\begin{aligned} &\int_{B_r^+(z)} (2\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \cdot \partial_\nu u\, \delta_{\beta\nu} - \gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \cdot \partial_\beta u\, n + \omega \cdot \xi)\sqrt{\gamma} d\mathcal{L}^n \\ = \; &\int_{S_r^+(z)} (2\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \cdot \partial_\nu u\, \vec{n}_\beta \xi^\nu - \gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \cdot \partial_\beta u\, \vec{n}_\nu \xi^\nu)\sqrt{\gamma} d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Genauer erhält man diese Gleichung, indem man die Differentialgleichung (1.12) mit den zulässigen Testvektorfeldern $\xi(x) := \psi(x)(x-z)$ benutzt, wobei man mit geeigneten Abschneidefunktionen $\psi \in C^\infty_{kpt}(B_r^+(z), [0,1])$ die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_{B_r^+(z)}$ approximiert.
Da auf $S_r^+(z)$ gilt $\xi = r\vec{n}$, erhält man

$$\begin{aligned} &(2-n)\int_{B_r^+(z)} |Du|^2_\gamma d\mu_\gamma + \int_{B_r^+(z)} \omega \cdot \xi \, d\mu_\gamma \\ = \; &\int_{S_r^+(z)} [2r(\gamma^{\alpha\beta} - \delta^{\alpha\beta})\partial_\alpha u \cdot \partial_\nu u\, \vec{n}_\beta \vec{n}_\nu + 2r\partial_\beta u \cdot \partial_\nu u\, \vec{n}_\beta \vec{n}_\nu - r|Du|^2_\gamma]\sqrt{\gamma} d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Hier und nur hier geht nun die Voraussetzung an die Metrik γ ein, im Punkt z Euklidisch zu sein. Daher gilt nämlich für $x \in S_r^+(z)$ die Abschätzung $|\gamma^{\alpha\beta}(x) - \delta_{\alpha\beta}| \le r\|D\gamma\|_\infty$. Außerdem schätzt man gemäß Lemma 1.8 ab $|\omega| \le C_\omega \|D\gamma\|_\infty |Du|^2_\gamma$. Damit erhält man aus obiger Gleichung mit einer Konstanten $C_\gamma := C\|D\gamma\|_\infty$

$$\begin{aligned} &2r\int_{S_r^+(z)} \left|\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|^2 \sqrt{\gamma} d\mathcal{H}^{n-1} \\ \le \; &(2-n)\int_{B_r^+(z)} |Du|^2_\gamma d\mu_\gamma + r\int_{S_r^+(z)} |Du|^2_\gamma \sqrt{\gamma} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &+ C_\gamma r^2 \int_{S_r^+(z)} |Du|^2_\gamma \sqrt{\gamma} d\mathcal{H}^{n-1} + C_\omega \|D\gamma\|_\infty\, r\int_{B_r^+(z)} |Du|^2_\gamma d\mu_\gamma \qquad (1.26) \\ = \; &(1 + C_\gamma r)\Bigg((2-n)\int_{B_r^+(z)} |Du|^2_\gamma d\mu_\gamma + r\int_{S_r^+(z)} |Du|^2_\gamma \sqrt{\gamma} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &+ \left[\frac{C_\omega \|D\gamma\|_\infty}{1 + C_\gamma r} - \frac{(2-n)C_\gamma}{1 + C_\gamma r}\right] r\int_{B_r^+(z)} |Du|^2_\gamma d\mu_\gamma\Bigg). \end{aligned}$$

Die Konstante χ wird nun als der Term in den eckigen Klammern für den Wert $r = 0$ festgelegt sowie $D := 1 + C_\gamma R$ gesetzt. Multiplizieren obiger Gleichung mit $e^{\chi r} r^{1-n}/D$ führt auf

$$\begin{aligned} &\frac{2}{D} e^{\chi r} r^{2-n} \int_{S_r^+(z)} \left|\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|^2 \sqrt{\gamma} d\mathcal{H}^{n-1} \\ \le \; &e^{\chi r}(2-n) r^{1-n} \int_{B_r^+(z)} |Du|^2_\gamma d\mu_\gamma + e^{\chi r} r^{2-n} \int_{S_r^+(z)} |Du|^2_\gamma \sqrt{\gamma} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &+ \chi e^{\chi r} r^{2-n} \int_{B_r^+(z)} |Du|^2_\gamma d\mu_\gamma \\ = \; &\frac{d}{dr}\left[e^{\chi r} r^{2-n} \int_{B_r^+(z)} |Du|^2_\gamma d\mu_\gamma\right]. \end{aligned}$$

Integrieren von σ bis ρ liefert die Behauptung. □

Eine wichtige Folgerung aus der Energiemonotonie ist das folgende

Korollar 1.13. *Die Abbildung $u \in H^1(B_2^+, \mathcal{N})$ sei stationär mit freier Randbedingung und erfülle für ein $\varepsilon_0 > 0$ die Energieabschätzung*

$$2^{2-n} \int_{B_2^+} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \leq \varepsilon_0,$$

wobei eine Riemannsche Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(B_2^+)$ vorliege. Dann gilt

$$\sup_{x \in B_1^+,\, \rho \leq 2-|x|} \rho^{2-n} \int_{B_\rho^+(x)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \leq C\varepsilon_0$$

mit einer Konstanten $C = C(n, G, \|D\gamma\|_\infty)$.

Beweis. Zunächst sieht man an der Definition von $E_\rho^+(x)$, dass

$$B_{\rho/G}^+(x) \subset E_\rho^+(x) \subset B_{\rho G}^+(x), \tag{1.27}$$

weil die Wurzeln der Eigenwerte von $\gamma(x)$ wegen Bedingung (1.2) im Intervall $[G^{-1}, G]$ liegen. Sei nun $x \in B_1^+ \cap \partial\mathbb{R}_+^n$ und $\rho \leq 1/G^2$, so dass $B_\rho^+(x) \subset E_{\rho G}^+(x) \subset E_{1/G}^+(x) \subset B_2^+$ gilt. Mit der Energiemonotonie (1.24) folgt

$$\begin{aligned} \rho^{2-n} \int_{B_\rho^+(x)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma &\leq e^{\chi\rho G} \rho^{2-n} \int_{E_{\rho G}^+(x)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \\ &\leq e^{\chi/G} G^{2(n-2)} \int_{E_{1/G}^+(x)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \leq e^{\chi/G} G^{2(n-2)} 2^{n-2} \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Für $1/G^2 < \rho \leq 2 - |x|$ gilt auch ohne die Stationarität von u die Abschätzung

$$\rho^{2-n} \int_{B_\rho^+(x)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \leq \rho^{2-n} 2^{n-2} \varepsilon_0 \leq G^{2(n-2)} 2^{n-2} \varepsilon_0.$$

Demnach gilt die Behauptung im Randfall $x \in B_1^+ \cap \partial\mathbb{R}_+^n$, wenn man als Konstante den Wert $C_{rand} := e^{\chi/G} G^{2(n-2)} 2^{n-2}$ wählt. Sei nun $x = (x', x_n) \in B_1^+$ mit $x_n > 0$. Der Fall $x_n/G^2 \leq \rho \leq 1/(1+G^2)$ lässt sich auf den Randfall zurückführen, da dann

$$\rho^{2-n} \int_{B_\rho^+(x)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \leq \rho^{2-n} \int_{B_{\rho+\rho G^2}^+(x',0)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \leq C_{rand}(1+G^2)^{n-2} \varepsilon_0. \tag{1.28}$$

Falls $1/(1+G^2) < \rho \leq 2 - |x|$ ist, gilt die Behauptung ohnehin wegen

$$\rho^{2-n} \int_{B_\rho^+(x)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \leq \rho^{2-n} 2^{n-2} \varepsilon_0 \leq (1+G^2)^{n-2} 2^{n-2} \varepsilon_0. \tag{1.29}$$

Zuletzt ist die Situation für $\rho < x_n/G^2$ zu betrachten. Hierfür gilt die Schachtelung $B_\rho(x) \subset E_{\rho G}(x) \subset E_{x_n/G}(x) \subset B_{x_n}(x) \subset B_2^+$. Daher kann man mit der Energiemonotonie im Inneren, vgl. (1.25), diesen Fall wie folgt auf den schon behandelten Fall

$\rho \geq x_n/G^2$ zurückführen.

$$\begin{aligned}
\rho^{2-n}\int_{B_\rho(x)}|Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma &\leq \rho^{2-n}\int_{E_{\rho G}(x)}|Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \\
&\leq e^{\chi x_n/G}G^{2(n-2)}x_n^{2-n}\int_{E_{x_n/G}(x)}|Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \\
&\leq e^{\chi/G}G^{2(n-2)}x_n^{2-n}\int_{B_{x_n}(x)}|Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \\
&\leq e^{\chi/G}G^{2(n-2)}C_{rand}(1+G^2)^{n-2}\varepsilon_0,
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Abschätzung (1.28) und (1.29) benutzt wurden. Damit ist das Korollar auch im letzten Fall bewiesen. □

Das Korollar liefert unter anderem mit der Poincaré-Ungleichung, dass jede stationäre Abbildung $u \in H^1(B_2^+, \mathcal{N})$ wie im Korollar eine lokale BMO-Bedingung der Form

$$\sup_{B_\rho(x)\subset B_1^+} ⨍_{B_\rho(x)} |u - u_{\rho,x}| d\mathcal{L}^n \leq C \sup_{B_\rho(x)\subset B_1^+}\left[\rho^{2-n}\int_{B_\rho(x)}|Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma\right]^{1/2} \leq C\varepsilon_0^{1/2}$$

erfüllt, wobei die Abkürzung $u_{\rho,x} := ⨍_{B_\rho(x)} u\, d\mathcal{L}^n$ benutzt wurde und für eine Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und eine Borel-messbare Funktion f auf A das Durchschnittsintegral als $⨍_A f d\mathcal{L}^n := \frac{1}{\mathcal{L}^n(A)}\int_A f d\mathcal{L}^n$ definiert ist, falls $0 < \mathcal{L}^n(A) < \infty$. Für die Definition des Raumes $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ vergleiche man Abschnitt 3.3. Obige Eigenschaft ist wegen des folgenden Lemmas interessant.

Lemma 1.14 ([B], Lm A.1). *Sei $u \in L^1(B_r(x_0), \mathbb{R}^N)$ eine Abbildung mit*

$$m(x_0, r) := \sup_{B_\rho(x)\subset B_r(x_0)} ⨍_{B_\rho(x)} |u - u_{\rho,x}| d\mathcal{L}^n < \infty.$$

Weiter sei $\zeta \in C^\infty_{kpt}(B_r(x_0), [0,1])$ eine Abschneidefunktion mit $\zeta \equiv 1$ auf $B_{r/2}(x_0)$ und $\|D\zeta\|_\infty \leq 4/r$. Dann gilt für $\bar{u} := ⨍_{B_r(x_0)} u\, d\mathcal{L}^n$

$$\zeta(u-\bar{u}) \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) \qquad \textit{mit} \qquad \|\zeta(u-\bar{u})\|_{\mathrm{BMO}} \leq Cm(x_0, r),$$

wobei die Konstante C nur von n und $\mathcal{N}$ abhängt.

1.4 Bekannte Regularitätsaussagen

Im Allgemeinen kann man auch für stationär harmonische Abbildungen keine Hölderstetigkeit zeigen. Ein Gegenbeispiel ist die Abbildung $u : B^n \to S^{n-1}, u(x) := \frac{x}{|x|}$, die für $n \geq 3$ energieminimierend in der Klasse der H^1-Abbildungen mit den gleichen Randwerten und damit insbesondere eine stationäre harmonische Abbildung ist. Für einen einfachen Beweis hiervon vergleiche man [Li2]. Es gibt im Inneren aber bereits das folgende fundamentale Resultat. Es charakterisiert die Punkte, an denen Hölderstetigkeit und damit höhere Regularität gemäß untenstehendem Satz 1.17 gilt. Der Beweis wurde für den Fall der Euklidischen Metrik in [B] geführt. Der Satz ist auch ein Spezialfall von Satz 3.4 der vorliegenden Arbeit.

Theorem 1.15 (kleine-Energie Regularitätssatz). *Sei $\mathcal{N}$ eine kompakte Mannigfaltigkeit und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Auf B_1^n sei eine Riemannsche Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(B_1)$ gegeben. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n, G, \|D\gamma\|_\infty, \mathcal{N}) > 0$, so dass für jede Abbildung $u \in H^1(B_1, \mathcal{N})$, die bezüglich der Metrik γ stationär harmonisch ist, aus der Bedingung*

$$\int_{B_1} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \leq \varepsilon_0 \tag{1.30}$$

die Hölderstetigkeit von u auf $B_{1/4}$ folgt mit einem geeignet zu wählenden Hölder-Exponenten $\alpha = \alpha(n, G, \|D\gamma\|_\infty, \mathcal{N}) \in (0, 1)$, sowie die Abschätzung

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/4})} \leq C = C(n, G, \|D\gamma\|_\infty, \mathcal{N}).$$

Bemerkung 1.16. Satz 3.4 zeigt sogar noch allgemeiner, dass das Theorem für nur schwach harmonische Abbildungen gilt, wenn man die Voraussetzung (1.30) durch

$$\sup_{B_\rho(x) \subset B_{1/2}} \rho^{2-n} \int_{B_\rho(x)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \leq \varepsilon_0$$

ersetzt. Wegen Korollar 1.13 ist dies eine schwächere Voraussetzung als (1.30), falls $\varepsilon_0 > 0$ hierin geeignet kleiner gewählt wird.

Aus der Hölderstetigkeit folgt die höhere Regularität mithilfe klassischer Ergebnisse aus der Theorie elliptischer Differentialgleichungen. Genauer gilt der folgende

Satz 1.17. *Sei für ein $0 < \alpha < 1$ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ der Klasse $C^{k+1,\alpha}$ und eine abgeschlossene $C^{k+1,\alpha}$-Untermannigfaltigkeit $\Gamma \subset \mathcal{N}$ gegeben. Auf dem in $\mathbb{R}^n_+$ relativ offenen, beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ liege eine Riemannsche Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G^{k-1,\alpha}(\Omega)$ zugrunde. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n, G, \Gamma, \mathcal{N})$, so dass alle schwach harmonischen Abbildungen $u \in C^{0,\alpha} \cap H^1(\Omega, \mathcal{N})$ mit freier Randbedingung $u(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$, die*

$$\sup_{B_\rho^+(x) \subset \Omega} \rho^{2-n} \int_{B_\rho^+(x)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma < \varepsilon_0$$

erfüllen, von der Klasse $C^{k,\alpha}$ sind und die $C^{k,\alpha}$-Norm auf jeder kompakten Teilmenge $B \subset \Omega$ beschränkt ist durch

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(B)} \leq C = C(\|u\|_{C^{0,\alpha}}, \alpha, \Omega, G, \|\gamma\|_{C^{k-1,\alpha}}, \Gamma, \mathcal{N}, \operatorname{dist}(B, \partial\Omega \setminus \partial\mathbb{R}^n_+)).$$

Beweis. Zunächst ist die $C^{1,\alpha}$-Regularität zu zeigen, danach folgt der Satz aus der Schauder-Theorie für lineare elliptische Differentialgleichungen. Für den ersten Teil benutzt man den

Satz 1.18. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Betrachtet wird eine Differentialgleichung der Form*

$$\int_\Omega a^{\mu\nu} \partial_\mu u \cdot \partial_\nu W d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f(\cdot, u, Du) \cdot W d\mathcal{L}^n \tag{1.31}$$

für alle $W \in L^\infty \cap H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit kompaktem Träger in Ω. Hierbei sollen die Funktionen $a^{\mu\nu} : \Omega \to \mathbb{R}$ und $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$ für alle $x \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}^N$ sowie alle $\xi \in \mathbb{R}^{n*}$ und $\hat{\xi} \in \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^N$ die folgenden Bedingungen erfüllen.

$$(i) \ \ |a^{\mu\nu}(x)| \leq M, \quad (ii) \ \ a^{\mu\nu}(x)\xi_\mu\xi_\nu \geq \lambda|\xi|^2 \ \ \text{und} \ \ (iii) \ \ |f(x, y, \hat{\xi})| \leq A(1 + |\hat{\xi}|^2)$$

mit Konstanten $M, A \geq 0$ und $\lambda > 0$. Dann gibt es eine Konstante $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M, \lambda, A)$, so dass jede Lösung $u \in C^{0,\alpha} \cap H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ von (1.31) mit

$$\sup_{B_\rho(x) \subset \Omega} \rho^{2-n} \int_{B_\rho(x)} |Du|^2 d\mathcal{L}^n < \varepsilon_0 \tag{1.32}$$

von der Klasse $C^{1,\alpha}$ ist und auf jeder kompakten Teilmenge $B \subset \Omega$ die Abschätzung

$$\|u\|_{C_{1,\alpha}(B)} \leq C = C(\|u\|_{C^{0,\alpha}}, \alpha, \Omega, M, \lambda, A, \operatorname{dist}(B, \partial\Omega))$$

erfüllt.

Beweis. Zunächst folgert man aus [G1], Thm. VI.1.3, dass u für jedes $\beta \in (0,1)$ in $C^{0,\beta}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ liegt. Auf hinreichend kleinen Kugeln $B_\rho(y) \subset \Omega$ kann man nämlich wegen der Hölderstetigkeit von u die Voraussetzung $2A \sup_{B_\rho(y)} |u - u(y)| < \lambda$ erfüllen. Wegen Annahme (1.32) gilt die Aussage des besagten Satzes VI.1.3 auf ganz Ω laut Bemerkung 1.1 (S.172) in [G1]. Daher sind die Voraussetzungen von [G1], Thm. VI.1.5 erfüllt, was die gewünschten Resultate liefert. □

Der Satz liefert die $C^{1,\alpha}$-Regularität stetiger schwach harmonischer Abbildungen im Inneren, da u im schwachen Sinne die Differentialgleichung (1.19) erfüllt. Im Inneren folgt die $C^{1,\alpha}$-Regularität übrigens auch ohne die Voraussetzung von (1.32) mit der Theorie von Ladyzhenskaya und Ural'tseva, vgl. [LU, §6], da im inneren Fall die Koeffizienten $a^{\mu\nu}$ aus der Differentialgleichung (1.31) sogar differenzierbar sind. Für den Beweis der Randregularität setzt man die Abbildung durch Spiegelung über Γ fort und zeigt, dass die fortgesetzte Abbildung eine Differentialgleichung der Form (1.31) erfüllt. Diese Vorgehensweise wird in [GJ], §4, angedeutet und im Abschnitt 2.3 der vorliegenden Arbeit ausgeführt.
Nun, da die $C^{1,\alpha}$-Regularität gezeigt ist, hat man den Fall einer linearen elliptischen Differentialgleichung mit hölderstetiger Inhomogenität vorliegen. Daher kann man die höhere Regularität aus dem folgenden Resultat der Schauder-Theorie schließen.

Satz 1.19. *Für ein $k \geq 2$ und $0 < \alpha < 1$ sei das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ beschränkt und trage eine Riemannsche Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}^{k-1,\alpha}_G(\Omega)$. Die Abbildung $v \in C^{1,\alpha}(\Omega, \mathbb{R})$ erfülle $\Delta_\gamma v \in C^{k-2,\alpha}(\Omega, \mathbb{R})$, wobei der Ausdruck $\Delta_\gamma v$ hier im schwachen Sinne zu verstehen ist. Im Fall $\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+ \neq \emptyset$ sei außerdem eine der Randbedingungen*

$$v \equiv 0 \textit{ auf } \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+ \quad \textit{oder} \quad \frac{\partial v}{\partial x_n} \equiv 0 \textit{ auf } \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$$

erfüllt. Dann ist $v \in C^{k,\alpha}(\Omega, \mathbb{R})$ und die zugehörige Norm ist auf jeder kompakten Teilmenge $B \subset \Omega$ beschränkt durch

$$\|v\|_{C^{k,\alpha}(B)} \leq C(\|v\|_\infty + \|\Delta_\gamma v\|_{C^{k-2,\alpha}})$$

mit einer Konstanten $C = C(\alpha, \Omega, G, \|\gamma\|_{C^{k-1,\alpha}}, \operatorname{dist}(B, \partial\Omega \setminus \partial\mathbb{R}^n_+))$.

Der Satz ist ein Spezialfall der Ergebnisse in [ADN, Thm 7.3] oder [Mor, §6.3]. Für den Fall eines leeren Randes oder von Dirichlet-Randbedingungen vergleiche man auch [GT, Kap. 6].

Auf das vorliegende Problem wendet man den Satz wie folgt an. Hat man bereits $u \in C^{k-1,\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ für $k \geq 2$ gezeigt, so erfüllt u laut (1.18) und (1.19) die Differentialgleichung

$$\Delta_\gamma u = \gamma^{\alpha\beta}(I\!I \circ u)(\partial_\alpha u, \partial_\beta u) \in C^{k-2,\alpha}(\Omega, \mathcal{N})$$

und die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial x_n} \perp \Gamma$ auf $\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$. Im Folgenden wird notiert $L := \dim \mathcal{N}$ sowie $l := \dim \Gamma$. Nach Voraussetzung gibt es für $y_0 \in u(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$ und ein hinreichend kleines $\delta > 0$ einen $C^{k+1,\alpha}$-Diffeomorphismus $\phi : B^l_\delta \to \Gamma \cap B_\delta(y_0)$ und $C^{k,\alpha}$-Orthonormalbasisvektorfelder $n_j(y) \in \mathrm{T}^\perp_y \Gamma \subset \mathrm{T}_y \mathcal{N}$ für $y \in \Gamma \cap B_\delta(y_0)$ und $1 \leq j \leq L - l$. Da die Stetigkeit von u vorausgesetzt ist, kann man annehmen, dass $\mathrm{Bild}(u) \subset B_\delta(y_0)$ gilt. Daher stellt die folgende Funktion eine $C^{k,\alpha}$-Parametrisierung einer Umgebung von $\mathrm{Bild}(u) \subset \mathcal{N}$ dar.

$$\Phi : B^l_\delta \times B^{L-l}_\delta \to \mathcal{N}, \quad \Phi(x, t_1, \ldots, t_{L-l}) = \exp^{\mathcal{N}}_{\phi(x)}\left(\sum_{j=1}^{L-l} t_j n_j(\phi(x))\right).$$

Die Abbildung $\tilde{u} := \Phi^{-1} \circ u : \Omega \to \mathbb{R}^L$ erfüllt wie u die Eigenschaft $\Delta_\gamma \tilde{u} \in C^{k-2,\alpha}(\Omega)$ sowie die Randbedingung $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n} \perp \mathbb{R}^l \times \{0\}$ auf $\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$, denn es gilt $\Phi^{-1}(\Gamma) = B^l_\delta \times \{0\}$ und die Karte Φ^{-1} erhält Orthogonalität auf Γ. Für $1 \leq i \leq l$ erfüllen die Komponenten $\tilde{u}^i$ daher auf $\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ die Neumannrandbedingung $\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial x_n} \equiv 0$, während für $l + 1 \leq i \leq L$ wegen $u(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$ die Dirichletbedingung $\tilde{u}^i \equiv 0$ auf $\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ erfüllt ist. Deshalb folgt mit Satz 1.19 die $C^{k,\alpha}$-Regularität von $\tilde{u}$ und somit auch von $u = \Phi \circ \tilde{u}$ mit den behaupteten Abschätzungen. □

Im nächsten Kapitel wird noch folgende Gradientenabschätzung benötigt, die auf [Sch] zurückgeht.

Satz 1.20. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit einer Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(\Omega)$ und $\mathcal{N}$ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es ein $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(n, G, \|D\gamma\|_\infty, \mathcal{N}) > 0$, so dass für jede bezüglich γ harmonische Abbildung $u \in C^2(\Omega, \mathcal{N})$, die*

$$\rho^{2-n} \sup_{B_\rho(x) \subset \Omega} \int_{B_\rho(x)} |Du|^2_\gamma d\mu_\gamma \leq \varepsilon_0$$

mit einem $\varepsilon_0 \leq \bar{\varepsilon}$ erfüllt, die Abschätzung

$$|Du(x)| \leq \frac{C\sqrt{\varepsilon_0}}{\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)} \quad \textit{für alle } x \in \Omega$$

gilt. Hierbei hängt die Konstante C nur von n, G, $\|D\gamma\|_\infty$ und $\mathcal{N}$ ab.

Beweis. Theorem 2.2 aus [Sch], angewandt auf der Kugel $B_R(x)$, liefert die Abschätzung

$$|Du(x)|^2 \leq CR^{-n} \int_{B_R(x)} |Du|^2_\gamma d\mu_\gamma \leq CR^{-2}\varepsilon_0$$

und damit die Behauptung, falls $R := \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ gewählt ist. □

Das folgende Hebbarkeitsresultat geht an mehreren Stellen entscheidend in die vorliegende Arbeit ein.

Lemma 1.21. *Auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ liege eine Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(\Omega)$ zugrunde, $\mathcal{N}$ sei eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\Gamma \subset \mathcal{N}$ eine Untermannigfaltigkeit hiervon. Die Abbildung $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N}) \cap C^2(\Omega \setminus \Sigma, \mathcal{N})$ sei harmonisch zur freien Randbedingung $u((\Omega \setminus \Sigma) \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$ außerhalb einer in Ω relativ abgeschlossenen Ausnahmemenge $\Sigma \subset \Omega$ mit $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma) < \infty$. Dann ist u bezüglich der Metrik γ schwach harmonisch auf ganz Ω mit freier Randbedingung $u(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$.*

Beweis. Sei $V \in L^\infty \cap H^1(\Omega, \mathrm{T}\mathcal{N})$ ein beliebiges, längs u tangentiales Vektorfeld mit kompaktem Träger $K \subset \Omega$, das die Randbedingung $V(x) \in \mathrm{T}_{u(x)}\Gamma$ für $\mathcal{L}^{n-1}$-fast alle $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ erfülle. Wegen $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma \cap K) < \infty$ hat $\Sigma \cap K$ verschwindende 2-Kapazität, vgl. [EG, §4.7.2]. Daher gibt es für $i \in \mathbb{N}$ Abschneidefunktionen $\zeta_i \in H^1(\mathbb{R}^n, [0,1])$ mit

$$\Sigma \cap K \subset \operatorname{int}\{x \in \Omega : \zeta_i(x) = 1\}, \tag{1.33}$$

für die bei $i \to \infty$ die Konvergenz

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D\zeta_i|^2 d\mathcal{L}^n \to 0 \qquad \text{und} \qquad \zeta_i \to 0 \quad \mathcal{L}^n\text{-fast überall auf } \mathbb{R}^n$$

erfüllt ist. Die zweite Konvergenz folgt dabei nach einem Teilfolgenübergang aus der ersten. Wegen (1.33) sind $W_i := (1 - \zeta_i)V$ zulässige Testvektorfelder für die auf $\Omega \setminus \Sigma$ harmonische Abbildung u. Gemäß Lemma 1.3 ist also für alle $i \in \mathbb{N}$

$$0 = \int Du \cdot_\gamma \nabla^{\mathcal{N}} W_i d\mu_\gamma = \int (1 - \zeta_i) Du \cdot_\gamma \nabla^{\mathcal{N}} V d\mu_\gamma - \int Du \cdot_\gamma (D\zeta_i \otimes V) d\mu_\gamma. \tag{1.34}$$

Das letzte Integral verschwindet bei $i \to \infty$ wegen

$$\left| \int Du \cdot_\gamma (D\zeta_i \otimes V) d\mu_\gamma \right| \le \|V\|_\infty \left[\int |Du|^2_\gamma d\mu_\gamma \right]^{1/2} \left[\int |D\zeta_i|^2_\gamma d\mu_\gamma \right]^{1/2} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wegen dominierter Konvergenz folgt damit aus (1.34), indem man $i \to \infty$ streben lässt,

$$\int Du \cdot_\gamma \nabla^{\mathcal{N}} V d\mu_\gamma = 0$$

für alle zulässigen Testvektorfelder V. □

Kapitel 2

Das Spiegelungsargument

2.1 Eingrenzung des Bildbereiches

Der im folgenden Kapitel geführte Beweis der Randregularität stationärer harmonischer Abbildungen mit freier Randbedingung $u(\Omega \cap \partial \mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$ beruht auf einem Spiegelungsprinzip, bei dem die Abbildung durch Spiegelung an der Untermannigfaltigkeit Γ auf eine Vollkugel B_1 fortgesetzt wird. Dabei besteht das Problem, dass die Funktionswerte $u(x)$ wegen fehlender Stetigkeit weit entfernt von Γ liegen können, so dass die nächste-Punkt-Retraktion auf Γ in $u(x)$ möglicherweise nicht wohldefiniert ist, in welchem Fall man nicht sinnvoll einen Spiegelungspunkt zu $u(x)$ angeben kann. Dieses Problem wird durch das folgende Lemma behoben, das bisher unbekannt war und eine neue und vergleichsweise einfache Herangehensweise an das Regularitätsproblem bei einer freien Randbedingung ermöglicht.

Satz 2.1. *Sei $\mathcal{N}$ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\Gamma \subset \mathcal{N}$ eine Untermannigfaltigkeit hiervon. Auf B_2^{n+} sei eine Riemannsche Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(B_2^+)$ gegeben. Dann gibt es ein $\bar\varepsilon = \bar\varepsilon(n, G, \|D\gamma\|_\infty, \mathcal{N}) > 0$, so dass für alle stationären harmonischen Abbildungen $u \in H^1(B_2^+, \mathcal{N})$ mit freier Randbedingung $u(B_2^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$, die*

$$2^{2-n} \int_{B_2^+} |Du|^2_\gamma d\mu_\gamma \leq \varepsilon_0$$

für ein $\varepsilon_0 \leq \bar\varepsilon$ erfüllen, gilt

$$\operatorname{dist}(u(x), \Gamma) \leq C\sqrt{\varepsilon_0} \text{ für alle } x \in B_{1/2}^+$$

mit einer Konstanten $C = C(n, G, \|D\gamma\|_\infty, \mathcal{N})$.

Die Menge der Abbildungen u mit den Eigenschaften wie im Satz wird im Folgenden mit $\mathfrak{H}_{\varepsilon_0} = \mathfrak{H}_{\varepsilon_0}(G, \Gamma, \mathcal{N})$ bezeichnet.
Der Satz gilt noch mit wesentlich schwächeren Voraussetzungen, nämlich in der folgenden Form.

Satz 2.2. *Es seien $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\Gamma \subset \mathcal{N}$ eine Teilmenge hiervon. Die Abbildung $u \in H^1(B_1^+, \mathcal{N}) \cap C^1(B_1^+ \setminus \partial\mathbb{R}^n_+, \mathcal{N})$ erfülle $u(B_1^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$ und für Konstanten $\varepsilon_0 > 0$ und $K_0 \geq 0$ sowohl*

$$\sup_{B_\rho^+(x) \subset B_1^+} \rho^{2-n} \int_{B_\rho^+(x)} |Du|^2 d\mathcal{L}^n \leq \varepsilon_0$$

als auch die Gradientenabschätzung

$$|Du(x)| \leq \frac{K_0\sqrt{\varepsilon_0}}{\operatorname{dist}(x,\partial\mathbb{R}^n_+)} \quad \textit{für alle } x \in B_1^+. \tag{2.1}$$

Dann gilt mit einer Konstanten $C = C(n, K_0)$

$$\operatorname{dist}(u(x),\Gamma) \leq C\sqrt{\varepsilon_0} \textit{ für alle } x \in B^+_{1/2}.$$

Bemerkung 2.3. Der Satz (2.1) ist ein Spezialfall von Satz (2.2), da aus den Voraussetzungen die C^1-Regularität von u mittels der Sätze (1.15) und (1.17) und die beiden Abschätzungen bei geeigneter Wahl von ε_0 mit Korollar (1.13) und Satz (1.20) folgen. Darüber hinaus sagt Satz (2.2) aber unter anderem noch aus, dass Satz (2.1) gültig bleibt, wenn man statt stationärer harmonischer Abbildungen allgemeiner für ein $p > 2$ stationäre p-harmonische Abbildungen mit homogener Zielmannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ betrachtet. Für solche Abbildungen ist unter der Voraussetzung von kleiner p-Energie nämlich C^1-Regularität bewiesen, man vergleiche [TW]. Ebenso gilt eine Monotonieformel für die p-Energie und eine Gradientenabschätzung wie in (2.1), s. [DF], Korollar 2.6 und Theorem 2.1. Analoge Regularitätsaussagen sind für stationäre p-harmonische Abbildungen mit allgemeinen Zielmannigfaltigkeiten nicht bekannt.

Beweis von Satz 2.2. Mit C werden in diesem Beweis nur Konstanten bezeichnet, die ausschließlich von n und K_0 abhängen. Zu einem Punkt $x_0 \in B^+_{1/2} \setminus \partial\mathbb{R}^n_+$ sei $R := \frac{1}{3}\operatorname{dist}(x_0, \partial\mathbb{R}^n_+)$ und x_1 der Punkt in $\partial\mathbb{R}^n_+$ mit $|x_0 - x_1| = \operatorname{dist}(x_0, \partial\mathbb{R}^n_+) = 3R$. Es wird definiert $\bar{u} := ⨍_{B^+_{5R}(x_1)} u$ und $w(x) := u(x) - \bar{u}$ für $x \in B_{2R}(x_0)$. Zunächst wird die Abschätzung $|w(x_0)| \leq C_1\sqrt{\varepsilon_0}$ für eine geeignete Konstante $C_1 = C_1(n, K_0)$ gezeigt. Die Vorgehensweise hierfür ist eine Weiterentwicklung der Technik aus [Mo1, Lm. 6]. Sei G_{x_0} die Fundamentallösung des Laplaceoperators mit Singularität in x_0, also

$$G_{x_0}(x) := \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\alpha(n)}\,|x_0 - x|^{2-n} & \text{für } n > 2 \\ \frac{1}{2\pi}\log|x_0 - x| & \text{für } n = 2, \end{cases}$$

wobei $\alpha(n) := \mathcal{L}^n(B_1^n)$ das Volumen der Einheitskugel ist. In beiden Fällen ist also

$$|DG_{x_0}(x)| \leq C(n)|x_0 - x|^{1-n} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Man wählt eine Abschneidefunktion $\zeta \in C^\infty_{kpt}(B_{2R}(x_0), [0,1])$ mit $\zeta \equiv 1$ auf $B_R(x_0)$ und $\|D\zeta\|_\infty \leq CR^{-1}$. Die Greensche Darstellungsformel liefert für alle $v \in C^2_{kpt}(B_{2R}(x_0), \mathbb{R})$ die Gleichheit $v(x_0) = \int G_{x_0}\Delta v\, d\mathcal{L}^n = -\int \partial_\alpha G_{x_0}\,\partial_\alpha v\, d\mathcal{L}^n$. Wegen $\zeta(x_0) = 1$ gilt daher

$$\begin{aligned} &|w(x_0)|^2 \\ &\quad = -\int_{B_{2R}(x_0)} \partial_\alpha G_{x_0}\,\partial_\alpha(|w|^2\zeta^2) \\ &\quad \leq C\int_{B_{2R}(x_0)} |DG_{x_0}||w\cdot\partial_\alpha w|\zeta^2 + C\int_{B_{2R}(x_0)\setminus B_R(x_0)} |DG_{x_0}||w|^2|D\zeta| \\ &\quad \leq C\|w\|_\infty \int_{B_{2R}(x_0)} |DG_{x_0}||Du| + CR^{-n}\int_{B_{2R}(x_0)\setminus B_R(x_0)} |w|^2 \\ &\quad =: I + II, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Abschätzungen $|DG_{x_0}(x)| \leq C|x_0 - x|^{1-n} \leq CR^{1-n}$ für $x \in B_{2R}(x_0) \setminus B_R(x_0)$ sowie $|D\zeta| \leq CR^{-1}$ nach Definition von ζ benutzt wurden. Nun folgert man aus der Gradientenabschätzung (2.1) wegen $\operatorname{dist}(x_0, \partial\mathbb{R}^n_+) = 3R$

$$I \leq \frac{K_0\sqrt{\varepsilon_0}}{R}\|w\|_\infty \int_{B_{2R}(x_0)} |DG_{x_0}| \leq C\sqrt{\varepsilon_0}\|w\|_\infty,$$

weil $\int_{B_{2R}(x_0)} |x_0 - x|^{1-n} d\mathcal{L}^n(x) = CR$ ist. In dieser Abschätzung gilt

$$\|w\|_\infty \leq |w(x_0)| + CR\|Dw\|_\infty \leq |w(x_0)| + C\sqrt{\varepsilon_0}.$$

Außerdem folgt mit der Poincaré-Ungleichung auf Halbkugeln für $w = u - \bar{u}$ wegen $B_{2R}(x_0) \subset B^+_{5R}(x_1) \subset B^+_1$

$$II \leq CR^{-n} \int_{B^+_{5R}(x_1)} |w|^2 \leq CR^{2-n} \int_{B^+_{5R}(x_1)} |Du|^2 \leq C\varepsilon_0.$$

Damit ist gezeigt $|w(x_0)|^2 \leq C\sqrt{\varepsilon_0}|w(x_0)| + C\varepsilon_0 \leq \frac{1}{2}|w(x_0)|^2 + C\varepsilon_0$, also

$$|u(x_0) - \bar{u}|^2 = |w(x_0)|^2 \leq C_1\varepsilon_0$$

für eine Konstante $C_1 = C_1(n, K_0)$. Nachzuweisen ist nun nur noch $\operatorname{dist}(\bar{u}, \Gamma) \leq C_2\sqrt{\varepsilon_0}$ für $C_2 = C_2(n)$. Hierfür sei definiert $d(y) := \operatorname{dist}(y, \Gamma)$ für $y \in \mathcal{N}$, wobei dist der Euklidische Abstand auf $\mathbb{R}^N$ sei. Die Funktion d ist Lipschitz mit Dehnungsschranke 1. Nun integriert man die Ungleichung $\operatorname{dist}(\bar{u}, \Gamma) \leq d(u(x)) + |u(x) - \bar{u}|$ und erhält

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(\bar{u}, \Gamma) &\leq \fint_{B^+_{5R}(x_1)} d \circ u \, d\mathcal{L}^n + \fint_{B^+_{5R}(x_1)} |u(x) - \bar{u}| d\mathcal{L}^n(x) \\
&\leq C\left[R^{2-n} \int_{B^+_{5R}(x_1)} |D(d \circ u)|^2 d\mathcal{L}^n\right]^{1/2} + C\left[R^{2-n} \int_{B^+_{5R}(x_1)} |Du|^2 d\mathcal{L}^n\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

nach der Poincaré-Ungleichung wegen $d \circ u \equiv 0$ auf $B_{5R}(x_1) \cap \partial\mathbb{R}^n_+$. Da $\operatorname{Lip}(d) = 1$ gilt, ist $|D(d \circ u)| \leq |Du|$, also

$$\operatorname{dist}(\bar{u}, \Gamma) \leq C\left[R^{2-n} \int_{B^+_{5R}(x_1)} |Du|^2\right]^{1/2} \leq C\sqrt{\varepsilon_0},$$

womit das Lemma bewiesen ist. □

2.2 Fortsetzung auf die Vollkugel

In diesem Abschnitt besitze die Abbildung u stets die Eigenschaften aus Satz (2.1), das heißt $u \in \mathfrak{H}_{\varepsilon_0}(G, \Gamma, \mathcal{N})$. Besagter Satz liefert für jedes $\delta > 0$ die für die Spiegelung benötigte Eigenschaft $u(B^+_{1/2}) \subset U_\delta := \{x \in \mathcal{N} : \operatorname{dist}^{\mathcal{N}}(x, \Gamma) < \delta\}$, wenn ε_0 klein genug ist. Hierbei ist mit $\operatorname{dist}^{\mathcal{N}}$ der Riemannsche Abstand auf $\mathcal{N}$ gemeint. Man kann $\delta > 0$ so verkleinern, dass für jedes $y \in U_\delta$ der nächste Punkt $\pi(y) \in \Gamma$ eindeutig definiert und mit y durch eine eindeutige kürzeste Geodätische verbunden ist. Auf einer solchen Umgebung U_δ von Γ wird nun die geodätische Spiegelung σ an der Untermannigfaltigkeit Γ definiert durch

$$\sigma : U_\delta \to U_\delta,\ y = \exp_{\pi(y)}(v) \mapsto \exp_{\pi(y)}(-v),$$

wobei $v \in \mathrm{T}_{\pi(y)}\mathcal{N}$ eindeutig durch die Bedingung definiert ist, dass die Geodätische $[0,1] \ni t \mapsto \exp_{\pi(y)}(tv)$ die kürzeste Verbindung von $\pi(y)$ nach y ist. Die Spiegelungsabbildung σ ist für hinreichend kleine $\delta > 0$ ein Diffeomorphismus auf U_δ und

$$\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{U_\delta}\,.$$

Wählt man ε_0 so klein, dass $u(B^+_{1/2}) \subset U_\delta$ gilt, so kann man u durch Spiegelung an Γ auf die ganze Kugel $B_{1/2}$ fortsetzen. Hierzu wird für $x = (x', x_n) \in B_{1/2}$ definiert $x^* := (x', -x_n)$ sowie $B^-_r := (B^+_r)^*$ für die unteren Halbkugeln vom Radius $r > 0$ notiert. Mit diesen Schreibweisen lautet die Fortsetzung von $u \in H^1(B^+_{1/2}, \mathcal{N})$

$$\boldsymbol{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in B^+_{1/2} \\ \sigma(u(x^*)) & \text{für } x \in B^-_{1/2}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Die so definierte Abbildung $\boldsymbol{u}$ liegt im Sobolev-Raum $H^1(B_{1/2}, \mathcal{N})$, da $\boldsymbol{u}|_{B^+_{1/2}}$ und $\boldsymbol{u}|_{B^-_{1/2}}$ H^1-Abbildungen in $\mathcal{N}$ sind und auf $B_{1/2} \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ die gleichen Randwerte haben. Sei g die von der Euklidischen Metrik von $\mathbb{R}^N$ induzierte Metrik auf $\mathrm{T}\mathcal{N}$. Die fortgesetzte Abbildung $\boldsymbol{u}$ wird nun nicht mehr mit g gemessen, sondern mit dem Skalarproduktfeld h längs u, definiert durch

$$h(x) := \begin{cases} g(\boldsymbol{u}(x)) & \text{für } x \in B^+_{1/2} \\ \sigma^* g(\boldsymbol{u}(x)) & \text{für } x \in B^-_{1/2}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Dabei ist für $y \in U_\delta \subset \mathcal{N}$ und $v, w \in T_y\mathcal{N}$ definiert

$$\sigma^* g(y)(v, w) := g(\sigma(y))(D\sigma(y)v, D\sigma(y)w).$$

Die Metrik $\gamma = (\gamma_{\alpha\beta})$ wird für $x \in B^-_{1/2}$ fortgesetzt durch

$$\gamma_{\alpha\beta}(x) := \begin{cases} \gamma_{\alpha\beta}(x^*) & \text{für } 1 \le \alpha, \beta \le n-1 \text{ oder } \alpha = \beta = n \\ -\gamma_{\alpha\beta}(x^*) & \text{für } \alpha = n \ne \beta \text{ oder } \alpha \ne n = \beta. \end{cases} \tag{2.4}$$

Weil γ die Bedingung (1.3) erfüllt, stellt diese Definition eine stetige Fortsetzung von γ dar. Für $x \in B^-_{1/2}$ sind die Eigenwerte von $\gamma(x)$ dieselben wie die von $\gamma(x^*)$. Daher ist die fortgesetzte Metrik γ auch auf $B^-_{1/2}$ positiv definit und es gilt $\sqrt{\gamma(x)} = \sqrt{\gamma(x^*)}$. Im Folgenden wird abgekürzt

$$\Sigma(x) := D\sigma(\boldsymbol{u}(x)).$$

Für $x_0 \in B_{1/2} \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ gilt wegen $\boldsymbol{u}(x_0) \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \Sigma(x_0) &= D\sigma(\boldsymbol{u}(x_0)) = \Pi_\Gamma(\boldsymbol{u}(x_0)) - \Pi^\perp_\Gamma(\boldsymbol{u}(x_0)) \\ &= 2\Pi_\Gamma(\boldsymbol{u}(x_0)) - \mathrm{Id}(\boldsymbol{u}(x_0)), \end{aligned} \tag{2.5}$$

wobei $\Pi_\Gamma(y)$ und $\Pi^\perp_\Gamma(y)$ für $y \in \Gamma$ die orthogonalen Projektionen von $\mathrm{T}_y\mathcal{N}$ auf $\mathrm{T}_y\Gamma$ bzw. auf $\mathrm{T}^\perp_y\Gamma \subset \mathrm{T}_y\mathcal{N}$ sind und $\mathrm{Id}(y)$ die Identität auf $\mathrm{T}_y\mathcal{N}$. Denn wegen $\sigma\big|_\Gamma = \mathrm{id}$ gilt $D\sigma(y)v = v$ für $v \in \mathrm{T}_y\Gamma$ und für $v \perp \mathrm{T}_y\Gamma$ gilt $\sigma(\exp_y(tv)) = \exp_y(-tv)$, also $D\sigma(y)v = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\exp_y(-tv) = -v$. Weiter gilt wegen $\sigma = \sigma^{-1}$

$$\Sigma(x)^{-1} = D\sigma(\boldsymbol{u}(x))^{-1} = D\sigma(\sigma(\boldsymbol{u}(x))) = D\sigma(\boldsymbol{u}(x^*)) = \Sigma(x^*). \tag{2.6}$$

Die kovariante Ableitung eines längs $\boldsymbol{u}$ zu $\mathcal{N}$ tangentialen H^1-Vektorfeldes V wird dementsprechend für $\mathcal{L}^n$-fast alle $x \in B_{1/2}$ definiert als

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{T}_{\boldsymbol{u}(x)}\mathcal{N}) \ni \nabla^h V(x) := \begin{cases} \nabla^{\mathcal{N}} V(x) & \text{falls } x \in B^+_{1/2} \\ \Sigma(x^*)\nabla^{\mathcal{N}}\big(\Sigma(x)V(x)\big) & \text{falls } x \in B^-_{1/2}, \end{cases}$$

wenn $\nabla^{\mathcal{N}}$ der Levi-Civita-Zusammenhang auf $\mathcal{N}$ ist. Der Grund für diese Spiegelungskonstruktion ist das folgende

Lemma 2.4. *Eine Abbildung $u \in \mathfrak{H}_{\varepsilon_0}$ sei wie in (2.2) durch Spiegelung zu einer Abbildung $\boldsymbol{u} \in H^1(B_{1/2}, \mathcal{N})$ fortgesetzt. Ebenso sei $\gamma \in \mathfrak{M}_G(B^+_{1/2})$ wie in (2.4) auf $B_{1/2}$ fortgesetzt, h wie in (2.3) und ∇^h wie oben definiert. Dann gilt für jedes beschränkte Vektorfeld $V \in H^1(B_{1/2}, \mathrm{T}\mathcal{N})$ mit kompaktem Träger im Inneren von $B_{1/2}$ und $V(x) \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{u}(x)}\mathcal{N}$ für $\mathcal{L}^n$-fast alle $x \in B_{1/2}$*

$$\int_{B_{1/2}} D\boldsymbol{u} \cdot^h_\gamma \nabla^h V d\mu_\gamma = 0, \tag{2.7}$$

wobei $\cdot^h_\gamma$ das Hilbert-Schmidt-Skalarprodukt zum Skalarproduktfeld h auf $\mathrm{T}\mathcal{N}$ und zur Riemannschen Metrik γ auf $B_{1/2}$ bezeichnet. Die Gleichung (2.7) *bedeutet also*

$$\int_{B^+_{1/2}} Du \cdot_\gamma \nabla^{\mathcal{N}} V d\mu_\gamma + \int_{B^-_{1/2}} \Sigma D\boldsymbol{u} \cdot_\gamma \nabla^{\mathcal{N}}(\Sigma V) d\mu_\gamma = 0.$$

Beweis. Das Vektorfeld V wird in den bezüglich der Spiegelung σ equivarianten und den antiequivarianten Anteil zerlegt: $V = V_e + V_a$, wobei für $x \in B_{1/2}$ definiert ist

$$\begin{aligned} V_e(x) &:= \frac{1}{2}[V(x) + \Sigma(x^*)V(x^*)], \\ V_a(x) &:= \frac{1}{2}[V(x) - \Sigma(x^*)V(x^*)]. \end{aligned}$$

Wegen $\Sigma(x)\Sigma(x^*) = \mathrm{Id}(\boldsymbol{u}(x^*))$ nach (2.6) gilt

$$V_e(x^*) = \Sigma(x)V_e(x) \qquad \text{und} \qquad V_a(x^*) = -\Sigma(x)V_a(x). \tag{2.8}$$

Nach Definition von V_e und (2.5) gilt für $x_0 \in B_{1/2} \cap \partial\mathbb{R}^n_+$

$$\begin{aligned} V_e(x_0) &= \frac{1}{2}[V(x_0) + \Sigma(x_0)V(x_0)] \\ &= \Pi_\Gamma(\boldsymbol{u}(x_0))V(x_0) \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{u}(x_0)}\Gamma. \end{aligned}$$

Daher ist $V_e\big|_{B^+_{1/2}}$ ein zulässiges Variationsvektorfeld für u zur freien Randbedingung $u(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$, so dass

$$\int_{B^+_{1/2}} D\boldsymbol{u} \cdot^h_\gamma \nabla^h V_e d\mu_\gamma = \int_{B^+_{1/2}} Du \cdot_\gamma \nabla^{\mathcal{N}} V_e d\mu_\gamma = 0. \tag{2.9}$$

Weiter berechnet man mit der Definition von h und ∇^h und unter Berücksichtigung der Equivarianz (2.8) von V_e

$$\begin{aligned}
&\int_{B^-_{1/2}} D\boldsymbol{u} \cdot^h_\gamma \nabla^h V_e d\mu_\gamma \\
&= \int_{B^-_{1/2}} \Sigma D\boldsymbol{u} \cdot_\gamma \nabla^{\mathcal{N}}(\Sigma V_e) d\mu_\gamma \\
&= \int_{B^-_{1/2}} D[u(x^*)] \cdot_{\gamma(x)} \nabla^{\mathcal{N}}[V_e(x^*)] d\mu_\gamma(x) \\
&= \int_{B^-_{1/2}} Du(x^*) \cdot_{\gamma(x^*)} \nabla^{\mathcal{N}} V_e(x^*) d\mu_\gamma(x) \qquad \text{nach Definition (2.4) von } \gamma \\
&= \int_{B^+_{1/2}} Du \cdot_\gamma \nabla^{\mathcal{N}} V_e d\mu_\gamma = 0. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Mit der gleichen Rechnung folgt wegen der Antiequivarianz (2.8) von V_a

$$\int_{B^-_{1/2}} D\boldsymbol{u} \cdot^h_\gamma \nabla^h V_a d\mu_\gamma = -\int_{B^+_{1/2}} Du \cdot_\gamma \nabla^{\mathcal{N}} V_a d\mu_\gamma = -\int_{B^+_{1/2}} D\boldsymbol{u} \cdot^h_\gamma \nabla^h V_a d\mu_\gamma,$$

also

$$\int_{B_{1/2}} D\boldsymbol{u} \cdot^h_\gamma \nabla^h V_a d\mu_\gamma = 0. \qquad (2.11)$$

Aus (2.9), (2.10) und (2.11) folgt die Behauptung. □

2.3 Nachtrag zu Abschnitt 1.4

Für den Beweis von Satz 1.17 ist noch der Schluss von der Hölderstetigkeit einer stationären harmonischen Abbildung auf die $C^{1,\alpha}$-Regularität am freien Rand nachzuliefern. Hierfür benutzt man das in Abschnitt 2.2 erläuterte Spiegelungsverfahren, um eine stationäre harmonische Abbildung $u \in C^{0,\alpha} \cap H^1(B^+_{1/2}, \mathcal{N})$ mit freier Randbedingung zu einer Abbildung $\boldsymbol{u} \in C^{0,\alpha} \cap H^1(B_{1/2}, \mathcal{N})$ fortzusetzen. Dazu benötigt man in diesem Fall nicht Lemma 2.1, weil man wegen der Hölderstetigkeit von u und der Randbedingung $u(B_{1/2} \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$ annehmen kann, dass die Funktionswerte von u nahe an Γ liegen. Das folgende Lemma liefert dann zusammen mit Satz 1.18 die $C^{1,\alpha}$-Regularität auch am freien Rand.

Lemma 2.5. *Die Voraussetzungen von Lemma 2.4 seien gegeben mit einem auf $B^+_{1/2}$ stetigen $u \in \mathfrak{H}_{\varepsilon_0}$, so dass auch die wie im vorangehenden Abschnitt durch Spiegelung fortgesetzte Abbildung $\boldsymbol{u} \in H^1(B_{1/2}, \mathcal{N})$ stetig ist. Falls $\rho > 0$ so klein gewählt ist, dass $\boldsymbol{u}(B_\rho(x_0))$ kompakten Abschluss in einem Kartenbereich von $\mathcal{N}$ hat, erfüllt $\boldsymbol{u}$ die folgende Differentialgleichung in Koordinatendarstellung. Für alle beschränkten, längs $\boldsymbol{u}$ tangentialen Vektorfelder $V \in H^1(B_\rho(x_0), \mathrm{T}\mathcal{N})$, die kompakten Träger im Inneren von $B_\rho(x_0)$ haben, ist*

$$\int_{B_\rho(x_0)} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha \boldsymbol{u}^i \partial_\beta V^i \sqrt{\gamma} d\mathcal{L}^n = \int_{B_\rho(x_0)} f_i(\cdot, \boldsymbol{u}, D\boldsymbol{u}) V^i d\mathcal{L}^n,$$

wobei die Komponenten $\boldsymbol{u}^i$ und V^i bezüglich der lokalen Koordinaten auf $\mathcal{N}$ gebildet sind. Die Funktionen $f_i : B_\rho(x_0) \times \boldsymbol{u}(B_\rho(x_0)) \times (\mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ erfüllen dabei für $1 \le i \le \dim \mathcal{N}$

$$|f_i(x, \boldsymbol{u}(x), D\boldsymbol{u}(x))| \le C|D\boldsymbol{u}(x)|^2$$

mit einer Konstanten C, die nur von $n, G, \Gamma, \mathcal{N}$ und den Koordinaten auf $\boldsymbol{u}(B_\rho(x_0))$ abhängt.

Beweis. Es seien X_i für $1 \le i \le \dim \mathcal{N}$ lokale Koordinatenvektorfelder auf einer Umgebung von $\boldsymbol{u}(B_\rho(x_0))$ in $\mathcal{N}$. Die Christoffelsymbole $H_{\beta k}^{\,j}$ zu ∇^h sind für $1 \le \beta \le n$ und $1 \le j, k \le \dim \mathcal{N}$ definiert durch die Gleichungen $\nabla^h_{e_\beta}(X_k \circ \boldsymbol{u}) = H_{\beta k}^{\,j}(X_j \circ \boldsymbol{u})$. Es folgt für alle $x \in B_\rho(x_0)$ die Abschätzung $|H_{\beta k}^{\,j}(x)| \le C|D\boldsymbol{u}(x)|$. Sei nun $V = V^i(X_i \circ \boldsymbol{u})$ wie im Lemma und hierzu $\widetilde{V} = \widetilde{V}^j(X_j \circ \boldsymbol{u})$ definiert durch $\widetilde{V}^j := h^{ij}V^i$, wobei (h^{ij}) die inverse Matrix zu (h_{ij}) sei. Dann gilt nach der Produktregel für den Zusammenhang ∇^h, die sich aus der Produktregel für $\nabla^{\mathcal{N}}$ ableitet,

$$\nabla^h_{e_\beta}\widetilde{V} = \partial_\beta \widetilde{V}^j(X_j \circ \boldsymbol{u}) + \widetilde{V}^k \nabla^h_{e_\beta}(X_k \circ \boldsymbol{u}) = (\partial_\beta \widetilde{V}^j + \widetilde{V}^k H_{\beta k}^{\,j})(X_j \circ \boldsymbol{u}).$$

Damit lautet die Gleichung (2.7) für das Vektorfeld $\widetilde{V}$

$$\begin{aligned} 0 &= \int h_{ij}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha \boldsymbol{u}^i (\nabla^h_{e_\beta}\widetilde{V})^j \sqrt{\gamma}\, d\mathcal{L}^n \\ &= \int h_{ij}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha \boldsymbol{u}^i \partial_\beta \widetilde{V}^j \sqrt{\gamma}\, d\mathcal{L}^n + \int h_{ij}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha \boldsymbol{u}^i H_{\beta k}^{\,j}\widetilde{V}^k \sqrt{\gamma}\, d\mathcal{L}^n, \end{aligned}$$

also folgt wegen $\widetilde{V}^j = h^{lj}V^l$ bzw. $h_{ij}\widetilde{V}^j = V^i$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &\int \gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha \boldsymbol{u}^i \partial_\beta V^i \sqrt{\gamma}\, d\mathcal{L}^n \\ &\quad = \int \gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha \boldsymbol{u}^i \partial_\beta h_{ij}\, h^{lj} V^l \sqrt{\gamma}\, d\mathcal{L}^n - \int h_{ij}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha \boldsymbol{u}^i H_{\beta k}^{\,j} h^{lk} V^l \sqrt{\gamma}\, d\mathcal{L}^n \\ &\quad =: \int f_l(\cdot, \boldsymbol{u}, D\boldsymbol{u}) V^l\, d\mathcal{L}^n, \end{aligned}$$

und $|f_l(\cdot, \boldsymbol{u}, D\boldsymbol{u})| \le C|D\boldsymbol{u}||Dh| + C|D\boldsymbol{u}||H| \le C|D\boldsymbol{u}|^2$, wobei C nur von den genannten Größen abhängt. □

Kapitel 3

Hölderstetigkeit am freien Rand

3.1 Das Ergebnis

Das Ziel dieses Kapitels ist der Beweis des folgenden Resultates.

Theorem 3.1. *Sei $\mathcal{N}$ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit sowie $\Gamma \subset \mathcal{N}$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sei auf der n-dimensionalen Halbkugel B_2^+ eine Riemannsche Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(B_2^+)$ gegeben. Dann gibt es eine Konstante $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n, G, \|D\gamma\|_\infty, \Gamma, \mathcal{N}) > 0$, so dass für jede Abbildung $u \in H^1(B_2^+, \mathcal{N})$, die bezüglich der Metrik γ stationär harmonisch zur freien Randbedingung $u(B_2^+ \cap \partial\mathbb{R}_+^n) \subset \Gamma$ ist, aus der Bedingung*

$$2^{2-n} \int_{B_2^+} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \leq \varepsilon_0 \tag{3.1}$$

die Hölderstetigkeit von u auf $B_{1/4}^+$ folgt mit einem geeignet zu wählenden Hölder-Exponenten $\alpha = \alpha(n, G, \|D\gamma\|_\infty, \Gamma, \mathcal{N}) \in (0,1)$ und weiter

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/4}^+)} \leq C = C(n, G, \|D\gamma\|_\infty, \Gamma, \mathcal{N}).$$

Der Satz 1.17 liefert dann für ein $k \geq 2$ die $C^{k,\alpha}$-Regularität von u auf $B_{1/4}^+$ und Abschätzungen der $C^{k,\alpha}$-Norm etwa auf $B_{1/8}^+$.

Bemerkung 3.2. Aus Satz 3.4 und Lemma 2.4 folgt die Aussage des Theorems sogar allgemeiner für nur schwach harmonische Abbildungen, wenn die Voraussetzung (3.1) zu

$$\sup_{B_\rho^+(x) \subset B_1^+} \rho^{2-n} \int_{B_\rho^+(x)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \leq \varepsilon_0$$

verschärft wird.

Mit einem Standard-Überdeckungsargument folgt wie in [SU, Cor. 2.7] für jede Sobolev-Abbildung $u \in H^1(B_1^+, \mathcal{N})$

$$\mathcal{H}^{n-2}\left(\left\{x \in B_1^+ : \liminf_{r \searrow 0} r^{2-n} \int_{B_r^+(x)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \geq \varepsilon_0\right\}\right) = 0. \tag{3.2}$$

Daraus folgt aus den Theoremen 3.1 und 1.15 durch Umskalieren das

Korollar 3.3. *Seien $\mathcal{N}$, Γ, n und γ wie im Theorem sowie $u \in H^1(B_1^+, \mathcal{N})$ stationär harmonisch zur freien Randbedingung $u(B_1^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$. Dann gilt*

$$\mathcal{H}^{n-2}(\operatorname{sing}(u)) = 0,$$

wobei $\operatorname{sing}(u) := B_1^+ \setminus \{x \in B_1^+ : u \in C^{2,\alpha} \text{ auf einer Umgebung von } x\}$ *sei.*

Der Beweis von Satz 3.1 beruht auf der Tatsache, dass die durch Spiegelung fortgesetzte Abbildung $\boldsymbol{u}$ eine Differentialgleichung der Form (2.7) erfüllt. Genauer werden nur die folgenden Voraussetzungen an die Daten γ, h und ∇^h benötigt.
Die Riemannsche Metrik $\gamma \in C^{0,1}(B_{1/2}, \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^{n*})$ erfüllt für Konstanten $G \geq 1$ und $L \geq 0$ sowie für alle $x \in B_{1/2}$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$G^{-2}|\xi|^2 \leq \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \gamma_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta \leq G^2|\xi|^2 \quad \text{sowie} \quad \operatorname{Lip}(\gamma) \leq L. \tag{3.3}$$

Das Skalarproduktfeld $h = (h_{ij})$ ist eine H^1-Metrik auf $\boldsymbol{u}^* \mathrm{T}\mathcal{N}$, die für alle $x \in B_{1/2}$ und $v \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{u}(x)}\mathcal{N}$ die Eigenschaften

$$H^{-2}|v|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{\dim\mathcal{N}} h_{ij}(x)v^iv^j \leq H^2|v|^2 \quad \text{sowie} \quad \sup_{i,j}|Dh_{ij}(x)| \leq K_1(1+|D\boldsymbol{u}(x)|) \tag{3.4}$$

besitzt, mit Konstanten $H \geq 1$ und $K_1 \geq 0$. Zuletzt ist ∇^h ein Zusammenhang auf $\boldsymbol{u}^* \mathrm{T}\mathcal{N}$, der für alle C^1-Schnitte V in $\mathrm{T}\mathcal{N}$ und alle $x \in B_{1/2}$ erfüllt

$$|\nabla^h(V \circ \boldsymbol{u})(x)| \leq K_2\|V\|_{C^1}(1+|D\boldsymbol{u}(x)|) \tag{3.5}$$

mit einer Konstanten $K_2 > 0$. Die Konstanten H, K_1 und K_2 hängen dabei nur von den Daten n, Γ und $\mathcal{N}$ ab. In den letzten beiden Abschätzungen kann man den Faktor $1+|D\boldsymbol{u}|$ sogar durch $|D\boldsymbol{u}|$ ersetzen. Die oberen Schranken werden nur deshalb allgemeiner gehalten, weil dies in Kapitel 6 bei der Behandlung von allgemeinen Randwerten benötigt wird.
Der Zusammenhang ∇^h ist darüber hinaus metrisch bezüglich des Skalarproduktfeldes h, das heißt für je zwei längs $\boldsymbol{u}$ tangentiale Vektorfelder $V, W \in H^1(B_{1/2}, \mathrm{T}\mathcal{N})$ gilt

$$D(V \cdot_h W) = \nabla^h V \cdot_h W + V \cdot_h \nabla^h W. \tag{3.6}$$

Diese Bedingung rechnet man wie folgt nach. Auf $B^+_{1/2}$ entspricht sie der Gleichheit $D(V \cdot W) = \nabla^{\mathcal{N}} V \cdot W + V \cdot \nabla^{\mathcal{N}} W$, die erfüllt ist, da der Levi-Civita-Zusammenhang $\nabla^{\mathcal{N}}$ metrisch bezüglich der Riemannschen Metrik auf $\mathcal{N}$ ist. Auf $B^-_{1/2}$ gilt dagegen

$$D(V \cdot_h W) = D(\Sigma V \cdot \Sigma W) = \nabla^{\mathcal{N}}(\Sigma V) \cdot \Sigma W + \Sigma V \cdot \nabla^{\mathcal{N}}(\Sigma W)$$

und damit die Behauptung.

Unter diesen allgemeineren Voraussetzungen gilt

Satz 3.4. *Sei $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$ eine kompakte Mannigfaltigkeit, $K_0 \geq 0$ sowie G, L, H, K_1, K_2 und n Konstanten wie oben. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, nur abhängig von den Daten $G, L, H, K_0, K_1, K_2, n$ und $\mathcal{N}$, so dass Folgendes gilt: Seien eine Metrik γ, ein Skalarproduktfeld h, ein Zusammenhang ∇ und eine Abbildung $u \in H^1(B^n_{1/2}, \mathcal{N})$ gegeben* *wie in (3.3) bis (3.6), wobei ∇^h durch ∇ und $\boldsymbol{u}$ durch u ersetzt seien. Weiter sei eine Funktion $F : B_{1/2} \times \mathcal{N} \times (\mathbb{R}^{n*} \otimes \mathrm{T}\mathcal{N}) \to \mathrm{T}\mathcal{N}$ gegeben, die $F(x, y, \hat{\xi}) \in \mathrm{T}_y\mathcal{N}$ sowie*

$$|F(x, y, \hat{\xi})| \leq K_0(1 + |\hat{\xi}|) \quad \textit{für alle } x \in B_{1/2},\ y \in \mathcal{N} \textit{ und } \hat{\xi} \in \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathrm{T}\mathcal{N} \tag{3.7}$$

erfüllt. Unter diesen Voraussetzungen genüge die Abbildung u der Differentialgleichung

$$\int_{B_{1/2}} Du \cdot_\gamma^h \nabla V d\mu_\gamma = \int_{B_{1/2}} F(\cdot, u, Du) \cdot_h V d\mathcal{L}^n \tag{3.8}$$

für beliebige längs u tangentiale Vektorfelder $V \in L^\infty \cap H^1(B_{1/2}, \mathrm{T}\mathcal{N})$ mit kompaktem Träger im Inneren von $B_{1/2}$ und u besitze kleine skalierte Energien in der Form

$$\sup_{B_\rho(x) \subset B_{1/2}} \rho^{2-n} \int_{B_\rho(x)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \leq \varepsilon_0. \tag{3.9}$$

Dann ist $u \in C^{1,\alpha}(B_{1/4})$ mit einem Hölderexponenten $\alpha > 0$ und beschränkten Normen $\|u\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/4})} + \|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/8})} \leq C$, wobei α und C nur von denselben Daten abhängen wie ε_0.

Der Satz enthält die Sätze 1.15 und 3.1 als Spezialfälle mit $F \equiv 0$ wegen Lemma 1.3, Korollar 1.13 und Lemma 2.4. Darüberhinaus impliziert er auch entsprechende Aussagen unter wesentlich allgemeineren Randbedingungen, vgl. Theorem 6.15. Damit deckt obiger Satz das Regularitätsproblem für stationäre harmonische Abbildungen sowohl an inneren Punkten als auch an Randpunkten mit einer freien Randbedingung, Dirichlet-Randwerten oder noch allgemeiner gefassten Randwerten ab.
Das Hauptproblem beim Beweis ist das Herleiten der Hölderstetigkeit. Dies wird in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels ausgeführt. Ist die Hölderstetigkeit erst einmal bewiesen, so folgt die behauptete $C^{1,\alpha}$-Regularität wie folgt. Die Rechnung aus Lemma 2.5 bringt die Differentialgleichung (3.8) in lokalen Koordinaten auf $u(B_\rho(x_0))$, $\rho << 1$, auf die Form

$$\int_{B_\rho(x_0)} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha u^i \partial_\beta V^i \sqrt{\gamma} d\mathcal{L}^n = \int_{B_\rho(x_0)} f_i(\cdot, u, Du) V^i d\mathcal{L}^n,$$

wobei die Funktionen $f_i : B_\rho(x_0) \times u(B_\rho(x_0)) \times (\mathbb{R}^{n*} \otimes \mathrm{T}\mathcal{N}) \to \mathbb{R}$ die Abschätzungen

$$f_i(x, u(x), Du(x)) \leq C(1 + |Du(x)|^2) \quad \text{für alle } x \in B_\rho(x_0) \tag{3.10}$$

erfüllen. Die Konstante C hängt dabei nur von den Daten $G, L, H, K_0, K_1, K_2, n$ und $\mathcal{N}$ ab. Daher liefert Satz 1.18 die $C^{1,\alpha}$-Regularität mit der behaupteten Abschätzung der $C^{1,\alpha}$-Norm.
Die Voraussetzung (3.7) im Satz lässt sich nicht zu quadratischem Wachstum der Funktion F im Stil von (3.10) abschwächen, weil für solche Funktionen F der Beweis der Hölderstetigkeit zusammenbricht. Genauer ließe sich der Term in untenstehender Ungleichung (3.32) nur durch $C\rho^{n-1}$ abschätzen, was eine Größenordnung zu schlecht ist.

3.2 Konstruktion von optimalen Basisvektorfeldern

Dieser Abschnitt folgt der Arbeit [H], wobei einige Änderungen zur Anpassung an die allgemeineren Voraussetzungen nötig sind. Man kann wie in [H] o.E. annehmen, dass auf

$\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$ globale glatte Basisvektorfelder existieren, denn sonst kann man zum Normalenbündel $\mathrm{T}^\perp\mathcal{N}$ übergehen, dessen Tangentialbündel trivial ist. $\mathrm{T}^\perp\mathcal{N}$ versieht man mit der Produktmetrik $\tilde{h} = (h_{ij}) \times (\delta_{ij})$ bezüglich der Zerlegung $\mathrm{T}_v(\mathrm{T}^\perp\mathcal{N}) = \mathrm{T}_y\mathcal{N} \oplus \mathrm{T}_y^\perp\mathcal{N}$ für $v \in \mathrm{T}_y^\perp\mathcal{N}$. Außerdem geht man zu dem Zusammenhang $\widetilde{\nabla} := \nabla \times D$ auf $\mathrm{T}(\mathrm{T}^\perp\mathcal{N})$ über mit der komponentenweisen Ableitung D auf den Fasern $\mathrm{T}_y^\perp\mathcal{N}$. Dann erfüllt eine Abbildung $u : B_{1/2} \to \mathcal{N} \subset \mathrm{T}^\perp\mathcal{N}$ genau dann die Differentialgleichung (3.8) als Abbildung nach $\mathcal{N}$, wenn sie als Abbildung nach $\mathrm{T}^\perp\mathcal{N}$ die gleiche Differentialgleichung mit $\tilde{h}$ und $\widetilde{\nabla}$ erfüllt. Dabei erfüllen $\tilde{h}$ und $\widetilde{\nabla}$ genau wie h und ∇ die Voraussetzungen (3.4) bis (3.6). Da $\mathrm{Bild}(u) \subset \mathcal{N}$ in einer kompakten Menge liegt, existieren in einer Umgebung von $\mathrm{Bild}(u) \subset \mathcal{N} \subset \mathrm{T}^\perp\mathcal{N}$ glatte Basisvektorfelder mit endlicher C^1-Norm. Man hat also o.E. für $1 \le j \le k := \dim\mathcal{N}$ globale orthonormale C^1-Basisvektorfelder $\tilde{e}_j(y) \in \mathrm{T}_y\mathcal{N}$ mit $\|\tilde{e}_j\|_{C^1(\mathcal{N})} \le C(\mathcal{N})$. Aus der Basis $\tilde{e}_j(u(x))$ konstruiert man für $x \in B_{1/2}$ mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren H^1-Basisvektorfelder $\hat{e}_j(x) \in \mathrm{T}_{u(x)}\mathcal{N}$, die für die Skalarprodukte $h(x)$ orthonormal sind. Wegen der Voraussetzungen (3.4) und (3.5) an h und ∇ ist

$$\sup_{1\le j\le k} |\nabla \hat{e}_j(x)| \le C(1 + |Du(x)|) \quad \text{für alle } x \in B_{1/2} \tag{3.11}$$

mit einer Konstanten $C = C(n, H, K_1, K_2, \mathcal{N})$.

3.2.1 Ein Minimierer für das Funktional $\mathcal{F}$

Für ein später zu wählendes $\rho \in (0, 1/2)$ betrachtet man die Situation auf der Kugel B_ρ. Wie man später sieht, ist es ausreichend, den Fall einer Euklidischen Metrik auf B_ρ zu betrachten. Für $R = (R_{ij}) \in H^1(B_\rho, \mathbb{O}(k))$ wird definiert $e_i^R := R_{ij}\hat{e}_j$ sowie

$$\mathcal{F}(R) := \sum_i \int_{B_\rho} \|\nabla e_i^R\|_h^2 =: \sum_i \|\nabla e_i^R\|_{L^2,h}^2,$$

wobei $\|\cdot\|_h$ die Hilbert-Schmidt-Norm zum Skalarproduktfeld h auf $\mathcal{N}$ und zur Euklidischen Metrik auf B_ρ ist. Wie in [H] wird ein Minimierer von $\mathcal{F}$ gesucht.

Lemma 3.5. *$\mathcal{F}$ besitzt einen Minimierer $R^0 \in H^1(B_\rho, \mathbb{O}(k))$.*

Beweis. Sei $R^m = (R_{ij}^m) \in H^1(B_\rho, \mathbb{O}(k))$ für $m \in \mathbb{N}$ eine Minimalfolge, also

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{F}(R^m) = m_{\mathcal{F}} := \inf_{H^1(B_\rho, \mathbb{O}(k))} \mathcal{F}.$$

Für $1 \le i \le k$ gilt mit der abkürzenden Schreibweise $e_i^m := R_{ij}^m\hat{e}_j$ nach der Produktregel für ∇

$$\nabla e_i^m = \nabla(R_{ij}^m\, \hat{e}_j) = \hat{e}_j \otimes DR_{ij}^m + R_{ij}^m \nabla \hat{e}_j. \tag{3.12}$$

Integrieren über B_ρ liefert, da die $\hat{e}_j$ bezüglich h orthonormal sind:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^k \|DR_{ij}^m\|_{L^2}^2 &= \|\hat{e}_j \otimes DR_{ij}^m\|_{L^2,h}^2 \\ &\le 2\|\nabla\hat{e}_j\|_{L^2,h}^2 + 2\|\nabla(R_{ij}^m\, \hat{e}_j)\|_{L^2,h}^2 \\ &\le \widetilde{C} + 2\mathcal{F}(R^m) \le C, \end{aligned}$$

da $\mathcal{F}(R^m) \to m_{\mathcal{F}}$ bei $m \to \infty$, wobei die Konstanten hier im Gegensatz zur übrigen Arbeit von Du abhängen, nicht aber von $m \in \mathbb{N}$. Weil außerdem wegen $R^m(x) \in \mathbb{O}(k)$

für alle $x \in B_\rho$ die L^2-Norm von R^m unabhängig von m beschränkt ist, folgt die Abschätzung $\sup_m \|R^m\|_{H^1} \le C$. Also kann man nach Übergang zu einer Teilfolge für ein $R^0 \in H^1(B_\rho, \mathbb{O}(k))$ schwache Konvergenz $R^m \rightharpoonup R^0$ in $H^1(B_\rho, \mathbb{O}(k))$ annehmen und nach dem Satz von Rellich $R^m \to R^0$ in L^2. Wegen $\mathcal{F}(R^m) \to m_{\mathcal{F}} \le \mathcal{F}(R^0)$ folgt mit der Schreibweise $e_i^m := R_{ij}^m \hat{e}_j$ für $m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
0 &\ge \lim_{m\to\infty} \mathcal{F}(R^m) - \mathcal{F}(R^0) \\
&= \sum_{i=1}^k \left(\lim_{m\to\infty} \|\nabla e_i^m\|_{L^2,h}^2 - \|\nabla e_i^0\|_{L^2,h}^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^k \left(\lim_{m\to\infty} \|\nabla (e_i^m - e_i^0)\|_{L^2,h}^2 + 2 \lim_{m\to\infty} (\nabla e_i^m, \nabla e_i^0)_{L^2,h} - 2\|\nabla e_i^0\|_{L^2,h}^2 \right) \\
&\ge 2 \sum_{i=1}^k \left(\lim_{m\to\infty} L_i(R^m) - L_i(R^0) \right),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

wobei $L_i(R^m) := (\nabla e_i^m, \nabla e_i^0)_{L^2,h}$ definiert ist. Es wird nun gezeigt, dass nach Übergang zu einer Teilfolge $L_i(R^m) \to L_i(R^0)$ konvergiert bei $m \to \infty$. Dazu berechnet man mit der Produktregel (3.12)

$$L_i(R^m) = (\hat{e}_j \otimes DR_{ij}^m, \nabla e_i^0)_{L^2,h} + (R_{ij}^m \nabla \hat{e}_j, \nabla e_i^0)_{L^2,h}. \tag{3.14}$$

Bezeichnet man den ersten Summanden mit $\hat{L}_{ij}(R^m)$, so ist $\hat{L}_{ij}(R)$ ein stetiges lineares Funktional in $R \in H^1(B_\rho, \mathbb{R}^{k\times k})$, da

$$|\hat{L}_{ij}(R)| \le C\|DR_{ij}\|_{L^2}\|\nabla e_i^0\|_{L^2} \le C\|R\|_{H^1}.$$

Wegen schwacher Konvergenz $R^m \rightharpoonup R^0$ in H^1 gilt daher bei $m \to \infty$

$$\hat{L}_{ij}(R^m) \to \hat{L}_{ij}(R^0). \tag{3.15}$$

Weiter gilt nach Übergang zu einer Teilfolge $R_{ij}^m \to R_{ij}^0$ fast überall und

$$|R_{ij}^m \nabla \hat{e}_j \cdot_h \nabla e_i^0| \le C|R_{ij}^m \nabla \hat{e}_j||\nabla e_i^0| \le C(1 + |Du|)|\nabla e_i^0| \in L^1,$$

also folgt mit dominierter Konvergenz aus (3.14) und (3.15) bei $m \to \infty$:

$$L_i(R^m) \longrightarrow \sum_{j=1}^k \left[\hat{L}_{ij}(R^0) + (R_{ij}^0 \nabla \hat{e}_j, \nabla e_i^0)_{L^2,h} \right] = L_i(R^0).$$

Daher besagt (3.13)

$$\mathcal{F}(R^0) = \lim_{m\to\infty} \mathcal{F}(R^m) = \inf_{H^1(B_\rho, \mathbb{O}(k))} \mathcal{F},$$

d.h. R^0 ist der gesuchte Minimierer. □

3.2.2 Eulergleichung für $\mathcal{F}$

Lemma 3.6. *Ist $R^0 \in H^1(B_\rho, \mathbb{O}(k))$ ein Minimierer von $\mathcal{F}$ und sind für $1 \le i \le k$ die zugehörigen Basisvektorfelder $e_i := R^0_{ij}\hat{e}_j$, so erfüllen diese im schwachen Sinne die Eulergleichung*

$$d^*(\nabla e_i \cdot_h e_j) \equiv 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \text{ für } 1 \le i,j \le k, \tag{3.16}$$

wenn man $\nabla e_i \cdot_h e_j$ durch die Null-1-Form auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortsetzt. Ferner gilt

$$\sum_{i=1}^k \int_{B_\rho} |De_i|^2 d\mathcal{L}^n \le C \int_{B_\rho} (1 + |Du|^2) d\mathcal{L}^n, \tag{3.17}$$

wobei e_i als ein $\mathbb{R}^N$-wertiges Vektorfeld aufgefasst ist. Die Konstante C hängt dabei nur von n, H, K_1, K_2 und $\mathcal{N}$ ab.

Beweis. Sei $A \in C^\infty(\overline{B_\rho}, \mathfrak{so}(k))$ mit $\mathfrak{so}(k) = \mathrm{T}_I\,\mathbb{O}(k) = \{A \in \mathbb{R}^{k\times k} : A^t = -A\}$. Mit der nächste-Punkt-Retraktion p auf die Untermannigfaltigkeit $\mathbb{O}(k) \subset \mathbb{R}^{k\times k}$ werden für $|t| << 1$ Vergleichsabbildungen definiert als $R^t = (R^t_{ij}) := p(I + tA) \in C^\infty(\overline{B_\rho}, \mathbb{O}(k))$. Hierfür gilt $R^0 \equiv I$ und $\frac{\partial}{\partial t} R^t\big|_{t=0} = Dp(I)A = A$, da $Dp(I)$ die orthogonale Projektion auf $\mathrm{T}_I\mathbb{O}(k) = \mathfrak{so}(k)$ ist. Wegen der Minimalitätseigenschaft der Basisfelder e_i gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sum_{i=1}^k \int_{B_\rho} \|\nabla(R^t_{ij} e_j)\|_h^2 \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{B_\rho} \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \|e_j \otimes DR^t_{ij} + R^t_{ij} \nabla e_j\|_h^2 \qquad \text{nach der Produktregel für } \nabla \\
&= 2\sum_{i=1}^k \int_{B_\rho} R^0_{ij} \nabla e_j \cdot_h \left\{ e_j \otimes \frac{\partial}{\partial t} DR^t_{ij}\bigg|_{t=0} + \frac{\partial}{\partial t} R^t_{ij}\bigg|_{t=0} \nabla e_j \right\} \\
&= 2\sum_{i=1}^k \int_{B_\rho} \nabla e_i \cdot_h \{e_j \otimes DA_{ij} + A_{ij} \nabla e_j\} \\
&= 2\int_{B_\rho} \left(\sum_{i,j=1}^k \nabla e_i \cdot_h (e_j \otimes DA_{ij}) + \sum_{i,j=1}^k A_{ij} \nabla e_i \cdot_h \nabla e_j \right).
\end{aligned}$$

Da die Matrizen $(A_{ij}(x)) \in \mathfrak{so}(k)$ antisymmetrisch sind, verschwindet der zweite Summand unter dem letzten Integral. Damit führt obige Rechnung auf

$$0 = \sum_{i,j=1}^k \int_{B_\rho} DA_{ij} \cdot (\nabla e_i \cdot_h e_j), \tag{3.18}$$

wobei $'\cdot'$ das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n*}$ bezeichnet. Weiter sieht man mit der Verträglichkeit von ∇ und h laut Bedingung (3.6)

$$\nabla e_i \cdot_h e_j = D(e_i \cdot_h e_j) - e_i \cdot_h \nabla e_j = -\nabla e_j \cdot_h e_i,$$

da die Basis e_i orthonormal bezüglich h ist. Da $\nabla e_i \cdot_h e_j$ also antisymmetrisch in i, j ist, gilt (3.18) auch für symmetrische Matrixfunktionen $A = (A_{ij})$, also für beliebige $A \in C^\infty(\overline{B_\rho}, \mathbb{R}^{k\times k})$. Damit ist (3.18) äquivalent zu

$$\int_{B_\rho} D\phi \cdot (\nabla e_i \cdot_h e_j) = 0 \qquad \text{für alle } \phi \in C^\infty(\overline{B_\rho}, \mathbb{R}) \text{ und } 1 \le i,j \le k.$$

Da ϕ hierbei keinen kompakten Träger in B_ρ haben muss, ist (3.16) gezeigt. Für den Beweis von (3.17) sieht man zunächst mit der Minimierungseigenschaft der e_i

$$\sum_{i=1}^k \int_{B_\rho} \|\nabla e_i\|_h^2 \leq \sum_{i=1}^k \int_{B_\rho} \|\nabla \hat{e}_i\|_h^2 \leq C \int_{B_\rho} (1+|Du|)^2. \tag{3.19}$$

Die letzte Ungleichung gilt dabei wegen Abschätzung (3.11) und Voraussetzung (3.4) mit einer Konstanten $C = C(n, H, K_1, K_2, \mathcal{N})$. Nun stellt man e_i bezüglich der C^1-Basisvektorfelder $\tilde{e}_j(y) \in \mathrm{T}_y\mathcal{N}$ dar als $e_i = r_i^j(\tilde{e}_j \circ u)$ mit Koeffizientenfunktionen $r_i^j \in H^1(B_{1/2}, \mathbb{R})$. Nach Definition von $\hat{e}_i$ als h-Orthonormalisierung der Basisfelder $\tilde{e}_i \circ u$ ist $\|r_i^j\|_\infty \leq C(H, \mathcal{N})$. Weiter sei $J(x) : T_{u(x)}\mathcal{N} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ die Inklusion. Unter Verwendung der Produktregeln für D und ∇ folgt

$$\begin{aligned} |D(Je_i) - J\nabla e_i| &= |r_i^j D(J\tilde{e}_j \circ u) - r_i^j J\nabla(\tilde{e}_j \circ u)| \\ &\leq C(H, \mathcal{N}) \sum_{j=1}^k |D(J\tilde{e}_j \circ u) - J\nabla(\tilde{e}_j \circ u)| \leq C(1+|Du|) \end{aligned} \tag{3.20}$$

mit $C = C(H, K_2, \mathcal{N})$ nach Voraussetzung (3.5). Die Abschätzungen (3.19) und (3.20) liefern die Behauptung (3.17) wegen der Ungleichung $(1+|Du|)^2 \leq 2(1+|Du|^2)$. □

3.3 Hardy-Raum und BMO

In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften des Hardy-Raumes und des Raumes BMO zusammengestellt, die in der vorliegenden Arbeit benötigt werden. Für eine detailliertere Behandlung des Themas vergleiche man etwa [St2] oder [S].

Der Raum BMO($\mathbb{R}^n$) ist definiert als der Raum der Funktionen $g \in L^1_{lok}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|g\|_{\mathrm{BMO}} := \sup_{r>0,\, x\in\mathbb{R}^n} \fint_{B_r(x)} |g - g_{r,x}| d\mathcal{L}^n < \infty,$$

wobei $g_{r,x} := \fint_{B_r(x)} g \, d\mathcal{L}^n$ ist und $\fint$ das Durchschnittsintegral bezeichnet. Die Funktion $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}}$ bildet eine Halbnorm auf dem Raum BMO($\mathbb{R}^n$). Dieser Raum spielt im folgenden Abschnitt eine zentrale Rolle wegen

Lemma 3.7. *Sei u eine Abbildung wie in Satz 3.4. Für eine Kugel $B_\rho(x) \subset B_{1/2}$ sei eine Abschneidefunktion $\zeta \in C^\infty_{kpt}(B_\rho(x), [0,1])$ gewählt mit $\zeta \equiv 1$ auf $B_{\rho/2}(x)$ und $\|D\zeta\|_\infty < 4/\rho$. Dann ist mit $\bar{u} := \fint_{B_\rho(x)} u \, d\mathcal{L}^n$*

$$\zeta(u - \bar{u}) \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\|\zeta(u-\bar{u})\|_{\mathrm{BMO}} \leq C \sup_{B_s(y)\subset B_\rho(x)} \fint_{B_s(y)} |u - u_{s,y}| d\mathcal{L}^n \leq C\varepsilon_0^{1/2},$$

wobei die Konstante C nur von n und $\mathcal{N}$ abhängt.

Beweis. Wegen Voraussetzung (3.9) gilt

$$\sup_{B_s(y)\subset B_{1/2}} \fint_{B_s(y)} |u - u_{s,y}| d\mathcal{L}^n \leq C\varepsilon_0^{1/2},$$

daher folgt die Behauptung aus Lemma 1.14. □

Nun wird der Hardy-Raum $\mathcal{H}_a(\mathbb{R}^n)$ definiert. Dazu wählt man eine glatte Funktion $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit Träger in B_1 sowie $\int \phi \, d\mathcal{L}^n = 1$ und setzt $\phi_r(x) := \phi(x/r)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Für eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$f^*(x) := \sup_{r>0} \left| r^{-n} \int f(y)\phi_r(x-y) d\mathcal{L}^n(y) \right|.$$

Der Hardy-Raum $\mathcal{H}_a(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als die Menge der L^1-Funktionen f mit endlicher Hardy-Norm

$$\|f\|_{\mathcal{H}_a} := \|f^*\|_{L^1} < \infty.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von ϕ, vgl. [St2, §III.1]. Ein berühmtes Resultat von Fefferman und Stein ([FS]) liefert die Dualität $(\mathcal{H}_a(\mathbb{R}^n))^* = \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. Das ist der tiefer liegende Grund für die Ungleichung

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} fg d\mathcal{L}^n \right| \le C\|f\|_{\mathcal{H}_a} \|g\|_{\mathrm{BMO}} \tag{3.21}$$

für alle $f \in \mathcal{H}_a(\mathbb{R}^n)$ und $g \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. Diese Ungleichung lässt sich allerdings auch elementarer beweisen. Sie ist nämlich eine einfache Folgerung aus der atomaren Zerlegung von Hardy-Funktionen, wie etwa in [St2, §IV.1.2] ausgeführt.
In der vorliegenden Arbeit spielen Hardy-Funktionen der folgenden Form eine zentrale Rolle.

Lemma 3.8 ([CLMS]). *Seien $f \in H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $\Lambda \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n*})$ gegeben mit $d^*\Lambda \equiv 0$ im Distributionssinne. Dann ist $\langle Df, \Lambda \rangle \in \mathcal{H}_a(\mathbb{R}^n)$ mit der Schranke*

$$\|\langle Df, \Lambda\rangle\|_{\mathcal{H}_a} \le C\|Df\|_{L^2}\|\Lambda\|_{L^2},$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n*}$ bezeichnet.

3.4 Eine Rate für den Energieabfall

Der Kern des Beweises von Satz 3.4 und damit von Satz 3.1 liegt in dem folgenden

Satz 3.9. *Für hinreichend kleine Werte von $\varepsilon_0 > 0$ gilt für alle $u \in H^1(B_{1/2}, \mathcal{N})$ mit den Eigenschaften aus Satz 3.4*

$$r^{1-n} \int_{B_r(x)} |Du| d\mathcal{L}^n \le C r^\alpha \quad \text{für alle } x \in B_{1/4} \text{ und } 0 < r < 1/2 - |x|. \tag{3.22}$$

Die Wahl der Konstanten ε_0, C und $\alpha \in (0,1)$ hängt dabei nur von den Daten $G, L, H, K_0, K_1, K_2, n$ und $\mathcal{N}$ ab.

Mit einem bekannten Lemma von Morrey folgt aus dem Satz $u \in C^{0,\alpha}(B_{1/4})$, s. z.B. [G1], Thm 1.1 (S.64) oder [G2], S.43. Da die Konstante C in (3.22) nur von den genannten Daten abhängt, gilt auch $\|u\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/4})} \le C(G, L, H, K_0, K_1, K_2, n, \mathcal{N})$. Die $C^{1,\alpha}$-Regularität folgt wie in der Bemerkung nach Satz 3.4, so dass dieser hiermit bewiesen ist.

Beweis. Die Beweistechnik geht auf [B] zurück. Die hier gewählte Darstellung lehnt sich allerdings stärker an die in [Mo2] an, da diese ein wenig transparenter ist.
In folgenden Beweis bezeichnet der Buchstabe C nur Konstanten, die höchstens von

den im Satz aufgezählten Daten abhängen. Zunächst wird ein $x_0 \in B_{1/4}$ fest gewählt und die Behauptung (3.22) für den Fall bewiesen, dass die Metrik im Punkt $x = x_0$ Euklidisch ist, dass also für alle $1 \le \alpha, \beta \le n$ gilt $\gamma_{\alpha\beta}(x_0) = \delta_{\alpha\beta}$. Für x_0 wie oben und $0 < r < 1/2 - |x_0|$ sei definiert

$$M_u(r) := \sup_{B_\rho(y) \subset B_r(x_0)} \rho^{1-n} \int_{B_\rho(y)} |Du| d\mathcal{L}^n.$$

Das Ziel ist der Beweis der Existenz eines $\theta < 1$, so dass für alle $r < 1/2 - |x_0|$ gilt

$$M_u(\theta r) \le \frac{1}{2} M_u(r) + Cr.$$

Dazu wird nun eine Kugel $B_\rho(y) \subset B_r(x_0)$ betrachtet. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird $y = 0$ angenommen. Auf B_ρ wird ein h-Orthonormalbasisfeld e_i längs u mit den Eigenschaften (3.16) und (3.17) zugrundegelegt, wie es in Abschnitt 3.2 konstruiert wurde. Weiter sei eine Abschneidefunktion $\zeta \in C^\infty_{kpt}(B_\rho, [0,1])$ wie in Lemma 3.7 gewählt, sie erfülle also $\zeta \equiv 1$ auf $B_{\rho/2}$ und $\|D\zeta\|_\infty < 4/\rho$. Mit den Schreibweisen $u_\rho := \fint_{B_\rho} u$ und $\tilde{u} := \zeta(u - u_\rho)$ besagt Lemma 3.7 dann $\tilde{u} \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|\tilde{u}\|_{\mathrm{BMO}} \le C M_u(r). \tag{3.23}$$

Die Komponenten der Ableitung von $\tilde{u}$ werden für $1 \le l \le k$ abgekürzt als

$$w_l := D\tilde{u} \cdot_h e_l = D\tilde{u} \cdot f_l,$$

wenn definiert ist $f_l := (h_{ij}) e_l$. Hierfür gilt $f_l \in H^1$ mit

$$\|Df_l\|^2_{L^2(B_\rho)} \le C \int_{B_\rho} (1 + |Du|^2) d\mathcal{L}^n,$$

da die gleiche Abschätzung für die e_l gilt und wegen Voraussetzung (3.4). Mit Eigenschaft (3.9) von u bedeutet das

$$\|Df_l\|^2_{L^2(B_\rho)} \le C\rho^{n-2}\varepsilon_0 + C\rho^n. \tag{3.24}$$

Für die außerhalb B_ρ durch Null fortgesetzte 1-Form $w_l \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n*})$ existiert eine Hodge-de Rham-Zerlegung der Form

$$w_l = d\alpha_l + B_l, \quad d^* B_l \equiv 0 \tag{3.25}$$

mit einer Funktion $\alpha_l \in H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und einer 1-Form $B_l \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n*})$. Zur Konstruktion dieser Zerlegung setzt man $\alpha_l := d^* \Delta^{-1} w_l$, so dass $d^*(w_l - d\alpha_l) = d^* w_l - \Delta\alpha_l \equiv 0$. Für eine detailliertere Ausführung vergleiche man [IM, §6]. Die Zerlegung (3.25) ist L^2-orthogonal, da der Gaußsche Satz mit der Bezeichnung $\vec{n}(x) := x/|x|$ liefert

$$\begin{aligned} \left| \int d\alpha_l \cdot B_l d\mathcal{L}^n \right| &\le \liminf_{R\to\infty} \left| \int_{\partial B_R} \alpha_l \langle B_l; \vec{n} \rangle d\mathcal{H}^{n-1} \right| \\ &\le \liminf_{R\to\infty} \|\alpha_l B_l\|_{L^1(\partial B_R)} = 0, \end{aligned}$$

da $\int_0^\infty \|\alpha_l B_l\|_{L^1(\partial B_R)} d\mathcal{L}^1(R) = \|\alpha_l B_l\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$.

Abschätzung von B_l

Die Orthogonalität der Zerlegung (3.25) ergibt mit dem Euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^{n*}$

$$\begin{aligned} \|B_l\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle B_l, w_l \rangle d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} \langle B_l, D\tilde{u} \cdot f_l \rangle d\mathcal{L}^n \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \langle Df_l, B_l \rangle \cdot \tilde{u}\, d\mathcal{L}^n \qquad \text{wegen } d^* B_l \equiv 0 \\ &\leq C \|\langle Df_l, B_l \rangle\|_{\mathcal{H}_a} \|\tilde{u}\|_{\mathrm{BMO}} \end{aligned}$$

wegen der Hardy-BMO-Ungleichung (3.21). Lemma 3.8 und Abschätzung (3.23) führen auf

$$\|B_l\|_{L^2}^2 \leq C \|Df_l\|_{L^2(B_\rho)} \|B_l\|_{L^2} M_u(r),$$

was wegen Eigenschaft (3.24) von f_l besagt $\|B_l\|_{L^2} \leq C\rho^{n/2-1} \varepsilon_0^{1/2} M_u(r) + C\rho^{n/2}$, also

$$\rho^{1-n} \int_{B_\rho} |B_l| d\mathcal{L}^n \leq \left[\rho^{2-n} \int_{B_\rho} |B_l|^2 d\mathcal{L}^n \right]^{1/2} \leq C\varepsilon_0^{1/2} M_u(r) + C\rho. \tag{3.26}$$

Abschätzung von $D\alpha_l$

Zur Abschätzung von $d\alpha_l$ zerlegt man $\alpha_l = \alpha_l^0 + \alpha_l^1$, wobei $\alpha_l^0 \in H^1(B_{\rho/2}, \mathbb{R})$ die Funktion ist mit

$$\Delta \alpha_l^0 \equiv 0 \text{ auf } B_{\rho/2} \qquad \text{und} \qquad \alpha_l^0 = \alpha_l \text{ auf } \partial B_{\rho/2} \text{ im Spursinn.}$$

Für $\alpha_l^1 := \alpha_l - \alpha_l^0$ gilt dann im Spursinn

$$\alpha_l^1\big|_{\partial B_{\rho/2}} \equiv 0 \qquad \text{und} \qquad \Delta \alpha_l^1 = \Delta \alpha_l \text{ auf } B_{\rho/2}.$$

Abschätzung von $D\alpha_l^1$

Die Funktion $\psi \in H^1(B_{\rho/2}, \mathbb{R})$ sei definiert als die Lösung zu

$$\Delta \psi = d^* \left(\frac{D\alpha_l^1}{|D\alpha_l^1|} \right) \qquad \text{und} \qquad \psi = 0 \text{ auf } \partial B_{\rho/2} \text{ im Spursinn.} \tag{3.27}$$

Hierbei ist $\frac{D\alpha_l^1}{|D\alpha_l^1|}$ an Stellen $x \in B_{\rho/2}$ mit $D\alpha_l^1(x) = 0$ als Null zu interpretieren. Die Existenz der Lösung folgt aus dem Rieszschen Darstellungssatz auf dem Hilbert-Raum $H_0^1(B_{\rho/2}, \mathbb{R})$. Mit der so gewählten Funktion ψ folgt nun

$$\begin{aligned} \int_{B_{\rho/2}} |D\alpha_l^1| &= -\int_{B_{\rho/2}} d^* \left(\frac{D\alpha_l^1}{|D\alpha_l^1|} \right) \cdot \alpha_l^1 \qquad (3.28) \\ &= \int_{B_{\rho/2}} D\psi \cdot D\alpha_l^1 = \int_{B_{\rho/2}} D\psi \cdot D\alpha_l. \end{aligned}$$

Da $\Delta\psi$ die Divergenz der durch Eins beschränkten Funktion $f := \frac{D\alpha_l^1}{|D\alpha_l^1|}$ ist, liefert L^p-Theorie, siehe z.B. [G2], Abschnitt 4.3:

$$\begin{aligned} \|D\psi\|_{L^2(B_{\rho/2})} &\leq C\|f\|_{L^2(B_{\rho/2})} \leq C\rho^{n/2}, \qquad (3.29) \\ \|D\psi\|_{L^{n+1}(B_{\rho/2})} &\leq C\|f\|_{L^{n+1}(B_{\rho/2})} \leq C\rho^{n/(n+1)}, \end{aligned}$$

wobei die Konstanten jeweils nur von n abhängen. Wegen der Poincaré-Ungleichung zum Exponenten $n+1$ und der stetigen Einbettung $W^{1,n+1} \hookrightarrow L^\infty$ folgt aus der letzten Abschätzung

$$\|\psi\|_{L^\infty(B_{\rho/2})} \leq C \left[\rho \int_{B_{\rho/2}} |D\psi|^{n+1}\right]^{1/(n+1)} \leq C\rho^{1/(n+1)} \|D\psi\|_{L^{n+1}(B_{\rho/2})} \leq C\rho. \quad (3.30)$$

Die Unabhängigkeit der Konstanten von ρ sieht man dabei in der ersten Ungleichung mit einem Skalierungsargument.
Wegen $D\alpha_l = w_l - B_l$ und $d^* B_l \equiv 0$ im schwachen Sinne gilt für alle $\psi \in H^1_0(B_{\rho/2}, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \int_{B_{\rho/2}} D\alpha_l \cdot D\psi &= \int_{B_{\rho/2}} w_l \cdot D\psi = \int_{B_{\rho/2}} (Du \cdot_h e_l) \cdot D\psi \\ &= \int_{B_{\rho/2}} Du \cdot_h (e_l \otimes D\psi) \\ &= \int_{B_{\rho/2}} Du \cdot_h \nabla(\psi e_l) - \int_{B_{\rho/2}} (Du \cdot_h \nabla e_l)\psi \qquad (3.31) \end{aligned}$$

wegen der Produktregel für ∇. Nun benutzt man die Lipschitzbedingung an γ aus (3.3), um für $x \in B_\rho \subset B_r(x_0)$ zu erhalten $|\gamma_{\alpha\beta}(x) - \delta_{\alpha\beta}| \leq Lr$. Damit folgt für das erste Integral in der letzten Zeile

$$\int_{B_{\rho/2}} Du \cdot_h \nabla(\psi e_l) d\mathcal{L}^n \leq \int_{B_{\rho/2}} Du \cdot^h_\gamma \nabla(\psi e_l) d\mu_\gamma + Cr\|Du\|_{L^2(B_{\rho/2})} \|D(\psi e_l)\|_{L^2(B_{\rho/2})}.$$

Da u die Differentialgleichung (3.8) erfüllt, ist der erste Summand abgeschätzt durch

$$\int_{B_{\rho/2}} Du \cdot^h_\gamma \nabla(\psi e_l) d\mu_\gamma \leq C\|\psi e_l\|_\infty \int_{B_{\rho/2}} (1 + |Du|_\gamma) d\mu_\gamma \leq C\rho^n, \quad (3.32)$$

wobei das Ergebnis (3.30) und $\|Du\|_{L^2(B_{\rho/2})} \leq C\rho^{n/2-1}$ benutzt wurde, vgl. (3.9). Im zweiten Summanden gilt wegen (3.29), (3.30) und (3.17)

$$\|D(\psi e_l)\|_{L^2} \leq \|\psi\|_\infty \|De_l\|_{L^2(B_\rho)} + C\|D\psi\|_{L^2} \leq C\rho^{n/2}, \quad (3.33)$$

also folgt insgesamt

$$\int_{B_{\rho/2}} Du \cdot_h \nabla(\psi e_l) d\mathcal{L}^n \leq Cr\rho^{n-1}.$$

Hiermit liefern (3.28) und (3.31)

$$\int_{B_{\rho/2}} |D\alpha^1_l| \leq \left| \int_{B_{\rho/2}} (Du \cdot_h \nabla e_l)\psi \right| + Cr\rho^{n-1}. \quad (3.34)$$

Da e_l eine h-Orthonormalbasis ist und nach Definition von f_m gilt hierbei

$$Du \cdot_h \nabla e_l = \sum_{m=1}^k \langle Du, \nabla e_l \cdot_h e_m \rangle \cdot_h e_m = \sum_{m=1}^k \langle Du, \nabla e_l \cdot_h e_m \rangle \cdot f_m,$$

daher wird (3.34) zu

$$\begin{aligned}
\int_{B_{\rho/2}} |D\alpha_l^1| &\leq \sum_{m=1}^{k} \left| \int_{B_{\rho/2}} \langle Du, \nabla e_l \cdot_h e_m \rangle \cdot \psi f_m \right| + Cr\rho^{n-1} \\
&= \sum_{m=1}^{k} \left| \int_{B_{\rho/2}} \langle D(\psi f_m), \nabla e_l \cdot_h e_m \rangle \cdot \tilde{u} \right| + Cr\rho^{n-1} \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

wegen $d^*(\nabla e_l \cdot_h e_m) \equiv 0$. Aus demselben Grund ist gemäß Lemma 3.8 die Funktion $\Phi := \langle D(\psi f_m), \nabla e_l \cdot_h e_m \rangle \in \mathcal{H}_a(\mathbb{R}^n)$, wenn man sich die Funktion ψf_m außerhalb von $B_{\rho/2}$ durch Null fortgesetzt denkt. Analog zu (3.33), nun unter Verwendung von (3.24), leitet man die Abschätzung $\|D(\psi f_m)\|_{L^2} \leq C\rho^{n/2}$ her. Lemma 3.8 liefert dann die Abschätzung

$$\|\Phi\|_{\mathcal{H}_a} \leq C\|D(\psi f_m)\|_{L^2(B_{\rho/2})}\|De_l\|_{L^2(B_{\rho/2})} \leq C\rho^{n-1}\varepsilon_0^{1/2} + C\rho^n.$$

Unter Verwendung der Hardy-BMO-Ungleichung und (3.23) folgt damit aus (3.35)

$$\rho^{1-n} \int_{B_{\rho/2}} |D\alpha_l^1| \leq C\varepsilon_0^{1/2} M_u(r) + Cr. \qquad (3.36)$$

Abschätzung von $D\alpha_l^0$

Wegen $\alpha_l = \alpha_l^0 + \alpha_l^1$ und $d\alpha_l = w_l - B_l$ gilt auf $B_{\rho/2}$

$$|D\alpha_l^0| \leq |D\alpha_l^1| + |D\alpha_l| \leq |D\alpha_l^1| + C|Du| + |B_l|$$

und deshalb nach (3.26), (3.36) und der Definition von $M_u(r)$

$$\rho^{1-n} \int_{B_{\rho/2}} |D\alpha_l^0| \leq CM_u(r) + Cr. \qquad (3.37)$$

Da der Gradient $\nabla\alpha_l^0$ ebenso wie α_l^0 eine harmonische Funktion ist, folgt aus der Mittelwertformel für jedes $0 < \theta < 1/2$

$$(\theta\rho)^{-n} \int_{B_{\theta\rho}} |D\alpha_l^0| \leq C\rho^{-n} \int_{B_{\rho/2}} |D\alpha_l^0|. \qquad (3.38)$$

Diese Abschätzung ist offensichtlich für $\theta \geq 1/4$ mit $C = 4^n$. Im Fall $0 < \theta < 1/4$ erhält man für $x \in B_{\theta\rho}$ mit der Mittelwertformel $|D\alpha_l^0(x)| \leq ⨍_{B_{\rho/4}(x)} |D\alpha_l^0| \leq 2^n ⨍_{B_{\rho/2}} |D\alpha_l^0|$. (3.37) und (3.38) liefern schließlich

$$(\theta\rho)^{1-n} \int_{B_{\theta\rho}} |D\alpha_l^0| \leq C\theta M_u(r) + Cr. \qquad (3.39)$$

Beweis von Satz 3.9

Nach Definition von $w_l = d\alpha_l^0 + d\alpha_l^1 + B_l$ gilt auf $B_{\rho/2}$

$$|Du| \leq C \sum_{l=1}^{k} (|D\alpha_l^0| + |D\alpha_l^1| + |B_l|),$$

also nach (3.26), (3.36) und (3.39):

$$\begin{aligned}(\theta\rho)^{1-n}\int_{B_{\theta\rho}}|Du| &\leq C\sum_{l=1}^{k}(\theta\rho)^{1-n}\left(\int_{B_{\theta\rho}}|D\alpha_l^0|+\int_{B_{\rho/2}}|D\alpha_l^1|+\int_{B_\rho}|B_l|\right)\\ &\leq C_0\left(\theta+\theta^{1-n}\varepsilon_0^{1/2}\right)M_u(r)+C\theta^{1-n}r,\end{aligned}$$

wobei die Konstanten C_0 und C nur von L, H, K_0, K_1, K_2, n und $\mathcal{N}$ abhängen. Wählt man nun $\theta := 1/(4C_0)$ und $\varepsilon_0^{1/2} \leq \theta^{n-1}/(4C_0)$, so erhält man

$$(\theta\rho)^{1-n}\int_{B_{\theta\rho}}|Du| \leq \frac{1}{2}M_u(r)+Cr.$$

Da für jede Kugel $B_{\theta\rho}(y) \subset B_{\theta r}(x_0)$ gilt $B_\rho(y) \subset B_r(x_0)$, folgt sogar

$$M_u(\theta r) \leq \frac{1}{2}M_u(r)+Cr. \tag{3.40}$$

Hieraus folgt durch ein Standardverfahren der Regularitätstheorie für ein geeignetes $0 < \alpha < 1$ und alle Radien $0 < r < 1/2 - |x_0|$ die Wachstumsrate $M_u(r) \leq Cr^\alpha$, wie etwa in [GT, Lm 8.23] ausgeführt. Damit ist die Behauptung des Satzes für den Fall $\gamma_{\alpha\beta}(x_0) = \delta_{\alpha\beta}$ bewiesen. Den allgemeinen Fall $x \in B_{1/4}$ kann man auf diesen mit einer Basistransformation T_x wie in Bemerkung 1.11 zurückführen, deren Eigenwerte im Intervall $[G^{-1}, G]$ liegen. Obige Argumentation, angewandt auf die transformierte Abbildung $v := u \circ T_x$, liefert mit $E_r(x) = T_x B_r(x)$

$$r^{1-n}\int_{E_r(x)}|Du|d\mathcal{L}^n \leq C(n,G)r^{1-n}\int_{B_r(x)}|Dv|d\mathcal{L}^n \leq Cr^\alpha$$

für alle $r > 0$ mit $B_r(x) \subset T_x^{-1}B_{1/2}$, also mit $E_r(x) \subset B_{1/2}$. Damit erhält man für alle $0 \leq r \leq 1/4G^2$ wegen $B_r(x) \subset E_{rG}(x) \subset B_{1/2}$

$$r^{1-n}\int_{B_r(x)}|Du|d\mathcal{L}^n \leq r^{1-n}\int_{E_{rG}(x)}|Du|d\mathcal{L}^n \leq G^{n-1}Cr^\alpha$$

und damit die Behauptung des Satzes. Für $1/4G^2 < r \leq 1/2 - |x|$ gilt diese ohnehin, da dann

$$r^{1-n}\int_{B_r(x)}|Du|d\mathcal{L}^n \leq C\varepsilon_0^{1/2} \leq C\varepsilon_0^{1/2}(4G^2)^\alpha r^\alpha.$$

□

Kapitel 4

Kompaktheit stationärer harmonischer Abbildungen

4.1 Defektmaß und starke Konvergenz harmonischer Abbildungen

Die Vorgehensweise in diesem Abschnitt orientiert sich an der Arbeit [Li]. Ab jetzt wird für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ die Bezeichnung $\mathfrak{H}_\Lambda(\Omega) = \mathfrak{H}_\Lambda(\Omega, G, \Gamma, \mathcal{N})$ für die Menge der Abbildungen $v \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ benutzt, die bezüglich einer Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(\Omega)$ stationär harmonisch mit freier Randbedingung $v(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$ sind und die Energieabschätzung $r_\Omega^{2-n} E_\gamma(v) \leq \Lambda$ erfüllen, wobei $r_\Omega := \operatorname{diam}(\Omega)/2$. Für eine fixierte Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(\Omega)$ sei $\mathfrak{H}^\gamma_\Lambda(\Omega) = \mathfrak{H}^\gamma_\Lambda(\Omega, \Gamma, \mathcal{N})$ die Teilmenge der Abbildungen, die obige Eigenschaften bezüglich der gegebenen Metrik γ erfüllen.
In diesem Kapitel werden Folgen $u_i \in \mathfrak{H}^{\gamma_i}_\Lambda(B_2^+)$ zu Metriken $\gamma_i \in \mathfrak{M}_G(B_2^+)$ für $i \in \mathbb{N}$ betrachtet. Wegen der Bedingung $2^{2-n} E_{\gamma_i}(u_i) \leq \Lambda$ für alle $i \in \mathbb{N}$ sind die Normen $\|u_i\|_{H^1}$ beschränkt. Daher kann man durch Teilfolgenübergang immer für ein geeignetes $u \in H^1(B_2^+, \mathcal{N})$ schwache Konvergenz $u_i \rightharpoonup u$ in $H^1(B_2^+, \mathcal{N})$ bei $i \to \infty$ erreichen. Zum Beweis dieser Behauptung benutzt man zunächst, dass der Hilbert-Raum $H^1(B_2^+, \mathbb{R}^N)$ lokal schwach folgenkompakt ist, um schwache Konvergenz einer Teilfolge gegen eine Grenzabbildung $u \in H^1(B_2^+, \mathbb{R}^N)$ zu erhalten. Nach dem Satz von Rellich kann man hierfür $u_i \to u$ in L^2-Norm annehmen, woraus wiederum für eine Teilfolge der u_i Konvergenz $\mathcal{L}^n$-f.ü. folgt. Damit ist sichergestellt, dass auch die Grenzabbildung in $H^1(B_2^+, \mathcal{N})$ liegt, und die Behauptung ist bewiesen. Mit der Kompaktheit des Spuroperators $H^1(B_2^+, \mathbb{R}^N) \to L^2(B_2^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^N)$ schließt man außerdem, dass die Grenzabbildung genau wie die Abbildungen u_i die Randbedingung $u(B_2^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$ erfüllt.
Für die Regularitätstheorie wird jedoch die starke Konvergenz $u_i \to u$ in der H^1-Norm benötigt. Ein Grund hierfür ist, dass man bei gegenwärtigem Kenntnisstand nicht sicherstellen kann, dass bei nur schwacher Konvergenz die Grenzabbildung wieder stationär harmonisch ist.
Für die Untersuchung des Konvergenzproblems benötigt man zunächst den Begriff der schwachen Maßkonvergenz auf dem Raum $\mathcal{R}(M)$ der Radon-Maße auf einer abgeschlossenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$. Hierbei handelt es sich um die offen-regulären Maße auf M, die auf allen kompakten Teilmengen $K \subset M$ endlich sind. Man notiert für $\mu_i, \mu \in \mathcal{R}(M)$

$$\mu_i \rightharpoonup \mu \ \text{ in } \mathcal{R}(M) \text{ bei } i \to \infty \qquad \text{oder} \qquad \operatorname*{w-lim}_{i\to\infty} \mu_i = \mu,$$

falls für jedes $f \in C^0_{kpt}(M, \mathbb{R})$ gilt

$$\int f d\mu_i \to \int f d\mu \quad \text{bei } i \to \infty.$$

Die benötigten Eigenschaften dieser Konvergenzart sind im folgenden Lemma zusammengestellt.

Lemma 4.1 (Eigenschaften der schwachen Maßkonvergenz). *Für eine abgeschlossene Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ seien $\mu_i \in \mathcal{R}(M)$ für $i \in \mathbb{N}$.*

(i) Für alle kompakten Mengen $K \subset M$ gelte $\sup_i \mu_i(K) < \infty$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{i_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, so dass $\text{w-lim}_{j\to\infty} \mu_{i_j} \in \mathcal{R}(M)$ existiert.

(ii) Es gelte $\mu_i \rightharpoonup \mu$ bei $i \to \infty$ mit einem Maß $\mu \in \mathcal{R}(M)$. Dann gilt für jede beschränkte Borel-Menge $A \subset \Omega$

$$\mu(A^\circ) \le \liminf_{i\to\infty} \mu_i(A^\circ) \le \limsup_{i\to\infty} \mu_i(\overline{A}) \le \mu(\overline{A}).$$

Hierbei seien A° und $\overline{A}$ das Innere bzw. der Abschluss der Menge A relativ zu M. Obige Aussage impliziert insbesondere

$$\mu(A) = \lim_{i\to\infty} \mu_i(A), \quad \textit{falls } \mu(\partial A) = 0.$$

Für den Beweis wird auf [M], Thm. 1.23 und Thm. 1.24, verwiesen. Der Zusammenhang der schwachen Maßkonvergenz mit der starken Konvergenz von Sobolev-Abbildungen ist der folgende:

Lemma 4.2 (Maßkonvergenz und starke H^1-Konvergenz). *Seien $G, \Lambda < \infty$ und $\gamma_i, \gamma \in \mathfrak{M}_G(B_2^+)$ Riemannsche Metriken mit $\gamma_i \to \gamma$ gleichmäßig bei $i \to \infty$. Die Abbildungen $u_i, u \in H^1(B_2^+, \mathcal{N})$ sollen eine gemeinsame Energieschranke $E_{\gamma_i}(u_i) \le \Lambda$ besitzen sowie die Konvergenz $u_i \rightharpoonup u$ in $H^1(B_2^+, \mathcal{N})$ und $u_i \to u$ in der L^2-Norm erfüllen. Unter diesen Voraussetzungen sind äquivalent*

(i) $u_i \to u$ in der H^1-Norm auf B_1^+

(ii) $\mu_{\gamma_i} \llcorner |Du_i|^2_{\gamma_i} \rightharpoonup \mu_\gamma \llcorner |Du|^2_\gamma$ in $\mathcal{R}(\overline{B}_1^+)$.

Beweis. Sei zunächst (i) erfüllt. Für ein beliebiges $f \in C^0(\overline{B}_1^+, \mathbb{R})$ gilt

$$\left| \int f |Du_i|^2_{\gamma_i} d\mu_{\gamma_i} - \int f |Du|^2_\gamma d\mu_\gamma \right| \le \sup |f| \int_{B_1^+} \left| |Du_i|^2_{\gamma_i} \sqrt{\gamma_i} - |Du|^2_\gamma \sqrt{\gamma} \right| d\mathcal{L}^n \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

wegen der gleichmäßigen Konvergenz $\gamma_i \to \gamma$ und der Voraussetzung $u_i \to u$ in der H^1-Norm.
Ist umgekehrt (ii) gegeben, so folgt mit $f = \mathbb{1}_{\overline{B}_1^+}$ wegen der gleichmäßigen Konvergenz $\gamma_i \to \gamma$ zunächst $\int_{B_1^+} |Du_i|^2_\gamma d\mu_\gamma \to \int_{B_1^+} |Du|^2_\gamma d\mu_\gamma$, also

$$\begin{aligned} &\int_{B_1^+} |Du_i - Du|^2_\gamma d\mu_\gamma \\ &= \int_{B_1^+} \left(|Du_i|^2_\gamma - |Du|^2_\gamma \right) d\mu_\gamma - 2 \int_{B_1^+} (Du_i - Du) \cdot_\gamma Du \, d\mu_\gamma \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

wenn man die schwache Konvergenz $u_i \rightharpoonup u$ berücksichtigt. $\square$

Im Allgemeinen gilt allerdings für $u_i \in \mathfrak{H}_\Lambda^{\gamma_i}(B_2^+)$ mit $u_i \rightharpoonup u \in H^1(B_2^+, \mathcal{N})$

$$\operatorname*{w-lim}_{i\to\infty} \mu_{\gamma_i} \llcorner |Du_i|_{\gamma_i}^2 = \mu_\gamma \llcorner |Du|_\gamma^2 + \nu \in \mathcal{R}(\overline{B}_2^+) \tag{4.1}$$

mit dem sogenannten *Defektmaß* ν. Die Existenz des Grenzwertes kann man für Abbildungen $u_i \in \mathfrak{H}_\Lambda^{\gamma_i}(B_2^+)$ laut Lemma 4.1(i) immer durch einen Teilfolgenübergang erreichen, da $E_{\gamma_i}(u_i) \le 2^{n-2}\Lambda$ beschränkt ist. Für die Menge dieser Grenzwerte wird die Notation $\mathfrak{R}_{\Lambda,G}(\Omega) = \mathfrak{R}_{\Lambda,G}(\Omega, \Gamma, \mathcal{N})$ eingeführt wie folgt, falls $\Omega \subset \mathbb{R}_+^n$ eine beschränkte Menge ist.

$$\mathfrak{R}_{\Lambda,G}(\Omega) := \left\{ \operatorname*{w-lim}_{i\to\infty} \mu_{\gamma_i} \llcorner |Du_i|_{\gamma_i}^2 \in \mathcal{R}(\overline{\Omega}) \;\middle|\; \gamma_i \in \mathfrak{M}_G(\Omega),\ u_i \in \mathfrak{H}_\Lambda^{\gamma_i}(\Omega, \Gamma, \mathcal{N}) \right\}. \tag{4.2}$$

Das folgende Lemma zeigt den ersten Zusammenhang des Defektmaßes $\nu \llcorner \overline{B}_1^+$ mit der *Energiekonzentrationsmenge*

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\{u_i\}) := \left\{ x \in \overline{B}_1^+ : \liminf_{\rho \searrow 0} \liminf_{i\to\infty} \rho^{2-n} \int_{B_\rho^+(x)} |Du_i|_{\gamma_i}^2 \, d\mu_{\gamma_i} \ge \varepsilon_0 \right\},$$

wobei ε_0 nicht größer als in den Theoremen 1.15 und 3.1 gewählt sei.

Lemma 4.3. *Für Abbildungen $u_i \in \mathfrak{H}_\Lambda^{\gamma_i}(B_2^+)$, die $u_i \rightharpoonup u \in H^1(B_2^+, \mathcal{N})$ bei $i \to \infty$ erfüllen, gilt mit dem durch (4.1) gegebenen Defektmaß ν*

$$\operatorname{spt}(\nu \llcorner \overline{B}_1^+) \cup \operatorname{sing}(u) \subset \mathfrak{S},$$

wobei die singuläre Menge von u definiert ist als

$$\operatorname{sing}(u) := \overline{B}_1^+ \setminus \left\{ x \in \overline{B}_1^+ : u \in C^{2,\alpha} \text{ auf einer Umgebung von } x \right\}.$$

Darüber hinaus ist $\mathfrak{S}$ eine abgeschlossene Menge und es gilt die Konvergenz $u_i \to u$ in $C^2_{lok}(B_2^+ \setminus \mathfrak{S}, \mathcal{N})$ bei $i \to \infty$.

Beweis. Zu $x \in \overline{B}_1^+ \setminus \mathfrak{S}$ wählt man nach Definition von $\mathfrak{S}$ ein $0 < \rho < 1$ mit

$$\liminf_{i\to\infty} \rho^{2-n} \int_{B_\rho^+(x)} |Du_i|_{\gamma_i}^2 \, d\mu_{\gamma_i} < \varepsilon_0.$$

Im Fall $x \notin \partial\mathbb{R}_+^n$ kann man ρ außerdem so klein wählen, dass $B_\rho^+(x) = B_\rho(x) \subset \mathbb{R}_+^n$ gilt. Nach Übergang zu einer Teilfolge erfüllen alle u_i auf der Kugel $B_\rho^+(x)$ im Fall $x \in \partial\mathbb{R}_+^n$ die Voraussetzungen von Theorem 3.1 und im anderen Fall die von Theorem 1.15. Die Theoreme und der Satz 1.17 liefern dann $u_i \in C^{2,\alpha}(B_{\rho/16}^+(x))$ und

$$\|u_i\|_{C^{2,\alpha}(B_{\rho/16}^+(x))} \le C \quad \text{unabhängig von } i. \tag{4.3}$$

Der Satz von Arzéla-Ascoli garantiert nach nochmaligem Teilfolgenübergang bei $i \to \infty$ die Konvergenz $u_i \to u$ in der $C^2(B_{\rho/16}^+(x))$-Norm. Das liefert $\nu \llcorner B_{\rho/16}^+(x) \equiv 0$ und damit $\operatorname{spt}(\nu \llcorner \overline{B}_1^+) \subset \mathfrak{S}$, da $x \in \overline{B}_1^+ \setminus \mathfrak{S}$ beliebig war. Wegen $u \in C^{2,\alpha}(B_{\rho/16}^+(x), \mathcal{N})$ für $x \in \overline{B}_1^+ \setminus \mathfrak{S}$ gilt weiter $\operatorname{sing}(u) \subset \mathfrak{S}$. An der Abschätzung (4.3) und der Definition von $\mathfrak{S}$ liest man außerdem $B_{\rho/16}^+(x) \subset B_2^+ \setminus \mathfrak{S}$ ab, also ist $\mathfrak{S}$ abgeschlossen. □

Mit $\mu := \text{w-lim}_{i\to\infty} \mu_{\gamma_i} \llcorner |Du_i|^2_{\gamma_i}$ liefert Lemma 4.1(ii) für alle $x \in B_1^+$ und alle bis auf abzählbar viele $\rho \leq 2 - |x|$

$$\mu(B_\rho^+(x)) = \lim_{i\to\infty} \int_{B_\rho^+(x)} |Du_i|^2_{\gamma_i} d\mu_{\gamma_i}, \tag{4.4}$$

weil wegen $\mu(\overline{B_2^+}) \leq 2^{n-2}\Lambda$ für alle bis auf abzählbar viele ρ die Menge $S_\rho^+(x)$ eine μ-Nullmenge ist. Damit schließt man aus der Definition von $\mathfrak{S}$ sowie der Linksstetigkeit von $\rho \mapsto \rho^{2-n}\mu(B_\rho^+(x))$ die folgende Charakterisierung der Energiekonzentrationsmenge für $x \in \overline{B}_1^+$

$$x \in \mathfrak{S} \iff \liminf_{\rho \searrow 0} \rho^{2-n}\mu(B_\rho^+(x)) \geq \varepsilon_0. \tag{4.5}$$

Insbesondere ist die Menge $\mathfrak{S}$ schon durch das Maß $\mu \in \mathfrak{R}_{\Lambda,G}(B_2^+)$ festgelegt. Daher wird im Folgenden oft notiert

$$\Sigma_\mu := \mathfrak{S} = \left\{ x \in \overline{B}_1^+ : \liminf_{\rho \searrow 0} \rho^{2-n}\mu(B_\rho^+(x)) \geq \varepsilon_0 \right\}. \tag{4.6}$$

Außerdem folgt aus der Energiemonotonie der stationären Abbildungen u_i gemäß Korollar 1.13 mit Λ statt ε_0

$$\sup_{x\in\overline{B}_1^+,\, \rho<1} \rho^{2-n}\mu(B_\rho^+(x)) \leq C\Lambda \tag{4.7}$$

mit $C = C(n, G, \sup_i \|D\gamma_i\|_\infty)$. Die Gleichung (4.7) und die Definition (4.6) von Σ_μ liefern mit einem Überdeckungsargument das folgende

Lemma 4.4 (Struktur der Defektmaße). *Es gibt positive Konstanten C_* und C^*, nur abhängend von den Daten $n, G, \|D\gamma\|_\infty, \Gamma$ und $\mathcal{N}$, so dass für jedes Maß der Form $\mu = \mu_\gamma \llcorner |Du|^2_\gamma + \nu \in \mathfrak{R}_{\Lambda,G}(B_2^+)$ mit dem zugehörigen Defektmaß ν gilt*

$$C_*\mathcal{H}^{n-2} \llcorner \Sigma_\mu \leq \nu \llcorner \overline{B}_1^+ \leq C^*\mathcal{H}^{n-2} \llcorner \Sigma_\mu.$$

Bemerkung 4.5. Die Aussage des Lemmas ist nach dem Satz von Radon-Nikodym äquivalent zu der Strukturaussage $\nu \llcorner \overline{B}_1^+ = \theta\mathcal{H}^{n-2} \llcorner \Sigma_\mu$ für das Defektmaß, wobei $\theta : \Sigma_\mu \to [0, \infty)$ eine Borel-messbare Funktion ist, die $C_* \leq \theta \leq C^*$ erfüllt. Diese Darstellung von ν wird im Folgenden allerdings nicht benötigt.

Beweis. Sei $A \subset \Sigma_\mu$ Borel-messbar und $\cup_{j\in\mathbb{N}} B_{r_j}(x_j) \supset A$ eine Kugelüberdeckung von A mit $x_j \in \overline{B}_1^+$ und $r_j < 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann folgt wegen $A \subset \mathbb{R}^n_+$ aus (4.7)

$$\mu(A) \leq \sum_j \mu(B_{r_j}^+(x_j)) \leq C\Lambda \sum_j r_j^{n-2},$$

also $\mu(A) \leq C^*\mathcal{H}^{n-2}(A)$ für ein geeignetes C^*. Für die umgekehrte Abschätzung wählt man zu jedem $\delta > 0$ eine geeignete Familie von disjunkten Kugeln $\{B_{r_j}(x_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ mit Mittelpunkten $x_j \in A$ und Radien $r_j \leq \delta$, so dass für alle $j \in \mathbb{N}$

$$r_j^{2-n}\mu(B_{r_j}^+(x_j)) \geq \varepsilon_0/2 \tag{4.8}$$

erfüllt ist. Nach Definition der Menge $\Sigma_\mu \supset A$ überdecken die Kugeln mit obiger Eigenschaft die Menge A. Ein elementares Überdeckungsargument, vgl. [Sim1, Thm.

3.3], liefert daher disjunkte Kugeln $\{B_{r_j}(x_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft (4.8), so dass $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} B_{5r_j}(x_j)$ gilt. Sei nun $A_\delta := \{x \in B_2^+ : \operatorname{dist}(x, A) < \delta\}$ die δ-Umgebung von A. Dann gilt wegen der Eigenschaft (4.8)

$$\sum_j r_j^{n-2} \leq 2\varepsilon_0^{-1} \sum_j \mu(B_{r_j}^+(x_j)) \leq 2\varepsilon_0^{-1}\mu(A_\delta) < \infty. \tag{4.9}$$

Da die Kugeln $B_{5r_j}(x_j)$ die Menge A überdecken, folgt für hinreichend kleine Werte von $\delta > 0$

$$\mathcal{H}^{n-2}(A) \leq 2\alpha(n-2)\sum_j (5r_j)^{n-2},$$

wobei $\alpha(n-2) = \mathcal{L}^{n-2}(B_1^{n-2})$ ist. Mit der Abschätzung (4.9) folgt daher

$$\mu(A) = \lim_{\delta\searrow 0} \mu(A_\delta) \geq \frac{\varepsilon_0}{4}\alpha(n-2)^{-1}\, 5^{2-n}\mathcal{H}^{n-2}(A) =: C_*\mathcal{H}^{n-2}(A).$$

Insgesamt ist also gezeigt

$$C_*\mathcal{H}^{n-2}\llcorner\Sigma_\mu \leq \mu\llcorner\Sigma_\mu \leq C^*\mathcal{H}^{n-2}\llcorner\Sigma_\mu.$$

Dies impliziert insbesondere $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_\mu) < \infty$, also erst recht $\mathcal{L}^n(\Sigma_\mu) = 0$. Aus der Definition von ν und $\operatorname{spt}(\nu) \subset \Sigma_\mu$ gemäß Lemma 4.3 folgt $\nu\llcorner\overline{B_1^+} = \mu\llcorner\Sigma_\mu$ und damit die Behauptung. □

Eine wichtige Folgerung aus den beiden vorhergehenden Lemmata ist der folgende Sachverhalt, der im Fall eines leeren Randes bereits in [TW, Thm. 4] bewiesen wurde.

Korollar 4.6. *Die Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ sei kompakt, $\Gamma \subset \mathcal{N}$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit hiervon und $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ ein beschränktes Gebiet. Auf Ω seien Metriken $\gamma_i, \gamma \in \mathfrak{M}_G(\Omega)$ gegeben mit $\gamma_i \to \gamma$ in $C^{1,\alpha}$ bei $i \to \infty$. Die Abbildungen $u_i \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ seien stationär harmonisch bezüglich γ_i mit freier Randbedingung $u_i(\Omega \cap \mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$ und für ein $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ gelte schwache Konvergenz $u_i \rightharpoonup u$ in H^1. Dann ist u schwach harmonisch bezüglich γ zur freien Randbedingung $u(\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$.*

Beweis. Laut Lemma 4.3 gilt $u_i, u \in C^{2,\alpha}(\Omega \setminus \Sigma, \mathcal{N})$ und $u_i \to u$ in $C^2_{lok}(\Omega \setminus \Sigma, \mathcal{N})$ bei $i \to \infty$ für eine abgeschlossene Menge Σ, die laut Lemma 4.4 endliches $\mathcal{H}^{n-2}$-Maß besitzt. Äquivalent zur Harmonizität und der freien Randbedingung der u_i auf $\Omega\setminus\Sigma$ ist gemäß Lemma 1.9 $\Delta_{\gamma_i} u_i \perp \mathcal{N}$ auf $(\Omega\setminus\Sigma)\setminus\partial\mathbb{R}^n_+$ und $\frac{\partial u_i}{\partial x_n} \perp \Gamma$ auf $(\Omega\setminus\Sigma)\cap\partial\mathbb{R}^n_+$. Wegen der C^2-Konvergenz hat die Grenzabbildung u dieselben Eigenschaften mit der Metrik γ, so dass u auf $\Omega\setminus\Sigma$ harmonisch mit freier Randbedingung $u((\Omega\setminus\Sigma)\cap\partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$ ist, und zwar bezüglich der Metrik γ. Das Hebbarkeitslemma 1.21 liefert dann die schwache Harmonizität mit der behaupteten Randbedingung auf ganz Ω. □

Lemma 4.7 (Defektmaß und starke H^1-Konvergenz). *Gegeben seien Abbildungen $u_i \in \mathfrak{H}_\Lambda^{\gamma_i}(B_2^+)$ und $u \in H^1(B_2^+, \mathcal{N})$ mit $u_i \rightharpoonup u$ in $H^1(B_2^+, \mathcal{N})$ sowie $u_i \to u$ in der L^2-Norm, wobei die Riemannschen Metriken $\gamma_i \in \mathfrak{M}_G(B_2^+)$ gleichmäßig auf $\overline{B_2^+}$ gegen eine Grenzmetrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(B_2^+)$ konvergieren sollen. Weiter liege bei $i \to \infty$ Maßkonvergenz $\mu_{\gamma_i}\llcorner|Du_i|^2_{\gamma_i} \rightharpoonup \mu = \mu_\gamma\llcorner|Du|^2_\gamma + \nu$ in $\mathcal{R}(\overline{B_2^+})$ vor. Dann gelten die beiden folgenden Aussagen.*

(i) $u_i \to u$ in der H^1-Norm auf B_1^+ impliziert $\mathcal{H}^{n-2}\big(B_1^+ \cap \Sigma_\mu\big) = 0$ bzw. äquivalent $\nu\llcorner B_1^+ \equiv 0$.

(ii) Aus $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_\mu) = 0$ oder $\nu\llcorner\overline{B_1^+} \equiv 0$ folgt $u_i \to u$ in der H^1-Norm auf B_1^+.

Beweis. Aus der Konvergenz $u_i \to u$ in der H^1-Norm auf B_1^+ folgt gemäß Lemma 4.2 für jede Funktion $f \in C^0_{kpt}(B_1^+, \mathbb{R})$, die durch Null stetig auf $\overline{B}_2^+$ fortgesetzt wurde,

$$\int f d\mu = \lim_{i\to\infty} \int f|Du_i|^2_{\gamma_i} d\mu_{\gamma_i} = \int f|Du|^2_\gamma d\mu_\gamma, \tag{4.10}$$

also $\nu \llcorner B_1^+ \equiv 0$. Sei umgekehrt $\nu \llcorner \overline{B}_1^+ \equiv 0$ und $f \in C^0(\overline{B}_1^+, [0,\infty))$. Dann gilt, da S_1^+ eine $\mathcal{L}^n$-Nullmenge ist, $\mu(S_1^+) = \nu(S_1^+) = 0$. Wie in Lemma 4.1(ii) folgt mit Approximation von $f\mathbb{1}_{B_1^+}$ durch stetige Funktionen

$$\int_{\overline{B}_1^+} f d\mu = \int_{B_1^+} f d\mu \le \liminf_{i\to\infty} \int_{B_1^+} f|Du_i|^2_{\gamma_i} d\mu_{\gamma_i} \le \limsup_{i\to\infty} \int_{B_1^+} f|Du_i|^2_{\gamma_i} d\mu_{\gamma_i} \le \int_{\overline{B}_1^+} f d\mu,$$

also

$$\lim_{i\to\infty} \int f|Du_i|^2_{\gamma_i} d\mu_{\gamma_i} = \int_{\overline{B}_1^+} f d\mu = \int f|Du|^2_\gamma d\mu_\gamma.$$

Durch Zerlegung einer beliebigen Funktion $f \in C^0(\overline{B}_1^+, \mathbb{R})$ in ihren positiven und negativen Anteil folgt die letzte Gleichheit auch für solche f. Lemma 4.2 liefert dann die starke Konvergenz $u_i \to u$ auf B_1^+. □

4.2 Existenz $(n-2)$-flacher Tangentenmaße

Im Folgenden werden Radon-Maße $\mu \in \mathcal{R}(\overline{\Omega})$ für eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ durch triviale Fortsetzung, also durch Setzen von $\mu(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) := 0$, als Maße in $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ aufgefasst. Es werden die folgenden Begriffe benötigt.

Definition 4.8. *Sei $\mu \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ ein Radon-Maß und $a \in \mathbb{R}^n$.*

(i) Für $r > 0$ sei das Maß $\mu_{a,r} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ definiert durch $\mu_{a,r}(A) := r^{2-n}\mu(a + rA)$ für alle Borel-Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$.

(ii) Ein Maß der Form $\psi = \text{w-lim}_{i\to\infty} \mu_{a,r_i} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ für eine Folge $r_i \searrow 0$ heißt Tangentenmaß *von μ an der Stelle a. Die Menge aller solcher Tangentenmaße wird mit* $\mathrm{Tan}(\mu, a)$ *bezeichnet.*

Die Menge $\mathfrak{R}^{\mathfrak{cst}}_{\Lambda,G}(\mathbb{R}^n_+)$ bezeichne in Analogie zur Definition (4.2) das System von Maßen der Form $\mu = \text{w-lim}_{i\to\infty} \mu_{\gamma_i} \llcorner |Du_i|^2_{\gamma_i} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n_+)$, wobei für $i \in \mathbb{N}$ auf beschränkten Gebieten $\Omega_i \subset \Omega_{i+1} \subset \mathbb{R}^n_+$ mit $\cup_i \Omega_i = \mathbb{R}^n_+$ die folgenden Daten gegeben seien: Es seien $u_i \in \mathfrak{H}^{\gamma_i}_\Lambda(\Omega_i)$, wobei die Riemannschen Metriken $\gamma_i \in \mathfrak{M}_G(\Omega_i)$ auf allen kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^n_+$ in der C^1-Norm gegen eine konstante Metrik konvergieren sollen. Das Superskript $\mathfrak{cst}$ der Menge bezieht sich auf diese konstante Grenzmetrik.
Da der innere Fall bereits in [Li] behandelt wurde, werden hier nur Tangentenmaße in Randpunkten betrachtet.

Lemma 4.9. *Sei $\mu \in \mathfrak{R}_{\Lambda,G}(B_2^+)$. Dann besitzt μ in allen Punkten $a \in \Sigma_\mu \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ nur nichttriviale Tangentenmaße und*

$$\mathrm{Tan}(\mu, a) \subset \mathfrak{R}^{\mathfrak{cst}}_{\Lambda,G}(\mathbb{R}^n_+).$$

Beweis. Wegen $\mu \in \mathfrak{R}_{\Lambda,G}(B_2^+)$ gibt es Riemannsche Metriken $\gamma_i \in \mathfrak{M}_G(B_2^+)$ und Abbildungen $u_i \in \mathfrak{H}_\Lambda^{\gamma_i}(B_2^+)$, so dass

$$\mu = \operatorname*{w-lim}_{i\to\infty} \mu_{\gamma_i} \llcorner |Du_i|^2_{\gamma_i}.$$

Sei nun $a \in \Sigma_\mu \cap \partial\mathbb{R}^n_+$. Für jede Folge $r_j \searrow 0$ existiert laut Lemma 4.1(i) nach Teilfolgenübergang der Grenzwert

$$\psi = \operatorname*{w-lim}_{j\to\infty} \mu_{a,r_j} \in \operatorname{Tan}(\mu,a) \subset \mathfrak{R}_{\Lambda,G}(\mathbb{R}^n_+),$$

denn gemäß Abschätzung (4.7) gilt $\mu_{a,r_j}(B_R^+) = r_j^{2-n}\mu(B^+_{r_jR}(a)) \leq C\Lambda R^{n-2}$ für alle $R > 0$, falls j groß genug gewählt ist, so dass $r_jR < 1$ erfüllt ist. Die Maße μ_{a,r_j} haben wegen der Darstellung von μ die Form

$$\mu_{a,r_j} = \operatorname*{w-lim}_{i\to\infty} \mu_{\tilde\gamma_{ij}} \llcorner |D\tilde u_{ij}|^2_{\tilde\gamma_{ij}}$$

mit $\tilde\gamma_{ij}(x) := \gamma_i(a + r_jx)$ und $\tilde u_{ij}(x) := u_i(a + r_jx)$ für alle $x \in B^+_{1/r_j}$. Mit einem Diagonalfolgenargument sieht man nach Übergang zu einer Teilfolge von $\{j\}$

$$\psi = \operatorname*{w-lim}_{i\to\infty} \mu_{\tilde\gamma_{ii}} \llcorner |D\tilde u_{ii}|^2_{\tilde\gamma_{ii}}.$$

Hierbei sind $\tilde\gamma_{ii} \in \mathfrak{M}_G(B^+_{1/r_i})$ sowie $\tilde u_{ii} \in \mathfrak{H}_\Lambda^{\tilde\gamma_{ii}}(B^+_{1/r_i})$. Außerdem gilt nach Definition der $\tilde\gamma_{ii}$ die Abschätzung $\|D\tilde\gamma_{ii}\|_\infty \leq r_i\|D\gamma_i\|_\infty \to 0$ bei $i \to \infty$, also konvergieren die Metriken $\tilde\gamma_{ii}$ nach nochmaligem Teilfolgenübergang auf allen kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^n_+$ in C^1 gegen eine konstante Metrik. Das Maß ψ ist nicht das Nullmaß, da wegen $a \in \Sigma_\mu$ gilt $\psi(\overline{B}_1^+) \geq \liminf_{r_j\searrow 0} r_j^{2-n}\mu(B^+_{r_j}(a)) \geq \varepsilon_0$. □

Das wesentliche Beweismittel in diesem Abschnitt ist das folgende Resultat der Geometrischen Maßtheorie.

Satz 4.10 ([M, Thm. 14.18]). *Seien $m \leq n$ natürliche Zahlen und $\nu \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ ein Radon-Maß mit der Eigenschaft, dass der Grenzwert $\lim_{r\searrow 0} r^{-m}\nu(B_r(a))$ an ν-fast allen Punkten $a \in \mathbb{R}^n$ existiert sowie positiv und endlich ist. Dann besitzt ν an ν-fast allen Punkten $a \in \mathbb{R}^n$ ein m-flaches Tangentenmaß, d.h. es gibt einen m-dimensionalen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$ und eine Konstante $0 < C < \infty$ mit $C\mathcal{H}^m \llcorner V \in \operatorname{Tan}(\nu,a)$.*

Da in [Li] unter zusätzlichen Voraussetzungen an die Zielmannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ für alle Maße $\mu \in \mathfrak{R}_{\Lambda,G}(B_2^+,\Gamma,\mathcal{N})$ die Eigenschaft $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_\mu \setminus \partial\mathbb{R}^n_+) = 0$ bewiesen wurde, wird dies im Folgenden vorausgesetzt. Die benötigte Bedingung an $\mathcal{N}$ ist dabei laut [Li], dass keine nichtkonstante, glatte harmonische Abbildung $S^2 \to \mathcal{N}$ existieren darf.

Satz 4.11 (Existenz $(n-2)$-flacher Tangentenmaße). *Sei $\mu \in \mathfrak{R}_{\Lambda,G}(B_2^+)$ mit $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_\mu \cap \partial\mathbb{R}^n_+) > 0$. Dann gibt es für $\mathcal{H}^{n-2}$-fast alle $a \in \Sigma_\mu \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ einen $(n-2)$-dimensionalen Unterraum $V \subset \partial\mathbb{R}^n_+$ und eine Konstante $0 < C < \infty$, so dass*

$$C\mathcal{H}^{n-2} \llcorner V \in \operatorname{Tan}(\mu,a).$$

Beweis. Die direkte Anwendung von Satz 4.10 ist problematisch, falls die Metriken γ_i nicht auf $\overline{B}_2^+$ gleichmäßig gegen die Euklidische Metrik konvergieren, weil dann die Monotonieformel für stationäre Abbildungen nur auf Ellipsoiden, aber nicht auf Kugeln

gilt. Dieses Problem wird durch Übergang zu einem Tangentenmaß gelöst.
Für $\mathcal{H}^{n-2}$-fast alle $a \in \Sigma_\mu \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ gilt

$$\limsup_{r\searrow 0} r^{2-n}\mathcal{H}^{n-2}(B_r(a)\cap\Sigma_\mu\cap\partial\mathbb{R}^n_+) \geq 2^{2-n}\alpha(n-2), \tag{4.11}$$

vgl. [F, 2.10.19(2)] oder [Sim1, Bem. 3.7]. Laut [M, Thm. 14.16] gilt außerdem für $\mathcal{H}^{n-2}$-fast alle $a \in \Sigma_\mu \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ und alle $\psi \in \mathrm{Tan}(\mu, a)$

$$\mathrm{Tan}(\psi, b) \subset \mathrm{Tan}(\mu, a) \quad \text{für alle } b \in \mathrm{spt}(\psi). \tag{4.12}$$

Im Folgenden sei $a \in \Sigma_\mu \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ mit den Eigenschaften (4.11) und (4.12) gewählt und $r_j \searrow 0$ eine Folge, für die der Limes superior in (4.11) angenommen wird. Lemma 4.9 liefert nach Übergang zu einer Teilfolge ein Tangentenmaß $\psi := \text{w-lim}_{j\to\infty}\mu_{a,r_j}$ mit $0 \not\equiv \psi \in \mathrm{Tan}(\mu, a) \subset \mathfrak{R}^{\mathsf{cst}}_{\Lambda,G}(\mathbb{R}^n_+)$. Demnach hat ψ die Form

$$\psi = \underset{i\to\infty}{\text{w-lim}}\, \mu_{\gamma_i} \llcorner |Du_i|^2_{\gamma_i}$$

mit $\gamma_i \in \mathfrak{M}_G(\Omega_i)$ und $u_i \in \mathfrak{H}_\Lambda(\Omega_i)$, wobei $\cup_i\Omega_i = \mathbb{R}^n_+$ ist und die γ_i auf kompakten Mengen bei $i \to \infty$ gleichmäßig gegen eine konstante Metrik konvergieren. Im Folgenden wird $\gamma_i \to (\delta_{\alpha\beta})$ gleichmäßig auf kompakten Mengen vorausgesetzt, da dies immer durch eine affin lineare Transformation zu erreichen ist. Unter dieser Annahme kann man die Transformationen $T^{\gamma_i}_x$ aus Bemerkung 1.11 für $x \in \Omega_i$ so wählen, dass man auf allen kompakten Mengen gleichmäßige Konvergenz $T^{\gamma_i}_x \to \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ bei $i \to \infty$ erhält. Wegen der Energiemonotonie der stationären harmonischen Abbildungen u_i laut Korollar 1.12 sind die Terme

$$e^{\chi_i\rho}\rho^{2-n}\int_{T^{\gamma_i}_x B^+_\rho(x)} |Du_i|^2_{\gamma_i}\, d\mu_{\gamma_i}$$

für alle $x \in \overline{B}^+_1$ monoton in ρ, falls ρ hinreichend klein ist. Genauer muss ρ so klein gewählt werden, dass im Fall $x \notin \partial\mathbb{R}^n_+$ gilt $T^{\gamma_i}_x B^+_\rho(x) = T^{\gamma_i}_x B_\rho(x) \subset \Omega_i$, während im Fall $x \in \partial\mathbb{R}^n_+$ lediglich $T^{\gamma_i}_x B^+_\rho(x) \subset \Omega_i$ erfüllt sein muss. Wegen $\|D\gamma_i\|_\infty \to 0$ können die Konstanten χ_i laut Korollar 1.12 so gewählt werden, dass $\chi_i \to 0$ bei $i \to \infty$ gilt. Zusammen mit der Konvergenz $T^{\gamma_i}_x \to \mathrm{id}$ liefert Lemma 4.1(ii), da die folgende Funktion linksstetig von ρ abhängt:

$$\rho \mapsto \rho^{2-n}\psi(B^+_\rho(x)) \quad \text{ist monoton für alle } x \in \overline{B}^+_1, \text{ falls } \rho > 0 \text{ klein genug ist.} \tag{4.13}$$

Daher existiert die $(n-2)$-dimensionale Dichte

$$\Theta^{n-2}(\psi, x) := \lim_{\rho\searrow 0}\rho^{2-n}\psi(B^+_\rho(x)) \quad \text{für } x \in \overline{B}^+_1$$

und ist endlich. Für alle $x \in \Sigma_\psi$ gilt insbesondere nach Definition (4.6) dieser Menge $\Theta^{n-2}(\psi, x) \geq \varepsilon_0$. Die Strukturaussage aus Lemma 4.4, angewandt auf das Maß $\psi \llcorner \overline{B}^+_2 \in \mathfrak{R}_{\Lambda,G}(B^+_2)$, liefert für ein Maß $\nu \in \mathcal{R}(\overline{B}^+_1)$ und Konstanten $C_*, C^* > 0$

$$\psi \llcorner \overline{B}^+_1 = \mathcal{L}^n \llcorner |Du|^2 + \nu, \quad C_*\mathcal{H}^{n-2}\llcorner\Sigma_\psi \leq \nu \leq C^*\mathcal{H}^{n-2}\llcorner\Sigma_\psi,$$

wobei $u = \text{w-lim}_{i\to\infty} u_i \in H^1(B^+_2, \mathcal{N})$. Nun soll $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_\psi \cap \partial\mathbb{R}^n_+) > 0$ gezeigt werden. Hierfür benutzt man Lemma 4.1(ii), um herzuleiten

$$\begin{aligned}
\psi(\overline{B}_1 \cap \partial\mathbb{R}^n_+) &\geq \limsup_{j\to\infty}\mu_{a,r_j}(B_1 \cap \partial\mathbb{R}^n_+) = \limsup_{j\to\infty} r_j^{2-n}\mu(B_{r_j}(a) \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \\
&\geq C_*\limsup_{j\to\infty} r_j^{2-n}\mathcal{H}^{n-2}(B_{r_j}(a)\cap\Sigma_\mu\cap\partial\mathbb{R}^n_+) > 0
\end{aligned}$$

wegen der Strukturaussage für μ aus Lemma 4.4, Eigenschaft (4.11) von a und der Wahl der Folge $\{r_j\}$. Obige Abschätzung liefert die gewünschte Aussage

$$\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_\psi \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \geq (C^*)^{-1}\nu(\overline{B}_1 \cap \partial\mathbb{R}^n_+) = (C^*)^{-1}\psi(\overline{B}_1 \cap \partial\mathbb{R}^n_+) > 0.$$

Weil $\mathcal{L}^n \llcorner |Du|^2$ absolutstetig zum Lebesguemaß ist, verschwindet für $\mathcal{H}^{n-2}$-fast alle $b \in \overline{B}_1^+$ die $(n-2)$-dimensionale Dichte $\Theta^{n-2}(\mathcal{L}^n \llcorner |Du|^2, b) = 0$, vgl. [FZ, S. 152]. Für $\mathcal{H}^{n-2}$-fast alle $b \in \overline{B}_1^+$ gilt also $\Theta^{n-2}(\nu, b) = \Theta^{n-2}(\psi, b) < \infty$. Für $b \in \Sigma_\psi$ ist dieser Term nach unten durch ε_0 abgeschätzt, das bedeutet

$$\Theta^{n-2}(\nu, b) = \Theta^{n-2}(\psi, b) \geq \varepsilon_0 \quad \text{für } \nu\text{-fast alle } b \in \overline{B}_1^+.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 4.10 für das Maß $\nu \llcorner \partial\mathbb{R}^n_+ \in \mathcal{R}(\overline{B}_1^+) \subset \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ erfüllt, daher gibt es für ν-fast alle Punkte $b \in \overline{B}_1^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ ein $(n-2)$-flaches Tangentenmaß $\varpi = \text{w-lim}_{l\to\infty} \nu_{b,\rho_l} \in \mathrm{Tan}(\nu, b) \subset \mathcal{R}(\mathbb{R}^n_+)$ für eine geeignete Folge $\rho_l \searrow 0$. Das bedeutet $\varpi = C\mathcal{H}^{n-2} \llcorner V$ für einen $(n-2)$-dimensionalen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$ und eine Konstante $0 < C < \infty$. Wegen $V \subset \mathrm{spt}(\varpi) \subset \mathbb{R}^n_+$ kann nur $V \subset \partial\mathbb{R}^n_+$ gelten. Wählt man $b \in \overline{B}_1^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ so, dass $\Theta^{n-2}(\nu, b) = \Theta^{n-2}(\psi, b)$ erfüllt ist, so gilt für alle bis auf abzählbar viele $R > 0$

$$\varpi(B_R^+) = \lim_{l\to\infty} \rho_l^{2-n}\nu(B_{\rho_l R}^+(b)) = \lim_{l\to\infty} \rho_l^{2-n}\psi(B_{\rho_l R}^+(b)),$$

woraus wegen $\nu_{b,\rho_l} \leq \psi_{b,\rho_l}$ folgt $\varpi = \text{w-lim}_{l\to\infty} \psi_{b,\rho_l} \in \mathrm{Tan}(\psi, b)$. Mit Eigenschaft (4.12) folgt die Behauptung

$$\varpi = C\mathcal{H}^{n-2} \llcorner V \in \mathrm{Tan}(\psi, b) \subset \mathrm{Tan}(\mu, a).$$

□

Es soll nicht unerwähnt bleiben, dass die tiefliegenden Rektifizierbarkeitsaussagen aus [P] das folgende Ergebnis implizieren.

Proposition 4.12. *Für jedes $\mu \in \mathfrak{R}_{\Lambda,G}(B_2^+)$ ist Σ_μ eine $(n-2)$-rektifizierbare Menge.*

Beweis. Laut Lemma 4.4 hat $\mu \llcorner \overline{B}_1^+$ für ein $\gamma \in \mathfrak{M}_G(B_1^+)$, ein $u \in H^1(B_1^+, \mathcal{N})$ und ein Maß $\nu \in \mathcal{R}(\overline{B}_1^+)$ die Form

$$\mu \llcorner \overline{B}_1^+ = \mu_\gamma \llcorner |Du|_\gamma^2 + \nu, \quad C_*\mathcal{H}^{n-2} \llcorner \Sigma_\mu \leq \nu \leq C^*\mathcal{H}^{n-2} \llcorner \Sigma_\mu.$$

Wegen $\nu(\overline{B}_1^+ \setminus \Sigma_\mu) = 0$ ist die Aussage der Proposition äquivalent damit, dass ν ein $(n-2)$-rektifizierbares Maß ist. Im Folgenden seien die Maße μ und ν durch triviales Fortsetzen als Maße auf $\mathbb{R}^n$ aufgefasst. Wie in (4.13) folgt

$$\rho \mapsto \rho^{2-n}\mu(E_\rho^\gamma(x)) \quad \text{ist monoton für alle } x \in \overline{B}_1^+ \text{ und hinreichend kleine } \rho > 0.$$

Sei $x_0 \in \Sigma_\mu$ beliebig. Es wird $\gamma(x_0) = (\delta_{\alpha\beta})$ angenommen, da dies durch eine affin lineare Transformation zu erreichen ist. Zu jedem $\varepsilon > 0$ lässt sich dann $\rho(\varepsilon) > 0$ so klein wählen, dass auf $U_\varepsilon := B_{\rho(\varepsilon)}(x_0)$ die Eigenwerte von γ im Intervall $[(1+\varepsilon)^{-2}, (1+\varepsilon)^2]$ liegen. Daher gilt mit $g_\varepsilon := 1 + \varepsilon$ für alle $x \in U_\varepsilon$ und alle $\rho < 1$ die Schachtelung $E^\gamma_{\rho/g_\varepsilon}(x) \subset B_\rho(x) \subset E^\gamma_{\rho g_\varepsilon}(x)$, weshalb für $x \in \Sigma_\mu \cap U_\varepsilon$ gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \leq \limsup_{\rho\searrow 0} \rho^{2-n}\mu(B_\rho(x)) &\leq \lim_{\rho\searrow 0} \rho^{2-n}\mu(E^\gamma_{\rho g_\varepsilon}(x)) \qquad (4.14) \\ &\leq \liminf_{\rho\searrow 0} \rho^{2-n}\mu(B_{\rho g_\varepsilon^2}(x)) = g_\varepsilon^{2(n-2)} \liminf_{\rho\searrow 0} \rho^{2-n}\mu(B_\rho(x)). \end{aligned}$$

Wie im Beweis von Satz 4.11 folgt für $\mathcal{H}^{n-2}$-fast alle $x \in U_\varepsilon$ aus [FZ, S. 152]

$$\lim_{\rho \searrow 0} \rho^{2-n} \int_{B_\rho(x)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma = 0. \tag{4.15}$$

Aus (4.14) und (4.15) folgt für $\mathcal{H}^{n-2}$-fast alle $x \in \Sigma_\mu \cap U_\varepsilon$, d.h. für ν-fast alle $x \in U_\varepsilon$

$$\varepsilon_0 \leq \limsup_{\rho \searrow 0} \rho^{2-n} \nu(B_\rho(x)) \leq g_\varepsilon^{2(n-2)} \liminf_{\rho \searrow 0} \rho^{2-n} \nu(B_\rho(x)).$$

Damit sind für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ die Voraussetzungen von [P, Kor. 5.4] für das Maß $\nu \llcorner U_\varepsilon$ erfüllt, und es folgt die Rektifizierbarkeit von $\nu \llcorner U_\varepsilon$. Da der Mittelpunkt $x_0 \in \Sigma_\mu$ von $U_\varepsilon = B_{\rho(\varepsilon)}(x_0)$ beliebig gewählt war, folgt die Proposition. $\square$

4.3 Der Kompaktheitssatz

In diesem Abschnitt wird für die Kompaktheit von Folgen in $\mathfrak{H}_\Lambda(B_2^+, G, \Gamma, \mathcal{N})$ bezüglich der H^1-Normtopologie eine notwendige und hinreichende Bedingung in Termen der Daten Γ und $\mathcal{N}$ entwickelt.

Bezeichnung 4.13. *Sei $\mathcal{N}$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\Gamma \subset \mathcal{N}$ eine Untermannigfaltigkeit hiervon sowie $A \subset \mathcal{N}$ eine abgeschlossene Teilmenge. Für $l \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sei auf der l-dimensionalen Sphäre $S^l \subset \mathbb{R}^{l+1}$ die vom Euklidischen Skalarprodukt des $\mathbb{R}^{l+1}$ induzierte Metrik zugrundegelegt. Es werden folgende Sprechweisen verwendet.*

(i) Man sagt, die Menge A trägt keine nichttrivialen, harmonischen S^l, *wenn jede glatte harmonische Abbildung $v : S^l \to A \subset \mathcal{N}$ konstant ist.*

(ii) Analog spricht man davon, dass A keine nichttrivialen, harmonischen S_+^l mit freiem Rand Γ *trägt, wenn es keine nichtkonstante, glatte harmonische Abbildung $v : S_+^l \to A \subset \mathcal{N}$ gibt, die die Randbedingungen $v(\partial S_+^l) \subset \Gamma$ sowie $\partial_{l+1} v(x) \perp \Gamma$ für alle $x \in \partial S_+^l$ erfüllt.*

(iii) Allgemeiner sagt man, dass die Menge A keine nichttrivialen, am Rand glatten, stationären harmonischen S_+^l mit freiem Rand Γ *trägt, wenn es keine nichtkonstante, stationäre harmonische Abbildung $v \in H^1(S_+^l, \mathcal{N})$ zur freien Randbedingung $v(\partial S_l^+) \subset \Gamma$ gibt, die* $\mathrm{Bild}(v) \subset A$ *erfüllt und in einer vollen Umgebung von ∂S_+^l glatt ist.*

Das Hauptergebnis dieses Kapitels lautet hiermit folgendermaßen.

Theorem 4.14 (Kompaktheit stationärer harmonischer Abbildungen). *Gegeben seien Konstanten $\Lambda > 0$, $G \geq 1$, eine kompakte, glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ sowie eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit $\Gamma \subset \mathcal{N}$. Weiter seien für $i \in \mathbb{N}$ Abbildungen $w_i \in \mathfrak{H}_\Lambda(B_2^+, G, \Gamma, \mathcal{N})$ gegeben. Falls die Menge $A := \overline{\cup_i \mathrm{Bild}(w_i)}$ weder nichttriviale harmonische S^2 noch nichttriviale harmonische S_+^2 mit freiem Rand Γ trägt, besitzt $\{w_i\}$ eine in der H^1-Norm auf B_1^+ konvergente Teilfolge.*

Für Beispiele von Mannigfaltigkeiten $\mathcal{N}$ und $\Gamma \subset \mathcal{N}$, für die die Voraussetzungen des Theorems erfüllt sind, wird auf Abschnitt 5.3 verwiesen.

Bemerkung 4.15. Die Version des Theorems im inneren Fall stammt aus der Arbeit [Li]. In diesem Fall genügt es vorauszusetzen, dass $\overline{\cup_i \mathrm{Bild}(w_i)}$ keine nichttrivialen harmonischen S^2 trägt, um für die Folge stationärer harmonischer Abbildungen $w_i \in H^1(B_2, \mathcal{N})$ mit $E(w_i) \leq \Lambda$ für alle $i \in \mathbb{N}$ die Existenz einer in der H^1-Norm auf B_1^+ konvergenten Teilfolge zu garantieren. Die Bedingung über die Nichtexistenz von Halbsphären entfällt hier.

Bemerkung 4.16. Die Voraussetzungen des Theorems sind im folgenden Sinne auch notwendig für die Kompaktheit der Menge der stationären harmonischen Abbildungen: Falls eine Menge $A \subset \mathcal{N}$ eine nichttriviale harmonische S^2 trägt, gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ eine Folge von stationären, da glatten harmonischen Abbildungen $w_i : \mathbb{R}^n \to A \subset \mathcal{N}$, die keine in der $H^1(B_1, \mathbb{R}^N)$-Norm konvergente Teilfolge besitzt. In diesem Fall kann die Konvergenz also an einem inneren Punkt scheitern. Falls dagegen A eine nichttriviale harmonische S_+^2 mit freiem Rand Γ trägt, kann man ein Gegenbeispiel konstruieren, bei dem an einem Randpunkt ein Konvergenzproblem auftritt. Genauer gibt es dann für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ eine Folge von glatten, also stationären harmonischen Abbildungen $w_i : \mathbb{R}_+^n \to A \subset \mathcal{N}$ mit freier Randbedingung $w_i(\partial \mathbb{R}_+^n) \subset \Gamma$, die keine bezüglich der $H^1(B_1^+, \mathbb{R}^N)$-Norm konvergente Teilfolge hat.
Für die Konstruktion der Gegenbeispiele geht man wie folgt vor. Angenommen, es gibt eine nichtkonstante harmonische Abbildung $w : S_+^2 \to A \subset \mathcal{N}$ mit freier Randbedingung $w(\partial S_+^2) \subset \Gamma$, also $\partial_3 w \perp \Gamma$ auf ∂S_+^2. Mittels stereographischer Projektion kann man w als eine harmonische Abbildung $\mathbb{R}_+^2 \to A \subset \mathcal{N}$ auffassen, die einer freien Randbedingung $\partial_2 w \perp \Gamma$ auf $\partial \mathbb{R}_+^2$ genügt. Für eine Folge $\lambda_i \searrow 0$ setzt man $w_i(x) := w(x/\lambda_i)$ für $x \in \mathbb{R}_+^2$, um harmonische Abbildungen mit der gleichen freien Randbedingung wie w zu erhalten. Damit gilt für alle $f \in C^0(\overline{B}_1^+, \mathbb{R})$

$$\int f |Dw_i|^2 d\mathcal{L}^2 = \int f(x) \lambda_i^{-2} |Dw|^2(x/\lambda_i)\, d\mathcal{L}^2(x) \underset{\lambda_i \searrow 0}{\longrightarrow} C_0 f(0),$$

weil $x \to \lambda_i^{-2} |Dw|^2(x/\lambda_i)$ bis auf eine Konstante $C_0 > 0$ die Eigenschaften eines glättenden Kerns hat. Obige Gleichung entspricht der Maßkonvergenz

$$\mathcal{L}^2 \llcorner |Dw_i|^2 \rightharpoonup C_0 \delta_0 \tag{4.16}$$

mit dem Dirac-Maß δ_0 mit Masse im Nullpunkt. Nach Lemma 4.7(i) gibt es also keine stark konvergente Teilfolge von $\{w_i\}$. In höheren Dimensionen $n > 2$ erhält man Gegenbeispiele durch Hinzufügen redundanter Variablen, also durch die Definition

$$\hat{w}_i(x) := w_i(x_{n-1}, x_n) \quad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n.$$

Diese Abbildungen sind ebenfalls harmonisch mit freier Randbedingung $\partial_n \hat{w}_i \perp \Gamma$ auf $\partial \mathbb{R}_+^n$ und wie bei der Folge $\{w_i\}$ tritt auch für keine Teilfolge von $\{\hat{w}_i\}$ starke Konvergenz ein.
In dem Fall, dass eine nichtkonstante harmonische Abbildung $w : S^2 \to A \subset \mathcal{N}$ existiert, geht man analog vor. Man fasst w als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to A \subset \mathcal{N}$ auf und definiert $w_i(x) := w(x/\lambda_i)$ für eine beliebige Nullfolge λ_i. Wie oben sieht man $\mathcal{L}^2 \llcorner |Dw_i|^2 \rightharpoonup C_0 \delta_0$ mit einer Konstanten $C_0 > 0$ und daher keine starke Konvergenz für eine Teilfolge von $\{w_i\}$. Durch Setzen von $\hat{w}_i(x) := w_i(x_{n-1}, x_n)$ für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ erhält man Gegenbeispiele auch für alle $n > 2$.

Beweis des Theorems. Die für die Abbildungen $w_i \in \mathfrak{H}_\Lambda(B_2^+)$ zugrundegelegten Metriken seien $g_i \in \mathfrak{M}_G(B_2^+)$. Angenommen, die Aussage des Theorems gilt nicht. Dann besitzt das Maß $\mu := \text{w-lim}_{i\to\infty} \mu_{g_i} \llcorner |Dw_i|^2_{g_i} \in \mathfrak{R}_{\Lambda,G}(B_2^+)$ laut Lemma 4.7 eine nichttriviale singuläre Menge, also $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_\mu) > 0$. In [Li, Lm 3.1] wurde bereits der innere Fall behandelt mit dem Ergebnis $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_\mu \setminus \partial\mathbb{R}^n_+) = 0$, weil keine nichttrivialen harmonischen S^2 existieren. Da also $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_\mu \cap \partial\mathbb{R}^n_+) > 0$ gilt, existiert laut Satz 4.11 nach Anwendung einer geeigneten Drehung ein Tangentenmaß der Form

$$\psi := C_0 \mathcal{H}^{n-2} \llcorner (\mathbb{R}^{n-2} \times \{0\}) \in \operatorname{Tan}(\mu, a)$$

für ein $a \in \Sigma_\mu \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ und eine Konstante $0 < C_0 < \infty$. Lemma 4.9 liefert Metriken $\gamma_i \in \mathfrak{M}_G(B^+_{s_i})$ und Abbildungen $u_i \in \mathfrak{H}^{\gamma_i}_\Lambda(B^+_{s_i})$, wobei $s_i \to \infty$ bei $i \to \infty$, so dass

$$C_0 \mathcal{H}^{n-2} \llcorner (\mathbb{R}^{n-2} \times \{0\}) = \psi = \operatorname*{w-lim}_{i\to\infty} \mu_{\gamma_i} \llcorner |Du_i|^2_{\gamma_i} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n_+).$$

Dabei konvergieren die Metriken γ_i nach einer affin linearen Transformation in C^1_{lok} gegen die Euklidische Metrik. Aus dem Beweis von Lemma 4.9 sieht man, dass die u_i durch Umskalieren aus den w_i hervorgehen, daher gilt

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{Bild}(u_i) \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{Bild}(w_i).$$

Aufgrund der Form des Maßes ψ kann man die Vermutung anstellen, dass die u_i längs $\mathbb{R}^{n-2} \times \{0\}$ näherungsweise konstant sind. Tatsächlich gilt

Behauptung 1.

$$\sum_{k=1}^{n-2} \int_{B_4^+} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right|^2 d\mathcal{L}^n \longrightarrow 0 \quad \text{bei } i \to \infty.$$

Beweis. Sei $z \in \mathbb{R}^{n-2} \times \{0\}$. Die Metriken γ_i konvergieren auf $\overline{B_6^+(z)}$ in C^1 gegen die Euklidische Metrik. Insbesondere kann man die Transformationen $T^i_z := T^{\gamma_i}_z$ aus Bemerkung 1.11 so wählen, dass bei $i \to \infty$ Konvergenz $T^i_z \to \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ gewährleistet ist. Die transformierten Metriken $\tilde{\gamma}_i := T^{i*}_z \gamma_i$ erfüllen $\tilde{\gamma}_i(z) = (\delta_{\alpha\beta})$. Die entsprechend transformierten Abbildungen seien $\tilde{u}_i := u_i \circ T^i_z$. Hierfür gilt dann die Energiemonotonieformel aus Satz 1.10 mit Konstanten $D > 0$ und $0 \le \chi_i \le C'(n,G)\|D\gamma_i\|_\infty \to 0$. Mit den Bezeichnungen $r(x) := |x - z|$ und $\vec{n}(x) := \frac{x-z}{|x-z|}$ gilt daher für alle $0 < \sigma < \rho \le 5$ und hinreichend große $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{D} \int_{B^+_\rho(z)\setminus B^+_\sigma(z)} e^{\chi_i r} r^{2-n} \left| \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \vec{n}} \right|^2 d\mu_{\tilde{\gamma}_i} \\
&\quad \le \quad e^{\chi_i\rho}\rho^{2-n} \int_{B^+_\rho(z)} |D\tilde{u}_i|^2_{\tilde{\gamma}_i} d\mu_{\tilde{\gamma}_i} - e^{\chi_i\sigma}\sigma^{2-n} \int_{B^+_\sigma(z)} |D\tilde{u}_i|^2_{\tilde{\gamma}_i} d\mu_{\tilde{\gamma}_i} \\
&\quad = \quad e^{\chi_i\rho}\rho^{2-n} \int_{T^i_z B^+_\rho(z)} |Du_i|^2_{\gamma_i} d\mu_{\gamma_i} - e^{\chi_i\sigma}\sigma^{2-n} \int_{T^i_z B^+_\sigma(z)} |Du_i|^2_{\gamma_i} d\mu_{\gamma_i} \\
&\quad \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \quad \rho^{2-n}\psi(B^+_\rho(z)) - \sigma^{2-n}\psi(B^+_\sigma(z)) = 0
\end{aligned}$$

nach Lemma 4.1(ii), wobei $\mu_{\gamma_i} \llcorner |Du_i|^2_{\gamma_i} \rightharpoonup \psi$ sowie $T^i_z \to \mathrm{id}$ und $\chi_i \to 0$ bei $i \to \infty$ benutzt wurde. Die Konvergenz gilt dabei ohne Ausnahme für alle $0 < \sigma < \rho \le 5$, da $\psi(S^+_\rho(z)) = 0 = \psi(S^+_\sigma(z))$ für alle solche ρ, σ gilt. Es folgt

$$\int_{B^+_\rho(z)\setminus B^+_\sigma(z)} r^2 \left| \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \vec{n}} \right|^2 d\mu_{\tilde{\gamma}_i} \longrightarrow 0 \quad \text{bei } i \to \infty. \tag{4.17}$$

Weiter schließt man aus der Monotonieformel für $\sigma \leq 1$

$$\begin{aligned} \frac{2}{D}\int_{B_\sigma^+(z)} e^{\chi_i r} r^{2-n}\left|\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \vec{n}}\right|^2 d\mu_{\tilde{\gamma}_i} &\leq e^{\chi_i\sigma}\sigma^{2-n}\int_{B_\sigma^+(z)} |D\tilde{u}_i|^2_{\tilde{\gamma}_i} d\mu_{\tilde{\gamma}_i} \\ &\leq e^{\chi_i}\int_{B_1^+(z)} |D\tilde{u}_i|^2_{\tilde{\gamma}_i} d\mu_{\tilde{\gamma}_i} \leq e^{\chi_i} C. \end{aligned}$$

Wegen $\chi_i \to 0$ ist also für $\sigma \leq 1$

$$\sigma^{-n}\int_{B_\sigma^+(z)} r^2\left|\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \vec{n}}\right|^2 d\mu_{\tilde{\gamma}_i} \leq \int_{B_\sigma^+(z)} r^{2-n}\left|\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \vec{n}}\right|^2 d\mu_{\tilde{\gamma}_i} \leq C$$

unabhängig von i abgeschätzt. Dies impliziert

$$\int_{B_\sigma^+(z)} r^2\left|\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \vec{n}}\right|^2 d\mu_{\tilde{\gamma}_i} \underset{\sigma\searrow 0}{\longrightarrow} 0 \tag{4.18}$$

gleichmäßig für $i \in \mathbb{N}$. Die Kombination von (4.17) und (4.18) liefert mit der Transformation $T_z^i(x) = z + T_i(x-z)$

$$\begin{aligned} \int_{T_z^i B_\rho^+(z)} |Du_i(x)\cdot T_i(x-z)|^2 d\mu_{\gamma_i}(x) &= \int_{B_\rho^+(z)} |D\tilde{u}_i(x)\cdot(x-z)|^2 d\mu_{\tilde{\gamma}_i}(x) \\ &= \int_{B_\rho^+(z)} r^2\left|\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \vec{n}}\right|^2 d\mu_{\tilde{\gamma}_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Wegen $T_z^i \to \mathrm{id}$ und $T_i \to \mathrm{id}$ bei $i \to \infty$ sowie wegen der Beschränktheit von $\|Du_i\|_{L^2}$ folgt für alle $0 < \rho \leq 5$

$$\int_{B_\rho^+(z)} |Du_i(x)\cdot(x-z)|^2 d\mu_{\gamma_i}(x) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.19}$$

Wegen

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(x)\right| \leq |Du_i(x)\cdot x| + |Du_i(x)\cdot(x-e_k)|$$

liefert die Gleichheit (4.19) die Behauptung, indem man sie einmal mit $z = 0$ und $\rho = 4$ und ein weiteres Mal mit $z = e_k$ und $\rho = 5$ benutzt. □

Zum Beweis des Theorems werden nun mit einem Aufblasargument harmonische 2-Sphären bzw. 2-Halbsphären konstruiert. Dazu betrachtet man um später zu wählende Punkte p_i 'aufgeblasene' Versionen der u_i:

$$v_i(y) := u_i(p_i + \delta_i y) \qquad \text{mit } p_i \in B_2^{n-2}\times\overline{B_1^{2+}} \text{ und } \delta_i \searrow 0,$$

und zeigt, dass deren Grenzwert längs $\Sigma_\psi = \mathbb{R}^{n-2}\times\{0\}$ konstant ist und dass man nach Weglassen der $(n-2)$ redundanten Variablen harmonische S^2 oder S^2_+ erhält.
Die Stützpunkte p_i werden in den zu Σ_ψ tangentialen und den orthogonalen Anteil zerlegt als $p_i =: (X_1^i, X_2^i) \in \mathbb{R}^{n-2}\times\mathbb{R}^2_+$. Im Folgenden wird für gewisse n-dimensionale affine Halbräume die Notation

$$\mathbb{H}_i := \left\{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} : x_n \geq -p_i^n/\delta_i\right\}$$

verwendet, wobei p_i^n für $i \in \mathbb{N}$ die n-te Koordinate von p_i bezeichne. Da die u_i auf $B_1^{n-2}(X_1^i)\times B_1^{2+}(X_i^2) \subset B_3^{n-2}\times B_2^{2+} \subset B_4^{n+}$ definiert sind, wenn man $i \in \mathbb{N}$ hinreichend groß wählt, ist dann

$$v_i : B_{R_i}^{n-2} \times B_{R_i}^2 \cap \mathbb{H}_i \longrightarrow \mathrm{Bild}(u_i),$$

falls $R_i := 1/\delta_i \to \infty$ ist. Wie die Abbildungen werden auch die zugrundeliegenden Metriken umskaliert zu $\eta_i(y) := \gamma_i(p_i + \delta_i y)$. Wegen $u_i \in \mathfrak{H}_\Lambda(B_{s_i}^+)$ und Korollar 1.13 ist für alle $S > 0$ und hinreichend große Werte von $i \in \mathbb{N}$

$$S^{2-n} \int_{B_S^+ \cap \mathbb{H}_i} |Dv_i|_{\eta_i}^2 d\mu_{\eta_i} = (S\delta_i)^{2-n} \int_{B_{S\delta_i}^+(p_i)} |Du_i|_{\gamma_i}^2 d\mu_{\gamma_i} \le C\Lambda. \tag{4.20}$$

Wahl der X_1^i

Die behauptete Konstanz der Grenzabbildungen längs der ersten $(n-2)$ Koordinatenrichtungen läuft auf Abschätzungen der Funktion

$$f_i(X_1) := \sum_{k=1}^{n-2} \int_{B_2^{2+}} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right|^2 (X_1, X_2)\, d\mathcal{L}^2(X_2) \qquad \text{für } X_1 \in B_3^{n-2}$$

hinaus. Um zu zeigen, dass die L^1-Normen der skalierten Abbildungen v_i gegen Null konvergieren, benötigt man Abschätzungen der skalierten L^1-Normen von f_i. Es stellt sich heraus, dass dies unabhängig von den Skalen δ_i möglich ist, was später alle Freiheiten für die Wahl der Skalierungsfaktoren lässt.

Behauptung 2. Die Koordinaten $X_1^i \in B_2^{n-2}$ lassen sich so wählen, dass

(i) $\sup_{0<r\le 1} r^{2-n} \int_{B_r^{n-2}(X_1^i)} f_i \, d\mathcal{L}^{n-2} \longrightarrow 0$ bei $i \to \infty$ und

(ii) die Abbildungen u_i nahe allen Punkten $(X_1^i, X_2) \in \{X_1^i\} \times \overline{B_2^{2+}}$ glatt sind.

Eigenschaft (i) bedeutet für die v_i und alle $0 < R \le R_i$ mit der Abkürzung $r_i := \delta_i R \le 1$

$$\begin{aligned} R^{2-n} & \int_{B_R^{n-2}\times B_{R_i}^2 \cap \mathbb{H}_i} \sum_{k=1}^{n-2} \left| \frac{\partial v_i}{\partial y_k} \right|^2 d\mathcal{L}^n \qquad\qquad (4.21) \\ = \quad & r_i^{2-n} \int_{B_{r_i}^{n-2}(X_1^i)} \left(\sum_{k=1}^{n-2} \int_{B_1^{2+}(X_2^i)} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right|^2 d\mathcal{L}^2 \right) d\mathcal{L}^{n-2} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

wobei die Transformation $y = (x - p_i)/\delta_i$ benutzt wurde sowie die Gleichheit $R_i = 1/\delta_i$.

Beweis. Für (i) wendet man Behauptung 1 an, um $\|f_i\|_{L^1} \to 0$ bei $i \to \infty$ zu erhalten. Dann benutzt man die schwachen L^1-Abschätzungen für die Hardy-Littlewood Maximalfunktion

$$\mathcal{M} f_i(x) = \sup_{r>0} r^{2-n} \int_{B_r^{n-2}(x)} f_i \, d\mathcal{L}^{n-2} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^{n-2},$$

wobei die f_i außerhalb von B_3^{n-2} durch Null fortgesetzt seien. Besagte Abschätzungen liefern für jedes $\varepsilon_i > 0$

$$\mathcal{L}^{n-2}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^{n-2} : \mathcal{M} f_i(x) > \varepsilon_i\right\}\right) \le \frac{C}{\varepsilon_i} \|f_i\|_{L^1}$$

mit einer Konstanten C, die nur von n abhängt, vgl. z.B. [St1, Thm. 1]. Mit der Wahl von $\varepsilon_i := 2C\|f_i\|_{L^1}/\mathcal{L}^{n-2}(B_2^{n-2}) \to 0$ bei $i \to \infty$ folgt

$$\mathcal{L}^{n-2}\left(\left\{x \in B_2^{n-2} : \mathcal{M}f_i(x) > \varepsilon_i\right\}\right) \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}^{n-2}(B_2^{n-2}).$$

Für Aussage (ii) folgert man aus dem Regularitätssatz 3.3, dass

$$\mathcal{L}^{n-2}\left(\left\{x \in B_2^{n-2} : \text{für ein } y_x \in \overline{B_2^{2+}} \text{ ist } (x, y_x) \in \operatorname{sing}(u_i)\right\}\right) \leq \mathcal{H}^{n-2}(\operatorname{sing}(u_i)) = 0.$$

Daher kann man stets $X_1^i \in B_2^{n-2}$ so wählen, dass $\mathcal{M}f_i(X_1^i) \leq \varepsilon_i \to 0$ bei $i \to \infty$ und (ii) erfüllt sind. $\square$

Wahl von $\boldsymbol{\delta_i}$

Bei der Wahl der Skalierungsfaktoren δ_i muss man wie in [Li] sehr sorgfältig vorgehen, da eine zu große Wahl die Energie der skalierten Abbildungen v_i wegen der Nähe der Energiekonzentrationsmenge zu groß werden ließe, so dass keine Konvergenz eintritt, und eine zu kleine Wahl die Energie zu klein werden ließe, so dass man als Grenzwert nur eine konstante Abbildung erhielte. Um die Konvergenz der v_i gegen eine harmonische Abbildung v auf $\mathbb{R}^n$ resp. $\mathbb{R}^n_+$ zu erreichen, benötigt man Kleinheit der Energie gleichzeitig auf allen Kugeln in diesem Gebiet. All das liefert die folgende Aussage.

Behauptung 3. Nach Übergang zu einer Teilfolge von $\{i\}$ lässt sich eine monotone Folge $\delta_i \searrow 0$ finden, so dass

$$\mathcal{E}_i(\delta_i) := \max_{X_2 \in \overline{B_2^{2+}}} \delta_i^{2-n} \int_{B_{\delta_i}^{n-2}(X_1^i) \times B_{\delta_i}^{2+}(X_2)} |Du_i|_{\gamma_i}^2 d\mu_{\gamma_i} = \frac{\varepsilon_0}{c(n)}. \tag{4.22}$$

Der Wert der Konstanten $c(n) > 2$ wird später festgelegt.

Beweis. Man kann $X_1^i \to: X_1^0 \in \mathbb{R}^{n-2}$ bei $i \to \infty$ annehmen. Für ein hinreichend kleines $\delta_0 > 0$ gilt laut Lemma 4.1(ii) wegen $\psi(S_{\delta_0}^+(X_1^0, 0)) = 0$

$$\lim_{i \to \infty} \delta_0^{2-n} \int_{B_{\delta_0}^+(X_1^i, 0)} |Du_i|_{\gamma_i}^2 d\mu_{\gamma_i} = \delta_0^{2-n}\psi\left(B_{\delta_0}^+\left(X_1^0, 0\right)\right) \geq \varepsilon_0,$$

da $\psi = C_0\mathcal{H}^{n-2} \llcorner (\mathbb{R}^{n-2} \times \{0\})$ ist mit $C_0 \geq \varepsilon_0$. Wegen $B_{\delta_0}^{n-2}(X_1^i) \times B_{\delta_0}^{2+} \supset B_{\delta_0}^+(X_1^i, 0)$ folgt für jedes hinreichend kleine $\delta_0 > 0$ und $i > i_0(\delta_0)$

$$\mathcal{E}_i(\delta_0) \geq \delta_0^{2-n} \int_{B_{\delta_0}^{n-2}(X_1^i) \times B_{\delta_0}^{2+}} |Du_i|_{\gamma_i}^2 d\mu_{\gamma_i} \geq \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Auf der anderen Seite ist u_i nach Wahl von X_1^i auf $\overline{B_\delta^{n-2}(X_1^i) \times B_{2+\delta}^{2+}}$ glatt, falls $\delta \leq \delta(i)$ klein genug ist. Bezeichnet man mit C_i das Maximum von $|Du_i|_{\gamma_i}^2$ auf dieser Menge, so liefert das für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\delta \leq \delta(i)$

$$\mathcal{E}_i(\delta) \leq \max_{X_2 \in \overline{B_2^{2+}}} \delta^{2-n} C_i \, \mu_{\gamma_i}\left(B_\delta^{n-2}(X_1^i) \times B_\delta^{2+}(X_2)\right) \leq C_i C \delta^2 \leq \frac{\varepsilon_0}{2c(n)}.$$

Damit erhält man ausgehend von einem hinreichend kleinen $\delta_0 > 0$ ein $i_1 \in \mathbb{N}$ und ein $0 < \delta_0' < \delta_0$ mit $\mathcal{E}_{i_1}(\delta_0) \geq \varepsilon_0/2 > \varepsilon_0/c(n)$ und $\mathcal{E}_{i_1}(\delta_0') \leq \varepsilon_0/2c(n)$. Da $\mathcal{E}_{i_1}$ wegen dominierter Konvergenz stetig vom Argument δ abhängt, liefert der Zwischenwertsatz ein $\delta_1 \in (\delta_0', \delta_0)$ mit $\mathcal{E}_{i_1}(\delta_1) = \varepsilon_0/c(n)$. Wiederholt man dieses Verfahren, nun mit $\delta_1/2$ statt δ_0, so erhält man sukzessive eine Teilfolge $\{i_j\} \subset \mathbb{N}$ und eine monotone Folge $\delta_j \searrow 0$, so dass $\mathcal{E}_{i_j}(\delta_j) = \varepsilon_0/c(n)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt. $\square$

Wahl von $X_2^i \in \overline{B_1^{2+}}$

Mit der oben bewiesenen Aussage kann man nun X_2^i so wählen, dass die Energien der skalierten Abbildungen auf einer Nullumgebung nach unten beschränkt sind, und so garantieren, dass die Grenzabbildung nicht konstant wird. Hierzu wählt man X_2^i als den Punkt, an dem das Maximum in (4.22) angenommen wird. Es bleibt zu zeigen, dass tatsächlich $X_2^i \in \overline{B_1^{2+}}$ für unendlich viele Werte von i gilt. Angenommen, für alle bis auf endlich viele $i \in \mathbb{N}$ gilt dies nicht. Dann erhält man durch Teilfolgenübergang Konvergenz $p_i \to: p \in \overline{B_2^{n-2}} \times (\overline{B_2^{2+}} \setminus B_1^2)$. Da die Transformationen $T_p^{\gamma_i}$ gegen die Identität konvergieren, gilt für große Werte von i

$$\frac{\varepsilon_0}{c(n)} = \delta_i^{2-n} \int_{B_{\delta_i}^{n-2}(X_1^i) \times B_{\delta_i}^{2+}(X_2^i)} |Du_i|_{\gamma_i}^2 d\mu_{\gamma_i} \leq \delta_i^{2-n} \int_{E_{2\delta_i}^+(p)} |Du_i|_{\gamma_i}^2 d\mu_{\gamma_i}.$$

Da für hinreichend große Werte von i gilt $\delta_i \leq 1/4$, ist

$$E_{2\delta_i}^+(p) \subset E_{1/2}^+(p) \subset B_3^{n-2} \times (B_3^{2+} \setminus B_{1/4}^2),$$

und letztere Menge ist eine ψ-Nullmenge, ebenso wie ihr Rand. Daher folgt mit der Energiemonotonie aus der obigen Gleichung der Widerspruch

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0}{c(n)} &\leq e^{\chi/2} 4^{n-2} \int_{E_{1/2}^+(p)} |Du_i|_{\gamma_i}^2 d\mu_{\gamma_i} \leq e^{\chi/2} 4^{n-2} \int_{B_3^{n-2} \times (B_3^{2+} \setminus B_{1/4}^2)} |Du_i|_{\gamma_i}^2 d\mu_{\gamma_i} \\ &\underset{i \to \infty}{\longrightarrow} e^{\chi/2} 4^{n-2} \psi \left(B_3^{n-2} \times (B_3^{2+} \setminus B_{1/4}^2) \right) = 0. \end{aligned}$$

Hierbei sei die Konstante χ wie in Korollar 1.12 gleichzeitig zu allen Metriken γ_i gewählt. Aufgrund obiger Argumentation wird im Folgenden $X_2^i \in \overline{B_1^{2+}}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ angenommen.
Behauptung 3 besagt für die skalierten Abbildungen nach Wahl der X_2^i

$$\begin{aligned} & \int_{B_1^{n-2} \times B_1^2 \cap \mathbb{H}_i} |Dv_i|_{\eta_i}^2 d\mu_{\eta_i} \\ = & \max_{z \in B_{R_i}^2 \cap \mathbb{H}_i^2} \int_{B_1^{n-2} \times B_1^2(z) \cap \mathbb{H}_i} |Dv_i|_{\eta_i}^2 d\mu_{\eta_i} = \frac{\varepsilon_0}{c(n)}, \end{aligned} \tag{4.23}$$

wobei $\mathbb{H}_i^2$ durch $\mathbb{H}_i =: \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{H}_i^2$ definiert ist. Für die letzte Gleichung wurde benutzt, dass unter den Transformationen $y = (x - p_i)/\delta_i$ die Mengen $B_{R_i}^2 \cap \mathbb{H}_i^2$ den Teilkugeln $B_1^{2+}(X_2^i) \subset B_2^2$ entsprechen.

Gleichmäßige Konvergenz der v_i

Um Konvergenz auf $B_1^{n-2} \times B_1^2 \cap \mathbb{H}_i$ sicherzustellen, der Menge, auf der man Energieabschätzungen nach unten hat, braucht man Kleinheit der Energie auf einer Umgebung hiervon, also auf Kugeln $B_1^{n-2}(A_1) \times B_1^2(A_2) \cap \mathbb{H}_i$ für gewisse $a = (A_1, A_2) \in \mathbb{H}_i$. Hierzu benötigt man Variationen parallel zur singulären Menge $\Sigma_\psi = \mathbb{R}^{n-2} \times \{0\}$. Dies ist die einzige Stelle dieser Arbeit, an der aus der Differentialgleichung für Stationarität mehr Information als die Energiemonotonie abgeleitet werden muss. Mit der Schreibweise $y = (Y_1, Y_2) \in \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$ definiert man für $a \in B_{R_i-1}^{n-2} \times B_{R_i-1}^2 \cap \mathbb{H}_i$

$$F_i(a) := \int_{B_1^{n-2} \times B_1^2} \left(|Dv_i|_{\eta_i}^2 \sqrt{\eta_i} \right) (y - a) \zeta(Y_1) \varphi(Y_2) d\mathcal{L}^n(y),$$

wobei der Integrand als Null zu interpretieren ist, wo er nicht definiert ist, sowie ζ und φ Abschneidefunktionen sind mit

$$\zeta \in C^\infty_{kpt}(B_1^{n-2}, [0,1]), \quad \zeta \equiv 1 \text{ auf } B_{3/4}^{n-2}$$
$$\text{und} \quad \varphi \in C^\infty_{kpt}(B_1^2, [0,1]), \quad \varphi \equiv 1 \text{ auf } B_{1/2}^2.$$

Behauptung 4. Mit hinreichend großen Werten von $i_0 \in \mathbb{N}$ gilt für $i \geq i_0$ und alle Punkte $a = (A_1, A_2) \in B^{n-2}_{R_{i_0}-1} \times B^2_{R_{i_0}-1} \cap \mathbb{H}_i$

$$\int_{B^{n-2}_{3/4}(A_1)\times B^2_{1/2}(A_2)\cap\mathbb{H}_i} |Dv_i|^2_{\eta_i} d\mu_{\eta_i} \leq F_i(a) \leq \frac{2\varepsilon_0}{c(n)}. \tag{4.24}$$

Wählt man $c(n) := 2^{5n-9}$, so folgt hieraus die $C^{1,\alpha}$-Regularität der v_i auf der Menge $B_{i_0,i} := B^{n-2}_{R_{i_0}-1} \times B^2_{R_{i_0}-1} \cap \mathbb{H}_i$ mit unabhängig von i beschränkten Normen

$$\|v_i\|_{C^{1,\alpha}(B_{i_0,i})} \leq C = C(n, R_{i_0}, G, \Gamma, \mathcal{N}).$$

Beweis. Setzt man den Integranden Null, wo er nicht definiert ist, so ist für alle Punkte $a = (A_1, A_2) = (a_1, \ldots, a_n) \in B^{n-2}_{R_{i_0}-1} \times B^2_{R_{i_0}-1} \cap \mathbb{H}_i$

$$F_i(a) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(|Dv_i|^2_{\eta_i}\sqrt{\eta_i}\right)(y)\zeta(Y_1 + A_1)\varphi(Y_2 + A_2)d\mathcal{L}^n(y),$$

also für $1 \leq \kappa \leq n-2$

$$\frac{\partial F_i}{\partial a_\kappa}(a) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(|Dv_i|^2_{\eta_i}\sqrt{\eta_i}\right)(y)\frac{\partial \zeta}{\partial y_\kappa}(Y_1 + A_1)\varphi(Y_2 + A_2)d\mathcal{L}^n(y).$$

Nun benutzt man die Differentialgleichung für Stationarität (1.12) mit der Testfunktion $\xi(y) := \zeta(Y_1 + A_1)\varphi(Y_2 + A_2)e_\kappa$, die für $1 \leq \kappa \leq n-1$ zulässig ist. Obige Gleichung wird damit zu

$$\frac{\partial F_i}{\partial a_\kappa}(a) = 2\int_{\mathbb{R}^n} \left({\eta_i}^{\alpha\beta}\partial_\alpha v_i \partial_\kappa v_i \sqrt{\eta_i}\right)(y)\frac{\partial \zeta}{\partial y_\beta}(Y_1 + A_1)\varphi(Y_2 + A_2)d\mathcal{L}^n(y) + O\left(\|D\eta_i\|_\infty\right).$$

Beim letzten Summanden wurde die Energieabschätzung (4.20) benutzt. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial F_i}{\partial a_\kappa}(a)\right| \quad &\leq \quad C\left[\int_{B^{n-2}_{R_{i_0}}\times B^2_{R_{i_0}}\cap\mathbb{H}_i} |Dv_i|^2_{\eta_i} d\mu_{\eta_i}\right]^{1/2}\left[\int_{B^{n-2}_{R_{i_0}}\times B^2_{R_{i_0}}\cap\mathbb{H}_i} |\partial_\kappa v_i|^2 d\mu_{\eta_i}\right]^{1/2} \\ &\quad +O(\|D\eta_i\|_\infty). \end{aligned}$$

Nun benutzt man $\|D\eta_i\|_\infty \leq \delta_i\|D\gamma_i\|_\infty \to 0$ bei $i \to \infty$ sowie die Abschätzungen (4.20) und (4.21), um für $1 \leq \kappa \leq n-2$ die Konvergenz

$$\frac{\partial F_i}{\partial a_\kappa} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{gleichmäßig auf } B^{n-2}_{R_{i_0}-1} \times B^2_{R_{i_0}-1} \cap \mathbb{H}_i \tag{4.25}$$

zu erhalten. Nach (4.23) gilt für alle $i \geq i_0$ und $A_2 \in B^2_{R_{i_0}} \cap \mathbb{H}^2_i$ die Abschätzung $F_i(0, A_2) \leq \frac{\varepsilon_0}{c(n)}$, daher liefert die gleichmäßige Konvergenz der partiellen Ableitungen (4.25) sogar

$$F_i(a) \leq \frac{2\varepsilon_0}{c(n)} \quad \text{für alle } a \in B^{n-2}_{R_{i_0}-1} \times B^2_{R_{i_0}-1} \cap \mathbb{H}_i.$$

Damit ist Aussage (4.24) bewiesen. Diese impliziert

$$\int_{B_{1/2}(a)\cap\mathbb{H}_i} |Dv_i|^2_{\eta_i} d\mu_{\eta_i} \leq \frac{2\varepsilon_0}{c(n)}$$

für alle $a \in B^{n-2}_{R_{i_0}-1} \times B^2_{R_{i_0}-1} \cap \mathbb{H}_i$. Falls $c(n) \geq 2 \cdot 2^{n-2}$ gewählt ist, kann man den Regularitätssatz 3.1 auf allen Kugeln $B_{1/2}(a) \cap \mathbb{H}_i$ mit $a \in B^{n-2}_{R_{i_0}-1} \times B^2_{R_{i_0}-1} \cap \partial\mathbb{H}_i$ anwenden, um $C^{1,\alpha}$-Regularität mit von i unabhängigen Normabschätzungen auf den kleineren Kugeln $B_{1/32}(a)\cap\mathbb{H}_i$ zu erhalten. Weiter benutzt man für $c(n) \geq 2\cdot 32^{n-2}$ den inneren Regularitätssatz 1.15 auf Kugeln $B_{1/32}(a) \subset \mathbb{H}_i$ für $a \in B^{n-2}_{R_{i_0}-1} \times B^2_{R_{i_0}-1} \cap \mathbb{H}_i$ mit $\operatorname{dist}(a, \partial\mathbb{H}_i) \geq 1/32$, der $C^{1,\alpha}$-Regularität und die entsprechenden Abschätzungen auf den Kugeln $B_{1/256}(a)$ liefert. □

Mit den $C^{1,\alpha}$-Abschätzungen aus der Behauptung 4 hat man Konvergenz der v_i in C^1 gesichert. Nun unterscheidet man zwei Fälle. Entweder bleibt p_i^n/δ_i bei $i \to \infty$ beschränkt oder nicht, in welchem Fall man $p_i^n/\delta_i \to \infty$ bei $i \to \infty$ annehmen kann. Dann sind die v_i auf jeder Kugel B_S mit $S > 0$ definiert, falls $i \geq i_0(S)$ groß genug ist, und Behauptung 4 liefert Abschätzungen

$$\|v_i\|_{C^{1,\alpha}(B_S)} \leq C \quad \text{unabhängig von } i \geq i_0(S).$$

Der Satz von Arzéla-Ascoli liefert ein $\hat{v} \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathcal{N})$, so dass nach Auswahl einer Teilfolge die Konvergenz

$$v_i \to \hat{v} \quad \text{in } C^1_{lok}(\mathbb{R}^n, \mathcal{N})$$

bei $i \to \infty$ gilt. Die Gleichung (4.21) liefert durch Grenzübergang

$$\sum_{k=1}^{n-2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \hat{v}}{\partial y_k} \right|^2 d\mathcal{L}^n = 0,$$

also ist $\hat{v}$ längs $\mathbb{R}^{n-2} \times \{0\}$ konstant und $v := \hat{v}|_{\{0\}\times\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{N}$ ist harmonisch bezüglich der Euklidischen Metrik. Wegen

$$\int_{B_1^{n-2}\times B_1^2} |D\hat{v}|^2 d\mathcal{L}^n = \frac{\varepsilon_0}{c(n)} > 0$$

laut (4.23) ist die Abbildung v nicht konstant und wegen (4.20) hat sie endliche Energie, denn für alle $R > 0$ ist

$$\int_{B_R^2} |Dv|^2 d\mathcal{L}^2 = \frac{1}{\alpha(n-2)} R^{2-n} \int_{B_R^{n-2}\times B_R^2} |D\hat{v}|^2 d\mathcal{L}^n \leq C\Lambda. \tag{4.26}$$

Mit Theorie linearer Differentialgleichungen, etwa mit Satz 1.19, folgt C^∞-Regularität für die harmonische Abbildung $v : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{N}$. Mittels stereographischer Projektion kann man v daher als glatte, nichtkonstante harmonische Abbildung $S^2 \setminus \{e_1\} \to \mathcal{N}$ mit endlicher Energie auffassen. Auch als Abbildung der Sphäre ist v dabei harmonisch, da im Zweidimensionalen die Harmonizität unter konformen Parametertransformationen erhalten bleibt, weil das Energiefunktional in diesem Fall unter solchen Transformationen invariant ist. Lemma 1.21 zeigt, dass die fortgesetzte Abbildung $v : S^2 \to \mathcal{N}$ eine schwach harmonische Abbildung ist, die nach Bemerkung 1.16 auch im Punkt e_1 glatt ist. Die Existenz einer solchen 2-Sphäre widerspricht den Voraussetzungen des

Theorems, da Bild(v) nach Konstruktion im Abschluss von $\cup_i$Bild(w_i) liegt.
Im anderen Fall, dass $p_i^n/\delta_i \leq C$ beschränkt ist, definiert man

$$\tilde{v}_i(y) := v_i\left(y - \frac{p_i^n}{\delta_i}e_n\right), \quad \text{sowie } \tilde{\eta}_i(y) := \eta_i\left(y - \frac{p_i^n}{\delta_i}e_n\right),$$

so dass die Abbildungen $\tilde{v}_i$ für jedes $S > 0$ und hinreichend große $i \geq i_0(S)$ auf B_S^+ definiert sind. Hierbei ist zu beachten, dass wegen $p_i^n/\delta_i \leq C$ für große S gilt

$$B_1^{n-2} \times B_1^{2+}(0, p_i^n/\delta_i) \subset B_S^+,$$

was wesentlich für die untere Abschätzung der Energie

$$\int_{B_S^+} |D\tilde{v}_i|^2_{\tilde{\eta}_i} d\mu_{\tilde{\eta}_i} \geq \int_{B_1^{n-2}\times B_1^2\cap\mathbb{H}_i} |Dv_i|^2_{\eta_i} d\mu_{\eta_i} = \frac{\varepsilon_0}{c(n)} > 0 \tag{4.27}$$

mithilfe von (4.23) ist. Weiter geht man analog zum oben behandelten Fall vor. Zunächst folgert man aus den Abschätzungen $\|\tilde{v}_i\|_{C^{1,\alpha}(B_S^+)} \leq C$ gemäß Behauptung 4 die Existenz einer Grenzabbildung $\hat{v} \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{N})$, so dass nach Übergang zu einer Teilfolge

$$\tilde{v}_i \to \hat{v} \quad \text{in } C^1_{lok}(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{N})$$

bei $i \to \infty$ gilt. Wegen der unteren Schranke (4.27) der Energie ist $\hat{v}$ nicht konstant, wegen

$$\sum_{k=1}^{n-2} \int_{\mathbb{R}^n_+} \left|\frac{\partial \hat{v}}{\partial y_k}\right|^2 d\mathcal{L}^n = 0$$

aber konstant längs $\mathbb{R}^{n-2}$, so dass $v := \hat{v}|_{\{0\}\times\mathbb{R}^2_+} : \mathbb{R}^2_+ \to \mathcal{N}$ eine harmonische Abbildung mit freier Randbedingung $v(\partial\mathbb{R}^2_+) \subset \Gamma$, bzw. äquivalent mit $\partial_2 v(x) \perp \Gamma$ für alle $x \in \partial\mathbb{R}^2_+$ definiert. Satz 1.19 garantiert, dass v von der Klasse C^∞ ist. Genau wie in (4.26) sieht man auch, dass v endliche Energie hat. Die gewonnene Abbildung kann man wie oben durch stereographische Projektion als harmonische Abbildung $v : S^2_+ \setminus \{e_1\} \to \mathcal{N}$ auffassen, die die freie Randbedingung $\partial_3 v(x) \perp \Gamma$ für $x \in \partial S^2_+ \setminus \{e_1\}$ erfüllt. Auch als Abbildung von S^2_+ ist v laut Lemma 1.21 schwach harmonisch mit freiem Rand Γ, woraus mit Bemerkung 3.2 die Glattheit im Punkt e_1 folgt. Diese Konstruktion ist ein Widerspruch zur vorausgesetzten Nichtexistenz harmonischer Halbsphären, da Bild(v) im Abschluss von $\cup_i$Bild(w_i) liegt. □

Kapitel 5

Dimensionsreduktion der Singularitätenmenge

5.1 Das Dimensionsreduktionsprinzip nach Federer

Das von Federer entwickelte Verfahren zur Dimensionsreduktion beruht auf der Analyse von Tangentenabbildungen, die analog zu den Tangentenmaßen aus Definition 4.8 definiert sind. Hier werden nur Tangentenabbildungen in Randpunkten $a \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ betrachtet.

Definition 5.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ ein Gebiet, $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ sowie $M \subset \Omega$ eine Teilmenge.*

(i) Für alle $a \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ und $r > 0$ sei definiert $M_{a,r} := \frac{1}{r}(M - a) \subset \mathbb{R}^n_+$ und

$$u_{a,r} : \Omega_{a,r} \to \mathbb{R}^N \quad \textit{mit} \quad u_{a,r}(y) := u(a + ry).$$

(ii) Eine Tangentenabbildung an u im Punkt $a \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ ist eine Abbildung der Form $\text{s-lim}_{i\to\infty} u_{a,r_i} \in H^1(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^N)$ für eine Folge $r_i \searrow 0$ bei $i \to \infty$. Mit dem starken Grenzwert ist hier Konvergenz in $H^1_{lok}(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^N)$ gemeint.

Das genannte Verfahren von Federer wurde bereits in [SU] in einer ähnlichen Situation angewandt, nämlich in der Regularitätstheorie energieminimierender Abbildungen. In der für den Randfall interessanten Form ist es in folgendem Satz festgehalten.

Satz 5.2 (Federers Dimensionsreduktionsprinzip). *Für $n, N \in \mathbb{N}$ sei eine Familie von Abbildungen $\mathfrak{H} \subset \cup_\Omega H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gegeben, wobei sich die Vereinigung über alle relativ $\mathbb{R}^n_+$ offenen Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ erstrecken soll. Zu jeder Abbildung $u \in \mathfrak{H}$ sei eine abgeschlossene Menge $\partial\text{-sing}(u) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$ ausgezeichnet. Für diese Daten werden die folgenden Eigenschaften vorausgesetzt.*

H.1 **(Abgeschlossenheit unter Skalierung)** *Aus $u \in \mathfrak{H}$ folgt $u_{a,r} \in \mathfrak{H}$ für alle $a \in \partial\text{-sing}(u) \cap B_1^+$ und $0 < r < 1 - |a|$.*

H.2 **(Existenz homogener Tangentenabbildungen)** *Gegeben seien $u \in \mathfrak{H}$ und ein Punkt $a \in \partial\text{-sing}(u) \cap B_1^+$. Dann gibt es zu jeder Folge $r_i \searrow 0$ eine Teilfolge r_{i_k}, so dass die Tangentenabbildung $v := \text{s-lim}_{k\to\infty} u_{a,r_{i_k}} \in \mathfrak{H}$ existiert und außerdem homogen vom Grad Null ist, also $v_{0,\lambda} = v$ für alle $\lambda > 0$ erfüllt.*

H.3 **(Eigenschaften der singulären Menge)**

- *(a) Jede konstante Funktion* $u \in \mathfrak{H}$ *erfüllt* $\partial\text{-sing}(u) = \emptyset$.
- *(b) Für alle* $u \in \mathfrak{H}$, $a \in \partial\text{-sing}(u) \cap B_1^+$ *und* $0 < r < 1 - |a|$ *gilt der Zusammenhang* $\partial\text{-sing}(u_{a,r}) = (\partial\text{-sing}(u))_{a,r}$.
- *(c) Seien* $u_i, u \in \mathfrak{H}$ *mit* $u_i \to u$ *in* $H^1(B_{1+\delta}^+, \mathbb{R}^N)$ *bei* $i \to \infty$ *für ein* $\delta > 0$. *Dann gilt für jedes* $\varepsilon > 0$ *und hinreichend große* $i \geq i_0(\varepsilon)$

$$\partial\text{-sing}(u_i) \cap B_1^+ \subset \{x \in B_1^+ : \operatorname{dist}(x, \partial\text{-sing}(u)) < \varepsilon\}.$$

Sei $d \in \mathbb{N}$ *die kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft*

$$\mathcal{H}\text{-dim}(\partial\text{-sing}(u) \cap B_1^+) \leq d \quad \textit{für alle } u \in \mathfrak{H},$$

wobei $\mathcal{H}$-dim *die Hausdorff-Dimension bezeichne. Dann ist* $d \leq n-1$ *und falls es ein* $u \in \mathfrak{H}$ *mit* $\partial\text{-sing}(u) \neq \emptyset$ *gibt, dann gibt es auch eine Abbildung* $v \in \mathfrak{H}$, *deren singuläre Menge* $L := \partial\text{-sing}(v)$ *ein* d*-dimensionaler Unterraum ist und die die Eigenschaft*

$$v_{b,\lambda} = v \qquad \textit{für alle } b \in L \textit{ und } \lambda > 0$$

besitzt. Im Fall $d = 0$ *ist darüber hinaus für alle* $u \in \mathfrak{H}$ *und* $\rho < 1$ *die Singularitätenmenge* $\partial\text{-sing}(u) \cap B_\rho$ *endlich.*

Für den Beweis wird auf [Sim1, Thm. A.4] verwiesen. Dort wird eine andere Konvergenzart zugrundegelegt, aber der Beweis lässt sich sofort auf den hier vorliegenden Fall der H^1-Normkonvergenz übertragen. Aus dem Beweis in [Sim1] geht auch hervor, dass es ausreicht, Tangentenabbildungen um Punkte $a \in \partial\text{-sing}(u) \subset \partial\mathbb{R}_+^n$ zu betrachten.

5.2 Optimale Regularitätsaussagen für harmonische Abbildungen

Über den inneren Teil $\operatorname{sing}(u) \setminus \partial\mathbb{R}_+^n$ der Singularitätenmenge ist das folgende Regularitätsresultat bereits bekannt.

Satz 5.3 ([Li]). *Gegeben seien eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit* $\mathcal{N}$, *ein Gebiet* $\overline{B}_1^+ \subset \Omega \subset \mathbb{R}_+^n$, *auf dem eine Riemannsche* $C^{1,\alpha}$*-Metrik zugrundeliegt, sowie ein* $k \in \mathbb{N}$ *mit* $2 \leq k \leq n-1$. *Die Abbildung* $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ *sei stationär harmonisch auf* $\Omega \setminus \partial\mathbb{R}_+^n$ *und der Abschluss von* Bild(u) *trage für kein* $l \in \mathbb{N}$ *mit* $2 \leq l \leq k$ *eine nichttriviale harmonische* S^l. *Dann gilt*

$$\mathcal{H}\text{-dim}\left(\operatorname{sing}(u) \cap B_1^+ \setminus \partial\mathbb{R}_+^n\right) \leq n - k - 2.$$

Im Fall $k = n-2$ *besitzt die Menge* $\operatorname{sing}(u) \cap B_1^+$ *höchstens in* $\partial\mathbb{R}_+^n$ *Häufungspunkte. Im Fall* $k = n-1$ *ist* u *auf* $B_1^+ \setminus \partial\mathbb{R}_+^n$ *von der Klasse* $C^{2,\alpha}$.

Nun bleibt noch die Menge der Randsingularitäten zu betrachten. Dazu wird der Satz aus dem vorhergehenden Abschnitt für eine abgeschlossene Menge $A \subset \mathcal{N}$ auf die folgende Familie von Abbildungen angewandt.

$$\mathfrak{H}_\Lambda^A := \left\{ v \in \mathfrak{H}_\Lambda(\Omega) \;\middle|\; \overline{B}_1^+ \subset \Omega \text{ relativ offenes Gebiet} \subset \mathbb{R}_+^n,\ \operatorname{Bild}(v) \subset A \right\}.$$

Für Abbildungen $u \in \mathfrak{H}_\Lambda^A$ wird als singuläre Menge die Menge der Randsingularitäten $\partial\text{-sing}(u) := \text{sing}(u) \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ betrachtet, wobei hier

$$\text{sing}(u) := \overline{\Omega} \setminus \big\{x \in \overline{\Omega} : u \in C^{2,\alpha}(U \cap \overline{\Omega}) \text{ für eine Umgebung } U \text{ von } x\big\} \tag{5.1}$$

gesetzt sei, wenn Ω der Definitionsbereich von u ist. Beim folgenden Nachweis, dass die Familie $\mathfrak{H}_\Lambda^A$ die Voraussetzungen aus Satz 5.2 erfüllt, geht als entscheidendes Werkzeug der Kompaktheitssatz 4.14 ein.

Lemma 5.4. *Sei $\mathcal{N}$ eine glatte, kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand, $\Gamma \subset \mathcal{N}$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit und $A \subset \mathcal{N}$ eine abgeschlossene Teilmenge. Falls A keine nichttrivialen harmonischen S^2 und keine nichttrivialen harmonischen S^2_+ mit freiem Rand Γ trägt, erfüllt $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\Lambda^A$ mit der wie oben definierten Menge ∂-sing der Randsingularitäten die Bedingungen H.1 bis H.3.*

Beweis. Bedingung H.1 ist erfüllt, weil für eine Abbildung $u \in \mathfrak{H}_\Lambda(\Omega)$ die skalierte Abbildung $u_{a,r} \in \mathfrak{H}_\Lambda(\Omega_{a,r})$ ist und außerdem $\text{Bild}(u_{a,r}) = \text{Bild}(u) \subset A$ gilt. Seien nun $u \in \mathfrak{H}_\Lambda^A$, $a \in B_1^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ und eine Folge $r_i \searrow 0$ gegeben. Zum Nachweis von H.2 benutzt man den Kompaktheitssatz 4.14, um für eine Teilfolge $\lambda_k := r_{i_k}$ und ein $v \in H^1(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{N})$ Konvergenz $u_{a,\lambda_k} \to v$ in $H^1_{lok}(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^N)$ bei $k \to \infty$ zu erhalten. Die Abbildungen u_{a,λ_k} liegen dabei in $\mathfrak{H}_\Lambda^{\gamma_k}(\Omega_{a,\lambda_k})$ mit den Metriken $\gamma_k := \gamma_{a,\lambda_k}$. An dieser Stelle benutzt man nun wesentlich, dass starke Normkonvergenz gewährleistet ist, um sicherzustellen, dass die Grenzabbildung v bezüglich der Grenzmetrik $\eta := C^1\text{-}\lim_{k\to\infty} \gamma_k$ stationär harmonisch mit freier Randbedingung Γ ist. Die schwache Harmonizität folgt dabei mit Korollar 4.6 auch schon bei schwacher Konvergenz, aber um für die Grenzabbildung die Differentialgleichung für Stationarität herzuleiten, benötigt man Konvergenz in H^1_{lok}. Auf diese Weise folgt $v \in \mathfrak{H}_\Lambda^\eta(\mathbb{R}^n_+)$, also $v \in \mathfrak{H}_\Lambda^A$. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die zugrundeliegende Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(\Omega)$ im Punkt $a \in B_1^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ Euklidisch ist, da dies mit der affinen Transformation T_a^γ erreicht werden kann. Unter dieser Voraussetzung gilt gemäß Satz 1.10 mit den Konstanten D, χ wie im Satz und den Notationen $r(x) := |x-a|$ sowie $\vec{n}(x) := \frac{x-a}{|x-a|}$

$$\frac{2}{D}\int_{B_\rho^+(a)} e^{\chi r} r^{2-n}\left|\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|^2 d\mu_\gamma \le e^{\chi\rho}\rho^{2-n}\int_{B_\rho^+(a)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \le C\Lambda$$

für alle hinreichend kleinen $\rho > 0$. Es folgt, dass $r^{2-n}\left|\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|^2$ auf einer Umgebung von a integrierbar ist, weshalb man für alle $R > 0$ schließt

$$\int_{B_R^+} |y|^{2-n}\left|\frac{\partial u_{a,\lambda_k}}{\partial r}(y)\right|^2 d\mu_{\gamma_k}(y) = \int_{B^+_{\lambda_k R}(a)} r^{2-n}\left|\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|^2 d\mu_\gamma \longrightarrow 0$$

bei $\lambda_k \to 0$. Dies impliziert $\frac{\partial v}{\partial r} \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n_+$, also $v_{0,\lambda} = v$ für alle $\lambda > 0$. Diese Eigenschaft bleibt auch unter der Transformation $(T_a^\gamma)^{-1}$ erhalten, so dass Eigenschaft H.2 nachgewiesen ist.

Die Bedingungen H.3(a) und (b) sind sofort an der Definition der Menge ∂-sing(u) abzulesen. Falls H.3(c) nicht erfüllt ist, gibt es $u_i, u \in \mathfrak{H}_\Lambda^A$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass bei $i \to \infty$ Konvergenz $u_i \to u$ in $H^1_{lok}(B^+_{1+\delta}, \mathbb{R}^N)$ gilt und für unendlich viele $i \in \mathbb{N}$

$$\partial\text{-sing}(u_i) \cap B_1^+ \not\subset \{x \in B_1^+ : \text{dist}(x, \partial\text{-sing}(u)) < \varepsilon\} =: U_\varepsilon \tag{5.2}$$

erfüllt ist. Die für die Abbildungen u_i und u zugrundegelegten Metriken seien γ_i resp. γ. Die Eigenschaft (5.2) liefert nach Teilfolgenübergang eine Folge singulärer Punkte $x_i \in \partial\text{-sing}(u_i) \cap B_1^+ \setminus U_\varepsilon$, die gegen einen Punkt $x \in \partial\mathbb{R}^n_+ \setminus \partial\text{-sing}(u)$ konvergiert. Da x kein singulärer Punkt ist, bleibt $|Du|^2_\gamma$ auf einer Umgebung von $x \in \overline{B}_1^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ beschränkt, daher ist für alle hinreichend kleinen Radien $r \in (0, \delta)$

$$r^{2-n} \int_{B_r^+(x)} |Du|^2_\gamma d\mu_\gamma < \varepsilon_0.$$

Wegen der Konvergenz $x_i \to x$ bei $i \to \infty$ ist für hinreichend große $i > i_0(r)$ insbesondere $x_i \in B^+_{r/8}(x)$ gewährleistet, also liefert der Regularitätssatz 3.1 wegen $x_i \in \text{sing}(u_i)$ den Widerspruch

$$r^{2-n} \int_{B_r^+(x)} |Du|^2_\gamma d\mu_\gamma \quad = \quad \lim_{i\to\infty} r^{2-n} \int_{B_r^+(x)} |Du_i|^2_{\gamma_i} d\mu_{\gamma_i} \geq \varepsilon_0.$$

Damit ist die letzte Eigenschaft H.3(c) gezeigt. □

Die Randaussage des folgenden Regularitätssatzes ist laut vorangehendem Lemma ein Spezialfall von Satz 5.2.

Theorem 5.5. *Sei $\mathcal{N}$ eine glatte, kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand, $\Gamma \subset \mathcal{N}$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit hiervon und $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ ein Gebiet mit $\overline{B}_1^+ \subset \Omega$. Darüber hinaus sei $k \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq k \leq n-1$ gegeben sowie ein Hölderexponent $0 < \alpha < 1$. Die Abbildung $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ sei stationär harmonisch zur freien Randbedingung $u(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$ bezüglich einer Riemannschen $C^{1,\alpha}$-Metrik auf Ω. Es gelten folgende Regularitätsaussagen.*

(i) Falls der Abschluss von Bild(u) *weder nichttriviale harmonische S^2 noch für irgendein $2 \leq l \leq k$ nichttriviale, am Rand glatte, stationäre harmonische S^l_+ mit freiem Rand Γ trägt, so gilt*

$$\mathcal{H}\text{-dim}\left(\text{sing}(u) \cap \partial\mathbb{R}^n_+ \cap B_1^+\right) \leq n-k-2$$

und für $k = n-2$ ist die Menge $\text{sing}(u) \cap \partial\mathbb{R}^n_+ \cap B_1^+$ *endlich. Im Fall $k = n-1$ liefert obige Dimensionsabschätzung die $C^{2,\alpha}$-Regularität von u in einer Umgebung von $\partial\mathbb{R}^n_+ \cap B_1^+$.*

(ii) Trägt der Abschluss von Bild(u) *für $2 \leq l \leq k$ weder nichttriviale harmonische S^l noch nichttriviale harmonische S^l_+ mit freiem Rand Γ, so ist*

$$\mathcal{H}\text{-dim}\left(\text{sing}(u) \cap B_1^+\right) \leq n-k-2.$$

Im Fall $k = n-2$ ist $\text{sing}(u) \cap B_1^+$ *endlich und für $k = n-1$ ist u auf B_1^+ von der Klasse $C^{2,\alpha}$.*

Beweis. Sei $A := \overline{\text{Bild}(u)}$. Zunächst wird die Aussage (i) bewiesen. Laut Lemma 5.4 erfüllt $\mathfrak{H}^A_\Lambda$ die Voraussetzungen für das Dimensionsreduktionsverfahren von Federer aus Satz 5.2. Die Zahl $d \in \mathbb{N}$ sei wie dort als die kleinste natürliche Zahl definiert, für die

$$\mathcal{H}\text{-dim}\left(\partial\text{-sing}(w) \cap B_1^+\right) \leq d \quad \text{für alle } w \in \mathfrak{H}^A_\Lambda$$

erfüllt ist. Falls nicht alle Singularitätenmengen ∂-sing(u) für $u \in \mathfrak{H}_\Lambda^A$ leer sind, erhält man aus dem Satz eine Abbildung $v \in \mathfrak{H}_\Lambda^A$, für die $L := \partial$-sing(v) ein d-dimensionaler Unterraum ist und die

$$v_{b,\lambda} = v \quad \text{für alle } b \in L \text{ und } \lambda > 0 \tag{5.3}$$

erfüllt. Da die Singularitätenmenge von v einen d-dimensionalen Unterraum enthält, folgt aus dem Regularitätssatz 3.3, dass $d \leq n-3$ sein muss. Nun wird gezeigt, dass man v so wählen kann, dass

$$v \in \mathfrak{H}_\Lambda^\eta(\mathbb{R}_+^n), \quad \text{wobei } \eta \in \mathfrak{M}_G(\mathbb{R}_+^n) \text{ die Euklidische Metrik ist.}$$

Diese Behauptung kann man tatsächlich im Beweis von Satz 5.2 aus der Konstruktion von v als eine Tangentenabbildung ablesen. Man kann obige Eigenschaft aber auch direkt aus der radialen Konstanz $v_{0,\lambda} = v$ schließen. Wegen $v \in \mathfrak{H}_\Lambda^\gamma(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}_+^n$ ist nämlich $v = v_{0,\lambda} \in \mathfrak{H}_\Lambda^{\gamma_{0,\lambda}}(\Omega_{0,\lambda})$ für alle $\lambda > 0$. Lässt man $\lambda \searrow 0$ streben, so sieht man $v \in \mathfrak{H}_\Lambda^\eta(\mathbb{R}_+^n)$ mit der Metrik $\eta = \lim_{\lambda \searrow 0} \gamma_{0,\lambda} \in \mathfrak{M}_G(\mathbb{R}_+^n)$. Die Metrik η ist konstant, da $\|D\eta\|_\infty \leq \lambda \|D\gamma\|_\infty \to 0$ bei $\lambda \searrow 0$ gilt. Durch eine lineare Parametertransformation kann man also erreichen, dass η die Euklidische Metrik ist.
Da $L \subset \mathbb{R}_+^n$ ist, kann man durch eine Drehung, die den Definitionsbereich $\mathbb{R}_+^n$ in sich überführt, $L = \mathbb{R}^d \times \{0\}$ erreichen. Wegen Translationsinvarianz $v_{b,1} = v$ für alle $b \in L = \mathbb{R}^d \times \{0\}$ definiert

$$\tilde{v} := v\big|_{\{0\} \times \mathbb{R}_+^{n-d}} : \mathbb{R}_+^{n-d} \to A \subset \mathcal{N}$$

eine stationäre harmonische Abbildung mit freier Randbedingung $v(\mathbb{R}^{n-d-1} \times \{0\}) \subset \Gamma$. Da $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ die Randsingularitätenmenge von v ist, folgt ∂-sing$(\tilde{v}) = \{0\}$. Außerdem ist $\tilde{v}$ genau wie v radial konstant, d.h. $\tilde{v}_{0,\lambda} = \tilde{v}$ für alle $\lambda > 0$. Daher erhält man mit

$$w := \tilde{v}\big|_{S_+^{n-d-1}} : S_+^{n-d-1} \to A \subset \mathcal{N}$$

eine in einer Randumgebung glatte Abbildung, die nicht konstant ist, weil $\tilde{v}$ im Nullpunkt singulär ist. Man kann zeigen, dass w stationär harmonisch zur freien Randbedingung $w(\partial S_+^{n-d-1}) \subset \Gamma$ ist. Ist diese Behauptung verifiziert, so widerspricht die Existenz von w den Voraussetzungen des Satzes, wenn $n-k-1 \leq d \leq n-3$ ist, und die Dimensionsabschätzung aus (i) folgt.
Zu zeigen ist noch, dass w stationär harmonisch mit freier Randbedingung ist. Die schwache Harmonizität von w sieht man, wenn man die schwache Differentialgleichung (1.19) mit der Metrik γ bezüglich Polarkoordinaten aufschreibt und $\frac{\partial w}{\partial r} \equiv 0$ benutzt. Da w in einer Randumgebung glatt ist, bleibt die Stationarität nur noch im Inneren zu zeigen. Sei dazu für $m := n-d-1$ ein beliebiges glattes, zu S_+^m tangentiales Vektorfeld $\xi \in C^\infty(S_+^m, \mathbb{R}^{m+1})$ mit kompaktem Träger in $S_+^m \setminus \partial S_+^m$ gegeben. Mit einer Abschneidefunktion $\varphi \in C_{kpt}^\infty(\mathbb{R}_{>0}, [0,1])$ sei für $x \in \mathbb{R}_+^{m+1}$ gesetzt $\tilde{\xi}(x) := \varphi(|x|)\xi_*(x)$, wobei $\xi_*(x) := \xi\big(\frac{x}{|x|}\big)$ sei. Hierfür gilt $\tilde{\xi} \in C^\infty(\mathbb{R}_+^{m+1}, \mathbb{R}^{m+1})$ und $\tilde{\xi}$ hat kompakten Träger in $\mathbb{R}_+^{m+1} \setminus \partial \mathbb{R}_+^{m+1}$. Daher ist $\tilde{\xi}$ im Sinne von Lemma 1.8 ein zulässiges Testvektorfeld für die stationäre harmonische Abbildung $\tilde{v}$, so dass

$$0 = \partial E\big(\tilde{v}, \tilde{\xi}\big) = \int_{\mathbb{R}_+^{m+1}} \Big[2\big(D\tilde{v}D\tilde{\xi}\big) \cdot D\tilde{v} - |D\tilde{v}|^2 \operatorname{div} \tilde{\xi}\Big] \, d\mathcal{L}^{m+1}, \tag{5.4}$$

da auf $\mathbb{R}^{m+1}_+$ die Euklidische Metrik zugrundeliegt. Hierbei berechnet man in $x \in \mathbb{R}^{m+1}_+$

$$\begin{aligned} D\tilde{v}(x)D\tilde{\xi}(x)\cdot D\tilde{v}(x) &= \varphi'(|x|)D\tilde{v}(x)\xi_*(x)\cdot\frac{\partial\tilde{v}}{\partial r}(x) + \varphi(|x|)D\tilde{v}(x)D\xi_*(x)\cdot D\tilde{v}(x) \\ &= \varphi(|x|)D\tilde{v}(x)D\xi_*(x)\cdot D\tilde{v}(x) \end{aligned}$$

wegen der radialen Konstanz von $\tilde{v}$ und weiter

$$\operatorname{div}\tilde{\xi}(x) = \varphi'(|x|)\frac{x}{|x|}\cdot\xi_*(x) + \varphi(|x|)\operatorname{div}\xi_*(x) = \varphi(|x|)\operatorname{div}\xi_*(x),$$

weil ξ_* tangential zu S^m_+ ist. Damit wird (5.4) zu

$$0 = \int_{\mathbb{R}^{m+1}_+} \varphi(|\cdot|)\left[2(D\tilde{v}D\xi_*)\cdot D\tilde{v} - |D\tilde{v}|^2\operatorname{div}\xi_*\right] d\mathcal{L}^{m+1}$$

für alle $\varphi \in C^\infty_{kpt}(\mathbb{R}_{>0},[0,1])$. Lässt man nun etwa $\varphi \to \mathbb{1}_{(0,2)}$ konvergieren, so folgt wegen der radialen Konstanz von $\tilde{v}$ und ξ_* sowie wegen $\tilde{v}|_{S^m_+} = w$ und $\xi_*|_{S^m_+} = \xi$

$$\partial E(w,\xi) = \int_{S^m_+}\left[2(DwD\xi)\cdot Dw - |Dw|^2\operatorname{div}\xi\right] d\mathcal{H}^m = 0.$$

Gemäß Lemma 1.8 bedeutet dies nach Wahl der Vektorfelder ξ die Stationarität von w auf $S^m_+ \setminus \partial S^m_+$. In einer Randumgebung ist w glatt harmonisch. Wegen der Randbedingung $\partial_{m+1}w \perp \Gamma$ auf ∂S^m_+, die aus der entsprechenden Eigenschaft von v resultiert, ist w laut Lemma 1.9 stationär harmonisch auf S^m_+ zur freien Randbedingung $w(\partial S^m_+) \subset \Gamma$. Damit ist der letzte Baustein zum Beweis der Dimensionsabschätzung in Situation (i) erbracht.

Zur Herleitung der Endlichkeitsaussage in Punkt (i) sei nun $\delta_0 > 0$ so klein gewählt, dass $B^+_{1+2\delta_0} \subset \Omega$ gewährleistet ist. Im Fall $k = n-2$ ist $d \le 0$, der letzten Aussage des Satzes 5.2 zufolge ist die Singularitätenmenge ∂-sing$(u) \cap B^+_{1/r}$ mit $r = 1+\delta_0$ also endlich. Anwenden dieses Ergebnisses auf die skalierte Abbildung $u_{0,r}$ liefert die letzte Behauptung aus Teil (i) des Theorems.

Unter den Voraussetzungen von (ii) liefert die innere Regularitätsaussage aus Satz 5.3 die Dimensionsabschätzung

$$\mathcal{H}\text{-dim}\left(\operatorname{sing}(u)\cap B^+_1 \setminus \partial\mathbb{R}^n_+\right) \le n-k-2. \tag{5.5}$$

Für $2 \le l \le k$ sei nun $v \in H^1(S^l_+,\mathcal{N})$ stationär harmonisch mit freier Randbedingung $v(\partial S^+_l) \subset \Gamma$, erfülle Bild$(v) \subset A$ und sei in einer Randumgebung glatt. Da die Dimension des Definitionsbereiches von v gleich $l \le k$ ist, liefert Anwendung von (5.5) auf v die Glattheit von v auf ganz S^l_+. Den Voraussetzungen aus (ii) zufolge ist v also konstant. Aus diesem Grund implizieren die Bedingungen aus (ii) diejenigen aus (i). Die bereits bewiesene Aussage aus Punkt (i) zusammen mit (5.5) liefert daher die behauptete Dimensionsabschätzung.

Nun zu dem Fall $k = n-2$ in (ii). Falls $\operatorname{sing}(u)\cap B^+_1$ nicht endlich ist, lässt der Satz 5.5 zusammen mit der Aussage (i) nur noch den Fall zu, dass Punkte $p_i \in \operatorname{sing}(u)\setminus\partial\mathbb{R}^n_+$ gegen einen Randpunkt $p \in \operatorname{sing}(u)\cap\partial\mathbb{R}^n_+$ konvergieren. Mit den Skalierungsfaktoren $\lambda_i := 2|p_i - p| \searrow 0$ ist für jedes $i \in \mathbb{N}$ der Punkt

$$x_i := \frac{1}{\lambda_i}(p_i - p) \in \operatorname{sing}(u_{p,\lambda_i}) \cap S^+_{1/2}.$$

Wie in Lemma 5.4 gezeigt, konvergiert eine Teilfolge von u_{p,λ_i} gegen eine homogene Tangentenabbildung $v \in \mathfrak{H}_\Lambda^A$ mit $v_{0,\lambda} = v$ für alle $\lambda > 0$. Weiter lässt sich durch Übergang zu einer Teilfolge für ein $x \in S_{1/2}^+$ die Konvergenz $x_i \to x$ bei $i \to \infty$ erreichen. Im vorliegenden Fall $k = n - 2$ wurde bereits bewiesen, dass $\mathcal{H}$-dim$(\mathrm{sing}(v) \cap B_1^+) \leq 0$ gilt. Da nun v radial konstant ist, muss $\mathrm{sing}(v) \subset \{0\}$ gelten. Insbesondere ist $|Dv|^2$ in einer Umgebung von $x \in S_{1/2}^+$ beschränkt. Daher gilt für alle hinreichend kleinen $\rho > 0$

$$\rho^{2-n} \int_{B_\rho^+(x)} |Dv|^2 d\mathcal{L}^n < \varepsilon_0.$$

Im Fall $x \notin \partial\mathbb{R}_+^n$ sei dabei $\rho > 0$ so klein gewählt, dass $B_\rho^+(x) = B_\rho(x) \subset \mathbb{R}_+^n$ gilt. Für die Abbildungen $u_i := u_{p,\lambda_i}$ mit den zugrundeliegenden Metriken $\gamma_i := \gamma_{p,\lambda_i}$ gilt laut einem der Regularitätssätze 1.15 und 3.1 wegen $x_i \in \mathrm{sing}(u_i)$

$$\rho^{2-n} \int_{B_\rho^+(x)} |Du_i|^2 d\mu_{\gamma_i} > \varepsilon_0,$$

falls $i \in \mathbb{N}$ so groß gewählt ist, dass $x_i \in B_{\rho/8}^+(x)$ gilt. Die letzten beiden Ungleichungen stehen im Widerspruch, da Konvergenz $u_i \to v$ in der H^1-Norm bei $i \to \infty$ gilt. Dies zeigt die letzte Behauptung des Theorems. □

Bemerkung 5.6. Die Abschätzung der Dimension der Singularitätenmenge aus Theorem 5.5(ii) ist unter der dort vorausgesetzten Nichtexistenz von nichttrivialen harmonischen Sphären und Halbsphären optimal. Denn wenn es für ein $k \geq 2$ auf einer Teilmenge $A \subset \mathcal{N}$ eine nichtkonstante harmonische Abbildung $\hat{v} : S^{k+1} \to A \subset \mathcal{N}$ gibt, dann definiert

$$\hat{u} : \mathbb{R}^{k+2} \to A \subset \mathcal{N}, \quad \hat{u}(x) := \hat{v}(x/|x|),$$

eine stationäre harmonische Abbildung bezüglich der Euklidischen Metrik mit Singularitätenmenge $\mathrm{sing}(\hat{u}) = \{0\}$. Da die Dimension des Definitionsbereiches hier $n = k + 2$ ist, gilt also

$$\mathcal{H}\text{-dim}(\mathrm{sing}(\hat{u})) = n - k - 2.$$

Die Tatsache, dass $\hat{u}$ tatsächlich stationär harmonisch ist, wird unten gezeigt. Gibt es dagegen eine nichttriviale harmonische Abbildung $v : S_+^{k+1} \to A \subset \mathcal{N}$ mit freiem Rand Γ, so definiert man eine stationäre harmonische Abbildung u mit freier Randbedingung $u(\partial\mathbb{R}_+^{k+2}) \subset \Gamma$ analog durch

$$u : \mathbb{R}_+^{k+2} \to A \subset \mathcal{N}, \quad u(x) := v(x/|x|).$$

Auch in diesem Fall gilt $\mathrm{sing}(u) = \{0\}$, also $\mathcal{H}$-dim$(\mathrm{sing}(u)) = n - k - 2$, da hier $n = k + 2$ ist.
Nun zum Nachweis, dass $\hat{u}$ und u stationär harmonisch sind. Hier wird nur der Beweis für u dargestellt, da im Fall von $\hat{u}$ die analoge Argumentation zum Ziel führt. Wenn man die Differentialgleichung für Harmonizität (1.19) bezüglich der Metrik in Polarkoordinaten umschreibt, sieht man, dass wegen $\frac{\partial u}{\partial r} \equiv 0$ die Harmonizität von u auf $\mathbb{R}_+^{k+2} \setminus \{0\}$ äquivalent zur Harmonizität von $v = u\big|_{S_+^{k+1}}$ auf S_+^{k+1} ist. Die freie Randbedingung $\partial_{k+2} u \perp \Gamma$ auf $\partial\mathbb{R}_+^{k+2} \setminus \{0\}$ folgt sofort aus der freien Randbedingung von v, die $\partial_{k+2} v \perp \Gamma$ auf ∂S_+^{k+1} besagt. Also ist u auf $\mathbb{R}_+^{k+2} \setminus \{0\}$ glatt harmonisch mit der erwähnten freien Randbedingung. Mit Lemma 1.21 sieht man, dass u sogar auf ganz

$\mathbb{R}^{k+2}_+$ schwach harmonisch mit freier Randbedingung $u(\partial\mathbb{R}^{k+2}_+) \subset \Gamma$ ist.
Im Folgenden sei wie oben $n := k+2 \geq 4$ die Dimension des Definitionsbereiches und $\mathcal{N}$ sei isometrisch in einen Euklidischen Raum $\mathbb{R}^N$ eingebettet. Für den Nachweis der Stationarität von u auf ganz $\mathbb{R}^n_+$ sei ein beliebiges Testvektorfeld $\xi \in C^\infty_{kpt}(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n)$ mit der Randbedingung $\xi(\partial\mathbb{R}^n_+) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$ gegeben. Hierfür berechnet sich laut (1.11) die innere Variation bezüglich der Euklidischen Metrik als

$$\begin{aligned}
\partial E(u,\xi) &= \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n_+\setminus B^+_\varepsilon} \left[2\partial_\alpha u \cdot \partial_\nu u\, \partial_\alpha \xi^\nu - \partial_\alpha u \cdot \partial_\alpha u\, \partial_\nu \xi^\nu\right] d\mathcal{L}^n \\
&= \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{S^+_\varepsilon} \left[2\partial_\alpha u \cdot \partial_\nu u\, \vec{n}_\alpha \xi^\nu - \partial_\alpha u \cdot \partial_\alpha u\, \vec{n}_\nu \xi^\nu\right] d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\quad + \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+\setminus B_\varepsilon} \left[2\partial_\alpha u \cdot \partial_\nu u\, \vec{n}_\alpha \xi^\nu - \partial_\alpha u \cdot \partial_\alpha u\, \vec{n}_\nu \xi^\nu\right] d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\quad - \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n_+\setminus B^+_\varepsilon} \left[2\partial_\alpha (\partial_\alpha u \cdot \partial_\nu u) \xi^\nu - \partial_\nu (\partial_\alpha u \cdot \partial_\alpha u) \xi^\nu\right] d\mathcal{H}^{n-1} \\
&=: I + II - III
\end{aligned} \tag{5.6}$$

nach dem Gaußschen Satz mit dem äußeren Normalenvektor $\vec{n}(x) := -\frac{x}{|x|}$ für $x \in S^+_\varepsilon$ und $\vec{n}(x) := -e_n$ für $x \in \partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\varepsilon$. Das Integral III in obiger Gleichung verschwindet, da

$$2\partial_\alpha(\partial_\alpha u \cdot \partial_\nu u)\xi^\nu - \partial_\nu(\partial_\alpha u \cdot \partial_\alpha u)\xi^\nu = 2\partial_\alpha\partial_\alpha u \cdot \partial_\nu u\, \xi^\nu = 2\Delta u \cdot \partial_\xi u = 0,$$

denn gemäß Lemma 1.9 ist $\Delta u \perp \mathcal{N}$ auf $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$. Das zweite Randintegral II in (5.6) verschwindet auch. Hierfür beobachtet man zunächst, dass wegen $\vec{n} \equiv -e_n$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\varepsilon$ gilt

$$\partial_\alpha u \cdot \partial_\nu u\, \vec{n}_\alpha \xi^\nu = -\partial_n u \cdot \partial_\xi u = 0,$$

denn für $x \in \partial\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ ist wegen der freien Randbedingung $\partial_n u(x) \perp \mathrm{T}_{u(x)}\,\Gamma$ und außerdem gilt $\partial_\xi u(x) \in \mathrm{T}_{u(x)}\,\Gamma$, da $\xi(\partial\mathbb{R}^n_+) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$ erfüllt ist. Aus demselben Grund ist auf $\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\varepsilon$

$$\vec{n}_\nu \xi^\nu = -e_n \cdot \xi \equiv 0.$$

Damit ist $II = 0$ gezeigt. Zuletzt sieht man im ersten Randintegral I aus (5.6), dass auf S^+_ε nach Definition von u gilt $\partial_\alpha u\, \vec{n}_\alpha = -\frac{\partial u}{\partial r} \equiv 0$. Damit vereinfacht sich die Gleichung (5.6) zu

$$\begin{aligned}
\partial E(u,\xi) &= \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{S^+_\varepsilon} |Du(x)|^2 \frac{x}{|x|} \cdot \xi(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \\
&= \lim_{\varepsilon\searrow 0} \varepsilon^{n-3} \int_{S^+_1} |Du(y)|^2\, y \cdot \xi(\varepsilon y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) = 0,
\end{aligned}$$

denn unter der Transformation $x = \varepsilon y$ ist $|Du(x)| = \varepsilon^{-1}|Du(y)|$ wegen der radialen Konstanz $u(x) = u(y)$ von u. Damit ist die Differentialgleichung für Stationarität (1.11) auf $\mathbb{R}^n_+$ erfüllt und die Behauptung ist gezeigt.

5.3 Zur Nichtexistenz harmonischer Sphären und Halbsphären

Im folgenden Lemma wird eine Bedingung eingeführt, die die Existenz von nichttrivialen harmonischen S^l und S^l_+ mit freiem Rand Γ ausschließt. Ein solches Kriterium wurde in [CL, Def. 5.1] mit der spezielleren Voraussetzung $\nabla k(p) \in \mathrm{T}_p \widehat{\Gamma}_0$ für alle $p \in \widehat{\Gamma}_0$ anstelle von (5.7) eingeführt, wobei ∇ den Gradienten bezeichne.

Lemma 5.7. *Gegeben sei eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$, eine Untermannigfaltigkeit $\Gamma \subset \mathcal{N}$ und eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathcal{N}$. Weiter bezeichne $\pi : \widehat{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$ die universelle Überlagerung, $\widehat{A} := \pi^{-1}(A)$ und $\widehat{\Gamma}_0$ sei eine Zusammenhangskomponente von $\pi^{-1}(\Gamma)$. Auf $\widehat{A}$ gebe es eine definit konvexe Funktion $k : \widehat{A} \to \mathbb{R}$, so dass in allen Punkten $p \in \widehat{\Gamma}_0 \cap \widehat{A}$ die Bedingung*

$$\nabla k(p) \cdot v \geq 0 \quad \text{für alle } v \in \mathrm{T}_p \widehat{A} \cap \mathrm{T}_p^{\perp} \widehat{\Gamma}_0 \tag{5.7}$$

erfüllt sei. Hierbei bezeichne $\nabla k(p)$ den Gradienten von k und $T_p\widehat{A}$ den Tangentialkegel an $\widehat{A}$ im Punkt p. Unter diesen Voraussetzungen trägt A für kein $l \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ eine nichttriviale harmonische S^l oder eine nichttriviale harmonische S^l_+ mit freiem Rand Γ. Allgemeiner ist dann jede glatte harmonische Abbildung $u : \mathcal{M} \to A \subset \mathcal{N}$ mit freier Randbedingung $u(\partial\mathcal{M}) \subset \Gamma$ konstant, wenn $\mathcal{M}$ eine kompakte, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit zusammenhängendem, eventuell leerem Rand ist.

Beweis. Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ habe die Dimension $n \in \mathbb{N}$. Weil $\mathcal{M}$ einfach zusammenhängend ist, lässt sich die Abbildung u aus dem Satz zu $\hat{u} : \mathcal{M} \to \widehat{A} \subset \widehat{\mathcal{N}}$ liften. Da außerdem $u(\partial\mathcal{M})$ zusammenhängend ist, lässt sich die geliftete Abbildung so wählen, dass sie wie u harmonisch mit der freien Randbedingung $\hat{u}(\partial\mathcal{M}) \subset \widehat{\Gamma}_0$ und $\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu_\gamma} \perp \widehat{\Gamma}_0$ auf $\partial\mathcal{M}$ ist. Hierbei sei auf $\widehat{\mathcal{N}}$ die durch π zurückgeholte Metrik zugrundegelegt und ν_γ bezeichne den inneren Einheitsnormalenvektor auf $\partial\mathcal{M}$ bezüglich der Metrik γ. Zunächst wird gezeigt, dass die Verkettung $k \circ \hat{u} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ eine subharmonische Funktion ist. Dazu benötigt man eine Kettenregel für den Laplaceoperator. Man sieht für alle längs $\hat{u}$ parallelen Vektorfelder V auf $\widehat{\mathcal{N}}$

$$\partial_\alpha(\partial_V k \circ \hat{u}) = (\nabla^{\widehat{\mathcal{N}}} Dk \circ \hat{u})(\partial_\alpha \hat{u}, V) + (Dk \circ \hat{u}) \nabla^{\widehat{\mathcal{N}}}_{e_\alpha} V.$$

Diese Gleichung vollzieht man am einfachsten nach, indem man an festen Punkten $x \in \mathcal{M}$ und $\hat{u}(x) \in \widehat{\mathcal{N}}$ von erster Ordnung Euklidische Koordinaten einführt, in denen dann die kovariante Ableitung der gewöhnlichen Richtungsableitung entspricht. Die obige Kettenregel wird mit $V := \sqrt{\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta \hat{u}$ angewandt, um auf $\mathcal{M} \setminus \partial\mathcal{M}$ zu erhalten

$$\begin{aligned}
\Delta_\gamma(k \circ \hat{u}) &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_\alpha \left(\sqrt{\gamma}\gamma^{\alpha\beta} \partial_{\partial_\beta \hat{u}} k \circ \hat{u} \right) \\
&= \gamma^{\alpha\beta} (\nabla^{\widehat{\mathcal{N}}} Dk \circ \hat{u})(\partial_\alpha \hat{u}, \partial_\beta \hat{u}) + (Dk \circ \hat{u}) \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \nabla^{\widehat{\mathcal{N}}}_{e_\alpha} \left(\sqrt{\gamma}\gamma^{\alpha\beta} \partial_\beta \hat{u} \right) \\
&= \mathrm{Spur}_\gamma (\nabla^{\widehat{\mathcal{N}}} Dk \circ \hat{u})(D\hat{u} \otimes D\hat{u}) + (Dk \circ \hat{u})(\Delta_\gamma \hat{u})^\top \geq 0,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

denn da $\hat{u}$ harmonisch ist, verschwindet der tangentiale Anteil $(\Delta_\gamma \hat{u})^\top$ des Laplace-Operators, und da k konvex ist, ist $(\nabla^{\widehat{\mathcal{N}}} Dk \circ \hat{u})(D\hat{u} \otimes D\hat{u})$ positiv semidefinit. Damit ist nachgewiesen, dass $h := k \circ \hat{u}$ tatsächlich eine subharmonische Funktion auf $\mathcal{M}$ ist. Außerdem implizieren die freie Randbedingung $\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu_\gamma} \perp \Gamma$ auf $\partial\mathcal{M}$ und die Voraussetzungen an die Funktion k die folgende Randbedingung an h.

$$\frac{\partial h}{\partial \nu_\gamma} = (Dk \circ \hat{u}) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu_\gamma} = (\nabla k \circ \hat{u}) \cdot \frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu_\gamma} \geq 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{M}.$$

Wegen dieser Randbedingung ist h sogar harmonisch, denn nach Gaußschem Satz ist mit dem inneren Einheitsnormalenvektor ν_γ an $\partial\mathcal{M}$, der hier bezüglich der Metrik γ gebildet sei,

$$\int_{\mathcal{M}} \Delta_\gamma h \, d\mu_\gamma = -\int_{\partial\mathcal{M}} \frac{\partial h}{\partial \nu_\gamma} \sqrt{\gamma} d\mathcal{H}^{n-1} \leq 0.$$

Damit wird Gleichung (5.8) zu

$$0 = \Delta_\gamma h = \mathrm{Spur}_\gamma(\nabla^{\widehat{\mathcal{N}}} Dk \circ \hat{u})(D\hat{u} \otimes D\hat{u}) \quad \text{auf } \mathcal{M} \setminus \partial\mathcal{M}.$$

Da die Bilinearform $\nabla^{\widehat{\mathcal{N}}} Dk$ auf Bild$(\hat{u})$ positiv definit ist, folgt aus dieser Gleichheit $D\hat{u} \equiv 0$ auf $\mathcal{M}$. Demzufolge ist $\hat{u}$ und damit auch $u = \pi \circ \hat{u}$ konstant. Dies beweist die letzte Aussage des Satzes. Weil insbesondere S^l und S^l_+ die Voraussetzungen an die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ erfüllen, folgen die übrigen Behauptungen. □

Die Anwendung dieses Kriteriums liefert den folgenden

Satz 5.8. *Sei $\mathcal{N}$ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit nichtpositiver Schnittkrümmung, $\Gamma \subset \mathcal{N}$ eine Untermannigfaltigkeit und $A \subset \mathcal{N}$ eine abgeschlossene Teilmenge. In den folgenden Fällen trägt A für kein $l \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ eine nichttriviale harmonische S^l oder eine nichttriviale harmonische S^l_+ mit freiem Rand Γ.*

(i) In dem Fall, dass Γ total geodätisch ist und $A = \mathcal{N}$,

(ii) falls $\Gamma = \partial G$ und $A = \mathcal{N} \setminus G$ für ein glattes, geodätisch sternförmiges Gebiet $G \subset \mathcal{N}$. Geodätisch sternförmig soll dabei bedeuten, dass es einen Sternpunkt $p_0 \in G$ gibt, so dass $G = \exp_{p_0}(U)$ das Bild einer sternförmigen Nullumgebung U ist, auf der die geodätische Exponentialabbildung $\exp_{p_0}$ injektiv ist.

(iii) In dem Fall, dass $\Gamma \subset \partial B$ und $A = \mathcal{N} \setminus B$, wobei B eine Normalkugel in $\mathcal{N}$ ist.

Allgemeiner gibt es in allen Fällen keine nichtkonstante glatte harmonische Abbildung $u : \mathcal{M} \to A \subset \mathcal{N}$ mit freier Randbedingung $u(\partial\mathcal{M}) \subset \Gamma$ für eine kompakte, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ mit zusammenhängendem, möglicherweise leerem Rand.

Beweis. Sei $\pi : \widehat{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$ die universelle Überlagerung. Auf $\widehat{\mathcal{N}}$ sei die durch π zurückgeholte Metrik zugrundegelegt. Da die Mannigfaltigkeit $\widehat{\mathcal{N}}$ eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit nichtpositiver Schnittkrümmung ist, ist für einen beliebigen Punkt $p_0 \in \widehat{\mathcal{N}}$ die Funktion $k(y) := d^2(y, p_0)$ strikt konvex auf $\widehat{\mathcal{N}}$, wenn d den Riemannschen Abstand auf $\widehat{\mathcal{N}}$ bezeichnet. Der Beweis hiervon benutzt die Rauchschen Vergleichssätze für Jacobi-Felder und wird etwa in [J, Lm. 8.7.2] geführt. Für die Rauchschen Vergleichssätze vergleiche man auch [CE, Thm. 1.28, 1.29]. Den Gradienten von k berechnet man in einem von p_0 verschiedenen Punkt $p \in \widehat{\mathcal{N}}$ als

$$\nabla k(p) = 2rc_p'(r) \quad \text{mit } r := d(p, p_0) > 0, \tag{5.9}$$

wenn c_p die nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische ist, die p_0 mit p verbindet. Diese Geodätische ist eindeutig, weil $\widehat{\mathcal{N}}$ eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit nichtpositiver Schnittkrümmung ist und daher nach dem Satz von Hadamard-Cartan die Exponentialabbildung ein globaler Diffeomorphismus ist, vgl. [GHL, 3.87]. Für den Beweis der Behauptung (5.9) benutzt man, dass c_p nach Gaußschem Lemma die Riemannsche Sphäre vom Radius r, auf der k den konstanten Wert r^2 hat, senkrecht schneidet. Daher gilt für alle Vektoren $v \in \mathrm{T}_p\widehat{\mathcal{N}}$ mit $v \perp c_p'(r)$ die Gleichheit $\nabla k(p) \cdot v = \partial_v k(p) = 0$. Hieraus folgt (5.9), wenn man $k(c_p(t)) = t^2$ für alle $t > 0$ benutzt.

Ist die Untermannigfaltigkeit Γ nun total geodätisch, so ist auch eine beliebige Zusammenhangskomponente $\widehat{\Gamma}_0$ von $\pi^{-1}(\Gamma) \subset \widehat{\mathcal{N}}$ total geodätisch. Wählt man für die Definition von k einen Punkt $p_0 \in \widehat{\Gamma}_0$, so verläuft für jedes $p \in \widehat{\Gamma}_0$ die verbindende Geodätische c_p in der Untermannigfaltigkeit $\widehat{\Gamma}_0$. Aus (5.9) folgt

$$\nabla k(p) \in \mathrm{T}_p\widehat{\Gamma}_0 \quad \text{für alle } p \in \widehat{\Gamma}_0.$$

Daher sind die Bedingungen von Lemma 5.7 für die Funktion $k : \widehat{\mathcal{N}} \to \mathbb{R}$ erfüllt, so dass im Fall (i) die Behauptung folgt.

Nun liege die Situation von Unterpunkt (ii) vor. Da das Gebiet G geodätisch sternförmig, also insbesondere einfach zusammenhängend ist, zerfällt $\pi^{-1}(G) \subset \widehat{\mathcal{N}}$ in Zusammenhangskomponenten, von denen jede zu G isometrisch ist. Jede solche Zusammenhangskomponente $\widehat{G}_0$ ist also wieder geodätisch sternförmig mit einem Sternpunkt $\hat{p}_0$. Die Untermannigfaltigkeit $\widehat{\Gamma}_0 := \partial\widehat{G}_0$ ist eine Zusammenhangskomponente von $\pi^{-1}(\Gamma)$. Außerdem sei definiert $\widehat{A} := \pi^{-1}(A)$. Um zu zeigen, dass die Funktion $k(y) := d^2(y, \hat{p}_0)$ die Voraussetzungen von Lemma 5.7 erfüllt, sei nun $p \in \widehat{\Gamma}_0 \cap \widehat{A}$, c_p die nach Bogenlänge parametrisierte geodätische Verbindung von $\hat{p}_0$ mit p sowie $r := d(p, \hat{p}_0)$. Da $\widehat{G}_0$ geodätisch sternförmig ist, gilt $c_p(t) \in \widehat{G}_0$ für alle $t \in [0, r)$, so dass

$$-c_p'(r) \in \mathrm{T}_p\overline{\widehat{G}_0}. \tag{5.10}$$

Da es sich bei $\widehat{G}_0$ um ein glattes Gebiet handelt, ist $\mathrm{T}_p\overline{\widehat{G}_0}$ ein Halbraum. Da nach Voraussetzung $\widehat{A} \subset \widehat{\mathcal{N}} \setminus \widehat{G}_0$ und $\widehat{\Gamma}_0 = \partial\widehat{G}_0$ gilt, ist jeder Vektor $v \in \mathrm{T}_p\widehat{A} \cap \mathrm{T}_p^{\perp}\widehat{\Gamma}_0$ ein äußerer Normalenvektor an das Gebiet $\widehat{G}_0$. Daher folgt

$$\nabla k(p) \cdot v = 2rc_p'(r) \cdot v \geq 0 \quad \text{laut (5.10).}$$

Also lässt sich Lemma 5.7 anwenden, was die zweite Aussage beweist.

Bei Punkt (iii) liegt eine Normalkugel $B = \exp_{p_0}(B_R(0))$ vor, wobei $p_0 \in \mathcal{N}$ und $R > 0$ so gewählt sind, dass $\exp_{p_0}$ auf $B_R(0)$ injektiv ist. Da B demnach einfach zusammenhängend ist, ist jede Zusammenhangskomponente $\widehat{B}_0$ von $\pi^{-1}(B) \subset \widehat{\mathcal{N}}$ isometrisch zu B, also eine Normalkugel in $\widehat{\mathcal{N}}$ um einen Mittelpunkt $\hat{p}_0 \in \pi^{-1}(p_0)$. Mit $\widehat{\Gamma}_0$ sei diejenige Zusammenhangskomponente von $\pi^{-1}(\Gamma)$ bezeichnet, die in $\partial\widehat{B}_0$ liegt, und es sei $\widehat{A} := \pi^{-1}(A)$ gesetzt. Wie oben wählt man als konvexe Funktion $k(y) := d^2(y, \hat{p}_0)$ für $y \in \widehat{\mathcal{N}}$. Der Gradient dieser Funktion berechnet sich wie in (5.9), so dass nach Gaußschem Lemma $\nabla k(p)$ für alle $p \in \widehat{\Gamma}_0$ ein äußerer Normalenvektor an $\widehat{B}_0$ in $p \in \partial\widehat{B}_0$ ist. Wegen $\widehat{A} \subset \widehat{\mathcal{N}} \setminus \widehat{B}_0$ gilt für alle $v \in \mathrm{T}_p\widehat{A}$ die gewünschte Eigenschaft $\nabla k(p) \cdot v \geq 0$, so dass Lemma 5.7 die letzte Behauptung des Satzes liefert. □

Der Satz 5.8 ergibt zusammen mit Theorem 5.5 die folgende Aussage.

Korollar 5.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ ein glattes Gebiet mit einer $C^{1,\alpha}$-Metrik γ. Unter den Voraussetzungen des Satzes 5.8 ist jede bezüglich γ stationäre harmonische Abbildung $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ mit freier Randbedingung $u(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$ und $u(\Omega) \subset A$ von der Klasse $C^{2,\alpha}$.*

Der Punkt (i) von Satz 5.8 schließt insbesondere den Fall ein, dass Γ eine einpunktige Untermannigfaltigkeit ist, so dass in diesem Fall die Konstanz aller harmonischer Abbildungen $S^l_+ \to \mathcal{N}$ folgt, die auf ∂S^l_+ konstant sind. Dieser Satz gilt für $l \geq 3$ laut [KW] und für $l = 2$ laut [Le] tatsächlich schon ohne die Voraussetzung, dass $\mathcal{N}$ nichtpositive Schnittkrümmung trägt. In noch allgemeinerer Form wird dieses Resultat im folgenden Satz bewiesen, der in der vorliegenden Arbeit vor allem bei der Betrachtung von Dirichlet-Randwerten von Bedeutung ist, vgl. Theorem 6.27.

Satz 5.10. *Sei $\mathcal{N}$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $l \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann ist jede stationäre harmonische Abbildung $u \in H^1(S^l_+, \mathcal{N})$, die in einer Umgebung von ∂S^l_+ von der Klasse C^∞ ist und konstante Randwerte $u|_{\partial S^l_+}$ besitzt, schon auf ganz S^l_+ konstant.*

Beweis. Im Fall $l = 2$ ist die Abbildung u laut Theorem 3.1 auch in inneren Punkten glatt, also glatt harmonisch auf ganz S^2_+. Daher liefert die Arbeit [Le] die Konstanz von u. Im Fall $l \geq 3$ folgt der Beweis der Vorgehensweise aus [SU2, Lm. 2.5], worin ein etwas schwächeres Ergebnis hergeleitet wird. Die mit der Standardmetrik versehene Sphäre S^l lässt sich mithilfe stereographischer Projektion mit dem Raum $\mathbb{R}^l$ identifizieren, wenn man auf diesem die Metrik $(\gamma_{\alpha\beta}(x)) = 4(1+|x|^2)^{-2}(\delta_{\alpha\beta})$ zugrundelegt. Die Halbsphäre S^l_+ entspricht dabei der Einheitskugel $B_1 \subset \mathbb{R}^l$. Sei also eine stationäre harmonische Abbildung $u \in H^1(B_1, \mathcal{N})$ gegeben, die für ein $\varepsilon > 0$ auf $B_1 \setminus B_{1-\varepsilon}$ glatt ist und konstante Randwerte $u|_{S_1} \equiv c \in \mathcal{N}$ besitzt. Für $\lambda \geq 1$ und $x \in B_1$ definiert man hierzu eine Variation durch

$$u_\lambda(x) := \begin{cases} u \circ \phi_\lambda(x) & \text{für } |x| \leq \lambda^{-1} \\ c & \text{für } \lambda^{-1} < |x| < 1, \end{cases} \tag{5.11}$$

wobei $\phi_\lambda(x) := \lambda x$ sei. Diese Variation erfüllt $u_1 = u$, daher liefert der Beweis von Lemma 1.8 für $\xi := \frac{\partial}{\partial \lambda_+}\phi_\lambda\Big|_{\lambda=1} = \mathrm{id}$ die Gleichheit

$$\frac{d}{d\lambda_+} E_\gamma(u_\lambda)\Big|_{\lambda=1} = \partial E_\gamma(u, \xi),$$

wobei $\frac{d}{d\lambda_+}$ die rechtsseitige Ableitung bezeichnet. Nun wählt man eine Abschneidefunktion $\zeta \in C^\infty(\overline{B}_1, [0,1])$ mit $\mathrm{spt}(\zeta) \subset \overline{B}_1 \setminus B_{1-\varepsilon}$ und $\zeta \equiv 1$ auf $\overline{B}_1 \setminus B_{1-\varepsilon/2}$. Wegen der Linearität der Funktion $\xi \mapsto \partial E_\gamma(u, \xi)$ gilt

$$\partial E_\gamma(u, \xi) = \partial E_\gamma(u, (1-\zeta)\xi) + \partial E_\gamma(u, \zeta\xi)$$

und der erste Summand auf der rechten Seite verschwindet wegen der Stationarität von u, da $(1-\zeta)\xi$ kompakten Träger in B_1 hat. Laut (1.12) gilt daher mit einer Funktion ω, die $|\omega(x)| \leq C|Du(x)|^2$ für alle $x \in B_1$ erfüllt,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\lambda_+} E_\gamma(u_\lambda)\Big|_{\lambda=1} = \partial E_\gamma(u, \zeta\xi) \\ &\quad = \int_{B_1} \Big[2\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \cdot \partial_\nu u \partial_\beta(\zeta\xi^\nu) - \gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \cdot \partial_\beta u\, \partial_\nu(\zeta\xi^\nu) + \zeta\, \omega \cdot \xi \Big]\, d\mu_\gamma \\ &\quad \geq \int_{S_1} \Big[2\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \cdot \partial_\nu u\, \vec{n}_\beta \zeta\xi^\nu - \gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \cdot \partial_\beta u\, \vec{n}_\nu \zeta\xi^\nu \Big] \sqrt{\gamma} d\mathcal{H}^{l-1} - C\int_{\mathrm{spt}(\zeta)} |Du|^2 d\mathcal{L}^l \end{aligned}$$

nach Gaußschem Satz, wobei $\vec{n}(x) := x$ der äußere Normalenvektor in $x \in S_1$ sei. Wegen $\gamma_{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta}$, $\zeta(x) = 1$ und $\xi(x) = \vec{n}(x)$ für $x \in S_1$ wird die letzte Ungleichung zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda_+} E_\gamma(u_\lambda)\bigg|_{\lambda=1} &\geq \int_{S_1} \left[2 \left| \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|^2 - |Du|^2 \right] d\mathcal{H}^{l-1} - C \int_{\operatorname{spt}(\zeta)} |Du|^2 d\mathcal{L}^l \\ &= \int_{S_1} \left| \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|^2 d\mathcal{H}^{l-1} - C \int_{\operatorname{spt}(\zeta)} |Du|^2 d\mathcal{L}^l, \end{aligned}$$

da wegen $u|_{S_1} \equiv c$ auf S^1 die Gleichheit $|Du| = \left|\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|$ gilt. Lässt man nun $\mathcal{L}^l(\operatorname{spt}(\zeta))$ gegen Null streben, so erhält man

$$\frac{d}{d\lambda_+} E_\gamma(u_\lambda)\bigg|_{\lambda=1} \geq 0.$$

Andererseits berechnet man mit der Definition von u_λ und der Metrik γ

$$E_\gamma(u_\lambda) = \int_{B_{1/\lambda}} \lambda^2 |Du(\lambda x)|_\gamma^2 d\mu_\gamma(x) = \int_{B_1} \lambda^{2-l} \left(\frac{2}{1 + |\lambda^{-1} y|^2} \right)^{l-2} |Du(y)|^2 d\mathcal{L}^l(y).$$

Differenzieren unter dem Integral führt auf

$$0 \leq \frac{d}{d\lambda_+} E_\gamma(u_\lambda)\bigg|_{\lambda=1} = (l-2) \int_{B_1} \left(\frac{2}{1 + |y|^2} \right)^{l-2} \frac{|y|^2 - 1}{1 + |y|^2} |Du|^2 d\mathcal{L}^l(y) \leq 0.$$

Hieraus folgt $|Du|^2 \equiv 0$, also die behauptete Konstanz von u. $\square$

Kapitel 6

Allgemeine Randbedingungen

6.1 Das Konzept der allgemeinen Randbedingung

Die bisher behandelten freien Randbedingungen $u(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$ lassen sich noch allgemeiner fassen, nämlich in der Form $u(x) \in \Gamma(x)$ für alle $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$, wobei $\Gamma(x) \subset \mathcal{N}$ eine $C^{2,\alpha}$-Schar von Untermannigfaltigkeiten ist. Dieser Begriff wird unten präziser gefasst. Wie schon bisher ist dabei das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ als offen in der Relativtopologie von $\mathbb{R}^n_+$ zu verstehen. Die betrachtete Klasse von Randbedingungen umfasst sowohl die freien Randbedingungen in dem Fall, dass $\Gamma(x)$ nicht vom Parameter x abhängt, als auch die Dirichlet-Randbedingungen $u|_{\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+} = g$ für eine vorgegebene Abbildung $g \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega} \cap \partial\mathbb{R}^n_+, \mathcal{N})$, was dem Fall von einpunktigen Mannigfaltigkeiten $\Gamma(x) = \{g(x)\}$ entspricht. Die Behandlung von solchen allgemeinen Randbedingungen hat unter anderem den Vorteil, dass sich freie und Dirichlet-Randbedingungen mit denselben Beweismethoden behandeln lassen, so dass man eine einheitliche Theorie erhält. In obiger Ausführung ist noch die Klasse der betrachteten Scharen von Untermannigfaltigkeiten zu spezifizieren. Hierzu werden zunächst die folgenden Sprechweisen eingeführt.

Bezeichnung 6.1. *Sei $\Gamma = (\Gamma(x))_{x\in\overline{\Omega}\cap\partial\mathbb{R}^n_+}$ eine Schar von kompakten Untermannigfaltigkeiten einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$.*

(i) Zu einer Mannigfaltigkeit $\Gamma(x)$ und $\delta > 0$ sei $U_\delta(\Gamma(x)) \subset \mathcal{N}$ die δ-Umgebung der Mannigfaltigkeit $\Gamma(x)$ bezüglich des Riemannschen Abstandes auf $\mathcal{N}$.

(ii) Mit den nächste-Punkt-Retraktionen $\pi_{\Gamma(x)}$ auf $\Gamma(x)$ sei definiert

$$\delta_\Gamma := \frac{1}{4} \sup \left\{ \delta > 0 \;\middle|\; \pi_{\Gamma(x)} : U_\delta(\Gamma(x)) \to \Gamma(x) \text{ existiert für alle } x \in \overline{\Omega} \cap \partial\mathbb{R}^n_+. \right\}$$

(iii) Die Schar von Untermannigfaltigkeiten $(\Gamma(x))$ heiße schwach stetig, *falls $\delta_\Gamma > 0$ gilt und es zu jedem $x_0 \in \overline{\Omega} \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ ein $\rho > 0$ gibt, so dass $\Gamma(x) \subset U_{\delta_\Gamma}(\Gamma(x_0))$ gilt, falls $x \in D_\rho(x_0) := B_\rho(x_0) \cap \overline{\Omega} \cap \partial\mathbb{R}^n_+$. Der Radius $\rho_{x_0} = \rho_{x_0}(\Gamma) > 0$ bezeichne in diesem Fall das halbe Supremum der Radien ρ mit obiger Eigenschaft.*

(iv) Für eine im Sinne von (iii) schwach stetige Schar Γ wird definiert

$$\pi_{x_0} : D_{\rho_{x_0}}(x_0) \times U_{\delta_\Gamma}(\Gamma(x_0)) \to \mathcal{N}, \quad \pi_{x_0}(x, y) := \pi_{\Gamma(x)}(y).$$

Nun lässt sich der Begriff einer $C^{k,\alpha}$-Schar von Mannigfaltigkeiten präzisieren.

Definition 6.2 (Allgemeine Randwerte). *Es seien eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$, ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ sowie $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $0 < \alpha < 1$ gegeben. Eine in obigem Sinne schwach stetige Schar $\Gamma = (\Gamma(x))_{x \in \overline{\Omega} \cap \partial \mathbb{R}^n_+}$ von kompakten $C^{k+1,\alpha}$-Untermannigfaltigkeiten $\Gamma(x) \subset \mathcal{N}$, die alle von derselben Dimension $l \in \mathbb{N}_0$ sind, wird als* allgemeine Randwerte der Klasse $C^{k,\alpha}$ *bezeichnet, falls für alle $x_0 \in \overline{\Omega} \cap \partial \mathbb{R}^n_+$ gilt*

$$\pi_{x_0} \in C^{k,\alpha}(D_{\rho_{x_0}}(x_0) \times U_{\delta_\Gamma}(\Gamma(x_0)), \mathcal{N}).$$

Die $C^{k,\alpha}$-„Norm“ der Schar von Untermannigfaltigkeiten wird definiert als

$$|||\Gamma|||_{k,\alpha} := \max_{x_0 \in \overline{\Omega} \cap \partial \mathbb{R}^n_+} \|\pi_{x_0}\|_{C^{k,\alpha}}.$$

Außerdem sei für $C^{2,\alpha}$-Randwerte definiert

$$|\Gamma|_1 := \max_{x_0 \in \overline{\Omega} \cap \partial \mathbb{R}^n_+} \{\|D_x \pi_{x_0}\|_\infty, \|D_x D_y \pi_{x_0}\|_\infty\} \qquad \text{und} \qquad |\Gamma|_2 := \max_{x_0 \in \overline{\Omega} \cap \partial \mathbb{R}^n_+} \|D_x^2 \pi_{x_0}\|_\infty,$$

wobei D_x und D_y die totalen Ableitungen von π_{x_0} nach dem ersten bzw. zweiten Argument bezeichnen sollen.
Das System der allgemeinen Randwerte Γ der Klasse $C^{2,\alpha}$ wie oben, deren Norm für ein $K \geq 0$ durch $|||\Gamma|||_{2,\alpha} \leq K$ beschränkt ist, wird mit $\mathcal{A}_K(\Omega) = \mathcal{A}_K(\Omega, \mathcal{N})$ bezeichnet. Die Teilmenge der $C^{k,\alpha}$-Randwerte Γ mit $|||\Gamma|||_{k,\alpha} \leq K$ wird mit $\mathcal{A}_K^{k,\alpha}(\Omega) = \mathcal{A}_K^{k,\alpha}(\Omega, \mathcal{N})$ notiert.

In Anlehnung an Lemma 1.3 wird nun der Begriff von schwacher Harmonizität mit einer allgemeinen Randbedingung definiert.

Definition 6.3 (Schwach harmonische Abbildung mit allgemeiner Randbedingung). *Sei $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$ eine kompakte, isometrisch eingebettete Untermannigfaltigkeit und hierauf $\Gamma \in \mathcal{A}_K(\Omega)$ allgemeine Randwerte. Eine Abbildung $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ heiße* schwach harmonisch zur allgemeinen Randbedingung $u(x) \in \Gamma(x)$ *für $x \in \Omega \cap \partial \mathbb{R}^n_+$, wenn die Differentialgleichung*

$$\int_\Omega Du \cdot_\gamma DV d\mu_\gamma = 0$$

für alle längs u tangentialen Vektorfelder $V \in L^\infty \cap H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit kompaktem Träger in Ω gilt, die die Randbedingung $V(x) \in \mathrm{T}_{u(x)} \Gamma(x)$ für $\mathcal{L}^{n-1}$-fast alle $x \in \Omega \cap \partial \mathbb{R}^n_+$ erfüllen. Wenn man V statt als ein $\mathbb{R}^N$-wertiges Vektorfeld als einen Schnitt in $u^* \mathrm{T} \mathcal{N}$ auffasst, bedeutet obige Gleichung

$$\int_\Omega Du \cdot_\gamma \nabla^{\mathcal{N}} V d\mu_\gamma = 0.$$

Wie in Bemerkung 1.2 ausgeführt, ist dieser Begriff von Harmonizität zu schwach für die Regularitätstheorie. Um Aussagen über Regularität herleiten zu können, muss man mehr Variationen zulassen. Es ist natürlich, alle Variationen mit der gleichen Randbedingung als zulässig zu erklären.

Definition 6.4 (Stationäre harmonische Abbildung mit allgemeiner Randbedingung). *Gegeben sei ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$, auf dem eine Riemannsche Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(\Omega)$ vorliege, sowie eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$ und eine Schar von Untermannigfaltigkeiten $\Gamma \in \mathcal{A}_K(\Omega)$. Eine Abbildung $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ heiße* stationär harmonisch zur allgemeinen Randbedingung $u(x) \in \Gamma(x)$ *für* $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$, *falls*

$$\frac{d}{dt}E_\gamma(u_t)\bigg|_{t=0} = 0$$

für alle Variationen $u_t \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ mit $u_0 = u$ erfüllt ist, für die $t \mapsto E_\gamma(u_t)$ differenzierbar ist, die einen kompakten Träger $K \subset \Omega$ haben, d.h. $u_t|_{\Omega\setminus K} = u|_{\Omega\setminus K}$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, und die den Randbedingungen $u_t(x) \in \Gamma(x)$ für $\mathcal{L}^{n-1}$-fast alle $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ genügen.

Bemerkung 6.5. Die beiden vorangehenden Definitionen enthalten als Spezialfall Dirichlet-Randbedingungen der Form $u|_{\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+} = g$ für eine gegebene Randabbildung $g \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega} \cap \partial\mathbb{R}^n_+, \mathcal{N})$. Üblicherweise werden bei der Definition einer stationär harmonischen Abbildung mit Dirichlet-Randbedingung schwächere Forderungen gestellt, insbesondere müssen alle zulässigen Variationen kompakten Träger in der offenen Menge $\Omega \setminus \partial\mathbb{R}^n_+$ haben. Man erhält also keinerlei Informationen über Variationen auf dem Rand. Legt man diese Definition zugrunde, so kann man auch keine Aussagen über das Verhalten der Abbildung am Rand erwarten. Tatsächlich ist für solche Abbildungen keine Energiemonotonieformel in Randpunkten wie in Satz 6.9 bekannt. Eine solche Formel lässt sich nur beweisen, wenn man die Klasse der zulässigen Variationen wie oben vergrößert. Dies wird auch dadurch gerechtfertigt, dass die in der Definition beschriebenen Variationen für Abbildungen u zulässig sind, die das Energiefunktional in der Klasse von Abbildungen mit der gleichen allgemeinen Randbedingung minimieren. Solche Abbildungen stellen den Prototypen einer stationären harmonischen Abbildung mit allgemeiner Randbedingung dar, weshalb es natürlich ist, Variationen wie oben auch für stationäre harmonische Abbildungen zuzulassen.

Bemerkung 6.6. Im Fall einer freien Randbedingung, also falls $\Gamma(x) = \Gamma_0 \subset \mathcal{N}$ für alle $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ gilt, stellt die letzte Definition stärkere Bedingungen als die Definition 1.4 einer stationären harmonischen Abbildung mit freier Randbedingung. Zugunsten einer natürlicheren Formulierung der Definition 6.4 werden aber dennoch alle dort aufgeführten Variationen zugelassen, obwohl tatsächlich nur schwache Harmonizität und Variationen wie im Beweis von Lemma 6.8 benötigt werden. Die dort verwendeten Variationen sind im Spezialfall einer freien Randbedingung auch gemäß Definition 1.4 zulässig.

Es bleibt nachzuweisen, dass die Definition 6.4 bereits schwache Harmonizität impliziert.

Lemma 6.7. *Mit den Daten aus den beiden vorhergehenden Definitionen sind alle stationären harmonischen Abbildungen $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ zur allgemeinen Randbedingung $u(x) \in \Gamma(x)$ für alle $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ auch schwach harmonisch zu dieser allgemeinen Randbedingung.*

Beweis. Wie in Definition 6.3 sei ein Vektorfeld $V \in L^\infty \cap H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit kompaktem Träger in Ω gegeben, das längs u tangential ist und die Bedingung $V(x) \in \mathrm{T}_{u(x)}\,\Gamma(x)$ für $\mathcal{L}^{n-1}$-fast alle Randpunkte $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ erfüllt. Hierzu ist nun eine Variation u_t mit den

Eigenschaften aus Definition 6.4 zu konstruieren. Zu $x_0 \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ sei $\rho = \rho(x_0) > 0$ so gewählt, dass für alle $x \in B_\rho(x_0) \cap \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ gilt $\Gamma(x) \subset U_{\delta_\Gamma/2}(\Gamma(x_0))$. Mithilfe einer Zerlegung der Eins kann man sich auf den Fall beschränken, dass $\mathrm{spt}(V) \subset B^+_\rho(x_0)$ für ein $x_0 \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ gilt, denn für Vektorfelder V mit kompaktem Träger in $\Omega \setminus \partial\mathbb{R}^n_+$ ist bereits $u_t := \pi_\mathcal{N}(u + tV)$ eine zulässige Variation, wobei $\pi_\mathcal{N}$ die nächste-Punkt-Retraktion auf $\mathcal{N}$ bezeichnet. Nun verläuft der Beweis analog zu dem von Lemma 1.3. Im Folgenden wird für alle $x \in B^+_\rho(x_0) \cap \Omega$ mit $\pi_{\Gamma(x)} : U_{\delta_\Gamma}(\Gamma(x_0)) \to \Gamma(x')$ die nächste-Punkt-Retraktion auf $\Gamma(x')$ bezeichnet, wobei $(x_1, \ldots, x_n)' := (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ gesetzt sei. Außerdem wird abgekürzt $\pi^\perp_{\Gamma(x)} := \pi_{\Gamma(x)} - \mathrm{id}$. Hiermit zerlegt man nun für diejenigen $x \in \Omega$, die $u(x) \in U_{\delta_\Gamma}(\Gamma(x_0))$ erfüllen,

$$\begin{aligned} u(x) &= u^\top(x) + u^\perp(x) := \pi_{\Gamma(x)}(u(x)) - \pi^\perp_{\Gamma(x)}(u(x)) \\ \text{sowie} \quad V(x) &= V^\top(x) + V^\perp(x) := D\pi_{\Gamma(x)}(u(x))V(x) - D\pi^\perp_{\Gamma(x)}(u(x))V(x). \end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Randbedingungen an u und V die Gleichheiten $u = u^\top$ und $V = V^\top$ auf $\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ garantieren. Nun sei für Punkte $x \in \Omega$, für die $u^\top(x)$ definiert ist, $w_t(x) := \pi_\mathcal{N}\big(u^\top(x) + tV^\top(x)\big)$ gesetzt, wobei $\pi_\mathcal{N}$ wie oben ist. Mit einer Abschneidefunktion $\zeta \in C^\infty_{kpt}(U_{\delta_\Gamma}(\Gamma(x_0)), [0,1])$, die $\zeta \equiv 1$ auf $U_{\delta_\Gamma/2}(\Gamma(x_0))$ erfüllt, sei für alle $x \in \Omega$ und $|t| << 1$ definiert

$$U_t(x) := \zeta(u(x))\, \pi^\perp_{\Gamma(x)}(w_t(x)).$$

Die Ableitung dieses Vektorfeldes berechnet sich für alle $x \in \Omega$ als

$$\frac{\partial U_t}{\partial t}(x)\bigg|_{t=0} = \zeta(u(x)) D\pi^\perp_{\Gamma(x)}\big(u^\top(x)\big)V^\top(x) = 0,$$

weil $\pi^\perp_{\Gamma(x)} \circ \pi_{\Gamma(x)} \equiv 0$ ist. Daher haben mit $\tilde{u}_t := \pi_\mathcal{N}(u + tV)$ die Variationen

$$u_t(x) := \pi_\mathcal{N}(\tilde{u}_t(x) + U_t(x)) \quad \text{für } x \in B^+_\rho(x_0) \cap \Omega$$

die Anfangsvektorfelder $\frac{\partial u_t}{\partial t}\big|_{t=0} = V$. In allen Randpunkten $x \in B^+_\rho(x_0) \cap \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ gilt $u(x) \in \Gamma(x) \subset U_{\delta_\Gamma/2}(\Gamma(x_0))$ sowie $w_t(x) = \tilde{u}_t(x)$. Daher erfüllen die Abbildungen u_t für hinreichend kleine Werte von $|t|$ die Randbedingung

$$u_t(x) = \pi_\mathcal{N}\left(\tilde{u}_t(x) + \pi^\perp_{\Gamma(x)}(\tilde{u}_t(x))\right) = \pi_{\Gamma(x)}(\tilde{u}_t(x)) \in \Gamma(x).$$

Darüber hinaus erfüllt die Variation u_t für $|t| << 1$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial t} Du_t\right| &\le C(1 + \|V\|_\infty)(1 + |Du| + |DV|) \in L^2 \\ \text{sowie} \qquad \left|\frac{\partial u_t}{\partial t}\right| &\le C(1 + \|V\|_\infty) < \infty \end{aligned}$$

mit nur von Γ und $\mathcal{N}$ abhängenden Konstanten, da $\tilde{u}_t$ und U_t Schranken derselben Form besitzen. Daher berechnet man wie in (1.8) die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial t} E_\gamma(u_t) = 2 \int_\Omega Du \cdot_\gamma D\frac{\partial u_t}{\partial t}\, d\mu_\gamma < \infty,$$

so dass die Variation u_t alle Voraussetzungen aus Definition 6.4 erfüllt. Es folgt

$$\int_\Omega Du \cdot_\gamma DV d\mu_\gamma = \frac{1}{2}\, \frac{\partial}{\partial t} E_\gamma(u_t)\bigg|_{t=0} = 0$$

und damit die schwache Harmonizität von u. □

Für wie oben definierte stationäre harmonische Abbildungen lässt sich nun näherungsweise die Differentialgleichung für Stationarität aus Lemma 1.8 beweisen.

Lemma 6.8 (Differentialgleichung für Stationarität unter allgemeiner Randbedingung). *Seien $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$ eine isometrisch eingebettete Untermannigfaltigkeit sowie $\Gamma \in \mathcal{A}_K(\Omega)$ allgemeine Randwerte mit $\delta_\Gamma \geq \delta_0$ für ein $\delta_0 > 0$. Weiter sei $\gamma \in \mathfrak{M}_G(\Omega)$ eine Riemannsche Metrik auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$. Die Abbildung $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ sei stationär harmonisch zu der allgemeinen Randbedingung $u(x) \in \Gamma(x)$ für $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$. Dann gilt für alle Testvektorfelder $\xi \in C^\infty_{kpt}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, die die Randbedingung $\xi(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$ erfüllen,*

$$\begin{aligned}|\partial E_\gamma(u,\xi)| &= \left| \int_\Omega \left[2(Du\nabla^\Omega\xi) \cdot_\gamma Du - |Du|^2_\gamma \mathrm{div}_\gamma \xi\right] d\mu_\gamma \right| \\ &\leq \ (C_1\|D\xi\|_\infty + C_2\|\xi\|_\infty) \int_{\mathrm{spt}(\xi)} |Du| d\mathcal{L}^n + C_3\|\xi\|_\infty \int_{\mathrm{spt}(\xi)} |Du|^2 d\mathcal{L}^n \qquad (6.1)\end{aligned}$$

mit den gleichen Notationen wie in Lemma 1.8 und Konstanten $C_1 = C_1'(n, G, \mathcal{N})|\Gamma|_1$, $C_2 = C_2'(n, G, K, \mathcal{N})(|\Gamma|_1^2 + |\Gamma|_2)$ und $C_3 = C_3'(n, G, \delta_0, K, \mathcal{N})|\Gamma|_1$. In Koordinatendarstellung hat die linke Seite der Ungleichung die Form

$$\partial E_\gamma(u,\xi) = \int_\Omega \left[2\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \cdot \partial_\nu u \partial_\beta \xi^\nu - \gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \cdot \partial_\beta u \, \partial_\nu \xi^\nu + \omega \cdot \xi\right] d\mu_\gamma,$$

wobei die Norm von $\omega(x) \in \mathbb{R}^n$ für $x \in \Omega$ durch $C(n,G)\|D\gamma\|_\infty |Du(x)|^2$ beschränkt ist.

Beweis. Für $\delta_1 \in (0, \delta_\Gamma]$, $x_0 \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ und hinreichend kleine Werte von $\rho \in (0, \rho_{x_0}]$ gilt

$$\Gamma(x') \subset U_{\delta_1}(\Gamma(x_0)) \quad \text{für alle } x \in B_\rho(x_0). \qquad (6.2)$$

Hierbei seien δ_Γ und ρ_{x_0} wie in Bezeichnung 6.1 gewählt und zu $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sei definiert $x' := (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$. Zu der gegebenen Schar Γ von Untermannigfaltigkeiten sei $\delta_1 = \delta_1(\delta_0, \mathcal{N}) \in (0, \delta_\Gamma]$ so klein gewählt, dass alle nächste-Punkt-Retraktionen

$$\begin{aligned}\pi_{\Gamma(x)} &: U_{2\delta_1}(\Gamma(x_0)) \to \Gamma(x') \quad \text{für alle } x \in B_\rho(x_0) \text{ sowie} \\ \pi_{\mathcal{N}} &: U^E_{2\delta_1}(\mathcal{N}) \to \mathcal{N}\end{aligned}$$

existieren, wobei $U^E_{2\delta_1}(\mathcal{N})$ die $2\delta_1$-Umgebung von $\mathcal{N}$ im umgebenden Euklidischen Raum bezeichne. Gemäß der Voraussetzungen an Γ ist dann wie in Definition 6.2 die Funktion $(x,y) \mapsto \pi_{\Gamma(x)}(y)$ von der Klasse C^2 auf $B_\rho(x_0) \times U_{2\delta_1}(\Gamma(x_0))$ mit durch K beschränkter C^2-Norm.

Zunächst wird das Lemma für Testvektorfelder ξ bewiesen, für die zusätzlich zu den im Lemma geforderten Eigenschaften noch $\mathrm{spt}(\xi) \subset B_\rho(x_0)$ für ein $\rho > 0$ mit der Eigenschaft (6.2) gewährleistet ist. Das Vektorfeld ξ definiert eine Variation des Definitionsbereiches durch $\phi_t(x) := x + t\xi(x)$. Für hinreichend kleine Werte von $|t|$ handelt es sich hierbei um einen Diffeomorphismus auf Ω. Wegen $\xi(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$ erfüllt ϕ_t die Randbedingung $\phi_t(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$. Da die Variation $u \circ \phi_t$ nicht die verlangten allgemeinen Randbedingungen erfüllt, benötigt man eine Transformation auf $\mathcal{N}$, die diese Randbedingung herstellt. Hierfür wird mit $\pi^\perp_{\Gamma(x)} := \pi_{\Gamma(x)} - \mathrm{id}$ definiert

$$\Psi : B_\rho(x_0) \times B_\rho(x_0) \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}, \quad \Psi(x, \tilde{x}, p) = \pi_{\mathcal{N}}\left(p + \zeta(p)\pi^\perp_{\Gamma(x)}(\pi_{\Gamma(\tilde{x})}(p))\right),$$

wobei $\zeta \in C^\infty(\mathcal{N}, [0,1])$ eine Abschneidefunktion mit $\zeta \equiv 0$ auf $\mathcal{N} \setminus U_{2\delta_1}(\Gamma(x_0))$ und mit $\zeta \equiv 1$ auf $U_{\delta_1}(\Gamma(x_0))$ sei, die außerdem $\|D\zeta\|_\infty \leq C\delta_1^{-1}$ erfülle. Die so definierte Abbildung besitzt die Eigenschaften

$$\begin{aligned} & \Psi(x,x,\cdot) = \mathrm{id}_{\mathcal{N}} \quad \text{für alle } x \in B_\rho(x_0) \\ \text{und} \quad & \Psi(x,\tilde{x},\Gamma(\tilde{x})) \subset \Gamma(x) \quad \text{für alle } x,\tilde{x} \in B_\rho(x_0) \cap \partial\mathbb{R}^n_+. \end{aligned}$$

Damit wird nun als Variation von $u|_{B_\rho(x_0)}$ definiert

$$u_t(x) := \Psi\left(x, \phi_t(x), u \circ \phi_t(x)\right) \quad \text{für } x \in B_\rho(x_0).$$

Diese Variation erfüllt die verlangten Randbedingungen. Die schwache Ableitung berechnet sich für $x \in B_\rho(x_0)$ als

$$\begin{aligned} Du_t(x) &= D_1\Psi(x,\phi_t(x),u\circ\phi_t(x)) + D_2\Psi(x,\phi_t(x),u\circ\phi_t(x))D\phi_t(x) \\ &\quad + D_3\Psi(x,\phi_t(x),u\circ\phi_t(x))Du(\phi_t(x))D\phi_t(x), \end{aligned}$$

wenn D_1, D_2 und D_3 die totalen Ableitungen von Ψ nach den Argumenten x, $\tilde{x}$ bzw. p bezeichnen. Mit der Transformation ϕ_t^{-1} ergibt sich die Energie der Variationen als

$$\begin{aligned} & E_\gamma(u_t) \\ &= \int \left| D_1\Psi(\phi_t^{-1},\cdot,u) + D_2\Psi(\phi_t^{-1},\cdot,u)D\phi_t\circ\phi_t^{-1} + D_3\Psi(\phi_t^{-1},\cdot,u)Du\,D\phi_t\circ\phi_t^{-1}\right|^2_{\gamma\circ\phi_t^{-1}} \\ &\qquad \sqrt{\gamma\circ\phi_t^{-1}}\det(D\phi_t^{-1})d\mathcal{L}^n \\ &=: \int f(t,y)d\mathcal{L}^n(y). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Zur Ableitung dieses Terms nach t darf man unter dem Integral differenzieren, da $\frac{\partial}{\partial t}f(t,y)$ durch $C|Du|^2$ majorisiert ist. Daher ist $E_\gamma(u_t)$ nach t differenzierbar, so dass u_t alle in der Definition 6.4 geforderten Eigenschaften besitzt. Für die Berechnung der Ableitung von f in einem festen Punkt $y \in \Omega$ legt man zweckmäßigerweise Koordinaten zugrunde, die in diesem Punkt von erster Ordnung Euklidisch sind, so dass $\gamma_{\alpha\beta}(y) = \delta_{\alpha\beta}$ und $D\gamma_{\alpha\beta}(y) = 0$ für alle $1 \leq \alpha,\beta \leq n$ gilt. Unter dieser Annahme macht es beim Differenzieren im Punkt y keinen Unterschied, ob eine allgemeine Metrik γ oder die Euklidische Metrik vorliegt. Wie im Beweis von Lemma 1.8, genauer den Gleichungen (1.14) bis (1.16), berechnet man wegen $\frac{\partial}{\partial t}\phi_t\big|_{t=0} = \xi$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\phi_t^{-1}\bigg|_{t=0} = -\xi, \qquad & \frac{\partial}{\partial t}\left(D\phi_t\circ\phi_t^{-1}\right)\bigg|_{t=0} = D\xi \\ \text{sowie} \qquad & \frac{\partial}{\partial t}\det(D\phi_t^{-1})\bigg|_{t=0} = -\operatorname{div}\xi. \end{aligned}$$

Weiter lautet in (6.3) der Term innerhalb der Betragsstriche für $t=0$ an der Stelle y

$$D_1\Psi(y,y,u(y)) + D_2\Psi(y,y,u(y)) + D_3\Psi(y,y,u(y))Du(y) = D\left[\Psi(y,y,u(y))\right] = Du(y).$$

Damit erhält man im Punkt y wegen $D\gamma(y) \equiv 0$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}f(t,y)\bigg|_{t=0} \\ &= 2Du(y)\cdot\big[-D_1^2\Psi(y,y,u(y))\xi(y) - D_1D_2\Psi(y,y,u(y))\xi(y) + D_2\Psi(y,y,u(y))D\xi(y) \\ &\qquad -D_1D_3\Psi(y,y,u(y))(\xi(y),Du(y)) + D_3\Psi(y,y,u(y))Du(y)D\xi(y)\big] \\ &\quad -|Du|^2\operatorname{div}\xi(y), \end{aligned} \tag{6.4}$$

wobei sich zwei der vorkommenden Summanden wegen der oben aufgeführten Eigenschaften von Ψ schreiben lassen als

$$\begin{aligned} D_2\Psi(y,y,u(y)) + D_3\Psi(y,y,u(y))Du(y) &= D\left[\Psi(y,y,u(y))\right] - D_1\Psi(y,y,u(y)) \\ &= Du(y) + O(|\Gamma|_1), \end{aligned} \tag{6.5}$$

wobei $O(|\Gamma|_1) \leq C(\mathcal{N})|\Gamma|_1$. Nun benötigt man Abschätzungen der Ableitungen von Ψ. Unter Verwendung von $|D_y\pi_{\Gamma(x)}(y)| \leq K$ für alle $x \in B_\rho(x_0)$ berechnet man mit der Definition von Ψ

$$\begin{aligned} \|D_1^2\Psi\|_\infty \leq C(\mathcal{N})(|\Gamma|_1^2 + |\Gamma|_2), \qquad & \|D_1D_2\Psi\|_\infty \leq C(K,\mathcal{N})|\Gamma|_1^2 \\ \text{sowie} \qquad & \|D_1D_3\Psi\|_\infty \leq C(\delta_1,K,\mathcal{N})|\Gamma|_1. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Benutzt man nun (6.5), um zwei der Summanden aus (6.4) umzuschreiben und wendet auf die restlichen Terme von (6.4) die Abschätzungen (6.6) an, so führt dies auf

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(t,y)\bigg|_{t=0} &= 2Du(y)\cdot Du(y)D\xi(y) - |Du|^2 \operatorname{div}\xi(y) \\ &\quad + |Du|\,\|\xi\|_\infty O\left(|\Gamma|_1^2 + |\Gamma|_2\right) + |Du|\,\|D\xi\|_\infty O(|\Gamma|_1) \\ &\quad + |Du|^2\|\xi\|_\infty O(|\Gamma|_1). \end{aligned}$$

Durch Rücktransformieren auf allgemeine Koordinaten erhält man mit der gleichen Argumentation wie in Lemma 1.8

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_\gamma(u_t)\bigg|_{t=0} &= \int \left[2Du \cdot_\gamma (Du\nabla^\Omega\xi) - |Du|_\gamma^2 \operatorname{div}_\gamma \xi\right] d\mu_\gamma \\ &\quad + \left[\|\xi\|_\infty O\left(|\Gamma|_1^2 + |\Gamma|_2\right) + \|D\xi\|_\infty O(|\Gamma|_1)\right] \int_{\operatorname{spt}(\xi)} |Du| \\ &\quad + \|\xi\|_\infty O(|\Gamma|_1) \int_{\operatorname{spt}(\xi)} |Du|^2, \end{aligned}$$

wobei die O-Terme nun zusätzlich von G abhängen. Damit ist die erste Behauptung des Satzes im Fall $\operatorname{spt}(\xi) \subset B_\rho(x_0)$ bewiesen. Den allgemeinen Fall führt man auf diesen mit einer differenzierbaren Zerlegung der Eins zurück. Die Koordinatendarstellung von $\partial E_\gamma(u,\xi)$ wurde bereits in Lemma 1.8 gezeigt. □

6.2 Verallgemeinerte Energiemonotonieformel am Rand

Im Fall der allgemeinen Randbedingung gilt die Energiemonotonie in der folgenden Form.

Satz 6.9 (Energiemonotonie unter allgemeiner Randbedingung). *Gegeben seien eine isometrisch eingebettete Mannigfaltigkeit $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$ und für $z \in \partial\mathbb{R}^n_+$ und $R > 0$ allgemeine Randwerte $\Gamma \in \mathcal{A}_K(B_R^+(z))$ mit $|\Gamma|_1, |\Gamma|_2 \leq K'$ und $\delta_\Gamma \geq \delta_0$ für Konstanten $K \geq K' \geq 0$ und $\delta_0 > 0$. Auf $B_R^+(z)$ liege eine Riemannsche Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(B_R^+(z))$ mit der Eigenschaft $\gamma_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta}$ für $1 \leq \alpha,\beta \leq n$ zugrunde. Dann gibt es Konstanten $0 \leq \chi = \chi(n,G,\|D\gamma\|_\infty,R,\delta_0,K,K',\mathcal{N})$ mit $\chi \to 0$ bei $K', \|D\gamma\|_\infty \to 0$ sowie Konstanten $D = D(n,R,G,\|D\gamma\|_\infty) \geq 1$ und $\widetilde{C} \geq 0$, abhängig von den gleichen Daten wie χ, so dass für jede stationäre harmonische Abbildung $u \in H^1(B_R^+(z),\mathcal{N})$ mit allgemeiner Randbedingung $u(x) \in \Gamma(x)$ für $x \in B_R^+(z) \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ die Terme*

$$SE(\rho) := e^{\chi\rho}\rho^{2-n}\int_{B_\rho^+(z)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma + \widetilde{C}\rho|\Gamma|_1 + \widetilde{C}\rho^2|\Gamma|_2$$

monoton nichtfallend in $0 < \rho < R$ *sind. Genauer gilt für* $0 < \sigma < \rho < R$

$$SE(\rho) - SE(\sigma) \geq \frac{2}{D} \int_{B_\rho^+(z) \setminus B_\sigma^+(z)} e^{\chi r} r^{2-n} \left| \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|^2 d\mu_\gamma,$$

wobei $\vec{n}(x) := \frac{x-z}{|x-z|}$, $r(x) := |x - z|$ *und* $|\cdot|$ *die Euklidische Norm auf* $\mathbb{R}^N$ *bezeichnet.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis der Energiemonotonie am freien Rand in Satz 1.10, wobei diesmal das Lemma 6.8 anstelle des Lemmas 1.8 heranzuziehen ist. Auch hier benutzt man das Testvektorfeld $\xi(x) := x - z$ auf einer Halbkugel $B_r^+(z)$ und führt dieselbe Rechnung wie für Satz 1.10 durch. Im vorliegenden Fall muss man lediglich zusätzlich die folgenden Korrekturterme aus Lemma 1.8 berücksichtigen.

$$\begin{aligned}
&\big(C_1\|D\xi\|_\infty + C_2\|\xi\|_\infty\big) \int_{\mathrm{spt}(\xi)} |Du| d\mathcal{L}^n + C_3\|\xi\|_\infty \int_{\mathrm{spt}(\xi)} |Du|^2 d\mathcal{L}^n \\
\leq\ & (C_1 + C_2 r) \int_{B_r^+(z)} |Du| d\mathcal{L}^n + C_3 r \int_{B_r^+(z)} |Du|^2 d\mathcal{L}^n \\
\leq\ & C_\Gamma r \int_{B_r^+(z)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma + \frac{1}{2}(C_1 + C_2 r) \int_{B_r^+(z)} \frac{1}{r} d\mathcal{L}^n,
\end{aligned}$$

wobei bei der letzten Abschätzung die Youngsche Ungleichung $|Du| \leq \frac{1}{2} r|Du|^2 + \frac{1}{2r}$ benutzt wurde. Die Konstante $C_\Gamma = C_\Gamma(n, G, R, \delta_0, K, K', \mathcal{N})$ erfüllt $C_\Gamma \to 0$, wenn man $|\Gamma|_1, |\Gamma|_2 \leq K' \to 0$ streben lässt, weil die Konstanten C_1 bis C_3 dieselbe Eigenschaft besitzen. Der letzte Summand in obiger Ungleichung berechnet sich mit einer Konstanten $C_0 = C_0(n, G, R, K, \mathcal{N})$ als

$$\begin{aligned}
C(n)(C_1 + C_2 r) r^{n-1} &= C(n) \left[C_1'|\Gamma|_1 + C_2'(|\Gamma|_1^2 + |\Gamma|_2) r\right] r^{n-1} \\
&\leq C_0(|\Gamma|_1 + 2r|\Gamma|_2) r^{n-1},
\end{aligned}$$

wobei $|\Gamma|_1 \leq K$ und $r \leq R$ abgeschätzt wurde. Unter Berücksichtigung dieser Terme erhält man wie in (1.26) die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&2r \int_{S_r^+(z)} \left| \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|^2 \sqrt{\gamma} d\mathcal{H}^{n-1} \\
\leq\ & (2-n) \int_{B_r^+(z)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma + r \int_{S_r^+(z)} |Du|_\gamma^2 \sqrt{\gamma} d\mathcal{H}^{n-1} + C_\gamma r^2 \int_{S_r^+(z)} |Du|_\gamma^2 \sqrt{\gamma} d\mathcal{H}^{n-1} \\
& + (C_\omega \|D\gamma\|_\infty + C_\Gamma)\, r \int_{B_r^+(z)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma + C_0(|\Gamma|_1 + 2r|\Gamma|_2) r^{n-1} \\
=\ & (1 + C_\gamma r) \Bigg((2-n) \int_{B_r^+(z)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma + r \int_{S_r^+(z)} |Du|_\gamma^2 \sqrt{\gamma} d\mathcal{H}^{n-1} \\
& + \left[\frac{C_\omega \|D\gamma\|_\infty + C_\Gamma}{1 + C_\gamma r} - \frac{(2-n) C_\gamma}{1 + C_\gamma r} \right] r \int_{B_r^+(z)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \Bigg) + C_0(|\Gamma|_1 + 2r|\Gamma|_2) r^{n-1}.
\end{aligned}$$

Nun werden die gesuchten Konstanten festgesetzt als $D := 1 + C_\gamma R$, $\widetilde{C} := e^{\chi R} C_0 / D$ und χ als der Term in eckigen Klammern für den Wert $r = 0$. Wegen der Form der Konstanten $C_\gamma = C\|D\gamma\|_\infty$ laut Beweis von Satz 1.10 hat χ die behauptete Eigenschaft.

Multiplizieren der Ungleichung mit $e^{\chi r} r^{1-n}/D$ liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{D} e^{\chi r} r^{2-n} \int_{S_r^+(z)} \left|\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|^2 \sqrt{\gamma} d\mathcal{H}^{n-1} \\
\leq\ & e^{\chi r}(2-n) r^{1-n} \int_{B_r^+(z)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma + e^{\chi r} r^{2-n} \int_{S_r^+(z)} |Du|_\gamma^2 \sqrt{\gamma} d\mathcal{H}^{n-1} \\
& + \chi e^{\chi r} r^{2-n} \int_{B_r^+(z)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma + \widetilde{C}(|\Gamma|_1 + 2r|\Gamma|_2) \\
=\ & \frac{d}{dr}\left[e^{\chi r} r^{2-n} \int_{B_r^+(z)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma + \widetilde{C}(r|\Gamma|_1 + r^2|\Gamma|_2)\right].
\end{aligned}$$

Der Satz folgt durch Integrieren von σ bis ρ. □

Wie in Bemerkung 1.11 behandelt man den Fall einer allgemeinen Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G$ durch eine Parametertransformation T_z^γ, die die Bedingung $\gamma(z) = (\delta_{\alpha\beta})$ herstellt. Wie am freien Rand folgt so die folgende Energiemonotonie-Eigenschaft auf Halbellipsoiden $E_\rho^+(z) = T_z^\gamma B_\rho^+(z)$.

Korollar 6.10. *Gegeben sei eine isometrisch eingebettete Mannigfaltigkeit $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$ und allgemeine Randwerte $\Gamma \in \mathcal{A}_K(\Omega)$ mit $|\Gamma|_1, |\Gamma|_2 \leq K'$ sowie $\delta_\Gamma \geq \delta_0$ für Konstanten $K \geq K' \geq 0$ und $\delta_0 > 0$. Auf dem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}_+^n$ liege eine beliebige Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(\Omega)$ vor. Hierfür gibt es Konstanten $\chi, \widetilde{C} \geq 0$, nur abhängend von den Daten $n, \Omega, G, \|D\gamma\|_\infty, \delta_0, K, K'$ und $\mathcal{N}$, so dass jede stationäre harmonische Abbildung $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ mit allgemeiner Randbedingung $u(x) \in \Gamma(x)$ für $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^n$ die folgende Monotonieeigenschaft am Rand erfüllt. Für $z \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^n$ ist die skalierte Energie auf wie oben definierten Halbellipsoiden*

$$e^{\chi\rho} \rho^{2-n} \int_{E_\rho^+(z)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma + \widetilde{C}\rho|\Gamma|_1 + \widetilde{C}\rho^2|\Gamma|_2 \tag{6.7}$$

monoton in $\rho > 0$, solange ρ klein genug ist, um $E_\rho^+(z) \subset \Omega$ sicherzustellen. Die Konstante χ kann außerdem so gewählt werden, dass $\chi \to 0$ gilt, falls K' und $\|D\gamma\|_\infty$ gegen Null streben.

Analog zu Korollar 1.13 erhält man auch das folgende Resultat.

Korollar 6.11. *Seien $\mathcal{N}$ und Γ wie im vorangehenden Korollar mit $\Omega = B_2^+$. Weiter sei $\gamma \in \mathfrak{M}_G(B_2^+)$ eine Riemannsche Metrik und $u \in H^1(B_2^+, \mathcal{N})$ stationär harmonisch zu γ mit allgemeiner Randbedingung $u(x) \in \Gamma(x)$ für $x \in B_2^+ \cap \partial\mathbb{R}_+^n$. Für ein $\varepsilon_0 > 0$ seien die Abschätzungen*

$$2^{2-n} \int_{B_2^+} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \leq \varepsilon_0 \qquad \textit{und} \qquad 2|\Gamma|_1 + 2^2|\Gamma|_2 \leq \varepsilon_0 \tag{6.8}$$

gegeben. Dann gibt es eine Konstante $C = C(n, G, \|D\gamma\|_\infty, \delta_0, K, \mathcal{N})$, so dass

$$\sup_{x \in B_1^+,\, \rho \leq 2-|x|} \rho^{2-n} \int_{B_\rho^+(x)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \leq C\varepsilon_0.$$

Bemerkung 6.12. Die zweite Ungleichung in (6.8) lässt sich immer erreichen, indem man sich auf die Betrachtung kleiner Kugeln $B_\rho^+ \subset \Omega$ beschränkt, bei denen $\rho > 0$ so klein gewählt ist, dass $\rho|\Gamma|_1 + \rho^2|\Gamma|_2 \leq \varepsilon_0$ erfüllt ist. Nach Umskalieren auf B_2^+ durch Setzen von $\tilde{u}(x) := u(\rho x/2)$ und $\widetilde{\Gamma}(x) := \Gamma(\rho x/2)$ für $x \in B_2^+$ gilt dann die gewünschte Abschätzung für $\widetilde{\Gamma}$. Dabei ist zu beachten, dass die zu Γ bestimmten Konstanten χ und $\widetilde{C}$ aus Satz 6.9 auch für $\widetilde{\Gamma}$ zulässig sind, da sie nur von oberen Schranken für $|||\Gamma|||_{k,\alpha}$, $|\Gamma|_1$ und $|\Gamma|_2$ sowie von δ_Γ abhängen und δ_Γ durch Umskalieren nicht verändert wird.

Beweis des Korollars. Für einen Randpunkt $x \in B_1^+ \cap \partial\mathbb{R}_+^n$ und $\rho \leq 1/G^2$ gilt die Schachtelung $B_\rho^+(x) \subset E_{\rho G}^+(x) \subset E_{1/G}^+(x) \subset B_2^+$. Mit der Energiemonotonie (6.7) folgt

$$\begin{aligned}
\rho^{2-n} \int_{B_\rho^+(x)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma &\leq e^{\chi\rho G} \rho^{2-n} \int_{E_{\rho G}^+(x)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \\
&\leq e^{\chi/G} G^{2(n-2)} \int_{E_{1/G}^+(x)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma + \widetilde{C} G^{-1}|\Gamma|_1 + \widetilde{C} G^{-2} |\Gamma|_2 \\
&\leq e^{\chi/G} G^{2(n-2)} 2^{n-2} \varepsilon_0 + \widetilde{C} G^{-1} \varepsilon_0.
\end{aligned}$$

Für $1/G^2 < \rho \leq 2 - |x|$ sieht man die behauptete Abschätzung wie in Korollar 1.13 sofort, ohne die Stationarität von u benutzen zu müssen. Den Fall eines inneren Punktes $x = (x', x_n) \in B_1^+$ mit $x_n > 0$ und $x_n/G^2 \leq \rho \leq 1/(1 + G^2)$ führt man mit derselben Argumentation wie in besagtem Korollar auf den Randfall zurück. Für $\rho < x_n/G^2$ benutzt man wie dort die innere Monotonieformel, so dass keine Anpassung an die Randsituation notwendig ist. Zuletzt gilt die Behauptung für $1/(1 + G^2) < \rho \leq 2 - |x|$ ohnehin für beliebige Sobolev-Abbildungen. $\square$

6.3 Eine flexiblere Spiegelungskonstruktion

Bevor man ein Spiegelungsverfahren wie am freien Rand durchführen kann, muss man auch hier zunächst einmal sicherstellen, dass die Funktionswerte in der Nähe der Mannigfaltigkeit liegen, an der gespiegelt werden soll. Dies leistet der folgende

Satz 6.13. *Sei $\mathcal{N}$ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und auf B_2^{n+} sei eine Riemannsche Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(B_2^+)$ gegeben. Weiter seien $K \geq 0$ und $\delta_0 > 0$ vorgegebene Konstanten. Dann gibt es eine Zahl $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(n, G, \|D\gamma\|_\infty, \delta_0, K, \mathcal{N}) > 0$, so dass für alle Randwerte $\Gamma \in \mathcal{A}_K(B_2^+)$ mit $\delta_\Gamma \geq \delta_0$ und alle stationären harmonischen Abbildungen $u \in H^1(B_2^+, \mathcal{N})$ zur allgemeinen Randbedingung $u(x) \in \Gamma(x)$ für alle $x \in B_2^+ \cap \partial\mathbb{R}_+^n$, die außerdem*

$$2^{2-n} \int_{B_2^+(x)} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \leq \varepsilon_0 \qquad \textit{sowie} \qquad 2|\Gamma|_1 + 2^2|\Gamma|_2 \leq \varepsilon_0 \tag{6.9}$$

für ein $\varepsilon_0 \leq \bar{\varepsilon}$ erfüllen, dass für alle solche Abbildungen gilt

$$\mathrm{dist}(u(x), \Gamma(x')) \leq C\sqrt{\varepsilon_0} \quad \textit{für alle } x = (x'', x_n) \in B_{1/2}^+ \textit{ und } x' = (x'', 0)$$

mit einer Konstanten C, die nur von den Daten $n, G, \|D\gamma\|_\infty$ und $\mathcal{N}$ abhängt.

Beweis. Aus Voraussetzung (6.9) folgt mit Korollar 6.11 die Kleinheit aller skalierten Energien

$$\sup_{B_\rho^+(x)\subset B_1^+} \rho^{2-n}\int_{B_\rho^+(x)} |Du|^2 d\mathcal{L}^n \le C\varepsilon_0.$$

Da für u im Inneren außerdem die Gradientenabschätzung aus Satz 1.20 gilt, erfüllt u die Voraussetzungen des Satzes 2.2. Der zweite Teil der Annahme (6.9) stellt sicher, dass die Mannigfaltigkeiten $\Gamma(x')$ für alle $x \in B_{1/2}^+$ in der ε_0-Umgebung $U_{\varepsilon_0}(\Gamma(0))$ liegen. Daher ist es ausreichend, $\operatorname{dist}(u(x), U_{\varepsilon_0}(\Gamma(0))) \le C\sqrt{\varepsilon_0}$ für alle $x \in B_{1/2}^+$ herzuleiten. Dies folgt aus Satz 2.2, wenn man für die dort gegebene Teilmenge Γ die Umgebung $U_{\varepsilon_0}(\Gamma(0))$ einsetzt. □

Die folgende Vorgehensweise ist weitgehend analog zu Abschnitt 2.2. Wie bisher sei $x' := (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ gesetzt, falls $x = (x_1, \dots, x_n)$. Zunächst wird zu den Randwerten $\Gamma \in \mathcal{A}_K(B_{1/2}^+)$ eine Zahl $0 < \delta_\Gamma^* \le \delta_\Gamma$ gewählt, so dass für alle $x \in B_{1/2}^+$ auf den Umgebungen $U_x := U_{\delta_\Gamma^*}(\Gamma(x'))$ die geodätischen Spiegelungen an den Mannigfaltigkeiten $\Gamma(x')$ sinnvoll definiert sind. Dafür sei zunächst $\delta_\Gamma^* \in (0, \delta_\Gamma)$ so klein gewählt, dass für jedes $x \in B_{1/2}^+$ alle Punkte $y \in U_x$ mit ihrem nächsten Punkt $\pi_{\Gamma(x')}(y) \in \Gamma(x')$ durch eine eindeutige Geodätische verbunden sind. Mit einer solchen Wahl von δ_Γ^* lässt sich die geodätische Spiegelung an der Mannigfaltigkeit $\Gamma(x')$ auf der Umgebung U_x definieren als

$$\sigma_x : U_x \to U_x, \quad y = \exp_{\pi_x(y)}(v) \mapsto \exp_{\pi_x(y)}(-v),$$

wobei $\pi_x := \pi_{\Gamma(x')}$ gesetzt ist. Nun wird die Zahl $\delta_\Gamma^* \in (0, \delta_\Gamma)$ falls nötig noch so weit verkleinert, dass die Spiegelungen σ_x für alle $x \in B_{1/2}^+$ Diffeomorphismen auf U_x sind und $\sigma_x^{-1} = \sigma_x$ erfüllen. Wählt man den Parameter ε_0 aus dem vorangegangenen Satz in Abhängigkeit von δ_Γ^* klein genug, so erfüllt eine Abbildung u wie in diesem Satz in allen Punkten $x \in B_{1/2}^+$ die Bedingung $u(x) \in U_x$. Aus diesem Grund kann man die Abbildung durch die folgende Spiegelungskonstruktion zu einer Abbildung $\boldsymbol{u} \in H^1(B_{1/2}, \mathcal{N})$ fortsetzen.

$$\boldsymbol{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in B_{1/2}^+ \\ \sigma_x(u(x^*)) & \text{für } x \in B_{1/2}^-. \end{cases} \tag{6.10}$$

Hierbei ist wie bisher für einen Punkt $x = (x'', x_n)$ der Spiegelpunkt als $x^* = (x'', -x_n)$ definiert. Ist g die durch das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^N$ induzierte Metrik auf $\mathcal{N}$, so wird für die gespiegelte Abbildung das Skalarproduktfeld

$$h(x) := \begin{cases} g(\boldsymbol{u}(x)) & \text{für } x \in B_{1/2}^+ \\ \sigma_x^* g(\boldsymbol{u}(x)) & \text{für } x \in B_{1/2}^- \end{cases} \tag{6.11}$$

zugrundegelegt. Dabei ist für $y \in U_x \subset \mathcal{N}$ und $v, w \in T_y\mathcal{N}$ definiert

$$\sigma_x^* g(y)(v, w) := g(\sigma_x(y))(D\sigma_x(y)v, D\sigma_x(y)w).$$

Die Metrik $\gamma = (\gamma_{\alpha\beta}) \in \mathfrak{M}_G(B_{1/2}^+)$ wird genau wie in Abschnitt 2.2 für $x \in B_{1/2}^-$ stetig fortgesetzt durch

$$\gamma_{\alpha\beta}(x) := \begin{cases} \gamma_{\alpha\beta}(x^*) & \text{für } 1 \le \alpha, \beta \le n-1 \text{ oder } \alpha = \beta = n \\ -\gamma_{\alpha\beta}(x^*) & \text{für } \alpha = n \ne \beta \text{ oder } \alpha \ne n = \beta. \end{cases} \tag{6.12}$$

Im Folgenden wird abgekürzt

$$\widetilde{\Sigma}(x) := D\sigma_x(\boldsymbol{u}(x)).$$

Wie in (2.5) zeigt man für $x_0 \in B_{1/2} \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ wegen $\boldsymbol{u}(x_0) \in \Gamma(x_0)$

$$\widetilde{\Sigma}(x_0) = \Pi_{\Gamma(x_0)}(\boldsymbol{u}(x_0)) - \Pi^{\perp}_{\Gamma(x_0)}(\boldsymbol{u}(x_0)) = 2\Pi_{\Gamma(x_0)}(\boldsymbol{u}(x_0)) - \mathrm{Id}(\boldsymbol{u}(x_0)), \tag{6.13}$$

wobei mit $\Pi_{\Gamma(x_0)}(y)$ und $\Pi^{\perp}_{\Gamma(x_0)}(y)$ die orthogonalen Projektionen auf $\mathrm{T}_y\,\Gamma(x_0)$ bzw. auf $\mathrm{T}^{\perp}_y\,\Gamma(x_0) \subset \mathrm{T}_y\,\mathcal{N}$ bezeichnet seien und $\mathrm{Id}(y)$ die Identität auf $\mathrm{T}_y\,\mathcal{N}$ sei. Auch hier folgt aus $\sigma_x = \sigma_x^{-1}$

$$\widetilde{\Sigma}^{-1}(x) = D\sigma_x(\boldsymbol{u}(x))^{-1} = D\sigma_x(\sigma_x(\boldsymbol{u}(x))) = D\sigma_x(\boldsymbol{u}(x^*)) = \widetilde{\Sigma}(x^*). \tag{6.14}$$

Daher wird die kovariante Ableitung eines längs $\boldsymbol{u}$ zu $\mathcal{N}$ tangentialen H^1-Vektorfeldes V analog wie in Abschnitt 2.2 definiert als

$$\widetilde{\nabla}^h V(x) := \begin{cases} \nabla^{\mathcal{N}} V(x) & \text{für } x \in B^+_{1/2} \\ \widetilde{\Sigma}(x^*)\nabla^{\mathcal{N}}\big(\widetilde{\Sigma}(x)V(x)\big) & \text{für } x \in B^-_{1/2}. \end{cases} \tag{6.15}$$

Lemma 6.14. *Die Daten $\mathcal{N}$, Γ, γ und u seien wie in Satz 6.13 gewählt mit einem hinreichend kleinen $\varepsilon_0 > 0$, dessen Wahl nur von $n, G, \|D\gamma\|_\infty$, einer unteren Schranke für δ^*_Γ, K und $\mathcal{N}$ abhängt. Insbesondere sei also $u \in H^1(B^+_2, \mathcal{N})$ stationär harmonisch zur allgemeinen Randbedingung $u(x) \in \Gamma(x)$ für $x \in B^+_2 \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ und es gelte die Ungleichung* (6.9)*. Die Abbildung $\boldsymbol{u} \in H^1(B_{1/2}, \mathcal{N})$ sei die Fortsetzung von u gemäß* (6.10)*. Ebenso sei $\gamma \in \mathfrak{M}_G(B^+_{1/2})$ wie in* (6.12) *auf $B_{1/2}$ fortgesetzt sowie h und $\widetilde{\nabla}^h$ wie in* (6.11) *bzw. in* (6.15) *definiert. Für jedes längs $\boldsymbol{u}$ tangentiale, beschränkte Vektorfeld $V \in H^1(B_{1/2}, \mathrm{T}\mathcal{N})$ mit kompaktem Träger im Inneren von $B_{1/2}$ gilt dann*

$$\int_{B_{1/2}} D\boldsymbol{u} \cdot^h_\gamma \widetilde{\nabla}^h V\, d\mu_\gamma = \int_{B^-_{1/2}} F(\cdot, \boldsymbol{u}, D\boldsymbol{u}) \cdot V\, d\mathcal{L}^n, \tag{6.16}$$

und die Funktion F erfüllt die Abschätzung $|F(\cdot, \boldsymbol{u}, D\boldsymbol{u})| \le C(1 + |D\boldsymbol{u}|)$ mit einer Konstanten $C = C(n, G, \|D\gamma\|_\infty, K, \mathcal{N}) \ge 0$. In Gleichung (6.16) *wurde die Notation $\cdot^h_\gamma$ verwendet für das Hilbert-Schmidt-Skalarprodukt zum Skalarproduktfeld h auf $\mathrm{T}\mathcal{N}$ und zur Riemannschen Metrik γ auf $B_{1/2}$. Die Gleichung bedeutet also*

$$\int_{B^+_{1/2}} Du \cdot_\gamma \nabla^{\mathcal{N}} V\, d\mu_\gamma + \int_{B^-_{1/2}} \widetilde{\Sigma} D\boldsymbol{u} \cdot_\gamma \nabla^{\mathcal{N}}\big(\widetilde{\Sigma}V\big)\, d\mu_\gamma = \int_{B^-_{1/2}} F(\cdot, \boldsymbol{u}, D\boldsymbol{u}) \cdot V\, d\mathcal{L}^n.$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 2.4. Das Vektorfeld V wird in den bezüglich der Spiegelungen σ_x equivarianten und den antiequivarianten Anteil zerlegt als $V = V_e + V_a$, falls für $x \in B_{1/2}$ definiert ist

$$\begin{aligned} V_e(x) &:= \frac{1}{2}\big[V(x) + \widetilde{\Sigma}(x^*)V(x^*)\big], \\ V_a(x) &:= \frac{1}{2}\big[V(x) - \widetilde{\Sigma}(x^*)V(x^*)\big]. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von $\widetilde{\Sigma}(x)\widetilde{\Sigma}(x^*) = \mathrm{Id}(\boldsymbol{u}(x^*))$ laut (6.14) folgt

$$V_e(x^*) = \widetilde{\Sigma}(x)V_e(x) \qquad \text{und} \qquad V_a(x^*) = -\widetilde{\Sigma}(x)V_a(x). \tag{6.17}$$

Nach Definition von V_e und (6.13) gilt für $x_0 \in B_{1/2} \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ die Randbedingung

$$\begin{aligned} V_e(x_0) &= \frac{1}{2}\big[V(x_0) + \widetilde{\Sigma}(x_0)V(x_0)\big] \\ &= \Pi_{\Gamma(x_0)}(\boldsymbol{u}(x_0))V(x_0) \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{u}(x_0)}\Gamma(x_0). \end{aligned}$$

Demzufolge ist $V_e\big|_{B^+_{1/2}}$ ein zulässiges Variationsvektorfeld für u zur allgemeinen Randbedingung $u(x) \in \Gamma(x)$ für $x \in B^+_{1/2} \cap \partial\mathbb{R}^n_+$. Mit Definition 6.3 folgt

$$\int_{B^+_{1/2}} D\boldsymbol{u} \cdot^h_\gamma \widetilde{\nabla}^h V_e d\mu_\gamma = \int_{B^+_{1/2}} Du \cdot_\gamma \nabla^{\mathcal{N}} V_e d\mu_\gamma = 0. \tag{6.18}$$

Weiter berechnet man mit der Definition von h und $\widetilde{\nabla}^h$

$$\begin{aligned} \int_{B^-_{1/2}} D\boldsymbol{u} \cdot^h_\gamma \widetilde{\nabla}^h V_e d\mu_\gamma &= \int_{B^-_{1/2}} \widetilde{\Sigma} D\boldsymbol{u} \cdot_\gamma \nabla^{\mathcal{N}}\big(\widetilde{\Sigma}V_e\big) d\mu_\gamma \\ &= \int_{B^-_{1/2}} \left\{ D[\sigma_x(\boldsymbol{u}(x))] - \frac{D\sigma_x}{dx}(\boldsymbol{u}(x)) \right\} \cdot_{\gamma(x)} \nabla^{\mathcal{N}}[\widetilde{\Sigma}(x)V_e(x)] d\mu_\gamma(x), \end{aligned} \tag{6.19}$$

wobei $\frac{D\sigma_x}{dx}(y)$ die totale Ableitung von $\sigma_x(y)$ nach der Variablen x bezeichnet. Hierbei sieht man mit partieller Integration

$$-\int_{B^-_{1/2}} \left(\frac{D\sigma_x}{dx} \circ \boldsymbol{u}\right) \cdot_\gamma \nabla^{\mathcal{N}}(\widetilde{\Sigma}V_e) d\mu_\gamma = \int_{B^-_{1/2}} F(x, \boldsymbol{u}(x), D\boldsymbol{u}(x)) \cdot V_e(x) d\mathcal{L}^n(x)$$

mit einer Funktion F, die für eine Konstante $C = C(n, G, \|D\gamma\|_\infty, K, \mathcal{N})$ die verlangte Abschätzung $F(x, \boldsymbol{u}(x), D\boldsymbol{u}(x)) \le C(1 + |D\boldsymbol{u}|)$ erfüllt. Die bei der partiellen Integration auftretenden Randterme auf $B^-_{1/2} \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ verschwinden, weil $\frac{d\sigma_x}{dx_n} \equiv 0$ gilt. Damit wird (6.19) unter Berücksichtigung der Equivarianz (6.17) von V_e zu

$$\begin{aligned} &\int_{B^-_{1/2}} D\boldsymbol{u} \cdot^h_\gamma \widetilde{\nabla}^h V_e d\mu_\gamma - \int_{B^-_{1/2}} F(\cdot, \boldsymbol{u}, D\boldsymbol{u}) \cdot V_e d\mathcal{L}^n \\ &= \int_{B^-_{1/2}} D[u(x^*)] \cdot_{\gamma(x)} \nabla^{\mathcal{N}}[V_e(x^*)] d\mu_\gamma(x) \\ &= \int_{B^-_{1/2}} Du(x^*) \cdot_{\gamma(x^*)} \nabla^{\mathcal{N}} V_e(x^*) d\mu_\gamma(x) \qquad \text{nach Definition (6.12) von } \gamma \\ &= \int_{B^+_{1/2}} Du \cdot_\gamma \nabla^{\mathcal{N}} V_e d\mu_\gamma = 0. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Mit der gleichen Rechnung folgt, indem man nun anstelle der Equivarianz von V_e die Antiequivarianz (6.17) von V_a ausnutzt,

$$\begin{aligned} &\int_{B^-_{1/2}} D\boldsymbol{u} \cdot^h_\gamma \widetilde{\nabla}^h V_a d\mu_\gamma - \int_{B^-_{1/2}} F(\cdot, \boldsymbol{u}, D\boldsymbol{u}) \cdot V_a d\mathcal{L}^n \\ &= -\int_{B^+_{1/2}} Du \cdot_\gamma \nabla^{\mathcal{N}} V_a d\mu_\gamma = -\int_{B^+_{1/2}} D\boldsymbol{u} \cdot^h_\gamma \widetilde{\nabla}^h V_a d\mu_\gamma, \end{aligned}$$

also

$$\int_{B_{1/2}} D\boldsymbol{u} \cdot^h_\gamma \widetilde{\nabla}^h V_a d\mu_\gamma = \int_{B^-_{1/2}} F(\cdot, \boldsymbol{u}, D\boldsymbol{u}) \cdot V_a d\mathcal{L}^n. \tag{6.21}$$

Wegen (6.18), (6.20) und (6.21) folgt die Behauptung. □

6.4 Randregularität bei kleiner Energie

Nun lässt sich das Theorem 3.1 auf den Fall allgemeiner Randwerte ausweiten.

Theorem 6.15. *Es seien eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ und eine Riemannsche Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(B_2^{n+})$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gegeben, sowie Konstanten $K \geq 0$ und $\delta_0 > 0$. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n, G, \|D\gamma\|_\infty, \delta_0, K, \mathcal{N}) > 0$, so dass für alle Randwerte $\Gamma \in \mathcal{A}_K(B_2^+)$, für die $\delta_\Gamma^* \geq \delta_0$ gewählt werden kann, und jede Abbildung $u \in H^1(B_2^+, \mathcal{N})$, die bezüglich der Metrik γ stationär harmonisch zu der allgemeinen Randbedingung $u(x) \in \Gamma(x)$ für $x \in B_2^+ \cap \partial\mathbb{R}_+^n$ ist, aus den Bedingungen*

$$2^{2-n} \int_{B_2^+} |Du|_\gamma^2 d\mu_\gamma \leq \varepsilon_0 \qquad \textit{und} \qquad 2|\Gamma|_1 + 2^2|\Gamma|_2 \leq \varepsilon_0 \tag{6.22}$$

die $C^{1,\alpha}$-Regularität von u auf $B_{1/4}^+$ folgt mit einem geeignet zu wählenden Hölder-Exponenten $\alpha = \alpha(n, G, \|D\gamma\|_\infty, K, \mathcal{N}) \in (0,1)$. Für die Höldernorm gilt darüber hinaus die Abschätzung

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/4}^+)} + \|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/8}^+)} \leq C = C(n, G, \|D\gamma\|_\infty, K, \mathcal{N}).$$

Beweis. Zunächst setzt man die Abbildung u wie vor Lemma 6.14 durch Spiegelung zu einer Abbildung $\boldsymbol{u} \in H^1(B_{1/2}, \mathcal{N})$ fort. Man rechnet nach, dass das Skalarproduktfeld h und der Zusammenhang $\widetilde{\nabla}^h$ aus Lemma 6.14 die Eigenschaften (3.4) bis (3.6) erfüllen, und zwar mit Konstanten, die nur von n, K und $\mathcal{N}$ abhängen. Besagtes Lemma liefert für $\boldsymbol{u}$ eine Differentialgleichung der Form, wie sie in Satz 3.4 verlangt ist. Zuletzt besitzt $\boldsymbol{u}$ gemäß Korollar 6.11 kleine skalierte Energien

$$\sup_{B_\rho(x) \subset B_{1/2}} \rho^{2-n} \int_{B_\rho(x)} |D\boldsymbol{u}|_\gamma^2 d\mu_\gamma \leq C\varepsilon_0$$

mit einer Konstanten $C = C(n, G, \|D\gamma\|_\infty, \delta_0, K, \mathcal{N})$, so dass die fortgesetzte Abbildung für hinreichend kleine Werte von $\varepsilon_0 > 0$ alle Voraussetzungen des Satzes 3.4 erfüllt, welcher die gewünschten Aussagen impliziert. □

Lemma 6.16 (Natürliche Randbedingung). *Auf $\Omega \subset \mathbb{R}_+^n$ sei eine Riemannsche $C^{1,\alpha}$-Metrik γ mit der Eigenschaft (1.3) gegeben und $\Gamma \in \mathcal{A}_K(\Omega)$ seien allgemeine Randwerte auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$. Unter diesen Voraussetzungen sei die Abbildung $u \in C^2(\Omega \setminus \partial\mathbb{R}_+^n, \mathcal{N}) \cap C^1(\Omega, \mathcal{N})$ bezüglich γ harmonisch zur allgemeinen Randbedingung $u(x) \in \Gamma(x)$ für $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^n$. Dann erfüllt sie die* natürliche Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \perp \mathrm{T}_{u(x)}\,\Gamma(x) \quad \textit{für } x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^n. \tag{6.23}$$

Beweis. Sei $V \in L^\infty \cap H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ein längs u tangentiales Vektorfeld mit kompaktem Träger in Ω, das für $\mathcal{L}^{n-1}$-fast alle $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^n$ die Randbedingung $V(x) \in \mathrm{T}_{u(x)}\,\Gamma(x)$ erfülle. Nach Definition 6.3 ist V also ein zulässiges Testvektorfeld für die harmonische Abbildung u mit allgemeiner Randbedingung. Nach Definition des Laplace-Beltrami-Operators folgt daher unter Verwendung der Eigenschaft (1.3) von γ

$$0 = \int_\Omega Du \cdot_\gamma DV\, d\mu_\gamma = -\int_\Omega \Delta_\gamma u \cdot V\, d\mu_\gamma - \int_{\Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^n} \frac{1}{\gamma_{nn}} \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot V \sqrt{\gamma} d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Laut Lemma 1.9 gilt $\Delta_\gamma u \perp \mathcal{N}$ auf $\Omega \setminus \partial\mathbb{R}^n_+$, daher verschwindet das erste Integral der rechten Seite, mit dem Resultat

$$\int_{\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{\gamma_{nn}}\frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot V\sqrt{\gamma}d\mathcal{H}^{n-1} = 0.$$

Da man V beliebig mit der Randbedingung $V(x) \in \mathrm{T}_{u(x)}\,\Gamma(x)$ wählen kann, ist obige Gleichheit äquivalent zu $\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \perp \mathrm{T}_{u(x)}\,\Gamma(x)$ für alle $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$.

□

Die höhere Regularität von schwach harmonischen Abbildungen mit allgemeiner Randbedingung folgt wieder aus der klassischen Schauder-Theorie linearer Differentialgleichungen. Genauer gilt der

Satz 6.17. *Für einen Hölder-Exponenten $\alpha \in (0,1)$ und ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ liege auf dem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ eine Riemannsche Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}^{k-1,\alpha}_G(\Omega)$ zugrunde. Weiter seien eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$ der Klasse $C^{k,\alpha}$ und allgemeine Randwerte $\Gamma \in \mathcal{A}^{k,\alpha}_K(\Omega)$ gegeben. Dann sind alle bezüglich γ schwach harmonischen Abbildungen $u \in C^{1,\alpha}(\Omega,\mathcal{N})$ mit allgemeiner Randbedingung $u(x) \in \Gamma(x)$ für $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ von der Klasse $C^{k,\alpha}$. Darüber hinaus sind die $C^{k,\alpha}$-Normen auf jeder kompakten Teilmenge $B \subset \Omega$ abgeschätzt durch*

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(B)} \leq C = C(\|u\|_{C^{1,\alpha}}, \alpha, \Omega, G, \|\gamma\|_{C^{k-1,\alpha}}, K, \mathcal{N}, \mathrm{dist}(B, \partial\Omega \setminus \partial\mathbb{R}^n_+)).$$

Beweis. In inneren Punkten ist die behauptete Regularität eine Konsequenz des Satzes 1.17. Daher müssen hier nur noch Randpunkte $x_0 \in \Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+$ betrachtet werden. Wegen der vorausgesetzten $C^{k,\alpha}$-Abhängigkeit von $u(x)$ und $\Gamma(x)$ vom Parameter x kann man einen Radius $\rho \in (0, \rho_{x_0})$ so klein wählen, dass $u(B^+_\rho(x_0)) \subset U_{\delta_\Gamma}(\Gamma(x_0))$ gilt sowie $\Gamma(x) \subset U_{\delta_\Gamma}(\Gamma(x_0))$ für alle $x \in B^+_\rho(x_0)\cap\partial\mathbb{R}^n_+$. Falls $\pi_{\Gamma(x)}$ die nächste-Punkt-Retraktion auf $\Gamma(x')$ bezeichnet, ist die Abbildung $B^+_\rho(x_0) \times U_{\delta_\Gamma}(\Gamma(x_0)) \ni (x,y) \mapsto \pi_{\Gamma(x)}(y)$ von der Klasse $C^{k,\alpha}$ mit durch K beschränkter $C^{k,\alpha}$-Norm. Nun sei angenommen, dass für ein $l \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq l \leq k$ bereits $u \in C^{l-1,\alpha}(\Omega,\mathcal{N})$ gezeigt ist und dass $\|u\|_{C^{l-1,\alpha}(B)}$ für $B := B^+_\rho(x_0)$ nur von den im Satz genannten Daten abhängt. Mit der Abbildung $\pi^\perp_{\Gamma(x)} := \mathrm{id} - \pi_{\Gamma(x)}$ zerlegt man für $x \in B$

$$u(x) = \pi_{\Gamma(x)}(u(x)) + \pi^\perp_{\Gamma(x)}(u(x)) =: u^\top(x) + u^\perp(x).$$

Als Nächstes wird $\Delta_\gamma u^\top \in C^{l-2,\alpha}(B,\mathcal{N})$ gezeigt. Weil u nach Annahme von der Klasse $C^{l-1,\alpha}$ und die Metrik γ sogar von der Klasse $C^{k-1,\alpha}$ ist, sieht man zunächst

$$\Delta_\gamma u = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_\alpha(\sqrt{\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta u) = \gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta u + C^{l-2,\alpha}\text{-Terme.} \tag{6.24}$$

Dieselbe Formel gilt auch für $u^\top$ statt u. Die Norm der $C^{l-2,\alpha}$-Terme hängt dabei nur von $\|u\|_{C^{l-1,\alpha}}$, $\|\gamma\|_{C^{k-1,\alpha}}$, n, G und K ab. Da die nächste-Punkt-Retraktionen von der Klasse $C^{k,\alpha} \subset C^{l,\alpha}$ sind und $u \in C^{l-1,\alpha}(\Omega,\mathcal{N})$ gilt, berechnet man

$$\begin{aligned}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta u^\top &= \gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta[\pi_{\Gamma(x)}(u(x))] \\ &= \gamma^{\alpha\beta}D\pi_{\Gamma(x)}(u(x))\partial_\alpha\partial_\beta u(x) + C^{l-2,\alpha}\text{-Terme.}\end{aligned} \tag{6.25}$$

Hier hängt die Norm der $C^{l-2,\alpha}$-Terme nur von $\|u\|_{C^{l-1,\alpha}}$, G und K ab. Die letzten beiden Gleichungen (6.24) und (6.25) ergeben zusammen

$$\Delta_\gamma u^\top = D\pi_{\Gamma(x)}(u(x))\Delta_\gamma u(x) + C^{l-2,\alpha}\text{-Terme.}$$

Da u die Differentialgleichung $\Delta_\gamma u = \gamma^{\alpha\beta}(\mathit{\Pi} \circ u)(\partial_\alpha u, \partial_\beta u) \in C^{l-2,\alpha}$ erfüllt, folgt die Behauptung $\Delta_\gamma u^\top \in C^{l-2,\alpha}(B, \mathbb{R}^N)$, wobei die Norm $\|\Delta_\gamma u^\top\|_{C^{l-2,\alpha}(B)}$ höchstens von den im Satz genannten Daten abhängt. Dasselbe gilt nach Definition von $u^\perp = u - u^\top$ auch für $\Delta_\gamma u^\perp$. Diese Abbildung erfüllt darüberhinaus noch für $x \in B \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ die Randbedingung

$$u^\perp(x) = \pi^\perp_{\Gamma(x)}(u(x)) = 0,$$

da u die allgemeine Randbedingung $u(x) \in \Gamma(x)$ erfüllt. Daher impliziert Satz 1.19 $u^\perp \in C^{l,\alpha}$ mit den entsprechenden Normabschätzungen. Weil u laut Lemma 6.16 in Punkten $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ der natürlichen Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \perp \Gamma(x)$ genügt, erfüllt $u^\top$ für $x \in B \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ die Randbedingung

$$\frac{\partial u^\top}{\partial x_n}(x) = \frac{\partial}{\partial x_n}\left[\pi_{\Gamma(x)}(u(x))\right] = \Pi_{\Gamma(x)}(u(x))\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = 0.$$

Hierbei wurde $\frac{\partial}{\partial x_n}\pi_{\Gamma(x)}(y) = 0$ für $y \in \Gamma(x)$ verwendet und $\Pi_{\Gamma(x)}(y) : \mathrm{T}_y\mathcal{N} \to \mathrm{T}_y\Gamma(x)$ bezeichnet die orthogonale Projektion. Satz 1.19 liefert nun auch die $C^{l,\alpha}$-Regularität inklusive Normabschätzungen für $u^\top$. Sukzessive leitet man so $u \in C^{k,\alpha}(\Omega, \mathcal{N})$ her. □

Die beiden vorangegangenen Sätze 6.15 und 6.17 liefern die folgende Version des Korollars 3.3 im Fall einer allgemeinen Randbedingung.

Korollar 6.18. *Die Daten $\mathcal{N}, \Gamma, n$ und γ seien wie in Theorem 6.15 gegeben. Dann erfüllt die singuläre Menge einer stationären harmonischen Abbildung $u \in H^1(B_1^{n+}, \mathcal{N})$ zur allgemeinen Randbedingung $u(x) \in \Gamma(x)$ für alle $x \in B_1^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+$*

$$\mathcal{H}^{n-2}(\mathrm{sing}(u)) = 0.$$

Beweis. Für alle singulären Punkte $x \in \mathrm{sing}(u)$ wird die Eigenschaft

$$\liminf_{r \searrow 0} r^{2-n} \int_{B_r^+(x)} |Du|^2_\gamma d\mu_\gamma \geq \varepsilon_0 \tag{6.26}$$

gezeigt. Falls dies für ein $x \in \mathrm{sing}(u)$ nicht gilt, kann man ein $r > 0$ so klein wählen, dass

$$r^{2-n} \int_{B_r^+(x)} |Du|^2_\gamma d\mu_\gamma \leq \varepsilon_0 \quad \text{und} \quad r|\Gamma|_1 + r^2|\Gamma|_2 \leq \varepsilon_0$$

erfüllt ist. Nach Umskalieren liegt also der Fall von Theorem 6.15 oder, im inneren Fall, von Theorem 1.15 vor. Zusammen mit den Sätzen 1.17 und 6.17 liefern diese den Widerspruch $x \notin \mathrm{sing}(u)$. Wegen der Eigenschaft (6.26) der singulären Punkte folgt die Behauptung aus (3.2). □

6.5 Übertragung des Kompaktheitssatzes auf den allgemeinen Randfall

Dieser Abschnitt behandelt die in Kapitel 4 behandelte Problematik der Konvergenz von stationären harmonischen Abbildungen im Fall von allgemeinen Randbedingungen. Hierzu wird zunächst ein geeigneter Konvergenzbegriff für eine Folge von allgemeinen Randwerten benötigt.

Definition 6.19. *Für allgemeine Randwerte $\Gamma_i, \Gamma \in \mathcal{A}_K(\Omega)$ wird notiert*

$$\Gamma_i \xrightarrow{\mathcal{A}} \Gamma \text{ bei } i \to \infty \qquad \text{oder} \qquad \mathcal{A}\text{-}\lim_{i\to\infty} \Gamma_i = \Gamma,$$

falls für jedes feste $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ die Konvergenz $\Gamma(x) = C^1\text{-}\lim_{i\to\infty}\Gamma_i(x)$ gilt. Letzteres soll bedeuten, dass für hinreichend große Werte von $i \in \mathbb{N}$ gilt $\Gamma_i(x) \subset U_{\delta_\Gamma}(\Gamma(x))$ sowie

$$\pi_{\Gamma_i(x)}\big|_{U_{\delta_\Gamma}(\Gamma(x))} \to \pi_{\Gamma(x)}\big|_{U_{\delta_\Gamma}(\Gamma(x))} \quad \text{in } C^1(U_{\delta_\Gamma}(\Gamma(x)), \mathcal{N}) \text{ bei } i \to \infty.$$

Diese Konvergenzart wird im Folgenden auch mit $\Gamma_i(x) \xrightarrow{C^1} \Gamma(x)$ bei $i \to \infty$ notiert.

Bemerkung 6.20. Die folgende Überlegung zeigt, dass dieser Konvergenzbegriff für Randwerte der geeignete ist. Gegeben seien allgemeine Randwerte $\Gamma_i, \Gamma \in \mathcal{A}_K(\Omega)$, die die Konvergenz $\Gamma_i \xrightarrow{\mathcal{A}} \Gamma$ bei $i \to \infty$ erfüllen, sowie Abbildungen $u_i, u \in C^1(\Omega, \mathcal{N})$, für die $u_i \to u$ in C^1 gilt. Dann folgt aus der natürlichen Randbedingung $\frac{\partial u_i}{\partial x_n}(x) \perp \Gamma_i(x)$ für $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ und alle $i \in \mathbb{N}$ die natürliche Randbedingung der Grenzabbildung $\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \perp \Gamma(x)$ für $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$. Zum Beweis dieser Behauptung benutzt man, dass an Punkten $y \in \Gamma_i(x)$ die orthogonale Projektion auf $\mathrm{T}_y\,\Gamma_i(x)$ die Form

$$\Pi_{\Gamma_i(x)}(y) = D\pi_{\Gamma_i(x)}(y) : \mathrm{T}_y\,\mathcal{N} \to \mathrm{T}_y\,\Gamma_i(x)$$

besitzt. Das Entsprechende gilt mit $\Gamma(x)$ anstelle von $\Gamma_i(x)$. Damit folgt wegen der Voraussetzung $\Gamma(x) = C^1\text{-}\lim_{i\to\infty}\Gamma_i(x)$ für alle $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ die Konvergenz

$$\begin{aligned} 0 = \Pi_{\Gamma_i(x)}(u_i(x))\frac{\partial u_i}{\partial x_n}(x) \quad &= \quad D\pi_{\Gamma_i(x)}(u_i(x))\frac{\partial u_i}{\partial x_n}(x) \\ &\underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \quad D\pi_{\Gamma(x)}(u(x))\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = \Pi_{\Gamma(x)}(u(x))\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \end{aligned}$$

und damit die behauptete natürliche Randbedingung für u.

In diesem Abschnitt werden nun Folgen von Abbildungen aus der folgenden Menge betrachtet. Die Klasse $\mathfrak{H}_{\Lambda,K}(\Omega) = \mathfrak{H}_{\Lambda,K}(\Omega, G, \mathcal{N})$ sei das System der stationären harmonischen Abbildungen $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ zur allgemeinen Randbedingung $u(x) \in \Gamma(x)$ für $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$, die $r_\Omega^{2-n}E_\gamma(u) \leq \Lambda$ für $r_\Omega := \operatorname{diam}(\Omega)/2$ erfüllen. Hierbei liege eine Riemannsche Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(\Omega)$ zugrunde und $\Gamma \in \mathcal{A}_K(\Omega)$ seien allgemeine Randwerte auf der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$. Im Folgenden werden auch die Schreibweisen $\mathfrak{H}^\gamma_{\Lambda,K}(\Omega) = \mathfrak{H}^\gamma_{\Lambda,K}(\Omega, \mathcal{N})$, $\mathfrak{H}_{\Lambda,\Gamma}(\Omega) = \mathfrak{H}_{\Lambda,\Gamma}(\Omega, G, \mathcal{N})$ sowie $\mathfrak{H}^\gamma_{\Lambda,\Gamma}(\Omega) = \mathfrak{H}^\gamma_{\Lambda,\Gamma}(\Omega, \mathcal{N})$ für diejenigen Teilmengen von $\mathfrak{H}_{\Lambda,K}(\Omega)$ verwendet, bei der die Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(\Omega)$ oder die Randwerte $\Gamma \in \mathcal{A}_K(\Omega)$ oder beide festgelegt sind.

6.5.1 Defektmaß und starke Konvergenz

Auch hier wird zur Analyse des Konvergenzverhaltens von Folgen $u_i \in \mathfrak{H}_{\Lambda,K}(\Omega)$ das Konzept der Maßkonvergenz von Radon-Maßen herangezogen. Die betrachteten Maße sind die von der Form

$$\operatorname*{w-lim}_{i\to\infty} \mu_{\gamma_i} \llcorner |Du_i|^2_{\gamma_i} \in \mathcal{R}(\overline{\Omega}) \qquad \text{mit } \gamma_i \in \mathfrak{M}_G(\Omega) \text{ und } u_i \in \mathfrak{H}^{\gamma_i}_{\Lambda,\Gamma_i}(\Omega, \mathcal{N}),$$

wobei $\Gamma_i \in \mathcal{A}_K(\Omega)$ allgemeine Randbedingungen auf $\mathcal{N}$ seien, für die der Grenzwert $\mathcal{A}\text{-}\lim_{i\to\infty}\Gamma_i \in \mathcal{A}_K(\Omega)$ existiert. Die Menge der Maße mit diesen Eigenschaften wird mit $\mathfrak{R}_{\Lambda,G,K}(\Omega) = \mathfrak{R}_{\Lambda,G,K}(\Omega,\mathcal{N})$ bezeichnet. Der für diese Arbeit interessante Fall ist der, dass die Randwerte Γ_i gegen eine konstante Mannigfaltigkeit $\Gamma \subset \mathcal{N}$ konvergieren, da dies beim Übergang zu einer Tangentenabbildung passiert. Falls man starke Konvergenz gegen die Tangentenabbildung nachweisen kann, ist diese dann stationär harmonisch zur freien Randbedingung $u(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma$, vgl. Lemma 6.26(i).

Für ein Maß $\mu \in \mathfrak{R}_{\Lambda,G,K}(B_2^+)$ sei die singuläre Menge $\Sigma_\mu \subset \overline{B}_1^+$ wie in (4.6) definiert als

$$\Sigma_\mu := \left\{ x \in \overline{B}_1^+ : \liminf_{\rho\searrow 0} \rho^{2-n}\mu(B_\rho^+(x)) \geq \varepsilon_0 \right\}.$$

Die Konstante $\varepsilon_0 > 0$ sei dabei nicht größer als in den Theoremen 1.15 und 6.15 gewählt. Man erhält den folgenden Zusammenhang mit der Konvergenz von stationären harmonischen Abbildungen.

Lemma 6.21. *Gegeben seien Metriken $\gamma_i, \gamma \in \mathfrak{M}_G(B_2^+)$ und allgemeine Randwerte $\Gamma_i, \Gamma \in \mathcal{A}_K(B_2^+)$, für die bei $i \to \infty$ Konvergenz $\gamma_i \to \gamma$ in C^1 und $\Gamma_i \xrightarrow{\mathcal{A}} \Gamma$ erfüllt sei. Die Abbildungen $u_i \in \mathfrak{H}^{\gamma_i}_{\Lambda,\Gamma_i}(B_2^+)$ sollen gegen eine Abbildung $u \in H^1(B_2^+, \mathcal{N})$ konvergieren, und zwar im Sinne $u_i \rightharpoonup u$ schwach in $H^1(B_2^+,\mathcal{N})$ sowie $u_i \to u$ in der L^2-Norm. Außerdem gelte bei $i \to \infty$ die Maßkonvergenz*

$$\mu_{\gamma_i} \llcorner |Du_i|^2_{\gamma_i} \rightharpoonup \mu = \mu_\gamma \llcorner |Du|^2_\gamma + \nu \in \mathfrak{R}_{\Lambda,G,K}(B_2^+).$$

Dann gibt es Konstanten $C_*, C^* > 0$, so dass

$$C_*\mathcal{H}^{n-2} \llcorner \Sigma_\mu \leq \nu \llcorner \overline{B}_1^+ \leq C^*\mathcal{H}^{n-2} \llcorner \Sigma_\mu$$

und es gilt Konvergenz $u_i \to u$ in $C^2_{lok}(B_1^+ \setminus \Sigma_\mu, \mathcal{N})$. Außerdem impliziert jede der untenstehenden Aussagen die jeweils Folgende.

(i) $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_\mu) = 0$ oder äquivalent $\nu \llcorner \overline{B}_1^+ \equiv 0$

(ii) $u_i \to u$ in der H^1-Norm auf B_1^+

(iii) $\mathcal{H}^{n-2}(B_1^+ \cap \Sigma_\mu) = 0$ oder äquivalent $\nu \llcorner B_1^+ \equiv 0$.

Der Beweis benutzt die gleiche Argumentation wie im freien Randfall in Abschnitt 4.1. In diesem Abschnitt werden von den Eigenschaften der stationären harmonischen Abbildungen u_i lediglich auf hinreichend kleinen Kugeln ein kleine-Energie-Regularitätssatz wie in Theorem 3.1 benötigt, der in Form von Theorem 6.15 auch bei allgemeinen Randbedingungen vorliegt, sowie die Beschränktheit der skalierten Energien, genauer

$$\sup_{x\in\overline{B}_1^+,\, \rho<1} \rho^{2-n} \int_{B_\rho^+(x)} |Du_i|^2_{\gamma_i} d\mu_{\gamma_i} \leq C \quad \text{unabhängig von } i,$$

was hier aus Korollar 6.11 folgt. Der Fall allgemeiner Randbedingungen verlangt also keine neuen Beweisideen und wird daher nicht gesondert behandelt.

6.5.2 Analyse der Tangentenmaße

Lemma 6.22. *Zu einem Maß $\mu \in \mathfrak{R}_{\Lambda,G,K}(B_2^+)$ sei $\psi \in \mathrm{Tan}(\mu, a) \subset \mathcal{R}(\mathbb{R}^n_+)$ ein Tangentenmaß in einem Punkt $a \in B_1^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+$. Dann hat ψ die Form*

$$\psi = \operatorname*{w-lim}_{i\to\infty} \mu_{\gamma_i} \llcorner |Du_i|^2_{\gamma_i}$$

für Metriken $\gamma_i \in \mathfrak{M}_G(B_{s_i}^+)$, allgemeine Randwerte $\Gamma_i \in \mathcal{A}_K(B_{s_i}^+)$ und $u_i \in \mathfrak{H}^{\gamma_i}_{\Lambda,\Gamma_i}(B_{s_i}^+)$. Bei $i \to \infty$ gilt hierbei $s_i \to \infty$ und auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ konvergieren die Metriken γ_i nach einer affin linearen Basistransformation in C^1 gegen die Euklidische Metrik. Ebenso gilt die Konvergenz $\Gamma_i \xrightarrow{\mathcal{A}} \Gamma_0$ gegen die konstante Mannigfaltigkeit $\Gamma_0 := C^1\text{-}\lim_{j\to\infty}\widetilde{\Gamma}_j(a) \subset \mathcal{N}$, falls $\widetilde{\Gamma}_j$ eine das Maß μ wie in Lemma 6.21 definierende Folge allgemeiner Randwerte ist. Darüberhinaus gilt

$$\rho \mapsto \rho^{2-n}\psi(B_\rho^+(x)) \quad \textit{ist monoton für alle } x \in \overline{B}_1^+\textit{, falls } \rho > 0 \textit{ klein genug ist.} \tag{6.27}$$

Beweis. Ein Tangentenmaß $\psi \in \mathrm{Tan}(\mu, a)$ ist mit einer geeigneten Nullfolge $r_j \searrow 0$ ein schwacher Grenzwert der Form $\psi = \text{w-lim}_{r_j\searrow 0}\, \mu_{a,r_j}$. Für das Maß μ gilt nach Definition der Menge $\mathfrak{R}_{\Lambda,G,K}(B_2^+)$

$$\mu = \operatorname*{w-lim}_{i\to\infty} \mu_{\tilde{\gamma}_i} \llcorner |D\tilde{u}_i|^2_{\tilde{\gamma}_i}$$

für Metriken $\tilde{\gamma}_i \in \mathfrak{M}_G(B_2^+)$ und Abbildungen $\tilde{u}_i \in \mathfrak{H}^{\tilde{\gamma}_i}_{\Lambda,\widetilde{\Gamma}_i}(B_2^+)$, wobei für die allgemeinen Randwerte $\widetilde{\Gamma}_i \in \mathcal{A}_K(B_2^+)$ der Grenzwert $\widetilde{\Gamma} := \mathcal{A}\text{-}\lim_{i\to\infty}\widetilde{\Gamma}_i \in \mathcal{A}_K(B_2^+)$ existiert. Wie im Beweis von Lemma 4.9 sieht man mit einem Diagonalfolgenargument, dass nach Teilfolgenübergang die Konvergenz

$$\mu_{\gamma_i} \llcorner |Du_i|^2_{\gamma_i} \rightharpoonup \psi \quad \text{in } \mathcal{R}(\mathbb{R}^n_+)$$

gilt, wobei notiert wurde $\gamma_i(x) := \tilde{\gamma}_i(a + r_i x)$ und $u_i(x) := \tilde{u}_i(a + r_i x)$ für $x \in B^+_{1/r_i}$. Bezeichnet man analog $\Gamma_i(x') := \widetilde{\Gamma}_i(a + r_i x')$, so gilt $\gamma_i \in \mathfrak{M}_G(B^+_{1/r_i})$, $\Gamma_i \in \mathcal{A}_K(B^+_{1/r_i})$ sowie $u_i \in \mathfrak{H}^{\gamma_i}_{\Lambda,\Gamma_i}(B^+_{1/r_i})$. An der Definition der Objekte liest man ab

$$\|D\gamma_i\|_\infty \le r_i \|D\tilde{\gamma}_i\|_\infty \to 0 \quad \text{ und } \quad |\Gamma_i|_1 + |\Gamma_i|_2 \le C r_i |\widetilde{\Gamma}_i|_1 + C r_i^2 |\widetilde{\Gamma}_i|_2 \to 0 \tag{6.28}$$

bei $i \to \infty$. Daher konvergiert γ_i nach einem Teilfolgenübergang auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n_+$ in C^1 gegen eine konstante Metrik, nach einer affin linearen Transformation gegen die Euklidische, und die Randbedingungen erfüllen $\mathcal{A}\text{-}\lim_i \Gamma_i \equiv \widetilde{\Gamma}(a)$ für den konstanten Randwert $\widetilde{\Gamma}(a) \subset \mathcal{N}$, da gilt

$$\Gamma_i(0) = \widetilde{\Gamma}_i(a) \xrightarrow{C^1} \widetilde{\Gamma}(a) \quad \text{bei } i \to \infty.$$

Seien nun die Konstanten χ_i und $\widetilde{C}$ wie in Korollar 6.10 zu den Metriken γ_i und den Randwerten Γ_i gewählt. Die Konstante $\widetilde{C}$ lässt sich dabei gleichzeitig zu allen γ_i, Γ_i bestimmen und die Werte χ_i lassen sich wegen (6.28) so wählen, dass $\chi_i \to 0$ konvergiert, falls $i \to \infty$. Hierfür sind nun gemäß des erwähnten Korollars die Terme

$$e^{\chi_i\rho}\rho^{2-n}\int_{T_x^{\gamma_i}B_\rho^+(x)} |Du_i|^2_{\gamma_i} d\mu_{\gamma_i} + \widetilde{C}\rho|\Gamma_i|_1 + \widetilde{C}\rho^2|\Gamma_i|_2 \quad \text{monoton in } \rho << 1$$

für alle $x \in \overline{B}_1^+$. Da die Metriken γ_i bei $i \to \infty$ gegen die Euklidische Metrik konvergieren, lassen sich die Transformationen $T_x^{\gamma_i}$ so wählen, dass $T_x^{\gamma_i} \to \mathrm{id}$ gleichmäßig auf allen kompakten Mengen gilt. Daher folgt mit Lemma 4.1(ii) die Behauptung (6.27). $\square$

Neben allgemeiner Ergebnisse der Geometrischen Maßtheorie aus [M] war die Monotonieeigenschaft (6.27) der Tangentenmaße die wesentliche Zutat für den Beweis von Satz 4.11. Tatsächlich lässt sich im Fall allgemeiner Randbedingungen der Beweis dieses Satzes ab der Gleichung (4.13) wörtlich übernehmen, wobei nun lediglich die Strukturaussage aus obigem Lemma 6.21 die Rolle von Lemma 4.4 übernimmt. Damit erhält man auch unter diesen allgemeineren Voraussetzungen den

Satz 6.23. *Gegeben sei ein Maß $\mu \in \mathfrak{R}_{\Lambda,G,K}(B_2^+)$ mit $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_\mu \cap \partial\mathbb{R}^n_+) > 0$. Dann existiert für $\mathcal{H}^{n-2}$-fast alle Punkte $a \in \Sigma_\mu \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ ein $(n-2)$-dimensionaler Unterraum $V \subset \partial\mathbb{R}^n_+$, so dass für eine Konstante $C > 0$ gilt*

$$C\mathcal{H}^{n-2} \llcorner V \in \mathrm{Tan}(\mu, a).$$

6.5.3 Kompaktheit bei allgemeiner Randbedingung

Im vorliegenden Fall gilt der Kompaktheitssatz 4.14 in der folgenden Form.

Theorem 6.24. *Zu Konstanten $\Lambda > 0$, $G \geq 1$ und $K \geq 0$ seien stationäre harmonische Abbildungen $w_i \in \mathfrak{H}_{\Lambda,\widetilde{\Gamma}_i}(B_2^+, G, \mathcal{N})$ in eine kompakte, glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ gegeben. Die allgemeinen Randwerte $\widetilde{\Gamma}_i \in \mathcal{A}_K(\Omega)$ sollen bei $i \to \infty$ im Sinne von $\widetilde{\Gamma}_i \xrightarrow{\mathcal{A}} \Gamma$ gegen ein $\Gamma \in \mathcal{A}_K(\Omega)$ konvergieren. Die Menge $\overline{\cup_i \mathrm{Bild}(w_i)}$ trage weder nichttriviale harmonische S^2 noch für irgendein $x \in \overline{B}_1^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ nichttriviale harmonische S^2_+ mit freiem Rand $\Gamma(x)$. Dann lässt sich eine Teilfolge von $\{w_i\}$ auswählen, die in der H^1-Norm auf B_1^+ konvergiert.*

Beweisskizze. Der Beweis verläuft zum größten Teil analog zum Beweis von Theorem 4.14, daher werden hier nur kurz die wenigen Punkte diskutiert, an denen eine leichte Anpassung an den hier zu behandelnden allgemeineren Fall nötig ist.
Falls die Aussage des Theorems für die Folge $w_i \in \mathfrak{H}^{g_i}_{\Lambda,K}$ mit $g_i \in \mathfrak{M}_G(B_2^+)$ und allgemeinen Randwerten wie im Theorem nicht gilt, wird wie schon im Beweis zu 4.14 ein Tangentenmaß von

$$\mu := \operatorname*{w-lim}_{i\to\infty} \mu_{g_i} \llcorner |Dw_i|^2_{g_i} \in \mathfrak{R}_{\Lambda,G,K}(B_2^+)$$

betrachtet. Der Artikel [Li] liefert wegen der vorausgesetzten Nichtexistenz nichtkonstanter harmonischer S^2 das Ergebnis $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_\mu \setminus \partial\mathbb{R}^n_+) = 0$. Da auf der anderen Seite die fehlende Kompaktheit der Folge w_i laut Lemma 6.21 impliziert $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_\mu) > 0$, also $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_\mu \cap \partial\mathbb{R}^n_+) > 0$, liefert Satz 6.23 in einem Punkt $a \in \Sigma_\mu \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ nach einer Drehung die Existenz eines flachen Tangentenmaßes

$$\psi := C_0\mathcal{H}^{n-2} \llcorner (\mathbb{R}^{n-2} \times \{0\}) \in \mathrm{Tan}(\mu, a)$$

mit einer Konstanten $0 < C_0 < \infty$. Als Tangentenmaß eines Maßes aus $\mathfrak{R}_{\Lambda,G,K}(B_2^+)$ hat es gemäß Lemma 6.22 die Gestalt

$$C_0\mathcal{H}^{n-2} \llcorner (\mathbb{R}^{n-2} \times \{0\}) = \psi = \operatorname*{w-lim}_{i\to\infty} \mu_{\gamma_i} \llcorner |Du_i|^2_{\gamma_i} \quad \text{in } \mathcal{R}(\mathbb{R}^n_+).$$

Hierbei sind die Abbildungen $u_i \in \mathfrak{H}^{\gamma_i}_{\Lambda,\Gamma_i}(B^+_{s_i})$ stationär harmonisch zu allgemeinen Randbedingungen $\Gamma_i \in \mathcal{A}_K(B^+_{s_i})$ bezüglich Riemannscher Metriken $\gamma_i \in \mathfrak{M}_G(B^+_{s_i})$, wobei $s_i \to \infty$ bei $i \to \infty$ gilt. Aus der Konstruktion der u_i durch Umskalieren der Abbildungen w_i folgt $\cup_i \mathrm{Bild}(u_i) \subset \cup_i \mathrm{Bild}(w_i)$. Nach Lemma 6.22 gilt außerdem bei $i \to \infty$ für die konstante Mannigfaltigkeit $\Gamma_0 := \Gamma(a) \subset \mathcal{N}$ Konvergenz $\Gamma_i \xrightarrow{\mathcal{A}} \Gamma_0$

und die Metriken γ_i konvergieren o.E. auf allen kompakten Mengen in C^1 gegen die Euklidische Metrik. Bei $i \to \infty$ streben also alle Größen $|\Gamma_i|_1, |\Gamma_i|_2, \|D\gamma_i\|_\infty$ gegen Null. In dieser Situation lassen sich laut Satz 6.9 Konstanten $\chi_i, \widetilde{C}_i \to 0$ und affine Transformationen $T_z^{\gamma_i} \to \mathrm{id}$ bei $i \to \infty$ wählen, so dass die Energiemonotonieformel

$$\begin{aligned} &\frac{2}{D} \int_{B_\rho^+(z) \setminus B_\sigma^+(z)} e^{\chi_i r} r^{2-n} \left| \frac{\partial (u_i \circ T_z^{\gamma_i})}{\partial \vec{n}} \right|^2 d\mu_{\gamma_{i,z}^*} \qquad (6.29) \\ \leq \quad & e^{\chi_i \rho} \rho^{2-n} \int_{T_z^{\gamma_i} B_\rho^+(z)} |Du_i|_{\gamma_i}^2 d\mu_{\gamma_i} - e^{\chi_i \sigma} \sigma^{2-n} \int_{T_z^{\gamma_i} B_\sigma^+(z)} |Du_i|_{\gamma_i}^2 d\mu_{\gamma_i} + \widetilde{C}_i(\rho - \sigma) \end{aligned}$$

für alle $0 < \sigma < \rho \leq 5$, $z \in \partial \mathbb{R}_+^n$ und hinreichend große $i \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Hierbei seien $\gamma_{i,z}^* := T_z^{\gamma_i *}(\gamma_i)$ die transformierten Metriken und wie bisher $r(x) := |x - z|$ sowie $\vec{n}(x) := \frac{x-z}{|x-z|}$. Bis auf den Korrekturterm $\widetilde{C}_i(\rho - \sigma)$ ist diese Formel identisch zu der im freien Randfall, da auch in der vorliegenden Situation $\chi_i \to 0$ konvergiert. Der Korrekturterm verschwindet beim Grenzübergang $i \to \infty$, weil Γ_i gegen eine konstante Mannigfaltigkeit konvergiert, daher stellt dieser Term keine zusätzliche Schwierigkeit dar. In allen Situationen, in denen die genaue Energiemonotonieformel (6.29) im Beweis von Theorem 4.14 benutzt wird, strebt der besagte Korrekturterm gegen Null, so dass die Behauptungen 1 bis 3 aus dem Beweis auch unter den hier vorliegenden allgemeineren Voraussetzungen gelten. Tatsächlich wird außer der Energiemonotonieformel nur noch die Regularitätsaussage aus Korollar 3.3 benötigt, die mit Korollar 6.18 auch im allgemeinen Randfall vorliegt. Daher kann man auch hier die Existenz von Punkten $p_i = (X_1^i, X_2^i) \in B_2^{n-2} \times \overline{B_1^{2+}}$ und Skalierungsfaktoren $\delta_i \searrow 0$ bei $i \to \infty$ zeigen, so dass die skalierten Abbildungen

$$v_i(y) := u_i(p_i + \delta_i y) \qquad \text{für } y \in B_{R_i}^{n-2} \times B_{R_i}^2 \cap \mathbb{H}_i$$

mit $R_i := 1/\delta_i \to \infty$ die folgenden Eigenschaften erfüllen. Die v_i sind stationär harmonisch auf dem Definitionsbereich mit allgemeiner Randbedingung $v_i(y) \in H_i(y)$ für $y \in B_{R_i}^{n-2} \times B_{R_i}^2 \cap \partial \mathbb{H}_i$ zur Metrik η_i, falls definiert ist

$$H_i(y) := \Gamma_i(p_i + \delta_i y) \qquad \text{sowie} \qquad \eta_i(y) := \gamma_i(p_i + \delta_i y)$$

für $y \in B_{R_i}^{n-2} \times B_{R_i}^2 \cap \mathbb{H}_i$. Hierfür gilt

$$|H_i|_1, |H_i|_2 \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{und} \qquad C^1\text{-}\lim_{i \to \infty} \eta_i \equiv \sum_\alpha dx_\alpha \otimes dx_\alpha,$$

da dasselbe für Γ_i bzw. γ_i erfüllt ist. Wie in den Behauptungen 2 und 3 aus dem Beweis von Theorem 4.14 erhält man die folgenden Eigenschaften der Abbildungen v_i.

$$R^{2-n} \int_{B_R^{n-2} \times B_{R_i}^2 \cap \mathbb{H}_i} \sum_{k=1}^{n-2} \left| \frac{\partial v_i}{\partial y_k} \right|^2 d\mathcal{L}^n \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{für alle } 0 < R < R_i \qquad (6.30)$$

sowie für eine später geeignet zu bestimmende Konstante $c(n) > 2$

$$\begin{aligned} &\int_{B_1^{n-2} \times B_1^2 \cap \mathbb{H}_i} |Dv_i|_{\eta_i}^2 d\mu_{\eta_i} \\ = \quad & \max_{z \in B_{R_i}^2 \cap \mathbb{H}_i^2} \int_{B_1^{n-2} \times B_1^2(z) \cap \mathbb{H}_i} |Dv_i|_{\eta_i}^2 d\mu_{\eta_i} = \frac{\varepsilon_0}{c(n)}. \qquad (6.31) \end{aligned}$$

Nach Definition der v_i und Korollar 6.11 gilt für alle $S > 0$ und hinreichend große Werte von $i \in \mathbb{N}$

$$S^{2-n} \int_{B_S^+ \cap \mathbb{H}_i} |Dv_i|^2_{\eta_i} d\mu_{\eta_i} = (S\delta_i)^{2-n} \int_{B^+_{S\delta_i}(p_i)} |Du_i|^2_{\gamma_i} d\mu_{\gamma_i} \leq C \max\{\Lambda, K\}. \tag{6.32}$$

Als Letztes ist nun noch das Äquivalent zu Behauptung 4 aus dem Beweis von Theorem 4.14 zu beweisen, in der mehr Information aus der Differentialgleichung für Stationarität ausgenutzt wurde als die Energiemonotonieformel. Diese Behauptung soll im vorliegenden Fall im Detail bewiesen werden. Sie lautet

Behauptung 4.a Für hinreichend große Werte von $i \geq i_0$ gilt in allen Punkten $a \in B^{n-2}_{R_{i_0}-1} \times B^2_{R_{i_0}-1} \cap \mathbb{H}_i$ die Abschätzung

$$\int_{B_{1/2}(a) \cap \mathbb{H}_i} |Dv_i|^2_{\eta_i} d\mu_{\eta_i} \leq \frac{2\varepsilon_0}{c(n)}.$$

Mit der Wahl von $c(n) := 2^{5n-9}$ und einem eventuell vergrößerten $i_0 \in \mathbb{N}$ folgt für $i \geq i_0$ die $C^{1,\alpha}$-Regularität aller v_i auf $B^{n-2}_{R_{i_0}-1} \times B^2_{R_{i_0}-1} \cap \mathbb{H}_i$ mit unabhängig von i beschränkten $C^{1,\alpha}$-Normen.

Beweis. Es seien Abschneidefunktionen

$$\begin{array}{rll} & \zeta \in C^\infty_{kpt}(B^{n-2}_1, [0,1]) & \text{mit } \zeta \equiv 1 \text{ auf } B^{n-2}_{3/4} \\ \text{und} & \varphi \in C^\infty_{kpt}(B^2_1, [0,1]) & \text{mit } \varphi \equiv 1 \text{ auf } B^2_{1/2} \end{array}$$

gewählt. Wie am freien Rand wird für $a = (A_1, A_2) \in B^{n-2}_{R_{i_0}-1} \times B^2_{R_{i_0}-1} \cap \mathbb{H}_i$ definiert

$$F_i(a) := \int_{B^{n-2}_1 \times B^2_1} \left(|Dv_i|^2_{\eta_i} \sqrt{\eta_i}\right)(y-a) \zeta(Y_1) \varphi(Y_2) d\mathcal{L}^n(y),$$

wobei der Integrand außerhalb seines Definitionsbereiches durch Null fortgesetzt sei. Für $1 \leq \kappa \leq n-2$ berechnen sich die partiellen Ableitungen als

$$\frac{\partial F_i}{\partial a_\kappa}(a) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(|Dv_i|^2_{\eta_i} \sqrt{\eta_i}\right)(y) \frac{\partial \zeta}{\partial y_\kappa}(Y_1 + A_1) \varphi(Y_2 + A_2) d\mathcal{L}^n(y).$$

Nun wendet man die Version der Differentialgleichung für Stationarität unter einer allgemeinen Randbedingung an, die in Lemma 6.8 bereitgestellt wurde. Mit dem Testvektorfeld $\xi(y) := \zeta(Y_1 + A_1)\varphi(Y_2 + A_2) e_\kappa$ erhält man aus dieser Differentialgleichung

$$\begin{aligned} & \left|\frac{\partial F_i}{\partial a_\kappa}(a)\right| \\ \leq \; & 2 \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\eta_i{}^{\alpha\beta} \partial_\alpha v_i \partial_\kappa v_i \sqrt{\eta_i}\right)(y) \frac{\partial \zeta}{\partial y_\beta}(Y_1 + A_1)\varphi(Y_2 + A_2) d\mathcal{L}^n(y) \right| + C\|D\eta_i\|_\infty \\ & + [C_{1,i}\|D\xi\|_\infty + C_{2,i}\|\xi\|_\infty] \int_{B^{n-2}_{R_{i_0}} \times B^2_{R_{i_0}} \cap \mathbb{H}_i} |Dv_i| d\mathcal{L}^n \\ & + C_{3,i}\|\xi\|_\infty \int_{B^{n-2}_{R_{i_0}} \times B^2_{R_{i_0}} \cap \mathbb{H}_i} |Dv_i|^2 d\mathcal{L}^n \end{aligned} \tag{6.33}$$

mit Konstanten $C_{1,i} = C_1'|H_i|_1$, $C_{2,i} = C_2'(|H_i|_1^2 + |H_i|_2)$ und $C_{3,i} = C_3'|H_i|_1$, die alle bei $i \to \infty$ verschwinden, weil hierbei $|H_i|_1, |H_i|_2 \to 0$ konvergiert. Da außerdem wegen (6.32) gilt

$$\int_{B^{n-2}_{R_{i_0}} \times B^2_{R_{i_0}} \cap \mathbb{H}_i} |Dv_i| d\mathcal{L}^n \le C R_{i_0}^{n/2} \left[\int_{B^{n-2}_{R_{i_0}} \times B^2_{R_{i_0}} \cap \mathbb{H}_i} |Dv_i|^2 d\mathcal{L}^n \right]^{1/2} \le C R_{i_0}^{n-1},$$

muss man in (6.33) bei $i \to \infty$ nur noch das erste Integral berücksichtigen. Man erhält

$$\begin{aligned} &\lim_{i\to\infty} \left\| \frac{\partial F_i}{\partial a_\kappa} \right\|_\infty \\ &\le \lim_{i\to\infty} C \left[\int_{B^{n-2}_{R_{i_0}} \times B^2_{R_{i_0}} \cap \mathbb{H}_i} |Dv_i|^2_{\eta_i} d\mu_{\eta_i} \right]^{1/2} \left[\int_{B^{n-2}_{R_{i_0}} \times B^2_{R_{i_0}} \cap \mathbb{H}_i} |\partial_\kappa v_i|^2 d\mu_{\eta_i} \right]^{1/2} = 0 \end{aligned}$$

wegen (6.30) und (6.32). Da also für $1 \le \kappa \le n-2$ die Ableitungen $\frac{\partial F_i}{\partial a_\kappa}$ auf der Menge $B^{n-2}_{R_{i_0}-1} \times B^2_{R_{i_0}-1} \cap \mathbb{H}_i$ gleichmäßig gegen Null konvergieren und wegen (6.31) die Abschätzung $F_i(0, A_2) \le \frac{\varepsilon_0}{c(n)}$ für alle $A_2 \in B^2_{R_{i_0}} \cap \mathbb{H}_i$ gilt, folgt

$$\int_{B_{1/2}(a) \cap \mathbb{H}_i} |Dv_i|^2_{\eta_i} d\mu_{\eta_i} \le F_i(a) \le \frac{2\varepsilon_0}{c(n)} \quad \text{für alle } a \in B^{n-2}_{R_{i_0}-1} \times B^2_{R_{i_0}-1} \cap \mathbb{H}_i.$$

Dies zeigt den ersten Teil der Behauptung. Um nun den Regularitätssatz 6.15 anwenden zu können, wählt man $i_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $i \ge i_0$ gilt

$$\frac{1}{2}|H_i|_1 + \frac{1}{4}|H_i|_2 \le \varepsilon_0.$$

Wählt man außerdem den Wert der Konstanten $c(n) \ge 2 \cdot 2^{n-2}$, so sind die Voraussetzungen des besagten Satzes auf allen Kugeln $B_{1/2}(a) \cap \mathbb{H}_i$ um Randpunkte $a \in B^{n-2}_{R_{i_0}-1} \times B^2_{R_{i_0}-1} \cap \partial\mathbb{H}_i$ gegeben. Der Satz garantiert, dass die v_i auf den kleineren Kugeln $B_{1/32}(a) \cap \mathbb{H}_i$ von der Klasse $C^{1,\alpha}$ sind mit gleichgradig abgeschätzten $C^{1,\alpha}$-Normen. Wählt man $c(n) \ge 2 \cdot 32^{n-2}$, so sind die Voraussetzungen des inneren Regularitätssatzes 1.15 und des Satzes 1.17 auf den Kugeln $B_{1/32}(a) \subset \mathbb{H}_i$ um innere Punkte $a \in B^{n-2}_{R_{i_0}-1} \times B^2_{R_{i_0}-1} \cap \mathbb{H}_i$ mit Randabstand $\operatorname{dist}(a, \partial\mathbb{H}_i) \ge 1/32$ gegeben. Man folgert die $C^{1,\alpha}$-Regularität mit den verlangten Abschätzungen in Umgebungen der Punkte a. □

Um nun die Existenz harmonischer Sphären oder Halbsphären herzuleiten, unterscheidet man wieder zwei Fälle. Zunächst wird der Fall betrachtet, dass $p_i^n/\delta_i \le C$ unabhängig von $i \in \mathbb{N}$ beschränkt ist. Hierbei sei mit p_i^n die n-te Koordinate von p_i bezeichnet. Es sei definiert

$$\tilde{v}_i(y) := v_i\left(y - \frac{p_i^n}{\delta_i} e_n\right), \quad \tilde{\eta}_i(y) := \eta_i\left(y - \frac{p_i^n}{\delta_i} e_n\right) \quad \text{und} \quad \widetilde{H}_i(y) := H_i\left(y - \frac{p_i^n}{\delta_i} e_n\right).$$

Diese Objekte sind für jedes $S > 0$ auf B_S^+ definiert, falls $i \ge i_0(S)$ groß genug gewählt ist, und $\tilde{v}_i$ ist stationär harmonisch zur allgemeinen Randbedingung $\tilde{v}_i(y) \in \widetilde{H}_i(y)$ für $y \in B_S^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ bezüglich der Metrik $\tilde{\eta}_i$. Für große S gilt wegen der Beschränktheit von

p_i^n/δ_i die Inklusion $B_1^{n-2} \times B_1^{2+}(0, p_i^n/\delta_i) \subset B_S^+$ und daher für hinreichend große Werte von $i \geq i_0(S)$

$$\int_{B_S^+} |D\tilde{v}_i|^2_{\tilde{\eta}_i} d\mu_{\tilde{\eta}_i} \geq \int_{B_1^{n-2} \times B_1^2 \cap \mathbb{H}_i} |Dv_i|^2_{\eta_i} d\mu_{\eta_i} = \frac{\varepsilon_0}{c(n)} > 0. \tag{6.34}$$

Die Normabschätzungen aus Behauptung 4a liefern

$$\|\tilde{v}_i\|_{C^{1,\alpha}} \leq C \quad \text{unabhängig von } i \geq i_0(S),$$

so dass eine Grenzabbildung $\hat{v} \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$ existiert, für die nach Teilfolgenübergang

$$\tilde{v}_i \to \hat{v} \quad \text{in } C^1_{lok}(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{N})$$

gilt. Die Randwerte erfüllen für den konstanten Randwert $\Gamma_0 \subset \mathcal{N}$ die Konvergenz $\widetilde{H}_i \xrightarrow{\mathcal{A}} \Gamma_0$ bei $i \to \infty$, weil die Randbedingungen $\widetilde{H}_i$ Umskalierungen der Γ_i sind, für welche die Konvergenz $\Gamma_i \xrightarrow{\mathcal{A}} \Gamma_0$ sowie $|\Gamma_i|_1, |\Gamma_i|_2 \to 0$ bei $i \to \infty$ gilt. Da außerdem $\tilde{\eta}_i$ auf kompakten Mengen in C^1 gegen die Euklidische Metrik konvergiert, ist $\hat{v}$ harmonisch zur freien Randbedingung $\hat{v}(\partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma_0$ bezüglich der Euklidischen Metrik. Die freie Randbedingung sieht man daran, dass die natürliche Randbedingung $\partial_n \tilde{v}_i(y) \perp \widetilde{H}_i(y)$ für $y \in B_S^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ laut Bemerkung 6.20 nach Grenzübergang zu $\partial_n \hat{v} \perp \Gamma_0$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+$ wird, was zu der behaupteten freien Randbedingung äquivalent ist. Gleichung (6.34) hat zur Konsequenz, dass die Abbildung $\hat{v}$ nicht konstant ist, aber wegen (6.30) ist sie konstant längs $\mathbb{R}^{n-2} \times \{0\}$. Daher definiert $v := \hat{v}|_{\{0\} \times \mathbb{R}^2_+} : \mathbb{R}^2_+ \to \mathcal{N}$ eine nichtkonstante harmonische Abbildung mit freier Randbedingung $v(\partial\mathbb{R}^2_+) \subset \Gamma_0$. Da diese Abbildung wegen (6.32) endliche Energie besitzt, lässt sie sich laut Lemma 1.21 zu einer nichtkonstanten harmonischen Abbildung $v : S_2^+ \to \mathcal{N}$ mit freiem Rand Γ_0 fortsetzen. Dies steht im Widerspruch zu den Voraussetzungen des Theorems, da nach Konstruktion die Werte von v im Abschluss von $\cup_i \mathrm{Bild}(u_i) \subset \cup_i \mathrm{Bild}(w_i)$ liegen.
Im zweiten zu betrachtenden Fall ist p_i^n/δ_i bei $i \to \infty$ unbeschränkt, so dass nach einem Teilfolgenübergang $p_i^n/\delta_i \to \infty$ konvergiert. In diesem Fall ist v_i auf beliebig großen Kugeln B_S mit $S > 0$ definiert, falls i in Abhängigkeit von S groß genug gewählt ist. Die Randbedingung spielt auf diesen Kugeln keine Rolle mehr, so dass keine Anpassung an den allgemeinen Randfall nötig ist. Wie im Beweis von Theorem 4.14 konstruiert man daher im Widerspruch zur Annahme eine nichtkonstante harmonische S^2. Damit ist Theorem 6.24 bewiesen. □

6.6 Dimensionsreduktion und volle Randregularität

Mit der im vorangegangenen Abschnitt gezeigten Kompaktheitseigenschaft lässt sich jetzt das Problem der Dimensionsreduktion der Singularitätenmenge unter einer allgemeinen Randbedingung auf den bereits behandelten Fall einer freien Randbedingung zurückführen.

Theorem 6.25. *Gegeben seien ein Gebiet $\overline{B}_1^+ \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n_+$, eine glatte, kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ und hierauf allgemeine Randwerte $\Gamma \in \mathcal{A}_K(\Omega)$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq k \leq n-1$ sowie ein Hölderexponent $0 < \alpha < 1$ gegeben. Die Abbildung $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ sei stationär harmonisch zur allgemeinen Randbedingung $u(x) \in \Gamma(x)$ für $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ bezüglich einer Riemannschen $C^{1,\alpha}$-Metrik auf Ω. Es gelten die folgenden beiden Aussagen.*

(i) Der Abschluss von $\mathrm{Bild}(u)$ *trage weder eine nichttriviale harmonische* S^2 *noch für irgendein* $2 \le l \le k$ *und irgendein* $x \in \overline{B}_1^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ *eine nichttriviale, am Rand glatte, stationäre harmonische* S^l_+ *mit freiem Rand* $\Gamma(x)$*. Dann gilt*

$$\mathcal{H}\text{-dim}\left(\mathrm{sing}(u) \cap \partial\mathbb{R}^n_+ \cap B_1^+\right) \le n - k - 2.$$

Im Fall $k = n-2$ *ist die Menge* $\mathrm{sing}(u) \cap \partial\mathbb{R}^n_+ \cap B_1^+$ *sogar endlich und für* $k = n-1$ *liefert obige Dimensionsabschätzung die* $C^{2,\alpha}$*-Regularität von* u *in einer Umgebung von* $\partial\mathbb{R}^n_+ \cap B_1^+$*.*

(ii) Trägt der Abschluss von $\mathrm{Bild}(u)$ *sogar für* $2 \le l \le k$ *keine nichttrivialen harmonischen* S^l *und für kein* $x \in \overline{B}_1^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ *eine nichttriviale harmonische* S^l_+ *mit freiem Rand* $\Gamma(x)$*, so gilt*

$$\mathcal{H}\text{-dim}\left(\mathrm{sing}(u) \cap B_1^+\right) \le n - k - 2.$$

Falls die Voraussetzungen mit $k = n-2$ *gegeben sind, ist die singuläre Menge* $\mathrm{sing}(u) \cap B_1^+$ *endlich, und für* $k = n-1$ *ist* $u \in C^{2,\alpha}(B_1^+, \mathcal{N})$*.*

Wie schon früher wird für alle $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ notiert $\partial\text{-sing}(u) := \mathrm{sing}(u) \cap \partial\mathbb{R}^n_+$, wobei $\mathrm{sing}(u)$ wie in (5.1) definiert ist. Das letzte benötigte Mittel zum Beweis des Theorems ist das

Lemma 6.26. *Die Objekte* Ω, $\mathcal{N}$, Γ *und* u *seien gegeben wie im Theorem und die zugrundegelegte Metrik sei* $\gamma \in \mathfrak{M}_G(\Omega)$*. Für ein* $a \in \overline{B}_1^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ *und eine geeignete Folge* $r_i \searrow 0$ *bei* $i \to \infty$ *sei* $v := \text{s-lim}_{i\to\infty} u_{a,r_i}$ *eine Tangentenabbildung im Punkt* a *an die Abbildung* u*. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(i) Die Tangentenabbildung v *ist stationär harmonisch mit freier Randbedingung* $v(\partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma(a)$ *bezüglich der konstanten Metrik* $\gamma(a)$*.*

(ii) Die Tangentenabbildung ist homogen vom Grad Null, d.h. für alle $\lambda > 0$ *gilt* $v_{0,\lambda} = v$*.*

(iii) Für alle $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $i_0 = i_0(\varepsilon)$*, so dass*

$$\partial\text{-sing}(u_{a,r_i}) \cap B_1^+ \subset \left\{x \in B_1^+ : \mathrm{dist}(x, \partial\text{-sing}(v)) < \varepsilon\right\} \qquad \text{für alle } i \ge i_0.$$

Beweis. Zunächst wird die Aussage (i) hergeleitet. Für die skalierten Randwerte und Metriken gilt auf allen Kugeln B_R^+ mit beliebig großen Radien $R > 0$

$$\mathcal{A}\text{-}\lim_{i\to\infty} \Gamma_{a,r_i} \equiv \Gamma(a) \qquad \text{und} \qquad C^1\text{-}\lim_{i\to\infty} \gamma_{a,r_i} \equiv \gamma(a). \tag{6.35}$$

Laut Lemma 6.21 liegen die Abbildungen u_{a,r_i} und deren Grenzwert v für hinreichend große $i \ge i_0(R)$ in $C^{2,\alpha}(B_R^+ \setminus \Sigma, \mathcal{N})$ für eine relativ abgeschlossene Menge $\Sigma \subset B_R^+$ mit $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma) < \infty$, und es gilt sogar $u_{a,r_i} \to v$ in $C^2_{lok}(B_R^+ \setminus \Sigma, \mathcal{N})$ bei $i \to \infty$. Daher erfüllen die u_{a,r_i} eine natürliche Randbedingung gemäß Lemma 6.16. Genauer gilt

$$\Delta_{\gamma_{a,r_i}} u_{a,r_i} \perp \mathcal{N} \;\; \text{auf } (B_R^+ \setminus \Sigma) \setminus \partial\mathbb{R}^n_+ \;\; \text{und} \;\; \frac{\partial u_{a,r_i}}{\partial x_n}(x) \perp \Gamma_{a,r_i}(x) \;\; \text{für } x \in (B_R^+ \setminus \Sigma) \cap \partial\mathbb{R}^n_+.$$

Wegen der Konvergenz $u_{a,r_i} \to v$ in $C^2_{lok}(B^+_R \setminus \Sigma, \mathcal{N})$ und (6.35) wird dies im Grenzwert zu

$$\Delta_{\gamma(a)} v \perp \mathcal{N} \quad \text{auf} \quad (B^+_R \setminus \Sigma) \setminus \partial\mathbb{R}^n_+ \qquad \text{sowie} \qquad \begin{cases} v\left((B^+_R \setminus \Sigma) \cap \partial\mathbb{R}^n_+\right) \subset \Gamma(a) \quad \text{und} \\ \frac{\partial v}{\partial x_n} \perp \Gamma(a) \quad \text{auf} \quad (B^+_R \setminus \Sigma) \cap \partial\mathbb{R}^n_+, \end{cases}$$

wobei für die natürliche Randbedingung die Bemerkung 6.20 herangezogen wurde. Nach Lemma 1.9 ist v demzufolge auf $B^+_R \setminus \Sigma$ glatt harmonisch zur freien Randbedingung $v((B^+_R \setminus \Sigma) \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma(a)$. Mit Lemma 1.21 sieht man, dass v sogar auf ganz B^+_R schwach harmonisch mit freier Randbedingung $\Gamma(a)$ ist, wobei $R > 0$ beliebig gewählt werden kann. Für den Nachweis der Stationarität von v benötigt man die vorausgesetzte H^1-Normkonvergenz $u_{a,r_i} \to v$ bei $i \to \infty$. Die Abbildung v erfüllt die Differentialgleichung für Stationarität, weil für die u_{a,r_i} die Differentialgleichungen (6.1) gelten und die dort auftretenden Korrekturterme wegen $|\Gamma_{a,r_i}|_1, |\Gamma_{a,r_i}|_2 \to 0$ bei $i \to \infty$ verschwinden. Somit ist v auch stationär mit freier Randbedingung.
Nun zum Nachweis der Homogenität (ii). Wegen der Energiemonotonieformel aus Satz 6.9 gilt für hinreichend kleine Radien $\rho > 0$

$$\frac{2}{D} \int_{B^+_\rho(a)} e^{\chi r} r^{2-n} \left|\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|^2 d\mu_\gamma \le e^{\chi\rho} \rho^{2-n} \int_{B^+_\rho(a)} |Du|^2_\gamma d\mu_\gamma + C\rho \le C,$$

wobei $r(x) := |x-a|$, $\vec{n}(x) := \frac{x-a}{|x-a|}$ und die Konstante $\chi \ge 0$ wie in Satz 6.9 zu der zugrundeliegenden Metrik $\gamma \in \mathfrak{M}_G(\Omega)$ gewählt sei. Obige Gleichung garantiert, dass $r^{2-n}|\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|^2$ lokal bei a integrierbar ist. Daher gilt mit der Abkürzung $\gamma_i := \gamma_{a,r_i}$ für alle $R > 0$ und hinreichend große Werte von i

$$\int_{B^+_R} |y|^{2-n} \left|\frac{\partial u_{a,r_i}}{\partial r}(y)\right|^2 d\mu_{\gamma_i}(y) = \int_{B^+_{r_i R}(a)} r^{2-n} \left|\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|^2 d\mu_\gamma \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dies impliziert $\frac{\partial v}{\partial r} \equiv 0$ und damit Behauptung (ii).
Falls die Aussage (iii) nicht gilt, gibt es nach Übergang zu einer Teilfolge zu jedem $i \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_i \in \partial\text{-sing}(u_{a,r_i}) \cap B^+_1$, so dass $x_0 := \lim_i x_i \in \partial\mathbb{R}^n_+ \setminus \partial\text{-sing}(v)$ existiert. Da also v in einer Umgebung von x_0 von der Klasse C^1 ist, gilt für hinreichend kleine $\rho > 0$

$$\rho^{2-n} \int_{B^+_\rho(x_0)} |Dv|^2_{\gamma(a)} d\mu_{\gamma(a)} < \varepsilon_0.$$

Andererseits ist $x_i \in B^+_{\rho/8}(x_0)$, falls $i > i_0(\rho)$ hinreichend groß gewählt ist. Also gilt $\text{sing}(u_{a,r_i}) \cap B^+_{\rho/8}(x_0) \neq \emptyset$ und der Regularitätssatz 6.15 liefert den Widerspruch

$$\varepsilon_0 \le \lim_{i\to\infty} \rho^{2-n} \int_{B^+_\rho(x_0)} |Du_{a,r_i}|^2_{\gamma_{a,r_i}} d\mu_{\gamma_{a,r_i}} = \rho^{2-n} \int_{B^+_\rho(x_0)} |Dv|^2_{\gamma(a)} d\mu_{\gamma(a)} < \varepsilon_0.$$

□

Beweis des Theorems. Satz 5.3 liefert bereits die Dimensionsabschätzungen für die innere Singularitätenmenge $\text{sing}(u) \cap B^+_1 \setminus \partial\mathbb{R}^n_+$, so dass hier nur noch die Menge der Randsingularitäten $\partial\text{-sing}(u) = \text{sing}(u) \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ betrachtet werden muss. Angenommen, in einem der Fälle (i) oder (ii) gelte $\mathcal{H}^s(\partial\text{-sing}(u) \cap B_1^+) > 0$ für ein $s > n-k-2$. Laut [F, 2.10.17(3)] gibt es ein $a \in \partial\text{-sing}(u) \cap B_1^+$ und eine Folge $r_i \searrow 0$ bei $i \to \infty$ mit

$$\lim_{r_i \searrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(B_{r_i}(a) \cap \partial\text{-sing}(u))}{\alpha(s) r_i^s} \geq 1. \tag{6.36}$$

Hierbei ist $\alpha(s) := \Gamma(\frac{1}{2})^s / \Gamma(\frac{s}{2}+1)$ für beliebige $s \geq 0$ eine Interpolation der Werte $\alpha(n) = \mathcal{L}^n(B_1^n)$. In dem wie oben gewählten Punkt a betrachtet man die Tangentenabbildung $v := \text{s-lim}_{i\to\infty} u_{a,r_i}$. Dieser Grenzwert in $H^1_{lok}(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{N})$ existiert laut Theorem 6.24 nach Übergang zu einer Teilfolge von $\{r_i\}$, da $\overline{\text{Bild}(u)}$ keine harmonischen S^2 und keine harmonischen S^2_+ mit freiem Rand $\Gamma(x)$ für ein $x \in \overline{B}_1^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ trägt. Gemäß Lemma 6.26(i) ist v stationär harmonisch zur freien Randbedingung $v(\partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma(a)$. Das Theorem 5.5 impliziert daher $\mathcal{H}^s(\partial\text{-sing}(v) \cap \overline{B}_1^+) = 0$ sowohl im Fall (i) als auch in (ii), so dass eine endliche Kugelüberdeckung

$$\bigcup_{j=1}^m B_{\rho_j}(x_j) \supset \partial\text{-sing}(v) \cap \overline{B}_1^+ \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^m \rho_j^s < 1$$

existiert. Für hinreichend große $i \in \mathbb{N}$ liefert Lemma 6.26(iii)

$$\partial\text{-sing}(u_{a,r_i}) \cap B_1^+ \subset \bigcup_{j=1}^m B_{\rho_j}(x_j), \tag{6.37}$$

so dass für alle hinreichend großen Werte von i gilt

$$r_i^{-s}\mathcal{H}^s(B_{r_i}(a) \cap \partial\text{-sing}(u)) = \mathcal{H}^s(B_1^+ \cap \partial\text{-sing}(u_{a,r_i})) \leq \sum_{j=1}^m \alpha(s)\rho_j^s < \alpha(s).$$

Dies widerspricht der Wahl des Punktes a und der Folge r_i gemäß (6.36), so dass $\mathcal{H}^s(\partial\text{-sing}(u) \cap B_1^+) = 0$ für alle $s > n-k-2$ gezeigt ist. Unter Berücksichtigung von Satz 5.3 folgen damit die Dimensionsabschätzungen der Unterpunkte (i) und (ii).
Zuletzt ist noch der Fall $k = n-2$ zu diskutieren. Auch hierbei ist wegen Satz 5.3 nur noch der Fall auszuschließen, dass sing(u) einen Häufungspunkt $a \in \partial\text{-sing}(u) \cap \overline{B}_1^+$ im Rand besitzt. Unter dieser Annahme gibt es Punkte $p_i \in \text{sing}(u)$, so dass bei $i \to \infty$ gilt $\lambda_i := 2|p_i - a| \to 0$. Bei Betrachtung der Randsingularitäten in Punkt (i) nimmt man zusätzlich an, dass alle $p_i \in \partial\mathbb{R}^n_+$ liegen. Die Folge λ_i ist so gewählt, dass gilt

$$x_i := \frac{1}{\lambda_i}(p_i - a) \in \text{sing}(u_{a,\lambda_i}) \cap S^+_{1/2} \quad \text{für alle} \;\; i \in \mathbb{N}. \tag{6.38}$$

Nach Übergang zu einer Teilfolge existiert der starke Grenzwert $v := \text{s-lim}_{i\to\infty} u_{a,\lambda_i}$. Als Tangentenabbildung ist v laut Lemma 6.26(i) stationär harmonisch zur freien Randbedingung $v(\partial\mathbb{R}^n_+) \subset \Gamma(a)$ bezüglich einer konstanten Metrik, o.E. der Euklidischen. Demnach ist $\partial\text{-sing}(v) \cap B_1^+$ gemäß Theorem 5.5 eine endliche Menge. Gelten sogar die Voraussetzungen aus (ii), so ist auch $\text{sing}(v) \cap B_1^+$ endlich. Da v nach Lemma 6.26(iii) radial konstant ist, muss $\partial\text{-sing}(v) \subset \{0\}$ und bei (ii) sogar $\text{sing}(v) \subset \{0\}$ gelten, denn sonst würde $\partial\text{-sing}(v)$ bzw. $\text{sing}(v)$ einen Ursprungsstrahl enthalten. Nach Teilfolgenübergang existiert der Grenzwert $x := \lim_i x_i \in S^+_{1/2}$, bei Fall (i) gilt sogar $x \in S^+_{1/2} \cap \partial\mathbb{R}^n_+$. Wegen obiger Aussagen über $\partial\text{-sing}(v)$ bzw. $\text{sing}(v)$ ist sowohl bei (i) als auch bei (ii) die Energiedichte $|Dv|^2$ in einer Umgebung von x beschränkt, weshalb für hinreichend kleine Werte von $\rho > 0$ gilt

$$\rho^{2-n} \int_{B_\rho^+(x)} |Dv|^2 d\mathcal{L}^n < \varepsilon_0. \tag{6.39}$$

Im Fall $x \notin \partial\mathbb{R}^n_+$ sei außerdem $\rho > 0$ so klein gewählt, dass $B_\rho^+(x) = B_\rho(x) \subset \mathbb{R}^n_+$ gilt. Nun sei $u_i := u_{a,\lambda_i}$ gesetzt und die jeweils zugrundeliegenden Metriken seien mit $\gamma_i := \gamma_{a,\lambda_i}$ bezeichnet. Da für hinreichend große Werte von $i \in \mathbb{N}$ gilt $x_i \in B^+_{\rho/8}(x)$, also $\operatorname{sing}(u_i) \cap B^+_{\rho/8}(x) \neq \emptyset$, liefert einer der Regularitätssätze 1.15 und 6.15

$$\rho^{2-n} \int_{B_\rho^+(x)} |Du_i|^2 d\mu_{\gamma_i} > \varepsilon_0$$

für große Werte von i im Widerspruch zu (6.39). Damit folgen die Endlichkeitsaussagen aus den Unterpunkten (i) und (ii). □

Ein besonders interessanter Spezialfall des Theorems 6.25 ist der Fall von Dirichlet-Randwerten $\Gamma(x) = \{g(x)\}$ für eine gegebene Randabbildung $g \in C^{2,\alpha}(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+, \mathcal{N})$. Für diesen Fall existieren die im Theorem genannten Halbsphären auf keiner Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ laut Satz 5.10. Aus diesem Grund lässt sich nun in einem sehr allgemeinen Fall die volle Randregularität stationärer harmonischer Abbildungen mit Dirichlet-Randwerten formulieren. Eine solche Aussage war bisher nur für energieminimierende Abbildungen mit Dirichlet-Randbedingung aus [SU2] bekannt. Das folgende Theorem liefert erstmals volle Randregularität unter Voraussetzungen alleine an die erste Variation der Energie.

Theorem 6.27 (Volle Randregularität unter Dirichlet-Randbedingungen). *Gegeben sei eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ und ein beschränktes, relativ $\mathbb{R}^n_+$ offenes Gebiet $\overline{B_1^+} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n_+$, auf dem eine $C^{1,\alpha}$-Metrik zugrundeliege. Es seien Randwerte $g \in C^{2,\alpha}(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+, \mathcal{N})$ gegeben. Unter diesen Voraussetzungen sei die Abbildung $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ stationär harmonisch zur Dirichlet-Randbedingung $u(x) = g(x)$ für $x \in \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ im Sinne von Definition 6.4. Falls der Abschluss von* Bild(u) *keine nichttriviale harmonische S^2 trägt, ist u in einer vollen Umgebung von $B_1^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ von der Klasse $C^{2,\alpha}$.*

Symbolverzeichnis

Literaturverzeichnis

[ADN] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I*, Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 623-727.

[B] F. Bethuel, *On the singular set of stationary harmonic maps*, Manuscripta Math. **78** (1993), 417-443.

[CE] J. Cheeger, D. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland Mathematical Library, Vol. 9, North-Holland Publishing Company, New York, 1975.

[CL] Y. Chen, F.H. Lin, *Evolution equations with a free boundary condition*, J. Geom. Anal. **8**, Nr. 2 (1998), 179-197.

[CLMS] R. Coifman, P.-L. Lions, Y. Meyer, S. Semmes, *Compensated compactness and Hardy spaces*, J. Math. Pures Appl. IX, **72**, Nr. 3 (1993), 247-286.

[DF] F. Duzaar, M. Fuchs, *On removable singularities of p-harmonic maps*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **7**, Nr. 5 (1990), 385-405.

[DS1] F. Duzaar, K. Steffen, *A partial regularity theorem for harmonic maps at a free boundary*, Asymptotic Analysis **2** (1989), 299-343.

[DS2] F. Duzaar, K. Steffen, *An optimal estimate for the singular set of a harmonic mapping in the free boundary*, J. reine angew. Math. **401** (1989), 157-187.

[EG] L. Evans, R. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, London, 1992.

[F] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[FS] C. Fefferman, E.M. Stein, *H^p-spaces of several variables*, Acta Math. **129** (1972), 137-193.

[FZ] H. Federer, W.Ziemer, *The Lebesgue set of a function whose distribution derivatives are p-th power summable*, Indiana Univ. Math. J. **22** (1972), 139-158.

[G1] M. Giaquinta, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1983.

[G2] M. Giaquinta, *Introduction to Regularity Theory for Nonlinear Elliptic Systems*, Birkhäuser, Berlin, 1993.

[GHL] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[GJ] R. Gulliver, J. Jost, *Harmonic maps which solve a free boundary problem*, J. reine angew. Math., **381** (1987), 61-89.

[GT] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[H] F. Hélein, *Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une variété riemannienne*, C.R. Acad. Sci. Paris **312** (1991), 591-596.

[HL] R. Hardt, F.H. Lin, *Partially constrained boundary conditions with energy minimizing mappings*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 309-334.

[IM] T. Iwaniec, G. Martin, *Quasiregular mappings in even dimensions*, Acta Math. **170**, Nr. 1 (1993), 29-81.

[J] Jürgen Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[KGB] K. Grosse-Brauckmann, *Interior and boundary monotonicity formulas for stationary harmonic maps*, Manuscripta Math. **77** (1992), 89-95.

[KN] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, Volume II*, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New York, 1969.

[KW] H. Karcher, J. Wood, *Non-existence results and growth properties for harmonic maps and forms*, J. Reine Angew. Math. **353** (1984), 165-180.

[Le] L. Lemaire, *Applications harmoniques de surfaces riemannienes*, J. Diff. Geom., **13** (1978), 51-78.

[Li] F.H. Lin, *Gradient estimates and blow-up analysis for stationary harmonic maps*, Annals of Math. **149** (1999), 785-829.

[Li2] F.H. Lin, *Une remarque sur l'application* $x/|x|$, C.R. Acad. Sci. Paris **305**, Sér. I, (1987), 529-531.

[LU] O. Ladyzhenskaya, N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press, New York, 1968.

[M] P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces - Fractals and rectifiability*, Cambridge Studies in advanced mathematics **44**, Cambridge University Press, 1995.

[Mo1] R. Moser, *Unique solvability of the Dirichlet problem for weakly harmonic maps*, Manuscripta Math. **105**, Nr. 3 (2001), 379-399.

[Mo2] R. Moser, *Regularity for the approximated harmonic map equation and application to the heat flow for harmonic maps*, Math. Z. **243** (2003), 263-289.

[Mor] C.B. Morrey, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, New York, 1966.

[P] D. Preiss, *Geometry of measures in $\mathbb{R}^n$: Distribution, rectifiability, and densities*, Annals of Math. **125** (1987), 537-643.

[R] T. Rivière, *Everywhere discontinuous harmonic maps into spheres*, Acta Math. **175** (1995), 197-226.

[Sch] R. Schoen, *Analytic aspects of the harmonic map problem*, in: S.S. Chern(ed.), Seminar on Nonlinear Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 1984, 321-358.

[S] S. Semmes, *A primer on Hardy spaces, and some remarks on a theorem of Evans and Müller*, Comm. PDE **19**, Nr. 1-2 (1994), 277-319.

[Sim1] L. Simon, *Lectures on Geometric Measure Theory*, Proc. of Centre for Math. Anal. **3**, Australian National Univ. (1983).

[Sim2] L. Simon, *Theorems on regularity and singularity of harmonic maps*, ETH Lecture notes, Birkhäuser, Zürich, 1996.

[St1] E. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.

[St2] E. Stein, *Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

[SU] R. Schoen, K. Uhlenbeck, *A regularity theory for harmonic maps*, J. Differential Geom., **17** (1982), 307-335. Differential Equations, Springer-Verlag, 1984, 321-358.

[SU2] R. Schoen und K. Uhlenbeck, *Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps*, J. Differential Geom., **18** (1983), 253-268.

[TW] T. Toro, C.Y. Wang, Compactness Properties of weakly p-harmonic maps into homogeneous spaces, Ind. Univ. Math. J. **44**, Nr. 1 (1995), 87-113.

Zusammenfassung

Das Energiefunktional $E(u) := \int_{\mathcal{M}} |Du|^2 d\mu$ für Sobolev-Abbildungen $u \in H^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ zwischen kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ nimmt seit langem einen besonderen Stellenwert in der Variationsrechnung ein. Bei der Betrachtung einer freien Randbedingung beschränkt man sich auf Abbildungen $u \in H^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, die die Nebenbedingung $u(\partial\mathcal{M}) \subset \Gamma$ für eine fixierte Untermannigfaltigkeit $\Gamma \subset \mathcal{N}$ erfüllen. Für Abbildungen u, die die Energie in dieser Klasse von Abbildungen minimieren, verschwindet die erste Variation der Energie, also $\frac{d}{dt}E(u_t)\big|_{t=0} = 0$, für geeignete Variationen $u_t \in H^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ von $u = u_0$, die die Randbedingung $u_t(\partial\mathcal{M}) \subset \Gamma$ erfüllen. Allgemeiner spricht man von stationären harmonischen Abbildungen $u \in H^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ zur freien Randbedingung $u(\partial\mathcal{M}) \subset \Gamma$, wenn die erste Variation der Energie für Variationen u_t von $u = u_0$ wie oben verschwindet.

Obwohl für stationäre harmonische Abbildungen $u \in H^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ die Regularitätstheorie im Inneren $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ weit entwickelt ist, gibt es unter einer freien Randbedingung wenige Aussagen zur Stetigkeit am Rand $\partial\mathcal{M}$, worin das härteste Problem beim Nachweis von C^2-Regularität besteht. Die vorgelegte Arbeit schließt diese Lücke mit den beiden folgenden Resultaten. Für die Menge $\operatorname{sing}(u)$ der irregulären Punkte konnte zunächst partielle Regularität $\mathcal{H}^{n-2}(\operatorname{sing}(u)) = 0$ für $n = \dim \mathcal{M}$ hergeleitet werden. Darüber hinaus konnte dieses Ergebnis für spezielle Zielmannigfaltigkeiten $\mathcal{N}$ zu der Dimensionsabschätzung $\dim(\operatorname{sing}(u)) \leq n - 4$ verbessert werden. Dazu muss man von der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ fordern, dass sie weder nichtkonstante harmonische 2-Sphären $v : S^2 \to \mathcal{N}$ noch nichtkonstante harmonische 2-Halbsphären $v : S^2_+ \to \mathcal{N}$ zur freien Randbedingung $v(\partial S^2_+) \subset \Gamma$ zulässt. Diese beiden Ergebnisse bringen die Regularitätstheorie am freien Rand auf den Stand, der im Inneren bereits erreicht war.

Der Schlüssel zum Beweis des partiellen Regularitätssatzes ist eine Spiegelungskonstruktion, bei der die Abbildung u mit der Randbedingung $u(\partial\mathcal{M}) \subset \Gamma$ lokal durch geodätische Spiegelung an der Untermannigfaltigkeit Γ über den Rand $\partial\mathcal{M}$ hinaus fortgesetzt wird. Ein Teil von $\partial\mathcal{M}$ liegt dann im Inneren des Definitionsbereiches der fortgesetzten Abbildung, so dass Methoden aus dem inneren Fall angewendet werden können. Die Erkenntnis, dass sich diese Konstruktion durchführen lässt, ermöglicht eine neue und sehr natürliche Herangehensweise an das Problem einer freien Randbedingung. Mithilfe dieses Verfahrens können auch bereits vorhandene Beweise für energieminimierende Abbildungen mit freien Randbedingungen wesentlich vereinfacht werden.

Der Beweis der besagten Dimensionsabschätzung beruht auf einem Kompaktheitssatz, der auch für sich betrachtet von Interesse ist und im vorliegenden Randfall bisher unbekannt war. Er besagt, dass unter obigen Forderungen an $\mathcal{N}$ jede Folge stationärer harmonischer Abbildungen $u_i \in H^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ zur freien Randbedingung $u_i(\partial\mathcal{M}) \subset \Gamma$, für die $E(u_i)$ beschränkt ist, eine in der H^1-Norm konvergente Teilfolge besitzt. Die besagten Bedingungen an $\mathcal{N}$ sind auch notwendig für obige Kompaktheitseigenschaft.

Die für die freie Randbedingung entwickelten Methoden lassen sich tatsächlich noch auf eine wesentlich größere Klasse von Randbedingungen anwenden. Besonderes Interesse verdienen hierbei die Dirichlet-Randwerte, bei denen für eine Randabbildung $g \in C^{2,\alpha}(\partial\mathcal{M}, \mathcal{N})$ gefordert ist, dass $u \in H^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ auf $\partial\mathcal{M}$ mit dieser übereinstimmt. Für stationäre harmonische Abbildungen u mit solchen Randwerten konnte in der vorgelegten Arbeit erstmals ein Ergebnis zur vollen Randregularität unter Voraussetzungen lediglich an die erste Variation der Energie bewiesen werden. Bisher war ein derartiges Resultat nur für energieminimierende Abbildungen bekannt.