

Über die Minimierer der relaxierten Energie
von Abbildungen höherdimensionaler Kugeln
in die 2-Sphäre

I n a u g u r a l - D i s s e r t a t i o n

zur

Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Ulrike Tarp
aus Düsseldorf

Düsseldorf
2003

Gedruckt mit der Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf.

Referent: Prof. Dr. K. Steffen

Koreferent: Prof. Dr. W. Singhof

Tag der mündlichen Prüfung: 28. Januar 2004

Einleitung

Flüssigkristalle sind stabförmige Moleküle, deren Enden nicht unterschieden werden können. Die Ausrichtung dieser Stäbe wird als Abbildung u des Behälters $B \subset \mathbb{R}^3$, in dem sie sich befinden, in den reellen projektiven Raum $P^2(\mathbb{R})$ beschrieben. Stabile Ausrichtungen u minimieren die Deformationsenergie $E(u)$, die im einfachsten Fall durch $E(u) = \frac{1}{2} \int_B |Du|^2$ gegeben ist, unter gewissen Nebenbedingungen.

Für den Mathematiker liegt es nahe, anstelle des dreidimensionalen „Behälters“ ein beschränktes C^∞ -Gebiet $U \subset \mathbb{R}^m$ und anstelle von $P^2(\mathbb{R})$ eine beliebige geschlossene n -dimensionale Riemannsche C^∞ -Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ zu betrachten, die nach einem (tiefliegenden) Satz von Nash isometrisch als kompakte Untermannigfaltigkeit in einen hochdimensionalen Euklidischen Raum $\mathbb{R}^k$ eingebettet ist. Das entsprechende Variationsproblem ist nun, die *Dirichlet-Energie* $E(u) := \frac{1}{2} \int_U |Du|^2$ von Abbildungen $u : U \rightarrow \mathcal{N}$ unter vorgegebenen C^∞ -Randwerten $\varphi|_{\partial U} : \partial U \rightarrow \mathcal{N}$ zu minimieren. Da man sich glatte Minimierer wünscht, muß man dafür sorgen, daß es überhaupt glatte Abbildungen $u : \bar{U} \rightarrow \mathcal{N}$ mit diesen Randwerten gibt und verlangt daher, daß schon $\varphi \in C^\infty(\bar{U}, \mathcal{N})$ ist. Weil sich Existenz von Energieminimierern in $C^\infty(\bar{U}, \mathcal{N})$ aber im allgemeinen nicht nachweisen läßt, betrachtet man als Klasse der zulässigen Abbildungen den Sobolev-Raum

$$H_\varphi^1(U, \mathcal{N}) = \{u \in H^1(U, \mathbb{R}^k) \mid u - \varphi \in H_0^1(U, \mathbb{R}^k), u(x) \in \mathcal{N} \text{ für fast alle } x \in U\},$$

wobei $H^1(U, \mathbb{R}^k)$ der übliche Sobolev-Hilbert-Raum der quadratintegrierbaren $\mathbb{R}^k$ -wertigen Funktionen mit quadratintegrierbaren Distributionsableitungen ist. Da $H_\varphi^1(U, \mathcal{N})$ eine bezüglich der schwachen Topologie abgeschlossene Teilmenge von $H^1(U, \mathbb{R}^k)$ ist, und da das Energiefunktional schwach unterhalbstetig ist, also bei schwacher Konvergenz $u_n \rightharpoonup u$ in $H_\varphi^1(U, \mathcal{N})$ gilt $E(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n)$, liefert die direkte Methode der Variationsrechnung Existenz von Energieminimierern in $H_\varphi^1(U, \mathcal{N})$. Diese sind schwache Lösungen der Euler-Gleichungen, welche im einfachsten Fall $\mathcal{N} = S^n$ die Form $\Delta u = -|Du|^2 u$ haben. Nicht notwendig energieminimierende Lösungen der Euler-Gleichungen heißen (*schwach*) *harmo-*

nische Abbildungen von U nach $\mathcal{N}$.

Die Regularitätstheorie für elliptische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung zeigt, daß jede stetige harmonische Abbildung automatisch glatt ist, allerdings sagt sie nichts darüber aus, ob harmonische Abbildungen stetig sind. Tatsächlich hat Rivière in [Riv95] zu jeder glatten, nicht konstanten Randabbildung $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ eine überall unstetige harmonische Abbildung $u \in H_\varphi^1(B^3, S^2)$ konstruiert. Energiemimimierer hingegen sind glatt bis auf eventuelle Singularitäten in einer Ausnahmemenge $\text{sing } u \subset\subset U$ mit Hausdorff-Dimension $\leq m - 3$ ([SU82], [SU83]). Mehr Regularität kann man im allgemeinen nicht erwarten, denn Hardt und Lin zeigen in [HL86], daß es in jeder Dimension $m \geq 3$ ein glattes, beschränktes, konvexes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^m$ und eine Abbildung $\varphi \in C^\infty(\bar{U}, S^2)$ gibt, so daß $\mathcal{H}^{m-3}(\text{sing } u) > 0$ ist für jeden Energieminimierer $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$, und so daß außerdem gilt

$$\min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} E(u) < \inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u). \quad (1)$$

Es ist kein Zufall, daß die Zielmannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ hier die Sphäre S^2 ist, denn ist $\pi_2(\mathcal{N}) = 0$, so liegt $C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)$ bezüglich der Normtopologie dicht in $H_\varphi^1(U, S^2)$ ([Bet91]) und eine solche *Energielücke* tritt nicht auf. Nun möchte man wissen, wie groß diese Energielücke ist und ob das Infimum auf der rechten Seite von (1) angenommen wird. Das Problem hierbei ist, daß schwache Häufungswerte einer Minimalfolge in $C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)$ im allgemeinen *nicht* wieder glatt sind. $C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)$ liegt sogar schwach folgendicht im Sobolev-Raum $H_\varphi^1(U, S^2)$ ([PR]). Deshalb betrachtet man die *relaxierte Energie*

$$\mathcal{F}(u) := \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n) \mid u_n \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2), u_n \rightharpoonup u \right\}$$

von u . Da sie schwach unterhalbstetig ist, gibt es $\mathcal{F}$ -Minimierer in $H_\varphi^1(U, S^2)$, und es gilt

$$\min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} \mathcal{F}(u) = \inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u).$$

Daher kann man sich der Antwort auf die Frage, ob $\inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u)$ angenommen wird, nähern, indem man $\mathcal{F}$ -Minimierer auf Regularität untersucht. Die Idee ist, die relaxierte Energie durch ein Funktional F darzustellen, das außer der Energie auch in sinnvoller Weise das Vorhandensein von Singularitäten berücksichtigt. Kann man zeigen, daß F -Minimierer schwach harmonisch sind, so besteht die Hoffnung, daß sich wie bei Energieminimierern zumindest partielle Regularität zeigen läßt.

Um eine solche Darstellung von $\mathcal{F}$ zu erreichen, werden die Singularitäten von $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ in einem $(m - 3)$ -dimensionalen Strom auf $\mathbb{R}^m$ kodiert, dem

Singularitätenstrom S_u (Definition 4.2). Ein k -Strom auf $\mathbb{R}^m$ ist eine stetige Linearform auf der Menge der glatten k -Formen mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}^m$. Ein einfaches Beispiel ist die Integration über eine orientierte k -dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit endlichen Maßes. Allgemeiner betrachtet man *rektifizierbare k -Ströme ganzer Vielfachheit*, die im wesentlichen der Integration über eine Vereinigung von abzählbar vielen Mannigfaltigkeiten entsprechen. Im einfachsten Fall einer Sobolev-Abbildung mit „wenigen“ Singularitäten - damit ist gemeint, daß $\text{sing } u$ in der Vereinigung von endlich vielen kompakten C^1 -Untermannigfaltigkeiten von U enthalten ist - entspricht S_u der Integration über diese Mannigfaltigkeiten, die mit geeigneten Orientierungen und Vielfachheiten versehen sind. Für jedes $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ ist S_u Rand eines rektifizierbaren $(m-2)$ -Stromes L auf $\mathbb{R}^m$ mit ganzer Vielfachheit und endlicher Masse (Satz 6.1, vgl. auch [Pak02]). Das Infimum der Massen der rektifizierbaren Ströme ganzer Vielfachheit mit Rand S_u ist also endlich und wird mit $m_i(S_u)$ bezeichnet. Läßt man stattdessen alle $(m-2)$ -Ströme mit Rand S_u zu, so wird das Infimum mit $m_r(S_u)$ bezeichnet. In beiden Fällen gibt es einen Masse-minimierenden Strom L mit $M(L) = m_i(S_u)$ bzw. $M(L) = m_r(S_u)$. Dieser heißt eine *Minimalverbindung* zu S_u ; $m_i(S_u)$ bzw. $m_r(S_u)$ nennt man dementsprechend *Masse einer Minimalverbindung* zu S_u .

In Dimension $m = 3$ (siehe Kapitel 2) ist bekannt, daß die relaxierte Energie durch das Funktional

$$F(u) := E(u) + 4\pi L(u)$$

dargestellt wird, wobei $L(u) = m_i(S_u) = m_r(S_u)$ (vgl. Bemerkung 3.7) die Minimalverbindung des Singularitätenstroms von u ist. Insbesondere gilt also

$$\min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} F(u) = \inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u).$$

Mit Hilfe dieser Darstellung kann man zeigen, daß jeder $\mathcal{F}$ -Minimierer schwach harmonisch ([BBC90]) und außerhalb einer Ausnahmemenge $\text{sing } u \subset \bar{U}$ von höchstens endlichem 1-dimensionalen Hausdorff-Maß glatt ist ([GMS89]). Dies beantwortet zwar nicht die Frage, ob $\inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u)$ angenommen wird, ist aber ein Schritt in die gewünschte Richtung.

Der Beweis von $\mathcal{F} = F$ im dreidimensionalen Fall hängt entscheidend davon ab, daß hier $m_r(S_u) = m_i(S_u)$ gilt (vgl. Bemerkung 3.7): Um $F(u) \geq \mathcal{F}(u)$ zu zeigen, benötigt man einerseits die Stetigkeit von F ; diese folgt daraus, daß $u \mapsto m_r(S_u)$ in beliebiger Dimension stetig ist (Bemerkung 3.8). Andererseits benötigt man die Tatsache, daß man die Singularitäten aus R_φ -Abbildungen - das sind Abbildungen $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ mit „wenigen“ Singularitäten (vgl. Definition 4.1) - unter Energieaufwand $< 4\pi m_i(S_u) + \frac{1}{n}$ entfernen kann; auch dies ist

in beliebiger Dimension richtig ([Pak02], [PR], vgl. auch Satz 4.4). $F(u) \leq \mathcal{F}(u)$ ist einfach eine Konsequenz der schwachen Unterhalbstetigkeit von F .

In höheren Dimensionen $m \geq 4$ hingegen stimmt $m_r(S_u)$ nicht unbedingt mit $m_i(S_u)$ überein. Definiert man $F^r(u) := E(u) + 4\pi m_r(S_u)$, so erhält man zwar ein bezüglich der Normtopologie stetiges und bezüglich der schwachen Topologie unterhalbstetiges Funktional, so daß $F^r \leq \mathcal{F}$ genauso folgt wie im dreidimensionalen Fall, aber F^r ist im allgemeinen zu klein: Pakzad hat in [Pak02] gezeigt, daß man $U \subset \mathbb{R}^4$ und die Randabbildung φ so vorgeben kann, daß

$$\min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} F^r(u) < \inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u)$$

gilt; F^r ist also im allgemeinen nicht die relaxierte Energie. Definiert man hingegen $F(u) := E(u) + 4\pi m_i(S_u)$, so erhält man wieder ein bezüglich der schwachen Topologie unterhalbstetiges Funktional (Satz 6.3, vgl. auch [Pak02]), so daß gilt $F \leq \mathcal{F}$. Pakzad vermutet, daß F die relaxierte Energie ist, kann dies aber nicht zeigen, da nicht bekannt ist, ob $u \mapsto 4\pi m_i(S_u)$ stetig bezüglich der Normtopologie ist.

Obwohl wir weiterhin nicht wissen, ob $u \mapsto 4\pi m_i(S_u)$ stetig bezüglich der Normtopologie ist, beweisen wir in dieser Arbeit, daß $F(u) = \mathcal{F}(u)$ für eine sehr große Klasse von Abbildungen $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ richtig ist, nämlich für alle die u , deren singuläre Menge $\text{sing } u$ Lebesgue-Maß Null hat (Satz 7.2). Dabei benötigen wir keinerlei Randregularität von u , das heißt $\text{sing } u$ darf durchaus den gesamten Rand von U enthalten. Satz 7.2 folgt unmittelbar aus unserem Approximationssatz Satz 7.1, der eine entscheidende Verbesserung eines Approximationssatzes von Bethuel darstellt (Satz 4.1): Es ist uns gelungen zu beweisen, daß jedes $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ mit $\mathcal{L}^m(\text{sing } u) = 0$ in der Normtopologie durch R_φ -Abbildungen approximiert werden kann, ohne daß F springt. Dies kompensiert die unbekannte Stetigkeit von F , so daß $F(u) = \mathcal{F}(u)$ für $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ mit $\mathcal{L}^m(\text{sing } u) = 0$ genauso gezeigt werden kann wie im dreidimensionalen Fall. Mit Hilfe von Satz 7.2 können wir die Größe der Energielücke in Termen der Massen von Minimalverbindungen zu E - und $\mathcal{F}$ -Minimierern abschätzen (Korollar 7.1).

In Kapitel 8 schließlich beweisen wir, daß $\mathcal{L}^m(\text{sing } u) = 0$ für jeden F -Minimierer $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ gilt. Genauer zeigen wir, daß $\mathcal{H}^{m-2}(\text{sing } u \cap U) < \infty$ ist (Satz 8.1). Dazu fixieren wir eine Minimalverbindung L zu S_u und zeigen, daß für $0 < r < r_0$ und $B_{r_0}(z) \subset U$ die „skalierte F -Energie“

$$r^{2-m} f_z(r) := r^{2-m} \left(\frac{1}{2} \int_{B_r(z)} |Du|^2 + 4\pi M(L \llcorner B_r(z)) \right)$$

monoton nichtfallend in r ist (Satz 8.3). Mit Hilfe dieser Monotonieformel sehen wir, daß $L_{\perp} B_{\frac{r}{n}}(z) = 0$ ist, wenn $f_z(r) < 4\pi \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-2} \mathcal{H}^{m-2}(B_r(z))$ gilt (Satz 8.4). Da jeder F -Minimierer schwach harmonisch ist (Satz 6.4), können wir dann auf $B_{\frac{r}{n}}(z)$ auf Evans' ε -Regularitätssatz (siehe Satz 8.2) zurückgreifen und erhalten unseren F - ε -Regularitätssatz Satz 8.5: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $u \in C^\infty(B_{\frac{r}{4n}}(z), S^2)$ ist, wenn $r^{2-m} f_z(r) < \varepsilon$ gilt. Weil nun die Energiedichte jeder Sobolev-Abbildung $\mathcal{H}^{m-2}$ -fast überall Null ist und die Dichte jedes rektifizierbaren $(m-2)$ -Stromes ganzer Vielfachheit außerhalb einer Menge mit endlichem $\mathcal{H}^{m-2}$ -Maß verschwindet, folgt $\mathcal{H}^{m-2}(\text{sing } u \cap U) < \infty$.

Also gilt $F(u) = \mathcal{F}(u)$ für jeden F -Minimierer u und wegen $F \leq \mathcal{F}$ folgt, daß u genau dann ein $\mathcal{F}$ -Minimierer ist, wenn u ein F -Minimierer ist. Insbesondere gilt

$$\min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} F(u) = \min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} \mathcal{F}(u) = \inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u)$$

(Satz 8.6). Die Regularitätstheorie für F -Minimierer in Kapitel 8 zeigt somit, daß in beliebiger Dimension gilt: Jeder Minimierer $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ der relaxierten Energie ist schwach harmonisch und glatt außerhalb einer Ausnahmemenge $\text{sing } u \subset \bar{U}$ mit $\mathcal{H}^{m-2}(\text{sing } u \cap U) < \infty$. Mit anderen Worten: Alles, was bisher über $\mathcal{F}$ -Minimierer in Dimension $m = 3$ bekannt war, konnten wir auch für beliebige Dimensionen $m \geq 4$ beweisen.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

In Kapitel 1 werden Grundlagen über harmonische Abbildungen bis hin zur Energielücke bereitgestellt.

In Kapitel 2 gehen wir auf den dreidimensionalen Fall ein, der Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist.

In Kapitel 3 stellen wir alle für uns relevanten Fakten über Ströme zusammen.

In Kapitel 4 gehen wir auf die Approximierbarkeit von Sobolev-Abbildungen durch Abbildungen mit „wenigen“ Singularitäten ein. Wir benötigen eine Version von Bethuels Approximationssatz, die so in der Literatur nicht zu finden ist, aber unmittelbar aus dem in [Bet91] bzw. [HL] geführten Beweis folgt. Damit man auch ohne Lektüre jener Artikel einsehen kann, daß die von uns angegebene Version gilt, skizzieren wir die dort durchgeführte Konstruktion der approximierenden Abbildungen. Außerdem erklären wir den Singularitätenstrom S_u zu $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$. Da unsere Definition etwas von der aus der Literatur bekannten abweicht, sind wir auch hier relativ ausführlich.

In Kapitel 5 gehen wir auf Graphenströme ein, die für das Verständnis des Singularitätenstroms S_u wesentlich sind. Alles hier gesagte ist aus der Literatur bekannt, wenn auch zum Teil gut versteckt; deshalb geben wir auch hier einige Beweise an.

In Kapitel 6 wird das Funktional F in Dimension $m \geq 4$ eingeführt. Dies ist im wesentlichen schon in [Pak02] geschehen. Allerdings tauchen dort einige Ungenauigkeiten auf, die wir jetzt beheben.

In den Kapiteln 7 und 8 stellen wir unsere schon oben beschriebenen neuen Ergebnisse im Fall $m \geq 4$ dar.

In Kapitel 9 fassen wir unsere Ergebnisse noch einmal kurz zusammen und weisen auf einige offene Probleme zur Energielücke und zur relaxierten Energie hin.

An dieser Stelle möchte ich meinem Lehrer Prof. Dr. Klaus Steffen herzlich für die Betreuung dieser Arbeit und die intensive Lektüre des Manuskriptes danken. Außerdem gilt mein Dank Dr. Andreas Gastel für sein stets offenes Ohr für mathematische Probleme und für zahlreiche Literaturtips.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	i
1 Die Energielücke	1
2 Die Situation für $m = 3$	7
3 Ströme	11
4 $R_\varphi^\infty(U, S^2)$ -Abbildungen und Minimalverbindungen	17
5 Graphenströme	23
6 Definition von F in Dimension $m \geq 4$	27
7 Ein Approximationssatz	33
8 Regularitätstheorie für F -Minimierer	39
9 Schlußbemerkungen	47

Kapitel 1

Die Energielücke

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ ein (C^∞) -glattes, beschränktes Gebiet und $\mathcal{N}$ eine C^∞ -glatte geschlossene (d.h. kompakt ohne Rand) n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$.

Definition 1.1. Der *Sobolev-Raum* $H^1(U, \mathcal{N})$ ist definiert durch

$$H^1(U, \mathcal{N}) := \{u \in H^1(U, \mathbb{R}^k) \mid u(x) \in \mathcal{N} \text{ für fast alle } x \in U\},$$

wobei $H^1(U, \mathbb{R}^k)$ der übliche Sobolev-Hilbert-Raum der quadratintegrierbaren $\mathbb{R}^k$ -wertigen Funktionen auf U mit quadratintegrierbaren Distributionsableitungen erster Ordnung ist.

Bemerkung 1.1. Da L^2 -konvergente Folgen fast überall konvergente Teilfolgen besitzen und $\mathcal{N}$ kompakt (also abgeschlossen) in $\mathbb{R}^k$ ist, ist $H^1(U, \mathcal{N})$ eine bezüglich der schwachen Topologie abgeschlossene Teilmenge von $H^1(U, \mathbb{R}^k)$. Wir erinnern daran, daß schwache Konvergenz in $H^1(U, \mathbb{R}^k)$ dadurch charakterisiert ist, daß

$$u_n \rightharpoonup u \text{ (schwach) in } H^1$$

genau dann, wenn

$$u_n \rightarrow u \text{ (stark) in } L^2 \quad \text{und} \quad Du_n \rightharpoonup Du \text{ (schwach) in } L^2.$$

Dies liegt daran, daß in einem Hilbert-Raum jede schwach konvergente Folge beschränkt ist, jede in H^1 beschränkte Menge nach dem Satz von Rellich relativkompakt in L^2 ist und jede relativkompakte Teilmenge von L^2 eine in L^2 konvergente Teilfolge besitzt.

Bemerkung 1.2. Man beachte, daß $H^1(U, \mathcal{N})$ im Gegensatz zu $H^1(U, \mathbb{R}^k)$ kein linearer Raum ist: Addition von Funktionen und deren Multiplikation mit Konstanten führen aus $H^1(U, \mathcal{N})$ heraus.

Definition 1.2. Die *Dirichlet-Energie* von $u \in H^1(U, \mathcal{N})$ ist definiert durch

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_U |Du|^2 d\mathcal{L}^m.$$

Bemerkung 1.3. Um die Notation zu vereinfachen, werden wir oft auf die Angabe des Maßes unter dem Integral verzichten. Dann ist *immer* Integration bzgl. des Lebesgue-Maßes gemeint.

Definition 1.3. Für $\varphi \in C^\infty(\partial U, \mathcal{N})$ ist

$$H_\varphi^1(U, \mathcal{N}) := \{u \in H^1(U, \mathcal{N}) \mid u|_{\partial U} = \varphi \text{ in } L^2\}.$$

Bemerkung 1.4. $H_\varphi^1(U, \mathcal{N})$ ist eventuell leer; φ kann zwar immer zu einem $u \in H^1(U, \mathbb{R}^k)$ fortgesetzt werden, aber nicht unbedingt zu $u \in H_\varphi^1(U, \mathcal{N})$. Ist z.B. $U = B^m$ die offene Einheitskugel in $\mathbb{R}^m, m \geq 3$, und $\mathcal{N} = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Standardsphäre, so kann jede glatte Randabbildung φ durch $u(x) := \varphi(\frac{x}{|x|})$ zu einem $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ fortgesetzt werden; im Fall $m = 2$ dagegen ist dies keine Fortsetzung endlicher Energie und es ist sogar $H_{\text{id}}^1(U, S^2) = \emptyset$. Auch ist keineswegs klar, daß $H_\varphi^1(U, \mathcal{N})$ stetige Abbildungen enthält. In Dimension $m = 3$ zum Beispiel ist $H_\varphi^1(U, S^2) \neq \emptyset$ äquivalent zu $\deg \varphi = 0$. Deshalb werden wir immer voraussetzen, daß $\varphi \in C^\infty(\bar{U}, \mathcal{N})$, also Einschränkung auf $\bar{U}$ einer C^∞ -Funktion auf einer Umgebung von $\bar{U}$ in $\mathbb{R}^m$ ist, und für $H_{\varphi|_{\partial U}}^1(U, \mathcal{N})$ abkürzend $H_\varphi^1(U, \mathcal{N})$ schreiben. Dann ist natürlich

$$H_\varphi^1(U, \mathcal{N}) = \{u \in H^2(U, \mathcal{N}) \mid u - \varphi \in H_0^1(U, \mathbb{R}^k)\}.$$

Bemerkung 1.5. $H_\varphi^1(U, \mathcal{N})$ ist schwach abgeschlossen in $H^1(U, \mathbb{R}^k)$. Ist nämlich

$$H_\varphi^1(U, \mathcal{N}) \ni u_n \rightharpoonup u \in H^1(U, \mathbb{R}^k),$$

so ist nach Bemerkung 1.1 schon $u \in H^1(U, \mathcal{N})$. Da die Spurabbildung

$$\begin{aligned} T : H^1(U, \mathbb{R}^k) &\rightarrow L^2(\partial U, \mathbb{R}^k) \\ u &\mapsto u|_{\partial U} \end{aligned}$$

linear und stetig ist, folgt $\varphi = u_n|_{\partial U} \xrightarrow{L^2} u|_{\partial U}$, also $u \in H_\varphi^1(U, \mathcal{N})$.

Lemma 1.1. Das *Energiefunktional* ist schwach unterhalbstetig, das heißt für jede in $H^1(U, \mathcal{N})$ schwach konvergente Folge $u_n \rightharpoonup u$ gilt

$$E(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_U |Du_n|^2 - \frac{1}{2} \int_U |Du|^2 &= \frac{1}{2} \int_U |Du_n - Du|^2 + \int_U \langle (Du_n - Du), Du \rangle \\ &\geq \int_U \langle (Du_n - Du), Du \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

wenn $u_n \rightharpoonup u$ in H^1 , also $Du_n \rightharpoonup Du$ in L^2 . Dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt in $\text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. $\square$

Satz 1.1 (Existenzsatz). *Ist $H_\varphi^1(U, \mathcal{N}) \neq \emptyset$, so existieren Energieminimierer in $H_\varphi^1(U, \mathcal{N})$, das heißt Abbildungen $u \in H_\varphi^1(U, \mathcal{N})$, so daß $E(u) \leq E(v)$ für alle Vergleichsabbildungen $v \in H_\varphi^1(U, \mathcal{N})$. Energieminimierer sind schwache Lösungen der Euler-Gleichungen*

$$\Delta u = -\text{Spur } A_u(Du, Du), \quad (1.1)$$

das heißt für jedes $\psi \in C_{\text{kpt}}^\infty(U)$ ist

$$\int_U \langle Du, D\psi \rangle = - \int_U \text{Spur } A_u(Du, Du) \cdot \psi.$$

Dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt in $\text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ und „ $\cdot$ “ das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^k$. $A_y(\cdot, \cdot) : T_y \mathcal{N} \times T_y \mathcal{N} \rightarrow (T_y \mathcal{N})^\perp$ ist die zweite Fundamentalform von $\mathcal{N}$, in der die Krümmung von $\mathcal{N}$ kodiert ist. Ist $\mathcal{N} = S^n$, so hat (1.1) die Form

$$\Delta u = -|Du|^2 u. \quad (1.2)$$

Definition 1.4. Jede (nicht notwendig energieminimierende) schwache Lösung von (1.1) heißt (schwach) harmonische Abbildung von U nach $\mathcal{N}$.

Beweis. Für derartige Existenzaussagen hat sich die direkte Methode der Variationsrechnung bewährt: Wir betrachten eine Minimalfolge $u_n \in H_\varphi^1(U, \mathcal{N})$, also eine Folge mit der Eigenschaft

$$E(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf_{u \in H_\varphi^1(U, \mathcal{N})} E(u).$$

Wegen Kompaktheit von $\mathcal{N}$ ist diese Energie-beschränkte Folge auch beschränkt in $H_\varphi^1(U, \mathcal{N})$, besitzt also eine schwach konvergente Teilfolge, deren Grenzwert u nach Bemerkung 1.5 in $H_\varphi^1(U, \mathcal{N})$ liegt. Lemma 1.1 zeigt, daß u ein Energieminimierer ist. Zu $\psi \in C_{\text{kpt}}^\infty(U, \mathbb{R}^k)$ betrachten wir Variationen

$$u_t := \Pi(u + t\psi),$$

wobei Π die nächste-Punkt-Retraktion einer Umgebung von $\mathcal{N}$ auf $\mathcal{N}$ ist. Da u die Energie minimiert, gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{1}{2} \int_U |Du_t|^2 = 0. \quad (1.3)$$

Für genügend kleines t ist

$$\begin{aligned} |Du_t| &= |D\Pi(u + t\psi)(Du + tD\psi)| \leq C|Du + tD\psi|, \\ \left| \frac{\partial}{\partial t} Du_t \right| &\leq C|\psi||Du + tD\psi| + C|D\psi| \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} |Du_t|^2 \leq 2|Du_t| \left| \frac{\partial}{\partial t} Du_t \right| \leq C|\psi||Du + tD\psi|^2 + C|D\psi||Du + tD\psi|.$$

Letzteres rechtfertigt Differentiation unter dem Integral in (1.3). Mit $P_y := D\Pi_y \in \text{Hom}(\mathbb{R}^k, T_y\mathcal{N})$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \right|_0 \langle Du_t, Du_t \rangle &= \langle Du, D \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_0 u_t \rangle = \langle Du, D(P(u))\psi + P(u)D\psi \rangle \\ &= \langle Du, DP(u)Du\psi \rangle + \langle Du, D\psi \rangle \\ &= \text{Spur}(Du)^T DP(u)Du\psi + \langle Du, D\psi \rangle \\ &= \text{Spur } A_u(Du, Du) \cdot \psi + \langle Du, D\psi \rangle. \end{aligned}$$

Mit (1.3) folgt

$$\int_U \langle Du, D\psi \rangle = - \int_U \text{Spur } A_u(Du, Du) \cdot \psi.$$

Ist $\mathcal{N} = S^n$, so ist $A_y(v, w) = |v||w|y$ und wir erhalten (1.2). $\square$

Satz 1.2 (Regularitätssatz). *Jede stetige Lösung $u \in C(\bar{U}, \mathcal{N})$ von (1.1) ist glatt (das heißt $u \in C^\infty(\bar{U}, S^2)$).*

Beweis. Siehe z.B. [GT83], Kapitel 6 und 8, oder [Jos98]. $\square$

Bemerkung 1.6. Die Regularitätstheorie für elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung sagt nichts darüber aus, ob harmonische Abbildungen stetig sind, denn Du kommt in der Inhomogenität von (1.1) quadratisch vor und 2 ist gerade der „kritische Exponent“, ab dem Stetigkeit der Lösungen nicht mehr gefolgert werden kann. Tatsächlich hat Rivière in [Riv95] eine überall unstetige harmonische Abbildung $u \in H_\varphi^1(B^3, S^2)$ konstruiert. Für Energieminimierer kann man jedoch deutlich bessere Regularitätsaussagen machen, wie folgender Satz von Schoen und Uhlenbeck aus [SU82] und [SU83] zeigt:

Definition 1.5. Die *singuläre Menge* $\text{sing } u$ von $u \in H_\varphi^1(U, \mathcal{N})$ ist das Komplement in $\bar{U}$ der größten relativ offenen Teilmenge V von $\bar{U}$, so daß u auf V $\mathcal{L}^m$ -fast überall mit einer stetigen Funktion übereinstimmt.

Satz 1.3 (Regularitätssatz für Energieminimierer). *Jeder Energieminimierer $u \in H_\varphi^1(U, \mathcal{N})$ ist bis auf eventuelle Singularitäten in einer kleinen Ausnahmenge $\text{sing } u \subset \bar{U}$ glatt. Genauer gilt: $\text{sing } u \cap \partial U = \emptyset$ und $\dim^{\mathcal{H}}(\text{sing } u) \leq m - 3$, wobei $\dim^{\mathcal{H}}$ die Hausdorff-Dimension ist.*

Bemerkung 1.7. Simon hat bewiesen, daß der höchstdimensionale Anteil von $\text{sing } u$ rektifizierbar ist (siehe [Sim96]). Ist $\mathcal{N} = S^2$, so gilt sogar folgende stärkere Aussage: $\text{sing } u = K \cup \bigcup_{i=1}^Q \Sigma_i$, wobei jedes Σ_i eine eingebettete $(m - 3)$ -dimensionale $C^{1,\alpha}$ -Mannigfaltigkeit ist und $K \subset U$ eine kompakte Menge ist mit $\dim^{\mathcal{H}}(K) \leq m - 4$. Der Beweis hierfür ist in [Sim92] skizziert, der Preprint [Sim] mit dem vollständigen Beweis war uns allerdings nicht zugänglich.

Mehr Regularität kann man für Energieminimierer nicht erwarten, wie folgender Satz von Hardt und Lin ([HL86]) zeigt:

Definition 1.6. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ ein C^∞ -glattes, beschränktes Gebiet. Dann sei

$$C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2) := \{u \in C^\infty(\bar{U}, S^2) \mid u|_{\partial U} = \varphi|_{\partial U}\}$$

Satz 1.4 (Energielücke). *Für jedes $m \geq 3$ gibt es ein glattes, beschränktes, konvexes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^m$ und ein $\varphi \in C^\infty(\bar{U}, S^2)$, so daß $\mathcal{H}^{m-3}(\text{sing } u) > 0$ ist für jeden Energieminimierer $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$, und so daß außerdem gilt*

$$\min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} E(u) < \inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u).$$

Dieses Phänomen wird Energielücke genannt.

Bemerkung 1.8. Es ist kein Zufall, daß hier $\mathcal{N} = S^2$ ist, denn S^2 ist das einfachste Beispiel einer Mannigfaltigkeit mit $\pi_2(\mathcal{N}) \neq 0$, und ein Satz von Bethuel besagt, daß $C_\varphi^\infty(U, \mathcal{N})$ (stark) dicht in $H_\varphi^1(U, S^2)$ liegt, wenn $\pi_2(\mathcal{N}) = 0$ (siehe [Bet91]; dieser Artikel enthält allerdings Fehler, wenn man statt $U \subset \mathbb{R}^m$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ betrachtet. Eine korrigierte Version von Bethuels Satz in diesem Fall ist in [HL] zu finden).

Natürlich möchte man jetzt wissen, wie groß die Energielücke aus Satz 1.4 ist, und ob $\inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u)$ angenommen wird. Das Problem hierbei ist, daß schwache Häufungswerte einer Minimalfolge $\{u_n\} \subset C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)$ im allgemeinen *nicht* wieder in $C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)$ liegen.

Definition 1.7. Die *relaxierte Energie* von $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ ist definiert durch

$$\mathcal{F}(u) := \inf \{ \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n) \mid u_n \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2), u_n \rightharpoonup u \},$$

falls u schwacher Grenzwert einer Folge $u_n \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)$ ist, anderenfalls setzt man

$$\mathcal{F}(u) := \infty.$$

Weil die Energie schwach unterhalbstetig ist, gilt dies auch für $\mathcal{F}$, weshalb $\inf_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} \mathcal{F}(u)$ angenommen wird und trivialerweise

$$\min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} \mathcal{F}(u) = \inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u) \quad (1.4)$$

gilt. Daher kann man sich der Antwort auf die Frage, ob $\inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u)$ angenommen wird, nähern, indem man $\mathcal{F}$ -Minimierer auf Regularität untersucht. Jedoch ist zunächst völlig unklar, wie man dabei vorgehen soll. Im Fall $m = 3$ sind schon große Fortschritte gemacht worden, die wir im nächsten Kapitel darstellen wollen. Unsere neuen Beiträge in dieser Arbeit beziehen sich auf den Fall $m \geq 4$.

Kapitel 2

Die Situation für $m = 3$

In diesem Kapitel sei immer $U \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes, C^∞ -glattes Gebiet und $\varphi \in C^\infty(\bar{U}, S^2)$.

Definition 2.1. Der *Index* $\text{ind}_p u$ im Punkt p einer auf einer punktierten Umgebung von $p \in \mathbb{R}^3$ stetigen Abbildung u nach S^2 ist der von $0 < \varepsilon \ll 1$ unabhängige Abbildungsgrad von $S^2 \ni w \mapsto u(p + \varepsilon w) \in S^2$. Die *Vielfachheit* von p ist der Betrag dieses Indizes.

Definition 2.2. ([BCL86]) Ist $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ stetig auf $\bar{U}$ bis auf endlich viele Punktsingularitäten in U , so ist die *Masse einer Minimalverbindung* von u definiert als

$$L(u) := \min_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \sum_{i=1}^k d(p_i, n_{\sigma(i)}), \quad (2.1)$$

wobei $p_1, \dots, p_k \in U$ die Singularitäten mit positivem Index (mit Vielfachheiten aufgezählt) und $n_1, \dots, n_k \in U$ die Singularitäten mit negativem Index von u sind; $\mathcal{S}_k$ ist die Menge aller Permutationen von $\{1, \dots, k\}$ und d der innere Abstand in U , also das Infimum der Längen aller verbindenden Streckenzüge in U .

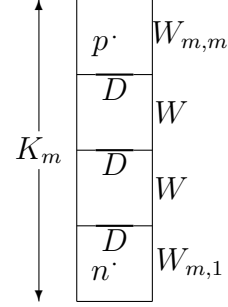
Natürlich ist $L(u) = 0$ für alle $u \in C_\varphi(\bar{U}, S^2)$ und auch für alle $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$, die stetig sind bis auf endlich viele Singularitäten mit Index 0. Die Bedeutung von L ist folgende:

Satz 2.1. Zu jedem $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$, welches glatt ist bis auf endlich viele Punktsingularitäten, gibt es eine Folge $\{u_n\} \subset C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)$ mit $u_n \rightharpoonup u$ und

$$E(u_n) \leq E(u) + 4\pi L(u) + \frac{1}{n}.$$

Beweisskizze. Der Beweis ist als „The basic construction for removing a pair of singularities“ in [Bet90] zu finden und verläuft wie folgt:

Zunächst habe u nur zwei Singularitäten p und n mit Index ± 1 , deren Verbindungsstrecke $[p, n]$ in U liege. Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ sei $K_m \subset U$ eine (kleine) Quaderumgebung von $[p, n]$, so daß $K_m \supset K_{m+1} \supset \dots$ und $K_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} [p, n]$ im Hausdorff-Abstand. K_m wiederum wird wie im Bild ersichtlich in Würfel $W_{m,i}$ unterteilt. $u|_{\partial W_{m,1}}$ hat Abbildungsgrad -1 . Auf einer kleinen Kreisscheibe D auf dem im Bild oberen Rand von $W_{m,1}$ wird u so verändert, daß die neue Abbildung $v_m : \partial W_{m,1} \rightarrow S^2$ Abbildungsgrad 0 hat, und so daß $\int_D |Dv_m|^2 < 8\pi + \varepsilon$. v_m wird dann radial konstant auf ganz $W_{m,1}$ fortgesetzt.



Dieses Verfahren wird nun nacheinander auf $W_{m,2}$ bis $W_{m,m}$ angewendet. Die daraus resultierende Abbildung $v_m : K_m \rightarrow S^2$ stimmt auf ∂K_m mit u überein, und eine relativ komplizierte Rechnung zeigt, daß $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{K_m} |Dv_m|^2 \leq 4\pi|p - n|$. Setzt man nun $u_m := v_m$ auf K_m , $u_m := u$ auf $U \setminus K_m$, so erhält man nach Approximation durch C^∞ -Abbildungen und geeigneter Auswahl einer Teilfolge die Behauptung. Im allgemeinen Fall betrachtet man eine Folge von verbindenden Streckenzügen L_k , deren Längen gegen $L(u)$ konvergieren, und wendet (auf leicht modifizierte Art, da die Singularitäten von u ja nicht mehr zwangsläufig Index ± 1 haben), das obige Verfahren auf jede der Strecken jedes L_k an. $\square$

Bemerkung 2.1 (und Definition). Für L gilt folgende Integralmaximumdarstellung (siehe [BBC90]):

$$L(u) = \sup_{\substack{\alpha \in C^\infty(\bar{U}) \\ \|d\alpha\|_\infty \leq 1}} \left(\int_U (u^* \omega) \wedge d\alpha - \int_{\partial U} \alpha(\varphi|_{\partial U})^* \omega \right), \quad (2.2)$$

wobei ω eine beliebige Volumenform auf S^2 mit $\int_{S^2} \omega = 1$ ist. Da die rechte Seite von (2.2) für jedes $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ endlich ist, benutzen wir (2.2) als Definition der *Masse einer Minimalverbindung* von $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$. (2.2) zeigt ferner, daß L stetig bezüglich der Normtopologie auf $H_\varphi^1(U, S^2)$ ist.

Satz 2.2. ([BZ88]) *Jedes $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ kann in der Normtopologie durch Abbildungen in $H_\varphi^1(U, S^2)$, welche glatt sind bis auf höchstens endlich viele Singularitäten, die alle in U liegen, approximiert werden.*

Bemerkung 2.2. Zusammen mit einem Diagonalfolgenargument zeigen Satz 2.1 und Satz 2.2, daß $C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)$ schwach folgendicht in $H_\varphi^1(U, S^2)$ liegt. Also ist die relaxierte Energie $\mathcal{F}(u)$ für jedes $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ endlich.

Definiert man nun

$$F(u) := E(u) + 4\pi L(u),$$

so erhält man ein bezüglich der Normtopologie stetiges Funktional auf $H_\varphi^1(U, S^2)$, welches neben der Dirichlet-Energie auch noch in sinnvoller Weise Beiträge eventueller Singularitäten zur „Gesamtenergie“ berücksichtigt. Folgender Satz stammt aus [BBC90].

Satz 2.3. $\inf_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} F(u)$ wird angenommen und es gilt

$$F = \mathcal{F} \text{ auf } H_\varphi^1(U, S^2). \quad (2.3)$$

Da $\min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} \mathcal{F}(u) = \inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u)$ gilt (siehe (1.4)), folgt insbesondere

$$\min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} F(u) = \inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u). \quad (2.4)$$

Beweis. Für die Existenz von F -Minimierern ist nur schwache Unterhalbstetigkeit von F zu zeigen (vgl. mit dem Beweis von Satz 1.1): Sei ω eine glatte 2-Form auf $\mathbb{R}^3$, so daß $4\pi\omega$ auf S^2 die Standard-Volumenform ist und $4\pi|\omega| \leq 1$ überall auf $\mathbb{R}^3$, und sei α eine glatte Funktion auf $\bar{U}$ mit $\|d\alpha\|_\infty \leq 1$. Dann ist

$$Q_\alpha(u) := E(u) + \int_U 4\pi(u^*\omega) \wedge d\alpha \quad (2.5)$$

eine nichtnegative stetige quadratische Form auf $H^1(U, \mathbb{R}^3)$: Zu $x \in U$ wähle eine Orthonormalbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$, so daß $e_1, e_2 \in \ker(d\alpha(x))$. Für fast alle $x \in U$ erhält man

$$\begin{aligned} & | \langle (u^*\omega) \wedge d\alpha(x), e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \rangle | \\ &= | \langle \omega(u(x)), \partial_{e_1} u(x) \wedge \partial_{e_2} u(x) \rangle \langle d\alpha(x), e_3 \rangle | \\ &\leq \frac{1}{4\pi} |\partial_{e_1} u(x)| |\partial_{e_2} u(x)| \cdot 1 \leq \frac{1}{8\pi} |Du(x)|^2. \end{aligned}$$

Also ist der Integrand des zweiten Integrals in (2.5) punktweise nicht kleiner als das Negative des Integranden des ersten Integrals $E(u)$, d.h. $Q_\alpha(u)$ ist nichtnegativ. Folglich ist Q_α schwach unterhalbstetig: Dazu schreibe $Q_\alpha(u) = B_\alpha(u, u)$ mit einer stetigen, symmetrischen Bilinearform B_α auf $H^1(U, \mathbb{R}^3)$; dann gilt für $u_n \rightharpoonup u$:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} Q_\alpha(u_n) - Q_\alpha(u) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (B_\alpha(u_n - u, u_n - u) + 2B_\alpha(u, u_n - u)) \geq 0.$$

Für $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ ist aber $F(u) = \sup_{\|d\alpha\|_\infty \leq 1} Q_\alpha(u) + \text{const}(\varphi)$, also ist auch F schwach unterhalbstetig auf $H_\varphi^1(U, S^2)$.

„ $\leq$ “ in (2.3) folgt sofort aus der schwachen Unterhalbstetigkeit von F und der Tatsache, daß für $u_n \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)$ gilt $E(u_n) = F(u_n)$; für „ $\geq$ “ wird $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ gemäß Satz 2.2 durch u_n mit nur endlich vielen Singularitäten, die alle in U liegen, approximiert, wobei $F(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(u)$ gilt, da F stetig ist; dann werden die

Singularitäten der u_n mit Hilfe von Satz 2.1 unter Energieaufwand $< 4\pi L(u_n) + \frac{1}{n}$ entfernt. Mit Hilfe eines Diagonalfolgenargumentes erhält man so eine Folge $\{v_n\} \subset C_\varphi^\infty(U, S^2)$ mit $v_n \rightharpoonup u$ und

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(v_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (E(u_n) + 4\pi L(u_n)) = F(u).$$

□

Mit Hilfe der Darstellung (2.3) der relaxierten Energie konnte gezeigt werden:

Satz 2.4. *Jeder $\mathcal{F}$ -Minimierer ist schwach harmonisch ([BBC90]) und glatt bis auf eine abgeschlossene Ausnahmemenge $\text{sing } u \subset \bar{U}$ mit $\mathcal{H}^1(\text{sing } u \cap U) < \infty$ ([GMS89]).*

Allerdings ist nicht bekannt, ob diese Regularitätssaussage optimal ist, bzw. ob $\mathcal{F}$ -Minimierer überhaupt Singularitäten haben können. Mit anderen Worten: Es ist nicht klar, ob $\inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u)$ im allgemeinen durch eine Abbildung $u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)$ realisiert wird oder nicht. Übrigens ist auch nicht bekannt, ob $C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)$ überhaupt immer eine harmonische Abbildung enthält; da jeder $\mathcal{F}$ -Minimierer schwach harmonisch ist, hätte man eine solche gefunden, wenn man zeigen könnte, daß $\inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u)$ realisiert wird.

Nun steht die Frage im Raum, ob es auch in höheren Dimensionen $m \geq 4$ ein geeignetes Funktional F gibt, so daß ein zu (2.3) oder zumindest zu (2.4) analoges Resultat gilt. Hierauf bezieht sich unser Beitrag in dieser Arbeit. Bevor wir unsere Ergebnisse dazu darstellen können, benötigen wir einige Vorbereitungen, die in den Kapiteln 3 bis 5 gegeben werden.

Kapitel 3

Ströme

In diesem Abschnitt tragen wir alle für uns relevanten Fakten über *Ströme* zusammen. Details können zum Beispiel in [Fed69] nachgelesen werden, leichter verständlich sind jedoch [Sim83], [GMS98a] und [GMS98b].

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $0 \leq k \leq m$. Mit $\mathcal{D}^k(U)$ bezeichnen wir die Menge aller C^∞ - k -Formen mit kompaktem Träger in U , welche wie üblich mit folgender Topologie ausgestattet sein soll:

$$\omega^i := \sum_{\alpha \in I(k,m)} \omega_\alpha^i dx^\alpha \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \omega := \sum_{\alpha \in I(k,m)} \omega_\alpha dx^\alpha$$

genau dann, wenn es eine kompakte Teilmenge $K \subset U$ gibt, so daß

$$\begin{cases} \text{spt } \omega_\alpha^i \subset K \text{ für alle } \alpha \in I(k,m) \text{ und für alle } i \text{ und} \\ \lim_{i \rightarrow \infty} D^\beta \omega_\alpha^i = D^\beta \omega_\alpha \text{ für alle } \alpha \in I(k,m) \text{ und für jeden Multiindex } \beta. \end{cases}$$

Dabei ist $I(k,m)$ die Menge aller Multiindizes $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ mit $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq m$ und $dx^\alpha = dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k}$.

Definition 3.1. $\mathcal{D}_k(U)$ sei der Dualraum von $\mathcal{D}^k(U)$ bezüglich dieser Topologie, die Elemente von $\mathcal{D}_k(U)$ heißen $(k\text{-})$ Ströme auf U .

Ein einfaches Beispiel für einen k -Strom auf U ist die Integration von k -Formen über eine orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ von U von lokal endlichem k -dimensionalen Hausdorff-Maß (z.B. $\mathcal{M}$ relativ abgeschlossen in U). Dieser Strom wird mit $\llbracket \mathcal{M} \rrbracket$ bezeichnet und ist definiert durch

$$\llbracket \mathcal{M} \rrbracket(\alpha) := \int_{\mathcal{M}} \alpha.$$

Definition 3.2. $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m$ heißt *abzählbar k -rektifizierbar*, wenn es paarweise disjunkte eingebettete k -dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeiten $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots$ und eine Menge $\mathcal{N}_0 \subset \mathbb{R}^m$ mit $\mathcal{H}^k(\mathcal{N}_0) = 0$ gibt, so daß

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{N}_0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{N}_i.$$

Ist $\mathcal{M}$ abzählbar k -rektifizierbar und $\mathcal{H}^k$ -meßbar mit $\mathcal{H}^k(\mathcal{M}) < \infty$, so heißt $\mathcal{M}$ *k -rektifizierbar*.

Bemerkung 3.1. Ist $\mathcal{M}$ abzählbar k -rektifizierbar und $\mathcal{H}^k$ -meßbar, so ist

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i,$$

wobei $\mathcal{H}^k(\mathcal{M}_0) = 0$ ist und jedes $\mathcal{M}_i$ eine Borel-Teilmenge von $\mathcal{N}_i$ ist. Ist außerdem $\mathcal{H}^k(\mathcal{M}) < \infty$, so gilt

$$\mathcal{H}^k(\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^k(\mathcal{M}_i).$$

Bemerkung 3.2. Eine $\mathcal{H}^k$ -meßbare, abzählbar k -rektifizierbare Menge $\mathcal{M}$ besitzt in $\mathcal{H}^k$ -fast jedem Punkt $x \in \mathcal{M}$ einen „approximativen Tangentialraum“ $T_x \mathcal{M}$, nämlich den Tangentialraum $T_x \mathcal{N}_i$ der C^1 -Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}_i$, wenn $x \in \mathcal{N}_i$. Über $\mathcal{M}$ kann man genauso integrieren wie über C^1 -Mannigfaltigkeiten, und es gelten dieselben Rechenregeln, insbesondere Flächen- und Koflächenformel. Gradient, Jacobische etc. im Punkt $x \in \mathcal{M}$ einer auf einer Umgebung von $\mathcal{M}$ definierten Lipschitz-Abbildung f definiert man einfach als Gradient, Jacobische etc. von f bezüglich $\mathcal{N}_i$, wenn $x \in \mathcal{N}_i$ ist (siehe z.B. [GMS98a], [Sim83]).

Definition 3.3. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i \subset \mathcal{N}_0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{N}_i \subset U$ sei abzählbar k -rektifizierbar und $\mathcal{H}^k$ -meßbar; die $\mathcal{N}_i$ seien wie in Definition 3.2. $\theta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{H}^k$ -meßbar und lokal $\mathcal{H}^k$ -summierbar; $\xi : \mathcal{M} \rightarrow \Lambda_k \mathbb{R}^m$ sei $\mathcal{H}^k$ -meßbar, so daß $\xi(x) \in T_x \mathcal{M}$ und $\|\xi(x)\| = 1$ für fast alle $x \in \mathcal{M}$. Dann ist durch

$$\tau(\mathcal{M}, \theta, \xi)(\omega) := \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathcal{M}_i} \theta(x) \langle \omega(x), \xi(x) \rangle d\mathcal{H}^k(x) \text{ für } \omega \in \mathcal{D}^k(U) \quad (3.1)$$

ein Strom $\tau(\mathcal{M}, \theta, \xi) \in \mathcal{D}_k(U)$ gegeben. Ein Strom dieser Form heißt *rektifizierbarer k -Strom ganzer Vielfachheit*, kurz *rektifizierbarer k -Strom*; die Menge der rektifizierbaren k -Ströme auf U sei mit $\mathcal{R}_k(U)$ bezeichnet.

Bemerkung 3.3. Ohne Einschränkung werden wir annehmen, daß $\theta|_{\mathcal{M}_i}$ konstant ist für jedes i und setzen $\theta_i := \theta|_{\mathcal{M}_i}$.

Definition 3.4. Die *Einschränkung* $T \llcorner A$ eines rektifizierbaren k -Stroms $T = \tau(\mathcal{M}, \theta, \xi) \in \mathcal{R}_k(U)$ auf eine Borel-Menge $A \subset U$ ist der rektifizierbare k -Strom $T \llcorner A = \tau(\mathcal{M} \cap A, \theta|_A, \xi|_A) \in \mathcal{R}_k(U)$. Der *Rand* $\partial T \in \mathcal{D}_{k-1}(U)$ eines Stromes $T \in \mathcal{D}_k(U)$ ist der $(k-1)$ -Strom, der definiert ist durch

$$\partial T(\omega) := T(d\omega) \quad \text{für alle } \omega \in \mathcal{D}^k(U).$$

Die *Masse* von T ist definiert durch

$$M(T) := \sup\{T(\omega) \mid \omega \in \mathcal{D}^k(U), \|\omega\|_\infty \leq 1\},$$

wobei die *Komassennorm* $\|\omega\|_\infty$ von $\omega \in \mathcal{D}^k(U)$ definiert ist durch

$$\|\omega\|_\infty := \sup_{x \in U} \sup\{\langle \omega(x), \xi \rangle \mid \xi \text{ einfaches } k\text{-Vektorfeld auf } \mathbb{R}^m \text{ mit } |\xi| = 1\};$$

ist $V \subset U$ offen, so ist die *Masse von T in V* definiert als

$$M_V(T) := \sup\{T(\omega) \mid \omega \in \mathcal{D}^k(U), \text{spt } \omega \subset V, \|\omega\|_\infty \leq 1\}.$$

Bemerkung 3.4. Die Masse ist als verallgemeinertes Volumen zu verstehen, denn für eine orientierte k -dimensionale abgeschlossene C^1 -Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} \subset U$ ist $M(\llbracket \mathcal{M} \rrbracket) = \mathcal{H}^k(\mathcal{M})$. Für einen rektifizierbaren k -Strom $\tau(\mathcal{M}, \theta, \xi) \in \mathcal{R}_k(U)$ gilt

$$M(\tau(\mathcal{M}, \theta, \xi)) = \mathcal{H}^k \llcorner \theta(\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \mathcal{H}^k(\mathcal{M}_i).$$

Dabei ist $\mathcal{H}^k \llcorner \theta$ das Radon-Maß, welches gegeben ist durch $\mathcal{H}^k \llcorner \theta(A) = \int_A \theta d\mathcal{H}^k$. θ sei dabei auf $U \setminus \mathcal{M}$ durch 0 fortgesetzt.

Satz 3.1. Sei $T = \tau(\mathcal{M}, \theta, \xi) \in \mathcal{R}_k(U)$ ein rektifizierbarer k -Strom mit $M(T) < \infty$. Dann gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{M(T \llcorner B_r(x))}{\mathcal{H}^k(B_r(x))} = 0 \quad \text{für } \mathcal{H}^k\text{-fast alle } x \in U \setminus \mathcal{M} \text{ und} \quad (3.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{M(T \llcorner B_r(x))}{\mathcal{H}^k(B_r(x))} \geq 1 \quad \text{für } \mathcal{H}^k\text{-fast alle } x \in \mathcal{M}. \quad (3.3)$$

Beweis. Dies ist eine Konsequenz des Differenziationssatzes für Radon-Maße von Radon-Nikodym ([GMS98a], 1.1.5, theorem 3 und [GMS98a], 1.1.4 theorem 1 (ii)): Es gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{M(T \llcorner B_r(x))}{\mathcal{H}^k(B_r(x))} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^k \llcorner \theta(B_r(x))}{\mathcal{H}^k(B_r(x))} = \theta$$

$\mathcal{H}^k$ -fast überall. □

Definition 3.5. Eine Folge von k -Strömen T_n auf U *konvergiert* gegen den k -Strom T auf U , $T_n \rightarrow T$, genau dann wenn $M(T - T_n) \rightarrow 0$, T_n *konvergiert schwach* gegen T , $T_n \rightharpoonup T$, genau dann wenn für alle Formen $\omega \in \mathcal{D}^k(U)$ gilt: $T_n(\omega) \rightarrow T(\omega)$.

Bemerkung 3.5. Offenbar ist die Masse schwach unterhalbstetig, das heißt es gilt $M(T) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} M(T_n)$ für alle $\mathcal{D}_k(U) \ni T_n \rightharpoonup T \in \mathcal{D}_k(U)$.

In $\mathcal{D}_k(U)$ gilt folgender (nicht besonders tiefliegende) Kompaktheitssatz (siehe z.B. [GMS98a] oder [Sim83]):

Satz 3.2. Sei $\{T_n\} \in \mathcal{D}_k(U)$ eine Folge von Strömen, die $\sup_n M_V(T_n) < \infty$ erfüllt für alle offenen Teilmengen $V \subset\subset U$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{T_{n'}\}$ und einen Strom $T \in \mathcal{D}_k(U)$, so daß $T_{n'} \rightharpoonup T$. Wegen schwacher Unterhalbstetigkeit der Masse ist natürlich

$$M_V(T) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} M_V(T_{n'}).$$

für alle offenen Teilmengen $V \subset\subset U$.

Sind alle T_n k -rektifizierbar, so hätte man gerne, daß auch der schwache Grenzwert T wieder ein rektifizierbarer k -Strom ist. Im allgemeinen ist dies allerdings falsch, wie folgendes Beispiel zeigt (siehe [GMS98a], Seite 145): Seien

$$T_n := n \left[\left(0, \frac{1}{n}\right) \right] \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R}).$$

Natürlich ist $M(T_n) = 1$ für alle n , also gibt es nach Satz 3.2 ein $T \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$, so daß $T_n \rightharpoonup T$. Wegen

$$T_n(\alpha) = n \int_0^{\frac{1}{n}} \langle \alpha(x); e_1 \rangle dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \alpha(0); e_1 \rangle = \delta_0 e_1(\alpha)$$

für alle $\alpha \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$ ist $T = \delta_0 e_1$, das heißt, der Träger des Grenzstromes $T \neq 0$ ist eine 0-dimensionale Menge. Daher ist T nicht rektifizierbar und erst recht $T \notin \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$. Das Problem hierbei ist, daß $M(\partial T_n) = 2n \rightarrow \infty$ konvergiert. Unter der Zusatzbedingung, daß auch die Randmassen beschränkt bleiben, gilt nämlich das folgende tiefliegende „closure theorem“ von Federer und Fleming: ([Fed69] 4.2.16)

Satz 3.3. Zu $k \geq 1$ sei $\{T_n\} \in \mathcal{R}_k(U)$ eine Folge von Integralströmen, die $\sup_n \{M_V(T_n) + M_V(\partial T_n)\} < \infty$ erfüllt für alle offenen Teilmengen $V \subset\subset U$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{T_{n'}\}$ und einen Strom $T \in \mathcal{R}_k(U)$, so daß $T_{n'} \rightharpoonup T$. Da dann auch $\partial T_{n'} \rightharpoonup \partial T$ gilt, folgt wegen schwacher Unterhalbstetigkeit der Masse außerdem

$$M_V(T) + M_V(\partial T) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \{M_V(T_{n'}) + M_V(\partial T_{n'})\}$$

für alle offenen Teilmengen $V \subset\subset U$.

Mit Hilfe dieses „closure theorem“ kann folgender, ebenfalls sehr tiefliegende Rektifizierbarkeitssatz bewiesen werden:

Satz 3.4. *Sei $k \geq 1$. Für $T \in \mathcal{R}_k(U)$ mit $M(\partial T) < \infty$ ist automatisch auch $\partial T \in \mathcal{R}_{k-1}(U)$.*

Definition 3.6. Sei $S \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^m)$ ein k -rektifizierbarer Strom, welcher Rand eines Stromes $T \in \mathcal{R}_{k+1}(\mathbb{R}^m)$ mit $M(T) < \infty$ ist. Dann heißt

$$m_i(S) := \inf\{M(T) \mid T \in \mathcal{R}_{k+1}(\mathbb{R}^m), \partial T = S\}$$

Masse einer (geometrischen) Minimalverbindung zu S . Mit Hilfe von Satz 3.3 sehen wir, daß es einen (nicht notwendig eindeutigen) minimierenden Strom $T_0 \in \mathcal{R}_{k+1}(\mathbb{R}^m)$ gibt mit $\partial T_0 = S$ und $M(T_0) = m_i(S)$. T_0 nennen wir *eine (geometrische) Minimalverbindung von S (mit ganzer Vielfachheit)*; das ist die Bedeutung des Subskripts „i“ für „integer“.

$$m_r(S) := \inf\{M(T) \mid T \in \mathcal{D}_{k+1}(\mathbb{R}^m), \partial T = S\}$$

heißt *Masse einer reellen Minimalverbindung von $S \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^m)$.* Wie oben gibt es, wenn $m_r(S) < \infty$, einen minimierenden Strom T_0 , der auch eine *reelle Minimalverbindung von S* genannt wird.

Bemerkung 3.6. Es gilt

$$m_r(S) = \inf\{M(\frac{T}{l}) \mid T \in \mathcal{R}_{k+1}(\mathbb{R}^m), \partial T = lS\} \leq m_i(S)$$

(siehe z.B. [GMS98b], Kapitel 1.3.4, Korollar 2), das heißt, man braucht nur Verbindungen der Form (3.1) zu betrachten, wobei jetzt $\theta_i \in \mathbb{Q}$ bzw. $\theta_i \in \mathbb{R}$ zugelassen ist; daher der Name *reelle Minimalverbindung*.

Bemerkung 3.7. Natürlich ist $m_r(S) \leq m_i(S)$ für jeden rektifizierbaren k -Strom $S \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^m)$, wobei „ $<$ “ tatsächlich vorkommt: Es gibt sogar eine Kurve endlicher Länge $\Gamma \subset \mathbb{R}^4$, so daß $m_r([\Gamma]) < m_i([\Gamma])$ ist. Dies wurde erstmals von Young in [You63] bewiesen, weitere Beispiele sind in [Mor84] und [Whi84] zu finden. Ist allerdings $S \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^m)$ mit $k = 0$ oder $k \geq m - 2$, so ist $m_r(S) = m_i(S)$, wie Federer in [Fed74] gezeigt hat.

Bemerkung 3.8. Ist $S \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^m)$ mit $m_r(S) < \infty$, so gilt

$$m_r(S) = \sup_{\substack{\psi \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^m) \\ \|d\psi\|_\infty \leq 1}} S(\psi).$$

Dies folgt im wesentlichen aus dem Satz von Hahn-Banach (vgl. [Fed69] 4.1.12).

Kapitel 4

$R_\varphi^\infty(U, S^2)$ -Abbildungen und Minimalverbindungen

Wie immer sei $U \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes, C^∞ -glattes Gebiet und $\varphi \in C^\infty(\bar{U}, S^2)$. Der Raum $H^1(U, S^2)$ ist deutlich komplizierter als der „gewöhnliche“ Sobolev-Raum $H^1(U, \mathbb{R}^3)$: Zwar kann jedes $u \in H^1(U, S^2)$ in der Normtopologie durch eine Folge $u_n \in C^\infty(\bar{U}, \mathbb{R}^3) \cap H^1(U, \mathbb{R}^3)$ approximiert werden, jedoch liegen die u_n im allgemeinen *nicht* in $C^\infty(\bar{U}, S^2)$. Aber jedes $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ ist (starker) Grenzwert einer Folge von „nicht sehr singulären“ $u_n \in H_\varphi^1(U, S^2)$:

Definition 4.1.

$$R_\varphi^0(U, S^2) := \{u \in H_\varphi^1(U, S^2) \mid u \in C(\bar{U} \setminus \mathcal{M}, S^2), \mathcal{M} = \cup_{i=1}^l \mathcal{M}_i \text{ mit} \\ (m-3)\text{-dimensionalen, zusammenhängenden, kompakten} \\ \text{berandeten } C^1\text{-Untermannigfaltigkeiten } \mathcal{M}_i \text{ von } U\},$$

$$R_\varphi^\infty(U, S^2) := \{u \in H_\varphi^1(U, S^2) \mid u \in C^\infty(\bar{U} \setminus \mathcal{M}, S^2), \mathcal{M} = \cup_{i=1}^l \mathcal{M}_i \text{ mit} \\ (m-3)\text{-dimensionalen, zusammenhängenden, kompakten} \\ \text{berandeten } C^1\text{-Untermannigfaltigkeiten } \mathcal{M}_i \text{ von } U\}.$$

Satz 4.1. $R_\varphi^0(U, S^2)$ und $R_\varphi^\infty(U, S^2)$ liegen bezüglich der Normtopologie dicht in $H_\varphi^1(U, S^2)$.

Beweisskizze. Der vollständige Beweis ist in [Bet91] zu finden, in übersichtlicher Form auch in [HL]. Für glatte beschränkte Gebiete $U \subset \mathbb{R}^3$ ist der Satz schon aus [BZ88] bekannt. Wir wollen hier kurz Bethuels Konstruktion der approximierenden Abbildungen $w_n \in R_\varphi^0(U, S^2)$ und $\tilde{w}_n \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$ skizzieren: Es wird von einer „Würfel“zerlegung von $\bar{U}$ ausgegangen, so daß $u|_C \in H^1(C, S^2)$ ist für jede k -Zelle C der Zerlegung, $k = 0, \dots, m$. Alle folgenden Zerlegungen

werden jeweils so vorgenommen, daß wieder $u|_C \in H^1(C, S^2)$ für jede k -Zelle C , $k = 0, \dots, m$. Außerdem muß eine bestimmte Bedingung an die Energie von u auf jedem k -Skelett der Zerlegung erfüllt sein. Zuerst wird jeder Würfel der Anfangszerlegung in $(n+1)^m$ kleine Würfel Q_i zerlegt. Die Ränder dieser kleinen Würfel werden noch feiner unterteilt. Auf den 1-Zellen dieser Randzerlegung ist u nach dem Sobolev-Einbettungssatz stetig, hier wählt man $u_n := u$. Nun wird u_n radial konstant auf die 2-Zellen der Randzerlegung fortgesetzt, das Resultat wird in der H^1 -Normtopologie durch stetige Abbildungen approximiert, die auf dem 1-Skelett mit u übereinstimmen. Daß dies möglich ist, kann in [Bet91] bzw. in [HL] nachgelesen werden. Durch sukzessive radial konstante Fortsetzung erhält man nun u_n auf dem gesamten $(m-1)$ -Skelett der Würfelzerlegung. War u schon stetig auf einer $(m-1)$ -Zelle, so kann man dort natürlich $u_n = u$ wählen. Nun muß u_n noch auf den m -Zellen definiert werden. Dazu werden die Q_i in „gute“ und „schlechte“ Würfel eingeteilt, je nachdem, ob die Energie von u auf ihren k -Skeletten, $1 \leq k \leq m$, eine gewisse Schranke übersteigt oder nicht. Da es relativ wenige „schlechte“ Würfel gibt, kann man $\tilde{u}$ einfach radial konstant auf ihr Inneres fortsetzen. Von den „guten“ Würfeln gibt es aber sehr viele, deshalb muß man hier sorgfältiger vorgehen: Jeder „gute“ Würfel wird so fein unterteilt, daß die Oszillation von u auf jeder so entstandenen 1-Zelle sehr klein ist. Man kann dann $u|_{Q^1}$ (Q^1 ist das 1-Skelett) so zu $v \in H^1(Q, S^2)$ auf ganz Q fortsetzen, daß $v(C)$ für jede m -Zelle C in einer kleinen Kugel in S^2 enthalten ist. v kann dann durch stetige Abbildungen approximiert werden, ohne auf dem 1-Skelett verändert zu werden (siehe [Bet91], [HL]). Da die so erhaltene Approximation nicht mit den anderen Würfeln zusammenpaßt, wird sie auf einen konzentrischen Teilwürfel $\tilde{Q}$ von Q „zusammengedrückt“. Dies ist $u_n|_{\tilde{Q}}$. Jetzt muß u_n nur noch auf $Q \setminus \tilde{Q}$ definiert werden. Dazu sei $\Pi : Q \setminus \tilde{Q} \rightarrow \partial Q$ die Zentralprojektion bezüglich des Würfelmittelpunktes von Q von $Q \setminus \tilde{Q}$ auf ∂Q . Auf dem Urbild $\Pi^{-1}(C)$ einer 1-Zelle der Randzerlegung (die man gebraucht hatte, um u_n auf dem $(m-1)$ -Skelett zu definieren) setzt man $u_n := u_n \circ \Pi$. Somit ist u_n auf dem 2-Skelett von $Q \setminus \tilde{Q}$ definiert. Durch sukzessive radial konstante Fortsetzung erhält man u_n auf ganz $Q \setminus \tilde{Q}$ und somit auf ganz $\bar{U}$. u_n ist stetig bis auf eine Ausnahmemeinde der Dimension $m-3$. Nun werden diese Singularitäten ins Innere von U gedrückt, indem man u_n ersetzt durch eine Abbildung w_n , welche in einer ε -Umgebung von ∂U konstant ist in Richtungen senkrecht zu ∂U und außerhalb einer 2ε -Umgebung von ∂U mit u_n übereinstimmt. Es ist $w_n \in R_\varphi^0(U, S^2)$. Mit Hilfe eines Glättungsargumentes erhält man schließlich eine Abbildung $\tilde{w}_n \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$ mit $\text{sing } \tilde{w}_n = \text{sing } w_n$. Eine komplizierte Rechnung zeigt, daß bei „richtiger“ Wahl der Zerlegungen und $n \rightarrow \infty$ dann $w_n \rightarrow u$ konvergiert in H^1 und $\tilde{w}_n \rightarrow u$ ebenfalls in H^1 . $\square$

Obige Konstruktion der approximierenden Abbildungen zeigt, daß auch folgender Satz gilt, der eine zentrale Rolle in dieser Arbeit spielen wird:

Satz 4.2. *Sei W relativ offen in $\bar{U}$ und $V \subset \bar{U}$ sei eine Umgebung von $\bar{U} \setminus W$ in $\bar{U}$, so daß gilt $\text{dist}(\partial W \cap U, \partial V \cap U) > 0$. Dann gilt*

- (i) *Zu $u, v \in H_\varphi^1(U, S^2)$ mit $u|_V = v|_V$ $\mathcal{L}^m$ -fast überall gibt es Folgen $\{u_n\}$ und $\{v_n\} \subset R_\varphi^\infty(U, S^2)$, so daß $u_n \rightarrow u$, $v_n \rightarrow v$ und $u_n|_{\bar{U} \setminus W} = v_n|_{\bar{U} \setminus W}$ $\mathcal{L}^m$ -fast überall für alle n .*
- (ii) *Ist $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ stetig auf V , so gibt es eine Folge $\{u_n\} \subset R_\varphi^0(U, S^2)$, so daß $u_n \rightarrow u$ in $H_\varphi^1(U, S^2)$ und $u_n|_{\bar{U} \setminus W} = u|_{\bar{U} \setminus W}$ für alle n . Ferner gibt es eine Folge $\{\tilde{u}_n\} \subset R_\varphi^\infty(U, S^2)$ mit $\text{sing } \tilde{u}_n = \text{sing } u_n$ und $\int_U (|\tilde{u}_n - u_n|^2 + |D\tilde{u}_n - Du_n|^2) < \frac{1}{n}$.*

Beweis. Man wählt einfach die anfängliche „Würfel“-zerlegung von U so fein, daß für jede Zelle C jeder Dimension gilt:

$$\bar{C} \cap \partial W = \emptyset \quad \text{oder} \quad \bar{C} \cap \partial V = \emptyset.$$

Zusätzlich muß natürlich die Bedingung aus [Bet91] erfüllt bleiben, daß $u \in H^1(C, S^2)$ für jede k -Zelle C , $k = 0, \dots, m$. Bethuels Konstruktion ohne das Glättungsargument liefert dann die Behauptung für R_φ^0 -Abbildungen; in (i) muß dabei W durch eine relativ offene Menge $\tilde{W} \subset \bar{U}$ ersetzt werden, deren Abschluß in W enthalten ist. Dann bleibt noch genügend Platz für das Glättungsargument, so daß die Behauptung für R_φ^∞ -Abbildungen folgt. $\square$

Der Rest dieses Kapitels beschäftigt sich mit dem Problem, inwieweit R_φ^∞ -Abbildungen durch glatte approximiert werden können.

Definition 4.2. Zu $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ sei der *Singularitätenstrom* $S_u \in \mathcal{D}_{m-3}(\mathbb{R}^m)$ definiert durch

$$S_u(\alpha) := \int_U u^* \omega \wedge d\alpha - \int_{\partial U} \varphi^* \omega \wedge \alpha \quad \text{für alle } \alpha \in \mathcal{D}^{m-3}(\mathbb{R}^m),$$

wobei ω eine 2-Form auf S^2 mit $\int_{S^2} \omega = 1$ ist.

Bemerkung 4.1. S_u ist unabhängig von der gewählten Volumenform ω . Denn ist $4\pi\omega_0$ die Standard-Volumenform auf S^2 , so ist $d(\omega_0 - \omega) = 0$, daher $\omega_0 - \omega = d\beta$ für eine 1-Form β auf S^2 , die glatt mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}^3$ fortgesetzt sei. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_U u^* \omega_0 \wedge d\alpha - \int_U u^* \omega \wedge d\alpha - \int_{\partial U} \varphi^* \omega_0 \wedge \alpha + \int_{\partial U} \varphi^* \omega \wedge \alpha \\ = \int_U u^*(d\beta) \wedge d\alpha - \int_{\partial U} \varphi^*(d\beta) \wedge \alpha. \end{aligned}$$

Für glatte u ist $d(u^*(d\beta) \wedge \alpha) = u^*(d\beta) \wedge d\alpha$ und daher

$$\int_U u^*(d\beta) \wedge d\alpha - \int_{\partial U} \varphi^*(d\beta) \wedge \alpha = 0;$$

für $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ folgt dies durch Approximation in $H^1(U, \mathbb{R}^3)$ durch eine Folge $u_n \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, \mathbb{R}^3)$.

Bemerkung 4.2. Es gilt $\text{spt } S_u \subset \text{sing } u$. Ist nämlich u stetig auf einer offenen Kugel $B \subset\subset U$, und ist $\text{spt } \alpha \subset B$, so sieht man mit Hilfe von Approximation von $u|_B$ durch $u_n \in C^\infty(B, S^2)$ und $d(u_n^*\omega) = u_n^*d\omega = 0$, also $u_n^*\omega \wedge d\alpha = \pm d(u_n^*\omega \wedge \alpha)$, daß $\int_U u^*\omega \wedge d\alpha = 0$ gilt. Ist u stetig auf einer relativ offenen Umgebung B eines Randpunktes $x \in \partial U$ und ist $\tilde{u}$ eine stetige Fortsetzung von u auf eine offene Umgebung $\tilde{B} \subset \mathbb{R}^m$ von B , so folgt genauso $\int_U u^*\omega \wedge d\alpha = \int_U \tilde{u}^*\omega \wedge d\alpha = \int_{\partial U} \varphi^*\omega \wedge \alpha$ für α mit $\text{spt } \alpha \subset \tilde{B}$.

Ist $u \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$ mit $\text{sing } u \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{M}_i$ ($\mathcal{M}_i$ wie oben), so kann jeder der singulären Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}_i$ wie folgt ein Index zugeordnet werden (siehe [Pak01]):

Definition 4.3. Sei $u \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$ mit $\text{sing } u \subset \bigcup_{i=1}^k \mathcal{M}_i \subset\subset U$ und $\mathcal{M}_i$ wie oben. Für $i \geq 1$ sei $\mathcal{M}_i$ durch ein stetiges $(m-3)$ -Vektorfeld ξ_i orientiert. Zu $a \in \mathcal{M}_i$ sei N_a der 3-dimensionale affine Unterraum durch a orthogonal zu $\xi_i(a)$. Für genügend kleines $\delta > 0$ betrachten wir die Kugel $M_{a,\delta} := B_\delta(a) \cap N_a$, die orientiert sei durch den 3-Vektor m_a , so daß $\langle dx_1(a) \wedge \dots \wedge dx_m(a), \xi_i(a) \wedge m_a \rangle = (-1)^m$ ist. Sei $\Sigma_{a,\delta} := \partial M_{a,\delta}$. Dann ist der Limes der Grade von u auf $\Sigma_{a,\delta}$, also der Integrale $\int_{\Sigma_{a,\delta}} u^*\omega$, bei $\delta \searrow 0$ unabhängig von $a \in \mathcal{M}_i$. Dieser Limes heißt *Index* von u auf $\mathcal{M}_i$ und wird mit $\text{ind}_{\mathcal{M}_i} u$ bezeichnet.

Definition 4.4. Ist $u \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$ und $\mathcal{M}$ wie in Definition 4.1, so heißt $y \in S^2$ *regulärer Wert* von u , wenn y ein regulärer Wert von $u|_{U \setminus \mathcal{M}}$ ist. Das heißt, für alle $x \in (u|_{U \setminus \mathcal{M}})^{-1}(y)$ hat $Du|_{U \setminus \mathcal{M}}$ maximalen Rang, oder es ist $(u|_{U \setminus \mathcal{M}})^{-1}(y) = \emptyset$.

Bemerkung 4.3. Ein Satz von Sard besagt, daß $\mathcal{H}^2$ -fast jedes $y \in S^2$ regulärer Wert von $u \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$ ist, und die Menge der regulären Werte ist $\mathcal{H}^2$ -fast bestimmt durch u (unabhängig von der Wahl von $\mathcal{M}$). Ist y ein regulärer Wert von u , so ist $(u|_{U \setminus \mathcal{M}})^{-1}(y)$ eine $(m-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $U \setminus \mathcal{M}$, also lokal in $U \setminus \mathcal{M}$ Vereinigung von endlich vielen $(m-2)$ -dimensionalen zusammenhängenden Flächenstücken.

Definition 4.5. Für jeden regulären Wert $y \in S^2$ von $u \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$ sei $T_u^y \in \mathcal{D}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ definiert durch

$$T_y^u := \tau \left(u^{-1}(y), 1, \frac{D(u)}{|D(u)|} \right),$$

wobei $D(u)$ das zu $u^*\omega$ duale Vektorfeld ist, welches durch

$$\langle D(u)(x), \Psi \rangle \omega_{\mathbb{R}^m} = u^*\omega(x) \wedge \Psi \quad \forall \Psi \in \Lambda^{m-2}(\mathbb{R}^m)$$

definiert ist. Dabei ist $\omega_{\mathbb{R}^m}$ die Standardvolumenform auf $\mathbb{R}^m$ und ω ist die Standardvolumenform auf S^2 .

Bemerkung 4.4. Für fast jeden regulären Wert y von $u \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$ gilt $T_y^u \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ mit $\text{spt } T_y^u \subset \bar{U}$: In [Pak01], Lemma 1 wird gezeigt, daß $D(u)(x)$ tangential zur Mannigfaltigkeit $u^{-1}(y)$ ist für jeden regulären Wert $y = u(x)$, und daß fast überall auf U gilt $|D(u)| = \frac{1}{4\pi}|Ju|$, wobei $Ju = \sqrt{\det(DuDu^*)}$ die Jacobische von u ist. Außerdem ist $M(T_y^u) < \infty$ für fast jeden regulären Wert $y \in S^2$. Dies sieht man wie folgt mit Hilfe der Koflächenformel:

$$\int_{S^2} M(T_y^u) dy = \int_{S^2} \int_{u^{-1}(y)} d\mathcal{H}^{m-2} d\mathcal{H}^2(y) = \int_U |Ju| \leq \frac{1}{2} \int_U |Du|^2.$$

Die Rechnung zeigt außerdem, daß es eine Menge mit positivem $\mathcal{H}^2$ -Maß von regulären Werten $y \in S^2$ gibt, so daß $T_y^u \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ mit $M(T_y^u) \leq \frac{1}{4\pi} E(u)$.

Satz 4.3. Sei $u \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$. Für fast jeden regulären Wert $y \in S^2$ von u ist $T_y^u \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ und es gilt

$$\partial T_y^u = S_u + \tau \left((\varphi|_{\partial U})^{-1}, 1, \frac{D(\varphi|_{\partial U})}{|D(\varphi|_{\partial U})|} \right), \quad (4.1)$$

wobei $D(\varphi|_{\partial U})$ das zu $(\varphi|_{\partial U})^*\omega$ duale Vektorfeld ist, welches durch

$$\langle D(\varphi|_{\partial U})(x), \Psi \rangle \omega_{E_x} = (\varphi|_{\partial U})^*\omega(x) \wedge \Psi \quad \forall \Psi \in \Lambda^{m-3}(E_x) \quad (4.2)$$

definiert ist. Dabei ist ω_{E_x} die Standardvolumenform auf dem Tangentialraum $E_x = T_x(\partial U)$ und ω die Standardvolumenform auf S^2 . Es ist $S_u \in \mathcal{R}_{m-3}(\mathbb{R}^m)$ für jedes $u \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$ und es gilt (mit $\mathcal{M}_i$ und ξ_i wie in Definition 4.3)

$$S_u = \sum_{i=1}^l \tau(\mathcal{M}_i, \text{ind}_{\mathcal{M}_i} u, \xi_i).$$

Beweis. Der Beweis wird in [Pak01] geführt und verläuft wie folgt:

1. ∂T_y^u ist eine „flache Kette“.
2. Mit Hilfe von Konstanzsatz ([Fed69] 4.1.31 bzw. [GMS98a] 5.3.1 Theorem 3) und Verschwindungssatz ([Fed69] 4.1.21) wird gezeigt, daß ∂T_y^u von der Form

$$\sum_i r_y^i \tau(\mathcal{M}_i, 1, \xi_i) + \tau \left((\varphi|_{\partial U})^{-1}(y), 1, \frac{D(\varphi|_{\partial U})}{|D(\varphi|_{\partial U})|} \right)$$

ist.

3. Mit Hilfe der „slicing theory“ wird gezeigt, daß $r_y^i = \text{ind}_{\mathcal{M}_i} u$ ist für fast alle regulären Werte $y \in S^2$ von u .
4. Mit Hilfe der Koflächenformel werden jetzt sowohl (4.1) als auch (4.2) bewiesen.

□

Bemerkung 4.5. Satz 4.3 zeigt, daß $T_y^u - T_y^\varphi \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ gilt mit $\partial(T_y^u - T_y^\varphi) = S_u$ für fast alle regulären Werte $y \in S^2$ von $u \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$. Mit einer Rechnung wie in Bemerkung 4.4 sieht man, daß man $y \in S^2$ außerdem so wählen kann, daß $M(T_y^u - T_y^\varphi) \leq \frac{1}{4\pi}(E(u) + E(\varphi))$. Es ist also

$$m_i(S_u) \leq \frac{1}{4\pi}(E(u) + E(\varphi))$$

für jedes $u \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$.

Folgender Satz aus [Pak02], der in allgemeinerer Form in [PR] bewiesen wird, bringt die Masse einer geometrischen Minimalverbindung $m_i(S_u)$ zu S_u mit der Approximierbarkeit von $R_\varphi^\infty(U, S^2)$ -Abbildungen durch glatte Abbildungen in Zusammenhang:

Satz 4.4. *Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes, C^∞ -glattes Gebiet und $\varphi \in C^\infty(\bar{U}, S^2)$. Dann gibt es zu jedem $u \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$ eine Folge $\{u_n\} \subset C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)$ mit $u_n \rightharpoonup u$ und $u_n \rightarrow u$ fast überall, so daß gilt*

$$E(u_n) < E(u) + 4\pi m_i(S_u) + \frac{1}{n}.$$

Die Konstruktion der approximierenden Abbildungen u_n ist eine Anpassung der Konstruktion im Beweis von Satz 2.1. Mit Hilfe eines Diagonalfolgenargumentes folgt aus Satz 4.1 und Satz 4.4:

Satz 4.5. $C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)$ liegt schwach folgendicht in $H_\varphi^1(U, S^2)$.

Bemerkung 4.6. Aus Satz 4.5 folgt, daß die relaxierte Energie

$$\mathcal{F}(u) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n) \mid u_n \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2), u_n \rightharpoonup u \right\}$$

für alle $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ endlich ist.

Kapitel 5

Graphenströme

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes, C^∞ -glattes Gebiet. Ein spezielles Beispiel für einen Integralstrom $G_u \in \mathcal{R}_m(\mathbb{R}^{m+3})$ mit $\text{spt } G_u \subset \bar{U} \times S^2$ ist die Integration über den Graphen

$$\mathcal{G}_u := \{(x, u(x)) \in U \times S^2\}$$

von $u \in C^\infty(\bar{U}, S^2)$. Mit

$$(\text{id} \bowtie u)(x) := (x, u(x))$$

ist für alle $\beta \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^{m+3})$

$$G_u(\beta) := \int_{\mathcal{G}_u} \beta = \int_U (\text{id} \bowtie u)^* \beta.$$

Da $\Lambda_m D(\text{id} \bowtie u) = \Lambda_m(\text{id} \bowtie Du)$ ein Polynom vom Grad $\leq \text{rang}(Du) \leq 2$ in Du ist, ist letzteres auch für $u \in H^1(U, S^2)$ endlich.

Definition 5.1. Der *Graphenstrom* $G_u \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^{m+3})$ zu $u \in H^1(U, S^2)$ ist definiert durch

$$G_u(\beta) := \int_U (\text{id} \bowtie u)^* \beta \text{ für alle } \beta \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^m).$$

Satz 5.1. Der Graphenstrom G_u zu $u \in H^1(U, S^2)$ ist ein rektifizierbarer m -Strom auf $\mathbb{R}^{m+3}$, $G_u \in \mathcal{R}_m(\mathbb{R}^{m+3})$, und es gilt

$$M(G_u) \leq (1 + \frac{m}{2}) \mathcal{L}^m(U) + mE(u).$$

Beweis. (Siehe auch [GMS98a], [GMS98b].) Daß $G_u \in \mathcal{R}_m(\mathbb{R}^{m+3})$ ist, folgt aus einem „Lusin-artigen“ Approximationssatz (siehe [EG92] Kapitel 6.6.3): Auf meßbaren Mengen $A_n \subset U$ mit $\mathcal{L}^m(U \setminus A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ stimmt u mit C^1 -Funktionen $v_n : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ überein. Dann gilt $G_{v_n|_{A_n}} \in \mathcal{R}_m(\mathbb{R}^{m+3})$ und $M(G_u - G_{v_n|_{A_n}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Daher ist auch $G_u \in \mathcal{R}_m(\mathbb{R}^{m+3})$. Für die Massenabschätzung berechnet man für die kanonische Basis $e = e_1 \wedge \dots \wedge e_m$ von $\Lambda_m \mathbb{R}^m$ die Euklidische Norm

$$|\Lambda_m D(\text{id} \rtimes u)e| = \left(1 + \sum_{i=1}^m |\partial_i u|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq m} |\partial_i u \wedge \partial_j u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Für $\beta \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^{m+3})$ mit $\|\beta\|_\infty \leq 1$ gilt daher

$$\begin{aligned} | \langle \beta(x, u(x)), \Lambda_m D(\text{id} \rtimes u)(x)e \rangle | &\leq 1 + \sum_{i=1}^m |\partial_i u(x)| + \sum_{1 \leq i < j \leq m} |\partial_i u(x) \wedge \partial_j u(x)| \\ &\leq (1 + \frac{m}{2}) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^m |\partial_i u(x)| \right)^2 \leq 1 + \frac{m}{2} (1 + |Du(x)|^2), \end{aligned}$$

woraus $M(G_u) \leq (1 + \frac{m}{2})\mathcal{L}^m(U) + mE(u)$ folgt. $\square$

Lemma 5.1. *Konvergiert $u_n \rightarrow u$ in $H^1(U, S^2)$, so gilt $G_{u_n} \rightarrow G_u$.*

Beweis. (Siehe auch [GMS98a], [GMS98b].) Für $\beta \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^{m+3})$ und die kanonische Basis $e = e_1 \wedge \dots \wedge e_m$ von $\Lambda_m \mathbb{R}^m$ berechnen wir

$$\begin{aligned} |G_u(\beta) - G_{u_n}(\beta)| &\leq \int_U | \langle \beta(\text{id} \rtimes u) - \beta(\text{id} \rtimes u_n); \Lambda_m(\text{id} \rtimes Du)e \rangle | \\ &\quad + \int_U | \langle \beta(\text{id} \rtimes u_n); \Lambda_m(\text{id} \rtimes Du)e - \Lambda_m(\text{id} \rtimes Du_n)e \rangle |. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Es gilt

$$| \langle \beta(\text{id} \rtimes u) - \beta(\text{id} \rtimes u_n); \Lambda_m(\text{id} \rtimes Du)e \rangle | \leq 2\|\beta\|_\infty (1 + \frac{m}{2}(1 + |Du|^2)),$$

und nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert $\beta \circ (\text{id} \rtimes u_n) \rightarrow \beta \circ (\text{id} \rtimes u)$ fast überall. Da dieses Argument auf jede Teilfolge von $\beta \circ (\text{id} \rtimes u_n)$ angewendet werden kann, gilt

$$\int_U | \langle \beta(\text{id} \rtimes u) - \beta(\text{id} \rtimes u_n); \Lambda_m(\text{id} \rtimes Du)e \rangle | \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Für das zweite Integral in (5.1) berechnen wir

$$\begin{aligned} &| \langle \beta(\text{id} \rtimes u_n(x)); \Lambda_m(\text{id} \rtimes Du(x))e - \Lambda_m(\text{id} \rtimes Du_n(x))e \rangle | \\ &\leq \|\beta\|_\infty |\Lambda_m(\text{id} \rtimes Du(x))e - \Lambda_m(\text{id} \rtimes Du_n(x))e| \\ &\leq \|\beta\|_\infty \left(\sum_{i=1}^m |\partial_i u_n(x) - \partial_i u(x)| + \sum_{1 \leq i < j \leq m} |\partial_i u_n(x) \wedge \partial_j u_n(x) - \partial_i u(x) \wedge \partial_j u(x)| \right) \\ &\leq \|\beta\|_\infty (\sqrt{m}|Du_n(x) - Du(x)| + m(|Du_n(x)| + |Du(x)|)|Du_n(x) - Du(x)|). \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \int_U | < \beta(\text{id} \rtimes u_n); \Lambda_m(\text{id} \rtimes Du)e - \Lambda_m(\text{id} \rtimes Du_n)e > | \\ \leq \|\beta\|_\infty (\sqrt{m} \mathcal{L}^m(U)^{\frac{1}{2}} + m(\|Du_n\|_{L^2} + \|Du\|_{L^2}) \|Du - Du_n\|_{L^2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

□

Satz 5.2. Sei $\varphi \in C^\infty(\bar{U}, S^2)$ und sei $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$. Dann gilt

$$(i) \quad \partial(G_u - G_\varphi) = S_u \times \llbracket S^2 \rrbracket$$

(ii) Konvergiert $u_n \rightarrow u$ in H^1 , dann gilt $S_{u_n} \rightharpoonup S_u$.

Beweis. (i) (Vergleiche [Pak02], Beweis von Proposition 3.1.) Seien $\pi_{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^{m+3} \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\pi_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^{m+3} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Projektionen auf $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Dann ist für $\alpha \in \mathcal{D}^{m-3}(\mathbb{R}^m)$ und $\omega \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} S_u(\alpha) \int_{S^2} \omega &= \int_U u^* \omega \wedge d\alpha - \int_{\partial U} \varphi^* \omega \wedge \alpha \\ &= \int_U (\text{id} \rtimes u)^* (\pi_{\mathbb{R}^m}^* d\alpha \wedge \pi_{\mathbb{R}^3}^* \omega) - \int_U (\text{id} \rtimes \varphi)^* (\pi_{\mathbb{R}^m}^* d\alpha \wedge \pi_{\mathbb{R}^3}^* \omega) \\ &= G_u(d(\pi_{\mathbb{R}^m}^* \alpha) \wedge \pi_{\mathbb{R}^3}^* \omega) - G_\varphi(d(\pi_{\mathbb{R}^m}^* \alpha) \wedge \pi_{\mathbb{R}^3}^* \omega) \\ &= \partial G_u(\pi_{\mathbb{R}^m}^* \alpha \wedge \pi_{\mathbb{R}^3}^* \omega) - \partial G_\varphi(\pi_{\mathbb{R}^m}^* \alpha \wedge \pi_{\mathbb{R}^3}^* \omega). \end{aligned}$$

Außerdem ist $\partial(G_u - G_\varphi)(\pi_{\mathbb{R}^m}^* \alpha \wedge \pi_{\mathbb{R}^3}^* \omega) = 0$ für alle $\omega \in \mathcal{D}^l(\mathbb{R}^3)$ und $\alpha \in \mathcal{D}^{m-1-l}(\mathbb{R}^m)$, wenn $l = 0, 1, 3$. Dies folgt, da nach dem Satz von Stokes $\partial(G_{u_n} - G_\varphi) = 0$ ist für $u_n \in C^\infty(\bar{U}, \mathbb{R}^3)$, und da bei $u_n \rightarrow u$ in der H^1 -Norm

$$G_{u_n}(d(\pi_{\mathbb{R}^m}^* \alpha \wedge \pi_{\mathbb{R}^3}^* \omega)) \rightarrow G_u(d(\pi_{\mathbb{R}^m}^* \alpha \wedge \pi_{\mathbb{R}^3}^* \omega))$$

konvergiert, wenn $l = 0, 1$ ist, während $G_u(d(\pi_{\mathbb{R}^m}^* \alpha \wedge \pi_{\mathbb{R}^3}^* \omega)) = 0$ ist für $l = 3$ und $u \in H^1(U, S^2)$. Das bedeutet gerade

$$\partial(G_u - G_\varphi) = S_u \times \llbracket S^2 \rrbracket \tag{5.2}$$

(vgl. [Fed69] 4.1.8). (ii) folgt mit Hilfe von Lemma 5.1 aus (i). □

Bemerkung 5.1. Konvergiert u_n nur schwach gegen u , so konvergiert G_{u_n} im allgemeinen *nicht* schwach gegen G_u : Denn sonst gälte auch $\partial G_{u_n} \rightharpoonup \partial G_u$, also wegen Satz 5.2 (i) $S_{u_n} \rightharpoonup S_u$. Da $C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)$ nach Satz 4.5 schwach dicht in $H_\varphi^1(U, S^2)$ liegt und für $u_n \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)$ gilt $S_{u_n} = 0$, wäre $S_u = 0$ für alle $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$. Aber ist zum Beispiel $U = B^3$ die dreidimensionale offene Einheitskugel, $\varphi = \text{const}$ und $u \in C_\varphi^\infty(\bar{U} \setminus \{\pm \frac{1}{2}e_1\}, S^2)$, so ist nach Satz 4.3 $S_u \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^3)$, und für alle

$\alpha \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R}^3) = C_{\text{kpt}}^\infty(\mathbb{R}^3)$ ist $S_u(\alpha) = \alpha(\frac{1}{2}e_1) - \alpha(-\frac{1}{2}e_1) \neq 0$ im allgemeinen. Aber da nach Satz 5.1 gilt

$$M(G_{u_n}) \leq C(\mathcal{L}^m(U) + E(u_n)) \leq K$$

für eine Konstante K unabhängig von n , wenn $C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2) \ni u_n \rightharpoonup u \in H_\varphi^1(U, S^2)$, gibt es nach Satz 3.3 ein $T \in \mathcal{R}_m(\mathbb{R}^{m+3})$ mit $\partial(T - G_\varphi) = 0$, so daß (nach Übergang zu einer Teilfolge) $G_{u_n} \rightharpoonup T$ konvergiert. In [GMS98a] und [GMS98b] wird gezeigt, daß T eine besondere Struktur hat, nämlich $T = G_u - L \times \llbracket S^2 \rrbracket$ für ein $L \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$:

Definition 5.2. Ein Integralstrom $T \in \mathcal{R}_m(U \times \mathbb{R}^3)$ mit $\text{spt } T \subset U \times S^2$ und $\partial T = 0$, der die Form $T = G_{u \llcorner} (U \times \mathbb{R}^3) - L \times \llbracket S^2 \rrbracket$ hat für ein $u \in H^1(U, S^2)$ und ein $L \in \mathcal{R}_{m-2}(U)$ mit $M(L) < \infty$, heißt *kartesischer Strom* (Siehe [GMS98a] und [GMS98b], insbesondere [GMS98b] Abschnitt 5.2.3, Theorem 1.). Die Menge der kartesischen Ströme wird mit $\text{cart}^{2,1}(U, S^2)$ bezeichnet.

$\partial T = 0$ ist hier natürlich zu $S_{u \llcorner} U = \partial L$ äquivalent (wenn $S_{u \llcorner} U$ als Strom in $\mathcal{D}_{m-3}(U)$ aufgefaßt wird), da $\partial(S \times T) = (\partial S) \times T \pm S \times (\partial T)$ ist (vgl. [Fed69] 4.1.8). Da nach dem Satz von Stokes für $u \in C^\infty(U, S^2)$ auf der orientierten Mannigfaltigkeit $\mathcal{G}_u$ gilt $\partial G_{u \llcorner} (U \times \mathbb{R}^3) = 0$, ist $G_{u \llcorner} (U \times \mathbb{R}^3) = G_{u \llcorner} (U \times \mathbb{R}^3) - 0 \times \llbracket S^2 \rrbracket \in \text{cart}^{2,1}(U, S^2)$ für glatte $u : U \rightarrow S^2$. Für kartesische Ströme gilt folgender Kompaktheitssatz ([GMS98a], Abschnitt 5.5.2, Theorem 6 zusammen mit [GMS98b] Abschnitt 5.2.3, Theorem 1):

Satz 5.3. Sei $\{T_n\} \subset \text{cart}^{2,1}(U, S^2)$ mit $T_n = G_{u_n \llcorner} (U \times \mathbb{R}^3) - L_n \times \llbracket S^2 \rrbracket$ für $u_n \in H^1(U, S^2)$ und $L_n \in \mathcal{R}_{m-2}(U)$ wie oben und mit

$$\begin{cases} \sup_n M(T_n) \leq \sup_n (M(G_{u_n}) + 4\pi M(L_n)) < \infty \\ \sup_n \int_U (|u_n|^2 + |Du_n|^2) < \infty. \end{cases}$$

Wenn $T_n \rightharpoonup T$ in $\mathcal{R}_m(U \times \mathbb{R}^3)$ und $u_n \rightharpoonup u$ in $H^1(U, S^2)$ konvergieren, dann ist $T \in \text{cart}^{2,1}(U, S^2)$ und $T = G_{u \llcorner} (U \times \mathbb{R}^3) - L \times \llbracket S^2 \rrbracket$ für ein $L \in \mathcal{R}_{m-2}(U)$ mit $M(L) < \infty$.

Für $u_n \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)$ mit $u_n \rightharpoonup u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ gilt also $G_{u_n \llcorner} (U \times \mathbb{R}^3) \rightharpoonup G_{u \llcorner} (U \times \mathbb{R}^3) - L \times \llbracket S^2 \rrbracket$ mit $L \neq 0$, wenn $S_u \neq 0$.

Kapitel 6

Definition von F in Dimension

$$m \geq 4$$

Sei ab jetzt immer $U \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes C^∞ -Gebiet und $\varphi \in C^\infty(\bar{U}, S^2)$. Wir kommen nun auf die Fragen am Ende von Kapitel 2 zurück: Gibt es in höheren Dimensionen $m \geq 4$ ein zu

$$F(u) = E(u) + 4\pi L(u)$$

analoges Funktional, das die relaxierte Energie

$$\mathcal{F}(u) = \inf \{ \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n) \mid u_n \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2), u_n \rightharpoonup u \}$$

darstellt oder zumindest

$$\min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} F(u) = \inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u)$$

erfüllt? Bemerkung 2.1 zusammen mit den Bemerkungen 3.7 und 3.8 besagen, daß für $U \subset \mathbb{R}^3$ und $u \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$ tatsächlich $F(u) = \mathcal{F}(u)$ gilt, wenn $L(u) := m_r(S_u) = m_i(S_u)$ definiert wird. Für $m \geq 4$, $U \subset \mathbb{R}^m$ und $u \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$ stimmt $m_i(S_u)$ aber nicht unbedingt mit $m_r(S_u)$ überein. Definiert man $F^r(u) := E(u) + 4\pi m_r(S_u)$, so erhält man zwar wegen Bemerkung 3.8 ein bezüglich der Normtopologie stetiges und bezüglich der schwachen Topologie unterhalbstetiges Funktional, so daß $F^r \leq \mathcal{F}$ genauso folgt wie im dreidimensionalen Fall, auch macht die Approximation von $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ durch R_φ^∞ -Abbildungen keine Probleme, da F^r stetig ist, aber man kann den Energieaufwand beim Entfernen von Singularitäten aus R_φ^∞ -Abbildungen nur durch $4\pi m_i(S_u) + \varepsilon$ kontrollieren (siehe Satz 4.4) und nicht durch den eventuell kleineren Wert $4\pi m_r(S_u) + \varepsilon$. Pakzad hat in [Pak02] gezeigt, daß F^r tatsächlich im allgemeinen zu klein ist: Man kann nämlich $U \subset \mathbb{R}^4$ und die Randabbildung φ so vorgeben, daß gilt

$$\min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} F^r(u) < \inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u);$$

F^r ist also zumindest in Dimension $m = 4$ nicht die relaxierte Energie.

In Hinblick auf Satz 4.4 schlägt Pakzad vor, m_i anstelle von m_r zur Definition von F heranzuziehen, und vermutet, daß $E(u) + 4\pi m_i(S_u)$ tatsächlich die relaxierte Energie $\mathcal{F}(u)$ ist. Der erste Schritt ist, zu zeigen, daß $m_i(S_u)$ für alle $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ Sinn macht.

Satz 6.1. *Für jedes $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ gibt es ein $L \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ mit $M(L) \leq \frac{1}{4\pi}(E(u) + E(\varphi))$ und $\partial L = S_u$.*

Beweis. Wir approximieren u in der H^1 -Norm durch eine Folge $u_n \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$. Es sei $L_n \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ eine Minimalverbindung zu S_{u_n} . Dann ist

$$T_n := G_{u_n} - G_\varphi - L_n \times \llbracket S^2 \rrbracket \in \mathcal{R}_m(\mathbb{R}^{m+3})$$

mit

$$M(T_n) \leq (2 + m)\mathcal{L}^m(U) + (m + 1)(E(u_n) + E(\varphi))$$

nach Satz 5.1 und Bemerkung 4.5. Nach Satz 5.2 (i) gilt außerdem $\partial T_n = 0$ für alle n . Daher gibt es nach Satz 3.3 einen rektifizierbaren Strom $T \in \mathcal{R}_m(\mathbb{R}^{m+3})$ mit $\partial T = 0$, so daß nach Übergang zu einer Teilfolge $T_n = G_{u_n} - G_\varphi - L_n \times \llbracket S^2 \rrbracket \rightarrow T$ konvergiert. Wegen starker Konvergenz $u_n \rightarrow u$ konvergiert nach Lemma 5.1 auch $G_{u_n} \rightarrow G_u$. Daher gibt es ein $L \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$, so daß $L_n \rightarrow L$ konvergiert. Da die Masse schwach unterhalbstetig ist, hat man unter Verwendung von Bemerkung 4.5

$$M(L) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} M(L_n) \leq \frac{1}{4\pi}(E(u) + E(\varphi)),$$

und wegen $\partial T = 0$ ist

$$\partial L \times \llbracket S^2 \rrbracket = \partial(G_u - G_\varphi) = S_u \times \llbracket S^2 \rrbracket$$

nach Satz 5.2 (i), also $\partial L = S_u$. □

Bemerkung 6.1. Im wesentlichen ist Satz 6.1 mit anderem Beweis schon in [Pak02] zu finden, allerdings wird dort nicht sicher gestellt, daß $\partial L = S_u$ auch dann gilt, wenn die Ströme als Ströme auf ganz $\mathbb{R}^m$ aufgefaßt werden.

Definition 6.1. Mit Hilfe von Satz 6.1 ist

$$m_i(S_u) := \inf\{M(L) \mid L \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m), \partial L = S_u\}$$

für jedes $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ sinnvoll definiert und endlich. Wir setzen für $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$

$$F(u) := E(u) + 4\pi m_i(S_u).$$

Satz 6.2. Für jedes $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ gibt es einen minimierenden Strom $L \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ mit $\partial L = S_u$ und

$$M(L) = m_i(S_u) \leq \frac{1}{4\pi}(E(u) + E(\varphi)). \quad (6.1)$$

Beweis. Sei $\{L_n\}$ eine Minimalfolge für $m_i(S_u)$, das heißt, es sei $L_n \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ mit $\partial L_n = S_u$, so daß $M(L_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m_i(S_u)$. Wir setzen

$$T_n := G_u - G_\varphi - L_n \times \llbracket S^2 \rrbracket.$$

Dann ist $T_n \in \mathcal{R}_m(\mathbb{R}^{m+3})$ mit $\partial T_n = 0$ und

$$M(T_n) \leq (2 + m)\mathcal{L}^m(U) + (m + 1)(E(u) + E(\varphi)).$$

Daher gibt es einen rektifizierbaren Strom $T \in \mathcal{R}_m(\mathbb{R}^{m+3})$, so daß nach Übergang zu einer Teilfolge $T_n \rightarrow T$ konvergiert. Daher konvergiert auch L_n schwach gegen einen rektifizierbaren Strom $L \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ mit $\partial L = S_u$. Mit schwacher Unterhalbstetigkeit der Masse folgt $M(L) = m_i(S_u)$. $\square$

Satz 6.3. F ist schwach unterhalbstetig.

Beweis. (vgl. [Pak02]) Sei $u_n \rightarrow u$ in $H_\varphi^1(U, S^2)$ und $L_n \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ sei eine Minimalverbindung zu S_{u_n} . Dann ist $T_n := G_{u_n} - L_n \times \llbracket S^2 \rrbracket \in \mathcal{R}_m(\mathbb{R}^{m+3})$ mit $\partial(T_n - G_\varphi) = 0$ und

$$M(T_n - G_\varphi) \leq (2 + m)\mathcal{L}^m(U) + (m + 1)(E(u_n) + E(\varphi)) \leq K$$

für eine Konstante K unabhängig von n . Nach Satz 3.3 gibt es einen rektifizierbaren Strom $T \in \mathcal{R}_m(\mathbb{R}^{m+3})$, so daß $T_n \rightarrow T$ und $\partial(T - G_\varphi) = 0$. Nach Satz 5.3 ist

$$T_\perp(U \times \mathbb{R}^3) = G_{u_\perp}(U \times \mathbb{R}^3) - \tilde{L} \times \llbracket S^2 \rrbracket$$

für ein $\tilde{L} \in \mathcal{R}_{m-2}(U)$. Da $T_\perp((\mathbb{R}^m \setminus \bar{U}) \times \mathbb{R}^3) = 0$ ist, gilt also

$$T = G_u - L \times \llbracket S^2 \rrbracket.$$

Hier ist $L \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ mit

$$L(\alpha) := \lim_{\eta \nearrow \mathbb{1}_U} \tilde{L}(\eta\alpha) + \lim_{\eta \nearrow \mathbb{1}_U} T((1 - \eta)\pi_{\mathbb{R}^m}^* \alpha \wedge \pi_{\mathbb{R}^3}^* \omega)$$

für $\alpha \in \mathcal{D}^{m-2}(\mathbb{R}^m)$, wobei $\eta \in C_{\text{kpt}}^\infty(\mathbb{R}^m)$ ist mit $\text{spt } \eta \subset\subset U$, und wobei $\omega \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^3)$ so ist, daß ω auf S^2 die Standardvolumenform ist. Es konvergiert also

$$G_{u_n} - L_n \times \llbracket S^2 \rrbracket \rightarrow G_u - L \times \llbracket S^2 \rrbracket,$$

d.h. zu $\varepsilon > 0$ und $\beta \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^{m+3})$ gibt es ein $N_{\beta,\varepsilon} > 0$, so daß für alle $n > N_{\beta,\varepsilon}$ gilt

$$L_n \times \llbracket S^2 \rrbracket(\beta) - L \times \llbracket S^2 \rrbracket(\beta) > G_{u_n}(\beta) - G_u(\beta) - \varepsilon.$$

Daher gilt für alle $\alpha \in \mathcal{D}^{m-2}(\mathbb{R}^m)$ und $n > N_{\pi_{\mathbb{R}^m}^* \alpha \wedge \pi_{\mathbb{R}^3}^* \omega, \varepsilon}$ (ω wie oben)

$$\begin{aligned} & E(u_n) - E(u) + 4\pi(L_n(\alpha) - L(\alpha)) \\ &= E(u_n) - E(u) + L_n \times \llbracket S^2 \rrbracket(\pi_{\mathbb{R}^m}^* \alpha \wedge \pi_{\mathbb{R}^3}^* \omega) - L \times \llbracket S^2 \rrbracket(\pi_{\mathbb{R}^m}^* \alpha \wedge \pi_{\mathbb{R}^3}^* \omega) \\ &> E(u_n) - E(u) + G_{u_n}(\pi_{\mathbb{R}^m}^* \alpha \wedge \pi_{\mathbb{R}^3}^* \omega) - G_u(\pi_{\mathbb{R}^m}^* \alpha \wedge \pi_{\mathbb{R}^3}^* \omega) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Für $\alpha \in \mathcal{D}^{m-2}(\mathbb{R}^m)$ mit $\|\alpha\|_\infty \leq 1$ setzen wir

$$Q_\alpha(u) := E(u) + G_u(\pi_{\mathbb{R}^m}^* \alpha \wedge \pi_{\mathbb{R}^3}^* \omega) = E(u) + \int_U \alpha \wedge u^* \omega \quad (6.2)$$

und wählen zu $\mathcal{L}^m$ -fast jedem $x \in U$ eine Orthonormalbasis $e = e_1 \wedge \dots \wedge e_m$ von $\Lambda_m \mathbb{R}^m$, so daß $e_1 \wedge e_2 \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{m-2}} \in \ker(\alpha(x))$ ist, wenn $3 \leq i_1 < \dots < i_{m-2} \leq m$. Dann ist

$$\begin{aligned} & | \langle \alpha \wedge u^* \omega(x); e \rangle | \\ &= | \langle \alpha(x); e_3 \wedge \dots \wedge e_m \rangle | | \langle \omega(u(x)); \partial_{e_1} u(x) \wedge \partial_{e_2} u(x) \rangle | \leq \frac{1}{2} |Du|^2. \end{aligned}$$

Der Integrand des zweiten Integrals in (6.2) ist also punktweise nicht kleiner als das Negative des Integranden des ersten Integrals $E(u)$ in (6.2), d.h. Q_α ist nicht-negativ. Schreibt man $Q_\alpha(u) = B_\alpha(u, u)$ mit einer symmetrischen Bilinearform B auf $H^1(U, \mathbb{R}^3)$, so sieht man

$$\begin{aligned} E(u_n) - E(u) + 4\pi(L_n(\alpha) - L(\alpha)) &\geq B_\alpha(u_n, u_n) - B_\alpha(u, u) - \varepsilon \\ &= B_\alpha(u_n - u, u_n - u) - 2B_\alpha(u, u_n - u) - \varepsilon \geq -2\varepsilon, \end{aligned}$$

wenn n groß genug ist. Daraus folgt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n) - E(u) - 4\pi(M(L_n) - M(L)) \geq 0,$$

also

$$\begin{aligned} F(u) &= E(u) + 4\pi m_i(S_u) \leq E(u) + 4\pi M(L) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n) + 4\pi M(L_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n), \end{aligned}$$

d.h. F ist schwach unterhalbstetig. □

Mit der direkten Methode der Variationsrechnung folgt aus Satz 6.3, daß $\inf_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} F(u)$ angenommen wird, und da $F(u) = E(u)$ ist für $u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)$, gilt genauso wie im dreidimensionalen Fall

$$F(u) \leq \mathcal{F}(u) \quad \forall u \in H_\varphi^1(U, S^2) \quad (6.3)$$

und insbesondere

$$\min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} F(u) \leq \inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u). \quad (6.4)$$

Ebenfalls wie im dreidimensionalen Fall gilt

Satz 6.4. *Jeder F -Minimierer ist schwach harmonisch.*

Beweis. Zu $v \in H_\varphi^1(U, S^2)$ und $\psi \in C_{\text{kpt}}^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ betrachten wir Variationen

$$v_t(x) := \frac{v(x) + t\psi(x)}{|v(x) + t\psi(x)|}.$$

Für genügend kleine $|t|$ (nur abhängig von ψ , nicht von v) ist $v_t \in H_\varphi^1(U, S^2)$ mit $\text{sing } v_t = \text{sing } v$. Wir behaupten, daß für $|t| \ll 1$ sogar gilt

$$S_{v_t} = S_v. \quad (6.5)$$

Ist $v \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$, so ist dies klar. $v \in H_\varphi^1(U, S^2)$ approximieren wir in der H^1 -Norm durch eine Folge $\{v_n\} \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$. Natürlich gilt dann auch für $|t| \ll 1$

$$\int_U (|(v_n)_t - v_t|^2 + |D(v_n)_t - Dv_t|^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Mit Hilfe von Satz 5.2 (ii) sehen wir, daß für alle $\alpha \in \mathcal{D}^{m-3}(\mathbb{R}^m)$ gilt:

$$|S_v(\alpha) - S_{v_t}(\alpha)| \leq |S_v(\alpha) - S_{v_n}(\alpha)| + |S_{(v_n)_t}(\alpha) - S_{v_t}(\alpha)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

also ist (6.5) für jedes $v \in H_\varphi^1(U, S^2)$ richtig. Ist $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ nun ein F -Minimierer, so gilt für alle $|t| \ll 1$

$$E(u) + 4\pi m_i(S_u) \leq E(u_t) + 4\pi m_i(S_{u_t}),$$

wegen (6.5) also $E(u) \leq E(u_t)$ für alle $|t| \ll 1$ und daher (da E bzgl. Variationen der betrachteten Art bei $t = 0$ differenzierbar ist)

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 E(u_t) = 0,$$

das heißt, u ist schwach harmonisch (siehe Beweis von Satz 1.1). □

Pakzad vermutet, daß F die relaxierte Energie ist, kann dies aber nicht zeigen, da nicht bekannt ist, ob F bzw. $u \mapsto m_i(S_u)$ stetig bezüglich der Normtopologie auf $H_\varphi^1(U, S^2)$ ist, und da deshalb das R_φ^∞ -Approximationsargument aus dem dreidimensionalen Fall versagt. Die Frage, ob in (6.3) oder wenigstens in (6.4) die umgekehrte Ungleichung „ $\geq$ “ richtig ist, bleibt also in [Pak02] offen.

In den nächsten beiden Kapiteln geben wir die Antwort für (6.4): Es gilt

$$\min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} F(u) = \inf_{C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u). \quad (6.6)$$

Dabei gehen wir folgendermaßen vor: In Kapitel 7 zeigen wir, daß jedes $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ mit $\mathcal{L}^m(\text{sing } u) = 0$ durch R_φ^∞ -Abbildungen approximiert werden kann, ohne daß F springt (Satz 7.1). Daraus folgt mit Hilfe von Satz 4.4, daß „ $\geq$ “ in (6.3) für alle diese u richtig ist. In Kapitel 8 zeigen wir dann, daß jeder F -Minimierer die Regularitätsbedingung in unserem Approximationssatz, also $\mathcal{L}^m(\text{sing } u) = 0$ erfüllt, wodurch (6.6) bewiesen ist.

Kapitel 7

Ein Approximationssatz

Wie immer sei $U \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes C^∞ -Gebiet und $\varphi \in C^\infty(\bar{U}, S^2)$. Folgende Verbesserung von Bethuels Approximationssatz (Satz 4.2) wird uns erlauben, das R_φ^∞ -Approximationsargument aus dem dreidimensionalen Fall (siehe Beweis von Satz 2.3, (2.3) , „ $\geq$ “) für Abbildungen $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ mit $\mathcal{L}^m(\text{sing } u) = 0$ auch im Fall $m > 3$ durchzuführen, obwohl wir dann nicht wissen, ob F stetig ist.

Satz 7.1. *Sei $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ mit $\mathcal{L}^m(\text{sing } u) = 0$. Dann gibt es eine Folge $u_n \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$, so daß $u_n \rightarrow u$ in der H^1 -Norm und $|F(u) - F(u_n)| \rightarrow 0$ konvergiert.*

Bemerkung 7.1. Es wird tatsächlich keinerlei Randregularität vorausgesetzt, $\partial U \subset \text{sing } u$ ist also durchaus erlaubt.

Um Satz 7.1 aus Satz 4.2 zu folgern, müssen wir die Differenz der Massen von Minimalverbindungen der Singularitätenströme zweier Sobolevabbildungen u und v durch ihre Energien kontrollieren. Zunächst zeigen wir, daß dies für u und $v \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$ möglich ist:

Lemma 7.1. *Sei W relativ offen in $\bar{U}$ mit $\mathcal{L}^m(\partial W) = 0$, und seien u und $v \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$, so daß gilt $u|_{\bar{U} \setminus W} = v|_{\bar{U} \setminus W}$ $\mathcal{L}^m$ -fast überall. Dann gibt es einen rektifizierbaren $(m-2)$ -Strom $L \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ mit $\partial L = S_u - S_v$ und*

$$8\pi M(L) \leq \int_W |Du|^2 + \int_W |Dv|^2.$$

Beweis. Nach Satz 4.3 gilt für fast jeden regulären Wert $y \in S^2$ (also für fast jedes $y \in S^2$) $L_y := T_y^u - T_y^v \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ mit $\partial L_y = S_u - S_v$. Da $u|_{U \setminus W} = v|_{U \setminus W}$

ist, gilt

$$\begin{aligned}
\int_{S^2} M(L_y) d\mathcal{H}^2(y) &= \int_{S^2} M(T_y^u - T_y^v) d\mathcal{H}^2(y) \\
&\leq \int_{S^2} \left(\int_{(u|_{\overline{W}})^{-1}(y)} d\mathcal{H}^{m-2} + \int_{(v|_{\overline{W}})^{-1}(y)} d\mathcal{H}^{m-2} \right) d\mathcal{H}^2(y) \\
&= \int_{\overline{W}} (Ju + Jv) \leq \frac{1}{2} \left(\int_W |Du|^2 + \int_W |Dv|^2 \right).
\end{aligned}$$

Daher gibt es einen regulären Wert y von u und von v , so daß gilt

$$8\pi M(L_y) \leq \int_W |Du|^2 + \int_W |Dv|^2.$$

□

Mit Hilfe von Satz 4.2 (i) können wir eine ähnliche Abschätzung für u und $v \in H_\varphi^1(U, S^2)$ zeigen:

Lemma 7.2. *Sei W relativ offen in $\bar{U}$ mit $\mathcal{L}^m(\partial W) = 0$, und V sei eine Umgebung von $\bar{U} \setminus W$ in $\bar{U}$, so daß gilt $\text{dist}(\partial W \cap U, \partial V \cap U) > 0$. Dann gibt es zu gegebenen u und $v \in H_\varphi^1(U, S^2)$, die auf V $\mathcal{L}^m$ -fast überall übereinstimmen, einen rektifizierbaren $(m-2)$ -Strom $L \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ mit $\partial L = S_u - S_v$ und*

$$8\pi M(L) \leq \int_W |Du|^2 + \int_W |Dv|^2.$$

Beweis. Wir approximieren u und v gemäß Satz 4.2 (i) durch Folgen $\{u_n\}$ und $\{v_n\} \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$, so daß $u_n|_{U \setminus W} = v_n|_{U \setminus W}$ $\mathcal{L}^m$ -fast überall für alle n , und so daß $u_n \rightarrow u$, $v_n \rightarrow v$ konvergiert in $H_\varphi^1(U, S^2)$. Nach Lemma 7.1 gibt es zu jedem n ein $L_n \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ mit $\partial L_n = S_{u_n} - S_{v_n}$ und

$$8\pi M(L_n) \leq \int_W |Du_n|^2 + \int_W |Dv_n|^2. \quad (7.1)$$

Sei $T_n := G_{u_n} - G_{v_n} - L_n \times \llbracket S^2 \rrbracket$. Dann ist $T_n \in \mathcal{R}_m(\mathbb{R}^{m+3})$ mit $\partial T_n = 0$ gemäß Satz 5.2 (i), und wegen Satz 5.1, (7.1) und starker Konvergenz $u_n \rightarrow u$ und $v_n \rightarrow v$ ist

$$\begin{aligned}
M(T_n) &\leq M(G_{u_n}) + M(G_{v_n}) + 4\pi M(L_n) \\
&\leq (2+m)\mathcal{L}^m(U) + (m+2)(E(u) + E(v)).
\end{aligned}$$

Nach Satz 3.3 gibt es daher ein $T \in \mathcal{R}_m(\mathbb{R}^{m+3})$ mit $\partial T = 0$, so daß nach Übergang zu einer Teilfolge $T_n \rightarrow T$ konvergiert. Wegen starker Konvergenz $u_n \rightarrow u$ und $v_n \rightarrow v$ konvergieren nach Lemma 5.1 auch $G_{u_n} \rightarrow G_u$ und $G_{v_n} \rightarrow G_v$. Daher

gibt es ein $L \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$, so daß $L_n \rightharpoonup L$ konvergiert. Da die Masse schwach unterhalbstetig ist, hat man unter Verwendung von (7.1)

$$\begin{aligned} 8\pi M(L) &\leq 8\pi \liminf_{n \rightarrow \infty} M(L_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_W |Du_n|^2 + \int_W |Dv_n|^2 \right) \\ &= \int_W |Du|^2 + \int_W |Dv|^2, \end{aligned}$$

und wegen $\partial T = 0$ ist

$$\partial L \times \llbracket S^2 \rrbracket = \partial(G_u - G_v) = (S_u - S_v) \times \llbracket S^2 \rrbracket,$$

also $\partial L = S_u - S_v$. □

Beweis von Satz 7.1. Da $\text{sing } u$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\bar{U}$ ist mit $\mathcal{L}^m(\text{sing } u) = 0$, gibt es zu jedem $n > 0$ eine relativ offene Menge $W_n \subset \bar{U}$ mit $\mathcal{L}^m(\partial W_n) = 0$, so daß $\mathcal{L}^m(W_n) < \frac{1}{n}$ ist und

$$\text{sing } u \subset \dots \subset W_{n+1} \subset \bar{W}_{n+1} \subset W_n \subset \dots \subset W_1.$$

Sei $V_n := \bar{U} \setminus W_n$. V_{n+2} ist eine Umgebung von $\bar{U} \setminus W_{n+1} = V_{n+1}$ und u ist stetig auf V_{n+2} . Daher liefert Satz 4.2 (ii) Folgen $u_n \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$ und $\tilde{u}_n \in R_\varphi^0(U, S^2)$, so daß

$$\tilde{u}_n|_{V_{n+1}} = u|_{V_{n+1}} \quad \text{und} \quad \int_U (|\tilde{u}_n - u|^2 + |D\tilde{u}_n - Du|^2) < \frac{1}{n}, \quad (7.2)$$

$$\int_U (|\tilde{u}_n - u_n|^2 + |D\tilde{u}_n - Du_n|^2) < \frac{1}{n}$$

und $\text{sing } u_n = \text{sing } \tilde{u}_n$, also $S_{u_n} = S_{\tilde{u}_n}$ für alle n . Nach Lemma 7.2 gibt es zu jedem n einen Strom $L_n \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ mit $\partial L_n = S_u - S_{\tilde{u}_n} = S_u - S_{u_n}$ und

$$\begin{aligned} 8\pi M(L_n) &\leq \int_{W_n} |Du|^2 + \int_{W_n} |D\tilde{u}_n|^2 \\ &\leq \int_{W_n} |Du|^2 + 2 \left(\int_{W_n} |Du|^2 + \int_{W_n} |D\tilde{u}_n - Du|^2 \right) \\ &\leq 3 \int_{W_n} |Du|^2 + \frac{2}{n} \end{aligned}$$

nach (7.2). Daher ist

$$8\pi |m_i(S_u) - m_i(S_{u_n})| \leq 8\pi M(L_n) \leq 3 \int_{W_n} |Du|^2 + \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Zusammen mit $\mathcal{L}^m(W_n) \rightarrow 0$ und starker Konvergenz $u_n \rightarrow u$ folgt $|F(u) - F(u_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. □

Satz 7.2. Für jedes $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ mit $\mathcal{L}^m(\text{sing } u) = 0$ ist $F(u)$ die relaxierte Energie von u , das heißt es gilt

$$F(u) = \mathcal{F}(u).$$

Beweis. Da „ $\leq$ “ für alle $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ richtig ist (siehe Kapitel 6, (6.3)), zeigen wir „ $\geq$ “: Nach Satz 7.1 gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $u_n \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$, so daß

$$|F(u) - F(u_n)| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \int_U (|u - u_n|^2 + |Du - Du_n|^2) < \frac{1}{n}. \quad (7.3)$$

Nach Satz 4.4 können die Singularitäten der $u_n \in R_\varphi^\infty(U, S^2)$ unter Energieaufwand $< 4\pi m_i(S_{u_n}) + \varepsilon$ entfernt werden, das heißt zu jedem u_n gibt es eine Folge $C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2) \ni v_{n,k} \rightharpoonup u_n$ bei $k \rightarrow \infty$ mit $E(v_{n,k}) < F(u_n) + \frac{1}{k}$. Setze $v_n := v_{n,k_n}$ mit $k_n \geq n$ so groß, daß $|\langle \lambda_i, v_{n,k_n} - u_n \rangle| < \frac{1}{n}$ ist für $i = 1, \dots, n$, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ eine dichte Teilmenge der Einheitskugel von $H^1(U, \mathbb{R}^3)$ ist. Dann folgt $v_n \rightharpoonup u$ und

$$E(v_n) \leq F(u_n) + \frac{1}{n}. \quad (7.4)$$

(7.3) und (7.4) ergeben zusammen

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(v_n) \leq F(u).$$

□

Wir können nun die Größe der Energielücke in Termen der Massen von Minimalverbindungen zu den Singularitätenströmen von E - und $\mathcal{F}$ -Minimierern abschätzen:

Korollar 7.1. Sei $u_{\mathcal{F}} \in H_\varphi^1(U, S^2)$ ein $\mathcal{F}$ -Minimierer und $u_E \in H_\varphi^1(U, S^2)$ sei ein Energieminimierer. Dann gilt

$$4\pi m_i(S_{u_{\mathcal{F}}}) \leq \inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u) - \min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} E(u) \leq 4\pi m_i(S_{u_E}).$$

Dabei gilt in der ersten Ungleichung Gleichheit genau dann, wenn $u_{\mathcal{F}}$ die Energie minimiert; Gleichheit in der zweiten Ungleichung gilt genau dann, wenn u_E ein $\mathcal{F}$ -Minimierer ist.

Beweis. Nach (1.4) ist $\inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u) = \min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} \mathcal{F}(u)$ und nach (6.3) ist $F \leq \mathcal{F}$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u) - \min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} E(u) &= \mathcal{F}(u_{\mathcal{F}}) - E(u_E) \\ &\geq F(u_{\mathcal{F}}) - E(u_E) \\ &= E(u_{\mathcal{F}}) - E(u_E) + 4\pi m_i(S_{u_{\mathcal{F}}}) \\ &\geq 4\pi m_i(S_{u_{\mathcal{F}}}), \end{aligned}$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $E(u_{\mathcal{F}}) = E(u_E)$, denn dann ist $u_{\mathcal{F}}$ ein Energieminimierer und aus Satz 1.3 und Satz 7.2 folgt, daß $\mathcal{F}(u_{\mathcal{F}}) = F(u_{\mathcal{F}})$. Andererseits ist $\mathcal{F}(u_E) = F(u_E)$ nach Satz 1.3 und Satz 7.2. Daher gilt

$$\begin{aligned}
 \inf_{u \in C_{\varphi}^{\infty}(\bar{U}, S^2)} E(u) - \min_{u \in H_{\varphi}^1(U, S^2)} E(u) &= \mathcal{F}(u_{\mathcal{F}}) - E(u_E) \\
 &= \mathcal{F}(u_{\mathcal{F}}) - F(u_E) + F(u_E) - E(u_E) \\
 &= \mathcal{F}(u_{\mathcal{F}}) - \mathcal{F}(u_E) + 4\pi \, \mathfrak{m}_i(S_{u_E}) \\
 &\leq 4\pi \, \mathfrak{m}_i(S_{u_E}),
 \end{aligned}$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn u_E ein $\mathcal{F}$ -Minimierer ist. $\square$

Bemerkung 7.2. Im dreidimensionalen Fall weiß man, daß ein Energieminimierer kein $\mathcal{F}$ -Minimierer sein kann ([BBC90]). In Korollar 7.1 gilt dann also niemals „=“. Dazu wird die Darstellung $\mathcal{F} = F$ der relaxierten Energie benötigt und die Tatsache, daß Energieminimierer höchstens endlich viele Singularitäten besitzen, die alle im Inneren von U liegen. Simons Regularitätssatz für Energieminimierer (Bemerkung 1.7) und unser Resultat aus Kapitel 8, daß jeder $\mathcal{F}$ -Minimierer u auch ein F -Minimierer ist, und daß dann gilt $\mathcal{F}(u) = F(u)$, scheinen es möglich zu machen, diesen Beweis auf den allgemeinen Fall $m \geq 4$ zu übertragen. Alternativ könnte man ein Produktargument heranziehen.

Kapitel 8

Regularitätstheorie für F -Minimierer

Wie immer sei $U \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes C^∞ -Gebiet, und es sei $\varphi \in C^\infty(\bar{U}, S^2)$. In Kapitel 7 haben wir gesehen, daß $F(u)$ zumindest für solche $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ mit $\mathcal{L}^m(\text{sing } u) = 0$ mit der relaxierten Energie $\mathcal{F}(u)$ übereinstimmt. Nun werden wir zeigen, daß diese Regularitätsbedingung von jedem F -Minimierer erfüllt wird. Genauer beweisen wir folgenden partiellen Regularitätssatz, der für $m = 3$ schon aus [GMS98b] (Kapitel 4.2.9 Theorem 1) bekannt ist:

Satz 8.1. *Sei $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ ein F -Minimierer. Dann ist $\mathcal{H}^{m-2}(\text{sing } u \cap U) < \infty$ und u ist C^∞ -glatt auf $\bar{U} \setminus \text{sing } u$.*

Wir werden auf folgenden Satz von Evans (siehe [Eva91]) zurückgreifen. (Eine Version mit allgemeiner kompakter Zielmannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ findet sich in [Bet93]).

Satz 8.2 (ε -Regularitätssatz). *Sei $B \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Kugel in $\mathbb{R}^m$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für jedes schwach harmonische $u \in H^1(B, S^2)$, welches für alle $z \in B$ und alle $r < s$ mit $B_s(z) \subset B$ die Energie-Monotonieformel*

$$r^{2-m} \int_{B_r(z)} |Du|^2 dx \leq s^{2-m} \int_{B_s(z)} |Du|^2 dx$$

erfüllt, gilt: Ist $B_r(z) \subset B$ und

$$r^{2-m} \int_{B_r(z)} |Du|^2 < \varepsilon,$$

dann ist u C^∞ -glatt auf $B_{\frac{r}{4}}(z)$. Aus Skalierungsgründen hängt ε nicht vom Radius von B ab.

Eine Energie-Monotonieformel wie in diesem Satz gilt beispielsweise für Energieminimierer oder allgemeiner für stationär harmonische Abbildungen. Das sind

schwach harmonische Abbildungen $u \in H^1(U, S^2)$, deren Energie zusätzlich stationär bezüglich Variationen im Definitionsbereich ist, das heißt für differenzierbar von t abhängige Diffeomorphismenscharen $\Psi_t : U \rightarrow U$ mit $\Psi_t|_{U \setminus K} = \text{id}|_{U \setminus K}$ für alle t und ein Kompaktum $K \subset\subset U$ und $\Psi_0 = \text{id}$ ist

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E(u \circ \Psi_t^{-1}) = 0.$$

Dies kann man für F -Minimierer *nicht* auf ganz U erwarten. Als Ersatz fixieren wir eine Minimalverbindung L von S_u , die ja nach Satz 6.2 existiert, und nutzen die Stationarität von $E(u) + 4\pi M(L)$ bezüglich Variationen im Definitionsbereich, um eine etwas andere Monotonieformel für F -Minimierer herzuleiten. Für $m = 3$ wurde dies schon in [GMS98b] durchgeführt, wobei nur die geometrischen Eigenschaften der Minimalverbindung, nicht aber die im Fall $m \geq 4$ unbekannte stetige Abhängigkeit ihrer Masse von u benutzt wurden. Daher können wir ähnlich vorgehen wie dort:

Lemma 8.1 (Variationsgleichung für F -Minimierer). *Sei $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ ein F -Minimierer mit Minimalverbindung $L = \tau(\mathcal{L}, \theta, \zeta) \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ zu S_u . Dann ist für jedes $\psi \in C_{\text{kpt}}^\infty(U, \mathbb{R}^m)$*

$$\int_U \left(\frac{1}{2} |Du|^2 \text{Spur } D\psi - \langle Du, Du D\psi \rangle \right) + 4\pi \int_{\mathcal{L}} \theta \text{Spur}_{\mathcal{L}} D\psi \, d\mathcal{H}^{m-2} = 0,$$

wobei $(\text{Spur}_{\mathcal{L}} D\psi)(x) := \text{Spur}((\text{id}|_{T_x \mathcal{L}})^* D\psi(x)|_{T_x \mathcal{L}})$ die Spur von $D\psi(x)|_{T_x \mathcal{L}}$ gefolgt von der orthogonalen Projektion auf $T_x \mathcal{L}$ ist.

Beweis. Sei $\Psi_t(x) := x + t\psi(x)$, wobei $t > 0$ so klein sei, daß $\Psi_t : U \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus ist. Da u ein F -Minimierer ist, gilt

$$E(u) + 4\pi M(L) = E(u) + 4\pi m_i(S_u) \leq E(v) + 4\pi m_i(S_v) \leq E(v) + 4\pi M(\tilde{L})$$

für alle $v \in H_\varphi^1(U, S^2)$ und alle (nicht notwendig minimierenden) Ströme $\tilde{L} \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ mit $\partial \tilde{L} = S_v$. Daher ist, sofern die Ableitung bei $t = 0$ existiert (was die folgenden Rechnungen auch zeigen),

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (E(u \circ \Psi_t^{-1}) + 4\pi M(\Psi_{t\#} L)) = 0, \quad (8.1)$$

wobei $\Psi_{t\#} L := \tau(\Psi_t(\mathcal{L}), \theta \circ \Psi_t^{-1}, \frac{(\Lambda_{m-2} D\Psi_t) \zeta}{|(\Lambda_{m-2} D\Psi_t) \zeta|} \circ \Psi_t^{-1})$ ist. Wir berechnen

$$\begin{aligned} E(u \circ \Psi_t^{-1}) &= \frac{1}{2} \int_U |(Du) \circ \Psi_t^{-1} D\Psi_t^{-1}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_U |Du((D\Psi_t^{-1}) \circ \Psi_t)|^2 \det D\Psi_t, \\ M(\Psi_{t\#} L) &= \int_{\Psi_t(\mathcal{L})} \theta \circ \Psi_t^{-1} d\mathcal{H}^{m-2} = \int_{\mathcal{L}} \theta J_{\mathcal{L}} \Psi_t d\mathcal{H}^{m-2}, \end{aligned}$$

wobei $(J_{\mathcal{L}}\Psi_t)(x) := \sqrt{\det(D\Psi_t(x)|_{T_x\mathcal{L}})^*(D\Psi_t(x)|_{T_x\mathcal{L}})}$ ist für $\mathcal{H}^{m-2}$ -fast alle $x \in \mathcal{L}$. Wegen

$$\begin{aligned} D\Psi_t &= \text{id} + tD\psi, \\ D\Psi_t^{-1} \circ \Psi_t &= (D\psi_t)^{-1} = \text{id} - tD\psi + O(t^2), \\ \det D\psi_t &= 1 + t \text{Spur } D\psi + O(t^2), \\ J_{\mathcal{L}}\Psi_t &= 1 + t \text{Spur}_{\mathcal{L}} D\psi + O(t^2) \end{aligned}$$

liefert (8.1)

$$\int_U \left(\frac{1}{2} |Du|^2 \text{Spur } D\psi - \langle Du, Du D\psi \rangle \right) + 4\pi \int_{\mathcal{L}} \theta \text{Spur}_{\mathcal{L}} D\psi d\mathcal{H}^{m-2} = 0.$$

□

Satz 8.3 (Monotonieformel). *Sei $u \in H_{\varphi}^1(U, S^2)$ ein F -Minimierer mit Minimalverbindung $L = \tau(\mathcal{L}, \theta, \zeta) \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ zu S_u . Ist $B_{r_0}(z) \subset U$, so existiert für $\mathcal{L}^1$ -fast alle $r \in]0, r_0[$ die Ableitung*

$$\frac{d}{dr} \left(r^{2-m} \left(\frac{1}{2} \int_{B_r(z)} |Du|^2 + 4\pi M(L \llcorner B_r(z)) \right) \right)$$

und es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left(r^{2-m} \left(\frac{1}{2} \int_{B_r(z)} |Du|^2 + 4\pi M(L \llcorner B_r(z)) \right) \right) \\ &= r^{2-m} \frac{d}{dr} \left(\int_{B_r(z)} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + 4\pi \int_{B_r(z) \cap \mathcal{L}} |\nu_{\mathcal{L}}^{\perp}|^2 \theta d\mathcal{H}^{m-2} \right) \geq 0, \quad (8.2) \end{aligned}$$

wobei $\nu(x) := \frac{x-z}{|x-z|}$ ist, und wobei für $\mathcal{H}^{m-2}$ -fast alle x (nämlich für alle die x , in denen $\mathcal{L}$ einen approximativen Tangentialraum besitzt) $\nu_{\mathcal{L}}^{\perp}(x)$ die Komponente von $\nu(x)$ orthogonal zu $T_x\mathcal{L}$ ist, also

$$\nu_{\mathcal{L}}^{\perp}(x) := \nu(x) - \sum_{\alpha=1}^{m-2} (\nu(x) \cdot \zeta_{\alpha}(x)) \zeta_{\alpha}(x),$$

wenn die ζ_i orthonormal sind mit $\zeta_1 \wedge \dots \wedge \zeta_{m-2} = \zeta$. Außerdem ist

$$r^{2-m} \left(\frac{1}{2} \int_{B_r(z)} |Du|^2 + 4\pi M(L \llcorner B_r(z)) \right)$$

monoton nichtfallend auf $]0, r_0[$.

Bemerkung 8.1. Es ist im allgemeinen

$$\frac{1}{2} \int_{B_r(z)} |Du|^2 + 4\pi M(L \lrcorner B_r(z)) \neq F(u|_{B_r(z)}).$$

Dazu sei z.B. $U = B^3$, $\varphi = \text{const}$ und $u \in C_\varphi^\infty(\bar{U} \setminus \{\pm \frac{1}{2}e_1\}, S^2)$ mit $\text{ind}_{\frac{1}{2}e_1} u = 1 = -\text{ind}_{-\frac{1}{2}e_1} u$. Dann ist $\llbracket -\frac{1}{2}e_1, \frac{1}{2}e_1 \rrbracket$ eine Minimalverbindung zu S_u , aber es gilt $m_i(S_u|_{\frac{1}{4}B^3}) = 0 \neq M(L \lrcorner \frac{1}{4}B^3)$.

Beweis der Monotonieformel. Ohne Einschränkung sei $z = 0$. Sei $\psi(x) := x\eta(|x|)$, wobei $\eta : [0, r] \rightarrow [0, 1]$ für $0 < r < r_0$ eine glatte Abschneidefunktion sei mit $\eta(0) = 1$ und $\eta(r) = 0$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} D\psi(x) &= \eta(|x|) \text{id}(x) + \frac{\eta'(|x|)}{|x|} x \otimes x, \\ \text{Spur } D\psi(x) &= m\eta(|x|) + |x|\eta'(|x|), \\ \langle Du(x), Du(x)D\psi(x) \rangle &= |Du(x)|^2\eta(|x|) + \frac{\eta'(|x|)}{|x|} \langle Du(x), Du(x)x \otimes x \rangle \\ &= |Du(x)|^2\eta(|x|) + \frac{\eta'(|x|)}{|x|} \sum_{i,j,k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) x_j x_k \\ &= |Du(x)|^2\eta(|x|) + |x|\eta'(|x|) \left| \frac{\partial u}{\partial r}(x) \right|^2, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{Spur}_{\mathcal{L}} D\psi(x) &= \sum_{\alpha=1}^{m-2} \zeta_\alpha(x) D\psi(x) \zeta_\alpha(x) \\ &= (m-2)\eta(|x|) + \frac{\eta'(|x|)}{|x|} \sum_{\alpha=1}^{m-2} \sum_{ij} \zeta_\alpha^i(x) x_i x_j \zeta_\alpha^j(x) \\ &= (m-2)\eta(|x|) + |x|\eta'(|x|) \sum_{\alpha=1}^{m-2} (\zeta_\alpha(x) \cdot \nu(x))^2 \\ &= (m-2)\eta(|x|) + |x|\eta'(|x|) - |x|\eta'(|x|) \left| \nu(x)^\perp_{\mathcal{L}} \right|^2. \end{aligned}$$

Mit Lemma 8.1 erhalten wir

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{B_r} |Du(x)|^2 ((m-2)\eta(|x|) + |x|\eta'(|x|)) dx \\ &\quad + 4\pi \int_{B_r \cap \mathcal{L}} ((m-2)\eta(|x|) + |x|\eta'(|x|)) \theta(x) d\mathcal{H}^{m-2}(x) \\ &= \int_{B_r} |x|\eta'(|x|) \left| \frac{\partial u}{\partial r}(x) \right|^2 dx + 4\pi \int_{B_r \cap \mathcal{L}} |x|\eta'(|x|) \left| \nu(x)^\perp_{\mathcal{L}} \right|^2 \theta(x) d\mathcal{H}^{m-2}(x). \end{aligned}$$

Bei $\eta \rightarrow \mathbf{1}_{[0,r]}$ in geeigneter Form ergibt dies

$$\begin{aligned} (2-m)\frac{1}{2} \int_{B_r} |Du|^2 + r \frac{d}{dr} \frac{1}{2} \int_{B_r} |Du|^2 + (2-m)4\pi M(L_\perp B_r) + r \frac{d}{dr} 4\pi M(L_\perp B_r) \\ = r \frac{d}{dr} \int_{B_r} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + r \frac{d}{dr} 4\pi \int_{B_r \cap \mathcal{L}} |\nu_{\mathcal{L}}^\perp|^2 \theta d\mathcal{H}^{m-2}. \end{aligned}$$

Die hier auftretenden Ableitungen sind Ableitungen monotoner Funktionen, die $\mathcal{L}^1$ -fast überall auf $]0, r_0[$ existieren. Es folgt also (8.2). Zu zeigen bleibt, daß $r^{2-m}f(r)$ monoton nichtfallend auf $]0, r_0[$ ist, wobei

$$f(r) := \frac{1}{2} \int_{B_r(z)} |Du|^2 + 4\pi M(L_\perp B_r(z)).$$

f ist positiv und monoton nichtfallend in r . Wir zerlegen $f = f_a + f_s$, wobei f_a der absolutstetige und f_s der rein singuläre Anteil von f sei. Dann sind sowohl f_a als auch f_s monoton nichtfallend, und für $r_0 > r > s > 0$ gilt

$$\begin{aligned} & r^{2-m}f(r) - s^{2-m}f(s) \\ &= r^{2-m}f_a(r) - s^{2-m}f_a(s) + r^{2-m}f_s(r) - s^{2-m}f_s(s) \\ &\geq r^{2-m}f_a(r) - s^{2-m}f_a(s) + (r^{2-m} - s^{2-m})f_s(s) \\ &= \int_s^r \frac{d}{d\rho} (\rho^{2-m}f_a(\rho) + \rho^{2-m}f_s(s)) d\rho \\ &= \int_s^r \left(\frac{d}{d\rho} (\rho^{2-m}f_a(\rho)) + f_s(s) \frac{d}{d\rho} \rho^{2-m} \right) d\rho \\ &\geq \int_s^r \left(\frac{d}{d\rho} (\rho^{2-m}f_a(\rho)) + f_s(\rho) \frac{d}{d\rho} \rho^{2-m} \right) d\rho \\ &= \int_s^r \frac{d}{d\rho} (\rho^{2-m}f(\rho)) d\rho \geq 0 \end{aligned}$$

nach (8.2) und wegen $\frac{d}{d\rho} \rho^{2-m} < 0$ im vorletzten Schritt. $\square$

Satz 8.4. Sei $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ ein F -Minimierer mit Minimalverbindung $L \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ zu S_u , und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: Ist $B_r(z) \subset U$ und ist

$$r^{2-m} \left(\frac{1}{2} \int_{B_r(z)} |Du|^2 + 4\pi M(L_\perp B_r(z)) \right) < 4\pi \left(\frac{n-1}{n} \right)^{m-2} \alpha_{m-2},$$

so gilt $L_\perp B_{\frac{r}{n}}(z) = 0$. Dabei ist $\alpha_{m-2} := \mathcal{H}^{m-2}(B^{m-2})$ das Volumen der $(m-2)$ -dimensionalen Einheitskugel.

Beweis. Angenommen, es gilt $L_\perp B_{\frac{r}{n}}(z) \neq 0$. Dann gibt es nach Satz 3.1 (3.3) ein $x \in B_{\frac{r}{n}}(z)$, so daß

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha_{m-2}^{-1} \rho^{2-m} M(L_\perp B_\rho(x)) \geq 1.$$

Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $\frac{r}{n} > \rho > 0$, so daß

$$4\pi\alpha_{m-2} - \delta \leq \rho^{2-m} \left(\frac{1}{2} \int_{B_\rho(x)} |Du|^2 + 4\pi M(L_\perp B_\rho(x)) \right).$$

Nach Satz 8.3 ist also

$$\begin{aligned} 4\pi\alpha_{m-2} - \delta &\leq r^{2-m} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{2-m} \left(\frac{1}{2} \int_{B_{(1-\frac{1}{n})r}(x)} |Du|^2 + 4\pi M(L_\perp B_{(1-\frac{1}{n})r}(x)) \right) \\ &\leq \left(\frac{n-1}{n} \right)^{2-m} r^{2-m} \left(\frac{1}{2} \int_{B_r(z)} |Du|^2 + 4\pi M(L_\perp B_r(z)) \right). \end{aligned}$$

Bei $\delta \searrow 0$ erhält man

$$4\pi\alpha_{m-2} \leq \left(\frac{n-1}{n} \right)^{2-m} r^{2-m} \left(\frac{1}{2} \int_{B_r(z)} |Du|^2 + 4\pi M(L_\perp B_r(z)) \right) < 4\pi\alpha_{m-2}$$

nach der Voraussetzung. Dies ist ein Widerspruch, also gilt $L_\perp B_{\frac{r}{n}}(z) = 0$. $\square$

Satz 8.5 (F - ε -Regularitätssatz). Sei $u \in H^1_\varphi(U, S^2)$ ein F -Minimierer, $B_r(z) \subset U$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ (unabhängig von u), so daß gilt: Ist

$$r^{2-m} \left(\frac{1}{2} \int_{B_r(z)} |Du|^2 + 4\pi M(L_\perp B_r(z)) \right) < \varepsilon,$$

so ist $u \in C^\infty(B_{\frac{r}{4n}}(z), S^2)$.

Beweis. Sei $\varepsilon := \min\{\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}, (\frac{n-1}{n})^{m-2}4\pi\alpha_{m-2}\}$, wobei $\tilde{\varepsilon}$ die Zahl aus Satz 8.2 ist. Dann ist nach Satz 8.4 $L_\perp B_{\frac{r}{n}}(z) = 0$. Nach Satz 8.3 gilt auf $B_{\frac{r}{n}}(z)$ also die Monotonieformel aus Satz 8.2. Da u außerdem nach Satz 6.4 schwach harmonisch ist, ist $u \in C^\infty(B_{\frac{r}{4n}}(z), S^2)$. $\square$

Bemerkung 8.2. Der Beweis zeigt, daß man in Satz 8.5 die Voraussetzung

$$r^{2-m} \left(\frac{1}{2} \int_{B_r(z)} |Du|^2 + 4\pi M(L_\perp B_r(z)) \right) < \varepsilon$$

durch

$$r^{2-m} \left(\frac{1}{2} \int_{B_r(z)} |Du|^2 + 4\pi M(L_\perp B_r(z)) \right) < \left(\frac{n-1}{n} \right)^{m-2} 4\pi\alpha_{m-2}$$

und

$$\int_{B_{\frac{r}{n}}(z)} |Du|^2 < \tilde{\varepsilon}$$

ersetzen kann.

Beweis von Satz 8.1. Sei $\varepsilon > 0$ wie in Satz 8.5 und $L \in \mathcal{R}_{m-2}(\mathbb{R}^m)$ sei eine Minimalverbindung zu S_u . Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{sing } u \cap U &\subset \left\{ z \in U \mid \liminf_{r \rightarrow 0} r^{2-m} \left(\frac{1}{2} \int_{B_r(z)} |Du|^2 + 4\pi M(L \llcorner B_r(z)) \right) \geq \varepsilon \right\} \\ &\subset S_1 \cup S_2, \end{aligned}$$

wobei

$$S_1 := \left\{ z \in U \mid \liminf_{r \rightarrow 0} r^{2-m} \int_{B_r(z)} |Du|^2 > 0 \right\}$$

und

$$S_2 := \left\{ z \in U \mid \liminf_{r \rightarrow 0} r^{2-m} M(L \llcorner B_r(z)) > 0 \right\}$$

ist. Nach Satz 3.1 (3.2) ist $\mathcal{H}^{m-2}(S_2) < \infty$, und ein Standard-Überdeckungsargument zeigt, daß $\mathcal{H}^{m-2}(S_1) = 0$ ist für jedes $u \in H^1(U, S^2)$: Es gilt

$$S_1 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S(u, n, k),$$

wobei

$$S(u, n, k) := \left\{ z \in U \mid r^{2-m} \int_{B_r(z)} |Du|^2 \geq \frac{1}{n} \text{ für alle } 0 < r < \frac{1}{k} \right\}.$$

Es reicht zu zeigen, daß für jede Kugel $B_r(x) \subset\subset U$ gilt: $\mathcal{H}^{m-2}(S(u, n, k) \cap \bar{B}_r(x)) = 0$. Ohne Einschränkung sei $B_r(x) = B^m$ die m -dimensionale Einheitskugel. Für festes $0 < \sigma < 1$ wähle eine maximale Menge disjunkter Kugeln $B_{\frac{\sigma}{2}}(x_i)$, $1 \leq i \leq l_\sigma$, mit Mittelpunkten $x_i \in S(u, n, k) \cap \bar{B}^m$. Dann ist $S(u, n, k) \cap \bar{B}^m \subset \bigcup_{i=1}^{l_\sigma} B_\sigma(x_i) =: U_\sigma$, und wegen $x_i \in S(u, n, k) \cap \bar{B}^m$ ist

$$l_\sigma \sigma^{m-2} \leq 2^{m-2} \varepsilon^{-1} \sum_{i=1}^{l_\sigma} \int_{B_{\frac{\sigma}{2}}(x_i)} |Du|^2 \leq 2^{m-2} \varepsilon^{-1} \int_{U_\sigma} |Du|^2. \quad (8.3)$$

Daraus erhalten wir

$$\mathcal{L}^m(U_\sigma) \leq \sigma^2 \mathcal{L}^m(B^m) l_\sigma \sigma^{m-2} \leq \sigma^2 \mathcal{L}^m(B^m) 2^{m-2} \varepsilon^{-1} \int_{U_\sigma} |Du|^2 \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0,$$

und mit (8.3) folgt $l_\sigma \sigma^{m-2} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$, also $\mathcal{H}^{m-2}(S(u, n, k) \cap \bar{B}^m) = 0$, da ja $S(u, n, k) \cap \bar{B}^m \subset U_\sigma$. Insgesamt ist also $\mathcal{H}^{m-2}(\text{sing } u \cap U) < \infty$. Daß $u \in C^\infty(\bar{U} \setminus \text{sing } u, S^2)$ ist, folgt aus Satz 1.2, da u schwach harmonisch ist. $\square$

Nun können wir das Energie-Infimum in $C^\infty_\varphi(\bar{U}, S^2)$ charakterisieren und damit die Frage aus Kapitel 2, ob ein zu (2.4) analoges Resultat in beliebiger Dimension gilt, positiv beantworten.

Satz 8.6. *Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes C^∞ -Gebiet und $\varphi \in C^\infty(\bar{U}, S^2)$. Dann ist $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ genau dann ein F -Minimierer, wenn u ein $\mathcal{F}$ -Minimierer ist. Insbesondere gilt*

$$\min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} F(u) = \inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u).$$

Beweis. Sei v ein F -Minimierer. Natürlich ist $\text{sing } v \subset (\text{sing } v \cap U) \cup \partial U$. Da $\mathcal{L}^m(\partial U) = 0$ ist und nach Satz 8.1 $\mathcal{H}^{m-2}(\text{sing } v \cap U) < \infty$ gilt, ist $\mathcal{L}^m(\text{sing } v) = 0$ und daher nach Satz 7.2 $F(v) = \mathcal{F}(v)$. Da $F(u) \leq \mathcal{F}(u)$ für alle $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ gilt (siehe (6.3)), und da $F(v) = \min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} F(u)$ ist, folgt

$$\mathcal{F}(v) = \min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} \mathcal{F}(u).$$

Ist andererseits v ein $\mathcal{F}$ -Minimierer und w ein F -Minimierer, so ist $F(w) = \mathcal{F}(w)$ und

$$F(w) \leq F(v) \leq \mathcal{F}(v) \leq \mathcal{F}(w).$$

Also gilt in jeder dieser Ungleichungen „ $=$ “ und v ist ein F -Minimierer.

$$\min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} F(u) = \inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u)$$

folgt dann aus (1.4). □

Kapitel 9

Schlußbemerkungen

Wir haben die Energielücke in beliebiger Dimension $m \geq 3$ durch die Massen der Minimalverbindungen (mit ganzen Vielfachheiten) zu den singulären Strömen von E - und $\mathcal{F}$ -Minimierern abgeschätzt und wissen genausoviel über jeden Minimierer u der relaxierten Energie $\mathcal{F}$ wie im dreidimensionalen Fall: u ist schwach harmonisch und glatt bis auf eine kompakte Ausnahmemenge $\text{sing } u \subset \bar{U}$ mit $\mathcal{H}^{m-2}(\text{sing } u) < \infty$. Allerdings bleiben folgende Fragen offen:

- Ist F die relaxierte Energie? Oder gibt es ein glattes beschränktes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^m$ und ein $\varphi \in C^\infty(\bar{U}, S^2)$, so daß ein $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ existiert mit $F(u) < \mathcal{F}(u)$? Natürlich müßte nach unseren Ergebnissen ein solches u „sehr singulär“ sein, d.h. es wäre $\mathcal{L}^m(\text{sing } u) > 0$.
- Kann man, sofern eine echte Energielücke auftritt, zeigen, daß kein $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ existiert, das sowohl die Energie E als auch die relaxierte Energie $\mathcal{F}$ minimiert? Mit Hilfe von Simons Regularitätsaussage für Energieminimierer $u \in H_\varphi^1(U, S^2)$ (siehe Bemerkung 1.7) sollte dies ähnlich zu beweisen sein, wie in [BBC90] im dreidimensionalen Fall durchgeführt.

Wie im dreidimensionalen Fall sind folgende Fragen ebenfalls offen:

- Ist die Regularitätsaussage für $\mathcal{F}$ -Minimierer optimal?
- Wird $\inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u)$ angenommen?
- Gibt es für alle glatten, beschränkten Gebiete $U \subset \mathbb{R}^m$ und alle $\varphi \in C^\infty(\bar{U}, S^2)$ eine harmonische Abbildung in $C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)$, also eine harmonische Abbildung ohne Singularitäten?
- Kann man zu vorgegebenem $N \in \mathbb{N}$ ein glattes, beschränktes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^m$ und eine Abbildung $\varphi \in C^\infty(\bar{U}, S^2)$ finden, so daß $\inf_{u \in C_\varphi^\infty(\bar{U}, S^2)} E(u) - \min_{u \in H_\varphi^1(U, S^2)} E(u) > N$ ist?

Literaturverzeichnis

- [BBC90] BETHUEL, F., H. BREZIS und J.-M. CORON: *Relaxed Energies for Harmonic Maps*. In: BERESTYCKI, H., J.-M. CORON und I. EKE-LAND (Herausgeber): *Variational Methods*, Seiten 37–52, Boston, MA, 1990. Birkhäuser.
- [BCL86] BREZIS, H., J.-M. CORON und E. LIEB: *Harmonic maps with defects*. Comm. Math. Phys., 107:649–705, 1986.
- [Bet90] BETHUEL, F.: *A characterisation of maps in $H^1(B^3, S^2)$ which can be approximated by smooth maps*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 7:269–286, 1990.
- [Bet91] BETHUEL, F.: *The approximation problem for Sobolev maps between two manifolds*. Acta Math., 167:153–206, 1991.
- [Bet93] BETHUEL, F.: *On the singular set of stationary harmonic maps*. Manuscripta Math., 78:417–443, 1993.
- [BZ88] BETHUEL, F. und X. ZHENG: *Density of Smooth Functions between Two Manifolds in Sobolev Spaces*. J. Funct. Anal., 80:60–75, 1988.
- [EG92] EVANS, L. C. und R. F. GARIEPY: *Measure Theory and fine Properties of Functions*. CRC Press London, 1992.
- [Eva91] EVANS, C.L.: *Partial regularity for stationary harmonic maps into spheres*. Arch. Rat. Mech. Anal, 116:101–163, 1991.
- [Fed69] FEDERER, H.: *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag, New York, 1969.
- [Fed74] FEDERER, H.: *Real flat chains, cochains and variational problems*. Ind. Univ. Math. J., 24:351–407, 1974.
- [GMS89] GIAQUINTA, M., G. MODICA und J. SOUČEK: *The Dirichlet Energie of Mappings with values into the sphere*. Manuscripta Math., 65:489–507, 1989.

- [GMS98a] GIAQUINTA, M., G. MODICA und J. SOUČEK: *Cartesian Currents in the Calculus of Variations I*. Springer, 1998.
- [GMS98b] GIAQUINTA, M., G. MODICA und J. SOUČEK: *Cartesian Currents in the Calculus of Variations II*. Springer, 1998.
- [GT83] GILBARG, D. und N. S. TRUDINGER: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, 1983.
- [HL] HANG, F. und F.H. LIN: *Topology of Sobolev Mappings II*. Courant Institute.
- [HL86] HARDT, R. und F. LIN: *A remark on H^1 mappings*. Manuscripta Math., 56:1–10, 1986.
- [Jos98] JOST, J.: *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer, 1998.
- [Mor84] MORGAN, F.: *Area minimizing currents bounded by higher multiples of curves*. Rend. Circ. Mat. Palermo, 33:37–46, 1984.
- [Pak01] PAKZAD, M. R.: *Existence of infinitely many weakly harmonic maps from a domain in $\mathbb{R}^n$ into S^2 for non-constant boundary data*. Calc. Var., 237:97–121, 2001.
- [Pak02] PAKZAD, M. R.: *Relaxing the Dirichlet energy for maps into S^2 in high dimensions*. Commun. Contemp. Math, 4(3):513–528, 2002.
- [PR] PAKZAD, M. R. und T. RIVIÈRE: *Weak density of smooth maps for the Dirichlet energy between manifolds*. Preprint.
- [Riv95] RIVIÈRE, T.: *Everywhere discontinuous harmonic maps into spheres*. Acta Math., 175:197–226, 1995.
- [Sim] SIMON, LEON: *On the singularities of harmonic maps*. Preprint.
- [Sim83] SIMON, LEON: *Lectures on Geometric Measure Theory*. Australian National University, Center for Mathematical Analysis, Canberra, 1983.
- [Sim92] SIMON, LEON: *Singularities of geometric variational problems*. In: *AMS Park City Geometry Series*, 1992.
- [Sim96] SIMON, LEON: *Theorems on Regularity and Singularity of Energy Minimizing Maps*. Lectures in Mathematics, ETH Zürich. Birkhäuser, 1996.

- [SU82] SCHOEN, R. und K. UHLENBECK: *A regularity theory for harmonic maps*. J. Differ. Geom, 17:307–335, 1982.
- [SU83] SCHOEN, R. und K. UHLENBECK: *Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps*. J. Differ. Geom., 18:253–268, 1983.
- [Whi84] WHITE, B.: *The least area bounded by multiples of a curve*. Proc. Am. Math. Soc, 90:230–232, 1984.
- [You63] YOUNG, L. C.: *Some extremal questions for simplicial complexes V: The relative area of a Klein bottle*. Rend. Circ. Mat. Palermo, 12:257–274, 1963.