

# Reduzierte Modelle zur effizienten Optimierung optischer Übertragungssysteme

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Jan Alexander Posth  
aus Düsseldorf

Düsseldorf

2004

---

Gedruckt mit der Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent: Prof. Dr. K.-H. Spatschek  
Korreferent: Prof. Dr. H. Löwen

Tag der mündlichen Prüfung: 17. Dezember 2003

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2. Grundlagen</b>	<b>9</b>
2.1. Die kubisch nichtlineare Schrödingergleichung . . . . .	9
2.2. Die $T$ - $M$ -Gleichungen . . . . .	11
2.3. Erweiterung der $T$ - $M$ -Gleichungen für hohe Pulsleistungen . . . . .	13
2.4. Der Optimierungsalgorithmus für das erweiterte $T$ - $M$ -Modell . . . . .	14
2.5. Kenngrößen des Managements der Dispersion zweiter Ordnung . . . . .	17
2.6. Numerische Verfahren . . . . .	19
2.7. Motivation dieser Arbeit . . . . .	20
<b>3. Management der Dispersion zweiter Ordnung</b>	<b>21</b>
3.1. Optimale Dispersions-Kompensation für die “Two-Step-Map” . . . . .	21
3.2. Dispersions-Management eines komplexen Glasfasersystems . . . . .	22
3.3. Stabilität generalisierter DMS . . . . .	29
3.4. Zusammenfassung . . . . .	33
<b>4. Management der Dispersion dritter Ordnung</b>	<b>37</b>
4.1. Erweiterung der $T$ - $M$ -Gleichungen für die GNLSE . . . . .	37
4.1.1. Die generalisierte kubisch nichtlineare Schrödingergleichung . . . . .	38
4.1.2. Endlich dimensionale Approximation der GNLSE . . . . .	40
4.2. Management der Dritte-Ordnungs-Dispersion . . . . .	41
4.2.1. Periodische Kompensation der Dispersion dritter Ordnung . . . . .	42
4.2.2. Optimierte Rekonstruktion der Pulsform . . . . .	45
4.2.3. Dritte-Ordnungs-Dispersion und SRS-induzierte Eigen-Frequenz- Verschiebung . . . . .	48
4.3. Zusammenfassung . . . . .	50
<b>5. Glasfasersysteme mit kontinuierlicher Verstärkung</b>	<b>53</b>
5.1. Die $T$ - $M$ -Gleichungen für Raman-verstärkte Glasfasersysteme . . . . .	54
5.2. Optimierung der Startverteilung . . . . .	55
5.2.1. Der ungedämpfte Fall . . . . .	56
5.2.2. Der gedämpfte Fall mit EDFA-Verstärkung . . . . .	57
5.2.3. Der gedämpfte Fall mit Raman-Verstärkung . . . . .	58

5.2.4. Vergleich der verschiedenen Verstärkungsschemata . . . . .	59
5.2.5. Approximation der effektiven Nichtlinearität . . . . .	61
5.3. Optimierung durch Längenmanagement . . . . .	63
5.3.1. Auswirkungen des Designs der “Two-Step-Map” auf das Verhalten der Lösungsmannigfaltigkeit . . . . .	65
5.3.2. Vergleich des Längenmanagements mit Pre-Chirping . . . . .	67
5.4. Zusammenfassung . . . . .	72
<b>6. ODE-Approximation der NLSE für den Multi-Puls-Fall</b>	<b>79</b>
6.1. Herleitung der $n$ -Puls-ODE-Gleichungen . . . . .	80
6.2. Ergebnisse für den stark nichtlinearen Fall . . . . .	85
6.3. Ergebnisse für komplexe Übertragungssysteme mit DPSK . . . . .	87
6.4. Zusammenfassung . . . . .	90
<b>7. Zusammenfassung</b>	<b>93</b>
<b>A. Zur Gauß-Hermite-Entwicklung des DM-Solitons</b>	<b>97</b>
<b>B. Zur Variation of Action Method für <math>n</math> Pulse</b>	<b>101</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>105</b>
<b>Danksagung</b>	<b>111</b>
<b>Erklärung</b>	<b>113</b>

# 1. Einleitung

Nichtlineare Dynamik spielt in der Natur eine wichtige Rolle. Als spezielles Beispiel sei hier die Propagation von Lichtpulsen in Glasfaserkabeln genannt. Die hier zugrunde liegende nichtlineare Physik kurzer Pulse im Zeitbereich wird durch die *Nichtlineare Schrödinger Gleichung* (Non-Linear Schrödinger Equation, NLSE) beschrieben. Die NLSE geht als Näherung der sich langsam verändernden Amplitude des elektrischen Feldes aus den Maxwell Gleichungen hervor. Da die Eigenschaften dieser Gleichung und das Verhalten ihrer Lösungen von ganz erheblicher Bedeutung für die Konstruktion und Optimierung moderner Glasfasernetze sind, werden zur Zeit größere Anstrengungen unternommen, die der NLSE zugrundeliegenden physikalischen Prozesse zu verstehen.

In der optischen Datenübertragung lässt sich die digitale Information durch die Amplitude des elektrischen Feldes abbilden. Man kodiert sie hierzu in den Eigenschaften der Lichtpulse, die durch die Glasfaser propagieren. Wählt man z.B. die Return-To-Zero Modulation (RTZ), so stellt ein Lichtpuls eine *Eins* da, sein Ausbleiben eine *Null*. Bei der Differential Phase Shift Keying Modulation (DPSK) hingegen steckt die Information im Phasenwechsel aufeinanderfolgender Pulse. Dabei ist das übergeordnete Ziel, möglichst hohe Übertragungsraten und möglichst geringe Bit-Fehler-Raten (Bit Error Rates, BER) zu erreichen. Man verwendet deswegen Pulse sehr kurzer Dauer, die eine Leistung besitzen, die weit über dem Rauschniveau liegt. Dies führt zu nichtlinearen Effekten. Um die BER niedrig zu halten, ist eine exzellente Wiederherstellung des Signals am Empfänger notwendig. Dies bedeutet hinsichtlich der Glasfaserstrecke eine nahezu periodische Übertragung.

Um eine möglichst optimale Übertragungsqualität zu gewährleisten, ist man daran interessiert, Effekte, die das Signal stören, zu minimieren. Der offensichtlichste dieser Effekte ist die Dämpfung des Signals in der Glasfaser, und tatsächlich wurde in den ersten Glasfasernetzen lediglich diese Dämpfung durch den Einsatz von periodisch angeordneten Verstärkern kompensiert. Mit höheren Anforderungen an die Übertragungsrate wurden allerdings die Pulsdauern kürzer und kürzer, bis die Signalverbreiterung durch die Gruppengeschwindigkeits- oder chromatische Dispersion zum Problem wurde. Die Lösung hierfür besteht in der *Dispersions-Kompensation* [2, 4].

Dispersions-Kompensation (Dispersion Compensation) oder auch Dispersions-Management (Dispersion Management, DM) besteht in der Manipulation der chromatischen Dispersion einer Glasfaserübertragungsstrecke. Sie stellt eine der attraktivsten Techniken dar, die Leistungsfähigkeit eines optischen Datenübertragungssystems zu optimieren, und zwar sowohl für den Solitonen-Fall [27, 26] als auch für den Nicht-Solitonen-Fall [18]. Die Technik, eine Dispersions-kompensierende Glasfaser (Dispersion Compensa-

ting Fiber, DCF) einzusetzen, um die Dispersion einer Standard-Monomode Glasfaser (Standard Monomode Fiber, SMF) zu beschränken, ist daher auch sehr gebräuchlich. Das einfachste, Dispersions-gemanagte Übertragungselement besteht aus einer Übertragungsglasfaser, etwa einer SMF oder einer Dispersion Shifted Fiber (DSF), und einer Kompensationsfaser mit entgegengesetzter Dispersion (DCF für SMF oder SMF für DSF mit normaler Dispersion). Durch das Einfügen einer solchen Kompensationsglasfaser wird die Gesamtdispersion des Übertragungselementes stark verringert oder, im Idealfall, komplett eliminiert.

Einfache Systeme von Glasfasern, in denen sich die Dispersion periodisch von Faser zu Faser ändert, wurden in der Vergangenheit von einer Vielzahl von Autoren genauestens untersucht [24, 25, 5, 11, 51, 13, 14, 44, 63, 34, 30, 1, 58, 57, 59, 8, 50]. Die Ausbreitung von Einzelpulsen im RTZ-Format wurde hierbei beschrieben durch numerische Mittelungsmethoden [44], die Guiding-Center-Theorie [24, 25], durch Variationsmethoden mit einfachem und erweitertem Ansatz [5, 58] und mittels Multi-Skalen-Theorie [1]. Neben der Kompensation von Dispersionseffekten kann durch geeignetes Dispersions-Management auch die Nichtlinearität durch die verbleibende mittlere Dispersion balanciert werden. Dies ist von besonderer Bedeutung, da die Kontrolle von nichtlinearen Effekten sehr wichtig ist, will man eine gute Übertragungsqualität sicherstellen.

Breiten sich nichtlineare Pulse in Dispersions-gemanagten (DM) Übertragungstrecken aus, so nennt man sie *dispersion managed solitary waves* und im Falle des starken Dispersions-Managements auch *DM-Solitonen* (Dispersion Managed Solitons, DMS). Diese DMS stellen periodische Lösungen des Übertragungssystems dar und sind wegen ihrer Stabilität hervorragende Kandidaten für die Datenübertragung [8, 65]. Hierbei versteht man unter *starkem* Dispersions-Management, dass die mittlere Dispersion und der Koeffizient der Nichtlinearität bezüglich der Länge eines typischen Übertragungssegments vergleichsweise klein sind, während die lokale chromatische Dispersion von der Ordnung Eins ist.

Im Gegensatz zum Soliton besitzt das DM-Soliton eine quadratische Zeitabhängigkeit der Phase, den so genannten *Chirp*. Darüber hinaus hat es nicht länger die Soliton-typische Sekans-Hyperbolicus-Form, sondern besteht aus einem selbstähnlichen Gauß-Kern, der den Hauptteil der Energie enthält, und der von oszillierenden Flügeln wesentlich geringerer Amplitude flankiert wird. Dieses DM-Soliton besitzt die interessante Eigenschaft, dass es auch im Bereich normaler mittlerer Dispersion entlang einer periodischen Übertragungstrecke stabil propagieren kann, während dies für Solitonen nur bei anomaler Dispersion der Fall ist.

Neben der Untersuchung von Dispersions-Management periodischer Glasfasersysteme, wie sie z.B. für transatlantische Verbindungen genutzt werden, rückt aufgrund der ständig zunehmenden Nutzung des Internets und der damit verbundenen anwachsenden Datenflut zunehmend die Optimierung bereits bestehender, urbaner und damit nicht periodischer Übertragungstrecken in den Vordergrund. Deren Aufbau orientiert sich zwangsläufig an geographischen Randbedingungen, wie zum Beispiel an der Lage der zu verbindenden Städte. Damit geht viel Flexibilität bei der Planung und Optimierung einer solchen Glasfaserverbindung verloren. Zusätzlich sind solche komplexen Übertragungs-

---

system nicht überall zugänglich, was es abermals erschwert, Dispersions-Management zu betreiben. Will man die Leistungsfähigkeit bereits installierter Systeme verbessern, so besteht gewaltiges praktisches Interesse daran, dies mit geringst möglichem Aufwand zu tun. Dazu ist ein genaueres Verständnis der Abhängigkeit der DMS von den Systemparametern notwendig [7].

Heutzutage hat man es mit immer kürzeren Pulsdauern ( $T_{FWHM} \sim ps$ ) und längeren Übertragungstrecken zu tun, was dazu führt, dass zusätzliche lineare und nichtlineare Effekte berücksichtigt werden müssen, wenn man zukünftige Glasfasernetze erfolgreich konzipieren will. Hier reicht einfaches Management der chromatischen Dispersion, wie oben beschrieben, mitunter nicht mehr aus. Betrachtet man die mathematische Beschreibung der Ausbreitung von Pulsen in Glasfasern, so tauchen Störterme höherer Ordnung in der *Generalisierten Nichtlinearen Schrödinger Gleichung* (Generalized Non-Linear Schrödinger Equation, GNLSE) [42] auf. Für diese komplizierte nichtlineare, partielle Differentialgleichung existieren allerdings keine direkten Lösungsmethoden. Der Grund, warum die linearen und nichtlinearen Störterme höherer Ordnung, wie z.B. *Dritte-Ordnungs-Dispersion* (Slope oder Third Order Dispersion, TOD), tatsächlich relevant sind, liegt darin, dass die Störungen führender Ordnung wie Dämpfung und Gruppengeschwindigkeits-Dispersion quasi-periodisch auf relativ kurzen Übertragungsdistanzen kompensiert werden. Dadurch tragen sie bezüglich längerer Skalen praktisch nicht bei. Dies führt dazu, dass die Effekte höherer Ordnung über diese längere Distanz ihre Wirkung akkumulieren und so das Verhalten der Pulse maßgeblich beeinflussen können.

Um eine nahezu fehlerfreie Signalübertragung zu gewährleisten, muss man unter Berücksichtigung all dieser Effekte periodische Lösungen der GNLSE finden. Diese hängen ihrerseits von einer Vielzahl von Parametern, wie der Pulsleistung und -dauer, der Länge der Kompensationsfasern, der Position der Verstärker und weitere Charakteristika des Glasfasersystems ab. Diese Optimierung lässt sich grundsätzlich numerisch bewerkstelligen. Allerdings ist der Parameterraum, über dem optimiert werden muss, je nach Problemstellung hochdimensional. Dadurch wächst der Simulationsaufwand stark an, da für jede sinnvolle Parameterkombination eine partielle Differentialgleichung, die GNLSE, gelöst werden muss. Man ist daher daran interessiert, einfachere mathematische Modelle zu entwickeln, die die GNLSE gut approximieren, gleichzeitig aber wesentlich schneller numerisch zu simulieren sind. Im Idealfall ermöglichen solche einfachen analytischen Approximationen einer partiellen Differentialgleichung zusätzlich noch, das fundamentale Verhalten der Lösungen der Differentialgleichung besser zu verstehen.

Ein Modell, welches die NLSE auf ein System gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführt, sind die so genannten *T-M-Gleichungen*. Diese approximieren die NLSE in praktisch relevanten Parameterbereichen sehr gut und sind um ein Vielfaches schneller numerisch zu integrieren. Die Lösungen der *T-M-Gleichungen* sind für den einfachen Fall einer symmetrischen Dispersionsanordnung (der so genannten "Two-Step-Map") ohne Dämpfung und Verstärkung bereits gründlich untersucht worden [22, 57]. Eines der wesentlichen Ergebnisse hierbei ist die Existenz periodischer Lösungen. In der Realität ist Dämpfung aber immer vorhanden, und dem Signal muss

regelmäßig durch Verstärker wieder Leistung zugeführt werden, damit es nicht in die Größenordnung der Rauschamplitude zerfällt. Dies geschieht z.B. durch mit Erbium dotierte Verstärker (Erbium Doped Fiber Amplifier, EDFA), die in bestimmten Abständen lokal das Signal verstärken (lumped amplification). Die dadurch auftretenden Schwankungen in der Leistung des Pulses zwischen zwei Verstärkern führt dazu, dass sich das System vollkommen anders als im ungedämpften Fall verhält. Hinzu kommt, dass jeder Verstärker neben der gewünschten Verstärkung dem Signal auch Rauschen hinzufügt. Die Rauschamplitude lagert sich an das Signal an und sorgt so für einen Übergang zu einem leicht veränderten Soliton. Dies führt zu einer stochastischen Frequenzfluktuation und damit zu einer veränderten Geschwindigkeit der Solitonen. Letztendlich ändern sich dadurch die Ankunftszeiten der einzelnen Pulse (arrival time jitter, Gordon-Haus-Jitter [20]). Da diese aber nur innerhalb ihres Slots  $T_{Slot}$  richtig detektiert werden, wird die Datenübertragungsrate  $\sim 1/T_{Slot}$  durch das Verstärker-Rauschen begrenzt.

Verlässt man bestimmte Parameterbereiche, so kann das einfache  $T$ - $M$ -Modell das tatsächliche Verhalten des Pulses nicht mehr hinreichend genau beschreiben. Dies ist immer dann der Fall, wenn zusätzliche physikalische Effekte, wie etwa eine stärkere Nichtlinearität oder weitere Terme in der NLSE, die Annahmen, die dem  $T$ - $M$ -Modell zugrunde liegen, außer Kraft setzen. So können die  $T$ - $M$ -Gleichungen weder Pulses höherer Leistung noch die symmetriebrechenden Effekte der GNLSE erfassen.

Auch ist das  $T$ - $M$ -Modell auf die Propagation eines Einzelpulses beschränkt. Beschränkt man sich auf wohl separierte Pulse nicht allzu großer Leistung, so ist eine Einzelpulsapproximation durchaus berechtigt. Durch immer kürzere Pulse und immer geringere Pulsabstände aber wird die Wechselwirkung einzelner Pulse mit ihren Nachbarn innerhalb eines Übertragungskanals zunehmend wichtiger.

Ziel dieser Arbeit ist es, die  $T$ - $M$ -Gleichungen dahingehend zu erweitern, dass sie moderne Hochleistungsglasfasersysteme ähnlich gut beschreiben wie sie es für die "Two-Step-Map" bereits tun. Hierzu wird das  $T$ - $M$ -Modell derart modifiziert, dass es seine Gültigkeit auch für komplexe, aperiodische Übertragungsstrecken behält, die durch die GNLSE beschrieben werden und in denen die Wechselwirkung der Pulse untereinander nicht mehr zu vernachlässigen ist. Mittels dieses erweiterten Modells lassen sich dann auch solche modernen Hochleistungsübertragungsstrecken schnell und effizient optimieren. Dabei werden Daten realer Glasfaserstrecken zugrunde gelegt und Effekte wie die Dämpfung und Dritte-Ordnungs-Dispersion mit simuliert. Im Rahmen der Optimierung werden die Grenzen des herkömmlichen Dispersions-Managements aufgezeigt, und neue Verfahren vorgestellt, die die benötigte Übertragungsqualität wiederherstellen, wenn man zu immer kürzeren Pulsen oder höheren Leistungen übergeht. Anhand eines Mehr-Puls-Modells wird die Intra-Kanal-Wechselwirkung simuliert und ihre Auswirkung auf das Übertragungsverhalten untersucht. Leistungsfähige Numerik wird entwickelt und eingesetzt, um schnell große Parameterbereiche auf periodische Lösungen hin untersuchen zu können. Die Ergebnisse der Optimierungsprozesse werden durch PDE-Simulationen der GNLSE verifiziert.

## 2. Grundlagen

In diesem Kapitel stellen wir den mathematischen Formalismus vor, der die Propagation eines Lichtpulses in einem Glasfasersystem beschreibt. Nach den allgemeinen Grundlagen führen wir reduzierte mathematische Modelle, spezifische Definitionen und bestimmte numerische Algorithmen ein, die wir zur Optimierung der optischen Übertragungssysteme benötigen werden.

### 2.1. Die kubisch nichtlineare Schrödingergleichung

Strahlt man Licht oder ein pulsförmiges Lichtsignal unter einem nicht zu großen Winkel in eine Glasfaser ein, so wird es unter Totalreflexion durch die Faser propagieren. Die Ausbreitung dieses Signals in einer Glasfaser wird durch die kubisch nichtlineare Schrödingergleichung (NLSE) beschrieben [27, 13, 57, 59, 42]

$$i \mathcal{E}_z(z, t) - \frac{1}{2} \beta_2(z) \mathcal{E}_{tt}(z, t) + \sigma(z) |\mathcal{E}(z, t)|^2 \mathcal{E}(z, t) = i G(z) \mathcal{E}(z, t). \quad (2.1)$$

Hier ist  $\mathcal{E}$  die Einhüllende des elektrischen Feldes,  $z$  die räumliche Ausbreitung des Pulses in einem mitbewegten Bezugssystem entlang der Glasfaser, und  $t$  die Zeit. Der Koeffizient  $\beta_2$  steht für die Zweite-Ordnungs-Dispersion,  $\sigma$  ist der Koeffizient der Nichtlinearität, und  $G$  beinhaltet die Dämpfung bzw. Verstärkung des Signals. Verschiedene Funktionen  $G$  führen zu einem veränderten Verhalten der Gleichung.  $G$  kann im allgemeinen Fall einfache Dämpfung, lokale Verstärkung sowie Raman-Verstärkung enthalten. Die partiellen Orts- und Zeitableitungen werden durch die tiefgestellten Indices  $z$  und  $t$  deutlich gemacht. Alle Größen sind normiert [26, 59]. Dabei wird die Zeit mittels der Pulsbreite ( $T_{FWHM} \sim ps$ , Full Width at Half Maximum), die Amplitude mit der Pulsleistung ( $P_{Peak} \sim mW$ , Peak Power) und die Ortskoordinate mit systemtypischen Längen normiert ( $L \sim 40 km$ ). Hierbei kann es sich zum Beispiel um den Abstand zweier Verstärker handeln oder um die Länge, die durch die lokale Dispersion gegeben ist. In dem vorliegenden Fall ist der Abstand zwischen den Verstärkern von der selben Größenordnung wie die Dispersions-Länge (bzgl. der lokalen Dispersion), während die nichtlineare Länge und die Dispersions-Länge bzgl. der mittleren Dispersion wesentlich größer sind. Eine derartige Normierung ist die übliche Vorgehensweise im Falle des starken Dispersions-Managements [14, 13].

Durch folgende Transformation

$$\mathcal{E}(z, t) = \mathcal{A}(z, t) \exp\left(\int_0^z G(z') dz'\right) \quad (2.2)$$

gelingt es, die rechte Seite von Gleichung (2.1) zu entfernen. Man erhält so eine einfacher zu handhabende Version der NLSE

$$i \mathcal{A}_z(z, t) + d(z) \mathcal{A}_{tt}(z, t) + c(z) |\mathcal{A}(z, t)|^2 \mathcal{A}(z, t) = 0. \quad (2.3)$$

Der Koeffizient  $d$  ist nun das Maß für die Dispersion,  $c$  beschreibt die effektive Wirkung der Nichtlinearität, die sich jetzt durch Dämpfung und/oder Verstärkung ändern kann:

$$d(z) = -\frac{\beta_2 L}{2T_{FWHM}^2}, \quad c(z) = c_0 \exp\left(2 \int_0^z dz' G(z')\right), \quad c_0 = \sigma(z) P_{Peak} L. \quad (2.4)$$

Dabei ist  $G(z)$  allgemein gegeben durch

$$G(z) = -\gamma(z) + v(z) \sum_{i=1}^N \delta(z - z_i) + g_0(z) \exp(-\gamma_R(z_R - z)). \quad (2.5)$$

Hier ist  $\gamma(z)$  die Dämpfung,  $g_0(z) \exp(-\gamma_R(z_R - z))$  die gedämpfte Raman-Verstärkung [56] und  $v(z)$  der Verstärkungsfaktor eines lokalen EDFA.  $z_R$  ist die Position des Raman-Verstärkers, die  $z_i$  sind die Positionen der EDFA's. Alle Größen sind vollständig normiert. Man lässt eine Ortsabhängigkeit der Koeffizienten  $d$  und  $c$  zu, da in der Regel mindestens zwei verschiedenen Glasfasersorten innerhalb einer Übertragungstrecke vorhanden sind.  $c$  ist darüber hinaus durch die Dämpfung und/oder Verstärkung von der Ausbreitung  $z$  abhängig. Da es eine Vielzahl kommerziell erhältlicher Glasfasern für die verschiedensten Einsatzbereiche gibt, die ganz unterschiedliche Werte für die chromatische Dispersion  $\beta_2$ , die Nichtlinearität  $c$  und die Dämpfung  $\gamma$  aufweisen, ist es von Vorteil, mit dimensionslosen Einheiten zu arbeiten. Für einen typischen Parametersatz [3], wie z.B.  $T_{FWHM} = 7 \text{ ps}$  und  $L = 40 \text{ km}$ , entspricht eine Dispersion von  $d = 5$  dem Koeffizienten  $\beta_2 = -12.5 \text{ ps}^2/\text{km}$ . Wählt man weiterhin  $\sigma = 1 \text{ W}^{-1}\text{km}^{-1}$  sowie  $P_{Peak} = 25 \text{ mW}$ , so ist  $c_0 = 1$ .

Die mittlere Leistung ( $P_{mean}$ , Mean Power) ist definiert durch

$$P_{mean} = \frac{1}{2} \frac{1}{T_{Slot}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{A}|^2 dt. \quad (2.6)$$

Der Faktor  $\frac{1}{2}$  repräsentiert die Wahrscheinlichkeit, in einer Pulsfolge eine Eins oder eine Null zu finden,  $T_{Slot} = 25 \text{ ps}$  den Standardabstand zweier aufeinanderfolgender Pulse bei einer Datenrate von  $40 \text{ Gb/s}$ . Dieses Maß für die mittlere Leistung, die sich in einer Übertragungstrecke befindet, bezieht sich aufgrund seiner technisch motivierten Herkunft auf den Fall vieler Pulse, die durch die Glasfaser propagieren. Zwecks Vergleichbarkeit von Parameterbereichen kann man diese Definition aber auch für Einzelpulse heranziehen.

## 2.2. Die $T$ - $M$ -Gleichungen

Im nächsten Schritt führt man die so genannte *Linsen-Transformation* durch, die dem *Atmen* des Pulses aufgrund der hohen lokalen Dispersion  $d$  Rechnung trägt [52],

$$\mathcal{A}(z, t) = \frac{N}{\sqrt{T(z)}} Q \left( z, \frac{t}{T(z)} = x \right) \exp \left( i \frac{M(z)}{T(z)} t^2 \right). \quad (2.7)$$

Die Pulsparameter  $T$  und  $M$  sind periodische Funktionen bzgl. der Ortskoordinate  $z$  [34, 58, 59]. Das DM-Soliton kann durch eine Gauß-Glocke approximiert werden, wie numerische Untersuchungen gezeigt haben [30, 23]. Deswegen entwickelt man  $Q$  in der Basis der Gauß-Hermite-Eigenfunktionen  $\{\psi_n\}$  mit  $\psi_{nxx} - x^2\psi_n = \lambda_n\psi_n$  des harmonischen Oszillators [36, 55, 34, 50], deren nullte Mode gerade eine Gauß-Verteilung ist (vergl. Anhang A):

$$Q \left( z, \frac{t}{T(z)} \right) = \sum_n b_n(z) \psi_n \left( \frac{t}{T(z)} = x \right). \quad (2.8)$$

Der Gauß-Kern trägt den Hauptteil der Energie und wird von oszillierenden Flügeln wesentlich geringerer Amplitude flankiert. Diese resultieren aus einer Umverteilung der Pulsenergie zwischen den Gauß-Hermite-Moden durch die Nichtlinearität. Letztendlich interpretiert man also das DM-Soliton als Grundzustand eines makroskopischen, nicht-linearen Quanten-Oszillators [50]. Benutzt man zusätzlich

$$T_z(z) = 4 d(z) M(z), \quad (2.9)$$

so kann man die Gleichungen für die  $b_k$  vereinfachen

$$\begin{aligned} b_{kz} = & \quad i \frac{d}{T^2} b_k \lambda_k + i \left( \frac{d}{T^2} - T M_z \right) \sum_n b_n S_{nk} \\ & + i \frac{c N^2}{T} \sum_{n,m,l} b_n b_m b_l^* V_{nmlk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dabei handelt es sich bei  $\lambda_k$ ,  $S_{nk}$ , und  $V_{nmlk}$  um bekannte Koeffizienten (vergl. Kapitel 4.1.1, Anhang A) [59]. Unter der Annahme, dass sich die Pulsform in einer Gauß-Hermite-Basis darstellen lässt, hat man so die NLSE (2.3), eine partielle Differentialgleichung (Partial Differential Equation, PDE), durch ein unendliches System gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen (Ordinary Differential Equation, ODE) erfasst.

Reduzierte Modelle zur Optimierung von DM-Solitonen erhält man nun durch ein Abschneiden des obigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen. Die NLSE (2.3) ist symmetrisch bzgl. der Zeit  $t$ , also nimmt man in der einfachsten Näherung nur die ersten zwei geraden Hermite-Moden mit,  $b_0$  und  $b_2$ . Da man in dieser Näherung im wesentlichen den Gauß-Kern beschreiben möchte, fordert man weiterhin  $b_2 \equiv 0$ . Diese zusätzliche Bedingung führt zu

$$M_z(z) = \frac{d(z)}{T^3(z)} - \frac{c(z)}{T^2(z)} \frac{N^2 |B_0|^2}{2\sqrt{2}\pi}. \quad (2.11)$$

Die Gleichungen (2.9) und (2.11) beschreiben die Entwicklung des Pulsbreitenparameters  $T$  und der Phase mit quadratischer Zeitabhängigkeit, des Chirps  $M$ , entlang der Glasfaser. Diese so genannten  $T$ - $M$ -Gleichungen lassen sich ebenfalls durch einen *Variationsansatz* (Variation of Action Method, VAM) oder mittels der Momenten-Methode erhalten. Die VAM wird in Kapitel 6 zum Einsatz kommen, um ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für  $n$  Pulse herzuleiten. Dieses reduziert sich dann für  $n = 1$  zu den hier hergeleiteten  $T$ - $M$ -Gleichungen.

Da  $N^2$  ein willkürlich eingeführter Parameter ist, kann man  $|B_0|^2 \equiv |b_0(0)|^2 = 2\sqrt{2}\pi$  wählen. Die Information über die Pulsleistung ist dann in  $N^2$  enthalten, weswegen dieser Parameter auch Leistungsparameter genannt wird. Dadurch vereinfacht sich Gleichung (2.11), sodass das einfachste Modell aus zwei gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen besteht

$$T_z(z) = 4d(z)M(z), \quad (2.12)$$

$$M_z(z) = \frac{d(z)}{T^3(z)} - \frac{c(z)N^2}{T^2(z)}. \quad (2.13)$$

Diese beschreiben die Entwicklung der Breite und des Chirps eines einzelnen Gaußförmigen Pulses. Die Entwicklung der Amplitude wird im gedämpften Fall über Gleichung (2.4) modelliert. Die Evolution dieser makroskopischen Größen, aus denen sich die Verteilungsfunktion jederzeit wiedergewinnen lässt, sind hinsichtlich der Optimierung in der Telekommunikation von großem Interesse.

Wählt man als Startverteilung eine Gauß-Glocke ohne anfänglichen Chirp ( $M_0 = 0$ ), so erhält man aus den Gleichungen (2.7) und (2.8)

$$\mathcal{A}(z=0, t) = \frac{N}{\sqrt{T_0}} \sqrt{2\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2T_0^2}\right). \quad (2.14)$$

Ein Vergleich mit der üblichen Definition einer Gauß-Verteilung

$$\bar{\mathcal{A}}(z=0, t) = \sqrt{P_{Peak}} \exp\left(-\frac{1}{2} \ln 2 \frac{t^2}{(1/2 T_{FWHM})^2}\right), \quad (2.15)$$

für die bei  $t_{1/2} = 1/2 T_{FWHM}$  gerade  $|\bar{\mathcal{A}}(z=0, t_{1/2})|^2 = \frac{1}{2} P_{Peak}$  gilt, liefert die Konvertierungsgleichungen  $T_{FWHM} = 2\sqrt{\ln 2} T_0$  und  $P_{Peak} = 2\sqrt{2} N^2 T_0^{-1}$ . Die Energie des Pulses ist dann durch  $E = \int_{-\infty}^{\infty} dt |A(t)|^2$  bzw. durch

$$E = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\ln 2}} P_{Peak} T_{FWHM} = 2\sqrt{2\pi} N^2 \quad (2.16)$$

gegeben.

## 2.3. Erweiterung der $T$ - $M$ -Gleichungen für hohe Pulsleistungen

Das gerade vorgestellte Modell verliert in starkem Maße seine guten Approximationseigenschaften der NLSE, sobald die zugrundeliegende Annahme, dass der Puls Gauß-Form besitzt, verletzt wird. Dies ist z.B. bei höheren Pulsleistungen, also größeren Pulsamplituden der Fall. Mit der Pulsleistung wächst die nichtlineare Wechselwirkung des Pulses mit sich selbst, was zu einer Deformation des Pulses führt. Von vorneherein ist nicht klar, ob sich diese Deformationen immer noch im Rahmen einer endlich-dimensionalen Darstellung in der Gauß-Hermite-Basis erfassen lassen [49, 45]. Auf jeden Fall reicht es nicht mehr, sich nur auf die ersten zwei Moden des Gleichungssystems (2.10) zu beschränken.

Wir nehmen deshalb in dieser Näherung zusätzlich die nächst gerade Mode,  $b_4$ , mit und schneiden das System erst dann ab. Erneut lassen wir keine ungeraden Moden und damit auch keine asymmetrischen Verformungen des Pulses zu.

Wir führen die Notation

$$b_0(z) = (|B_0| + a_0(z)) \exp(i\phi(z)), \quad (2.17)$$

$$b_2(z) = 0, \quad (2.18)$$

$$b_4(z) = a_4(z) \exp(i\phi(z)) \quad (2.19)$$

ein, mit der wir eine leicht gestörte Gauß-Glocke beschreiben.  $b_0(z) = |B_0| \exp(i\phi(z))$  und Gleichung (2.22) beschreiben die Propagation der reinen Gauß-Mode durch eine Phasenänderung. Die meiste Energie des Pulses finden wir gerade in dieser nullten Mode, weshalb wir die Gleichungen (2.10) linearisieren können. Dadurch bekommen wir im Vergleich zu den Gleichungen (2.12) und (2.13) zwei weitere Differentialgleichungen für die Koeffizienten  $a_0$  und  $a_4$ . In dieser Normierung ist  $|B_0| \equiv |b_0(0)|$  gegeben durch  $|B_0|^2 = 2\sqrt{2\pi}$ ,  $a_0$  und  $a_4$  sind komplex und von geringer Amplitude.

Hierbei ist überaus wichtig, dass es sich bei den zusätzlichen Differentialgleichungen für  $a_0$  und  $a_4$  um *lineare* Differentialgleichungen handelt

$$ia_{0z} - \phi_z a_0 + \frac{d}{T^2} a_0 \lambda_0 + \frac{cN^2}{T} \sum_{n=0,4} [V_{00n0}(2|B_0|^2 a_n + B_0^2 a_n^*) + a_n S_{0n}] = 0, \quad (2.20)$$

$$ia_{4z} - \phi_z a_4 + \frac{d}{T^2} a_4 \lambda_4 + \frac{cN^2}{T} \sum_{n=0,4} [V_{00n4}(2|B_0|^2 a_n + B_0^2 a_n^*) + a_n S_{4n}] = -\frac{cN^2}{T} (B_0 |B_0|^2 V_{0004} + B_0 S_{40}). \quad (2.21)$$

Die Koeffizienten  $a_0$  und  $a_4$  und damit auch  $b_0$  und  $b_4$  verändern die Pulsform über die Gleichungen (2.7) und (2.8), was dazu führt, dass jetzt eine Abweichung von der reinen Gauß-Form möglich ist.

Die Gleichung für die Phase  $\phi$  ist von den zusätzlichen Differentialgleichungen für  $a_0$  und  $a_4$  vollständig entkoppelt,

$$\phi_z = \frac{d}{T^2} \lambda_0 + \frac{cN^2}{T} |B_0|^2 \left( \frac{S_{00}}{2\sqrt{2\pi}} + V_{0000} \right). \quad (2.22)$$

Neben der Linearität der Differentialgleichungen für die höheren Hermite-Moden, ist eine weitere wichtige Eigenschaft dieser Gleichungen, dass sie nicht von  $T$  und  $M$  abhängen. Umgekehrt modifizieren die Koeffizienten  $a_0$  und  $a_4$  ihrerseits nicht die Gleichungen (2.12) und (2.13) für  $T$  und  $M$ . Die einzige Näherung, die wir hier gemacht haben, liegt in der Beschränkung der Pulsform auf eine leicht gestörte Gauß-Glocke sowie in dem Abschneiden des Differentialgleichungssystems nach der vierten Mode.

## 2.4. Der Optimierungsalgorithmus für das erweiterte $T$ - $M$ -Modell

In der Datenübertragung ist es von ganz besonderer Bedeutung, dass sich das Signal am Ende der Übertragungsstrecke nicht allzu sehr von dem Eingangssignal unterscheidet. Dies bedeutet, dass man periodische Lösungen der NLSE bzw. der reduzierten mathematischen Modelle finden möchte. Für das erweiterte  $T$ - $M$ -Modell heißt dies neben Periodizität in  $T$  und  $M$  auch Periodizität in allen Hermite-Koeffizienten  $a_n$  [45].

Wir stellen den Optimierungsalgorithmus, der uns eben diese Periodizität garantiert, anhand des einfachen, im vorangegangenen Absatz beschriebenen Modells für höhere Leistungen vor. Dadurch hat man nur bzgl. zweier zusätzlicher Koeffizienten zu optimieren,  $a_0$  und  $a_4$ . Da die Gleichungen für die  $a_n$  aber alle linear sind, lässt sich das Verfahren einfach auf beliebig viele Hermite-Moden erweitern. Die Suche nach einem Satz vollständiger periodische Lösungen für  $T$ ,  $M$ ,  $a_0$  und  $a_4$  kann nur numerisch bewerkstelligt werden. Hierzu ist es notwendig, die Koeffizienten  $a_n = \zeta_n + i \eta_n$  in ihren Real- und Imaginärteil aufzuspalten. Dies liefert vier lineare gewöhnliche Differentialgleichungen für  $\zeta_0$ ,  $\zeta_4$ ,  $\eta_0$  und  $\eta_4$ ,

$$\begin{aligned} \zeta_{0z} &= \eta_0 \phi_z - \frac{d}{T^2} \lambda_0 \eta_0 \\ &\quad - \frac{c N^2}{T} S_{00} \eta_0 - \frac{c N^2}{T} B_0^2 (V_{0000} \eta_0 + V_{4000} \eta_4) , \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \eta_{0z} &= -\zeta_0 \phi_z + \frac{d}{T^2} \lambda_0 \zeta_0 + \frac{c N^2}{T} S_{00} \zeta_0 \\ &\quad + 3 \frac{c N^2}{T} B_0^2 (V_{0000} \zeta_0 + V_{4000} \zeta_4) , \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{4z} &= \eta_4 \phi_z - \frac{d}{T^2} \lambda_4 \eta_4 \\ &\quad - \frac{c N^2}{T} S_{44} \eta_4 - \frac{c N^2}{T} B_0^2 (V_{4400} \eta_4 + V_{4000} \eta_0) , \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \eta_{4z} &= -\zeta_4 \phi_z + \frac{d}{T^2} \lambda_4 \zeta_4 + \frac{c N^2}{T} S_{44} \zeta_4 \\ &\quad + 3 \frac{c N^2}{T} B_0^2 (V_{4400} \zeta_4 + V_{4000} \zeta_0) + \frac{c N^2}{T} B_0^3 V_{4000} . \end{aligned} \quad (2.26)$$

Man hat also bzgl. sechs Parametern zu optimieren,  $T$ ,  $M$ ,  $\zeta_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\zeta_4$ , und  $\eta_4$ . Auf den ersten Blick scheint dies einen großen numerischen Aufwand zu erfordern und in der Tat

müsste man erhebliche Rechenzeit- und Leistung aufwenden, um für alle sechs Parameter Periodizität zu finden, würde man eine Optimierung mit einem gebräuchlichen Verfahren wie etwa "Amoeba" durchführen.

Der numerische Rechenaufwand lässt sich allerdings stark senken, wenn man die spezielle Struktur der Gleichungen (2.12), (2.13), und (2.23)–(2.26) geschickt ausnutzt.

Der hierzu notwendige Optimierungsalgorithmus ist von der tatsächlichen Übertragungstrecke unabhängig. Der Einfachheit halber wählen wir den einfachsten Fall, eine einzelne SMF. Ein reales Glasfasersystem ist wesentlich komplizierter, und wir werden später darauf zurückkommen. Die Zweite-Ordnungs-Dispersions-Kompensation besteht aus zwei DCF's, eine vor der SMF, die Präkompensation, und eine nach der SMF, die Postkompensation. Die Idee des Dispersions-Managements mit dem Ziel, periodische Lösungen zu finden, besteht also darin, zwei DCF's geeigneter Länge ( $L_{pre}$  und  $L_{post}$ ) an den Anfang und an das Ende der Übertragungstrecke anzuhängen. Dies ist schematisch in Abbildung 2.1 dargestellt. Die Längen der DCF's werden zunächst frei gelassen.

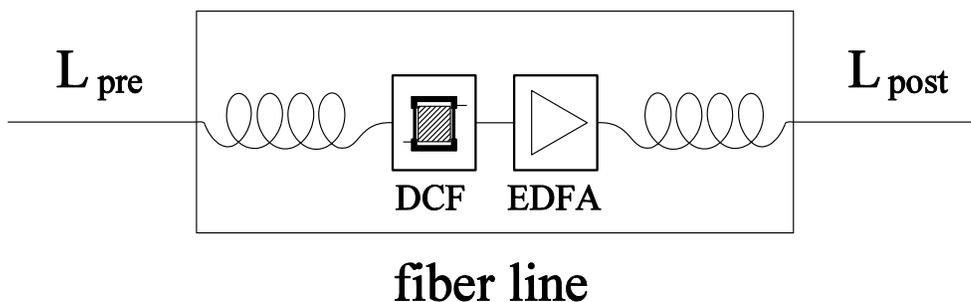


Abbildung 2.1.: Schematische Darstellung einer optischen Übertragungstrecke mit Prä- und Postkompensationselementen. Die Glasfaserstrecke selbst ist in der Regel sehr komplex und besteht aus verschiedenen Glasfasern und Verstärkern.

Damit hat man zwei Freiheitsgrade. Die Optimierungsaufgabe besteht nun darin, durch eine geeignete Wahl der Längen dieser DCF's Periodizität der Pulsparameter bzgl. des gesamten Glasfasersystems herzustellen. Zwei Freiheitsgrade sind natürlich nicht ausreichend, um Periodizität für alle sechs Parameter zu finden.

Wir konzentrieren uns deshalb zunächst auf die Gleichungen (2.12) und (2.13). Dabei gehen wir immer von einem Chirp-freien ( $M(0) = 0$ ) Eingangspuls aus, der eine bestimmte Halbwertsbreite  $T_{FWHM}$  besitzt. Die Anfangsphase  $\phi(0)$  soll ebenfalls verschwinden, kann aber in jedem Fall ohne Beschränkung der Allgemeinheit aufgrund der Phaseninvarianz der NLSE heraustransformiert werden. Da wir als erstes bzgl.  $T$  und  $M$  nach Periodizität suchen, ist das Optimierungsproblem nur zweidimensional. Wir ändern schrittweise die Längen der beiden kompensierende DCF's und integrieren die Differen-

tialgleichungen numerisch solange, bis wir Periodizität in  $T$  und  $M$  gefunden haben. Der Suchprozess lässt sich zusätzlich noch dadurch beschleunigen, indem man ausnutzt, dass  $M$  positiv oder Null zu Beginn der Postkompensations-DCF sein muss, um zum Startwert  $M(0) = 0$  zurückkehren zu können (siehe Gleichung (2.13) für  $d(z) < 0$ ).

In einem zweiten Schritt müssen wir die verbleibenden Koeffizienten  $\zeta_0, \eta_0, \zeta_4$  und  $\eta_4$  so wählen, dass sie ebenfalls periodisch übertragen werden. Dabei bleibt die bereits erreichte Periodizität in  $T$  und  $M$  erhalten, solange wir nicht die Längen der ersten und letzten DCF ändern. Somit haben wir ein Anfangswertproblem für die höheren Hermite-Koeffizienten zu lösen. Sind die richtigen Anfangswerte gefunden und benutzen wir die im ersten Schritt bestimmten Kompensationslängen, so haben wir vollständig periodische Lösungen der Differentialgleichungen (2.12), (2.13), und (2.23)–(2.26) gefunden. Wir kombinieren die Parameter  $\zeta_0, \eta_0, \zeta_4$  und  $\eta_4$  zu einem Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_4 \\ \eta_4 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Da die Gleichungen (2.23)–(2.26) *linear* bzgl.  $\zeta_0, \eta_0, \zeta_4$  und  $\eta_4$  sind, können wir die Propagation dieser Koeffizienten durch die Differentialgleichungen als Superposition der allgemeinen homogene Lösung und einer speziellen inhomogenen Lösung beschreiben. Für den inhomogenen Teil der Lösung geben wir einen Satz von Anfangswerten vor  $\mathbf{x}^{inh}(0)$ . Dann seien die Anfangswerte der *periodischen* Lösung  $\mathbf{x}$  gegeben durch

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{hom}(0) + \mathbf{x}^{inh}(0). \quad (2.28)$$

$\mathbf{x}^{hom}(0)$  ist zunächst noch unbestimmt. Die Gesamtlösung schreiben wir als

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{hom}(0) + \mathbf{x}^{inh}. \quad (2.29)$$

Den inhomogenen Teil der Lösung  $\mathbf{x}^{inh}$  erhalten wir, indem wir die zugehörigen Anfangswerte  $\mathbf{x}^{inh}(0)$  wählen und dann das komplette System der Differentialgleichungen (2.12), (2.13) und (2.23)–(2.26) numerisch integrieren. Die Transmissionsmatrix  $\mathbf{A}$  lässt sich z.B. berechnen, indem man vier linear unabhängigen Vektoren  $\mathbf{x}_{(i)}^{hom}(0)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  nimmt und für diese die Gleichungen (2.12) und (2.13), sowie den homogenen Teil der Gleichungen (2.23)–(2.26) vier mal integriert. Die vier linear unabhängige Vektoren sind im einfachsten Fall gegeben durch

$$\mathbf{x}_{(i)}^{hom}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

und man erhält dann

$$\mathbf{A} = \left( \mathbf{x}_{(1)}^{hom} \quad \mathbf{x}_{(2)}^{hom} \quad \mathbf{x}_{(3)}^{hom} \quad \mathbf{x}_{(4)}^{hom} \right). \quad (2.31)$$

Die Forderung nach Periodizität bedeutet nichts anderes als  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$ . Wir stellen die Gleichungen (2.28) und (2.29) um und erhalten

$$(\mathbf{A} - \mathbf{1}) \mathbf{x}^{hom}(0) = \mathbf{x}^{inh}(0) - \mathbf{x}^{inh}. \quad (2.32)$$

Nun können wir auch die Anfangswerte des homogene Teils der periodischen Lösung,  $\mathbf{x}^{hom}(0)$ , bestimmen. In Übereinstimmung mit Gleichung (2.32) erhält man diese direkt, indem man  $\mathbf{A} - \mathbf{1}$  invertiert. Hier muss sichergestellt werden, dass  $\det[\mathbf{A} - \mathbf{1}] \neq 0$  gilt. Wir bekommen letztlich

$$\mathbf{x}^{hom}(0) = [\mathbf{A} - \mathbf{1}]^{-1} [\mathbf{x}^{inh}(0) - \mathbf{x}^{inh}]. \quad (2.33)$$

Eine Lösung mit den Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{hom}(0) + \mathbf{x}^{inh}(0)$  erfüllt nun die Periodizitätsbedingung  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$ .

Damit müssen wir das Differentialgleichungssystem (2.12), (2.13) und (2.23)–(2.26) insgesamt nur fünf mal integrieren und dann Gleichung (2.32) lösen, um geeignete Anfangswerte für  $\zeta_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\zeta_4$  und  $\eta_4$  zu erhalten. Auf diese Weise erhalten wir periodische Lösungen wesentlich schneller als es z.B. mittels einer vollständigen sechs-dimensionalen Optimierung möglich wäre.

Es sei zum Schluss noch einmal darauf hingewiesen, dass sich diese Methode leicht auf ein höher dimensionales Gleichungssystem, also auf mehr Hermite-Moden erweitern lässt. Auch ist sie unabhängig von der Beschaffenheit der Übertragungsstrecke, solange nur jeweils zu Beginn und am Ende des Glasfasersystems eine Kompensationsfaser installiert ist. Somit lässt sich dieser Optimierungsalgorithmus auch auf komplexe optische Übertragungsstrecken anwenden.

## 2.5. Kenngrößen des Managements der Dispersion zweiter Ordnung

Nachdem wir im vorigen Abschnitt unsere grundsätzliche Vorgehensweise beim Zweite-Ordnungs-Dispersions-Management vorgestellt haben, wollen wir nun einige Größen definieren, die bei der Analyse der Simulationsergebnisse von großem Nutzen sein werden.

Die wesentlichen Parameter, die wir zum Dispersions-Management nutzen, sind die Prä- und die Postkompensationslänge,  $L_{pre}$  und  $L_{post}$ . Beide sind entweder normiert oder haben die Einheit  $[km]$ . Somit sind sie von der tatsächlichen Dimension des Glasfasersystems abhängig. Infolgedessen hat es sich als nützlich erwiesen, ein relatives Maß für die Kompensation einzuführen.

Wir definieren die *relative* Prä- und Postkompensation auf die folgende Art und Weise. Im rein linearen Fall haben wir eine perfekte Kompensation der chromatischen Dispersion, wenn

$$\int_{L_{inline}} dz d(z) + \int_{L_{in}} dz d_{DCF}(z) = 0 \quad (2.34)$$

gilt. Hier ist  $L_{inline}$  die Gesamtlänge der Übertragungsstrecke *ohne* die Kompensationsfasern und  $d_{DCF}$  der Koeffizient der Dispersion der Glasfasern, die wir zur Kompensation

einsetzen. Aus obiger Bedingung erhalten wir dann  $L_{lin}$  als die Länge der DCF, die wir einsetzen müssen, um vollständig linear zu kompensieren. Da es im linearen Fall ohne Belang ist, wo kompensiert wird, können wir z.B. ausschließlich Prä- oder Postkompensation wählen. Endliche Amplituden verursachen jedoch Abweichungen vom rein linearen Verhalten über den nichtlinearen Term in der NLSE. Diese Abweichungen durch die Nichtlinearität können wir ausbalancieren, indem wir unter- oder überkompensieren, je nach Parameterregime. Ferner ist es im nichtlinearen Fall hinsichtlich der Performance der Übertragungsstrecke von großer Bedeutung, in welchem Verhältnis die Gesamtkompensationslänge auf Prä- und Postkompensation aufgeteilt wird. Wir definieren deshalb die *relative* Prä- und Postkompensation

$$L_{pre}^{rel} = \frac{L_{pre}}{L_{lin}}, \quad L_{post}^{rel} = \frac{L_{post}}{L_{lin}}. \quad (2.35)$$

Damit ergibt sich die relative Gesamtkompensation durch

$$L_{total}^{rel} = \frac{L_{pre} + L_{post}}{L_{lin}}. \quad (2.36)$$

$L_{total}^{rel} = 1$  entspricht dem linearen Fall, während  $L_{total}^{rel} > 1$  Überkompensation und  $L_{total}^{rel} < 1$  Unterkompensation aufgrund von nichtlinearen Effekten bedeutet. Beide Fälle sind in Abhängigkeit vom gewählten Parameterbereich möglich.

Für den einfachen Fall einer ‘‘Two-Step-Map’’, in der  $d(z) = \text{const.}$  für jede SMF und DCF gilt, können wir die Definition vereinfachen

$$L_{lin}d_{DCF} + L_{SMF}d_{SMF} = 0 \Rightarrow L_{lin} = -L_{SMF} \frac{d_{SMF}}{d_{DCF}}. \quad (2.37)$$

Da ausschließlich mit DCF’s kompensiert werden soll, gilt  $L_{DCF} = L_{pre} + L_{post}$  und somit

$$L_{pre/post}^{rel} = -\frac{L_{pre/post}d_{DCF}}{L_{SMF}d_{SMF}} \quad L_{total}^{rel} = -\frac{L_{DCF}d_{DCF}}{L_{SMF}d_{SMF}}. \quad (2.38)$$

Um die Ergebnisse, die wir durch unser Zweite-Ordnungs-Dispersions-Management erhalten, mit vorangegangenen Studien, in denen periodische Lösungen durch Variation der Startparameter des Pulses gesucht werden, vergleichen zu können, definieren wir die Residual-Dispersion oder die gemittelte Dispersion  $d_{av}$  sowie die Stärke  $S$  der Dispersionsabbildung, die ‘‘Map Strength’’ in gewohnter Weise. Dabei ist  $d_+$  der Koeffizient der Dispersion einer SMF ( $d_{SMF}$ ),  $d_-$  der einer DCF ( $d_{DCF}$ ),  $L_- \equiv L_{DCF}$ ,  $L_+ \equiv L_{SMF}$  und  $L_{ges} = L_- + L_+$

$$d_{av} = \frac{L_-d_- + L_+d_+}{L_{ges}}, \quad (2.39)$$

$$S = \frac{|L_-d_- - L_+d_+|}{T_{FWHM}^2}. \quad (2.40)$$

Die Halbwertsbreite  $T_{FWHM}$  wird hier immer an Anfang der Übertragungsstrecke ermittelt. Im ungedämpften Fall ist dies gleichzeitig auch der Chirp-freie Punkt ( $M = 0$ ).

Mittels Gleichung (2.38) können wir die Parameter  $d_{av}$  und  $S$  durch  $L_{total}^{rel}$  ausdrücken

$$d_{av} = \frac{(1 - L_{total}^{rel})L_{SMF}d_{SMF}}{L_{SMF} + L_{DCF}}, \quad (2.41)$$

$$S = \frac{|(1 + L_{total}^{rel})L_{SMF}d_{SMF}|}{T_{FWHM}^2}. \quad (2.42)$$

$L_{total}^{rel} < 1$  entspricht nun  $d_{av} > 0$ , also einer *positiven* mittleren Dispersion oder Unterkompensation und  $L_{total}^{rel} > 1$  entspricht  $d_{av} < 0$ , einer *negativen* mittleren Dispersion oder Überkompensation.

## 2.6. Numerische Verfahren

Im Rahmen dieser Arbeit sind zwei grundsätzliche numerische Aufgaben zu lösen: Zum einen müssen wir die NLSE integrieren, also eine nichtlineare, partielle Differentialgleichung lösen, um Referenz-Ergebnisse zu erhalten, an denen wir unsere Approximationen messen können. Zum zweiten haben wir ein System endlich vieler, gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen zu integrieren.

Die NLSE integrieren wir mittels der Split-Step-Fourier-Methode [2]. Diese hat den Vorteil, dass sie konservativ ist. Bei der Split-Step-Fourier-Methode faktorisiert man den Exponentialoperator der formalen Lösung der NLSE in einen linearen und einen nichtlinearen Anteil. Da die beiden Einzeloperatoren nicht kommutieren, ist das Verfahren nicht exakt. Durch eine symmetrische Faktorisierung des Exponentialoperators erreicht man, dass das Verfahren bis einschließlich der zweiten Ordnung korrekt ist. Der nichtlineare Teil ist im Ortsraum bereits diagonal, den linearen Teil diagonalisiert man mittels eines Fast-Fourier-Transform-Algorithmuses (FFT) [53] im Fourierraum. Die beiden Einzelschritte löst man dann jeweils abwechselnd und hintereinander.

Zur Lösung des Systems gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen bedienen wir uns eines *Runge-Kutta-Fehlberg-Tripels* vierter Ordnung [28]. Dieses verfügt über eine Schrittweitensteuerung sowie über eine Interpolationsroutine zur Ausgabe von Zwischenergebnissen. Dabei besteht die wesentliche Neuerung nach Fehlberg darin, die Schrittweite durch den Vergleich von Integrationen unterschiedlicher Ordnung zu optimieren. Der Vorteil kommt dadurch zustande, dass die niedrigere Ordnung bereits in der höheren enthalten ist, also keine zusätzliche Rechenleistung erforderlich ist, wie es etwa der Fall ist, wenn man die Schrittweite über Integrationen zweier unterschiedlicher Schrittweiten steuert. Allerdings kann es durch die Schrittweitensteuerung geschehen, dass man nicht an allen gewünschten Stellen über das Ergebnis der Integration verfügt. Hierfür sorgt die Interpolationsroutine, die durch Polynominterpolation das Ergebnis zwischen den Stützstellen des Integrators approximiert. Dieser leistungsfähige Runge-Kutta-Fehlberg-Algorithmus sorgt für eine effiziente Integration unserer Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen mit der gewünschten Genauigkeit.

## 2.7. Motivation dieser Arbeit

Im vorliegenden Kapitel haben wir die Grundlagen bereitgestellt, auf denen wir in den folgenden Kapiteln aufbauen werden. Die NLSE lässt sich im schwach nichtlinearen Fall gut durch die  $T$ - $M$ -Gleichungen approximieren. Geht man zu höheren Amplituden bzw. Pulsleistungen über, so wird die Hinzunahme weiterer Gauß-Hermite-Moden notwendig, um die Wirkung der Nichtlinearität auf die Pulsform richtig beschreiben zu können. Ferner haben wir Methoden aufgezeigt, mit denen sich periodische Lösungen der ODE-Approximationen finden lassen, und wir haben Kenngrößen des Zweite-Ordnungs-Dispersions-Managements eingeführt.

In Kapitel 3 werden wir mit Hilfe dieser mathematischen Modelle und Methoden zeigen, dass wir durch eine optimale Kompensation der Zweite-Ordnungs-Dispersion das Übertragungsverhalten eines komplexen Telekommunikationssystems erheblich verbessern können. Des weiteren werden wir untersuchen, inwieweit wir durch die Periodizität, die wir in der endlich dimensionalen ODE-Approximation gefunden haben, auf Stabilität der Lösung der PDE schließen können.

Kapitel 4 wird sich damit befassen, wie wir die bestehende Gauß-Hermite-Approximation zu erweitern haben, um Effekte wie die Dritte-Ordnungs-Dispersion oder höhere, nichtlineare Terme der GNLSE erfassen zu können. Mit dem so modifizierten Modell wird es uns gelingen, aktives Management der Dritte-Ordnungs-Dispersion zu betreiben. Unsere schnellen Optimierungsalgorithmen ermöglichen es uns, auch hier verschiedene Wege aufzuzeigen, wie sich die Performance eines modernen optischen Übertragungssystems, in dem die Dritte-Ordnungs-Dispersion eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielt, steigern lässt.

Kapitel 5 widmet sich der systematischen Untersuchung der verschiedenen Verstärkungsschemata und deren Einfluss auf die Existenz von DM-Solitonen, also von periodischen Lösungen. Im einzelnen werden wir den ungedämpften Fall, den gedämpften Fall mit lokalen Verstärkern, sowie den gedämpften Fall mit kontinuierlichen oder Raman-Verstärkern betrachten. Um ein besseres Verständnis über die Wirkungsweise der Dämpfung und/oder Verstärkung zu erlangen, werden wir eine leistungsfähige Approximation der effektiven Nichtlinearität einführen. Schließlich werden wir zeigen, dass auch bei vorliegender Raman-Verstärkung das von uns vorgestellte Zweite-Ordnungs-Dispersions-Management anderen Verfahren überlegen ist.

Im letzten Kapitel 6 werden wir eine endlich-dimensionale ODE-Approximation der NLSE für  $n$  Pulse entwickeln. Dies wird speziell in Hinblick auf Dispersions-gemanagte Telekommunikationssysteme und die hoch aktuelle DPSK-Methode geschehen. Dabei wird unser Modell nur auf wenigen, sinnvollen Annahmen basieren, was eine hohe Flexibilität sowie einen breiten Anwendungsbereich garantiert. Wir werden die Leistungsfähigkeit unserer Approximation im stark nichtlinearen Fall unter Beweis stellen und schließlich einen Ausblick auf ihre Relevanz bzgl. moderner, realer optischer Übertragungsstrecken wagen.

# 3. Management der Dispersion zweiter Ordnung

In diesem Kapitel befassen wir uns mit der Optimierung einer realen Übertragungsstrecke durch Dispersions-Management. Im Gegensatz zu den einfachen Glasfaserstrecken, die aus einer periodischen Anordnung von abwechselnd SMF's und DCF's bestehen, betrachten wir hier ein aperiodisches optisches Übertragungssystem. Dieses besteht aus einer großen Anzahl von Glasfasern unterschiedlichster Länge, Nichtlinearität, Dispersion und Dämpfung sowie Verstärkern und weiteren Bauelementen. Solche unregelmäßigen Übertragungsstrecken findet man z.B., wann immer bei der Konzeption auf die Geographie oder die Infrastruktur Rücksicht genommen werden muss, also etwa bei der Verbindung zweier Städte.

Mit unseren in Kapitel 2 vorgestellten mathematischen Modellen und Optimierungsalgorithmen werden wir globales Dispersions-Management einer existenten Lichtwellenleiterstrecke betreiben. Dabei wird uns bereits das Einzelpulsmodell entscheidende Hinweise bzgl. des Designs einer solchen Strecke geben. Hinsichtlich der Praktikabilität werden wir nur am Anfang und am Ende der Übertragungsstrecke Manipulationen vornehmen, da hier auch technisch bestmöglicher Zugang gewährleistet ist.

Sämtliche Optimierungsergebnisse, die wir durch unser einfaches Modell erhalten, werden durch umfangreiche numerische Simulationen der NLSE überprüft. Wir werden außerdem diskutieren, inwieweit das einfache Einzelpulsmodell Vorhersagen in Hinblick auf das Verhalten mehrerer Pulse zulässt.

## 3.1. Optimale Dispersions-Kompensation für die "Two-Step-Map"

Zunächst setzen wir unseren Optimierungsalgorithmus für den einfachsten Fall einer SMF ein. Damit besteht die "Fiber-Line" in Abbildung 2.1 aus einer einzelnen Faser der Länge  $L_{fiber} = 10 km$  und der Dispersion  $10.54 ps^2/km$ . Dieser Dispersionswert ist gebräuchlich und die Dispersion in der Datenübertragung eingesetzter SMF's liegt oft in diesem Bereich. Die sehr einfache Übertragungsstrecke ist in Abbildung 3.1 zu sehen. Die Kompensationsfasern haben die entgegengesetzte Dispersion der SMF, also  $-10.54 ps^2/km$ , und wir simulieren ohne Dämpfung. Für einen Gauß-Puls mit einer Leistung von  $P_{mean} = 2 mW$  und einer Halbwertsbreite von  $T_{FWHM} = 5 ps$  finden wir

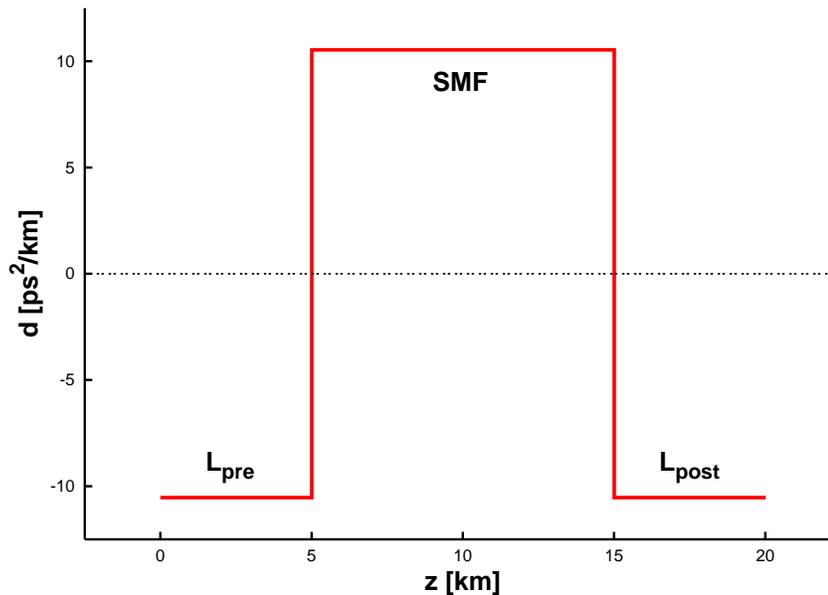


Abbildung 3.1.: Die Dispersion einer einzelnen Glasfaser (SMF) mit hoher Dispersion wird durch zwei Fasern mit entgegengesetzter Dispersion (DCF) kompensiert. Diese werden vor und hinter der SMF installiert. Die Parameter für den Gauß-Puls sind gegeben durch  $P_{mean} = 2 \text{ mW}$  und  $T_{FWHM} = 5 \text{ ps}$ .

optimale Kompensationslängen von  $L_{pre} \approx 5.007 \text{ km}$  und  $L_{post} \approx 5.007 \text{ km}$ . Wegen der relativ geringen Pulsleistung befinden wir uns nahe am linearen Regime, was erklärt, warum die Gesamtkompensationslänge  $L_{total}$  fast gleich der linearen  $L_{lin}$  ist. Hingegen deutet die geringfügige Überkompensation auf nichtlineare Effekte hin. Da wir Dämpfung nicht mit simuliert haben, ist ferner die Wirkung der effektiven Nichtlinearität symmetrisch. Das führt dazu, dass Prä- und Postkompensationslänge beide gleich groß sind:  $L_{pre} = L_{post}$ .

## 3.2. Dispersions-Management eines komplexen Glasfasersystems

Nachdem wir die Leistungsfähigkeit unseres Optimierungsalgorithmus am einfachen Beispiel der “Two-Step-Map” demonstriert haben, wenden wir uns nun dem praktisch relevanten Fall einer realistischen optischen Übertragungsstrecke zu. Die tatsächlichen Daten der einzelnen Elemente dieser Übertragungsstrecke wurden von der Deutschen Telekom bereitgestellt. Insgesamt besteht das gesamte Glasfasersystem aus ca. 45 Fasern (SMF’s und DCF’s) sowie einer Vielzahl von EDFA-Verstärkern und anderen optischen Elementen wie Multiplexern, Filtern usw. [32, 45]. Abbildung 3.2 gibt einen Eindruck von der Komplexität der Glasfaserstrecke, die die Städte Berlin und Darmstadt verbindet. Die Länge der kompletten Strecke beträgt etwa  $900 \text{ km}$ . Im Gegensatz zu transatlanti-

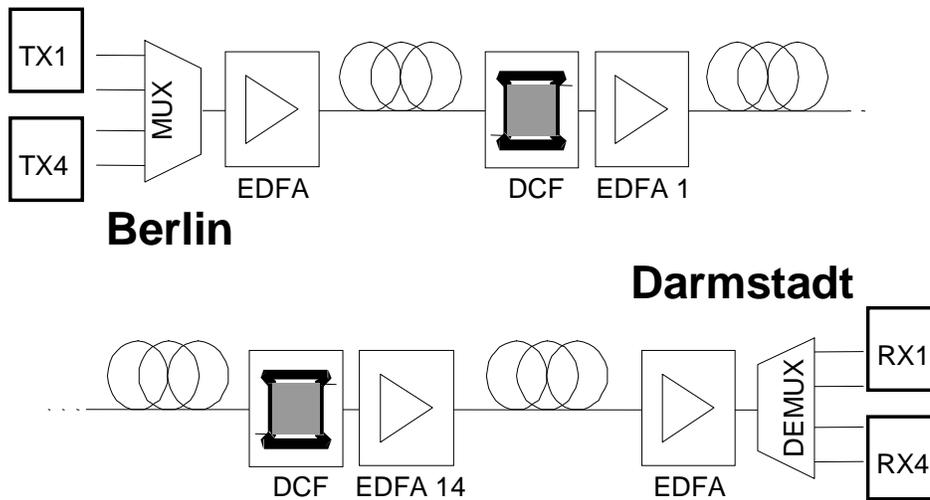


Abbildung 3.2.: Schematische Darstellung der Übertragungsstrecke der Deutschen Telekom.

schen Glasfaserstrecken besitzt diese Übertragungsstrecke keinen periodischen Aufbau. So richteten sich die Positionen der DCF's und der EDFA's nach geographischen Rahmenbedingungen wie z.B. die Lage von Städten. Dies hat zur Folge, dass die einzelnen SMF's z.T. beträchtlich in der Länge variieren. Damit einher gehen unterschiedlich starke Verstärker sowie ganz neue Anforderungen an das Dispersions-Management, welches hier im wesentlichen an den beiden Ein- bzw. Auskoppelungspunkten des Signals geschehen muss. Natürlich finden sich innerhalb der Fiber-Line auch DCF's. Diese sind aber nicht periodisch angeordnet. Das führt dazu, dass die Pulse sich beim Durchgang durch das Glasfasersystem mitunter sehr stark verbreitern und, je nach aktueller Position, höchst unterschiedlich verhalten. Die zeitweise extrem große Halbwertsbreite der Pulse zusammen mit immer wiederkehrender, starker lokaler Verstärkung resultiert in einer nicht zu vernachlässigenden Wirkung der Nichtlinearität, die ebenfalls entlang der Übertragungsstrecke stark schwankt. Diese Änderungen der Amplitude und der Halbwertsbreite der Pulse über große Skalen hinweg sowie die Asymmetrie im Aufbau bedingen die hohe Komplexität des Systems.

Die Länge und Dämpfung sowie die Koeffizienten der Dispersion und der Nichtlinearität der einzelnen Fasern kann von Element zu Element höchst unterschiedlich sein, wie man Tabelle 3.2 entnehmen kann. Folgende Kennzahlen der Einzelfasern sind für unsere Untersuchung von Belang.

Typ	Länge [km]	Dämpfung [1/km]
SMF	2.6 ÷ 56.45	-0.0691 ÷ -0.0221
DCF	4.5 ÷ 10.8	-0.0998 ÷ -0.0600
	Nichtlinearität [1/(mW km)]	Dispersion [ps <sup>2</sup> /km]
SMF	0.00132	10.54
DCF	0.00526	-64.23 ÷ -58.36

Tabelle 3.2: Charakteristische Daten der Glasfasern der realistischen Übertragungsstrecke, die den Ergebnissen der Abbildungen 3.3–3.8 zugrunde liegen.

Um die Komplexität des Übertragungssystems zu verdeutlichen, simulieren wir zunächst einen Gauß-Pulse ( $T_{FWHM} = 5 \text{ ps}$ ,  $P_{mean} = 2 \text{ mW}$ ) ohne jegliche Dispersions-Kompensation. In Abbildung 3.3 sehen wir die Variation der Halbwertsbreite  $T_{FWHM}$  des Pulses während seiner Propagation entlang der Glasfaserstrecke. Die Rechtecke entsprechen der PDE-Integration, die Linie dem Ergebnis, welches wir mittels der einfachen  $T$ - $M$ -Gleichungen erhalten haben. Unsere Simulationsergebnisse zeigen erstens,

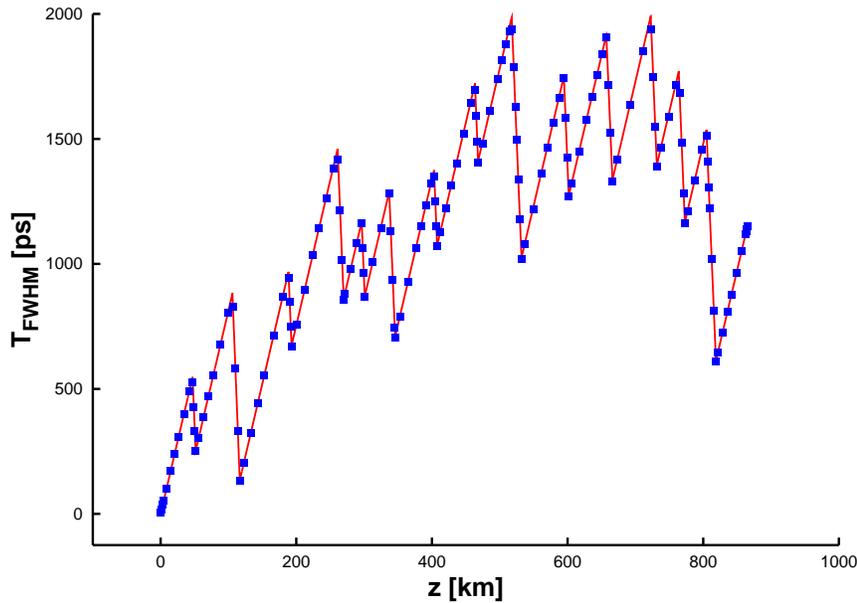


Abbildung 3.3.: Variation der Halbwertsbreite eines Pulses in einer realen Übertragungsstrecke ohne jegliche Dispersions-Kompensation. Die Parameter für den Gauß-Pulse sind  $T_{FWHM} = 5 \text{ ps}$ ,  $P_{mean} = 2 \text{ mW}$ .

dass es für einen Puls geringer Amplitude vollkommen genügt, lediglich die beiden Gleichungen (2.12) und (2.13) zu integrieren. Hier benötigen wir noch keine zusätzlichen Korrekturterme, da der Puls aufgrund der geringen Wirkung der Nichtlinearität auch während seiner Propagation entlang der Glasfaserstrecke Gauß-Form behält. Zweitens können wir erkennen, dass sich der Puls am Ende der Übertragungsstrecke um mehr

als den Faktor 200 verbreitert hat. Diese Verbreiterung des Pulses ist für die Qualität der Datenübertragung verheerend. Zurückzuführen ist sie auf das Fehlen jeglicher Dispersions-Kompensation.

Wir setzen nun unseren Optimierungsalgorithmus ein, um mittels globalen Dispersions-Managements die Übertragungseigenschaften obiger Glasfaserstrecke zu verbessern. Dabei manipulieren wir ausschließlich die Längen der ersten und der letzten DCF, alle anderen Parameter bleiben unverändert. Bei einer Kompensationsdispersion von  $-60.93 \text{ ps}^2/\text{km}$  beträgt die lineare Kompensationslänge  $L_{lin}$  ungefähr  $17.17 \text{ km}$ . Abbildung 3.4 zeigt uns, dass eine vollständige Wiederherstellung des Eingangspulses am Endempfänger möglich ist, wenn wir die optimierte Prä- und Postkompensation wählen. Wir haben also eine vollständig periodische Lösung der Gleichungen (2.12) und (2.13) und damit ein DM-Soliton gefunden. Da es sich bei der Übertragungsstrecke nicht um die typische “Two-Step-Map”, sondern um ein wesentlich komplexeres, asymmetrisches Glasfasersystem handelt, nennen wir diese DM-Solitonen *generalisierte* DM-Solitonen. Zusätzlich zu der Verbesserung der Übertragungsqualität ist es uns gelungen, das Aus-

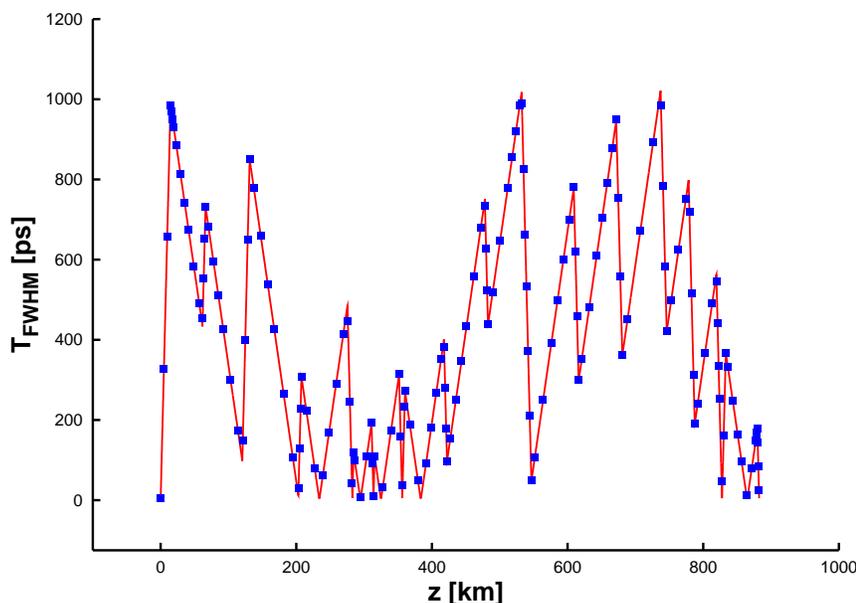


Abbildung 3.4.: Wie Abbildung 3.3, jetzt jedoch mit optimiertem Dispersions-Management.

schmieren des Pulses während seiner Propagation durch die Glasfaserstrecke, also den zwischenzeitlichen Anstieg seiner Halbwertsbreite  $T_{FWHM}$ , um den Faktor Zwei im Vergleich zum nicht-kompensierten Fall (vergl. Abbildung 3.3) zu reduzieren. Dies ist insofern von erheblicher Bedeutung, da ein verbreiteter Puls auch immer mit mehr Pulsen in seiner Nachbarschaft wechselwirken wird als ein schmaler.

Erneut stimmen die Ergebnisse der PDE- und ODE-Integration perfekt überein. Gehen wir allerdings zu Pulsen mit höheren Leistungen über, so müssen wir zu dem detaillierteren Modell (2.12), (2.13) und (2.23)–(2.26) übergehen, um weiterhin eine gute Übereinstimmung mit der PDE-Simulation der NLSE zu erreichen.

Wie gezeigt, genügen im Bereich geringerer Pulsleistung die beiden Gleichungen für  $T$  und  $M$  zur Optimierung. Im Falle der komplexen Übertragungsstrecke der Deutschen Telekom finden wir für die Pulsparameter  $T_{FWHM} = 5 \text{ ps}$  und  $P_{mean} = 2 \text{ mW}$  eine ganze Familie von periodischen Lösungen. Insgesamt 14 verschiedene Kombinationen von Prä- und Postkompensationswerten führen hier zur Periodizität in  $T$  und  $M$ . Abbildung 3.5 zeigt für jede dieser Kombinationen das Maximum der Halbwertsbreite, welches der Puls während der Propagation durch die Glasfaserstrecke erreicht, in Abhängigkeit von der jeweiligen Präkompensation. Wir sehen, dass periodische Lösungen, die fast keine

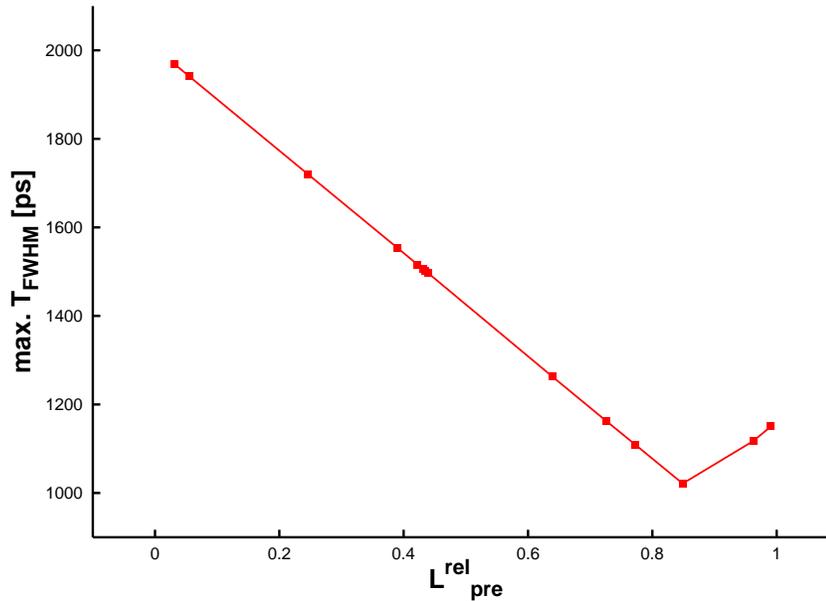


Abbildung 3.5.: Maximum der Halbwertsbreite  $T_{FWHM}$  während der Propagation durch die Glasfaserstrecke gegen die relative Präkompensationslänge. Gezeigt sind alle 14 periodischen Lösungen, die für die Pulsparameterkombination  $T_{FWHM} = 5 \text{ ps}$ ,  $P_{mean} = 2 \text{ mW}$  gefunden werden konnten.

Präkompensation aufweisen, während ihres Durchgangs durch das Glasfasersystem sehr breit werden. Überwiegend präkompensierte Lösungen hingegen bleiben relativ schmal. In Abbildung 3.5 erkennen wir ein Minimum bzgl. der maximalen Halbwertsbreite, das zu einer relativen Präkompensationslänge von ca.  $L_{pre}^{rel} \approx 0.85$  gehört. Dieses Minimum zeigt den optimalen Operationspunkt der Glasfaserstrecke an und in der Tat haben wir dieses Verhältnis von Prä- und Postkompensation in der der Abbildung 3.4 zugrundeliegenden Simulation eingesetzt.

Insgesamt sind zur Datenübermittlung solche periodischen Lösungen zu bevorzugen, die einen möglichst niedriges Maximum der Halbwertsbreite aufweisen. Diese schmieren nicht so stark aus, was wiederum eine minimale Wechselwirkung der Pulse untereinander mit sich bringt.

Um zu untersuchen, wie sich dieses Glasfasersystem hinsichtlich anderer Pulsleistungen und Halbwertsbreiten verhält, haben wir die Optimierung für ca. 4.000 verschie-

dene Pulsparameterkombinationen durchgeführt. Für fast alle dieser Kombinationen finden sich eine oder mehrere periodische Lösungen. Einige Parameterkombinationen weisen bis zu 16 Lösungen auf. Keine Lösungen lassen sich finden im praktisch uninteressanten Fall sehr breiter Eingangspulse mit geringer Leistung. Lösungen mit einer relativen Gesamtkompensation  $L_{total}^{rel} < 1$ , also unterkompensierte Lösungen, existieren für breite Pulse hoher Amplitude. Dabei unterscheidet sich die Anzahl der gefundenen periodischen Lösungen je nach Wahl der anfänglichen Pulsparameter. Eine Beziehung zwischen der genauen Anzahl der DM-Solitonen und der Parameterkombination Pulsleistung/Amplitude konnte allerdings nicht gefunden werden. Es ist aber zu vermuten, dass das Dispersions-Management für diese spezielle Fiber-Line in einigen Parameterbereichen effizienter funktioniert und so mehrere periodische Lösungen zulässt.

Wir wollen nun in den Bereich höherer Pulsleistungen gehen und untersuchen, wie sich das erweiterte  $T$ - $M$ -Modell dort verhält. Hierzu nehmen wir einen Puls mit einer Halbwertsbreite von  $T_{FWHM} = 5 \text{ ps}$  und einer Leistung von  $P_{mean} = 25 \text{ mW}$ . Tatsächlich ist solch eine *mittlere* Pulsleistung fast schon unrealistisch hoch und damit am Rande der praktischen Relevanz. Wir wählen diesen Wert hauptsächlich, um das erweiterte  $T$ - $M$ -Modell im Grenzbereich zu testen. Wir führen erneut unsere Optimierungsprozedur durch, fordern diesmal jedoch zusätzlich Periodizität für die höheren Hermite-Moden, die wir nun mit simulieren, um eine etwaige Pulsdeformation erfassen zu können. Nachdem wir mittels unserer ODE-Optimierung die erforderlichen Prä- und Postkompensationslängen sowie die Anfangswerte für die Pulsparameter  $a_0$  und  $a_4$  bestimmt haben, führen wir mit diesen Werten eine entsprechende PDE-Simulation durch und vergleichen das Eingangs- und das Ausgangssignal miteinander. In Abbildung 3.6 sehen wir den Vergleich des Eingangs- mit dem Ausgangssignal. Wir erkennen eine klare Abweichung der Pulsform vom Gauß-Profil, ein Hinweis darauf, dass die nichtlineare Selbstwechselwirkung des Pulses nun aufgrund der erheblich höheren Amplitude stärker den Puls deformiert. Trotzdem stimmen Eingangs- und Ausgangspulse immer noch ziemlich gut überein. Unsere Optimierung führt also selbst bei so hohen Leistungen immer noch zu guten Ergebnissen. Die Abweichungen bei der Pulsform lassen sich dadurch erklären, dass die Pulsleistung sehr hoch war, und wir Hermite-Moden mit  $n > 4$  in der Optimierung nicht berücksichtigt haben. Bei derart hohen Amplituden werden die höheren Hermite-Moden immer wichtiger. Ist die Pulsleistung hingegen geringer, stimmen Eingangs- und Ausgangssignal wesentlich besser überein. Dies ist in Abbildung 3.7 zu sehen. Auch für große Leistungen können wir also im erweiterten ODE-Modell generalisierte DM-Solitonen finden, diese werden allerdings je nach Amplitude des Pulses nur noch bedingt durch die PDE-Simulation bestätigt.

In diesem Kapitel wollen wir auch schon kurz einen Ausblick auf die Übertragung vieler Pulse geben. Wir haben festgestellt, dass sich ein einzelner Puls beim Durchgang durch die Glasfaserstrecke mitunter ganz erheblich verbreitert. Diese Verbreiterung können wir zwar durch geeignetes Dispersions-Management minimieren, sie bleibt aber selbst im optimalen Operationspunkt der Übertragungstrecke noch groß gegen den typischen Pulsabstand von  $25 \text{ ps}$ , wie er in einem modernen  $40 \text{ Gb/s}$ -Übertragungssystem vorliegt. Damit "sieht" ein Puls viele seiner Nachbarn und kann mit ihnen wechsel-

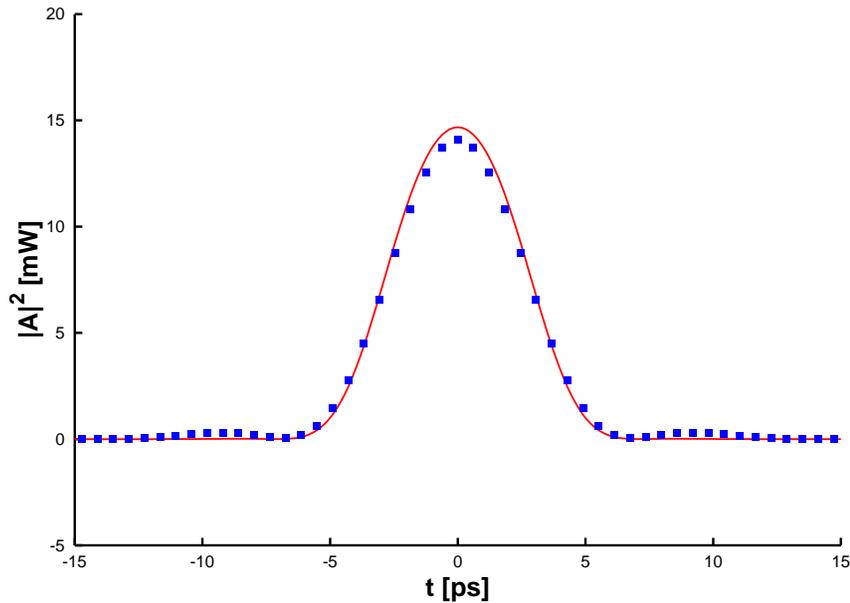


Abbildung 3.6.: Eingangssignal (Linie) und Ausgangssignal (Rechtecke) der PDE-Simulation. Die Anfangswerte und das Dispersions-Management basieren auf den Optimierungsvorhersagen des ODE-Modells, die Parameter des Pulses sind  $P_{mean} = 25 \text{ mW}$  und  $T_{FWHM} = 5 \text{ ps}$ .

wirken. Wie stark sich diese Puls-Puls-Wechselwirkung auswirkt und inwiefern sie die Übertragungsqualität beeinflusst, lässt sich im Rahmen des Einzelpulsmodells nicht beantworten. Auch ist nicht klar, ob und inwieweit sich die Optimierungsergebnisse für einzelne Pulse auf eine Mehr-Puls-Situation übertragen lassen. Erstaunlicherweise gelingt dies für die vorliegende Übertragungsstrecke im Bereich moderater Leistungen überraschend gut. In Abbildung 3.8 sehen wir das Ergebnis für eine mittlere Pulsleistung von  $P_{mean} = 2 \text{ mW}$ . Insgesamt haben wir eine Pulssequenz von 200 Pulsen simuliert, von denen nur einige in Abbildung 3.8 zu sehen sind. Verglichen wird wieder die Startverteilung (Linien) mit der Endverteilung am Empfänger (Rechtecke). Obwohl wir eine ziemlich gute Übereinstimmung beider Signale erkennen können, sehen wir auch, dass starke Puls-Puls-Wechselwirkung die Amplituden der einzelnen Pulse erheblich beeinflusst hat. Die Wechselwirkung führt an einigen Stellen sogar dazu, dass ein Puls zu wachsen beginnt, wo ursprünglich gar keiner gewesen ist. Diese Effekte lassen sich mit unserem jetzigen Ein-Puls-Modell nicht erfassen, wir werden aber später in Kapitel 6 dieses Problem wieder aufgreifen.

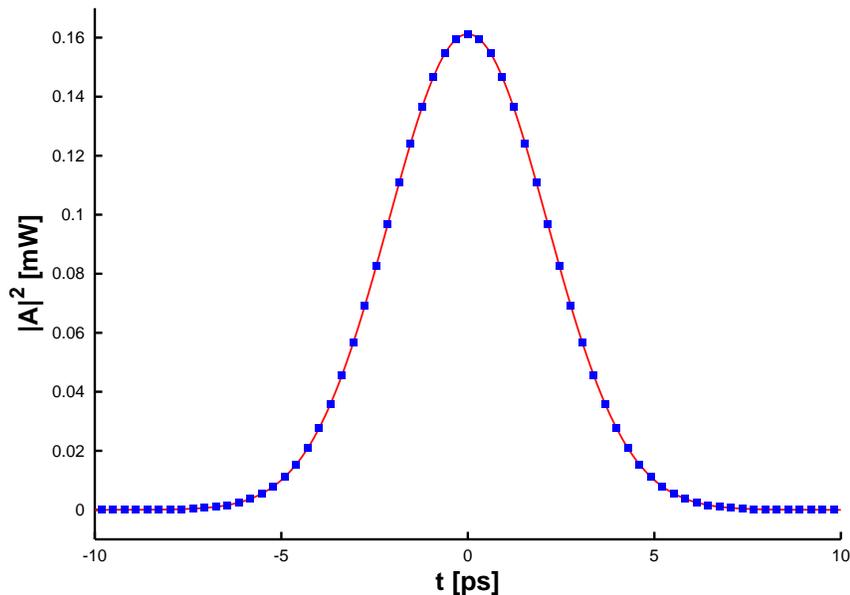


Abbildung 3.7.: Wie Abbildung 3.6, jetzt jedoch für eine wesentlich geringere Eingangsleistung des Pulses ( $P_{mean} = 2 \text{ mW}$ ,  $T_{FWHM} = 5 \text{ ps}$ ).

### 3.3. Stabilität generalisierter DMS

In dem vorigen Abschnitt haben wir gezeigt, dass es grundsätzlich möglich ist, auch für komplexe, asymmetrische Übertragungsstrecken vollständig periodische Lösungen der verschiedenen ODE-Approximationen der NLSE zu finden. Dabei haben wir durch aktives Dispersions-Management die akkumulierte Dispersion so eingestellt, dass sie sich gerade mit der Nichtlinearität ausbalanciert hat. Je nach Leistung der Pulse werden die mittels des ODE-Modells gewonnenen periodischen Pulslösungen sehr gut durch die PDE-Simulation bestätigt.

Von Interesse ist nun, ob die im ODE-Modell gefundenen periodischen Lösungen sich auch bei der PDE-Integration der NLSE bewähren. Zwar haben wir gezeigt, dass sie hinsichtlich einer einzelnen Übertragung durch das Glasfasersystem eine sehr gute Übertragungsqualität aufweisen. Dies heißt aber noch nicht, dass es sich auch um echt periodische Lösungen der NLSE handelt. Auch wenn diese Quasi-Periodizität bzgl. eines Durchgangs durch die Glasfaserstrecke in der Praxis vollkommen ausreichend ist, so ist es doch interessant zu untersuchen, wie nahe sich unsere quasi-periodischen Lösungen an echt periodischen Lösungen der NLSE befinden.

Für die periodische “Two-Step-Map” ohne jegliche Dämpfung und Verstärkung wurde die Existenz von DM-Solitonen als periodischer Grundzustand der NLSE bereits gezeigt [50, 30, 23]. Es existieren numerische Mittelungsverfahren, die es erlauben, eine anfängliche Gauß-Verteilung durch geschicktes Iterieren dieses Verfahrens in das der Gauß-Glocke “nächste” DM-Soliton relaxieren zu lassen [8]. Sollte es sich bei unseren im vorigen Kapitel gefundenen periodischen Pulslösungen also nicht um DM-Soliton han-

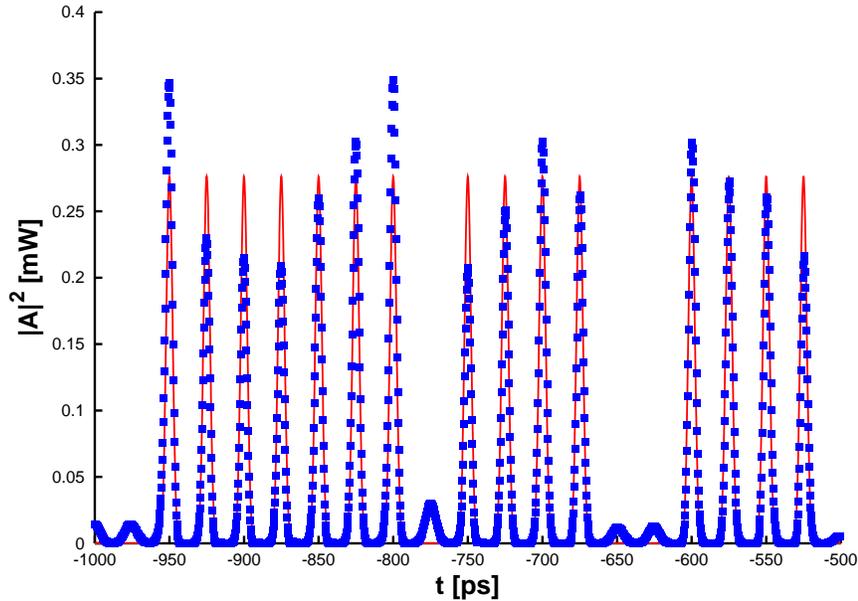


Abbildung 3.8.: Beispiel einer Mehr-Puls-Simulation, deren Dispersions-Management aus der Einzel-Puls-Optimierung gewonnen wurde. Die PDE-Eingangsverteilung wird durch Linien, die PDE-Ausgangsverteilung durch Rechtecke dargestellt ( $P_{mean} = 2 \text{ mW}$ ,  $T_{FWHM} = 5 \text{ ps}$ ).

deln, so besteht zumindest die Hoffnung, dass es uns gelingt, diese Lösungen in “echte” generalisierte DM-Solitonen umzuwandeln, die über viele Durchgänge durch das Übertragungssystem hin ihre Gestalt bewahren. Sind unsere Lösungen aber zu “weit” von einem DM-Soliton entfernt, so ist es fraglich, ob sie wirklich in einen echt periodischen Zustand relaxieren oder einfach nur zerfallen. In jedem Fall ist es möglich, dass das “echte” DM-Soliton in einem gänzlich anderen Parameterbereich liegt als die von uns gefundene Lösung [8].

Um diese Fragestellung zu beantworten, betrachten wir die Lösung, die Abbildung 3.4 zugrunde liegt. Sie entspricht unserem Optimierungsergebnis für moderate Leistungen aus Kapitel 3.2 und garantiert minimales Ausschmieren des Pulses während seiner Propagation durch die Übertragungsstrecke sowie eine durch die PDE-Simulation bestätigte exzellente Übertragungsqualität. Gemäß des in [8] vorgestellten numerischen Mittelungsverfahrens integrieren wir den Puls 25-mal entlang der Übertragungsstrecke, wobei wir wegen der vorhandenen Dämpfung nach jedem Durchgang geeignet verstärken. Abbildung 3.9 zeigt die Entwicklung des Pulses nach jeder Propagation durch die vollständige Übertragungsstrecke. Hier lässt sich noch die anfänglich hohe Stabilität der Lösung erahnen, wie sie von unserem ODE-Modell vorausgesagt wird. Nach ein oder zwei periodisch Durchgängen beginnt unsere Lösung allerdings zu zerfallen. Dabei nimmt die Amplitude ab, die Halbwertsbreite wächst an und der Puls entwickelt links und rechts die typischen, kleinen Trabanten.

Offensichtlich ist unsere periodische Lösung der ODE-Approximation der NLSE kein

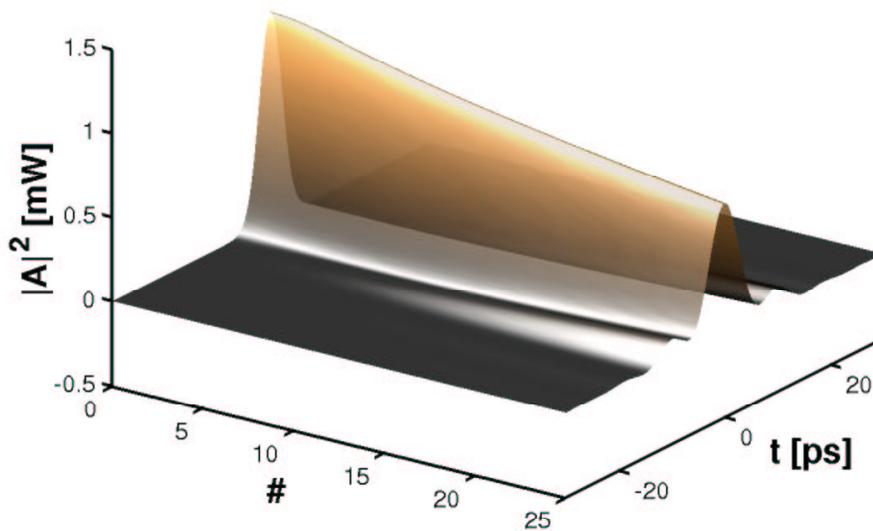


Abbildung 3.9.: Entwicklung der ODE-periodischen Lösung bei 25-facher PDE-Integration der vollständigen Übertragungstrecke.

echtes DM-Soliton. Wir untersuchen nun, ob unsere zerfallende ODE-periodische Lösung letztendlich in ein DM-Soliton relaxiert, indem wir überprüfen, ob das numerische Mittelungsverfahren [8] für unseren Puls konvergiert. Dabei signalisiert eine verschwindende Schwankung der Halbwertsbreite/Amplitude des Pulses eine echt periodische Lösung der PDE-Integration und damit der NLSE, ein “echtes” DM-Soliton.

Auch nach mehrmaliger Iteration des Verfahrens können wir nicht die typische Oszillation der Halbwertsbreite oder der Amplitude um den stabilen Wert beobachten, ein Indiz dafür, dass der Puls immer noch zerfällt. In Abbildung 3.10 sehen wir das DM-Soliton samt seiner Trabantenpulse. Wir bemerken eine wesentlich größere Stabilität der periodischen Lösung. Tatsächlich lässt sich eine Veränderung der Pulsform, die auf ein weiteres Zerfallen hindeutet, erst im logarithmischen Plot erkennen. Hier sehen wir auch die typischen Trabantenpulse gut, die den höheren Hermite-Moden entsprechen. Ein Blick auf die Schwankung der Halbwertsbreite und die der Amplitude in Abbildung 3.11 zeigt eindeutig, dass das DM-Soliton nicht um seine echt periodische Lösung oszilliert, sondern immer noch zerfällt. Trotz des zu beobachtenden weiteren Zerfalls können wir durchaus von einem DM-Soliton sprechen, denn die Stabilitätseigenschaften dieser Lösung sind bereits sehr bemerkenswert. Allerdings liegt das DM-Soliton in einem anderen Parameterbereich als unsere Startverteilung. Abbildung 3.12 zeigt noch einmal unser DM-Soliton im linearen und logarithmischen Plot. Hier sind die Trabantenpulse hervorragend zu erkennen, und die Verteilungsfunktion erinnert stark an die DM-Solitonen, die für die “Two-Step-Map” gefunden wurden [8, 48].

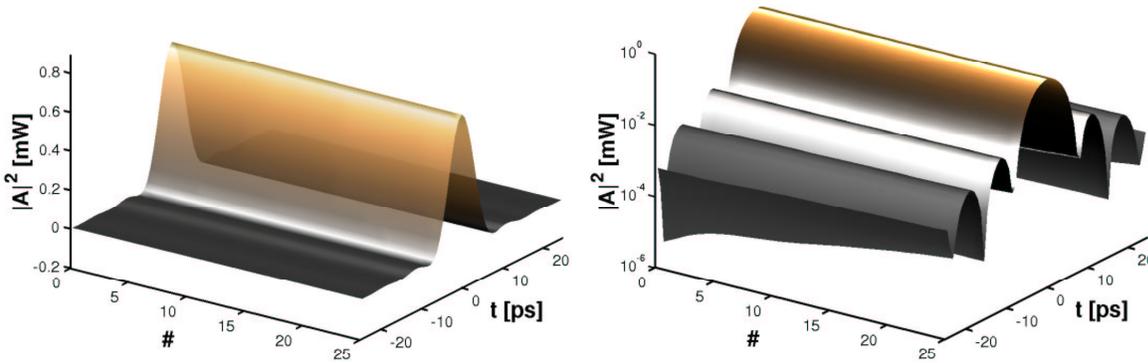


Abbildung 3.10.: Entwicklung des DM-Solitons bei 25-facher PDE-Integration der vollständigen Übertragungstrecke nach sechs Mittlungen. Links linear, rechts logarithmisch geplottet.

Verantwortlich für die Oszillation der Halbwertsbreite bzw. der Amplitude um ihre periodischen Lösungen ist das Gegenspiel von Dispersion und Nichtlinearität. Liegen die gewählten Anfangswerte des Pulses für das jeweilige System zu weit von der periodischen Lösung entfernt, so wird die Lösung nicht um diesen echt periodischen Punkt im Phasenraum kreisen, sondern sich davon entfernen. Der Puls zerfällt dann, wie wir eben gezeigt haben. Wir wiederholen die Mittlungsprozedur mit einer ODE-periodischen Lösung wesentlich höherer Pulsleistung und hoffen, dass der Puls diesmal in das benachbarte echt periodische DM-Soliton zerfällt. Abbildung 3.13 zeigt den anfänglichen Zerfall der Startverteilung. Wir führen das Mittlungsverfahren diesmal mit 150 Integrationen des gesamten Glasfasersystems durch. Nach nur zwei Iterationen können wir die für DM-Solitonen typische Oszillation der Pulskenngößen um ihren stabilen Wert erkennen. In Abbildung 3.14 sehen wir die Entwicklung des Pulses nach diesen zwei Mittlungen. Durch die anfängliche Relaxation ist die Anfangsverteilung stark auseinandergelaufen. Die Oszillation der Pulskenngößen selbst verläuft relativ langsam über viele Integrationen hinweg. Sowohl der neue Parameterbereich des Pulses als auch der Verlauf der Oszillation deuten auf einen überwiegend linearen Charakter des Übertragungssystems hin. Wir setzen den Mittlungsprozess fort und nach insgesamt neun Iterationen erhalten wir ein äußerst stabiles DM-Soliton. Abbildung 3.15 zeigt uns das Ergebnis. Die Oszillationen der Halbwertsbreite bzw. der Amplitude sind nunmehr so gering, dass sie neben den anfänglichen Schwankungen nicht mehr auszumachen sind. Abbildung 3.16 vergleicht diese Oszillationen nach zwei und nach neun Iterationen des Mittlungsprozesses. Wir haben also eine periodische Lösung der NLSE gefunden, ein echtes, generalisiertes DM-Soliton. Dieses befindet sich abermals in einem anderen Parameterbereich als unsere ODE-periodische Lösung, in welchem es nun aber gelingt, das für die Oszillation der Halbwertsbreite und der Amplitude notwendige Gleichgewicht von Dispersion und Nichtlinearität zu erzeugen. Insgesamt weist das neue DM-Soliton eine extrem große Sta-

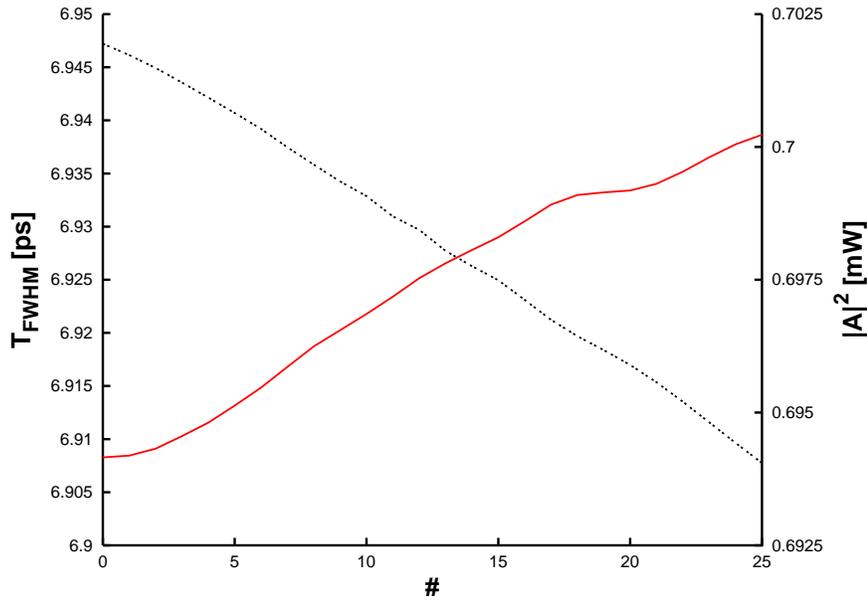


Abbildung 3.11.: Schwankung der Halbwertsbreite (rot) und der Amplitude (schwarz) nach sechs Mittlungen.

bilität auf. Das macht es zu einem interessanten Kandidaten für die Datenübertragung. Allerdings ist fraglich, ob der Parameterbereich, in dem es existiert, und insbesondere seine große Halbwertsbreite noch relevant für die Praxis sind.

Unabhängig davon haben wir gezeigt, dass man DM-Solitonen nicht nur für die symmetrische, ungedämpfte “Two-Step-Map” sondern auch für asymmetrische, hochgradig komplexe Glasfasersysteme finden kann. Je nach untersuchtem Parameterbereich haben diese ganz unterschiedliche Formen und Eigenschaften. Somit besteht die Hoffnung, dass sich für Übertragungstrecken, die in einem vollständig anderen Parameterregime operieren, DM-Solitonen erzeugen oder finden lassen, die für die Telekommunikation von Interesse sind.

## 3.4. Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir uns mit schnellem und effektiven Dispersions-Management komplexer optischer Übertragungssysteme befasst. Mittels effizienter Algorithmen haben wir periodische Lösungen, so genannte generalisierte DM-Solitonen für die Einzelpulsübertragung gefunden und mit den so gefundenen Optimierungsergebnissen die Übertragungsqualität einer realen Glasfaserstrecke verbessern können. Dabei haben wir unser ODE-Modell im Grenzbereich seiner Gültigkeit getestet und intensive numerische Untersuchungen hinsichtlich der Stabilität der periodischen Lösungen angestellt. Im Rahmen dieser Untersuchungen haben wir weitere echt periodische Lösungen der NLSE finden können, die ganz ausgezeichnete Übertragungseigenschaften aufweisen, allerdings nicht im praxisrelevanten Parameterregime liegen.

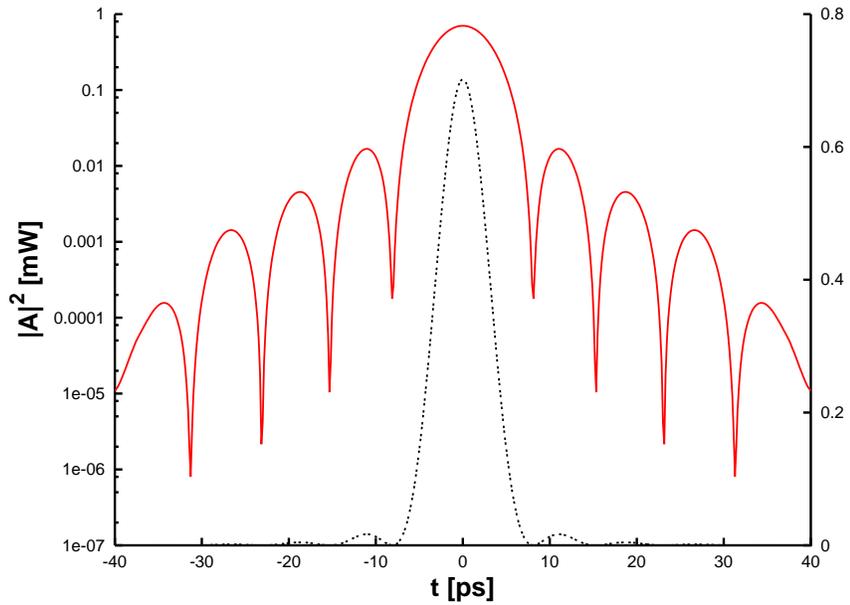


Abbildung 3.12.: Das DM-Soliton nach sechs Mittlungen, linear (schwarz, rechte Skala) und logarithmisch (rot, linke Skala) geplottet.

In den kommenden Kapiteln wollen wir auf diesen Ergebnissen aufbauen. Wir werden einerseits die Güte unserer Ergebnisse kritisch hinterfragen und andererseits unsere Modelle und Algorithmen beständig weiterentwickeln, um auch im Bereich modernster Glasfasersysteme über Optimierungsmodelle zu verfügen.

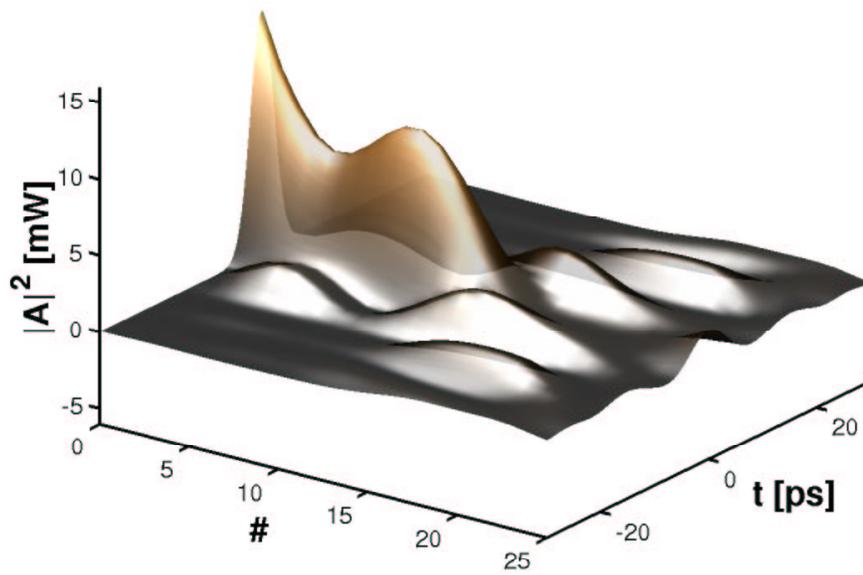


Abbildung 3.13.: Zerfall der ODE-periodischen Lösung bei 25-facher PDE-Integration der vollständigen Übertragungstrecke, diesmal mit einer höheren Leistung.

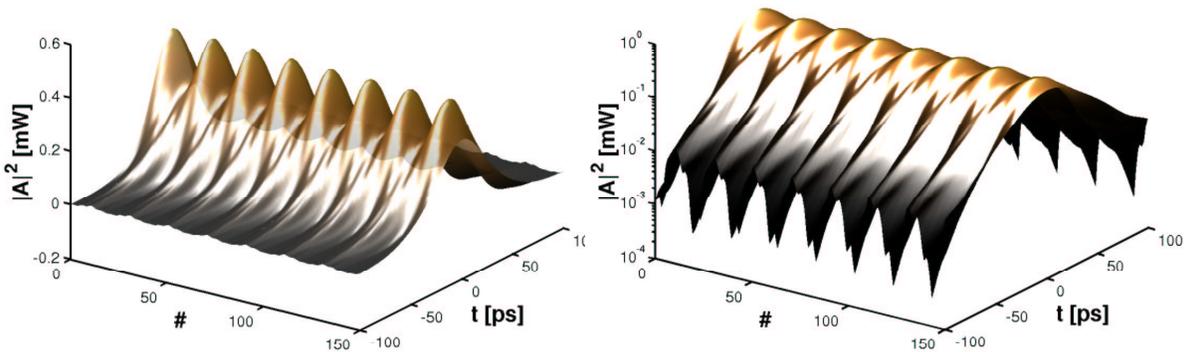


Abbildung 3.14.: Entwicklung des DM-Solitons bei 150-facher PDE-Integration der vollständigen Übertragungstrecke nach zwei Mittlungen. Links linear, rechts logarithmisch geplottet.

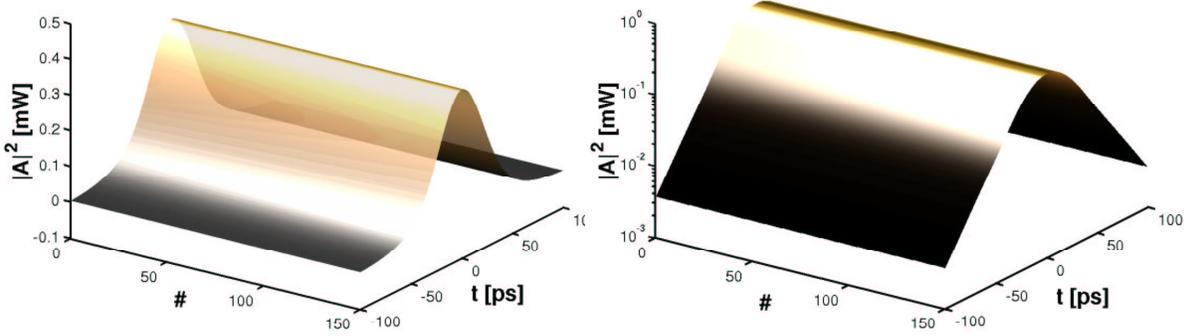


Abbildung 3.15.: Entwicklung des echt periodischen DM-Solitons bei 150-facher PDE-Integration der vollständigen Übertragungstrecke nach neun Mittlungen. Links linear, rechts logarithmisch geplottet.

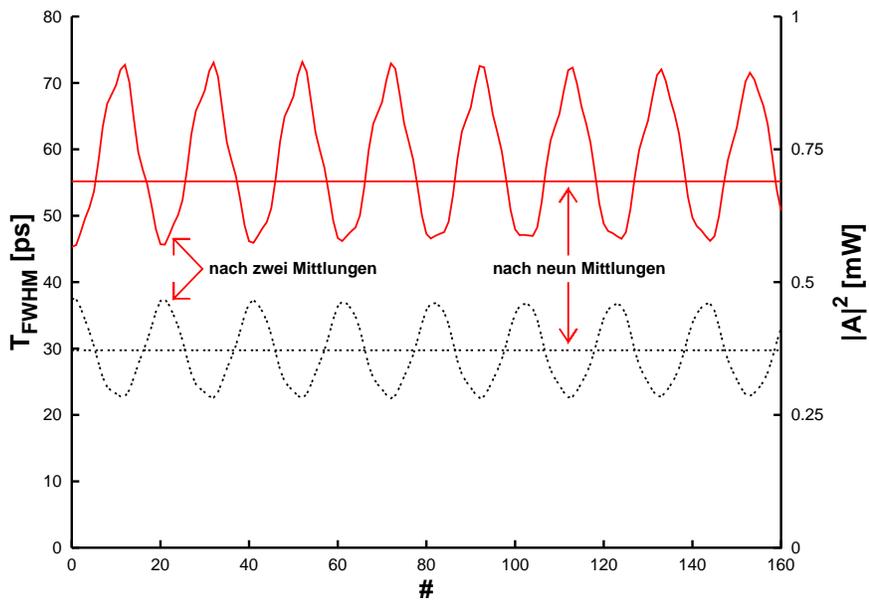


Abbildung 3.16.: Schwankung der Halbwertsbreite (rot) und der Amplitude (schwarz) nach zwei und nach neun Mittlungen.

# 4. Management der Dispersion dritter Ordnung

In der modernen optischen Datenübertragung geht man zwecks immer höherer Bitraten zum immer kürzeren Pulsen über. Dies führt dazu, dass physikalische Effekte zum Tragen kommen, die bisher zu vernachlässigen waren. Störterme höherer Ordnung, wie z.B. Dritte-Ordnungs-Dispersion (linear) und SRS-induzierte Terme (nichtlinear), gewinnen an Bedeutung und müssen bei der Optimierung hinsichtlich der Übertragungsqualität nun mit berücksichtigt werden.

Im letzten Kapitel haben wir gezeigt, dass es möglich ist, die zusätzlichen Stabilitätsbedingungen, die aufgrund hoher Pulsleistungen hinsichtlich der Periodizität der Lösung auftreten, durch einen erweiterten Gauß-Hermite-Ansatz zu erfüllen. Allerdings hat es sich hier ausschließlich um symmetrische Effekte gehandelt. Berücksichtigen wir Dritte-Ordnungs-Dispersion oder Raman-induzierte Terme in unserem Modell, so werden diese zusätzlichen Terme der NLSE die Symmetrie brechen. Dabei ist von vorneherein nicht klar, ob der Gauß-Hermite-Ansatz in der Lage ist, diese Symmetriebrechung, die zu einer starken Deformation und Verschiebung des Pulses führen kann, zu beschreiben.

In diesem Kapitel werden wir dieser Fragestellung nachgehen. Wir werden die generalisierte NLSE (GNLSE) durch ein endlich dimensionales System gewöhnlicher Differentialgleichungen approximieren und zeigen, dass es uns damit möglich ist, optische Übertragungssysteme zu optimieren. Hierzu stellen wir verschiedene Möglichkeiten des Managements der Dispersion dritter Ordnung vor.

## 4.1. Erweiterung der $T$ - $M$ -Gleichungen für die GNLSE

Wie wir bereits in Kapitel 2.2 und 2.3 gesehen haben, ist die Entwicklung einer Pulslösung in Gauß-Hermite-Eigenfunktionen ein natürlicher Ansatz [9, 36]. Ein Puls in einem passend gewählten Koordinatensystem wird dann immer im Kern aus der Mode mit dem größten Entwicklungskoeffizienten, der nullten Eigenmode bestehen. Dies ist eine Gauß-Glocke [55, 34].

Ein Beispiel für die erfolgreiche Anwendung dieser Methode ist die analytische Beschreibung von *dispersion managed solitons* als spezielle Lösung der NLSE [43]. Allerdings ist die NLSE bzgl. der Zeit symmetrisch. Terme höherer Ordnung wie etwa

Dritte-Ordnungs-Dispersion oder Raman-induzierte Terme sind nicht vorhanden.

Beziehen wir diese Terme aber in unsere Untersuchungen ein, so ist die Symmetrie durch die zusätzlichen Störterme gebrochen. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zwischen der NLSE und der GNLSE.

Bisher haben wir aufgrund dieser Symmetrie der NLSE die Gauß-Hermite-Entwicklung nur in den geraden Moden durchgeführt. Wir werden nun auch die ungeraden Moden berücksichtigen, um asymmetrische Effekte erfassen zu können. Erneut schneiden wir nach den ersten, führenden Moden ab, um unser Modell möglichst effizient zu gestalten.

#### 4.1.1. Die generalisierte kubisch nichtlineare Schrödingergleichung

Im Gegensatz zu der in Kapitel 2.1 vorgestellten NLSE beschäftigen wir uns nun mit der generalisierten kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung GNLSE. Diese hat folgende Form [2, 26]

$$i\mathcal{A}_z + d\mathcal{A}_{tt} + c|\mathcal{A}|^2\mathcal{A} + i\beta\mathcal{A}_{ttt} + r(|\mathcal{A}|^2)_t\mathcal{A} = 0. \quad (4.1)$$

Auch hier sind die Koeffizienten  $d$ ,  $c$ ,  $\beta$  und  $r$  Funktionen von  $z$ . Sie repräsentieren die chromatische Dispersion, die Nichtlinearität, Dritte-Ordnungs-Dispersion und die Eigen-Frequenz-Verschiebung (self-frequency shift) aufgrund der stimulierten Raman-Streuung (Stimulated Raman Scattering, SRS), hier im folgenden kurz Raman-Term genannt. In den praxisrelevanten Parameterbereichen, die die Grundlage unserer Untersuchungen bilden, liegt die Halbwertsbreite im Bereich einiger  $ps$ , die Amplitude bei einigen  $mW$ , und die typische Systemlänge in der Größenordnung von 10–100  $km$  (vergl. Kapitel 2.1, [3]). Dies impliziert, dass in dimensionslosen Einheiten  $d$  wesentlich größer als die anderen Koeffizienten und  $c$  größer als  $\beta$  und  $r$  ist. Daher lassen sich bei unseren Betrachtungen die letzten zwei Terme auch als Störung der NLSE ansehen. Der Koeffizient des zweiten Raman-Terms  $(|\mathcal{A}|^2\mathcal{A})_t$ , der für die Aufsteilung des Signals verantwortlich ist (self-steepening), ist dann noch einmal ca. um den Faktor Zehn kleiner als die beiden Störterme. Wir vernachlässigen ihn deshalb.

Neben diesen durch SRS hervorgerufene nichtlineare Effekte höherer Ordnung (Puls-Aufsteilung und Eigen-Frequenz-Verschiebung) wird Raman-Streuung auch zur Verstärkung des eigentlichen Signals genutzt. Dies geschieht durch eine zusätzlich eingestrahlte Pumpwelle. Raman-Verstärkung oder auch *distributed amplification* wird Gegenstand des Kapitels 5 sein.

Nachdem wir in Kapitel 3 mittels des in Kapitel 2.3 vorgestellten Gauß-Hermite-Modells bereits gute Ergebnisse bzgl. der Approximation der gewöhnlichen NLSE erzielt haben, wählen wir nun die gleiche Vorgehensweise, um die komplexere GNLSE zu beschreiben. Lediglich die Auswahl der Moden, welche wir in unserem Modell berücksichtigen, wird aufgrund der asymmetrischen Natur der GNLSE anders ausfallen.

Wir führen wieder die Transformation (2.7) durch und wählen  $T_z(z)$  gemäß Glei-

chung (2.9). Setzen wir den Ansatz (2.7) in die GNLS (4.1) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 iQ_z + \frac{d}{T^2}Q_{xx} + \frac{cN^2}{T}|Q|^2Q - TM_zx^2Q + \frac{rN^2}{T^2}(|Q|^2)_xQ = \\
 -i\frac{\beta}{T^3}Q_{xxx} + \beta\frac{6M}{T^2}(Q_x + xQ_{xx}) + i\beta\frac{12M^2}{T}(xQ + x^2Q_x) - 8\beta M^3x^3Q.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Analog Gleichung (2.8) entwickeln wir  $Q$  im vollständigen System der Gauß-Hermite-Eigenfunktionen und erhalten ein System nichtlinearer gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten  $b_k$  (Anhang A)

$$\begin{aligned}
 ib_{kz} + \frac{d}{T^2}b_k\lambda_k + \left(\frac{d}{T^2} - TM_z\right) \sum_n b_n S_{nk} + \frac{cN^2}{T} \sum_{n,m,l} b_n b_m b_l^* V_{nmlk} = \\
 -\frac{rN^2}{T^2} \sum_{n,m,l} b_n b_m b_l^* T_{nmlk} + \beta \left[ \sum_n \left(\frac{12M^2}{T}i - \frac{2i}{T^3} + \frac{6M}{T^2}\lambda_n\right) b_n D_{nk} + \right. \\
 \left. \sum_n \left(\frac{6M}{T^2} - \frac{i}{T^3}\lambda_n\right) b_n E_{nk} + \left(\frac{12M^2}{T}i - \frac{i}{T^3}\right) \sum_n b_n E_{nk}^{(2)} + \right. \\
 \left. \left(\frac{6M}{T^2} - 8M^3\right) \sum_n b_n D_{nk}^{(3)} \right].
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Um das Gleichungssystem (4.3) übersichtlich zu halten, haben wir die auftretenden Integrale in den Eigenfunktionen  $\{\psi_n\}$  abgekürzt (vergl. Anhang A)

$$\begin{aligned}
 S_{nk} &= \int \psi_n x^2 \psi_k, & V_{nmlk} &= \int \psi_n \psi_m \psi_l \psi_k, & T_{nmlk} &= \int \psi_n (\psi_m \psi_l)_x \psi_k, \\
 D_{nk} &= \int \psi_n x \psi_k, & D_{nk}^{(3)} &= \int \psi_n x^3 \psi_k, \\
 E_{nk} &= \int \psi_n x \psi_k, & E_{nk}^{(2)} &= \int \psi_n x^2 \psi_k.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Als nächstes schreiben wir die aufgrund der Dritte-Ordnungs-Dispersion hinzugekommenen linearen Terme in (4.3) kompakter. Hierzu führen wir die Funktionen

$$\begin{aligned}
 C_{nk}(z) &= \left(\frac{12M^2}{T}i - \frac{2i}{T^3} + \frac{6M}{T^2}\lambda_n\right) D_{nk} + \left(\frac{6M}{T^2} - \frac{i}{T^3}\lambda_n\right) E_{nk} \\
 &\quad + \left(\frac{12M^2}{T}i - \frac{i}{T^3}\right) E_{nk}^{(2)} + \left(\frac{6M}{T^2} - 8M^2\right) D_{nk}^{(3)}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

ein. Dadurch erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
 ib_{kz} + \frac{d}{T^2}b_k\lambda_k + \left(\frac{d}{T^2} - TM_z\right) \sum_n b_n S_{nk} + \frac{cN^2}{T} \sum_{n,m,l} b_n b_m b_l^* V_{nmlk} = \\
 -\frac{rN^2}{T^2} \sum_{n,m,l} b_n b_m b_l^* T_{nmlk} + \beta \sum_n C_{nk} b_n.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Das Gleichungssystem (4.6) geht für  $\beta = r \equiv 0$  über in die Gleichungen (2.10).

Wie in Kapitel 2.2 für die NLSE geschehen, haben wir auch hier zunächst die GNLSE lediglich umgeschrieben. Eine Approximation geschieht erst durch geeignetes Abschneiden der Gleichungen (4.6).

### 4.1.2. Endlich dimensionale Approximation der GNLSE

In Kapitel 2.2 und 2.3 haben wir gesehen, dass zur Beschreibung der Ausbreitung von Pulsen im Falle der gewöhnlichen NLSE die Gleichung für  $M$  so gewählt werden kann, dass die zweite Mode verschwindet [50]. Da  $T_{0000}$  und  $T_{0002}$  sowie  $D_{nk}$ ,  $D_{nk}^{(3)}$ ,  $E_{nk}$  und  $E_{nk}^{(2)}$  für  $n, k \in \{0, 2\}$  Null sind, beeinflussen Dritte-Ordnungs-Dispersion und der Raman-Term diese Wahl von  $M$  nicht.

Mit der selben Wahl für  $M_z(z)$  wie in Kapitel 2.2 und der in Kapitel 2.3 beschriebenen Linearisierung um die Gauß-Mode erhalten wir erneut gewöhnliche und vor allem *lineare* Differentialgleichungen für die komplexen Funktionen  $a_k$  [46]

$$\begin{aligned} ia_{0z} - \phi_z a_0 + \frac{d}{T^2} a_0 \lambda_0 + \frac{cN^2}{T} \sum_{n=0}^4 [V_{00n0} (2|B_0|^2 a_n + B_0^2 a_n^*) + a_n S_{0n}] \\ + \frac{rN^2}{T^2} \sum_{n=0}^4 (B_0^2 a_n^* T_{00n0} + |B_0|^2 a_n (T_{0n00} + T_{n000})) - \beta \sum_{n=0}^4 \mathcal{C}_{n0} a_n = 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} ia_{kz} - \phi_z a_k + \frac{d}{T^2} a_k \lambda_k + \frac{cN^2}{T} \sum_{n=0}^4 [V_{00nk} (2|B_0|^2 a_n + B_0^2 a_n^*) + a_n S_{nk}] \\ + \frac{rN^2}{T^2} \sum_{n=0}^4 (B_0^2 a_n^* T_{00nk} + |B_0|^2 a_n (T_{0n0k} + T_{n00k})) - \beta \sum_{n=0}^4 \mathcal{C}_{nk} a_n = \\ - \frac{cN^2}{T} (B_0 |B_0|^2 V_{000k} + B_0 S_{k0}) - \frac{rN^2}{T^2} B_0 |B_0|^2 T_{000k} + \beta \mathcal{C}_{0k} B_0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Diese gehen für  $\beta = r \equiv 0$  sowie  $k = 4$  und  $n = 0, 4$  in die Gleichungen (2.20) und (2.21) über.

Wie in Kapitel 2.3 haben wir auch hier nur die eine Annahme gemacht, dass die Energie der Pulslösung in der nullten Mode, also im Gauß-förmigen Kern konzentriert ist. Da wir nach Gauß-ähnlichen Lösungen suchen, ist diese Annahme sinnvoll.

Wir wollen das Gleichungssystem (4.7) und (4.8) für die GNLSE noch weiter vereinfachen. Wie bereits oben erwähnt, sind in dem von uns untersuchten Parameterbereich die Dritte-Ordnungs-Dispersion und der Raman-Term klein und können als Störung betrachtet werden. Diese Näherung gilt selbst für kurze Pulse in SMF's oder DCF's noch gut. Deswegen vernachlässigen wir im nächsten Schritt alle die Terme, in denen ein

Produkt der Störkoeffizienten  $\beta$  und  $r$  sowie der als klein angenommenen  $a_n$  vorkommt

$$ia_{0z} - \phi_z a_0 + \frac{d}{T^2} a_0 \lambda_0 + \frac{cN^2}{T} \sum_{n=0}^4 [V_{00n0}(2|B_0|^2 a_n + B_0^2 a_n^*) + a_n S_{0n}] = 0, \quad (4.9)$$

$$ia_{kz} - \phi_z a_k + \frac{d}{T^2} a_k \lambda_k + \frac{cN^2}{T} \sum_{n=0}^4 [V_{00nk}(2|B_0|^2 a_n + B_0^2 a_n^*) + a_n S_{nk}] = \quad (4.10)$$

$$- \frac{cN^2}{T} (B_0 |B_0|^2 V_{000k} + B_0 S_{k0}) - \frac{rN^2}{T^2} B_0 |B_0|^2 T_{000k} + \beta C_{0k} B_0.$$

Das noch einmal reduzierte Gleichungssystem (4.9) und (4.10) ist wesentlich einfacher als das ursprüngliche. Die Störterme, die durch Dritte-Ordnungs-Dispersion und den Raman-Term hinzu kommen, tauchen nur noch als Inhomogenität in den Gleichungen (4.10) auf. Die nullte Mode  $a_0$ , der Gauß-Kern, wird nun nur noch indirekt über die  $a_k$  von der Dritte-Ordnungs-Dispersion oder dem Raman-Term beeinflusst. Dies geschieht zudem ausschließlich in den geraden Moden. Das bedeutet, dass asymmetrische Pulsverformungen nur über die höheren Moden möglich sind.

Beide Gleichungssysteme (4.7) und (4.8) sowie (4.9) und (4.10) müssen natürlich für numerische Zwecke in ihren Real- und Imaginärteil aufgeteilt werden, wie es exemplarisch in Kapitel 2.4 geschehen ist.

Kürzlich wurde eine ähnliche Reduktion des Gauß-Hermite-Ansatzes untersucht [35, 33]. Allerdings fiel die Wahl der Gleichungen für  $T$  und  $M$  hier vollkommen anders aus. Vorangegangene Arbeiten zeigen, dass für DM-Solitonen beide Gleichungssysteme für  $T$  und  $M$  zu einer guten Approximation der NLSE bzw. der GNLSE führen.

## 4.2. Management der Dritte-Ordnungs-Dispersion

Aktuelle Experimente [41] zeigen, dass die Kompensation der Dritte-Ordnungs-Dispersion zusätzlich zum herkömmlichen Dispersions-Management der chromatischen Dispersion das Übertragungsverhalten eines Glasfasersystems deutlich verbessern kann. Dabei ist die Vorgehensweise beim Dritte-Ordnungs-Dispersions-Management grundsätzlich die gleiche wie bei der Kompensation der Zweite-Ordnungs-Dispersion: Auch hier will man erreichen, dass über ein Übertragungselement hin die akkumulierte Dritte-Ordnungs-Dispersion verschwindet. Anders ausgedrückt heißt das, dass das Integral bzgl. des Dritte-Ordnungs-Dispersions-Terms Null sein soll. Dann sollte sich der Effekt dieses Terms bei der Übertragung kompensieren und konsequenterweise sein Einfluss auf die Propagation des Pulses dementsprechend klein sein.

In Übertragungssystemen, in denen Dritte-Ordnungs-Dispersions-Management stattfindet, lässt sich immer noch die Existenz eines Grundzustandes der dazugehörigen gemittelten Gleichung zeigen. Dies beweist, dass es eine stabile Pulslösung gibt [40].

Mittels unseres ODE-Modells (4.7) und (4.8) sowie (4.9) und (4.10) werden wir solche Lösungen in Systemen mit Dritte-Ordnungs-Dispersions-Management finden und

dabei zeigen, dass das ODE-Modell eine hervorragende Approximation der PDE liefert. Zusätzlich zeigen uns effiziente Optimierungsalgorithmen Wege auf, wie sich Dritte-Ordnungs-Dispersion auch dann noch kompensieren lässt, wenn die akkumulierte Dritte-Ordnungs-Dispersion nicht verschwindet [46].

Wir beginnen mit dem einfachen Beispiel einer “Two-Step-Map”, um die Idee des Dritte-Ordnungs-Dispersions-Managements zu verdeutlichen und um die Leistungsfähigkeit unserer mathematischen Modelle unter Beweis zu stellen.

### 4.2.1. Periodische Kompensation der Dispersion dritter Ordnung

In diesem Kapitel untersuchen wir Dritte-Ordnungs-Dispersions-Management, das einfach darin besteht, Glasfasern hintereinander zu schalten, die bzgl. des Koeffizienten der Dritte-Ordnungs-Dispersion ein entgegengesetztes Vorzeichen haben. Genau diese Vorgehensweise haben wir schon beim Management der chromatischen Dispersion angewandt. Wir betrachten zu diesem Zweck eine symmetrische Anordnung hinsichtlich der chromatischen Dispersion, die so genannte “Two-Step-Map”. Die Parameter der Glasfasern sind dem praxisrelevanten Bereich entnommen, zunächst vernachlässigen wir die Dämpfung der Fasern. Die “Two-Step-Map” sieht folgendermaßen aus:

Typ	$L$	$d [ps^2/km]$	$c [1/mW/km]$	$\beta [ps^3/km]$	$r [ps/mW/km]$
DCF	25%	-10.0	$2.0 \times 10^{-3}$	$2.0 \times 10^{-2}$	$1.0 \times 10^{-5}$
SMF	50%	10.0	$2.0 \times 10^{-3}$	$\pm 2.0 \times 10^{-2}$	$1.0 \times 10^{-5}$
DCF	25%	-10.0	$2.0 \times 10^{-3}$	$2.0 \times 10^{-2}$	$1.0 \times 10^{-5}$

Tabelle 4.2.1: Charakteristische Daten der Glasfasern der “Two-Step-Map”.

Der Koeffizient der Dritte-Ordnungs-Dispersion  $\beta_{SMF}$  kann entweder einen positiven Wert annehmen (*kein* Dritte-Ordnungs-Dispersions-Management) oder einen negativen Wert (Dritte-Ordnungs-Dispersions-Management). Die Parameter des Gauß-förmigen Eingangssignals sind  $T_{FWHM} = 5 ps$  und  $P_{mean} = 2 mW$ . Wir haben das Parameterregime so gewählt, dass die Effekte aufgrund der Dritte-Ordnungs-Dispersion im Vergleich zum Raman-Term überwiegen. So wird das Verhalten des Systems nicht wesentlich vom Raman-Term beeinflusst und wir können uns ganz auf das Dritte-Ordnungs-Dispersions-Management konzentrieren. Der symmetrische Aufbau der “Two-Step-Map” hinsichtlich der chromatischen Dispersion garantiert uns dabei, dass diese vollständig kompensiert ist. Dies erleichtert es uns, die Wirkung der Dritte-Ordnungs-Dispersion im kompensierten und im nicht kompensierten Fall zu untersuchen.

In einem ersten Schritt, wählen wir eine SMF der Länge  $L = 150 km$ . Damit ist die gesamte Übertragungstrecke  $300 km$  lang. In Abbildung 4.1 sehen wir das Ergebnis der PDE-Simulation der symmetrischen “Two-Step-Map”, bei der zwar die Dispersion zweiter Ordnung vollständig, die dritter Ordnung hingegen überhaupt nicht kompensiert ist. Abbildung 4.2 zeigt das analoge Ergebnis für den Fall, dass wir auch die Dritte-Ordnungs-Dispersion kompensieren. Ohne jegliches Dritte-Ordnungs-Dispersions-Management be-

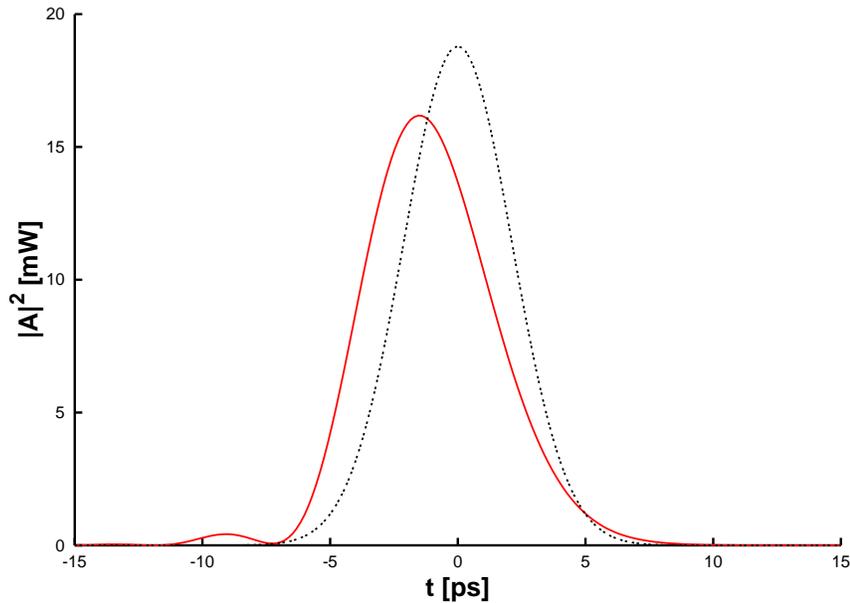


Abbildung 4.1.: Vergleich des Eingangssignals (schwarz) und des Ausgangssignals am Empfänger (rot) der PDE-Integration nach einer Propagation von 300 km ohne jegliche Kompensation der Dritte-Ordnungs-Dispersion.

obachten wir die typische Verschiebung des Pulszentrums sowie eine Deformation der Pulsgestalt. Beides führt zu einer starken Abnahme der Übertragungsqualität.

Betreiben wir jedoch Dritte-Ordnungs-Dispersions-Management, so wird die Verschiebung unterdrückt und die Gauß-Form des Pulses vollständig wiederhergestellt. In diesem Fall liefert das ODE-Modell eine perfekte Approximation der PDE. Dies gilt auch dann noch, wenn wir die Propagationslänge erheblich erhöhen. Während der Propagation durch das Glasfasersystem wird der Puls zwar immer noch verschoben und deformiert, aber am Ende der “Two-Step-Map” haben wir diese Effekte mittels des Dispersions-Managements wieder rückgängig gemacht.

In einem zweiten Schritt untersuchen wir die Differenz zwischen Eingangs- und Ausgangssignal im PDE-Modell in Abhängigkeit von der Länge des Übertragungssystems. Auch hier vergleichen wir wieder den kompensierten und den nicht kompensierten Fall.

Um die Abweichungen sinnvoll quantifizieren zu können, führen wir folgende generalisierte  $L_2$ -Norm ein:

$$\|\psi_1 - \psi_2\| = \left( \frac{\int (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)^2 dt}{\int |\psi_2|^4 dt} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (4.11)$$

Diese Norm spricht sehr stark auf kleinste Unterschiede zwischen den Verteilungsfunktionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  an und ist somit gut als Maß für die Übertragungsqualität geeignet. Ein hoher Wert der  $L_2$ -Norm bedeutet einen großen Unterschied zwischen den beiden Signalen und damit eine schlechte Übertragungsqualität. Im Falle des Dritte-Ordnungs-Dispersions-Managements werden sowohl die Verschiebung des Pulses als auch seine

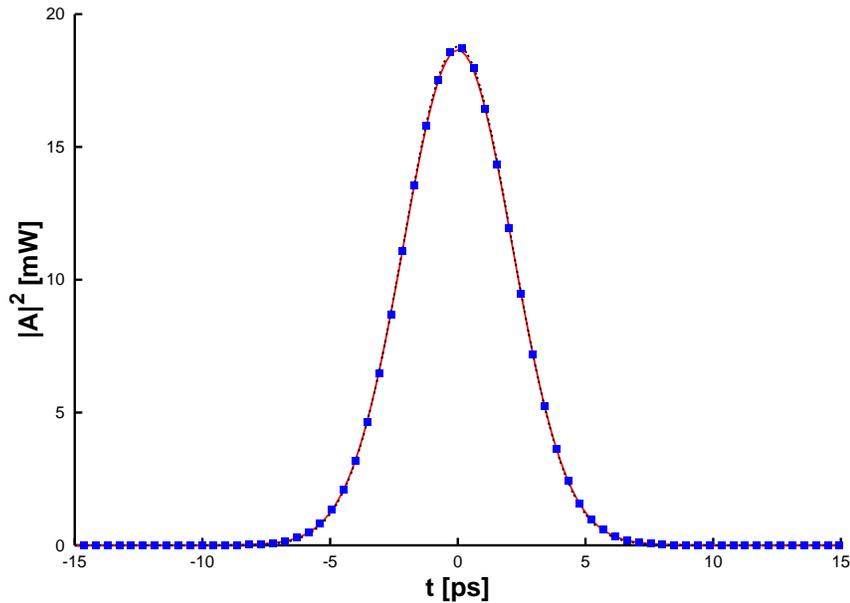


Abbildung 4.2.: Wie Abbildung 4.1, jetzt jedoch mit Dritter-Ordnungs-Dispersions-Management. Durch die gewaltige Verbesserung in der Übertragungsqualität kann man keinen Unterschied mehr zwischen Eingangspuls und Ausgangspuls feststellen. Das ODE-Modell (Rechtecke) beschreibt die PDE nahezu perfekt.

Deformierung kompensiert und wir erhoffen uns einen dementsprechend kleinen Wert der  $L_2$ -Norm.

Zusätzlich untersuchen wir auch die Differenz zwischen dem PDE- und dem ODE-Ausgangssignal im kompensierten Fall. Schauen wir uns Abbildung 4.3 an, so erkennen wir, dass die “Two-Step-Map” eine deutlich bessere Übertragungsqualität aufweist (kleinere  $L_2$ -Norm), wenn wir Dritte-Ordnungs-Dispersions-Managements betreiben (rote Punkte in Abbildung 4.3). Verglichen mit dem nicht-kompensierten Fall (schwarze Ringe in Abbildung 4.3) sind die Abweichungen wesentlich kleiner und wachsen viel langsamer an. Wir haben Übertragungsdistanzen bis zu 1000 km simuliert, ohne bei dem System mit Dritte-Ordnungs-Dispersions-Management einen weiteren Anstieg der  $L_2$ -Norm zu beobachten. Des Weiteren sehen wir, dass das ODE-Modell durchaus in der Lage ist, die PDE im kompensierten Fall sehr gut zu beschreiben. Die Abweichung zwischen PDE- und ODE-Integration (blaue Rechtecke in Abbildung 4.3) liegt sogar noch unter der Differenz zwischen PDE-Eingangspuls und Ausgangspuls. Wir können also das reduzierte Gauß-Hermite-Modell benutzen, um zuverlässig auch größere Übertragungsdistanzen zu simulieren, solange die Dritte-Ordnungs-Dispersion hinreichend kompensiert ist.

Das ist auch einleuchtend: Das Management der Dritte-Ordnungs-Dispersion führt letztendlich dazu, dass der Puls näher an der Gauß-Form bleibt bzw. wieder dahin zurückkehrt. Unser ODE-Modell geht aber gerade von einem gestörten Gauß-Ansatz aus, wird also umso weiter tragen, je weniger der Puls die Gauß-Approximation verlässt.

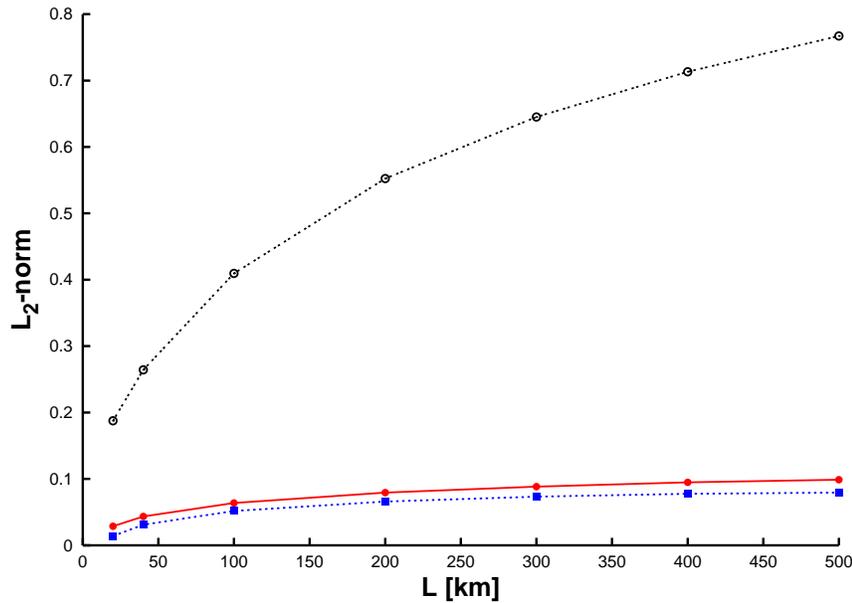


Abbildung 4.3.: Simulationsergebnisse des PDE-Modells im Falle Dritte-Ordnungs-Dispersions-Kompensation (rote Punkte) und bei Abwesenheit jeglicher Dritte-Ordnungs-Dispersions-Kompensation (schwarze Ringe). Die Abbildung zeigt die Differenz zwischen Eingangs- und Ausgangssignal der PDE-Simulation gemessen in der  $L_2$ -norm (4.11) in Abhängigkeit von der Länge der “Two-Step-Map”. Die Rechtecke (blau) vergleichen das PDE- und das ODE-Simulationsergebnis, also jeweils die Ausgangssignale am Ende der Glasfaserstrecke, im kompensierten Fall.

## 4.2.2. Optimierte Rekonstruktion der Pulsform

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns damit, wie wir die Verschiebung und Deformation des Pulses, die durch die Dritte-Ordnungs-Dispersion verursacht wird, auch dann verhindern können, wenn keine *vollständige* Kompensation der Dritte-Ordnungs-Dispersion vorliegt. Dies bedeutet insbesondere, dass wir eine restliche akkumulierte Dritte-Ordnungs-Dispersion haben, deren Effekte wir anderweitig ausbalancieren müssen. Als Beispiel für genau solch einen Fall betrachten wir das reale  $40\text{ Gb/s}$ -Übertragungssystem aus Kapitel 3.2 [49]. So zeigen wir auch gleichzeitig, dass unser erweitertes Modell (4.7) und (4.8) bzw. (4.9) und (4.10) nicht nur die symmetrische “Two-Step-Map” beschreiben kann, sondern auch ein komplexes, hochgradig asymmetrisches System mit Dämpfung und Verstärkung. Dies ist hinsichtlich der Praxis von Bedeutung, da viele real existierenden Übertragungstrecken nicht periodisch sind.

Wie bereits erwähnt, lassen sich installierte Glasfasersysteme nur dann ohne viel Aufwand optimieren, wenn man die Kompensationselemente an gut zugänglichen Abschnitten der Strecke einfügen kann. Das ist in der Regel am Sender, am Empfänger und an den Verstärkern der Fall. Bei urbanen Netzen richten sich die Positionen dieser aber allgemein an der schon vorhandenen Infrastruktur aus, weshalb die Abstände zwischen den Verstärkern erheblich variieren können. Im Gegensatz zu transatlantischen

Verbindungen kann man dann nicht mehr von einem periodischen Aufbau reden.

Die Eingangsparameter des Pulses,  $T_{FWHM}$  und  $P_{mean}$ , wählen wir aus dem praktisch relevanten Bereich, und die Dispersion zweiter Ordnung ist, wie in Kapitel 3.2 diskutiert, immer vollständig kompensiert. Hingegen ist die Dispersion dritter Ordnung diesmal *nicht* komplett kompensiert. Zwar kann sich das Vorzeichen der Dritte-Ordnungs-Dispersion von Glasfaser zu Glasfaser durchaus ändern, es verbleibt aber eine restliche, akkumulierte Dispersion dritter Ordnung.

Unser neuer Ansatz, die aus dieser verbleibenden Dritte-Ordnungs-Dispersion resultierenden Effekte wie die Verschiebung und Verformung des Pulses, zu kompensieren, besteht in der Wahl einer optimierten Gestalt des Eingangspulses, die wir mittels des erweiterten ODE-Modells vorhersagen können.

Simulieren wir einen einfachen Gauß-förmigen Eingangspuls ohne Management der Dritte-Ordnungs-Dispersion, so wird das Pulszentrum, je nach Vorzeichen der verbleibenden akkumulierten Dispersion dritter Ordnung, zu der einen oder der anderen Seite verschoben und seine Form stark asymmetrisch verzerrt. Solange diese Verzerrung nicht allzu groß ist, gelingt es, wie bereits gezeigt, dem ODE-Modell sehr gut, die PDE-Simulationsergebnisse zu approximieren. Zwecks einer optimalen Übertragungsqualität wollen wir nun diese asymmetrischen Verzerrungen vollständig unterdrücken, und dies alleine durch eine geringfügige und symmetrische Veränderung der Pulsform des Eingangssignals. Ein solcher symmetrischer Puls, der formunverändert durch das Glasfasersystem übertragen wird, entspricht einer vollständig periodischen Lösung des Gleichungssystems (4.7) und (4.8) in unserem ODE-Modell.

Hierfür erweitern wir unseren in Kapitel 2.4 vorgestellten Optimierungsalgorithmus [45] auf die zusätzlichen Hermite-Moden. Dies ist, wie schon diskutiert, wegen der Linearität der weiteren Gleichungen in den Koeffizienten  $a_k$ , einfach zu bewerkstelligen. Wie ebenfalls in Kapitel 2.4 erwähnt, ist diese Optimierungsmethode sehr effizient und mit einem geringen Aufwand an Computerleistung durchzuführen, da wir die Pulsform, die periodisch übertragen wird, mit einigen wenigen ODE-Integrationen berechnen können.

Für die Existenz einer periodischen Lösung des vollständigen ODE-Modells ist die einzige einschränkende Bedingung die Invertierbarkeit der Übertragungsmatrix (vergl. Kapitel 2.4). Diese ist annähernd immer erfüllt, sodass wir für fast alle Parameterkombinationen solch periodische Lösungen finden (vergl. Kapitel 3.2). Es ist aber nicht klar, ob die durch das ODE-Modell vorausgesagte Periodizität tatsächlich in der PDE-Simulation bestehen bleibt. Dies ist umso wahrscheinlicher, je näher unsere Eingangsverteilung einer Gauß-Glocke kommt. Gleichzeitig wollen wir aber gerade durch subtile Abweichungen von dieser Gauß-Form Periodizität erzwingen. Wir überprüfen also unser ODE-Optimierungsergebnis, indem wir eine PDE-Simulation mit dieser leicht modifizierten Anfangsverteilung durchführen. Abbildung 4.4 zeigt eine Gauß-Glocke mit den Parametern  $T_{FWHM} = 7 ps$  und  $P_{mean} = 7 mW$  sowie eine optimierte Verteilung derselben Energie als Eingangssignal. Die Optimierung wurde, wie oben beschrieben, mit dem ODE-Modell durchgeführt. Die Modifikationen an der Pulsform, die Periodizität garantieren, sind gering und vor allem symmetrischer Natur, sodass auch die neue Startverteilung fast wie ein Gauß-Puls aussieht. In Abbildung 4.5 sehen wir das Ergebnis

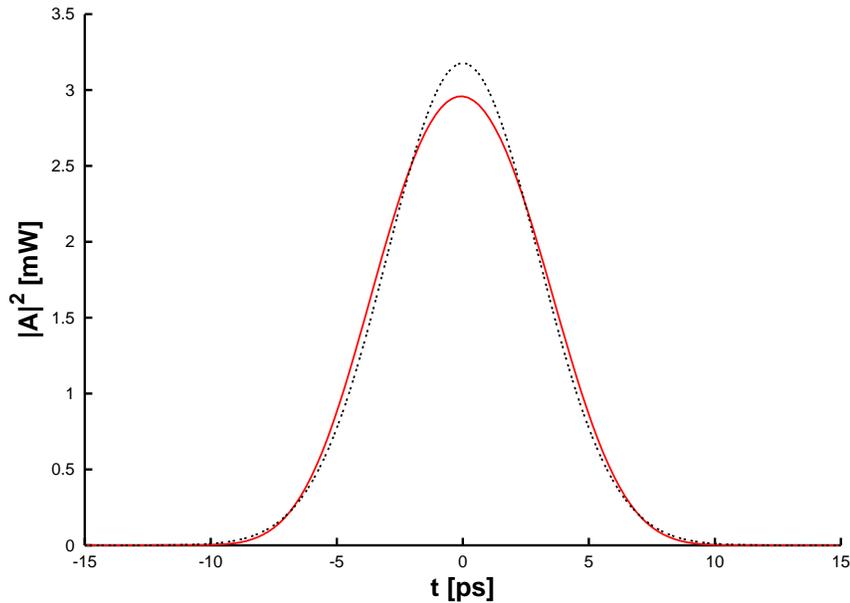


Abbildung 4.4.: Pulsoptimierung mit dem ODE-Modell. In Abbildung 4.4 sieht man den nicht optimierten, Gauß-förmigen Eingangspuls (schwarz) und das optimierte Eingangssignal (rot).

der Simulation, das Ausgangssignal nach Propagation durch die komplexe und asymmetrische Übertragungsstrecke jeweils für den optimierten und den nicht optimierten Eingangspuls. Offensichtlich gelingt es uns, mittels der ODE-Optimierung die Pulsdeformation aufgrund der restlichen akkumulierten Dispersion dritter Ordnung vollständig zu unterdrücken. Dies ist von wesentlicher Bedeutung, da jegliche asymmetrische Verzerrung des Pulses sofort zu einer Abnahme der Übertragungsqualität führt. Unsere Simulationen haben gezeigt, dass der Übertragungsfehler gemessen durch die  $L_2$ -Norm (4.11) um 15% abnimmt, wenn wir statt Gauß-Pulsen unsere optimierte Signalförmigkeit benutzen.

Zwar ist zum aktuellen Zeitpunkt nicht klar, ob und in welcher Form es technisch möglich und wirtschaftlich ist, derart modifizierte Pulse zu erzeugen und einzusetzen. Das Ergebnis betont aber ganz deutlich die Bedeutung, die der tatsächlichen Pulsform beigemessen werden muss, wenn man an einem optimalen Übertragungsverhalten interessiert ist. Auch zeigt es, dass bereits kleine und symmetrische Modifikationen an der Pulsform eine asymmetrische Verzerrung und eine Verschiebung des Pulses unterbinden können.

Weiterhin stimmen ODE- und PDE-Integration für den Fall der optimierten Verteilungsfunktion selbst bei einer Simulation einer komplexen Übertragungsstrecke von ca. 900 km beinahe perfekt überein. Obwohl diese Übertragungsstrecke bzgl. der Dritte-Ordnungs-Dispersion nicht vollständig kompensiert ist, tritt weder eine Verschiebung noch eine Deformation des Pulses am Empfänger auf.

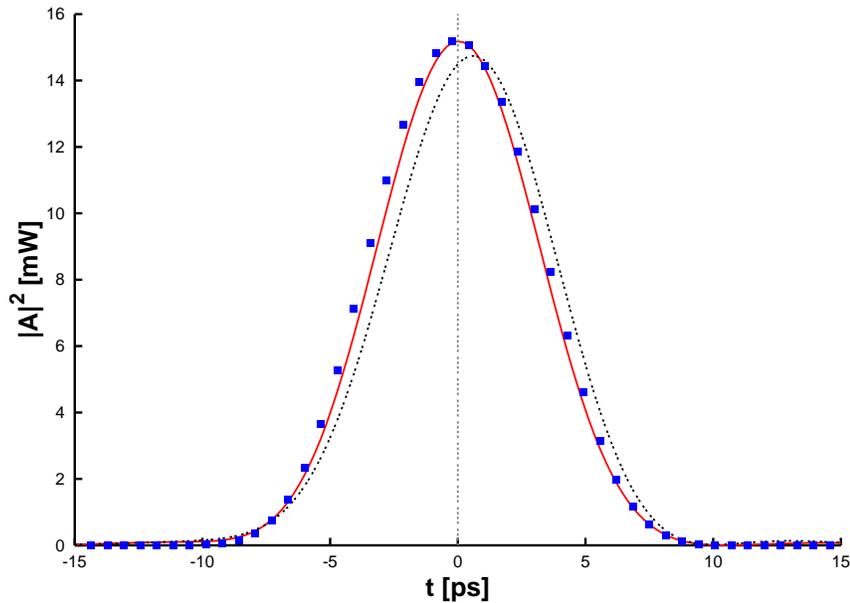


Abbildung 4.5.: Pulsoptimierung mit dem ODE-Modell. In Abbildung 4.5 sieht man den nicht optimierten, Gauß-förmigen Ausgangspuls (PDE, schwarz), das optimierte Ausgangssignal (PDE, rot) sowie das optimierte Ausgangssignal der ODE-Simulation (Rechtecke) am Empfänger.

### 4.2.3. Dritte-Ordnungs-Dispersion und SRS-induzierte Eigen-Frequenz-Verschiebung

Eine weitere Möglichkeit, die akkumulierte Dispersion dritter Ordnung zu kompensieren, besteht darin, sie durch die Eigen-Frequenz-Verschiebung auszubalancieren. Dabei wird die Dritte-Ordnungs-Dispersion, je nach Vorzeichen, dafür sorgen, dass das Pulszentrum zu der einen oder anderen Seite verschoben wird, während der Raman-Term diesem Effekt bei geeigneter Wahl der Parameter entgegenwirkt und den Puls in die entgegengesetzte Richtung verschieben wird. Gleichzeitig wird neben dieser Verschiebung auch die Deformation der Pulsform kompensiert.

Die in den vorangegangenen Abschnitten untersuchten Übertragungssysteme wurden alle in einem Parameterbereich betrieben, in dem der führende Raman-Term klein gegenüber der Dritte-Ordnungs-Dispersion war. Wollen wir aber die Effekte der Dritte-Ordnungs-Dispersion und die des Raman-Terms miteinander ausbalancieren, so müssen wir in ein anderes Parameterregime wechseln. Hierzu konstruieren wir eine einfache Glasfaserstrecke, in der die Auswirkungen der Dritte-Ordnungs-Dispersion und des Raman-Terms von der selben Größenordnung, aber entgegengesetzter Vorzeichen sind. Erneut betrachten wir eine “Two-Step-Map” bzgl. der Zweite-Ordnungs-Dispersion  $d(z)$  folgender Form:

$$d(z) = \begin{cases} d_0 + \langle d \rangle & \text{von } z \in [0, 0.25[ \\ -d_0 + \langle d \rangle & \text{von } z \in [0.25, 0.75[ \\ d_0 + \langle d \rangle & \text{von } z \in [0.75, 1[ \end{cases} \quad (4.12)$$

Für  $z > 1$  setzen wir dieses Schema periodisch fort. Die normierten Parameter der Simulationen sind gegeben durch  $T(0) = 1.2$ ,  $d_0 = 5.0$ ,  $\langle d \rangle = 0.15$ ,  $\beta = -0.025$ ,  $c = 1.0$ ,  $r = 0.2$  und die Länge der Glasfaserverbindung ist 1. Dabei sind alle Parameter so gewählt, dass die durch die Dritte-Ordnungs-Dispersion und den Raman-Term auftretenden Störungen vergleichsweise groß und damit auch nach einer kurzen Propagationsdistanz schon gut zu erkennen sind.

Erneut benutzen wir unseren schnellen ODE-Algorithmus, um die Übertragungsstrecke hinsichtlich der Pulsform zu optimieren. Zu diesem Zwecke variieren wir  $N$ , den Leistungsparameter des Pulses, um den Beitrag des Raman-Term zu erhöhen oder zu senken. In Abbildung 4.6 sehen wir die Differenz zwischen Eingangs- und Ausgangssignal, gemessen durch die  $L_2$ -Norm in Abhängigkeit von  $N$  nach acht hintereinander geschalteten “Two-Step-Maps”. Das Minimum bzgl. der  $L_2$ -Norm liegt bei  $N = 0.7$ .

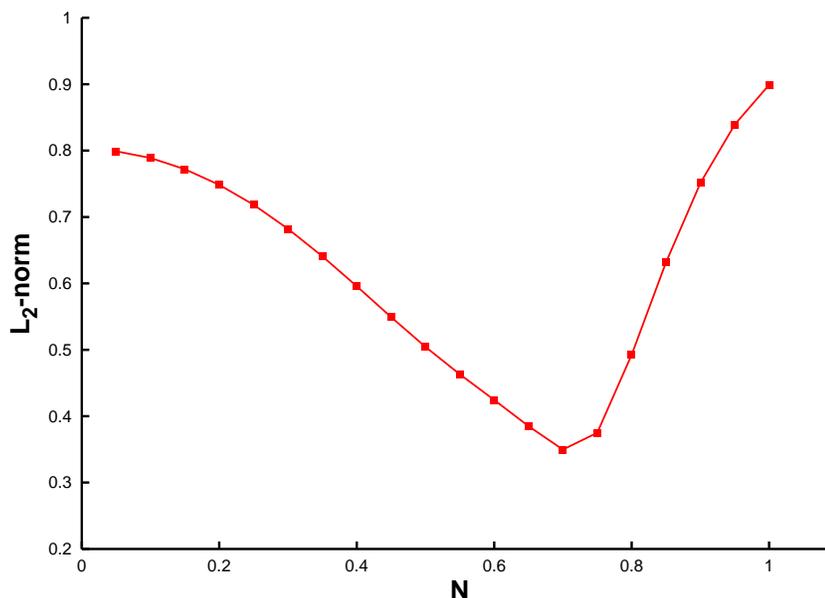


Abbildung 4.6.: Differenz zwischen Eingangs- und Ausgangspuls im ODE-Modell in Abhängigkeit von  $N$ , wenn die Dritte-Ordnungs-Dispersion und der Raman-Term von der gleichen Größenordnung sind.

Dies ist einfach zu erklären: In dem gewählten Parameterbereich ist Dritte-Ordnungs-Dispersion der dominante Effekt, solange die Pulsleistung kleiner als  $N = 0.7$  bleibt. Sie sorgt dafür, dass der Puls deformiert und nach links verschoben wird. Damit lässt die Übertragungsqualität nach und, da wir uns von der Gauß-Approximation weg bewegen, nimmt auch die Güte unseres ODE-Modells ab. Wächst  $N$  an, so wird der Raman-Term immer wichtiger und beginnt, den Puls nach rechts zu verschieben. Dies wirkt der durch die Dritte-Ordnungs-Dispersion hervorgerufenen Verschiebung nach links entgegen. Bei  $N = 0.7$  ist die Verschiebung schließlich vollständig kompensiert und wir haben einen nicht verschobenen Puls vorliegen, der annähernd wieder Gauß-Form besitzt. Dies garantiert ein optimales Übertragungsverhalten bei  $N = 0.7$ . Ein weiterer Anstieg der

Pulsleistung  $N$  führt dazu, dass nun der Raman-Term gegenüber der Dritte-Ordnungs-Dispersion dominiert und das Pulszentrum weiter nach rechts verschiebt. Daraus resultiert abermals eine Abnahme der Übertragungsqualität.

Abbildung 4.7 zeigt die Ausgangspulse nach der PDE-Integration für drei verschiedene Werte der Pulsleistung  $N$ . Man erkennt gut, wie das Zentrum des Pulses von einer

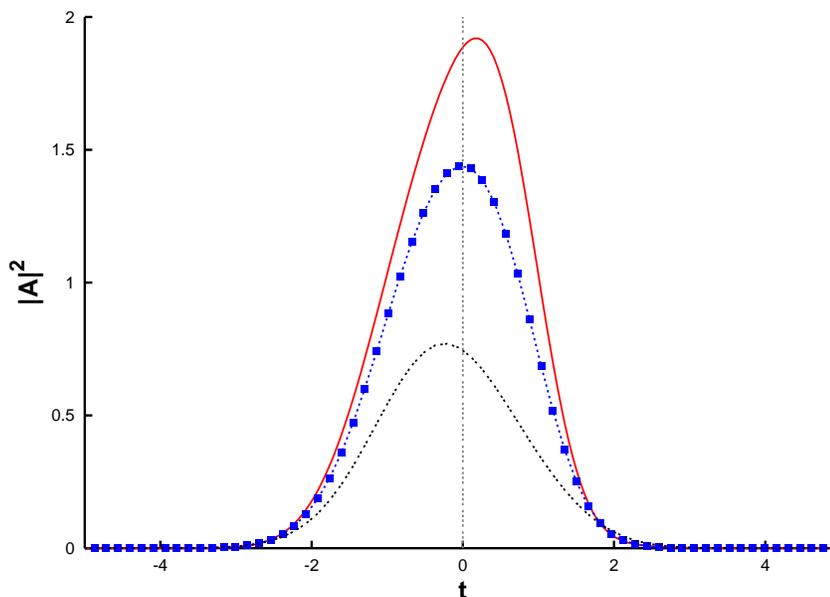


Abbildung 4.7.: Drei Ergebnisse der PDE-Integration für verschiedene Werte der Pulsleistung  $N$ . Die schwarze Linie repräsentiert  $N = 0.6$ , die Rechtecke  $N = 0.7$  und die rote Linie  $N = 0.8$ . Das Optimum bei  $N = 0.7$  entspricht dem Minimum der  $L_2$ -Norm in Abbildung 4.6.

Seite zur anderen wandert, und der Puls asymmetrisch verzerrt wird. Der Puls, dessen Zentrum nicht verschoben ist, repräsentiert das Minimum bzgl. der  $L_2$ -Norm in Abbildung 4.6, das wir mit unserem ODE-Optimierungsalgorithmus vorausgesagt hatten. Somit besteht eine weitere Möglichkeit des Dritte-Ordnungs-Dispersions-Managements durch Ausbalancieren der Dritte-Ordnungs-Dispersion mit dem führenden Raman-Term.

### 4.3. Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir gezeigt, dass wir das Gauß-Hermite-Modell dahingehend erweitern können, dass sich damit auch asymmetrische Effekte wie Dritte-Ordnungs-Dispersion und der Raman-Term beschreiben lassen. Auf der Grundlage dieses ODE-Modells haben wir schnelle Optimierungsalgorithmen vorgestellt, die es uns ermöglichen, das optimale Übertragungsverhalten einer Glasfaserübertragungsstrecke vorherzusagen.

Anhand einer “Two-Step-Map” haben wir die Vorteile des aktiven Dritte-Ordnungs-Dispersions-Management verdeutlicht und gezeigt, dass eine solche Herangehensweise

nicht nur die Übertragungsqualität der Glasfaserstrecke verbessert sondern auch den Gültigkeitsbereich des ODE-Modells erweitert.

Ferner ist es uns gelungen, mittels des ODE-Optimierungsalgorithmus die Form eines Eingangspulses derart zu modifizieren, dass er periodisch durch eine reale, komplexe und asymmetrische Übertragungsstrecke von  $900\text{ km}$  Länge propagiert. Dabei tritt keine Deformation oder Verschiebung des Pulses mehr auf, obwohl die Dritte-Ordnungs-Dispersion nicht vollständig kompensiert ist.

Schließlich haben wir am Beispiel einer zweiten “Two-Step-Map” gezeigt, dass es möglich ist, die Dritte-Ordnungs-Dispersion bei geeigneter Wahl des Parameterbereiches durch den führenden Raman-Term auszubalancieren. Dabei konnten wir durch Optimierung mittels des ODE-Modells einen optimalen Arbeitspunkt hinsichtlich der Pulsleistung finden, in dem die Verschiebung des Pulszentrums vermindert ist oder sogar vollständig unterdrückt wird.



## 5. Glasfasersysteme mit kontinuierlicher Verstärkung

Nachdem wir uns in den vorangegangenen Kapiteln mit dem Dispersions-Management zweiter und dritter Ordnung von ungedämpften Übertragungstrecken bzw. von solchen mit Dämpfung und anschließender lokaler Verstärkung beschäftigt haben, wollen wir nun eine neue, sehr moderne Verstärkungsmethode untersuchen, die zunehmend in der Telekommunikation Verwendung findet: Raman-Verstärkung.

Wir werden Strategien vorstellen, wie sich auch bei Anwesenheit dieser neuen Verstärkungstechnik periodische Lösungen hinsichtlich des Übertragungsverhaltens finden lassen, und wir werden die verschiedenen Fälle (ungedämpft, Dämpfung und EDFA-Verstärkung, Dämpfung und Raman-Verstärkung) systematisch vergleichen. Dabei werden wir Unterschiede bzgl. der Existenz und des Verhaltens periodischer Lösungen feststellen. Für den ungedämpften Fall wurde bereits eine Vielzahl an theoretischen Resultaten anhand des Beispiels der symmetrischen “Two-Step-Map” erarbeitet [22, 57]. Dieser ideale Fall hat aber nur wenig mit der Realität gemein, in der immer Dämpfung vorhanden, und damit auch Verstärkung notwendig ist. Gerade die heutzutage gebräuchliche lokale Verstärkung (lumped amplification) durch mit Erbium dotierte Verstärker (Erbium Doped Fiber Amplifier, EDFA) führt zu einer gewaltigen Schwankung der Leistung des Signals zwischen zwei Verstärkern, und damit zu einem gänzlich anderen Systemverhalten. Kürzlich wurde experimentell gezeigt, dass Raman-Verstärkung (distributed amplification) eine Alternative mit großem Potential zum herkömmlichen Verstärkungsschema darstellt [3]. Die Verstärkung des Signals geschieht hier nicht lokal, sondern über die Glasfaser verteilt durch eine zusätzlich eingestrahlte Pumpwelle. Diese pumpt über den Raman-Effekt Energie in das eigentliche Signal und verstärkt es so kontinuierlich. Damit ist eine wesentlich gleichmäßigere Leistungsverteilung längs der Glasfaser und eine höhere mittlere Leistung des Signals garantiert. Es ist klar, dass eine so veränderte Leistungsverteilung die Charakteristika der DM-Solitonen, also der periodischen Lösungen beeinflusst.

Die Verstärkung des Signals durch eine externe Pumpwelle über Raman-Streuung darf dabei nicht mit den durch SRS hervorgerufenen nichtlinearen Terme höherer Ordnung verwechselt werden, die wir bereits in Kapitel 4 kennengelernt haben. Diese Raman-Terme stellen eine nichtlineare Selbstwechselwirkung des Pulses (self-frequency shift, self-steepening) dar und erscheinen als solche als zusätzliche Terme in der GNLSE [2, 26]. Sie gewinnen für kurze Pulse hoher Amplitude an Bedeutung und sind vollkommen un-

abhängig vom Verstärkungsschema. Die Raman-Verstärkung ist hingegen ein externer Effekt, der die Pulse durch einen veränderten effektiven Koeffizienten der Nichtlinearität beeinflusst (vergl. Gleichungen (2.4), (2.5)).

Neben dem bereits vorgestellten Dispersions-Management durch Variation der Längen einzelner Kompensationsfasern zeigen wir, dass sich Periodizität auch durch optimale Wahl der Anfangsparameter der Pulse erzielen lässt. So hat man die Freiheit, die Breite, die Amplitude oder Leistung und den Chirp des Pulse zu wählen. Dieses Verfahren wird aufgrund seiner einfachen Praktikabilität gerne eingesetzt, um für den Idealfall der ungedämpften, symmetrischen “Two-Step-Map” periodische Lösungen zu finden. Durch Anwesenheit von Dämpfung wird diese Optimierungsroutine allerdings stark verkompliziert. Trotzdem werden wir auch diese Optimierung durchführen, um unsere Ergebnisse mit denen aus der Literatur vergleichen zu können. Dieses Verfahren wird sich aber als weniger effizient und als numerisch aufwendiger erweisen, als das von uns bereits diskutierte Längenmanagement [49].

Schließlich führen wir eine einfache, aber dennoch aussagekräftige Approximation der effektiven Nichtlinearität ein, die das Systemverhalten bei Raman-Verstärkung gut beschreibt.

## 5.1. Die $T$ - $M$ -Gleichungen für Raman-verstärkte Glasfasersysteme

Zur systematischen Untersuchung der Auswirkungen der Raman-Verstärkung auf die Charakteristika der periodischen Lösungen bemühen wir das in Kapitel 2.1 und 2.2 vorgestellte  $T$ - $M$ -Modell [5, 54]. Unser Interesse gilt dabei speziell dem Verstärkungs- und Dämpfungsterm  $G$ , der verschiedene funktionelle Formen annehmen kann und dadurch das Verhalten der Lösungsmannigfaltigkeit beeinflusst. Liegt keine Dämpfung vor ( $G(z) = 0$ ), so ist die Energieverteilung entlang der Glasfaser symmetrisch bzw. konstant. Sobald aber  $G(z) \neq 0$  gilt, ist diese Symmetrie gebrochen und der Chirp-freie Punkt entfernt sich von der Mitte der SMF. Wir konzentrieren uns in diesem Kapitel auf Raman-verstärkte Übertragungssysteme. Der Pumpprozess soll, wie in der Praxis üblich, rückwärtig vom Ende des Glasfasersystem her geschehen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit positionieren wir daher den Raman-Verstärker hinter dem letzten Element an der Stelle  $z_R$ . Damit nimmt Gleichung (2.5) folgende Form an

$$G(z) = -\gamma(z) + g_0(z) \exp(-\gamma_R(z_R - z)). \quad (5.1)$$

Diese Konfiguration mit Raman-Verstärkung vergleichen wir mit zwei weiteren Fällen [43, 31, 12]:

1. Der *ungedämpfte* Fall. Es liegt keine Dämpfung oder Verstärkung vor,  $G(z) = 0$ .
2. Der *gedämpfte* Fall. Hier wird das Signal während der Propagation durch die Glasfaserstrecke lediglich gedämpft. Dieser Fall stellt einen Spezialfall der Gleichung (5.1) dar, bei dem sowohl  $g_0(z) = 0$  als auch  $\gamma_R = 0$  gewählt wurde. Dieses

Dämpfungsmodell entspricht einem Übertragungssystem, in dem die Verstärkung durch EDFA's bewerkstelligt wird, die jeweils am Ende eines Kompensationsabschnitts sitzen. Der Verstärkungsfaktor wird so gewählt, dass Eingangs- und Ausgangssignal die gleiche Leistung besitzen.

Neben der speziellen Form des Dämpfungs- bzw. Verstärkungsprofil verwenden wir zur numerischen Simulation die in Kapitel 2.2 hergeleiteten  $T$ - $M$ -Gleichungen (2.12) und (2.13). Durch die Lösung dieses Systems gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen erhalten wir die Evolution der makroskopischen Pulsparameter wie Breite, Amplitude und Chirp. Im ungedämpften Fall ( $G(z) = 0$ ,  $c = c_0$ ) lassen sich viele Informationen bzgl. der Lösungen dieser Gleichungen analytisch herleiten, wenn man davon ausgeht, dass der Pulsleistungsparameter  $N$  klein ist und eine Störungsrechnung anwendet. Dies ist nicht mehr ohne weiteres möglich, sobald Dämpfung und/oder Verstärkung vorliegt ( $G(z) \neq 0$ ,  $c = c(z)$ ).

## 5.2. Optimierung der Startverteilung

Zunächst suchen wir nach einer periodischen Lösung der Gleichungen (2.12) und (2.13), also nach einem DM-Soliton, indem wir für eine gegebene Übertragungstrecke die Anfangswerte der Pulsparameter optimieren. Um unsere Ergebnisse für gedämpfte und Raman-verstärkte Systeme mit Resultaten aus der Literatur für den ungedämpften Fall vergleichen zu können, führen wir die Vorgehensweise exemplarisch am Beispiel der symmetrischen "Two-Step-Map" (STSM) vor.

Im Gegensatz zu der in den vorigen Kapiteln betrachteten "Two-Step-Map" (vergl. z.B. Abbildung 3.1), deren spezielle und variable Form von uns in Hinblick auf unseren Optimierungsalgorithmus gewählt wurde, besteht die ungedämpfte "Two-Step-Map", wie sie in der Literatur zu finden ist, aus zwei SMF's oder  $d_+$ -Fasern und einer DCF oder  $d_-$ -Faser in der Mitte. Im gedämpften/verstärkten Fall schließt ein Raman-Verstärker oder ein EDFA die Übertragungstrecke ab, der Periodizität in der Pulsleistung herstellt. Dabei hängt der Koeffizient der Nichtlinearität  $c(z)$  vom gewählten Verstärkungsschema ab. Im ungedämpften Fall gilt  $c(z) = \langle c \rangle = 1$ . Liegt Dämpfung und Verstärkung vor, so lässt sich  $c_0$  aus  $\langle c \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L dz c(z)$  berechnen ( $c(z) = c_0 \exp(2 \int_0^z dz' G(z'))$ ).

In diesem Fall ist  $c(z)$  nicht länger konstant. Um das Verständnis des so veränderten Koeffizienten der Nichtlinearität zu erleichtern, und um die Numerik effizienter zu gestalten, führen wir zusätzlich eine Stufenapproximation der Nichtlinearität ein,  $c_{step}$ . Die Sprünge dieses Stufenprofils werden wir an die gleichen Stellen legen, an denen auch die chromatische Dispersion ihren Wert ändert, der Mittelwert von  $c_{step}$  ist Eins. Dies hat den Vorteil, dass im Rahmen der Stufenapproximation der Koeffizient der Nichtlinearität innerhalb einer Glasfaser wie im ungedämpften Fall konstant ist. Der Koeffizient der lokalen chromatischen Dispersion ist gegeben durch  $d_{loc} = 5.0$ .

Schauen wir uns die Gleichungen (2.12) und (2.13) an, die zur Beschreibung unseres Systems dienen sollen, so erkennen wir, dass wir die Parameter  $T_0$  und  $M_0$  so bestimmen müssen, dass sie periodisch übertragen werden. Diese periodische Lösung ( $T, M$ ) muss als Periodizitätslänge gerade die Länge der "Two-Step-Map" haben.

### 5.2.1. Der ungedämpfte Fall

Im denkbar einfachsten Fall sieht die “Two-Step-Map” aus wie in Abbildung 5.1, die Parameter sind in Tabelle 5.2.1 zu finden. Neben der Dispersionsstufe ist auch der Verlauf der effektiven Nichtlinearität  $c(z) = \langle c \rangle = 1$  gezeigt.

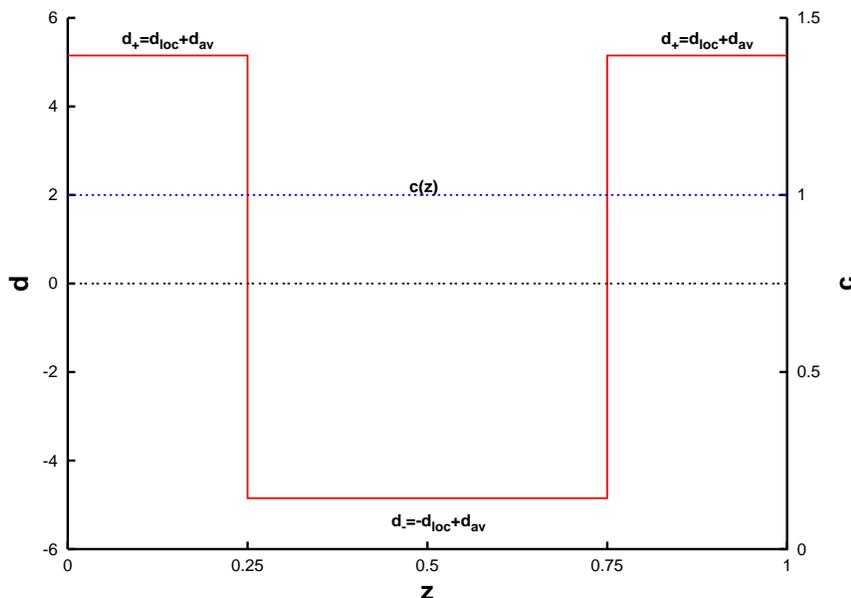


Abbildung 5.1.: Die STSM im ungedämpften Fall. Die chromatische Dispersion  $d(z)$  ist rot dargestellt, die effektive Nichtlinearität  $c(z)$  blau.

Typ	$L$	$d$	$c_0$	$\gamma(z)$	$g_0(z)$	$\gamma_R$
$d_+$	0.25	$5.0 + d_{av}$	1.0	0.0	0.0	0.0
$d_-$	0.5	$-5.0 + d_{av}$	1.0	0.0	0.0	0.0
$d_+$	0.25	$5.0 + d_{av}$	1.0	0.0	0.0	0.0

Tabelle 5.2.1: Design der “Two-Step-Map” im ungedämpften Fall.

Im ungedämpften Fall starten wir direkt vom Chirp-freien Punkt aus, der in der Mitte der  $d_+$ -Faser liegt. Dies ist gleichzeitig der Beginn unserer “Two-Step-Map”. Für einen vorgegebenen Wert von  $T(0)$  und  $d_{av}$  finden wir dann einfach eine periodische Lösung, indem wir die Pulsleistung  $N$  solange erhöhen, bis  $T(1) = T(0)$  gilt. Haben wir Periodizität in  $T$  gefunden, so ist  $M$  automatisch auch periodisch:  $M(1) = M(0)$ . Dies garantiert uns die Symmetrie in der Nichtlinearität  $c(z) = \langle c \rangle = \text{const.}$ . Wir haben es demnach effektiv nur mit einer eindimensionalen Optimierung zu tun, die sich mit sehr wenig Simulationsaufwand bewerkstelligen lässt. Dieser Fall ist in der Literatur intensiv untersucht worden [7, 43, 8]. Wir werden hier diese Ergebnisse für unsere Parameter reproduzieren, um sie mit den zwei anderen Verstärkungsschemata vergleichen zu können.

### 5.2.2. Der gedämpfte Fall mit EDFA-Verstärkung

Im gedämpften Fall ändert sich an der Dispersionsabbildung grundsätzlich nichts (vergl. Tabelle 5.2.2). Der effektive Koeffizient der Nichtlinearität  $c(z)$  ist nun allerdings gemäß Gleichung (2.4), wie in Abbildung 5.2 zu sehen, exponentiell gedämpft.

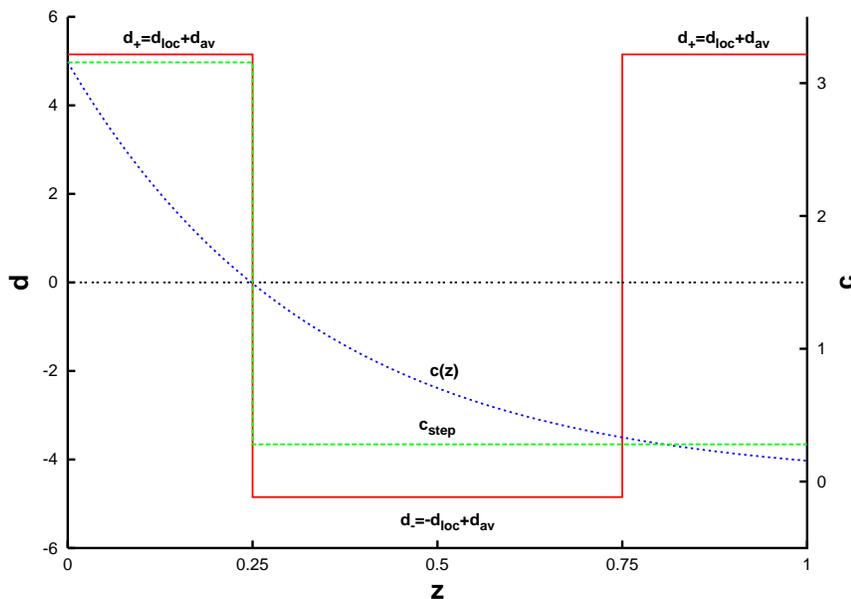


Abbildung 5.2.: Wie Abbildung 5.1, jetzt jedoch im gedämpften Fall. Zusätzlich gezeigt ist die Approximation der effektiven Nichtlinearität durch das Stufenprofil  $c_{step}$  (grün).

Typ	$L$	$d$	$c_0$	$c_{step}$	$\gamma(z)$	$g_0(z)$	$\gamma_R$
$d_+$	0.25	$5.0 + d_{av}$	3.157	3.157	1.5	0.0	0.0
$d_-$	0.5	$-5.0 + d_{av}$	3.157	0.281	1.5	0.0	0.0
$d_+$	0.25	$5.0 + d_{av}$	3.157	0.281	1.5	0.0	0.0

Tabelle 5.2.2: Design der “Two-Step-Map” im gedämpften Fall.

Die Nichtlinearität  $c_0$  haben wir hier so berechnet, dass die gemittelte Nichtlinearität wieder den Wert Eins annimmt und somit die effektive Wirkung der Nichtlinearität die gleiche ist. Darüber hinaus haben wir die effektive Nichtlinearität  $c(z)$  durch ein einfaches Stufenprofil  $c_{step}$  approximiert, das ebenfalls in Abbildung 5.2 gezeigt ist. Dies hat den Vorteil, dass der neue Koeffizient der Nichtlinearität nun wieder stückweise konstant ist. Auch hier ist der Mittelwert Eins. Der Sprung in der Nichtlinearität findet ferner genau an der Stelle der Glasfaserstrecke statt, an der sich auch die Dispersion  $d$  ändert. Trotz der Approximation durch stückweise konstante Koeffizienten der Nichtlinearität wird die Symmetrie der Übertragungsstrecke aufgrund der speziellen Form dieses Dämpfungsschemas nicht wiederhergestellt. Deshalb reicht es jetzt nicht mehr aus, lediglich

den Leistungsparameter  $N$  zu variieren, um für vorgegebene Werte von  $T(0)$  und  $d_{av}$  Periodizität herzustellen. Wir müssen zusätzlich auch den Anfangswert für den Chirp,  $M(0)$ , durchfahren und selbst dann ist es nicht immer möglich, für jede Kombination von  $T(0)$  und  $d_{av}$  eine periodische Lösung zu finden. Dies gilt sowohl für den realistischen, exponentiellen Dämpfungsfall als auch für unsere Stufenapproximation.

Die Notwendigkeit eines von Null verschiedenen Anfangswertes  $M(0)$  für den Chirp, das so genannte Pre-Chirping, begründet sich in der Tatsache, dass der Chirp-freie Punkt nicht mehr in der Mitte der  $d_+$ -Glasfaser liegt, sobald Dämpfung vorliegt. Wie in Abbildung 5.2 gut zu erkennen, bricht Dämpfung die Symmetrie des effektiven Koeffizienten der Nichtlinearität. Das hat zur Folge, dass der Chirp-freie Punkt aus seiner symmetrischen Position heraus wandert. Pre-Chirping vermag diese Asymmetrie nur bedingt zu kompensieren, sodass wir nicht für alle Startwerte  $T(0)$ ,  $d_{av}$  Periodizität finden können. Ein DM-Soliton ist in diesem Fall durch  $T(1) = T(0)$  und  $M(1) = M(0) \neq 0$  charakterisiert.

Ein weitere Nachteil dieser Methode liegt darin, dass wir nun zwei Parameter zu variieren haben,  $T(0)$  und  $M(0)$ . Damit liegt ein zweidimensionales Optimierungsproblem vor, was den Simulationsaufwand erheblich erhöht.

Neben technischen Schwierigkeiten ist Pre-Chirping somit nicht das ideale Verfahren, um Periodizität in der Übertragung zu erzielen. Eine zweite Möglichkeit, wieder zum Chirp-freien Punkt zurückzukehren, besteht im Längenmanagement, das wir in den Kapiteln 2.4 und 2.5 eingeführt und in den folgenden Kapiteln eingesetzt haben. Wir werden später auf dieses wesentlich effizientere Verfahren zurück kommen.

### 5.2.3. Der gedämpfte Fall mit Raman-Verstärkung

Ist neben der Dämpfung auch noch Raman-Verstärkung anwesend, so ändert sich der Verlauf der effektiven Nichtlinearität  $c(z)$  noch einmal. Bei geeigneter Wahl des Verstärkungsparameters  $g_0(z)$  kehrt diese zu ihrem Anfangswert zurück, was einer 100%-tigen Wiederherstellung der Eingangsleistung des Pulses entspricht. Dies ist in Abbildung 5.3 gut zu erkennen, Tabelle 5.2.3 zeigt die dazugehörigen Parameter.

Typ	$L$	$d$	$c_0$	$c_{step}$	$\gamma(z)$	$g_0(z)$	$\gamma_R$
$d_+$	0.25	$5.0 + d_{av}$	1.562	1.562	1.5	3.470	2.0
$d_-$	0.5	$-5.0 + d_{av}$	1.562	0.438	1.5	3.470	2.0
$d_+$	0.25	$5.0 + d_{av}$	1.562	1.562	1.5	3.470	2.0

Tabelle 5.2.3: Design der “Two-Step-Map” im Raman-verstärkten Fall.

Natürlich muss auch hier die Nichtlinearität  $c_0$  angepasst werden, damit die gemittelte Nichtlinearität Eins ist. Obwohl durch den optimal gewählten Verstärkungsfaktor der Koeffizient der effektiven Nichtlinearität  $c(z)$  wieder seinen Ausgangswert annimmt, bleibt sein Verlauf asymmetrisch. Wir sehen aber, dass die Asymmetrie bei weitem nicht so groß ist wie im einfach gedämpften Fall. Des weiteren ist der minimal erreichte Wert

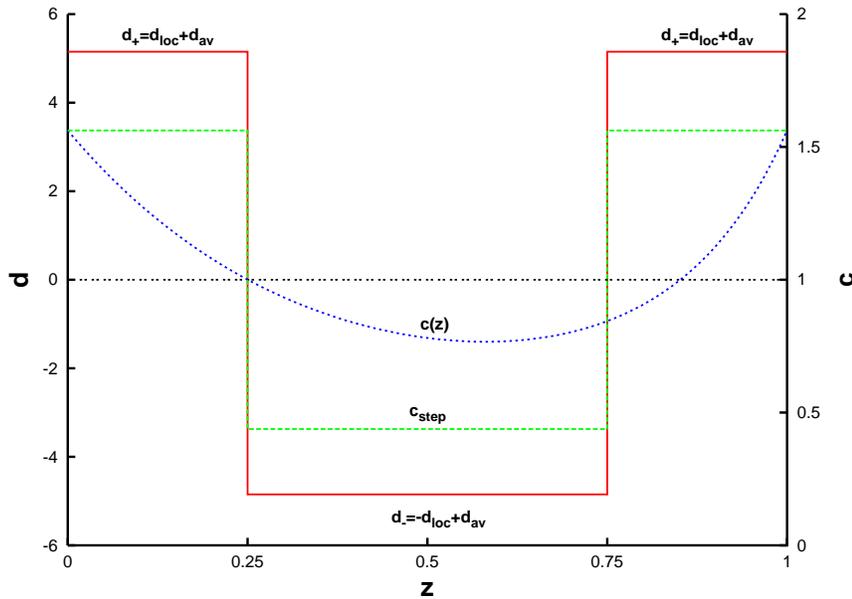


Abbildung 5.3.: Wie Abbildung 5.2, jetzt jedoch im Raman-verstärkten Fall.

erheblich größer, was letztendlich bedeutet, dass das Signal weniger stark gedämpft wird. Dies verbessert das Signal-zu-Rauschen-Verhältnis (Signal to Noise Ratio, SNR).

Für den realistischen Verlauf von  $c(z)$  bei Anwesenheit von Raman-Verstärkung ist die Vorgehensweise bei der Suche nach periodischen Lösungen die gleiche wie im einfach gedämpften Fall. Auch hier haben wir eine Asymmetrie im Koeffizienten der Nichtlinearität, die uns den Chirp-freien Punkt verschiebt.

Allerdings haben wir wegen der weniger starken Asymmetrie in einem Raman-verstärkten System jetzt die Möglichkeit, die effektive Wirkung der Nichtlinearität durch eine *symmetrische* Stufe  $c_{step}$  zu approximieren. Deren Verlauf ist ebenfalls in Abbildung 5.3 zu sehen, die Sprünge der Stufe decken sich wieder mit denen der chromatischen Dispersion. Durch die Wiederherstellung der Symmetrie in der Nichtlinearität ist Pre-Chirping nicht mehr notwendig, um DM-Solitonen zu finden.

Im nächsten Abschnitt werden wir die unterschiedlichen Ergebnisse vergleichen.

#### 5.2.4. Vergleich der verschiedenen Verstärkungsschemata

Wir untersuchen, wie sich die einzelnen Dämpfungs- und Verstärkungsmodelle auf die Mannigfaltigkeit der periodischen Lösungen auswirkt. In Abbildung 5.4 tragen wir diese Lösungen für die drei Fälle und für drei Werte der Halbwertsbreite  $T_{FWHM}$  im Raum der Energie  $E$  des Pulses und der gemittelten Dispersion  $d_{av}$  der “Two-Step-Map” auf. Derartige Abbildungen für den ungedämpften Fall finden sich in [7], [43] und [8].

Der Unterschied zwischen den Verstärkungsschemata nimmt mit steigender mittlerer Dispersion  $d_{av}$  und für geringere Halbwertsbreiten  $T_{FWHM}$  zu. Eine geringer Halbwertsbreite bedeutet eine größere “Map Strength”  $S$ . Die Abhängigkeit der Energie  $E$  der

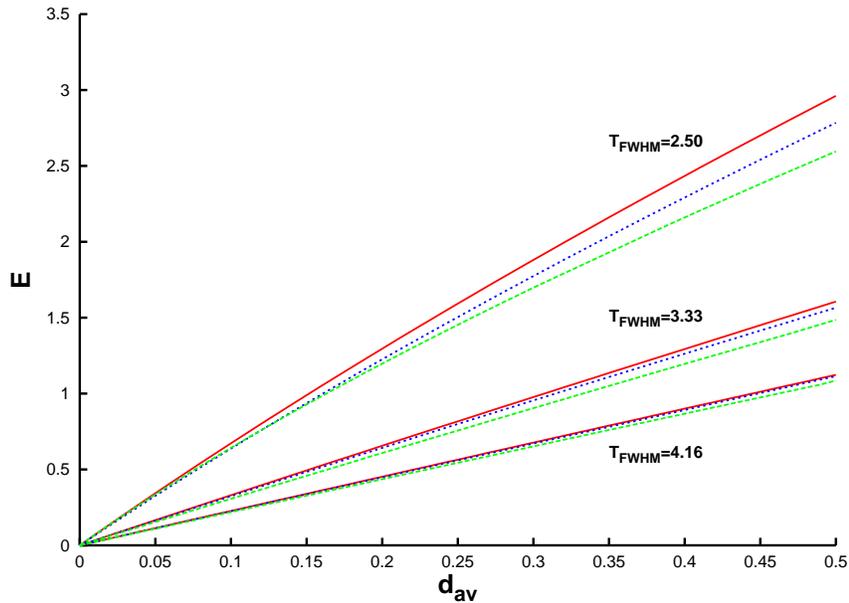


Abbildung 5.4.: Energie  $E$  der DM-Solitonen in Abhängigkeit von der mittleren Dispersion  $d_{av}$  für drei verschiedene Werte von  $T_{FWHM}$  im ungedämpften (rot), im einfach gedämpften (grün) und im Raman-verstärkten (blau) Fall.

DM-Solitonen von der mittleren Dispersion  $d_{av}$  ist also für alle drei Verstärkungsmodelle durchaus vergleichbar. Dies gilt allerdings nur, solange man überhaupt in der Lage ist, eine periodische Lösung zu finden.

Wie wir aber in Abbildung 5.5 erkennen können, ist dies nicht immer der Fall. Wir betrachten die DM-Solitonen im Raum der Energie  $E$  des Pulses und der Halbwertsbreite  $T_{FWHM}$  bei festgehaltener mittlerer Dispersion  $d_{av}$ . Um die Unterschiede im Verhalten der periodischen Lösungen klar herauszuarbeiten, haben wir  $d_{av}$  relativ groß gewählt. Während wir im ungedämpften Fall immer noch für jeden Wert der Halbwertsbreite  $T_{FWHM}$  ein DM-Soliton finden können, existieren im gedämpften und Raman-verstärkten Fall Bereiche, in denen kein periodisches Übertragungsverhalten garantiert werden kann. Insbesondere bei einfacher Dämpfung sind unterhalb einer minimalen Halbwertsbreite keine periodischen Lösungen mehr, darüber allerdings jeweils zwei zu finden. Im Gegensatz zum gedämpften Fall liegen die periodischen Lösungen für Raman-Verstärkung ziemlich nah am ungedämpften Fall. Dies ist einleuchtend, da die Energieverteilung entlang der Glasfaserstrecke bei Raman-Verstärkung wesentlich ausgewogener ist als im gedämpften Fall (vergl. Abbildungen 5.2 und 5.3).

Die Gegenwart von Dämpfung und/oder Raman-Verstärkung zerstört in jedem Fall die Symmetrie der effektiven Wirkung der Nichtlinearität  $c(z)$ . Wie bereits diskutiert, müssen wir dann einen Anfangswert  $M(0) \neq 0$  wählen, um periodische Lösungen finden zu können. Allerdings reicht dieses Pre-Chirping nicht immer aus, um die Verschiebung des Chirp-freien Punktes zu kompensieren. Daher ändert sich die Lösungsmannigfaltigkeit der DM-Solitonen, sobald gedämpft und verstärkt wird. Abbildung 5.6 zeigt

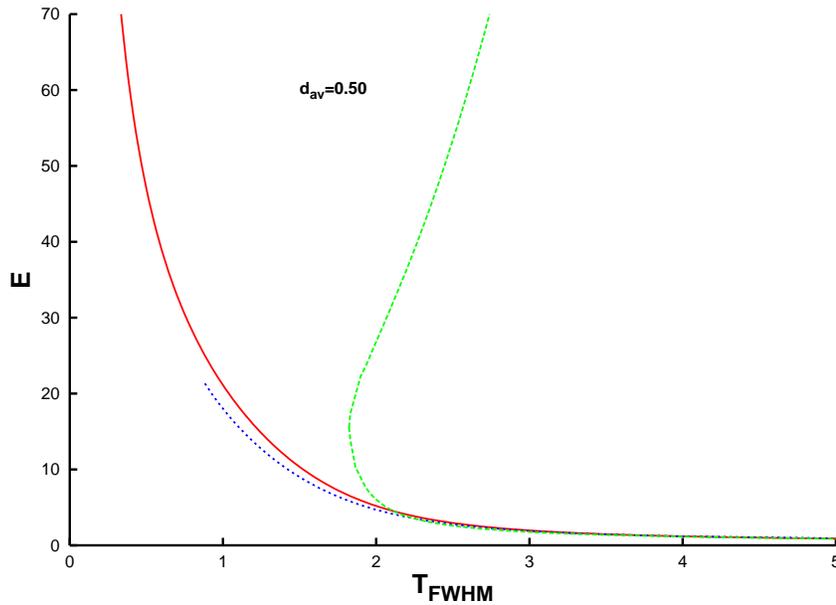


Abbildung 5.5.: Energie  $E$  der DM-Solitonen in Abhängigkeit von der Halbwertsbreite  $T_{FWHM}$  für einen festen Werte von  $d_{av} = 0.50$  im ungedämpften (rot), im einfach gedämpften (grün) und im Raman-verstärkten (blau) Fall.

die Grenzen des Pre-Chirping auf. Je kleiner die Halbwertsbreite  $T_{FWHM}$  wird, desto wichtiger wird das Pre-Chirping, bis es schließlich ganz versagt. Da man heutzutage in der Telekommunikation zwecks hoher Datenübertragungsraten immer kürzere Pulse einsetzt, ist es wünschenswert, Pre-Chirping komplett zu vermeiden und die Glasfaserstrecke immer im Chirp-freien Punkt zu betreiben.

### 5.2.5. Approximation der effektiven Nichtlinearität

Im Falle der Raman-Verstärkung können wir die Notwendigkeit des Pre-Chirping umgehen, wenn wir den effektiven Koeffizienten der Nichtlinearität  $c(z)$  durch ein Stufenprofil  $c_{step}$  approximieren, wie wir es in Kapitel 5.2.3 beschrieben haben. Durch das ähnliche Verhalten der Lösungsmannigfaltigkeit bei Raman-Verstärkung und totaler Abwesenheit von Dämpfung gelingt es hier, die Symmetrie in  $c(z)$  wiederherzustellen. Symmetrie und stückweise Konstanz in  $c(z)$  (und  $d(z)$ ) bedeutet aber, dass wir periodische Lösungen wie im ungedämpften Fall suchen und finden können, also insbesondere Chirp-freie DM-Solitonen. In der Gegenwart einfacher Dämpfung reicht eine solche Approximation nicht aus, da das Profil der Nichtlinearität zu asymmetrisch ist.

Zunächst überprüfen wir, ob die Stufenprofile eine gute Beschreibung der realen Dämpfungssituation liefert. Zu diesem Zweck betrachten wir erneut die Abbildungen 5.4, 5.5 und 5.6, diesmal jedoch mit den zusätzlichen Ergebnissen für die Stufenprofile. Wie in den Abbildungen 5.7–5.11 gut zu erkennen, liefert die einfache Stufenapproximation der effektiven Nichtlinearität eine gute, im Falle der Raman-Verstärkung sogar eine her-

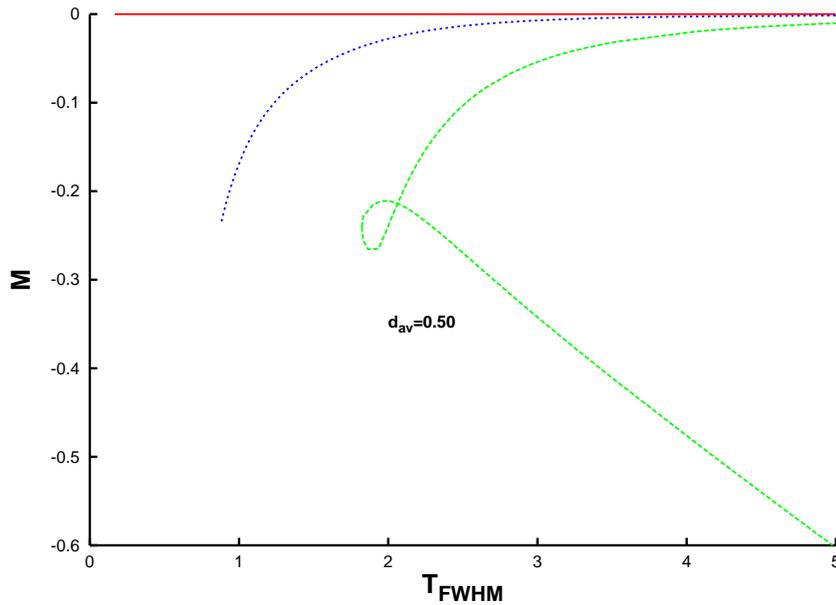


Abbildung 5.6.: Chirp  $M$  der DM-Solitonen in Abhängigkeit von der Halbwertsbreite  $T_{FWHM}$  für einen festen Werte von  $d_{av} = 0.50$  im ungedämpften (rot), im einfach gedämpften (grün) und im Raman-verstärkten (blau) Fall.

vorrangige Beschreibung der tatsächlichen Dämpfung und/oder Verstärkung. Natürlich bestehen Abweichungen, aber im Hinblick auf die Einfachheit der Approximation sind die Ergebnisse gerade für größere Halbwertsbreiten  $T_{FWHM}$  erfreulich gut. Für Raman-Verstärkung hält die Übereinstimmung zwischen Stufenprofil und dem viel komplexeren, asymmetrischen Koeffizienten der Nichtlinearität auch im Bereich kleiner Halbwertsbreiten  $T_{FWHM}$  an. Da wir durch die Stufenapproximation im Raman-verstärkten System kein Pre-Chirping mehr betreiben müssen, um DM-Solitonen zu finden, existieren hier periodische Lösungen auch wieder für sehr kleine Halbwertsbreiten  $T_{FWHM}$ . Betrachten wir die Abbildungen 5.9–5.11, so stellen wir fest, dass die Stufenprofile das typische Verhalten der Lösungsäste erhalten. Während die DM-Solitonen des Raman-verstärkten Systems nah am ungedämpften Fall liegen, finden sich die periodischen Lösungen des einfach gedämpften Systems in einem anderen Bereich des Lösungsraumes. Auch diese Eigenschaft der DM-Solitonen wird durch das simple Stufenprofil richtig modelliert.

Da es uns gelungen ist, den effektiven Koeffizienten der Nichtlinearität  $c(z)$  bei Anwesenheit von Raman-Verstärkung durch ein symmetrisches Stufenprofil zu approximieren, finden wir periodische Lösungen wie im ungedämpften Fall durch eindimensionale Optimierung und ohne jegliches Pre-Chirping (vergl. Abbildung 5.11). Natürlich haben wir uns damit vom realen Fall entfernt, denn die tatsächliche Raman-verstärkte Glasfaserstrecke besitzt einen asymmetrischen Verlauf von  $c(z)$  und benötigt zur periodischen Übertragung einen Puls mit Pre-Chirp.

Wir haben in diesem Abschnitt gesehen, dass wir alleine durch Pre-Chirping nicht immer in der Lage sind, die durch Dämpfung und/oder Raman-Verstärkung hervorgeru-

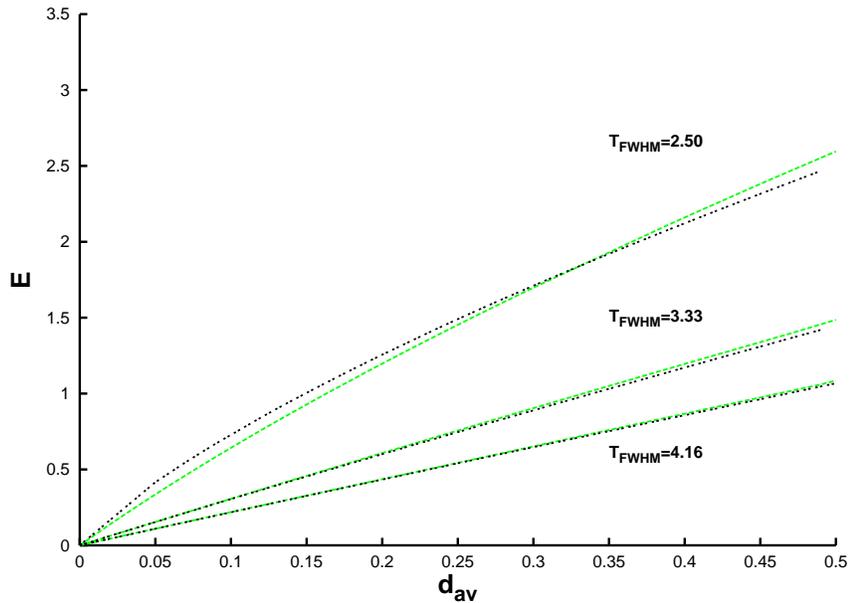


Abbildung 5.7.: Energie  $E$  der DM-Solitonen in Abhängigkeit von der mittleren Dispersion  $d_{av}$  für drei verschiedene Werte von  $T_{FWHM}$  im einfach gedämpften (grün) Fall. Zusätzlich zu sehen ist das Ergebnis für das Stufenprofil (schwarz).

fene Asymmetrie der effektiven Nichtlinearität zu kompensieren. Für Raman-verstärkte Systeme haben wir eine einfache Approximation eingeführt, die eine Optimierung ohne Pre-Chirping zulässt. Im nächsten Abschnitt vergleichen wir diese Ergebnisse mit denen, die wir durch unser Längenmanagement erhalten.

### 5.3. Optimierung durch Längenmanagement

Wie in den Kapiteln 2.4 und 2.5 diskutiert, werden wir nun das Glasfasersystem selbst verändern, um DM-Solitonen zu finden. Dabei optimieren wir die Längen der dispersions-kompensierenden ersten und letzten Glasfaser, bis wir Periodizität in den makroskopischen Pulsparametern erreicht haben. Durch die geeignete Wahl dieser Längen werden wir die Übertragung des Signals immer im Chirp-freien Punkt beginnen und beenden, die Notwendigkeit des Pre-Chirping entfällt also. Die so gewonnenen Ergebnisse vergleichen wir mit denen, die wir im letzten Abschnitt durch die Optimierung der Anfangswerte erhalten haben. Als wichtiges Resultat werden wir zeigen, dass Längenmanagement (LM) effizienter und flexibler als Pre-Chirping ist.

Wir kehren zunächst zu einer “Two-Step-Map” (TSM) zurück, wie sie in Abbildung 3.1 zu sehen ist. Hier kompensieren zwei in der Länge variable DCF’s eine SMF. Diese Form der Dispersionsabbildung wurde in Hinblick auf unseren Optimierungsalgorithmus gewählt (vergl. Kapitel 2.4). Dabei entspricht eine  $d_+$ -Faser, also eine Glasfaser mit positiver Dispersion, einer SMF und eine  $d_-$ -Faser einer DCF. Die Parameter bleiben die gleichen, die wir im vorigen Abschnitt als Grundlage unserer Simulationen

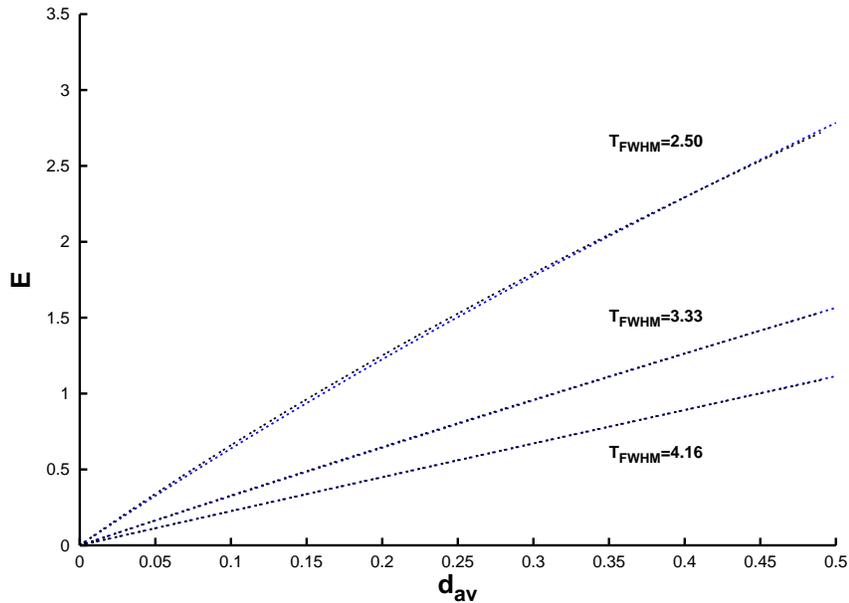


Abbildung 5.8.: Wie Abbildung 5.7, jetzt im Raman-verstärkten (blau) Fall.

genommen haben. Damit sieht unsere neue “Two-Step-Map” wie in Abbildung 5.12 aus. Vergleichen wir die neue TSM für LM mit der symmetrischen TSM (STSM) wie sie in den Abbildungen 5.1, 5.2 und 5.3 gezeigt ist, dann erkennen wir, dass die Position der  $d_+$ - und der  $d_-$ -Fasern gerade vertauscht ist. Des weiteren lassen wir die Längen der  $d_-$ -Fasern nun variabel, um Dispersions-Management betreiben zu können. Dieser veränderte Aufbau unser “Two-Step-Map” bedeutet insbesondere, dass wir jetzt den Chirp-freien Punkt nicht mehr in der Mitte der  $d_+$ -Glasfaser, sondern irgendwo in der  $d_-$ -Faser suchen. Dies wird die Form der Lösungsmannigfaltigkeit der DM-Solitonen stark beeinflussen. Den Koeffizienten der Nichtlinearität berechnen wir genau wie für die STSM. Da wir jetzt aber im Rahmen der Optimierung ständig die Gesamtlänge des Übertragungssystems ändern, müssen wir  $c_0$  permanent anpassen, damit im Mittel immer der Vergleichswert Eins angenommen wird. Konsequenterweise berechnen wir mit jeder Längenänderung auch den notwendigen Raman-Verstärkungsfaktor neu, der zu Periodizität in der Amplitude führt.

Zur Charakterisierung des Längenmanagements ziehen wir die Definitionen aus Kapitel 2.5 für den einfachen Fall einer TSM heran (vergl. Gleichungen (2.41), (2.42)).

Anstatt nun die Startparameter des Pulses zu variieren, optimieren wir durch Änderung der Prä- und Postkompensationslängen  $L_{pre}$  und  $L_{post}$ . Im Falle einer periodischen Lösung werden wir so die Übertragung des Signals immer im Chirp-freien Punkt beginnen und beenden. Neben dem bereits diskutierten geringeren numerischen Aufwand wird sich das Längenmanagement als viel flexibler und leistungsfähiger gegenüber dem Anfangswertoptimierung herausstellen. So lassen sich in weit größeren Parameterbereichen periodische Lösungen finden, besonders wenn wir eine “Two-Step-Map” mit  $d_{DCF} = -d_{SMF}$  wählen. Allerdings wird die Gesamtlänge nicht mehr konstant Eins,

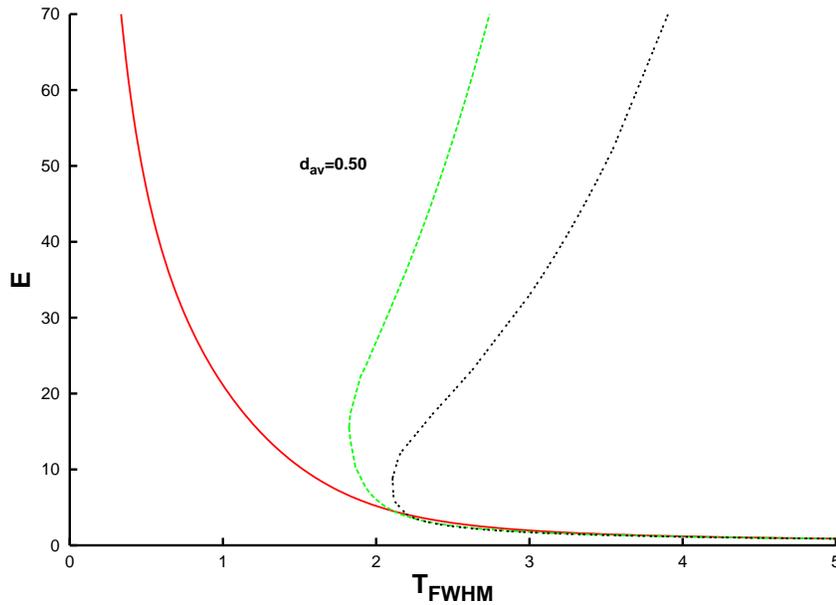


Abbildung 5.9.: Energie  $E$  der DM-Solitonen in Abhängigkeit von der Halbwertsbreite  $T_{FWHM}$  für einen festen Werte von  $d_{av} = 0.50$  im ungedämpften (rot) und im einfach gedämpften (grün) Fall. Zusätzlich zu sehen ist das Ergebnis für das Stufenprofil (schwarz), im ungedämpften Fall ist kein Stufenprofil notwendig.

sondern je nach Kompensationsanforderungen größer oder kleiner sein.

Da wir jetzt eine SMF (und keine DCF wie bei der STSM) in der Mitte der “Two-Step-Map” haben, müssen wir die Simulationen des vorangegangenen Abschnitts für unsere neue TSM wiederholen. Nur so können wir die beiden Optimierungsverfahren vergleichen.

### 5.3.1. Auswirkungen des Designs der “Two-Step-Map” auf das Verhalten der Lösungsmannigfaltigkeit

Wie im vorigen Abschnitt beschrieben, ändern wir, um das Dispersions-Management durch die Optimierung der Längen der DCF’s betreiben zu können, den Dispersionsverlauf der TSM wie folgt ab. Dabei vertauschen wir die  $d_+$ - und die  $d_-$ -Fasern im Vergleich zu Kapitel 5.2 (vergl. Tabelle 5.3.1 mit Tabelle 5.2.1, Tabelle 5.2.2 sowie Tabelle 5.2.3).

Typ	$L$	$d$
$d_-$ (DCF)	$L_{pre} = 0.25$	$-5.0 + d_{av}$
$d_+$ (SMF)	$L_{SMF} = 0.5$	$5.0 + d_{av}$
$d_-$ (DCF)	$L_{post} = 0.25$	$-5.0 + d_{av}$

Tabelle 5.3.1: Verlauf der chromatischen Dispersion  $d$  bei der für Längenmanagement ausgelegten “Two-Step-Map”.

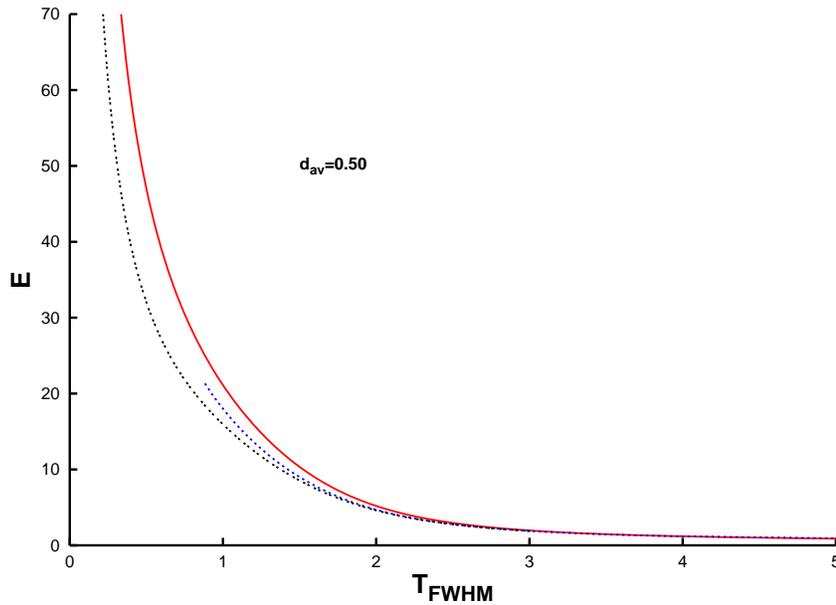


Abbildung 5.10.: Wie Abbildung 5.9, jetzt im Raman-verstärkten (blau) Fall.

Alle weiteren Parameter der Übertragungsstrecke ( $c_0$ ,  $\gamma$ ,  $g_0$  und  $\gamma_R$ ; siehe Tabelle 5.2.1, Tabelle 5.2.2 und Tabelle 5.2.3) bleiben unverändert, um einen direkten Vergleich mit der STSM aus Kapitel 5.2 zu ermöglichen. Da die Längen hier zunächst noch fest sind, müssen wir unseren alten, zweidimensionalen Optimierungsalgorithmus anwenden, um nach periodischen Lösungen zu suchen. Die Vorgehensweise ist dieselbe wie in Kapitel 5.2. In den Abbildungen 5.13–5.19 sehen wir die neuen Ergebnisse für die “Two-Step-Map” im Vergleich zu den Resultaten der STSM aus Kapitel 5.2. Den Abbildungen entnehmen wir folgende Ergebnisse: Erstens liegen auch für die neue “Two-Step-Map” die periodischen Lösungen im Raman-verstärkten Fall nah an denen des ungedämpften Systems. Zweitens sind nun genau wie bei einfacher Dämpfung auch im ungedämpften bzw. Raman-verstärkten Fall keine Lösungen mehr für kleine Halbwertsbreiten  $T_{FWHM}$  zu finden. Für die alte STSM des vorigen Abschnitts konnten wir dieses Verhalten lediglich bei einfacher Dämpfung beobachten. Drittens ist die Lösungsmannigfaltigkeit im gedämpften Fall in Bezug auf eine größere mittlere Dispersion  $d_{av}$  bzw. eine kleinere Halbwertsbreite  $T_{FWHM}$  noch eingeschränkter. Viertens steigt die Ähnlichkeit hinsichtlich der  $E$ - $d_{av}$ -Lösungsäste zwischen den beiden “Two-Step-Maps” mit anwachsender Halbwertsbreite. Fünftens müssen wir nun im gedämpften und Raman-verstärkten Fall einen positiven Pre-Chirp ( $M(0) > 0$ ) wählen, um Periodizität zu erreichen (vergl. Abbildung 5.18, 5.19).

All diese Unterschiede in der Parameterabhängigkeit der DM-Solitonen resultieren allein aus dem Vertauschen der  $d_+$ - und  $d_-$ -Fasern. Nur durch eine andere Wahl des Startpunktes innerhalb der TSM haben wir die periodischen Lösungen z.T. in einen vollkommen anderen Bereich des Parameterraums verschoben.

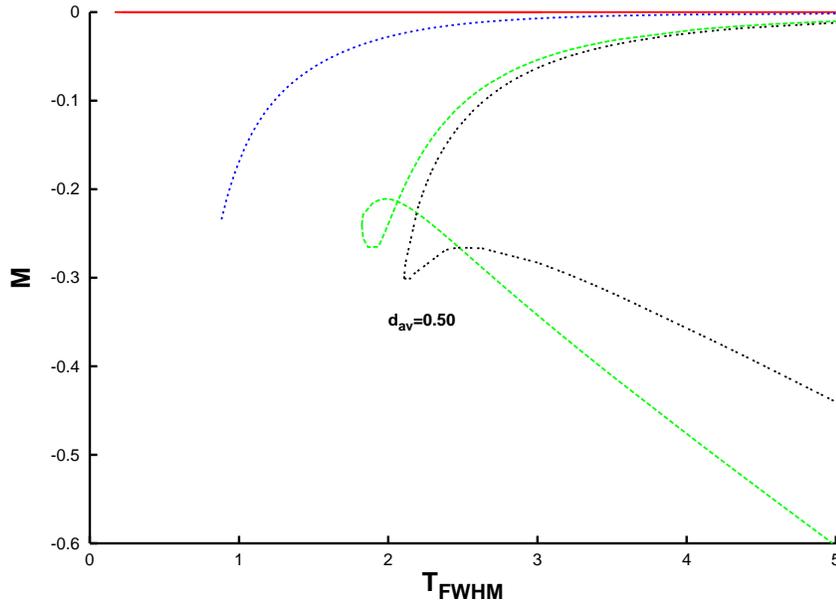


Abbildung 5.11.: Chirp  $M$  der DM-Solitonen in Abhängigkeit von der Halbwertsbreite  $T_{FWHM}$  für einen festen Werte von  $d_{av} = 0.50$  im ungedämpften (rot), im einfach gedämpften (grün) und im Raman-verstärkten (blau) Fall. Zusätzlich zu sehen sind die Ergebnissen der Stufenprofile im einfach gedämpften (schwarz) und im Raman-verstärkten (rot) Fall. Im ungedämpften Fall ist kein Stufenprofil notwendig.

### 5.3.2. Vergleich des Längenmanagements mit Pre-Chirping

Im letzten Abschnitt haben wir auch bei der neuen TSM gesehen, dass wir, um periodische Lösungen finden zu können, im gedämpften und Raman-verstärkten Fall immer noch Pre-Chirping des Eingangspulses betreiben müssen. Diese Notwendigkeit hängt also nicht von der Form der Glasfaserstrecke ab, sondern vielmehr von der Asymmetrie der effektiven Nichtlinearität und der Verschiebung des Chirp-freien Punktes. Besagte Verschiebung wollen wir in diesem Abschnitt durch eine geeignete Wahl der Glasfaserlängen kompensieren.

Beim Längenmanagement (LM) sind die Startparameter des Eingangspulses festgelegt. Dies bedeutet insbesondere  $M(0) = 0$ . Wie bereits in Kapitel 2.4 erklärt, variieren wir die Längen der Kompensationsfasern,  $L_{pre}$  und  $L_{post}$  solange, bis Periodizität gefunden ist:  $T(1) = T(0)$  und  $M(1) = M(0) = 0$ . Die neue Form der TSM erlaubt es uns dabei, die Optimierung zu beschleunigen (vergl. Kapitel 2.4). Ein weitere Grund für die Wahl der neuen TSM ist der bereits diskutierte technische Aspekt, die praktische Relevanz dieses Optimierungsverfahrens. Letztendlich verschieben wir den Ein- und Auskopplungspunkt des Pulses durch die Optimierung der Prä- und Postkompensationslänge genau in den Chirp-freien Punkt des neuen Systems.

Im ungedämpften Fall gilt wegen der Symmetrie in  $d(z)$  und  $c(z)$  immer  $L_{pre} = L_{post}$ . Diese Eigenschaft bleibt auch bei unserer neuen TSM erhalten, obwohl wir in der Mitte eine  $d_+$ -Faser anstatt einer  $d_-$ -Faser haben. Da wir aber aufgrund von nichtlinearen

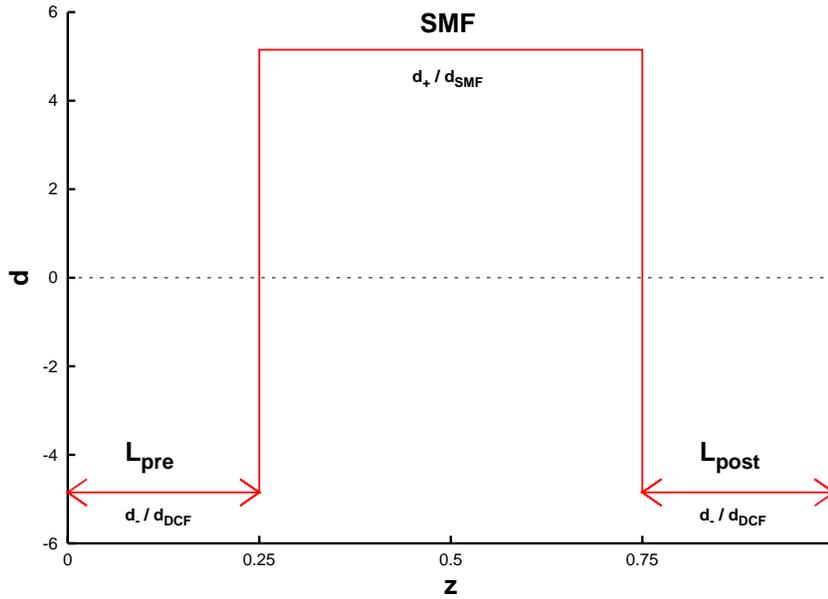


Abbildung 5.12.: Die “Two-Step-Map” für Längenmanagement.

Effekten über- oder unterkompensieren müssen, wird  $L_{ges} = L_{pre} + L_{post} + L_{SMF}$  nicht genau Eins sein. Bei Anwesenheit von Dämpfung und/oder Raman-Verstärkung ist die Symmetrie gebrochen:  $L_{pre} \neq L_{post}$ . Bzgl. der Gesamtlänge gilt das Gleiche wie im ungedämpften Fall. Die Nichtlinearität  $c_0$  und die Raman-Verstärkung  $g_0$  werden jeweils wie oben besprochen angepasst, sobald sich die Länge des Systems ändert. Die Parameter der TSM für Längenmanagement sind in Tabelle 5.3.2 zusammengefasst.

Typ	$L$	$d$	$c_0$	$\gamma(z)$	$g_0(z)$	$\gamma_R$
DCF	$L_{pre}$ : optimiert	$d_{DCF}$	berechnet	1.5	berechnet	2.0
SMF	$L_{SMF} = 0.5$	$d_{SMF}$	berechnet	1.5	berechnet	2.0
DCF	$L_{post}$ : optimiert	$d_{DCF}$	berechnet	1.5	berechnet	2.0

Tabelle 5.3.2: Design der “Two-Step-Map”, bei der das Dispersions-Management durch Optimierung der Kompensationslängen realisiert wird.

Längenmanagement liefert die besten Ergebnisse, wenn wir  $d_{DCF} = -d_{SMF}$  wählen. In diesem ausgewogenen Fall muss die Längenoptimierung lediglich nichtlineare Effekte und die Verschiebung des Chirp-freien Punktes kompensieren. Wir wählen jedoch  $d_{DCF} = -4.5$  und  $d_{SMF} = 5.5$  in unseren Simulationen mit LM. Dies ermöglicht es uns, die neuen Ergebnisse direkt mit den Resultaten aus Kapitel 5.2 und Kapitel 5.3.1 zu vergleichen, die wir für einen festen Wert der mittleren Dispersion  $d_{av} = 0.50$  erhalten haben.

Die mittels LM gefundenen DM-Solitonen vergleichen wir mit denen, die wir durch die Optimierung der Anfangsparameter des Pulses gefunden haben, in den Abbildungen 5.20–5.25. Beginnend mit den Abbildungen 5.20–5.22 weisen wir zunächst auf die

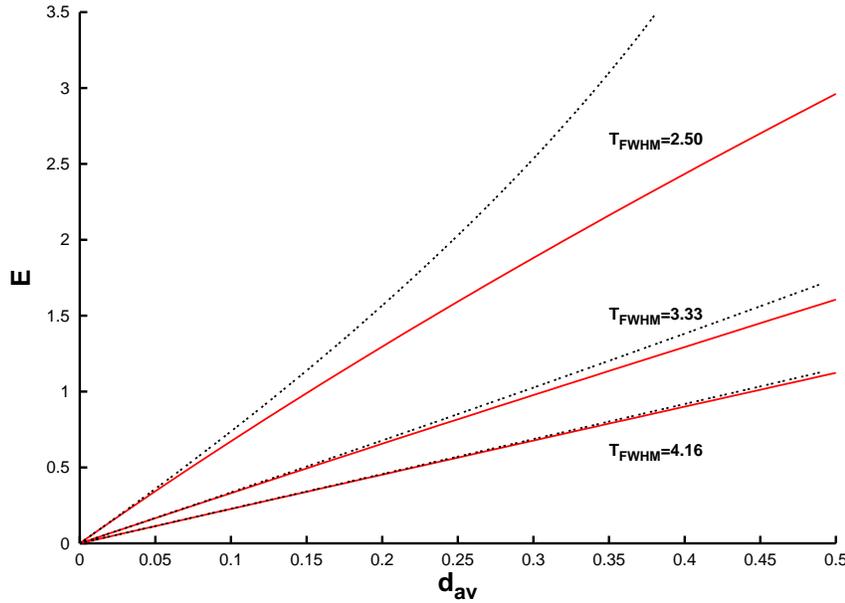


Abbildung 5.13.: Energie  $E$  der DM-Solitonen in Abhängigkeit von der mittleren Dispersion  $d_{av}$  für drei verschiedene Werte von  $T_{FWHM}$  im ungedämpften (rot) Fall. Verglichen werden die Ergebnisse der STSM aus Kapitel 5.2 (rot) mit den neuen (schwarz).

großen Unterschiede zwischen den beiden Optimierungsverfahren hin. Bei der Optimierung der Startparameter des Pulses einschließlich des Chirps  $M$  wird die mittlere Dispersion durchgeführt. Je nach Projektion des Lösungsraumes wird zu jedem Wert von  $d_{av}$  einer der drei Pulsparameter  $T_{FWHM}$ ,  $E$  und  $M$  festgehalten, während bzgl. der anderen beiden die zweidimensionale Suche nach Periodizität durchgeführt wird. Dies bedeutet, dass sich die Dispersionsstufe fortwährend ändert. Wir beginnen mit  $d_{DCF} = -5.0$ ,  $d_{SMF} = 5.0$  ( $d_{av} = 0.0$ ) und erhöhen die mittlere Dispersion, bis wir bei  $d_{DCF} = -4.5$ ,  $d_{SMF} = 5.5$  ( $d_{av} = 0.50$ ) aufhören. Dabei ist die Länge konstant Eins. Beim Längenmanagement sind alle drei Pulsparameter sowie die Dispersion ( $d_{DCF} = -4.5$ ,  $d_{SMF} = 5.5$ ) von vorne herein festgelegt. Die einzigen Variablen sind die Längen der Prä- und der Postkompensationsfaser, die so durchgeführt werden, dass die mittlere Dispersion genau wie bei der Optimierung der Anfangswerte den Bereich von  $d_{av} = 0.0$  bis  $d_{av} = 0.50$  überstreicht. Damit hat das System mit Längenmanagement für eine mittlere Dispersion von  $d_{av} = 0.50$  ebenfalls die Länge Eins, wobei Prä- und Postkompensation aber nicht symmetrisch aufgeteilt sein müssen. Für diese Konfiguration berechnen wir die wesentlichen LM-Parameter (vergl. Kapitel 2.5)

$$L_{lin} = -L_{SMF} \frac{d_{SMF}}{d_{DCF}} = -0.5 \frac{5.5}{-4.5} = 0.61. \quad (5.2)$$

Durch  $L_{ges} = L_{SMF} + L_{DCF}$  und  $L_{SMF} = 0.5$  erhalten wir  $L_{DCF} = 0.5$  unter der Voraussetzung, dass die Gesamtlänge Eins ist. Dies führt zu:

$$L_{total}^{rel} = \frac{L_{DCF}}{L_{lin}} = \frac{0.5}{0.61} = 0.82 = 82\%. \quad (5.3)$$

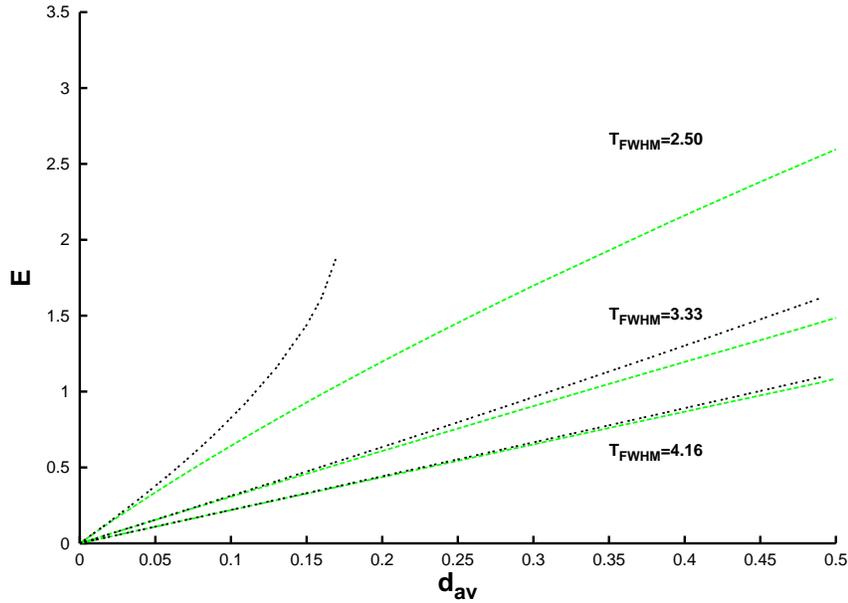


Abbildung 5.14.: Wie Abbildung 5.13, jetzt im gedämpften (grün) Fall.

Bei einer Gesamtlänge von Eins ist die Übertragungsstrecke also unterkompensiert (82%), was eine positive mittlere Dispersion von  $d_{av} = 0.50$  zu Folge hat

$$d_{av} = \frac{(1 - L_{total}^{rel})L_{SMF}d_{SMF}}{L_{ges}} = \frac{(1 - 0.82) 0.5 \cdot 5.5}{0.5 + 0.5} = 0.50. \quad (5.4)$$

Auf der anderen Seite setzt eine mittlere Dispersion von  $d_{av} = 0.0$  eine vollständige Kompensation voraus:  $L_{total}^{rel} = 1.0 = 100\%$ . Dies bedeutet wiederum  $L_{lin} = 0.61$  sowie  $L_{ges} = 0.61 + 0.5 = 1.11$ .

Im Falle des Längenmanagements starten wir demnach in Abbildung 5.20–5.22 mit einer Gesamtlänge von 1.11 ( $d_{av} = 0.0$ ) und reduzieren diese auf genau Eins ( $d_{av} = 0.50$ ). Die Ergebnisse, die wir in Abbildung 5.20 sehen, sind sehr interessant: Erstens sind die periodischen Lösungen im gedämpften Fall für  $T_{FWHM} = 2.50$  nicht länger auf kleine Werte der mittleren Dispersion  $d_{av}$  beschränkt. Zweitens erhalten wir durch LM im Bereich größerer Halbwertsbreiten in dieser Projektion des Lösungsraumes fast die selben Resultate, die auch die Optimierung der Anfangswerte geliefert hat. Noch besser zu erkennen sind diese Resultate in Abbildung 5.23 und 5.24. In dieser Projektion des Lösungsraums halten wir im Falle der Anfangswertoptimierung die mittlere Dispersion  $d_{av} = 0.50$  und im Falle des LM die Gesamtlänge  $L_{ges} = 1$  fest. Damit sind im ungedämpften Fall, der bzgl.  $c(z)$  symmetrisch ist und keinen Pre-Chirp benötigt ( $L_{pre} = L_{post} = 0.5$  für LM), die periodischen Lösungen beider Optimierungsverfahren identisch.

Wir beobachten ferner, dass das System mit Raman-Verstärkung erneut sehr nah am ungedämpften System liegt. Schließlich finden wir im einfach gedämpften Fall auch für kleinere Halbwertsbreiten periodische Lösungen, wenn wir LM einsetzen. Dafür geht

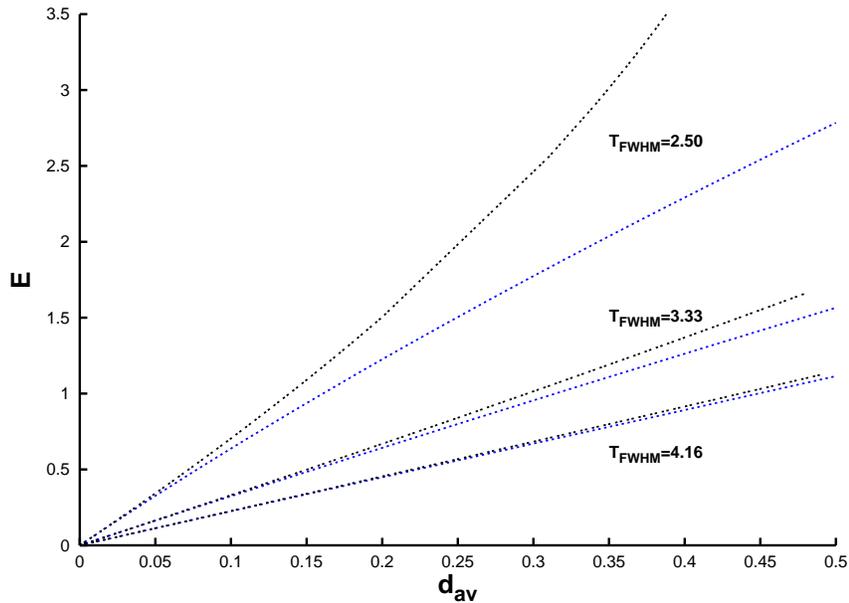


Abbildung 5.15.: Wie Abbildung 5.13, jetzt im Raman-verstärkten (blau) Fall.

im gedämpften Fall bei LM mitunter die zweite Lösung verloren. Dies verstehen wir, wenn wir die Auswirkungen der effektiven Nichtlinearität diskutieren. Im gedämpften Fall ist diese im Vergleich zum ungedämpften System hochgradig asymmetrisch. Die Asymmetrie verschiebt die Position des Chirp-freien Punktes aus der Mitte der DCF. Beim LM versuchen wir, diese Verschiebung zu kompensieren, indem wir wieder in den Chirp-freien Punkt zurückkehren. Dies ist aber nicht mehr möglich, wenn eine zu starke Asymmetrie den Chirp-freien Punkt aus der DCF heraus und in die SMF hinein geschoben hat. Mit genau dieser Situation haben wir es in Abbildung 5.23 und 5.24 zu tun. Die letzte periodische Lösung des oberen Lösungsastes im gedämpften Fall weist für LM annähernd keine Präkompensation mehr auf,  $L_{pre} \approx 0$ . Mittels LM können wir das DM-Soliton zur nächst höheren Energie nicht mehr finden, da dann der Chirp-freie Punkt in die SMF gewandert ist. Wir finden allerdings immer noch die Lösung, die zu der niedrigeren Energie gehört.

Die Flexibilität des LM, die wir hier künstlich eingeschränkt haben, um den Vergleich mit der Anfangswertoptimierung zu ermöglichen, garantiert aber zwei Möglichkeiten, wieder beide Lösungen zu finden. Wir können einerseits eine beliebige Gesamtlänge zulassen oder andererseits die mittlere Dispersion gleich Null wählen ( $d_{DCF} = -d_{SMF}$ ). In beiden Fällen wird ein größerer Anteil der DCF's alleine zur Kompensation der Verschiebung des Chirp-freien Punktes zur Verfügung stehen.

Schließlich diskutieren wir noch kurz Abbildung 5.25, bei der es sich im wesentlichen um Abbildung 5.18 eingeschränkt auf die neue TSM handelt. Gut zu erkennen ist, dass wir für die neue, LM-geeignete "Two-Step-Map" ausschließlich positive Werte für den Pre-Chirp finden. Im gedämpften und hinsichtlich der effektiven Nichtlinearität am asymmetrischsten Fall müssen wir den Pre-Chirp erheblich größer wählen als bei dem

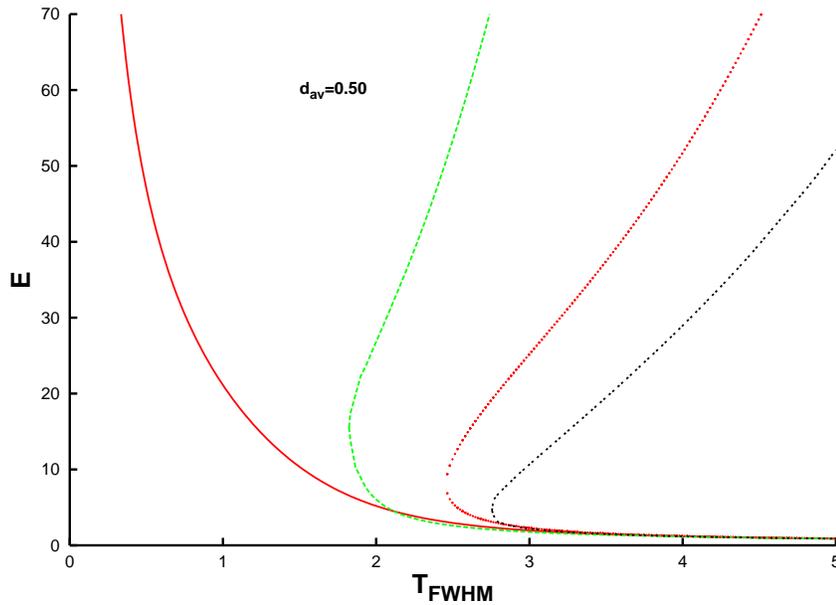


Abbildung 5.16.: Energie  $E$  der DM-Solitonen in Abhängigkeit von der Halbwertsbreite  $T_{FWHM}$  für einen festen Werte von  $d_{av} = 0.50$  im ungedämpften (rot) und im gedämpften (grün) Fall. Verglichen werden die Ergebnisse der STSM aus Kapitel 5.2 (rot, grün) mit den neuen (schwarz und im ungedämpften Fall, rot gestrichelt).

Raman-verstärkten System. Aus dem vergleichsweise geringen Pre-Chirp resultiert im Raman-verstärkten Fall die gute Übereinstimmung zwischen der Anfangswertoptimierung und dem LM, die wir in den Abbildungen 5.20 und 5.23 beobachtet haben. Setzen wir LM ein, so ist natürlich überhaupt keine Pre-Chirp nötig.

## 5.4. Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir die Existenz und Charakteristika von DM-Solitonen in Glasfasersystemen mit Dämpfung und/oder Raman-Verstärkung systematisch untersucht. Mittels umfangreicher numerischer Simulationen haben wir die Ergebnisse mit dem bekannten ungedämpften Fall verglichen. Wir haben gezeigt, dass es im Gegensatz zum ungedämpften Fall bei Anwesenheit von Dämpfung und Raman-Verstärkung notwendig ist, das DM-Soliton mit einem Pre-Chirp zu versehen und dass dieser Pre-Chirp nicht immer ausreicht, um die Verschiebung des Chirp-freien Punktes zu kompensieren. Ein wichtiges Resultat ist das sehr ähnliche Verhalten der DM-Solitonen bei Raman-Verstärkung und bei dem sehr gut studierten ungedämpften System.

Des weiteren haben wir eine Stufenapproximation des effektiven Koeffizienten der Nichtlinearität eingeführt, um den Verlauf dieses Koeffizienten im gedämpften und Raman-verstärkten Fall erfassen zu können. Bei Raman-verstärkten Systemen gelang es uns, mittels dieses Stufenprofils die Symmetrie in der effektiven Nichtlinearität wiederherzustellen, die im physikalisch korrekten Fall gebrochen ist. Hinsichtlich der Eigen-

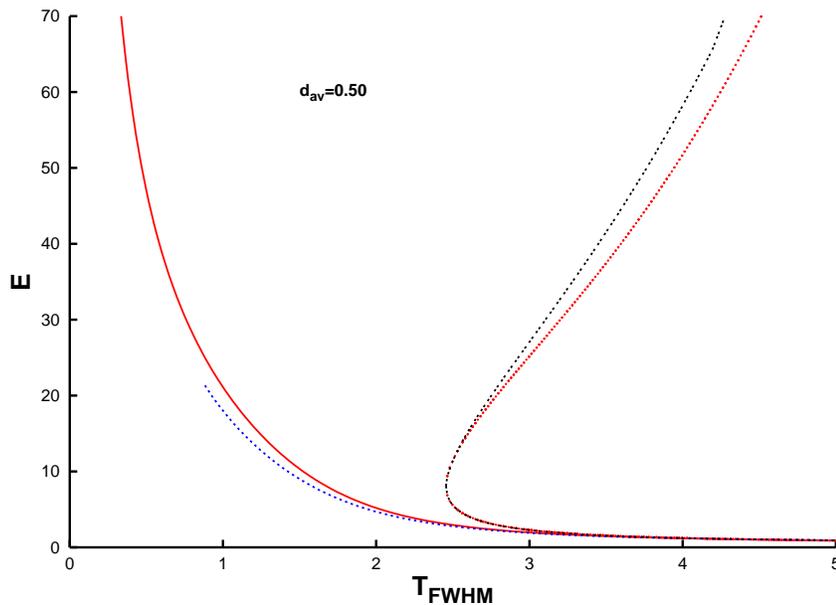


Abbildung 5.17.: Wie Abbildung 5.16, jetzt im ungedämpften (rot) und im Raman-verstärkten (blau) Fall.

schaften der DM-Solitonen liefert diese einfache Approximation im Raman-verstärkten Fall gute Ergebnisse und beschleunigt die Numerik ungemein. Es besteht weiterhin die Hoffnung, dass aufgrund der Einfachheit des Stufenprofils analytische Ergebnisse für Systeme mit Raman-Verstärkung möglich sind.

Schließlich haben wir unsere Dispersions-Kompensation mittels Längenmanagement auf Raman-verstärkte Glasfaserstrecken angewendet. Hier ist überhaupt kein Pre-Chirp notwendig. Wir haben gezeigt, dass sowohl die Anfangswertoptimierung einschließlich des Pre-Chirping als auch das Längenmanagement durchaus vergleichbare Ergebnisse liefern. Durch die systematische Analyse einer Vielzahl von Simulationsergebnissen zeigte sich dabei das LM als flexibler und leistungsfähiger hinsichtlich der Suche nach DM-Solitonen.

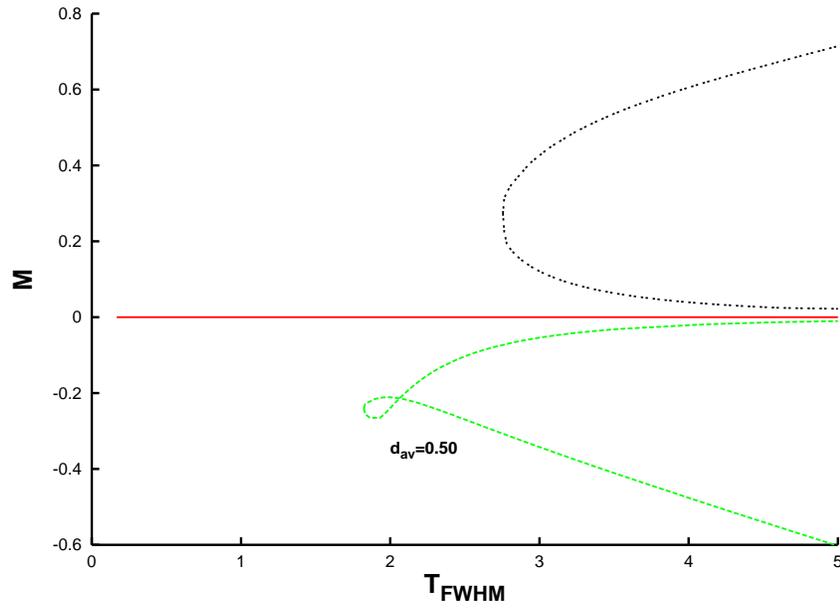


Abbildung 5.18.: Chirp  $M$  der DM-Solitonen in Abhängigkeit von der Halbwertsbreite  $T_{FWHM}$  für einen festen Werte von  $d_{av} = 0.50$  im ungedämpften (rot) und im gedämpften (grün) Fall. Verglichen werden die Ergebnisse der STSM aus Kapitel 5.2 (rot, grün) mit den neuen (schwarz und im ungedämpften Fall, rot).

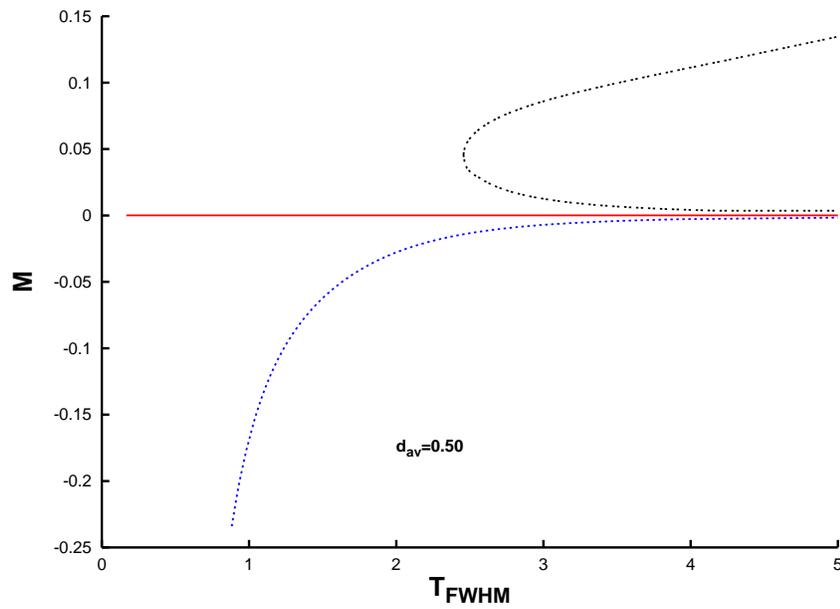


Abbildung 5.19.: Wie Abbildung 5.18, jetzt im ungedämpften (rot) und im Raman-verstärkten (blau) Fall.

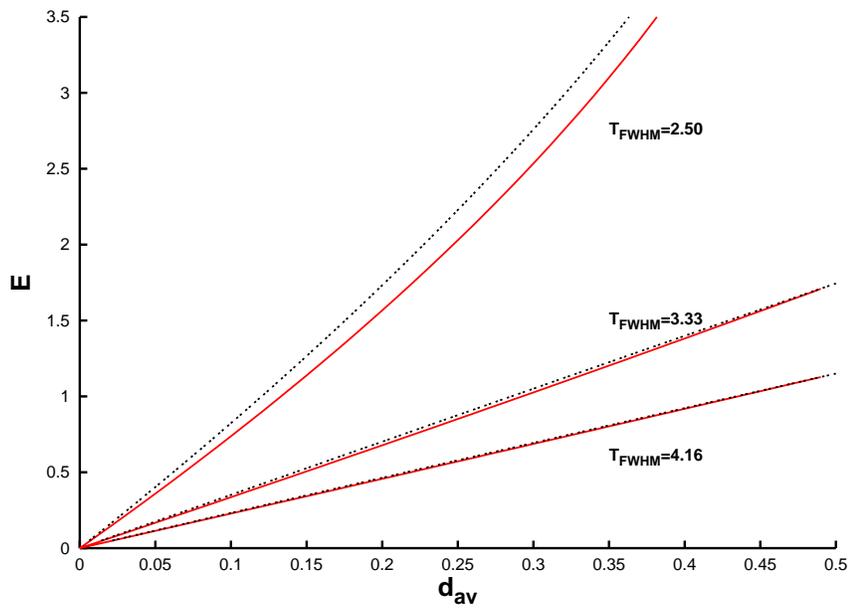


Abbildung 5.20.: Energie  $E$  der DM-Solitonen in Abhängigkeit von der mittleren Dispersion  $d_{av}$  für drei verschiedene Werte von  $T_{FWHM}$  im ungedämpften (rot) Fall. Verglichen werden Pre-Chirping (rot) und LM (schwarz).

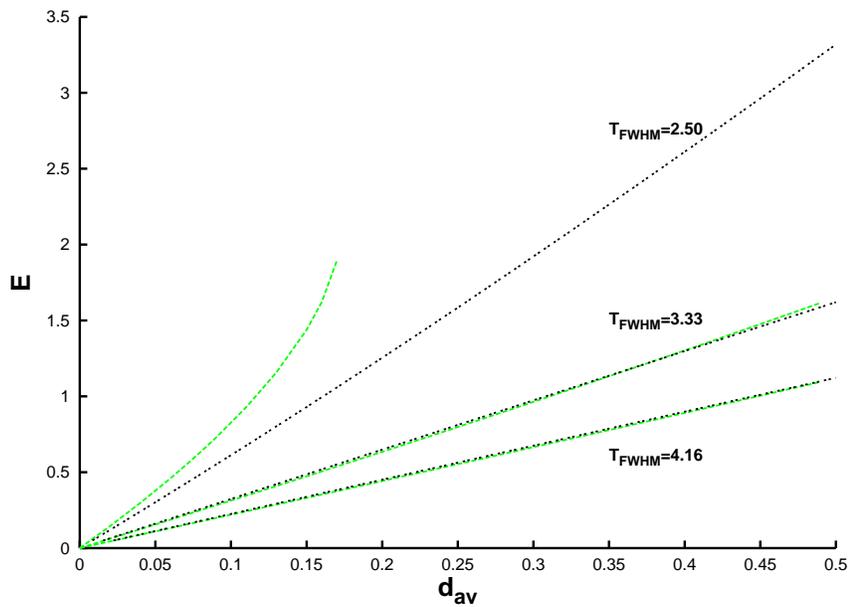


Abbildung 5.21.: Wie Abbildung 5.20, jetzt im gedämpften (grün) Fall. Verglichen werden Pre-Chirping (grün) und LM (schwarz).

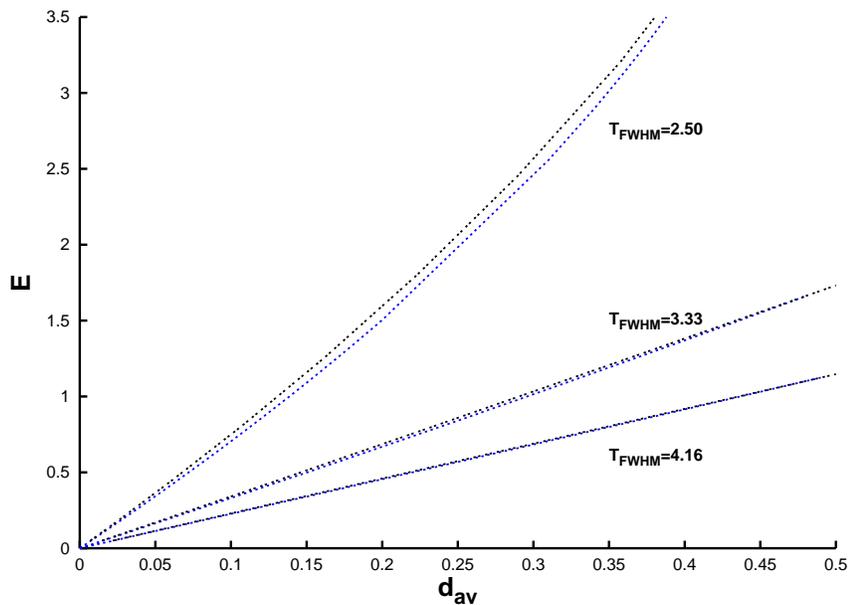


Abbildung 5.22.: Wie Abbildung 5.20, jetzt im Raman-verstärkten (blau) Fall. Verglichen werden Pre-Chirping (blau) und LM (schwarz).

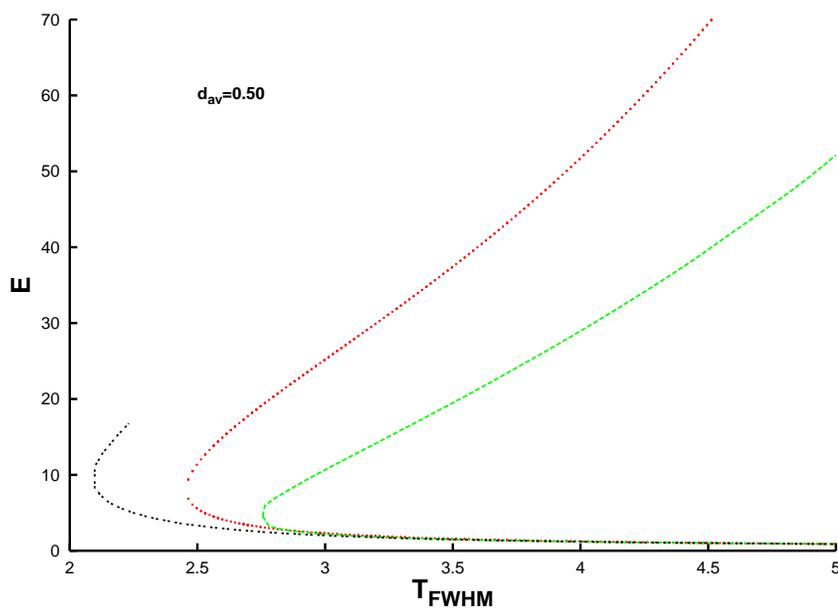


Abbildung 5.23.: Energie  $E$  der DM-Solitonen in Abhängigkeit von der Halbwertsbreite  $T_{FWHM}$  für einen festen Werte von  $d_{av} = 0.50$  im ungedämpften (rot) und im gedämpften (grün) Fall. Verglichen werden Pre-Chirping (rot, grün) und LM (schwarz und im ungedämpften Fall, rot).

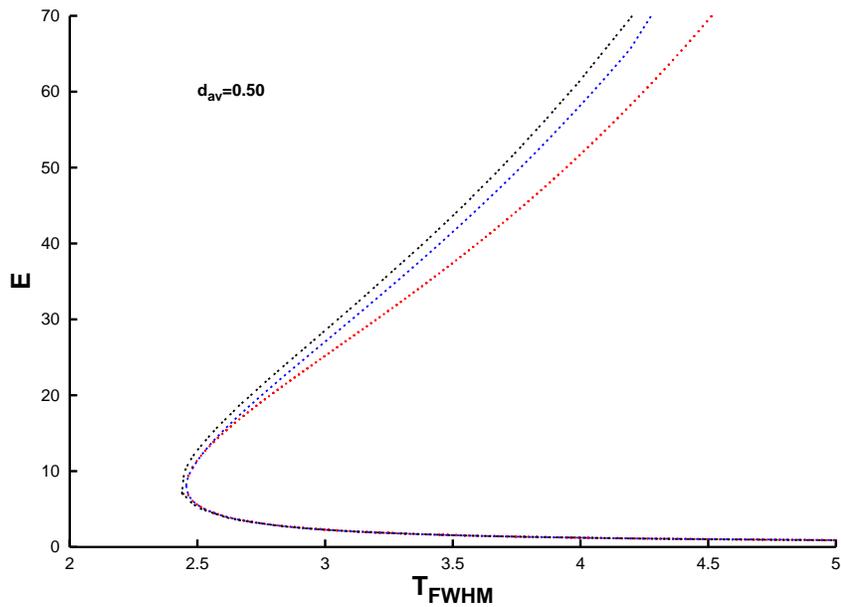


Abbildung 5.24.: Wie Abbildung 5.23, jetzt im ungedämpften (rot) und im Raman-verstärkten (blau) Fall. Verglichen werden Pre-Chirping (rot, blau) und LM (schwarz und im ungedämpften Fall, rot).

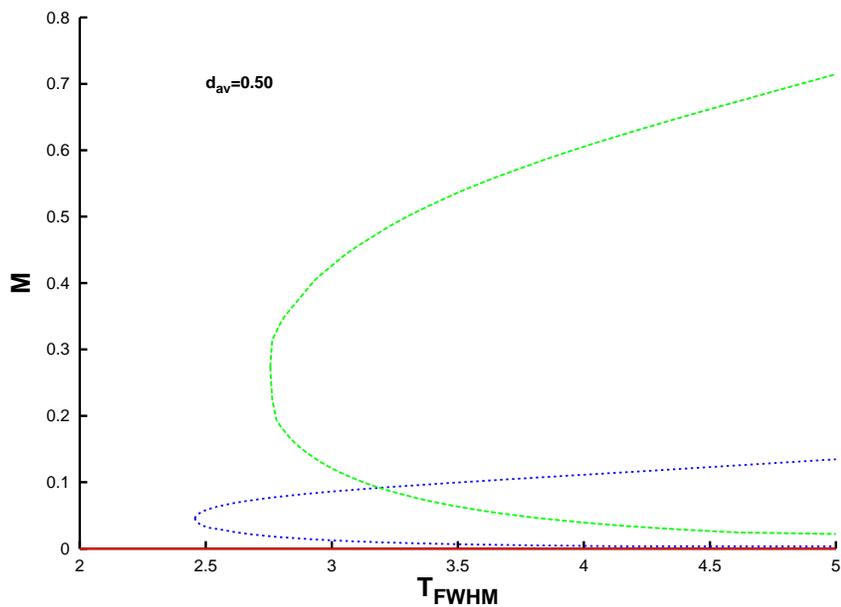


Abbildung 5.25.: Chirp  $M$  der DM-Solitonen in Abhängigkeit von der Halbwertsbreite  $T_{FWHM}$  für einen festen Werte von  $d_{av} = 0.50$  im ungedämpften (rot), im gedämpften (grün) und im Raman-verstärkten (blau) Fall. Verglichen werden Pre-Chirping (rot, grün, blau) und LM (rot).



## 6. ODE-Approximation der NLSE für den Multi-Puls-Fall

Die in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten Ergebnisse haben sich ausschließlich auf den Ein-Puls-Fall bezogen. Wie gezeigt, lassen sich mit den ODE-Modellen, die die Ein-Puls-Propagation der NLSE approximieren, z.T. sehr gute Resultate erzielen, die schnelle Optimierung hinsichtlich des tatsächlichen Übertragungsverhaltens einer Glasfaserstrecke zulassen.

Allerdings haben wir bereits in Kapitel 3.2 gesehen, dass bei den heute erforderlichen Übertragungsraten von  $40\text{ Gb/s}$  in der urbanen und transkontinentalen Telekommunikation die nichtlineare Wechselwirkung der einzelnen Pulse untereinander nicht mehr zu vernachlässigen ist (vergl. Abbildung 3.8). Diese führt zu einer Degeneration des Signals und damit zu einer schlechteren Übertragungsqualität. Dies gilt umso mehr, je geringer der Abstand der Pulse ist und je weiter sie während der Propagation durch die Glasfaser ausschmieren und sich somit überlagern. Es ist daher für die Konzeption und Planung hoch effizienter Übertragungssysteme von essentiellstem Interesse, die nichtlineare Wechselwirkung zwischen den einzelnen Pulsen eines Übertragungskanals, die Intra-Kanal-Wechselwirkung, zu verstehen.

Für die Wechselwirkungsmechanismen mehrerer Solitonen liegen bereits eine Vielzahl von Ergebnissen vor [21, 29, 37, 64, 61, 17, 62, 60, 15, 10, 38, 39, 16, 19]. Dabei wird in der Regel von zwei linear überlagerten Ein-Solitonen-Zuständen ausgegangen [29], die sich mittels der inversen Streutransformation (IST) als Lösung der NLSE berechnen lassen [64]. Die Wechselwirkung wird dann als adiabatische Störung modelliert (Quasi-Particle Approach, QPA) [29, 17, 16]. Daneben gibt es Ansätze, die Wechselwirkung zweier Solitonen durch eine Variationsrechnung [6] und eine direkte Störungstheorie [37] zu beschreiben. Der Variationsansatz ist insofern etwas flexibler als der Solitonansatz, da die Pulsform noch weitestgehend frei ist. Bei allen Modellen werden stets zahlreiche Voraussetzungen gemacht, damit sie überhaupt aussagekräftig und mathematisch zu handhaben sind. So müssen die Solitonen wohl separiert sowie von etwa gleicher Amplitude und Phase sein [6, 60, 16, 15], um die Annahme der Wechselwirkung als reine Störung rechtfertigen zu können. Die Beschreibung der Wechselwirkung beschränkt sich zudem oft nur auf die nächsten Nachbarn [60, 15], da davon ausgegangen wird, dass der Überlapp eines Solitons mit weiter entfernten Pulsen vernachlässigt werden kann. Diese einschränkenden Voraussetzungen werden ebenfalls für die in der Literatur zu findenden  $n$ -Solitonen-Modelle getroffen [16, 60, 17, 15, 16]. Auch untersuchen diese Modelle auf-

grund der Einschränkung auf die durch die IST zu gewinnende Solitonenlösung lediglich die Variante der NLSE, bei der der Koeffizient der Dispersion  $d(z)$  konstant ist. Damit ist diese Herangehensweise für Übertragungssysteme mit Dispersions-Management ungeeignet, da eine variable Dispersion von vorne herein ausgeschlossen ist. Gerade solche Systeme sind aber hochaktuell und von großer Praxisrelevanz.

Wir wählen deshalb hier einen wesentlich allgemeineren Ansatz, um die Propagation von  $n$  Pulsen und deren vollständige Wechselwirkung untereinander zu beschreiben. Insbesondere wird es uns damit möglich sein, Glasfaserstrecken mit starkem Dispersions-Management zu simulieren. In diesen schmieren die DM-Solitonen stark aus. Das führt zu einem großen Überlapp und damit zu einer komplexen nichtlinearen Wechselwirkung, die nicht mehr als reine Störung betrachtet werden kann.

## 6.1. Herleitung der $n$ -Puls-ODE-Gleichungen

Bereits in Kapitel 2.2 haben wir darauf hingewiesen, dass sich die  $T$ - $M$ -Gleichungen auch durch eine Variation of Action Method (VAM) herleiten lassen [5, 57, 47]. Dabei geht man von einer Lagrangedichte aus

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\mathcal{A}^* \mathcal{A}_z - \mathcal{A} \mathcal{A}_z^*) - d(z) |\mathcal{A}_t|^2 + \frac{c(z)}{2} |\mathcal{A}|^4, \quad (6.1)$$

mittels derer sich die NLSE (2.3) als Eulergleichung dieser Lagrangedichte schreiben lässt

$$\text{NLSE} \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}^*} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_t^*} - \frac{d}{dz} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_z^*} = 0. \quad (6.2)$$

Damit lautet das Variationsproblem

$$\delta \mathcal{S} = \delta \int \{\mathcal{L}\}_t dz = 0, \quad \{\mathcal{L}\}_t = \int \mathcal{L} dt. \quad (6.3)$$

Die Integration über  $t$  wird später explizit ausgeführt, was effektiv zu einer Reduktion der Freiheitsgrade führt.

Für den Puls  $\mathcal{A}$  macht man nun den physikalisch motivierten Ansatz

$$\mathcal{A}(z, t) = a(z) f\left(\frac{t}{T(z)} = x\right) \exp(i(\lambda(z) + \mu(z)t^2)). \quad (6.4)$$

Die Wahl dieser Testfunktion lässt sich dadurch begründen, dass im linearen Fall ein Gauß-Paket Lösung der NLSE ist. Zunächst ist die Pulsform  $f(x)$  allerdings noch nicht genauer spezifiziert. Der Puls ist durch vier Parameter festgelegt: die Amplitude  $a(z)$ , die Breite  $T(z)$ , seine Phase  $\lambda(z)$  und den Chirp  $\mu(z)$ .

Man setzt nun die Testfunktion (6.4) in die Lagrangedichte (6.1) ein und führt die  $t$ -Integration aus. Gemäß des Variationsprinzips (6.3) liefern dann die Eulergleichungen der gemittelten Lagrangedichte  $\{\mathcal{L}\}_t$  bzgl.  $a(z)$ ,  $T(z)$ ,  $\lambda(z)$  und  $\mu(z)$  die Evolutionsgleichungen dieser makroskopischen Pulsparameter in der Ausbreitungsrichtung  $z$  des Pulses:

$$\frac{\partial \{\mathcal{L}\}_t}{\partial \xi} - \frac{d}{dz} \frac{\partial \{\mathcal{L}\}_t}{\partial \xi_z} = 0; \quad \xi = a(z), T(z), \lambda(z), \mu(z). \quad (6.5)$$

Diese folgen letztendlich zu

$$\begin{aligned} a^2 T &= \text{const.} \quad , \quad \frac{dT}{dz} = 4 d(z) T \mu, \\ \frac{d\mu}{dz} &= -4 d(z) \mu^2 + \left( \frac{d(z) C_1}{T^4} - \frac{c(z) C_2}{T^3} \right), \end{aligned} \quad (6.6)$$

mit den Abkürzungen

$$C_1 = \frac{\int |f(x)_x|^2 dx}{\int x^2 |f(x)|^2 dx} \quad , \quad C_2 = \frac{\int |f(x)|^4 dx}{4 \int x^2 |f(x)|^2 dx}. \quad (6.7)$$

Hinzu kommt noch eine Gleichung für die globale Phase  $\lambda(z)$  (vergl. Gleichung (2.22)), die aber wegen der Phaseninvarianz der NLSE vollständig entkoppelt. Wählt man einen Gauß-förmigen Puls  $f(x) = \exp(-x^2)$ , so lassen sich die Integrale (6.7) vollständig analytisch auswerten. Bei geeigneter Normierung und mit der Schreibweise  $M = \mu T$  sind dann die Bewegungsgleichungen (6.6) mit den  $T$ - $M$ -Gleichungen (2.12) und (2.13) identisch. Die so hergeleiteten Evolutionsgleichungen für die Parameter des Pulses sind zunächst einmal lediglich durch Annahmen über die Form des Pulses eingeschränkt.

Um dieses Verfahren auf  $n$  Pulse zu erweitern, schreiben wir  $\mathcal{A}$  als Summe mehrerer Einzelverteilungen

$$\mathcal{A} = \sum_{m=1}^n \mathcal{A}_m. \quad (6.8)$$

Die Wechselwirkung der Pulse  $\mathcal{A}_m$  untereinander soll nur über den nichtlinearen Term von statten gehen, die linearen Anteile der NLSE superponieren wir einfach. Unsere neue  $n$ -Puls-Lagrangedichte muss zwei Bedingungen erfüllen.

Erstens soll die Eulergleichung dieser Dichte bzgl. des  $m$ -ten Pulses die NLSE dieses Pulses plus weitere reine Wechselwirkungsterme ergeben. Dabei möchten wir insbesondere erreichen, dass sich in der NLSE, die zum  $m$ -ten Puls gehört, keine Anteile des Selbstwechselwirkungsterms  $|\mathcal{A}_k|^2 \mathcal{A}_k$  des  $k$ -ten ( $k = 1, \dots, n; k \neq m$ ) Pulses befinden.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_m^*} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_{m t}^*} - \frac{d}{dz} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_{m z}^*} = 0 \quad (6.9)$$

soll zu

$$i \mathcal{A}_{m z} + d(z) \mathcal{A}_{m t t} + c(z) |\mathcal{A}_m|^2 \mathcal{A}_m + \Sigma_{k \neq m} = 0 \quad (6.10)$$

führen, wobei  $\Sigma_{k \neq m}$  die Wechselwirkung des Pulses mit allen anderen Pulsen beinhaltet.

Zweitens sollen alle Eulergleichungen bzgl. der Einzelpulse  $\mathcal{A}_m$  zusammen wieder zur kompletten NLSE für  $\mathcal{A} = \sum_{m=1}^n \mathcal{A}_m$  führen

$$\sum_{m=1}^n \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_m^*} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_{m t}^*} - \frac{d}{dz} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_{m z}^*} \right] = 0, \quad (6.11)$$

$$\Leftrightarrow i \mathcal{A}_z + d(z) \mathcal{A}_{t t} + c(z) |\mathcal{A}|^2 \mathcal{A} = 0. \quad (6.12)$$

Diese beiden Eigenschaften erfüllt folgende Lagrangedichte (vergl. Anhang B)

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^n (\mathcal{A}_i^* \mathcal{A}_{i,z} - \mathcal{A}_i \mathcal{A}_{i,z}^*) - d(z) \sum_{i=1}^n |\mathcal{A}_{i,t}|^2 + \frac{c(z)}{2} \left( \sum_{i=1}^n |\mathcal{A}_i|^4 + \Sigma_{\mathcal{L}} \right), \quad (6.13)$$

$$\Sigma_{\mathcal{L}} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \mathcal{A}_i^2 \mathcal{A}_j^{*2} + \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ i \neq j, k \neq l}}^n \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \mathcal{A}_k^* \mathcal{A}_l^*. \quad (6.14)$$

Somit haben wir die NLSE für die  $n$ -Puls-Propagation umgeschrieben. Dabei haben wir lediglich die physikalisch anschauliche Annahme getroffen, dass die Wechselwirkung der Pulse untereinander ausschließlich über die nichtlinearen Terme vonstatten gehen soll. Dies ist einsichtig, da im linearen Grenzfall keine Wechselwirkung existiert. Insbesondere haben wir die nichtlineare Wechselwirkung nicht als Störung behandelt oder sie auf die nächsten Nachbarn eingeschränkt. Der Ansatz für den Puls ist nun etwas flexibler als im Einzelpulsfall, beinhaltet also mehr Parameter

$$\mathcal{A}_m(z, t) = a_m(z) f(x_m(z, t)) \exp[i \phi_m(z, t)], \quad (6.15)$$

$$\phi_m(z, t) = \lambda_m(z) + \omega_m(z) x_m(z, t) + \mu_m(z) x_m^2(z, t), \quad (6.16)$$

$$x_m(z, t) = \frac{t - \tau_m(z)}{T_m(z)}. \quad (6.17)$$

Damit haben wir pro Puls sechs rein reelle, nur ortsabhängige makroskopische Evolutionsgrößen,  $a_m(z)$ ,  $\tau_m(z)$ ,  $T_m(z)$ ,  $\lambda_m(z)$ ,  $\omega_m(z)$  und  $\mu_m(z)$ . Sie stellen nacheinander die Amplitude, die Position, die Breite, die zeitlich konstante Phase, die Frequenz und den Chirp eines Einzelpulses dar. Neben der Amplitude und Breite eines jeden Pulses lassen wir also auch die Position sowie drei Phasenparameter variabel. Wir erlauben also insbesondere eine Bewegung des einzelnen Pulses relativ zu allen anderen sowie eine Änderung seiner Frequenz. Dadurch ist unser Modell grundsätzlich auch dazu geeignet, Systeme mit mehreren Frequenzkanälen (Wavelength Division Multiplexing, WDM) zu beschreiben. Hierzu muss die Lagrangedichte allerdings den WDM-Erfordernissen angepasst werden (vergl. Anhang B).

Genau wie im Einzelpulsfall wählen wir eine Gauß-Glocke als Pulsform

$$f(x_m(z, t)) = \exp(-x_m^2(z, t)). \quad (6.18)$$

Diese hat bereits in den vorangegangenen Kapiteln zu exzellenten Ergebnissen geführt und ist zudem der in der Telekommunikation gebräuchlich Informationsträger.

Die weitere Vorgehensweise orientiert sich an der Herleitung der  $T$ - $M$ -Gleichungen für einen Puls. Wir setzen unseren Ansatz (6.15) in die Lagrangedichte (6.13) ein und integrieren bzgl. der Zeit. Die dabei auftretenden Integrale über die Gauß-Verteilungen lassen sich allesamt analytisch berechnen (Anhang B). Mit den Abkürzungen

$$\Theta_2 = \alpha_2^{-1/2} \exp(i \delta_2) \exp\left(\frac{1}{4} \beta_2^2 \alpha_2^{-1} - \gamma_2\right), \quad (6.19)$$

$$\Theta_4 = \alpha_4^{-1/2} \exp(i \delta_4) \exp\left(\frac{1}{4} \beta_4^2 \alpha_4^{-1} - \gamma_4\right) \quad (6.20)$$

sowie

$$\alpha_2 = 2(\eta_i + \eta_j^*), \quad \alpha_4 = \eta_i + \eta_j + \eta_k^* + \eta_l^*, \quad (6.21)$$

$$\beta_2 = 2i \left( \frac{\omega_i}{T_i} - \frac{\omega_j}{T_j} \right) + 4(\eta_i \tau_i + \eta_j^* \tau_j), \quad (6.22)$$

$$\beta_4 = i \left( \frac{\omega_i}{T_i} + \frac{\omega_j}{T_j} - \frac{\omega_k}{T_k} - \frac{\omega_l}{T_l} \right) + 2(\eta_i \tau_i + \eta_j \tau_j + \eta_k^* \tau_k + \eta_l^* \tau_l), \quad (6.23)$$

$$\gamma_2 = 2i \left( \frac{\omega_i}{T_i} \tau_i - \frac{\omega_j}{T_j} \tau_j \right) + 2(\eta_i \tau_i^2 + \eta_j^* \tau_j^2), \quad (6.24)$$

$$\gamma_4 = i \left( \frac{\omega_i}{T_i} \tau_i + \frac{\omega_j}{T_j} \tau_j - \frac{\omega_k}{T_k} \tau_k - \frac{\omega_l}{T_l} \tau_l \right) + \eta_i \tau_i^2 + \eta_j \tau_j^2 + \eta_k^* \tau_k^2 + \eta_l^* \tau_l^2, \quad (6.25)$$

$$\delta_2 = 2(\lambda_i - \lambda_j), \quad \delta_4 = \lambda_i + \lambda_j - \lambda_k - \lambda_l \quad (6.26)$$

und

$$\eta_i = \frac{1 - i \mu_i}{T_i^2}, \quad \eta_i^* = \frac{1 + i \mu_i}{T_i^2} \quad (6.27)$$

können wir die gemittelte Lagrangedichte  $\bar{L} = \{\mathcal{L}\}_t$  analytisch auswerten:

$$\begin{aligned} \bar{L} = & - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=1}^n a_i^2 \left[ \lambda_{iz} T_i - \tau_{iz} \omega_i + \frac{1}{4} \mu_{iz} T_i - \frac{1}{2} \mu_i T_{iz} \right] \\ & - \sqrt{\frac{\pi}{2}} d \sum_{i=1}^n a_i^2 \left[ \frac{\omega_i^2}{T_i} + \frac{1 + \mu_i^2}{T_i} \right] \\ & + \sqrt{\pi} \frac{c}{2} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i^4 T_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n a_i^2 a_j^2 \Theta_2 + \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ i \neq j, k \neq l}}^n a_i a_j a_k a_l \Theta_4 \right]. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Die  $6 \times n$  Evolutionsgleichungen der sechs makroskopischen Größen aller  $n$  Pulse erhalten wir, indem wir die Eulergleichungen bzgl. dieser Parameter aufstellen (Anhang B)

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \xi_m} - \frac{d}{dz} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \xi_{mz}} = 0; \quad \xi_m = a_m, \tau_m, T_m, \lambda_m, \omega_m, \mu_m. \quad (6.29)$$

Dies führt konkret zu folgenden sechs gewöhnlichen, rein reellen Differentialgleichungen für den  $m$ -ten Puls ( $m = 1, \dots, n$ )

$$\begin{aligned} \tau_{mz} = & 2d \frac{\omega_m}{T_m} + \frac{\sqrt{2}c}{T_m} \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n a_i^2 \Im \left[ \Theta_2 \left( \frac{\beta_2}{\alpha_2} - 2\tau_m \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{n-1} \frac{1}{a_m} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq m, j \neq k}}^n a_i a_j a_k \Im \left[ \Theta_4 \left( \frac{\beta_4}{\alpha_4} - 2\tau_m \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$T_{mz} = 4d \frac{\mu_m}{T_m} - \sqrt{2c} \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n a_i^2 \Im \left[ \Theta_2 \left( 1 - \frac{4}{T_m^2} \left( \frac{1}{4} \frac{\beta_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{1}{2\alpha_2} - \frac{\beta_2}{\alpha_2} \tau_m + \tau_m^2 \right) \right) \right] \right. \quad (6.31)$$

$$\left. + \frac{1}{n-1} \frac{1}{a_m} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq m, j \neq k}}^n a_i a_j a_k \Im \left[ \Theta_4 \left( 1 - \frac{4}{T_m^2} \left( \frac{1}{4} \frac{\beta_4^2}{\alpha_4^2} + \frac{1}{2\alpha_4} - \frac{\beta_4}{\alpha_4} \tau_m + \tau_m^2 \right) \right) \right] \right\},$$

$$a_{mz} = -\frac{1}{2} \frac{T_{mz}}{T_m} a_m + \frac{\sqrt{2c}}{T_m} \left\{ a_m \sum_{i=1}^n a_i^2 \Im \Theta_2 + \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq m, j \neq k}}^n a_i a_j a_k \Im \Theta_4 \right\}, \quad (6.32)$$

$$\omega_{mz} = -2 \frac{a_{mz}}{a_m} \omega_m + 2\sqrt{2c} \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n a_i^2 \Re \left[ \Theta_2 \left( \frac{\beta_2}{\alpha_2} \eta_m - i \frac{\omega_m}{T_m} - 2 \eta_m \tau_m \right) \right] \right. \quad (6.33)$$

$$\left. + \frac{1}{n-1} \frac{1}{a_m} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq m, j \neq k}}^n a_i a_j a_k \Re \left[ \Theta_4 \left( \frac{\beta_4}{\alpha_4} \eta_m - i \frac{\omega_m}{T_m} - 2 \eta_m \tau_m \right) \right] \right\},$$

$$\mu_{mz} = -2 \frac{a_{mz}}{a_m} \mu_m - 2 \frac{\omega_m}{T_m} \tau_{mz} - \frac{T_{mz}}{T_m} \mu_m + \frac{4d}{T_m^2} (\omega_m^2 + 1 + \mu_m^2) - \frac{\sqrt{2c}}{2} a_m^2 \quad (6.34)$$

$$\left. + \frac{2\sqrt{2c}}{T_m} \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n a_i^2 \Re \left[ \Theta_2 \left( \left( \frac{\beta_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{2}{\alpha_2} \right) \eta_m - \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left( i \frac{\omega_m}{T_m} + 4 \eta_m \tau_m \right) \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 2i \frac{\tau_m}{T_m} \omega_m + 4 \eta_m \tau_m^2 - 1 \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{n-1} \frac{1}{a_m} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq m, j \neq k}}^n a_i a_j a_k \Re \left[ \Theta_4 \left( \left( \frac{\beta_4^2}{\alpha_4^2} + \frac{2}{\alpha_4} \right) \eta_m - \frac{\beta_4}{\alpha_4} \left( i \frac{\omega_m}{T_m} + 4 \eta_m \tau_m \right) \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 2i \frac{\tau_m}{T_m} \omega_m + 4 \eta_m \tau_m^2 - 1 \right) \right] \right\},$$

$$\lambda_{mz} = -\frac{1}{4} \mu_{mz} + \frac{\omega_m}{T_m} \tau_{mz} + \frac{1}{2} \frac{T_{mz}}{T_m} \mu_m - \frac{d}{T_m^2} (\omega_m^2 + 1 + \mu_m^2) + \frac{\sqrt{2c}}{2} a_m^2 \quad (6.35)$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2c}}{T_m} \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n a_i^2 \Re \Theta_2 + \frac{1}{n-1} \frac{1}{a_m} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq m, j \neq k}}^n a_i a_j a_k \Re \Theta_4 \right\}.$$

Das  $6 \times n$ -dimensionale System gewöhnlicher Differentialgleichungen (6.30)–(6.35) stellt unsere Approximation der NLSE für  $n$  Pulse da. Für  $n = 1$  geht es letztendlich in die  $T$ - $M$ -Gleichungen (2.12) und (2.13) sowie eine weitere Gleichung für die Phase über, die sich im Ein-Puls-Modell heraustransformieren lässt. Die einzigen Näherungen, die wir gemacht haben, bestehen in der Annahme einer Gauß-artigen Pulsform sowie in der Tatsache, dass wir jeden Puls durch maximal sechs makroskopische Parameter beschreiben. Weitere Einschränkungen, wie bei den in der Literatur zu findenden Mehr-Solitonen-Modellen, benötigen wir nicht. So können z.B. die Amplituden oder Phasen

der Einzelpulse in unserem Modell völlig verschiedene Werte annehmen. Dies ist wichtig hinsichtlich der verschiedenen Kodierungstechniken, mit denen die Information in das Bitmuster eingebracht wird, und unterscheidet unser Modell von den Solitonen-Modellen in [6, 60, 16, 15], die wohl separierte Solitonen von etwa gleicher Amplitude und Phase voraussetzen. Insbesondere lassen sich mit unserem Modell sehr eng gepackte Pulse simulieren, deren Wechselwirkung nicht mehr in den Bereich einer Störung fällt. Genau solche Systeme mit hohen Übertragungsraten sind aber bzgl. der Telekommunikation von erheblichem Interesse. Auch simuliert unser Modell zunächst die Wechselwirkung eines jeden Pulses mit allen anderen, gegenüber der in der Literatur oft zu findenden Einschränkung auf die Nächsten-Nachbar-Wechselwirkung [60, 15]. Je nach Genauigkeitsanforderungen können wir eine effektive Wechselwirkungslänge einführen, die es uns erlaubt, die Numerik hocheffizient zu gestalten. Gleichzeitig beinhaltet unser Modell automatisch über  $c(z)$  (vergl. Gleichung (2.4)) Dämpfung und über  $d(z)$  die Möglichkeit, Glasfasern verschiedener Dispersion zu simulieren. Damit können wir insbesondere reale Übertragungsstrecken mit starkem Dispersions-Management (vergl. Kapitel 3.2) numerisch beschreiben. In solchen Systemen schmieren die Pulse stark aus, was erneut eine über einen störungstheoretischen Ansatz [16, 60, 17, 15, 16] hinausgehende Beschreibung der nichtlinearen Wechselwirkung erfordert. Dies ist ein ganz wesentlicher Unterschied zu den untersuchten Solitonen-Systemen, in denen die Pulse sehr stabil propagieren. Zunächst diskutieren wir aber die Güte unseres Modells anhand eines einfachen Beispiels.

## 6.2. Ergebnisse für den stark nichtlinearen Fall

Wir testen die Modellierung der nichtlinearen Wechselwirkung durch unser ODE-Modell im denkbar einfachsten Fall zweier Pulse. Bei der Übertragungstrecke handelt es sich um eine “Two-Step-Map” mit starkem Dispersions-Management. Die hohe, alternierende Dispersion der SMF’s und DCF’s führt zu starken Änderungen in der Amplitude und Breite der Pulse. Die Pulse haben beide eine gleich hohe Leistung von  $P_{Peak} = 56.37 \text{ mW}$  und eine Halbwertsbreite von  $T_{FWHM} = 5 \text{ ps}$ . Der Abstand der Pulse beträgt lediglich  $25 \text{ ps}$ , wir simulieren also ein  $40 \text{ Gb/s}$ -System. Die Wahl der Parameter führt zu starkem Ausschmieren der Pulse bei einer hohen Amplitude und somit zu einer großen, nichtlinearen Wechselwirkung. Um die Auswirkungen der Nichtlinearität besonders gut beobachten zu können, simulieren wir Dämpfung nicht mit. Die “Two-Step-Map” ist von der Form, wie wir sie in Abbildung 3.1 sehen. Hier allerdings beträgt die Gesamtlänge  $100 \text{ km}$ . Außerdem ist die “Two-Step-Map” vollständig hinsichtlich der chromatischen Dispersion kompensiert. Eine lineare Integration würde also wieder exakt zu dem Eingangssignal führen. Abbildung 6.1 zeigt uns das Resultat. Wir erkennen zweierlei. Erstens unterscheidet sich die Endverteilung der PDE-Integration mit und ohne Puls-Puls-Wechselwirkung gewaltig. Spüren die Pulse sich gegenseitig (rot), so nimmt die Amplitude noch stärker ab und die Halbwertsbreite noch mehr zu als es aufgrund der nichtlinearen Selbstwechselwirkung der Pulse (grün) sowieso schon der Fall ist. Zweitens wird die Deformation der Pulse exzellent von unserem ODE-Modell nachvollzogen. Ins-

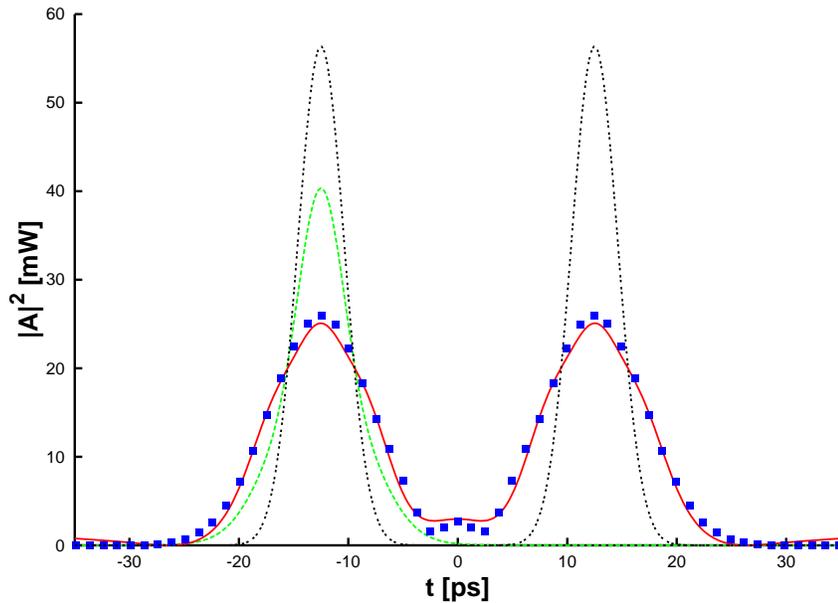


Abbildung 6.1.: Vergleich des Ausgangssignals der PDE-Integration (rot) und der ODE-Integration (Rechtecke) nach einer Propagation von  $100\text{ km}$ . Das Eingangssignal ist schwarz dargestellt, das Ergebnis der PDE-Integration *ohne* Wechselwirkung der Pulse untereinander grün.

besondere die Veränderung der Breite und der Amplitude der Pulse findet sich nahezu perfekt im ODE-Ergebnis wieder. Man beachte, dass die Amplitude allein aufgrund von nichtlinearen Effekten um mehr als die Hälfte gegenüber der Startverteilung abgenommen hat. Im linearen Fall hätten wir überhaupt keine Veränderung der Pulse feststellen können. Ein Blick auf den Real- und Imaginärteil der Verteilungsfunktion in Abbildung 6.2 verrät uns, wie gut auch die Phase von unserem ODE-Modell modelliert wird. Insbesondere der Realteil wird nahezu perfekt von unsere ODE-Modell wiedergegeben, beim Imaginärteil sehen wir größere Abweichungen. Dies ist aber auch nicht verwunderlich, da die hohe nichtlineare Wechselwirkung dafür sorgt, dass die Pulse von der reinen Gauß-Form abweichen. Besonders gut ist dies zwischen den Pulsen zu erkennen. Die Gauß-Form der Pulse ist aber eine der wesentlichen Annahmen, die in unserer ODE-Approximation stecken. Je weiter also die Pulse in ihrer Form von der Gauß-Glocke abweichen, desto schlechter muss zwangsläufig das ODE-Modell werden.

Diese insgesamt hervorragende Übereinstimmung veranlasst uns, unser ODE-Modell für  $n$  Pulse zur Simulation eines anspruchsvolleren Datenübertragungssystems einzusetzen. Dabei wird neben Dämpfung und Verstärkung auch eine neue Modulationstechnik, die DPSK-Methode simuliert.

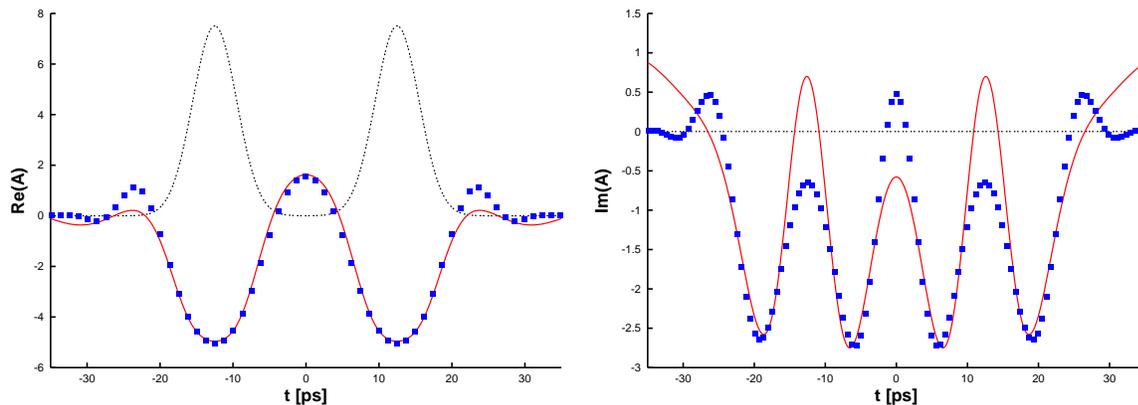


Abbildung 6.2.: Vergleich des Ausgangssignals der PDE-Integration (rot) und der ODE-Integration (Rechtecke) nach einer Propagation von  $100 \text{ km}$ . Links der Realteil, rechts der Imaginärteil. Das Eingangssignal ist schwarz dargestellt.

### 6.3. Ergebnisse für komplexe Übertragungssysteme mit DPSK

Bei der *Differential Phase Shift Keying*-Methode (DPSK) handelt es sich um eine relativ neue Modulationstechnik, bei der die Information nicht in der Amplitude, sondern in der Phase der Pulse kodiert ist.

Normalerweise entspricht ein Lichtpuls in der digitalen Datenübertragung einer *Eins*, sein Ausbleiben einer *Null*. Zwischen aufeinanderfolgenden Einsen (Pulsen) kann der Laser entweder abgeschaltet werden (*Return To Zero*- oder RTZ-Format) oder bis zur nächsten Eins kontinuierlich Licht einstrahlen (*Non Return to Zero*- oder NRZ-Format). Beide Formate haben eine ungleichmäßige Leistungsverteilung innerhalb der Glasfaser zu Folge. Damit wechselwirken einzelne Pulse in Abhängigkeit von ihrer Nachbarschaft höchst unterschiedlich. Insbesondere kann es vorkommen, dass Pulse dort entstehen, wo vorher eine Null gewesen ist und andere Pulse derart zerfallen, dass sie nicht mehr als Einsen vom Empfänger registriert werden.

Um eine gleichmäßige Leistungsverteilung bei der Datenübertragung zu garantieren, die den Einzelpulsen eine weitgehend ähnliche Umgebung schafft, hat man damit begonnen, die Information in der Phase bzw. durch einen Phasenwechsel zu kodieren. Dabei strahlt man sowohl für Einsen als auch für Nullen einen Puls im RTZ-Format ein. Wechselt die Phase von Null auf  $\pi$  oder umgekehrt, so entspricht dies einer Null, bleibt sie hingegen konstant, so liegt eine Eins vor. Zudem hat sich gezeigt, dass Phasensprünge im Signal die Propagation der Einzelpulse stabilisieren kann [60]. Diese Modulationstechnik nennt man DPSK-Methode.

Zur Dekodierung der Information am Empfänger wird das Signal vorher gedoppelt. Das Original läuft direkt in den Empfänger, wo es mit seiner um die Taktrate verzögerten Kopie überlagert wird. Bei dem hier betrachteten  $40 \text{ Gb/s}$ -System entspricht die Verzögerung also  $T_{Slot} = 25 \text{ ps}$ . Die Modulationstechnik und das Ergebnis dieser De-

kodierung für das Eingangssignal ist in Abbildung 6.3 zu sehen. Die Pulse haben eine Leistung von  $P_{Peak} = 15 \text{ mW}$  und eine Halbwertsbreite von  $T_{FWHM} = 5 \text{ ps}$ . Gut zu

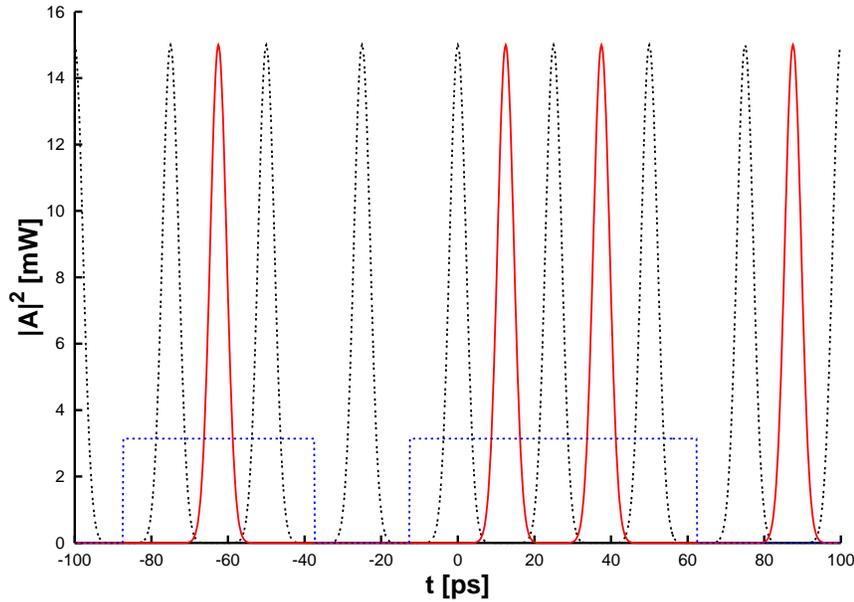


Abbildung 6.3.: Ein aus neun Pulsen bestehendes Eingangssignal in DPSK-Modulation. Die tatsächlich eingestrahelten Pulse sind schwarz dargestellt, ihre Phase blau. Zusätzlich gezeigt ist die dekodierte Bitfolge aus acht Bits (rot).

erkennen ist hier, dass bei einem Wechsel der Phase zweier aufeinanderfolgender Pulse um  $\pi$  am Empfänger eine Null registriert wird. Bleibt andererseits die Phase konstant bei Null oder  $\pi$ , so sieht der Empfänger eine Eins. Da immer die relative Phase zwischen zwei Pulsen die Information beinhaltet, sind bei DPSK stets  $n + 1$  Pulse nötig, um  $n$  Bits zu kodieren.

Man beachte, dass sich die Phase aufeinanderfolgender Pulse bei DPSK z.T. um ihren Maximalwert unterscheiden kann. Dies stellt hohe Anforderungen an unser ODE-Modell.

Das in Abbildung 6.3 gezeigte Signal schicken wir nun durch eine Übertragungsstrecke mit einer Gesamtlänge von  $250 \text{ km}$ . Diese besteht aus zehn Einzelementen von je  $25 \text{ km}$  Länge, in denen das Dispersions-Management stattfindet. Jedes dieser Elemente besteht aus einer SMF ( $20 \text{ km}$ ) zur Übertragung und einer DCF ( $5 \text{ km}$ ) zur Dispersions-Kompensation. Da der Koeffizient der chromatischen Dispersion der DCF vom Betrag her viermal so groß ist wie der der SMF, ist das System vollständig kompensiert. Diesmal berücksichtigen wir zusätzlich Dämpfung in unseren Simulationen, um einem realen Übertragungssystem möglichst nahe zu kommen. Damit die Amplituden nicht zu klein werden und sich überhaupt keine nichtlinearen Effekte mehr beobachten lassen, verstärken wir das Signal am Ende eines jeden der zehn Einzelemente auf seine Anfangsamplitude. Diese lokale Verstärkung wird zusammen mit der Dämpfung und der starken Dispersion dafür sorgen, dass sich Halbwertsbreite und Amplitude der

Pulse ganz erheblich bei der Propagation durch die Übertragungstrecke ändern werden. In Abbildung 6.4 ist die Entwicklung der Halbwertsbreite (rot) und der Pulsamplitude (blau) entlang der Fiber-Line dargestellt. Dabei bedeutet eine Halbwertsbreite, die größer als der Pulsabstand (schwarz) ist, einen signifikanten Überlapp benachbarter Pulse. Derartig periodische Übertragungstrecken findet man z.B. in der transkontinentalen

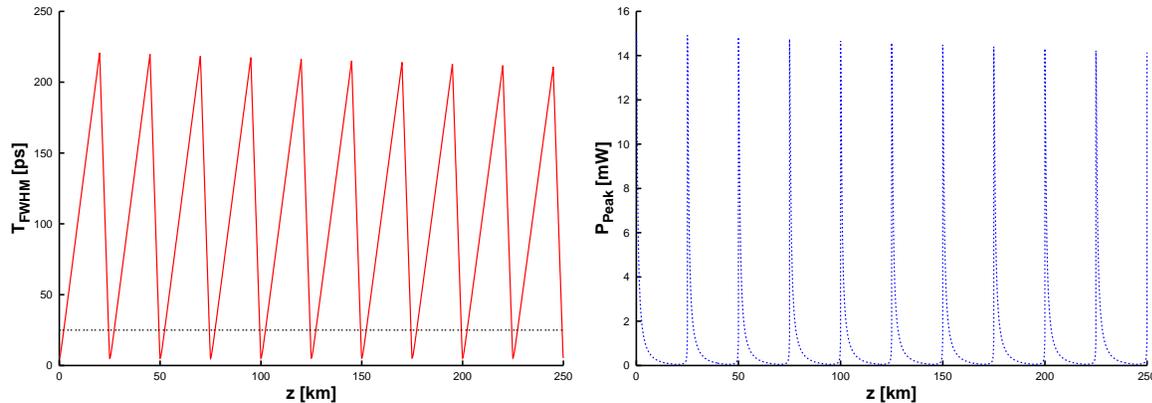


Abbildung 6.4.: Entwicklung der Pulsparameter  $T_{FWHM}$  (links, rot) und  $P_{Peak}$  (rechts, blau) entlang der 250 km langen Übertragungstrecke. Zusätzlich zur Halbwertsbreite ist im linken Plot der Pulsabstand  $T_{Slot} = 25 ps$  schwarz dargestellt.

Telekommunikation. Man beachte, dass wir dieses Glasfasersystem mit Pulsleistungen simulieren, die im realistischen Bereich liegen. Damit haben wir im Gegensatz zum vorigen Abschnitt ein schwach nichtlineares System vorliegen, indem die Auswirkungen der Puls-Puls-Wechselwirkung geringer sind. Bei der Integration arbeiten wir bei beiden Modellen (PDE und ODE) mit periodischen Randbedingungen. Die effektive Wechselwirkungslänge des ODE-Integrators wählen wir maximal.

Das Ergebnis der Simulationen sehen wir in Abbildung 6.5. Hier vergleichen wir das PDE-Integrationsresultat mit unserem ODE-Modell. Wir erkennen zweierlei. Erstens führt die nichtlineare Wechselwirkung der Pulse untereinander zu einer Änderung der Amplituden. Im linearen Fall wäre diese nicht zu beobachten gewesen. Diese Schwankung der Einzelamplituden wird von unserem ODE-Modell gut nachvollzogen. Zweitens können wir auch aus den ODE-Integrationsdaten die richtige Bitfolge nahezu perfekt wiederherstellen. Dies wäre nicht möglich gewesen, wenn unser ODE-Modell die Entwicklung der Phase falsch beschrieben hätte. Insbesondere die Positionen der Phasensprünge müssen zur erfolgreichen Dekodierung des DPSK-Signals exakt erhalten bleiben. Das gelingt erstaunlich gut, wenn wir bedenken, dass wir eine Verschiebung der Pulse untereinander durch den Parameter  $\tau_m(z)$  zugelassen haben. Ein Blick auf den Real- und Imaginärteil (vergl. Abbildung 6.6) des eigentlichen Signals bestätigt die hohe Qualität unseres ODE-Modells. Man beachte, dass sich wegen der Phaseninvarianz der NLSE eine globale Phase stets heraustransformieren lässt, wichtig sind lediglich die relativen Phasen der Pulse untereinander. Damit haben wir anhand eines realistischen Glasfasersystems gezeigt, dass unsere ODE-Approximation der NLSE für  $n$  Pulse in der

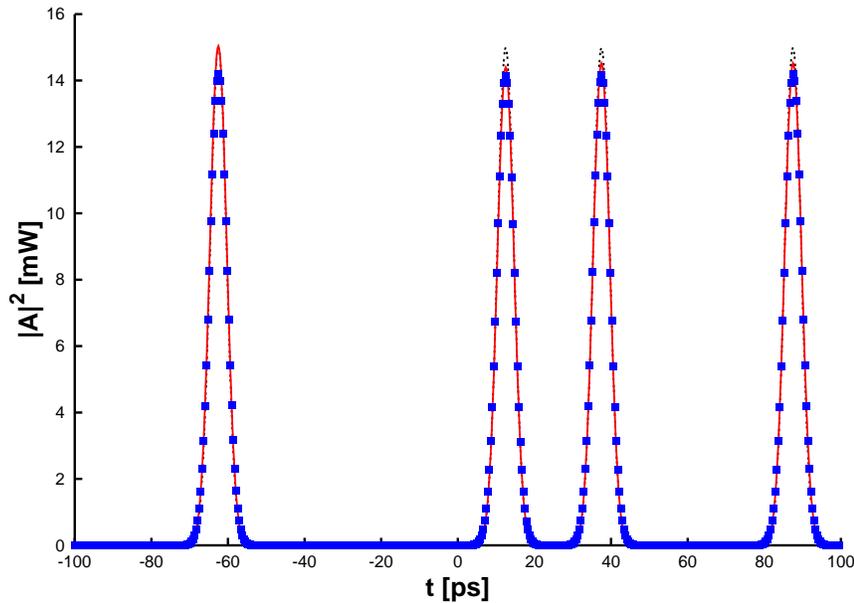


Abbildung 6.5.: Dekodierte Bitfolge am Empfänger nach der Propagation des Signals durch eine 250 km lange Glasfaserstrecke mit starkem Dispersions-Management. Das Ergebnis der PDE-Integration ist rot dargestellt, das der ODE-Integration durch Rechtecke, das Eingangssignal schwarz.

Lage ist, erfolgreich DPSK-modulierte Pulsfolgen in Systemen mit starkem Dispersions-Management zu simulieren. Es wird Gegenstand weiterer Untersuchungen sein, festzustellen wie weit diese Approximation tatsächlich trägt und wo ihre konkreten Grenzen liegen. Neben dem bereits gegebenen Ausblick auf den WDM-Fall ist der Einfluss der Dritte-Ordnungs-Dispersion auf die Puls-Puls-Wechselwirkung natürlich ebenfalls von großem Interesse.

## 6.4. Zusammenfassung

Mittels einer komplexen VAM-Rechnung haben wir eine endlich-dimensionale ODE-Approximation der NLSE für  $n$  Pulse gefunden. Diese unterliegt von vorne herein lediglich der Einschränkung auf die Gauß-Form der Pulse, was eine nicht zu starke nichtlineare Wechselwirkung impliziert. Weitere Einschränkungen mussten wir bei unserem Modell nicht treffen. Insbesondere können die Parameter der Einzelpulse wie etwa Amplitude oder Phase frei variiert werden. Dies ist bzgl. der gebräuchlichen Modulationstechniken von großer Wichtigkeit. Auch ist die ODE-Approximation auf beliebige und dispersions-gemanagte Übertragungssysteme anwendbar und besitzt somit praktische Relevanz. Die numerische Effizienz des ODE-Integrators können wir durch Einstellen einer effektiven Wechselwirkungslänge je nach Genauigkeitsanforderungen steigern.

Anhand von zwei Pulsen hoher Amplitude haben wir die Leistungsfähigkeit unseres Modells unter Beweis gestellt. In diesem erheblich nichtlinearen Fall konnten wir sowohl

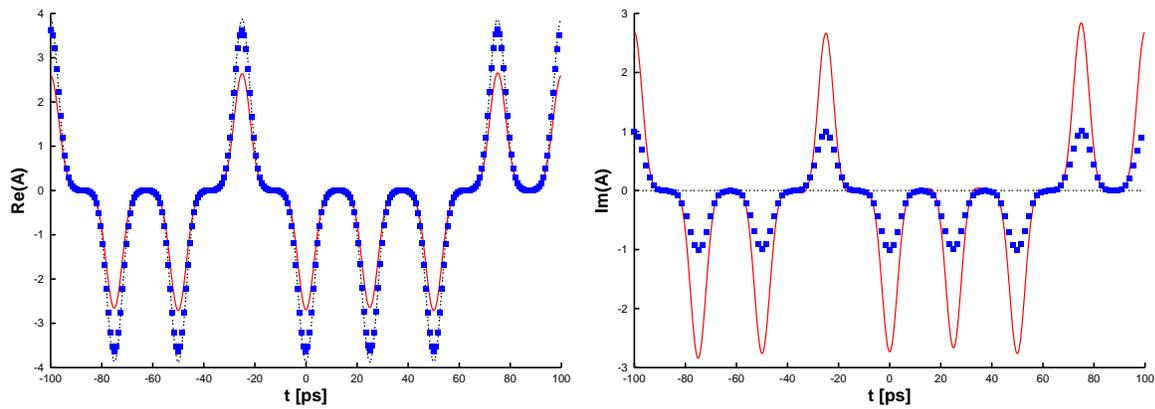


Abbildung 6.6.: Vergleich des Ausgangssignals der PDE-Integration (rot) und der ODE-Integration (Rechtecke) nach einer Propagation von  $250 \text{ km}$ . Links der Realteil, rechts der Imaginärteil. Das Eingangssignal ist schwarz dargestellt.

die Änderungen bzgl. der Pulsamplituden und Halbwertsbreiten als auch die Drehung der Phase exzellent beschreiben.

Zusätzlich haben wir ein periodisches, dispersions-gemanagtes Glasfasersystem mit Dämpfung und Verstärkung simuliert. In den neun Pulsen waren dabei mittels DPSK acht Bits kodiert, die sich nach Propagation durch die  $250 \text{ km}$  lange Übertragungsstrecke perfekt aus dem ODE-Signal wiederherstellen ließen. Damit haben wir gezeigt, dass unser ODE-Modell auch für mehr als zwei Pulse in praktisch-relevanten Anwendungen hervorragende Ergebnisse liefert.

Schließlich haben wir mit der Bereitstellung der Lagrangedichte für den WDM-Fall einen ersten Ausblick auf weitere interessante und aktuelle Fragestellungen gegeben.



# 7. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit haben wir uns, ausgehend von der endlich-dimensionalen Approximation der NLSE durch die  $T$ - $M$ -Gleichungen, mit der schnellen und effizienten Optimierung optischer Übertragungssysteme beschäftigt. Dabei haben wir je nach Anforderungen durch die Physik das  $T$ - $M$ -Modell erweitert und seine Leistungsfähigkeit ganz beträchtlich erhöht. Schließlich haben wir auf Grundlage einer VAM-Rechnung ein ODE-Modell zur Beschreibung mehrerer Pulse sowie deren Wechselwirkung untereinander entwickelt.

In Kapitel 3 konnten wir zeigen, dass wir die Performance eines komplexen Glasfaser-systems, das im praxisrelevanten Parameterbereich betrieben wird, ganz erheblich durch Optimierung des Dispersions-Managements steigern können. Diese Optimierung geschah ausschließlich mit dem  $T$ - $M$ -Modell bzw. im Bereich höherer Leistungen mit der Erweiterung des Modells um einige wenige, gerade Hermite-Moden. Durch die exzellenten Approximationseigenschaften der ODE-Modelle gelang es uns, schnelle Optimierungsalgorithmen zu entwickeln, die periodische Lösungen hinsichtlich der Übertragung liefern, so genannte generalisierte DM-Solitonen. Durch die geschickte Wahl der optimalen Lösung konnten wir das Ausschmieren des Pulses während seiner Propagation durch das Glasfasersystem minimieren. Dies führte direkt zu einer hervorragenden Übertragungsqualität. Gegenstand der Simulationen war eine real existierende Glasfaserstrecke von ca. 900 km Länge, die aus etwa 130 verschiedenen Elementen besteht.

In einem zweiten Schritt haben wir die Stabilität der generalisierten DM-Solitonen, die wir mittels der ODE-Algorithmen gefunden haben, intensiv untersucht. Dabei haben wir festgestellt, dass diese Lösungen zwar bzgl. einer PDE-Integration der NLSE annähernd periodisch sind, später jedoch z.T. zerfallen. Wir konnten beobachten, dass dieser Anfangszustand bei geeigneter Wahl der Anfangsparameter in das nächstgelegene echte DM-Soliton relaxiert. Durch weitere Iterationen fanden wir so stabil-periodische Lösungen, die ganz hervorragende Übertragungseigenschaften aufweisen. Allerdings befinden sich die von uns entdeckten DM-Solitonen wahrscheinlich nicht in einem Parameterbereich, der auch für die Anwendung in der Telekommunikation von Interesse ist. Es besteht jedoch die Hoffnung, dass sich weitere DM-Solitonen finden lassen, die für die Praxis relevant sind.

In Kapitel 4 haben wir das Gauß-Hermite-Modell um ungerade Moden erweitert. Damit gelang es uns, die symmetriebrechenden Terme der GNLSE wie Dritte-Ordnungs-Dispersion und SRS-induzierte, nichtlineare Terme höherer Ordnung im Rahmen un-

serer ODE-Approximation der GNLSE zu beschreiben. Die Erweiterung unserer Optimierungsalgorithmen aus Kapitel 3 ermöglichte es uns, zusätzlich zum Management der chromatischen Dispersion aktives Management der Dritte-Ordnungs-Dispersion zu betreiben. Dieses führte gleichzeitig zu einer besseren Übertragungsqualität durch das Glasfasersystem und zu einem größeren Gültigkeitsbereich unseres erweiterten ODE-Modells.

Durch eine optimierte und symmetrische Modifikation der Form des Eingangspulses haben wir ferner die Deformation des Pulses durch verbleibende, nicht vollständig kompensierte Dritte-Ordnungs-Dispersion eliminieren können. Dabei propagierte das Signal durch die schon in Kapitel 3 untersuchte komplexe Telekommunikationsstrecke, die eine erhebliche Residual-Dritte-Ordnungs-Dispersion aufweist. Zwar ist fraglich, inwiefern eine so subtile Modifikation der Pulsform technisch umsetzbar ist, die Kompensation asymmetrischer Effekte durch eine optimierte Wahl symmetrischer Anfangswerte ist jedoch hochinteressant.

Schließlich haben wir gezeigt, dass wir bei Wahl eines geeigneten Parameterbereiches die Effekte der Dritte-Ordnungs-Dispersion auch durch den führenden Raman-Term ausbalancieren können. Mit Hilfe unseres Optimierungsalgorithmus fanden wir einen optimalen Arbeitspunkt, in dem die unerwünschte Verschiebung des Pulszentrums unterbunden wird.

In Kapitel 5 haben wir ausführlich das Verhalten von DM-Solitonen unter unterschiedlichen Dämpfungs- und Verstärkungsschemata diskutiert. Im Fokus unserer Untersuchungen stand die Raman-Verstärkung, eine Methode, die auch in der Technik immer mehr Bedeutung erlangt. Unsere Ergebnisse für Raman-Verstärkung und Dämpfung haben wir mit dem ungedämpften Fall verglichen. Dabei fanden wir heraus, dass es bei Asymmetrie der effektiven Nichtlinearität nötig ist, die Pulslösung mit einem Pre-Chirp zu versehen, will man Periodizität hinsichtlich der Übertragung garantieren. Dieses Pre-Chirping hat sich bzgl. seiner Fähigkeit, die Verschiebung des Chirp-freien Punktes zu kompensieren, als eingeschränkt erwiesen. Ein wichtiges Ergebnis ist die relativ hohe Übereinstimmung der Charakteristika der DM-Solitonen im Raman- und im ungedämpften Fall.

Mittels eines einfachen Stufenprofils haben wir ferner die effektive Nichtlinearität bemerkenswert gut approximiert. Dieses Stufenprofil stellt in Raman-verstärkten Systemen die Symmetrie der Nichtlinearität wieder her und beschleunigt so die Numerik ungemein. Selbst im einfach gedämpften Fall liefert das Stufenprofil noch eine gute Approximation der tatsächlichen Nichtlinearität. Aufgrund der Einfachheit des Stufenprofils besteht die Hoffnung auf analytische Ergebnisse, die ein besseres Verständnis der Auswirkungen der Raman-Verstärkung auf ein Übertragungssystem ermöglichen.

Um Pre-Chirping komplett zu vermeiden, haben wir unsere Dispersions-Kompensation mittels Längenmanagement auch im Raman-verstärkten System eingesetzt. Die Optimierungsergebnisse des Pre-Chirping und des Längenmanagements stellten sich dabei als durchaus vergleichbar heraus. Allerdings konnten wir durch eine systematische Analyse zeigen, dass unsere Methode des Längenmanagements im Vergleich zur An-

---

fangswertoptimierung mit Pre-Chirping nicht nur numerisch effizienter, sondern auch flexibler und leistungsfähiger ist, was die Suche nach periodischen Lösungen anbelangt.

Im letzten Kapitel 6 haben wir eine endlich-dimensionale ODE-Approximation der NLSE für  $n$  Pulse entwickelt. Durch eine umfangreiche VAM-Rechnung fanden wir  $6 \times n$  Evolutionsgleichungen für die sechs makroskopischen Parameter eines jeden der  $n$  Pulse. Dabei war unser Ansatz allgemeiner gehalten und weit weniger eingeschränkt als vergleichbare  $n$ -Solitonen-Modelle. Insbesondere ist unser Modell auch in Fasern mit negativer Dispersion einsetzbar, in denen die Existenz von Solitonen-Lösungen bis jetzt noch nicht gezeigt werden konnte. Die Leistungsfähigkeit unseres  $n$ -Puls-Modells haben wir im stark nichtlinearen Grenzfall anhand zweier Pulse unter Beweis gestellt, die durch eine Dispersions- gemanagte Glasfaserstrecke propagierten. Schließlich haben wir acht mittels DPSK kodierte Bits in einem komplexen Übertragungssystem simuliert und so gezeigt, dass unsere ODE-Approximation durchaus in der Lage ist, realistische Konfigurationen erfolgreich zu modellieren.

Als Ausblick auf ein weiteres, interessantes Anwendungsgebiet haben wir die Lagrange-Gedichte für Übertragungssysteme mit mehreren Frequenzkanälen (WDM) bereitgestellt.



# A. Zur Gauß-Hermite-Entwicklung des DM-Solitons

Ausgehend von Gleichung (4.2) entwickeln wir  $Q(z, \frac{t}{T(z)} = x)$  in der Basis der Gauß-Hermite-Eigenfunktionen  $\{\psi_n\}$  des harmonischen Oszillators (vergl. Gleichung (2.8)). Diese sind orthogonal, normiert und vollständig im Raum der quadrat-integrablen Funktionen. Die Gauß-Hermite-Eigenfunktionen erfüllen die Gleichungen

$$\psi_{nxx} - x^2\psi_n = \lambda_n\psi_n, \quad \int \psi_k\psi_n = \delta_{kn}, \quad (\text{A.1})$$

wobei die Eigenwerte  $\lambda_n$  gegeben sind durch  $\lambda_n = -1 - 2n$ , und sie hängen über

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x) \quad (\text{A.2})$$

mit den Hermite-Polynomen  $H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \partial^n / \partial x^n (\exp(-x^2))$  zusammen. Die Koeffizienten  $b_n$  der Entwicklung (2.8) lassen sich wegen der Orthogonalität der  $\psi_n$  durch das einfache Skalarprodukt im  $L_2$ -Raum aus

$$\langle \psi_k | Q \rangle = \sum_n b_n \langle \psi_k | \psi_n \rangle = \sum_n b_n \delta_{kn} = b_k. \quad (\text{A.3})$$

gewinnen. Das  $\delta_{kn}$  ist hier das Kronecker- $\delta$ .

Multiplizieren wir also die in  $\{\psi_n\}$  entwickelte Gleichung (4.2) skalar mit  $\psi_k$ , so erhalten wir das System (4.3) von gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten  $b_k$ . Bei der Multiplikation mit  $\psi_k$  treten die Skalarprodukte (4.4) auf

$$\begin{aligned} S_{nk} &= \int \psi_n x^2 \psi_k, & V_{nmk} &= \int \psi_n \psi_m \psi_l \psi_k, & T_{nmk} &= \int \psi_n (\psi_m \psi_l)_x \psi_k, \\ D_{nk} &= \int \psi_n x \psi_k, & D_{nk}^{(3)} &= \int \psi_n x^3 \psi_k, \\ E_{nk} &= \int \psi_n x \psi_k, & E_{nk}^{(2)} &= \int \psi_n x^2 \psi_k. \end{aligned}$$

Da alle diese Integrale von der Form  $\int x^n \exp(-ax^2)$  sind, lassen sie sich analytisch auswerten. Weil die Integration über den ganzen Raum durchgeführt wird, erhält man

nur für gerade Integranden ein von Null verschiedener Wert. Ferner führen Symmetrien bei den Integranden dazu, dass viele Skalarprodukte gleich sind.

Einige der mehreren hundert für unsere Modelle relevanten Ergebnisse der Integrationen listen wir exemplarisch in Tabelle A auf. Die zweifach indizierten Koeffizienten sind jeweils vollständig.

$$\underline{S_{nm}}$$

$$\begin{array}{cccc} S_{00} & = & \frac{1}{2} & S_{02} = \frac{1}{\sqrt{2}} & S_{11} = \frac{3}{2} & S_{13} = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ S_{22} & = & \frac{5}{2} & S_{24} = \sqrt{3} & S_{33} = \frac{7}{2} & S_{44} = \frac{9}{2} \end{array}$$

$$\underline{V_{nmk}}$$

$$\begin{array}{cccc} V_{0000} & = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & V_{1100} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} & V_{1111} = \frac{3}{4\sqrt{2\pi}} & V_{2000} = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \\ V_{2110} & = & \frac{1}{8\sqrt{\pi}} & V_{2200} = \frac{3}{8\sqrt{2\pi}} & V_{2211} = \frac{7}{16\sqrt{2\pi}} & V_{2220} = \frac{1}{32\sqrt{\pi}} \\ & & & \dots & & \end{array}$$

$$\underline{T_{nmk}}$$

$$\begin{array}{cccc} T_{1000} & = & -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} & T_{1101} = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} & T_{1110} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} & T_{2001} = -\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \\ T_{2010} & = & -\frac{3}{4\sqrt{2\pi}} & T_{2201} = -\frac{3}{16\sqrt{\pi}} & T_{2210} = \frac{3}{16\sqrt{\pi}} & T_{2212} = -\frac{13}{32\sqrt{2\pi}} \\ & & & \dots & & \end{array}$$

$$\underline{D_{nm}}$$

$$D_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad D_{12} = 1 \quad D_{23} = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad D_{34} = \sqrt{2}$$

$$\underline{D_{nm}^{(3)}}$$

$$\begin{aligned} D_{01}^{(3)} &= \frac{3}{2\sqrt{2}} & D_{03}^{(3)} &= \frac{\sqrt{3}}{2} & D_{12}^{(3)} &= 3 \\ D_{14}^{(3)} &= \sqrt{3} & D_{23}^{(3)} &= \frac{9}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} & D_{34}^{(3)} &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\underline{E_{nm}}$$

$$\begin{aligned} E_{01} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} & E_{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}} & E_{12} &= -1 & E_{21} &= 1 \\ E_{23} &= -\sqrt{\frac{3}{2}} & E_{32} &= \sqrt{\frac{3}{2}} & E_{34} &= -\sqrt{2} & E_{43} &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\underline{E_{nm}^{(2)}}$$

$$\begin{aligned} E_{01}^{(2)} &= -\frac{3}{2\sqrt{2}} & E_{03}^{(2)} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} & E_{10}^{(2)} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} & E_{12}^{(2)} &= -2 \\ E_{14}^{(2)} &= -\sqrt{3} & E_{23}^{(2)} &= -\frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} & E_{30}^{(2)} &= \frac{\sqrt{3}}{2} & E_{32}^{(2)} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ E_{34}^{(2)} &= -3\sqrt{2} & E_{41}^{(2)} &= \sqrt{3} & E_{43}^{(2)} &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Tabelle A: Koeffizienten der Gauß-Hermite-Entwicklung.



## B. Zur Variation of Action Method für $n$ Pulse

Grundlage des VAM-Ansatzes für  $n$  Pulse ist eine geeignete Lagrangedichte. Grundsätzlich lassen sich mehrere Lagrangedichten finden, die die Bedingung (6.11) erfüllen, so unter anderem, zusammen mit ihren linearen Anteilen

$$\mathcal{L}_1^{NL} = \frac{1}{2n} \left| \sum_{i=1}^n A_i \right|^4, \quad \mathcal{L}_2^{NL} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i,j,k=1}^n (A_i A_j A_k^{*2} + A_i^* A_j^* A_k^2) - n \sum_{i,j=1}^n A_i^2 A_j^{*2} \right]. \quad (\text{B.1})$$

Da wir die linearen Anteile der Lagrangedichten superponieren, sind hier nur die nichtlinearen Wechselwirkungsterme dargestellt. Diese Lagrangedichten haben allerdings den Nachteil, dass sie die nichtlinearen Selbstwechselwirkungsterme der einzelnen Pulse mischen. Stellen wir z.B. die Eulergleichung von  $\mathcal{L}_1^{NL}$  bzgl. des  $m$ -ten Pulses auf, so werden wir in der resultierenden NLSE neben der Nichtlinearität des  $m$ -ten Pulses auch noch Anteile der Nichtlinearitäten aller anderen Pulse plus zahlreiche Wechselwirkungsterme finden. Diese Mischung der Selbstwechselwirkungsterme der Pulse ist nicht physikalisch motiviert. Vielmehr erwarten wir, in der NLSE bzgl. des  $m$ -ten Pulses lediglich die Nichtlinearität genau dieses Pulses nebst weiteren, reinen Wechselwirkungstermen zu finden. Dies erreichen wir durch eine geeignete Linearkombination der beiden nichtlinearen Anteil der Lagrangedichte (B.1)

$$\mathcal{L}^{NL} = \frac{1}{n-1} (n \mathcal{L}_1^{NL} - \mathcal{L}_2^{NL}). \quad (\text{B.2})$$

Die resultierende Lagrangedichte (6.13) erfüllt dann zusätzlich auch Bedingung (6.9), (6.10). Ebenfalls lässt sich eine geeignete Lagrangedichte für den WDM-Fall. Die Nichtlinearität des  $i$ -ten Kanals ist hier durch die Frequenzbedingung  $\omega_i = \omega_j + \omega_k - \omega_l$  eingeschränkt:

$$\sum_{\substack{j,k,l=1 \\ \omega_i = \omega_j + \omega_k - \omega_l}}^n A_j A_k A_l^* = |A_i|^2 A_i + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |A_j|^2 A_i + \sum_{\substack{j,k,l=1,j,k \neq i,l \\ \omega_i = \omega_j + \omega_k - \omega_l}}^n A_j A_k A_l^*. \quad (\text{B.3})$$

Damit ergibt sich der nichtlineare Anteil der Lagrangedichte im WDM-Fall zu

$$\mathcal{L}_{WDM}^{NL} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |A_i|^4 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} |A_i|^2 |A_j|^2 + \frac{1}{4} \sum_{\substack{i,j,k,l=1,j,k \neq i,l \\ \omega_i = \omega_j + \omega_k - \omega_l}}^n (A_j A_k A_l^* A_i^* + A_j^* A_k^* A_l A_i). \quad (\text{B.4})$$

Für die Einzelpulse machen wir den Ansatz (6.15) einer Gauß-Glocke, die durch sechs makroskopische Parameter beschrieben wird. Wir setzen diesen Ansatz mit den Abkürzungen (6.16), (6.17) und (6.18) in die Lagrangedichte (6.13) ein und mitteln bzgl. der Zeit  $t$ , da wir uns auf die Ortsabhängigkeit der sechs Pulsparameter konzentrieren. Wegen des Gauß-Ansatzes treten bei der Integration über  $t$  folgende Integrale auf:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt x_i^2 \exp(-2x_i^2) &= T_i \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} dt x_i \exp(-2x_i^2) &= 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(-2x_i^2) &= T_i \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Diese resultieren aus dem linearen Anteil der Lagrangedichte, im nichtlinearen Teil finden wir Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \exp[-(x_i^2 + x_j^2 + x_k^2 + x_l^2) + i(\phi_i + \phi_j - \phi_k - \phi_l)], \quad (\text{B.6})$$

die sich für  $i = j, k = l$  bzw.  $i = j = k = l$  wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} i = j, k = l &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp[-2(x_i^2 + x_j^2) + 2i(\phi_i - \phi_j)], \\ i = j = k = l &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(-4x_i^2) = T_i \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Für den Fall, dass nicht alle vier Indices gleich sind, lösen wir das Integral allgemein, und mit den Abkürzungen (6.19)–(6.27) erhalten wir das Ergebnis

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \exp[-(x_i^2 + x_j^2 + x_k^2 + x_l^2) + i(\phi_i + \phi_j - \phi_k - \phi_l)] = \sqrt{\pi} \Theta_{2,4}. \quad (\text{B.8})$$

Mit diesen Integralen erhalten wir die gemittelte Lagrangedichte (6.28).

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen der Pulsparameter  $a_m(z)$ ,  $\tau_m(z)$ ,  $T_m(z)$ ,  $\lambda_m(z)$ ,  $\omega_m(z)$  und  $\mu_m(z)$  aus der gemittelten Lagrangedichte (6.28) führen wir exemplarisch für den Phasenparameter  $\lambda_m(z)$  durch, die Bewegungsgleichungen für die weiteren fünf Parameter erhalten wir vollkommen analog. Allerdings sind die expliziten Berechnungen z.T. sehr langwierig, weshalb wir uns hier auf den einfachsten Parameter beschränken. Zu berechnen haben wir

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_m} - \frac{d}{dz} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_{mz}} = 0. \quad (\text{B.9})$$

Dies bedeutet im einzelnen

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_{mz}} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} a_m^2 T_m, \quad \frac{d}{dz} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_{mz}} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} (2a_m a_{mz} T_m + a_m^2 T_{mz}) \quad (\text{B.10})$$

sowie, wegen  $\Theta_{2,4} = \Theta_{2,4}(\delta_{2,4}) \sim \exp(i\delta_{2,4})$  und  $\delta_{2,4} = \delta_{2,4}(\lambda_m) \sim \lambda_m$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_m} &= \sqrt{\pi} \frac{c}{2} \left\{ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n a_i^2 a_j^2 \Theta_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_m} (2i(\lambda_i - \lambda_j)) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ i \neq j, k \neq l}}^n a_i a_j a_k a_l \Theta_4 \frac{\partial}{\partial \lambda_m} (i(\lambda_i + \lambda_j - \lambda_k - \lambda_l)) \right\} \\ &= \sqrt{\pi} \frac{c}{2} \left\{ a_m^2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n (2i a_i^2 \Theta_2 + \text{c.c.}) + \frac{1}{n-1} a_m \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq m, j \neq k}}^n (2i a_i a_j a_k \Theta_4 + \text{c.c.}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Wir nutzen  $y + y^* = 2 \Re y$  sowie  $\Re(iy) = -\Im y$ ,  $y \in \mathbb{C}$  aus und erhalten mit den Beziehungen (B.9) und (B.10)

$$\begin{aligned} &- 2\sqrt{\pi} c \left\{ a_m^2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n a_i^2 \Im \Theta_2 + \frac{1}{n-1} a_m \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq m, j \neq k}}^n a_i a_j a_k \Im \Theta_4 \right\} \\ &+ \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2a_m a_{mz} T_m + a_m^2 T_{mz}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Mit den fünf weiteren Parametern verfahren wir in analoger Weise. Wir bekommen so ein Gleichungssystem von sechs gewöhnlichen Differentialgleichungen, das wir zu lösen haben. Stellen wir z.B. die für  $\lambda_m$  gewonnene Gleichung (B.12) nach  $a_{mz}$  um, so erhalten wir Gleichung (6.32). Diese benötigt noch  $T_{mz}$ , welches uns Gleichung (6.31) liefert.

Letztendlich erhalten wir das komplette Differentialgleichungssystem (6.30)–(6.35), das uns die Entwicklung der makroskopischen Pulskenngößen beschreibt.



# Literaturverzeichnis

- [1] M. J. Ablowitz and G. Biondini, *Multiscale pulse dynamics in communication systems with strong dispersion management*, Opt. Lett. **23** (1998) 1668–1670.
- [2] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, Boston, 1989.
- [3] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, San Diego, 1995.
- [4] G. P. Agrawal, *Fiber-optic communication systems*, John Wiley & Sons, New York, 1997.
- [5] D. Anderson, *Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers*, Phys. Rev. A **27** (1983) 3135–3145.
- [6] D. Anderson and M. Lisak, *Bandwidth limits due to mutual pulse interaction in optical soliton communication systems*, Opt. Lett. **11** (1986) 174.
- [7] A. Berntson, D. Anderson, N. Doran, W. Forysiak, and J. Nijhof, *Power dependence and accessible bandwidth for dispersion-managed solitons in asymmetric dispersion maps*, El. Lett. **34** (1998) 2054–2056.
- [8] V. Cautaerts, A. Maruta, and Y. Kodama, *On the dispersion managed soliton*, Chaos **10** (2000) 515–528.
- [9] H. J. A. da Silva and J. J. O’Reilly, *Optical pulse modeling with Hermite-Gaussian functions*, Opt. Lett. **14** (1989) 526–528.
- [10] V. Dimitrov, D. Donkova, and I. Uzunov, *On the description of interaction in sequences of unequal soliton like-pulses*, Optical and Quantum Electronics. **28** (1996) 1765–1771.
- [11] W. Forysiak, F. M. Knox, and N. J. Doran, *Average soliton propagation in periodically amplified systems with stepwise dispersion-profiled fiber*, Opt. Lett. **19** (1994) 174–176.
- [12] I. Gabitov, E. G. Shapiro, and S. K. Turitsyn, *Optical pulse dynamics in fiber links with dispersion compensation*, Opt. Comm. **134** (1997) 317–329.
- [13] I. Gabitov and S. K. Turitsyn, *Averaged pulse dynamics in a cascaded transmission system with passive dispersion compensation*, Opt. Lett. **21** (1996) 327–329.

- [14] I. Gabitov and S. K. Turitsyn, *Breathing solitons in optical fibre links*, JETP Lett. **63** (1996) 863–866.
- [15] V. S. Gerdjikov, D. J. Kaup, I. M. Uzunov, and E. G. Evstatiev, *The asymptotic behaviour of  $N$ -soliton trains of the NLSE*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 3943–3946.
- [16] V. S. Gerdjikov, I. M. Uzunov, E. G. Evstatiev, and G. Diankov, *The nonlinear Schrödinger equation and  $N$ -soliton interaction. Generalization of Karpman-Solov'ev approach*, Phys. Rev. E **55** (1997) 6039.
- [17] V. S. Gerdjikov, I. M. Uzunov, and F. Lederer, *The nonlinear Schrödinger equation and  $N$ -soliton interactions. Generalization of the Karpman-Solov'ev approach*, Phys. Rev. E **55** (1997) 6039.
- [18] A. Ghatak and K. Thyagarajan, *Introduction to Fiber Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [19] M. Gölles, I. M. Uzunov, and F. Lederer, *Break up of  $N$ -soliton bound states due to intrapulse Raman scattering and third-order of dispersion. An eigenvalue analysis*, Phys. Lett. A **231** (1997) 195.
- [20] J. P. Gordon and H. A. Haus, *Random walk of coherently amplified solitons in optical fiber transmission*, Opt. Lett. **11** (1986) 665.
- [21] K. A. Gorshkov and L. A. Ostrovsky, *Interactions of Solitons in Nonintegrable Systems: Direct Perturbation Methods and Applications*, Physica D **3** (1981) 428–438.
- [22] V. S. Grigoryan, T. Yu, E. A. Golovchenko, C. R. Menyuk, and A. N. Pilipetskii, *Dispersion-managed soliton dynamics*, Opt. Lett. **22** (1997) 1609–1611.
- [23] A. Hasegawa, *Quasi-soliton for ultra-high speed communications*, Physica D **123** (1998) 276–270.
- [24] A. Hasegawa and Y. Kodama, *Guiding-center soliton in optical fibers*, Opt. Lett. **15** (1990) 1443–1445.
- [25] A. Hasegawa and Y. Kodama, *Guiding-Center Soliton*, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 161–164.
- [26] A. Hasegawa and Y. Kodama, *Solitons in optical communications*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [27] A. Hasegawa and F. Tappert, *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion*, Appl. Phys. Lett. **23** (1973) 142–144.
- [28] G. Heinzel, *Beliebig genau*, c't **8** (1992) 103–115.

- 
- [29] V. I. Karpman and V. V. Solov'ev, *A perturbational approach to the two-soliton systems*, *Physica D* **3** (1981) 487–502.
- [30] Y. Kodama, *Nonlinear pulse propagation in dispersion-managed systems*, *Physica D* **123** (1998) 255–266.
- [31] M. Kunze, *Periodic solutions of a singular Lagrangian system related to dispersion-managed fiber communication systems*, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **1** (2001) 159–167.
- [32] E. W. Laedke, T. Schäfer, A. Posth, C. Karle, K. H. Spatschek, M. Gunkel, and S. K. Turitsyn, *Optimization of dispersion-managed optical fiber lines*, *Journal of the University of Applied Sciences Mittweida* **8** (2000) 63–70.
- [33] T. I. Lakoba and G. P. Agrawal, *Effects of third-order dispersion on dispersion-managed solitons*, *J. Opt. Soc. Am. B* **16** (1999) 1332–1343.
- [34] T. I. Lakoba and D. J. Kaup, *Hermite-Gaussian expansion for pulse propagation in strongly dispersion managed fibers*, *Phys. Rev. E* **58** (1998) 6728–6741.
- [35] T. I. Lakoba and D. J. Kaup, *Influence of the Raman effect on dispersion-managed solitons and their interchannel collisions*, *Opt. Lett.* **24** (1999) 808–810.
- [36] P. Larzaridis, G. Debarge, and P. Gallion, *Exact solutions for linear propagation of chirped pulses using a chirped Gauss-Hermite orthogonal basis*, *Opt. Lett.* **22** (1997) 685–687.
- [37] B. A. Malomed, *Bound solitons in the nonlinear Schrödinger-Ginzburg-Landau equation*, *Phys. Rev. A* **44** (1991) 6954–6957.
- [38] B. A. Malomed, M. Göllés, I. M. Uzunov, and F. Lederer, *Stability and interaction of pulses in simplified Ginzburg-Landau equations*, *Physica Scripta* **55** (1997) 73–79.
- [39] B. A. Malomed, I. M. Uzunov, M. Göllés, and F. Lederer, *Two-stage-perturbation theory for bandwidth-limited amplification of optical solitons near the zero-dispersion point*, *Phys. Rev. E* **55** (1997) 3777.
- [40] J. T. Moeser, *Stable pulse propagation in optical fibers with varying dispersion*, PhD thesis - Brown University, Providence, RI, 2002.
- [41] M. Murakami, H. Maeda, and T. Imai, *Long-Haul 16x10 Gb/s WDM Transmission Experiment Using Higher Order Fiber Dispersion Management Technique*, *IEEE Phot. Tech. Lett.* **11** (1999) 898–900.
- [42] A. C. Newell and J. V. Moloney, *Nonlinear Optics*, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1992.
- [43] J. H. B. Nijhof, N. J. Doran, W. Forysiak, and A. Berntson, *Energy enhancement of dispersion-managed solitons and WDM*, *Electr. Lett.* **34** (1998) 481–482.

- [44] J. H. B. Nijhof, N. J. Doran, W. Forysiak, and F. M. Knox, *Stable soliton-like propagation in dispersion managed systems with net anomalous, zero and normal dispersion*, Electron. Lett. **33** (1997) 1726.
- [45] J. A. Posth, E. W. Laedke, T. Schäfer, and K. H. Spatschek, *Dispersion-compensation for single-pulse propagation in complex optical fiber-lines (submitted)*.
- [46] J. A. Posth, T. Schäfer, E. W. Laedke, and K. H. Spatschek, *Fast optimization procedures for third-order dispersion management*, Opt. Comm. **219** (2003) 241–249.
- [47] T. Schäfer, *Modelle für das mittlere Verhalten von Solitonen in Systemen mit stark variierender Dispersion (Diplomarbeit)*, Heinrich-Heine-Universität, Düsseldorf, 1998.
- [48] T. Schäfer, *Der Einfluss von Dispersionskompensation auf Solitonen in optischen Übertragungstrecken (Dissertation)*, Heinrich-Heine-Universität, Düsseldorf, 2001.
- [49] T. Schäfer, E. W. Laedke, M. Gunkel, C. Karle, A. Posth, K. H. Spatschek, and S. K. Turitsyn, *Optimization of Dispersion-Managed Optical Fiber Lines*, J. Light. Tech. **20** (2002) 946–952.
- [50] T. Schäfer, V. K. Mezentsev, K. H. Spatschek, and S. K. Turitsyn, *The dispersion-managed soliton as a ground state of a macroscopic nonlinear quantum oscillator*, Proc. Roy. Soc. A **457** (2001) 273–282.
- [51] N. Smith, N. J. Doran, F. M. Knox, and W. Forysiak, *Energy-scaling characteristics of solitons in strongly dispersion-managed fibers*, Opt. Lett. **21** (1996) 1981–1983.
- [52] V. I. Talanov, *Focusing of light in cubic media*, JETP Letters **11** (1970) 199–201.
- [53] S. A. Teukolsky, W. H. Press, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, New York, 1988.
- [54] S. K. Turitsyn, *Theory of average pulse propagation in high-bit-rate optical transmission systems with strong dispersion management.*, JETP Letters **65** (1997) 845–851.
- [55] S. K. Turitsyn, *Breathing self-similar dynamics and oscillatory tails of the chirped dispersion-managed soliton*, Phys. Rev. E **58** (1998) R1256–R1259.
- [56] S. K. Turitsyn, M. P. Fedoruk, W. Forysiak, and N. J. Doran, *Dispersion-management in fiber communication lines using Raman amplification*, Opt. Comm. **170** (1999) 23–27.

- 
- [57] S. K. Turitsyn, I. Gabitov, E. W. Laedke, V. K. Mezentsev, S. L. Musher, E. G. Shapiro, T. Schäfer, and K. H. Spatschek, *Variational approach to optical pulse propagation in dispersion compensated transmission systems*, Opt. Comm. **151** (1998) 117–135.
- [58] S. K. Turitsyn, T. Schäfer, and V. K. Mezentsev, *Generalized momentum method to describe high-frequency solitary wave propagation in systems with varying dispersion*, Phys. Rev. E **58** (1998) R5264–R5267.
- [59] S. K. Turitsyn, T. Schäfer, K. H. Spatschek, and V. K. Mezentsev, *Path-averaged chirped optical soliton in dispersion-managed fiber communication lines*, Opt. Comm. **163** (1999) 122–158.
- [60] I. M. Uzunov, V. S. Gerdjikov, M. Gölles, and F. Lederer, *On the description of  $N$ -soliton interaction in optical fibers*, Opt. Comm. **125** (1996) 237–242.
- [61] I. M. Uzunov, M. Gölles, and F. Lederer, *Soliton interaction near the zero-dispersion wavelength*, Phys. Rev. E **52** (1995) 1059.
- [62] I. M. Uzunov, R. Muschall, M. Gölles, F. Lederer, and S. Wabnitz, *Effect of nonlinear gain and filtering on soliton interaction*, Opt. Comm. **118** (1995) 577–580.
- [63] T.-S. Yang and W. L. Kath, *Analysis of enhanced-power solitons in dispersion-managed optical fibers*, Opt. Lett. **22** (1997) 985–987.
- [64] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*, Sov. Phys. JETP **34** (1972) 62–69.
- [65] V. Zharnitsky, E. Grenier, S. K. Turitsyn, C. K. R. Jones, and J. S. Hesthaven, *Ground states of dispersion-managed nonlinear Schrödinger equation*, Phys. Rev. E **62** (2000) 7358–7364.



# Danksagung

Während der Anfertigung der vorliegenden Dissertation haben mich eine Vielzahl von lieben und hilfsbereiten Menschen unterstützt, denen ich an dieser Stelle herzlich danken möchte.

An erster Stelle geht mein spezieller Dank an Herrn Prof. Dr. Karl-Heinz Spatschek für die durchweg ebenso effiziente wie angenehme Betreuung der Arbeit sowie für seine Bereitschaft, als erster Berichterstatter zu fungieren. Prof. Spatschek hat es durch seine Vorlesungen und durch zahlreiche Diskussionen während des Entstehungsprozesses dieser Arbeit immer wieder geschafft, mich für die Physik zu begeistern und mich so zu motivieren, konzentriert an meiner Dissertation zu arbeiten.

Prof. Dr. H. Löwen danke ich für seine Bereitschaft, das Korreferat zu übernehmen, sowie für eine Vielzahl von exzellenten Vorlesungen im Bereich der Theoretischen Physik, die mein Interesse an der Theoretischen Physik geweckt haben. Ihm verdanke ich es, dass ich mich für diesen Fachbereich entschieden habe.

Schließlich haben alle Mitarbeiter des *Institutes für Theoretische Physik I* durch einen kollegialen Arbeitsstil und einen stets freundlichen Umgang dazu beigetragen, dass mir das wissenschaftliche Arbeiten Freude bereitet hat. Ich denke an dieser Stelle an Frau Elvira Gröters, die immer für Verwaltungsfragen offen war und diese stets schnell und freundlich geregelt hat, an Herrn Dr. Herbert Wenk, aufgrund dessen unermüdlichen Einsatzes es nie zu nennenswerten Ausfällen im EDV-Bereich gekommen ist, und der mir half, so manche Klippe sicher zu umschiffen, an Christoph Karle, der mich bei technischen Problemen sehr effizient unterstützt hat, und an Herrn Eckhard Zügge, dessen lebendige und humorvolle Art mir die Arbeit erleichtert hat. Natürlich gilt mein Dank auch all meinen Freunden und Kollegen, Sylvie Defrasne, Fabio Mancin, Dr. Dmitry Lesnik, Kolja Kauder, Götz Lehmann, Marcus Neuer, Andreas Wingen und Zelemir Marojevic, mit denen mir die Zusammenarbeit immer Freude bereitet hat.

Meinem Freund Dr. Tobias Schäfer danke ich ganz ausdrücklich für seine freundschaftliche, unkomplizierte und äußerst fruchtbare Zusammenarbeit. Ohne die vielen Anregungen und Ideen, die wir gemeinsam in zahlreichen Diskussionen entwickelt haben, wäre diese Arbeit nicht dieselbe.

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Dr. Ernst Wolfgang Laedke, von dem ich ungemein viel während der letzten Jahre gelernt habe. Dabei habe ich ganz erheblich von seiner Erfahrung und seinem Wissen profitieren können, welches er stets breitwillig mit mir geteilt hat. Neben seiner hohen fachlichen Kompetenz schätze ich Dr. Ernst Wolfgang Laedke als guten Freund, der mir immer verständnisvoll zur Seite gestanden und mich bei meiner Arbeit unterstützt hat.



# Erklärung

Mit meiner Unterschrift versichere ich an Eidesstatt, dass ich die vorgelegte Dissertation selbst und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt habe und dass ich diese in der jetzigen oder einer ähnlichen Form noch keiner anderen Fakultät eingereicht habe.

Ich erkläre ferner, dass die Dissertation noch nicht veröffentlicht wurde (Veröffentlichungen nach §4(3) der Promotionsordnung bleiben hiervon ausgenommen).

Die Promotionsordnung ist mir bekannt.

*Düsseldorf, im Januar 2004*