Einpunkt-Erweiterungen von wilden erblichen Algebren

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von
Christelle Chesné
aus Les Lilas (Frankreich)

Düsseldorf
2003

Gedruckt mit der Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

1. Referent: Prof. Dr. O. Kerner
2. Referent: Prof. Dr. V. Franjou
3. Referent: Prof. Dr. B. Keller
4. Referent: Prof. Dr. C. M. Ringel

Tag der mündlichen Prüfung: 24. November 2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Darstellungstheorie endlich dimensionaler Algebren beschäftigt sich mit der Untersuchung von Modulkategorien über diesen Algebren. Sei k stets ein algebraisch abgeschlossener Körper und A eine endlich dimensionale k-Algebra. Wir bezeichnen mit $A-\text{mod}$ die Kategorie der endlich erzeugten A-Moduln. Ein effizienter Ansatz, um diese Kategorie zu beschreiben, ist die Betrachtung von $\Gamma(A)$, dem Auslander-Reiten-Köcher von A. Dieser liefert uns eine Visualisierung der Kategorie $A-\text{mod}/\operatorname{rad}^\infty(A-\text{mod})$, wobei $\operatorname{rad}^\infty(A-\text{mod})$ das Ideal der Morphismen, welche beliebig lange Faktorisierungen besitzen, bezeichnet. Die Auslander-Reiten-Verschiebung τ_A induziert auf $\Gamma(A)$ die Struktur eines Verschiebungsköchers. In vielen Spezialfällen kann man den Auslander-Reiten-Köcher einer endlich dimensionaler Algebra gut beschreiben, wie im Beispiel einer erblichen Algebra. (Eine Algebra nennen wir erblich, wenn sie die globale Dimension 0 oder 1 hat.)

Eine hilfreiche Induktionstechnik für Algebren sind Einpunkt-Erweiterungen. Ist $\hat{A}$ eine endlich dimensionale Basisalgebra und existiert ein einfacher injektiver $\hat{A}$-Modul S_ω, so kann $\hat{A}$ als verallgemeinerter oberer Dreiecksmatrizenring

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & k \end{pmatrix} = A[X]$$

geschrieben werden. Die Algebra $\hat{A}$ heißt dann Einpunkt-Erweiterung von A durch den A-Modul X. Der Matrizenring wird folgendermaßen konstruiert: Ist e_ω ein primitives Idempotent von $\hat{A}$ so, dass $\hat{A}e_\omega$ die projektive Überlagerung von S_ω ist, dann bildet $\hat{A}e_\omega$ ein zweiseitiges Ideal in $\hat{A}$. Die Algebra A wird definiert als $A = \hat{A}\,/\,Ae_\omega = (1-e_\omega)\hat{A}(1-e_\omega)$ und $X = \operatorname{rad} Ae_\omega$ ist ein A-Modul. Somit bildet $A-\text{mod}$ eine volle exakte Unterkategorie von $\hat{A}-\text{mod}$. Ist M ein unzerlegbarer $\hat{A}$-Modul, so ist entweder $M \in A-\text{mod}$, $M \simeq S_\omega$ oder $M = (M_0, V, \varphi)$ für $M_0 \in A-\text{mod}$, $V \in k-\text{mod}$ und $\varphi : V \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(X, M_0)$ eine injektive lineare Abbildung. Gibt es nur wenige unzerlegbare $\hat{A}$-Moduln M_0 mit $\operatorname{Hom}_A(X, M_0) \neq 0$ und sind zudem die Dimensionen von den Räumen $\operatorname{Hom}_A(X, M_0)$ klein, so bestehen zum Beispiel gute Aussichten, die unzerlegbaren $\hat{A}$-Moduln, die nicht in $A-\text{mod}$ liegen, beschreiben zu können.

Eine erbliche Algebra H heißt wild, wenn es für jede endlich dimensionale k-Algebra B eine volle exakte Einbettung $B-\mathrm{mod} \longrightarrow H-\mathrm{mod}$ gibt. In diesem Fall ist H auch wild in dem Sinn von [3]. Diese Bezeichnung reflektiert die Komplexität der Modulkategorie einer wilden erblichen Algebra.

Sei jetzt H eine wilde erbliche Algebra und X ein nichttrivialer H-Modul. Die Auslander-Reiten-Struktur von $H[X]$ kann im Allgemeinen nicht aus der Struktur von H erhalten werden. Insbesondere ist nicht bekannt, wann der Auslander-Reiten Köcher von $H[X]$ eine präinjektive Komponente, das heißt eine Komponente ohne orientierte Zykel, die nur endlich viele τ-Bahnen hat und deren τ-Bahnen alle einen injektiven Punkt enthalten, besitzt. In Spezialfällen wurde diese Frage aber schon beantwortet.

Sei $R \neq 0$ ein regulärer H-Modul, so dass $H[R]$ eine Kippalgebra vom Typ H_0 ist (d.h. $H[R]$ ist der Endomorphismenring eines Kippmoduls über H_0). Dann ist $H[\tau_H^m R]$ auch eine Kippalgebra vom Typ H_0 für $m \geq 0$ nach F. Lukas [13, 5.2.4]. Daraus folgt laut H. Strauss [15, Th. A], dass der Auslander-Reiten-Köcher von $H[\tau_H^m R]$ eine präinjektive Komponente für alle $m \geq 0$ besitzt. Die Algebra $H[\tau_H^{-m} R]$ ist hingegen für $m \gg 0$ keine Kippalgebra. Nach [13] ist sie aber stückweise erblich vom Typ H_0, insbesondere sind die Kategorien $H[\tau_H^{-m} R]-\mathrm{mod}$ und $H_0-\mathrm{mod}$ deriviert äquivalent. S. Lache bewies in [12, Th. 2] die Existenz einer präinjektiven Komponente für diesen Fall. Er beschrieb auch alle anderen Komponenten des Auslander-Reiten-Köchers von $H[\tau_H^{-m} R]$. Mit einem anderen Ansatz zeigten O. Kerner and A. Skowroński in [10] für sehr spezielle Wegealgebren H, dass $\Gamma(H[\tau_H^m X])$ eine präinjektive Komponente besitzt, wenn $m \gg 0$ oder $m \ll 0$ ist.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist, dieses Resultat für beliebige wilde erbliche Algebren zu beweisen. Genauer gesagt, wird ein Ergebnis hergeleitet, welches diese Resultate als Spezialfälle enthält.

Wir zerlegen die Algebra $H = H_1 \times \ldots \times H_t$ in ihre Zusammenhangskomponenten und wählen $r \in \{0, \ldots, t\}$ und einen H-Modul $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_t$ so, dass X_i ein H_i-Modul ist und dass $\tau_H^m X_1, \cdots, \tau_H^m X_r$, $\tau_H^{-m} X_{r+1}, \cdots, \tau_H^{-m} X_t$ nichttrivial für alle $m \geq 0$ sind. Dann betrachten wir:

$$X(m) = \tau_H^m X_1 \oplus \ldots \oplus \tau_H^m X_r \oplus \tau_H^{-m} X_{r+1} \oplus \ldots \oplus \tau_H^{-m} X_t \ .$$

Sind alle $H_1, \ldots, H_t$ wild, dann können wir die folgende Aussage formulieren, die unendlich viele Komponenten in $\Gamma(H[X(m)])$ beschreibt.

Theorem: *Sei $m \gg 0$ und A die Einpunkt-Erweiterung $A = H[X(m)]$. Dann gilt:*

(a) Der Auslander-Reiten-Köcher von A besitzt genau eine präinjektive Komponente. Es ist die präinjektive Komponente einer wilden Wegealgebra $\tilde{A}$.

(b) Jede reguläre Komponente in $\Gamma(\tilde{A})$ induziert eine Komponente vom Typ $\mathbb{Z}\mathbf{A}_\infty$ im stabilen Auslander-Reiten-Köcher von A.

(c) Ist N ein regulärer $\tilde{A}$-Modul, so existiert ein $l_0 \in \mathbb{N}$ mit:

$$\tau_A^l \, \tau_{\tilde{A}}^{l_0} N \simeq \tau_{\tilde{A}}^{l+l_0} N \quad \textit{für alle } l \geq 0 \,.$$

Die Anzahl der τ-Bahnen der präinjektiven Komponente von $\tilde{A}$ sind über die kombinatorischen Daten der Köcher der Algebren $H_1, \ldots, H_t$ bestimmt: Für $1 \leq i \leq r$ definieren wir μ_i als die Anzahl der Isomorphieklassen von präinjektiven einfachen H_i-Moduln und für $r+1 \leq i \leq t$ sei μ_i die Anzahl der Isomorphieklassen von präinjektiven oder regulären einfachen H_i-Moduln. Nach [11] lassen sich diese Zahlen in der Struktur von den Köchern der Algebren $H_1, \ldots, H_t$ direkt ablesen. Dann besitzt die präinjektive Komponente von $\Gamma(H[X(m)])$ genau $(\sum \mu_i + 1)$ τ-Bahnen.

In dem Fall einer stückweise erblichen Einpunkt-Erweiterung $H[\tau_H^m R]$ erlaubt dieses Ergebnis, die präinjektive Komponente von dem Auslander-Reiten-Köcher (deren Existenz schon in [12] bewiesen wurde) für $|m| \gg 0$ zu beschreiben. Die Aussagen *(b)* und *(c)* implizieren natürlich auch, dass der Auslander-Reiten-Köcher von $H[X(m)]$ unendlich viele reguläre Komponenten vom Typ $\mathbb{Z}\mathbf{A}_\infty$ besitzt. Das duale Resultat für Einpunkt-Coerweiterungen folgt direkt aus diesem Theorem. In diesem Fall zeigt man insbesondere die Existenz einer präprojektiven Komponente.

Mein herzlicher Dank gilt natürlich meinem Lehrer Prof. Dr. O. Kerner. Ohne seine ständige Gesprächsbereitschaft und seine wertvollen Hinweise hätte diese Arbeit nicht entstehen können.

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel werden die klassischen Begriffe und Ergebnisse, die für das Verständnis dieser Arbeit benötigt werden, kurz eingeführt. Für Details verweisen wir auf [1], [7] und [14].

Sei k ein algebraisch abgeschlossenener Körper. Alle Algebren, die wir in dieser Arbeit betrachten, sind endlich dimensionale k-Algebren. Für eine Algebra A werden wir unter "A-Modul" immer einen endlich erzeugten Linksmodul über A verstehen. Die Kategorie dieser Moduln wird mit $A-$mod bezeichnet.

1.1 Köcher und Wegealgebren

Ein *Köcher* $\mathcal{Q}$ ist ein orientierter Graph. Er besteht aus einer Menge von Punkten $\mathcal{Q}_0$ und einer Menge von Pfeilen $\mathcal{Q}_1$. Jedem Pfeil α werden sein Startpunkt $s(\alpha)$ und sein Endpunkt $e(\alpha)$ zugeordnet. Der Köcher $\mathcal{Q}$ heißt endlich, wenn $\mathcal{Q}_0$ und $\mathcal{Q}_1$ endliche Mengen sind. Für zwei Punkte $i,\ j \in \mathcal{Q}_0$ ist ein *Weg der Länge* $r \geq 1$ eine Folge von Pfeilen $\alpha_r \dots \alpha_1$, mit $s(\alpha_1) = i$, $e(\alpha_r) = j$ und $s(\alpha_{t+1}) = e(\alpha_t)$ für alle $t \geq 1$. Zusätzlich gibt es zu jedem Punkt i den *leeren Weg* e_i (der Länge 0) von i nach i.

Sei $\mathcal{Q}$ ein Köcher. Die *Wegealgebra* $k\mathcal{Q}$ wird als der k-Vektorraum, der die Wege von $\mathcal{Q}$ als Basis hat, definiert und mit folgender Multiplikation versehen: für zwei Wege $w_1 = \alpha_r \dots \alpha_1$ und $w_2 = \beta_s \dots \beta_1$ ist das Produkt

$$w_1.w_2 = \begin{cases} \alpha_r \dots \alpha_1 \, \beta_s \dots \beta_1 & \text{falls } s(\alpha_1) = e(\beta_s) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit bekommt man eine Algebra, die genau dann endlich dimensional ist, wenn der Köcher endlich ist und keine orientierten Zykel besitzt (das heißt keine nichtleeren Wege mit gleichem Start- und Endpunkt). Die Algebra $k\mathcal{Q}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn der Köcher $\mathcal{Q}$ zusammenhängend ist. Ist $\mathcal{Q}$ endlich, so hat $k\mathcal{Q}$ das Einselement $1_{k\mathcal{Q}} = \sum_{i \in \mathcal{Q}_0} e_i$ und ist eine *erbliche* Algebra, was bedeutet, dass sie eine (und damit alle) der Bedingungen des folgenden Satzes erfüllt.

Satz 1.1.1 *Für eine Algebra A sind die folgenden Aussagen äquivalent :*

1. *Jeder Untermodul eines projektiven A-Moduls ist projektiv.*
2. *Jeder Faktormodul eines injektiven A-Moduls ist injektiv.*
3. *Die globale Dimension von A ist 0 oder 1.*
4. *Für alle* $X, Y \in A-\mathrm{mod}$ *und alle* $i \geq 2$ *ist* $\mathrm{Ext}^i_A(X, Y) = 0$.

Ab jetzt werden wir nur noch endliche Köcher $\mathcal{Q}$ ohne orientierte Zykel betrachten und damit nur endlich dimensionale Wegealgebren $k\mathcal{Q}$.

Die *Wegekategorie* $\mathcal{W}(\mathcal{Q})$ von $\mathcal{Q}$ ist die Kategorie, die als Objekte die Punkte von $\mathcal{Q}$ hat und als Morphismen die Wege in $\mathcal{Q}$. Eine *Darstellung von* $\mathcal{Q}$ *über* k ist ein kovarianter Funktor $F : \mathcal{W}(\mathcal{Q}) \to k-\mathrm{mod}$, wobei $k-\mathrm{mod}$ die Kategorie der endlich dimensionalen k-Vektoräume bezeichnet. Die Darstellungen von $\mathcal{Q}$ über k bilden eine abelsche Kategorie, die wir mit $\mathrm{rep}_k \mathcal{Q}$ bezeichnen.

Satz 1.1.2 *Für einen Köcher* $\mathcal{Q}$ *sind die Kategorien* $k\mathcal{Q}-\mathrm{mod}$ *und* $\mathrm{rep}_k \mathcal{Q}$ *äquivalent.*

Sei $k\mathcal{Q}$ eine Wegealgebra. Für $n \geq 1$ definieren wir $<k\mathcal{Q}^+>^n$ als das Ideal, das von den Wegen der Länge mindestens n erzeugt wird. Das Ideal $<k\mathcal{Q}^+>$ ist nilpotent und stimmt überein mit dem Radikal von $k\mathcal{Q}$. Es gilt:

$$k\mathcal{Q} \;/\; \mathrm{rad}\; k\mathcal{Q} \simeq \prod_{i \in \mathcal{Q}_0} k \;.$$

Eine endlich dimensionale Algebra A, für die $A/\operatorname{rad} A \simeq k^r$ gilt ($r \in \mathbb{N}$), heißt *Basisalgebra*. Damit ist jede Wegealgebra eine endlich dimensionale erbliche Basisalgebra. Da viele Algebren nicht erblich sind, lässt sich nicht jede endlich dimensionale Basisalgebra als Wegealgebra darstellen. Der folgende Satz zeigt, welche wichtige Rolle die Klasse der Wegealgebren doch spielt.

Satz 1.1.3 *Sei A eine endlich dimensionale Basisalgebra über k und sei* $\{S_1, \ldots, S_n\}$ *ein vollständiges Repräsentantensystem von einfachen A-Moduln. Wir definieren* $\mathcal{Q}_A$ *als den Köcher mit Punktemenge* $\{1, \ldots, n\}$ *und mit* $\dim_k \mathrm{Ext}^1_A(S_i, S_j)$ *Pfeilen von i nach j für* i, j *Punkte von* $\mathcal{Q}_A$.
Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes zweiseitiges Ideal $I \subset <k\mathcal{Q}^+>^2$, *so dass A isomorph zu* $k\mathcal{Q}_A/I$ *ist.*

Die Voraussetzung "Basisalgebra" ist keine Einschränkung, wenn man die Modulkategorie untersuchen will. Zu jeder endlich dimensionalen Algebra A gibt es nämlich eine Basisalgebra A^b, so dass A-mod und A^b-mod äquivalente Kategorien sind. (A und A^b heißen dann Morita-äquivalent). Ist A zusätzlich erblich, dann ist die Basisalgebra A^b sogar isomorph zu einer Wegealgebra ($I = 0$).

Ein hilfreiches Kriterium, um Algebren nach dem Komplexitätsgrad ihrer Modulkategorie zu klassifizieren, ist der Darstellungstyp. Eine k-Algebra A heißt darstellungsendlich, wenn es nur endlich viele Isomorphieklassen von unzerlegbaren A-Moduln gibt. Ansonsten wird sie darstellungsunendlich genannt und ist nach [3] entweder zahm oder wild. Es reicht uns also, die Definition einer wilden Algebra anzugeben.

Definition: Sei $k\langle X,Y\rangle$ die freie Algebra über k in zwei nichtkommutierenden Unbestimmten. Eine k-Algebra A heißt *wild*, falls ein endlich erzeugter $(A, k\langle X,Y\rangle)$-Bimodul M existiert, der frei als $k\langle X,Y\rangle$-Modul ist, und so dass der Funktor

$$F = (M \otimes_{k\langle X,Y\rangle} -) : k\langle X,Y\rangle-\text{mod} \to A-\text{mod}$$

Unzerlegbarkeit und Isomorphieklassen respektiert.

Die Begriffe "zahm" und "wild" entsprechen der Erwartung, dass Modulkategorien über zahme Algebren sich besser beschreiben lassen. Im Allgemeinen ist es schwer, den Darstellungstyp einer gegebenen Algebra zu bestimmen. Für den Speziallfall einer zusammenhängenden Wegealgebra kQ gilt aber das Folgende:

kQ ist genau dann darstellungsendlich, wenn Q ein Köcher vom Dynkin-Typ ist (d.h. von der Form A_n, D_n, E_6, E_7 oder E_8).

kQ ist genau dann zahm, wenn Q ein Köcher vom Euklidischen Typ ist (d.h. von der Form $\tilde{A}_n$, $\tilde{D}_n$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$ oder $\tilde{E}_8$).

kQ ist wild in allen anderen Fällen.

1.2 Einige Begriffe aus der Darstellungstheorie

Sei A eine endlich dimensionale Algebra über einen Körper k. In diesem Paragraph werden wir Techniken erläutern, die helfen, die Kategorie der endlich erzeugten A-Moduln zu beschreiben.

Die Auslander-Reiten-Verschiebung

Für $X, Y \in A-$mod sei $I\!P(X,Y)$ der Untervektorraum von $\mathrm{Hom}_A(X,Y)$ der Homomorphismen, die über einen projektiven A-Modul faktorisieren. Dual dazu definieren wir mit $I\!I(X,Y)$ die Morphismen, die über einen injektiven Modul faktorisieren. Damit definieren wir:

- $\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y)$ als den Faktorraum $\mathrm{Hom}_A(X,Y)/I\!P(X,Y)$,
- $\overline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y)$ als den Faktorraum $\mathrm{Hom}_A(X,Y)/I\!I(X,Y)$.

So erhalten wir zwei Faktorkategorien von $A-$mod: $A-\overline{\mathrm{mod}}$ (bzw. $A-\underline{\mathrm{mod}}$) hat als Objekte die A-Moduln und als Morphismen zwischen zwei Moduln X und Y die Elemente aus $\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y)$ (bzw. $\overline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y)$).

Die *Auslander-Reiten-Verschiebung* für A ist der Funktor

$$\tau_A = \mathrm{D}\,\mathrm{Tr} : A-\underline{\mathrm{mod}} \longrightarrow A-\overline{\mathrm{mod}}\ ,$$

wobei D$=\mathrm{Hom}_k(-,k)$ die Dualität und Tr die klassische Transposition sind. Im Sonderfall einer erblichen Algebra A ist Tr isomorph zu dem Funktor $\mathrm{Ext}^1_A(-,A)$. Der Funktor τ_A ist eine Äquivalenz von Kategorien mit Inversem

$$\tau_A^- = \mathrm{Tr}\,\mathrm{D} : A-\overline{\mathrm{mod}} \longrightarrow A-\underline{\mathrm{mod}}\ .$$

Durch den nächsten Satz bekommen wir ein Hilfsmittel, um die Hom- und Ext-Räume zwischen Moduln zu vergleichen.

Satz 1.2.1 *(Auslander-Reiten-Formel). Für zwei A-Moduln X und Y gilt:*

$$\mathrm{Ext}^1_A(X,Y) \simeq \mathrm{D}\,\overline{\mathrm{Hom}}_A(Y,\tau_A X) \simeq \mathrm{D}\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(\tau_A^- Y, X)$$

als Bimoduln über $(\mathrm{End}_A(X), \mathrm{End}_A(Y))$. *Wenn A erblich ist, folgt insbesondere:*

$$\mathrm{Ext}^1_A(X,Y) \simeq \mathrm{D}\,\mathrm{Hom}_A(Y,\tau_A X) \simeq \mathrm{D}\,\mathrm{Hom}_A(\tau_A^- Y, X).$$

Auslander-Reiten-Folgen

Definition: Eine kurze exakte Folge $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ heißt *Auslander-Reiten-Folge* (oder fast zerfallende Folge) falls gilt:

- Die Folge zerfällt nicht.
- Ist $M \in A-$mod und ist $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(X,M)$ kein zerfallender Monomorphismus, so faktorisiert φ über f.
- Ist $N \in A-$mod und ist $\psi \in \mathrm{Hom}_A(N,Z)$ kein zerfallender Epimorphismus, so faktorisiert ψ über g.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, folgt unmittelbar, dass X unzerlegbar nicht injektiv und Z unzerlegbar nicht projektiv ist.

Satz 1.2.2 *Ist $Z \in A-\mathrm{mod}$ unzerlegbar und nicht projektiv, so gibt es (bis auf Isomorphie) genau eine Auslander-Reiten-Folge, die in Z endet. Sie hat die Form*

$$0 \longrightarrow \tau_A Z \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0 \ .$$

Der Mittelterm U dieser Folge ist im Allgemein nicht unzerlegbar. Betrachte eine Zerlegung von $U = \bigoplus_{i=1}^{r} U_i$ in unzerlegbare Moduln. Wir interessieren uns für die Eigenschaften der Teilabbildungen $f_i : \tau_A Z \longrightarrow U_i$ und $g_i : U_i \longrightarrow Z$ für $i = 1, \ldots, r$.

Definition: Seien X, Y unzerlegbare A-Moduln. Ein Homomorphismus $h : X \longrightarrow Y$ heißt *irreduzibel*, wenn er nicht zerfällt und wenn für jeden A-Modul M gilt: Sind $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(X, M)$ und $\beta \in \mathrm{Hom}_A(M, Y)$ mit $f = \alpha\beta$, so ist α ein zerfallender Monomorphismus oder β ein zerfallender Epimorphismus.

Aus dieser Definition folgt direkt, dass eine irreduzible Abbildung entweder injektiv oder surjektiv ist. Die partiellen Abbidungen f_i und g_i aus der obigen Auslander-Reiten-Folge sind irreduzibel. (Es gilt umgekehrt: Jede irreduzible Abbildung zwischen unzerlegbaren A-Moduln kann aus Auslander-Reiten-Folgen erhalten werden.)

Auslander-Reiten Köcher

Für zwei A-Moduln X und Y definieren wir:

$$\mathrm{rad}(X,Y) = \left\{ f \in \mathrm{Hom}_A(X,Y) \mid \begin{array}{l} \text{Ist } U \text{ unzerlegbar in } A-\mathrm{mod}, \text{ so enthält} \\ \text{die Menge } \mathrm{Hom}_A(U,X) f \,\mathrm{Hom}_A(Y,U) \\ \text{keinen Automorphismus.} \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{rad}^2(X,Y) = \left\{ f \in \mathrm{Hom}_A(X,Y) \mid \begin{array}{c} \exists\ Z \in A-\mathrm{mod},\ \exists\ g \in \mathrm{rad}(X,Z) \\ \text{und } h \in \mathrm{rad}(Z,Y) \text{ mit } f = gh. \end{array} \right\}$$

Sei $\mathrm{Irr}\,(X,Y) = \mathrm{rad}(X,Y)/\,\mathrm{rad}^2(X,Y)$. Dieser Begriff hängt eng mit dem von irreduziblen Abbildungen zusammen. Betrachte für einen unzerlegbaren und nicht projektiven Modul X die Auslander-Reiten-Folge

$$0 \longrightarrow \tau_A X \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{s} U_i^{r_i} \longrightarrow X \longrightarrow 0 \ ,$$

wobei die U_i unzerlegbar und paarweise nichtisomorph sind. Dann gilt:

- Für alle $i \in \{1, ..., s\}$ $\quad \dim_k \mathrm{Irr}\,(\tau_A X, U_i) = r_i = \dim_k \mathrm{Irr}\,(U_i, X)$,
- Für alle $V \in A$-ind $\quad \mathrm{Irr}\,(\tau_A X, V) \neq 0 \ \Leftrightarrow \exists\ i \in \{1, ..., n\}\ V \simeq U_i$
  $\Leftrightarrow\ \mathrm{Irr}\,(V, X) \neq 0$.

Wir definieren jetzt den *Auslander-Reiten-Köcher* $\Gamma(A)$ von A:

- Die Punkte von $\Gamma(A)$ sind die Isomorphieklassen von unzerlegbaren A-Moduln.
- Für zwei unzerlegbare A-Moduln X und Y setzen wir $\dim_k \operatorname{Irr}(X, Y)$ Pfeile von $[X]$ nach $[Y]$.

Ab jetzt werden wir unzerlegbare A-Moduln und ihre Isomorphieklassen nicht mehr unterscheiden.

Der Auslander-Reiten-Köcher erlaubt es, einen guten Überblick über die Modulkategorie zu erlangen. Der Auslander-Reiten-Köcher einer endlichdimensionalen Algebra ist immer lokalendlich (d.h. in einem Punkt starten und enden nur endlich viele Pfeile), aber im Allgemeinen unendlich. Er ist meistens auch nicht zusammenhängend.

Für einen unzerlegbaren A-Modul X nennen wir die Menge $\{\tau_A^i X,\ i \in \mathbb{Z}\}$ *τ_A-Bahn von X*. Eine Zusammenhangskomponente von $\Gamma(A)$ ohne orientierte Zykel, die nur endlich viele τ_A-Bahnen enthält, und deren τ_A-Bahnen alle einen projektiven Modul enthalten, heißt *präprojektiv*. Analog definiert man eine *präinjektive Komponente*. Ein unzerlegbarer Modul X heißt *präprojektiv* (bzw. *präinjektiv*), falls er zu einer präprojektiven (bzw. präinjektiven) Komponente von $\Gamma(A)$ gehört.

Ein A-Modul X, für den $\tau_A^m \tau_A^{-m} X \simeq X$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt, heißt *regulär*. Regulär nennen wir auch eine Komponente von $\Gamma(A)$, die nur reguläre Punkte enthält.

Der Auslander-Reiten-Köcher einer beliebigen endlich dimensionalen Algebra enthält nicht notwendig präprojektive oder präinjektive Komponenten. Falls die Algebra eine Wegealgebra ist, kann man hingegen die verschiedenen Komponenten gut beschreiben:

Satz 1.2.3 *Sei kQ die Wegealgebra eines endlichen zusammenhängenden Köchers ohne orientierte Zykel.*

1. *Wenn kQ darstellungsendlich ist, dann besteht $\Gamma(kQ)$ aus genau einer Zusammenhangskomponente, die endlich, präprojektiv und präinjektiv ist.*
2. *Wenn kQ darstellungsunendlich ist, dann besitzt $\Gamma(kQ)$ genau eine präprojektive und eine präinjektive Komponente, die jeweils alle präprojektiven und alle präinjektiven Moduln enthalten. Es gibt unendlich viele andere Komponenten, die alle regulär sind.*

Die regulären Komponenten können genauer beschrieben werden. Dazu muss zuerst unterschieden werden, ob kQ wild oder zahm ist.

1.3 Die Modulkategorie einer wilden erblichen Algebra

Sei $H = kQ$ eine endlich dimensionale wilde Wegealgebra über einen zusammenhängenden Köcher $\mathcal{Q}$. Um die Zusammenhangskomponenten von $\Gamma(H)$ zu beschreiben, brauchen wir die folgenden Bezeichnungen: Für Λ ein (nicht notwendig endlicher) Köcher und I ein Intervall von $\mathbb{Z}$ definieren wir einen neuen Köcher $I\Lambda$: Die Punktmenge von $I\Lambda$ ist $I \times \Lambda_0$, jedem Pfeil $\alpha : x \longrightarrow y$ in Λ und jedem $z \in I$ entsprechen in $I\Lambda$ die Pfeile:

$$\begin{aligned}&(z,\alpha) : (z,x) \longrightarrow (z,y)\\ &(z,\alpha)' : (z,y) \longrightarrow (z+1,x) \text{ falls } z+1 \in I.\end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit $\mathbf{A}_\infty$ den unendlichen Köcher $\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \ \cdots$.

$\Gamma(H)$ besteht ausschließlich aus den folgenden Komponenten:

- der präprojektiven Komponente $\mathcal{P}(H) = \mathbb{N}\mathcal{Q}^*$, wobei $\mathcal{Q}^*$ der duale Köcher zu $\mathcal{Q}$ ist (das heißt der Köcher mit umgekehrten Pfeilen),
- der präinjektiven Komponente $\mathcal{I}(H) = -\mathbb{N}\mathcal{Q}^*$,
- unendlich vielen regulären Komponenten der Form $\mathbb{Z}\mathbf{A}_\infty$.

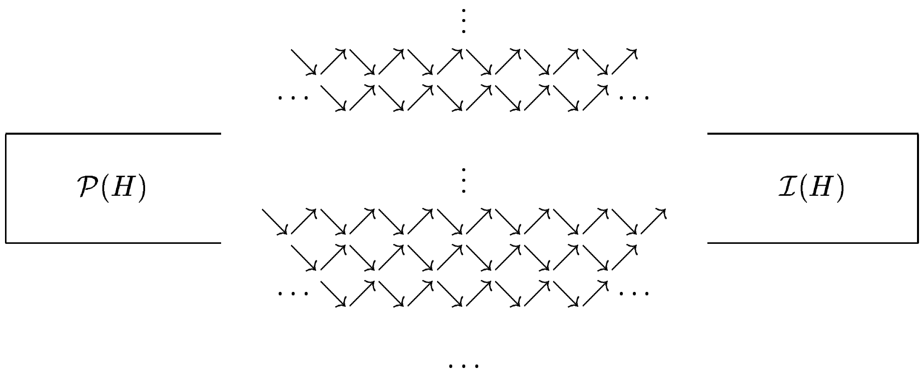

Abbildung 1.1: Auslander-Reiten Köcher einer wilden erblichen Algebra

Wir wollen jetzt eine erste Beschreibung von Homomorphismen zwischen H-Moduln geben. Da $H-$mod eine Krull-Schmidt Kategorie ist, brauchen wir nur die Abbildungen zwischen unzerlegbaren Moduln zu betrachten.

Satz 1.3.1 *Seien X_p, X_r und X_i unzerlegbare H-Moduln, X_p sei präprojektiv, X_r regulär und X_i präinjektiv. Dann gilt:*

1. $\mathrm{Hom}_H(X_i, X_r) = \mathrm{Hom}_H(X_i, X_p) = \mathrm{Hom}_H(X_r, X_p) = 0$

2. Für jedes $c > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit:

(a) $\dim_k \mathrm{Hom}_H(X_p, \tau_H^m X_r) \geq c$ *für alle* m *mit* $|m| \geq N$,
(b) $\dim_k \mathrm{Hom}_H(X_p, \tau_H^m X_i) \geq c$ *für alle* m *mit* $m \geq N$,
(c) $\dim_k \mathrm{Hom}_H(\tau_H^m X_r, X_i) \geq c$ *für alle* m *mit* $|m| \geq N$.

Insbesonders folgt daraus, dass jede Komponente von $\Gamma(H)$ nur endlich viele nicht aufrichtige Moduln hat.

Satz 1.3.2 *Seien X und Y unzerlegbare H-Moduln.*

(a) Sind X und Y präprojektiv, so gilt:

- $\mathrm{Hom}_H(X, Y) \neq 0 \;\Rightarrow\;$ *X ist ein Vorgänger von Y in $\mathcal{P}(H)$.*
- $\forall\, c > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}$ *mit* $\dim_k \mathrm{Hom}_H(X, \tau_H^{-m} Y) \geq c \quad \forall\, m \geq N$.

(b) Dual gilt für X und Y präinjektiv:

- $\mathrm{Hom}_H(X, Y) \neq 0 \;\Rightarrow\;$ *Y ist ein Nachfolger von X in $\mathcal{I}(H)$.*
- $\forall\, c > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}$ *mit* $\dim_k \mathrm{Hom}_H(\tau_H^m X, Y) \geq c \quad \forall\, m \geq N$.

Aus diesem Satz folgt, dass präprojektive und präinjektive unzerlegbare Moduln keine Selbsterweiterungen haben können. Für reguläre Moduln ist die Situation anders:

Satz 1.3.3 *Seien X und Y zwei unzerlegbare reguläre H-Moduln. Dann gilt:*

(a) Es existiert $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{Hom}_H(\tau_H^m X, Y) = 0 \quad \forall\, m \geq N_1$.

(b) Für alle $c > 0$ existiert $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $\dim_k \mathrm{Hom}_H(X, \tau_H^m Y) \geq c$ *für alle* $m \geq N_2$.

Morphismen zwischen H-Moduln besitzen starke Faktorisierungseigenschaften, wie O. Kerner es in [8] zeigte:

Satz 1.3.4 *Seien X_p ein präprojektiver, X_r ein regulärer und X_i ein präinjektiver H-Modul. Für einen regulären Modul $R \neq 0$ gilt:*

(a) Jeder Homomorphismus $X_p \xrightarrow{f} X_r$ *faktorisiert über* $\tau_H^{-m} R$ *für* $m \gg 0$.

(b) Jeder Homomorphismus $X_r \xrightarrow{g} X_i$ *faktorisiert über* $\tau_H^m R$ *für* $m \gg 0$.

(c) Jeder Homomorphismus $X_p \xrightarrow{h} X_i$ *faktorisiert über* $\tau_H^m R$ *für* $|m| \gg 0$.

Corollar 1.3.5 *Seien X_p, X_r und X_i wie im Satz 1.3.4*

(a) Es existieren Monomorphismen $X_j \longrightarrow \tau_H^m X_i$ $(j = p, r)$ für $m \gg 0$.

(b) Es existieren Epimorphismen $\tau_H^{-m} X_p \longrightarrow X_j$ $(j = r, i)$ für $m \gg 0$.

L. Unger hat für Homomorphismen zwischen bestimmten H-Moduln das folgende Ergebnis in [16, 1.3] bewiesen:

Satz 1.3.6 *Seien X und Y unzerlegbare H-Moduln ohne Selbsterweiterungen, so dass $\operatorname{Ext}^1_H(X, Y) = 0$, und sei $f \in \operatorname{Hom}_H(X, Y) \setminus \{0\}$.*

(a) Wenn f injektiv ist, dann ist der Kern von f unzerlegbar und es gilt:

$$\dim_k \operatorname{Ext}^1_H(\operatorname{Ker} f, \operatorname{Ker} f) = \dim_k \operatorname{Hom}_H(X, Y) - 1 \ .$$

(b) Wenn f surjektiv ist, dann ist der Cokern von f unzerlegbar und es gilt:

$$\dim_k \operatorname{Ext}^1_H(\operatorname{Coker} f, \operatorname{Coker} f) = \dim_k \operatorname{Hom}_H(X, Y) - 1 \ .$$

Nach einem Satz von D. Happel und C.M. Ringel [5, 4.1] sind diese beiden Fällen die Einzigen, die auftreten können.

1.4 Einpunkt-Erweiterungen von Algebren

Sei A eine Algebra und sei X ein A-Modul. Die *Einpunkt-Erweiterung* $A[X]$ von A durch X ist die Algebra

$$A[X] = \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

wobei die Multiplikation in $A[X]$ folgendermaßen definiert wird:

$$\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & x' \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ax' + x\lambda' \\ 0 & \lambda\lambda' \end{pmatrix} ,$$

für alle $a, a' \in A$, $x, x' \in X$, $\lambda, \lambda' \in k$. Einen $A[X]$-Modul kann man sich dann als ein Tripel

$$\begin{pmatrix} \bar{M} \\ V \end{pmatrix}_{\varphi}$$

vorstellen, wobei $\bar{M} \in A{-}\mathrm{mod}$, $V \in k{-}\mathrm{mod}$ und $\varphi \in \operatorname{Hom}_k(V, \operatorname{Hom}_A(X, M))$. Die $A[X]$-Modulstruktur wird erhalten durch:

$$\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} am + (x)(v)\varphi \\ \lambda v \end{pmatrix} .$$

Da A eine Faktoralgebra von $A[X]$ ist, bekommen wir eine volle exakte Einbettung

$$A\text{-mod} \hookrightarrow A[X]\text{-mod}\ ,$$

die auch erweiterungsabgeschlossen ist. Die Kategorie A−mod wird identifiziert mit der vollen Unterkategorie von $A[X]$−mod, die als Objekte die Tripel

$$\begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix}_0$$

hat, wobei $U \in A$−mod. Für einen $A[X]$-Modul M sei AM der größte Untermodul von M, der als A-Modul aufgefasst werden kann.
Ist $M = \begin{pmatrix} \bar{M} \\ V \end{pmatrix}_\varphi$, so ist $AM = \begin{pmatrix} \bar{M} \\ 0 \end{pmatrix}_0$. Wir bekommen die exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow AM \longrightarrow M \longrightarrow S_\omega^{\ N} \longrightarrow 0\ ,$$

wobei $N = \dim_k V$ und S_ω der einfache injektive $A[X]$-Modul mit $AS_\omega = 0$ ist. Die unzerlegbaren projektiven $A[X]$-Moduln sind die unzerlegbaren Projektiven von A−mod zusammen mit dem zusätzlichen Modul

$$P_\omega = \begin{pmatrix} X \\ k \end{pmatrix}_{\alpha \mapsto \alpha\, \mathrm{id}_X}.$$

Daraus folgt, dass die projektive Dimension von einem A-Modul nicht größer in $A[X]$−mod ist als in A−mod. Das Radikal von P_ω ist X und seine Einbettung in P_ω liefert die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow P_\omega \longrightarrow S_\omega \longrightarrow 0.$$

Die Anwendung von dem Funktor $\mathrm{Hom}_{A[X]}(-, S)$ auf diese Folge liefert das folgende Lemma:

Lemma 1.4.1 *Sei S ein einfacher A-Modul. Es gilt:*

$$\mathrm{Hom}_A(X, S) \simeq \mathrm{Ext}^1_{A[X]}(S_\omega, S),$$

$$\mathrm{Ext}^1_A(X, S) \simeq \mathrm{Ext}^2_{A[X]}(S_\omega, S)\ .$$

Gewisse Auslander-Reiten-Folgen in $A[X]$−mod können aus der Auslander-Reiten-Struktur von A erhalten werden [14, 2.5]:

Satz 1.4.2 *Sei $0 \longrightarrow \tau_A M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ eine Auslander-Reiten-Folge in A−mod. Dann ist*

$$0 \longrightarrow \begin{pmatrix} \tau_A M \\ \mathrm{Hom}_A(X, \tau_A M) \end{pmatrix}_{\mathrm{id}_{(X,X)}} \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ id \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} N \\ \mathrm{Hom}_A(X, \tau_A M) \end{pmatrix}_{(X,f)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}} M \longrightarrow 0$$

die Auslander-Reiten-Folge in $A[X]$−mod mit Endterm M. Ist insbesondere $\mathrm{Hom}_A(X, \tau_A M) = 0$, so gilt:

$$\tau_A M \simeq \tau_{A[X]} M\ .$$

Mit dem Modul X kann man auch die *Einpunkt-Coerweiterung* von A durch X konstruieren. Es handelt sich um die Algebra

$$[X]A = \begin{pmatrix} k & \mathrm{Hom}_A(X,k) \\ 0 & A \end{pmatrix} .$$

Die Ergebnisse, die für Einpunkt-Erweiterungen gelten, können dualisiert werden. Es gilt insbesondere:

Satz 1.4.3 *Sei* η*:* $0 \longrightarrow N \longrightarrow Z \longrightarrow \tau_A^- N \longrightarrow 0$ *eine Auslander-Reiten-Folge in* $A-$mod.
Wenn $\mathrm{Hom}_A(\tau_A^- N, X) = 0$ *gilt, dann ist* η *auch eine Auslander-Reiten-Folge in* $[X]A-$mod.

Kapitel 2

Der Auslander-Reiten-Köcher einer Einpunkt-Erweiterung

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $H = H_1 \times \ldots \times H_t$ ein Produkt von endlich dimensionalen zusammenhängenden wilden erblichen Algebren $H_1, \ldots, H_t$. Wir können o.E. voraussetzen, dass H die Wegealgebra eines Köchers $\mathcal{Q}$ mit Zusammenhangskomponenten $\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_t$ ist. Es gilt dann: $H_\lambda \simeq k\mathcal{Q}_\lambda$ für alle $\lambda \in \{1, \ldots, t\}$.

Sei $X \neq 0$ ein H-Modul. In diesem Kapitel wollen wir die Auslander-Reiten-Struktur von der Einpunkt-Erweiterung $H[X]$ untersuchen und spezieller ein Kriterium für die Existenz einer präinjektiven Komponente in dem Auslander-Reiten-Köcher von $H[X]$ beweisen.

2.1 Einpunkt-Erweiterungen von wilden erblichen Algebren

Wir betrachten die Einpunkt-Erweiterung $A{=}H[X]$ von H durch einen H-Modul X. Nach dem Satz 1.1.3 existieren ein Köcher $\mathcal{Q}_A$ und ein Ideal $I \subset < k\mathcal{Q}^+ >^2$, so dass gilt:

$$A \;\simeq\; k\mathcal{Q}_A \,/\, I \; .$$

Sei $\{S_i,\ i \text{ Punkt von } \mathcal{Q}\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem von einfachen H-Moduln. Da A genau einen (bis auf Isomorphie) zusätzlichen einfachen Modul besitzt, enthält $\mathcal{Q}_A$ genau einen zusätzlichen Punkt ω. Wir wollen jetzt die Pfeile von $\mathcal{Q}_A$ und die Anzahl der Erzeugenden von I bestimmen.

Sei $\mathcal{R} = \{\rho_1, \dots, \rho_n\}$ ein minimales Erzeugendensystem von I als zweiseitigem Ideal, so dass ρ_s für jedes $s \in \{1, \dots, n\}$ eine lineare Kombination von Wegen ist, die alle denselben Startpunkt und denselben Endpunkt haben. ρ_s heißt dann *Relation* in $\mathcal{Q}_A$. Für i, j Punkte von $\mathcal{Q}_A$ bezeichnet $N_{\mathcal{R}}(i,j)$ die Anzahl der Relationen in $\mathcal{R}$ mit Anfang i und Ende j und $N_{\mathcal{P}}(i,j)$ die Anzahl der Pfeile von i nach j in $\mathcal{Q}_A$. Ein Satz von K. Bongartz [2, 1.1] hilft uns, diese Zahlen abzuschätzen.

Satz 2.1.1 *Seien i, j Punkte von $\mathcal{Q}_A$. Dann gilt:*

$$N_{\mathcal{P}}(i,j) = \dim_k \operatorname{Ext}^1_A(S_i, S_i) \ ,$$

$$N_{\mathcal{R}}(i,j) = \dim_k \operatorname{Ext}^2_A(S_j, S_j) \ .$$

Aus diesem Satz folgt, dass $\mathcal{Q}$ ein voller Unterköcher von $\mathcal{Q}_A$ ist. Da der zusätzliche einfache Modul S_ω injektiv ist, enden keine Pfeile in ω, das heißt, dass ω eine *Quelle* von $\mathcal{Q}_A$ ist. Für einen Punkt i von $\mathcal{Q}$ ist die projektive Dimension von S_i in $A-$mod und in $H-$mod identisch, also verschwindet der Funktor $\operatorname{Ext}^2_A(S_i, -)$ und in i starten keine Relationen. Der Punkt ω ist dann der einzige mögliche Startpunkt für Relationen.

Sei $r \in \{0, \dots, t+1\}$. Wir wählen jetzt $X_1 \in H_1-$mod, $\dots$, $X_t \in H_t-$mod alle nichttrivial, so dass $X_1, \dots, X_r$ keine unzerlegbaren H-präprojektiven Summanden und $X_{r+1}, \dots, X_t$ keine unzerlegbaren H-präinjektiven Summanden haben. Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir bilden die direkte Summe

$$X(m) = \tau_H^m X_1 \oplus \dots \oplus \tau_H^m X_r \oplus \tau_H^{-m} X_{r+1} \oplus \dots \oplus \tau_H^{-m} X_t \ .$$

In jeder Zusammenhangskomponente $\mathcal{Q}_\lambda$ von $\mathcal{Q}$ teilen wir die Punkte in zwei Mengen auf:

- Für $1 \leq \lambda \leq r$ sei $\mathcal{S}_\lambda$ die Menge aller Punkte i von $\mathcal{Q}_\lambda$, für die der einfache Modul S_i präinjektiv ist, und sei $\mathcal{T}_\lambda$ die Menge der anderen Punkten von $\mathcal{Q}_\lambda$.
- Für $r+1 \leq \lambda \leq t$ sei $\mathcal{S}_\lambda$ die Menge aller Punkte i von $\mathcal{Q}_\lambda$, für die der einfache Modul S_i präinjektiv oder regulär ist, und sei $\mathcal{T}_\lambda$ die Menge der anderen Punkten von $\mathcal{Q}_\lambda$.

Wir bezeichnen dann mit $\mathcal{S}$ die Vereinigung der $\mathcal{S}_\lambda$ und mit $\mathcal{T}$ die Vereinigung der $\mathcal{T}_\lambda$. Da einfache injektive und einfache projektive H_λ-Moduln für alle $\lambda \in \{1, \dots, t\}$ existieren, gilt immer $|\mathcal{S}| \geq t$ und $|\mathcal{T}| \geq t$.

Satz 2.1.2 *Sei A=$H[X(m)]$ die Einpunkt-Erweiterung von H durch $X(m)$ und seien $h, h' \in \mathbb{N}$. Dann existiert $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $m \geq N_1$ gilt:*

(a) Der Köcher $\mathcal{Q}_A$ enthält mindestens h Pfeile von ω nach jedem $i \in \mathcal{S}$ und keine Pfeile von ω nach einem $i \in \mathcal{T}$.

(b) Die Relationen von $\mathcal{Q}_A$ starten alle in ω. Keine enden in $\mathcal{S}$ und jeder Punkt aus $\mathcal{T}$ ist Endpunkt von mindestens h' Relationen.

Beweis: (a) Aus dem Lemma 1.4.1 und dem Satz 2.1.1 folgt:

$$N_{\mathcal{P}}(\omega,i) = \dim_k \operatorname{Ext}^1_A(S_\omega,S_i) = \dim_k \operatorname{Hom}_H(X,S_i)$$

$$N_{\mathcal{R}}(\omega,i) = \dim_k \operatorname{Ext}^2_A(S_\omega,S_i) = \dim_k \operatorname{Ext}^1_H(X,S_i)$$

Zu jedem einfachen H-Modul S_i gibt es genau ein $\lambda \in \{1,\dots,t\}$, so dass S_i ein H_λ-Modul ist. Wir können also das Problem in $H_\lambda-$mod zurückführen. Wir wählen N_0 so, dass für alle $m \geq N_0$ gilt:

1. $\dim \operatorname{Hom}_{H_\lambda}(\tau^m_{H_\lambda} X_\lambda, S_i) \geq h$ für alle $\lambda \in \{1,\dots,r\}$ und $i \in \mathcal{S}_\lambda$.

1'. $\dim \operatorname{Hom}_{H_\lambda}(\tau^{-m}_{H_\lambda} X_\lambda, S_i) \geq h$ für alle $\lambda \in \{r+1,\dots,t\}$ und $i \in \mathcal{S}_\lambda$.

2. $\operatorname{Hom}_{H_\lambda}(\tau^m_{H_\lambda} X_\lambda, S_j) = 0$ für alle $\lambda \in \{1,\dots,r\}$ und $j \in \mathcal{T}_\lambda$.

2'. $\operatorname{Hom}_{H_\lambda}(\tau^{-m}_{H_\lambda} X_\lambda, S_j) = 0$ für alle $\lambda \in \{r+1,\dots,t\}$ und $j \in \mathcal{T}_\lambda$.

Diese Wahl ist möglich nach den Sätzen über Homomorphismen aus dem Paragraph 1.3. Sei $m \geq N_0$. Es gibt dann mindestens h Pfeile von ω nach jedem $i \in \mathcal{S}_\lambda$ und keine von ω nach $j \in \mathcal{T}_\lambda$.

(b) Um die Anzahl von Relationen zu berechnen, benutzen wir die Auslander-Reiten-Formel (1.2.1):

$$N_{\mathcal{R}}(\omega,i) = \dim_k \operatorname{Ext}^1_H(X,S_i) = \dim_k \operatorname{Hom}_H(S_i,\tau_H X)$$

Aus den Sätzen 1.3.1 und 1.3.3 folgt dann direkt, dass ein $N_1 \geq N_0$ existiert, so dass für $m \geq N_1$ gilt

3. $\dim_k \operatorname{Hom}_{H_\lambda}(S_i, \tau^{m+1}_{H_\lambda} X_\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \{1,\dots,r\}$ und $i \in \mathcal{S}_\lambda$.

3'. $\dim_k \operatorname{Hom}_{H_\lambda}(S_i, \tau^{-m+1}_{H_\lambda} X_\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \{r+1,\dots,t\}$ und $i \in \mathcal{S}_\lambda$.

4. $\dim_k \operatorname{Hom}_{H_\lambda}(S_i, \tau^{m+1}_{H_\lambda} X_\lambda) \geq h'$ für alle $\lambda \in \{1,\dots,r\}$ und $j \in \mathcal{T}_\lambda$.

4'. $\dim_k \operatorname{Hom}_{H_\lambda}(S_i, \tau^{-m+1}_{H_\lambda} X_\lambda) \geq h'$ für alle $\lambda \in \{r+1,\dots,t\}$ und $j \in \mathcal{T}_\lambda$.

Dies bedeutet, dass für diese Wahl von $X(m)$ die einzigen möglichen Relationen in $\mathcal{Q}_A$ in ω starten und in einem Punkt aus $\mathcal{T}$ enden, und dass es zwischen ω und jedem $i \in \mathcal{T}$ mindestens h' Relationen gibt.

2.2 Der Auslander-Reiten-Köcher von $H[X(m)]$

Wir wählen wie im Paragraph 2.1 einen H-Modul $X(m)$ der Form

$$X(m) = \tau_H^m X_1 \oplus \ldots \oplus \tau_H^m X_r \oplus \tau_H^{-m} X_{r+1} \oplus \ldots \oplus \tau_H^{-m} X_t.$$

Sei μ die Anzahl der Elementen von $\mathcal{S}$.

Theorem: *Sei $m \gg 0$ und sei A die Algebra $A = H[X(m)]$. Dann gilt:*

(a) Der Auslander-Reiten-Köcher von A besitzt genau eine präinjektive Komponente. Es ist die präinjektive Komponente einer wilden Wegealgebra $\tilde{A}$ mit $(\mu + 1)$ Einfachen.

(b) Der Köcher $\Gamma(A)$ enthält auch unendlich viele Komponenten $\mathcal{C}$ vom Typ $\mathbb{Z}\mathbf{A}_\infty$ mit der Eigenschaft:

$$\forall\ M \in \mathcal{C} \quad \exists\ l_0 \in \mathbb{N} \quad mit \quad \tau_A^l M \in \tilde{A}\text{−mod} \quad \forall\ l \geq l_0.$$

(c) Ist N ein regulärer $\tilde{A}$-Modul, so existiert ein $l_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\tau_A^l \tau_{\tilde{A}}^{l_0} N \simeq \tau_{\tilde{A}}^{l+l_0} N \quad \textit{für alle } l \geq 0.$$

Besitzt für ein $\lambda \in \{1, \ldots, t\}$ X_λ keine unzerlegbaren H-präprojektiven direkten Summanden, so gilt zusätzlich:

(d) $\mathcal{P}(H_\lambda)$ ist eine präprojektive Komponente in $\Gamma(A)$.

(e) Der Auslander-Reiten-Köcher von A enthält dann auch unendlich viele reguläre Komponenten $\mathcal{D}$ vom Typ $\mathbb{Z}\mathbf{A}_\infty$, für die gilt:

$$\forall\ M \in \mathcal{D} \quad \exists\ l_0 \in \mathbb{N} \quad mit \quad \tau_A^{-l} M \in H\text{−mod} \quad \forall\ l \geq l_0.$$

(f) Ist N ein regulärer H_λ-Modul, so existiert ein $l_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\tau_A^{-l} \tau_H^{-l_0} N \simeq \tau_H^{-l-l_0} N \quad \textit{für alle } l \geq 0.$$

Wir wollen zuerst eine Zahl N definieren, so dass das Theorem für alle $m \geq N$ gilt. Sei Q_j die injektive Hülle von S_j in A−mod für alle $j \in \mathcal{T}$. Die injektive Hülle von S_j in H−mod ist dann $H_\lambda Q_j$. Die Ergebnisse der vorherigen Paragraphen liefern uns $N_1, \ldots, N_5$, die folgende Bedingungen erfüllen:

- $N_1 \in \mathbb{N}$ wird wie im Satz 2.1.2 für $h = \dim_k H$ und $h' = h^2 + 1$ gewählt.
- Sei $\lambda \in \{1, \ldots, t\}$, so dass X_λ einen unzerlegbaren H-regulären direkten Summanden hat. Nach dem Satz 1.3.4 existiert $N_2(\lambda)$ so dass jeder Homomorphismus $\tau_{H_\lambda}^- S_j \longrightarrow H_\lambda Q_j$ über $\tau_{H_\lambda}^m X_\lambda$ (bzw. über $\tau_{H_\lambda}^{-m} X_\lambda$) für $m \geq N_2$ und $j \in \mathcal{T}_\lambda$ faktorisiert. Sei N_2 das Maximum dieser $N_2(\lambda)$.

- Sei $\lambda \in \{1, \ldots, r\}$, so dass X_λ ein präinjektiver H-Modul ist. Dann existiert nach dem Korollar 1.3.5(a) eine natürliche Zahl $N_3(\lambda)$, so dass ein Monomorphismus $\tau_{H_\lambda}^{-} S_j \longrightarrow \tau_{H_\lambda}^{m} X_\lambda$ für $m \geq N_3(\lambda)$ und $j \in \mathcal{T}_\lambda$ existiert. Sei N_3 das Maximum dieser $N_3(\lambda)$.

- Sei $\lambda \in \{r+1, \ldots, t\}$, so dass X_λ ein präprojektiver H-Modul ist. Für $j \in \mathcal{T}_\lambda$ ist S_j auch präprojektiv und $\tau_{H_\lambda}^{s} S_j$ ist dann unzerlegbar projektiv für ein $s \in \mathbb{N}$ geeignet. Dann existiert nach dem Korollar 1.3.5(b) eine natürliche Zahl $N_4(\lambda)$, so dass für alle $m \geq N_4(\lambda)$ und $j \in \mathcal{T}_\lambda$ ein Epimorphismus $\tau_{H_\lambda}^{-m+s} X_\lambda \longrightarrow \tau_{H_\lambda}^{s} H_\lambda Q_j$ existiert. Sei N_4 das Maximum dieser $N_4(\lambda)$.

- Es existiert N_5, so dass $\tau_{H_\lambda}^{m} X_\lambda$ (bzw. $\tau_{H_\lambda}^{-m} X_\lambda$) aufrichtig in $H_\lambda-$mod ist für alle $m \geq N_5$.

Wir wählen N=max$\{N_1, \ldots, N_5\}$ und $m \geq N$. Wir definieren jetzt eine Faktoralgebra von $A = H[X(m)]$ und zeigen, dass sie eine präinjektive Komponente besitzt.

Sei $1_H = \sum_{i=1}^{n} e_i$ eine Zerlegung der Eins von H in eine Summe von paarweise orthogonalen Idempotenten, so dass

$$He_i / \operatorname{rad}(Hei) \;\simeq\; S_i \quad \forall\, i \in \mathcal{Q}_0$$

gilt. Wir betrachten für $\tilde{e} = \sum_{j \in \mathcal{T}} e_i$ die Faktoralgebra

$$\tilde{A} = A \;/ < \tilde{e} > .$$

Diese ist eine wilde erbliche Algebra mit $(\mu + 1)$ Einfachen. Es gilt nämlich nach der Wahl von $m \geq N_1$:

$$\tilde{A} \;\simeq\; k\mathcal{Q}_{\tilde{A}},$$

wobei $\mathcal{Q}_{\tilde{A}}$ der volle Unterköcher von $\mathcal{Q}_A$ mit Punktmenge $\{\omega\} \cup \mathcal{S}$ ist. Der Köcher $\mathcal{Q}_{\tilde{A}}$ ist zusammenhängend und wild, weil $\mu \geq 1$ und weil er mindestens $h = \dim_k(H)$ Pfeile von ω nach jedem Punkt aus $\mathcal{S}$ enthält. Er hat ω als einzige Quelle. Also hat der Auslander-Reiten-Köcher von $\tilde{A}$ genau eine (unendliche) präinjektive Komponente $\mathcal{I}(\tilde{A})$.

Die Projektion $A \longrightarrow \tilde{A}$ liefert die volle exakte Einbettung

$$\tilde{A}-\text{mod} \hookrightarrow A-\text{mod}$$

Wir zeigen jetzt, dass $\mathcal{I}(\tilde{A})$ auch eine Komponente von $\Gamma(A)$ ist.

Der einfache injektive Modul S_ω ist die einzige Senke von $\mathcal{I}(\tilde{A})$ und der Endterm folgender Auslander-Reiten-Folge in $\tilde{A}-$mod:

$$0 \longrightarrow \tau_{\tilde{A}} S_\omega \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathcal{S}} Q_i^{\alpha_i} \longrightarrow S_\omega \longrightarrow 0 \qquad (\mathcal{E}),$$

wobei $\alpha_i \geq h$ die Anzahl der Pfeile $\omega \to i$ ist und Q_i die injektive Hülle von S_i in $\tilde{A}-$mod ist. Da es in $\mathcal{Q}_A$ keine Relationen gibt, die in $i \in \mathcal{S}$ enden, ist Q_i auch die injektive Hülle von S_i in $A-$mod. Damit ist die Sequenz $\mathcal{E}$ auch eine Auslander-Reiten-Folge in $A-$mod.

Wir nehmen an, dass $\mathcal{I}(\tilde{A})$ keine Komponente von $\Gamma(A)$ ist. Dann existieren ein unzerlegbarer Modul $U \in \mathcal{I}(\tilde{A})$, ein unzerlegbarer A-Modul $M \notin \tilde{A}-$mod und eine irreduzible Abbildung in $A-$mod

$$M \longrightarrow U \;\text{ oder }\; U \longrightarrow M.$$

Da $\mathcal{E}$ eine Auslander-Reiten-Folge in $A-$mod ist, in der alle unzerlegbaren injektiven $\tilde{A}$-Moduln vorkommen, muss die τ_A-Bahn von M dann einen A-injektiven Modul enthalten. Also können wir ohne Einschränkung M so wählen, dass er unzerlegbar injektiv in $A-$mod ist. Das heißt, dass er isomorph zu der A-injektiven Hülle Q_j von einem einfachen H-Modul S_j für $j \in \mathcal{T}$.

Es reicht uns dann zu zeigen, dass es keinen unzerlegbaren injektiven A-Modul Q_j mit Sockel S_j für $j \in \mathcal{T}$ gibt, so dass der Faktormodul Q_j/S_j einen direkten Summand in $\mathcal{I}(\tilde{A})$ besitzt. Dafür brauchen wir folgende Proposition:

Proposition: *Sei $m \geq N$ und sei $j \in \mathcal{T}$. Dann gilt:*

(A) Der Modul $Y_j = Q_j/S_j$ ist ein Ziegel in $A-$mod, d.h. $\mathrm{End}_A(Y_j)$ ist isomorph zu k.

(B) Y_j hat Selbsterweiterungen. Wenn Y_j sich als $\tilde{A}$-Modul auffassen lässt, ist er also regulär in $\tilde{A}-$mod.

2.3 Beweis der Proposition

Sei $j \in \mathcal{T}$. Wir wählen $\lambda \in \{1, \dots, t\}$ so, dass j ein Punkt von $\mathcal{Q}_\lambda$ ist.

(A) Y_j ist ein Ziegel für $m \geq N$.

Sei $m \geq N$ und sei η die kurze exakte Folge $0 \longrightarrow S_j \longrightarrow Q_j \longrightarrow Y_j \longrightarrow 0$. Es reicht zu zeigen, dass der k-Vektorraum $\mathrm{Hom}_A(Q_j, Y_j)$ eindimensional ist. Dann ist Y_j ein Ziegel.

Wir wenden den Funktor $\operatorname{Hom}_A(Q_j, -)$ auf η an und bekommen die lange exakte Sequenz:

$$0 = \operatorname{Hom}_A(Q_j, S_j) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(Q_j, Q_j) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(Q_j, Y_j) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(Q_j, S_j)$$

Wir zeigen, dass $\operatorname{Ext}^1_A(Q_j, S_j) = 0$ ist. Dann gilt

$$\operatorname{Hom}_A(Q_j, Q_j) \simeq \operatorname{Hom}_A(Q_j, Y_j) \simeq k \ ,$$

und die Behauptung ist bewiesen. Nach der Auslander-Reiten-Formel gilt

$$\operatorname{Ext}^1_A(Q_j, S_j) \simeq \mathrm{D}\, \underline{\operatorname{Hom}}_A(\tau_A^- S_j, Q_j) \ .$$

Weil $m \geq N_1$ und $j \in \mathcal{T}$ ist, gilt $\operatorname{Hom}_A(X(m), S_j) = 0$. Nach dem Satz 1.4.2 ist dann $\tau_A^- S_j \simeq \tau_H^- S_j$. Wir betrachten also einen Homomorphismus $f \in \operatorname{Hom}_A(\tau_H^- S_j, Q_j)$.

$S_j \in H_\lambda-\mathrm{mod}$, also ist $\tau_{H_\lambda}^- S_j \simeq \tau_H^- S_j$ ein H_λ-Modul. Da $H_\lambda-\mathrm{mod}$ abgeschlossen gegen Bilder ist, muss f über die Einbettung $\epsilon : H_\lambda Q_j \hookrightarrow Q_j$ faktorisieren. Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \tau_{H_\lambda}^- S_j & \xrightarrow{f_\lambda} & H_\lambda Q_j \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon} \\ \tau_{H_\lambda}^- S_j & \xrightarrow{f} & Q_j \end{array} \quad ,$$

wobei $f_\lambda \in \operatorname{Hom}_{H_\lambda}(\tau_{H_\lambda}^- S_j, H_\lambda Q_j)$. Wir zeigen, dass f_λ über den H_λ-Modul $\tau_{H_\lambda}^m X_\lambda$ (bzw. $\tau_{H_\lambda}^{-m} X_\lambda$) faktorisiert.

Wenn X_λ einen unzerlegbaren H-regulären Summand hat, gilt es schon nach der Wahl von $m \geq N_2$.

Sei jetzt X_λ präinjektiv in $H_\lambda-\mathrm{mod}$, also $1 \leq \lambda \leq r$. Der Modul S_j ist regulär oder präprojektiv in $H_\lambda-\mathrm{mod}$. Weil m größer oder gleich N_3 ist, existiert ein Monomorphismus $\alpha : \tau_{H_\lambda}^- S_j \longrightarrow \tau_{H_\lambda}^m X_\lambda$. Da $H_\lambda Q_j$ ein injektiver H_λ-Modul ist, faktorisiert dann f_λ über α.

Als Letztes überprüfen wir den Fall, in dem X_λ präprojektiv in H_λ-mod ist (also $\lambda \geq r+1$). Wir wählen $s \in \mathbb{N}$ so, dass $\tau_{H_\lambda}^{s-1} S_j$ unzerlegbar H_λ-projektiv ist. Es existiert ein Epimorphismus $\pi : \tau_{H_\lambda}^{-m+s} X_\lambda \longrightarrow \tau_{H_\lambda}^s H_\lambda Q_j$. Der Morphismus $\tau_{H_\lambda}^s f_\lambda \in \operatorname{Hom}_H(\tau_H^{s-1} S_j, \tau_H^s H_\lambda Q_j)$ startet in einem projektiven Modul. Er faktorisiert also über π und damit faktorisiert f_λ über $\tau_{H_\lambda}^{-s}\pi \in \operatorname{Hom}_{H_\lambda}(\tau_{H_\lambda}^- S_j, \tau_{H_\lambda}^{-m} X_\lambda)$.

In allen drei Fällen erhalten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \tau_{H_\lambda}^{\pm m} X_\lambda & \xrightarrow{\beta} & H_\lambda Q_j \\ \uparrow \alpha & & \downarrow \epsilon \\ \tau_{H_\lambda}^{-} S_j & \xrightarrow{f} & Q_j \end{array} \quad .$$

Da Q_j injektiv in $A-$mod ist, faktorisiert die Abbildung $\beta\epsilon$ über die Einbettung von $\tau_{H_\lambda}^{m} X_\lambda$ (bzw. von $\tau_{H_\lambda}^{-m} X_\lambda$) in P_ω. Damit faktorisiert f über den A-projektiven Modul P_ω. Es gilt dann für alle $m \geq N$

$$\mathrm{Ext}_A^1(Q_j, S_j) \simeq \mathrm{D}\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(\tau_{H_\lambda}^{-} S_j, Q_j) = 0.$$

Also ist Y_j ein Ziegel in $A-$mod.

(B) Y_j hat Selbsterweiterungen für $m \geq N$.

Sei $m \geq N$. Nach Anwendung von $\mathrm{Hom}_A(Y_j, -)$ auf η bekommen wir:

$$0 = \mathrm{Ext}_A^1(Y_j, Q_j) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(Y_j, Y_j) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^2(Y_j, S_j) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^2(Y_j, Q_j) = 0 \ .$$

Also reicht es zu zeigen, dass $\mathrm{Ext}_A^2(Y_j, S_j) \neq 0$. Wir betrachten die kurze exakte Folge θ:

$$0 \longrightarrow HY_j \longrightarrow Y_j \longrightarrow (S_\omega)^z \longrightarrow 0 \ ,$$

mit $z = (\underline{\dim}\, Q_j)_\omega = (\underline{\dim}\, P_\omega)_j = (\underline{\dim}\, X(m))_j$. Da $m \geq N_5$, ist $X(m)$ aufrichtig in $H-$mod, also ist $z \geq 1$. Wir wenden $\mathrm{Hom}_A(-, S_j)$ auf θ an:

$$\begin{array}{l} 0 = \mathrm{Ext}_A^1(S_\omega{}^z, S_j) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(Y_j, S_j) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(HY_j, S_j) \longrightarrow \ \ldots \\ \quad\ \mathrm{Ext}_A^2(S_\omega{}^z, S_j) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^2(Y_j, S_j) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^2(HY_j, S_j) = 0 \ . \end{array}$$

Es gilt $\mathrm{Ext}_A^1(S_\omega, S_j) = 0$ nach der Wahl von $m \geq N_1$. Da HY_j sich als H-Modul auffassen lässt, ist seine projektive Dimension in $A-$mod wie in $H-$mod 0 oder 1, also $\mathrm{Ext}_A^2(HY_j, S_j) = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \dim_k \mathrm{Ext}_A^2(Y_j, S_j) = & \quad z \dim_k \mathrm{Ext}_A^2(S_\omega, S_j) - \dim_k \mathrm{Ext}_A^1(HY_j, S_j) \\ & \qquad + \dim_k \mathrm{Ext}_A^1(Y_j, S_j) \\ \geq & \quad \dim_k \mathrm{Ext}_A^2(S_\omega, S_j) - \dim_k \mathrm{Ext}_H^1(HY_j, S_j) \quad . \end{aligned}$$

Die Dimension von $\mathrm{Ext}_H^1(HY_j, S_j)$ ist eine Konstante von H, sie hängt also nicht von der Wahl von m ab. Für jedes i ist $\dim_k \mathrm{Ext}_H^1(S_i, S_j) \leq h$ und HY_j hat Länge höchstens h, also gilt $\dim_k \mathrm{Ext}_H^1(HY_j, S_j) \leq h^2$. Wir haben N_1 so gewählt, dass

$$\forall\, m \geq N_1 \quad \dim_k \mathrm{Ext}_A^2(S_\omega, S_j) \geq h^2 + 1.$$

Für $m \geq N$ gilt dann: $\dim_k \operatorname{Ext}^2_A(Y_j, S_j) \geq 1$. Also hat der Modul Y_j Selbsterweiterungen.

Bemerkung: Falls Y_j sich als $\tilde{A}$-Modul auffassen lässt, ist er also regulär in $\tilde{A}-\mathrm{mod}$. Insbesondere ist Y_j ein Ziegel der Quasilänge $\leq \mu$ in $\tilde{A}-\mathrm{mod}$ nach [6, 2.6] und, falls $\mu > 1$, sogar der Quasilänge $\leq \mu - 1$ nach [9, 3.3].

2.4 Beweis des Theorems

Sei $m \geq N$.

(a): Aus der Proposition folgern wir, dass Y_j für $j \in \mathcal{T}$ keinen direkten Summand in $\mathcal{I}(\tilde{A})$ besitzt. Also ist $\mathcal{I}(\tilde{A})$ eine Komponente von $\Gamma(A)$. Da sie den einzigen einfachen injektiven Modul von $A-\mathrm{mod}$ enthält, ist $\mathcal{I}(\tilde{A})$ damit die einzige präinjektive Komponente von $\Gamma(A)$.

(b) und *(c)*: Wir betrachten jetzt A als eine iterierte Einpunkt-Coerweiterung von $\tilde{A}$. Sei nämlich $j_1 \in \mathcal{T}$ eine Senke von Q_A. Dann gilt

$$A \simeq \begin{pmatrix} k & \operatorname{Hom}_k(Y_{j_1}, k) \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = [Y_{j_1}]A_1 \ ,$$

wobei A_1 die Faktoralgebra $A\,/< e_{j_1} >$ ist. Dieses Verfahren wird wiederholt mit $j_2 \in \mathcal{T}$ Senke von $Q_A \setminus \{j_1\}$, usw., bis $\{j_1, \ldots, j_s\}$ die ganze Menge $\mathcal{T}$ ergibt. Dann bekommen wir:

$$A \simeq [Y_{j_1}] \ldots [Y_{j_s}]A_s \ ,$$

wobei $A_s \simeq A\,/< e_{j_1}, \ldots, e_{j_s} >= A\,/<\tilde{e}>= \tilde{A}$. Iterierte Anwendungen von dem Satz 1.4.3 liefern das folgende Lemma.

Lemma 2.4.1 *Sei* $M \in \tilde{A}-\mathrm{mod}$ *mit* $\operatorname{Hom}_A(\tau^-_{\tilde{A}} M, Y_j) = 0$ *für alle* $j \in \mathcal{T}$. *Dann gilt:*

$$\tau^-_{\tilde{A}} M \simeq \tau^-_A M \ .$$

Sei Z ein regulärer $\tilde{A}$-Modul. Wir suchen $l_0 \in \mathbb{N}$, so dass es nur triviale Morphismen in $\operatorname{Hom}_A(\tau^{l+l_0}_{\tilde{A}} Z, Y_j)$ für alle $l \geq 0$ und $j \in \mathcal{T}$ gibt. Aus dem Lemma 2.4.1 folgt dann $\tau^{l+l_0}_{\tilde{A}} Z \simeq \tau^l_A \tau^{l_0}_{\tilde{A}} Z$ für alle $l \geq 0$.

Sei $j \in \mathcal{T}$. Nach der Proposition wissen wir, dass Y_j ein Ziegel ist. Sei $\tilde{Y}_j$ der größte $\tilde{A}$-Untermodul von Y_j. Jeder Morphismus aus $\operatorname{Hom}_A(\tau^l_{\tilde{A}} Z, Y_j)$ faktorisiert über die Einbettung $\tilde{Y}_j \hookrightarrow Y_j$. Es reicht uns dann zu zeigen, dass es keine nichttriviale Homomorphismen von $\tau^l_{\tilde{A}} Z$ nach $\tilde{Y}_j$ für $l \gg 0$ gibt.

$\tilde{Y}_j$ ist ein $\tilde{A}$-Modul und $\tau^l_{\tilde{A}} Z$ ist regulär in $\tilde{A}-\mathrm{mod}$. Wir brauchen also nur zu beweisen, dass $\tilde{Y}_j$ keine unzerlegbaren $\tilde{A}$-präinjektiven Summanden hat.

In den Speziallfällen $Y_j = \tilde{Y}_j$ und $\tilde{Y}_j = 0$ ist es offensichtlich, weil $\tilde{Y}_j$ dann ein regulärer $\tilde{A}$-Modul ist.

Sei also $\tilde{Y}_j \neq 0$ kein $\tilde{A}$-Modul. Er hat keine unzerlegbaren $\tilde{A}$-injektiven direkten Summanden, weil injektive $\tilde{A}$-Moduln auch A-injektiv sind und weil er in dem nichtinjektiven unzerlegbaren A-Modul Y_j enthalten ist. Wir betrachten die Auslander-Reiten-Folge mit Endterm S_ω

$$0 \longrightarrow \tau_{\tilde{A}} S_\omega \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathcal{S}} Q_i^{\alpha_i} \longrightarrow S_\omega \longrightarrow 0 \qquad (\mathcal{E})$$

und wenden darauf den Funktor $(\tilde{A}e_i, -)$ für $i \in \mathcal{S}$ an. Wir bekommen

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(\tilde{A}e_i, \tau_{\tilde{A}} S_\omega) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(\tilde{A}e_i, \bigoplus_{p \in \mathcal{S}} Q_p^{\alpha_p}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(\tilde{A}e_i, S_\omega) = 0\,.$$

Also gilt: $(\underline{\dim}\, \tau_{\tilde{A}} S_\omega)_i \geq (\underline{\dim}\, Q_i^{\alpha_i})_i = \alpha_i \geq h > (\underline{\dim}\, \tilde{Y}_j)_i$ für alle $i \in \mathcal{S}$. Daraus folgt, dass $\tau_{\tilde{A}} S_\omega$ auch kein Summand von $\tilde{Y}_j$ ist. Wir konstruieren für jedes $i \in \mathcal{S}$ eine kurze exakte Folge in $\tilde{A}-\mathrm{mod}$

$$0 \longrightarrow K_i \longrightarrow Q_i \longrightarrow S_\omega \longrightarrow 0 \quad (\mathcal{F})\ ,$$

wobei der Epimorphismus eine irreduzible Abbildung aus $\mathcal{E}$ ist. Dann folgt aus dem Satz 1.3.6, dass K_i ein Ziegel ist und dass

$$\dim_k \operatorname{Ext}_A^1(K_i, K_i) = \dim_k \operatorname{Hom}_A(Q_i, S_\omega) - 1 = \alpha_i - 1 > 0\ .$$

Also ist K_i ein regulärer $\tilde{A}$-Modul. Wir wenden dann s Mal $\tau_{\tilde{A}}$ auf $\mathcal{F}$ an und bekommen Epimorphismen $\tau_{\tilde{A}}^s Q_i \twoheadrightarrow \tau_{\tilde{A}}^s S_\omega$ für alle $i \in \mathcal{S}$ und $s \in \mathbb{N}$.

Für alle $i \in \mathcal{S}$ wählen wir eine irreduzible Abbildung $\varphi_i : \tau_{\tilde{A}} S_\omega \to Q_i$ aus $\mathcal{E}$. Der Sockel von $\tau_{\tilde{A}} S_\omega$ ist nicht einfach, also kann φ_i nicht injektiv sein. Da φ_i irreduzibel ist, muss φ_i also surjektiv sein. Mit der kurzen exakten Folge

$$0 \longrightarrow R_i \longrightarrow \tau_{\tilde{A}} S_\omega \longrightarrow Q_i \longrightarrow 0 \quad (\mathcal{F}')\ ,$$

verfahren wir wie mit $\mathcal{F}$, es liefert uns Epimorphismen $\tau_{\tilde{A}}^{s+1} S_\omega \twoheadrightarrow \tau_{\tilde{A}}^s Q_i$ für alle $i \in \mathcal{S}$ und $s \in \mathbb{N}$. Wir bekommen eine unendliche Folge

$$\ldots \twoheadrightarrow \tau_{\tilde{A}}^{s+1} S_\omega \twoheadrightarrow \tau_{\tilde{A}}^s Q_i \twoheadrightarrow \tau_{\tilde{A}}^s S_\omega \twoheadrightarrow \ldots \twoheadrightarrow \tau_{\tilde{A}}^2 S_\omega \twoheadrightarrow \tau_{\tilde{A}} Q_i \twoheadrightarrow \tau_{\tilde{A}} S_\omega\,.$$

Sei N ein unzerlegbarer präinjektiver nicht injektiver $\tilde{A}$-Modul. Er ist isomorph zu $\tau_{\tilde{A}}^s S_\omega$ oder zu $\tau_{\tilde{A}}^s Q_i$ für $s \geq 1$ und $i \in \mathcal{S}$ geeignet, also gibt es einen Epimorphismus von N nach $\tau_{\tilde{A}} S_\omega$. Daraus folgt:

$$(\underline{\dim}\, N)_i \geq (\underline{\dim}\, \tau_{\tilde{A}} S_\omega)_i \geq h > (\underline{\dim}\, \tilde{Y}_j)_i$$

für alle $i \in \mathcal{S}$. Also hat $\tilde{Y}_j$ keine unzerlegbare $\tilde{A}$-präinjektive Summanden. Es gilt dann:

$$\forall\ j \in \mathcal{S} \quad \exists\ l_j \in \mathbb{N} \text{ mit } \quad \forall\ l \geq 0 \quad \mathrm{Hom}_A(\tau_{\tilde{A}}^{l+l_j} Z, \tilde{Y}_j) = 0\ .$$

Für l_0 =max$\{l_j,\ j \in \mathcal{T}\}$ ist *(c)* bewiesen. Da es in $\Gamma(\tilde{A})$ unendlich viele reguläre Komponenten vom Typ $\mathbb{Z}\mathbf{A}_\infty$ gibt, bekommen wir unendlich viele Komponenten in $A-$mod, die die Bedingung von *(b)* erfüllen.

(d), *(e)* und *(f)*: Sei $\lambda \in \{1, \ldots, t\}$ und sei X_λ ohne unzerlegbare präprojektive Summanden. Dann folgt direkt aus dem Satz 1.4.2, dass $\mathcal{P}(H_\lambda)$ auch eine Komponente von $\Gamma(A)$ ist, weil $X(m)$ in jeden präprojektiven H_λ-Modul nur trivial abbildet. Sei $\mathcal{C}$ eine reguläre Komponente von $\Gamma(H_\lambda)$ und $M \in \mathcal{C}$. Der Modul X_λ lässt sich in eine direkte Summe von präinjektiven und regulären H_λ-Moduln zerlegen, also existiert nach den Sätzen 1.3.1 und 1.3.3 eine Zahl l_0, so dass es für alle $l \geq l_0$ keine nichttriviale Morphismen von $\tau_H^m X_\lambda$ (bzw. $\tau_H^{-m} X_\lambda$) nach $\tau_H^{-l} M$ gibt. Also gilt nach dem Satz 1.4.2

$$\tau_A^{-l} \tau_H^{-l_0} M \ \simeq \tau_H^{-l-l_0} M \quad \forall\ l \geq 0\ .$$

Daraus folgt die Behauptung.

Kapitel 3

Beispiele

3.1 Einpunkt-Erweiterungen der verallgemeinerten Kronecker-Algebra

Sei $r \geq 3$ und $\mathcal{Q}_r$ der verallgemeinerte Kronecker-Köcher

$$\overset{2}{\bullet} \underset{\alpha_r}{\overset{\alpha_1}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\vdots}}}} \overset{1}{\bullet} .$$

Dann ist die Wegealgebra $H = k\mathcal{Q}_r$ wild. Der einfache Modul S_1 zum Punkt 1 ist projektiv, während S_2 injektiv ist. Sei X ein H-Modul ohne präinjektive Summanden. Für $0 \neq m \in \mathbb{N}$ bilden wir die Erweiterung von H durch $\tau_H^{-m} X$ und bekommen die Algebra $H[\tau_H^{-m} X]$ als Wegealgebra des Köchers mit Relationen

$$\overset{\omega}{\bullet} \underset{\beta_s}{\overset{\beta_1}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\vdots}}}} \overset{2}{\bullet} \underset{\alpha_r}{\overset{\alpha_1}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\vdots}}}} \overset{1}{\bullet} ,$$

mit $s = \underline{\dim}(\tau_H^{-m} X)_2$, wobei die Anzahl der Relationen von dem Dimensionsvektor von $\tau_H^{-m} X$ bestimmt wird. Wir können nach dem Theorem m groß genug wählen, so dass der Auslander-Reiten-Köcher von $H[\tau_H^{-m} X]$ eine präinjektive Komponente mit zwei τ-Bahnen besitzt. Wenn X keine unzerlegbare präprojektive direkte Summanden besitzt, dann hat der Auslander-Reiten-Köcher von $H[\tau_H^{-m} X]$ eine präprojektive Komponente, die präprojektive Komponente von H. In dem Fall, in dem X einen unzerlegbaren präprojektiven direkten Summanden hat, existiert im Allgemeinen keine präprojektive Komponente.

Lemma 3.1.1 *Sei X ein H-Modul, der einen unzerlegbaren präprojektiven direkten Summanden P und einen unzerlegbaren regulären direkten Summanden R besitzt. Dann hat der Auslander-Reiten-Köcher von $H[\tau_H^{-m} X]$ keine präprojektive Komponente.*

Beweis: Wir wählen P so, dass keiner seiner Vorgänger ein Summand von X ist. Wäre $\mathcal{P}$ eine präprojektive Komponente von $H[\tau_H^{-m} X]$, dann müsste sie den einzigen einfachen projektiven $H[\tau_H^{-m}X]$-Modul S_1 und nach dem Satz 1.4.2 den Anfang von $\mathcal{P}(H)$ (d.h. alle Vorgänger von $\tau_H^{-m}P$) enthalten. Deswegen müssten $\tau_H^{-m}P$, P_ω und $\tau_H^{-m}R$ auf $\mathcal{P}$ sitzen. Der Modul $\tau_H^{-m}R$ liegt aber auf einem Zyklus, weil er H-regulärer Modul ist, also kann er nicht zu $\mathcal{P}$ gehören. Daraus folgt, dass $H[\tau_H^{-m}X]$ keine präprojektive Komponente besitzt.

Wenn jetzt X ein präprojektiver Modul ist, können wir aus [4, 2.6] den folgenden Satz schließen.

Satz 3.1.2 *Sei X präprojektiver H-Modul. Wenn alle direkte Summanden von X auf einem Schnitt liegen, dann hat $H[\tau_H^{-m}X]$ eine präprojektive Komponente mit drei τ-Bahnen.*

Wenn X die Vorraussetzungen dieses Satzes nicht erfüllt, besitzt dann die Algebra $H[\tau_H^{-m}X]$ keine präprojektive Komponente.

Lemma 3.1.3 *Sei Y ein unzerlegbarer präprojektiver H-Modul und setze $X = Y \oplus \tau_H^{-}Y$. Dann besitzt $H[\tau_H^{-m}X]$ keine präprojektive Komponente für alle $m \geq 0$.*

Beweis: Wenn $H[\tau_H^{-m}X]$ eine präprojektive Komponente $\mathcal{P}$ besitzt, dann muss sie den einzigen einfachen projektiven $H[\tau_H^{-m}X]$-Modul S_1 enthalten. Die Auslander-Reiten-Struktur von $\mathcal{P}(H)$ wird bis $\tau_H^{-m}Y$ durch Einpunkt-Erweiterung nicht gestört, also sitzt $\tau_H^{-m}Y$ auf $\mathcal{P}$. Da $\tau_H^{-m}Y$ ein direkter Summand des Radikals von P_ω ist, muss dann P_ω zu $\mathcal{P}$ gehören. Aber dies ist unmöglich, weil P_ω auf einem Zyklus liegt. Betrachte nämlich die Auslander-Reiten-Sequenz in $H[\tau_H^{-m}X]-$mod, die in $\tau_H^{-m-1}Y$ endet:

$$0 \longrightarrow \tau_{H[\tau_H^{-m}X]}\tau_H^{-m-1}Y \longrightarrow Z \longrightarrow \tau_H^{-m-1}Y \longrightarrow 0\ .$$

Aus dem Satz 1.4.2 können wir folgern, dass $\tau_{H[\tau_H^{-m}X]}\tau_H^{-m-1}Y$ ein Faktormodul von P_ω ist. Somit bekommen wir den Zyklus

$$P_\omega \longrightarrow \tau_{H[\tau_H^{-m}X]}\tau_H^{-m-1}Y \longrightarrow Z \longrightarrow \tau_H^{-m-1}Y \longrightarrow P_\omega$$

und P_ω kann nicht präprojektiv sein. Also besitzt $H[\tau_H^{-m}X]$ keine präprojektive Komponente.

3.2 Die erweiterte Kronecker-Algebra

In der erweiterten Kronecker-Algebra, d.h. in der Wegealgebra $H = kQ$ des Köchers

$$\overset{3}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet} \rightrightarrows \overset{1}{\bullet}\ ,$$

betrachten wir den unzerlegbaren regulären Modul X_0 mit dem Dimensionsvektor (1 2 0). Die ersten Verschobenen von X_0 haben folgende Dimensionsvektoren:

$$\begin{array}{rcl} \underline{\dim}(\tau_H^- X_0) & = & (\,3 \quad 2 \quad 2\,) \\ \underline{\dim}(\tau_H^{-2} X_0) & = & (\,5 \quad 4 \quad 0\,) \\ \underline{\dim}(\tau_H^{-3} X_0) & = & (15 \quad 10 \quad 4) \end{array}$$

Sei $X = \tau_H^{-3} X_0$. Die orthogonale Kategorie $X^{\perp}$ von X ist die volle Unterkategorie von $H-$mod mit den Objekten:

$$\{Y \in A\text{−mod} \mid \operatorname{Hom}_H(X,Y) = 0 = \operatorname{Ext}^1_H(X,Y)\}$$

Dann ist $M = P_3 \oplus \tau_H^{-3} P_3$ ein minimaler projektiver Generator von $X^{\perp}$. Der Raum $\operatorname{Hom}_H(P_3, \tau_H^{-3} P_3)$ hat die Dimension $\underline{\dim}(\tau_H^{-3} P_3)_3 = 3$, also ist der Endomorphismenring von M eine wilde erbliche Algebra, die isomorph zu der Wegealgebra des Köchers

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \bullet \end{tikzcd}$$

ist. Der Modul $T = M \oplus X$ ist ein Kippmodul in $H-$mod. Die Kippalgebra $\operatorname{End}_A(T)$ lässt sich zerlegen als

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{End}_A(T) & \simeq & \begin{pmatrix} \operatorname{End}_H(M) & \operatorname{Hom}_H(M,X) \\ \operatorname{Hom}_H(X,M) & \operatorname{End}_H(X) \end{pmatrix} \\ & \simeq & \begin{pmatrix} \operatorname{End}_H(M) & \operatorname{Hom}_H(M,X) \\ 0 & k \end{pmatrix} \end{array}$$

und ist damit die Einpunkt-Erweiterung von $C = \operatorname{End}_H(M)$ durch den C-Modul $E = \operatorname{Hom}_H(M,X)$. Die zu T torsionsfreie Klasse enthält nur endlich viele Elemente, somit ist die Verbindungskomponente eine präinjektive Komponente in $\Gamma(C[E])$ mit drei τ-Bahnen. Wenn wir den Modul E weit genug in die τ_C oder in die τ_C^--Richtung verschieben, dann besitzt nach dem Theorem die Einpunkt-Erweiterung $C[\tau_C^m E]$ hingegen eine präinjektive Komponente mit zwei τ-Bahnen für $|m| \gg 0$.

3.3 Kanonische Algebren

Kanonische Algebren sind eine wichtige Klasse von Algebren, die von C. M. Ringel in [14] eingeführt wurden. Sei $t \geq 2$ und $n_1, \ldots, n_t \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den Köcher $\mathcal{Q}(n_1, \ldots, n_t)$:

$$\begin{tikzcd}
& p_1^{(1)} \arrow[r, "\alpha_2^{(1)}"] & p_2^{(1)} \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\alpha_{n_1-1}^{(1)}"] & p_{n_1-1}^{(1)} \arrow[ddr, "\alpha_{n_1}^{(1)}"] & \\
& p_1^{(2)} \arrow[r, "\alpha_2^{(2)}"] & p_2^{(2)} \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\alpha_{n_2-1}^{(2)}"] & p_{n_2-1}^{(2)} \arrow[dr, "\alpha_{n_2}^{(2)}"'] & \\
\omega \arrow[uur, "\alpha_1^{(1)}"] \arrow[ur, "\alpha_1^{(2)}"'] \arrow[dr, "\alpha_1^{(t)}"'] & & \vdots & & \vdots & 0 \\
& p_1^{(t)} \arrow[r, "\alpha_2^{(t)}"] & p_2^{(t)} \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\alpha_{n_1-1}^{(1)}"] & p_{n_t-1}^{(t)} \arrow[ur, "\alpha_{n_t}^{(t)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Wir bezeichnen mit $\alpha^{(s)}$ den Weg $\alpha^{(s)} = \alpha_{n_s}^{(s)} \ldots \alpha_2^{(s)} \alpha_1^{(s)}$. Sei I das Ideal von $k\mathcal{Q}(n_1, \ldots, n_t)$, das von den Wegen $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(t)}$ erzeugt wird. Einen Unterraum J von I nennen wir *generisch*, wenn gilt:

(a) $\dim_k J = t - 2$

(b) J schneidet jeden Unterraum $< \alpha^{(s)}, \alpha^{(s')} >$ trivial.

Die Algebren, die durch den Köcher $\mathcal{Q}(n_1, \ldots, n_t)$ mit Relationsideal J definiert werden, heißen *kanonische Algebren vom Typ* $(n_1, \ldots, n_t)$. Eine kanonische Algebra A kann immer als eine Einpunkterweiterung der Wegealgebra $k\mathcal{Q}'$ betrachtet werden, wobei $\mathcal{Q}'$ aus $\mathcal{Q}$ durch Streichen von ω und von den zugehörigen Pfeilen entsteht. Das Radikal M von dem unzerlegbaren projektiven Modul P_ω zum Punkt ω ist ein $k\mathcal{Q}'$-Modul, es gilt also

$$A \simeq k\mathcal{Q}'[M] \; .$$

M hat dann den folgenden Dimensionsvektor in $k\mathcal{Q}'$

$$\underline{\dim}(M) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 2 \\ 1 & \cdots & 1 & \end{pmatrix} .$$

Umgekehrt gilt nach [13, 4.4], dass jede Einpunkt-Erweiterung von $k\mathcal{Q}'$ mit einem elementaren Modul E der Dimension $\underline{\dim}(M)$ eine kanonische Algebra ist. Sei E ein elementarer $k\mathcal{Q}'$-Modul. Dann ist $\tau_{k\mathcal{Q}'}^{m} E$ auch elementar und der Auslander-Reiten-Köcher von $k\mathcal{Q}'[\tau_{k\mathcal{Q}'}^{m} E]$ besitzt für $|m| \gg 0$ eine präinjektive Komponente mit $(1 - t + \sum p_{n_i})$ τ-Bahnen. Da $\tau_{k\mathcal{Q}'}^{m} E$ regulär ist, ist die präprojektive Komponente $\mathcal{P}(k\mathcal{Q}')$ die präprojektive Komponente von $\Gamma(k\mathcal{Q}'[\tau_{k\mathcal{Q}'}^{m} E])$.

Literaturverzeichnis

[1] M. Auslander, I. Reiten und S. Smalø. Representation theory of Artin algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1994.

[2] K. Bongartz. Algebras and quadratic forms. J. Lond. Math., Soc. II. Ser. **28** (1983), 461-469.

[3] Yu. A. Drozd. Tame and wild matrix problems. In: Representation Theory II, Springer Lecture Notes in Math. **832** (1980), 242-258.

[4] D. Happel, I. Reiten und S. Smalø. Tilting in abelian categories and quasitilted algebras. Mem. Am. Math. Soc. **575** (1996).

[5] D. Happel und C.M. Ringel. Tilted algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **274** (1982), 399-443.

[6] M. Hoshino. Modules without self-extensions and Nakayama's conjecture. Arch. Math. **43** (1984), 493-500.

[7] O. Kerner. Representations of wild quivers. CMS Conf. Proceed. **19** (1996), 65-107.

[8] O. Kerner. Factorisations of morphisms for wild hereditary algebras. In: Representations of algebras. Lect. Notes Pure Appl. Math. **224** (2002), 121-127.

[9] O. Kerner und F. Lukas. Regular stones of wild hereditary algebras. J. Pure Appl. Algebra **93**, No.1 (1994), 15-31.

[10] O. Kerner und A. Skowroński. On the structure of modules over wild hereditary algebras. Manuscr. Math. **108**, No.3 (2002), 369-383.

[11] S. König. Tame and wild socle-projective categories and generalized Bäckström orders. Commun. Algebra **18**, No.3 (1990), 889-925.

[12] S. Lache. Stückweise erbliche Einpunkterweiterungen. Diss. Düsseldorf 1997.

[13] F. Lukas. Elementare Moduln über wilden erblichen Algebren. Diss. Düsseldorf 1993.

[14] C.M. Ringel. Tame algebras and integral quadratic forms. Springer Lecture Notes in Math. **1099** (1984).

[15] H. Strauss. On the perpendicular category of a partial tilting module. J. Algebra **144**, No.1 (1991), 43-66.

[16] L. Unger. On wild tilted algebras which are squids. Arch. Math. **55** (1990), 542-550.