Skalierungslimiten von Irrfahrten in stetiger Zeit mittels markierter Punktprozesse

Inaugural - Dissertation

zur
Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Adam Barczyk

aus Beuthen (Polen)

Düsseldorf, 12. März 2012

Aus dem mathematischen Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Gedruckt mit der Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent:	Prof. Dr. P. Kern
Koreferent:	Prof. Dr. H.P. Scheffler
Tag der mündlichen Prüfung:	25. April 2012

Bene docet, qui bene distinguit

Für Julia und Elias

Zusammenfassung

Betrachtet man Folgen unabhängig identisch verteilter (i.i.d.), $\mathbb{R}^+$-wertiger Zufallsvariablen $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und i.i.d., $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvariablen $(\mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so versteht man unter einer Irrfahrt in stetiger Zeit oder auch Continuous Time Random Walk eine klassische Irrfahrt $S_n := \sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k$, welche dem Erneuerungsprozess $N_t := \max\{n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=1}^n J_k \leq t\}$ subordiniert wird, d.h. man betrachtet den stochastischen Prozess $\sum_{k=1}^{N_t} \mathbf{X}_k$. Werden die Folgen $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als stochastisch unabhängig vorausgesetzt, so spricht man von einem ungekoppelten Continuous Time Random Walk, während man bei der gekoppelten Variante eine Abhängigkeitsstruktur zwischen diesen Folgen unterstellt.

Diese Arbeit befasst sich mit einer systematischen Untersuchung von Skalierungslimiten ungekoppelter sowie gekoppelter Continuous Time Random Walks, indem ein neuartiger Zugang mittels der Theorie markierter Punktprozesse genutzt wird. Dieser Zugang erlaubt ein besseres Verständnis dieser stochastischen Prozesse, da jede Sprungstelle mit der sich dort ereignenden Sprünghöhe einzeln betrachtet werden kann. Auf diese Weise ist es möglich das Auftreten der unterschiedlichen Skalierungslimiten bei Rückwärts- und Vorwärtskopplung in den Arbeiten von Henry und Straka [25] sowie Jurlewicz et al. [30] erstmals zufriedenstellend zu erklären.

Durch die Einführung eines stetigen Summationsfunktionals wird die Konvergenz von ungekoppelten Irrfahrten aus der Konvergenz gewisser zugehöriger markierter Punktprozesse hergeleitet. In diesem Fall lassen sich die Verteilungslimiten dieser Punktprozesse mit Standardmethoden bestimmen, indem eine stetige Zeitdeformation verwendet wird. Die auf diese Weise bestimmten Skalierungslimiten werden mit Hilfe einer Reihendarstellung angegeben, welche für Simulationszwecke geeignet ist. Da die resultierenden Prozesse keine Lévyprozesse sind, ist bisher kein Simulationsalgorithmus bekannt.

Im gekoppelten Fall wird die Konvergenz der zugehörigen Punktprozesse mit Hilfe statistischer Methoden über eine Konvergenzuntersuchung der einzelnen Punkte nachgewiesen, da die verwendete Zeitdeformation nicht mehr stetig ist. Es stellt sich heraus, dass ein starker Zusammenhang zur Theorie von extremen Orderstatistiken besteht, wie er bereits für skalierte, reelle Partialsummen, die gegen eine unendlich teilbare Zufallsvariable ohne Normalverteilungsanteil konvergieren, bekannt ist, vgl. Barczyk, Janssen und Pauly [3]. Aufgrund dessen wird auch die noch offene Fragestellung nach der Konvergenz residualer Orderstatistiken bei LePage [35] diskutiert und beantwortet.

Anschließend findet eine Untersuchung der gemeinsamen Konvergenz von gekoppelten Irrfahrten und deren betragsmäßig größten Sprüngen statt. Diese Betrachtung erweitert die Ergebnisse einer Arbeit von Schumer, Baeumer und Meerschaert [52], indem sie eine geschlossene Darstellung des Skalierungslimes bereitstellt.

Abstract

Given an i.i.d. sequence $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of $\mathbb{R}^+$-valued random variables and an sequence $(\mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of i.i.d. $\mathbb{R}^d$-valued random variables a continuous time random walk is a renewal process $N_t := \max\{n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=1}^n J_k \leq t\}$ subordinated to the random walk $S_n := \sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k$, i.e. one studies the process $\sum_{k=1}^{N_t} \mathbf{X}_k$. The process is called uncoupled if the sequences $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(\mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are stochastically independent. Otherwise one speaks of coupled continuous time random walks.

In this thesis scaling limits of uncoupled and coupled continuous time random walks are studied in a systematic way using a marked point process approach. By marking each jump with its occurring amplitude every point can be studied separately, which leads to a better understanding of these processes. In this way it can be explained for the first time why the different scaling limits occur if a forward- or backward-coupling structure is used as in the articles of Henry and Straka [25] and Jurlewicz et al. [30].

By introducing a continuous summation functional the convergence of uncoupled random walks is deduced from the convergence of certain associated marked point processes. Using a continuous time deformation the convergence of these point processes can be studied with standard methods. The resulting scaling limits are given by a series representation which is of its own interest for simulation purposes. Since the resulting limit processes are not Lévy processes, no simulation algorithm is known yet.

In the coupled case the convergence of the associated marked point processes is studied with statistical methods by analyzing the points of the point process, because the time deformation is not continuous any more. It turns out that there is a strong connection to the theory of extreme order statistics. This connection is already known for real valued scaled partial sums which converge to an infinitely divisible random variable without Gaussian part, cf. Barczyk, Janssen and Pauly [3]. Because of this connection LePage's [35] open problem of the convergence of residual order statistics is solved.

Motivated by this connection also the joint convergence of coupled continuous time random walks and the biggest absolut value of its jumps is studied. This last part complements results of an article by Schumer, Baeumer and Meerschaert [52], presenting a closed form of the scaling limit.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Ein Irrfahrtenmodell in stetiger Zeit oder auch Continuous Time Random Walk, kurz *CTRW*, dient der Betrachtung zufälliger Wartezeiten, welche zwischen den Zeitpunkten zweier zufälliger räumlicher Änderungen eines Teilchens auftreten. Grundlegend wird dabei zwischen zwei Arten von *CTRWs* unterschieden. Bei gekoppelten Irrfahrten unterstellt man eine Abhängigkeitsstruktur zwischen den Zwischenwartezeiten und den räumlichen Änderungen selbst, während diese Zufallsgrößen bei ungekoppelten Irrfahrten als stochastisch unabhängig angesehen werden. Typischerweise wird bei gekoppelten *CTRWs* angenommen, dass eine räumliche Änderung lediglich von der vorhergegangenen bzw. der kommenden zeitlichen Änderung abhängig ist. Dies führt zu der Begriffsbildung von rückwärts- bzw. vorwärtsgekoppelten *CTRWs*.

Die Motivation zur Untersuchung solcher Modelle stammt aus der Hydrologie, in welcher *CTRWs* als Lösungen anormaler Diffusionsgleichungen dienen, mit welchen die Ausbreitung von Partikeln in porösen Medien beschrieben wird. Jedoch besitzen diese Modelle eine Vielzahl weiterer Anwendungsmöglichkeiten, z.B. in der Physik und der Biologie, vgl. Baeumer und Meerschaert [2] und darin enthaltene Referenzen, sowie in den Wirtschaftswissenschaften, in denen die Sprünge die logarithmische Preisänderung eines Finanzproduktes nach einer zufälligen Wartezeit beschreiben, vgl. Scalas [50].

Ziel dieser Arbeit ist es das Auftreten der verschiedenen Skalierungslimiten zu verstehen, falls die räumlichen und zeitlichen Änderungen einen heavy tail besitzen. Bei ungekoppelten *CTRWs* sind die Skalierungslimiten bereits bekannt und vollständig verstanden, da sie sich nicht unterscheiden, vgl. Meerschaert und Scheffler [41]. Auch die Skalierungslimiten von rückwärts- und vorwärtsgekoppelten *CTRWs* sind bereits bekannt, vgl. Henry und Straka [25] sowie Jurlewicz et al. [30], jedoch ist völlig unklar wieso in diesem

Fall Unterschiede auftreten. Entgegen der berechtigten Vermutung, dass die Unterschiede in den Eigenschaften der Skalierungslimiten von rückwärts- und vorwärtsgekoppelten *CTRWs* nur marginal sind, zeigen aktuelle Ergebnisse, dass diese nicht zutreffend ist. In Beispiel 5.2 bei Jurlewicz et al. [30] werden die Skalierungslimiten von rückwärts- und vorwärtsgekoppelten *CTRWs* untersucht, falls die Sprungzeiten und die Zwischenwartezeiten übereinstimmen und mit einem α-stabilen Subordinators für ein $0 < \alpha < 1$ zu einem festen Zeitpunkt übereinstimmen. In diesem Fall besitzt der Skalierungslimes bei Vorwärtskopplung eine Lebesguedichte, die von einer kompakten Menge getragen wird, sodass dieser Momente jeder Ordnung besitzt, während die Dichte des Skalierungslimes bei Rückwärtskopplung auf einer unbeschränkten Menge nicht verschwindet, sodass dieser nur Momente der Ordnung kleiner α besitzt. Um zu verstehen, warum die Skalierungslimiten sich unterscheiden und so deren grundlegend verschiedene Eigenschaften zu verstehen, wird ein neuer Ansatz mittels markierter Punktprozesse genutzt. Dieser erlaubt es, den Mechanismus, welcher zum Auftreten der verschiedenen Limiten führt, besser zu verstehen und dadurch ähnliche, zufällige Systeme mit Abhängigkeitsstrukturen zu untersuchen. Es zeigt sich, dass dieser Ansatz zusätzlich eine einfache Untersuchung der betragsmäßig größten Sprünge von *CTRWs* erlaubt. Diese Fragestellung wird aktuell untersucht, vgl. Schumer, Baeumer und Meerschaert [52] sowie Silvestrov und Teugels [55], jedoch ist eine Herangehensweise mittels Standardmethoden sehr umständlich. Der Punktprozessansatz hingegen liefert ein einfaches Hilfsmittel zur Untersuchung der gemeinsamen Konvergenz der *CTRWs* und deren betragsmäßig größten Sprüngen.

Für die mathematische Behandlung sei, falls nicht anders bemerkt, ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ gegeben. Auf diesem betrachtet man eine i.i.d. Folge $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvektoren $(J_n, \mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche die Wartezeiten zwischen zwei räumlichen Veränderungen, die auch als Zeitsprünge bezeichnet werden, und den Sprüngen selbst beschreibt. Mit dieser Notation bezeichnen die Partialsummen $T_n = \sum_{k=1}^n J_k$ den Zeitpunkt des n-ten Sprunges und $\mathbf{S}_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k$ die Position des Teilchens nach n Sprüngen. Da jedoch der zeitliche Verlauf der Position des Teilchens von Interesse ist, führt man den Erneuerungsprozess

$$N_t = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : T_n \leq t\}$$

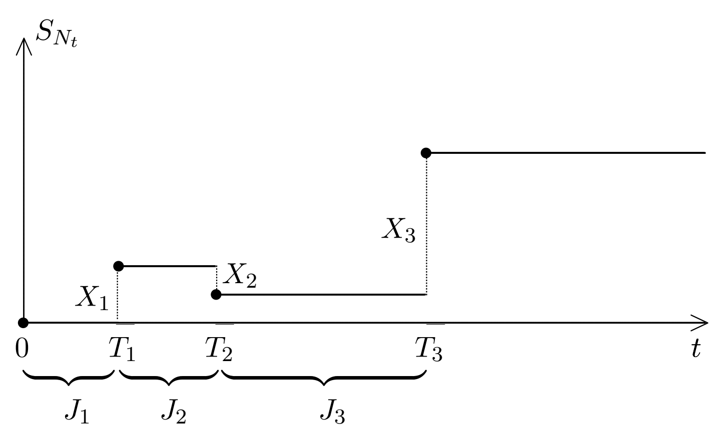
ein. Falls man diesem die Irrfahrt $\mathbf{S}_n$ subordiniert, erhält man den stochastischen Prozess

$$\mathbf{S}_{N_t} = \sum_{k=1}^{N_t} \mathbf{X}_k,$$

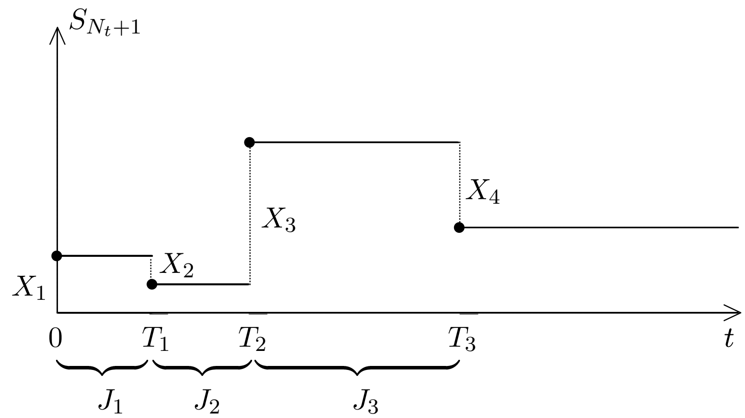
welcher die Position des Teilchens zur Zeit t beschreibt. Die Skalierungslimiten dieses Prozesses können mit Hilfe der klassischen Erneuerungstheorie nur dann beschrieben werden, wenn die Wartezeiten einen endlichen Erwartungswert besitzen, d.h. $\mathbb{E}(J_1) < \infty$. Unter der in physikalischen Anwendung häufig getroffenen Annahme, dass die Verteilungen der Zufallsvariablen J_1 und $\mathbf{X}_1$ einen heavy tail besitzen, vgl. Shlesinger, Klafter und Wong [54], ist diese Bedingung i.A. jedoch nicht erfüllt. In diesem Fall ist ein genaueres Studium dieser Objekte notwendig. Falls nun der Vektor $(J_1, \mathbf{X}_1)$ eine Abhängigkeitsstruktur besitzt, bezeichnet man die stochastischen Prozesse

$$\mathbf{S}_{N_t} = \sum_{k=1}^{N_t} \mathbf{X}_k \text{ bzw. } \mathbf{S}_{N_t+1} = \sum_{k=1}^{N_t+1} \mathbf{X}_k \tag{1.1}$$

als rückwärts- bzw. vorwärtsgekoppelte *CTRWs*. Beim rückwärtsgekoppelten *CTRW* $\mathbf{S}_{N_t}$ wird zunächst die zufällige Zeit J_1 gewartet, bevor ein Sprung mit der Höhe $\mathbf{X}_1$ stattfindet, d.h. aufgrund der i.i.d. Struktur der Folge $(J_n, \mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist jede Sprunghöhe abhängig von der vorhergegangenen Zwischenwartezeit.



Im finanzmathematischen Kontext beschreibt $\mathbf{S}_{N_t}$ z.B. den Preis eines Finanzprodukts zum Zeitpunkt t. Dahingegen wird beim vorwärtsgekoppelten *CTRW* $\mathbf{S}_{N_t+1}$ der Sprung mit der Höhe $\mathbf{X}_1$ in den Nullpunkt gesetzt. Anschließend wird die Zeit J_1 gewartet, bevor ein Sprung mit der Höhe $\mathbf{X}_2$ stattfindet, d.h. die aktuelle Zwischenwartezeit bis zum nächsten Sprungzeitpunkt ist lediglich von der vorhergegangenen Sprunghöhe abhängig.



Während $\mathbf{S}_{N_t}$ im finanzmathematischen Kontext also den Preis eines Finanzproduktes zum Zeitpunkt t beschreibt, erhält man durch $\mathbf{S}_{N_t+1}$ den Wert dieses Produkts zum nächst möglichen Handelszeitpunkt.
Um die Skalierungslimiten von (1.1) zu untersuchen und zu verstehen, warum sie sich im gekoppelten Fall unterscheiden, wird zunächst das Verhalten der markierten Punktprozesse

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(T_k,\mathbf{X}_k)}$$

studiert. Diese Vorgehensweise besitzt den Vorteil, dass die Folge der markierten Punkte $(T_n,\mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Folge von Sprungzeiten, welche mit der sich dort ereignenden Sprunghöhe markiert wurden, entspricht. Es ist also möglich das asymptotische Verhalten für jeden dieser Punkte einzeln zu untersuchen. Dadurch lassen sich Rückschlüsse auf die Prozesse in (1.1) ziehen, falls man die Markierungen der Punkte aufsummiert, deren Sprungzeiten vor dem Zeitpunkt t liegen.
Für viele in dieser Arbeit getroffene Aussagen wird ein inneres Produkt $< \cdot,\cdot >$ und eine damit assoziierte Norm $\|\cdot\| = (< \cdot,\cdot >)^{\frac{1}{2}}$ auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^d$ für ein $d\in\mathbb{N}$ verwendet. Da jedoch alle Normen auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum äquivalent sind, vgl. Meise und Vogt [42, Lemma 5.14], kann die verwendete Norm beliebig gewählt werden.

In Kapitel 2 wird zunächst die klassische Theorie der Punktprozesse, wie sie in den Büchern von Daley und Vere-Jones [10], Kallenberg [31] sowie Resnick [46], [47] dargestellt wird, als Einführung zusammengefasst. Ziel ist ein grundlegendes Verständnis von Punktprozessen und deren Konvergenz. Von besonderer Bedeutung ist dabei die Theorie der zusammengesetzten Poissonschen Punktprozesse und der Konvergenz von Punktprozessen gegen diese. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels wird kurz die Theorie von

möglichen Grenzverteilungen von Summen unabhängiger ein- sowie mehrdimensionaler Zufallsgrößen zusammengetragen. Das Verständnis dieser dient dazu, die möglichen Skalierungslimiten der Zeit- und Raumprozesse besser zu verstehen. Ein Hauptaugenmerk liegt dabei auf dem Teil über operatorstabile Verteilungen, die eine natürliche, mehrdimensionale Verallgemeinerung stabiler Verteilungen darstellen. Der dritte Abschnitt widmet sich der Theorie von Lévyprozessen. Einleitend werden einige Eigenschaften des Pfadraums $D[0,\infty)$ zusammengetragen. Ergänzend werden auch Zusammenhänge zum verwandten Funktionenraum $G[0,\infty)$ aller linksstetigen Funktionen mit existierenden rechtsseitigen Limiten hergestellt. Die Einführung dieses Raums ist hilfreich, um die Unterschiede bei Rückwärts- bzw. Vorwärtskopplung zu erläutern. Im Anschluss wird der Zusammenhang von Lévyprozessen und unendlich teilbaren Verteilungen hergestellt, welcher erlaubt die Ferguson-Klass Reihen- bzw. Integraldarstellung für Lévyprozesse anzugeben. Diese wird verwendet, um die Ergebnisse dieser Arbeit in den gesamtwissenschaftlichen Kontext der Arbeiten von Henry und Straka [25] sowie Jurlewicz et al. [30] einzubinden.
Kapitel 3 widmet sich der Untersuchung von ungekoppelten *CTRWs*. Es wird gezeigt, wie man die Theorie der Punktprozesse nutzen kann, um die Skalierungslimiten dieser Irrfahrten zu bestimmen. Das Kapitel ist in zwei Abschnitte über den ein- und mehrdimensionalen Fall aufgeteilt, um die jeweiligen Schwierigkeiten, welche in den entsprechenden Beweisen auftreten, voneinander zu trennen. In beiden Abschnitten wird auch gezeigt, wie man die dort erhaltenen Ergebnisse mit denen von Meerschaert und Scheffler [41] in Einklang bringt. Dazu wird eine Reihen- bzw. Integraldarstellung der Grenzprozesse genutzt, welche für Simulationszwecke von Interesse ist. Die Beweisführung bedient sich einer stetigen Zeitdeformation bei Punktprozessen, die eine Untersuchung dieser mit Standardmethoden erlaubt. Anschließend werden die Skalierungslimiten mittels einer stetigen Abbildung vom Raum der Punktmaße in den Raum der càdlàg-Funktionen bestimmt.
Das Kapitel 4 verallgemeinert die Ergebnisse aus Kapitel 3 für gekoppelte *CTRWs*. Dabei wird stets zwischen rückwärts- und vorwärtsgekoppelten Irrfahrten unterschieden. In diesem Kapitel wird aufgezeigt, warum sich die Skalierungslimiten bei Henry und Straka [25] und Jurlewicz et al. [30] bei Rückwärts- bzw. Vorwärtskopplung unterscheiden. Der Unterschied schlägt sich auch in den Reihen- bzw. Integraldarstellungen für die verschiedenen Limiten nieder. Anders als in Kapitel 3 kann die Konvergenz der Punktprozesse nicht mehr mit Standardmethoden untersucht werden, da die Zeitdeformation im gekoppelten Fall nicht mehr stetig ist. Dieser Umstand verlangt eine tiefgreifendere Untersuchung der Punktprozesse. Im eindimensionalen Fall stellt sich heraus, dass nur die Punkte mit den

betragsmäßig größten Marken zum Limesprozess beitragen, so dass eine Verbindung zur Theorie von extremen Orderstatistiken hergestellt werden kann, vgl. Barczyk, Janssen und Pauly [3] sowie darin enthaltene Referenzen. Um die Beweismethodik des eindimensionalen Falls auf den mehrdimensionalen zu übertragen, wird die offene Fragestellung nach der Konvergenz residualer Orderstatistiken, vgl. LePage [35], beantwortet.
Die Bestimmung der Verteilungslimiten residualer Orderstatistiken erlaubt eine Untersuchung von Maximumsprozessen, welche einem Erneuerungsprozess subordiniert werden, im fünften Kapitel. Diese Prozesse werden auch *CTRM* genannt, vgl. Schumer, Baeumer und Meerschaert [52]. Auf die Untersuchung ungekoppelter *CTRM* wird verzichtet, da die Ergebnisse des gekoppelten Falls sich auf den ungekoppelten übertragen lassen. Die verwendete Beweismethodik erlaubt auch die Beantwortung der Fragestellung nach der gemeinsamen Konvergenz von *CTRWs* und *CTRM* im mehrdimensionalen, gekoppelten Fall, wie sie im Artikel von Silvestrov und Teugels [55] untersucht wird.
In Kapitel 6 werden Hilfsresultate präsentiert, welche für die Beweisführung unerlässlich sind, jedoch den Blick auf Wesentliches verschleiern. Im ersten Teil wird die Stetigkeit aller Abbildungen nachgewiesen, auf welche das Continuous Mapping Theorem angewendet wird. Das Hauptresultat des zweiten Teils ist eine Verallgemeinerung der Maximums- bzw. Kolmogoroffungleichung für den Fall integrierbarer Stoppzeiten. Sie erlaubt die Verwendung des Theorems 4.2 bei Billingsley [7] durch den Nachweis einer Abschneidebedingung. Dieses Theorem ist essentiell für die Beweisführung. Im dritten Teil werden einige verwendete Resultate aus der Statistik zusammengetragen.

Abschließend möchte ich Herrn Prof. Dr. Peter Kern für die hervorragende Betreuung und Hilfsbereitsschaft bei der Erstellung dieser Dissertation danken. Ein herzlicher Dank gebührt auch Herrn Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler für die Übernahme und Erstellung des Zweitgutachtens.
Weiter möchte ich mich auch bei den Professoren und Mitarbeitern des Lehrstuhls für Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie am Mathematischen Institut der Heinrich-Heine-Universität für die vielen anregenden Diskussionen bedanken.

Mein tiefster Dank gebührt meiner Frau, die mich mit Ihrer Liebe zu jeder Zeit unterstützt hat.

Kapitel 2

Grundlagen

Dieses Kapitel fasst die Grundlagen für das Verständnis dieser Arbeit zusammen. Da in dieser Arbeit die Skalierungslimiten von *CTRWs* mittels markierter Punktprozesse bestimmt werden sollen, beginnt dieses Kapitel mit einem Abschnitt über die Theorie der zufälligen Maße. Anschließend wird in zwei Abschnitten über Limesverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen und Lévyprozesse die Theorie zusammengefasst, welche für ein Verständnis von *CTRWs* notwendig ist. Um im weiteren Verlauf dieser Arbeit die betragsmäßig größten Sprünge von *CTRWs* zu untersuchen, folgt ein Abschnitt über die Grundlagen der eindimensionalen Extremwerttheorie.

2.1 Punktprozesse

2.1.1 Punktprozesse und zufällige Maße

Zunächst werden die Eigenschaften der Räume, die in diesem Kapitel behandelt werden, definiert.

Definition 2.1
Sei $\mathscr{X}$ ein topologischer Raum.

(a) Der Raum $\mathscr{X}$ heißt separabel, falls es eine abzählbare Teilmenge gibt, deren Abschluss in $\mathscr{X}$ mit $\mathscr{X}$ übereinstimmt.

(b) Der Raum $\mathscr{X}$ heißt vollständig metrisierbar, falls eine Metrik d auf $\mathscr{X}$ existiert, bzgl. derer jede Cauchyfolge in $\mathscr{X}$ konvergiert.

(c) Der Raum $\mathscr{X}$ heißt polnisch, falls er separabel und vollständig metrisierbar ist.

Separable und vollständig metrisierbare Räume tragen die Bezeichnung polnische Räume zu Ehren der polnischen Mathematiker Sierpinski, Kuratowski und Tarski, welche sich als erste mit ihnen beschäftigt haben, vgl. Kuratowski [33].
Der Begriff des separablen Raums bedeutet, dass dieser nicht allzu groß ist, da man sich bei der Behandlung vieler Eigenschaften dieses Raums auf die abzählbare Teilmenge zurückziehen kann. Dagegen sind vollständige Räume zum einen metrisch und zum anderen stimmen die konvergenten Folgen in der Metrik d mit den Cauchyfolgen des Raums überein.
Dieser Abschnitt dient als eine allgemeine Einführung in die Theorie der zufälligen Maße und der Punktprozesse, wie sie in den Büchern von von Daley und Vere-Jones [10], Kallenberg [31], Resnick [46], [47] sowie Jacobsen [26] dargestellt wird. Diese Theorie soll dabei, wann immer möglich, allgemein auf einem lokal kompakten, separablen und metrischen (*lcsm*) Zustandsraum $\mathscr{X}$ entwickelt werden. An einigen Stellen werden die Resultate für den $\mathbb{R}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ spezialisiert, da diese Form für die spätere Beweisführung benötigt wird.
Unter einem zufälligen Maß auf einem Raum $\mathscr{X}$ versteht man eine zufällige Verteilung von Punkten in diesem Raum. Es wird angenommen, dass der Raum $\mathscr{X}$ mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_{\mathscr{X}}$ augestattet ist. Um nun eine Verteilung von Punkten in $\mathscr{X}$ zu modellieren, muss für alle Mengen $A \in \mathcal{B}_{\mathscr{X}}$ die zufällige Anzahl der Punkte bestimmt werden, die in A fallen. Man modelliert also eine Verteilung von Punkten in $\mathscr{X}$ als das Maß, welches die Punkte in jeder Menge $A \in \mathcal{B}_{\mathscr{X}}$ zählt. Problematisch können die Mengen werden, welche unendlich viele Punkte enthalten. Deshalb ist es sinnvoll nicht alle Maße für die Modellierung solcher Verteilungen zuzulassen.

Definition 2.2
Sei $\mathscr{X}$ ein lcsm Raum, ausgestattet mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_{\mathscr{X}}$.

(a) Eine Abbildung $\nu : (\mathscr{X}, \mathcal{B}_{\mathscr{X}}) \to [0, \infty]$ heißt Maß, falls sie die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $\nu(\emptyset) = 0$.

(ii) Für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_{\mathscr{X}}$ ist die Abbildung ν σ-additiv, d.h. es gilt

$$\nu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(A_k).$$

(b) Ein Maß ν heißt Radonmaß, falls das Maß aller kompakten Mengen $K \in \mathcal{B}_{\mathscr{X}}$ endlich

ist, d.h. es gilt

$$\nu(K) < \infty.$$

Die Verwendung der Radonmaße hat den Vorteil, dass jede relativkompakte Menge endliches Maß besitzt. Durch diese Eigenschaft bildet die Menge der Radonmaße einen geeigneten Kandidaten für die Modellierung zufälliger Punktverteilungen.

Definition 2.3
Sei $\mathscr{X}$ ein lcsm Raum. Man definiert

$$M_+(\mathscr{X}) := \{\nu : \nu \text{ ist ein Radonmaß auf } \mathscr{X}\}.$$

Es ist bekannt, dass $M_+(\mathscr{X})$ unter einer geeigneten Metrik ein vollständiger, separabler und metrischer Raum ist, vgl. Daley [10, A.2.6.III]. Die von dieser Metrik induzierte Topologie wird als vage Topologie bezeichnet, i.Z. $\hat{w}$-Toplogie. Weiter ist die zugehörige Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}_{M_+(\mathscr{X})}$ die kleinste σ-Algebra, bezüglich derer die Abbildung $\mu \mapsto \mu(A)$ messbar für alle relativkompakten Borelmengen $A \in \mathscr{B}_{\mathscr{X}}$ ist.
Jedoch ist der Raum $M_+(\mathscr{X})$ für die Modellierung von Punktverteilungen in $\mathscr{X}$ noch zu allgemein. Wenn man die Punkte in einer Menge $A \in \mathcal{B}_{\mathscr{X}}$ zählen will, so muss man sicherstellen, dass das zugehörige Maß nur ganzzahlige Werte oder den Wert ∞ annimmt. Von besonderem Interesse sind auch jene Punktmaße, welche lediglich bestimmen, ob ein Punkt an einer bestimmten Stelle des Raums $\mathscr{X}$ liegt, da diese aus mathematischer Sicht deutlich einfacher zu handhaben sind.

Definition 2.4
Sei $\mathscr{X}$ ein lcsm Raum.

(a) Ein Radonmaß m auf $\mathscr{X}$ heißt Punktmaß, falls m nur ganzzahlige Werte annimmt. Der Raum aller Punktmaße auf $\mathscr{X}$ wird mit $M_p(\mathscr{X})$ bezeichnet.

(b) Ein Punktmaß $m \in M_p(\mathscr{X})$ heißt einfach (oder simpel), falls gilt:

$$m(\{x\}) = 0 \text{ oder } 1 \text{ für alle } x \in \mathscr{X}.$$

In Daley [10, Proposition 7.1.III] wird gezeigt, dass der Raum $M_p(\mathscr{X})$ eine abgeschlossene Teilmenge von $M_+(\mathscr{X})$ bildet und damit selbst ein vollständiger, separabler und metrischer Raum ist. Aus der Teilmengeneigenschaft folgt für die zugehörige σ-Algebra $\mathscr{B}_{M_p(\mathscr{X})}$, welche auch mit $\mathcal{M}_p(\mathscr{X})$ bezeichnet wird, dass diese die kleinste σ-Algebra ist, so dass die Abbildung $m \mapsto m(A)$ für alle Punktmaße m und alle $A \in \mathscr{B}_{\mathscr{X}}$ messbar ist.

Man erhält ein besseres Verständnis von Punktmaßen, falls man den Zerlegungssatz von Lebesgue heranzieht.

Lemma 2.5 (Lebesguescher Zerlegungssatz)
Sei $\mathscr{X}$ ein lcsm Raum, ausgestattet mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_{\mathscr{X}}$, und ν ein Radonmaß auf $\mathcal{B}_{\mathscr{X}}$. Sei weiter $(x_i)_{i\in I}$ die höchstens abzählbare Menge der singulären Punkte von ν, welche auch Atome genannt werden. Dann besitzt ν eine eindeutige Zerlegung

$$\nu = \nu_s + \nu_d,$$

wobei $\nu_s = \sum_{k\in I} c_k \varepsilon_{x_k}$ ein rein singuläres Maß bildet, welches eindeutig durch die Menge der Punkte mit zugehöriger Masse $(x_i, c_i)_{i\in I} \subset \mathscr{X} \times \mathbb{R}^{>0}$ bestimmt wird, während ν_d ein rein diffuses Maß ist.

Beweis. Vgl. Satz 2.6 in Kapitel VII bei Elstrodt [12]. ■

Damit sind die Punktmaße gerade die Maße, welche keinen diffusen Anteil ν_d in Lemma 2.5 besitzen und deren Atome nur ganzzahlige Massewerte aufweisen, d.h. es gilt $c_i \in \mathbb{N}$ für alle $i \in I$. Für die simplen Punktmaße gilt zusätzlich $c_i = 1$ für alle $i \in I$.
Nachdem nun die Räume $M_+(\mathscr{X})$ und $M_p(\mathscr{X})$ zur Verfügung stehen, wird es möglich sein, Verteilungen auf diesen Räumen zu modellieren. Im ersten Schritt betrachtet man messbare Abbildungen in diese Räume. Die bereits angesprochene, mathematisch einfache Handhabung simpler Punktmaße überträgt sich auch auf jene messbaren Abbildungen, deren Verteilung auf den simplen Punktmaßen konzentriert ist.

Definition 2.6
Sei $\mathscr{X}$ ein lcsm Raum, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum

(a) Ein Punktprozess N ist eine messbare Abbildung vom Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ in den Raum $(M_p(\mathscr{X}), \mathcal{M}_p(\mathscr{X}))$.

(b) Ein Punktprozess N heißt einfach (oder simpel), falls die Verteilung von N auf den einfachen Punktmaßen konzentriert ist, d.h. es gilt

$$\mathbb{P}\big(N(\{x\}) \leq 1 \text{ für alle } x \in \mathscr{X}\big) = 1.$$

(c) Ein markierter Punktprozess mit Lokalisationen im lcsm Raum $\mathscr{X}$ und Marken im lcsm Raum $\mathscr{K}$ ist ein Punktprozess mit Werten im Raum $M_p(\mathscr{X} \times \mathscr{K})$ mit der

zusätzlichen Eigenschaft, dass der Lokalisationsprozess $\{N(A \times \mathscr{K}) : A \in \mathcal{B}_{\mathscr{X}}\}$ selbst einen Punktprozess bildet.

Markierte Punktprozesse bilden das Grundgerüst der Beweismethodik, die in dieser Arbeit verwendet wird. Sie erlauben es, eine Verteilung von Punkten in einem *lcsm* Raum $\mathscr{X}$ zu modellieren, so dass jeder dieser Punkte mit einer speziellen Marke mit Werten in einem *lcsm* Raum $\mathscr{K}$ ausgestattet werden kann.
Im nächsten Schritt sollen Kriterien angegeben werden, unter denen eine Abbildung N einen Punktprozess bildet. Das folgende Lemma gibt zum einen eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an und zum anderen erlaubt es ein besseres Verständnis der Struktur von Punktprozessen.

Lemma 2.7
Eine Abbildung $N : (\Omega, \mathcal{A}) \to (M_p(\mathscr{X}), \mathcal{M}_p(\mathscr{X}))$ ist ein Punktprozess genau dann, wenn die Abbildung $\omega \mapsto N(\omega, A)$ für jedes $A \in \mathcal{B}_{\mathscr{X}}$ $((\Omega, \mathcal{A}), ([0, \infty], \mathcal{B}([0, \infty])))$-messbar ist.

Beweis. Die Notwendigkeit folgt unmittelbar, da $\omega \mapsto N(\omega, \cdot)$ und $A \mapsto N(\omega, A)$ messbar sind. Somit ist $\omega \mapsto N(\omega, A)$ als Komposition zweier messbarer Abbildungen messbar.
Sei nun $\omega \mapsto N(\omega, A)$ messbar. Man definiert $\mathscr{C} = \{A \in \mathcal{M}_p(\mathscr{X}) : N^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$. Mit der Definintion eines zufälligen Maßes rechnet man leicht nach, dass $\mathscr{C}$ eine σ-Algebra auf $M_p(\mathscr{X})$ bildet. Betrachtet man für Maße m die nach Voraussetzung geltende Gleichheit der Mengen $N^{-1}(\{m : m(A) \in B\}) = \{\omega : N(\omega, A) \in B\} \in \mathcal{A}$, so folgt

$$\mathscr{C} \supset \sigma\{\{m : m(A) \in B\}, A \in \mathcal{B}_{\mathscr{X}}, B \in \mathcal{B}([0, \infty])\} = \mathcal{M}_p(\mathscr{X}),$$

was die Behauptung liefert. ■

Dieses Lemma zeigt weiter, dass man einen Punktprozess N auch als einen Kern von $(\Omega, \mathcal{A})$ nach $(\mathscr{X}, \mathcal{B}_{\mathscr{X}})$ auffassen kann, d.h. N ist eine Abbildung von $\Omega \times \mathscr{X}$ nach $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, so dass $N(\omega, A)$ für festes ω ein Maß für die Menge A ist und eine $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$-wertige Zufallsvariable für festes A.
Das nun folgende Lemma ist hilfreich, wenn man im weiteren Verlauf dieser Arbeit die Konvergenz von Punktprozessen untersuchen will. Da es aber auch von eigenständigem Interesse sein wird, um die Verteilung von Punktprozessen zu bestimmen, soll es bereits an dieser Stelle aufgeführt werden.

Lemma 2.8
Seien N_1 und N_2 simple Punktprozesse auf dem lcsm Raum $(\mathscr{X}, \mathcal{B}_{\mathscr{X}})$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(i) $N_1 \stackrel{\mathcal{D}}{=} N_2$.

(ii) $\mathbb{P}(N_1(A) = 0) = \mathbb{P}(N_2(A) = 0)$ *für alle relativkompakten Mengen* $A \in \mathcal{B}_{\mathscr{X}}$.

Beweis. Vgl. Kallenberg [31, Theorem 10.9]. ■

Die Abbildung

$$\mathscr{P} : \mathcal{B}_{\mathscr{X}} \to [0,1], A \mapsto \mathbb{P}(N(A) = 0)$$

wird oft auch als avoidance-Funktion des Punktprozesses N bezeichnet, vgl. Beispiel 5.4(a) bei Daley und Verre-Jones [10]. Das Lemma 2.8 besagt also, dass die Verteilung eines simplen Punktprozesses bereits durch die Werte seiner avoidance-Funktion auf den relativkompakten Mengen der zugehörigen Borel-σ-Algebra festgelegt ist.
Die Verteilung eines Punktprozesses, der nicht notwendigerweise simpel ist, lässt sich nur mit mehr Aufwand bestimmen. Es ist bekannt, dass die Verteilung eines stochastischen Prozesses bereits durch seine endlichdimensionalen Randverteilungen bestimmt ist. Dies ist leichter als die Verteilung des Prozesses auf dem Funktionenraum selbst zu bestimmen. Eine analoge Aussage gilt auch für Punktprozesse.

Lemma 2.9
Seien N_1, N_2 *zwei Punktprozesse auf dem lcsm Raum* $\mathscr{X}$. *Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $N_1 \stackrel{\mathcal{D}}{=} N_2$.

(ii) $(N_1(A_1), \ldots, N_1(A_n)) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (N_2(A_1), \ldots, N_2(A_n))$ *für alle relativkompakten Mengen* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}_{\mathscr{X}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Vgl Kallenberg [31, Lemma 10.1]. ■

Ähnlich wie bei stochastischen Prozessen, ist auch die Frage von Interesse, unter welchen Bedingungen ein Punktprozess mit gegebenen, endlichdimensionalen Randverteilungen bzw. ein simpler Punktprozess mit gegebener, avoidance-Funktion existiert. Im Kontext dieser Fragen muss man sich, wie auch bei stochastischen Prozessen, mit Konsitenzaussagen über die Familie der endlichdimensionalen Randverteilungen beschäftigen, wie sie im Konsistenzsatz von Kolmogoroff zu finden sind, vgl. Kallenberg [31, Theorem 5.16]. Da jene Resultate jedoch für diese Arbeit nicht von Interesse sind, wird an dieser Stelle darauf verzichtet, auf sie einzugehen.

Ein weiteres Hilfsmittel bei der Untersuchung der Verteilungskonvergenz von Punktprozessen soll das weiter unten definierte Laplacefunktional sein. Wenn man sich mit Verteilungskonvergenz von Zufallsvariablen beschäftigt, ist es oft einfacher, statt der Konvergenz der Zufallsvariablen direkt, die Konvergenz der entsprechenden Laplacetransformierten nachzuweisen. Dies ist möglich, da die Laplacetransformierte einer $\mathbb{R}^+$-wertigen Zufallsvariable deren Verteilung eindeutig festlegt. Aus diesem Grund soll nun ein Analogon für Punktprozesse eingeführt werden.

Definition 2.10
Sei $N : (\Omega, \mathcal{A}) \to (M_p(\mathscr{X}), \mathcal{M}_p(\mathscr{X}))$ ein Punktprozess. Für eine nichtnegative, beschränkte und meßbare Funktion $f : \mathscr{X} \to \mathbb{R}^+$ sei

$$N(\omega, f) := \int_{\mathscr{X}} f dN(\omega).$$

Dann ist das Laplacefunktional von N definiert als die Laplacetransformierte der Verteilung von N

$$L_N[f] := \int_{\Omega} \exp(-N(\omega, f))\ d\mathbb{P}(\omega).$$

Wie die Laplacetransformierte bei Zufallsvariablen legt auch das Laplacefunktional eines Punktprozesses die Verteilung dieses eindeutig fest.

Lemma 2.11
Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.9 sind die Aussagen (i) und (ii) äquivalent zu

(iii) $L_{N_1}[f] = L_{N_2}[f]$ für alle nichtnegativen und stetigen f mit kompaktem Träger.

Beweis. Vgl. Resnick [47, Theorem 5.2]. ■

Da die Untersuchung der Skalierungslimiten von *CTRWs* durch die Untersuchung der zugehörigen Punktprozesse erfolgen soll, wird im nächsten Schritt die Theorie der Konvergenz von Punktprozessen zusammengetragen.

2.1.2 Konvergenz von Punktprozessen

Die schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathbb{P}_n$ gegen ein Grenzmaß $\mathbb{P}$ ist definiert über die Konvergenz

$$\int f d\mathbb{P}_n \to \int f d\mathbb{P} \tag{2.1}$$

für alle stetigen und beschränkten Funktionen f. Dieses Konzept lässt sich jedoch nicht auf $M_+(\mathscr{X})$ übertragen, da die Maße i.A. unbeschränkt sind. Da man es aber mit Radonmaßen zu tun hat, kann man die Konvergenz von (2.1) zumindest für alle stetigen und beschränkten Funktionen f erwarten, die außerhalb eines Kompaktums verschwinden. Man definiert also wie üblich

$$C_K^+(\mathscr{X}) := \{f : \mathscr{X} \mapsto \mathbb{R}^+ : f \text{ ist stetig und besitzt einen kompakten Träger}\}.$$

Daraus erhält man den Begriff der vagen Konvergenz in $M_+(\mathscr{X})$.

Definition 2.12
Sei $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Maßen aus $M_+(\mathscr{X})$. Dann konvergiert ν_n für $n \to \infty$ vage gegen das Grenzmaß ν_0, i.Z. $\nu_n \xrightarrow{v} \nu_0$, falls die Konvergenz

$$\int_{\mathscr{X}} f d\nu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathscr{X}} f d\nu_0 \text{ für alle } f \in C_K^+(\mathscr{X})$$

gilt.

Bemerkung 2.13
Bei der vagen Konvergenz handelt es sich um die Konvergenz in der oben beschriebenen Metrik, welche die $\widehat{w}$-Topologie induziert, vgl. Daley [10, A.2.6.II].

Für die vage Konvergenz ist auch ein Portmanteau-Theorem bekannt.

Satz 2.14 (Portmanteau-Theorem für Radonmaße)
Sei $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Maßen aus $M_+(\mathscr{X})$. Dann sind für $n \to \infty$ die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\nu_n \xrightarrow{v} \nu_0$.

(ii) $\nu_n(A) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \nu_0(A)$ *für alle relativkompakten Mengen* $A \in \mathcal{B}_{\mathscr{X}}$ *mit* $\nu_0(\partial A) = 0$.

(iii) *Bezeichnet man mit $\mathcal{K}(\mathscr{X})$ bzw. $\mathcal{O}(\mathscr{X})$ die kompakten bzw. offenen Teilmengen des lcsm Raums $\mathscr{X}$, so gilt für alle $K \in \mathcal{K}(\mathscr{X})$*

$$\limsup_{n\to\infty} \nu_n(K) \leq \nu_0(K),$$

während man für alle relativkompakten $O \in \mathcal{O}(\mathscr{X})$ die Abschätzung

$$\liminf_{n\to\infty} \nu_n(O) \geq \nu_0(O)$$

erhält.

Beweis. Vgl. Resnick [47, Theorem 3.2]. ■

Mit dem Konzept der vagen Konvergenz lassen sich nun Konvergenzbegriffe für Punktprozesse definieren. Wenn man erneut Lemma 2.9 betrachtet, so bieten sich sofort zwei verschiedene Konvergenzbegriffe an. Zum einen kann man schwache Konvergenz von Verteilungen auf $M_p(\mathscr{X})$ betrachten, zum anderen kann man auch an Verteilungskonvergenz der endlichdimensionalen Randverteilungen eines Punktprozesses denken.

Definition 2.15
Sei $(N_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Punktprozessen auf dem lcsm Raum $\mathscr{X}$.

(*a*) *Die Folge $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für $n \to \infty$ in Verteilung gegen den Punktprozess N_0, i.Z. $N_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N_0$, falls die Folge der Verteilungen $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vage gegen die Verteilung $\mathcal{P}$ von N_0 konvergiert.*

(*b*) *Die Folge $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert im Sinne der endlichdimensionalen Randverteilungen gegen den Punktprozess N_0, falls für jede endliche Familie $\{A_1, \ldots, A_k\}$ von relativkompakten Mengen, welche $\mathbb{P}(N_0(\partial A_i) > 0) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, k$ erfüllen, die gemeinsame Verteilung von $\{N_n(A_1), \ldots, N_n(A_k)\}$ schwach in $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^k}$ gegen die gemeinsame Verteilung von $\{N_0(A_1), \ldots, N_0(A_k)\}$ konvergiert.*

Bei der Betrachtung stochastischer Prozesse unterscheiden sich die beiden Begriffe in Definition 2.15. Aus der schwachen Konvergenz eines stochastischen Prozesses folgt die Konvergenz der endlichdimensionalen Randverteilungen, während die Umkehrung nur dann gilt, falls die Folge der Verteilungen zusätzlich schwach relativkompakt ist, vgl. Kallenberg [31, Lemma 14.2]. Es stellt sich jedoch heraus, dass die beiden Begriffe für Punktprozesse äquivalent sind. Der Grund hierfür ist in einer Version des Satzes von Prohorov für zufällige Maße zu finden, vgl. Kallenberg [31, Lemma 14.15], welcher besagt, dass die Folge der zugehörigen Verteilungen der Punktprozesse genau dann straff ist, wenn die Folge der Anzahl der Punkte in einer Menge A straff ist für alle relativkompakten Mengen $A \in \mathcal{B}_{\mathscr{X}}$. Dieses erstaunliche Resultat folgt aus dem Umstand, dass die zugehörigen Punktmaße auf beschränkten Mengen endlich sind.
Die verschiedenen Aussagen über die Konvergenz von Punktprozessen sollen im folgenden Satz zusammengefasst werden. Es stellt sich heraus, dass die beiden Konvergenzbegriffe aus Definition 2.15 äquivalent sind. Dies macht es einfacher die schwache Konvergenz von Punktprozessen nachzuweisen. Beachtet man zusätzlich, dass die Verteilung eines simplen Punktprozesses durch seine avoidance-Funktion festgelegt ist, so ist es nur natürlich, dass

aus der Konvergenz der eindimensionalen Randverteilungen bereits die Konvergenz der endlichdimensionalen Randverteilungen folgt. Die Aussage, dass die schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen mit Werten auf $\mathbb{R}^+$ äquivalent zur punktweisen Konvergenz der entsprechenden Laplacetransformierten ist, welche aus dem Satz von Dubourdieu und Feller, vgl. Feller [15, Kapitel XIII.1, Theorem 1a], folgt, überträgt sich auch auf Punktprozesse und ihre Laplacefunktionale.

Satz 2.16 (Konvergenz von Punktprozessen)
Sei $(N_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Punktprozessen auf dem lcsm Raum $(\mathscr{X},\mathcal{B}_{\mathscr{X}})$. Dann sind die folgenden Aussagen für $n\to\infty$ äquivalent:

(i) $N_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N_0$.

(ii) $\int_{\mathscr{X}} f dN_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \int_{\mathscr{X}} f dN_0$ *für alle* $f\in C_K^+(\mathscr{X})$.

(iii) $(N_n(A_1),\ldots,N_n(A_k)) \xrightarrow{\mathcal{D}} (N_0(A_1),\ldots,N_0(A_k))$ *für alle relativkompakten Mengen* $A_1,\ldots,A_k\in\mathcal{B}_{\mathscr{X}}$ *mit* $N_0(\partial A_i)=0$ *f.s. für* $1\le i\le k$.

(iv) $L_{N_n}[f]\to L_{N_0}[f]$ *für alle* $f\in C_K^+(\mathscr{X})$.

Falls N_0 ein simpler Punktprozess ist, so ist auch äquivalent:

(v) $N_n(A) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_0(A)$ *für alle relativkompakten Mengen* $A\in\mathcal{B}_{\mathscr{X}}$ *mit* $N_0(\partial A)=0$ *f.s..*

Beweis. Vgl. Theorem 9.1.VII bei Daley und Vere-Jones [10] und Theorem 14.16 bei Kallenberg [31]. ■

2.1.3 Poissonprozess

Der Poissonprozess ist das einfachste Beispiel für einen stochastischen Prozess mit unstetigen Pfaden. Da eine enge Verbindung zwischen dem Poissonprozess und Punktprozessen besteht, soll der Poissonprozess in dieser Arbeit als spezieller Punktprozess eingeführt werden.

Definition 2.17
Für ein Radonmaß ν auf dem lcsm Raum $\mathscr{X}$ nennt man einen Punktprozess N einen zusammengesetzten Poissonprozess oder Poisson random measure mit Intensitätsmaß ν, i.Z. PRM(ν), falls gilt:

(a) $$\mathbb{P}(N(A)=k)=\begin{cases}\exp(-\nu(A))\frac{\nu(A)^k}{k!}, & \text{falls } \nu(A)<\infty\\ 0, & \text{falls } \nu(A)=\infty\end{cases} \quad \text{für alle } A\in\mathcal{B}_{\mathscr{X}}.$$

(b) *Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle in $\mathscr{X}$ paarweise disjunkten Mengen $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{B}_{\mathscr{X}}$ sind $N(A_i)$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen für $i \leq k$.*

Aus der Definition folgt unmittelbar, dass für alle $A \in \mathcal{B}_{\mathscr{X}}$ mit $\nu(A) = \infty$ die Identität $N(A) = \infty$ f.s. gilt. Die Eigenschaft (b) zeigt auch, dass im Fall $\mathscr{X} = \mathbb{R}$ der Poissonprozess unabhängige Zuwächse besitzt, d.h. für alle $t_1 < \ldots < t_k$ sind die Zufallsvariablen $N((t_i, t_{i+1}])$ für $i = 1, \ldots, k-1$ stochastisch unabhängig.
Um die Konvergenz eines Punktprozesses gegen einen Poissonschen Punktprozess nachzuweisen, wird aufgrund von Satz 2.16 oft die Konvergenz der Laplacefunktionale nachgewiesen. Dazu muss zunächst das Laplacefunktional eines Poissonschen Punktprozesses bestimmt werden.

Satz 2.18 (Laplacefunktional von PRM)
Ein Punktprozess $N : (\Omega, \mathcal{A}) \to (M_p(\mathscr{X}), \mathcal{M}_p(\mathscr{X}))$ ist genau dann ein PRM(ν), falls sein Laplacefunktional die Form

$$L_N[f] = \exp\left(-\int_{\mathscr{X}} \left(1 - e^{-f(x)}\right) d\nu(x)\right)$$

für alle $f \in C_K^+(\mathscr{X})$ besitzt.

Beweis. Vgl. Resnick [46, Proposition 3.6]. ■

2.1.4 Konvergenz gegen einen Poissonschen Punktprozess

Die Theorie der Konvergenz von Punktprozessen beginnt in vielen Lehrbüchern mit der Fragestellung, unter welchen Bedingungen ein Punktprozess, dessen Punkte ein Dreiecksschema von zeilenweise i.i.d. Zufallsvariablen bilden, gegen einen Poissonschen Punktprozess konvergieret. Da diese Resultate essentiell für die spätere Beweisführung sein werden, sollen sie in diesem separaten Abschnitt zusammengetragen werden.

Satz 2.19

Sei $(X_{k,n})_{1\leq k\leq n}, n \in \mathbb{N}$ *ein Dreiecksschema von zeilenweise i.i.d. Zufallsvariablen auf dem Zustandsraum* $(\mathscr{X}, \mathcal{B}_{\mathscr{X}})$. *Weiter sei* N *ein Poissonscher Punktprozess auf* $M_p(\mathscr{X})$ *mit Intensitätsmaß* ν. *Dann sind die beiden folgenden Aussagen für* $n \to \infty$ *äquivalent:*

(i) $\sum_{k=1}^n \varepsilon_{X_{k,n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N$ *in* $M_p(\mathscr{X})$.

(ii) $n\mathbb{P}(X_{1,n} \in \cdot) \xrightarrow{v} \nu(\cdot)$.

Beweis. Der Beweis erfolgt über die Konvergenz von Laplacefunktionalen. Für eine Funktion $f \in C_K^+(\mathscr{X})$ gilt die Konvergenz

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-\sum_{k=1}^n \varepsilon_{X_{k,n}}(f)\right)\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(-\sum_{k=1}^n f(X_{k,n})\right)\right) = (\mathbb{E}\ (\exp(-f(X_{1,n}))))^n$$

$$= \left(1 - \frac{\mathbb{E}\ (n(1-\exp(-f(X_{1,n}))))}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{\int_{\mathscr{X}} (1-\exp(-f(x))\ nP^{X_{1,n}}(x)}{n}\right)^n$$

$$\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left(\int_{\mathscr{X}} (1-\exp(-f(x)))\ d\nu(x)\right)$$

wegen der Definition der Exponentialfunkion genau dann, wenn

$$\int_{\mathscr{X}} (1-\exp(-f(x))\ nd\mathbb{P}^{X_{1,n}}(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathscr{X}} (1-\exp(-f(x)))\ \nu(dx)$$

gilt. Dies wiederum ist äquivalent zur vagen Konvergenz

$$n\mathbb{P}(X_{1,n} \in \cdot) \xrightarrow{v} \nu(\cdot)$$

für $n \to \infty$. Die Behauptung folgt dann aus Satz 2.16 (iv). ∎

Mit diesem grundlegenden Konvergenzresultat lassen sich Grenzwertsätze für markierte Punktprozesse herleiten, die essentiell für die spätere Beweisführung sein werden.

Satz 2.20

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge* $\mathbb{R}^+$*-wertiger i.i.d. Zufallsvariablen und* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{>0}$ *eine Folge reeller Zahlen. Dann sind die folgenden Aussagen für* $n \to \infty$ *äquivalent:*

(i) *Es gilt die vage Konvergenz des normierten Wahrscheinlichkeitsmaßes*

$$n\mathbb{P}\left(a_n^{-1}X_1 \in \cdot\right) \xrightarrow{v} \nu(\cdot)$$

für $n \to \infty$ *in* $(0, \infty]$ *gegen ein Radonmaß* ν.

(*ii*) *Es gilt die Verteilungskonvergenz der Punktprozesse*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\left(\frac{k}{n}, a_n^{-1}X_k\right)} \xrightarrow{\mathcal{D}} PRM(\lambda\!\!\lambda \otimes \nu)$$

in $M_p([0,\infty) \times (0,\infty])$.

Beweis. Vgl. Resnick [47, Theorem 6.3]. ■

Unter Verwendung von Satz 2.19 lässt sich Satz 2.20 auf allgemeinere Räume erweitern. Man erhält sofort folgendes Korollar:

Korollar 2.21
Sei $(X_{k,n})_{1\le k\le n}$, $n \in \mathbb{N}$ *ein Dreiecksschema von zeilenweise i.i.d. Zufallsvariablen mit Werten in einem lcsm Raum* $(\mathscr{X}, \mathcal{B}_{\mathscr{X}})$, *welches für* $n \to \infty$ *die Bedingung*

$$n\mathbb{P}(X_{1,n} \in \cdot) \xrightarrow{v} \nu(\cdot)$$

für ein Radonmaß ν *erfüllt. Dann gilt die Konvergenz*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\left(\frac{k}{n}, X_{k,n}\right)} \xrightarrow{\mathcal{D}} PRM(\lambda\!\!\lambda \otimes \nu)$$

für $n \to \infty$ *in* $M_p([0,\infty) \times \mathscr{X})$.

Beweis. Vgl. Resnick [47, Korollar 6.1]. ■

2.2 Limesverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen

Um die Konvergenz von *CTRWs* zu untersuchen, wird es notwendig sein, die möglichen Limesverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsvariablen bzw. Zufallsvektoren näher zu studieren. Diese Klasse von Verteilungen stimmt mit der Klasse der unendlich teilbaren Verteilungen überein. Die Theorie für diese Klasse von Verteilungen hat sich im Laufe der letzten Jahrzehnte zu einem breiten Forschungsfeld entwickelt. Eine umfassende Einführung für den eindimensionalen Fall ist im Buch von Gnedenko und Kolmogoroff [21] zu finden. Die darin aufgeführten Ergebnisse wurden im Buch von Petrov [43] durch einen neueren Zugang verallgemeinert. Wenn man die Theorie auf vektorwertige Zufallsvariablen verallgemeinern will, dient das Buch von Meerschaert und Scheffler [40] als umfangreiche Zusammenfassung.

2.2.1 Unendlich teilbare Verteilungen

Definition 2.22

Sei $\mathbf{X}$ *ein* $\mathbb{R}^d$*-wertiger Zufallsvektor mit Verteilung* μ*. Dann heißt* $\mathbf{X}$ *unendlich teilbar, falls eine Folge* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ *mit* $k_n \uparrow \infty$ *für* $n \to \infty$ *und ein Dreiecksschema von zeilenweise i.i.d. Zufallsvektoren* $\mathbf{X}_{1,n}, \ldots, \mathbf{X}_{k_n,n}$ *existiert, so dass gilt:*

$$\mathbf{X}_{1,n} + \ldots + \mathbf{X}_{k_n,n} \overset{\mathcal{D}}{=} \mathbf{X}.$$

Besitzt also $\mathbf{X}_{1,n}$ *die Verteilung* μ_n*, so gilt* $\mu_n^{*k_n} = \mu$*, wobei* μ^{*n} *das* n*-te Faltungsprodukt von* μ_n *bezeichnet.*

Da in der Theorie der unendlich teilbaren Verteilungen charakteristische Funktionen eine tragende Rolle spielen, soll Definition 2.22 äquivalent umformuliert werden.

Definition 2.23

Sei $\mathbf{X}$ *ein* $\mathbb{R}^d$*-wertiger Zufallsvektor mit charakteristischer Funktion*

$$\phi(t) = \int \exp(i < t, \mathbf{X} >) \; d\mathbb{P}, \;\; t \in \mathbb{R}^d. \tag{2.2}$$

Dann heißt $\mathbf{X}$ *unendlich teilbar, falls charakteristische Funktionen* $\phi_n(t)$ *und eine Folge* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ *mit* $k_n \uparrow \infty$ *existieren, so dass*

$$\phi(t) = \phi_n^{k_n}(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}^d$ *und alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Für unendlich teilbare Zufallsvektoren ist eine Darstellung der charakteristischen Funktion in (2.2) bekannt. Diese ist besonders nützlich, da sie nur von drei Parametern abhängt. Sei also $\mathbf{X}$ ein Zufallsvektor mit charakteristischer Funktion $\phi(t)$. Falls für eine stetige Funktion $\varphi(t)$ mit $\varphi(0) = 0$ die Gleichheit

$$\phi(t) = \exp\left(\varphi(t)\right) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}^d$$

gilt, so heißt φ die log-charakteristische Funktion von $\mathbf{X}$. Für diese erhält man nun die folgende Darstellung.

Satz 2.24 (Lévy-Khinchin Formel)

Ein $\mathbb{R}^d$*-wertiger Zufallsvektor* $\mathbf{X}$ *ist genau dann unendlich teilbar, falls sich die* log-*charakteristische Funktion* $\varphi(t)$ *von* $\mathbf{X}$ *auf die Form*

$$\varphi(t) = i < b, t > -\frac{1}{2}Q(t) + \int_{x\neq 0} \left(\exp(i < t, x >) - 1 - \frac{i < t, x >}{1 + \|x\|^2} \right) d\eta(x)$$

bringen lässt, wobei $b \in \mathbb{R}^d$, $Q(t)$ eine positiv semidefinite, quadratische Form auf $\mathbb{R}^d$ und η ein σ-endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ ist, welches die Bedingung

$$\int_{x\neq 0} \min\{1, \|x\|^2\} d\eta(x) < \infty \tag{2.3}$$

erfüllt. Weiter ist das Tripel (b, Q, η) eindeutig bestimmt und wird als Lévy-Tripel bezeichnet.

Beweis. Vgl. Meerschaert und Scheffler [40, Satz 3.1.11.]. ■

Definition 2.25
Ein σ-endliches Maß auf $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$, welches die Bedingung (2.3) erfüllt, heißt auch Lévymaß. Damit ist ein Lévymaß ein auf von Null weg beschränkten Mengen endliches Maß, welches in der Null höchstens einen Pol zweiter Ordnung besitzen darf.

Der erste Term in der Lévy-Khinchin Formel ist lediglich ein Shift. Der zweite Term wird als Gaußsche Komponente bezeichnet, da er die log-charakteristische Funktion einer zentrierten Normalverteilung darstellt. Der letzte Term wird auch als Poissonscher Anteil bezeichnet. Die Ursache dafür liegt in der Beobachtung, dass dieser Term für ein endliches Maß η die log-charakteristische Funktion einer geshifteten, zusammengesetzten Poissonverteilung bildet. Weiter folgt aus der Lévy-Khinchin Formel, dass die Normalverteilung stochastisch unabhängig von allen anderen unendlich teilbaren Verteilungen mit $Q = 0$ ist.
Der Wert von unendlich teilbaren Zufallsvariablen liegt darin, dass diese unter gewissen Voraussetzungen die Grenzverteilungen für asymptotisch vernachlässigbare Dreiecksschemata von Zufallsvektoren bilden, wobei der Begriff der asymptotischen Vernachlässigbarkeit noch zu definieren ist. Betrachtet man z.B. den zentralen Grenzwertsatz von Lindeberg-Feller, vgl. Klenke [32, Satz 15.43], so setzt dieser die Existenz zweiter Momente voraus. Es stellt sich also die Frage, ob notwendige und hinreichende Bedingungen existieren, um auch ohne die Momentenannahme asymptotische Normalität von Dreiecksschemata zu erreichen. Die Antwort auf diese Frage erhält man als Spezialfall des folgenden Satzes 2.28. Zunächst jedoch soll die ausstehende Definition gegeben werde.

Definition 2.26
Ein Dreiecksschema $(\mathbf{X}_{i,n})_{1\leq i\leq k_n}, n \in \mathbb{N}$ von zeilenweise unabhängigen $\mathbb{R}^d$-wertigen Zufallsvektoren heißt asymptotisch vernachlässigbar, falls für alle $\varepsilon > 0$

$$\max_{1\leq i\leq k_n} \mathbb{P}\left(\|\mathbf{X}_{i,n}\| > \varepsilon\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.4}$$

gilt.

Bemerkung 2.27

Man beachte, dass aus der Bedingung (2.4) keinesfalls $\max_{1\leq i\leq k_n} \mathbf{X}_{i,n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ folgt.

Bei Summen von Zufallsvektoren, deren Summanden aus einem Dreiecksschema von asymptotisch vernachlässigbaren Zufallsvektoren stammen, wird der Einfluss eines einzelnen Summanden asymptotisch beliebig klein. Unter dieser Bedingung lassen sich die möglichen Grenzverteilungen der Summen angeben. Es stellt sich heraus, dass diese mit der Klasse der unendlich teilbaren Verteilungen übereinstimmen.

Satz 2.28

Sei $(\mathbf{X}_{i,n})_{1\leq i\leq k_n}, n \in \mathbb{N}$ ein Dreiecksschema von asymptotisch vernachlässigbaren $\mathbb{R}^d$-wertigen Zufallsvektoren. Dann gibt es einen Zufallsvektor $\mathbf{X}$ und Shifts $b_n \in \mathbb{R}^d$, so dass die Konvergenz

$$\sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{X}_{i,n} - b_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbf{X}$$

für $n \to \infty$ genau dann gilt, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Es esxistiert ein Lévymaß η auf $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$, so dass die vage Konvergenz

$$\sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{P}(\mathbf{X}_{i,n} \in \cdot) \xrightarrow{v} \eta(\cdot)$$

für $n \to \infty$ in $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ gilt.

(ii) Es existiert eine positiv semidefinite, quadratische Form Q auf $\mathbb{R}^d$ mit

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}\left(< t, \mathbf{X}_{i,n} >^2 \mathbf{1}_{\|\mathbf{X}_{i,n}\|<\varepsilon}\right) - \left(\mathbb{E}\left(< t, \mathbf{X}_{i,n} > \mathbf{1}_{\|\mathbf{X}_{i,n}\|<\varepsilon}\right)\right)^2\\
=&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}\left(< t, \mathbf{X}_{i,n} >^2 \mathbf{1}_{\|\mathbf{X}_{i,n}\|<\varepsilon}\right) - \left(\mathbb{E}\left(< t, \mathbf{X}_{i,n} > \mathbf{1}_{\|\mathbf{X}_{i,n}\|<\varepsilon}\right)\right)^2\\
=&Q(t)
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}^d$.

In diesem Fall ist die Verteilung von $\mathbf{X}$ unendlich teilbar. Wählt man die Zentrierungen b_n als abgeschnittene Erwartungswerte für einen Stetigkeitspunkt τ, so dass η stetig auf

$\mathbb{S}_{\tau}^{d-1}$ *ist, gemäß*

$$b_n = \sum_{i=1}^{k_n} \int_{\|x\| \leq \tau} x \, d\mathbb{P}^{X_{i,n}}(x),$$

so besitzt $\mathbf{X}$ *das Lévy-Tripel* $(0, Q, \eta)$. *Andernfalls besitzt* $\mathbf{X}$ *das Lévy-Tripel* (b, Q, η), *wobei* b *von der speziellen Wahl der Folge* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *abhängt.*

Beweis. Für den eindimensionalen Fall vgl. Gnedenko und Kolmogoroff [21, §25 Satz 1] oder Petrov [43, Theorem 3.3]. Für den allgemeinen Fall vgl. Meerschaert und Scheffler [41, Satz 3.2.2]. ■

2.2.2 Stabile Verteilungen

Stabile Verteilungen bilden eine spezielle Klasse von unendlich teilbaren Verteilungen. Sie lassen sich durch einen Parameter, der im Folgenden als Stabilitätsindex bezeichnet wird, klassifizieren. Dabei unterscheidet man für den Stabilitätsindex zwei Fälle, um eine Untersuchung dieser Verteilungen zu vereinfachen. In beiden Fällen ist die Gestalt des Lévy-Tripels bekannt und von einer besonders einfachen Form. In diesem Abschnitt sollen einige Resultate über stabile Verteilungen zusammengetragen werden, die für die spätere Beweisführung benötigt werden.

Definition 2.29
Sei X *eine reelle Zufallsvariable und* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von unabhängigen Kopien von* X. *Dann besitzt* X *eine stabile Verteilung, falls reelle Folgen* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *existieren, so dass für alle* $n \in \mathbb{N}$ *die folgende Verteilungsgleichheit gilt:*

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} b_n (X_1 + \ldots X_n) + c_n. \tag{2.5}$$

Man kann zeigen, dass für jede stabile Verteilung ein Index $\alpha \in (0, 2]$ existiert, so dass $b_n = n^{-\frac{1}{\alpha}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, vgl. Samorodnitsky und Taqqu [49, Korollar 2.1.3]. Dieser Index wird auch als Stabilitätsindex der stabilen Verteilung bezeichnet. Dies rechtfertigt auch die Bezeichnung $\alpha-$stabile Verteilung.
Wie oben angedeutet, unterscheidet man nun zwei Fälle für den Stabilitätsindex.

Satz 2.30
Sei X *eine reelle Zufallsvariable mit* $\alpha-$*stabiler Verteilung. Dann ist* X *nichtdegeneriert, unendlich teilbar mit einem Lévy-Tripel* (b, Q, η).

(i) Ist $\alpha = 2$, so ist $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ und $Q(t) = \sigma^2 t^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Das Lévymaß η ist in diesem Fall identisch mit dem Nullmaß.

(ii) Ist $\alpha < 2$, so gilt $Q(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für das Lévymaß gilt

$$\eta((x,\infty)) = pCx^{-\alpha},\ \eta((-\infty,-x)) = qCx^{-\alpha}$$

für alle $x > 0$ und gewisse Konstanten $C > 0$ und $p, q \geq 0$ mit $p + q = 1$.

Beweis. Vgl. Meerschaert und Scheffler [40, Korollar 7.3.4]. ■

Da stabile Verteilungen selbst unendlich teilbar sind, ist natürlich auch die Darstellung ihrer log-charakteristischen Funktion von Interesse.

Satz 2.31
Sei X eine reelle Zufallsvariable mit nichtdegenerierter und nicht Gaußscher α-stabiler Verteilung mit zugehörigem Lévy-Tripel $(b, 0, \eta)$. Dann gilt für die log*-charakteristische Funktion φ von X die Darstellung*

$$\varphi(t) = \begin{cases} ibt - |t|^\alpha C(1-\alpha)^{-1}\Gamma(2-\alpha)\left[1 - i(p-q)sign(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right] & \text{für } \alpha \neq 1 \\ ibt - C|t|^\alpha\left[\frac{\pi}{2} + i(p-q)sign(t)\log(|t|)\right] & \text{für } \alpha = 1. \end{cases}$$

Beweis. Vgl. Meerschaert und Scheffler [40, Theorem 7.3.5]. ■

Wie bereits angesprochen, bilden stabile Verteilungen die Klasse der stochastischen Limiten im Sinne von Verteilungslimiten von Dreiecksschemata von zeilenweise i.i.d. Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}$. Dies soll im folgenden Abschnitt über operatorstabile Verteilungen gezeigt werden. Anstatt jedoch direkt entsprechende Sätze zu zitieren, sollen operatorstabile Verteilungen als Limiten normierter und zentrierter Zufallsvektoren definiert werden. Der Zusammenhang zur möglichen Definition über die Teilbarkeitseigenschaft (2.5) wird im später folgenden Satz 2.37 hergestellt.

2.2.3 Operatorstabile Verteilungen

Operatorstabile Verteilungen sind eine natürliche, mehrdimensionale Verallgemeinerung von stabilen Verteilungen und bilden eine spezielle Klasse von unendlich teilbaren Verteilungen. Sie sind von Interesse, wenn man *CTRWs* untersucht, welche aus i.i.d. Zufallsvektoren hervorgehen. Im Eindimensionalen stimmt die Klasse der operatorstabilen Verteilungen mit der Klasse der stabilen Verteilungen überein. Jedoch gibt es im mehrdimensionalen

Fall Verteilungen, deren Randverteilungen stabil sind, welche aber selbst nicht operatorstabil sind. Auch sind i.A. die eindimensionalen Randverteilungen von operatorstabilen Verteilungen selbst nicht notwendigerweise stabil. Eine Übersicht dieser Zusammenhänge bietet der Artikel von Meerschaert und Scheffler [39]. Aus diesem Grund sollen Resultate für operatorstabile Verteilungen in diesem Abschnitt zusammengetragen werden.
Um die eindimensionale Theorie für den $\mathbb{R}^d$ zu verallgemeineren, muss zunächst der Begriff der nichtdegenerierten Verteilung erweitert werden.

Definition 2.32
Ein Maß auf dem $\mathbb{R}^d$ heißt voll, falls es nicht von einer Hyperebene des $\mathbb{R}^d$ getragen wird.

Mit diesem Begriff lassen sich nun operatorstabile Verteilungen definieren.

Definition 2.33
Sei $(\mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. $\mathbb{R}^d$-wertigen Zufallsvektoren mit Verteilung μ. Sei weiter $\mathbf{X}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvektor mit voller Verteilung ν.

(a) *Die Verteilung ν heißt operatorstabil, falls eine Folge linearer Operatoren $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(\mathbb{R}^d)$ und eine Folge von Vektoren $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ existieren, so dass die schwache Konvergenz*

$$A_n\mu^{*n} * \varepsilon_{b_n} \xrightarrow{w} \nu$$

für $n \to \infty$ gilt.

(b) *In Termen von Zufallsvariablen lässt sich dies als Verteilungskonvergenz*

$$A_n(\mathbf{X}_1 + \ldots + \mathbf{X}_n) + b_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbf{X}$$

für $n \to \infty$ schreiben.

Nun erhält man aus der Lévy-Khinchin Formel einige Eigenschaften von operatorstabilen Verteilungen. Diese besitzen gewisse Skalierungseigeschaften. Außerdem lässt sich die bekannte Zerlegung von stabilen Verteilungen in zusammengesetzten Poisson- und Gaußschen Anteil auch auf operatorstabile Verteilungen verallgemeinern. Genauso wie sich stabile Verteilungen über einen Stabilitätsindex klassifizieren lassen, kann man für volle, operatorstabile Verteilungen stets einen Operator $E \in GL(\mathbb{R}^d)$ finden, welcher deren Eigenschaften wiedergibt. Als mehrdimensionale Verallgemeinerung der Eigenschaft, dass der Stabilitätsindex von α-stabilen Verteilungen die Bedingung $0 < \alpha \leq 2$ erfüllt, lässt sich zeigen, dass die Eigenwerte des Operators E größer oder gleich $\frac{1}{2}$ sind. Bevor der entsprechende Satz jedoch angegeben werden kann, muss noch das Faltungsprodukt für eine nicht natürliche Anzahl an Maßen sowie der Exponentialoperator für Matrizen erklärt werden.

Definition 2.34

Sei ν eine unendlich teilbare Verteilung mit Lévy-Tripel (b, Q, η) und $t > 0$. Dann definiert man die t-fache Faltung von ν, i.Z. ν^t, als die unendlich teilbare Verteilung, die das Lévy-Tripel $(tb, tQ, t\eta)$ besitzt.

Bemerkung 2.35

Man beachte, dass Definition 2.34 verträglich mit der Definition der Faltung einer natürlichen Anzahl von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist und damit eine Verallgemeinerung dieser für unendlich teilbare Verteilungen darstellt. Dies rechtfertigt auch die Bezeichnung ν^n für die Faltung ν^{*n}.

Definition 2.36

Für $A \in L(\mathbb{R}^d)$ und $t \geq 0$ wird das Matrixexponential t^A auf folgende Weise definiert:

$$t^A := \exp(A \log t), \;\; \exp(A) := \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{A^k}{k!}.$$

Satz 2.37

Ein volles Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $\mathbb{R}^d$ ist genau dann operatorstabil, falls es unendlich teilbar ist und ein linearer Operator $E \in GL(\mathbb{R}^d)$ sowie geeignete Shifts $b_t \in \mathbb{R}^d$ existieren, so dass

$$\nu^t = t^E \nu * \varepsilon_{b_t} \tag{2.6}$$

für alle $t > 0$ gilt, wobei $t^E \nu$ das Bildmaß bzgl. der Abbildung $x \mapsto t^E x$ bezeichnet. Dann besitzen die Eigenwerte von E einen Realteil größer oder gleich $\frac{1}{2}$. Weiter lässt sich ν in eindeutiger Weise als Faltungsprodukt $\nu = \nu_1 * \nu_2$ von zwei Wahrscheinlichkeitsmaßen ν_1 und ν_2 darstellen, welche auf zwei E-invarianten Teilräumen V_1 bzw. V_2 mit $\mathbb{R}^d = V_1 \oplus V_2$ konzentriert sind. Dass Maß ν_1 ist ein volles, operatorstabiles Wahrscheinlichleitsmaß vom Compound-Poisson-Typ und ν_2 ist ein volles, Gaußsches Wahrscheinlichkeitsmaß auf V_2.

Beweis. Vgl. Meerschaert und Scheffler [40, Theorem 7.2.1]. ■

Definition 2.38

Man nennt den Operator E aus Satz 2.37 auch einen Exponenten des Maßes ν und bezeichnet ν auch als (t^E)-operatorstabil, falls die Bedingung 2.6 erfüllt ist.

Da operatorstabile Verteilungen selbst unendlich teilbar sind, bilden sie aufgrund von Definition 2.22 und Satz 2.28 Limesverteilungen von Dreiecksschemata von i.i.d. Zufallsvektoren. Deshalb sollen nun Kriterien für die Konvergenz gegen eine operatorstabile Verteilung zusammengetragen werden. Dafür wird der Begriff des Anziehungsbereiches einer Verteilung hilfreich sein.

Definition 2.39
Sei $(\mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von i.i.d. $\mathbb{R}^d$-wertigen Zufallsvektoren, wobei $\mathbf{X}_0$ die Verteilung ν besitzt. Sei weiter $\mathbf{Y}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvektor mit Verteilung μ. Dann befindet sich $\mathbf{X}_0$ bzw. ν im generalisierten Anzeihungsbereich von $\mathbf{Y}$ bzw. μ, i.Z. $\mathbf{X}_0 \in GDOA(\mathbf{Y})$ bzw. $\nu \in GDOA(\mu)$, falls eine Folge linearer Operatoren $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(\mathbb{R}^d)$ und eine Folge von Vektoren $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ existieren, so dass die Konvergenz

$$A_n \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i + b_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbf{Y} \tag{2.7}$$

bzw.

$$A_n \nu^n * \varepsilon_{b_n} \xrightarrow{w} \mu$$

für $n \to \infty$ gilt.

Bemerkung 2.40
Man spricht vom einem strikten Anziehungsbereich, falls auf Zentrierungen verzichtet werden kann, d.h. es gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die normierenden Operatoren A_n in (2.7) besitzen eine Eigenschaft, die es möglich macht, deren asymptotisches Verhalten zu untersuchen. Dafür soll der Begriff der regulären Variation von reellwertigen Funktionen, mit dem sich das Buch von Seneta [53] beschäftigt, für lineare Operatoren auf dem $\mathbb{R}^d$ verallgemeinert werden. Die Theorie der regulär variierenden Operatoren wird im Buch von Meerschaert und Scheffler [40] in Kapitel 2.4 zusammengetragen.

Definition 2.41 *(a) Sei $f : \mathbb{R}^+ \to GL(\mathbb{R}^d)$ eine Borel-messbare Funktion. Dann heißt f regulär variierend zum Index $E \in L(\mathbb{R}^d)$, i.Z. $f \in RV_E$, falls*

$$f(tx)f(t)^{-1} \xrightarrow{t\to\infty} x^E$$

für alle $x > 0$ gilt. Falls $E = 0$ gilt, so heißt f langsam variierend.

(b) *Eine Folge linearer Operatoren $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset GL(\mathbb{R}^d)$ heißt regulär variierend zum Index E, i.Z. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in RV_E$, falls die Funktion $A(t) := A_{\lfloor t \rfloor}$ regulär variierend vom Index E ist.*

Es stellt sich nun heraus, dass die normierenden Operatoren stets als regulär variierend gewählt werden können. Dies macht es auch möglich, das Lévymaß der Limesverteilung als Grenzmaß der normierten Verteilung von $\mathbf{X}$ zu bestimmen.

Lemma 2.42
Sei $(\mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von i.i.d. $\mathbb{R}^d$-wertigen Zufallsvektoren. Sei weiter $\mathbf{Y}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvektor mit voller $\left(t^E\right)$-operatorstabiler Verteilung. Genau dann befindet sich der Zufallsvektor $\mathbf{X}_0$ im Anziehungsbereich von $\mathbf{Y}$, falls eine Folge regulär variierender linearer Operatoren $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in RV_{-E}$ existiert, so dass für eine geeignete Folge von Shifts $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Verteilungskonvergenz

$$B_n \sum_{k=1}^{n} \mathbf{X}_k - b_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbf{Y} \tag{2.8}$$

für $n \to \infty$ gilt.
Falls die Verteilung von $\mathbf{Y}$ das Lévy-Tripel $(b, 0, \eta)$ besitzt, ist die Bedingung (2.8) äquivalent zur vagen Konvergenz

$$n\mathbb{P}(B_n\mathbf{X}_0 \in \cdot) \xrightarrow{v} \eta(\cdot)$$

für $n \to \infty$ in $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ gegen ein volles Lévymaß η.

Beweis. Vgl. Meerschaert und Scheffler [40, Theorem 8.1.5 und Korollar 8.2.11]. ■

2.3 Lévyprozesse und Funktionenräume

Bei der Untersuchung der Skalierungslimiten von *CTRWs* stellt sich heraus, dass ein Verständnis von Lévyprozessen notwendig wird. Bei Lévyprozessen handelt es sich um spezielle stochastische Prozesse, deren Pfade rechtsstetige Funktionen mit existierenden linksseitigen Limiten sind. Um die Theorie solcher stochastischen Prozesse zusammenzutragen, wird zunächst der Raum dieser Funktionen näher untersucht, wobei sich herausstellt, dass dieser separabel und vollständig metrisierbar ist. Am Ende dieses Abschnitts wird noch die Abbildung $\mathscr{I}$ betrachtet, welche eine Funktion f auf ihre linksstetige Variante abbildet. In diesem Kontext werden kurz einige Eigenschaften des Raumes aller linksstetigen Funktionen mit existierenden rechtsseitigen Limiten angesprochen, der auch separabel und bzgl. der gleichen Metrik vollständig ist. Dabei stellt sich heraus, dass $\mathscr{I}$ eine injektive Abbildung zwischen diesen Räumen ist, die auch Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante Eins ist. Das Verständnis dieser Abbildung ist hilfreich, wenn es darum geht, warum rückwärts- bzw. vorwärtsgekoppelte *CTRWs* unterschiedliche Skalierungslimiten besitzen. Im letzten Abschnitt soll eine kurze Zusammenfassung der Theorie der Lévyprozesse erfolgen. Zusätzlich wird in diesem Abschnitt eine Reihendarstellung für Lévyprozesse eingeführt, wie sie in der Arbeit von Ferguson und Klass [13] zu finden ist. Diese wird im weiteren Verlauf hilfreich sein, um die Verteilung der Skalierungslimiten von *CTRWs* zu bestimmen.

2.3.1 Die Räume $D[0,\infty)$ und $G[0,\infty)$

In diesem Abschnitt sollen wichtige Resultate über die Funktionenräume $D[0,\infty)$ und $G[0,\infty)$ vorgestellt werden, deren Verständnis essentiell ist, um Grenzwertsätze für die in dieser Arbeit betrachteten stochastischen Prozesse herzuleiten und um die Unterschiede bei Rückwärts- bzw. Vorwärtskopplung zu verstehen. Da *CTRWs* keine stetigen, sondern lediglich rechtsstetige Pfade mit existierenden linksseitigen Limiten besitzen, ist der Raum $C[0,\infty)$ aller stetigen Abbildungen $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, ausgestattet mit der Supremumsmetrik, bzgl. derer er separabel und vollständig ist, nicht für die Betrachtung von *CTRWs* geeignet. Es genügt jedoch i.A. für f nur Sprungstellen als Unstetigkeitsstellen zuzulassen.

Definition 2.43
Eine Funktion $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ heißt càdlàg-Funktion (continue à droite, limites à gauche), falls die rechts- und linksseitigen Limiten

$$f(t+)=\lim_{s\downarrow t} f(s),\ \ f(t-)=\lim_{s\uparrow t} f(s)$$

existieren $(mit\ f(0-):=f(0))$ und falls für alle $t\geq 0$ gilt:

$$f(t+)=f(t).$$

Der Raum aller reellwertigen càdlàg-Funktionen wird mit $D([0,\infty),\mathbb{R})$ bezeichnet. Dieser Raum lässt sich auch für $\mathbb{R}^d$-wertige Funktionen zum Raum $D([0,\infty),\mathbb{R}^d)$ verallgemeineren. Dabei wird auf die Nennung des Wertebereichs verzichtet, falls sich dieser aus dem Kontext ergibt. Wichtig ist, dass sich bei càdlàg-Funktionen Sprungstellen, deren Sprunghöhen eine vorgegebene positive Schranke $\varepsilon>0$ überschreiten, nicht häufen können (vgl. Billingsley [7, Kapitel 3, Lemma 1] für den Raum $D[0,1]$). Es folgt, dass eine càdlàg-Funktion höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt.

Nun will man den Raum $D[0,\infty)$ metrisieren. Die Supremumsmetrik $\sup|\cdot|$, wie man sie auf $C[0,\infty)$ verwenden würde, ist nicht geeignet, da $D[0,\infty)$ bzgl. dieser nicht separabel wäre (es gibt überabzählbar viele Funktionen, welche einen beliebigen, festen Abstand ε zueinander besitzten). Um eine Metrik zu konstruieren, in der sich zwei gegeneinander konvergierende Sprungfunktionen nahe kommen, muss berücksichtigt werden, dass zwei benachbarte Sprungstellen den Abstand der Funktionen nicht allzu viel vergrößern. Man lässt also Deformationen der Zeitskala zu, um benachbarte Sprungstellen übereinander zu schieben. Zunächst soll eine Metrik auf $D[0,T] := \{f_{|[0,T]} : f \in D[0,\infty)\}$ konstruiert werden, aus welcher dann eine geeignete Metrik auf $D[0,\infty)$ abgeleitet werden kann.

Definition 2.44

Sei $T > 0$ und $\Lambda_{[0,T]}$ die Menge der stetigen und strikt wachsenden Bijektionen des Intervalls $[0,T]$. Für zwei Funktionen $f, g \in D[0,T]$ definiert man

$$d_{[0,T]}(f,g) := \inf_{\lambda\in\Lambda_{[0,T]}} \max\left\{\sup_{0\le t\le T}|\lambda(t)-t|, \sup_{0\le t\le T}|f(t)-g(\lambda(t))|\right\}.$$

Die Abbildung $d_{[0,T]}$ ist eine Metrik, bzgl. derer der Raum $D[0,T]$ separabel, aber nicht vollständig ist, vgl. Billingsley [7, S. 111ff]. Eine abzählbare und dichte Teilmenge bilden die rechtsstetigen Treppenfunktionen mit konstanter, rationaler Treppenbreite und rationalen Funktionswerten. Eine Funktionenfolge f_n konvergiert also gegen f in der Metrik $d_{[0,T]}$, falls eine Folge von Abbildungen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda_{[0,T]}$ existiert, so dass

$$\sup_{0\le t\le T}|\lambda_n(t)-t| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ und } \sup_{0\le t\le T}|f_n(t)-f(\lambda_n(t))| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

gilt. Die Konvergenz in der Metrik $d_{[0,T]}$ ist schwächer als die Konvergenz in der auf $C[0,T]$ verwendeten Metrik der gleichmäßigen Konvergenz. Konvergiert nämlich eine Funktionenfolge f_n gleichmäßig gegen ein f auf $[0,T]$, so konvergiert sie auch in $d_{[0,T]}$, da man die Folge der Bijektionen als konstant gleich der Identität auf $[0,T]$ wählen kann. Die Umkehrung ist i.A. jedoch falsch. Aus der Konvergenz in der Metrik $d_{[0,T]}$ folgt nicht einmal die punktweise Konvergenz für alle $t \in [0,T]$. Betrachtet man die Funktionenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\mathbf{1}_{[0,x+n^{-1})}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für ein $0 < x < T$, so besitzt diese Folge für $n \to \infty$ den Grenzwert $a_0 := \mathbf{1}_{[0,x)}$ bzgl. der Metrik $d_{[0,T]}$. Jedoch folgt keinesfalls die punktweise Konvergenz $a_n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_0(t)$ im Punkt $t = x$. Aber man kann zumindest die Konvergenz in allen Stetigkeitspunkten erwarten. Gleichmäßige Konvergenz erhält man jedoch nur unter Zusatzbedingungen.

Lemma 2.45
Sei $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ *in* $d_{[0,T]}$*. Dann gilt die Konvergenz* $f_n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(t)$ *für alle Stetigkeitspunkte* t *von* f*. Falls* f *stetig auf* $[0,T]$ *ist, so gilt sogar* $f_n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(t)$ *gleichmäßig in* t*.*

Beweis. Vgl. Billingsley [7, S. 112]. ■

Nun soll eine andere Metrik $\widetilde{d}_{[0,T]}$ konstruiert werden, welche topologisch äquivalent zu $d_{[0,T]}$ ist, d.h. $d_{[0,T]}$ und $\widetilde{d}_{[0,T]}$ erzeugen die gleiche Topologie und besitzen somit die gleichen konvergenten Folgen, aber bzgl. derer der Raum $D[0,T]$ vollständig ist. Dies ist möglich, da die Vollständigkeit eines Raumes an der Metrik und nicht an der Topologie hängt. Die Idee, um zu einer besseren Metrik zu gelangen, ist die, das Annähern der Funktionenfolge λ_n an die Identiät auf eine andere Weise zu definieren. Sei dazu

$$\Lambda^{\varepsilon}_{[0,T]} := \left\{ \lambda \in \Lambda_{[0,T]} : \left| \log \frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s} \right| \leq \varepsilon \right\}.$$

Man erhält die gewünschte Metrik auf die folgende Weise.

Definition 2.46
Für zwei Funktionen $f,g \in D[0,T]$ *definiert man*

$$\widetilde{d}_{[0,t]}(f,g) := \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \sup_{0\leq t\leq T} |f(t)-g(\lambda(t))| \leq \varepsilon \textit{ für ein } \lambda \in \Lambda^{\varepsilon}_{[0,T]} \right\}.$$

Satz 2.47
Die Metriken $d_{[0,T]}$ *und* $\widetilde{d}_{[0,T]}$ *sind topologisch äquivalent. Weiter ist der Raum* $D[0,T]$ *bzgl. der Metrik* $\widetilde{d}_{[0,T]}$ *separabel und vollständig.*

Beweis. Vgl. Billingsley [7, S. 113ff]. ■

Die Metrik $\widetilde{d}_{[0,T]}$ induziert die sogenannte Skorokhod-J_1-Topologie. Da man nun für alle $T>0$ eine Metrik zur Verfügung hat, welche $D[0,T]$ zu einem polnischen Raum macht, lässt sich hieraus eine Metrik $\widetilde{d}_{[0,\infty)}$ auf $D[0,\infty)$ konstruieren, vgl. Lindvall [37, S. 113 ff]. Diese Metrik ähnelt der Metrik auf einem topologischen Produkt von Räumen.

Lemma 2.48
Sei $(\mathscr{X}_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *eine Folge metrischer Räume und* $\mathscr{X} := \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{X}_i$ *das topologische Produkt. Dann ist*

$$d(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} \frac{d_k(x_k,y_k)}{1+d_k(x_k,y_k)}, \;\; x,y \in \mathscr{X} \tag{2.9}$$

eine Metrik auf $\mathscr{X}$. Weiter ist die Konvergenz $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^{(0)}$ in $(\mathscr{X}, d)$ äquivalent zur Konvergenz der Projektionen $(x_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_i^{(0)}$ in $(\mathscr{X}_i, d_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Beweis. Die Definitheit und Symmetrie von (2.9) folgen unmittelbar aus der Eigenschaft, dass d_i eine Metrik für alle $i \in \mathbb{N}$ ist. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Tatsache, dass die Abbildung $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ monoton wachsend auf $[0, \infty)$ ist.
Sei nun $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^{(0)}$ in $(\mathscr{X}, d)$, d.h. es gilt

$$d(x^{(n)}, x^{(0)}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} \frac{d_k(x_k^{(n)}, x_k^{(0)})}{1 + d_k(x_k^{(n)}, x_k^{(0)})} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.10}$$

Damit diese Reihe gegen Null konvergieren kann, ist notwendig, dass die Summanden für $n \to \infty$ verschwinden

$$\frac{d_i(x_i^{(n)}, x_i^{(0)})}{1 + d_i(x_i^{(n)}, x_i^{(0)})} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ für alle } i \in \mathbb{N}, \tag{2.11}$$

was gleichbedeutend mit der Konvergenz $(x_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_i^{(0)}$ in $(\mathscr{X}_i, d_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ist. Da die Konvergenz der Projektionen jedoch äquivalent zu (2.11) ist, erhält man mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, vgl. Elstrodt [12, Kapitel IV, Satz 2.7], die Konvergenz (2.10). ■

Diese Metrik erlaubt es, das topologische Produkt $\prod_{i\in I} \mathscr{X}_i$ von polnischen Räumen $\mathscr{X}_i$ selbst zu einem polnischen Raum zu machen, falls die Indexmenge I höchstens abzählbar ist. Dies lässt sich auch auf den Raum $D[0, \infty)$ übertragen, falls man Funktionen f mit Werten in $[0, \infty)$ als Summe von Funktionen $f_n := f_{|[i_{n-1}, i_n]}$ auffasst, wobei $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Stetigkeitspunkten von f bezeichnet, welche $i_n \uparrow \infty$ für $n \to \infty$ erfüllt.

Satz 2.49
Sei $\widetilde{d}_{[0,\infty)}$ die in Lindvall [37, Abschnitt 4] konstruierte Metrik auf $D[0, \infty)$. Dann gilt:

(i) Der Raum $\left(D[0, \infty), \widetilde{d}_{[0,\infty)}\right)$ ist separabel und vollständig.

(ii) Es gilt $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ in $\widetilde{d}_{[0,\infty)}$ genau dann, falls eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda_{[0,\infty)}$ existiert, so dass für $n \to \infty$ die Konvergenzen

$$f_n \circ \lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \textit{ kompakt gleichmäßig}, \quad \lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \textit{id gleichmäßig}$$

gelten, wobei $\Lambda_{[0,\infty)}$ die Menge der stetigen und streng monoton wachsenden Bijektionen des Intervalls $[0, \infty)$ bezeichnet, d.h. für $\lambda \in \Lambda_{[0,\infty)}$ gilt $\lambda(0) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \infty$.

Beweis. Vgl. Lindvall [37, Satz 1]. ■

Um im weiteren Verlauf dieser Arbeit zu verstehen, warum sich die Skalierungslimiten von rückwärts- und vorwärtsgekoppelten *CTRWs* unterscheiden, wird es hilfreich sein linksstetige Varianten von càdlàg Funktionen zu betrachten. Diese Funktionen sind also keine Elemente mehr in $D[0,\infty)$.

Definition 2.50
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ heißt càglàd (continue à gauche, limites à droite), falls die rechts- und linksseitigen Limiten

$$f(t+) = \lim_{s \downarrow t} f(s), \;\; f(t-) = \lim_{s \uparrow t} f(s)$$

existieren (mit $f(0-) := f(0)$), und falls für alle $t > 0$ gilt:

$$f(t-) = f(t).$$

Der Raum aller càglàd-Funktionen wird mit $G[0,\infty)$ bezeichnet. Es ist bekannt, dass der metrische Raum $\left(G[0,\infty), \widetilde{d}_{[0,\infty)}\right)$ ebenfalls separabel und vollständig ist, vgl. Carmona und Nualart [8, S. 8]. Dieses Resultat ist nicht verwunderlich. Verwendet man mit

$$w_x(A) := \sup\{|x(s) - x(t)| : s, t \in A\} \text{ für } A \subset [0,T]$$

statt des in Billingsley [7] verwendeten rechtsseitigen Stetigkeitsmoduls

$$w_x(\delta) := \sup_{0 \le t \le T-\delta} w_x([t, t+\delta])$$

die linksseitige Variante

$$\widetilde{w}_x(\delta) = \sup_{\delta \le t \le T} w_x([t-\delta, t]),$$

so erhält man die gewünschten Eigenschaften von $\left(G[0,\infty), \widetilde{d}_{[0,\infty)}\right)$ mit der gleichen Beweismethodik. Betrachtet man jedoch die Räume $D[0,T]$ und $G[0,T]$ für ein festes $T > 0$, so lassen sie sich nicht einfach mittels einer Abbildung identifizieren. Wählt man z.B. die kanonische Verschiebung der Funktionswerte an den Unstetigkeitsstellen

$$\mathscr{I} : D[0,T] \to G[0,T], \;\; f(t) \mapsto f(t-) \text{ für alle } 0 \le t \le T, \tag{2.12}$$

so ist diese nicht bijektiv, denn die Funktion $\mathbf{1}_{\{0\}} \in G[0,T]$ besitzt unter $\mathscr{I}$ kein Urbild in $D[0,T]$. Der Grund hierfür liegt darin, dass die injektive Abbildung $\mathscr{I}$ in den Teilraum aller linksstetigen Funktionen mit existierenden rechtsseitigen Limiten, die auch rechtsstetig in Null sind, abbildet. Dieser ist unter $\widetilde{d}_{[0,\infty)}$ jedoch nicht vollständig, da die Cauchyfolge $x_n := \mathbf{1}_{[0,\frac{T}{n})}(x)$ keinen Grenzwert in diesem Raum besitzt. Mit Hilfe der Rechtsstetigkeit der Elemente von $D[0,T]$ lässt sich jedoch zeigen, dass die Abbildung $\mathscr{I}$ zumindest Lipschitz-stetig ist.

Lemma 2.51
Seien $f, g \in D[0,T]$ für ein $T > 0$. Dann gilt:

$$\widetilde{d}_{[0,T]}(\mathscr{I}(f), \mathscr{I}(g)) \leq \widetilde{d}_{[0,T]}(f, g),$$

d.h. die Abbildung $\mathscr{I}$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante Eins.

Beweis. Der Beweis beruht auf der bekannten Abschätzung für càdlàg-Funktionen

$$\sup_{0<t\leq T} |f(t-)| \leq \sup_{0\leq t\leq T} |f(t)|,$$

vgl. Appelbaum [1, S. 119]. Aus der Rechtsstetigkeit von f folgt, dass auch $\mathscr{I}(f)$ rechtsstetig in 0 ist. Man erhält also

$$\sup_{0\leq t\leq T} |\mathscr{I}(f(t))| = \sup_{0<t\leq T} |\mathscr{I}(f(t))| \leq \sup_{0\leq t\leq T} |f(t)|.$$

Sei nun $\widetilde{d}_{[0,T]}(f, g) = \delta$. Dann folgt für alle $\varepsilon > \delta$

$$\sup_{0\leq t\leq T} |f(t) - g(\lambda(t))| \leq \varepsilon \text{ für ein } \lambda \in \Lambda_\varepsilon.$$

Nun definiert man $\widetilde{g} := f - g \circ \lambda$. Da λ stetig und bijektiv auf $[0,T]$ ist, erhält man

$$\varepsilon \geq \sup_{0\leq t\leq T} |\widetilde{g}(t)| \geq \sup_{0\leq t\leq T} |\mathscr{I}(\widetilde{g}(t))| \geq \sup_{0\leq t\leq T} |f(t-) - g(\lambda(t-))| \geq \sup_{0\leq t\leq T} |f(t-) - g(\lambda(t)-)|,$$

d.h. es gilt

$$\widetilde{d}_{[0,T]}(\mathscr{I}(f), \mathscr{I}(g)) \leq \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > \delta$. Die Behauptung folgt nun mit dem Grenzübergang $\varepsilon \downarrow \delta$.

■

Nun gilt, dass Lipschitz-stetige Abbildungen insbesondere stetig sind, da die Verschiebung von benachbarten Werten durch die Lipschitzkonstante beschränkt wird.

Korollar 2.52
Die in (2.12) definierte Abbildung $\mathscr{I}$ ist stetig.

2.3.2 Lévyprozesse

Ein stochastischer Prozess $(\mathbf{X}(t))_{t\geq 0}$ ist eine Familie von Zufallsvariablen mit Werten in einem gemeinsamen Messraum $(E, \mathcal{E})$. In dieser Arbeit sind lediglich Prozesse von Interesse, welche Werte in $\mathbb{R}^d$ für ein festes $d \in \mathbb{N}$ annehmen, jedoch sind an dieser Stelle auch wesentlich abstraktere Räume möglich. Wertet man den Prozess für ein festes $\omega \in \Omega$ aus, so bezeichnet man die Abbildung $t \mapsto (\mathbf{X}(t))(\omega)$ auch als Pfad des Prozesses. In dieser Arbeit werden auch nur stochastische Prozesse betrachtet, deren Pfade Elemente des bereits eingeführten Raums $D[0,\infty)$ sind. Stattet man den Funktionenraum $D[0,\infty)$ nun mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_{D[0,\infty)}$ aus, so ist ein stochastischer Prozess eine messbare Abbildung in den Messraum $(D[0,\infty), \mathcal{B}_{D[0,\infty)})$, d.h. dessen Realisierungen sind Funktionen in $D[0,\infty)$. Um also die Verteilung eines stochastischen Prozesses $\mathbf{X}(\cdot)$ zu bestimmen, muss $\mathbb{P}(\mathbf{X}(\cdot) \in A)$ für alle $A \in \mathcal{B}_{D[0,\infty)}$ bestimmt werden. Da dies sehr aufwendig ist, soll nun ein einfacherer Weg dargestellt werden. Für Zeitpunkte $t_1, \dots, t_n$ bezeichne $\pi_{t_1,\dots,t_n}$ die kannonische Projektion von $D[0,\infty)$ nach $\mathbb{R}^d$, d.h. für $x(\cdot) \in D[0,\infty)$ ist $\pi_{t_1,\dots,t_n}(x(\cdot))$ die Projektion auf die endlich vielen Randverteilungen zu den Zeitpunkten $t_1, \dots, t_n$

$$\pi_{t_1,\dots,t_n}(x(\cdot)) = (x(t_1), \dots, x(t_n)).$$

Nun wird die Verteilung eines stochastischen Prozesses bereits durch die Kenntnis hinreichend vieler dieser Randverteilungen festgelegt.

Lemma 2.53
Sei $\mathbf{X}(\cdot)$ ein stochastischer Prozess mit Werten in $\big(D[0,\infty), \mathcal{B}_{D[0,\infty)}\big)$. Sei weiter T_0 eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}^+$. Dann ist die Verteilung $\mathbb{P}^{\mathbf{X}(\cdot)}$ bereits durch die endlichdimensionalen Randverteilungen $\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_n}\mathbb{P}^{\mathbf{X}(\cdot)}$ für $t_1, \dots, t_n \in T_0,\ n \in \mathbb{N}$ festgelegt.

Beweis. Vgl. Billingsley [7, Lemma 14.5]. ■

Nachdem man nun Hilfsmittel bereit hat, um die Verteilung von stochastischen Prozessen zu bestimmen, soll nun die Klasse der für diese Arbeit maßgeblichen Prozesse eingeführt werden. Ein Lévyprozess ist ein stochastischer Prozess mit den folgenden Zusatzeigenschaften:

Definition 2.54
Ein stochastischer Prozess $(\mathbf{X}(t))_{t\geq 0} =: \mathbf{X}(\cdot)$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Werten im Raum $\mathbb{R}^d$ heißt Lévyprozess, falls er die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) Es gilt $\mathbf{X}(0) = 0$ f.s..

(b) *Die Pfade des Prozesses sind Elemente in* $D[0,\infty)$.

(c) *Für* $(t_i)_{1\leq i\leq n} \subset \mathbb{R}^+$ *mit* $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ *sind die Zuwächse* $\mathbf{X}(t_2) - \mathbf{X}(t_1), \ldots, \mathbf{X}(t_n) - \mathbf{X}(t_{n-1})$ *stochastisch unabhängige Zufallsvariablen.*

(d) *Der Prozess besitzt stationäre Zuwächse, d.h. für alle* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ *und alle* $\varepsilon > 0$ *gilt die Verteilungsgleichheit*

$$\mathbb{P}^{\mathbf{X}(t_1+\varepsilon)-\mathbf{X}(t_1)} = \mathbb{P}^{\mathbf{X}(t_2+\varepsilon)-\mathbf{X}(t_2)}.$$

(e) *Der Prozess ist stochastisch stetig, d.h. es gilt für alle* $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{P}\left(\|\mathbf{X}(t+\varepsilon) - \mathbf{X}(t)\| \geq \delta\right) = 0.$$

Man beachte, dass die Eigenschaft (e) aus Definition 2.54 keinesfalls die Stetigkeit der Pfade des Prozesses impliziert. Als einfachstes Beispiel, welches dies verdeutlicht, kann der Poissonprozess mit Intensitätsmaß $\lambda\!\!\lambda$ aus Definition 2.17 angeführt werden. Aus Proposition 5.1 bei Resnick [47] ist bekannt, dass der Poissonprozess sich in einfacher Weise als Punktprozess darstellen lässt. Sei dazu $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, wobei Γ_n die n-te Partialsumme einer Folge von i.i.d. standard exponentialverteilten Zufallsvariablen bildet. Dann definiert

$$N_t := \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\Gamma_k}([0,t]) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\Gamma_k\leq t} \tag{2.13}$$

einen homogenen Poissonprozess. Offenbar erfüllt N_t die Bedingungen (a) und (b). Man kann zeigen, dass N_t auch unabhängige sowie stationäre Zuwächse besitzt und stochastisch stetig ist, vgl. Cont und Tankov [9, Proposition 2.12]. An der Darstellung (2.13) erkennt man jedoch, dass die Pfade von N_t stückweise stetige Sprungfunktion mit Sprunghöhe 1 sind.

Betrachtet man einen Lévyprozess $\mathbf{X}(\cdot)$ an einer Stelle $t > 0$, so gilt offenbar mit der Konvention $\mathbf{X}(0) := 0$

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbf{X}(n^{-1}tk) - \mathbf{X}(n^{-1}t(k-1))\right). \tag{2.14}$$

Da ein Lévyprozess unabhängige und stationäre Zuwächse besitzt, zeigt (2.14), dass $X(t)$ für alle festen $t > 0$ eine unendlich teilbare Verteilung besitzt. Es stellt sich die Frage, ob man auch zu jeder unendlich teilbaren Verteilung einen zugehörigen Lévyprozess finden kann. Der Zusammenhang wird im folgenden Satz dargestellt.

Satz 2.55
Sei $\mathbf{X}(\cdot)$ *ein Lévyprozess auf* $\mathbb{R}^d$*. Dann besitzt* $\mathbf{X}(\cdot)$ *zu jeder festen Zeit* $t > 0$ *eine unendlich teilbare Verteilung. Ist andererseits* ν *eine unendlich teilbare Verteilung, so existiert ein Lévyprozess* $\mathbf{X}(\cdot)$*, so dass die Verteilungsgleichheit* $\mathbb{P}^{\mathbf{X}(1)} = \nu$ *gilt.*

Beweis. Der erste Teil der Aussage folgt sofort aus der Darstellung (2.14). Für den zweiten Teil vgl. Kallenberg [31, Theorem 13.12]. ■

Die Untersuchung von *CTRWs* in dieser Arbeit führt zu Skalierungslimiten, welche eine Reihendarstellung besitzen. Dies macht es notwendig, eine solche Darstellung für Lévyprozesse $(\mathbf{X}(t))_{0\leq t\leq T}$ für $T > 0$ herzuleiten. Der Einfachheit halber wird in diesem Kapitel nur der eindimensionale Fall betrachtet. Im Mehrdimensionalen sind auch Reihen- und Integraldarstellungen von Lévyprozessen bekannt, vgl. die sogenannte Itô-Darstellung in Formeln (5.35) und (5.36) bei Resnick [47].
Sei also $(X(t))_{0\leq t\leq T}$ ein Lévyprozess mit Werten in $\mathbb{R}$. Dann lässt sich $(X(t))_{0\leq t\leq T}$ in drei unabhängige Lévyprozesse

$$(X(t))_{0\leq t\leq T} = \Big(X^{(1)}(t) + X^{(2)}(t) + X^{(3)}(t)\Big)_{0\leq t\leq T}$$

zerlegen, vgl. Gihman und Skorokhod [19, S. 199]. Hierbei ist $X^{(2)}$ entweder eine Brownsche Bewegung mit Drift oder degeneriert und die Prozesse $X^{(1)}$, $X^{(3)}$ sind Sprungprozesse. Seien η_1 bzw. η_2 die Lévymaße der Prozesse $X^{(1)}$ bzw. $X^{(3)}$. Es wird nun der Fall betrachtet, dass der Prozess $(X(t))_{0\leq t\leq T}$ keinen Normalverteilungsanteil enthält, d.h. es gilt $X^{(2)}(t) \equiv 0$. Dann ist η_1 auf $(-\infty, 0)$ und η_2 auf $(0,\infty)$ konzentriert. Man definiert nun die links- bzw. rechtsseitigen Inversen der Lévymaße η_1 bzw. η_2 durch

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}_1(y) &:= \inf\{t : \eta_1((-\infty, t]) \geq y\} \wedge 0,\ \ y > 0;\\ \widetilde{\Psi}_2(y) &:= \sup\{t : \eta_2([t,\infty)) \geq y\} \vee 0,\ \ y > 0.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Sei Γ_n die n-te Partialsumme einer Folge von i.i.d. standard exponentialverteilten Zufallsvariablen und $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen, wobei τ_1 gemäß $\mathcal{U}[0,1]$ verteilt ist. Definiert man nun die Folgen von Zufallsvariablen $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\widetilde{\Gamma}_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\widetilde{\tau}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\widetilde{\Gamma}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\widetilde{\tau}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige stochastische Kopien bezeichnen, die auch unabhängig voneinander sind, so erhält man nun die

Ferguson-Klass Darstellung von $X_1(\cdot)$ und $X_3(\cdot)$ durch

$$(X^{(1)}(t))_{0\le t\le T} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{[0,t]}(T\cdot\tau_k) - t\cdot\mathbb{E}\left(\Psi_1(\Gamma_k)\mathbf{1}_{\Psi_1(\Gamma_k)<-\tau}\right)\right)_{0\le t\le T}, \quad (2.16)$$

$$(X^{(3)}(t))_{0\le t\le T} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{[0,t]}(T\cdot\widetilde{\tau}_k) - t\cdot\mathbb{E}(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k)>\tau})\right)_{0\le t\le T} \quad (2.17)$$

in $D[0,T]$ für $0\le t\le T$, vgl. Ferguson und Klass [13, S. 1637]. Dabei sind die Abschneidepunkte $\pm\tau$ als Stetigkeitspunkte der Maße η_1 bzw. η_2 zu wählen. Verschiedene Wahlen von τ wirken sich dabei lediglich auf den Driftanteil aus. Falls das Lévymaß auch die Funktion $|x|\cdot\mathbf{1}_{|x|>1}$ integriert, so existieren die ersten Momente in (2.16) und (2.17), so dass auf das Abschneiden verzichtet werden kann. Falls $X(\cdot)$ ein stabiler Lévyprozess ist, so lässt sich mit Hilfe Satz 2.30 zeigen, dass dies genau dann der Fall ist, falls der Stabilitätsindex α die Bedingung $1<\alpha<2$ erfüllt. Gilt für den Stabilitätsindex α hingegen $\alpha<1$, so kann auf die Zentrierungen sogar gänzlich verzichtet werden, vgl. [48, Theorem 4.1].

2.4 Limesverteilungen von Maxima unabhängiger Zufallsvariablen

Bei der Untersuchung von *CTRWs* stellt sich auch die Frage nach dem asymptotischen Verhalten des betragsmässig größten Sprungs. Um dieser Fragestellung nachzugehen, wird ein Verständnis der Theorie von Maxima und Minima von i.i.d. Zufallsvariablen notwendig sein. Diese Theorie wird oft auch als Extremwertheorie bezeichnet und soll in diesem Abschnitt zusammengefasst werden, wie sie in den Büchern von Resnick [46], [47] und de Haan und Ferreira [11] gelehrt wird. Obwohl diese Bücher einen hervorragenden Einstieg in die Extremwerttheorie bieten, gehen die Anfänge der eindimensionalen Theorie bis in die 20er Jahre des letzten Jahrhundets zurück, vgl. z.B. Fréchet [18], und gewannen mit dem Artikel von Gnedenko [20] an Bedeutung. In den ersten Jahren fand ein Studium dieser Theorie aus rein mathematischer Neugierde statt, jedoch fanden sich in den folgenden Jahren immer mehr Anwendungsmöglichkeiten. Heutzutage besitzt die Extremwerttheorie bei der Auswertung multivariater, abhängiger Daten eine enorm praktische Relevanz. Doch trotz der umfangreichen Anwendungsmöglichkeiten, die eine Verknüpfung von Extremwerttheorie und Statistik bietet, findet diese in der Literatur erst deutlich später statt, vgl. z.B. Pickands [45].

2.4.1 Eindimensionale Extremwerttheorie

Die Untersuchung der Limesverteilungen von geeignet skalierten Maxima und Minima, welche auch Extremwertverteilungen gennant werden, beginnt in der Literatur oft mit der Beobachtung, dass für eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F die Verteilung von $\max\{X_1,\dots,X_n\}$ und $\min\{X_1,\dots,X_n\}$ in Termen der n-ten Potenz von F beschrieben werden kann:

$$\mathbb{P}\left(\bigvee_{k=1}^{n} X_k \le t\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k \le t\}\right) = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k \le t) = F^n(t);$$

$$\mathbb{P}\left(\bigwedge_{k=1}^{n} X_k \le t\right) = 1-\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k > t\}\right) = 1-\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k > t) = 1-(1-F(t))^n.$$

Auf der Basis dieser einfachen Darstellung der Verteilungsfunktion von Maximum und Minimum lässt sich nun die gesamte, folgende Theorie aufbauen. Zum Beispiel zeigt diese Darstellung, dass es notwendig ist, die monotonen Folgen $(\bigvee_{k=1}^{n} X_k)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\bigwedge_{k=1}^{n} X_k)_{n\in\mathbb{N}}$ geeignet zu skalieren, um Grenzwertsätze zu erhalten; definiert man nämlich den rechten bzw. linken Endpunkt von F als

$$x_\infty = \sup\{t : F(t) < 1\} \text{ bzw. } x_{-\infty} := \inf\{t : F(t) > 0\}$$

so folgt mit der monotonen Konvergenz

$$\mathbb{P}\left(\bigvee_{k=1}^{n} X_k \le t\right) = F^n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ für alle } t < x_\infty,$$

$$\mathbb{P}\left(\bigwedge_{k=1}^{n} X_k \le t\right) = 1-(1-F(t))^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ für alle } t > x_{-\infty}$$

die f.s. Konvergenz des Maximums bzw. Minimums gegen der rechten bzw. linken Endpunkt

$$\bigvee_{k=1}^{n} X_k \uparrow x_\infty \text{ f.s.}, \quad \bigwedge_{k=1}^{n} X_k \downarrow x_{-\infty} \text{ f.s.}$$

für $n\to\infty$. Obwohl diese Aussagen sehr nützlich sind, lässt sich mit ihnen allein noch keine vernünftige Extremwerttheorie betreiben. Führt man jedoch geeignete Normierungen und Zentrierungen ein, so lassen sich die möglichen, nichtdegenerierten Extremwertverteilungen bestimmen. Ein zentrales Resultat der eindimensionalen Extremwerttheorie, welches auf die Arbeit von Fisher und Tippet [17] zurückgeht, zeigt nun, dass die Klasse von Extremwertverteilungen sich in besonders einfacher Weise parametrisieren lässt. Bevor dieses jedoch vorgestellt werden kann, muss definiert werden, wann zwei Verteilungen vom selben Typ sind.

Definition 2.56
Seien F, G zwei Verteilungsfunktionen. Dann heißen F und G vom selben Typ, i.Z. $F \sim_T G$, falls Konstanten $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}$ existieren, so dass F und G affin linear ineinander transformiert werden können, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichheit

$$F(x) = G(c_1 x + c_2).$$

Analog heißen zwei Zufallsvariablen X, Y vom selben Typ, falls deren Verteilungsfunktionen vom selben Typ sind.

Bemerkung 2.57
Die Relation $\sim_T$ in Definition 2.56 bildet eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Verteilungsfunktionen.

Satz 2.58 (Fisher-Tippet Theorem)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F. Falls Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{>0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ existieren, so dass die Konvergenz

$$\mathbb{P}\left(a_n^{-1} \bigvee_{k=1}^{n} X_k - b_n \leq t\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} G(t) \tag{2.18}$$

für alle Stetigkeitspunkte t einer nichtdegenerierten Verteilungsfunktion G gilt, so ist G von einem der drei folgenden Typen:

(i) $\Phi_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \exp\left(-t^{-\alpha}\right), & t \geq 0 \end{cases}$ *für ein* $\alpha > 0$ *(Fréchet).*

(ii) $\Psi_\alpha(t) = \begin{cases} \exp\left(-(-t)^{\alpha}\right), & t < 0 \\ 1, & t \geq 0, \end{cases}$ *für ein* $\alpha > 0$ *(Weibull).*

(iii) $\Lambda(t) = \exp(-e^{-x})$, $t \in \mathbb{R}$ *(Gumbel).*

Bemerkung 2.59
Zur Vereinfachung der Notation wird im weiteren für eine Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Verteilungsfunktionen, welche

$$F_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_0(x) \tag{2.19}$$

für alle Stetigkeitspunkte x von F erfüllt, die Symbolik $F_n(x) \xrightarrow{w} F_0(x)$ für $n \to \infty$ verwendet. Die Rechtfertigung dafür liefert der Satz von Helly-Bray, vgl. [32, Satz 13.23], welcher zeigt, dass die Konvergenz in (2.19) äquivalent zur schwachen Konvergenz der von F_n erzeugten Verteilungen gegen die von F_0 erzeugte Verteilung ist.

An dieser Stelle bietet es sich an, genau wie bei Summen, von einem Anziehungsbereich der Verteilungsfunktion G zu sprechen, d.h. es gilt $F \in DOA_{\max}(G)$, falls (2.18) erfüllt ist.

Dieser Satz zeigt also, dass sich die nichtdegenerierten Extremwertverteilungen von Maxima bis auf affin lineare Transformationen in drei Verteilungsklassen einordnen lassen. Unter Beachtung der Verbindung von Maximum und Minumum durch die Gleichheit

$$\bigvee_{k=1}^{n} X_k = - \bigwedge_{k=1}^{n} (-X_k)$$

folgt, dass die Klasse der Extremwertverteilung für das Minimum aus den Spiegelungen der drei Verteilungsklassen Φ_α, Ψ_α und Λ besteht. Aus diesem Grund soll für eine Verteilungsfunktion F die Notation $F \in DOA_{\min}(G)$ eingeführt werden, falls für $n \to \infty$ die Konvergenz

$$\mathbb{P}\left(a_n^{-1} \bigwedge_{k=1}^{n} X_k - b_n \leq t \right) \xrightarrow{w} 1 - G(-t)$$

für geeignete, normierende und zentrierende Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und eine Folge von von i.i.d. nach F verteilter Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt.

Der Beweis des Fisher-Tippet Theorems und einige wichtige Eigenschaften der Klassen von Extremwertverteilungen ergeben sich, wenn man den Satz 2.58 auf eine andere Weise formuliert.

Satz 2.60

Die Klasse der möglichen Typen von Extremwertverteilungen wird durch $G_\gamma(ax+b)$ für reelle Konstanten $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ beschrieben, wobei G_γ durch

$$G_\gamma(x) = \exp\left(-(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}} \right), \ 1 + \gamma x > 0 \tag{2.20}$$

für ein $\gamma \in \mathbb{R}$ definiert wird. Für $\gamma = 0$ ist die rechte Seite von (2.20) als $\exp(-e^{-x})$ zu interpretieren.

Beweis. Vgl. de Haan und Ferreira [11, Satz 1.1.3]. ■

Im Fall $\gamma = 0$ erhält man die Gumbelverteilung, die oft auch treffend als Doppelexponentialverteilung bezeichnet wird. Dies bedeutet also, dass $x_\infty = \infty$ gilt und die Extremwertverteilung einen exponentiell fallenden tail besitzt.
Der Fall $\gamma < 0$ impliziert $x_\infty = -\frac{1}{\gamma}$. Die Klasse wird oft auch als Klasse der inversen Weibullverteilungen bezeichnet.
Der Fall $\gamma > 0$ in (2.20), welcher zu Fall (i) in Satz 2.20 gehört, impliziert $G_\gamma(x) < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. es gilt $x_\infty = \infty$. Weiter gilt für $x \to \infty$

$$1 - G_\gamma(x) \sim \gamma^{-\frac{1}{\gamma}} x^{-\frac{1}{\gamma}},$$

d.h. G_γ besitzt einen vom Index $-\frac{1}{\gamma}$ regulär variierenden tail. Aufgrund dieser Eigenschaft wird die Klasse Φ_α in dieser Arbeit von näherem Interesse sein, weshalb in der weiteren Betrachtung der Extremwerttheorie in dieser Arbeit die anderen Verteilungsklassen vernachlässigt werden. Die Klasse Φ_α wird oft als Klasse der Fréchetverteilungen bezeichnet. Obwohl diese drei Verteilungsklassen aus modelltechnischer Sicht sehr unterschiedliche Eigenschaften besitzen, sind sie mathematisch verwandt.

Lemma 2.61
Für eine Zufallsvariable $X > 0$ sind die folgenden drei Eigenschaften äquivalent:

(i) X *besitzt die Verteilungsfunktion* Φ_α.

(ii) $\log X^\alpha$ *besitzt die Verteilungsfunktion* Λ.

(iii) $-X^{-1}$ *besitzt die Verteilungsfunktion* Ψ_α.

Der Beweis dieses Lemmas ist trivial, so dass auf ihn verzichtet werden kann.
Da jede Verteilungsfunktionen in der Klasse Φ_α einen regulär variierenden tail und den rechten Endpunkt $x_\infty = \infty$ besitzt, stellt sich die Frage, in wie weit sich diese Eigenschaften auf Verteilungsfunktionen $\widetilde{F}$ mit $\widetilde{F} \in DOA_{\max}(\Phi_\alpha)$ übertragen lassen.

Satz 2.62
Sei $\widetilde{F}$ eine Verteilungsfunktion. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\widetilde{F} \in DOA_{\max}(\Phi_\alpha)$.

(ii) $\sup\{x : \widetilde{F}(x) < 1\} = \infty$ *und es gilt* $1 - \widetilde{F} \in RV_{-\alpha}$.

Definiert man die linksseitige Inverse der Verteilungsfunktion $\widetilde{F}$ durch

$$\widetilde{F}^{\leftarrow}(y) := \inf\{t : \widetilde{F}(t) \geq y\},$$

so gilt in diesem Fall die Konvergenz

$$\widetilde{F}^n(a_n x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi_\alpha(x)$$

für $a_n := \left(\frac{1}{1-\widetilde{F}}\right)^{\leftarrow}(n)$.

Beweis. Vgl. de Haan und Ferreira [11, Theorem 1.2.1 und Korollar 1.2.4]. ∎

Dieser Satz zeigt, dass die Verteilungsfunktionen, die von Φ_α für ein $\alpha > 0$ angezogen werden, einen zum Index α regulär variierenden tail besitzen. Weiter zeigt sich, dass man bei der Konvergenz (2.18) auf die zentrierende Folge $(\widetilde{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verzichten kann. Zu bemerken ist, dass auch andere Wahlen der Folge $(\widetilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ möglich sind. Jedoch kann es dann möglich sein, dass die Limesverteilung affin transformiert werden muss, damit die zugehörige Verteilungsfunktion die Gestalt Φ_α besitzt.
Nun ist bekannt, dass regulär variierende Verteilungstails und die Konvergenz von markierten Punktprozessen gegen Poissonsche Punktprozesse zusammenhängen. Dies erlaubt es den vorangegangenen Satz etwas zu verallgemeineren.

Satz 2.63
Sei $\left(\widetilde{X}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine i.i.d. Folge* $\mathbb{R}^+$*-wertiger Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion* $\widetilde{F}$. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(*i*) *Es existiert eine Folge* $(\widetilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{>0}$, *so dass man für* $n \to \infty$ *die vage Konvergenz des normierten Wahrscheinlichkeitsmaßes*

$$n\mathbb{P}(\widetilde{a}_n^{-1}\widetilde{X}_1 \in \cdot) \stackrel{v}{\longrightarrow} \widetilde{\nu}(\cdot) \tag{2.21}$$

in $(0,\infty]$ *erhält.*

(*ii*) *Es gilt die Verteilungskonvergenz der normierten Maxima*

$$\widetilde{a}_n^{-1}\bigvee_{k=1}^{n}\widetilde{X}_k \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \widetilde{Y}_0, \tag{2.22}$$

wobei $\widetilde{Y}_0$ *die Verteilungsfunktion*

$$\widetilde{F}_{Y_0}(x) := \exp(-\widetilde{\nu}((x,\infty])) \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$$

besitzt.

Für den Spezialfall $\widetilde{\nu}((x,\infty)) = x^{-\alpha}$ *folgt also, dass* $\widetilde{Y}_0$ *die Verteilungsfunktion* Φ_α *besitzt.*

Beweis. Aus der Bedingung (2.21) folgt mit Satz 2.19 die schwache Konvergenz der Punktprozesse

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{\widetilde{a}_n^{-1}\widetilde{X}_k} \xrightarrow{\mathcal{D}} PRM(\widetilde{\nu}) =: N_0$$

in $M_p((0,\infty])$. Mit Hilfe dieser erhält man aus Satz 2.16 die Konvergenz

$$\mathbb{P}\left(\widetilde{a}_n^{-1}\bigvee_{k=1}^{n}\widetilde{X}_k \le x\right) = \mathbb{P}\left(\widetilde{a}_n^{-1}\widetilde{X}_1 \le x,\ldots,\widetilde{a}_n^{-1}\widetilde{X}_n \le x\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{\widetilde{a}_n^{-1}\widetilde{X}_k}((x,\infty]) = 0\right)$$
$$\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(N_0((x,\infty]) = 0\right) = \exp(-\widetilde{\nu}((x,\infty]).$$

Andererseits folgt aus Bedingung (2.22) für alle $x > 0$ die Konvergenz

$$\mathbb{P}\left(\widetilde{a}_n^{-1}\bigvee_{k=1}^{n}\widetilde{X}_k \le x\right) = \mathbb{P}\left(\widetilde{a}_n^{-1}\widetilde{X}_1 \le x,\ldots,\widetilde{a}_n^{-1}\widetilde{X}_n \le x\right) = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\widetilde{a}_n^{-1}\widetilde{X}_k \le x) = \widetilde{F}(\widetilde{a}_n x)^n$$
$$\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(-\widetilde{\nu}((x,\infty]).$$

Durch Übergang zu Logarithmen erhält man daraus

$$n(-\log(\widetilde{F}(\widetilde{a}_n x))) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\nu}((x,\infty]).$$

Aus der Taylorentwicklung des Logarithmus folgt nun das asymptotische Verhalten

$$-\log(1-x) \sim x$$

für $x \downarrow 0$. Man erhält

$$n(-\log(\widetilde{F}(\widetilde{a}_n x))) \sim n\mathbb{P}(\widetilde{a}_n^{-1}\widetilde{X}_1 > x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\nu}((x,\infty]).$$

Es gilt also

$$n\mathbb{P}(\widetilde{a}_n^{-1}\widetilde{X}_1 \in (x,\infty]) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\nu}((x,\infty]) \tag{2.23}$$

für alle Stetigkeitspunkte x des Maßes $\widetilde{\nu}$. Sei nun $f \in C_K^+((0,\infty])$. Dann existiert ein $M > 0$, so dass der Träger von f in $[M,\infty]$ enthalten ist. Man erhält mit (2.23)

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_M^\infty f(x)n\, d\mathbb{P}^{\widetilde{a}_n^{-1}\widetilde{X}_1}(x) \le \sup_{x\in(M,\infty]} f(x)\cdot\sup_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(\widetilde{a}_n^{-1}\widetilde{X}_1 \in (M,\infty]) < \infty,$$

d.h. $\left(n\mathbb{P}\left(\widetilde{a}_n^{-1}\widetilde{X}_1 \in (x,\infty]\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist vage relativ kompakt. Es folgt die Behauptung. ∎

Für normierte Minima negativer Zufallsvariablen kann man eine ähnliche Aussage erhalten. Da der Beweis sich kaum von dem Beweis des Satzes 2.63 unterscheidet, soll an dieser Stelle lediglich das Resultat ohne Beweis vorgestellt werden.

Satz 2.64

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge $\mathbb{R}^-$-wertiger Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(*i*) *Es existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{>0}$, so dass man für $n \to \infty$ die vage Konvergenz des normierten Wahrscheinlichkeitsmaßes*

$$n\mathbb{P}(a_n^{-1}X_1 \in \cdot) \xrightarrow{v} \nu(\cdot) \tag{2.24}$$

in $[-\infty, 0)$ erhält.

(*ii*) *Es gilt die Verteilungskonvergenz der normierten Minima*

$$a_n^{-1} \bigwedge_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} Y_0, \tag{2.25}$$

wobei Y_0 die Verteilungsfunktion

$$F_{Y_0}(x) := 1 - \exp(-\nu([-\infty, x])) \cdot \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x)$$

besitzt.

Für den Spezialfall $\nu([-\infty, x]) = (-x)^{-\alpha}$ folgt, dass Y_0 die Verteilungsfunktion $F_{Y_0}(x) = 1 - \Phi_\alpha(-x)$ für $x < 0$ besitzt.

Nach dieser kurzen Einführung in die Extremwerttheorie soll nun der Übergang zu sequentiellen Extrema erfolgen. Dieser Schritt wird nötig sein, um die Verteilung der stochastischen Prozesse, welche man als Limiten von sequentiellen Maxima oder auch Minima erhält, zu identifizieren. Diese Prozesse werden oft auch als Extremwertprozesse bezeichnet.

Sei also $\widetilde{F}$ eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$. Man definiert nun eine Familie von endlichdimensionalen Randverteilungen $\widetilde{F}_{\widetilde{t}_1,\dots,\widetilde{t}_k}(x_1, \dots, x_k)$, $0 < \widetilde{t}_1 < \dots < \widetilde{t}_k$, $k \in \mathbb{N}$, $x_i \in \mathbb{R}$, durch

$$\widetilde{F}_{\widetilde{t}_1,\dots,\widetilde{t}_k}(x_1, \dots, x_k) = \widetilde{F}^{\widetilde{t}_1}\left(\bigwedge_{i=1}^{k} x_i\right) \widetilde{F}^{\widetilde{t}_2-\widetilde{t}_1}\left(\bigwedge_{i=2}^{k} x_i\right) \dots \widetilde{F}^{\widetilde{t}_k-\widetilde{t}_{k-1}}(x_k). \tag{2.26}$$

Diese Definition besitzt folgenden Hintergrund: Ist $(\widetilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvaribalen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion $\widetilde{F}$, so gilt für positive natürliche Zahlen $l_1 < \ldots < l_k$ und $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigvee_{i=1}^{l_1} \widetilde{X}_i \leq x_1, \ldots, \bigvee_{i=1}^{l_k} \widetilde{X}_i \leq x_k\right) = \widetilde{F}_{l_1,\ldots,l_k}(x_1, \ldots, x_k).$$

Man kann also (2.26) als Verallgemeinerung von (2.27) auf sequentielle Maxima ansehen. Die Familie (2.26) erfüllt die Konsistenzbedingungen aus Kolmogoroffs Konsitenzsatz. Also exisitiert ein stochastischer Prozess $(\widetilde{X}(t))_{t>0}$ dessen endlichdimensionale Randverteilungen durch (2.26) festgelegt werden. Der Prozess $(\widetilde{X}(t))_{t>0}$ wird auch als von $\widetilde{F}$ erzeugter Maximumsprozess bezeichnet. Auf die gleiche Weise wie in (2.26) lässt sich durch die endlichdimensionalen Randverteilungen

$$\begin{aligned} &F_{t_1,\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_k) \\ &= 1 - \left(1 - F\left(\bigvee_{i=1}^{k} x_i\right)\right)^{t_1} \left(1 - F\left(\bigvee_{i=2}^{k} x_i\right)\right)^{t_2 - t_1} \ldots \ (1 - F(x_k))^{t_k - t_{k-1}} \end{aligned} \tag{2.27}$$

ein Prozess $(X(t))_{t\geq 0}$ definieren, welcher als von F erzeugter Minimumsprozess bezeichnet wird. Falls es aus dem Kontext ersichtlich ist, sollen im Folgenden sowohl der Maximums- wie auch der Minimumsprozess, der von einer Verteilungsfunktion F erzeugt wird, als Extremwertprozess bezeichnet werden.

Nun stellt sich die Frage nach einer Darstellung eines solchen, von einer Verteilung erzeugten, Extremwertprozesses. Sei also $\widetilde{x}_{-\infty}$ bzw. $\widetilde{x}_{\infty}$ der linke bzw. rechte Endpunkt von $\widetilde{F}$. Seien weiter $\widetilde{N} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(\widetilde{t}_k, \widetilde{j}_k)}$ ein Poissonscher Punktprozess auf $(0, \infty) \times (\widetilde{x}_{-\infty}, \widetilde{x}_{\infty})$ mit Intensitätsmaß

$$\mathbb{E}(\widetilde{N}((0, t] \times (a, b])) = t(-\log \widetilde{F}(a) - (-\log \widetilde{F}(b)))$$

für $\widetilde{x}_{-\infty} < a < b < \widetilde{x}_{\infty}$. Analog zu Resnick [47, S. 161] definiert man nun

$$\widetilde{Y}(t) := \bigvee_{\widetilde{t}_k \leq t} \widetilde{j}_k, \ t > 0. \tag{2.28}$$

Dann folgt aus

$$\mathbb{P}(\widetilde{Y}(t) \leq x) = \mathbb{P}(\widetilde{N}((0, t] \times (x, \infty)) = 0) = \exp(-\mathbb{E}(\widetilde{N}((0, t] \times (x, \infty))) = \widetilde{F}^t(x), \tag{2.29}$$

dass der Prozess $\widetilde{Y}(\cdot)$ die Verteilungen (2.26) als endlichdimensionale Randverteilungen besitzt. Der für diese Arbeit interessante Spezialfall ergibt sich, wenn man den Punktprozess $\widetilde{N}$ als $PRM(\lambda\!\!\lambda \otimes \widetilde{\nu})$ mit $\widetilde{\nu}((x, \infty]) = x^{-\alpha}, \ x > 0$ für ein $\alpha > 0$ ansetzt. Dann erhält man aus (2.29)

$$\mathbb{P}(\widetilde{Y}(1) \leq x) = \widetilde{F}(x) = \exp\left(-x^{-\alpha}\right) = \Phi_\alpha(x),$$

also die Fréchetverteilung. Bei Betrachtung von Satz 2.30 erkennt man also, dass das zugehörige Maß $\widetilde{\nu}$ das Lévymaß einer α-stabilen Verteilung bildet. Man hat also einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Maxima und der Konvergenz von Summen hergestellt.

Die gleiche Konstruktion lässt sich durchführen, um eine Darstellung des Minimumsprozesses, welcher von einer Verteilung erzeugt wird, zu erhalten. Betrachtet man eine Verteilungsfunktion F mit linkem Endpunkt $x_{-\infty}$ und rechtem Endpunkt x_∞ sowie den Poissonschen Punktprozess $N = \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(t_k,j_k)}$ auf $(0,\infty) \times (x_{-\infty}, x_\infty)$ mit Intensitätsmaß

$$\mathbb{E}(N((0,t] \times (a,b])) = t\left(\log(1-F(a)) - \log(1-F(b))\right)$$

für $x_{-\infty} < a < b < x_\infty$ und definiert

$$Y(t) := \bigwedge_{t_k \leq t} j_k, \tag{2.30}$$

so folgt aus der Gleichung

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Y(t) \leq x\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(Y(t) > x\right) = 1 - \mathbb{P}\left(N\left((0,t] \times (-\infty, x]\right) = 0\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\mathbb{E}\left(N((0,t] \times (-\infty,x])\right)\right) = 1 - (1-F(x))^t, \end{aligned} \tag{2.31}$$

dass der Prozess $Y(t)$ die Verteilungen (2.27) als endlichdimensionale Randverteilungen besitzt. Auch für die Minimumsprozesse ist der Spezialfall $N = PRM(\lambda\!\!\lambda \otimes \nu)$ mit $\nu((-\infty,x]) = (-x)^{-\alpha}$ für $x < 0$ von Interesse. In diesem erhält man nämlich mit (2.31) die Verteilungsfunktion von $\widetilde{Y}(1)$ durch die Gleichung

$$\mathbb{P}\left(Y(1) \leq x\right) = F(x) = 1 - \exp\left(-(-x)^{-\alpha}\right) = 1 - \Phi_\alpha(-x),$$

d.h. $Y(1)$ besitzt eine gespiegelte Fréchetverteilung.

Durch die Konstruktion von Extremwertprozessen hat man nun eine Einbettung einer Folge von Maxima bzw. Minima in einen stochastischen Prozess. Nach Resnick [46, S. 180] sind viele Eigenschaften des Maximumsprozesses $\widetilde{Y}$ bekannt.

Bemerkung 2.65

Der Maximumsprozess $\widetilde{Y}$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

(i) $\widetilde{Y}$ ist ein stochastisch stetiger Prozess.

(ii) Der Prozess $\widetilde{Y}$ ist ein Markoffprozess.

(iii) Die Pfade von $\widetilde{Y}$ sind nicht fallend und konstant zwischen den Sprungzeiten. Weiter gilt die fast sichere Konvergenz

$$\lim_{t\to 0} \widetilde{Y}(t) = \widetilde{x}_{-\infty}, \quad \lim_{t\to\infty} \widetilde{Y}(t) = \widetilde{x}_{\infty}.$$

(iv) Es existiert eine Version von $\widetilde{Y}$, deren Pfade sich f.s. in $D(0,\infty)$ befinden.

Die Aussagen $(i),(ii)$ und (iv) der Bemerkung lassen sich auch auf Minimumsprozesse übertragen. Da der Mimimumsprozess mit einem gespiegelten Maximumsprozess vergleichbar ist, müssen in Aussage (iii) $\widetilde{x}_{-\infty}$ durch x_∞ sowie $\widetilde{x}_\infty$ durch $x_{-\infty}$ ersetzt und die Eigenschaft „nicht fallend“ durch „nicht wachsend“ ersetzt werden, damit diese Aussage auch für Minimumsprozesse korrekt ist.

Nun soll für eine i.i.d. Folge nach $\widetilde{F} \in DOA_{\max}(\Phi_\alpha)$ verteilter, reeller Zufallsvariablen $(\widetilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Konvergenz der sequentiellen Maxima gegen den zugehörigen, von Φ_α erzeugten Extremwertprozess nachgewiesen werden. Statt den Beweis wie üblich über die Konvergenz der endlichdimensionalen Randverteilungen mit Straffheitsresultaten zu führen, kann dieser auch auf Satz 2.63 aufgebaut werden. Die Schwierigkeit dabei ist jedoch die Behandlung von Punkten, welche nicht auf dem positiven Teil der reellen Achse liegen.

Satz 2.66

Sei $\left(\widetilde{X}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge reeller Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion $\widetilde{F} \in DOA_{\max}(\Phi_\alpha)$, d.h. es existiert eine Folge reeller Zahlen $(\widetilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{>0}$, so dass die schwache Konvergenz

$$\mathbb{P}\left(\widetilde{a}_n^{-1} \bigvee_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i \le x\right) = \widetilde{F}^n(\widetilde{a}_n x) \xrightarrow{w} \Phi_\alpha(x)$$

für $n \to \infty$ gilt. Dann konvergiert der normierte Extremwertprozess

$$\widetilde{Y}_n(t) = \begin{cases} \widetilde{a}_n^{-1} \bigvee_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor} \widetilde{X}_i, & t \ge \frac{1}{n} \\ \widetilde{a}_n^{-1}\widetilde{X}_1, & 0 < t < \frac{1}{n} \end{cases} \tag{2.32}$$

in Verteilung für $n \to \infty$ in $D(0,\infty)$ gegen den von Φ_α erzeugten Maximumsprozess $(\widetilde{Y}(t))_{t>0}$.

Beweis. Der Beweis dieses Satzes kann bei Resnick [46, Proposition 4.20] gefunden werden und verwendet die Stetigkeit des später in (5.7) definierten Maximumsfunktionals. ■

Bemerkung 2.67
Falls es sich bei der Folge $\left(\widetilde{X}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in Satz 2.66 um ein Folge von $\mathbb{R}^+$-wertigen Zufallsvariablen handelt, so findet die Konvergenz sogar in $D[0,\infty)$ statt, denn nach Bemerkung 2.65 gilt die f.s. Konvergenz $\widetilde{Y}(t) \to 0$ für $t \downarrow 0$.

Eine ähnliche Aussage, nämlich die, dass die Konvergenz von sequentiellen Minima gegen den von der gespiegelten Fréchetverteilung erzeugten Minumumsprozess gilt, falls die geeignet normierten Minima selbst im Anziehungsbereich der gespiegelten Fréchetverteilung liegen, soll im nächsten Satz formuliert werden.

Satz 2.68
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge reeller Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion $F \in DOA_{\min}(\Phi_\alpha)$, d.h. es existiert eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{>0}$, so dass die schwache Konvergenz

$$\mathbb{P}\left(a_n^{-1}\bigwedge_{i=1}^{n} X_i \le x\right) \xrightarrow{w} 1 - \Phi_\alpha(-x)$$

für $n \to \infty$ gilt. Dann konvergiert der normierte Extremwertprozess

$$Y_n(t) = \begin{cases} a_n^{-1}\bigwedge_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor} X_i, & t \ge \frac{1}{n} \\ a_n^{-1}X_1, & 0 < t < \frac{1}{n} \end{cases}$$

in Verteilung für $n \to \infty$ in $D(0,\infty)$ gegen den von Φ_α erzeugten Minimumsprozess $(Y(t))_{t>0}$.

Beweis. Der Beweis kann mit den gleichen Argumenten wie der Beweis von Satz 2.66 geführt werden, da man lediglich das Vorzeichen der Zufallsvariablen ändern muss und anschliessend die Stetigkeit des in (5.8) definierten Minimumsfunktionals ausnutzen kann. Aus diesem Grund soll an dieser Stelle auf einen Beweis verzichtet werden. ■

Bemerkung 2.69
Analog zu Bemerkung 2.67 findet die Konvergenz in Satz 2.68 in $D[0,\infty)$ statt, falls die Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R}^-$-wertig sind.

Für die spätere Beweisführung wird es hilfreich sein, über eine Darstellung der Extremwertprozesse $\widetilde{Y}(\cdot)$ und $Y(\cdot)$ in den Sätzen 2.66 und 2.68 zu verfügen, um die Verteilung von Limiten von Extremwertprozessen zu identifizieren.

Lemma 2.70

In der Situtaion aus Satz 2.66 und Satz 2.68 seien $\widetilde{\nu}$ und ν die Maße, welche nach Satz 2.63 und Satz 2.64 die vage Konvergenz

$$n\mathbb{P}\left(\widetilde{a}_n^{-1}X_1 \in \cdot\right) \xrightarrow{v} \widetilde{\nu}(\cdot),\ n\mathbb{P}\left(a_n^{-1}\widetilde{X}_1 \in \cdot\right) \xrightarrow{v} \nu(\cdot)$$

erfüllen und

$$\Psi_1(y) := \inf\{t : \nu((-\infty, t]) \geq y\} \wedge 0,\ \ y > 0$$

$$\Psi_2(y) := \sup\{t : \widetilde{\nu}([t, \infty)) \geq y\} \vee 0,\ \ y > 0$$

die zugehörigen links- bzw. rechtsseitgen Inversen. Seien weiter Γ_n und $\widetilde{\Gamma}_n$ die n-ten Partialsummen i.i.d. standard exponentialverteilter Zufallsvariablen und $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(\widetilde{\tau}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von i.i.d. $\mathcal{U}(0,1)$ verteilten Zufallsvariablen, so dass die Unabhängigkeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \perp (\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\widetilde{\tau}_n)_{n\in\mathbb{N}} \perp \left(\widetilde{\Gamma}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gelten. Dann gilt für alle $T > 0$ die Verteilungsgleichheit

$$(\widetilde{Y}(t))_{0\leq t\leq T} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left(\bigvee_{T\cdot\widetilde{\tau}_k\leq t} \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)_{0\leq t\leq T},\ (Y(t))_{0\leq t\leq T} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left(\bigwedge_{T\cdot\tau_k\leq t} \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\right)_{0\leq t\leq T}$$

in $D[0,T]$.

Beweis. Betrachtet man die in (2.28) und (2.30) konstruierten Extremwertprozesse, so folgt die Behauptung aus Satz 2.63 und Satz 2.64, falls

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(T\cdot\tau_k, \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k))} \text{ bzw. } \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\left(T\cdot\widetilde{\tau}_k, \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)}$$

Darstellungen von $PRM(\lambda\!\!\lambda \otimes \nu)$ in $M_p([0,T] \times [-\infty, 0))$ bzw. $M_p([0,T] \times (0, \infty])$ für alle $T > 0$ sind. Dies wiederum wird in Abschnitt $3(A)$ im Artikel von Rosiński [48] gezeigt. ■

Kapitel 3

Ungekoppelte *CTRWs*

In diesem Kapitel wird nun mit der Bestimmung der Skalierungslimiten von *CTRWs* begonnen. Dabei werden zunächst Prozesse untersucht, deren Sprünge Werte in den reellen Zahlen annehmen, um ein besseres Verständnis der Beweismethodik zu gewährleisten. Dies führt auch dazu, dass die Reihendarstellung der Skalierungslimiten, welche in den entsprechenden Abschnitten näher untersucht wird, sich für Simulationszwecke eignet. Im Anschluss werden die Ergebnisse aus dem ersten Abschnitt durch Betrachtung des mehrdimensionalen Falls verallgemeinert.

3.1 Ungekoppelte *CTRWs* basierend auf i.i.d. Zufallsvariablen

Für die Untersuchung des Limesverhaltens von *CTRWs* wird zunächst der Fall betrachtet, dass die Sprunghöhen durch reellwertige i.i.d. Zufallsvariablen beschrieben werden, welche als stochastisch unabängig von den i.i.d. Zwischenwartezeiten angenommen werden.
Sei also $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nichtnegativen i.i.d. Zufallsvariablen, welche die Folge der Zwischenwartezeiten zwischen den Sprüngen beschreiben möge. Dann definiert $T_n := \sum_{k=1}^n J_k$ mit der Konvention $T_0 = 0$ den Zeitpunkt des n-ten Sprunges. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge von i.i.d. Zufallsvariablen, welche die Spunghöhen beschreibt, die sich zu den Zeitpunkten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ereignen. In diesem Kapitel wird angenommen, dass die Folgen $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig sind. Dann erhält man durch $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ mit der Konvention $S_0 = 0$ die Position des Teilchens nach dem n-ten Sprung.
Da die Wartezeit zwischen zwei Sprüngen des *CTRWs* als zufällig betrachtet wird, definiert

man den Erneuerungsprozess

$$N_t = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : T_n \leq t\}, \tag{3.1}$$

welcher die Anzahl der Sprünge bis zur Zeit t beschreibt. Damit erhält man die Darstellung des *CTRWs* als die durch abgeschnittene Erwartungswerte zentrierte Irrfahrt, welche dem Erneuerungsprozess N_t subordiniert wird:

$$t \mapsto S_{N_t} = \sum_{k=1}^{N_t} (X_k - \mathbb{E}_\tau(X_k)),\ \mathbb{E}_\tau(X) = \mathbb{E}\left(X \mathbf{1}_{\|X\| \leq \tau}\right). \tag{3.2}$$

Nun setzt man voraus, dass sich J_1 im strikten Anziehungsbereich einer α-stabilen Verteilung mit Index $\alpha \in (0,1)$ befindet, d.h. es existiert eine Folge reeller Zahlen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{>0}$, so dass für $n \to \infty$ die Verteilungskonvergenz

$$b_n^{-1} T_n \xrightarrow{\mathcal{D}} D \tag{3.3}$$

für eine Zufallsvariable $D > 0$ f.s. mit α-stabiler Verteilung gilt, vgl. Definition 2.39. Das zur unendlich teilbaren Zufallsvariable D gehörige Lévymaß bezeichnet man mit η^α. Aus der klassischen Theorie ist auch eine funktionale Form des Grenzwertsatzes (3.3) bekannt, d.h. es gilt die Konvergenz

$$\left(b_n^{-1} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} J_k\right)_{t \geq 0} \xrightarrow{\mathcal{D}} (D(t))_{t\geq 0} \tag{3.4}$$

für $n \to \infty$ in $D[0,\infty)$, vgl. Meerschaert und Scheffler [40, Bsp. 11.2.18]. Für den Prozess $(D(t))_{t\geq 0}$ gilt für jedes $c > 0$

$$(D(ct))_{t\geq 0} \overset{fi.di.}{=} \left(c^{\frac{1}{\alpha}} D(t)\right)_{t\geq 0}, \tag{3.5}$$

wobei $\overset{fi.di.}{=}$ die Gleichheit aller endlichdimensionalen Randverteilungen bezeichnet, was nach Definition 11.1.2 bei Meerschaert und Scheffler [40] bedeutet, dass $(D(t))_{t\geq 0}$ selbstähnlich mit Exponent $\frac{1}{\alpha}$ ist. Diese Selbstähnlichkeit wird in einem späteren Abschnitt nützlich sein, um die Verteilung der Skalierungslimiten des *CTRWs* zu bestimmen. Zusätzlich ist bekannt, dass der Prozess $D(\cdot)$ f.s. streng monoton wachsende Pfade besitzt. Aus diesem Grund wird $D(\cdot)$ als strikt α-stabiler Lévyprozess oder auch als α-stabiler Subordinator bezeichnet. Da die Zufallsvariablen $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegativ sind, folgt zusammen mit der Selbstähnlichkeit (3.5) die stochastische Konvergenz

$$D(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty$$

für $t \to \infty$. Aus dieser monotonen Konvergenz erhält man die fast sichere Konvergenz

$$D(t) \xrightarrow{f.s.} \infty \tag{3.6}$$

für $t \to \infty$, vgl. Bertoin [6, Kapitel I, Satz 19].
Analog setzt man für die Sprunghöhen voraus, dass X_1 sich im Anziehungsbereich einer β-stabilen Verteilung ohne Gaußschen Anteil befinde, d.h. es gilt aufgrund von Satz 2.30 für den Stabilitätsindex β die Einschränkung $\beta \in (0,2)$. Dabei soll die normierende Folge mit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{>0}$ bezeichnet werden. Wie in (3.4) erhält man aus der klassischen Theorie einen funktionalen Grenzwertsatz, falls man die sequentiellen Partialsummen geeignet zentriert, d.h. es gilt die Verteilungskonvergenz

$$\left(B_n^{-1} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} (X_k - \mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k)) \right)_{t\geq 0} \xrightarrow{\mathcal{D}} (A(t))_{t\geq 0} \tag{3.7}$$

für $n \to \infty$ in $D[0,\infty)$ gegen einen Lévyprozess $A(\cdot)$. Dabei seien die Punkte $\pm\tau$ Stetigkeitspunkte des zur unendlich teilbaren Zufallsvariable $A(1)$ gehörigen Lévymaßes, welches auch mit η^β bezeichnet wird. An dieser Stelle ist zu bemerken, dass der Prozess $A(\cdot)$ von der Wahl des Abschneidepunktes τ abhängt. Aus der Unabhängigkeit der Folgen $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt, dass auch die Prozesse $D(\cdot)$ und $A(\cdot)$ stochastisch unabhängig sind.
Diese Voraussetzungen sollen für das ganze Kapitel gelten und werden als Voraussetzungen dieses Kapitels bezeichnet.

3.1.1 Konvergenz der zugehörigen Punktprozesse

In diesem Abschnitt soll nun gezeigt werden, dass der Punktprozess mit den normierten Sprungzeiten als Punkte und den normierten Sprunghöhen als Marken in $M_p([0,\infty) \times [-\infty,\infty]\backslash\{0\})$ konvergent gegen einen Grenzpunktprozess ist. In den nächsten Teilen sollen daraus die Skalierungslimiten von *CTRWs* bestimmt werden. Diese Vorgehensweise ist von Vorteil, da man so eine Reihendarstellung des Grenzprozesses erhält, indem man jeden Zeitpunkt mit der sich dort ereignenden Sprunghöhe einzeln betrachtet.

Lemma 3.1
Seien

$$\begin{aligned} \Psi_1(y) &:= \inf\{t : \eta^\beta_{|(-\infty,0)}((-\infty,t]) \geq y\} \wedge 0,\ \ y > 0 \ \textit{und} \\ \Psi_2(y) &:= \sup\{t : \eta^\beta_{|(0,\infty)}([t,\infty)) \geq y\} \vee 0,\ \ y > 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

die links- bzw. rechtsseitig stetigen, inversen Funktionen der entsprechenden Einschränkungen von η^β. Weiter sei Γ_n die n-te Partialsumme von i.i.d. standard exponentialverteilten und $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. $\mathcal{U}(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen, welche auch unabhängig von $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Für stochastisch unabhängige Kopien $(\widetilde{\tau}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\widetilde{\Gamma}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche auch unabhängig voneinander sind, betrachtet man die unabhängigen Poissonschen Punktprozesse

$$N_\infty^{(1)} := \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(T\cdot\tau_k, \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k))},\ \ N_\infty^{(2)} := \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(T\cdot\widetilde{\tau}_k, \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k))}.$$

Dann gilt unter den Voraussetzungen dieses Kapitels für alle $T > 0$ die gemeinsame Verteilungskonvergenz

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_k, B_n^{-1}X_k^-\right)}, \sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_k, B_n^{-1}X_k^+\right)}\right)\\ &\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\tau_k), \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k))}, \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\widetilde{\tau}_k), \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k))}\right)\end{aligned}$$

für $n\to\infty$ in $M_p([0,\infty)\times[-\infty,0))\times M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$.

Beweis. Man betrachtet zunächst den Punktprozess

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(\frac{k}{n}, B_n^{-1}X_k^+\right)}$$

auf dem Raum $M_p([0,T]\times(0,\infty])$. Aus Theorem 3.2.2 bei Meerschaert und Scheffler [40] folgt für alle in $(0,\infty]$ relativkompakten Borelmengen A mit $\eta^\beta_{|(0,\infty)}(\partial A) = 0$ die Konvergenz

$$n\mathbb{P}\left(B_n^{-1}X_1^+ \in A\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(B_n^{-1}X_k^+ \in A\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta^\beta_{|(0,\infty)}(A).$$

Somit folgt die vage Konvergenz der normierten Wahrscheinlichkeitsmaße

$$n\mathbb{P}\left(B_n^{-1}X_1^+ \in \cdot\right) \xrightarrow{v} \eta^\beta_{|(0,\infty)}(\cdot) \tag{3.9}$$

für $n\to\infty$ in $(0,\infty]$. Nach Korollar 2.21 ist diese äquivalent zur Konvergenz

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\left(\frac{k}{n}, B_n^{-1}X_k^+\right)} \xrightarrow{\mathcal{D}} PRM\left(\lambda\!\!\lambda \otimes \eta^\beta_{|(0,\infty)}\right)$$

für $n \to \infty$ in $M_p([0,\infty) \times (0,\infty])$. Nun erhält man, wie im Abschnitt $3(A)$ bei Rosiński [48], für alle $T > 0$ die Darstellung von $PRM\left(\lambda\!\!\lambda \otimes \eta^{\beta}_{|(0,\infty)}\right)$ in $M_p([0,T] \times (0,\infty])$ durch

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(T\cdot\widetilde{\tau}_k, \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k))}.$$

Es folgt also die Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(\frac{k}{n}, B_n^{-1}X_k^+\right)} \xrightarrow{\mathcal{D}} N_\infty^{(2)} \tag{3.10}$$

für $n \to \infty$ in $M_p([0,T]\times(0,\infty])$. Mit den gleichen Argumenten erhält man die Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(\frac{k}{n}, B_n^{-1}X_k^-\right)} \xrightarrow{\mathcal{D}} N_\infty^{(1)} \tag{3.11}$$

für $n \to \infty$ in $M_p([0,T]\times[-\infty,0))$. Mit der Konvergenz (2.4) und Korollar 2.1 bei Barczyk, Janssen und Pauly [3] folgt schliesslich die gemeinsame Konvergenz von (3.10) und (3.11)

$$\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(\frac{k}{n}, B_n^{-1}X_k^-\right)},\ \sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(\frac{k}{n}, B_n^{-1}X_k^+\right)}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(N_\infty^{(1)},\ N_\infty^{(2)}\right) \tag{3.12}$$

auf dem entsprechenden Produktraum. Da nun $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig sind, folgt aus Theorem 3.2 bei Billingsley [7], (3.4) und (3.10) für $n \to \infty$ die gemeinsame Konvergenz

$$\left(b_n^{-1}\sum_{k=1}^{\lfloor n\cdot\rfloor} J_k, \sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(\frac{k}{n}, B_n^{-1}X_k^-\right)}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(D(\cdot), N_\infty^{(1)}\right) \tag{3.13}$$

und

$$\left(b_n^{-1}\sum_{k=1}^{\lfloor n\cdot\rfloor} J_k, \sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(\frac{k}{n}, B_n^{-1}X_k^+\right)}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(D(\cdot), N_\infty^{(2)}\right) \tag{3.14}$$

in $D[0,\infty)\times M_p([0,T]\times[-\infty,0))$ bzw. $D[0,\infty)\times M_p([0,T]\times(0,\infty])$. Beachtet man (3.12), so erhält man die gemeinsame Konvergenz von (3.13) und (3.14)

$$\begin{aligned}&\left(b_n^{-1}\sum_{k=1}^{\lfloor n\cdot\rfloor} J_k\ , \sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(\frac{k}{n}, B_n^{-1}X_k^-\right)}\ , \sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(\frac{k}{n}, B_n^{-1}X_k^+\right)}\right)\\ &\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(D(\cdot), N_\infty^{(1)}, N_\infty^{(2)}\right)\end{aligned} \tag{3.15}$$

für $n \to \infty$ auf dem entsprechenden Produktraum.

Sei nun $D^{\uparrow}[0,\infty)$ der Teilraum aller nichtfallenden und nichtnegativen Funktionen in $D[0,\infty)$. Für alle $d \in \mathbb{N}$ betrachtet man die Abbildung

$$\mathscr{T} : D^{\uparrow}[0,\infty) \times M_p([0,\infty) \times [-\infty,\infty]^d \backslash \{0\}) \to M_p([0,\infty) \times [-\infty,\infty]^d \backslash \{0\}), \tag{3.16}$$

$$\mathscr{T}(x,m) = \widetilde{m},\ \widetilde{m}(f) = \iint f(x(u),v)\ m(du,dv),\ f \in C_K^+([0,\infty) \times [-\infty,\infty]^d \backslash \{0\}). \tag{3.17}$$

Die Abbildung $\mathscr{T}$ stellt eine Deformation der Zeitskala dar und ersetzt den zeitlichen Verlauf $t \mapsto t$ durch $t \mapsto x(t)$. Nach Lemma 6.1 ist die Abbildung $\mathscr{T}$ f.s. stetig in den Punkten $\left(D(\cdot), N_\infty^{(i)}\right)$ für $i = 1,2$.

Fasst man nun die Punktprozesse in (3.12) als Verteilungen auf $M_p([0,\infty)\times[-\infty,0))$ bzw. $M_p([0,\infty) \times (0,\infty])$ auf, so folgt aus dem Continuous Mapping Theorem (vgl. Billingsley [7, Theorem 5.1]) für $n \to \infty$

$$\begin{aligned}\mathscr{T}\left(b_n^{-1}\sum_{k=1}^{\lfloor n\cdot\rfloor} J_k, \sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(\frac{k}{n}, B_n^{-1}X_k^-\right)}\right) &= \sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_k, B_n^{-1}X_k^-\right)} \\ \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathscr{T}\left(D, N_\infty^{(1)}\right) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\tau_k), \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k))}\end{aligned} \tag{3.18}$$

in $M_p([0,\infty) \times [-\infty,0))$ und analog

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_k, B_n^{-1}X_k^+\right)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\widetilde{\tau}_k), \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k))}$$

in $M_p([0,\infty) \times [0,\infty))$. Aus (3.15) folgt dann für $n \to \infty$ die gemeinsame Konvergenz

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_k, B_n^{-1}X_k^-\right)}, \sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_k, B_n^{-1}X_k^+\right)}\right) \\ &\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\tau_k), \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k))}, \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\widetilde{\tau}_k), \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k))}\right)\end{aligned}$$

auf dem entsprechenden Produktraum. ∎

3.1.2 Konvergenz des *CTRW*

Nun soll aus der Verteilungskonvergenz der Punktprozesse in Lemma 3.1 die Konvergenz des CTRW

$$\left(B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}(X_k-\mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k))\right)_{t\geq 0}\xrightarrow{\mathcal{D}}(X_0(t))_{t\geq 0}$$

gegen einen Grenzprozess $X_0(\cdot)$ in $D[0,\infty)$ gefolgert werden. Dazu wird der Prozess zunächst in $D[0,T]$ betrachtet, was es erlaubt, eine konkrete Reihendarstellung für den Grenzprozess anzugeben. Aus der Konvergenz in $D[0,T]$ für alle $T>0$ wird schließlich die Konvergenz in $D[0,\infty)$ gefolgert.

Satz 3.2
Sei $E(t) := \inf\{x : D(x) > t\}$ der zu dem Prozess $D(\cdot)$ gehörige hitting-time Prozess. Dann folgt unter den Voraussetzungen dieses Kapitels mit der Notation aus Lemma 3.1 für alle $T>0$ die Verteilungskonvergenz

$$\begin{aligned}&\left(B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}(X_k-\mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k))\right)_{0\leq t\leq T}\\ &\xrightarrow{\mathcal{D}}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\leq t}-E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\right)\right.\\ &\left.+\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\Psi_1\left(T^{-1}\Gamma_k\right)\mathbf{1}_{D(T\cdot\tau_k)\leq t}-E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau\left(\Psi_1\left(\Gamma_k\right)\right)\right)\right)_{0\leq t\leq T}\end{aligned}\tag{3.19}$$

für $n\to\infty$ in $D[0,T]$.

Beweis*.* Sei $T>0$ beliebig, aber fest. Für den Beweis zerlegt man

$$\begin{aligned}&B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}(X_k-\mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k))\\ &=B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}(X_k^+-\mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k^+))+B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}(X_k^--\mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k^-))\end{aligned}$$

und weist für $n \to \infty$ die Konvergenz

$$\left(B_n^{-1} \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} (X_k^+ - \mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k^+)) \right)_{0 \le t \le T}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k) \mathbf{1}_{D(T \cdot \widetilde{\tau}_k) \le t} - E(t) \cdot \mathbb{E}_\tau \left(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k) \right) \right) \right)_{0 \le t \le T} \tag{3.20}$$

in $D[0,T]$ nach. Dabei ist die Reihe in (3.20) f.s. kovergent, vgl. Rosiński [48, Satz 4.1]. Die Konvergenz der Summe der Negativteile gegen den entsprechenden Grenzwert folgt analog. Nun ist die Summation im Funktionenraum $D[0,T]$ i.A. keine stetige Abbildung. Jedoch ist bekannt, dass aus $x_n \to x$ und $y_n \to y$ die Konvergenz $x_n + y_n \to x + y$ für $n \to \infty$ in $D[0,T]$ für eine große Klasse von Grenzfunktionen $x, y \in D[0,T]$ folgt. Im Artikel von Whitt [56, Theorem 4.1] wird die Aussage in ihrer allgemeinsten zu erwartenden Form präzisiert, indem gezeigt wird, dass die Summation von $D[0,T] \times D[0,T]$ nach $D[0,T]$ meßbar und stetig für alle Grenzfunktionen x, y ist, welche $Disc(x) \cap Disc(y) = \emptyset$ erfüllen. Um dieses Resultat auf die vorliegende Situation anwenden zu können, muss gezeigt werden, dass die Prozesse

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k) \mathbf{1}_{D(T \cdot \tau_k) \le t} - E(t) \cdot \mathbb{E}_\tau \left(\Psi_1(\Gamma_k) \right) \right) \right)_{0 \le t \le T}$$

und

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k) \mathbf{1}_{D(T \cdot \widetilde{\tau}_k) \le t} - E(t) \cdot \mathbb{E}_\tau \left(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k) \right) \right) \right)_{0 \le t \le T}$$

f.s. keine gemeinsame Sprungstellen besitzen. Da der Prozess $E(\cdot)$ f.s. stetige Pfade und der Prozess $D(\cdot)$ f.s. streng monoton wachsende Pfade besitzt, ist dies jedoch äquivalent zu der Aussage, dass $\tau_i \neq \widetilde{\tau}_j$ für alle $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ f.s. gilt. Dieser Umstand folgt direkt aus der Unabhängigkeit der Folgen $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\widetilde{\tau}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Man betrachtet für einen Punktprozess $\sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_{(t_k, x_k)}$ auf $M_p([0,\infty) \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d)$ das Summationsfunktional

$$\chi : M_p([0,\infty) \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d) \to D[0,T], \chi \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_{(t_k, x_k)} \right)(t) = \left(\sum_{t_k \le t} x_k \right)_{0 \le t \le T}. \tag{3.21}$$

Das Funktional χ ist nach Lemma 6.2 und Bemerkung 6.3 f.s. stetig im Punkt

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_{\left(D(T \cdot \widetilde{\tau}_k), \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k) \mathbf{1}_{\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k) > \varepsilon} \right)},$$

falls ε ein Stetigkeitspunkt von $\eta^{\beta}_{|(0,\infty)}$ ist. Um die Stetigkeit des Summationsfunktionals verwenden zu können bemerkt man, dass die Einschränkungsabbildung π, welche durch

$$\begin{aligned}
&\pi : M_p([0,\infty) \times [-\infty,\infty]^d \backslash \{0\}) \to M_p([0,\infty) \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}^d_{\varepsilon}),\\
&\pi(m) = m_{|[0,\infty)\times[-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}^d_{\varepsilon}},
\end{aligned} \tag{3.22}$$

für den Stetigkeitspunkt ε definiert ist, f.s. stetig im Punkt $\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\widetilde{\tau}_k),\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)}$ ist, vgl. Feigin, Krantz und Resnick [14, Proposition 3.3]. Aus der Stetigkeit von χ, dem Continuous Mapping Theorem, (3.18), (3.22) und der Mengengleichheit (3.7) bei Meerschaert und Scheffler [41] erhält man die Konvergenz

$$\begin{aligned}
\chi \circ \pi \left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_k, B_n^{-1}X_k^+\right)} \right)(t) &= \left(B_n^{-1} \sum_{b_n^{-1}T_k \le t} X_k^+ \mathbf{1}_{B_n^{-1}X_k^+ \ge \varepsilon} \right)_{0\le t\le T}\\
= \left(B_n^{-1} \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} X_k^+ \mathbf{1}_{B_n^{-1}X_k^+ \ge \varepsilon} \right)_{0\le t\le T} &\xrightarrow{\mathcal{D}} \chi \circ \pi \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\left(D(T\cdot\widetilde{\tau}_k),\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)} \right)(t)\\
= \left(\sum_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\le t} \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k) \mathbf{1}_{\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\ge\varepsilon} \right)_{0\le t\le T}&
\end{aligned} \tag{3.23}$$

für $n \to \infty$ in $D[0,T]$. Nun ist noch die Konvergenz der entsprechenden abgeschnittenen Erwartungswerte nachzuweisen. Sei ohne Einschränkung $\varepsilon < \tau$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{N_{tb_n}} \mathbb{E}\left(B_n^{-1}X_k^+ \ \mathbf{1}_{[\varepsilon,\tau]}\left(B_n^{-1}X_k^+\right)\right) = \frac{N_{tb(n)}}{n} \cdot \int_{\varepsilon}^{\tau} xn \ d\mathbb{P}^{B_n^{-1}X_1^+}(x).$$

Es ist bekannt, dass der Grenzwert des skalierten Erneuerungsprozesses $n^{-1}N_{\cdot b_n}$ der hitting-time Prozess $E(\cdot)$ ist, d.h. es gilt für $n \to \infty$ die Verteilungskonvergenz

$$\left(\frac{N_{tb_n}}{n}\right)_{t\ge 0} \xrightarrow{\mathcal{D}} (E(t))_{t\ge 0} \tag{3.24}$$

in $D[0,\infty)$, vgl. Meerschaert und Scheffler [41, Korollar 3.4]. Zusammen mit der vagen Konvergenz $n\cdot P(B_n^{-1}X_1^+ \in \cdot) \xrightarrow{v} \eta^{\beta}_{|(0,\infty)}(\cdot)$ für $n \to \infty$ in $(0,\infty]$ folgt

$$\frac{N_{tb(n)}}{n} \cdot \int_{\varepsilon}^{\tau} xn \ d\mathbb{P}^{B_n^{-1}X_1^+}(x) \xrightarrow{\mathcal{D}} E(t) \cdot \int_{\varepsilon}^{\tau} x \ d\eta^{\beta}_{|(0,\infty)}(x). \tag{3.25}$$

Dabei ist zu beachten, dass das Integral in (3.25) existiert, da das Lévymaß $\eta^{\beta}_{|(0,\infty)}$ auf von Null weg beschränkten Mengen endlich ist. Nimmt man die Gleichungen (4.10) und

(4.13) bei Janssen [28] zur Hilfe, so lässt sich dieses Integral mit ähnlichen Argumenten als Erwartungswert identifizieren

$$\int_\varepsilon^\tau x \, d\eta^\beta_{|(0,\infty)}(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{[\varepsilon,\tau]}(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\right).$$

Damit ist also die Verteilungskonvergenz

$$\sum_{k=1}^{N_{tb_n}} \mathbb{E}\left(B_n^{-1}X_k^+ \; \mathbf{1}_{[\varepsilon,\tau]}\left(B_n^{-1}X_k^+\right)\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} E(t)\cdot \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{[\varepsilon,\tau]}(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\right) \tag{3.26}$$

für $n\to\infty$ in $D[0,\infty)$ nachgewiesen. Fügt man dies mit (3.23) zusammen, so erhält man mit Hilfe des Continuous Mapping Theorems die Konvergenz der Prozesse

$$\begin{aligned}&\left(B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}\left(X_k^+\mathbf{1}_{X_k^+\geq\varepsilon B_n} - \mathbb{E}\left(X_k^+ \; \mathbf{1}_{[\varepsilon,\tau]}\left(B_n^{-1}X_k^+\right)\right)\right)\right)_{0\leq t\leq T}\\ &\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\leq t}\mathbf{1}_{\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\geq\varepsilon} - E(t)\cdot\mathbb{E}\left(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{[\varepsilon,\tau]}(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\right)\right)\right)_{0\leq t\leq T}\end{aligned} \tag{3.27}$$

für $n\to\infty$ in $D[0,T]$. Nun folgt aus der Lévy-Itô Faltungsformel für Lévyprozesse, vgl. Cont und Tankov [9, Proposition 3.7], und der Stetigkeit des Prozesses $E(t)$, vgl. Meerschaert und Scheffler [41, Korollar 3.1 (c)], für fast alle $\omega\in\Omega$ die in $t\in[0,T]$ gleichmäßige Konvergenz

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\leq t}\mathbf{1}_{\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\geq\varepsilon} - E(t)\cdot\mathbb{E}(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{[\varepsilon,\tau]}(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k)))\right)\\ &\xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0}\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\leq t} - E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\right),\end{aligned} \tag{3.28}$$

vgl. Cont und Tankov [9, S. 80]. Sei nun $\widetilde{d}_{[0,T]}(\cdot,\cdot)$ die Skorokhodmetrik des Raums $D[0,T]$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt die Konvergenz in der Skorokhodmetrik

$$\begin{aligned}\widetilde{d}_{[0,T]}\Bigg(&\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\leq t}\mathbf{1}_{\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\geq\varepsilon} - E(t)\cdot\mathbb{E}(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{[\varepsilon,\tau]}(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k)))\right),\\ &\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\leq t} - E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\right)\Bigg)\xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0} 0 \text{ f.s.},\end{aligned}$$

woraus für $\varepsilon \downarrow 0$ die Konvergenz der Prozesse

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\leq t}\mathbf{1}_{\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\geq\varepsilon} - E(t)\cdot\mathbb{E}(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{[\varepsilon,\tau]}(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k)))\Big)\right)_{0\leq t\leq T}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\leq t} - E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\Big)\right)_{0\leq t\leq T}$$

in $D[0,T]$ folgt. Nach Billingsley [7, Theorem 4.2] bleibt die Bedingung

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\Bigg(\widetilde{d}_{[0,T]}\Bigg(B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}\Big(X_k^+\mathbf{1}_{X_k^+\geq\varepsilon B_n} - \mathbb{E}\left((X_k^+\mathbf{1}_{[\varepsilon B_n,\tau B_n]}(X_k^+))\right)\Big),$$

$$B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}\left(X_k^+ - \mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k^+)\right)\Bigg)\geq\delta\Bigg) = 0$$

für alle $\delta > 0$ nachzuweisen. Da die Skorokhodmetrik $\widetilde{d}_{[0,T]}$ durch die von der Supremumsnorm induzierte Metrik majorisiert wird, genügt es jedoch

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\Bigg(\sup_{0\leq t\leq T}\Bigg|B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}\Big(X_k^+\mathbf{1}_{X_k^+\geq\varepsilon B_n} - \mathbb{E}\left((X_k^+\mathbf{1}_{[\varepsilon B_n,\tau B_n]}(X_k^+))\right)\Big)$$

$$-B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}\left(X_k^+ - \mathbb{E}\left(X_k^+\mathbf{1}_{[0,\tau B_n]}(X_k^+)\right)\right)\Bigg|\geq\delta\Bigg) = 0 \tag{3.29}$$

für alle $\delta > 0$ zu zeigen. Mit Hilfe der verallgemeinerten Maximumsungleichung, vgl. Lemma 6.9 und Bemerkung 6.10, erhält man die Abschätzung

$$\mathbb{P}\Bigg(\sup_{0\leq t\leq T}\Bigg|B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}\Big(X_k^+\mathbf{1}_{X_k^+\geq\varepsilon B_n} - \mathbb{E}\left(X_k^+\mathbf{1}_{[\varepsilon B_n,\tau B_n]}(X_k^+)\right)\Big) \tag{3.30}$$

$$- B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}\left(X_k^+ - \mathbb{E}\left(X_k^+\mathbf{1}_{[0,\tau B_n]}(X_k^+)\right)\right)\Bigg|\geq\delta\Bigg)$$

$$= \mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq N_{Tb_n}}\left|B_n^{-1}\sum_{k=1}^{j}\left(X_k^+\mathbf{1}_{X_k^+<\varepsilon B_n} - \mathbb{E}\left(X_k^+\mathbf{1}_{X_k^+<\varepsilon B_n}\right)\right)\right|\geq\delta\right)$$

$$\leq (\delta B_n)^{-2}\ \mathbb{E}(N_{Tb_n})\cdot Var\left(X_1^+\mathbf{1}_{X_1^+<\varepsilon B_n}\right)$$

$$\leq (\delta B_n)^{-2}\ \mathbb{E}(N_{Tb_n})\cdot\mathbb{E}\left((X_1^+)^2\mathbf{1}_{X_1^+<\varepsilon B_n}\right). \tag{3.31}$$

Es bleibt noch das asymptotische Verhalten des ersten Moments des hitting-time Prozesses

$$\mathbb{E}(N_{Tb_n}) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(N_{Tb_n}\geq k) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(T_k\leq Tb_n),$$

sowie des zweiten abgeschnittenen Moments

$$\mathbb{E}\left((X_1^+)^2 \, \mathbf{1}_{X_1^+ < \varepsilon B_n}\right)$$

zu untersuchen. Betrachtet man (3.24), so konvergieren die endlichdimensionalen Randverteilungen des Prozesses $n^{-1}N_{\cdot b_n}$ für $n \to \infty$ gegen die endlichdimensionalen Randverteilungen des hitting-time Prozesses $E(\cdot)$. Da die Familie $(n^{-1}N_{tb_n})_{n\in\mathbb{N}}$ jedoch nicht gleichgradig integrierbar ist, kann an dieser Stelle keine Konvergenz in L^1 erwartet werden. Daher muss die Asymptotik des normierten hitting-time Prozesses näher untersucht werden. Setzt man zunächst

$$G(x) = \int_0^x (1 - F_{J_1}(s))ds,$$

als die integrierte Tailfunktion der Verteilungsfunktion F_{J_1}, so folgt aus Karamatas Theorem (vgl. Resnick [47, Satz 2.1]), dass G regulär variierend vom Index $1 - \alpha$ ist:

$$G(x) \sim \frac{x(1 - F_{J_1}(x))}{1 - \alpha} \in RV_{1-\alpha}.$$

Durch eine Anwendung Karamatas Tauberian Theorems, vgl. Seneta [53, Theorem 2.3], erhält man das Verhalten der Laplacetransformierten $\widehat{G}(t^{-1})$ im Nullpunkt durch

$$\widehat{G}\left(t^{-1}\right) \sim G(t) \cdot \Gamma(2 - \alpha),$$

wobei Γ die Gammafunktion bezeichnet, vgl. Elstrodt [12, S. 154]. Durch eine partielle Integration des Riemann-Stieltjes Integrals, welches bei der Berechnung von $\widehat{G}(t)$ bestimmt werden muss, folgt, dass die Laplacetransformierte von G sich als Funktion der Laplacetransformierten von F_{J_1} darstellen lässt, d.h. es gilt für alle $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\widehat{G}(t) &= \int_0^\infty \exp(-st)dG(s) = -\int_0^\infty G(s)\; d\exp(-st)(s) \\
&= t\int_0^\infty G(s)\exp(-st)ds = t\int_0^\infty s\exp(-st)ds - t\int_0^\infty \int_0^s F_{J_1}(x)dx\exp(-st)ds \\
&= \frac{1}{t} - \mathcal{L}\left(\int_0^\cdot F_{J_1}(x)dx\right)(t) = \frac{1-\widehat{F_{J_1}}(t)}{t},
\end{aligned}$$

vgl. Mallor und Omey [38], wobei $\mathcal{L}(f)(t)$ ebenfalls die Laplacetransformierte der Funktion f an der Stelle t bezeichnet. Man erhält mit Hilfe der Funktionalgleichung der Gammafunktion, vgl. Elstrodt [12, S. 155]

$$\begin{aligned}
1 - \widehat{F_{J_1}}\left(t^{-1}\right) &= t^{-1}\widehat{G}\left(t^{-1}\right) \sim \frac{G(t)}{t}\,\Gamma(2-\alpha) \\
&\sim (1 - F_{J_1}(t))\,\frac{\Gamma(2-\alpha)}{1-\alpha} = (1 - F_{J_1}(t))\,\Gamma(1-\alpha).
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt betrachtet man die Laplacetransformierte $\widehat{\mathbb{E}(N.)}(t)$ von $\mathbb{E}(N_t)$. Da Laplacetransformation eine lineare Operation ist und Faltungen von Funktionen im Laplaceraum in Produkte übergehen, folgt aus der Konvergenz der geometrischen Reihe

$$\widehat{\mathbb{E}(N.)}(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\widehat{T_n \leq} \cdot)(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\widehat{F_{J_1}}(t))^n = \left(1 - \widehat{F_{J_1}}(t)\right)^{-1} - 1$$

für alle $t > 0$. Beachtet man Theorem 9 von Mallor und Omey [38], so erhält man, dass $\mathbb{E}(N_t) + 1 \in RV_\alpha$ gilt. Wendet man erneut Karamatas Tauberian Theorem an, so erhält man

$$\widehat{\mathbb{E}\,(N.)}(t^{-1}) + 1 = \left(1 - \widehat{F_{J_1}}\left(t^{-1}\right)\right)^{-1} \sim \mathbb{E}(N_t)\ \Gamma(1+\alpha).$$

Ingesamt folgt das asymptotische Verhalten von $\mathbb{E}(N_t)$:

$$\mathbb{E}(N_t) \sim (1 - F_{J_1}(t))^{-1} \cdot \Gamma(1-\alpha)^{-1} \cdot \Gamma(1+\alpha)^{-1}. \tag{3.32}$$

Nun muss noch das zweite abgeschnittene Moment näher untersucht werden. Es ist bekannt, dass die Funktion $\mathbb{P}(|X_1| > \cdot)$ regulär variierend vom Index $-\beta$ ist, vgl. Meerschaert und Scheffler [40, Satz 8.2.18]. Mit Hilfe eines Spezialfalles des Satzes von Karamata, vgl. Satz 6.11, lässt sich diese Eigenschaft nutzen, um das asymptotische Verhalten des zweiten abgeschnittenen Moments zu bestimmen. Nutzt man dies zusammen mit (3.31), (3.32) und Satz 2.30, so folgt unmittelbar für gewisse Konstanten $p > 0, q > 0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\Bigg(\sup_{0\leq t\leq T} \Bigg| B_n^{-1} \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} \left(X_k^+ \mathbf{1}_{X_k^+ \geq \varepsilon B_n} - \mathbb{E}\left(X_k^+ \mathbf{1}_{[\varepsilon B_n, \tau B_n]}(X_k^+)\right)\right) \\
&- B_n^{-1} \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} \left(X_k^+ - \mathbb{E}\left(X_k^+ \mathbf{1}_{[0,\tau B_n]}(X_k^+)\right)\right) \Bigg| \geq \delta \Bigg) \\
&\leq \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} (\delta B_n)^{-2}\ \mathbb{E}\left((X_1^+)^2\ \mathbf{1}_{X_1^+ < \varepsilon B_n}\right) \cdot \mathbb{E}(N_{Tb_n}) \\
&\leq \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} (\delta B_n)^{-2}\ \mathbb{E}\left(X_1^2\ \mathbf{1}_{|X_1| < \varepsilon B_n}\right) \cdot \mathbb{E}(N_{Tb_n}) \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{\varepsilon^2 \beta}{\delta^2 (2-\beta)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha)} \frac{n\mathbb{P}\left(B_n^{-1}|X_1| > \varepsilon\right)}{n\mathbb{P}\left(b_n^{-1} J_1 > T\right)} \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\varepsilon^2 \beta}{\delta^2 (2-\beta)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha)} \frac{\eta^\beta((\varepsilon,\infty)) + \eta^\beta((-\infty,-\varepsilon))}{\eta^\alpha((T,\infty))} \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{p}{q} \cdot \frac{\beta \varepsilon^{2-\beta}}{\delta^2 (2-\beta)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha) T^{-\alpha}} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.33}$$

und damit die Behauptung. ■

3.1.3 Reihendarstellung des Grenzprozesses

Nun ist von Interesse, wie sich der Grenzprozess in (3.19) mit dem Prozess $A(E(\cdot))$ identifizieren lässt, wobei $E(\cdot)$ erneut den in Satz 3.2 definierten hitting-time Prozess bezeichnet, der von Meerschaert und Scheffler [40] als Grenzprozess in der Skorokhod-Topologie ausgemacht wurde, die von der Metrik $d_{[0,\infty)}$ erzeugt wird. Dazu wird die Ferguson-Klass Darstellung des Lévyprozesses $A(\cdot)$ verwendet, um so eine neue Reihendarstellung des Prozesses $A(E(\cdot))$ zu erhalten. Die so gewonnene Darstellung kann auch benutzt werden, um den Prozess $A(E(\cdot))$, welcher eben kein Lévy-Prozess ist, zu simulieren.

Korollar 3.3
Für den Grenzprozess aus Satz 3.2 und den Prozess $A(E(\cdot))$ gilt Verteilungsgleichheit in $D[0,T]$

$$\begin{aligned}&\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\leq t}-t\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\Big)\\&+\sum_{k\in\mathbb{N}}\big(\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\tau_k)\leq t}-t\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_1(\Gamma_k))\big)\Bigg)_{0\leq t\leq T}\\&\stackrel{\mathcal{D}}{=}(A(E(t)))_{0\leq t\leq T}\end{aligned}\tag{3.34}$$

für alle $T>0$. Insbesondere folgt daraus die Existenz eines Skalierungslimes $(X_0(t))_{t\geq0}$ von

$$B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}(X_k-\mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k))\tag{3.35}$$

für $n\to\infty$ in $D[0,\infty)$ und es gilt

$$(X_0(t))_{t\geq0}\stackrel{\mathcal{D}}{=}(A(E(t))_{t\geq0}.\tag{3.36}$$

Bemerkung 3.4
Man beachte, dass die Reihendarstellung in (3.34) vom Abschneidepunkt τ abhängt. Dies ist dem Umstand geschuldet, dass der Limesprozess $A(\cdot)$ in (3.7) selbst von τ abhängt.

Beweis. Da die Lévyprozesse $A(\cdot)$ und $D(\cdot)$ unabhängig sind, besitzt $D(t)$ zu den Zeitpunkten $t=T\cdot\tau_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ eine stetige Verteilung, vgl. (6.6). Mit Korollar 3.1 (c) und der Mengengleichheit (3.2) bei Meerschaert und Scheffler [41] folgt aus der Unabhängigkeit

$$\tau_n \perp D(t),\ \widetilde{\tau}_n \perp D(t)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t > 0$ die Darstellung

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\le t} - t\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\Big) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \big(\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\tau_k)\le t} - t\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_1(\Gamma_k))\big)\\
&\overset{f.s.}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)< t} - t\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\Big)\\
&+ \sum_{k\in\mathbb{N}} \big(\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\tau_k)< t} - t\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_1(\Gamma_k))\big)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{[0,E(t))}(T\cdot\widetilde{\tau}_k) - t\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\\
&+ \sum_{k\in\mathbb{N}} \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{[0,E(t))}(T\cdot\tau_k) - t\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_1(\Gamma_k))\\
&\overset{f.s.}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{[0,E(t)]}(T\cdot\widetilde{\tau}_k) - t\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\\
&+ \sum_{k\in\mathbb{N}} \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{[0,E(t)]}(T\cdot\tau_k) - t\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_1(\Gamma_k)),
\end{aligned} \tag{3.37}$$

sodass die behauptete Verteilungsgleicheit aus der Ferguson-Klass Darstellung (2.16) und (2.17) folgt. Da nach Satz 3.2 der Skalierungslimes von (3.35) in $D[0,T]$ für alle $T > 0$ existiert und dessen Verteilung mit der Verteilung von $A(E(\cdot))$ übereinstimmt, folgt die Behauptung (3.36) somit aus Satz 1 bei Lindvall [37] und Theorem 14.5 bei Billingsley [7]. ■

Die Reihendarstellung für den Prozess $A(E(\cdot))$ in $D[0,T]$ hängt jedoch noch von T ab. Da der Prozess $A(E(\cdot))$ jedoch ein Prozess mit Pfaden in $D[0,\infty)$ ist, ist diese Darstellung von Nachteil. Nun soll mittels der Selbstähnlichkeitseigenschaften der Prozesse $A(\cdot)$ und $E(\cdot)$ gezeigt werden, dass eine Betrachtung der Prozesses $A(E(\cdot))$ in $D[0,1]$ genügt.
Unter Beachtung von Satz 2.30 erhält man die Selbstähnlichkeitseigenschaft

$$\begin{aligned}
\Psi_2(sy) &= \inf\{t : \eta^\beta([t,\infty)) \le sy\} \vee 0\\
&= \inf\{t : s^{-1}\eta^\beta([t,\infty)) \le y\} \vee 0\\
&= \inf\left\{t : \eta^\beta\left(\left[s^{\frac{1}{\beta}}t,\infty\right)\right) \le y\right\} \vee 0\\
&= s^{-\frac{1}{\beta}}\Psi_2(y).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Zusätzlich sind auch Selbstähnlichkeitseigenschaften für die Prozesse

$$A(tx) \stackrel{\mathcal{D}}{=} t^{\frac{1}{\beta}} A(x), \ D(tx) \stackrel{\mathcal{D}}{=} t^{\frac{1}{\alpha}} D(x), \tag{3.39}$$

bekannt, vgl. Meerschaert und Scheffler [41, (2.6) und Proposition 3.1]. Nun gilt, dass

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\le t} - t\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\right) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\tau_k)\le t} - t\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_1(\Gamma_k))\right)$$

eine Darstellung von $A(E(t))$ in $D[0,T]$ ist. Aus den Selbstähnlichkeitseigenschaften (3.39) folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\le t} - t\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\right) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\tau_k)\le t} - t\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_1(\Gamma_k))\right) \\
&\stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(T^{\frac{1}{\beta}}\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{[0,T^{-1}E(t)]}(\widetilde{\tau}_k) - t\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\right) \\
&+ \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(T^{\frac{1}{\beta}}\Psi_1(\Gamma_k)\mathbf{1}_{[0,T^{-1}E(t)]}(\tau_k) - t\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_1(\Gamma_k))\right) \\
&\stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{[0,E(t)]}(\widetilde{\tau}_k) - t\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\right) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\Psi_1(\Gamma_k)\mathbf{1}_{[0,E(t)]}(\tau_k) - t\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_1(\Gamma_k))\right).
\end{aligned}$$

Dies ist nun eine Darstellung von $A(E(\cdot))$ in $D[0,1]$. Als Fazit erhält man nun die folgende Bemerkung.

Bemerkung 3.5
Aus dem Satz 1 bei Lindvall [37] und Korollar 3.3 folgt unmittelbar, dass der Prozess

$$\left(B_n^{-1} \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} (X_k - \mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k)) \right)_{t\ge 0}$$

einen Grenzprozess in $D[0,\infty)$ besitzt. Aufgrund der Selbstähnlichkeitseigenschaften genügt es jedoch, den Grenzprozess in $D[0,1]$ zu betrachten.

3.2 Ungekoppelte *CTRWs* basierend auf i.i.d. Zufallsvektoren

In diesem Abschnitt soll die Theorie für das Limesverhalten von *CTRWs*, welche auf einer Folge von i.i.d. Zufallsvariablen basieren, für den Fall von i.i.d. Zufallsvektoren verallgemeinert werden. Dafür ist es notwendig eine Darstellung von $PRM(\lambda\!\!\lambda \otimes \eta)$ für mehrdimensionale Lévymaße $\eta \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ zu entwickeln. Diese ist bereits bekannt und basiert

auf einer radialen Zerlegung des Lévymaßes η. Maßgeblich für diese Darstellung ist die Theorie aus dem Artikel von Rosiński [48].
Zunächst müssen die Voraussetzungen aus dem vorherigen Abschnitt für mehrdimensionale Zufallsvektoren verallgemeinert werden. Man behält die Zwischenwartezeiten $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche zu Sprungzeiten $T_n = \sum_{k=1}^n J_k$ führen, bei. Weiter sei $D(\cdot)$ der Limesprozess der sequentiellen, normierten Partialsummen der $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Die Sprunghöhen sollen nun jedoch von i.i.d., $\mathbb{R}^d$-wertigen Zufallsvektoren $(\mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche unabhängig von $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind, beschrieben werden, so dass sich $\mathbf{X}_1$ im Anziehungsbereich einer vollen, operatorstabilen Verteilung ν ohne Normalverteilungsanteil mit zugehörigem Lévymaß η befinden möge. Aus Lemma 2.42 folgt, dass eine Folge zum Index $-E$ regulär variierender und invertierbarer, linearer Operatoren $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset GL(\mathbb{R}^d)$ existiert, sodass für $n \to \infty$ die Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{n}(A_n\mathbf{X}_k - \mathbb{E}_\tau(A_n\mathbf{X}_k)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbf{A}$$

gilt, wobei $\mathbf{A}$ ein Zufallsvektor mit Verteilung ν ist. Dabei sei τ so gewählt, dass $\eta(\mathbb{S}_\tau^{d-1}) = 0$ gilt. Genau wie im eindimensionalen Fall erhält man den funktionalen Grenzwertsatz

$$\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor}(A_n\mathbf{X}_k - \mathbb{E}_\tau(A_n\mathbf{X}_k))\right)_{t\geq 0} \xrightarrow{\mathcal{D}} (\mathbf{A}(t))_{t\geq 0}$$

für $n \to \infty$ in $D[0,\infty)$, wobei $(\mathbf{A}(t))_{t\geq 0}$ einen operatorstabilen Lévyprozess mit Exponent E bildet, welcher vom Abschneidepunkt τ abhängt. Damit nun, ähnlich wie in Lemma 3.1, die Konvergenz der Punktprozesse $\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{(b(n)^{-1}T_k, A_n\mathbf{X}_k)}$ untersucht werden kann, muss eine Darstellung von $PRM(\lambda\!\!\lambda \otimes \eta)$ als Punktprozess auf $M_p([0,T] \times [-\infty,\infty]^d \backslash \{0\})$ gefunden werden. Diese benötigte Darstellung basiert auf einer radialen Zerlegung des Maßes η

$$\eta(A) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \mathbf{1}_A(xv)\ \widetilde{\eta}(dx, v)\ d\sigma(v),\ \ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d\backslash\{0\}), \tag{3.40}$$

wobei σ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{d-1}$ ist und $\{\widetilde{\eta}(\cdot, v)\}_{v\in\mathbb{S}^{d-1}}$ eine in v schwach messbare Familie von Lévymaßen auf $(0,\infty)$ bezeichnet. Wie im Eindimensionalen definiert man nun

$$\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(u,v) := \sup\{x > 0 : \widetilde{\eta}([x,\infty), v) \geq u\} \tag{3.41}$$

als Inverse der Projektion des Lévymaßes η in Richtung v. Seien $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in Lemma 3.1 und $(\mathbf{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvektoren mit Verteilung σ, so dass

$(\mathbf{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig von $(\tau_n, \Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Dann gilt die Verteilungsgleichheit

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(T\cdot\tau_k, \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} PRM(\lambda\!\!\lambda \otimes \eta) \tag{3.42}$$

in $M_p([0,T] \times [-\infty, \infty]^d \backslash \{0\})$, vgl. Rosiński [48, (3.6)]. Diese Voraussetzungen sollen nun die Voraussetzungen dieses Kapitels ergänzen.

3.2.1 Konvergenz der zugehörigen Punktprozesse

Durch die radiale Zerlegung des Maßes η, welche die Darstellung von $PRM(\lambda\!\!\lambda\otimes\eta)$ möglich macht, kann man nun eine Verallgemeinerung von Lemma 3.1 für den mehrdimensionalen Fall formulieren.

Lemma 3.6
Unter den Voraussetzungen dieses Kapitels gilt für $n \to \infty$ die Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_k, A_n\mathbf{X}_k\right)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\tau_k), \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k)} \tag{3.43}$$

für alle $T > 0$ in $M_p([0,\infty) \times [-\infty, \infty]^d \backslash \{0\})$.

Beweis. Sei $T > 0$ beliebig, aber fest. Analog zum Beweis von Lemma 3.1 betrachtet man zunächst den Punktprozess

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(\frac{k}{n}, A_n\mathbf{X}_k\right)}$$

auf dem Raum $M_p([0,T] \times [-\infty, \infty]^d \backslash \{0\})$. Nun gilt nach Lemma 2.42 für $n \to \infty$ die vage Konvergenz

$$n\mathbb{P}\left(A_n\mathbf{X}_1 \in \cdot\right) \xrightarrow{v} \eta(\cdot)$$

in $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$, welche nach Korollar 2.21 äquivalent zur Konvergenz der markierten Punktprozesse

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\left(\frac{k}{n}, A_n\mathbf{X}_k\right)} \xrightarrow{\mathcal{D}} PRM(\lambda\!\!\lambda \otimes \eta)$$

für $n \to \infty$ in $M_p([0,\infty)\times[-\infty,\infty]^d\backslash\{0\})$ ist. Wie in (3.10) erhält man aus der Darstellung (3.42) die Verteilungskonvergenz

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(\frac{k}{n}, A_n\mathbf{X}_k\right)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(T\cdot\tau_k, \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k)}$$

in $M_p([0,T] \times [-\infty,\infty]^d \backslash \{0\})$. Da die Zufallsvariablen $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Zufallsvektoren $(\mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig sind, gilt die gemeinsame Konvergenz

$$\left(b_n^{-1} \sum_{k=1}^{\lfloor n\cdot \rfloor} J_k, \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(\frac{k}{n}, A_n \mathbf{X}_k\right)} \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(D(\cdot), \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(T\cdot\tau_k, \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k)} \right)$$

für $n \to \infty$ auf dem Produktraum $D[0,\infty) \times M_p([0,T] \times [-\infty,\infty]^d \backslash \{0\})$. Nun betrachtet man erneut die in (3.16) definierte, nach Lemma 6.1 f.s. stetige, Abbildung $\mathscr{T}$. Dann folgt aus dem Continuous Mapping Theorem für $n \to \infty$ die Konvergenz

$$\begin{aligned} &\mathscr{T}\left(b_n^{-1} \sum_{k=1}^{\lfloor n\cdot \rfloor} J_k, \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(\frac{k}{n}, A_n \mathbf{X}_k\right)} \right) = \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1} T_k, A_n \mathbf{X}_k\right)} \\ &\xrightarrow{\mathcal{D}} \mathscr{T}\left(D(\cdot), \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(T\cdot\tau_k, \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k)} \right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\tau_k), \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k)} \end{aligned}$$

in $M_p([0,\infty) \times [-\infty,\infty]^d \backslash \{0\})$. ■

3.2.2 Konvergenz des mehrdimensionalen *CTRW*

Nun sollen mit Hilfe der Konvergenz (3.43) die Skalierungslimiten des *CTRW* bestimmt werden. Der Beweis verläuft analog zum eindimensionalen Fall. Es folgt das Hauptresultat dieses Kapitels.

Satz 3.7

Unter den Voraussetzungen dieses Kapitels gilt für alle $T > 0$ die Verteilungskonvergenz

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{k=1}^{N_{tb_n}} (A_n \mathbf{X}_k - \mathbb{E}_\tau(A_n \mathbf{X}_k)) \right)_{0\le t\le T} \\ &\xrightarrow{\mathcal{D}} \Bigg(\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \Bigg[\sum_{D(T\cdot\tau_k)\le t} \left(\widetilde{\eta}^{\leftarrow} \left(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k\right) \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k)\ge\varepsilon} \right) \\ &- E(t) \cdot \int_{\varepsilon\le\|x\|\le\tau} x \; d\eta(x) \Bigg] \Bigg)_{0\le t\le T} \end{aligned}$$

für $n \to \infty$ in $D[0,T]$.

Bemerkung 3.8

In Satz 3.7 kann auf den Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ nicht verzichtet werden. Die Reihe ist ohne die verwendete Abschneidetechnik i.A. nur absolut konvergent, falls die Realteile der

Eigenwerte $a_1 < \ldots < a_p$ des Operators E die Bedingung $a_1 > 1$ erfüllen. In diesem Fall integriert das Lévymaß η auch die Funktion $\min\{1, \|x\|\}$, so dass ein Herausschneiden des Nullpunktes nicht notwendig ist. Da unter den Voraussetzungen dieses Kapitels jedoch nur $a_1 > \frac{1}{2}$ gewährleistet werden kann, darf auch auf die genutzte Zentrierung nicht verzichtet werden.

Beweis. Für ein beliebiges, aber festes $T > 0$ betrachtet man zunächst das in (3.21) definierte Summationsfunktional χ und die in (3.22) für Stetigkeitspunkte ε definierte Einschränkungsabbildung π mit $\pi(m) = m_{|[0,\infty)\times[-\infty,\infty]^d\setminus\mathbb{K}_\varepsilon^d}$, d.h. η ist stetig auf $\mathbb{S}_\varepsilon^{d-1}$. Aufgrund von Lemma 6.2 und Bemerkung 6.3 ist χ f.s. stetig im Punkt

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\tau_k),\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k)} \mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\geq\varepsilon}.$$

Weiter ist π f.s. stetig im Punkt $\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\tau_k),\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k)}$, vgl. Feigin, Krantz und Resnick [14, Proposition 3.3]. Also folgt mit Lemma 3.6 wie in (3.22) die Verteilungskonvergenz

$$\begin{aligned}
\chi\circ\pi\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_k, A_n\mathbf{X}_k\right)}\right)(t) &= \left(\sum_{k=1}^{N_{tb_n}} A_n\mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|\geq\varepsilon}\right)_{0\leq t\leq T} \\
&\xrightarrow{\mathcal{D}} \chi\circ\pi\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\tau_k),\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k)}\right)(t) \\
&= \left(\sum_{D(T\cdot\tau_k)\leq t} \widetilde{\eta}^{\leftarrow}\left(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k\right)\mathbf{V}_k \cdot \mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\geq\varepsilon}\right)_{0\leq t\leq T}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

für $n\to\infty$ in $D[0,T]$. Betrachtet man nun die zufällige Summe der abgeschnittenen Erwartungswerte, so folgt mit (3.24) für $\varepsilon < \tau$ die Konvergenz

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N_{tb_n}} \mathbb{E}(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\varepsilon\leq\|A_n\mathbf{X}_k\|\leq\tau}) &= \frac{N_{tb_n}}{n}\cdot\int_{\varepsilon\leq\|x\|\leq\tau} x\; nd\mathbb{P}^{A_n\mathbf{X}_1}(x) \\
&\xrightarrow{\mathcal{D}} E(t)\cdot\int_{\varepsilon\leq\|x\|\leq\tau} x\; d\eta(x) = E(t)\cdot\int_{\varepsilon\leq\|x\|\leq\tau} x\; d\eta(x)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

für $n\to\infty$ in $D[0,\infty)$. Zusammen mit (3.44) und dem Continuous Mapping Theorem erhält man die Konvergenz der Prozesse

$$\left(\sum_{k=1}^{N_{tb_n}} \left(A_n \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\|A_n \mathbf{X}_k\| \geq \varepsilon} - \mathbb{E}(A_n \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\varepsilon \leq \|A_n \mathbf{X}_k\| \leq \tau})\right)\right)_{0 \leq t \leq T}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\widetilde{\eta}^{\leftarrow}\left(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k\right) \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{1}_{D(T \cdot \tau_k) \leq t} \cdot \mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k) \geq \varepsilon}\right)\right.$$

$$\left. - E(t) \cdot \int_{\varepsilon \leq \|x\| \leq \tau} x \, d\eta(x)\right)_{0 \leq t \leq T}$$

für $n \to \infty$ in $D[0,T]$. Bildet man noch den Grenzübergang für $\varepsilon \downarrow 0$, so erhält man den behaupteten Grenzwert. Erneut bleibt nach Theorem 4.2 von Billingsley [7] noch die Bedingung

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} \left(A_n \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\|A_n \mathbf{X}_k\| \geq \varepsilon} - \mathbb{E}\left(A_n \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\varepsilon \leq \|A_n \mathbf{X}_k\| \leq \tau}\right)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} \left(A_n \mathbf{X}_k - \mathbb{E}\left(A_n \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\|A_n \mathbf{X}_k\| \leq \tau}\right)\right) \right\| \geq \delta\right) = 0$$

für alle $\delta > 0$ nachzuweisen.

Um die euklidische Norm $\|\cdot\|$ abzuschätzen, verwendet man zunächst die Normungleichung $\|x\| \leq \|x\|_1$ für euklidische Normen auf dem $\mathbb{R}^d$. Bezeichnet man mit $x^{(i)}$ die i-te Komponente des Vektors $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(d)})$ für alle $1 \leq i \leq d$, so folgt aus der verallgemeinerten Maximumsungleichung, vgl. Lemma 6.9 und Bemerkung 6.10, die Abschätzung

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \to \infty} \; \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} \left(A_n \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\|A_n \mathbf{X}_k\| \geq \varepsilon} - \mathbb{E}\left(A_n \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\varepsilon \leq \|A_n \mathbf{X}_k\| \leq \tau}\right)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} \left(A_n \mathbf{X}_k - \mathbb{E}\left(A_n \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\|A_n \mathbf{X}_k\| \leq \tau}\right)\right) \right\| \geq \delta\right)$$
$$\leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \to \infty} \; \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq j \leq N_{Tb_n}} \left\| \sum_{k=1}^{j} A_n \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\|A_n \mathbf{X}_k\| < \varepsilon} - \mathbb{E}\left(A_n \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\|A_n \mathbf{X}_k\| < \varepsilon}\right) \right\|_1 \geq \delta\right)$$
$$\leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \to \infty} \; \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{d} \max_{1 \leq j \leq N_{Tb_n}} \left| \sum_{k=1}^{j} (A_n \mathbf{X}_k)^{(i)} \mathbf{1}_{\|A_n \mathbf{X}_k\| < \varepsilon} - \mathbb{E}\left((A_n \mathbf{X}_k)^{(i)} \mathbf{1}_{\|A_n \mathbf{X}_k\| < \varepsilon}\right) \right| \geq \delta\right)$$

$$\le \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\ \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{d}\max_{1\le j\le N_{Tb_n}}\left|\sum_{k=1}^{j}(A_n\mathbf{X}_k)^{(i)}\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|<\varepsilon}-\mathbb{E}\left((A_n\mathbf{X}_k)^{(i)}\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|<\varepsilon}\right)\right|\ge\frac{\delta}{d}\right)$$

$$\le \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{d}\mathbb{P}\left(\max_{1\le j\le N_{Tb_n}}\left|\sum_{k=1}^{j}(A_n\mathbf{X}_k)^{(i)}\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|<\varepsilon}-\mathbb{E}\left((A_n\mathbf{X}_k)^{(i)}\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|<\varepsilon}\right)\right|\ge\frac{\delta}{d}\right)$$

$$\le\left(\frac{\delta}{d}\right)^{-2}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(N_{Tb_n}\right)\sum_{i=1}^{d}Var\left((A_n\mathbf{X}_1)^{(i)}\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_1\|<\varepsilon}\right)$$

$$\le\left(\frac{\delta}{d}\right)^{-2}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(N_{Tb_n}\right)\sum_{i=1}^{d}\mathbb{E}\left(\left((A_n\mathbf{X}_1)^{(i)}\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_1\|<\varepsilon}\right)^2\right). \tag{3.46}$$

Das asymptotische Verhalten von $\mathbb{E}(N_{Tb_nS})$ wurde bereits in (3.32) bestimmt. Die zweiten Momente der Komponenten von $A_n\mathbf{X}_1$ können mit der Ungleichung

$$|x^{(i)}|\le\max_{1\le i\le d}|x^{(i)}|=\|x\|_\infty\le\|x\|$$

abgeschätzt werden. Man erhält

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\ \mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\left\|\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}\left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|\ge\varepsilon}-\mathbb{E}\left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\varepsilon\le\|A_n\mathbf{X}_k\|\le\tau}\right)\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}\left(A_n\mathbf{X}_k-\mathbb{E}\left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|\le\tau}\right)\right)\right\|\ge\delta\right)$$

$$\le\left(\frac{\delta}{d}\right)^{-2}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha)}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{d}\frac{n\cdot\mathbb{E}\left(((A_n\mathbf{X}_1)^{(i)})^2\mathbf{1}_{|(A_n\mathbf{X}_1)^{(i)}|<\varepsilon}\right)}{n\cdot\mathbb{P}\left(b_n^{-1}J_1>T\right)}$$

$$=\left(\frac{\delta}{d}\right)^{-2}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\ \Gamma(1+\alpha)\ \eta^\alpha((T,\infty))}\cdot\sum_{i=1}^{d}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}n\mathbb{E}\left(((A_n\mathbf{X}_1)^{(i)})^2\mathbf{1}_{|(A_n\mathbf{X}_1)^{(i)}|<\varepsilon}\right). \tag{3.47}$$

Es bleibt also

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}n\cdot\mathbb{E}\left(((A_n\mathbf{X}_1)^{(i)})^2\mathbf{1}_{|(A_n\mathbf{X}_1)^{(i)}|<\varepsilon}\right)=0 \tag{3.48}$$

für alle $1\le i\le d$ nachzuweisen. In Proposition 3.3.11 bei Meerschaert und Scheffler [40] wird gezeigt, dass unter anderem (3.48) hinreichend dafür ist, dass $\mathbf{X}_1$ im generalisierten Anziehungsbereich einer unendlich teilbaren Verteilung ν ohne Normalverteilungsanteil liegt. Nun muss gezeigt werden, dass (3.48) auch notwendig ist, falls ν operatorstabil ist und keinen Normalverteilungsanteil besitzt.

Sei dazu $i \in \{1, \ldots, d\}$ beliebig, aber fest gewählt. Zunächst soll der Erwartungswert in (3.48) in Integralschreibweise dargestellt werden. Dazu bezeichne $e_1, \ldots, e_d$ die orthonormale Standardbasis des $\mathbb{R}^d$ und A_n^* die Adjungierte des linearen Operators A_n. Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$\mathbb{E}\left(((A_n\mathbf{X}_1)^{(i)})^2 \mathbf{1}_{|(A_n\mathbf{X}_1)^{(i)}|<\varepsilon}\right) = \int_{|<x,e_i>|<\varepsilon} < x, e_i >^2 \, d\mathbb{P}^{A_n\mathbf{X}_1}(x)$$

$$\int_{|<A_n x,e_i>|<\varepsilon} < A_n x, e_i >^2 \, d\mathbb{P}^{\mathbf{X}_1}(x) = \int_{|<x,A_n^* e_i>|<\varepsilon} < x, A_n^* e_i >^2 \, d\mathbb{P}^{\mathbf{X}_1}(x). \tag{3.49}$$

Nun sollen die Vektoren $A_n^* e_i$ in Polarkoordinaten dargestellt werden. Sei also $r_n > 0$ und $v_n \in \mathbb{S}^{d-1}$ so gewält, dass $r_n v_n = A_n^* e_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da aus den Voraussetzungen dieses Kapitels folgt, dass die Operatoren A_n regulär variierend zum Index $-E$ sind, folgt $\left((A_n^*)^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in RV_{E^*}$. Der Einfachheit halber sollen nun allgemeiner als in Lemma 6.11

$$V(r, v) := \mathbb{P}(| < \mathbf{X}_1, v > | > r), \; U(r, v) := \mathbb{E}(< \mathbf{X}_1, v >^2 \mathbf{1}_{|<\mathbf{X}_1,v>|<r}) \tag{3.50}$$

den tail der Verteilung bzw. das zweite abgeschnittene Moment von $\mathbf{X}_1$ in Richtung v bezeichnen. Dann lässt sich der abgeschnittene Erwartungswert in (3.48) aufgrund von (3.49) auf folgende Weise darstellen:

$$\mathbb{E}\left(((A_n\mathbf{X}_1)^{(i)})^2 \mathbf{1}_{|(A_n\mathbf{X}_1)^{(i)}|<\varepsilon}\right) = r_n^2 \int_{|<x,v_n>|<r_n^{-1}\varepsilon} < x, v_n >^2 \, d\mathbb{P}^{\mathbf{X}_1}(x) = r_n^2 U(r_n^{-1}\varepsilon, v_n). \tag{3.51}$$

Nun muss das Verhalten von r_n für $n \to \infty$ bestimmt werden. Aus der Theorie der eindimensionalen, regulär variierenden Funktionen ist bekannt, dass Funktionen $f \in RV_\delta$ sich maßgeblich wie die Funktion $x \mapsto x^\delta$ verhalten, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $x^{\delta-\varepsilon} \leq f(x) \leq x^{\delta+\varepsilon}$ für hinreichend große x. Eine Verallgemeinerung dieser Eigenschaft für Operatoren wird bei Meerschaert und Scheffler [40, Korollar 4.2.6] dargestellt. Seien nun $a_1 < \ldots < a_p$ für ein $p \leq d$ die verschiedenen Realteile der Eigenwerte des linearen Operators E bzw. E^*. Aus Korollar 4.2.6 bei Meerschaert und Scheffler [40] folgt wegen der regulären Variationseigenschaft $\left((A_n^*)^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in RV_{E^*}$

$$n^\delta \|A_n^* e_i\| = n^\delta \|r_n v_n\| = n^\delta r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

für alle $\delta \leq \frac{1}{2}$. Daraus folgt insbesondere $r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Wie im eindimensionalen Fall soll nun die Konvergenz von (3.51) durch Vergleich mit dem Verteilungstail untersucht werden. Es gilt:

$$n \cdot r_n^2 U\left(r_n^{-1}\varepsilon, v_n\right) = \varepsilon^2 \frac{U(r_n^{-1}\varepsilon, v_n)}{\varepsilon^2 r_n^{-2} V\left(r_n^{-1}\varepsilon, v_n\right)} \cdot \frac{V\left(r_n^{-1}\varepsilon, v_n\right)}{V\left(\varepsilon^{-1}(r_n^{-1}\varepsilon), v_n\right)} \cdot n \cdot V(r_n^{-1}, v_n).$$

Im ersten Schritt soll zunächst der dritte Faktor untersucht werden. Für diesen erhält man aus den Voraussetzungen dieses Kapitels mit Hilfe des Portmanteau-Theorems, vgl. Klenke [32, Satz 13.16], und der Beschränktheit des Lévymaßes η auf von Null weg beschränkten Mengen die obere Schranke

$$\limsup_{n\to\infty} n \cdot V(r_n^{-1}, v_n) = \limsup_{n\to\infty} n \cdot \mathbb{P}(| < \mathbf{X}_1, v_n > | > r_n^{-1})$$

$$= \limsup_{n\to\infty} n \cdot \mathbb{P}\left(| < \mathbf{X}_1, r_n v_n > | > 1\right) \leq \limsup_{n\to\infty} n \cdot \mathbb{P}(| < \mathbf{X}_1, A_n^* e_i > | > 1) \tag{3.52}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} n \cdot \mathbb{P}(| < A_n \mathbf{X}_1, e_i > | > 1) \leq \eta(\{x \in \mathbb{R}^d : |x^{(i)}| > 1\}) =: C_1 < \infty. \tag{3.53}$$

Es folgt die Beschränktheit des dritten Faktors.

Als nächstes betrachtet man Definition 6.1.1 bei Meerschaert und Scheffler [40], welche den regulären Variationsbegriff für Maße verallgemeinert. Nach Lemma 2.42 folgt aus den Voraussetzungen dieses Kapitels die Eigenschaft $\mathbb{P}^{\mathbf{X}_1} \in RVM_\infty(E)$. Der Begiff der regulär variierenden Maße lässt sich noch weiter verallgemeinern. Betrachtet man Definition 6.2.1 bei Meerschaert und Scheffler [40], so erhält man den Begriff der $R-O$ variierenden Maße. Nun gilt für ein Maß $\mu \in RVM_\infty(E)$ auch $\mu \in ROV(E, c)$ für alle $c \geq 1$. Da nach Satz 2.37 für die Eigenwerte des Operator E die Abschätzung $a_1 > \frac{1}{2}$ gilt, existiert ein $\widetilde{\varepsilon} > 0$, so dass $2 - \widetilde{\varepsilon} - \frac{1}{a_1} > 0$ gilt. Damit lässt sich Theorem 6.3.4 bei Meerschaert und Scheffler [40] anwenden, welches besagt, dass (3.50) ebenfalls $R - O$ variierend ist und dass eine Konstante $C_2 > 0$ existiert, so dass für alle $0 < \widetilde{\delta} < 1$ und hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{V\left(\widetilde{\delta} r_n^{-1}, v_n\right)}{V\left(\widetilde{\delta}^{-1}\left(\widetilde{\delta} r_n^{-1}\right), v_n\right)} \leq C_2 \widetilde{\delta}^{\,-\widetilde{\varepsilon}-\frac{1}{a_1}} \tag{3.54}$$

gilt. Damit hat man eine Abschätzung für den zweiten Faktor gefunden.

Mit Korollar 6.3.9 bei Meerschaert und Scheffler [40] lässt sich weiter eine Schranke $C_3 > 0$ finden, so dass für alle $0 < \widetilde{\delta} < 1$ und hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\frac{U\left(\widetilde{\delta} r_n^{-1}, v_n\right)}{\widetilde{\delta}^2 r_n^{-2} V(\left(\widetilde{\delta} r_n^{-1}, v_n\right))} \leq C_3 \tag{3.55}$$

gilt. Fügt man nun die Abschätzungen (3.53), (3.54) und (3.55) zusammen und beachtet $2 - \widetilde{\varepsilon} - \frac{1}{a_1} > 0$ so erhält man die gewünschte Behauptung

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} n \cdot r_n^2 U\left(r_n^{-1}\varepsilon, v_n\right) \leq \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^2 C_1 C_2 C_3 \varepsilon^{-\widetilde{\varepsilon}-\frac{1}{a_1}} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} C_1 C_2 C_3 \varepsilon^{2-\widetilde{\varepsilon}-\frac{1}{a_1}}$$

$$= 0.$$

■

3.2.3 Reihendarstellung des Grenzprozesses

Nun soll der Limes

$$\left(\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sum_{D(T\cdot\tau_k)\leq t} \left(\widetilde{\eta}^{\leftarrow}\left(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k\right)\mathbf{V}_k \cdot \mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)>\varepsilon}\right) - E(t)\cdot\int_{\varepsilon\leq\|x\|\leq\tau} x\, d\eta(x)\right)_{0\leq t\leq T}$$

wieder mit dem im Artikel von Meerschaert und Scheffler [41] bestimmten Limes $\mathbf{A}(E(\cdot))$ identifiziert werden, wobei der Prozess $E(\cdot)$ in Satz 3.2 definiert wurde. Sei dazu $N := PRM(\lambda\!\!\lambda \otimes \eta)$ auf $M_p([0,T]\times[-\infty,\infty]^d\backslash\{0\})$. Im ungekoppelten Fall gilt dann für alle $T>0$ die Verteilungsgleichheit

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{\tau_k\leq t}\left(\widetilde{\eta}^{\leftarrow}\left(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k\right)\mathbf{V}_k \cdot \mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\geq\varepsilon}\right)\right)_{0\leq t\leq T}\\ &= \left(\iint_{[0,t]\times\{x:\|x\|>\varepsilon\}} xN(ds,dx)\right)_{0\leq t\leq T}\end{aligned}$$

in $D[0,T]$, vgl. Resnick [47, (5.36)]. Zusammen mit

$$E(t)\cdot\int_{\varepsilon\leq\|x\|\leq\tau} x\, d\eta(x) = \iint_{[0,E(t)]\times\{x:\varepsilon<\|x\|\leq\tau\}} x\, ds\, d\eta(x)$$

und der aufgrund der Unabhängigkeit der Prozesse $D(\cdot)$ und $A(\cdot)$ geltenden Stetigkeit

$$\mathbb{P}(D(T\cdot\tau_k)=t) = 0 \text{ für alle } t>0 \text{ und alle } k\in\mathbb{N}$$

erhält man nun die folgende Darstellung des Grenzprozesses:

$$\begin{aligned}&\left(\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sum_{D(T\cdot\tau_k)\leq t} \left(\widetilde{\eta}^{\leftarrow}\left(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k\right)\mathbf{V}_k \cdot \mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\geq\varepsilon}\right) - E(t)\cdot\int_{\varepsilon\leq\|x\|\leq\tau} x\, d\eta(x)\right)_{0\leq t\leq T}\\ &= \Bigg(\iint_{[0,E(t)]\times\{x:\|x\|>\tau\}} xN(ds,dx)\\ &+ \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[\iint_{[0,E(t)]\times\{x:\varepsilon\leq\|x\|\leq\tau\}} xN(ds,dx) - \iint_{[0,E(t)]\times\{x:\varepsilon\leq\|x\|\leq\tau\}} x\, ds\, d\eta(x)\right]\Bigg)_{0\leq t\leq T}.\end{aligned}$$

Es ist bekannt, dass dies die sogenannte Itô-Darstellung des Lévyprozesses $\mathbf{A}(\widetilde{t})$ an der Stelle $\widetilde{t}=E(t)$ ist, vgl Resnick [47, (5.36)]. Mit den gleichen Argumenten wie im eindimensionalen Fall folgt also, dass der Skalierungslimes des Prozesses

$$\left(A_n\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}(\mathbf{X}_k - \mathbb{E}_\tau(A_n\mathbf{X}_k))\right)_{t\geq 0}$$

für $n\to\infty$ in $D[0,\infty)$ existiert und in Verteilung mit $(A(E(t)))_{t\geq 0}$ übereinstimmt.

Kapitel 4

Gekoppelte *CTRWs*

4.1 Gekoppelte *CTRWs* basierend auf i.i.d. Zufallsvariablen

In diesem Kapitel soll die in Kapitel 3 erarbeitete Theorie für das Limesverhalten ungekoppelter *CTRWs*, welchen eine Folge von i.i.d. Sprunghöhen zugrunde liegt, für den gekoppelten Fall verallgemeinert werden. Die Beweise lassen sich in diesem Fall nicht mit Standardmethoden für Punktprozesse bewältigen, da die Abbildung $\mathscr{T}$ unter Abhängigkeiten i.A. nicht mehr stetig ist. Dieser Umstand erfordert eine nähere Untersuchung der entsprechenden Punktprozesse und des Zustandekommens derer Limiten. Es stellt sich heraus, dass ein Zusammenhang zur Konvergenz von zufälligen Summen von extremen Orderstatistiken besteht. Dies ist jedoch nicht erstaunlich, da die Theorien der Konvergenz von Punktprozessen und der Konvergenz von Dreiecksschemata gegen unendlich teilbare Zufallsvariablen ohne Normalverteilungsanteil stark miteinander verbunden sind, vgl. Meerschaert und Scheffler [40, Remark 3.3.30.]. Eine Verbindung der Theorien der Konvergenz von Dreiecksschemata und der Konvergenz extremer Orderstatistiken ist auch bereits bekannt. In den Artikeln von Janssen [28] und Barczyk, Janssen und Pauly [3] wurde gezeigt, dass nur die betragsmäßig größten Summanden einen Beitrag zur Limesverteilung liefern. Diese Ergebnisse wurden auch durch eine funktionale Form verallgemeinert, wodurch ein Zusammenhang zu Lévyprozessen hergestellt wurde, vgl. Janssen [29]. Diese Ergebnisse sollen nun in diesem Abschnitt genutzt werden, um nachzuweisen, dass auch die Konvergenz von Punktprozessen gegen einen zeitlich deformierten Poissonschen Punktprozess nur an der Konvergenz der Punkte mit den betragsmäßig größten Marken hängt. Auf diese Weise kann auf die Verwendung der im abhängigen Fall nicht mehr stetigen Abbildung $\mathscr{T}$ verzichtet werden.

4.1.1 Konvergenz der zugehörigen Punktprozesse

Zunächst sollen die Voraussetzungen aus Kapitel 3 für den gekoppelten Fall verallgemeinert werden. Man betrachtet nun eine Folge von i.i.d. Zufallsvektoren $(J_n, X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche Werte auf dem Raum $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ annehmen, mit der Interpretation, dass die Folge $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu Sprungzeiten $T_n = \sum_{k=1}^n J_k$ führt, an denen ein Sprung der Höhe X_n stattfindet. Man beachte, dass keinerlei Voraussetzungen über die Abhängigkeitsstruktur der Zufallsvariablen J_n und X_n für festes $n \in \mathbb{N}$ gemacht werden. Damit lassen sich nun die zentrierten und normierten sequentiellen Partialsummen

$$(b_n^{-1}T_{\lfloor nt\rfloor}, B_n^{-1}(S_{\lfloor nt\rfloor} - n\mathbb{E}_\tau(X_1))) := \sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor} \big((b_n^{-1}J_k, B_n^{-1}X_k) - (0, \mathbb{E}_\tau(B_n^{-1}X_k))\big) \qquad (4.1)$$

für gewisse Folgen reeller Konstanten $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{>0}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{>0}$ definieren, wobei $\mathbb{E}_\tau(\cdot)$ den in (3.2) definierten abgeschnittenen Erwartungswert bezeichnet. Eine Standardvoraussetzung für gekoppelte *CTRWs* ist, dass der Prozess in (4.1) in Verteilung gegen einen Lévyprozess $(D(t), A(t))_{t\geq 0}$ in $D([0,\infty), \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, ausgestattet mit der Skorokhod-J_1-Topologie, konvergiert, wobei $(D(t))_{t\geq 0}$ α-stabil mit $0 < \alpha < 1$ und $(A(t))_{t\geq 0}$ β-stabil mit $0 < \beta < 2$ ist. Die zugehörigen Lévymaße werden erneut mit η^α bzw. η^β bezeichnet. Der Abschneidepunkt τ soll so gewählt werden, dass $\pm\tau$ Stetigkeitspunkte von η^β sind. Weiter ist zu beachten, dass aus Lemma 2.42 folgt, dass die normierenden Konstanten als regulär variierend gewählt werden können, d.h. es gilt $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in RV_{\frac{1}{\alpha}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in RV_{\frac{1}{\beta}}$. Diese Voraussetzungen sollen für das ganze Kapitel gelten und werden als Voraussetzung dieses Kapitels bezeichnet.

Vollzieht man den Beweis von Lemma 3.1 nach, so erkennt man, dass die gleiche Beweismethodik für den gekoppelten Fall nicht genutzt werden kann, da die Stetigkeit der dort verwendeten Abbildung $\mathscr{T}$ voraussetzt, dass die Prozesse $(D(t))_{t\geq 0}$ und $(A(t))_{t\geq 0}$ f.s. niemals gemeinsam springen. Diese Voraussetzung ist i.A. nur erfüllt, falls diese stochastisch unabhängig sind. Zudem ist die Beweismethodik, welche die Abbildung $\mathscr{T}$ heranzieht, nicht dazu geeignet, die Unterschiede von rückwärts- und vorwärtsgekoppelten *CTRWs* zu untersuchen. Aus diesen Gründen soll nun ein Ansatz gewählt werden, welcher die Konvergenz der Punktprozesse aus der Konvergenz der Punkte herleitet.

Lemma 4.1

Unter den Voraussetzungen dieses Kapitels gilt mit der Notation aus Satz 3.2 für alle Zeitpunkte $T > 0$ und $n \to \infty$ die Verteilungskonvergenz

$$\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_k, B_n^{-1}X_k^+\right)}, \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_k, B_n^{-1}X_k^-\right)}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\left(D(T\cdot\widetilde{\tau}_k), \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)}, \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\tau_k), \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k))}\right) \tag{4.2}$$

in $M_p([0,\infty) \times (0,\infty]) \times M_p([0,\infty) \times [-\infty, 0))$ *und*

$$\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_{k-1}, B_n^{-1}X_k^+\right)}, \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_{k-1}, B_n^{-1}X_k^-\right)}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\left(D(T\cdot\widetilde{\tau}_k-), \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)}, \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\tau_k-), \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k))}\right) \tag{4.3}$$

in $M_p([0,\infty \times (0,\infty]) \times M_p([0,\infty) \times [-\infty, 0))$, *wobei* $D(x-)$ *den linksseitigen Grenzwert der Funktion* $D(\cdot)$ *an der Stelle* x *bezeichnet.*

Bemerkung 4.2

Zunächst ist zu beachten, dass die Zufallsvariablen τ_i bzw. $\widetilde{\tau}_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ den Zeitpunkt beschreiben, an dem der i-te kleinste bzw. i-te größte Sprung des Prozesses $A(\cdot)$ stattfindet. Da im gekoppelten Fall die Prozesse $D(\cdot)$ und $A(\cdot)$ nicht unabhängig sind, verliert man auch die Unabhängigkeit von τ_i bzw. $\widetilde{\tau}_i$ zum Prozess $D(\cdot)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Betrachtet man also für ein beliebiges $i \in \mathbb{N}$ und $T > 0$ den stochastischen Prozess $(D(t \cdot \tau_i))_{0\le t\le T}$ in $D[0,T]$, so kann dieser zur Zeit $t = T$ mit positiver Wahrscheinlichkeit einen Sprung besitzen. Es stellt sich heraus, dass dieser Sprung zu einer deterministischen Zeit, welchen es bei ungekoppelten *CTRWs* f.s. nicht gibt, zu Unterschieden bei rückwärts- bzw. vorwärtsgekoppelten *CTRWs* führt.

Beweis. Sei nun $T > 0$ beliebig, aber fest gewählt. Mit dem Resultat (2.4) bei Barczyk, Janssen und Pauly [3] und der Voraussetzung

$$(b_n^{-1}T_{\lfloor nt \rfloor}, B_n^{-1}(S_{\lfloor nt \rfloor} - n\mathbb{E}_\tau(X_1)))_{t\ge 0} \xrightarrow{\mathcal{D}} (D(t), A(t))_{t\ge 0} \tag{4.4}$$

für $n \to \infty$ in $D[0,\infty) \times D[0,\infty)$ folgt unter Beachtung der regulären Variationseigenschaft

$$\frac{B_{\lfloor nT \rfloor}}{B_n} \to T^{\frac{1}{\beta}} \text{ für } n \to \infty,$$

und der Selbstähnlichkeit (3.38) für jedes feste $r \in \mathbb{N}$ die gemeinsame Konvergenz der r unteren und oberen Orderstatistiken

$$\left(b_n^{-1} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} J_k, B_n^{-1} X^-_{1:\lfloor nT \rfloor}, \ldots, B_n^{-1} X^-_{r:\lfloor nT \rfloor}, B_n^{-1} X^+_{\lfloor nT \rfloor:\lfloor nT \rfloor}, \ldots, B_n^{-1} X^+_{\lfloor nT \rfloor - r+1:\lfloor nT \rfloor} \right)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \Big(D(T), \Psi_1(T^{-1}\Gamma_1), \ldots, \Psi_1(T^{-1}\Gamma_r), \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_1), \ldots, \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_r) \Big) \tag{4.5}$$

für $n \to \infty$ in $[0,\infty) \times [-\infty, 0)^r \times (0,\infty]^r$. Setzt man nun $X_{i:\lfloor nT \rfloor} = 0$, falls $i \leq 0$ oder $i > \lfloor nT \rfloor$, so erhält man aus der Konvergenz der endlichdimensionalen Randverteilungen die Konvergenz der Zufallsvektoren

$$\left(b_n^{-1} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} J_k, \Big(B_n^{-1} X^-_{i:\lfloor nT \rfloor} \Big)_{i\in\mathbb{N}}, \Big(B_n^{-1} X^+_{\lfloor nT \rfloor - j+1:\lfloor nT \rfloor} \Big)_{j\in\mathbb{N}} \right)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \Big(D(T), (\Psi_1(T^{-1}\Gamma_i))_{i\in\mathbb{N}}, (\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_j))_{j\in\mathbb{N}} \Big) \tag{4.6}$$

für $n \to \infty$ in $[0,\infty) \times [-\infty, 0)^{\mathbb{N}} \times (0,\infty]^{\mathbb{N}}$.
Man betrachtet nun die Punktprozesse in (4.2) nach einer geeigneten Umsummation

$$\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_k, B_n^{-1}X_k^+\right)}, \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_k, B_n^{-1}X_k^-\right)} \right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_{\widetilde{d}_{\lfloor nT \rfloor - k+1}}, B_n^{-1}X^+_{\lfloor nT \rfloor - k+1:\lfloor nT \rfloor}\right)}, \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_{d_k}, B_n^{-1}X^-_{k:\lfloor nT \rfloor},\right)} \right),$$

wobei $(d_1, \ldots, d_{\lfloor nT \rfloor})$ bzw. $(\widetilde{d}_1, \ldots, \widetilde{d}_{\lfloor nT \rfloor})$ den Antirangvektor von $\Big(X_1^-, \ldots, X^-_{\lfloor nT \rfloor}\Big)$ bzw. $\Big(X_1^+, \ldots, X^+_{\lfloor nT \rfloor}\Big)$ bezeichnet. Um nun die Konvergenz der Punktprozesse aus der Konvergenz der Punkte herzuleiten, ist zunächst das Limesverhalten von

$$b_n^{-1} T_{d_i} = b_n^{-1} \sum_{l=1}^{d_i} J_l = b_n^{-1} \sum_{l=1}^{\lfloor n \frac{d_i}{n} \rfloor} J_l \text{ und } b_n^{-1} T_{\widetilde{d}_{\lfloor nT \rfloor - i+1}} \tag{4.7}$$

für $1 \leq i \leq \lfloor nT \rfloor$ zu studieren. Da $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. sind, ist d_i offenbar gleichverteilt auf der Menge $\{1, \ldots, \lfloor nT \rfloor\}$. Man betrachtet nun eine Folge von Zufallsvektoren $\Big(U_1^{(n)}, \ldots U_r^{(n)}\Big)$ mit i.i.d. auf der Menge $\{1, \ldots, \lfloor nT \rfloor\}$ gleichverteilten Komponenten. Nun gilt für alle $k_i \in [0,1]$, $1 \leq i \leq r$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{U_1^{(n)}}{\lfloor nT \rfloor} \leq k_1, \ldots, \frac{U_r^{(n)}}{\lfloor nT \rfloor} \leq k_r \right) = \prod_{i=1}^r \mathbb{P}(U_i^{(n)} \leq k_i \lfloor nT \rfloor) = \prod_{i=1}^r \frac{\lfloor k_i \lfloor nT \rfloor \rfloor}{\lfloor nT \rfloor} \xrightarrow{n\to\infty} \prod_{i=1}^r k_i.$$

Daraus folgt für $n \to \infty$ die Konvergenz

$$\left(\frac{U_1^{(n)}}{\lfloor nT \rfloor}, \ldots, \frac{U_r^{(n)}}{\lfloor nT \rfloor}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\tau_1, \ldots, \tau_r). \tag{4.8}$$

Für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ sei ein $r \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq r \leq n$ fest gewählt. Unter Beachtung der gemeinsamen Verteilung der Antiränge folgt aus (4.8) und dem Lemma von Freedman, vgl. Janssen und Mason [27, Lemma 5.5], die Konvergenz der endlichdimensionalen Randverteilungen

$$\left(\frac{d_1}{\lfloor nT \rfloor}, \ldots, \frac{d_r}{\lfloor nT \rfloor}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\tau_1, \ldots, \tau_r)\,.$$

Setzt man nun erneut $d_i = 0$ für $i \leq 0$ und $i > \lfloor nT \rfloor$, so erhält man daraus mit Lemma 2.48 die Konvergenz auf dem Produktraum

$$\left(\frac{d_i}{n}\right)_{i \in \mathbb{N}} = \left(\frac{d_i}{\lfloor nT \rfloor} \cdot \frac{\lfloor nT \rfloor}{n}\right)_{i \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} (T \cdot \tau_i)_{i \in \mathbb{N}} \tag{4.9}$$

in $[0, T]^{\mathbb{N}}$. Aufgrund der Abhängigkeiten zwischen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann die Konvergenz von (4.7) nicht über einen klassischen Continuous Mapping Ansatz nachgewiesen werden. Der Grund hierfür liegt darin, dass die Projektion

$$\pi_t : D[0, \infty) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ (x, t) \mapsto x(t)$$

nur f.s. stetig ist, falls fast alle Pfade von x stetig in t sind. Auch die Verwendung von klassischen Transfersätzen für zufällige Summen, wie sie z.B. bei Gnedenko und Korolev [23] oder Finkelstein und Tucker [16] zu finden sind, ist nicht hilfreich, da diese entweder eine Unabhängigkeit der zufälligen Anzahl an Summanden und den Summanden selbst oder eine stochastische Konvergenz in (4.9), vgl. Becker-Kern [4], fordern, welche hier nicht vorliegt. Aus diesen Gründen wird an dieser Stelle ein anderer Ansatz gewählt.
Sei $\left(\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_{\lfloor nT \rfloor}\right)$ der Antirangvektor der Zwischenwartezeiten $\left(J_1, \ldots, J_{\lfloor nT \rfloor}\right)$. Man betrachtet nun für ein beliebiges $i \in \mathbb{N}$ die Folge von Zufallsvariablen

$$\left(b_n^{-1} J_{\lfloor nT \rfloor - j + 1 : \lfloor nT \rfloor} \mathbf{1}_{\widehat{d}_{\lfloor nT \rfloor - j + 1} \leq d_i}\right)_{j \in \mathbb{N}}$$

mit der üblichen Konvention $J_{j : \lfloor nT \rfloor} = 0$ für $j \leq 0$ und $j > \lfloor nT \rfloor$. Um Konvergenzaussagen über deren Verteilung machen zu können, wird zum einen die Unabhängigkeit von Antirängen und Orderstatistiken und zum anderen die gemeinsame Konvergenz der Orderstatistiken

$$\left(n^{-1} \widehat{d}_{\lfloor nT \rfloor - j + 1}, n^{-1} d_i\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} (T \cdot \widehat{\tau}_j, T \cdot \tau_i)$$

für alle $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ und $n \to \infty$ in $[0,T] \times [0,T]$ benötigt, wobei $(\widehat{\tau}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge von $\mathcal{U}(0,1)$ verteilten Zufallsvariablen bildet. Die Unabhängigkeit von Aniträngen und Orderstatistiken ist bereits aus der nichtparametrischen Statistik bekannt. Zum einen ist die Orderstatistik im Produktexperiment suffizient und vollständig für die Familie aller Wahrscheinlichkeitsmaße, vgl. Lemma 6.16, zum anderen ist die Verteilung der Antiränge für diese Familie ancillar. Somit folgt aus dem Satz von Basu, vgl. Lemma 6.14, die Unabhängigkeit der Antiränge von den Orderstatistiken

$$\left(\left(d_1, \dots d_{\lfloor nT \rfloor}\right), \left(\widehat{d}_1, \dots \widehat{d}_{\lfloor nT \rfloor}\right)\right) \perp \left(J_{1:\lfloor nT \rfloor}, \dots, J_{\lfloor nT \rfloor : \lfloor nT \rfloor}\right). \tag{4.10}$$

Bezeichnet $(\eta^\alpha)^{-1}$ die rechtsseitige Inverse des zur unendlich teilbaren Zufallsvariable $D(1)$ gehörigen Lévymaßes η^α, so erhält man aus der der Voraussetzung $b_n^{-1} T_{\lfloor n \cdot \rfloor} \xrightarrow{\mathcal{D}} D(\cdot)$ für $n \to \infty$ in $D[0,\infty)$, aus welcher insbesondere die Konvergenz der eindimensionalen Randverteilungen für jede feste Zeit T folgt, der Konvergenz (2.4) bei Barczyk, Janssen und Pauly, der Konvergenz der Sprungzeiten gegen $\mathcal{U}(0,1)$ verteilte Zufallsvariablen, vgl. (4.9), und der Unabhängigkeit von Antirängen und Orderstatistiken die gemeinsame Konvergenz

$$\left(b_n^{-1} J_{\lfloor nT \rfloor - i+1 : \lfloor nT \rfloor}, n^{-1} \widehat{d}_{\lfloor nT \rfloor - i+1}\right)_{i\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left((\eta^\alpha)^{-1}(T^{-1}\widehat{\Gamma}_i), T \cdot \widehat{\tau}_i\right)_{i\in\mathbb{N}} \tag{4.11}$$

für $n \to \infty$ in $([0,\infty) \times [0,T])^{\mathbb{N}}$, wobei $\widehat{\Gamma}_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ wie Γ_i verteilt ist. Man beachte, dass die Folgen $\left(\widehat{\Gamma}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im gekoppelten Fall jedoch nicht unabhängig sein müssen. Mit den gleichen Argumenten erhält man aus der vorausgesetzten Verteilungskonvergenz $B_n^{-1}(S_{\lfloor nt \rfloor} - n\mathbb{E}_\tau(X_1)) \xrightarrow{\mathcal{D}} A(\cdot)$ für $n \to \infty$ in $D[0,\infty)$ die Konvergenz

$$\left(B_n^{-1} X^-_{j:\lfloor nT \rfloor}, B_n^{-1} X^+_{\lfloor nT \rfloor - j+1 : \lfloor nT \rfloor}, n^{-1} d_j\right)_{j\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\Psi_1(T^{-1}\Gamma_j), \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_j), T \cdot \tau_j\right)_{j\in\mathbb{N}} \tag{4.12}$$

für $n \to \infty$ in $((-\infty,0] \times [0,\infty) \times [0,T])^{\mathbb{N}}$. Da nun die Konverenz der Zeit- und Raumprozesse $(b_n^{-1} T_{\lfloor n \cdot \rfloor}, B_n^{-1}(S_{\lfloor nt \rfloor} - n\mathbb{E}_\tau(X_1))) \xrightarrow{\mathcal{D}} (D(\cdot), A(\cdot))$ für $n \to \infty$ in $D([0,\infty), \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ per Voraussetzung gemeinsam erfolgt, folgt daraus die gemeinsame Konvergenz von (4.11) und (4.12), aus der insbesondere die gemeinsame Konvergenz der Sprungzeiten

$$\left((n^{-1} d_i)_{i\in\mathbb{N}}, (n^{-1} \widehat{d}_{\lfloor nT \rfloor - j+1})_{j\in\mathbb{N}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} ((T \cdot \tau_i)_{i\in\mathbb{N}}, (T \cdot \widehat{\tau}_j)_{j\in\mathbb{N}}) \tag{4.13}$$

für $n \to \infty$ in $[0,T]^{\mathbb{N}} \times [0,T]^{\mathbb{N}}$ folgt. Man beachte, dass die Folgen $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\widehat{\tau}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im gekoppelten Fall ebenfalls nicht unabhängig sein müssen. Aus der gemeinsamen Konvergenz folgt nun für $n \to \infty$ die Konvergenz der Indikatorfunktionen

$$\left(\mathbf{1}_{n^{-1}\widehat{d}_{\lfloor nT \rfloor - j+1} \le n^{-1} d_i}\right)_{j\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\mathbf{1}_{\widehat{\tau}_j \le \tau_i}\right)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Daraus folgt unter Beachtung der Unabhängigkeit (4.10) und der Konvergenz (4.11) die Konvergenz

$$\left(b_n^{-1} J_{\lfloor nT \rfloor - j+1:\lfloor nT \rfloor} \mathbf{1}_{\widehat{d}_{\lfloor nT \rfloor - j+1} \leq d_i}\right)_{j\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\widehat{\eta}^{-1}(T^{-1}\widehat{\Gamma}_j)\mathbf{1}_{\widehat{\tau}_j \leq \tau_i}\right)_{j\in\mathbb{N}}$$

für $n \to \infty$ in $[0,\infty)^{\mathbb{N}}$. Nun erhält man durch Summation

$$\sum_{l\in\mathbb{N}} b_n^{-1} J_{\lfloor nT \rfloor - l+1:\lfloor nT \rfloor} \mathbf{1}_{n^{-1}\widehat{d}_{\lfloor nT \rfloor - l+1} \leq n^{-1} d_i} = \sum_{l=1}^{\lfloor nT \rfloor} b_n^{-1} J_{\lfloor nT \rfloor - l+1:\lfloor nT \rfloor} \mathbf{1}_{n^{-1}\widehat{d}_{\lfloor nT \rfloor - l+1} \leq n^{-1} d_i}$$

$$= b_n^{-1} \sum_{l=1}^{\lfloor nT \rfloor} J_l \mathbf{1}_{l \leq d_i} = b_n^{-1} \sum_{l=1}^{d_i} J_l \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{l\in\mathbb{N}} \widehat{\eta}^{-1}(T^{-1}\widehat{\Gamma}_l)\mathbf{1}_{T\cdot\widehat{\tau}_l \leq T\cdot\tau_i} \tag{4.14}$$

für $n \to \infty$ in $\mathbb{R}^+$. Betrachtet man (2.17) so folgt, dass es sich bei (4.14) um die Ferguson-Klass Darstellung von $D(T\cdot\tau_i)$ handelt. Da die Konveregenz der Antiränge in (4.13) gemeinsam gilt, erhält man

$$\left(b_n^{-1} \sum_{l=1}^{\lfloor n\cdot\frac{d_i}{n}\rfloor} J_l\right)_{i\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} (D(T\cdot\tau_i))_{i\in\mathbb{N}} \tag{4.15}$$

für $n \to \infty$ in $[0,\infty)^{\mathbb{N}}$. Ersetzt man d_i durch $\widetilde{d}_{\lfloor nT \rfloor - i+1}$, so folgt aus den gleichen Argumenten

$$\left(b_n^{-1} \sum_{l=1}^{\lfloor n\cdot\frac{\widetilde{d}_{\lfloor nT \rfloor - i+1}}{n}\rfloor} J_l\right)_{i\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} (D(T\cdot\widetilde{\tau}_i))_{i\in\mathbb{N}}$$

für $n \to \infty$ in $[0,\infty)^{\mathbb{N}}$. Zusammen mit der gemeinsamen Konvergenz der oberen und unteren Orderstatistiken in (4.5) erhält man daraus die Konvergenz der Punkte

$$\begin{aligned}&\left(\left(b_n^{-1} T_{\widetilde{d}_{\lfloor nT \rfloor - i+1}}, B_n^{-1} X^+_{\lfloor nT \rfloor - i+1:\lfloor nT \rfloor}\right), \left(b_n^{-1} T_{d_i}, B_n^{-1} X^-_{i:\lfloor nT \rfloor}\right)\right)_{i\in\mathbb{N}} \\ &\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\left(D(T\cdot\widetilde{\tau}_i), \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_i)\right), \left(D(T\cdot\tau_i), \Psi_1(T^{-1}\Gamma_i)\right)\right)_{i\in\mathbb{N}}\end{aligned} \tag{4.16}$$

für $n \to \infty$ in $([0,\infty) \times (0,\infty] \times [0,\infty) \times [-\infty,0))^{\mathbb{N}}$.

Aus der Konvergenz der Punkte lässt sich nun die Konvergenz der entsprechenden Punktmaße gewinnen. Beachtet man Lemma 6.5, so folgt aus (4.16) und der asymptotischen Unabhängigkeit der oberen und unteren Orderstatistiken, vgl. Barczyk, Janssen und Pauly [3, Korollar 2.1] für $n \to \infty$ die Konvergenz der Punktprozesse

$$\left(\varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_{\widetilde{d}_{\lfloor nT\rfloor-i+1}},B_n^{-1}X^+_{\lfloor nT\rfloor-i+1:\lfloor nT\rfloor}\right)},\varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_{d_i},B_n^{-1}X^-_{i:\lfloor nT\rfloor}\right)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$$
$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\varepsilon_{\left(D(T\cdot\widetilde{\tau}_i),\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_i)\right)},\varepsilon_{(D(T\cdot\tau_i),\Psi_1(T^{-1}\Gamma_i))}\right)_{i\in\mathbb{N}}$$

in $(M_p([0,\infty)\times(0,\infty])\times M_p([0,\infty)\times[-\infty,0)))^{\mathbb{N}}$. Summiert man nun für ein festes $r\in\mathbb{N}$ die ersten r Komponenten auf, so erhält man für $n\to\infty$ die Konvergenz

$$\left(\sum_{k=1}^{r}\varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_{\widetilde{d}_{\lfloor nT\rfloor-k+1}},B_n^{-1}X^+_{\lfloor nT\rfloor-k+1:\lfloor nT\rfloor}\right)},\sum_{k=1}^{r}\varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_{d_k},B_n^{-1}X^-_{k:\lfloor nT\rfloor}\right)}\right)$$
$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{k=1}^{r}\varepsilon_{\left(D(T\cdot\widetilde{\tau}_k),\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)},\sum_{k=1}^{r}\varepsilon_{(D((T\cdot\tau_k),\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k))}\right)$$

in $M_p([0,\infty)\times(0,\infty])\times M_p([0,\infty)\times[-\infty,0))$. Mit dem Grenzübergang für $r\to\infty$ ergibt sich

$$\left(\sum_{k=1}^{r}\varepsilon_{\left(D(T\cdot\widetilde{\tau}_k),\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)},\sum_{k=1}^{r}\varepsilon_{(D((T\cdot\tau_k),\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k))}\right)$$
$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\varepsilon_{\left(D(T\cdot\widetilde{\tau}_k),\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)},\sum_{k\in\mathbb{N}}\varepsilon_{(D((T\cdot\tau_k),\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k))}\right)$$

auf dem gleichen Raum. Nach Theorem 4.2 von Billingsley [7] bleibt noch für alle $f\in C_K^+([0,\infty)\times[-\infty,\infty]\backslash\{0\})$

$$\lim_{r\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\ \mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} f\left(b_n^{-1}T_{d_k},B_n^{-1}X^-_{k:\lfloor nT\rfloor}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sum_{k=1}^{r} f\left(b_n^{-1}T_{d_k},B_n^{-1}X^-_{k:\lfloor nT\rfloor}\right)\right|>\delta\right)=0 \tag{4.17}$$

und

$$\lim_{r\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} f\left(b_n^{-1}T_{\widetilde{d}_{\lfloor nT\rfloor-k+1}},B_n^{-1}X^+_{\lfloor nT\rfloor-k+1:\lfloor nT\rfloor}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sum_{k=1}^{r} f\left(b_n^{-1}T_{\widetilde{d}_{\lfloor nT\rfloor-k+1}},B_n^{-1}X^+_{\lfloor nT\rfloor-k+1:\lfloor nT\rfloor}\right)\right|>\delta\right)=0 \tag{4.18}$$

für alle $\delta > 0$ zu zeigen. Es gilt für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} f\left(b_n^{-1}T_{d_k}, B_n^{-1}X^-_{k:\lfloor nT\rfloor}\right) - \sum_{k=1}^{r} f\left(b_n^{-1}T_{d_k}, B_n^{-1}X^-_{k:\lfloor nT\rfloor}\right)\right| > \delta\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{k=r+1}^{\lfloor nT\rfloor} f\left(b_n^{-1}T_{d_k}, B_n^{-1}X^-_{k:\lfloor nT\rfloor}\right) > \delta\right)\\
&\leq \mathbb{P}\left(\sum_{k=r+1}^{\infty} f\left(b_n^{-1}T_{d_k}, B_n^{-1}X^-_{k:\lfloor nT\rfloor}\right) > \delta\right)\\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\sum_{k=r+1}^{\infty} f\left(D(T\cdot\tau_k), \varPsi_1(T^{-1}\Gamma_k)\right) > \delta\right)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

da $f \geq 0$ stetig ist. Man beachte, dass die Reihe in (4.19) f.s. nur eine endliche Summe ist, da f einen kompakten Träger besitzt. Es folgt also aus dem Portmanteau-Theorem

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=r+1}^{\infty} f\left(D(T\cdot\tau_k), \varPsi_1(T^{-1}\Gamma_k)\right) > \delta\right) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Das gleiche Argument gilt für die oberen Orderstatistiken, so dass (4.18) gezeigt ist. Man erhält also für $n \to \infty$

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_k, B_n^{-1}X_k^+\right)}, \sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_k, B_n^{-1}X_k^-\right)}\right)\\
&\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_{\widetilde{d}_{\lfloor nT\rfloor-k+1}}, B_n^{-1}X^+_{\lfloor nT\rfloor-k+1:\lfloor nT\rfloor}\right)}, \sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_{d_k}, B_n^{-1}X^-_{k:\lfloor nT\rfloor}\right)}\right)\\
&\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\left(D(T\cdot\widetilde{\tau}_k), \varPsi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)}, \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\tau_k), \varPsi_1(T^{-1}\Gamma_k))}\right)
\end{aligned}$$

in $M_p([0,\infty) \times (0,\infty] \times M_p([0,\infty) \times [-\infty, 0))$.

Es bleibt noch die Konvergenz (4.3) nachzuweisen. Dazu muss das Verhalten der zufälligen Summe $b_n^{-1}T_{d_i-1}$ für $1 \leq i \leq \lfloor nT\rfloor$ verstanden werden. Es gilt

$$b_n^{-1}T_{d_i-1} = b_n^{-1}\sum_{k=1}^{d_i-1} J_k = b_n^{-1}\sum_{k=1}^{\left\lceil n\cdot\frac{d_i-1}{n}\right\rceil} J_k = b_n^{-1}\sum_{k=1}^{\left\lceil n\cdot\frac{d_i}{n}-1\right\rceil} J_k.$$

Beachtet man die Gleichheit

$$\mathscr{I}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} J_k\right) = \sum_{k=1}^{\lceil nT-1 \rceil} J_k$$

für die in (2.12) definierte Abbildung $\mathscr{I}$, so legt die Stetigkeit der Abbildung $\mathscr{I}$, welche in Korollar 2.52 nachgewiesen wurde, die Annahme

$$\left(b_n^{-1}\sum_{k=1}^{\lceil n\frac{d_i}{n}-1 \rceil} J_k\right)_{i\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} (D(T\cdot\tau_i-))_{i\in\mathbb{N}} \tag{4.20}$$

für $n \to \infty$ in $([0,\infty))^{\mathbb{N}}$ nahe. Da die Konvergenz von (4.15) aber nicht durch einen Continuous Mapping Ansatz nachgewiesen werden kann, muss die Annahme (4.20) mit anderen Argumenten bewiesen werden. Vollzieht man die Argumente noch einmal nach, welche die Konvergenzaussage (4.14) erlaubt haben, so erhält man

$$\begin{aligned} b_n^{-1}\sum_{l=1}^{d_i-1} J_l &= \sum_{l=1}^{\lfloor nT \rfloor} b_n^{-1} J_{\lfloor nT \rfloor-l+1:\lfloor nt \rfloor}\mathbf{1}_{\widehat{d}_{\lfloor nT \rfloor-l+1}\leq d_i-1} \\ &= \sum_{l=1}^{\lfloor nT \rfloor} b_n^{-1} J_{\lfloor nT \rfloor-l+1:\lfloor nt \rfloor}\mathbf{1}_{n^{-1}\widehat{d}_{\lfloor nT \rfloor-l+1}<n^{-1}d_i} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{l\in\mathbb{N}} \widehat{\eta}^{-1}(T^{-1}\widehat{\Gamma}_l)\mathbf{1}_{T\cdot\widehat{\tau}_l<T\cdot\tau_i}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Vergleicht man (4.21) mit der Ferguson-Klass Darstellung (2.17) des Prozesses $(D(t))_{0\leq t\leq T}$ zur Zeit $t = T\cdot\tau_i$, so fällt auf, dass die beiden Darstellungen sich bis auf das Ungleichheitszeichen in der Indikatorfunktion gleichen. Findet nun ein Sprung zur Zeit $t = T\cdot\tau_i$ statt, so wird dieser in der Reihe (4.21) nicht berücksichtigt. Also erhält man aus (4.21) die Behauptung (4.20). Erneut folgt die Konvergenz der Punkte

$$\begin{aligned} &\left(\left(b_n^{-1}T_{\widetilde{d}_{\lfloor nT \rfloor-i+1}-1}, B_n^{-1}X^+_{\lfloor nT \rfloor-i+1:\lfloor nT \rfloor}\right), \left(b_n^{-1}T_{d_i-1}, B_n^{-1}X^-_{i:\lfloor nT \rfloor}\right)\right)_{i\in\mathbb{N}} \\ &\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\left(D(T\cdot\widetilde{\tau}_i-), \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_i)\right), \left(D(T\cdot\tau_i-), \Psi_1(T^{-1}\Gamma_i)\right)\right)_{i\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

für $n \to \infty$ in $([0,\infty)\times(0,\infty]\times[0,\infty)\times[-\infty,0))^{\mathbb{N}}$. Mit der gleichen Argumentation wie oben erhält man nun (4.3). ■

4.1.2 Konvergenz der vorwärts- und rückwärtsgekoppelten *CTRWs*

Nachdem man nun eine Verallgemeinerung von Lemma 3.1 für den rückwärts- und vorwärtsgekoppelten Fall zur Verfügung hat, ist es mit den Techniken aus dem Beweis von Satz 3.2 möglich, die Skalierungslimiten der entsprechenden *CTRWs* zu bestimmen.

Satz 4.3
Sei $\mathcal{S}$ die in (6.5) definierte Menge der nichtsingulären Punkte des Prozesses $D(\cdot)$. Dann gilt unter den Voraussetzungen dieses Kapitels und mit der Notation aus Satz 3.2 für alle $T \in \mathcal{S}$ die Konvergenz

$$\left(B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}(X_k-\mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k))\right)_{0\le t\le T}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \Bigg(\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\le t} - E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\Big)$$

$$-\sum_{k\in\mathbb{N}}\big(\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\tau_k)\le t} - E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_1(\Gamma_k))\big)\Bigg)_{0\le t\le T}$$

und

$$\left(B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}+1}(X_k-\mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k))\right)_{0\le t\le T}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \Bigg(\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k-)\le t} - E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\Big)$$

$$-\sum_{k\in\mathbb{N}}\big(\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\tau_k-)\le t} - E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_1(\Gamma_k))\big)\Bigg)_{0\le t\le T}$$

für $n\to\infty$ in $D[0,T]$.

Beweis. Sei nun $T \in \mathcal{S}$ beliebig, aber fest gewählt. Wie im Beweis von Satz 3.2 verwendet man die Zerlegung in Positiv- und Negativteil

$$B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}(X_k-\mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k))$$

$$= B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}(X_k^+-\mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k^+)) + B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}(X_k^--\mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k^-)).$$

Anschließend genügt es die Konvergenz

$$\left(B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}(X_k^+-\mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k^+))\right)_{0\le t\le T}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\le t} - E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\Big)\right)_{0\le t\le T}$$

für $n \to \infty$ in $D[0,T]$ nachzuweisen. Mit den gleichen Argumenten folgt die Konvergenz der Negativteile

$$\left(B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}(X_k^- - \mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k^-))\right)_{0\le t\le T}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\tau_k)\le t} - E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_1(\Gamma_k))\right)\right)_{0\le t\le T}$$

für $n \to \infty$ in $D[0,T]$. Die Konvergenz der Summe folgt anschließend mit den gleichen Argumenten wie im Beweis von Satz 3.2, da die Folgen $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\widetilde{\tau}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch im gekoppelten Fall unabhängig sind.

Man betrachtet nun erneut das Summationsfunktional χ, welches in (3.21) definiert wurde. Zu beachten ist, dass die Stetigkeit von χ, welche in Lemma 6.2 nachgewiesen wurde, auch im gekoppelten Fall erhalten bleibt, da man nur nichtsinguläre Punkte $T \in \mathcal{S}$ des Prozesses $D(\cdot)$ betrachtet. Verwendet man erneut die in (3.22) definierte stetige Einschränkungsabbildung π, so folgt aus Lemma 4.1, dem Continuous Mapping Theorem und der Mengengleichheit (3.7) bei Meerschaert und Scheffler [41] die Verteilungskonvergenz

$$\begin{aligned}
\chi\circ\pi\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_k,B_n^{-1}X_k^+\right)}\right)(t) &= \left(B_n^{-1}\sum_{b_n^{-1}T_k\le t}X_k^+\mathbf{1}_{B_n^{-1}X_k^+\ge\varepsilon}\right)_{0\le t\le T}\\
&= \left(B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}X_k^+\mathbf{1}_{X_k^+\ge\varepsilon B_n)}\right)_{0\le t\le T} \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi\circ\pi\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\varepsilon_{\left(D(T\cdot\widetilde{\tau}_k),\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)}\right)(t)\\
&= \left(\sum_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\le t}\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\ge\varepsilon}\right)_{0\le t\le T}
\end{aligned}\tag{4.22}$$

für $n \to \infty$ in $D[0,T]$. Man beachte, dass es sich bei der Reihe in (4.22) f.s. nur um eine endliche Summe handelt, da $\Gamma_k \to \infty$ f.s. für $k \to \infty$, so dass (4.22) f.s. konvergiert. Es bleibt noch die Konvergenz der abgeschnittenen Erwartungswerte nachzuweisen. Sei ohne Einschränkung $\tau > \varepsilon$. Wie in (3.24) erhält man die Konvergenz des normierten hitting-time Prozesses

$$\left(\frac{N_{tb_n}}{n}\right)_{t\ge0} \xrightarrow{\mathcal{D}} (E(t))_{t\ge0}$$

für $n \to \infty$ in $D[0,T]$. Aus (3.9) folgt für $n \to \infty$ die vage Konvergenz

$$n\mathbb{P}\left(B_n^{-1}X_1^+ \in \cdot\right) \xrightarrow{v} \eta^\beta_{(0,\infty)}(\cdot)$$

in $(0,\infty]$. Mit den gleichen Argumenten wie im Beweis von Lemma 4.1 erhält man mit Hilfe von Lemma 6.2 und dem Continuous Mapping Theorem für $n \to \infty$ die Konvergenz der durch abgeschnittene Erwartungswerte zentrierten Prozesse

$$\left(B_n^{-1} \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} \left(X_k^+ \mathbf{1}_{X_k^+ \geq B_n \varepsilon} - \mathbb{E}\left(X_k^+ \, \mathbf{1}_{[\varepsilon,\tau]} \left(B_n^{-1} X_k^+ \right) \right) \right) \right)_{0\leq t\leq T}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k) \mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\leq t} \mathbf{1}_{\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\geq\varepsilon} - E(t) \cdot \mathbb{E}\left(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k) \mathbf{1}_{[\varepsilon,\tau]}(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k)) \right) \right) \right)_{0\leq t\leq T}$$

in $D[0,T]$, da der Prozess $E(\cdot)$ f.s. stetige Pfade besitzt. Genau wie in (3.28) erhält man aus der für $t \in [0,T]$ gleichmäßigen Konvergenz für $\varepsilon \downarrow 0$ für fast alle $\omega \in \Omega$ die Konvergenz

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k) \mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\leq t} \mathbf{1}_{\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\geq\varepsilon} - E(t) \cdot \mathbb{E}(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k) \mathbf{1}_{[\varepsilon,\tau]}(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))) \right) \right)_{0\leq t\leq T}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k) \mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\leq t} - E(t) \cdot \mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k)) \right) \right)_{0\leq t\leq T}$$

für $n \to \infty$ in $D[0,T]$. Wie im Beweis von Satz 3.2 bleibt noch

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\Bigg(\sup_{0\leq t\leq T} \Bigg| & B_n^{-1} \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} \left(X_k^+ \mathbf{1}_{X_k^+\geq \varepsilon B_n} - \mathbb{E}(X_k^+ \mathbf{1}_{[\varepsilon B_n, \tau B_n]}(X_k^+) \right) \\ & - B_n^{-1} \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} \left(X_k^+ - \mathbb{E}(X_k^+ \mathbf{1}_{[0,\tau B_n]}(X_k^+)) \right) \Bigg| \geq \delta \Bigg) = 0 \end{aligned}$$

für alle $\delta > 0$ zu zeigen.

Sei $\mathcal{F}_n := \sigma((J_1,X_1),\ldots,(J_n,X_n))$ die natürliche Filtration der Vektoren $(J_i,X_i)_{1\leq i\leq n}$. Nun erhält man aus der Mengengleichheit (3.7) bei Meerschaert und Scheffler [41]

$$\{N_t + 1 \geq k\} = \{t \geq T_{k-1}\} \in \mathcal{F}_{k-1},$$

was bedeutet, dass $N_t + 1$ für alle $t \in [0,T]$ eine Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Nun erhält man aus der verallgemeinerten Maximumsungleichung, vgl. Lemma 6.9 und Bemerkung

6.10, die Abschätzung

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\Bigg(\sup_{0\le t\le T}\Bigg|B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}\left(X_k^+\mathbf{1}_{X_k^+\ge\varepsilon B_n}-\mathbb{E}\left(X_k^+\mathbf{1}_{[\varepsilon B_n,\tau B_n]}(X_k^+)\right)\right)$$

$$-B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}\left(X_k^+-\mathbb{E}_{\tau B_n}\left(X_k^+\right)\right)\Bigg|\ge\delta\Bigg)$$

$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\max_{1\le j\le N_{Tb_n}}\left|B_n^{-1}\sum_{k=1}^{j}\left(X_k^+\mathbf{1}_{X_k^+<\varepsilon B_n}-\mathbb{E}\left(X_k^+\mathbf{1}_{X_k^+<\varepsilon B_n}\right)\right)\right|\ge\delta\right)$$

$$\le\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\max_{1\le j\le N_{Tb_n}+1}\left|B_n^{-1}\sum_{k=1}^{j}\left(X_k^+\mathbf{1}_{X_k^+<\varepsilon B_n}-\mathbb{E}\left(X_k^+\mathbf{1}_{X_k^+<\varepsilon B_n}\right)\right)\right|\ge\delta\right)$$

$$\le\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\delta^{-2}\,\mathbb{E}\left(N_{Tb_n}+1\right)\cdot Var\left(B_n^{-1}X_1^+\mathbf{1}_{B_n^{-1}X_1^+<\varepsilon}\right)$$

$$\le\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}(\delta B_n)^{-2}\,\mathbb{E}\left(N_{Tb_n}\right)\cdot\mathbb{E}\left((X_1^+)^2\mathbf{1}_{B_n^{-1}X_1^+<\varepsilon}\right).$$

Nun wurde in (3.33) bereits die Konvergenz

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}(\delta B_n)^{-2}\,\mathbb{E}\left(N_{Tb_n}\right)\cdot\mathbb{E}\left((X_1^+)^2\mathbf{1}_{B_n^{-1}X_1^+<\varepsilon}\right)=0$$

nachgewiesen, wodurch man die Behauptung erhält. Vollzieht man den Beweis noch einmal nach, so erhält man mit den gleichen Argumenten die Konvergenz

$$\left(B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}+1}\left(X_k-\mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k)\right)\right)_{0\le t\le T}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}}\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k-)\le t}-E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\right)$$

$$-\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\tau_k-)\le t}-E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_1(\,\Gamma_k))\right)\Bigg)_{0\le t\le T}$$

für $n\to\infty$ in $D[0,T]$. ■

4.1.3 Reihendarstellung der Grenzprozesse

Nachdem man nun die Skalierungslimiten der rückwärts- und vorwärtsgekoppelten *CTRWs* durch eine Reihendarstellung gegeben hat, soll eine Verbindung mit den Ergebnissen von Henry und Straka [25] und Jurlewicz et al. [30] hergestellt werden. Dazu wird erneut die Ferguson-Klaas Darstellung des Prozesses $A(\cdot)$ in $D[0,T]$ für $T \in \mathcal{S}$ benutzt, vgl. (2.16) und (2.17).

Korollar 4.4
Für $T \in \mathcal{S}$ sei $(A(E(t)-)^+)_{0\le t\le T}$ die rechtsstetige Variante des Prozesses $(A(E(t)-))_{0\le t\le T}$, welcher Pfade in $G[0,T]$ besitzt. Dann gilt für die Skalierungslimiten aus Satz 4.3 die Verteilungsgleichheit

$$\begin{aligned}&\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\le t}-E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\Big)\\&-\sum_{k\in\mathbb{N}}\big(\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\tau_k)\le t}-E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_1(\Gamma_k))\big)\Bigg)_{0\le t\le T}\\&\overset{\mathcal{D}}{=}\big(A(E(t)-)^+\big)_{0\le t\le T}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k-)\le t}-E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\Big)\\&-\sum_{k\in\mathbb{N}}\big(\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\tau_k-)\le t}-E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_1(\Gamma_k))\big)\Bigg)_{0\le t\le T}\\&\overset{\mathcal{D}}{=}(A(E(t)))_{0\le t\le T}\end{aligned}$$

in $D[0,T]$. Insbesondere existieren die Skalierungslimiten von

$$\left(B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}(X_k-\mathbb{E}_\tau(X_k))\right)_{t\ge 0}\quad \textit{bzw.}\quad \left(B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}+1}(X_k-\mathbb{E}_\tau(X_k))\right)_{t\ge 0}$$

für $n\to\infty$ in $D[0,\infty)$ und stimmen in Verteilung mit

$$(A(E(t)-)^+)_{t\ge 0}\ \textit{bzw.}\ (A(E(t)))_{t\ge 0}$$

überein.

Beweis. Sei $T \in \mathcal{S}$ beliebig, aber fest. Zunächst bemerkt man die Gleichheit der Mengen

$$\{D(x-) \leq t\} = \{x \leq E(t)\}. \tag{4.23}$$

Ist nämlich $D(x-) \leq t$, so gilt $D(y) \leq t$ für alle $y < x$. Daraus folgt $x \leq E(t)$. Ist andererseits $D(x-) > t$, so existiert aufgrund der Linksstetigkeit von $D(x-)$ ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $y \geq x - \varepsilon$ die Aussage $D(y) > t$ gilt. Es folgt $E(t) \leq x - \varepsilon < x$.
Damit erhält man durch Vergleich mit (2.16) und (2.17) die Verteilungsgleichheit

$$\begin{aligned}
&\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k-)\leq t} - E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\Big) \\
&- \sum_{k\in\mathbb{N}} \big(\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\tau_k-)\leq t} - E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_1(\Gamma_k))\big) \Bigg)_{0\leq t\leq T} \\
&= \Bigg(\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{T\cdot\widetilde{\tau}_k\leq E(t)} - E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\Big) \\
&- \sum_{k\in\mathbb{N}} \big(\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{T\cdot\tau_k\leq E(t)} - E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_1(\Gamma_k))\big) \Bigg)_{0\leq t\leq T} \\
&\stackrel{\mathcal{D}}{=} (A(E(t)))_{0\leq t\leq T}
\end{aligned}$$

in $D[0,T]$. Weiter gilt mit

$$\{D(x) < t\} = \{x < E(t)\},$$

vgl. Meerschaert und Scheffler [41, (3.2)], die Verteilungsgleichheit

$$\begin{aligned}
&\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\leq t} - E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\Big) \\
&- \sum_{k\in\mathbb{N}} \big(\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\tau_k)\leq t} - E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_1(\Gamma_k))\big) \Bigg)_{0\leq t\leq T} \\
&= \Bigg(\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{T\cdot\widetilde{\tau}_k< E(t)} + \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)=t} - E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\Big) \\
&- \sum_{k\in\mathbb{N}} \big(\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{T\cdot\tau_k< E(t)} + \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{D(T\cdot\tau_k)=t} - E(t)\cdot\mathbb{E}_\tau(\Psi_1(\Gamma_k))\big) \Bigg)_{0\leq t\leq T} \qquad (4.24) \\
&\stackrel{\mathcal{D}}{=} \big(A(E(t)-)^+\big)_{0\leq t\leq T} \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

in $D[0,T]$. Um die in (4.25) behauptete Gleichheit in Verteilung einzusehen, ist zu beachten, dass die Darstellung (4.24) zu jedem Zeitpunkt $t \notin \{D(T \cdot \tau_k), D(T \cdot \widetilde{\tau}_k),\ k \in \mathbb{N}\}$ mit der Ferguson-Klass Darstellung von $(A(E(t)-))_{0 \le t \le T}$ übereinstimmt. Die Unterschiede zu diesen Zeitpunkten begründen die Rechtsstetigkeit des Prozesses (4.24), welcher Verteilungslimes von $D[0,T]$-wertigen Zufallsvariablen ist.
Nun ist die Menge $\mathcal{S}$ dicht in $\mathbb{R}^+$, vgl. Bemerkung 6.3, und enthält dadurch eine Folge von Punkten $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ mit $T_n \uparrow \infty$ für $n \to \infty$. Man erhält somit aus Lemma 14.5 bei Billingsley [7] und Satz 1 bei Lindvall [37], dass die Skalierungslimiten der Prozesse

$$\left(B_n^{-1} \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} (X_k - \mathbb{E}_\tau(X_k)) \right)_{t \ge 0} \quad \text{bzw.} \quad \left(B_n^{-1} \sum_{k=1}^{N_{tb_n}+1} (X_k - \mathbb{E}_\tau(X_k)) \right)_{t \ge 0}$$

in $D[0,\infty)$ auch im gekoppelten Fall existieren und in Verteilung mit

$$(A(E(t)-)^+)_{t \ge 0} \text{ bzw. } (A(E(t)))_{t \ge 0}$$

übereinstimmen. ∎

Bemerkung 4.5
Statt der in (4.1) geforderten Konvergenz in $D([0,\infty), \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ kann auch die schwächere Voraussetzung der Konvergenz in $D([0,\infty), \mathbb{R}^+) \times D([0,\infty), \mathbb{R})$ gemacht werden, vgl. Whitt [57, S. 83], da die im Beweis von Lemma 4.1 verwendete, stetige Projektion $\pi_t : D([0,\infty), \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto x(t)$ auch stetig von $D([0,\infty), \mathbb{R}^+) \times D([0,\infty), \mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ist und dies die einzige Stelle in den Beweisen von Lemma 4.1 und Satz 4.3 ist, an denen die stärkere Voraussetzung eingeht. Die Stetigkeit der Projektion vom Produktraum $D([0,\infty), \mathbb{R}^+) \times D([0,\infty), \mathbb{R}^d)$ nach $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ folgt, da die Projektionen $\pi_t^{(1)} : D([0,\infty), \mathbb{R}^+) \to \mathbb{R}^+$ und $\pi_t^{(2)} : D([0,\infty), \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^d$ selbst stetig sind, so dass auch die Abbildung $(\pi_t^{(1)}, \pi_t^{(2)})$ stetig ist.

4.2 Gekoppelte *CTRWs* basierend auf i.i.d. Zufallsvektoren

Nachdem am eindimensionalen Fall der Unterschied zwischen rückwärts- und vorwärtsgekoppelten *CTRWs* studiert wurde, sollen diese Ergebnisse nun für den multivariaten Fall verallgemeinert werden. Das Resultat aus Lemma 4.1 lässt sich jedoch nicht ohne Weiteres auf höhere Dimensionen übertragen, da die Verwendung von Orderstatistiken reellwertige Zufallsvariablen voraussetzt. Um dieses Problem zu umgehen, soll erneut die radiale Zerlegung des Maßes η verwendet werden, welche es erlaubt die Punkte eines Punktprozesses ihrer Norm nach zu sortieren. Weitere Schwierigkeiten treten dadurch auf, dass die Sprünge in verschiedene Richtungen auftreten. So werden die asymptotischen Sprunghöhen i.A. von unterschiedlichen Lévymaßen skaliert, was dazu führt, dass die Punkte im Limespunktprozess (3.42) für festes $\omega \in \Omega$ nicht mehr der Größe des Betrags ihrer Markierung nach absteigend angeordnet sind.

4.2.1 Residuale Orderstatistiken

Um die im eindimensionalen Fall verwendete Beweismethodik beibehalten zu können, ist es zunächst nötig, das Verhalten der nach der Größe ihrer Norm nach sortierten Sprünge näher zu untersuchen. Man definiert also für $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ die residualen Orderstatistiken durch

$$\|x_{1:n}\| \leq \ldots \leq \|x_{n:n}\|$$

mit der üblichen Konvention $x_{i:n} = 0$, falls $i \leq 0$ oder $i > n$ gilt. Die Namensgebung residuale Orderstatistiken geht dabei auf eine Arbeit von LePage [35] zurück, in welcher vermutet wurde, dass die Verteilungskonvergenz

$$\left(A_n \mathbf{X}_{\lfloor nT \rfloor - k+1:\lfloor nT \rfloor}\right)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k\right)_{k\in\mathbb{N}} \tag{4.26}$$

für $n \to \infty$ in $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ unter den Voraussetzungen aus Kapitel 3 gilt. In einer im selben Jahr erschienenen Arbeit von LePage, Woodroofe und Zinn [36] wurde diese Behauptung im Speziellfall nachgewiesen, dass der Limesprozess $\mathbf{A}(\cdot)$ einen multivariaten stabilen Lévyprozess bildet. Einige Jahre später bewiesen Hahn, Hudson und Veeh [24] eine ähnliche Behauptung im t^E-operatorstabilen Fall, indem sie eine spezielle Norm $\|\cdot\|_H$ für die Sortierung verwendeten, welche die spezielle Struktur des Exponenten E berücksichtigte. In einer Arbeit von Scheffler [51] wurde die umgekehrte Fragestellung, ob aus der Konvergenz (4.26) bereits die Konvergenz der geeignet normierten und zentrierten Partialsummen gegen eine operatorsemistabile Zufallsvariable folgt, positiv beantwortet. Jedoch konnte auch in dieser Arbeit die umgekehrte Richtung dieser Aussage nur im Spezialfall beantwortet werden, dass die Funktion $\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(x, v)$, welche in (3.40) definiert wurde, unabhängig von $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ ist, da in diesem Fall die Winkel- und Längenkomponenten der residualen Orderstatistiken asymptotisch unabhängig sind. Diese Vorraussetzung ist jedoch auch nur im multivariaten, stabilen Fall erfüllt. In dieser Arbeit wird anschliessend vermutet, dass die Aussage (4.26) i.A. keine Gültigkeit besitzt.

In dem nun folgenden Abschnitt soll die Konvergenz von residualen Orderstatistiken mittels Punktprozessen untersucht werden, um die so erhaltenen Ergebnisse auf mehrdimen-

sionale, gekoppelte *CTRWs* anzuwenden. Dazu müssen die Voraussetzungen aus dem vorhergegangenen Abschnitt für den mehrdimensionalen Fall erweitert werden.
Man betrachtet also eine Folge von i.i.d. Zufallsvektoren $(J_n, \mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche Werte auf dem Raum $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ für ein festes $d \in \mathbb{N}$ annehmen. Dabei beschreiben die Zufallsvariablen J_n erneut die Zwischenwartezeiten zwischen den Sprüngen $T_n = \sum_{k=1}^n J_k$, an denen ein Sprung mit Höhe $\mathbf{X}_n$ stattfindet. Auch im multivariaten Fall wird keine Annahme über die Abhängigkeitsstruktur der Zufallsvariablen J_n und $\mathbf{X}_n$ für festes $n \in \mathbb{N}$ gemacht. Wie in (4.1) definiert man erneut die zentrierten und normierten sequentiellen Partialsummen

$$(b_n^{-1}T_{\lfloor nt\rfloor}, A_n\mathbf{S}_{\lfloor nt\rfloor} - n\mathbb{E}_\tau(A_n\mathbf{X}_1)) := \sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor}[(b_n^{-1}J_k, A_n\mathbf{X}_k) - (0, \mathbb{E}_\tau(A_n\mathbf{X}_k))] \tag{4.27}$$

für eine Folge linearer Operatoren $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset GL(\mathbb{R}^d)$ und die bereits definierte Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man setzt erneut voraus, dass der Prozess in (4.27) in Verteilung gegen einen Lévyprozess $(D(t), \mathbf{A}(t))_{t\geq 0}$ in $D([0,\infty), \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$, ausgestattet mit der Skorokhod-J_1-Topologie, konvergiert. Der Prozess $D(\cdot)$ sei, wie in Kapitel 3, α-stabil mit $0 < \alpha < 1$. Der multivariate Prozess $\mathbf{A}(\cdot)$ hingegen bildet einen vollen, operatorstabilen Lévyprozess mit Exponent E ohne Normalverteilungsanteil. Man beachte, dass aus Satz 2.37 folgt, dass die Eigenwerte des Exponenten E einen Realteil größer $\frac{1}{2}$ besitzen. Analog zu Kapitel 3 soll das Lévymaß von $\mathbf{A}(1)$ mit η bezeichnet werden. Wie in (3.40) sei

$$\eta(A) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \mathbf{1}_A(xv)\ \widetilde{\eta}(dx, v)\ d\sigma(v),\ \ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \backslash \{0\}),$$

die radiale Zerlegung von η und

$$\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(u, v) := \sup\{x > 0 : \widetilde{\eta}([x, \infty), v) \geq u\}$$

die Inverse der Projektion von η in Richtung v. Diese Voraussetzungen sollen das ganze Kapitel über gelten und werden als Voraussetzungen dieses Kapitels bezeichnet.
Ein zentrales Hilfsmittel bei der Untersuchung residualer Orderstatistiken wird das folgende Lemma sein.

Lemma 4.6
Sei $N_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_{\mathbf{X}_k^{(n)}},\ n \in \mathbb{N}_0$ *eine Folge von Punktprozessen auf* $M_p([-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d)$ *mit* $N_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N_0$. *Falls für fast alle* $\omega \in \Omega$ *die Bedingungen*

$$\varepsilon < \|\mathbf{X}_i^{(0)}(\omega)\| < \infty \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \text{ und } \|\mathbf{X}_1^{(0)}(\omega)\| > \|\mathbf{X}_2^{(0)}(\omega)\| > \ldots$$

gelten, so folgt die Verteilungskonvergenz

$$(\mathbf{X}_{n-k+1:n})_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\mathbf{X}_k^{(0)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

für $n \to \infty$ *in* $\left(\mathbb{R}^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d\right)^{\mathbb{N}}$.

Beweis. Der Beweis basiert auf einem Continuous Mapping Argument, welches wiederum auf Lemma 7.1 bei Resnick [47] aufbaut. Sei

$$M := \left\{ m \in M_p([-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d) : m = \sum_{k=1}^{P} \varepsilon_{x_k},\ \infty > \|x_1\| > \ldots > \|x_P\| > \varepsilon, \right\}$$

die Menge aller Punktmaße auf $[-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d$, deren Punkte der Norm nach absteigend sortiert sind. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ betrachtet man die Abbildung

$$\pi_k : M_p([-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d) \to [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d$$

$$\pi_k\left(\sum_{i=1}^{P} \varepsilon_{x_i}\right) \mapsto x_{P-k+1:P},\ x_{P-k+1:P} = 0 \text{ für } k \leq 0 \text{ und } k > P.$$

Nun wird gezeigt, dass die Abbildung π_k in allen Punkten $m \in M$ stetig ist. Sei also $(m_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M_p([-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d)$ eine Folge von Punktmaßen, welche vage gegen ein Punktmaß $m_0 = \sum_{k=1}^{P} \varepsilon_{x_k^{(0)}} \in M_p([-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d)$ konvergent ist. Nun wähle man n hinreichend groß, so dass m_n nur P Punkte im Inneren von $[-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d$ besitzt. Im nächsten Schritt sortiert man die Punkte der Größe ihrer Norm nach absteigend, d.h. man stellt m_n wie folgt dar:

$$m_n = \sum_{i=1}^{P} \varepsilon_{x_i^{(n)}},\ \infty > \|x_1^{(n)}\| \geq \ldots \geq \|x_P^{(n)}\| > \varepsilon.$$

Nun folgt aus Lemma 7.1 bei Resnick [47] die Konvergenz der Punkte

$$\left(x_1^{(n)},\ldots,x_P^{(n)}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \left(x_1^{(0)},\ldots,x_P^{(0)}\right) \tag{4.28}$$

in $(\mathbb{R}^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d)^P$. Beachtet man die Definition der Abbildung π_k, so gilt

$$\pi_k(m_n) = x_i^{(n)},\ \pi_k(m_0) = x_k^{(0)} \text{ für } 1 \leq k \leq P \text{ und } \pi_k(m_n) = \pi_k(m_0) = 0 \text{ für } k > P.$$

Die Stetigkeit von π_k folgt somit aus (4.28). Damit lässt sich nun das Continuous Mapping Theorem auf den Punktprozess N_n anwenden. Dazu beachte man, dass $N_0 \in M$ f.s. gilt.

Wählt man $n > k$, so folgt aus dem Continuous Mapping Theorem die Verteilungskonvergenz

$$\pi_k(N_n) = \mathbf{X}_{n-k+1:n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \pi_k(N_0) = \mathbf{X}_k^{(0)}$$

für $n \to \infty$ in $(\mathbb{R}^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d)^{\mathbb{N}}$. Damit erhält man für jedes feste $r \in \mathbb{N}$ die Konvergenz der endlichdimensionalen Randverteilungen

$$(\pi_1(N_n), \dots, \pi_r(N_n)) = (\mathbf{X}_{n:n}, \dots, \mathbf{X}_{n-r+1:n}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\pi_1(N_0), \dots, \pi_r(N_0)) = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_r)\,,$$

aus welcher bereits die behauptete Konvergenz auf dem Produktraum folgt. ■

Mit diesem Lemma lässt sich nun die Konvergenz der residualen Orderstatistiken untersuchen.

Satz 4.7
Seien $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathbf{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in Kapitel 3. Für $k \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega$ sei weiter

$$\widehat{d}_k(\omega) = \arg \left(\max_{\substack{i\in\mathbb{N} \\ i\neq \widehat{d}_1(\omega),\dots,\widehat{d}_{k-1}(\omega)}} \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_i(\omega), \mathbf{V}_i(\omega)) \right) \tag{4.29}$$

das Argument des k-ten größten Elementes der Menge $\{\eta^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_i(\omega), \mathbf{V}_i(\omega)), i \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt unter den Voraussetzungen dieses Kapitels die Verteilungskonvergenz der residualen Orderstatistiken

$$\left(A_n \mathbf{X}_{\lfloor nT\rfloor-k+1:\lfloor nT\rfloor}\right)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_{\widehat{d}_k}, \mathbf{V}_{\widehat{d}_k})\mathbf{V}_{\widehat{d}_k}\right) \tag{4.30}$$

für $n \to \infty$ in $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$.

Bemerkung 4.8
Zunächst ist zu beachten, dass die in (4.29) definierte Zufallsvariable für fast alle $\omega \in \Omega$ definiert ist, da die Menge $\{i \in \mathbb{N} : \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_i(\omega), \mathbf{V}_i(\omega)) > \varepsilon\}$ für alle $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Elemente enthält.
Weiter gilt, dass obwohl der in (4.30) behauptete Verteilungslimes für $T = 1$ nicht mit dem in (4.26) vermuteten übereinstimmt, dies nicht im Widerspruch zu den bereits untersuchten Spezialfällen steht. Ist der Prozess $\mathbf{A}(\cdot)$ nämlich multivariat α-stabil verteilt, so stimmt das Lévymaß in jede Richtung mit dem Lévymaß einer eindimensional α-stabil verteilten Zufallsvariablen überein. In diesem Fall folgt aufgrund der Monotonieeigenschaften der Funktion $x \mapsto \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(x, v)$, dass $\widehat{d}_k(\omega) = k$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt. I.A. braucht dies jedoch nicht der Fall zu sein.

Beweis. Wie bereits erwähnt, soll der Beweis mittels der Konvergenz von Punktprozessen geführt werden. Als erster Schritt soll zunächst der eingeschränkte Markenprozess

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{(A_n \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\|A_n \mathbf{X}_k\| \geq \varepsilon})}$$

untersucht werden, um die Limiten der betragsmässig größten, normierten Sprünge zu bestimmen. Aus Satz 2.28 (i) und der Voraussetzung

$$\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} (A_n \mathbf{X}_k - \mathbb{E}_\tau(A_n \mathbf{X}_k)) \right)_{t \geq 0} \xrightarrow{\mathcal{D}} (A(t))_{t \geq 0}$$

für $n \to \infty$ in $D[0, \infty)$ folgt aus Satz 2.28 für alle $T > 0$ die vage Konvergenz der normierten Verteilung

$$\lfloor nT \rfloor \mathbb{P}\left(A_n \mathbf{X}_k \in \cdot\right) \xrightarrow{v} T \cdot \eta(\cdot)$$

für $n \to \infty$ in $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$. Diese ist nach Satz 2.19 äquivalent zur Konvergenz der Punktprozesse

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{A_n \mathbf{X}_k} \xrightarrow{\mathcal{D}} PRM(T \cdot \eta) \tag{4.31}$$

für $n \to \infty$ in $M_p([-\infty, \infty]^d \backslash \{0\})$. Um aus der Konvergenz der Punktprozesse die Konvergenz der entsprechenden Punkte zu folgern, wird eine Darstellung von $PRM(T \cdot \eta)$ als Punktprozess benötigt. Zunächst ist bekannt, dass $\sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_{\Gamma_k}$ eine Darstellung von $PRM(\lambda\!\!\lambda)$ auf $\mathbb{R}^+$ ist, vgl. Resnick [47, Proposition 5.1]. Aus Proposition 5.2 bei Resnick [47] erhält man, dass $\sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_{T^{-1}\Gamma_k}$ eine Darstellung von $PRM(T \cdot \lambda\!\!\lambda)$ auf $\mathbb{R}^+$ ist. Da $(\mathbf{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge mit Verteilung σ bildet, folgt aus Proposition 5.3 von Resnick [47]

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_{(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k)} = PRM(T \cdot \lambda\!\!\lambda \otimes \sigma).$$

Definiert man nun die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{R}^d,\ (x, y) \mapsto \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(x, y) y$$

und beachtet

$$(T \cdot \lambda\!\!\lambda \otimes \sigma) \circ f^{-1} = T \cdot \eta \text{ auf } \mathcal{B}([-\infty, \infty]^d \backslash \{0\}),$$

so folgt erneut aus Proposition 5.2 von Resnick [47]

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{f(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k} = PRM(T\cdot\eta). \tag{4.32}$$

Zusammen mit (4.31) erhält man also

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{A_n\mathbf{X}_k} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k}$$

in $M_p([-\infty,\infty]^d\backslash\{0\})$. Ähnlich wie in (3.22) definiert man nun für einen Stetigkeitspunkt ε, d.h. η ist stetig auf $\mathbb{S}_\varepsilon^{d-1}$, die Einschränkungsabbildung

$$\pi' : M_p([-\infty,\infty]^d\backslash\{0\}) \to M_p([-\infty,\infty]^d\backslash\mathbb{K}_\varepsilon^d),\ m\mapsto m_{|(\mathbb{K}_\varepsilon^d)^C},$$

welche nach Proposition 3.3 von Feigin, Kratz und Resnick [14] stetig ist. Aus dem Continuous Mapping Theorem und Lemma 2.8 folgt somit

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|\geq\varepsilon}} &\overset{\mathcal{D}}{=} \sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|\geq\varepsilon}\ \varepsilon_{A_n\mathbf{X}_k}\\ &\xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\geq\varepsilon}\ \varepsilon_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k} \overset{\mathcal{D}}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k\mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\geq\varepsilon}}\end{aligned} \tag{4.33}$$

für $n\to\infty$ in $M_p([-\infty,\infty]^d\backslash\mathbb{K}_\varepsilon^d)$. Um nun Lemma 4.6 anwenden zu können, sortiert man die Punkte in (4.33) der Größe ihrer Norm nach absteigend

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k\mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\geq\varepsilon}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_{\widehat{d}_k},\mathbf{V}_{\widehat{d}_k})\mathbf{V}_{\widehat{d}_k}\mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}\left(T^{-1}\Gamma_{\widehat{d}_k},\mathbf{V}_{\widehat{d}_k}\right)\geq\varepsilon}}.$$

Damit folgt aus der Konvergenz der Punktprozesse

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|\geq\varepsilon}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_{\widehat{d}_k},\mathbf{V}_{\widehat{d}_k})\mathbf{V}_{\widehat{d}_k}\mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_{\widehat{d}_k},\mathbf{V}_{\widehat{d}_k})\geq\varepsilon}}$$

und Lemma 4.6 die Konvergenz der Punkte

$$\begin{aligned}&\left(A_n\mathbf{X}_{\lfloor nT\rfloor-k+1:\lfloor nT\rfloor}\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_{\lfloor nT\rfloor-k+1:\lfloor nT\rfloor}\|\geq\varepsilon}\right)_{k\in\mathbb{N}}\\ &\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_{\widehat{d}_k},\mathbf{V}_{\widehat{d}_k})\mathbf{V}_{\widehat{d}_k}\mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_{\widehat{d}_k},\mathbf{V}_{\widehat{d}_k})\geq\varepsilon}\right)_{k\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

in $(\mathbb{R}^d\backslash\mathbb{K}_\varepsilon^d)^{\mathbb{N}}$. Führt man nun den Grenzübergang $\varepsilon\downarrow 0$ aus, so folgt

$$\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_{\widehat{d}_k},\mathbf{V}_{\widehat{d}_k})\mathbf{V}_{\widehat{d}_k}\mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_{\widehat{d}_k},\mathbf{V}_{\widehat{d}_k})\geq\varepsilon} \xrightarrow{f.s.} \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_{\widehat{d}_k},\mathbf{V}_{\widehat{d}_k})\mathbf{V}_{\widehat{d}_k}.$$

Eine einfache Anwendung von Theorem 4.2 bei Billingsley [7] liefert die Behauptung

$$(A_n\mathbf{X}_{\lfloor nT\rfloor-k+1:\lfloor nT\rfloor})_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_{\widehat{d}_k},\mathbf{V}_{\widehat{d}_k})\mathbf{V}_{\widehat{d}_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

für $n\to\infty$ in $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$. ■

4.2.2 Konvergenz der zugehörigen Punktprozesse

Nachdem man die Verteilungslimiten der residualen Orderstatistiken bestimmt hat, kann nun die Konvergenz der markierten Punktprozesse

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{(b_n^{-1}T_k, A_n\mathbf{X}_k)}, \quad \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{(b_n^{-1}T_{k-1}, A_n\mathbf{X}_k)} \tag{4.34}$$

mit den gleichen Mitteln wie im eindimensionalen Fall untersucht werden.

Lemma 4.9

Sei $(\widetilde{\tau}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathcal{U}(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen. Dann gilt unter den Voraussetzungen dieses Kapitels mit der Notation aus Lemma 3.6 und Satz 4.7 für alle Zeitpunkte $T > 0$ die Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{(b_n^{-1}T_k, A_n\mathbf{X}_k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\widetilde{\tau}_k), \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k)} \tag{4.35}$$

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{(b_n^{-1}T_{k-1}, A_n\mathbf{X}_k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\widetilde{\tau}_k-), \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k)} \tag{4.36}$$

für $n \to \infty$ in $M_p([0,\infty) \times [-\infty,\infty]^d \backslash \{0\})$, wobei $D(x-)$ erneut den linksseitigen Grenzwert der Funktion $D(\cdot)$ an der Stelle x bezeichnet.

Beweis. Da nun der Verteilungslimes von $\left(A_n\mathbf{X}_{\lfloor nT \rfloor - i+1:\lfloor nT \rfloor}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ bestimmt wurde, lässt sich der restliche Beweis mit der gleichen Methodik wie im Beweis von Satz 4.1 durchführen. Man betrachtet den Punktprozess in (4.34) nach einer geeigneten Umsummation

$$\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_k, A_n\mathbf{X}_k\right)}\right) = \left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_{d_{\lfloor nT \rfloor - k+1}}, A_n\mathbf{X}_{\lfloor nT \rfloor - k+1:\lfloor nT \rfloor}\right)}\right),$$

wobei $\left(d_1, \dots, d_{\lfloor nT \rfloor}\right)$ hier den Antirangvektor von $\left(\|\mathbf{X}_1\|, \dots \|\mathbf{X}_{\lfloor nT \rfloor}\|\right)$ bezeichnet. Da die i.i.d. Zufallsvektoren $(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{\lfloor nT \rfloor})$ der Größe ihrer Norm nach angeordnet werden und $(\|\mathbf{X}_1\|, \dots, \|\mathbf{X}_{\lfloor nT \rfloor}\|)$ auch i.i.d. sind, ist der Vektor $\left(d_1, \dots, d_{\lfloor nT \rfloor}\right)$ gleichverteilt auf der Menge $\mathfrak{S}_{\lfloor nT \rfloor}$. Mit den gleichen Argumenten, die zu der Konvergenz (4.16) führten, folgt aus den Voraussetzungen dieses Kapitels und Satz 4.7 die Verteilungskonvergenz

$$\left(b_n^{-1}T_{d_{\lfloor nT \rfloor - i+1}}, A_n\mathbf{X}_{\lfloor nT \rfloor - i+1:\lfloor nt \rfloor}\right)_{i\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(D(T\cdot\tau_i), \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_{\widehat{d}_i}, \mathbf{V}_{\widehat{d}_i})\mathbf{V}_{\widehat{d}_i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$$

für $n \to \infty$ in $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$. Aus der Konvergenz der Punkte lässt sich nun mit Hilfe von Lemma 6.5 die Verteilungskonvergenz der Punktmaße

$$\left(\varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_{d_{\lfloor nT \rfloor - i+1}}, A_n\mathbf{X}_{\lfloor nT \rfloor - i+1:\lfloor nT \rfloor}\right)}\right)_{i\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\varepsilon_{\left(D(T\cdot\tau_i), \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_{\widehat{d}_i}, \mathbf{V}_{\widehat{d}_i})\mathbf{V}_{\widehat{d}_i}\right)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$$

für $n \to \infty$ in $(M_p([0,\infty) \times [-\infty,\infty]^d \backslash \{0\}))^{\mathbb{N}}$ herleiten. Mit einem ähnlichen Argument wie in (4.19) folgt aus Theorem 4.2 von Billingsley [7]

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_k, A_n \mathbf{X}_k\right)} &= \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_{d_{\lfloor nT \rfloor - k+1}}, A_n \mathbf{X}_{\lfloor nT \rfloor - k+1:\lfloor nT \rfloor}\right)} \\ &\xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_{\left(D(T\cdot \tau_k), \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_{\widehat{d}_k}, \mathbf{V}_{\widehat{d}_k})\mathbf{V}_{\widehat{d}_k}\right)} \end{aligned} \tag{4.37}$$

für $n \to \infty$ in $M_p([0,\infty) \times [-\infty,\infty]^d \backslash \{0\})$. Im nächsten Schritt soll die Reihenfolge der Summanden in (4.37) geändert werden. Man definiert

$$r_i(\omega) := 1 + \#\left\{ j \in \mathbb{N} : \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_j(\omega), \mathbf{V}_j(\omega)) > \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_i(\omega), \mathbf{V}_i(\omega)) \right\}$$

als Inverse von $\widehat{d}_i$. Die Zufallsvariable r_i ist für alle $i \in \mathbb{N}$ wohldefiniert, da die definierende Menge f.s. endlich ist, vgl. Bemerkung 4.8. Weiter ist zu beachten, dass die Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig von $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Mit der Definition von $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erhält man

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_{\left(D(T\cdot \tau_k), \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_{\widehat{d}_k}, \mathbf{V}_{\widehat{d}_k})\mathbf{V}_{\widehat{d}_k}\right)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_{\left(D(T\cdot \tau_{r_k}), \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k\right)}.$$

Während also τ_i den Zeitpunkt beschreibt, zu welchem der i-te größte Sprung stattfindet, wird τ_{r_i} als Zeitpunkt interpretiert, zu welchem sich ein Sprung mit der Höhe $\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_i, \mathbf{V}_i)\mathbf{V}_i$ ereignet. Aus der i.i.d. Struktur der Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und der Unabhängigkeit $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \perp (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt für alle $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_{r_i} \le t) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\tau_{r_i} \le t | r_i = k) \cdot \mathbb{P}(r_i = k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\tau_k \le t) \cdot \mathbb{P}(r_i = k) \\ &= \mathbb{P}(\tau_i \le t), \end{aligned}$$

d.h. es gilt $\tau_{r_i} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \tau_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Mit dem gleichen Argument zeigt man, dass die Zufallsvariablen $\tau_{r_1}, \ldots, \tau_{r_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ unabhängig sind, d.h. auch $(\tau_{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ bildet eine Folge von i.i.d. $\mathcal{U}(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen. Sei also $\tau_{r_n} := \widetilde{\tau}_n$. Damit ist (4.35) gezeigt.

Für den Nachweis von (4.36) ist lediglich (4.20) zu beachten. Damit erhält man die Konvergenz der Punkte

$$\left(b_n^{-1}T_{d_{\lfloor nT \rfloor - i+1}-1}, A_n \mathbf{X}_{\lfloor nT \rfloor - i+1:\lfloor nT \rfloor}\right)_{i\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(D(T\cdot\tau_i -), \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_{\widehat{d}_i}, \mathbf{V}_{\widehat{d}_i})\mathbf{V}_{\widehat{d}_i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$$

für $n \to \infty$ in $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$. Die gleiche Beweismethodik führt schließlich zur Konvergenz der Punktprozesse

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1} T_{k-1}, A_n \mathbf{X}_k\right)} = \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1} T_{d_{\lfloor nT \rfloor - k+1:\lfloor nT \rfloor}-1}, A_n \mathbf{X}_{\lfloor nT \rfloor - k+1:\lfloor nT \rfloor}\right)}$$
$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_{\left(D(T \cdot \tau_k -), \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_{\widehat{d}_k}, \mathbf{V}_{\widehat{d}_k})\mathbf{V}_{\widehat{d}_k}\right)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T \cdot \widetilde{\tau}_k -), \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k)}$$

für $n \to \infty$ in $M_p([0,\infty) \times [-\infty,\infty]^d \backslash \{0\})$. ■

4.2.3 Konvergenz der mehrdimensionalen, gekoppelten *CTRWs*

Mit Lemma 4.9 hat man nun die Konvergenz der Sprungzeiten an denen ein Sprung stattfindet, welcher zur Limesverteilung beiträgt, vollständig verstanden. Dies erlaubt es die Skalierungslimiten von *CTRWs* in der in dieser Arbeit allgemeinsten Form zu untersuchen. Wie im eindimensionalen Fall ist es auch im mehrdimensionalen Fall nun möglich, zu verstehen worin sich rückwärts- und vorwärtsgekoppelte mehrdimensionale *CTRWs* unterscheiden.

Satz 4.10

Sei $\mathcal{S}$ die in (6.5) definierte Menge der nichtsingulären Punkte des Prozesses $D(\cdot)$. Dann gilt unter den Voraussetzungen dieses Kapitels und mit der Notation aus Satz 3.2 für alle $T \in \mathcal{S}$ die Konvergenz

$$\left(\sum_{k=1}^{N_{tb_n}} (A_n \mathbf{X}_k - \mathbb{E}_\tau(A_n \mathbf{X}_k))\right)_{0 \le t \le T}$$
$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{D(T \cdot \widetilde{\tau}_k) \le t} \left(\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k \mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k) \ge \varepsilon}\right) - E(t) \cdot \int_{\varepsilon \le \|x\| \le \tau} x \, d\eta(x)\right)_{0 \le t \le T}$$

und

$$\left(\sum_{k=1}^{N_{tb_n}+1} (A_n \mathbf{X}_k - \mathbb{E}_\tau(A_n \mathbf{X}_k))\right)_{0 \le t \le T}$$
$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{D(T \cdot \widetilde{\tau}_k -) \le t} \left(\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k \mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k) \ge \varepsilon}\right) - E(t) \cdot \int_{\varepsilon \le \|x\| \le \tau} x \, d\eta(x)\right)_{0 \le t \le T}$$

für $n \to \infty$ in $D[0,T]$.

Beweis. Im ersten Schritt verwendet man die Stetigkeit des Summationsfunktionals χ aus (3.21) für alle $T \in \mathcal{S}$ und der Einschränkungsabbildung π aus (3.22). Zusammen mit Lemma 4.9 erhält man die Konvergenz

$$\chi \circ \pi \left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1} T_k, A_n \mathbf{X}_k\right)} \right)(t) = \left(\sum_{k=1}^{N_{tb_n}} A_n \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\|A_n \mathbf{X}_k\| \geq \varepsilon} \right)_{0 \leq t \leq T}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \chi \circ \pi \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T \cdot \widetilde{\tau}_k), \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k)} \right)(t)$$

$$= \left(\sum_{D(T \cdot \widetilde{\tau}_k) \leq t} \left(\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k) \mathbf{V}_k \mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k) \geq \varepsilon} \right) \right)_{0 \leq t \leq T} \tag{4.38}$$

und

$$\chi \circ \pi \left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1} T_{k-1}, A_n \mathbf{X}_k\right)} \right)(t) = \left(\sum_{k=1}^{N_{tb_n}+1} A_n \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\|A_n \mathbf{X}_k\| \geq \varepsilon} \right)_{0 \leq t \leq T}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \chi \circ \pi \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T \cdot \widetilde{\tau}_k -), \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k)} \right)(t)$$

$$= \left(\sum_{D(T \cdot \widetilde{\tau}_k -) \leq t} \left(\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k) \mathbf{V}_k \mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k) \geq \varepsilon} \right) \right)_{0 \leq t \leq T} \tag{4.39}$$

für $n \to \infty$ in $D[0, T]$. Dabei ist zu beachten, dass die Reihen in (4.38) und (4.39) f.s. nur endlich viele Summanden besitzen, so dass sie f.s. konvergent sind. Im nächsten Schritt untersucht man die abgeschnittenen Erwartungswerte. In (3.24) wurde die Konvergenz des normierten hitting-time Prozesses

$$\left(\frac{N_{tb_n}}{n} \right)_{t \geq 0} \xrightarrow{\mathcal{D}} (E(t))_{t \geq 0}$$

in $D[0, \infty)$ benutzt. Weiter gilt die vage Konvergenz der normierten Wahrscheinlichkeitsmaße

$$n\mathbb{P}(A_n \mathbf{X}_1 \in \cdot) \xrightarrow{v} \eta(\cdot)$$

in $[-\infty, \infty]^d \backslash \{0\}$. Es folgt die Konvergenz der Prozesse

$$\sum_{k=1}^{N_{tb_n}} \mathbb{E}\left(A_n \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{[\varepsilon, \tau]}(\|A_n \mathbf{X}_k\|) \right) = \frac{N_{tb_n}}{n} \cdot \int_{\varepsilon \leq \|x\| \leq \tau} x \; n d\mathbb{P}^{A_n \mathbf{X}_1}(x)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} E(t) \cdot \int_{\varepsilon \leq \|x\| \leq \tau} x \; d\eta(x) = E(t) \cdot \int_{\varepsilon \leq \|x\| \leq \tau} x \; d\eta(x)$$

für $n \to \infty$ in $D[0,\infty)$. Fügt man dies mit (4.38) bzw. (4.39) zusammen, so erhält man mit den gleichen Argumenten wie im eindimensionalen Fall die Konvergenz der Prozesse

$$\left(\sum_{k=1}^{N_{tb_n}} \left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|\geq\varepsilon} - \mathbb{E}\left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\varepsilon\leq\|A_n\mathbf{X}_k\|\leq\tau}\right)\right)\right)_{0\leq t\leq T}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\leq t} \left(\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k\mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\geq\varepsilon}\right) - E(t)\cdot\int_{\varepsilon\leq\|x\|\leq\tau} x\, d\eta(x)\right)_{0\leq t\leq T}$$

und

$$\left(\sum_{k=1}^{N_{tb_n}+1} \left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|\geq\varepsilon} - \mathbb{E}\left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\varepsilon\leq\|A_n\mathbf{X}_k\|\leq\tau}\right)\right)\right)_{0\leq t\leq T}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k-)\leq t} \left(\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k\mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\geq\varepsilon}\right) - E(t)\cdot\int_{\varepsilon\leq\|x\|\leq\tau} x\, d\eta(x)\right)_{0\leq t\leq T}$$

für $n \to \infty$ in $D[0,T]$. Die behaupteten Limiten erhält man mit dem Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$. Nach Theorem 4.2 von Billingsley bleibt

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\Bigg(\sup_{0\leq t\leq T}\Bigg\|\sum_{k=1}^{N_{tb_n}} \left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|\geq\varepsilon} - \mathbb{E}\left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\varepsilon\leq\|A_n\mathbf{X}_k\|\leq\tau}\right)\right)$$
$$- \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} \left(A_n\mathbf{X}_k - \mathbb{E}\left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|\leq\tau}\right)\right)\Bigg\| \geq \delta\Bigg) = 0$$

und

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\Bigg(\sup_{0\leq t\leq T}\Bigg\|\sum_{k=1}^{N_{tb_n}+1} \left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|\geq\varepsilon} - \mathbb{E}\left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\varepsilon\leq\|A_n\mathbf{X}_k\|\leq\tau}\right)\right)$$
$$- \sum_{k=1}^{N_{tb_n}+1} \left(A_n\mathbf{X}_k - \mathbb{E}\left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|\leq\tau}\right)\right)\Bigg\| \geq \delta\Bigg) = 0$$

für alle $\delta > 0$ zu zeigen. Analog zu (3.46) erhält man

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\Bigg(\sup_{0\le t\le T}\Bigg\| \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} \left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|\ge\varepsilon} - \mathbb{E}\left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\varepsilon\le\|A_n\mathbf{X}_k\|\le\tau}\right)\right)$$

$$- \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} \left(A_n\mathbf{X}_k - \mathbb{E}\left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|\le\tau}\right)\right)\Bigg\| > \delta\Bigg)$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\max_{1\le j\le N_{Tb_n}}\left\|\sum_{k=1}^{j}\left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|<\varepsilon} - \mathbb{E}\left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|<\varepsilon}\right)\right)\right\| \ge \delta\right)$$

$$\le \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\max_{1\le j\le N_{Tb_n}+1}\left\|\sum_{k=1}^{j}\left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|<\varepsilon} - \mathbb{E}\left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|<\varepsilon}\right)\right)\right\|_1 \ge \delta\right)$$

$$\le \delta^{-2}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(N_{Tb_n+1}\right)\sum_{i=1}^{d}\mathbb{E}\left(\left((A_n\mathbf{X}_1)^{(i)}\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_1\|<\varepsilon}\right)^2\right)$$

$$\le \delta^{-2}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(N_{Tb_n}\right)\sum_{i=1}^{d}\mathbb{E}\left(\left((A_n\mathbf{X}_1)^{(i)}\mathbf{1}_{|(A_n\mathbf{X}_1)^{(i)}|<\varepsilon}\right)^2\right)$$

und

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\Bigg(\sup_{0\le t\le T}\Bigg\| \sum_{k=1}^{N_{tb_n}+1} \left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|\ge\varepsilon} - \mathbb{E}\left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\varepsilon\le\|A_n\mathbf{X}_k\|\le\tau}\right)\right)$$

$$- \sum_{k=1}^{N_{tb_n}+1} \left(A_n\mathbf{X}_k - \mathbb{E}\left(A_n\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\|A_n\mathbf{X}_k\|\le\tau}\right)\right)\Bigg\| > \delta\Bigg)$$

$$\le \delta^{-2}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(N_{Tb_n}\right)\sum_{i=1}^{d}\mathbb{E}\left(\left((A_n\mathbf{X}_1)^{(i)}\mathbf{1}_{|(A_n\mathbf{X}_1)^{(i)}|<\varepsilon}\right)^2\right).$$

Nun verwendet man die in (3.48) nachgewiesene, notwendige Bedingung für die Kongenz gegen eine operatorstabile Verteilung

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} n\cdot\mathbb{E}\left(((A_n\mathbf{X}_1)^{(i)})^2\mathbf{1}_{|(A_n\mathbf{X}_1)^{(i)}|<\varepsilon}\right) = 0$$

für alle $1 \le i \le d$ und erhält das gewünschte Resultat unter Beachtung des asymptotischen Verhaltens des normierten hitting-time Prozesses in (3.32). ■

4.2.4 Reihendarstellung der Grenzprozesse

In diesem Abschnitt soll, wie im eindimensionalen Fall, eine Brücke zwischen den Resultaten von Henry und Straka [25] und Jurlewicz et al. [30] und Satz 4.10 geschlagen werden.

Das folgende Korollar bildet eine bloße Umformulierung von Korollar 4.4 für den mehrdimensionalen Fall. Der Beweis verläuft analog zu dem von Korollar 4.4 und wird nicht erneut geführt.

Korollar 4.11

Für $T \in \mathcal{S}$ sei $(\mathbf{A}(E(t)-)^+)_{0\le t\le T}$ die rechtsstetige Variante des $G[0,T]$-wertigen Prozesses $(\mathbf{A}(E(t)-))_{0\le t\le T}$. Dann gilt für die Skalierungslimiten aus Satz 4.10

$$\left(\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\sum_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\le t}\left(\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k\cdot\mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\ge\varepsilon}\right)-E(t)\int_{\varepsilon\le\|x\|\le\tau}x\;d\eta(x)\right)\right)_{0\le t\le T}$$

$$\stackrel{\mathcal{D}}{=}(\mathbf{A}(E(t)-)^+)_{0\le t\le T}$$

und

$$\left(\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\sum_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k-)\le t}\left(\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k\cdot\mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\ge\varepsilon}\right)-E(t)\int_{\varepsilon\le\|x\|\le\tau}x\;d\eta(x)\right)\right)_{0\le t\le T}$$

$$\stackrel{\mathcal{D}}{=}(\mathbf{A}(E(t)))_{0\le t\le T}$$

in $D[0,T]$. Insbesondere folgt, dass die Skalierungslimiten der Prozesse

$$\left(\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}(A_n\mathbf{X}_k-\mathbb{E}_\tau(A_n\mathbf{X}_k))\right)_{t\ge0}\quad \textit{bzw.}\quad \left(\sum_{k=1}^{N_{tb_n}+1}(A_n\mathbf{X}_k-\mathbb{E}_\tau(A_n\mathbf{X}_k))\right)_{t\ge0}$$

in $D[0,\infty)$ existieren und in Verteilung mit $(\mathbf{A}(E(t)))_{t\ge0}$ bzw. $(\mathbf{A}(E(t)-)^+)_{t\ge0}$ übereinstimmen.

Bemerkung 4.12

Wie im eindimensionalen Fall kann die in (4.27) geforderte Konvergenz in $D([0,\infty),\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)$ mit den gleichen Argumenten wie in Bemerkung 4.5 durch die Forderung der Konvergenz in $D([0,\infty),\mathbb{R}^+)\times D([0,\infty),\mathbb{R}^d)$ abgeschwächt werden.

Kapitel 5

Extremwertprozesse und gekoppelte CTRWs

Nachdem nun abschließend untersucht wurde, wie sich die Skalierungslimiten von Summenprozessen, welche einem gekoppelten Erneuerungsprozess subordiniert wurden, mittels Punktprozessen bestimmen lassen, soll in diesem Kapitel versucht werden die gleiche Beweismethodik auf Extremwertprozesse anzuwenden, um zusätzlich das asymptotische Verhalten der betragsmäßig größten Sprünge von *CTRWs* zu untersuchen. Diese Fragestellung ist naturgemäß von hohem praktischen Interesse. Falls der *CTRW* einen aktuariellen Gesamtschaden beschreibt, so ist zur Prämienberechnung der höchste zu erwartende Einzelschaden von ebenso großer Bedeutung wie der Gesamtschaden an sich. Zur Modellierung dieses Sachverhaltes ist die klassische Erneuerungstheorie oft ungeeignet, da die Zwischenwartezeiten zwischen zwei Schäden dort entweder als fix oder als exponentialverteilt angenommen werden. Aus diesem Grund wurden diese Modelle dahingehend verallgemeinert, dass man beliebige zufällige Zwischenwartezeiten zuließ, welche einen heavy tail besaßen, vgl. Benson, Schumer und Meerschaert [5]. Im Artikel von Schumer, Baeumer und Meerschaert [52] wird zusätzlich noch dieselbe Abhängigkeitsstruktur, wie sie im Kapitel 4 dieser Arbeit verwendet wird, zwischen den Sprüngen und den Zwischenwartezeiten zugelassen. Dies legt auch die in diesen Artikeln verwendete Bezeichnung Continuous Time Random Maxima (*CTRM*) nahe. Analog wird im weiteren Verlauf auch von Continuous Time Random Minima (*CTRm*) die Rede sein. Von weiterem Interesse ist die von Silvestrov und Teugels [55] untersuchte Fragestellung nach dem gemeinsamen asymptotischen Verhalten von *CTRW*, *CTRM* und *CTRm*.

Bisher wurde in den Kapiteln 3 und 4 versucht, die Marken der Punkte eines markierten Punktprozesses, dessen Lokalisationen gewisse Bedingungen erfüllten, mittels des f.s. stetigen Funktionals χ aufzusummieren. In diesem Kapitel sollen zwei neue Funktionale $\chi^{\max}$ und $\chi^{\min}$ konstruiert werden, welche die betragsmäßig größte bzw. kleinste Marke unter allen Punkten mit gewissen Eigenschaften finden. Da für die Limesverteilung der markierten Punktprozesse in den entsprechenden Abschnitten von Kapitel 3 und 4 gezeigt wurde, dass lediglich die Punkte mit den betragsmäßig größten Marken relevant sind, ist zu erwarten, dass die Punktprozessmethodik auf Extremwertprozesse einfacher angewendet werden kann, als dies für Summenprozesse der Fall war, da keine Summierbarkeitsbedingungen zu beachten sind. Zusätzlich kann durch den Umweg über die Konvergenz von markierten Punktprozessen die gemeinsame Konvergenz von Summen und Extrema nachgewiesen werden, indem man die f.s. stetigen Funktionale χ, $\chi^{\max}$ und $\chi^{\min}$ auf die gleiche, konvergente Folge von Punktprozessen anwendet. Diese Herangehensweise besitzt große Vorteile zu den in der oben zitierten Literatur genutzten Beweistechniken, denn man erhält eine geschlossene Darstellung des gemeinsamen Limes von *CTRW*, *CTRM* und *CTRm*, welche simulierbar ist, während die Lösung im gekoppelten Fall bei Schumer, Baeumer und Meerschaert [52] nur in Form einer Integralgleichung angegeben wird, welche i.A. nur numerisch bestimmt werden kann. Weiter wurde in diesem Artikel auch nur der rückwärtsgekoppelte Fall untersucht. Durch den Punktprozessansatz lässt sich jedoch auch der vorwärtsgekoppelte Fall ohne weiteren großen Aufwand untersuchen, was eine vergleichende Untersuchung der Eigenschaften der Skalierungslimiten von *CTRM* bzw. *CTRm* bei Rückwärts- bzw. Vorwärtskopplung erlaubt, wie es für *CTRWs* bereits im Artikel von Jurlewicz et al. [30] geschehen ist.

5.1 Extremwertprozesse und *CTRWs* im eindimensionalen Fall

In diesem Abschnitt soll das asymptotische Verhalten von *CTRM* und *CTRm*, sowie die gemeinsame Konvergenz von *CTRW* und der zugehörigen Extremwertprozesse, untersucht werden. Dabei wird lediglich der gekoppelte Fall betrachtet, da sich daraus die Ergebnisse für den ungekoppelten Fall ableiten lassen. Der Einfachheit halber werden die Voraussetzungen und die Notation aus Kapitel 4 auch für dieses Kapitel vorausgesetzt und als Voraussetzungen dieses Kapitels bezeichnet. Die Beweismethodik bedient sich hauptsächlich des Continuous Mapping Theorems, welches auf die in (5.7) und (5.8) konstruierten Funktionale $\chi^{\max}$ und $\chi^{\min}$ angewendet wird.

Satz 5.1

Sei $\mathcal{S}$ die in (6.5) definierte Menge der nichtsingulären Punkte des Prozesses $D(\cdot)$. Dann gilt unter den Voraussetzungen dieses Kapitels mit der Notation aus Satz 3.2 für $n \to \infty$ die gemeinsame Verteilungskonvergenz der rückwärts- und vorwärtsgekoppelten CTRM und CTRm

$$\left(B_n^{-1} \bigvee_{k=1}^{N_{tb_n}} X_k^+, B_n^{-1} \bigwedge_{k=1}^{N_{tb_n}} X_k^- \right)_{0 \le t \le T} \tag{5.1}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\bigvee_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k) \le t} \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k), \bigwedge_{D(T\cdot\tau_k) \le t} \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k) \right)_{0 \le t \le T} \tag{5.2}$$

und

$$\left(B_n^{-1} \bigvee_{k=1}^{N_{tb_n}+1} X_k^+, B_n^{-1} \bigwedge_{k=1}^{N_{tb_n}+1} X_k^- \right)_{0 \le t \le T} \tag{5.3}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\bigvee_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k-) \le t} \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k), \bigwedge_{D(T\cdot\tau_k-) \le t} \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k) \right)_{0 \le t \le T} \tag{5.4}$$

in $D[0,T]$ für alle $T \in \mathcal{S}$.

Beweis. Der Beweis besteht in einer einfachen Anwendung des Continuous Mapping Theorems auf das in Lemma 4.1 nachgewiesene Konvergenzresultat für markierte Punktprozesse

$$\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{(b_n^{-1}T_k, B_n^{-1}X_k^+)}, \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{(b_n^{-1}T_k, B_n^{-1}X_k^-)} \right)$$
$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\widetilde{\tau}_k), \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k))}, \varepsilon_{(D(T\cdot\tau_k), \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k))} \right) \tag{5.5}$$

und

$$\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{(b_n^{-1}T_{k-1}, B_n^{-1}X_k^+)}, \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{(b_n^{-1}T_{k-1}, B_n^{-1}X_k^-)} \right)$$
$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\widetilde{\tau}_k-), \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k))}, \varepsilon_{(D(T\cdot\tau_k-), \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k))} \right) \tag{5.6}$$

für $n \to \infty$ in $M_p([0,\infty) \times (0,\infty]) \times M_p([0,\infty) \times [-\infty, 0))$. Statt jedoch das in (3.21) definierte Summationsfunktional χ zu verwenden, definiert man an dieser Stelle das Maximumsfunktional

$$\chi^{\max} : M_p([0,\infty) \times [-\infty,\infty]^d \backslash \{0\}) \to D[0,T],$$
$$\chi^{\max}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(\widetilde{t}_k,\widetilde{x}_k)}\right)(t) = \left(\bigvee_{\widetilde{t}_k\le t} \|\widetilde{x}_k\|\right)_{0\le t\le T} \tag{5.7}$$

und das Mimimumsfunktional

$$\chi^{\min} : M_p([0,\infty) \times [-\infty,0)) \to D[0,T],\ \chi^{\min}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(t_k,x_k)}\right)(t) = \left(\bigwedge_{t_k\le t} x_k\right)_{0\le t\le T}. \tag{5.8}$$

Während man beim Summationsfunktional χ eine Abschneidetechnik verwenden musste, um zu gewährleisten, dass sich nicht abzählbar viele, kleine Punkte zu ∞ aufsummieren, ist dies beim Maximumsfunktional bzw. Minimumsfunktional nicht nötig, da Punkte mit kleinem Betrag für die Bestimmung des Maximums bzw. Minimums irrelevant sind. In Lemma 6.4 wird gezeigt, dass auch die Funktionale $\chi^{\max}$ und $\chi^{\min}$ für jedes $T \in \mathcal{S}$ f.s. stetig in den behaupteten Grenzpunkten sind. Sei also $T \in \mathcal{S}$ beliebig, aber fest. Zunächst soll der rückwärtsgekoppelte Fall untersucht werden. Man erhält aus dem Continuous Mapping Theorem die Konvergenz

$$\begin{aligned}
&\chi^{\max}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} \varepsilon_{(b_n^{-1}T_k, B_n^{-1}X_k^+)}\right)(t) = \left(\bigvee_{b_n^{-1}T_k\le t} B_n^{-1}X_k^+\right)_{0\le t\le T} \\
&= \left(B_n^{-1}\bigvee_{k=1}^{N_{tb_n}} X_k^+\right)_{0\le t\le T} \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi^{\max}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\left(D(T\cdot\widetilde{\tau}_k), \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)}\right)(t) \\
&= \left(\bigvee_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\le t} \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)_{0\le t\le T}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

für $n \to \infty$ in $D[0,T]$. Analog erhält man durch die Anwendung von $\chi^{\min}$ die Verteilungskonvergenz

$$\left(B_n^{-1}\bigwedge_{k=1}^{N_{tb_n}} X_k^-\right)_{0\le t\le T} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\bigwedge_{D(T\cdot\tau_k)\le t} \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\right)_{0\le t\le T}. \tag{5.10}$$

Die gemeinsame Konvergenz von (5.9) und (5.10) erhält man aus der gemeinsamen Konvergenz der Punktprozesse in (5.5), wodurch die Behauptung (5.1) bewiesen ist. Wendet man hingegen die Funktionale $\chi^{\max}$ und $\chi^{\min}$ auf den vorwärtsgekoppelten Fall an, so erhält man die Verteilungskonvergenz

$$\chi^{\max}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{\left(b_n^{-1}T_{k-1}, B_n^{-1}X_k^+\right)}\right)(t) = \left(\bigvee_{b_n^{-1}T_{k-1}\le t} B_n^{-1}X_k^+\right)_{0\le t\le T}$$

$$= \left(B_n^{-1}\bigvee_{k=1}^{N_{tb_n}+1} X_k^+\right)_{0\le t\le T} \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi^{\max}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\left(D(T\cdot\tau_k-), \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)}\right)(t)$$

$$= \left(\bigvee_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k-)\le t} \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)_{0\le t\le T}$$

und analog

$$\left(\bigwedge_{k=1}^{N_{tb_n}+1} B_n^{-1}X_k^-\right)_{0\le t\le T} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\bigvee_{D(T\cdot\tau_k-)\le t} \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\right)_{0\le t\le T}$$

für $n\to\infty$ in $D[0,T]$. Die Behauptung (5.3) folgt somit aus der gemeinsamen Konvergenz in (5.6). ■

Wie in Kapitel 4 ist nun von Interesse, wie die Verteilung der Limesprozesse

$$\left(\bigvee_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\le t} \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)_{0\le t\le T} \quad \text{und} \quad \left(\bigwedge_{D(T\cdot\tau_k)\le t} \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\right)_{0\le t\le T}$$

im rückwärtsgekoppelten Fall und

$$\left(\bigvee_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k-)\le t} \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)_{0\le t\le T} \quad \text{und} \quad \left(\bigwedge_{D(T\cdot\tau_k-)\le t} \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\right)_{0\le t\le T}$$

im vorwärtsgekoppelten Fall mit der Verteilung des von Φ_α erzeugten Extremwertprozesses zusammenhängt.

Korollar 5.2

Sei $\widetilde{Y}(\cdot)$ der von Φ_β erzeugte Maximums- und $Y(\cdot)$ der von Φ_β erzeugte Minimumsprozess. Seien weiter $(\widetilde{Y}(E(t)-)^+)_{0\le t\le T}$ und $(Y(E(t)-)^+)_{0\le t\le T}$ die rechtsstetigen Varianten der

$G[0,T]$-wertigen Prozesse $(\widetilde{Y}(E(t)-))_{0\leq t\leq T}$ und $(Y(E(t)-))_{0\leq t\leq T}$. Dann gelten für die Grenzprozesse aus Satz 5.1 die Darstellungen

$$\left(\bigvee_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\leq t}\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)_{0\leq t\leq T}\stackrel{\mathcal{D}}{=}\left(\left(\eta^\beta((1,\infty))\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot\widetilde{Y}(E(t)-)^+\right)_{0\leq t\leq T}$$

und

$$\left(\bigwedge_{D(T\cdot\tau_k)\leq t}\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\right)_{0\leq t\leq T}\stackrel{\mathcal{D}}{=}\left(\left(\eta^\beta((-\infty,-1])\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot Y(E(t)-)^+\right)_{0\leq t\leq T}$$

im rückwärtsgekoppelten Fall sowie

$$\left(\bigvee_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k-)\leq t}\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)_{0\leq t\leq T}\stackrel{\mathcal{D}}{=}\left(\left(\eta^\beta((1,\infty))\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot\widetilde{Y}(E(t))\right)_{0\leq t\leq T}$$

und

$$\left(\bigwedge_{D(T\cdot\tau_k-)\leq t}\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\right)_{0\leq t\leq T}\stackrel{\mathcal{D}}{=}\left(\left(\eta^\beta((-\infty,-1])\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot Y(E(t))\right)_{0\leq t\leq T}$$

im vorwärtsgekoppelten Fall in $D[0,T]$.

Beweis. Zunächst soll die Richtigkeit der behaupteten Darstellungen für den rückwärtsgekoppelten Fall nachgewiesen werden.
Aus den Voraussetzungen dieses Kapitels und Satz 2.62 erhält man die Verteilungskonvergenz

$$a_n^{-1}\bigvee_{k=1}^n X_k^+\xrightarrow{\mathcal{D}}\widetilde{Y}(1)$$

für $n\to\infty$ in $\mathbb{R}^+$ und die in Satz 2.62 definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aus Satz 2.63 folgt hingegen für $n\to\infty$ die Konvergenz

$$B_n^{-1}\bigvee_{k=1}^n X_k^+\xrightarrow{\mathcal{D}}\widehat{Y}$$

in $\mathbb{R}^+$, wobei $\widehat{Y}$ die Verteilungsfunktion $F_{\widehat{Y}}(x)=\exp(-\eta^\beta((x,\infty]))\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ besitzt. Da diese beiden Konvergenzresultate nur durch einen Wechsel der normierenden Folge zustande kommen, folgt aus dem Typenkonvergenzsatz, vgl. Resnick [46, Proposition 0.2], und Satz 2.58 die Verteilungsgleichheit $\widehat{Y}\stackrel{\mathcal{D}}{=}\widetilde{C}\cdot\widetilde{Y}(1)$ für eine Konstante $\widetilde{C}>0$. Man erhält durch den Vergleich der Verteilungsfunktionen von $Y(1)$ und $\widehat{Y}$ für alle $x > 0$ die Gleichheit

$$\exp(-\eta^\beta((x,\infty))) = \mathbb{P}\left(\widetilde{C} \cdot \widetilde{Y}(1) \le x\right) = \mathbb{P}\left(\widetilde{Y}(1) \le \widetilde{C}^{-1}x\right) = \exp\left(-\left(\widetilde{C}^{-1}x\right)^{-\beta}\right). \tag{5.11}$$

Nun ist η^β das Lévymaß einer β-stabilen Verteilung, welches aufgrund von Satz 2.30 die Selbstähnlichkeitseigenschaft

$$\eta^\beta((x,\infty)) = \eta^\beta((1,\infty)) \cdot x^{-\beta}$$

besitzt. Aufgrund von (5.11) erhält man daraus den Wert der Konstanten

$$\widetilde{C} = \left(\eta^\beta_{(0,\infty)}((1,\infty))\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

welcher es einem erlaubt den Grenzwert des Quotienten der normierenden Konstanten zu bestimmen:

$$\frac{a_n}{B_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\eta^\beta((1,\infty))\right)^{\frac{1}{\beta}}. \tag{5.12}$$

Weiter folgt aus Satz 2.66 die Konvergenz der sequentiellen Maxima

$$\left(a_n^{-1} \bigvee_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_k^+\right)_{0\le t\le T} \overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow} (\widetilde{Y}(t))_{0\le t\le T}$$

für $n \to \infty$ in $D[0,T]$. Andererseits folgt aber durch Anwendung des Maximumsfunktionals auf (3.10) die Verteilungskonvergenz

$$\left(B_n^{-1} \bigvee_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_k^+\right)_{0\le t\le T} \overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \left(\bigvee_{T\cdot\widetilde{\tau}_k\le t} \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)_{0\le t\le T} \tag{5.13}$$

für $n \to \infty$ in $D[0,T]$. Nun erhält man unter Beachtung von (5.12) für $n \to \infty$ die Konvergenz der Prozesse

$$\left(B_n^{-1} \bigvee_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_k^+\right)_{0\le t\le T} = \left(a_n B_n^{-1} a_n^{-1} \bigvee_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_k^+\right)_{0\le t\le T} \overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \left(\left(\eta^\beta((1,\infty))\right)^{\frac{1}{\beta}} \widetilde{Y}(t)\right)_{0\le t\le T} \tag{5.14}$$

in $D[0,T]$. Ein Vergleich von (5.13) und (5.14) liefert die Verteilungsgleichheit

$$\left(\bigvee_{T\cdot\widetilde{\tau}_k\le t} \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)_{0\le t\le T} \overset{\mathcal{D}}{=} \left(\left(\eta^\beta((1,\infty))\right)^{\frac{1}{\beta}} \widetilde{Y}(t)\right)_{0\le t\le T} \tag{5.15}$$

in $D[0,T]$. Nutzt man schließlich noch die Mengengleichheit (4.23), welche zur Darstellung

$$\left(\bigvee_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k-)\le t}\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)_{0\le t\le T}=\left(\bigvee_{T\cdot\widetilde{\tau}_k\le E(t)}\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)_{0\le t\le T}$$

führt, so folgt die Behauptung

$$\left(\bigvee_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k-)\le t}\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)_{0\le t\le T}\stackrel{\mathcal{D}}{=}\left(\left(\eta^\beta((1,\infty))\right)^{\frac{1}{\beta}}\widetilde{Y}(E(t))\right)_{0\le t\le T}.$$

Um die behauptete Darstellung der Skalierungslimiten von *CTRm* im rückwärtsgekoppelten Fall nachzuweisen, nutzt man den zweiten Teil von Satz 2.62, mit welchem man auf die Verteilungskonvergenz

$$a_n^{-1}\bigwedge_{k=1}^n X_k^-\xrightarrow{\mathcal{D}}Y(1)$$

für $n\to\infty$ und die dort definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schließen kann. Mit den gleichen Argumenten, die zu (5.12) führten, weist man die Konvergenz der normierenden Folgen

$$\frac{a_n}{B_n}\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\left(\eta^\beta((-\infty,-1])\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

nach und folgert

$$\left(\bigwedge_{D(T\cdot\tau_k-)\le t}\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\right)_{0\le t\le T}\stackrel{\mathcal{D}}{=}\left(\left(\eta^\beta((-\infty,-1])\right)^{\frac{1}{\beta}}Y(E(t))\right)_{0\le t\le T}.$$

Für den vorwärtsgekoppelten Fall nutzt man die Mengengleichheit (3.2) bei Meerschaert und Scheffler [41], welche einem die disjunkte Zerlegung

$$\{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\le t\}=\{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)<t\}\cup\{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)=t\}=\{T\cdot\widetilde{\tau}_k<E(t)\}\cup\{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)=t\}$$

erlaubt. Durch diese erhält man unter Beachtung von (5.15) die gewünschte Darstellung

$$\begin{aligned}&\left(\bigvee_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\le t}\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)_{0\le t\le T}\\&=\left(\left(\bigvee_{T\cdot\widetilde{\tau}_k<E(t)}\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)\vee\left(\bigvee_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)=t}\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)\right)_{0\le t\le T}\\&\stackrel{\mathcal{D}}{=}\left(\left(\eta^\beta((1,\infty))\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot\widetilde{Y}(E(t)-)^+\right)_{0\le t\le T}\end{aligned}\tag{5.16}$$

in $D[0,T]$. Um die in (5.16) behauptete Verteilungsgleichheit nachzuvollziehen, beachtet man zunächst

$$\left(\bigvee_{T\cdot\widetilde{\tau}_k<E(t)} \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)_{0\le t\le T} \stackrel{\mathcal{D}}{=} (\widetilde{Y}(E(t)-))_{0\le t\le T}.$$

Der verbleibende Teil $\left(\bigvee_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)=t}\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\right)$ liefert einem die Rechtsstetigkeit des Limesprozesses, da ein Sprung zur zufälligen Zeit $E(t)$ von diesem berücksichtigt wird.
Die gleichen Argumente liefern einem die letzte noch nachzuweisende Darstellung

$$\left(\bigwedge_{D(T\cdot\tau_k)\le t} \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\right)_{0\le t\le T} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left(\left(\eta^\beta((-\infty,-1])\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot Y(E(t)-)^+\right)_{0\le t\le T}$$

in $D[0,T]$. ■

Nachdem nun die Verteilung der Skalierungslimiten von *CTRWs* und den zugehörigen Extremwertprozessen bekannt ist, soll im nächsten Schritt nachgewiesen werden, dass die Prozesse auch gemeinsam konvergieren.

Satz 5.3
Unter den Voraussetzungen dieses Kapitels gilt mit der Notation aus Satz 3.2 und Korollar 5.2 für $n\to\infty$ die gemeinsame Konvergenz

$$\begin{aligned}&\left(B_n^{-1}\bigvee_{k=1}^{N_{tb_n}} X_k^+, B_n^{-1}\bigwedge_{k=1}^{N_{tb_n}} X_k^-, B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}}(X_k-\mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k))\right)_{t\ge 0}\\ &\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\left(\eta^\beta((1,\infty))\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot\widetilde{Y}(E(t)-)^+, \left(\eta^\beta((-\infty,-1])\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot Y(E(t)-)^+, A(E(t)-)^+\right)_{t\ge 0}\end{aligned} \tag{5.17}$$

und

$$\begin{aligned}&\left(B_n^{-1}\bigvee_{k=1}^{N_{tb_n}+1} X_k^+, B_n^{-1}\bigwedge_{k=1}^{N_{tb_n}+1} X_k^-, B_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_{tb_n}+1}(X_k-\mathbb{E}_{\tau B_n}(X_k))\right)_{t\ge 0}\\ &\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\left(\eta^\beta((1,\infty))\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot\widetilde{Y}(E(t)), \left(\eta^\beta((-\infty,-1])\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot Y(E(t)), A(E(t))\right)_{t\ge 0}\end{aligned} \tag{5.18}$$

in $D[0,\infty)$.

Beweis. Der Beweis beruht lediglich auf der Beobachtung, dass für zwei stetige Abbildungen auch deren kartesisches Produkt stetig ist. Wendet man also für ein $T\in\mathcal{S}$ die

Funktionale $\chi \circ \pi$, $\chi^{\max}$ und $\chi^{\min}$ auf die konvergenten Folgen

$$\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{(b_n^{-1} T_k, B_n^{-1} X_k^+)}, \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{(b_n^{-1} T_k, B_n^{-1} X_k^-)} \right)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T \cdot \widetilde{\tau}_k), \Psi_2(T^{-1} \widetilde{\Gamma}_k))}, \varepsilon_{(D(T \cdot \tau_k), \Psi_1(T^{-1} \Gamma_k))} \right)$$

und

$$\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{(b_n^{-1} T_{k-1}, B_n^{-1} X_k^+)}, \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \varepsilon_{(b_n^{-1} T_{k-1}, B_n^{-1} X_k^-)} \right)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T \cdot \widetilde{\tau}_k -), \Psi_2(T^{-1} \widetilde{\Gamma}_k))}, \varepsilon_{(D(T \cdot \tau_k -), \Psi_1(T^{-1} \Gamma_k))} \right)$$

an, so folgt für $n \to \infty$ die gemeinsame Konvergenz

$$\left(B_n^{-1} \bigvee_{k=1}^{N_{tb_n}} X_k^+, B_n^{-1} \bigwedge_{k=1}^{N_{tb_n}} X_k^-, B_n^{-1} \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} X_k^+ \mathbf{1}_{B_n^{-1} X_k^+ \geq \varepsilon}, B_n^{-1} \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} X_k^- \mathbf{1}_{B_n^{-1} X_k^- \geq \varepsilon} \right)_{0 \leq t \leq T} \tag{5.19}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \Bigg(\bigvee_{D(T \cdot \widetilde{\tau}_k) \leq t} \Psi_2(T^{-1} \widetilde{\Gamma}_k), \bigwedge_{D(T \cdot \tau_k) \leq t} \Psi_1(T^{-1} \Gamma_k),$$

$$\sum_{D(T \cdot \tau_k) \leq t} \Psi_2(T^{-1} \widetilde{\Gamma}_k) \mathbf{1}_{\Psi_2(T^{-1} \widetilde{\Gamma}_k) \geq \varepsilon}, \sum_{D(T \cdot \widetilde{\tau}_k) \leq t} \Psi_1(T^{-1} \Gamma_k) \mathbf{1}_{\Psi_2(T^{-1} \Gamma_k) \geq \varepsilon} \Bigg)_{0 \leq t \leq T}$$

in $D[0,T]$. Unter Beachtung von (3.26) und der Stetigkeit des Prozesses $E(\cdot)$ folgt mit Hilfe des Continuous Mapping Theorems die Konvergenz der zentrierten Prozesse in (5.19)

$$\Bigg(\left(B_n^{-1} \bigvee_{k=1}^{N_{tb_n}} X_k^+, B_n^{-1} \bigwedge_{k=1}^{N_{tb_n}} X_k^-, B_n^{-1} \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} X_k^+ \mathbf{1}_{B_n^{-1} X_k^+ \geq \varepsilon}, B_n^{-1} \sum_{k=1}^{N_{tb_n}} X_k^- \mathbf{1}_{B_n^{-1} X_k^- \geq \varepsilon} \right)$$

$$- \left(0, 0, \frac{N_{tb_n}}{n} \cdot n \mathbb{E} \left(B_n^{-1} X_1^+ \mathbf{1}_{[\varepsilon, \tau]} (B_n^{-1} X_1^+) \right), \frac{N_{tb_n}}{n} \cdot n \mathbb{E} \left(B_n^{-1} X_1^+ \mathbf{1}_{[\varepsilon, \tau]} (B_n^{-1} X_1^+) \right) \right) \Bigg)_{0 \leq t \leq T}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \Bigg(\Bigg(\bigvee_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k \le t} \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k), \bigvee_{D(T\cdot\tau_k \le t} \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k),$$

$$\sum_{D(T\cdot\widetilde{\tau}_k)\le t} \Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\ge\varepsilon}, \sum_{D(T\cdot\tau_k)\le t} \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\ge\varepsilon} \Bigg)$$

$$- \left(0, 0, E(t)\cdot \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{[\varepsilon,\tau]}(\Psi_2(\widetilde{\Gamma}_k))\right), E(t)\cdot \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(\Psi_1(\Gamma_k)\mathbf{1}_{[\varepsilon,\tau]}(\Psi_1(\Gamma_k))\right)\right)\Bigg)_{0\le t\le T}$$

für $n \to \infty$ in $D[0,T]$. Mit den Darstellungen in Korollar 4.4 und Korollar 5.2 erhält man den in (5.17) behaupteten Limes, falls man den Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ ausführt. Die Abschneidebedingung, welche nach Theorem 4.2 von Billingsley [7] nachzuweisen ist, kann im Beweis von Satz 4.3 gefunden werden. Durch Anwendung der gleichen Argumente erhält man die in (5.18) behauptete Konvergenz. ■

5.2 Extremwertprozesse und *CTRWs* im mehrdimensionalen Fall

Nachdem im vorherigen Abschnitt *CTRWs*, *CTRM* und *CTRWm* sowie deren gemeinsame Konvergenz im einsimensionalen Fall abschließend untersucht wurden, sollen diese Ergebnisse nun auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinert werden. Dabei sollen *CTRWs* jedoch nur auf ihre betragsmäßig grössten Sprünge untersucht werden. Auf eine Betrachtung komponentenweiser Maxima, wie sie z.B. in den Büchern von de Haan [11] und Resnick [46] durchgeführt wird, soll an dieser Stelle verzichtet werden. Der Grund hierfür liegt in der in den Kapiteln 3 und 4 verwendeten radialen Zerlegung des Levymaßes $\eta \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, welche nicht für eine Betrachtung von Extrema entlang von Koordinatenachsen geeignet ist. Der Grundstein für die Untersuchung mehrdimensionaler *CTRM* wurde dabei bereits in Kapitel 4 im Abschnitt über residuale Orderstatistiken gelegt.
Zu Beginn dieses Abschnitts wird direkt das Hauptresultat dieses Kapitels formuliert. Dessen Beweis gleicht dem der Sätze 5.1 und 5.3, da das in diesen Sätzen verwendete Maximumsfunktional $\chi^{\max}$ direkt für den mehdimensionalen Fall eingeführt wurde. Aus diesem Grund soll auf den Beweis des folgenden Satzes verzichtet werden.

Satz 5.4
Sei $\mathcal{S}$ die in (6.5) definierte Menge der nichtsingulären Punkte des Prozesses $D(\cdot)$. Dann gilt unter den Voraussetzungen dieses Kapitels mit der Notation aus Satz 4.3 und Lemma 4.9 für $n \to \infty$ die gemeinsame Konvergenz des CTRWs und seines betragsmäßigen

Maximums

$$\left(\sum_{k=1}^{N_{tb_n}} (A_n \mathbf{X}_k - \mathbb{E}_\tau(A_n \mathbf{X}_k)), \bigvee_{k=1}^{N_{tb_n}} \|A_n \mathbf{X}_k\| \right)_{0 \le t \le T}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \Bigg(\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Bigg(\sum_{D(T \cdot \tau_k) \le t} \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k) \mathbf{V}_k \mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k) \ge \varepsilon}$$

$$- E(t) \cdot \int_{\varepsilon \le \|x\| \le \tau} x \; d\eta(x) \Bigg), \bigvee_{D(T \cdot \widetilde{\tau}_k) \le t} \widetilde{\eta}^{\leftarrow} \left(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k \right) \Bigg)_{0 \le t \le T}$$

in $D[0,T]$.

Kapitel 6

Appendix

6.1 Stetige Abbildungen

Lemma 6.1
Die in (3.16) definierte Abbildung $\mathscr{T}$ ist f.s. stetig im Punkt $(D(\cdot), PRM(\lambda\!\!\lambda \otimes \eta))$.

Beweis. Sei $N_\infty := PRM(\lambda\!\!\lambda \otimes \eta)$.
Man statte den Raum $D^{\uparrow}[0,\infty) \times M_p([0,\infty) \times [-\infty,\infty]^d \backslash \{0\})$ mit der Produkttopologie aus, welche durch die Produktmetrik aus der Skorokhodmetrik und der vagen Metrik induziert wird. Sei nun $B_1 := \{u \geq 0 : D(\omega, u) \text{ ist unstetig in } u\}$ und $B = B_1 \times ([-\infty,\infty]^d \backslash \{0\})$. Nach Billingsley [7, S. 110] besitzt die Menge B_1 für fast alle $\omega \in \Omega$ höchstens abzählbar viele Punkte. Im Folgenden wird nun die fast sichere Folgenstetigkeit der Abbildung $\mathscr{T}$ nachgewiesen. Da der vorliegende Raum metrisch ist, erfüllt er insbesondere das erste Abzählbarkeitsaxiom, wodurch die Begriffe der Stetigkeit und der Folgenstetigkeit äquivalent sind. Sei dazu $(x_n(\omega,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nichtfallenden càdlàg Funktionen in $D[0,\infty)$, welche in der Skorokhod-Topologie gegen die Funktion $D(\omega,\cdot)$ konvergent ist. Analog sei $(m_n(\omega,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punktmaßen in $M_p([0,\infty)\times[-\infty,\infty]^d\backslash\{0\})$, welche vage konvergent gegen $N_\infty(\omega,\cdot)$ ist. Dann existiert für alle $f \in C_K^+([0,\infty)\times[-\infty,\infty]^d\backslash\{0\})$ eine kompakte Menge $K \subset [0,\infty) \times [-\infty,\infty]^d \backslash \{0\}$, so dass gilt:

$$\left| \iint f(x_n(\omega,u),v)\; m_n(\omega)(du,dv) - \iint f(D(\omega,u),v)\; N_\infty(\omega)(du,dv) \right|$$
$$= \left| \iint_K f(x_n(\omega,u),v)\; m_n(\omega)(du,dv) - \iint_K f(D(\omega,u),v)\; N_\infty(\omega)(du,dv) \right|.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt:

$$\left| \iint f(x_n(\omega,u),v)\; m_n(\omega)(du,dv) - \iint f(D(\omega,u),v)\; N_\infty(\omega)(du,dv) \right|$$

$$\leq \left| \iint_{K\cap B^C} f(x_n(\omega,u),v) - f(D(\omega,u),v)\; m_n(\omega)(du,dv) \right| \tag{6.1}$$

$$+ \left| \iint_{K\cap B} f(x_n(\omega,u),v) - f(D(\omega,u),v)\; m_n(\omega)(du,dv) \right| \tag{6.2}$$

$$+ \left| \iint_K f(D(\omega,u),v)\; m_n(\omega)(du,dv) - \iint_K f(D(\omega,u),v)\; N_\infty(\omega)(du,dv) \right|. \tag{6.3}$$

Nun gilt für (6.1) die Abschätzung

$$\left| \iint_{K\cap B^C} f(x_n(\omega,u),v) - f(D(\omega,u),v)\; m_n(\omega)(du,dv) \right|$$

$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ m_n(\omega)(K\cap B^C) \right\} \cdot \sup_{K\cap B^C} \left\{ |f(x_n(\omega,u),v) - f(D(\omega,u),v)| \right\}. \tag{6.4}$$

Da $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Radonmaßen ist, welche konvergent gegen das Radonmaß $N_\infty(\omega,\cdot)$ ist, folgt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ m_n(\omega)(K\cap B^C) \right\} < \infty$. Da die Funktion $(u,v) \mapsto (D(\omega,u),v)$ stetig ist für alle $(u,v) \in K \cap B^C$, folgt mit Lemma 2.45

$$\sup_{K\cap B^C} \left\{ |f(x_n(\omega,u),v) - f(D(\omega,u),v)| \right\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Damit verschwindet (6.1) für $n \to \infty$.

Beachtet man, dass die Zufallsvariablen $\widetilde{\tau}_k$ und $D(u)$ unabhängig für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $u \in [0,\infty)$ sind, so folgt, dass für fast alle $\omega \in \Omega$ die Gleichheit $N_\infty(\omega)(K\cap B) = 0$ gilt. Da $m_n(\omega)(K\cap B)$ eine Folge nichtnegativer und ganzer Zahlen ist, welche konvergent gegen 0 ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $m_n(\omega)(K\cap B) = 0$ für alle $n \geq n_0$. Somit verschwindet auch (6.2) für $n \to \infty$.

Da nun $f \in C_K^+$ gilt, folgt mit der Definition der vagen Konvergenz

$$\iint_K f(D(\omega,u),v)\; m_n(\omega)(du,dv) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \iint_K f(D(\omega,u),v)\; N_\infty(\omega)(du,dv),$$

womit auch (6.3) für $n \to \infty$ verschwindet. Es folgt die fast sichere Stetigkeit von $\mathscr{T}$ im Punkt $(D(\cdot), PRM(\lambda\!\!\lambda \otimes \eta))$. ■

Lemma 6.2

Sei

$$\mathcal{S} := \{T \in \mathbb{R}^+ : \mathbb{P}\left(D(T\cdot\tau_i) = T\right) = 0 \textit{ für alle } i \in \mathbb{N}\} \tag{6.5}$$

eine Menge von nichtsingulären Punkten. Weiter sei $\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(u,v)$ *die in (3.41) definierte Inverse der Projektion des Lévymaßes* $\widetilde{\eta}$ *in Richtung* v*. Dann gilt, dass das in (3.21) definierte Summationsfunktional* χ *für alle* $T \in \mathcal{S}$ *f.s. stetig im Punkt*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\left(D(T\cdot\tau_k),\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k \mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k,\mathbf{V}_k)>\varepsilon}\right)}$$

ist, falls $\varepsilon > 0$ *so gewählt ist, dass* η *stetig auf* $\mathbb{S}_\varepsilon^{d-1}$ *ist. Für den Fall des eindimensionalen CTRW folgt, dass* χ *für alle* $T \in \mathcal{S}$ *und alle Stetigkeitspunkte* $\varepsilon > 0$ *von* η^β *in den Punkten*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\left(D(T\cdot\tau_k),\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)\mathbf{1}_{\Psi_1(T^{-1}\Gamma_k)<-\varepsilon}\right)} \quad \textit{und} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\left(D(T\cdot\widetilde{\tau}_k),\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)\mathbf{1}_{\Psi_2(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k)>\varepsilon}\right)}$$

f.s. stetig ist.

Bemerkung 6.3

Es gilt, dass das Komplement der Menge $\mathcal{S}$ höchstens abzählbar ist, so dass $\mathcal{S}$ eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}^+$ ist. Insbesondere gilt unter den Voraussetzung von Kapitel 3, dass die Mengen $\mathcal{S}$ und $\mathbb{R}^{>0}$ übereinstimmen.

Beweis. Im ungekoppelten Fall, welcher in Kapitel 3 behandelt wurde, gilt die Unabhängigkeit der Lévyprozesse $D(\cdot) \perp A(\cdot)$ bzw. $D(\cdot) \perp \mathbf{A}(\cdot)$. Aus dieser Unabhängigkeit und der Stetigkeit der endlichdimensionalen Randverteilungen erhält man insbesondere, dass $T \cdot \tau_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $T > 0$ ein Stetigkeitspunkt des Prozesses $D(\cdot)$ ist:

$$\mathbb{P}\left(D(T\cdot\tau_n) = T\right) = \int_0^1 \mathbb{P}\left(D(T\cdot s) = T | \tau_n = s\right) ds = \int_0^1 \mathbb{P}\left(D(T\cdot s) = T\right) ds = 0. \tag{6.6}$$

Insbesondere bedeutet dies $\mathcal{S} = \mathbb{R}^{>0}$.

Im gekoppelten Fall betrachtet man für $x, t > 0$ die Vektoren $((J_1, \mathbf{X}_1), \ldots, (J_{\lfloor nxt\rfloor}, \mathbf{X}_{\lfloor nxt\rfloor}))$. Weiter sei $(d_1, \ldots, d_{\lfloor nxt\rfloor})$ der zugehörige Antirangvektor der Orderstatistiken des Vektors $(\|\mathbf{X}_1\|, \ldots, \|\mathbf{X}_{\lfloor nxt\rfloor}\|)$. Dann erhält man mit den gleichen Argumenten, die zur Konvergenz (4.15) führten, unter den Voraussetzungen von Kapitel 3 und 4 die Verteilungskonvergenz

$$\left(b_n^{-1} \sum_{k=1}^{\lfloor nx\frac{d_i}{n}\rfloor} J_k \right)_{i\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(D(xt\cdot\tau_i)\right)_{i\in\mathbb{N}} \tag{6.7}$$

in $[0,\infty)^{\mathbb{N}}$, wobei $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. $\mathcal{U}[0,1]$-verteilten Zufallsvariablen bildet. Unter Beachtung der regulären Variationseigenschaft $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in RV_{\frac{1}{\alpha}}$ erhält man mit den gleichen Argumenten die Konvergenz

$$\left(b_n^{-1} \sum_{k=1}^{\lfloor nx\frac{d_i}{n}\rfloor} J_k \right)_{i\in\mathbb{N}} = \left(b_n^{-1} \cdot b_{\lfloor nx\rfloor} \cdot b_{\lfloor nx\rfloor}^{-1} \sum_{k=1}^{\lfloor nx\frac{d_i}{n}\rfloor} J_k \right)_{i\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(x^{\frac{1}{\alpha}} D(t\cdot\tau_i) \right)_{i\in\mathbb{N}} \tag{6.8}$$

für $n \to \infty$ in $[0, \infty)$. Somit gilt für alle $T \in \mathbb{R}^{>0}$ und alle $i \in \mathbb{N}$ die Gleichheit

$$\mathbb{P}\left(D(T \cdot \tau_i) = T\right) = \mathbb{P}\left(D(\tau_i) = T^{1-\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Da die Menge der singulären Punkte eines Wahrsheinlichkeitsmaßes höchstens abzählbar ist, vgl. Lemma 2.5, sind die Mengen

$$\left\{T \in \mathbb{R}^+ : \mathbb{P}(D(T \cdot \tau_i) = T) > 0\right\} = \left\{T \in \mathbb{R}^+ : \mathbb{P}\left(D(\tau_i) = T^{1-\frac{1}{\alpha}}\right) > 0\right\}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ höchstens abzählbar. Damit ist

$$\begin{aligned}
&\{T \in \mathbb{R}^+ : \mathbb{P}\left(D(T \cdot \tau_i) = T\right) = 0 \text{ für alle } i \in \mathbb{N}\}^C \\
&\left\{\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \{T \in \mathbb{R}^+ : \mathbb{P}\left(D(T \cdot \tau_i) = T\right) = 0\}\right\}^C \\
&\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{T \in \mathbb{R}^+ : \mathbb{P}\left(D(T \cdot \tau_i) = T\right) > 0\}
\end{aligned}$$

eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen, also selbst wieder abzälbar. ■

Beweis. Der Beweis von Lemma 6.2 ist eine Verallgemeinerung des Beweises von Resnick [47, 7.2.3] und wird nur für den Punkt

$$N = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_{\left(D(T \cdot \tau_k), \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k \mathbf{1}_{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k) > \varepsilon}\right)}$$

geführt. Die Stetigkeit in den entsprechenden Punkten des einsimensionalen *CTRW* folgt sofort als Spezialfall, da die Zerlegung in Polarkoordinaten im eindimensionalen Fall mit der Zerlegung in Positiv- und Negativteil übereinstimmt.
Sei nun $T \in \mathcal{S}$ beliebig, aber fest gewählt. Es wird nun gezeigt, dass für gewisse Folgen von Punktmaßen

$$(m_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M_p([0, \infty) \times [-\infty, \infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d)$$

mit $m_n \xrightarrow{v} m_0$ die Konvergenz $d_{[0,T]}(\chi(m_n), \chi(m_0)) \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus folgt schließlich die Konvergenz in der Metrik $\widetilde{d}_{[0,T]}$.

Man betrachtet die Menge

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^C := \{m \in M_p([0,\infty) \times [-\infty,\infty]^d : m([0,\infty) \times \mathbb{S}_\varepsilon^{d-1}) = 0,\\ m([0,\infty) \times \{x\} : \|x\| = \infty) = 0,\\ m(\{0\} \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d) = m(\{T\} \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d) = 0,\\ m([0,T] \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d) < \infty,\\ \text{keine vertikale Linie enthält zwei Punkte von } m(([0,T] \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d) \cap \cdot)\}.\end{aligned}$$

Zunächst soll gezeigt werden, dass N f.s. in $\mathcal{N}^C$ liegt. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N([0,\infty) \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d)) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{D(T\cdot\tau_k) < \infty\} \cap \{\widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\Gamma_k, \mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k \notin \mathbb{B}_\varepsilon^d\})\\ &\leq \eta\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| > \varepsilon\right\}\right) < \infty,\end{aligned}$$

woraus

$$\mathbb{P}(N([0,\infty) \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d) < \infty) = 1$$

folgt. Da der Prozess $D(\cdot)$ f.s. streng monoton wachsende Pfade besitzt und $D(0) = 0$ erfüllt, gilt die Gleichheit

$$\mathbb{E}(N(\{0\} \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d)) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(D(T\cdot\tau_k) = 0) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\tau_k = 0) = 0,$$

mit Hilfe derer man auf

$$\mathbb{P}(N(\{0\} \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d) = 0) = 1$$

schließt. Schließlich bleibt noch zu zeigen:

$$\mathbb{P}(\text{keine vertikale Linie enthält zwei Punkte von } m(([0,T] \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d) \cap \cdot) = 1.$$

Man erhält erneut aufgrund der f.s. streng monotonen Pfade von $D(\cdot)$ die Gleichheit

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\exists \text{ eine vertikale Linie, welche zwei Punkte von } N([0,T] \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d \cap \cdot) \text{ enthält})\\ &\leq \mathbb{P}(\exists j,k \in \mathbb{N}, j < k : D(T\cdot\tau_j) = D(T\cdot\tau_k)) = \mathbb{P}(\exists j,k \in \mathbb{N}, j < k : \tau_j = \tau_k) = 0,\end{aligned}$$

woraus wie gewünscht $\mathbb{P}(N \in \mathcal{N}^C) = 1$ folgt. Weiter wird nun gezeigt, dass für ein $m_0 \in \mathcal{N}^C$ und eine Folge $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $m_n \xrightarrow{v} m_0$ die Konvergenz $\chi(m_n)(\cdot) \to \chi(m)(\cdot)$ in $D[0,T]$ gilt.

Beachtet man, dass m_0 f.s. in $\mathcal{N}^C$ liegt, so folgt aus Lemma 7.1 bei Resnick [47], dass Konstanten $k_0, n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass für alle $n \geq n_0$ die Anzahl der Punkte in der Menge $[0,T] \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d$ bereits konstant ist

$$m_n([0,T] \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d) = m_0([0,T] \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d) = k_0.$$

Zusätzlich folgt aus Lemma 7.1 bei Resnick [47], dass für alle $n \in \mathbb{N}^{\geq n_0} \cup \{0\}$ eine Nummerierung $\left(\left(\tau_i^{(n)}, x_i^{(n)}\right) 1 \leq i \leq k_0\right)$ der Punkte von $m_n(([0,T] \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d))$ existiert, so dass zum einen die Darstellung

$$m_n(([0,T] \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d) \cap \cdot) = \sum_{k=1}^{k_0} \varepsilon_{\left(\tau_k^{(n)}, x_k^{(n)}\right)}(\cdot),$$

$$0 < \tau_1^{(0)} < \ldots < \tau_{k_0}^{(0)} < T < \tau_{k_0+1}^{(0)}$$

und zum anderen die Konvergenz

$$\left(\left(\tau_i^{(n)}, x_i^{(n)}\right) 1 \leq i \leq k_0\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\left(\tau_i^{(0)}, x_i^{(0)}\right) 1 \leq i \leq k_0\right)$$

in $\left([0,T] \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d\right)^{k_0}$ gilt. Als nächstes wählt man ein $\delta > 0$ so klein, dass für alle $n \geq n_0$ die folgenden Bedingungen gelten:

$$\tau_1^{(n)} > 2\delta,\ \tau_{k+1}^{(n)} - \tau_k^{(n)} > 2\delta,\ 1 \leq k \leq k_0 - 1,\ \tau_{k_0}^{(n)} < T - 2\delta.$$

Aus der Konvergenz der Punkte $\left(\tau_k^{(n)}, x_k^{(n)}\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\tau_k^{(0)}, x_k^{(0)}\right)$ für $1 \leq k \leq k_0$ folgt dann, dass ein $n_1 \geq n_0$ existiert, so dass für alle $n \geq n_1$ und alle $1 \leq k \leq k_0$ gilt:

$$\left(\tau_k^{(n)}, x_k^{(n)}\right) \in \left(\tau_k^{(0)} - \delta, \tau_k^{(0)} + \delta\right) \times \left\{x \in \mathbb{R}^d : \left\|x - x_k^{(0)}\right\| < \delta\right\}.$$

Nun definiert man für alle $1 \leq k \leq k_0$ und alle $n \geq n_1$ stetige Bijektionen $\lambda_n : [0,T] \mapsto [0,T]$ durch

$$\lambda_n(0) = 0,\ \lambda_n(T) = T,\ \lambda_n\left(\tau_k^{(n)}\right) = \tau_k^{(0)}$$

und interpoliert linear zwischen diesen Punkten auf ganz $[0,T]$. Sei nun $\|x(t)\|_{[0,T]}$ die

Supremumsnorm der Funktion $x(t)$ auf $[0,T]$. Dann gilt die für alle $n \geq n_1$ die Abschätzung

$$\left\|\chi(m_n) \circ \lambda_n^{-1}(t) - \chi(m_0)(t)\right\|_{[0,T]} = \left\| \sum_{\tau_k^{(n)} \leq \lambda_n^{-1}(t)} x_k^{(n)} - \sum_{\tau_k^{(0)} \leq t} x_k^{(0)} \right\|_{[0,T]}$$

$$= \left\| \sum_{\lambda_n\left(\tau_k^{(n)}\right) \leq t} x_k^{(n)} - \sum_{\tau_k^{(0)} \leq t} x_k^{(0)} \right\|_{[0,T]} = \left\| \sum_{\tau_k^{(0)} \leq t} \left(x_k^{(n)} - x_k^{(0)} \right) \right\|_{[0,T]}$$

$$\leq \sum_{\tau_k^{(0)} \leq T} \left\| x_k^{(n)} - x_k^{(0)} \right\| \leq k_0 \delta, \tag{6.9}$$

da $\tau_{k_0+1}^{(0)} > T$ und $x_k^{(n)}$ in der δ-Umgebung von $x_k^{(0)}$ enthalten ist für alle $1 \leq k \leq k_0$. In den nächsten Schritten wird gezeigt, dass die Bijektionen λ_n in der gleichmäßigen Metrik um höchstens 3δ von der Identität abweichen:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\lambda_n^{-1}(t) - t| = \sup_{0 \leq t \leq T} |\lambda_n(t) - t| \leq 3\delta. \tag{6.10}$$

Dafür wird die Darstellung

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\lambda_n(t) - t| = \bigvee_{k=0}^{k_0} \bigvee_{s \in \left[\tau_k^{(n)}, \tau_{k+1}^{(n)}\right]} |\lambda_n(s) - s|, \ \tau_0^{(n)} = 0, \ \tau_{k_0+1}^{(n)} > T$$

verwendet, wobei $\tau_0^{(n)} = 0$ und $\tau_{k+1}^{(n)} = T$ gilt. Auf dem ersten Intervall gilt nun

$$\sup_{0 \leq s \leq \tau_1^{(n)}} |\lambda_n(s) - s| = \sup_{0 \leq s \leq \tau_1^{(n)}} \left| \frac{\tau_1^{(0)}}{\tau_1^{(n)}} s - s \right| = \sup_{0 \leq s \leq \tau_1^{(n)}} \left| \frac{\tau_1^{(0)}}{\tau_1^{(n)}} - 1 \right| s \leq \left| \frac{\tau_1^{(0)}}{\tau_1^{(n)}} - 1 \right| \tau_1^{(n)}$$

$$= \left| \tau_1^{(0)} - \tau_1^{(n)} \right| \leq \delta.$$

Definiert man $\Delta\tau^{(j)} = \tau_{k+1}^{(j)} - \tau_k^{(j)}$ für $j = 0, \ldots, n$, so gilt auf den weiteren Intervallen $\left[\tau_k^{(n)}, \tau_{k+1}^{(n)}\right]$ für $1 \leq k \leq k_0$ die Darstellung

$$\lambda_n(s) = \frac{\tau_{k+1}^{(0)} - \tau_k^{(0)}}{\tau_{k+1}^{(n)} - \tau_k^{(n)}} s + \tau_k^{(0)} - \left(\frac{\tau_{k+1}^{(0)} - \tau_k^{(0)}}{\tau_{k+1}^{(n)} - \tau_k^{(n)}} \right) \tau_k^{(n)} = \frac{\Delta\tau^{(0)}}{\Delta\tau^{(n)}} s + \tau_k^{(0)} - \frac{\Delta\tau^{(0)}}{\Delta\tau^{(n)}} \tau_k^{(n)}.$$

Hieraus folgt

$$\sup_{\tau_k^{(n)} \leq s \leq \tau_{k+1}^{(n)}} |\lambda_n(s) - s| = \sup_{\tau_k^{(n)} \leq s \leq \tau_{k+1}^{(n)}} \left| \frac{\Delta\tau^{(0)}}{\Delta\tau^{(n)}} s + \tau_k^{(0)} - \frac{\Delta\tau^{(0)}}{\Delta\tau^{(n)}} \tau_k^{(n)} - s \right|.$$

Mit der Verschiebung $y := s - \tau_k^{(n)}$ ergibt sich schließlich die gewünschte Abschätzung:

$$\sup_{\tau_k^{(n)} \leq s \leq \tau_{k+1}^{(n)}} |\lambda_n(s) - s| = \sup_{0 \leq y \leq \Delta\tau^{(n)}} \left| \frac{\Delta\tau^{(0)}}{\Delta\tau^{(n)}}(y + \tau_k^{(n)}) + \tau_k^{(0)} - \frac{\Delta\tau^{(0)}}{\Delta\tau^{(n)}}\tau_k^{(n)} - (y + \tau_k^{(n)}) \right|$$

$$= \sup_{0 \leq y \leq \Delta\tau^{(n)}} \left| \left(\frac{\Delta\tau^{(0)}}{\Delta\tau^{(n)}} - 1 \right) y + (\tau_k^{(0)} - \tau_k^{(n)}) \right|$$

$$\leq \left| \frac{\Delta\tau^{(0)}}{\Delta\tau^{(n)}} - 1 \right| \Delta\tau^{(n)} + \left| \tau_k^{(0)} - \tau_k^{(n)} \right| \leq \left| \Delta\tau^{(0)} - \Delta\tau^{(n)} \right| + \delta$$

$$= \left| \tau_{k+1}^{(0)} - \tau_k^{(0)} - \left(\tau_{k+1}^{(n)} - \tau_k^{(n)} \right) \right| + \delta \leq \delta + \left| \tau_{k+1}^{(0)} - \tau_{k+1}^{(n)} \right| + \left| \tau_k^{(0)} - \tau_k^{(n)} \right| \leq 3\delta.$$

Damit erhält man aus (6.9) und (6.10) die obere Schranke

$$d_{[0,T]}(\chi(m_n)(\cdot), \chi(m_0)(\cdot)) \leq k_0\delta \vee 3\delta = \delta(k_0 \vee 3)$$

für alle $n \geq n_1$. Da δ beliebig klein gewählt werden kann, folgt mit dem Grenzübergang $\delta \downarrow 0$ die Konvergenz

$$d_{[0,T]}(\chi(m_n)(t), \chi(m_0)(t)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und damit die Behauptung. ■

Lemma 6.4

Sei $\mathcal{S}$ die in (6.5) definierte Menge von nichtsingulären Punkten. Dann sind die in (5.7) und (5.8) definierten Funktionale $\chi^{\max}$ bzw. $\chi^{\min}$ f.s. stetig in den Punkten

$$N := \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{\left(D(T\cdot\widetilde{\tau}_k), \widetilde{\eta}^{\leftarrow}(T^{-1}\widetilde{\Gamma}_k, \mathbf{V}_k)\mathbf{V}_k\right)} \ \textit{bzw.} \ \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_{(D(T\cdot\tau_k), \Psi_1(T^{-1}\Gamma_k))}$$

für alle $T \in \mathcal{S}$.

Beweis. An dieser Stelle wird lediglich die Stetigkeit von $\chi^{\max}$ im Punkt N nachgewiesen. Die Stetigkeit von $\chi^{\min}$ im entsprechenden Punkt lässt sich mit den gleichen Argumenten nachweisen.

Eine Beweisskizze für die Stetigkeit der eindimensionalen Version des Maximumsfunktionals ist auf Seite 214 des Buches von Resnick [46] zu finden.

Man betrachtet erneut die im Beweis von Lemma 6.2 konstruierte Menge $\mathcal{N}^C$, welche $\mathbb{P}(N \in \mathcal{N}^C) = 1$ erfüllt. Sei zunächst $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie im Beweis von Lemma 6.2. Nun wähle man den Stetigkeitspunkt $\varepsilon > 0$, welcher in die Konstruktion der Menge $\mathcal{N}^C$ eingeht, so klein, dass mindestens eine Marke von m_0 eine Norm $> \varepsilon$ besitzt. Im Beweis von Lemma 6.2 wurde begründet, dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$

$$m_n \left([0,T] \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d\right) = m_0 \left([0,T] \times [-\infty,\infty]^d \backslash \mathbb{K}_\varepsilon^d\right) = k_0$$

mit $1 \leq k_0 < \infty$ gilt. Im nächsten Schritt betrachtet man die Sortierung der Punkte von m_n aus dem Beweis von Lemma 6.2, welche

$$\left((t_i^{(n)}, x_i^{(n)}\right)_{1\leq i\leq k_0} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(t_i^{(0)}, x_i^{(0)}\right)_{1\leq i\leq k_0}$$

erfüllt und hält auch das in diesem Beweis gewählte $\delta > 0$ fest. Erneut definiert man eine Folge von Endomorphismen λ_n von $[0,T]$ duch

$$\lambda_n(0) = 0,\ \lambda_n(T) = T,\ \lambda_n\left(t_i^{(n)}\right) = t_i^{(0)}$$

und interpoliert zwischen den Punkten linear auf ganz $[0,T]$. Im Beweis von Lemma 6.2 wurde bereits gezeigt, dass die Abschätzung

$$\left\|\lambda_n^{-1}(t) - t\right\|_{[0,T]} = \|\lambda_n(t) - t\|_{[0,T]} \leq \max_{1\leq k\leq k_0} \left|t_k^{(n)} - t_k^{(0)}\right| \leq 3\delta$$

gilt. Zusätzlich gilt auch

$$\begin{aligned}
\left\|\chi^{\max}(m_n)(\lambda_n^{-1}(t)) - \chi^{\max}(m_0)(t)\right\|_{[0,T]} &= \left\| \bigvee_{t_k^{(n)}\leq\lambda^{-1}(t)} \|x_k^{(n)}\| - \bigvee_{t_k^{(0)}\leq t} \|x_k^{(0)}\| \right\|_{[0,T]} \\
= \left\| \bigvee_{\lambda\left(t_k^{(n)}\right)\leq t} \|x_k^{(n)}\| - \bigvee_{t_k^{(0)}\leq t} \|x_k^{(0)}\| \right\|_{[0,T]} &= \sup_{0\leq t\leq T} \left| \bigvee_{t_k^{(0)}\leq t} \|x_k^{(n)}\| - \bigvee_{t_k^{(0)}\leq t} \|x_k^{(0)}\| \right| \\
\leq \delta,
\end{aligned}$$

woraus die Konvergenz in der Metrik $d_{[0,T]}$ und damit auch die Konvergenz in der Skorokhodmetrik $\widetilde{d}_{[0,T]}$ folgt. ■

Lemma 6.5

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit Werten in einem lcsm Raum $\mathscr{X}$. Dann folgt aus der Konvergenz

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X_0$$

in $\mathscr{X}$ die Konvergenz der Punktmaße

$$\varepsilon_{X_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \varepsilon_{X_0}$$

für $n \to \infty$ in $M_p(\mathscr{X})$.

Beweis. Offenbar gilt aufgrund des Continuous Mapping Theorems für alle $f \in C_K^+(\mathscr{X})$ für $n \to \infty$ die Konvergenz

$$\int_{\mathscr{X}} f \; d\varepsilon_{X_n} = f(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} f(X_0) = \int_{\mathscr{X}} f \; d\varepsilon_{X_0}.$$

Die Behauptung folgt mit Satz 2.16. ■

6.2 Wichtige Sätze

Lemma 6.6 (Waldsche Gleichung für die Varianz)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ eine Folge von zentrierten i.i.d. Zufallsvariablen und T eine $\mathbb{N}$-wertige, integrierbare Stoppzeit bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\sigma(X_1, \ldots, X_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt

$$S_T := \sum_{k=1}^{T} X_k \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

und

$$Var(S_T) = Var(X_1) \cdot \mathbb{E}(T).$$

Beweis. Aufgrund der Stoppzeiteigenschaft ist die Zufallsvariable $\mathbf{1}_{T\geq m}$ messbar bzgl. $\mathcal{F}_{m-1}$ und damit insbesondere unabhängig von X_k für alle $k \geq m$. Daraus erhält man die Zentriertheit von S_T:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{T} X_k\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} X_k \mathbf{1}_{T\geq k}\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_k) \cdot \mathbb{E}(\mathbf{1}_{T\geq k}) = 0.$$

Ebenso folgt daraus

$$Var(S_T) = \mathbb{E}(S_T^2) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbf{1}_{T\geq k}\right)^2\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} X_k^2 \mathbf{1}_{T\geq k} + 2\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{m=k+1}^{\infty} X_k X_m \mathbf{1}_{T\geq k} \mathbf{1}_{T\geq m}\right)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_k^2)\cdot\mathbb{P}(T\geq k) + 2\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{m=k+1}^{\infty}\mathbb{E}\Big(X_k\mathbf{1}_{T\geq m}X_m\Big)$$

$$= Var(X_1)\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(T\geq k) + 2\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{m=k+1}^{\infty}\mathbb{E}\left(X_k\mathbf{1}_{T\geq m}\right)\mathbb{E}(X_m)$$

$$= Var(X_1)\cdot\mathbb{E}(T).$$

Da $X_1 \in L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ und T integrierbar ist, folgt $S_T \in L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. ■

Bemerkung 6.7

Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge von Zufallsvariablen, so dass $(X_n,Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge bildet. Dann bleibt die Aussage in Lemma 6.6 gültig, falls $T\in L^1(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ eine Stoppzeit bzgl. der Filtration $(\widetilde{\mathcal{F}}_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\sigma((X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ bildet.

Beweis. Da $(X_n,Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge bildet, bleibt offenbar die im Beweis von Lemma 6.6 verwendete Unabhängigkeit $\mathbf{1}_{T\geq m} \perp X_k$ für alle $k\geq m$ erhalten. ■

Lemma 6.8 (Markoff-Ungleichung)

Sei $X:\Omega\to\mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ eine monoton wachsende Abbildung. Dann gilt für jedes $\varepsilon>0$ mit $g(\varepsilon)>0$ die Abschätzung

$$\mathbb{P}(|X|\geq\varepsilon)\leq\frac{\mathbb{E}(g\circ|X|)}{g(\varepsilon)}.$$

Für den Speziallfall $g(x)=x^2$ erhält man die Tschebyscheff-Ungleichung

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|>\varepsilon)\leq\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}.$$

Beweis. Es gilt

$$\{|X|\geq\varepsilon\}\subset\{g\circ|X|\geq g(\varepsilon)\}.$$

Damit folgt aus

$$g(\varepsilon)\cdot\mathbb{P}(|X|\geq\varepsilon)\leq g(\varepsilon)\cdot\mathbb{P}(g\circ|X|\geq g(\varepsilon)) = \int g(\varepsilon)\cdot\mathbf{1}_{g\circ|X|\geq g(\varepsilon)}d\mathbb{P}\leq\int g\circ|X|d\mathbb{P}$$

die Behauptung. Die Folgerung für den Fall $g(x)=x^2$ ist trivial. ■

Nun werden Lemma 6.6 und Lemma 6.8 benutzt um die folgende, verallgemeinerte Version der Maximumsungleichung für integrierbare Stoppzeiten zu beweisen.

Lemma 6.9 (Verallgemeinerte Maximumsungleichung)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ eine Folge von zentrierierten i.i.d. Zufallsvariablen und T eine $\mathbb{N}$-wertige, integrierbare Stoppzeit bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}} := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq T}\left|\sum_{j=1}^{k} X_j\right| \geq \delta\right) \leq \delta^{-2} \cdot \mathbb{E}(T) \cdot Var(X_1).$$

Beweis. Man betrachtet den Partialsummenprozess $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$ mit der Konvention $S_0 := 0$. Mit Hilfe dieses definiert man den gestoppten Partialsummenprozess $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$M_0 := 0,\ \ M_{k+1} := \begin{cases} S_{k+1}, & \text{falls } \max_{1\leq j\leq k}|S_j| < \delta \\ M_k & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.
Zunächst beschränkt man die Stoppzeit durch eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, d.h. man betrachtet $T \wedge n$. Nun gilt aufgrund der Stoppzeiteigenschaft die Unabhängigkeit $\mathbf{1}_{T\wedge n\geq k} \perp X_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, welche mit Hilfe des Satzes der dominierten Konvergenz die folgende Darstellung des zweiten Moments des gestoppten Partialsummenprozesses liefert:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{T\wedge n}(S_k - S_{k-1})^2\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{T\wedge n} S_k^2 - 2S_kS_{k-1} + S_{k-1}^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{T\wedge n} S_k^2 - 2(S_{k-1} + S_k - S_{k-1})S_{k-1} + S_{k-1}^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{T\wedge n}\left(S_k^2 - S_{k-1}^2\right)\right) - 2\cdot\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{T\wedge n} X_kS_{k-1}\right) \\
&= \mathbb{E}(S_{T\wedge n}^2) - \mathbb{E}(S_0^2) - 2\cdot\mathbb{E}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} X_kS_{k-1}\mathbf{1}_{k\leq T\wedge n}\right) \\
&= \mathbb{E}(S_{T\wedge n}^2) - 2\mathbb{E}(X_1)\cdot\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{E}(S_{k-1}\mathbf{1}_{k\leq T\wedge n}) \\
&= \mathbb{E}(S_{T\wedge n}^2).
\end{aligned}$$

Genauso folgt

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{T\wedge n}(M_k - M_{k-1})^2\right) = \mathbb{E}(M_{T\wedge n}^2) - 2\cdot\mathbb{E}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}(M_k - M_{k-1})S_{k-1}\mathbf{1}_{k\leq T\wedge n}\right). \tag{6.11}$$

Ist nun $\max_{1\leq j\leq k-1}|S_j| \geq \delta$, so folgt $M_k = M_{k-1}$. Im anderen Fall $\max_{1\leq j\leq k-1}|S_j| < \delta$ erhält man $M_k = S_k,\ M_{k-1} = S_{k-1}$. Damit und mit (6.11) lässt sich mit den gleichen Argumenten wie oben eine analoge Darstellung des zweiten Moments des gestoppten Prozesses $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finden

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{T\wedge n}(M_k - M_{k-1})^2\right)\\
&= \mathbb{E}(M_{T\wedge n}^2) - 2\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\left((M_k - M_{k-1})S_{k-1}\mathbf{1}_{k\leq T\wedge n}\mathbf{1}_{\max_{1\leq j\leq k-1}|S_j|\geq\delta}\right)\\
&- 2\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\left((M_k - M_{k-1})S_{k-1}\mathbf{1}_{k\leq T\wedge n}\mathbf{1}_{\max_{1\leq j\leq k-1}|S_j|<\delta}\right)\\
&= \mathbb{E}(M_{T\wedge n}^2) - 2\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\left((S_k - S_{k-1})S_{k-1}\mathbf{1}_{k\leq T\wedge n}\mathbf{1}_{\max_{1\leq j\leq k-1}|S_j|<\delta}\right)\\
&= \mathbb{E}(M_{T\wedge n}^2) - 2\mathbb{E}(X_1)\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\left(S_{k-1}\mathbf{1}_{k\leq T\wedge n}\mathbf{1}_{\max_{1\leq j\leq k-1}|S_j|<\delta}\right)\\
&= \mathbb{E}(M_{T\wedge n}^2).
\end{aligned}
$$

Insgesamt erhält man mit der Markoff-Ungleichung, vgl. Satz 6.8, und der Ungleichung $|M_k - M_{k-1}| \leq |S_k - S_{k-1}|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq T\wedge n}|S_k| \geq \delta\right) = \mathbb{P}\left(|M_{T\wedge n}| \geq \delta\right) \leq \delta^{-2}\ \mathbb{E}\left(M_{T\wedge n}^2\right) = \delta^{-2}\ E\left(\sum_{k=1}^{T\wedge n}(M_k - M_{k-1})^2\right)\\
&\leq \delta^{-2}\ E\left(\sum_{k=1}^{T\wedge n}(S_k - S_{k-1})^2\right) = \delta^{-2}\ \mathbb{E}\left(S_{T\wedge n}^2\right). \qquad (6.12)
\end{aligned}
$$

Nun soll ein Übergang von beschränkten zu unbeschränkten Stoppzeiten erfolgen. Bildet man den Grenzübergang für $n \to \infty$, so folgt aus der f.s. Konvergenz

$$\max_{1\leq k\leq T\wedge n}|S_k| \xrightarrow{f.s.} \max_{1\leq k\leq T}|S_k|$$

die Konvergenz in Verteilung und somit nach dem Portmanteau-Theorem

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq T\wedge n}|S_k| \geq \delta\right) \geq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq T}|S_k| \geq \delta\right). \qquad (6.13)$$

Da die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zentriert ist, bildet der Partialsummenprozess $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offenbar ein Martingal bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach Klenke [32, Satz 10.15] bildet somit auch $(S_{T\wedge n}, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal. Weiter gilt nach Lemma 6.6 die L^2-Beschränktheit

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\ \mathbb{E}(S_{T\wedge n}^2) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}(T\wedge n)\cdot\mathbb{E}(X_1^2) < \infty,$$

woraus mit Hilfe des Martingalkonvergenzsatzes, vgl. Klenke [32, Satz 11.10], die Existenz einer $\mathcal{F}_\infty$-meßaren Zufallsvariable X_∞ folgt, welche den L^2-Limes des Martingals $(S_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ bildet

$$S_{T\wedge n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X_\infty \text{ f.s. und in } L^2.$$

Da $S_{T\wedge n} \overset{f.s.}{\longrightarrow} S_T$ für $n \to \infty$ gilt, folgt wegen der Eindeutigkeit von Limiten und mit Lemma 6.6 die Konvergenz

$$\mathbb{E}(S^2_{T\wedge n}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(S_T^2) = \mathbb{E}(T) \cdot Var(X_1),$$

woraus man mit (6.12) und (6.13) die Behauptung erhält. ■

Bemerkung 6.10
Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge von Zufallsvariablen, so dass $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge bildet. Dann bleibt die Aussage in Lemma 6.9 gültig, falls $T \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ eine Stoppzeit bzgl. der Filtration $(\widetilde{\mathcal{F}}_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\sigma((X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ bildet.

Beweis. Da $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge bildet, bleibt offenbar die im Beweis von Lemma 6.9 verwendete Unabhängigkeit $\mathbf{1}_{T\wedge n\geq k} \perp X_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ erhalten. Zusätzlich ist Lemma 6.6 nach Bemerkung 6.7 weiterhin anwendbar. ■

Lemma 6.11 (Spezialfall des Satzes von Karamata)
Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Weiter sei

$$V(t) = \mathbb{P}(|X| > t)$$

der tail der Verteilung von X und

$$U(t) = \mathbb{E}\left(X^2 \mathbf{1}_{|X|\leq t}\right)$$

das zweite abgeschnittene Moment von X. Dann sind für alle $0 < \beta < 2$ die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $U \in RV_{2-\beta}$;

(ii) $V \in RV_{-\beta}$;

(iii) $\lim_{t\to\infty} t^2 \frac{V(t)}{U(t)} = \frac{2-\beta}{\beta}$.

Beweis. Sei μ die Verteilung von $|X|$. Dann folgt aus $U(t) = \int_0^t x^2 d\mu(x)$ die Identiät $dU(t) = t^2 d\mu(x)$. Also gilt:

$$V(t) = \int_t^\infty d\mu(x) = \int_t^\infty x^{-2} x^2 d\mu(x) = \int_t^\infty x^{-2} dU(x).$$

Aus Meerschaert und Scheffler [40, Theorem 5.3.11] folgt dann die Äquivalenz von (i) und (iii). Mit den gleichen Argumenten zeigt man die Äquivalenz von (ii) und (iii). ■

In den Kapiteln, die sich mit gekoppelten *CTRWs* beschäftigen, wird die Unabhängigkeit von Antirängen und Orderstatistiken verwendet. Diese soll noch an dieser Stelle nachgewiesen werden. Dazu werden folgende zwei Definitionen benötigt.

Definition 6.12
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta})$ ein statistisches Experiment und $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$ eine Teil-σ-Algebra.

(a) Die σ-Algebra $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$ heißt suffizient für $(\mathbb{P})_{\theta\in\Theta}$, falls für alle $A \in \mathcal{A}$ eine von $\theta \in \Theta$ unabhängige Version der bedingten Erwartung $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_\theta}(\mathbf{1}_A|\mathcal{T})$ existiert.

(b) Sei $T : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ eine Statistik. Dann heißt T suffizient, falls $\mathcal{T} := T^{-1}(\mathcal{A}')$ suffizient ist.

Man kann Suffizienz nun auf die folgende Weise interpretieren. Liegt eine suffiziente σ-Algebra $\mathcal{T}$ vor, so enthält das statistische Experiment $(\Omega, \mathcal{T}, (\mathbb{P}_{\theta|\mathcal{T}})_{\theta\in\Theta})$ ebensoviel Information, wie das ursprüngliche Experiment $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta})$.

Definition 6.13
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta})$ ein statistisches Experiment und $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$ eine Teil-σ-Algebra.

(a) Die σ-Algebra $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$ heißt vollständig für $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, falls gilt:

Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{T}-$messbar, $f \in L^1(\mathbb{P}_\theta)$ für alle $\theta \in \Theta$ mit $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_\theta}(f) = 0$ für alle $\theta \in \Theta$, so folgt $f = 0$ $\mathbb{P}_{\theta|\mathcal{T}}$ f.s. für alle $\theta \in \Theta$.

(b) Sei $T : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ eine Statistik. Dann heißt T vollständig, falls $T^{-1}(\mathcal{A}')$ vollständig ist.

(c) Eine σ-Algeba bzw. eine Statistik heißt beschränkt vollständig, falls (a) bzw. (b) für alle beschränkten und $\mathcal{T}$-messbaren Funktionen f gilt.

Im Gegensatz zum Begriff der Suffizienz, der ein Experiment betrachtet, welches eine kleinere Familie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen enthält, ist die Vollständigkeit eine Reichhaltigkeitsforderung an die Familie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$. Der Wert dieser beiden Begriffe ist in der Schätztheorie zu finden. Falls man eine suffiziente und vollständige σ-Algebra $\mathcal{T}$ zur Verfügung hat, um ein Funktional erwartungstreu zu schätzen, wobei das Risiko bzgl. einer strikt konvexen Verlustfunktion minimiert werden soll, so kann gezeigt werden, dass ein Schätzer, der dies leistet, messbar bzgl. $\mathcal{T}$ und f.s. eindeutig ist. Da jenes Resultat für diese Arbeit jedoch irrelevant ist, wird an dieser Stelle darauf verzichtet. Stattdessen sollen die beiden Begriffe genutzt werden, um eine hinreichende Bedingung für Unabhängigkeit von Zufallsvariablen zu formulieren.

Lemma 6.14 (Basu)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta})$ ein statistisches Experiment, $T : \Omega \to \Omega'$ eine suffiziente und beschränkt vollständige Statistik. Sei weiter $V : \Omega \to \Omega''$ eine ancillare Statistik, d.h. es gilt $\mathbb{P}_\theta^V = Q$ für alle $\theta \in \Theta$. Dann sind T und V $\mathbb{P}_\theta$-stochastisch unabhängig für alle $\theta \in \Theta$.

Beweis. Vgl. Lehmann und Romano [34, Theorem 5.1.2]. ■

Dieses Lemma soll nun genutzt werden, um die in Kapitel 4 verwendete Unabhängigkeit von Antirängen und Orderstatistiken nachzuweisen. Dazu sollen diese Begriffe zunächst einmal definiert werden.

Definition 6.15
Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$.

(a) Für $i \leq n$ heißt $r_i = r_i(x) := \#\{j \in \{1, \ldots, n\} : x_j \leq x_i\}$ der Rang von x_i. Der zugehörige Vektor $r(x) := (r_1(x), \ldots, r_n(x))$ heißt auch Rangvektor.

(b) Die inverse Permutation $(d_1(x), \ldots, d_n(x)) = d(x) := r(x)^{-1}$ heißt auch Antirangvektor und $d_i(x)$ heißt auch der i-te Antirang.

(c) Der i-te Eintrag der geordneten Stichprobe $x_{i:n} := x_{d_i}$ heißt auch i-te Orderstatistik.

Um nun mit dem Lemma von Basu die Unabhängigkeit von Antirängen und Orderstatistiken nachzuweisen, muss gezeigt werden, dass die Orderstatistik suffizient und vollständig für die Familie aller Wahrscheinlichkeitsmaße ist und dass Antiränge ancillar bzgl. dieser Familie sind.

Lemma 6.16
Sei $(\mathbb{P})_{\theta\in\Theta}$ *die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Raum* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. *Sei ferner* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta})$ *ein statistisches Experiment und* $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, (\mathbb{P}_\theta)^n_{\theta\in\Theta}\right)$ *das Produktexperiment. Dann ist die Orderstatistik*

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{1:n}, \ldots, x_{n:n})$$

suffizient und vollständig für $(\mathbb{P}_\theta)^n_{\theta\in\Theta}$.

Beweis. Die Suffizienz der Orderstatistik wird in Beispiel 3.7 b) bei Witting [58] nachgewiesen. Nun gilt für alle konvexen Familien von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\widetilde{\mathbb{P}}_\theta)_{\theta\in\Theta} \subseteq \{\text{Wahrscheinlichkeitsmaße auf } (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})\}$ für welche $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, (\widetilde{\mathbb{P}}_\theta)_{\theta\in\Theta})$ vollständig ist, dass die Orderstatistik für $(\widetilde{\mathbb{P}}_\theta)^n_{\theta\in\Theta}$ vollständig ist, vgl. Pfanzagl [44, Theorem 1.5.10]. Offenbar ist die Familie aller Wahrscheinlichkeitsmaße $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ konvex. Sei also

$$\int f d\mathbb{P}_\theta = 0$$

für alle $\mathbb{P}_\theta \in (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$. Man definiert die Mengen $A_1 := \{f > 0\}$ und $A_2 := \{f < 0\}$. Es bleibt zu zeigen: $\mathbb{P}_\theta(A_i) = 0$ für $i = 1, 2$ und alle $\mathbb{P}_\theta \in (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$. Angenommen es gilt $\mathbb{P}_\theta(A_i) > 0$ für ein $\mathbb{P}_\theta \in (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$. Dann ist

$$\mathbf{1}_{A_i} \frac{\mathbb{P}_\theta}{\mathbb{P}_\theta(A_i)} \in (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$$

und es gilt

$$\int f \mathbf{1}_{A_i} \frac{d\mathbb{P}_\theta}{\mathbb{P}_\theta(A_i)} \neq 0,$$

was einen Widerspruch zur getroffenen Annahme bedeutet. ■

Kapitel 7

Symbolverzeichnis

Folgende Abkürzungen, Symbole und Notationen, welche nicht explizit definiert wurden, werden in dieser Arbeit benutzt:

bzgl.	bezüglich
d.h.	das heißt
i.A.	im Allgemeinen
i.i.d.	independent identically distributed
i.Z.	in Zeichen
cf.	confer
i.e.	id est
càdlàg	continue à droite, limites à gauche (rechtsstetig mit linksseitigen Limiten)
càglàd	continue à gauche, limites à droite (linksstetig mit rechtsseitigen Limiten
CTRW	Continuous Time Random Walk

Ω	Grundraum
$(\Omega, \mathcal{A})$	Messraum, Grundraum versehen mit σ-Algebra $\mathcal{A}$
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$	Maßraum, Grundraum versehen mit σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf der ein Maß $\mathbb{P}$ definiert ist

$\mathbb{E}(\cdot)$	Erwartungswertoperator
$Var(\cdot)$	Varianzoperator
$Cov(\cdot)$	Kovarianzoperator
$\circ$	Kompositionsoperator
$\times$	kartesisches Produkt
$\otimes$	Tensorprodukt
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen vereinigt mit 0
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
$\mathbb{K}^d$	Offene d-dimensionale Einheitskugel
$\mathbb{K}^d_\varepsilon$	Offene d-dimensionale Kugel um 0 mit Radius ε
$\mathbb{S}^d$	d-dimensionale Einheitsspähre
$\mathbb{S}^d_\varepsilon$	d-dimensionale Sphäre um 0 mit Radius ε
$\mathbb{B}^d$	d-dimensionaler Einheitsball
$\mathbb{B}^d_\varepsilon$	d-dimensionaler Ball um 0 mit Radius ε
$\mathcal{B}$	Borelmengen der reellen Zahlen
$\mathfrak{S}_n$	Symmetrische Gruppe auf n Symbolen
$M_+(\mathscr{X})$	Radonmaße auf dem Raum $\mathscr{X}$.
$M_p(\mathscr{X})$	Punktmaße auf dem Raum $\mathscr{X}$.
$C[0,T]$	Raum aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,T]$
$D[0,T]$	Raum aller càdlàg-Funktion auf dem Intervall $[0,T]$
$G[0,T]$	Raum aller càglàd-Funktion auf dem Intervall $[0,T]$
$L(\mathbb{R}^d)$	lineare Gruppe auf dem $\mathbb{R}^d$
$GL(\mathbb{R}^d)$	generalisierte lineare Gruppe auf dem $\mathbb{R}^d$
(a,b)	offenes Intervall von a bis b
$[a,b]$	abgeschlossenes Intervall von a bis b
$\{a,b\}$	Menge bestehend aus den Elementen a und b
$\lfloor\cdot\rfloor$	untere Gaußklammer
$\lceil\cdot\rceil$	obere Gaußklammer
$\vert\cdot\vert$	Betrag

$< \cdot, \cdot >$	Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^d$
$\\| \cdot \\|$	mit dem Skalarprodukt $< \cdot, \cdot >$ assoziierte Norm

$\sup A$	Supremum der Menge A
$\inf A$	Infimum der Menge A
$\limsup_{n\to\infty} x_n$	Limes Superior der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\liminf_{n\to\infty} x_n$	Limes Inferior der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\lim_{n\to\infty} x_n$	Limes der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$Disc(f)$	Menge der Unstetigkeitsstellen der Funktion f

$\xrightarrow{\mathcal{D}}$	Konvergenz in Verteilung
$\xrightarrow{w}$	schwache Konvergenz
$\xrightarrow{f.s.}$	f.s. Konvergenz

$\stackrel{\mathcal{D}}{=}$	Gleichheit in Verteilung
$\stackrel{f.s.}{=}$	fast sichere Gleichheit

$\sum$	Summenzeichen
$\prod$	Produktzeichen
$\int f(x)\, dx$	Riemann-Integral der Funktion f
$\int f(x)\, dF(x)$	Riemann-Stieltjes-Integral der Funktion f bzgl. der Funktion F

$\log$	natürlicher Logarithmus
$sign(x)$	Vorzeichenfunktion der reellen Zahl x
f^+	$\max(f, 0)$
f^-	$\min(f, 0)$
$f^+ + f^-$	Zerlegung in Positiv- und Negativteil
$\mathcal{U}(0,1)$	Gleichverteilung auf dem Intervall $[0,1]$

Literaturverzeichnis

[1] D. Appelbaum, *Lévy Processes und Stochastic Calculus*, Cambridge University Press (2004), Cambridge.

[2] B. Baeumer und M.M. Meerschaert, Stochastic solutions for fractional Cauchy problems, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 4 (2001), S. 481-500

[3] A. Barczyk, A. Janssen und M. Pauly, The asymptotics of L-statistics for non i.i.d. variables with heavy tails, *Probab. Math. Stat.* 31 (2011), S. 285-299.

[4] P. Becker-Kern, Random sums of independent random vectors attracted by (semi)-stable hemigroups, *Jour. Appl. Anal.* 10 (2004), S. 83-104.

[5] D. Benson, R. Schumer und M.M. Meerschaert, Recurrence of extreme events with power-law interarrival times, *Geophys. Res. Let.* 34 (2007), L16404.

[6] D.A. Bertoin, *Lévy Processes*, Cambridge University Press (1996), Cambridge.

[7] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley Series in Probability and Statistics (1968), Wiley.

[8] R. Carmona und D. Nualart, *Nonlinear Stochastic Integrators, Equations and Flows*, Stochastics Monographs 6 (1990), Gordon and Breach Science Publishers, New York.

[9] R. Cont und P. Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC (2004), Boca Raton.

[10] D. Daley und D. Vere-Jones, *An Introduction to the Theory of Point Processes*, Springer (1988), New York.

[11] L. de Haan und Anna Ferreira, *Extreme Value Theorey*, Springer (2006), New York.

[12] J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, Springer (2009), Berlin.

[13] T.S. Ferguson und M.J. Klass, A representation of independent increment processes without gaussian components, *Ann. Math. Stat.* 43 (1972), S. 1634-1643.

[14] P. Feigin, M.F. Krantz und S.I. Resnick, Parameter estimation for moving averages with positive innovations, *Ann. Appl. Probab.* 6 (1996), S. 1157-1190.

[15] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory ans Its Applications*, Wiley Series in Probability and Statistics (1966), Wiley.

[16] M. Finkelstein und H.G. Tucker, A necessary and sufficient condition for convergence in law of random sums of random variables under nonrandom centering, *Proc. Am. Math. Soc.* 107 (1989), S. 1061-1070.

[17] R.A. Fisher und L.H.C. Tippett, Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 25 (1928), S. 180-190.

[18] M. Fréchet, Sur la loi de probabilité de l'écart maximum, *Ann. Soc. Math. Polon.* 6 (1927), S. 93-116.

[19] I.I. Gihman und A.V. Skorokhod, *The Theory of Stochastic Processes III*, Die Grundlehr. d. math. Wissensch. (1979), Vol. 232, Springer, Berlin.

[20] B. Gnedenko, Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, *Ann. Math.* 44 (1943), S. 423-453.

[21] B. Gnedenko, und A.V. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addison-Wesley (1968), Reading, MA.

[22] B. Gnedenko, On limit theorems for a random number of random variables, *Lect. Notes Math.* 1021 (1983), S. 167-176.

[23] B. Gnedenko und V.J. Korolev, *Random Summation*, CRC Press (1996), Boca Raton.

[24] M.G. Hahn, W.N. Hudson und J.A. Veeh, Operator stable laws: Series representation and domains of normal attraction, *Jour. Theor. Probab.* 2 (1989), S. 3-35.

[25] B.I. Henry und P. Straka, Lagging and leading coupled continuous time random walks, renewal times and their joint limits, *Stoch. Proc. Appl.* 121 (2011), S. 324-336.

[26] M. Jacobsen, *Point Process, Theory and Applications*, Birkhäuser (2006), Boston.

[27] A. Janssen und D.M. Mason, Non-standard rank tests, *Lect. Notes Stat.* 65 (1990), Springer, New York.

[28] A. Janssen, Sums of independent triangular arrays and extreme order statistics, *Ann. Probab.* 22 (1994), S. 1766-1793.

[29] A. Janssen, Invariance principles for sums of extreme sequential order statistics attracted to Lévy processes, *Stoch. Proc. Appl.* 85 (2000), S. 255-277.

[30] A. Jurlewicz, P. Kern, M.M. Meerschaert and H.P. Scheffler, Fractional governing equations for coupled random walks, Preprint (2011), erscheint in *Comp. Math. Appl.*, doi:10.1016/j.camwa.2011.10.010.

[31] O. Kallenberg, *Random Measures*, Akad.-Verl. (1986), Berlin.

[32] A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer (2006), Berlin.

[33] K. Kuratowski, *A Half Century of Polish Mathematics: Remembrances and Reflections*, Pergamon Press (1980), Oxford.

[34] E.L. Lehmann und J.P. Romano, *Testing Statistical Hypotheses*, Springer (2005), New York.

[35] R. LePage, Multidimensional infinitely divisidle variables and processes part II, *Lect. Notes Math.* 860 (1981), S. 297-284.

[36] R. LePage, M. Woodroofe und J. Zinn, Convergence to a stable distribution via order statistics, *Ann. Probab.* 9 (1981), S. 624-632.

[37] T. Lindvall, Weak convergence of probability measures and random functions in the function space $D[0, \infty)$, *Jour. Appl. Probab.* 10 (1973), 109-121.

[38] F. Mallor und E. A.M. Omey, *Univariate and multivariate weighted renerwal theory*, Public University of Navarra (2006), Pamplona.

[39] M.M. Meerschaert und H.P. Scheffler, *One-dimensional marginals of operator stable laws and their domains of attraction*, Publ. Math. Debrecen 55 (1999), 487-499.

[40] M.M. Meerschaert und H.P. Scheffler, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Vectors*, Wiley Series in Probability and Statistics (2001), Wiley.

[41] M.M. Meerschaert und H.P. Scheffler, Limit theorems for continuous-time random walks with infinite mean waiting times, *Jour. Appl. Probab.* 41 (2004), S. 623-638.

[42] R. Meise und D. Vogt, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg Studium (1992), Braunschweig/Wiesbaden.

[43] V.V. Petrov, *Limit Theorems of Probability Theory*, Clarendon Press (1995), Oxford.

[44] J. Pfanzagl, *Parametric Statistical Theory*, De Gruyter (1994), Berlin.

[45] J. Pickands III, Statistical interference using extreme order statistics, *Ann. Math. Stat.* 3 (1975), S. 119-131.

[46] S.I. Resnick, *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes*, Springer (1987), Berlin.

[47] S.I. Resnick, *Heavy-Tail Phenomena*, Springer (2007), New York.

[48] J. Rosiński, *Series representations of Lévy processes from the perspective of point processes*, In Levy Processes - Theory and Applications, Birkhauser (2001), S. 401 - 415.

[49] G. Samorodnitsky und M. Taqqu, *Stable non-Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall (1994), New York.

[50] E. Scalas, Five years of continuous-time random walks in Econophysics, *Proc. of WEHIA* 55 (2004), S. 223-230.

[51] H.P. Scheffler, Series representation for operator semistable laws and domains of normal attraction, *Jour. Math. Sci.* 92 (1998), S. 4062-4084.

[52] R. Schumer, B. Baeumer, M.M. Meerschaert, Extremal behavior of a coupled continuous time random walk, *Physica* 390 (2010), S. 505-511.

[53] E. Seneta, *Regularly Varying Functions*, Springer (1976), Berlin.

[54] M. Shlesinger, J. Klafter und Y.M. Wong, Random walks with infinite spatial and temporal moments, *Jour. Stat. Phys.* 27 (1982), S. 499-512.

[55] D.S. Silvestrov und J.L. Teugels, Limit theorems for mixed max-sum processes with renewal stopping, *Ann. Appl. Probab.* 14 (2004), S. 1838-1868.

[56] W. Whitt, Some useful functions for functional limit theorems, *Math. Oper. Res.* 5 (1980), S. 67-85.

[57] W. Whitt, *Stochastic Process Limits*, Springer (2002), New York.

[58] H. Witting, *Mathematische Statistik; Parametrische Verfahren bei festem Stichprobenumfang*, B.G. Teubner (1985), Stuttgart.

Erklärung

Die hier vorgelegte Dissertation habe ich eigenständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt. Die Dissertation wurde in der vorgelegten oder in ähnlicher Form noch bei keiner anderen Institution eingereicht. Ich habe bisher keine erfolglosen Promotionsversuche unternommen.

Adam Barczyk Düsseldorf, den 03.05.2012