

# Lokale Einschlußzeiten eines Tokamak-Plasmas

Inaugural-Dissertation  
zur  
Erlangung des Doktorgrades der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

**RALF PIERRE**

aus Haan

Düsseldorf 2003

Gedruckt mit Genehmigung der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent: Prof. Dr. E. Rebhan

Koreferent: Prof. Dr. D. Reiter

Tag der mündlichen Prüfung: 3. Februar 2003

©Ralf Pierre 2003



## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird durch die Einführung von lokalen Einschlußzeiten eine genauere Untersuchung eines gezündeten Fusionsplasmas vorgestellt, als es bisher mit globalen Einschlußzeiten möglich war. Die Grundlage zur Definition dieser lokalen Größen bildet das Vorhandensein eines Dichte- und eines Temperaturprofils. Mit Hilfe von Bilanzgleichungen und einem eindimensionalen Plasmamodell wird die lokale Teilcheneinschlußzeit  $\tau_p(r)$  und die lokale Energieeinschlußzeit  $\tau_E(r)$  für ein Fusionsplasma im Gleichgewichtszustand definiert. Zusätzlich wird für dieses Modell die Berechnung von Brennkurven vorgestellt, die ebenfalls um eine räumliche Komponente ergänzt wird.

Ein Kapitel beschäftigt sich nur mit dem Plasmazentrum und leitet dort die Zusammenhänge zwischen der Temperatur, der Konzentration für die  $\alpha$ -Teilchen und dem Verhältnis der Einschlußzeiten ab. Anschließend werden die Eigenschaften der zu erwartenden Profilverläufe von  $\tau_p(r)$  und  $\tau_E(r)$  in Abhängigkeit der Dichte- und Temperaturprofile bestimmt. Für den aus technischer Sicht interessanten Bereich sind hieraus steigende Verläufe zu erwarten.

Ein wesentlicher Schwerpunkt dieser Arbeit ist die Untersuchung des Einflusses der Einschlußzeitprofile auf die Verläufe der Dichte und der Temperatur. Hierzu wird ein Verfahren hergeleitet, mit dem aus vorgegebenen  $\tau_p(r)$  und  $\tau_E(r)$  das zugehörige Dichte- und Temperaturprofil berechnet werden kann. Dabei stellt sich heraus, daß die Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen nicht beliebig vorgegeben werden kann, sondern durch  $\tau_p(r)$  und  $\tau_E(r)$  fest vorbestimmt ist. Die Beispielrechnungen hierzu haben gezeigt, daß die beiden Einschlußzeitprofile einen ähnlichen Verlauf aufweisen müssen, damit die Dichte und die Temperatur physikalisch sinnvolle Verläufe haben. Darüber hinaus ist festzustellen, daß die Dichte- und Temperaturverläufe sehr sensitiv von den vorgegebenen Einschlußzeitprofilen abhängen. Ein weiterer Schwerpunkt ist die Untersuchung von Brennkurvendiagrammen zu verschiedenen Dichte- und Temperaturprofilen. Diese werden für unterschiedliche Brennbereiche miteinander verglichen. Dabei läßt sich bei einzelnen Brenngleichtungen zum Teil ein sehr unterschiedliches Verhalten beobachten, das sich in den Verläufen der Einschlußzeitprofile widerspiegelt. Die größten Auffälligkeiten treten bei niedrigen Temperaturen und hohen Konzentrationen der  $\alpha$ -Teilchen auf. Bei der Untersuchung von Brennkurven kann das Phänomen auftreten, daß diese in bestimmten Brennbereichen aufbrechen. Die Ursache hierfür liegt in einem so ungünstigen Verlauf der Dichte und der Temperatur, daß nur bei Mittelung über einen hinreichend großen Bereich des Plasmas ein Gleichgewicht existiert.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Grundlagen des Plasmamodells . . . . .	3
2.2	Definition lokaler Einschlußzeiten . . . . .	4
2.2.1	Definition der Teilcheneinschlußzeit . . . . .	4
2.2.2	Definition der Energieeinschlußzeit . . . . .	5
2.3	Berechnung von Brenngleichgewichten . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Untersuchung des Plasmazentrums</b>	<b>13</b>
3.1	Maximalwert von $\rho$ in Abhängigkeit von $f_\alpha$ . . . . .	14
3.2	Maximalwert von $\rho$ in Abhängigkeit von $T$ . . . . .	16
3.3	Brennkurven für das Plasmazentrum . . . . .	17
3.4	Übertragung der Grenzkurven in das Brennkurvendiagramm . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Merkmale der Einschlußzeitprofile</b>	<b>21</b>
4.1	Konstante Einschlußzeiten . . . . .	21
4.2	Entwicklung um das Plasmazentrum . . . . .	23
4.2.1	Einschlußzeiten durch $n(r)$ und $T(r)$ ausgedrückt . . . . .	23
4.2.2	$n(r)$ und $T(r)$ durch Einschlußzeiten ausgedrückt . . . . .	24
4.3	Berechnung konkreter Beispiele . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Berechnung von <math>n(r)</math> und <math>T(r)</math> aus den Einschlußzeitprofilen</b>	<b>33</b>
5.1	Gegebenes Profil $\tau_p(r)$ . . . . .	34
5.1.1	Berechnung des Dichteprofiles . . . . .	34
5.1.2	Berechnung des Temperaturprofils . . . . .	36
5.2	Gegebenes Profil $\tau_E(r)$ . . . . .	40
5.3	Berechnung von $n(r)$ und $T(r)$ aus gegebenen $\tau_E(r)$ und $\tau_p(r)$ . . . . .	40
5.4	Beispiele zur Berechnung von $n(r)$ und $T(r)$ aus den Einschlußzeitprofilen . . . . .	46

5.4.1	2-parametrische Einschlußzeitprofile . . . . .	46
5.4.2	3-parametrische Einschlußzeitprofile . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Brennkurven für ausgewählte Standardprofile <math>n(r)</math> und <math>T(r)</math></b>	<b>57</b>
6.1	Vorgabe von $\rho$ am Plasmarand . . . . .	58
6.1.1	Brennkurven und Verläufe von $\tau_p(r)$ , $\tau_E(r)$ und $\rho(r)$ an einem konkreten Beispiel . . . . .	58
6.1.2	Geschlossene und offene Brennkurven . . . . .	65
6.2	Vorgabe von $\rho$ im Plasmazentrum . . . . .	67
6.2.1	Brennkurven und Verlauf von $\tau_p(r)$ , $\tau_E(r)$ und $\rho(r)$ an einem konkreten Beispiel . . . . .	68
6.2.2	Geschlossene und offene Brennkurven . . . . .	74
6.3	Verschiebung von $\rho_{\max}$ und $T_{\min}$ . . . . .	76
6.4	Katalog von Brennkurvendiagrammen . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>85</b>
<b>Anhang</b>		
<b>A</b>	<b>Die Formeln von Cardano</b>	<b>89</b>
<b>B</b>	<b>Die Regel von l'Hôpital</b>	<b>91</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>93</b>
<b>Danksagungen</b>		<b>97</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Der kontrollierten Kernfusion kann für die zukünftige weltweite Energieversorgung eine tragende Rolle zukommen. Es gibt dabei unterschiedliche Konzepte, wie die Gewinnung von Energie aus der Verschmelzung von Atomkernen realisiert werden kann. In Europa wird vornehmlich an dem magnetischen Einschluß eines heißen Plasmas, der in einem Tokamak oder einem Stellarator verwirklicht wird, gearbeitet. Hierbei treten eine Vielzahl von Schwierigkeiten auf, die sowohl technisch bedingt sind als auch auf physikalischen Verständnisproblemen beruhen [1, 2, 3, 4, 5].

Eines der ungelösten Probleme ist der Transport sowohl der Teilchen als auch der Energie in einem Fusionsplasma. Man versucht diesem beizukommen, indem man Einschlußzeiten definiert, mit denen diese Prozesse beschrieben werden können. Man benutzt dabei eine sehr pauschale Beschreibung dieser Transportprozesse und erfaßt diese durch globale Einschlußzeiten. Details der Vorgänge, die sich im Inneren des Plasmas abspielen, werden hierbei nicht beschrieben. Im Hinblick auf Fusionsreaktoren sind in den letzten Jahren Skalierungsgesetze für die globale Energieeinschlußzeit entwickelt worden, die diese in Verbindung mit den wichtigsten Plasmametern setzen. Hierbei werden Parameter wie Stromstärke, Magnetfeld, Radius (kleiner und großer Torusradius), mittlere Dichte, mittlere Temperatur usw. verwendet. Mit Hilfe dieser Skalierungsgesetze, die auf den Daten einer Vielzahl von Experimenten beruhen, extrapoliert man in den Bereich eines möglichen Fusionsreaktors, so wie es zum Beispiel beim ITER-Projekt praktiziert wird [6].

In diese Skalierungsgesetze gehen keine inneren Struktureigenschaften des Plasmas ein, sondern es wird nur mit gemittelten Größen gearbeitet. Es ist bekannt, daß zum Beispiel die Dichte und die Temperatur extreme Un-

terschiede zwischen dem Zentrum und dem Rand des Plasmas aufweisen. Für das Fusionsplasma können diese Unterschiede erhebliche Auswirkungen haben. Die unterschiedliche Struktur ist sowohl durch den Versuchsaufbau und die damit verbundenen Einschlußbedingungen als auch durch äußere gezielte Eingriffe bedingt. Diese Eingriffe können zum Beispiel durch eine zusätzliche Aufheizung des Plasmas oder die Zufuhr der Brennstoffe erfolgen, die auf einen bestimmten Teilbereich des Plasmas beschränkt werden [7, 8, 9, 10].

In dieser Arbeit soll über das Konzept der globalen Einschlußzeiten hinausgegangen werden, indem in Anlehnung an diese lokale Einschlußzeiten definiert werden. Die Grundlage dieser Definition bildet das Vorhandensein eines Dichte- und eines Temperaturprofils, aus denen wir für die lokalen Einschlußzeiten ebenfalls Profilverläufe erhalten. Ein Schwerpunkt dieser Arbeit ist die Untersuchung der Zusammenhänge zwischen den Verläufen der lokalen Einschlußzeiten und denen der Dichte und der Temperatur. Wir beschränken uns dabei nicht nur auf die Beschreibung der Abhängigkeit der lokalen Einschlußzeiten von den Dichte- und Temperaturprofilen, die aus den Definitionen wesentlich einfacher abzuleiten sind, sondern untersuchen umgekehrt auch den Einfluß der Einschlußzeitprofile auf die Verläufe der Dichte und der Temperatur. Hierzu wird ein Verfahren zur Bestimmung der Dichte- und Temperaturprofile aus vorgegebenen Einschlußzeitverläufen vorgestellt. Es wird sich dabei herausstellen, daß das Dichte- und das Temperaturprofil wesentlich sensitiver von den Einschlußzeitprofilen abhängen, als es umgekehrt der Fall ist.

Der zweite Schwerpunkt dieser Arbeit ist die Untersuchung von Brennkurven. Bei der Plasmabeschreibung mit globalen Einschlußzeiten spielt der Quotient  $\rho$  der beiden Einschlußzeiten eine wesentliche Rolle, und die Bedingung  $\rho = const$  wird als eine Art Transportskalierung benutzt. Durch die Vorgabe von  $\rho$  kann daraus eine Brennkurve in der  $n_e \tau_E T$ ,  $T$ -Ebene berechnet werden. Bei der Beschreibung mit lokalen Einschlußzeiten wird dieser Quotient zu einer Funktion  $\rho(r)$ . Aus diesem Grund wird zu einem festen Radius  $r_0$  die Transportskalierung  $\rho(r_0) = const$  gesetzt. Einem gegebenem Plasma entspricht in der Brennebene dann nicht mehr ein einziger Brennpunkt, sondern eine Brennlinie, und wir erhalten zu jedem Radius eine Brennkurve. Jeder Brennlinie ist ein Profil der Dichte, der Temperatur und der beiden Einschlußzeiten zugeordnet. Diese Profile können in verschiedenen Bereichen der Brennebene sehr unterschiedlich sein. Das kann sogar soweit gehen, daß die Brennkurven in manchen Bereichen aufbrechen.

# Kapitel 2

## Grundlagen

Im folgenden Kapitel werden wir die Grundlagen für das in dieser Arbeit behandelte Modell eines gezündeten Fusionsplasmas zusammenstellen. Dabei werden wir die Fluidbeschreibung des Plasmas zugrunde legen, und die daraus resultierenden Bilanzgleichungen über Teilvolumina mitteln, die vom Plasmazentrum  $r = 0$  bis zum Radius  $r$  reichen. Die auf diese Art gebildeten Mittelwerte bezeichnen wir als lokale Mittelmaße. Im weiteren Verlauf stellen wir, in Analogie zu nulldimensionalen Modellen, die Berechnung von Brenngleichgewichten und Brennkurvendiagrammen für dieses Modell vor.

### 2.1 Grundlagen des Plasmamodells

Wir legen in dieser Arbeit ein Plasmamodell zugrunde, bei dem die Flächen  $n = \text{const}$  und  $T = \text{const}$  einen Satz geschachtelter Tori bilden, das heißt  $n = n(r)$  und  $T = T(r)$ . Als weitere Vereinfachung verwenden wir einen topologischen Torus (periodischer Zylinder). Unter diesen Voraussetzungen reduziert sich die Mittelung einer Größe  $A(r)$  vom Plasmazentrum bis zum Radius  $r$  auf

$$\langle A(r) \rangle := \frac{2}{r^2} \int_0^r A(r') r' dr' \quad \text{für} \quad 0 < r \leq a, \quad (2.1)$$

wobei  $a$  den kleinen Torusradius angibt. Das so definierte Mittelmaß hängt nur noch vom Radius  $r$  ab. An der Definition (2.1) stört noch, daß diese für  $r = 0$  nicht definiert ist. Um auch für diesen Punkt den Mittelwert definieren zu können, bilden wir den Grenzwert  $r \rightarrow 0$  und erhalten für diesen mit

$$\langle A(0) \rangle = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2}{r^2} \int_0^r A(r') r' dr' = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2}{r^2} \frac{A(r) r}{2} r = A(0)$$

den Funktionswert von  $A$  an der Stelle null. In der Gleichung wurde das Integral durch die Trapez-Regel angenähert und anschließend der Grenzwert gebildet. Die

hier beschriebene Mittelung soll als Grundlage zur Definition eines eindimensionalen Modells dienen, das in den nächsten Abschnitten weiter entwickelt werden soll. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir für den kleinen Torusradius  $a = 1$  m setzen.

## 2.2 Definition lokaler Einschlußzeiten

Nachdem im letzten Abschnitt die Teilvolumenmittelung vorgestellt wurde, durch die wir eine eindimensionale Beschreibung von Plasmagrößen erhalten, leiten wir jetzt die Größen her, die in dieser Arbeit untersucht werden sollen. Ausgangspunkt dafür sind Bilanzgleichungen, die wir aus der Fluidbeschreibung des Plasmas erhalten, wie sie in den gängigen Lehrbüchern vorgestellt wird [11, 12, 13, 14].

### 2.2.1 Definition der Teilcheneinschlußzeit

Die Teilchenbilanzgleichungen der Fluidbeschreibung haben für die verschiedenen Plasmakomponenten  $j$  die Form

$$\frac{\partial n_j(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\Gamma}_j(\vec{r}, t) = Q_j(\vec{r}, t), \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

wobei  $\vec{\Gamma}_j(\vec{r}, t) = n_j(\vec{r}, t) \vec{v}_j(\vec{r}, t)$  die Teilchenstromdichte bezeichnet, und  $Q_j(\vec{r}, t)$  für sämtliche Teilchenquellen und -senken einschließlich der Umsätze bei den Fusionsreaktionen steht. Als Plasmakomponenten werden explizit nur die vorhandenen Ionen berücksichtigt und nicht die Elektronen, die wir nicht extra behandeln, da wir die Quasineutralitätsbedingung voraussetzen. Durch Mittelung der Gleichung (2.2), so wie es in 2.1 beschrieben ist, erhalten wir mit  $\Gamma_j(r, t) = n_j(r, t) v_j(r, t)$

$$\frac{d}{dt} \int_0^r n_j(r', t) r' dr' + r \Gamma_j(r, t) = \int_0^r Q_j(r', t) r' dr'. \quad (2.3)$$

Da der Teilchenstrom nur unzureichend beschrieben werden kann, wird die Größe der *Teilcheneinschlußzeit* eingeführt. Diese ist durch das Verhältnis der mittleren Teilchendichte zum mittleren Teilchenabfluß definiert. Man kann sie auch als die durchschnittliche Verweildauer eines Teilchens im Plasma interpretieren. Ersetzen wir den Teilchenstrom durch Gleichung (2.3), so lautet die Definition für die Teilcheneinschlußzeit

$$\tau_{p,j}(r, t) := \frac{\int_0^r n_j(r', t) r' dr'}{\int_0^r Q_j(r', t) r' dr' - \frac{d}{dt} \int_0^r n_j(r', t) r' dr'}.$$

Als weitere Vereinfachung setzen wir voraus, daß sich das Plasma im Gleichgewichtszustand befindet. Alle Größen sind demnach nicht explizit zeitabhängig, insbesondere entfällt der Term mit der Zeitableitung. Die Gleichung reduziert sich somit auf

$$\tau_{p,j}(r) = \frac{\int_0^r n_j(r') r' dr'}{\int_0^r Q_j(r') r' dr'}.$$

Die von uns in dieser Arbeit untersuchten Fusionsplasmen bestehen aus drei verschiedenen Teilchensorten. Zuerst betrachten wir den Brennstoff, der aus Deuterium und Tritium besteht. Die Stoffmengen beider Sorten sollen gleich sein, das heißt, wir gehen von einem 50:50 Brennstoffgemisch aus. Fassen wir diese beiden Mengen zu einer Ionendichte  $n_I(r)$  zusammen, so gilt

$$n_D(r) = n_T(r) = \frac{n_I(r)}{2}.$$

Die Verluste der Brennstoffe treten durch die Umsetzung bei der Fusion und durch Diffusion auf. Wir gehen davon aus, daß diese Verluste durch die kontinuierliche Zufuhr neuer Brennstoffe, z.B. durch Pelletinjektion, kompensiert werden.

Als dritte Teilchensorte betrachten wir die  $\alpha$ -Teilchen. Diese entstehen bei den Fusionsprozessen und werden als Heliumasche bezeichnet, weil sie an keiner weiteren nuklearen Reaktion teilnehmen. Der Verlust der Teilchen entsteht nur durch Diffusion, d.h. die Teilchenbilanz wird nicht durch äußere Eingriffe beeinflusst, was uns dazu veranlaßt, über die Bilanz der  $\alpha$ -Teilchen die Teilcheneinschlußzeit zu definieren. Diese lautet

$$\tau_p(r) = \frac{\int_0^r n_\alpha(r') r' dr'}{\int_0^r Q_\alpha(r') r' dr'} \quad (2.4)$$

und wird für alle Teilchensorten im Plasma vorausgesetzt. Den Quellterm  $Q_\alpha(r)$  für die  $\alpha$ -Teilchen werden wir später definieren.

### 2.2.2 Definition der Energieeinschlußzeit

Die gleichen Überlegungen wie für die Teilchen werden wir jetzt für die Energie des Plasmas durchführen. Aus der Fluidbeschreibung erhalten wir für die Energiebilanz die Gleichung

$$\frac{\partial E(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{Q}(\vec{r}, t) = P(\vec{r}, t), \quad (2.5)$$

in der  $\vec{Q}(\vec{r}, t)$  die Energiestromdichte und  $P(\vec{r}, t)$  sämtliche Energiequellen und -senken beschreibt.  $E(\vec{r}, t) = \sum_j \frac{3}{2} n_j(\vec{r}, t) k_B T_j(\vec{r}, t)$  ist der Ausdruck für die Gesamtenergiedichte. Wir mitteln auch die Gleichung (2.5) nach der am Anfang beschriebenen Methode und gehen davon aus, daß sich alle Teilchen im thermischen

Gleichgewicht befinden. Führen wir die Gesamtdichte  $n_{\text{tot}}(\vec{r}, t) := \sum_j n_j(\vec{r}, t)$  ein, so erhalten wir aus der Energiebilanzgleichung mit dem Energiestrom  $J(r, t)$

$$\frac{3}{2} \frac{d}{dt} \int_0^r n_{\text{tot}}(r', t) k_B T(r', t) r' dr' + r J(r, t) = \int_0^r P(r', t) r' dr'.$$

Analog zum letzten Abschnitt definieren wir die *Energieeinschlußzeit* als Verhältnis der Gesamtenergie zum Energiestrom, die dann lautet

$$\tau_E(r, t) := \frac{\frac{3}{2} \int_0^r n_{\text{tot}}(r', t) T(r', t) r' dr'}{\int_0^r P(r', t) r' dr' - \frac{d}{dt} \frac{3}{2} \int_0^r n_{\text{tot}}(r', t) T(r', t) r' dr'}.$$

Auch für diese Gleichung setzen wir voraus, daß sich das Plasma in einem Gleichgewichtszustand befindet und die Zeitabhängigkeit deshalb entfällt. Die Energieeinschlußzeit reduziert sich dann auf die Gleichung

$$\tau_E(r) = \frac{\frac{3}{2} k_B \int_0^r n_{\text{tot}}(r') T(r') r' dr'}{\int_0^r P(r') r' dr'}. \quad (2.6)$$

Der Term für die Energiequellen und -senken setzt sich aus dem Zugewinn an Energie aus den Kernreaktionen und aus dem Verlust von Energie durch Strahlung zusammen. Wir können diesen Term durch  $P(r) := P_{\text{fus}}(r) - P_{\text{rad}}(r)$  definieren.

## 2.3 Berechnung von Brenngleichgewichten

In diesem Abschnitt werden wir zuerst die in den Gleichungen (2.4) und (2.6) noch unbekanntten Größen vorstellen, um am Schluß die Berechnung von Brenngleichgewichten und deren Darstellung in Brennkurvendiagrammen zu erläutern.

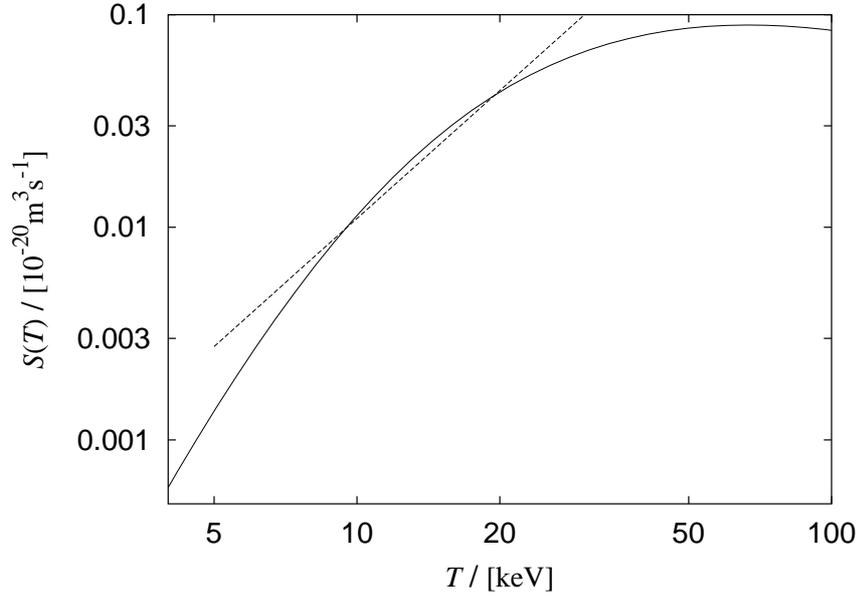
### Thermonukleare Reaktionsrate der Deuterium-Tritium-Reaktion

In dieser Arbeit verwenden wir für den Reaktionsquerschnitt der Deuterium-Tritium-Reaktion eine Näherungsformel von Bosch und Hale [15, 16]. Diese lautet

$$S(T) = C_1 \theta(T) \sqrt{\frac{\xi(T)}{m_r c^2 T^3}} e^{-3\xi(T)} \quad (2.7)$$

mit den Abkürzungen

$$\xi(T) = \left( \frac{B_G^2}{4\theta(T)} \right)^{1/3}, \quad \theta(T) = \frac{T}{1 - \frac{T(C_2+T(C_4+TC_6))}{1+T(C_3+T(C_5+TC_7))}},$$



**Abbildung 2.1:** Reaktionsquerschnitt der Deuterium-Tritium-Reaktion (durchgezogene Linie) mit der quadratischen Näherung im Bereich zwischen 10 und 20 keV (gestrichelte Linie).

den Fit-Parametern  $C_1, \dots, C_7$ , der Schwerpunktsenergie  $m_r c^2$  und dem Gamov-Parameter  $B_G = \pi \alpha Z_1 Z_2 \sqrt{2 m_r c^2}$ . Der Verlauf dieser Funktion für den Reaktionsquerschnitt ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Zusätzlich ist eine quadratische Näherung eingetragen, die in dem Bereich von 10 bis 20 keV eine gute Approximation liefert (gestrichelte Linie) [17]. Diese lautet

$$S(T) \approx C_R T^2 \quad \text{mit} \quad C_R = 1.1 \cdot 10^{-24} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} (\text{keV})^{-2}. \quad (2.8)$$

Der Verlauf der Reaktion ist  $\text{D} + \text{T} \rightarrow {}^4\text{He} (3\,517 \text{ keV}) + \text{n} (14\,069 \text{ keV})$ . Das entstehende Neutron kann das Plasma ungehindert verlassen und nimmt dabei 4/5 der erzeugten Fusionsenergie mit. Das  $\alpha$ -Teilchen hingegen verbleibt im Plasma und trägt mit seinem Teil der Energie von  $E_\alpha = 3\,517 \text{ keV}$  zur Aufheizung bei. Wir gehen davon aus, daß das  $\alpha$ -Teilchen instantan thermalisiert. Mit der Formel für den Reaktionsquerschnitt sind wir in der Lage, den Quellterm  $Q_\alpha(r)$  aus Gleichung 2.4 anzugeben. Dieser lautet

$$Q_\alpha(r) = n_D(r) n_T(r) S(T(r)) = \frac{1}{4} n_I^2(r) S(T(r)). \quad (2.9)$$

Der Term für den Zugewinn an Energie durch die Kernreaktionen lautet entsprechend

$$P_{\text{fus}}(r) = E_\alpha n_D(r) n_T(r) S(T(r)) = \frac{E_\alpha}{4} n_I^2(r) S(T(r)). \quad (2.10)$$

### Strahlungsverluste

Die Strahlungsverluste, die in einem Fusionsplasma auftreten, setzen sich aus drei Arten zusammen. Der bedeutendste Verlust dabei entsteht durch Bremsstrahlung, die wir durch

$$P_{B,i} = n_e n_i \frac{Z_i^2 e^6}{24 \pi \epsilon_0^3 c^3 m_e h} \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m_e}} g_{\text{ff}} \left( \frac{Z_i^2}{T} \right)$$

beschreiben [18]. Mit der Abkürzung  $C_B = 4,203 \cdot 10^{-37} \text{ W m}^{-3} (\text{keV})^{-1/2}$  sowie der Annahme, daß der Gamov-Parameter eins ist und die Temperatur in keV angegeben wird, reduziert sich die Gleichung auf  $P_{B,i} = C_B n_e n_i Z_i^2 \sqrt{T}$ .

Als zweite Verluststrahlung sei die Synchrotronstrahlung erwähnt, die durch die Beschleunigung geladener Teilchen hervorgerufen wird. Da der größte Teil der dabei entstehenden Strahlung wieder reabsorbiert wird, ist der Energieverlust gegenüber den Verlusten durch Bremsstrahlung gering und kann daher vernachlässigt werden.

Eine weitere Strahlungsart ist die Linienstrahlung, die hauptsächlich von Verunreinigungen in der kalten Plasmarandschicht entsteht. Auch auf diese Art des Energieverlustes wollen wir in dieser Arbeit verzichten und behandeln nur Plasmen ohne Verunreinigungen.

Für die Strahlungsverluste, die demnach in Gleichung (2.6) einzusetzen sind, resultiert die Gleichung

$$P_{\text{rad}}(r) = C_B n_e(r) (n_{\text{I}}(r) + 4 n_{\alpha}(r)) \sqrt{T(r)}, \quad (2.11)$$

wobei  $n_{\text{I}}(r)$  die Ionendichte und  $n_{\alpha}(r)$  die Dichte der Heliumasche beschreibt.

### Brennleichgewichte und Brennkurven

Aus den bisher abgeleiteten Gleichungen werden wir jetzt die notwendigen Formeln zur Berechnung der Brennleichgewichte herleiten. Ausgangspunkt hierfür sind die Gleichungen (2.4) und (2.6), die wir zu diesem Zweck zusammenfassen. Bevor wir aber soweit sind, müssen wir noch einmal auf die unterschiedlichen Dichten eingehen, die in den Formeln für die Einschlußzeiten auftreten. Wir gehen davon aus, daß für alle  $r$  die Quasineutralitätsbedingung gilt, es muß demnach

$$n_e(r) = n_{\text{I}}(r) + 2 n_{\alpha}(r) \quad (2.12)$$

gelten. Wir setzen voraus, daß sich die Dichteprofile der Ionen und der  $\alpha$ -Teilchen nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden, das heißt, beide weisen den gleichen Verlauf auf. Das hat zur Folge, daß auch das Dichteprofil der Elektronen

diesen Verlauf hat und wir schreiben für dieses  $n_e(r) = \bar{n}_e N(r)$  mit  $\bar{N} = 1$ . Mit Hilfe der über das gesamte Plasmavolumen gemittelten Größen  $\bar{n}_e$ ,  $\bar{n}_\alpha$  und  $\bar{n}_I$  erhalten wir aus Gleichung (2.12) für die Ionendichte

$$n_I(r) = (\bar{n}_e - 2\bar{n}_\alpha) N(r). \quad (2.13)$$

Durch Verwendung dieser Gleichung erhalten wir für die Gesamtdichte

$$n_{\text{tot}}(r) = n_I(r) + n_\alpha(r) + n_e(r) = (2\bar{n}_e - \bar{n}_\alpha) N(r). \quad (2.14)$$

Gehen wir nun bei den  $\alpha$ -Teilchen noch zu den auf die Elektronendichte bezogene Konzentration  $f_\alpha = \bar{n}_\alpha/\bar{n}_e$  über, so erhalten wir für die verwendeten Dichteprofile die folgenden vier Gleichungen

$$\begin{aligned} n_e(r) &= \bar{n}_e N(r), \\ n_\alpha(r) &= \bar{n}_e f_\alpha N(r), \\ n_I(r) &= \bar{n}_e (1 - 2f_\alpha) N(r), \\ n_{\text{tot}}(r) &= \bar{n}_e (2 - f_\alpha) N(r). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Es ist leicht einzusehen, daß die möglichen Werte für die Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen zwischen 0 und 0.5 liegen. In (2.15) sind alle auftretenden Dichteprofile in Abhängigkeit des Elektronendichteprofiles ausgedrückt. Wir werden deshalb für den Rest der Arbeit das Elektronendichteprofile mit  $n(r) := n_e(r) = \bar{n}_e N(r)$  bezeichnen. Mit den Gleichungen (2.15) für die Dichten und den Gleichungen (2.9), (2.10) und (2.11) für die Quell- bzw. Senkenterme der Teilchen- und Energiebilanzen lauten die Gleichungen (2.4) und (2.6) der Einschlußzeiten

$$\tau_p(r) = \frac{4f_\alpha I_1(r)}{(1 - 2f_\alpha)^2 I_2(r)} \quad (2.16)$$

und

$$\tau_E(r) = \frac{6(2 - f_\alpha) I_3(r)}{E_\alpha (1 - 2f_\alpha)^2 I_2(r) - 4C_B (1 + 2f_\alpha) I_4(r)}. \quad (2.17)$$

Die Abkürzungen  $I_i(r)$  mit  $i = 1, 2, 3, 4$  sind durch die Integrale

$$\begin{aligned} I_1(r) &:= \frac{2}{r^2} \int_0^r n(r') r' dr' \\ I_2(r) &:= \frac{2}{r^2} \int_0^r n^2(r') S(T(r')) r' dr' \\ I_3(r) &:= \frac{2}{r^2} \int_0^r n(r') T(r) r' dr' \\ I_4(r) &:= \frac{2}{r^2} \int_0^r n^2(r') \sqrt{T(r')} r' dr' \end{aligned} \quad (2.18)$$

definiert. Bevor wir zu der Berechnung von Brenngleichgewichten übergehen, stellen wir die kompaktere Darstellung der Einschlußzeiten

$$\tau_{\text{p}}(r) = \frac{a I_1(r)}{I_2(r)} \quad \text{und} \quad \tau_{\text{E}}(r) = \frac{b I_3(r)}{I_2(r) - c I_4(r)} \quad (2.19)$$

vor, in der die Abkürzungen

$$a := \frac{4 f_{\alpha}}{(1 - 2 f_{\alpha})^2}, \quad b := \frac{6(2 - f_{\alpha})}{E_{\alpha}(1 - 2 f_{\alpha})^2}, \quad c := \frac{4 C_{\text{B}}(1 + 2 f_{\alpha})}{E_{\alpha}(1 - 2 f_{\alpha})^2} \quad (2.20)$$

verwendet werden. Diese Schreibweise bietet sich an, wenn die Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen bekannt ist. Die Größen  $a$ ,  $b$  und  $c$  hängen nur von  $f_{\alpha}$  ab, und es läßt sich leicht zeigen, daß sie mit zunehmendem  $f_{\alpha}$  größer werden. Als Konsequenz hieraus läßt sich festhalten, daß die Einschlußzeiten mit größer werdendem Anteil der  $\alpha$ -Teilchen ebenfalls ansteigen. Eine genauere Untersuchung dieser Zusammenhänge werden wir in Kapitel 4 vornehmen.

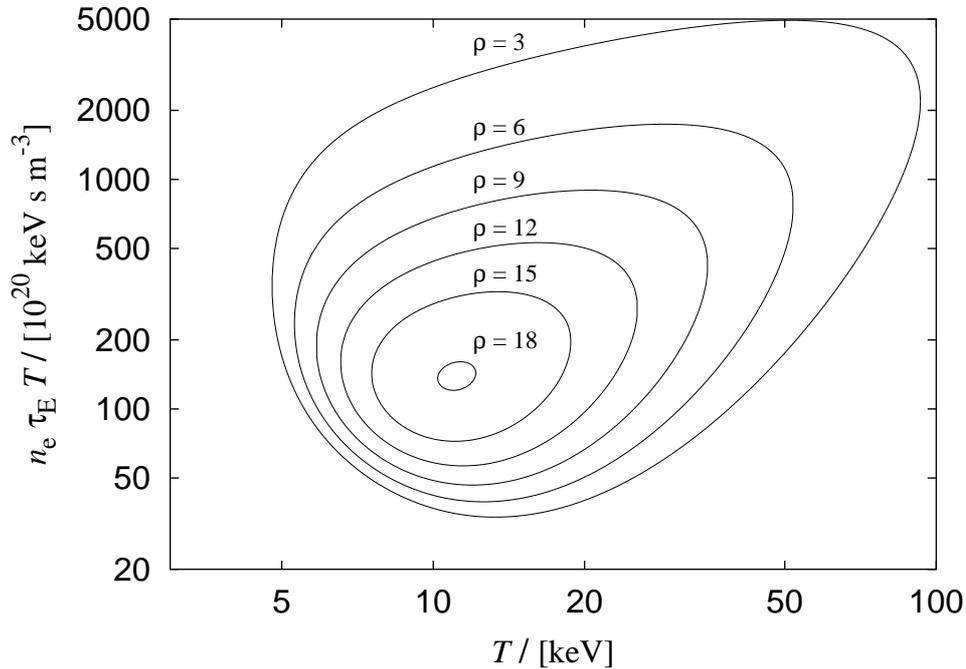
Wir kommen jetzt zur Berechnung der Brenngleichgewichte und der darauf aufbauenden Berechnung von Brennkurven [19, 20, 21]. Bei nulldimensionalen Modellen wird zur Berechnung einer Brennkurve das Verhältnis der globalen Einschlußzeiten  $\rho = \tau_{\text{p}}/\tau_{\text{E}}$  vorgegeben. Da wir in unserem Modell lokale Einschlußzeiten verwenden, können wir für diese kein festes Verhältnis vorgeben. Wir definieren stattdessen das Verhältnis der Einschlußzeiten durch

$$\rho(r) := \frac{\tau_{\text{p}}(r)}{\tau_{\text{E}}(r)} = \frac{a I_1(r) (I_2(r) - c I_4(r))}{b I_2(r) I_3(r)} \quad (2.21)$$

als weitere lokale Größe. Um für gegebene Profile  $n(r)$  und  $T(r)$  Brenngleichgewichte zu berechnen, geben wir uns den Wert  $\rho$  an einer speziellen Stelle  $r_0$  vor. Setzen wir diesen Wert und die Definitionen (2.20) in die Gleichung (2.21) ein, dann erhalten wir durch Ausmultiplizieren die kubische Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = & 4 I_2(r_0)(3 \rho(r_0) I_3(r_0) + 2 E_{\alpha} I_1(r_0)) f_{\alpha}^3 \\ & - 4(9 \rho(r_0) I_2(r_0) I_3(r_0) + 2 E_{\alpha} I_1(r_0) I_2(r_0) + 4 C_{\text{B}} I_1(r_0) I_4(r_0)) f_{\alpha}^2 \\ & + (27 \rho(r_0) I_2(r_0) I_3(r_0) + 2 E_{\alpha} I_1(r_0) I_2(r_0) - 8 C_{\text{B}} I_1(r_0) I_4(r_0)) f_{\alpha} \\ & - 6 \rho(r_0) I_2(r_0) I_3(r_0). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Aus dieser Gleichung, die wir mit Hilfe der Formeln von Cardano, die in Anhang A beschrieben sind, lösen können, lassen sich die zu den Brenngleichgewichten zugehörigen Konzentrationen der  $\alpha$ -Teilchen bestimmen. Mit diesen  $f_{\alpha}$  sind die Brenngleichgewichte zu den vorgegebenen Profilen  $n(r)$  und  $T(r)$  eindeutig bestimmt, und die zugehörigen Verläufe der lokalen Einschlußzeiten



**Abbildung 2.2:** Brennkurvendiagramm in der  $n_e \tau_E T$ ,  $T$ -Ebene für konstante Profile  $n(r) = \text{const}$  und  $T(r) = \text{const}$ . Aufgetragen sind die Brennkurven für  $\rho = 3, 6, 9, 12, 15$  und  $18$  (von außen nach innen).

lassen sich aus (2.19) berechnen.

Als nächstes ist zu klären, wie solche Brenngleichgewichte in ein Brennkurvendiagramm übertragen werden können, in dem das Fusionsprodukt  $n_e \tau_E T$  über die Temperatur aufgetragen wird. Sowohl die Temperatur als auch die Größen, aus denen das Fusionsprodukt zusammengesetzt ist, sind vom Radius  $r$  abhängig. Für die Dichte und die Temperatur verwenden wir nicht den Funktionswert an der Stelle  $r$ , sondern das lokale Mittelmaß bei  $r$  (das lokale Mittelmaß der Dichte bezeichnen wir in den Brennkurvendiagrammen mit  $n_e$  und das lokale Mittelmaß der Temperatur mit  $T$ ). Verbindet man die für ein Brenngleichgewicht zu jedem Radius  $r$  erhaltenen Punkte, so erhält man eine Profil (Brennprofil) in der Brennebene. Wir werden später das Brenngleichgewicht für einzelne Radien  $r$  betrachten und verstehen darunter den Punkt des zugehörigen Brennprofils bei  $r$ .

Nachdem wir die Berechnung von Brenngleichgewichten zu vorgegebenem Dichte- und Temperaturprofil vorgestellt haben, gehen wir über zur Berechnung von Brennkurven. In nulldimensionalen Modellen berechnet man hierzu zu fest vorgegebenem  $\rho$  die Brenngleichgewichte für verschiedene Temperaturen und

trägt diese in der Brennebene auf. Da wir mit Temperaturprofilen arbeiten, variieren wir den Mittelwert  $\bar{T}$  von  $T(r)$ , indem wir mit einem konstanten Faktor multiplizieren. Wir können nun für unterschiedliche Mittelwerte des Temperaturprofils und einem vorgegebenem  $\rho(r_0)$  die Brenngleichgewichte berechnen. Um eine Brennkurve zu erhalten, fehlt noch die Angabe eines  $r$ , für den die Brennpunkte jedes Brenngleichgewichts aufgetragen werden. Wir erhalten somit zu vorgegebenen Profilen  $n(r)$ ,  $T(r)$  und  $\rho$  bei  $r_0$  zu jedem Radius  $r$  eine Brennkurve. Die Brennkurve zum Radius  $r_0$  ist dadurch ausgezeichnet, daß auf ihr  $\rho = const$  ist.

In Abbildung 2.2 ist ein Brennkurvendiagramm für konstante Profile aufgetragen, das dem eines nulldimensionalen Modells entspricht. Für dieses Beispiel ist es egal, für welches  $r_0$  das Verhältnis der Einschlußzeiten  $\rho(r_0)$  vorgegeben wird. Auch sind die Brennkurven für jeden Radius  $r$  gleich, weil alle Brennprofile aus einem Punkt bestehen. In Kapitel 6 werden wir den Einfluß von Profilen auf die Brennkurvendiagramme genauer untersuchen.

# Kapitel 3

## Untersuchung des Plasmazentrums

In diesem Abschnitt werden wir unsere Aufmerksamkeit auf das Plasmazentrum richten. Dabei werden wir uns vornehmlich damit beschäftigen, welche Zusammenhänge dort zwischen den Größen  $\rho$ ,  $T$  und  $f_\alpha$  bestehen. Insbesondere soll untersucht werden, welche Einschränkungen für diese Größen gelten.

Zur Berechnung von Brenngleichgewichten ist es notwendig, aus der Gleichung (2.22) für vorgegebene Profile  $n(r)$  und  $T(r)$  und einem vorgegebenem  $\rho$  an einer Stelle  $r_0$  die zugehörigen Konzentrationen  $f_\alpha$  zu bestimmen. Da wir für  $r_0$  das Plasmazentrum wählen, müssen wir zuerst die Gleichung (2.22) für  $r_0 = 0$  bestimmen. Mit Hilfe der Grenzwertbildung aus 2.1 ergibt dies

$$\begin{aligned} 0 = & 4(3\rho T S(T) + 2E_\alpha S(T)) f_\alpha^3 \\ & - 4(9\rho T S(T) + 2E_\alpha S(T) + 4C_B \sqrt{T}) f_\alpha^2 \\ & + (27\rho T S(T) + 2E_\alpha S(T) - 8C_B \sqrt{T}) f_\alpha \\ & - 6\rho T S(T), \end{aligned} \tag{3.1}$$

wobei  $T$  und  $\rho$  die Werte an der Stelle  $r = 0$  angeben. Auffällig ist, daß diese Gleichung nicht von der Dichte  $n(0)$  im Plasmazentrum abhängt, weshalb diese für unsere weiteren Überlegungen in diesem Kapitel keine Rolle spielen wird. Berücksichtigt man bei der Untersuchung eines Fusionsplasmas keine Profile und geht von konstanter Dichte und konstanter Temperatur aus, so erhält man ebenfalls Gleichung (3.1) zur Bestimmung der Konzentrationen. Die Untersuchung des Plasmazentrums ist somit äquivalent zu der eines Plasmas mit konstanten Profilen,  $n(r) = \text{const}$  und  $T(r) = \text{const}$ .

Um die Gleichung (3.1) übersichtlicher zu machen, definieren wir

$$\beta := \frac{E_\alpha}{3T} \quad \text{und} \quad \gamma := \frac{4C_B}{3S(T)\sqrt{T}}. \quad (3.2)$$

Beide Werte sind größer null und lassen sich in einen einfachen Zusammenhang bringen. Dividieren wir sie durcheinander, so erhalten wir  $\gamma/\beta = 4C_B\sqrt{T}/E_\alpha S(T)$  als das Verhältnis der abgestrahlten Energie zur Fusionsleistung ohne Berücksichtigung der  $\alpha$ -Teilchen. Da wir uns mit Gleichgewichtssystemen ohne Fremdheizung beschäftigen, muß dieser Wert kleiner als eins sein, es gilt also  $\gamma < \beta$ . Die Gleichung (3.1) lautet mit diesen Abkürzungen

$$0 = 4(\rho + 2\beta)f_\alpha^3 - 4(3\rho + 2\beta + \gamma)f_\alpha^2 + (9\rho + 2\beta - 2\gamma)f_\alpha - 2\rho. \quad (3.3)$$

Diese Gleichung wird die Basis unserer weiteren Überlegungen sein.

### 3.1 Maximalwert von $\rho$ in Abhängigkeit von $f_\alpha$

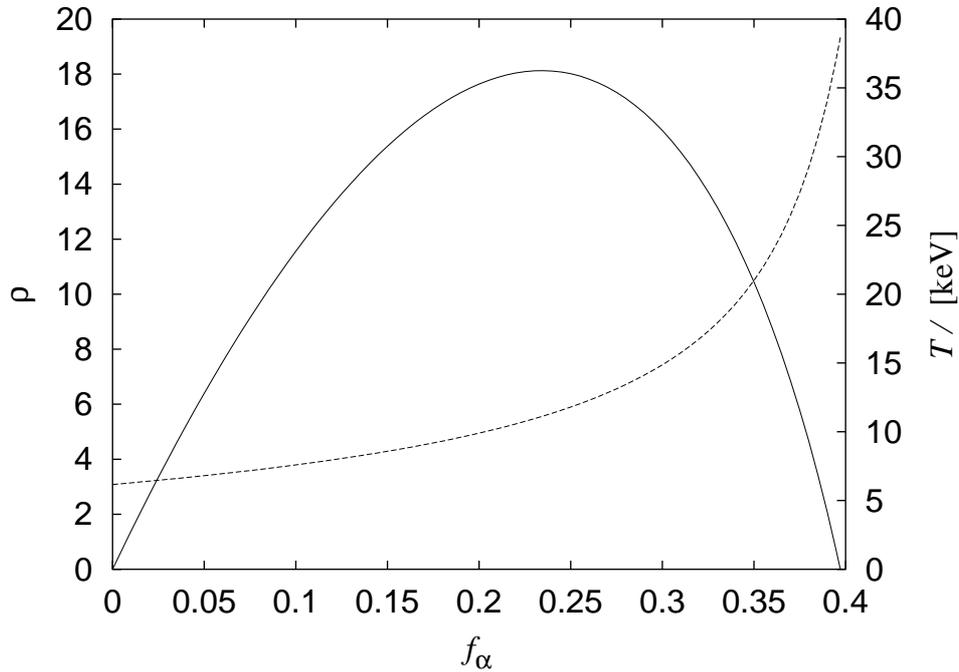
Als erstes untersuchen wir  $\rho$  und die Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen. Von der Berechnung der Brennkurven bei globalen Einschlußzeiten ist bekannt, daß diese nicht für beliebige Werte  $\rho$  existieren, sondern sich für größer werdende  $\rho$  immer enger zusammenziehen, bis es schließlich keine Brenngleichgewichte mehr gibt [19]. Auch bei Brennkurven zu lokalen Einschlußzeiten gibt es ein maximales  $\rho$ , das wir im folgenden berechnen wollen. Wir werden so vorgehen, daß wir uns  $f_\alpha$  vorgeben und das zu dieser Konzentration zugehörige maximale  $\rho$  berechnen. Hierzu lösen wir die Gleichung (3.3) nach  $\rho$  auf und erhalten

$$\rho(f_\alpha, T) = \frac{8\beta f_\alpha^3 - 4(2\beta + \gamma)f_\alpha^2 + 2(\beta - \gamma)f_\alpha}{-4f_\alpha^3 + 12f_\alpha^2 - 9f_\alpha + 2}. \quad (3.4)$$

Um für fest vorgegebenes  $f_\alpha$  das Maximum zu bestimmen, leiten wir (3.4) partiell nach  $T$  ab und erhalten als Bedingung für  $T$  die Gleichung

$$c = \frac{4C_B(1 + 2f_\alpha)}{E_\alpha(1 - 2f_\alpha)^2} = \frac{2S(T)^2}{2S'(T)T^{3/2} + S(T)\sqrt{T}}, \quad (3.5)$$

in der  $c$  der Definition (2.20) entspricht. Aus dieser Gleichung wird  $T$  zu gegebenem  $f_\alpha$  numerisch bestimmt und in  $\rho(f_\alpha, T)$  eingesetzt. Der auf diese Weise erhaltene Verlauf von  $\rho$  in Abhängigkeit von  $f_\alpha$  ist in Abbildung 3.1 aufgetragen, in der zusätzlich der Verlauf der dazugehörigen Temperatur dargestellt ist (gestrichelte Linie). Für das maximale  $\rho$  lesen wir den Wert  $\rho_{\max} = 18.13$  mit der dazugehörigen Konzentration  $f_\alpha = 23.42\%$  und der Temperatur 11.11 keV ab. Im

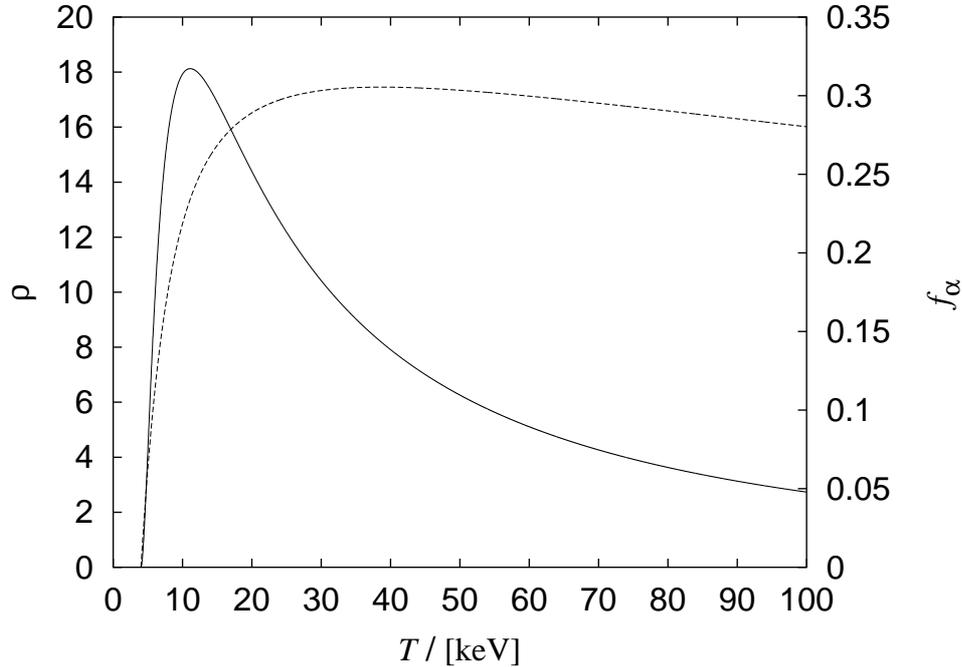


**Abbildung 3.1:** Maximales  $\rho$  (durchgezogene Linie) im Plasmazentrum bei vorgegebener Konzentration  $f_\alpha$  mit der dazugehörigen Temperatur  $T$  (gestrichelte Linie).

Plasmazentrum ist das die obere Grenze für  $\rho$ , bis zu der noch ein Brenngleichgewicht existiert.

Weitere bedeutende Punkte sind die beiden Nullstellen von  $\rho(f_\alpha)$ . Diese führen zu einer weiteren Restriktion der möglichen Konzentrationen. Bisher haben wir aus der Quasineutralitätsbedingung schließen können, daß  $f_\alpha$  unterhalb von 50% liegen muß. In Abbildung 3.1 ist abzulesen, daß die maximal mögliche Konzentration bei 39.68% liegt, das heißt, es existiert eine noch strengere Einschränkung an  $f_\alpha$ . Der untere Grenzwert für die Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen von 0% bleibt bestehen. Geht nämlich der Anteil der Heliumasche gegen null, so muß auch deren Einschlußzeit  $\tau_p$  gegen null gehen und somit auch  $\rho$ . Bestimmen lassen sich diese Wert aus der Gleichung (3.3), indem wir  $\rho = 0$  einsetzen und nach  $f_\alpha$  auflösen. Wir erhalten wieder ein Polynom dritten Grades in  $f_\alpha$ , deren Wurzeln gesucht sind. Die Lösung  $f_\alpha = 0$  kann direkt abgelesen werden, und es bleibt eine quadratische Gleichung übrig, deren einzige physikalisch sinnvolle Lösung

$$f_\alpha(T) = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{4\beta} - \sqrt{\frac{\gamma}{2\beta} + \left(\frac{\gamma}{4\beta}\right)^2} \quad (3.6)$$



**Abbildung 3.2:** Maximales  $\rho$  (durchgezogene Linie) im Plasmazentrum bei vorgegebener Temperatur  $T$  mit der dazugehörigen Konzentration  $f_\alpha$  (gestrichelte Linie).

ist. Als Bedingung für das Maximum dieser Funktion erhalten wir die Gleichung  $S(T) - 2TS'(T) = 0$ , aus der wir  $T = 38.68 \text{ keV}$  erhalten. Gehen wir noch einmal auf die Abbildung 3.1 ein, so liegen unterhalb der Funktion  $\rho(f_\alpha)$  alle Paare  $(f_\alpha, \rho)$ , für die Brenngleichgewichte existieren. Betrachtet man daher den Funktionsverlauf für ein festes  $\rho$  ( $< 18.13$ ), so wird der mögliche  $f_\alpha$ -Bereich durch die beiden Punkte auf der Kurve zu diesem  $\rho$  begrenzt.

### 3.2 Maximalwert von $\rho$ in Abhängigkeit von $T$

Ähnlich wie im letzten Abschnitt, in dem der maximale Wert von  $\rho$  in Abhängigkeit von  $f_\alpha$  bestimmt wurde, werden wir jetzt das maximale  $\rho$  in Abhängigkeit von  $T$  berechnen. Wir verwenden hierzu erneut die Gleichung (3.4) und maximieren diese zu fest vorgegebenem  $T$ . Für festes  $T$  ist  $\rho(f_\alpha)$  eine gebrochen-rationale Funktion, von der wir das Maximum numerisch bestimmen. Bei der Berechnung können wir uns auf den Bereich von 0 bis 40% beschränken.

In Abbildung 3.2 ist das maximale  $\rho$  mit der dazugehörigen Konzentration  $f_\alpha$  zu vorgegebener Temperatur aufgetragen. Der Verlauf weist das gleiche Maximum

auf wie der von  $\rho(f_\alpha)$  aus dem letzten Abschnitt, aus dem wir das maximale  $\rho$ , für das noch ein Brenngleichgewicht existiert, bestimmt haben. Der Verlauf von  $\rho(T)$  in Abbildung 3.2 weist bei  $T = 3.999 \text{ keV}$  eine Nullstelle auf, die die Mindesttemperatur für das Plasmazentrum angibt, ab der Brenngleichgewichte existieren. Nach oben ist die Temperatur nicht beschränkt, es läßt sich allerdings das asymptotische Verhalten  $\rho \rightarrow 0$  für  $T \rightarrow \infty$  feststellen. Wie im letzten Abschnitt können wir aus Abbildung 3.2 den maximalen Temperaturbereich zu einem festen  $\rho$  bestimmen, der durch die Werte  $T$ , die zu diesem  $\rho$  abgelesen werden können, begrenzt wird.

### 3.3 Brennkurven für das Plasmazentrum

In diesem Abschnitt werden wir die Brennkurven für das Plasmazentrum berechnen. Diese können durch Vorgabe von  $\rho$  an der Stelle  $r_0 = 0$  nach der am Ende von Abschnitt 2.3 beschriebenen Methode berechnet werden. Zusätzlich stellen wir eine sehr übersichtliche Beschreibung der Brennkurven für das Plasmazentrum vor, die ohne die Formeln von Cardano auskommt. Hierzu bestimmen wir die Gleichung (2.17) für  $r = 0$  und erhalten mit  $n_e = n(0)$  nach  $n_e \tau_E$  aufgelöst

$$n_e \tau_E = \frac{6(2 - f_\alpha)T}{E_\alpha(1 - 2f_\alpha)^2 S(T) - 4C_B(1 + 2f_\alpha)\sqrt{T}}. \quad (3.7)$$

Anschließend lösen wir (3.7) nach  $f_\alpha$  auf, wobei wir die Abkürzungen

$$\mathcal{A} := 4n_e \tau_E C_B \sqrt{T} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} := 4n_e \tau_E E_\alpha S(T) \quad (3.8)$$

verwenden und erhalten, da  $f_\alpha < 0.5$  sein muß, die einzige physikalisch sinnvolle Lösung

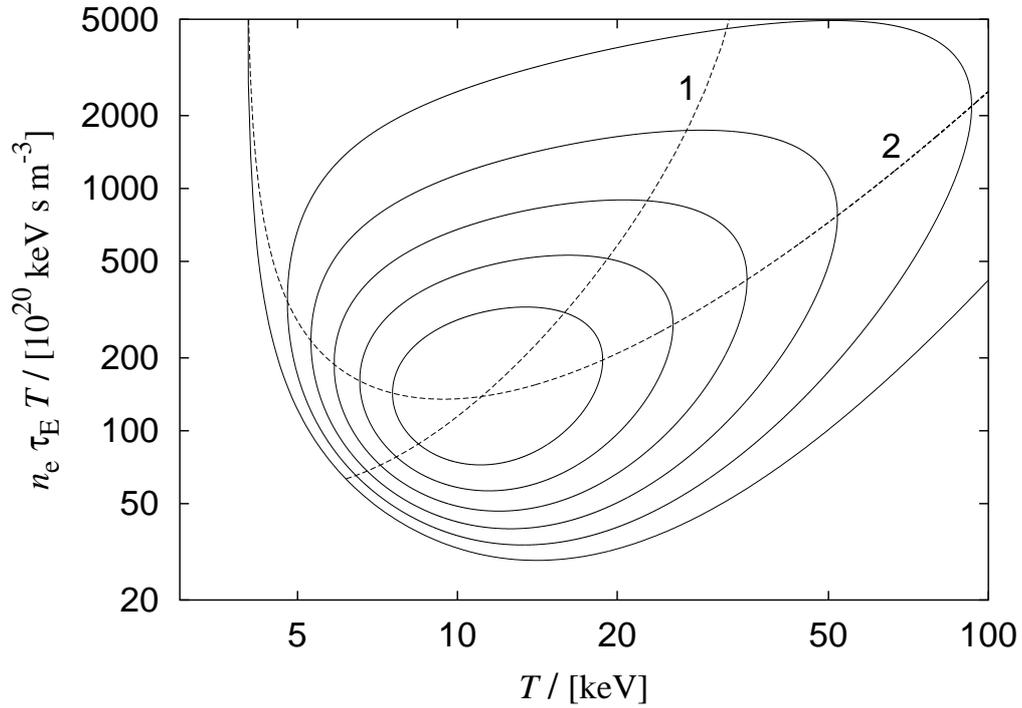
$$f_\alpha = \frac{1}{2} - \frac{3T - \mathcal{A}}{\mathcal{B}} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{\mathcal{B}(9T + 2\mathcal{A})}{(3T - \mathcal{A})^2}} \right). \quad (3.9)$$

Zuletzt drücken wir die Gleichung (3.4) mit den Abkürzungen (3.8) aus und erhalten

$$\rho(n_e \tau_E, T) = \frac{1}{6n_e \tau_E T S(T)} \frac{4\mathcal{B}f_\alpha^3 - 4(\mathcal{B} + 2\mathcal{A})f_\alpha^2 + (\mathcal{B} - 4\mathcal{A})f_\alpha}{-4f_\alpha^3 + 12f_\alpha^2 - 9f_\alpha + 2}. \quad (3.10)$$

Aus den Gleichungen (3.8)-(3.10) lassen sich zu jedem fest vorgegebenem  $\rho$  die Brennkurven für das Plasmazentrum bestimmen.

In Abbildung 3.3 sind die Brennkurven für das Plasmazentrum zu fest vorgegebenen Werten  $\rho$  aufgetragen. Die Brennkurven ziehen sich für größer wer-



**Abbildung 3.3:** Brennkurvendiagramm in der  $n_e \tau_E T, T$ -Ebene. Dargestellt sind die Brennkurven für  $\rho = 0, 3, 6, 9, 12$  und  $15$  (von außen nach innen). Mit 1 ist der Verlauf der Brennpunkte gekennzeichnet, die sich aus den Wertepaaren  $(T, f_\alpha)$  aus Abbildung 3.1 mit Hilfe von (3.7) berechnen lassen. Kurve 2 läßt sich analog aus Abbildung 3.2 bestimmen.

dendes  $\rho$  solange immer enger zusammen, bis der in diesem Kapitel berechnete maximale Wert  $\rho$  überschritten ist und keine Kurven mehr existieren. Für  $\rho = 0$  ist die Brennkurve offen. *Dieses Brennkurvendiagramm ist für das Zentrum jedes Plasmas gültig, egal welche Profilverläufe verwendet werden.* Die mit 1 und 2 bezeichneten Kurven erläutern wir im folgenden Abschnitt.

### 3.4 Übertragung der Grenzkurven in das Brennkurvendiagramm

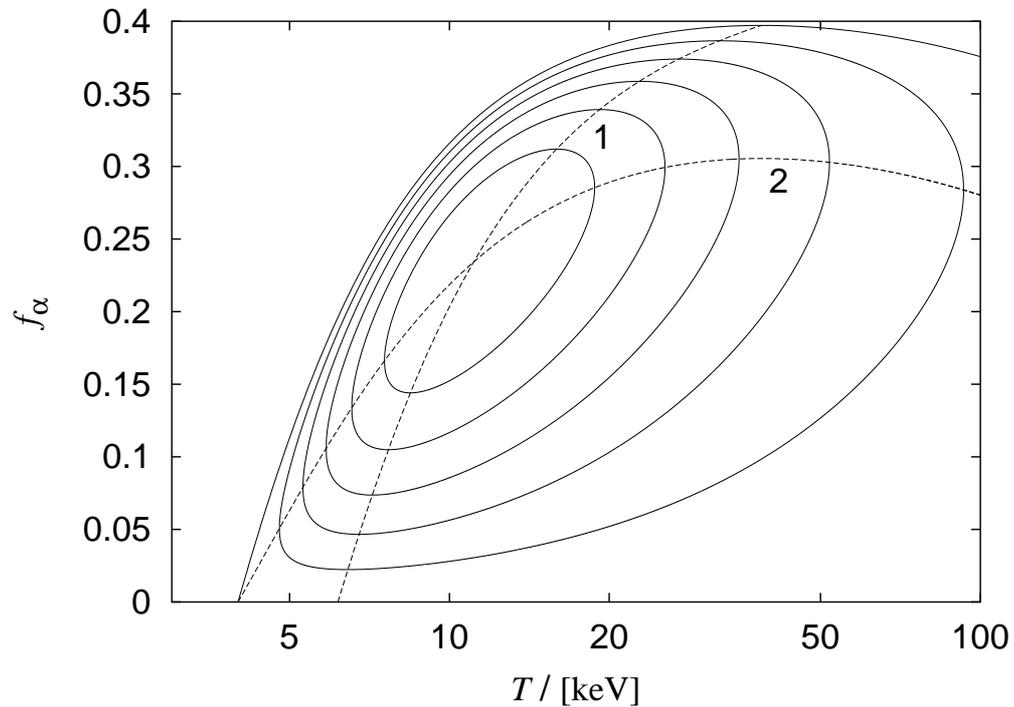
Wir werden jetzt die in den Abschnitten 3.1 und 3.2 bestimmten Grenzkurven auf das Brennkurvendiagramm übertragen. Aus Abbildung 3.1 lesen wir zu jedem  $f_\alpha$  die Temperatur  $T$ , bei der das maximale  $\rho$  angenommen wird, ab. Für jedes Paar  $(f_\alpha, T)$  bestimmen wir anschließend mit Hilfe von Gleichung (3.7) den Punkt  $(T, n_e \tau_E T)$ . Mit dieser Methode übertragen wir die Grenzkurve

aus Abschnitt 3.1 in das Brennkurvendiagramm. In Abbildung 3.3 ist diese Grenzkurve mit 1 gekennzeichnet. Genauso verfahren wir mit der Grenzkurve aus Abschnitt 3.2, mit dem einzigen Unterschied, daß wir aus Abbildung 3.2 zu jedem  $T$  die zugehörige Konzentration  $f_\alpha$  ablesen. In Abbildung 3.3 ist diese Kurve mit 2 markiert. Der zu jedem Paar  $(T, f_\alpha)$  dazugehörige Wert  $\rho$  gibt die Brennkurve an, die durch diesen Punkt im Brennkurvendiagramm verläuft.

Die Kurven 1 und 2 schneiden sich in dem Punkt, auf den sich die Brennkurven bei größer werdendem  $\rho$  zusammenziehen. Es ist der Punkt, für den das maximale  $\rho$  erzielt werden kann. Betrachten wir die Schnittpunkte der Kurve 1 mit den Brennkurven, so erinnern wir uns daran, daß diese Kurve als Abgrenzung der möglichen  $f_\alpha$ -Werte für ein vorgegebenes  $\rho$  angesehen werden kann. Die Schnittpunkte kennzeichnen demnach die Brenngleichgewichte auf der Brennkurve, die zu der maximalen und der minimalen Konzentration  $f_\alpha$  gehören. Die minimale Konzentration gehört zum Schnittpunkt auf dem unteren Teil der Brennkurve und die maximale zum Schnittpunkt auf dem oberen Teil. Ähnlich verhält es sich mit den Schnittpunkten der Kurve 2, mit dem Unterschied, daß diese das Temperaturintervall begrenzen. Aus diesem Grund liegen die Schnittpunkte an den Rändern der Brennkurven.

In Abbildung 3.2 haben wir die einzige Nullstelle  $T = 3.999 \text{ keV}$  abgelesen und festgehalten, daß sich  $\rho$  für  $T \rightarrow \infty$  asymptotisch der  $T$ -Achse nähert. Aus diesem Grund ist die Brennkurve für  $\rho = 0$  nicht geschlossen, weil keine obere Schranke für die Temperatur existiert.

Abschließend betrachten wir die Konzentrationen der  $\alpha$ -Teilchen, die in jedem Punkt auf der Brennkurve vorliegt, und tragen sie in der  $f_\alpha, T$ -Ebene auf. Diese sind in Abbildung 3.4 dargestellt und bilden für  $\rho \neq 0$  geschlossene Kurven. Zusätzlich sind wiederum die Grenzverläufe 1 und 2 aus den Abschnitten 3.1 und 3.2 aufgetragen. Es ist deutlich zu erkennen, daß Linie 1 die Kurven am maximalen und am minimalen Wert für  $f_\alpha$  schneidet. Genauso verhält es sich mit der Linie 2, die die Kurven an der maximalen und der minimalen Temperatur schneidet. Vergleicht man die Linien 1 und 2 in den Abbildungen 3.3 und 3.4, dann wird noch einmal deutlich, daß das kleinere Fusionsprodukt  $n_e \tau_E T$  zu einer festen Temperatur  $T$  bei dem kleineren Wert  $f_\alpha$  liegt. Wir gehen noch einmal speziell auf die Kurve für  $\rho = 0$  ein. Die offene Kurve in Abbildung 3.4 stellt nicht die  $f_\alpha$  Werte für die offene Kurve in Abbildung 3.3 dar. Bei der Bestimmung der  $f_\alpha$  für  $\rho = 0$  haben wir in Abschnitt 3.1 zwei mögliche Lösungen erhalten. Eine davon ist  $f_\alpha = 0$ , durch die die offene Kurve in Abbildung 3.3 bestimmt wird. Die zweite Lösung ist in (3.6) angegeben und ist die, die



**Abbildung 3.4:** In der  $f_\alpha$ ,  $T$ -Ebene sind die Verläufe der Konzentrationen  $f_\alpha$  für  $\rho = 0, 3, 6, 9, 12$  und  $15$  (von außen nach innen) dargestellt. Mit 1 ist der Zusammenhang  $f_\alpha(T)$  aus Abbildung 3.1 und mit 2 der aus Abbildung 3.2 gekennzeichnet.

in Abbildung 3.4 aufgetragen ist. Letztere ist dadurch gekennzeichnet, daß die Energieeinschlußzeit unendlich wird, so daß kein endliches Fusionsprodukt existiert.

# Kapitel 4

## Merkmale der Einschlußzeitprofile

In diesem Kapitel werden wir charakteristische Verläufe der lokalen Einschlußzeitprofile  $\tau_p(r)$  und  $\tau_E(r)$  erarbeiten. Dabei beschränken wir uns auf den Bereich, der für die technische Realisierung eines Fusionsplasmas in Frage kommt. Dieser liegt im Temperaturintervall von 10-20 keV und bei einer Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen von bis zu 5%. Ein Ziel ist es, die Wertebereiche der in dieser Arbeit neu definierten Größen zu bestimmen, auf denen wir im weiteren Verlauf aufbauen werden.

### 4.1 Konstante Einschlußzeiten

Bevor wir auf die Eigenschaften der Einschlußzeitprofile eingehen, überlegen wir uns, ob eine solche Untersuchung überhaupt notwendig ist. Sollte sich herausstellen, daß die lokalen Einschlußzeiten mit der globalen Einschlußzeit nahezu übereinstimmen, dann wäre deren Einführung abundant. Um diesen Sachverhalt zu untersuchen, setzen wir die lokalen Einschlußzeiten als konstant voraus, und leiten hieraus Konsequenzen für die Profilverläufe der Teilchendichte und der Temperatur ab.

Sei  $\tau_p(r) := \tau_p = \text{const.}$  Dann erhalten wir aus Gleichung (2.19a) für die Teilcheneinschlußzeit

$$\tau_p C_R \int_0^r n^2(r') T^2(r') r' dr' = a \int_0^r n(r') r' dr' .$$

Für den Reaktionsquerschnitt haben wir die Näherungsformel (2.8) eingesetzt. Da diese Gleichung für alle  $r$  erfüllt sein muß, können wir diese nach  $r$  differenzieren

und erhalten nach  $n(r)$  aufgelöst die Beziehung

$$n(r) = \frac{a}{\tau_p C_R} \frac{1}{T^2(r)} \sim \frac{1}{T^2(r)}.$$

Man erkennt hieran, daß die Profile gegenläufig sein müssen in dem Sinn, daß wenn das eine steigend ist, muß das andere abfallend sein, damit die Teilcheneinschlußzeit konstant ist. Da aus Messungen bekannt ist, daß sowohl die Dichte als auch die Temperatur zum Rand abnehmen, widerspricht dies der oben aufgestellten Annahme, daß  $\tau_p(r)$  konstant sein soll.

Den gleichen Schluß können wir für die Energieeinschlußzeit ziehen. Setzen wir  $\tau_E(r) := \tau_E = \text{const}$ , so erhalten wir aus (2.19b)

$$\tau_E \left( C_R \int_0^r n^2(r') T^2(r') r' dr' - c \int_0^r n^2(r') \sqrt{T(r')} r' dr' \right) = b \int_0^r n(r') T(r') r' dr'.$$

Wir differenzieren wiederum nach  $r$  und erhalten nach  $n(r)$  aufgelöst

$$n(r) = \frac{b}{\tau_E} \frac{T(r)}{C_R T^2(r) - c \sqrt{T(r)}} \sim \frac{T(r)}{C_R T^2(r) - c \sqrt{T(r)}}.$$

Aus dieser Bedingung läßt sich nicht direkt schließen, daß  $n(r)$  und  $T(r)$  gegenläufig sein müssen. Dies wird jedoch durch eine weitere Differentiation nach  $r$  deutlich. Aus den obigen Überlegungen können wir schließen, daß die Einschlußzeiten Profilstrukturen aufweisen, deren Verläufe es im weiteren Verlauf der Arbeit zu untersuchen gilt.

Für  $\rho = \text{const}$  können wir solche allgemeinen Überlegungen nicht durchführen, da in Gleichung (2.21) Produkte von Integralen auftreten. Diese Integrale lassen sich durch Differentiation von (2.21) nicht vollständig beseitigen. Es soll jedoch auf einen Spezialfall hingewiesen werden. Für den Fall, daß ein konstantes Temperaturprofil  $T(r) := T_0 = \text{const}$  vorliegt, lautet die Gleichung für  $\rho(r)$

$$\rho(r) = \frac{a \left( \int_0^r n^2(r') S(T_0) r' dr' - c \int_0^r n^2(r') \sqrt{T_0} r' dr' \right) \int_0^r n(r') r' dr'}{b \int_0^r n^2(r') S(T_0) r' dr' \int_0^r n(r') T_0 r' dr'}.$$

Es ist offensichtlich, daß sich die Integrale herauskürzen lassen, so daß sich die Gleichung auf

$$\rho(r) = \frac{a (S(T_0) - c \sqrt{T_0})}{b S(T_0) T_0}$$

reduziert. Für ein konstantes Temperaturprofil ist  $\rho(r)$  konstant und unabhängig vom Teilchenprofil. Die Umkehrung, daß aus einem konstanten  $\rho$ -Verlauf auch ein konstantes Temperaturprofil folgt, läßt sich hier nicht zeigen. Wie wir in Kapitel 5 sehen werden, gilt sie aber ebenfalls.

## 4.2 Entwicklung um das Plasmazentrum

Um einen Überblick über das Verhalten der lokalen Einschlußzeiten  $\tau_p(r)$  und  $\tau_E(r)$  zu erhalten, werden wir diese in eine Taylor-Reihe um das Plasmazentrum entwickeln. Wir werden uns weiterhin auf den Temperaturbereich von 10-20 keV beschränken und die Näherungsformel für den Reaktionsquerschnitt verwenden. Das Dichteprofil  $n(r)$  und das Temperaturprofil  $T(r)$  geben wir uns als Potenzreihe vor. Unter der Annahme, daß sie bei  $r = 0$  keine Spitze haben, sind sie durch

$$n(r) = n_0 + n_2 r^2 \quad \text{und} \quad T(r) = T_0 + T_2 r^2 \quad (4.1)$$

gegeben. Für die Darstellung der Einschlußzeiten, wie sie in (2.16)-(2.17) angegeben sind, benötigen wir die in (2.18) aufgelisteten Funktionen  $I_i(r)$ . Wir setzen die Gleichungen (4.1) hierin ein, wobei wir in  $I_4(r)$  für die Wurzelfunktion die Taylor-Entwicklung verwenden. Wir brechen nach dem quadratischen Term ab und erhalten die Näherungen

$$\begin{aligned} I_1(r) &= \frac{2}{r^2} \int_0^r n(r') r' dr' = n_0 + \frac{1}{2} n_2 r^2 \\ I_2(r) &= \frac{2}{r^2} C_R \int_0^r n^2(r') T^2(r') r dr' \approx C_R n_0^2 T_0^2 + C_R n_0 T_0 (n_2 T_0 + n_0 T_2) r^2 \\ I_3(r) &= \frac{2}{r^2} \int_0^r n(r') T(r') r' dr' \approx n_0 T_0 + \frac{1}{2} (n_2 T_0 + n_0 T_2) r^2 \\ I_4(r) &= \frac{2}{r^2} \int_0^r n^2(r') \sqrt{T(r')} r' dr' \approx n_0^2 \sqrt{T_0} + n_0 \frac{n_0 T_2 + 4 n_2 T_0}{4 \sqrt{T_0}} r^2. \end{aligned}$$

### 4.2.1 Einschlußzeiten durch $n(r)$ und $T(r)$ ausgedrückt

Nachdem wir diese vier Ausdrücke in die Gleichungen der Einschlußzeiten eingesetzt haben, entwickeln wir diese um  $r = 0$  und erhalten die gesuchten Reihen für  $\tau_p(r)$  und  $\tau_E(r)$ .

Für die Teilcheneinschlußzeit lautet die Entwicklung bis zur zweiten Ordnung

$$\tau_p(r) \approx \frac{a}{C_R n_0 T_0^2} \left( 1 - \frac{n_2 T_0 + 2 n_0 T_2}{2 n_0 T_0} r^2 \right). \quad (4.2)$$

Unter der Voraussetzung, daß Dichte- und Temperaturprofil fallend sind, müssen die Größen  $n_2$  und  $T_2$  negativ sein. Dann läßt sich aus Gleichung (4.2) schließen, daß  $\tau_p(r)$  vom Plasmazentrum aus ansteigen muß.

Für die Energieeinschlußzeit erhalten wir die Entwicklung

$$\tau_E(r) \approx \frac{b T_0}{n_0 (C_R T_0^2 - c \sqrt{T_0})} \left( 1 - \left( \frac{n_2}{2 n_0} + \frac{T_2 (2 C_R T_0^2 + c \sqrt{T_0})}{4 T_0 (C_R T_0^2 - c \sqrt{T_0})} \right) r^2 \right). \quad (4.3)$$

Auch in diesem Fall läßt sich eine Aussage über den anfänglichen Verlauf der Einschlußzeit machen. Da  $C_R T_0^2 - c \sqrt{T_0} > 0$  gelten muß (ansonsten wäre  $\tau_E(0)$  negativ), steigt die Energieeinschlußzeit ebenfalls nach außen an.

Als letztes wollen wir die Entwicklung von  $\rho(r)$  untersuchen. Diese lautet

$$\rho(r) \approx \frac{a(T_0^2 - c\sqrt{T_0}/C_R)}{bT_0^3} - \frac{a(2T_0^2 - 5c\sqrt{T_0}/C_R)T_2}{4bT_0^4} r^2. \quad (4.4)$$

In diesem Fall läßt sich keine eindeutige Aussage über den Verlauf von  $\rho(r)$  machen. Entscheidend hierfür ist das Vorzeichen des Ausdrucks  $2T_0^2 - 5c\sqrt{T_0}/C_R$ , welches von  $T_0$  und  $f_\alpha$  abhängt. Aus diesem Grund werden wir für den zugrunde gelegten Temperaturbereich eine Fallunterscheidung vornehmen. Bei  $T_0 = 10$  keV ist die Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen, bei der der Ausdruck das Vorzeichen wechselt, 22.18%, für  $T_0 = 20$  keV liegt die Konzentration bei 32.33%. Ein Vorzeichenwechsel dieses Ausdrucks findet demnach nur bei sehr großen  $f_\alpha$  statt, so daß wir für den Bereich kleiner Konzentrationen festhalten können, daß der Wert dieses Terms positiv ist. Es ergibt sich schließlich ebenso wie bei den Einschlußzeiten das Bild, daß das  $\rho$ -Profil ebenfalls vom Zentrum aus ansteigt.

Es fällt an der Entwicklung von  $\rho(r)$  auf, daß sie nicht von den Koeffizienten  $n_0$  und  $n_2$  abhängt. Das erweckt den Anschein, als ob  $\rho(r)$  unabhängig von der Dichte  $n(r)$  sei. Dies bestätigt sich nicht, was der Term vierter Ordnung

$$\frac{a(3n_0T_2 - n_2T_0)(T_0^2 - 4c\sqrt{T_0}/C_R)T_2}{12bn_0T_0^5} r^4$$

zeigt. Es wird deutlich, daß das  $\rho$ -Profil stärker vom Temperaturprofil als vom Dichteprofil beeinflusst wird.

In den Entwicklungen von  $\tau_p(r)$ ,  $\tau_E(r)$  und  $\rho(r)$  treten keine linearen Terme auf. Schließt man spitze Dichte- und Temperaturprofile aus, so überträgt sich das auch auf die Einschlußzeitprofile und  $\rho$ .

#### 4.2.2 $n(r)$ und $T(r)$ durch Einschlußzeiten ausgedrückt

Im letzten Abschnitt haben wir die Einschlußzeitprofile durch eine Reihenentwicklung ausgedrückt, deren Koeffizienten durch die des Dichte- und Temperaturprofils ausgedrückt sind. Wir werden jetzt den umgekehrten Weg gehen und eine Entwicklung für  $n(r)$  und  $T(r)$  in Abhängigkeit von den Entwicklungskoeffizienten der Einschlußzeiten herleiten. Diese Aufgabe ist etwas schwieriger, weil uns keine expliziten Bestimmungsgleichungen  $n = n(\tau_p(r), \tau_E(r), r)$  und  $T = T(\tau_p(r), \tau_E(r), r)$  vorliegen. Wir werden deshalb so vorgehen, daß wir uns die Einschlußzeitprofile durch die endlichen Potenzreihen

$$\tau_p(r) = \tau_{p0} + \tau_{p2} r^2 \quad \text{und} \quad \tau_E(r) = \tau_{E0} + \tau_{E2} r^2 \quad (4.5)$$

vorgeben. Durch Koeffizientenvergleich mit den Entwicklungen (4.2) und (4.3) des letzten Abschnitts erhalten wir Bestimmungsgleichungen für die Größen  $n_0, n_2, T_0$  und  $T_2$  aus (4.1).

### Vergleich der niedrigsten Ordnung

Wir betrachten zuerst die beiden Gleichungen, die sich aus dem Vergleich der konstanten Terme ergeben. Diese lauten

$$\tau_{P0} = \frac{a}{C_R n_0 T_0^2} \quad \text{und} \quad \tau_{E0} = \frac{b T_0}{n_0 (C_R T_0^2 - c \sqrt{T_0})}. \quad (4.6)$$

Dividieren wir diese durcheinander, so kürzt sich  $n_0$  heraus, und mit der Abkürzung  $\rho_0 := \tau_{P0}/\tau_{E0}$  erhalten wir

$$\rho_0 = \frac{a T_0^2 - c \sqrt{T_0}/C_R}{b T_0^3}. \quad (4.7)$$

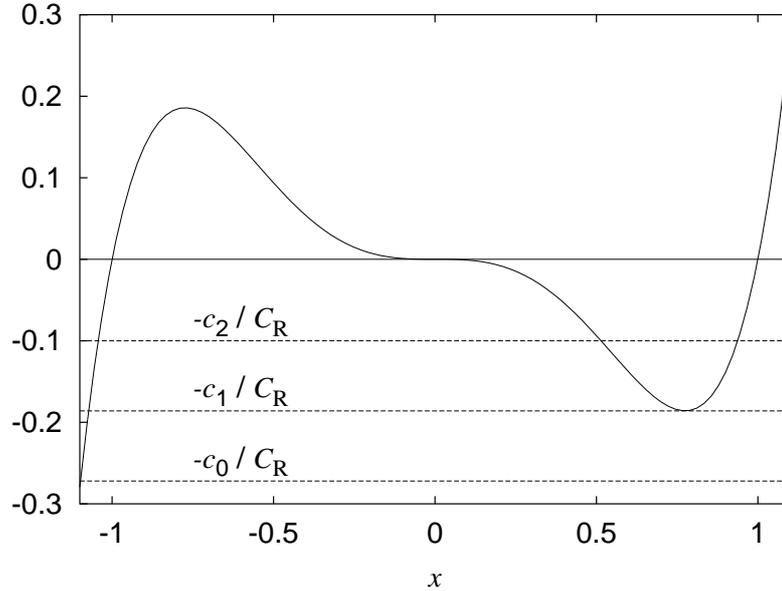
Wir werden jetzt untersuchen, unter welchen Voraussetzungen diese Gleichung physikalisch brauchbare Lösungen für  $T_0$  liefert. Dazu führen wir eine weitere Abkürzung  $\lambda := a/(b \rho_0)$  ein. Mit der Substitution  $x := \sqrt{T_0}$  erhalten wir die Gleichung

$$x^5 - \lambda x^3 = -\lambda c/C_R. \quad (4.8)$$

Für dieses Polynom 5. Grades gibt es keine allgemeinen Lösungsformeln, jedoch läßt es sich wegen seiner einfachen Beschaffenheit leicht diskutieren. Hierzu betrachten wir erst einmal nur die linke Seite der Gleichung (4.8). Es läßt sich sehr leicht zeigen, daß dieses Polynom die drei Nullstellen 0 und  $\pm \sqrt{\lambda}$ , die zwei Extrema  $\pm \sqrt{\frac{3}{5}\lambda}$  sowie einen Sattelpunkt im Ursprung hat.

In Abbildung 4.1 ist der Verlauf des Polynoms für  $\lambda = 1$  aufgetragen. Ebenfalls eingetragen sind verschiedene  $-\lambda c/C_R$ , deren Schnittpunkte mit der Funktion die von uns gesuchten Lösungen der Gleichung (4.8) sind. Es ist offensichtlich, daß es mindestens eine und maximal drei Lösungen gibt. Da  $\lambda c/C_R$  größer null ist und  $x$  bzw.  $\sqrt{T_0}$  positiv sein muß, liegen die uns interessierenden Schnittpunkte im IV. Quadranten des Koordinatensystems. Hier ist die Existenz einer Lösung nicht immer gewährleistet. Als Bedingung für die Existenz einer Lösung kann der Grenzfall  $c_1/C_R$  betrachtet werden, bei dem es nur einen Schnittpunkt gibt. Der Zusammenhang zwischen den Größen  $\rho_0$  und  $f_\alpha$  für diesen Punkt wird durch die Gleichung (4.8) für  $x = \sqrt{\frac{3}{5}\lambda}$  bzw. die Gleichung

$$\rho_0 = \left( \frac{108 C_R^2}{3 \cdot 125 c^2} \right)^{1/3} \frac{a}{b} \quad (4.9)$$

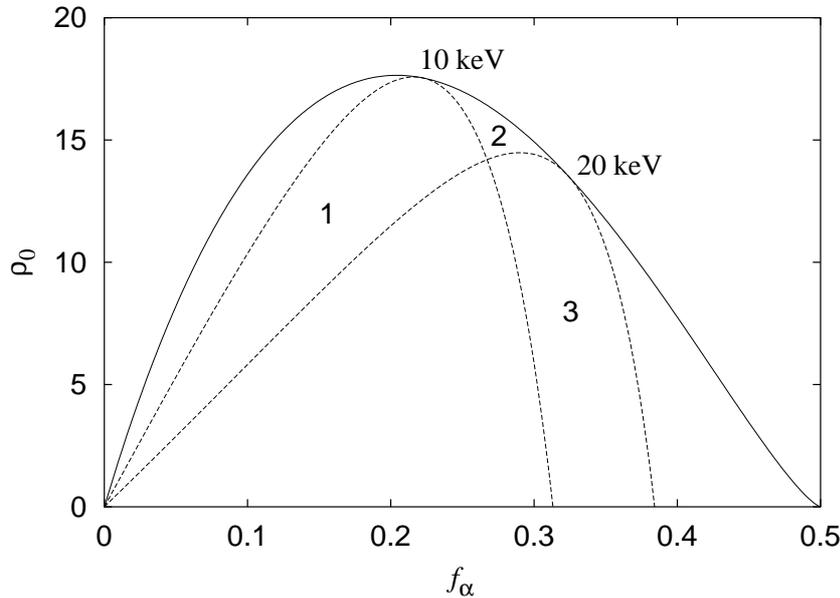


**Abbildung 4.1:** Dargestellt sind die beiden Seiten der Gleichung (4.8) für  $\lambda = 1$  und unterschiedliche Werte  $c_i$  für  $c$ . Die Schnittpunkte der gestrichelten Linien mit der durchgezogenen Kurve sind die Lösungen der Gleichung.

ausgedrückt,  $a$ ,  $b$  und  $c$  sind Funktionen von  $f_\alpha$ , die in (2.20) angegeben sind. Die hierdurch aus (4.9) folgende Funktion  $\rho_0(f_\alpha)$  ist in Abbildung 4.2 aufgetragen. Für die Wertepaare  $(f_\alpha, \rho_0)$  unterhalb dieser Kurve existieren zwei Schnittpunkte und oberhalb keine. Die Kurve in Abbildung 4.2 stellt den gleichen Zusammenhang wie die in Abbildung 3.1 dar, nur daß in 4.2 die Näherungsformel für den Reaktionsquerschnitt verwendet wurde.

In Abbildung 4.2 sind neben der Grenzkurve (4.9) zusätzlich zwei typische Kurven  $\rho_0(f_\alpha)$  aufgetragen, und zwar die, die zu  $T_0 = 10$  keV und zu  $T_0 = 20$  keV gehören.  $\rho_0(f_\alpha)$  ist durch Gleichung (4.7) gegeben, in der wir für  $T_0$  die jeweilige Temperatur einsetzen und  $a$ ,  $b$  und  $c$  als Funktionen von  $f_\alpha$  auffassen. Die Berührungspunkte dieser beiden Verläufe mit der Grenzkurve kennzeichnen die Punkte, für die die Gleichung (4.7) nur eine Lösung hat. In den Bereichen 1 und 3 liegen die uns interessierenden Paare  $(f_\alpha, \rho_0)$ , durch die eine Lösung mit  $T_0$  aus dem Intervall 10-20 keV hindurchgeht, in Bereich 2 gehen zwei Lösungen mit  $T_0$  zwischen 10 und 20 keV hindurch.

Nachdem wir die Lösbarkeit der Gleichung (4.7) ausführlich diskutiert haben, werden wir eine weitere Einschränkung vornehmen. Wir wollen jetzt nicht



**Abbildung 4.2:** Maximales  $\rho_0$  im Plasmazentrum (Gleichung (4.9)). Zusätzlich ist (4.7) für  $T_0 = 10 \text{ keV}$  und  $T_0 = 20 \text{ keV}$  aufgetragen.

mehr jeden beliebigen Wert von  $f_\alpha$  zulassen, sondern uns auf den Bereich bis 5% konzentrieren. Betrachten wir unter diesem Gesichtspunkt die Größen  $a$ ,  $b$  und  $c$ , so können wir diese in erster Näherung durch  $a \approx 4 f_\alpha$ ,  $b \approx 12/E_\alpha$  und  $c \approx 4 C_B/E_\alpha$  beschreiben. Setzen wir diese Näherungen in Gleichung (4.7) ein, so erhalten wir den einfachen Zusammenhang

$$\rho_0 \approx \frac{f_\alpha E_\alpha T_0^2 - 4 C_B \sqrt{T_0}/C_R}{3 T_0^3} \approx \frac{E_\alpha}{3 T_0} f_\alpha. \quad (4.10)$$

Im letzten Schritt haben wir die Tatsache ausgenutzt, daß  $T_0 \geq 10 \text{ keV}$  und  $4 C_B/E_\alpha C_R \approx 2.7 (\text{keV})^{(3/2)}$  ist. Wir erhalten somit für kleine  $f_\alpha$  einen linearen Zusammenhang zwischen  $\rho_0$  und  $f_\alpha$ , der in Abbildung 4.2 gut zu erkennen ist.

Aus (4.10) erhalten wir eine Näherungslösung für  $T_0$ , die wir in (4.6a) einsetzen können. Ersetzen wir in dieser Gleichung wiederum das  $a$ , so erhalten wir für  $n_0$  und  $T_0$  die Approximationen

$$T_0 \approx \frac{E_\alpha f_\alpha \tau_{E0}}{3 \tau_{p0}} \quad \text{und} \quad n_0 \approx \frac{36 \tau_{p0}}{C_R E_\alpha^2 f_\alpha \tau_{E0}^2}. \quad (4.11)$$

Diese beiden Gleichungen beschreiben, wie die Temperatur und die Dichte näherungsweise von den Einschlußzeiten und der Konzentration  $f_\alpha$  abhängen.

Bevor wir uns in der Entwicklung der nächst höheren Ordnung zuwenden,

$T_0/\text{keV}$	1%			3%			5%		
	$\tau_{p0}/s$	$\tau_{E0}/s$	$\rho_0$	$\tau_{p0}/s$	$\tau_{E0}/s$	$\rho_0$	$\tau_{p0}/s$	$\tau_{E0}/s$	$\rho_0$
10	3.79	3.54	1.07	12.35	3.85	3.20	22.45	4.23	5.31
15	1.68	2.25	0.75	5.49	2.44	2.25	9.98	2.66	3.75
20	0.95	1.66	0.57	3.09	1.79	1.72	5.61	1.95	2.88

**Tabelle 4.1:** Wertetabelle für die Einschlußzeiten  $\tau_{p0}$  und  $\tau_{E0}$  im Temperaturintervall von 10-20 keV, bei der Dichte  $10^{20}\text{m}^{-3}$  und einer maximalen Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen von 5%.

wollen wir auf den Wertebereich der Einschlußzeiten eingehen. Wir beschränken uns in diesem Kapitel auf das Temperaturintervall von 10-20 keV. Die Dichte soll in der Größenordnung von  $10^{20}\text{m}^{-3}$  und die Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen bei maximal 5% liegen.

Zur Berechnung der Einschlußzeiten verwenden wir jetzt die genauere Formel für den Reaktionsquerschnitt, so daß die Gleichungen der konstanten Terme

$$\tau_{p0} = \frac{a}{n_0 S(T_0)} \quad \text{und} \quad \tau_{E0} = \frac{b T_0}{n_0 (S(T_0) - c \sqrt{T_0})} \quad (4.12)$$

lauten. In Tabelle 4.1 sind die Werte für  $\tau_{p0}$ ,  $\tau_{E0}$  und  $\rho_0$  aufgetragen. Die Teilcheneinschlußzeit umfaßt einen wesentlich größeren Wertebereich als die Energieeinschlußzeit. Die Werte von  $\rho_0$  liegen im Bereich von 1 bis 5.

### Vergleich der nächst höheren Ordnung

Wie werden nun den Koeffizientenvergleich auf die nächste Ordnung ausdehnen. Wir setzen dabei voraus, daß durch die Vorgabe von  $\tau_{p0}$  und  $\tau_{E0}$  die Werte  $n_0$  und  $T_0$  bereits berechnet sind. Um genauere Ergebnisse zu erzielen, verwenden wir die genauere Fit-Formel für den Reaktionsquerschnitt. Der Grund liegt darin, daß bei den Koeffizienten 2. Ordnung auch die Ableitung dieser Funktion auftritt, die durch die Näherungsformel (2.8) nicht so gut approximiert wird. Der Koeffizientenvergleich liefert uns das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \tau_{p2} &= -\frac{\tau_{p0}}{2 n_0} n_2 - \frac{\tau_{p0} S'(T_0)}{2 S(T_0)} T_2 \\ \tau_{E2} &= -\frac{\tau_{E0}}{2 n_0} n_2 - \frac{\tau_{E0} (-2 S(T_0) + c \sqrt{T_0} + 2 T_0 S'(T_0))}{4 T_0 (S(T_0) - c \sqrt{T_0})} T_2. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind linear in  $n_2$  und  $T_2$ , und man kann die vereinfachte Form

$$\begin{pmatrix} \tau_{p2} \\ \tau_{E2} \end{pmatrix} = M(\tau_{p0}, \tau_{E0}) \begin{pmatrix} n_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

aufschreiben, in der für  $M(\tau_{p0}, \tau_{E0})$  die entsprechenden Einträge aus obigen Gleichungen zu setzen sind. Unser Interesse gilt der Auflösung dieser Gleichung nach  $n_2$  und  $T_2$ , was unter der Voraussetzung, daß die Matrix regulär ist, problemlos durchzuführen ist. Als Bedingung für die Singularität der Matrix erhalten wir die Gleichung  $2S^2(T_0) - c\sqrt{T_0}[S(T_0) - 2T_0S'(T_0)] = 0$ . Diese wird für den hier betrachteten Wertebereich nicht erfüllt, denn in dem  $f_\alpha$ -Bereich zwischen 0 und 10% liegt die Temperatur, bei der die Determinante null ist, unterhalb von 6 keV. Mit der Bestimmungsgleichung

$$M^{-1}(\tau_{p0}, \tau_{E0}) \begin{pmatrix} \tau_{p2} \\ \tau_{E2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_2 \\ T_2 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

sind wir in der Lage,  $n_2$  und  $T_2$  aus den vorgegebenen Koeffizienten der Einschlußzeiten zu bestimmen.

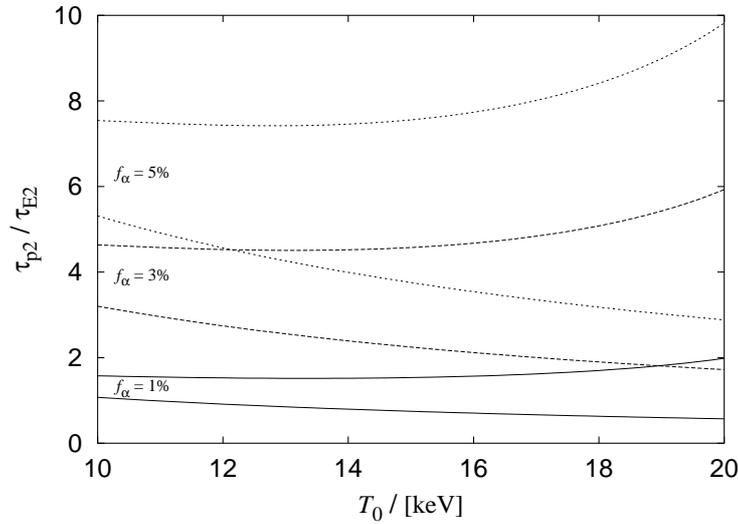
Ähnlich wie bei der nullten Ordnung, wollen wir auch hier den möglichen Wertebereich für die Koeffizienten  $\tau_{p2}$  und  $\tau_{E2}$  bestimmen. Da wir davon ausgehen, daß sowohl die Dichte als auch die Temperatur vom Zentrum nach außen hin abnehmen, müssen beide Werte auf der rechten Seite von Gleichung (4.14) kleiner null sein. Aus dieser Bedingung können wir die Ungleichung

$$\rho_0 < \frac{\tau_{p2}}{\tau_{E2}} < \rho_0 \frac{2T_0S'(T_0)(S(T_0) - c\sqrt{T_0})}{S(T_0)(2T_0^2S'(T_0) - (2S(T_0) - c\sqrt{T_0}))} \quad (4.15)$$

ableiten. Es fällt auf, daß nur das Verhältnis  $\tau_{p2}/\tau_{E2}$  eingeschränkt wird, und auch das nur durch das Verhältnis der Einschlußzeiten im Zentrum, nicht aber von deren absoluten Werten. Dies zeigt, daß dem Verhältnis der Einschlußzeiten eine wesentlich größere Bedeutung zukommt, als deren Absolutwerten. In Abbildung 4.3 sind die möglichen Verhältnissbereiche von  $\tau_{p2}/\tau_{E2}$  für unterschiedliche  $f_\alpha$  im Temperaturintervall 10-20 keV aufgetragen. In Tabelle 4.2 sind hierzu unterschiedliche Wertebereiche zu vorgegebenen Temperaturen und Konzentrationen der  $\alpha$ -Teilchen aufgetragen. Es fällt auf, daß die Breite der Bereiche mit zunehmendem  $f_\alpha$  größer wird.

	1%	3%	5%
10 keV	1.07 - 1.58	3.20 - 4.64	5.31 - 7.54
15 keV	0.75 - 1.54	2.25 - 4.57	3.75 - 7.56
20 keV	0.57 - 1.99	1.72 - 5.93	2.88 - 9.82

**Tabelle 4.2:** Wertebereiche für das Verhältnis  $\tau_{p2}/\tau_{E2}$  zu vorgegebenen Temperaturen und Konzentrationen für die  $\alpha$ -Teilchen.



**Abbildung 4.3:** Verschiedene Verhältnissbereiche von  $\tau_{p2}/\tau_{E2}$  zu den Konzentrationen der  $\alpha$ -Teilchen  $f_\alpha = 1\%$ ,  $3\%$  und  $5\%$ .

### 4.3 Berechnung konkreter Beispiele

Wir wollen jetzt zum Abschluß dieses Kapitels die hergeleiteten Verfahren an zwei konkreten Beispielen durchrechnen. Dabei wollen wir sowohl aus vorgegebenen Dichte- und Temperaturprofilen die Einschlußzeitprofile bestimmen als auch im zweiten Beispiel den umgekehrten Weg gehen und aus vorgegebenen Einschlußzeiten näherungsweise  $n(r)$  und  $T(r)$  berechnen.

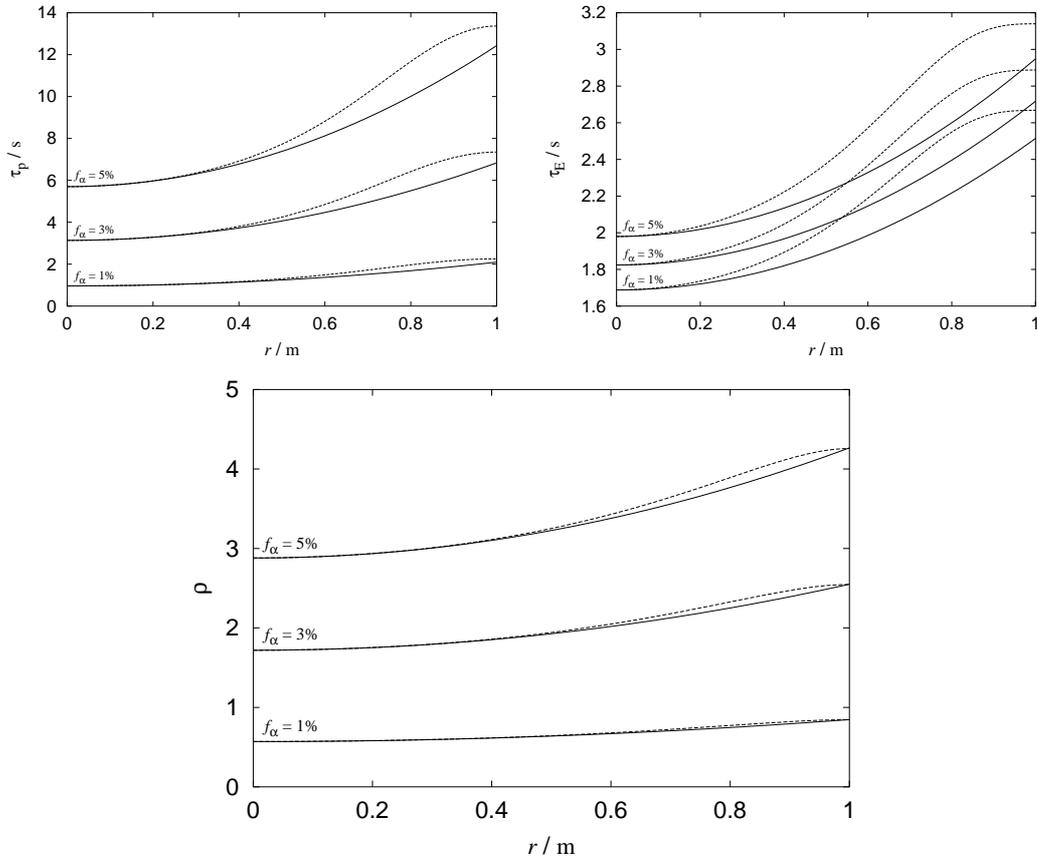
#### Berechnung der Einschlußzeitprofile aus $n(r)$ und $T(r)$

Im ersten Beispiel geben wir uns das Dichte- und das Temperaturprofil durch

$$n(r) = \tilde{n} (1 - r^2/m^2) \quad \text{und} \quad T(r) = \tilde{T} (1 - r^2/m^2) \quad (4.16)$$

mit den Konstanten  $\tilde{n} = 10^{20} \text{ m}^{-3}$  und  $\tilde{T} = 20 \text{ keV}$  vor. Als Konzentration für die  $\alpha$ -Teilchen geben wir uns die Werte  $1\%$ ,  $3\%$  und  $5\%$  vor. Mit diesen Angaben können wir  $\tau_p(r)$  und  $\tau_E(r)$  näherungsweise aus den Taylor-Entwicklungen bestimmen. Wir verwenden dazu nicht die Gleichungen (4.2) und (4.3), sondern die Entwicklungen mit der Fit-Formel für den Reaktionsquerschnitt.

Zusätzlich zu den Näherungslösungen betrachten wir die exakten Lösungen für  $\tau_p(r)$  und  $\tau_E(r)$ , die wir aus den Gleichungen (2.16)-(2.17) bestimmen. In Abbildung 4.4 sind die Ergebnisse aufgetragen. Die durchgezogenen Kurven sind die Näherungslösungen, und die gestrichelten Linien sind zum Vergleich dazu die exakten Lösungen. Für die Einschlußzeiten wird die Approximation zum Rand



**Abbildung 4.4:** Einschlußzeitprofile und  $\rho$ -Profil für die in (4.16) vorgegebenen Dichte- und Temperaturprofile. Die durchgezogenen Linien sind die Näherungslösungen aus der Taylor-Entwicklung, die gestrichelten Linien sind die exakt berechneten Verläufe.

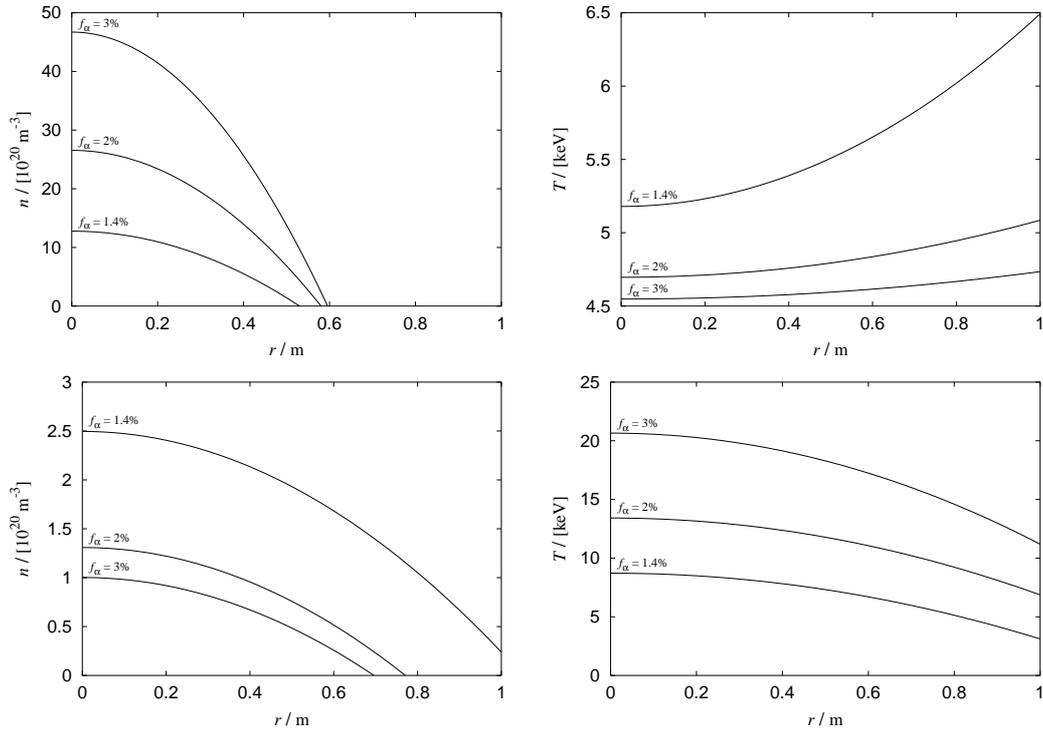
immer ungenauer, dagegen ist sie für das  $\rho$ -Profil über den gesamten Bereich von  $r$  relativ gut. Vergleicht man die Verläufe von  $\rho(r)$  für die drei unterschiedlichen Konzentrationen  $f_\alpha$ , so spiegelt sich der lineare Zusammenhang  $\rho_0 \sim f_\alpha$  aus (4.10) sehr gut wider.

### Berechnung von $n(r)$ und $T(r)$ aus den Einschlußzeitprofilen

Im letzten Beispiel geben wir uns das Teilcheneinschlußzeitprofil und das Energieeinschlußzeitprofil durch

$$\tau_p(r) = (3 + 4r^2/\text{m}^2) \text{ s} \quad \text{und} \quad \tau_E(r) = (1.8 + 2r^2/\text{m}^2) \text{ s} \quad (4.17)$$

vor. Die Koeffizienten der Profile sind den Tabellen 4.1 und 4.2 für  $T_0 = 20 \text{ keV}$  und  $f_\alpha = 3\%$  entnommen. Als Konzentration für die  $\alpha$ -Teilchen geben wir uns



**Abbildung 4.5:** Dichte- und Teilchenprofil aus den in (4.17) vorgegebenen Einschlußzeitprofilen. Da die Berechnung von  $T_0$  nicht eindeutig ist, existieren für jedes  $f_\alpha$  zwei Lösungen. Aufgetragen sind die Profile für die  $\alpha$ -Konzentrationen 1.4%, 2% und 3%.

1.4%, 2% und 3% vor. Mit diesen Vorgaben und den Gleichungen (4.12) und (4.14) können wir eine Näherungslösung für die Profile  $n(r)$  und  $T(r)$  bestimmen. In Abbildung 4.5 sind diese aufgetragen. Für jedes  $f_\alpha$  gibt es zwei mögliche Lösungen, von denen die zu der kleineren Temperatur in den beiden oberen Abbildungen und die andere in den unteren aufgetragen ist. Wir interessieren uns für die Lösungen in den unteren Diagrammen, da sich die Temperaturen hier im Bereich von 10-20 keV bewegen. Außerdem sind die Profilverläufe hier fallend. Auffällig ist, daß zwei der drei Dichteprofile ab einem bestimmten Wert  $r$  negativ werden, so daß wir folgern können, daß die Lösungen nur für den Bereich um  $r = 0$  brauchbare Werte liefern. Vergleichen wir die Verläufe von  $n(r)$  und  $T(r)$  für die unterschiedlichen Werte  $f_\alpha$ , so lassen sich die Zusammenhänge  $T_0 \sim f_\alpha$  und  $n_0 \sim f_\alpha^{-1}$  aus (4.10) bestätigen. Über die Güte der Näherungen lassen sich keine weiteren Angaben machen, da wir die tatsächlichen Lösungen nicht kennen. Dies soll als Motivation für das nächste Kapitel dienen, in dem wir ein Verfahren entwickeln werden, mit dem aus den vorgegebenen Einschlußzeitprofilen das Dichte- und das Temperaturprofil berechnet werden kann.

# Kapitel 5

## Berechnung von $n(r)$ und $T(r)$ aus den Einschlußzeitprofilen

In diesem Kapitel werden wir untersuchen, wie und unter welchen Bedingungen es möglich ist, zu vorgegebenen Einschlußzeitprofilen die dazugehörigen Verläufe der Dichte und der Temperatur zu berechnen. Am Ende von Kapitel 4 haben wir ein solches Beispiel näherungsweise berechnet und sind dabei zu dem Ergebnis gekommen, daß die Näherungslösung nur bedingt brauchbar ist. Wir werden uns deshalb in diesem Kapitel genauer mit dieser Aufgabe beschäftigen. Ausgangspunkt unserer Überlegungen sind die Definitionsgleichungen der Einschlußzeiten, die wir hier noch einmal explizit angeben. Sie lauten

$$\tau_{\text{P}}(r) = \frac{a \int_0^r n(r') r' dr'}{\int_0^r n^2(r') S(T(r')) r' dr'} \quad (5.1)$$

und

$$\tau_{\text{E}}(r) = \frac{b \int_0^r n(r') T(r') r' dr'}{\int_0^r n^2(r') \left( S(T(r')) - c \sqrt{T(r')} \right) r' dr'}. \quad (5.2)$$

Diese Gleichungen lassen sich problemlos zu einem System von homogenen, nicht-linearen Integralgleichungen umschreiben. Hierfür gibt es numerische Verfahren, mit denen solche Systeme gelöst werden können [23]. Es stellt sich dabei heraus, daß die Lösungen meistens divergieren und den physikalischen Bereich verlassen. Es ließ sich anhand der Integralgleichungen nicht klären, worin die Ursachen für dieses Verhalten liegen. Wir werden deshalb die Integralgleichungen so umformen, daß wir Differentialgleichungen erhalten, an denen die Problematik deutlich wird. Dabei werden wir so vorgehen, daß wir zuerst nur die Integralgleichung (5.1) behandeln und  $\tau_{\text{E}}(r)$  weiterhin aus  $n(r)$  und  $T(r)$  berechnen. Anschließend werden wir beide Gleichungen zusammen als System untersuchen.

## 5.1 Gegebenes Profil $\tau_p(r)$

Wir betrachten zuerst nur die Gleichung für die Teilcheneinschlußzeit. Unser Ziel ist es, Differentialgleichungen für die Dichte und die Temperatur abzuleiten. Dabei setzen wir voraus, daß  $\tau_p(r)$  und entweder  $n(r)$  oder  $T(r)$  vorgegeben sind. Zuerst multiplizieren wir (5.1) mit dem Nenner der rechten Seite und differenzieren nach  $r$ . Das ergibt

$$\tau_p'(r) \int_0^r n^2(r') S(T(r')) r' dr' + \tau_p(r) n^2(r) S(T(r)) r = a n(r) r. \quad (5.3)$$

Anschließend lösen wir (5.3) nach dem Integral auf, differenzieren ein weiteres mal nach  $r$  und erhalten

$$n(a - n \tau_p S) \left( \frac{1}{r} - \frac{\tau_p''}{\tau_p'} \right) - 2n^2 \tau_p' S + (a - 2n \tau_p S) n' - n^2 \tau_p S_T T' = 0, \quad (5.4)$$

wobei  $S_T$  für die partielle Ableitung von  $S(T)$  nach  $T$  steht. Diese Gleichung lösen wir nach  $n'$  oder  $T'$  auf und erhalten so die gesuchte Differentialgleichung. Der Term  $\left( \frac{1}{r} - \frac{\tau_p''}{\tau_p'} \right)$  könnte dabei für  $\tau_p' = 0$  Probleme machen. Wir setzen deshalb voraus, daß das Teilcheneinschlußzeitprofil nur im Zentrum ein Extremum hat und daß die zweite Ableitung an diesem Punkt nicht verschwindet. Unter diesen Voraussetzungen kann man zeigen, daß der Term auch für  $r = 0$  endlich wird. Zur Notation in diesem Kapitel sei bemerkt, daß wir auf die explizite Angabe der Abhängigkeit der Größen  $n$ ,  $T$ ,  $\tau_p$  und  $\tau_E$  von  $r$  und  $S$  von  $T$  im allgemeinen verzichten werden.

### 5.1.1 Berechnung des Dichteprofiles

Wir betrachten zuerst den Fall, daß das Temperaturprofil  $T(r)$  vorgegeben ist. Aus (5.4) erhalten wir in diesem Fall als Differentialgleichung für  $n$

$$n' = \frac{n^2 (2 \tau_p' S + \tau_p S_T T') - n (a - n \tau_p S) \left( \frac{1}{r} - \frac{\tau_p''}{\tau_p'} \right)}{a - 2n \tau_p S}. \quad (5.5)$$

Der Definitionsbereich dieser Differentialgleichung wird durch den Nenner auf der rechten Seite eingeschränkt, da nicht ausgeschlossen werden kann, daß dieser null wird. Aus diesem Grund müssen wir die Nullstellen des Nenners aus dem Definitionsbereich ausschließen. Die Bestimmungsgleichung für diese lautet

$$n = \frac{a}{2 \tau_p S}. \quad (5.6)$$

Diese Gleichung kann als Kurve im  $n, r$ -Raum interpretiert werden, die von der Lösung der Differentialgleichung nicht berührt oder geschnitten werden darf. Wir werden diese Kurve im weiteren Verlauf als die Singularitätlinie der Differentialgleichung bezeichnen.

Um die Differentialgleichung (5.5) zu lösen, benötigen wir noch einen Anfangswert, den wir aus Gleichung (5.1) erhalten, indem wir  $r = 0$  einsetzen und die Integrale mit Hilfe der in Abschnitt 2.1 durchgeführten Grenzwertbildung auswerten. Wir erhalten

$$n_0 = \frac{a}{\tau_p(0) S(T(0))} \quad (5.7)$$

als Anfangswert für die Dichte. Wir sind nun in der Lage, das durch (5.5) und (5.7) beschriebene Anfangswertproblem bei Vorgabe von  $f_\alpha$ ,  $T(r)$  und  $\tau_p(r)$  numerisch mit dem Runge-Kutta-Verfahren [24] zu lösen. In der Regel tritt der Fall ein, daß sich die Lösung der Differentialgleichung der Singularitätlinie (5.6) annähert und divergiert oder den physikalischen Bereich verläßt. Es wird das gleiche Verhalten wie bei der direkten Lösung der Integralgleichung beobachtet.

Wir suchen deshalb einen Weg, diese Problematik zu umgehen. Als Möglichkeit bietet sich an, einen Punkt auf der Singularitätlinie (5.6) zu suchen, in dem der Zähler aus (5.5) ebenfalls null wird und der Grenzwert existiert. Ein solcher Punkt würde es uns ermöglichen, die Singularitätlinie zu durchstoßen und das Divergieren an dieser auszuschließen. Die Bedingung für einen solchen Durchstoßpunkt, in dem sowohl Zähler als auch Nenner der Differentialgleichung null sind, läßt sich zu der Gleichung

$$\frac{\tau_p''}{\tau_p'} + 2 \frac{\tau_p'}{\tau_p} + \frac{S_T T'}{S} - \frac{1}{r} = 0 \quad (5.8)$$

zusammenfassen, indem wir  $n$  eliminieren. Es fällt auf, daß (5.8) unabhängig von  $a$  ist, das heißt, die Suche nach einem möglichen Durchstoßpunkt hängt nicht von der Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen ab. Wir lösen die Gleichung (5.8) nach  $r$  auf und erhalten den gesuchten Punkt  $(r, n)$ , indem wir  $n$  mit Hilfe von Gleichung (5.6) bestimmen. Die Steigung  $n'$  in diesem Punkt können wir mit Hilfe der Regel von L'Hôpital, die in Anhang B beschrieben ist, aus (5.5) bestimmen. Wir können das Anfangswertproblem neu formulieren, indem wir den so erhaltenen Punkt als neuen Anfangswert verwenden. Da die Berechnung der Steigung in dem Durchstoßpunkt nicht eindeutig ist, kann es mehrere Lösungen geben.

Mit dieser Methode sind wir in der Lage, Lösungen der Differentialgleichung (5.5) zu finden, die nicht divergieren. Diese entsprechen im Normalfall jedoch nicht den tatsächlichen Lösungen, weil sie nicht die Bedingung (5.7) erfüllen. Wir modifizieren deshalb unser Anfangswertproblem so, daß die Lösung eine zusätzliche Randbedingung erfüllen muß. Um das zu ermöglichen, führen wir einen weiteren Parameter ein. Wir geben dazu nur noch den relativen Profilverlauf der Temperatur fest vor, lassen deren Mittelwert aber variabel,  $T(r) = \bar{T} t(r)$  mit variablem  $\bar{T}$ . Damit wird  $n(0) - n_0$ , wobei  $n(0)$  der Wert der Dichte einer nicht divergierenden Lösung bei  $r = 0$  und  $n_0$  der in (5.7) geforderte Wert ist, zu einer Funktion von  $\bar{T}$ , für die wir  $F(\bar{T}) = n(0) - n_0$  schreiben. Um die gesuchte Lösung der Differentialgleichung zu erhalten, müssen wir die Nullstelle der Funktion  $F(\bar{T})$  finden, die den zu einer nicht divergierenden Lösung passenden Wert  $\bar{T}$  liefert.

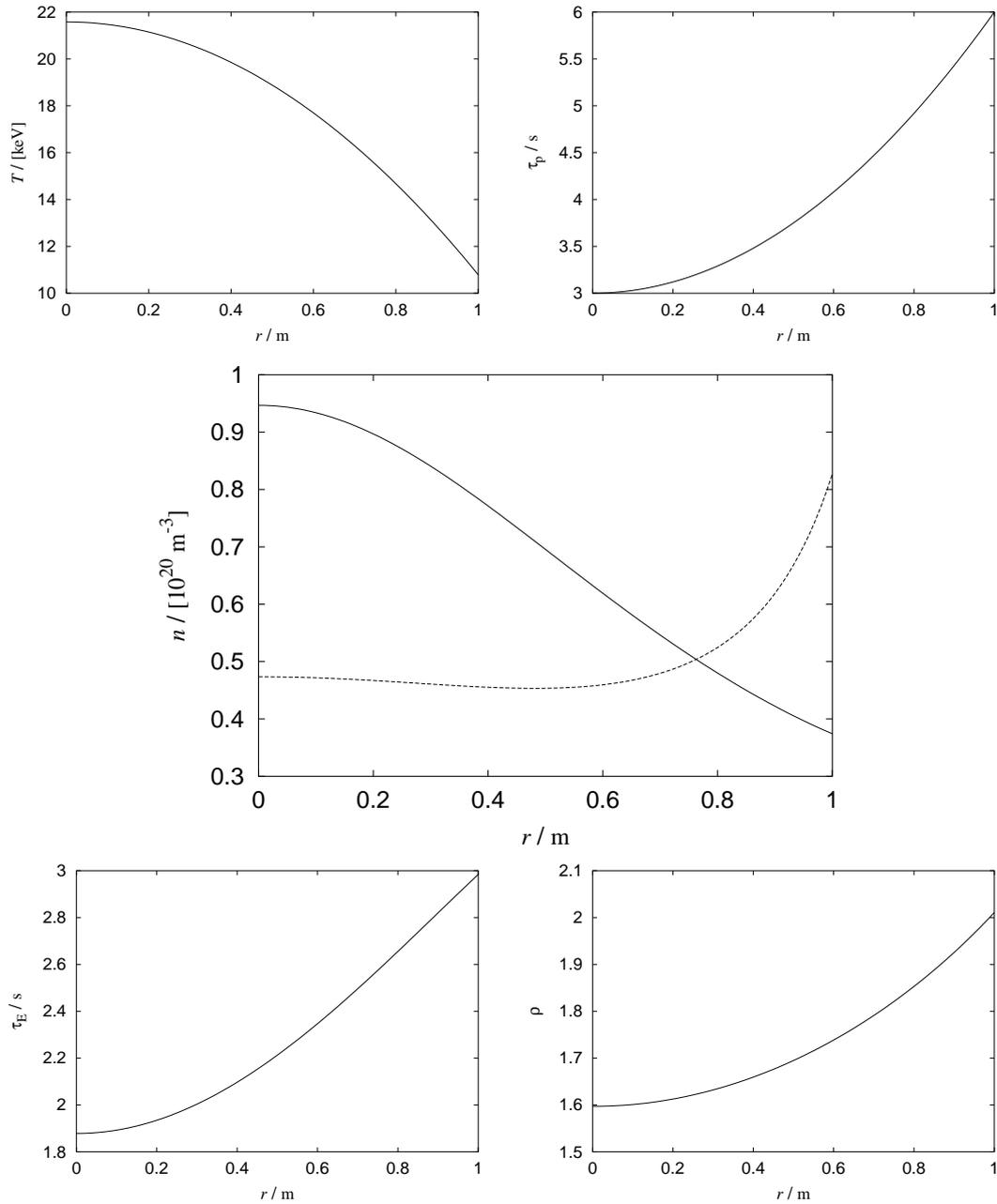
Wir machen den Sachverhalt an einem konkreten Beispiel deutlich. In Abbildung 5.1 sind die Funktionsverläufe für dieses Beispiel dargestellt. In den oberen beiden Diagrammen sind die vorgegebenen Profilverläufe der Temperatur und der Teilcheneinschlußzeit aufgetragen. Das Temperaturprofil ist dabei schon mit dem passenden Mittelwert  $\bar{T} = 16.12$  keV versehen. In dem mittleren Bild ist die Lösung der Differentialgleichung (durchgezogene Linie) und die Singularitätenslinie (gestrichelte Linie) (5.6) dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, daß der Definitionsbereich für die Differentialgleichung durch die Singularitätenslinie in zwei Teile geteilt wird. Für die Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen haben wir 3% vorgegeben. Der Vollständigkeit halber sind in den unteren beiden Bildern die Energieeinschlußzeit und der  $\rho$ -Verlauf aufgetragen.

### 5.1.2 Berechnung des Temperaturprofils

Jetzt betrachten wir den Fall, daß neben  $\tau_p(r)$  das Dichteprofil  $n(r)$  vorgegeben ist. Zur Bestimmung der Differentialgleichung für die Temperatur, lösen wir die Gleichung (5.4) nach  $T'$  auf und erhalten

$$T' = \frac{(a - 2n\tau_p S) n' - 2n^2 \tau_p' S + n(a - n\tau_p S) \left( \frac{1}{r} - \frac{\tau_p''}{\tau_p'} \right)}{n^2 \tau_p S_T}. \quad (5.9)$$

Der Definitionsbereich dieser Differentialgleichung wird ebenfalls durch die Nullstellen des Nenners eingeschränkt. Deren Bestimmung ist in diesem Fall sehr einfach, weil die einzige Nullstelle von  $S_T$  bei  $T = 66.65$  keV liegt (Maximum des Reaktionsquerschnitts). Die Singularitätenslinie ist demnach eine Parallele zur  $r$ -Achse durch 66.65 keV.



**Abbildung 5.1:** In den ersten beiden Abbildungen sind die vorgegebenen Profilverläufe für die Temperatur und die Teilcheneinschlußzeit aufgetragen. Das Temperaturprofil ist auf  $\bar{T} = 16.12 \text{ keV}$  bezogen. In der mittleren Zeichnung ist der Verlauf der Teilchendichte (durchgezogene Linie) und die Singularitätlinie (gestrichelte Linie) dargestellt. In den unteren beiden Abbildungen sind die daraus resultierenden Verläufe der Energieeinschlußzeit und von  $\rho$  aufgetragen.

Obwohl die vom Definitionsbereich ausgeschlossene Kurve außerhalb des von uns untersuchten Wertebereichs liegt, versuchen wir auch für diese Differentialgleichung einen Durchstoßpunkt durch die Singularitätslinie zu finden. Es wird sich zeigen, daß man dabei auch Aussagen über die Lösungen im interessanten Bereich machen kann. Wir setzen  $T = 66.65$  keV in den Zähler von (5.9) ein, und erhalten die Gleichung

$$(a - 2n\tau_p S_{\max})n' - 2n^2\tau_p' S_{\max} + n(a - n\tau_p S_{\max})\left(\frac{1}{r} - \frac{\tau_p''}{\tau_p'}\right) = 0, \quad (5.10)$$

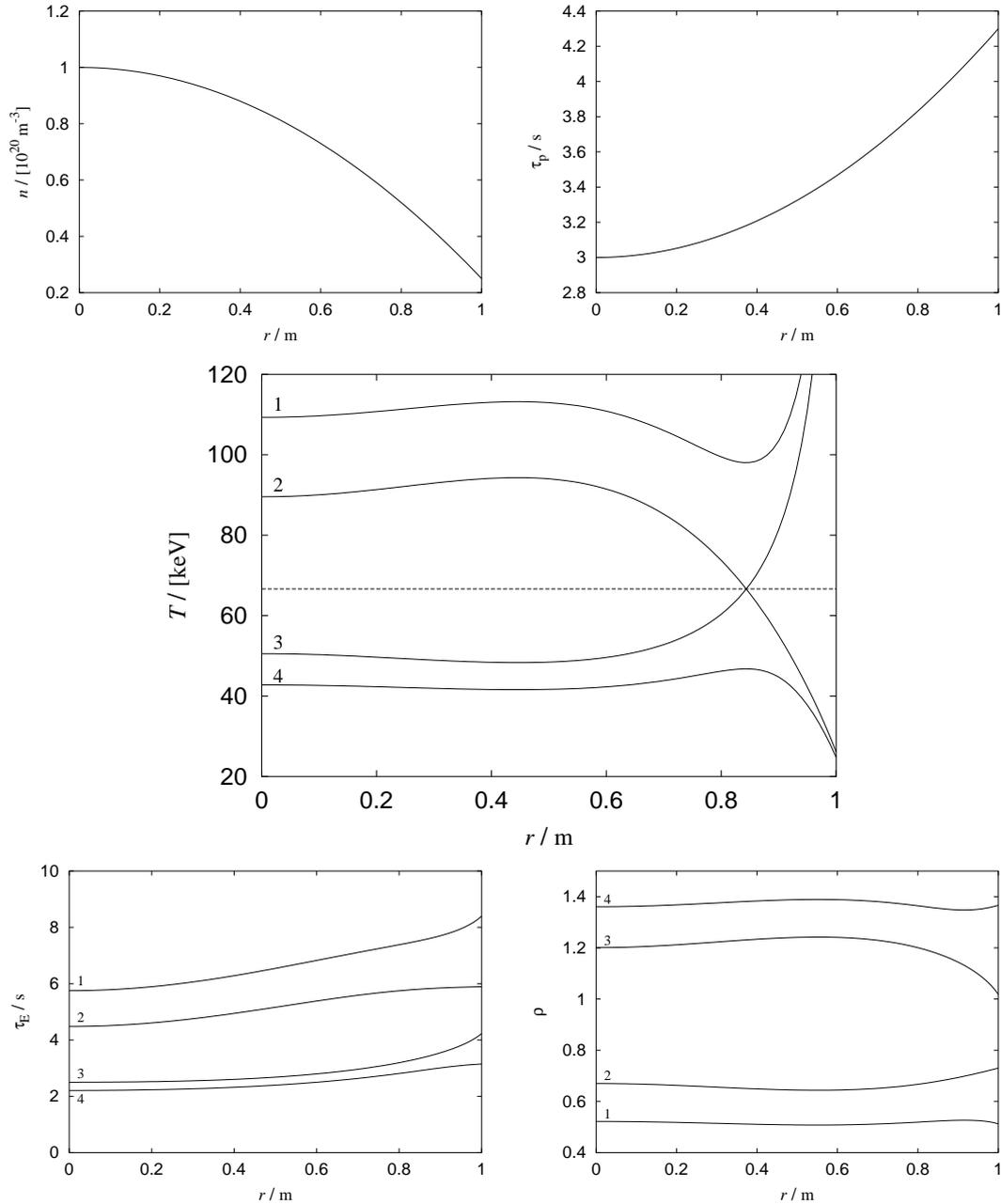
in der  $S_{\max}$  für den Wert des Reaktionsquerschnitts im Maximum steht. Die Steigung in dem erhaltenen Punkt  $(r, 66.65$  keV) berechnen wir wiederum mit der Regel von L'Hôpital aus Anhang B. Mit diesem Durchstoßpunkt als Anfangswert können wir die Differentialgleichung (5.9) numerisch lösen. Dabei tritt wieder der Fall ein, daß wir eine zusätzliche Randbedingung zu erfüllen haben. Aus Gleichung (5.1) erhalten wir als Bestimmungsgleichung für die Temperatur an der Stelle  $r = 0$

$$T_0 = S^{-1}\left(\frac{a}{\tau_p(0)n(0)}\right). \quad (5.11)$$

Das Besondere hierbei ist, daß die Funktion für den Reaktionsquerschnitt für Werte oberhalb von  $S_{\max}$  nicht umkehrbar und für Werte unterhalb nicht eindeutig umkehrbar ist. Für den Fall, daß der Wert unterhalb liegt, existieren zwei Lösungen, von denen die eine größer und die andere kleiner als 66.65 keV ist.

Um die zusätzliche Randbedingung zu erfüllen, gehen wir genauso vor wie bei der Berechnung des Dichteprofiles. Als Anpassungsvariable verwenden wir dabei den Wert der  $\alpha$ -Teilchen Konzentration  $f_\alpha$ . Wir definieren die Funktion  $F(f_\alpha) = T_0 - T(0)$  und bestimmen über die Nullstelle den Wert  $f_\alpha$ , für den eine Lösung existiert. Da wir aus Gleichung (5.11) zwei Werte für  $T_0$  erhalten und zwei Steigungen für den Durchstoßpunkt mit unterschiedlichem Vorzeichen haben, können wir die Funktion  $F$  mit beiden  $T_0$  verwenden, indem wir den größeren Wert für  $T_0$  mit der negativen Steigung für den Durchstoßpunkt und den kleineren Wert  $T_0$  mit der positiven Steigung kombinieren. Wir erhalten hieraus zwei Lösungen für das Temperaturprofil. Verblüffenderweise findet man zu beiden den gleichen Wert  $f_\alpha$ .

Zusätzlich zu diesen beiden speziellen Lösungen gibt es unendlich viele weitere Lösungen. Diese ergeben sich aus Werten für die  $\alpha$ -Teilchen Konzentration, die kleiner als die für die speziellen Lösungen berechnete Konzentration  $f_\alpha$



**Abbildung 5.2:** In den ersten beiden Abbildungen sind die vorgegebenen Profilverläufe für die Dichte und die Teilcheneinschlußzeit aufgetragen. In der mittleren Abbildung sind vier Lösungen für das Temperaturprofil dargestellt. Die Kurven 2 und 3 sind die diskreten Lösungen zu  $f_\alpha = 5.22\%$ , die Kurven 1 und 4 sind aus dem kontinuierlichen Bereich zu  $f_\alpha = 5\%$ . Die physikalisch relevanten Lösungen liegen etwa im Bereich unterhalb von Kurve 4. In den unteren beiden Abbildungen sind die zugehörigen Verläufe von  $\tau_E$  und  $p$  aufgetragen.

sind. Es bleibt festzuhalten, daß zu vorgegebenen Profilen  $n(r)$  und  $\tau_p(r)$  zwei diskrete Lösungen zu einer bestimmten Konzentration  $f_\alpha$  und ein kontinuierlicher Bereich von Lösungen zu kleineren Konzentrationen existieren. Zum besseren Verständnis stellen wir auch hier ein konkretes Beispiel vor.

In Abbildung 5.2 sind die Funktionsverläufe für dieses Beispiel dargestellt. In den ersten beiden Diagrammen sind die vorgegebenen Profilverläufe der Dichte und der Teilcheneinschlußzeit aufgetragen. In der mittleren Abbildung sind vier mögliche Verläufe für das Temperaturprofil aufgetragen. Die Kurven 2 und 3 ergeben sich aus der oben vorgestellten Berechnung mit der Konzentration  $f_\alpha = 5.22\%$ , die einen Durchstoßpunkt durch die Singularitätslinie (gestrichelte Linie) enthalten. Die Kurven 1 und 4 stammen aus dem kontinuierlichen Bereich mit der Konzentration  $f_\alpha = 5\%$ . Es wird deutlich, daß die kontinuierlichen Lösungen unterhalb und oberhalb der beiden sich kreuzenden diskreten Lösungen liegen müssen. Man kann sich diesen Sachverhalt auch anhand des Richtungsfeldes veranschaulichen. Auf dem Definitionsbereich können sich zwei Lösungen einer Differentialgleichung nicht schneiden. Das hat zur Folge, daß Lösungen mit Anfangswerten  $T_0$  zwischen den Anfangswerten von Kurve 2 und 3 zwangsläufig auf die Singularitätslinie zulaufen müssen. Die  $T_0$ , die außerhalb liegen, können dagegen die Singularitätslinie nicht erreichen. In den unteren beiden Diagrammen sind die zugehörigen Verläufe für  $\tau_E$  und  $\rho$  aufgetragen.

## 5.2 Gegebenes Profil $\tau_E(r)$

Die gleichen Überlegungen können auch für die zweite Integralgleichung (5.2) durchgeführt werden. Dabei gelangt man zu ähnlichen Ergebnissen, weshalb wir im Rahmen dieser Arbeit darauf verzichten, auch diese vorzustellen. Wir gehen deshalb über zu der am Anfang dieses Kapitels gestellten Aufgabe und leiten ein Lösungsverfahren zur Berechnung des Dichte- und des Temperaturprofils aus vorgegebenen Einschlußzeitprofilen her.

## 5.3 Berechnung von $n(r)$ und $T(r)$ aus gegebenen $\tau_E(r)$ und $\tau_p(r)$

Nachdem wir in 5.1 die Integralgleichung (5.1) durch Umwandlung in eine Differentialgleichung einmal für  $n$  und einmal für  $T$  gelöst haben, werden wir jetzt die Gleichungen (5.1) und (5.2) zusammen untersuchen. Unser Ziel ist es, ein System

von Differentialgleichungen zur Bestimmung von  $n$  und  $T$  herzuleiten. Um die Formeln übersichtlicher zu machen, führen wir die Abkürzungen

$$\begin{aligned} A(T, r) &:= a r \\ B(T, r) &:= S(T) r \\ C(T, r) &:= b T r \\ D(T, r) &:= \left( S(T) - c \sqrt{T} \right) r \end{aligned} \quad (5.12)$$

ein. Setzen wir diese Größen in die beiden Integralgleichungen ein und differenzieren nach  $r$ , so bleibt in jeder Gleichung ein Integral erhalten, und das Gleichungssystem hat die Form

$$\begin{aligned} \tau_p' \int n^2 B dr + \tau_p n^2 B &= n A \\ \tau_E' \int n^2 D dr + \tau_E n^2 D &= n C. \end{aligned}$$

Um die verbliebenen Integrale zu eliminieren, lösen wir die Gleichungen nach diesen auf und differenzieren ein weiteres Mal nach  $r$ . Mit den zusätzlichen Abkürzungen

$$\begin{aligned} E(n, T, r) &:= n A - \tau_p n^2 B \\ F(n, T, r) &:= n C - \tau_E n^2 D \end{aligned} \quad (5.13)$$

erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} n^2 B &= -\frac{\tau_p''}{(\tau_p')^2} E + \frac{1}{\tau_p'} (E_n n' + E_T T' + E_r) \\ n^2 D &= -\frac{\tau_E''}{(\tau_E')^2} F + \frac{1}{\tau_E'} (F_n n' + F_T T' + F_r), \end{aligned}$$

wobei  $E_n = \partial E / \partial n$ ,  $E_T = \partial E / \partial T$  etc. gesetzt wurde. Formen wir die Gleichungen so um, daß auf der linken Seite nur Terme stehen, die von  $n'$  und  $T'$  abhängen, so erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} E_n & E_T \\ F_n & F_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n' \\ T' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_p' n^2 B + \frac{\tau_p''}{\tau_p'} E - E_r \\ \tau_E' n^2 D + \frac{\tau_E''}{\tau_E'} F - F_r \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

das es zu lösen gilt. Als Bedingung für die Lösbarkeit dieses Gleichungssystems muß die Invertierbarkeit der Matrix gefordert werden. Dies hat zur Folge, daß die Determinante nicht null sein darf, das heißt, es muß  $E_n F_T - E_T F_n \neq 0$  gelten.

Unter dieser Voraussetzung lautet das System von Differentialgleichungen

$$n' = \frac{\left(2\tau_p' n^2 B - \left(\frac{1}{r} - \frac{\tau_p''}{\tau_p'}\right) E\right) F_T - \left(2\tau_E' n^2 D - \left(\frac{1}{r} - \frac{\tau_E''}{\tau_E'}\right) F\right) E_T}{E_n F_T - E_T F_n} \quad (5.15)$$

$$T' = \frac{\left(2\tau_E' n^2 D - \left(\frac{1}{r} - \frac{\tau_E''}{\tau_E'}\right) F\right) E_n - \left(2\tau_p' n^2 B - \left(\frac{1}{r} - \frac{\tau_p''}{\tau_p'}\right) E\right) F_n}{E_n F_T - E_T F_n}. \quad (5.16)$$

Beim Lösen dieser Differentialgleichungen stoßen wir auf dieselbe Problematik wie bei der Untersuchung einer einzigen Integralgleichung zu Beginn dieses Kapitels. Wir werden deshalb die gleiche Methode anwenden, um diese zu lösen. Der wesentliche Unterschied besteht darin, daß es sich hier um ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen handelt. Der Singularitätlinie der früheren Fälle entspricht hier eine Fläche im dreidimensionalen  $n, T, r$ -Raum. Die Bestimmungsgleichung für diese Fläche ist durch das Verschwinden der oben aufgeführten Determinante gegeben.

Mögliche Durchstoßpunkte durch diese Singularitätsfläche liegen vor, wenn Nenner und Zähler der Differentialgleichungen verschwinden. Weil es sich um zwei Differentialgleichungen handelt und die Nenner identisch sind, erhalten wir ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den drei Unbekannten  $r, n$  und  $T$ . Da nichtlineare Gleichungen vorliegen, ist das Finden einer Nullstelle keineswegs trivial. Bei genauerer Untersuchung der Gleichungen erkennt man, daß diese Polynome in  $n$  sind, deren Koeffizienten nur von  $r$  und  $T$  abhängen. Zur Darstellung dieser Polynome verwenden wir die Abkürzung  $\hat{X} := \tau''/\tau' X - X_r$ , in der  $\tau = \tau_p$  für  $X$  gleich  $A$  und  $B$  und  $\tau = \tau_E$  für  $X$  gleich  $C$  und  $D$  zu setzen ist.

Der Zähler der ersten Gleichung aus (5.15) lautet  $\alpha_2 n^4 + \alpha_1 n^3 + \alpha_0 n^2$  mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \hat{A} C_T \\ \alpha_1 &= C_T \left(2\tau_p' B - \tau_p \hat{B}\right) + \tau_p B_T \hat{C} - \tau_E D_T \hat{A} \\ \alpha_2 &= \tau_p B_T \left(2\tau_E' D - \tau_E \hat{D}\right) - \tau_E D_T \left(2\tau_p' B - \tau_p \hat{B}\right). \end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung (5.16) lautet der Zähler  $\beta_2 n^3 + \beta_1 n^2 + \beta_0 n$  mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \beta_0 &= A \hat{C} - \hat{A} C \\ \beta_1 &= A \left(2\tau_E' D - \tau_E \hat{D}\right) - C \left(2\tau_p' B - \tau_p \hat{B}\right) + 2 \left(\tau_E \hat{A} D - \tau_p B \hat{C}\right) \\ \beta_2 &= 2 D \tau_E \left(2\tau_p' B - \tau_p \hat{B}\right) - 2 B \tau_p \left(2\tau_E' D - \tau_E \hat{D}\right). \end{aligned}$$

Der Nenner beider Gleichungen lautet  $\gamma_2 n^3 + \gamma_1 n^2 + \gamma_0 n$  mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= A C_T \\ \gamma_1 &= \tau_p (B_T C - 2 B C_T) - \tau_E A D_T \\ \gamma_2 &= 2 \tau_p \tau_E (B D_T - B_T D) .\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Nullstellen dieser drei Polynome fassen wir diese in der kompakten Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^2 \\ n \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.17)$$

zusammen. Diese Gleichung ist nur unter der Voraussetzung lösbar, daß die Determinante null ist. Wir können deshalb so vorgehen, daß wir zuerst die Wertepaare  $(r, T)$  bestimmen, für die die Determinante verschwindet. Dies liefert zunächst Kurven  $T = T(r)$  in der  $r, T$ -Ebene. Anschließend kann zu jedem Wert  $(r, T)$  das zugehörige  $n$  berechnet werden. Als Ergebnis erhalten wir Kurven auf der Singularitätsfläche, die die möglichen Durchstoßpunkte kennzeichnen. Die möglichen Steigungen in diesen Punkten erhalten wir mit Hilfe der Regel von L'Hôpital, wie es in Anhang B beschrieben ist. Mit jedem dieser Durchstoßpunkte als Anfangswert können Lösungen der Differentialgleichungen (5.15)-(5.16) berechnet werden.

Auch jetzt erhalten wir zusätzliche Randbedingungen bei  $r = 0$ , die von der gesuchten Lösung erfüllt werden müssen. Hierzu werten wir die Gleichungen (5.1) und (5.2) an der Stelle  $r = 0$  aus und erhalten mit  $\rho(0) = \tau_p(0)/\tau_E(0)$  zunächst

$$\tau_p(0) = \frac{a}{n_0 S(T_0)} \quad \text{und} \quad \tau_E(0) = \frac{b T_0}{n_0 (S(T_0) - c \sqrt{T_0})} . \quad (5.18)$$

Werden diese beiden Gleichungen so zusammengefaßt, daß die Variable  $n_0$  herausfällt, so erhalten wir als Bestimmungsgleichung für die Temperatur  $T_0$

$$\frac{b}{a} \rho(0) = \frac{S(T_0) - c \sqrt{T_0}}{T_0 S(T_0)} . \quad (5.19)$$

Es existiert allerdings nicht für beliebige Werte  $\rho(0)$  und  $f_\alpha$  eine Lösung für  $T_0$ . Der Zusammenhang (5.19) wurde schon in Kapitel 3 untersucht. In Abbildung 3.1 ist das maximale  $\rho_0$  in Abhängigkeit der Konzentration  $f_\alpha$  aufgetragen. Wertepaare  $(f_\alpha, \rho)$  unterhalb der Kurve haben zwei Lösungen für  $T_0$ , Wertepaare

auf der Kurve genau eine, und für alle anderen Wertepaare existiert keine Lösung. Der zu dem berechneten Wert  $T_0$  gehörige Wert  $n_0$  kann aus einer der beiden Gleichungen (5.18) bestimmt werden.

Zum Lösen der Differentialgleichungen (5.15)-(5.16) unter Berücksichtigung der Randbedingungen (5.18) gehen wir genauso vor wie in Abschnitt 5.1.2. Als Anpassungsvariable wählen wir die Konzentration  $f_\alpha$  und definieren die Funktion

$$\vec{F}(f_\alpha) := \begin{pmatrix} n_0 \\ T_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n(0) \\ T(0) \end{pmatrix},$$

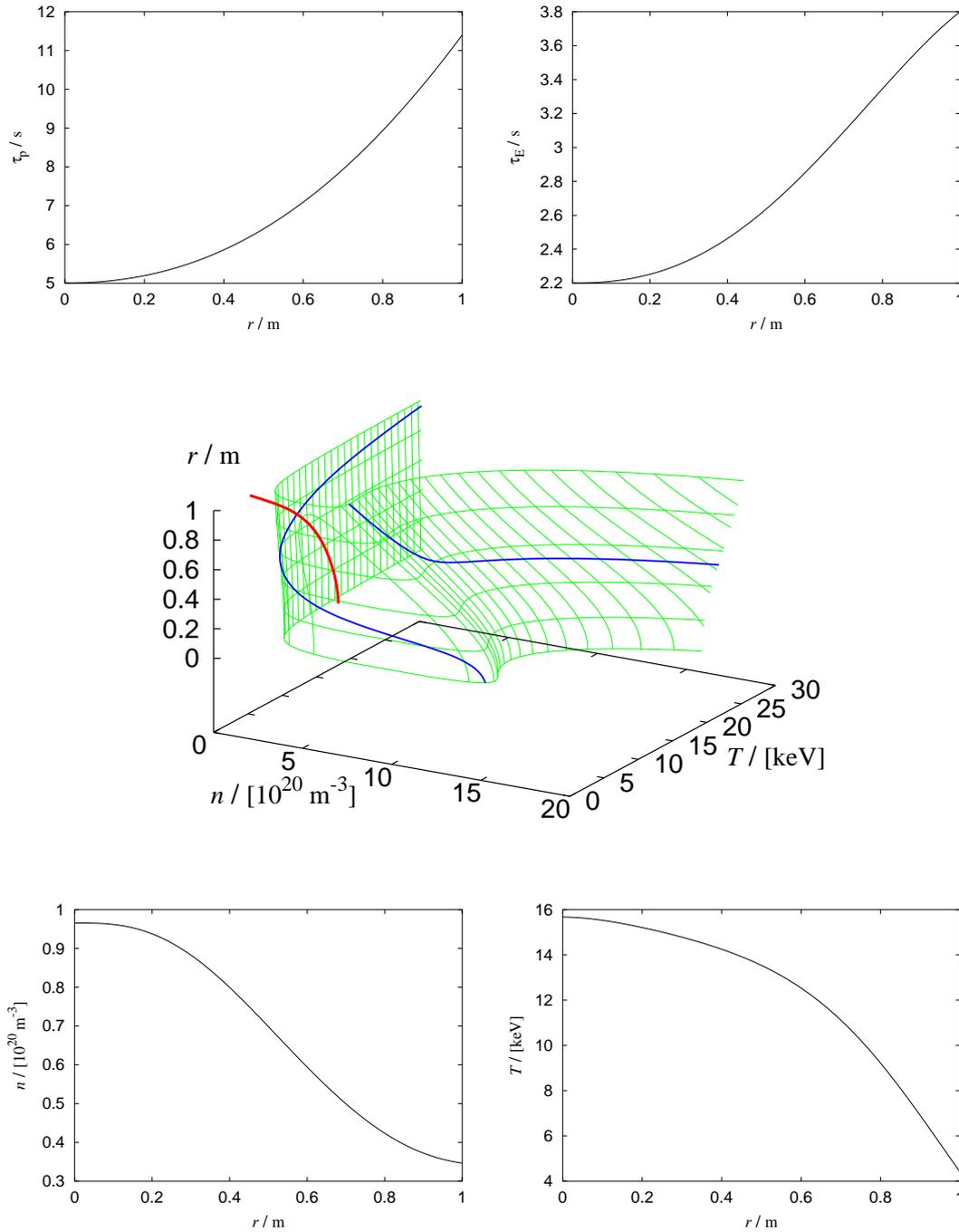
deren Nullstelle zu suchen ist. Wegen der Vielzahl möglicher Durchstoßpunkte ist das Finden einer Nullstelle dieser Funktion mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden. Aus diesem Grund werden wir uns bei der Berechnung von Beispielen auf einen kleinen Bereich von Anfangswerten beschränken.

Bevor wir uns konkreten Beispielen zuwenden, beweisen wir die in Abschnitt 4.1 aufgestellte Behauptung, *daß aus einem konstanten  $\rho$ -Profil automatisch ein konstantes Temperaturprofil folgt*. Ein konstantes  $\rho$ -Profil hat zur Folge, daß sich die Teilcheneinschlußzeit und die Energieeinschlußzeit nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Wir bezeichnen diesen mit  $\rho_0$  und können durch  $\tau_p(r) = \rho_0 \tau_E(r)$  die Teilcheneinschlußzeit aus der Differentialgleichung (5.16) eliminieren. Durch Umformen und Zusammenfassen reduziert sich diese auf

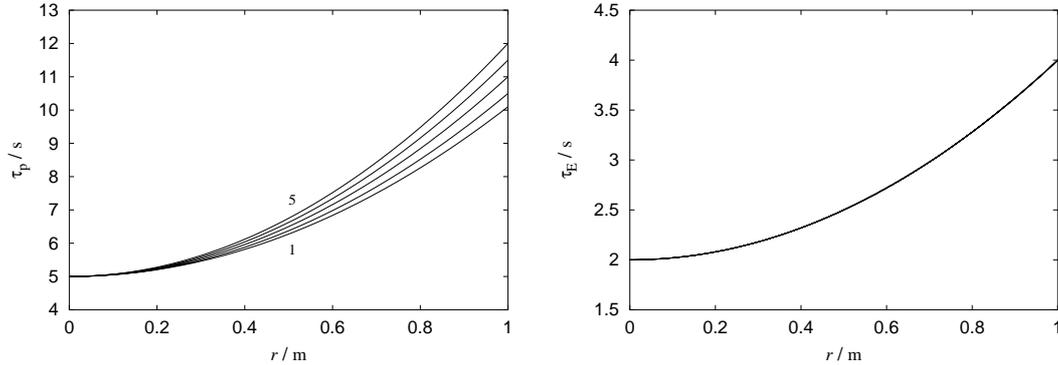
$$T' = \frac{n^2 \tau_E B C}{E_n F_T - E_T F_n} \left( 2 \frac{\tau_E'}{\tau_E} + \frac{\tau_E''}{\tau_E'} - \frac{1}{r} \right) \left( \frac{a}{b} \frac{S(T) - c\sqrt{T}}{T S(T)} - \rho_0 \right). \quad (5.20)$$

Mit  $\rho(r) = \rho_0 = \rho(0)$  und der generell für  $\rho(0)$  gültigen Bedingung (5.19) folgt hieraus  $T' = 0$  (Aus (5.19) folgt, daß der letzte Faktor auf der rechten Seite von (5.20) verschwindet).

Wir berechnen jetzt ein konkretes Beispiel, an dem wir die Vorgehensweise noch einmal verdeutlichen. In Abbildung 5.3 sind die Funktionsverläufe für dieses Beispiel aufgetragen. In den oberen beiden Diagrammen sind die vorgegebenen Profilverläufe für die Einschlußzeiten dargestellt. In der mittleren Abbildung ist zu diesen Profilen die gehörige Lösung (rot) zusammen mit der Singularitätsfläche (grün) im  $n, T, r$ -Raum aufgetragen. Auf dieser Fläche sind die möglichen Durchstoßpunkte als blaue Linien markiert. Die Lösung schneidet diese Fläche im Punkt  $(0.49 \text{ m}^3, 10.9 \text{ keV}, 0.71 \text{ m})$ . In den unteren Diagrammen



**Abbildung 5.3:** In den ersten beiden Diagrammen sind die vorgegebenen Einschlußzeitprofile dargestellt. In dem mittleren Bild ist die Singularitätsfläche (grün) mit den zwei Kurven (blau), die die möglichen Durchstoßpunkte kennzeichnen, aufgetragen. Die Lösung der Differentialgleichung (rot) schneidet eine dieser Linien bei  $(0.49 \text{ m}^3, 10.9 \text{ keV}, 0.71 \text{ m})$ . In den unteren beiden Bildern sind  $n(r)$  und  $T(r)$  noch einmal separat dargestellt.



**Abbildung 5.4:** Im rechten Diagramm ist das fest vorgegebene Profil der Energieeinschlußzeit aufgetragen. Links sind die möglichen Teilcheneinschlußzeitprofile mit dem festen Parameter  $\tau_{p0} = 5$  s dargestellt.

sind die Verläufe der Dichte und der Temperatur noch einmal separat dargestellt. Der Wert für die Konzentration beträgt  $f_\alpha = 3.14\%$ .

## 5.4 Beispiele zur Berechnung von $n(r)$ und $T(r)$ aus den Einschlußzeitprofilen

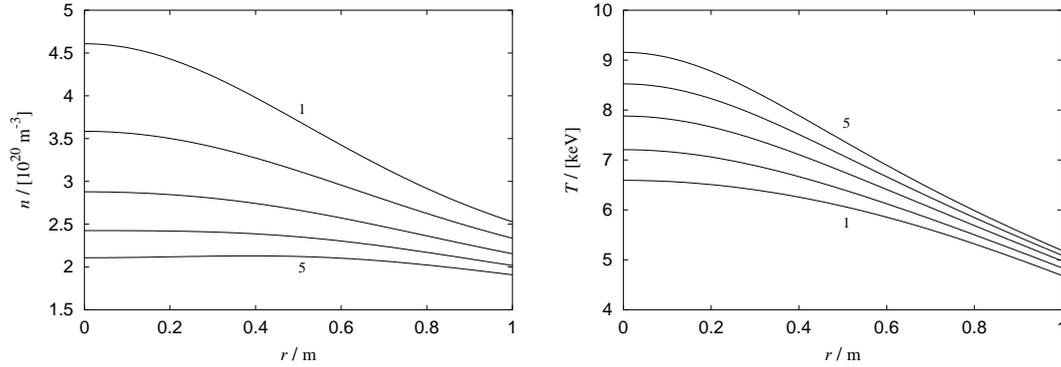
In diesem Abschnitt werden wir systematisch zu vorgegebenen Einschlußzeitprofilen die zugehörigen Verläufe des Dichteprofiles und des Temperaturprofils mit der im letzten Abschnitt vorgestellten Methode berechnen. Dabei beschränken wir uns für die Einschlußzeiten auf den in Kapitel 4 bestimmten Wertebereich.

### 5.4.1 2-parametrische Einschlußzeitprofile

Zunächst untersuchen wir Einschlußzeitprofile der Form  $\tau(r) = \tau_0 + \tau_2 r^2$ , das heißt, jedes Profil wird durch zwei frei wählbare Parameter vorgegeben. In Abschnitt 4.2.1 haben wir gesehen, daß unter der Voraussetzung, daß  $n(r)$  und  $T(r)$  bei  $r = 0$  keine Spitze haben, die Einschlußzeitprofile dort ebenfalls keine Spitze haben. Aus diesem Grund untersuchen wir nur  $\tau$ -Profile ohne linearen Term.

#### Festes $\tau_E$ -Profil

Zunächst geben wir uns das Energieeinschlußzeitprofil fest vor und berechnen zu verschiedenen  $\tau_p$ -Profilen die Verläufe von  $n(r)$  und  $T(r)$ . Bei der Wahl der Parameter nehmen wir Bezug auf die in Tabelle 4.1 und 4.2 aufgestellten Wertebereiche.



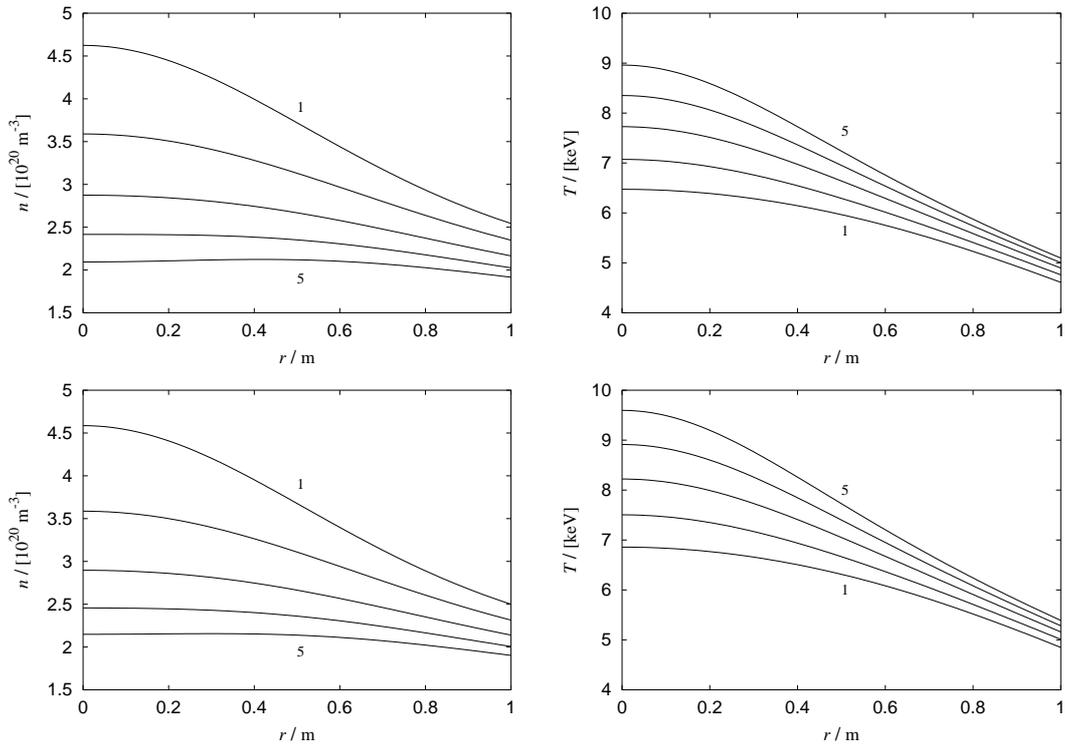
**Abbildung 5.5:** Verläufe der Dichte- und Temperaturprofile zu den in Abbildung 5.4 dargestellten Einschlußzeitprofilen ( $\tau_{p0} = 5$  s). Die zugehörigen Werte für die Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen sind in Tabelle 5.1 aufgeführt.

Im ersten Beispiel setzen wir  $\tau_{p0} = 5$  s und variieren den Parameter  $\tau_{p2}$  soweit, bis keine physikalisch sinnvollen Lösungen  $n(r)$  und  $T(r)$  mehr existieren. In Abbildung 5.4 sind links die möglichen  $\tau_p$ -Profile zu dem fest vorgegebenem  $\tau_E(r)$  (rechts) dargestellt. Es fällt auf, daß der Bereich der möglichen  $\tau_p$ -Profile zum vorgegebenen  $\tau_E$ -Profil sehr klein ist. *Hieraus läßt sich schließen, daß durch die Vorgabe des Energieeinschlußzeitprofils der Verlauf von  $\tau_p(r)$  weitestgehend vorbestimmt ist.* Die zugehörigen Lösungen  $n(r)$  und  $T(r)$  sind in Abbildung 5.5 aufgetragen. Aus den Verläufen der Dichteprofile wird deutlich, daß diese mit steiler werdender Teilcheneinschlußzeit zunehmend flacher werden, bis sie schließlich bei  $r = 0$  ein Minimum aufweisen und vom Zentrum aus ansteigen. Dieser Sachverhalt dient uns als Kriterium dafür, daß keine vernünftige Lösung mehr vorliegt.

Bei flacheren  $\tau_p$ -Profilen gibt es ab einem bestimmten Verlauf keine Lösung mehr. Dieser Verlauf ist dadurch gekennzeichnet, daß das  $\tau_p$ -Profil ungefähr

Profil	$f_\alpha (\tau_{p0} = 2.5 \text{ s})$	$f_\alpha (\tau_{p0} = 5 \text{ s})$	$f_\alpha (\tau_{p0} = 10 \text{ s})$
1	0.91%	1.85%	3.83%
2	0.93%	1.89%	3.92%
3	0.97%	1.98%	4.11%
4	1.02%	2.07%	4.31%
5	1.07%	2.18%	4.54%

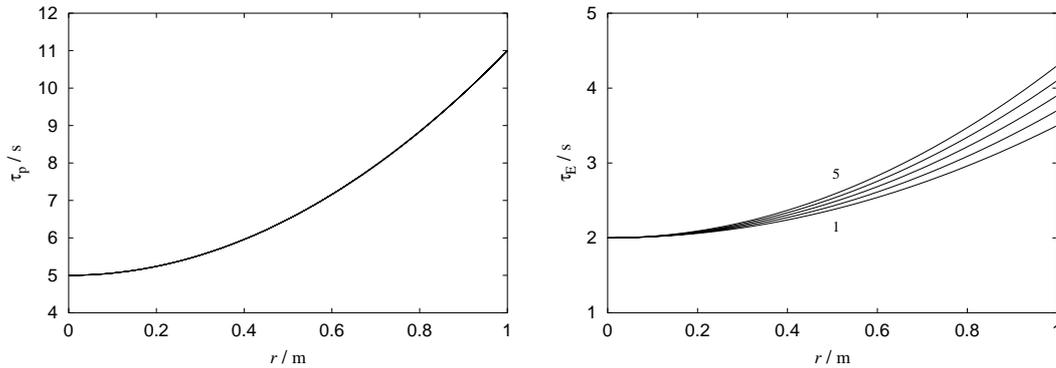
**Tabelle 5.1:** Tabelle mit den Konzentrationen der  $\alpha$ -Teilchen für die in den Abbildungen 5.5 und 5.6 dargestellten Dichte- und Teilchenprofile.



**Abbildung 5.6:** In den oberen beiden Diagrammen sind die Verläufe von  $n(r)$  und  $T(r)$  für die Einschlußzeiten aus Abbildung 5.5 aufgetragen, wobei die  $\tau_p$ -Profile mit dem Faktor  $1/2$  multipliziert wurden ( $\tau_{p0} = 2.5$  s). Für die unteren Diagramme wurden die  $\tau_p(r)$  mit  $2$  multipliziert ( $\tau_{p0} = 10$  s).

ein Vielfaches von  $\tau_E(r)$  ist. Hierfür gilt in etwa  $\rho = const$  aus dem  $T = const$  folgt. Aus den Temperaturprofilen in Abbildung 5.5 wird deutlich, daß diese für flachere  $\tau_p(r)$  ebenfalls flacher werden. In Tabelle 5.1 sind die zugehörigen Konzentrationen der  $\alpha$ -Teilchen aufgetragen. Mit steiler werdendem  $\tau_p$ -Profil wird der zugehörige Wert  $f_\alpha$  größer. Durch die Zunahme der Konzentration ändern sich die Anfangswerte von  $n(r)$  und  $T(r)$  relativ stark, was zur Folge hat, daß die Verläufe bei  $r = 0$  weit auseinander liegen. Qualitativ drückt sich das in den Gleichungen (4.11) aus, aus denen für  $\tau_{p0} = const$  und  $\tau_{E0} = const$  die Relationen  $n_0 \sim 1/f_\alpha$  und  $T_0 \sim f_\alpha$  folgen.

Als nächstes verändern wir den Wert  $\tau_{p0}$  und bestimmen wieder die Profile  $\tau_p(r)$ , für die es vernünftige Lösungen  $n(r)$  und  $T(r)$  gibt. Dabei ergibt sich ein ähnlicher Sachverhalt wie im ersten Beispiel. Jetzt ist der Rahmen, in dem sich der zweite Parameter  $\tau_{p2}$  bewegen kann, stark begrenzt. Er muß sich im gleichen Maße ändern, in dem der Wert  $\tau_{p0}$  geändert wird. Aus diesem Grund betrachten wir noch einmal die vorgegebenen Einschlußzeiten aus Abbildung 5.4, mit dem



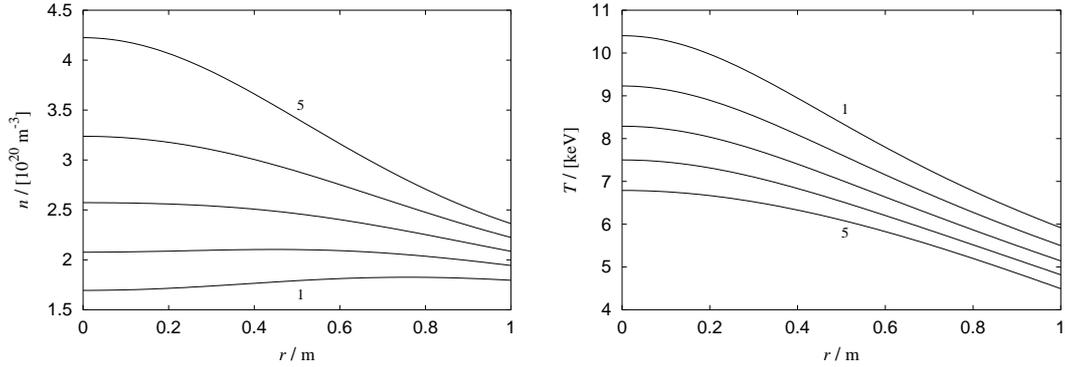
**Abbildung 5.7:** In dem linken Diagramm ist das fest vorgegebene Profil der Teilcheneinschlußzeit aufgetragen. Rechts sind die möglichen Energieeinschlußzeitprofile mit dem festen Parameter  $\tau_{E0} = 2$  s dargestellt.

Unterschied, daß wir die Teilcheneinschlußzeitprofile mit einem konstanten Faktor multiplizieren. In Abbildung 5.6 sind die Dichte- und Temperaturprofile aufgetragen, die sich durch die Multiplikation der  $\tau_p$ -Profile mit  $1/2$  und  $2$  ergeben. Der Vergleich mit Abbildung 5.4 zeigt, daß sich die  $n$ - und  $T$ -Profile nur unwesentlich voneinander unterscheiden. Sie werden im wesentlichen nur durch die Form des  $\tau_p$ -Profils bestimmt und nicht durch die Höhe. Der einzige Unterschied wird bei der Betrachtung der Konzentrationen für die  $\alpha$ -Teilchen deutlich. Diese ändern sich im gleichen Maße, wie die Teilcheneinschlußzeitprofile.

### Festes $\tau_p$ -Profil

Nachdem wir die möglichen  $\tau_p$ -Profile zu einem fest vorgegebenen  $\tau_E$ -Profil und die hieraus resultierenden Verläufe für die Dichte und die Temperatur berechnet haben, werden wir jetzt die gleichen Untersuchungen für ein fest vorgegebenes  $\tau_p$ -Profil machen. In Abbildung 5.7 sind das vorgegebene Teilcheneinschlußzeitprofil und die zu dem vorgegebenen Wert  $\tau_{E0} = 2$  s möglichen Energieeinschlußzeitprofile dargestellt. Hierbei tritt das gleiche Verhalten wie in dem vorangegangenen Beispiel auf. Zu dem fest vorgegebenem  $\tau_p$ -Profil gibt es nur einen sehr kleinen Bereich von  $\tau_E$ -Profilen, für die vernünftige Lösungen  $n(r)$  und  $T(r)$  existieren. In Abbildung 5.8 sind diese aufgetragen, und es ergibt sich fast das gleiche Bild wie in Abbildung 5.6. Auch bei diesem Beispiel liegt die eine Grenze für die möglichen  $\tau_E$ -Profile in dem Bereich, wo  $\tau_E(r)$  ein Vielfaches von  $\tau_p(r)$  ist (Kurve 5). Die andere Grenze liegt dort, wo die berechneten Dichteprofile allmählich vom Zentrum aus ansteigend verlaufen (Kurve 1).

In Tabelle 5.2 sind die zugehörigen Konzentrationen für die  $\alpha$ -Teilchen aufgelistet. Diese macht deutlich, daß die Konzentration mit steiler werdendem  $\tau_E$ -Profil



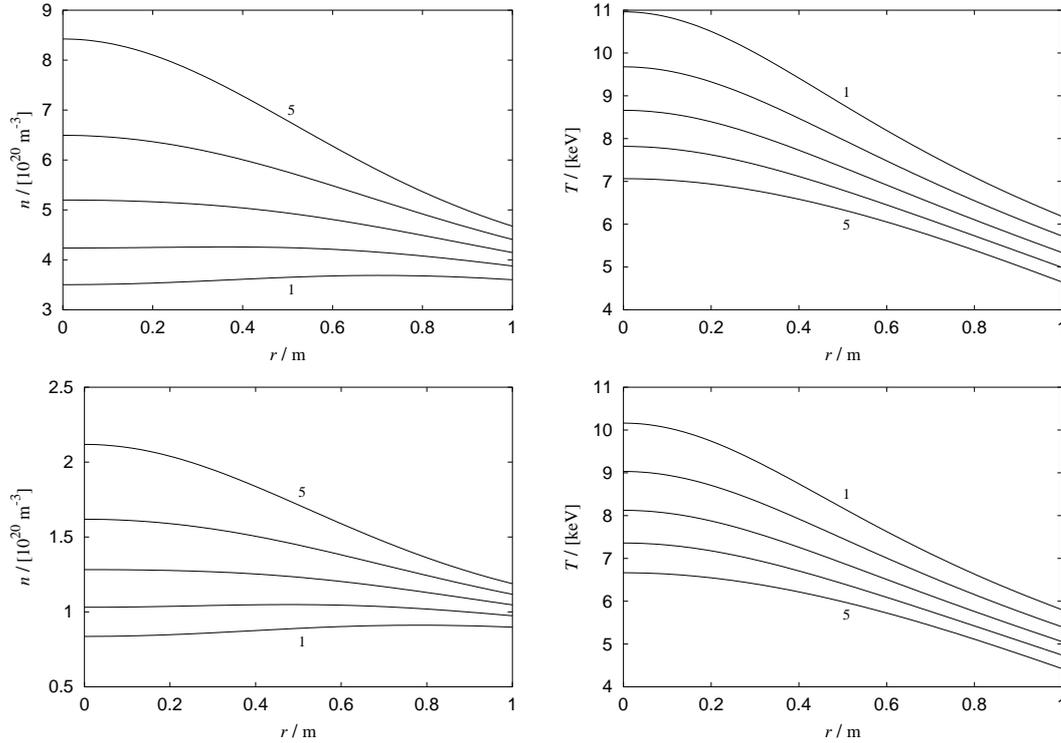
**Abbildung 5.8:** Verhalten der Dichte- und Temperaturprofile zu den in Abbildung 5.7 dargestellten Einschlußzeitprofilen ( $\tau_{E0} = 2$  s). Die zugehörigen Werte für die Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen sind in Tabelle 5.2 aufgeführt.

größer wird. Wir werden auch bei diesem Beispiel die Vorgabe von  $\tau_{E0}$  variieren. Die Auswirkungen auf die möglichen  $\tau_E$ -Profile sind die gleichen wie im letzten Beispiel. Aus diesem Grund geben wir uns wieder die Einschlußzeitprofile aus Abbildung 5.7 vor und multiplizieren diese mit einem konstanten Faktor.

In Abbildung 5.9 sind die Verläufe von  $n(r)$  und  $T(r)$  für zwei Beispiele aufgetragen. In den oberen beiden Diagrammen sind die Dichte- und Temperaturprofile für die mit  $1/2$  multiplizierten  $\tau_E$ -Profile dargestellt. In den unteren beiden Diagrammen sind diese für die mit  $2$  multiplizierten  $\tau_E$ -Profile dargestellt. Vergleichen wir diese mit Abbildung 5.8, so erkennen wir bei den Temperaturprofilen kaum Unterschiede. Ganz anders dagegen verhalten sich die Dichteprofile, die bei der Verdopplung der  $\tau_E$ -Profile nur noch halb so hoch sind und umgekehrt. Betrachten wir die Konzentrationen der  $\alpha$ -Teilchen in Tabelle 5.2, so zeigen diese dasselbe Verhalten.

Profil	$f_\alpha (\tau_{E0} = 1 \text{ s})$	$f_\alpha (\tau_{E0} = 2 \text{ s})$	$f_\alpha (\tau_{E0} = 4 \text{ s})$
1	5.03%	2.41%	1.18%
2	4.57%	2.19%	1.08%
3	4.23%	2.04%	1.00%
4	4.00%	1.93%	0.95%
5	3.85%	1.86%	0.92%

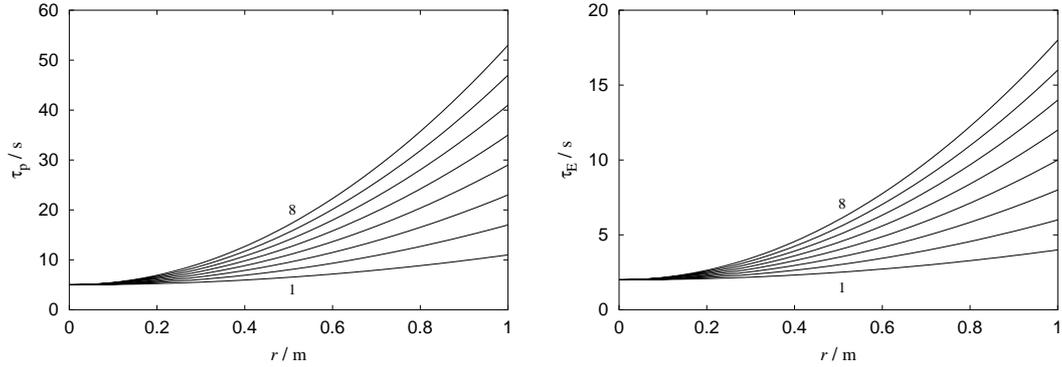
**Tabelle 5.2:** Tabelle mit den Konzentrationen der  $\alpha$ -Teilchen für die in den Abbildungen 5.8 und 5.9 dargestellten Dichte- und Teilchenprofile.



**Abbildung 5.9:** In den oberen beiden Diagrammen sind die Verläufe von  $n(r)$  und  $T(r)$  für die Einschlußzeiten aus Abbildung 5.7 aufgetragen, wobei die  $\tau_E$ -Profile mit dem Faktor  $1/2$  multipliziert wurden ( $\tau_{E0} = 1$  s). Für die unteren Diagramme wurde  $\tau_E(r)$  mit  $2$  multipliziert ( $\tau_{E0} = 4$  s).

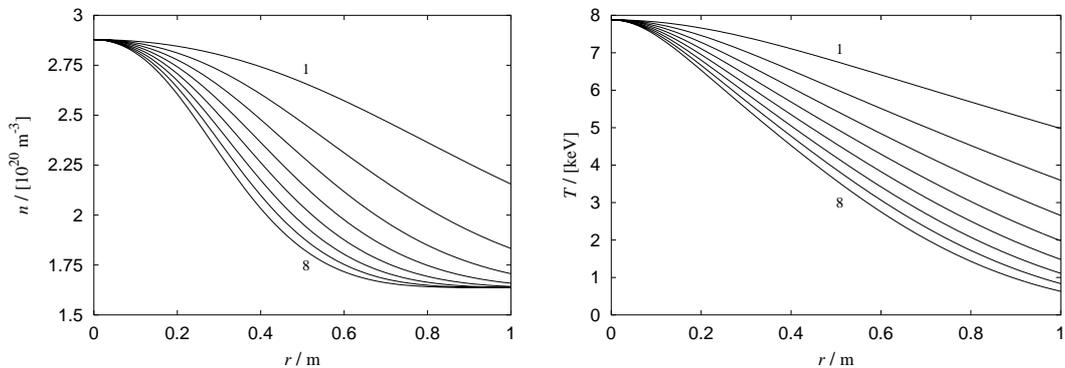
### Variable $\tau_P$ - und $\tau_E$ -Profile

Im nächsten Beispiel werden wir beide Einschlußzeitprofile variieren. Wir geben uns  $\tau_{P0} = 5$  s,  $\tau_{E0} = 2$  s und das Verhältnis  $\tau_{P2}/\tau_{E2} = 3$  fest vor. In Abbildung 5.10 sind die hier untersuchten Verläufe von  $\tau_P(r)$  und  $\tau_E(r)$  aufgetragen. Durch das simultane Verändern beider Profilverläufe ist es uns möglich, auch wesentlich steiler verlaufende Profile zu untersuchen. Bei der Variation eines einzelnen Profils wie in den vorangegangenen Beispielen sind wir erheblich eingeschränkter gewesen. Dies unterstreicht noch einmal den in Abschnitt 4.2.2 erzielten Befund, daß die Verhältnisse der Einschlußzeitkoeffizienten wichtiger sind als deren absolute Werte. In Abbildung 5.11 sind die Dichte- und Temperaturprofile zu den Einschlußzeitprofilen aus Abbildung 5.10 dargestellt. Für steiler verlaufende Einschlußzeitprofile fallen  $n(r)$  und  $T(r)$  wesentlich schneller und stärker ab. Eine Besonderheit an diesem Beispiel ist, daß die Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen für alle Kurven gleich ist und bei knapp 2% liegt. Aus diesem Grund sind die Werte von  $n(r)$  und  $T(r)$  an der Stelle  $r = 0$  bei allen Kurven gleich. Diese Besonderheit

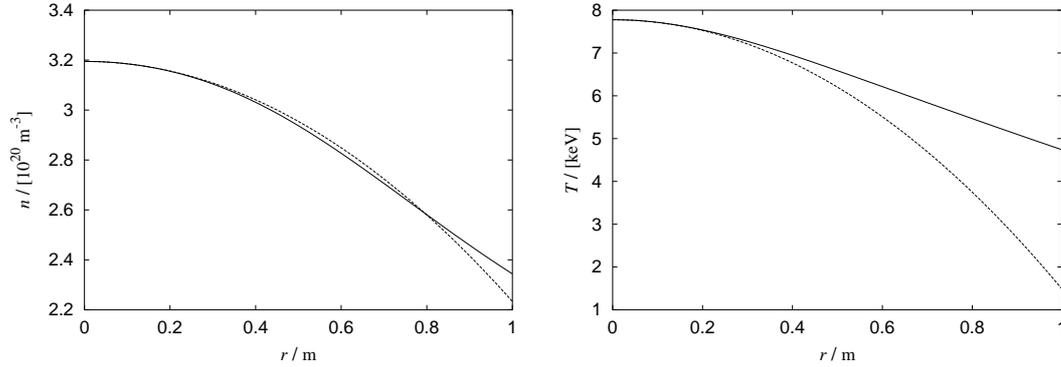


**Abbildung 5.10:** Verschiedene Einschlußzeitprofile  $\tau_p(r)$  und  $\tau_E(r)$  mit  $\tau_{p0} = 5$  s,  $\tau_{E0} = 2$  s und dem Verhältnis  $\tau_{p2}/\tau_{E2} = 3$ .

resultiert allerdings nur aus der einfachen Wahl der Profile  $\tau_p(r)$  und  $\tau_E(r)$ . Nachdem wir jetzt in der Lage sind, zu vorgegebenen Einschlußzeitprofilen die Profile  $n(r)$  und  $T(r)$  zu berechnen, gehen wir noch einmal auf die Näherungslösung aus Abschnitt 4.3 ein. Berechnen wir zu den dort untersuchten Profilen  $\tau_p(r)$  und  $\tau_E(r)$  die exakte Lösung nach der hier vorgestellten Methode, so erhalten wir als Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen 1.303%. Für diese Konzentration bestimmen wir nochmals die Näherungslösung und vergleichen diese mit der exakten Lösung. In Abbildung 5.12 sind die exakt berechneten Verläufe  $n(r)$  und  $T(r)$  mit den Approximationen aus Kapitel 4 dargestellt. Die Näherungslösung für das Dichteprofil zeigt dabei eine erstaunlich gute Übereinstimmung mit der richtigen Lösung, wohingegen die Abweichungen beim Temperaturprofil wesentlich größer sind.



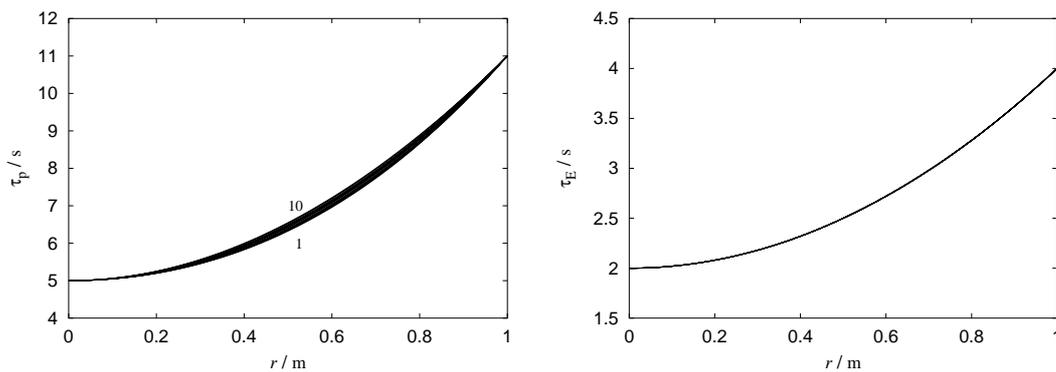
**Abbildung 5.11:** Profilverläufe  $n(r)$  und  $T(r)$  zu den in Abbildung 5.10 dargestellten Einschlußzeitprofilen  $\tau_p(r)$  und  $\tau_E(r)$



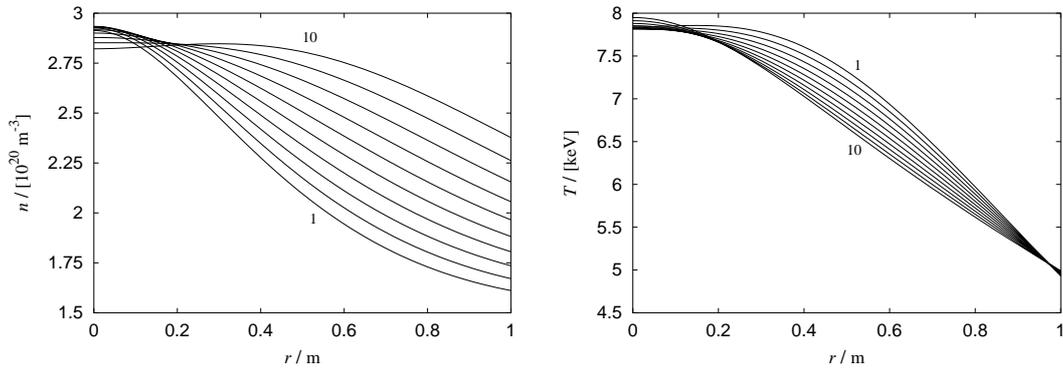
**Abbildung 5.12:** Vergleich der Näherungslösung (gestrichelte Linie) aus Abschnitt 4.3 mit der exakten Lösung. Der Wert für die Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen berechnet sich zu 1.303%

### 5.4.2 3-parametrische Einschlußzeitprofile

In diesem Abschnitt werden wir einen zusätzlichen Parameter  $\tau_3$  für die Einschlußzeitprofile einführen, so daß diese die kubische Form  $\tau(r) = \tau_0 + \tau_2 r^2 + \tau_3 r^3$  annehmen. Mit Hilfe dieses zusätzlichen Parameters werden wir den Einfluß der Form der Einschlußzeitprofile auf das Dichte- und das Temperaturprofil untersuchen. Wir geben uns dazu die Profile  $\tau_p(r)$  und  $\tau_E(r)$  vor, halten eines von beiden fest und variieren beim anderen nur den Verlauf zwischen festem Anfangs- und Endpunkt. In Abbildung 5.13 sind die Einschlußzeitprofile mit der Variation des  $\tau_p$ -Profils dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, daß es fast keine Variationsmöglichkeit für das  $\tau_p$ -Profil gibt. Die 10 Kurven liegen so dicht beisammen,



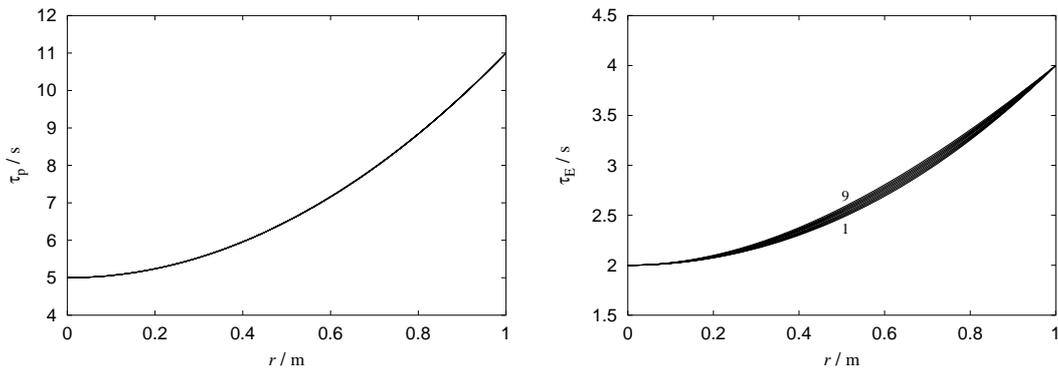
**Abbildung 5.13:** Im rechten Diagramm ist der fest vorgegebene Verlauf von  $\tau_E(r)$  aufgetragen. Links sind die möglichen Teilcheneinschlußzeitverläufe mit den fest gewählten Randwerten  $\tau_p(0) = 5 \text{ s}$  und  $\tau_p(1 \text{ m}) = 11 \text{ s}$  dargestellt.



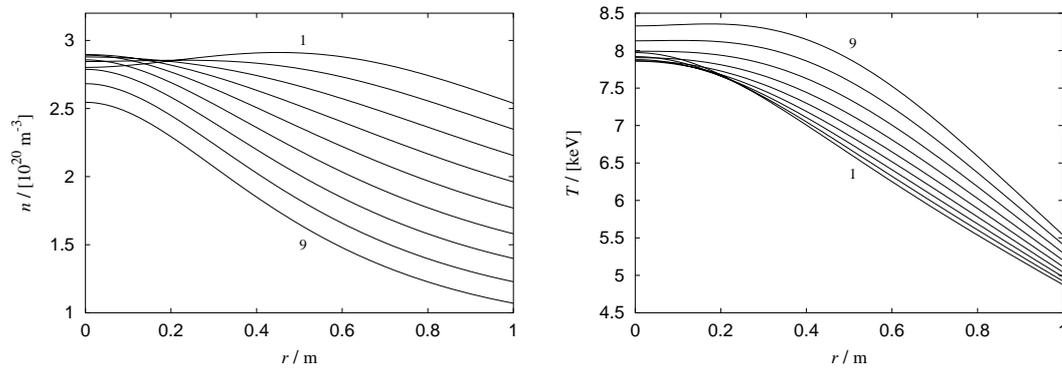
**Abbildung 5.14:** Dichte- und Temperaturprofile zu den in Abbildung 5.13 dargestellten Einschlußzeitprofilen.

daß man die Unterschiede nur erahnen kann. Ein ganz anderes Bild offenbart sich, wenn man die zugehörigen Dichte- und Temperaturprofile betrachtet, die in Abbildung 5.14 dargestellt sind. Obwohl das  $\tau_p$ -Profil nur geringfügig verändert wurde, ändern sich die Verläufe von  $n(r)$  und  $T(r)$  sehr stark. Dies verdeutlicht die Schwierigkeit, passende Profile  $\tau_p(r)$  und  $\tau_E(r)$  zu finden, für die physikalisch vernünftige Dichte- und Temperaturprofile existieren. Auf der anderen Seite kann sich die Möglichkeit eröffnen, durch eine geringfügige Einflußnahme auf den Verlauf der Einschlußzeit positive Effekte in einem Fusionsreaktor zu erzielen.

Abschließend wollen wir die gleichen Überlegungen für das Energieeinschlußzeitprofil durchführen. In Abbildung 5.15 sind das feste  $\tau_p$ -Profil und die möglichen  $\tau_E$ -Profile aufgetragen. Die Variationsmöglichkeit von  $\tau_E(r)$  ist ebenfalls sehr begrenzt. In Abbildung 5.16 sind die zugehörigen Dichte- und Temperaturprofile



**Abbildung 5.15:** Im linken Diagramm ist der fest vorgegebene Verlauf von  $\tau_p(r)$  aufgetragen. Rechts sind die möglichen Energieeinschlußzeitverläufe mit den fest gewählten Randwerten  $\tau_E(0) = 2$  s und  $\tau_E(1 \text{ m}) = 4$  s dargestellt.



**Abbildung 5.16:** Dichte- und Temperaturprofile zu den in Abbildung 5.15 dargestellten Einschlußzeitprofilen.

aufgetragen. Bei diesen zeigt sich wieder eine wesentlich stärkere Veränderung. Betrachtet man zusätzlich die Konzentrationen der  $\alpha$ -Teilchen, so stellt man fest, daß diese sich nur wenig ändern. Der Wert  $f_\alpha$  liegt für alle Beispiele bei etwa 2%.



# Kapitel 6

## Brennkurven für ausgewählte Standardprofile $n(r)$ und $T(r)$

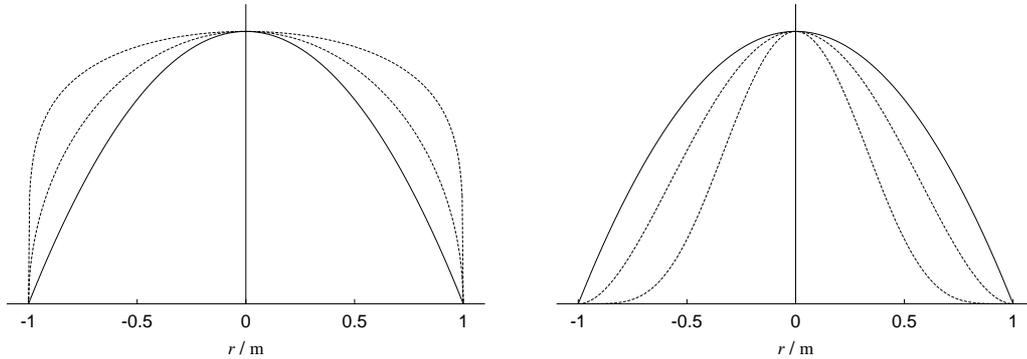
In diesem Kapitel untersuchen wir für vorgegebene Dichte- und Temperaturprofile das Verhalten der Brenngleichgewichte über den gesamten Plasmabereich. Dabei richten wir unser Hauptaugenmerk auf die Größen  $\tau_p$ ,  $\tau_E$  und  $\rho$ .

Zuerst überlegen wir uns, welche möglichen Profilformen wir verwenden. Wir fordern, daß diese im Zentrum ( $r = 0$ ) keine Spitze haben und am Rand verschwinden. Zum einen ließe sich dies durch Polynome realisieren, doch sind diese in ihrer Variationsmöglichkeit sehr umständlich, da man bei der Forderung nach ausreichender Flexibilität schnell zu höheren Ordnungen gelangt und entsprechend viele Parameter erhält. Wir wählen deshalb die Profile

$$n(r) = n_0 (1 - r^2/R^2)^{\alpha_n} \quad \text{und} \quad T(r) = T_0 (1 - r^2/R^2)^{\alpha_T}, \quad (6.1)$$

deren Form durch einen einzigen Parameter ( $\alpha > 0$ ) kontrolliert werden kann. In Abbildung 6.1 sind die Profilverläufe für unterschiedliche Koeffizienten  $\alpha$  aufgetragen. Wir setzen im weiteren Verlauf dieses Kapitels  $R = 1$  m und  $n_0 = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ . Aus (6.1) erhalten wir für die Temperatur im Plasmazentrum  $T(0) = T_0$  und für den Mittelwert  $\bar{T} = T_0/(2(\alpha_T + 1))$ .

Nachdem wir die möglichen Verläufe der Profile festgelegt haben, können wir mit der Berechnung der Brennkurven, so wie es am Ende von Kapitel 2 beschrieben ist, beginnen. Es bleibt dabei noch die entscheidende Frage zu klären, in welchem Punkt die Vorgabe von  $\rho$  erfolgen soll. Bisher ist man bei der Berechnung von Brennkurven so vorgegangen, daß man  $\rho$  für das Verhältnis der globalen Einschlußzeiten vorgegeben hat und zu verschiedenen Temperaturen das Brenngleichgewicht bestimmt hat. In Kapitel 2 haben wir  $\tau_p$ ,  $\tau_E$  und



**Abbildung 6.1:** Beispiele abgeflachter Profile bzw. zugespitzter Profile die sich aus (6.1) ergeben. In der linken Graphik sind von unten nach oben die Profile zu  $\alpha = 1.0, 0.5, 0.2$  aufgetragen. Rechts sind von unten nach oben die Profile zu  $\alpha = 5.0, 2.0, 1.0$  dargestellt.

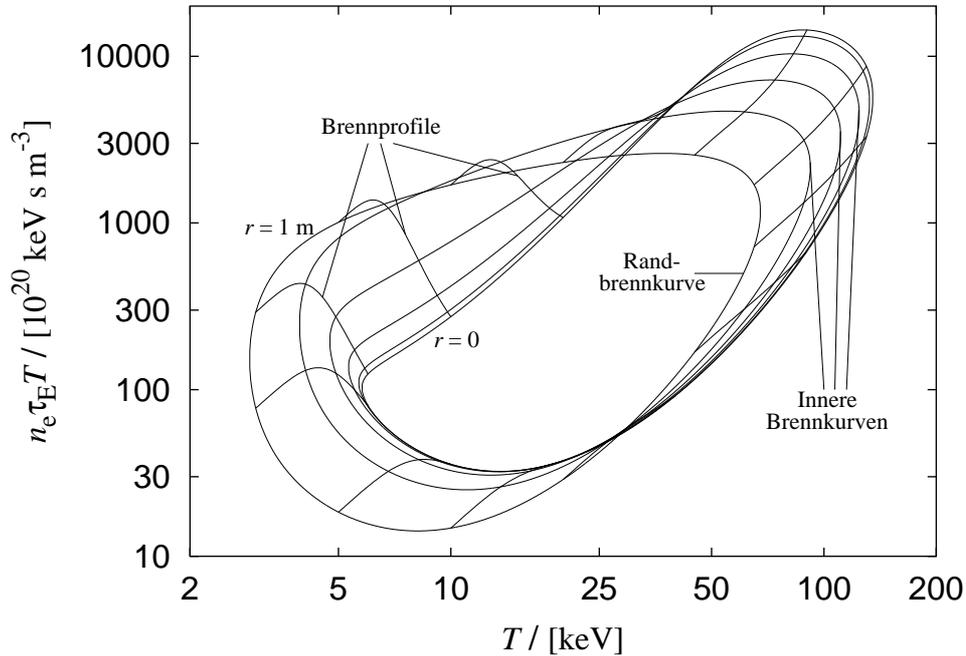
$\rho$  als lokale Größen definiert, und dabei festgelegt, daß zur Berechnung des Brenngleichgewichts die Vorgabe von  $\rho$  an einem beliebigen Punkt im Plasma erfolgen kann. Wir werden uns in diesem Kapitel bei der Vorgabe von  $\rho$  auf zwei Fälle beschränken. Zum ersten werden wir auf einer ganzen Brennkurve den selben Wert  $\rho$  am Plasmarand vorgeben und untersuchen, wie sich die lokalen Einschlußzeiten und  $\rho(r)$  zum Plasmazentrum hin entwickeln. Beim zweiten Fall geben wir  $\rho$  im Plasmazentrum vor und untersuchen, wie sich die lokalen Einschlußzeiten und  $\rho(r)$  nach außen hin entwickeln.

## 6.1 Vorgabe von $\rho$ am Plasmarand

Wir werden bei dem zuerst untersuchten Fall zu vorgegebenen Profilen  $n(r)$  und  $T(r)$  und vorgegebenem  $\rho$  am Plasmarand die zugehörigen Brennkurven für unterschiedliche  $r$  berechnen. Die Vorgabe von  $\rho = const$  an der Stelle  $r = 1$  m für alle Punkte einer Brennkurve bedeutet, daß sämtliche Brenngleichgewichte am Plasmarand das gleiche Verhältnis der Einschlußzeiten aufweisen. Wir bezeichnen die Brennkurve zu  $r = 1$  m als *Randbrennkurve* und alle anderen zu  $r < 1$  m als *innere Brennkurven*.

### 6.1.1 Brennkurven und Verläufe von $\tau_p(r)$ , $\tau_E(r)$ und $\rho(r)$ an einem konkreten Beispiel

Bei dem Beispiel, das wir jetzt untersuchen werden, wählen wir für die Profile  $n(r)$  und  $T(r)$  die Koeffizienten  $\alpha_n = 1$  und  $\alpha_T = 1$ . Mit diesen Werten geben wir



**Abbildung 6.2:** Brennkurven für unterschiedliche Radien  $r = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  und  $1 \text{ m}$  zu den Profilkoeffizienten  $\alpha_n = 1$  und  $\alpha_T = 1$  und  $\rho = 3$  auf dem Rand des Plasmas. Zusätzlich sind für die mittleren Temperaturen  $T = 3, 5, 10, 20, 45$  und  $65 \text{ keV}$  die Brennprofile aufgetragen.

uns, wie aus Abbildung 6.1 ersichtlich wird, moderat abfallende Profilformen vor. Für  $\rho$  geben wir uns den Wert 3 vor, womit wir etwa im mittleren Bereich der in Tabelle 4.1 aufgelisteten Werte liegen. In Abbildung 6.2 sind die Brennkurven zu diesen Profilen  $n(r)$  und  $T(r)$  für die Radien  $r = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  und  $1 \text{ m}$  aufgetragen.

Betrachten wir die Randbrennkurve, so ähnelt die Form der Kurve in etwa denen für konstante Profile aus Abbildung 2.2. Der Grund dafür ist, daß für alle Brenngleichgewichte auf dieser Kurve der gleiche Wert  $\rho$  vorliegt. Betrachtet man die zu kleineren Radien gehörigen inneren Brennkurven, so ist festzustellen, daß diese eine zunehmende Deformation aufweisen, die vornehmlich in der oberen Hälfte der Kurven auftritt.

Nicht nur die Form der Brennkurven ändert sich mit abnehmendem  $r$ , sondern auch die Lage im Brennkurvendiagramm. So ist deutlich zu erkennen, daß die Kurven sowohl nach rechts zu einer höheren Temperatur, als auch nach oben zu einem größeren Fusionsprodukt verschoben sind. Dies läßt sich damit erklären, daß aufgrund der Profilform von  $T(r)$  die lokale mittlere Temperatur in der Nähe des Zentrums wesentlich höher ist als wenn die kühleren Randschichten mit

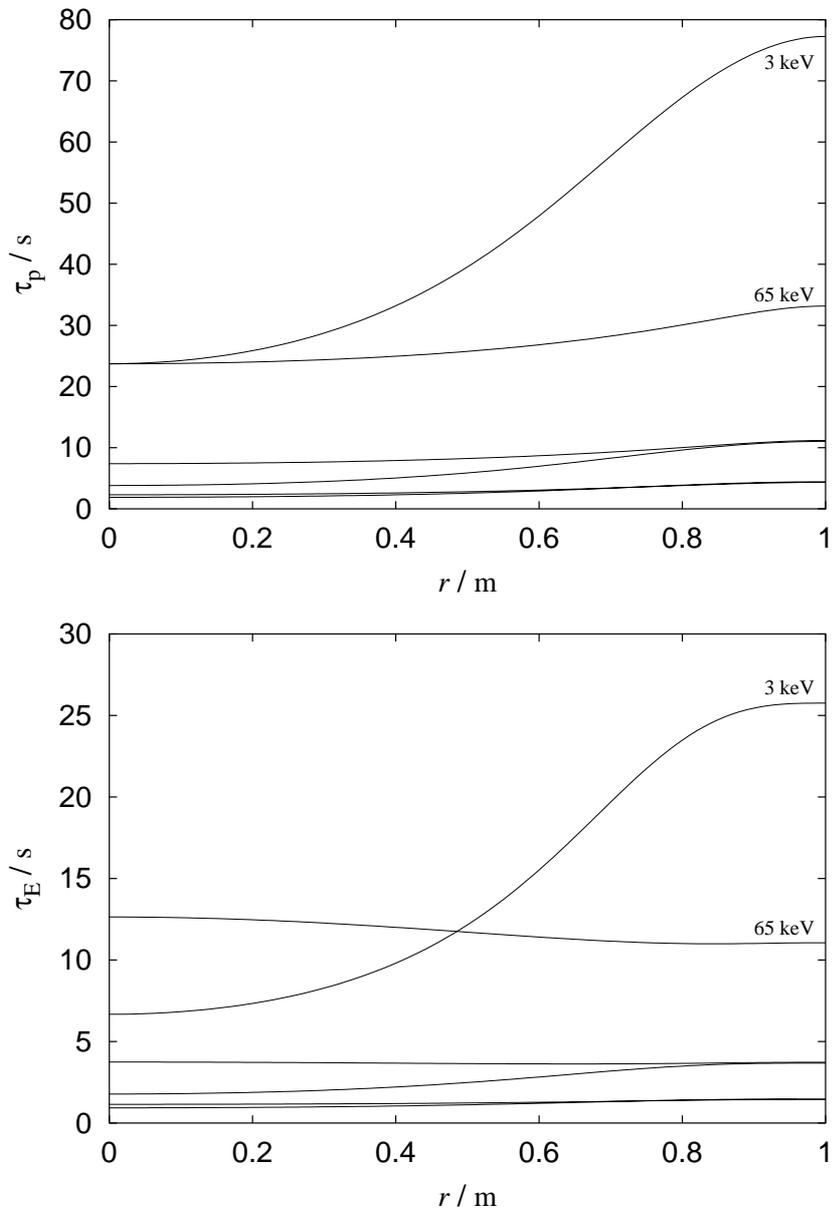
$T/\text{keV}$	$T(0)/\text{keV}$	$f_\alpha$	$f_\alpha$
3	6	2.71%	8.05%
5	10	2.00%	26.43%
10	20	3.53%	36.12%
20	40	6.86%	38.55%
45	90	15.36%	36.34%
65	130	24.28%	31.04%

**Tabelle 6.1:** Tabelle der Konzentrationen für die  $\alpha$ -Teilchen. In der ersten Spalte ist der Mittelwert des Temperaturprofils eingetragen und in der zweiten Spalte die Temperatur an der Stelle  $r = 0$ . Zu jedem vorgegebenem Temperaturprofil gibt es zwei Konzentrationen, die jeweils zu einem Brenngleichgewicht führen.

dazugezählt werden. Gleiches gilt für die Dichte, die im Zentrum sehr viel größer ist als am Rand und deshalb für kleine  $r$  das Fusionsprodukt mit verstärkt. Eine wichtige Konsequenz dieser Verschiebung ist, daß die Brennkurve für den Plasmarand bis unter die in Kapitel 3 für das Zentrum festgestellte minimale Temperatur von  $T = 4 \text{ keV}$  verschoben wird. Auch der Wert des Fusionsprodukts liegt bei einigen Brenngleichgewichten unterhalb der Grenze für das Zentrum. *Als wichtiges Ergebnis läßt sich hier schon einmal festhalten, daß durch die Berücksichtigung von Profilen für  $n(r)$  und  $T(r)$  der Operationsbereich für ein Fusionsplasma erweitert werden kann.*

In Abbildung 6.2 sind zusätzlich zu den Brennkurven die Brennprofile zu verschiedenen Brenngleichgewichten eingezeichnet. In Tabelle 6.1 sind die vorgegebenen Temperaturen und die hierfür berechneten Konzentrationen der  $\alpha$ -Teilchen aufgelistet. Die Konzentrationen in der dritten Spalte sind die Werte für den unteren Teil der Brennkurven und in der vierten Spalte stehen die  $f_\alpha$  für den oberen Teil. Die meisten inneren Brennkurven weisen das oben für die Brennkurven dargelegte Verhalten auf, nämlich, daß zum Plasmazentrum die Temperatur und das Plasmaproduct ansteigen. Ausnahmen gibt es hauptsächlich auf dem oberen Zweig zu kleineren Temperaturen. In diesem Bereich liegen auch die größten Verformungen der Brennkurven.

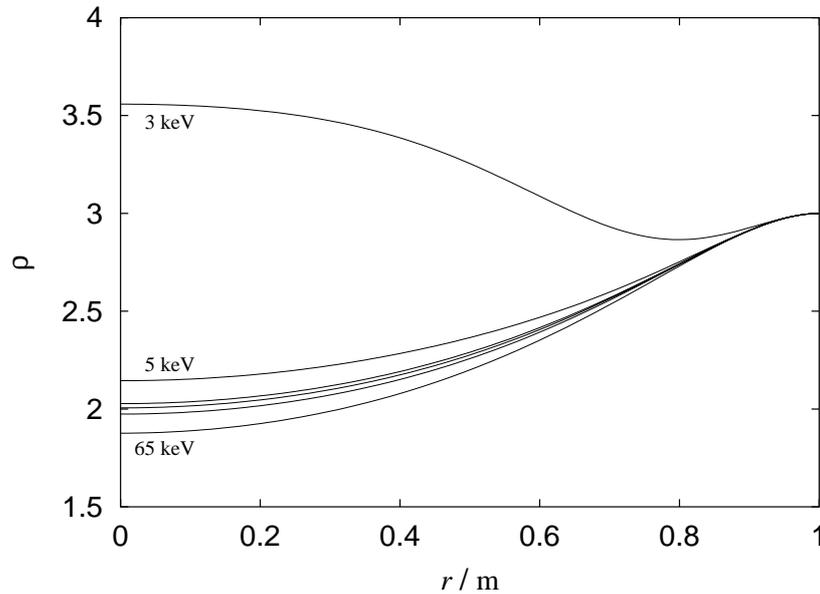
Um die einzelnen Brenngleichgewichte und deren Eigenschaften besser analysieren zu können, untersuchen wir die Verläufe von  $\tau_p(r)$ ,  $\tau_E(r)$  und  $\rho(r)$ . Da die Wertebereiche der einzelnen Größen über den Verlauf einer Brennkurve stark variieren, teilen wir diese auf und betrachten den oberen und unteren Teil der Brennkurven separat.



**Abbildung 6.3:** Verläufe von  $\tau_p(r)$  und  $\tau_E(r)$  der Brenngleichgewichte auf dem unteren Teil der Brennkurven aus Abbildung 6.2. Die vier nicht gekennzeichneten Kurven stehen für  $T = 10, 20, 5$  und  $45$  keV (von unten nach oben).

### Brenngleichgewichte auf dem unteren Teil der Brennkurven

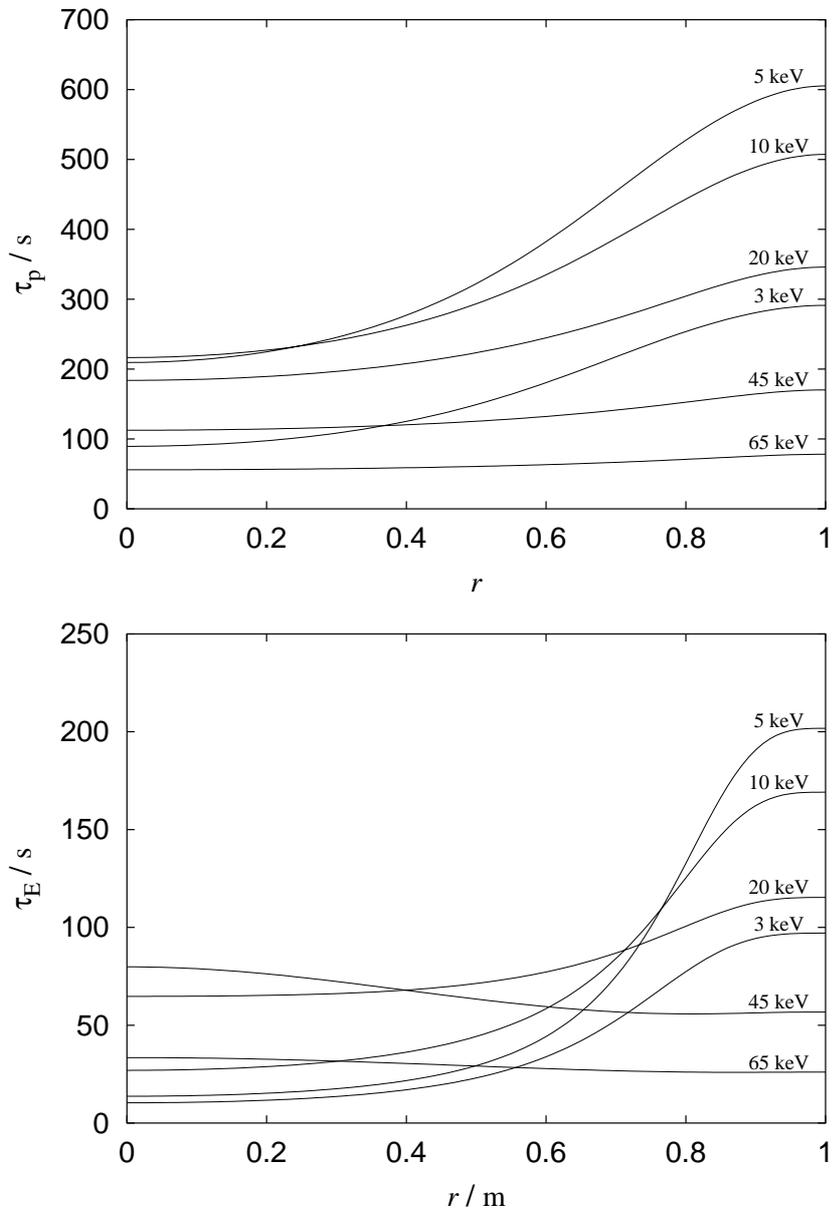
In Abbildung 6.3 sind die Einschlußzeitprofile zu den Temperaturen  $T = 3, 5, 10, 20, 45$  und  $65$  keV der Brenngleichgewichte auf dem unteren Teil der Brennkurven aufgetragen. Am markantesten ist der Verlauf der Ein-



**Abbildung 6.4:** Verläufe von  $\rho(r)$  der Brenngleichgewichte auf dem unteren Teil der Brennkurven. Die drei nicht gekennzeichneten Kurven stehen für  $T = 45, 20$  und  $10$  keV (von unten nach oben).

schlußzeit zu  $T = 3$  keV. Dieser fällt dadurch auf, daß sowohl  $\tau_p(r)$  als auch  $\tau_E(r)$  sehr stark nach außen ansteigen. Ansonsten hebt sich nur noch die Einschlußzeit zu  $T = 65$  keV ab, da sie wesentlich größere Werte annimmt als die Verläufe zu den restlichen Temperaturen. Die Änderung im Verlauf hingegen ist wie bei den übrigen Verläufen sehr moderat. Bis auf die Energieeinschlußzeiten zu  $T = 45$  keV und  $T = 65$  keV verlaufen die Einschlußzeiten ansteigend. In Abschnitt 4.2 haben wir das Ansteigen dieser für den Bereich von 10-20 keV mit Hilfe der Entwicklungen vorausgesagt. Die Einschlußzeiten weisen für den unteren Zweig der Brennkurven nur an der Grenze zu sehr kleiner und sehr großer Temperatur ein auffälliges Verhalten auf.

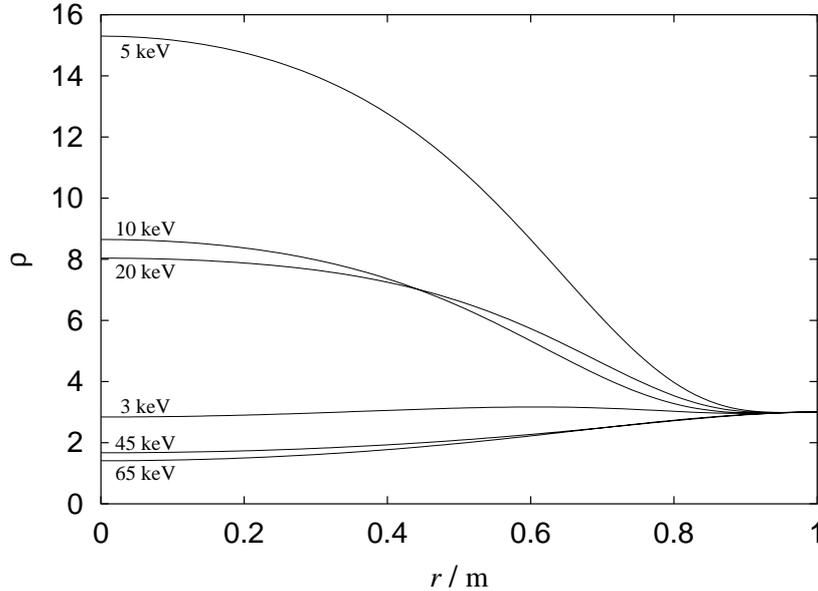
In Abbildung 6.4 sind die dazugehörigen Verläufe für  $\rho(r)$  aufgetragen. Bis auf die Kurve für  $T = 3$  keV sind die Verläufe von  $\rho(r)$  fast identisch. Das bedeutet, daß sich der Wert von  $\rho$  zwar für unterschiedliche Radien  $r$  unterscheidet, aber auf jeder inneren Brennkurve (festes  $r$ ) nahezu konstant ist. Das ist der Grund dafür, warum der untere Teil der Brennkurven seine Form fast beibehält und nur durch Übergang zu höheren mittleren Dichten und Temperaturen verschoben wird. Nur für  $T = 3$  keV ist eine deutliche Abweichung zu erkennen, was auch in Abbildung 6.2 sichtbar wird.



**Abbildung 6.5:** Verläufe von  $\tau_p(r)$  und  $\tau_E(r)$  der Brenngleichgewichte auf dem oberen Teil der Brennkurven.

### Brenngleichgewichte auf dem oberen Teil der Brennkurven

In Abbildung 6.5 sind die Einschlußzeitprofile zu den Temperaturen  $T = 3, 5, 10, 20, 45$  und  $65$  keV der Brenngleichgewichte auf dem oberen Teil der Brennkurven aufgetragen. Im Gegensatz zum unteren Teil unterscheiden sich hier die Einschlußzeiten sehr deutlich voneinander. Bis auf die Energieeinschlußzeiten für  $T = 45$  keV und  $T = 65$  keV sind diese zum Rand ansteigend. Der we-



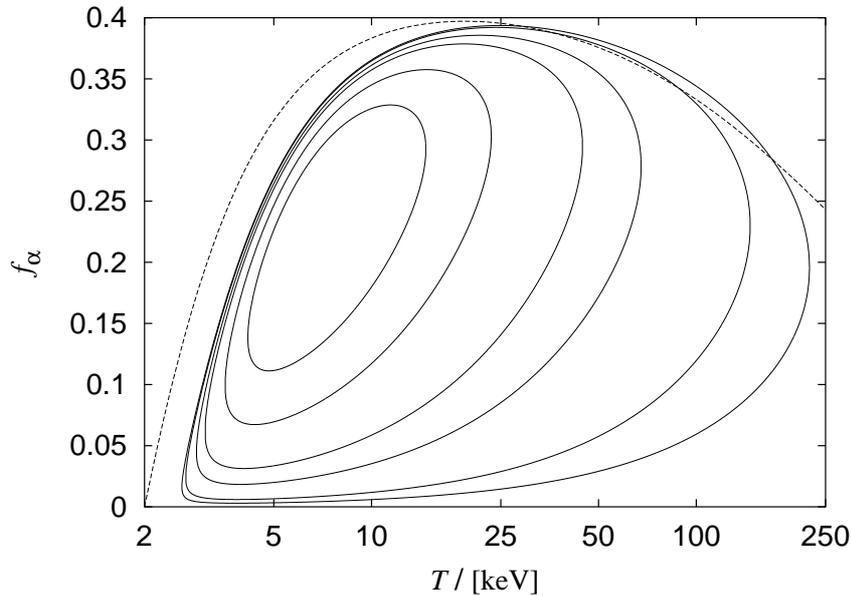
**Abbildung 6.6:** Verläufe von  $\rho(r)$  der Brenngleichgewichte auf dem oberen Teil der Brennkurven.

sentliche Unterschied zu den Verläufen des unteren Teils der Brennkurven liegt im Wertebereich der Einschlußzeiten, der fast zehnmal so groß ist. Das erklärt, warum die Einschlußzeitprofile an den Grenzen des unteren Teils ( $T = 3$  keV und  $T = 65$  keV) sehr viel größere Werte aufweisen als die restlichen.

Der starke Anstieg der Energieeinschlußzeit ist der Grund dafür, warum das Fusionsprodukt für  $T = 3, 5$  und  $10$  keV nach außen größer wird, obwohl die mittlere Dichte und die mittlere Temperatur kleiner werden (siehe Abbildung 6.2).

In Abbildung 6.6 sind die dazugehörigen Verläufe von  $\rho(r)$  aufgetragen. Auch hier zeigt sich ein sehr viel differenzierteres Bild als beim unteren Teil. Der Wertebereich ist sehr viel größer, und die Profilverläufe unterscheiden sich zum Teil sehr stark voneinander. Für kleine Radien variiert der Wert von  $\rho$  zwischen 2 und 15, was der Grund für die markante Verformung der Brennkurven in Richtung Plasmazentrum ist.

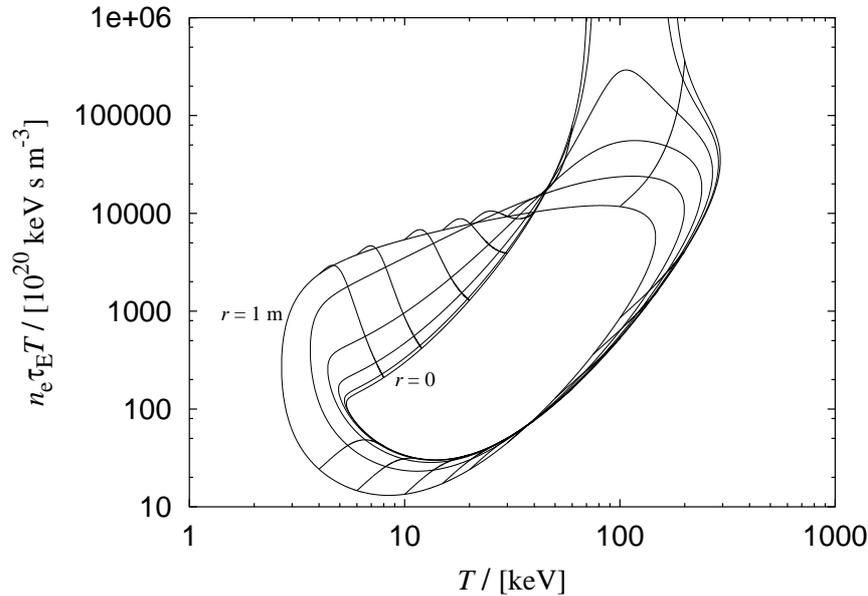
Für  $T = 5, 10$  und  $20$  keV ist der Verlauf von  $\rho(r)$  fallend und für  $T = 3, 45$  und  $65$  keV ist er leicht steigend. In Abschnitt 4.2.1 haben wir bei der Untersuchung der Verläufe der lokalen Größen festgestellt, daß man bei  $\rho(r)$  eine Fallunterscheidung vornehmen muß. Bei kleinen  $f_\alpha$  steigt das Profil, und bei hinreichend großen Werten ist es fallend. Hier liegt der Fall vor, daß die Konzentration  $f_\alpha$  so groß ist, daß  $\rho(r)$  für  $T = 5$  keV und  $T = 10$  keV fallend ist. Man braucht hierzu nur die berechneten Werte  $f_\alpha$  aus Tabelle 6.1 mit den in Abschnitt 4.2 angegebenen Konzentrationen zu vergleichen.



**Abbildung 6.7:** Konzentrationen der  $\alpha$ -Teilchen zu den Profilen mit den Koeffizienten  $\alpha_n = \alpha_T = 1$  und den vorgegebenen Werten  $\rho = 0.5, 1, 3, 5, 10$  und  $15$  am Plasmarand (von außen nach innen). Zusätzlich ist die für jede mittlere Temperatur maximale Konzentration  $f_\alpha$  im Plasmazentrum aufgetragen (gestrichelte Linie).

### 6.1.2 Geschlossene und offene Brennkurven

Wir gehen noch einmal auf die Vorgehensweise zur Berechnung der Brennkurven für die unterschiedlichen Radien ein. Wir haben zu vorgegebenen Profilen  $n(r)$  und  $T(r)$  den Wert  $\rho$  an der Stelle  $r = 1$  m fest vorgegeben. Anhand der berechneten  $f_\alpha$ -Werte konnten wir  $\tau_p$ ,  $\tau_E$ ,  $\rho$  und das Fusionsprodukt für kleinere Radien bis ins Plasmazentrum berechnen. In dem oben durchgerechneten Beispiel war dies ohne Probleme möglich. Es stellt sich jedoch die Frage, ob dies immer möglich ist. Wie schon im letzten Abschnitt erläutert, haben die Einschlußzeiten und  $\rho(r)$  recht unterschiedliche Verläufe. Daher können wir nicht sicher sein, ob diese nicht zu den am Plasmarand berechneten  $f_\alpha$  den physikalischen Bereich im Plasmazentrum verlassen. Dies ist in der Tat möglich, es stellt sich nämlich heraus, daß der Wert von  $\rho$  entscheidend dafür ist, ob die inneren Brennkurven geschlossen sind. Hierzu betrachten wir Abbildung 6.7, in der die Konzentrationen der  $\alpha$ -Teilchen aufgetragen sind, die sich für vorgegebene  $\rho$  am Plasmarand berechnen lassen. Zusätzlich ist für jedes auf  $T$  gemittelte Temperaturprofil die maximal mögliche Konzentration  $f_\alpha$  für das Plasmazentrum aufgetragen. Diese läßt sich durch Einsetzen von  $T(0)$  in Gleichung

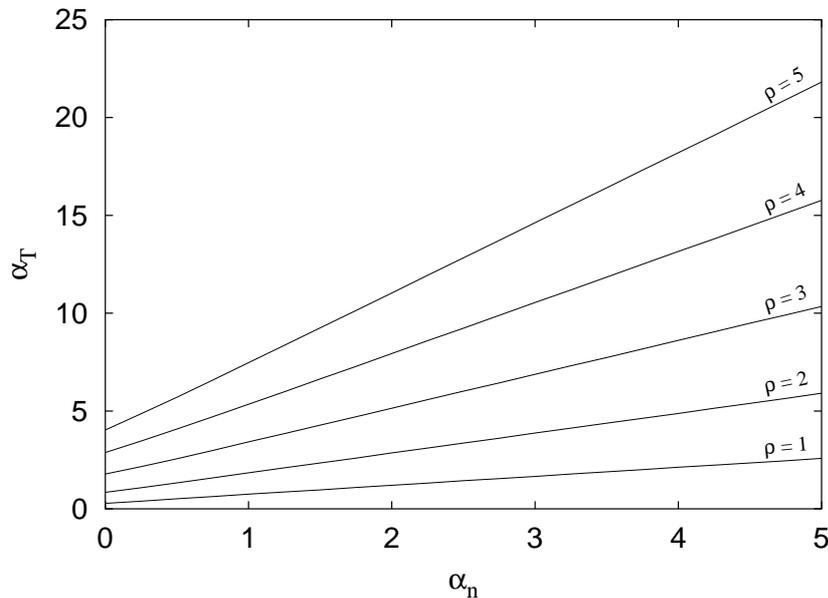


**Abbildung 6.8:** Brennkurven für unterschiedliche Radien  $r = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  und  $1$  m zu den Profilkoeffizienten  $\alpha_n = 1$  und  $\alpha_T = 1$  und  $\rho = 1$  auf dem Rand des Plasmas. Die inneren Brennkurven zu  $r = 0.2$  m und  $r = 0$  sind nicht geschlossen.

chung (3.6) bestimmen (Gleichung (3.6) berechnet zu vorgegebener Temperatur das  $f_\alpha$  mit  $\rho = 0$  im Plasmazentrum, das die maximale Konzentration  $f_\alpha$  zu dieser Temperatur angibt).

In Abbildung 6.7 ist deutlich zu erkennen, daß die Grenzkurve für das Zentrum die zwei äußeren Kurven schneidet. Das bedeutet, daß für die Werte  $\rho = 0.5$  und  $\rho = 1$  die Brennkurven im Plasmazentrum nicht geschlossen sind, weil das am Plasmarand berechnete  $f_\alpha$  für die vorgegebenen  $n(r)$  und  $T(r)$  im Plasmazentrum zu groß ist. In Abbildung 6.8 sind die Brennkurven für  $\rho = 1$  dargestellt. Die beiden innersten Brennkurven zu  $r = 0.2$  m und  $r = 0$  sind nicht geschlossen, sondern brechen nach oben auf. *Es zeigt sich, daß es nicht genügt, wie bisher üblich, Brenngleichgewichte nur mit gemittelten Gleichungen und globalen Einschlußzeiten zu untersuchen.* Bei einem harmlos aussehenden globalen Brenngleichgewicht können lokal unerfüllbare Bedingungen auftreten, die dieses Gleichgewicht unmöglich machen.

In Abbildung 6.9 sind die Koeffizientenpaare  $(\alpha_n, \alpha_T)$  aufgetragen, die bei fest vorgegebenem  $\rho$  noch geschlossene Brennkurven liefern. Paare die oberhalb der jeweiligen Linie liegen, bilden zum Zentrum offene Brennkurven. Die von uns untersuchten Profile  $n(r)$  und  $T(r)$  haben das Koeffizientenpaar  $(1,1)$ , welches in

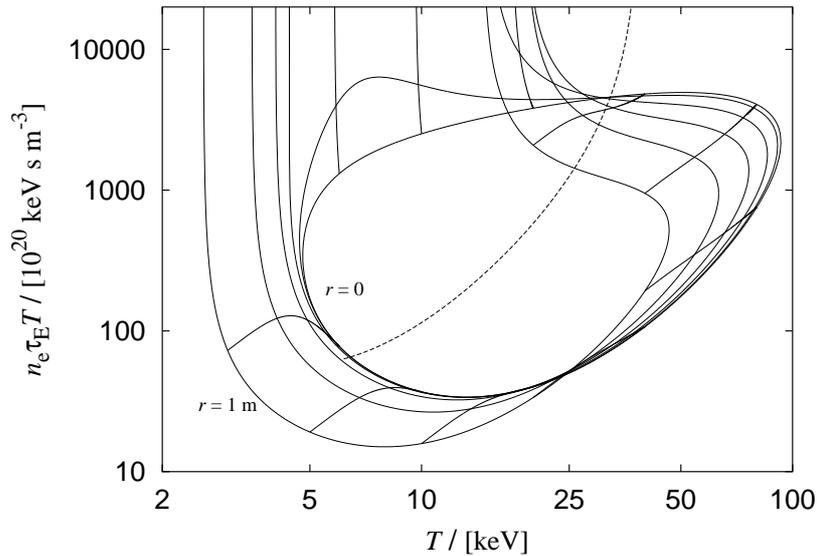


**Abbildung 6.9:** Maximal mögliche Profilkoeffizienten  $\alpha_n$  und  $\alpha_T$  zu den vorgegebenen  $\rho = 1, 2, 3, 4$  und  $5$  am Plasmarand, bei denen die inneren Brennkurven geschlossen bleiben.

Abbildung 6.9 oberhalb der Linie  $\rho = 1$  und unterhalb der Linie  $\rho = 3$  liegt. In den Abbildungen 6.2 und 6.8 haben wir gesehen, daß die inneren Brennkurven für  $\rho = 3$  im Zentrum geschlossen, bzw. für  $\rho = 1$  offen sind. Auffällig ist, daß ein linearer Zusammenhang zu bestehen scheint. Da mit zunehmendem  $\rho$  die Brennkurven enger werden und dementsprechend auch der Wertebereich der Konzentrationen kleiner wird, wie in Abbildung 6.7 deutlich zu erkennen ist, ist der Bereich der möglichen Koeffizientenpaare größer. *Als Ergebnis bleibt festzuhalten, daß die Brennkurven für zugespitzte Temperaturprofile oder für kleine Werte  $\rho$  im Inneren des Plasmas aufbrechen.*

## 6.2 Vorgabe von $\rho$ im Plasmazentrum

Im Gegensatz zu Abschnitt 6.1 werden wir jetzt den Wert  $\rho$  im Plasmazentrum vorgeben und diesen Wert auf der ganzen zu diesem gehörigen Brennkurve festhalten. Die Brennkurve für  $r = 0$  ist somit durch das gleiche Verhältnis der Einschlußzeiten gekennzeichnet.



**Abbildung 6.10:** Brennkurven für unterschiedliche Radien  $r = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  und  $1$  m zu den Profilkoeffizienten  $\alpha_n = 1$  und  $\alpha_T = 1$  und  $\rho = 3$  im Zentrum des Plasmas. Zusätzlich sind einige Brennprofile aufgetragen. Die gestrichelte Linie markiert die Grenze zwischen steigenden und abfallenden  $\rho$ -Profilen.

### 6.2.1 Brennkurven und Verlauf von $\tau_p(r)$ , $\tau_E(r)$ und $\rho(r)$ an einem konkreten Beispiel

Für das hier untersuchte Beispiel geben wir uns die gleichen Profile wie in 6.1.1 vor. Auch der Wert von  $\rho$  wird übernommen, nur daß er diesmal nicht für den Plasmarand sondern für das Zentrum des Plasmas gelten soll. In Abbildung 6.10 sind die Brennkurven zu den Radien  $r = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  und  $1$  m dargestellt. Das Auffälligste an diesen Brennkurven ist, daß sie nicht alle geschlossen sind. Am Ende von Abschnitt 6.1 haben wir dieses Phänomen für den Fall der Vorgabe von  $\rho$  am Plasmarand untersucht und sind zu dem Ergebnis gekommen, daß dafür entweder die Profile zum Zentrum sehr steil zulaufen müssen oder  $\rho$  sehr klein gewählt werden muß. Im jetzigen Beispiel brechen die Brennkurven schon bei relativ gemäßigten Vorgaben auf. Wir wollen die Ursache hierfür genauer untersuchen. Das Aufbrechen der Brennkurven bedeutet, daß das Fusionsprodukt  $n_e \tau_E T$  unendlich wird. Da die Elektronendichte und die Temperatur endlich vorgegeben sind, muß die Energieeinschlußzeit gegen unendlich gehen. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die für das Brenngleichgewicht im Zentrum bestimmte Konzentration  $f_\alpha$  für den gesamten Plasmabereich zu groß ist. Bei größeren Radien verlaufen die Profile  $n(r)$  und  $T(r)$  so ungünstig, daß die Bremsstrahlungsver-

$T/\text{keV}$	$T(0)/\text{keV}$	$f_\alpha$	$f_\alpha$
3	6	2.26%	17.58%
5	10	2.80%	30.98%
10	20	5.21%	37.68%
20	40	10.17%	38.47%
40	80	20.10%	34.09%

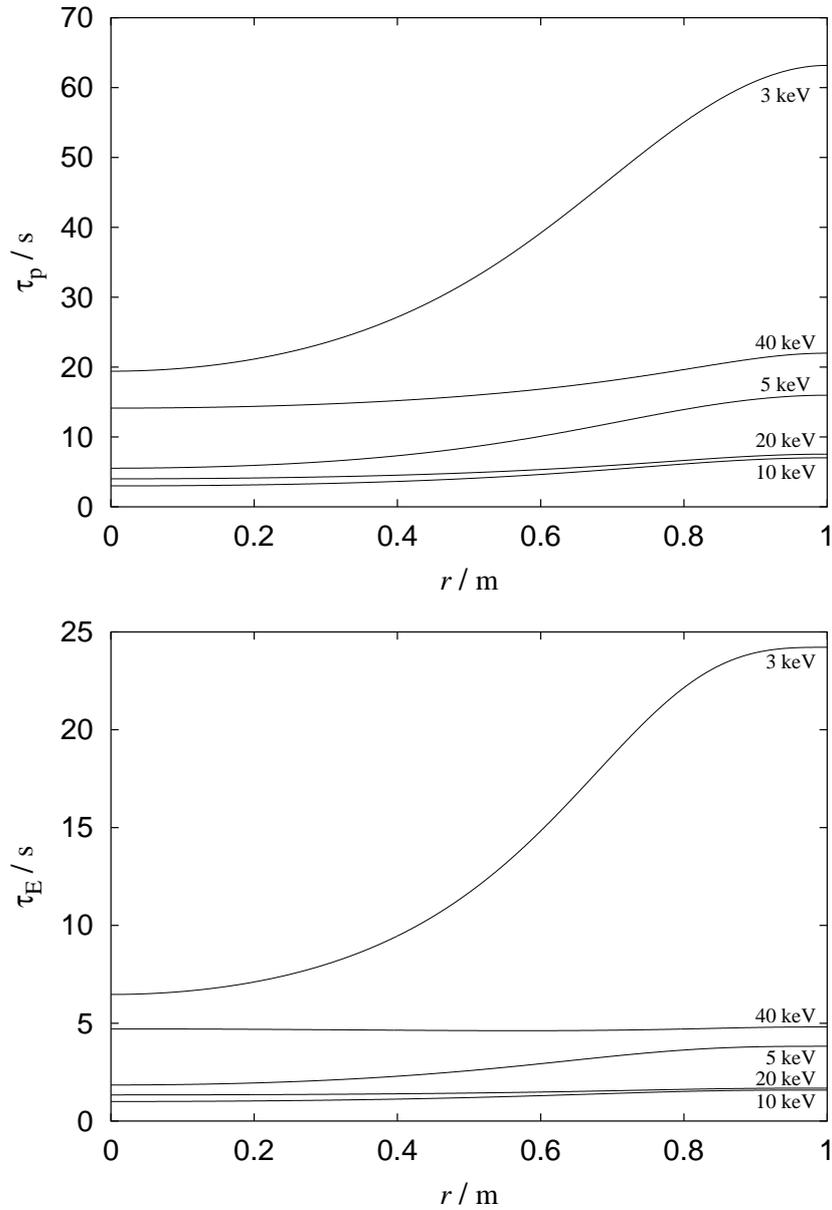
**Tabelle 6.2:** Tabelle mit den Konzentrationen der  $\alpha$ -Teilchen für die in Abbildung 6.10 durchgehend eingetragenen Brenngleichgewichte (vgl. Tabelle 6.1).

ste durch die gewonnene Fusionsleistung nicht kompensiert werden. Die Tatsache, daß die Energieeinschlußzeit unendlich wird, hat zur Folge, daß  $\rho$  null wird. Da wir für alle Brenngleichgewichte im Zentrum  $\rho = 3$  vorgegeben haben, muß  $\rho$  für größere Werte von  $r$  dort, wo die Kurven aufbrechen, auf null absinken. Das heißt, die Profile von  $\rho(r)$  müssen nach dort hin fallend sein.

Um festzustellen, wie der Verlauf von  $\rho(r)$  ist, gehen wir noch einmal auf die Taylor-Entwicklung in Abschnitt 4.2.1 ein. Dort haben wir mit Hilfe des quadratischen Terms entschieden, wie die Profile vom Zentrum aus verlaufen. Wir geben hier noch einmal die Entwicklung von  $\rho(r)$  an, verwenden allerdings nicht die Näherungsformel für den Reaktionsquerschnitt, sondern die genauere Fit-Formel (2.5). Wir erhalten für diese

$$\rho(r) \approx \frac{a(S(T_0) - c\sqrt{T_0})}{bT_0 S(T_0)} + \frac{aT_2(c\sqrt{T_0}S(T_0) - 2S^2(T_0) + 2cT_0^{3/2}S'(T_0))}{4bT_0^2 S^2(T_0)} r^2.$$

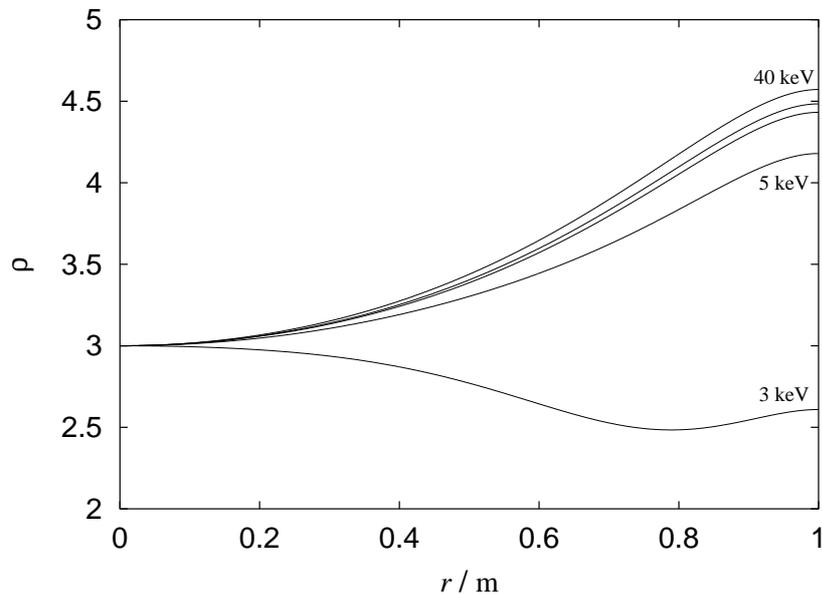
Das Vorzeichen des quadratischen Terms entscheidet über den Verlauf von  $\rho(r)$ . Untersuchen wir die Punkte, an denen ein Vorzeichenwechsel stattfindet, so erhalten wir als Bedingung die Gleichung (3.4). In Kapitel 3 haben wir mit Hilfe dieser Gleichung das maximale  $\rho$  zu vorgegebener Konzentration  $f_\alpha$  im Plasmazentrum bestimmt. Im Brennkurvendiagramm markieren die Schnittpunkte der zugehörigen Kurve mit den Brennkurven die Brenngleichgewichte, an denen die minimal und die maximal mögliche Konzentration  $f_\alpha$  erreicht wird (vgl. Abschnitt 3.4). Hieraus folgt, daß es zu jedem  $f_\alpha$  zwischen der minimal und der maximal möglichen Konzentration ein Brenngleichgewicht mit steigendem und eins mit fallendem  $\rho$ -Profil gibt. In Abbildung 6.10 haben wir die Kurve gestrichelt eingetragen (Sie ist identisch mit Kurve 1 aus Abbildung 3.3). Diese trennt in etwa den Bereich, in dem die aufbrechenden Brennkurven nach unendlich davonlaufen (fallende  $\rho$ -Profile), von dem Bereich, in dem die Brennkurven für alle  $r$  bis zum Rand regulär bleiben (steigende  $\rho$ -Profile).



**Abbildung 6.11:** Verlauf von  $\tau_p(r)$  und  $\tau_E(r)$  der Brenngleichgewichte auf dem unteren Teil der Brennkurven.

### Brenngleichgewichte auf dem unteren Teil der Brennkurven

In Abbildung 6.11 sind die Profile der Einschlußzeiten für die Brenngleichgewichte auf dem unteren Teil der Brennkurven aufgetragen. Wie im Beispiel aus dem letzten Abschnitt ist der Verlauf zu  $T = 3 \text{ keV}$  am auffälligsten, da dieser im Verhältnis zu den anderen nach außen sehr stark ansteigt. Bis auf das Energieeinschlußzeitprofil für  $T = 40 \text{ keV}$  sind alle Profile ansteigend.

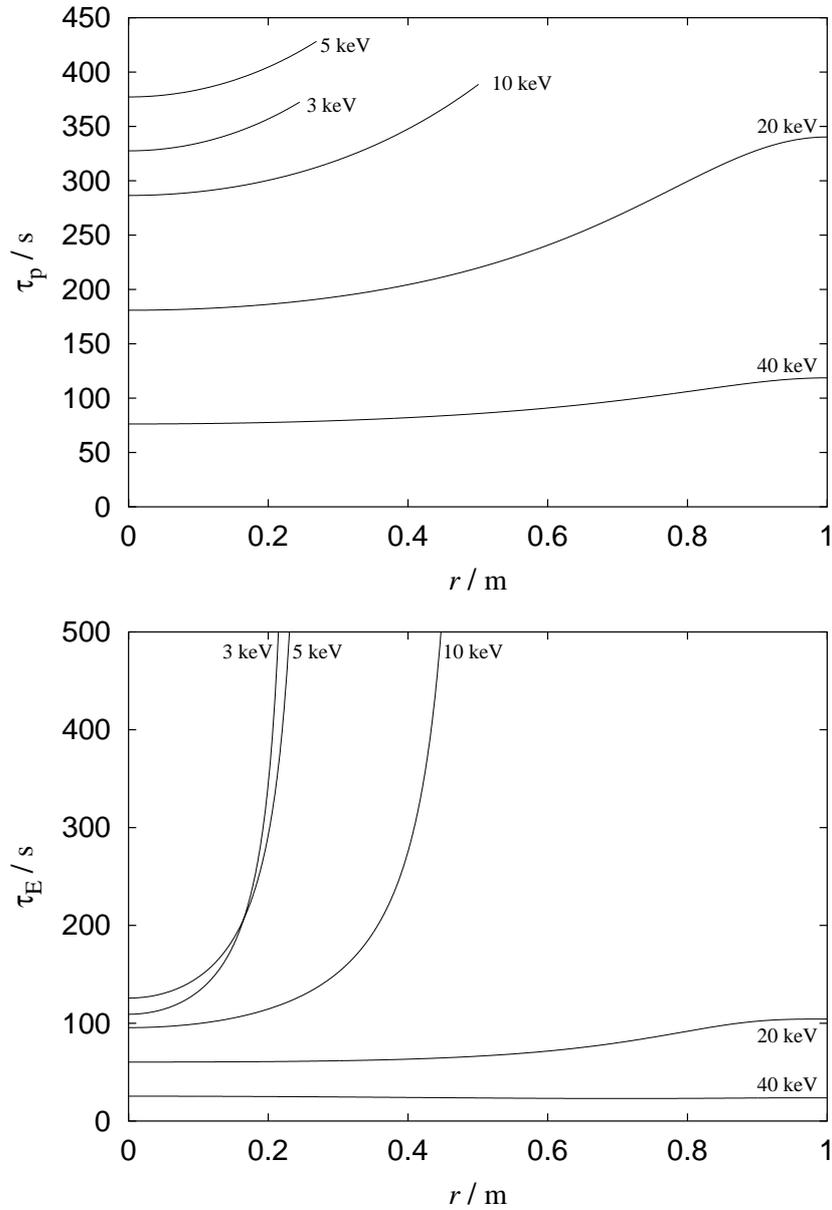


**Abbildung 6.12:** Verlauf von  $\rho(r)$  der Brenngleichgewichte auf dem unteren Teil der Brennkurven. Die zwei nicht gekennzeichneten Kurven gehören zu den Temperaturen 10 und 20 keV (von unten nach oben).

In Abbildung 6.12 sind die dazugehörigen  $\rho$ -Profile aufgetragen. Die Verläufe von  $\rho(r)$  sind für die Temperaturen  $T = 5, 10, 20$  und  $40$  keV ansteigend und liegen sehr dicht beieinander. Aus diesem Grund haben die Brennkurven im unteren Teil die gleiche Form, weil  $\rho$  auf diesen nahezu konstant ist. Nur im Bereich unterhalb von  $5$  keV gibt es größere Unterschiede, wie der Verlauf von  $\rho$  für  $T = 3$  keV deutlich macht. Das Brenngleichgewicht liegt für  $r = 0$  oberhalb der in Abbildung 6.10 gestrichelt eingetragenen Linie. Das bedeutet, daß das  $\rho$ -Profil zu Beginn fallend ist.

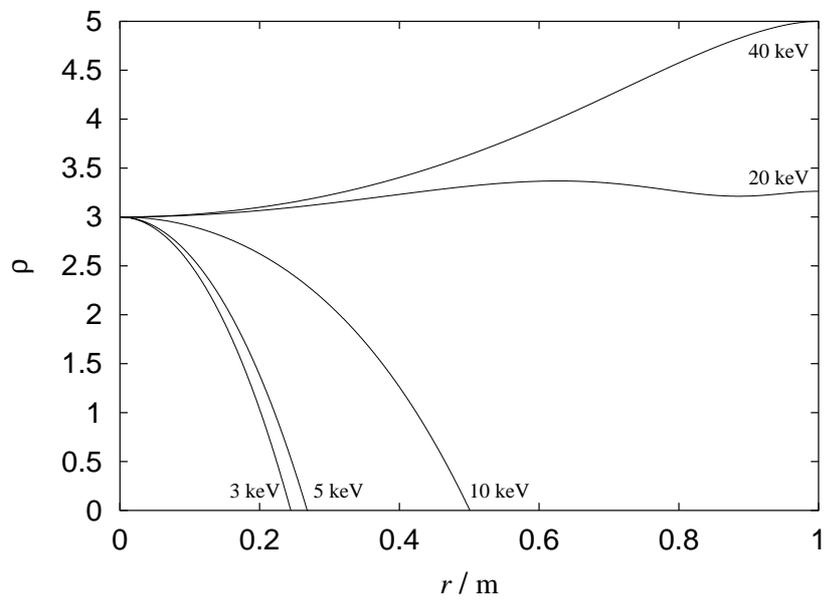
### Brenngleichgewichte auf dem oberen Teil der Brennkurven

In Abbildung 6.13 sind die Verläufe der Einschlußzeiten für die Brenngleichgewichte auf dem oberen Teil der Brennkurven aufgetragen. Auch hier sind die Werte der Einschlußzeiten wesentlich größer als auf dem unteren Teil. Aus dem Diagramm für die  $\tau_E$ -Profile wird ersichtlich, warum die Brennkurven aufbrechen. Für  $T = 3, 5$  und  $10$  keV wird die Energieeinschlußzeit unendlich groß, weshalb auch das Fusionsprodukt unendlich wird. Bis auf das  $\tau_E$ -Profil für  $T = 40$  keV sind alle Einschlußzeitprofile ansteigend.

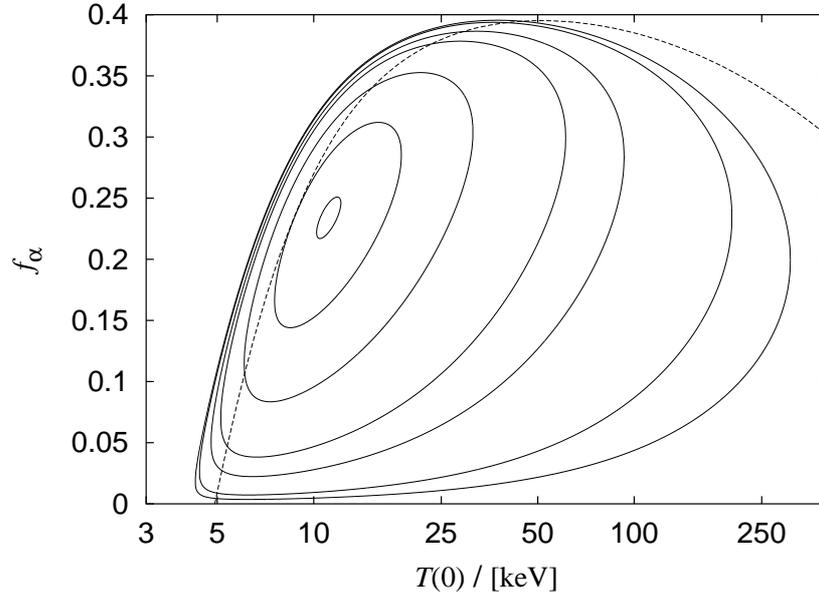


**Abbildung 6.13:** Verlauf von  $\tau_p(r)$  und  $\tau_E(r)$  der Brenngleichgewichte auf dem oberen Teil der Brennkurven.

In Abbildung 6.14 sind die dazugehörigen  $\rho$ -Profile aufgetragen. Für die drei Beispiele, in denen die Energieeinschlußzeit unendlich wird, geht  $\rho(r)$  gegen null. Abbildung 6.14 zeigt, wie rasch  $\rho(r)$  null wird. Die  $\rho$ -Profile zu den Temperaturen 20 und 40 keV verlaufen hingegen ansteigend. Aus dem Brennkurvendiagramm 6.10 wird deutlich, daß diese unterhalb der gestrichelten Linie beginnen.



**Abbildung 6.14:** Verlauf von  $\rho(r)$  der Brenngleichgewichte auf dem oberen Teil der Brennkurven.



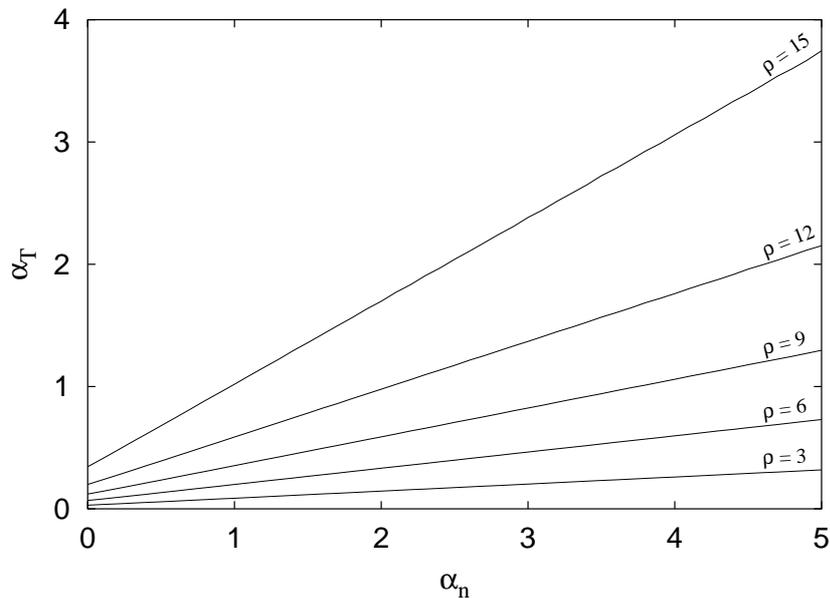
**Abbildung 6.15:** Konzentrationen der  $\alpha$ -Teilchen zu den Profilen mit den Koeffizienten  $\alpha_n = \alpha_T = 1$  und den vorgegebenen  $\rho = 0.5, 1, 3, 5, 10, 15$  und  $18$  im Plasmazentrum (von außen nach innen) in Abhängigkeit von der Temperatur bei  $r = 0$ . Zusätzlich ist die maximale Konzentration aus der Berechnung von  $f_\alpha$  für  $\rho = 0$  auf dem Plasmarand in Abhängigkeit von  $T(0)$  aufgetragen (gestrichelte Linie).

### 6.2.2 Geschlossene und offene Brennkurven

Analog zum ersten Beispiel werden wir auch hier die Gründe für das Aufbrechen der Brennkurven untersuchen. Hierzu vergleichen wir die im Plasmazentrum für fest vorgegebenes  $\rho$  berechneten Konzentrationen  $f_\alpha$  mit der maximal möglichen Konzentration am Plasmarand ( $r = 1$  m). Um letztere zu berechnen, verwenden wir Gleichung (2.22), die wir für  $\rho = 0$  nach  $f_\alpha$  auflösen. Eine Lösung lautet  $f_\alpha = 0$  und die einzige weitere Lösung kleiner als  $0.5$  ist

$$f_\alpha(r_0) = \frac{1}{2} + \eta - \sqrt{\eta^2 + 2\eta} \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{C_B I_4(r_0)}{E_\alpha I_1(r_0)}. \quad (6.2)$$

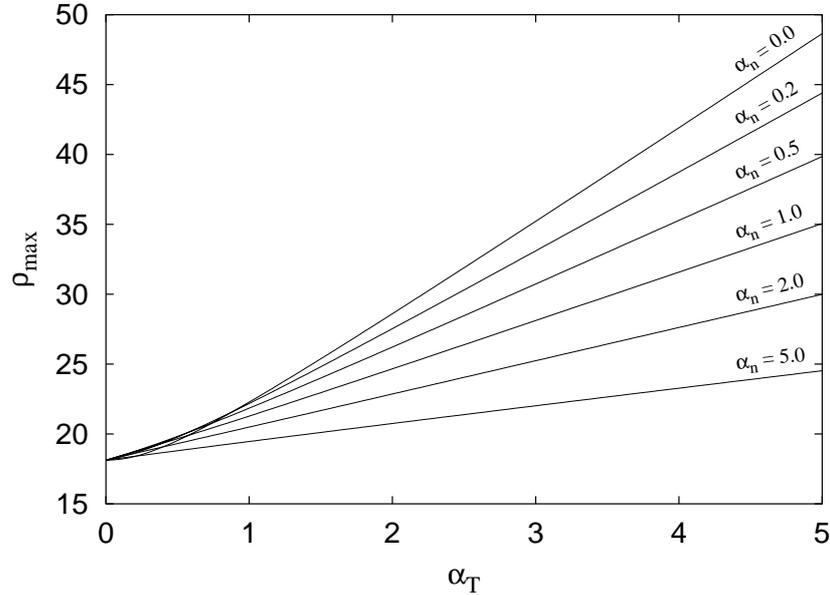
Mit dieser Gleichung können wir zu den  $T(r)$  und  $n(r)$  die maximale Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen, bei der noch ein Brenngleichgewicht existiert, in Abhängigkeit vom Radius  $r_0$  bestimmen. In Abbildung 6.15 sind die Konzentrationen  $f_\alpha$  für im Plasmazentrum vorgegebene  $\rho$  aufgetragen. Zusätzlich sind die sich aus (6.2) ergebenden maximal möglichen Konzentrationen  $f_\alpha$  für  $r_0 = 1$  m aufgetragen. Auf der Abszisse ist die Temperatur im Zentrum  $T(0)$  aufgetragen. Es ist deutlich zu erkennen, daß die gestrichelte Linie wesentlich mehr Kurven schneidet als es im



**Abbildung 6.16:** Maximal mögliche Profilkoeffizienten  $\alpha_n$  und  $\alpha_T$  zu den vorgegebenen Werten  $\rho = 3, 6, 9, 12$  und  $15$ , bei denen die Brennkurven geschlossen bleiben.

vorherigen Beispiel der Fall war. Erst ab  $\rho > 15$  bleiben die Brennkurven für die vorgegebenen Profile  $n(r)$  und  $T(r)$  geschlossen.

In Abbildung 6.16 sind die Koeffizientenpaare  $(\alpha_n, \alpha_T)$  aufgetragen, die bei fest vorgegebenen Werten  $\rho$  im Plasmazentrum noch geschlossene Brennkurven liefern. Paare, die oberhalb der jeweiligen Linie liegen, liefern für das zugehörige  $\rho$  im Plasmazentrum offene Brennkurven. Auch hier scheint ein linearer Zusammenhang zwischen den Koeffizienten für die Profile zu bestehen. *Abbildung 6.16 macht deutlich, daß die Brennkurven schon für sehr viel kleinere Koeffizienten  $\alpha_T$  aufbrechen als es im vorangegangenen Beispiel der Fall war.*

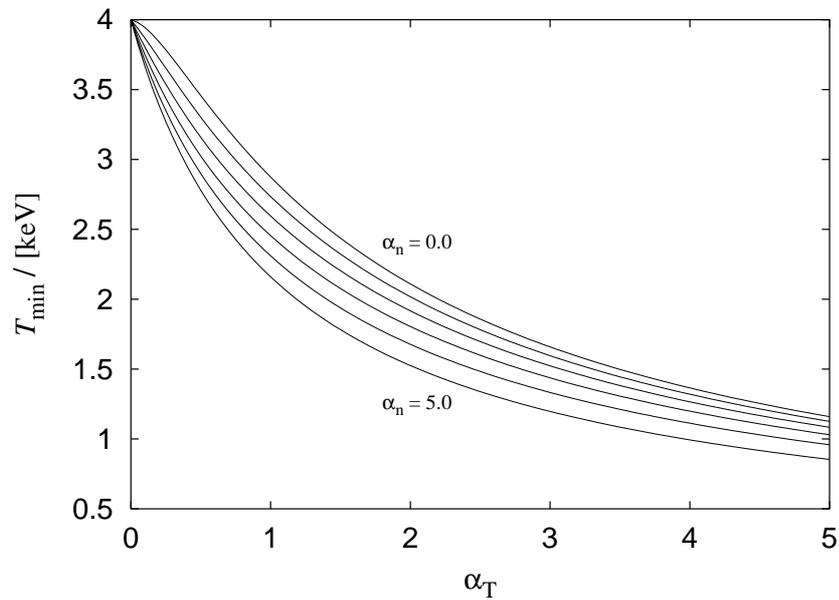


**Abbildung 6.17:** Maximal mögliches  $\rho$  am Plasmarand in Abhängigkeit des Profilkoeffizienten  $\alpha_T$  zu vorgegebenen  $\alpha_n$ .

### 6.3 Verschiebung von $\rho_{\max}$ und $T_{\min}$

Als nächstes werden wir zwei weitere Phänomene untersuchen, die bei der Berechnung von Brennkurven unter Berücksichtigung von Profilen auftreten. In Kapitel 3 haben wir die Brennkurven und Parametergrenzen für das Zentrum des Fusionsplasmas untersucht. Wir sind dabei zu dem Ergebnis gekommen, daß nur bis  $\rho(0) = 18.13$  Brennkurven existieren. Für die zu  $r > 0$  gehörigen Brennkurven gilt diese Einschränkung nicht. Für diese lassen sich andere Grenzen festlegen. Hierzu geht man ähnlich vor, wie es in Kapitel 3 für das Plasmazentrum gemacht wurde. In Abbildung 6.17 ist  $\rho_{\max}$  über  $\alpha_T$  für fest vorgegebene  $\alpha_n$  aufgetragen. Für  $\alpha_T = 0$  ist  $\rho_{\max}$  gleich dem Wert für das Plasmazentrum, da, wie in Abschnitt 4.1 gezeigt, für ein konstantes Temperaturprofil auch der Verlauf  $\rho(r)$  konstant ist. Aus Abbildung 6.17 wird deutlich, daß der Einfluß der Profile sich markant auf das maximale  $\rho$  auswirkt.

Als weitere Größe bestimmen wir die niedrigste Temperatur bei der noch ein Brenngleichgewicht existiert. In Abbildung 6.2 haben wir gesehen, daß die Randbrennkurve auch für mittlere Temperaturen unterhalb der niedrigsten Temperatur im Plasmazentrum Werte liefert. Wir geben deshalb den Zusammenhang zwischen der niedrigsten Temperatur in Abhängigkeit der Profilkoeffizienten an. Der Verlauf ist in Abbildung 6.18 für verschiedene feste Werte  $\alpha_n$  aufgetragen.



**Abbildung 6.18:** Niedrigste Temperatur einer Brennkurve für verschiedene  $\alpha_n$ . Aufgetragen sind die Kurven für vorgegebene Werte  $\alpha_n = 0.0, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0$  und  $5.0$  (von oben nach unten).

Es wird deutlich, daß durch geeignete Wahl der Profilkoeffizienten  $\alpha_n$  und  $\alpha_T$  die niedrigste Temperatur einer Brennkurve abgesenkt werden kann.

## 6.4 Katalog von Brennkurvendiagrammen

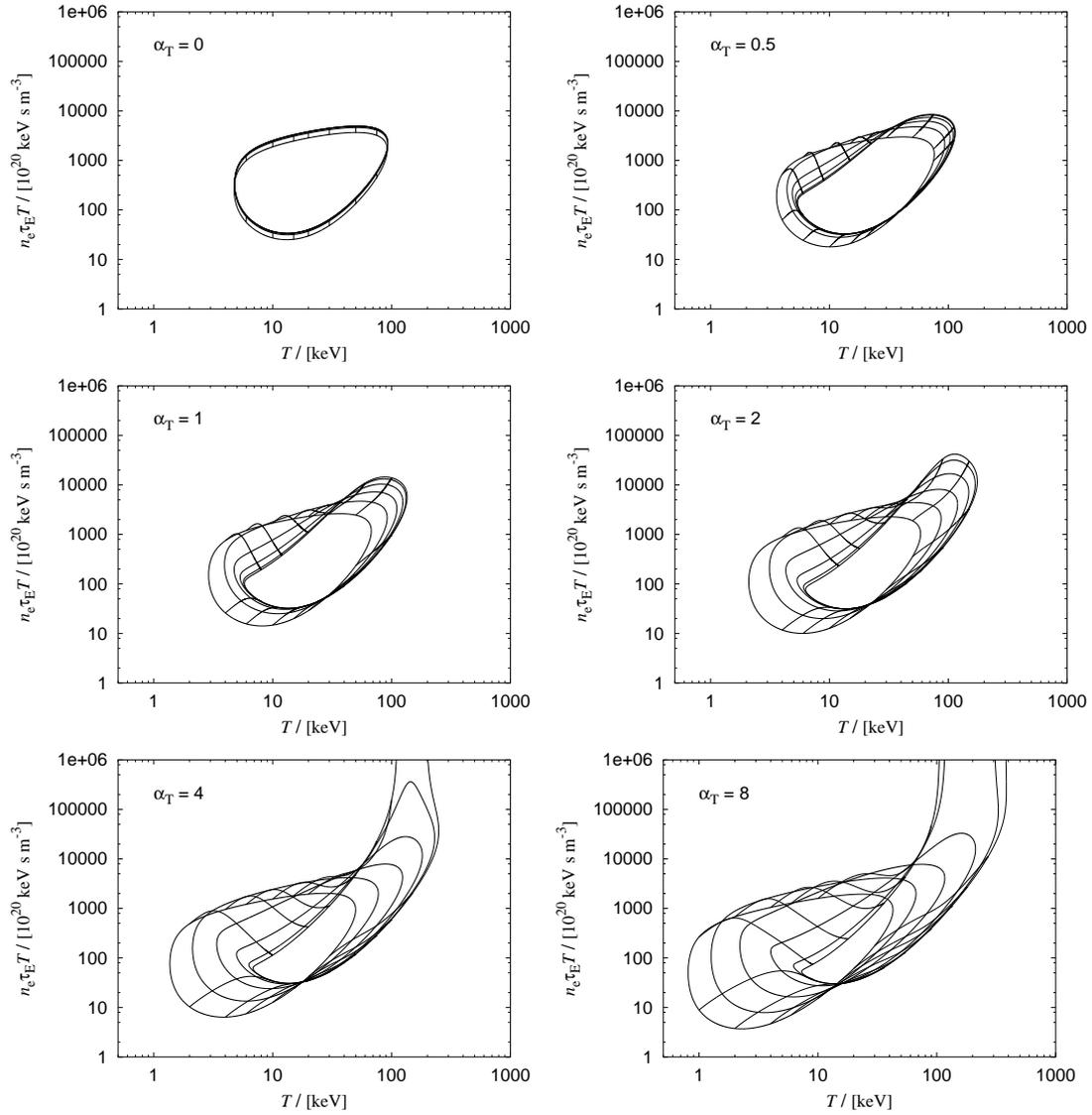
Am Ende dieses Kapitels stellen wir einen Katalog von Brennkurvendiagrammen zusammen, in denen die Auswirkungen der Temperatur- und Dichteprofile auf die Brennkurven noch einmal veranschaulicht werden.

In Abbildung 6.19 werden das Dichteprofil und der Wert von  $\rho$  am Plasmarand konstant gehalten, das Temperaturprofil wird variiert. Es ist zu erkennen, daß die Brennkurven auch bei Vorgabe von  $\rho$  am Plasmarand aufbrechen können. Man vergleiche hierzu Abbildung 6.9, in der der Bereich für geschlossene und offene Brennkurven in Abhängigkeit von den Profilkoeffizienten und  $\rho$  dargestellt ist. Darüber hinaus wird deutlich, daß die minimale Temperatur, bei der noch ein Brenngleichgewicht existiert, mit größer werdendem Koeffizienten  $\alpha_T$  kleiner wird (vgl. Abbildung 6.18).

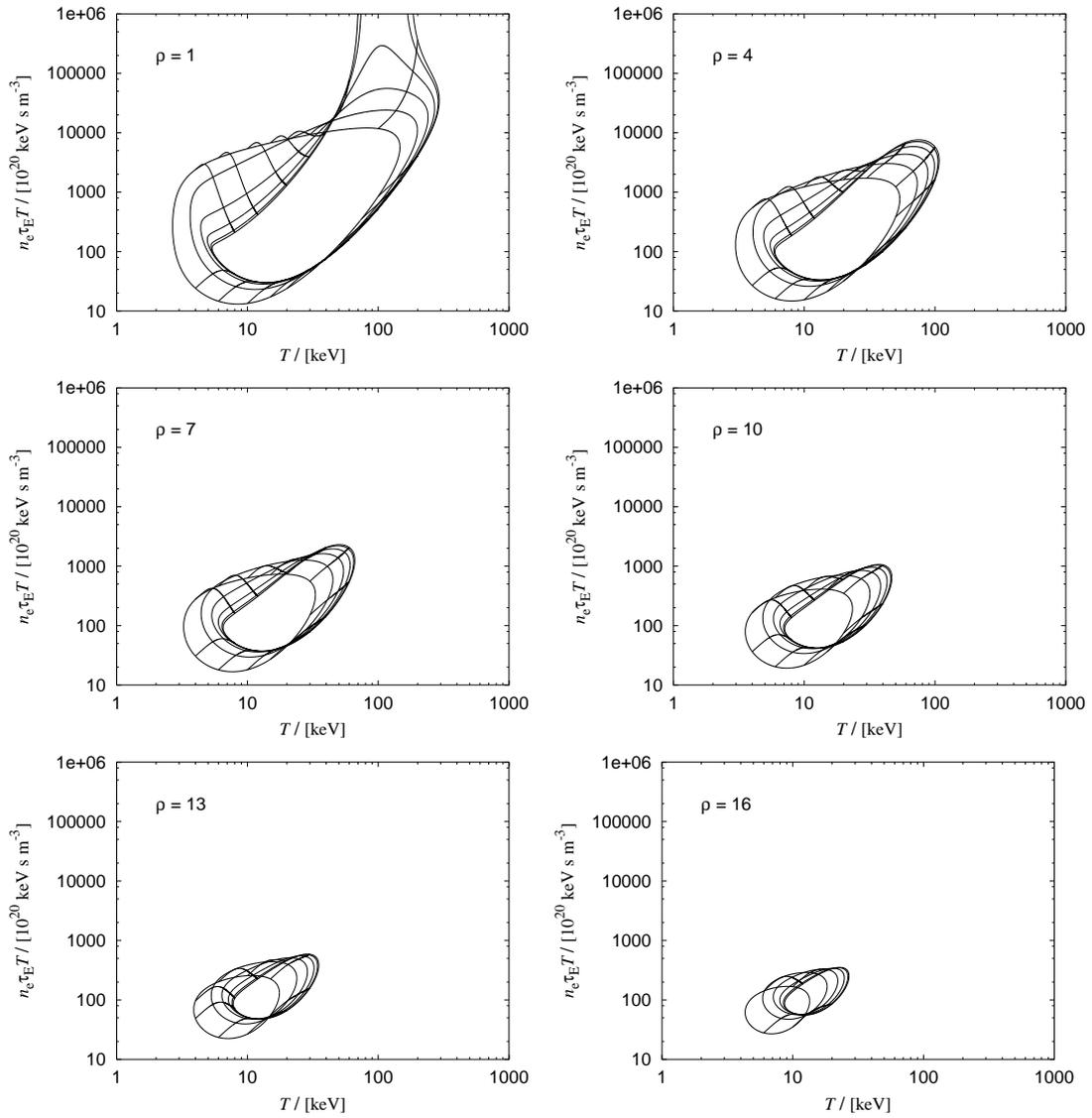
In Abbildung 6.20 werden die Profile  $n(r)$  und  $T(r)$  fest gehalten, variiert wird  $\rho$  am Plasmarand. Mit zunehmendem  $\rho$  werden die Brennkurven enger. Im ersten Bild ist  $\rho$  so klein gewählt, daß die Brennkurven nach innen aufbrechen. Man vergleiche hierzu die Abbildung 6.9.

In Abbildung 6.21 wird  $\rho$  am Plasmarand konstant gehalten, die Profilkoeffizienten werden gleichermaßen verändert. Mit größer werdenden Koeffizienten liegen die Brennkurven für das Zentrum und für den Rand immer weiter auseinander. Es wird erneut deutlich, daß durch geeignete Wahl von Profilen die untere Grenze der Temperatur, bei der noch ein Brenngleichgewicht existiert, kleiner gemacht werden kann (vgl. Abbildung 6.18).

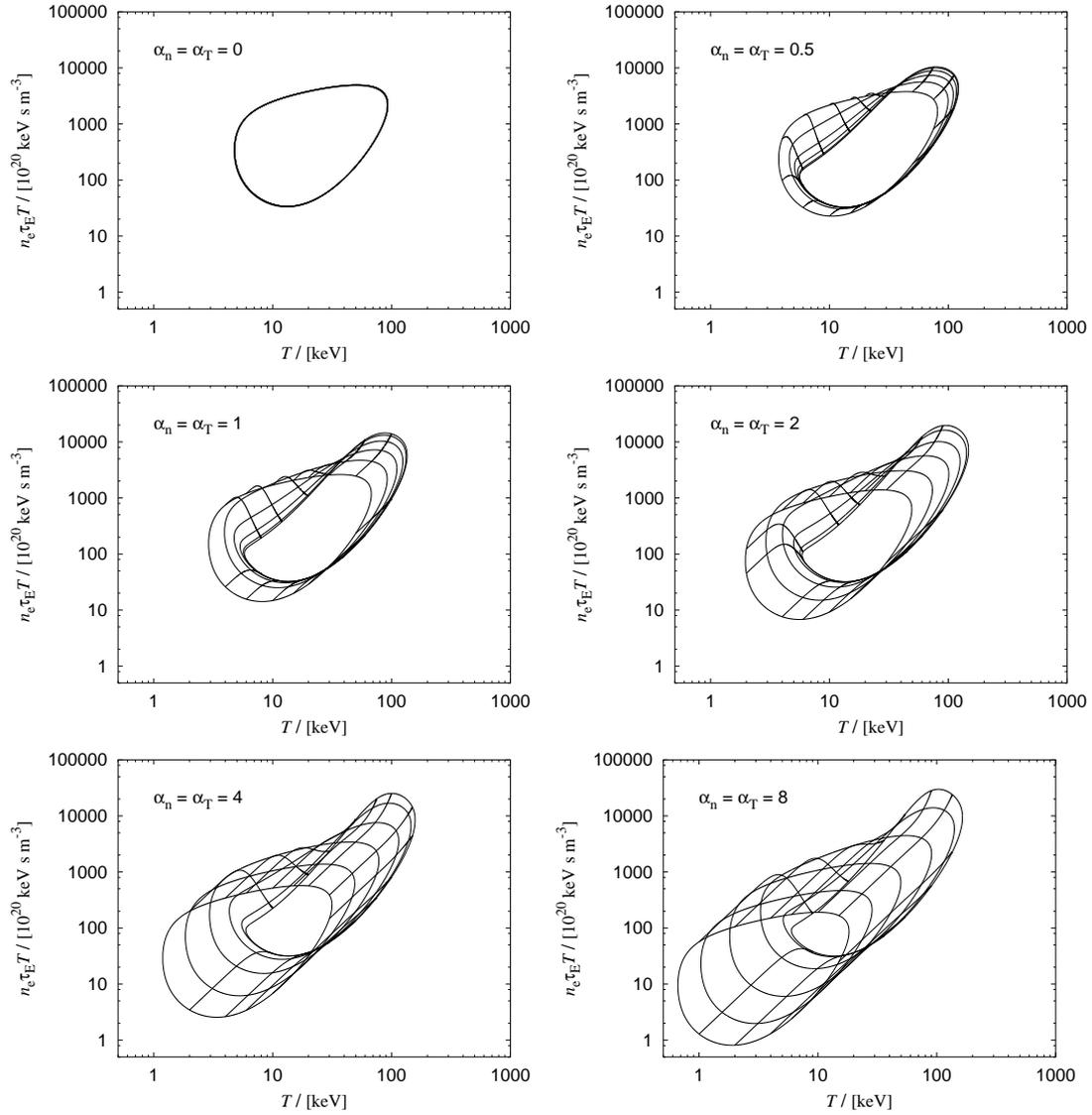
In Abbildung 6.22 werden die gleichen Profilkoeffizienten verwendet, wie in Abbildung 6.19, in 6.23 wie in 6.20 und in 6.24 wie in 6.21. Der Unterschied liegt allein in der Vorgabe von  $\rho$ , die in den Abbildungen 6.22-6.24 im Plasmazentrum erfolgt. Die Ergebnisse sind relativ ähnlich zu dem Beispiel, bei dem die Vorgabe von  $\rho$  am Plasmarand erfolgt. Der einzige Unterschied ist, daß die Brennkurven schon bei viel moderateren Vorgaben von  $\alpha_T$ ,  $\alpha_n$  und  $\rho$  aufbrechen (vgl. Abbildung 6.16).



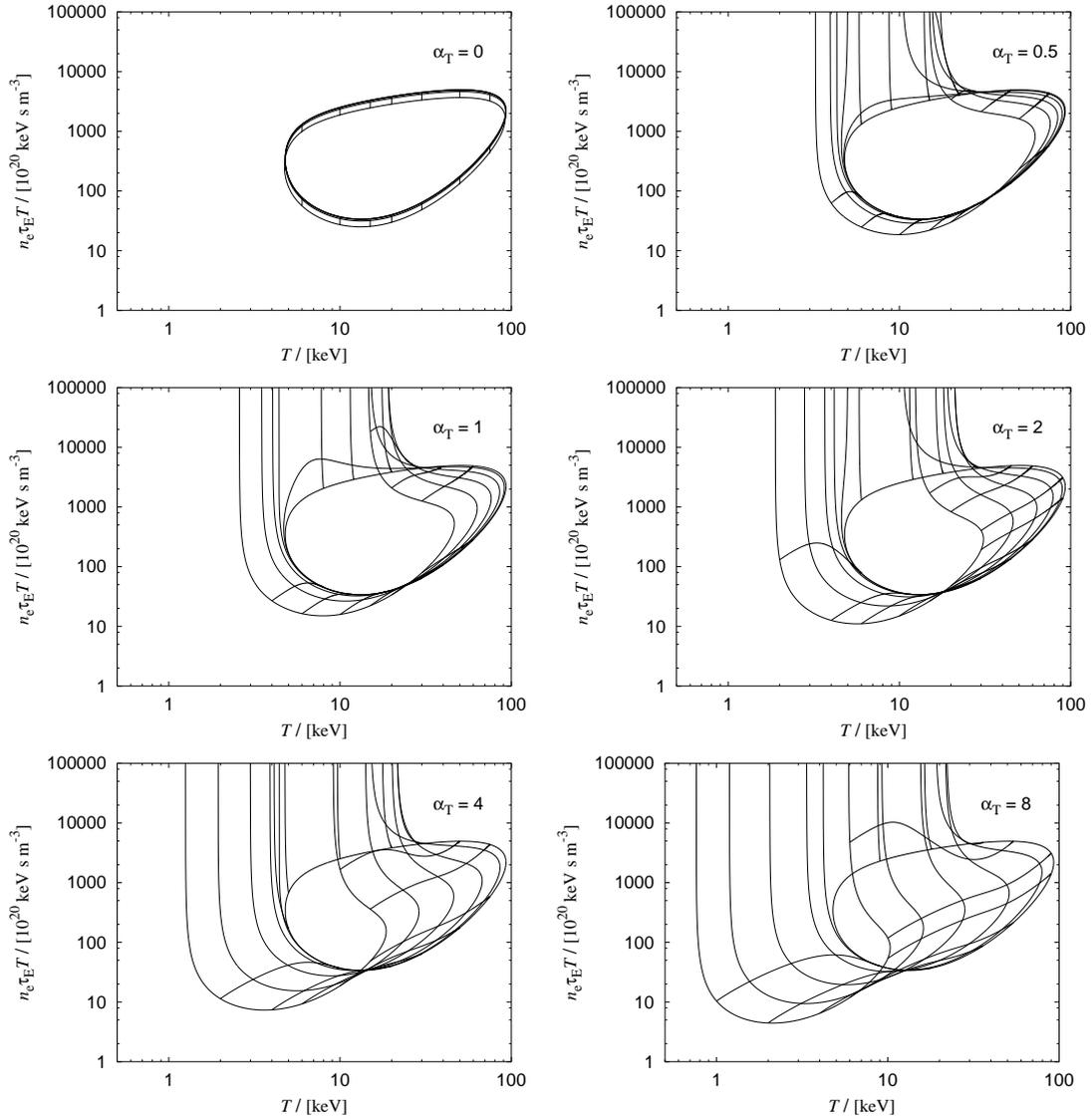
**Abbildung 6.19:** Das Dichteprofil ist durch  $\alpha_n = 1$  vorgeben, auf dem Plasmarand ist  $\rho = 3$  vorgegeben. Die 6 Abbildungen zeigen die Brennkurven für  $\alpha_T = 0, 0.5, 1, 2, 4$  und  $8$ .



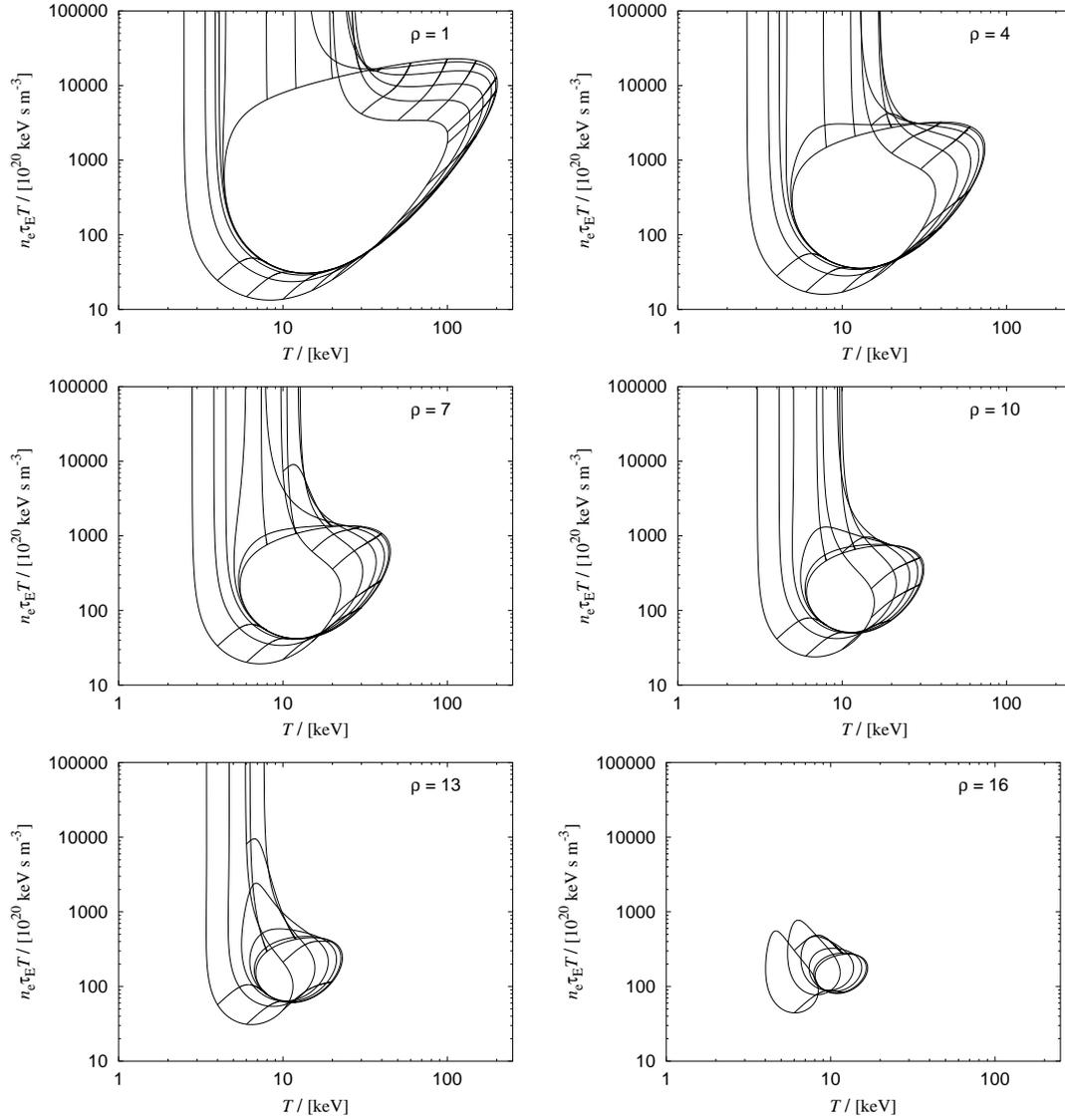
**Abbildung 6.20:** Die Profile  $n(r)$  und  $T(r)$  mit den Koeffizienten  $\alpha_n = \alpha_T = 1$  werden festgehalten. Am Plasmarand sind  $\rho = 1, 4, 7, 10, 13$  und  $16$  vorgegeben.



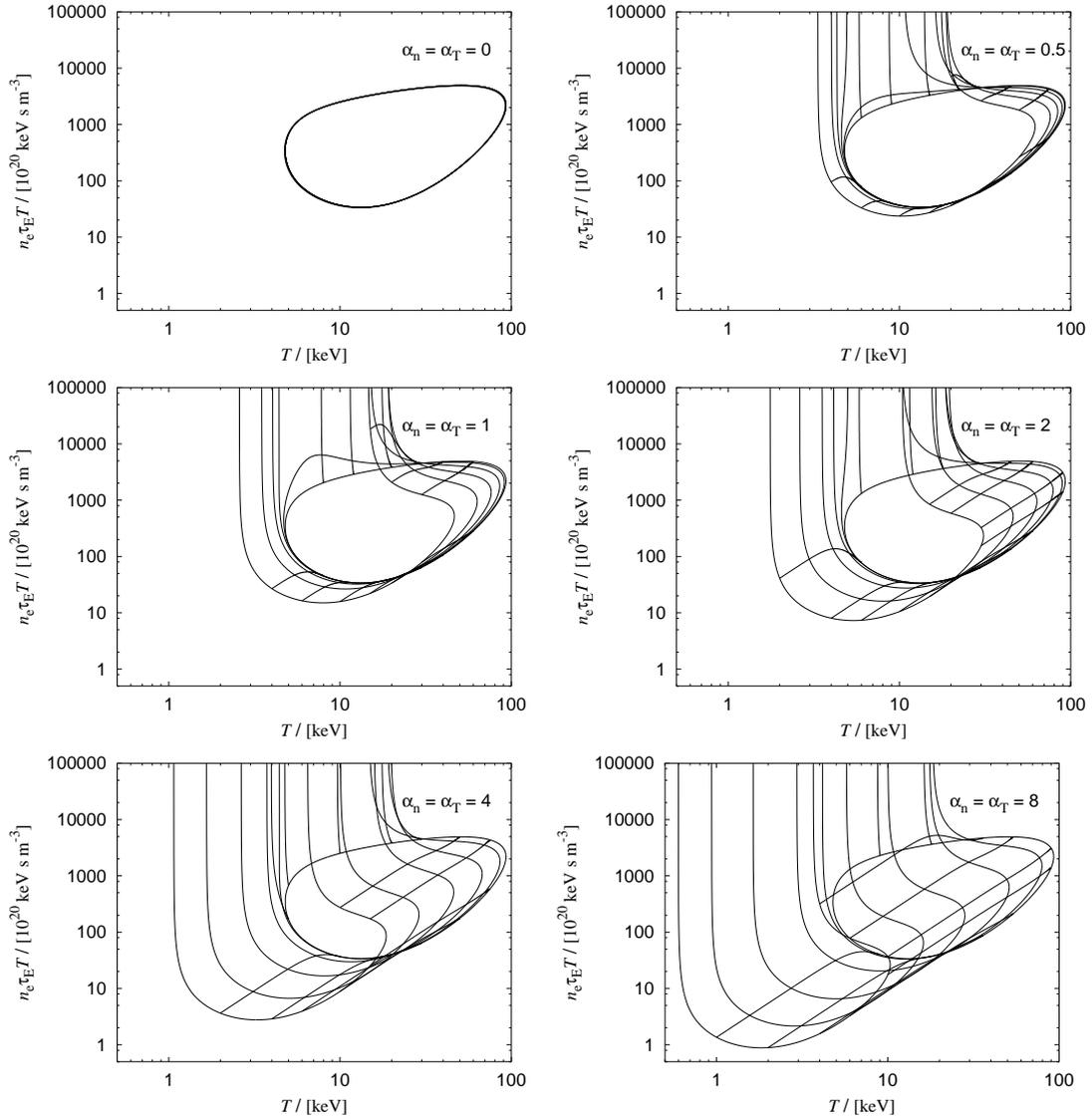
**Abbildung 6.21:** Am Plasmarand ist  $\rho = 3$  vorgegeben. Die Koeffizienten der Profile sind in den 6 Abbildungen durch  $\alpha_n = \alpha_T = 0, 0.5, 1, 2, 4$  und  $8$  gegeben.



**Abbildung 6.22:** Das Dichteprofil ist durch  $\alpha_n = 1$  vorgegeben, im Plasmazentrum ist  $\rho = 3$  vorgegeben. Die 6 Abbildungen zeigen die Brennkurven für  $\alpha_T = 0, 0.5, 1, 2, 4$  und  $8$ .



**Abbildung 6.23:** Die Profile  $n(r)$  und  $T(r)$  mit den Koeffizienten  $\alpha_n = \alpha_T = 1$  werden festgehalten. Im Plasmazentrum sind  $\rho = 1, 4, 7, 10, 13$  und  $16$  vorgegeben.



**Abbildung 6.24:** Im Plasmazentrum ist  $\rho = 3$  vorgegeben. Die Koeffizienten der Profile sind in den 6 Abbildungen durch  $\alpha_n = \alpha_T = 0, 0.5, 1, 2, 4$  und  $8$  gegeben.

# Kapitel 7

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit haben wir durch die Einführung von lokalen Einschlußzeiten die Möglichkeit zu einer genaueren Untersuchung eines gezündeten Fusionsplasmas erhalten, als es bisher mit Hilfe globaler Einschlußzeiten möglich war. Die Grundlage zur Definition dieser lokalen Größen bildet das Vorhandensein eines Dichte- und eines Temperaturprofils. In Kapitel 2 haben wir mit Hilfe von Bilanzgleichungen und eines eindimensionalen Plasmamodells die lokalen Einschlußzeiten für ein Fusionsplasma im Gleichgewichtszustand definiert. Zusätzlich haben wir für dieses Modell die Berechnung von Brennkurven vorgestellt, die ebenfalls um eine räumliche Komponente ergänzt wurde, sowie die Berechnung von Brennprofilen

In Kapitel 3 haben wir uns auf die Untersuchung des Plasmazentrums bei  $r = 0$  beschränkt. Aus der Berechnungsvorschrift für die Brennkurven haben wir Zusammenhänge zwischen den Größen  $\rho$ ,  $T$  und  $f_\alpha$  ableiten können. Damit waren wir auch in der Lage, Grenzen für diese zu bestimmen, die zum Teil sogar auch analytisch angegeben werden können. So liegt der maximale Wert von  $\rho$ , bei dem noch ein Brenngleichgewicht im Zentrum existiert, bei etwa 18. Die Temperatur muß mindestens 4 keV betragen, und die Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen darf nicht größer als 40% sein. Die Berechnung von Brennkurven für das Plasmazentrum ist äquivalent zu einer Berechnung von Brennkurven für das ganze Plasma ohne Berücksichtigung von Profilen.

In Kapitel 4 haben wir die Eigenschaften der neu definierten Größen  $\tau_p(r)$ ,  $\tau_E(r)$  und  $\rho(r)$  untersucht. Dabei haben wir uns weitestgehend auf den für die technische Realisierung interessanten Bereich von 10-20 keV beschränkt. Es konnte gezeigt werden, daß die Profile der Einschlußzeiten und von  $\rho(r)$  für abfallende Dichte- und Temperaturprofile vom Zentrum aus ansteigen. Darüber

hinaus haben wir durch die Einschränkung des Temperaturbereichs und der Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen interessante Zusammenhänge zwischen der Dichte, der Temperatur, der  $\alpha$ -Teilchen-Konzentration und den Einschlußzeiten erhalten. Durch Koeffizientenvergleich der Taylor-Entwicklungen für die Einschlußzeiten, und die Einschränkungen der Profile  $n(r)$  und  $T(r)$  haben wir die Größenordnungen von  $\tau_p$  und  $\tau_E$  abschätzen können. Mit diesen Ergebnissen konnten wir uns Einschlußzeitprofile vorgeben und aus diesen näherungsweise das Dichte- und das Temperaturprofil berechnen. Da diese Näherungslösung nur bedingt brauchbar war, haben wir uns in Kapitel 5 einen exakten Lösungsweg für die Berechnung von  $n(r)$  und  $T(r)$  aus vorgegebenen Einschlußzeitprofilen erarbeitet.

Wir sind dabei auf ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen gestoßen, welches im Normalfall für beliebige Profile  $\tau_p(r)$ ,  $\tau_E(r)$  und  $f_\alpha$  keine Lösung besitzt. Ähnlich wie bei der Berechnung von Brenngleichgewichten zu vorgegebenen Profilen  $n(r)$  und  $T(r)$  muß auch zu vorgegebenen Einschlußzeitprofilen die Konzentration der  $\alpha$ -Teilchen bestimmt werden. In den anschließenden Berechnungen hat sich gezeigt, daß die Verläufe  $n(r)$  und  $T(r)$  sehr sensitiv auf Veränderungen der Einschlußzeitprofile reagieren. Darüber hinaus konnte festgestellt werden, daß die beiden Einschlußzeitprofile einen ähnlichen Verlauf aufweisen müssen, damit die Verläufe von  $n(r)$  und  $T(r)$  abfallende Profile ergeben. Wir haben uns in diesem Kapitel nur auf einen sehr kleinen Bereich von  $\tau$ -Profilen und Konzentrationen der  $\alpha$ -Teilchen konzentriert.

In Kapitel 6 haben wir die Brennkurvendiagramme zu verschiedenen Dichte- und Temperaturprofilen untersucht und für unterschiedliche Brennbereiche miteinander verglichen. Wir haben dabei zum Teil sehr unterschiedliche Verhaltensweisen der Brenngleichgewichte feststellen können, die sich in den Verläufen der Einschlußzeiten und insbesondere im Verhalten von  $\rho(r)$  widerspiegeln haben. Die größten Auffälligkeiten traten bei niedrigen Temperaturen und hohen Konzentrationen der  $\alpha$ -Teilchen auf.

Bei der Untersuchung innerer Brennkurven trat das Phänomen auf, daß diese in bestimmten Brennbereichen aufbrechen können. Es erfordert daher eine zusätzliche Untersuchung der lokalen Einschlußzeiten, um entscheiden zu können, ob das zu vorgegebenem  $\rho$  am Plasmarand berechnete Brenngleichgewicht für die lokalen Größen bis ins Plasmazentrum physikalisch sinnvolle Werte liefert. Die Profile  $n(r)$  und  $T(r)$  können nämlich so ungünstig verlaufen, daß das Brenngleichgewicht nur bei Mittelung über hinreichend große Bereiche des Plasmas existiert. Dieses Phänomen trat vornehmlich bei kleinen Werten von  $\rho$  und sehr unterschiedlichen Profilverläufen der Dichte und der Temperatur auf.

Als entscheidend erwies sich dabei, ob der zur Berechnung der Brennkurven benötigte Wert  $\rho$  am Rand des Plasmas oder im Plasmazentrum vorgegeben wird. Bei der Vorgabe im Zentrum trat das Aufbrechen wesentlich häufiger auf als bei Vorgabe am Plasmarand.

Als letztes haben wir untersucht, wie sich die Berücksichtigung der Profile auf das maximal mögliche  $\rho$  und die minimale Temperatur, bei der noch ein Brenngleichgewicht existiert, auswirkt. Für beide Größen galten nicht mehr die in Kapitel 3 für das Plasmazentrum gemachten Einschränkungen, sondern der Wertebereich wurde insbesondere für  $\rho$  erheblich erweitert.

In Anlehnung an die empirischen Skalierungsgesetze für die globalen Einschlußzeiten wäre es sicherlich interessant, solche auch für die lokalen Einschlußzeiten zu erhalten. Im Rahmen dieser Arbeit wurde versucht, die bestehenden Skalierungsgesetze für die globalen Einschlußzeiten auch auf die lokalen Einschlußzeiten anzuwenden. Diese Untersuchungen haben aber keine sinnvollen Ergebnisse geliefert. Es wäre daher notwendig, aufgrund von Meßdaten neuartige Skalierungsgesetze für die Einschlußzeiten aufzustellen, in welche die Profilform der Dichte und der Temperatur eingehen und die auch Aussagen über den Verlauf der Einschlußzeiten machen. Die in dieser Arbeit hergeleiteten Zusammenhänge zwischen den Profilen  $n(r)$ ,  $T(r)$  einerseits und  $\tau_p(r)$ ,  $\tau_E(r)$  andererseits sollten bei der Aufstellung derartiger Skalierungsgesetze hilfreich sein.



# Anhang A

## Die Formeln von Cardano

Zur Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms dritten Grades gibt es nach Cardano exakte Formeln. Deren Form soll hier kurz skizziert werden, da anhand dieser Formeln exakte Ergebnisse erzielt werden können. Dabei gehen wir im wesentlichen so vor, wie es in [26] beschrieben ist. Gegeben sei die kubische Gleichung

$$X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = 0. \quad (\text{A.1})$$

Mit Hilfe der Tschirnhausen-Transformation  $X \mapsto X - \frac{a_2}{3}$  läßt sich diese Gleichung in

$$X^3 + pX + q = 0 \quad (\text{A.2})$$

umformen mit

$$p = a_1 - \frac{1}{3} a_2^2 \quad \text{und} \quad q = \frac{2}{27} a_2^3 - \frac{1}{3} a_1 a_2 + a_0.$$

Man definiert die *Diskriminante*  $D$  durch

$$D := -(4p^3 + 27q^2),$$

und setzt

$$A := \sqrt[3]{-\frac{27}{2}q + \frac{3}{2}\sqrt{-3D}}$$
$$B := \sqrt[3]{-\frac{27}{2}q - \frac{3}{2}\sqrt{-3D}},$$

wobei die 3. Wurzeln so gewählt werden, daß  $AB = -3p$  gilt. Definiert man noch die 3-ten Einheitswurzeln  $\lambda = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ , so lauten die drei Lösungen von (A.2)

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{3}(A + B) \\x_2 &= \frac{1}{3}(\bar{\lambda}A + \lambda B) \\x_3 &= \frac{1}{3}(\lambda A + \bar{\lambda}B).\end{aligned}$$

Macht man die Tschirnhausen-Transformation durch  $X_i \mapsto X_i + \frac{a_2}{3}$  wieder rückgängig, so erhält man die gesuchten Lösungen der Gleichung (A.1).

Da wir nur mit reellen Polynomen arbeiten, können wir anhand der Diskriminante erkennen, wie viele reelle Nullstellen das Polynom hat [27]. Hierfür ergibt sich:

- $D < 0$  eine reelle Lösung (eine reelle und zwei komplexe Wurzeln),
- $D > 0$  drei reelle Lösungen (drei verschiedene reelle Wurzeln),
- $D = 0$  eine reelle Lösung (eine dreifache reelle Wurzel), falls  $p = q = 0$  gilt, oder zwei reelle Lösungen (eine einfache und eine zweifache reelle Wurzel), falls  $p^3 = q^2 \neq 0$  ist.

# Anhang B

## Die Regel von l'Hôpital

Bei der Berechnung der Steigung in den Durchstoßpunkten aus Kapitel 5 verwenden wir die Regel von l'Hôpital [28]. Diese sagt aus, daß für zwei in einer Umgebung von  $x_0$  differenzierbare Funktionen  $f$  und  $g$ , deren Ausdruck  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  entweder  $\left[\frac{0}{0}\right]$  oder  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$  ergibt,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

gilt. Diese Regel soll nun auf die in Kapitel 5 auftretenden Probleme angewendet werden. Bei den Untersuchungen in Abschnitt 5.1, in dem die Teilcheneinschlußzeit separat behandelt wird, erhalten wir in den einzelnen Fällen eine Differentialgleichung der Form

$$y' = \frac{f(y, x)}{g(y, x)},$$

in der  $y$  stellvertretend für das gesuchte Dichte- bzw. Temperaturprofil stehen soll, das eine Funktion von  $x$  ist. Die Auswertung dieses Ausdrucks soll nun an einer Stelle vorgenommen werden, an der Nenner und Zähler null sind. Nach der oben angegebenen Regel von l'Hôpital erhalten wir

$$y' = \frac{f_y y' + f_x}{g_y y' + g_x},$$

wobei die Indizes für die partielle Ableitung stehen. Hieraus läßt sich eine Bestimmungsgleichung für das gesuchte  $y'$  ableiten. Diese lautet

$$g_y y'^2 + (g_x - f_y) y' - f_x = 0, \tag{B.1}$$

und ist ein Polynom zweiten Grades in der gesuchten Größe  $y'$ , das sich ohne Probleme exakt lösen läßt. Es existieren entweder zwei oder keine reellen Lösungen für die Steigung im Durchstoßpunkt.

In Abschnitt 5.3 ist die Regel auf ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen anzuwenden. Dieses sei durch

$$y' = \frac{f(y, z, x)}{g(y, z, x)} \quad \text{und} \quad z' = \frac{h(y, z, x)}{g(y, z, x)}$$

gegeben, wobei  $y$  und  $z$  für die gesuchten Profile stehen, die von der Variablen  $x$  abhängen. Wir untersuchen die Stelle, an der beide Zähler und der Nenner null werden, so daß wir wiederum die Regel von l'Hôpital anwenden können und

$$y' = \frac{f_y y' + f_z z' + f_x}{g_y y' + g_z z' + g_x} \quad \text{und} \quad z' = \frac{h_y y' + h_z z' + h_x}{g_y y' + g_z z' + g_x}$$

erhalten. Wir lösen zuerst die linke Seite nach  $z'$  auf, wodurch sich

$$z' = \frac{-g_y y'^2 + (f_y - g_x) y' + f_x}{g_z y' - f_z} \quad (\text{B.2})$$

ergibt und setzen dies in die rechte Gleichung ein. Als Ergebnis erhalten wir das folgende Polynom

$$\begin{aligned} & f_x (f, g)_{x,z} + f_z (f, h)_{x,z} \\ & + (f_x (f, g)_{y,z} + f_y (f, g)_{x,z} + f_z (f, h)_{y,z} \\ & - f_z (g, h)_{x,z} - g_x (f, g)_{x,z} - g_z (f, h)_{x,z}) y' \\ & + (f_y (f, g)_{y,z} - f_z (g, h)_{y,z} - g_x (f, g)_{y,z} \\ & - g_y (f, g)_{x,z} + g_z (g, h)_{x,z} - g_z (f, h)_{y,z}) y'^2 \\ & + (-g_y (f, g)_{y,z} + g_z (g, h)_{y,z}) y'^3 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

dritten Grades, dessen Nullstellen sich mit Hilfe der Formeln von Cardano bestimmen lassen, die in Anhang A beschrieben sind. In der Formel (B.3) wurde die Abkürzung  $(f, g)_{x,y} := f_x g_y - f_y g_x$  verwendet. Es existieren demnach maximal drei reelle Werte für die Steigung in jedem Durchstoßpunkt.

# Literaturverzeichnis

- [1] M. Keilhacker and the JET Team, *Fusion physics progress on the Joint Europe Torus (JET)*, Plasma Phys. Control. Fusion **41**, B1-B23 (1999)
- [2] J. Jacquinot and the JET Team, *Deuterium-tritium operation in magnetic confinement experiments: results and underlying physics*, Plasma Phys. Control. Fusion **41**, A13-A46 (1999)
- [3] T. S. Taylor, *Physics of advanced tokamaks*, Plasma Phys. Control. Fusion **39**, B47-B73 (1997)
- [4] M. N. Rosenbluth, *Physics fundamentals for ITER*, Plasma Phys. Control. Fusion **41**, A99-A113 (1999)
- [5] C. Alejaldre, J. Alonso, L. Almuquera *Confinement studies in the TJ-II stellarator*, Plasma Phys. Control. Fusion, **41** (1999)
- [6] ITER Confinement Database and Modelling Working Group (presented by J. G. Cordey), *Energy confinement scaling and the extrapolation to ITER*, Plasma Phys. Control. Fusion **39**, B115-B127 (1999)
- [7] W. Horton, F. Porcelli, P. Zhu, A. Aydemir, Y. Kishimoto, T. Tajima *Ignitor physics assessment and confinement projections*, Nucl. Fusion **42**, 169-179 (2000)
- [8] Z. A. Pietrzyk, *Improved central confinement by current profile modification in shaped plasmas using ECRH and ECCD in TCV*, 27th EPS Conference on Contr. Fusion and Plasma Phys. Budapest, 12-16 June 2000, ECA Vol. **24B**, 1609-1612 (2000)
- [9] A. Bruschi, C. Sozzi, A. Airoidi *Thermal transport and global energy confinement during ECRH at 140 GHz, on steady-state discharges of FTU tokamak*, 26th EPS Conference on Contr. Fusion and Plasma Phys. Maastricht, 14-18 June 1999, ECA Vol. **23J**, 1177-1180 (1999)

- [10] T. Obiki, T. Mizuuchi, H. Okada, *Profile Control and its Effects on Plasma Confinement in Heliotron E*, Collaboration Program of the Laboratory for Complex Energy Processes, Institut of Advanced Energy, Kyoto University
- [11] U. Schumacher, *Fusionsforschung*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1993
- [12] R. J. Goldston und p. H. Rutherford, *Plasmaphysik*, Vieweg, 1998
- [13] K.-H. Spatschek, *Theoretische Plasmaphysik*, Teubner, Stuttgart, 1990
- [14] D. R. Nicholson, *Introduction to plasma theory*, Wiley, New York, 1983
- [15] H.-S. Bosch, *Review of Data and Formulas for Fusion Cross-sections*, IPP Report IPP I/252, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching bei München, September 1990
- [16] H.-S. Bosch and G. M. Hale, *Improved formulas for fusion cross-sections and thermal reactivities*, Nuclear Fusion **32**(4), 611-631 (1992), Erratum Nuclear Fusion **33**(12), 1919 (1993)
- [17] J. Wesson, *Tokamaks*, Oxford Engineering Science 20, Clarendon Press, Oxford, 1987
- [18] D. J. Rose and J. Melville Clark, *Plasmas and Controlled Fusion*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1961
- [19] D. Reiter, G. H. Wolf, H. Kever, *Burn condition, Helium particle confinement and exhaust efficiency*, Nucl. Fusion, **30**, 2141-2155 (1990)
- [20] D. Reiter, G. H. Wolf, H. Kever, *Stationary burning: Analysis of profile effects on the required exhaust efficiency and the permitted Helium particle confinement time*, J. Nucl. Mater., **176-177**, 756-763 (1990)
- [21] E. Rebhan, U. Vieth, D. Reiter, G. H. Wolf, *Effect of Helium concentration on ignition curves with energy confinement time including radiation losses*, Nucl. Fusion, **36**, 264-269 (1996)
- [22] E. Rebhan, U. Vieth, *Burn stability and safe operating regime of a tokamak reactor with ITER scaling*, Nucl. Fusion, **37**, 251-270 (1997)
- [23] Drábek und Kufner, *Integralgleichungen*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1996

- [24] J. Stoer, R. Bulirsch, *Numerische Mathematik 2*, Springer Lehrbuch, 1990
- [25] O. Forster, *Analysis 2*, Vieweg Studium, Braunschweig/Wiesbaden, 1984
- [26] E. Kunz, *Algebra*. Vieweg, 1991
- [27] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main 2000
- [28] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis*, Teubner, Stuttgart, 1980



## Danksagungen

Herr **Prof. Dr. E. Rebhan** gab die Anregung für diese Arbeit. Dafür und für die Betreuung bei der Durchführung der Arbeit möchte ich mich herzlich bei ihm bedanken.

Bei Herrn **Prof. Dr. D. Reiter** bedanke ich mich für seine Bereitschaft, sich als Gutachter zur Verfügung zu stellen.

Herr **Prof. Dr. H. Löwen** danke ich für die Möglichkeit, diese Arbeit am Institut für Theoretische Physik II anfertigen zu können.

Mein Dank gilt weiter allen Mitarbeitern des Instituts, die zu der ausgesprochen angenehmen und kollegialen Atmosphäre beigetragen haben.

Schließlich bedanke ich mich herzlich bei meinen Eltern und meiner Freundin Caroline, auf deren Unterstützung und Verständnis ich mich jederzeit verlassen konnte.

