

Blätterungen von Nilmannigfaltigkeiten

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von
Christoph Peters
aus Düsseldorf

Düsseldorf
2003

Gedruckt mit der Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen
Fakultät Düsseldorf.

Referent: Univ.-Prof. Dr. Wilhelm Singhof

Korreferent: Univ.-Prof. Dr. Klaus Steffen

Tag der mündlichen Prüfung: 6. Februar 2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	iii
1 Lie-Gruppen und Lie-Algebren	1
1.1 Nilpotente Lie-Algebren	1
1.2 Die Campbell-Baker-Hausdorff-Formel	2
1.3 Gitter in Lie-Gruppen	4
1.4 Die Kohomologie einer Lie-Algebra	8
2 Blätterungen	11
2.1 Riemannsche Blätterungen	11
2.2 Transversal parallelisierbare Blätterungen	17
2.3 Blätterungen homogener Mannigfaltigkeiten	20
2.4 Kohomologie und harmonische Formen	27
3 Die Darstellungstheorie nilpotenter Lie-Algebren	37
3.1 Die Kirillov-Zerlegung	38
3.2 Unitäre Darstellungen	39
3.3 Induktion	43
3.4 Kirillov-Theorie	46

Inhaltsverzeichnis

3.5	Die reguläre Darstellung	48
3.6	Die glatten Vektoren induzierter Darstellungen	53
4	Blätterungen von Nilmannigfaltigkeiten	61
4.1	Vorbemerkungen	61
4.2	Die reduzierte Blätterungskohomologie	62
4.3	Die oberste Kohomologiegruppe	66
4.4	Die harmonischen p -Formen	69
4.5	Rationale Blätterungen	74
4.6	Eindimensionale Blätterungen	87
4.7	Ergebnisse	92
	Anhang	97
A	Halbeinfache Lie-Gruppen	97
	Literaturverzeichnis	105

Einleitung

Eine p -dimensionale *Blätterung* $\mathcal{F}$ einer n -dimensionalen, differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist im wesentlichen eine Zerlegung von M in eine Familie zusammenhängender Teilmengen, die lokal wie parallele, affine p -dimensionale Unterräume des $\mathbb{R}^n$ aussehen.

Wir werden in dieser Arbeit Blätterungen von homogenen Mannigfaltigkeiten untersuchen, die wie folgt gegeben sind: Sei G eine Lie-Gruppe. Durch eine Untergruppe P von G erhalten wir eine Blätterung von G , deren Blätter von der Form gP mit $g \in G$ sind. Teilen wir zusätzlich auch noch ein Gitter Γ aus G heraus, so erhalten wir eine Blätterung der kompakten Mannigfaltigkeit $\Gamma \backslash G$ mit den Blättern ΓgP .

Ein einfaches Beispiel für diese Art von Blätterungen bilden die linearen Flüsse auf dem Torus. In dieser Situation ist $G = \mathbb{R}^2$, das Gitter ist $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ und P eine Untergruppe von G der Form $(\alpha, \beta)\mathbb{R}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wir erhalten als Blätterung einen linearen Fluß auf dem Torus $\mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{R}^2$ mit Steigung $\frac{\beta}{\alpha}$.

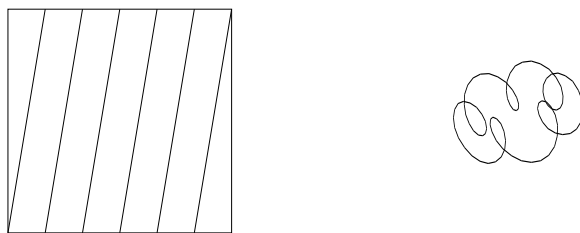


ABBILDUNG 1: Ein Blatt des linearen Flusses auf dem Torus, Steigung 6.

Einleitung

Wählen wir auf dem Torus die von der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$ induzierte Metrik, so bleibt der Abstand benachbarter Blätter der oben beschriebenen Blätterungen offensichtlich konstant, wenn man sich in Blattrichtung fortbewegt. Metriken mit dieser Eigenschaft werden von Reinhart in [Rei59] für beliebige Blätterungen beschrieben und untersucht; er nennt solch eine Metrik *bündelartig*. Blätterungen, auf denen eine bündelartige Metrik existiert, heißen *Riemannsche Blätterungen*. Eine Riemannsche Blätterung ist also eine Blätterung, auf der eine Metrik existiert, so daß der Abstand zweier benachbarter Blätter bzgl. dieser Metrik lokal konstant bleibt.

Auf den von uns untersuchten homogenen Mannigfaltigkeiten $\Gamma \backslash G$ erhalten wir in natürlicher Weise eine Metrik, indem wir uns in $T_\Gamma \Gamma \backslash G$ eine Orthonormalbasis vorgeben und diese mit der Multiplikation in G in eine Orthonormalbasis von $T_{\Gamma g} \Gamma \backslash G$ für alle $g \in G$ überführen. Wir werden solch eine Metrik *kanonische Metrik* nennen. Es stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen eine kanonische Metrik bündelartig auf der von P induzierten Blätterung von $\Gamma \backslash G$ ist.

Nachdem wir im ersten Kapitel Grundlegendes über Lie-Gruppen zusammengetragen haben, werden wir im zweiten Kapitel die Problemstellung und die auftretenden Begriffe präziser beschreiben und eine Antwort auf obige Frage finden. Wir werden sehen, daß die untersuchten Blätterungen eine kanonische, bündelartige Metrik besitzen, wenn die Untergruppe P normal in G ist. Setzen wir zusätzlich voraus, daß G nilpotent ist, so erhalten wir, daß im Fall, daß P nicht normal in G ist, keine kanonische, bündelartige Metrik auf $\Gamma \backslash G$ existiert.

Ergänzend dazu werden wir im Anhang sehen, daß es im Fall, daß G halbeinfach ist, Untergruppen P von G gibt, so daß die von P induzierte Blätterung Riemannsch ist, jedoch P nicht normal in G ist. Wir können direkt eine kanonische Metrik konstruieren und sehen, daß diese bündelartig ist.

Mit diesen Ergebnissen haben wir aber noch nicht die Frage beantwortet, wann die betrachteten Blätterungen Riemannsch sind. Falls auf der von P in $\Gamma \backslash G$ induzierten Blätterung keine kanonische, bündelartige Metrik existiert, kann es dann überhaupt eine bündelartige Metrik auf $\Gamma \backslash G$ geben? Eine Teil-Antwort

auf diese Frage wird die Betrachtung der reduzierten Blätterungskohomologie liefern, die wir am Ende des zweiten Kapitels definieren.

Die *Blätterungskohomologie* einer geblättertten Mannigfaltigkeit ist gegeben durch den Quotienten-Kokomplex aller Differentialformen auf der Mannigfaltigkeit nach den Differentialformen, die transversal zu den Blättern verlaufen.

Die durch diesen Kokomplex gegebene Kohomologie kann im allgemeinen unendlich-dimensional sein. Es ist sogar möglich, daß sie nicht Hausdorffsch ist. Deshalb wird auch die *reduzierte* Blätterungskohomologie untersucht. Das ist der Quotient der Blätterungskohomologie nach dem Abschluß der Null, also die Hausdorffsch gemachte Blätterungskohomologie.

Außerdem führen wir am Ende des zweiten Kapitels den Begriff der *tangential harmonischen* Differentialformen ein. Dies sind die Differentialformen aus dem oben beschriebenen Quotienten-Kokomplex, die harmonisch in Blattrichtung sind, also im Kern eines *blattweisen Laplace-Operators* $\Delta_{\mathcal{F}}$ liegen.

Roe betrachtet in [Roe87] den *blattweisen Wärmeleitungsoperator* $e^{-t\Delta_{\mathcal{F}}}$ von tangentialen Differentialformen auf beliebigen, geblättertten Mannigfaltigkeiten. Es ist ein Wärmeleitungsoperator auf dem oben beschriebenen Quotienten-Kokomplex, also die Wärmeleitung in Richtung der Blätter. Roe zeigt, daß nach endlicher Zeit glatte tangentiale Differentialformen durch den Wärmeleitungsoperator immer wieder in glatte tangentiale Differentialformen überführt werden. Alvarez-Lopez und Kordyukov zeigen in ihrem Artikel [ALK01], daß für eine Blätterung einer kompakten Mannigfaltigkeit versehen mit einer bündelartigen Metrik dies nach unendlicher Zeit auch noch gilt. Sie zeigen außerdem, daß der Wärmeleitungsoperator nach unendlicher Zeit eine Projektion auf den Kern von $\Delta_{\mathcal{F}}$ liefert. Auf diese Weise wird eine Hodge-Zerlegung der reduzierten Blätterungskohomologie induziert.

Die Methode, die wir verwenden, um die reduzierte Kohomologie der von uns untersuchten Blätterungen zu bestimmen, ist eine Verallgemeinerung einer Methode, die von Deninger und Singhof in [DS01] auf der Heisenberg-Gruppe, dem einfachsten Beispiel einer nilpotenten, nicht-abelschen Lie-Gruppe eingeführt worden ist:

Einleitung

Sei $\mathfrak{p}$ die zu der Lie-Gruppe P gehörende Lie-Algebra. Die Blätterungskohomologie kann in kanonischer Weise mit der Kohomologie der Lie-Algebra $\mathfrak{p}$ mit Koeffizienten in den glatten Funktionen auf $\Gamma \backslash G$ identifiziert werden. Durch die Zerlegung von $C^\infty(\Gamma \backslash G)$ in irreduzible Komponenten erhalten wir Teilräume, auf denen $\mathfrak{p}$ operiert und auf denen sich die Lie-Algebren-Kohomologie von $\mathfrak{p}$ berechnen läßt. Ebenso folgt dann, daß die reduzierte Blätterungskohomologie mit der reduzierten Lie-Algebrenkohomologie identifiziert werden kann.

Im dritten Kapitel berechnen wir die irreduziblen Komponenten von $C^\infty(\Gamma \backslash G)$. Mit der regulären Darstellung erhalten wir eine Operation von G auf $L^2(\Gamma \backslash G)$. Diese Darstellung können wir mit den Sätzen von Richardson aus [Ric71] in irreduzible Komponenten zerlegen, die nach der Kirillov-Theorie (s. [Kir62]) bekannt sind. An dieser Stelle müssen wir voraussetzen, daß G nilpotent ist. Durch einen Übergang zu den glatten Funktionen erhalten wir die gewünschte Zerlegung von $C^\infty(\Gamma \backslash G)$ in irreduzible Komponenten und die Operationen von $\mathfrak{p}$ auf diesen Komponenten.

Im vierten Kapitel berechnen wir mit dem oben beschriebenen Verfahren für den Fall, daß G nilpotent ist, die oberste reduzierte Blätterungskohomologie und vergleichen sie mit den tangential harmonischen p -Formen, wobei $p = \dim P$ ist.

Wir erhalten Resultate, wenn wir zusätzlich voraussetzen, daß $\mathfrak{p}$ entweder eindimensional oder rational ist. Mit Hilfe des Satzes von Alvarez-Lopez und Kordyukov werden wir sehen, daß unter diesen zusätzlichen Voraussetzungen die von P induzierte Blätterung von $\Gamma \backslash G$ nicht Riemannsch sein kann, wenn P nicht normal in G ist. Also folgt, daß auf einer gegebenen Blätterung des untersuchten Typs genau dann eine bündelartige Metrik existiert, wenn auf ihr eine kanonische, bündelartige Metrik existiert.

Ein weiteres interessantes Ergebnis erhalten wir, indem wir die Dimension des Raums der harmonischen p -Formen und der obersten reduzierten Kohomologie miteinander vergleichen. Es ist leicht zu sehen, daß der Vektorraum der tangential harmonischen p -Formen eindimensional ist, wenn die von P induzierte Blätterung ein dichtes Blatt in $\Gamma \backslash G$ besitzt. Ist diese Blätterung Riemannsch,

so folgt mit dem Satz von Alvarez-Lopez und Kordyukov auch, daß die oberste reduzierte Blätterungskohomologie eindimensional ist.

Besitzt die Blätterung andererseits kein dichtes Blatt, so können die oberste reduzierte Blätterungskohomologie und der Raum der harmonischen p -Formen auch unendlichdimensional sein. So ist z.B. die oberste reduzierte Kohomologie einer Blätterung, die durch einen linearen Fluß auf dem Torus gegeben ist, genau dann unendlichdimensional, wenn der Fluß eine rationale Steigung besitzt.

Falls die von P induzierte Blätterung nicht Riemannsch ist, so müssen die Kohomologie und der Raum der harmonischen Formen nicht mehr miteinander übereinstimmen. Wir werden sehen, daß die oberste reduzierte Blätterungskohomologie im Fall, daß P eindimensional und nicht normal in G ist, immer unendlichdimensional ist, unabhängig davon, ob die von P induzierte Blätterung ein dichtes Blatt in $\Gamma \backslash G$ besitzt oder nicht. Der Raum der harmonischen 1-Formen dagegen ist in dieser Situation immer eindimensional.

Schließlich werden wir an einem Beispiel sehen, daß sich die genannten Resultate nicht ohne weiteres auf beliebige, höherdimensionale Blätterungen übertragen lassen.

Der Grund liegt darin, daß sich in manchen Situationen die reduzierte Blätterungskohomologie und der Raum der tangential harmonischen Formen nicht verändern, wenn wir statt der von P in $\Gamma \backslash G$ induzierten Blätterung die von $P/H \cap P$ in $(\Gamma/H \cap \Gamma) \backslash (G/H)$ induzierte Blätterung betrachten, wobei H ein beliebiger, rationaler Normalteiler von G ist. Dennoch können diese beiden Blätterungen offensichtlich geometrisch vollkommen verschiedene Eigenschaften besitzen.

Wir werden jedoch auch sehen, daß wir nach Wahl einer kanonischen Metrik die Berechnung der tangential harmonischen Formen und der reduzierten Blätterungskohomologie beliebigdimensionaler Blätterungen oft auf den Fall der eindimensionalen Untergruppe P zurückführen können.

Ein Vergleich der tangential harmonischen p -Formen mit der obersten reduzier-

Einleitung

ten Blätterungskohomologie liefert somit in vielen Fällen direkt geometrische Aussagen über die untersuchten Blätterungen.

1 Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Wir möchten in dieser Arbeit Blätterungen auf bestimmten homogenen Mannigfaltigkeiten untersuchen. Eine Blätterung ist eine zusätzliche Struktur auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Den Begriff der Blätterung werden wir im nächsten Kapitel genauer definieren. In diesem Kapitel beschreiben wir erst einmal die Mannigfaltigkeiten, auf denen wir dann diese zusätzliche Struktur untersuchen werden.

Eine Lie-Gruppe bezeichnen wir immer mit Großbuchstaben, z.B. G und die zugehörige Lie-Algebra mit kleinen Frakturbuchstaben, also die zu G gehörende Lie-Algebra mit $\mathfrak{g}$. Wir betrachten nur zusammenhängende, einfach zusammenhängende, reelle Lie-Gruppen endlicher Dimension.

Die nächsten beiden Abschnitte stellen einen kurzen, allgemein gehaltenen Überblick über die von uns im folgenden verwendete Theorie dar. Eine detaillierte Einführung findet sich z.B. im ersten Kapitel von [CG90].

1.1 Nilpotente Lie-Algebren

Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über $\mathbb{R}$. Wir werden sehen, daß bei unseren Betrachtungen nilpotente Lie-Algebren eine gesonderte Rolle spielen. Deshalb definieren wir zuerst diese spezielle Klasse von Lie-Algebren.

1.1.1 Definition: Die *aufsteigende Zentralreihe* von $\mathfrak{g}$ ist gegeben durch eine Folge von Idealen $\mathfrak{g}_0 := \{0\}$ und $\mathfrak{g}_i := \{X \in \mathfrak{g} \mid [\mathfrak{g}, X] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1}\}$ für $i \in \mathbb{N}$. Eine

1 Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *nilpotent*, wenn es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ ist.

Wir nennen $Z(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}_1 = \{Z \in \mathfrak{g} \mid [\mathfrak{g}, Z] = 0\}$ das *Zentrum* von $\mathfrak{g}$.

Das einfachste Beispiel einer nilpotenten, nicht-abelschen Lie-Algebra ist die *Heisenberg-Algebra*. Sie ist die dreidimensionale Lie-Algebra mit den Erzeugenden X, Y und Z , wobei Z das Zentrum von $\mathfrak{g}$ erzeugt und die Lie-Klammer in $\mathfrak{g}$ gegeben ist durch $[X, Y] = Z$.

1.1.2 Bemerkung: Jede Unter algebra und jeder Quotient einer nilpotenten Lie-Algebra ist offensichtlich wieder nilpotent.

Wir werden im folgenden immer voraussetzen, daß die betrachteten Lie-Gruppen zusammenhängend und einfach zusammenhängend sind. Eine *nilpotente Lie-Gruppe* G ist unter dieser Bedingung eine Lie-Gruppe, deren zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ nilpotent ist.

1.2 Die Campbell-Baker-Hausdorff-Formel

Jede (zusammenhängende und einfach zusammenhängende) nilpotente Lie-Gruppe ist auch *exponentiell*, d.h. die Exponentialabbildung $\exp$ von einer nilpotenten Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ in die dazu gehörende Lie-Gruppe G ist ein Diffeomorphismus. Die Umkehrabbildung von $\exp$ heißt *Logarithmus* und wird mit $\log$ bezeichnet.

Im allgemeinen Fall ist die Exponentialabbildung nicht mehr injektiv. Es gibt jedoch immer eine kleine Umgebung U der 0 in $\mathfrak{g}$, auf der $\exp$ invertierbar ist.

Mit der Exponentialfunktion und dem Logarithmus können wir aus der Lie-Klammer als Operation auf der Lie-Algebra das Produkt der Lie-Gruppe erhalten. Wir definieren zuerst ein spezielles Produkt in der Lie-Algebra.

1.2.1 Definition: Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra zusammen mit einer Exponentialabbildung $\exp: \mathfrak{g} \longrightarrow G$. Dann gibt es eine Umgebung $U \subseteq \mathfrak{g}$ der 0, so daß $\exp$ auf U invertierbar ist. Wir bezeichnen die Umkehrabbildung von $\exp$ auf

1.2 Die Campbell-Baker-Hausdorff-Formel

U auch mit $\log$.

Für $X, Y \in U$ definieren wir $X \star Y := \log(\exp X \cdot \exp Y)$.

Die Abbildung $\star: U \times U \longrightarrow \mathfrak{g}$ ist analytisch. Das Produkt $X \star Y$ läßt sich ausschließlich als Reihe von Kommutatoren von X und Y darstellen. Für beliebige Lie-Algebren gilt lokal die sogenannte *Campbell-Baker-Hausdorff-Formel*:

1.2.2 Satz: Sei $U \subseteq \mathfrak{g}$ eine Umgebung der 0, in der $\exp$ invertierbar ist. Für beliebige $X, Y \in U$ gilt:

$$X \star Y = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sum_{\substack{p_i + q_i > 0 \\ 1 \leq i \leq n}} \frac{(\sum_{i=1}^n (p_i + q_i))^{-1}}{p_1! q_1! \dots p_n! q_n!} \cdot (\text{ad}_X)^{p_1} (\text{ad}_Y)^{q_1} \dots (\text{ad}_X)^{p_n} (\text{ad}_Y)^{q_n-1} Y.$$

Dabei ist für $V \in \mathfrak{g}$ die adjungierte Darstellung ad_V von $\mathfrak{g}$ gegeben durch $\text{ad}_V(W) := [V, W]$ für alle $W \in \mathfrak{g}$.

Ist $q_n = 0$, so ist in der obigen Formel $(\text{ad}_X)^{p_n} (\text{ad}_Y)^{q_n-1} Y$ als $(\text{ad}_X)^{p_n-1}$ zu lesen.

In dem Fall, daß $\exp: \mathfrak{g} \longrightarrow G$ ein Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung $\log$ ist, stimmt das von uns definierte $\star$ -Produkt mit dem Produkt in der Lie-Gruppe überein. Für jede nilpotente Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ liefert die Exponentialfunktion einen Diffeomorphismus auf ganz $\mathfrak{g}$. Wir können also im obigen Satz $U = \mathfrak{g}$ wählen. Somit haben wir eine Möglichkeit gefunden, das Produkt in einer nilpotenten Lie-Gruppe über Lie-Klammern in der zugehörigen Lie-Algebra auszudrücken.

Die *adjungierte Darstellung* ad wie oben beschrieben ordnet jedem Element der Lie-Algebra $X \in \mathfrak{g}$ eine Operation $[X, \cdot]$ auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ zu. Ebenso läßt sich eine adjungierte Darstellung der Lie-Gruppe G definieren.

1.2.3 Definition: Für $g \in G$ sei $\alpha_g: h \mapsto ghg^{-1}$ ein innerer Automorphismus von G . Die Ableitung von α im Einselement e von G , also $T_e(\alpha_g): \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ liefert für jedes $g \in G$ eine Operation auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Die Abbildung, die ein

1 Lie-Gruppen und Lie-Algebren

gegebenes Element $g \in G$ auf die zugehörige Operation auf $\mathfrak{g}$ abbildet heißt die *adjungierte Darstellung* der Lie-Gruppe G und wird mit Ad bezeichnet. Wir schreiben Ad_g für das Bild von $g \in G$ unter der adjungierten Darstellung.

Die adjungierte Darstellung genügt der folgenden Gleichung:

$$\exp(\text{Ad}_g(X)) = \alpha_g(\exp X) \quad \text{für alle } g \in G, X \in \mathfrak{g}.$$

Also ist $\text{Ad}_{\exp X}(Y) = X \star Y \star (-X)$ für $X, Y \in U$. Wir erhalten damit direkt aus der Campbell-Baker-Hausdorff-Formel 1.2.2:

$$\text{Ad}_{\exp X}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\text{ad}_X)^k Y = e^{\text{ad}_X} Y.$$

Im dritten Kapitel werden wir die besondere Bedeutung der adjungierten Darstellung bei der Untersuchung der Darstellungen einer nilpotenten Lie-Gruppe erkennen. Hier haben wir erst einmal eine Formel erhalten, die einen Zusammenhang zwischen der adjungierten Darstellung der Lie-Gruppe Ad und der adjungierten Darstellung der Lie-Algebra ad herstellt.

1.3 Gitter in Lie-Gruppen

Lie-Gruppen sind i.a. nicht kompakt. Die meisten der von uns im folgenden untersuchten Aussagen über Blätterungen gelten jedoch nur auf kompakten Mannigfaltigkeiten. Wir können viele Lie-Gruppen kompakt machen, indem wir eine passende Untergruppe herausteilen.

Dieser Abschnitt besteht aus einer Zusammenfassung der für uns relevanten Definitionen und Ergebnisse aus [Mal51]. In den ersten beiden Kapiteln von [Rag72] befindet sich eine ausführliche Zusammenstellung dieser Resultate. Für Details und Beweise sei auf diese Quelle verwiesen.

1.3.1 Definition: Sei G eine Lie-Gruppe. Eine diskrete Untergruppe Γ von G heißt *Gitter*, wenn ein endliches, invariantes Maß auf $\Gamma \backslash G$ existiert.

Nicht jede Lie-Gruppe besitzt ein Gitter. Wir geben ein zweidimensionales Beispiel an.

1.3.2 Beispiel: Sei $\mathfrak{g}$ die zweidimensionale Lie-Algebra mit den Erzeugenden X und Y , so daß $[X, Y] = Y$ ist. Die zu $\mathfrak{g}$ gehörende Lie-Gruppe G ist die Gruppe der affinen Transformationen, $G = \text{Aff}$. Diese Lie-Gruppe enthält kein Gitter.

Die Gitter einer nilpotenten Lie-Gruppe G können auch auf eine andere Weise beschrieben werden.

1.3.3 Definition: Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq G$ heißt *uniforme* Untergruppe von G , wenn $\Gamma \backslash G$ kompakt ist.

Es ist leicht einzusehen, daß eine diskrete uniforme Untergruppe ein Gitter ist. Andererseits gibt es jedoch Gitter, die nicht notwendigerweise uniform sind.

Anders ist die Situation jedoch bei nilpotenten Lie-Gruppen. Ist G nilpotent, so ist eine diskrete Untergruppe Γ von G genau dann ein Gitter, wenn sie uniform ist. Die Gitter einer nilpotenten Lie-Gruppe sind also genau die kokompakten diskreten Untergruppen.

Ist Γ ein Gitter einer nilpotenten Lie-Gruppe G , dann können wir eine Basis der zugehörigen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit Hilfe von $\log(\Gamma)$ so wählen, daß $\mathfrak{g}$ rationale Struktur-Konstanten besitzt (s. [Mal51]). Das heißt: Es gibt eine Basis $X_1, \dots, X_n$ von $\mathfrak{g}$, so daß $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q}X_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}X_n$ eine rationale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist und $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ gilt.

Es gilt sogar, daß eine nilpotente Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ genau dann rationale Strukturkonstanten besitzt, wenn sie ein Gitter enthält (vgl. auch: [CG90, Kapitel 5] oder [Rag72, Kapitel II]). Ist G eine einfach zusammenhängende, nilpotente Lie-Gruppe der Dimension n , so wird jedes Gitter Γ in G von n Elementen erzeugt. Fassen wir nun die Ergebnisse über Gitter nilpotenter Lie-Gruppen zusammen.

1.3.4 Satz: Sei G eine nilpotente Lie-Gruppe. Eine diskrete Untergruppe Γ von G ist genau dann ein Gitter in G , wenn eine der folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

1 Lie-Gruppen und Lie-Algebren

- (i) Γ ist eine uniforme Untergruppe von G .
- (ii) Es gibt eine Basis $X_1, \dots, X_n$ der zu G gehörenden Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit rationalen Struktur-Konstanten, mit der gilt:

$$\Gamma = \{\exp(m_1 X_1) \cdot \dots \cdot \exp(m_n X_n) \mid m_i \in \mathbb{Z} \text{ für } 1 \leq i \leq n\}.$$

Wir bezeichnen eine Basis $X_1, \dots, X_n$ von $\mathfrak{g}$ wie in (ii) als Basis mit rationalen Strukturkonstanten *bezüglich* $\log \Gamma$.

Mit der Campbell-Baker-Hausdorff-Formel 1.2.2 folgt eine Aussage über die Form von $\log \Gamma$.

1.3.5 Korollar: Sei $\Gamma \subseteq G$ ein Gitter einer nilpotenten Lie-Gruppe G und $X_1, \dots, X_n$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ mit rationalen Strukturkonstanten bezüglich $\log \Gamma$. Dann gibt es rationale Polynomfunktionen $q_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $1 \leq i \leq n$, so daß $\log \Gamma$ gegeben ist durch

$$\log \Gamma = \{q_1(m_1, \dots, m_n)X_1 + \dots + q_n(m_1, \dots, m_n)X_n \mid m_i \in \mathbb{Z} \text{ für } 1 \leq i \leq n\}.$$

Die Projektion in einen Quotienten ergibt unter gewissen Voraussetzungen wieder eine uniforme Untergruppe, wie wir mit dem folgenden Satz sehen werden (vgl. [Rag72, Theorem 1.13]). Durch Induktion über die aufsteigende Zentralreihe läßt sich der Satz 1.3.4 mit Hilfe dieses Satzes beweisen.

1.3.6 Satz: Sei G eine Lie-Gruppe, H eine abgeschlossene, normale Untergruppe und Γ eine diskrete Untergruppe von G . Wir bezeichnen die Projektion mit $\text{pr}: G \longrightarrow G/H$. Dann gilt:

- (i) Wenn $\Gamma \cap H$ uniform in H ist und Γ uniform in G , dann ist $\text{pr}(\Gamma)$ uniform in G/H und ΓH ist eine abgeschlossene Untergruppe von G .
- (ii) Wenn $\Gamma \cap H$ uniform in H und $\text{pr}(\Gamma)$ uniform in G/H ist, dann ist Γ uniform in G .

Um die Aussage des obigen Satzes auf nilpotente Lie-Gruppen anwenden zu können, benötigen wir erst noch eine Definition.

1.3.7 Definition: Sei G eine nilpotente Lie-Gruppe und Γ ein Gitter von G . Die zu G gehörende Lie-Algebra bezeichnen wir mit $\mathfrak{g}$. Wir nennen eine Untergruppe H von G *rational*, wenn es eine Basis $X_1, \dots, X_k$ der zu H gehörenden Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ gibt, die zu einer Basis $X_1, \dots, X_n$ von $\mathfrak{g}$ fortgesetzt werden kann, die rational bezüglich $\log \Gamma$ ist.

Wenn G nilpotent und Γ ein Gitter in G ist, so ist auch $\Gamma \cap H$ ein Gitter in H , wenn H ein rationales Ideal ist. Denn $\mathfrak{h}$ besitzt in diesem Fall eine Basis, die rational bezüglich des Gitters $\log \Gamma \cap \mathfrak{h}$ ist. Mit Satz 1.3.6 folgt also: Wenn H ein rationales Ideal von G und Γ ein Gitter in G ist, dann ist auch $\text{pr}(\Gamma)$ ein Gitter in G/H .

Wir möchten im folgenden die Mannigfaltigkeiten $\Gamma \backslash G$ mit einer bestimmten Art von Metrik versehen, der *kanonischen Metrik*. Diese Metrik entsteht in natürlicher Weise durch die Wahl einer Basis von $\mathfrak{g}$. Wir beschreiben zuerst, wie wir aus einem Element $X \in \mathfrak{g}$ ein Vektorfeld auf $\Gamma \backslash G$ erhalten (vgl. [Poo81, Seite 38f]).

1.3.8 Konstruktion: Sei G eine Lie-Gruppe, Γ ein Gitter von G und $\mathfrak{g}$ die zu G gehörende Lie-Algebra. Wir wählen ein Element $X \in \mathfrak{g}$ und konstruieren zu diesem Element ein Vektorfeld auf $\Gamma \backslash G$ wie folgt:

Nach Definition ist $\mathfrak{g} = T_e G$, wobei $e \in G$ das Einselement bezeichne. Mit X erhalten wir ein linksinvariantes Vektorfeld $\tilde{X}$ durch $\tilde{X}_g := T_e L_g X$, wobei $L_g: G \rightarrow G$ die Multiplikation von links mit $g \in G$ bezeichne, es ist also $L_g(h) = g \cdot h$ für alle $h \in G$.

Sei $\text{pr}: G \rightarrow \Gamma \backslash G$ die Projektion. Dann ist für $g \in G$ durch $T_g \text{pr}(\tilde{X}_g)$ ein Vektorfeld auf $\Gamma \backslash G$ gegeben. Wir nennen dieses Vektorfeld das zu X gehörenden *kanonische Vektorfeld* und bezeichnen es auch wieder mit X .

Eine andere Beschreibung des zu X gehörenden kanonischen Vektorfelds erhalten wir mit der folgenden Rechnung. Es ist:

$$T_g \text{pr}(\tilde{X}_g) = T_g \text{pr} \circ T_e L_g X = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \text{pr} \circ L_g \circ \exp(tX).$$

1.3.9 Definition: Sei G eine Lie-Gruppe und Γ ein Gitter von G . Außerdem sei $X_1, \dots, X_n$ eine Basis der zu G gehörenden Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Wir erhalten eine Riemannsche Metrik von $\Gamma \backslash G$, wenn wir voraussetzen, daß in jedem Punkt $\Gamma g \in \Gamma \backslash G$ die Vektoren der von der Basis $X_1, \dots, X_n$ induzierten kanonischen Vektorfelder eine Orthonormalbasis von $T_{\Gamma g} \Gamma G$ bilden. Wir nennen die Metrik, die wir auf diese Art erhalten *kanonische Metrik* von $\Gamma \backslash G$ bzgl. der Basis $X_1, \dots, X_n$.

1.4 Die Kohomologie einer Lie-Algebra

In diesem Abschnitt definieren wir die Kohomologie einer Lie-Algebra. Eine Motivation der folgenden Konstruktion findet sich z.B. in [Kna88, Kapitel IV]. Wir verschaffen uns hier nur einen allgemeinen Überblick mit besonderem Augenmerk auf den Fall der nilpotenten Lie-Algebra.

Sei $\mathfrak{g}$ eine reelle Lie-Algebra. Wir bezeichnen einen Homomorphismus π von $\mathfrak{g}$ in die Gruppe der linearen Operationen auf einem reellen Vektorraum V als *Darstellung*. Durch eine Darstellung erhalten wir eine $\mathfrak{g}$ -Modul-Struktur auf dem Vektorraum V .

In Kapitel 3.2 werden wir eine spezielle Klasse von Darstellungen – die unitären Darstellungen – noch genauer beschreiben und untersuchen. Zunächst definieren wir jedoch für $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$C^i(\mathfrak{g}; V) := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda^i \mathfrak{g}; V)$$

und den Homomorphismus $d^i: C^i(\mathfrak{g}; V) \longrightarrow C^{i+1}(\mathfrak{g}; V)$, der für $\alpha \in C^i(\mathfrak{g}; V)$ und $X_1, \dots, X_{i+1} \in \mathfrak{g}$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} d^i \alpha(X_1 \wedge \dots \wedge X_{i+1}) &= \sum_{j=1}^{i+1} (-1)^{j+1} \pi(X_j) \alpha(X_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_j \wedge \dots \wedge X_{i+1}) \\ &\quad + \sum_{j < k} (-1)^{j+k} \alpha([X_j, X_k] \wedge X_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_j \wedge \dots \wedge \hat{X}_k \wedge \dots \wedge X_{i+1}). \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß $(C^i(\mathfrak{g}; V), d^i)$ ein Kokettenkomplex ist. Somit können wir die i -te Kohomologie definieren als

$$H^i(\mathfrak{g}; V) := \text{Kern } d^i / \text{Bild } d^{i-1}.$$

1.4.1 Bemerkung:

- Wir haben uns bei der Definition auf reelle Vektorräume beschränkt. Genauso läßt sich aber auch die Kohomologie mit Koeffizienten in komplexen Vektorräumen definieren. Wenn $V_{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung des reellen Vektorraums V ist, so ist die Operation von $\mathfrak{g}$ auf $V_{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C}$ in natürlicher Weise durch die Operation von $\mathfrak{g}$ auf V gegeben und es gilt:

$$H^i(\mathfrak{g}; V_{\mathbb{C}}) \cong H^i(\mathfrak{g}; V) \otimes \mathbb{C}.$$

- Zwischen den reellen Vektorräumen $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda^i \mathfrak{g}; V)$ und $V \otimes \Lambda^i \mathfrak{g}^*$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus. Wir werden im folgenden zwischen diesen beiden Mengen nicht mehr unterscheiden.
- Ist V unendlichdimensional, so ist die Lie-Algebren-Kohomologie im allgemeinen auch nicht mehr endlichdimensional.
- Ist V ein topologischer Vektorraum, so erhalten wir in natürlicher Weise eine Topologie auf der Lie-Algebren-Kohomologie $H^i(\mathfrak{g}; V)$. Wir definieren in diesem Fall die *reduzierte* Lie-Algebren-Kohomologie $\bar{H}^i(\mathfrak{g}; V)$ als die Hausdorffsch gemachte Lie-Algebren-Kohomologie, also

$$\bar{H}^i(\mathfrak{g}; V) := \text{Kern } d^i / \overline{\text{Bild } d^{i-1}}.$$

Von Dixmier wurde die Dimension der Kohomologie einer nilpotenten Lie-Algebra genauer untersucht. Er beweist in [Dix55] den folgenden Satz. Dabei sagen wir abkürzend von einem $\mathfrak{g}$ -Modul W , daß er in einem $\mathfrak{g}$ -Modul V *enthalten* ist, wenn W Quotient eines Untermoduls von V ist.

1.4.2 Satz: Sei $\mathfrak{g}$ eine n -dimensionale, nilpotente Lie-Algebra und V ein endlich-dimensionaler $\mathfrak{g}$ -Modul.

1 Lie-Gruppen und Lie-Algebren

1. Wenn V keinen trivialen Untermodul enthält, so ist $\dim H^i(\mathfrak{g}; V) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
2. Wenn V einen trivialen Untermodul enthält, so ist $\dim H^i(\mathfrak{g}; V) \geq 2$ für $0 < i < n$ und $\dim H^i(\mathfrak{g}; V) = 1$ für $i = 0, n$.

Jede reelle Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ operiert trivial auf $\mathbb{R}$, somit wird $\mathbb{R}$ selbst zu einem trivialen $\mathfrak{g}$ -Modul. Die Kohomologie $H^i(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ wird abkürzend mit $H^i(\mathfrak{g})$ bezeichnet. Aus dem obigen Satz von Dixmier erhalten wir direkt das folgende Korollar.

1.4.3 Korollar: Sei $\mathfrak{g}$ eine n -dimensionale nilpotente Lie-Algebra. Dann ist die Dimension der Kohomologie $\dim H^i(\mathfrak{g}) > 0$ für $0 \leq i \leq n$.

2 Blätterungen

2.1 Riemannsche Blätterungen

Wir werden in diesem Abschnitt allgemein definieren, was eine Blätterung ist, sowie die für uns im folgenden relevanten Beispiele konstruieren. Eine allgemeine Einführung in die Theorie der Blätterungen befindet sich z.B. in dem Buch [Ton88], oder in dem Artikel [Law74]. Nachdem wir die Blätterungen, die wir später genauer betrachten wollen, definiert haben, werden wir die Vektorfelder auf geblätterten Mannigfaltigkeiten genauer untersuchen und den Begriff der Riemannschen Blätterung einführen (vgl. [Rei59]).

2.1.1 Definition: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n . Eine *Blätterung* $\mathcal{F}$ der Dimension p und der Kodimension $q = n - p$ von M ist eine Zerlegung $\{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von M in zusammenhängende Teilmengen L mit der folgenden Eigenschaft:

Für jeden Punkt $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung U und eine Karte $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, so daß für jede Teilmenge L_α die Zusammenhangskomponenten von $U \cap L_\alpha$ durch die Gleichungen $\varphi(y) = (a, b_1, \dots, b_q) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ mit Konstanten $b_1, \dots, b_q$ gegeben sind. Solche Karten φ heißen *Bündelkarten*. Die Teilmengen L_α heißen die *Blätter* von $\mathcal{F}$.

2.1.2 Beispiel: Sei $\pi: M \rightarrow B$ ein lokaltriviales Bündel mit Faser F . Die Fasern $\pi^{-1}(b) \cong F$ über den Punkten $b \in B$ liefern die Blätter einer Blätterung

2 Blätterungen

von M . Die Bündelkarten sind die lokalen Trivialisierungen der Faserung.

Die lokaltrivialen Faserungen liefern also schon eine große Klasse von Beispielen für Blätterungen. Es gibt jedoch auch sehr viel Beispiele von Blätterungen, die keine Faserungen sind, wie z.B. die Blätterungen auf dem Torus, die einem Fluß mit irrationaler Steigung entsprechen. Wir werden in dieser Arbeit eine spezielle Klasse von Blätterungen untersuchen, die eine Verallgemeinerung der linearen Flüsse auf dem Torus darstellen.

Eine Blätterung ist durch die an die Blätter tangentialen Vektoren eindeutig gegeben. Wir schreiben $T_x\mathcal{F} := T_xL_\alpha \subseteq T_xM$ für den Untervektorraum der in $x \in M$ an das Blatt L_α mit $x \in L_\alpha$ tangentialen Vektoren und $T\mathcal{F} := \bigcup_{x \in M} T_x\mathcal{F}$.

Mit dem folgenden, fundamentalen Satz von Frobenius erhalten wir eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Untervektorbündel F des Tangentialbündels TM die Tangentialvektoren einer Blätterung liefert. Wir nennen ein Vektorbündel $F \subseteq TM$ *vollständig integrabel*, wenn es eine Blätterung $\mathcal{F}$ von M gibt mit $F = T\mathcal{F}$. Der Satz von Frobenius (vgl. z.B. [Ste83, Kapitel III, Theorem 5.1]) liefert eine leichter nachzuprüfende, äquivalente Bedingung zur vollständigen Integrabilität eines Untervektorbündels.

2.1.3 Satz von Frobenius: Ein Untervektorbündel F des Tangentialbündels TM ist genau dann vollständig integrabel, wenn die glatten Vektorfelder aus $\Gamma(M, F)$ eine Lie-Unteralgebra von $\Gamma(M, TM)$ bilden.

Betrachten wir als zugrundeliegende Mannigfaltigkeit eine Lie-Gruppe G , so sehen wir, daß durch eine Unteralgebra $\mathfrak{p}$ der zu G gehörenden Lie-Algebra $\mathfrak{g} = T_eG$ ein vollständig integrables Untervektorbündel und damit eine Blätterung gegeben ist. Blätterungen dieser Art werden wir im folgenden genauer untersuchen. Zuerst beschreiben wir jedoch diese Blätterungen präziser.

2.1.4 Konstruktion: Sei G eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende Lie-Gruppe. Eine Untergruppe P von G liefert eine Blätterung von G mit Blättern der Form gP für $g \in G$.

Wir können eine Verallgemeinerung dieser Konstruktion verwenden, um Blätterungen auf kompakten Mannigfaltigkeiten zu erhalten.

2.1.5 Konstruktion: Sei $\Gamma \subseteq G$ ein Gitter in G . Wir konstruieren eine Blätterung auf der kompakten Mannigfaltigkeit $M := \Gamma \backslash G$. Die Algebra der Vektorfelder $\Gamma(M, TM)$ identifizieren wir mit $C^\infty(M) \otimes \mathfrak{g}$. Dazu wählen wir eine Basis $X_1, \dots, X_n$ von $\mathfrak{g}$. Bezeichnen wir die dazu gehörenden kanonischen Vektorfelder mit $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_i$, so liefert die Abbildung $\sum f_i \tilde{X}_i \mapsto \sum f_i \otimes X_i$ den gewünschten Isomorphismus. Mit dieser Identifikation sehen wir direkt mit dem Satz von Frobenius 2.1.3, daß eine Unterálgebra $\mathfrak{p}$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G ein vollständig integrables Untervektorbündel des Tangentialbündels, also eine Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ der homogenen Mannigfaltigkeit M induziert. Die Blätter dieser Blätterung sind von der Form ΓgP für beliebige $g \in G$, wobei P die zu $\mathfrak{p}$ gehörende Lie-Gruppe bezeichne.

Wir werden im folgenden auf dieser Art von Blätterungen Metriken untersuchen, deren Orthonormalvektoren in Richtung der Blätter aus einer fest gewählten Basis von $\mathfrak{p}$ hervorgehen – eine Beschreibung, die wir in der folgenden Definition noch präzisieren werden.

2.1.6 Definition: Sei $(\Gamma \backslash G, \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ eine geblätterte Mannigfaltigkeit, wie wir sie in 2.1.5 beschrieben haben. Wir nennen eine Metrik g auf $\Gamma \backslash M$ *tangential kanonisch*, wenn es eine Basis $X_1, \dots, X_p$ von $\mathfrak{p}$ gibt, so daß die zu den entsprechenden kanonischen Vektorfeldern (s. 1.3.8) gehörenden Vektoren in jedem Punkt Γh von $\Gamma \backslash G$ eine Orthonormalbasis von $T_{\Gamma h} \mathcal{F}(\mathfrak{p})$ bzgl. g bilden.

Offenbar führt der Begriff der Blätterungen zwangsläufig zu einer Unterscheidung zwischen Tangentialvektoren in Richtung der Blätter und Tangentialvektoren transversal zu den Blättern. Diese beiden verschiedenen Arten von Vektoren wollen wir im folgenden genauer untersuchen, um einen tieferen Einblick in die Struktur einer gegebenen Blätterung zu erhalten.

Dazu beschreiben wir zunächst die Vektorfelder, die transversal in Richtung der Blätter liegen. Wir betrachten dabei die Äquivalenzklassen von Vektoren

2 Blätterungen

in dem Quotienten $TM/T\mathcal{F}$, dem Normalenbündel der Blätterung.

2.1.7 Definition: Das Quotientenvektorbündel $T\mathcal{F}^\perp := TM/T\mathcal{F}$ heißt das *transversale Bündel* der Blätterung $\mathcal{F}$. Für ein gegebenes Vektorfeld $X \in \Gamma(M, TM)$ heißt das Vektorfeld $\bar{X} \in T\mathcal{F}^\perp$, das von X repräsentiert wird, das zu X gehörende *transversale Vektorfeld*.

Wir möchten untersuchen, ob die Abstände zweier benachbarter Blätter lokal konstant bleiben. Dafür betrachten wir eine spezielle Art von Metrik, die von Reinhart in [Rei59] eingeführt worden ist. Die Begriffe, die wir benötigen, um diese spezielle Art von Metrik auf geblätterten Mannigfaltigkeiten zu beschreiben, haben ihren Ursprung im Fall der Blätterung durch eine lokaltriviale Faserung. Wir untersuchen zuerst diese Blätterungen, um eine Motivation für die Begriffsbildung im allgemeinen Fall zu erhalten.

Sei $\pi: M \longrightarrow B$ eine lokaltriviale Faserung mit Faser F . In einer Umgebung eines Punktes $x \in M$ gibt es eine lokale Trivialisierung von M , d.h. es gibt eine offene Umgebung U von x , die wir mit $U_1 \times U_2$ identifizieren können, so daß U_1 eine offene Umgebung eines Punktes x_1 in F ist und U_2 eine offene Umgebung eines Punktes x_2 in B ist. Der Tangentialraum von M an x zerfällt in eine direkte Summe $T_x M \cong T_{x_1} F \oplus T_{x_2} B$. Dabei entsprechen die Vektoren in $T(\{x_1\} \times U_2)$ den Vektoren des transversalen Bündels. Es gibt also einen natürlichen Isomorphismus zwischen der Menge der transversalen Tangentialvektoren $T_y \mathcal{F}^\perp$ und den Vektoren in $T_{y_2} B$, wobei $y = (y_1, y_2) \in U_1 \times U_2$ ist.

Existiert eine Riemannsche Metrik g' auf $TU_1 \subseteq TF$ und eine Riemannsche Metrik g'' auf $TU_2 \subseteq TB$, so erhalten wir eine Metrik g auf $TU \subseteq TM$ durch $g_y(v_1 + w_1, v_2 + w_2) = g'_{y_1}(v_1, v_2) + g''_{y_2}(w_1, w_2)$, wobei $v_i \in T_{y_1} U_1$ und $w_i \in T_{y_2} U_2$ ist für $i = 1, 2$ und $y = (y_1, y_2) \in U_1 \times U_2$. Mit einer Zerlegung der Eins können wir die so erhaltene Metrik auf ganz M fortsetzen und machen somit M zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Wenden wir die so konstruierte Metrik auf Vektorfelder an, die senkrecht zu den Blättern verlaufen und in Richtung der Blätter konstant sind, also auf Vektorfelder $X_1, X_2 \in \Gamma(M, TM)$, die lokal

2.1 Riemannsche Blätterungen

von der Form $X_i(y_1, y_2) = (0, X_i''(y_2)) \in T_{y_1}F \oplus T_{y_2}B$ für $i = 1, 2$ sind, so sehen wir, daß die Funktion

$$(y_1, y_2) \mapsto g_{(y_1, y_2)}(X_1(y_1, y_2), X_2(y_1, y_2)) = g_{y_2}''(X_1''(y_2), X_2''(y_2))$$

unabhängig von y_1 ist. Wir sagen, daß die Metrik g *konstant in Richtung der Blätter* ist.

Diese Art von Metrik wurde von Reinhart in [Rei59] auf Blätterungen verallgemeinert, die nicht notwendigerweise lokaltriviale Faserungen sein müssen. Wir werden sehen, daß die Blätterungen, auf denen eine solche Metrik existiert, besondere geometrische Eigenschaften haben: die Abstände zwischen einzelnen Blättern bleiben lokal konstant. Wir verwenden im folgenden die Bezeichnungen von Molino [Mol75].

Bei beliebigen Blätterungen läßt sich nicht von einer Metrik auf dem Quotienten $T\mathcal{F}^\perp$ auf eine Metrik schließen, die konstant in Richtung der Blätter ist. Im Fall einer lokaltrivialen Faserung haben alle transversalen Vektorfelder, die konstant in Richtung der Blätter sind, die Eigenschaft, daß sie Blätter in Blätter überführen. In der allgemeinen Situation haben nicht mehr alle transversalen Vektorfelder diese Eigenschaft. Vektorfelder mit dieser Eigenschaft nennen wir *blätternde Vektorfelder*. Sie werden in der Literatur auch *infinitesimale Automorphismen* genannt. Die zu diesen Vektorfeldern gehörenden Flüsse überführen Blätter in Blätter, wie wir direkt an der Definition sehen.

2.1.8 Definition: Ein Vektorfeld $X \in \Gamma(M, TM)$ heißt *blätternd*, wenn für alle $Y \in \Gamma(M, T\mathcal{F})$ die Lie-Klammer $[X, Y] \in \Gamma(M, T\mathcal{F})$ ist. Die Menge der blätternden Vektorfelder bildet eine Unteralgebra von $\Gamma(M, TM)$, die Molino mit $L(M, \mathcal{F})$ bezeichnet.

Aus der Unteralgebra $L(M, \mathcal{F})$ der blätternden Vektorfelder teilen wir noch die Vektorfelder heraus, die tangential in Richtung der Blätter sind. Wir erhalten so die zugehörigen transversalen Vektorfelder.

2.1.9 Definition: Die Menge der zu den $X \in L(M, \mathcal{F})$ gehörenden transversalen Vektorfeldern ist eine Quotientenalgebra, die Molino mit $l(M, \mathcal{F})$ be-

2 Blätterungen

zeichnet.

Nun können wir den Begriff der bündelartigen Metrik auf beliebigen geblätterten Mannigfaltigkeiten einführen. Blätterungen, die eine bündelartige Metrik besitzen, werden Riemannsche Blätterungen genannt.

2.1.10 Definition: Sei $(M, \mathcal{F})$ eine geblätterte Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge. Eine glatte Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *basisch*, wenn für alle Vektorfelder $Z \in \Gamma(M, T\mathcal{F})$ die Ableitung $Zf = 0$ ist, d.h. wenn f konstant in Richtung der Blätter ist.

Eine *bündelartige Metrik* $g_x: T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Metrik auf der geblätterten Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{F})$, so daß auf allen offenen Mengen $U \subseteq M$ und allen blätternden Vektorfeldern X und Y auf U , die zusätzlich auch noch senkrecht zu den Blättern verlaufen, die Funktion $x \mapsto g_x(X(x), Y(x))$ von U nach $\mathbb{R}$ basisch ist.

Die Blätterung $\mathcal{F}$ auf M heißt *Riemannsch* genau dann, wenn eine bündelartige Metrik auf $(M, \mathcal{F})$ existiert.

Vergleichen wir diese Definition mit unseren Betrachtungen der lokaltrivialen Faser-Bündel $\pi: M \rightarrow B$ als Blätterungen (vgl. 2.1.2), so erkennen wir den Ursprung der obigen Begriffe. Die basischen Funktionen sind diejenigen, die induziert von Funktionen auf B sind. Ebenso läßt sich, wie wir oben auch gesehen haben, der Ursprung des Begriffs der bündelartigen Metrik erklären.

In seiner Arbeit [Rei59] gibt Reinhart eine anschauliche Beschreibung der Riemannschen Blätterungen an. Wir können äquivalent zur Existenz einer bündelartigen Metrik auch fordern, daß die Entfernungen zwischen zwei Blättern lokal konstant sein müssen.

2.1.11 Satz: ([Rei59]) Sei $(M, \mathcal{F})$ eine geblätterte Mannigfaltigkeit. Eine Riemannsche Metrik g auf M ist genau dann bündelartig, wenn jede Geodätische die senkrecht bezüglich g zu einem Blatt startet, jedes Blatt senkrecht bezüglich g schneidet.

Die Riemannschen Blätterungen sind dann von Molino in [Mol75] weiter klassifiziert worden. Er setzte diesen Typ von Blätterungen in Verbindung mit zwei weiteren Arten von Blätterungen, den transversal parallelisierbaren Blätterungen und den Lie-Blätterungen. Diese Blätterungen werden wir im folgenden noch konkreter untersuchen.

2.2 Transversal parallelisierbare Blätterungen

Eine Spezialfall einer Riemannschen Blätterung liegt vor, wenn die untersuchte Blätterung eine transversale Struktur besitzt, d.h. wenn die blätternden Vektorfelder das transversale Bündel $T\mathcal{F}^\perp$ erzeugen. Wir definieren die sog. transversalen Parallelisierungen.

2.2.1 Definition: Sei $(M, \mathcal{F})$ eine geblätterte Mannigfaltigkeit. Eine *transversale Parallelisierung* der Blätterung $\mathcal{F}$ besteht aus transversalen Vektorfeldern $\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_q \in l(M, \mathcal{F})$ repräsentiert durch blätternde Vektorfelder $V_1, \dots, V_q \in L(M, \mathcal{F})$, so daß in jedem Punkt $x \in M$ der Tangentialraum an M zerfällt in

$$T_x M = T_x \mathcal{F} \oplus \mathbb{R}V_1(x) \oplus \dots \oplus \mathbb{R}V_q(x).$$

Wenn die Vektorfelder $\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_q$ eine Unteralgebra der Lie-Algebra der transversal blätternden Vektorfelder $l(M, \mathcal{F})$ als Vektorraum erzeugen, so sprechen wir von einer *Lie-Parallelisierung* von $(M, \mathcal{F})$.

Untersuchen wir zur Veranschaulichung wieder zuerst die Bedeutung dieser Definition in der Situation der lokaltrivialen Faser-Bündel $\pi: M \rightarrow B$ als Blätterungen (vgl. 2.1.2). Eine transversale Parallelisierung $\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_q$ liefert in diesem Fall eine Parallelisierung des Basisraums. Wir erhalten also direkt:

2.2.2 Bemerkung: Sei $\pi: M \rightarrow B$ ein lokaltriviales Bündel mit Faser F aufgefaßt als Blätterung $(M, \mathcal{F})$. Wenn die Blätterung $(M, \mathcal{F})$ transversal parallelisierbar ist, dann ist auch der Basisraum B parallelisierbar.

Zurück zur allgemeinen Situation. Eine Blätterung, die eine transversale Par-

2 Blätterungen

alleisierung besitzt, ist offensichtlich auch Riemannsch. Wir wählen einfach die blätternden Repräsentanten der Parallelisierung als Orthonormalbasis für eine bündelartige Metrik.

Wir werden nun die Lie-Parallelisierungen genauer untersuchen. Die Blätterungen, die eine Lie-Parallelisierung besitzen, sind zuerst von Fedida in [Fed71] genauer beschrieben worden. Für eine gegebene Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist die Existenz einer $\mathfrak{g}$ -Parallelisierung äquivalent zur Existenz einer speziellen $\mathfrak{g}$ -wertigen 1-Form, der sog. Maurer-Cartan-Form.

2.2.3 Definition: Sei $(M, \mathcal{F})$ eine beliebige geblätterte Mannigfaltigkeit. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra der Dimension q . Es gebe eine $\mathfrak{g}$ -wertige 1-Form α auf M mit den Eigenschaften:

- (i) $\alpha_x: T_x M \longrightarrow \mathfrak{g}$ ist surjektiv für alle $x \in M$,
- (ii) $d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0$.

Dabei bezeichne $[\alpha, \alpha]$ die Lie-Klammer von Formen mit Werten in einer Lie-Algebra, also $[\alpha, \alpha](X, Y) = 2[\alpha(X), \alpha(Y)]$ für alle Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(M, TM)$.

Dann ist Kern α ein vollständig integrables Vektorbündel auf M . Die induzierte Blätterung heißt *Lie-Blätterung* bzw. *$\mathfrak{g}$ -Blätterung*. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *Strukturalgebra* dieser Blätterung.

Der Begriff der $\mathfrak{g}$ -Blätterung steht mit dem Begriff der Lie-Parallelisierung in einem engen Zusammenhang. Wir werden sehen, daß eine gegebene Blätterung genau dann eine Lie-Parallelisierung besitzt, wenn sie eine Lie-Blätterung ist.

2.2.4 Satz: Sei $(M, \mathcal{F})$ eine geblätterte Mannigfaltigkeit. Dann sind äquivalent:

- (1) $(M, \mathcal{F})$ besitzt eine Lie-Parallelisierung $\mathfrak{g}$,
- (2) $(M, \mathcal{F})$ ist eine $\mathfrak{g}$ -Blätterung.

Der Beweis dieses Satzes aus [Mol88] veranschaulicht recht gut den direkten Zusammenhang zwischen den beiden Begriffen.

2.2 Transversal parallelisierbare Blätterungen

Beweis: Für alle $\lambda \in \mathfrak{g}$ liefert die Gleichung $\alpha(X) = \lambda$ ein transversales Vektorfeld $\bar{X}$. Die Lie-Blätterungen sind also transversal parallelisierbar. Mit der Abbildung $\lambda \mapsto \alpha^{-1}(\lambda)$ läßt sich $\mathfrak{g}$ mit einer Unterálgebra der transversalen Vektorfelder identifizieren.

Umgekehrt sei $\mathcal{F}$ eine Blätterung der Kodimension q zusammen mit einer transversalen Lie-Parallelisierung $\mathfrak{g} := \{\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_q\}$, wobei $\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_q$ die zu $Z_1, \dots, Z_q \in \Gamma(M, TM)$ gehörenden Vektorfelder sind. Für beliebige $x \in M$ läßt sich jeder Tangentialvektor $v_x \in T_x M$ in eindeutiger Weise schreiben als

$$v_x = v'_x + \xi_1 Z_1(x) + \dots + \xi_q Z_q(x).$$

Dabei ist v'_x tangential an das Blatt, das durch den Punkt x läuft und $\xi_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq q$. Mit $\alpha_x(v_x) := \xi_1 \bar{Z}_1(x) + \dots + \xi_q \bar{Z}_q(x)$ erhalten wir eine $\mathfrak{g}$ -wertige 1-Form α auf M . Diese 1-Form ist offensichtlich glatt, denn sie ist konstant auf den Vektorfeldern $Z_1, \dots, Z_q$ und verschwindet auf den an die Blätter tangentialen Vektorfelder. Es läßt sich leicht nachrechnen, daß α die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (i) Für alle $x \in M$ ist $\alpha_x: T_x M \longrightarrow \mathfrak{g}$ surjektiv.
- (ii) Kern α ist das zu den Blättern von $\mathcal{F}$ tangentialen Vektorfeld.
- (iii) Für die Form α und beliebige Vektorfelder $Y \in \Gamma(M, T\mathcal{F})$ gilt $Y\alpha = 0$ und $d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0$.

Also sind die Lie-Blätterungen genau die Blätterungen, die eine transversale Lie-Parallelisierung besitzen. $\square$

Wir werden im nächsten Abschnitt die Blätterungen homogener Mannigfaltigkeiten untersuchen, die wir in 2.1.5 konstruiert haben. Wir werden sehen, wann diese Blätterungen Lie-Blätterungen sind und, falls sie Lie-Blätterungen sind, ihre Strukturalgebra bestimmen.

2.3 Blätterungen homogener Mannigfaltigkeiten

Die Bezeichnungen seien dieselben wie in 2.1.5, also G eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende Lie-Gruppe und $\Gamma \subseteq G$ ein Gitter in G . Wir erhalten eine Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ der homogenen Mannigfaltigkeit $M := \Gamma \backslash G$, indem wir eine Unteralgebra $\mathfrak{p}$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G wählen. Die Blätter dieser Blätterung sind von der Form ΓgP , wobei $g \in G$ ist und P die zu $\mathfrak{p}$ gehörende Lie-Gruppe bezeichnet.

Wir werden sehen, daß diese Blätterungen Riemannsch sind, wenn die Lie-Algebra $\mathfrak{p}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist. In diesem Fall sind die Blätterungen sogar $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ -Blätterungen, also Lie-Blätterungen mit Strukturalgebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. Für den Beweis dieser Aussage untersuchen wir zuerst, wie für eine gegebene Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und eine Unteralgebra $\mathfrak{p}$ die blätternden Vektorfelder der von $\mathfrak{p}$ induzierten Blätterungen bestimmt werden können. Zur Bestimmung der blätternden Vektorfelder berechnen wir in der folgenden Konstruktion die Lie-Klammer von Vektorfeldern. Wir werden sehen, wie wir nach Wahl einer Basis von $\mathfrak{g}$ aus den Strukturkonstanten die blätternden Vektorfelder ablesen können.

2.3.1 Konstruktion: Wir wählen eine Basis $X_1, \dots, X_n$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so daß die Unteralgebra $\mathfrak{p}$ von $X_1, \dots, X_p$ erzeugt wird. Die zu X_i für $1 \leq i \leq n$ gehörenden kanonischen Vektorfelder (s. 1.3.8) bezeichnen wir auch wieder mit X_i . Die kanonischen Vektorfelder liefern lokal, in einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$, eine Koordinatendarstellung der Mannigfaltigkeit M . Die zu einem Vektorfeld X_i gehörende Koordinate bezeichnen wir mit x_i .

Nun bestimmen wir die blätternden Vektorfelder X auf U , die senkrecht zu den Blättern verlaufen. Diese Vektorfelder X sind von der Form $X = \sum_{i=p+1}^n f_i X_i$ mit $f_i \in C^\infty(U)$, wobei für alle tangentiellen Vektorfelder $Y \in \Gamma(U, T\mathcal{F})$ auf U das Vektorfeld $[X, Y]$ tangential an die Blätter ist. Die tangentialen Vektorfelder Y sind allgemein von der Form $Y = \sum_{j=1}^p g_j X_j$ mit glatten Funktionen $g_j \in C^\infty(U)$. Damit läßt sich die Lie-Klammer $[X, Y]$ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
 [X, Y] &= \sum_{i=p+1}^n \sum_{j=1}^p (f_i g_j [X_i, X_j] + f_i X_i g_j X_j - g_j X_j f_i X_i) \\
 &= \sum_{i,k=p+1}^n \sum_{j=1}^p f_i g_j \alpha_{ij}^k X_k - \sum_{k=p+1}^n \sum_{j=1}^p g_j X_j f_k X_k + \text{tangentieller Anteil}.
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen die α_{ij}^k die Strukturkonstanten von $\mathfrak{g}$ bezüglich der von uns gewählten Basis, es ist also $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n \alpha_{ij}^k X_k$.

Damit das Vektorfeld X blätternd ist, muß folglich für alle $p < k \leq n$ und beliebige glatte Funktionen g_j auf U gelten: $\sum_{j=1}^p \sum_{i=p+1}^n g_j f_i \alpha_{ij}^k = \sum_{j=1}^p g_j X_j f_k$. Da die g_j beliebig wählbar sind, ist dieses Gleichungssystem äquivalent zu

$$X_j f_k = \sum_{i=p+1}^n f_i \alpha_{ij}^k \quad \forall j, k \text{ mit } 1 \leq j \leq p < k \leq n.$$

Für ein festes j erhalten wir ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Wir wählen dazu die Umgebung U klein genug, so daß wir U mit einer offenen Umgebung in $\mathbb{R}^n$ und X_j mit $\frac{\partial}{\partial x_j}$ identifizieren können.

In $\mathbb{R}^n$ können wir dann explizit Lösungen der Differentialgleichungen vom obigem Typ angeben. Wir schreiben abkürzend A_j für die Matrix $(\alpha_{ij}^k)_{p < i, k \leq n}$, müssen also die Differentialgleichungssysteme $\frac{\partial}{\partial x_j} y = A_j y$ für alle $1 \leq j \leq p$ lösen. Zur Vereinfachung wählen wir ein festes j und betrachten die Funktionen nur in Abhängigkeit von x_j . Konstant bedeute im folgenden also nur konstant in der Variablen x_j .

Nach der Theorie linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist jede komplexe Lösung $(\tilde{f}_{p+1,j}, \dots, \tilde{f}_{n,j})$ der Differentialgleichung $\frac{\partial}{\partial x_j} y = A_j y$ von der Form $\tilde{f}_{k,j}(x_j) = \sum_{r=1}^m \varphi_{r,k}(x_j) e^{\lambda_r x_j}$, wobei λ_r mit $1 \leq r \leq m$ die verschiedenen Eigenwerte von A_j und die $\varphi_{r,k}$ Polynome in x_j vom Grad kleiner als die Größe des größten Jordan-Blocks zum Eigenwert λ_j von A_j sind. Die reellen Lösungen bestehen aus dem Real- und dem Imaginärteil der komplexen Lösungen.

2 Blätterungen

Die blätternden Vektorfelder, die senkrecht zu den Blättern verlaufen, sind also von der Form $\sum_{k=p+1}^n f_k X_k$, wobei die f_k lokal, nach Identifikation von U mit einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, aus Produkten und Summen von Funktionen der Form $x_j^a e^{bx_j} \cos cx_j$ und $x_j^a e^{bx_j} \sin cx_j$ mit $1 \leq j \leq p$ bestehen.

Die obige Konstruktion vereinfacht sich entscheidend, wenn die Unteralgebra $\mathfrak{p}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist. In diesem Fall sind nämlich die oben betrachteten Strukturkonstanten alle 0, also sind die Matrizen $A_j = 0$ für $1 \leq j \leq p$, also sind die blätternden Vektorfelder genau diejenigen, die konstant in Richtung der Blätter sind.

Wir sehen also, daß die Bedingung „ $\mathfrak{p}$ Ideal in $\mathfrak{g}$ “ hinreichend dafür ist, daß die Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ Riemannsch ist.

2.3.2 Satz: Sei $\mathfrak{p}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Dann ist die Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ der kompakten Mannigfaltigkeit $M := \Gamma \backslash G$ eine Lie-Blätterung mit Strukturalgebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$.

Zur Veranschaulichung hier noch einmal der komplette Beweis, den wir oben bereits skizziert haben:

Beweis: Wir berechnen in diesem Beweis wie in der Konstruktion beschrieben direkt die transversalen Vektorfelder der Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$.

Sei $X_1, \dots, X_p$ eine Basis von $\mathfrak{p}$. Wir ergänzen diese Basis zu einer Basis $X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_n$ von $\mathfrak{g}$. Die zu den X_i mit $1 \leq i \leq n$ gehörenden kanonischen Vektorfelder bezeichnen wir auch wieder mit X_i .

Ein Vektorfeld $X \in \Gamma(M, TM) \cong C^\infty(M) \otimes \mathfrak{g}$ ist nach Wahl der Basis von der Form $X = \sum_{i=1}^n f_i X_i$ mit $f_i \in C^\infty(M)$ für $1 \leq i \leq n$; ein Vektorfeld $Y \in \Gamma(M, T\mathcal{F}(\mathfrak{p})) \cong C^\infty(M) \otimes \mathfrak{p}$ ist von der Form $Y = \sum_{j=1}^p g_j X_j$ mit $g_j \in C^\infty(M)$ für $1 \leq j \leq p$. Um die blätternden Vektorfelder zu bestimmen, müssen wir also für beliebige $g_j \in C^\infty(M)$ die folgende Lie-Klammer berechnen:

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p f_i g_j [X_i, X_j] + f_i X_i g_j X_j - g_j X_j f_i X_i.$$

Da $\mathfrak{p}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist, liegen die Summanden $f_i g_j [X_i, X_j]$ in $\Gamma(M, T\mathcal{F}(\mathfrak{p}))$, liefern also keine Bedingungen dafür, daß X ein blätterndes Vektorfeld ist.

2.3 Blätterungen homogener Mannigfaltigkeiten

Ebenso liegen die Summanden $f_i X_i g_j X_j$ in $\Gamma(M, \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$, da die X_j mit $1 \leq j \leq p$ als Basis von $\mathfrak{p}$ gewählt worden sind.

Wenn wir also die Vektorfelder $X \in \Gamma(M, TM)$ mit der Eigenschaft bestimmen wollen, so daß für alle $Y \in \Gamma(M, T\mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ die Lie-Klammer $[X, Y] \in \Gamma(M, T\mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ ist, so bleiben nur die Gleichungen $g_j X_j f_i = 0$ für $p < i \leq n$ und beliebige $g_j \in C^\infty(M)$ mit $1 \leq j \leq p$ zu verifizieren. Diese Gleichungen entsprechen den Gleichungen $X_j f_i = 0$ für $1 \leq j \leq p$ und $p < i \leq n$. Also müssen die f_i für $p < i \leq n$ konstant in Richtung der Blätter sein.

Wir erhalten so direkt eine transversale Parallelisierung durch die zu den Vektoren $X_{p+1}, \dots, X_n$ gehörenden, transversalen Vektorfelder $\bar{X}_{p+1}, \dots, \bar{X}_n$. Diese Parallelisierung besitzt in natürlicher Weise die Struktur der Lie-Algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. $\square$

Betrachten wir nun den Fall, daß $\mathfrak{p}$ kein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist. Falls die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ nilpotent ist, so muß $\mathfrak{p}$ ein Ideal sein, damit die geblätterte Mannigfaltigkeit $(\Gamma \backslash G, \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ eine kanonische, bündelartige Metrik besitzt. Wir beweisen diese Aussage, indem wir wie bisher direkt die blätternden Vektorfelder bestimmen, die senkrecht zu den Blättern verlaufen.

2.3.3 Satz: Sei $\mathfrak{g}$ eine nilpotente Lie-Algebra und $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ eine von einer Unter- algebra $\mathfrak{p}$ induzierte Blätterung. Wenn die geblätterte homogene Mannigfaltigkeit $(\Gamma \backslash G, \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ eine kanonische, bündelartige Metrik besitzt, so ist $\mathfrak{p}$ ein Ideal.

Beweis: Eine bündelartige Metrik ist eine Metrik g , so daß für alle offenen Mengen $U \subset M$, alle blätternden Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(U, TM)$, die senkrecht zu den Blättern verlaufen und alle tangentialen Vektorfelder $Z \in \Gamma(M, T\mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ gilt: $Zg(X, Y) = 0$.

Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Basis von $\mathfrak{g}$, die die kanonische Metrik auf $(\Gamma \backslash G, \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ induziert. Wir können dabei o.B.d.A. davon ausgehen, daß die Unter- algebra $\mathfrak{p}$ von den Vektoren $X_1, \dots, X_p$ erzeugt wird. Wie bisher bezeichnen wir die zu $X_1, \dots, X_n$ gehörenden kanonischen Vektorfelder auch wieder mit $X_1, \dots, X_n$.

2 Blätterungen

Außerdem identifizieren wir wie oben für $U \subseteq M$ die Menge der glatten Vektorfelder $\Gamma(U, TM)$ mit der Menge $C^\infty(U) \otimes \mathfrak{g}$ und $\Gamma(U, T\mathcal{F})$ mit $C^\infty(U) \otimes \mathfrak{p}$. Die blätternden Vektorfelder in $(M, \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ berechnen wir gemäß der obigen Konstruktion.

Wenn die kanonische Metrik g der geblätterten Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ bündelartig ist, dann ist $X_j g(\sum_{k=p+1}^n f_k X_k, \sum_{k=p+1}^n f_k X_k) = 0$ für alle $1 \leq j \leq p$ und alle blätternden Vektorfelder $\sum_{k=p+1}^n f_k X_k$, die senkrecht zu den Blättern verlaufen. Da wir die Basis von $T_x M$ orthonormal gewählt haben, ist $g(\sum_{k=p+1}^n f_k X_k, \sum_{k=p+1}^n f_k X_k) = \sum_{k=p+1}^n f_k^2$. Also ist die Metrik g auf M genau dann bündelartig, wenn die Funktion $\sum_{k=p+1}^n f_k^2$ konstant in Richtung der Blätter ist.

Im folgenden betrachten wir $\sum_{k=p+1}^n f_k^2$ nur als Funktion in der Variablen x_j . Die Funktionen f_k sind lokal Lösungen des linearen Gleichungssystems $A_j y = \frac{\partial}{\partial x_j} y$, wobei $A_j = (\alpha_{ij}^k)_{p < i, k \leq n}$ die Matrix der Strukturkonstanten bezeichne. Die f_k sind also Linearkombinationen von Funktionen der Form $x_j^a e^{bx_j} \cos cx_j$ und $x_j^a e^{bx_j} \sin cx_j$. Die Summe $\sum_{k=p+1}^n f_k^2$ kann deshalb nur dann konstant in x_j sein, wenn sich die f_k nur aus Funktionen $\cos cx_j$ und $\sin cx_j$ zusammensetzen, also oben immer $a = b = 0$ gilt. Folglich kann eine kanonische Metrik g nur dann bündelartig sein, wenn die Eigenwerte von A_j rein imaginär oder Null sind und die zugehörigen Jordanblöcke von der Größe eins sind.

Um die Aussage des Satzes zu beweisen, müssen wir also nur noch die Gestalt Jordannormalformen der A_j für nilpotente Lie-Algebren bestimmen. Da die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ nilpotent ist, besitzt die Matrix A_j Null als einzigen Eigenwert. Wenn $\mathfrak{p}$ kein Ideal ist, dann gibt es ein j mit $1 \leq j \leq p$, so daß $A_j \neq 0$ ist.

Falls $\mathfrak{p}$ also kein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist, so besteht die Jordannormalform für ein A_j aus Jordan-Blöcken zum Eigenwert Null, von denen mindestens einer von der Größe > 1 ist. Also gibt es blätternde Vektorfelder $\sum_{k=p+1}^n f_k X_k$, für die $\sum_{k=p+1}^n f_k^2$ nicht konstant in Richtung des Vektorfeldes X_j ist. Somit kann die kanonische Metrik g nicht bündelartig sein.

Wir haben also gezeigt, daß eine beliebige kanonische Metrik g auf M nicht bündelartig sein kann, wenn $\mathfrak{p}$ kein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist. $\square$

2.3 Blätterungen homogener Mannigfaltigkeiten

Fassen wir die beiden vorhergehenden Resultate zusammen, so erhalten wir den folgenden Satz, mit dessen Hilfe wir einfach bestimmen können, wann die Blätterungen aus Beispiel 2.1.5 eine kanonische, bündelartige Metrik besitzen.

2.3.4 Satz: Sei G eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende nilpotente Lie-Gruppe, Γ ein Gitter in G und $\mathfrak{p}$ eine Unteralgebra der zu G gehörenden Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Die von $\mathfrak{p}$ induzierte Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ auf $M := \Gamma \backslash G$ besitzt genau dann eine bündelartige, kanonische Metrik, wenn $\mathfrak{p}$ ein Ideal ist. Treffen diese beiden äquivalenten Bedingungen zu, so ist die Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ sogar eine Lie-Blätterung mit Strukturalgebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, also insbesondere transversal parallelisierbar.

2.3.5 Bemerkung: Die obigen Berechnungen zeigen noch mehr, als nur eine Aussage über Blätterungen von nilpotenten Lie-Algebren zu liefern. Es läßt sich direkt für eine gegebene Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und eine Unteralgebra $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{g}$ aus den Strukturkonstanten eine Aussage über das Aussehen der blätternden Vektorfelder und somit über die Struktur der Blätterung herleiten. Da das Ergebnis lokal ist, spielt das Gitter, das in der Konstruktion 2.1.5 herausgeteilt wird, überhaupt keine Rolle.

Zur Veranschaulichung dieses Umstands bestimmen wir alle möglichen eindimensionalen Blätterungen des Typs 2.1.5 eines zweidimensionalen Raums.

Gegeben sei also eine zweidimensionale Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit Erzeugenden X und Y . Wir betrachten die Blätterung $\mathcal{F}(\mathbb{R}Y)$. Für die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gibt es genau zwei verschiedene mögliche Isomorphieklassen. Entweder ist $\mathfrak{g}$ abelsch oder nicht. Wenn $\mathfrak{g}$ abelsch ist, dann ist $\mathfrak{g}$ natürlich auch insbesondere nilpotent und die von Y erzeugte Unteralgebra ist ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Also ist die Blätterung $\mathcal{F}(\mathbb{R}Y)$ eine Lie-Blätterung mit Strukturalgebra $\mathbb{R}$. Teilen wir in diese Situation ein Gitter heraus, so erhalten wir als Blätterung einen linearen Fluß auf dem Torus.

Falls die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ nicht abelsch ist, dann können wir nach einem Ba-

2 Blätterungen

siswechsel davon ausgehen, daß die Struktur der Lie-Algebra entweder durch $[X, Y] = Y$ oder durch $[X, Y] = X$ gegeben ist. Die betrachtete Lie-Algebra ist also die zu der Lie-Gruppe der affinen Transformationen Aff gehörende Lie-Algebra. Wir haben gesehen, daß diese Lie-Gruppe kein Gitter zuläßt. Die blätternden Vektorfelder lassen sich, wie in der obigen Konstruktion gesehen, aus der Matrix der Strukturkonstanten, die in diesem Fall nur aus einer Zahl besteht bestimmen. Im Fall $[X, Y] = Y$ ist diese Zahl 0. Die blätternden Vektorfelder sind also von der Form $cX + g(x, y)Y$ mit $g \in C^\infty(\text{Aff})$ und $c \in \mathbb{R}$. Dies ist offensichtlich auch wieder eine Lie-Blätterung mit Strukturalgebra $\mathbb{R}$. Im Fall $[X, Y] = X$ ist die Zahl 1. Die blätternden Vektorfelder sind also lokal von der Form $ce^y X + g(x, y)Y$ mit einer beliebigen glatten Funktion $g \in C^\infty(\text{Aff})$ und $c \in \mathbb{R}$. Diese Blätterungen sind offensichtlich nicht Riemannsch – die Entfernung benachbarter Blätter bleibt lokal nicht konstant.

Die Berechnung der blätternden Vektorfelder mit der Konstruktion 2.3.1 läßt vermuten, daß sich im Fall halbeinfacher Lie-Gruppen leicht feststellen läßt, unter welchen Voraussetzungen an $\mathfrak{p}$ die Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ eine kanonische, bündelartige Metrik besitzt. Wir werden dies im Anhang untersuchen.

Mit den oben bewiesenen Sätzen haben wir im Fall, daß $\mathfrak{g}$ nilpotent ist, gesehen, unter welchen Voraussetzungen die Blätterungen $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ eine kanonische, bündelartige Metrik besitzen. Es stellt sich direkt die Frage, ob es Beispiele von Blätterungen der Art $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ gibt, die zwar keine kanonische bündelartige Metrik besitzen, jedoch trotzdem Riemannsch sind. Gibt es also Fälle, in denen $\mathfrak{p}$ kein Ideal ist, die Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ jedoch trotzdem eine bündelartige Metrik besitzt?

Wir werden am Ende dieser Arbeit Teilantworten auf diese Frage finden, z.B. für den Fall daß $\mathfrak{p}$ eindimensional ist. Dies erreichen wir, indem wir eine speziellen Art von Kohomologie dieser Blätterungen berechnen und das Ergebnis mit den tangential harmonischen Differentialformen vergleichen. Im nächsten Abschnitt definieren wir die verwendete Kohomologie und den Begriff einer tangential harmonischen Differentialform.

2.4 Kohomologie und harmonische Formen

Der Satz von Alvarez-Lopez und Kordyukov, den wir in diesem Abschnitt formulieren wollen, stellt einen Zusammenhang zwischen der reduzierten Blätterungskohomologie und den tangentialen harmonischen Formen her. Zuerst definieren wir die reduzierte Blätterungskohomologie.

Es gibt verschiedene Kohomologien, die für geblätterte Mannigfaltigkeiten definiert werden können. Wir werden im folgenden jedoch nur die reduzierte Blätterungskohomologie betrachten, die im wesentlichen eine „tangentielle Variante“ der klassischen deRham-Kohomologie ist.

Wir wollen aus den Differentialformen auf M die Formen herausteilen, die transversal zu den Blättern verlaufen. Dabei folgen wir der Vorgehensweise aus [ALT91] und [EKA83]. Im folgenden identifizieren wir den zu den transversalen Tangentialvektoren dualen Vektorraum $T^*\mathcal{F}^\perp$ mit der Menge

$$\{\omega \in T^*M \mid \omega(X) = 0 \ \forall X \in T\mathcal{F}\}.$$

Dies ist ein Untervektorraum des Kotangentialraums T^*M von M . Mit dem folgenden Satz werden wir sehen, daß die äußere Algebra $\Lambda^i T^*\mathcal{F}$ zusammen mit der Einschränkung der äußeren Ableitung einen Unterkomplex von $(\Lambda^i T^*M, d^i)$ liefert. Der Satz ist eine Version des Satzes von Frobenius (s. z.B. [Ste83, Kapitel III, Abschnitt 5]; dort findet sich auch ein Beweis, wie sich der folgende Satz aus dem oben zitierten Satz 2.1.3 herleiten läßt.).

2.4.1 Satz: Sei F ein Untervektorbündel des Tangentialbündels TM , das von den Vektorfeldern $X_1, \dots, X_p$ erzeugt wird. Sei $(F^\perp)^*$ die Menge aller 1-Formen ω auf M , für die gilt: $\omega(X) = 0$ für alle $X \in F$. Die Erzeugenden von $(F^\perp)^*$ bezeichnen wir mit $\omega_{p+1}, \dots, \omega_n$.

Das Vektorfeld F ist genau dann vollständig integrabel, wenn es für $p < i \leq n$ und $p < j < k \leq n$ reelle Zahlen $c_{ij}^k \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $d(\omega_i) = \sum_{p < j < k \leq n} c_{ij}^k \omega_j \wedge \omega_k$ gilt.

Es folgt direkt die entsprechende Aussage über die glatten Differentialformen

2 Blätterungen

$$\omega \in \Omega^k(M) = \Gamma(M, \Lambda^k T^*M).$$

Die Übertragung auf unsere Situation ist offensichtlich: Eine Blätterung $\mathcal{F}$ einer Mannigfaltigkeit M liefert ein integrables Untervektorbündel $T\mathcal{F}$. Deshalb ist die Einschränkung $d_\perp^k$ der äußeren Ableitung $d^k: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ auf die transversalen Differentialformen gegeben durch

$$d_\perp^k: \Omega_\perp^k(M) := \Gamma(M, \Lambda^k T^* \mathcal{F}^\perp) \rightarrow \Omega_\perp^{k+1}(M).$$

Damit können wir die Blätterungskohomologie von $(M, \mathcal{F})$ als den Quotientenkomplex von $\Omega^k(M)$ nach dem Unterkomplex $\Omega_\perp^k(M)$ definieren.

2.4.2 Definition: Sei $(M, \mathcal{F})$ eine geblätterte Mannigfaltigkeit. Definieren wir die Quotientenalgebra $\Omega_\mathcal{F}^k(M) := \Omega^k(M) / \Omega_\perp^k(M)$ und $d_\mathcal{F}^k$ als die von der äußeren Ableitung auf dem Quotienten $\Omega_\mathcal{F}^k(M)$ induzierte Abbildung, so erhalten wir mit $\dots \rightarrow \Omega_\mathcal{F}^k \xrightarrow{d_\mathcal{F}^k} \Omega_\mathcal{F}^{k+1} \rightarrow \dots$ nach Satz 2.4.1 einen Kokettenkomplex.

Wir definieren die *Blätterungskohomologie* von $(M, \mathcal{F})$ als die Kohomologie $H^i(M, \mathcal{F}) = \text{Kern } d_\mathcal{F}^i / \text{Bild } d_\mathcal{F}^{i-1}$ des Quotientenkomplexes $(\Omega_\mathcal{F}^k, d_\mathcal{F}^k)$.

Die Kohomologiegruppen $H^i(M, \mathcal{F})$ sind Fréchet-Räume. Die Koränder sind jedoch im allgemeinen nicht abgeschlossen in den Kozykeln. Deshalb müssen die Vektorräume $H^i(M, \mathcal{F})$ im allgemeinen auch nicht Hausdorffsch sein (s. z.B. [Hae80, Abschnitt 2.1]). Dies führt zu der folgenden Definition.

2.4.3 Definition: Die *reduzierte Blätterungskohomologie* von $(M, \mathcal{F})$ ist definiert als die Hausdorffsch gemachte Blätterungskohomologie von $(M, \mathcal{F})$ und wird bezeichnet mit $\bar{H}^i(M, \mathcal{F}) := \text{Kern } d_\mathcal{F}^i / \overline{\text{Bild } d_\mathcal{F}^{i-1}}$.

2.4.4 Bemerkung:

- Außer der oben definierten Kohomologie lassen sich auch noch andere Kohomologiearten von Blätterungen definieren. So ist die *basische Kohomologie* von Reinhart in [Rei59] definiert worden als die Kohomologie des Unterkomplexes aller Differentialformen, die konstant in Richtung der Blätter sind. Außerdem kann man in beiden Fällen neue Kohomologien definieren, indem man nur Formen betrachtet, die zwar glatt in Richtung der Blätter,

jedoch nur stetig auf ganz M sind (s. z.B. [MS88, Kapitel III] – dort in einer allgemeineren Situation).

- Sämtliche Kohomologiearten lassen sich auch über $\mathbb{C}$ als zugrundeliegendem Körper definieren. Da die reelle Kohomologie immer ein reeller Vektorraum ist, können wir einfach $H^i(M; \mathcal{F}) \otimes \mathbb{C}$, bzw. $\bar{H}^i(M; \mathcal{F}) \otimes \mathbb{C}$ als Definition der komplexen Kohomologie betrachten.
- Lokal, d.h. in einer kleinen offenen Menge $U \subseteq M$, kann $\Omega_{\mathcal{F}}(U)$ nach Wahl einer Basis $\omega_1, \dots, \omega_p$ von $T^*\mathcal{F}$ identifiziert werden mit:

$$\Omega_{\mathcal{F}}^k(U) = \left\{ \sum f \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} \mid f \in C^\infty(U), 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p \right\}.$$

Nun untersuchen wir den Fall aus 2.1.5. Dort ist eine Blätterung der homogenen Mannigfaltigkeit $\Gamma \backslash G$ gegeben durch eine Untergruppe P der Lie-Gruppe G . Die Blätter dieser Blätterung sind von der Form ΓgP mit $g \in G$. In diesem Fall können wir durch einen direkten Vergleich der Blätterungskohomologie mit der Lie-Algebren-Kohomologie den folgenden Satz beweisen.

2.4.5 Satz: Sei $(M, \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ eine Blätterung der homogenen Mannigfaltigkeit $M := \Gamma \backslash G$, die durch eine Unteralgebra $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{g}$ wie in 2.1.5 beschrieben induziert wird. Dann gibt es für alle $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ einen natürlichen Isomorphismus zwischen der Blätterungskohomologie und der Lie-Algebren-Kohomologie

$$H^i(M; \mathcal{F}(\mathfrak{p})) \cong H^i(\mathfrak{p}; C^\infty(M)).$$

Dieser Zusammenhang wurde in [DS01] von Deninger und Singhof festgestellt.

Wir werden diesen Satz später benutzen, um die Kohomologie der Blätterungen aus Beispiel 2.1.5 für den Fall zu bestimmen, daß G nilpotent ist.

Ein weiterer Schritt wird dann darin bestehen, die Klassen in der Kohomologie mit den harmonischen Formen vergleichen, also eine Art Hodge-Theorie von Blätterungen zu untersuchen. Dazu beschreiben wir zuerst, wie wir einen blattweise Hodge-Stern-Operator $\star_{\mathcal{F}}$ herleiten können und untersuchen die Beziehungen von $\star_{\mathcal{F}}$ mit dem Stern-Operator $\star$ auf der ganzen Mannigfaltigkeit.

2 Blätterungen

Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Blätterung $\mathcal{F}$. Die obige Zerlegung des Tangentialbündels in transversale und tangentiale Vektoren $TM \cong T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{F}^\perp$ liefert eine Zerlegung der äußeren Algebra des Kotangentialbündels von M . Es ist

$$\Lambda^k T^*M \cong \bigoplus_{i+j=k} \Lambda^i T^*\mathcal{F} \otimes \Lambda^j T^*\mathcal{F}^\perp.$$

Wir definieren $\Lambda^{i,j} T^*M := \Lambda^i T^*\mathcal{F} \otimes \Lambda^j T^*\mathcal{F}^\perp$. Für die glatten Differentialformen auf M erhalten wir damit eine Zerlegung $\Omega^k(M) = \bigoplus_{i+j=k} \Omega^{i,j}(M)$ mit

$$\Omega^{i,j}(M) := \Gamma(M, \Lambda^{i,j} T^*M) \cong \Gamma(M, \Lambda^i T^*\mathcal{F}) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(M, \Lambda^j T^*\mathcal{F}^\perp).$$

Dabei ist $\Omega^{k,0}(M) \cong \Omega_{\mathcal{F}}^k(M)$. Wir werden diese beiden Mengen in Zukunft miteinander identifizieren. Entsprechend definieren wir für offene Teilmengen $U \subseteq M$ die Menge der lokalen Differentialformen $\Omega^{i,j}(U)$.

Im folgenden wählen wir eine lokale Koordinaten-Darstellung von M in einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$. Bezüglich dieser Koordinatendarstellung können wir die geblätterte Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{F})$ in U transversal und tangential orientieren, also eine Orientierung auf $TU \cap T\mathcal{F}$ und eine Orientierung auf $TU \cap T\mathcal{F}^\perp$ wählen. Aus diesen Orientierungen erhalten wir auf U einen tangentialen Hodge-Stern-Operator $\star_{\mathcal{F}}$ und einen transversalen Hodge-Stern-Operator $\star_\perp$ auf den Einschränkungen $\Gamma(U, \Lambda^k T^*\mathcal{F})$ und $\Gamma(U, \Lambda^k T^*\mathcal{F}^\perp)$ von $\Omega^{k,0}(M)$ bzw. $\Omega^{0,k}(M)$.

Nun können wir die Teilmenge U der Mannigfaltigkeit M so orientieren, daß die Volumenform von M auf U gegeben ist durch $\text{vol} = \star_{\mathcal{F}}(1) \wedge \star_\perp(1)$. Wir erhalten dann in U einen Stern-Operator $\star: \Omega^k(U) \longrightarrow \Omega^{n-k}(U)$. Eine direkte Berechnung zeigt, daß eine Einschränkung dieses Stern-Operators auf den direkten Summanden $\Omega^{i,j}(U)$ bis auf das Vorzeichen mit $\star_{\mathcal{F}} \otimes \star_\perp$ übereinstimmt. Dieses Vorzeichen wird in [ALK01], Lemma 3.2 bzw. in [ALT91], Lemma 4.8 konkret angegeben.

Im folgenden gehen wir von der Situation aus, daß wir die oben beschriebene Konstruktion auf ganz M fortsetzen können, daß also die geblätterte

Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{F})$ transversal und tangential orientierbar ist. Wir erhalten dann einen tangentialen Hodge-Stern-Operator $\star_{\mathcal{F}}$ und einen transversalen Hodge-Stern-Operator $\star_{\perp}$ auf ganz M . Insbesondere die von uns untersuchten Blätterungen sind tangential und transversal orientierbar.

2.4.6 Bemerkung: Wir wählen eine Basis $X_1, \dots, X_n$ von $\mathfrak{g}$, so daß die Unteralgebra $\mathfrak{p}$ von $X_1, \dots, X_p$ erzeugt wird. Die zu dieser Basis gehörenden kanonischen Vektorfelder, die wir in 1.3.8 konstruiert haben, liefern eine kanonische Metrik auf $T\mathcal{F}$. Mit dieser Metrik erhalten wir insbesondere eine Orientierung von $T\mathcal{F}$ und eine Orientierung von $T\mathcal{F}^{\perp}$.

Mit dem Hodge-Stern-Operator von M läßt sich ein Skalarprodukt auf den tangentialen Formen $\Omega_{\mathcal{F}}^k(M) = \Omega^{k,0}(M)$ konstruieren durch

$$\langle \omega, \omega' \rangle := \int_M \omega \wedge \star(\omega').$$

Aus unserer Wahl der Orientierung von M folgt für $\omega, \omega' \in \Omega^{k,0}(M) \cong \Omega_{\mathcal{F}}^k(M)$:

$$\langle \omega, \omega' \rangle = \int_M \star_{\perp}(1) \wedge \omega \wedge \star_{\mathcal{F}}(\omega')$$

Die zu $d_{\mathcal{F}}^k$ bezüglich dieses Skalarproduktes auf $\Omega_{\mathcal{F}}^k(M)$ adjungierte Abbildung $\delta_{\mathcal{F}}^k$ erhalten wir wie in der klassischen Hodge-Theorie (s. z.B. [Poo81, Kapitel IV]) für eine tangential Differentialform $\omega \in \Omega^{k,0}(M) \cong \Omega_{\mathcal{F}}^k(M)$ durch $\delta_{\mathcal{F}}^k(\omega) = (-1)^{nk+n+1} \star^{n-k+1} d_{\mathcal{F}}^{p-k} \star^k(\omega)$. Unter gewissen Voraussetzungen können wir in dieser Formel den Hodge-Stern-Operator auf M durch den tangentialen Stern-Operator $\star_{\mathcal{F}}$ ersetzen.

2.4.7 Satz: Die Bezeichnungen seien wie oben. Außerdem gelte $d(\star_{\perp}(1)) = 0$. Dann ist mit $\omega \in \Omega_{\mathcal{F}}^k(M)$:

$$\delta_{\mathcal{F}}^k(\omega) = (-1)^{pk+p+1} \star_{\mathcal{F}} d_{\mathcal{F}} \star_{\mathcal{F}}(\omega).$$

Beweis: Der Beweis ist eine einfache Rechnung. Er befindet sich in [ALK01, Abschnitt 3]. $\square$

2 Blätterungen

In zwei für unsere Betrachtungen ausschlaggebende Situationen ist die Gleichung $d(\star_\perp(1)) = 0$ erfüllt.

2.4.8 Lemma:

- (i) Sei M eine kompakte Riemannsche Blätterung und $\mathcal{F}$ eine Riemannsche Blätterung von M versehen mit einer bündelartigen Metrik g . Den transversalen Hodge-Operator bzgl. dieser Metrik bezeichnen wir mit $\star_\perp$. Dann ist $d(\star_\perp(1)) = 0$.
- (ii) Sei G eine nilpotente Lie-Gruppe und Γ eine Gitter von G . Sei $\mathfrak{p}$ eine Unteralgebra der zu G gehörenden Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Die Unteralgebra $\mathfrak{p}$ induziert auf $\Gamma \backslash G$ wie in 2.1.5 beschrieben eine Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$. Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ und sei g die von dieser Basis induzierte kanonische Metrik auf $\Gamma \backslash G$. Dann gilt für den zu dieser Metrik gehörenden transversalen Hodge-Stern-Operator $d(\star_\perp(1)) = 0$.

Beweis: Der erste Teil des obigen Lemmas folgt direkt, für den zweiten Teil benötigen wir nur eine kleine Berechnung. Wir können o.B.d.A. voraussetzen, daß die Elemente $X_1, \dots, X_p$ die Unteralgebra $\mathfrak{p}$ erzeugen. Dann ist $\star_\perp(1) = \omega_{p+1} \wedge \dots \wedge \omega_n$, wobei $\omega_1, \dots, \omega_n$ die zu $X_1, \dots, X_n$ duale Basis von 1-Formen bezeichnet. Es folgt

$$\begin{aligned}
 & d(\omega_{p+1} \wedge \dots \wedge \omega_n) \\
 &= \sum_{k=p+1}^n (-1)^{k-p} (d\omega_k) \wedge \omega_{p+1} \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_k \wedge \dots \wedge \omega_n \\
 &= \sum_{k=p+1}^n (-1)^{k-p} \left(\sum_{i < j} \alpha_{ij}^k \omega_i \wedge \omega_j \right) \wedge \omega_{p+1} \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_k \wedge \dots \wedge \omega_n.
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen die α_{ij}^k die Strukturkonstanten von $\mathfrak{g}$ bezüglich der von uns gewählten Basis, es ist also $[X_i, X_j] = \sum_k \alpha_{ij}^k X_k$.

Da $\mathfrak{g}$ nilpotent ist, ist $\alpha_{ik}^k = \alpha_{kj}^k = 0$ für alle $1 \leq i, j, k \leq n$. Da $\mathfrak{p}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist, ist $\alpha_{ij}^k = 0$ für alle $1 \leq i, j \leq p$ und $p < k \leq n$. Also folgt unter den gegebenen Voraussetzungen, daß $d(\omega_{p+1} \wedge \dots \wedge \omega_n) = 0$ ist. $\square$

Wir werden also in den genannten Fällen $\delta_{\mathcal{F}}^k$ immer mit den tangentialen Hodge-Stern-Operator berechnen können.

Zurück zur allgemeinen Situation. Mit den Abbildungen $d_{\mathcal{F}}^k$ und $\delta_{\mathcal{F}}^k$ können wir nun den blattweisen Laplace-Operator definieren, sowie den Begriff der tangential harmonischen Formen einführen.

2.4.9 Definition: Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Blätterung $\mathcal{F}$. Der (blattweise) *Laplace-Operator* wird definiert als $\Delta_{\mathcal{F}} = d_{\mathcal{F}}\delta_{\mathcal{F}} + \delta_{\mathcal{F}}d_{\mathcal{F}}$. Die Formen, die im Kern des Laplace-Operators $\Delta_{\mathcal{F}}$ liegen, heißen *tangential harmonische* Formen.

Wir werden in Zukunft den Zusatz *tangential* einfach weglassen und die tangential harmonischen Formen nur noch *harmonische Formen* nennen.

Kacimi-Alaoui und Hector zeigen in [EKAH86], daß bei Riemannschen Blätterungen kompakter Mannigfaltigkeiten eine Hodge-Zerlegung der basischen Kohomologie existiert, d.h. für alle Kohomologieklassen gibt es genau einen harmonischen Repräsentanten. Der Beweis verwendet die von Molino ([Mol82]) entwickelte Strukturtheorie Riemannscher Blätterungen. Außerdem beweisen Kacimi-Alaoui, Sergiescu und Hector in [EKASH85], daß die basische Kohomologie Riemannscher Blätterungen kompakter Mannigfaltigkeiten immer endlichdimensional ist; ein Resultat, das die Autoren nicht aus der Hodge-Zerlegung herleiteten, wie es vor ihnen von anderen, z.B. Reinhart versucht worden ist.

Die von uns betrachtete, reduzierte Blätterungskohomologie kann jedoch auch für Riemannsche Blätterungen kompakter Mannigfaltigkeiten unendlichdimensional sein. Doch Alvarez-Lopez und Kordyukov zeigen in [ALK01], daß im Fall einer Riemannschen Blätterungen die reduzierte Kohomologie immer eine Hodge-Zerlegung zuläßt. Dies ist i.a. falsch, wenn die untersuchte Blätterung nicht Riemannsch ist. Wir werden sehen, daß die Blätterungen aus 2.1.5 eine ganze Klasse von Gegenbeispielen liefern. Zuerst formulieren wir jedoch den Satz von Alvarez-Lopez und Kordyukov.

2 Blätterungen

2.4.10 Satz: Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{F}$ eine Riemannsche Blätterung von M . Es existiert also eine bündelartige Metrik auf $(M, \mathcal{F})$. Jede bündelartige Metrik auf M liefert eine blattweise Hodge-Zerlegung

$$\Omega_{\mathcal{F}}^k(M) = \text{Kern } \Delta_{\mathcal{F}}^k \oplus \overline{\text{Bild } \Delta_{\mathcal{F}}^k}.$$

Beweisidee: Der Beweis von Alvarez-Lopez und Kordyukov basiert auf einer Untersuchung des blattweisen Wärmeleitungsoperators $e^{-t\Delta_{\mathcal{F}}^k}$. Roe zeigt in [Roe87], daß für jede Blätterung eine anfänglich glatte Form $\omega \in \Omega_{\mathcal{F}}^k(M)$ für alle $t \geq 0$ auf eine glatte Form $e^{-t\Delta_{\mathcal{F}}^k}\omega$ abgebildet wird. Alvarez-Lopez und Kordyukov zeigen in [ALK01], daß für Riemannsche Blätterungen dies auch noch für $t = \infty$, also nach unendlicher Zeit richtig ist. Außerdem zeigten sie, daß dieser Operator für $t = \infty$ die orthogonale Projektion auf den Kern des blattweisen Laplace-Operators $\Delta_{\mathcal{F}}^k$ liefert und daß daraus die gesuchte Hodge-Zerlegung folgt. $\square$

Der Satz von Alvarez-Lopez setzt die Existenz einer bündelartigen Metrik auf der Blätterung voraus, d.h. die untersuchte Blätterung $(M, \mathcal{F})$ muß Riemannsch sein.

Wir werden sehen, daß bei den von uns untersuchten Beispielen von Blätterungen diese Voraussetzung auch wirklich notwendig ist; die von uns untersuchten Blätterungen lassen i.a. keine Hodge-Zerlegung zu, wenn sie nicht Riemannsch sind.

Eine wichtige Konsequenz aus dem oben zitierten Satz ist das folgende Korollar, das eine Poincaré-Dualität der reduzierten Blätterungskohomologie liefert. Es ist das Korollar C von [ALK01].

2.4.11 Korollar: Sei M eine kompakte, Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\mathcal{F}$ eine Riemannsche Blätterung von M der Dimension p . Wir versehen $(M, \mathcal{F})$ mit einer bündelartigen Metrik g und erhalten einen tangentialen Hodge-Stern-Operator $\star_{\mathcal{F}}$. Der Stern-Operator $\star_{\mathcal{F}}$ induziert einen Isomorphismus

$$\bar{H}^i(M; \mathcal{F}) \cong \bar{H}^{p-i}(M; \mathcal{F}).$$

Wir werden später die Dimension der obersten reduzierten Blätterungskohomologie der von uns untersuchten Blätterungen berechnen, also $\bar{H}^p(M; \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$. Das Korollar 2.4.11 liefert für die oberste Kohomologie einen Isomorphismus $\bar{H}^p(M; \mathcal{F}(\mathfrak{p})) \cong \bar{H}^0(M; \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ für den Fall, daß $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ Riemannsch ist. In der folgenden Bemerkung sehen wir, wie sich die nullte reduzierte Kohomologie berechnen läßt.

2.4.12 Bemerkung: Sei M eine zusammenhängende, kompakte, Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\mathcal{F}$ eine Blätterung auf M . Die nullte reduzierte Blätterungskohomologie besteht genau aus den glatten Funktionen $\xi \in C^\infty(M)$, die konstant in Blattrichtung sind. Wenn die Blätterung $\mathcal{F}$ ein dichtes Blatt in M besitzt, dann folgt offensichtlich, daß für die Dimension der nullten reduzierten Kohomologie $\dim \bar{H}^0(M; \mathcal{F}) = 1$ gelten muß.

Ist also die Blätterung $(M, \mathcal{F})$ Riemannsch und enthält ein in M dichtes Blatt, so folgt mit Korollar 2.4.11, daß die oberste reduzierte Blätterungskohomologie eindimensional ist.

Auslander, Green und Hahn beweisen in [AGH63] den folgenden Satz über eindimensionale Blätterungen, der eine äquivalente Bedingung dazu gibt, daß $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ ein dichtes Blatt in $\Gamma \backslash G$ besitzt.

2.4.13 Satz: Sei $\mathfrak{p}$ eine Unteralgebra der nilpotenten Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Sei G die zu $\mathfrak{g}$ gehörende Lie-Gruppe und Γ ein Gitter von G . Dann besitzt die Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ von $\Gamma \backslash G$ genau dann ein dichtes Blatt in $\Gamma \backslash G$, wenn die von $\mathfrak{p}$ induzierte Blätterung auf dem Torus $\bar{\Gamma} \backslash \bar{G}$ ein dichtes Blatt besitzt. Dabei bezeichne $\bar{G}$ die zu $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ gehörende Lie-Gruppe und $\bar{\Gamma}$ das von Γ induzierte Gitter von $\bar{G}$.

2.4.14 Bemerkung:

- (i) Sei $G = \mathbb{R}^n$ und $\Gamma \subseteq G$ ein Gitter von G . Die zu Γ gehörende Lie-Algebra sei erzeugt von $X_1, \dots, X_n$. Ist $\mathfrak{p}$ eine eindimensionale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, so besitzt die von $\mathfrak{p}$ induzierte Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ des n -dimensionalen

2 Blätterungen

Torus $\Gamma \backslash G$ genau dann ein dichtes Blatt, wenn $\mathfrak{p}$ von $a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ erzeugt wird, wobei $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind.

- (ii) Besitzt die Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ ein dichtes Blatt in $\Gamma \backslash G$, so ist jedes Blatt von $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ dicht in $\Gamma \backslash G$. Dies gilt offensichtlich, falls $\Gamma \backslash G$ ein Torus ist und somit auch im allgemeinen Fall.

2.4.15 Beispiel: Sei G die Heisenberggruppe und Γ das Standard-Gitter von G . Die Gruppe G kann als die Gruppe der 3x3-Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } x, y, z \in \mathbb{R}$$

versehen mit dem üblichen Matrizenprodukt aufgefaßt werden, und das Gitter Γ besteht gerade aus den obigen Matrizen mit ganzzahligen Einträgen. Die zu $\mathfrak{g}$ gehörende Lie-Algebra ist erzeugt von Elementen $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ mit $[X, Y] = Z$ und Z erzeugt das Zentrum von $\mathfrak{g}$. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann besitzt die Blätterung, die durch die eindimensionale Unteralgebra $\mathfrak{p} = \mathbb{R}(aX + bY + cZ)$ auf $\Gamma \backslash G$ induziert wird nach Satz 2.4.13 genau dann ein dichtes Blatt in $\Gamma \backslash G$, wenn a und b linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind.

Deninger und Singhof zeigen in [DS01], daß, falls ein dichtes Blatt von $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ in $\Gamma \backslash G$ existiert, die reduzierte Blätterungskohomologie $\bar{H}^1(\Gamma \backslash G; \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ unendlichdimensional ist. Außerdem zeigen sie, daß diese Blätterungen keine Hodge-Zerlegung wie in Satz 2.4.10 zulassen. Somit können solche Blätterungen nicht Riemannsch sein.

3 Die Darstellungstheorie nilpotenter Lie-Algebren

Wir haben im vorigen Kapitel ein notwendiges und hinreichendes Kriterium hergeleitet, mit dem wir untersuchen können, wann die dort beschriebenen Blätterungen der homogenen Mannigfaltigkeiten eine kanonische, bündelartige Metrik besitzen. Unser nächstes Ziel soll es sein zu untersuchen, ob die Hodge-Zerlegung, die wir mit dem Satz von Alvarez-Lopez und Kordyukov (Satz 2.4.10) für Riemannsche Blätterungen erhalten, auch auf den Blätterungen möglich ist, die keine kanonische bündelartige Metrik besitzen.

Dazu müssen wir die Blätterungskohomologie und die harmonischen Formen der Blätterungen miteinander vergleichen. Im Fall, daß $\mathfrak{g}$ die Heisenberg-Algebra ist, entwickelten Deninger und Singhof in [DS01] ein Verfahren zur Bestimmung der Dimension der reduzierten Blätterungskohomologie, das sich auch in der Situation beliebiger nilpotenter Lie-Algebren anwenden läßt. Wir werden die Blätterungskohomologie mit Hilfe der Lie-Algebren-Kohomologie bestimmen. Diese Kohomologie läßt sich wiederum durch die Berechnung der irreduziblen Komponenten bestimmen.

Später werden wir noch genauer sehen, warum eine Beschränkung auf nilpotente Lie-Algebren bei unserer Vorgehensweise notwendig ist. Der Grund liegt darin, daß sich die komplexe Kohomologie $H^*(\mathfrak{p}; C^\infty(\Gamma \backslash G, \mathbb{C}))$ für nilpotente Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ in eindeutiger und berechenbarer Weise in irreduzible Komponenten zerlegen läßt.

3 Die Darstellungstheorie nilpotenter Lie-Algebren

Wir haben in Bemerkung 1.4.1 gesehen, daß

$$H^*(\mathfrak{p}; C^\infty(\Gamma \backslash G)) \otimes \mathbb{C} \cong H^*(\mathfrak{p}; C^\infty(\Gamma \backslash G, \mathbb{C}))$$

ist. Im folgenden interpretieren wir alle Funktionenräume als Räume komplexwertiger Funktionen. Wir schreiben also z.B. abkürzend $C^\infty(\Gamma \backslash G)$ für $C^\infty(\Gamma \backslash G, \mathbb{C})$, oder $L^2(\mathbb{R}^k)$ für $L^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{C})$ und berechnen die komplexe Lie-Algebren-Kohomologie von $\mathfrak{p}$.

3.1 Die Kirillov-Zerlegung

Mit der Kirillov-Zerlegung (s. [Kir62]) erhalten wir eine Zerlegung nilpotenter Lie-Algebren mit eindimensionalem Zentrum. Diese Zerlegung spielt in den Beweisen der Sätze von Richardson in [Ric71] und Kirillov in [Kir62] über unitäre Darstellungen eine zentrale Rolle. Sowohl Kirillov als auch Richardson führen in den Beweisen zu ihren Sätzen den Fall einer allgemeinen nilpotenten Lie-Algebra mit Induktionsbeweisen auf den einer nilpotenten Lie-Algebra mit eindimensionalem Zentrum zurück und benutzen dann die Kirillov-Zerlegung, um ihre Aussagen in der einfachsten Situation zu zeigen.

Zuerst erweitern wir den Begriff der aufsteigenden Zentralreihe, indem wir weitere Ideale zwischen den einzelnen Folgengliedern der Zentralreihe zulassen.

3.1.1 Bemerkung: Eine Lie-Algebra ist genau dann nilpotent, wenn es eine beliebige Folge von Idealen $\mathfrak{g}_i$ gibt ($1 \leq i \leq m$) mit

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_m \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}_0 = \{0\},$$

so daß $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.

Die Kirillov-Zerlegung ist eine direkte Konsequenz aus dieser Umformulierung des Begriffs der nilpotenten Lie-Algebra. Der Beweis, den wir aus [Kir62] zitieren, veranschaulicht diesen Zusammenhang recht gut. Außerdem werden wir die verwendete Argumentation noch einmal an anderer Stelle verwenden.

3.1.2 Kirillov-Zerlegung: Sei $\mathfrak{g}$ eine nilpotente Lie-Algebra mit 1-dimensionalem Zentrum. Dann gibt es eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Y \oplus \mathbb{R}Z \oplus \mathfrak{w},$$

wobei Z das Zentrum $Z(\mathfrak{g})$ erzeugt und für die Basiselemente X, Y und Z gilt: $[X, Y] = Z$, sowie $[W, Y] = 0$ für alle $W \in \mathfrak{w}$.

Beweis: Da $\mathfrak{g}$ nilpotent ist, finden wir wie oben eine Folge von Idealen $\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{g}_m = \mathfrak{g}$ mit $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1}$. Dabei können wir o.B.d.A. annehmen, daß $\dim(\mathfrak{g}_{i+1}) - \dim(\mathfrak{g}_i) = 1$ ist. Es existiert also insbesondere ein zweidimensionales Ideal $\mathfrak{g}_2$ mit $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_2] \subseteq Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_1$. Sei $Z \in Z(\mathfrak{g})$ ein Erzeugendes des Zentrums und $Y \in \mathfrak{g}_2$ ein weiteres Element, so daß $\mathfrak{g}_2$ von Z und Y erzeugt wird. Da $Y \notin Z(\mathfrak{g})$ ist, gibt es ein $X \in \mathfrak{g}$, für das $[X, Y] = Z$ gilt. Sei $Z(Y) := \{V \in \mathfrak{g} \mid [V, Y] = 0\}$ der Teilraum von $\mathfrak{g}$, der alle Elemente enthält, die mit Y kommutieren. Dann ist $Z(Y) = \mathbb{R}Y \oplus Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{w}$ und es bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus Z(Y)$ ist.

Für alle $V \in \mathfrak{g}$ liegt $[V, Y]$ im Zentrum $Z(\mathfrak{g})$, ist also von der Form tZ , wobei der Faktor $t \in \mathbb{R}$ ist. Also kommutiert $V - tX$ mit Y und liegt somit in $Z(Y)$. Folglich gibt es ein $V_0 \in Z(Y)$, so daß $V = tX + V_0$ ist. $\square$

Wenn wir ein Gitter Γ von G gewählt haben, so können wir eine Basis von $\mathfrak{w}$ mit rationalen Strukturkonstanten bezüglich $\log \Gamma \cap \mathfrak{w}$ wählen. Insbesondere erhalten wir somit eine Basis von $Z(Y) = \{V \in \mathfrak{g} \mid [V, Y] = 0\}$ mit rationalen Strukturkonstanten bezüglich $\log \Gamma \cap Z(Y)$.

3.2 Unitäre Darstellungen

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung von Lie-Gruppen sind die unitären Darstellungen. Zuerst die grundlegenden Definitionen. Eine ausführliche Einführung in die Theorie unitärer Darstellung von nilpotenten Lie-Gruppen, aus der wir im folgenden auch oft zitieren werden, befindet sich z.B. in [CG90].

3.2.1 Definition: Sei G eine Lie-Gruppe.

- (1) Eine *unitäre* Darstellung π von G ist ein Homomorphismus von G in die Gruppe aller unitären Transformationen eines Hilbertraumes $\mathcal{H}_\pi$, wobei für alle $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ die Abbildung $g \mapsto (\pi(g))(\xi)$ eine stetige Abbildung von G nach $\mathcal{H}_\pi$ ist.
- (2) Zwei unitäre Darstellungen π und π' heißen *äquivalent*, wenn es einen invertierbaren linearen Operator $A: \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_{\pi'}$ gibt, so daß $\pi(g) = A^{-1}\pi'(g)A$ für alle $g \in G$ ist.
- (3) Ein *invarianter Teilraum* für eine Darstellung π ist ein Vektorraum V mit $\pi(g)V \subseteq V$ für alle $g \in G$. Die Darstellung π heißt *irreduzibel* genau dann, wenn es keinen invarianten Teilraum außer $\{0\}$ und $\mathcal{H}_\pi$ gibt.

Wir betrachten in dieser Arbeit ausschließlich unitäre Darstellungen. Deshalb werden wir im folgenden auch abkürzend einfach nur *Darstellung* schreiben, wenn wir unitäre Darstellung meinen.

Zur Bestimmung irreduzibler unitärer Darstellungen verwendet Kirillov die folgenden fundamentalen Sätze über unitäre Operatoren. Mit dem Lemma von Schur läßt sich bestimmen, worauf irreduzible Operatoren das Zentrum einer Lie-Gruppe abbilden und mit dem Satz von Stone und von Neumann können wir berechnen, worauf die Elemente $g, h \in G$ abgebildet werden, deren Kommutator im Zentrum von G liegt.

3.2.2 Lemma von Schur: Seien π, π' zwei irreduzible unitäre Darstellungen von G und $A: \mathcal{H}_{\pi'} \longrightarrow \mathcal{H}_\pi$ ein linearer beschränkter Operator, so daß $A\pi(g) = \pi'(g)A$ für alle $g \in G$ gilt.

Wenn π und π' nicht äquivalent zueinander sind, dann ist $A = 0$. Wenn π und π' äquivalent zueinander sind, dann ist die Operation A eindeutig bis auf die Multiplikation mit einer komplexen Zahl durch die obige Gleichung gegeben. Insbesondere folgt, wenn $\pi = \pi'$ ist, daß es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $A = e^{2\pi i \lambda} E$ gilt, wobei E der Identitätsoperator ist.

Der Beweis veranschaulicht noch einmal die oben definierten Begriffe. Er ist

nur eine leichte Abänderung eines Beweises aus [Zel73].

Beweis: Wenn $A \neq 0$ ist, dann folgt, daß $\text{Kern}(A) \neq \mathcal{H}_{\pi'}$ und $\text{Bild}(A) \neq \{0\}$ ist. Der Kern und das Bild von A ist offensichtlich invariant in $\mathcal{H}_{\pi'}$, bzw. $\mathcal{H}_{\pi}$. Da π und π' irreduzibel sind, muß also $\text{Kern}(A) = \{0\}$ und $\text{Bild}(A) = \mathcal{H}_{\pi'}$ sein. Somit ist der Operator A eine Bijektion zwischen $\mathcal{H}_{\pi'}$ und $\mathcal{H}_{\pi}$. Deshalb existiert ein inverser Operator A^{-1} und es gilt $\pi' = A\pi A^{-1}$, d.h. die Darstellungen π und π' sind zueinander äquivalent.

Wir müssen nun nur noch zeigen, daß für äquivalente Darstellungen π und π' der Operator A eindeutig bis auf eine Multiplikation mit einer komplexen Zahl $\mu \in S^1 \subset \mathbb{C}$ vom Betrag 1 ist.

Wenn π und π' äquivalent zueinander sind, so können wir $\mathcal{H}_{\pi}$ und $\mathcal{H}_{\pi'}$ miteinander identifizieren. Seien A und B zwei beschränkte lineare Operatoren, so daß $A\pi = \pi'A$ und $B\pi = \pi'B$ gilt. Dann erfüllt für beliebige $\mu \in \mathbb{C}$ mit Betrag 1 der Operator $C_{\mu} := B - \mu A$ die Gleichung $C_{\mu}\pi = \pi'C_{\mu}$ und ist beschränkt. Wie wir oben gesehen haben, ist entweder $C_{\mu} = 0$, oder es gibt einen inversen Operator C_{μ}^{-1} . Aber wenn μ_0 eine Nullstelle der Gleichung $\det(B - \mu A) = 0$ ist, dann ist C_{μ_0} ein singulärer Operator. Somit ist $C_{\mu_0} = 0$ und $B = \mu_0 A$. Wir wählen $\lambda \in \mathbb{R}$ so, daß $\mu_0 = e^{2\pi i \lambda}$ ist. $\square$

Mit dem letzten Teil des Lemmas sehen wir, daß jeder lineare beschränkte Operator A , der mit allen Operationen einer irreduziblen Darstellung π kommutiert, ein Vielfaches des Identitäts-Operators ist.

Mit dem Satz von Stone und von Neumann werden wir bestimmen, worauf eine irreduzible Darstellung die Elemente g und $h \in G$ mit $ghg^{-1}h^{-1} \in Z(G)$ abbildet. Auch hier sei wieder z.B. auf [Kir62] oder [CG90, Kapitel 2] als Quelle verwiesen. An beiden Stellen findet sich auch ein Beweis.

3.2.3 Satz von Stone und von Neumann: Seien π_1 und π_2 zwei unitäre Darstellungen von $\mathbb{R}$, die beide auf demselben Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\pi_1} = \mathcal{H}_{\pi_2}$ operieren. Außerdem gebe es ein $\lambda \neq 0$, so daß für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\pi_1(x)\pi_2(y)\pi_1(x)^{-1} = e^{2\pi i \lambda xy}\pi_2(y).$$

3 Die Darstellungstheorie nilpotenter Lie-Algebren

Dann zerfällt $\mathcal{H}$ in eine direkte Summe von Teilräumen, die invariant und irreduzibel unter der Operation von π_1 und π_2 sind. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots$

Für jeden Summanden $\mathcal{H}_k$ gibt es eine Isometrie $J_k: \mathcal{H}_k \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$, die die Darstellungen π_1 und π_2 äquivalent auf Darstellungen $\tilde{\pi}_1$ und $\tilde{\pi}_2$ abbildet. Diese Darstellungen operieren auf $L^2(\mathbb{R})$ durch:

$$\tilde{\pi}_1(x)\xi(t) = \xi(t+x) \quad \tilde{\pi}_2(y)\xi(t) = e^{2\pi i \lambda y t} \xi(t).$$

Bestimmen wir zur Veranschaulichung der Anwendung der obigen Sätze die irreduziblen Darstellungen der einfachsten nilpotenten, nichtabelschen Lie-Gruppe, der Heisenberg-Gruppe.

3.2.4 Beispiel: Sei G die dreidimensionale Heisenberggruppe. Dies ist die Gruppe der oberen reellen 3x3-Matrizen mit dem üblichen Matrixprodukt. Ihre Elemente sind von der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die zu G gehörende Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist gegeben durch die Erzeugenden X , Y und Z und deren Lie-Klammern $[X, Y] = Z$ und $[X, Z] = [Y, Z] = 0$. Wir können mit dem Satz von Stone und von Neumann und mit dem Lemma von Schur sämtliche irreduziblen Darstellungen der zu $\mathfrak{g}$ gehörenden Lie-Gruppe G bestimmen. Dabei bezeichnen wir mit Kleinbuchstaben $x := \exp X$, $y := \exp Y$ und $z := \exp Z$ die zur Basis von $\mathfrak{g}$ gehörenden Elemente in G . Mit der Campbell-Baker-Hausdorff-Formel 1.2.2 ergeben sich für die Produkte in G die entsprechenden Formeln aus den Lie-Klammern in $\mathfrak{g}$.

Sei π eine beliebige irreduzible Darstellung. Da Z das Zentrum von $\mathfrak{g}$ erzeugt, kommutiert der Operator $\pi(z)$ mit allen anderen Operatoren $\pi(g)$ für beliebige $g \in G$. Nach dem Lemma von Schur gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß $\pi(z) = e^{2\pi i \lambda} E$ ist. Da π ein Homomorphismus ist, folgt mit $c \in \mathbb{R}$, daß $\pi(e^{cZ}) = e^{2\pi i \lambda c} E$ ist.

Wenn $\lambda = 0$ ist, so ist auch $\pi(z) = \pi(x)\pi(y)\pi(x)^{-1}\pi(y)^{-1} = E$. Wir können also wieder das Lemma von Schur anwenden und erhalten, daß es Konstanten

$\mu \in \mathbb{R}$ und $\nu \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\pi(e^{aX}) = e^{2\pi i \mu a} E, \quad \pi(e^{bY}) = e^{2\pi i \nu b} E, \quad \pi(e^{cZ}) = E.$$

Wenn $\lambda \neq 0$ ist, so können wir den Satz von Stone und von Neumann anwenden. Wir interpretieren dazu die Operationen der von e^X bzw. e^Y erzeugten einparametrischen Untergruppen $\pi(e^{aX})$ und $\pi(e^{bY})$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ auf $\mathcal{H}_\pi$ als Darstellungen von $\mathbb{R}$. Diese Darstellungen erfüllen die Bedingung aus dem obigen Satz. Somit ist für $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ die Operation $\pi(e^{aX})$ äquivalent zu der Operation $\xi(t) \mapsto \xi(t+a)$ und $\pi(e^{bY})$ ist äquivalent zu $\xi(t) \mapsto e^{2\pi i \lambda b t} \xi(t)$ auf $L^2(\mathbb{R})$.

Also ist für jede irreduzible Darstellung π die Operation auf $\mathcal{H}_\pi$, die gegeben ist durch $\pi(\exp(aX + bY + cZ))$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, äquivalent zu der Operation auf $L^2(\mathbb{R})$, die gegeben ist durch:

$$\xi(t) \mapsto \exp\left(2\pi i \lambda \left(c + bt + \frac{bc}{2}\right)\right) \xi(t+a).$$

Wir werden später mit der Kirillov-Theorie ein allgemeiner anwendbares Werkzeug bekommen, um die irreduziblen Darstellungen nilpotenter Liegruppen zu bestimmen. Diese Theorie baut jedoch auf dem Lemma von Schur und dem Satz von Stone und von Neumann auf. Beliebige nilpotente Liegruppen werden auf Liegruppen mit eindimensionalem Zentrum zurückgeführt und diese werden dann in der oben beschriebenen Art und Weise untersucht.

3.3 Induktion

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wie das oben schon erwähnte Verfahren bei den Beweisen von Kirillov in [Kir62] und Richardson in [Ric71] funktioniert. Beide konstruieren Darstellungen ausgehend von Untergruppen niedrigerer Dimension. Wir werden also sehen, wie wir aus einer Darstellung einer Untergruppe eine Darstellung auf der gesamten Gruppe erhalten.

3 Die Darstellungstheorie nilpotenter Lie-Algebren

Sei K eine abgeschlossene Untergruppe der Lie-Gruppe G . Mit dem Verfahren der Induktion nach Mackey [Mac52] können wir aus einer Darstellung π von K in natürlicher Weise eine Darstellung von G erhalten.

In der folgenden Definition wird vorausgesetzt, daß der Quotient $K \backslash G$ ein rechtsinvariantes Maß besitzt. Dies ist z.B. immer dann der Fall, wenn wir zusätzlich noch voraussetzen, daß G nilpotent ist (s. [Rag72, Kapitel I]: nilpotente Lie-Gruppen sind unimodular und deshalb besitzen Quotienten nilpotenter Lie-Gruppen ein rechtsinvariantes Maß). Wenn der Quotient $K \backslash G$ kein rechtsinvariantes Maß besitzt, läßt sich immer noch eine induzierte Darstellung definieren. Dies ist jedoch mit einigen technischen Schwierigkeiten verbunden, die wir hier vermeiden können.

3.3.1 Definition: Sei K eine abgeschlossene Untergruppe von G und π eine unitäre Darstellung der Lie-Gruppe K . Die Darstellung σ operiere auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}_\sigma$, der aus allen Borel-meßbaren Vektorfunktionen $\xi: G \longrightarrow \mathcal{H}_\pi$ besteht, für die gilt:

- (i) $\xi(kx) = \pi(k)[\xi(x)]$ für alle $k \in K$.
- (ii) Nach Bedingung (i) ist $\|\xi(\cdot)\|_{\mathcal{H}_\pi}^2$ konstant auf Kg für alle $g \in G$ und kann somit als Abbildung $\tilde{\xi}$ auf dem Quotienten $K \backslash G$ aufgefaßt werden. Mit dieser Identifikation soll das Integral $\int_{K \backslash G} \|\xi(g)\| \, d\dot{g} = \int_{K \backslash G} \tilde{\xi}(Kg) \, d\dot{g}$ endlich sein, wobei $d\dot{g}$ das rechtsinvariante Maß auf $K \backslash G$ bezeichne.

Die Darstellung σ sei dann auf G definiert durch $\sigma(g)\xi(x) = \xi(xg)$ für alle $g \in G$ und $\xi \in \mathcal{H}_\sigma$. Wir schreiben $\text{Ind}(K \uparrow G, \pi) := \sigma$ und nennen diese Darstellung die von π *induzierte Darstellung* auf G .

Seien $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}_\sigma$ beliebig. Wie in Bedingung (ii) sehen wir, daß die Abbildung $g \mapsto \langle \xi_1(g), \xi_2(g) \rangle$ konstant auf Kg für alle $g \in G$ ist. Das innere Produkt von ξ_1 und ξ_2 auf $\mathcal{H}_\sigma$ ist mit der Identifikation aus (ii) gegeben durch

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \int_{K \backslash G} \langle \xi_1(g), \xi_2(g) \rangle \, d\dot{g}.$$

3.3.2 Grundlegende Eigenschaften:

- (1) Wenn die Darstellungen π und π' auf K äquivalent sind, so sind auch die Darstellungen $\text{Ind}(K \uparrow G, \pi)$ und $\text{Ind}(K \uparrow G, \pi')$ zueinander äquivalent.
- (2) $\text{Ind}(K \uparrow G, \bigoplus_i \pi_i)$ ist äquivalent zu $\bigoplus_i \text{Ind}(K \uparrow G, \pi_i)$. Insbesondere gilt: Wenn $\text{Ind}(K \uparrow G, \pi)$ irreduzibel ist, dann ist auch π irreduzibel. Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch.
- (3) *Induktion in Stufen:* Wenn $K \subseteq H \subseteq G$ abgeschlossene Untergruppen sind und π eine Darstellung von K ist, so folgt, daß die Darstellung $\text{Ind}(K \uparrow G, \pi)$ äquivalent zu $\text{Ind}(H \uparrow G, \text{Ind}(K \uparrow H, \pi))$ ist.

Ein wichtige Darstellung, die wir im folgenden noch genauer untersuchen werden, ist die reguläre Darstellung. Die reguläre Darstellung läßt sich durch Induktion wie folgt definieren.

3.3.3 Beispiel: Sei Γ ein Gitter von G und π die Darstellung auf Γ , die jedem Element den Identitätsoperator auf $\mathcal{H}_\pi = \mathbb{C}$ zuordnet. Die induzierte Darstellung $U := \text{Ind}(\Gamma \uparrow G, \pi)$ operiert auf dem Raum $\mathcal{H}_U$, der isometrisch zu $L^2(\Gamma \backslash G, \mathbb{C})$ ist.

Für $g \in G$ ist $U(g)\xi(\bar{x}) = \xi(\bar{x}g)$, wobei $\bar{x} = \Gamma x \in \Gamma \backslash G$ ist. U heißt die *reguläre Darstellung* von G auf $L^2(\Gamma \backslash G, \mathbb{C})$.

Der folgende Satz liefert einen Zusammenhang zwischen den Darstellungen π der Lie-Gruppe G und den Darstellungen eines Quotienten G/G_0 . Der Satz läßt sich direkt mit der Definition der Induktion beweisen. Er spielt ein wichtiges technisches Hilfsmittel in der Kirillov-Theorie und den damit verwandten Sätzen über nilpotente Lie-Gruppen. Mit diesem Satz werden wir sehen, wie in den Beweisen der Aussagen über irreduzible Darstellungen nilpotenter Lie-Gruppen ein „Induktionsschritt“ möglich ist.

3.3.4 Satz: Sei σ eine Darstellung der Lie-Gruppe G , die alle Elemente einer normalen Untergruppe G_0 von G auf den Identitäts-Operator abbildet.

Dann können wir die Darstellung σ als eine Darstellung $\tilde{\sigma}$ der Quotienten-Gruppe G/G_0 betrachten. Wenn $\tilde{\sigma}$ von einer Darstellung $\tilde{\pi}$ auf $G_1/(G_1 \cap G_0)$

3 Die Darstellungstheorie nilpotenter Lie-Algebren

induziert wird, dann wird σ von der Darstellung π auf G_1 mit $\pi(g_1) = \tilde{\pi}(\bar{g}_1)$ induziert, wobei $g_1 \in G_1$ ein beliebiger Repräsentant von $\bar{g}_1 \in G_1/(G_1 \cap G_0)$ ist.

In [Kir62] befindet sich ein elementarer Beweis des obigen Satzes.

3.4 Kirillov-Theorie

Kirillov stellt in [Kir62] einen Zusammenhang zwischen den irreduziblen Darstellungen einer nilpotenten, zusammenhängenden Lie-Gruppe G und den Elementen des Dualraums $\mathfrak{g}^*$ der zu G gehörenden Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ her. Er führt dort den Begriff der maximal untergeordneten Algebra ein und zeigt, daß alle irreduziblen Darstellungen in einer Bijektion zu den Bahnen der zur adjungierten Darstellung auf G dualen Abbildung Ad^* in $\mathfrak{g}^*$ stehen. Diese Bijektion ist für $f \in \mathfrak{g}^*$ gegeben durch $f \mapsto \text{Ind}(M \uparrow G, \exp(2\pi i f \circ \log))$ mit $M := \exp \mathfrak{m}$, wobei $\mathfrak{m}$ eine maximal untergeordnete Algebra zu f ist, die wir im folgenden definieren.

3.4.1 Definition: Sei $f \in \mathfrak{g}^*$ ein Element aus dem Dualraum von $\mathfrak{g}$. Eine Unter-algebra $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{g}$ heißt *maximal untergeordnet* zu f , wenn $\mathfrak{m}$ von maximaler Dimension ist, so daß $f([\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]) = 0$ gilt.

Zu einem gegebenen Funktional $f \in \mathfrak{g}^*$ gibt es verschiedene maximal untergeordnete Algebren. Dennoch ist die Dimension einer beliebigen maximal untergeordneten Algebra zu einem gegebenen $f \in \mathfrak{g}^*$ eindeutig bestimmt. Kirillov gibt in [Kir62] eine Formel für die Dimension einer maximal untergeordneten Algebra an:

3.4.2 Bemerkung: Sei $f \in \mathfrak{g}^*$. Ist $\mathfrak{m}$ eine maximal untergeordnete Algebra bzgl. f von $\mathfrak{g}$, so ist

- (i) $\dim(\mathfrak{m}) = \dim(\mathfrak{g}) - \frac{1}{2} \dim(\text{ad}_{\mathfrak{g}}^* f)$,
- (ii) Die alternierende Bilinearform $\beta: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $\beta(X, Y) = f([X, Y])$. Dann ist $\dim(\mathfrak{m}) = \dim(\mathfrak{g}) - \frac{1}{2} \text{Rang } \beta$.

Ist $\mathfrak{m}$ maximal untergeordnet zu f , dann definiert f einen sog. Charakter $\bar{f}$ auf $M = \exp \mathfrak{m}$. Dies ist eine eindimensionale unitäre Darstellung von M , die durch das Funktional f gegeben ist. Dieser Charakter induziert eine Darstellung π_f von G .

3.4.3 Satz von Kirillov: Sei $f \in \mathfrak{g}^*$ und die Unter algebra $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{g}$ maximal untergeordnet bzgl. f . Sei M die zu $\mathfrak{m}$ gehörende Lie-Gruppe und die Darstellung $\bar{f}$ von M sei gegeben durch $\bar{f}(m) = \exp(2\pi i f(\log(m)))$. Die Darstellung $\pi_f := \text{Ind}(M \uparrow G, \bar{f})$ hat die folgenden Eigenschaften:

- π_f ist irreduzibel,
- π_f ist bis auf Äquivalenz unabhängig von der Wahl der maximal untergeordneten Algebra $\mathfrak{m}$,
- π_{f_1} ist genau dann äquivalent zu π_{f_2} , wenn f_1 in $\text{Ad}_G^*(f_2)$ liegt,
- Jede irreduzible Darstellung von G kann so bis auf Äquivalenz erhalten werden.

Kirillov beweist diesen Satz in [Kir62].

Sei im folgenden $f \in \mathfrak{g}^*$ und $\mathfrak{m}$ eine bzgl. f maximal untergeordnete Algebra. Wir können den Hilbertraum $\mathcal{H}_{\pi_f}$, auf dem die irreduzible Darstellungen π_f operiert, mit dem Raum $L^2(\mathbb{R}^s)$ mit passendem $s \in \mathbb{N}$ identifizieren (vgl. [CG90, Kapitel I]).

3.4.4 Konstruktion: Sei M die zu $\mathfrak{m}$ gehörende Lie-Gruppe, $n = \dim G$ und $k = \dim M$. Dann identifizieren wir $\mathcal{H}_{\pi_f}$ mit $L^2(\mathbb{R}^{n-k})$ wie folgt:

Wir ergänzen eine Basis $\{X_1, \dots, X_k\}$ von $\mathfrak{m}$ zu einer Basis $\{X_1, \dots, X_n\}$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow M \backslash G$, definiert durch

$$\varphi(t_1, \dots, t_{n-k}) = M \cdot \exp(t_1 X_{k+1}) \cdot \dots \cdot \exp(t_{n-k} X_n).$$

liefert eine Identifikation des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^{n-k}$ mit dem G -invarianten Maß auf $M \backslash G$.

Nach der Identifikation von $\mathcal{H}_{\pi}$ mit $L^2(\mathbb{R}^{n-k})$ können wir nun untersuchen, wie die Operationen einer beliebigen irreduziblen Darstellung auf $L^2(\mathbb{R}^{n-k})$

3 Die Darstellungstheorie nilpotenter Lie-Algebren

operieren.

3.4.5 Satz: Sei $\pi_f = \text{Ind}(M \uparrow G, \bar{f})$ eine irreduzible Darstellung der nilpotenten Lie-Gruppe G . Wir ergänzen eine Basis $X_1, \dots, X_k$ von $\mathfrak{m}$ zu einer Basis $X_1, \dots, X_n$ von $\mathfrak{g}$. Dann gibt es Polynome $P_1, \dots, P_n: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß mit $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ und $t = (t_1, \dots, t_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}$ die Operationen der Darstellung π auf $L^2(\mathbb{R}^{n-k})$ wie folgt gegeben sind:

$$\begin{aligned} & (\pi_f(\exp s_1 X_1 + \dots + s_n X_n) \xi)(t) \\ &= \bar{f}(\exp(P_1(s, t) X_1 + \dots + P_k(s, t) X_k)) \xi(P_{k+1}(s, t), \dots, P_n(s, t)). \end{aligned}$$

Beweis: Nach der Definition der induzierten Abbildung ist die Operation von $\pi_f(g)$ für $g \in G$ auf $\mathcal{H}_{\pi_f}$ gegeben durch $\pi_f(g) \xi(h) = \xi(hg)$ und für die Funktionen $\xi \in \mathcal{H}_{\pi_f}$ gilt $\xi(mh') = \bar{f}(m) \pi(h')$. Wir übertragen diese Bedingungen in den Raum $L^2(\mathbb{R}^{n-k})$.

Die Abbildung $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow G$ sei gegeben durch $\rho(s) = \exp(s_1 X_1 + \dots + s_n X_n)$ für $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$. Wir schreiben mit $t = (t_1, \dots, t_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}$ abkürzend $\rho(0, t)$ für $\rho(0, \dots, 0, t_1, \dots, t_{n-k})$. Es ist also $M\rho(0, t) = \varphi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}^{n-k}$. Mit der Campbell-Baker-Hausdorff-Formel 1.2.2 folgt, daß es Polynome $P_1, \dots, P_n: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\rho^{-1}(\rho(0, t) \rho(s)) = (P_1(s, t), \dots, P_n(s, t)).$$

Mit diesen Notationen erhalten wir nach Identifikation von $\mathcal{H}_\pi$ mit $L^2(\mathbb{R}^{n-k})$ direkt die Aussage des Satzes. $\square$

3.5 Die reguläre Darstellung

Wir untersuchen in diesem Abschnitt die reguläre Darstellung U von G , die auf $L^2(\Gamma \backslash G)$ mit $(U(g_0) \xi)(\Gamma g) = \xi(\Gamma g g_0)$ für $g, g_0 \in G$ und $\xi \in L^2(\Gamma \backslash G)$ operiert.

Nach [Ric71] zerfällt U in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen π mit endlicher Vielfachheit. Wie wir oben gesehen haben, erhalten wir U durch

Induktion aus der Darstellung auf Γ , die alle $\gamma \in \Gamma$ auf den Identitäts-Operator abbildet.

Wir bezeichnen die Vielfachheit, mit der die irreduzible Darstellung π_f induziert von $f \in \mathfrak{g}^*$ in der Zerlegung der regulären Darstellung U auftritt, mit $m(f, U)$.

In [Ric71] gibt Richardson an, wie sich die Vielfachheiten $m(f, U)$ konkret bestimmen lassen. Er konstruiert für seine Beweise spezielle maximal untergeordnete Algebren. Diese Konstruktion wird sich im folgenden auch in anderen Fällen als sehr hilfreich erweisen. Sie befindet sich auch in verkürzter Form in [CR87].

3.5.1 Konstruktion: Zur Konstruktion einer speziellen maximal untergeordneten Algebra $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{g}$ bezüglich f benötigen wir das folgende

3.5.2 Lemma: Sei $f \in \mathfrak{g}^*$ mit $f \neq 0$. Es gibt in $\mathfrak{g}$ ein Ideal $\mathfrak{h}$, das folgende Eigenschaften besitzt:

- (1) $f(\mathfrak{h}) = 0$,
- (2) Das Zentrum von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ist eindimensional,
- (3) $f|\{X \in \mathfrak{g} \mid [\mathfrak{g}, X] \subseteq \mathfrak{h}\} \neq 0$.

Beweis: Wir konstruieren schrittweise ein passendes Ideal $\mathfrak{h}$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Wenn $\mathfrak{h} := \{0\}$ die Bedingungen (1)-(3) nicht erfüllt, dann folgt, daß entweder $f|Z(\mathfrak{g}) = 0$, oder $\dim Z(\mathfrak{g}) > 1$ gilt.

Falls $\dim Z(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) > 1$ ist und $\mathfrak{h}$ die Bedingungen (1) und (3) erfüllt, dann ersetzen wir $\mathfrak{h}$ durch das Ideal $\text{Kern } f \cap \{X \in \mathfrak{g} \mid [\mathfrak{g}, X] \subseteq \mathfrak{h}\}$. Dadurch vergrößern wir das Ideal $\mathfrak{h}$. Die Eigenschaften (1) und (3) bleiben gültig. Wir wiederholen diese Konstruktion so lange, bis auch (2) erfüllt ist.

Falls die dritte Bedingung nicht erfüllt ist, dann verschwindet f auf der Menge $\tilde{Z}(\mathfrak{h}) := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}\}$. In diesem Fall ersetzen wir $\mathfrak{h}$ durch $\text{Kern } f \cap \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{g}] \subseteq \tilde{Z}(\mathfrak{h})\}$. Da $f \neq 0$ ist, finden wir nach wiederholter Anwendung ein

3 Die Darstellungstheorie nilpotenter Lie-Algebren

Ideal $\mathfrak{h}$, das alle drei gewünschten Eigenschaften erfüllt. $\square$

Im folgenden wählen wir ein Ideal $\mathfrak{h}_1$ von $\mathfrak{g}$ mit den obigen Eigenschaften. Um mit Hilfe des Ideals $\mathfrak{h}_1$ die spezielle maximal untergeordnete Algebra $\mathfrak{m}$ zu konstruieren, betrachten wir die Quotientenalgebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$. Wegen der oben beschriebenen Eigenschaften von $\mathfrak{h}_1$ ist $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$ eine nilpotente Lie-Algebra mit eindimensionalem Zentrum.

Ist die Dimension dieser Lie-Algebra ≤ 1 , so ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$ und wir sind fertig. Ist $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$ nicht abelsch, so zerlegen wir diese Lie-Algebra mit der Kirillov-Zerlegung 3.1.2. Es ist

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1 = \mathbb{R}\bar{X} \oplus \mathbb{R}\bar{Y} \oplus \mathbb{R}\bar{Z} \oplus \bar{\mathfrak{w}},$$

wobei $[\bar{X}, \bar{Y}] = \bar{Z}$ ist, $\bar{Z}$ das Zentrum $Z(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1)$ erzeugt und $[\bar{W}, \bar{Y}] = 0$ für alle $\bar{W} \in \bar{\mathfrak{w}}$ gilt.

Wir wählen einen Repräsentanten X von $\bar{X}$ in $\mathfrak{g}$ und erhalten: $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathfrak{m}_1$, wobei $\mathfrak{m}_1$ das Urbild unter der Projektion von der Menge aller mit $\bar{Y}$ in $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$ kommutierenden Element $Z(\bar{Y})$ ist. Wir wenden die Konstruktion erneut auf $\mathfrak{m}_1$ an, d.h. wir wählen erneut ein Ideal $\mathfrak{h}_2$ von $\mathfrak{m}_1$, das (1)- (3) erfüllt und zerlegen den Quotienten $\mathfrak{m}_1/\mathfrak{h}_2$ mit der Kirillov-Zerlegung 3.1.2 bzw. erhalten mit $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1$ eine untergeordnete Algebra, wenn $\mathfrak{m}_1/\mathfrak{h}_2$ abelsch ist. Andernfalls erhalten wir eine Unter algebra $\mathfrak{m}_2$ von $\mathfrak{m}_1$ und eine Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_2 \oplus \mathfrak{m}_2$. Nach wiederholtem Anwenden erhalten wir $\mathfrak{m}_k$ mit $f([\mathfrak{m}_k, \mathfrak{m}_k]) = 0$. Also ist $\mathfrak{m}_k$ eine maximal untergeordnete Algebra von sich selbst bzgl. der Abbildung $f|_{\mathfrak{m}_k}$.

Wir müssen nun noch zeigen, daß $\mathfrak{m}_k$ auch maximal untergeordnete Algebra von $\mathfrak{g}$ ist. Dazu verwenden wir die Dimensionsformeln für maximal untergeordnete Unter algebren von Kirillov aus Bemerkung 3.4.2. Die Quotientenalgebra $\mathfrak{m}_k/\mathfrak{h}_k$ ist auch eine maximal untergeordnete Algebra von sich selbst bzgl. der von f induzierten Abbildung. Außerdem ist $\dim(\mathfrak{m}_{k-1}/\mathfrak{h}_k) = \dim(\mathfrak{m}_k/\mathfrak{h}_k) + 1$. Die Bilinearform β von $\mathfrak{m}_{k-1}/\mathfrak{h}_k$, die durch $\beta(\bar{X}, \bar{Y}) = f(X, Y)$ gegeben ist, hat den Rang 2. Also ist die Dimension einer maximal untergeordneten Algebra in $\mathfrak{m}_{k-1}/\mathfrak{h}_k$ nach dem zweiten Punkt der Bemerkung 3.4.2 $\dim(\mathfrak{m}_{k-1}/\mathfrak{h}_k) =$

$\dim(\mathfrak{m}_k/\mathfrak{h}_k)$. Folglich ist $\mathfrak{m}_k/\mathfrak{h}_k$ eine maximal untergeordnete Algebra des Quotienten $\mathfrak{m}_{k-1}/\mathfrak{h}_k$.

Da aufgrund der Eigenschaften von $\mathfrak{h}_k$ die Bahn $\text{ad}_{\mathfrak{m}_{k-1}} f$ in $\mathfrak{m}_{k-1}$ mit der Bahn der von f induzierten Abbildung im Quotienten $\mathfrak{m}_{k-1}/\mathfrak{h}_k$ identifiziert werden kann, ist nach dem ersten Punkt der Bemerkung 3.4.2 das Urbild $\mathfrak{m}_k$ von $\mathfrak{m}_k/\mathfrak{h}_k$ in $\mathfrak{m}_{k-1}$ auch maximal untergeordnet in $\mathfrak{m}_{k-1}$.

Durch wiederholte Anwendung der obigen Schritte sehen wir, daß die Unter-
algebra $\mathfrak{m}_k$ von $\mathfrak{g}$ eine maximale Unter-
algebra von $\mathfrak{g}$ bzgl. f ist. Wir werden
im folgenden eine maximal Unter-
algebra, die auf diese Art konstruiert werden
kann eine *spezielle untergeordnete Algebra* nennen.

Die spezielle untergeordnete Algebra ist nicht eindeutig durch f gegeben, denn die Konstruktion hängt von der Wahl der Vektoren $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ und deren Repräsentanten ab.

Das besondere an der obigen Konstruktion ist, daß wir für ein gegebenes Gitter Γ der zu $\mathfrak{g}$ gehörenden Lie-Gruppe G die spezielle maximal untergeordnete Algebra $\mathfrak{m}$ so konstruieren können, daß sie rationale Strukturkonstanten bezüglich $\log \Gamma \cap \mathfrak{m}$ hat, wenn $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{Q}$ ist (vgl. [CR87]). Wir konstruieren einfach in jedem Schritt das Ideal $\mathfrak{h}_i$ so, daß es rationale Strukturkonstanten bzgl. $\log \Gamma \cap \mathfrak{h}_i$ hat und können dann, nachdem wir in der Kirillov-Zerlegung von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_i$ eine Basis von $\bar{\mathfrak{m}}_i$ mit rationalen Strukturkonstanten bezüglich $\overline{\log \Gamma \cap \mathfrak{m}_i}$ gewählt haben, mit Satz 1.3.4 voraussetzen, daß die Lie-Algebra $\mathfrak{m}_i$ rationale Strukturkonstanten bezüglich $\log \Gamma \cap \mathfrak{m}_i$ besitzt.

Mit den so konstruierten speziell untergeordneten Algebren lassen sich die Sätze von Richardson über die Vielfachheiten des Auftretens einzelner irreduzibler Komponenten in der Zerlegung der regulären Darstellung formulieren und beweisen. Die Beweisidee besteht auch hier wieder, wie beim Beweis des Satzes von Kirillov 3.4.3 aus einem Induktionsbeweis. Durch Herausteilen einer passenden Unter-
algebra wird die Dimension verringert.

Für den Induktionsschritt seiner Beweise verwendet Richardson das folgende Lemma von Moore [Moo65].

3.5.3 Lemma: Sei G eine nilpotente Lie-Gruppe, Γ ein Gitter von G und π eine irreduzible Darstellung von G . Sei H eine eindimensionale, rationale, normale Untergruppe von G , so daß $\pi(h)$ die Identität für alle $h \in H$ ist.

Sei $\text{pr}: G \longrightarrow G/H$ die Projektion und $\tilde{\pi} = \pi \circ \text{pr}^{-1}$. Sei U die reguläre Darstellung von G bezüglich Γ und $\tilde{U}$ die reguläre Darstellung von G/H bzgl. $\text{pr}(\Gamma)$. Dann ist die Vielfachheit $m(\pi, U) = m(\tilde{\pi}, \tilde{U})$.

Wir werden auf die Details der Beweise von Richardson nicht weiter eingehen, aber das obige Lemma im folgenden noch einmal verwenden. Zur Formulierung der Sätze von Richardson bedarf es vorab einiger Definitionen.

3.5.4 Definition: Sei $f \in \mathfrak{g}^*$ mit spezieller maximal untergeordneter Algebra $\mathfrak{m} = \log(M)$. Das Paar $(\bar{f}, M)$ heißt *rational*, wenn $f(\log(\Gamma \cap M)) \subseteq \mathbb{Q}$ ist und $\mathfrak{m}$ mit rationalen Strukturkonstanten bezüglich $\log \Gamma \cap \mathfrak{m}$ konstruiert worden ist.

Es heißt *integral*, wenn für den zu f gehörenden Charakter zusätzlich auch noch $\bar{f}(\log(\Gamma \cap M)) = 1$ gilt, also $f(\log(\Gamma \cap M)) \subseteq \mathbb{Z}$ ist.

Wir bezeichnen mit $(\bar{f}, M)g$ für $g \in G$ das Paar $(\bar{f}^g, M^{g^{-1}})$, wobei $\bar{f}^g(m) := \bar{f}(gmg^{-1})$ und $M^{g^{-1}} := g^{-1}Mg$ ist. Außerdem sei $(\bar{f}, M)G := \{(\bar{f}, M)g \mid g \in G\}$. Wir schreiben $O(\bar{f}) := (\bar{f}, M)G$. Richardson zeigt in [Ric71] den folgenden Satz:

3.5.5 Satz: Für die Vielfachheit $m(\pi_f, U)$ der irreduziblen Darstellung $\pi_f = \text{Ind}(M \uparrow G, \bar{f})$ in der Zerlegung der regulären Darstellung U gilt $m(\pi_f, U) > 0$ genau dann, wenn in $O(\bar{f})$ ein integrales Element liegt.

Wir werden nur einen einfachen Spezialfall dieses Satzes verwenden.

3.5.6 Korollar: Sei $(\bar{f}, M)$ ein integraler Charakter. Dann ist $m(\pi_f, U) > 0$.

Richardson gibt in [Ric71] auch einen Satz an, mit dem sich die Vielfachheit $m(f, U)$ direkt bestimmen läßt. Er beweist, daß für ein integrales Element $(\bar{f}, M)$ und beliebiges $\gamma \in \Gamma$ auch $(\bar{f}, M)\gamma$ ein integrales Element ist. Wir

bezeichnen den Raum der integralen Punkte von $O(\bar{f})$ mit $O(\bar{f})_\Gamma$.

3.5.7 Satz: Sei π eine irreduzible Darstellung von G , die von einem rationalen Punkt $(\bar{f}, M)$ induziert wird. Dann ist

$$m(\pi, U) = \#\{O(\bar{f})_\Gamma/\Gamma\}.$$

3.6 Die glatten Vektoren induzierter Darstellungen

Wir erhalten aus einer Darstellung π einer Lie-Gruppe G eine Darstellung $\bar{\pi}$ der zu G gehörenden Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ in der folgenden Weise:

3.6.1 Definition: Sei π eine unitäre Darstellung, die auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}_\pi$ operiert. Ein Vektor $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ heißt *glatt*, wenn die vektorwertige Funktion $g \mapsto (\pi(g))\xi$ eine glatte Abbildung von G nach $\mathcal{H}_\pi$ ist. Wir bezeichnen die Menge aller glatten Vektoren von π mit $\mathcal{H}_\pi^\infty$.

Die zu π gehörende Darstellung $\bar{\pi}$ von $\mathfrak{g}$ operiert auf $\mathcal{H}_\pi^\infty$ und ist gegeben durch

$$\bar{\pi}(X)\xi = \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{x=0} \pi(\exp(xX))\xi.$$

In diesem Abschnitt möchten wir die glatten Vektoren von induzierten Darstellungen im allgemeinen und die von der regulären Darstellung im besonderen bestimmen. Zuerst berechnen wir jedoch die Operationen von $\bar{\pi}$ für eine irreduzible Darstellung π von G , die auf $L^2(\mathbb{R}^{n-k})$ operiert.

Sei π eine irreduzible Darstellung von G . Wir wählen eine Basis $X_1, \dots, X_k$ von $\mathfrak{m}$, die wir zu einer Basis $X_1, \dots, X_n$ von $\mathfrak{g}$ ergänzen. In Satz 3.4.5 haben wir gesehen, daß es Polynome $P_1, \dots, P_n: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ und alle $t = (t_1, \dots, t_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}$, sowie $\xi \in L^2(\mathbb{R}^{n-k})$ gilt:

$$\pi(s_1 X_1 + \dots + s_n X_n)\xi(t)$$

3 Die Darstellungstheorie nilpotenter Lie-Algebren

$$= \exp(2\pi i f(P_1(s, t)X_1 + \dots P_k(s, t)X_k)) \xi(P_{k+1}(s, t), \dots, P_n(s, t)).$$

Wir erhalten die Darstellung $\bar{\pi}$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ aus der Darstellung π der Lie-Gruppe G durch $\bar{\pi}(X)\xi(t) = \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{x=0} \pi(\exp(xX))\xi(t)$.

3.6.2 Satz: Die Operation der irreduziblen Darstellung $\bar{\pi}$ von $\mathfrak{g}$ auf den glatten Vektoren in $L^2(\mathbb{R}^{n-k})$ für einen Basisvektor X_i mit $1 \leq i \leq n$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(X_i)\xi(t_1, \dots, t_{n-k}) &= 2\pi i \sum_{j=1}^k f(X_j) \frac{\partial}{\partial s_i} P_j(0, \dots, 0, t_1, \dots, t_{n-k}) \xi(t_1, \dots, t_{n-k}) \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^n \frac{\partial}{\partial s_i} P_j(0, \dots, 0, t_1, \dots, t_{n-k}) \frac{\partial}{\partial t_{j-k}} \xi(t_1, \dots, t_{n-k}). \end{aligned}$$

Beweis: Die Polynomfunktionen $P_i(s, t)$ sind, wie wir im Beweis von Satz 3.4.5 gesehen haben, die Koordinatenfunktionen von $\rho^{-1}(\rho(0, t)\rho(s))$ mit $\rho(s) = \exp(s_1 X_1 + \dots + s_n X_n)$ und $\rho(0, t) = \exp(t_1 X_{k+1} + \dots + t_{n-k} X_n)$. Insbesondere folgt daraus, daß $P_i(0, t) = t_i$ für alle $t = (t_1, \dots, t_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}$ ist. Nun können wir die Operation von $\bar{\pi}(X_i)$ auf den glatten Vektoren in $L^2(\mathbb{R}^{n-k})$ für ein Basiselement X_i von $\mathfrak{g}$ bestimmen. Wir schreiben $e_i \in \mathbb{R}^n$ für den i -ten Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$, also $e_i = \rho^{-1}(e^{X_i})$. Es ist

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(X_i)\xi(t) &= \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{x=0} \exp\left(2\pi i f\left(\sum_{j=1}^k P_j(xe_j, t)X_j\right)\right) \xi(P_{k+1}(xe_i, t), \dots, P_n(xe_i, t)) \\ &= 2\pi i \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{x=0} f(P_1(xe_i, t)X_1 + \dots + P_k(xe_i, t)X_k) \xi(t) \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^n \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{x=0} P_j(xe_i, t) \frac{\partial}{\partial t_{j-k}} \xi(t). \end{aligned}$$

Da $f \in \mathfrak{g}^*$ linear ist, folgt direkt die Behauptung. $\square$

Nun zur Bestimmung der glatten Vektoren einer induzierten Darstellung. Poulsen beweist in [Pou72] einen Satz, mit dem sich die glatten Vektoren einer

3.6 Die glatten Vektoren induzierter Darstellungen

induzierten Darstellung leicht berechnen lassen. Wir werden diesen Satz in diesem Abschnitt auf die reguläre Darstellung und auf beliebige irreduzible Darstellungen einer nilpotenten Lie-Gruppe anwenden.

Sei G eine Lie-Gruppe, K eine abgeschlossene Untergruppe von G . Sei $\sigma := \text{Ind}(K \uparrow G, \pi)$ eine Darstellung auf G , die von einer Darstellung π der Untergruppe K induziert wird. π operiert auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}_\pi$.

3.6.3 Definition: Wir bezeichnen den Raum der glatten Funktionen $\xi: G \rightarrow \mathcal{H}_\pi$, für die $\xi(kg) = \pi(k)[\xi(g)]$ für alle $k \in K$ und $g \in G$ gilt mit $C^\infty(K \backslash G, \pi)$.

Für alle $\xi \in C^\infty(K \backslash G, \pi)$ und $X \in \mathfrak{g}$ definieren wir

$$\tilde{X}\xi(g) := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\xi(g \exp(xX)) - \xi(g)).$$

Offensichtlich ist wieder $\tilde{X}\xi \in C^\infty(K \backslash G, \pi)$ für alle $\xi \in C^\infty(K \backslash G, \pi)$.

Nun können wir den Satz von Poulsen formulieren. Dabei bezeichne $\|\cdot\|_2$ die L^2 -Norm auf $C^\infty(K \backslash G, \pi) \subset L^2(K \backslash G)$. Wir wählen im folgenden eine Basis $X_1, \dots, X_n$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G .

3.6.4 Satz: Sei $\sigma = \text{Ind}(K \uparrow G, \pi)$. Die Menge $\mathcal{H}_\sigma^\infty$ aller glatten Vektoren von σ ist die Menge aller Funktionen $\xi \in C^\infty(K \backslash G, \pi)$, so daß

$$\|\tilde{X}_{i_1} \dots \tilde{X}_{i_m} \xi\|_2 < \infty \text{ für } 1 \leq i_j \leq n, \text{ für } 1 \leq j \leq m \text{ und } 0 \leq m < \infty.$$

$\mathcal{H}_\sigma^\infty$ wird zu einem Fréchet-Raum durch die Seminormen $\|\tilde{X}_{i_1} \dots \tilde{X}_{i_m} \xi\|_2$ auf $C^\infty(K \backslash G, \pi)$. Außerdem gilt für die von der Darstellung σ von G induzierten Darstellung $\bar{\sigma}$ von $\mathfrak{g}$ und für alle $\xi \in \mathcal{H}_\sigma^\infty$ offensichtlich:

$$\bar{\sigma}(X_{i_1}) \dots \bar{\sigma}(X_{i_m}) \xi = \tilde{X}_{i_1} \dots \tilde{X}_{i_m} \xi.$$

Beweis: s. [Pou72]. □

Wenden wir nun den Satz auf die reguläre Darstellung U von G an. Wir wählen also Γ als Gitter von G . Die reguläre Darstellung ist $U = \text{Ind}(\Gamma \uparrow G, 1)$. Offen-

3 Die Darstellungstheorie nilpotenter Lie-Algebren

sichtlich können wir $C^\infty(\Gamma \backslash G, 1)$ mit den glatten Funktionen $C^\infty(\Gamma \backslash G)$ identifizieren. Dabei geht die Operation von $\tilde{X}$ für beliebige $X \in \mathfrak{g}$ über in

$$\tilde{X}\xi(\Gamma g) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\xi(\Gamma g \exp(tX)) - \xi(\Gamma g)),$$

wobei $\Gamma g \in \Gamma \backslash G$ und $\xi \in C^\infty(\Gamma \backslash G)$ beliebig sind.

Da für alle $\xi \in C^\infty(\Gamma \backslash G)$ auch $\tilde{X}\xi \in C^\infty(\Gamma \backslash G)$ gilt und $\Gamma \backslash G$ kompakt ist, erhalten wir das folgende Korollar.

3.6.5 Korollar: Die Menge der glatten Vektoren der regulären Darstellung von G auf $L^2(\Gamma \backslash G)$ stimmt mit der Menge der glatten Funktionen $C^\infty(\Gamma \backslash G)$ überein. Die Topologie auf dem Fréchet-Raum $\mathcal{H}_\sigma^\infty$ aus Satz 3.6.4 stimmt mit der üblichen Topologie auf $C^\infty(\Gamma \backslash G)$ überein.

Nun wollen wir den Raum der glatten Vektoren einer beliebigen irreduziblen Darstellung π einer nilpotenten Lie-Gruppe G bestimmen. Es stellt sich heraus, daß für beliebige nilpotente Lie-Gruppen und beliebige irreduzible Darstellungen der Raum der glatten Vektoren immer mit einem bestimmten Funktionenraum identifiziert werden kann, dem Raum der sogenannten Schwartzschen Funktionen. Diese Funktionen sind die schnell-fallenden Funktionen auf $\mathbb{R}^k$.

3.6.6 Definition: Der Raum der Schwartzschen Funktionen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ besteht aus allen glatten, komplexwertigen Funktionen $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$, für die zusätzlich gilt:

$$\left\| t_1^{j_1} \dots t_k^{j_k} \frac{\partial^{i_1}}{\partial t_1^{i_1}} \dots \frac{\partial^{i_k}}{\partial t_k^{i_k}} \xi(t_1, \dots, t_k) \right\|_2 < \infty.$$

Dabei sind die $j_h, i_h \in \mathbb{N}$ für $1 \leq h \leq k$. Die Topologie auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ wird durch diese Seminormen induziert.

Im folgenden werden wir zur Vereinfachung der Notation $\mathcal{S}(\mathbb{R}^0)$ mit $\mathbb{C}$ identifizieren.

Sei $\mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$ die Menge aller Polynom-Operationen auf $C^\infty(\mathbb{R}^k)$. Das heißt ein Element aus $\mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$ ist eine Linearkombination von Operatoren der Form

$$\xi(t_1, \dots, t_k) \mapsto t_1^{j_1} \dots t_k^{j_k} \frac{\partial^{i_1}}{\partial t_1^{i_1}} \dots \frac{\partial^{i_k}}{\partial t_k^{i_k}} \xi(t_1, \dots, t_k)$$

3.6 Die glatten Vektoren induzierter Darstellungen

mit $j_h, i_h \in \mathbb{N}$ für $1 \leq h \leq k$. Dann ist der Schwartzsche Raum gerade die Menge der Funktionen $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ mit $\|D\xi\| < \infty$ für alle $D \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$.

Wir können wie in 3.4.4 den Raum der glatten Vektoren einer irreduziblen Darstellung $\mathcal{H}_\pi^\infty$ mit einem Teilraum von $C^\infty(\mathbb{R}^k)$ identifizieren.

Im folgenden Satz werden wir sehen, daß der topologische Raum $\mathcal{H}_\pi^\infty$ für eine beliebige irreduzible Darstellung π einer nilpotenten Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit einem Schwartzschen Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ identifiziert werden kann.

Nach dem Satz von Kirillov 3.4.3 gibt es für jede irreduzible Darstellung π von G ein $f \in \mathfrak{g}^*$ und eine zu f maximal untergeordnete Algebra $\mathfrak{m}$ mit zugehöriger Lie-Gruppe M , so daß $\pi = \text{Ind}(M \uparrow G, \bar{f})$ ist. Die Darstellung π operiert auf dem Raum $\mathcal{H}_\pi$, der isometrisch zu $L^2(\mathbb{R}^{n-k})$ ist, wobei $k := \dim M$ und $n := \dim G$ ist.

3.6.7 Satz: Sei G eine nilpotente Lie-Gruppe der Dimension n mit zugehöriger Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Sei $\pi = \text{Ind}(M \uparrow G, \bar{f})$ eine irreduzible Darstellung der Dimension > 1 von G . Dann ist die Menge der glatten Vektoren von π ein Schwartzscher Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ mit $n = \dim G$ und $k = \dim M$.

Zum Beweis des Satzes müssen wir für beliebige $X \in \mathfrak{g}$ die Operation $\xi \mapsto \tilde{X}\xi$ auf der Menge der glatten Vektoren in $L^2(\mathbb{R}^k)$ berechnen. Wir müssen zeigen, daß die Menge dieser Operationen mit der Menge der Polynom-Operationen $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{n-k})$ übereinstimmt.

Ein ausführlicher, technischer Beweis dieses Satzes befindet sich z.B. in [CG90, Abschnitt 4.1], wir werden hier jedoch die Aussage des Satzes mit Hilfe der Richardson-Konstruktion elementarer beweisen können.

Wir haben in 3.6.4 gesehen, daß wir die Operationen von $X \in \mathfrak{g}$ auf $\mathcal{H}_\pi^\infty$ durch $\bar{\pi}(X)$ gegeben ist, wobei $\bar{\pi}$ die von π auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ induzierte Darstellung bezeichnet. Mit dem Satz 3.6.2 erhalten wir, daß die Operationen von $\bar{\pi}$ in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{n-k})$ enthalten sind. Das folgende Lemma zeigt die Umkehrung, also daß es für alle Operationen $D \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n-k})$ ein $X \in \mathfrak{g}$ gibt mit $D = \bar{\pi}(X)$.

3.6.8 Lemma: Für eine beliebige irreduzible Darstellung $\bar{\pi}$ auf $\mathfrak{g}$ gibt es $X_1, \dots, X_{n-k} \in \mathfrak{g}$ und $Y_1, \dots, Y_{n-k} \in \mathfrak{g}$, so daß für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq n-k$ gilt:

$$\begin{aligned}\bar{\pi}(X_j)\xi(t_1, \dots, t_{n-k}) &= \frac{\partial}{\partial t_j}\xi(t_1, \dots, t_{n-k}), \\ \bar{\pi}(Y_j)\xi(t_1, \dots, t_{n-k}) &= 2\pi i t_j \xi(t_1, \dots, t_{n-k}).\end{aligned}$$

Beweis: Dieses Lemma werden wir mit der Richardson-Konstruktion 3.5.1 beweisen. Wir konstruieren hier nur X_1 und Y_1 mit den gewünschten Eigenschaften, die Elemente X_i und Y_i erhalten wir analog.

Mit der Konstruktion von Richardson 3.5.1 sehen wir, daß es ein Ideal $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{m}$ mit den folgenden Eigenschaften gibt.

- $f(\mathfrak{h}) = 0$,
- Das Zentrum von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ist eindimensional,
- $f|\{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}\} \neq 0$.

Sei $f_0 \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ gegeben durch $f_0(\bar{V}) = f(V)$ für einen beliebigen Repräsentanten $V \in \mathfrak{g}$ von $\bar{V} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Weil $f(\mathfrak{h}) = 0$ ist, ist die Funktion f_0 dadurch eindeutig bestimmt und die zu f_0 maximal untergeordnete Algebra von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ist die Projektion $\bar{\mathfrak{m}} \subseteq \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{m}$. Sei $\pi_0 = \text{Ind}(M/(M \cap H) \uparrow G/H, \bar{f}_0)$. Die Darstellung π auf G ist, wie wir in 3.3.4 gesehen haben, gegeben durch $\pi(g) = \pi_0(\text{pr}(g))$, wobei $\text{pr}: G \longrightarrow G/H$ die Projektion bezeichne.

Für die Darstellungen $\bar{\pi}$ auf $\mathfrak{g}$ und $\bar{\pi}_0$ auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ bedeutet dies, daß $\bar{\pi}(V) = \bar{\pi}_0(T_1 \text{pr } V)$ ist. Dabei ist die Projektion pr eine Submersion, also $T_1 \text{pr}$ surjektiv. Es reicht somit, wenn wir $\bar{X}_1, \bar{Y}_1 \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ mit den gewünschten Eigenschaften finden.

Den Quotienten $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ können wir mit der Kirillov-Zerlegung 3.1.2 durch $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \mathbb{R}\bar{X}_1 \oplus \mathbb{R}\bar{Y}_1 \oplus \mathbb{R}\bar{Z}_1 \oplus \bar{\mathfrak{w}}$ darstellen, wobei $\bar{Z}_1$ das Zentrum von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ erzeugt, $[\bar{X}_1, \bar{Y}_1] = \bar{Z}_1$ und $[\bar{Y}_1, \bar{\mathfrak{w}}] = 0$ ist. Die dritte Eigenschaft von $\mathfrak{h}$ besagt, daß f_0 auf dem Zentrum von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ nicht verschwindet. Deshalb gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $f_0(\bar{Z}_1) = \lambda$.

Wir definieren eine Abbildung $\tilde{\xi}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ für ein festes Tupel $(t_2, \dots, t_k) \in$

3.6 Die glatten Vektoren induzierter Darstellungen

$\mathbb{R}^{n-k-1}$ durch $\tilde{\xi}(t_1) := \xi(t_1, t_2, \dots, t_k)$. Wie in der Berechnung der irreduziblen Darstellungen der Heisenberg-Gruppe 3.2.4 können wir die Abbildungen

$$a \mapsto \pi_0(\exp(a\bar{X}_1)) \text{ und } b \mapsto \pi_0(\exp(b\bar{Y}_1))$$

als Darstellungen von $\mathbb{R}$ interpretieren, die auf einem Teilraum von $L^2(\mathbb{R})$ operieren und erhalten dann mit dem Lemma von Schur 3.2.2 und dem Satz von Stone und von Neumann 3.2.3, daß $\pi_0(\exp(a\bar{X}_1))\tilde{\xi}(t_1) = \tilde{\xi}(t_1 + a)$ und $\pi_0(\exp(b\bar{Y}_1))\xi(t_1) = \exp(2\pi i \lambda b t_1)\xi(t_1)$ ist.

Mit der Definition $\bar{\pi}_0(\bar{X})\xi(t) = \frac{\partial}{\partial x}\big|_{x=0} \pi_0(\exp(x\bar{X}))\xi(t_1)$ für $\bar{X} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ erhalten wir dann $\bar{\pi}_0(\bar{X}_1) = \frac{\partial}{\partial t_1}$ und $\bar{\pi}_0(\bar{Y}_1) = 2\pi i \lambda t_1$. Durch die Wahl geeigneter Repräsentanten $X_1, Y_1 \in \mathfrak{g}$ von $\bar{X}_1$ und $\bar{Y}_1 \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ erhalten wir die gesuchten Elemente.

Wenn wir nun fortfahren mit der Richardson-Konstruktion, so erhalten wir in jedem Schritt analog die weiteren Elemente $X_j, Y_j \in \mathfrak{g}$ mit $1 < j \leq n - k$, die die gewünschten Operationen liefern. $\square$

4 Blätterungen von Nilmannigfaltigkeiten

4.1 Vorbemerkungen

Sei G eine nilpotente (zusammenhängende und einfach zusammenhängende) Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Wir betrachten in diesem Abschnitt die Situation aus Beispiel 2.1.5. Wir haben also eine p -dimensionale Unteralgebra $\mathfrak{p}$, die eine Zerlegung des totalen Tangentialraums und somit eine Blätterung von G liefert.

Wählen wir ein Gitter $\Gamma \subseteq G$ und betrachten den Quotienten $\Gamma \backslash G$, so läßt sich die Algebra der Vektorfelder über dieser Mannigfaltigkeit mit $C^\infty(\Gamma \backslash G) \otimes \mathfrak{g}$ identifizieren. Also liefert die Unteralgebra $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{g}$ auch eine Blätterung der kompakten Mannigfaltigkeit $\Gamma \backslash G$. Wir bezeichnen diese Blätterung von $\Gamma \backslash G$ mit $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$.

Wir werden sehen, auf welche Weise die reduzierte Blätterungskohomologie $\bar{H}^i(\Gamma \backslash G; \mathcal{F}(\mathfrak{p})) \otimes \mathbb{C}$ für $0 \leq i \leq p$ berechnet werden kann. Nach Satz 2.4.5 können wir diese Kohomologie mit der reduzierten Lie-Algebren-Kohomologie $\bar{H}^i(\mathfrak{p}; C^\infty(\Gamma \backslash G))$ identifizieren. Dabei operiert $\mathfrak{p}$ auf dem Raum $C^\infty(\Gamma \backslash G)$ der glatten, komplexwertigen Funktionen auf $\Gamma \backslash G$ durch die Einschränkung der regulären Darstellung $\bar{U}$ von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{p}$.

Im vorigen Kapitel haben wir untersucht, wie wir die reguläre Darstellung

in irreduzible Komponenten zerlegen können. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, wie diese Zerlegung eine Zerlegung der reduzierten Lie-Algebren-Kohomologie $\bar{H}^i(\mathfrak{p}; C^\infty(\Gamma \backslash G))$ liefert.

In 3.6.2 haben wir die Operationen irreduzibler Darstellungen der zu G gehörenden Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ beschrieben. Diese Operationen setzen sich aus zwei Typen von Operationen zusammen: den Multiplikationen mit einem Polynom und den partiellen Ableitungen.

Wir werden untersuchen, wie die Lie-Algebren-Kohomologie und die harmonischen Formen für eine gegebene Darstellung berechnet werden können.

Schließlich werden wir im Fall, daß $\mathfrak{p}$ kein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist – unter zusätzlichen Voraussetzungen an $\mathfrak{p}$ – in der Zerlegung von $\bar{U}$ in irreduzible Komponenten Darstellungen finden, deren Operationen auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ der Multiplikation mit einem nichtkonstanten Polynom entsprechen. Die oberste reduzierte Kohomologiegruppe der von uns untersuchten Blätterungen $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ ist in diesem Fall immer unendlichdimensional.

Andererseits werden wir sehen, daß die irreduziblen Komponenten, auf denen die Darstellungen Operationen vom Typ „Multiplikation mit einem nichtkonstanten Polynom“ liefern, keine harmonischen p -Formen enthalten. Unter gewissen Voraussetzungen besitzen die Blätterungen $(\Gamma \backslash G, \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ also in den Fällen, in denen $\mathfrak{p}$ kein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist, keine blattweise Hodge-Zerlegung, deren Existenz für Riemannsche Blätterungen im Satz 2.4.10 von Alvarez-Lopez und Kordyukov gezeigt worden ist.

4.2 Die reduzierte Blätterungskohomologie

Wir bezeichnen mit U die reguläre Darstellung von G auf $L^2(\Gamma \backslash G)$ und $\bar{U}$ die dazu gehörende Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G . Wie wir in Satz 2.4.5 gesehen haben, können wir die i -te komplexe, reduzierte Kohomologie der von $\mathfrak{p}$ induzierten Blätterung mit der Lie-Algebren-Kohomologie $\bar{H}^i(\mathfrak{p}; C^\infty(\Gamma \backslash G))$ identifizieren. Zuerst werden wir sehen, daß die reduzierte Blätterungskoho-

mologie in unserem Fall immer positive Dimension hat. Der folgende Satz gilt in einer allgemeineren Situation, in der G nicht nilpotent sein muß.

4.2.1 Satz: Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und $\Gamma \subset G$ ein Gitter, so daß auf $\Gamma \backslash G$ ein rechtsinvariantes Maß existiert. Sei $\mathfrak{p}$ eine Unter algebra von $\mathfrak{g}$. Dann ist für alle i mit $0 \leq i \leq p = \dim \mathfrak{p}$ die Lie-Algebren-Kohomologie $H^i(\mathfrak{p}) \otimes \mathbb{C}$ ein direkter Summand der reduzierten Blätterungskohomologie $\bar{H}^i(\Gamma \backslash G; \mathcal{F}(\mathfrak{p})) \otimes \mathbb{C}$.

Der Satz ist eine direkte Konsequenz aus dem folgenden Lemma.

4.2.2 Lemma: Sei $K \subseteq C^\infty(\Gamma \backslash G)$ die Menge der komplexwertigen, konstanten Funktionen auf $\Gamma \backslash G$. Dann ist sowohl K , als auch das orthogonale Komplement von K in $L^2(\Gamma \backslash G)$ invariant unter den Operationen der regulären Darstellung U von G .

Beweis: Die reguläre Darstellung U ist nach Definition induziert von der Darstellung, die jedem Element von Γ den Identitätsoperator auf $\mathbb{C}$ zuordnet. Dabei operiert U auf $L^2(\Gamma \backslash G)$ durch $U(g)\xi(\Gamma x) = \xi(\Gamma xg)$ mit $x, g \in G$. Das innere Produkt auf $L^2(\Gamma \backslash G)$ ist nach Definition 3.3.1 gegeben durch

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \int_{\Gamma \backslash G} \langle \xi_1(\Gamma g), \xi_2(\Gamma g) \rangle d\dot{g},$$

wobei $d\dot{g}$ das rechtsinvariante Maß auf $\Gamma \backslash G$ bezeichne.

Das orthogonale Komplement von K , der Menge der konstanten Funktionen in $L^2(\Gamma \backslash G)$, ist also von der Form $K^\perp = \{f \in \mathcal{H}_U \mid \int_{\Gamma \backslash G} |f(\Gamma g)| d\dot{g} = 0\}$.

Die Menge K ist offensichtlich invariant unter den Operationen der regulären Darstellung. Auch das orthogonale Komplement $K^\perp$ ist invariant unter den Operationen von U , denn da das Maß $d\dot{g}$ rechtsinvariant ist, folgt

$$\int_{\Gamma \backslash G} |U(h)\xi(\Gamma g)| d\dot{g} = \int_{\Gamma \backslash G} |\xi(\Gamma gh)| d\dot{g} = \int_{\Gamma \backslash G} |\xi(\Gamma g)| d\dot{g}.$$

□

Beweis des Satzes 4.2.1: Die Menge der glatten Vektoren in K und in $K^\perp$ ist auch invariant unter den Operationen von $\bar{U}$, denn nach Definition ist für alle $X \in \mathfrak{g}$ die Operation $\bar{U}(X)$ auf diesen Mengen gegeben durch

$$\bar{U}(X)\xi(\Gamma g) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (U(\exp(tX))\xi(\Gamma g) - \xi(\Gamma g)).$$

Also können wir die Lie-Algebren-Kohomologie $H^i(\mathfrak{p}; C^\infty(\Gamma \backslash G))$ zerlegen in

$$H^i(\mathfrak{p}; C^\infty(\Gamma \backslash G)) = H^i(\mathfrak{p}; K) \oplus H^i(\mathfrak{p}; K^\perp).$$

Auf der ersten Komponente operiert $\mathfrak{p}$ trivial. Also ist $H^i(\mathfrak{p}; K) = H^i(\mathfrak{p}) \otimes \mathbb{C}$. Da die Menge der konstanten Funktionen abgeschlossen in $C^\infty(\Gamma \backslash G)$ ist, folgt die Behauptung des Satzes über die reduzierte Kohomologie. $\square$

Wie wir in Satz 1.4.2 gesehen haben, ist die Dimension der Kohomologie $H^i(\mathfrak{p})$ im Falle einer nilpotenten Lie-Algebra $\mathfrak{p}$ für $0 \leq i \leq p$ immer positiv. Es folgt also direkt:

4.2.3 Korollar: Sei G eine nilpotente Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und $\Gamma \subset G$ ein Gitter. Sei $\mathfrak{p}$ eine Unterálgebra von $\mathfrak{g}$. Dann ist $\dim \bar{H}^i(\mathfrak{p}; C^\infty(\Gamma \backslash G)) \geq \dim H^i(\mathfrak{p}) > 0$.

Deitmar und Deninger untersuchen in [DD02] Bedingungen, unter denen die reduzierte Blätterungskohomologie mit der Lie-Algebren-Kohomologie $H^i(\mathfrak{p})$ übereinstimmt. Dies ist jedoch nur unter sehr speziellen Bedingungen möglich.

Um die reduzierte Kohomologie allgemein bestimmen zu können, müssen wir die Berechnung der reduzierten Lie-Algebren-Kohomologie $\bar{H}^i(\mathfrak{p}; C^\infty(\Gamma \backslash G))$ vereinfachen. Dazu werden wir im folgenden diese Kohomologie in irreduzible Komponenten zerlegen. Ab jetzt beschränken wir uns auf den Fall, daß G nilpotent ist.

Im vorigen Kapitel haben wir mit dem Satz 3.6.4 gezeigt, daß die glatten Vektoren der regulären Darstellung U der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auf $L^2(\Gamma \backslash G)$ mit den glatten Funktionen in $C^\infty(\Gamma \backslash G)$ übereinstimmen. Außerdem stimmt die Operation von $\bar{U}$ mit der üblichen Operation von $\mathfrak{p}$ auf $C^\infty(\Gamma \backslash G)$ überein. Es ist

4.2 Die reduzierte Blätterungskohomologie

für alle $Y \in \mathfrak{p}$ und $\xi \in C^\infty(\Gamma \backslash G)$

$$\bar{U}(Y)\xi(\Gamma g) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}(\xi(\Gamma g e^{xY}) - \xi(\Gamma g)).$$

Wir erhalten also $H^i(\mathfrak{p}; C^\infty(\Gamma \backslash G)) = H^i(\mathfrak{p}; L^2(\Gamma \backslash G)^\infty)$, wobei wir $L^2(\Gamma \backslash G)^\infty$ für die glatten Vektoren in $L^2(\Gamma \backslash G)$ bezüglich der regulären Darstellung U schreiben. Mit dieser Gleichung läßt sich die Kohomologie in irreduzible Summanden aufteilen, denn die reguläre Darstellung U auf $L^2(\Gamma \backslash G)$ zerfällt, wie wir oben gesehen haben, in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen mit endlicher Vielfachheit.

Wir erhalten also den folgenden Satz (s. [DS01]), der sowohl für die Blätterungskohomologie $H^i(\Gamma \backslash G; \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$, als auch für die reduzierte Blätterungskohomologie $\bar{H}^i(\Gamma \backslash G; \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ gültig ist. Da wir in dieser Arbeit speziell die reduzierte Kohomologie untersuchen, formulieren wir den Satz hier nur für die reduzierte Blätterungskohomologie.

4.2.4 Satz: Eine Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ der Nilmannigfaltigkeit $\Gamma \backslash G$ sei wie oben gegeben. Dann läßt sich die reduzierte Blätterungskohomologie wie folgt in irreduzible Summanden zerlegen:

$$\bar{H}^i(\Gamma \backslash G; \mathcal{F}(\mathfrak{p})) \otimes \mathbb{C} = \widehat{\bigoplus_{\pi} m(\pi, U) \bar{H}^i(\mathfrak{p}; \mathcal{H}_{\pi}^{\infty})}$$

Dabei wird der Abschluß der direkten Summe über alle Äquivalenzklassen irreduzibler, unitärer Darstellungen gebildet. Außerdem bezeichne $m(\pi, U)$ die Vielfachheit der irreduziblen Darstellung π in der Zerlegung der regulären Darstellung U und $\mathcal{H}_{\pi}^{\infty}$ den Raum der glatten Vektoren der Darstellung π von G . Die Operation von $\mathfrak{p}$ auf $\mathcal{H}_{\pi}^{\infty}$ ist schließlich gegeben durch die zu der irreduziblen Darstellung π von G gehörende Darstellung $\bar{\pi}$ von $\mathfrak{g}$.

Ein ausführlicher Beweis dieses Satzes befindet sich in [DD02, Abschnitt 2].

Wir müssen, dem obigen Satz zufolge, zur Bestimmung der reduzierten Blätterungskohomologie die reduzierte Lie-Algebren-Kohomologie auf den einzelnen irreduziblen Komponenten $\mathcal{H}_{\pi}^{\infty}$ und die Vielfachheiten $m(\pi, U)$ der irreduziblen Darstellungen π in der Zerlegung der regulären Darstellung U berechnen.

4.3 Die oberste Kohomologiegruppe

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wie die Kohomologie von $\mathfrak{p}$ auf einer irreduziblen Komponente $\mathcal{H}_\pi^\infty$ von $C^\infty(\Gamma \backslash G)$ bestimmt werden kann. Zur Berechnung der Lie-Algebren-Kohomologie $H^i(\mathfrak{p}; \mathcal{H}_\pi^\infty)$ auf einem irreduziblen Unterraum müssen wir zuerst einmal die Operation von $\mathfrak{p}$ auf $\mathcal{H}_\pi^\infty$ angeben.

Die eindimensionalen Darstellungen operieren auf $\mathbb{C}$ durch Multiplikation mit einer komplexen Zahl. Wir untersuchen im folgenden nur die Darstellungen der Dimension größer als 1. Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, wird solch eine irreduzible Darstellung π von G von einer eindimensionalen Darstellung $\bar{f}$ auf einer Untergruppe M der Lie-Gruppe G induziert.

Dabei ist $M := \exp \mathfrak{m}$ die zu einer bezüglich $f \in \mathfrak{g}^*$ maximal untergeordneten Lie-Algebra $\mathfrak{m}$ gehörende Lie-Gruppe, und die eindimensionale Darstellung $\bar{f}$ von M ist gegeben durch die Multiplikation mit $\exp(2\pi i f(\log m))$ für $m \in M$.

Wir ergänzen eine Basis $\{X_1, \dots, X_k\}$ von $\mathfrak{m}$, zu einer Basis $\{X_1, \dots, X_n\}$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow M \backslash G$, die wir in 3.4.4 durch

$$\varphi(t_1, \dots, t_{n-k}) = M \cdot \exp(t_1 X_{k+1}) \cdot \dots \cdot \exp(t_{n-k} X_n)$$

definiert haben, liefert eine Identifikation des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^{n-k}$ mit dem rechtsinvarianten Maß auf $M \backslash G$. Wir können also den Hilbertraum $\mathcal{H}_{\pi_f}$ mit $L^2(\mathbb{R}^{n-k})$ identifizieren, wobei $k = \dim M$ und $n = \dim G$ ist. Außerdem haben wir in 3.6.7 gesehen, daß wir auf diese Weise auch den Raum der glatten Vektoren $\mathcal{H}_{\pi_f}^\infty$ mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ identifizieren können.

Nun beschreiben wir die Operation der Elemente von $\mathfrak{p}$ auf dem Schwartzschen Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$. Dazu wählen wir eine Basis $X_1, \dots, X_p$ von $\mathfrak{p}$. Nach 3.6.2 hat die Operation von $\bar{\pi}_f(X_i)$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ für ein gegebenes Basiselement $X_i \in \mathfrak{p}$ mit $1 \leq i \leq p$ und eine irreduzible Darstellung $\bar{\pi}_f$ von $\mathfrak{g}$ die Form

$$\begin{aligned} & \bar{\pi}_f(X_i) \xi(t_1, \dots, t_{n-k}) \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^k f(X_j) \frac{\partial P_j}{\partial s_i}(0, \dots, 0, t_1, \dots, t_{n-k}) \xi(t_1, \dots, t_{n-k}) \end{aligned}$$

4.3 Die oberste Kohomologiegruppe

$$+ \sum_{j=k+1}^n \frac{\partial P_j}{\partial s_i}(0, \dots, 0, t_1, \dots, t_{n-k}) \frac{\partial}{\partial t_{j-k}} \xi(t_1, \dots, t_{n-k}).$$

Dabei sind die $P_1, \dots, P_n: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow \mathbb{R}$ Polynome, die wir wie im Beweis von Satz 3.4.5 erhalten.

Für unsere Zwecke wird es ausreichen, wenn wir die Dimension der obersten Lie-Algebren-Kohomologie $H^p(\mathfrak{p}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}))$ berechnen, wobei die Elemente von $\mathfrak{p}$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ in der oben beschriebenen Weise operieren.

Dabei können wir jedoch nicht den Satz von Dixmier 1.4.2 zur Abschätzung der Dimension der Kohomologie verwenden, da die irreduziblen Darstellungen $\bar{\pi}_f$ i.a. auf unendlichdimensionalen $\mathfrak{p}$ -Moduln, den Fréchet-Räumen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ operieren. Satz 1.4.2 setzt jedoch endlichdimensionale $\mathfrak{p}$ -Moduln voraus.

Zur Berechnung gehen wir deshalb zurück auf die Definition der Kohomologie. Die Lie-Algebren-Kohomologie ist die Kohomologie der Kokette, die gegeben ist durch $C^i(\mathfrak{p}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})) := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda^i \mathfrak{p}^*; \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}))$ und den Korandoperator $d_{\pi_f}^{i-1}: C^{i-1}(\mathfrak{p}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})) \longrightarrow C^i(\mathfrak{p}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}))$, der definiert ist durch

$$\begin{aligned} d_{\pi_f}^{i-1} \alpha(X_1 \wedge \dots \wedge X_i) = \\ \sum_{r=1}^i (-1)^r \bar{\pi}_f(X_r) \alpha(X_1 \wedge \dots \wedge \widehat{X_r} \wedge \dots \wedge X_i) \\ + \sum_{1 \leq r < s \leq i} (-1)^{rs} \alpha([X_r, X_s] \wedge X_1 \wedge \dots \wedge \widehat{X_r} \wedge \dots \wedge \widehat{X_s} \wedge \dots \wedge X_i). \end{aligned}$$

Im Fall $i = p = \dim \mathfrak{p}$ ist $X_1 \wedge \dots \wedge X_p \neq 0$ genau dann, wenn $X_1, \dots, X_p$ eine Basis von $\mathfrak{p}$ bildet. Wir bezeichnen die Strukturkonstanten bezüglich dieser Basis mit α_{rs}^t , also die Lie-Klammer $[X_r, X_s]$ ist von der Form $[X_r, X_s] = \sum_{t=1}^p \alpha_{rs}^t X_t$.

Da $\mathfrak{g}$ und somit insbesondere auch $\mathfrak{p}$ nilpotent ist, folgt $\alpha_{rs}^s = 0$ und $\alpha_{rs}^r = 0$ für alle $1 \leq r, s \leq p$. Somit ist die Lie-Klammer $[X_r, X_s] \in \langle X_t \mid t \neq r, s \rangle$ für alle $1 \leq r, s \leq p$. Wir sehen also, daß die zweite Summe in der Definition von $d_{\pi_f}^{p-1}$ immer verschwindet.

Da $H^p(\mathfrak{p}; \mathcal{H}_{\pi_f}^\infty) = \text{Coker } d_{\pi_f}^{p-1}$ ist, müssen wir zur Berechnung der obersten Kohomologie nur das Bild der Abbildung $d_{\pi_f}^{p-1}$ in $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda^i \mathfrak{p}^*; \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}))$ be-

4 Blätterungen von Nilmannigfaltigkeiten

stimmen. Dazu reicht es nach unseren obigen Betrachtungen aus, nach Wahl einer Basis $X_1, \dots, X_p$ von $\mathfrak{p}$ alle Elemente der Form

$$\sum_{r=1}^p (-1)^r \bar{\pi}_f(X_r) \alpha(X_1 \wedge \dots \widehat{X_r} \wedge \dots \wedge X_p)$$

zu bestimmen.

Bevor wir mit der konkreten Berechnung der reduzierten Kohomologie beginnen, werden wir in diesem Abschnitt noch ein Lemma beweisen, das aussagt, wie sich die reduzierte Blätterungskohomologie zusammensetzt aus der reduzierten Blätterungskohomologie von Blätterungen niedrigerer Dimension bzw. Kodimension. Das folgende Lemma wird uns dabei behilflich sein, spezielle Ergebnisse der Berechnungen der reduzierten Blätterungskohomologie auf allgemeinere Situationen auszuweiten.

4.3.1 Lemma: Sei $\mathfrak{p}$ eine Unteralgebra einer nilpotenten Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Sei $\mathfrak{h}$ ein rationales Ideal von $\mathfrak{g}$ mit zugehöriger Lie-Gruppe $H = \exp \mathfrak{h}$. Sei $\bar{\mathfrak{p}} := \mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ die von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ induzierte Unteralgebra und $p_0 := \dim(\bar{\mathfrak{p}})$. Sei $\bar{\Gamma} := \Gamma/\Gamma \cap H$. Dann ist $\bar{H}^{p_0}(\bar{\Gamma} \backslash (G/H); \mathcal{F}(\bar{\mathfrak{p}})) \otimes \mathbb{C}$ ein direkter Summand von $\bar{H}^p(\Gamma \backslash G; \mathcal{F}(\mathfrak{p})) \otimes \mathbb{C}$.

Beweis: Sei $f \in \mathfrak{g}^*$ mit $\text{Kern } f \supseteq \mathfrak{h}$. Sei $\bar{\pi}$ die zu f gehörende, irreduzible Darstellung von $\mathfrak{g}$. Für alle $X \in \mathfrak{h}$ ist $\bar{\pi}(X) = 0$. Durch $\bar{\pi}_0(\bar{X}) := \bar{\pi}(X)$ ist nach Satz 3.3.4 eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ gegeben, wobei $\bar{X} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ die Äquivalenzklasse von $X \in \mathfrak{g}$ bezeichne. Jede irreduzible Darstellung von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ist auf diese Art gegeben und entspricht einem Funktional $f \in \mathfrak{g}^*$ mit $\text{Kern } f \supseteq \mathfrak{h}$.

Sei $X_1, \dots, X_p$ eine Basis von $\mathfrak{p}$ und $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_p$ bezeichne die Äquivalenzklassen dieser Basis in $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Ist $p_0 < p$, so können wir o.B.d.A. davon ausgehen, daß $X_{p_0+1}, \dots, X_p \in \mathfrak{h}$ sind, also $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{p_0}$ eine Basis von $\bar{\mathfrak{p}}$ bildet.

Die äußere Ableitung $d_{\pi_0}^{p-1}: C^{p-1} \longrightarrow C^p$ ist gegeben durch

$$d_{\pi_0}^{p-1}(\alpha)(\bar{X}_1 \wedge \dots \wedge \bar{X}_{p_0}) = \sum_i \bar{\pi}_0(\bar{X}_i) \alpha(\bar{X}_1 \wedge \dots \widehat{\bar{X}_i} \wedge \dots \wedge \bar{X}_{p_0})$$

4.4 Die harmonischen p -Formen

und die äußere Ableitung $d_\pi^{p-1}: C^{p-1} \longrightarrow C^p$ ist gegeben durch

$$d_\pi^{p-1}(\alpha)(X_1 \wedge \dots \wedge X_p) = \sum_i \bar{\pi}(\bar{X}_i) \alpha(X_1 \wedge \dots \wedge \widehat{X_i} \wedge \dots \wedge X_p).$$

Da die $X_{p_0+1}, \dots, X_p \in \mathfrak{h}$ sind, ist $\pi(X_i) = 0$ für $p_0 < i \leq p$. Somit sind Bild und Kern der beiden äußeren Ableitungen identisch.

Für die Vielfachheit in der Zerlegung der regulären Darstellung folgt nach Lemma 3.5.3, daß $m(\tilde{\pi}, \tilde{U}) = m(\pi, U)$ ist, wobei $\tilde{U}$ die reguläre Darstellung von G/H und U die reguläre Darstellung von G bezeichne. Es folgt also

$$\bigoplus_{\substack{f \in \mathfrak{g}^* \\ \text{Kern } f \supseteq \mathfrak{h}}} m(\pi_f, U) \bar{H}^p(\mathfrak{p}; \mathcal{H}_{\pi_f}^\infty) \cong \bigoplus_{f \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*} m(\tilde{\pi}_f, \tilde{U}) \bar{H}^{p_0}(\bar{\mathfrak{p}}; \mathcal{H}_{\tilde{\pi}_f}^\infty).$$

Dabei werden die direkten Summe über alle Funktionale mit paarweise verschiedenen Bahnen in $\text{Ad}_{G/H}^*$ bzw. Ad_G^* gebildet.

Die linke Seite ist ein direkter Summand von $\bar{H}(\Gamma \backslash G; \mathcal{F}(\mathfrak{p})) \otimes \mathbb{C}$ und somit auch die rechte Seite.

Im Fall $p_0 = p$ folgt die Aussage des Satzes analog. $\square$

Wir untersuchen im nächsten Abschnitt den Raum der tangential harmonischen p -Formen, wobei $p = \dim \mathfrak{p}$ ist und werden dort u.a. ein zu 4.3.1 vergleichbares Lemma über diese Formen zeigen.

4.4 Die harmonischen p -Formen

In diesem Abschnitt sei die Mannigfaltigkeit $\Gamma \backslash G$ versehen mit einer beliebigen Metrik g , die tangential kanonisch ist (s. 2.1.6). Es gibt also eine Basis $X_1, \dots, X_p$ von $\mathfrak{p}$, so daß die Vektoren der entsprechenden kanonischen Vektorfelder in jedem Punkt eine Orthonormalbasis bzgl. der Metrik g der zu den Blättern tangentialen Vektoren liefern.

Wir haben in 2.4 gesehen, wie wir aus der Metrik auf $\Gamma \backslash G$ einen transversalen Hodge-Stern-Operator $\star_\perp$ erhalten. Wir setzen zusätzlich voraus, daß

4 Blätterungen von Nilmannigfaltigkeiten

$d(\star_\perp(1)) = 0$ ist. Nach Satz 2.4.7 können wir dann die zu $d_{\mathcal{F}}$ adjungierte Abbildung $\delta_{\mathcal{F}}$ berechnen mit $\delta_{\mathcal{F}}^i(\omega) = (-1)^{pi+p+1} \star_{\mathcal{F}} d_{\mathcal{F}} \star_{\mathcal{F}}$, wobei $\omega \in \Omega_{\mathcal{F}}^i(\Gamma \backslash M)$ eine beliebige i -Form ist.

Wir werden nun untersuchen, wie die bezüglich einer Metrik mit den oben beschriebenen Eigenschaften harmonischen p -Formen in den einzelnen irreduziblen Summanden von $C^\infty(\Gamma \backslash G)$ berechnet werden können. Dabei ist p die Dimension der Blätterung, also $p = \dim \mathfrak{p}$.

Bei der Berechnung schränken wir die betrachteten Operatoren, also $d_{\mathcal{F}}$, $\star_{\mathcal{F}}$, $\delta_{\mathcal{F}}$ und $\Delta_{\mathcal{F}}$ wie folgt auf eine irreduzible Komponente ein:

Die Zerlegung von $C^\infty(\Gamma \backslash G)$ in irreduzible Komponenten der Form $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ induziert eine Zerlegung des Raums der i -Formen

$$C^i(\mathfrak{p}, C^\infty(\Gamma \backslash G)) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda^i \mathfrak{p}^*; C^\infty(\Gamma \backslash G)) \cong C^\infty(\Gamma \backslash G) \otimes \Lambda^i \mathfrak{p}^*$$

in Komponenten $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) \otimes \Lambda^i \mathfrak{p}^*$.

Die Zerlegung von $C^i(\mathfrak{p}, C^\infty(\Gamma \backslash G))$ in diese irreduziblen Komponenten ist, wie wir gesehen haben, invariant unter der Operation der äußeren Ableitung $d_{\mathcal{F}}^i$ und offensichtlich ist sie auch invariant unter der Operation des Hodge-Stern-Operators $\star_{\mathcal{F}}$ und somit auch invariant unter der zu $d_{\mathcal{F}}^i$ adjungierten Abbildung $\delta_{\mathcal{F}}^i$, die ja unter den von uns beschriebenen Voraussetzungen eine Komposition von $\star_{\mathcal{F}}$ und $d_{\mathcal{F}}$ ist. Also sind die irreduziblen Komponenten auch invariant unter der Operation des Laplace-Operators $\Delta_{\mathcal{F}}$.

Wir bezeichnen die Einschränkungen von $\star_{\mathcal{F}}$, $\delta_{\mathcal{F}}$ und $\Delta_{\mathcal{F}}$ auf die irreduzible Komponente $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) \otimes \Lambda^i \mathfrak{p}^*$ mit $\star_\pi$, δ_π bzw. Δ_π , so wie wir oben schon d_π für die Einschränkung von $d_{\mathcal{F}}$ geschrieben haben. Dabei bezeichne π die irreduzible Darstellung von G , die die Operation von $\mathfrak{p}$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ induziert.

Im vorigen Abschnitt haben wir schon gesehen, wie das Bild von $d_\pi^{p-1}: C^{p-1} \rightarrow C^p$ auf einer irreduziblen Komponente berechnet werden kann. Für eine irreduzible Darstellung π von G ist nach Identifikation von $\mathcal{H}_\pi^\infty$ mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ die Einschränkung der äußeren Ableitung $d_\pi^{p-1}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) \otimes \Lambda^{p-1} \mathfrak{p} \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) \otimes \Lambda^p \mathfrak{p}^*$

gegeben durch:

$$d_\pi^{p-1} \alpha(X_1 \wedge \dots \wedge X_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^i \bar{\pi}(X_i) \alpha(X_1 \wedge \dots \wedge \widehat{X_i} \wedge \dots \wedge X_p).$$

Dabei bezeichne $X_1, \dots, X_p$ die Basis von $\mathfrak{p}$, die die Metrik auf den tangentialen Vektoren induziert.

Um die adjungierte Abbildung δ_π^p von d_π^p zu berechnen, betrachten wir zuerst die Einschränkung des Hodge-Stern-Operators auf eine irreduzible Komponente. Dieser bildet $\xi \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) \otimes \Lambda^p \mathfrak{p}^*$ auf $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) \otimes \Lambda^0 \mathfrak{p} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ ab, wobei $\omega_1, \dots, \omega_p$ die zu $X_1, \dots, X_p$ duale Basis bezeichnet. Verknüpft mit der Korandabbildung $d_\pi^0: C^0 \rightarrow C^1$ folgt für $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$:

$$(d_\pi^0 \star_\pi)(\xi \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^i \bar{\pi}(X_i) \xi \omega_i.$$

Noch einmal verknüpft mit dem Stern-Operator erhalten wir die Abbildung $\delta_\pi^p = (-1)^{p(p+1)+1} \star_\pi d_\pi^0 \star_\pi: C^p \rightarrow C^{p-1}$. Dabei ist

$$\star_\pi d_\pi^0 \star_\pi (\xi \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^i \bar{\pi}(X_i) \xi \omega_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \dots \wedge \omega_p.$$

Der Laplace-Operator $\Delta_\pi^p = d_\pi^{p-1} \delta_\pi^p$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) \otimes \Lambda^p \mathfrak{p}^*$ ist gegeben durch:

$$\Delta_\pi^p (\xi \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p) = (-1)^{p(p+1)+1} \sum_{i=1}^p \bar{\pi}(X_i) \bar{\pi}(X_i) \xi \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p.$$

Wir sehen also, daß wir zur Berechnung der Einschränkung der harmonischen p -Formen auf eine irreduzible Komponente unter den gegebenen Voraussetzungen alle Elemente $\xi \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) \otimes \Lambda^p \mathfrak{p}^*$ bestimmen müssen mit

$$\sum_{i=1}^p \bar{\pi}(X_i) \bar{\pi}(X_i) \xi \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p = 0,$$

oder äquivalent dazu die Menge aller Schwartzschen Funktionen $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ mit $\sum_{i=1}^p \bar{\pi}(X_i) \bar{\pi}(X_i) \xi = 0$. Wir haben mit diesen Berechnungen also im wesentlichen den folgenden Satz gezeigt:

4.4.1 Satz: Sei $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ eine Blätterung von $\Gamma \backslash G$ versehen mit einer tangential kanonischen Metrik, für die $d(\star_{\perp}(1)) = 0$ ist. Dann gibt es auf der irreduziblen Komponenten $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$, auf der $\mathfrak{p}$ mit der irreduziblen Darstellung $\bar{\pi}$ operiert, einen natürlichen Isomorphismus zwischen den harmonischen p -Formen $\text{Kern } \Delta_{\pi}^p$ und den harmonischen Funktionen $\text{Kern } \Delta_{\pi}^0$.

Aus dieser Aussage über die irreduziblen Komponenten folgt direkt die Aussage über ganz $\Omega_{\mathcal{F}}^*$.

4.4.2 Korollar: Sei $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ versehen mit einer tangential kanonischen Metrik, für die $d(\star_{\perp}(1)) = 0$ gilt. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus zwischen den harmonischen p -Formen $\text{Kern } \Delta_{\mathcal{F}}^p$ und den harmonischen Funktionen $\text{Kern } \Delta_{\mathcal{F}}^0$.

Die tangential harmonischen Funktionen auf der geblätterten Mannigfaltigkeit $(\Gamma \backslash G, \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ sind offenbar die Funktionen, die konstant in Blattrichtung sind. Wir erhalten analog zu Bemerkung 2.4.12 direkt, daß $\dim \text{Kern } \Delta_{\mathcal{F}}^0$ eindimensional ist, wenn $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ ein in $\Gamma \backslash G$ dichtes Blatt besitzt. Also gilt das folgende

4.4.3 Korollar: Die geblätterte Mannigfaltigkeit $(\Gamma \backslash G, \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ sei versehen mit einer tangential kanonischen Metrik, für die $d(\star_{\perp}(1)) = 0$ gilt. Wenn $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ ein dichtes Blatt in $\Gamma \backslash G$ besitzt, dann ist $\dim \text{Kern } \Delta_{\mathcal{F}}^p$ eindimensional.

Mit Satz 2.4.13 haben wir gesehen, daß $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ genau dann kein dichtes Blatt in $\Gamma \backslash G$ besitzt, wenn die Projektion von $\mathfrak{p}$ in den abelschen Quotienten $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ rational ist, also eine Basis mit rationalen Strukturkonstanten bezüglich des Bildes von $\log \Gamma$ unter der Projektion in den Quotienten $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ besitzt.

Wir haben also für beliebige Blätterungen $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ mit einem dichten Blatt die Dimension des Raums der harmonischen p -Formen bestimmt. Sie ist nicht davon abhängig, ob die Blätterung Riemannsch ist oder nicht.

Bei der reduzierten Blätterungskohomologie ist die Situation etwas komplizierter. Wir haben zwar mit 2.4.12 gesehen, daß im Fall, daß die Blätterung

Riemannsch ist, die erste reduzierte Kohomologie eindimensional ist, wenn die Blätterung ein dichtes Blatt besitzt. Lassen wir jedoch die Voraussetzung Riemannsch weg, so werden wir sehen, daß etwas vergleichbares nicht mehr gilt. Insbesondere werden wir zeigen, daß die oberste reduzierte Blätterungskohomologie einer eindimensionalen Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ immer unendlichdimensional ist – unabhängig davon, ob $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ ein dichtes Blatt besitzt, oder nicht.

Bevor wir dies tun, werden wir in diesem Abschnitt noch ein Lemma über die harmonischen Formen beweisen, das dem Lemma 4.3.1 über die reduzierte Blätterungskohomologie ähnelt. Es gilt:

4.4.4 Lemma: Sei G eine nilpotente Lie-Gruppe und Γ ein Gitter von G . Sei $\mathfrak{p}$ eine Unteralgebra der zu G gehörenden Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Außerdem sei $\mathfrak{h}$ ein rationales Ideal von $\mathfrak{g}$ mit zugehöriger Lie-Gruppe $H = \exp \mathfrak{h}$. Die von $\mathfrak{p}$ induzierte Unteralgebra von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ bezeichnen wir mit $\bar{\mathfrak{p}}$ und die Dimension von $\bar{\mathfrak{p}}$ mit $p_0 := \dim(\bar{\mathfrak{p}})$.

Die Mannigfaltigkeit $\Gamma \backslash G$ sei versehen mit einer kanonischen Metrik g und die Mannigfaltigkeit $\bar{\Gamma} \backslash \bar{G}$ mit $\bar{G} := G/H$ und $\bar{\Gamma} := \Gamma/\Gamma \cap H$ mit der von g induzierten, kanonischen Metrik $\bar{g}$. Dann bilden die harmonischen p_0 -Formen der Blätterung $\mathcal{F}(\bar{\mathfrak{p}})$ bezüglich $\bar{g}$ einen direkten Summanden der harmonischen p -Formen der Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ bezüglich g .

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis von Lemma 4.3.1. Dort haben wir gesehen, daß die Summe $\bigoplus m(\pi_f, U) \mathcal{H}_{\pi_f}^\infty$ über alle $f \in \mathfrak{g}^*$ mit $\mathfrak{h} \subseteq \text{Kern } f$, die verschiedene Bahnen bzgl. der koadjungierten Darstellung von $\mathfrak{g}$ haben, ein direkter Summand in $C^\infty(\Gamma \backslash G)$ ist.

Wenn die Metrik g kanonisch ist, dann ist auch offensichtlich die von g induzierte Metrik $\bar{g}$ kanonisch. Beide sind insbesondere auch transversal kanonisch. Nach Lemma 2.4.8 gilt mit beiden Metriken $d(\star_\perp(1)) = 0$ und wir können die harmonischen Formen wie in Abschnitt 4.4 berechnen.

Dort haben wir gesehen, daß die Einschränkung von $\Delta_{\mathcal{F}}$ invariant auf den irreduziblen Komponenten ist und auf diesen den Funktionen $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$

mit $\sum \pi_f(X_i)^2 \xi = 0$ entspricht. Damit folgt die Behauptung. $\square$

4.5 Rationale Blätterungen

Wir haben in den Abschnitten 4.3 und 4.4 beschrieben, wie sich aus einer gegebenen, irreduziblen Darstellung $\bar{\pi}$ die oberste reduzierte Lie-Algebren-Kohomologie $\bar{H}^p(\mathfrak{p}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}))$ und die Menge der harmonischen p -Formen bestimmen lassen.

In diesem Abschnitt werden wir den Spezialfall untersuchen, daß $\mathfrak{p}$ eine rationale Unteralgebra ist. Es gibt also eine Basis $Z'_1, \dots, Z'_n$ von $\mathfrak{g}$, die rational bezüglich $\log \Gamma$ ist, so daß $\mathfrak{p} = \mathbb{R}Z'_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Z'_n$ gilt. Wir werden sehen, daß in diesem Fall, wenn $\mathfrak{p}$ kein Ideal ist, immer unendlich viele irreduzible Darstellungen $\bar{\pi}$ in der Zerlegung der regulären Darstellung auftreten, die eine irreduzible Komponente in der Kohomologie $\neq 0$ induzieren. Auf diesen irreduziblen Komponenten gibt es jedoch keine harmonischen p -Formen $\neq 0$.

Wir konstruieren zuerst für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ein rationales Funktional $f_\lambda \in \mathfrak{g}^*$ und damit eine irreduzible Darstellung $\pi_\lambda = \text{Ind}(M \uparrow G, \bar{f}_\lambda)$ von G . Später werden wir zeigen, daß wir eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ so wählen können, daß für die von $\bar{f}_\lambda$ induzierten Abbildung π_λ die Vielfachheit in der Zerlegung der regulären Darstellung $m(\pi_\lambda, U) > 0$ ist. Doch zuerst zur Definition von f_λ .

4.5.1 Konstruktion: Sei G eine nilpotente Lie-Gruppe und Γ ein Gitter von G . Die zu G gehörende Lie-Algebra bezeichnen wir mit $\mathfrak{g}$. Außerdem sei $\mathfrak{p}$ eine rationale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, jedoch kein Ideal.

Wir betrachten eine Erweiterung der aufsteigenden Zentralreihe von $\mathfrak{g}$, so wie wir sie auch schon im Beweis des Lemmas 3.1.2 über die Kirillov-Zerlegung verwendet haben. Wir haben also eine Folge von Idealen $\mathfrak{g}_0 := \{0\} \subseteq \mathfrak{g}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ mit $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1}$ und $\dim \mathfrak{g}_i - \dim \mathfrak{g}_{i-1} = 1$ für $1 \leq i \leq n$.

Diese Zerlegung induziert eine Basis $Z_1, \dots, Z_n$ von $\mathfrak{g}$, so daß das Ideal $\mathfrak{g}_i$ von $Z_1, \dots, Z_i$ für $1 \leq i \leq n$ erzeugt wird. Wir können dabei die $\mathfrak{g}_i$ und damit die

Basis-Elemente Z_i so wählen, daß die $Z_1, \dots, Z_n$ eine Basis bilden, die rational bezüglich $\log \Gamma$ ist.

Wir definieren die Zahl j_0 als das Minimum aller Zahlen $1 \leq j \leq n$ mit $[\mathfrak{g}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p} + \mathfrak{g}_j$. Da $\mathfrak{p}$ kein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist, ist $j_0 > 0$. Außerdem folgt aus der Minimalität von j_0 , daß $Z_{j_0} \notin \mathfrak{p}$ ist.

Wir erhalten eine Folge von Unteralgebren

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p} + \mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{p} + \mathfrak{g}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{p} + \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}.$$

Dabei ist $\dim(\mathfrak{p} + \mathfrak{g}_i) - \dim(\mathfrak{p} + \mathfrak{g}_{i-1}) \in \{0, 1\}$ für $1 \leq i \leq n$.

Nun konstruieren wir eine neue Basis von $\mathfrak{g}$. Nach Voraussetzung gibt es ein Element $X \in \mathfrak{g}$ und ein Element $Z'_1 \in \mathfrak{p}$, so daß $[X, Z'_1] \in \mathfrak{p} + \mathfrak{g}_{j_0-1} + Z_{j_0}$ ist. Wir ergänzen Z'_1 zu einer Basis $Z'_1, \dots, Z'_p$ von $\mathfrak{p}$. Diese Basis können wir wie folgt zu einer Basis $Z'_1, \dots, Z'_n$ von $\mathfrak{g}$ fortsetzen: Wenn $\mathfrak{p} + \mathfrak{g}_i \neq \mathfrak{p} + \mathfrak{g}_{i-1}$ ist, so wählen wir Z'_i als weiteres Basiselement.

Da $\mathfrak{p}$ eine rationale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist und die Basis $Z_1, \dots, Z_n$ rational bezüglich $\log \Gamma$ ist, kann eine so konstruierte Basis $Z'_1, \dots, Z'_n$ auch wieder rational bezüglich $\log \Gamma$ gewählt werden. Insbesondere gibt es auch ein i_0 mit $p < i_0 \leq n$, so daß $Z'_{i_0} = Z_{j_0}$ ist.

Wir definieren ein Funktional $f \in \mathfrak{g}^*$ durch $f(Z'_{i_0}) = 1$ und $f(Z'_i) = 0$ für $i \neq i_0$. Aus der Definition folgt direkt, daß f rational ist und daß $f(\mathfrak{p}) = 0$ und $f(\mathfrak{g}_{j_0-1}) = 0$ gilt.

Für beliebige $\lambda \neq 0$ sei $f_\lambda \in \mathfrak{g}^*$ gegeben durch $f_\lambda := \lambda \cdot f$. Die obige Konstruktion stellt sicher, daß die zu solchen Funktionalen f_λ gehörenden, irreduziblen Darstellungen für unendlich viele $\lambda \in \mathbb{Z}$ positive Vielfachheit in der Zerlegung der regulären Darstellung haben. Dies werden wir jetzt mit Hilfe des Satzes von Richardson 3.5.5 beweisen.

Um den Satz von Richardson 3.5.5 über die Vielfachheit der von $\bar{f}_\lambda$ induzierten, irreduziblen Darstellung in der regulären Darstellung U anwenden zu können, benötigen wir eine spezielle maximal untergeordnete Algebra, so wie sie in 3.5.1 konstruiert worden ist. Wir werden im folgenden gemäß dieser Kon-

struktionsvorschrift eine spezielle maximal untergeordnete Algebra $\mathfrak{m}$ bzgl. f von $\mathfrak{g}$ konstruieren. Die Konstruktion einer maximal untergeordneten Algebra $\mathfrak{m}$ bezüglich f_λ ist unabhängig von λ , falls $\lambda \neq 0$ ist. Also wird die Unter algebra $\mathfrak{m}$ auch maximal untergeordnet zu f_λ für alle $\lambda \neq 0$ sein.

Wir werden das folgende Lemma in einer anderen Situation auch noch einmal verwenden und formulieren es deshalb allgemein.

4.5.2 Lemma: Sei $Z'_1, \dots, Z'_n$ eine Basis von $\mathfrak{g}$, die rational bezüglich $\log \Gamma$ ist. Außerdem gelte mit $\tilde{\mathfrak{g}}_i := \bigoplus_{j=1}^i \mathbb{R}Z'_j$ und $\tilde{\mathfrak{g}}_0 := \{0\}$, daß $[\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}}_i] \subseteq \tilde{\mathfrak{g}}_{i-1}$ für $1 \leq i \leq n$ ist.

Sei $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ und ein Funktional $f \in \mathfrak{g}^*$ gegeben durch $f(Z'_{i_0}) = 1$ und $f(Z'_i) = 0$ für $i \neq i_0$. Dann gibt es unendlich viele $\lambda \in \mathbb{Z}$, so daß die Vielfachheit der zu $\lambda \cdot f \in \mathfrak{g}^*$ gehörende Darstellung π_λ in der Zerlegung der regulären Darstellung U von $\Gamma \backslash G$ nicht Null ist.

Außerdem sind für $\lambda \neq \lambda'$ die Darstellungen π_λ und $\pi'_{\lambda'}$ nicht äquivalent zueinander.

Beweis: Wir konstruieren schrittweise eine spezielle maximal untergeordnete Algebra $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{g}$ mit dem Verfahren von Richardson. Auf diese Weise erhalten wir im i -ten Schritt eine Unter algebra $\mathfrak{m}_i$ und ein Element $X_i \in \mathfrak{g}$, so daß $\mathfrak{m}_1 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{m}_{n-k} = \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}X_{n-k} \oplus \mathfrak{m}$ gilt. Wir zeigen zuerst mit vollständiger Induktion, daß für alle i mit $1 \leq i \leq n - k$ gilt: $\tilde{\mathfrak{g}}_{i_0} \subseteq \mathfrak{m}_i$. Dazu betrachten wir die Richardson-Konstruktion genauer.

Im ersten Schritt teilen wir aus $\mathfrak{g}$ ein Ideal $\mathfrak{h}_1$ mit den folgenden Eigenschaften heraus:

- (1) $f(\mathfrak{h}_1) = 0$,
- (2) Das Zentrum von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$ ist eindimensional,
- (3) $f|\{V \in \mathfrak{g} \mid [\mathfrak{g}, V] \subseteq \mathfrak{h}_1\} \neq 0$.

Wie wir in der Konstruktion 3.5.1 gesehen haben, erhalten wir das gesuchte Ideal durch schrittweise Konstruktion. Es folgt direkt aus den Voraussetzungen

des Lemmas, daß $\tilde{\mathfrak{g}}_{i_0-1} \subseteq \text{Kern } f$ ist. Also folgt

$$\mathfrak{h}_1 \supseteq \text{Kern } f \cap \{V \in \mathfrak{g} \mid [\mathfrak{g}, V] \subseteq \tilde{\mathfrak{g}}_{i_0-1}\} = \text{Kern } f \cap \tilde{\mathfrak{g}}_{i_0} \supseteq \tilde{\mathfrak{g}}_{i_0-1}.$$

Wir bezeichnen mit $\bar{X}$ die Äquivalenzklasse von $X \in \mathfrak{g}$ in $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$ und schreiben abkürzend Z für Z'_{i_0} . Nach Voraussetzung ist $[\mathfrak{g}, Z] \subseteq \tilde{\mathfrak{g}}_{i_0-1}$. Das Zentrum von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$ wird also von der Äquivalenzklasse $\bar{Z}$ von $Z = Z'_{i_0}$ erzeugt.

Mit der Kirillov-Zerlegung 3.1.2 des Quotienten $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$ erhalten wir

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1 = \mathbb{R}\bar{X}_1 \oplus \mathbb{R}\bar{Y}_1 \oplus \mathbb{R}\bar{Z} \oplus \bar{\mathfrak{w}}_1,$$

wobei $[\bar{X}_1, \bar{Y}_1] = \bar{Z}$ und $[\bar{Y}_1, \bar{W}] = 0$ für alle $\bar{W} \in \bar{\mathfrak{w}}_1$ gilt.

Nun wählen wir einen Repräsentanten $X_1 \in \mathfrak{g}$ von $\bar{X}_1$. Wir stellen X_1 mit unserer obigen Basis $Z'_1, \dots, Z'_n$ dar und erhalten reelle Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit $X_1 = \alpha_1 Z'_1 + \dots + \alpha_n Z'_n$. Da $[\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}}_{i_0}] \subseteq \tilde{\mathfrak{g}}_{i_0-1} \subseteq \mathfrak{h}_1$ ist, kann der Repräsentant X_1 von $\bar{X}_1$ ohne Einschränkung so gewählt werden, daß $\alpha_1 = \dots = \alpha_{i_0} = 0$ ist.

Wir erhalten eine Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 \oplus \mathfrak{m}_1$ mit $\tilde{\mathfrak{g}}_{i_0} \subseteq \mathfrak{m}_1$ und wenden die Konstruktion erneut auf $\mathfrak{m}_1$ an. Wir finden also ein Ideal $\mathfrak{h}_2$ von $\mathfrak{m}_1$ mit den oben genannten Eigenschaften. Wenn $\mathfrak{m}_1/\mathfrak{h}_2$ abelsch ist, so haben wir mit $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1$ eine spezielle, maximal untergeordnete Algebra gefunden. Wenn nicht, so wiederholen wir die Konstruktion erneut.

Wir erhalten im i -ten Schritt ($i \geq 1$) das Ideal $\mathfrak{h}_i$. Für dieses Ideal gilt nach Konstruktion $\text{Kern } f \cap \mathfrak{m}_{i-1} \cap \tilde{\mathfrak{g}}_{i_0} \subseteq \mathfrak{h}_i$. Nach Induktions-Voraussetzung ist $\tilde{\mathfrak{g}}_{i_0} \subseteq \mathfrak{m}_{i-1}$. Wir können also insbesondere wieder davon ausgehen, daß das Zentrum von $\mathfrak{m}_{i-1}/\mathfrak{h}_i$ von der Äquivalenzklasse $\bar{Z}$ von Z erzeugt wird. Wir erhalten eine Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}X_i \oplus \mathfrak{m}_i$. Dabei ist $\mathbb{R}X_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}X_i \subseteq \mathbb{R}Z'_{i_0+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}Z'_n$. Also folgt $\tilde{\mathfrak{g}}_{i_0} \subseteq \mathfrak{m}_i$. Wir erhalten nach $n-k$ Schritten, daß das Ideal $\tilde{\mathfrak{g}}_{i_0}$ in der speziellen maximal untergeordneten Algebra $\mathfrak{m}$ enthalten ist.

Nach diesen Vorbemerkungen beweisen wir die erste Aussage des Lemmas. Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f_\lambda \in \mathfrak{g}^*$ gegeben durch $f_\lambda := \lambda \cdot f$. Die zu f_λ gehörende, irreduzible Darstellung von G bezeichnen wir mit π_λ . Nach dem Satz von

4 Blätterungen von Nilmannigfaltigkeiten

Richardson 3.5.5 ist die Vielfachheit $m(\pi_\lambda, U) > 0$, wenn $f_\lambda(\mathfrak{m} \cap \log \Gamma) \subseteq \mathbb{Z}$ ist. Wir haben gezeigt, daß $Z'_{i_0} \in \mathfrak{m}$ ist. Also folgt $f_\lambda(\mathfrak{m} \cap \log \Gamma) = f_\lambda(\mathbb{R}Z'_{i_0} \cap \log \Gamma)$. Da die Basis $Z'_1, \dots, Z'_n$ rational bezüglich $\log \Gamma$ ist, gibt es ein rationales Polynom $q_{i_0}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so daß

$$f_\lambda(\mathbb{R}Z_{i_0} \cap \log \Gamma) = \{q_{i_0}(m_1, \dots, m_n)\lambda \mid m_i \in \mathbb{Z} \text{ für } 1 \leq i \leq n\}.$$

Also existieren unendlich viele $\lambda \in \mathbb{Z}$ mit $m(\pi_\lambda, U) > 0$; wir wählen einfach λ als ganzzahliges Vielfaches des Hauptnenners der Koeffizienten von q_{i_0} . Somit haben wir den ersten Teil des Lemmas bewiesen.

Es bleibt noch die zweite Aussage zu zeigen. Im folgenden sei $\lambda \neq \lambda'$. Außerdem setzen wir $\lambda \neq 0$ und $\lambda' \neq 0$ voraus. Für diese Fälle ist die obige Aussage trivial. Wir betrachten noch einmal den ersten Schritt in der Konstruktion von $\mathfrak{m}$. Da $\lambda \neq 0$ und $\lambda' \neq 0$ ist, folgt $\text{Kern } f_\lambda = \text{Kern } f_{\lambda'}$.

Wir haben oben gesehen, daß das Zentrum von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$ von der Äquivalenzklasse $\bar{Z}'_{i_0}$ von $Z'_{i_0} \in \mathfrak{g}$ erzeugt wird.

Da $\mathfrak{h}_1$ ein Ideal ist und im Kern von f_λ sowie von $f_{\lambda'}$ enthalten ist, folgt $\pi_\lambda(h) = \pi_{\lambda'}(h) = E$ für alle $h \in H_1 := \exp \mathfrak{h}_1$. Dabei bezeichne E den Identitätsoperator. Wir können also Darstellungen $\tilde{\pi}_\lambda$ und $\tilde{\pi}_{\lambda'}$ auf G/H_1 durch $\tilde{\pi}_\lambda(\bar{g}) = \pi_\lambda(g)$, sowie $\tilde{\pi}_{\lambda'}(\bar{g}) = \pi_{\lambda'}(g)$ definieren, wobei $g \in G$ ein beliebiger Repräsentant von $\bar{g} \in G/H_1$ ist. Diese Darstellungen können wir mit Hilfe des Satzes 3.3.4 mit den Darstellungen π_λ bzw. $\pi_{\lambda'}$ von G identifizieren.

Sei $z := \exp Z'_{i_0} \in G$ und $\bar{z}$ ein Repräsentant von z in G/H_1 . Das Element $\bar{z}$ liegt im Zentrum des Quotienten G/H_1 . Die Operation von $\tilde{\pi}_\lambda(\bar{z}^t)$ ist für $t \in \mathbb{R}$ die Multiplikation mit $\exp(2\pi i t \lambda)$ und die Operation von $\tilde{\pi}_{\lambda'}(\bar{z}^t)$ ist die Multiplikation mit $\exp(2\pi i t \lambda')$. Wenn $\lambda \neq \lambda'$ ist, so können die Darstellungen $\tilde{\pi}_\lambda$ und $\tilde{\pi}_{\lambda'}$ nicht äquivalent sein, da sie für das Zentrum von G/H_1 unterschiedliche Operatoren liefern.

Deshalb können auch die Darstellungen π_λ und $\pi_{\lambda'}$ für $\lambda \neq \lambda'$ nicht äquivalent zueinander sein. $\square$

Wir haben also eine Familie von paarweise nicht zueinander äquivalenten, ir-

reduziblen Darstellungen konstruiert, die in der Zerlegung der regulären Darstellung mit positiver Vielfachheit auftreten. Wir werden jetzt die Operationen der zu den f_λ gehörenden, irreduziblen Darstellungen berechnen.

Im folgenden Lemma sehen wir, wie wir ganz allgemein unter gewissen Bedingungen an die maximal untergeordnete Algebra $\mathfrak{m}$ die Operation von $\mathfrak{p}$ auf einer irreduziblen Komponente leicht berechnen können.

4.5.3 Lemma: Sei $f \in \mathfrak{g}^*$ und π_f die von dem zu f gehörenden Charakter $\bar{f}$ gehörende induzierte, irreduzible Darstellung. Sei $X_1, \dots, X_k$ eine Basis der maximal untergeordneten Algebra $\mathfrak{m}$ und $X_1, \dots, X_n$ eine Basis von $\mathfrak{g}$. Seien $t_{k+1}, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ und $X = t_{k+1}X_1 + \dots + t_nX_n \in \mathfrak{g}$, sowie $Y \in \mathfrak{p}$ beliebig.

Wenn für alle $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt: $\text{ad}_X^i Y \subseteq \mathfrak{m}$, dann folgt mit $\xi \in L^2(\mathbb{R}^{n-k})$:

$$\pi_f(\exp Y)\xi(t_1, \dots, t_{n-k}) = \bar{f}(\exp \text{Ad}_{\exp(X)}(Y))\xi(t_1, \dots, t_{n-k})$$

Beweis: Dieses Lemma kann mit einer einfachen Rechnung bewiesen werden. Wir verwenden dabei die Definition der induzierten Darstellung und die Gleichung $\text{Ad}_{\exp X}(Y) = e^{\text{ad}_X}(Y)$, die für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt. Wir hatten diese Formel direkt aus der Campbell-Baker-Hausdorff-Formel 1.2.2 hergeleitet.

Im folgenden sei $h := \exp Y$. Nach Voraussetzung ist $Y = \text{ad}_X^0(Y) \in \mathfrak{m}$ und $\text{ad}_X^i(Y) \in \mathfrak{m}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Deshalb folgt

$$X \star Y \star (-X) = e^{\text{ad}_X} Y = Y + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \text{ad}_X^i Y \in \mathfrak{m}.$$

Somit ist $\exp(\text{Ad}_g Y) = \exp(X \star Y \star (-X)) = ghg^{-1} \in M$, wobei $M := \exp \mathfrak{m}$ die zu $\mathfrak{m}$ gehörende Lie-Gruppe bezeichnet.

Es folgt also $\pi_f(h)\xi(g) = \xi(gh) = \xi(ghg^{-1}g) = \bar{f}(ghg^{-1})\xi(g)$. Nach Identifikation von $\mathcal{H}_\pi$ mit $L^2(\mathbb{R}^{n-k})$ durch die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow M \backslash G$, die wie oben gegeben ist durch $\varphi(t_1, \dots, t_{n-k}) = M \exp(t_1 X_{k+1} + \dots + t_{n-k} X_n)$ erhalten wir die Behauptung. $\square$

Wir werden sehen, daß es in der konkreten Situation eine maximal untergeordnete Algebra $\mathfrak{m}$ bzgl. f_λ gibt, so daß $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ ist und $\text{ad}_X^i \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ für alle

$i \in \mathbb{N}$ und alle $X \in \mathfrak{g}$ gilt. Dazu konstruieren wir im folgenden eine maximal untergeordnete Algebra mit diesen gewünschten Eigenschaften.

4.5.4 Konstruktion: Wir wählen die Basis $Z'_1, \dots, Z'_n$ von $\mathfrak{g}$, so wie wir sie in der Konstruktion 4.5.1 von f_λ beschrieben haben. Die Unter algebra $\mathfrak{p}$ ist also erzeugt von $Z'_1, \dots, Z'_p$. Außerdem gibt es ein $X \in \mathfrak{g}$ mit $[X, Z'_1] \in \mathfrak{p} + \mathfrak{g}_{j_0-1} + Z'_{i_0}$. Wir definieren

$$\mathfrak{m}_0 := \mathfrak{p} + \mathfrak{g}_{j_0}.$$

Es folgt $[\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0] \subseteq \mathfrak{p} + \mathfrak{g}_{j_0-1}$ und somit $f([\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0]) = 0$. Wir können also für $\lambda \neq 0$ die Unter algebra $\mathfrak{m}_0$ zu einer bzgl. $f_\lambda = \lambda \cdot f$ maximal untergeordneten Algebra $\mathfrak{m}$ ergänzen. Da $f_\lambda([\mathfrak{g}, \mathfrak{p}]) \neq 0$ ist, ist insbesondere $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{g}$.

4.5.5 Bemerkung: Nach dem Satz von Kirillov 3.4.3 ist die irreduzible Darstellung π_λ bis auf Äquivalenz unabhängig von der Wahl der maximal untergeordneten Algebra $\mathfrak{m}$. Wir müssen also gar nicht zeigen, daß die oben konstruierte Algebra $\mathfrak{m}$ mit der speziellen Unter algebra, die wir in Lemma 4.5.2 konstruiert haben, übereinstimmt. Dennoch ist offensichtlich mit der Bezeichnung aus Lemma 4.5.2 $\mathfrak{m}_0 \subseteq \tilde{\mathfrak{g}}_{i_0}$. Also kann mit der in 4.5.4 beschriebenen Methode sogar eine spezielle, maximal untergeordnete Algebra konstruiert werden.

In den folgenden Berechnungen sei $\mathfrak{m}$ immer auf die oben beschriebene Weise gewählt. Wir erhalten eine Basis von $\mathfrak{m}$, indem wir die $X_i := Z'_i$ für $1 \leq i \leq p$ zu einer Basis $X_1, \dots, X_k$ von $\mathfrak{m}$ fortsetzen. Diese Basis von $\mathfrak{m}$ ergänzen wir wiederum zu einer Basis $X_1, \dots, X_n$ von $\mathfrak{g}$. Offensichtlich ist $\mathfrak{p} \subseteq \text{Kern } f_\lambda$ und für $i \in \mathbb{N}$ ist $\text{ad}_{\mathfrak{g}}^i \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p} + \mathfrak{g}_{j_0} \subseteq \mathfrak{m}$. Die Eigenschaften des obigen Lemmas sind also mit dieser Wahl von $\mathfrak{m}$ erfüllt.

Mit dieser maximal untergeordneten Algebra berechnen wir die von $\bar{f}_\lambda$ induzierte, irreduzible Darstellung $\pi_\lambda := \text{Ind}((\exp \mathfrak{m}) \uparrow G, \bar{f})$ von G . Der Charakter von f_λ ist dabei die eindimensionale Darstellung $\bar{f}_\lambda$ von M , die gegeben ist durch $\bar{f}_\lambda(m)\xi = \exp(2\pi i f_\lambda(\log m))\xi$ für $m \in M$ und $\xi \in \mathbb{C}$.

Wir wählen die Basis $X_1, \dots, X_n$ von $\mathfrak{g}$ wie oben beschrieben. Also ist $\mathfrak{p}$ erzeugt von $X_1, \dots, X_p$, $\mathfrak{m}$ erzeugt von $X_1, \dots, X_k$ und $X_1, \dots, X_n$ eine Basis von $\mathfrak{g}$.

Mit dieser Basis können wir, wie wir in der Konstruktion 3.4.4 gesehen haben, den Raum $\mathcal{H}_{\pi_\lambda}$ mit $L^2(\mathbb{R}^{n-k})$ identifizieren, bzw. $\mathcal{H}_{\pi_\lambda}^\infty$ mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$.

Um die Einschränkung der zu π_λ gehörenden Darstellung $\bar{\pi}_\lambda$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auf den Teilraum $\mathfrak{p}$ zu bestimmen, müssen wir nur verwenden, daß wir $\bar{\pi}_\lambda$ aus der Gleichung $\bar{\pi}_\lambda(X) = \frac{\partial}{\partial t} \big|_{t=0} \pi_\lambda(\exp tX)$ für alle $X \in \mathfrak{p}$ erhalten. Es folgt direkt mit der Basis $X_1, \dots, X_n$ von $\mathfrak{g}$ und der Identifikation von $\mathcal{H}_{\pi_\lambda}^\infty$ mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$:

4.5.6 Lemma: Die Operation von $\bar{\pi}_\lambda(X)$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ ist für beliebige $X \in \mathfrak{p}$ gegeben durch:

$$\bar{\pi}_\lambda(X)\xi(t_1, \dots, t_{n-k}) = 2\pi i f_\lambda(\text{Ad}_g(X))\xi(t_1, \dots, t_{n-k}).$$

Dabei sei $g := \exp(t_1 X_{k+1} + \dots + t_{n-k} X_n)$.

Beweis: Wir können das vorangehende Lemma 4.5.3 anwenden, da die Voraussetzungen nach Lemma 4.5.2 und der in der Konstruktion 4.5.4 beschriebenen Wahl von $\mathfrak{m}$ erfüllt sind. Es ist also für $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ und $Y \in \mathfrak{p}$

$$\pi_\lambda(\exp X)\xi(t_1, \dots, t_{n-k}) = \exp(2\pi i f_\lambda(\text{Ad}_g(X)))\xi(t_1, \dots, t_{n-k})$$

mit $g = \exp(t_1 X_{k+1} + \dots + t_{n-k} X_n)$. Da $\text{Ad}_g(tX) = t\text{Ad}_g(X)$ für $t \in \mathbb{R}$ und $X \in \mathfrak{p}$ gilt, folgt direkt die Behauptung. $\square$

Zur weiteren Berechnung mit diesen irreduziblen Darstellungen benötigen wir zwei Eigenschaften von $\text{Ad}_g|_{\mathfrak{p}}$. Zur Erinnerung: Wir wählten $X_1 \in \mathfrak{p}$ so, daß es ein $X \in \mathfrak{g}$ gibt mit $[X_1, X] \in Z'_{i_0} \oplus \mathfrak{g}_{j_0-1}$.

4.5.7 Bemerkung: Wir verwenden die obigen Bezeichnungen. Insbesondere sei wieder $X_1, \dots, X_k$ die oben beschriebene Basis von $\mathfrak{m}$ und $X_1, \dots, X_n$ eine Ergänzung zu einer Basis von $\mathfrak{g}$. Es gilt:

- (i) $f_\lambda(\text{Ad}_1(X)) = 0$ für alle $X \in \mathfrak{p}$.
- (ii) Sei $\lambda \neq 0$. Dann gibt es $(t_1, \dots, t_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}$, so daß $f_\lambda(\text{Ad}_g(X_1)) \neq 0$ ist. Dabei ist wie oben $g = \exp(t_1 X_{k+1} + \dots + t_{n-k} X_n)$.

Beweis: Die erste Eigenschaft ist offensichtlich, denn aus der Definition der adjungierten Darstellung Ad folgt direkt, daß $\text{Ad}_1(X) = X$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ ist. Außerdem folgt aus der Konstruktion 4.5.1, daß $f_\lambda(\mathfrak{p}) = 0$ ist.

Die zweite Eigenschaft erhalten wir aus der Gleichung $\text{Ad}_{\exp X}(Y) = e^{\text{ad}_X}(Y)$, die für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt. Wir hatten diese Formel, die direkt aus der Campbell-Baker-Hausdorff-Formel 1.2.2 folgt, oben schon verwendet.

Nach Konstruktion von f_λ und Wahl der Basis $X_1, \dots, X_n$ ist $X_1 \in \mathfrak{p}$ und es gibt ein Element $X \in \mathfrak{g}$ mit $[X, X_1] \in \mathfrak{p} + \mathfrak{g}_{j_0-1} + Z'_{i_0}$. Es ist $f_\lambda(\mathfrak{p} + \mathfrak{g}_{j_0-1}) = 0$, also folgt $f_\lambda([X, X_1]) = f_\lambda(Z'_{i_0}) = \lambda$. Im folgenden werden wir X mit der obigen Basis darstellen als $X = s_1 X_1 + \dots + s_k X_k + t_1 X_{k+1} + \dots + t_{n-k} X_n$ und wir definieren $X' := t_1 X_{k+1} + \dots + t_{n-k} X_n$. Da $s_1 X_1 + \dots + s_k X_k \in \mathfrak{m}$ ist, folgt $f_\lambda([\mathfrak{m}, s_1 X_1 + \dots + s_k X_k]) = 0$, weil $\mathfrak{m}$ eine maximal untergeordnete Algebra ist. Damit erhalten wir $f_\lambda([X', X_1]) = f_\lambda([X, X_1]) = f_\lambda(Z'_{i_0}) = \lambda$.

Außerdem folgt aus unserer Konstruktion von f_λ , sowie der Wahl der Basis $X_1, \dots, X_n$, daß $\text{ad}_{X'}^i Z'_{i_0} \in \mathfrak{g}_{j_0-1}$ für $i \in \mathbb{N}$ ist und somit ist $f_\lambda(\text{ad}_{X'}^i X_1) = f_\lambda(\text{ad}_{X'}^{i-1} Z'_{i_0}) = 0$ für alle $i > 1$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} f_\lambda(\text{Ad}_{\exp X'}(X_1)) &= f_\lambda(e^{\text{ad}_{X'}} X_1) \\ &= f_\lambda(X_1 + [X', X_1] + \frac{1}{2}[X', [X', X_1]] + \dots) \\ &= f_\lambda(X_1) + f_\lambda(Z'_{i_0}) + \frac{1}{2}f_\lambda([X', X_{p+1}]) + \dots \\ &= f_\lambda(Z'_{i_0}) = \lambda. \end{aligned}$$

Da wir $\lambda \neq 0$ vorausgesetzt haben, folgt die Behauptung. $\square$

Fassen wir unsere bisherigen Ergebnisse im folgenden Satz zusammen.

4.5.8 Satz: Es gibt für unendlich viele $\lambda \in \mathbb{Z}$ eine irreduzible Darstellung $\bar{\pi}_\lambda$ von $\mathfrak{g}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Für alle $X \in \mathfrak{p}$ ist die Operation von $\bar{\pi}_\lambda(X)$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ gegeben durch

$$\bar{\pi}_\lambda(X)\xi(t_1, \dots, t_{n-k}) = 2\pi i f_\lambda(\text{Ad}_g(X))\xi(t_1, \dots, t_{n-k})$$

mit $g = \exp(t_1 X_{k+1} + \dots + t_{n-k} X_n)$. Dabei ist $X_1, \dots, X_n$ die oben be-

schriebene Basis von $\mathfrak{g}$, so daß $X_1, \dots, X_k$ eine Basis von $\mathfrak{m}$ und $X_1, \dots, X_p$ eine Basis von $\mathfrak{p}$ ist.

- (ii) Die Vielfachheit von π_λ in der irreduziblen Zerlegung der regulären Darstellung ist $m(\pi_\lambda, U) > 0$.
- (iii) $(\bar{\pi}_\lambda(X))\xi(0) = 0$ für alle $X \in \mathfrak{p}$ und $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$.
- (iv) $\bar{\pi}_\lambda \neq 0$.

Beweis: Die erste Aussage haben wir in Lemma 4.5.6 gezeigt. Die zweite Aussage zeigten wir in 4.5.2, und die dritte und vierte Aussage können wir direkt aus der Bemerkung 4.5.7 herleiten. $\square$

Nun können wir mit diesen Informationen die Dimension der obersten reduzierten Kohomologie $\bar{H}^p(\mathfrak{p}; \mathcal{H}_{\pi_\lambda}^\infty)$ abschätzen. Wir werden im folgenden Lemma sehen, daß diese Kohomologie von positiver Dimension ist.

Wir wählen eine beliebige, irreduzible Darstellung π_λ des oben untersuchten Typs. Um den Raum $\mathcal{H}_{\pi_\lambda}^\infty$ der glatten Vektoren von π_λ mit einem Schwartzschen Raum identifizieren zu können, benötigen wir wieder die oben beschriebene Basis $X_1, \dots, X_n$ von $\mathfrak{g}$, wobei $X_1, \dots, X_k$ eine Basis von $\mathfrak{m}$ ist. Mit dieser Basis erhalten wir wie oben beschrieben aus der irreduziblen Darstellung π_λ von G eine $\mathfrak{g}$ -Modul-Struktur auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$.

Dabei ist die Operation von $\mathfrak{p}$ auf dem Schwartzschen Raum durch $\bar{\pi}_\lambda$ gegeben mit $\bar{\pi}_\lambda(X)\xi(t) = 2\pi i f_\lambda(\text{Ad}_g(X))\xi(t)$, wobei $g = \exp(t_1 X_{k+1} + \dots + t_{n-k} X_n)$, $X \in \mathfrak{p}$ und $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$, sowie $t \in \mathbb{R}^{n-k}$ ist.

4.5.9 Lemma: Die Operation von $\mathfrak{p}$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ sei gegeben durch eine Darstellung der Form $\bar{\pi}_\lambda$ mit $\lambda \neq 0$. Dann ist die Dimension der obersten reduzierten Kohomologie $\dim \bar{H}^p(\mathfrak{p}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})) > 0$. Außerdem ist die äußere Ableitung $d_{\pi_\lambda}^{p-1}: C^{p-1}(\mathfrak{p}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})) \longrightarrow C^p(\mathfrak{p}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}))$ nicht die Nullabbildung.

Beweis: Da nach Konstruktion von f_λ die maximal untergeordnete Algebra $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{g}$ ist, folgt direkt, daß $k < n$ ist.

Wir haben in Abschnitt 4.3 gesehen, wie wir mit einer gegebenen irreduziblen

4 Blätterungen von Nilmannigfaltigkeiten

Darstellung die oberste Kohomologie $H^p(\mathfrak{p}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}))$ berechnen können. Dieses Verfahren wenden wir jetzt an.

Die äußere Ableitung $d_{\pi_\lambda}^{p-1}: C^{p-1}(\mathfrak{p}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})) \longrightarrow C^p(\mathfrak{p}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}))$ ist gegeben durch

$$d_{\pi_\lambda}^{p-1}\alpha(X_1 \wedge \dots \wedge X_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^i \bar{\pi}_\lambda(X_i) \alpha(X_1 \wedge \dots \wedge \widehat{X_i} \wedge \dots \wedge X_p).$$

Sei $\tilde{\alpha} \in \text{Bild } d_{\pi_\lambda}^{p-1}$ beliebig. Dann folgt direkt $\tilde{\alpha}(X_1 \wedge \dots \wedge X_p)(0) = 0$, da nach Satz 4.5.8 für alle $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ und alle $X \in \mathfrak{p}$ gilt: $\bar{\pi}_\lambda(X)\xi(0) = 0$.

Nach Identifikation von $C^p(\mathfrak{p}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) \otimes \Lambda^p \mathfrak{p}^*$ mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ enthält also das Bild von $d_{\pi_\lambda}^{p-1}$ den Teilraum $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{n-k})$ von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$, der aus den schnell-fallenden Funktionen besteht, die im Ursprung verschwinden.

Also ist $d_{\pi_\lambda}^{p-1}$ nicht die Nullabbildung. Außerdem ist das Bild von $d_{\pi_\lambda}^{p-1}$ nicht nullkodimensional in C^p . Es gilt für alle $\lambda \neq 0$, daß $H^p(\mathfrak{p}; \mathcal{H}_{\pi_\lambda}^\infty)$ den eindimensionalen Quotienten $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})/\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{n-k})$ enthält.

Die Menge $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{n-k})$ ist offensichtlich abgeschlossen in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$. Daraus folgt die erste Behauptung des Lemmas. $\square$

Insgesamt erhalten wir also, daß in der direkten Summe $\widehat{\bigoplus} m(\pi, U) \bar{H}^p(\mathfrak{p}; \mathcal{H}_\pi^\infty)$ über alle Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen π von $\mathfrak{g}$ unendlich viele (nach Lemma 4.5.2 paarweise verschiedene) Summanden der Form $\bar{H}^p(\mathfrak{p}; \mathcal{H}_{\pi_\lambda}^\infty)$ mit positiver Vielfachheit auftreten. Außerdem ist $\dim \bar{H}^p(\mathfrak{p}; \mathcal{H}_{\pi_\lambda}^\infty) > 0$. Es folgt also für die Blätterungskohomologie in dem Fall, daß die Unterálgebra $\mathfrak{p}$ kein Ideal ist:

4.5.10 Satz: Die direkte Summe $\widehat{\bigoplus}_\lambda m(\pi_\lambda, U) \bar{H}^p(\mathfrak{p}; \mathcal{H}_{\pi_\lambda}^\infty)$ über $\lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist ein unendlichdimensionaler Untervektorraum von $\bar{H}^p(\Gamma \backslash G; \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$. Insbesondere ist die oberste reduzierte Blätterungskohomologie $\bar{H}^p(\Gamma \backslash G; \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ unendlichdimensional über $\mathbb{R}$.

Nun vergleichen wir dieses Ergebnis über die reduzierte Blätterungskohomologie mit den harmonischen p -Formen. Es zeigt sich, daß die tangential harmonischen Formen keinen Anteil in den irreduziblen Komponenten $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) \otimes \Lambda^p \mathfrak{p}^*$

besitzen.

Wir haben in Abschnitt 4.4 gesehen, wie wir die harmonischen p -Formen in den irreduziblen Komponenten unter gewissen Voraussetzungen berechnen können. Wir erhalten wieder für den Fall, daß $\mathfrak{p}$ kein Ideal ist mit den obigen Bezeichnungen:

4.5.11 Satz: Sei $\Gamma \backslash G$ versehen mit einer Riemannschen Metrik, die tangential kanonisch ist und mit der für den transversalen Hodge-Stern-Operator $d(\star_\perp(1)) = 0$ gilt. Dann ist $\text{Kern } \Delta_{\pi_\lambda}^p = \{0\}$.

Beweis: Die Voraussetzungen, die für die Berechnung nach Abschnitt 4.4 benötigt werden, sind erfüllt. Zur Berechnung der harmonischen p -Formen müssen wir in dem Teilraum $\mathcal{H}_{\pi_\lambda}^\infty$, den wir mit dem Schwartzschen Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ identifizieren, nur den Kern der Operation bestimmen, die eine p -Form $\xi \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) \otimes \Lambda^p \mathfrak{p}^*$ abbildet auf eine p -Form $\tilde{\xi} \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) \otimes \Lambda^p \mathfrak{p}^*$. Dabei ist $\omega_1, \dots, \omega_p$ die zu $X_1, \dots, X_p$ duale Basis von $\Lambda^1 \mathfrak{p}^*$ und die Funktion $\tilde{\xi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ ist gegeben durch

$$\tilde{\xi}(t_1, \dots, t_{n-k}) := \sum_{i=1}^p 4\pi f_\lambda(\text{Ad}_g(X_i)) \xi(t_1, \dots, t_{n-k})$$

mit $g := \exp(t_1 X_{k+1} + \dots + t_{n-k} X_n)$.

Der Kern des Laplace-Operators $\Delta_{\pi_\lambda}^p$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) \otimes \Lambda^p \mathfrak{p}^*$ ist also der Kern der Operation, die aus der Multiplikation mit dem Polynom $Q: \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$ besteht, das gegeben ist durch

$$Q(t_1, \dots, t_{n-k}) := 4\pi^2 \sum_{i=1}^p f_\lambda(\text{Ad}_{\exp(t_1 X_{k+1} + \dots + t_{n-k} X_n)}(X_i))^2.$$

Wir haben die Basis $X_1, \dots, X_p$ von $\mathfrak{p}$ so konstruiert, daß es ein $g \in G$ der obigen Form gibt mit $f_\lambda(\text{Ad}_g(X_1)) \neq 0$. Aufgrund unserer speziellen Basiswahl ist Q nicht das Nullpolynom. Es folgt also, daß $\text{Kern } \Delta_{\pi_\lambda}^p = \{0\}$ ist. $\square$

Wir sehen somit, daß eine Hodge-Zerlegung der reduzierten Kohomologie für die von uns untersuchten Blätterungen $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ im Fall, daß die rationale Unter-
algebra $\mathfrak{p}$ kein Ideal ist, nicht möglich ist.

4 Blätterungen von Nilmannigfaltigkeiten

Es gibt jedoch im Fall, daß die Voraussetzung „ $\mathfrak{p}$ rational“ nicht erfüllt ist, Unteralgebren, die kein Ideal sind, deren zugehörige Blätterungen jedoch eine tangentielle Hodge-Zerlegung induzieren. Wir betrachten als ein Beispiel eine zweidimensionale Blätterung von $\Gamma \backslash (H \times S^1)$, wobei H die dreidimensionale Heisenberggruppe bezeichne.

4.5.12 Beispiel: Sei $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_2 \oplus \mathbb{R}X_3 \oplus \mathbb{R}X_4$ die Lie-Algebra mit zweidimensionalem Zentrum $Z(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}X_3 \oplus \mathbb{R}X_4$ und $[X_1, X_2] = X_3$. Wir wählen $\Gamma := \mathbb{Z}X_1 \oplus \mathbb{Z}X_2 \oplus \mathbb{Z}X_3 \oplus \mathbb{Z}X_4$.

Die Unteralgebra $\mathfrak{p}$ sei gegeben durch $\mathfrak{p} := \mathbb{R}X_2 \oplus \mathbb{R}(aX_3 + bX_4)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind. Wir berechnen nun die reduzierte Kohomologie dieser Blätterung und die harmonischen Formen. Dazu wählen wir ein beliebiges rationales Funktional $f \in \mathfrak{g}^*$ und erhalten so einen irreduziblen direkten Summanden der reduzierten Blätterungskohomologie von $(\Gamma \backslash G, \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$. Dabei ist f gegeben durch $f(X_i) = \alpha_i \in \mathbb{Q}$ für $1 \leq i \leq 4$.

Es gibt zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Fall ist $\alpha_3 = 0$, also ist $\mathfrak{g}$ selbst eine maximal untergeordnete Algebra bezüglich f , denn es ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathbb{R}X_3$. Die zu f gehörende, irreduzible Darstellung π ist also eindimensional. Die äußere Ableitung $d_\pi^1: \mathbb{C} \otimes \Lambda^1 \mathfrak{p}^* \longrightarrow \mathbb{C} \otimes \Lambda^2 \mathfrak{p}^*$ ist gegeben durch

$$d_\pi^1(\xi_1 \omega_1 + \xi_2 \omega_2) = 2\pi i(\alpha_2 \xi_1 + b\alpha_4 \xi_2) \omega_1 \wedge \omega_2$$

mit $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}$. Dabei bezeichne ω_1, ω_2 die zur oben beschriebenen Basis von $\mathfrak{p}$ duale Basis. Das Bild dieser Abbildung ist offensichtlich $\{0\}$, wenn $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ ist, oder ganz $\mathbb{C} \otimes \Lambda^2 \mathfrak{p}^*$, wenn entweder $\alpha_2 \neq 0$, oder $\alpha_4 \neq 0$ ist. Der Laplace-Operator $\Delta_\pi^2: \mathbb{C} \otimes \Lambda^2 \mathfrak{p}^* \longrightarrow \mathbb{C} \otimes \Lambda^2 \mathfrak{p}^*$ ist für $\xi \omega_1 \wedge \omega_2 \in \mathbb{C} \otimes \Lambda^2 \mathfrak{p}^*$ gegeben durch

$$\Delta_\pi^2(\xi \omega_1 \wedge \omega_2) = -4\pi^2(\alpha_2^2 + b^2 \alpha_4^2) \xi \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Der Vektorraum der harmonischen Formen ist also im Fall $\alpha_3 \neq 0$ genau dann der gesamte Raum $\mathbb{C} \otimes \Lambda^2 \mathfrak{p}^*$, wenn $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ ist. Ansonsten ist nur das Null-Element harmonisch. Für die irreduziblen Komponenten von $C^\infty(\Gamma \backslash G)$, die einem Funktional $f \in \mathfrak{g}^*$ mit $f(X_3) = 0$ entsprechen, gibt es also eine Hodge-Zerlegung in dem von uns untersuchten Sinn.

Ist $\alpha_3 \neq 0$, so ist eine maximal untergeordnete Algebra $\mathfrak{m}$ von f gegeben durch $\mathfrak{m} = \mathbb{R}X_2 \oplus \mathbb{R}X_3 \oplus \mathbb{R}X_4$. Die zu f gehörende, irreduzible Darstellung $\bar{\pi}$ operiert also auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Die äußere Ableitung $d_\pi^1: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes \Lambda^1 \mathfrak{p}^* \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{p}^*$ ist gegeben durch

$$d_\pi^1(\xi_1 \omega_1 + \xi_2 \omega_2) = 2\pi i(t\xi_1(t) + (a\alpha_3 + b\alpha_4)\xi_2(t))\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Da nach Voraussetzung $\alpha_3 \neq 0$ und α_4 rational sind und a, b linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind, folgt $a\alpha_3 + b\alpha_4 \neq 0$. Das Bild von d_π^1 ist also offensichtlich ganz $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{p}^*$. Ebenso folgt $\text{Kern } \Delta_\pi^2 = \{0\}$. Also gibt es auch in diesem Fall eine Hodge-Zerlegung auf der irreduziblen Komponente $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

4.5.13 Bemerkung: Im obigen Beispiel besitzt die untersuchte Blätterung kein dichtes Blatt. Wir können jedoch das Beispiel abändern, indem wir anstelle von X_2 einen Vektor $a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_4$ mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ wählen. Nach Satz 2.4.13 besitzt dann die Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ ein dichtes Blatt in $\Gamma \backslash G$. Eine Rechnung analog zu der obigen zeigt, daß jedes Element der obersten reduzierten Blätterungskohomologie einen harmonischen Repräsentanten besitzt. Der einzige Unterschied besteht darin, daß die reduzierte Blätterungskohomologie unendlichdimensional ist.

Wir werden im nächsten Abschnitt Situationen untersuchen, die wir ähnlich wie die obige behandeln können. Wir werden insbesondere sehen, daß im Fall, daß $\mathfrak{p}$ eindimensional ist, die eindimensionale Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ genau dann eine Hodge-Zerlegung besitzt, wenn $\mathfrak{p}$ ein Ideal ist – unabhängig davon, ob $\mathfrak{p}$ ein Basiselement in $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ besitzt, oder nicht.

4.6 Eindimensionale Blätterungen

In diesem Abschnitt werden wir die Methoden des vorigen Abschnitts auf eine weitere Situation anwenden, um zu untersuchen, wann die untersuchten Blätterungen $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ eine Hodge-Zerlegung zulassen. Wir untersuchen den Fall, daß $\mathfrak{p}$ eindimensional ist.

4.6.1 Satz: Sei G eine nilpotente Lie-Gruppe mit zugehöriger Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Sei Γ ein Gitter von G und $\mathfrak{p}$ eine eindimensionale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$.

Wenn $\mathfrak{p}$ kein Ideal ist, so ist die erste, reduzierte Blätterungskohomologie $\bar{H}^1(\Gamma \backslash G; \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ unendlichdimensional. Wählen wir auf $\Gamma \backslash G$ eine tangential kanonische Metrik mit $d(\star_\perp(1)) = 0$, so besitzt die Blätterung $(\Gamma \backslash G, \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ keine Hodge-Zerlegung bzgl. dieser Metrik.

Beweis: Wir wählen wie in 4.5.1 eine Folge von Idealen $\mathfrak{g}_0 := \{0\} \subseteq \mathfrak{g}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$, mit $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1}$ und $\dim \mathfrak{g}_i - \dim \mathfrak{g}_{i-1} = 1$ für $1 \leq i \leq n$. Außerdem treffen wir die Wahl der Ideale so, daß es eine Basis $Z_1, \dots, Z_n$ von $\mathfrak{g}$ mit rationalen Strukturkonstanten bezüglich $\log \Gamma$ gibt, so daß das Ideal $\mathfrak{g}_i$ von $Z_1, \dots, Z_i$ für $1 \leq i \leq n$ erzeugt wird.

Da $\mathfrak{p}$ kein Ideal ist, liegt diese Unteralgebra nicht im Zentrum von $\mathfrak{g}$. Es gibt also ein $j \in \mathbb{N}$ mit $j < n$, so daß $[\mathfrak{g}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{g}_j$ ist. Wir wählen j_0 minimal mit $[\mathfrak{g}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{g}_{j_0}$ und definieren $f \in \mathfrak{g}^*$ durch $f(Z_{j_0}) = 1$ und $f(Z_i) = 0$ für $1 \leq i \neq j_0 \leq n$. Nach Lemma 4.5.2 gibt es unendlich viele $\lambda \in \mathbb{Z}$, so daß die zu $f_\lambda := \lambda \cdot f$ gehörende, irreduzible Darstellung π_λ von G positive Vielfachheit in der Zerlegung der regulären Darstellung hat. Außerdem sind für $\lambda \neq \lambda'$ die Darstellungen π_λ und $\pi_{\lambda'}$ nicht äquivalent.

Sei Y ein Erzeugendes von $\mathfrak{p}$. Nach Wahl von j_0 existiert ein Element $X \in \mathfrak{g}$ mit $[X, Y] = Z_{j_0} + \alpha_{j_0-1}Z_{j_0-1} + \dots + \alpha_1Z_1$ mit $\alpha_{j_0-1}, \dots, \alpha_1 \in \mathbb{R}$.

Eine maximal untergeordnete Algebra $\mathfrak{m}$ bezüglich f kann so gewählt werden, daß sie $\mathfrak{g}_{j_0} \oplus \mathfrak{p}$ enthält. Also ist $X \notin \mathfrak{m}$.

Zur Beschreibung der Operation von $\mathfrak{p}$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ müssen wir eine Basis von $\mathfrak{g}$ wählen. Sei $k := \dim \mathfrak{m}$. Wir ergänzen $X_1 := Y$ zu einer Basis $X_1, \dots, X_k$ von $\mathfrak{m}$. Außerdem wählen wir $X_{k+1} := X$ und ergänzen $X_1, \dots, X_k, X_{k+1}$ zu einer Basis $X_1, \dots, X_n$ von $\mathfrak{g}$.

Die Untergruppe $P := \exp \mathfrak{p} = \exp(\mathbb{R}Y)$ operiert auf dem Teilraum der meßbaren Funktionen $\xi: G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\xi(mg) = \bar{f}(m)\xi(g)$ für alle $m \in M = \exp \mathfrak{m}$ und $g \in G$ und $\int_{M \backslash G} |\xi(g)|^2 dg < \infty$ (vgl. 3.3.1).

Wir haben die Unteralgebra $\mathfrak{m}$ so gewählt, daß sie $\mathfrak{p}$ enthält. Außerdem ist $[X, Y] \in \mathfrak{g}_{j_0} \subseteq \mathfrak{m}$. Allgemein gilt für beliebige $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, daß $\text{ad}_X^i Y \in \mathfrak{m}$ ist. Somit können wir Lemma 4.5.3 anwenden.

Die Operation von P auf dem Teilraum $L_1 := \{\xi(\cdot, 0, \dots, 0) \mid \xi \in L^2(\mathbb{R}^{n-k})\}$ von $L^2(\mathbb{R}^{n-k})$, den wir mit $L^2(\mathbb{R})$ identifizieren können, ist also mit $s, t \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\pi(\exp(sY))\xi(t, 0, \dots, 0) = \bar{f}_\lambda(\exp \text{Ad}_{\exp(tX)}(sY))\xi(t, 0, \dots, 0).$$

Dabei ist $\text{Ad}_{\exp(tX)}(sY) \in sY + \frac{1}{2}stZ_{j_0} + Z'$ mit $Z' \in \mathfrak{g}_{j_0-1} \subseteq \text{Kern } f_\lambda$, also folgt $\bar{f}_\lambda(\text{Ad}_{\exp tX}(sY)) = s\bar{f}_\lambda(Y) + \frac{1}{2}st\lambda$.

Die Operation der Unteralgebra $\mathfrak{p}$ auf dem Raum der glatten Vektoren der Darstellung π erhalten wir durch $\bar{\pi}_\lambda(Y) = \frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} \pi_\lambda(\exp(sY))$. Die Operation von Y ist also auf dem Unterraum $S_1 := \{\xi(\cdot, 0, \dots, 0) \mid \xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})\}$ von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$, den wir mit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ identifizieren können, gegeben durch

$$\bar{\pi}_\lambda(Y)\xi(t, 0, \dots, 0) = 2\pi i \left(f_\lambda(Y) + \frac{1}{2}tf_\lambda(Z_{j_0}) \right) \xi(t, 0, \dots, 0).$$

Da $f_\lambda(Z_{j_0}) = \lambda \neq 0$ ist, gibt es also reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\bar{\pi}_\lambda(Y)\xi(t, 0, \dots, 0) = 2\pi i(a + bt)\xi(t, 0, \dots, 0)$. Wir müssen zur Berechnung der Kohomologie und der harmonischen Formen also nur Operationen untersuchen, die auf S_1 in dieser Weise operieren.

Mit dem folgenden Lemma sehen wir, daß der Abschluß des Bildes dieser Operation in dem Raum der Schwartzschen Funktionen positive Kodimension hat. Also ist $\dim \bar{H}^1(\mathfrak{p}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})) > 0$. Mit Lemma 4.5.2 haben wir gesehen, daß es unendlich viele verschieden direkte Summanden dieser Form in der reduzierten Blätterungskohomologie $\bar{H}^1(\Gamma \backslash G; \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ gibt. Also ist diese Kohomologie unendlichdimensional.

Andererseits werden wir sehen, daß $\text{Kern}(\bar{\pi}_\lambda(Y)) = \{0\}$ für alle $\lambda \neq 0$ ist. Der Laplace-Operator $\Delta_{\pi_\lambda}^1$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) \otimes \Lambda^1 \mathfrak{p}^*$ ist gegeben durch $\Delta_{\pi_\lambda}^1 \xi \omega = \bar{\pi}_\lambda(Y)^2 \xi \omega$, wobei ω das zu Y duale Element bezeichne. Also folgt auch für die harmonischen 1-Formen, daß $\text{Kern } \Delta_{\pi_\lambda}^1 = \{0\}$ ist, falls $\lambda \neq 0$ gilt. $\square$

4 Blätterungen von Nilmannigfaltigkeiten

Um den Beweis des Satzes fertigzustellen müssen wir also nur noch das folgende Lemma beweisen.

4.6.2 Lemma: Sei $O: \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ eine Operation, so daß es reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt mit

$$(O\xi)(t_{k+1}, 0, \dots, 0) = 2\pi i(a + bt_{k+1})\xi(t_{k+1}, 0, \dots, 0).$$

Dann ist Kern $O = \{0\}$ und die Kodimension von $\overline{\text{Bild } O}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ ist positiv.

Beweis: Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, daß $b = -1$ ist, also gilt

$$(O\xi)(t_{k+1}, 0, \dots, 0) = 2\pi i(a - t_{k+1})\xi(t_{k+1}, 0, \dots, 0).$$

Die Fourier-Transformation von ξ in der ersten Komponente bezeichnen mit $F_1\xi$, es ist also

$$F_1\xi(t_{k+1}, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x t_{k+1}} \xi(t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_n) dx.$$

Diese Operation ist ein Isomorphismus auf dem Schwartzschen Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ und sie überführt die Operation $\frac{\partial}{\partial t_{k+1}}$ in die Multiplikation mit $-2\pi i t_{k+1}$ und umgekehrt. Wir definieren einen Operator O' auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ durch $O' := F_1 \circ O \circ F_1^{-1}$. Es gilt also mit $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ und $t_{k+1} \in \mathbb{R}$:

$$O'(F_1(\xi))(t_{k+1}, 0, \dots, 0) = \left(2\pi i a + \frac{\partial}{\partial t_{k+1}}\right) (F_1(\xi))(t_{k+1}, 0, \dots, 0).$$

Sei T die Operation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$, die gegeben ist durch die Multiplikation mit $\exp(2\pi i a t_{k+1})$. Diese Operation ist ein Isomorphismus auf dem Raum der Schwartzschen Funktionen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ und sie überführt die Operation von $2\pi i a + \frac{\partial}{\partial t_{k+1}}$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ in die Operation $\frac{\partial}{\partial t_{k+1}}$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$.

Wir definieren eine Operator O'' auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ durch $O'' := T \circ O' \circ T^{-1}$. Dann folgt mit $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ und $t_{k+1} \in \mathbb{R}$

$$(O'' \circ T \circ F_1(\xi))(t_{k+1}, 0, \dots, 0) = \left(\frac{\partial}{\partial t_{k+1}} \circ T \circ F_1(\xi)\right) (t_{k+1}, 0, \dots, 0).$$

Durch erneute Fouriertransformation in der ersten Komponente erhalten wir einen Operator $O''' := F_1 \circ O'' \circ F_1^{-1}$ mit

$$(O''' \circ F_1 \circ T \circ F_1(\xi))(t_{k+1}, 0, \dots, 0) = -2\pi i t_{k+1} (F_1 \circ T \circ F_1(\xi))(t_{k+1}, 0, \dots, 0).$$

Das Bild der O''' auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ enthält offensichtlich alle Schwartzschen Funktionen $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{n-k})$, die im Ursprung verschwinden. Also ist die Kodimension des Abschlusses von Bild O''' positiv in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ und somit auch die Dimension von $\overline{\text{Bild } O'}$, da die Komposition $F_1 \circ T \circ F_1$ einen Homöomorphismus auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ liefert. Außerdem ist der Kern von O''' offensichtlich $\{0\}$ und somit auch der Kern von O .

Zur Veranschaulichung des Beweises dient das folgende, kommutative Diagramm (vgl. [DS01]). Dabei bezeichne die Operation $D_1: \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$ die partielle Ableitung nach der ersten Komponente.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) & \xrightarrow{O} & \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) & (O(\xi))(0, \dots, 0) = 2\pi i a \xi(0, \dots, 0) \\ \downarrow F_1 \cong & & \cong \downarrow F_1 & \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) & \xrightarrow{O'} & \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) & (O' \circ F_1(\xi))(0, \dots, 0) = (2\pi i a + D_1) \xi(0, \dots, 0) \\ \downarrow T \cong & & \cong \downarrow T & \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) & \xrightarrow{O''} & \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) & (O'' \circ T \circ F_1(\xi))(0, \dots, 0) = D_1 \xi(0, \dots, 0) \\ \downarrow F_1 \cong & & \cong \downarrow F_1 & \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) & \xrightarrow{O'''} & \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}) & (O''' \circ F_1 \circ T \circ F_1(\xi))(0, \dots, 0) = 0. \end{array}$$

□

Ein zu dem obigen Satz analoges Resultat erhalten wir für Blätterungen $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ in einer allgemeineren Situation.

4.6.3 Korollar: Sei G eine nilpotente Lie-Gruppe und Γ ein Gitter in G . Sei $\mathfrak{p}$ eine p -dimensionale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Es gebe ein rationales Ideal $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$, so daß $\bar{\mathfrak{p}} := \mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ eine eindimensionale Unteralgebra von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ist und $\bar{\mathfrak{p}}$ kein Ideal in $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ist. Dann ist $\bar{H}^p(\Gamma \backslash G; \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ unendlichdimensional.

Außerdem gibt es auf der geblätterten Mannigfaltigkeit $(\Gamma \backslash G, \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ versehen mit einer beliebigen, kanonischen Metrik keine Hodge-Zerlegung.

4 Blätterungen von Nilmannigfaltigkeiten

Beweis: Die Aussage dieses Korollars folgt mit den Lemmata 4.3.1 und 4.4.4. Indem wir das Ideal $\mathfrak{h}$ aus $\mathfrak{g}$ herausteilen, sind wir in der Situation einer eindimensionalen Blätterung $\mathcal{F}(\bar{\mathfrak{p}})$ von $\bar{\Gamma}\backslash\bar{G}$, wobei $\bar{G}$ die zu $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ gehörende Lie-Gruppe bezeichne, und $\bar{\Gamma} = \Gamma/\Gamma \cap \mathfrak{h}$ ist.

Da $\bar{\mathfrak{p}}$ kein Ideal in $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ist, folgt nach Satz 4.6.1, daß $\bar{H}^1(\bar{\Gamma}\backslash\bar{G}, \mathcal{F}(\bar{\mathfrak{p}}))$ unendlichdimensional ist.

Die Blätterung $(\bar{\Gamma}\backslash\bar{G}, \mathcal{F}(\bar{\mathfrak{p}}))$ besitzt keine Hodge-Zerlegung, da $\bar{\mathfrak{p}}$ kein Ideal in $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ist. Nach Lemma 4.4.4 ist unter den gegebenen Voraussetzungen Kern $\Delta_{\mathcal{F}(\bar{\mathfrak{p}})}^1$ ein direkter Summand in Kern $\Delta_{\mathcal{F}(\bar{\mathfrak{p}})}^p$. Damit folgt die Behauptung für $(\Gamma\backslash G, \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$. $\square$

4.6.4 Bemerkung: In Beispiel 4.5.12 haben wir eine zweidimensionale Blätterung konstruiert, die die Bedingungen des obigen Korollars nicht erfüllt. Jedes echte, rationale Ideal $\mathfrak{h}$, das wir aus $\mathfrak{g}$ herausteilen können, überführt $\mathfrak{p}$ in ein Ideal $\bar{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Wir erhalten somit Blätterungen $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ beliebiger Dimension, die ein dichtes Blatt in $\Gamma\backslash G$ besitzen, deren oberste reduzierte Blätterungskohomologie jedoch nicht eindimensional, sondern sogar unendlichdimensional ist.

Im nächsten Abschnitt fassen wir die Ergebnisse, die wir in den letzten beiden Abschnitten erhalten haben, zusammen. Durch einen Vergleich mit den Resultaten aus Abschnitt 2.3 erhalten wir weiterführende Sätze.

4.7 Ergebnisse

Zuerst fassen wir noch einmal die Bedingungen zusammen, unter denen wir Resultate erhalten haben.

4.7.1 Situation: Sei G eine nilpotente, zusammenhängende und einfach zusammenhängende Lie-Gruppe, $\Gamma \subset G$ ein Gitter und $\mathfrak{p}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Wir erhalten auf $\Gamma\backslash G$ eine Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$.

Im folgenden sei entweder

- (i) $\mathfrak{p}$ rational, oder
- (ii) $\mathfrak{p}$ eindimensional.

Wir erhalten in der ersten der oben beschriebenen Situationen durch direkten Vergleich der reduzierten, obersten Blätterungskohomologie (s. 4.5.10) mit den tangential harmonischen p -Formen (s. 4.5.11) und in der zweiten Situation mit 4.6.1 direkt den folgenden Satz.

4.7.2 Satz: Sei eine der beiden oben beschriebenen Situationen gegeben. Auf $\Gamma \backslash G$ gebe es eine beliebige Metrik, die tangential kanonisch ist (s. 2.1.6) und mit der $d(\star_{\perp}(1)) = 0$ gilt. Wenn jedes Element von $\bar{H}^p(\Gamma \backslash G; \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ einen harmonischen Repräsentanten besitzt, dann ist $\mathfrak{p}$ ein Ideal.

Beweis: Wäre $\mathfrak{p}$ kein Ideal, so haben wir in den vorigen Abschnitten gesehen, daß $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ unter den gegebenen Voraussetzungen an die Metrik g keine Hodge-Zerlegung zuläßt. $\square$

Wir mußten uns bei diesem Satz auf eine Metrik beschränken, die insbesondere tangential kanonisch ist. Gibt es jedoch irgendeine bündelartige Metrik auf einer beliebigen, geblätternen Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{F})$, so können wir diese in tangentialer Richtung beliebig abändern und erhalten eine Metrik, die immer noch bündelartig ist. Es folgt also:

4.7.3 Satz: In einer der oben beschriebenen Situationen ist die Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ von $\Gamma \backslash G$ genau dann Riemannsch, wenn $\mathfrak{p}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist.

Beweis: Sei $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ eine Riemannsche Blätterung von $\Gamma \backslash G$. Es existiert also eine bündelartige Metrik auf $(\Gamma \backslash G, \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$. Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, daß diese Metrik tangential kanonisch ist. Da die Metrik bündelartig ist, folgt nach Lemma 2.4.8 für den transversalen Hodge-Stern-Operator $d(\star_{\perp}(1)) = 0$. Wir können somit den Satz 4.7.2 anwenden.

Nach dem Satz von Alvarez-Lopez und Kordyukov 2.4.10 liefert eine bündel-

4 Blätterungen von Nilmannigfaltigkeiten

artige Metrik eine Hodge-Zerlegung der reduzierten Kohomologie, also muß $\mathfrak{p}$ nach 4.7.2 ein Ideal in $\mathfrak{g}$ sein.

Ist andererseits $\mathfrak{p}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$, so haben wir in Satz 2.3.2 gesehen, daß in diesem Fall auf der Blätterung $(\Gamma \backslash G, \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ eine kanonische, bündelartige Metrik existiert. Die Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ ist sogar eine Lie-Blätterung mit Strukturalgebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. $\square$

Wir haben also in Verbindung mit 2.3.2 gesehen, daß es genau dann auf einer der von uns untersuchten Blätterungen eine bündelartige Metrik gibt, wenn auf ihr eine kanonische, bündelartige Metrik existiert. Mit diesem zusätzlichen Resultat können wir noch einmal die harmonischen Differentialformen mit der reduzierten Kohomologie vergleichen, im Fall daß $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ nicht Riemannsch ist. Wir erhalten somit abschließend den folgenden Satz.

4.7.4 Satz: Sei eine der oben beschriebenen Situationen gegeben. Dann sind äquivalent:

- (i) $\mathfrak{p}$ ist ein Ideal in $\mathfrak{g}$.
- (ii) Die Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ ist Riemannsch.
- (iii) Auf $(\Gamma \backslash G, \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ existiert eine kanonische Metrik g , so daß es jedes Element von $\bar{H}^p(\Gamma \backslash G; \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ genau einen (bzgl. g) tangential harmonischen Repräsentanten besitzt.

Beweis: Im vorigen Satz haben wir gezeigt, daß die Eigenschaften (i) und (ii) äquivalent zueinander sind. Wir müssen also nur noch (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) zeigen.

Ist $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ Riemannsch, so existiert auf $\Gamma \backslash G$ eine bündelartige Metrik. Wir können mit dem vorigen Satz o.B.d.A. voraussetzen, daß diese Metrik kanonisch ist. Es folgt dann direkt mit dem Satz von Alvarez Lopez und Kordyukov 2.4.10 der Punkt (iii).

Ist andererseits der Punkt (iii) erfüllt, so haben wir in Lemma 2.4.8 gesehen, daß für eine kanonische Metrik g auch immer $d(\star_{\perp}(1)) = 0$ gilt. Wir können also in dieser Situation den Satz 4.7.2 anwenden und erhalten, daß $\mathfrak{p}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ sein muß. Also ist nach Satz 2.3.2 die Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ Riemannsch. $\square$

Gibt es eine kanonische Metrik auf $(\Gamma \backslash G, \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$, die eine Hodge-Zerlegung liefert, so liefert natürlich auch jede andere kanonische Metrik eine Hodge-Zerlegung.

Wir haben also gesehen, daß unter den von uns untersuchten Blätterungen die Riemannschen Blätterungen die einzigen sind, die eine tangentielle Hodge-Zerlegung zulassen. Die kanonischen Metriken auf den Blätterungen $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ sind in diesem Fall auch immer bündelartig.

Anhang

A Halbeinfache Lie-Gruppen

In diesem Anhang untersuchen wir die Blätterungen $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ vom Typ 2.1.5 im Fall, daß die zugrundeliegende Lie-Gruppe G halbeinfach ist. Da die halbeinfachen Lie-Gruppen kompakt sind, können wir das Gitter im folgenden immer als die triviale Untergruppe $\{e\}$ wählen.

Wir werden sehen, daß $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ Riemannsch ist, wenn $\mathfrak{p}$ in einer Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ enthalten ist. Wir benutzen dazu die Konstruktion 2.3.1 zur Berechnung der blätternden Vektorfelder von $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$.

Zuerst untersuchen wir das einfachste Beispiel einer halbeinfachen Lie-Gruppe, $G = SU(2)$.

Beispiel: Wir betrachten $\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(2)$, die zu $SU(2)$ gehörende, reelle Lie-Algebra. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist gegeben durch die drei Erzeugenden

$$X := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad Y := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit lassen sich die Lie-Klammern berechnen als $[X, Y] = XY - YX = Z$, $[X, Z] = -Y$ und $[Y, Z] = X$. Wir wählen als Unteralgebra $\mathfrak{p} := \mathbb{R}Z$. Die Mannigfaltigkeit $SU(2)$ kann mit der 3-Sphäre S^3 identifiziert werden, und die zu $\mathfrak{p}$ gehörende Lie-Gruppe P ist äquivalent zu einem maximalen Torus von $SU(2)$, also zu S^1 . Die von uns untersuchte Blätterung ist also im

Anhang

wesentlichen eine Hopf-Faserung. Somit existiert natürlich eine bündelartige Metrik auf dieser Blätterung.

Wir werden trotzdem noch einmal die Berechnungen aus 2.3.1 für dieses Beispiel durchführen. Wir berechnen also die blätternden Vektorfelder, die senkrecht zu den Blättern verlaufen. Wenn wir die blätternden Vektorfelder kennen, so sehen wir, wie eine bündelartige Metrik auf $(SU(2), \mathcal{F}(\mathfrak{p}))$ gewählt werden kann.

Dazu bestimmen wir wie in der Konstruktion 2.3.1 die Lie-Klammer eines beliebigen Vektorfeldes, das tangential entlang der Blätter verläuft mit einem Vektorfeld, dessen Vektoren senkrecht zu den Blättern sind. Jedes tangentiale Vektorfeld ist von der Form hZ mit beliebigem $h \in C^\infty(SU(2))$ und die Vektorfelder, die senkrecht zu den Blättern verlaufen, sind von der Form $f_1X + f_2Y$ mit beliebigen $f_1 \in C^\infty(SU(2))$ und $f_2 \in C^\infty(SU(2))$. Es ist

$$\begin{aligned} [f_1X + f_2Y, hZ] &= f_1h[X, Z] + f_2h[Y, Z] + f_1XhZ + f_2YhZ - hZf_1X - hZf_2Y \\ &= -f_1hY + f_2hX - hZf_1X - hZf_2Y + (f_1Xh + f_2Yh)Z \end{aligned}$$

Damit das Vektorfeld $f_1X + f_2Y$ blätternd ist, muß für alle $h \in C^\infty(SU(2))$ die Lie-Klammer $[f_1X + f_2Y, hZ]$ ein tangentiales Vektorfeld ergeben. Es folgt also, daß für blätternde Vektorfelder $f_1X + f_2Y$ gelten muß:

$$Zf_2 = -f_1 \text{ und } Zf_1 = f_2.$$

Dies ist ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Bezeichnen wir die lokale Koordinatenfunktion, die dem Tangentialvektor Z entspricht mit z , sowie die X bzw. Y entsprechende mit x bzw. y , so erhalten wir, daß die blätternden Vektorfelder lokal von der folgenden Form sind:

$$(\xi_1(x, y) \cos z + \xi_2(x, y) \sin z)X + (-\xi_1(x, y) \sin z + \xi_2(x, y) \cos z)Y + \eta(x, y, z)Z.$$

Dabei sind ξ_1 und ξ_2 beliebige glatte Funktionen in x und y , sowie η eine glatte Funktion in den Variablen x , y und z .

Die kanonische Metrik g auf $SU(2)$, die gegeben ist, indem wir die zu $X, Y, Z \in \mathfrak{su}(2) = T_e SU(2)$ gehörenden kanonischen Vektorfelder (s. 1.3.8) als Orthonormalbasis wählen, ist bündelartig, denn:

Seien $f_1 X + f_2 Y$ und $\tilde{f}_1 X + \tilde{f}_2 Y$ zwei blätternde Vektorfelder, die senkrecht zu den Blättern verlaufen. Es ist also $Z f_2 = -f_1$, $Z f_1 = f_2$, sowie $Z \tilde{f}_2 = -\tilde{f}_1$ und $Z \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

Sei g nun die oben beschriebene kanonische Metrik. Dann ist

$$\begin{aligned} & Zg(f_1 X + f_2 Y, \tilde{f}_1 X + \tilde{f}_2 Y) \\ &= Z(f_1 \tilde{f}_1 + f_2 \tilde{f}_2) \\ &= (Z f_1) \tilde{f}_1 + f_1 (Z \tilde{f}_1) + (Z f_2) \tilde{f}_2 + f_2 (Z \tilde{f}_2) \\ &= f_2 \tilde{f}_1 + f_1 \tilde{f}_2 - f_1 \tilde{f}_2 - f_2 \tilde{f}_1 = 0. \end{aligned}$$

Somit ist die kanonische Metrik g bündelartig. Also ist die Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ von $SU(2)$ Riemannsch.

Die Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ ist jedoch nicht transversal parallelisierbar. Wir haben nämlich in Bemerkung 2.2.2 gesehen, daß eine transversale Parallelisierung der Hopf-Faserung aufgefaßt als Blätterung eine Parallelisierung von S^2 induzieren würde. Die 2-Sphäre S^2 ist jedoch nicht parallelisierbar.

Nun zur Untersuchung der Blätterungen beliebiger halbeinfacher Lie-Algebren. In der allgemeinen Situation nutzen wir aus, daß die halbeinfachen Lie-Gruppen sich im wesentlichen in Kopien von $SU(2)$ zerlegen lassen. Wir werden uns einen groben Überblick über die Theorie der halbeinfachen Lie-Algebren verschaffen. Eine genauere Beschreibung befindet sich z.B. in [Ser87] oder in [Zel73].

Wir verwenden den folgenden Satz über die Zerlegung einer beliebigen komplexen Lie-Algebra in Eigenräume. Dabei sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe Lie-Algebra und $\mathfrak{t}$ eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, also eine maximale kommutative Unteralgebra. Außerdem bezeichnen wir mit $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ die Unteralgebra

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X \ \forall H \in \mathfrak{t}\}$$

Anhang

als den *Eigenraum* von $\mathfrak{g}$ bzgl. $\mathfrak{t}$ zum *Gewicht* α . Insbesondere ist $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}$. Alle Gewichte $\alpha \neq 0$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ nennen wir *Wurzeln* von $\mathfrak{g}$. Die Menge aller Wurzeln bezeichnen wir mit $\Delta_{\mathfrak{g}}$. Sie ist für beliebige, endlichdimensionale Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ immer endlich. Außerdem gilt für alle $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g}}$ auch $-\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g}}$.

Satz 1: Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe, halbeinfache Lie-Algebra und $\mathfrak{t}$ eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Die Eigenräume $\mathfrak{g}_\alpha$ sind eindimensional für $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g}}$, ebenso die Unteralgebren $\mathfrak{t}_\alpha := [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{t}$. Es existiert also für alle $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g}}$ ein eindeutig bestimmtes $H_\alpha \in \mathfrak{t}_\alpha$ mit $\alpha(H_\alpha) = 1$. Außerdem gibt es für alle $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g}}$ und für alle $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ ein eindeutiges $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$, $[H_\alpha, X_\alpha] = X_\alpha$ und $[H_\alpha, X_{-\alpha}] = -X_{-\alpha}$.

Sind $\alpha, \beta \in \Delta_{\mathfrak{g}}$ mit $\alpha + \beta \neq 0$, so erhalten wir außerdem $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, also ist mit zwei Erzeugenden $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$ von $\mathfrak{g}$ die Lie-Klammer $[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha\beta}X_{\alpha+\beta}$, wobei $N_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ und $X_{\alpha+\beta}$ ein Erzeugendes von $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ ist. Dabei ist die Zahl $N_{\alpha\beta} \neq 0$ genau dann, wenn $\alpha + \beta \in \Delta_{\mathfrak{g}}$ gilt.

Wir erhalten also zusammenfassend für eine halbeinfache, komplexe Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und eine Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{g}$ die Menge der Wurzeln $\Delta_{\mathfrak{g}}$ und können damit eine Basis von $\mathfrak{g}$ bilden, indem wir zu den Wurzeln $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g}}$ gehörende Eigenvektoren $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ wählen.

Dabei können die Eigenvektoren X_α so gewählt werden, daß für alle $\alpha, \beta \in \Delta_{\mathfrak{g}}$ gilt:

$$\begin{aligned} [X_\alpha, X_{-\alpha}] &= H_\alpha, \quad [H_\alpha, X_\alpha] = X_\alpha, \quad [H_\alpha, X_{-\alpha}] = -X_{-\alpha}, \\ [X_\alpha, X_\beta] &= \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha + \beta \notin \Delta_{\mathfrak{g}} \\ N_{\alpha\beta}X_{\alpha+\beta} & \text{falls } \alpha + \beta \in \Delta_{\mathfrak{g}} \end{cases} \\ [H_\alpha, X_\beta] &= 0 \text{ für } \alpha \neq \beta. \end{aligned}$$

Dabei sind die Zahlen $N_{\alpha\beta} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist durch diese Lie-Klammern eindeutig gegeben. Die Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{t}$ wird erzeugt von den

Elementen H_α mit $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g}}$. Wir nennen die Basis von $\mathfrak{g}$ bestehend aus den H_α , und X_α mit $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g}}$ eine *Cartan-Weyl-Basis* von $\mathfrak{g}$ bzgl. $\mathfrak{t}$.

Nun untersuchen wir den reellen Fall. Ist $\mathfrak{g}$ eine reelle halbeinfache Lie-Algebra, so wählen wir eine Cartan-Weyl-Basis $\{X_\alpha, H_\alpha \mid \alpha \in \Delta_{\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}}\}$ der komplexen halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. Setzen wir für beliebige $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}}$

$$C_\alpha := \frac{1}{\sqrt{2}}(X_\alpha + X_{-\alpha}) \text{ und } S_\alpha := \frac{1}{\sqrt{2}}i(X_\alpha - X_{-\alpha}),$$

so erhalten wir mit $\{iC_\alpha, iS_\alpha, iH_\alpha \mid \alpha \in \Delta_{\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}}\}$ eine reelle Basis der reellen, halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, wobei

$$[iH_\alpha, iC_\alpha] = S_\alpha \text{ und } [iH_\alpha, iS_\alpha] = -C_\alpha$$

für alle $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}}$ ist.

Mit dieser reellen Darstellung der Cartan-Weyl-Basis erhalten wir im folgenden Satz das gewünschte Resultat.

Satz 2: Sei $\mathfrak{g}$ eine reelle halbeinfache Lie-Algebra und $\mathfrak{t}$ eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Sei $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{t}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Dann gibt es eine kanonische, bündelartige Metrik der Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$.

Da die halbeinfachen Lie-Gruppen kompakt sind, kann das Gitter Γ hier als $\{e\}$ gewählt werden. In dieser Situation ist eine Metrik kanonisch, wenn es eine Basis $X_1, \dots, X_n$ von $\mathfrak{g}$ gibt, so daß in jedem Punkt $g \in G$ die Vektoren der zu den X_i mit $1 \leq i \leq n$ gehörenden linksinvarianten Vektorfeldern eine Orthonormalbasis von $T_g G$ in jedem Punkt $g \in G$ bilden (vgl. mit der Definition der kanonischen Vektorfelder 1.3.8).

Sei $X_1, \dots, X_p$ eine Basis von $\mathfrak{p}$. Wir ergänzen diese Basis zu einer Basis $X_1, \dots, X_n$ von $\mathfrak{g}$. Wir haben in der Konstruktion 2.3.1 gesehen, wie die blätternden Vektorfelder der Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$ bestimmt werden können.

Wir schreiben x_j für die zu X_j gehörende Koordinatenfunktion mit $1 \leq j \leq p$. Ein Vektorfeld $\sum_{i=p+1}^n f_i X_i$ ist genau dann blätternd, wenn für alle $1 \leq j \leq p$

Anhang

gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \begin{pmatrix} f_{p+1} \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = A_j \begin{pmatrix} f_{p+1} \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnet die Matrix $A_j = (\alpha_{ij}^k)_{i,k}$ die Matrix der Strukturkonstanten von $\mathfrak{g}$ bezüglich der von uns gewählten Basis. Es ist also $[X_i, X_j] = \sum \alpha_{ij}^k X_k$. Damit die kanonische Metrik, die durch unsere Basiswahl gegeben ist, bündelartig ist, muß gelten:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=p+1}^n f_i^2 = 0 \Leftrightarrow (f_{p+1}, \dots, f_n) A_j \begin{pmatrix} f_{p+1} \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = 0.$$

Also muß die Matrix A_j schiefssymmetrisch sein. Wir haben somit das folgende Lemma gezeigt:

Lemma: Die kanonische Metrik, die nach Wahl einer Orthonormalbasis von $\mathfrak{g}$ entsteht, ist genau dann bündelartig, wenn die Matrix der Strukturkonstanten $A_j = (\alpha_{ij}^k)_{i,k=p+1}^n$ schiefssymmetrisch ist.

Mit diesem Lemma können wir nun den Satz 2 beweisen.

Beweis von Satz 2: Wir wählen eine Basis $H_1, \dots, H_p$ von $\mathfrak{p}$ und ergänzen diese zu einer Basis $H_1, \dots, H_k$ von $\mathfrak{t}$. Dann ist $-iH_1, \dots, -iH_k$ eine $\mathbb{C}$ -Basis von $\mathfrak{t} \otimes \mathbb{C}$, einer Cartan-Unteralgebra der komplexen halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$.

Wir wählen eine Cartan-Weyl-Basis von $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. D.h. ist $\Delta_{\mathfrak{g}} = \{\alpha_j, \alpha_{-j} \mid 1 \leq j \leq k\}$, so erhalten wir eine Basis mit $\{H_j, X_{\alpha_j}, X_{-\alpha_j} \mid 1 \leq j \leq k\}$ von $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$, so daß für $1 \leq i \neq j \leq k$ gilt:

$$\begin{aligned} [X_{\alpha_i}, X_{\alpha_j}] &= N_{\alpha_i \alpha_j} X_{\alpha_i + \alpha_j}, \text{ falls } \alpha_i + \alpha_j \in \Delta_{\mathfrak{g}}, \\ [X_{\alpha_i}, X_{\alpha_j}] &= 0 \text{ sonst,} \\ [-iH_i, X_{\alpha_i}] &= \alpha_i(-iH_i) X_{\alpha_i}, \end{aligned}$$

Wir definieren C_{α_i} und S_{α_i} für $1 \leq i \leq k$ wie oben. Es ist mit $1 \leq i, j \leq k$:

$$\begin{aligned} [H_i, iC_{\alpha_i}] &= \alpha_i(H_i)S_{\alpha_i} \\ [H_i, iC_{\alpha_j}] &= 0 \text{ für } i \neq j \\ [H_i, iS_{\alpha_i}] &= -\alpha_i(H_i)C_{\alpha_i} \\ [H_i, iS_{\alpha_j}] &= 0 \text{ für } i \neq j \\ [H_i, H_j] &= 0. \end{aligned}$$

Mit diesen Daten können wir die Matrix der Strukturkonstanten der oben beschriebenen Lie-Klammern $A_s = (\alpha_{rs}^t)_{r,t}$ für $1 \leq s \leq p$ und $1 \leq r, t \leq 2p - k$ direkt angeben. Wir numerieren die Basisvektoren von $\mathfrak{g}$ in der Reihenfolge $H_1, \dots, H_k, C_{\alpha_1}, \dots, C_{\alpha_k}, S_{\alpha_1}, \dots, S_{\alpha_k}$ mit $1, \dots, 3k$ durch. Damit folgt für die Strukturkonstanten α_{rs}^t mit $1 \leq s \leq p$:

$$\begin{aligned} \alpha_{rs}^t &= 0 && \text{für alle } 1 \leq r, t \leq k, \\ \alpha_{(k-r)s}^t &= \alpha_s(H_s) && \text{für } k < r \leq 2r \text{ und } t = 2k - r, \\ \alpha_{(k-r)s}^t &= 0 && \text{für } k < r \leq 2r \text{ und } t \neq 2k - r, \\ \alpha_{(2k-r)s}^t &= -\alpha_s(H_s) && \text{für } k < r \leq 2r \text{ und } t = k - r, \\ \alpha_{(2k-r)s}^t &= 0 && \text{für } k < r \leq 2r \text{ und } t \neq k - r. \end{aligned}$$

Die Matrix $A_s = (\alpha_{rs}^t)_{r,t=p+1}^n$ ist somit für alle $1 \leq s \leq p$ schiefsymmetrisch und folglich ist die kanonische Metrik der Blätterung $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$, die durch die oben beschriebenen Cartan-Weyl-Basis gegeben ist, dem Lemma zufolge bündelartig.

□

Anhang

Literaturverzeichnis

- [AGH63] AUSLANDER, LOUIS, L. GREEN und F. HAHN: *Flows on homogeneous spaces. Appendix by L. Greenberg. (Annals of Mathematics Studies. 53)*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, VII, 107 p. , 1963.
- [ALK01] ÁLVAREZ LÓPEZ, JESÚS A. und YURI A. KORDYUKOV: *Long time behavior of leafwise heat flow for Riemannian foliations*. Compos. Math., 125(2):129–153, 2001.
- [ALT91] ÁLVAREZ LÓPEZ, JESÚS A. und PHILIPPE TONDEUR: *Hodge decomposition along the leaves of Riemannian foliation*. J. Funct. Anal., 99(2):433–458, 1991.
- [CG90] CORWIN, LAWRENCE J. und FREDERICK P. GREENLEAF: *Representations of nilpotent Lie groups and their applications. Part 1: Basic theory and examples*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 18., 1990.
- [CR87] CYGAN, JACEK M. und LEONARD F. RICHARDSON: *Global solvability on compact nilmanifolds of three or more steps*. Trans. Am. Math. Soc., 301:343–373, 1987.
- [DD02] DEITMAR, ANTON und CHRISTOPHER DENINGER: *A dynamical Lefschetz trace formula for algebraic Anosov diffeomorphisms*. Preprintreihe SFB 478, April 2002.

- [Dix55] DIXMIER, J.: *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes*. Acta Sci. Math., 16:246–250, 1955.
- [DS01] DENINGER, CHRISTOPHER und WILHELM SINGHOF: *A counter-example to smooth leafwise Hodge decomposition for general foliations and to a type of dynamical trace formulas*. Ann. Inst. Fourier, 51(1):209–219, 2001.
- [EKA83] EL KACIMI-ALAOUI, AZIZ: *Sur la cohomologie feuilletée*. Compos. Math., 49:195–215, 1983.
- [EKAH86] EL KACIMI-ALAOUI, AZIZ und GILBERT HECTOR: *Décomposition de Hodge sur l'espace des feuilles d'un feuilletage riemannien*. Ann. Inst. Fourier, 36(3):207–227, 1986.
- [EKASH85] EL KACIMI ALAOUI, AZIZ, VLAD SERGIESCU und GILBERT HECTOR: *La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien est de dimension finie*. Math. Z., 188:593–599, 1985.
- [Fed71] FEDIDA, E.: *Sur les feuilletages de Lie*. C. R. math. Acad. Sc., 272:999–1001, 1971.
- [Hae80] HAEFLIGER, ANDRE: *Some remarks on foliations with minimal leaves*. J. Differ. Geom., 15:269–284, 1980.
- [Kir62] KIRILLOV, A.A.: *Unitary representations of nilpotent Lie groups*. Russ. Math. Surv., 17(4):53–104, 1962.
- [Kna88] KNAPP, ANTHONY W.: *Lie groups, Lie algebras, and cohomology*. Mathematical Notes, 34. Princeton, NJ: Princeton University Press., 1988.
- [Law74] LAWSON, JUN., H.BLAINE: *Foliations*. Bull. Am. Math. Soc., 80:369–418, 1974.
- [Mac52] MACKEY, GEORGE W.: *Induced representation of locally compact groups. I*. Ann. of Math., II. Ser., 55:101–139, 1952.

- [Mal51] MAL'CEV, A.I.: *On a class of homogeneous spaces*. Am. Math. Soc. Translation 39., 1951.
- [Mol75] MOLINO, PIERRE: *Sur la géométrie transverse des feuilletages*. Ann. Inst. Fourier, 25(2):279–284, 1975.
- [Mol82] MOLINO, PIERRE: *Geometrie globale des feuilletages riemanniens*. Indag. Math., 44:45–76, 1982.
- [Mol88] MOLINO, PIERRE: *Riemannian foliations*. Progress in Mathematics, Vol. 73. Boston-Basel: Birkhäuser., 1988.
- [Moo65] MOORE, C.C.: *Decomposition of unitary representations defined by discrete subgroups of nilpotent groups*. Ann. Math. (2), 82:146–182, 1965.
- [MS88] MOORE, CALVIN C. und CLAUDE SCHOCHET: *Global analysis on foliated spaces*. Mathematical Sciences Research Institute Publications, 9. New York etc.: Springer-Verlag., 1988.
- [Poo81] POOR, WALTER A.: *Differential geometric structures*. New York etc.: McGraw-Hill Book Company. XIII, 1981.
- [Pou72] POULSEN, NIELS SKOVHUS: *On C^∞ -vectors and intertwining bilinear forms for representations of Lie groups*. J. Funct. Anal., 9:87–120, 1972.
- [Rag72] RAGHUNATHAN, M.S.: *Discrete subgroups of Lie groups*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 68. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag., 1972.
- [Rei59] REINHART, B.L.: *Foliated manifolds with bundle-like metrics*. Ann. of Math., 69:119–132, 1959.
- [Ric71] RICHARDSON, LEONARD F.: *Decomposition of the L^2 -space of a general compact nilmanifold*. Am. J. Math., 93:173–90, 1971.

- [Roe87] ROE, JOHN: *Finite propagation speed and Connes' foliation algebra*. Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 102:459–466, 1987.
- [Ser87] SERRE, JEAN-PIERRE: *Complex semisimple Lie algebras. Transl. from the French by G. A. Jones*. New York etc.: Springer-Verlag., 1987.
- [Ste83] STERNBERG, SHLOMO: *Lectures on differential geometry. 2nd ed.* New York: Chelsea Publishing Company., 1983.
- [Ton88] TONDEUR, PHILIPPE: *Foliations on Riemannian manifolds*. Universitext. New York etc.: Springer-Verlag., 1988.
- [Zel73] ZELOBENKO, D.P.: *Compact Lie groups and their representations*. Translations of Mathematical Monographs. Vol. 40. Providence, R.I.: American Mathematical Society., 1973.