

Resampling-Verfahren und ihre Anwendungen in der nichtparametrischen Testtheorie

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von
THORSTEN PAULS
aus Monheim am Rhein

Düsseldorf

2003

Gedruckt mit der Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent: PROF. DR. A. JANSSEN, Düsseldorf

Koreferenten: PROF. DR. K. JANßEN, Düsseldorf
PROF. DR. E. MAMMEN, Heidelberg

Tag der mündlichen Prüfung: 5. Dezember 2002

MEINER FAMILIE
TANJA UND JOSHUA P.V.

Vorwort

”The Baron had fallen to the bottom of a deep lake. Just when it looked like all was lost, he thought to pick himself up by his own bootstrap.”

R. E. Raspe; The Adventures of Baron Munchausen

In der mathematischen Statistik besitzen nichtparametrische Verfahren zur Bestimmung unbekannter Parameter einen großen Stellenwert. Beim Testen von nichtparametrischen Hypothesen geht es darum, geeignete kritische Werte zu bestimmen. In dieser Arbeit sollen dazu sog. Resampling-Verfahren verwendet werden. Diese fallen unter die Klasse der computergestützten Methoden, mit deren Hilfe ad hoc datenabhängige Schätzer bestimmt werden können. Eine Verwendung solcher Verfahren beruht insbesondere darauf, dass zunehmend in allen Bereichen, in denen statistische Verfahren zur Entscheidungsfindung herangezogen werden, immer leistungsfähigere Computer zur Verfügung stehen.

„Resampling-Verfahren und ihre Anwendungen in der nichtparametrischen Testtheorie“ entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Lehrstuhl für Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. A. Janssen danken, der mir die Möglichkeit gab, diese Arbeit zu erstellen. Seine wertvollen Hinweise und die stete Diskussionsbereitschaft haben zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Ein herzlicher Dank gebührt Herrn Prof. Dr. K. Janßen und Herrn Prof. Dr. E. Mammen für die Übernahme und Erstellung der weiteren Gutachten.

Meinen Eltern, die mir durch ihre tatkräftige Unterstützung das Studium ermöglichten, gilt mein aufrichtiger Dank.

Ein ganz besonderer Dank gilt meiner Frau Tanja Kraski. Sie hat mich

während meines Vorhabens stets dazu ermutigt, nicht aufzugeben und durch ihre ständige Motivation diese Arbeit in ihrer vorliegenden Form erst ermöglicht. Auch möchte ich all denjenigen danken, die die Zeit gefunden haben meine Arbeit auf Fehler zu durchsuchen.

Diese Arbeit wurde im Rahmen des DFG-Forschungsprojekts „**Permutationstests und Randomisationstests in heteroskedastischen Modellen**“ (DFG JA 472/5-2) erstellt.

Düsseldorf, den 17. Januar 2003

Thorsten Pauls

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	I
Symbol- und Abkürzungsverzeichnis	VII
1 Einleitung	1
I Resampling-Tests und bedingte Grenzwertsätze in der nichtparametrischen Statistik	7
2 Resampling-Verfahren	9
2.1 Motivation	9
2.2 Die Bootstrap-Methode	10
2.3 Allgemeine Resampling-Verfahren	16
3 Resampling-Tests	19
3.1 Motivation und Definition	19
3.2 Asymptotischer Vergleich bedingter und unbedingter Tests . . .	22
4 Bedingte Grenzwertsätze für lineare Statistiken	25
4.1 Allgemeine Grenzwertsätze	25
4.2 Grenzwertsätze für Summen unabhängiger Zufallsvariablen . . .	36
4.3 Einfache lineare Permutationsstatistiken	47
4.4 Beweise der zentralen Sätze (Satz 4.5 und Satz 4.8)	57
5 Konsistenz des Bootstrap-Stichprobenmittels	61
6 Spezielle Bootstrap-Verfahren	73
6.1 i.i.d.-weighted-Bootstrap	73

6.2	Wild-Bootstrap mit zufälligem Stichprobenumfang	76
6.3	Prepivotisieren und der double-Bootstrap	79
7	Grenzwertsätze für studentisierte Resampling-Statistiken	89
8	Ein multivariater zentraler Grenzwertsatz	95
II	Simulationsstudien	101
9	Monte-Carlo-Simulation	103
9.1	Monte-Carlo-Verfahren	104
9.2	Bootstrap-Verfahren	105
9.2.1	Sampling-Prozeduren	105
9.2.2	Bootstrap-Wiederholungen	109
9.2.3	prepivotated Bootstrap	110
9.3	Permutations-Verfahren	111
10	Testprobleme vom Behrens-Fisher-Typ	113
10.1	Bootstrap- und Permutationstest für das erweiterte Behrens-Fisher-Problem	113
10.2	Tests vom Wilcoxon-Typ	126
11	Zusammenfassung und Ausblick	131
III	Appendix	133
A	Verteilungskonvergenz und der Satz von Skorohod	135
A.1	Definition und Eigenschaften auf metrischen Räumen	135
A.2	Metrisierung der schwachen Konvergenz	136
A.3	Der Satz von Skorohod	137
B	Unendlich teilbare Verteilungen	139
B.1	Lévy-Khintchine Formel	139
B.2	Konvergenz gegen unendlich teilbare Verteilungen	141
B.3	Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz gegen unendlich teilbare Verteilungsklassen	142
B.4	Konvergenz gegen eine Normalverteilung	144

B.5 Quantildarstellung	146
Tabellenverzeichnis	149
Abbildungsverzeichnis	151
Algorithmenverzeichnis	153
Literaturverzeichnis	155

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

Im Folgenden sind alle in dieser Arbeit verwendeten Symbole und Abkürzungen aufgeführt. Symbole, die nur vereinzelt verwendet werden, sind an dieser Stelle nicht berücksichtigt. Die optionalen Zahlen geben die Seiten an, in denen einem Symbol erstmalig eine Bedeutung zugewiesen wird.

Symbole

$:=$	wird definiert als
\equiv	ist konstant gleich
$\forall, \exists, \Leftrightarrow, \Rightarrow$	übliche logische Symbole
$\in, \notin, \subset, \cap, \cup, \complement, \setminus$	übliche Mengenoperationen
$\mu_1 \star \mu_2$	Faltung zweier Maße μ_1 und μ_2
$\xi \sim \mu$	$\mathcal{L}(\xi) = \mu$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Euklidisches Skalarprodukt, S. 95
$\ \cdot \ $	Euklidische Norm, S. 95
$\ \cdot \ _p$	L_p -Norm
$\ \cdot \ _\infty$	Supremumsnorm
$[x]$	Gaußklammer, größte ganze Zahl $\leq x$
$a \wedge b$	$:= \min\{a, b\}$
$a \vee b$	$:= \max\{a, b\}$
\square	Ende einer Bemerkung
\blacksquare	Ende eines Beweises
ε_x	Einpunktmaß
λ	Lebesgue-Maß über $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

$\mathbb{1}_A$	Indikatorfunktion der Menge A
$\mathcal{B}(n, p)$	Binomialverteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit p
$\mathcal{B}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$	Borelsche Mengen auf \mathbb{R}^d
$C_b(S)$	Menge aller stetigen und beschränkten Funktionen auf einem metrischen Raum (S, d) , S. 135
const	Konstant
$\text{Cov}(X, Y)$	Kovarianz zweier Zufallsvariablen X und Y
$E(X)$	Erwartungswert einer Zufallsvariablen X
e_i	i -ter Einheitsvektor im \mathbb{R}^d
F	Verteilungsfunktion
F^{-1}	Quantilfunktion
i	imaginäre Einheit, $i^2 = -1$
\mathbf{I}	Einheitsmatrix
$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty}$	$\limsup_{n \rightarrow \infty}$
$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty}$	$\liminf_{n \rightarrow \infty}$
$\mathcal{L}(g(X) \mid \mathbb{P})$	Verteilung von $g(X)$ unter \mathbb{P}
$\mathcal{L}(g(X) \mid \mathbf{Y})$	bedingte Verteilung von $g(X)$ gegeben \mathbf{Y}
$\mathcal{M}_1(\Omega) := \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$	Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem Messraum (Ω, \mathcal{A}) , S. 22
$\text{Mult}(n, (p_1, \dots, p_n))$	Multinomialverteilung
$N(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2
\mathbb{N}, \mathbb{N}_0	$\{1, 2, \dots\}, \{0, 1, \dots\}$
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$	zugrundeliegender Wahrscheinlichkeitsraum
$o(\cdot)$	Landau-Symbol
$\mathbb{P}, \mathbb{P}_\vartheta$	Wahrscheinlichkeitsmaß
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{R}, \mathbb{R}_+	Menge der reellen bzw. positiven reellen Zahlen
$\text{supp}(T)$	Träger einer Funktion T
S	$:= \{\varphi \in L_2(0, 1) : \varphi \text{ monoton nicht-fallend, } \ \varphi\ _2 \leq 1\}$
\mathcal{S}_n	symmetrische Gruppe der Dimension n
t	Transposition
$\text{Var}(X)$	Varianz einer Zufallsvariablen X
$X_{i:n}$	i -te Orderstatistik von X_1, \dots, X_n
$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$	\mathbb{P} -stochastische Konvergenz
$\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$	schwache Konvergenz, S. 135

$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$	Verteilungskonvergenz, S. 135
$X_n \rightarrow X$ P-f.s.	\mathbb{P} -fast sichere Konvergenz
$X_n \rightarrow X$ P-stoch.	\mathbb{P} -stochastische Konvergenz
$F_n \rightrightarrows F$	$(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert vollständig gegen F , S. 142
$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y$	$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$

Abkürzungen

bzgl.	bezüglich
bzw.	beziehungsweise
d.h.	das heißt
et al.	et alii (und andere)
f.	folgende
ff.	fortfolgende
f.s.	fast sicher
f.ü.	fast überall
Hrsg.	Herausgeber
i.Allg.	im Allgemeinen
i.i.d.	unabhängig identisch verteilt
S.	Seite(n)
sog.	sogenannt(e, -er, -es)
u.a.	und andere
vgl.	vergleiche
z.B.	zum Beispiel

Kapitel 1

Einleitung

Die grundlegende Aufgabe der statistischen Analyse ist es, Informationen aus einem Datensatz zu gewinnen, vgl. RAO [109]. Solche Datensätze werden als Realisierungen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ einer Zufallsvariablen X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ angesehen. Im Allgemeinen basiert die statistische Analyse dabei auf von X abhängigen Statistiken $T := T(X)$. Ziel ist es, Aussagen über die Verteilung \mathbb{P}^T bzw. über deren Parameter zu treffen. Häufig finden solche Untersuchungen unter der Annahme eines strikten parametrischen Modells statt. Da jedoch eine solche Annahme in vielen Situationen nicht realistisch ist, versucht man dafür verteilungsfreie Verfahren zu entwickeln.

In der mathematischen Literatur finden sich eine Vielzahl solcher nicht-parametrischer Methoden. Eine wichtige Klasse ist die der sog. Resampling-Verfahren. Dabei versteht man unter einem **Resampling-Verfahren** eine statistische Methode, die auf Basis einer Ausgangsstichprobe $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ durch wiederholtes Erzeugen einer neuen Stichprobe nach einem vorgeschriebenen Muster Informationen über die Zusammensetzung der zugrundeliegenden Verteilung liefert. Die bekanntesten Methoden sind hierbei Bootstrap- und Permutationsverfahren.

Das **Bootstrap-Verfahren** wurde erstmals von EFRON [38] vorgeschlagen. In Fällen, in denen sich naheliegende Schätzer nicht explizit berechnen lassen, sollen diese mithilfe von sog. Monte-Carlo-Verfahren approximiert werden.

Die Idee des Bootstrap-Verfahrens besteht darin, das ursprüngliche Zufallsexperiment, welches zu einer Stichprobe $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ geführt hat, zu simulieren. Dazu wird die vorliegende Stichprobe als neue Grundgesamtheit

betrachtet, aus der in analoger Weise zum ersten Zufallsexperiment wiederum Stichproben gezogen werden. Die interessierenden Fragestellungen bzgl. der wahren Verteilung werden dann anhand der simulierten Stichprobe ausgewertet. Da hier alle Rahmenbedingungen des Experiments bekannt sind, können an dieser Stelle Aussagen getroffen werden. Man hofft, dass sich die in dem simulierten Modell erzielten Ergebnisse nun auf das ursprüngliche Zufallsexperiment übertragen lassen.

Bei diesem Vorgehen wird versucht, den unbekanntem datenerzeugenden Mechanismus aus den zur Verfügung stehenden Daten zu rekonstruieren, indem man die unbekannt zugrundeliegende Verteilung \mathbb{P}_F mit zugehöriger Verteilungsfunktion F durch eine direkt aus den Daten geschätzte Verteilung $\mathbb{P}_{\hat{F}}$ ersetzt.

Trifft man keine spezielle Verteilungsannahme und wählt als Schätzer der Verteilung \mathbb{P}_F die empirische Verteilung $\mathbb{P}_{\hat{F}_n}$ mit empirischer Verteilungsfunktion \hat{F}_n , so spricht man vom **nichtparametrischen Bootstrap**. In diesem Fall wird die neue Stichprobe durch Ziehen mit Zurücklegen aus der Grundgesamtheit gewonnen. Schränkt man die unbekannt Verteilung \mathbb{P}_F auf eine spezielle Klasse – z.B. der Klasse der Normalverteilungen – ein, so führt die Einbeziehung dieser zusätzlichen Information zur Konstruktion eines **parametrischen Bootstrap**.

Da sich diese Arbeit im wesentlichen mit nichtparametrischen Fragestellungen befasst, soll an Stellen, in denen vom **gewöhnlichen Bootstrap** gesprochen wird, stets die nichtparametrische Variante gemeint sein.

Beim **Permutationsverfahren** werden, insbesondere in der Testtheorie, die gesuchten Parameter anhand der Permutationsverteilung bestimmt. Diese nichtparametrische Methode wurde erstmals von FISHER [39] und PITMAN [99, 100, 101] zur Bestimmung entsprechender Verteilungen verwendet. Dabei werden die neuen Stichproben entgegen den Bootstrap-Verfahren durch Ziehen ohne Zurücklegen gewonnen, d.h. man wählt eine Permutation $\tau \in \mathcal{S}_n$ aus der symmetrischen Gruppe \mathcal{S}_n und bestimmt die zugehörige Verteilung bzw. deren Parameter aus $\mathbf{x}_\tau := (x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)})$.

Ziel dieser Arbeit ist es, diese beiden und weitere in der Literatur auftretende Methoden in einer umfassenden Theorie zusammenzuführen. Die Untersuchungen beziehen sich dabei auf Aussagen in Form von bedingten und unbedingten Grenzwertsätzen, die ihre Motivation in der asymptotischen Test-

theorie finden und dort eine wesentliche Rolle spielen.

Ausgangspunkt ist eine Arbeit von MASON und NEWTON [89], in der lineare Bootstrap-Statistiken als durch austauschbare Variablen gewichtete Summen der Ausgangsstichprobe dargestellt werden, vgl. auch HUŠKOVA [65]. Überraschenderweise erfolgen die Beweise mittels Hájek's Ergebnisse über das asymptotische Verhalten einfacher linearer Rangstatistiken, vgl. hierzu HÁJEK, ŠIDÁK und SEN [53] sowie HUŠKOVA, BERAN und DUPAČ [66].

In dieser Arbeit lassen sich die betrachteten Resampling-Statistiken in gemeinsamer Form als gewichtete Summen durch

$$T_n^* := k(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,i} (X_{n,i} - \bar{X}_n) \quad (1.1)$$

darstellen, wobei $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ ein beliebiges Dreiecksschema von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $(W_{n,i})_{i \leq k(n)}$ ein von $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ unabhängiges Dreiecksschema von Gewichtsfunktionen auf einem neuem Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$ bezeichnen. Die einzelnen Resampling-Verfahren werden hierbei durch unterschiedliche Gewichte $(W_{n,i})_{i \leq k(n)}$ charakterisiert.

Bei der Untersuchung entsprechender Limesverteilungen spielt die Theorie über unendlich teilbare Maße eine entscheidende Rolle, vgl. hierzu ARAUJO und GINÉ [1] sowie GNEDENKO und KOLMOGOROV [48]. Dabei zeigt sich, dass die Grenzvarenblen als Summe zweier Partialsummen und einer unendlich teilbaren Verteilung darstellbar sind.

Diese Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Der erste Teil liefert die theoretischen Ergebnisse in Form bedingter und unbedingter Grenzwertsätze für allgemeine Dreiecksschemata $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ von Zufallsvariablen. Die hier vorgestellten Ergebnisse finden sich zum Teil in JANSSEN und PAULS (2002). Im zweiten Teil wird die Gültigkeit der erzielten Ergebnisse für finite Stichprobenumfänge überprüft. Dazu werden Monte-Carlo-Simulationen für verschiedene Testsituationen durchgeführt. Die Struktur beider Teile ist wie folgt:

Die Kapitel 2 und 3 befassen sich mit der Motivation und Definition allgemeiner Resampling-Verfahren und den daraus resultierenden Resampling-Tests als bedingte Tests gegeben den Daten. Als zentrale Aussage erhält man ein Lemma, welches unter allgemein gültigen Modellvoraussetzungen die asymptotische Äquivalenz des Resampling-Tests und des asymptotischen Tests liefert.

Diese Überlegungen rechtfertigen die Behandlung allgemeiner Grenzwertsätze für Resampling-Statistiken der Form (1.1).

In Kapitel 4 werden bedingte und unbedingte Grenzwertsätze für allgemeine Resampling-Statistiken der Form (1.1) hergeleitet. Dabei sind die Aussagen zunächst unabhängig von der speziellen Wahl der Resampling-Verfahren und somit unabhängig von speziellen Gewichtsfunktionen $(W_{n,i})_{i \leq k(n)}$.

Die Beweise erfolgen in Anlehnung an MASON und NEWTON [89] mithilfe von Aussagen über einfache lineare Rangstatistiken, vgl. HÁJEK, ŠIDÁK und SEN [53]. Dabei zieht man sich zunächst auf den Fall deterministischer Zufallsvariablen zurück und zeigt hier die Gültigkeit der entsprechenden Aussagen für lineare Rangstatistiken mit zufälligen Scores. Als Anwendung findet man im Fall konvergenter Summen unabhängiger Zufallsvariablen Konvergenzaussagen für Resampling-Statistiken.

Bei der Darstellung entsprechender Limesvariablen spielen Aussagen über unendlich teilbare Maße und ihre Darstellung mithilfe der Lévy-Khintchine-Formel, vgl. Anhang B, eine entscheidende Bedeutung. Ein wichtiges Hilfsmittel ist dabei die Konstruktion eines kompakten metrischen Raumes S . Hierauf lassen sich durch die Resampling-Gewichte $(W_{n,i})_{i \leq k(n)}$ Folgen von Treppenfunktionen definieren, deren Limesfunktionen Teile der Grenzvariablen bilden.

In Kapitel 5 werden genaue Bedingungen für die Konsistenz des Bootstrap-Stichprobenmittels gegeben. Dabei werden die in Kapitel 4 angegebenen Normierungsbedingungen überprüft und die Form möglicher Grenzvariablen untersucht.

Kapitel 6 liefert weitere Beispiele von Resampling-Gewichten. Neben bekannten Verfahren wie Bayesian-Bootstrap und double-Bootstrap werden auch weniger bekannte Methoden wie ein Bootstrap-Verfahren mit zufälligem Stichprobenumfang betrachtet.

Grenzwertaussagen in Form von Gesetzen der großen Zahlen findet man in Kapitel 7. Diese werden dazu verwendet, bedingte zentrale Grenzwertsätze für studentisierte Statistiken herzuleiten, deren Nenner durch das Resampling-Verfahren berücksichtigt werden.

Eine multivariate Betrachtung der Ergebnisse findet man in Kapitel 8. Hier werden bedingte Grenzwertsätze für multivariate Resampling-Statistiken formuliert und bewiesen. Dabei beschränkt man sich auf den Normalverteilungsfall, da hier aus den vorigen Überlegungen bekannt ist, dass unter dieser Vor-

aussetzung Resampling-Verfahren konsistent sind.

Der zweite Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der praktischen Umsetzung der gewonnen Erkenntnisse aus dem ersten Teil. Dabei werden anhand von Problemen des Behrens-Fisher-Typs Monte-Carlo-Studien durchgeführt.

Kapitel 9 gibt einen kurzen Überblick über die in der Studie verwendeten Methoden. Neben den im ersten Teil vorgestellten Resampling-Verfahren wird hier im Falle des gewöhnlichen Bootstrap kurz auf Sampling-Prozeduren eingegangen, mithilfe derer man Monte-Carlo-Approximationen verbessern kann. Solche Methoden finden ihren Ursprung in der Monte-Carlo-Theorie und wurden auf die Situation der Bootstrap-Verfahren übertragen, vgl. SHAO und TU [117]. In diesem Kapitel findet man auf Basis der theoretischen Ergebnisse von JÖCKEL [74, 75] auch eine kurze Darstellung über die Wahl des Resampling-Umfangs.

In dem sich anschließenden Kapitel 10 werden die erzielten Ergebnissen in Form von Tabellen, die die relativen Verwerfungswahrscheinlichkeiten für verschiedene Ausgangssituationen angeben, dargestellt und diskutiert.

Eine kurze Zusammenfassung zusammen mit einem Ausblick beschließt die Arbeit. Hierin werden weitere Anwendungspunkte und Forschungsansätze beschrieben, die Gegenstand weiterer wissenschaftlicher Untersuchungen sein sollen.

Ein Appendix liefert einen kurzen Überblick über die in dieser Arbeit verwendeten Hilfsmittel der Verteilungskonvergenz und der Theorie über unendlich teilbare Maße.

Teil I

Resampling-Tests und bedingte Grenzwertsätze in der nichtparametrischen Statistik

Kapitel 2

Resampling-Verfahren

2.1 Motivation

Im Folgenden seien X_1, \dots, X_n i.i.d. Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit unbekannter gemeinsamer Verteilung

$$\mathbb{P}^{(X_1, \dots, X_n)} =: \mathbb{P}_\vartheta^n, \quad \vartheta \in \Theta.$$

Bezeichnet $T_n(\mathbf{X}; \vartheta)$ eine Statistik, welche von $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ und dem unbekanntem Parameter $\vartheta \in \Theta$ abhängt, so ist durch

$$H_n(x; \vartheta) := \mathbb{P}_\vartheta^n(T_n(\mathbf{X}; \vartheta) \leq x)$$

die Verteilungsfunktion von $T_n(\mathbf{X}; \vartheta)$ unter \mathbb{P}_ϑ^n definiert. $H_n(\cdot; \vartheta)$ soll hier schwach gegen eine asymptotische Verteilungsfunktion $H_A(\cdot; \vartheta)$ konvergieren.

Im Allgemeinen lässt sich die Verteilungsfunktion $H_n(\cdot; \vartheta)$ nicht oder nur sehr schwer analytisch berechnen. Man benötigt also einen geeigneten Ansatz diese näherungsweise zu bestimmen, um somit, z.B. im Falle von Testproblemen, geeignete kritische Werte zu erhalten.

Eine Möglichkeit ist die *asymptotische Approximation*, bei der die Tatsache ausgenutzt wird, dass die Verteilungsfunktion $H_n(\cdot; \vartheta)$ schwach gegen eine Grenzfunktion $H_A(\cdot; \vartheta)$ konvergiert. Somit kann bei großen Stichprobenumfängen diese Limesverteilung als Approximation zur Bestimmung kritischer Werte herangezogen werden. Ein wesentliches Problem an dieser Stelle stellt jedoch die Abhängigkeit vom unbekanntem Parameter dar. Es stellt sich heraus, dass in vielen Fällen diese Abhängigkeit bei Erhöhung des Stichprobenumfangs immer weiter abnimmt, so dass die zu $H_A(\cdot; \vartheta)$ zugehörige Verteilung unabhängig von ϑ ist, vgl. BERAN und DUCHARME [19, S. 6f.].

In solchen Fällen liegt es nahe als einfache Approximation der unbekanntenen Verteilungsfunktion die Funktion $H_A(\cdot; \hat{\vartheta}_n)$ zu wählen. Diese Überlegungen führen nun zur Bootstrap-Methode von EFRON [38].

2.2 Die Bootstrap-Methode

EFRON [38] lieferte in seiner Arbeit ein alternatives Verfahren, mit der die unbekanntene Verteilung mittels der sog. Bootstrap-Verteilungsfunktion bestimmt wird. Bei dieser Vorgehensweise überspringt man den ersten Schritt der asymptotischen Approximation und geht direkt zu einer Schätzung mittels $\hat{\vartheta}_n$ über.

Definiere neue i.i.d. Zufallsvariablen X_1^*, \dots, X_n^* mit gemeinsamer Verteilung $\mathbb{P}_{\hat{\vartheta}_n}^n = \mathcal{L}(X_1^*, \dots, X_n^* \mid \mathbf{X})$ gegeben den Daten $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$. Dann ist die zu $H_n(\cdot; \vartheta)$ gehörige *Bootstrap-Verteilungsfunktion* definiert durch

$$H_n^*(x) := \mathbb{P}_{\hat{\vartheta}_n}^n(T_n(X^*; \hat{\vartheta}_n) \leq x \mid \mathbf{X}). \quad (2.1)$$

Wählt man die empirische Verteilungsfunktion

$$\hat{F}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(X_i)$$

als zugehörigen konsistenten Schätzer, so führt dies zum gewöhnlichen Bootstrap und es gilt für den Parameterraum

$$\Theta := \{F : F \text{ Verteilungsfunktion}\}.$$

In diesem Fall werden die neuen Bootstrap-Variablen X_1^*, \dots, X_n^* durch Ziehen mit Zurücklegen aus der Grundgesamtheit X_1, \dots, X_n gewonnen. Diese Überlegungen machen eine Implementierung in ein Computerprogramm relativ einfach, vgl. Algorithmus 1 auf Seite 106. Auf diese Aussage soll jedoch erst im zweiten Teil dieser Arbeit genauer eingegangen werden.

Das folgende Beispiel veranschaulicht die Vorgehensweise bei der Bestimmung der Bootstrap-Verteilungsfunktion in einer parametrischen Situation.

Beispiel 2.1 (Parametrischer Bootstrap)

Seien X_1, \dots, X_n i.i.d. Zufallsvariablen mit einer gemeinsamen Verteilung $\mathbb{P}_{\vartheta}^n := \mathbb{N}^n(\mu, \sigma^2)$, dann ist $\vartheta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ =: \Theta$. Wähle als Schätzer

$\hat{\vartheta}_n := (\bar{X}_n, S_n^2)$ mit

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{und} \quad S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Die Statistik T_n sei gegeben durch

$$T_n := T_n(\mathbf{X}; \vartheta) := \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu).$$

Dann gilt

$$H_n(x; \vartheta) := \mathbb{P}_{\vartheta}^n(T_n(\mathbf{X}; \vartheta) \leq x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Als Bootstrap-Verteilungsfunktion erhält man aus (2.1)

$$H_n^*(x) := \mathbb{P}_{\hat{\vartheta}_n}^n(T_n(\mathbf{X}^*; \hat{\vartheta}_n) \leq x \mid \mathbf{X}) = \Phi\left(\frac{x}{S_n}\right),$$

wobei $\mathbf{X}^* = (X_1^*, \dots, X_n^*)$ die Bootstrap-Stichprobe mit gemeinsamer Verteilung $\mathbb{P}_{\hat{\vartheta}_n}^n = \mathbb{N}^n(\bar{X}_n, S_n^2)$ ist.

Obwohl das Bootstrap-Verfahren eine intuitiv anzuwendende Methode ist, um unbekannte Verteilungen zu schätzen, muss bei der Durchführung mit Vorsicht vorgegangen werden. Das folgende Beispiel zeigt einen Fall, in dem der gewöhnliche Bootstrap nicht anwendbar ist.

Beispiel 2.2

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von auf $(0, \tau)$, $\tau > 0$, gleichverteilten i.i.d. Zufallsvariablen. Unter der Definition

$$X_{n:n} := \max\{X_1, \dots, X_n\},$$

zeigt man, dass

$$n(\tau - X_{n:n}/\tau) \xrightarrow{\mathcal{D}} Y \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

wobei Y eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 ist.

An dieser Stelle ist der gewöhnliche Bootstrap im folgenden Sinne nicht konsistent, vgl. BICKEL und FREEDMAN [22, S. 1210]. Bezeichnet $X_{n:n}^*$ das Maximum der Bootstrap-Stichprobe X_1^*, \dots, X_n^* , so gilt für $n \rightarrow \infty$, dass

$$\mathbb{P}(X_{n:n} - X_{n:n}^* > 0 \mid X_1, \dots, X_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{P-stoch.}$$

und somit wegen $(1 - \frac{1}{n})^n \rightarrow \exp(-1) \neq 1$

$$\mathbb{P}(n(X_{n:n} - X_{n:n}^*)/X_{n:n} > x \mid X_1, \dots, X_n) \not\rightarrow \exp(-x) \quad \forall x \geq 0. \quad (2.3)$$

Die beiden Gleichungen (2.2) und (2.3) ergeben zusammen, dass in diesem speziellen Beispiel die Bootstrap-Verteilungsfunktion nicht gegen die korrekte Limesverteilung konvergiert. Eine Modifikation des gewöhnlichen Bootstrap-Verfahrens liefert jedoch die gewünschte Konvergenz. Definiert man durch $X_1^*, \dots, X_{m(n)}^*$ eine neue Stichprobe vom Umfang $m(n)$, welche mit Zurücklegen aus der Grundgesamtheit X_1, \dots, X_n gezogen wurde, so zeigt SWANEPOEL [121], dass wenn für ein $0 < \varepsilon < 1$ die Beziehung

$$m(n) = o(n^{(\varepsilon+1)/2}/(\log n)^{1/2})$$

gilt, die Behauptung

$$\mathbb{P}(m(n)(X_{n:n} - X_{m(n):m(n)}^*)/X_{n:n} > x \mid X_1, \dots, X_n) \rightarrow \exp(-x) \quad (2.4)$$

für alle $x \geq 0$ und $n \rightarrow \infty$ fast sicher erfüllt ist. Dabei bezeichnet $X_{m(n):m(n)}^* := \max\{X_1^*, \dots, X_{m(n)}^*\}$ das Maximum der Bootstrap-Stichprobe vom Bootstrap-Stichprobenumfang $m(n)$.

DEHEUVELS, MASON und SCHORACK [34] lieferten in ihrer Arbeit eine Verfeinerung des Ergebnisses von SWANEPOEL [121]. Da es sich hier lediglich um ein Beispiel handelt, soll auf den entsprechenden Beweis verzichtet werden.

Satz 2.3

Angenommen $m(n) \rightarrow \infty$ und $m(n)/n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt (2.4) \mathbb{P} -stochastisch. Ist die Bedingung

$$(m(n) \log \log n)/n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

zusätzlich erfüllt, so gilt (2.4) \mathbb{P} -f.s.

Beweis. Vgl. DEHEUVELS, MASON und SCHORACK [34, Theorem 2.1]. ■

Die Frage der Konsistenz von Bootstrap-Schätzern ist ein in der Literatur vielbehandeltes Problem. BERAN [14] liefert in seiner Arbeit Bedingungen unter denen $H_n^*(\cdot)$ eine geeignete Approximation von $H_n(\cdot; \vartheta)$ darstellt.

Satz 2.4 (Beran (1984))

Sei (Θ, d_Θ) ein metrischer Raum. Angenommen für $\varepsilon > 0$ und $\vartheta \in \Theta$ gilt:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\vartheta^n(d_\Theta(\hat{\vartheta}_n, \vartheta) > \varepsilon) = 0$;
- (ii) Für jede Folge $(\vartheta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Θ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} d_\Theta(\vartheta_n, \vartheta) = 0$ konvergiere $H_n(\cdot, \vartheta_n)$ schwach gegen eine Grenzverteilungsfunktion $H_A(\cdot; \vartheta)$;
- (iii) Die Grenzverteilungsfunktion $H_A(x, \vartheta)$ sei stetig in x für alle $\vartheta \in \Theta$.

Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$ und $\vartheta \in \Theta$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\vartheta^n(\|H_n^*(\cdot) - H_A(\cdot; \vartheta)\|_\infty > \varepsilon) = 0.$$

Beweis. Vgl. BERAN und DUCHARME [19, Proposition 1.2]. ■

Einen neuen Ansatz über die Konvergenz von Bootstrap-Verteilungsfunktionen lieferte PUTTER [105] in seiner Dissertation. Dazu werden folgende Definitionen benötigt:

Definition 2.5

Sei S ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $M \subset S$ heißt **nirgends dicht**, falls \overline{M} keine inneren Punkte hat. M heißt **von erster Kategorie** in S , falls M Vereinigung von abzählbar vielen, nirgends dichten Mengen ist. M heißt **von zweiter Kategorie** in S , falls M nicht von erster Kategorie in S ist.

Damit ergibt sich:

Satz 2.6 (Putter (1994))

Sei (Θ, d_Θ) ein vollständiger metrischer Raum. Angenommen für alle $\vartheta \in \Theta$ gelten:

- (i) $H_n(\cdot; \vartheta)$ konvergiere für $n \rightarrow \infty$ schwach gegen eine Grenzverteilungsfunktion $H_A(\cdot; \vartheta)$;
- (ii) Für jedes $n \geq 1$ ist $H_n(\cdot; \vartheta)$ stetig in $\vartheta \in \Theta$;
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\vartheta^n(d_\Theta(\hat{\vartheta}_n, \vartheta) > \varepsilon) = 0$.

Dann existiert eine Menge E der ersten Kategorie, so dass für alle $\vartheta \in \Theta \setminus E$

$$H_n(\cdot; \hat{\vartheta}_n) \xrightarrow{w} H_A(\cdot; \vartheta).$$

Darüberhinaus ist $\Theta \setminus E$ eine Menge der zweiten Kategorie.

Beweis. Vgl. PUTTER [105]. ■

BERAN [18] betrachtet die Frage der Konsistenz der Bootstrap-Verteilung für allgemeine LAN-Modelle. Dabei liefert Beran für diese spezielle Klasse statistischer Modelle von der Wahl der Metrik d_Θ unabhängige Bedingungen für die Konsistenz der Bootstrap-Verteilung.

Der zentrale Satz dieser Arbeit besagt, dass die Konvergenz der Bootstrap-Verteilung gegen die wahre Grenzverteilung äquivalent zu einer LAE-Eigenschaft (**l**ocal **a**symptotic **e**quivariant) ist, welche eine Verallgemeinerung des Konzeptes der Regularität von Hájek darstellt, vgl. BERAN [18, Theorem 2.1 und 2.2].

Darüber hinaus wird die Supereffizienz eines Schätzers als hinreichende aber nicht notwendige Bedingung für das Scheitern der Konvergenz angegeben, vgl. BERAN [18, Theorem 3.2]. Dabei heißt ein Schätzer in einem Punkt (asymptotisch) **supereffizient**, falls in diesem die asymptotische Cramér-Rao-Ungleichung unterschritten wird, vgl. Witting [128, S. 199].

Beispiel 2.7 (Hodges-Schätzer)

Seien X_j , $j \in \mathbb{N}$, unabhängig $N(\vartheta, 1)$ -verteilte Zufallsvariablen, $\vartheta \in \mathbb{R}$. Die Verteilungsklasse $\mathcal{P} = \{N(\vartheta, 1) : \vartheta \in \mathbb{R}\}$ ist in jedem Punkt $\vartheta \in \mathbb{R}$ $L_2(\vartheta)$ -differenzierbar mit der Fisher-Information $I(\vartheta) = 1$ und für den (ML-)Schätzer $\hat{\vartheta}_n(x) := \bar{x}_n$ wird die Cramér-Rao-Schranke angenommen. Insbesondere gilt dann

$$\mathcal{L}_\vartheta(\sqrt{n}(\bar{x}_n - \vartheta)) \xrightarrow{w} N(0, I(\vartheta)^{-1}).$$

Benutzt man jedoch den für $|\bar{x}_n| \leq n^{-1/4}$ modifizierten Schätzer

$$T_{n,H} := \begin{cases} b\bar{x}_n & |\bar{x}_n| \leq n^{-1/4} \\ |\bar{x}_n| & |\bar{x}_n| > n^{-1/4} \end{cases} \quad \text{für} \quad (2.5)$$

mit $b^2 < 1$, so gilt mit

$$\sigma^2(\vartheta) := \begin{cases} 1 & \vartheta \neq 0 \\ b^2 & \vartheta = 0, \end{cases} \quad \text{für}$$

dass

$$\mathcal{L}_\vartheta(\sqrt{n}(T_{n,H} - \vartheta)) \xrightarrow{w} N(0, \sigma^2(\vartheta)) \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Die (asymptotische) Cramér-Rao-Schranke $I(\vartheta)^{-1} = 1$ wird also vom Schätzer $T_{n,H}$ in den Punkten $\vartheta \neq 0$ angenommen, dagegen im Punkt $\vartheta = 0$ unterschritten. Somit ist der Schätzer im Punkt $\vartheta = 0$ (asymptotisch) supereffizient, vgl. auch BERAN [18], PUTTER [106] und WITTING [128, Beispiel 6.32].

Mehr als 10 Jahre nach dem Vorschlag von Efron lieferten MASON und NEWTON [89] ein **verallgemeinertes Bootstrap-Verfahren** zum Beweis der Konsistenz der empirischen Verteilungsfunktion, der Quantilfunktion sowie des Stichprobenmittels. Die Bootstrap-Statistiken werden mittels von der Stichprobe unabhängigen Gewichtsfunktionen dargestellt. Unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen an diese Gewichte lassen sich dann mithilfe von Ergebnissen über lineare Rangstatistiken Aussagen über die Konsistenz entsprechender Schätzer treffen. Dabei spielt Hájek's Theorie über einfache lineare Rangstatistiken eine entscheidende Rolle, vgl. HÁJEK, ŠIDÁK und SEN [53].

Betrachtet man den gewöhnlichen Bootstrap für eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von i.i.d. Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und definiert man durch $Z_{n,1}, \dots, Z_{n,n}$ unabhängige auf $\{1, \dots, n\}$ gleichverteilte Zufallsvariablen, so lassen sich die Bootstrap-Variablen durch

$$X_i^* = X_{Z_{n,i}}$$

beschreiben. Definiert man Gewichte

$$M_{n,j} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{j\}}(Z_{n,i}), \quad (2.7)$$

so gilt für den Bootstrap-Mittelwert

$$\bar{X}_n^* := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^* = \sum_{i=1}^n M_{n,i} X_i,$$

bzw.

$$n^{1/2}(\bar{X}_n^* - \bar{X}_n) = n^{1/2} \sum_{i=1}^n (M_{n,i} - 1/n) X_i.$$

Somit lässt sich das Bootstrap-Stichprobenmittel als gewichtete Summe in Abhängigkeit der Gewichtsfunktionen $(M_{n,i})_{i \leq n}$ und der i.i.d. Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n auffassen, vgl. auch BARBE und BERTAIL [7].

Unter Berücksichtigung von Beispiel 2.2 erhält man durch Abändern des Stichprobenumfanges der Bootstrap-Stichprobe eine andere Möglichkeit des Bootstrap-Mittelwertes. In diesem Fall definiert man die Gewichte durch

$$M_{n,j} := \frac{1}{m(n)} \sum_{i=1}^{m(n)} \mathbb{1}_{\{j\}}(Z_{n,i}). \quad (2.8)$$

Dieses Verfahren wird in der englischsprachigen Literatur „ $m(n)$ **out of n -Bootstrap**“ oder kurz „ $m(n)$ -**Bootstrap**“ genannt.

2.3 Allgemeine Resampling-Verfahren

Ausgehend von den obigen Überlegungen sollen nun allgemeine Resampling-Verfahren eingeführt werden. Dabei wird die Einschränkung auf i.i.d. Zufallsvariablen wegfallen. Im Folgenden sei dazu $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ ein Dreiecksschema von Zufallsvariablen auf einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Betrachte Statistiken der Form

$$T_n^* = k(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,i} (X_{n,i} - \bar{X}_n), \quad (2.9)$$

mit einem Dreiecksschema $(W_{n,i})_{i \leq k(n)}$ von zufälligen Gewichtsfunktionen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$. Die Zufallsvariablen $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ und $(W_{n,i})_{i \leq k(n)}$ sind in Bezug auf das Produktmaß $\mathbb{P} \otimes \tilde{\mathbb{P}}$ unabhängig. Die Gewichte sollen im weiteren Verlauf dieser Arbeit die folgenden **Generalvoraussetzungen** erfüllen:

(E1) Die Komponenten von $(W_{n,1}, \dots, W_{n,k(n)})$ seien für jedes $n \in \mathbb{N}$ austauschbar;

(E2) $\max_{1 \leq i \leq k(n)} |W_{n,i} - \bar{W}_n| \rightarrow 0$ $\tilde{\mathbb{P}}$ -stochastisch;

$$(E3) \sum_{i=1}^{k(n)} (W_{n,i} - \bar{W}_n)^2 \rightarrow 1 \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-stochastisch.}$$

Definition 2.8

Statistiken der Form (2.9) heißen (lineare) **Resampling-Statistiken** mit Gewichtsfunktionen $(W_{n,i})_{i \leq k(n)}$.

Bemerkung 2.9

Gilt $\bar{W}_n = \frac{1}{k(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,i} = 0$ $\tilde{\mathbb{P}}$ -f.s., so folgt, dass $T_n^* = k(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,i} X_{n,i}$ $\tilde{\mathbb{P}}$ -f.s. \square

Die folgenden Beispiele zeigen, dass sich in diese Definition der Resampling-Statistiken neben dem gewöhnlichen Bootstrap-Verfahren von EFRON [38] eine Vielzahl weiterer bekannter Methoden einbinden lassen. Dabei unterscheiden sich die einzelnen Methoden lediglich in der Wahl ihrer Gewichte $(W_{n,i})_{i \leq k(n)}$. Weitere Resampling-Verfahren werden ausführlich in Kapitel 6 untersucht.

Beispiel 2.10

(a) (**$m(n)$ -Bootstrap**) Seien $(M_{n,1}, \dots, M_{n,k(n)})$ multinomialverteilte Zufallsvariablen mit Stichprobenumfang $m(n) = \sum_{i=1}^{k(n)} M_{n,i}$ und Auswahlwahrscheinlichkeiten $1/k(n)$. Dann sind die $m(n)$ -Bootstrap-Gewichte definiert durch

$$W_{n,i} := m(n)^{1/2} \left(\frac{1}{m(n)} M_{n,i} - \frac{1}{k(n)} \right). \quad (2.10)$$

In dem Spezialfall, dass $m(n) = k(n)$, erhält man den gewöhnlichen Bootstrap von EFRON [38].

(b) (**Permutations-Statistiken**) Betrachtet man einfache (lineare) Permutationsstatistiken der Form

$$T_n = k(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} c_{n\tau(i)} X_{n,i},$$

mit Regressionskoeffizienten $(c_{ni})_{i \leq k(n)}$, so sind die zugehörigen Gewichte gegeben durch

$$W_{n,i} = c_{n\tau(i)}. \quad (2.11)$$

Dabei ist $\tau(\cdot)$ eine auf der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_{k(n)}$ gleichverteilte Permutation. Die Gewichte $(W_{n,i})_{i \leq k(n)}$ erfüllen genau dann die Generalvorausset-

zungen, wenn diese von den Regressionskoeffizienten erfüllt werden, vgl. auch PAULS [95, Lemma 4.1].

(c) (**Wild-Bootstrap**) LIU [83] gibt in ihrer Arbeit ein Bootstrap-Verfahren für nicht i.i.d. Modelle an, wobei die Resampling-Stichproben so gewählt werden, dass diese die Heteroskedastizität der Originalstichprobe widerspiegeln. Während beim gewöhnlichen Bootstrap die Zufallsvariablen $X_{n,1}^*, \dots, X_{n,k(n)}^*$ durch Ziehen mit Zurücklegen gewonnen werden, so wählt man an dieser Stelle

$$X_{n,i}^* := \bar{X}_n + (X_{n,i} - \bar{X}_n)Z_{n,i},$$

wobei die $(Z_{n,i})_{i \leq k(n)}$ ein Dreiecksschema von zeilenweise i.i.d. Zufallsvariablen mit $E(Z_{n,1}) = 0$ und $\text{Var}(Z_{n,i}) = 1$ bilden. Die Wild-Bootstrap-Gewichte sind dann definiert durch

$$W_{n,i} = k(n)^{-1/2} Z_{n,i}. \tag{2.12}$$

Als Spezialfall liefern uns diese Gewichte Bootstrap-Verfahren mit zufälligem Stichprobenumfang, vgl. MAMMEN [85, S. 14f.] und Abschnitt 6 weiter unten.

Kapitel 3

Resampling-Tests

3.1 Motivation und Definition

Resampling-Verfahren werden in der Testtheorie dazu verwendet entsprechende kritische Werte zu bestimmen. Dabei lässt sich die Vorgehensweise durch folgendes nichtparametrisches Problem motivieren:

Im Folgenden bezeichne H_0 eine zusammengesetzte Nullhypothese von Verteilungen und X_1, \dots, X_n reellwertige Zufallsvariablen auf einem Messraum (Ω, \mathcal{A}) mit gemeinsamer Verteilung $\mathbb{P} \in H_0$, sowie $T_n := T_n(X) : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine von $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ abhängige Statistik.

Wie schon in Kapitel 1 angesprochen, existiert in vielen Fällen unter H_0 ein zentraler Grenzwertsatz sowie ein konsistenter Varianzschätzer V_n für die asymptotische Varianz von T_n . Dann lässt sich ein einseitiger T_n -Test φ_n für H_0 als asymptotischer α -Niveau-Test durch

$$\varphi_n = \begin{cases} 1 & > \\ T_n & u_{1-\alpha} V_n^{1/2} \\ 0 & \leq \end{cases} \quad (3.1)$$

definieren, wobei $u_\alpha := \Phi^{-1}(1-\alpha)$ das α -Fraktile der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Bei dieser Vorgehensweise tritt in der Praxis jedoch das zentrale Problem auf, dass der Anwender keinerlei Kontrolle über die wahre Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art bei festem Stichprobenumfang besitzt und dieser Test lediglich asymptotisch für große Stichprobenumfänge das gewünschte Niveau einhält.

Hier werden nun Resampling-Verfahren zur Bestimmung geeigneter kritischer Werte herangezogen. Ziel solcher Verfahren ist es, bezogen auf das Testproblem, bessere datenabhängige kritische Werte $c_n^*(\alpha) := c_n^*(\alpha|\mathbf{X})$ zu bestimmen, so dass eine Kontrolle der Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art möglich wird.

Bezeichnet $T_n^* := T_n(\mathbf{X}^*)$ die Resampling-Statistik gegeben den Daten und $H_n^*(\cdot)$ die zugehörige Verteilungsfunktion unter der Nullhypothese H_0 , so lässt sich ein *Resampling-Test* φ_n^* , in Anlehnung an BERAN [15], wie folgt definieren:

Definition 3.1 (Resampling-Test)

Seien

$$H_n^{*-1}(y) := \inf\{x : H_n^*(x) \geq y\}$$

$$\tilde{H}_n^{*-1}(y) := \sup\{x : H_n^*(x) \leq y\}$$

die links- bzw. rechtsseitig stetigen inversen Verteilungsfunktionen von $H_n^*(\cdot)$. Dann ist ein **(einseitiger) Resampling-Test** als *randomisierter bedingter Test* definiert durch

$$\varphi_n^* = \begin{cases} 1 & > \\ \gamma^* & T_n = c_n^*(\alpha), \\ 0 & < \end{cases} \quad (3.2)$$

wobei für den kritischen Wert $c_n^*(\alpha)$ des Testes φ_n^* gilt

$$H_n^{*-1}(1 - \alpha) \leq c_n^*(\alpha) \leq \tilde{H}_n^{*-1}(1 - \alpha). \quad (3.3)$$

Bemerkung 3.2

(a) In der Regel wählt man $c_n^*(\alpha) := H_n^{*-1}(1 - \alpha)$ als das $(1 - \alpha)$ -Quantil der Resampling-Verteilung unter der Nullhypothese H_0 .

(b) $c_n^*(\alpha)$ und $\gamma^* := \gamma^*(\mathbf{X})$ sind Zufallsvariablen, da diese in Abhängigkeit von $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ bestimmt werden.

(c) Analog lassen sich zweiseitige Resampling-Tests definieren. Für einen zweiseitigen Bootstrap-t-Tests vgl. WOLF-OSTERMANN [130]. \square

Die Wahl der Teststatistik hängt stets von dem betrachteten Modell und somit von der Wahl der entsprechenden Hypothese ab. In dem folgenden Bei-

spiel soll eine in der Praxis wichtige Darstellung der Teststatistiken angegeben werden:

Beispiel 3.3 (Teststatistiken)

Lineare Teststatistiken der Form

$$T_n = k(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} c_{ni} X_{n,i} \quad (3.4)$$

spielen in der statistischen Betrachtung eine wichtige Rolle, wobei $(c_{ni})_{i \leq k(n)}$ ein Dreiecksschema von reellen Regressionskoeffizienten bezeichnet. Dabei haben zwei Spezialfälle eine hervorgehobene Bedeutung, welche in den späteren Kapiteln immer wieder aufgegriffen werden:

(a) Zweistichprobenstatistiken

Betrachtet man ein Zweistichprobenproblem (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) mit Gesamtstichprobenumfang $k(n) = n_1 + n_2$, so sind die zugehörigen Regressionskoeffizienten häufig gegeben durch

$$c_{ni} = \left(\frac{n_1 n_2}{k(n)} \right)^{1/2} \cdot \begin{cases} -\frac{1}{n_1} & i \leq n_1 \\ \frac{1}{n_2} & n_1 < i \leq k(n). \end{cases} \quad (3.5)$$

(b) Einstichprobenstatistiken

Regressionskoeffizienten $c_{ni} = k(n)^{-1/2}$ definieren einfache Teststatistiken der Form

$$T_n = \sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i}.$$

Die Behandlung von Resampling-Tests motiviert nun die Betrachtung von allgemeinen Grenzwertsätzen, da hierdurch das asymptotische Verhalten von Tests unter Nullhypothesen H_0 , und später auch unter Alternativen, studiert werden kann. Hierbei soll die folgende Fragestellung im weiteren Verlauf der Arbeit im Vordergrund stehen:

Wie funktionieren Resampling-Tests?

Diese steht im engen Zusammenhang mit dem Titel der von MAMMEN [85] verfassten Monographie „When does bootstrap work?“. Sie ist jedoch in einem

allgemeinerem Kontext zu verstehen, da Permutationstest basierend auf den Gewichten aus Beispiel 2.10(b) unter

$$H_0 \subset H_{\text{prod}} := \{\mathbb{P}^n : \mathbb{P} \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})\}$$

stets das gewünschte Niveau einhalten, vgl. LEHMANN [80]. Dabei bezeichnet $\mathcal{M}_1(\Omega) := \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ den Raum aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem Messraum (Ω, \mathcal{A}) .

Der Vergleich von bedingten Tests der Form (3.2) mit unbedingten Tests der Form (3.1) soll in dem folgendem Abschnitt genauer betrachtet werden.

3.2 Asymptotischer Vergleich bedingter und unbedingter Tests

Nachdem nun Resampling-Tests als bedingte Tests gegeben den Daten motiviert wurden, werden diese mit unbedingten Tests der Form (3.1) verglichen. Dieser Vergleich findet in Form der asymptotischen Äquivalenz zweier Tests statt, vgl. WITTING und NÖLLE [129, S. 58].

Im Folgenden sei d eine Metrik, die die schwache Konvergenz auf dem Raum $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ metrisiert, vgl. Anhang A. Man betrachte folgendes Modell:

(I) (**Unbedingte Konvergenz**) Sei $\mathbb{P} \in H_0$. Die reelle Statistik T_n konvergiere auf H_0 in Verteilung gegen eine Zufallsvariable T . Dabei sei die Verteilungsfunktion F_T von T stetig und strikt monoton steigend auf ihrem Träger $\text{supp}(F_T)$.

(II) (**Asymptotischer unbedingter α -Niveau Test**) Sei $\varphi_{n,\alpha}$ ein Test gegeben durch unbedingte kritische Werte $c_n(\alpha)$ mit

$$\varphi_{n,\alpha} := \mathbf{1}_{(c_n(\alpha), \infty)}(T_n), \tag{3.6}$$

so dass $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varphi_{n,\alpha}) \rightarrow \alpha$ für $n \rightarrow \infty$.

(III) (**Bedingter Test**) Sei T_n^* eine beliebige Teststatistik mit bedingter Verteilungsfunktion F_n^* von $\mathcal{L}(T_n^* \mid X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)})$. Bezeichne mit $F_n^{*-1}(1 - \alpha) = c_n^*(\alpha) = c_n^*(\alpha \mid X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)})$ das $(1 - \alpha)$ -Quantil der bedingten Verteilung gegeben den Daten $X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)}$. Dann ist ein nicht randomisierter bedingter T_n -Test gegeben durch

$$\varphi_{n,\alpha}^* := \mathbf{1}_{(c_n^*(\alpha), \infty)}(T_n). \tag{3.7}$$

Lemma 3.4

Unter den Modellvoraussetzungen (I)-(III) sind folgende Aussagen für $n \rightarrow \infty$ äquivalent:

- (a) $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(|\varphi_{n,\alpha} - \varphi_{n,\alpha}^*|) \rightarrow 0$ für alle $\alpha \in (0, 1)$;
- (b) $d(\mathcal{L}(T_n), \mathcal{L}(T_n^* | X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)})) \rightarrow 0$ P-stoch.

Beweis. (b) \Rightarrow (a), vgl. WITTING und NÖLLE [129, S. 58].

(a) \Rightarrow (b) Sei $c(\alpha) = F_T^{-1}(1 - \alpha)$ das $(1 - \alpha)$ -Quantil von F_T . Dann gilt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(|\varphi_{n,\alpha} - \mathbb{1}_{(c(\alpha), \infty)}(T_n)|) \rightarrow 0 \tag{3.8}$$

und man wählt $c_n(\alpha) = c(\alpha)$. Bezeichne F_n die Verteilungsfunktion von T_n und sei U eine auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable, die unabhängig von den Daten ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(|F_n(c(U)) - F_n(c_n^*(U))|) \\ &= \int \left| \int \mathbb{1}_{(-\infty, c(u)]}(T_n) - \mathbb{1}_{(-\infty, c_n^*(u)]}(T_n) \, d\mathbb{P} \right| \, du \\ &\leq \iint \mathbb{1}_{(c(u), c_n^*(u)] \cup (c_n^*(u), c(u)]}(T_n) \, d\mathbb{P} \, du \\ &= \mathbb{P} \otimes \lambda_{|(0,1)}(\{T_n \in (c(U), c_n^*(U))\} \cup \{T_n \in (c_n^*(U), c(U))\}) \\ &\leq \int_0^1 \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(|\varphi_{n,\alpha} - \varphi_{n,\alpha}^*|) \, d\alpha + 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{P}(\{T_n = x\}). \end{aligned}$$

Somit existiert nach dem Teilfolgekriterium für jede Teilfolge eine weitere Teilfolge $\{m\}$, so dass

$$F_m(c(U)) - F_m(c_m^*(U)) \rightarrow 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

gilt. Aufgrund der gegebenen Voraussetzungen gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und $u \in (0, 1)$, dass $F_m(x) \rightarrow F_T(x)$ bzw. $F_m^{-1}(u) \rightarrow F_T^{-1}(u)$ und somit

$$c_m^*(U) \rightarrow c(U) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Wegen $\mathcal{L}(c(U)) = \mathcal{L}(T)$ und $\mathcal{L}(c_n^*(U)) = \mathcal{L}(T_n^* | X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)})$ gegeben den Zufallsvariablen $X_{n,i}$, $i = 1, \dots, k(n)$, folgt

$$d(\mathcal{L}(T), \mathcal{L}(T_m^* | X_{m,1}, \dots, X_{m,k(m)})) \rightarrow 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

entlang der gegebenen Teilfolge $\{m\}$. Hieraus folgt aus dem Teilfolgekriterium zusammen mit der Dreiecksungleichung für $n \rightarrow \infty$ die stochastische Konvergenz in (b), d.h.

$$d(\mathcal{L}(T_n), \mathcal{L}(T_n^* \mid X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)}) \rightarrow 0$$

\mathbb{P} -stochastisch und somit ist die Behauptung bewiesen. ■

Definition 3.5

Zwei Folgen von Tests $\varphi_{n,\alpha}$ und $\varphi_{n,\alpha}^*$, die die Aussage (a) in Lemma 3.4 erfüllen, sollen im Folgenden **(asymptotisch) äquivalent** genannt werden.

Lemma 3.4 rechtfertigt die Betrachtung von Grenzwertsätzen linearer Statistiken. Findet man Bedingungen, unter denen beide Limesverteilungen übereinstimmen, so erhält man die asymptotische Äquivalenz der zugehörigen Tests und somit die mathematische Rechtfertigung für den Einsatz von Resampling-Verfahren in der Testtheorie. In diesem Fall spricht man von der *Konsistenz* einer Resampling-Methode.

Kapitel 4

Bedingte Grenzwertsätze für lineare Statistiken

4.1 Allgemeine Grenzwertsätze

Wie in den vorigen Abschnitten bereits erwähnt, spielen Grenzwertsätze in der asymptotischen Statistik – insbesondere in der Testtheorie – eine zentrale Rolle. Die in der heutigen Literatur vorzufindenden Sätze beschränken sich i.Allg. auf spezielle Modellannahmen und liefern keine umfassende Theorie über die Gültigkeit solcher Aussagen bei Vorliegen von Dreiecksschemata $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ von beliebigen Zufallsvariablen.

Die vorhergehenden Überlegungen über Resampling-Verfahren und die daraus resultierenden Resampling-Tests rechtfertigen an dieser Stelle die Formulierung von allgemeinen Grenzwertsätzen für lineare Statistiken T_n^* der Form (2.9), d.h.

$$T_n^* = k(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,i} (X_{n,i} - \bar{X}_n).$$

Aus der Varianzformel von Hájek für einfache lineare Rangstatistiken, vgl. HÁJEK, ŠIDÁK und SEN [53, Theorem 3.3.3], folgt unter den Generalvoraussetzungen (E1)–(E3), dass

$$\text{Var}_{\hat{P}} \left(\frac{T_n^*}{\left(\sum_{j=1}^{k(n)} (W_{n,j} - \bar{W}_n)^2 \sum_{j=1}^{k(n)} (X_{n,j} - \bar{X}_n)^2 \right)^{1/2}} \right) = \frac{k(n)}{k(n) - 1}.$$

Definiert man $0/0 := 0$, so erhält man aus der Straffheit der Folge

$$\left(\mathcal{L} \left(\frac{T_n^*}{\left(\sum_{i=1}^{k(n)} (X_{n,i} - \bar{X}_{n,i})^2 \right)^{1/2}} \mid X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad (4.1)$$

nach dem Satz von Prohorov, vgl. BILLINGSLEY [24, S. 35ff.], die Relativkompaktheit und somit die Existenz entsprechender Häufungspunkte entlang einer Teilfolge $\{m\} \subset \mathbb{N}$.

Diese Aussage liefert die Existenz von Grenzverteilungen und man kann im Folgenden die Form der möglichen Limesverteilungen genauer studieren. Bei der Darstellung der Limesvariablen werden Aussagen über unendlich teilbare Maße eine entscheidende Rolle spielen, vgl. dazu Anhang B.

Im weiteren Verlauf seien auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Zufallsvariablen

$$Y_{n,i} := \frac{X_{n,i} - \bar{X}_n}{\left(\sum_{i=1}^{k(n)} (X_{n,i} - \bar{X}_n)^2 \right)^{1/2}} \quad (4.2)$$

definiert. Unabhängig von den bisherigen Wahrscheinlichkeitsräumen bezeichne $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ einen weiteren Wahrscheinlichkeitsraum, so dass für festes $\omega \in \Omega$ reellwertige Zufallsvariablen $Z_i, \tilde{Z}_j, Z^{(\omega)} : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ definiert sind. Weiter bezeichne ζ_i und $\tilde{\zeta}_j$ Zufallsvariablen auf Ω und $\Pi : \Omega \times \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ sei definiert durch $\Pi(\omega, \tilde{\omega}) = \omega$.

Die Untersuchungen beziehen sich zunächst auf studentisierte Statistiken in deren Nenner Terme der Form

$$\sum_{i=1}^{k(n)} (X_{n,i} - \bar{X}_n)^2$$

auftreten werden. Deshalb bedarf die Menge

$$H_n := \left\{ \sum_{i=1}^{k(n)} (X_{n,i} - \bar{X})^2 = 0 \right\}$$

einer genaueren Untersuchung bei der Behandlung von Grenzwertsätzen für Statistiken der Form (2.9) bzw. der studentisierten Version hiervon. Jedoch wird das beschriebene Ereignis in der Regel mit geringer Wahrscheinlichkeit auftreten.

Bei der nichtparametrischen Behandlung von Resampling-Statistiken bedient man sich der Darstellung einfacher linearer Rangstatistiken. Dabei wird

man häufig mit der Notwendigkeit konfrontiert, Funktionen durch Treppenfunktionen zu approximieren. Die Gewichtsfunktionen $(W_{n,i})_{i \leq (n)}$ definieren für $u \in (0, 1)$ eine Zufallsvariable $\tilde{\omega} \mapsto \varphi_n(\tilde{\omega}, \cdot) =: \varphi_n(\cdot)$ von $\tilde{\Omega}$ in den Raum

$$S := \{\varphi \in L_2(0, 1) : \varphi \text{ monoton nicht-fallend, } \|\varphi\|_2 \leq 1\} \quad (4.3)$$

mittels

$$\varphi_n(\cdot, u) := \frac{(k(n) - 1)^{1/2}}{(\sum_{i=1}^{k(n)} (W_{n,i} - \bar{W}_n)^2)^{1/2}} (W_{1+[k(n)u]:k(n)} - \bar{W}_n) \quad (4.4)$$

Dabei bezeichnet $[\cdot]$ die Gaußklammer. Der Raum S bildet ein wesentliches Hilfsmittel in der Beweisführung. Es gilt das folgende Lemma:

Lemma 4.1

Der Raum $(S, \|\cdot\|_1)$ ist ein kompakter metrischer Raum.

Beweis. Sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in S , d.h. eine Folge monotoner nicht-fallender Funktionen mit $\|\varphi_n\|_2 \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$|\varphi_n(u)| \leq \max(u^{-1/2}, (1-u)^{-1/2}) =: \varphi_0(u), \quad 0 < u < 1.$$

Somit ist für festes $u \in (0, 1)$ die Folge $(\varphi_n(u))_n$ durch $\varphi_0(u)$ beschränkt. Es existiert dann eine Teilfolge $\{m\} \subset \mathbb{N}$, so dass $(\varphi_m(u))_m$ für alle $u \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ konvergent ist. Da φ_m monoton nicht-fallend ist, folgt

$$\varphi_m(u) \rightarrow \varphi(u) \quad (4.5)$$

für eine Funktion $\varphi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ für fast alle $u \in (0, 1)$. Der Satz über die dominierende Konvergenz von Lebesgue liefert nun die $L_1(0, 1)$ -Konvergenz von (4.5) und somit die Behauptung. ■

Bemerkung 4.2

Sei $\varphi : (\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbb{P}_1) \rightarrow S$ eine Zufallsvariable und $U : (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mathbb{P}_2) \rightarrow (0, 1)$ eine auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Dann bildet

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto \varphi(\omega_1, U(\omega_2)) =: \varphi(U)$$

eine reelle Zufallsvariable auf dem Produktraum $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2)$ mit bedingter Verteilung $\mathcal{L}(\varphi(\omega_1, U)|\omega_1)$ gegeben ω_1 und zweiten Momenten

$$\int \varphi^2(\omega_1, U(\omega_2)) \, d\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2(\omega_1, \omega_2) \leq 1.$$

□

Der Raum S spielt als metrischer Raum versehen mit der L_1 - bzw. der L_2 -Norm eine entscheidende Rolle in der Konstruktion möglicher Grenzvariablen. Die durch (4.4) definierten Zufallsvariablen erfüllen nun folgende Konvergenzeigenschaft im Sinne der schwachen Konvergenz, vgl. dazu Anhang A.

Lemma 4.3

Für jede Teilfolge existiert eine weitere Teilfolge $\{m\} \subset \mathbb{N}$ und eine Zufallsvariable $\varphi : \tilde{\Omega} \rightarrow S$, so dass $\varphi_m \rightarrow \varphi$ in Verteilung in $(S, \|\cdot\|_1)$, falls $m \rightarrow \infty$.

Beweis. Nach dem vorigen Lemma 4.1 ist $(S, \|\cdot\|_1)$ ein kompakter metrischer Raum. Somit besitzt jede Folge in S eine schwach konvergente Teilfolge, vgl. BILLINGSLEY [24, Theorem 1.4]. Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung. ■

I.Allg. erhält man nach Lemma 4.3 lediglich die Verteilungskonvergenz in dem metrischen Raum $(S, \|\cdot\|_1)$. Die stärkere Aussage der Verteilungskonvergenz in $(S, \|\cdot\|_2)$ lässt sich durch das folgende Lemma charakterisieren:

Lemma 4.4

Angenommen es existiert eine Teilfolge $\{m\} \subset \mathbb{N}$, so dass die Folge $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen (4.4) entlang dieser in Verteilung in $(S, \|\cdot\|_1)$ gegen eine Zufallsvariable $\varphi \in S$ konvergiert. Bezeichnet $\varphi(U)$ die zugehörige Zufallsvariable, so gilt $\mathbb{E}(\varphi(U)) = 0$ und folgende Aussagen sind äquivalent:

- (a) $\varphi_m \rightarrow \varphi$ in Verteilung in $(S, \|\cdot\|_2)$;
- (b) $\text{Var}(\varphi(U)) = 1$.

Beweis. (b) \Rightarrow (a) Nach dem Satz A.7 von Skorohod betrachtet man auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum fast sicher konvergente Versionen von (φ_m) auf $(S, \|\cdot\|_1)$, so dass

$$\|\varphi_m(\tilde{\omega}, \cdot) - \varphi(\tilde{\omega}, \cdot)\|_1 \rightarrow 0 \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-f.s.}$$

Per Definition gilt $\mathbb{E}(\varphi_m(U)) = \mathbb{E}(\varphi(U)) = 0$ und

$$\|\varphi_m(\tilde{\omega}, \cdot)\|_2^2 = \int |\varphi_m(\tilde{\omega}, u)|^2 du \rightarrow 1 \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-stochastisch.}$$

Gilt nun $\text{Var}(\varphi(U)) = \mathbb{E}(\varphi(U)^2) = 1$, so folgt $\|\varphi(\tilde{\omega}, \cdot)\|_2 = 1$ f.s. und man erhält $\|\varphi_m(\tilde{\omega}, \cdot)\|_2 \rightarrow \|\varphi(\tilde{\omega}, \cdot)\|_2$ $\tilde{\mathbb{P}}$ -stochastisch. Geht man zu fast sicher konvergenten

Teilfolgen über, so liefert der Satz von Vitali, vgl. WITTING [127, Satz 1.181], für festes $\tilde{\omega}$

$$\|\varphi_m(\tilde{\omega}, \cdot) - \varphi(\tilde{\omega}, \cdot)\|_2 \rightarrow 0 \quad \tilde{P}\text{-stochastisch}$$

und somit die Verteilungskonvergenz in $(S, \|\cdot\|_2)$.

(b) \Rightarrow (a) Geht man erneut zu fast sicher konvergenten Versionen $\varphi_m \rightarrow \varphi$ auf $(S, \|\cdot\|_2)$ über, so folgt mit dem Satz von Vitali, dass $\|\varphi(\tilde{\omega}, \cdot)\|_2 = 1$ fast sicher und somit $E(\varphi(U)^2) = 1$. ■

Als nächstes soll ein allgemeiner bedingter Grenzwertsatz für Resampling-Statistiken formuliert werden, welcher ein weites Anwendungsspektrum für folgende Betrachtungen liefert. In den Sätzen 4.5 und 4.8 zeigt sich, dass die entsprechenden zufälligen Limesvariablen als Summe zweier Partialsummen und einer unendlich teilbaren Zufallsvariablen darstellbar sind. Satz 4.8 liefert darüberhinaus eine untere Schranke für die Varianz des normalverteilten Anteils der unendlich teilbaren Zufallsvariablen, die, falls die Folge von Treppenfunktionen $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(S, \|\cdot\|_2)$ schwach konvergent ist, angenommen wird.

Die Beweise dieser zentralen Aussagen werden an späterer Stelle erfolgen. Vorher sollen noch einige Vorbereitungen getroffen werden, die von eigenem mathematischen Interesse sind. Diese liefern neue Grenzwertsätze für spezielle Formen von Resampling-Statistiken.

Satz 4.5

Für jede Teilfolge existiert eine weitere Teilfolge $\{m\} \subset \mathbb{N}$, so dass die folgenden Konvergenzaussagen gelten:

(a) *Die Folge der Orderstatistiken*

$$(Y_{i:k(m)})_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow (\zeta_i)_{i \in \mathbb{N}}, \quad (Y_{k(m)+1-j:k(m)})_{j \in \mathbb{N}} \rightarrow (\tilde{\zeta}_j)_{j \in \mathbb{N}} \quad (4.6)$$

konvergiert in Verteilung auf $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$, wobei ζ_i und $\tilde{\zeta}_j$ entsprechende Grenzvaren beschreiben. Weiter gilt fast sicher, dass

$$\sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\zeta}_j^2 \leq 1 \quad (4.7)$$

und $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(H_m) = 0$.

(b) Es existiert eine weitere Teilfolge $m \rightarrow \infty$, so dass

$$\mathcal{L}\left(\frac{T_m^*}{\left(\sum_{i=1}^{k(m)}(X_{m,i} - \bar{X}_m)^2\right)^{1/2}} \mid X_{m,1}, \dots, X_{m,k(m)}\right) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(T_0 \mid \Pi) \quad \mathbb{P}\text{-stoch.} \quad (4.8)$$

Die zugehörige Zufallsvariable $T_0 : \Omega \times \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$T_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i Z_i + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\zeta}_j \tilde{Z}_j + Z^{(\Pi)} \quad (4.9)$$

und i.i.d. Zufallsvariablen Z_i, \tilde{Z}_j , $i, j \in \mathbb{N}$, mit $\mathbb{E}(Z_1) = 0$ und $\text{Var}(Z_1) \leq 1$. Darüberhinaus ist $Z^{(\Pi)}$ definiert durch eine Familie von unendlich teilbaren Zufallsvariablen $Z^{(\omega)}$ mit $\mathbb{E}((Z^{(\omega)})^2) \leq 1$, für alle $\omega \in \Omega$.

Beweis. Vgl. Abschnitt 4.4. ■

Die folgende Bemerkung soll die in Satz 4.5 getroffene Notation näher erläutern.

Bemerkung 4.6

An dieser Stelle soll die gewählte Notation näher erläutert werden. Bezeichnet d eine Metrik, welche die schwache Konvergenz metrisiert, vgl. dazu Anhang A, so ist

$$\mathcal{L}(\tilde{T}_m^* \mid X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)}) \xrightarrow{w} \mu \quad \mathbb{P}\text{-stoch.}$$

äquivalent zu

$$d(\mathcal{L}(\tilde{T}_m^* \mid X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)}), \mu) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

vgl. GINÉ [46, S. 41]. □

Über die in (4.9) auftretenden Zufallsvariablen sind bisher keine genaueren Angaben gemacht worden. Es zeigt sich, dass die Gestalt insbesondere von dem jeweiligen Modell, d.h. von den Gewichtsfunktionen $(W_{n,i})_{i \leq k(n)}$ abhängt. Die folgende Bemerkung liefert eine genauere Beschreibung der Zufallsvariablen Z_i, \tilde{Z}_j :

Bemerkung 4.7

Die Grenzvariable von (4.4) definiert die neuen Zufallsvariablen Z_i, \tilde{Z}_j wie folgt:

Ist $\varphi : \tilde{\Omega} \rightarrow S$ eine Grenzvariable der Folge $(\varphi)_m$ von Treppenfunktionen (4.4) entlang einer geeigneten Teilfolge $\{m\} \subset \mathbb{N}$ und $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bzw. $(\tilde{V}_j)_{j \in \mathbb{N}}$

zwei unabhängige Folgen gleichverteilter Zufallsvariablen mit Werten in $(0, 1)$, die unabhängig von den übrigen Zufallsvariablen sind, so werden die Z_i, \tilde{Z}_j aus (4.9) durch die Grenzvariable mittels

$$Z_i := \varphi(V_i) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{Z}_j := \varphi(\tilde{V}_j), \quad i, j \in \mathbb{N}, \quad (4.10)$$

definiert. □

Die Wahl des Resampling-Verfahrens und somit die Wahl der entsprechenden Gewichte $(W_{n,i})_{i \leq k(n)}$ beeinflussen die Darstellung der unendlich teilbaren Zufallsvariablen $Z^{(\omega)}$ in Satz 4.5. Aus der Theorie über unendlich teilbare Maße weiß man, dass sich $Z^{(\omega)}$ als Faltung einer zentrierten Normalverteilung mit einer zusammengesetzten Poissonverteilung schreiben lässt, vgl. ARAUJO und GINÉ [1, Theorem 4.12].

Der folgende Satz liefert einen genaueren Eindruck über den unendlich teilbaren Anteil $Z^{(\omega)}$ der Limesvariablen T_0 in (4.9). Der Beweis soll zusammen mit dem noch ausstehenden Beweis von Satz 4.5 zu einem späteren Zeitpunkt in Abschnitt 4.4 erfolgen.

Satz 4.8

Für jedes $\omega \in \Omega$ beschreibe $\bar{\sigma}^2(\omega)$ die Varianz des normalverteilten Anteils von $Z^{(\omega)}$ aus (4.9). Dann gelten:

(a) *Für jedes $\omega \in \Omega$ ist*

$$\bar{\sigma}^2(\omega) \geq \text{Var}(Z_1) \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i^2(\omega) - \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\zeta}_j^2(\omega) \right). \quad (4.11)$$

(b) *Die Folge $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiere schwach gegen ein $\varphi \in S$ in $(S, \|\cdot\|_2)$. Dann gilt $\text{Var}(Z_1) = 1$ und $Z^{(\omega)}$ ist für jedes $\omega \in \Omega$ eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz*

$$\bar{\sigma}^2(\omega) = \text{Var}(Z^{(\omega)}) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i^2(\omega) - \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\zeta}_j^2(\omega). \quad (4.12)$$

Beweis. Vgl. Abschnitt 4.4. ■

Die Sätze 4.5 und 4.8 beschränken sich auf studentisierte Versionen der Resampling-Statistik (2.9), bei denen der Nenner nicht in das Resampling-Verfahren eingebunden wird. Der folgende Satz liefert zusätzliche Voraussetzungen, unter denen bedingte Grenzwertsätze für T_n^* gefunden werden können.

Satz 4.9

Die Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei konvergent in $(S, \|\cdot\|_2)$ gegen eine Funktion φ und $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Gilt die gemeinsame Konvergenz

$$\left((X_{i:k(n)})_{i \in \mathbb{N}}, (X_{k(n)+1-j:k(n)})_{j \in \mathbb{N}}, \left(\sum_{k=1}^{k(n)} (X_{n,k} - \bar{X}_n)^2 \right)^{1/2} \right) \quad (4.13)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}} ((\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}, (\tilde{\xi}_j)_{j \in \mathbb{N}}, \xi_0)$$

auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}$, so folgt

$$\mathcal{L}(T_n^* \mid X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)}) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(\tilde{T}_0 \mid \Pi) \quad \mathbb{P}\text{-stoch.}, \quad (4.14)$$

wobei die Limesvariable \tilde{T}_0 durch

$$\tilde{T}_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i Z_i + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\xi}_j \tilde{Z}_j + \tilde{Z}^{(\Pi)}$$

gegeben ist. Der unendlich teilbare Anteil $\tilde{Z}^{(\omega)}$ von \tilde{T}_0 ist zentriert normalverteilt mit Varianz

$$\tilde{\sigma}^2(\omega) = \xi_0^2(\omega) - \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2(\omega) - \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\xi}_j^2(\omega).$$

Beweis. 1. Schritt: Nimmt man an, dass $(\mathbb{P}(H_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist, so kann man (4.13) und $\mathbb{1}_{H_n}$ nach Satz A.7 auf einem neuen Wahrscheinlichkeitsraum durch fast sicher konvergente Versionen ersetzen. Auf der Menge $\{\xi_0 > 0\}$ folgt die Behauptung dann mittels Division durch

$$\left(\sum_{i=1}^{k(n)} (X_{n,i} - \bar{X}_n)^2 \right)^{1/2} \mathbb{1}_{H_n^c}.$$

Nach Satz 4.5 und 4.8 liegt Konvergenz gegen eine Variable T_0 mit der Form (4.9) vor. Da $\varphi_n \rightarrow \varphi$ schwach in $(S, \|\cdot\|_2)$ ist für jedes $\omega \in \Omega$ die Variable $Z^{(\omega)}$ eine zentrierte normalverteilte Zufallsvariable mit entsprechender Varianz (4.12).

Auf dem Komplement $\{\xi_0 = 0\}$ definiere man für festes $\omega \in \Omega$ Regressionskoeffizienten $c_{ni} := X_{n,i}(\omega) - \bar{X}_n(\omega)$. Dann liefert $\xi_0(\omega) = 0$ zusammen mit der fast sicheren Konvergenz von (4.13), dass $\sum_{i=1}^{k(n)} c_{ni}^2 \rightarrow 0$ und somit

$$\text{Var} \left(k(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} c_{ni} W_{R_i:k(n)} \right) \rightarrow 0.$$

Hieraus folgt, dass (4.13) gegen ε_0 konvergiert und somit die Behauptung.

2. Schritt: Ist $(\mathbb{P}(H_n))_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergent, so findet man konvergente Teilfolgen, so dass stets die Limesvariablen mit \tilde{T}_0 übereinstimmen. In diesem Fall kann man sich auf den ersten Schritt zurückziehen und die Aussage ist im allgemeinen Fall bewiesen. ■

Betrachtet man das folgende Lemma 4.10, so zeigt sich in Korollar 4.11, dass unter den gegebenen Voraussetzungen die bedingte Konvergenz im Sinne von (4.8) und (4.14) die unbedingte Verteilungskonvergenz der studentisierten und nicht-studentisierten Resampling-Statistiken impliziert.

Lemma 4.10

Sei $(R_n(S, T))_{n \in \mathbb{N}}$ eine durch unabhängige Zufallsvariablen S und T definierte Folge reeller Statistiken. Dann gelten für $n \rightarrow \infty$:

(a) Die bedingte Verteilungskonvergenz

$$d(\mathcal{L}(R_n(S, T) \mid T = \cdot), \mathcal{L}(R_0(S, T) \mid T = \cdot)) \rightarrow 0 \quad \mathcal{L}(T)\text{-stoch.}$$

impliziert die unbedingte Verteilungskonvergenz

$$\mathcal{L}(R_n(S, T)) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(R_0(S, T)).$$

(b) Es sei $\mathbb{E}(R_n(S, T) \mid T) = 0$ und $\text{Var}(R_n(S, T) \mid T) := \mathbb{E}(R_n^2(S, T) \mid T) \rightarrow 0$ stochastisch. Dann konvergiert die Folge $(R_n(S, T))_{n \in \mathbb{N}}$ stochastisch gegen 0, d.h.

$$R_n(S, T) \rightarrow 0 \quad \text{stochastisch.} \tag{4.15}$$

Ist zusätzlich $\text{Var}(R_n(S, T) \mid T)$ gleichmäßig beschränkt, so folgt dass

$$\text{Var}(R_n(S, T)) \rightarrow 0. \tag{4.16}$$

Beweis. Teil (a): Wählt man $f \in C_b(\mathbb{R})$, so gilt unter den Voraussetzungen entlang einer Teilfolge, dass

$$\int f(z) \, d\mathbb{P}^{R_n(S, T) \mid T=t}(z) \rightarrow \int f(z) \, d\mathbb{P}^{R_0(S, T) \mid T=t}(z) \quad \mathbb{P}^T\text{-f.s.}$$

Hieraus folgt die Behauptung aus der Beschränktheit der Funktion f mithilfe des Satzes über die dominierte Konvergenz von Lebesgue.

Teil (b): Wegen

$$\mathbb{E}(R_n(S, T)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(R_n(S, T) \mid T)) = 0$$

und

$$\text{Var}(R_n(S, T)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(R_n^2(S, T) \mid T))$$

folgt (4.16) unmittelbar aus dem Satz über die dominierte Konvergenz von Lebesgue.

Für den Beweis von (4.15) betrachte man die Gleichung

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{|R_n(S, T)| \geq \varepsilon\}) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_{[\varepsilon, \infty)}(|R_n(S, T)|)) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(g \circ T) \end{aligned}$$

mit $g(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_{[\varepsilon, \infty)}(|R_n(S, t)|))$. Wegen der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen S und T gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{|R_n(S, T)| \geq \varepsilon\}) \\ &= \iint \mathbf{1}_{[\varepsilon, \infty)}(|R_n(s, t)|) \, d\mathbb{P}^S(s) \, d\mathbb{P}^T(t). \end{aligned}$$

Für das innere Integral erhält man mit der Tschebyscheff'schen Ungleichung, dass

$$\mathbb{P}(\{|R_n(S, t)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{\text{Var}(R_n(S, t))}{\varepsilon^2} \rightarrow 0$$

und somit gilt die Behauptung. ■

Als Folgerung erhält man nun einen unbedingten Grenzwertsatz für allgemeine Resampling-Statistiken. Es gilt:

Korollar 4.11

Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 4.5 und 4.9. Dann folgt unter denselben Voraussetzungen die unbedingte Konvergenz der Resampling-Statistik bzw. der studentisierten Version, d.h.

$$T_m^* \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{T}_0 \tag{4.17}$$

bzw.

$$\frac{T_m^*}{(\sum_{i=1}^{k(m)} (X_{m,i} - \bar{X}_m)^2)^{1/2}} \xrightarrow{\mathcal{D}} T_0. \tag{4.18}$$

Beweis. Betrachte (4.18) bzw. (4.17) als eine von zwei unabhängigen Zufallsvariablen abhängige Folgen reeller Zufallsvariablen und wende Lemma 4.10 an. ■

Als wichtige Methode, insbesondere im Zweistichprobenfall, ist das Permutationsverfahren anzusehen. Lemma 4.10 und Korollar 4.11 liefern nun als Anwendung alle Häufungspunkte von Summen der Form (3.4) im Zweistichprobenfall für zeilenweise austauschbare Zufallsvariablen.

Korollar 4.12

Sei $T_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Statistik der Form

$$T_n = k(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} c_{ni} X_{n,i}$$

mit Regressionskoeffizienten $c_{n,i}$ und zeilenweise austauschbaren Zufallsvariablen $X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)}$. Bezeichnet

$$T_n^* = k(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} c_{n,\tau(i)} X_{n,i}$$

die zugehörige Permutations-Statistik, d.h. die Resampling-Statistik (2.9) mit Gewichten $W_{n,i} = c_{n\tau(i)}$, so gilt $T_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} T_n^*$ und für eine Teilfolge $\{m\} \subset \mathbb{N}$ gelten die Konvergenzeigenschaften (4.18) und (4.17) aus Korollar 4.11.

Beweis. Unter der Voraussetzungen der Austauschbarkeit der Zufallsvariablen $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ gilt die Verteilungsgleichheit $T_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} T_n^*$ und Korollar 4.11 ist anwendbar. ■

Beispiel 4.13

Betrachtet man ein Zweistichprobenproblem und ein durch die Permutationsgewichte (2.11) definiertes Resampling-Verfahren, so konvergiert für $n_1/k(n) \rightarrow \kappa \in (0, 1)$ die Folge der Treppenfunktionen $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Verteilung in $(S, \|\cdot\|_2)$ und es gilt

$$\mathcal{L}(Z_1) = \kappa \varepsilon_{-(\frac{1-\kappa}{\kappa})^{1/2}} + (1 - \kappa) \varepsilon_{(\frac{\kappa}{1-\kappa})^{1/2}} .$$

In diesem Fall lassen sich die Ergebnisse aus Satz 4.5, Satz 4.8 und Korollar 4.12 wie folgt deuten:

(a) Liegt ein beliebiges Dreiecksschema $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ von Zufallsvariablen vor, so liefern die Sätze 4.5 und 4.8 alle Limesverteilungen für studentisierte Statistiken der Form

$$\frac{k(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} c_{n\tau(i)} X_{n,i}}{\left(\sum_{i=1}^{k(n)} (X_{n,i} - \bar{X}_n)^2\right)^{1/2}}. \quad (4.19)$$

(b) Unter den zusätzlichen Voraussetzungen, dass die Zufallsvariablen aus $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ zeilenweise austauschbar sind, besteht nach Korollar 4.12 kein Unterschied zwischen (4.19) und

$$\frac{T_n}{\left(\sum_{i=1}^{k(n)} (X_{n,i} - \bar{X}_n)^2\right)^{1/2}}.$$

Somit erhält man in diesem Fall sämtliche Limesverteilungen studentisierter Zweistichprobenstatistiken.

4.2 Grenzwertsätze für Summen unabhängiger Zufallsvariablen

Im vorangegangenen Abschnitt wurden allgemeine bedingte und unbedingte Grenzwertsätze formuliert, wobei die entsprechenden Statistiken auf beliebigen Dreiecksschemata $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ beruhen. In Beispiel 3.3(b) werden Einstichprobenstatistiken der Form

$$T_n = \sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i} \quad (4.20)$$

als ein Beispiel zu betrachtender Statistiken angegeben. Ziel dieses Abschnittes ist, weitere Grenzwertsätze herzuleiten, in denen die Ursprungsstatistik gerade die Gestalt (4.20) aufweist. Weiter sollen Bedingungen angegeben werden, unter denen die Verteilung der Resampling-Statistiken konsistent sind. Dabei heißen solche gerade *konsistent*, wenn diese dieselbe Grenzverteilung wie die Ursprungsstatistik (4.20) besitzen.

Dazu sei im Folgenden $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ ein Dreiecksschema von zeilenweise unabhängigen reellen Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen $F_{n,i}$, $i \leq k(n)$, und konvergenter Partialsumme T_n , d.h.

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi. \quad (4.21)$$

Das Dreiecksschema sei infinitesimal, d.h. es gelte

$$\max_{1 \leq i \leq k(n)} \mathbb{P}(|X_{n,i}| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (4.22)$$

vgl. auch Definition B.7. Dann ist nach Satz B.8 die zugehörige Verteilung $\mathcal{L}(\xi)$ unendlich teilbar und für die Limesverteilung gilt nach der Quantildarstellung

$$\xi \stackrel{\mathcal{D}}{=} \Delta^- + N + \Delta^+ + K, \quad (4.23)$$

mit $N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, vgl. Janssen [67] bzw. Anhang B.5. Im weiteren Verlauf soll die Voraussetzung

$$\sum_{i=1}^{k(n)} a_{n,i}^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \quad (4.24)$$

angenommen werden, wobei die $a_{n,i}$ für ein $\tau > 0$ durch

$$a_{n,i} := \mathbb{E}(X_{n,i} \mathbf{1}_{(-\tau, \tau)}(X_{n,i})) \quad (4.25)$$

definiert sind. Für $X'_{n,i} := X_{n,i} - a_{n,i}$ und

$$a'_{n,i} := \mathbb{E}(X'_{n,i} \mathbf{1}_{(-\tau, \tau)}(X'_{n,i}))$$

gilt nach GNEDENKO und KOLMOGOROV [48, S. 118]

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k(n)} a'_{n,i} &= \sum_{i=1}^{k(n)} \int_{|x| < \tau} x \, dF_{n,i}(x + a_{n,i}) \\ &= \sum_{i=1}^{k(n)} \left\{ \int_{|x - a_{n,i}| < \tau} x \, dF_{n,i}(x) - \int_{|x| < \tau} x \, dF_{n,i}(x) + a_{n,i} \int_{|x| \geq \tau} dF'_{n,i}(x) \right\} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Somit lässt sich Bedingung (4.24) stets durch Zentrierung an den trunkierten Erwartungswerten erzielen.

Legt man diese allgemeinen Voraussetzungen zugrunde, so erhält man Aussagen über die gemeinsame Konvergenz der oberen und unteren Orderstatistiken, sowie der Summe der Quadrate.

Lemma 4.14

Sei $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ ein infinitesimales Dreiecksschema von zeilenweise unabhängigen Zufallsvariablen, welches die Voraussetzung (4.24) erfüllt. Die Folge der Partialsummen (4.21) konvergiere gegen eine Limesvariable ξ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \left((X_{i:k(n)})_{i \in \mathbb{N}}, (X_{k(n)+1-j:k(n)})_{j \in \mathbb{N}}, \sum_{k=1}^{k(n)} X_{n,k}^2 \right) \\ & \xrightarrow{\mathcal{D}} \left((\psi_1(S_i))_{i \in \mathbb{N}}, (\psi_2(\tilde{S}_j))_{j \in \mathbb{N}}, \sum_{i=1}^{\infty} \psi_1(S_i)^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_2(\tilde{S}_j)^2 + \sigma^2 \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Beweis. Teil 1: In einem ersten Schritt betrachte man die Verteilungskonvergenz von

$$\sum_{k=1}^{k(n)} X_{n,k}^2 \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{\infty} \psi_1(S_i)^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_2(\tilde{S}_j)^2 + \sigma^2.$$

Sind die Zufallsvariablen symmetrisch, d.h. $\mathbb{P}^{X_{n,i}} = \mathbb{P}^{-X_{n,i}}$, so folgt der Beweis mit den Methoden aus JANSSEN [67], Abschnitt 5. Wähle dazu ein $\delta > 0$, so dass $\pm\delta$ Stetigkeitspunkte des zu der Zufallsvariable ξ gehörenden Lévy-Maßes η sind. Die gemeinsame Konvergenz der Orderstatistiken liefert dann

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{k(n)} X_{n,k}^2 \mathbf{1}_{[\delta, \infty)}(|X_{n,k}|) = \sum_{k=1}^{k(n)} X_{k:k(n)}^2 \mathbf{1}_{[\delta, \infty)}(|X_{k:k(n)}|) \\ & \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{\infty} \psi_1(S_i)^2 \mathbf{1}_{(-\infty, -\delta]}(\psi_1(S_i)) + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_2(\tilde{S}_j)^2 \mathbf{1}_{[\delta, \infty)}(\psi_2(\tilde{S}_j)), \end{aligned} \quad (4.27)$$

vgl. JANSSEN [67]. Die asymptotische Unabhängigkeit der oberen und unteren Summen folgt aus dem Splittinglemma B.14, vgl. auch JANSSEN [67]. Für $\delta \downarrow 0$ ist nun die rechte Seite von (4.27) fast sicher konvergent. Somit existiert eine Folge $\delta_n \downarrow 0$ mit

$$\sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i}^2 \mathbf{1}_{[\delta_n, \infty)}(|X_{n,i}|) \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{\infty} \psi_1(S_i)^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_2(\tilde{S}_j)^2. \quad (4.28)$$

Wählt man $\delta_n \rightarrow 0$ langsam genug, so dass das Splittinglemma angewendet werden kann und die Summe

$$\sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i} \mathbf{1}_{(-\delta_n, \delta_n)}(X_{n,i}) \xrightarrow{\mathcal{D}} N,$$

konvergent ist gegen den normalverteilten Anteil N von ξ aus (4.23), so liefert Raikov's Theorem, vgl. RAIKOV [108], die stochastische Konvergenz

$$\sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i}^2 \mathbb{1}_{(-\delta_n, \delta_n)}(X_{n,i}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2. \quad (4.29)$$

In dem Fall symmetrischer Zufallsvariablen folgt nun die Behauptung aus (4.28) und (4.29).

Der allgemeine Fall wird auf den symmetrischen Fall zurückgeführt. Dazu sei $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Rademachervariablen, d.h. eine Folge von unabhängig auf $\{-1, +1\}$ gleichverteilten Zufallsvariablen, unabhängig von den Variablen $(X_{n,k})_{k \leq k(n)}$.

Betrachtet man

$$Y_{n,k} := \varepsilon_k(X_{n,k} - a_{nk}), \quad (4.30)$$

so ist die zugehörige Verteilungsfunktion gegeben durch

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\varepsilon_k(X_{n,k} - a_{nk}) \leq x) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{P}(X_{n,k} - a_{nk} \leq x) + \mathbb{P}(X_{n,k} - a_{nk} \geq -x)) \\ &=: \frac{1}{2} (\bar{F}_{n,i}(x) + 1 - \bar{F}_{n,i}((-x)-)). \end{aligned}$$

Konvergiert nun nach (4.21) die Summe $\sum_{k=1}^{k(n)} X_{n,k}$ in Verteilung gegen eine unendlich teilbare Zufallsvariable ξ , so konvergiert die Partialsumme der symmetrisierten Zufallsvariablen $Y_{n,k}$ nach Satz B.11 in Verteilung gegen eine neue unendlich teilbare Zufallsvariable T , d.h.

$$\sum_{k=1}^{k(n)} Y_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{D}} T. \quad (4.31)$$

Bezeichnet η das zur Quantildarstellung (4.23) gehörige Lévy-Maß, so lässt sich das zu T gehörige Lévy-Maß $\bar{\eta}$ wie folgt herleiten. Nach (4.21) gilt für alle Stetigkeitspunkte $x \in \mathbb{R}$ von η , dass

$$\sum_{k=1}^{k(n)} \mathbb{P}(X_{n,k} \leq x) \rightarrow \eta((-\infty, x]) \quad \forall x < 0$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{k(n)} \mathbb{P}(X_{n,k} \geq x) \rightarrow \eta([x, \infty)) \quad \forall x > 0$$

und daher

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k(n)} \mathbb{P}(\varepsilon_k X_{n,k} \leq x) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{k(n)} \mathbb{P}(X_{n,k} \leq x) + \sum_{k=1}^{k(n)} \mathbb{P}(X_{n,k} \geq -x) \right] \\ &\longrightarrow \frac{1}{2} [\eta((-\infty, x]) + \eta([-x, \infty))] \quad \text{für } x < 0, \end{aligned}$$

vgl. auch GNEDENKO und KOLMOGOROV [48, S. 116, Theorem 4].

Somit ist

$$\bar{\eta}(A) := \frac{1}{2} [\eta(A) + \eta(-A)] \quad A \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4.32)$$

Bedingung (4.24) liefert die Konvergenz von

$$\sum_{i=1}^{k(n)} \varepsilon_i X_{n,i} \xrightarrow{\mathcal{D}} T$$

und der erste Teil des Beweises lässt sich auf die symmetrisierte Zufallsvariable anwenden. Somit konvergiert

$$\sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i}^2 = \sum_{i=1}^{k(n)} (\varepsilon_i X_{n,i})^2 \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi_0$$

gegen eine unendlich teilbare Zufallsvariable ξ_0 . Es bleibt an dieser Stelle lediglich die Form der unendlich teilbaren Zufallsvariable ξ_0 zu untersuchen. Das zugehörige Lévy-Maß ist dann gerade $x \mapsto 2\bar{\eta}([\sqrt{x}, \infty))$, $x > 0$ auf $(0, \infty)$.

Nach der Reihendarstellung von unendlich teilbaren Maßen, vgl. JANSSEN [67, Lemma 4.1], besitzen die Folgen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi_1(S_i)^2 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \psi_2(\tilde{S}_j)^2 \quad (4.33)$$

die charakteristischen Funktionen

$$t \mapsto \exp\left(\int_{(0, \infty)} (\exp(iut) - 1) d\nu_i(u)\right), \quad i = 1, 2,$$

mit Lévy-Maßen ν_i auf $(0, \infty)$. Diese sind für $x > 0$ gegeben durch

$$x \mapsto \nu_1([x, \infty)) := \eta((-\infty, -\sqrt{x})) \quad \text{bzw.} \quad x \mapsto \nu_2([x, \infty)) := \eta([\sqrt{x}, \infty)).$$

Die Summe der beiden Reihen (4.33) besitzen nun aufgrund der Eigenschaften von unendlich teilbaren Maßen das Lévy-Maß $\nu_1 + \nu_2$. Dies ist jedoch das zugehörige Lévy-Maß von ξ_0 , woraus die Behauptung folgt.

Teil 2: Die gemeinsame Konvergenz der oberen und unteren Orderstatistiken von (4.26) auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ folgt aus den Ergebnissen von JANSSEN [67]. Die gemeinsame Konvergenz des Tripels (4.26) lässt sich wie folgt behandeln.

Das Splittinglemma zusammen mit Raikov's Theorem liefert für eine Folge $\tau_n \downarrow 0$ die Konvergenz

$$\sum_{i=1}^{k(n)} (\varepsilon_i X_{n,i})^2 \mathbf{1}_{(-\tau_n, \tau_n)}(\varepsilon_i X_{n,i}) \rightarrow \sigma^2.$$

Nach dem Satz von Prohorov ist die Folge (4.26) straff. Somit muss man lediglich die entsprechenden Häufungspunkte der Folge identifizieren. Sei

$$((\zeta_i)_{i \in \mathbb{N}}, (\tilde{\zeta}_j)_{j \in \mathbb{N}}, R)$$

ein möglicher Häufungspunkt. Dann findet man nach dem Theorem A.7 von Skorohod fast sicher konvergente Versionen von Zufallsvariablen auf einem neuen Wahrscheinlichkeitsraum. Für festes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^m \zeta_i^2 + \sum_{j=1}^m \tilde{\zeta}_j^2 + \sigma^2 \leq R \quad \text{f.ü.}$$

und somit

$$\sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\zeta}_j^2 + \sigma^2 \leq R \quad \text{f.ü.} \tag{4.34}$$

Für die letzten Zufallsvariablen in (4.34) besteht Verteilungsgleichheit. Hieraus folgt f.ü. die Gleichheit in (4.34) und somit die Behauptung. ■

Bemerkung 4.15

(a) Das Lemma 4.14 erweitert die Aussagen von Raikov, dass für zentrierte Zufallsvariablen $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$

$$\sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i}^2 \rightarrow \sigma^2,$$

falls $\mathcal{L}(\xi) = N(0, \sigma^2)$, vgl. GNEDENKO und KOLMOGOROV [48].

(b) Die Reihen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi_1(S_i) \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \psi_2(\tilde{S}_j)$$

stellen unendlich teilbare Zufallsvariablen mit charakteristischen Funktionen (4.2) dar. Für eine genauere Untersuchung der Reihendarstellung unendlich teilbarer Maße vgl. man JANSSEN [67], Section 4. □

Lemma 4.14 liefert an dieser Stelle die Grundlage, die allgemeinen bedingten Grenzwertsätze aus Kapitel 4.1 auf konvergente Summen der Form (4.21) anzuwenden. Dabei ergibt sich, dass die Limesverteilung als Summe unendlicher Summen darstellbar ist, deren Summanden von den aus der Quantildarstellung definierten Inversen ψ_1 und ψ_2 der Lévy-Maße abhängen, vgl. Anhang B.

Satz 4.16

Sei $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ ein infinitesimales Dreiecksschema von zeilenweise unabhängigen Zufallsvariablen mit konvergenter Partialsumme (4.21), so dass die Bedingung (4.24) erfüllt ist. Konvergiert die Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen aus (4.4) schwach in $(S, \|\cdot\|_2)$, so gilt

$$\mathcal{L}(T_n^* \mid X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)}) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X_0 \mid \Pi) \quad \mathbb{P}\text{-stoch.} \quad (4.35)$$

Die Limesvariable X_0 ist dabei definiert durch

$$X_0 := \sum_{i=1}^{\infty} \psi_1(S_i)Z_i + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_2(\tilde{S}_j)\tilde{Z}_j + \sigma Z, \quad (4.36)$$

wobei Z eine von den Inversen ψ_1 und ψ_2 unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariable ist.

Beweis. Nach Lemma 4.14 folgt die gemeinsame Konvergenz

$$\begin{aligned} & \left((X_{i:k(n)})_{i \in \mathbb{N}}, (X_{k(n)+1-j:k(n)})_{j \in \mathbb{N}}, \sum_{k=1}^{k(n)} X_{n,k}^2 \right) \\ & \xrightarrow{\mathcal{D}} \left((\psi_1(S_i))_{i \in \mathbb{N}}, (\psi_2(\tilde{S}_j))_{j \in \mathbb{N}}, \sum_{i=1}^{\infty} \psi_1(S_i)^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_2(\tilde{S}_j)^2 + \sigma^2 \right). \end{aligned}$$

Satz 4.9 liefert die bedingte Verteilungskonvergenz der Resampling-Statistik

$$\mathcal{L}(T_n^* \mid X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)}) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X_0 \mid \Pi) \quad \mathbb{P}\text{-stoch.}$$

mit

$$X_0 := \sum_{i=1}^{k(n)} \psi_1(S_i)Z_i + \sum_{j=1}^{k(n)} \psi_2(\tilde{S}_j)\tilde{Z}_j + \tilde{Z}^{(\Pi)}.$$

Dabei ist $\tilde{Z}^{(\Pi)}$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und

$$\text{Var}(\tilde{Z}^{(\omega)}) = \sigma^2 + \sum_{i=1}^{k(n)} \psi_1(S_i) + \sum_{j=1}^{k(n)} \psi_2(\tilde{S}_j) - \sum_{i=1}^{k(n)} \psi_1(S_i) - \sum_{j=1}^{k(n)} \psi_2(\tilde{S}_j) = \sigma^2.$$

■

Betrachtet man die Darstellung der Limesvariablen X_0 durch

$$X_0 := \sum_{i=1}^{k(n)} \psi_1(S_i) Z_i + \sum_{j=1}^{k(n)} \psi_2(\tilde{S}_j) \tilde{Z}_j + \sigma Z,$$

so lässt sich in Bezug auf die Verteilungsgleichheit mit ξ und somit bzgl. der Konsistenz von Resampling-Verfahren folgende Bemerkung formulieren:

Korollar 4.17

- (a) Für $\xi = K$ in (4.23) gilt $X_0 = 0$.
 (b) Ist $\xi \neq K$, so erhält man aus der Darstellung der Limesvariablen X_0 die folgende äquivalenten Beziehungen (i)–(iii) für $\mathcal{L}(X_0 \mid \Pi)$:

(i) $\mathcal{L}(X_0 \mid \Pi = \omega)$ ist \mathbb{P} -f.s. unabhängig von ω .

(ii) $E(\xi) < \infty$ und $\mathcal{L}(X_0 \mid \Pi) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \xi - E(\xi)$ \mathbb{P} -f.s.

(iii) ξ ist eine normalverteilte Zufallsvariable. □

Beweis. Teil (a): Betrachtet man die Darstellung der Limesvariablen X_0 in (4.36), so ist die Behauptung offensichtlich.

Teil (b): Angenommen es gilt $\xi \neq K$.

(i) \Rightarrow (iii) Ist $\mathcal{L}(X_0 \mid \Pi)$ unabhängig von ω , so folgt aus der Darstellung

$$X_0 := \sum_{i=1}^{k(n)} \psi_1(S_i) Z_i + \sum_{j=1}^{k(n)} \psi_2(\tilde{S}_j) \tilde{Z}_j + \sigma Z,$$

dass $\psi_1 = 0$ und $\psi_2 = 0$. Aus der Quantildarstellung unendlich teilbarer Maße, vgl. Anhang B.5, folgt dann für das zugehörige Lévy-Maß, dass $\eta = 0$ und somit ist die Behauptung bewiesen.

(iii) \Rightarrow (ii) Unter der Voraussetzung, dass ξ normalverteilt ist, gilt für das zugehörige Lévy-Maß $\eta = 0$ und somit $X_0 = \sigma Z \stackrel{\mathcal{D}}{=} \xi - E(\xi)$.

(ii) \Rightarrow (i) Diese Behauptung ist offensichtlich. ■

Nachdem nun bei Vorliegen einer schwach konvergenten Partialsumme mit

$$\sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i} \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi,$$

die möglichen Limesverteilungen der Resampling-Statistiken betrachtet wurden, sollen an dieser Stelle die beiden Verteilungen $\mathcal{L}(\xi)$ und $\mathcal{L}(X_0)$ miteinander verglichen und untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen beide Grenzverteilungen übereinstimmen, d.h. die Verteilung der Resampling-Statistiken konsistent ist.

Dazu benötigt man die durch die Lévy-Khintchine-Formel (B.3) gegebene Darstellung der charakteristische Funktion der unendlich teilbaren Zufallsvariablen ξ mit

$$\mathbb{E}(\exp(it\xi)) = \exp\left(i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int A(u, t) \, d\eta(u)\right) \quad (4.37)$$

für ein $\gamma \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$ und ein Lévy-Maß η . Die Funktion $A(\cdot, t)$ ist dabei für festes $t \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A(u, t) := \exp(iut) - 1 - \frac{itu}{1 + u^2},$$

vgl. auch (B.2).

Satz 4.18

Sei $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ ein infinitesimales Dreiecksschema von zeilenweise unabhängigen Zufallsvariablen mit konvergenter Partialsumme (4.21). Betrachtet man die Zufallsvariable X_0 aus (4.36) mit

$$X_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_1(S_i) Z_i + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_2(\tilde{S}_j) \tilde{Z}_j + \sigma Z,$$

wobei die gemeinsame Verteilung der Z_i durch ein Maß ν mit

$$\int x \, d\nu(x) = 0 \quad \text{und} \quad \int x^2 \, d\nu(x) \leq 1 \quad (4.38)$$

gegeben ist, so gelten unter der Voraussetzung (4.24):

(a) Die Verteilung von X_0 ist unendlich teilbar mit Lévy-Maß

$$\eta_0(A) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \nu(s^{-1}A) \, d\nu(s), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

und für die charakteristische Funktion gilt

$$\mathbb{E}(\exp(itX_0)) = \exp\left(itb - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int A(u, t) \, d\eta_0(u)\right), \quad (4.39)$$

mit

$$b := \iint \left(\frac{uz}{1 + (uz)^2} - \frac{uz}{1 + u^2} \right) \, d\nu(z) \, d\eta(u).$$

(b) Die beiden Limesvariablen ξ und X_0 stimmen in Verteilung überein, d.h. $\xi \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_0$, genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Die Verteilung von ξ entspricht einer zentrierten Normalverteilung oder es gilt $\xi = 0$.
- (ii) ξ ist eine symmetrische Zufallsvariable und $\nu = \frac{1}{2}(\varepsilon_{-1} + \varepsilon_1)$.

Beweis. Teil (a): Im Folgenden sei $\sigma^2 = 0$. Da die Verteilung $\mathcal{L}(\xi)$ nach Voraussetzung unendlich teilbar ist, findet man für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Dreiecksschema zeilenweise unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen mit

$$X_{n,1} + \cdots + X_{n,n} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \xi.$$

Satz 1 aus GNEDENKO und KOLMOGOROV [48, S. 116] liefert die Konvergenz von

$$n \mathbb{E}(X_{n,i} \mathbf{1}_{(-\tau, \tau)}(X_{n,i})).$$

Somit ist die Voraussetzung (4.24) erfüllt und Satz 4.16 kann auf die Wild-Bootstrap-Gewichte

$$W_{n,i} = k(n)^{-1/2} Z_{n,i}$$

mit $Z_{n,i} = Z_i$ angewendet werden. Somit gilt

$$\sum_{i=1}^n Z_i X_{n,i} \xrightarrow{\mathcal{D}} X_0.$$

Im Folgenden soll nun die Limesverteilung $\mathcal{L}(X_0)$ mittels charakteristischer Funktionen genauer untersucht werden. Dabei sei

$$\exp(\Psi(t)) := \exp\left(i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int A(u, t) \, d\eta(u)\right).$$

Dann lässt sich die charakteristische Funktion von $\sum_{i=1}^n Z_i X_{n,i}$ wegen

$$\mathbb{E}(\exp(it\xi)) = \mathbb{E}\left(\exp\left(it \sum_{i=1}^n X_{n,i}\right)\right) = \exp(\Psi(t))$$

darstellen als

$$t \mapsto \left(\int \exp\left(\frac{1}{n}\Psi(tz)\right) d\nu(z) \right)^n. \quad (4.40)$$

Setzt man $\Psi = \Psi_1 + i\Psi_2$ mit reellen Funktionen $\Psi_i, i = 1, 2$ und $\psi_1 \leq 0$, so gilt für jedes $s > 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\exp(s\Psi(tz)) - 1}{s} \right| &= \left| \frac{\exp(s(\Psi_1(tz) + i\psi_2(tz))) - 1}{s} \right| \\ &= \left| \frac{\exp(is\Psi_2(tz))(\exp(s\Psi_1(tz)) - 1)(\exp(is\Psi_2(tz)) - 1)}{s} \right| \\ &\leq |\exp(is\Psi_2(tz))| \left| \frac{\exp(s\Psi_1(tz)) - 1}{s} \right| + \left| \frac{\exp(is\Psi_2(tz)) - 1}{s} \right| \\ &\leq |\Psi_1(tz)| + |\Psi_2(tz)|. \end{aligned}$$

Für festes t liefert der Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz die Darstellung

$$\int \exp(\Psi(tz)/n) d\nu(z) = 1 - \int \Psi(tz) d\nu(z)/n + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Somit konvergiert die charakteristische Funktion (4.40) gegen

$$\exp\left(\int \Psi(tz) d\nu(z)\right). \quad (4.41)$$

Setzt man

$$\begin{aligned} itb &:= \int \Psi(tz) d\nu(z) - \int A(u, t) d\eta_0(u) \\ &= \iint A(u, tz) d\eta(u) d\nu(z) - \iint A(uz, t) d\nu(z) d\eta(u) \end{aligned}$$

so gilt für die Grenzfunktion (4.41), dass

$$\exp\left(\int \Psi(tz) d\nu(z)\right) = \exp\left(itb + \int A(u, t) d\eta_0(u)\right).$$

Mithilfe des Satzes von Fubini und unter der Voraussetzung $\int x d\nu(x) = 0$ folgt hieraus die Behauptung, dass

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{it} \iint A(u, tz) - A(uz, t) d\nu(z) d\eta(u) \\ &= \iint \left(\frac{uz}{1 + (uz)^2} - \frac{uz}{1 + u^2} \right) d\nu(z) d\eta(u), \end{aligned}$$

und das entsprechende Lévy-Maß η_0 lässt sich darstellen durch

$$\eta_0(A) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \nu(s^{-1}A) \, d\nu(s), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Teil (b)/1. Teil: Angenommen es gelte b(i) oder b(ii). Aus den Darstellungen (4.37) und (4.39) der charakteristischen Funktionen folgt, dass

$$\xi \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_0,$$

falls $\eta = \eta_0$. Gilt $\xi \stackrel{\mathcal{D}}{=} N(0, \sigma^2)$ bzw. $\xi = 0$, so folgt aus Satz 4.16 zusammen mit Bemerkung 4.17 unmittelbar die Behauptung.

Definiert man die Spiegelung von η durch $\bar{\eta}(A) := \eta(-A)$, so gilt $\eta_0 = (\eta + \bar{\eta})/2 = \eta$ gerade falls $\nu = \frac{1}{2}(\varepsilon_{-1} + \varepsilon_1)$.

Teil (b)/2. Teil: Im Folgenden sei $\xi \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_0$ keine zentrierte Normalverteilung und $\xi \neq 0$. Dann ist das zugehörige Levy-Maß nicht trivial, d.h. es gilt $\eta \neq 0$ und aus den Darstellungen der charakteristischen Funktionen folgt $\eta = \eta_0$. Angenommen es gelte $1 \in \text{supp}(\eta)$. Definiert man $\nu_s(A) := \nu(s^{-1}A)$ für alle $s \neq 0$ und $a \wedge b := \min\{a, b\}$, so gilt

$$\int y^2 \wedge 1 \, d\eta_0(y) = \iint x^2 \wedge 1 \, d\nu_s(x) \, d\eta(s) \leq \int s^2 \wedge 1 \, d\eta(s).$$

Die Funktion $f(s) := s^2 \wedge 1 - \int x^2 \wedge 1 \, d\nu_s(x) \geq 0$ bildet eine stetige Funktion mit $\int f \, d\eta = 0$, falls $\eta = \eta_0$. Da $1 \in \text{supp}(\eta)$ folgt $f(1) = 0$ und

$$\int x^2 \wedge 1 \, d\nu(x) = 1.$$

Unter den Voraussetzungen gilt

$$\int x \, d\nu(x) = 0 \quad \text{und} \quad \int x^2 \, d\nu(x) \leq 1$$

und somit ist der Träger von ν durch $[-1, 1]$ gegeben, wobei $\int x^2 \, d\nu(x) = 1$. Somit folgt, dass $x^2 = 1$ ν f.ü. Wegen $\int x \, d\nu = 0$ ist dieses symmetrisch und das Maß ν besitzt die angegebene Form. Hieraus folgt, dass $\xi \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_0$ symmetrisch ist. ■

4.3 Einfache lineare Permutationsstatistiken

Einfache lineare Rangstatistiken vom Typ

$$S_n = \sum_{i=1}^{k(n)} (c_{ni} - \bar{c}_n) d_n(R_i) \tag{4.42}$$

besitzen in der asymptotischen Statistik eine wesentliche Bedeutung. In dieser Arbeit liefern diese die Grundlage für die noch ausstehenden Beweise der zentralen Sätze 4.5 und 4.8. Nimmt man die allgemein definierten Zufallsvariablen $Y_{n,i}$ (4.2) aus Abschnitt 4.1 als deterministisch an, so lassen sich die entsprechenden Resampling-Statistiken als lineare Rangstatistiken der Form (4.42) auffassen.

Im Folgenden sollen für $1 \leq i \leq k(n)$ die Regressionskoeffizienten c_{ni} und die zufälligen Score-Funktionen $d_n(i) : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ die Voraussetzungen

$$\sum_{i=1}^{k(n)} (c_{ni} - \bar{c}_n)^2 = 1 \quad \text{mit} \quad \bar{c}_n := \frac{1}{k(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} c_{ni} \quad (4.43)$$

bzw.

$$\frac{1}{k(n) - 1} \sum_{i=1}^{k(n)} (d_n(i) - \bar{d}_n)^2 = 1 \quad \text{auf} \quad B_n := \left\{ \sum_{i=1}^{k(n)} (d_n(i) - \bar{d}_n)^2 > 0 \right\} \quad (4.44)$$

erfüllen.

Die Regressionskoeffizienten $(c_{ni})_{i \leq k(n)}$ werden in diesem Kapitel als fest angesehen werden, wohingegen die Scores $(d_n(i))_{i \leq k(n)}$ von den Rängen unabhängige Zufallsvariablen bezeichnen. Im Folgenden erfüllen die Regressionskoeffizienten die Ordnungsbedingung

$$c_{n1} \leq c_{n2} \leq \dots \leq c_{nk(n)}. \quad (4.45)$$

Bezeichnet $d_{i:k(n)}$ die i -te Orderstatistik der Variablen in (4.44), so folgt aus der Austauschbarkeit der Zufallsvariablen die Verteilungsgleichheit

$$(d_n(R_i))_{i \leq k(n)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} (d_{R_i:k(n)})_{i \leq k(n)}.$$

Somit kann man als weitere Voraussetzung die Bedingung

$$d_n(1) \leq d_n(2) \leq \dots \leq d_n(k(n))$$

annehmen.

In dieser Arbeit sind die Score-Funktionen typischerweise durch

$$d_n(i) = (k(n) - 1)^{1/2} \frac{W_{i:k(n)}}{\left(\sum_{i=1}^{k(n)} (W_{n,i} - \bar{W}_n)^2 \right)^{1/2}} \quad (4.46)$$

gegeben.

Definiert man entsprechende Variablen

$$W_{n,i} := \frac{d_n(R_i)}{(k(n) - 1)^{1/2}},$$

so bildet $(W_{n,i})_{i \leq k(n)}$ unter der Voraussetzung (4.44) ein Dreiecksschema von zeilenweise austauschbaren Zufallsvariablen. Diese erfüllen offensichtlich per Definition die Bedingungen (E1) und (E3) der Generalvoraussetzungen sowie $\tilde{\mathbb{P}}(B_n) \rightarrow 1$ und

$$(k(n) - 1)^{-1/2} \max_{1 \leq i \leq k(n)} |d_n(i) - \bar{d}_n| \rightarrow 0 \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-stoch.}$$

Setzt man $Y_{n,i} = (c_{ni} - \bar{c}_n)$, wobei die $Y_{n,i}$ durch (4.2) definiert sind, so folgt die Verteilungsgleichheit

$$S_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left(\frac{k(n) - 1}{k(n)} \right)^{1/2} \frac{T_n^*}{\left(\sum_{i=1}^{k(n)} (W_{n,i} - \bar{W}_n)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{k(n)} (X_{n,i} - \bar{X}_n)^2 \right)^{1/2}}.$$

Aus der Varianzformel für lineare Rangstatistiken von Hájek, vgl. HÁJEK, ŠIDÁK und SEN [53, Theorem 3.3.3], folgt für die bedingte Varianz gegeben den Funktionen $(W_{n,i})_{i \leq k(n)}$, dass unter den obigen Voraussetzungen

$$\text{Var}(S_n \mid (W_{n,i})_{i \leq k(n)}) = \mathbb{1}_{B_n}.$$

Unter den Bedingungen $\bar{c}_n = 0$ oder $\bar{d}_n = 0$ folgt unmittelbar aus HÁJEK, ŠIDÁK und SEN [53], dass

$$\text{E}(S_n \mid (W_{n,i})_{i \leq k(n)}) = 0.$$

Somit existiert nach dem Satz von Prohorov eine konvergente Teilfolge von $\mathcal{L}(S_n \mid (W_{n,i})_{i \leq k(n)})$ und unter zusätzlichen Regularitätsvoraussetzungen lassen sich alle möglichen Limesverteilungen charakterisieren.

In Bezug auf die Treppenfunktionen (4.4) lässt sich jetzt für $u \in (0, 1)$ die Funktion

$$\varphi_n(u) := d_n(1 + [k(n)u]) - \bar{d}_n \tag{4.47}$$

definieren. Aus den Arbeiten von Hájek weiß man, dass diese Treppenfunktionen in der Behandlung linearer Rangstatistiken eine entscheidende Bedeutung besitzen.

Nachdem nun die einzelnen Variablen mit denen aus Kapitel 4.1 abgeglichen sind, können an dieser Stelle die noch ausstehenden Beweise von Satz 4.5 und Satz 4.8 für den Spezialfall einfacher linearer Permutationsstatistiken mit deterministischen Regressionskoeffizienten $c_{ni} = Y_{n,i}$ durchgeführt werden.

Beweis. (Satz 4.5 im deterministischen Fall $c_{ni} = Y_{n,i}$)

Betrachte im Folgenden Regressionskoeffizienten der Form

$$c_{ni} := Y_{n,i},$$

mit $Y_{n,i}$, $1 \leq i \leq k(n)$, definiert durch (4.2), d.h.

$$Y_{n,i} := \frac{X_{n,i} - \bar{X}_n}{\left(\sum_{i=1}^{k(n)} (X_{n,i} - \bar{X}_n)^2\right)^{1/2}}.$$

Dann gilt für diese Variablen, dass $\bar{c}_n = 0$. Für den weiteren Verlauf des Beweises bezeichne analog zu JANSSEN [67] $(U_{n,i})_{i \leq k(n)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Dreiecksschema von zeilenweise unabhängigen auf $(0, 1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen, so dass

$$(U_{n,1}, \dots, U_{n,k(n)}), \tag{4.48}$$

definiert ist durch $U_{n,i} = V_i$ für $i \leq k(n)/2$ bzw. $U_{n,k(n)} = \tilde{V}_1, \dots, U_{n,k(n)-j} = \tilde{V}_{j+1}$ sonst. Dabei sind die V_i bzw. \tilde{V}_j durch Bemerkung 4.2 definiert. Diese spezielle Darstellung geht auf CSÖRGŐ et al. [27] zurück. Bezeichnet man mit $(R_1, \dots, R_{k(n)})$ den Rangvektor der gleichverteilten Zufallsvariablen aus (4.48), so gilt nach einer Varianzungleichung von HAJÉK [50, Theorem 3.1] für die bedingte Varianz gegeben den Gewichten $(W_{n,i})_{i \leq k(n)}$,

$$\begin{aligned} & \text{Var}\left(S_n - \sum_{i=1}^{k(n)} c_{ni} \varphi_n(U_{n,i}) \mid (W_{n,i})_{i \leq k(n)}\right) \\ & \leq 2\sqrt{2} \frac{\max_{1 \leq i \leq k(n)} |W_{n,i} - \bar{W}_n|}{\left(\sum_{i=1}^{k(n)} (W_{n,i} - \bar{W}_n)^2\right)^{1/2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-stoch.} \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.10(b) folgt hieraus die unbedingte Konvergenz

$$S_n - \sum_{i=1}^{k(n)} c_{ni} \varphi_n(U_{n,i}) \rightarrow 0 \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-stoch.}$$

Somit lässt sich das ursprüngliche Problem an dieser Stelle auf gewichtete Partialsummen der Form

$$\sum_{i=1}^{k(n)} c_{ni} \varphi_n(U_{n,i}) \tag{4.49}$$

mit unabhängigen Zufallsvariablen reduzieren. Man betrachte im Folgenden die drei Folgen:

$$(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{in } S; \tag{4.50a}$$

$$(c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nk(n)}, 0, \dots) \quad \text{in } [-1, 1]^{\mathbb{N}}; \tag{4.50b}$$

$$(c_{nk(n)}, c_{nk(n)-1}, \dots, c_{n1}, 0, \dots) \quad \text{in } [-1, 1]^{\mathbb{N}}. \tag{4.50c}$$

Nach Lemma 4.1 bzw. dem Satz von Tychonoff, vgl. MEISE und VOGT [92, Satz 4.3], sind S bzw. $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ kompakte metrische Räume. Somit findet man für jede Folge eine Teilfolge $\{m\} \subset \mathbb{N}$, so dass jede der drei Folgen (4.50a)–(4.50c) entlang dieser in S bzw. $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ konvergiert. Bezeichne für $i, j \in \mathbb{N}$ die entsprechenden Häufungspunkte mit c_i und \tilde{c}_j , d.h.

$$c_{mi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c_i \quad \text{und} \quad c_{m(k(m)+1-j)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{c}_j \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Dann folgt aus der Normierungsbedingung (4.43) und $\bar{c}_n = 0$, dass

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{c}_j^2 \leq 1.$$

Nach Lemma 4.3 existiert eine Zufallsvariable $\varphi : \tilde{\Omega} \rightarrow S$, so dass die Folge $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in Verteilung in $(S, \|\cdot\|_1)$ gegen φ konvergiert. Da $(S, \|\cdot\|_1)$ ein kompakter metrischer Raum ist, findet man nach dem Satz A.7 von Skorohod auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum Versionen, so dass die Folge $(\varphi)_{m \in \mathbb{N}}$ fast sicher gegen φ konvergiert. Hieraus folgt, dass

$$\|\varphi_m - \varphi\| := \iint |\varphi_m(\tilde{\omega}, x) - \varphi(\tilde{\omega}, x)| \, dx \, d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{\omega}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Für festes $r \in \mathbb{N}$ gilt dann, dass

$$\sum_{i=1}^r |c_{mi} - c_i| + r \|\varphi_m - \varphi\| \rightarrow 0.$$

Auf Grund der Konvergenz von (4.50a)–(4.50c) findet man eine isotone Folge $r_m \uparrow \infty$, $r_m < k(m)/2$ mit

$$a_m := \sum_{i=1}^{r_m} |c_{mi} - c_i| + r_m \|\varphi_m - \varphi\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Wegen $\|\varphi_m\| \leq 1$ und $\|\varphi\| \leq 1$ erhält man, dass

$$\begin{aligned}
 & \left\| \sum_{i=1}^{r_m} c_{mi} \varphi_m(U_{m,i}) - \sum_{i=1}^{r_m} c_i \varphi(V_i) \right\| \\
 & \leq \left\| \sum_{i=1}^{r_m} \varphi_m(U_{m,i}) (c_{mi} - c_i) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{r_m} c_i (\varphi_m(U_{m,i}) - \varphi(V_i)) \right\| \\
 & \leq \sum_{i=1}^{r_m} \|\varphi_m(U_{m,i})\| |c_{mi} - c_i| + \sum_{i=1}^{r_m} |c_i| \|\varphi_m(U_{m,i}) - \varphi(V_i)\| \\
 & \leq a_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

Somit konvergiert die untere Reihe von (4.49)

$$\sum_{i=1}^{r_m} c_{mi} \varphi_m(U_{m,i}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi(V_i)$$

in Verteilung gegen die erste Reihe von (4.9) mit $\xi_i = c_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Für die obere Reihe lässt sich analog eine neue isotone Folge $s_m \uparrow \infty$, $s_m < k(m)/2$ finden, so dass entlang der Teilfolge $\{m\} \subset \mathbb{N}$

$$\sum_{j=k(m)+1-s_m}^{k(m)} |c_{mj} - \tilde{c}_j| + s_m \|\varphi_m - \varphi\| \rightarrow 0$$

und somit

$$\sum_{i=k(m)-s_m+1}^{k(m)} c_{mi} \varphi_m(U_{m,i}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{c}_j \varphi(\tilde{V}_j).$$

Als letzter Schritt soll die Konvergenz der mittleren Summe

$$\sum_{i=r_m+1}^{k(m)-s_m} c_{mi} \varphi_m(U_{m,i}) \tag{4.51}$$

betrachtet werden. Die Folge der zugehörigen Verteilungen ist straff, da (4.51) per Definition zentriert und die Varianz durch 1 beschränkt ist.

Fasst man die Summe (4.51) als neue Partialsumme auf und überprüft die asymptotische Vernachlässigbarkeit der entsprechenden Zufallsvariablen, so besitzt die Folge der zugehörigen Verteilungen einen unendlich teilbaren Häufungspunkt, welcher in der Limesverteilung (4.9) auftritt.

Die asymptotische Vernachlässigbarkeit folgt jedoch für $r_m + 1 \leq i \leq k(m) - s_m$ aus der Ungleichung

$$\|c_{mi}\varphi_m(U_{m,i})\| \leq \max\{|c_{mi}| : r_m + 1 \leq i \leq k(m) - s_m\} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Somit ist $\sum_{i=r_m+1}^{k(m)-s_m} c_{mi}\varphi(U_{m,i})$ konvergent gegen die unendlich teilbare Zufallsvariable in (4.9).

Aus der Beschränktheit der Varianz von (4.51) durch 1 folgt dann mittels des Lemmas von Fatou, vgl. GÄNSSLER und STUTE [45, Satz 1.6.7], dass $E(Z^2) \leq 1$. ■

Aus dem Beweis lässt sich nun im Falle deterministischer Variablen die Darstellung der Limesvariable (4.9) analysieren. Dazu betrachte man die folgende Bemerkung:

Bemerkung 4.19

In dem Spezialfall (4.42)–(4.47) ist die Limesvariable von S_n durch

$$T_0 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i Z_i + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{c}_j \tilde{Z}_j + Z \tag{4.52}$$

gegeben. Dabei ist Z eine unendlich teilbare Zufallsvariable und c_i und \tilde{c}_j beschreibt die Limiten von $(c_{ni} - \bar{c}_n)_n$ bzw. $(\tilde{c}_{n(n+1-j)} - \bar{c})_n$. □

Als nächstes soll der noch ausstehende Beweis von Satz (4.8) für den Spezialfall einfacher linearer Permutationsstatistiken mit deterministischer Regressionskoeffizienten durchgeführt werden.

Beweis. (Satz 4.8 im deterministischen Fall $c_{ni} = Y_{n,i}$)

Teil (b): Wählt man erneut die isotonen Folgen r_m und s_m aus dem vorigen Beweis, so gilt

$$\left| \sum_{i=1}^{r_m} (c_{mi}^2 - c_i^2) \right| \leq \sum_{i=1}^{r_m} |c_{mi} - c_i| |c_{mi} + c_i| \leq 2 \sum_{i=1}^{r_m} |c_{mi} - c_i| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

und somit wegen $\sum_{i=1}^{k(m)} c_{mi}^2 = 1$, dass

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=r_m+1}^{k(m)-s_m} c_{mi}^2 &= 1 - \sum_{i=1}^{r_m} c_{mi}^2 - \sum_{j=k(m)-s_m+1}^{k(m)} c_{mj}^2 \\
 &= 1 - \sum_{i=1}^{r_m} c_{mi}^2 - \sum_{j=1}^{s_m} c_{m(k(m)+1-j)}^2 \\
 &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1 - \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 - \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{c}_j^2. \tag{4.53}
 \end{aligned}$$

Für auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen $(U_{m,i})_{i \leq k(m)}$ möchte man im Folgenden die Normalverteilungskonvergenz

$$\sum_{j=r_m+1}^{k(m)-s_m} c_{mj} \varphi(U_{m,i}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{N}(0, \bar{\sigma}^2)$$

zeigen. Definiert man

$$c'_{mj} := c_{mi} \mathbb{1}_{[r_m+1, k(m)-s_m]}(j), \quad 1 \leq j \leq k(m),$$

so gilt $\max_{1 \leq j \leq k(m)} |c'_{mj}| \rightarrow 0$ und

$$\sum_{j=r_m+1}^{k(m)-s_m} c_{mi} \varphi_m(U_{m,i}) = \sum_{j=1}^{k(m)} c_{mj} \varphi_m(U_{m,i}).$$

Die L_2 -Konvergenz der Funktionen φ_m impliziert die gleichgradige Integrierbarkeit und somit zusammen mit

$$\|c_{mi} \varphi_m(U_{m,i})\|_1 \rightarrow 0$$

die Gültigkeit der Lindeberg-Bedingung

$$\sum_{j=1}^{k(m)} \int_{\{|c'_{mi} \varphi_m(U_{m,j})| \geq \varepsilon\}} (c'_{mi} \varphi_m(U_{m,i}))^2 d\mathbb{P} \rightarrow 0.$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz von Lindeberg-Feller, vgl. WITTING und MÜLLER-FUNK [128, Korollar 5.104], folgt wegen (4.53) die Verteilungskonvergenz gegen eine zentrierte Normalverteilung mit Varianz

$$\sigma^2 := 1 - \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 - \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{c}_j^2.$$

Die Behauptung, dass $\text{Var}(Z_1) = 1$, folgt unmittelbar aus dem Lemma 4.4.

Teil (a): Im Folgenden soll der mittlere Teil

$$\sum_{i=r_m+1}^{k(m)-s_m} c_{mi} \varphi_m(U_{m,i}),$$

als Konvergent entlang einer Teilfolge $\{m\} \subset \mathbb{N}$ angenommen werden. Dann folgt nach GNEDENKO und KOLMOGOROV [48, S. 116, Theorem 1] für die Limesvarianz des normalverteilten Anteils, dass

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2 &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=r_m+1}^{k(m)-s_m} \text{Var}(c_{mi} \varphi_m(U_{m,i}) \mathbf{1}_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(c_{mi} \varphi_m(U_{m,i}))) \\ &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=r_m+1}^{k(m)-s_m} \text{Var}(c_{mi} \varphi_m(U_{m,i}) \mathbf{1}_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(c_{mi} \varphi_m(U_{m,i}))). \end{aligned} \quad (4.54)$$

1. Schritt Analog zum Beweis von Lemma 4.14 betrachtet man zunächst symmetrische Zufallsvariablen $\varphi_m(U_{m,i})$. Ohne Einschränkung kann man annehmen, dass

$$\tilde{\omega} \mapsto \|\varphi_m(\tilde{\omega}, \cdot) - \varphi(\tilde{\omega}, \cdot)\|_1 \rightarrow 0$$

$\tilde{\mathbb{P}}$ -stochastisch. Dann existiert auf einem geeignetem Wahrscheinlichkeitsraum für jedes $\delta > 0$ ein $K > 0$ und ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\text{Var}(\varphi_m(U_{m,1}) \mathbf{1}_{(-K, K)}(\varphi_m(U_{m,1}))) \geq \iint \varphi(\tilde{\omega}, x)^2 dx d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{\omega}) - \delta =: \beta(\delta)$$

für alle $m \geq m_0$. Andererseits gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $r_m + 1 \leq i \leq k(m) - s_m$ unter $c_{mi} \neq 0$, dass

$$|\varepsilon/c_{mi}| > K \quad (4.55)$$

Beachtet man, dass für jede messbare Menge $A \subset \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\text{Var}(X) \geq \text{Var}(X \mathbf{1}_A)$$

gilt, so erhält man zusammen mit (4.55) die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\text{Var}(c_{mi} \varphi_m(U_{m,i}) \mathbf{1}_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(c_{mi} \varphi_m(U_{m,i}))) \\ &\geq c_{mi}^2 \text{Var}(\varphi_m(U_{m,i}) \mathbf{1}_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(c_{mi} \varphi_m(U_{m,i}))) \\ &\geq c_{mi}^2 \text{Var}(\varphi_m(U_{m,i}) \mathbf{1}_{(-K, K)}(\varphi_m(U_{m,i}))) \\ &\geq c_{mi}^2 \beta(\delta). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun für den Spezialfall symmetrischer Zufallsvariablen aus (4.53), (4.54) und

$$\sum_{i=r_m+1}^{k(m)-s_m} c_{mi}^2 (\|\varphi\|_2^2 - \delta) \rightarrow \sigma^2 \beta(\delta).$$

2. Schritt Für den allgemeinen Fall bedient man sich symmetrisierter Variablen. Dazu sei $\tilde{\varphi}_m(\tilde{U}_{m,i})$ eine von $\varphi_m(U_{m,i})$ unabhängige Kopie. Dann lassen sich die obigen Aussagen auf

$$\varphi_m(U_{m,i}) - \tilde{\varphi}_m(\tilde{U}_{m,i})$$

anwenden. ■

Die beiden vorausgegangenen Beweise liefern nun in Spezialfällen die Gültigkeit von Grenzwertsätzen für Statistiken der Form (4.42). In einigen Situationen ist es hilfreich die Bedeutung der scores und der Regressionskoeffizienten zu vertauschen. Dies soll an dieser Stelle am Beispiel des Zweistichprobenfalles veranschaulicht werden.

Beispiel 4.20

Im Folgenden betrachte man ein Zweistichprobenproblem zu den Stichprobenumfängen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $k(n) = n_1 + n_2$. Durch die Gleichung

$$S_n = \sum_{i=1}^{k(n)} b_{ni} a_n(R_i)$$

sei eine Rangstatistik mit reellen scores $(a_n(i))_{i \leq k(n)}$ und Regressionskoeffizienten

$$b_{ni} = \left(\frac{n_1 n_2}{k(n)} \right)^{1/2} \cdot \begin{cases} -\frac{1}{n_1} & i \leq n_1 \\ \frac{1}{n_2} & n_1 < i \leq k(n). \end{cases}$$

definiert. Unter Verwendung der Definition von Rängen gilt dann

$$S_n = \sum_{i=1}^{k(n)} b_{nD_i} a_n(i).$$

Dabei bezeichnet D_i den i -ten Antirang der gepoolten Stichprobe.

Für die Regressionskoeffizienten $(b_{ni})_{i \leq k(n)}$ gilt $\bar{b}_n = 0$ und somit erfüllen diese die Bedingung (4.43). Definiert man

$$d_n(i) := (k(n) - 1)^{1/2} b_{ni} \quad \text{und} \quad c_{ni} := (k(n) - 1)^{1/2} a_n(i),$$

so gelten für die neuen scores $(d_n(i))_{i \leq k(n)}$ die Voraussetzungen

$$d_n(1) \leq \dots \leq d_n(k(n))$$

und

$$\frac{1}{k(n) - 1} \sum_{i=1}^{k(n)} (d_n(i) - \bar{d}_n)^2 = \sum_{i=1}^{k(n)} b_{ni}^2 = 1.$$

Somit kann an dieser Stelle die Bedeutung von Satz 4.5 näher diskutiert werden.

Unter der Voraussetzung, dass $\min(n_1, n_2) \rightarrow \infty$ für $k(n) \rightarrow \infty$, erfüllt das Schema $(d_n(D_i)/(k(n) - 1)^{1/2})_{i \leq k(n)}$ die Voraussetzungen (E1)–(E3). Nimmt man an, dass die Regressionskoeffizienten $(c_{ni})_{i \leq k(n)}$ für $n \rightarrow \infty$ die Bedingungen (4.43) und (4.45) mit konvergenten Folgen $c_{ni} - \bar{c}_n \rightarrow c_i$ und $c_{n(k(n)+1-j)} - \bar{c}_n \rightarrow c_j$, $i, j \in \mathbb{N}$ erfüllen, so werden die entsprechenden Limesvariablen durch (4.52) gegeben.

Gilt zusätzlich $n_1/k(n) \rightarrow \kappa \in (0, 1)$ für $n \rightarrow \infty$, so konvergiert die Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen schwach in $(S, \|\cdot\|_2)$ gegen eine Funktion φ mit

$$\varphi(u) = -\left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)^{1/2} \mathbf{1}_{[0,\kappa]}(u) + \left(\frac{\kappa}{1-\kappa}\right)^{1/2} \mathbf{1}_{(\kappa,1)}(u), \quad u \in (0, 1).$$

Die Statistik S_n konvergiert in Verteilung gegen T_0 aus (4.52), wobei Z zentriert normalverteilt mit Varianz

$$\sigma^2 := 1 - \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 - \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{c}_j^2$$

ist.

4.4 Beweise der zentralen Sätze (Satz 4.5 und Satz 4.8)

Nachdem nun einige Vorbereitungen getroffen wurden und beide Hauptsätze in Spezialfällen bewiesen sind, können diese nun in ihrer allgemeinen Form behandelt werden. Das wesentliche Hilfsmittel hierbei ist der Satz von Skorohod, vgl. Satz A.7. Dabei zieht man sich für festes $\omega \in \Omega$ auf fast sicher konvergente Versionen einfacher Permutationsstatistiken mit zufälligen Scores zurück. Hier lassen sich die in Abschnitt 4.3 gewonnenen Erkenntnisse anwenden und auf den allgemeinen Fall übertragen.

Beweis. (Satz 4.5 im allgemeinen Fall)

Teil (a): Nach der Cauchy-Schwarz'schen-Ungleichung gilt

$$\frac{X_{n,i} - \bar{X}_n}{\left(\sum_{i=1}^{k(n)} (X_{n,i} - \bar{X})^2\right)^{1/2}} \in [-1, 1].$$

Somit sind $(Y_{i:k(m)})_{i \in \mathbb{N}}$ und $(Y_{k(m)+1-j:k(m)})_{j \in \mathbb{N}}$ Folgen in $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$. Aufgrund der Kompaktheit von $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ besitzt jede Folge in $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ nach dem Satz von Prohorov eine schwach konvergent Teilfolge $\{m\} \subset \mathbb{N}$ mit

$$(Y_{i:k(m)})_{i \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} (\zeta_i)_{i \in \mathbb{N}}, \quad (Y_{k(m)+1-j:k(m)})_{j \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} (\tilde{\zeta}_j)_{j \in \mathbb{N}}.$$

Teil (b): Erweitert man den Beweis aus Abschnitt 4.3 für deterministische Koeffizienten, so erhält man die Gültigkeit von Satz 4.5 wie folgt. Dazu sei $\tau = (\tau(i))_{i \leq k(n)} : (\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}') \rightarrow \mathcal{S}_{k(n)}$ eine auf der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_{k(n)}$ gleichverteilte Permutation, welche unabhängig von den X - und W -Variablen ist. Unter den Generalvoraussetzungen (E1)–(E3) erhält man

$$T_n^* \stackrel{\mathcal{D}}{=} k(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,\tau(i)} (X_{n,i} - \bar{X}_n) =: \tilde{T}_n^*$$

auf dem Produktraum $\Omega \times \tilde{\Omega} \times \Omega'$. Da an dieser Stelle lediglich die Verteilungskonvergenz unter \mathbb{P} in (4.8) nachgewiesen werden soll, kann nach dem Satz A.7 von Skorohod die konvergenten Orderstatistiken in (4.6) sowie die konvergente Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{H_n}$ auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum durch fast sicher konvergente Versionen ersetzt werden.

Auf diesem neuen Wahrscheinlichkeitsraum erhält man durch den Satz über die dominierte Konvergenz von Lebesgue die $L_1(\mathbb{P})$ -Konvergenz von (4.6), d.h. für alle $i, j \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|Y_{i:k(m)} - \zeta_i\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \|Y_{k(m)+1-j:k(m)} - \tilde{\zeta}_j\|_1 \rightarrow 0. \quad (4.56)$$

Man findet nun isotone Folgen $r_m \uparrow \infty$, $s_m \uparrow \infty$ in \mathbb{N} , so dass

$$\sum_{i=1}^{r_m} |Y_{i:k(m)} - \zeta_i| \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad (4.57a)$$

$$\sum_{j=1}^{s_m} |Y_{k(m)+1-j:k(m)} - \tilde{\zeta}_j| \rightarrow 0 \quad (4.57b)$$

in $L_1(\mathbb{P})$ konvergieren. Nach dem Teilfolgekriterium existiert eine Teilfolge, so dass die Folgen (4.6) und (4.57a), (4.57b) für alle $\omega \in M$ mit $\mathbb{P}(M) = 1$ konvergieren. Per Konstruktion gilt $\mathbb{1}_{H_n} \rightarrow V$ fast sicher, wobei V eine Zufallsvariable mit Werten in $\{0, 1\}$ ist.

An dieser Stelle sind nun alle Vorbereitungen getroffen worden, um die Beweisschritte für den Spezialfall in Abschnitt 4.3 anzuwenden. Dabei wählt man $c_{ni} = Y_{i:k(n)}(\omega)$, $\omega \in M \cap \{V = 0\}$, wobei die Zufallsvariablen durch (4.2) definiert sind. Für festes ω ist nun analog zu Abschnitt 4.3 die Zufallsvariable

$$\tilde{\omega} \mapsto \frac{T_m^*}{\left(\sum_{i=1}^{k(m)} (X_{m,i}(\omega) - \bar{X}_m(\omega))^2\right)^{1/2}} = k(m)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(m)} c_{mi} W_{R_i:k(m)} \quad (4.58)$$

eine einfache lineare Permutationsstatistik mit zufälligen Scores. Somit lässt sich für festes ω der Beweis für den deterministischen Fall wiederholen. Man erhält die Konvergenz des oberen bzw. unteren Teils der Summe entlang einer Teilfolge. Der mittlere Teil (4.51) bildet eine straffe Folge

$$\omega \mapsto \mathcal{L}\left(\sum_{i=r_m+1}^{k(m)-s_m} c_{mi} \varphi(U_{m,i}) \mid X_{m,1}, \dots, X_{m,k(m)}\right)$$

von Ω in $(\mathcal{M}_1(\mathbb{R}), d)$. Somit existiert nach dem Satz von Prohorov eine schwach konvergente Teilfolge. Nach dem Satz A.7 von Skorohod findet man jetzt auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum fast sicher konvergente Versionen. Für festes ω erfüllt die Folge die Voraussetzung der asymptotischen Vernachlässigbarkeit. Somit ist die entsprechende Limesvariable $Z^{(\omega)}$ unendlich teilbar.

Als Abschluss bleibt lediglich der Fall $\omega \in M \cap \{V = 1\}$ zu betrachten. Hier definiere man $Z^{(\omega)} = 0$. Auf einem neuen Wahrscheinlichkeitsraum gilt dann $\mathbb{1}_{H_m(\omega)} = 0$ und $T_m^*(\omega) = 0$. Die Limesvariablen $\zeta_i(\omega)$ und $\tilde{\zeta}_j(\omega)$ sind ebenfalls 0 und man erhält $T_0(\omega) = 0$. ■

Beweis. (Satz 4.8 im allgemeinen Fall)

Für den allgemeinen Beweis von Satz 4.8 lässt sich analog zum vorigen Beweis die studentisierte Resampling-Statistik auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum als einfache lineare Permutationsstatistik mit zufälligen Scores auffassen. Dazu geht man auf dem neuen Wahrscheinlichkeitsraum zu fast sicher konvergenten Versionen der Orderstatistiken über und erhält entsprechend zu (4.58) für $c_{ni} = Y_{ni}(\omega)$ und festem $\omega \in \Omega$ eine Darstellung der

Zufallsvariablen

$$\tilde{\omega} \mapsto \frac{T_m^*}{\left(\sum_{i=1}^{k(m)} (X_{m,i}(\omega) - \bar{X}_m(\omega))^2\right)^{1/2}} = k(m)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(m)} c_{mi} W_{R_i:k(m)}$$

mithilfe von Rängen $(R_i)_{i \leq k(m)}$. Somit befindet man sich in der Situation von Abschnitt 4.3 und der entsprechende Beweis ist analog zum vorigen Vorgehen anwendbar. ■

Kapitel 5

Konsistenz des Bootstrap-Stichprobenmittels

Die zentrale Bedeutung des arithmetischen Mittels in der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Statistik führte zu umfangreichen Untersuchungen der Konsistenz des Bootstrap-Stichprobenmittels.

Die Entwicklung der Theorie begann mit den Arbeiten von BICKEL und FREEDMAN [22] und SINGH [119], welche für Folgen $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von i.i.d. Zufallsvariablen mit $E(X_1^2) < \infty$ bedingte Grenzwertsätze der Form

$$\left\| \mathbb{P}\left(n^{1/2}(\bar{X}_n - E(X_1)) \leq x\right) - \mathbb{P}^*\left(n^{1/2}(\bar{X}_n^* - \bar{X}_n) \leq x\right) \right\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{f.s.} \quad (5.1)$$

bewiesen haben, wobei \mathbb{P}^* die bedingte Verteilung gegeben den Daten bezeichnet.

Für $E(X_1^2) = \infty$ zeigt ATHREYA [5], dass die fast sichere Konvergenz in (5.1) durch die \mathbb{P} -stochastische Konvergenz ersetzt werden muss, falls die Zufallsvariable X_1 im Anziehungsbereich einer Normalverteilung liegt.

Diese beiden Ergebnisse werden in der Arbeit von GINÉ und ZINN [47] zusammengefasst. Sie zeigen, dass unter den jeweiligen Voraussetzungen beide Bedingungen notwendig für die Konsistenz des Bootstrap-Stichprobenmittels sind.

ARCONES und GINÉ [2, 3] behandeln in ihren Arbeiten die Konsistenz des Bootstrap-Verfahrens für abweichende Stichprobenumfänge $m(n)$. Als entscheidende Entwicklung in der Untersuchung der Konsistenz von Bootstrap-Verfahren kann die Arbeit von MASON und NEWTON [89] angesehen werden. Diese führen den sog. „verallgemeinerten Bootstrap“ auf Basis austauschbarer

Gewichte ein und beweisen unter Verwendung allgemeiner Ergebnisse über einfache lineare Rangstatistiken aus HAJÉK, ŠIDÁK und SEN [53] entsprechende Grenzwertsätze, vgl. auch Abschnitt 2.2.

Im Laufe der Jahre wurde die Theorie stetig ausgeweitet und es existieren eine Vielzahl an Literaturquellen über diese Thematik, vgl. auch ARENAL-GUTIÉRREZ und MATRÁN [4]. Dabei lag der Schwerpunkt der Untersuchungen jedoch stets auf Folgen $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von i.i.d. Zufallsvariablen. MAMMEN [85, 86] zeigt für lineare Statistiken, dass die Bootstrap-Verteilung genau dann konsistent ist, falls eine Normalapproximation mit geschätzten Varianzen gültig ist. Grenzwertsätze für studentisierte Bootstrap-Statistiken betrachten MASON und SHAO [90].

CUESTA-ALBERTOS und MATRÁN [30] sowie DEL BARRIO, MATRÁN und CUESTO-ALBERTOS [10] behandeln Grenzwertsätze für Dreiecksschemata zeilenweise unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen. Analog zu den Ergebnissen aus der vorliegenden Arbeit zeigt sich, dass entsprechende Limesvariablen unendlich teilbare Maße darstellen und sich als Faltung einer Normalverteilung mit einer zusammengesetzten Poissonverteilung schreiben lassen.

Betrachtet man die sog. Resampling-Intensität $c := \lim_{n \rightarrow \infty} m(n)/k(n) \in (0, \infty)$, so lassen sich für stetige Funktionen $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ Grenzwertsätze in Abhängigkeit einer Normalisierungskonstanten $r_n := f(m(n)/k(n))$ untersuchen, vgl. DEL BARRIO, CUESTA-ALBERTOS und MATRÁN [8]. Dabei ist die Limesverteilung vom Grenzwert $f(c)$ abhängig und stellt wiederum ein unendlich teilbares Maß dar.

Wie in den vorigen Abschnitten gezeigt, kann man bei der Herleitung allgemeiner Grenzwertsätze für Resampling-Verfahren auf die einschränkende Voraussetzung zeilenweiser i.i.d. Zufallsvariablen verzichten. Deshalb soll im Rahmen des bisherigen Kontextes ein allgemeines Dreiecksschema $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ von Zufallsvariablen vorausgesetzt werden.

Im weiteren Verlauf sei T_n^* eine Statistik der Form (2.9), d.h.

$$T_n^* = k(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,i} (X_{n,i} - \bar{X}_n),$$

mit den entsprechenden Bootstrap-Gewichten aus Beispiel 2.10(a) und (c). Um an dieser Stelle die Gültigkeit von Grenzwertsätzen der Form 4.5 bzw. 4.8 zeigen zu können, müssen zunächst Bedingungen angegeben werden, un-

ter denen die Generalvoraussetzungen (E1)–(E3) aus Kapitel 4.1 gültig sind. Lemma 5.2 stellt die Gültigkeit der Generalvoraussetzungen für den Fall der $m(n)$ -Bootstrap-Gewichte sicher. Für den Beweis wird das folgende Korollar benötigt:

Korollar 5.1

Sei X eine $\mathcal{B}(n, p)$ -verteilte Zufallsvariable. Dann gilt

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^4) \leq n(p + p^4) + 4! n(n - 1)(p(1 - p))^2.$$

Beweis. Definiert man $X := \sum_{i=1}^n X_i$ mit unabhängig identisch $\mathcal{B}(1, p)$ -verteilten Zufallsvariablen X_i , $i = 1, \dots, n$, so gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^4) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n (X_i - p)\right)^4\right) \\ &= \sum_{i,j,r,s=1}^n \mathbb{E}((X_i - p)(X_j - p)(X_r - p)(X_s - p)) \\ &= n \mathbb{E}((X_1 - p)^4) + \frac{4!}{2} n(n - 1) \text{Var}(X_1)^2 \\ &\leq n(p + p^4) + 4! n(n - 1)(p(1 - p))^2. \end{aligned}$$

■

Lemma 5.2

Sei $k(n) \rightarrow \infty$. Dann erfüllen die $m(n)$ -Bootstrap-Gewichte

$$W_{n,i} := m(n)^{1/2} \left(\frac{1}{m(n)} M_{n,i} - \frac{1}{k(n)} \right)$$

aus Beispiel 2.10(a) die Generalvoraussetzungen (E1)–(E3) falls $m(n) \rightarrow \infty$.

Beweis. Die Gültigkeit der Generalvoraussetzung (E1) folgt unmittelbar aus der Konstruktion der Gewichte durch multinomialverteilte Zufallsvariablen. Es bleibt also lediglich die Bedingungen (E2) und (E3) zu überprüfen. Wählt man

$$W_{n,i} := m(n)^{1/2} \left(\frac{1}{m(n)} M_{n,i} - \frac{1}{k(n)} \right),$$

mit $(M_{n,1}, \dots, M_{n,k(n)}) \sim \text{Mult}(m(n), (\frac{1}{k(n)}, \dots, \frac{1}{k(n)}))$, so gilt

$$\bar{W}_n := \frac{1}{k(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,i} = 0.$$

Die Bedingung (E3) folgt dann aus der Tschebyscheff'schen Ungleichung sowie

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,i}^2\right) = \frac{k(n) - 1}{k(n)} \rightarrow 1$$

und

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,i}^2\right) = \frac{(m(n) - 1)(k(n) - 1)}{m(n)k(n)^2} \rightarrow 0.$$

Die Bedingung (E2) lässt sich mittels der Markov'schen Ungleichung wie folgt nachweisen:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}\left(\max_{1 \leq i \leq k(n)} |W_{n,i}| \geq \varepsilon\right) &\leq k(n) \tilde{\mathbb{P}}\left(\left|M_{n,1} - \frac{m(n)}{k(n)}\right| \geq m(n)^{1/2} \varepsilon\right) \\ &\leq k(n) m(n)^{-2} \varepsilon^{-4} \mathbb{E}\left(\left(M_{n,1} - \frac{m(n)}{k(n)}\right)^4\right). \end{aligned}$$

Nach Korollar 5.1 gilt

$$k(n) m(n)^{-2} \varepsilon^{-4} \mathbb{E}\left(\left(M_{n,1} - \frac{m(n)}{k(n)}\right)^4\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und somit die Behauptung. ■

Analog kann man nun den Fall der Wild-Bootstrap-Gewichte betrachten. Dabei stellt sich heraus, dass die Generalvoraussetzungen (E1)–(E3) gerade dann erfüllt sind, falls die Gewichte eine Normalitätsbedingung einhalten.

Lemma 5.3

Sei $k(n) \rightarrow \infty$. Dann erfüllen die Wild-Bootstrap-Gewichte

$$W_{n,i} := k(n)^{-1/2} Z_{n,i}$$

aus Beispiel 2.10(c) die Generalvoraussetzungen (E1)–(E3), falls

$$\mathcal{L}\left(k(n)^{-1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} Z_{n,i}\right) \xrightarrow{w} \mathbb{N}(0, 1). \quad (5.2)$$

Beweis. Die Gültigkeit der Gerneralvoraussetzung (E1) folgt analog zum vorigen Beweis unmittelbar aus der Definition der Gewichte $W_{n,i}$. Betrachte die Wild-Bootstrap-Gewichte

$$W_{n,i} = k(n)^{-1/2} Z_{n,i},$$

mit $Z_{n,1}, \dots, Z_{n,k(n)}$ i.i.d. Zufallsvariablen und $E(Z_{n,1}) = 0$ bzw. $\text{Var}(Z_{n,1}) = 1$. Dann folgt aus dem zentralen Grenzwertsatz, dass

$$\bar{W}_n := \frac{1}{k(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,i} = \frac{1}{k(n)^{3/2}} \sum_{i=1}^{k(n)} Z_{n,i} \xrightarrow{\tilde{\mathbb{P}}} 0$$

bzw.

$$\max_{1 \leq i \leq k(n)} |W_{n,i}| \xrightarrow{\tilde{\mathbb{P}}} 0.$$

Raikov's Theorem liefert die stochastische Konvergenz der Quadrate

$$\sum_{i=1}^{k(n)} (W_{n,i} - \bar{W}_n)^2 = \sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,i}^2 \xrightarrow{\tilde{\mathbb{P}}} 1,$$

vgl. RAIKOV [108] ■

Korollar 5.4

Unter den Voraussetzungen von Lemma 5.3 ist hinreichend für die Gültigkeit von (5.2), dass

$$Z_{n,1} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z_1, \tag{5.3}$$

wobei Z_1 eine Zufallsvariable mit $E(Z_1) = 0$ und $\text{Var}(Z_1) = 1$ ist.

Beweis. Bezeichnet F_n und F_0 die Verteilungsfunktionen von $Z_{n,1}$ bzw. Z_1 , so lassen sich die Zufallsvariablen mittels ihrer inversen Verteilungsfunktionen schreiben als

$$Z_{n,1} = F_n^{-1}(U) \quad \text{bzw.} \quad Z_1 = F_0^{-1}(U), \tag{5.4}$$

wobei U eine auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable ist. Aus (5.3) folgt dann, dass $F_n^{-1} \rightarrow F_0^{-1}$ fast sicher und der Satz von Vitali liefert

$$F_n^{-1}(U) - F_0^{-1}(U) \xrightarrow{L_2} 0.$$

Somit gilt $\text{Var}(F_n^{-1}(U) - F_0^{-1}(U)) \rightarrow 0$. Bezeichnen U_1, U_2, \dots unabhängige auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen, so folgt wegen

$$\text{Var}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k(n)} F_n^{-1}(U_i) - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k(n)} F_0^{-1}(U_i)\right) \rightarrow 0$$

die Gültigkeit des zentralen Grenzwertsatzes mittels der Quantildarstellung (5.4) und somit die Behauptung. ■

Die Lemmata 5.2 und 5.3, sowie Korollar 5.4 liefern im Falle der Bootstrap-Gewichte aus Beispiel 2.10(a) und (c) hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Generalvoraussetzungen (E1)–(E3). Damit ist man nun in der Lage, die durch die Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen aus (4.4) definierten i.i.d. Zufallsvariablen Z_i genauer zu beschreiben. Im Falle der $m(n)$ -Bootstrap-Gewichte ergibt sich:

Satz 5.5

Sei $k(n) \rightarrow \infty$. Die durch die $m(n)$ -Bootstrap-Gewichte definierte Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen konvergiere gegen ein $\varphi \in S$. Dann gilt:

(a) $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung in $(S, \|\cdot\|_2)$, falls

$$\frac{m(n)}{k(n)} \rightarrow c \in (0, \infty]$$

und die Zufallsvariablen $Z_1 \stackrel{\mathcal{D}}{=} \varphi(U)$ sind gegeben durch

$$Z_1 \stackrel{\mathcal{D}}{=} c^{-1/2}(X - c) \quad \text{für } c \in (0, \infty),$$

wobei X eine standardpoissonverteilte Zufallsvariable ist, bzw. durch

$$\mathcal{L}(Z_1) = N(0, 1) \quad \text{für } c = \infty.$$

(b) $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung in $(S, \|\cdot\|_1)$ mit $\varphi = 0$, falls

$$\frac{m(n)}{k(n)} \rightarrow 0.$$

Beweis. Teil (a): Betrachtet man die $m(n)$ -Bootstrap-Gewichte mit

$$W_{n,i} := m(n)^{1/2} \left(\frac{1}{m(n)} M_{n,i} - \frac{1}{k(n)} \right),$$

so gilt $\overline{W}_n = 0$. Der Beweis der Konvergenz der Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(S, \|\cdot\|_2)$ erfolgt nun, indem man die multinomialverteilten Gewichte $(M_{n,i})_{i \leq k(n)}$ in der folgenden speziellen Form darstellt. Seien U_1, U_2, \dots unabhängige auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen und $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots$

die Einheitsvektoren auf $\mathbb{R}^{k(n)}$. Dann lassen sich die obigen Zufallsvariablen $M_{n,1}, \dots, M_{n,k(n)}$ schreiben als

$$M_{n,i} = \sum_{i=1}^{k(n)} \mathbf{1}_{e_i}(Y_{n,k}), \quad (5.5)$$

wobei

$$Y_{n,k} := \left(\mathbf{1}_{\left(\frac{j-1}{k(n)}, \frac{j}{k(n)}\right]}(U_k) \right)_{1 \leq j \leq k(n)}. \quad (5.6)$$

Aufgrund der Generalvoraussetzung (E2) genügt es, das Konvergenzverhalten der Treppenfunktion

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_n(u) &:= (k(n) - 1)^{1/2} (W_{1+[k(n)u]:k(n)} - \bar{W}_n) \\ &= \frac{(k(n) - 1)^{1/2}}{m(n)^{1/2}} \left(M_{1+[k(n)u]:k(n)} - \frac{m(n)}{k(n)} \right) \end{aligned}$$

zu betrachten.

Betrachte zunächst den Fall $0 < c < \infty$. Bezeichnet F_n die Verteilungsfunktion einer $\mathcal{B}(m(n), \frac{1}{k(n)})$ -Verteilung, so gilt nach dem Poisson'schen Grenzwertsatz für festes $x \in \mathbb{R}$, dass

$$F_n(x) \rightarrow G(x),$$

wobei $G(\cdot)$ die Verteilungsfunktion einer poissonverteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert c ist. Mit (5.5) und (5.6) lassen sich nun neue Zufallsvariablen durch

$$(U_i)_i \mapsto \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(M_{n,1}) \quad \text{und} \quad (U_i)_i \mapsto \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(M_{n,k(n)})$$

definieren. Diese sind in jedem Argument monoton nicht-fallend und die Kovarianzungleichung von Hájek, vgl. HÁJEK [51, Lemma 3.1] liefert, dass

$$\text{Cov}(\mathbf{1}_{(-\infty, x]}(M_{n,1}), -\mathbf{1}_{(-\infty, x]}(M_{n,k(n)})) \geq 0. \quad (5.7)$$

Aus der Austauschbarkeit der $(M_{n,i})_{i \leq k(n)}$ folgt für jedes Paar $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $i < j$

$$\text{Cov}(\mathbf{1}_{(-\infty, x]}(M_{n,i}), \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(M_{n,j})) \leq 0$$

und somit

$$\text{Var}\left(\frac{1}{k(n)} \sum_{k=1}^{k(n)} \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(M_{n,k})\right) \leq \frac{1}{k(n)^2} \sum_{k=1}^{k(n)} \text{Var}(\mathbf{1}_{(-\infty, x]}(M_{n,k})) \rightarrow 0. \quad (5.8)$$

Zusammen mit der Konvergenz

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{k(n)} \sum_{k=1}^{k(n)} \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(M_{n,k})\right) = F_n(x) \rightarrow G(x)$$

folgt dann aus der Tschebyscheff'schen Ungleichung, dass

$$\frac{1}{k(n)} \sum_{k=1}^{k(n)} \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(M_{n,k}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} G(x) \quad \mathbb{P}\text{-stoch.}$$

Somit gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$ die gleichmäßige Konvergenz

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{k(n)} \sum_{k=1}^{k(n)} \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(M_{n,k}) - G(x) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \mathbb{P}\text{-stoch.}$$

Sei nun $u \in (0, 1)$ fest. Dann folgt aus der Definition der Orderstatistiken, dass

$$\mathbb{P}(M_{1+[k(n)u]:k(n)} \leq r) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{k(n)} \sum_{k=1}^{k(n)} \mathbb{1}_{(-\infty, r]}(M_{n,k}) \geq \frac{1 + [k(n)u]}{k(n)}\right). \quad (5.9)$$

Für $r > 0$ konvergiert dieser Ausdruck gegen 1, falls $u > G(r)$ bzw. gegen 0 falls $u < G(r)$. Somit gilt

$$M_{1+[k(n)u]:k(n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} G^{-1}(u) \quad (5.10)$$

für alle $u \in S(G^{-1}) := \{u : G^{-1} \text{ stetig in } u\}$. Nun lassen sich die Ideen aus den Beweisen von Lemma 4.1 und 4.4 durchführen. Für jede Folge erhält man entlang einer Teilfolge $\{m\} \subset \mathbb{N}$ die punktweise Konvergenz von

$$\tilde{\varphi}_m(u) \rightarrow c^{-1/2}(G^{-1}(u) - c) := \varphi(u) \quad \forall u \in S(G^{-1}) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad (5.11)$$

Für eine weitere Teilfolge gilt die Generalvoraussetzung (E2) f.s. und die Bedingung (5.11) folgt ebenfalls für φ_m . Da $\mathbb{E}(\varphi(U_1)) = 0$ und $\text{Var}(\varphi(U_1)) = 1$ gilt, erhält man nun die gewünschte Konvergenz in $(S, \|\cdot\|_2)$. Somit folgt die Behauptung für $0 < c < \infty$, da $G^{-1}(U_1) = X$, wobei X eine poissonverteilte Zufallsvariable zum Parameter c ist.

Für den Fall $c = \infty$ wird der vorhandene Beweis entsprechend abgeändert. Beachte, dass eine Folge von $\mathcal{B}(m(n), \frac{1}{k(n)})$ -verteilten Zufallsvariablen ξ_n für $m(n)/k(n) \rightarrow \infty$ gegen eine normalverteilte Zufallsvariable Y konvergiert, d.h.

$$\left(\frac{m(n)}{k(n)}\right)^{-1/2} \left(\xi_n - \frac{m(n)}{k(n)}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} Y, \quad (5.12)$$

mit $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{N}(0, 1)$. Betrachte nun

$$\mathbb{1}_{(-\infty, x]} \left(\left(\frac{k(n)}{m(n)} \right)^{-1/2} \left(M_{n,k} - \frac{m(n)}{k(n)} \right) \right).$$

Analog zu (5.7) und (5.8) folgt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{k(n)} \sum_{k=1}^{k(n)} \mathbb{1}_{(-\infty, x]} \left(\left(\frac{k(n)}{m(n)} \right)^{-1/2} \left(M_{n,k} - \frac{m(n)}{k(n)} \right) \right) - \Phi(x) \right| \rightarrow 0$$

und somit wie in (5.9)

$$\mathbb{P} \left(\left(\frac{m(n)}{k(n)} \right)^{-1/2} \left(M_{1+[k(n)u]:k(n)} - \frac{m(n)}{k(n)} \right) \leq r \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

falls $u > \Phi(r)$ bzw.

$$\mathbb{P} \left(\left(\frac{m(n)}{k(n)} \right)^{-1/2} \left(M_{1+[k(n)u]:k(n)} - \frac{m(n)}{k(n)} \right) \leq r \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

falls $u < \Phi(r)$. Dann gilt

$$\left(\frac{m(n)}{k(n)} \right)^{-1/2} \left(M_{1+[k(n)u]:k(n)} - \frac{m(n)}{k(n)} \right) \rightarrow \Phi^{-1}(u) \quad \mathbb{P}\text{-stoch.}$$

Somit folgt die Behauptung für $c = \infty$.

Teil (b): Im Fall $c = 0$ zeigt sich, dass in (5.12) $Y = 0$ gilt. Um diese Aussage zu beweisen ersetzt man die konvergente Folge $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch eine neue Folge $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von poissonverteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(\eta_n) = m(n)/k(n)$. Für die charakteristische Funktion von

$$\left(\frac{m(n)}{k(n)} \right)^{-1/2} \left(\eta_n - \frac{m(n)}{k(n)} \right)$$

gilt dann

$$\begin{aligned} \rho_n(t) &:= \mathbb{E} \left[\exp \left(it \left(\frac{k(n)}{m(n)} \right)^{1/2} \left(\eta_n - \frac{m(n)}{k(n)} \right) \right) \right] \\ &= \exp \left[-it \left(\frac{m(n)}{k(n)} \right)^{1/2} \right] \exp \left[\frac{m(n)}{k(n)} \exp \left(it \left(\frac{k(n)}{m(n)} \right)^{1/2} \right) - 1 \right] \\ &= \exp \left[\frac{m(n)}{k(n)} \left(\exp \left(it \left(\frac{k(n)}{m(n)} \right)^{1/2} \right) - 1 \right) - it \left(\frac{m(n)}{k(n)} \right)^{1/2} \right]. \end{aligned}$$

Für festes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\rho_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Somit folgt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{k(n)} \sum_{k=1}^{k(n)} \mathbf{1}_{(-\infty, x]} \left(\left(\frac{k(n)}{m(n)} \right)^{-1/2} \left(M_{n,k} - \frac{m(n)}{k(n)} \right) \right) - F_0(x) \right| \rightarrow 0$$

für $F_0 := \mathbf{1}_{[0, \infty)}$. Mit denselben Argumenten wie oben folgt dann, dass

$$\left(\frac{k(n)}{m(n)} \right)^{-1/2} \left(M_{1+[k(n)u]:k(n)} - \frac{m(n)}{k(n)} \right) \rightarrow F_0^{-1}(u)$$

mit $F_0^{-1} = 0$. Somit ist die Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offensichtlich konvergent in $(S, \|\cdot\|_1)$, jedoch nach Lemma 4.4 nicht konvergent in $(S, \|\cdot\|_2)$. ■

Satz 5.6

Für $k(n) \rightarrow \infty$ konvergiert die durch die Wild-Bootstrap-Gewichte definierte Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen genau dann in Verteilung in $(S, \|\cdot\|_2)$ gegen ein $\varphi \in S$, falls die Voraussetzung (5.3) erfüllt ist.

Beweis. Bezeichnet F_0 die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen Z_1 , so gilt analog zu den Überlegungen des vorhergehenden Beweises, dass

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{k(n)} \sum_{k=1}^{k(n)} \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(Z_{n,k}) - F_0(x) \right| \rightarrow 0$$

und somit $Z_{1+[k(n)u]:k(n)} \rightarrow F_0^{-1}(u)$ bis auf eine abzählbare Menge von u mit $u \in (0, 1)$. Hieraus folgt $\varphi = F_0^{-1}$. Nach Lemma 4.4 folgt dann wegen $\text{Var}(\varphi(U)) = \text{Var}(Z_1) = 1$ die Behauptung. ■

Bemerkung 5.7

Betrachtet man die Situationen konvergenter Partialsummen aus Abschnitt 4.2, so lassen sich bzgl. der asymptotischen Korrektheit der in Beispiel 2.10(a) und (c) angegebenen Bootstrap-Verfahren

$$T_n^* = k(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,i} (X_{n,i} - \bar{X}_n) \tag{5.13}$$

folgende Aussagen treffen:

- (a) Die bedingte Verteilung von T_n^* gegeben $X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)}$ ist genau dann im Sinne von Korollar 4.17 asymptotisch konsistent, falls die Limesverteilung $\mathcal{L}(\xi)$ zentriert normalverteilt ist.

(b) In dem Fall $c = \infty$ liefern die $m(n)$ -Bootstrap-Gewichte stets zentrierte Normalverteilungen $\mathcal{L}(X_0 \mid \Pi)$ mit zufälliger bedingter Varianz

$$\sigma^2(\omega) := \sum_{i=1}^{\infty} \psi_1(S_i(\omega))^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_2(\tilde{S}_j(\omega))^2 + \sigma^2.$$

(c) Die Ergebnisse aus Abschnitt 4.3 lassen sich in der Situation $c = 0$ nicht auf den $m(n)$ -Bootstrap anwenden. In diesem Fall ist die Limesvariable $\tilde{T}_0 = Z^{(\Pi)}$ bedingt unendlich teilbar, vgl. Satz 4.9. Für weitere Ergebnisse im Falle kleiner Resampling-Intensitäten $m(n)/k(n)$ bei zeilenweise i.i.d. Dreiecksschemata $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ vgl. man DEL BARRIO und MATRÁN [9].

(d) Die unbedingte Konsistenz des Bootstrap-Stichprobenmittels, d.h. $X_0 \stackrel{\mathcal{D}}{=} \xi$, ist ein Spezialfall von Satz 4.18(b). □

Die in diesem Abschnitt gewonnen Erkenntnisse enthalten als Spezialfälle die bekannten Ergebnissen aus der zu diesem Thema veröffentlichten Literatur. Mithilfe der angegebenen Sätze erhält man für Dreiecksschemata $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ von Zufallsvariablen neben der Aussage, wann Bootstrap-Verfahren konsistent sind, eine genaue Darstellung möglicher Limesverteilungen. Erste Ansätze hierzu findet man in den zu Beginn dieses Abschnittes angegebenen Arbeiten von CUESTA-ALBERTOS und MATRÁN [30], DEL BARRIO, MATRÁN und CUESTA-ALBERTOS [10] und andere.

Kapitel 6

Spezielle Bootstrap-Verfahren

Neben den in Beispiel 2.10 betrachteten Resampling-Gewichten treten in der Literatur eine Vielzahl weiterer Formen von Verfahren auf, mit deren Hilfe geeignete Approximationen für die Verteilungsfunktion einer Statistik bestimmt werden können. Diese gehen zum Teil auf die ursprüngliche Bootstrap-Idee von EFRON [38] zurück und bilden dabei neue Varianten der Wahl von Gewichten für die Bestimmung entsprechender Verteilungen.

In diesem Kapitel sollen nun einige bekannte und weniger bekannte Formen vorgestellt werden und im Rahmen der vorhergehenden Untersuchungen analysiert werden, inwieweit (bedingte) Grenzwertsätze existieren.

6.1 i.i.d.-weighted-Bootstrap

Sei $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge strikt positiver i.i.d. Zufallsvariablen mit endlicher Varianz $0 < \text{Var}(\eta_1) < \infty$. Definiert man

$$D_{n,i} := \frac{\eta_i}{k(n)}, \quad i = 1, \dots, k(n); \quad k(n) \geq 1, \\ \sum_{j=1} \eta_j$$

so erhält man eine neue Form von Resampling-Gewichten durch

$$W'_{n,i} := k(n)^{1/2} \left(D_{n,i} - \frac{1}{k(n)} \right). \quad (6.1)$$

Das hieraus resultierende Resampling-Verfahren wird *i.i.d.-weighted-Bootstrap* genannt, vgl. PRAESTGAARD und WELLNER [104, Example 3.1].

Um einen Grenzwertsatz formulieren zu können, müssen an dieser Stelle die Generalvoraussetzungen (E1)–(E3) überprüft werden. Es gilt das folgende Lemma:

Lemma 6.1

Sei $k(n) \rightarrow \infty$. Unter den obigen Voraussetzungen erfüllen die Gewichte (6.1) die Voraussetzungen (E1), (E2) und

$$\sum_{i=1}^{k(n)} (W'_{n,i} - \bar{W}'_n)^2 \rightarrow \rho_\eta^2 := \frac{\mathbb{E}(\eta_1^2)}{(\mathbb{E}(\eta_1))^2} - 1 > 0. \quad (6.2)$$

Beweis. Bedingung (E1) ist per Definition erfüllt und aus $\sum_{i=1}^{k(n)} D_{n,i} = 1$ folgt $\bar{W}'_n = 0$. Somit erhält man für die Summe der Quadrate

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k(n)} (W'_{n,i} - \bar{W}'_n)^2 &= k(n) \sum_{i=1}^{k(n)} \left(D_{n,i} - \frac{1}{k(n)}\right)^2 = k(n) \sum_{i=1}^{k(n)} D_{n,i}^2 - 1 \\ &= \frac{k(n) \sum_{i=1}^{k(n)} \eta_i^2}{\left(\sum_{j=1}^{k(n)} \eta_j\right)^2} - 1 \rightarrow \rho_\eta^2 \quad \text{stochastisch.} \end{aligned}$$

Schreibt man

$$\begin{aligned} &\max_{1 \leq i \leq k(n)} |W'_{n,i} - \bar{W}'_n| \\ &= \sqrt{k(n)} \max_{1 \leq i \leq k(n)} \left|D_{n,i} - \frac{1}{k(n)}\right| \\ &= \frac{1}{\bar{\eta}_n} \frac{1}{\sqrt{k(n)}} \max_{1 \leq i \leq k(n)} |\eta_i - \bar{\eta}|, \end{aligned}$$

so folgt die Voraussetzung (E2) direkt aus dem zentralen Grenzwertsatz für die i.i.d. Zufallsvariablen η_i , $i = 1, \dots, k(n)$. ■

Definiert man neue Gewichte

$$W_{n,i} := \frac{k(n)^{1/2}}{\rho_\eta} \left(D_{n,i} - \frac{1}{k(n)}\right), \quad i = 1, \dots, k(n), \quad (6.3)$$

so erfüllen diese nach Lemma 6.1 die Generalvoraussetzungen (E1)–(E3) und man kann die Limesverteilungen der Treppenfunktionen

$$\varphi_n(\cdot, u) := \frac{(k(n) - 1)^{1/2}}{(\sum_{i=1}^{k(n)} (W_{n,i} - \bar{W}_n)^2)^{1/2}} (W_{1+[k(n)u]:k(n)} - \bar{W}_n) \quad (6.4)$$

untersuchen.

Lemma 6.2

Bezeichnet F die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen η_1 , so konvergiert für die Gewichte (6.3) die Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen aus (6.4) in Verteilung in $(S, \|\cdot\|_2)$ gegen eine Limesfunktion $\varphi \in S$ mit

$$\varphi(u) := \rho_\eta^{-1} \cdot \frac{F^{-1}(u) - \mathbf{E}(\eta_1)}{\mathbf{E}(\eta_1)}.$$

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 5.5 genügt es aufgrund der Generalvoraussetzung (E2) das asymptotische Verhalten der Funktion

$$\tilde{\varphi}_n(u) := \rho_\eta^{-1} \cdot k(n) \left(D_{1+[k(n)u]:k(n)} - \frac{1}{k(n)} \right)$$

zu betrachten. Definiert man das arithmetische Mittel $\bar{\eta}_n := 1/k(n) \sum_{i=1}^{k(n)} \eta_i$ der Zufallsvariablen η_i , $i = 1 \dots, k(n)$, so gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_n(u) &= \rho_\eta^{-1} \cdot k(n) \left(\frac{\eta_{1+[k(n)u]:k(n)}}{\sum_{i=1}^{k(n)} \eta_i} - \frac{1}{k(n)} \right) \\ &= \rho_\eta^{-1} \cdot \frac{\eta_{1+[k(n)u]:k(n)} - \bar{\eta}_n}{\bar{\eta}_n}. \end{aligned}$$

Mithilfe von Konvergenzaussagen über zentrale Orderstatistiken, vgl. WITTING und MÜLLER-FUNK [128, S. 575], folgt

$$\tilde{\varphi}_n(u) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \rho_\eta^{-1} \cdot \frac{F^{-1}(u) - \mathbf{E}(\eta_1)}{\mathbf{E}(\eta_1)}.$$

Zusammen mit Lemma 4.1 und Lemma 4.3 erhält man hieraus die Verteilungskonvergenz in $(S, \|\cdot\|_1)$.

Bezeichnet U eine auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable, so ist nach Lemma 4.4

$$\text{Var}(\varphi(U)) = 1$$

äquivalent zur Verteilungskonvergenz von φ_n in $(S, \|\cdot\|_2)$. Wegen

$$\begin{aligned} \text{Var}(\varphi(U)) &= \frac{1}{\rho_\eta^2} \cdot \text{Var}\left(\frac{F^{-1}(U) - \mathbb{E}(\eta_1)}{\mathbb{E}(\eta_1)}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ist diese Bedingung bereits unter den gegebenen Voraussetzungen erfüllt. ■

Beispiel 6.3 (Bayesian-Bootstrap)

Der Bayesian-Bootstrap von RUBIN [111] stellt eine Variante des Bootstrap-Verfahrens dar, die dazu dient, die posterior Verteilung eines Parameters gegeben den Daten zu approximieren.

Wählt man $(k(n)-1)$ unabhängige auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen $U_1, \dots, U_{k(n)-1}$, so liefert für $U_{0:k(n)-1} := 0$ und $U_{k(n):k(n)-1} := 1$ der Vektor

$$\left(U_{i:k(n)-1} - U_{i-1:k(n)-1} \right)_{i=1}^{k(n)}$$

die Auswahlwahrscheinlichkeiten mit denen die Elemente von $X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)}$ in der Bayesian-Bootstrap-Stichprobe auftreten.

In diesem Fall ist $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger identisch exponentialverteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(\eta_1) = 1$ und es gilt

$$\left(U_{i:k(n)-1} - U_{i-1:k(n)-1} \right)_{i=1}^{k(n)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left(\frac{\eta_k}{\sum_{j=1}^{k(n)} \eta_j} \right)_{k=1}^{k(n)},$$

vgl. REISS [110, Theorem 1.6.7]. Unter diesen Voraussetzungen gilt für den Normierungsfaktor ρ_η^2 , dass $\rho_\eta^2 = 1$ und der Vektor $(D_{n,1}, \dots, D_{n,k(n)})$ genügt einer Dirichletverteilung zu dem Parameter $(k(n), (1, \dots, 1))$, zur Definition einer Dirichletverteilung vgl. REISS [110, S. 59].

6.2 Wild-Bootstrap mit zufälligem Stichprobenumfang

In seiner Monographie liefert MAMMEN [85, S. 14f.] zur Motivation des Wild-Bootstrap ein Resampling-Verfahren mit zufälligen poissonverteiltem Stichprobenumfang. Bezeichnet N eine poissonverteilte Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(N) = k(n)$ und definiert man für eine Bootstrap-Stichprobe $X_{n,1}^*, \dots, X_{n,k(n)}^*$

$$N_j := \#\{1 \leq i \leq N : X_{n,i}^* = X_{n,j}^*\}, \quad j = 1, \dots, k(n),$$

so sind die N_j unabhängig poissonverteilt mit $E(N_j) = 1$. In diesem Fall wählt man als Wild-Bootstrap-Gewichte

$$Z_{n,i} = N_i - 1$$

und die Anzahl der Bootstrap-Replikationen $\sum_{i=1}^{k(n)} N_j$ ist zufällig. Diese Überlegungen lassen sich auf folgende Art erweitern:

Wählt man unabhängig poissonverteilte Zufallsvariablen $(N_i)_{i=1,\dots,k(n)}$ mit $E(N_i) = m(n)/k(n)$, so liefert dies eine Auswahl mit zufälligem Bootstrap-Stichprobenumfang $\sum_{i=1}^{k(n)} N_i$, so dass $E(N_i) = m(n)$. In diesem Fall sind durch

$$Z_{n,i} := \left(\frac{k(n)}{m(n)}\right)^{1/2} \left(N_i - \frac{m(n)}{k(n)}\right) \quad (6.5)$$

neue Bootstrap-Gewichte

$$W_{n,i} = k(n)^{-1/2} Z_{n,i} \quad (6.6)$$

definiert.

Per Definition gilt $E(Z_{n,1}) = 0$ sowie $\text{Var}(Z_{n,1}) = 1$ und die Form (6.6) bildet eine spezielle Variante der Wild-Bootstrap-Gewichte aus Beispiel 2.10(c). Betrachtet man die neuen Gewichte genauer, so fällt auf, dass diese in ihrer Darstellung den $m(n)$ -Bootstrap-Gewichten ähneln.

Während beim gewöhnlichen Bootstrap-Verfahren die neuen Bootstrap-Zufallsvariablen mittels einer Multinomialverteilung bestimmt werden, ersetzt man beim modifizierten Wild-Bootstrap diese durch eine Poissonverteilung mit entsprechendem Erwartungswert.

Da es sich hier um Wild-Bootstrap-Gewichte handelt, reicht es nach Lemma 5.3 für die Gültigkeit eines Grenzwertsatzes aus,

$$Z_{n,1} \xrightarrow{D} Z_1$$

zu überprüfen, wobei $E(Z_1) = 0$ und $\text{Var}(Z_1) = 1$ gelten muss. Die entsprechenden Bedingungen liefert nun das folgende Lemma:

Lemma 6.4

Gilt $m(n)/k(n) \rightarrow c \in (0, \infty]$, so erfüllen die durch (6.6) definierten Gewichte die Generalvoraussetzungen (E1)–(E3) und die durch (4.4) definierte Folge

$(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen konvergiert in Verteilung in $(S, \|\cdot\|_2)$ gegen ein $\varphi \in S$. Für $c \in (0, \infty)$ gilt $Z_1 \stackrel{\mathcal{D}}{=} \varphi(U)$ mit

$$Z_1 \stackrel{\mathcal{D}}{=} c^{-1/2}(X - c),$$

wobei X eine standard poissonverteilte Zufallsvariable ist und für $c = \infty$ genügt die Verteilung $\mathcal{L}(Z_1)$ einer standardisierten Normalverteilung.

Beweis. Nach Lemma 5.3 genügt es für die Gültigkeit von (E1)–(E3) die Existenz einer Zufallsvariablen Z_1 mit $\mathbb{E}(Z_1) = 0$ und $\mathbb{E}(Z_1^2) = 1$ nachzuprüfen, so dass

$$Z_{n,1} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z_1.$$

Teil 1: Betrachte den Fall $m(n)/k(n) \rightarrow c \in (0, \infty)$. Sei X eine zum Parameter c poissonverteilte Zufallsvariable. Dann gilt für die charakteristische Funktion der $Z_{n,i}$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{Z_{n,1}}(t) &:= \exp\left(-it\left(\frac{m(n)}{k(n)}\right)^{1/2}\right) \exp\left(\frac{m(n)}{k(n)}\left(\exp\left(it\left(\frac{m(n)}{k(n)}\right)^{-1/2}\right) - 1\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{m(n)}{k(n)}\left(\exp\left(it\left(\frac{m(n)}{k(n)}\right)^{-1/2}\right) - 1\right) - it\left(\frac{m(n)}{k(n)}\right)^{1/2}\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\left(c\left(\exp(itc^{-1/2}) - 1\right) - itc^{1/2}\right) =: \hat{\varphi}_{Z_1}(t), \end{aligned}$$

mit $Z_1 = c^{-1/2}(X - c)$. Aus dem Stetigkeitssatz von P. Lévy, vgl. BAUER [11] folgt dann die Behauptung für $c \in (0, \infty)$.

Teil 2: Betrachtet man den Fall $m(n)/k(n) \rightarrow \infty$, so ergibt sich für die charakteristische Funktion der $Z_{n,i}$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{Z_{n,1}}(t) &= \exp\left(\frac{m(n)}{k(n)}\left(\exp\left(it\left(\frac{m(n)}{k(n)}\right)^{-1/2}\right) - 1\right) - it\left(\frac{m(n)}{k(n)}\right)^{1/2}\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Aus dem Stetigkeitssatz von P. Lévy folgt dann, dass

$$Z_{n,1} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1).$$

■

6.3 Prepivotisieren und der double-Bootstrap

Die Methode des Prepivotisierens wurde von BERAN [16] im Zusammenhang mit Konfidenzintervallen vorgeschlagen und anschließend in BERAN [17] auf Bootstrap-Tests übertragen. Ziel ist es, durch eine geeignete Transformation der Teststatistik T_n aus (3.2), diese derart umzuwandeln, dass die zugehörige Verteilung unter der Nullhypothese asymptotisch unabhängig von unbekanntem Parametern wird. In diesem Fall spricht man von einem (*asymptotischen*) *Pivot*, zur Definition vgl. BEHNEN und NEUHAUS [12, S. 367f.].

Bezeichnet $H_n^*(\cdot)$ die Bootstrap-Verteilungsfunktion von T_n unter einer Nullhypothese H_0 , so wählt BERAN [17] als neue Teststatistik

$$T_{n,1} := H_n^*(T_n). \tag{6.7}$$

Die Bootstrap-Verteilungsfunktion von $T_{n,1}$ unter H_0 ist dann analog zu (2.1) durch

$$H_{n,1}^*(x) = \mathbb{P}_{\hat{\theta}_n}^n(T_{n,1} \leq x \mid \mathbf{X}) \tag{6.8}$$

gegeben. Führt man nun bezüglich der Statistik (6.7) einen Bootstrap-Test durch, so erhält man als neuen Resampling-Test

$$\varphi_{B,1} = \begin{cases} 1 & > \\ T_n & c_n^*(c_{n,1}^*(\alpha)), \\ 0 & \leq \end{cases}$$

wobei $c_{n,1}^*(\alpha)$ mithilfe der Inversen von (6.8) analog zu (3.3) gewählt wird und $c_n^*(\cdot)$ den kritischen Wert des klassischen Bootstrap-Tests bezeichnet. Für einen zugehörigen Algorithmus zur Bestimmung der entsprechenden Verteilungsfunktion, vgl. BERAN und DUCHARME [19, Lecture 2] und Algorithmus 4.

Das Verfahren liefert nun die Idee für neue Bootstrap-Gewichte, die das zweimalige Ziehen einer Bootstrap-Stichprobe beschreiben.

Dazu bestimmt man analog zum gewöhnlichen Bootstrap von Efron eine erste Stichprobe $X_{n,1}^*, \dots, X_{n,k(n)}^*$ durch Ziehen mit Zurücklegen aus einer Grundgesamtheit $X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)}$. Aus dieser Bootstrap-Stichprobe wird erneut eine Bootstrap-Stichprobe $X_{n,1}^{**}, \dots, X_{n,k(n)}^{**}$ gewählt, mit deren Hilfe die Verteilungsfunktion analog zu (2.1) approximiert wird.

Aufgrund des zweimaligen Anwenden der klassischen Bootstrap-Idee wird dieses Verfahren auch *double-Bootstrap* oder iterativer Bootstrap genannt.

Im Folgenden soll die Methode des double-Bootstraps in der Terminologie der gewichteten Resampling-Verfahren beschrieben werden, wobei hier eine modifizierte Version betrachtet wird. Dabei sei $X_{n,1}^*, \dots, X_{n,m(n)}^*$ eine erste Bootstrap-Stichprobe, welche nach der $m(n)$ -Bootstrap-Methode gewonnen wird. Hieraus wird anschließend eine neue Stichprobe $X_{n,1}^{**}, \dots, X_{n,m(n)}^{**}$ mit Zurücklegen gezogen. Die zugehörigen Gewichte erhält man dann wie folgt:

Seien $\tilde{M}_n := (\tilde{M}_{n,1}, \dots, \tilde{M}_{n,k(n)})$ multinomialverteilte Zufallsvariablen zu einem Stichprobenumfang $m(n) = \sum_{i=1}^{k(n)} \tilde{M}_{n,i}$ und Auswahlwahrscheinlichkeiten $1/k(n)$. Dann sind gegeben \tilde{M}_n die double-Bootstrap-Gewichte definiert durch

$$W'_{n,i} := \frac{1}{m(n)^{1/2}} \left(M_{n,i} - \frac{m(n)}{k(n)} \right), \quad (6.9)$$

wobei für die Verteilung von $M_n := (M_{n,1}, \dots, M_{n,k(n)})$ die Beziehung

$$\mathcal{L}(M_n \mid \tilde{M}_n) = \mathcal{M}ult\left(m(n), \left(\frac{\tilde{M}_{n,1}}{m(n)}, \dots, \frac{\tilde{M}_{n,k(n)}}{m(n)}\right)\right)$$

gilt.

Bemerkung 6.5

(a) Für $m(n) = k(n)$ ergibt sich gerade der klassische double-Bootstrap, vgl. PRAESTGARD und WELLNER [104, Example 3.3].

(b) Der prepivoted Bootstrap und der double Bootstrap beschreiben nicht dasselbe Resampling-Verfahren. Beim Prepivoting wird neben der zweiten Bootstrap-Stichprobe $X_{n,1}^{**}, \dots, X_{n,k(n)}^{**}$ auch die erste Stichprobe $X_{n,1}^*, \dots, X_{n,k(n)}^*$ für die Bestimmung entsprechender kritischer Werte herangezogen, vgl. Algorithmus 4. □

Für die Gültigkeit eines bedingten Grenzwertsatzes müssen zunächst für die Gewichte (6.9) die Bedingungen (E1)–(E3) überprüft werden. Dazu benötigt man folgendes Lemma über Multinomialverteilungen.

Lemma 6.6

Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ eine multinomialverteilte Zufallsvariable, so dass

$$X \sim \mathcal{M}ult(n, (p_1, \dots, p_n)).$$

Dann gelten mit $n^{(k)} := n(n-1)\cdots(n-k+1)$:

$$E(X_1) = np_1,$$

$$E(X_1^2) = np_1 + n^{(2)}p_1^2,$$

$$E(X_1^3) = np_1 + 3n^{(2)}p_1^2 + n^{(3)}p_1^3,$$

$$E(X_1^4) = np_1 + 7n^{(2)}p_1^2 + 6n^{(3)}p_1^3 + n^{(4)}p_1^4,$$

und

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = -np_1p_2,$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2^2) = (n^{(3)} - nn^{(2)})p_1p_2^2 + (n^{(2)} - n^2)p_1p_2,$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1^2, X_2^2) &= (n^{(4)} - (n^{(2)})^2)p_1^2p_2^2 + (n^{(3)} - nn^{(2)})(p_1^2p_2 + p_1p_2^2) \\ &\quad + (n^{(2)} - n^2)p_1p_2. \end{aligned}$$

Beweis. Vgl. PRAESTGAARD und WELLNER [104] zusammen mit JOHNSON und KOTZ [76, Chapter 3]. ■

Mithilfe dieses Lemmas lassen sich nun die Generalvoraussetzungen (E1)–(E3) für die Gewichte (6.9) überprüfen.

Lemma 6.7

Sei $m(n)/k(n) \rightarrow c \in (0, \infty)$. Dann gelten für die $m(n)$ -double-Bootstrap-Gewichte (6.9):

(i) $(W'_{n,1}, \dots, W'_{n,k(n)})$ sind austauschbar;

(ii) $\sum_{i=1}^{k(n)} (W'_{n,i} - \bar{W}'_n)^2 \rightarrow \rho^2 = 2$ stochastisch.

Beweis. Die Austauschbarkeit ergibt sich direkt aus der Definition der Gewichte durch multinomialverteilte Zufallsvariablen. Es bleibt somit die Behauptung (ii) zu zeigen. Der Beweis erfolgt ähnlich zu PRAESTGAARD und

WELLNER [104, Lemma 3.1]. Wegen $\overline{W}'_n = 0$ betrachte

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,i}'^2 - \rho^2 &= \frac{1}{m(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} (M_{n,i} - \frac{m(n)}{k(n)})^2 - \rho^2 \\ &= \frac{1}{m(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} [M_{n,i}^2 - \mathbb{E}(M_{n,i}^2)] + \frac{k(n)}{m(n)} \mathbb{E}(M_{n,1}^2) - (\frac{m(n)}{k(n)} + \rho^2). \end{aligned}$$

Zeigt man, dass

$$\frac{1}{m(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} [M_{n,i}^2 - \mathbb{E}(M_{n,i}^2)] \rightarrow 0 \quad \text{stochastisch} \quad (6.10)$$

und

$$\frac{k(n)}{m(n)} \mathbb{E}(M_{n,1}^2) - \frac{m(n)}{k(n)} \rightarrow \rho^2, \quad (6.11)$$

so folgt die Behauptung aus dem Satz von Slutski. Die Konvergenz in (6.11) folgt aus Lemma 6.6 für $m(n)/k(n) \rightarrow c \in (0, \infty)$ wegen der Gleichung

$$\begin{aligned} &\frac{k(n)}{m(n)} \mathbb{E}(M_{n,1}^2) - \frac{m(n)}{k(n)} \\ &= \frac{k(n)}{m(n)} \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_{n,1}^2 | \tilde{M}_n)) - \frac{m(n)}{k(n)} \\ &= \frac{k(n)}{m(n)} \mathbb{E}\left(\tilde{M}_n + \frac{m(n)^{(2)}}{m(n)^2} \tilde{M}_n^2\right) - \frac{m(n)}{k(n)} \\ &= \frac{k(n)}{m(n)} \left[\frac{m(n)}{k(n)} + \frac{m(n) - 1}{m(n)} \left(\frac{m(n)}{k(n)} + \frac{m(n)^{(2)}}{k(n)^2} \right) \right] - \frac{m(n)}{k(n)} \\ &= 1 + \frac{m(n) - 1}{m(n)} \left(1 + \frac{m(n) - 1}{k(n)} \right) - \frac{m(n)}{k(n)} \rightarrow 2 = \rho^2. \end{aligned}$$

Definiert man

$$\text{Cov}(M_{n,1}^2, M_{n,2}^2 | \tilde{M}_n) := \mathbb{E}(M_{n,1}^2 M_{n,2}^2 | \tilde{M}_n) - \mathbb{E}(M_{n,1}^2 | \tilde{M}_n) \mathbb{E}(M_{n,2}^2 | \tilde{M}_n),$$

so gilt

$$\begin{aligned} &\text{Cov}(M_{n,1}^2, M_{n,2}^2) \\ &= \mathbb{E}(\text{Cov}(M_{n,1}^2, M_{n,2}^2 | \tilde{M}_n)) + \text{Cov}(\mathbb{E}(M_{n,1}^2 | \tilde{M}_n), \mathbb{E}(M_{n,2}^2 | \tilde{M}_n)), \end{aligned}$$

vgl. PRAESTGAARD und WELLNER [104, Example 3.3]. Nach Lemma 6.6 erhält man

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}(\text{Cov}(M_{n,1}, M_{n,2} | \tilde{M}_n)) \\
 &= \mathbb{E} \left[\frac{m(n)^{(4)} - (m(n)^{(2)})^2}{m(n)^4} \tilde{M}_{n,1} \tilde{M}_{n,2} \right. \\
 &\quad + \frac{m(n)^{(3)} - m(n)m(n)^{(2)}}{m(n)^3} (\tilde{M}_{n,1}^2 \tilde{M}_{n,2} - \tilde{M}_{n,1} \tilde{M}_{n,2}^2) \\
 &\quad \left. + \frac{m(n)^{(2)} - m(n)^2}{m(n)^2} \tilde{M}_{n,1} \tilde{M}_{n,2} \right] \leq 0,
 \end{aligned}$$

da alle Koeffizienten negativ sind. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
 & \text{Cov} \left(\mathbb{E}(M_{n,1}^2 | \tilde{M}_n), \mathbb{E}(M_{n,2} | \tilde{M}_n) \right) \\
 &= \text{Cov} \left(\tilde{M}_{n,1} + \frac{m(n)^{(2)}}{m(n)^2} \tilde{M}_{n,1}^2, \tilde{M}_{n,2} + \frac{m(n)^{(2)}}{m(n)^2} \tilde{M}_{n,2}^2 \right) \\
 &= \text{Cov}(\tilde{M}_{n,1}, \tilde{M}_{n,2}) + \left(\frac{m(n)^{(2)}}{m(n)^2} \right)^2 \text{Cov}(\tilde{M}_{n,1}^2, \tilde{M}_{n,2}^2) \\
 &\quad + \frac{m(n)^{(2)}}{m(n)^2} \text{Cov}(\tilde{M}_{n,1}^2, \tilde{M}_{n,2}) + \frac{m(n)^{(2)}}{m(n)^2} \text{Cov}(\tilde{M}_{n,1}, \tilde{M}_{n,2}^2) < 0,
 \end{aligned}$$

da alle Koeffizienten negativ sind. Aus der Tschebyscheff'schen Ungleichung folgt dann, dass

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\mathbb{P}} \left(\left| \frac{1}{m(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} (M_{n,i}^2 - \mathbb{E}(M_{n,i}^2)) \right| \geq \varepsilon \right) \\
 & \leq \varepsilon^{-2} m(n)^{-2} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^{k(n)} (M_{n,i}^2 - \mathbb{E}(M_{n,i}^2)) \right) \\
 & \leq \varepsilon^{-2} m(n)^{-2} \sum_{i=1}^{k(n)} \mathbb{E} \left((M_{n,i}^2 - \mathbb{E}(M_{n,i}^2))^2 \right) \\
 & \leq \varepsilon^{-2} m(n)^{-2} k(n) \mathbb{E} \left((M_{n,1}^2 - \mathbb{E}(M_{n,1}^2))^2 \right). \tag{6.12}
 \end{aligned}$$

Berechnet man den Erwartungswert, so folgt unter Lemma 6.6 und der Voraussetzung an die Resampling-Intensität $m(n)/k(n) \rightarrow c \in (0, \infty)$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}\left(\left(M_{n,1}^2 - \mathbb{E}(M_{n,1}^2)\right)^2\right) \\
 &= \mathbb{E}(M_{n,1}^4) - [\mathbb{E}(M_{n,1}^2)]^2 \\
 &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_{n,1}^4 | \tilde{M}_n)) - [\mathbb{E}(\mathbb{E}(M_{n,1}^2 | \tilde{M}_n))]^2 \\
 &= \frac{m(n)^{(4)}}{m(n)^4} \left(\frac{m(n)^{(4)}}{k(n)^4} + 6 \frac{m(n)^{(3)}}{k(n)^3} + 7 \frac{m(n)^{(2)}}{k(n)^2} + \frac{m(n)}{k(n)} \right) \\
 &\quad + 6 \frac{m(n)^{(3)}}{m(n)^3} \left(\frac{m(n)^{(3)}}{k(n)^3} + 3 \frac{m(n)^{(2)}}{k(n)^2} + \frac{m(n)}{k(n)} \right) \\
 &\quad + 7 \frac{m(n)^{(2)}}{m(n)^2} \left(\frac{m(n)^{(2)}}{k(n)^2} + \frac{m(n)}{k(n)} \right) + \frac{m(n)}{k(n)} \\
 &\quad - \left[\frac{m(n)}{k(n)} + \frac{m(n)^{(2)}}{m(n)^2} \left(\frac{m(n)}{k(n)} + \frac{m(n)^{(2)}}{k(n)^2} \right) \right]^2 \leq \tilde{K} = \text{const.}
 \end{aligned}$$

Zusammen mit (6.12) folgt hieraus die Konvergenz

$$\varepsilon^{-2} m(n)^{-2} k(n) \mathbb{E}\left(\left(M_{n,1}^2 - \mathbb{E}(M_{n,1}^2)\right)^2\right) \rightarrow 0$$

und somit ist die Behauptung gezeigt. ■

Lemma 5.2 liefert die Gültigkeit der beiden Generalvoraussetzungen (E1) und (E3). Für den Nachweis von (E2) verwendet man wieder die Eigenschaften multinomialverteilter Zufallsvariablen, welche in Lemma 6.6 zusammengefasst sind.

Lemma 6.8

Die $m(n)$ -double-Bootstrap-Gewichte (6.9) erfüllen für $m(n)/k(n) \rightarrow c \in (0, \infty)$ die Bedingung

$$\max_{1 \leq i \leq k(n)} |W'_{n,i} - \overline{W}'_n| \rightarrow 0 \quad \text{stochastisch.}$$

Beweis. Aus der Markov'schen Ungleichung folgt zusammen mit $\overline{W}'_n = 0$,

dass

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbb{P}}\left(\max_{1 \leq i \leq k(n)} |W'_{n,i} - \bar{W}'_n| \geq \varepsilon\right) &\leq \sum_{i=1}^{k(n)} \tilde{\mathbb{P}}(\{|W'_{n,i}| \geq \varepsilon\}) \\
 &= \sum_{i=1}^{k(n)} \tilde{\mathbb{P}}\left(\left\{|M_{n,i} - \frac{m(n)}{k(n)}\right| \geq m(n)^{1/2}\varepsilon\right\}) \\
 &\leq \sum_{i=1}^{k(n)} m(n)^{-2}\varepsilon^{-4} \mathbb{E}\left(\left(M_{n,i} - \frac{m(n)}{k(n)}\right)^4\right) \tag{6.13}
 \end{aligned}$$

Zeigt man, dass der Erwartungswert in (6.13) durch eine Konstante K beschränkt ist, so folgt hieraus unmittelbar die Behauptung. Aus der Definition der multinomialverteilten Zufallsvariablen $M_{n,j}, j = 1, \dots, k(n)$, erhält man, dass

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left(\left(M_{n,i} - \frac{m(n)}{k(n)}\right)^4\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\left(M_{n,1} - \frac{m(n)}{k(n)}\right)^4 \middle| \tilde{M}_n\right)\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(M_{n,1}^4 | \tilde{M}_n) - 4\frac{m(n)}{k(n)} \mathbb{E}(M_{n,1}^3 | \tilde{M}_n) + 6\left(\frac{m(n)}{k(n)}\right)^2 \mathbb{E}(M_{n,1}^2 | \tilde{M}_n) \right. \\
 &\quad \left. - 4\left(\frac{m(n)}{k(n)}\right)^3 \mathbb{E}(M_{n,1} | \tilde{M}_n) + \left(\frac{m(n)}{k(n)}\right)^4\right).
 \end{aligned}$$

Mit den in Lemma 6.6 angegebenen Rechenregeln erhält man hieraus, dass

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\left(M_{n,1} - \frac{m(n)}{k(n)}\right)^4 \middle| \tilde{M}_n\right)\right) \\
 &= \frac{m(n)^4}{m(n)^4} \mathbb{E}(\tilde{M}_{n,1}^4) + 6\frac{m(n)^3}{m(n)^3} \mathbb{E}(\tilde{M}_{n,1}^3) + 7\frac{m(n)^2}{m(n)^2} \mathbb{E}(\tilde{M}_{n,1}^2) + \mathbb{E}(\tilde{M}_{n,1}) \\
 &\quad - 4\frac{m(n)}{k(n)} \frac{m(n)^3}{m(n)^3} \mathbb{E}(\tilde{M}_{n,1}^3) - 12\frac{m(n)}{k(n)} \frac{m(n)^2}{m(n)^2} \mathbb{E}(\tilde{M}_{n,1}^2) - 4\frac{m(n)}{k(n)} \mathbb{E}(\tilde{M}_{n,1}) \\
 &\quad + 6\left(\frac{m(n)}{k(n)}\right)^2 \frac{m(n)^2}{m(n)^2} \mathbb{E}(\tilde{M}_{n,1}^2) + 6\left(\frac{m(n)}{k(n)}\right)^2 \mathbb{E}(\tilde{M}_{n,1}) \\
 &\quad - 4\left(\frac{m(n)}{k(n)}\right)^3 \mathbb{E}(\tilde{M}_{n,1}) + \left(\frac{m(n)}{k(n)}\right)^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{m(n)^4}{m(n)^4} \left[\frac{m(n)^4}{k(n)^4} + 6 \frac{m(n)^3}{k(n)^3} + 7 \frac{m(n)^2}{k(n)^2} + \frac{m(n)}{k(n)} \right] \\
 &\quad + \frac{m(n)^3}{m(n)^3} \left[6 - 4 \frac{m(n)}{k(n)} \right] \left[\frac{m(n)^3}{k(n)^3} + 3 \frac{m(n)^2}{k(n)^2} + \frac{m(n)}{k(n)} \right] \\
 &\quad + \frac{m(n)^2}{m(n)^2} \left[7 - 12 \frac{m(n)}{k(n)} + 6 \left(\frac{m(n)}{k(n)} \right)^2 \right] \left[\frac{m(n)^2}{k(n)^2} + \frac{m(n)}{k(n)} \right] \\
 &\quad + \left[1 - 4 \frac{m(n)}{k(n)} + 6 \left(\frac{m(n)}{k(n)} \right) - 4 \left(\frac{m(n)}{k(n)} \right)^3 \right] \frac{m(n)}{k(n)} + \left(\frac{m(n)}{k(n)} \right)^4 \\
 &\leq K = \text{const.}
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt, dass

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{P}(\{ \max_{1 \leq i \leq k(n)} |W'_{n,i} - \bar{W}'_n| \geq \varepsilon \}) \\
 &\leq \frac{k(n)}{m(n)^2} \varepsilon^{-4} K \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

und somit folgt die Behauptung. ■

Aus diesen Überlegungen lassen sich nun neue Gewichte definieren, welche die Generalvoraussetzungen (E1)–(E3) erfüllen und somit in die weiteren Untersuchungen eingebunden werden können.

Korollar 6.9

Definiert man

$$W_{n,i} := \frac{m(n)^{1/2}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{m(n)} M_{n,i} - \frac{1}{k(n)} \right), \quad (6.14)$$

so erfüllen diese die Generalvoraussetzungen (E1)–(E3).

Beweis. Vgl. Lemma 6.7 und 6.8. ■

Nachdem die Generalvoraussetzungen (E1)–(E3) für die aus dem $m(n)$ -double-Bootstrap resultierenden Gewichte überprüft wurden, kann man sich mit der Frage beschäftigen, wann und unter welchen Voraussetzungen die Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen schwach konvergent in $(S, \|\cdot\|_2)$ ist.

Bei den wissenschaftlichen Untersuchungen hierzu stellte sich heraus, dass die Behandlung dieser Fragestellung mit den in dieser Arbeit verwendeten Methoden zu keinem zufriedenstellendem Ergebnis führt. Erste Ergebnisse zeigen jedoch, dass mit einer neu entwickelten Theorie entsprechende Konvergenzaussagen für die Gewichte (6.14) getroffen werden können. Dabei stellt sich heraus, dass unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen schwache Konvergenz der Folge von Treppenfunktionen $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(S, \|\cdot\|_2)$ vorliegt. Dies soll jedoch der Gegenstand weiterer wissenschaftlicher Studien sein, da mit der Aufnahme entsprechender Ergebnisse der Umfang dieser Arbeit nicht mehr zu kontrollieren wäre.

Kapitel 7

Grenzwertsätze für studentisierte Resampling-Statistiken

Bei der Behandlung studentisierter Resampling-Statistiken wurden bisher solche Statistiken betrachtet, deren Nenner nicht in das Resampling-Verfahren mit eingebunden sind. HALL und WILSON [59] beschreiben in ihrer Arbeit, dass insbesondere beim Testen von Hypothesen der Nenner durch das Resampling-Verfahren berücksichtigt werden soll, vgl. hierzu auch BERAN [17], BICKEL und FREEDMAN [22], sowie MASON und SHAO [90] für weitere theoretische Ergebnisse zu studentisierte Statistiken.

Sei $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ ein Dreiecksschema von reellwertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $k(n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

Im Folgenden sollen die Resampling-Gewichte $(W_{n,i})_{i \leq k(n)}$ mittels neuer Gewichtsfunktionen $(\tilde{W}_{n,i})_{i \leq k(n)}$ in der Form

$$W_{n,i} = m(n)^{1/2} \left(\tilde{W}_{n,i} - \frac{1}{k(n)} \right) \quad (7.1)$$

darstellbar sein. Weiter gelte, dass $\overline{W}_n = 0$.

Beispiel 7.1

(a) ($m(n)$ -**bootstrap**) Betrachtet man die $m(n)$ -Bootstrap-Gewichte aus Beispiel 2.10(a), so gilt für multinomialverteilte Zufallsvariablen $(M_{n,i})_{i \leq k(n)}$, dass

$$\tilde{W}_{n,i} = \frac{1}{m(n)} M_{n,i}, \quad 1 \leq i \leq k(n).$$

(b) (**Bayesian-Bootstrap**) Wählt man die Bayesian-Bootstrap-Gewichte aus Beispiel 6.3, so gilt unter der Voraussetzung $m(n) = k(n)$ für dirichletverteilte Zufallsvariablen $(D_{n,i})_{i \leq k(n)}$, dass

$$\tilde{W}_{n,i} = D_{n,i}.$$

Ziel dieses Kapitels ist es basierend auf der Teststatistik T_n^* (2.9) studentisierte Statistiken der Form

$$\tilde{T}_n^* := \frac{T_n^*}{(V_n^*)^{1/2}} \quad (7.2)$$

mit einem geeigneten Schätzer V_n^* herzuleiten und zu beweisen.

Unter diesen Voraussetzungen lassen sich bedingte zentrale Grenzwertsätze für Resampling-Statistiken formulieren. Dazu wird das folgende Gesetz der großen Zahlen benötigt.

Lemma 7.2

Die Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen aus (4.4) konvergiere schwach in $(S, \|\cdot\|_2)$ und sei $m(n)/k(n) \rightarrow c \in (0, \infty)$, sowie

- (a) $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$;
- (b) $X_{i:k(n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \forall i \in \mathbb{N}$ und $X_{k(n)+1-j:k(n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \forall j \in \mathbb{N}$;
- (c) $\sum_{i=1}^{k(n)} (X_{n,i} - \bar{X}_n)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2 > 0$;
- (d) $k(n)(\bar{X}_n)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Dann folgt die bedingte Konvergenz

$$\mathcal{L}\left(m(n) \sum_{i=1}^{k(n)} \tilde{W}_{n,i} X_{n,i}^2 \mid X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)}\right) \xrightarrow{w} \varepsilon_{c\sigma^2} \quad (7.3)$$

\mathbb{P} -stochastisch.

Beweis. Schreibt man

$$\sum_{i=1}^{k(n)} (X_{n,i} - \bar{X}_n)^2 = \sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i}^2 - k(n)(\bar{X}_n)^2,$$

so folgt aus den Voraussetzungen (c) und (d), dass

$$\sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i}^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2 \quad (7.4)$$

und somit

$$\frac{1}{k(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i}^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Zeigt man nun, dass

$$\sum_{i=1}^{k(n)} \left(X_{n,i}^2 - \frac{1}{k(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i}^2 \right)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad (7.5)$$

so sind für das Dreiecksschema $(X_{n,i}^2)_{i \leq k(n)}$ alle Voraussetzungen von Satz 4.9 erfüllt und für die zugehörige Resampling-Statistik

$$\begin{aligned} \hat{T}_n^* &= k(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,i} X_{n,i}^2 \\ &= k(n)^{1/2} m(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} \tilde{W}_{n,i} X_{n,i}^2 - \frac{m(n)^{1/2}}{k(n)^{1/2}} \sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i}^2 \end{aligned}$$

folgt unter der Voraussetzung $m(n)/k(n) \rightarrow c \in (0, \infty)$ die bedingte Konvergenz

$$\mathcal{L}\left(\frac{m(n)^{1/2}}{k(n)^{1/2}} \hat{T}_n^* \mid X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)}\right) \xrightarrow{w} \varepsilon_0 \quad \mathbb{P}\text{-stochastisch.}$$

und somit gilt zusammen mit (7.4) die Behauptung.

Im Folgenden soll (7.5) gezeigt werden. Wegen (b) gilt $\max X_{n,i}^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ und somit

$$\sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i}^4 \leq \max X_{n,i}^2 \sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i}^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \quad (7.6)$$

Schreibt man

$$\sum_{i=1}^{k(n)} \left(X_{n,i} - \frac{1}{k(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i}^2 \right)^2 = \sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i}^4 - k(n) \left(\frac{1}{k(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i}^2 \right)^2,$$

so erhält man (7.5) unmittelbar aus (7.4) und (7.6). ■

Beispiel 7.3 (Fortsetzung Beispiel 7.1)

(a) (**$m(n)$ -Bootstrap**) Sei $X_{n,1}^*, \dots, X_{n,m(n)}^*$ eine Bootstrap-Stichprobe, welche durch Ziehen mit Zurücklegen aus $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ gewonnen wurde. Dann gilt für die Summe der Quadrate

$$\sum_{i=1}^{m(n)} X_{n,i}^{*2} = m(n) \sum_{i=1}^{k(n)} \tilde{W}_{n,i} X_{n,i}^2.$$

(b) (**Bayesian-Bootstrap**) Betrachtet man dass in Beispiel 6.3 beschriebene Verfahren, so lässt sich die Summe der Quadrate der Resampling-Variablen schreiben als

$$\sum_{i=1}^{k(n)} D_{n,i} X_{n,i}^2.$$

Das Lemma ermöglicht nun, einen bedingten zentralen Grenzwertsatz für studentisierte Resampling-Statistiken der Form (7.2) zu formulieren und mithilfe der vorangegangenen Aussagen zu beweisen.

Satz 7.4

Unter den Voraussetzungen von Lemma 7.2 gilt

$$\mathcal{L}\left(\frac{\left(\frac{m(n)}{k(n)}\right)^{1/2} T_n^*}{(V_n^*)^{1/2}} \mid X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)}\right) \xrightarrow{w} N(0, 1) \quad (7.7)$$

\mathbb{P} -stochastisch mit

$$V_n^* := m(n) \sum_{i=1}^{k(n)} \tilde{W}_{n,i} X_{n,i}^2 - m(n) \left(\sum_{i=1}^{k(n)} \tilde{W}_{n,i} X_{n,i}\right)^2.$$

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen (a)–(d) und $m(n)/k(n) \rightarrow c \in (0, \infty)$ sind alle Bedingungen von Theorem 4.9 erfüllt und für

$$\frac{m(n)^{1/2}}{k(n)^{1/2}} T_n^* = m(n) \sum_{i=1}^{k(n)} \tilde{W}_{n,i} X_{n,i} - \frac{m(n)}{k(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i} \quad (7.8)$$

gilt

$$\mathcal{L}(T_n^* \mid X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)}) \xrightarrow{w} N(0, \sigma^2) \quad \mathbb{P}\text{-stoch.}$$

und somit

$$\mathcal{L}\left(\frac{m(n)^{1/2}}{k(n)^{1/2}} T_n^* \mid X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)}\right) \xrightarrow{w} N(0, c\sigma^2) \quad \mathbb{P}\text{-stoch.}$$

Aus der bedingten Konvergenz von (7.8) folgt

$$\mathcal{L}\left(m(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} \tilde{W}_{n,i} X_{n,i} - \frac{m(n)^{1/2}}{k(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i} \mid X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)}\right) \xrightarrow{w} \varepsilon_0$$

und somit wegen

$$\frac{1}{k(n)^{1/2}} \sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

gilt die bedingte Konvergenz

$$\mathcal{L}\left(m(n)\left(\sum_{i=1}^{k(n)} \tilde{W}_{n,i} X_{n,i}\right)^2 \mid X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)}\right) \xrightarrow{w} \varepsilon_0 \quad \mathbb{P}\text{-stoch.} \quad (7.9)$$

Betrachtet man

$$V_n^* = m(n) \sum_{i=1}^{k(n)} \tilde{W}_{n,i} X_{n,i}^2 - m(n) \left(\sum_{i=1}^{k(n)} \tilde{W}_{n,i} X_{n,i}\right)^2,$$

so folgt aus (7.9) zusammen mit Lemma 7.2, dass

$$\mathcal{L}(V_n^* \mid X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)}) \xrightarrow{w} \varepsilon_{c\sigma^2} \quad \mathbb{P}\text{-stoch.}$$

und somit ist die Behauptung gezeigt. ■

Beispiel 7.5 (Fortsetzung Beispiel 7.1(a))

Sei $X_{n,1}^*, \dots, X_{n,m(n)}^*$ die Bootstrap-Stichprobe vom Stichprobenumfang $m(n)$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} V_n^* &= m(n) \sum_{i=1}^{k(n)} \tilde{W}_{n,i} X_{n,i} - m(n) \left(\sum_{i=1}^{k(n)} \tilde{W}_{n,i} X_{n,i}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m(n)} (X_{n,i}^* - \bar{X}_n^*)^2. \end{aligned}$$

Bemerkung 7.6

Bezeichnet $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ ein infinitesimales Dreiecksschema von zeilenweise unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$\sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i} \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi \sim N(0, \sigma^2),$$

so sind die Voraussetzungen (a)–(d) aus Lemma 7.2 bereits erfüllt, vgl. ARAUJO und GINÉ [1, Exercise 2.3.1] sowie Abschnitt B.4. □

Kapitel 8

Ein multivariater zentraler Grenzwertsatz

In vielen praktischen Situationen liegen dem Anwender mehrdimensionale Daten vor, mittels derer Entscheidungen getroffen werden müssen. In diesem Kapitel soll ein multivariater Grenzwertsatz für Dreiecksschemata $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ von zeilenweise unabhängigen \mathbb{R}^d -wertigen Zufallsvariablen hergeleitet werden. Dazu zieht man sich mithilfe des Cramér-Wold-Device, vgl. WITTING und MÜLLER-FUNK [128, Korollar 5.69], auf den eindimensionalen Fall zurück und überprüft die Konsistenz der Resampling-Statistiken mittels der Ergebnisse aus den vorigen Kapiteln für jede Linearkombination. Der Beweisschluss erfolgt dann mit einem modifizierten Cramér-Wold-Device, vgl. Satz 8.2.

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ sei $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^d x_i y_i$ das Euklidische Skalarprodukt und $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ die zugehörige Euklidische Norm.¹

Sei $(\mathbf{X}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. \mathbb{R}^d -wertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Betrachtet man die durch (2.10) definierten $m(n)$ -Bootstrap-Gewichte $(W_{n,i})_{i \leq k(n)}$ mit

$$W_{n,i} := m(n)^{1/2} \left(\frac{1}{m(n)} M_{n,i} - \frac{1}{k(n)} \right),$$

so gilt für ein durch $\mathbf{X}_{n,i} := 1/k(n)^{1/2} \mathbf{X}_i, i = 1, \dots, k(n)$, definiertes Dreiecks-

¹Alle auftretenden Vektoren sind als Spaltenvektoren aufzufassen und werden durch fett gedruckte Buchstaben dargestellt; ^t bezeichnet in diesem Zusammenhang die Transposition.

schema $(\mathbf{X}_{n,i})_{i \leq k(n)}$, dass

$$\mathcal{L}(k(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,i} \mathbf{X}_{n,i} \mid \mathbf{X}_{n,1}, \dots, \mathbf{X}_{n,k(n)}) \xrightarrow{w} \mathbf{N}(0, \Gamma) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher,} \quad (8.1)$$

falls $E(\|\mathbf{X}_1\|^2) < \infty$, vgl. BICKEL und FREEDMAN [22].

SEPANSKI [115] zeigt in seiner Arbeit, dass die Voraussetzung $E(\|\mathbf{X}_1\|^2) < \infty$ notwendig für die fast sichere Konvergenz in (8.1) ist. Liegt die Verteilung $\mathcal{L}(\mathbf{X}_1)$ im allgemeinen Anziehungsbereich einer d -dimensionalen Normalverteilung, d.h. es existiert eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Matrizen und eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Vektoren, so dass

$$\mathcal{L}\left(A_n \sum_{i=1}^n X_i - v_n\right) \xrightarrow{w} \mathbf{N}(0, \mathbf{I}), \quad (8.2)$$

so ist dies notwendig und hinreichend für die stochastische Konvergenz in (8.1), vgl. SEPANSKI [115, 116].

Ausgehend von diesen Untersuchungen und den Ergebnissen aus den vorigen Kapiteln sollen an dieser Stelle allgemeine bedingte Grenzwertsätze für multivariate Resampling-Statistiken formuliert und bewiesen werden. Dabei sei im Folgenden $(\mathbf{X}_{n,i})_{i \leq k(n)}$ ein Dreiecksschema von zeilenweise unabhängigen \mathbb{R}^d -wertigen Zufallsvariablen $\mathbf{X}_{n,i} = (X_{n,i}^{(1)}, \dots, X_{n,i}^{(d)})^t$, $i = 1, \dots, k(n)$, auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Definition 8.1 (Multivariate Resampling-Statistik)

Sei $(\mathbf{X}_{n,i})_{i \leq k(n)}$ ein Dreiecksschema von zeilenweise unabhängigen \mathbb{R}^d -wertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $(W_{n,i})_{i \leq k(n)}$ ein von $(\mathbf{X}_{n,i})_{i \leq k(n)}$ unabhängiges Dreiecksschema von Resampling-Gewichten auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$. Dann ist eine **(multivariate) Resampling-Statistik** definiert durch

$$T_n^* := k(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,i} (\mathbf{X}_{n,i} - \bar{\mathbf{X}}_n). \quad (8.3)$$

Für die Untersuchungen von (8.3) wird folgender modifizierter Cramér-Wold-Device verwendet:

Satz 8.2

Sei $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine straffe Folge von Zufallsvariablen $\xi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ und bezeichne

$D := \{\boldsymbol{\lambda}_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge in \mathbb{R}^d . Gilt

$$\langle \boldsymbol{\xi}_n, \boldsymbol{\lambda}_k \rangle \xrightarrow{\mathcal{D}} \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}_k \rangle \quad \forall \boldsymbol{\lambda}_k \in D, \quad (8.4)$$

so folgt

$$\boldsymbol{\xi}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \boldsymbol{\xi} \quad \text{in } \mathbb{R}^d.$$

Beweis. Nach dem Satz von Prohorov ist die Folge $(\boldsymbol{\xi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ relativkompakt, d.h. zu jeder Teilfolge $\{n'\} \subset \mathbb{N}$ existiert eine weitere Teilfolge $\{n''\} \subset \mathbb{N}$ und ein $\boldsymbol{\xi}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, so dass

$$\boldsymbol{\xi}_{n''} \xrightarrow{\mathcal{D}} \boldsymbol{\xi}_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d.$$

Aus dem Stetigkeitssatz, vgl. BAUER [11], folgt für die zugehörigen charakteristischen Funktionen, dass für alle $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d$

$$\hat{\varphi}_{\boldsymbol{\xi}_{n''}}(\boldsymbol{t}) \rightarrow \hat{\varphi}_{\boldsymbol{\xi}_0}(\boldsymbol{t}). \quad (8.5)$$

Nach Voraussetzung (8.4) gilt für alle $\boldsymbol{\lambda}_k \in D$

$$\langle \boldsymbol{\xi}_n, \boldsymbol{\lambda}_k \rangle \xrightarrow{\mathcal{D}} \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}_k \rangle$$

und somit

$$\mathbb{E}[\exp(is \langle \boldsymbol{\lambda}_k, \boldsymbol{\xi}_n \rangle)] \rightarrow \mathbb{E}[\exp(is \langle \boldsymbol{\lambda}_k, \boldsymbol{\xi} \rangle)] \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Aus der Darstellung der charakteristischen Funktionen von $\boldsymbol{\xi}_n$ und $\boldsymbol{\xi}$ folgt dann für alle $\boldsymbol{\lambda}_k \in D$, dass

$$\hat{\varphi}_{\boldsymbol{\xi}_n}(\boldsymbol{\lambda}_k) \rightarrow \hat{\varphi}_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\lambda}_k). \quad (8.6)$$

Wegen (8.5) und (8.6) stimmen die beiden Limesfunktionen auf der dichten Teilmenge D des \mathbb{R}^d überein, d.h. für alle $\boldsymbol{\lambda}_k \in D$ gilt

$$\hat{\varphi}_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\lambda}_k) = \hat{\varphi}_{\boldsymbol{\xi}_0}(\boldsymbol{\lambda}_k),$$

und wegen der Stetigkeit der Funktionen folgt

$$\hat{\varphi}_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{t}) = \hat{\varphi}_{\boldsymbol{\xi}_0}(\boldsymbol{t}) \quad \forall \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d.$$

Somit konvergiert für jede Teilfolge $\{n''\} \subset \mathbb{N}$ die charakteristische Funktion von $\boldsymbol{\xi}_{n''}$ stets gegen dieselbe Limesfunktion $\hat{\varphi}_{\boldsymbol{\xi}}$, d.h.

$$\hat{\varphi}_{\boldsymbol{\xi}_{n''}} \rightarrow \hat{\varphi}_{\boldsymbol{\xi}}$$

und somit

$$\boldsymbol{\xi}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \boldsymbol{\xi} \quad \text{in } \mathbb{R}^d,$$

vgl. BILLINGSLEY [24, Theorem 2.3]. ■

Dieses Lemma bildet die Grundlage für den Beweis eines multivariaten Grenzwertsatzes für Resampling-Statistiken (8.3) mit austauschbaren Gewichten. Dabei bedient man sich wiederum der Theorie unendlich teilbarer Maße und Aussagen über Grenzverteilungen von Summen unabhängiger \mathbb{R}^d -wertiger Zufallsvariablen, die sich aus den in Abschnitt B dargestellten Ergebnissen gewinnen lassen, vgl. MEERSCHAERT und SCHEFFLER [91, Section 3] bzw. RVAČEVA [113].

Im Folgenden betrachte man ein Dreiecksschema $(\mathbf{X}_{n,i})_{i \leq k(n)}$ zeilenweise unabhängiger Zufallsvariablen in \mathbb{R}^d mit Verteilungsfunktionen $F_{n,j}$, $j = 1, \dots, k(n)$, so dass für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq k(n)} \mathbb{P}(\|\mathbf{X}_{n,i}\| \geq \varepsilon) = 0 \quad (8.7)$$

gilt.

Definition 8.3

Ein Dreiecksschema $(\mathbf{X}_{n,i})_{i \leq k(n)}$ von vektorwertigen Zufallsvariablen in \mathbb{R}^d auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, welches die Bedingung (8.7) erfüllt, heißt **infinitesimal** oder (asymptotisch) vernachlässigbar.

Aus den vorigen Untersuchungen über die Gültigkeit bedingter und unbedingter Grenzwertsätze im univariaten Fall weiß man, dass Resampling-Verfahren i.Allg. dann konsistent sind, wenn die wahre Limesverteilung einer Normalverteilung entspricht, vgl. Satz 4.18 zusammen mit Korollar 4.17. Aufgrund dessen soll sich an dieser Stelle auf den Normalverteilungsfall zurückgezogen werden. Für das Dreiecksschema $(\mathbf{X}_{n,i})_{i \leq k(n)}$ von Zufallsvariablen gelte stets

$$\sum_{i=1}^{k(n)} \mathbf{X}_{n,i} \xrightarrow{\mathcal{D}} \boldsymbol{\xi} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (8.8)$$

mit einer positiv semidefiniten Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$. Dann lässt sich folgender bedingter zentrale Grenzwertsatz für multivariate Resampling-Statistiken beweisen:

Satz 8.4

Konvergiert die durch (4.4) definierte Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen in Verteilung in $(S, \|\cdot\|_2)$ gegen ein $\varphi \in S$, so gilt

$$\mathcal{L}(T_n^* \mid \mathbf{X}_{n,1}, \dots, \mathbf{X}_{n,k(n)}) \xrightarrow{w} \mathbf{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad \mathbb{P}\text{-stoch.} \quad (8.9)$$

Beweis. Nach dem Cramér-Wold-Device, vgl. WITTING und MÜLLER-FUNK [128], gilt für alle $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^d$

$$\left\langle \sum_{i=1}^{k(n)} \mathbf{X}_{n,i}, \boldsymbol{\lambda} \right\rangle \xrightarrow{\mathcal{D}} \left\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda} \right\rangle \sim N(0, \boldsymbol{\lambda}^t \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\lambda}). \quad (8.10)$$

Die Folge $(\langle \mathbf{X}_{n,i}, \boldsymbol{\lambda} \rangle)_{i \leq k(n)}$ bildet für alle $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^d$ ein neues infinitesimales Dreiecksschema von Zufallsvariablen in \mathbb{R} . Nach PETROV [97, Theorem 4.1] ist (8.10) für alle $\varepsilon > 0$ äquivalent zu (8.11a)–(8.11c):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k(n)} \mathbb{E}(\langle \mathbf{X}_{n,i}, \boldsymbol{\lambda} \rangle \mathbf{1}(|\langle \mathbf{X}_{n,i}, \boldsymbol{\lambda} \rangle| < \varepsilon)) = 0; \quad (8.11a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k(n)} \left[\mathbb{E}(\langle \mathbf{X}_{n,i}, \boldsymbol{\lambda} \rangle^2 \mathbf{1}(|\langle \mathbf{X}_{n,i}, \boldsymbol{\lambda} \rangle| < \varepsilon)) \right. \\ \left. - \left(\mathbb{E}(\langle \mathbf{X}_{n,i}, \boldsymbol{\lambda} \rangle \mathbf{1}(|\langle \mathbf{X}_{n,i}, \boldsymbol{\lambda} \rangle| < \varepsilon)) \right)^2 \right] = \boldsymbol{\lambda}^t \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\lambda}; \quad (8.11b)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k(n)} \mathbb{P}(|\langle \mathbf{X}_{n,i}, \boldsymbol{\lambda} \rangle| \geq \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (8.11c)$$

Hieraus folgt für alle $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^d$, dass

$$\sum_{i=1}^{k(n)} \langle \mathbf{X}_{n,i}, \boldsymbol{\lambda} \rangle^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \boldsymbol{\lambda}^t \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\lambda},$$

vgl. ARAUJO und GINÉ [1, S. 55] und Bemerkung 8.5.

Wegen (8.8) gilt nun die Voraussetzung (4.13) und Satz 4.9 lässt sich für alle $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^d$ auf eindimensionale Resampling-Statistiken der Form

$$T_n^{*,\boldsymbol{\lambda}} := \langle T_n^*, \boldsymbol{\lambda} \rangle = k(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,i} (\langle \mathbf{X}_{n,i}, \boldsymbol{\lambda} \rangle - \langle \bar{\mathbf{X}}_n, \boldsymbol{\lambda} \rangle)$$

anwenden. Somit konvergiert entlang einer Teilfolge $\{m\} \subset \mathbb{N}$ für alle $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^d$ und alle $\omega \in N_{\boldsymbol{\lambda}}^c$ mit $\mathbb{P}(N_{\boldsymbol{\lambda}}) = 0$

$$\mathcal{L}(T_n^{*,\boldsymbol{\lambda}}(\omega)) := \mathcal{L}\left(k(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,i} (\langle \mathbf{X}_{n,i}(\omega), \boldsymbol{\lambda} \rangle - \langle \bar{\mathbf{X}}_n(\omega), \boldsymbol{\lambda} \rangle)\right) \quad (8.12)$$

schwach gegen

$$N(0, \boldsymbol{\lambda}^t \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\lambda}). \quad (8.13)$$

Der Beweisschluss erfolgt nun mit dem erweiterten Cramér-Wold-Device, vgl. Satz 8.2. Wähle eine abzählbare dichte Teilmenge $\Lambda := \{\boldsymbol{\lambda}_k : k \in \mathbb{N}\}$ des \mathbb{R}^d . Dann existiert eine Teilfolge, so dass (8.12) f.s. konvergent ist für $\boldsymbol{\lambda}_1 \in \Lambda$ mit dem Grenzwert (8.13). Entlang einer weiteren Teilfolge gilt dieselbe Behauptung für $\boldsymbol{\lambda}_2 \in \Lambda$. Somit existiert eine Teilfolge, so dass fast sichere Konvergenz für alle $\boldsymbol{\lambda}_k \in \Lambda$ vorliegt.

Da nach Voraussetzung für alle Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots, k(n)$, die Folge $(\mathcal{L}(T_n^*, \mathbf{e}_i \mid \mathbf{X}_{n,1}, \dots, \mathbf{X}_{n,k(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ straff ist, folgt hieraus die Straffheit der Folge $(\mathcal{L}(T_n^* \mid \mathbf{X}_{n,1}, \dots, \mathbf{X}_{n,k(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ für die multivariate Resampling-Statistik T_n^* aus (8.3).

Mit Satz 8.2 erhält man dann entlang einer Teilfolge die fast sichere Konvergenz gegen $N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ und somit gilt die Behauptung. \blacksquare

Bemerkung 8.5

Sei $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ ein infinitesimales Dreiecksschema von zeilenweise unabhängigen Zufallsvariablen. Gilt

- (i) $\sum_{i=1}^{k(n)} \mathbb{P}(|X_{n,i}| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0$,
- (ii) $\sum_{i=1}^{k(n)} \mathbb{E}(X_{n,i} \mathbb{1}(|X_{n,i}| \leq \tau)) \rightarrow 0$ für ein $\tau > 0$,
- (iii) $\sum_{i=1}^{k(n)} \mathbb{E}(X_{n,i} \mathbb{1}(|X_{n,i}| \leq \tau))^2 \rightarrow \sigma^2 \geq 0$ für ein $\tau > 0$,

so konvergiert die Summe $\sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i}^2$ stochastisch gegen σ^2 , vgl. ARAUJO und GINÉ [1, Exercise 2.3.1].

Teil II

Simulationsstudien

Kapitel 9

Monte-Carlo-Simulation

Wie in Kapitel 3 bereits erwähnt, werden Resampling-Verfahren in der Testtheorie dazu verwendet, datenabhängige kritische Werte zu bestimmen, die bei fixen Stichprobenumfängen einen Vorteil gegenüber asymptotisch bestimmten kritischen Werten aufweisen.

In diesem Kapitel werden anhand verschiedener Testprobleme unterschiedliche Resampling-Methoden untersucht und die erzielten Ergebnisse miteinander verglichen.

Dabei sollen als Beispiele für Bootstrap- und Permutationsverfahren das Behrens-Fisher-Problem und speziell für Permutationsverfahren der Wilcoxon-Test herangezogen werden. Der Schwerpunkt der Untersuchungen soll sich jedoch auf das Behrens-Fisher-Problem beziehen.

Im Falle der Permutationstests für das Behrens-Fisher-Problem existieren bereits umfangreiche Untersuchungen in JANSSEN [68] und HEBBEN [61, 62], jedoch sollen hier neue Simulationen durchgeführt werden, um die Vergleichbarkeit der einzelnen Ergebnisse zu gewährleisten.

Die Untersuchungen wurden mit MATLAB 6.12 auf einem Linux-PC durchgeführt. Zusätzlich zur Standardinstallation wurde die „Statistics Toolbox 3.0“ sowie verschiedene Erweiterungen zur Durchführung von Bootstrap- und Permutationsverfahren verwendet.

Bevor die Problemstellungen sowie die Resultate vorgestellt werden können, sollen im Einzelnen die Vorgehensweisen genauer beschrieben werden.

9.1 Monte-Carlo-Verfahren

Bei den Monte-Carlo-Simulationen wurde sowohl bei den Bootstrap- als auch bei den Permutationsverfahren nach folgendem Muster vorgegangen: Für jede Kombination von Stichprobengrößen n_1, n_2 , Fehlervarianzen σ_1^2, σ_2^2 und Fehlerverteilungen $\mathcal{L}(W)$ wurde folgender Zyklus entsprechend den jeweiligen Angaben M -mal wiederholt:

1. Erzeugung des Datensatzes

- Generierung von $n = n_1 + n_2$ (Pseudo-)Zufallszahlen z_i unter den Verteilungen der Fehlervariablen W aus Tabelle 9.1.
- Multiplikation der z_i mit den entsprechenden Standardabweichungen ergibt die Stichprobe x_1, \dots, x_n .

2. Durchführung des Tests

- Berechne den Wert t_n der Teststatistik unter Nullhypothese für den erzeugten Datensatz x_1, \dots, x_n .
- Erzeuge eine Resampling-Stichprobe unter der Nullhypothese und berechne den Wert der Resampling-Teststatistik t_n^* .
- Wiederhole (b) B -mal und erhalte t_{nb}^* , $b = 1, \dots, B$.
- Berechne den geschätzten p-Wert $p_n^*(\alpha)$ der Resampling Verteilung.
- Lehne H_0 ab, falls $p_n^*(\alpha) \leq \alpha$, andernfalls lehne H_0 nicht ab.

	$\mathcal{L}(W)$
normal	$\mathcal{L}(W) = N(0, 1)$
double-expon	W ist doppel exponentialverteilt
exponential	$W = W' - 1$, wobei W' standardexponentialverteilt ist
uniform	W ist gleichverteilt auf $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
logistic	$\mathcal{L}(W)$ besitzt die Dichte $f(x) = \exp(-x)(1 + \exp(-x))^{-2}$
cauchy	$\mathcal{L}(W)$ besitzt die Dichte $f(x) = 1/(\pi(1 + x^2))$

Tabelle 9.1: Fehlerverteilungen für Monte-Carlo-Simulationen

9.2 Bootstrap-Verfahren

Zunächst soll genauer auf die Bootstrap-Simulationen eingegangen werden, die in diesem Teil der Arbeit einen gewissen Schwerpunkt bilden.

Bei den Bootstrap-Verfahren wurden verschiedene Gewichte gewählt, diese sind:

- gewöhnlicher Bootstrap;
- Wild-Bootstrap (mit poissonverteilten Stichprobenumfang);
- prepivoted Bootstrap

9.2.1 Sampling-Prozeduren

Zeit und Kosten (im Sinne von Rechnerzeit) sind trotz immer größerer Rechnerkapazitäten ein wesentliches Kriterium für die Anwendbarkeit von Resamplingverfahren mithilfe von Monte-Carlo-Methoden in der Praxis.

Betrachtet man den *uniform Bootstrap*-Algorithmus, welcher die Implementierung des gewöhnlichen Bootstrap darstellt, so liefert dieser einen erwartungstreuen Schätzer für die wahre Bootstrap-Verteilungsfunktion, vgl. HALL [56, S. 288ff.].

In der Monte-Carlo-Theorie existieren eine Vielzahl von Methoden, mit denen man Simulationen effizienter gestalten kann, vgl. z.B. HAMMERSLEY und HANDSCOMB [60]. Ausgehend vom uniform Bootstrap-Algorithmus wurden im Falle linearer Statistiken einige dieser Verfahren zur effizienteren Gestaltung der Monte-Carlo-Prozeduren auf die Bootstrap-Theorie übertragen, vgl. SHAO und TU [117] und die darin enthaltenen Quellen. Die neuen Verfahren sind zum größten Teil ebenfalls erwartungstreu, weisen jedoch eine kleinere Varianz auf. Deshalb bietet sich der Varianzenquotient als Effizienzkriterium zum Vergleich einzelner Sampling-Prozeduren an, vgl. auch HALL [56, Appendix II].

In den folgenden Abschnitten sollen zunächst verschiedene Verfahren vorgestellt werden, für die im Rahmen dieser Arbeit Simulationsstudien durchgeführt wurden. Zusammenfassend sind dies:

- uniform Bootstrap;
- balanced Bootstrap;

- antithetic Bootstrap.

Neben diesen Methoden existieren eine Vielzahl weiterer Verfahren, mit denen Monte-Carlo-Simulationen im obigen Sinne effizienter gestaltet werden können. Um den Rahmen dieser Arbeit überschaubar zu halten, sollen lediglich die oben genannten Verfahren kurz vorgestellt werden.

Uniform Bootstrap

In vielen Fällen ist eine analytische Bestimmung der Bootstrap-Verteilungsfunktion einer vorgegebenen Statistik T_n nicht möglich. Jedoch lässt sich diese meist durch einen einfachen Monte-Carlo-Algorithmus berechnen.

Algorithmus 1 (Uniform Bootstrap)

1. Beobachte Realisierungen von Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n ;
2. ziehe $X_1^* = (X_1^{*(1)}, \dots, X_n^{*(1)})$ i.i.d. durch Ziehen mit Zurücklegen aus X_1, \dots, X_n ;
3. berechne die Bootstrap-Statistik $T_n^{*(1)}$;
4. wiederhole die Schritte (2) und (3) B -mal und berechne jeweils $T_n^{*(b)}$, für $b = 1, \dots, B$;
5. verwende

$$H_{MC}^*(x) := \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(T_n^{*(b)})$$

als Approximation für die Bootstrap-Verteilungsfunktion.

Balanced Bootstrap

Das Verfahren des „balanced bootstrap resampling“ wurde erstmals von DAVISON, HINKLEY und SCHECHTMAN [33] vorgeschlagen. Die Grundidee des Verfahrens ist, dass jede Zufallsvariable X_i aus der Grundgesamtheit mit gleicher Häufigkeit in allen Bootstrap-Stichproben auftritt.

Seien $X_1^{*(b)}, \dots, X_n^{*(b)}$, $b = 1, \dots, B$, verschiedene Bootstrap-Stichproben. Für $i = 1, \dots, n$ und $b = 1, \dots, B$, definiere

$$p_i^{*(b)} := \#\{X_j^{*(b)} = X_i, j = 1, \dots, n\}/n,$$

die relative Häufigkeit, mit der eine Beobachtung X_i der Grundgesamtheit in der b -ten Bootstrap-Stichprobe auftritt. Dann gilt $\sum_{i=1}^n p_i^{*(b)} = 1$ für alle $b = 1, \dots, B$ und die $p_i^{*(b)}$ können als entsprechende Auswahlwahrscheinlichkeiten aufgefasst werden.

Jedes Verfahren mit Resampling-Wahrscheinlichkeiten

$$\{p_i^{*(b)}, i = 1, \dots, n, b = 1, \dots, B\},$$

die zusätzlich die Bedingung

$$\sum_{b=1}^B p_i^{*(b)} = \frac{B}{n} \tag{9.1}$$

erfüllen, heißen *balanced Bootstrap-Verfahren*.

Man beachte, dass durch die Nebenbedingung (9.1) jedes X_i genau B -mal in der Gesamt-Bootstrap-Stichprobe $\{X_i^{*(b)}, i = 1, \dots, n, b = 1, \dots, B\}$ vorkommt.

Die Auswahl der Bootstrap-Stichprobe nach der Methode des balanced Resampling wird nach dem folgenden Algorithmus durchgeführt:

Algorithmus 2 (Balanced Bootstrap)

1. Vervielfältige jede Beobachtung X_i genau B -mal, so dass man einen Vektor der Länge $B \cdot n$ erhält;
2. permutiere diese $B \cdot n$ Beobachtungen zufällig;
3. wähle $X_{(b-1)n+1}, \dots, X_{bn}$ als b -te Bootstrap-Stichprobe mit $b = 1, \dots, B$ und bestimme $T_n^{*(b)}$;
4. verwende

$$H_{MC}^{BB}(x) := \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(T_n^{*(b)})$$

als Approximation für die Bootstrap-Verteilungsfunktion.

Antithetic Bootstrap

Antithetic sampling ist eine klassische Technik um den Fehler von Monte-Carlo-Simulationen zu verkleinern, vgl. HAMMERSLEY und HANDSCOMB [60, Section 5.6]. Die zugrundeliegende Idee lässt sich wie folgt beschreiben. Angenommen $\hat{\vartheta}_{1n}$ ist ein Schätzer eines unbekanntem Parameters ϑ . Findet man

einen weiteren Schätzer $\hat{\vartheta}_{2n}$ von ϑ derart, dass

$$\text{Var}(\hat{\vartheta}_{1n}) = \text{Var}(\hat{\vartheta}_{2n}) \quad \text{und} \quad \text{Cov}(\hat{\vartheta}_{1n}, \hat{\vartheta}_{2n}) \leq 0, \quad (9.2)$$

so ist die Varianz eines neuen Schätzers

$$\hat{\vartheta}_n = (\hat{\vartheta}_{1n} + \hat{\vartheta}_{2n})/2$$

kleiner als die Varianz von $\sqrt{2} \hat{\vartheta}_{1n}$.

HALL [54] übertrug die Idee des antithetic samplings auf den uniform Bootstrap-Algorithmus. Seien $X_1^{*(b)}, \dots, X_n^{*(b)}$ für $b = 1, \dots, B$ unabhängige Bootstrap-Stichproben und H_{1n}^* der einfache Monte-Carlo-Schätzer

$$H_{1n}^*(x) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \mathbf{1}_{\{T_n^{*(b)} \leq x\}}.$$

Ziel ist es, einen neuen Bootstrap-Schätzer H_{2n}^* zu finden, so dass dieser die obigen Eigenschaften (9.2) besitzt. Definiere dazu neue Bootstrap-Stichproben $\{\tilde{X}_i^{*(b)} = X_{\tau(\xi(b,i))}, i = 1, \dots, n\}$, $b = 1, \dots, B$, wobei τ eine auf der symmetrischen Gruppe \mathcal{S}_n gleichverteilten Permutation und $\xi(b, i)$ durch

$$X_i^{*(b)} = X_{\xi(b,i)}$$

definiert ist, mit $\xi(b, i), i = 1, \dots, n$, gleichverteilt auf $\{1, \dots, n\}$, für $b = 1, \dots, B$.

Definiere nun als neuen Schätzer

$$H_{2n}^*(x) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \mathbf{1}_{\{\tilde{T}_n^{*(b)} \leq x\}}.$$

Dann ist der Antithetic-Bootstrap-Schätzer gegeben durch

$$H_n^*(x) = (H_{1n}^*(x) + H_{2n}^*(x))/2. \quad (9.3)$$

Das Problem ist jetzt, die Permutation τ so zu wählen, dass H_{1n}^* und H_{2n}^* die Bedingungen (9.2) erfüllen.

Hall [54] zeigt nun in seiner Arbeit, dass die sog. *antithetische Permutation* mit

$$\tau(i) = n - i + 1 \quad (9.4)$$

nicht nur die gewünschten Eigenschaften besitzt, sondern dass der hieraus gewonnene Schätzer gleichzeitig die kleinste Varianz besitzt.

Simulationsstudien zeigen, dass der rechnerische Aufwand eines solchen Verfahrens bei B Bootstrap-Wiederholungen unwesentlich größer ist als die Berechnung durch den uniform Algorithmus mit $2B$ Bootstrap-Wiederholungen. Jedoch erhält man einen Schätzer mit einer wesentlich kleineren Varianz, vgl. HALL [54].

Zusammenfassend lässt sich der zugehörige Algorithmus wie folgt beschreiben:

Algorithmus 3 (Antithetic Bootstrap)

1. Erzeuge B Bootstrap-Stichproben $X_1^{*b}, \dots, X_n^{*b}$ mithilfe des uniform Algorithmus 1;
2. bestimme neue Bootstrap-Stichproben $X_{\tau(\xi(b,1))}, \dots, X_{\tau(\xi(b,n))}$ für $b = 1, \dots, B$ mittels der antithetischen Permutation $\tau(i) = n - i + 1$.
3. berechne den neuen Bootstrap-Schätzer durch

$$H_n^*(x) = (H_{1n}^*(x) + H_{2n}^*(x))/2.$$

9.2.2 Bootstrap-Wiederholungen

Eine in der Literatur über Bootstrap-Verfahren vielgestellte Fragestellung ist, wie viele Bootstrap-Wiederholungen B man in jedem Monte-Carlo-Schritt durchzuführen hat, vgl. DAVISON und HINKLEY [32, S. 155]. JÖCKEL [74, 75] liefert in seinen Arbeiten eine zufriedenstellende Lösung für Monte-Carlo-Tests, die unmittelbar auf Bootstrap-Tests übertragen werden kann.

Ein Effekt bei einem nicht exakt ausgeführten Monte-Carlo-Test ist, dass sich die Güte verkleinert. Jöckel gibt in seiner Arbeit eine untere Schranke für den Fehler an, den man bei der Durchführung einer Monte-Carlo-Simulation macht. Bezeichnet man mit $\beta_B(\alpha, H_A)$ die Güte des Monte-Carlo-Tests basierend auf dem geschätzten p -Wert und mit $\beta_\infty(\alpha, H_A)$ die Güte des Tests mit dem exakten p -Wert, so gilt

$$\begin{aligned} \beta_B(\alpha, H_A) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^t B \binom{B-1}{k-1} G_0^{B-k}(x) g_0(x) (1 - G_0(x))^{k-1} g_A(t) \, dx \, dt \\ &= \int_0^1 \beta_\infty(u, H_A) h_B(u; \alpha) \, du, \end{aligned} \tag{9.5}$$

vgl. DAVISON und HINKLEY [32, S. 155]. Dabei ist $h_B(u; \alpha)$ die Dichte einer unvollständigen Beta-Verteilung auf $[0, 1]$ mit Parametern $(B + 1)\alpha$ und $(B + 1)(1 - \alpha)$, zur Definition vgl. GREENWOOD und HARTLEY [49, S. 181ff.].

JÖCKEL (1986) liefert nun in seiner Arbeit eine untere Schranke für den Quotienten aus geschätzter und wahrer Gütefunktion durch

$$\begin{aligned} \frac{\beta_B(\alpha, H_A)}{\beta_\infty(\alpha, H_A)} &\geq 1 - \frac{\alpha^{(B+1)\alpha}(1-\alpha)^{(B+1)(1-\alpha)}\Gamma(B+1)}{(B+1)\alpha\Gamma((B+1)\alpha)\Gamma((B+1)(1-\alpha))} \\ &\geq 1 - \left(\frac{1-\alpha}{2\pi(B+1)\alpha}\right)^{1/2} =: e(\alpha, B), \end{aligned} \tag{9.6}$$

wobei die letzte Ungleichung unmittelbar aus der Stirlingschen Formel $\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}$ für große x folgt und $\Gamma(x)$ die Gammafunktion bezeichnet.² Tabelle 9.2 gibt einige Werte der Schranke für verschiedene Fehlerwahrscheinlichkeiten 1. Art an.

B	19	39	99	199	499	999	9999
$\alpha = 0.05$	0.61	0.73	0.83	0.88	0.92	0.95	0.98
$\alpha = 0.01$	-	-	0.60	0.72	0.82	0.87	0.96

Tabelle 9.2: Untere Fehlerschranken $e(\alpha, B)$, vgl. DAVISON und HINKLEY [32, S. 156].

Sie beschreibt bei variablen Fehlerniveaus 1.Art die theoretische Fehlerschranke $e(\alpha, B)$ aus (9.6). Man sieht, dass bei $\alpha = 0.05$ die Wahl von $B = 999$ Bootstrap-Wiederholungen ausreichend sind, falls man einen Fehler im Sinne von (9.6) von 5% durch den Monte-Carlo-Schritt toleriert. Verkleinert man die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art auf $\alpha = 0.01$, so werden für denselben Verlust bereits $B = 9999$ Bootstrap-Wiederholungen benötigt. Diese Beobachtung wird die Grundlage in den folgenden Simulationsuntersuchungen bilden.

9.2.3 prepivoted Bootstrap

In Abschnitt 6.3 wurde Prepivotisieren als Methode vorgestellt, durch die in manchen Situationen aufgrund einer geeigneten Transformation der Teststatistik der zugehörige Bootstrap-Test verbessert werden kann.

²Man beachte, dass in der ersten Auflage von DAVISON und HINKLEY [32, S. 155] eine falsche Ungleichungsrelation steht.

Durch zweimalige Verwendung der Bootstrap-Idee erhält man eine neue Verteilungsfunktion bezüglich der man einen kritischen Wert zur Durchführung eines Resampling-Tests bestimmen kann.

Algorithmus 4 liefert nun ein Monte-Carlo-Verfahren zur Bestimmung eines Schätzers der Bootstrap-Verteilungsfunktion.

Algorithmus 4 (pre pivoted Bootstrap)

1. Beobachte Realisierungen von Zufallszahlen X_1, \dots, X_n ;
2. ziehe eine erste Bootstrap-Stichprobe i.i.d. $X_1^* = (X_{11}^*, \dots, X_{1n}^*)$ durch Ziehen mit Zurücklegen aus X_1, \dots, X_n und bestimme T_1^* ;
3. erzeuge eine neue Bootstrap-Stichprobe $X_1^{**} = (X_{11}^{**}, \dots, X_{1n}^{**})$ durch Ziehen mit Zurücklegen aus X_1^* und bestimme T_1^{**} ;
4. wiederhole (3) B_1 -mal und berechne jeweils $T_j^{**}, j = 1, \dots, B_1$;
5. berechne

$$\tilde{H}_1(T_1^*) := \frac{1}{B_1} \sum_{j=1}^{B_1} \mathbb{1}_{\{T_j^{**} \leq T_1^*\}};$$

für $j = 1, \dots, B$ und verwende

$$\tilde{H}_{B,1}(x) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \mathbb{1}_{\{\tilde{H}_i(T_i^*) \leq x\}}$$

als Approximation für $H_{n,1}^*(\cdot)$.

Die Idee des pre pivoted Bootstrap lässt sich iterativ fortsetzen und führt zum sog. *iterativen Bootstrap*, vgl BERAN und DUCHARME [19, Lecture 2]. Entsprechende Algorithmen zur Bestimmung der Verteilungsfunktion erhält man analog zu Algorithmus 4.

9.3 Permutations-Verfahren

Neben den Bootstrap-Testverfahren werden auch Permutationstests in den Simulationen betrachtet. Dabei werden die Teststatistiken unter der Nullhypothese für zufällige Permutationen ausgewertet und dafür die entsprechenden Verwerfungswahrscheinlichkeiten berechnet. Diese werden dann am Beispiel des Behrens-Fisher-Problems als Vergleich zu den Bootstrap-Ergebnissen her-

angezogen. Theoretische Ergebnisse hierzu findet man unter anderem in JANSSEN [68].

Algorithmus 5

1. Beobachte Realisierungen der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_{n_1} und X_{n_1+1}, \dots, X_n mit $n_2 := n - n_1$;
2. bestimme für eine auf der symmetrischen Gruppe \mathcal{S}_n gleichverteilten Permutation $\tau(\cdot)$ den Vektor $(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)})$;
3. berechne die Permutationsstatistik $\tilde{T}_n^{(1)}$;

4. wiederhole die Schritte (2) und (3) P -mal und berechne jeweils $\tilde{T}_n^{(p)}, p = 1, \dots, P$;

5. verwende

$$\tilde{H}_{MC}(x) := \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(\tilde{T}_n^{(p)})$$

als Approximation der Permutationsverteilungsfunktion.

Kapitel 10

Testprobleme vom Behrens-Fisher-Typ

10.1 Bootstrap- und Permutationstest für das erweiterte Behrens-Fisher-Problem

Im ersten Teil dieser Arbeit wurde das Zweistichprobenproblem als ein wichtiges Beispiel aufgeführt, siehe die Beispiele 3.3 und 4.13. Exemplarisch soll nun an dieser Stelle das Verhalten von Resampling-Tests anhand des Behrens-Fisher-Problems praktisch untersucht werden.

Es sei $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von reellen i.i.d. Zufallsvariablen mit $E(Z_1) = 0$ und $\text{Var}(Z_1) = 1$. Für positive unbekannte Standardabweichungen σ_1^2, σ_2^2 betrachte man das Zweistichprobenproblem (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) zum Stichprobenumfang $n = n_1 + n_2$ mit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{n_1})$ und $\mathbf{Y} = (X_{n_1+1}, \dots, X_n)$, so dass

$$X_i = \mu_1 + \sigma_1 Z_i, \quad 1 \leq i \leq n_1, \quad \mu_1 \in \mathbb{R}$$

und

$$X_i = \mu_2 + \sigma_2 Z_i, \quad n_1 < i \leq n, \quad \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

Betrachtet man $\vartheta = \mu_1 - \mu_2$, so ist das interessierende Testproblem durch

$$H_0 := \{\vartheta = 0\} \tag{10.1}$$

gegen die einseitige Alternative

$$H_1 := \{\vartheta > 0\} \tag{10.2}$$

gegeben. Die eingeschränkte Nullhypothese ist dann $\tilde{H}_0 : \{\vartheta = 0, \sigma_1^2 = \sigma_2^2\}$.

Definiert man

$$\bar{X} := \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i \quad \text{bzw.} \quad \bar{Y} := \frac{1}{n_2} \sum_{i=n_1+1}^n X_i$$

und

$$S_X^2 := \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 \quad \text{bzw.} \quad S_Y^2 := \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=n_1+1}^n (X_i - \bar{Y})^2,$$

so basieren entsprechende Tests auf den Statistiken

$$T_n := \left(\frac{n_1 n_2}{n} \right)^{1/2} (\bar{X} - \bar{Y}) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{T}_n := T_n V_n^{-1/2} \quad (10.3)$$

mit

$$V_n = \frac{n_1 n_2}{n} (S_X^2/n_1 + S_Y^2/n_2).$$

Unter der Normalverteilungsannahme erhält man für die eingeschränkte Nullhypothese \tilde{H}_0 den klassischen Zweistichproben t -Test, welcher exakt das gewünschte Niveau einhält, vgl. z.B. WITTING [127, S. 200 ff.].

Definiert man

$$T_1 := \frac{n_1^{1/2}(\bar{X} - \mu_1)}{S_X} \quad \text{und} \quad T_2 := \frac{n_2^{1/2}(\bar{Y} - \mu_2)}{S_Y},$$

so zeigt sich, dass die Gleichung

$$T_n = T_1 \sin \eta + T_2 \cos \eta$$

gilt. Hier ist

$$\tan \eta = (S_X/S_Y)(n_2/n_1)^{1/2}.$$

Daraus ergibt sich, dass $T_1 \sim t_{n_1-1}$ und $T_2 \sim t_{n_2-1}$, wodurch T_n unter der Nullhypothese H_0 keiner t -Verteilung genügt und der klassische t -Test das gewünschte Niveau nicht mehr exakt einhalten kann. Solche Testprobleme sind als **Behrens-Fisher-Probleme** bekannt, vgl. BEHRENS [13] und FISHER [40, 41]. PFANZAGL [98] zeigt, dass bei unbekanntem Varianzen keine exakten Lösungen für das Behrens-Fisher-Problem existieren, vgl. auch LINNIK [82] und LEHMANN [80].

Eine der bekanntesten und interessantesten Lösungsvorschläge für das klassische Behrens-Fisher-Problem stammt von Welch. Dieser schlägt als Test

$$\varphi_W = \begin{cases} 1 & > \\ \tilde{T}_n & t_f, \\ 0 & \leq \end{cases} \quad (10.4)$$

vor, wobei man als kritischen Wert t_f das $(1 - \alpha)$ -Quantil einer t-Verteilung mit

$$f := \frac{\left(\frac{S_X^2}{n_1} + \frac{S_Y^2}{n_2}\right)^2}{\frac{S_X^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{S_Y^4}{n_2^2(n_2-1)}} \text{-Freiheitsgraden}$$

wählt, vgl. Welch [123, 124].

YUEN [131] zeigt, dass bei Verteilung mit größer werdenden Tails Welch's Approximation immer konservativer wird, und schlägt als Modifikation der Teststatistik eine Variante vor, welche auf getrimmten bzw. winsorisierten Mitteln basiert.

Schränkt man die Klasse der Verteilungen nicht auf Normalverteilungen ein, so wurde für das allgemeine Behrens-Fisher-Problem nichtparametrische Lösungen unter anderem von POTTHOFF [103] vorgeschlagen. Dieser stellt einen Test auf Basis der Wilcoxon-Statistik vor. Andere nichtparametrische Verfahren findet man in FLINGER und POLICELLO [43] und RUST und FLINGER [112].

An dieser Stelle lässt sich auf Basis des ersten Teils dieser Arbeit eine nicht-parametrischer Bootstrap-Test als asymptotischer α -Niveau Test herleiten, vgl. auch PAULS [95].

Dazu sei im Folgenden $\mathcal{L}(\mathbf{X}) = \mathbb{P}_F^{n_1}$ und $\mathcal{L}(\mathbf{Y}) = \mathbb{P}_G^{n_2}$ mit zugehörigen Verteilungsfunktionen F und G . Dann werden die Bootstrap-Stichproben \mathbf{X}^* und \mathbf{Y}^* durch Ziehen mit Zurücklegen aus \mathbf{X} bzw. \mathbf{Y} gewonnen und es gilt

$$\mathcal{L}(X_1^*, \dots, X_{n_1}^* \mid \mathbf{X}) = \mathbb{P}_{\hat{F}_{n_1}}^{n_1}$$

bzw.

$$\mathcal{L}(Y_1^*, \dots, Y_{n_2}^* \mid \mathbf{Y}) = \mathbb{P}_{\hat{G}_{n_2}}^{n_2}.$$

Definiert man

$$\bar{X}_{n_1}^* := \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i^* \quad \text{bzw.} \quad \bar{Y}_{n_2}^* := \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i^*$$

und

$$S_X^{*2} := \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i^* - \bar{X}_{n_1}^*)^2 \quad \text{bzw.} \quad S_Y^{*2} := \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i^* - \bar{Y}_{n_2}^*)^2$$

so ist die zugehörige Bootstrap-Statistik gegeben durch

$$\tilde{T}_n^* = \frac{(\bar{X}_{n_1}^* - \bar{Y}_{n_2}^*) - (\bar{X} - \bar{Y})}{(S_X^{*2}/n_1 + S_Y^{*2}/n_2)^{1/2}}.$$

Mittels dieser Definitionen lässt sich ein (einseitiger) Resampling-Test für das Testproblem (10.1)–(10.2) durch

$$\varphi_B^* = \begin{cases} 1 & > \\ \tilde{T}_n & c_n^*(\alpha) \\ 0 & \leq \end{cases} \quad (10.5)$$

angeben, wobei $c_n^*(\alpha)$ im Bootstrap-Fall das $(1 - \alpha)$ -Quantil der Bootstrap-Verteilungsfunktion

$$H_n^*(x) = P^*[\tilde{T}_n^* \leq x \mid \mathbf{Z}]$$

ist, vgl. BERAN [17] sowie HALL und MARTIN [58].

JANSSEN [68] betrachtet einen asymptotisch exakten Permutationstest für das verallgemeinerte Behrens-Fisher-Problem. Dabei wird der entsprechende kritische Wert $c_n^*(\alpha)$ des Testes (10.5) aus der Permutationsverteilung bestimmt. Diese Ergebnisse beruhen auf allgemeinen bedingten Grenzwertsätzen für studentische Permutationsstatistiken, vgl. JANSSEN [68]. Weitere Ansätze basierend auf Permutationsverteilungen findet man in PALLINI und PESARIN [94].

φ_W	Welch Test (10.4)
φ_P	Permutationstest
$\varphi_B^*, \tilde{\varphi}_B^*$	Bootstrap-Tests
$\varphi_{B,1}^*$	prepivoted Bootstrap-Test
$\varphi_{B,P}^*$	Wild-Bootstrap-Test
$\varphi_{B,B}^*$	balanced Bootstrap-Test
$\varphi_{B,A}^*$	antithetic Bootstrap-Test

Tabelle 10.1: Notationen für Monte-Carlo-Simulationen

Die Tabellen 10.2 und 10.3 zeigen die relativen Häufigkeiten, mit denen die Nullhypothese H_0 des einseitigen Testproblems bei Durchführung des Permutationstest φ_P und des Welch-Tests φ_W (10.4) bzw. der Bootstrap-Tests φ_B^* (10.5) und $\tilde{\varphi}_B^*$ abgelehnt wurden. Bei dem Test φ_B^* wurde der Nenner V_n durch den Bootstrap-Schätzer ersetzt, wohingegen der Test $\tilde{\varphi}_B^*$ auf der Teststatistik

$$\tilde{T}_n^* := T_n^* V_n^{-1/2} = \frac{(\bar{X}_{n_1}^* - \bar{Y}_{n_2}^*) - (\bar{X} - \bar{Y})}{(S_X^2/n_1 + S_Y^2/n_2)^{1/2}} \quad (10.6)$$

basiert.

Bei den Simulationen wurde das in Abschnitt 9.1 beschriebene Verfahren jeweils M -mal für B Bootstrap- bzw. P Permutationsstichproben wiederholt. Die Wahl des Monte-Carlo-Umfanges richtet sich nach dem Rechneraufwand, wohingegen B bzw. P in Anlehnung an Abschnitt 9.2.2 gewählt wurde.

Vergleicht man die einzelnen Simulationsergebnisse, so zeigt sich, dass in der überwiegenden Anzahl der Fälle der Permutationstest φ_P den übrigen Testverfahren überlegen ist. Diese Beobachtung deckt sich insbesondere im Vergleich zum Welch-Test φ_W bzw. Bootstrap-Test φ_B^* mit den Ergebnissen aus HEBBEN [61], JANSSEN [68] und PAULS [95].

In den vorliegenden Verteilungssituationen besitzt der Test $\tilde{\varphi}_B^*$ die schlechtesten Eigenschaften im Vergleich zu den übrigen Tests. Die Gründe hierfür sind in der Wahl der Teststatistik (10.6) zu finden. Durch die Wahl eines Nenners V_n , welcher nicht dem Resampling-Verfahren angepasst wird, verstößt der Test $\tilde{\varphi}_B^*$ gegen die von HALL und WILSON [59] vorgeschlagenen Richtlinien für Bootstrap-Tests. Hierin sollen stets studentisierte Statistiken verwendet werden, bei denen der Varianzschätzer aus der Bootstrap-Stichprobe ermittelt wird. Theoretische Ergebnisse hierzu findet man in den Arbeiten von BERAN [17], BICKEL und FREEDMAN [22], sowie MASON und SHAO [90]. Hier wird gezeigt, dass die geschätzte Verteilungsfunktion aus dem Testverfahren φ_B^* eine bessere Approximation der wahren Verteilungsfunktion liefert als die Bootstrap-Verteilungsfunktion aus dem Test $\tilde{\varphi}_B^*$.

Betrachtet man alle Testverfahren im Vergleich zum steigenden Stichprobenumfang $n = n_1 + n_2$, so stellt sich heraus, dass bei balancierten Stichprobenumfängen $n_1 = n_2$ die Werte näher am gewünschten Niveau liegen als bei unbalancierten Stichproben $n_1 \neq n_2$.

Liegt eine schiefe Verteilung wie z.B. die Exponentialverteilung zugrunde, so liefert keines der betrachteten Verfahren Ergebnisse, die das gewünschte Feh-

lernniveau widerspiegeln. Eine theoretische Begründung für Resampling-Tests ergibt sich dabei aus den im ersten Teil dieser Arbeit vorgestellten Überlegungen.

Betrachtet man den Welch-Test, so bestätigt sich die Aussage von YUEN [131], dass für Verteilungen mit großen Tails der Test immer konservativer wird. Diese Aussage lässt sich insbesondere an den Ergebnissen für cauchyverteilte Daten verifizieren.

Die Simulationen erweitern die in der Literatur zu findenden Monte-Carlo-Studien für Testsituationen vom Behrens-Fisher-Typ. METHA und SRINIVASAN [93] vergleichen den Welch-Test mit verschiedenen klassischen Tests für das Behrens-Fisher-Problem. BEST und RAYNER untersuchen Fehlerwahrscheinlichkeiten 1. Art für unterschiedliche Tests (einschließlich dem Welch-Test) unter Normalverteilungsannahmen, vgl. auch WANG [122]. FUNG [44] verwendet einen studentisierten Wilcoxon-Test für das verallgemeinerte Behrens-Fisher-Problem und vergleicht diesen mit dem klassischen Wilcoxon-Test, dem studentischen t -Test und einem Test basierend auf einer Normalapproximation.

$M = 250.000, B = P = 999$												
$\vartheta = 0, \alpha = 0.05$												
Verteilung	$\sigma_1^2 : \sigma_2^2$	1.0:1.0			1.0:1.5			1.0:2.0				
		8:8	8:16	16:16	8:8	8:16	16:16	8:8	8:16	16:16		
normal	$n_1 : n_2$											
	φ_W	.0486	.0496	.0499	.0492	.0493	.0504	.0490	.0492	.0502		
	φ_P	.0503	.0499	.0504	.0509	.0458	.0509	.0511	.0442	.0509		
	φ_B^*	.0487	.0499	.0496	.0489	.0490	.0504	.0492	.0491	.0499		
	$\tilde{\varphi}_B^*$.0735	.0700	.0611	.0748	.0672	.0617	.0744	.0666	.0619		
double-expon	φ_W	.0468	.0479	.0493	.0474	.0476	.0493	.0468	.0482	.0493		
	φ_P	.0499	.0504	.0499	.0501	.0456	.0500	.0510	.0435	.0502		
	φ_B^*	.0617	.0618	.0598	.0623	.0615	.0603	.0626	.0611	.0603		
	$\tilde{\varphi}_B^*$.0692	.0659	.0580	.0693	.0645	.0583	.0697	.0631	.0586		
exponential	φ_W	.0425	.0260	.0475	.0574	.0332	.0595	.0711	.0409	.0682		
	φ_P	.0503	.0504	.0504	.0646	.0565	.0616	.0773	.0633	.0705		
	φ_B^*	.0628	.0416	.0644	.0764	.0488	.0717	.0862	.0558	.0761		
	$\tilde{\varphi}_B^*$.0675	.0449	.0566	.0842	.0522	.0705	.0993	.0613	.0804		

Tabelle 10.2: Relative Verwerfungswahrscheinlichkeiten beim Behrens-Fisher-Problem (Teil I)

$M = 250.000, B = P = 999$												
$\vartheta = 0, \alpha = 0.05$												
Verteilung	$\sigma_1^2 : \sigma_2^2$	1.0:1.0			1.0:1.5			1.0:2.0				
		8:8	8:16	16:16	8:8	8:16	16:16	8:8	8:16	16:16		
	$n_1 : n_2$											
logistic	φ_W	.0481	.0494	.0498	.0470	.0484	.0497	.0485	.0492	.0499		
	φ_P	.0500	.0508	.0495	.0502	.0458	.0500	.0512	.0444	.0504		
	φ_B^*	.0540	.0556	.0533	.0531	.0544	.0540	.0544	.0544	.0541		
	$\tilde{\varphi}_B^*$.0723	.0690	.0596	.0713	.0662	.0603	.0728	.0660	.0603		
uniform	φ_W	.0491	.0512	.0502	.0488	.0497	.0495	.0505	.0502	.0504		
	φ_P	.0500	.0507	.0494	.0502	.0476	.0501	.0518	.0470	.0502		
	φ_B^*	.0361	.0403	.0428	.0358	.0405	.0432	.0367	.0415	.0422		
	$\tilde{\varphi}_B^*$.0751	.0734	.0615	.0753	.0697	.0621	.0770	.0693	.0627		
cauchy	φ_W	.0258	.0271	.0289	.0251	.0272	.0288	.0261	.0272	.0292		
	φ_P	.0499	.0504	.0497	.0494	.0459	.0495	.0507	.0433	.0438		
	φ_B^*	.0800	.0869	.0929	.0790	.0876	.0940	.0801	.0877	.0878		
	$\tilde{\varphi}_B^*$.0420	.0361	.0302	.0413	.0349	.0302	.0422	.0353	.0306		

Tabelle 10.3: Relative Verwerfungswahrscheinlichkeiten beim Behrens-Fisher-Problem (Teil II)

Abbildung 10.1 und 10.2 zeigt die simulierten Gütefunktionen in Abhängigkeit von $\vartheta = \mu_1 - \mu_2$ für den Permutations- und den Bootstrap-Test im Vergleich zum klassischen Welch-Test bei unterschiedlichen Varianzverhältnissen. Hier wurde für den balancierten Stichprobenfall $n_1 = n_2 = 16$ unter einer Normalverteilungsannahme die relativen Verwerfungswahrscheinlichkeiten unter Shiftalternativen aufgetragen. Es zeigt sich, dass der Permutationstest φ_P im Vergleich zu den beiden anderen Verfahren das beste Verhalten aufweist und somit in der gegebenen Situation zu bevorzugen ist.

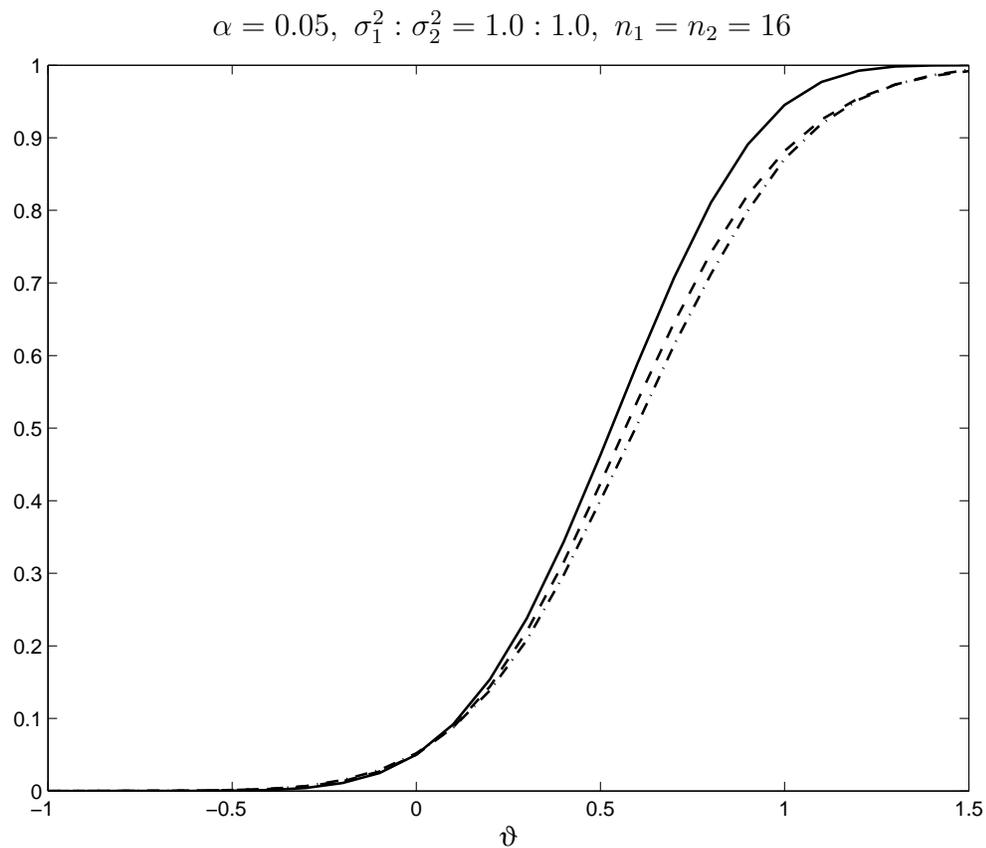


Abbildung 10.1: Gütevergleich für Permutationstest φ_P (—), Bootstrap-Test φ_B^* (- - -) und Welch-Test φ_W (- · -) bei zugrundeliegender Normalverteilung im Behrens-Fisher-Problem

In den Grafiken fällt auf, dass die simulierten Gütefunktionen zum Teil erhebliche Unterschiede aufweisen. Diese Beobachtung lässt sich durch die unterschiedlichen Fehlerniveaus in $\vartheta = 0$ erklären, welche sich aus Tabelle 10.2 ergeben.

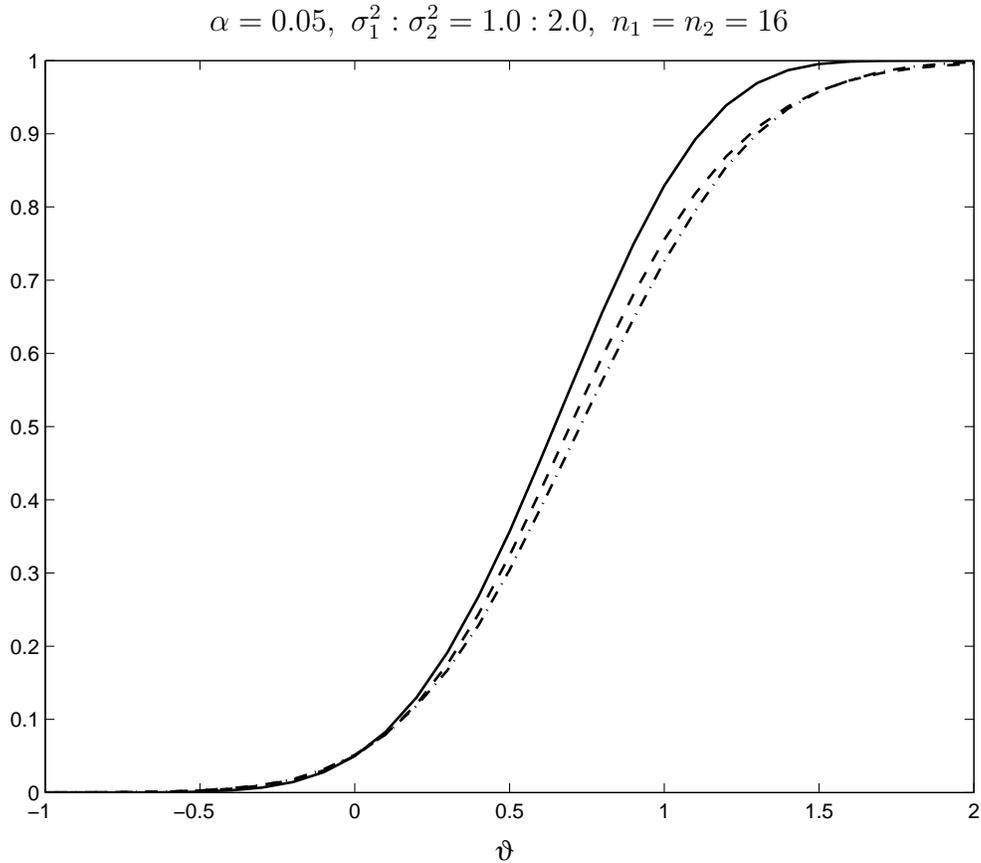


Abbildung 10.2: Gütevergleich für Permutationstest φ_P (—), Bootstrap-Test φ_B^* (- - -) und Welch-Test φ_W (- · -) bei zugrundeliegender Normalverteilung im Behrens-Fisher-Problem

Tabelle 10.4 zeigt die relativen Verwerfungswahrscheinlichkeiten des pre-pivoted-Bootstrap-Tests $\varphi_{B,1}^*$. Dabei wurde in jedem Monte-Carlo-Schritt $B_1 = B = 999$ Bootstrap-Stichproben gezogen. Aufgrund des erhöhten Recheraufwandes können in diesem Fall lediglich 3000 Monte-Carlo-Schritte betrachtet werden.

BERAN [17] liefert in seiner Arbeit eine analytische Betrachtung des pre-pivoted-Bootstraps im Vergleich zum Welch- und gewöhnlichen Bootstrap-Test. Vergleicht man die vorliegenden Ergebnisse mit denen aus Tabelle 10.2 und 10.3, so stellt man fest, dass die relativen Häufigkeiten in den wesentlichen Bereichen mit denen des gewöhnlichen Bootstrap-Tests φ_B^* vergleichbar sind. Lediglich bei cauchyverteilten Stichproben im unbalancierten Fall treten Werte auf, die im Vergleich zum balancierten Fall nicht erklärt werden können.

Tabelle 10.5 zeigt im balancierten Fall $n_1 = n_2 = 8$ die relativen Ver-

$M = 3.000, B1 = B = 999$							
$\vartheta = 0, \alpha = 0.05$							
Verteilung	$\sigma_1^2 : \sigma_2^2$	1.0:1.0		1.0:1.0		1.0:1.0	
	$n_1 : n_2$	8:16	16:16	8:16	16:16	8:16	16:16
normal	$\varphi_{B,1}^*$.0547	.0583	.0480	.0463	.0533	.0553
double-expon	$\varphi_{B,1}^*$.0720	.0543	.0690	.0630	.0683	.0593
exponential	$\varphi_{B,1}^*$.0667	.0713	.0743	.0763	.0703	.0727
logistic	$\varphi_{B,1}^*$.0620	.0517	.0600	.0587	.0577	.0547
uniform	$\varphi_{B,1}^*$.0470	.0473	.0437	.0513	.0497	.0470
cauchy	$\varphi_{B,1}^*$.1473	.0570	.1513	.0537	.1377	.0610

Tabelle 10.4: Relative Verwerfungswahrscheinlichkeiten des prepivoted Bootstrap-Test $\varphi_{B,1}^*$ beim Behrens-Fisher-Problem

werfungswahrscheinlichkeiten des in Abschnitt 6.2 beschriebenen Verfahrens. Dabei ist die zufällige Anzahl von Bootstrap-Replikationen gerade poissonverteilt mit Erwartungswert gleich dem ursprünglichem Stichprobenumfang. Für jeden Monte-Carlo-Schritt wurden analog zu den vorigen Simulationen $B = 999$ Bootstrap-Stichproben erzeugt. Es zeigt sich, dass das so gewonnene Testverfahren bei zugrundeliegender Normalverteilung eine gute Annäherung an das gewünschte Fehlerniveau liefert. In anderen Verteilungssituationen sind die erzielten Ergebnisse zum Teil jedoch wesentlich schlechter als die konkurrierenden Verfahren φ_P bzw. φ_B^* .

Die stark differierenden Ergebnisse können ihre Ursache in einem zu klein gewählten Monte-Carlo-Umfang haben. Dieser kann jedoch aufgrund des enormen Rechneraufwandes nicht erhöht werden, um die gewonnenen Ergebnisse zu stützen. Um eine abschließende Einschätzung der Methode angeben zu können, sind umfangreichere Simulationen nötig, die jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt werden können.

Tabelle 10.6 liefert Simulationsergebnisse zu den in Abschnitt 9.2.1 vorgestellten Sampling-Prozeduren. $\varphi_{B,B}^*$ stellt den Bootstrap-Test dar, bei dem die Bootstrap-Stichprobe nach der balanced-Bootstrap-Methode gewonnen wurde. Analog dazu bezeichnet $\varphi_{B,A}^*$ den Bootstrap-Test, bei dem die Stichprobe mithilfe des antithetic-Verfahrens gezogen wurde. Dabei wurden insgesamt $2B$ Bootstrap-Stichproben in jedem Monte-Carlo-Schritt erzeugt. Es zeigt sich,

$M = 10.000, B = 999$			
$\vartheta = 0, \alpha = 0.05$			
Verteilung	$\sigma_1^2 : \sigma_2^2$	1.0:1.0	1.0:1.5
	$n_1 : n_2$	8:8	8:8
normal	$\varphi_{B,P}^*$.0502	.0498
double-expon	$\varphi_{B,P}^*$.0625	.0600
exponential	$\varphi_{B,P}^*$.0624	.0776
logistic	$\varphi_{B,P}^*$.0532	.0557
uniform	$\varphi_{B,P}^*$.0374	.0353
cauchy	$\varphi_{B,P}^*$.0788	.0808

Tabelle 10.5: Relative Verwerfungswahrscheinlichkeiten des Wild-Bootstrap $\varphi_{B,P}^*$ bei poissonverteiletem Stichprobenumfang

dass beide Verfahren vergleichbare Ergebnisse zu dem gewöhnlichen Bootstrap-Test liefern. Dies deckt sich mit den aus der Theorie gewonnenen Vorstellungen, dass beide Verfahren lediglich dazu dienen die Monte-Carlo-Verfahren und nicht den Test selbst zu verbessern. Für weitere Monte-Carlo-Simulationen, vgl. Do [35].

$M = 100.000, B = 999$ $\vartheta = 0, \alpha = 0.05$												
Verteilung	$\sigma_1^2 : \sigma_2^2$	1.0:1.0			1.0:1.5			1.0:2.0				
		8:8	8:16	16:16	8:8	8:16	16:16	8:8	8:16	16:16		
	$n_1 : n_2$											
normal	$\varphi_{B,B}^*$.0497	.0499	.0494	.0481	.0496	.0493	.0496	.0499	.0511		
	$\varphi_{B,A}^*$.0498	.0502	.0495	.0481	.0496	.0493	.0503	.0500	.0498		
double-exp	$\varphi_{B,B}^*$.0621	.0626	.0602	.0623	.0606	.0588	.0614	.0610	.0605		
	$\varphi_{B,A}^*$.0626	.0623	.0602	.0625	.0609	.0591	.0621	.0615	.0607		
exponential	$\varphi_{B,B}^*$.0622	.0406	.0648	.0757	.0477	.0730	.0863	.0556	.0750		
	$\varphi_{B,A}^*$.0624	.0408	.0650	.0760	.0478	.0729	.0862	.0556	.0748		
logistic	$\varphi_{B,B}^*$.0536	.0546	.0540	.0534	.0538	.0549	.0542	.0536	.0532		
	$\varphi_{B,A}^*$.0537	.0550	.0539	.0537	.0536	.0549	.0543	.0533	.0534		
uniform	$\varphi_{B,B}^*$.0365	.0392	.0434	.0360	.0402	.0442	.0363	.0408	.0413		
	$\varphi_{B,A}^*$.0362	.0397	.0440	.0360	.0403	.0445	.0363	.0406	.0418		
cauchy	$\varphi_{B,B}^*$.0795	.0862	.0921	.0789	.0870	.0950	.0798	.0869	.0917		
	$\varphi_{B,A}^*$.0794	.0867	.0922	.0789	.0876	.0950	.0801	.0872	.0918		

Tabelle 10.6: Relative Verwerfungswahrscheinlichkeiten des balanced Bootstrap- $\varphi_{B,B}^*$ und des antithetic Bootstrap-Verfahrens $\varphi_{B,A}^*$

10.2 Tests vom Wilcoxon-Typ

Im Folgenden betrachte man ein Zweistichprobenproblem zum Stichprobenumfang $n = n_1 + n_2$ gegeben durch Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_{n_1}, X_{n_1+1}, \dots, X_n$ auf einem Messraum (Ω, \mathcal{A}) mit gemeinsamer Verteilung $P = \mathbb{P}^{(X_1, \dots, X_{n_1})}$ in der ersten Gruppe und Verteilung $Q = \mathbb{P}^{(X_{n_1+1}, \dots, X_n)}$ in der zweiten Gruppe. Die zugehörigen Verteilungsfunktionen seien F bzw. G . Für die Nullhypothese

$$H : \{\mathbb{P}^{X_1} = \mathbb{P}^{X_n}\}$$

gegen die Alternative $K : \{X_1 \text{ ist stochastisch größer als } X_2\}$ wird häufig der klassische Wilcoxon-Test mit entsprechenden kritischen Werten c_α angegeben durch

$$\varphi_{\text{Wilcox}} := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma \sum_{i=1}^{n_1} R_i & c_\alpha \\ 0 & < \end{cases} \quad (10.7)$$

Genügen die Zufallsvariablen einer logistischen Verteilung mit Dichtefunktion

$$f(x) = \exp(-x)(1 + \exp(-x))^{-2},$$

und gilt $G(\cdot) = F(\cdot - \vartheta)$, so liefert der Test (10.7) einen lokal besten Test für

$$H_0 : \{\vartheta = 0\} \text{ gegen } K : \{\vartheta > 0\},$$

vgl. HÁJEK, ŠIDÁK und SEN [53, S. 96].

JANSSEN [69] leitet einen asymptotisch korrekten Permutationstest vom Wilcoxon-Typ als Test statistischer Funktionale her. Betrachtet man die Wilcoxon Zweistichprobenrangstatistik

$$S_n = \left(\frac{n}{n_1 n_2}\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n_1} n^{-1} R_{ni} - \frac{n_1(n+1)}{2n}\right)$$

und definiert entsprechende empirische Verteilungsfunktionen

$$\hat{G}_n(t) := \frac{1}{n_2} \sum_{i=n_1+1}^n \mathbf{1}_{(-\infty, t]}(X_i), \quad \hat{F}_n(t) := \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{1}_{(-\infty, t]}(X_i)$$

und

$$\bar{G}_n := \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} \hat{G}_n(X_j), \quad \bar{F}_n := \frac{1}{n_2} \sum_{j=n_1+1}^n \hat{F}_n(X_j),$$

so lässt sich ein Test vom Wilcoxon-Typ definieren durch

$$\varphi_{W,\text{perm}} := \begin{cases} 1 & > \\ \gamma_n \tilde{S}_n & c_n(\alpha), \\ 0 & < \end{cases} \quad (10.8)$$

wobei die Teststatistik durch

$$\tilde{S}_n := S_n / \hat{\sigma}_n$$

mit einem konsistenten Varianzschätzer

$$\hat{\sigma}_n^2(X) := \frac{n_2}{n} \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (\hat{G}_n(X_i) - \bar{G}_n)^2 + \frac{n_1}{n} \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=n_1+1}^n (\hat{F}_n(X_i) - \bar{F}_n)^2$$

gegeben ist. Der kritische Wert $c_n(\alpha)$ ist dabei das $(1 - \alpha)$ -Quantil der Permutationsverteilung

$$\tau \mapsto \tilde{S}_n(X_{\tau(1)}, \dots, X_{\tau(n)})$$

mit aus der symmetrischen Gruppe \mathcal{S}_n gleichverteilten Permutationen τ . Unter schwachen Regularitätsvoraussetzungen ist der Test $\varphi_{W,\text{perm}}$ (10.8) ein asymptotischer α -Niveau Test, vgl. JANSSEN [69, Theorem 5.2].

Tabelle 10.7 vergleicht die relativen Verwerfungswahrscheinlichkeiten des klassischen Wilcoxon-Test φ_{Wilcox} mit denen des studentisierten Permutationstest $\varphi_{W,\text{perm}}$ aus JANSSEN [69].

Es zeigt sich, dass in allen vorliegenden Ausgangssituationen der Permutationstest das bessere Verhalten bzgl. dem nominellen Fehlerniveau 1. Art aufweist. Betrachtet man die Ergebnisse für jede einzelne Verteilungssituation, so stellt sich heraus, dass der Test $\varphi_{W,\text{perm}}$ in den meisten Fällen sehr nah an das gewünschte Niveau heranreicht. Somit werden die theoretischen Ergebnisse aus JANSSEN [69] durch die Simulationsergebnisse an dieser Stelle bestätigt. Im unbalancierten Fall, d.h. $n_1 \neq n_2$ liegen bei beiden Tests größere Abweichungen vom gewünschten Niveau vor als in den balancierten Fällen. Betrachtet man die Ergebnisse in Bezug auf unterschiedliche Varianzverhältnisse, so stellt sich heraus, dass auch hier größere Abweichungen vorliegen.

$M = 100.000, P = 999$												
$\alpha = 0.05$												
Verteilung	$\sigma_1^2 : \sigma_2^2$	1.0:1.0			1.0:1.5			1.0:2.0				
		8:8	8:16	16:16	8:8	8:16	16:16	8:8	8:16	16:16		
normal	$n_1 : n_2$.0502	.0518	.0504	.0484	.0476	.0507	.0508	.0501	.0495		
	$\varphi_{W,perm}$.0425	.0465	.0466	.0421	.0411	.0473	.0441	.0382	.0503		
double-expon	$\varphi_{W,perm}$.0499	.0515	.0503	.0500	.0507	.0503	.0502	.0463	.0499		
	φ_{Wilcox}	.0416	.0455	.0464	.0434	.0413	.0477	.0423	.0392	.0476		
logistic	$\varphi_{W,perm}$.0490	.0483	.0508	.0501	.0495	.0499	.0503	.0475	.0497		
	φ_{Wilcox}	.0423	.0457	.0468	.0424	.0414	.0459	.0428	.0395	.0473		
uniform	$\varphi_{W,perm}$.0500	.0525	.0516	.0522	.0499	.0510	.0546	.0485	.0526		
	φ_{Wilcox}	.0423	.0457	.0468	.0429	.0381	.0472	.0442	.0355	.0497		
cauchy	$\varphi_{W,perm}$.0500	.0525	.0516	.0518	.0508	.0510	.0502	.0508	.0541		
	φ_{Wilcox}	.0423	.0457	.0468	.0421	.0432	.0454	.0421	.0426	.0467		

Tabelle 10.7: Relative Verwerfungswahrscheinlichkeiten des studentisierten Permutationstests $\varphi_{W,perm}$ und des klassischen Wilcoxon-Tests φ_{Wilcox}

Die Abbildungen 10.3 und 10.4 zeigen in Abhängigkeit von ϑ die simulierten Gütefunktionen des studentisierten Permutationstests vom Wilcoxon-Typ $\varphi_{W,\text{perm}}$ (10.8) im Vergleich zum klassischen Wilcoxon-Test $\varphi_{W,\text{Wilcox}}$ (10.7). Dabei sind die Stichproben normalverteilt mit gleichem Erwartungswert und unterschiedlichen Varianzen σ_1^2 und σ_2^2 .

$$\alpha = 0.05, \sigma_1^2 : \sigma_2^2 = 1.0 : 1.0, n_1 = n_2 = 16$$

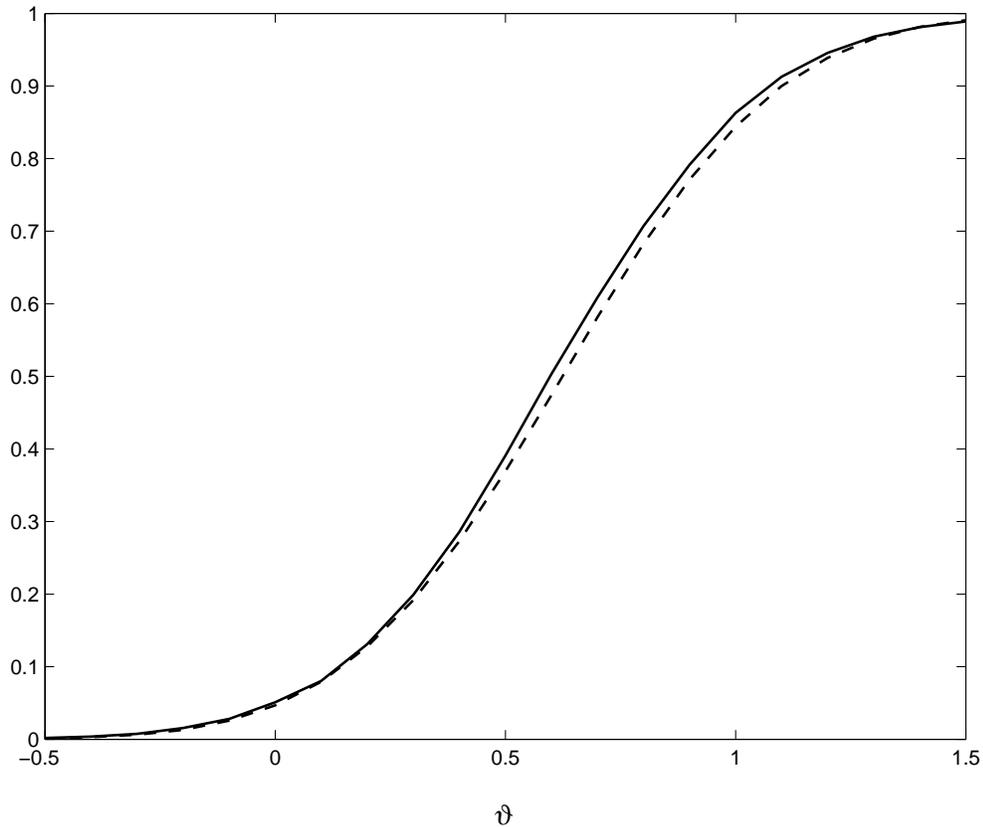


Abbildung 10.3: Gütevergleich für den studentisierten Permutationstest $\varphi_{W,\text{perm}}$ (—) und den Wilcoxon-Test $\varphi_{W,\text{Wilcox}}$ (- - -) bei zugrundeliegender Normalverteilung

Bei der Analyse der simulierten Gütefunktionen in Abbildung 10.3 und Abbildung 10.4 zeigt sich, dass die Funktionen des Permutationstests oberhalb der Gütefunktionen des klassischen Welch-Tests verlaufen.

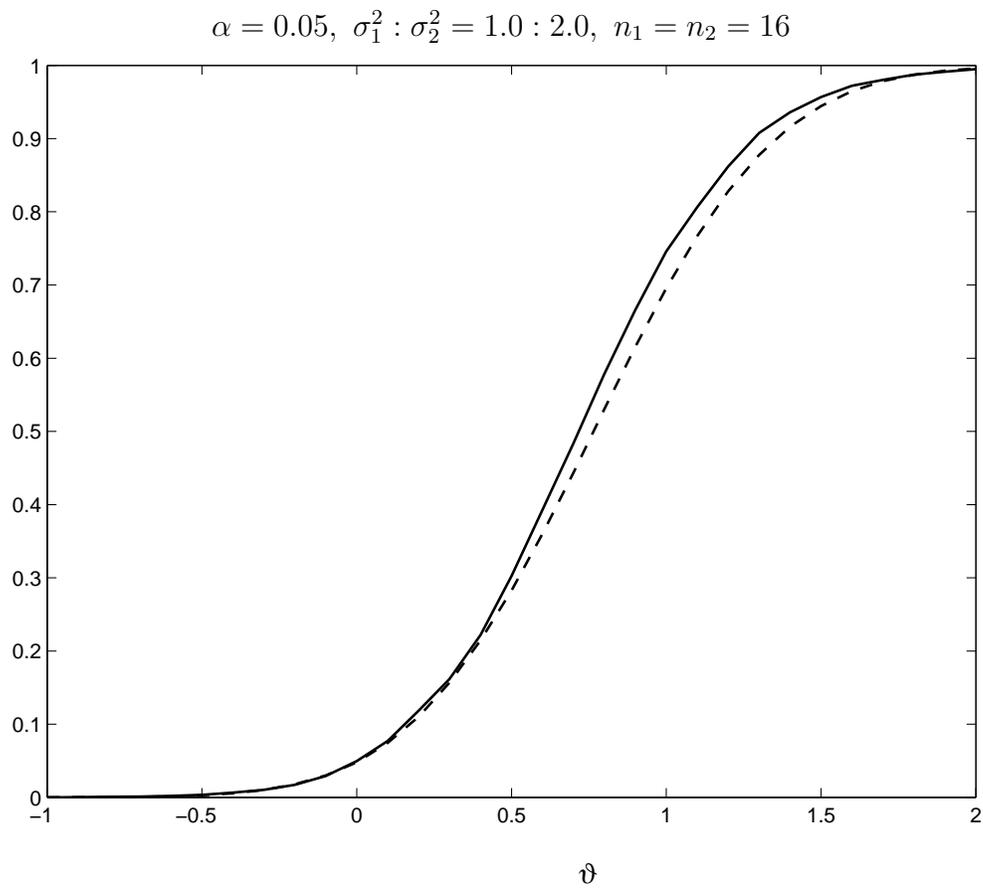


Abbildung 10.4: Gütevergleich für den studentisierten Permutationstest $\varphi_{W,perm}$ (—) und den Wilcoxon-Test φ_{Wilcox} (- - -) bei zugrundeliegender Normalverteilung

Kapitel 11

Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der Arbeit wurden unter allgemeinen Voraussetzungen Grenzwertsätze für lineare Resampling-Statistiken der Form

$$T_n^* = k(n)^{1/2} \sum_{i=1}^{k(n)} W_{n,i} (X_{n,i} - \bar{X}_n)$$

hergeleitet, wobei verschiedene Resampling-Verfahren durch unterschiedliche Gewichte $(W_{n,i})_{i \leq k(n)}$ charakterisiert werden. Diese umfassen klassische Methoden wie Bootstrap- und Permutationsverfahren, aber auch spezielle Resampling-Varianten wie Wild-Bootstrap-Verfahren.

Um bei einer gezielten Anwendung der Methodik unendlich teilbarer Maße den Umfang der Arbeit überschaubar zu halten, wurden hier Dreiecksschemata $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ reellwertiger Zufallsvariablen betrachtet. Mit Blick auf Kapitel 8 und dem Bestehen einer Theorie unendlich teilbarer Maße für banachwertige Zufallsvariablen scheint es sinnvoll, nach der Existenz einer entsprechenden Theorie für Zufallsvariablen $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ auf einem Banachraum (B, \mathcal{B}) mit σ -Algebra \mathcal{B} zu fragen.

In dieser Arbeit wurde das asymptotische Verhalten von bedingten Tests unter der Nullhypothese betrachtet, vgl. Lemma 3.4. Es zeigt sich, dass der Resampling-Test genau dann äquivalent zum asymptotischen Test ist, falls das gewählte Resampling-Verfahren konsistent ist, d.h. die Limesverteilungen der ursprünglichen Statistik T_n und die bedingte Limesverteilung von T_n^* gegeben den Daten $(X_{n,1}, \dots, X_{n,k(n)})$ übereinstimmen.

Mithilfe dieser Ergebnisse und den Anwendungen auf die nichtparametrische Testtheorie stellt sich die Frage, wie sich solche Verfahren unter Alter-

nativen Verhalten. Erste Ergebnisse finden sich in JANSSEN und PAULS [72], Section 6.

In Kapitel 7 wurden erste Aussagen über studentisierte Resampling-Statistiken getroffen. Basierend hierauf lassen sich weitere verfeinerte Aussagen formulieren, vgl. JANSSEN [71].

Weitere Fragestellungen, die sich aus den vorgestellten Ergebnissen ableiten lassen, befassen sich mit Aussagen über quadratische Statistiken. Ausgehend von einem bedingten multivariaten Grenzwertsatz in Kapitel 8 lassen sich die Auswirkungen allgemeiner Resampling-Verfahren auf hieraus resultierende quadratische Formen genauer untersuchen.

Wie die vorhergegangenen Ausführungen zeigen, ergeben sich aus den hier vorgestellten Ergebnissen eine Vielzahl neuer Ziele, welche Gegenstand neuer Untersuchungen sein werden. Ziel wird es sein, dem Theoretiker als auch dem Praktiker eine Methode zur Verfügung zu stellen, mit der eine gezielte Anwendung von Resampling-Methoden in Entscheidungsprozessen möglich ist. Dazu werden noch weitere Monte-Carlo-Studien für unterschiedliche Ausgangssituationen nötig sein. Hierdurch entsteht ein besserer Eindruck der Auswirkungen von Resampling-Verfahren in finiten Situationen und genauere Aussagen über die Anwendbarkeit können getroffen werden.

Teil III

Appendix

Anhang A

Verteilungskonvergenz und der Satz von Skorohod

A.1 Definition und Eigenschaften auf metrischen Räumen

Im Folgenden werden einige wesentliche Aussagen über die schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen beschrieben. Dabei richten sich die getroffenen Notationen nach BILLINGSLEY [24]. Stets sei (Ω, \tilde{d}) ein metrischer Raum mit Borelscher σ -Algebra \mathcal{A} .

Definition A.1

Eine Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen heißt **schwach konvergent** in (Ω, \tilde{d}) gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ , in Zeichen $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f \, d\mu_n = \int f \, d\mu$$

für alle $f \in C_b(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \text{stetig und beschränkt}\}$.

Eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen heißt **konvergent in Verteilung** gegen ein X_0 , in Zeichen $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X_0$, falls die Folge der zugehörigen Verteilungen schwach konvergiert.

Definition A.2

Sei (Ω, \tilde{d}) ein metrischer Raum mit σ -Algebra \mathcal{A} . Dann heißt eine Familie $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen **straff**, falls für jedes $\varepsilon > 0$

eine kompakte Menge K existiert, so dass

$$\mathbb{P}(K^c) \leq \varepsilon \quad \forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}.$$

Die Definition der Straffheit liefert nun den in der Wahrscheinlichkeitstheorie wichtigen Satz von Prohorov.

Satz A.3 (Prohorov)

Sei \mathcal{P} eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem Messraum (Ω, \mathcal{A}) .

Dann gelten:

(i) Ist \mathcal{P} straff, so ist die Familie relativkompakt, d.h. zu jeder Folge in \mathcal{P} existiert eine schwach konvergente Teilfolge.

(ii) Ist Ω separabel und vollständig, so gilt die Umkehrung in (i).

Beweis. Vgl. BILLINGSLEY [24, S. 35ff]. ■

Definition A.4

Ein vollständiger separabler metrischer Raum heißt **polnischer Raum**.

A.2 Metrisierung der schwachen Konvergenz

Neben der Definition der Verteilungskonvergenz über Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen lässt sich diese auch vermöge einer Metrik beschreiben, vgl. HUBER [64] oder WITTING und MÜLLER-FUNK [128, Anmerkung 5.42].

So lässt sich für allgemeine polnische Räume (Ω, \tilde{d}) , die schwache Konvergenz von Verteilungen mittels der *Prohorov-Metrik* beschreiben, welche definiert ist durch:

Definition A.5

Für $A \subset \Omega$ definiere

$$A^\delta := \{x \in \Omega : \inf_{y \in A} \tilde{d}(x, y) \leq \delta\}.$$

Dann ist für zwei Maße P und Q aus $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ die **Prohorov-Metrik** definiert durch

$$d_{Pr}(P, Q) := \inf\{\varepsilon > 0 : P(A) \leq Q(A^\varepsilon) + \varepsilon \text{ für alle } A \in \mathcal{A}\}. \quad (\text{A.1})$$

Speziell für die reelle Gerade \mathbb{R} definiert man die sog. *Lévy-Metrik* wie folgt:

Definition A.6

Seien P und Q zwei Maße aus $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mit Verteilungsfunktionen F und G . Dann ist durch

$$d_L(F, G) := \inf\{\varepsilon > 0 : F(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq G(x) \leq F(x + \varepsilon) + \varepsilon \forall x \in \mathbb{R}\} \quad (\text{A.2})$$

die **Lévy-Metrik** $d_L(F, G)$ definiert.

A.3 Der Satz von Skorohod

Der folgende Satz stellt ein wesentliches Hilfsmittel in den Beweisen der vorigen Kapitel dar. Er wurde erstmals von SKOROHOD [120] für vollständige separable metrische Räume bewiesen. Die hier vorliegende allgemeinere Version stammt von DUDLEY [36].

Theorem A.7 (Skorohod)

Sei (S, \tilde{d}) ein separabler metrischer Raum und $\mathbb{P}_n, n \in \mathbb{N}_0$, Wahrscheinlichkeitsmaße auf S mit $\mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_0$ schwach für $n \rightarrow \infty$. Dann existieren auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum Zufallsvariablen $X_n, n \in \mathbb{N}_0$, mit Werten in S , so dass $\mathcal{L}(X_n) = \mathbb{P}_n$ für alle n und $X_n \rightarrow X_0$ fast sicher gelten.

Beweis. Vgl. DUDLEY [37, Theorem 11.7.2]. ■

Anhang B

Unendlich teilbare Verteilungen

Die Theorie der unendlich teilbaren Maße spielt in der Behandlung von Grenzwertsätzen für Summen unabhängiger Zufallsvariablen eine wesentliche Rolle. Deshalb sollen in diesem Kapitel einige grundlegende Ergebnisse zur Verfügung gestellt werden, die an verschiedenen Stellen dieser Arbeit von entscheidender Bedeutung sind.

Im Laufe der Jahre hat sich eine umfassende Theorie entwickelt. GNEDENKO und KOLMOGOROV [48] liefern in ihrer Monographie eine Zusammenstellung der Ergebnisse für reellwertige Zufallsvariablen, vgl. auch FISZ [42]. ARAUJO und GINÉ [1] betrachten zusätzlich zum reellwertigen Fall das Verhalten in beliebigen Banachräumen. Einen neueren Zugang zu der Thematik, in der die aktuellen Ergebnisse aufgenommen wurden, findet man in PETROV [97].

In diesem Abschnitt werden lediglich Aussagen für reellwertige Zufallsvariablen dargestellt. Für Ergebnisse im Fall unabhängiger Zufallsvektoren vgl. RVAČEVA [113], die in ihrer Arbeit die vorhandenen Ergebnisse aus GNEDENKO und KOLMOGOROV [48] verallgemeinerte. Einen aktuellen Überblick über die Ergebnisse im multivariaten Fall liefern MEESCHAERT und SCHEFFLER [91] in ihrer Monographie.

B.1 Lévy-Khintchine Formel

Definition B.1

*Eine Verteilungsfunktion $t \mapsto F(t)$ und die zugehörige charakteristische Funktion $t \mapsto \hat{\varphi}(t)$ heißen **unendlich teilbar**, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine charakte-*

ristische Funktion $\hat{\varphi}_n(\cdot)$ existiert, so dass

$$\hat{\varphi}(t) = (\hat{\varphi}_n(t))^n \quad (\text{B.1})$$

gilt.

Satz B.2

Eine Funktion $\hat{\varphi}(\cdot)$ ist genau dann eine unendlich teilbare charakteristische Funktion, wenn sie folgende Darstellung besitzt:

$$\hat{\varphi}(t) = \exp\left(i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} A(u, t) \frac{1+u^2}{u^2} dG(u)\right), \quad (\text{B.2})$$

mit

$$A(u, t) = \exp(iut) - 1 - \frac{itu}{1+u^2}.$$

Dabei ist γ eine reelle Konstante, sowie $x \mapsto G(x)$ eine beschränkte nicht-fallende Funktion und der Integrand ist gleich $-t^2/2$ im Punkt $u = 0$.

Beweis. Vgl. PETROV [97, Theorem 1.16] ■

Definition B.3

Die Formel (B.2) heißt **Lévy-Khintchine Formel**.

Mithilfe der Lévy-Khintchine-Formel erhält man eine Möglichkeit unendlich teilbare Verteilungen zu charakterisieren. In dieser Arbeit wird an vielen Stellen auf eine andere Formulierung mittels Lévy-Maße zurückgegriffen.

Bemerkung B.4

Eine äquivalente Darstellung von (B.2) wurde in der Darstellung

$$\hat{\varphi}(t) = \exp\left(i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int A(u, t) d\eta(u)\right) \quad (\text{B.3})$$

von Lévy gegeben. Hierin ist η ein Maß mit der Eigenschaft

$$\int (x^2 \wedge 1) d\eta(x) < \infty. \quad (\text{B.4})$$

Definition B.5

Maße, die die Bedingung (B.4) erfüllen, heißen **Lévy-Maße**.

In vielen Betrachtungen spielen die Darstellungen für Normalverteilungen und für Poisson-Verteilungen mittels der Formel (B.2) eine wichtige Rolle. Im folgendem Beispiel sollen die entsprechenden Parameter für diese beiden Verteilungen explizit angegeben werden.

Beispiel B.6

(a) Setzt man in (B.2)

$$\gamma = \mu \quad \text{und} \quad G(u) = \sigma^2 \mathbf{1}_{(0,\infty)}(u),$$

so erhält man die charakteristische Funktion einer Normalverteilung mit den Parametern (μ, σ^2) , d.h.

$$\hat{\varphi}(t) = \exp(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}).$$

(b) Setzt man in (B.2)

$$\gamma = \lambda \quad \text{und} \quad G(u) = \frac{\lambda}{2} \mathbf{1}_{(1,\infty)}(u),$$

so erhält man die charakteristische Funktion einer Poisson-Verteilung zum Parameter $\lambda > 0$, d.h.

$$\hat{\varphi}(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1)).$$

B.2 Konvergenz gegen unendlich teilbare Verteilungen

Im Folgenden betrachte man ein Dreiecksschema $(X_{n,k})_{k \leq k(n)}$ von zeilenweise unabhängigen Zufallsvariablen. Ziel ist, alle möglichen Grenzverteilungen der Summe

$$\sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,k} \tag{B.5}$$

für $n \rightarrow \infty$ zu bestimmen.

Der zentrale Grenzwertsatz von Lindeberg-Feller setzt die Existenz endlicher zweiter Momente voraus. Es stellt sich somit an dieser Stelle die Frage, ob notwendige und hinreichende Bedingungen existieren, so dass ohne Voraussetzung an die Momente asymptotische Normalität vorliegt. Solche Aussagen werden überwiegend im Kontext der (asymptotischen) Vernachlässigbarkeit (B.6) hergeleitet.

Definition B.7

Gilt für alle $\varepsilon > 0$ die Bedingung

$$\max_{1 \leq k \leq k(n)} \mathbb{P}(|X_{n,k}| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad (\text{B.6})$$

so heißt ein Dreiecksschema $(X_{n,k})_{k \leq k(n)}$ **infinitesimal** oder (asymptotisch) vernachlässigbar.

Erfüllt ein Dreiecksschema die Bedingung der Vernachlässigbarkeit, so ist der Einfluss eines einzelnen Terms beliebig klein. Unter dieser Voraussetzung lässt sich nun die Gesamtheit aller möglichen Limesverteilungen von Partialsummen der Form (B.5) bestimmen und Bedingungen für die Konvergenz gegen eine spezielle derartige Limesverteilung angeben. Die Klasse der dabei auftretenden Verteilungen ist gerade die in Definition B.1 definierten unendlich teilbaren Verteilungen.

Satz B.8

Sei $(X_{n,k})_{k \leq k(n)}$ ein infinitesimales Dreiecksschema zeilenweise unabhängiger Zufallsvariablen mit einer gegen eine Zufallsvariable ξ schwach konvergenten Summe (B.5). Dann ist die Limesverteilung $\mathcal{L}(\xi)$ unendlich teilbar mit charakteristischer Funktion (B.2).

Beweis. Vgl. PETROV [97, Theorem 3.1]. ■

B.3 Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz gegen unendlich teilbare Verteilungsklassen

Basierend auf den Aussagen der vorangegangenen Abschnitte lassen sich an dieser Stelle notwendige und hinreichende Bedingungen für die Verteilungskonvergenz von Partialsummen der Form (B.5) gegen ein unendlich teilbares Maß finden. Dazu benötigt man die folgende Definition.

Definition B.9

Seien F_0, F_1, \dots beschränkte monoton nicht-fallende Funktionen. Dann heißt

die Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **vollständig konvergent** gegen F_0 , in Zeichen $F_n \rightrightarrows F_0$, falls für $S(F_0) := \{x \in \mathbb{R} : F_0 \text{ stetig in } x\}$ die folgenden beiden Aussagen erfüllt sind:

- (i) $F_n(x) \rightarrow F_0(x) \quad \forall x \in S(F_0)$
- (ii) $F_n(-\infty) \rightarrow F_0(-\infty)$ und $F_n(\infty) \rightarrow F_0(\infty)$.

Bemerkung B.10

Sind F_0, F_1, \dots Verteilungsfunktionen, so beschreibt die erste Voraussetzung nach dem Satz von Helly-Bray, vgl. GÄNSSLER und STUTE [45, Satz 1.12.5], gerade die schwache Konvergenz.

Der folgende Satz liefert notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz einer Partialsumme der Form (B.5) gegen eine unendlich teilbare Verteilung.

Satz B.11

Sei $(X_{n,k})_{k \leq k(n)}$ ein Dreiecksschema von zeilenweise unabhängigen Zufallsvariablen, die die Bedingung (B.6) erfüllen. Definiere $F_{nk}(x) := \mathbb{P}(X_{n,k} < x)$. Sei weiter $F(x)$ eine unendlich teilbare Verteilungsfunktion mit charakteristischer Funktion $t \mapsto \hat{\varphi}(t)$, die die Lévy-Khintchine Darstellung (B.2) besitzt. Dann ist notwendig und hinreichend für die Verteilungskonvergenz der Summe $\sum_{k=1}^{k(n)} X_{n,k}$ gegen $F(x)$, dass

$$G_n \rightrightarrows G, \quad \gamma_n \rightarrow \gamma,$$

wobei

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{k(n)} \int_{-\infty}^x \frac{y^2}{1+y^2} d\bar{F}_{nk}(y),$$

$$\gamma_n = \sum_{i=1}^{k(n)} \left(a_{nk} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} d\bar{F}_{nk}(x) \right),$$

$$a_{nk} = \int_{|x| < \tau} x d\bar{F}_{nk}(x), \quad \bar{F}_{nk}(x) = F_{nk}(x + a_{nk}),$$

und τ eine positive Zahl ist.

Beweis. Vgl. PETROV [97, Theorem 3.3] ■

Bemerkung B.12

Die unendlich teilbare Limesfunktion F ist eindeutig durch die Parameter G und γ bestimmt, vgl. dazu PETROV [97, Lemma 1.21].

B.4 Konvergenz gegen eine Normalverteilung

Eine wichtige Variante der Limesverteilungen von linearen Statistiken der Form (B.5) bildet die Normalverteilung. Mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes von Lindeberg-Feller lässt sich die Normalverteilungskonvergenz für Statistiken der Form (B.5) überprüfen. Der folgende Satz liefert äquivalente Bedingungen für die Normalverteilungskonvergenz unter infinitesimalen Dreiecksschemata $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$, vgl. GNEDENKO und KOLMOGOROV [48, S. 125].

Satz B.13

$(X_{n,k})_{k \leq k(n)}$ sei ein Dreiecksschema zeilenweise unabhängiger asymptotisch vernachlässigbarer Zufallsvariablen mit

$$\sum_{k=1}^{k(n)} X_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi.$$

Dann sind äquivalent:

- (i) $\xi = N(\mu, \sigma^2)$ für ein $(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$;
- (ii) $\sum_{k=1}^{k(n)} \int_{|x| \geq \varepsilon} dF_{n,k}(x) \rightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0$;
- (iii) $\mathbb{P}(\max_{k \leq k(n)} |X_{n,k}| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Beweis. (i) \Leftrightarrow (ii)

Für alle $\varepsilon > 0$ folgt aus den Eigenschaften von Lévy-Maßen

$$\sum_{k=1}^{k(n)} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} dF_{n,k}(x) \rightarrow \eta((-\infty, -\varepsilon])$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{k(n)} \int_{\varepsilon}^{\infty} dF_{n,k}(x) \rightarrow \eta([\varepsilon, \infty))$$

und somit wegen

$$\sum_{k=1}^{k(n)} \int_{|x| \geq \varepsilon} dF_{n,k}(x) = \sum_{k=1}^{k(n)} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} dF_{n,k}(x) + \sum_{k=1}^{k(n)} \int_{\varepsilon}^{\infty} dF_{n,k}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

dass $\eta((-\infty, -\varepsilon]) \equiv 0$ sowie $\eta([\varepsilon, \infty)) \equiv 0$ für alle $\varepsilon > 0$, vgl. auch GNE-DENKO und KOLMOGOROV [48, S. 125ff.]. Gilt andererseits $\xi = N(\mu, \sigma^2)$, so folgt aus der Darstellung mittels der Lévy-Khintchine-Formel (B.3), dass $\eta((-\infty, -\varepsilon]) \equiv 0$ sowie $\eta([\varepsilon, \infty)) \equiv 0$ und somit (ii).

(ii) \Leftrightarrow (iii)

Betrachte

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max_{k \leq k(n)} |X_{n,k}| \geq \varepsilon) &= 1 - \mathbb{P}(\max_{k \leq k(n)} |X_{n,k}| < \varepsilon) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^{k(n)} \mathbb{P}(|X_{n,k}| < \varepsilon) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^{k(n)} \left(1 - \int_{|x| \geq \varepsilon} dF_{n,k}(x)\right). \end{aligned}$$

Somit ist (ii) äquivalent zu

$$\prod_{k=1}^{k(n)} \left(1 - \int_{|x| \geq \varepsilon} dF_{n,k}(x)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (\text{B.7})$$

Weiter gilt, dass

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{k=1}^{k(n)} \int_{|x| \geq \varepsilon} dF_{n,k}(x) &\leq \prod_{k=1}^{k(n)} \left(1 - \int_{|x| \geq \varepsilon} dF_{n,k}(x)\right) \\ &\leq \exp\left(-\sum_{k=1}^{k(n)} \int_{|x| \geq \varepsilon} dF_{n,k}(x)\right). \end{aligned}$$

Somit impliziert (ii) die Gleichung (B.7) und somit (iii). Andererseits folgt aus (iii) unmittelbar (ii). \blacksquare

B.5 Quantildarstellung

Für ein infinitesimales Dreiecksschema $(X_{n,i})_{i \leq k(n)}$ von zeilenweise unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$T_n = \sum_{i=1}^{k(n)} X_{n,i} \rightarrow \xi. \quad (\text{B.8})$$

lässt sich nach dem Satz von Lévy-Khintchine (B.2) die Limesvariable ξ als unendlich teilbar mit charakteristischer Funktion (B.2) erkennen. Bezeichnet nun für $\sigma^2 = 0$ und $\eta_1 := \eta_{(-\infty, 0]}$ die Variable μ_1 das unendlich teilbare Maß mit charakteristischer Funktion (B.3) und analog μ_2 ein unendlich teilbares Maß für $\sigma^2 = 0$ sowie $\eta_2 := \eta_{(0, \infty)}$, so gilt für die Verteilung $\mu := \mathcal{L}(\xi)$ von ξ , dass

$$\mu = \mu_1 \star \mathbf{N}(0, \sigma^2) \star \mu_2.$$

Definiert man die inverse Verteilungsfunktion $\psi_1 : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0]$ des Lévy-Maßes η_1 durch

$$\psi_1(y) := \inf\{t : \eta_1(-\infty, t] \geq y\} \wedge 0, \quad (\text{B.9})$$

sowie die inverse Verteilungsfunktion $\psi_2 : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ von η_2 durch

$$\psi_2(y) := \sup\{t : \eta_2[t, \infty) \geq y\} \vee 0, \quad (\text{B.10})$$

so lassen sich hiermit neue Zufallsvariablen

$$\Delta^- := \sum_{i=1}^{\infty} \left(\psi_1(S_i) - \mathbf{E}(\psi_1(S_i) \mathbf{1}_{(-\tau, 0]}(\psi_1(S_i))) \right)$$

sowie

$$\Delta^+ := \sum_{i=1}^{\infty} \left(\psi_2(\tilde{S}_i) - \mathbf{E}(\psi_2(\tilde{S}_i) \mathbf{1}_{[0, \tau)}(\psi_2(\tilde{S}_i))) \right)$$

herleiten, so dass für eine geeignete Konstante

$$\xi \stackrel{\mathcal{D}}{=} \Delta^- + \mathbf{N}(0, \sigma^2) + \Delta^+ + K, \quad (\text{B.11})$$

gilt, vgl JANSSEN [67]. Dabei bezeichne

$$S_n := \sum_{i=1}^n Y_i$$

und

$$\tilde{S}_n := \sum_{j=1}^n \tilde{Y}_j$$

für unabhängige identisch standard exponentialverteilt Zufallsvariablen Y_i, \tilde{Y}_j .

Das folgende Lemma liefert ein wichtiges Hilfsmittel für die Beweise der zentralen Grenzwertsätzen in Kapitel 4.1.

Lemma B.14 (Splittinglemma)

Unter den gegebenen Voraussetzungen existiert eine Folge $0 \leq \tau_n \rightarrow 0$, so dass

$$Y_n := (R_n, S_n, T_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} Y := (R, S, T)$$

mit $\mathcal{L}(Y) = \mu_1 \otimes \mathbf{N}(0, 1) \otimes \mu_2$ und

$$R_n := \sum_{i=1}^{k(n)} \left(X_{n,i} \mathbf{1}_{(-\infty, \tau_n)}(X_{n,i}) - \mathbf{E}(X_{n,i} \mathbf{1}_{(-\tau, \tau_n)}(X_{n,i})) \right),$$

$$S_n := \sum_{i=1}^{k(n)} \left(X_{n,i} \mathbf{1}_{[-\tau_n, \tau_n)}(X_{n,i}) - \mathbf{E}(X_{n,i} \mathbf{1}_{[-\tau_n, \tau_n]}(X_{n,i})) \right),$$

$$T_n := \sum_{i=1}^{k(n)} \left(X_{n,i} \mathbf{1}_{(-\tau, \infty)}(X_{n,i}) - \mathbf{E}(X_{n,i} \mathbf{1}_{(\tau_n, \tau)}(X_{n,i})) \right),$$

Beweis. Vgl. JANSSEN [67, Lemma 5.3]. ■

Tabellenverzeichnis

9.1	Fehlerverteilungen für Monte-Carlo-Simulationen	104
9.2	Untere Fehlerschranken $e(\alpha, B)$ für Bootstrap-Wiederholungen .	110
10.1	Notationen für Monte-Carlo-Simulationen	116
10.2	Relative Verwerfungswahrscheinlichkeiten beim Behrens-Fisher- Problem (Teil I)	119
10.3	Relative Verwerfungswahrscheinlichkeiten beim Behrens-Fisher- Problem (Teil II)	120
10.4	Relative Verwerfungswahrscheinlichkeiten des prepivoted Bootstrap- Test beim Behrens-Fisher-Problem	123
10.5	Relative Verwerfungswahrscheinlichkeiten des Wild-Bootstrap bei poissonverteiltem Stichprobenumfang	124
10.6	Relative Verwerfungswahrscheinlichkeiten des balanced Bootstrap- und des antithetic Bootstrap-Verfahrens	125
10.7	Relative Verwerfungswahrscheinlichkeiten des studentisierten Per- mutationstests und des klassischen Wilcoxon-Tests	128

Abbildungsverzeichnis

10.1 Gütevergleich für Permutationstest, Bootstrap-Test und Welch-Test im Behrens-Fisher-Problem	121
10.2 Gütevergleich für Permutationstest, Bootstrap-Test und Welch-Test im Behrens-Fisher-Problem	122
10.3 Gütevergleich für den studentisierten Permutationstest und den Wilcoxon-Test	129
10.4 Gütevergleich für den studentisierten Permutationstest und den Wilcoxon-Test	130

Algorithmenverzeichnis

1.	Uniform Bootstrap	96
2.	Balanced Bootstrap	97
3.	Antithetic Bootstrap	99
4.	prepivoted Bootstrap	101
5.	Permutation	102

Literaturverzeichnis

- [1] ARAUJO, A. und GINÉ, E. (1980). *The central limit theorem for real and banach valued random variables*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, New York.
- [2] ARCONES, M.A. und GINÉ, E. (1989). The bootstrap of the mean with arbitrary bootstrap sample size. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.* **25**, No. 4, 457–481.
- [3] ARCONES, M.A. und GINÉ, E. (1991). Additions and corrections to “the bootstrap of the mean with arbitrary bootstrap sample size”. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.* **27**, No. 4, 583–595.
- [4] ARENAL-GUTIÉRREZ, E. und MATRÁN, C. (1996). A zero-one law approach to the central limit theorem for the weighted bootstrap mean. *Ann. Prob.* **24**, No. 1, 532–540.
- [5] ATHREYA, K.B. (1987). Bootstrap of the mean in the infinite variance case. *Ann. Stat.* **15**, 724–731.
- [6] BABU, G.J. und RAO, C.R. (1993). Bootstrap Methodology. *Handbook of Statistics*, Vol. 9, 627–659.
- [7] BARBE, J.G. und BERTAIL, P. (1995). *The Weighted Bootstrap*. Lecture Notes in Statistics 98, Springer-Verlag, New York.
- [8] DEL BARRIO, E., CUESTA-ALBERTOS, J.A. und MATRÁN, C. (2002). Asymptotic stability of the bootstrap sample mean. *Stoch. Proc. Appl.* **97**, 289–306.
- [9] DEL BARRIO, E. und MATRÁN, C. (2000). The weighted bootstrap mean for heavy-tailed distributions. *J. Theor. Probab.* **13**, No. 2, 547–569.
- [10] DEL BARRIO, E., MATRÁN, C. und CUESTA-ALBERTOS, J.A. (1999). Necessary conditions for the bootstrap of the mean of a triangular array. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.* **35**, No. 3, 371–386.
- [11] BAUER, H. (2002). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. deGruyter, Berlin.

- [12] BEHNEN, K. und NEUHAUS, G. (1995) *Grundkurs Stochastik. Eine integrierte Einführung in Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik*. B.G. Teubner, Stuttgart.
- [13] BEHRENS, W.V. (1929). Ein Beitrag zur Fehlerberechnung bei wenigen Beobachtungen. *Landw. Jb.* **68**, 807–837.
- [14] BERAN, R. (1984). Bootstrap methods in statistics. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **86**, 14–30.
- [15] BERAN, R. (1986). Simulated power functions. *Ann. Stat.* **14**, 151–173.
- [16] BERAN, R. (1987). Prepivoting to reduce level error of confidence sets. *Biometrika* **74**, 457–468.
- [17] BERAN, R. (1988). Prepivoting test statistics: A bootstrap view of asymptotic refinements. *J. Am. Stat. Assoc.* **83**, No. 403, 687–697.
- [18] BERAN, R. (1997). Diagnosing bootstrap success. *Ann. Inst. Stat. Math.* **49**, No. 1, 1–24.
- [19] BERAN, R. und DUCHARME, G.R. (1991). *Asymptotic Theory for Bootstrap Methods in Statistics*. Les Publications Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, Montréal.
- [20] BERAN, R. und MILLAR, R.W. (1987) Stochastic estimation and testing. *Ann. Stat.* **15**, 1131–1154.
- [21] BEST, D.J. und RAYNER, J.C.W. (1987). Welch’s approximate solution for the Behrens-Fisher problem. *Technometrics* **29**, 205–210.
- [22] BICKEL, P.J. und FREEDMAN, D.A. (1981). Some asymptotic theory for the bootstrap. *Ann. Statist.* **9**, 1196–1217.
- [23] BICKEL, P.J., GÖTZE, F. und VAN ZWET, W.R. (1997). Resampling fewer than n observations: Gains, losses, and remedies for losses. *Stat. Sin.* **7**, No. 1, 1–31.
- [24] BILLINGSLEY, P. (1968). *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons, New York.
- [25] BILLINGSLEY, P. (1986). *Probability and Measure*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, New York.
- [26] CHERNOFF, H. und TEICHER, H. (1958). A central limit theorem for sums of interchangeable random variables. *Ann. Math. Stat.* **29**, 118–130.

-
- [27] CSÖRGŐ, M., CSÖRGŐ, S., HORVÁTH, L. und MASON, D.M. (1986). Normal and stable convergence of integral functions of the empirical distribution function. *Ann. Probab.* **14**, 86–118.
- [28] CSÖRGŐ, S., HÄUSLER, E. und MASON, D.M. (1988). A probabilistic approach to the asymptotic distribution of sums of independent, identically distributed random variables. *Adv. Appl. Math.* **9**, No. 3, 259–333.
- [29] CSÖRGŐ, S. und MASON, D.M. (1989). Bootstrapping empirical functions. *Ann. Stat.* **17**, No. 4, 1447–1471.
- [30] CUESTA-ALBERTOS, J.A. und MATRÁN, C. (1998). The asymptotic distribution of the bootstrap sample mean of an infinitesimal array. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.* **34**, No. 1, 23–48.
- [31] DAVISON, A.C. und HINKLEY, D.V. (1994). Applying the bootstrap: An example. *Resen. Inst. Mat. Estat. Univ. Sao Paulo* **1**, No. 2–3, 283–304.
- [32] DAVISON, A.C. und HINKLEY, D.V. (1997). *Bootstrap methods and their application*. Cambridge Series on Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge.
- [33] DAVISON, A.C., HINKLEY, D.V. und SCHECHTMAN, E. (1986). Efficient bootstrap simulation. *Biometrika* **73**, 555–566.
- [34] DEHEUVELS, P., MASON, D.M. und SHORACK, G.R. (1993). Some Results on the influence of extremes on the bootstrap. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.* **29**, No. 1, 83–103.
- [35] DO, K.A. (1992). A simulation study of balanced and antithetic bootstrap resampling methods. *J. Statist. Comput. Simul.* **40**, 153–166.
- [36] DUDLEY, R.M. (1968). Distances of probability measures and random variables. *Ann. Math. Stat.* **39**, 1563–1572.
- [37] DUDLEY, R.M. (1989). *Real Analysis and Probability*. Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove.
- [38] EFRON, B. (1979). Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife. *Ann. Stat.* **7**, 1–27.
- [39] FISHER, R.A. (1935). *The Design of Experiments*. Oliver and Boyd, Edingburgh.
- [40] FISHER, R.A. (1936). The fiducial argument in statistical inference. *Ann. Eugen.* **6**, 391–422.
- [41] FISHER, R.A. (1939). The comparison of samples with possibly unequal variances. *Ann. Eugen.* **9**, 174–180.
-

- [42] FISZ, M. (1962). Infinitely divisible distributions: Recent results and applications. *Ann. Math. Stat.* **33**, 68–84.
- [43] FLINGER, M.A. und POLICELLO, G.E. (1981). Robust rank procedures for the Behrens-Fisher problem. *J. Am. Stat. Assoc.* **76**, 162–168.
- [44] FUNG, K.Y. (1979). A Monte Carlo study of the studentized Wilcoxon statistic for the Behrens-Fisher problem. *J. Statist. Comput. Simul.* **10**, 15–24.
- [45] GÄNSSLER, P. und STUTE, W. (1977). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer-Verlag, Berlin.
- [46] GINÉ, E. (1996). *Lectures on some aspects of the bootstrap*. Lectures on probability theory and statistics. Giné, E. et al. [Hrsg.], Ecole d’ete de probabilités de Saint-Flour XXVI-1996. Lecture Notes in Mathematics 1665, 37-151, Springer, New York.
- [47] GINÉ, E. und ZINN, J. (1989). Necessary conditions for the bootstrap of the mean. *Ann. Stat.* **17**, No. 2, 684–691.
- [48] GNEDENKO, B.V. und KOLMOGOROV, A.N. (1968). *Limit distributions for sums of independent random variables*. Addison-Wesley, Mass.
- [49] GREENWOOD, J.A. und HARTLEY, H.O. (1962) *Guide to tables in mathematical statistics*. Princeton Univ. Press, New York.
- [50] HÁJEK, J. (1961). Some extensions of the Wald-Wolfowitz-Noether theorem. *Ann. Math. Stat.* **32**, 506–523.
- [51] HÁJEK, J. (1968). Asymptotic normality of simple linear rank statistics under alternatives. *Ann. Math. Stat.* **39**, 325–346.
- [52] HÁJEK, J. (1969). *A course in nonparametric statistics*. Holden-Day, San-Francisco.
- [53] HÁJEK, J., ŠIDÁK, Z. und SEN, P.K. (1999). *Theory of rank tests*. Academic Press, Orlando.
- [54] HALL, P. (1989). Antithetic resampling for the bootstrap. *Biometrika* **76**, No. 4, 713–724.
- [55] HALL, P. (1990). Asymptotic properties of the bootstrap of heavy-tailed distributions. *Ann. Probab.* **18**, No. 3, 1342–1360.
- [56] HALL, P. (1997). *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York.
- [57] HALL, P. und MAMMEN, E. (1994). On general resampling algorithms and their performance in distribution estimation. *Ann. Stat.* **22**, No. 4, 2011-2030.

-
- [58] HALL, P. und MARTIN, M. (1988). On the bootstrap and two-sample problems. *Austral. J. Stat.* **30A**, Spec. Issue, 179–192.
- [59] HALL, P. und WILSON, S.R. (1991). Two guidelines for bootstrap hypothesis testing. *Biometrics* **47**, 757–762.
- [60] HAMMERSLEY, J.M. und HANDSCOMB, D.C. (1975). *Monte Carlo Methods*. Methuen & Co LTD, London.
- [61] HEBBEN, H. (1996). *Studentisierte Permutationstests für Mehrstichprobenprobleme*. Diplomarbeit, Univ. Düsseldorf.
- [62] HEBBEN, H. (1998). *Studentisierte Permutationstests für ein verallgemeinertes Behrens-Fisher-Problem bei verschiedenen Datenerhebungsstrategien*. Dissertation, Universität Düsseldorf.
- [63] HU, T.-C. und TAYLOR, R.L. (1997). On the strong law for arrays and for the bootstrap mean and variance. *Int. J. Math. Math. Sci.* **20**, No. 2, 375–382.
- [64] HUBER, P.J. (1981). *Robust Statistics*. John Wiley & Sons, New York.
- [65] HUŠKOVA, M. (1995). Rank statistics approach in generalized bootstrap. *Kybernetika* **31**, No. 3, 293–296.
- [66] HUŠKOVA, M., BERAN, R. und DUPAČ, V. [Hrsg.] (1998). Collected works of Jaroslav Hájek – With commentary. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, New York.
- [67] JANSSEN, A. (1994). Sums of independent triangular arrays and extreme order statistics. *Ann. Probab.* **22**, No. 4, 1766–1793.
- [68] JANSSEN, A. (1997). Studentized permutation tests for non-i.i.d. hypotheses and the generalized Behrens-Fisher problem. *Stat. Prob. Letters* **36**, No. 1, 9–21.
- [69] JANSSEN, A. (1999). Testing nonparametric statistical functionals with application to rank tests. *J. Stat. Planning and Inference* **81**, No. 1, 71–93.
- [70] JANSSEN, A. (2000). Invariance principles for sums of extreme sequential order statistics attracted to Lévy processes. *Stoch. Proc. Appl.* **85**, 255–277.
- [71] JANSSEN, A. (2002). Resampling Student t -type statistics. (*Preprint*).
- [72] JANSSEN, A. und PAULS, T. (2002). How do bootstrap and permutation tests work? (erscheint in *Ann. Stat.*).
- [73] JANSSEN, A. und PAULS, T. (2002). A Monte Carlo comparison of studentized bootstrap and permutation tests for heteroscedastic two-sample problems. (*Preprint*).
-

- [74] JÖCKEL, K.-H. (1982). *Eigenschaften und effektive Anwendung von Monte-Carlo-Tests*. Dissertation, Universität Dortmund.
- [75] JÖCKEL, K.-H. (1986). Finite sample properties and asymptotic efficiency for Monte Carlo tests. *Ann. Stat.* **14**, 336–347.
- [76] JOHNSON, N. und KOTZ, S. (1969). *Distributions in Statistics. Discrete Distributions*. Houghton Mifflin, Boston.
- [77] KHINTCHINE, A. (1937). Zur Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze. *Math. Sborn.* **44(2)**, 79–117.
- [78] KINATEDER, J. (1992). An invariance principle applicable to the bootstrap. In: LePage, R. and Billard, L. (ed.): *Exploring the limits of Bootstrap*. John Wiley & Sons, New York, 157–181.
- [79] KNIGHT, K. (1989). On the bootstrap of the sample mean in the infinite variance case. *Ann. Stat.* **17**, No. 3, 1168–1175.
- [80] LEHMANN, E.L. (1986). *Testing Statistical Hypotheses*. John Wiley & Sons, New York.
- [81] LEPAGE, R., WOODROOFE, M. und ZINN, J. (1981). Convergence to a stable distribution via order statistics. *Ann. Probab.* **9**, 624–632.
- [82] LINNIK, Y.W. (1975). *Problems of Analytical Statistic*. Statistical Publishing Society, London.
- [83] LIU, R. (1988). Bootstrap procedures under some non-i.i.d. models. *Ann. Stat.* **16**, No. 4, 1696–1708.
- [84] MAMMEN, E. (1989). Asymptotics with increasing dimension for robust regression with applications to the bootstrap. *Ann. Stat.* **17**, No. 1, 382–400.
- [85] MAMMEN, E. (1992). *When does bootstrap work? Asymptotic Results and Simulations*. Lecture Notes in Statistics 77, Springer-Verlag, New York.
- [86] MAMMEN, E. (1992). Bootstrap, wild bootstrap, and asymptotic normality. *Probab. Theory Relat. Fields* **93**, No. 4, 439–455.
- [87] MAMMEN, E. (1993). Bootstrap and wild bootstrap for high dimensional linear models. *Ann. Stat.* **21**, No. 1, 255–285.
- [88] MAMMEN, E. (1993). Bootstrap, Wild Bootstrap and generalized Bootstrap. Preprint, Institut für Mathematik, Humboldt-Universität Berlin.
- [89] MASON, D.M. und NEWTON, M.A. (1992) A rank statistic approach to the consistency of a general bootstrap. *Ann. Stat.* **20**, No. 3, 1611–1624.

-
- [90] MASON, D.M. und SHAO, Q.-M. (2001). Bootstrapping the Student t-statistic. *Ann. Prob.* **29**, 1435-1450.
- [91] MEERSCHAERT, M.M. und SCHEFFLER, H.-P. (2001). *Limit Distributions for Sums of independent Random Vectors*. John Wiley & Sons, New York.
- [92] MEISE, R. und VOGT, D. (1992). *Einführung in die Funktionalanalysis*. Vieweg studium, Braunschweig.
- [93] METHA, J.S. und SRINIVASAN, R. (1970). On the Behrens-Fisher problem. *Biometrika* **57**, 649–655.
- [94] PALLINI, A. und PESARIN, F. (1996). *Resampling Techniques for Testing non-parametric Hypotheses*. 8th international summer school on probability theory and mathematical statistics, CLEUP, Padova.
- [95] PAULS, T. (1998). *Zentrale Grenzwertsätze für Bootstrap- und Permutationstests*. Diplomarbeit, Universität Düsseldorf.
- [96] PESARIN, F. (2001). *Multivariate Permutation Tests: With Applications in Biostatistics*. John Wiley & Sons, New York.
- [97] PETROV, V.V. (1995). *Limit Theorems of Probability Theory*. Clarendon Press, Oxford.
- [98] PFANZGAL, J. (1974). On the Behrens-Fisher problem. *Biometrika* **61**, 39–47.
- [99] PITMAN, E.J.G. (1937). Significance tests which may be applied to samples from any populations. *J. R. Stat. Soc.* **4**, Suppl., 119–130.
- [100] PITMAN, E.J.G. (1937). Significance tests which may be applied to samples from any populations. II. The correlation coefficient test. *J. R. Stat. Soc.* **4**, Suppl., 225–232.
- [101] PITMAN, E.J.G. (1938). Significance tests which may be applied to samples from any populations. III. The analysis of variance test. *Biometrika* **29**, 322–335.
- [102] POLLAK, M. (1972). A note on infinitely divisible random vectors. *Ann. Math. Stat.* **43**, 673–675.
- [103] POTTHOFF, R.F. (1963). Use of the Wilcoxon statistic for a generalized Behrens-Fisher problem. *Ann. Math. Stat.* **34**, 1596–1599.
- [104] PRAESTGAARD, J. und WELLNER, J.A. (1993). Exchangeably weighted bootstraps of the general empirical process. *Ann. Probab.* **21**, No. 4, 2053–2086.
- [105] PUTTER, H. (1994). Consistency of Resampling Methods. Dissertation, Universität Leiden.

- [106] PUTTER, H. und VAN ZWET, W.R. (1996). Resampling: Consistency of substitution estimators. *Ann. Stat.* **24**, No. 6, 2297–2318.
- [107] PUTTER, H. und VAN ZWET, W.R. (1996). On a set of the first category. In: *Festschrift for Lucien LeCam*, Springer-Verlag, New York.
- [108] RAIKOV, D.A. (1938). On the connection between the central limit law of probability theory and the law of large numbers. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **2**, 323–338.
- [109] RAO, C.R. (1999). *Statistics and Truth. Putting chance to work*. World Scientific, Singapore.
- [110] REISS, R.-D. (1989). *Approximate distributions of order statistics. With applications to nonparametric statistics*. Springer-Verlag, New York.
- [111] RUBIN, D.B. (1981). The Bayesian bootstrap. *Ann. Stat.* **9**, 130–134.
- [112] RUST, S.W. und FLINGER, M.A. (1984). A modification of the Kruskal-Wallis statistic for the generalized Behrens-Fisher problem. *Commun. Stat. Theory Methods* **13**, 2013–2027.
- [113] RVAČEVA, E. (1962). On domains of attraction of multidimensional distributions. *Select. Transl. Math. Stat. Prob.* **2**, 183–205.
- [114] SAMAWI, H.M., WOODWORTH, G.G. und AL-SALEH, M.F. (1996). Two-sample importance resampling for the bootstrap. *Metron* **54**, No. 3–4, 141–156.
- [115] SEPANSKI, S.J. (1994). Necessary and sufficient conditions for the multivariate bootstrap of the mean. *Stat. Probab. Lett.* **19**, No. 3, 205–216.
- [116] SEPANSKI, S.J. (1996). Asymptotics for multivariate t -statistic for random vectors in the generalized domain of attraction of the multivariate normal law. *Stat. Probab. Lett.* **30**, No. 2, 179–188.
- [117] SHAO, J. und TU, D. (1996). *The Jackknife and Bootstrap*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York.
- [118] SHORACK, G.R. (1996). Linear rank statistics, finite sampling, permutation tests and Winsorizing. *Ann. Stat.* **24**, No. 3, 1371–1385.
- [119] SINGH, K. (1981). On the asymptotic accuracy of Efron’s bootstrap. *Ann. Stat.* **9**, 1187–1195.
- [120] SKOROHOD, A.V. (1956). Limit theorems for stochastic processes. *Theor. Probab. Appls.* **1**, 261–290.
- [121] SWANEPOEL, J.W.H. (1986). A note on proving that the (modified) bootstrap works. *Commun. Stat., Theory Methods* **15**, 3193–3203.

-
- [122] WANG, Y.Y. (1971). Probabilities of the type I error of the Welch tests for the Behrens-Fisher problem. *J. Am. Stat. Assoc.* **66**, 605–608.
- [123] WELCH, B.L. (1937). The significance of the difference between two means when the population variances are unequal. *Biometrika* **29**, 350–362.
- [124] WELCH, B.L. (1947). The generalization of Student's problem when several different population variances are involved. *Biometrika* **34**, 28–35.
- [125] WELLNER, J.A. (2001). Some converse limit theorems for exchangeable bootstraps. In: deGunst et al. [Hrsg.]: State of the Art in Probability and Statistics, Festschrift for Willem R. van Zwet, IMS Lecture Notes 36.
- [126] WENG, C.S. (1989). On a second-order asymptotic property of the Bayesian bootstrap mean. *Ann. Stat.* **17**, No. 2, 705–710.
- [127] WITTING, H. (1985). *Mathematische Statistik I. Parametrische Verfahren bei festem Stichprobenumfang*. B.G. Teubner, Stuttgart.
- [128] WITTING, H. und MÜLLER-FUNK, U. (1995). *Mathematische Statistik II. Asymptotische Statistik: Parametrische Modelle und nichtparametrische Funktionale*. B.G. Teubner, Stuttgart.
- [129] WITTING, H. und NÖLLE, G. (1970). *Angewandte Mathematische Statistik. Optimale finite und asymptotische Verfahren*. B.G. Teubner, Stuttgart.
- [130] WOLF-OSTERMANN, K. (1997). *Bootstrap-Testverfahren für Lokationsparameter univariater Verteilungen*. Dissertation, Universität Dortmund.
- [131] YUEN, K.K. (1974). The two-sample trimmed t for unequal population variances. *Biometrika* **61**, 165–170.
- [132] ZHENG, T. und TU, D. (1988). Random weighting method in regression models. *Sci. Sin., Ser. A* **31**, No. 12, 1442–1459.

Lebenslauf

Persönliche Daten

geboren am 05. August 1973
in Monheim am Rhein
Staatsangehörigkeit deutsch
Familienstand verheiratet

Ausbildung

seit 03/99 Promotionsvorhaben in Mathematik an der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
(gefördert durch ein DFG-Forschungsprojekt)
03/99 Erlangung des Grades eines Diplom-Mathematikers
an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Studienschwerpunkt: Mathematische Statistik
Thema der Diplomarbeit: Zentrale Grenzwertsätze
für Bootstrap- und Permutationstests
10/92 Beginn des Studiums der Mathematik an der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
1992 Abitur
1989-1992 Landrat-Lucas-Gymnasium, Leverkusen
1986-1989 Realschule Görrestraße, Leverkusen
1983-1986 Lise-Meitner-Gymnasium, Leverkusen
1979-1983 St. Stephanus Grundschule, Leverkusen

Beschäftigung

seit 04/99 Wissenschaftlicher Angestellter am Lehrstuhl für
Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeits-
theorie der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
10/98-03/99 Studentische Hilfskraft am Lehrstuhl für Mathema-
tische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie der
Heinrich-Heine-Universität

