

Anwendungen der Likelihood-Theorie in der Finanzmathematik

I n a u g u r a l - D i s s e r t a t i o n

zur

Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Martin Tietje

aus Husum

November 2011

Aus dem Mathematischen Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Gedruckt mit der Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent: Prof. Dr. A. Janssen

Koreferent: Prof. Dr. M. Reiß

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Januar 2012

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden systematisch Anwendungen der Likelihood-Theorie in der Finanzmathematik untersucht. Dazu wird ein Darstellungssatz bewiesen, der es erlaubt, Finanzmarkt-Modelle durch statistische Experimente zu identifizieren, wobei dann Preisprozesse über gefilterte Likelihood-Prozesse gegeben sind.

Eine Anwendung ist die Neuinterpretation von diversen Optionspreisen mittels Gütefunktionen von Tests.

Durch die Einführung eines Faktorisierungskonzeptes für Likelihood-Quotienten werden die Begriffe der Vollständigkeit von Finanzmärkten und der Vollständigkeit von statistischen Experimenten miteinander verknüpft.

Anschließend wird eine Robustheitsanalyse für Optionspreise durchgeführt. Durch Benutzung des Konzepts der L_1 -Differenzierbarkeit aus der Statistik werden Gradienten, das heißt Störungsrichtungen, die starke Reaktionen des Optionspreises hervorrufen, für einige Optionen ermittelt. Es zeigt sich, dass bei Itô-Prozess-Modellen mit deterministischer Volatilität Gradienten für gewisse Optionen durch Vielfache der zugehörigen Volatilitäten gegeben sind.

Unter Verwendung des dritten Lemmas von Le Cam wird unter geeigneten Voraussetzungen ein Konvergenzresultat für Optionspreise erzielt.

Als Spezialfall wird mit Hilfe von L_2 -Differenzierbarkeit und der LAN-Theorie (lokal asymptotische Normalität) von Le Cam ein Approximationsverfahren für Itô-Prozess-Modelle mit deterministischen Parametern durch zeitdiskrete Modelle präsentiert.

Durchgängig werden erzielte Resultate und Begriffe am Beispiel von Binomial-, Trinomial- oder Itô-Prozess-Modellen erläutert.

Abstract

In this thesis applications of the theory of likelihoods to financial mathematics are studied in a systematic way. To this end, a representation theorem which allows the identification of financial market models by statistical experiments is proven. In this representation price processes are given by filtered likelihood processes.

As application a new interpretation of certain option prices in terms of power functions of tests is presented.

A connection between the concepts of completeness of financial markets and completeness of statistical experiments is established via factorisation of likelihood ratios.

Afterwards a result about robustness of option prices is achieved. Gradients, that means directions of disturbance for which the option price shows strong reactions, are calculated for certain options. For that purpose the notion of L_1 -differentiability from statistics is used. In the case of Itô type models with deterministic volatility gradients are given by multiples of the corresponding volatilities.

By application of Le Cam's third lemma convergence of option prices under appropriate conditions is shown.

As a special case, with the help of L_2 -differentiability and the LAN theory (local asymptotic normality) from Le Cam, a method to approximate Itô type models with deterministic parameters by discrete time models is obtained.

Throughout, results and notions are explained in the case of binomial, trinomial or Itô type models.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Darstellung von Preisprozessen	6
1.1 Darstellung von Preisprozessen	6
1.2 Anwendung: Nutzenfunktion und Kullback-Leibler-Information . .	14
2 Optionspreise als Gütefunktionen von Tests	16
2.1 Optionspreise als Gütefunktionen von Tests	16
2.2 Anwendung: Eine Charakterisierung von Binomial-Modellen . . .	20
3 Vollständigkeit: Finanzmärkte und statistische Experimente	21
3.1 Komplementäre Experimente	21
3.2 Zusammenhang der Vollständigkeitskonzepte	25
4 Robustheit von Optionspreisen	29
4.1 L_1 -Differenzierbarkeit von Preisprozessen	29
4.2 Differenzierbarkeit von Optionspreisen	34
4.3 Bestimmung von Gradienten	37
5 Konvergenz von Optionspreisen	41
5.1 Standarddarstellung von Finanzexperimenten	41
5.2 Konvergenz von Finanzexperimenten	44
5.3 Konvergenz von Optionspreisen	49
6 Approximation von Itô-Prozess-Modellen	54
6.1 Identifizierung von zeitdiskreten Preisprozessen	54
6.2 Anwendung der LAN-Theorie	59

INHALTSVERZEICHNIS	II
--------------------	----

Literaturverzeichnis	68
----------------------	----

Einleitung

In der mathematischen Statistik ist die Theorie von Likelihoods und von statistischen Experimenten von großer Bedeutung. So beginnt etwa Strasser [32] sein Buch über mathematische Statistik mit einigen fundamentalen Grundlagen über Likelihood-Quotienten. Als wichtiges Beispiel der Anwendung ist die asymptotische Statistik zu nennen. Ein großes Gebiet der Forschung konzentriert sich darauf, über asymptotische Argumente mathematische Rechtfertigung für statistische Methoden zu liefern. Als Beispiel-Literatur für einige nützliche Konzepte zur Lösung von asymptotischen Problemen in der Statistik kann das Buch von Le Cam und Yang [19] angeführt werden. Als Referenz für die Theorie von Likelihoods und statistischen Experimenten dienen zum Beispiel die Bücher von Le Cam [18], Shiryaev und Spokoiny [30], Strasser [32] oder Torgersen [34].

Die vorliegende Arbeit setzt es sich zum Ziel, bekannte Konzepte und Resultate aus der mathematischen Statistik für finanzmathematische Problemstellungen nutzbar zu machen. Hierbei werden sowohl klassische Fragestellungen der Finanzmathematik, als auch solche neueren Datums, im Licht der mathematischen Statistik neu beleuchtet und mit einer statistischen Interpretation versehen, bekannte Resultate mit statistischen Techniken erneut bewiesen und gegebenenfalls erweitert und vollständig neue Ergebnisse erarbeitet.

Es ist zu erwähnen, dass die Anwendung von statistischen Begriffen und Techniken schon vielerorts Eingang in die Literatur gefunden hat. Im Folgenden werden in diesem Kontext einige Publikationen aufgeführt.

Als ein erstes mögliches Werkzeug der Statistik mit Anwendungsmöglichkeit in der Finanzmathematik wäre etwa das Neyman-Pearson Lemma zu nennen. Ursprünglich entwickelt, um Optimalität eines Tests, das heißt Minimalität der

Fehlerwahrscheinlichkeit zweiter Art unter Einhaltung einer Nebenbedingung an die Fehlerwahrscheinlichkeit erster Art, nachzuweisen, lässt sich die Technik zur Lösung von anderen Optimierungsproblemen nutzen. So findet das Neyman-Pearson Lemma Anwendung in Schied [27], wo für den Spezialfall eines einfachen Risikomaßes das Risiko einer durch die Emission einer Option entstehenden Zahlungsverpflichtung unter Bedingungen an das Kapital des Emittenten minimiert wird. Weitere Einsatzmöglichkeiten zeigen sich etwa in Föllmer und Leukert [5] beim sogenannten „Quantil-Hedging“ und in Föllmer und Leukert [6] bei der Risikominimierung beim Absichern von emittierten Optionen.

Ein Gegenstand der Forschung stellt die Untersuchung von Risiko mit Risikomaßen, die über Likelihood-Quotienten definiert sind, dar. Solche Risikomaße treten etwa in Schied [27] auf. Bei der Risikoanalyse mit Risikomaßen von dieser Gestalt tritt die Theorie von sogenannten „Maximin“-Tests in Erscheinung, vergleiche etwa Cvitanic und Karatzas [2], oder unter Verwendung eines anderen Ansatzes Rudloff und Karatzas [25]. In demselben Zusammenhang wird in Schied [28] ein Nutzenmaximierungsproblem mit einem robusten Nutzenfunktional, das über eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen definiert ist, auf das Finden von ungünstiges Wahrscheinlichkeitsmaßen durch Anwendung eines Resultats der Testtheorie von Huber und Strassen [9] zurückgeführt.

Ein weiteres aus der Statistik entliehenes Hilfsmittel ist der Begriff der Benachbarkeit, ein asymptotisches Analogon zu absoluter Stetigkeit. In einer Arbeit von Kabanov und Kramkov [14] nimmt das Konzept von Benachbarkeit für die Charakterisierung von asymptotischer Arbitrage eine zentrale Rolle ein. Auch Shiryaev [29] benutzt in seinem Buch über Finanzmathematik die Notation der Benachbarkeit. Darüber hinaus tritt in diesem Buch das berühmte dritte Lemma von Le Cam, welches auch in der vorliegenden Arbeit in späteren Kapiteln von Bedeutung sein wird, in Erscheinung.

Abschließend erwähnt sei eine Arbeit von Gushchin und Mordecki [8]. In ihrer Publikation wenden die Autoren die Theorie von binären Experimenten an, um extremale Maße zu bestimmen, die untere und obere Schranken für den Wertebereich von Optionspreisen in Semimartingal-Modellen liefern.

Als Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit dient folgende grundlegende Beobachtung. Für jedes Finanzmarkt-Modell mit positiven Preisprozessen, welches

mindestens ein Martingalmaß besitzt, existiert eine Darstellung als gefiltertes statistisches Experiment, welches dann Finanzexperiment genannt wird, wobei sich die Preisprozesse als gefilterte Likelihood-Prozesse ergeben. Aufbauend auf diesem Resultat werden in dieser Arbeit systematisch mögliche Anwendungen der Likelihood-Theorie in der Finanzmathematik erforscht. Genauer gesagt werden unter Verwendung dieses Darstellungssatzes Finanzmarkt-Modelle in die Sprache der mathematischen Statistik „übersetzt“ und daraufhin wird untersucht, inwieweit diese Modelle dann neue Interpretationen, Beweistechniken und Ergebnisse für diverse Fragestellungen erlauben.

Konkret ist diese Arbeit in sechs Kapitel unterteilt.

Das erste Kapitel enthält oben erwähnten Darstellungssatz, der eine Verbindung von Finanzmodellen zu statistischen Experimenten herstellt. Beispielhaft erläutert wird eine mögliche Darstellung für den Fall eines Binomial- und Trinomial-Modells, wobei im zugehörigen statistischen Experiment Zwei- beziehungsweise Dreipunkt-Verteilungen auftreten, sowie im Fall von Itô-Prozess-Modellen, in denen die zugehörigen Likelihood-Quotienten über den Satz von Girsanov gegeben sind. Als eine erste Anwendung wird eine Umschreibung von Erwartungsnutzen mit logarithmischer Nutzenfunktion als Differenz zweier Kullback-Leibler Informationen vorgestellt.

Im zweiten Kapitel werden mittels des Darstellungssatzes aus Kapitel 1 Optionspreise von verschiedenen Optionen neu beleuchtet. Es stellt sich heraus, dass sich der Optionspreis in vielen Fällen über Gütefunktionen von Tests beschreiben lässt. Im Fall eines europäischen Calls und eines europäischen Puts ist der zugrunde liegende Test durch einen Neyman-Pearson Test gegeben. Für die entsprechenden Optionspreise erhält man Abwandlungen des zugehörigen minimalen Bayes-Risikos. Diese Beobachtung ermöglicht im N -Perioden-Modell die Verwendung von Werkzeugen aus der Theorie der statistischen Experimente, nämlich die Fehlerfunktion und die Hellinger-Transformierte, um ein Resultat von Irle [10], das eine Identifizierung von N -Perioden-Modellen als Binomial-Modelle erlaubt, erneut zu beweisen.

In Kapitel 3 wird auf das Konzept der Vollständigkeit sowohl für Finanzmärkte als auch für statistische Experimente eingegangen. Es wird gezeigt, dass zwischen den augenscheinlich verschiedenen Begriffen der Vollständigkeit in gewisser Weise ein Zusammenhang hergestellt werden kann. Zu diesem Zweck wird der Begriff der komplementären Experimente, der im Wesentlichen eine Faktorisierung von Likelihood-Quotienten über eine Teilinformation beschreibt, entwickelt.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit der Robustheitsanalyse von Optionspreisen. Betrachtet werden dabei ein Itô-Prozess-Modell aus Kapitel 1 mit zusätzlichen Annahmen, eine Option mit Gestalt ähnlich wie im zweiten Kapitel sowie eine Störung in der Volatilität der Preisprozesse. Es zeigt sich, dass sich für jeden Preisprozess eine „Haupttrichtung“, auch genannt Gradient, das heißt eine Störungsrichtung für den Preisprozess, auf die der Optionspreis besonders empfindlich reagiert, bestimmen lässt. Für die einzelnen Gradienten ergeben sich dabei jeweils Vielfache der zugehörigen Volatilitäten. Im verwendeten Verfahren kommt das Konzept der L_1 -Differenzierbarkeit aus der mathematischen Statistik zum Einsatz.

Im fünften Kapitel wird die Konvergenz von Optionspreisen untersucht. Dazu wird zuerst eine Standarddarstellung für Finanzexperimente, angelehnt an den Begriff des Standardmaßes aus der Theorie der binären Experimente, eingeführt. Mittels Kompaktheitsargumenten und dem 3. Lemma von Le Cam lässt sich beweisen, dass Finanzexperimente unter geeigneten Voraussetzungen konvergieren, wobei das Grenzexperiment in Standarddarstellung angegeben werden kann. Hierbei liegt die Schwierigkeit hauptsächlich darin, zu argumentieren, warum beim Grenzübergang keine Masse nach unendlich abwandern kann. Dies lässt sich im Wesentlichen durch Verwendung der Markoff-Ungleichung und von Straffheitsargumenten bewerkstelligen. Schließlich wird das erzielte Konvergenzresultat auch auf Optionspreise ausgeweitet.

In Kapitel 6 wird als Spezialfall des fünften Kapitels ein Approximationsresultat für Itô-Prozess-Modelle angegeben. Hierbei erfolgt die Modellierung der Preisprozesse in der Approximationsfolge über zeitdiskrete Prozesse, welche als

Mitglieder einer L_2 -differenzierbaren Kurve von Wahrscheinlichkeitsmaßen identifiziert werden können. Die Identifizierung wird für den Fall eines Binomial-Modells exemplarisch ausgeführt. Es werden geeignete Voraussetzungen an die Volatilitäts- und Zinsratenkoeffizienten spezifiziert, für die sich dann mit Hilfe der bekannten LAN-Theorie (wobei LAN lokal asymptotische Normalität bezeichnet) Konvergenz gegen Itô-Prozess-Modelle mit deterministischen Volatilitäts- und Zinsratenfunktionen nachweisen lassen, wobei als Konvergenzart hierbei schwache Konvergenz aller endlich-dimensionalen Randverteilungen gemeint ist. Eine Anwendung der LAN-Theorie bietet sich an, da das Grenzmodell in diesem Fall durch Normalverteilungen beschrieben werden kann. Das vorgestellte Konvergenzresultat verallgemeinert die bekannte Approximation des klassischen Finanzmarkt-Modells von Black, Scholes und Merton durch das Cox-Ross-Rubinstein-Modell.

Abschließend möchte ich Herrn Prof. Dr. A. Janssen für die vielen anregenden Gespräche und die umfangreiche Betreuung bei der Erstellung dieser Arbeit danken. Ein herzlicher Dank gebührt auch Herrn Prof. Dr. M. Reiß für die Übernahme und Erstellung eines weiteren Gutachtens.

Kapitel 1

Darstellung von Preisprozessen

1.1 Darstellung von Preisprozessen

Das Ziel dieses Kapitels ist es, eine Grundlage zur Verbindung von Finanzmathematik und Statistik zu schaffen. Dazu wird ein Resultat vorgestellt, dass die Darstellung von Preisprozessen als Likelihood-Prozesse von gefilterten statistischen Experimenten erlaubt. Aufbauend auf diesem Ergebnis werden dann in den folgenden Kapiteln im Zusammenhang mit finanzmathematischen Fragestellungen Anwendungen der Theorie der statistischen Experimente und statistische Interpretationen vorgestellt.

Unter einem gefilterten Experiment versteht man ein statistisches Experiment $E = (\Omega, \mathcal{F}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ zusammen mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$, wobei I einen Zeitparameter-Bereich angibt. Hierbei ist $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ eine durch einen Parameter θ parametrisierte Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen und $(\Omega, \mathcal{F}, P_\theta)$ sind Wahrscheinlichkeitsräume. Nachzulesen ist diese Definition zum Beispiel in Shiryaev und Spokoiny [30].

In der Literatur wird bereits seit längerer Zeit mit gefilterten Experimenten gearbeitet. Frühere Resultate zu diesem Thema findet man beispielsweise in Jacod [11] und Strasser [33] während man mit Norberg [23] eine Arbeit jüngeren Datums anführen kann.

Im Folgenden sei $[0, T]$ mit $T < \infty$ ein Zeitintervall und $I \subset [0, T]$ mit $\{0, T\} \subset I$ bezeichne die Menge der Zeitpunkte in diesem Zeitintervall, an denen gehandelt werden kann. Dies beinhaltet den diskreten und den stetigen Fall. Zudem sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein gefilterter Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Filtration

$(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ und $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_t : t \in I)$, wobei P das physische Maß darstellt. Auf diesem gefilterten Wahrscheinlichkeitsraum seien d adaptierte, positive, diskontierte Preisprozesse $(X_t^i)_{t \in I}$, $1 \leq i \leq d$ gegeben mit der Annahme $\mathcal{F}_0 = \sigma(\mathcal{N})$, wobei $\mathcal{N} = \{N : P(N) = 0 \text{ oder } P(N) = 1\}$. Eine solche Modellierung von Preisprozessen werde von nun an als Finanzmarkt-Modell bezeichnet.

In dem ersten Resultat, das diese Preisprozesse als statistisches Experiment charakterisiert, spielt der Begriff des Martingalmaßes eine wichtige Rolle. In der Finanzmathematik ist oft die Frage nach der Existenz eines Martingalmaßes von Interesse. Im diskreten Fall bei endlichem Zeithorizont ist diese Existenz genau dann gegeben, wenn eine Arbitragefreiheits-Bedingung erfüllt ist, vergleiche Shiryaev [29] (S. 656). Im stetigen Fall wird diese Fragestellung in Delbaen und Schachermayer [3] untersucht.

Das folgende Theorem wird sich als Dreh- und Angelpunkt der weiteren Untersuchungen erweisen.

Theorem 1.1

Gegeben sei ein Finanzmarkt-Modell wie oben. Es sei Q ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (1) *Es existieren Wahrscheinlichkeitsmaße $Q_1, \dots, Q_d$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit*

$$\frac{dQ_i|_{\mathcal{F}_t}}{dQ|_{\mathcal{F}_t}} = \frac{X_t^i}{X_0^i}, \quad t \in I, \quad (1.1)$$

wobei $Q_i \ll Q$ für alle $1 \leq i \leq d$.

- (2) *Q ist ein Martingalmaß, das heißt $(X_t^i)_{t \in I}$ ist ein Q -Martingal für alle $1 \leq i \leq d$.*

Beweis. Für die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) betrachte Q_i wie in (1) angegeben. Unter Verwendung der Identität

$$\frac{dQ_i|_{\mathcal{F}_t}}{dQ|_{\mathcal{F}_t}} = E_Q \left[\frac{dQ_i}{dQ} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

folgt für alle $1 \leq i \leq d$ und $s < t$, $s, t \in I$:

$$\begin{aligned}
 E_Q[X_t^i | \mathcal{F}_s] &= X_0^i E_Q \left[\frac{X_t^i}{X_0^i} \middle| \mathcal{F}_s \right] = X_0^i E_Q \left[\frac{dQ_i | \mathcal{F}_t}{dQ | \mathcal{F}_t} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
 &= X_0^i E_Q \left[E_Q \left[\frac{dQ_i}{dQ} \middle| \mathcal{F}_t \right] \middle| \mathcal{F}_s \right] = X_0^i E_Q \left[\frac{dQ_i}{dQ} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
 &= X_0^i \frac{dQ_i | \mathcal{F}_s}{dQ | \mathcal{F}_s} = X_0^i \frac{X_s^i}{X_0^i} = X_s^i.
 \end{aligned}$$

Somit ist Q ein Martingalmaß.

Zeige als Nächstes $(2) \Rightarrow (1)$. Für alle $1 \leq i \leq d$ gilt

$$E_Q \left(\frac{X_T^i}{X_0^i} \right) = \frac{X_0^i}{X_0^i} = 1.$$

Somit werden durch

$$\frac{dQ_i}{dQ} = \frac{X_T^i}{X_0^i}$$

Wahrscheinlichkeitsmaße $Q_i \ll Q$ definiert. Es folgt

$$\frac{X_t^i}{X_0^i} = E_Q \left[\frac{X_T^i}{X_0^i} \middle| \mathcal{F}_t \right] = E_Q \left[\frac{dQ_i}{dQ} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{dQ_i | \mathcal{F}_t}{dQ | \mathcal{F}_t}.$$

für alle $1 \leq i \leq d$ und $t \in I$. ■

Bemerkung 1.2

Im Fall $I = [0, \infty)$ gestaltet sich der Beweis für Theorem 1.1 unterschiedlich. Die Implikation $(1) \Rightarrow (2)$ lässt sich auf den Fall $I = [0, \infty)$ ohne Änderung übertragen. Für $(2) \Rightarrow (1)$ kann der Beweis wie oben durchgeführt werden, wenn etwa folgende zusätzliche Bedingung gefordert wird: für alle i ist $(X_t^i)_{t \in [0, \infty)}$ ein erzeugtes Q -Martingal, welches durch ein X_∞^i erzeugt ist, das heißt $X_t^i = E_Q[X_\infty^i | \mathcal{F}_t]$, $t \in [0, \infty)$. In diesem Fall folgt die Aussage analog zum vorgestellten Beweis, wobei X_∞^i die Rolle von X_T^i übernimmt.

Des Weiteren lässt sich bemerken, dass für die Aussage von Theorem 1.1 die Annahme der Positivität an die Preisprozesse, außer für den Startwert, der zur Normierung notwendig ist, auch durch eine Nicht-Negativitäts-Bedingung ersetzt werden könnte, womit dann auch Preisprozesse, welche auf einer Menge mit positiver Wahrscheinlichkeit den Wert 0 annehmen, zugelassen wären.

Definition 1.3

Im Kontext von Theorem 1.1 wird

$$(\Omega, \mathcal{F}, \{Q_1, \dots, Q_d, Q, P\})$$

zusammen mit der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ als Finanzexperiment bezeichnet. Die Prozesse $\left(\frac{dQ_i|_{\mathcal{F}_t}}{dQ|_{\mathcal{F}_t}} \right)_{t \in I}$ heißen gefilterte Likelihood-Prozesse.

In einigen Anwendungen, wie zum Beispiel in diversen Berechnungsformeln für Optionspreise, spielt das physische Maß P keine Rolle und in solchen Fällen werde

$$(\Omega, \mathcal{F}, \{Q_1, \dots, Q_d, Q\})$$

als Finanzexperiment bezeichnet.

Es ist zu beachten, dass die Darstellung der Preisprozesse mit Hilfe von Theorem 1.1 nur möglich ist, wenn ein Martingalmaß existiert. Im Folgenden sollen daher nur Finanzmärkte betrachtet werden, in denen mindestens ein Martingalmaß vorliegt. Im Allgemeinen ist das Martingalmaß jedoch nicht eindeutig, was zu verschiedenen Finanzexperimenten führen kann. Unter starken Voraussetzungen (siehe Kapitel 2) sind diese Finanzexperimente aber äquivalent (siehe etwa Torgersen [34] für die Definition von Äquivalenz von statistischen Experimenten).

Zur Illustration werden in den folgenden Beispielen für das Cox-Ross-Rubinstein-Modell, das Trinomial-Modell und für Itô-Prozess-Modelle explizite Darstellungen von Preisprozessen gemäß (1) von Theorem 1.1 vorgestellt.

Beispiel 1.4 (N -Perioden-Modell)

Betrachte $I = \{0, 1, \dots, N\}$ als Menge von möglichen Handelszeitpunkten und einen ein-dimensionalen Preisprozess.

- (Binomial-Modell / Cox-Ross-Rubinstein-Modell)

Im Binomial-Modell nimmt man an, dass der Preisprozess in jedem Zeitabschnitt nur zwei mögliche Bewegungen durchführen kann: Eine Aufwärtsbewegung und eine Abwärtsbewegung, die durch einen Faktor u beziehungsweise d beschrieben wird, wobei $u > d > 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\Omega = \{1, 2\}^N$. Für $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$ setze

$k_i^{(n)}(\omega) := \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\omega_j=i\}}$, $i = 1, 2$. Dann gilt $k_1^{(n)} + k_2^{(n)} = n$. Betrachte die Preisentwicklung eines festverzinslichen Wertpapiers S^0 und den Preisprozess einer risikobehafteten Anlage S^1 , die beschrieben seien durch

$$\begin{aligned} S_n^0 &= s_0^0 r^n, \quad n \in I, \\ S_n^1 &= s_0^1 d^{k_1^{(n)}} u^{k_2^{(n)}}, \quad n \in I, \end{aligned}$$

wobei $s_0^0 > 0$, $r \geq 1$ und $s_0^1 > 0$ Konstanten sind. Es bezeichne $(\mathcal{F}_n)_{n \in I}$ die kanonische Filtration. Der diskontierte Preisprozess lässt sich nun schreiben als

$$X_n := \frac{S_n^1}{S_n^0} = \frac{s_0^1}{s_0^0} \tilde{d}^{k_1^{(n)}} \tilde{u}^{k_2^{(n)}}, \quad n \in I$$

bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n \in I}$, wobei $\tilde{d} := \frac{d}{r}$ und $\tilde{u} := \frac{u}{r}$.

Damit Theorem 1.1 angewendet werden kann, benötigt man die Existenz eines Martingalmaßes. Nach dem ersten Fundamental-Theorem der Preistheorie (vergleiche Shiryaev [29], S. 417/418) ist dafür erforderlich, dass auf dem Markt keine Arbitrage-Möglichkeit vorhanden ist. Ein einfaches Widerspruchsargument zeigt, dass dies im Binomial-Modell erfüllt ist, falls $u > r > d$ beziehungsweise $\tilde{u} > 1 > \tilde{d}$. Setzt man in diesem Fall $\tau_1 := \frac{\tilde{u} - 1}{\tilde{u} - \tilde{d}}$, $\tau_2 := \frac{1 - \tilde{d}}{\tilde{u} - \tilde{d}}$, $\kappa_1 := \tau_1 \tilde{d}$ und $\kappa_2 := \tau_2 \tilde{u}$, so gilt $\tau_1 + \tau_2 = 1$, $\kappa_1 + \kappa_2 = 1$ sowie $\frac{\kappa_1}{\tau_1} = \tilde{d}$ und $\frac{\kappa_2}{\tau_2} = \tilde{u}$. Somit sind $Q := (\tau_1 \varepsilon_1 + \tau_2 \varepsilon_2)^N$ und $Q_1 := (\kappa_1 \varepsilon_1 + \kappa_2 \varepsilon_2)^N$ zu P äquivalente Produkt-Wahrscheinlichkeitsmaße, die

$$\frac{dQ_{1|\mathcal{F}_n}}{dQ_{|\mathcal{F}_n}} = \left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^{k_1^{(n)}} \left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^{k_2^{(n)}} = \tilde{d}^{k_1^{(n)}} \tilde{u}^{k_2^{(n)}} = \frac{X_n}{X_0}$$

erfüllen. Dies liefert die explizite Darstellung aus Theorem 1.1; insbesondere ist Q ein Martingalmaß. Auf die Bedingung der Arbitrage-Freiheit kann bei dieser Konstruktion nicht verzichtet werden, da ansonsten $\tau_1 \geq 0$ beziehungsweise $\tau_2 \geq 0$ nicht mehr gewährleistet ist.

- (Trinomial-Modell)

Im Trinomial-Modell wird angenommen, dass der Preis drei Möglichkeiten besitzt, um sich zu entwickeln. Zusätzlich zu der Aufwärts- und Abwärtsbewegung vom Binomial-Modell existiere nun noch eine Mittelbewegung dazwischen, die durch einen Faktor m gegeben sei, wobei $u > m > d > 0$. Dies führt im Unterschied zum Binomial-Modell dazu, dass mehrere Martingalmaße existieren können, wenn die Bedingung der Arbitrage-Freiheit

erfüllt ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\Omega = \{1, 2, 3\}^N$. Für $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$ werden analog zum Binomial-Modell die Anzahl der Bewegungen gezählt durch Setzen von $k_i^{(n)}(\omega) := \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\omega_j=i\}}$, $i = 1, 2, 3$, wobei $k_1^{(n)} + k_2^{(n)} + k_3^{(n)} = n$. Die Preisentwicklungen seien beschrieben durch

$$\begin{aligned} S_n^0 &= s_0^0 r^n, \quad n \in I, \\ S_n^1 &= s_0^1 d^{k_1^{(n)}} m^{k_2^{(n)}} u^{k_3^{(n)}}, \quad n \in I. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für den diskontierten Preisprozess

$$X_n := \frac{S_n^1}{S_n^0} = \frac{s_0^1}{s_0^0} \tilde{d}^{k_1^{(n)}} \tilde{m}^{k_2^{(n)}} \tilde{u}^{k_3^{(n)}}, \quad n \in I,$$

wobei $\tilde{m} := \frac{m}{r}$.

Es gelte $u > r > d$ beziehungsweise $\tilde{u} > 1 > \tilde{d}$, was auch im Trinomial-Modell sichert, dass keine Arbitrage-Möglichkeit existiert. Zur Konstruktion von Maßen aus Theorem 1.1 unterscheide drei Fälle:

- (1.) $\tilde{m} = 1$: in diesem Fall vereinfacht sich die Darstellung des diskontierten Preisprozesses zu

$$X_n := \frac{S_n^1}{S_n^0} = \frac{s_0^1}{s_0^0} \tilde{d}^{k_1^{(n)}} \tilde{u}^{k_3^{(n)}}, \quad n \in I,$$

folglich liegt im Wesentlichen ein Binomial-Modell vor. Für jede Wahl von $q \in (0, 1)$ erfüllen $Q := ((1 - q)\tau_1\varepsilon_1 + q\varepsilon_2 + (1 - q)\tau_2\varepsilon_3)^N$ und $Q_1 := ((1 - q)\kappa_1\varepsilon_1 + q\varepsilon_2 + (1 - q)\kappa_2\varepsilon_3)^N$, mit $\tau_1, \tau_2, \kappa_1, \kappa_2$ wie im Binomial-Modell, die Gleichung

$$\frac{dQ_{1|\mathcal{F}_n}}{dQ_{|\mathcal{F}_n}} = \tilde{d}^{k_1^{(n)}} \tilde{u}^{k_3^{(n)}} = \frac{X_n}{X_0};$$

insbesondere ist Q für alle $q \in (0, 1)$ ein Martingalmaß, das heißt es existieren unendlich viele Martingalmäße.

- (2.) $\tilde{u} > \tilde{m} > 1$: In diesem Fall lassen sich die Aufwärts- und die Mittelbewegung durch Konvexkombination zu einer neuen Aufwärtsbewegung verschmelzen und das Trinomial-Modell lässt sich ähnlich wie das Binomial-Modell behandeln. Wähle $k \in (0, 1)$ beliebig und setze $\tilde{u}^* := k\tilde{m} + (1 - k)\tilde{u}$. Wie im Binomial-Fall gelten für $\alpha := \frac{\tilde{u}^* - 1}{\tilde{u}^* - \tilde{d}}$

und $\beta := \frac{1 - \tilde{d}}{\tilde{u}^* - \tilde{d}}$ die Gleichungen $\alpha + \beta = 1$ und $\tilde{d}\alpha + \tilde{u}^*\beta = 1$.

Mit einer analogen Rechnung erhält man, dass $b := \beta \frac{\tilde{u} - \tilde{u}^*}{\tilde{u} - \tilde{m}}$ und $c := \beta \frac{\tilde{u}^* - \tilde{m}}{\tilde{u} - \tilde{m}}$ die Beziehungen $b + c = \beta$ und $\tilde{m}b + \tilde{u}c = \tilde{u}^*\beta$ erfüllen. Wählt man nun $\tau_1 := \alpha$, $\tau_2 := b$, $\tau_3 := c$, $\kappa_1 := \tilde{d}\alpha$, $\kappa_2 := \tilde{m}b$, $\kappa_3 := \tilde{u}c$, so ergibt sich $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \alpha + b + c = \alpha + \beta = 1$, $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = \tilde{d}\alpha + \tilde{m}b + \tilde{u}c = \tilde{d}\alpha + \tilde{u}^*\beta = 1$ sowie $\frac{\kappa_1}{\tau_1} = \tilde{d}$, $\frac{\kappa_2}{\tau_2} = \tilde{m}$ und $\frac{\kappa_3}{\tau_3} = \tilde{u}$. Somit gilt für die Wahrscheinlichkeitsmaße $Q := (\tau_1\varepsilon_1 + \tau_2\varepsilon_2 + \tau_3\varepsilon_3)^N$ und $Q_1 := (\kappa_1\varepsilon_1 + \kappa_2\varepsilon_2 + \kappa_3\varepsilon_3)^N$ die Darstellung

$$\frac{dQ_{1|\mathcal{F}_n}}{dQ_{|\mathcal{F}_n}} = \tilde{d}^{k_1^{(n)}} \tilde{m}^{k_2^{(n)}} \tilde{u}^{k_3^{(n)}} = \frac{X_n}{X_0}.$$

Da diese Konstruktion für jedes $k \in (0, 1)$ durchgeführt werden kann, kann man mit Hilfe von Theorem 1.1 auch in diesem Fall die Existenz unendlich vieler Martingalmaße folgern.

- (3.) $1 > \tilde{m} > \tilde{d}$: Die Konstruktion verläuft analog zum 2. Fall, indem $\tilde{m}$ und $\tilde{d}$ zu einer neuen Abwärtsbewegung verschmolzen werden.

Beispiel 1.5 (Itô-Prozess-Modelle)

Sei $I := [0, T]$. Zur Modellierung der Volatilität betrachte einen Matrix-wertigen Prozess $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$, der progressiv meßbar und gleichmäßig positiv definit ist (vergleiche Korn und Korn [17], S. 57 für die Definition) und für den $\sum_{i,j=1}^d \int_0^T \sigma_{ij}(u)^2 du$ gleichmäßig beschränkt in ω ist. Sei

$$\sigma_i := (\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{id})'$$

der zum Index i gehörige d -dimensionale Spalten-Vektor. Seien ferner $\rho \geq 0$ und $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)'$ progressiv meßbare und gleichmäßig beschränkte Prozesse, die die Zins- beziehungsweise die Driftrate angeben.

Das festverzinsliche Wertpapier werde modelliert durch

$$V_t^0 = \exp \left(\int_0^t \rho(s) ds \right), \quad t \in [0, T]$$

und die diskontierten Preisprozesse werden beschrieben durch die Itô-Prozesse

$$X_t^i = \frac{V_t^i}{V_t^0} = X_0^i \exp \left(\int_0^t \sigma_i(s)' dW(s) + \int_0^t \left(\mu_i(s) - \rho(s) - \frac{\|\sigma_i(s)\|^2}{2} \right) ds \right)$$

für $t \in [0, T]$, wobei W eine d -dimensionale Brownsche Bewegung bezüglich dem physischen Maß P ist.

Sei $\mathbb{1} = (1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^d$ und setze $\theta(s) := \sigma(s)^{-1}[\rho(s)\mathbb{1} - \mu(s)]$. Setzt man

$$\frac{dQ}{dP} := \exp \left(\int_0^T \theta(s)' dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^T \|\theta(s)\|^2 ds \right),$$

so erhält man nach dem Satz von Girsanov (siehe Karatzas und Shreve [15], S.191 Theorem 5.1) ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \ll P$, so dass der Prozess

$$\bar{W}(t) := W(t) - \int_0^t \theta(s) ds$$

eine d -dimensionale Brownsche Bewegung bezüglich Q ist.

Durch Setzen von

$$\frac{dQ_i}{dQ} := \exp \left(\int_0^T \sigma_i(s)' d\bar{W}(s) - \frac{1}{2} \int_0^T \|\sigma_i(s)\|^2 ds \right)$$

und erneuter Anwendung des Satzes von Girsanov werden Wahrscheinlichkeitsmaße $Q_i \ll Q$ definiert mit der Eigenschaft, dass für alle $1 \leq i \leq d$

$$\bar{W}(t) - \int_0^t \sigma_i(s) ds$$

eine d -dimensionale Brownsche Bewegung bezüglich Q_i ist.

Wegen der Beziehung $\sigma_i(s)' \theta(s) = \sigma_i(s)' \sigma(s)^{-1} [\rho(s)\mathbb{1} - \mu(s)] = \rho(s) - \mu_i(s)$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{dQ_i}{dQ} &= \exp \left(\int_0^T \sigma_i(s)' d \left(W(s) - \int_0^s \theta(u) du \right) - \frac{1}{2} \int_0^T \|\sigma_i(s)\|^2 ds \right) \\ &= \exp \left(\int_0^T \sigma_i(s)' dW(s) + \int_0^T \left(\mu_i(s) - \rho(s) - \frac{\|\sigma_i(s)\|^2}{2} \right) ds \right) = \frac{X_T^i}{X_0^i} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{dQ_i|_{\mathcal{F}_t}}{dQ|_{\mathcal{F}_t}} &= E_Q \left[\frac{dQ_i}{dQ} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \exp \left(\int_0^t \sigma_i(s)' dW(s) + \int_0^t \left(\mu_i(s) - \rho(s) - \frac{\|\sigma_i(s)\|^2}{2} \right) ds \right) = \frac{X_t^i}{X_0^i}. \end{aligned}$$

Dies ist gerade die Darstellung aus Theorem 1.1; insbesondere zeigt diese Rechnung dann, dass Q ein Martingalmaß ist.

Dieses bekannte Resultat erhält man auch ohne Verwendung von Theorem 1.1.

Erneutes Anwenden der Beziehung $\sigma_i(s)' \theta(s) = \sigma_i(s)' \sigma(s)^{-1} [\rho(s) \mathbb{1} - \mu(s)] = \rho(s) - \mu_i(s)$ liefert

$$X_t^i = X_0^i \exp \left(\int_0^t \sigma_i(s)' d\bar{W}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\sigma_i(s)\|^2 ds \right).$$

Da $(\bar{W}(t))_{t \in [0, T]}$ eine Brownsche Bewegung bezüglich Q ist, folgt mit Itô-Formel, dass $(X_t^i)_{t \in [0, T]}$ ein stetiges lokales Martingal bezüglich Q bildet. Durch Verifizieren der Novikov-Bedingung (siehe Karatzas und Shreve [15], S. 199, Korollar 3.5.13), unter Verwendung der gleichmäßigen Beschränktheit von σ_i , zeigt man dann leicht, dass sogar ein Q -Martingal vorliegt.

1.2 Anwendung: Nutzenfunktion und Kullback-Leibler-Information

Als eine erste Anwendung der Darstellung von Preisprozessen als statistische Experimente lassen sich Erwartungsnutzen mit logarithmischen Nutzenfunktionen mit Hilfe von Kullback-Leibler-Informationen umschreiben.

In der mathematischen Statistik findet die Kullback-Leibler-Information Verwendung als statistisches Abstandsmaß; ist die Kullback-Leibler-Information $K(Q, P)$ für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q klein, so lässt sich schwer zwischen P und Q unterscheiden. Für Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q mit $Q \ll P$ ist die Kullback-Leibler-Information $K(Q, P)$ von Q bezüglich P gegeben durch

$$K(Q, P) := E_Q \left(\log \frac{dQ}{dP} \right) \in [0, \infty],$$

vergleiche etwa Witting und Müller-Funk [37], S. 37. Die Kullback-Leibler-Information bildet einen Spezialfall des allgemeineren Konzepts der f -Divergenz (siehe Liese und Vadja [21], S. 10 für die Definition).

Für die i -te risikobehaftete Anlage ist $N_i(t)$, der erwartete Nutzen mit logarithmischer Nutzenfunktion zum Zeitpunkt t , gegeben durch

$$N_i(t) := E_P \left(\log \frac{X_t^i}{X_0^i} \right),$$

sofern dieser Erwartungswert existiert.

Verwendung von Theorem 1.1 und der Definition der Kullback-Leibler-Information führt in diesem Fall zur folgenden Darstellung

$$N_i(t) = K(P|_{\mathcal{F}_t}, Q|_{\mathcal{F}_t}) - K(P|_{\mathcal{F}_t}, Q_i|_{\mathcal{F}_t}). \quad (1.2)$$

Diese Umschreibung des erwarteten Nutzen hat den Vorteil, dass ein Resultat aus der Theorie der Kullback-Leibler-Information verwendet werden kann, um ein Ergebnis in der Erwartungsnutzentheorie zu erzielen. Anwendung eines Approximations-Theorems für Kullback-Leibler-Informationen (vergleiche Liese und Vajda [21], Theorem 1.30, S. 20, dort formuliert in Form von f -Divergenz) liefert dann, unter geeigneten Voraussetzungen an die Filtration, $\lim_{t \rightarrow T} N_i(t) = N_i(T)$. Die Identität (1.2) kann auch zu einer alternativen Bestimmung von Erwartungsnutzen im Cox-Ross-Rubinstein-Modell und in Itô-Prozess-Modellen eingesetzt werden. Die in Zhu [39] detailliert dargestellten zugehörigen Rechnungen zur Umschreibung des Erwartungsnutzens, zur Anwendung des Approximations-Theorems und zur alternativen Bestimmung von Erwartungsnutzen sind elementar und werden hier nicht aufgeführt.

Kapitel 2

Optionspreise als Gütefunktionen von Tests

2.1 Optionspreise als Gütefunktionen von Tests

Als eine Anwendung der Darstellung der Finanzmodelle als statistische Experimente lassen sich Optionspreise von vielen Optionen mit Hilfe von Gütefunktionen von Tests uminterpretieren.

Sei in diesem Kapitel $I := [0, T]$ und betrachte als festverzinsliches Wertpapier

$$V_t^0 = \exp \left(\int_0^t \rho(u) du \right), \quad t \in [0, T],$$

wobei $\rho : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ eine deterministische Zinsrate ist. Im Folgenden werden nur Optionen H behandelt, bei denen die Auszahlung am Endzeitpunkt T der Handelsperiode stattfindet. Es ist zu beachten, dass dies nicht notwendigerweise heißt, dass der Auszahlungswert der Option nur vom Endwert der risikobehafteten Anlage abhängen darf.

Üblicherweise ist der zu einem Martingalmaß Q zugehörige Optionspreis $p_Q(H)$ einer Option mit Auszahlung H gegeben durch

$$p_Q(H) = E_Q((V_T^0)^{-1}H), \quad (2.1)$$

siehe etwa Karatzas and Shreve [15] (S. 378). Im Folgenden bezeichne $(V_t^i)_{t \in [0, T]}$ die (undiskontierte) Preisentwicklung der i -ten risikobehafteten Anlage, wobei v_0^i den Startpreis der i -ten Anlage angibt. Zur Verkürzung der Notation setze außerdem $Y_t^i := \exp \left(- \int_0^t \rho(u) du \right) \frac{V_t^i}{v_0^i}$.

Zur einfachen Berechnung des Optionspreises wird folgende Bedingung an die Gestalt der Auszahlung gestellt:

(A) Es sei angenommen, dass H , der Auszahlungswert der Option zum Endzeitpunkt T , die Form

$$H = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^d [a_{ij} V_T^i - K_{ij}] \phi_{ij}((Y_t^i)_{t \in [0, T]}) \quad (2.2)$$

mit Funktionen $\phi_{ij} : \mathbb{R}^{[0, T]} \rightarrow [0, 1]$, für welche $\phi_{ij}((Y_t^i)_{t \in [0, T]})$ messbare Ausdrücke bilden, und reellwertigen Koeffizienten a_{ij} , K_{ij} für $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq m$, besitzt.

Die Funktionen ϕ_{ij} können hierbei als (möglicherweise randomisierte) Tests angesehen werden. Beispiele für Optionen, die Bedingung (A) erfüllen, sind etwa europäischer Call, europäischer Put, Straddle, Strangle und Bull-Spread Optionen (siehe Korn und Korn [17], S. 148/149 für Auszahlungsprofile), die jeweils nur vom Endwert der zugrunde liegenden Anlage abhängen, oder etwa Down-and-out-Call, Down-and-out-Put und andere Barriere-Optionen, bei denen die gesamte Entwicklung der Anlage für die Auszahlung relevant ist.

Theorem 2.1

Unter der Annahme (A) und für ein festes Martingalmaß Q ist der Optionspreis (2.1) von H gegeben durch

$$p_Q(H) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^d \left[a_{ij} v_0^i E_{Q_i} \left(\phi_{ij} \left(\left(\frac{dQ_i|_{\mathcal{F}_t}}{dQ|_{\mathcal{F}_t}} \right)_{t \in [0, T]} \right) \right) - \exp \left(- \int_0^T \rho(u) du \right) K_{ij} E_Q \left(\phi_{ij} \left(\left(\frac{dQ_i|_{\mathcal{F}_t}}{dQ|_{\mathcal{F}_t}} \right)_{t \in [0, T]} \right) \right) \right].$$

Bemerkung 2.2

- Interpretiert man die Funktionen ϕ_{ij} als Tests, so kann man die Erwartungswerte in obiger Optionspreis-Formel als Gütefunktionen von Tests ansehen. Die Bedeutung dieser Neuinterpretation wird später noch mehrfach deutlich.
- In unvollständigen Märkten ist das Martingalmaß Q im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, daher können sich für verschiedene Wahlen von Q unterschiedliche Optionspreise ergeben.

Beweis von Theorem 2.1: Zunächst lässt sich feststellen, dass der Endwert V_T^i der i -ten risikobehafteten Anlage umschreiben lässt. Mit Hilfe von Theorem 1.1 erhält man

$$V_T^i = V_T^0 X_T^i = \exp\left(\int_0^T \rho(u) du\right) v_0^i \frac{dQ_{i|\mathcal{F}_T}}{dQ_{|\mathcal{F}_T}}.$$

Dies zusammen mit der Berechnungsformel (2.1) für Optionspreise ergibt

$$\begin{aligned} p_Q(H) &= E_Q\left(\exp\left(-\int_0^T \rho(u) du\right) H\right) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^d \left[a_{ij} E_Q\left(v_0^i \frac{dQ_{i|\mathcal{F}_T}}{dQ_{|\mathcal{F}_T}} \phi_{ij}\left(\left(\frac{dQ_{i|\mathcal{F}_t}}{dQ_{|\mathcal{F}_t}}\right)_{t \in [0, T]}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - \exp\left(-\int_0^T \rho(u) du\right) K_{ij} E_Q\left(\phi_{ij}\left(\left(\frac{dQ_{i|\mathcal{F}_t}}{dQ_{|\mathcal{F}_t}}\right)_{t \in [0, T]}\right)\right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^d \left[a_{ij} v_0^i E_{Q_i}\left(\phi_{ij}\left(\left(\frac{dQ_{i|\mathcal{F}_t}}{dQ_{|\mathcal{F}_t}}\right)_{t \in [0, T]}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - \exp\left(-\int_0^T \rho(u) du\right) K_{ij} E_Q\left(\phi_{ij}\left(\left(\frac{dQ_{i|\mathcal{F}_t}}{dQ_{|\mathcal{F}_t}}\right)_{t \in [0, T]}\right)\right) \right], \end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist. ■

Bemerkung 2.3

Obiger Beweis zeigt, dass Theorem 2.1 auch für eine größere Klasse von Auszahlungsfunktionen bewiesen werden kann. Als Verallgemeinerung wäre etwa denkbar, bei den Funktionen ϕ_{ij} auch eine Abhängigkeit von mehreren Preisprozessen zuzulassen, um zum Beispiel die Option $H = (V_T^2 - V_T^1 - K)^+$ behandeln zu können. In Kapitel 4 wird allerdings die spezielle Form von Annahme (A) benötigt, weshalb Theorem 2.1 in obiger Form formuliert ist.

Beispiel 2.4 (Europäischer Call)

Als erstes Beispiel lässt sich Theorem 2.1 auf den Optionspreis eines europäischen Calls anwenden. Ein europäischer Call zum Ausübungspreis K ist gegeben durch die Auszahlung

$$H_C = (V_T^1 - K)^+ = (V_T^1 - K) \mathbb{1}_{\{V_T^1 > K\}}.$$

Zu einem gegebenen Martingalmaß Q ergibt sich der Preis des europäischen

Calls zu

$$p_Q(H_C) = v_0^1 E_{Q_1} \left(\phi_C \left(\frac{dQ_1}{dQ} \right) \right) - \exp \left(- \int_0^T \rho(u) du \right) K E_Q \left(\phi_C \left(\frac{dQ_1}{dQ} \right) \right),$$

wobei $\phi_C \left(\frac{dQ_1}{dQ} \right) = \mathbb{1}_{\left\{ \frac{dQ_1}{dQ} > K(v_0^1)^{-1} \exp(-\int_0^T \rho(u) du) \right\}}$ gerade ein Neyman-Pearson-Test zum Testen der Hypothese $\{Q\}$ gegen die Alternative $\{Q_1\}$ ist. Setzt man $s := \frac{K}{v_0^1} \exp \left(- \int_0^T \rho(u) du \right)$, so ist ϕ_C ein Bayes-Test zur Vorbewertung $(s/(1+s), 1/(1+s))$ für $\{Q\}$ gegen $\{Q_1\}$ (siehe Witting [36], S. 228, Satz 2.48 (b)). Hierbei gilt

$$\frac{s}{1+s} = \frac{K \exp \left(- \int_0^T \rho(u) du \right)}{v_0^1 + K \exp \left(- \int_0^T \rho(u) du \right)}, \quad \frac{1}{1+s} = \frac{v_0^1}{v_0^1 + K \exp \left(- \int_0^T \rho(u) du \right)}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} v_0^1 - p_Q(H_C) &= \exp \left(- \int_0^T \rho(u) du \right) K E_Q \left(\phi_C \left(\frac{dQ_1}{dQ} \right) \right) \\ &\quad + v_0^1 \left(1 - E_{Q_1} \left(\phi_C \left(\frac{dQ_1}{dQ} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

folgt somit, dass

$$\begin{aligned} &\frac{v_0^1 - p_Q(H_C)}{v_0^1 + K \exp \left(- \int_0^T \rho(u) du \right)} \\ &= \frac{s}{1+s} E_Q \left(\phi_C \left(\frac{dQ_1}{dQ} \right) \right) + \frac{1}{1+s} \left(1 - E_{Q_1} \left(\phi_C \left(\frac{dQ_1}{dQ} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

das zugehörige minimale Bayes-Risiko ist (siehe Witting [36], S. 228, Satz 2.48 (c)).

Testet man umgekehrt $\{Q_1\}$ gegen $\{Q\}$ so ist durch $\psi := 1 - \phi_C$ ein Neyman-Pearson-Test gegeben. Für $s := \frac{v_0^1}{K} \exp \left(\int_0^T \rho(u) du \right)$ ist ψ also ein Bayes-Test zur Vorbewertung $(s/(1+s), 1/(1+s))$ zum Testen der Hypothese $\{Q_1\}$ gegen die Alternative $\{Q\}$. Analog zur obigen Rechnung ergibt sich, dass

$$v_0^1 - p_Q(H_C) = v_0^1 E_{Q_1}(\psi) + \exp \left(- \int_0^T \rho(u) du \right) K(1 - E_Q(\psi))$$

bis auf den Faktor $\frac{\exp \left(\int_0^T \rho(u) du \right)}{K + v_0^1 \exp \left(\int_0^T \rho(u) du \right)}$ das zugehörige minimale Bayes-Risiko von ψ ist.

2.2 Anwendung: Eine Charakterisierung von Binomial-Modellen

Beispiel 2.4 zeigt, dass eine Verbindung zwischen minimalem Bayes-Risiko und dem Optionspreis eines geeigneten europäischen Calls besteht. In der Definition der Fehlerfunktion (vergleiche Strasser [32], S. 68) findet das minimale Bayes-Risiko ebenfalls Verwendung. Da die Fehlerfunktion die Äquivalenzklasse eines statistischen Experiments eindeutig charakterisiert (siehe etwa Strasser [32], S. 76), lässt sich zeigen, dass aus der Eindeutigkeit des Optionspreises des europäischen Calls für alle möglichen Ausübungspreise bereits bis auf Äquivalenz die Eindeutigkeit des statistischen Experiments folgt. Der Beweis dazu verwendet lediglich einfache Umformungen und ist in Zahler [38] eingehend präsentiert.

Im Falle eines N -Perioden-Modells (vergleiche Beispiel 1.4) gilt sogar noch weitaus mehr. Unter einer Zusatzannahme (siehe Irle [10] (A1), S. 2) folgt aus der Eindeutigkeit der Optionspreise von europäischen Calls bereits die Eindeutigkeit des Martingalmaßes, was im N -Perioden-Modell äquivalent dazu ist, dass ein Binomial-Modell vorliegt. Der Beweis zu dieser Aussage ist in Irle [10] ausführlich dargestellt. Mit Hilfe der Darstellung des Preisprozesses als statistisches Experiment aus Theorem 1.1 kann man diesen Beweis neu führen. Die Voraussetzung der Eindeutigkeit der Optionspreise von europäischen Calls führt wie oben erwähnt zur Eindeutigkeit der Äquivalenzklasse und ersetzt ein maßtheoretisches Argument aus Irle [10]. Durch Verwendung der Hellinger-Transformierten (siehe etwa Strasser [32], Kapitel 53 für die Definition) kann man auf die Eindeutigkeit des Martingalmaßes schließen, was in diesem Fall die Argumentation über komplexe Analysis und Fourier-Transformierte in Irle [10] ersetzt. Die Tatsache, dass die Hellinger-Transformierte bei Produktexperimenten durch ein Produkt von Hellinger-Transformierten gegeben ist, lässt sich hierbei dazu verwenden, den mehr-dimensionalen Fall auf den ein-dimensionalen Fall zurückzuführen. Eine detaillierte Darstellung dieser Argumentation wird hier nicht aufgeführt, befindet sich aber in Zahler [38].

Diese Anwendung von Theorem 1.1 zeigt hier schon, dass die Neuinterpretation eines Finanzmarktes als statistisches Experiment die Möglichkeit für neue Beweistechniken bieten kann.

Kapitel 3

Vollständigkeit: Finanzmärkte und statistische Experimente

3.1 Komplementäre Experimente

Der Begriff der Vollständigkeit ist sowohl im Zusammenhang mit Finanzmärkten als auch im Zusammenhang mit statistischen Experimenten von Bedeutung. In diesem Kapitel wird gezeigt, dass zwischen den zunächst sehr unterschiedlich erscheinenden Versionen der Vollständigkeit auf gewisse Weise eine Verbindung besteht.

Zu Beginn des Kapitels wird ein nützliches Konzept für statistische Experimente vorgestellt: eine Faktorisierung der Likelihood-Quotienten über eine Teilinformation, die gegeben ist durch eine Teil- σ -Algebra $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$.

Betrachte im Folgenden ein dominiertes Experiment $E = (\Omega, \mathcal{F}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ und eine σ -Algebra $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann die Existenz eines $\theta_0 \in \Theta$ angenommen werden, für das $P_\theta \ll P_{\theta_0}$ für alle $\theta \in \Theta$ erfüllt ist, da man ansonsten ein entsprechendes gewähltes P_{θ_0} mit dieser Eigenschaft zum Experiment hinzufügen kann (siehe Lehmann und Romano [20], S.698 oder Torgersen [34], S.6). Setze

$$E_{|\mathcal{H}} := (\Omega, \mathcal{H}, \{P_{\theta|\mathcal{H}} : \theta \in \Theta\})$$

und bezeichne $E_{|\mathcal{H}}$ als das eingeschränkte Experiment. Mit dieser Bezeichnung lässt sich nun das Faktorisierungsergebnis formulieren.

Lemma 3.1

Das Experiment E faktorisiert über $E_{|\mathcal{H}}$ und ein Experiment E' , im Folgenden bezeichnet als das zu $E_{|\mathcal{H}}$ bezüglich E komplementäre Experiment, über Likelihood-Quotienten, das heißt es existiert ein Experiment $E' := (\Omega, \mathcal{F}, \{P'_\theta : \theta \in \Theta\})$ mit $P'_{\theta_0} = P_{\theta_0}$, so dass die Dichten von E faktorisieren über die Dichten von $E_{|\mathcal{H}}$ und E' , das heißt

$$\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}} = \frac{dP_{\theta|\mathcal{H}}}{dP_{\theta_0|\mathcal{H}}} \cdot \frac{dP'_\theta}{dP_{\theta_0}}. \quad (3.1)$$

Beweis. Zur Konstruktion des Experiments E' wird gezeigt, dass die linke Seite von (3.1) durch $\frac{dP_{\theta|\mathcal{H}}}{dP_{\theta_0|\mathcal{H}}}$ dividiert werden kann. Dazu definiere für festes $\theta \in \Theta$ die Menge A_θ durch $A_\theta := \left\{ E_{P_{\theta_0}} \left[\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}} \middle| \mathcal{H} \right] = 0 \right\}$. Mit dieser Bezeichnung folgt $A_\theta \in \mathcal{H}$ und

$$\begin{aligned} P_\theta(A_\theta) &= \int_\Omega \frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}} 1_{A_\theta} dP_{\theta_0} = \int_\Omega E_{P_{\theta_0}} \left[\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}} 1_{A_\theta} \middle| \mathcal{H} \right] dP_{\theta_0} \\ &= \int_\Omega 1_{A_\theta} E_{P_{\theta_0}} \left[\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}} \middle| \mathcal{H} \right] dP_{\theta_0} = 0. \end{aligned}$$

Somit gilt $\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}} 1_{A_\theta} = 0$ P_{θ_0} -fast sicher. Mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0$ ergibt sich

$$\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}} = E_{P_{\theta_0}} \left[\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}} \middle| \mathcal{H} \right] \cdot f_\theta, \text{ wobei } f_\theta := \frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}} / E_{P_{\theta_0}} \left[\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}} \middle| \mathcal{H} \right].$$

Folglich ist $E_{P_{\theta_0}}[f_\theta|\mathcal{H}] = 1$ und damit auch $E_{P_{\theta_0}}(f_\theta) = 1$. Durch Setzen von $\frac{dP'_\theta}{dP_{\theta_0}} := f_\theta$ wird also ein Wahrscheinlichkeitsmaß P'_θ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ definiert mit $P'_{\theta_0} = P_{\theta_0}$. Verwendet man die Identität $\frac{dP_{\theta|\mathcal{H}}}{dP_{\theta_0|\mathcal{H}}} = E_{P_{\theta_0}} \left[\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}} \middle| \mathcal{H} \right]$ führt dies gerade zu Gleichung (3.1). ■

Bemerkung 3.2

Die Faktorisierung (3.1) impliziert bereits die Unkorreliertheit von $\frac{dP_{\theta|\mathcal{H}}}{dP_{\theta_0|\mathcal{H}}}$ und $\frac{dP'_\theta}{dP_{\theta_0}}$ bezüglich P_{θ_0} , denn es gilt

$$\begin{aligned} \text{Cov}_{P_{\theta_0}} \left(\frac{dP_{\theta|\mathcal{H}}}{dP_{\theta_0|\mathcal{H}}}, \frac{dP'_\theta}{dP_{\theta_0}} \right) &= E_{P_{\theta_0}} \left(\frac{dP_{\theta|\mathcal{H}}}{dP_{\theta_0|\mathcal{H}}} \cdot \frac{dP'_\theta}{dP_{\theta_0}} \right) - E_{P_{\theta_0}} \left(\frac{dP_{\theta|\mathcal{H}}}{dP_{\theta_0|\mathcal{H}}} \right) E_{P_{\theta_0}} \left(\frac{dP'_\theta}{dP_{\theta_0}} \right) \\ &= 1 - 1 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Über Unabhängigkeit kann im Allgemeinen allerdings keine Aussage getroffen werden. Falls jedoch Unabhängigkeit von $\frac{dP_{\theta|\mathcal{H}}}{dP_{\theta_0|\mathcal{H}}}$ und $\frac{dP'_{\theta}}{dP_{\theta_0}}$ bezüglich P_{θ_0} vorliegt, so zieht dies Äquivalenz der Experimente $\{P_{\theta}, P_{\theta_0}\}$ und $\{P_{\theta|\mathcal{H}} \otimes P'_{\theta}, P_{\theta_0|\mathcal{H}} \otimes P_{\theta_0}\}$ im Sinne von Le Cam nach sich, das heißt, dass die Verteilungen der Likelihood-Quotienten übereinstimmen. Betrachtet man nämlich die Verteilung des Likelihood-Quotienten im ersten Experiment so folgt mit der Faktorisierung (3.1) und der Voraussetzung der Unabhängigkeit

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(\log \frac{dP_{\theta}}{dP_{\theta_0}} \middle| P_{\theta_0} \right) &= \mathcal{L} \left(\log \frac{dP_{\theta|\mathcal{H}}}{dP_{\theta_0|\mathcal{H}}} + \log \frac{dP'_{\theta}}{dP_{\theta_0}} \middle| P_{\theta_0} \right) \\ &= \mathcal{L} \left(\log \frac{dP_{\theta|\mathcal{H}}}{dP_{\theta_0|\mathcal{H}}} \middle| P_{\theta_0} \right) * \mathcal{L} \left(\log \frac{dP'_{\theta}}{dP_{\theta_0}} \middle| P_{\theta_0} \right). \end{aligned}$$

Nutzt man die Tatsache, dass sich die Dichte bei Produktexperimenten als Produkt von Dichten darstellen lässt und verwendet noch, dass bei $\mathcal{H}$ -messbaren Zufallsvariablen die Verteilung unter $P_{\theta_0|\mathcal{H}}$ und P_{θ_0} identisch sind, so findet man für die Verteilung des Likelihood-Quotienten im zweiten Experiment

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(\log \frac{d(P_{\theta|\mathcal{H}} \otimes P'_{\theta})}{d(P_{\theta_0|\mathcal{H}} \otimes P_{\theta_0})} \middle| P_{\theta_0|\mathcal{H}} \otimes P_{\theta_0} \right) \\ &= \mathcal{L} \left(\log \frac{dP_{\theta|\mathcal{H}}}{dP_{\theta_0|\mathcal{H}}} \middle| P_{\theta_0|\mathcal{H}} \right) * \mathcal{L} \left(\log \frac{dP'_{\theta}}{dP_{\theta_0}} \middle| P_{\theta_0} \right) \\ &= \mathcal{L} \left(\log \frac{dP_{\theta|\mathcal{H}}}{dP_{\theta_0|\mathcal{H}}} \middle| P_{\theta_0} \right) * \mathcal{L} \left(\log \frac{dP'_{\theta}}{dP_{\theta_0}} \middle| P_{\theta_0} \right). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt somit

$$\mathcal{L} \left(\log \frac{dP_{\theta}}{dP_{\theta_0}} \middle| P_{\theta_0} \right) = \mathcal{L} \left(\log \frac{d(P_{\theta|\mathcal{H}} \otimes P'_{\theta})}{d(P_{\theta_0|\mathcal{H}} \otimes P_{\theta_0})} \middle| P_{\theta_0|\mathcal{H}} \otimes P_{\theta_0} \right)$$

und infolgedessen die Äquivalenz der zwei Experimente.

Im Folgenden bezeichne $\mathcal{P}$ die Menge aller zu P äquivalenten Martingalmaße. Für einen festen Zeitpunkt $t \in I$ und festes $Q \in \mathcal{P}$ betrachte das Finanzexperiment $E = \{Q_1, \dots, Q_d, Q\}$ gemäß Theorem 1.1 und die σ -Algebra $\mathcal{F}_t$. Nach Lemma 3.1 besitzt das eingeschränkte Experiment

$$E|_{\mathcal{F}_t} = (\Omega, \mathcal{F}_t, \{Q_1|_{\mathcal{F}_t}, \dots, Q_d|_{\mathcal{F}_t}, Q|_{\mathcal{F}_t}\})$$

bezüglich E das komplementäre Experiment

$$E'_t = \{Q'_1(t), \dots, Q'_d(t), Q(t)\}$$

mit $Q(t) = Q$. Für die Dichten im neuen Experiment E'_t gilt mit (3.1) und (1.1), dass

$$\frac{dQ'_i(t)}{dQ} = \frac{\frac{dQ_i}{dQ}}{E_Q \left[\frac{dQ_i}{dQ} \middle| \mathcal{F}_t \right]} = \frac{X_T^i}{X_t^i}.$$

Wegen $Q \in \mathcal{P}$ folgt daraus

$$E_{Q(t)} \left[\frac{dQ'_i(t)}{dQ} \middle| \mathcal{F}_s \right] = \frac{1}{X_t^i} E_Q[X_T^i | \mathcal{F}_s] = \frac{X_s^i}{X_t^i}$$

für $s \geq t$. Dies gibt dem Experiment E'_t eine konkrete Bedeutung. Betrachtet man den Zeitpunkt t als den neuen Startpunkt der Beobachtungsperiode so beschreibt das Experiment E'_t gerade den auf den Zeitpunkt t normalisierten zukünftigen Preisverlauf ab dem Zeitpunkt t , gegeben durch

$$I \cap [t, T] \ni s \mapsto \frac{X_s^i}{X_t^i}.$$

Im Fall, dass die Preisentwicklungen durch Itô-Prozesse aus Beispiel 1.5 gegeben sind, haben die Dichten im komplementären Experiment eine besonders einfache Struktur. Dies wird im kommenden Beispiel vorgestellt.

Beispiel 3.3 (Itô-Prozess-Modelle, Fortsetzung)

Betrachtet werde eine Modellierung der Preisprozesse wie in Beispiel 1.5. Sei nun $t \in [0, T]$ ein fester Zeitpunkt. Für die Dichten in dem bezüglich dem eingeschränkten Experiment $E|_{\mathcal{F}_t}$ komplementären Experiment E'_t gilt

$$\begin{aligned} \frac{dQ'_i(t)}{dQ} &= \frac{dQ_i}{dQ} \bigg/ \frac{dQ_i|_{\mathcal{F}_t}}{dQ|_{\mathcal{F}_t}} \\ &= \exp \left(\int_0^T \sigma_i(s)' dW(s) + \int_0^T \left(\mu_i(s) - \rho(s) - \frac{\|\sigma_i(s)\|^2}{2} \right) ds \right. \\ &\quad \left. - \left(\int_0^t \sigma_i(s)' dW(s) + \int_0^t \left(\mu_i(s) - \rho(s) - \frac{\|\sigma_i(s)\|^2}{2} \right) ds \right) \right) \\ &= \exp \left(\int_t^T \sigma_i(s)' dW(s) + \int_t^T \left(\mu_i(s) - \rho(s) - \frac{\|\sigma_i(s)\|^2}{2} \right) ds \right). \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis deckt sich mit der Interpretation von t als neuem Startpunkt der Beobachtungsperiode.

3.2 Zusammenhang der Vollständigkeitskonzepte

Im kommenden Abschnitt wird die Idee der komplementären Experimente genutzt, um den eingangs erwähnten Zusammenhang zwischen den zwei Versionen der Vollständigkeit herzustellen. Zunächst wird für weitere Untersuchungen folgendes Hilfslemma benötigt.

Lemma 3.4

Seien P_0, P_1 Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $P_0 \ll P_1$.

Sei ferner $f \in L_1(P_0)$ und $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ eine Teil- σ -Algebra. Dann gilt

$$E_{P_1} \left[f \frac{dP_0}{dP_1} \middle| \mathcal{H} \right] = E_{P_0}[f | \mathcal{H}] E_{P_1} \left[\frac{dP_0}{dP_1} \middle| \mathcal{H} \right].$$

Der Beweis zu diesem Hilfslemma ist elementar und wird hier nicht aufgeführt. Das nächste Theorem liefert ein Kriterium für Martingalmaße mittels komplementärer Experimente.

Theorem 3.5

Sei $Q \in \mathcal{P}$ und Q^* ein weiteres zu Q äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß mit $g := \frac{dQ^*}{dQ}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Für alle $1 \leq i \leq d$ und $t \in I$ gilt:

$$E_{Q'_i(t)}[g | \mathcal{F}_t] = E_Q[g | \mathcal{F}_t].$$

(2) Das Wahrscheinlichkeitsmaß Q^* ist ein Martingalmaß, das heißt $Q^* \in \mathcal{P}$.

Beweis. Sei $1 \leq i \leq d$ und $t \in I$. Wegen (3.1) und $Q \in \mathcal{P}$ erhält man

$$E_Q \left[\frac{dQ'_i(t)}{dQ} \middle| \mathcal{F}_t \right] = E_Q \left[\frac{X_T^i}{X_t^i} \middle| \mathcal{F}_t \right] = 1.$$

Kombiniert man diese Gleichung mit Lemma 3.4 (unter Verwendung von $f := g$, $P_0 := Q'_i(t)$ und $P_1 := Q$), so führt die Aussage (3.1) zu

$$\begin{aligned} E_{Q'_i(t)}[g | \mathcal{F}_t] &= E_Q \left[g \frac{dQ'_i(t)}{dQ} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E_Q \left[g \frac{X_T^i}{X_t^i} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{1}{X_t^i} E_Q[g X_T^i | \mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

Folglich gilt (1) genau dann, wenn

$$E_Q[gX_T^i|\mathcal{F}_t] = X_t^i E_Q[g|\mathcal{F}_t].$$

Erneute Anwendung von Lemma 3.4 (mit $f := X_T^i$, $P_0 := Q^*$ und $P_1 := Q$) liefert

$$E_Q[gX_T^i|\mathcal{F}_t] = E_{Q^*}[X_T^i|\mathcal{F}_t]E_Q[g|\mathcal{F}_t].$$

Somit ist (1) äquivalent zu $E_{Q^*}[X_T^i|\mathcal{F}_t]E_Q[g|\mathcal{F}_t] = X_t^i E_Q[g|\mathcal{F}_t]$ beziehungsweise $E_{Q^*}[X_T^i|\mathcal{F}_t] = X_t^i$ für alle $1 \leq i \leq d$ und $t \in I$, und damit zu Aussage (2). ■

Theorem 3.5 besagt, dass in einem Finanzmarkt mehr als ein Martingalmaß auftritt, wenn mehr als ein g existiert, das die Bedingung (1) erfüllt. Dies ist in gewisser Weise eine Reichhaltigkeitsbedingung an das Experiment E'_t , denn für eine Funktion g wäre (1) leichter erfüllbar, wenn man das Experiment E'_t verkleinern würde. Die Forderung, dass ein Experiment hinreichend reichhaltig ist, tritt in der mathematischen Statistik häufiger auf und führt in natürlicher Weise zum Begriff der Vollständigkeit von Klassen von statistischen Experimenten.

Definition 3.6 (Vollständigkeit von Klassen von statistischen Experimenten)
 Sei $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ ein dominiertes Experiment. Es existiere ein $\theta_0 \in \Theta$ mit $P_\theta \ll P_{\theta_0}$ für alle $\theta \in \Theta$. Sei $\mathcal{G} \subset \bigcap_{\theta \in \Theta} L_1(P_\theta)$ eine Klasse von meßbaren Funktionen.

Dann heißt $\mathcal{G}$ vollständig bezüglich $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ falls für jedes $g \in \mathcal{G}$, für welches $E_{P_\theta}(g) = E_{P_{\theta_0}}(g)$ für alle $\theta \in \Theta$ erfüllt ist, folgt, dass g P_{θ_0} -fast sicher konstant ist.

Wie schon vorher erwähnt ist die Voraussetzung nach der Existenz von θ_0 nicht sehr restriktiv.

Es lässt sich nun das Hauptresultat dieses Kapitels formulieren.

Theorem 3.7

Sei $Q \in \mathcal{P}$ und sei $\mathcal{G}$ die Teilmenge von $\bigcap_{i=1}^d L_1(Q_i) \cap L_1(Q)$, die alle strikt positiven Funktionen enthält. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) Es existiert ein eindeutig bestimmtes Martingalmaß, das heißt $\mathcal{P} = \{Q\}$.
- (2) Falls $g \in \mathcal{G}$ und falls

$$E_{Q'_{(t)}}[g|\mathcal{F}_t] = E_Q[g|\mathcal{F}_t] \tag{3.2}$$

für alle $1 \leq i \leq d$ und $t \in I$ gilt, dann ist g schon Q -fast sicher konstant.

Beweis. Für den Beweis der Inklusion $(1) \Rightarrow (2)$ sei $g \in \mathcal{G}$, so dass die Bedingung (3.2) erfüllt ist. Setze $g^* := \frac{g}{E_Q(g)}$ und $Q^*(A) := \int_A g^* dQ$ für alle $A \in \mathcal{F}$. Dann definiert Q^* ein zu Q äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß. Aus (3.2) erhält man

$$E_{Q'_i(t)}[g^* | \mathcal{F}_t] = E_Q[g^* | \mathcal{F}_t]$$

für alle $1 \leq i \leq d$ und $t \in I$. Aus Theorem 3.5 folgt nun, dass Q^* ein Martingalmaß ist, das heißt $Q^* \in \mathcal{P}$. Wegen (1) gilt dann $Q^* = Q$. Dies impliziert $g^* = 1$ Q -fast sicher und deshalb ist g auch Q -fast sicher konstant.

Zum Nachweis von $(2) \Rightarrow (1)$ sei $Q^* \in \mathcal{P}$. Setzt man $g := \frac{dQ^*}{dQ}$ so zeigt Theorem 3.5, dass (3.2) für alle $1 \leq i \leq d$ und $t \in I$ erfüllt ist. Wegen (2) muss g also Q -fast sicher konstant sein. Da aber $E_Q(g) = 1$ gilt, folgt daraus schon $g = 1$ Q -fast sicher und somit $Q^* = Q$. ■

Betrachtet man den Fall, dass die Menge $I \subset [0, T]$ von möglichen Handelszeitpunkten eine endliche Menge ist, so ist die Bedingung $|\mathcal{P}| = 1$, die in (1) von Theorem 3.7 gefordert ist, notwendig und hinreichend für die Vollständigkeit des Finanzmarktes (vergleiche Shiryaev [29], S.481). Mit Vollständigkeit des Finanzmarktes ist gemeint, dass die Auszahlung von jeder Option repliziert werden kann. Dieses Resultat ist auch als zweites Fundamentaltheorem der Preistheorie bekannt.

Bedingung (2) aus Theorem 3.7 vereinfacht sich in dem Fall, dass nur zwei Handelszeitpunkte vorhanden sind, das heißt wenn nur im Startzeitpunkt $t = 0$ und im Endzeitpunkt $t = T$ gehandelt werden darf. Für den Zeitpunkt $t = T$ gilt wegen (3.1) die Gleichheit $Q'_i(T) = Q$, so dass (3.2) keine Bedingung liefert. Aufgrund der Annahme $\mathcal{F}_0 = \sigma(\mathcal{N})$ gilt $Q'_i(0) = Q_i$, so dass sich im Handelszeitpunkt $t = 0$ Bedingung (3.2) zu $E_{Q_i}(g) = E_Q(g)$ vereinfacht. Somit beschreibt (2) in diesem Fall, dass $\mathcal{G}$ vollständig bezüglich des Finanzexperiments $\{Q_1, \dots, Q_d, Q\}$ ist.

Im Allgemeinen kann man die Aussage (2) aus Theorem 3.7 nur als eine Art bedingte Vollständigkeit (im Sinne von Definition 3.6) für alle t interpretieren. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass (1) einen Zusammenhang zur Vollständigkeit des Finanzmarktes beschreibt, während (2) eine Verbindung zu einer Art Vollständigkeit einer bestimmten Klasse von Funktionen bezüglich des zugehörigen Finanzexperiments darstellt, so dass Theorem 3.7 beide Begriffe der

Vollständigkeit verknüpft.

Dies lässt sich folgendermaßen leicht veranschaulichen. Entfernt man eine (nicht redundante) risikobehaftete Anlage aus dem Finanzmarkt, so gefährdet man die Vollständigkeit des Finanzmarktes, da diese Anlage möglicherweise ein nicht zu ersetzender Bestandteil einer Replikationsstrategie für eine Option sein kann. Andererseits führt das Entfernen dieser risikobehafteten Anlage auch dazu, dass das zugehörige Finanzexperiment um ein Wahrscheinlichkeitsmaß verkleinert wird. Dies wiederum kann bewirken, dass Bedingung (3.2) abgeschwächt wird, wodurch möglicherweise nicht mehr erzwungen werden kann, dass g fast sicher konstant wird. Auf diese Weise wird dann auch die (bedingte) Vollständigkeit der Klasse $\mathcal{G}$ bezüglich des Finanzexperiments verletzt.

Kapitel 4

Robustheit von Optionspreisen

4.1 L_1 -Differenzierbarkeit von Preisprozessen

Das Ziel dieses Kapitels ist es, zu untersuchen, wie sensitiv Optionspreise auf Störungen im Preisprozess einer risikobehafteten Anlage reagieren. Ein wichtiges Hilfsmittel für diese Robustheitsanalyse ist die Beobachtung aus Kapitel 2, dass sich die Optionspreise gewisser Optionen über die Gütefunktionen von Tests ausdrücken lassen (vergleiche Theorem 2.1). Aus diesem Grund werden in diesem Kapitel nur Optionen mit Auszahlungsprofilen der Form (2.2) betrachtet, wobei zusätzlich angenommen sei, dass die einzelnen Preisprozesse jeweils nur durch ihren Wert zum letzten Zeitpunkt der Beobachtungsperiode eingehen, wie es etwa beim europäischen Call oder bei Bull-Spread Optionen der Fall ist, das heißt es liegt eine Option der Form

$$H = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^d [a_{ij} V_T^i - K_{ij}] \phi_{ij}(Y_T^i) \quad (4.1)$$

vor.

Bereits bekannt ist, dass sich Gütefunktionen von Tests in gewissen Richtungen besonders sensitiv gegenüber Störungen verhalten, siehe etwa Milbrodt und Strasser [22] oder Janssen [13] für den Fall eines zweiseitigen Kolmogorov-Smirnov Tests. Dies motiviert die obige Annahme an die Gestalt des Auszahlungsprofils.

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass sich die Optionspreise in diesem Fall unter geeigneten Voraussetzungen differenzieren lassen. Für das hier vorgestellte Verfahren ist das Konzept der L_1 -Differenzierbarkeit (vergleiche etwa Torgersen

[34], S. 49 oder Witting [36], S. 164) von großer Bedeutung. Verwendet wird in diesem Zusammenhang auch die Notation der Score-Funktion, einer Ableitung des logarithmierten Likelihoods, siehe etwa Cox und Hinkley [1], S. 107 für die Definition.

Gegenstand der Untersuchung ist im Folgenden eine Störung der Volatilität im Verhalten der Preisprozesse. Im klassischen Black-Scholes-Modell werden die Auswirkungen auf den Optionspreis durch Schwankungen in diversen Parametern des Modells in der Literatur als sogenannte „Greeks“ bezeichnet (vergleiche etwa Korn und Korn [17], S. 91). Der Einfluss auf den Optionspreis durch eine Störung in der Volatilität wird dabei „Vega“ genannt.

In diesem Kapitel werden die Preisentwicklungen nach dem Itô-Prozess-Modell aus Beispiel 1.5 modelliert, wobei sowohl die (zeitabhängige) Volatilitätsmatrix als auch die (zeitabhängigen) Störungsrichtungen als deterministisch angenommen werden. Fasst man alle Störungsrichtungen zusammen, so liefert dies eine Störungsmatrix, die mit τ bezeichnet werde. Es existiere ein $\varepsilon > 0$, so dass der Prozess $\sigma + r\tau$ für $|r| < \varepsilon$ weiterhin die Voraussetzungen von Beispiel 1.5 erfüllt. Die Matrix $\sigma + r\tau$ modelliert hierbei die gestörte Volatilität. Es bezeichne

$$\tau_i := (\tau_{i1}, \dots, \tau_{id})'$$

den zum Index i gehörigen Spalten-Vektor von τ in Analogie zur Bezeichnung σ_i für den i -ten Spalten-Vektor von σ aus Beispiel 1.5. Im gestörten Modell liefert der Satz von Girsanov wie in Beispiel 1.5 ein Martingalmaß Q_r , so dass

$$\bar{W}^{(r)}(t) := W(t) - \int_0^t \theta^{(r)}(s) ds$$

eine d -dimensionale Brownsche Bewegung bezüglich Q_r beschreibt mit $\theta^{(r)}(s) := (\sigma + r\tau)(s)^{-1}[\rho(s)\mathbb{1} - \mu(s)]$.

Es lässt sich feststellen, dass der Einfluss der risikobehafteten Anlagen auf den Optionspreis bei Auszahlungsprofilen der Form (2.2) getrennt in einzelnen Summanden vorliegt. Aus diesem Grund wird die Beobachtung zunächst auf den ersten Preisprozess beschränkt. Über den Satz von Girsanov erhält man durch

$$\frac{dQ_{1,r}}{dQ_r} := \exp \left(\int_0^T (\sigma_1 + r\tau_1)(s)' d\bar{W}^{(r)}(s) - \frac{1}{2} \int_0^T \|(\sigma_1 + r\tau_1)(s)\|^2 ds \right)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q_{1,r}$, so dass

$$\bar{W}^{(r)}(t) = \int_0^t (\sigma_1 + r\tau_1)(s) ds$$

eine d -dimensionale Brownsche Bewegung bezüglich $Q_{1,r}$ ist.

Für $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ aus dem Hilbertraum $L_2([0, T], \mathbb{A}_{[0, T]}; \mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ bezeichne $\|f\|_{L_2}^2 := \int_0^T \|f(s)\|^2 ds$ die übliche Norm auf diesem Hilbertraum und $\langle f, g \rangle_{L_2} := \int_0^T \langle f(s), g(s) \rangle ds$ das übliche Skalarprodukt.

Mit Hilfe der eingeführten Notationen lässt sich das Kernresultat dieses Kapitels formulieren und beweisen.

Theorem 4.1

Betrachtet werde ein Itô-Prozess-Modell wie oben, was insbesondere die Annahme, dass σ_1 und τ_1 deterministische (zeitabhängige) Prozesse bilden, beinhaltet. Dann sind die Kurven von Wahrscheinlichkeitsmaßen

$$r \mapsto \mathcal{L} \left(\log \frac{dQ_{1,r}}{dQ_r} \middle| Q_r \right) \quad \text{und} \quad r \mapsto \mathcal{L} \left(\log \frac{dQ_{1,r}}{dQ_r} \middle| Q_{1,r} \right), \quad |r| < \varepsilon$$

L_1 -differenzierbar in $r = 0$, wobei die Score-Funktion der ersten Kurve in $r = 0$ durch

$$\tilde{g}_0(x) = \langle \sigma_1, \tau_1 \rangle_{L_2} \left(\frac{-1 - (x + \frac{1}{2} \|\sigma_1\|_{L_2}^2)}{\|\sigma_1\|_{L_2}^2} + \frac{(x + \frac{1}{2} \|\sigma_1\|_{L_2}^2)^2}{\|\sigma_1\|_{L_2}^4} \right), \quad (4.2)$$

beziehungsweise der zweiten Kurve durch

$$\bar{\tilde{g}}_0(x) = \langle \sigma_1, \tau_1 \rangle_{L_2} \left(\frac{-1 + x - \frac{1}{2} \|\sigma_1\|_{L_2}^2}{\|\sigma_1\|_{L_2}^2} + \frac{(x - \frac{1}{2} \|\sigma_1\|_{L_2}^2)^2}{\|\sigma_1\|_{L_2}^4} \right) \quad (4.3)$$

gegeben ist.

Beweis. Der Beweis der L_1 -Differenzierbarkeit wird über ein Kriterium von Hájek geführt, siehe etwa Strasser [32], Theorem 77.3, S. 391 oder Torgersen [34], Theorem 9.4.1, S. 537. Aus der Tatsache, dass $\bar{W}^{(r)}$ eine d -dimensionale Brownsche Bewegung bezüglich Q_r ist, ergibt sich, dass

$$\log \frac{dQ_{1,r}}{dQ_r} = \int_0^T (\sigma_1 + r\tau_1)(s)' d\bar{W}^{(r)}(s) - \frac{1}{2} \int_0^T \|(\sigma_1 + r\tau_1)(s)\|^2 ds$$

unter Q_r eine $N(-\frac{1}{2} \|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2, \frac{1}{2} \|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2)$ -Normalverteilung mit Dichte

$$g_r(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi} \|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(x + \frac{1}{2} \|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2)^2}{\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2} \right)$$

besitzt. Für die Anwendung von Hájek's Kriterium benötigt man die Ableitung $\frac{\partial}{\partial r} \log(g_r(x))$. Hierzu werden zunächst die auftretenden inneren Ableitungen be-

stimmt. Für $f, g \in L_2([0, T], \mathbb{A}_{[0, T]}; \mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ gelten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \|f + rg\|_{L_2}^2 &= \frac{\partial}{\partial r} \int_0^T \|f(s) + rg(s)\|^2 ds \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\int_0^T \|f(s)\|^2 ds + 2r \int_0^T \langle f(s), g(s) \rangle ds \right. \\ &\quad \left. + r^2 \int_0^T \|g(s)\|^2 ds \right) \\ &= 2\langle f, g \rangle_{L_2} + 2r \|g\|_{L_2}^2 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \|f + rg\|_{L_2} &= \frac{\partial}{\partial r} (\|f + rg\|_{L_2}^2)^{1/2} = \frac{1}{2\|f + rg\|_{L_2}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \|f + rg\|_{L_2}^2 \\ &= \frac{\langle f, g \rangle_{L_2} + r\|g\|_{L_2}^2}{\|f + rg\|_{L_2}}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \log(g_r(x)) &= -\frac{\partial}{\partial r} \log(\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{(x + \frac{1}{2}\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2)^2}{\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2} \\ &= -\frac{\langle \sigma_1, \tau_1 \rangle_{L_2} + r\|\tau_1\|_{L_2}^2}{\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2} - \left(x + \frac{1}{2}\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2 \right) \frac{\langle \sigma_1, \tau_1 \rangle_{L_2} + r\|\tau_1\|_{L_2}^2}{\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2} \\ &\quad + \left(x + \frac{1}{2}\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2 \right)^2 \frac{\langle \sigma_1, \tau_1 \rangle_{L_2} + r\|\tau_1\|_{L_2}^2}{\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^4} \\ &= \frac{\langle \sigma_1, \tau_1 \rangle_{L_2} + r\|\tau_1\|_{L_2}^2}{\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2} \left(-1 - \left(x + \frac{1}{2}\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x + \frac{1}{2}\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2)^2}{\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2} \right) \\ &=: f_1(r) + f_2(r)x + f_3(r)x^2, \end{aligned}$$

mit f_1, f_2 und f_3 entsprechend gewählt, wobei alle drei Funktionen auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ stetig und gleichmäßig beschränkt sind.

Bezeichnet X_r eine $N(-\frac{1}{2}\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2, \frac{1}{2}\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2)$ -normalverteilte und Z eine $N(0, 1)$ -normalverteilte Zufallsvariable, so gilt für $|r| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} \int \left| \frac{\partial}{\partial r} \log(g_r(x)) g_r(x) \right| dx &= E(|f_1(r) + f_2(r)X_r + f_3(r)X_r^2|) \\ &= E(|\tilde{f}_1(r) + \tilde{f}_2(r)Z + \tilde{f}_3(r)Z^2|), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ und $\tilde{f}_3$ entsprechend gewählt und ebenfalls auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ stetig und gleichmäßig beschränkt sind. Wegen

$$|\tilde{f}_1(r) + \tilde{f}_2(r)Z + \tilde{f}_3(r)Z^2| \leq K_1 + K_2|Z| + K_3Z^2 \in L_1(P),$$

für Konstanten K_1, K_2, K_3 folgt aus dem Satz der majorisierten Konvergenz die Stetigkeit der Abbildung $r \mapsto \int \left| \frac{\partial}{\partial r} \log(g_r(x)) g_r(x) \right| dx$ auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Nach Hájek's Kriterium folgt hieraus die L_1 -Differenzierbarkeit der Kurve

$$r \mapsto \mathcal{L} \left(\log \frac{dQ_{1,r}}{dQ_r} \middle| Q_r \right).$$

Bezeichnet $\tilde{g}_0 := \frac{\partial}{\partial r} \log g_r|_{r=0}$ die zugehörige Score-Funktion der Kurve in $r = 0$, so ergibt sich aus obiger Rechnung wie behauptet

$$\tilde{g}_0(x) = \langle \sigma_1, \tau_1 \rangle_{L_2} \left(\frac{-1 - (x + \frac{1}{2} \|\sigma_1\|_{L_2}^2)}{\|\sigma_1\|_{L_2}^2} + \frac{(x + \frac{1}{2} \|\sigma_1\|_{L_2}^2)^2}{\|\sigma_1\|_{L_2}^4} \right).$$

Es verbleibt die Untersuchung der zweiten Kurve

$$r \mapsto \mathcal{L} \left(\log \frac{dQ_{1,r}}{dQ_r} \middle| Q_{1,r} \right).$$

Die Verteilung lässt sich durch Erweitern etwas umschreiben. Es gilt

$$\begin{aligned} & \mathcal{L} \left(\log \frac{dQ_{1,r}}{dQ_r} \middle| Q_{1,r} \right) \\ &= \mathcal{L} \left(\int_0^T (\sigma_1 + r\tau_1)(s)' d\bar{W}^{(r)}(s) - \frac{1}{2} \int_0^T \|(\sigma_1 + r\tau_1)(s)\|^2 ds \middle| Q_{1,r} \right) \\ &= \mathcal{L} \left(\int_0^T (\sigma_1 + r\tau_1)(s)' d \left(\bar{W}^{(r)}(s) - \int_0^s (\sigma_1 + r\tau_1)(u) du \right) \right. \\ & \quad \left. + \int_0^T (\sigma_1 + r\tau_1)(s)' d \left(\int_0^s (\sigma_1 + r\tau_1)(u) du \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^T \|(\sigma_1 + r\tau_1)(s)\|^2 ds \middle| Q_{1,r} \right) \\ &= \mathcal{L} \left(\int_0^T (\sigma_1 + r\tau_1)(s)' d \left(\bar{W}^{(r)}(s) - \int_0^s (\sigma_1 + r\tau_1)(u) du \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^T \|(\sigma_1 + r\tau_1)(s)\|^2 ds \middle| Q_{1,r} \right). \end{aligned}$$

Da $\bar{W}^{(r)}(s) - \int_0^s (\sigma_1 + r\tau_1)(u) du$ unter $Q_{1,r}$ eine Brownsche Bewegung bildet, folgt, dass

$$\mathcal{L} \left(\log \frac{dQ_{1,r}}{dQ_r} \middle| Q_{1,r} \right) = N \left(\frac{1}{2} \|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2, \frac{1}{2} \|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2 \right)$$

einer Normalverteilung folgt, welche die Dichte

$$\bar{g}_r(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \frac{1}{2}\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2)^2}{\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2}\right)$$

besitzt. Somit gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \log(\bar{g}_r(x)) &= \frac{\langle \sigma_1, \tau_1 \rangle_{L_2} + r\|\tau_1\|_{L_2}^2}{\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2} \left(-1 + x - \frac{1}{2}\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x - \frac{1}{2}\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2)^2}{\|\sigma_1 + r\tau_1\|_{L_2}^2} \right). \end{aligned}$$

Alle Argumente bei der Beweisführung zum Nachweis der L_1 -Differenzierbarkeit der ersten Kurve lassen sich nun analog für die zweite Kurve durchführen und man erhält für die zugehörige Score-Funktion $\bar{g}_0$ in 0

$$\bar{g}_0(x) = \langle \sigma_1, \tau_1 \rangle_{L_2} \left(\frac{-1 + x - \frac{1}{2}\|\sigma_1\|_{L_2}^2}{\|\sigma_1\|_{L_2}^2} + \frac{(x - \frac{1}{2}\|\sigma_1\|_{L_2}^2)^2}{\|\sigma_1\|_{L_2}^4} \right),$$

was den Beweis vollendet. ■

4.2 Differenzierbarkeit von Optionspreisen

Aus Theorem 4.1 wird in diesem Abschnitt ein Differenzierbarkeitsresultat für Optionspreise abgeleitet. Dies folgt im Wesentlichen aus der Tatsache, dass L_1 -Differenzierbarkeit bei einer Kurve von Wahrscheinlichkeitsmaßen auch Differenzierbarkeit von zugehörigen Gütefunktionen von Tests nach sich zieht. Diese Beobachtung soll im Folgenden präzisiert werden. Sei dazu $r \mapsto P_r$ eine Kurve von Wahrscheinlichkeitsmaßen, dominiert durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß P , mit zugehörigen Dichten $f_r := \frac{dP_r}{dP}$. Die Kurve sei L_1 -differenzierbar in $r = 0$ mit zugehöriger L_1 -Ableitung $\dot{f}_0$, das heißt

$$\|f_r - f_0 - r\dot{f}_0\|_{L_1(P)} = o(r).$$

Betrachte einen Test ϕ und setze $\alpha(\phi) := E_{P_0} \left(\frac{\dot{f}_0}{f_0} \phi \right)$. Dann gilt wegen $|\phi| \leq 1$

$$\begin{aligned} |E_{P_r}(\phi) - E_{P_0}(\phi) - r\alpha(\phi)| &= |E_P(f_r\phi) - E_P(f_0\phi) - rE_P(\dot{f}_0\phi)| \\ &\leq \|f_r\phi - f_0\phi - r\dot{f}_0\phi\|_{L_1(P)} \\ &\leq \|f_r - f_0 - r\dot{f}_0\|_{L_1(P)} = o(r), \end{aligned}$$

und somit insgesamt

$$|E_{P_r}(\phi) - E_{P_0}(\phi) - r\alpha(\phi)| = o(r). \quad (4.4)$$

Man erhält also für die Gütefunktion von ϕ Differenzierbarkeit in $r = 0$ mit Ableitung $\alpha(\phi)$. Es ergibt sich unmittelbar das folgende Theorem.

Theorem 4.2

Betrachtet werde das am Anfang des Kapitels beschriebene Modell mit einer Störung der Volatilität der Preisprozesse. Es sei H eine Option der Form (4.1) mit Optionspreis $p_Q(H)$. Es bezeichne H_r die Auszahlung der Option im gestörten Modell mit zugehörigem gestörten Optionspreis $p_{Q_r}(H_r)$. Dann existiert eine Ableitung $\alpha(H)$, so dass gilt

$$|p_{Q_r}(H_r) - p_Q(H) - r\alpha(H)| = o(r). \quad (4.5)$$

Beweis. Für den Optionspreis im gestörten Modell gilt

$$\begin{aligned} p_{Q_r}(H_r) = & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^d \left[a_{ij} v_0^i E_{Q_{i,r}} \left(\phi_{ij} \left(\frac{dQ_{i,r}}{dQ_r} \right) \right) \right. \\ & \left. - \exp \left(- \int_0^T \rho(u) du \right) K_{ij} E_{Q_r} \left(\phi_{ij} \left(\frac{dQ_{i,r}}{dQ_r} \right) \right) \right], \end{aligned}$$

da die Preisprozesse nach Voraussetzung nur durch ihre Endwerte auf den Optionspreis einwirken. Wie oben erwähnt, genügt es, nur den Einfluss der ersten risikobehafteten Anlage zu betrachten, da die übrigen Anlagen sich analog verhalten und in getrennte Summanden in den Optionspreis Eingang finden. Mit den Notationen von oben sieht man, dass im gestörten Optionspreis bei Untersuchung des ersten Preisprozesses Terme der Form $E_{Q_r} \left(\phi_{1j} \left(\frac{dQ_{1,r}}{dQ_r} \right) \right)$ und $E_{Q_{1,r}} \left(\phi_{1j} \left(\frac{dQ_{1,r}}{dQ_r} \right) \right)$ mit Tests ϕ_{1j} auftreten. Setzt man $\tilde{\phi}_{1j} := \phi_{1j} \circ \exp$, so erhält man

$$E_{Q_r} \left(\phi_{1j} \left(\frac{dQ_{1,r}}{dQ_r} \right) \right) = E_{\mathcal{L} \left(\frac{dQ_{1,r}}{dQ_r} | Q_r \right)} (\phi_{1j}) = E_{\mathcal{L} \left(\log \frac{dQ_{1,r}}{dQ_r} | Q_r \right)} (\tilde{\phi}_{1j}).$$

Wegen Theorem 4.1 und (4.4) existiert eine Ableitung α_{1j} , so dass gilt

$$\left| E_{\mathcal{L} \left(\log \frac{dQ_{1,r}}{dQ_r} | Q_r \right)} (\tilde{\phi}_{1j}) - E_{\mathcal{L} \left(\log \frac{dQ_{1,0}}{dQ_0} | Q_0 \right)} (\tilde{\phi}_{1j}) - r\alpha_{1j} \right| = o(r).$$

Verwendet man nun noch die Beobachtung, dass Q_0 dem ungestörten Martingalmaß Q und $Q_{1,0}$ dem Maß Q_1 aus Beispiel 1.5 entspricht, führt dies zu

$$\left| E_{Q_r} \left(\phi_{1j} \left(\frac{dQ_{1,r}}{dQ_r} \right) \right) - E_Q \left(\phi_{1j} \left(\frac{dQ_1}{dQ} \right) \right) - r\alpha_{1j} \right| = o(r).$$

Genauso existiert auch $\bar{\alpha}_{1j}$ mit

$$\left| E_{Q_{1,r}} \left(\phi_{1j} \left(\frac{dQ_{1,r}}{dQ_r} \right) \right) - E_{Q_1} \left(\phi_{1j} \left(\frac{dQ_1}{dQ} \right) \right) - r\bar{\alpha}_{1j} \right| = o(r).$$

Setzt man die so gefundenen Ableitungen für alle Preisprozesse und die entsprechenden Koeffizienten zu einem $\alpha(H)$ zusammen, wobei

$$\alpha(H) := \sum_{i=1}^d \alpha_i = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m \left[a_{ij} v_0^i \bar{\alpha}_{ij} - \exp \left(- \int_0^T \rho(u) du \right) K_{ij} \alpha_{ij} \right],$$

und verwendet noch, dass die Terme $E_Q \left(\phi_{1j} \left(\frac{dQ_1}{dQ} \right) \right)$ und $E_{Q_1} \left(\phi_{1j} \left(\frac{dQ_1}{dQ} \right) \right)$ den auftretenden Summanden in $p_Q(H)$ entsprechen, so folgt aus der Dreiecksungleichung bereits die gewünschte Aussage (4.5). ■

Bemerkung 4.3

- Es erscheint naheliegend, statt der Kurve $r \mapsto \mathcal{L} \left(\log \frac{dQ_{1,r}}{dQ_r} \middle| Q_r \right)$ aus Theorem 4.1 direkt die Kurve $r \mapsto Q_r$ zu untersuchen. Könnte man bei dieser Kurve L_1 -Differenzierbarkeit nachweisen, so wäre ein analoges Vorgehen wie in Theorem 4.2 zum Erreichen eines Differenzierbarkeitsresultats für Optionspreise allerdings nicht möglich. Dies liegt daran, dass in diesem Fall zum Beispiel bei der Betrachtung des Terms $E_{Q_r} \left(\phi_{1j} \left(\frac{dQ_{1,r}}{dQ_r} \right) \right)$ aus dem Beweis von Theorem 4.2 die Schwierigkeit auftritt, dass der Test selbst noch durch den Störparameter r beeinflusst wird und (4.4) somit nicht verwendet werden kann.
- Im vorgestellten Modell ist auch eine ungleichmässige Störung der Preisprozesse denkbar, das heißt für den Störparameter kann ein d -dimensionalen Vektor $r = (r_1, \dots, r_d)'$ gewählt werden, wobei r_j die Veränderung in der j -ten risikobehafteten Anlage beschreibt. Die obige Bedingung $|r| < \varepsilon$ wird dabei dann durch die Bedingung $\|r\| < \varepsilon$ ersetzt. Weil die Preisprozesse getrennt auf den Optionspreis einwirken, erhält man in Theorem 4.2 aber ein analoges Differenzierbarkeitsresultat.

- Die Werte für die einzelnen Ableitungen im Beweis von Theorem 4.2 lassen sich finanzmathematisch interpretieren. So beschreiben etwa α_{1j} und $\bar{\alpha}_{1j}$ wie stark eine Änderung in der ersten risikobehafteten Anlage auf den Optionspreis einwirkt. Sind diese Ableitungen Null (beziehungsweise nahe bei Null), so hat die durch τ_1 beschriebene Störung auf den ersten Preisprozess keinen (beziehungsweise nur einen geringen) Einfluss erster Ordnung auf den Optionspreis.

4.3 Bestimmung von Gradienten

Der in Bemerkung 4.3 erwähnte Einfluss der Störung der Preisprozesse auf den Optionspreis lässt sich noch weiter konkretisieren. Man kann für die einzelnen risikobehafteten Anlagen sogenannte Gradienten bestimmen. Der Optionspreis reagiert besonders sensitiv auf Störungen in Richtung eines Gradienten; Störungen in Richtungen, die orthogonal zu einem Gradienten verlaufen, haben keine Auswirkung erster Ordnung auf den Optionspreis. Im Folgenden wird ein Gradient zunächst nur für den ersten Preisprozess ermittelt; weitere Gradienten erhält man durch analoges Vorgehen.

Zur ersten Kurve aus Theorem 4.1 und der zugehörigen im Beweis definierten Normalverteilungs-Dichte g_r bezeichne wie zuvor $\dot{g}_0 := \frac{\partial}{\partial r} g_r|_{r=0}$ die L_1 -Ableitung der Kurve in $r = 0$, sowie $\tilde{g}_0 := \frac{\partial}{\partial r} \log g_r|_{r=0}$ die zugehörige Score-Funktion in 0. Wegen $\frac{\partial}{\partial r} \log g_r = \frac{1}{g_r} \frac{\partial}{\partial r} g_r$ erhält man unmittelbar die bekannte Beziehung $\dot{g}_0 = g_0 \tilde{g}_0$ zwischen L_1 -Ableitung und Score-Funktion. Die zugehörigen Komponenten α_{1j} in der Ableitung des Optionspreises lassen sich nun explizit angeben. Benutzt man

$$\alpha_{1j} = E_{\mathcal{L}(\log \frac{dQ_{1,0}}{dQ_0} | Q_0)} \left(\frac{\dot{g}_0}{g_0} \tilde{\phi}_{1j} \right) = E_{\mathcal{L}(\log \frac{dQ_{1,0}}{dQ_0} | Q_0)} (\tilde{g}_0 \tilde{\phi}_{1j}),$$

wobei $\tilde{\phi}_{1j} := \phi_{1j} \circ \exp$ wie oben, und setzt

$$u_0(x) := \frac{-1 - (x + \frac{1}{2} \|\sigma_1\|_{L_2}^2)}{\|\sigma_1\|_{L_2}^2} + \frac{(x + \frac{1}{2} \|\sigma_1\|_{L_2}^2)^2}{\|\sigma_1\|_{L_2}^4},$$

so folgt mit (4.2) die Darstellung

$$\begin{aligned} \alpha_{1j} &= \langle \sigma_1, \tau_1 \rangle_{L_2} E_{\mathcal{L}(\log \frac{dQ_{1,0}}{dQ_0} | Q_0)} (u_0 \tilde{\phi}_{1j}) = \langle \tau_1, E_{\mathcal{L}(\log \frac{dQ_{1,0}}{dQ_0} | Q_0)} (u_0 \tilde{\phi}_{1j}) \sigma_1 \rangle_{L_2} \\ &= \langle \tau_1, \gamma_{1j} \sigma_1 \rangle_{L_2}, \end{aligned}$$

wobei $\gamma_{1j} := E_{\mathcal{L}\left(\log \frac{dQ_{1,0}}{dQ_0} | Q_0\right)}(u_0 \tilde{\phi}_{1j})$. Ebenso verwendet man die Score-Funktion $\tilde{g}_0$ der zweiten Kurve aus Theorem 4.1 im Punkt $r = 0$ und findet mit (4.3) Koeffizienten $\bar{\gamma}_{1j} \in \mathbb{R}$, so dass

$$\bar{\alpha}_{1j} = E_{\mathcal{L}\left(\log \frac{dQ_{1,0}}{dQ_0} | Q_{1,0}\right)}\left(\tilde{g}_0 \tilde{\phi}_{1j}\right) = \langle \tau_1, \bar{\gamma}_{1j} \sigma_1 \rangle_{L_2}.$$

Bilden der Linearkombination

$$\gamma_1 := \sum_{j=1}^m \left[a_{1j} v_0^1 \bar{\gamma}_{1j} - \exp\left(-\int_0^T \rho(u) du\right) K_{1j} \gamma_{1j} \right] \in \mathbb{R}$$

führt schließlich zu einer Darstellung $\alpha_1 = \langle \tau_1, \gamma_1 \sigma_1 \rangle_{L_2}$ des ersten Koeffizienten in der Ableitung des Optionspreises $\alpha(H) = \sum_{i=1}^d \alpha_i$. In diesem Fall ist also der Gradient $\gamma_1 \sigma_1$ und damit die Richtung, in die der Optionspreis besonders stark beeinflusst wird, lediglich ein Vielfaches von σ_1 .

Mit der Notation aus Theorem 4.2 ergibt sich insgesamt für den Optionspreis

$$p_{Q_r}(H_r) = p_Q(H) + r \sum_{i=1}^d \gamma_i \langle \tau_i, \sigma_i \rangle_{L_2} + o(r).$$

Eine solche Entwicklung lässt sich für $d = 1$ im Fall eines europäischen Calls auch direkt erzielen. Im nächsten Beispiel wird dieser Spezialfall vorgestellt.

Beispiel 4.4

Betrachte den Fall $d = 1$ und als Option H einen europäischen Call mit Ausübungspreis K aus Beispiel 2.4, das heißt

$$H = (V_T^1 - K)^+ = (V_T^1 - K) \mathbb{1}_{\{V_T^1 > K\}}.$$

Wie zuvor seien eine deterministische Volatilitätsfunktion σ und eine deterministische Störungsfunktion τ angenommen. Für den Optionspreis ergibt sich ähnlich zur Black-Scholes Formel, vergleiche etwa Korn und Korn [17], Korollar 3.9, S. 88, eine geschlossene Form. Mit den Notationen aus Beispiel 1.5 zeigt sich, dass

$$\begin{aligned} \int_0^T \sigma(s) dW(s) - \int_0^T \rho(s) ds &= \int_0^T \sigma(s) d\left(W(s) - \int_0^s \theta(u) du\right) \\ &= \int_0^T \sigma(s) d\bar{W}(s) \end{aligned}$$

unter Q einer $N(0, \|\sigma\|_{L_2}^2)$ -Normalverteilung folgt. Somit besitzt die normierte Zufallsvariable $\|\sigma\|_{L_2}^{-1} \left(-\int_0^T \sigma(s) dW(s) + \int_0^T \rho(s) ds \right)$ unter Q eine $N(0, 1)$ -Normalverteilung. Formt man den im Auszahlungsprofil erscheinende Neyman-Pearson Test

$$\mathbb{1}_{\left\{ \frac{dQ_1}{dQ} > K(v_0^1)^{-1} \exp\left(-\int_0^T \rho(s) ds\right) \right\}}$$

durch Benutzung von

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{dQ_1}{dQ} > K(v_0^1)^{-1} \exp\left(-\int_0^T \rho(s) ds\right) \right\} \\ &= \left\{ \log \frac{dQ_1}{dQ} > \log(K(v_0^1)^{-1}) - \int_0^T \rho(s) ds \right\} \\ &= \left\{ \int_0^T \sigma(s) dW(s) - \int_0^T \rho(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma(s)^2 ds \right. \\ & \quad \left. > \log(K(v_0^1)^{-1}) - \int_0^T \rho(s) ds \right\} \\ &= \left\{ \|\sigma\|_{L_2}^{-1} \left(-\int_0^T \sigma(s) dW(s) + \int_0^T \rho(s) ds \right) \right. \\ & \quad \left. < \|\sigma\|_{L_2}^{-1} \left(-\log(K(v_0^1)^{-1}) + \int_0^T \rho(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma(s)^2 ds \right) \right\} \end{aligned}$$

um, so erhält man für den in der Preisberechnungs-Formel (2.1) auftretenden Erwartungswert des Tests bezüglich Q

$$\begin{aligned} & E_Q \left(\mathbb{1}_{\left\{ \frac{dQ_1}{dQ} > K(v_0^1)^{-1} \exp\left(-\int_0^T \rho(s) ds\right) \right\}} \right) \\ &= \Phi \left(\|\sigma\|_{L_2}^{-1} \left(-\log(K(v_0^1)^{-1}) + \int_0^T \rho(s) ds - \frac{1}{2} \|\sigma\|_{L_2}^2 \right) \right), \end{aligned}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der $N(0, 1)$ -Normalverteilung bezeichnet. Analog lässt sich über die Beobachtung, dass $\int_0^T \sigma(s) dW(s) - \int_0^T \rho(s) ds - \int_0^T \sigma(s)^2 ds$ unter Q_1 eine $N(0, \|\sigma\|_{L_2}^2)$ -Normalverteilung besitzt und somit die Zufallsvariable $\|\sigma\|_{L_2}^{-1} \left(-\int_0^T \sigma(s) dW(s) + \int_0^T \rho(s) ds + \int_0^T \sigma(s)^2 ds \right)$ unter Q_1 einer $N(0, 1)$ -Normalverteilung folgt, auch der Erwartungswert bezüglich des Wahrscheinlich-

keitsmaes Q_1 bestimmen, wodurch sich insgesamt für den Optionspreis ergibt

$$\begin{aligned} p_Q(H) = v_0^1 \Phi \left(\|\sigma\|_{L_2}^{-1} \left(-\log(K(v_0^1)^{-1}) + \int_0^T \rho(s) ds + \frac{1}{2} \|\sigma\|_{L_2}^2 \right) \right) \\ - K \exp \left(- \int_0^T \rho(s) ds \right) \Phi \left(\|\sigma\|_{L_2}^{-1} \left(-\log(K(v_0^1)^{-1}) \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^T \rho(s) ds - \frac{1}{2} \|\sigma\|_{L_2}^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Demzufolge ist $p_Q(H)$ eine Funktion der L_2 -Norm von σ , das heißt $p_Q(H) = h(\|\sigma\|_{L_2})$ für eine geeignete Funktion h . Verwendet man nun die im Beweis von Theorem 4.1 berechnete Ableitung $\frac{\partial}{\partial r} \|\sigma + r\tau\|_{L_2}|_{r=0} = \|\sigma\|_{L_2}^{-1} \langle \sigma, \tau \rangle_{L_2}$ und setzt man $\gamma := h'(\|\sigma\|_{L_2}) \|\sigma\|_{L_2}^{-1}$, so findet man mit Kettenregel für den Optionspreis $p_Q(H)$ die Entwicklung

$$p_{Q_r}(H_r) = p_Q(H) + r\gamma \langle \sigma, \tau \rangle_{L_2} + o(r),$$

das heißt es zeigt sich erneut, dass ein Vielfaches der Volatilität σ eine Richtung mit großem Einfluss erster Ordnung angibt.

Kapitel 5

Konvergenz von Optionspreisen

5.1 Standarddarstellung von Finanzexperimenten

In diesem Kapitel wird ein Konvergenzresultat für Optionspreise erarbeitet. Wie auch im letzten Kapitel ist dabei das Ergebnis aus Kapitel 2, dass sich die Optionspreise gewisser Optionen über die Gütefunktionen von Tests ausdrücken lassen (siehe Theorem 2.1), von Bedeutung. Deshalb wird die Konvergenz in diesem Kapitel für Optionen mit Auszahlungsprofilen der Form (2.2) formuliert.

Die Konvergenz wird in drei Schritten erreicht. Zunächst wird eine Standarddarstellung für Finanzexperimente hergeleitet. Im zweiten Schritt wird dann diese Darstellung verwendet, um Konvergenz der Preisprozesse, beziehungsweise der zugehörigen Finanzexperimente, die der Option zugrunde liegen, zu erhalten. Dies geschieht mit Hilfe von Kompaktheitsargumenten und dem 3. Lemma von Le Cam. Im dritten Schritt wird die Konvergenz dann auch auf die Optionspreise ausgeweitet.

Dieser Abschnitt befasst sich mit dem ersten Schritt. Betrachtet werde dazu zu einem festen Martingalmaß Q ein Finanzexperiment wie in Definition 1.3 mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$, wobei $I \subset [0, T]$ mit $\{0, T\} \subset I$ den Zeitbereich beschreibt, in dem gehandelt werden kann. Hierbei ist auch zugelassen, dass I diskret ist. Aus dem Finanzexperiment wird nun ein neues Experiment auf dem Raum $(([0, \infty]^d)^I, (\mathcal{B}([0, \infty]^d))^I)$ erzeugt, wobei $(\mathcal{B}([0, \infty]^d))^I$ die Produkt- σ -Algebra bezeichnet. Dieses neue Experiment besitzt den großen Vorteil, dass die Preisprozesse in der Standarddarstellung durch kanonische Projektionen beschrieben

werden. Die Information über die Preisentwicklungen wird somit vollständig in Wahrscheinlichkeitsmaße des Experiments verlagert. Es ist zu erwähnen, dass solche Standardexperimente vielfach Anwendung in der Statistik finden, siehe etwa Strasser [32] und Torgersen [34].

Für das weitere Vorgehen müssen zunächst einige Notationen eingeführt werden. Für eine Teilmenge $J \subset I$ bezeichne

$$\pi_J : ([0, \infty]^d)^I \rightarrow ([0, \infty]^d)^J$$

die kanonische Projektion von $([0, \infty]^d)^I$ nach $([0, \infty]^d)^J$. Abkürzend sei zusätzlich $\pi_t := \pi_{\{t\}}$ für $t \in I$. Durch die Projektionen wird eine neue Filtration

$$\mathcal{G}_t := \sigma(\pi_s : s \in I \cap [0, t]), \quad t \in I$$

auf $([0, \infty]^d)^I$ induziert. Zu einem Zeitpunkt $t \in I$ definiere die Zufallsvariable $Y_t : \Omega \rightarrow ([0, \infty]^d)^{I \cap [0, t]}$ durch

$$Y_t := \left(\left(\frac{X_s^i}{X_0^i} \right)_{i=1, \dots, d} \right)_{s \in I \cap [0, t]}, \quad (5.1)$$

das heißt Y_t enthält die gesamte Entwicklung aller d Preisprozesse bis zum Zeitpunkt t . Insbesondere beinhaltet Y_T die Information über $\frac{X_T^i}{X_0^i}$ für alle $1 \leq i \leq d$

und folglich aufgrund der Beziehung $\frac{X_T^i}{X_0^i} = \frac{dQ_i}{dQ}$ aus Theorem 1.1 auch über die Dichten. Hieraus folgt unmittelbar die Suffizienz der Statistik Y_T bezüglich des Experiments $\{Q_1, \dots, Q_d, Q\}$. Infolgedessen erfolgt beim Übergang von $\{Q_1, \dots, Q_d, Q\}$ zu den Bildverteilungen kein relevanter Informationsverlust, siehe auch Lehmann and Romano [20] für weitere Bemerkungen zur Suffizienz. Definiere die Bildverteilungen auf dem Raum $(([0, \infty]^d)^I, (\mathcal{B}([0, \infty]^d))^I)$ durch

$$\nu := \mathcal{L}(Y_T|Q), \quad \nu_i := \mathcal{L}(Y_T|Q_i).$$

Das folgende Theorem zeigt nun, dass diese Bildverteilungen wieder ein Finanzexperiment bilden.

Theorem 5.1

Das Bildexperiment $\{\nu_1, \dots, \nu_d, \nu\}$ zusammen mit der Filtration $(\mathcal{G}_t)_{t \in I}$ ist ein Finanzexperiment, wobei die Preisprozesse gegeben sind durch die Projektionen $(\pi_t)_{t \in I}$. In der Darstellung über Dichtequotienten heißt dies gerade, dass gilt

$$\frac{d\nu_i|_{\mathcal{G}_t}}{d\nu|_{\mathcal{G}_t}} = \pi_t^i, \quad i = 1, \dots, d, \quad t \in I, \quad (5.2)$$

wobei π_t^i die i -te Komponente von π_t bezeichnet.

Beweis. Zunächst wird die Darstellung (5.2) für den Fall $t = T$ verifiziert, um die Idee des Beweises zu demonstrieren. Aus Gleichung (1.1) und nach Definition von Y_T gemäß (5.1) folgt sofort

$$\frac{dQ_i}{dQ} = \frac{X_T^i}{X_0^i} = \pi_T^i \circ Y_T$$

für jedes feste $i = 1, \dots, d$. Wendet man darauf nun die Transformationsformel an, erhält man

$$\pi_T^i = \frac{d\mathcal{L}(Y_T|Q_i)}{d\mathcal{L}(Y_T|Q)} = \frac{d\nu_i}{d\nu}.$$

Für den allgemeinen Fall sei nun $t \in I$ und $1 \leq i \leq d$. Der Nachweis von (5.2) verläuft im Wesentlichen analog, allerdings übernimmt $I' := I \cap [0, t]$ die Rolle von I . Bezeichne die Bildverteilungen von Y_t unter Q beziehungsweise Q_i mit

$$\tilde{\nu} := \mathcal{L}(Y_t|Q) = \mathcal{L}(Y_t|Q|_{\mathcal{F}_t}), \quad \tilde{\nu}^i := \mathcal{L}(Y_t|Q_i) = \mathcal{L}(Y_t|Q_i|_{\mathcal{F}_t}).$$

Dann sind die Verteilungen $\tilde{\nu}$ und $\tilde{\nu}^i$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Raum $(([0, \infty]^d)^{I'}, (\mathcal{B}([0, \infty]^d))^{I'})$. Ferner bezeichne analog zur vorhergegangenen Notation $\tilde{\pi}_t : ([0, \infty]^d)^{I'} \rightarrow ([0, \infty]^d)^{\{t\}}$ die kanonische Projektion von $([0, \infty]^d)^{I'}$ nach $([0, \infty]^d)^{\{t\}}$. Wie im Spezialfall folgt

$$\tilde{\pi}_t^i = \frac{d\mathcal{L}(Y_t|Q_i|_{\mathcal{F}_t})}{d\mathcal{L}(Y_t|Q|_{\mathcal{F}_t})} = \frac{d\tilde{\nu}_i}{d\tilde{\nu}}. \quad (5.3)$$

Für eine Menge $B \in \mathcal{G}_t$ erhält man die Darstellung

$$B = A \times ([0, \infty]^d)^{I \setminus I'}, \quad A \in (\mathcal{B}([0, \infty]^d))^{I'}$$

und es gelten

$$\nu|_{\mathcal{G}_t}(B) = \nu(B) = \tilde{\nu}(A) \quad \text{sowie} \quad \nu_i|_{\mathcal{G}_t}(B) = \nu_i(B) = \tilde{\nu}_i(A),$$

beziehungsweise äquivalent formuliert

$$\tilde{\nu} = \mathcal{L}(\pi_{I'}|\nu|_{\mathcal{G}_t}) \quad \text{sowie} \quad \tilde{\nu}_i = \mathcal{L}(\pi_{I'}|\nu_i|_{\mathcal{G}_t}).$$

Wendet man diese Beziehung und die Transformationsformel auf (5.3) an, so folgt die Darstellung (5.2), da $\pi_t = \tilde{\pi}_t \circ \pi_{I'}$. ■

5.2 Konvergenz von Finanzexperimenten

Mit Hilfe von Theorem 5.1 wird in diesem Abschnitt ein Konvergenzresultat von Finanzexperimenten hergeleitet. Dabei fällt der Argumentation über Kompaktheit eine entscheidende Rolle zu. Im letzten Abschnitt wurden die Preisprozesse, die eigentlich nur endliche Werte annehmen, künstlich in den Raum $(([0, \infty]^d)^I, (\mathcal{B}([0, \infty]^d))^I)$ eingebettet, um einen kompakten Raum zu erhalten. Hierbei wird ausgenutzt, dass nach dem Satz von Tichonow ein beliebiges (auch überabzählbares) kartesisches Produkt kompakter Räume bezüglich der Produkttopologie selbst wieder kompakt ist. Nutzt man nun die Kompaktheit aus, um sich einen Häufungspunkt zu verschaffen, könnte es passieren, dass ein solcher Häufungspunkt Masse in den Punkt unendlich legt, wodurch also beim Grenzübergang Masse nach unendlich abwandert. Es stellt sich aber heraus, dass dieser ungewünschte Effekt hier nicht auftreten kann.

Als Erstes wird für die Argumentation folgendes technische Resultat benötigt.

Lemma 5.2

Betrachte den bezüglich der Produkttopologie kompakten Raum $\Omega = [0, \infty]^I$, wobei auch eine überabzählbare Menge I zugelassen ist. Wie üblich wird die von den offenen Teilmengen von Ω erzeugte Borel- σ -Algebra mit $\mathcal{B}(\Omega)$ bezeichnet. Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{B}([0, \infty])^I)$, wobei $\mathcal{B}([0, \infty])^I$ wie zuvor die Produkt- σ -Algebra bezeichnet. Dann existiert eine eindeutige Forsetzung von μ als Radon-Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$.

Beweis. Der Beweis wird zunächst für das Produkt des Einheitsintervalls $\Omega' := [0, 1]^I$ anstelle von Ω geführt. Es bezeichne $C(\Omega')$ den Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf Ω' . Im Folgenden wird die Gleichheit der σ -Algebren $\mathcal{B}([0, 1])^I = \sigma(C(\Omega'))$ gezeigt, das heißt μ kann als ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Raum $(\Omega', \sigma(C(\Omega')))$ betrachtet werden.

Die Inklusion $\mathcal{B}([0, 1])^I \subset \sigma(C(\Omega'))$ folgt unmittelbar aus der Stetigkeit der Koordinatenprojektionen $\pi_i : [0, 1]^I \rightarrow [0, 1]$. Die andere Inklusion $\sigma(C(\Omega')) \subset \mathcal{B}([0, 1])^I$ lässt sich mittels des Satzes von Stone-Weierstrass (siehe etwa Rudin [24], S.122) nachweisen. Sei dazu $\mathcal{A} \subset C(\Omega')$ die Algebra, die von den konstanten Funktionen und den Koordinatenprojektionen $\pi_i : [0, 1]^I \rightarrow [0, 1]$ erzeugt wird. Nach Stone-Weierstrass liegt $\mathcal{A}$ dicht in $C(\Omega')$ bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. Da der Grenzwert von meßbaren Funktionen

selbst wieder meßbar ist, folgt daraus die behauptete Inklusion.

Betrachte nun die Abbildung $F : C(\Omega') \rightarrow \mathbb{R}$, die definiert ist durch $F(f) = \int f d\mu$. Dann ist F eine positive Linearform und nach dem Darstellungssatz von Riesz (siehe etwa Elstrodt [4], S. 335, Satz 2.5) existiert ein eindeutiges Radon-Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega', \mathcal{B}(\Omega'))$, das μ fortsetzt.

Die Räume $[0, \infty]$ und $[0, 1]$ sind topologisch isomorph über die stetige, bijektive Abbildung $\phi : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$, die gegeben ist durch $\phi(x) = \frac{x}{1+x}$ für $x < \infty$ und $\phi(\infty) = 1$, und die zugehörige stetige inverse Abbildung ϕ^{-1} , die gegeben ist durch $\phi^{-1}(u) = \frac{u}{1-u}$ für $u < 1$ und $\phi^{-1}(1) = \infty$. Das für $\Omega' = [0, 1]^I$ bewiesene Resultat bleibt also auch weiterhin gültig, wenn stattdessen $\Omega = [0, \infty]^I$ betrachtet wird. ■

Im weiteren Verlauf des Kapitels wird nun eine Folge von Finanzexperimenten betrachtet, wobei der Zeitparameterraum I und die Anzahl der zugehörigen Preisprozesse d fixiert wird, alles andere aber vom Folgenindex $n \in \mathbb{N}$ abhängen darf. Für jeden Folgenindex $n \in \mathbb{N}$ liege also ein Finanzexperiment $E_n = (\Omega_n, \mathcal{F}_n, \{Q_{1,n}, \dots, Q_{d,n}, Q_n\})$ mit zugehöriger Filtration $(\mathcal{F}_{t,n})_{t \in I}$ und zugehörige Preisprozessen $(X_{t,n}^i)_{t \in I}$, $1 \leq i \leq d$ vor, das heißt gemäß Theorem 1.1 erhält man die Darstellung

$$\frac{dQ_{i,n}|\mathcal{F}_{t,n}}{dQ_n|\mathcal{F}_{t,n}} = \frac{X_{t,n}^i}{X_{0,n}^i}$$

für alle $1 \leq i \leq d$ und $t \in I$. Der Vektor (5.1) der gesamten Entwicklung aller d Preisprozesse bis zum Zeitpunkt t hängt ebenfalls vom Folgenindex ab und wird mit $Y_{t,n}$ bezeichnet.

Die Idee, wie man Konvergenz der Finanzexperimente erreichen kann, lässt sich nach allen Vorbereitungen wie folgt zusammenfassen: die Finanzexperimente werden mittels Theorem 5.1 standardisiert, die jeweils letzten Wahrscheinlichkeitsmaße werden künstlich in einen kompakten Raum eingebettet, gemäß Lemma 5.2 erweitert und über Kompaktheitsargumente wird ein schwacher Häufungspunkt ausgewählt. Dann zeigt man, dass keine Masse nach unendlich abwandert und verwendet schließlich das 3. Lemma von Le Cam (vergleiche Jacod und Shiryaev [12], S.621 Theorem 3.3), um auch schwache Konvergenz der übrigen Wahrscheinlichkeitsmaße zu erhalten.

Zur Anwendung des 3. Lemmas von Le Cam ist das Konzept der Benachbartheit von Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen notwendig. Grob gesprochen ist

Benachbarkeit das asymptotische Analogon zur absoluten Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen (siehe zum Beispiel Lehmann und Romano [20], S. 492), oder genauer gesagt: man nennt eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen (P_n) benachbart bezüglich (Q_n) , wobei P_n und Q_n auf gemeinsamen Maßräumen $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ definiert sind, und bezeichnet dies mit $(P_n) \triangleleft (Q_n)$, falls für jede Folge von Mengen $A_n \in \mathcal{F}_n$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(A_n) = 0$ auch $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(A_n) = 0$ erfüllt ist. Gilt neben $(P_n) \triangleleft (Q_n)$ auch noch $(Q_n) \triangleleft (P_n)$, so spricht man von wechselseitiger Benachbarkeit und bezeichnet dies mit $(P_n) \triangleleft\triangleright (Q_n)$.

Der Begriff der Benachbarkeit hat nicht nur vielschichtige Anwendungen in der asymptotischen Statistik sondern hat auch schon, wie bereits in der Einleitung erwähnt, Einzug in die Finanzmathematik erhalten.

Zur Formulierung des Konvergenzresultates wird zusätzlich das Konzept von Netzen (siehe etwa Kelley [16], Kapitel 2 für die Definition) als Verallgemeinerung von Folgen benötigt. Dies liegt daran, dass für überabzählbares I der Raum $[0, \infty]^I$ wie oben erwähnt zwar kompakt ist, allerdings nicht das Kriterium der Folgenkompaktheit erfüllt (vergleiche Steen und Seebach [31], S. 125). Da am Ende des Kapitels aber Optionspreise, die Werte in $\mathbb{R}$ annehmen, untersucht werden, ist es möglich, sich später wieder vom Konzept der Netze zu lösen und zu Folgen zurückzukehren.

Es kann nun das Kernresultat dieses Abschnittes formuliert und bewiesen werden.

Theorem 5.3

Sei wie oben $E_n = (\Omega_n, \mathcal{F}_n, \{Q_{1,n}, \dots, Q_{d,n}, Q_n\})$, $(\mathcal{F}_{t,n})_{t \in I}$ eine Folge von Finanzexperimenten, so dass

$$(Q_{i,n}) \triangleleft\triangleright (Q_n)$$

für alle $i = 1, \dots, d$ erfüllt ist. Dann existiert ein Experiment in Standarddarstellung

$$E = ([0, \infty)^d)^I, (\mathcal{B}([0, \infty)^d))^I, \{\nu_1, \dots, \nu_d, \nu\}$$

mit zugehörigen Preisprozessen, die durch die Beziehung (5.2) gegeben sind, welches ein Häufungspunkt der Folge im folgenden Sinn ist: es existiert ein Teilnetz $(\mathcal{I}, \leq)$ von $(\mathbb{N}, \leq)$, so dass alle endlich-dimensionalen Randverteilungen von $(\mathcal{L}(Y_{T,\tau} | Q_{i,\tau}))_{\tau \in \mathcal{I}}$ schwach konvergent gegen die Randverteilungen von

ν_i sind für alle $i = 1, \dots, d+1$, wobei zur Vereinfachung der Notation $\nu_{d+1} := \nu$ und $Q_{d+1,n} := Q_n$ gesetzt wird.

Beweis. Verwende zunächst Theorem 5.1, um jedes Finanzexperiment E_n in ein Finanzexperiment in Standarddarstellung zu transformieren und bezeichne das so erhaltene Experiment mit $\{\nu_{1,n}, \dots, \nu_{d,n}, \nu_n\}$. Setze außerdem $\nu_{d+1,n} := \nu_n$ und $Q_{d+1,n} := Q_n$. Wie schon zuvor wird $\nu_{d+1,n}$ in den kompakten Raum $(([0, \infty]^d)^I, (\mathcal{B}([0, \infty]^d))^I)$ eingebettet.

Lemma 5.2 zeigt nun, dass sich jedes $\nu_{d+1,n}$ zu einem eindeutig bestimmten Radon-Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Raum $(([0, \infty]^d)^I, \mathcal{B}([0, \infty]^d)^I)$ erweitern lässt. Weil die Menge der Radon-Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem kompakten Raum schwach kompakt ist, besitzt die Folge $(\nu_{d+1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ einen schwachen Häufungspunkt ν . Folglich existiert ein Teilnetz $(\mathcal{I}, \leq)$, so dass $\nu_{d+1,\tau} \rightarrow \nu$ schwach entlang $\tau \in \mathcal{I}$ konvergiert.

Zur Betrachtung der endlich-dimensionalen Randverteilungen wähle $k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in I$ mit $t_1 < t_2 < \dots < t_k = T$ und setze $J := \{t_1, \dots, t_k\} \subset I$. Wegen $\mathcal{L}(Y_{T,\tau}|Q_\tau) = \nu_{d+1,\tau} \rightarrow \nu$ schwach folgt

$$\mathcal{L} \left(\left(\frac{X_{t_j,\tau}^i}{X_{0,\tau}^i} \right)_{(i,j) \in \{1,\dots,d\} \times \{1,\dots,k\}} \middle| Q_\tau \right) \rightarrow \mathcal{L}(\pi_J|\nu) \quad (5.4)$$

schwach auf $([0, \infty]^d)^J$, wobei wie zuvor π_J die kanonische Projektion vom Raum $([0, \infty]^d)^I$ auf $([0, \infty]^d)^J$ bezeichnet.

Weil die Preisprozesse nur endliche Werte annehmen, liegt die gesamte Masse der Verteilungen $\mathcal{L} \left(\left(\frac{X_{t_j,\tau}^i}{X_{0,\tau}^i} \right)_{(i,j) \in \{1,\dots,d\} \times \{1,\dots,k\}} \middle| Q_\tau \right)$ auf dem Raum $([0, \infty)^d)^J$, genauer gesagt besitzt das Komplement $([0, \infty]^d)^J \setminus ([0, \infty)^d)^J$ äußeres Maß 0. Im Folgenden wird nun gezeigt, dass dies auch für $\mathcal{L}(\pi_J|\nu)$ zutrifft. Es gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{X_{t_j,n}^i}{X_{0,n}^i} dQ_n &= \int \frac{dQ_{i,n}|\mathcal{F}_{t_j}}{dQ_n|\mathcal{F}_{t_j}} dQ_n = E_{Q_n} \left(E_{Q_n} \left[\frac{dQ_{i,n}}{dQ_n} \middle| \mathcal{F}_{t_j} \right] \right) \\ &= E_{Q_n} \left(\frac{dQ_{i,n}}{dQ_n} \right) = 1 \end{aligned}$$

und somit folgt aus der Markoff-Ungleichung für jedes $K > 0$

$$Q_n \left(\left| \frac{X_{t_j,n}^i}{X_{0,n}^i} \right| \geq K \right) \leq \frac{1}{K} \int \frac{X_{t_j,n}^i}{X_{0,n}^i} dQ_n = \frac{1}{K}$$

für alle $1 \leq i \leq d, n \in \mathbb{N}$ und $t_j \in J$. Hieraus lässt sich sofort schließen, dass die Verteilungen $\mathcal{L} \left(\left(\frac{X_{t_j, \tau}^i}{X_{0, \tau}^i} \right)_{(i,j) \in \{1, \dots, d\} \times \{1, \dots, k\}} \middle| Q_\tau \right)$ straff sind, das heißt, in (5.4) liegt schwache Konvergenz gegen eine Verteilung ν_J auf dem Raum $([0, \infty)^d)^J$ vor, wobei ν_J die Einschränkung von $\mathcal{L}(\pi_J | \nu)$ auf $([0, \infty)^d)^J$ ist. Es lässt sich noch anmerken, dass aufgrund der Endlichkeit von J hier auch eine Teilfolge statt eines Teilnetzes verwendet werden kann.

Die Verteilungen ν_J lassen sich über Projektionen beschreiben und sind demzufolge konsistent gegenüber Projektionen, das heißt $(\nu_J)_{J \subset I, |J| < \infty}$ bildet ein projektives System und legt folglich eine eindeutig bestimmte Verteilung ν auf $([0, \infty)^d)^I$ fest, wie in Theorem 5.3 gefordert.

Als Nächstes wird Konvergenz der Verteilungen unter $Q_{i_0, \tau}$ für festes $1 \leq i_0 \leq d$ gezeigt. Dies wird durch Anwendung des dritten Lemmas von Le Cam erreicht. Wähle erneut $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_k \in I$ mit $t_1 < t_2 < \dots < t_k = T$ und setze $J := \{t_1, \dots, t_k\} \subset I$. Es bezeichne $\tilde{\pi}_T : ([0, \infty)^d)^J \rightarrow ([0, \infty)^d)^{\{T\}}$ die kanonische Projektion von $([0, \infty)^d)^J$ nach $([0, \infty)^d)^{\{T\}}$. Zu zeigen ist nun, dass

$$\mathcal{L} \left(\left(\frac{X_{t_j, \tau}^i}{X_{0, \tau}^i} \right)_{(i,j) \in \{1, \dots, d\} \times \{1, \dots, k\}} \middle| Q_{i_0, \tau} \right) \rightarrow \nu_{i_0, J} \quad (5.5)$$

schwach auf $([0, \infty)^d)^J$, wobei

$$\frac{d\nu_{i_0, J}}{d\nu_J} = \tilde{\pi}_T^{i_0}.$$

Nun ist aber der Likelihood-Quotient

$$\frac{dQ_{i_0, \tau}}{dQ_\tau} = \frac{X_{T, \tau}^{i_0}}{X_{0, \tau}^{i_0}}$$

in (5.5) enthalten, wodurch die Aussage direkt aus dem dritten Lemma von Le Cam folgt. Das System von Verteilungen $(\nu_{i_0, J})_{J \subset I, |J| < \infty}$ bildet abermals ein projektives System und man erhält wie oben ν_{i_0} auf $([0, \infty)^d)^I$ mit $\frac{d\nu_{i_0}}{d\nu} = \pi_T^{i_0}$, da sich die Darstellung der Dichten von der Darstellung bei den Randverteilungen überträgt.

Wählt man nun $t \in I$ und setzt $I' := I \cap [0, t]$, so zeigt man wie im Beweis von Theorem 5.1 durch Anwendung der Transformationsformel

$$\frac{d\nu_{i_0}|_{\mathcal{G}_t}}{d\nu|_{\mathcal{G}_t}} = \pi_t^{i_0},$$

wodurch das Grenzexperiment $(\nu_1, \dots, \nu_d, \nu)$, wie gefordert, ein Finanzexperiment in Standardform beschreibt. ■

Bemerkung 5.4

In Theorem 5.3 lässt sich im folgenden Fall das Teilnetz durch eine Teilfolge ersetzen: Es existiert eine abzählbare Teilmenge $J \subset I$, so dass jeder beliebige schwache Häufungspunkt ν bereits eindeutig durch seine Randverteilung $\mathcal{L}(\pi_J|\nu)$ festgelegt ist.

Beweis. Aus dem Beweis von Theorem 5.3 folgt, dass die Folge $(\nu_{d+1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ einen schwachen Häufungspunkt ν besitzt und dass ein Teilnetz $(\mathcal{I}, \leq)$ existiert, so dass $\nu_{d+1,\tau} \rightarrow \nu$ entlang des Teilnetzes $\tau \in \mathcal{I}$. Folglich konvergiert auch $\mathcal{L}(\pi_J|\nu_{d+1,\tau}) \rightarrow \mathcal{L}(\pi_J|\nu)$ schwach entlang dieses Teilnetzes. Da J abzählbar ist, existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so dass $\mathcal{L}(\pi_J|\nu_{d+1,n_k}) \rightarrow \mathcal{L}(\pi_J|\nu)$ schwach. Betrachte nun zwei schwache Häufungspunkte ν_1, ν_2 von ν_{d+1,n_k} entlang der spezifizierten Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Dann sind $\mathcal{L}(\pi_J|\nu_1)$ und $\mathcal{L}(\pi_J|\nu_2)$ schwache Häufungspunkte von $\mathcal{L}(\pi_J|\nu_{d+1,n_k})$. Aufgrund der schwachen Konvergenz $\mathcal{L}(\pi_J|\nu_{d+1,n_k}) \rightarrow \mathcal{L}(\pi_J|\nu)$ ergibt sich $\mathcal{L}(\pi_J|\nu_1) = \mathcal{L}(\pi_J|\nu_2)$. Nutzt man nun die Voraussetzung aus, dass alle schwachen Häufungspunkte bereits durch die Randverteilungen unter π_J festgelegt sind, so erhält man $\nu_1 = \nu_2$. Demzufolge besitzt ν_{d+1,n_k} einen eindeutig bestimmten Häufungspunkt und konvergiert somit. ■

5.3 Konvergenz von Optionspreisen

Als erster Schritt für ein Konvergenzresultat für Optionspreise wurde im letzten Abschnitt bereits Konvergenz der Preisprozesse, die die Optionspreise steuern, beziehungsweise der zu den Preisprozessen zugehörigen Finanzexperimente erreicht. Wie eingangs im Kapitel erwähnt, werden Optionspreise mit Auszahlungsprofilen der Form (2.2) betrachtet und der Optionspreis über Gütefunktionen von Tests interpretiert. Somit muss Theorem 5.3 nur noch auf Gütefunktionen erweitert werden. Zu diesem Zweck wird ein Resultat bewiesen, dass für eine Folge von Tests die Existenz eines Grenzttests bereitstellt, so dass die Gütefunktionen gegen die Gütefunktion für den Grenzttest konvergiert. Das folgende Theorem modifiziert dabei ein Ergebnis von Le Cam, vergleiche etwa Strasser [32], Theorem 62.3, S. 308. Der Aufbau des Beweises folgt Rüschendorf [26],

S. 157. Dort wird die Existenz eines Grenzttests für den Spezialfall von LAN bewiesen, wobei LAN als Abkürzung für lokal asymptotische Normalität steht.

Theorem 5.5

Sei $E_n = (\Omega_n, \mathcal{F}_n, \{Q_{1,n}, \dots, Q_{d,n}, Q_n\})$ eine Folge von Finanzexperimenten mit $(Q_{i,n}) \ll (Q_n)$ für alle $i = 1, \dots, d$ wie in Theorem 5.3 und sei $\phi_n : \Omega_n \rightarrow [0, 1]$ eine Folge von Tests. Dann existiert ein schwacher Häufungspunkt

$$E = ([0, \infty)^d)^I, (\mathcal{B}([0, \infty)^d))^I, \{\nu_1, \dots, \nu_d, \nu\})$$

der Folge von Finanzexperimenten im Sinne von Theorem 5.3 mit

$$\pi_t^i = \frac{d\nu_i|_{\mathcal{G}_t}}{d\nu|_{\mathcal{G}_t}}, \quad i = 1, \dots, d,$$

ein Test $\phi : ([0, \infty)^d)^I \rightarrow [0, 1]$, der als Grenzttest bezeichnet wird, und eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so dass

$$E_{Q_{i,n_k}}(\phi_{n_k}) \rightarrow E_{\nu_i}(\phi) \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

für alle $i = 1, \dots, d + 1$, wobei wie zuvor $\nu_{d+1} := \nu$ und $Q_{d+1,n} := Q_n$.

Beweis. Der Beweis von Theorem 5.3 lässt sich zu großen Teilen imitieren, wobei die Verteilung der Tests ϕ_n mitberücksichtigt werden muss. Dies wird dadurch erreicht, dass im Gegensatz zum Beweis von Theorem 5.3 nicht die Verteilung von $Y_{T,n}$ betrachtet wird, sondern die gemeinsame Verteilung von ϕ_n und $Y_{T,n}$. Für die Kompaktheitsargumente führt dies zu keinen Komplikationen, da alle Tests in das kompakte Intervall $[0, 1]$ abbilden; statt dem kompakten Raum $([0, \infty]^d)^I$ wird nun der kompakte Raum $[0, 1] \times ([0, \infty]^d)^I$ verwendet. Zu beachten ist hierbei, dass in der Regel keine Unabhängigkeit der beiden Komponenten vorliegt; in vielen Fällen, wie etwa bei einem europäischen Call oder einem Down-and-out-Call, ist ϕ_n sogar eine Funktion von $Y_{T,n}$. Im Folgenden bezeichne $p_1 : [0, 1] \times ([0, \infty]^d)^I \rightarrow [0, 1]$ die kanonische Projektion auf die erste und $p_2 : [0, 1] \times ([0, \infty]^d)^I \rightarrow ([0, \infty]^d)^I$ die kanonische Projektion auf die zweite Komponente.

Wie vorher besitzt die Folge $\mathcal{L}((\phi_n, Y_{T,n})|Q_n)$ auf $[0, 1] \times ([0, \infty]^d)^I$ einen schwachen Häufungspunkt (im Sinne von Theorem 5.3) $\tilde{\nu}_{d+1}$. Verwendung der wechselseitigen Benachbarkeit liefert dann über das 3. Lemma von Le Cam die Existenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_d$, so dass

$$\mathcal{L}((\phi_\tau, Y_{T,\tau})|Q_{i,\tau}) \rightarrow \tilde{\nu}_i, \quad i = 1, \dots, d,$$

schwach entlang eines Teilnetzes mit

$$\frac{d\tilde{\nu}_i}{d\tilde{\nu}_{d+1}} = \bar{\pi}_T^i \quad (5.6)$$

wobei $\bar{\pi}_T^i : [0, 1] \times ([0, \infty]^d)^I \rightarrow [0, \infty]$ die kanonische Projektion auf die i -te Komponente zur Zeit T innerhalb der zweiten Komponente beschreibt, das heißt $\bar{\pi}_T^i = \pi_T^i \circ p_2$. Entsprechend der Notation von Theorem 5.3 setze $\nu_i := \mathcal{L}(p_2|\tilde{\nu}_i)$ für $i = 1, \dots, d+1$.

Wegen der Beschränktheit des Intervalls $[0, 1]$ lässt sich das Straffheitsargument aus dem Beweis von Theorem 5.3 erneut verwenden, um zu zeigen, dass die Konvergenz auf dem Raum $[0, 1] \times ([0, \infty)^d)^I$ anstelle von $[0, 1] \times ([0, \infty]^d)^I$ stattfindet.

Nach (5.6) faktorisiert die Dichte $d\tilde{\nu}_i/d\tilde{\nu}_{d+1}$ über p_2 , woraus sich die Suffizienz von p_2 für das Experiment $\{\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_{d+1}\}$ ergibt. Definiert man nun die Funktion $\phi : ([0, \infty)^d)^I \rightarrow [0, 1]$ durch $\phi(z) := E.[p_1|p_2 = z]$, so ist dieser bedingte Erwartungswert aufgrund der Suffizienz unabhängig von $\{\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_{d+1}\}$.

Für jedes $i = 1, \dots, d+1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $E_{Q_{i,n}}(\phi_n) \in [0, 1]$. Durch sukzessive $(d+1)$ -fache Bildung einer Teilfolge findet man somit eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des Teilnetzes, so dass für jedes $i = 1, \dots, d+1$ die Folge $E_{Q_{i,n_k}}(\phi_{n_k})$ für $k \rightarrow \infty$ konvergiert. Wegen

$$E_{Q_{i,n_k}}(\phi_{n_k}) = \int p_1 d\mathcal{L}((\phi_{n_k}, Y_{T,n_k})|Q_{i,n_k})$$

und der schwachen Konvergenz $\mathcal{L}((\phi_n, Y_{T,n})|Q_{i,n}) \rightarrow \tilde{\nu}_i$ ist $\int p_1 d\tilde{\nu}_i$ der einzige Kandidat für den Grenzwert von $E_{Q_{i,n_k}}(\phi_{n_k})$. Es folgt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} E_{Q_{i,n_k}}(\phi_{n_k}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int p_1 d\mathcal{L}((\phi_{n_k}, Y_{T,n_k})|Q_{i,n_k}) = \int p_1 d\tilde{\nu}_i \\ &= \int E.[p_1|p_2 = z] d\mathcal{L}(p_2|\tilde{\nu}_i)(z) = \int \phi d\nu_i = E_{\nu_i}(\phi) \end{aligned}$$

für alle $i = 1, \dots, d+1$, wie behauptet. ■

Anwendung von Theorem 5.5 führt nun unmittelbar zu einem Konvergenzresultat für Optionspreise.

Betrachte für eine Folge von Finanzexperimenten E_n aus Theorem 5.3 Preisprozesse $V_{t,n}^i$, $1 \leq i \leq d$, mit Startwerten $v_{0,n}^i := V_{0,n}^i$, so dass

$$\frac{dQ_{i,n}|\mathcal{F}_{t,n}}{dQ_n|\mathcal{F}_{t,n}} = \frac{V_{t,n}^i}{V_t^0 v_{0,n}^i}$$

gilt, wobei von dem festverzinslichen Wertpapier $V_t^0 = \exp\left(\int_0^t \rho(u)du\right)$ angenommen wird, dass keine Abhängigkeit zum Folgenindex n vorliegt. Wie in Kapitel 2 setze $Y_{t,n}^i := \exp\left(-\int_0^t \rho(u)du\right) \frac{V_{t,n}^i}{v_{0,n}^i}$. Seien $H_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$ Auszahlungsprofile der Form (2.2)

$$H_n = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^d [a_{ij,n} V_{T,n}^i - K_{ij,n}] \phi_{ij,n}((Y_{t,n}^i)_{t \in [0,T]}), \quad (5.7)$$

mit Tests $\phi_{ij,n} : ([0, \infty)^d)^I \rightarrow [0, 1]$ und konvergenten Koeffizienten $a_{ij,n}, K_{ij,n}$, wobei $a_{ij} := \lim_{n \rightarrow \infty} a_{ij,n}$ und $K_{ij} := \lim_{n \rightarrow \infty} K_{ij,n}$.

Beim Übergang zur Standarddarstellung verliert man die Information über die Startwerte der Preisprozesse, da man die Bildverteilung unter der Zufallsvariablen $Y_{T,n}$, die die auf den Startwert normierten Preisverläufe beinhaltet, verwendet. Folglich beinhaltet Konvergenz der Finanzexperimente keine Konvergenz der Startwerte. Deshalb wird hier noch zusätzlich die Voraussetzung getroffen, dass $v_{0,n}^i \rightarrow v_0^i$ für alle $1 \leq i \leq d$ und für $n \rightarrow \infty$ erfüllt ist.

Es ergibt sich nun das Hauptresultat dieses Kapitels.

Theorem 5.6

Sei E_n eine Folge von Finanzexperimenten wie in Theorem 5.3 und H_n eine Folge von Auszahlungsprofilen wie in (5.7) mit den zugehörigen Voraussetzungen. Dann existiert ein Experiment $E = (([0, \infty)^d)^I, (\mathcal{B}([0, \infty)^d))^I, \{\nu_1, \dots, \nu_d, \nu\})$, eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, Tests $\phi_{ij} : ([0, \infty)^d)^I \rightarrow [0, 1]$ und eine Auszahlungsfunktion H für das Grenzexperiment E , gegeben durch

$$H = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^d [a_{ij} V_T^i - K_{ij}] \phi_{ij}((Y_t^i)_{t \in [0,T]}),$$

mit $Y_t^i := \exp\left(-\int_0^t \rho(u)du\right) \frac{V_t^i}{v_0^i}$, wobei die (undiskontierten und nicht normierten) Preisprozesse im Grenzexperiment durch

$$V_t^i := v_0^i \exp\left(\int_0^t \rho(u)du\right) \pi_t^i = v_0^i \exp\left(\int_0^t \rho(u)du\right) \frac{d\nu_i|_{\mathcal{G}_t}}{d\nu|_{\mathcal{G}_t}}$$

definiert sind, so dass die Optionspreise von H_n gegen den Optionspreis von H im Grenzexperiment konvergieren, das heißt

$$p_{Q_{n_k}}(H_{n_k}) \rightarrow E_\nu \left(\exp\left(-\int_0^t \rho(u)du\right) H \right) =: p_\nu(H) \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Für den Optionspreis im Grenzexperiment gilt

$$p_\nu(H) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^d \left[a_{ij} v_0^i E_{\nu_i} \left(\phi_{ij} \left((\pi_t)_{t \in [0, T]} \right) \right) \right. \\ \left. - \exp \left(- \int_0^T \rho(u) du \right) K_{ij} E_\nu \left(\phi_{ij} \left((\pi_t)_{t \in [0, T]} \right) \right) \right].$$

Beweis. Nach Theorem 2.1 gilt für den Optionspreis von H_{n_k}

$$p_{Q_{n_k}}(H_{n_k}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^d \left[a_{ij, n_k} v_{0, n_k}^i E_{Q_{i, n_k}} \left(\phi_{ij, n_k} \left((Y_{t, n_k}^i)_{t \in [0, T]} \right) \right) \right. \\ \left. - \exp \left(- \int_0^T \rho(u) du \right) K_{ij, n_k} E_{Q_{n_k}} \left(\phi_{ij, n_k} \left((Y_{t, n_k}^i)_{t \in [0, T]} \right) \right) \right].$$

Mittels Theorem 5.5 erhält man nun die Existenz eines Grenzexperiments in Standarddarstellung $E = (([0, \infty)^d)^I, (\mathcal{B}([0, \infty)^d))^I, \{\nu_1, \dots, \nu_d, \nu\}$, einer Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und Tests $\phi_{ij} : ([0, \infty)^d)^I \rightarrow [0, 1]$, so dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_{Q_{i, n_k}} \left(\phi_{ij, n_k} \left((Y_{t, n_k}^i)_{t \in [0, T]} \right) \right) = E_{\nu_i} \left(\phi_{ij} \left((\pi_t)_{t \in [0, T]} \right) \right)$$

für alle $1 \leq i \leq d+1$. Deshalb gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{Q_{n_k}}(H_{n_k}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^d \left[a_{ij} v_0^i E_{\nu_i} \left(\phi_{ij} \left((\pi_t)_{t \in [0, T]} \right) \right) \right. \\ \left. - \exp \left(- \int_0^T \rho(u) du \right) K_{ij} E_\nu \left(\phi_{ij} \left((\pi_t)_{t \in [0, T]} \right) \right) \right].$$

und

$$v_0^i E_{\nu_i} \left(\phi_{ij} \left((\pi_t)_{t \in [0, T]} \right) \right) = E_\nu \left(v_0^i \frac{d\nu_i}{d\nu} \phi_{ij} \left((\pi_t)_{t \in [0, T]} \right) \right) \\ = E_\nu \left(\exp \left(- \int_0^T \rho(u) du \right) V_T^i \phi_{ij} \left((\pi_t)_{t \in [0, T]} \right) \right)$$

liefert $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{Q_{n_k}}(H_{n_k}) = E_\nu \left(\exp \left(- \int_0^T \rho(u) du \right) H \right)$ und damit die Behauptung von Theorem 5.6. ■

Kapitel 6

Approximation von Itô-Prozess-Modellen

6.1 Identifizierung von zeitdiskreten Preisprozessen

In diesem Kapitel wird die in Kapitel 5 vorgestellte Konvergenz von Finanzexperimenten für einen Spezialfall durchgeführt. Das Ziel ist hierbei die Herleitung eines Resultats zur Approximation von Itô-Prozess-Preismodellen durch zeitdiskrete Preismodelle. Insbesondere beinhaltet dieses Resultat die bekannte Konvergenz des Cox-Ross-Rubinstein-Modells gegen das klassische Black-Scholes-Modell, so dass entsprechende Ergebnisse von Föllmer und Schied [7], S. 246, verallgemeinert werden.

Als zu approximierendes Grenzmodell werde im Folgenden das Itô-Prozess-Preismodell aus Beispiel 1.5 für den Fall $d = 1$ betrachtet. Wie auch in Kapitel 4 wird der Volatilitätsprozess als deterministisch angenommen. Folglich liegen im Grenzmodell Normalverteilungen vor, wodurch ein zentraler Grenzwertsatz zur Approximation benötigt wird. Im Kontext von statistischen Experimenten kann ein solcher zentraler Grenzwertsatz mittels der bekannten LAN-Theorie (wobei LAN für lokal asymptotisch Normalität steht) von Le Cam erreicht werden. Als nächste Verallgemeinerung zu den in diesem Kapitel vorgestellten Ergebnissen wäre dann der Fall eines nicht deterministischen Volatilitätsprozesses, der unabhängig von der steuernden Brownschen Bewegung ist, denkbar. Dies würde zu gemischten Normalverteilungen im Grenzprozess und damit für die Approximation zur Theorie von LAMN (was im Englischen „local asymptotic mixed

normal“ bedeutet) führen.

Die Vorgehensweise im ersten Abschnitt ist wie folgt: zunächst wird eine Folge von zeitdiskreten Preisprozessen definiert, die sich dem gewünschten Itô-Preisprozess annähern soll. Damit die LAN-Theorie verwendet werden kann, werden dann die die Preisprozesse darstellenden Wahrscheinlichkeitsmaße innerhalb einer L_2 -differenzierbare Kurve von Wahrscheinlichkeitsmaßen identifiziert.

Im N -ten Approximationsschritt definiere

$$G_N := \left\{ \frac{kT}{N} : 0 \leq k \leq N, k \in \mathbb{N} \right\} \subset [0, T]$$

das diskrete Zeitgitter, welches alle Zeitpunkte enthält, in denen der N -te Preisprozess beobachtet wird. Für einen (diskontierten) Preisprozess $(X_{t,N}^1)_{t \in G_N}$ auf diesem Gitter und ein Martingalmaß Q_N sei $\{Q_{1,N}, Q_N\}$ das zugehöriges Finanzexperiment entsprechend der Darstellung aus Theorem 1.1. Setzt man $Z_{j,N} := \frac{X_{\frac{jT}{N},N}^1}{X_{\frac{(j-1)T}{N},N}^1}$ für $1 \leq j \leq N$ so ergibt sich

$$\frac{dQ_{1,N}|\mathcal{F}_{\frac{kT}{N},N}}{dQ_N|\mathcal{F}_{\frac{kT}{N},N}} = \frac{X_{\frac{kT}{N},N}^1}{X_{0,N}^1} = \prod_{j=1}^k \frac{X_{\frac{jT}{N},N}^1}{X_{\frac{(j-1)T}{N},N}^1} = \prod_{j=1}^k Z_{j,N} \quad (6.1)$$

für alle $1 \leq k \leq N$ und

$$Z_{k,N} - 1 = \frac{X_{\frac{kT}{N},N}^1 - X_{\frac{(k-1)T}{N},N}^1}{X_{\frac{(k-1)T}{N},N}^1}$$

beschreibt gerade den k -ten relativen Zuwachs von $(X_{t,N}^1)_{t \in G_N}$. Aus (6.1) erhält man

$$\frac{dQ_{1,N}|\mathcal{F}_{\frac{kT}{N},N}}{dQ_N|\mathcal{F}_{\frac{kT}{N},N}} = \frac{dQ_{1,N}|\mathcal{F}_{\frac{(k-1)T}{N},N}}{dQ_N|\mathcal{F}_{\frac{(k-1)T}{N},N}} \cdot Z_{k,N};$$

infolgedessen besitzt $Z_{k,N} = \frac{dQ_{1,N}(k)}{dQ_N(k)}$ gemäß Kapitel 3 eine Darstellung als Likelihood-Quotient im Experiment $\{Q_{1,N}(k), Q_N(k)\}$, welches das zum Experiment $\left\{ Q_{1,N}|\mathcal{F}_{\frac{(k-1)T}{N},N}, Q_N|\mathcal{F}_{\frac{(k-1)T}{N},N} \right\}$ bezüglich $\left\{ Q_{1,N}|\mathcal{F}_{\frac{kT}{N},N}, Q_N|\mathcal{F}_{\frac{kT}{N},N} \right\}$ komplementären Experiment beschreibt. Um die erwähnte Identifizierung zu vereinfachen, werden im Folgenden nur Preisprozesse mit unabhängigen Zuwächsen

behandelt. Mittels (6.1) lässt sich der Likelihood-Quotient des Finanzexperiments als Produkt

$$\frac{dQ_{1,N}}{dQ_N} = \prod_{j=1}^N \frac{dQ_{1,N}(j)}{dQ_N(j)}$$

schreiben. Bemerkung 3.2 zeigt, dass dies zusammen mit der Unabhängigkeitsannahme impliziert, dass in diesem Fall bis auf Äquivalenz bereits ein Produktexperiment vorliegt. Es lässt sich also bei der Modellierung ohne Einschränkung annehmen, dass

$$Q_{1,N} = \bigotimes_{j=1}^N Q_{1,N}(j), \quad Q_N = \bigotimes_{j=1}^N Q_N(j).$$

Um die Vorgehensweise für das im N -ten Approximationsschritt vorliegende N -Perioden-Modell zu beschreiben, wird zunächst ein Ein-Perioden-Modell behandelt und die Methode dann auf die einzelnen Perioden im N -Perioden-Modell angewandt.

In Analogie zur Notation von Beispiel 1.4 betrachte eine risikobehaftete Anlage S^1 , die im Ein-Perioden-Fall beschrieben wird durch den Startpreis S_0^1 und den Preis nach der ersten Periode S_1^1 , sowie ein festverzinsliches Wertpapier S^0 mit Zinsrate $r = 1 + \rho$ und Startwert $s_0^0 = 1$, das heißt $S_0^0 = 1$, $S_1^0 = 1 + \rho$. Für den diskontierten Preisprozess ergibt sich dann $X_0^1 = S_0^1$ und $X_1^1 = \frac{S_1^1}{1+\rho}$.

Zusätzlich zur Existenz eines Martingalmaßes sei die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P_0 angenommen, für das $\frac{S_1^1}{S_0^1}$ quadratintegrierbar ist und für das $\int \frac{S_1^1}{S_0^1} dP_0 = 1$ gilt. Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß P_0 wird im Folgenden zur Konstruktion der oben erwähnten Kurve von Wahrscheinlichkeitsmaßen als Fußpunkt verwendet. Die obige Zusatzannahme ist hierbei jedoch nicht sehr restriktiv. Ist die Zinsrate $r = 1$, das heißt $\rho = 0$, so lässt sich für P_0 jedes Martingalmaß wählen. Für große N erhält man sehr kleine Zeitabschnitte und benötigt infolgedessen auch Zinsraten, bei denen sich ρ nahe bei 0 befindet. Somit ist die Annahme nach der Existenz von P_0 eng mit der Annahme nach der Existenz eines Martingalmaßes verbunden.

Die Idee ist nun die (relativen) Zuwächse zu zerlegen; genauer sucht man eine Funktion $g \in L_2(P_0)$ und einen Parameter σ , so dass

$$\frac{S_1^1}{S_0^1} - 1 = \sigma g, \tag{6.2}$$

wobei $\int g dP_0 = 0$ und $\int g^2 dP_0 = 1$. Hierbei kommt der Funktion g die Aufgabe zu, die grundsätzliche Gestalt der Preisentwicklung zu beschreiben. Die Funktion g bleibt für alle Approximationsschritte und für alle Zeitintervalle gleich. Der Parameter σ beschreibt die lokale Ausprägung dieser Gestalt und hängt demzufolge sowohl vom jeweiligen Approximationsschritt N als auch vom Zeitintervall innerhalb des zugehörigen N -Perioden-Modells ab. Im folgenden Beispiel wird die Wahl von P_0 , g und σ für den Fall des Cox-Ross-Rubinstein-Modells explizit durchgeführt.

Beispiel 6.1 (Cox-Ross-Rubinstein-Modell, Fortsetzung von Beispiel 1.4)

Betrachte das Cox-Ross-Rubinstein-Modell aus Beispiel 1.4 im Ein-Perioden-Fall $N = 1$, wobei für die Aufwärts- beziehungsweise Abwärtsbewegung $u > 1 > d > 0$ erfüllt sei. Diese Bedingung wird getroffen, um die Existenz von P_0 zu sichern. Wie oben angedeutet ähnelt die Bedingung der Arbitrage-Freiheits-Bedingung (die die Existenz eines Martingalmaßes impliziert) $u > r > d > 0$ für Zinsraten r dicht bei 1. Setzt man $a := u - 1 > 0$, $b := 1 - d > 0$ und definiert $P_0 := \frac{a}{a+b}\varepsilon_1 + \frac{b}{a+b}\varepsilon_2 = \frac{1}{a+b}(a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2)$, so folgt

$$\int \frac{S_1^1}{S_0^1} dP_0 = d \frac{a}{a+b} + u \frac{b}{a+b} = \frac{(1-b)a}{a+b} + \frac{(1+a)b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1.$$

Die Wahl $g(1) := \frac{-b}{\sqrt{ab}}$, $g(2) := \frac{a}{\sqrt{ab}}$ führt zu

$$\begin{aligned} \int g dP_0 &= \frac{1}{a+b} \left(\frac{-ab}{\sqrt{ab}} + \frac{ba}{\sqrt{ab}} \right) = 0 \quad \text{sowie} \\ \int g^2 dP_0 &= \frac{1}{a+b} \left(\frac{ab^2}{ab} + \frac{ba^2}{ab} \right) = \frac{1}{a+b}(b+a) = 1. \end{aligned}$$

Wählt man schließlich $\sigma := \sqrt{ab}$, so gilt

$$1 + \frac{\sigma a}{\sqrt{ab}} = 1 + u - 1 = u \quad \text{sowie} \quad 1 - \frac{\sigma b}{\sqrt{ab}} = 1 - (1 - d) = d,$$

das heißt man erhält $1 + \sigma g = \frac{S_1^1}{S_0^1}$ und damit die Zerlegung (6.2).

Unter Regularitätsvoraussetzungen an g , vergleiche Lemma 6.2, ist $1 + \vartheta g$ für kleine $\vartheta \geq 0$ nichtnegativ und wegen $\int (1 + \vartheta g) dP_0 = 1$ wird dann durch Setzen von

$$\frac{dP_\vartheta}{dP_0} := 1 + \vartheta g \quad \text{für kleine } \vartheta \geq 0 \quad (6.3)$$

eine Kurve $\vartheta \mapsto P_\vartheta$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen definiert. Die Funktion g wird in der Theorie der statistischen Experimente als eine Tangente im Punkt P_0 bezeichnet. Aufgrund der Zerlegung (6.2) lässt sich der normierte (und nicht diskontierte) Preisprozess selbst über das Mitglied der Kurve P_σ identifizieren. Im folgenden Lemma wird innerhalb der Kurve (6.3) ein Martingalmaß ermittelt, das dann sogar eindeutig ist, und eine Verbindung zur Darstellung aus Kapitel 1 hergestellt.

Lemma 6.2

Es sei $\rho > 0$ und es gelte $\text{essinf}_{P_0}(g) > -\frac{\sigma}{\rho}$ für das wesentliche Infimum von g bezüglich P_0 . Dann legt $\vartheta = \frac{\rho}{\sigma}$ den eindeutigen Parameter innerhalb der Familie (6.3) fest, für den $Q := P_{\frac{\rho}{\sigma}}$ ein Martingalmaß für das diskontierte Ein-Perioden-Modell bildet, das heißt, es gilt

$$\int \frac{X_1^1}{X_0^1} dQ = 1.$$

Durch Setzen von $\frac{dQ_1}{dQ} := \frac{X_1^1}{X_0^1}$ erhält man dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q_1 und damit die Darstellung aus Theorem 1.1.

Beweis. Die Bedingung $\text{essinf}_{P_0}(g) > -\frac{\sigma}{\rho}$ beziehungsweise $\text{essinf}_{P_0}(\frac{\rho}{\sigma}g) > -1$ sichert, dass $1 + \frac{\rho}{\sigma}g$ eine positive Dichte bezüglich P_0 bildet. Anwendung von (6.3) führt zu

$$\begin{aligned} \int (1 + \sigma g) dP_{\frac{\rho}{\sigma}} &= \int (1 + \sigma g) \left(1 + \frac{\rho}{\sigma}g\right) dP_0 \\ &= \int (1 + \sigma g) dP_0 + \int \left(\frac{\rho}{\sigma}g + \rho g^2\right) dP_0 = 1 + \rho \end{aligned}$$

und es folgt mit (6.2)

$$\int \frac{X_1^1}{X_0^1} dP_{\frac{\rho}{\sigma}} = \int \frac{1}{1 + \rho} \frac{S_1^1}{S_0^1} dP_{\frac{\rho}{\sigma}} = \int \frac{1 + \sigma g}{1 + \rho} dP_{\frac{\rho}{\sigma}} = 1.$$

Löst man den Ansatz $\int (1 + \sigma g) dP_\vartheta = 1 + \rho$ mittels der obigen Rechnung nach ϑ auf, so zeigt dies, dass $\vartheta = \frac{\rho}{\sigma}$ die einzige mögliche Wahl darstellt, so dass $\int (1 + \sigma g) dP_\vartheta = 1 + \rho$ erfüllt ist. ■

Für das Cox-Ross-Rubinstein-Modell werden das Wahrscheinlichkeitsmaß P_σ und das Martingalmaß $P_{\frac{\rho}{\sigma}}$ aus Lemma 6.2 im folgenden Beispiel exemplarisch bestimmt.

Beispiel 6.3 (Cox-Ross-Rubinstein-Modell, Fortsetzung von Beispiel 6.1)

Betrachtet werde das Modell für eine risikobehaftete Anlage aus Beispiel 6.1 und die Modellierung eines festverzinslichen Wertpapiers S^0 wie oben mit Zinsrate $r = 1 + \rho$ und Startwert $s_0^0 = 1$. Für die Wahrscheinlichkeitsmaße P_ϑ aus der Kurve (6.3) ergeben sich Zwei-Punkt-Verteilungen

$$P_\vartheta = \eta_1(\vartheta)\varepsilon_1 + \eta_2(\vartheta)\varepsilon_2 = (1 - \eta_2(\vartheta))\varepsilon_1 + \eta_2(\vartheta)\varepsilon_2$$

für kleine $\vartheta > 0$. Aus der Beziehung (6.3) ergibt sich insbesondere $\frac{dP_\vartheta}{dP_0}(2) = 1 + \vartheta g(2)$. Durch Einsetzen der Wahlen von $P_0 = \frac{a}{a+b}\varepsilon_1 + \frac{b}{a+b}\varepsilon_2$ und g aus Beispiel 6.1 erhält man $\eta_2(\vartheta) = \left(1 + \vartheta \frac{a}{\sqrt{ab}}\right) \frac{b}{a+b}$. Dies führt zu

$$\eta_2(\sigma) = \eta_2(\sqrt{ab}) = (1 + a) \frac{b}{a+b} = u \frac{b}{a+b} \quad \text{sowie}$$

$$\tau_2 := \eta_2\left(\frac{\rho}{\sigma}\right) = \left(1 + \frac{\rho}{\sigma} \frac{a}{\sqrt{ab}}\right) \frac{b}{a+b} = \frac{b + \rho}{a+b}.$$

Die entsprechenden Werte von $\eta_1(\vartheta)$ lassen sich durch analoge Berechnungen oder durch Verwendung von $\eta_1(\vartheta) = 1 - \eta_2(\vartheta)$ ermitteln. Die Wahl der Bezeichnung τ_2 aus Beispiel 1.4 wird hier durch die bekannte Eindeutigkeit des Martingalmaßes im arbitrage-freien Binomial-Modell gerechtfertigt. Macht man Gebrauch von der Methode zur Bestimmung eines Martingalmaßes aus Beispiel 1.4, so führt dies im Binomial-Fall notwendigerweise zum gleichen Ergebnis. Tatsächlich ergibt die Nutzung der Formel $\tau_2 = \frac{1-\tilde{d}}{\tilde{u}-\tilde{d}}$ zusammen mit $u = 1 + a$, $d = 1 - b$ in diesem Fall

$$\tau_2 = \frac{1 - \tilde{d}}{\tilde{u} - \tilde{d}} = \frac{r - d}{u - d} = \frac{1 + \rho - d}{u - d} = \frac{b + \rho}{a + b}.$$

6.2 Anwendung der LAN-Theorie

In diesem Abschnitt werden Bedingungen spezifiziert, die eine Anwendung der LAN-Theorie auf die im ersten Abschnitt definierte Kurve von Wahrscheinlichkeitsmaßen ermöglichen. Daraufhin wird dann die oben erwähnte L_2 -Differenzierbarkeit der Kurve nachgewiesen und ein Approximationsresultat für Itô-Prozess-Modelle bewiesen. Zur Definition von L_2 -Differenzierbarkeit siehe etwa Torgeresen [34], Abschnitt 9.4, oder Strasser [32]. Grob gesprochen lässt sich das Konzept der L_2 -Differenzierbarkeit einer Kurve $\vartheta \mapsto P_\vartheta$ wie folgt erläutern: die Kurve wird über die Wurzel des Likelihood-Quotienten in den Hilbertraum $L_2(P_0)$

eingebettet, das heißt man erhält eine neue Kurve

$$\vartheta \mapsto \left(\frac{dP_\vartheta}{dP_0} \right)^{1/2} \in L_2(P_0).$$

Von dieser Kurve wird dann die Ableitung $g \in L_2(P_0)$ bezüglich der $L_2(P_0)$ -Norm im Punkt $\vartheta = 0$ gebildet.

Wie eingangs erwähnt sei der Volatilitätsprozess im zu approximierenden Itô-Prozess-Modell als deterministisch angenommen. Zusätzlich sei der Zinsratenprozess ρ ebenfalls deterministisch. Für die zur Modellierung des zeitdiskreten Preis- beziehungsweise Zinsprozesses notwendigen Parameter $\sigma_{i,N}$ beziehungsweise $\rho_{i,N}$ betrachte folgende Bedingungen (B1) und (B2):

(B1) Im N -ten Approximationsschritt werde das risikofreie Wertpapier modelliert durch den Startwert $S_{0,N}^0 = 1$ und durch Werte zu den übrigen Gitterpunkten von G_N

$$S_{\frac{kT}{N},N}^0 = \prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{\rho_{i,N}T}{N} \right)$$

mit Zinsraten $\frac{\rho_{i,N}T}{N} \geq 0$ auf $\left(\frac{(i-1)T}{N}, \frac{iT}{N} \right]$, die die Beschränktheits-Bedingung $\max\{\rho_{i,N} : i \leq N, N \in \mathbb{N}\} \leq R < \infty$ erfüllen.

Es sei zusätzlich $\rho : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ eine quadratintegrierbare Funktion, so dass

$$\prod_{i=1}^{\lfloor \frac{tN}{T} \rfloor} \left(1 + \frac{\rho_{i,N}T}{N} \right) \longrightarrow \exp \left(\int_0^t \rho(u) du \right) \quad \text{für } N \rightarrow \infty \quad (6.4)$$

für alle $t \in [0, T]$ erfüllt ist.

(B2) Sei wie oben $g \in L_2(P_0)$ eine Funktion mit $\int g dP_0 = 0$ und $\int g^2 dP_0 = 1$, so dass $g > -C$ für ein $C > 0$, und betrachte die über (6.3) definierte Kurve $[0, C^{-1}] \ni \vartheta \mapsto P_\vartheta$. Im N -ten Schritt und in der i -ten Periode bezeichnen $\frac{\sigma_{i,N}\sqrt{T}}{\sqrt{N}}$ mit Beschränktheits-Annahme $0 < \delta \leq \sigma_{i,N} \leq K$ lokale Volatilitätsparameter und der risikobehaftete Preisprozess werde modelliert durch den Startwert $S_{0,N}^1 = 1$ und durch

$$S_{\frac{kT}{N},N}^1 = \frac{d \left(\otimes_{i=1}^k P_{\frac{\sigma_{i,N}\sqrt{T}}{\sqrt{N}}} \right)}{dP_0^k} = \prod_{i=1}^k \frac{dP_{\frac{\sigma_{i,N}\sqrt{T}}{\sqrt{N}}}}{dP_0}$$

für die restlichen Werte. Diese Modellierung als Produkt wird durch (6.1) angeregt, wobei die Modellierung der einzelnen Faktoren durch die vorhergegangene Zerlegung (6.2) und die Identifizierung der Preise über die Kurve $[0, C^{-1}] \ni \vartheta \mapsto P_\vartheta$ gemäß (6.3) motiviert wird.

Definiere eine Treppenfunktion $\sigma_N : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$\sigma_N(u) := \sum_{k=1}^N \sigma_{k,N} \mathbb{1}_{\left(\frac{(k-1)T}{N}, \frac{kT}{N}\right]}(u).$$

Es sei $\sigma : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ eine quadratintegrierbare Funktion, so dass

$$\int_0^T (\sigma_N(u) - \sigma(u))^2 du \longrightarrow 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty. \quad (6.5)$$

Modelliert man die zeitdiskrete Situation im N -ten Approximationsschritt mittels (B1) und (B2), so kann man für das zugehörige N -Perioden-Modell ein Martingalmaß sowie eine Darstellung des Preisprozesses gemäß Theorem 1.1 mit Hilfe von Lemma 6.2 bestimmen. Für den diskontierten Preisprozess ergibt sich zunächst

$$X_{\frac{kT}{N}, N}^1 = \prod_{i=1}^k \left(\frac{dP_{\frac{\sigma_{i,N}\sqrt{T}}{\sqrt{N}}}}{dP_0} / \left(1 + \frac{\rho_{i,N}T}{N} \right) \right).$$

Im N -ten Schritt lässt sich für jede Periode j über Lemma 6.2 ein Martingalmaß $Q_N(j)$ angeben. Zu diesem Zweck setze $\theta_{j,N} := \frac{\rho_{j,N}}{\sigma_{j,N}}$. In der j -ten Periode liegt $\frac{\sigma_{j,N}\sqrt{T}}{\sqrt{N}}$ als Parameter für die Volatilität und $\frac{\rho_{j,N}T}{N}$ als Parameter für die Zinsrate vor. Wegen $\frac{\rho_{j,N}T}{N} \left(\frac{\sigma_{j,N}\sqrt{T}}{\sqrt{N}} \right)^{-1} = \frac{\theta_{j,N}\sqrt{T}}{\sqrt{N}}$ ist nach Lemma 6.2 das einzige Martingalmaß innerhalb der spezifizierten Kurve durch $Q_N(j) = P_{\frac{\theta_{j,N}\sqrt{T}}{\sqrt{N}}}$ gegeben. Das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß $Q_{1,N}(j)$ erhält man wie in Lemma 6.2 über

$$\frac{dQ_{1,N}(j)}{dQ_N(j)} = \frac{dP_{\frac{\sigma_{N,j}\sqrt{T}}{\sqrt{N}}}}{dP_0} / \left(1 + \frac{\rho_{N,j}T}{N} \right). \quad (6.6)$$

Setzt man nun $Q_{1,N} := \bigotimes_{j=1}^N Q_{1,N}(j)$ und $Q_N := \bigotimes_{j=1}^N Q_N(j)$, was wie eingangs erläutert durch die Annahme der unabhängigen Zuwächse und Bemerkung 3.2 motiviert wird, so führt dies schließlich zur Darstellung aus Theorem 1.1

$$X_{\frac{kT}{N}, N}^1 = \frac{d\left(\bigotimes_{j=1}^k Q_{1,N}(j)\right)}{d\left(\bigotimes_{j=1}^k Q_N(j)\right)} = \frac{dQ_{1,N}}{dQ_N}.$$

Der zunächst nur auf G_N definierte Preisprozess lässt sich zwischen den Auswertungszeitpunkten konstant fortsetzen, indem man $\left(X_{\lfloor \frac{t}{T} N \rfloor \frac{T}{N}, N}^1\right)_{t \in [0, T]}$ betrachtet, wobei $\lfloor x \rfloor$ die untere Gauß-Klammer von x bezeichnet.

Es lässt sich jetzt das Hauptresultat dieses Kapitels formulieren und beweisen.

Theorem 6.4

Gegeben sei die Modellierung einer Approximationsfolge von risikofreiem Wertpapier und risikobehafteter Anlage gemäß Bedingungen (B1) und (B2). Gegeben sei ferner ein Itô-Prozess-Modell wie in Beispiel 1.5 für Dimension $d = 1$ mit deterministischem (zeitabhängigem) Volatilitätsprozess σ und deterministischem (zeitabhängigem) Zinsratenprozess ρ , das heißt das risikofreie Wertpapier folgt einer Modellierung gemäß $S_0(t) = \exp(\int_0^t \rho(s) ds)$, $t \in [0, T]$, und die diskontierte risikobehaftete Anlage wird beschrieben durch Wahrscheinlichkeitsmaße Q und Q_1 , wobei

$$\frac{dQ_1|_{\mathcal{F}_t}}{dQ|_{\mathcal{F}_t}} = \exp\left(\int_0^t \sigma(s) dW(s) - \int_0^t \left(\rho(s) + \frac{\sigma(s)^2}{2}\right) ds\right) = \frac{X_t^1}{X_0^1}, \quad t \in [0, T].$$

Dann konvergieren für $N \rightarrow \infty$ alle endlich-dimensionalen Randverteilungen des Prozesses $\left(X_{\lfloor \frac{t}{T} N \rfloor \frac{T}{N}, N}^1\right)_{t \in [0, T]}$ unter $\bigotimes_{j=1}^N Q_N(j)$ schwach gegen die zugehörigen endlich-dimensionalen Randverteilungen von $\left(\frac{dQ_1|_{\mathcal{F}_t}}{dQ|_{\mathcal{F}_t}}\right)_{t \in [0, T]}$ unter Q .

Beweis. Der Beweis unterteilt sich in vier Schritte. Im ersten Schritt wird die L_2 -Differenzierbarkeit der zugrunde liegenden Kurve nachgewiesen. Im zweiten Schritt wird das Konvergenzverhalten zunächst für eine ein-dimensionale Randverteilung und unter dem Maß P_0^N untersucht. Im dritten Schritt wird dann die behauptete Konvergenz unter dem Martingalmaß $\bigotimes_{j=1}^N Q_N(j)$ gezeigt. Im vierten Schritt folgt schließlich die Verallgemeinerung auf beliebige endlich-dimensionale Randverteilungen.

Der Beweis der L_2 -Differenzierbarkeit im Punkt $\vartheta = 0$ erfolgt über ein Kriterium von Hájek, siehe etwa Torgersen [34], Theorem 9.4.1 sowie die auf das Theorem folgende Bemerkung, S. 537. Differenziert man die Dichte $1 + \vartheta g$, so erhält man in jedem Punkt die Tangente g . Für die Fisher-Information ergibt sich

$$\vartheta \mapsto \int \frac{g^2}{1 + \vartheta g} dP_0, \quad \vartheta \in [0, C^{-1}].$$

Der Satz von der dominierten Konvergenz liefert die Stetigkeit der Fisher-Information in $\vartheta = 0$, die für die Anwendung von Hájek's Kriterium benötigt

wird.

Betrache nun einen festen Zeitpunkt $t \in [0, T]$. Gegenstand der Untersuchung ist zunächst die Verteilung $\mathcal{L}\left(\log S_{\lfloor \frac{t}{T}N \rfloor \frac{T}{N}, N}^1 | P_0^N\right)$. Mit Hilfe des zweiten Lemmas von Le Cam (siehe Strasser [32], Theorem 79.2, S. 402 oder Witting und Müller-Funk [37], Satz 6.130, S. 317) wird eine stochastische Entwicklung von $\log S_{\lfloor \frac{t}{T}N \rfloor \frac{T}{N}, N}^1$ mit lokal asymptotischer Normalität (LAN) erreicht. Dafür ist eine Überprüfung der Noether-Bedingung (vergleiche Strasser [32], Bedingungen 79.1, S. 402) notwendig. Aufgrund der Beschränktheits-Bedingung in (B2) ist

$$\max_{i \in \{1, \dots, \lfloor \frac{t}{T}N \rfloor\}} \left| \frac{\sigma_{i,N} \sqrt{T}}{\sqrt{N}} \right| \rightarrow 0$$

sofort ersichtlich. Zum Nachweis des zweiten Bestandteils der Noether-Bedingung muss die Summe der quadrierten Koeffizienten $\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{T}N \rfloor} \frac{T}{N} \sigma_{i,N}^2$ bezüglich ihres Konvergenzverhaltens analysiert werden. Aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichung der L_2 -Norm im Hilbertraum $L_2([0, t], \mathbb{A}_{[0,t]}; \mathbb{R}, |\cdot|)$ gilt wegen

$$\begin{aligned} & \left| \left(\int_0^t \sigma_N(u)^2 du \right)^{1/2} - \left(\int_0^t \sigma(u)^2 du \right)^{1/2} \right| = \| \sigma_N \|_{L_2} - \| \sigma \|_{L_2} \\ & \leq \| \sigma_N - \sigma \|_{L_2} = \left(\int_0^t (\sigma_N(u) - \sigma(u))^2 du \right)^{1/2} \end{aligned}$$

und Bedingung (B2) bereits $\int_0^t \sigma_N(u)^2 du \rightarrow \int_0^t \sigma(u)^2 du$ für $N \rightarrow \infty$. Setzt man $\tilde{k}_N(t)$ als dasjenige $k \in \{1, \dots, N\}$, für das $\frac{(k-1)T}{N} < t < \frac{kT}{N}$ erfüllt ist (sofern $t \notin G_N$), so gilt

$$\int_0^t \sigma_N(u)^2 du = \sum_{k=1}^N \sigma_{k,N}^2 \frac{T}{N} \mathbb{1}_{\{k \frac{T}{N} \leq t\}} + R_N = \frac{T}{N} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{t}{T}N \rfloor} \sigma_{k,N}^2 + R_N,$$

wobei $R_N := \left(t - \frac{(\tilde{k}_N(t)-1)T}{N}\right) \sigma_{\tilde{k}_N(t), N}^2$ für $t \notin G_N$ und $R_N := 0$ für $t \in G_N$. Da im ersten Fall $R_N \leq \frac{T}{N} \sigma_{\tilde{k}_N(t), N}^2 \leq \frac{T}{N} K^2 \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$ gilt, stimmen die Grenzwerte

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^t \sigma_N(u)^2 du = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T}{N} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{T}N \rfloor} \sigma_{i,N}^2$$

überein und insgesamt erhält man

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T}{N} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{T}N \rfloor} \sigma_{i,N}^2 = \int_0^t \sigma(u)^2 du \quad (6.7)$$

Verwendung der L_2 -Differenzierbarkeit und des zweiten Lemmas von Le Cam führt zur stochastischen Entwicklung mit LAN

$$\log S_{\lfloor \frac{t}{T} N \rfloor \frac{T}{N}, N}^1 = \log \frac{d \left(\bigotimes_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{T} N \rfloor} P_{\frac{\sigma_{i,N} \sqrt{T}}{\sqrt{N}}} \right)}{dP_0^{\lfloor \frac{t}{T} N \rfloor}} = Z_{t,N} - \frac{1}{2} \frac{T}{N} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{T} N \rfloor} \sigma_{i,N}^2 + o_{P_0^N}(1), \quad (6.8)$$

mit $Z_{t,N} := \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{T} N \rfloor} \frac{\sigma_{i,N} \sqrt{T}}{\sqrt{N}} g$, wobei

$$\mathcal{L}(Z_{t,N} | P_0^N) \rightarrow N \left(0, \int_0^t \sigma(s)^2 ds \right) = \mathcal{L} \left(\int_0^t \sigma(s) dW(s) \middle| P \right)$$

schwach für $N \rightarrow \infty$ und $o_{P_0^N}(1)$ einen Rest-Summanden beschreibt, der P_0^N -stochastisch gegen 0 konvergiert. Folglich findet man die Konvergenz

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(\log S_{\lfloor \frac{t}{T} N \rfloor \frac{T}{N}, N}^1 | P_0^N \right) &\rightarrow N \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma(s)^2 ds, \int_0^t \sigma(s)^2 ds \right) \\ &= \mathcal{L} \left(\int_0^t \sigma(s) dW(s) - \int_0^t \frac{\sigma(s)^2}{2} ds \middle| P \right) \end{aligned}$$

schwach für $N \rightarrow \infty$. Benutzt man (B1) so ergibt sich entsprechend für den diskontierten Preisprozess die schwache Konvergenz

$$\begin{aligned} &\mathcal{L} \left(\log \left(\frac{d \left(\bigotimes_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{T} N \rfloor} P_{\frac{\sigma_{i,N} \sqrt{T}}{\sqrt{N}}} \right)}{dP_0^{\lfloor \frac{t}{T} N \rfloor}} / \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{T} N \rfloor} \left(1 + \frac{\rho_{i,N} T}{N} \right) \right) \middle| P_0^N \right) \\ &\rightarrow \mathcal{L} \left(\int_0^t \sigma(s) dW(s) - \int_0^t \left(\rho(s) + \frac{\sigma(s)^2}{2} \right) ds \middle| P \right). \end{aligned}$$

Das Ziel im nächsten Schritt ist es nun, Konvergenz unter dem Martingalmaß $\bigotimes_{j=1}^N P_{\frac{\theta_{j,N} \sqrt{T}}{\sqrt{N}}}$ zu beweisen. Dazu wird die Noether-Bedingung erneut überprüft, wobei $\theta_{j,N}$ die Rolle von $\sigma_{j,N}$ übernimmt. Aufgrund der Beschränktheitsannahme in (B1) und (B2) folgt unmittelbar

$$\max_{i \in \{1, \dots, \lfloor \frac{t}{T} N \rfloor\}} \left| \frac{\theta_{i,N} \sqrt{T}}{\sqrt{N}} \right| = \max_{i \in \{1, \dots, \lfloor \frac{t}{T} N \rfloor\}} \left| \frac{\rho_{i,N} \sqrt{T}}{\sigma_{i,N} \sqrt{N}} \right| \leq \frac{R}{\delta} \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{N}} \rightarrow 0$$

für $N \rightarrow \infty$. Setzt man

$$\alpha_{t,N} := \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{T} N \rfloor} \left(\sqrt{\frac{T}{N}} \theta_{i,N} \right)^2 = \frac{T}{N} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{T} N \rfloor} \left(\frac{\rho_{i,N}}{\sigma_{i,N}} \right)^2,$$

so ergibt sich

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \alpha_{t,N} \leq \frac{R^2}{\delta^2} T < \infty.$$

Ohne Einschränkung lässt sich annehmen, dass $\alpha_{t,N}$ gegen einen Grenzwert α_t für $N \rightarrow \infty$ konvergiert. Dies liegt daran, dass man ansonsten zu konvergenten Teilfolgen übergehen könnte. Es zeigt sich, dass eventuell differierende Grenzwerte keinen Einfluss auf folgende Berechnungen ausüben würden, da diese unabhängig vom Grenzwert der $\alpha_{t,N}$ durchgeführt werden können. Man würde also für jede Teilfolge dasselbe Ergebnis erzielen. Anwendung des zweiten Lemmas von Le Cam ergibt wie in (6.8) die stochastische Entwicklung mit LAN

$$\log \frac{d \left(\bigotimes_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{T} N \rfloor} P_{\frac{\theta_{N,i} \sqrt{T}}{\sqrt{N}}} \right)}{dP_0^{\lfloor \frac{t}{T} N \rfloor}} = \tilde{Z}_{t,N} - \frac{1}{2} \frac{T}{N} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{T} N \rfloor} \theta_{i,N}^2 + o_{P_0^N}(1),$$

mit $\tilde{Z}_{t,N} := \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{T} N \rfloor} \frac{\theta_{i,N} \sqrt{T}}{\sqrt{N}} g$, für welches die schwache Konvergenz gegen eine entsprechende Normalverteilung $\mathcal{L}(\tilde{Z}_{t,N} | P_0^N) \rightarrow N(0, \alpha_t)$ für $N \rightarrow \infty$ erfüllt ist.

Um Konvergenz von $Z_{t,N}$ unter $\bigotimes_{j=1}^N P_{\frac{\theta_{j,N} \sqrt{T}}{\sqrt{N}}}$ zu erhalten, wird das dritte Lemma von Le Cam verwendet. Die notwendige Bedingung der Benachbarkeit ist in der vorliegenden Situation mit LAN erfüllt. Dies liegt daran, dass Benachbarkeit beziehungsweise wechselseitige Benachbarkeit bereits aus der absoluten Stetigkeit beziehungsweise Äquivalenz der Wahrscheinlichkeitsmaße im Grenzexperiment folgt, vergleiche etwa Strasser [32], Theorem 18.11, S. 89. Aufgrund der Tatsache, dass $\mathcal{L}((Z_{t,N}, \tilde{Z}_{t,N}) | P_0^N)$ asymptotisch bivariat normalverteilt ist, konvergiert die Verteilung $Z_{t,N}$ nach Übergang von P_0^N zu $\bigotimes_{j=1}^N P_{\frac{\theta_{j,N} \sqrt{T}}{\sqrt{N}}}$ weiterhin gegen eine Normalverteilung, wobei die Varianz durch diesen Übergang unverändert bleibt und der Erwartungswert eine Verschiebung um die asymptotische Kovarianz erfährt, vergleiche etwa van der Vaart [35], S. 641. Bedingt durch die Normiertheit der Tangente g berechnet sich die Kovarianz bezüglich P_0 im N -ten Schritt zwischen $Z_{t,N}$ und $\tilde{Z}_{t,N}$ durch

$$\text{Cov}_{P_0}(Z_{t,N}, \tilde{Z}_{t,N}) = \frac{T}{N} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{tN}{T} \rfloor} \sigma_{i,N} \theta_{i,N} = \frac{T}{N} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{tN}{T} \rfloor} \rho_{i,N}.$$

Durch Benutzung von Bedingung (B1) findet man

$$\begin{aligned} \int_0^t \rho(u) du &= \lim_{N \rightarrow \infty} \log \left(\prod_{i=1}^{\lfloor \frac{tN}{T} \rfloor} \left(1 + \frac{\rho_{i,N} T}{N} \right) \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{tN}{T} \rfloor} \left(\log \left(1 + \frac{\rho_{i,N} T}{N} \right) \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T}{N} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{tN}{T} \rfloor} \rho_{i,N}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Tatsache, dass bei der Entwicklung des Logarithmus wegen der Beschränktheits-Bedingung aus (B1) die Summanden nach dem ersten von der Größenordnung $\frac{1}{N^2}$ oder kleiner sind und daher beim Grenzübergang (auch unter Berücksichtigung der Summenbildung) herausfallen, Eingang gefunden hat. Dies führt zur asymptotische Kovarianz

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Cov}_{P_0}(Z_{t,N}, \tilde{Z}_{t,N}) = \int_0^t \rho(u) du.$$

Mit Hilfe des dritten Lemmas von Le Cam lässt sich somit die schwache Konvergenz

$$\mathcal{L} \left(Z_{N,t} \left| \bigotimes_{j=1}^N P_{\frac{\theta_{j,N} \sqrt{T}}{\sqrt{N}}} \right. \right) \rightarrow N \left(\int_0^t \rho(s) ds, \int_0^t \sigma(s)^2 ds \right)$$

für $N \rightarrow \infty$ erzielen. Für den Preisprozess ergibt sich hieraus mit (6.8)

$$\begin{aligned} &\mathcal{L} \left(\log S_{\lfloor \frac{t}{T} N \rfloor \frac{T}{N}, N}^1 \left| \bigotimes_{j=1}^N P_{\frac{\theta_{j,N} \sqrt{T}}{\sqrt{N}}} \right. \right) \\ &\rightarrow \mathcal{L} \left(\int_0^t \sigma(s) dW(s) + \int_0^t \left(\rho(s) - \frac{\sigma(s)^2}{2} \right) ds \middle| P \right) \end{aligned}$$

und somit für den diskontierten Preisprozess

$$\begin{aligned} &\mathcal{L} \left(\log X_{\lfloor \frac{t}{T} N \rfloor \frac{T}{N}, N}^1 \left| \bigotimes_{j=1}^N P_{\frac{\theta_{j,N} \sqrt{T}}{\sqrt{N}}} \right. \right) \\ &\rightarrow \mathcal{L} \left(\int_0^t \sigma(s) dW(s) - \int_0^t \frac{\sigma(s)^2}{2} ds \middle| P \right) = \mathcal{L} \left(\frac{dQ_{1|\mathcal{F}_t}}{dQ_{|\mathcal{F}_t}} \middle| Q \right), \end{aligned}$$

womit die Behauptung für den Fall von ein-dimensionalen Randverteilungen bewiesen ist.

Die Verallgemeinerung der gewünschten Aussage auf mehr-dimensionale Randverteilungen erfolgt mittels des Satzes von Cramér-Wold. Zur Vereinfachung der

Notation wird exemplarisch die Konvergenz von Linearkombinationen der Form $a_1 Z_{t_1, N} + a_2 Z_{t_2, N}$ durch Verifizieren der Noether-Bedingung nachgewiesen, da sich die Argumentation auf beliebige endliche Linearkombinationen übertragen lässt. Aufgrund von Linearität folgt sofort die Konvergenz des Maximums gegen 0. Es verbleibt die Untersuchung der quadrierten Koeffizienten von

$$a_1 Z_{t_1, N} + a_2 Z_{t_2, N} = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t_1}{T} N \rfloor} \frac{a_1 \sigma_{i, N} \sqrt{T}}{\sqrt{N}} g + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t_2}{T} N \rfloor} \frac{a_2 \sigma_{i, N} \sqrt{T}}{\sqrt{N}} g.$$

Verwendung von (6.7) liefert

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t_1}{T} N \rfloor} \left(\frac{a_1 \sigma_{i, N} \sqrt{T}}{\sqrt{N}} + \frac{a_2 \sigma_{i, N} \sqrt{T}}{\sqrt{N}} \right)^2 + \sum_{i=\lfloor \frac{t_1}{T} N \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{t_2}{T} N \rfloor} \left(\frac{a_2 \sigma_{i, N} \sqrt{T}}{\sqrt{N}} \right)^2 \\ &= \frac{T}{N} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t_1}{T} N \rfloor} (a_1 + a_2)^2 \sigma_{i, N}^2 + \sum_{i=\lfloor \frac{t_1}{T} N \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{t_2}{T} N \rfloor} a_2^2 \sigma_{i, N}^2 \\ &\rightarrow \int_0^{t_1} (a_1 + a_2)^2 \sigma(s)^2 ds + \int_{t_1}^{t_2} a_2^2 \sigma(s)^2 ds \\ &= \int_0^{t_1} a_1^2 \sigma(s)^2 ds + \int_0^{t_1} a_1 a_2 \sigma(s)^2 ds + \int_0^{t_2} a_2^2 \sigma(s)^2 ds \end{aligned}$$

für $N \rightarrow \infty$. Bilden dieser Linearkombination im Grenzmodell führt zu

$$E_P \left(a_1 \int_0^{t_1} \sigma(s) dW(s) + a_2 \int_0^{t_2} \sigma(s) dW(s) \right) = 0,$$

und für die Varianz der Linearkombination erhält man

$$\begin{aligned} & Var_P \left(a_1 \int_0^{t_1} \sigma(s) dW(s) + a_2 \int_0^{t_2} \sigma(s) dW(s) \right) \\ &= a_1^2 \int_0^{t_1} \sigma(s)^2 ds + a_2^2 \int_0^{t_2} \sigma(s)^2 ds \\ &\quad + Cov_P \left(a_1 \int_0^{t_1} \sigma(s) dW(s), a_2 \int_0^{t_2} \sigma(s) dW(s) \right) \\ &= \int_0^{t_1} a_1^2 \sigma(s)^2 ds + \int_0^{t_2} a_2^2 \sigma(s)^2 ds + \int_0^{t_1} a_1 a_2 \sigma(s)^2 ds. \end{aligned}$$

Es folgt die Konvergenz

$$\mathcal{L}(a_1 Z_{t_1, N} + a_2 Z_{t_2, N} | P_0^N) \rightarrow \mathcal{L} \left(a_1 \int_0^{t_1} \sigma(s) dW(s) + a_2 \int_0^{t_2} \sigma(s) dW(s) \middle| P \right)$$

schwach für $N \rightarrow \infty$, womit sich die Behauptung des Theorems über den Satz von Cramér-Wold auch auf mehr-dimensionale Randverteilungen überträgt. ■

Literaturverzeichnis

- [1] D. R. Cox und D. V. Hinkley. *Theoretical Statistics*. Chapman & Hall, 1974.
- [2] J. Cvitanic und I. Karatzas. Generalized Neyman-Pearson lemma via convex duality. *Bernoulli*, 7:79–97, 2001.
- [3] F. Delbaen und W. Schachermayer. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Math. Ann.*, 300:463–520, 1994.
- [4] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer, 2002.
- [5] H. Föllmer und P. Leukert. Quantile Hedging. *Finance Stochast.*, 3:251–273, 1999.
- [6] H. Föllmer und P. Leukert. Efficient hedging: Cost versus shortfall risk. *Finance Stochast.*, 4:117–146, 2000.
- [7] H. Föllmer und A. Schied. *Stochastic finance. An introduction in discrete time*. de Gruyter, 2004.
- [8] A. A. Gushchin und E. Mordecki. Bounds on option prices for semimartingale market models. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 273:73–113, 2002.
- [9] P. Huber und V. Strassen. Minimax tests and the Neyman-Pearson lemma for capacities. *Ann. Statistics*, 1:251–263, 1973. Correction: *Ann. Statistics*, 2:223–224, 1974.
- [10] A. Irle. A measure-theoretic approach to completeness of financial markets. *Statistics & Probability Letters*, 68:1–7, 2004.
- [11] J. Jacod. Convergence of filtered statistical models and Hellinger processes. *Stochastic Processes and their applications.*, 32:47–68, 1989.

- [12] J. Jacod und A. N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer-Verlag, 2003.
- [13] A. Janssen. Principal component decomposition of non-parametric tests. *Probab. Theory Relat. Fields*, 101:193–209, 1995.
- [14] Yu. M. Kabanov und D. O. Kramkov. Large financial markets: Asymptotic arbitrage and contiguity. *Theory Probab. Appl.*, 39:182–187, 1994.
- [15] I. Karatzas und S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, 1991.
- [16] J. L. Kelley. *General Topology*. Springer-Verlag, 1975.
- [17] R. Korn und E. Korn. *Option Pricing and Portfolio Optimization*. American Math. Society, 2001.
- [18] L. Le Cam. *Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory*. Springer-Verlag, 1986.
- [19] L. Le Cam und G. L. Yang. *Asymptotics in statistics*. Springer-Verlag, 2000.
- [20] E. L. Lehmann und J. P. Romano. *Testing Statistical Hypotheses*. Springer-Verlag, 2005.
- [21] F. Liese und I. Vajda. *Convex Statistical Distances*. B.G. Teubner, 1987.
- [22] H. Milbrodt und H. Strasser. On the asymptotic power of the two-sided Kolmogorov-Smirnov test. *J. Statist. Planning Inference*, 26:1–23, 1990.
- [23] E. Norberg. On filtered experiments and the information contained in likelihood ratios. *Mathematical Methods of Statistics*, 13:50–68, 2004.
- [24] W. Rudin. *Functional analysis*. McGraw-Hill, 1991.
- [25] B. Rudloff und I. Karatzas. Testing composite hypotheses via convex duality. *Bernoulli*, 16:1224–1239, 2010.
- [26] L. Rüschendorf. *Asymptotische Statistik*. B.G. Teubner, 1988.

- [27] A. Schied. On the Neyman-Pearson Problem for law-invariant risk measures and robust utility functionals. *Annals Applied Probability*, 14:1398–1423, 2004.
- [28] A. Schied. Optimal investments for robust utility functionals in complete market models. *Mathematics of Operations Research*, 30:750–764, 2005.
- [29] A. N. Shiryaev. *Essentials of Stochastic Finance. Facts, Models, Theory*. World Scientific, 1999.
- [30] A. N. Shiryaev und V. G. Spokoiny. *Statistical Experiments and Decisions: Asymptotic Theory*. World Scientific, 2000.
- [31] L. A. Steen und J. A. Seebach, Jr.. *Counterexamples in Topology*. Springer-Verlag, 1995.
- [32] H. Strasser. *Mathematical Theory of Statistics*. de Gruyter, 1985.
- [33] H. Strasser. Stability of Filtered Experiments. *Contributions to Stochastics*, In honour of the 75th birthday of W. Eberl :202–213. Physica-Verlag, 1987.
- [34] E. N. Torgersen. *Comparison of statistical experiments*. Cambridge Univ. Press, 1991.
- [35] A. van der Vaart. The Statistical Work of Lucien Le Cam. *Ann. Statistics*, 30:631–682, 2002.
- [36] H. Witting. *Mathematische Statistik I. Parametrische Verfahren bei festem Stichprobenumfang*. B.G. Teubner, 1985.
- [37] H. Witting und U. Müller-Funk. *Mathematische Statistik II*. B.G. Teubner, 1995.
- [38] J. Zahler. *Eine Charakterisierung vollständiger Märkte durch die Eindeutigkeit europäischer Optionspreise*. Diplomarbeit, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, 2011.
- [39] C. Zhu. *Nutzenfunktion und die Kullback-Leibler Information*. Masterarbeit, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, 2010.

Erklärung

Die hier vorgelegte Dissertation habe ich eigenständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt. Die Dissertation wurde in der vorgelegten oder in ähnlicher Form noch bei keiner anderen Institution eingereicht. Ich habe bisher keine erfolglosen Promotionsversuche unternommen.

Martin Tietje

Düsseldorf, den 17. November 2011