

Mittelwerte konvexliegender Zahlen
und
monotone Umordnung bei
Integralungleichungen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von
Werner Clemens
aus Nettetal

Düsseldorf 2002

Gedruckt mit der Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent: Prof. Dr. K. Steffen
Koreferent: Prof. Dr. K. Janßen

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Juli 2002

Einleitung

There are a few key lemmas in real-variable theory which comprise to the arsenal of all analysts. To my mind, Gehring's Lemma is one of those elegant and powerful tools which will be appreciated forever. Its fundamental character is attested to by its numerous generalizations and applications. My only regret is that I won't be able to include many of these contributions here.

T. Iwaniec zum 70. Geburtstag von F. W. Gehring [Iwa95, S. 182]

Bei partiellen Differentialgleichungen wird die Existenz einer Lösung oft dadurch gesichert, dass man in einem Funktionenraum mit sehr vielen Funktionen arbeitet, man also a priori wenige Eigenschaften von einer Lösung verlangt. Man fordert dann auch nur, dass die Funktion mit Hilfsfunktionen getestet eine integrierte Version der Gleichung erfüllt. Eine solche schwache Lösung muss weder stetig noch klassisch differenzierbar sein. Die Regularitätstheorie untersucht anschließend, wie bestimmte Eigenschaften der Gleichung Regularitätseigenschaften der schwachen Lösung erzwingen.

Umgekehrte Integralungleichungen spielen dabei eine wichtige Rolle. Es handelt sich dabei um Ungleichungen, die nicht allgemeingültig sind, sondern aus dem Bestehen der partiellen Differentialgleichung durch Einsetzen bestimmter Testfunktionen für die Ableitung der schwachen Lösung hergeleitet werden. Sie enthalten Informationen über die schwache Lösung, aus denen man möglichst gute Regularitätsaussagen herausfiltern möchte.

Der Modelltyp solcher Ungleichungen ist die umgekehrte Hölder-Ungleichung. Dabei sagt man von einer Funktion $f : W_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ auf einem achsenparallelen Würfel $W_0 \subset \mathbb{R}^n$, dass sie eine (schwache, für $r < 1$) umgekehrte Hölder-Ungleichung erfüllt, falls es eine Konstante $c > 1$ und einen Exponenten $q > 1$ gibt, so dass für alle Mittelwerte auf achsenparallelen Teilwürfeln W sowie für alle q -Mittelwerte auf gestauchten Teilwürfeln rW (mit festem Stauchungsfaktor $r \leq 1$ und gleichem Zentrum wie W) gilt

$$\int_{rW} f^q \leq c \left(\int_W f \right)^q.$$

Man erhält eine solche Ungleichung beispielsweise mit $r = 1/2$ und Exponenten $q = \frac{n+2}{n}$ für die Funktion $f := |\nabla u|^{\frac{2n}{n+2}}$, wobei u aus dem Sobolev-Raum

$W^{1,2}(W_0, \mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung eines elliptischen partiellen Differentialgleichungssystems mit beschränkten Koeffizienten ist (z. B. [Gia83]).

Das Gehring-Lemma, der entscheidende Satz im Zusammenhang mit umgekehrten Hölder-Ungleichungen, macht die Aussage, dass die Integrabilität einer Funktion, die eine solche Ungleichung erfüllt, automatisch besser ist als die von vorneherein bekannte L^q -Integrabilität.

Es drängt sich die Frage auf, wie gut – in Abhängigkeit von q und c – die beste aus einer solchen Ungleichung resultierende Integrabilität ist, also die Frage nach einem möglichst großen P , so dass die Funktion f in allen Lebesgue-Räumen L^p mit $p \in [q, P[$ liegen muss. Da Integrabilität oberhalb des kritischen Exponenten der Ableitung via Sobolev-Einbettung auch Hölder-Stetigkeit impliziert, hat diese Frage auch Auswirkungen darauf, unter welchen Minimalvoraussetzungen eine schwache Lösung u stetig ist.

Die Frage nach der optimalen Integrabilität im Gehring-Lemma ist mehrfach gestellt worden. Man findet in der Literatur aber nur Teilantworten. Insbesondere bei mehreren Variablen und im Fall schwacher Ungleichungen geben die bisher verwendeten Methoden keine befriedigende Antwort. Die Schwierigkeit entsteht dadurch, dass alle bisherigen Beweise des Gehring-Lemmas letzten Endes auf Überdeckungssätzen beruhen. Durch Abschätzungen in diesen Überdeckungssätzen kommt es zu einem Verlust an Informationen über das mögliche Wachstum der Funktion (außer im Fall einer Variablen).

Wir entwickeln in dieser Arbeit eine neue Methode, umgekehrte Hölder-Ungleichungen und andere umgekehrte Integralungleichungen zu behandeln. Diese Methode benutzt keinen Überdeckungssatz und führt zu keinem Verlust an Informationen über das Wachstum. Die Methode basiert vielmehr auf geometrischen Betrachtungen zweidimensionaler Mittelwertmengen, die in natürlicher Weise mit den umgekehrten Integralungleichungen verbunden sind. An die Stelle der Überdeckungssätze tritt eine Extremaleigenschaft der monotonen Umordnung. Diese Eigenschaft ist eine von den umgekehrten Integralungleichungen unabhängige, neue Erkenntnis über Mittelwerte. Mit ihr kann die Fragestellung auf die Behandlung von umgekehrten Integralungleichungen für monotone Funktionen reduziert werden. Die Auswertung dieser einfacheren Beziehungen führen wir exemplarisch vor und demonstrieren, wie man so zu neuen, optimalen Ergebnissen kommt.

Wir möchten hervorheben, dass unsere Methode nicht nur neue Ergebnisse liefert, sondern auch einige bereits bekannte, aber eher isoliert nebeneinanderstehende Resultate vor einen gemeinsamen Hintergrund stellt. Betonen wollen wir auch, dass die Methode geometrisch anschaulich ist (wobei Anschauung sicherlich immer eine Frage des Geschmacks ist). Daneben erscheint uns die neue Erkenntnis über Mittelwerte auch für Fragestellungen interessant, die über die Behandlung von umgekehrten Integralungleichungen und den Gegenstand dieser Arbeit hinausgehen. So besteht die Hoffnung, dass auch in anderen Zusammenhängen auf den Einsatz von Überdeckungssätzen und sogenannten Maximalfunktionen (die beim Vergleichen von Mittelwerten oft herangezogen werden) verzichtet werden

kann und unsere Methode bessere Resultate liefert.

Als Anwendung haben wir in dieser Arbeit folgende Ergebnisse für umgekehrte Integralungleichungen ausgearbeitet:

- Bei umgekehrten Hölder-Ungleichungen für monotone Funktionen ist die optimale Integrität aus der Arbeit [ApSb90] bekannt.

Wir können hier nicht nur die optimale Integrität ausrechnen, sondern genau beschreiben, was die Gültigkeit einer umgekehrten Hölder-Ungleichung für monotone Funktionen bedeutet. Da hier (wie meist auch in der Literatur) alle anderen Betrachtungen auf den monotonen Fall zurückgeführt werden, nehmen Resultate über monotone Funktionen eine Schlüsselstellung ein.

- Bei einer umgekehrten Hölder-Ungleichung für eine Funktion einer Variablen kann man ohne Verlust zur umgekehrten Hölder-Ungleichung der monotonen Umordnung übergehen (und diese Ungleichung dann optimal ausnutzen). Dies ist aus den Arbeiten [Kor92a] und [Kor92b] bereits bekannt. Wir erhalten das gleiche Resultat, können aber wie im Fall monotoner Funktionen noch weitergehende Aussagen machen.
- Für Funktionen mehrerer Variablen ist die optimale Integrität bei umgekehrten Hölder-Ungleichungen nur für den Fall bekannt, dass die Ungleichung für alle Quader gilt [Kin94b]. Man testet bei der Herleitung umgekehrter Hölder-Ungleichungen im Kontext partieller Differentialgleichungen mit Hilfsfunktionen, die symmetrische Abschneidefunktionen enthalten. Dies führt im Quaderfall jedoch zu Problemen, da Quader beliebig dünn entarten können. Aus diesem Grund wird man hier keine umgekehrte Hölder-Ungleichung für alle Quader erwarten können. Für die Regularitätstheorie ist das optimale Integritätsresultat für das Quadersystem somit von geringerer Bedeutung.

Unsere Methode gibt genau wie [Kin94b] ein (mit zusätzlichen Aussagen verbessertes) Resultat für Quadersysteme. Wir beweisen aber darüber hinaus zum ersten Mal optimale Integrität für ein Mengensystem, das keine solchen Entartungen zulässt, sondern bei dem das Verhältnis vom kleinsten umgebenden Würfel zum größten enthaltenen Würfel beschränkt bleibt.

Umgekehrte Hölder-Ungleichungen auf Würfeln sind schwieriger zu behandeln. Wir zeigen aber, wie man bei diesen mit einem „vertretbaren“ Verlust zu dem gerade erwähnten Mengensystem übergehen kann.

- Bei umgekehrten Integral-Ungleichungen mit Oszillationsterm (ein Term, der die mittlere Abweichung der Funktion von ihrem Mittelwert beschreibt)

sind bisher keine befriedigenden Abschätzungen über die Integrabilität bekannt. Weiter gibt es keine zufriedenstellende Aussage darüber, wie groß die Konstante sein darf, damit die Ungleichung überhaupt Informationen enthält. Hier ist also selbst bei Funktionen einer Variablen die Situation weitgehend ungeklärt.

Wir zeigen, wie man solche Ungleichungen mit unserer Methode untersuchen und ohne Verlust zu einer Ungleichung für die monotone Umordnung übergehen kann. Dies ist auch für Funktionen mehrerer Variablen möglich, wenn man das oben erwähnte Mengensystem nimmt.

Für die wichtigste umgekehrte Ungleichung mit Oszillationsterm bestimmen wir aus der Rückführung auf monotone Funktionen noch eine Obergrenze (vermutlich die kleinste Obergrenze) für die Integrabilität. Ferner wird klar, dass die Ungleichung für alle „nichttrivialen“ Konstanten Informationen über Integrabilität enthält.

- Muckenhoupt-Klassen sind Mengen von Gewichtsfunktionen, die bei der Beschreibung von Abbildungseigenschaften einiger klassischer Operatoren benutzt werden. Wichtig ist die Selbstverbesserungseigenschaft dieser Klassen. Die Frage, wie weit die Selbstverbesserung geht, ist bisher nur für Funktionen einer Variablen geklärt. Wir erhalten mit unserer Methode sowohl die Aussage für Funktionen einer Variablen als auch für Funktionen mehrerer Variablen. Ferner erhellt unser Zugang die Verbindung dieser Klassen mit umgekehrten Hölder-Ungleichungen.

Wir werden in dieser Arbeit keine schwachen umgekehrten Integralungleichungen behandeln. Für diese sind zwar Verbesserungen durch Anwendung der obigen Aussagen zu erwarten, nach unserer Einschätzung wird eine direkte Übertragung der Methode jedoch bessere, wenn nicht optimale Ergebnisse liefern. Erste Betrachtungen zu dieser Problematik haben wir in Unterkapitel 1.5 zusammengestellt.

Die Hauptidee unseres Ansatzes wollen wir nun am Beispiel der umgekehrten Hölder-Ungleichung für Funktionen einer Variablen erläutern. Dazu betrachten wir eine Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, für die eine Konstante $c > 1$ und ein Exponent $q > 1$ existieren, so dass für alle Teilintervalle I von $[0, 1]$ mit positiver Länge die Ungleichung

$$\int_I f^q \leq c \left(\int_I f \right)^q$$

gilt. Ohne Einschränkung können wir f dabei als stetig voraussetzen, denn man kann mittels Glättung immer zu einer stetigen Funktion übergehen, die dieselbe Ungleichung erfüllt (siehe Lemma 2.1).

Statt die Ungleichung als einen eindimensionalen Vergleich „die linke Seite ist für alle I kleiner als die rechte Seite“ zu sehen, kann man sie auch als eine

Bedingung an die zweidimensionale Mittelwertmenge

$$M(f) := \left\{ \left(\int_I f, \int_I f^q \right) : I \text{ Teilintervall von } [0, 1] \text{ positiver Länge} \right\}$$

auffassen. Die umgekehrte Hölder-Ungleichung sagt dann gerade aus, dass die Menge $M(f)$ unterhalb des Graphen G_2 der Potenzfunktion $t \mapsto ct^q$ liegt. Aus der einfachen Umformung $(\int_I f)^q \leq \int_I f^q$ der gewöhnlichen Hölder-Ungleichung für das Produkt $1 \cdot f$ liest man ab, dass die Mittelwertmenge $M(f)$ gleichzeitig oberhalb des Graphen G_1 der Potenzfunktion $t \mapsto t^q$ liegt.

Wir werden sehen, dass die entsprechende Menge

$$M(f^*) := \left\{ \left(\int_I f^*, \int_I (f^*)^q \right) : I \text{ Teilintervall von } [0, 1] \text{ positiver Länge} \right\}$$

zur fallenden Umordnung f^* von f auch zwischen G_1 und G_2 liegen muss. Zurückübersetzt heißt dies, dass die fallende Umordnung die gleiche (mit gleichem q und insbesondere gleichem c) Ungleichung

$$\int_I (f^*)^q \leq c \left(\int_I f^* \right)^q$$

erfüllt.

Dass der Übergang zur monotonen Umordnung möglich ist, erhalten wir aus der nachfolgenden Aussage. Diese ist unabhängig davon, ob die Funktion f eine umgekehrte Integralungleichung erfüllt oder nicht. Sie drückt vielmehr eine neue Erkenntnis über Mittelwerte aus, die wesentlich stärker ist als bekannte Aussagen, die sich mit einem ähnlichen Vergleich von Mittelwerten beschäftigen und Maximalfunktionen benutzen. Insbesondere zeigt sie, dass die Mittelwertmenge bei monotoner Anordnung extremal gegenüber der Mittelwertmenge jeder anderen Anordnung ist. Sie gilt außerdem mit geeigneten Begriffsbildungen in allgemeinerer Form als an dieser Stelle angegeben: statt der Graphensituation auch auf Randstücken konvexer, zweidimensionaler Mengen; statt Mittelwerte zum Lebesgue-Maß auch zu gewichteten Lebesgue-Maßen; statt Funktionen einer Variablen auch für Funktionen mehrerer Variablen, wenn man die „richtigen“ Mittelwertmengen nimmt; statt stetiger Funktionen auch für Regelfunktionen.

Mit der Herleitung dieser Aussagen beschäftigen wir uns in Kapitel 1. Zu ihrem Nachweis gehen ganz entscheidend Betrachtungen von „Gegenwegen“ $t \mapsto \left(\int_0^t f, \int_0^t f^q \right)$ und $t \mapsto \left(\int_t^1 f, \int_t^1 f^q \right)$ in der Ebene, also zweidimensionale Argumente, ein. Dies macht klar, dass die Verschiebung der Sichtweise von „eindimensionaler Vergleich“ zu „Bedingung für die zweidimensionale Menge $M(f)$ “ mehr ist als eine Veranschaulichung des Gehaltes der umgekehrten Hölder-Ungleichung: wesentliche Eigenschaften offenbaren sich erst bei einer zweidimensionalen Betrachtungsweise.

Die Aussage lautet:

Für stetige Funktionen f ist der obere Rand der Menge $M(f)$ der Graph einer Funktion und liegt nirgendwo unterhalb des oberen Randes von $M(f^*)$. Ferner schneidet $M(f)$ nie das Innere eines Dreiecks, das als Ecken die Punkte $(\inf f, \inf f^q)$ und $(\sup f, \sup f^q)$ sowie einen oberen Randpunkt von $M(f)$ hat. Damit ist die Funktion, deren Graph den oberen Rand darstellt, insbesondere Lipschitz-stetig.

Dabei verstehen wir als oberen Rand einer zusammenhängenden, beschränkten Menge $M \subset [a, b] \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ den gemeinsamen Rand der Menge M und der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $(]a, b[\times \mathbb{R}_{\geq 0}) \setminus M$, wobei wir in der Situation oben die Punkte $a := \inf f$ und $b := \sup f$ voraussetzen. Man beachte, dass der obere Rand einer Menge M nicht zwingend Graph einer Funktion ist.

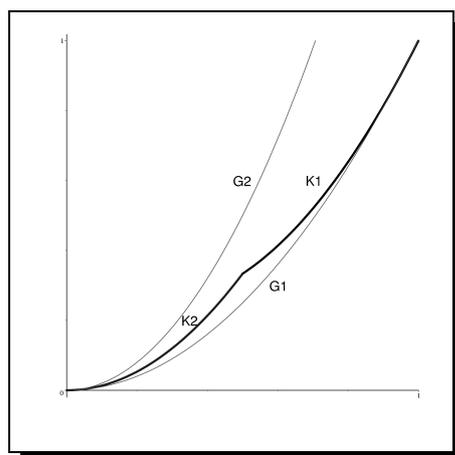
Für unsere Vorgehensweise ist wichtig, dass wir beim Übergang von der Funktion f zur fallenden Umordnung f^* keine Informationen über die Integrierbarkeit verloren haben; dies sichert uns die Umordnungsinvarianz der Lebesgue-Normen. Wir gewinnen vielmehr eine Bedingung für die einfachere Menge $M(f^*)$. Diese Menge $M(f^*)$ können wir vollständig beschreiben. Sie ist die Fläche, die durch die Kurven

$$K_1 := \left\{ \left(\int_0^t f^*, \int_0^t (f^*)^q \right) : t \in]0, 1[\right\},$$

$$K_2 := \left\{ \left(\int_t^1 f^*, \int_t^1 (f^*)^q \right) : t \in [0, 1[\right\}$$

sowie durch den Graphen G_1 der Potenzfunktion $t \mapsto t^q$ begrenzt wird. Die Beschreibung folgt aus unserem Ansatz und war in dieser Schärfe selbst bei Rückübersetzung für die Ungleichung nicht bekannt.

Mit der nebenstehenden Zeichnung erhält man einen kleinen Eindruck, wie eine Mittelwertmenge $M(f^*)$ aussehen kann. Dazu haben wir zur fallenden Funktion $f^* = f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, definiert als $f(t) := 1 - t$, und zu $q = 2$ die Kurven K_1, K_2 und den Graphen G_1 der Funktion $t \mapsto t^2$ geplottet. Ergänzt haben wir dies noch durch den Graphen G_2 der skalierten Funktion $t \mapsto 2t^2$, um die Bedingung zu veranschaulichen, die eine umgekehrte Hölder-Ungleichung an die Menge $M(f^*)$ stellt. Man beachte, dass die oben genannte Dreiecksbedingung vom oberen Rand der Menge $M(f^*)$ erfüllt wird.



Die Frage, was wir aus einer umgekehrten Hölder-Ungleichung für eine Funktion folgern können, von der wir nichts über deren Anordnung wissen, reduziert

sich nach dem oben Gesagten auf die Frage, für welche monoton fallenden Funktionen die Kurven K_1 und K_2 unterhalb des Graphen G_2 der Potenzfunktion $t \mapsto ct^q$ bleiben.

Insbesondere kann man aus der Bedingung an die Kurve K_1 eine optimale Integrabilitätsaussage herausfiltern. (Die Kurve K_2 beinhaltet keine Informationen über das Wachstum von f^* nahe null.) Dazu bestimmt man, in welchen Lebesgue-Räumen die Menge der stetigen, fallenden Funktionen mit K_1 unterhalb G_2 abgeschlossen ist. Hierzu setzt man zunächst monoton fallende, unbeschränkte Standardfunktionen wie $t \mapsto t^{-1/p}$ ein und findet dadurch einen Grenzexponenten P . Weitere Untersuchungen zeigen, dass dieses P auch für alle anderen monoton fallenden Funktionen die Grenzintegrabilität angibt. Bei diesen Untersuchungen können wir Entsprechendes aus der Arbeit [ApSb90] übernehmen.

Im Folgenden möchten wir einen knappen Überblick über die Vorgehensweise und Struktur dieser Arbeit im Einzelnen geben. In Kapitel 1 entwickeln wir unsere Methode. Allgemeiner als oben bei der umgekehrten Hölder-Ungleichung erläutert, tragen wir der Zweidimensionalität der Beziehungen voll Rechnung und betrachten Funktionen mit Werten auf dem Rand einer konvexen, zweidimensionalen Menge und leiten Aussagen über die Struktur zugehöriger Mittelwertmengen her. In Unterkapitel 1.1 führen wir dazu die Begriffsbildungen „Höhle“ und „Einschbarkeit“ ein. Mit ihrer Hilfe kann man die Hauptaussagen, die wir über Mittelwertmengen machen werden, in anschaulicher Weise formulieren.

Das Unterkapitel 1.2 kann man als das Kernstück dieser Arbeit bezeichnen. Hier beweisen wir für Regelfunktionen h , die ein kompaktes Intervall I_0 auf den Rand einer konvexen, zweidimensionalen Menge abbilden, dass der Abschluss der Intervallmittelwertmenge

$$\left\{ \int_I h : I \text{ Teilintervall von } I_0 \text{ positiver Länge} \right\}$$

nur einsehbare Höhlen hat und eine Höhle bei zugehöriger monotoner Anordnung am größten wird. Für den Spezialfall der Funktion $h(t) = (f(t), f^q(t))$ ist dies im Wesentlichen die Aussage, die wir oben für $M(f)$ und $M(f^*)$ gemacht haben. Das wohl entscheidende Argument läuft über die Betrachtung von „Gegenwegen“ $t \mapsto \int_0^t h$ und $t \mapsto \int_t^1 h$ und steckt im Beweis von Satz 1.11.

Als Verallgemeinerung der Intervallmittelwertmengen auf Funktionen mehrerer Variablen bietet sich zunächst die Betrachtung von Quadermittelwertmengen und Würfelmittelwertmengen an. Die Übertragung der Aussagen auf Quadermittelwertmengen ist technisch aufwändig, kann aber in prinzipiell gleicher Vorgehensweise gemacht werden (vgl. Unterkapitel 1.3.1). Eine vergleichbare Argumentation für Würfelmittelwertmengen ist dagegen nicht möglich und die eins-zu-eins übersetzten Aussagen erweisen sich bei der Würfelmittelwertmenge als falsch. In Kapitel 1.3.2 geben wir einige Gegenbeispiele, die diese vielleicht überraschende Tatsache demonstrieren.

Dies ist unbefriedigend, da das Quadersystem für die Anwendung geringere Bedeutung hat und eine entsprechende Aussage für Würfel wünschenswert wäre. Einen Ausweg bietet hier eine weitere mögliche Verallgemeinerung der eindimensionalen Aussagen. Wir wählen statt der Menge aller Quader oder aller Würfel die Menge aller Bilder von Intervallen unter einer raumfüllenden Abbildung wie beispielsweise der sogenannten Hilbert-Kurve. Für diese Menge lassen sich die bei Intervallmittelwertmengen gewonnenen Erkenntnisse in einfacher Form übertragen. Für Anwendungen ist eine solche Menge interessant, denn die Bilder von Intervallen unter raumfüllenden Kurven können nur zu Punkten nicht aber zu beliebig dünnen Mengen entarten und sind deshalb in diesem Zusammenhang besser als Quader. Ferner kann man, wenn eine evtl. schwache umgekehrte Hölder-Ungleichung für Würfel gilt, zu einer schwachen umgekehrten Hölder-Ungleichung für Bilder von Intervallen unter raumfüllenden Kurven übergehen. Also ist die Menge aller Bilder unter raumfüllenden Abbildungen nicht wesentlich schlechter als die Menge aller Würfel. Die Verwendung von raumfüllenden Kurven im Kontext umgekehrter Ungleichungen ist neu und erscheint uns, über die Untersuchungen dieser Arbeit hinaus, vielversprechend.

In Unterkapitel 1.4 geben wir Folgerungen für den Graphenfall an (wie z. B. bei der oben geschilderten Situation umgekehrter Hölder-Ungleichungen). Das Kapitel dient dabei neben der Spezialisierung unserer Aussagen über Mittelwertmengen auf den Graphenfall der Demonstration, auf welche einfache Weise man auch Aussagen über Oszillationsterme erhält. Dabei entstehen unter anderem Aussagen, die man als optimale Versionen des Theorems von Herz und der vielbeachteten Fefferman-Stein-Ungleichung bezeichnen kann.

In Unterkapitel 1.5 sammeln wir einige vorläufige Betrachtungen für zweidimensionale Mittelwertmengen, bei denen die Mittelwerte auf unterschiedlich skalierten Intervallen gebildet werden. Solche Mittelwertmengen sind für die Behandlung schwacher umgekehrter Hölder-Ungleichungen interessant.

In Kapitel 2 wollen wir Anwendungen auf umgekehrte Integralungleichungen demonstrieren. Dazu behandeln wir die umgekehrte Hölder-Ungleichung ausgiebig und gehen kurz auf Ungleichungen mit Oszillationsterm und Muckenhoupt-Klassen ein. Für die Themen aus Kapitel 2 haben wir im Unterkapitel 2.4 einige weiterführende Literaturhinweise zusammengestellt.

Im Anhang haben wir die Computerprogramme abgedruckt, mit denen die Beispiele im Text erstellt worden sind.

Meinem Lehrer Prof. Dr. Klaus Steffen danke ich herzlich für die Betreuung dieser Arbeit. Er war meinen Ideen gegenüber immer aufgeschlossen und hat mit anregenden Diskussionen dazu beigetragen, dass ich vormals vage Ahnungen präzisieren konnte.

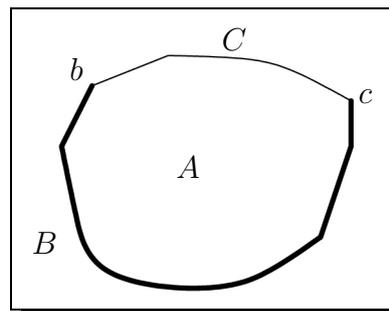
1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit Funktionen, die ihre Werte auf dem Rand einer konvexen zweidimensionalen Menge haben. Die konvexe Menge und die Funktion mit Werten auf dem Rand werden im Folgenden stets fest sein. Die Mindestvoraussetzungen, die wir dabei stellen, fassen wir zusammen in der:

Definition 1.1 (Voraussetzungen an A, b, c, B, C)

Sei A eine nichtleere, offene, konvexe, beschränkte Menge in der Ebene \mathbb{C} .

Den Rand ∂A verstehen wir mit positiver Orientierung (gegen den Uhrzeigersinn). In positiver Richtung durchlaufene Randstücke von einem x zu einem y bezeichnen wir mit $\partial A[x, y]$, $\partial A[x, y[$, $\partial A]x, y]$ oder $\partial A]x, y[$ – je nachdem, ob x oder y zu dem Randstück gehören. Im Folgenden seien zwei unterschiedliche Randpunkte b und c fest gewählt. Für die speziellen Randstücke $\partial A[b, c]$ und $\partial A]c, b[$ verwenden wir die kürzeren Bezeichnungen B und C , also B mit und C ohne Endpunkte. Das Randstück B kann mittels der Orientierung mit einer Ordnung versehen werden und ist dann im topologischen und ordnungstheoretischen Sinne zu einem kompakten Intervall äquivalent. Dazu definieren wir $b_1 \leq b_2$ genau dann, wenn das Randstück $\partial A[b_1, b_2] \subset B$ ist.



Funktionen mit Werten in B nennen wir **Funktionen mit konvexliegendem Wertebereich**.

Wir sind insbesondere an Mittelwertmengen von Funktionen mit konvexliegendem Wertebereich interessiert. Solche Mittelwertmengen liegen immer in der konvexen Hülle des Bildes. Für weitergehende Aussagen werden sich die Begriffsbildungen „Höhle“ und „Einsehbarkeit“ als entscheidend erweisen. Wir stellen sie im ersten Unterkapitel 1.1 bereit und leiten einfache Eigenschaften her.

Anschließend betrachten wir im Unterkapitel 1.2 die Intervallmittelwertmenge von Funktionen einer Variablen. Die hier entwickelten Ideen sind das Kernstück dieser Arbeit.

Danach werden wir untersuchen, wie man die Resultate auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen kann. Während man bei der Quadermittelwert-

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

menge (außer auf technische) auf keine Probleme stößt (Unterkapitel 1.3.1), sind direkt übertragene Aussagen für die Würfelmittelwertmenge falsch. Im Unterkapitel 1.3.2 geben wir entsprechende Gegenbeispiele. Dies ist unbefriedigend, da die Eigenschaft des Quadersystems, beliebig dünne Mengen zu enthalten, die Anwendbarkeit dieses System einschränkt. Die Verwendung von raumfüllenden Kurven führt hier aus dem Dilemma (Unterkapitel 1.3.3). Mit ihnen kann man die Resultate für Intervallmittelwertmengen von Funktionen einer Variablen auf Mittelwertmengen von Funktionen mehrerer Variablen übertragen. Das Mengensystem, auf dem man dann die Mittelwerte betrachtet, enthält dabei keine beliebig dünnen Mengen.

In Unterkapitel 1.4 geben wir an, wie man die Resultate anwendet, wenn das Randstück B der Graph einer Funktion ist. Hier werden wir insbesondere sehen, wie man mit einfachen Zusatzargumenten neben Mittelwerten auch Oszillationsterme behandeln kann.

Das Unterkapitel 1.5 beschäftigt sich schließlich mit dem Graphenfall und Mittelwertmengen, die auf gegeneinander skalierten Intervallen gebildet werden. Zu diesen, für schwache umgekehrte Integralungleichungen interessanten, Mittelwertmengen stellen wir erste vorläufige Betrachtungen an.

1.1. Höhlen und Einsehbarkeit

Die beiden nun folgenden Begriffe werden eine zentrale Rolle bei der Untersuchung von Mittelwertmengen zu Funktionen mit konvexliegendem Wertebereich spielen.

Definition 1.2 (Höhle und Einsehbarkeit)

Für jede Menge $M \subset \bar{A}$ und jeden Bogen C in ∂A definieren wir die **C -Höhle von M in A** durch

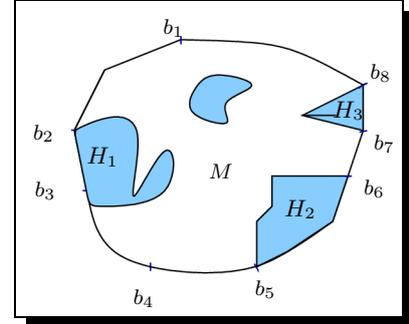
$$H(A, C, M) := \{a \in A : \text{es gibt ein } c \in C \text{ und einen Weg} \\ \text{von } a \text{ nach } c \text{ in } (A \cup \{c\}) \setminus M \}.$$

Eine Menge $H \subset A$ nennen wir **einsehbar von \bar{C}** oder **\bar{C} -einsehbar**, falls für alle Punkte $h \in H$ und alle Punkte $c \in \bar{C}$ die Verbindungsstrecke $[h, c[$ in H verläuft.

Falls A und C aus dem Zusammenhang klar sind, schreiben wir auch HM , $H(M)$ oder $H(C, M)$ und sprechen einfach von der Höhle von M und Einsehbarkeit. Bei uns wird M meist eine Menge von Mittelwerten einer Funktion mit konvexliegendem Wertebereich B sein. Dann ist sogar $M \subset \text{conv } B \subset \bar{A}$, was an manchen Stellen benötigt wird (vgl. Lemma 1.3). Wir werden von der Menge M oft verlangen müssen, dass sie abgeschlossen ist, bzw. meist untersuchen wir eher $H\bar{M}$ als HM . Dann ist die Höhle als eine Wegkomponente des Komplements

von $M \cap A$ offen in A . Man beachte noch, dass die leere Menge per Definition einsehbar ist.

Betrachten wir z. B. die nebenstehende Zeichnung. Der als abgeschlossen gedachte weiße Bereich soll M sein. Die mit H_1, H_2 und H_3 bezeichneten grauen Bereiche sollen offen sein. Dann ist die $\partial A]b_1, b_2[-$ Höhle von M leer und damit einsehbar. Die $\partial A]b_1, b_3[-$ Höhle, die $\partial A]b_2, b_3[-$ Höhle und die $\partial A]b_1, b_4[-$ Höhle sind die Menge H_1 . Es gibt kein Randstück von dem die Menge H_1 einsehbar wäre. Die $\partial A]b_5, b_6[-$ Höhle ist die Menge H_2 und einsehbar von $\partial A[b_5, b_6]$, nicht aber von $\partial A[b_4, b_6]$. Die $\partial A]b_7, b_8[-$ Höhle ist die Menge H_3 . Diese ist wegen der zu M gehörenden Strecke nicht einsehbar von $\partial A[b_7, b_8]$. Es gibt allerdings einen einzelnen Punkt auf der Verlängerung der Strecke, von dem H_3 einsehbar ist. Die $\partial A]b_6, b_5[-$ Höhle (man beachte die Reihenfolge der Punkte b_6, b_5) ist $H_1 \cup H_3$ und von nirgendwo einsehbar. Der unbezeichnete graue Bereich ist keine Höhle.



Lemma 1.3 (Einfache Eigenschaften von Höhlen)

Es seien M, N, M_λ Mengen in \bar{A} und H_λ Mengen in A für alle λ in einer Indexmenge Λ .

1. Die Inklusion $M \subset N$ impliziert die umgekehrte Inklusion $H M \supset H N$ für die Höhlen.
2. Sind alle Mengen H_λ einsehbar von einem Randstück \bar{C} , dann ist auch die Schnittmenge $\cap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ einsehbar von \bar{C} .
3. Ist $(H M) \setminus N$ einsehbar von \bar{C} , dann ist $H(M \cup N) = (H M) \setminus N$ und damit auch die Höhle der Vereinigung \bar{C} -einsehbar.
4. Haben die Mengen M_λ alle \bar{C} -einsehbare Höhlen und ist $C \setminus (\cup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda)$ nicht-leer, dann stimmt die Höhle $H(\cup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda)$ der Vereinigung mit dem Schnitt $\cap_{\lambda \in \Lambda} H M_\lambda$ der Höhlen überein.
5. Bei einer Menge $M \subset \text{conv } B$ mit \bar{C} -einsehbarer Höhle $H M$ zerstört eine Strecke zwischen zwei Punkten, die nicht zur Höhle gehören, die Einsehbarkeit nicht. Es gilt also, dass für $x, y \in (\text{conv } B) \setminus H M$ die eventuell kleinere Höhle $H(M \cup [x, y])$ wieder einsehbar ist.

Beweis 1. Für jedes $h \in H N \subset A$ gibt es ein $c \in C$ und einen Weg von h nach c in $(A \cup \{c\}) \setminus N \subset (A \cup \{c\}) \setminus M$, also $h \in H M$.

2. Für $h \in \cap H_\lambda$ und $c \in \bar{C}$ ist wegen Einsehbarkeit $[h, c] \subset H_\lambda$ für alle λ . Also ist $[h, c] \subset \cap H_\lambda$ und damit der Schnitt einsehbar.

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

3. Die \subset -Inklusion folgt aus $H(M \cup N) \subset H M \cap H N \subset H M \cap (A \setminus N) = H M \setminus N$. Für die \supset -Inklusion geben wir uns ein $h \in (H M) \setminus N$ vor. Die Einsehbarkeit garantiert zu jedem $c \in \overline{C}$, dass $[h, c[\subset (H M) \setminus N \subset A \setminus (M \cup N)$ ist. Damit ist $h \in H(M \cup N)$.

4. Die \subset -Inklusion folgt leicht aus 1. Für die \supset -Inklusion bemerken wir, dass der Schnitt der Höhlen nach 2. wieder einsehbar ist. Deshalb ist für $h \in \cap H M_\lambda$ und $c \in C \setminus (\cup M_\lambda)$ die Strecke $[h, c[\subset \cap H M_\lambda \subset \cap (A \setminus M_\lambda) = A \setminus (\cup M_\lambda)$. Damit ist $[h, c[$ das Bild eines Weges von h zu einem $c \in C$ in $(A \cup \{c\}) \setminus (\cup M_\lambda)$ und somit $h \in H(\cup M_\lambda)$.

5. Ohne Einschränkung können wir davon ausgehen, dass die \overline{C} -Schatten von x und y , definiert durch $S_x := \{a \in A : \text{es gibt ein } c \in \overline{C} \text{ mit } x \in [a, c]\}$ bzw. analog S_y , in M liegen. Denn sonst kann man die Menge $\tilde{M} := M \cup S_x \cup S_y$ betrachten, für die man $H \tilde{M} = H M$ mit der \overline{C} -Einsehbarkeit von $H M$ leicht sieht.

Dann ist für ein $h \in H(M \cup [x, y]) \subset H M$, ein $c \in \overline{C}$ und einen Weg w von h zu einem $r \in C$ in $(A \cup \{r\}) \setminus (M \cup [x, y])$ die Verbindungsstrecke $[h, c[$ in $H M \subset A \setminus M$ und in $A \setminus [x, y]$ (denn sonst müsste w durch $S_x \cup S_y \subset M$ laufen). Also ist $[h, c[\subset A \setminus (M \cup [x, y])$ und damit in $H(M \cup [x, y])$. \square

Für Konvergenzfragen benötigen wir einen Begriff, der die Konvergenz einer Folge von Mengen beschreibt.

Definition 1.4 (Hausdorff-Abstand)

Wir sagen zwei Mengen $M, N \subset \mathbb{C}$ haben einen Hausdorff-Abstand kleiner als ϵ , falls die Menge M in der ϵ -Umgebung $U_\epsilon(N) := \{z \in \mathbb{C} : \text{mit } |z - x| < \epsilon \text{ für ein } x \in N\}$ von N und falls N in der ϵ -Umgebung von M liegt. Dies ist genau dann der Fall, wenn der **Hausdorff-Abstand**

$$d(M, N) := \max(\sup_{x \in M} \inf_{y \in N} |x - y|, \sup_{y \in N} \inf_{x \in M} |x - y|)$$

kleiner als ϵ ist. Der Hausdorff-Abstand d ist eine Pseudometrik für Mengen in \mathbb{C} . Konvergenz und Cauchy-Eigenschaft von Folgen von Mengen beziehen sich im Folgenden stets auf den Hausdorff-Abstand.

Es ist wohlbekannt, dass die Menge der kompakten (nichtleeren) Teilmengen von \mathbb{C} mit dem Hausdorff-Abstand einen vollständigen, metrischen Raum bildet. Die in einer festen abgeschlossenen Menge enthaltenen kompakten Mengen bilden somit einen vollständigen, metrischen Teilraum. Verzichtet man auf Abgeschlossenheit, sind Grenzmengen nicht mehr eindeutig.

Wie der nächste Satz zeigt, passt der Hausdorff-Abstand gut zu den Begriffsbildungen „Höhle“ und „Einsehbarkeit“.

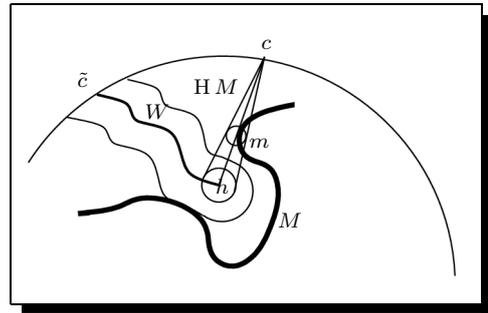
Lemma 1.5 (Approximationseigenschaften von Höhlen)

Es seien zwei Folgen von abgeschlossenen Mengen $M_n, N_n \subset \bar{A}$ gegeben, die im Hausdorff-Abstand gegen die abgeschlossenen Mengen M bzw. N konvergieren.

1. Sind die Höhlen $H M_n$ einsehbar, dann ist $H M$ wieder einsehbar.
2. Gilt die Inklusionsbeziehung $H M_n \subset H N_n$, dann gilt auch $H M \subset H N$.

Beweis 1. Wir nehmen an, dass $H M$ nicht einsehbar ist.

Dann findet man ein $h \in H M$, ein $m \in M$ und ein $c \in \bar{C}$ mit $m \in]h, c[$. Nach Definition der Höhle können wir einen Weg von einem $\tilde{c} \in C$ nach h finden, der ganz in $(A \cup \{\tilde{c}\}) \setminus M$ verläuft. Das Bild des Weges bezeichnen wir mit W . Sei r der minimale Abstand von W zu M . Da beide Mengen kompakt sind, ist $r > 0$. Sei s der Abstand von m zum Rand der Verbindungsmenge $U_{r/2}(h) * c := \{a \in A : \text{es gibt ein } y \in U_{r/2}(h) \text{ mit } a \in [y, c]\}$. Auch s ist positiv, da m innerer Punkt von $U_{r/2}(h) * c$ ist.



Aufgrund der Konvergenz von M_n gegen M ist für hinreichend große n zum einen kein Punkt von M_n in $U_{r/2}(W)$ (insbesondere sind h und auch $U_{r/2}(h)$ in $H M_n$), zum anderen ist ein Punkt von M_n in $U_s(m)$. Dann kann aber $H M_n$ entgegen der Voraussetzung nicht einsehbar sein und wir haben einen Widerspruch konstruiert.

2. Zum Nachweis der Übertragung der Inklusionsbeziehung auf die Grenzmen-
gen geben wir uns ein $h \in H M$ beliebig vor und wählen einen Weg, der von einem $c \in C$ nach h in $(A \cup \{c\}) \setminus M$ verläuft. Das Bild des Weges bezeichnen wir mit W . Sei $r > 0$ der minimale Abstand von W nach M . Es gilt $U_r(W) \subset A \setminus M$. Die Konvergenz von M_n gegen M sichert $U_{r/2}(W) \subset A \setminus M_n$ für hinreichend große n . Also ist $U_{r/2}(W) \subset H M_n \subset H N_n \subset A \setminus N_n$. Die Konvergenz von N_n gegen N sichert dann $U_{r/4}(W) \subset A \setminus N$ und damit $h \in W \subset H N$. \square

Bemerkung 1.6 Es sei auf das Phänomen aufmerksam gemacht, dass nicht einseh-
bare Höhlen beim Grenzübergang Teile abspalten können. Nimmt man z. B. als Menge A die Einheitskreisscheibe $U_1(0)$, als C die obere Halbkreislinie und als M_n die Intervalle $[-1, 1 - 1/n]$, dann ist $H M_n = U_1(0) \setminus [-1, 1 - 1/n]$. Insbesondere sind immer die Punkte aus der unteren Halbkreisscheibe in $H M_n$. Aber M_n konvergiert gegen $[-1, 1]$ und $H[-1, 1]$ besteht nur aus der oberen Halbkreisscheibe.

1.2. Mittelwerte auf Intervallen

Wir betrachten in diesem Kapitel Funktionen $f : I_0 \rightarrow B$ auf einem kompakten Intervall I_0 positiver Länge und mit konvexliegendem Wertebereich B (siehe Definition 1.1).

Wir stellen zunächst einige Begriffe bereit, die sich auf die Ordnung (aus Definition 1.1) im Randstück B und die Ordnung und Maßstruktur in I_0 beziehen. Das Lebesgue-Maß einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ notieren wir als $|M|$.

Definition 1.7

Eine Funktion $f : I_0 \rightarrow B$ heißt **fallend (wachsend)** auf einem Teilintervall $I \subset I_0$, falls bei allen $t_1 \leq t_2$ aus I für die Funktionswerte $f(t_1) \geq f(t_2)$ (bzw. $f(t_1) \leq f(t_2)$) gilt. Eine Funktion, die entweder auf ganz I fällt oder auf ganz I wächst, nennen wir **monoton auf I** .

Zwei messbare Funktionen $f, g : I_0 \rightarrow B$ heißen **gleichverteilt** und g heißt **Umordnung** von f , falls alle Zwischenniveaumengen gleiches Lebesgue-Maß haben, d.h. für alle Randpunkte $b_1 \leq b_2$ aus B gilt für die Urbilder des Randstückes $R := \partial A[b_1, b_2]$ die Gleichheit $|f^{-1}(R)| = |g^{-1}(R)|$. Wie im reellwertigen Fall (man vergleiche z. B. mit [BeSh88, Kap. 2]) sieht man, dass zu jeder messbaren Funktion $f : I_0 = [\alpha, \beta] \rightarrow B$ die Funktion $f^* : I_0 \rightarrow B$ definiert durch

$$f^*(t) := \inf\{b \in B : \alpha + |\{s \in I_0 : f(s) > b\}| \leq t\}$$

eine rechtsstetige, mit f gleichverteilte, fallende Funktion ist. Diese nennen wir die **fallende Umordnung** von f . Jede andere fallende Umordnung von f unterscheidet sich nur in den höchstens abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen von f^* .

Es sei darauf hingewiesen, dass die fallende Umordnung hier, anders als im reellwertigen Fall, von der Wahl des Wertebereichs $B \supset f(I_0)$ abhängen kann. Nehmen wir z. B. als A die Einheitskreisscheibe und betrachten die Funktion $f := \mathbb{1}_{[0,1[} - i\mathbb{1}_{[1,2[} - \mathbb{1}_{[2,3]}$. Diese Funktion hat als Bild die Punkte $1, -i, -1$. Wählt man $B := \partial A[-1, 1]$ (also die untere Halbkreislinie), dann ist $1 > -i > -1$ in B und somit gilt $f^* = f$. Wählt man aber $B := \partial A[1, -i]$ (also die Dreiviertelkreislinie von 1 bis $-i$), dann ist $-i > -1 > 1$ in B und damit $f^* = -i\mathbb{1}_{[0,1[} - \mathbb{1}_{[1,2[} + \mathbb{1}_{[2,3]} \neq f$. Da im Einzelfall für die Funktion $f : I_0 \rightarrow B$ der Wertebereich vorgegeben sein wird, notieren wir bei der fallenden Umordnung diese Abhängigkeit nicht.

Statt der oben definierten fallenden Umordnung f^* definiert auf $I_0 = [\alpha, \beta]$, betrachten wir auch eine mit verschobenem Definitionsbereich $f^* : [0, \beta - \alpha] \rightarrow B$ definiert durch

$$f^*(t) := \inf\{b \in B : |\{s \in I_0 : f(s) > b\}| \leq t\}.$$

Da in jedem Zusammenhang der Definitionsbereich klar sein wird, bzw. für unsere Mittelwertbetrachtungen die Definitionsbereichsverschiebung keine Bedeutung hat, unterscheiden wir nicht weiter zwischen diesen beiden Formen.

Einige Abkürzungen und Sprechweisen zu Mittelwerten stellen wir bereit in der

Definition 1.8 (Mittelwerte)

Zu jeder messbaren Teilmenge T von I_0 positiven Maßes definieren wir den **Mittelwert von f auf T** durch

$$f_T := \int_T f := \frac{1}{|T|} \int_T f(t) dt.$$

Für ein System \mathcal{T} von messbaren Mengen positiver Länge sei die **Mittelwertmenge von f auf \mathcal{T}** durch

$$f_{\mathcal{T}} := \{f_T : T \in \mathcal{T}\}$$

definiert.

Besonderes Interesse gilt dem System \mathcal{I} aller Teilintervalle von I_0 mit positiver Länge. Die zugehörige Mittelwertmenge $f_{\mathcal{I}}$ nennen wir die **Intervallmittelwertmenge von f** . Wir wollen die Intervalle aus \mathcal{I} als abgeschlossen voraussetzen; für die Mittelwerte ist eine solche Wahl ohne Bedeutung. Häufig betrachten wir statt $f_{\mathcal{I}}$ den Abschluss $\overline{f_{\mathcal{I}}}$ der Intervallmittelwertmenge. Ferner benötigen wir die Menge der **Häufungswerte von $f_{\mathcal{I}}$ bei verschwindender Intervalllänge**, definiert durch

$$f_{|I| \rightarrow 0} := \bigcap_{r > 0} \text{clos}\{f_I : I \in \mathcal{I}, |I| > r\}.$$

Es ist offensichtlich $\overline{f_{\mathcal{I}}} = f_{\mathcal{I}} \cup f_{|I| \rightarrow 0}$.

Gelegentlich ist die folgende Sichtweise von Vorteil. Parametrisiert man abgeschlossene Teilintervalle $I \subset I_0 = [\alpha, \beta]$ durch ihren Mittelpunkt x und Radius r , d. h. $I = [x - r, x + r]$, dann entspricht die Menge \mathcal{I} dem nach unten offenen gleichschenkeligen Dreieck

$$D := \{(x, r) : r \in]0, (\beta - \alpha)/2], x \in [\alpha + r, \beta - r]\}.$$

Die Intervallmittelwertmenge stimmt mit dem Bild der Abbildung $F : D \rightarrow \overline{A}$, definiert durch $F(x, r) := f_{[x-r, x+r]}$, überein:

$$f_{\mathcal{I}} = F(D).$$

Die Menge $f_{|I| \rightarrow 0}$ ist die Menge aller Häufungswerte der Funktion F , wenn man r gegen null laufen lässt.

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

Wir wollen im Folgenden die Intervallmittelwertmenge $f_{\mathcal{I}}$ für einige einfache Funktionen konkret berechnen. Für eine Funktion $f : I_0 \rightarrow B$, die nur **einen Wert** $b_1 \in B$ annimmt, kommt der Punkt b_1 als einzig möglicher Intervallmittelwert vor. Also ist hier

$$f_{\mathcal{I}} = \{b_1\}.$$

Betrachten wir eine Funktion $f : I_0 = [\alpha, \beta] \rightarrow B$, $f = b_1 \mathbb{1}_{I_1} + b_2 \mathbb{1}_{I_2}$ mit **zwei Werten** b_1, b_2 und einer Intervallzerlegung $I_1 \leq I_2$ von I_0 . Damit meinen wir, dass es ein $\gamma \in]\alpha, \beta[$ mit $I_1 = [\alpha, \gamma]$ und $I_2 = [\gamma, \beta]$ gibt. Man überlegt, dass die Intervallmittelwertmenge $f_{\mathcal{I}}$ dann die Strecke zwischen b_1 und b_2 ist:

$$f_{\mathcal{I}} = [b_1, b_2].$$

Man hat nämlich für alle Teilintervalle $I \subset I_1$ den Mittelwert $f_I = b_1$ und für alle Teilintervalle $I \subset I_2$ den Mittelwert $f_I = b_2$. Für alle Teilintervalle $I \subset I_0$, die die Sprungstelle γ enthalten, ist der Mittelwert $f_I = \frac{|I \cap I_1|}{|I|} b_1 + \frac{|I \cap I_2|}{|I|} b_2$, also eine konvexe Kombination der Punkte b_1, b_2 und somit ein Punkt auf der Strecke $[b_1, b_2]$. Man kann auch jeden Punkt der Strecke $[b_1, b_2]$, also aus der Menge $\{\lambda b_1 + (1 - \lambda) b_2, \lambda \in [0, 1]\}$, durch einen Intervallmittelwert realisieren. Dazu nimmt man für $\lambda \in [\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}, 1]$ z. B. das Intervall $I := [\alpha, \frac{\gamma - \alpha}{\lambda} + \alpha]$. Man überprüft dann leicht $I \subset I_0$ und $f_I = \lambda b_1 + (1 - \lambda) b_2$. Für $\lambda \in [0, \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}]$ kann man z. B. das Intervall $I := [\frac{\gamma - \lambda \beta}{1 - \lambda}, \beta]$ nehmen. Falls $b_1 = b_2$ ist, entartet die Strecke zum Punkt b_1 .

Für eine Funktion $f : I_0 \rightarrow B$, $f = b_1 \mathbb{1}_{I_1} + b_2 \mathbb{1}_{I_2} + b_3 \mathbb{1}_{I_3}$ mit **drei Werten** $b_1, b_2, b_3 \in B$ auf einer Intervallzerlegung $I_1 \leq I_2 \leq I_3$ von I_0 besteht die Intervallmittelwertmenge neben den Strecken $[b_1, b_2]$ und $[b_2, b_3]$ aus dem konvexen Viereck mit den Ecken $b_2, b_{12} := \frac{|I_1|}{|I_1 \cup I_2|} b_1 + \frac{|I_2|}{|I_1 \cup I_2|} b_2, b_{23} := \frac{|I_2|}{|I_2 \cup I_3|} b_2 + \frac{|I_3|}{|I_2 \cup I_3|} b_3$ und $b_{123} := \frac{|I_1|}{|I_0|} b_1 + \frac{|I_2|}{|I_0|} b_2 + \frac{|I_3|}{|I_0|} b_3$. (Das Viereck entartet zur Strecke, falls die Punkte b_1, b_2, b_3 auf einer Geraden liegen.) Das heißt, es gilt

$$f_{\mathcal{I}} = [b_1, b_2] \cup [b_2, b_3] \cup \text{conv}\{b_2, b_{12}, b_{23}, b_{123}\}.$$

Die nachfolgenden Zeichnungen (Beispiel 1.9 und 1.10) veranschaulichen die Situation. Analytisch kann man in folgender Weise argumentieren. Bezeichnen wir mit $\mathcal{I}_{i..j}$ alle Teilintervalle von $I_i \cup \dots \cup I_j$ mit positiver Länge und mit $\mathcal{J}_{i..j}$ alle Teilintervalle von I_0 , die $I_i \cup \dots \cup I_j$ enthalten, dann ist $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{1..3} = \mathcal{I}_{1..2} \cup \mathcal{I}_{2..3} \cup \mathcal{J}_{2..2}$. Damit gilt entsprechend für die Intervallmittelwertmenge $f_{\mathcal{I}_{1..3}} = f_{\mathcal{I}_{1..2}} \cup f_{\mathcal{I}_{2..3}} \cup f_{\mathcal{J}_{2..2}}$. Die ersten beiden Mengen bestehen aus Mittelwerten von Funktionen mit zwei Werten und sind damit nach den Betrachtungen oben die angegebenen Strecken. Die Mittelwertmenge $f_{\mathcal{J}_{2..2}}$ ist das angegebene Viereck und die Punkte $b_2, b_{12}, b_{23}, b_{123}$ sind alle Eckpunkte, denn die Menge $P := \{x(J) := (f_J f, |J|) : J \in \mathcal{J}_{2..2}\}$ ist ein Parallelogramm in $\mathbb{C} \times \mathbb{R}_{>0}$ mit den Ecken $x(I_2), x(I_1 \cup I_2), x(I_2 \cup I_3), x(I_0)$. Die Zentralprojektion $p : \mathbb{C} \times \mathbb{R}_{>0}, p(z, r) := z/r$ bildet schwach monoton durchlaufene Strecken auf schwach monoton durchlaufene Strecken und

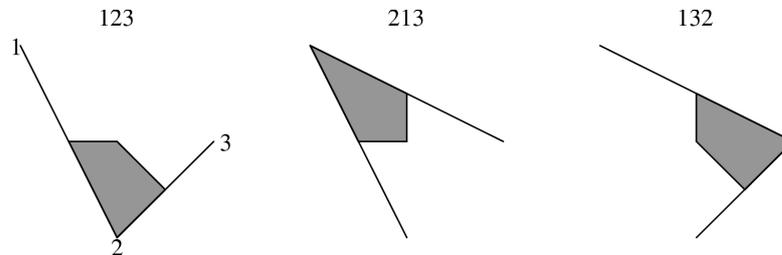
damit insbesondere konvexe Mengen auf konvexe Mengen ab. Da offensichtlich $p(P) = f_{\mathcal{J}_{2..2}}$ und dabei die Ecken von P auf die Punkte $b_2, b_{12}, b_{23}, b_{123}$ gehen, ist damit alles gezeigt.

Für eine Funktion $f : I_0 \rightarrow B$, $f = \sum_{i=1}^n b_i \mathbb{1}_{I_i}$ mit **n Werten** $b_1, \dots, b_n \in B$ und einer Intervallzerlegung $I_1 \leq \dots \leq I_n$ von I_0 erhält man mit entsprechenden Überlegungen und Bezeichnungen die **Rekursionsformel**

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{I}_{1..n}} &= f_{\mathcal{I}_{1..n-1}} \cup f_{\mathcal{I}_{2..n}} \cup f_{\mathcal{J}_{2..n-1}} \\ &= f_{\mathcal{I}_{1..n-1}} \cup f_{\mathcal{I}_{2..n}} \cup \text{conv}\{b_{2..n-1}, b_{1..n-1}, b_{2..n}, b_{1..n}\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Auf der Grundlage dieser Formel und mit Hilfe einer rekursiven Prozedur kann man Intervallmittelwertmengen zu Treppenfunktionen leicht plotten. Ein solches mit dem Computeralgebrasystem Maple realisiertes Programm befindet sich im Anhang. Mit ihm sind die folgenden Zeichnungen der Intervallmittelwertmengen von Treppenfunktionen mit 3 und 4 Werten entstanden.

Beispiel 1.9 Seien die Punkte $b_1 = -1 + 2i$, $b_2 = 0$, $b_3 = 1 + i$ gegeben. Wir berechnen die Intervallmittelwertmenge zu den Funktionen $f_{123}, f_{213}, f_{132} : [0, 3] \rightarrow \{b_1, b_2, b_3\}$ definiert durch $f_{i_1 i_2 i_3} := \sum_{j=1}^3 b_{i_j} \mathbb{1}_{[j-1, j]}$. D. h. f_{123} ist die Funktion, bei der $]0, 1[$ auf den Punkt b_1 , dann $]1, 2[$ auf b_2 und dann $]2, 3[$ auf b_3 abgebildet wird. Die anderen beiden Funktionen sind entsprechende Umordnungen dieser Funktion. Man findet:

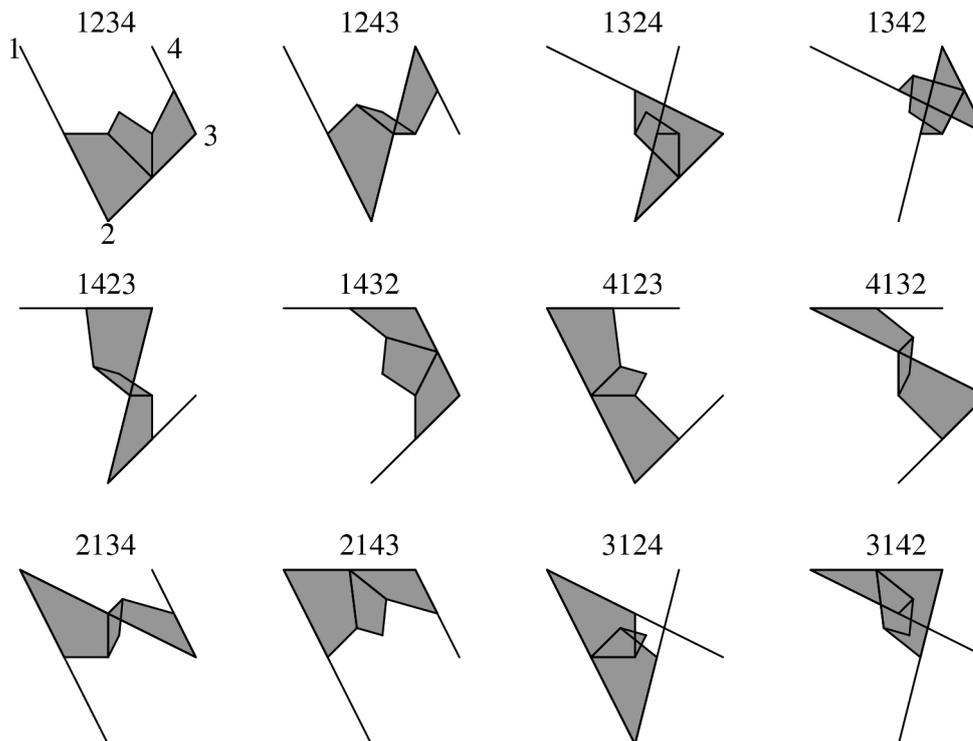


Bei der ersten Zeichnung entsteht z. B. die Strecke $[b_1, b_2]$ durch alle Mittelwerte auf Teilintervallen von $[0, 2]$, die Strecke $[b_2, b_3]$ durch alle Mittelwerte auf Teilintervallen von $[1, 3]$ und das Viereck durch alle Mittelwerte auf Teilintervallen von $[0, 3]$, die das Intervall $[1, 2]$ enthalten. Man beachte, dass die Verlängerungen der oberen Seiten des Vierecks durch die Punkte b_1 bzw. b_3 laufen.

Die Intervallmittelwertmengen zu den umgekehrten Anordnungen, also zu 321, 312 und 231, haben wir nicht ausgedrückt. Wie man leicht einsieht, stimmen sie mit den entsprechenden Mengen überein: $(f_{123})_{\mathcal{I}} = (f_{321})_{\mathcal{I}}$ usw.

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

Beispiel 1.10 Seien die Punkte $b_1 = -1 + 2i$, $b_2 = 0$, $b_3 = 1 + i$, $b_4 = 1/2 + 2i$ gegeben. Mit analoger Bezeichnungsweise wie beim vorangegangenen Beispiel berechnen wir die Intervallmittelwertmengen $(f_{i_1 i_2 i_3 i_4})_{\mathcal{I}}$ zu verschiedenen Reihenfolgen $i_1 i_2 i_3 i_4$ dieser Punkte.



In allen Fällen, bei denen die konvexliegenden Punkte b_1, \dots, b_4 nicht in einer monotonen Weise abgelaufen werden (Reihenfolgen 1243, 1324, 1342, 1423, 4132, 2134, 3124, 3142), ist die Intervallmittelwertmenge durch auftretende Überlappungen relativ kompliziert; und die Komplexität der Mengen nimmt bei weiteren Werten rasch zu. Dabei können aber nicht beliebige Mengen entstehen, sondern es gibt Eigenschaften, die alle Intervallmittelwertmengen haben. So liegt z. B. die Intervallmittelwertmenge offensichtlich immer in der konvexen Hülle der Werte von f und ist immer wegzusammenhängend. Man beachte aber, dass die Intervallmittelwertmenge nicht einfach zusammenhängend sein muss (siehe Anordnung 3124). Die Intervallmittelwertmengen können also verschiedene topologische Eigenschaften haben.

Richtet man bei unserem Beispiel seine Aufmerksamkeit auf das Komplement der Intervallmittelwertmenge, so fallen zwei Dinge auf.

1. Die Höhlen der Intervallmittelwertmengen sind alle einsehbar.
D. h. nimmt man eine offene konvexe Menge A , auf deren Rand die Punkte b_1, \dots, b_4 liegen (z. B. das Innere der konvexen Hülle der Punkte), dann sind

die $\partial A]b_1, b_2[-$, $\partial A]b_2, b_3[-$, $\partial A]b_3, b_4[-$ und $\partial A]b_4, b_1[-$ -Höhlen der Intervallmittelwertmenge einsehbar von $\partial A[b_1, b_2]$, $\partial A[b_2, b_3]$, $\partial A[b_3, b_4]$ bzw. $\partial A[b_4, b_1]$.

2. Die Höhlen sind bei monotoner Anordnung am größten.

D. h. die $\partial A]b_4, b_1[-$ -Höhle bei der Anordnung 1234 enthält die $\partial A]b_4, b_1[-$ -Höhle zu jeder anderen Anordnung (man lege im Geiste die Zeichnungen übereinander und stelle fest, dass bei 1234 die obere Höhle am größten ist). Entsprechend ist die linke $\partial]b_1, b_2[-$ -Höhle bei der Anordnung 1432 am größten, usw.

Die gerade gemachten Beobachtungen sind kein Zufall, sondern entsprechendes gilt für alle Treppenfunktionen und auch für eine größere Klasse von Funktionen (vgl. Satz 1.12, 1.14 und Bemerkung 1.17). Der Nachweis der Höhleneinsehbarkeit und der Höhleninklusion sind das Hauptergebnis über Intervallmittelwertmengen, und die Schlüsselresultate für die Methode dieser Arbeit. Das entscheidende Argument steckt im Beweis des folgenden Satzes.

Satz 1.11 (Einsehbarkeit von Höhlen)

Ist $f : I_0 \rightarrow B$ eine Funktion mit konvexliegendem Wertebereich und ist die Höhle $H_{f|_{I \rightarrow 0}}$ der Häufungswerte bei verschwindender Intervalllänge einsehbar, dann ist auch die Höhle $H_{\overline{f_I}}$ des Abschlusses der Intervallmittelwertmenge einsehbar.

Beweis Sei $H_{f|_{I \rightarrow 0}}$ einsehbar. Aus der Annahme, dass $H_{\overline{f_I}}$ nicht einsehbar ist, werden wir einen Widerspruch konstruieren.

Wir finden einen abgeschlossenen Sektor Y von \overline{A} , bestimmt durch zwei verschiedene Randpunkte $c_1, c_2 \in C$ und einen Höhlenpunkt $h \in H_{\overline{f}}$, mit folgenden Eigenschaften:

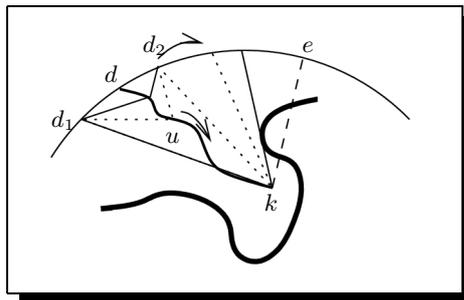
- Das Innere von Y gehört ganz zur Höhle, oder anders gesagt, es gilt $[h, c] \subset H_{\overline{f_I}}$ für alle $c \in C$ echt zwischen c_1 und c_2 .
- Auf dem Rand von Y liegt in A mindestens ein Intervallmittelwert, genauer gilt $f_I \cap ([h, c_1[\cup]h, c_2]) \neq \emptyset$.

Ein solcher Sektor ist immer zu finden. Denn mit der Annahme, dass $H_{\overline{f_I}}$ nicht einsehbar ist, erhält man die Existenz

- von einem Höhlenpunkt $k \in H_{\overline{f_I}}$,
- von einem Weg $u : [0, 1] \rightarrow \overline{A}$, der von einem Randpunkt $d \in C$ zu dem Höhlenpunkt k geht und ganz in der Höhle (genauer in $\{d\} \cup H_{\overline{f_I}}$) liegt, und
- von einem Randpunkt $e \in C$, von dem aus man den Höhlenpunkt k nicht sehen kann, d. h. es ist $[k, e] \cap \overline{f_I} \neq \emptyset$.

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

Da $H \overline{f_{\mathcal{I}}}$ offen ist, liegt für Randpunkte $d_1, d_2 \in C$ auf beiden Seiten hinreichend nahe bei d und einem Höhlenpunkt $u(t)$ mit hinreichend kleinem t (also $u(t)$ nahe bei d) der Sektor zu $d_1, d_2, u(t)$ ganz in der Höhle $H \overline{f_{\mathcal{I}}}$. Verändern wir den Sektor, indem wir t vergrößern (damit läuft $u(t)$ gegen den Punkt k) und indem wir den Randpunkt d_1



oder d_2 gegen den Randpunkt e (je nachdem auf welcher Seite von d der Punkt e liegt) laufen lassen. Es kommt dann irgendwann zu der Situation, dass $\overline{f_{\mathcal{I}}}$ nur den „Rand“ des Sektors schneidet (man beachte Stetigkeit und $\overline{f_{\mathcal{I}}}$ abgeschlossen). Schnittpunkte können dabei nur in $f_{\mathcal{I}}$ liegen, da ein Schnittpunkt in $f_{|I \rightarrow 0}$ wegen der Einsehbarkeit einen Punkt $x \in f_{|I \rightarrow 0} \cap \text{Bild}(u) = \emptyset$ implizieren würde. Die Existenz des Sektors Y und der Punkte h, c_1, c_2 mit den behaupteten Eigenschaften ist nun klar.

Wir wählen ein Intervall $I = [t_0, t_1] \in \mathcal{I}$ positiver Länge, so dass der Mittelwert f_I auf dem Rand des Sektors Y liegt und unter all diesen einen minimalen Abstand zum Höhlenpunkt h hat. Ein solches Intervall existiert, da $\overline{f_{\mathcal{I}}} = f_{\mathcal{I}} \cup f_{|I \rightarrow 0}$ abgeschlossen ist und kein Punkt aus $f_{|I \rightarrow 0}$ auf dem Rand des Sektors Y liegt. Im Folgenden nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $f_I \in]h, c_1[$. Wir betrachten die Funktionen

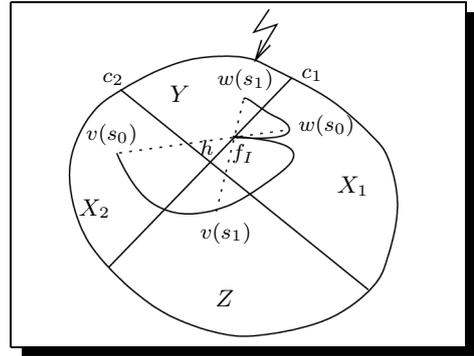
$$w : [t_0, t_1[\rightarrow f_{\mathcal{I}}, \quad w(t) := f_{[t, t_1]} \quad \text{und} \quad v :]t_0, t_1] \rightarrow f_{\mathcal{I}}, \quad v(t) := f_{[t_0, t]}.$$

Für diese Abbildungen gilt:

- Beide sind stetig und haben als Werte nur Intervallmittelwerte.
- w beginnt in f_I und v endet in f_I .
- Beide sind nicht konstant gleich f_I , denn sonst wäre der Mittelwert f_I auch ein Häufungswert von $f_{\mathcal{I}}$ bei verschwindender Intervalllänge, also in $f_{|I \rightarrow 0}$. Dies hatten wir aber oben bereits ausgeschlossen.
- Beide Abbildungen verlaufen „bzgl. f_I gegenüberliegend“, d. h. für alle $t \in]t_0, t_1[$ liegt f_I auf der Verbindungsstrecke $[w(t), v(t)]$, da der Gesamtmittelwert $f_I = f_{[t_0, t_1]}$ eine Linearkombination der Mittelwerte $f_{[t_0, t]}$ und $f_{[t, t_1]}$ ist. Ferner ist, wenn einer der Punkte $w(t)$ oder $v(t)$ gleich f_I ist, auch der andere gleich f_I .

Wir bezeichnen mit X_1, X_2, Z die anderen abgeschlossenen Sektoren von \overline{A} , die durch die Gerade durch den Randpunkt c_1 und den Höhlenpunkt h sowie durch die Gerade durch den Randpunkt c_2 und den Höhlenpunkt h definiert werden. Dabei sei Z der Sektor, der Y gegenüberliegt, X_1 der verbleibende Sektor, der an $]c_1, h[$ grenzt, sowie X_2 der verbleibende Sektor, der an $]c_2, h[$ grenzt.

Die Eigenschaften von w und v garantieren die Existenz von einem $s_0 \in]t_0, t_1[$ mit $w(s_0) \in X_1 \setminus]f_I, h]$. Der Gegenpunkt $v(s_0)$ kann dann nur im Innern von Y (Widerspruch dazu, dass das Innere von Y in der Höhle $H \overline{f_I}$ liegt), auf der Strecke $]f_I, h]$ (Widerspruch zur Wahl von I mit minimalem Abstand) oder in X_2 liegen. Liegt $v(s_0)$ in X_2 , so ist $v|_{[s_0, t_1]}$ ein Weg, der von X_2 nach $f_I \in X_1$ führt. Da dieser Weg nicht durch das Innere von Y und nicht durch h verlaufen darf, finden wir aus Stetigkeitsgründen ein s_1 , so dass $v(s_1)$ im Innern von Z liegt. Der Gegenpunkt $w(s_1)$ liegt dann verbotener Weise im Innern von Y . Damit haben wir die Annahme zum Widerspruch geführt. \square



Die Bedeutung des gerade bewiesenen Satzes liegt darin, dass für eine große Klasse von Funktionen die Häufungswertmenge bei verschwindender Intervalllänge einfach genug ist, so dass man deren Höhleneinsehbarkeit nachweisen kann. Auf diese Weise erhalten wir den:

Satz 1.12 (Einsehbarkeit bei Regelfunktionen)

Ist $f : I_0 \rightarrow B$ eine Regelfunktion mit konvexliegendem Wertebereich, dann ist die Höhle $H \overline{f_I}$ des Abschlusses der Intervallmittelwertmenge einsehbar.

Beweis Hat eine Funktion $f : I_0 \rightarrow B$ in $t_0 \in I_0$ einen linksseitigen Grenzwert b und ist eine Folge von Intervallen $I_n \nearrow t_0$ (d. h. für jedes $\delta > 0$ gibt es einen Index n_0 , ab dem alle Intervalle $I_n \subset [t_0 - \delta, t_0]$ sind) gegeben, dann strebt auch die Folge der Mittelwerte f_{I_n} gegen b . Denn zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ ist für hinreichend kleines $\delta > 0$ und für hinreichend große Indizes n

$$|f_{I_n} - b| \leq \int_{I_n} |f - b| \leq \sup_{t \in I_n} |f(t) - b| \leq \sup_{t \in [t_0 - \delta, t_0]} |f(t) - b| \leq \epsilon.$$

Also besteht für Funktionen mit linksseitigem Grenzwert b in t_0 die Menge aller Häufungswerte von f_I für Intervallkonvergenz von unten gegen t_0 , also die Menge

$$f_{I \nearrow t_0} := \bigcap_{r > 0} \overline{\{f_I : I \in \mathcal{I} \text{ mit } I \subset [t_0 - r, t_0]\}},$$

nur aus dem Punkt b . Analog ist $f_{I \searrow t_0} = \{b\}$ für eine Funktion mit rechtsseitigem Grenzwert b in t_0 .

Hat f in t_0 den linksseitigen Grenzwert b_1 und den rechtsseitigen Grenzwert b_2 , dann besteht die Menge der Häufungswerte von f_I für Intervalle gegen t_0 , also die Menge

$$f_{I \rightarrow t_0} := \bigcap_{r > 0} \overline{\{f_I : I \in \mathcal{I} \text{ mit } I \subset [t_0 - r, t_0 + r]\}},$$

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

aus der Strecke $[b_1, b_2]$. Denn für alle $a_n \leq t_0 \leq b_n$ mit $a_n < b_n$ ist der Mittelwert

$$f_{[a_n, b_n]} = \frac{t_0 - a_n}{a_n + b_n} f_{[a_n, t_0]} + \frac{b_n - t_0}{a_n + b_n} f_{[t_0, b_n]}$$

eine Konvexkombination der Mittelwerte $f_{[a_n, t_0]}$ und $f_{[t_0, b_n]}$. Konvergiert $f_{[a_n, b_n]}$, dann muss der Grenzwert folglich auf der Strecke $[b_1, b_2]$ liegen. Ferner konvergiert für eine Nullfolge r_n und Werte $\lambda, \mu \in [0, 1]$ mit $\lambda + \mu = 1$ die Folge

$$f_{[t_0 - \lambda r_n, t_0 + \mu r_n]} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} f_{[t_0 - \lambda r_n, t_0]} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} f_{[t_0, t_0 + \mu r_n]}$$

gegen $\frac{\lambda}{\lambda + \mu} b_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} b_2$. Mit geeigneter Wahl von λ und μ lässt sich so auch jeder Wert auf der Strecke $[b_1, b_2]$ realisieren.

Die Menge $f_{|I| \rightarrow 0}$ aller Häufungswerte bei verschwindender Intervalllänge lässt sich schreiben als die Vereinigung aller Mengen $f_{I \rightarrow t_0}$ mit $t_0 \in I_0$ (mit entsprechenden einseitigen Grenzwerten an den Intervallgrenzen von I_0).

Für Regelfunktionen, also solchen Funktionen, bei denen in allen Punkten die links- und rechtsseitigen Grenzwerte existieren, ist demnach $f_{|I| \rightarrow 0}$ eine Vereinigung von Strecken, die in B anfangen und enden. Damit hat $f_{|I| \rightarrow 0}$ für Regelfunktionen nur einsehbare Höhlen. \square

Da bei stetigen Funktionen in jedem Punkt t_0 der links- und rechtsseitige Grenzwert und der Funktionswert übereinstimmen, gilt in diesem Fall $f_{I \rightarrow t_0} = \{f(t_0)\} \in B$ und $f_{|I| \rightarrow 0} \subset B$. Also ist dann $f_{\mathcal{I}} \cap A = \overline{f_{\mathcal{I}}} \cap A$, und somit gilt für die Höhle die Gleichheit $H f_{\mathcal{I}} = H \overline{f_{\mathcal{I}}}$. Damit erhalten wir die

Folgerung 1.13 (Einsehbarkeit bei stetigen Funktionen)

Ist $f : I_0 \rightarrow B$ eine stetige Funktion mit konvexliegendem Bild, dann ist die Höhle $H f_{\mathcal{I}}$ einsehbar.

Die Einsehbarkeit der Höhlen ist die entscheidende Eigenschaft, die wir für folgendes Resultat benötigen.

Satz 1.14 (Höhleninklusion)

Ist $f : I_0 \rightarrow B$ eine Regelfunktion mit konvexliegendem Wertebereich und $h : I_0 \rightarrow B$ eine monotone Umordnung von f , dann ist $H \overline{f_{\mathcal{I}}} \subset H \overline{h_{\mathcal{I}}}$.

Beweis Wir zeigen die Inklusionsbeziehung zunächst per Induktion für alle Treppenfunktionen. Die Induktionsvoraussetzung benutzen wir für die Treppenfunktionen mit $n - 1$ Abschnitten, die durch Weglassen des höchsten bzw. niedrigsten Abschnittes entstehen. Entscheidend wird dabei die Einsehbarkeit der Höhlen benutzt.

Man überlegt, dass für Treppenfunktionen die Intervallmittelwertmenge $f_{\mathcal{I}}$ abgeschlossen ist. Dazu nimmt man ein Intervall mit einer Länge, die der kleinsten

Stufenlänge entspricht. Schiebt man dieses Intervall durch I_0 , erhält man alle Mittelwerte an denen höchstens zwei Stufen beteiligt sind. D. h. noch kleinere Intervalle geben keinen neuen Beitrag.

Da für alle monotonen Umordnungen h von f die Mittelwertmenge $h_{\mathcal{I}}$ mit der Mittelwertmenge $f_{\mathcal{I}}^*$ der fallenden Umordnung übereinstimmt, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $h = f^*$ ist. Wir zeigen per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$\mathcal{A}(n) \Leftrightarrow$ Ist f eine n -Treppenfunktion mit konvexliegendem Wertebereich von der Form

$$f : I_0 \rightarrow B, \quad f = \sum_{i=1}^n b_i \mathbb{1}_{I_i}$$

mit $b_1 \leq \dots \leq b_n$ in B und einer Zerlegung $I_0 = \dot{\cup}_{i=1}^n I_i$ in n Teilintervalle positiver Länge, dann ist $H f_{\mathcal{I}} \subset H f_{\mathcal{I}}^*$.

Induktionsverankerung $\mathcal{A}(1)$ und $\mathcal{A}(2)$: Für $f = b_1 \mathbb{1}_{I_0}$ ist $f^* = f$ und trivialerweise $H f_{\mathcal{I}} = H f_{\mathcal{I}}^*$. Für $f = b_1 \mathbb{1}_{I_1} + b_2 \mathbb{1}_{I_2}$ ist $f_{\mathcal{I}} = [b_1, b_2] = f_{\mathcal{I}}^*$, gleich ob das Intervall I_1 vor oder nach I_2 kommt. Also gilt auch hier $H f_{\mathcal{I}} = H f_{\mathcal{I}}^*$.

Induktionsschluss $\mathcal{A}(n-1) \Rightarrow \mathcal{A}(n)$ für $n \geq 3$: Gelte $\mathcal{A}(n-1)$ und sei eine n -Treppenfunktion

$$f : I_0 = [\alpha, \beta] \rightarrow B, \quad f = \sum_{i=1}^n b_i \mathbb{1}_{I_i}$$

mit Werten $b_1 \leq \dots \leq b_n$ und einer Zerlegung $I_0 = \dot{\cup}_{i=1}^n I_i$ gegeben. Wir betrachten die $(n-1)$ -Treppenfunktionen, die durch Weglassen des Abschnittes I_1 mit dem kleinsten Wert und Vorrücken der links liegenden Abschnitte bzw. durch Weglassen des Abschnittes I_n mit dem größten Wert und Zurückrücken der rechts liegenden Abschnitte entstehen. D. h. wir betrachten auf den Intervallen $J_0 := [\alpha + |I_1|, \beta]$ und $K_0 := [\alpha, \beta - |I_n|]$ die Abbildungen

$$g : J_0 \rightarrow B, \quad g := \sum_{i=2}^n b_i \mathbb{1}_{J_i} \quad \text{mit} \quad J_i := \begin{cases} I_i + |I_1| & : I_i < I_1 \\ I_i & : I_i > I_1 \end{cases},$$

$$h : K_0 \rightarrow B, \quad h := \sum_{i=1}^{n-1} b_i \mathbb{1}_{K_i} \quad \text{mit} \quad K_i := \begin{cases} I_i & : I_i < I_n \\ I_i - |I_n| & : I_i > I_n \end{cases}.$$

Dann findet man als fallende Umordnungen die Funktionen

$$f^* : I_0 \rightarrow B, \quad f^* = \sum_{i=1}^n b_i \mathbb{1}_{I_i^*},$$

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

$$g^* : J_0 \rightarrow B, \quad g^* = \sum_{i=2}^n b_i \mathbb{1}_{I_i^*},$$

$$h^* : K_0 \rightarrow B, \quad h^* = \sum_{i=1}^{n-1} b_i \mathbb{1}_{I_i^*}$$

mit den Intervallen

$$I_i^* = \alpha + \left[\sum_{j=1}^{i-1} |I_j|, \sum_{j=1}^i |I_j| \right].$$

Bezeichnen wir mit $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ die Mengen aller Teilintervalle von I_0, J_0 bzw. K_0 mit positiver Länge, dann liefert die Induktionsvoraussetzung angewendet für die $(n-1)$ -Treppenfunktionen g und h die Inklusionen

$$\mathbb{H} g_{\mathcal{J}} \subset \mathbb{H} g_{\mathcal{J}}^* \quad \text{und} \quad \mathbb{H} h_{\mathcal{K}} \subset \mathbb{H} h_{\mathcal{K}}^*. \quad (1.2)$$

Wir werden zeigen, dass gilt

$$\mathbb{H} f_{\mathcal{I}} \subset \mathbb{H} g_{\mathcal{J}} \cap \mathbb{H} h_{\mathcal{K}} \cap \mathbb{H} S \quad (1.3)$$

$$\mathbb{H} f_{\mathcal{I}}^* = \mathbb{H} g_{\mathcal{J}}^* \cap \mathbb{H} h_{\mathcal{K}}^* \cap \mathbb{H} S. \quad (1.4)$$

Dabei bezeichnen wir mit S den Schatten, den der Gesamtmittelwert $f_{I_0} = b_{1..n}$ vom Randstück $\partial A[b_n, b_1]$ beleuchtet in A wirft, d. h.

$$S := \{a \in A : \text{es gibt ein } c \in \partial A[b_n, b_1] \text{ mit } f_{I_0} \in [a, c]\}.$$

Aus den Beziehungen (1.2), (1.3) und (1.4) folgt dann die Behauptung $\mathbb{H} f_{\mathcal{I}} \subset \mathbb{H} f_{\mathcal{I}}^*$ für alle Treppenfunktionen.

Wir zeigen $\mathbb{H} f_{\mathcal{I}} \subset \mathbb{H} g_{\mathcal{J}}$ (und analog sieht man $\mathbb{H} f_{\mathcal{I}} \subset \mathbb{H} h_{\mathcal{K}}$). Zu jedem Intervallmittelwert m der Funktion g findet man einen Intervallmittelwert \tilde{m} der Funktion f , der von m aus gesehen nur in Richtung b_1 verschoben ist. Die Einsehbarkeit von b_1 der Höhle $\mathbb{H} f_{\mathcal{I}}$ garantiert dann, dass mit \tilde{m} auch m nicht in der Höhle $\mathbb{H} f_{\mathcal{I}}$ liegen kann. Also liegt die gesamte Intervallmittelwertmenge $g_{\mathcal{J}}$ außerhalb der Höhle von f . Damit muss $\mathbb{H} f_{\mathcal{I}} \subset \mathbb{H} g_{\mathcal{J}}$ sein.

Wir zeigen $\mathbb{H} f_{\mathcal{I}} \subset \mathbb{H} S$. Da der Gesamtmittelwert f_{I_0} nicht aus der einsehbaren Höhle $\mathbb{H} f_{\mathcal{I}}$ ist, kann auch kein Element aus seinem Schatten in $\mathbb{H} f_{\mathcal{I}}$ liegen. Also ist $S \subset A \setminus \mathbb{H} f$ und somit gilt $\mathbb{H} f_{\mathcal{I}} \subset \mathbb{H} S$. Damit ist der Nachweis der Inklusion 1.3 geführt.

Wir zeigen die Formel (1.4) Die \subset -Inklusion ist der Spezialfall von (1.3) für monotone Funktionen.

Für die \supset -Inklusion benutzen wir die Rekursionsformel (1.1) angewendet auf die fallende Umordnung

$$f_{\mathcal{I}}^* = f_{\mathcal{I}_{1..n}}^* = f_{\mathcal{I}_{1..n-1}}^* \cup f_{\mathcal{I}_{2..n}}^* \cup \text{conv}\{b_{1..n-1}, b_{1..n}, b_{2..n}, b_{2..n-1}\}.$$

Man überzeugt sich, dass das konvexe Viereck mit den Ecken $b_{1..n-1}$, $b_{1..n}$, $b_{2..n}$, $b_{2..n-1}$ im Schatten S liegt. Dazu beachte man, dass $b_{1..n}$ der Gesamtmittelwert ist und die Verlängerungen der Seiten $[b_{1..n-1}, b_{1..n}]$ und $[b_{2..n}, b_{1..n}]$ durch den höchsten Wert b_n bzw. durch den niedrigsten Wert b_1 laufen (weitere Ausführungen findet man rund um den Nachweis der Rekursionsformel 1.1). Ferner erkennt man die Intervallmittelwertmengen $f_{\mathcal{I}_{1..n-1}}^*$ und $f_{\mathcal{I}_{2..n}}^*$ als die Intervallmittelwertmengen $g_{\mathcal{J}}^*$ und $h_{\mathcal{K}}^*$. Damit ist

$$f_{\mathcal{I}}^* \subset g_{\mathcal{J}}^* \cup h_{\mathcal{K}}^* \cup S.$$

Für die Höhlen dieser beiden Mengen gilt dann die umgekehrte Inklusion. Die Einsehbarkeit von $H g^*$, $H h^*$ und $H S$ garantiert schließlich, dass wir die rechte Seite als Durchschnitt der einzelnen Höhlen schreiben dürfen (Lemma 1.3)

$$H f_{\mathcal{I}}^* \supset H(g_{\mathcal{J}}^* \cup h_{\mathcal{K}}^* \cup S) = H g_{\mathcal{J}}^* \cap H h_{\mathcal{K}}^* \cap H S.$$

Für beliebige **Regelfunktionen** $f : I_0 \rightarrow B$ können wir eine Folge von Treppenfunktionen $f_n : I_0 \rightarrow B$ wählen, die gleichmäßig gegen f strebt. Dann strebt auch f_n^* gleichmäßig gegen f^* , und die gleichmäßige Konvergenz sichert die Konvergenz der Mittelwertmengen im Hausdorff-Abstand: $(f_n)_{\mathcal{I}}$ konvergiert gegen $\overline{f_{\mathcal{I}}}$ und $(f_n^*)_{\mathcal{I}}$ gegen $\overline{f_{\mathcal{I}}^*}$. Denn aus

$$|(f_n)_{\mathcal{I}} - f_{\mathcal{I}}| \leq \int_I |f_n - f| \leq \sup_{t \in I_0} |f_n(t) - f(t)| \rightarrow 0$$

für alle $I \in \mathcal{I}$ folgt für ein vorgegebenes $\epsilon > 0$ und n hinreichend groß, $(f_n)_{\mathcal{I}} \subset U_{\epsilon}(f_{\mathcal{I}}) \subset U_{\epsilon}(\overline{f_{\mathcal{I}}})$ und $\overline{f_{\mathcal{I}}} \subset U_{\epsilon/2}(f_{\mathcal{I}}) \subset U_{\epsilon}((f_n)_{\mathcal{I}})$.

Mit Hilfe des Approximationslemmas 1.5 erhält man die Aussage dann für alle Regelfunktionen. \square

Die monotonen Funktionen spielen also eine besondere Rolle bei den Intervallmittelwertmengen. Bei ihnen ist auch die Intervallmittelwertmenge relativ einfach zu beschreiben. In diesem Zusammenhang beweisen wir den

Satz 1.15 (Intervallmittelwertmenge monotoner Funktionen)

Für monotone Funktionen $f : I_0 = [\alpha, \beta] \rightarrow B$ mit konvexliegendem Bildbereich ist die Höhlenwand $W := \partial f_{\mathcal{I}} \cap \partial H f_{\mathcal{I}}$ die Menge

$$\{f_I : I = [\alpha, t] \text{ mit } t \in]\alpha, \beta] \text{ oder } I = [t, \beta] \text{ mit } t \in [\alpha, \beta[\}$$

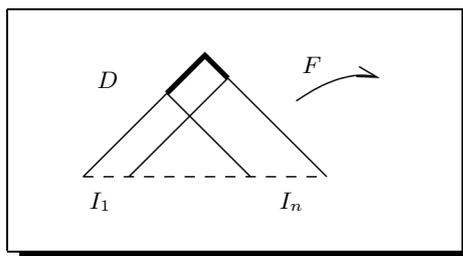
aller Mittelwerte auf Randintervallen aus \mathcal{I} . Also besteht die Höhlenwand aus den Kurven der beiden Abbildungen $t \mapsto f_{[\alpha, t]}$ und $t \mapsto f_{[t, \beta]}$.

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

Die Mittelwertmenge ist für stetige, monotone Funktionen die Fläche, die durch diese beiden Kurven und durch das Randstück B begrenzt ist. Bei unstetigen, monotonen Funktionen gilt dies auch, wenn \bar{A} die konvexe Hülle des Bildes von f ist.

Beweis Die Aussage über die Höhlenwand lautet in der nach Definition 1.8 beschriebenen Sichtweise, dass die Höhlenwand bei monotonen Funktionen aus dem Bild der oberen beiden Seiten des Dreiecks D besteht.

Die Induktion, die zum Nachweis der Aussage für alle monotonen Treppenfunktionen führt, liest man ohne Schwierigkeiten aus der nebenstehenden Zeichnung ab. Dazu muss man nur beachten, dass die neuen Seiten des hinzukommenden Vierecks, also die Bilder der dick gezeichneten beiden Strecken, bei monotonen Funktionen zum kleinsten und größten Wert ausgerichtet sind.



Für eine beliebige monotone Funktion $f : I_0 = [\alpha, \beta] \rightarrow B$ gibt es eine Folge von monotonen Treppenfunktionen f_n , die gleichmäßig gegen f konvergiert. Nehmen wir an, dass ein Mittelwert der Form $f_{[\alpha, t]}$ nicht zur Höhlenwand $W(f_{\mathcal{I}})$ gehört. Dann kann auch der entsprechende Mittelwert $(f_n)_{[\alpha, t]}$ für ein n , das groß genug ist, nicht zur Höhlenwand $W((f_n)_{\mathcal{I}})$ gehören. Denn die gezeigte Einsehbarkeit von $H\bar{f}_{\mathcal{I}}$ garantiert einen Mittelwert f_I in dem offenen Sektor $C * f_{[\alpha, t]}$. Für n hinreichend groß ist dann $(f_n)_I$ so nahe bei f_I und $(f_n)_{[\alpha, t]}$ so nahe bei $f_{[\alpha, t]}$, dass $(f_n)_I$ im Sektor $C * (f_n)_{[\alpha, t]}$ ist. Damit kann $(f_n)_{[\alpha, t]}$ nicht aus der Höhlenwand $W((f_n)_{\mathcal{I}})$ sein und wir haben einen Widerspruch zu der gültigen Aussage für Treppenfunktionen. \square

Bemerkung 1.16 Den Beweis von 1.12 kann man auch so aufbauen, dass man den Satz 1.11 nicht benutzt, sondern zunächst für alle Treppenfunktionen die Einsehbarkeit beweist. Dazu macht man eine Induktion über die Anzahl der Stufen und führt beim Induktionsschluss die Aussage für n -Stufen auf die Aussage für die ersten $(n - 1)$ und die letzten $(n - 1)$ Stufen zurück. Für den Nachweis, dass das hinzukommende konvexe Viereck mit den Ecken $b_{2..n-1}, b_{1..n-1}, b_{2..n}, b_{1..n}$ die Einsehbarkeit nicht zerstört, benutzt man ähnlich konstruierte Wege w, v wie im Beweis von 1.11. Für alle Regelfunktionen erhält man dann die Einsehbarkeit mit dem Approximationslemma 1.5.

Das indirekte Argument aus 1.11 ist eleganter und kürzer als die nötige Induktion. Möglicherweise ist der Satz 1.11 aber auch noch auf eine größere Klasse als die der Regelfunktionen anwendbar.

Bemerkung 1.17 Die Klasse der Funktionen $f : I_0 \rightarrow B$, für die $H\overline{f_{\mathcal{I}}}$ einsehbar ist, ist größer als die der Regelfunktionen.

Mit der gleichen Argumentation (vgl. Beweis von Satz 1.12) erhält man die Einsehbarkeit für alle Funktionen, die statt links- und rechtsseitiger Grenzwerte in allen Punkten nur links- und rechtsseitige Intervallmittelgrenzwerte haben, d. h. falls es zu jedem $t_0 \in I_0$ ein b_1 und $b_2 \in B$ gibt mit

$$\lim_{r \searrow 0} \sup_{I \subset [t_0-r, t_0]} \left| \int_I f - b_1 \right| = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{r \searrow 0} \sup_{I \subset [t_0, t_0+r]} \left| \int_I f - b_2 \right| = 0.$$

Insbesondere sind Werte von f auf Nullmengen nicht von Interesse.

Einsehbarkeit von $H\overline{f_{\mathcal{I}}}$ erhält man auch für Funktionen $f : I_0 = [\alpha, \beta] \rightarrow B$, die auf allen Intervallen $[\alpha + r, \beta - r]$ mit $r > 0$ Regelfunktionen sind (oder nur auf all diesen Intervallen überall links- und rechtsseitige Intervallmittelwerte in B haben). Solche Funktionen können anders als Regelfunktionen in den Intervallgrenzen α, β mehr als einen Häufungswert haben. Die Einsehbarkeit erhält man in diesem Fall durch folgendes Widerspruchsargument:

Angenommen die Höhle $H\overline{f_{\mathcal{I}}}$ wäre nicht einsehbar, dann findet man wie im Beweis von Satz 1.11 einen abgeschlossenen Sektor Y , bestimmt durch zwei Randpunkte $c_1 \neq c_2 \in C$ und einen Höhlenpunkt $h \in H\overline{f_{\mathcal{I}}}$, so dass das Innere Y° des Sektors ganz in der Höhle $H\overline{f_{\mathcal{I}}}$ liegt, und so dass ein Punkt z aus $\overline{f_{\mathcal{I}}}$ auf dem „Rand“ des Sektors liegt: $z \in \overline{f_{\mathcal{I}}} \cap]h, c_1[$ (oder analog $z \in \overline{f_{\mathcal{I}}} \cap]h, c_2[$). Da die Höhle offen ist, kann man noch eine Umgebung um den Höhlenpunkt h wählen mit

$$Y^\circ \cup U_\epsilon(h) \subset H\overline{f_{\mathcal{I}}}.$$

Wir finden ein Intervall $\tilde{I} \in \mathcal{I}$ mit einem Mittelwert $f_{\tilde{I}}$ so nahe bei z , dass $f_{\tilde{I}}$ in der Verbindungsmenge $U_{\epsilon/2}(h) * c_1$ liegt. Dann können wir ein $r > 0$ hinreichend klein wählen, so dass der Mittelwert auf $I := \tilde{I} \cap [\alpha + r, \beta - r]$ im Verbindungsraum $U_\epsilon(h) * c_1$ liegt. Da aber $H\overline{f_{\mathcal{I}_r}}$ (mit der Menge \mathcal{I}_r aller Teilintervalle von $[\alpha + r, \beta - r]$ mit positiver Länge) einsehbar ist, kann $(Y^\circ \cup U_\epsilon(h)) \cap \overline{f_{\mathcal{I}_r}}$ nicht leer sein. Gleiches gilt erst recht für die Obermenge

$$(Y^\circ \cup U_\epsilon(h)) \cap \overline{f_{\mathcal{I}}} \neq \emptyset.$$

Dies steht im Widerspruch zu obiger Inklusion.

Ungeklärt ist bisher, ob auch Funktionen, die bis auf eine Ausnahme im Innern des Definitionsintervalls I_0 Regelfunktionen sind, einsehbare Höhlen haben. Wir vermuten dies und sogar, dass bei allen messbaren Funktionen die Höhlen einsehbar sind. Wären die Höhlen auch für messbare Funktionen einsehbar, dann würde man auch die Höhleninklusion für alle messbaren Funktionen erhalten. Dazu würde man im Beweis statt der Treppenfunktionen einfache Funktionen, d. h. Funktionen mit endlich vielen Werten auf messbaren Mengen, nehmen.

Bei dem naheliegenden Versuch, die Einsehbarkeit bei messbaren Funktionen mittels Regularisierung auf stetige zurückzuführen, hat man die Schwierigkeit,

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

dass die Mittelwertmengen nicht im Hausdorff-Abstand konvergieren müssen. Approximieren wir z. B. eine Treppenfunktion $f : [0, 2] \rightarrow B$, die auf $[0, 1]$ einen Wert b_1 und auf $]0, 2]$ einen anderen Wert b_2 hat, durch eine Folge von stetigen, monotonen Funktionen $f_n : [0, 2] \rightarrow B$ mit immer schmaler werdenden Bereichen, in denen die Funktionen sich ändern. Dann ist die Mittelwertmenge $f_{\mathcal{I}} = [b_1, b_2]$; die Mittelwertmengen zu den stetigen Funktionen enthalten aber immer Punkte in der konvexen Hülle von $\partial A]b_1, b_2[$. Also konvergieren die Mittelwertmengen im Hausdorff-Abstand nicht. Die Höhlen konvergieren in diesem Beispiel aber schon. Dies zeigt, dass man zumindest bei Regularisierung nicht ohne ein geometrisches Zusatzargument auskommen wird.

Bei den ins Auge gefassten Anwendungen kann man regularisieren (man vergleiche z. B. Lemma 2.1), so dass dort die gezeigten Resultate auf jeden Fall ausreichen. In gleicher Weise kann man dort auch unbeschränkte Funktionen via Regularisierung behandeln. Deshalb brauchen wir keine Verallgemeinerung der Höhlensätze auf unbeschränkte, konvexe Mengen A .

Bemerkung 1.18 Wir betrachten statt des Lebesgue-Maßes auf I_0 ein gewichtetes Lebesgue-Maß μ , d. h. es gibt eine Lebesgue-messbare, nicht negative Gewichtsfunktion $w : I_0 \rightarrow [0, \infty[$ mit $\mu(A) = \int_A w(t)dt$ für alle Lebesgue-messbaren Mengen A . Das System $\mathcal{I}(\mu)$ aller Teilintervalle $I \subset I_0$ mit positivem Maß $\mu(I) > 0$ ist dann eventuell kleiner als das System \mathcal{I} aller Teilintervalle mit positiver Länge $|I| > 0$. Intervallmittelwerte bzgl. μ definiert man für μ -integrierbare Funktionen als $f_{I,\mu} := \int_I f d\mu := \frac{1}{\mu(I)} \int_I f d\mu$ für alle $I \in \mathcal{I}(\mu)$. Mit $f_{\mathcal{I}(\mu)}$ bezeichnen wir die entsprechende Intervallmittelwertmenge und mit $f_{\mu(I) \rightarrow 0}$ die Häufungswerte von $f_{\mathcal{I}(\mu)}$ bei verschwindendem Maß. Die fallende Umordnung bzgl. μ von einer Funktion $f : I_0 = [\alpha, \beta] \rightarrow B$ definieren wir als die Funktion $f^{*\mu} : [0, \mu(I_0)] \rightarrow B$ mit

$$f^{*\mu}(t) := \inf\{b \in B : \mu(\{s \in I_0 : f(s) > b\}) \leq t\}.$$

Eine Durchsicht der Beweise zeigt, dass mit diesen Definitionen die Höhlensätze 1.11, 1.12 und 1.14 auch für gewichtete Lebesgue-Maße gültig sind. Entscheidend von den Eigenschaften des Lebesgue-Maßes geht nämlich nur ein, dass Intervallmittelwerte stetig von den Intervallgrenzen abhängen (dies haben wir im Beweis von Satz 1.11 für die Wege w und v benutzt). Diese Stetigkeit ist auch für gewichtete Lebesgue-Maße gegeben.

Den Induktionsbeweis von Satz 1.14 kann man übrigens auch so aufbauen, dass man das Weglassen des höchsten und niedrigsten Wertes durch Nullsetzen eines entsprechenden Gewichtes erreicht. Im Falle mehrerer Variablen werden wir ein solches Vorgehen wählen müssen (Satz 1.21).

Für allgemeinere Maße als gewichtete Lebesgue-Maße auf I_0 gelten die Sätze im Allgemeinen nicht. Betrachten wir dazu als I_0 das Intervall $[0, 1]$, als A die Einheitskreisscheibe, als B die untere Halbkreislinie, als C die obere Halbkreislinie, als f die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow B$ definiert durch $f(t) = 1$ für $t > 0$ und $f(0) = -1$,

sowie das Maß $\mu := \mathcal{L} + \delta_0$ (Summe des Lebesgue-Maßes und des Punktmaßes in 0). Dann findet man $\overline{f_{\mathcal{I}(\mu)}} = f_{\mathcal{I}(\mu)} = [-1, 0] \cup \{1\}$ mit nicht einsehbarer Höhle $H(A, C, f_{\mathcal{I}(\mu)})$.

1.3. Mittelwerte bei mehreren Variablen

Wir wollen untersuchen, wie sich die Sätze für Funktionen einer Variablen auf Funktionen mehrerer Variablen übertragen lassen.

Wie wir sehen werden, lässt sich der Beweis auf alle Dimensionen ausdehnen, wenn man statt der Menge aller Intervalle positiven Maßes die Menge aller Quader positiven Maßes nimmt. Für die von uns ins Auge gefassten Anwendungen ist diese Quadermenge aber in der Regel zu groß. Um die Voraussetzungen entsprechender Sätze zu erfüllen, müsste man dann nämlich die Gültigkeit von gewissen Integralungleichungen auf „beliebig dünnen“ Quadern zeigen. Diese Forderung ist aber für die Praxis zu restriktiv.

Deshalb liegt der Versuch nahe, einen Höhlensatz für die Menge aller Würfel positiven Inhalts zu formulieren. Leider und überraschend sind analoge Aussagen für dieses Mengensystem falsch. Die Gültigkeit von abgeschwächten Aussagen bleibt ein offenes Problem. Als Hauptschwierigkeit erweist sich, dass man bei Wegnahme eines Würfel aus einem größeren Würfel niemals ein Würfel übrig behält (bei Intervallen und Quadern ist dies anders und geht jeweils entscheidend beim Einsehbarkeitsnachweis ein).

Einen Ausweg liefert die Verwendung von flächen- und raumfüllenden Kurven. Mit ihrer Hilfe kann die Ordnung des Intervalls auf höherdimensionale Mengen übertragen werden und man erhält analoge Höhlensätze zu denen über Intervallmittelwertmengen. Bei geeigneter Wahl einer raumfüllenden Kurve sind in dem System aller Bildmengen von Intervallen keine beliebig dünnen Mengen. In diesem Sinne ist dieses System dann nicht wesentlich schlechter als das Würfelsystem und besser als das Quadersystem.

1.3.1. Mittelwerte auf Quadern

Sei im Folgenden Q_0 ein N -dimensionaler, achsenparalleler, kompakter Quader im \mathbb{R}^N . Dabei soll N -dimensional bedeuten, dass das Innere von Q_0 in \mathbb{R}^N nicht leer ist. Wir untersuchen Funktionen auf Q_0 mit konvexliegendem Wertebereich, d. h. wir geben uns wie beim Fall einer Variablen eine konvexe, offene, beschränkte Menge $A \subset \mathbb{C}$, zwei verschiedene Randpunkte b und c von A , sowie die Randstücke B und C zwischen b und c vor und betrachten Funktionen $f : Q_0 \rightarrow B$.

Anders als im Fall einer Variablen müssen wir hier von Anfang an gewichtete Lebesgue-Maße auf Q_0 zulassen. Denn im Beweis von Satz 1.21 benötigen wir auch für den Nachweis im Falle des normalen Lebesgue-Maßes noch andere gewichtete Lebesgue-Maße. Die Möglichkeit, das Maß auf Teilquadern null setzen

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

zu können, dient dazu, die Werte der Funktion f auf diesen Quadern zu „vergessen“; ein Analogon zum Zusammenschieben von Intervallen ist nämlich im Mehrdimensionalen nicht vorhanden.

Wir werden also im Folgenden stets eine Lebesgue-messbare Gewichtsfunktion $w : Q_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ wählen. Das zugehörige gewichtete Lebesgue-Maß auf Q_0 bezeichnen wir immer mit μ , d. h. es ist $\mu(A) = \int_A w$ für alle Lebesgue-messbaren Mengen $A \subset Q_0$. Ferner soll immer $0 < \mu(Q_0) < \infty$ gelten.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(Q_0, \mu)$ die Menge aller achsenparallelen Teilquader $Q \subset Q_0$ mit positivem Maß $\mu(Q) > 0$. Man beachte dabei, dass auch N -dimensionale Teilquader Q vom Maß null sind, falls die Gewichtsfunktion fast überall auf Q verschwindet. Für alle Quader $Q \in \mathcal{Q}$ definieren wir den Quadermittelwert $f_Q := \int_Q f d\mu := \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f d\mu$. Wir wollen die Quadermittelwertmenge

$$f_{\mathcal{Q}} := \{f_Q : Q \in \mathcal{Q}\},$$

den Abschluss $\overline{f_{\mathcal{Q}}}$ der Quadermittelwertmenge und die Höhle $H \overline{f_{\mathcal{Q}}} := H(A, C, \overline{f_{\mathcal{Q}}})$ untersuchen. Mit

$$f_{\mu(Q) \rightarrow 0} := \bigcap_{r>0} \text{clos}\{f_Q : Q \in \mathcal{Q} \text{ und } \mu(Q) \leq r\}$$

bezeichnen wir die Menge der Häufungswerte von f_Q bei verschwindendem Maß.

Wie im Fall einer Variablen spielt der folgende Satz für das weitere Vorgehen eine Schlüsselrolle. Er führt die Einsehbarkeit der Höhle der Quadermittelwerte auf die Einsehbarkeit der Höhle der Häufungswerte bei verschwindendem Maß zurück. Diese weisen wir dann im wichtigen Fall von Treppenfunktionen f und w nach (Satz 1.20) und erhalten dann wie bei einer Variablen auch eine Inklusion in die Höhle der fallenden Umordnung (Satz 1.21). Mit dem Approximationslemma 1.5 erhalten wir daraus für alle Regelfunktionen f und zum Lebesgue-Maß ($w \equiv 1$) Einsehbarkeit der Höhlen und Inklusion in die Höhle der monotonen Umordnung (Folgerung 1.22).

Satz 1.19 (Einsehbarkeit von Höhlen)

Ist $f : Q_0 \rightarrow B$ eine messbare Funktion mit konvexliegendem Bild, $w : Q_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine messbare Gewichtsfunktion mit $0 < \int_{Q_0} w < \infty$ und $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(Q_0, \mu)$ die Menge aller Quader mit Maß $\mu(Q) := \int_Q w > 0$, dann folgt aus der Einsehbarkeit der Höhle $H f_{\mu(Q) \rightarrow 0}$ die Einsehbarkeit der Höhle $H \overline{f_{\mathcal{Q}}}$.

Beweis Der Beweis verläuft im Wesentlichen wie im Fall einer Variablen (vgl. Satz 1.11), wo man detailliertere Begründungen nachschlagen kann. Zu betonen ist, dass auch im Quadersystem die entscheidende Konstruktion der gegenüberliegenden Wege möglich ist.

Sei $H f_{\mu(Q) \rightarrow 0}$ einsehbar und nehmen wir an, dass $H \overline{f_Q}$ nicht einsehbar ist. Dann findet man zwei unterschiedliche Randpunkte $c_1, c_2 \in C$, einen Höhlenpunkt $h \in H \overline{f_Q}$, den abgeschlossenen Sektor $Y \subset \overline{A}$ mit den Randstrecken $[c_1, h]$ und $[c_2, h]$ und dem Randbogen $\partial A[c_1, c_2] \subset C$ sowie einen Quader $Q \in \mathcal{Q}$ mit den Eigenschaften:

- In Y gibt es keinen Häufungswert zu verschwindender Quadergröße, d. h. es ist $Y \cap f_{\mu(Q) \rightarrow 0} = \emptyset$, denn sonst könnte $f_{\mu(Q) \rightarrow 0}$ keine einsehbare Höhle haben. Dazu beachte man $h \in H \overline{f_Q} \subset H f_{\mu(Q) \rightarrow 0}$.
- Im Innern von Y liegen keine Werte aus dem Abschluss $\overline{f_Q}$ der Quadermittelwerte.
- Der Mittelwert f_Q liegt auf dem Rand von Y mit minimalem Abstand zu h , d. h. genauer gilt $f_Q \in]c_1, h[\cup]c_2, h[$ und $[h, f_Q[\cap \overline{f_Q} = \emptyset$.

Lässt man $Q = I_1 \times \dots \times I_N$ in einer Variablen, sagen wir in der ersten, einmal von links und einmal von rechts schrumpfen, so liefert dies die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} w : [t_0, t_1[&\rightarrow \overline{A}, & w(t) &:= f_{[t, t_1] \times I_2 \times \dots \times I_N} \\ v :]t_0, t_1] &\rightarrow \overline{A}, & v(t) &:= f_{[t_0, t] \times I_2 \times \dots \times I_N}. \end{aligned}$$

Damit wir bei der Mittelwertbildung nicht durch null teilen, setzen wir dabei voraus, dass alle entsprechenden Quader positives Maß haben, d. h. es ist immer $\mu([t, t_1] \times I_2 \times \dots \times I_N) > 0$ und $\mu([t_0, t] \times I_2 \times \dots \times I_N) > 0$. Dies können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit tun, da man sonst nach Verkleinerung von Q ein \tilde{Q} mit dieser Eigenschaft und mit gleichem Mittelwert $f_Q = f_{\tilde{Q}}$ findet. Denn der Anteil $Q \setminus \tilde{Q}$ hat Maß null und liefert auch keinen Beitrag zum Mittelwert.

Die Funktionen w, v haben die gleichen Eigenschaften, die schon bei einer Variablen die Konstruktion eines Widerspruches möglich machten:

- Beide sind stetig.
- Beide haben nur Werte in der Quadermittelwertmenge f_Q .
- Beide sind nicht konstant, denn sonst müsste der Mittelwert f_Q auch ein Häufungswert bei verschwindender Quadergröße sein, was im Widerspruch zu $Y \cap f_{\mu(Q) \rightarrow 0} = \emptyset$ steht.
- w und v verlaufen bzgl. f_Q gegenüberliegend. □

Entsprechend zum Satz 1.12 über die Einsehbarkeit bei Regelfunktionen einer Variablen ist bei Treppenfunktionen f und w die Menge der Häufungswerte bei verschwindendem Quadermaß einfach genug, um deren Höhleneinsehbarkeit und

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

damit auch die von $\overline{f_Q}$ nachzuweisen. Dabei verstehen wir unter einer Treppenfunktion von mehreren Variablen auf Q_0 eine Funktion, für die es eine Zerlegung von Q_0 in endlich viele Teilquader gibt, so dass die Funktion auf den Teilquadern konstant ist.

Satz 1.20 (Einschbarkeit bei Treppenfunktionen)

Ist $f : Q_0 \rightarrow B$ eine Treppenfunktion mit konvexliegendem Bild, $w : Q_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Treppenfunktion und $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(Q_0, \mu)$ die Menge aller Quader mit positivem Maß $\mu(Q) = \int_Q w > 0$, dann ist die Höhle $H \overline{f_Q}$ einschbar.

Beweis Wir werden folgenden Spezialfall beweisen:

Sind die Funktionen $f : [0, n] \times [0, n] \rightarrow B$ und $w : [0, n] \times [0, n] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ konstant auf allen Quadraten $]i, i + 1[\times]j, j + 1[$ mit $i, j \in \{0, \dots, n - 1\}$, dann ist die Höhle von $f_{\mu(Q) \rightarrow 0}$ und damit auch die Höhle von $\overline{f_Q}$ einschbar.

Man kann sich überzeugen, dass beim Beweis die äquidistante Unterteilung praktisch, aber nicht notwendig ist. Außerdem müssen f und w nicht von vorneherein die gleiche Unterteilung haben, da man immer zu einer gemeinsamen Unterteilung übergehen kann. Mit dieser Überlegung erhält man aus dem Spezialfall auch den Satz im Falle eines zweidimensionalen Quaders Q_0 . Den allgemeinen Fall eines N -dimensionalen Quaders kann man schließlich per Induktion nach N beweisen. Der Beweis des Spezialfalles zeigt gerade den Induktionsschritt von $N = 1$ auf $N = 2$. Der allgemeine Induktionsschritt braucht keine prinzipiell neuen Argumente, dafür aber eine sehr aufwändige Notation, so dass wir auf eine Darstellung verzichten wollen.

Die Werte von f und w auf dem Gitter

$$\left(\bigcup_{i \in \{0, \dots, n\}} \{i\} \times [0, n] \right) \cup \left(\bigcup_{k \in \{0, \dots, n\}} [0, n] \times \{k\} \right)$$

der möglichen Sprungstellen sind für unsere Mittelwertbetrachtungen ohne Bedeutung. Wir vereinbaren deshalb, dass wir im Beweis die Gleichheit von Funktionen immer bis auf mögliche Ausnahmen in den Sprungstellen meinen. Mit $f(i^+, \cdot) := \lim_{r \searrow 0} f(i + r, \cdot)$ bezeichnen wir die Funktion, die durch Bildung des rechtsseitigen Grenzwertes in der ersten Variablen entsteht. Entsprechend sind Schreibweisen $f(i^-, \cdot)$, $w(\cdot, k^+)$ usw. zu verstehen. Die Buchstaben i, j, x benutzen wir für die erste Variable und k, l, y für die zweite Variable von f und w , dabei seien i, j, k, l stets ganze Zahlen. Ein Quadrat der Form $[i - 1, i] \times [k - 1, k]$ nennen wir Elementarquadrat; wir nennen es Nullquadrat, wenn die Gewichtsfunktion w auf ihm verschwindet.

Wir müssen untersuchen, gegen welche Mengen sich Mittelwerte f_{Q_m} bei verschwindendem Maß $\mu(Q_m)$ häufen können. Dazu werden wir unter 1. und 2. alle

Fälle untersuchen, bei denen die Rechtecke Q_m auf eine Strecke oder einen Punkt schrumpfen. Unter 3. bis 7. handeln wir alle Fälle ab, bei denen die Rechtecke Q_m gegen ein nicht entartetes Rechteck, das aber Maß null hat, konvergieren. Man überlegt sich, dass die Menge $f_{\mu(Q) \rightarrow 0}$ sich als Vereinigung der unter 2. und 7., sowie für Randsituationen auch aus den unter 1., 3. bis 7., untersuchten Mengen darstellen lässt. Gemäß Lemma 1.3 erhält man aus der Höhleneinsehbarkeit der einzelnen Mengen dann die Einsehbarkeit der Höhle von $f_{\mu(Q) \rightarrow 0}$.

1. Für ein $x \in]0, n]$ bezeichnen wir mit $M(x^-, x, 0, n)$ die Menge aller Häufungswerte von Mittelwerten f_{Q_m} auf Rechtecken $Q_m \subset [0, x] \times [0, n]$ positiven Maßes, die gegen eine (eventuell zum Punkt entartete) Teilstrecke von $\{x\} \times [0, n]$ konvergieren. Ab einem hinreichend großen Index liegen alle Rechtecke Q_m in $[[x], x] \times [0, n]$, dabei bezeichnen wir mit $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner als x . Da die Funktionen f und w auf dieser Menge in der ersten Koordinate konstant sind, ist die Bestimmung der Menge $M(x^-, x, 0, n)$ ein eindimensionales Problem. Man findet, dass $M(x^-, x, 0, n)$ der Abschluss der Intervallmittelwertmenge zur Funktion $f(x^-, \cdot)$ und zum Gewicht $w(x^-, \cdot)$ ist, also mit suggestiver Schreibweise für die Intervallmittelwertmenge

$$M(x^-, x, 0, n) = \overline{f(x^-, \cdot)_{\mathcal{I}([0, n], w(x^-, \cdot))}}.$$

Die Höhle des Abschlusses der Intervallmittelwertmenge haben wir in Satz 1.12 bzw. in Bemerkung 1.18 als einsehbar erkannt.

Unter entsprechenden Voraussetzungen definiert man Mengen $M(x, x^+, 0, n)$, $M(0, n, y^-, y)$ und $M(0, n, y, y^+)$ und überlegt, dass deren Höhlen einsehbar sind.

2. Für ein $x \in]0, n[$ bezeichnen wir mit $M(x^-, x^+, 0, n)$ die Menge aller Häufungswerte von Mittelwerten f_{Q_m} auf Rechtecken $Q_m \subset [0, n] \times [0, n]$ positiven Maßes, die gegen eine (eventuell zum Punkt entartete) Teilstrecke von $\{x\} \times [0, n]$ konvergieren. Die Menge $M(x^-, x^+, 0, n)$ besteht aus den Mengen $M(x^-, x, 0, n)$ und $M(x, x^+, 0, n)$, sowie aus dem Abschluss N der Vereinigung aller Strecken $[f(x^-, \cdot)_I, f(x^+, \cdot)_I]$ mit I aus $\mathcal{I}([0, n], w(x^-, \cdot))$ und $\mathcal{I}([0, n], w(x^+, \cdot))$. Die Menge N besteht somit aus Strecken, die in der Menge $M(x^-, x, 0, n)$ beginnen und in der Menge $M(x, x^+, 0, n)$ enden. Das Lemma 1.3 sichert nun die Einsehbarkeit der Höhle von

$$M(x^-, x^+, 0, n) = M(x^-, x, 0, n) \cup M(x, x^+, 0, n) \cup N.$$

Unter entsprechenden Voraussetzungen definiert man Mengen $M(0, n, y^-, y^+)$ und überlegt, dass deren Höhlen einsehbar sind.

3. Seien $0 < i$ und $Q := [i, j] \times [k, l]$ ein nicht entartetes Rechteck, das Maß $\mu(Q) = 0$ hat und dessen linke Seite an Elementarquadrate grenzt, die nicht alle Nullquadrate sind.

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

Mit $M(i^-, j, k, l)$ bezeichnen wir die Menge aller Häufungswerte von Mittelwerten f_{Q_m} auf Rechtecken $Q_m \subset [0, j] \times [k, l]$ positiven Maßes, die gegen ein nicht entartetes Teilrechteck von Q konvergieren. Ab einem hinreichend großen Index liegen alle Rechtecke Q_m in $[i-1, i] \times [k, l]$. Damit ist die Bestimmung der Menge $M(i^-, j, k, l)$ ein eindimensionales Problem. Man findet, dass $M(i^-, j, k, l)$ der Abschluss der Intervallmittelwertmenge zur Funktion $f(i^-, \cdot)$ und zum Gewicht $w(i^-, \cdot)$ ist, also

$$M(i^-, j, k, l) = \overline{f(i^-, \cdot)_{\mathcal{I}([k, l], w(i^-, \cdot))}}.$$

Die Höhle des Abschlusses der Intervallmittelwertmenge haben wir in Satz 1.12 bzw. in Bemerkung 1.18 als einsehbar erkannt.

Unter entsprechenden Voraussetzungen definiert man Mengen $M(i, j^+, k, l)$, $M(i, j, k^-, l)$ und $M(i, j, k, l^+)$ und überlegt, dass deren Höhlen einsehbar sind.

4. Seien $0 < i, j < n$ und $Q := [i, j] \times [k, l]$ ein nicht entartetes Rechteck, das Maß $\mu(Q) = 0$ hat und dessen linke und dessen rechte Seite an Elementarquadrate grenzen, die nicht alle Nullquadrate sind.

Mit $M(i^-, j^+, k, l)$ bezeichnen wir die Menge aller Häufungswerte von Mittelwerten f_{Q_m} auf Rechtecken $Q_m \subset [0, n] \times [k, l]$ positiven Maßes, die gegen ein nicht entartetes Teilrechteck von Q konvergieren. Die Menge $M(i^-, j^+, k, l)$ besteht aus den Mengen $M(i^-, j, k, l)$ und $M(i, j^+, k, l)$, sowie aus dem Abschluss N der Vereinigung aller Strecken $[f(i^-, \cdot)_I, f(j^+, \cdot)_I]$ mit I aus $\mathcal{I}([k, l], w(i^-, \cdot))$ und $\mathcal{I}([k, l], w(j^+, \cdot))$. Die Menge N besteht somit aus Strecken, die in der Menge $M(i^-, j, k, l)$ beginnen und in der Menge $M(i, j^+, k, l)$ enden. Das Lemma 1.3 sichert nun die Einsehbarkeit der Höhle von

$$M(i^-, j^+, k, l) = M(i^-, j, k, l) \cup M(i, j^+, k, l) \cup N.$$

Unter entsprechenden Voraussetzungen definiert man Mengen $M(i, j, k^-, l^+)$ und überlegt, dass deren Höhlen einsehbar sind.

5. Seien $0 < i, 0 < k$ und $Q := [i, j] \times [k, l]$ ein nicht entartetes Rechteck, das Maß $\mu(Q) = 0$ hat und dessen linke und dessen untere Seite an Elementarquadrate grenzen, die nicht alle Nullquadrate sind.

Mit $M(i^-, j, k^-, l)$ bezeichnen wir die Menge aller Häufungswerte von Mittelwerten f_{Q_m} auf Rechtecken $Q_m \subset [0, j] \times [0, l]$ positiven Maßes, die gegen ein nicht entartetes Teilrechteck von Q konvergieren. Die Menge $M(i^-, j, k^-, l)$ besteht aus den Mengen $M(i^-, j, k, l)$ und $M(i, j, k^-, l)$, sowie aus dem Abschluss N der Vereinigung aller Strecken $[f(i^-, \cdot)_I, f(\cdot, k^-)_J]$ mit $k \in I \in \mathcal{I}([k, l], w(i^-, \cdot))$ und $i \in J \in \mathcal{I}([i, j], w(\cdot, k^-))$. Dazu beachte man, dass der Anteil von Q_m an $[i-1, i] \times [k-1, k]$ quadratisch gegen null geht im Gegensatz zu dem linear kleiner werdenden Anteil von Q_m an $[i-1, i] \times [k, l]$ und an $[i, j] \times [k-1, k]$. Die Menge N besteht somit aus Strecken, die in der Menge $M(i^-, j, k, l)$ beginnen und in

der Menge $M(i, j, k^-, l)$ enden. Das Lemma 1.3 sichert nun die Einsehbarkeit der Höhle von

$$M(i^-, j, k^-, l) = M(i^-, j, k, l) \cup M(i, j, k^-, l) \cup N.$$

Unter entsprechenden Voraussetzungen definiert man Mengen $M(i^-, j, k, l^+)$, $M(i, j^+, k^-, l)$ und $M(i, j^+, k, l^+)$ und überlegt, dass deren Höhlen einsehbar sind.

6. Seien $0 < i, j < n$, $0 < k$ und $Q := [i, j] \times [k, l]$ ein nicht entartetes Rechteck, das Maß $\mu(Q) = 0$ hat und dessen linke, dessen rechte und dessen untere Seite an Elementarquadrate grenzen, die nicht alle Nullquadrate sind.

Mit $M(i^-, j^+, k^-, l)$ bezeichnen wir die Menge aller Häufungswerte von Mittelwerten f_{Q_m} auf Rechtecken $Q_m \subset [0, n] \times [0, l]$ positiven Maßes, die gegen ein nicht entartetes Teilrechteck von Q konvergieren. Die Menge $M(i^-, j^+, k^-, l)$ besteht aus den Mengen $M(i^-, j^+, k, l)$, $M(i, j^+, k^-, l)$ und $M(i^-, j, k^-, l)$, sowie aus dem Abschluss N der Vereinigung von gewissen Strecken $[z, f(\cdot, k^-)_{[i, j]}]$ mit $z \in M(i^-, j^+, k, l)$. Die Menge N besteht somit aus Strecken, die in der Menge $M(i^-, j^+, k, l)$ beginnen und in der Menge $M(i^-, j, k^-, l)$ enden. Das Lemma 1.3 sichert nun die Einsehbarkeit der Höhle von

$$M(i^-, j^+, k^-, l) = M(i^-, j^+, k, l) \cup M(i, j^+, k^-, l) \cup M(i^-, j, k^-, l) \cup N.$$

Unter geeigneten Voraussetzungen definiert man Mengen $M(i^-, j^+, k, l^+)$, $M(i^-, j, k^-, l^+)$ und $M(i, j^+, k^-, l^+)$ und überlegt, dass deren Höhlen einsehbar sind.

7. Schließlich seien $0 < i, j < n$, $0 < k, l < n$ und $Q := [i, j] \times [k, l]$ ein nicht entartetes Rechteck, das Maß $\mu(Q) = 0$ hat und dessen Seiten an Elementarquadrate grenzen, die nicht alle Nullquadrate sind.

Mit $M(i^-, j^+, k^-, l^+)$ bezeichnen wir die Menge aller Häufungswerte von Mittelwerten f_{Q_m} auf Rechtecken $Q_m \subset [0, n] \times [0, n]$ positiven Maßes, die gegen ein nicht entartetes Teilrechteck von Q konvergieren. Die Menge $M(i^-, j^+, k^-, l^+)$ besteht aus den Mengen $M(i^-, j^+, k^-, l)$, $M(i^-, j^+, k, l^+)$, $M(i^-, j, k^-, l^+)$ und $M(i, j^+, k^-, l^+)$, sowie aus der konvexen Hülle N der Mittelwerte $f(i^-, \cdot)_{[k, l]}$, $f(j^+, \cdot)_{[k, l]}$, $f(\cdot, k^-)_{[i, j]}$ und $f(\cdot, l^+)_{[i, j]}$. Da jeder der vier Mittelwerte in einer der vier Mengen liegt, sichert Lemma 1.3 die Einsehbarkeit der Höhle von

$$\begin{aligned} M(i^-, j^+, k^-, l^+) = & M(i^-, j^+, k^-, l) \cup M(i^-, j^+, k, l^+) \\ & \cup M(i^-, j, k^-, l^+) \cup M(i, j^+, k^-, l^+) \cup N. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 1.21 (Höhleninklusion bei Treppenfunktionen)

Sei $f : Q_0 \rightarrow B$ eine Treppenfunktion mit konverliegendem Bild, die Gewichtsfunktion $w : Q_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ von μ eine Treppenfunktion, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(Q_0, \mu)$ die Menge aller Quader mit positivem Maß $\mu(Q) > 0$, ferner $f^* : [0, \mu(Q_0)] \rightarrow B$ die fallende Umordnung von f bzgl. μ , sowie \mathcal{I} die Menge aller Teilintervalle von $[0, \mu(Q_0)]$ positiver Länge $|I| > 0$. Dann ist die Höhle $H \overline{f_Q}$ in der Höhle $H \overline{f_{\mathcal{I}}^*}$ enthalten.

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

Beweis Wir zeigen die Aussage durch eine Induktion nach der Anzahl der Treppenstufen, auf denen f und w konstant und die Gewichtsfunktion w nicht null ist. Genauer werden wir per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage zeigen.

$\mathcal{A}(n) \Leftrightarrow$ Seien Q_1, \dots, Q_n achsenparallele, N -dimensionale Teilquader von Q_0 mit paarweise disjunktem Inneren, sei $w = \sum_{i=1}^n w_i \mathbb{1}_{Q_i}$ eine Funktion mit positiven Werten w_1, \dots, w_n auf Q_1, \dots, Q_n und $w = 0$ auf $Q_0 \setminus \cup_{i=1}^n Q_i$ und sei f eine Funktion, die für $i = 1, \dots, n$ auf dem Quader Q_i einen Wert b_i mit $b_1 \geq \dots \geq b_n$ hat. Dann gilt die Höhleninklusion $\overline{H f_{Q(w)}} \subset \overline{H f_{\mathcal{I}(w)}^{*w}}$.

Wir bezeichnen dabei mit $\mathcal{Q}(w)$ die Menge aller achsenparallelen Teilquader $Q \subset Q_0$ mit $\int_Q w > 0$. Die fallende Umordnung von f bzgl. des gewichteten Lebesgue-Maßes zu w notieren wir als f^{*w} . In der angegebenen Situation berechnet man

$$f^{*w} : [0, \int_{Q_0} w] \rightarrow B, \quad f^{*w} = \sum_{i=1}^n b_i \mathbb{1}_{I_i}$$

mit $I_1 := [0, w_1 |Q_1|]$ und $I_i := [\sum_{j=1}^{i-1} w_j |Q_j|, \sum_{j=1}^i w_j |Q_j|]$ für $i \in \{2, \dots, n\}$. Mit $\mathcal{I}(w)$ bezeichnen wir die Menge aller Teilintervalle $I \subset [0, \int_{Q_0} w]$ mit positiver Länge $|I| > 0$.

Man überlegt, dass man für alle Treppenfunktionen f und w nach gemeinsamer Verfeinerung ein solches n , solche Werte $b_1, \dots, b_n, w_1, \dots, w_n$ und Quader Q_1, \dots, Q_n findet. Damit liefert die Induktion tatsächlich einen Beweis des Satzes.

Induktionsverankerung $\mathcal{A}(1)$ und $\mathcal{A}(2)$: Für $n = 1$ bestehen die Mittelwertmenge $f_{Q(w)}$ und $f_{\mathcal{I}(w)}^{*w}$ aus dem Punkt $\{b_1\}$, für $n = 2$ aus der Strecke $[b_1, b_2]$. Damit gilt insbesondere $\overline{H f_{Q(w)}} = \overline{H f_{\mathcal{I}(w)}^{*w}}$ für $n = 1$ und $n = 2$.

Induktionsschluss $\mathcal{A}(n-1) \Rightarrow \mathcal{A}(n)$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$: Gelte $\mathcal{A}(n-1)$, seien Q_1, \dots, Q_n Quader mit paarweise disjunktem Innern, sei $w = \sum_{i=1}^n w_i \mathbb{1}_{Q_i}$ mit positiven Werten w_i , und sei f eine Funktion mit konstantem Wert b_i auf Q_i und $b_1 \geq \dots \geq b_n$.

Wir betrachten die Gewichtsfunktionen $v = \sum_{i=1}^{n-1} w_i \mathbb{1}_{Q_i}$ und $u = \sum_{i=2}^n w_i \mathbb{1}_{Q_i}$, d. h. für Mittelwertbildungen von f lassen wir einmal den höchsten Wert b_n und einmal den niedrigsten Wert b_1 weg. Die Induktionsvoraussetzung $\mathcal{A}(n-1)$ garantiert die Inklusionen

$$\overline{H f_{Q(v)}} \subset \overline{H f_{\mathcal{I}(v)}^{*v}} \quad \text{und} \quad \overline{H f_{Q(u)}} \subset \overline{H f_{\mathcal{I}(u)}^{*u}}.$$

Mit der in Satz 1.20 nachgewiesenen Einsehbarkeit von $\overline{H f_{Q(w)}}$ sieht man wie im Fall einer Variablen (vgl. Satz 1.14) die Inklusionen

$$\overline{H f_{Q(w)}} \subset \overline{H f_{Q(v)}}, \quad \overline{H f_{Q(w)}} \subset \overline{H f_{Q(u)}} \quad \text{und} \quad \overline{H f_{Q(w)}} \subset \overline{H S},$$

wobei wir mit S wieder den $\partial A[b_n, b_1]$ -Schatten vom Gesamtmittelwert f_{Q_0} bezeichnen. Schließlich hat man wie bei einer Variablen wieder die Identität

$$\mathbb{H} \overline{f_{\mathcal{I}(v)}^{*v}} \cap \mathbb{H} \overline{f_{\mathcal{I}(u)}^{*u}} \cap \mathbb{H} S = \mathbb{H} \overline{f_{\mathcal{I}(w)}^{*w}}.$$

Kombiniert man die Inklusionen, erhält man wie behauptet

$$\mathbb{H} \overline{f_{\mathcal{Q}(w)}} \subset \mathbb{H} \overline{f_{\mathcal{I}(w)}^{*w}}. \quad \square$$

Nehmen wir in den Sätzen 1.20 und 1.21 als Gewichtsfunktion $w \equiv 1$ auf Q_0 , so haben wir den Spezialfall, dass μ das Lebesgue-Maß auf Q_0 ist. Nehmen wir für $f : Q_0 \rightarrow B$ eine beliebige Regelfunktion und benutzen das Approximationslemma 1.5, sowie das Argument am Ende des Beweises von Satz 1.14, so erhalten wir die

Folgerung 1.22 (Quadermittelwerte bei Regelfunktionen)

Sei $f : Q_0 \rightarrow B$ eine Regelfunktion mit konvexliegendem Bild, sei \mathcal{Q} die Menge aller achsenparallelen Teilquader $Q \subset Q_0$ positiven Lebesgue-Maßes $\mathcal{L}^N(Q) > 0$ und \mathcal{I} die Menge aller Teilintervalle von $[0, \mathcal{L}^N(Q_0)]$ mit positiver Länge. Dann ist die Höhle $\mathbb{H} \overline{f_{\mathcal{Q}}}$ einsehbar und in der Höhle $\mathbb{H} \overline{f_{\mathcal{I}}^*}$ enthalten.

Bemerkung 1.23 Die in der Folgerung angegebene Inklusionsbeziehung ist optimal. Für eine Funktion $f : Q_0 \rightarrow B$, die in einer Variablen fällt und in allen anderen konstant ist, sieht man nämlich leicht $f_{\mathcal{Q}} = f_{\mathcal{I}}^*$ und damit auch $\mathbb{H} \overline{f_{\mathcal{Q}}} = \mathbb{H} \overline{f_{\mathcal{I}}^*}$. Gleichzeitig gibt es zu jeder Regelfunktion eine Umverteilung mit dieser Eigenschaft. Also besteht für jede Regelfunktion $f : Q_0 \rightarrow B$ die Identität

$$\bigcup_{h \simeq f} \mathbb{H} \overline{h_{\mathcal{Q}}} = \mathbb{H} \overline{f_{\mathcal{I}}^*},$$

wobei die Vereinigung über alle zu f gleichverteilten Regelfunktionen $h : Q_0 \rightarrow B$ genommen ist. In diesem Sinne ist $\mathbb{H} \overline{f_{\mathcal{I}}^*}$ das „Maximum“ der Höhlen zu allen Umordnungen von f .

Bemerkung 1.24 Der Höhlensatz gilt auch für alle mit Treppenfunktionen w gewichteten Lebesgue-Maße statt des Lebesgue-Maßes. Offen ist, ob der Höhlensatz bei mehreren Variablen auch für alle gewichteten Lebesgue-Maße gilt, wie dies bei Funktionen einer Variablen der Fall ist.

1.3.2. Mittelwerte auf Würfeln

Sei im Folgenden $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und W_0 ein N -dimensionaler, achsenparalleler Würfel im \mathbb{R}^N . Mit $\mathcal{W} = \mathcal{W}(W_0, \mathcal{L}^N)$ bezeichnen wir die Menge aller Teilwürfel $W \subset W_0$ mit positivem Inhalt $\mathcal{L}^N(W) > 0$. Wir betrachten Funktionen $f : W_0 \rightarrow B$ mit konvexliegendem Bild und untersuchen die Menge $f_{\mathcal{W}}$ der Würfelmittelwerte.

Wir wollen für $N = 2$ einige Beispiele von Quadratmittelwertmengen zu Treppenfunktionen untersuchen. Diese Beispiele zeigen, dass Aussagen, die mit den für Intervall- und Quadermittelwertmengen bewiesenen Höhlensätzen vergleichbar wären, für Würfelmittelwertmengen nicht gelten.

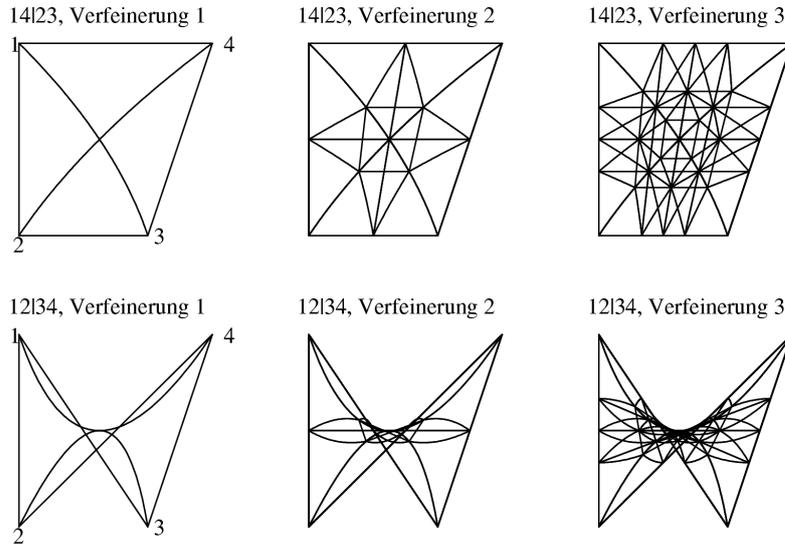
Die Computorexperimente sind mit einem Maple-Programm (siehe Anhang) ausgeführt. Dieses wurde wieder auf Basis einer Rekursionsformel erstellt. Hier besteht die Menge $\mathcal{W}_{1..n,1..n}$ aller Teilquadrate von $[0, n] \times [0, n]$ aus den vier Mengen $\mathcal{W}_{1..n-1,1..n-1}$, $\mathcal{W}_{1..n-1,2..n}$, $\mathcal{W}_{2..n,1..n-1}$, $\mathcal{W}_{2..n,2..n}$ sowie einer Restmenge \mathcal{M} aller Quadrate, die $[1, n-1] \times [1, n-1]$ enthalten. Dies führt auf die **Rekursionsformel**

$$f_{\mathcal{W}_{1..n,1..n}} = f_{\mathcal{W}_{1..n-1,1..n-1}} \cup f_{\mathcal{W}_{1..n-1,2..n}} \cup f_{\mathcal{W}_{2..n,1..n-1}} \cup f_{\mathcal{W}_{2..n,2..n}} \cup f_{\mathcal{M}}.$$

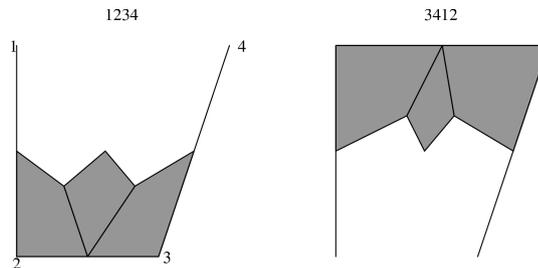
Das Programm benutzt von der Restmenge jeweils nur die Quadrate, bei denen eine Ecke $(0, 0)$, $(0, n)$, $(n, 0)$ oder (n, n) fest ist, sowie die Quadrate, die Seitenlänge $n - 1$ haben und bei denen eine Seite auf einer Seite von $[0, n] \times [0, n]$ liegt. Um dies auszugleichen und die Menge $f_{\mathcal{W}}$ anzunähern, haben wir verschiedene Verfeinerungen ausgedrückt. Diese entstehen dadurch, dass man dieselbe Funktion f als Treppenfunktion zu doppelt oder dreifach verfeinerten Unterteilungen auffasst. Auf diese Weise erhält man einen guten Eindruck, wie die Quadratmittelwertmengen aussehen.

Die Beschriftung ist so gewählt, dass bei „14 | 23“ die Quadratmittelwertmenge zur Treppenfunktion mit konstantem Wert b_1 auf $[0, 1] \times [0, 1]$, b_4 auf $[1, 2] \times [0, 1]$, b_2 auf $[0, 1] \times [1, 2]$ und b_3 auf $[1, 2] \times [1, 2]$ berechnet wird. Entsprechend gibt „123 | 456 | 789“ an, auf welchen Quadraten ein Wert b_i angenommen wird, also liegt z. B. das Quadrat, auf dem f den Wert b_5 annimmt in der Mitte und hat eine gemeinsame Seite mit den Quadraten zu den Werten b_2, b_4, b_6, b_7 . In der ersten Zeichnung haben wir jeweils durch Notation mit dem Index i angegeben, welche Ecke der Punkt b_i ist.

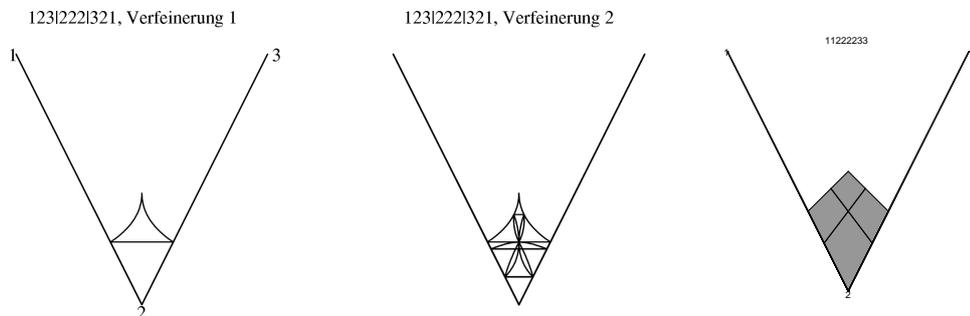
Im Fall einer Treppenfunktion mit 2×2 Werten erhalten wir als Quadratmittelwertmenge entweder das Viereck oder das „getwistete“ Viereck der 4 Eckpunkte. Die Höhlen dieser Mengen sind einsehbar und in der Höhle der Intervallmittelwertmenge der fallenden Umordnung enthalten. Dies kann man sich analytisch überlegen, wir begnügen uns aber mit dem folgenden Beispiel:



Die folgenden Intervallmittelwertmengen der zugehörigen monotonen Umordnungen 1234 und 3412 haben wir wie in den Beispielen 1.9 und 1.10 berechnet. Man erkennt, dass die Höhlen bei dem getwisteten Viereck oben, in den entsprechenden Höhlen der monotonen Umordnung enthalten sind.



Im Falle einer Treppenfunktion mit 3×3 Werten kann man schon Beispiele angeben, bei denen sowohl die Einsehbarkeit der Höhlen als auch die Inklusion in die Höhle der Intervallmittelwertmenge der fallenden Umordnung nicht mehr gegeben ist. Die Intervallmittelwertmenge der zugehörigen fallenden Umordnung ist die Zeichnung rechts.



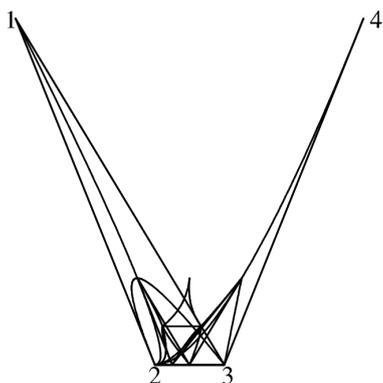
Im Falle einer Treppenfunktion mit 4×4 Werten kann man sogar ein Beispiel angeben, das zeigt, dass es im Allgemeinen keine Umordnung $g : Q_0 \rightarrow B$ einer

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

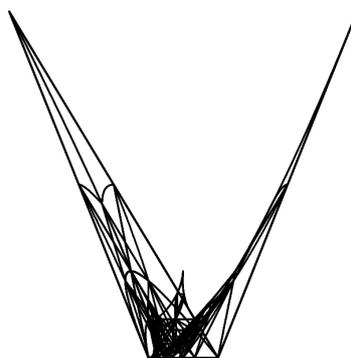
Funktion $f : Q_0 \rightarrow B$ gibt, die die Höhlen zu allen anderen Umordnungen von f enthält.

Dazu betrachten wir das folgende Beispiel zu den Punkten $b_1 = -5 + 4i$, $b_2 = -1$, $b_3 = 1$, $b_4 = 5 + 4i$. Die Spitze wird von links erreicht, d. h. fällt man das Lot vom Ende der Spitze, so liegen in der Nähe der Spitze alle Punkte links davon. Die Auflösung läßt dieses Phänomen leider nicht sehr deutlich erkennen, aber man kann sich auch analytisch überlegen, dass die Spitze der Mittelwert des gesamten Quadrates ist und dass bei Verkleinerung des Quadrates die Mittelwerte nach links gehen. Die Umordnung 4221 | 3332 | 2333 | 1224 hat das spiegelverkehrte Bild, also wird dort die gleiche Spitze von rechts erreicht. Da Quadratmittelwertmengen immer wegzusammenhängend sind und die Spitze der Gesamtmittelwert ist, der bei jeder Anordnung vorhanden ist, kann es somit keine Umordnung der Funktion geben, die eine Höhle hat, welche die Höhlen dieser beiden Anordnungen enthält.

334|2223|3222|4331, Verfeinerung 1



1334|2223|3222|4331, Verfeinerung 2



Neben den negativen Resultaten legen die aufgeführten und andere Computerexperimente die Vermutung nahe, dass zumindest eine Abschwächung der Höhlensätze gültig sein sollte.

Vermutung 1.25

Bezeichnen wir mit $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ die Mengen der Teilintervalle von $[0, |W_0|/2]$ bzw. von $[|W_0|/2, |W_0|]$, dann sollte die Inklusion

$$H \overline{f_W} \subset H(\overline{f_{\mathcal{I}_1}} \cup \overline{f_{\mathcal{I}_2}})$$

gelten.

Die Gültigkeit dieser Vermutung würde für die ins Auge gefassten Anwendungen ausreichen (vgl. auch Bemerkung 1.36).

Eine Schwierigkeit beim Würfelsystem rührt daher, dass jetzt weniger Mittelwerte als beim Quadersystem vorhanden sind. Insbesondere fallen bei Treppenfunktionen die Strecken in der Mittelwertmenge weg, die im Quaderfall durch

das Vergrößern der Quader in eine Richtung entstehen; die Werte auf dem neuen Teil werden beim Vergrößern der Quader linear eingemittelt. In der Würfelmittelwertmenge kann man beim Vergrößern eines Würfels W im Allgemeinen nur noch nichtlineare Kurven erwarten. Denn neben dem sich linear verändernden Anteil, der an den Seiten von W dazukommt, hat man immer auch einen sich quadratisch (oder höherer Ordnung) verändernden Anteil, der an den Kanten oder Ecken von W dazukommt.

Problematischer ist aber wohl noch, dass man beim Würfelsystem kein Analogon zu der Teilungseigenschaft im Quadersystem hat: einen Quader Q kann man durch einen Schnitt in zwei Teilquader Q_1, Q_2 unterteilen, der Mittelwert f_Q liegt dann auf der Strecke $[f_{Q_1}, f_{Q_2}]$. Ein solches Argument war entscheidend im Beweis von Satz 1.11 bzw. 1.19. Ähnliches ist im Würfelsystem aber nicht möglich.

Obwohl die Analyse der Würfelmittelwertmenge gerade auch unter Anwendungsgesichtspunkten sehr natürlich ist, bleibt wegen der genannten Schwierigkeiten der Beweis eines Höhlensatzes für Würfelmittelwertmengen, etwa in Form der obigen Vermutung, ein offenes Problem.

1.3.3. Mittelwerte auf raumfüllenden Kurven

In diesem Kapitel betrachten wir eine Menge P_0 , auf der ein endliches (äußeres) Maß μ und eine Metrik d definiert sind. Die Menge soll im maßtheoretischen Sinn zu einem Intervall äquivalent sein. Was wir damit meinen, klären wir in der

Definition 1.26

Sei $I_0 \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Eine Abbildung $p : I_0 \rightarrow P_0$ nennen wir **maßerhaltend**, wenn für jede μ -messbare Menge $P \subset P_0$ das Urbild $p^{-1}(P)$ Lebesgue-messbar ist und gleiches Maß hat: $|p^{-1}(P)| = \mu(P)$.

Eine Abbildung $p : I_0 \rightarrow P_0$ heißt **fast überall injektiv**, falls die Menge

$$N := \{t \in I_0 : p^{-1}\{p(t)\} \neq \{t\}\}$$

der Punkte, deren Wert mehr als einmal angenommen wird, eine Menge vom Lebesgue-Maß null ist.

Eine Menge P_0 mit endlichem Maß μ nennen wir **Kurvenintervall**, falls es eine stetige, surjektive, fast überall injektive, maßerhaltende Abbildung $p : I_0 := [0, \mu(P_0)] \rightarrow P_0$ gibt, für die alle Bildmengen von Teilintervallen μ -messbar sind. In dieser Situation sprechen wir auch davon, dass P_0 mittels p zu einem Kurvenintervall wird. Das Mengensystem aller Bildmengen von Intervallen positiver Länge, also die Menge

$$p(\mathcal{I}) := \{p(I) : I \text{ Teilintervall von } I_0 \text{ mit } |I| > 0\},$$

nennen wir dann die **Kurventeilintervalle** von P_0 bzgl. p .

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

Der folgende Satz zeigt, dass für Funktionen $f : P_0 \rightarrow B$ auf Kurvenintervallen P_0 und mit konvexliegendem Bild B ein Höhlensatz gilt, der den Untersuchungen bei einer Variablen entspricht. Damit kann man die gefundenen Aussagen bei einer Variablen auf eine sehr große Klasse von Situationen ausdehnen.

Satz 1.27 (Höhlensatz für Kurvenintervalle)

Sei P_0 mittels $p : I_0 \rightarrow P_0$ ein Kurvenintervall und $f : P_0 \rightarrow B$ eine stetige Funktion mit konvexliegendem Bildbereich. Dann ist die Höhle $\overline{H f_{p(\mathcal{I})}}$ des Abschlusses aller Mittelwerte auf Kurventeilintervallen einsehbar und in der Höhle $\overline{H f_{\mathcal{I}}^*}$ zur fallenden Umordnung f^* bzgl. μ enthalten.

Beweis Die Hintereinanderausführung $f \circ p : I_0 \rightarrow B$ ist eine stetige Funktion einer Variablen mit konvexliegendem Bild. Die Sätze 1.12 und 1.14 garantieren die Einsehbarkeit der Höhlen $\overline{H (f \circ p)_{\mathcal{I}}}$ und $\overline{H (f \circ p)_{\mathcal{I}}^*}$, sowie die Inklusion

$$\overline{H (f \circ p)_{\mathcal{I}}} \subset \overline{H (f \circ p)_{\mathcal{I}}^*}.$$

Für jedes Intervall $I \subset I_0$ mit positivem Maß $|I| > 0$ gilt

$$\mu(p(I)) = |p^{-1}(p(I))| = |I|.$$

Dabei ist die erste Identität die Maßerhaltung von p , die zweite folgt daraus, dass p fast überall injektiv ist. Mit der gleichen Begründung gilt für alle $b \in B$

$$\mu\{x \in p(I) : f(x) > b\} = |p^{-1}\{x \in p(I) : f(x) > b\}| = |\{t \in I : f \circ p(t) > b\}|.$$

Deshalb stimmen die Mittelwerte

$$(f \circ p)_I = \frac{1}{|I|} \int_I f \circ p d\mathcal{L} \quad \text{und} \quad f_{p(I)} = \frac{1}{\mu(p(I))} \int_{p(I)} f d\mu$$

überein. Man beachte dazu, dass ein Integral nur von der Verteilungsfunktion abhängt, und diese ist hier für beide Integranden identisch

$$b \mapsto \mu\{x \in p(I) : f(x) > b\} = |\{t \in I : f \circ p(t) > b\}|.$$

Die Gleichheit der Verteilungsfunktion garantiert auch, dass die fallenden Umordnungen $(f \circ p)^*$ und f^* übereinstimmen.

Insbesondere ist $(f \circ p)_I = f_{p(I)}$ für alle $I \in \mathcal{I}$. Also ist $(f \circ p)_{\mathcal{I}} = f_{p(\mathcal{I})}$ und damit

$$\overline{H (f \circ p)_{\mathcal{I}}} = \overline{H f_{p(\mathcal{I})}}.$$

Ferner ist $(f \circ p)_{\mathcal{I}}^* = f_{\mathcal{I}}^*$ und damit

$$\overline{H (f \circ p)_{\mathcal{I}}^*} = \overline{H f_{\mathcal{I}}^*}.$$

Die Kombination dieser Ergebnisse mit der Inklusion vom Beweisbeginn zeigt die Behauptung. □

Bemerkung 1.28 Die Stetigkeitsvoraussetzungen an f und p sind technischer Natur. Sie stellen sicher, dass in der sehr allgemeinen Version des Satzes die Funktion $f \circ p$ stetig und damit eine Regelfunktion ist. Im konkreten Fall wird man auch „Sprünge“ bei f und p zulassen können.

Beispiel 1.29 (Funktionen auf der Kreislinie)

Wir nehmen als P_0 die Einheitskreislinie \mathbb{S}^1 mit dem Hausdorff-Maß und der Standardmetrik aus der Ebene. Dann ist \mathbb{S}^1 mittels der Abbildung $p : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{S}^1, p(t) := e^{it}$ ein Kurvenintervall. Der Satz liefert also einen Höhlensatz für Funktionen $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow B$ mit konvexliegendem Bild. Die Menge $p(\mathcal{I})$ der Kurventeilintervalle besteht hier aus \mathbb{S}^1 und allen abgeschlossenen Bögen von \mathbb{S}^1 , die positives Maß haben und die den Punkt $1 = e^{i0}$ nicht „im Innern“ enthalten.

Betrachtet man statt $p(\mathcal{I})$ die Menge \mathcal{S} aller abgeschlossenen Teilbögen von \mathbb{S}^1 mit positivem Maß, dann ist die Höhle $H \overline{f_{\mathcal{S}}}$ wieder einsehbar. Denn man kann \mathcal{S} als Vereinigung von $p(\mathcal{I})$ und $\tilde{p}(\mathcal{I})$ darstellen, wobei wir für \tilde{p} eine andere Kreisfunktion z. B. $\tilde{p} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{S}^1$ mit $\tilde{p}(t) = e^{it+\pi}$ wählen. Mit Lemma 1.3 findet man $H \overline{f_{\mathcal{S}}} = H \overline{f_{p(\mathcal{I})}} \cap H \overline{f_{\tilde{p}(\mathcal{I})}}$ und die Einsehbarkeit dieser Höhle. Ferner können wir die Höhle wieder mit der Höhle der fallenden Umordnung abschätzen: $H \overline{f_{\mathcal{S}}} \subset H \overline{f_{p(\mathcal{I})}} \subset H \overline{f_{\mathcal{I}}^*}$. Dabei folgt die erste Inklusion unmittelbar aus $p(\mathcal{I}) \subset \mathcal{S}$.

Beispiel 1.30 Analog kann man als P_0 das Bild von regulären, stetig differenzierbaren Kurven p im \mathbb{R}^n betrachten. Man wählt das eindimensionale Hausdorff-Maß und die Standardmetrik im \mathbb{R}^n . Ist die Länge von P_0 endlich und hat die Menge der Selbstüberschneidungen verschwindendes Maß, dann wird P_0 mittels der Parametrisierung nach der Bogenlänge zu einem Kurvenintervall.

Sehr interessant in diesem Zusammenhang sind flächen- und raumfüllende Kurven. Auf ihnen liegt unser Hauptaugenmerk in diesem Kapitel. Wir betrachten für die Dimension 2 insbesondere die **Hilbert-Kurve**. Sie wurde von Hilbert in der Arbeit [Hil1891] eingeführt. Zu weiteren Informationen und zu den hier nicht vollständig ausgeführten Beweisen sei auf [Sag94] verwiesen. Die Hilbert-Kurve $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ wird wie folgt definiert:

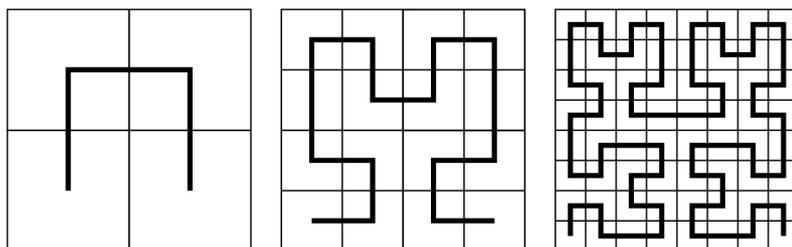
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ zerteilen wir das Intervall $[0, 1]$ in 4^n gleich große Intervalle $I_n^1 \leq \dots \leq I_n^{4^n}$ und das Quadrat $[0, 1]^2$ in 4^n gleich große Quadrate $W_n^1, \dots, W_n^{4^n}$. Die Nummerierung der Quadrate können wir dabei so wählen, dass

- bei ineinanderliegenden Intervallen $I_n^k \subset I_m^l$ auch stets die Quadrate $W_n^k \subset W_m^l$ ineinanderliegen und
- zwei im oberen Index aufeinanderfolgende Quadrate W_n^k und W_n^{k+1} immer eine gemeinsame Seite haben.

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

Um diese Nummerierung zu erreichen, benutzen wir die Konstruktion, die aus den folgenden Zeichnungen ablesbar ist (und von der man die angegebenen Eigenschaften per Induktion beweisen kann). Mit der Forderung, dass der Punkt $(0, 0)$ in allen ersten Würfeln W_n^1 und $(1, 0)$ in den letzten Würfeln $W_n^{4^n}$ liegen soll, wird die Nummerierung eindeutig.

Man wählt dann eine Funktion $h_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$, die jedes Intervall I_n^k in das Quadrat W_n^k abbildet und stetig ist. Dazu muss man insbesondere den Punkt $f_n(\frac{k}{4^n})$ auf der gemeinsamen Seite $W_n^k \cap W_n^{k+1}$ wählen. Die Bilder möglicher Funktionen h_1, h_2, h_3 sind in den folgenden Skizzen als dicke Linien eingezeichnet.



Man kann zeigen, dass h_n eine gleichmäßige Cauchy-Folge im Raum der stetigen Funktionen ist. Da dieser Raum vollständig ist, erhält man so die Existenz und Stetigkeit der punktweisen Grenzfunktion

$$h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2, h(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(t).$$

Diese ist nicht abhängig von der konkreten Wahl der Funktionen h_n und heißt Hilbert-Kurve. Von ihr sind folgende Eigenschaften bekannt:

1. Die Hilbert-Kurve ist auf ganz $[0, 1]$ stetig, aber nirgendwo differenzierbar. Genauer weiß man, dass

$$h \in C^{1/2}$$

Hölder-stetig zum Exponenten $1/2$, aber nicht besser Hölder-stetig ist (vgl. [Miln80]).

2. Die Hilbert-Kurve ist surjektiv, d. h. das Bild der Kurve füllt die ganze Fläche $[0, 1]^2$.
3. Die Hilbert-Kurve ist maßerhaltend: jede \mathcal{L}^2 -messbare Menge $M \subset [0, 1]^2$ hat ein \mathcal{L} -messbares Urbild mit gleichem Maß.

Ferner wird jede \mathcal{L} -messbare Menge auf eine \mathcal{L}^2 -messbare Menge abgebildet.

4. Die Hilbert-Kurve ist nicht injektiv, aber sie ist fast überall injektiv. Genauer ist h auf $[0, 1] \setminus N$ mit $N := \{\frac{k}{4^n} : n \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, 4^n - 1\}\}$ injektiv und die Menge N ist als Teilmenge von \mathbb{Q} abzählbar und damit Nullmenge.
5. Jede Bildmenge $h([\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n}])$ ist ein Quadrat mit Kantenlänge $\frac{1}{2^n}$.

Insbesondere wird das Einheitsquadrat mittels der Hilbert-Kurve zu einem Kurvenintervall. Die Kurventeilintervalle zur Hilbert-Kurve, also Mengen von der Form $h(I)$ mit einem Teilintervall $I \subset [0, 1]$ von positiver Länge, wollen wir die **Hilbert-Intervalle** in $[0, 1]^2$ nennen. Besonders bemerkenswert für unsere Zwecke ist, dass in dem Mengensystem $h(\mathcal{I})$ der Hilbert-Intervalle keine „beliebig dünnen“ Mengen auftreten. Dazu zeigen wir, dass zu jedem Hilbert-Intervall $P \in h(\mathcal{I})$ das Größenverhältnis vom kleinsten umschriebenen Quadrat $W \supset P$ zum größten einbeschriebenen Quadrat $W \subset P$ beschränkt bleibt, genauer gilt für alle Hilbert-Intervalle $P \in h(\mathcal{I})$

$$1 \leq \frac{\inf_{W \supset P} |W|}{\sup_{W \subset P} |W|} \leq 16. \tag{1.5}$$

Diese Abschätzungen sind optimal.

Beweis Die erste Ungleichung ist klar, da der Zähler immer größer als der Nenner ist. Die zweite Ungleichung erhält man aus der folgenden Betrachtung.

Sei ein beliebiges Intervall $I \in \mathcal{I}$ gegeben. Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$ minimal mit der Eigenschaft, dass ein Intervall der Form I_n^k ganz in I liegt. Falls $n = 1$ oder 2 ist, sind wir fertig, denn dann gilt

$$\frac{\inf_{W \supset h(I)} |W|}{\sup_{W \subset h(I)} |W|} \leq \frac{|[0, 1]^2|}{|h(I_2^k)|} = \frac{1}{1/4^2} = 16.$$

Falls $n \geq 3$ bezeichnen wir mit $I_n^{k_0}$ und $I_n^{k_1}$ die Intervalle in I mit minimalem Index k_0 bzw. maximalem Index k_1 . Diese beiden Indizes können sich höchstens um fünf unterscheiden: $k_1 - k_0 \leq 5$, denn sonst findet man in $I_n^{k_0} \cup I_n^{k_0+1} \cup \dots \cup I_n^{k_1}$ ein Intervall der Form I_{n-1}^l im Widerspruch zur Minimalität von n . Die zugehörigen Quadrate $W_n^{k_0}, \dots, W_n^{k_1}$ haben eins nach dem anderen eine gemeinsame Seite und liegen in maximal zwei benachbarten Quadraten der Form W_{n-1}^m, W_{n-1}^{m+1} . (In drei benachbarten Quadraten dieser Form können sie nicht liegen, denn sonst wird das „mittlere“ Quadrat ganz ausgefüllt und man erhält einen Widerspruch zur Minimalität von n .) Zwei benachbarte Quadrate der Seitenlänge $\frac{1}{2^{n-1}}$ lassen sich aber immer mit einem Quadrat W der Seitenlänge $\frac{1}{2^{n-2}}$ umschließen. Damit gilt

$$\frac{\inf_{W \supset h(I)} |W|}{\sup_{W \subset h(I)} |W|} \leq \frac{|W|}{|h(I_n^{k_0})|} = \frac{1/4^{n-2}}{1/4^n} = 16$$

und wir haben die zweite Ungleichung gezeigt.

Das Beispiel $h([0, 1]) = [0, 1]^2$ zeigt, dass bei der ersten Ungleichung Gleichheit eintreten kann. Das Beispiel $h([1/16, 6/16]) = W_2^2 \cup \dots \cup W_2^6$ (dies sind die Quadrate, die oben in der zweiten Zeichnung an zweiter bis sechster Stelle des Weges liegen) zeigt, dass auch in der zweiten Ungleichung Gleichheit eintreten kann. \square

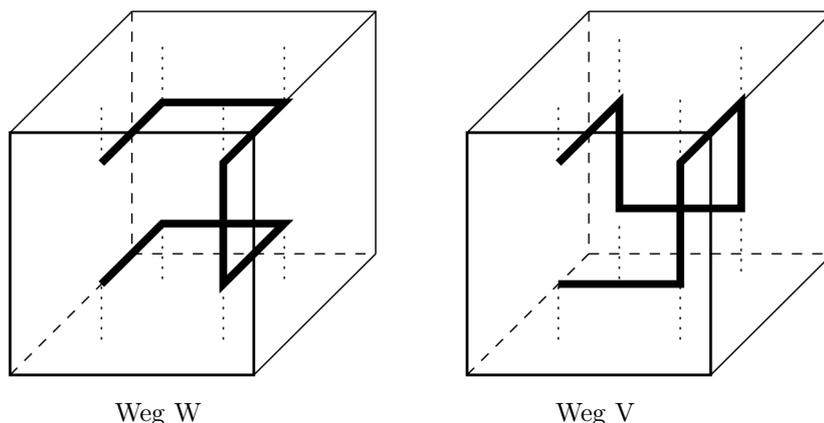
1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

Durch diese Ungleichung wird der Höhlensatz zu den Hilbert-Intervallen von $[0, 1]^2$ für die Anwendung interessanter als der für das System aller Rechtecke von $[0, 1]^2$ (vgl. Folgerung 1.22). Das Verhältnis von umschriebenen Quadraten zu einbeschriebenen Quadraten für dünner werdende Rechtecke wird beliebig groß, und dieser Umstand schränkt die Anwendbarkeit des Höhlensatzes für die Menge aller Rechteckmittelwerte sehr ein.

In diesem Zusammenhang sei darauf aufmerksam gemacht, dass man statt der Hilbert-Kurve auch andere flächenfüllende Kurven betrachten kann. Zumindest die Standardkurven (Peano-Kurve, Sierpinski-Kurve, Lebesgue-Kurve, vgl. [Sag94]) erfüllen auch eine vergleichbare Ungleichung wie 1.5. Der Wert 16 auf der rechten Seite ist dabei wahrscheinlich das Optimum, was man erreichen kann.

Man kann auch entsprechend **höherdimensionale Hilbert-Kurven** $h_N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^N$ betrachten. Um diese zu erhalten, zerteilt man für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Intervall $[0, 1]$ in 2^{Nn} gleich große Intervalle $I_n^1 \leq \dots \leq I_n^{2^{Nn}}$ und den N -dimensionalen Würfel in 2^{Nn} gleich große Teilwürfel $W_n^1, \dots, W_n^{2^{Nn}}$. Diese kann man so nummerieren, dass bei Intervallen $I_n^k \subset I_m^l$ stets $W_n^k \subset W_m^l$ gilt und immer W_n^k und W_n^{k+1} eine gemeinsame Seite haben. Ferner soll der Punkt $(0, 0, \dots, 0)$ im jeweils ersten Würfel W_n^1 und der Punkt $(1, 0, \dots, 0)$ im jeweils letzten Würfel $W_n^{2^{Nn}}$ liegen.

Anders als beim zweidimensionalen Fall hat man bei höheren Dimensionen dazu mehrere Möglichkeiten. Dies sieht man z. B. an der folgenden Zeichnung für $N = 3$. Um unsere Definition eindeutig zu machen, wählen wir die Abzählung von $W_1^1, \dots, W_1^{2^3}$ induktiv mit N , so dass die ersten 2^{N-1} N -Würfel die entsprechenden $(N-1)$ -Würfel als Seiten haben. Die letzten 2^{N-1} N -Würfel durchlaufen wir in umgekehrter Reihenfolge. In der Zeichnung entspricht der Weg W dieser Rückführung von $N = 3$ auf $N = 2$.



Wie für $N = 2$ wählt man wieder eine Folge von stetigen Funktionen $f_{N,n}$, die die Würfel entsprechend ihrer Reihenfolge ablaufen. Die Grenzfunktion nennt

man dann die N -dimensionale Hilbert-Kurve h_N . Die Hilbert-Kurve hat die Eigenschaften:

1. h ist auf ganz $[0, 1]$ stetig, aber nirgendwo differenzierbar. Genauer weiß man, dass

$$h_N \in C^{1/N}$$

Hölder-stetig zum Exponenten $1/N$, aber nicht besser Hölder-stetig ist (vgl. [Miln80]).

2. Die Hilbert-Kurve ist surjektiv, d. h. das Bild der Kurve füllt den ganzen Raum $[0, 1]^N$.
3. Die Hilbert-Kurve ist maßerhaltend: jede \mathcal{L}^N -messbare Menge $M \subset [0, 1]^N$ hat ein \mathcal{L} -messbares Urbild mit gleichem Maß.

Ferner wird jede \mathcal{L} -messbare Menge auf eine \mathcal{L}^N -messbare Menge abgebildet.

4. Die Hilbert-Kurve ist nicht injektiv, aber sie ist fast überall injektiv. Genauer ist h injektiv auf $[0, 1] \setminus N$ mit $N := \{\frac{k}{2^{Nn}} : n \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, 2^{Nn} - 1\}\}$ und N ist als Teilmenge von \mathbb{Q} abzählbar und damit Nullmenge.

5. Jede Menge $h([\frac{k}{2^{Nn}}, \frac{k+1}{2^{Nn}}])$ ist ein Würfel mit Kantenlänge $\frac{1}{2^n}$.

6. Die folgende Ungleichung gilt für alle Hilbert-Intervalle $P \in h(\mathcal{I})$ und ist optimal:

$$1 \leq \frac{\inf_{W \supset P} |W|}{\sup_{W \subset P} |W|} \leq 4^N. \quad (1.6)$$

Dabei wird das Infimum über alle umschriebenen, N -dimensionalen Würfel und das Supremum über alle einbeschriebenen, N -dimensionalen Würfel gebildet.

Insbesondere werden die Mengen $[0, 1]^N$ zu Kurvenintervallen, und auf ihnen gilt ein entsprechender Höhlensatz. Beim System der Hilbert-Intervalle kommt es dabei nicht zu Entartungen wie beim System aller Quader.

Es ist klar, dass man mit ähnlichen Konstruktionen eine große Klasse von Mengen zu Kurvenintervallen machen und dabei Entartungen im System vermeiden kann.

1.4. Anwendung im Graphenfall

Wir wollen die Höhlensätze für den Fall anwenden, dass das Randstück B der Graph einer konvexen Funktion ist. Durch ganz einfache Zusatzüberlegungen erhalten wir dabei nicht nur Aussagen über Mittelwerte sondern auch für Oszillationsterme. Ferner wollen wir unsere Resultate mit bekannten Aussagen vergleichen.

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

Um die Betrachtungen möglichst einfach zu halten, beschränken wir uns auf den Fall stetiger Funktionen. Dadurch müssen wir nicht zum Abschluss der auftretenden zweidimensionalen Mittelwertmengen übergehen (vgl. Folgerung 1.13). Außerdem konzentrieren wir uns weitgehend auf Funktionen einer Variablen und bemerken lediglich, was man im Fall mehrerer Variablen beachten muss. So betrachten wir in diesem Kapitel vorzugsweise stetige, reellwertige Funktionen $f : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall I_0 . Ohne Einschränkung nehmen wir $I_0 = [0, 1]$. Die Menge aller Teilintervalle von $[0, 1]$ positiver Länge bezeichnen wir wieder mit \mathcal{I} . Die fallende Umordnung $f^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir durch

$$f^*(t) := \inf\{y \in \mathbb{R} : |\{s \in [0, 1] : f(s) > y\}| \leq t\}.$$

Mit f ist auch die fallende Umordnung f^* stetig (z. B. [BeSh88]). Es sei darauf hingewiesen, dass manche Autoren abweichend von dieser Definition die Bezeichnung „fallende Umordnung“ und die Schreibweise „ f^* “ für die fallende Umordnung des Betrages $|f|$ verwenden.

Wir wollen die Ergebnisse der vorangehenden Kapitel für den Graphenfall in einer dieser Situation angemesseneren Sprechweise formulieren. Dazu definieren wir zunächst:

Definition 1.31 (oberer Rand)

Unter dem **oberen Rand** über dem Intervall $]a, b[$ einer zusammenhängenden, beschränkten Menge $M \subset [a, b] \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ verstehen wir den gemeinsamen Rand der Menge M und der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $(]a, b[\times \mathbb{R}_{\geq 0}) \setminus M$.

Für stetige Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ und stetige, konvexe Funktionen $k : [\inf f, \sup f] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ betrachten wir die Intervallmittelwertmengen

$$\begin{aligned} (f, k \circ f)_{\mathcal{I}} &:= \left\{ \left(\int_I f, \int_I k \circ f \right) : I \in \mathcal{I} \right\}, \\ (f^*, k \circ f^*)_{\mathcal{I}} &:= \left\{ \left(\int_I f^*, \int_I k \circ f^* \right) : I \in \mathcal{I} \right\}. \end{aligned}$$

Für diese Mengen nehmen wir den oberen Rand immer über $] \inf f, \sup f[$ und lassen den Hinweis darauf im Folgenden weg.

Mit Hilfe des Begriffes „oberer Rand“ lesen sich die wesentlichen Ergebnisse aus Kapitel 1.2 folgendermaßen:

Satz 1.32 (Höhlensatz im Graphenfall)

Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ die (stetige) fallende Umordnung und $k : [\inf f, \sup f] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig und konvex. Dann gilt:

- Das Innere eines Dreiecks, das als Ecken die Punkte $(\inf f, k(\inf f))$ und $(\sup f, k(\sup f))$ sowie einen oberen Randpunkt von $(f, k \circ f)_{\mathcal{I}}$ hat, schneidet

nie die Intervallmittelwertmenge $(f, k \circ f)_{\mathcal{I}}$. Insbesondere ist der obere Rand der Graph einer lokal Lipschitz-stetigen Funktion (und Lipschitz-stetig, falls k endliche Steigung in $\inf f$ und $\sup f$ hat). Gleiches gilt als Spezialfall auch für f^* .

- Ferner liegt der obere Rand der Intervallmittelwertmenge $(f, k \circ f)_{\mathcal{I}}$ nirgendwo unterhalb des oberen Randes der Intervallmittelwertmenge $(f^*, k \circ f^*)_{\mathcal{I}}$.
- Der obere Rand der Intervallmittelwertmenge $(f, k \circ f)_{\mathcal{I}}$ einer monotonen Funktion f (insbesondere also immer von f^*) besteht aus den Kurven

$$K_1(f) := \left\{ \left(\int_0^t f, \int_0^t k \circ f \right) : t \in]0, 1] \right\},$$

$$K_2(f) := \left\{ \left(\int_t^1 f, \int_t^1 k \circ f \right) : t \in [0, 1[\right\}.$$

Beweis Für lineare Funktionen k oder konstantes f ist die Aussage trivial. Für alle anderen Fälle wählen wir als A die offene, konvexe Menge, die vom Graphen von k und der Verbindungsstrecke $[(\inf f, k(\sup f)), (\sup f, k(\sup f))]$ begrenzt wird. Den Graph von k nennen wir B , die Verbindungsstrecke ohne die Endpunkte nennen wir C . Wir betrachten die stetige Abbildung

$$h : [0, 1] \rightarrow B, h(t) := (f(t), k \circ f(t)).$$

Damit sind wir in der Situation, wie wir sie in Kapitel 1.2 untersucht haben. Als fallende Umordnung h^* findet man

$$h^* : [0, 1] \rightarrow B, h^*(t) = (f^*(t), k \circ f^*(t))$$

mit der fallenden Umordnung f^* von f .

Die erste Behauptung ist nichts anderes als die Einsehbarkeit der Höhle $H h_{\mathcal{I}}$ (siehe Satz 1.11), wobei wir auf Grund der Stetigkeit wie in Folgerung 1.13 auf den Abschluss verzichten können. Die (lokale) Lipschitz-Stetigkeit überlegt man elementar aus der Dreiecksbedingung. Die zweite Behauptung ist eine Umformulierung der Höhleninklusion (Satz 1.14) und die letzte Behauptung nichts anderes als Satz 1.15. \square

Liest man ab, welche Aussage obiger Satz über ein vorgegebenes $\int_0^t f^*$ oder $\int_t^1 f^*$ (unter anderem) macht, so erhält man den ersten Punkt des nächsten Satzes. Diesen kann man leicht auf Oszillationsterme verallgemeinern (Punkt 2 und 3 des Satzes).

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

Satz 1.33 (monotone Umordnung bei Mittelwert und Oszillation)

Seien $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

1. Ist $k : [\inf f, \sup f] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig und konvex, dann gibt es für alle $t \in]0, 1]$ bzw. $t \in [0, 1[$ ein Intervall $I \in \mathcal{I}$ mit

$$\begin{aligned} \int_I f &= \int_0^t f^* \quad \text{und} \quad \int_I k \circ f \geq \int_0^t k \circ f^* \quad \text{bzw.} \\ \int_I f &= \int_t^1 f^* \quad \text{und} \quad \int_I k \circ f \geq \int_t^1 k \circ f^*. \end{aligned}$$

Dies ist optimal in dem Sinne, dass für monotone Funktionen f gilt

$$\begin{aligned} \int_I f &= \int_0^t f^* \implies \int_I k \circ f \leq \int_0^t k \circ f^*, \\ \int_I f &= \int_t^1 f^* \implies \int_I k \circ f \leq \int_t^1 k \circ f^*. \end{aligned}$$

2. Ist $k : [\inf f, \sup f] \times [\inf f, \sup f] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig und in der zweiten Variablen konvex, dann gibt es für alle $t \in]0, 1]$ bzw. $t \in [0, 1[$ ein Intervall $I \in \mathcal{I}$ mit

$$\begin{aligned} \int_I f &= \int_0^t f^* \quad \text{und} \quad \int_I k(f_I, f(s)) ds \geq \int_0^t k(f_{[0,t]}^*, f^*(s)) ds \quad \text{bzw.} \\ \int_I f &= \int_t^1 f^* \quad \text{und} \quad \int_I k(f_I, f(s)) ds \geq \int_t^1 k(f_{[t,1]}^*, f^*(s)) ds. \end{aligned}$$

Dies ist optimal in dem Sinne, dass für monotone Funktionen f gilt

$$\begin{aligned} \int_I f &= \int_0^t f^* \implies \int_I k(f_I, f(s)) ds \leq \int_0^t k(f_{[0,t]}^*, f^*(s)) ds, \\ \int_I f &= \int_t^1 f^* \implies \int_I k(f_I, f(s)) ds \leq \int_t^1 k(f_{[t,1]}^*, f^*(s)) ds. \end{aligned}$$

3. Ist $k : [\inf f, \sup f] \times [\inf g, \sup g] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig und konvex, dann gibt es für alle $t, s \in]0, 1]$ Intervalle $I, J \in \mathcal{I}$ mit

$$\int_I f = \int_0^t f^*, \quad \int_J g = \int_0^s g^* \quad \text{und} \quad \int_I \int_J k(f, g) \geq \int_0^t \int_0^s k(f^*, g^*).$$

und entsprechende weitere Intervalle und Aussagen zu allen anderen Kombinationen von $\int_0^t f^*$, $\int_t^1 f^*$ mit $\int_0^s g^*$, $\int_s^1 g^*$. Diese Aussage ist optimal in dem Sinne, dass für monotone Funktionen f, g gilt

$$\int_I f = \int_0^t f^*, \quad \int_J g = \int_0^s g^* \implies \int_I \int_J k(f, g) \leq \int_0^t \int_0^s k(f^*, g^*).$$

Beweis 1. Für ein t mit $f_0^t f^*$ und $f_t^1 f^*$ aus $] \inf f, \sup f[$ folgt die Aussage unmittelbar aus dem vorangehenden Satz 1.32. Man erhält die Existenz des Intervalls I aus dem Vergleich des oberen Randes von f und f^* . Die Optimalitätsaussage resultiert aus der Beschreibung des oberen Randes bei monotoner Anordnung.

Falls $f_0^t f^* = \sup f$ gilt, ist f^* konstant auf $[0, t[$ und somit $f_0^t k \circ f^* = k(\sup f)$; Stetigkeit von f gibt dann die Existenz eines Intervalls I mit $f_I f = \sup f$ und $f_I k \circ f = k(\sup f)$. In gleicher Weise handelt man die anderen „Randfälle“ ab.

2. Sei $t \in]0, 1]$ beliebig. Wenden wir die Aussage 1 auf die stetige, konvexe Funktion $y \mapsto k(f_{[0,t]}^*, y)$ an, so erhalten wir die Existenz eines Intervalls $I \in \mathcal{I}$ mit

$$\int_I f = \int_0^t f^* \quad \text{und} \quad \int_I k(f_I, f) = \int_I k(f_{[0,t]}^*, f) \geq \int_0^t k(f_{[0,t]}^*, f^*).$$

Dies zeigt den ersten Teil der Behauptung. Die Existenz des Intervalls zu $f_t^1 f$ erhält man analog und die Optimalitätsaussage kann man in gleicher Weise auf die unter 1. zurückführen.

3. Seien $t, s \in]0, 1]$ beliebig. Wenden wir die Aussage 1 auf die stetige, konvexe Funktion $x \mapsto f_0^s k(x, g^*)$ an, so erhalten wir die Existenz eines Intervalls $I \in \mathcal{I}$ mit

$$\int_I f = \int_0^t f^* \quad \text{und} \quad \int_I \int_0^s k(f, g^*) \geq \int_0^t \int_0^s k(f^*, g^*).$$

Wenden wir die Aussage 1 erneut an, diesmal auf die stetige, konvexe Funktion $y \mapsto \int_I k(f, y)$, so erhalten wir (nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge mit dem Satz von Fubini) die Existenz eines Intervalls $J \in \mathcal{I}$ mit

$$\int_J g = \int_0^s g^* \quad \text{und} \quad \int_J \int_I k(f, g) \geq \int_0^s \int_I k(f, g^*) = \int_I \int_0^s k(f, g^*) \geq \int_0^t \int_0^s k(f^*, g^*).$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung gezeigt. Durch zweimalige Anwendung der Optimalitätsaussage unter 1. erhält man bei entsprechendem Vorgehen hier die Optimalität. \square

Beispiel 1.34 Zur Veranschaulichung der Aussagen von Satz 1.32 und 1.33(1) betrachten wir die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) := 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Diese hat, wie man elementar nachrechnen kann, die fallende Umordnung

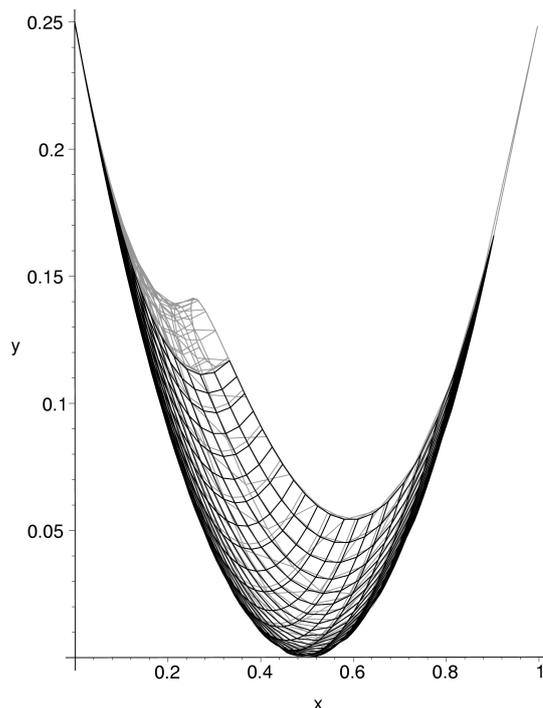
$$f^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^*(t) := (1 - t)^2.$$

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

Das Infimum und Supremum von f auf $[0, 1]$ sind 0 und 1. Als konvexe Funktion wählen wir die quadratische Funktion

$$k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, k(x) := \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Das graue Liniennetz stellt die Intervallmittelwertmenge $\{(f|_I, f_I k \circ f) : I \in \mathcal{I}\}$, das schwarze die Intervallmittelwertmenge $\{(f_I f^*, f_I k \circ f^*) : I \in \mathcal{I}\}$ dar.



Beispiel 1.35 Zur Veranschaulichung der Aussage von Satz 1.33(2) betrachten wir die Funktionen

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(t) := t \quad \text{und} \quad k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, k(x, y) := |x - y|.$$

Wir plotten die Flächen

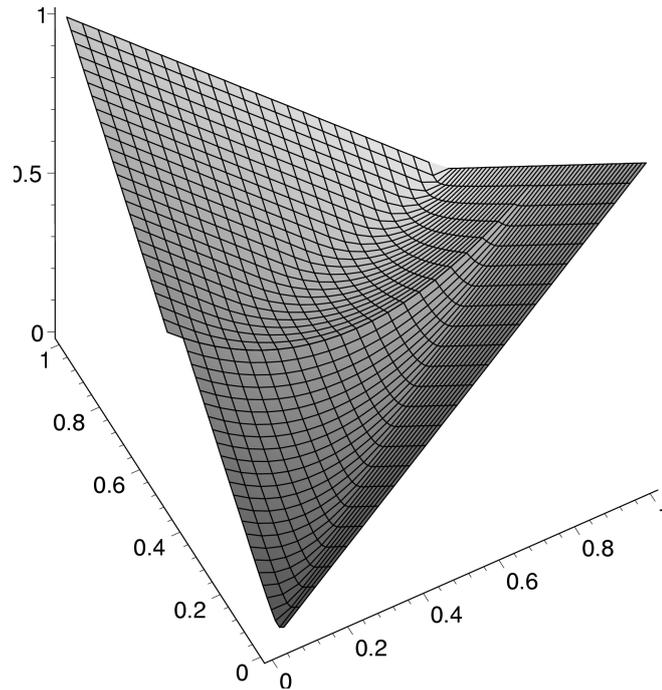
$$F_1 := \left\{ \left(x, \int_0^t f, \int_0^t |x - f(s)| ds \right) : x \in [0, 1], t \in]0, 1] \right\},$$

$$F_2 := \left\{ \left(x, \int_t^1 f, \int_t^1 |x - f(s)| ds \right) : x \in [0, 1], t \in [0, 1[\right\}$$

und untersuchen die Mittelwertmenge

$$M := \left\{ \left(x, \int_I f, \int_I |x - f(s)| ds \right) : x \in [0, 1], I \in \mathcal{I} \right\}.$$

Der Satz 1.33(1) sagt, dass der obere Rand (mit entsprechender Verallgemeinerung der Begriffsbildung auf dreidimensionale Mengen) von M über der Strecke $\{x\} \times]0, 1[$ zu jedem $x \in [0, 1]$ bei monotoner Anordnung am niedrigsten liegt. Also der obere Rand über $]0, 1[\times]0, 1[$ jeder anderen (stetigen) Anordnung von f oberhalb der gezeichneten Fläche liegen würde. Damit liegt insbesondere der obere Rand über der Diagonalen bei monotoner Anordnung am niedrigsten. Diese Aussage entspricht der in Satz 1.33(2) formulierten über Oszillation und veranschaulicht die Vorgehensweise im Beweis.



Bemerkung 1.36 Entsprechende Sätze (zu 1.32 und 1.33) erhält man für stetige Funktionen $f : [0, 1]^N \rightarrow \mathbb{R}$, wenn man statt des Intervallsystems das System der Hilbert-Intervalle nimmt. Man beachte, dass die Stetigkeit von f auch hier rechtfertigt, auf den Abschluss der Mittelwertmengen zu verzichten.

Anders ist dies beim Fall des Quadersystems. Hier wissen wir nicht, ob ein Verzicht auf den Abschluss möglich ist. Das Problem ist hier, dass auch bei stetig vorausgesetzter Funktion f die Häufungswerte von Mittelwerten $(f, k \circ f)_{Q_n}$ für $|Q_n|$ gegen null nicht auf dem Graphen von k liegen müssen. Zumindest erhalten wir aber noch ein „Folgenanalogon“ des Satzes 1.33. Also Aussagen der Form:

Ist $f : [0, 1]^N \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $k : [\inf f, \sup f] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig und konvex, dann gibt es für alle $t \in]0, 1]$ ein Folge von (nicht entarteten) achsenparallelen Quadern $Q_n \subset [0, 1]^N$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_n} f = \int_0^t f^* \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_n} k \circ f \geq \int_0^t k \circ f^*.$$

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

Falls die Vermutung 1.25 stimmt, würde man eine gegenüber den Hilbert-Intervallen etwas abgeschwächte Version auch für Würfelmittelwertmengen erhalten. So nehmen wir z. B. an, dass nicht für alle t , aber für die „interessanten am Rand“ gilt:

Ist $f : [0, 1]^N \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $k : [\inf f, \sup f] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig und konvex, dann gibt es für alle $t \in]0, 1/2]$ einen achsenparallelen Teilwürfel W von $[0, 1]^N$ mit

$$\int_W f = \int_0^t f^* \quad \text{und} \quad \int_W k \circ f \geq \int_0^t k \circ f^*$$

und für alle $t \in]1/2, 1]$ einen achsenparallelen Teilwürfel W von $[0, 1]^N$ mit

$$\int_W f = \int_t^1 f^* \quad \text{und} \quad \int_W k \circ f \geq \int_t^1 k \circ f^*.$$

Bemerkung 1.37 Wir wollen den direkten Zusammenhang mit zwei bekannten Resultaten aufzeigen.

Für Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ erkennt man mit Satz 1.33(1) leicht, dass für alle $t \in]0, 1]$, für die der Mittelwert $f_0^t f^*$ positiv ist, die Abschätzung

$$\frac{f_0^t k \circ f^*}{f_0^t f^*} \leq \sup_I \frac{f_I k \circ f}{f_I f}$$

gilt. Dabei soll das Supremum über alle Intervalle I mit positivem Mittelwert $f_I f$ gebildet sein. Analoges gilt für die f_t^1 -Mittelwerte. Damit erhält man, wenn man noch das Supremum über alle zulässigen t bildet,

$$\max \left(\sup_t \frac{f_0^t k \circ f^*}{f_0^t f^*}, \sup_t \frac{f_t^1 k \circ f^*}{f_t^1 f^*} \right) \leq \sup_I \frac{f_I k \circ f}{f_I f}.$$

Diese Abschätzung findet man mit anderen Mitteln bewiesen auch in den Arbeiten [Kor92a] und [Kor92b]. Sie sind dort die Grundlage, um optimale Integrierbarkeit im Gehring-Lemma für Funktionen einer Variablen zu beweisen (man siehe dazu auch Kapitel 2.1). Betonen wollen wir, dass die Aussage des Satzes 1.33(1) und erst recht von Satz 1.32 stärker ist als diese Abschätzung (insbesondere wird an jeder Stelle t eine Aussage gemacht) und einfacher in der Struktur. Ferner erhalten wir mit Bemerkung 1.36 auch Verallgemeinerungen für den Fall mehrerer Variablen. Solche werden in beiden zitierten Arbeiten ausdrücklich vermisst.

Aus dem Satz 1.33(2) schließt man unmittelbar, dass gilt

$$\sup_{I \in \mathcal{I}} \int_I |f^* - f_I^*| = \sup_{t \in]0, 1]} \int_0^t |f^* - f_{[0, t]}^*| = \sup_{t \in]0, 1]} \int_t^1 |f^* - f_{[t, 1]}^*| \leq \sup_{I \in \mathcal{I}} \int_I |f - f_I|.$$

Die darin enthaltene optimale Abschätzung der BMO-„Norm“ von Funktionen einer Variablen durch die der fallenden Umordnung, also

$$\|f^*\|_{\text{BMO}} := \sup_{I \in \mathcal{I}} \int_I |f^* - f_I^*| \leq \sup_{I \in \mathcal{I}} \int_I |f - f_I| =: \|f\|_{\text{BMO}},$$

wird auch in der Arbeit [Kle85] gezeigt. Sie wird dort mit einer Version des „Lemmas of the rising sun“ (Riesz) bewiesen. Die gleiche Version dieses Überdeckungslemmas wird übrigens auch in den beiden bereits zitierten Arbeiten benutzt. Dass man die BMO-Norm bei monotonen Funktionen in der oben angegebenen einfacheren Supremumsbildung über $t \in]0, 1]$ bzw. über $t \in [0, 1[$ schreiben kann, scheint dagegen neu zu sein. Man beachte außerdem, dass auch hier wieder der Satz 1.33 stärkere punktweise Abschätzungen und Verallgemeinerungen auf den Fall mehrerer Variablen zulässt.

Bemerkung 1.38 In der Literatur spielen Maximalfunktionen im Zusammenhang mit Mittelwerten und Oszillationstermen eine große Rolle. Viel verwendet werden insbesondere die **Hardy-Littlewood-Maximalfunktion** Mf und die **Sharp-Maximalfunktion** f^\sharp definiert für alle $x \in [0, 1]$ durch

$$Mf(x) := \sup_{I \in \mathcal{I}(x)} \int_I |f|$$

$$f^\sharp := \sup_{I \in \mathcal{I}(x)} \int_I |f - f_I|$$

mit der Menge $\mathcal{I}(x)$ aller Teilintervalle von $[0, 1]$ positiver Länge, die x enthalten. Nach unserer Einschätzung beruht ihre Bedeutung in der Literatur maßgeblich darauf, dass sie mit Aussagen folgender Form verwendet werden:

1. Es gibt eine Konstante $c_1 > 0$, so dass für alle $t \in]0, 1]$ gilt

$$c_1 \int_0^t |f|^* \leq (Mf)^*(t).$$

2. Es gibt eine Konstante $c_2 > 0$, so dass für alle $t \in]0, 1]$ gilt

$$(Mf)^*(t) \leq c_2 \int_0^t |f|^*.$$

3. Es gibt eine Konstante $c_3 > 0$, so dass für alle $t \in]0, 1/6]$ gilt

$$\left(\int_0^t |f|^* \right) - |f|^*(t) \leq c_3 (f^\sharp)^*(t).$$

4. Es gibt eine Konstante $c_4 > 0$, so dass für alle $t \in]0, 1]$ gilt

$$(f^\sharp)^*(t) \leq c_4 \int_0^t |f|^*.$$

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

Beweise dieser Aussagen findet man beispielsweise in [BeSh88, Kapitel 3.3 und 5.7]. Dort findet man auch historische Anmerkungen hierzu. Die 1. und 2. Aussage sind auch als **Theorem von Herz** in der Literatur bekannt und die 3. Aussage als (eine Variante der) **Fefferman-Stein-Ungleichung**. Die 4. Aussage folgt mit $f^\# \leq 2Mf$ unmittelbar aus der 2. Aussage.

Man schätzt also die fallende Umordnung der Maximalfunktionen nach oben und unten durch Terme der fallenden Umordnung von f bzw. von $|f|$ ab. Insgesamt geht man so in zwei Schritten von Mittelwerten bzw. Oszillationen auf Intervallen, zunächst über die Supremumbildung in der Maximalfunktion und dann durch die Abschätzungen, zu Termen der fallenden Umordnung über. Vergleichbar hierzu können wir mit Satz 1.32 und Satz 1.33 in einem Schritt und mit optimalen Resultaten Mittelwerte bzw. Oszillationen durch Terme der fallenden Umordnung abschätzen.

Um die Analogie deutlicher zu machen, betrachten wir folgende Varianten der obigen Maximalfunktionen

$$\begin{aligned} M_1 f(t) &:= \sup \left\{ \int_I |f| : I \in \mathcal{I} \text{ mit } \int_I f = \int_0^t f^* \right\}, \\ M_2 f(t) &:= \sup \left\{ \int_I |f| : I \in \mathcal{I} \text{ mit } \int_I f = \int_t^1 f^* \right\}, \\ f^{\#1}(t) &:= \sup \left\{ \int_I |f - f_I| : I \in \mathcal{I} \text{ mit } \int_I f = \int_0^t f^* \right\}, \\ f^{\#2}(t) &:= \sup \left\{ \int_I |f - f_I| : I \in \mathcal{I} \text{ mit } \int_I f = \int_t^1 f^* \right\}. \end{aligned}$$

Die Maximalfunktionen $M_1 f$ und $M_2 f$ stellen zusammen den oberen Rand der Mittelwertmenge $(f, |f|)_{\mathcal{I}}$ dar. Damit liefert der Satz 1.32 (oder Satz 1.33(1)) die Abschätzungen

$$\int_0^t |f^*| \leq M_1 f(t) \quad \text{und} \quad \int_t^1 |f^*| \leq M_2 f(t).$$

Dies entspricht der ersten Abschätzung der Hardy-Littlewood-Maximalfunktion (hier aber mit optimaler Konstante 1). Ferner kann man aus der Dreiecksbedingung des Satzes 1.32 auch eine Abschätzung von $M_1 f(t)$ und $M_2 f(t)$ nach oben in Termen der fallenden Umordnung gewinnen, die dann der zweiten Abschätzung der Hardy-Littlewood-Maximalfunktion entspricht.

Analog gibt der Satz 1.33(2) die Abschätzungen

$$\int_0^t |f^* - f_{[0,t]}^*| \leq f^{\#1}(t) \quad \text{und} \quad \int_t^1 |f^* - f_{[t,1]}^*| \leq f^{\#2}(t).$$

Diese entsprechen der ersten Abschätzung für die Sharp-Maximalfunktion $f^\#$ (wiederum mit optimaler Konstante 1 und auf dem ganzen Intervall $]0, 1]$ statt nur auf $]0, 1/6]$). Ferner kann man mit $f^{\#1} \leq 2M_1 f$ und $f^{\#2} \leq 2M_2 f$ sowie dem

über M_1f, M_2f Gesagten eine Abschätzung nach oben in Termen der fallenden Umordnung für die Varianten $f^{\#1}, f^{\#2}$ der Sharp-Maximalfunktion ableiten.

Da die Mittelwerte $f_0^t f^*$ und $f_t^1 f^*$ das Intervall $[\inf f, \sup f]$ des Wertebereichs von f durchlaufen, bezieht sich die Supremumsbildung bei $M_1f, M_2f, f^{\#1}$ und $f^{\#2}$ auf den Wertebereich von f . Dagegen orientiert sich die Supremumsbildung bei Mf und $f^\#$ am Definitionsbereich von f . Deshalb kann man nicht direkt vergleichen, aber eine Orientierung an dem Wertebereich erscheint uns für viele Fragestellungen angemessener zu sein. In diesem Zusammenhang betonen wir, dass dies zumindest bei umgekehrten Hölder-Ungleichungen und umgekehrten Integralungleichungen mit Oszillationsterm der Fall ist, wie wir in Kapitel 2 demonstrieren werden.

1.5. Mittelwerte auf skalierten Intervallen

In diesem Kapitel wollen wir von ersten Untersuchungen für Mittelwertmengen berichten, bei denen die Mittelwerte in der zweiten Koordinate auf einem Intervall gebildet werden, das gegenüber dem Intervall zur ersten Koordinate gestaucht ist. Solche Mittelwertmengen der Form

$$M_r(f, k \circ f) := \left\{ \left(\int_I f, \int_{rI} k \circ f \right) : I \in \mathcal{I} \right\}$$

mit $r < 1$ und konvexer Funktion k sind für schwache umgekehrte Integralungleichungen interessant. Bei Mengen dieser Art stehen wir erst am Anfang und hoffen, in einer späteren Arbeit darauf zurückkommen zu können. Wir sind überzeugt, dass mit den Ergebnissen aus Kapitel 1.2 oder mit analogen Betrachtungen auch diese Mittelwertmengen erforscht werden können. Falls man vergleichbare Ergebnisse wie in Kapitel 1.2 über diese Mittelwertmengen zeigen kann, werden sie in gleicher Weise optimale Integrität für schwache umgekehrte Integralungleichungen implizieren, wie dies die Ergebnisse aus Kapitel 1.2 für umgekehrte Integralungleichungen tun.

Wir stellen zunächst einige den Beispielen 1.9 und 1.10 entsprechende Computerexperimente vor. Dabei geben wir uns drei, vier oder fünf konvexliegende Punkte b_1, \dots, b_n vor. Diese sollen dabei alle auf dem Graph einer konvexen Funktion liegen und so durchnummeriert sein, dass die Größe der ersten Koordinate dem Auftreten der Reihenfolge entspricht: $\operatorname{Re}(b_1) < \dots < \operatorname{Re}(b_n)$.

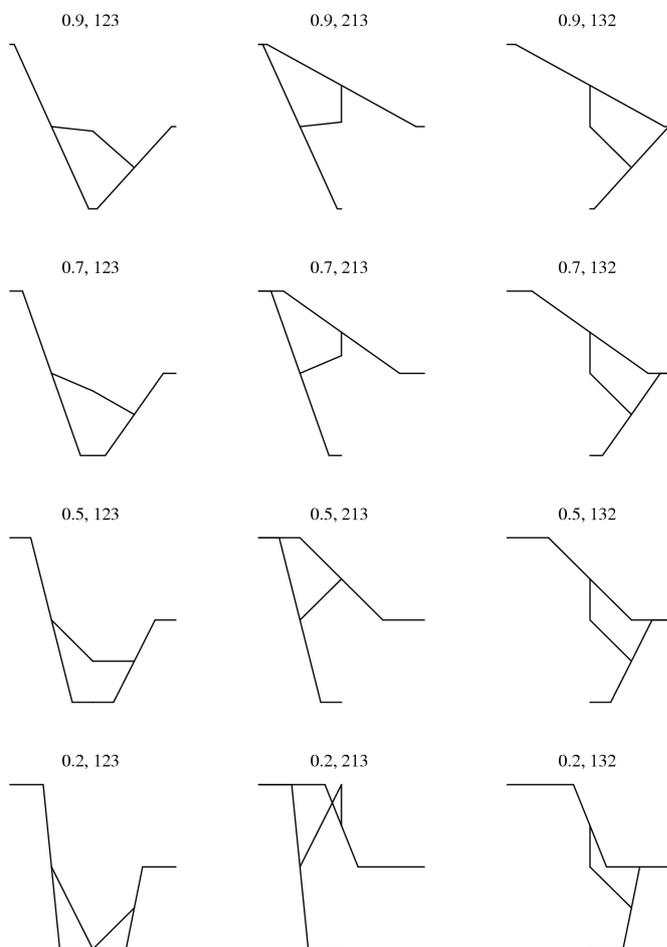
Zu jeder Permutation p , die wir durch Angabe einer entsprechenden Reihenfolge der Zahlen $1..n$ als zweites über jeder Zeichnung notieren, betrachten wir die Funktionen $h_p : [0, n] \rightarrow \{b_1, \dots, b_n\}$ definiert als $h_p := \sum_{i=1}^n b_{p(i)} \mathbf{1}_{[i-1, i]}$. Von den Mittelwertmengen

$$M_r(h_p) := \left\{ \left(\int_I \operatorname{Re}(h_p), \int_{rI} \operatorname{Im}(h_p) \right) : I \in \mathcal{I} \right\}$$

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

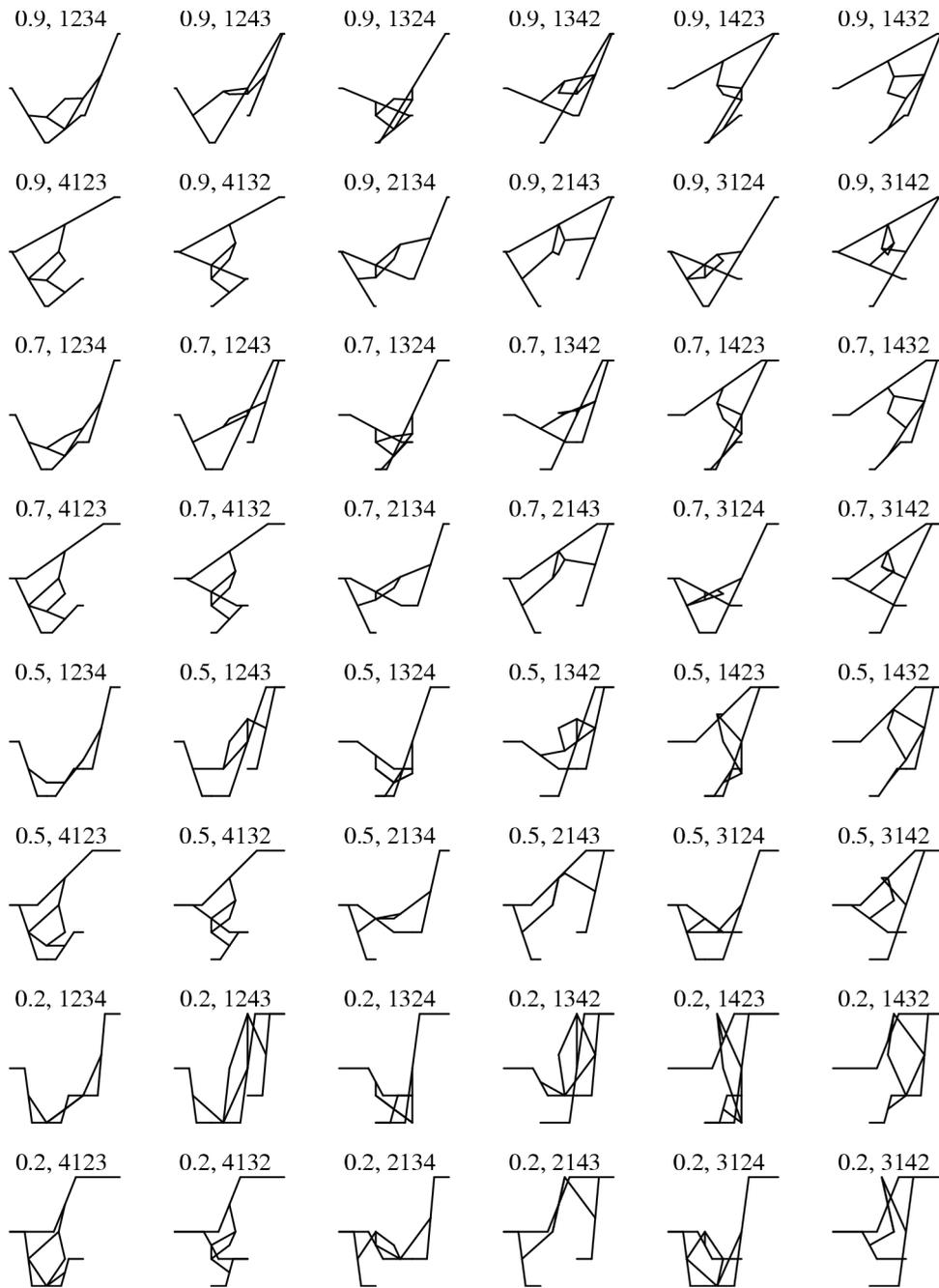
zum Skalierungsfaktor r , den wir als erstes über jeder Zeichnung notieren, wollen wir uns ein Bild verschaffen. Dazu plotten wir von der Menge $M_r(h_p)$ jeweils die „wichtigsten“ Linien und zwar alle Mittelwerte zu Intervallen I , bei denen die linke oder rechte Intervallgrenze ganzzahlig ist.

Beim ersten Beispiel haben wir die drei Punkte $b_1 = -1 + 2i$, $b_2 = 0$ und $b_3 = 1 + i$ gewählt. Dies sind die gleichen Punkte wie in Beispiel 1.9, die Bilder dort entsprechen also dem Fall $r = 1$. Man beachte insbesondere, wie sich die konvexen Vierecke und Verbindungsstrecken aus Beispiel 1.9 bei kleiner werdendem r verhalten. Man sieht, dass die monotone Anordnung, also jedes Bild der ersten Spalte, eine größere obere Höhle als die jeweils anderen beiden Anordnungen hat (man beachte aber das Beispiel weiter unten). Es fällt auf, dass hier (z. B. bei $r = 0,2$ und Anordnung 213) die Einsehbarkeit der Höhle verletzt ist.



Deutlicher erkennt man dies noch bei vier Punkten $b_1 = -1 + 2i$, $b_2 = 0$, $b_3 = 1 + i$ und $b_4 = 2 + 4i$. Hier ist der obere Rand der Menge $M_r(h_p)$ nicht mehr immer Graph einer Funktion (z. B. bei $r = 0,5$ und Anordnung 1342). Trotzdem scheint die monotone Anordnung (in jeder zweiten Zeile das erste Bild) relativ günstig für eine große obere Höhle zu sein.

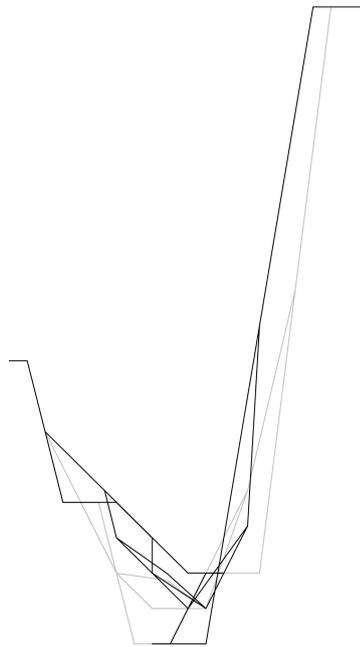
1.5. Mittelwerte auf skalierten Intervallen



Die monotone Anordnung muss aber nicht „überall“ die größte obere Höhle haben. Dies zeigt folgendes Beispiel. Hier haben wir zum Skalierungsfaktor $r = 0,5$ in grau die Mittelwertmenge der monotonen Anordnung und in Schwarz die Mittelwertmenge der Anordnung 12435 zu den Punkten $b_1 = -2 + 4i$, $b_2 = -1 + 2i$, $b_3 = 0$, $b_4 = 1 + i$ und $b_5 = 3 + 9i$ geplottet. In einem kleinen mittleren Bereich liegt hier der graue obere Rand oberhalb des schwarzen oberen Randes.

1. Zweidimensionale Mittelwertmengen

0.5, grau 12345, schwarz 12435



Um vergleichbare Resultate wie im Fall $r = 1$ auch bei $r < 1$ zu erhalten, muss die folgende Frage noch geklärt werden.

Offenes Problem

Kann man eine einfache Beschreibung oder eine „nicht zu schlechte“ obere Abschätzung für die Vereinigung der Höhlen über alle Umordnungen einer Funktion h finden:

$$\cup_{g^*=h^*} \overline{H M_r(g)} = ?$$

Kann man evtl. den oberen Rand aller Höhlen einer Umordnung von h bei vorgegebener erster Koordinate $x = \int_0^t \operatorname{Re}(h^*)$ nach unten durch den oberen Rand der fallenden Umordnung minus einem von x abhängigen Term abschätzen:

$$Mh(t) := \sup \left\{ \int_{rI} \operatorname{Im}(h) : I \in \mathcal{I}, \int_I \operatorname{Re}(h) = \int_0^t \operatorname{Re}(h^*) \right\} = ?$$

2. Umgekehrte Integralungleichungen

In der Regularitätstheorie für schwache Lösungen partieller Differentialgleichungen spielen umgekehrte Integralungleichungen eine wichtige Rolle (man vergleiche z. B. [Gia83] oder [Gia84], für Anwendungen bei quasikonformen Abbildungen siehe z. B. [BoIw83]). Sie stehen oft am Anfang von Regularitätsbetrachtungen. Eine besonders häufig auftretende Form ist die umgekehrte Hölder-Ungleichung. Diese wollen wir ausgiebig behandeln und darlegen, zu welchen neuen Resultaten unsere Methode führt.

Anschließend wollen wir noch kurz einen Blick auf umgekehrte Integralungleichungen mit Oszillationsterm und Muckenhoupt-Klassen werfen.

Am Ende werden wir in aller Kürze auf die geschichtliche Entwicklung der umgekehrten Integralungleichungen eingehen und weiterführende Literaturhinweise geben.

2.1. Umgekehrte Hölder-Ungleichungen

Wir stellen zunächst einige Redeweisen zusammen.

Sei im Folgenden stets $c > 1$ und $q > 1$. Mit I_0 bezeichnen wir immer ein kompaktes Intervall und mit \mathcal{I} die Menge aller Teilintervalle positiver Länge. Stets sei W_0 ein kompakter, achsenparalleler, N -dimensionaler Würfel mit einem $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Die Menge aller achsenparallelen Teilwürfel positiven Maßes bezeichnen wir mit \mathcal{W} . Die Menge aller Hilbert-Intervalle von W_0 bezeichnen wir mit $\mathfrak{h}(\mathcal{I})$ und mit \mathcal{Q} meinen wir die Menge aller achsenparallelen Teilquader von W mit positivem Maß. Ohne Einschränkung wählen wir im Folgenden meist $I_0 = [0, 1]$ und $W_0 = [0, 1]^N$. In diesem Kapitel seien Funktionen f stets reellwertig und nichtnegativ.

Bei einer integrierbaren Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ sagen wir, dass sie eine **umgekehrte (c, q) -Hölder-Ungleichung auf den Teilintervallen** erfüllt, falls für alle $I \in \mathcal{I}$ die Ungleichung

$$\left(\int_I f^q \right)^{1/q} \leq c \int_I f$$

2. Umgekehrte Integralungleichungen

gilt. Mit

$$\text{RH}(c, q, \mathcal{I})$$

bezeichnen wir die Menge aller solcher Funktionen. Gelegentlich ist es günstiger, eine Ungleichung der Form $\int_I f^q \leq d(\int_I f)^q$ zu betrachten. Diese Ungleichung ist äquivalent zu der (c, q) -Hölder-Ungleichung mit $d = c^q$.

Die Namensgebung „umgekehrte Hölder-Ungleichung“ kommt daher, dass die Hölder-Ungleichung angewendet auf das Produkt $1 \cdot f$ die Ungleichung

$$\int_I f \leq \left(\int_I f^q \right)^{1/q}$$

liefert.

Entsprechend sagen wir, dass eine integrierbare Funktion $f : [0, 1]^N \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine **umgekehrte (c, q) -Hölder-Ungleichung auf den Teilwürfeln** erfüllt, falls für alle $W \in \mathcal{W}$ die Ungleichung

$$\left(\int_W f^q \right)^{1/q} \leq c \int_W f$$

gilt. Analoge Sprechweisen benutzen wir für umgekehrte Hölder-Ungleichungen auf Teilquadranten und Hilbert-Intervallen. Die Mengen solcher Funktionen bezeichnen wir mit

$$\text{RH}(c, q, \mathcal{W}), \quad \text{RH}(c, q, \mathcal{Q}) \quad \text{bzw.} \quad \text{RH}(c, q, \text{h}(\mathcal{I})).$$

Neben diesen Typen tauchen verschiedene Varianten von umgekehrten Hölder-Ungleichungen auf.

Wir sagen, eine integrierbare Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ erfüllt eine **r -schwache umgekehrte (c, q) -Hölder-Ungleichung** für Teilintervalle, falls für alle $I \in \mathcal{I}$ die Ungleichung

$$\left(\int_{rI} f^q \right)^{1/q} \leq c \int_I f$$

gilt. Dabei bezeichnen wir mit rI das um einen Faktor $0 < r < 1$ gestauchte Intervall mit gleichem Mittelpunkt wie I . Die Menge aller solcher Funktionen bezeichnen wir mit $\text{RH}(c, q, r, \mathcal{I})$. Während wir Entsprechendes für Würfel und Quader vereinbaren, wollen wir im Falle der Hilbert-Intervalle nicht das skalierte Bild $r\text{h}(I)$, sondern das Bild $\text{h}(rI)$ des skalierten Intervalls nehmen.

Manchmal taucht eine zusätzliche additive Konstante k oder eine zusätzliche (integrierbare) Funktion g auf und man hat Ungleichungen der Form

$$\left(\int_I f^q \right)^{1/q} \leq c \int_I f + k \quad \text{oder} \quad \left(\int_I f^q \right)^{1/q} \leq c \int_I f + \int_I g.$$

Statt der Potenzfunktion t^p , die der umgekehrten Hölder-Ungleichung zu Grunde liegt, kann man andere wachsende, konvexe Funktionen $\varphi, \psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\varphi \leq \psi$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ nehmen. Man betrachtet dann Ungleichungen der Form

$$\int_I \varphi(f) \leq \psi \left(\int_I f \right).$$

Diese wollen wir als umgekehrte (φ, ψ) -Ungleichungen bezeichnen. Ist $\psi = c\varphi$, dann spricht man auch von einer **umgekehrten Jensen-Ungleichung**. Mit dem von uns gewählten Zugang brauchen wir ψ nicht in dieser Weise einzuschränken. Dies erweitert das Anwendungsspektrum vielleicht in eine interessante Richtung. Wir denken hier insbesondere an Kombinationen $\varphi(t) = t^p$ und ψ mit gleichem asymptotischen Verhalten wie $t \mapsto ct^p$ für große Werte, aber mit $\psi(0) > 0$. Die Bedingung an kleine Werte von f , die in einer umgekehrten Hölder-Ungleichung der Form $\int_I f^q \leq c(\int_I f)^q$ steckt (vgl. Satz 2.3), fällt damit weg. Wenn es um Aussagen wie z. B. Integrierbarkeitsexponenten von f geht, die nur vom Wachstum der Superniveaumengenmaße $|f^{-1}[t, \infty[|$ bei $t \rightarrow \infty$ abhängen, erscheint uns dies wünschenswert.

An Stelle von Würfeln treten häufig Kugeln auf. Daneben gibt es jede mögliche Kombination der oben angegebenen Formen.

Wir wollen uns im Weiteren auf stetige Funktionen beschränken. Aussagen über L^p -Normen (oder weitere Normen) von allgemeineren Funktionen f kann man mit dem folgenden Glättungslemma stets auf diesen Fall zurückführen. Denn das Lemma zeigt, dass für jede Regularisierung die gleiche umgekehrte Hölder-Ungleichung gilt. Außerdem weiß man, dass man stets eine Folge von regularisierten Funktionen nehmen kann, die in jeder L^p -Norm konvergiert.

Lemma 2.1 (Glättung bei umgekehrten Hölder-Ungleichungen)

Sei $0 < r \leq 1$ und $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein Kern mit Träger in $[\epsilon, 1 - \epsilon]^N$ mit einem $0 < \epsilon < 1$. Erfüllt eine Funktion $f : [0, 1]^N \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine (eventuell schwache) umgekehrte Hölder-Ungleichung

$$\left(\int_{rW} f^q \right)^{1/q} \leq c \int_W f \quad \text{für alle } W \in \mathcal{W},$$

dann erfüllt auch die Faltung $\varphi * f$ die gleiche umgekehrte Hölder-Ungleichung

$$\left(\int_{rW} (\varphi * f)^q \right)^{1/q} \leq c \int_W \varphi * f \quad \text{für alle } W \in \mathcal{W}_\epsilon.$$

Dabei bezeichnen wir mit \mathcal{W}_ϵ die Menge aller Teilwürfel von $[\epsilon, 1 - \epsilon]^N$ mit positivem Maß.

2. Umgekehrte Integralungleichungen

Beweis (nach [BoIw83])

Wir wenden eine kontinuierliche Version

$$\| \int_{\mathbb{R}^N} g(\cdot, y) d\mu(y) \|_{L^q} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \|g(\cdot, y)\|_{L^q} d\mu(y)$$

der Dreiecksungleichung für $d\mu(y) := \varphi(y) dy$ und $g(x, y) := f(x - y)$ an. Zusammen mit der vorausgesetzten umgekehrten Hölder-Ungleichung erhalten wir für alle $W \in \mathcal{W}_\epsilon$ die behauptete Abschätzung

$$\begin{aligned} \left(\int_{rW} (\varphi * f)^q \right)^{1/q} &= \left(\int_{rW} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x - y) \varphi(y) dy \right)^q dx \right)^{1/q} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{rW} f^q(x - y) dx \right)^{1/q} \varphi(y) dy \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}^N} \int_W f(x - y) dx \varphi(y) dy \\ &= c \int_W \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y) \varphi(y) dy dx \\ &= c \int_W \varphi * f. \end{aligned} \quad \square$$

2.1.1. Gehring-Lemma

Die Bedeutung von umgekehrten Hölder-Ungleichungen für die Regularitätstheorie resultiert daraus, dass aus ihnen eine höhere Integrierbarkeit als die von vorneherein vorliegende L^q -Integrierbarkeit folgt. Dies wurde zuerst von Gehring in [Geh73] im Zusammenhang mit der Untersuchung quasikonformer Abbildungen entdeckt. Seitdem hat das Gehring-Lemma zahlreiche Verbesserungen, Varianten, verschiedene Beweise und neue Anwendungen erfahren (wir verweisen auf [Iwa95] und dort zitierte Literatur).

Wir wollen hier zunächst eine Form des Gehring-Lemmas formulieren und einen klassischen Beweis mittels Maximalfunktionen skizzieren. Dies soll zu einem Vergleich mit unserer Methode dienen, mit der wir weiterreichende Resultate erzielen können.

Satz 2.2 (Gehring-Lemma)

Erfüllt eine stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine umgekehrte (c, q) -Hölder-Ungleichung für Teilintervalle, dann gibt es ein $p > q$ mit $f \in L^p$. D. h. für alle $c, q > 1$ gibt es ein $p > q$ mit

$$\text{RH}(c, q, \mathcal{I}) \subset L^p.$$

Beweis Die Ausarbeitung des folgenden Zuganges über Maximalfunktionen geht auf die Arbeit [FrMo85] zurück, wobei gewisse Teile so auch im Originalbeweis in [Geh73] zu finden sind.

Fassen wir bei der umgekehrten Hölder-Ungleichung

$$\left(\int_I f^q\right)^{1/q} \leq c \int_I f \quad \text{für alle } I \in \mathcal{I}$$

alle Intervalle, die ein vorgegebenes $t \in [0, 1]$ enthalten, zu dem Mengensystem $\mathcal{I}(t)$ zusammen und gehen zum Supremum über, so erhalten wir die Ungleichung

$$\left(\sup_{I \in \mathcal{I}(t)} \int_I f^q\right)^{1/q} \leq c \sup_{I \in \mathcal{I}(t)} \int_I f \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

Hier taucht auf beiden Seiten der Ungleichung die **Hardy-Littlewood-Maximalfunktion** $Mf(t) := \sup_{I \in \mathcal{I}(t)} \int_I f$ zu f bzw. zu f^q auf. Da die Bildung der fallenden Umordnung monoton ist (aus $g \leq h$ folgt $g^* \leq h^*$) und da $(g^{1/q})^* = (g^*)^{1/q}$ (z. B. in [BeSh88, Kapitel 2]), erhalten wir weiter

$$\left((Mf^q)^*(t)\right)^{1/q} \leq c(Mf)^*(t) \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

Die fallende Umordnung der Maximalfunktion $Mf(t)$ ist äquivalent zur Mittelwertfunktion $t \mapsto \int_0^t f^*$ der fallenden Umordnung. D. h. es gibt Konstanten $0 < c_1 \leq 1 \leq c_2$, so dass für alle $t \in [0, 1]$ gilt

$$c_1 \int_0^t f^* \leq (Mf)^*(t) \leq c_2 \int_0^t f^*.$$

Diese Beziehung wird im **Theorem von Herz** mit Hilfe von Überdeckungssätzen nachgewiesen (vgl. [BeSh88, Kapitel 3], dort findet man auch mehr über Maximalfunktionen und historische Anmerkungen). Die Äquivalenz von Maximalfunktion und Mittelwertfunktion zu f^* und $(f^*)^q$ ausnutzend, können wir so eine umgekehrte Hölder-Ungleichung für die fallende Umordnung f^* schließen

$$\left(\int_0^t (f^*)^q\right)^{1/q} \leq c_1^{-1/q} c_2 c \int_0^t f^*.$$

Dabei verschlechtert sich allerdings die Konstante von c auf $\tilde{c} := c_1^{-1/q} c_2 c$.

Mit Untersuchungen der umgekehrten Hölder-Ungleichung im Falle monotoner Funktionen (siehe Kapitel 2.1.2) kann man schließlich höhere Integrierbarkeit für f^* und damit auch für f folgern. \square

Durch die Untersuchungen aus Kapitel 1.4 erhalten auch wir eine Rückführung auf den monotonen Fall. Der entscheidende Vorteil dabei ist, dass wir ohne Verlust in der Konstanten zur monotonen Umordnung übergehen können. Dies geht

2. Umgekehrte Integralungleichungen

auch für Funktionen mehrerer Variablen (wenn wir das richtige Mengensystem nehmen). Als Zusatzinformation erhalten wir zudem eine Aussage, die die Situation bei monotonen Funktionen vollständig klärt. Ferner kann die auftretende Funktion ψ weitgehend beliebig sein und muss nicht wie bei klassischen Formen des Gehring-Lemmas vom Typ $\psi = c\varphi$ sein.

Satz 2.3 (Rückführung auf den monotonen Fall)

Seien $\varphi, \psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ Funktionen mit φ stetig, wachsend und konvex und $\varphi \leq \psi$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Erfüllt eine stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Ungleichung

$$\int_I \varphi \circ f \leq \psi \left(\int_I f \right) \quad (2.1)$$

für alle $I \in \mathcal{I}$, dann liegt neben der Intervallmittelwertmenge

$$M(f) := \left\{ \left(\int_I f, \int_I \varphi \circ f \right) : I \in \mathcal{I} \right\}$$

auch die Intervallmittelwertmenge

$$M(f^*) := \left\{ \left(\int_I f^*, \int_I \varphi \circ f^* \right) : I \in \mathcal{I} \right\}$$

der fallenden Umordnung in dem Zwischengraph

$$G := \{(x, y) : x \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Insbesondere liegt der obere Rand von $M(f^*)$ über $]\inf f, \sup f[$ in diesem Zwischengraph G . Der obere Rand von $M(f^*)$ besteht aus den Kurven $\{(\int_0^t f^*, \int_0^t \varphi \circ f^*) : t \in]0, 1]\}$ und $\{(\int_t^1 f^*, \int_t^1 \varphi \circ f^*) : t \in [0, 1[\}$. Das heißt es gilt

$$\int_0^t \varphi \circ f^* \leq \psi \left(\int_0^t f^* \right) \quad \text{für } t \in]0, 1], \quad (2.2)$$

$$\int_t^1 \varphi \circ f^* \leq \psi \left(\int_t^1 f^* \right) \quad \text{für } t \in [0, 1[\quad (2.3)$$

und die auch gültige Abschätzung $\int_I \varphi \circ f^* \leq \psi(\int_I f^*)$ für alle $I \in \mathcal{I}$ enthält nicht mehr Informationen aus (2.1) als diese beiden Ungleichungen.

Dieselbe Aussage gilt für stetige Funktionen $f : [0, 1]^N \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mehrerer Variablen, wenn man statt der Menge \mathcal{I} die Menge $\mathbb{h}_N(\mathcal{I})$ aller N -dimensionalen Hilbert-Intervalle nimmt.

Beweis Kann man unmittelbar aus Satz 1.32 ablesen. □

Bemerkung 2.4 Wie man aus einer Bedingung (2.2) an eine Funktion f für den Fall $\varphi(x) = x^q$ und $\psi(x) = cx^q$ optimale Integrierbarkeitsaussagen ableitet, untersuchen wir im nächsten Unterkapitel.

Für den gleichen Fall enthält die Ungleichung (2.3) eine Bedingung an kleine Werte von f^* . Im Kontext der Regularitätstheorie schwacher Lösungen partieller Differentialgleichungen ist nicht zu erwarten, dass eine Funktion eine solche Bedingung erfüllt. Man vergleiche in diesem Zusammenhang mit der Bemerkung am Ende des Kapitels V.1 in [Gia83].

Bemerkung 2.5 Man kann in dem Satz statt der Menge der Hilbert-Intervalle auch die Menge aller Quader nehmen. Das Quadersystem enthält aber beliebig dünne Mengen und ist deshalb für Anwendungen in der Regularitätstheorie von geringerer Bedeutung. Dort gelangt man nämlich zu umgekehrten Hölder-Ungleichungen für die Ableitung einer schwachen Lösung typischerweise dadurch, dass man mit Hilfsfunktionen testet, die symmetrische Abschneidefunktionen enthalten.

Mit der Aussage über Hilbert-Intervalle haben wir zum ersten Mal nachgewiesen, dass auch bei Funktionen mehrerer Variablen und Mengensystemen ohne Entartung dieselbe Ungleichung für die monotone Umordnung gilt. Mit den Ergebnissen zu monotonen Funktionen (siehe Kapitel 2.1.2) gelangen wir so zum ersten Mal zu einem optimalen Gehring-Lemma für Funktionen mehrerer Variablen auf einem Mengensystem ohne Entartungen.

Ist eine (schwache) umgekehrte Hölder-Ungleichung für das Würfelsystem bekannt, so kann man daraus eine schwache umgekehrte Hölder-Ungleichung für die Hilbert-Intervalle herleiten, wie wir im nächsten Satz demonstrieren wollen. In diesem Sinne ist eine umgekehrte Hölder-Ungleichung für Hilbert-Intervalle nicht wesentlich schlechter als eine für Würfel. Da man beim Übergang vom Würfelsystem zum Hilbert-System aber mit einem Verlust in der Konstanten c und im Skalierungsparameter r rechnen muss, sind die Ergebnisse nicht unbedingt auch im Fall des Würfelsystems optimal. Es bleibt noch zu untersuchen, ob in der Regularitätstheorie auch ein direkter Beweis einer umgekehrten Hölder-Ungleichung für Hilbert-Intervalle (statt Würfel oder Kugeln) möglich ist.

Satz 2.6 (Würfel versus Hilbert-Intervalle)

Gilt für eine Funktion $f : [0, 1]^N \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine umgekehrte Hölder-Ungleichung

$$\left(\int_W f^q \right)^{1/q} \leq c \int_W f$$

auf allen Teilwürfeln $W \in \mathcal{W}$, dann gilt auch eine schwache umgekehrte Hölder-Ungleichung auf den Hilbert-Intervallen. Genauer gibt es zu jedem $I \in \mathcal{I}$ ein Intervall $J \subset I$ mit $|J| \geq |I|/3$ und

$$\left(\int_{\text{h}(J)} f^q \right)^{1/q} \leq c2^{N+1} \int_{\text{h}(I)} f.$$

2. Umgekehrte Integralungleichungen

Beweis Wir formulieren den Beweis für $N = 2$ und bemerken am Ende, welche Änderungen für allgemeine N zu machen sind.

Wir betrachten zunächst Vereinigungen von bestimmten Intervallen. Dazu sei eine natürliche Zahl n vorgegeben und I_1, \dots, I_k im Innern disjunkte Intervalle der Form $[\frac{i-1}{4^n}, \frac{i}{4^n}]$ mit $i \in \{1, \dots, 4^n\}$. Die Bilder $\mathfrak{h}(I_1), \dots, \mathfrak{h}(I_k)$ sind Quadrate der Größe $\frac{1}{4^n}$ und man kann mit der vorausgesetzten umgekehrten Hölder-Ungleichung für die Vereinigung $J := I_1 \cup \dots \cup I_k$ abschätzen

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathfrak{h}(J)} f^q \right)^{1/q} &= \left(\frac{1}{k} \int_{\mathfrak{h}(I_1)} f^q + \dots + \frac{1}{k} \int_{\mathfrak{h}(I_k)} f^q \right)^{1/q} \\ &\leq c \left(\frac{1}{k} \left(\int_{\mathfrak{h}(I_1)} f \right)^q + \dots + \frac{1}{k} \left(\int_{\mathfrak{h}(I_k)} f \right)^q \right)^{1/q} \\ &\leq ck^{-\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathfrak{h}(I_1)} f + \dots + \int_{\mathfrak{h}(I_k)} f \right) \\ &= ck^{1-\frac{1}{q}} \int_{\mathfrak{h}(J)} f. \end{aligned}$$

Nun geben wir uns ein Intervall I aus \mathcal{I} beliebig vor. Zu diesem sei n die kleinste Zahl, für die ein Intervall der Form $[\frac{i-1}{4^n}, \frac{i}{4^n}]$ mit $i \in \{1, \dots, 4^n\}$ ganz in I liegt. Seien ferner I_1, \dots, I_k alle Intervalle dieser Form und $J := I_1 \cup \dots \cup I_k$. Man macht sich klar, dass dann k eine ganze Zahl zwischen 1 und 6 ist (sonst ist n nicht minimal). Ferner sieht man leicht ein, dass

$$\frac{1}{3} |\mathfrak{h}(I)| \leq |\mathfrak{h}(J)| = \frac{k}{4^n} \leq |h(I)| \leq \frac{k+2}{4^n} \leq \frac{8}{4^n}.$$

Damit und mit der Rechnung oben sowie elementarer Betrachtung des Termes in k erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathfrak{h}(J)} f^q \right)^{1/q} &\leq ck^{1-\frac{1}{q}} \int_{\mathfrak{h}(J)} f \\ &\leq ck^{1-\frac{1}{q}} \frac{k+2}{k} \int_{\mathfrak{h}(I)} f \\ &\leq c \max(3, 8 \cdot 6^{-1/q}) \int_{\mathfrak{h}(I)} f. \end{aligned}$$

Dies ist mit einer etwas besseren (aber noch von q abhängigen) Konstanten die Behauptung für $N = 2$.

Für $N > 2$ stellt man die gleichen Überlegungen an. Nun treten Intervalle der Form $[\frac{i-1}{2^{Nn}}, \frac{i}{2^{Nn}}]$ und Würfel der Größe $\frac{1}{2^{Nn}}$ auf. Die Anzahl der Intervalle, die man benötigt, ist höchstens $2 \cdot 2^N - 2$. Die gleiche Rechnung ergibt

$$\left(\int_{\mathfrak{h}(J)} f^q \right)^{1/q} \leq c \max(3, 2^{N+1} \cdot (2^{N+1} - 2)^{-\frac{1}{q}}) \int_{\mathfrak{h}(I)} f.$$

Dies ist mit etwas besserer (aber noch von q abhängigen) Konstante die Behauptung. \square

Bemerkung 2.7 Der Satz gilt mit anderen Konstanten auch für r -schwache umgekehrte Hölder-Ungleichungen auf Würfeln. Dazu wählt man zu beliebigem $I \in \mathcal{I}$ ein (möglichst großes) Teilintervall J , so dass $\frac{1}{r}h(J)$ ein Würfel in $h(I)$ ist. Man überlegt, dass dies auf eine Weise möglich ist, bei der das Verhältnis von $|I|$ zu $|J|$ beschränkt bleibt. Darauf kann man mit ähnlichen Argumenten einen Beweis gründen.

Bemerkung 2.8 Wir vermuten, dass man auch ohne eine Verschlechterung des Skalierungsparameters r auskommt (mit evtl. vergrößertem Verlust in der Konstanten). Dazu wäre es notwendig, genauer zu analysieren, was die Bedingung der umgekehrten Hölder-Ungleichung an die Würfelmittelmengemenge $\{(f_W f, f_W f^q) : W \in \mathcal{W}\}$ für die Mittelwertmenge $\{(f_{h(I)} f, f_{h(I)} f^q) : I \in \mathcal{I}\}$ bedeutet. Man beachte in diesem Zusammenhang, dass man jedes Hilbert-Intervall $h(I)$ als eine spezielle, abzählbare Vereinigung von im Innern disjunkten Würfeln schreiben kann und man auch noch Informationen über alle Teilwürfel des Hilbert-Intervalls bekommt, die in zwei der speziellen Würfel liegen.

2.1.2. Gehring-Lemma für monotone Funktionen

Zum Nachweis von höherer und optimaler Integrabilität für Funktionen, die eine umgekehrte Hölder-Ungleichung erfüllen, müssen wir nach den vorangehenden Untersuchungen „nur“ noch die Situation für monotone Funktionen klären.

Um das dabei auftretende Wachstum genauer charakterisieren zu können, als dies mit Lebesgue-Räumen L^p möglich ist, führen wir die Lorentz-Räume $L^{p,q}$ ein. Deren zweiter Parameter q fügt der Skala der Lebesgue-Räume eine Art Feinstruktur hinzu (genauer sagt der anschließende Satz). Die Idee bei den Funktionalen ist, das Verhältnis der fallenden Umordnung zur Potenzfunktion $t^{-1/p}$ mit einer L^q -Norm zum Maß $\frac{ds}{s}$ zu messen.

Definition 2.9 (Lorentz-Räume)

Sei I_0 ein kompaktes Intervall. Wir definieren für jede messbare Funktion $f : I_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und alle $p, q \in [0, \infty]$ die **Lorentz-Funktionale**

$$\|f\|_{pq} := \left(\int_{I_0} \left(s^{1/p} f^*(s) \right)^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q},$$

$$\|f\|_{p\infty} := \sup_{s \in I_0} s^{1/p} f^*(s).$$

Dabei soll $1/p$ null sein im Fall $p = \infty$. Die Menge aller messbaren Funktionen f , für die $\|f\|_{pq}$ endlich ist, nennen wir den **Lorentz-Raum** $L^{p,q}$.

2. Umgekehrte Integralgleichungen

Wir fassen die Aussagen über Lorentz-Räume, die wir hier benötigen, im folgenden Satz zusammen. Beweise und weitere Ausführungen findet man z. B. in [BeSh88, Kapitel 4].

Satz 2.10 (Lorentz-Räume)

Für alle $1 < p < P < \infty$ und $1 < q < Q < \infty$ gelten die Einbettungen

$$L^\infty \subset L^{P1} \subset L^{Pq} \subset L^{PQ} \subset L^{P\infty} \subset L^{p1} \subset L^{pq} \subset L^{pQ} \subset L^{p\infty} \subset L^1.$$

Für die Lorentz-Funktionale gelten entsprechende Einbettungsabschätzungen. Beispielsweise gilt die Abschätzung

$$\|f\|_{pQ} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{Q-q}{Qq}} \|f\|_{pq}.$$

Die Lorentz-Räume sind eine Verallgemeinerung der Lebesgue-Räume, denn es ist $L^{pp} = L^p$ für alle $1 \leq p \leq \infty$. Für die Einbettung $L^p \subset L^{pq}$ für $1 \leq q < p < \infty$ findet man die Abschätzung

$$\|f\|_{pq} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{1/q} \|f\|_p.$$

(Die Konstante ist besser als bei der Abschätzung oben.)

Der Operator $Mf(t) := \int_0^t f^* f^*$ bildet jeden Lorentz-Raum L^{pq} in sich ab und hat Operatornorm

$$\|M\|_{pq} := \|M\|_{L^{pq}L^{pq}} \leq \frac{p}{p-1}.$$

Die zugehörige Ungleichung

$$\left(\int_I \left(s^{1/p} \int_0^s f^*\right)^q \frac{ds}{s}\right)^{1/q} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_I \left(s^{1/p} f^*(s)\right)^q \frac{ds}{s}\right)^{1/q}$$

ist auch unter **Hardy-Ungleichung** bekannt. Da $f^*(t) \leq \int_0^t f^*$ ist, gilt somit

$$\|f\|_{pq} \leq \|Mf\|_{pq} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{pq}.$$

Das Funktional $f \mapsto \|Mf\|_{pq}$ ist immer eine Norm auf L^{pq} , während das äquivalente Funktional $f \mapsto \|f\|_{pq}$ unter Umständen die Dreiecksungleichung nicht erfüllt.

Zur Beschreibung der optimalen Integrierbarkeit im Gehring-Lemma für ein gegebenes $q \in]1, \infty[$ benötigen wir die Funktion

$$h_q :]q, \infty[\rightarrow]1, \infty[, \quad h_q(p) := \frac{p-1}{p} \left(\frac{p}{p-q}\right)^{1/q}.$$

Man überprüft leicht, dass $\lim_{p \searrow q} h_q(p) = \infty$ und $\lim_{p \rightarrow \infty} h_q(p) = 1$. Ferner findet man als Ableitung

$$\begin{aligned} h'_q(p) &= \frac{p - (p - 1)}{p^2} \left(\frac{p}{p - q} \right)^{\frac{1}{q}} + \frac{p - 1}{p} \frac{1}{q} \left(\frac{p}{p - q} \right)^{\frac{1}{q} - 1} \frac{(p - q) - p}{(p - q)^2} \\ &= -\frac{1}{p^2} \left(\frac{p}{p - q} \right)^{\frac{1}{q}} \frac{q - 1}{p - q}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir im zweiten Schritt so ausgeklammert und zusammengefasst, dass man leicht ablesen kann, dass die Ableitung für alle zulässigen p, q negativ ist. Die Funktion h_q ist also streng monoton fallend. Damit ist die Existenz einer streng monoton fallenden Umkehrfunktion

$$h_q^{-1} :]1, \infty[\rightarrow]q, \infty[$$

gesichert. Für diese gilt $\lim_{x \searrow 1} h_q^{-1}(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} h_q^{-1}(x) = q$.

Die Funktion h_q und deren Umkehrfunktion treten bei der Untersuchung von umgekehrten Hölder-Ungleichungen in natürlicher Weise auf. Dies verdeutlicht das folgende Resultat.

Lemma 2.11 (Gehring-Lemma für Potenzfunktionen)

Seien $c, q > 1$ und $p > q$. Eine Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ der Form $f(t) = t^{-1/p}$ erfüllt für alle $t \in]0, 1]$ die umgekehrte Hölder-Ungleichung

$$\left(\int_0^t f^q(s) ds \right)^{1/q} \leq c \int_0^t f(s) ds$$

genau dann, wenn $p \geq h_q^{-1}(c)$. Die Potenzfunktion darf also bei Annäherung an null nicht schneller als $t^{-1/P}$ mit $P := h_q^{-1}(c)$ wachsen.

Beweis Für Potenzfunktionen können die Integrale leicht berechnet werden und wir erhalten die folgenden Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \left(\frac{t^{-1/p}}{(1 - \frac{q}{p})} \right)^{1/q} &= \left(\int_0^t s^{-q/p} ds \right)^{1/q} \leq c \int_0^t s^{-1/p} ds = c \frac{t^{-1/p}}{1 - \frac{1}{p}} \\ \iff h_q(p) &= \frac{1 - \frac{1}{p}}{(1 - \frac{q}{p})^{\frac{1}{q}}} \leq c \\ \iff p &\geq h_q^{-1}(c). \quad \square \end{aligned}$$

Dass auch andere Funktionen, die eine umgekehrte Hölder-Ungleichung erfüllen, nicht wesentlich schneller als $t^{-1/P}$ mit $P := h_q^{-1}(c)$ wachsen können, zeigt der nächste Satz in Verbindung mit Satz 2.3.

2. Umgekehrte Integralungleichungen

Satz 2.12 (Gehring-Lemma für monotone Funktionen)

Seien $c, q > 1$ und $P := h_q^{-1}(c)$ sowie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine fallende Funktion. Erfüllt f für alle $t \in]0, 1]$ die umgekehrte Hölder-Ungleichung

$$\left(\int_0^t f^q(s) ds \right)^{1/q} \leq c \int_0^t f(s) ds, \quad (2.4)$$

dann liegt f für alle $p \in]q, P[$ im Lorentz-Raum $L^{p,q}$ und erfüllt für alle $t \in]0, 1]$ die Ungleichung

$$\left(t^{-1/p} \int_0^t s^{q/p} f^q(s) \frac{ds}{s} \right)^{1/q} \leq k \left(\int_0^t f^q(s) ds \right)^{1/q} \quad (2.5)$$

mit der Konstanten $k = k(c, q, p) = \left(1 - \left(\frac{c}{h_q(p)} \right)^q \right)^{-1/q}$.

Mit der Einbettung $L^{p,q} \subset L^p$ und der entsprechenden Abschätzung liegt f für alle $p \in]q, P[$ auch im Lebesgue-Raum L^p und erfüllt für alle $t \in]0, 1]$ die Ungleichung

$$\left(\int_0^t f^p(s) ds \right)^{1/p} \leq \tilde{k} \left(\int_0^t f^q(s) ds \right)^{1/q} \quad (2.6)$$

mit der Konstanten $\tilde{k} = \tilde{k}(c, q, p) = \left(\frac{q}{p} \right)^{1/q} k$.

Beweis (nach [ApSb90])

Wir geben uns ein $p \in]q, P[$ vor und betrachten den Term

$$T := \int_0^t s^{q/p} \left(\int_0^s f^q(u) du \right) \frac{ds}{s}.$$

Einerseits wenden wir auf T den Satz von Fubini an. Dadurch entsteht innen ein berechenbares Integral und man erhält so eine Differenz aus einem $L^{p,q}$ -Term und einem L^q -Term:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^t s^{\frac{q}{p}-2} \int_0^s f^q(u) du ds \\ &= \int_0^t f^q(u) \int_u^t s^{\frac{q}{p}-2} ds du \\ &= \int_0^t f^q(u) \left(\frac{u^{\frac{q}{p}-1}}{1-\frac{q}{p}} - \frac{t^{\frac{q}{p}-1}}{1-\frac{q}{p}} \right) du \\ &= \frac{p}{p-q} \int_0^t u^{\frac{q}{p}} f^q(u) \frac{du}{u} - \frac{p}{p-q} t^{\frac{q}{p}-1} \int_0^t f^q(u) du. \end{aligned}$$

Andererseits benutzen wir die vorausgesetzte umgekehrte Hölder-Ungleichung, um beim Term T das innere Integral nach oben abzuschätzen. Mit der $(L^{p,q}, L^{p,q})$ -Operatornorm $\|M\|_{p,q} = \frac{p}{p-1}$ (siehe Satz 2.10) des Operators $Mf(t) = \int_0^t f^*$

erhalten wir den gleichen L^{pq} -Term wie oben nur mit anderem Vorfaktor.

$$\begin{aligned} T &= \int_0^t \left(s^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^s f^q(u) du \right)^{1/q} \right)^q \frac{ds}{s} \\ &\leq \int_0^t \left(s^{\frac{1}{p}} c \int_0^s f(u) du \right)^q \frac{ds}{s} \\ &\leq c^q \|M\|_{pq}^q \int_0^t \left(s^{\frac{1}{p}} f(s) \right)^q \frac{ds}{s} \\ &= c^q \left(\frac{p}{p-1} \right)^q \int_0^t s^{\frac{q}{p}} f^q(s) \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

Wir fassen die beiden Berechnungen zusammen, indem wir die beiden L^{pq} -Terme auf der linken Seite aufsammeln und den L^q -Term auf der rechten. So erhalten wir nach Teilen durch $\frac{p}{p-q} t^{p/q} > 0$ die Ungleichung

$$\left(1 - c^q \left(\frac{p}{p-1} \right)^q \frac{p-q}{p} \right) t^{-\frac{q}{p}} \int_0^t s^{\frac{q}{p}} f^q(s) \frac{ds}{s} \leq \int_0^t f^q(s) ds.$$

Die Voraussetzung

$$p < P = h_q^{-1}(c) \iff h_q(p) = \frac{p-1}{p} \left(\frac{p}{p-q} \right)^{1/q} > c$$

garantiert, dass der Vorfaktor positiv ist und sich die Ungleichung beim Dividieren durch diesen Faktor nicht umkehrt. So erhalten wir mit

$$k := \left(1 - \left(\frac{c}{h_q(p)} \right)^q \right)^{-1/q} = \left[1 - c^q \left(\frac{p}{p-1} \right)^q \frac{p-q}{p} \right]^{-1/q}$$

die Ungleichung

$$t^{-\frac{q}{p}} \int_0^t s^{\frac{q}{p}} f^q(s) \frac{ds}{s} \leq k^q \int_0^t f^q(s) ds.$$

Dies ist bis auf das Ziehen der q -ten Wurzel die erste behauptete Ungleichung. Da die rechte Seite beschränkt ist, liest man ab, dass f im Lorentz-Raum L^{pq} liegen muss.

Die zweite Ungleichung folgt unmittelbar aus der Einbettungsungleichung von $L^{pq} \subset L^p$. Diese lautet $\|f\|_p \leq (q/p)^{1/q} \|f\|_{pq}$ (siehe Satz 2.10). \square

Bemerkung 2.13 Bezeichnen wir mit $\text{FRH}(c, q)$ die Menge aller fallenden Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, die für alle $t \in]0, 1]$ eine umgekehrte Hölder-Ungleichung $(\int_0^t f^q)^{1/q} \leq c \int_0^t f$ erfüllen. Dann beinhaltet der Satz die Aussage, dass für alle $p \in]q, P[$

$$\text{FRH}(c, q) \subset L^{pq} \subset L^p$$

2. Umgekehrte Integralungleichungen

ist. Diese Aussage ist optimal in der Hinsicht, dass für die Funktion $t^{-1/P}$ gilt

$$t^{-1/P} \in \text{FRH}(c, q) \setminus L^p \subset \text{FRH}(c, q) \setminus L^{pq}.$$

Ob man den Grenzfall noch genauer charakterisieren kann, wissen wir nicht. Wir vermuten, dass $\text{FRH}(c, q)$ zumindest nicht ganz in $L^{p\infty}$ liegt.

Idee: Man konstruiert eine fallende Funktion f , die auf einer Teilfolge mit einem log-Faktor singulärer als $t^{-1/P}$ verläuft. Deren mittleres singuläres Verhalten $f_0^t f$ aber wie $f_0^t s^{-1/P}$ geht (wenn das denn geht), am besten mit einer Treppenfunktion, dann hat auch $f_0^t f^q$ gleiches Verhalten wie $f_0^t s^{-q/p}$. Man muss überprüfen, ob $f \in \text{FRH}(c, q)$ ist. Zur Vereinfachung kann man konkrete Werte wie $c = 2$ und $q = 2$ nehmen.

2.2. Oszillationsungleichungen

In diesem Unterkapitel untersuchen wir Oszillationsungleichungen. Diese haben Bedeutung für die Regularitätstheorie schwacher Lösungen partieller Differentialgleichungen und für die Regularitätstheorie quasikonformer Abbildungen (z. B. [Iwa82]). Mit den Ergebnissen aus Unterkapitel 1.4 können wir analog zu den umgekehrten Hölder-Ungleichungen vorgehen.

Für eine Konstante $c > 0$ und einen Exponenten $q \geq 1$ sagen wir von einer integrierbaren Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, dass sie eine (c, q) -**Oszillationsungleichung auf den Teilintervallen** erfüllt, falls

$$\left(\int_I |f - f_I|^q \right)^{1/q} \leq c \int_I f$$

für alle $I \in \mathcal{I}$ gilt. Allgemeiner können wir auch eine stetige, in der zweiten Variablen konvexe Funktion $k : [\inf f, \sup f] \times [\inf f, \sup f] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und eine Funktion $\psi : [\inf f, \sup f] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ zulassen und Ungleichungen

$$\int_I k(f_I, f) \leq \psi \left(\int_I f \right)$$

für alle $I \in \mathcal{I}$ untersuchen.

Für Funktionen $f : [0, 1]^N \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ betrachtet man entsprechende Ungleichungen auf allen Teilwürfeln, allen Teilquadraten oder allen Hilbert-Intervallen.

Satz 2.14 (Rückführung auf den monotonen Fall)

Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige Funktion und k, ψ Funktionen wie oben angegeben. Erfüllt f eine Ungleichung

$$\int_I k(f_I, f) \leq \psi \left(\int_I f \right) \quad \text{für alle } I \in \mathcal{I}, \quad (2.7)$$

dann gilt

$$\int_0^t k(f_{[0,t]}^*, f^*) \leq \psi \left(\int_0^t f^* \right) \quad \text{für alle } t \in]0, 1], \quad (2.8)$$

$$\int_t^1 k(f_{[t,1]}^*, f^*) \leq \psi \left(\int_t^1 f^* \right) \quad \text{für alle } t \in [0, 1[\quad (2.9)$$

und die auch gültigen Ungleichungen $\int_I k(f_I^*, f^*) \leq \psi(\int_I f^*)$ für alle $I \in \mathcal{I}$ enthalten nicht mehr Informationen aus (2.7) als diese beiden Ungleichungen.

Dies gilt auch für stetige Funktionen $f : [0, 1]^N \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, falls man eine Ungleichung (2.7) für alle Hilbert-Intervalle voraussetzt.

Beweis Sieht man unmittelbar aus Satz 1.33(2). □

Für die wohl wichtigste Oszillationsungleichung wollen wir untersuchen, was aus ihr für die Integrabilität der Funktion f gefolgert werden kann. Dazu spezialisieren wir die Aussage des Satzes in der kommenden Folgerung und stellen erste Betrachtungen über Ungleichungen der Art (2.8) an.

Folgerung 2.15 ((c, 1)-Oszillationsungleichung)

Ist $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige Funktion, die die Ungleichung

$$\int_I |f - f_I| \leq c \int_I f \quad \text{für alle } I \in \mathcal{I} \quad (2.10)$$

erfüllt, dann gilt auch

$$\int_0^t |f^* - f_{[0,t]}^*| \leq c \int_0^t f^* \quad \text{für alle } t \in]0, 1], \quad (2.11)$$

$$\int_t^1 |f^* - f_{[t,1]}^*| \leq c \int_t^1 f^* \quad \text{für alle } t \in [0, 1[\quad (2.12)$$

und dies ist die stärkste Information, die man unabhängig von der Anordnung von f aus (2.10) schließen kann.

Wir wollen klären, welche Mindestintegrität man bei einer Ungleichung (2.11) für die Funktion f erwarten darf. Dazu setzen wir Potenzfunktionen $f(t) = t^{-1/p}$ ein. In diesem Zusammenhang taucht die Funktion

$$h(p) := \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \frac{1}{p-1}$$

in natürlicher Weise auf. Für die Funktion h prüft man mit elementarer Rechnung nach, dass sie die Grenzwerte $\lim_{p \searrow 1} h(p) = 1$ und $\lim_{p \rightarrow \infty} h(p) = 0$ sowie die Ableitung

$$h'(p) = h(p) \ln \frac{p-1}{p} < 0$$

besitzt. Damit ist die Funktion h streng monoton fallend und es existiert eine streng monoton fallende Umkehrfunktion $h^{-1} :]0, 1[\rightarrow]1, \infty[$.

2. Umgekehrte Integralungleichungen

Lemma 2.16 ((c, 1)-Oszillationsungleichung für Potenzfunktionen)

Für eine Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ der Form $f(t) = t^{-1/p}$ gilt die Ungleichung

$$\int_0^t |f - f_{[0,t]}| \leq c \int_0^t f$$

genau dann, wenn

$$p \geq h^{-1}(c/2).$$

Beweis Wir setzen die Potenzfunktion in den Oszillationsterm ein und berechnen

$$\begin{aligned} \int_0^t |f - f_{[0,t]}| &= \int_0^t \left| s^{-1/p} - \int_0^t u^{-1/p} ds \right| ds \\ &= \int_0^t \left| s^{-1/p} - \frac{p-1}{p} t^{-1/p} \right| ds \\ &= \frac{1}{t} \left(\int_0^{(\frac{p-1}{p})^p t} \left(s^{-1/p} - \frac{p}{p-1} t^{-1/p} \right) ds + \right. \\ &\quad \left. \int_{(\frac{p-1}{p})^p t}^t \left(-s^{-1/p} + \frac{p}{p-1} t^{-1/p} \right) ds \right) \\ &= \dots = \frac{p}{p-1} \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \frac{2}{p-1} t^{-1/p}. \end{aligned}$$

Für den Mittelwert auf der rechten Seite der Oszillationsungleichung erhalten wir

$$c \int_0^t f = c \frac{p-1}{p} t^{-1/p}.$$

Damit gilt die Oszillationsungleichung für Potenzfunktionen $f(s) = s^{-1/p}$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \frac{p}{p-1} \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \frac{2}{p-1} t^{-1/p} &\leq c \frac{p-1}{p} t^{-1/p} \\ \iff h(p) := \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \frac{1}{p-1} &\leq \frac{c}{2} \\ \iff p &\geq h^{-1}(c/2). \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 2.17 Das Lemma zeigt, dass man aus einer Oszillationsungleichung $f_I |f - f_I| \leq c f_I$ für f nur weniger als L^P -Integrabilität mit $P := h^{-1}(c/2)$ erwarten darf. Außerdem liest man ab, dass eine solche Ungleichung genau dann Informationen über Integrabilität enthalten kann, wenn $c < 2$ ist, da immer $f_I |f - f_I| \leq f_I |f| + f_I = 2f_I f$ ist, also für jedes nichttriviale c .

Bemerkung 2.18 In Analogie zu den umgekehrten Hölder-Ungleichungen erwarten wir, dass auch für Oszillationsungleichungen ein vergleichbares Glättungslemma wie 2.1 gilt. Damit könnte man sich auch bei Oszillationsungleichungen auf die Betrachtung stetiger Funktionen beschränken.

Ferner vermuten wir, dass (vergleichbar zu den Untersuchungen aus Unterkapitel 2.1.2) der gerade berechnete Grenzexponent für Potenzfunktionen auch den Grenzexponenten für die Integrierbarkeit von Funktionen angibt, die eine $(c, 1)$ -Oszillationsungleichung erfüllen.

In diesem Zusammenhang weisen wir darauf hin, dass Oszillationsungleichungen eng mit umgekehrten Hölder-Ungleichungen verbunden sind. So ist beispielsweise die $(c, 2)$ -Oszillationsungleichung nichts anderes als eine $(c + 1, 2)$ -umgekehrte Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} & \int_I |f - f_I|^2 \leq c \left(\int_I f \right)^2 \\ \iff & \int_I f^2 - 2f f_I + (f_I)^2 \leq c(f_I)^2 \\ \iff & \int_I f^2 - 2(f_I)^2 + (f_I)^2 \leq c(f_I)^2 \\ \iff & \int_I f^2 \leq (c + 1) \left(\int_I f \right)^2. \end{aligned}$$

2.3. Muckenhoupt-Klassen

Sei $1 < q < \infty$. Wir definieren zu integrierbaren Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ das Funktional

$$A_{q, \mathcal{I}}(f) := \sup_{I \in \mathcal{I}} \int_I f \left(\int_I f^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{q-1}.$$

Bei endlichem $A_{q, \mathcal{I}}(f)$ sprechen wir davon, dass f in der **Muckenhoupt-Klasse** $A_{q, \mathcal{I}}$ liegt. Für integrierbare Funktionen $f : [0, 1]^N \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definieren wir entsprechend die Funktionale $A_{q, \mathcal{W}}(f)$, $A_{q, \text{h}(\mathcal{I})}(f)$ und $A_{q, \mathcal{Q}}(f)$, indem wir das Supremum über alle Teilwürfel, Hilbert-Intervalle bzw. Teilquader von $[0, 1]^N$ bilden.

Muckenhoupt-Klassen sind bedeutend für die Untersuchung von Abbildungseigenschaften einiger klassischer Operatoren [GaRu85]. Besonders wichtig im Zusammenhang mit Muckenhoupt-Klassen ist ihre folgende Selbstverbesserungseigenschaft.

Satz 2.19 (Selbstverbesserung bei Muckenhoupt-Klassen)

Gilt $A_{q, \mathcal{I}}(f) < \infty$, dann gibt es einen Grenzexponenten $P = P(q, A_{q, \mathcal{I}}(f)) < q$, so dass $A_{p, \mathcal{I}}(f) < \infty$ für alle $p \in]P, q]$ gilt. Entsprechend verbessert sich die Potenz der Muckenhoupt-Klasse auch bei den anderen Mengensystemen.

Die Existenz eines solchen P kann man durch Rückführung auf den Fall monotoner Funktionen beweisen [Wik89]. Für monotone Funktionen kann man den

2. Umgekehrte Integralungleichungen

exakten Grenzexponenten bestimmen [Kor92a]. Bei Funktionen einer Variablen ist bekannt, dass man ohne Verlust zu monotonen Funktionen übergehen kann [Kor92a], [Kor92b]. Für Funktionen mehrerer Variablen ist uns aus der Literatur kein vergleichbares Resultat bekannt.

Wir erhalten mit den Resultaten aus Kapitel 1.4 den verlustfreien Übergang zu monotonen Funktionen sowohl bei Funktionen einer Variablen, als auch bei mehreren Variablen (wenn wir die Hilbert-Intervalle oder das Quadersystem nehmen).

Satz 2.20 (Rückführung auf den monotonen Fall)

Für stetige Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ bzw. $f : [0, 1]^N \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt

$$\sup_{t \in]0, 1]} \int_0^t f^* \left(\int_0^t (f^*)^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{q-1} \leq A_{q, \mathcal{I}}(f), A_{q, \mathbb{H}(\mathcal{I})}(f) \text{ bzw. } A_{q, \mathcal{Q}}(f).$$

Beweis Für $t \in]0, 1]$ findet man nach Satz 1.33(1) ein $I \in \mathcal{I}$ mit

$$\int_I f = \int_0^t f^* \quad \text{und} \quad \int_I f^{-\frac{1}{q-1}} \geq \int_0^t (f^*)^{-\frac{1}{q-1}}.$$

Daraus folgt (stärker als behauptet)

$$\int_0^t f^* \left(\int_0^t (f^*)^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{q-1} \leq \int_I f \left(\int_I f^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{q-1}.$$

Bei Funktionen mehrerer Variablen argumentiert man genauso mit Hilfe der Bemerkung 1.36 (bei Quadern reicht die Folgenversion aus). \square

Bemerkung 2.21 Es ist bekannt, dass zwischen umgekehrten Hölder-Ungleichungen und Muckenhoupt-Klassen ein Zusammenhang besteht [GaRu85]. Durch eine zweidimensionale Betrachtungsweise der Mittelwertmengen wird dieser Zusammenhang richtig deutlich: Die umgekehrte Hölder-Ungleichung und die Endlichkeit des Muckenhoupt-Funktional sind Bedingungen an den oberen Rand der entsprechenden Mittelwertmengen.

2.4. Anmerkungen und Literaturhinweise

Abschließend wollen wir in knapper Form einige Anmerkungen zur Literaturlage machen. Bei der Fülle an Literatur, die die Themen dieser Arbeit berühren, können die Anmerkungen nur unvollständig sein.

Das Gehring-Lemma wurde zuerst von F. W. Gehring in der Arbeit [Geh73] im Zusammenhang mit quasikonformen Abbildungen bewiesen. Für weitere Informationen über quasikonforme Abbildungen und Benutzung des Gehring-Lemmas

in diesem Zusammenhang sei auf [BoIw83], [Iwa91] [Iwa92], [Ast98], [GeIw99] verwiesen.

Die ersten Untersuchungen zu schwachen umgekehrten Hölder-Ungleichungen und zur Anwendung bei partiellen Differentialgleichungen findet man in [MeEl75]. Weitere frühe Untersuchungen hierzu und zum Teil andere Beweise des Gehring-Lemmas findet man z. B. in [Gia83], [GiMo79], [GiGi82], [HKM93], [Str80].

Neuere Arbeiten, die wesentlich das Gehring-Lemma benutzen, sind beispielsweise [KiZh99] oder [KiLe00] für parabolische partielle Differentialgleichungen.

In [FrMo85] und [Sbo86] wird die Rückführung (mit Verlust an Information) auf monotone Funktionen via Maximalfunktionen ausgearbeitet (vgl. hier Satz 2.2). In gewissem Maße ist dies aber schon im Originalbeweis von Gehring vorhanden. Für einen interpolationstheoretischen Ansatz verweisen wir auf die Arbeiten [Mil96], [Mil98] und [MaMi00].

Die Betrachtung von Muckenhoupt-Klassen geht auf [Muc72] zurück. Diese Klassen haben Bedeutung bei der Charakterisierung von Abbildungseigenschaften einiger wichtiger Operatoren [GaRu85].

Die Frage nach der optimalen Integrabilität beim Gehring-Lemma ist in mehreren Arbeiten explizit gestellt worden (z. B. in [Boj85] oder [Iwa82]) und es sind verschiedene Teilantworten gefunden worden:

In [ApSb90] wird für monotone Funktionen einer Variablen die optimale Integrierbarkeit gefunden. Diese Untersuchungen entsprechen unseren Ausführungen in Kapitel 2.1.2. Im Zusammenhang mit monotonen Funktionen, sei auch auf die Arbeit [Nan90] hingewiesen, wo bei einer ähnlichen umgekehrten Ungleichung optimale Integrierbarkeit gefunden wird.

In [Wik90] und [Boj85] findet man Untersuchungen über das asymptotische Verhalten der Integrierbarkeit, wenn die Konstante c gegen 1 strebt. Dies steht in engem Zusammenhang zu umgekehrten Ungleichungen mit Oszillationsterm. Man beachte hier auch die Arbeit [Iwa82] sowie die Untersuchungen in [GuRe76].

In den Arbeiten [Kor92a] und [Kor92b] wird die optimale Integrierbarkeit für Funktionen einer Variablen geklärt. Dies sowohl für den Fall des Gehring-Lemmas als auch für Muckenhoupt-Klassen. Die Methode basiert darauf, mit der Abschätzung 1.37 ohne Verlust zu monotonen Funktionen überzugehen. Die Formel wird in der Arbeit von A. A. Korenovskij mit Hilfe einer Version des „Lemmas of the rising sun“ bewiesen. Dieses Lemma ist ein Überdeckungssatz von Riesz, die benutzte Version stammt aus [Kle85] und ist für Funktionen einer Variablen ohne Verlust. Ein exaktes Analogon zu der Version für den Fall mehrerer Variablen existiert nicht.

In der Arbeit [Fio96] werden die Resultate aus [Kor92a], [Kor92b] für Regularitätsaussagen bei Minimierern eindimensionaler Variationsprobleme eingesetzt.

Es sei auch auf die Arbeit [BSW92] hingewiesen. Hier wird für Muckenhoupt-Klassen die optimale Integrierbarkeit im Falle Funktionen einer Variablen geklärt. Man findet auch ein Beispiel dafür, dass im Fall mehrerer Variablen nicht genau

2. Umgekehrte Integralungleichungen

das Gleiche gilt.

Im Artikel [Kin94b] wird bei Funktionen mehrerer Variablen eine umgekehrte Hölder-Ungleichung für alle Quader ohne Verlust auf eine umgekehrte Hölder-Ungleichung für monotone Funktionen zurückgeführt.

Uns sind keine Arbeiten bekannt, die untersuchen, mit welchem Verlust man von einer umgekehrten Hölder-Ungleichung für Würfel zum monotonen Fall übergehen kann, oder die ohne Verlust von einer umgekehrten Hölder-Ungleichung für ein System ohne Entartungen zum monotonen Fall übergehen. Ferner haben wir keine Kenntnis von Arbeiten, die sich bei schwachen umgekehrten Hölder-Ungleichungen mit der optimalen Integrabilität befassen.

Die fallende Umordnung ist nicht nur für diese Arbeit von besonderer Bedeutung. Einen schönen Überblick zum Thema monotone Umordnungen bietet [Kol89]. Für Themen, die in engerem Zusammenhang mit fallenden Umordnungen und den Gegenständen dieser Arbeit stehen, empfehlen wir das Buch [BeSh88] oder auch [Ste93]. In beiden findet man ausführliche Betrachtungen der Maximalfunktionen sowie historische Anmerkungen.

Im Zusammenhang mit unserer Bemerkung 1.38 sei auf den Artikel [Ler00] aufmerksam gemacht. Dort werden auch gewisse punktweise Abschätzungen für Maximalfunktionen von Mittelwerten und Oszillationen gezeigt. Die dort untersuchten Maximalfunktionen weichen von den klassischen und den von uns betrachteten ab.

Gewisse Bedeutung in der Literatur haben Untersuchungen von umgekehrten Integralungleichungen zu gewichteten Lebesgue-Maßen (statt des gewöhnlichen Lebesgue-Maßes) [BaKu85], [Fra89], [Kin94a]. Wir sehen keine Probleme, unseren Ansatz mittels Bemerkung 1.18 auch auf solche Fälle auszudehnen.

A. Computerprogramme

Die Programme sind für das Computeralgebrasystem „Maple“ geschrieben. Die benutzte Version ist Maple 7.00.

A.1. Intervallmittelwertmengen

Die Funktion **Intervallmittelwerte**(*b*,*text*) gibt die Intervallmittelwertmenge zur Funktion

$$f_b := b[1] * \mathbb{1}_{[0,1]} + \dots + b[n] * \mathbb{1}_{[n-1,n]}$$

zurück (als plot-Struktur). Dazu übergibt man als *b* eine Liste von Punkten

$$b = [[x\text{-Koord. v. } b[1], y\text{-Koord. v. } b[1]], \dots, [x\text{-Koord. v. } b[n], y\text{-Koord. v. } b[n]]].$$

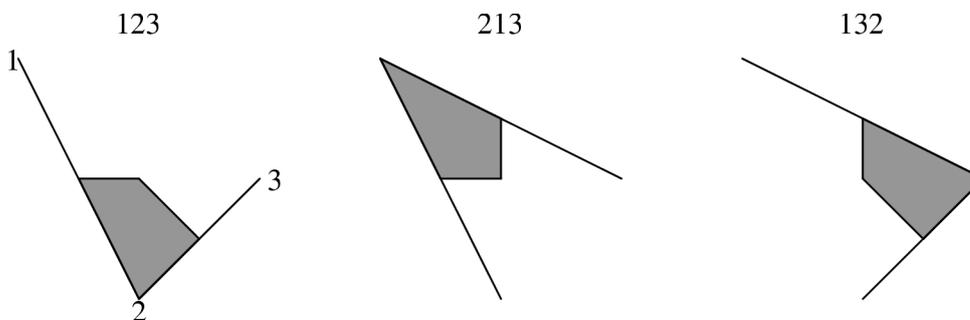
```
> Intervallmittelwerte:= proc( b ,text)
> local mean, f_I:
> mean:=(i,j)-> [sum(b['k'] [1], 'k'=i..j)/(j-i+1),
>   sum(b['k'] [2], 'k'=i..j)/(j-i+1)]:
> f_I:=proc(i,j)
>   if (j-i=1)
>   then return( {[b[i],b[j]]} )
>   else return( f_I(i,j-1) union f_I(i+1,j) union
>     {[mean(i+1,j-1),mean(i,j-1),mean(i,j),mean(i+1,j)]})
>   fi
> end:
> plots[polygonplot](f_I(1,nops(b)),
>   title=text,axes=none,color=GREEN,scaling=constrained);
> end:
```

Um zu veranschaulichen, wie man die Prozedur aufruft, folgt der Erzeugungstext für die beiden Beispiele aus Kapitel 1.2.

A. Computerprogramme

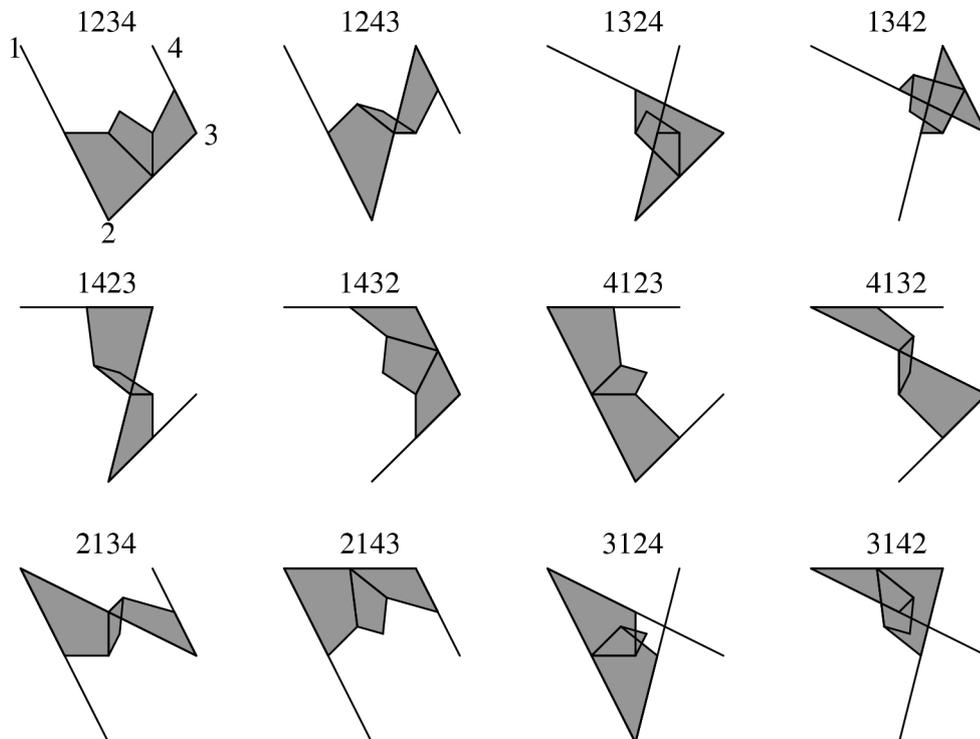
Zunächst das Beispiel einer Treppenfunktion mit drei Werten. Die erste Zeichnung dient zur Identifizierung der Punkte.

```
> b:= [[-1,2],[0,0],[1,1]]:  
> p:=array(1..3):  
> p[1]:=plots[display](  
>   plots[textplot]([b[1][1],b[1][2]], '1',align=LEFT),  
>   plots[textplot]([b[2][1],b[2][2]], '2',align=BELOW),  
>   plots[textplot]([b[3][1],b[3][2]], '3',align=RIGHT),  
>   Intervallmittelwerte([b[1],b[2],b[3]], '123')):  
> p[2]:=Intervallmittelwerte([b[2],b[1],b[3]], '213'):  
> p[3]:=Intervallmittelwerte([b[1],b[3],b[2]], '132'):  
> plots[display](p,font=[TIMES,ROMAN,11],axes=none,  
>   scaling=constrained);
```



Das Beispiel einer Treppenfunktion mit vier Werten wird wie folgt erzeugt.

```
> b:= [[-1,2],[0,0],[1,1],[0.5,2]]:
> p:=array(1..3,1..4):
> p[1,1]:=plots[display](
>   plots[textplot]([b[1][1],b[1][2]], '1', align=LEFT),
>   plots[textplot]([b[2][1],b[2][2]], '2', align=BELOW),
>   plots[textplot]([b[3][1],b[3][2]], '3', align=RIGHT),
>   plots[textplot]([b[4][1],b[4][2]], '4', align=RIGHT),
>   Intervallmittelwerte([b[1],b[2],b[3],b[4]], '1234'):
> p[1,2]:=Intervallmittelwerte([b[1],b[2],b[4],b[3]], '1243'):
> p[1,3]:=Intervallmittelwerte([b[1],b[3],b[2],b[4]], '1324'):
> p[1,4]:=Intervallmittelwerte([b[1],b[3],b[4],b[2]], '1342'):
> p[2,1]:=Intervallmittelwerte([b[1],b[4],b[2],b[3]], '1423'):
> p[2,2]:=Intervallmittelwerte([b[1],b[4],b[3],b[2]], '1432'):
> p[2,3]:=Intervallmittelwerte([b[4],b[1],b[2],b[3]], '4123'):
> p[2,4]:=Intervallmittelwerte([b[4],b[1],b[3],b[2]], '4132'):
> p[3,1]:=Intervallmittelwerte([b[2],b[1],b[3],b[4]], '2134'):
> p[3,2]:=Intervallmittelwerte([b[2],b[1],b[4],b[3]], '2143'):
> p[3,3]:=Intervallmittelwerte([b[3],b[1],b[2],b[4]], '3124'):
> p[3,4]:=Intervallmittelwerte([b[3],b[1],b[4],b[2]], '3142'):
> plots[display](p, font=[TIMES,ROMAN,11]);
```



A.2. Quadratmittelwertmengen

Die Funktion **Quadratmittelwerte**(b, text) berechnet eine Annäherung an die Menge aller Mittelwerte auf Quadraten von einer zweiparametrischen Treppenfunktion der Form

$$f_b := b_{11} * \mathbb{1}_{[0,1] \times [0,1]} + \dots + b_{1n} * \mathbb{1}_{[0,1] \times [n-1,n]} \\ + \dots + \\ b_{n1} * \mathbb{1}_{[n-1,n] \times [0,1]} + \dots + b_{nn} * \mathbb{1}_{[n-1,n] \times [n-1,n]}.$$

Die Werte der Funktion auf den Elementarquadraten sind als Liste von einer Liste zu übergeben.

Die Hilfsfunktion `mean` berechnet die Mittelwerte der k -ten Komponente auf Intervallen $[i1, i2] \times [j1, j2]$. Die nachfolgenden Hilfsfunktionen berechnen, welche Werte hinzukommen, wenn man ein Quadrat in einer Ecke festhält und vergrößert (se für `south-east` usw.). Die rekursive Funktion `f_W` führt die Berechnung auf die vier Unterquadrate zurück.

```
> Quadratmittelwerte:= proc( b ,text)
> local mean, w_se,w_ne,w_nw,w_sw,f_W:
> mean:=(i1,i2,j1,j2,k)->
>   sum(sum(b['i']['j'][k], 'i'=i1..i2), 'j'=j1..j2)
>   /((i2-i1+1)*(j2-j1+1)):
> w_se:=(i1,i2,j1,j2,k,t)->
>   ((i2-i1)*(j2-j1)*mean(i1,i2-1,j1,j2-1,k) +
>   (i2-i1)* t * mean(i1,i2-1,j2,j2,k) +
>   (j2-j1)*t*mean(i2,i2,j1,j2-1,k) +
>   t^2*b[i2,j2][k])/((i2-i1+t)*(j2-j1+t)):
> w_ne:=(i1,i2,j1,j2,k,t)->
>   ((i2-i1)*(j2-j1)*mean(i1+1,i2,j1,j2-1,k) +
>   (j2-j1)*t * mean(i1,i1,j1,j2-1,k) +
>   (i2-i1)*t*mean(i1+1,i2,j2,j2,k) +
>   t*t*b[i1][j2][k])/((i2-i1+t)*(j2-j1+t)):
> w_sw:=(i1,i2,j1,j2,k,t)->
>   ((i2-i1)*(j2-j1)*mean(i1,i2-1,j1+1,j2,k) +
>   (i2-i1)*t * mean(i1,i2-1,j1,j1,k) +
>   (j2-j1)*t*mean(i2,i2,j1+1,j2,k) +
>   t^2*b[i2,j1][k])/((i2-i1+t)*(j2-j1+t)):
> w_nw:=(i1,i2,j1,j2,k,t)->
>   ((i2-i1)*(j2-j1)*mean(i1+1,i2,j1+1,j2,k) +
>   (j2-j1)*t * mean(i1,i1,j1+1,j2,k) +
>   (i2-i1)*t*mean(i1+1,i2,j1,j1,k) +
>   t^2*b[i1,j1][k])/((i2-i1+t)*(j2-j1+t)):
```

```

> f_W:=proc(i1,i2,j1,j2)
>   if (i2-i1=0)
>     then return( {} )
>   else return(
>     f_W(i1,i2-1,j1,j2-1) union f_W(i1,i2-1,j1+1,j2) union
>     f_W(i1+1,i2,j1+1,j2) union f_W(i1+1,i2,j1,j2-1) union
>     {[w_se(i1,i2,j1,j2,1,t),w_se(i1,i2,j1,j2,2,t),t=0..1],
>      [w_sw(i1,i2,j1,j2,1,t),w_sw(i1,i2,j1,j2,2,t),t=0..1],
>      [w_ne(i1,i2,j1,j2,1,t),w_ne(i1,i2,j1,j2,2,t),t=0..1],
>      [w_nw(i1,i2,j1,j2,1,t),w_nw(i1,i2,j1,j2,2,t),t=0..1],
>      [[mean(i1,i2-1,j1,j2-1,1),mean(i1,i2-1,j1,j2-1,2)],
>       [mean(i1,i2-1,j1+1,j2,1),mean(i1,i2-1,j1+1,j2,2)],
>       [mean(i1+1,i2,j1+1,j2,1),mean(i1+1,i2,j1+1,j2,2)],
>       [mean(i1+1,i2,j1,j2-1,1),mean(i1+1,i2,j1,j2-1,2)],
>       [mean(i1,i2-1,j1,j2-1,1),mean(i1,i2-1,j1,j2-1,2)]] } )
>   fi
> end:
> plot(f_W(1,nops(b),1,nops(b)),title=text,axes=none,
>       scaling=constrained,color=BLACK);
> end:

```

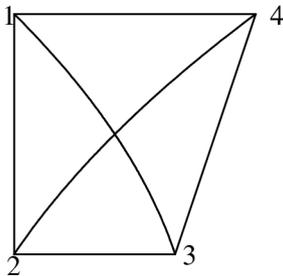
Um zu veranschaulichen, wie man die Prozedur aufruft, folgen die Erzeugungstexte für die vier Beispiele aus Kapitel 1.3.2.

A. Computerprogramme

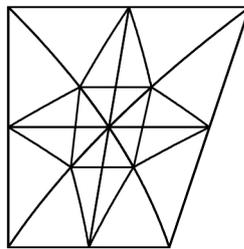
Das Beispiel zur Anordnung 14 | 23 wird mit folgendem Text aufgerufen:

```
> b1:=[-1,1]:b2:=[-1,-1]:b3:=[1,-1]:b4:=[2,1]:
> b:=[[b1,b4],[b2,b3]]:
> n:=nops(b):
> k:=2:
> b_verfeinert2:=[seq([seq(b[floor(i/k)+1,floor(j/k)+1],
>   i=0..k*n-1)],j=0..k*n-1)]:
> k:=3:
> b_verfeinert3:=[seq([seq(b[floor(i/k)+1,floor(j/k)+1],
>   i=0..k*n-1)],j=0..k*n-1)]:
> bild:=array(1..3):
> bild[1]:=plots[display](
>   plots[textplot]([b1[1],b1[2]],[1'],align=LEFT),
>   plots[textplot]([b2[1],b2[2]],[2'],align=BELOW),
>   plots[textplot]([b3[1],b3[2]],[3'],align=RIGHT),
>   plots[textplot]([b4[1],b4[2]],[4'],align=RIGHT),
>   Quadratmittelwerte(b,'14|23, Verfeinerung 1')):
> bild[2]:=Quadratmittelwerte(b_verfeinert2,
>   '14|23, Verfeinerung 2'):
> bild[3]:=Quadratmittelwerte(b_verfeinert3,
>   '14|23, Verfeinerung 3'):
> plots[display](bild,font=[TIMES,ROMAN,10]);
```

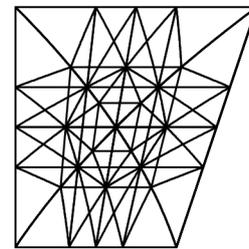
14|23, Verfeinerung 1



14|23, Verfeinerung 2



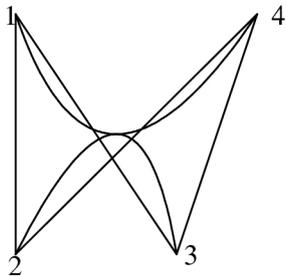
14|23, Verfeinerung 3



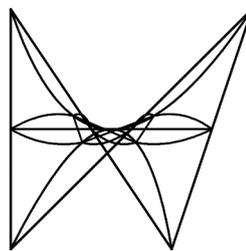
Das Beispiel zur Anordnung 12 | 34 wird mit folgendem Text aufgerufen:

```
> b1:=[-1,1]:b2:=[-1,-1]:b3:=[1,-1]:b4:=[2,1]:
> b:=[[b1,b2],[b3,b4]]:
> n:=nops(b):
> k:=2:
> b_verfeinert2:= [seq([seq(b[floor(i/k)+1,floor(j/k)+1],
>   i=0..k*n-1)],j=0..k*n-1)]:
> k:=3:
> b_verfeinert3:= [seq([seq(b[floor(i/k)+1,floor(j/k)+1],
>   i=0..k*n-1)],j=0..k*n-1)]:
> bild:=array(1..3):
> bild[1]:=plots[display](
>   plots[textplot]([b1[1],b1[2]],[1],align=LEFT),
>   plots[textplot]([b2[1],b2[2]],[2],align=BELOW),
>   plots[textplot]([b3[1],b3[2]],[3],align=RIGHT),
>   plots[textplot]([b4[1],b4[2]],[4],align=RIGHT),
>   Quadratmittelwerte(b,'12|34, Verfeinerung 1')):
> bild[2]:=Quadratmittelwerte(b_verfeinert2,
>   '12|34, Verfeinerung 2'):
> bild[3]:=Quadratmittelwerte(b_verfeinert3,
>   '12|34, Verfeinerung 3'):
> plots[display](bild,font=[TIMES,ROMAN,10]);
```

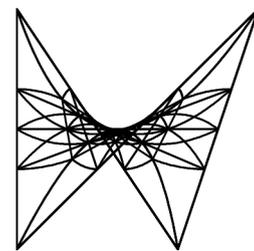
12|34, Verfeinerung 1



12|34, Verfeinerung 2



12|34, Verfeinerung 3

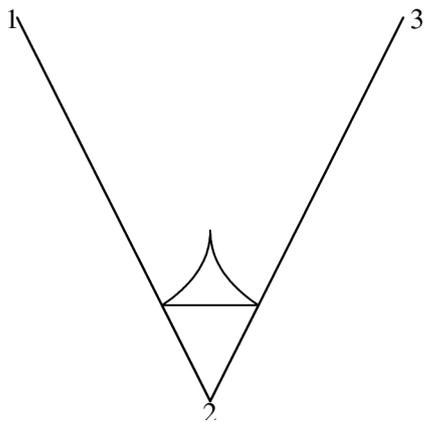


A. Computerprogramme

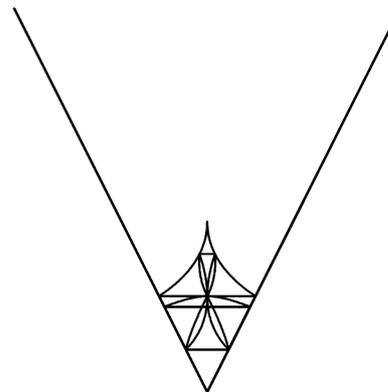
Das Beispiel zur Anordnung 123 | 222 | 321 wird mit folgendem Text aufgerufen:

```
> b1:=[-1,1]:b2:=[0,-1]:b3:=[1,1]:
> b:=[[b1,b2,b3],[b2,b2,b2],[b3,b2,b1]]:
> n:=nops(b):
> k:=2:
> b_verfeinert2:= [seq([seq(b[floor(i/k)+1,floor(j/k)+1],
>   i=0..k*n-1)],j=0..k*n-1)]:
> bild:=array(1..2):
> bild[1]:=plots[display](
>   plots[textplot]([b1[1],b1[2]],[1,1],align=LEFT),
>   plots[textplot]([b2[1],b2[2]],[2,2],align=BELOW),
>   plots[textplot]([b3[1],b3[2]],[3,3],align=RIGHT),
>   Quadratmittelwerte(b,'123|222|321,Verfeinerung 1')):
> bild[2]:=Quadratmittelwerte(b_verfeinert2,
>   '123|222|321, Verfeinerung 2'):
> plots[display](bild,font=[TIMES,ROMAN,10]);
```

123|222|321, Verfeinerung 1



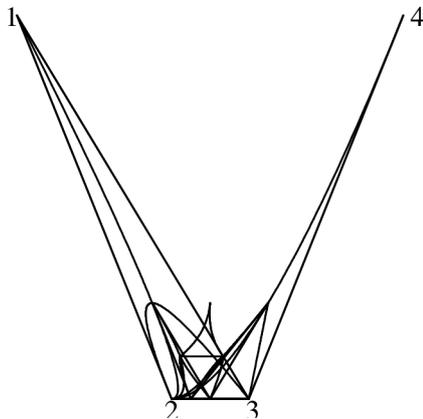
123|222|321, Verfeinerung 2



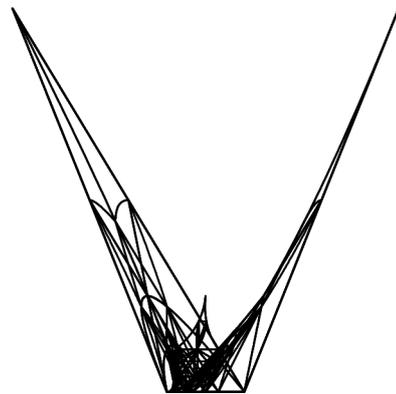
Das Beispiel zur Anordnung 1334 | 2223 | 3222 | 4331 wird mit folgendem Text aufgerufen:

```
> b1:=[-5,4]:b2:=[-1,0]:b3:=[1,0]:b4:=[5,4]:
> b:=[[b1,b3,b3,b4],[b2,b2,b2,b3],[b3,b2,b2,b2],[b4,b3,b3,b1]]:
> n:=nops(b):
> k:=2:
> b_verfeinert2:= [seq([seq(b[floor(i/k)+1,floor(j/k)+1],
>   i=0..k*n-1)],j=0..k*n-1)]:
> bild:=array(1..2):
> bild[1]:=plots[display](
>   plots[textplot]([b1[1],b1[2]],[1],align=LEFT),
>   plots[textplot]([b2[1],b2[2]],[2],align=BELOW),
>   plots[textplot]([b3[1],b3[2]],[3],align=BELOW),
>   plots[textplot]([b4[1],b4[2]],[4],align=RIGHT),
>   Quadratmittelwerte(b,'1334|2223|3222|4331,
>     Verfeinerung 1')):
> bild[2]:=Quadratmittelwerte(b_verfeinert2,
>   '1334|2223|3222|4331, Verfeinerung 2'):
> plots[display](bild,font=[TIMES,ROMAN,10]);
```

334|2223|3222|4331, Verfeinerung 1



1334|2223|3222|4331, Verfeinerung 2



A.3. Mittelwerte auf skalierten Intervallen

Die Funktion `Intervallmittelwerte(b,r,farbe,text)` gibt die wichtigsten Linien der Intervallmittelwertmenge

$$\left\{ \left(\int_I f_1, \int_{rI} f_2 \right) : I \in \mathcal{I} \right\}$$

für Treppenfunktionen $f = (f_1, f_2) := b[1] * \mathbb{1}_{[0,1]} + \dots + b[n] * \mathbb{1}_{[n-1,n]}$ und Stauchungsfaktor r zurück. Die Werte von f übergibt man durch Angabe von b als eine Liste von Punkten

$b = [[x\text{-Koord. v. } b[1], y\text{-Koord. v. } b[1]], \dots, [x\text{-Koord. v. } b[n], y\text{-Koord. v. } b[n]]]$.

```

> Intervallmittelwerte:= proc(b,r,farbe,text)
> local mean1,mean2,Mean2,unten,oben,
>   int_oben,int_unten,mean,f_I_rI:
> mean1:=(i,j)-> sum(b[k][1],k=i..j)/(j-i+1):
> mean2:=(i,j)-> sum(b[k][2],k=i..j)/(j-i+1):
> unten:=(i,j)-> (i+j-1)/2 - r*(j-i+1)/2:
> oben :=(i,j)-> (i+j-1)/2 + r*(j-i+1)/2:
> int_unten:=(i,j)-> floor(unten(i,j)+1):
> int_oben :=(i,j)-> floor(oben(i,j)):
> Mean2:=proc(i,j)
> local u,o,iu,io:global r:
> u :=unten(i,j):
> o :=oben(i,j):
> iu:=int_unten(i,j):
> io:=int_oben(i,j):
> if (io-iu=0)
>   then return(((iu-u)*b[iu][2]+(o-io)*b[io+1][2])/(o-u) )
>   else return(((iu-u)*b[iu][2]+(io-iu)*mean2(iu+1,io)+
>     (o-io)*b[io+1][2])/(o-u) )
> fi
> end:
> mean:=(i,j) -> [mean1(i,j),Mean2(i,j)]:
> f_I_rI:=proc(i,j)
>   if (j-i=1)
>     then return(
>       { [b[i],
>         [(1+r)/2*b[i][1]+(1-r)/2*b[j][1],b[i][2]],
>         [(b[i][1]+b[j][1])/2,(b[i][2]+b[j][2])/2],
>         [(1+r)/2*b[j][1]+(1-r)/2*b[i][1],b[j][2]],
>         b[j]] })

```

```

>     else return( f_I_rI(i,j-1) union f_I_rI(i+1,j) union
>                 {[mean(i+1,j),mean(i,j),mean(i,j-1)]})
>     fi
> end:
> return(plot(f_I_rI(1,nops(b)),color=farbe,title=text))
> end:

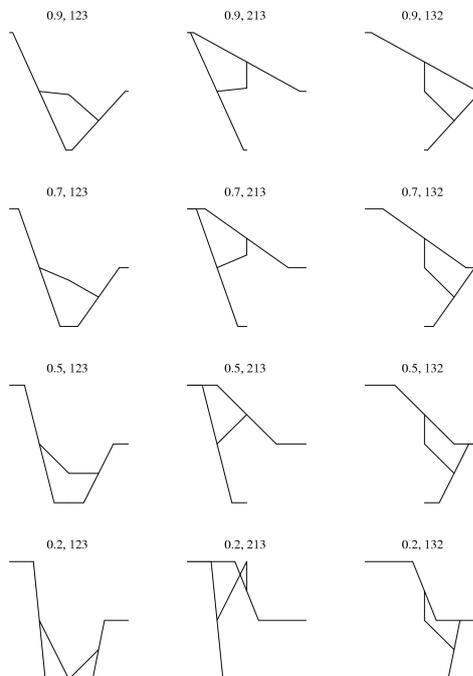
```

Den Aufruf der Prozedur demonstrieren wir an dem Beispiel:

```

> b1:=[-1,2]:b2:=[0,0]:b3:=[1,1]:
> p:=array(1..4,1..3):
> p[1,1]:=Intervallmittelwerte([b1,b2,b3],0.9,BLACK,'0.9,123'):
> p[1,2]:=Intervallmittelwerte([b2,b1,b3],0.9,BLACK,'0.9,213'):
> p[1,3]:=Intervallmittelwerte([b1,b3,b2],0.9,BLACK,'0.9,132'):
> p[2,1]:=Intervallmittelwerte([b1,b2,b3],0.7,BLACK,'0.7,123'):
> p[2,2]:=Intervallmittelwerte([b2,b1,b3],0.7,BLACK,'0.7,213'):
> p[2,3]:=Intervallmittelwerte([b1,b3,b2],0.7,BLACK,'0.7,132'):
> p[3,1]:=Intervallmittelwerte([b1,b2,b3],0.5,BLACK,'0.5,123'):
> p[3,2]:=Intervallmittelwerte([b2,b1,b3],0.5,BLACK,'0.5,213'):
> p[3,3]:=Intervallmittelwerte([b1,b3,b2],0.5,BLACK,'0.5,132'):
> p[4,1]:=Intervallmittelwerte([b1,b2,b3],0.2,BLACK,'0.2,123'):
> p[4,2]:=Intervallmittelwerte([b2,b1,b3],0.2,BLACK,'0.2,213'):
> p[4,3]:=Intervallmittelwerte([b1,b3,b2],0.2,BLACK,'0.2,132'):
> plots[display](p,axes=none,thickness=2,
> scaling=constrained,font=[TIMES,ROMAN,9]);

```



A. *Computerprogramme*

Literaturverzeichnis

- [ApSb90] D'APUZZO, L. & SBORDONE, C.,
Reverse Hölder Inequalities - A sharp Result,
Rend. di Matematica, (Ser. 7), Vol 10 (1990) 357-366.
- [Ast98] ASTALA, K.,
Analytic aspects of quasiconformality,
Doc. Math. J. DMV, Vol. II, Extra volume ICM 1998, 617-626.
- [BaKu85] BAGBY, R. J. & KURTZ, D. S.,
Covering lemmas and the sharp function,
Proc. Amer. Math. Soc., 93(2) (1985) 291-296.
- [BeSh88] BENNETT, C. & SHARPLEY, R.,
Interpolation of Operators,
Academic Press 1988, Pure and Applied Mathematics, 129.
- [Boj85] BOJARSKI, B.,
Remarks on the stability of reverse Hölder inequalities and quasiconformal mappings,
Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math., 10 (1985) 89-94.
- [BoIw83] BOJARSKI, B. & IWANIEC, T.,
Analytical foundation of the theory of quasiconformal mappings in \mathbb{R}^n ,
Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., 8 (1983) 257-324.
- [BSW92] BOJARSKI, B. & SBORDONE, C. & WIK, I.,
The Muckenhoupt class $A_1(\mathbb{R})$,
Stud. Math. 101(2) (1992) 155-163.
- [Fio96] FIORENZA, A.,
Regularity Results for Minimizers of Certain One-Dimensional Lagrange Problems of Calculus of Variations,
Bollettino U.M.I., (7) 10 B (1996) 943-962.
- [Fra89] FRANCIOSI, M.,
Weighted rearrangements and higher integrability results,
Stud. Math., 92 (1989) 131-139.

Literaturverzeichnis

- [FrMo85] FRANCIOSI, M. & MOSCARIELLO, G.,
Higher integrability results,
Manuscripta Math., 52 (1985) 151-170.
- [GaRu85] GARCIA-CUERVA, C. & RUBIO DE FRANCIA, J. L.,
Weighted norm inequalities and related topics,
North-Holland Math. Studies, 116 (1985).
- [Gar76] GARSIA, A. M.,
Combinatorial inequalities and smoothness of functions,
Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976) 157-171.
- [GaRo74] GARSIA, A. M. & RODEMICH, E.,
Monotonicity of certain functionals under rearrangement,
Ann. Inst. Fourier 24, 2 (1974) 67-116.
- [Geh73] GEHRING, F.W.,
The L^p -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping,
Acta Math., 130 (1973) 265-277.
- [GeIw99] GEHRING F. W. & IWANIEC, T.,
The limit of mappings with finite distortion,
Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 24 (1999) 253-264.
- [Gia83] GIAQUINTA, M.,
Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems,
Ann. Math. Study 105, Princeton Univ. Press (1983).
- [Gia84] GIAQUINTA, M.,
Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic systems,
Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin 1993
nach: Lecture notes by E. Lenzinger zur Nachdiplomvorlesung
WS83/84, Math. Dep. und Forschungsinst., ETH Zürich.
- [GiGi82] GIAQUINTA, M. & GUISTI, E.,
On the regularity of the minima of variational integrals,
Acta Math., 148 (1982) 31-46.
- [GiMo79] GIAQUINTA, M. & MODICA,
Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems,
J. reine angew. Math., 311/312 (1979) 145-169.

- [GuRe76] GUROV, L. G., & RESETNYAK, YU. K.,
A certain analogue of the concept of a function with bounded mean oscillation,
 Sibirsk. Math. Zh. 17, 3 (1976) 540-546.
- [HKM93] HEINONEN, J. T., KILPELÄINEN, T. & MARTIO, O.,
Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations,
 Oxford Univ. Press, 1993.
- [Hil1891] HILBERT, D.,
Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück,
 Math. Ann., 38, (1891) 459-460.
- [Iwa82] IWANIEC, T.,
On L^p -integrability in PDE's and quasiregular mappings for large exponents,
 Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I., 7 (1982) 301-322.
- [Iwa91] IWANIEC, T.,
Current advances in quasiconformal geometry and nonlinear analysis,
 in: XVIth Rolf Nevanlinna Colloquium, Proc. Intern. Conf. in Joensuu, Finland, Aug. 1995, N. Y. 1996 59-80.
- [Iwa92] IWANIEC, T.,
Quasiconformal space mappings,
 Collect. Surv. 1960-1990, Lect. Notes Math. 1508 (1992) 39-64.
- [Iwa95] IWANIEC, T.,
The Gehring Lemma,
 Proc. of the int. symp., Ann Arbor, MI, USA (1995) 181-204.
- [Kle85] KLEMES, I.,
A mean oscillation inequality,
 Proc. Am. Math. Soc., 93, Nr. 3 (1985) 497-500.
- [Kin94a] KINNUNEN, J.,
Higher integrability with weights,
 Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 19 (1994) 355-366.
- [Kin94b] KINNUNEN, J.,
Sharp results on reverse Hölder inequalities,
 Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, 1. Mathematica, Dissert. 95 (1994) 4-34.
- [KiLe00] KINNUNEN, J. & LEWIS, J. L.,
Higher integrability for parabolic systems of p -Laplacian type,
 Duke Math. J. 102 (2000) 253-271.

Literaturverzeichnis

- [KiZh99] KINNUNEN, J. & ZHOU, S.,
A local estimate for nonlinear equations with discontinuous coefficients,
Commun. Partial Differ. Equations 24 No. 11-12 (1999) 2043-2068.
- [Kol89] KOLYADA, V.I.,
Rearrangements of functions and imbedding theorems,
Russ. Math. Surv. Vol. 44 No. 5 (1989) 73-117.
- [Kor92a] KORENOVSKIJ, A. A.,
The exact continuation of a reverse Hölder inequality and Muckenhoupt's conditions,
Math. notes 52, No. 6 (1992) 1192-1201.
- [Kor92b] KORENOVSKIJ, A. A.,
The reverse Hölder inequality, the Muckenhoupt condition, and equimeasurable rearrangements of functions,
Russ. Acad. Sci. Dokl. Math. 45 (2) (1992) 301-304.
- [Kor95] KORENOVSKIJ, A. A.,
On the one-dimensional Muckenhoupt condition A_∞ ,
R. Acad. Sci. Paris, T. 320, Ser. 1, (1995) 19-24.
- [Ler00] LERNER, A. K.,
On pointwise estimates for maximal and singular integral operators,
Stud. Math. 138 (3)(2000) 285-290.
- [MaMi00] MASTYLO, M. & MILMAN, M.,
A new approach to Gehring's Lemma,
Ind. Univ. Math. Jour. 49 Nr. 2 (2000) 655-679.
- [MeEl75] MEYERS, N. & ELCTRAT, A.,
Some results on regularity for solutions of non-linear elliptic systems and quasiregular functions,
Duke Math J., 42 (1975) 121-136.
- [Mil96] MILMAN, M.,
A note on Gehring's lemma,
Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 21 (1996) 389-398.
- [Mil98] MILMAN, M.,
A note on interpolation and higher integrability,
Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 23 (1998) 169-180.
- [Miln80] MILNE, S. C.,
Peano curves and smoothness of functions,
Advances in Math. Vol. 35 (1980) 129-157.

- [MoSb95] MOSCARIELLO, G. & SBORDONE, C.,
 A_∞ as a limit case of reverse-Hölder inequalities when the exponent tends to 1,
Ric. Mat. 44, No. 1 (1995) 131-144.
- [Muc72] MUCKENHOUP, B.,
Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function,
Trans. Amer. Math. Soc., 165 (1972) 207-226.
- [Nan90] NANIA, L.,
On some reverse integral inequalities,
J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) 49 (1990) 319-326.
- [Sag94] SAGAN, H.,
Space-filling curves,
Springer Verlag, New York, 1994.
- [Sbo86] SBORDONE, C.,
On some integral inequalities and their applications to the calculus of variations,
Boll. Un. Mat. Ital., Ana. Func. Appl., 5-10(6,1) (1986) 73-94.
- [Ste93] STEIN, E. M.,
Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals.,
Princeton Math. Series, 43, Princeton, New Jersey 1993.
- [Str80] STREDULINSKI, E. W.,
Higher integrability from reverse Hölder inequalities,
Indiana Univ. Math. J., 29, 3 (1980) 408-417.
- [Wik89] WIK, I.,
On Muckenhoupt's classes of weight functions,
Stud. Math. 94, No. 3, (1989) 245-255.
- [Wik90] WIK, I.,
Reverse Hölder inequalities with constant close to 1,
Ric. Mat. 39, No. 1, (1990) 151-157.

Index

- A, b, c, B, C , 9
- $\partial A[x, y], \partial A]x, y[$, 9
- \leq bei Randpunkten, 9
- $H, H(A, C, M)$, 10
- f^* , 14, 48
- \mathcal{I} , 15
- $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}(Q_0, \mu)$, 30
- $\mathcal{W}, f_{\mathcal{W}}$, 38
- f , 15
- $f_I, f_{\mathcal{I}}, f_{|I| \rightarrow 0}$, 15
- $f_Q, f_{\mathcal{Q}}, f_{\mu(Q) \rightarrow 0}$, 30
- $p(\mathcal{I})$, 41
- h, h_N , 43, 46
- $h(\mathcal{I})$, 45
- Mf , 55
- f^\sharp , 55
- h_q, h_q^{-1} , 70
- h, h^{-1} , 75
- $RH(c, q, \cdot)$, 62
- $FRH(c, q)$, 73
- $A_{q, \mathcal{I}}(f)$, 77

- BMO-Norm, 55

- einsehbar, 10

- fallend bei Randpunkten, 14
- fallende Umordnung, 14, 48
- fast überall injektiv, 41
- Fefferman-Stein-Ungleichung, 56
- Funktionen mit konvexliegendem Wertebereich, 9

- Gehring-Lemma, 64
 - klassisch, 64
 - monotone Funktionen, 72
 - Potenzfunktionen, 71

- Rückführung auf monoton, 66
- gleichverteilt, 14

- Hardy-Littlewood-Maximalfunktion, 55, 65
- Hardy-Ungleichung, 70
- Hausdorff-Abstand, 12
- Hilbert-Intervalle, 45
- Hilbert-Kurve, 43
 - höherdimensionale, 46
- Höhlen, 10
 - Approximation, 13
 - einfache Eigenschaften, 11
 - Einsehbarkeit, 19, 30, 37, 42
 - Regelfunktion, 21
 - stetig, 22
 - Treppenfunktion, 32
 - Graphenfall, 48
 - monotone Anordnung, 22, 25, 35, 37, 40, 42
- Höhlenwand, 25

- Intervallmittelwertmenge, 15

- Kurvenintervall, 41
- Kurventeilintervalle, 41

- Lorentz-Funktional, 69
- Lorentz-Raum, 69, 70

- maßerhaltend, 41
- Mittelwert, 15
 - monotone Anordnung, 49
- Muckenhoupt-Klasse, 77
 - Rückführung auf monoton, 78
 - Selbstverbesserung, 77

- oberer Rand, 48

- Oszillation, 74
 - monotone Anordnung, 49
- Oszillationsungleichung, 74
 - Potenzfunktion, 76
 - Rückführung auf monoton, 74
- Rekursionsformel, 17, 38
- Sharp-Maximalfunktion, 55
- Theorem von Herz, 56, 65
- umgekehrte Jensen-Ungleichung, 63
- umgekehrte Hölder-Ungleichung, 61,
62
 - schwache, 62
 - Glättung, 63
 - Würfel versus Hilbertintervalle,
67
- Umordnung, 14, 48
- wachsend bei Randpunkten, 14