Primeigenschaften von Algebren in Modulkategorien über Hopfalgebren

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der Mathematischen-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf.

vorgelegt von
Christian Edgar Lomp
aus Düsseldorf

Düsseldorf
2002

Gedruckt mit der Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Heinrich-Heine Universität Düsseldorf.

1. Berichterstatter: Prof. Dr. R. Wisbauer
2. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Grunewald

Tag der mündlichen Prüfung 06.02.2002.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In vielen Bereichen der Mathematik betrachtet man Situationen, in denen Gruppen auf Algebren wirken. Als klassische Beispiele seien hier Galoisgruppen und Symmetriegruppen genannt. Wirkt eine Gruppe G auf eine R-Algebra A und wirkt jedes Element der Gruppe wie ein Automorphismus, so kann dieser Sachverhalt modultheoretisch durch den Gruppenring $R[G]$ zum Ausdruck gebracht werden. Einerseits ist A ein $R[G]$-Modul, andererseits verlangt man, daß die Multiplikation von A ein $R[G]$-Modulhomomorphismus ist. Eine ähnliche Situation liegt vor, wenn man die Wirkung einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ auf eine R-Algebra A betrachtet, so daß jedes Element der Liealgebra wie eine Derivation wirkt. Diese Wirkung induziert eine $U(\mathfrak{g})$-Modulstruktur auf A, wobei $U(\mathfrak{g})$ die universelle Einhüllende von $\mathfrak{g}$ ist. Auch hier wird die Multiplikation von A wieder zu einem $U(\mathfrak{g})$-Modulhomomorphismus. Beiden Fällen ist gemeinsam, daß das Tensorprodukt $A \otimes A$ eine entsprechende nicht-triviale Modulstruktur trägt. Genauer wird $A \otimes A$ im Fall einer Gruppenwirkung durch $(a \otimes b)^g := a^g \otimes b^g$ für alle $a, b \in A$ und $g \in G$ zu einem $R[G]$-Modul. Im Falle der Liealgebra $\mathfrak{g}$ läßt man ein Element x der Liealgebra durch $x \cdot (a \otimes b) := a \otimes (x \cdot b) + (x \cdot a) \otimes b$ auf $A \otimes A$ wirken. Durch Fortsetzung auf $U(\mathfrak{g})$ ergibt sich eine Modulstruktur auf $A \otimes A$. Dies zeigt, daß sowohl der Gruppenring als auch die Einhüllende der Liealgebra eine gemeinsame algebraische Struktur besitzen, nämlich eine Komultiplikation Δ, eine Koeinheit ε und eine sogenannte Antipode S. Diese Strukturen sind im Falle des Gruppenringes durch $\Delta(g) = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$ sowie $S(g) = g^{-1}$ für alle $g \in G$, und im Falle der Einhüllenden durch $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$, $\varepsilon(x) = 0$ und $S(x) = -x$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ gegeben.

Oft haben Algebren weitere Besonderheiten, wie beispielsweise Gruppen-Graduierungen. Dabei heißt eine R-Algebra A G-graduiert (mit einer Gruppe G), wenn es zu jedem Gruppenelement g R-Untermoduln A_g gibt, so daß A eine Zerlegung $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ besitzt, und so daß $A_g A_h \subseteq A_{gh}$ erfüllt ist. Auch hier finden wir eine versteckte Wirkung auf A. Sei $\{p_g\}_{g \in G}$ die duale Basis von $R[G]^*$. Jedes Element p_g wirkt auf A wie die Projektion auf die g-te Komponente, d.h. $p_g \cdot a = a_g$. Damit wird A zu einem $R[G]^*$-Modul. Ist die Gruppe endlich, so wird auch hier wieder die Multiplikation von A zu einem $R[G]^*$-Modulhomomorphismus. Dabei wirkt ein Element p_g durch $p_g \cdot (a \otimes b) := \sum_{h \in G} (p_{gh^{-1}} \cdot a) \otimes (p_h \cdot b)$ auf $A \otimes A$. Ebenso wie in den ersten beiden Beispielen besitzt $R[G]^*$ eine Komultiplikation, die durch $\Delta(p_g) = \sum_{(h \in G)} p_{gh^{-1}} \otimes p_h$ gegeben ist. Desweiteren ist die Koeinheit von $R[G]^*$ durch $\varepsilon(p_g) = \delta_{eg}$ definiert, wobei e das neutrale Element von G ist. Die Antipode ist durch $S(p_g) = p_{g^{-1}}$ gegeben.

Die oben drei genannten Objekte $R[G]$, $U(\mathfrak{g})$ sowie $R[G]^*$, falls G endlich ist, sind Hopfalgebren. Jede der obigen Wirkungen auf eine Algebra A kann dadurch gekennzeichnet werden, daß A eine Algebra in der Kategorie der Moduln über einer Hopfalgebra ist. Dabei heißt eine R-Algebra A eine Algebra in einer Kategorie $\mathcal{C}$, wenn die Multiplikation $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$ sowie die Einheit $\eta : R \longrightarrow A$ Morphismen in der Kategorie $\mathcal{C}$ sind. Dies impliziert auch, daß sowohl A als auch $A \otimes A$ Objekte der Kategorie $\mathcal{C}$ sind. Solche Algebren A, die Algebren in der Modulkategorie einer Hopfalgebra H sind, nennen wir Modulalgebren. Sie sind das zentrale Objekt der vorliegenden Untersuchung. Obwohl die oben, als Beispiele eingeführten, drei Objekte und ihre Wirkungen sehr verschieden sind, haben sie einige Gemeinsamkeiten und lassen sich allgemeiner im Rahmen von Modulalgebren über Hopfalgebren studieren (siehe auch [Ber85] oder [Coh85]). Dabei wollen wir Linksideale bzw. Ideale der Algebra studieren, die invariant unter der gegebenen Wirkung sind. Allgemeiner untersuchen wir die Kategorie der A-Moduln in der Kategorie der H-Moduln bzw. genauer solche Objekte, die sowohl eine A-Modulstruktur als auch eine H-Modulstruktur besitzen, so daß die A-Multiplikation ein H-Modulhomomorphismus ist. Diese Kategorie ist selber eine volle Modulkategorie über einer R-Algebra, dem sogenannten Smash-Produkt $A\#H$ von A und H. Im Falle einer Gruppenwirkung G ist diese Algebra gleich dem sogenannten Schiefgruppenring $A * G$ von A und G. Im Falle der Gruppen-Graduierung wurde das Smash-Produkt $A\#(R[G]^*)$ beispielsweise in [CR83] erfolgreich eingesetzt. Diese Konstruktion erlaubt nun einen modultheoretischen Zugang zur Untersuchung von invarianten Unterstrukturen.

Primeigenschaften von Algebren mit Gruppenwirkungen, Gruppen-Graduierungen oder mit Wirkung einer Liealgebra wurden in der Literatur ausgiebig studiert. Dabei hatten sich schon früher einige Gemeinsamkeiten und Analogien abgezeichnet (siehe [Ber85]). Das Anliegen dieser Arbeit ist es, einige der bekannten Ergebnisse der oben genannten drei Themenbereiche auf die allgemeinere Situation der Modulalgebren zu übertragen. Dabei sind wir an Eigenschaften von A als $A\#H$-Modul interessiert, die gewisse Primeigenschaften reflektieren. Ferner werden wir untersuchen, wie sich Primeigenschaften von $A\#H$, A und dem Fixring A^H gegenseitig beeinflussen. Dabei versuchen wir auch die Frage zu lösen, wie die Wirkung einer Hopfalgebra auf den Quotientenring einer Modulalgebra übertragen werden kann. Während dies für Gruppenwirkungen keine Schwierigkeiten bereitet, ist es für Gruppen-Graduierungen ein im Allgemeinen immer noch ungelöstes Problem.

Für unseren Ansatz müssen die betrachteten Algebren im Allgemeinen keine Algebren über Körpern sein. Andererseits treten über beliebigen Ringen einige Fragestellungen und neue Problem auf, die beim Betrachten von Algebren über Körpern keine weitere Rolle spielen. Das Fehlen einer Basis oder das Fehlen der Exaktheit des Tensor-Funktors sind hierfür nur einige Beispiele. In der Literatur wurden daher meist Modulalgebren über Körpern betrachtet. Dagegen sind Gruppenwirkungen und Graduierungen von Algebren oftmals über Ringen untersucht worden, so daß die einschlägigen Ergebnisse über Modulalgebren diese Untersuchungen nur zum Teil umfassen. In diesem Sinne führt unser Ansatz, Modulalgebren und Hopfalgebren über beliebigen kommutativen Ringen zu studieren, zu echten Verallgemeinerungen der bekannten Sätze über Gruppenwirkungen und Gruppengraduierungen.

Wie schon erwähnt, lassen sich Fragen bezüglich der Struktur der H-stabilen Linksideale einer H-Modulalgebra A durch das sogenannte Smash-Produkt $A\#H$ untersuchen. Dabei tritt folgende Situation auf: A ist ein Unterring von $A\#H$ und ein zyklischer links $A\#H$-Modul, dessen Endomorphismenring $\mathrm{End}_{A\#H}(A)$ isomorph zu dem Unterring A^H der H-invarianten Elemente von A ist. Möchte man die H-stabilen zweiseitigen Ideale von A untersuchen, so werden diese gerade durch die Modulstruktur von A über dem von der Multiplikationsalgebra $M(A)$ und von der H-Wirkung erzeugten Unterring $M_H(A)$ in $\mathrm{End}_R(A)$ beschrieben. Auch hier ist man in der Situation, daß A ein Unterring von $M_H(A)$ sowie ein zyklischer links $M_H(A)$-Modul ist. Der Endomorphismenring $\mathrm{End}_{M_H(A)}(A)$ ist isomorph zum Unterring $Z(A) \cap A^H =: Z(A)^H$. In vielen Fällen reicht es aus, Ringerweiterungen $A \subseteq B$ zu betrachten, in der A eine links B-Modulstruktur besitzt, die ihre Multiplikation erweitert. Da wir stets annehmen, daß A und B das gleiche Einselement besitzen, ist auch hier $\mathrm{End}_B(A)$ isomorph zu einem Unterring A^B von A. Solche Ringerweiterungen werden in dieser Arbeit *Erweiterungen mit zusätzlicher Modulstruktur* genannt und finden auch Verwendung in den funktionalanalytischen Arbeiten von Cabrera und Mohammed (siehe [CM01]). Weitere Beispiele von Erweiterungen mit zusätzlicher Modulstruktur sind: $A \subseteq A \otimes A^{op} =: A^e$ mit $\mathrm{End}_{A^e}(A) \simeq Z(A)$ oder $R \subseteq A$ falls A eine augmentierte R-Algebra ist.

Ziele, Ergebnisse und Aufbau der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist es, Modulalgebren in ihrem modultheoretischen Kontext zu untersuchen. Primeigenschaften und Lokalisierungen von Modulalgebren stehen dabei im Vordergrund. Ferner ist ein besseres Verständnis von Hopfalgebren über Ringen nötig, weshalb wir diese im zweiten Kapitel genauer untersuchen. Sogenannte Integrale, oder besser H-invariante Elemente, in einer R-Hopfalgebra H spielen eine große Rolle beim Studium von Modulalgebren und ihrem Smash-Produkt. Integrale stehen in Bijektion zu H-linearen Abbildungen von R nach H, und wir werden oft keinen Unterschied zwischen beiden Konzepten machen. Für Hopfalgebren, die endlich erzeugt und projektiv als Modul über dem Grundring sind, ist die Existenz von Integralen gesichert. Umgekehrt kann die Existenz solcher Elemente als Endlichkeitsbedingung für Hopfalgebren angesehen werden. In Satz 2.1.9 verallgemeinern wir eine Beobachtung von Sweedler. Ist H eine als R-Modul projektive R-Hopfalgebra, die ein nicht-triviales Links-Integral t besitzt, so zeigen wir, daß H als R-Modul endlich erzeugt sein muß, falls einer der folgenden Fälle erfüllt ist:

(1.) R ist ein Integritätsbereich oder

(2.) R ist noethersch und $\varepsilon(t)$ ist kein Nullteiler in R oder

(3.i) R ist selbst-injektiv und semiperfekt und $Rt \simeq R$ oder

(3.ii) R ist ein endliches Produkt von Integritätsbereichen und $Rt \simeq R$.

Andererseits werden wir in 2.1.12 zu jedem (als Ring) zerlegbaren Ring R eine R-Hopfalgebra konstruieren, die ein projektiver, nicht endlich erzeugter R-Modul ist und ein nicht-triviales Integral besitzt.

Für Modulalgebren A stehen Integrale in engem Zusammenhang mit $A\#H$-linearen Abbildungen von A nach $A\#H$. Insbesondere erhalten wir in Satz 2.2.6 eine Dichotomie für projektive Hopfalgebren H mit bijektiver Antipode über einem Integritätsbereich R:

> Entweder ist jede als R-Modul projektive links H-Modulalgebra A isomorph zu einem Linksideal von $A\#H$
>
> oder $\mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H) = 0$ für alle als R-Modul projektiven links H-Modulalgebren A.

Der erste Fall tritt genau dann ein, wenn die Hopfalgebra endlich erzeugt ist. In manchen Fragestellungen sind wir daran interessiert, Eigenschaften von A auf $A\#H$ zu übertragen. Dies ist natürlich um so schwieriger, wenn nicht gar unmöglich, wenn es keine nicht-trivialen Homomorphismen zwischen A und $A\#H$ gibt. Häufig werden wir daher die Existenz von Integralen voraussetzen.

In den letzten beiden Abschnitten des zweiten Kapitels werden wir die Wechselwirkung zwischen Integralen in der Hopfalgebra und der Separabilität der Hopfalgebra untersuchen. In Satz 2.3.6 charakterisieren wir die Separabilität des Smash-Produktes $A\#H$ über A. Diese Kriterien erlauben es uns, Eigenschaften von $A\#H$ und A miteinander zu vergleichen, ohne (wie in der Literatur üblich) starke Anforderungen an die Hopfalgebra zu stellen. In Satz 2.4.2 zeigen wir, daß H genau dann separabel über R ist, wenn es ein Links-(oder Rechts-)Integral t gibt mit $\varepsilon(t)$ invertierbar in R. Diese Kennzeichnung verallgemeinert Sätze von Kadison und Stolin [KS00, Corollary 5.2] sowie von Pareigis [Par73], da sie ohne Projektivitätsannahme auskommt. Es erweist sich, daß separable Hopfalgebren über Ringen gerade das Analogon von halbeinfachen Hopfalgebren über Körpern sind. Insbesondere sind Projektivitätsbedingungen an eine separable Hopfalgebra oft nicht nötig, wodurch eine größere Allgemeinheit erreicht wird. Ist hingegen eine R-Hopfalgebra H als Ring halbeinfach, so muß auch R halbeinfach, ${}_RH$ endlich erzeugt und projektiv und separabel über R sein (siehe 2.4.4). Durch Beispiele von Bialgebren zeigen wir, daß die Theorie der Integrale für Hopfalgebren stark von der Existenz der Antipode abhängt. So gibt es unendlich dimensionale Bialgebren mit nicht-trivialen Integralen (siehe 2.1.3 und vergleiche mit 2.1.9), sowie endlich dimensionale Bialgebren ohne Integrale (siehe 2.1.6 und vergleiche mit 2.1.5) und Bialgebren, die ein Integral t

mit $\varepsilon(t) = 1$ zulassen, ohne daß die Bialgebra separabel oder relativ halbeinfach zu sein braucht (siehe 2.4.3 und vergleiche mit 2.4.2).

Wann man die Wirkung einer Hopfalgebra auf einen Quotientenring einer Modulalgebra fortsetzen kann, ist immer noch eine offene Frage. Wir zeigen dazu zuerst in Satz 3.1.4, daß der torsionstheoretische Quotientenring einer Modulalgebra selber wieder eine Modulalgebra ist, sofern der injektive Modul welcher die Torsionstheorie koerzeugt eine H-Modulstruktur besitzt. Ferner zeigen wir in Satz 3.1.7, daß die Wirkung einer als R-Modul endlich erzeugten Hopfalgebra H mit bijektiver Antipode auf den torsionstheoretischen Quotientenring $Q_{\mathcal{F}}(A)$ einer Modulalgebra A bzgl. einer Gabriel Topologie $\mathcal{F}$ genau dann fortgesetzt werden kann, wenn $Q_{\mathcal{F}}(A)$ mit dem Quotientenring $Q_{\mathcal{F}_H}(A)$ übereinstimmt, wobei $\mathcal{F}_H$ die größte Gabriel-Topologie in $\mathcal{F}$ ist, die eine Basis aus H-stabilen Linksidealen besitzt. Dieser Satz gibt somit erstmalig notwendige und hinreichende Bedingungen für ein Fortsetzen der Hopf-Wirkung an. Abschließend werden bekannte Verträglichkeitsbedingungen zwischen Torsionstheorie und Hopf-Wirkung von Selvan [Sel94], Montgomery [Mon92] und Louden [Lou76] gegenübergestellt.

Im konkreten Fall des maximalen Quotientenringes untersuchen wir einen Ansatz von Rumynin. In [Rum93] hatte Rumynin behauptet, daß eine Hopf-Wirkung einer halbeinfachen Hopfalgebra stets auf den maximalen Quotientenring einer Modulalgebra fortgesetzt werden könnte. Wie sich herausstellte enthält der Beweis in [Rum93] eine bisher noch nicht überbrückbare Lücke. Wir untersuchen Rumynins Ansatz und vergleichen die von den injektiven Hüllen $E(A)$ bzw. $\widehat{A}$ in $A\#H$-Mod bzw. A-Mod koerzeugten Torsionstheorien für eine H-Modulalgebra A. Dabei ergibt sich (unter geeigneten Bedingungen an die Hopfalgebra) in Satz 3.2.4, daß sich die Hopf-Wirkung genau dann auf den maximalen Quotientenring einer H-Modulalgebra A fortsetzen läßt, wenn die Quotientenringe bzgl. der von $E(A)$ und $\widehat{A}$ koerzeugten Torsionstheorien identisch sind. Unter der Annahme, daß die Hopf-Wirkung auf den maximalen Quotientenring $Q_{max}(A)$ einer links nicht-singulären H-Modulalgebra A fortgesetzt werden kann, zeigen wir in Satz 3.2.7, daß $A\#H$ links nicht-singulär ist. In dieser Situation erhalten wir auch, daß der maximale Quotientenring von $A\#H$ isomorph zu $Q_{max}(A)\#H$ ist.

Da maximale Quotientenringe von nicht-singulären Algebren selbst-injektiv und von Neumann regulär sind, untersuchen wir im Folgenden selbst-injektive, von Neumann reguläre Modulalgebren und verallgemeinern bekannte Resultate über Schiefgruppenringen wie man sie in [AAd95] oder [GOPV81] findet.

In den letzten beiden Abschnitten des dritten Kapitels konstruieren wir den zentralen Abschluß einer Modulalgebra. Dabei stellen wir zuerst, dem Ansatz in [Wis96, Kapitel 32] folgend, eine allgemeine Konstruktion für Erweiterungen $A \subseteq M(A) \subseteq B \subseteq \operatorname{End}_R(A)$ voran. Wie in [Wis96, Kapitel 32] läßt sich dann auf der selbst-injektiven Hülle $\widehat{A}$ von A als B-Modul eine Ringstruktur definieren, sofern A B-semiprim ist, d.h. keine nilpotenten B-stabilen Ideale enthält. Setzen wir $B = M(A)$, so erhalten wir die wesentlichen Ergebnisse aus [Wis96, Kapitel 32]. Angewandt auf $B = M_H(A)$ erhalten wir die Konstruktion des zentralen Abschlusses von Matczuk in [Mat91] und die des erweiterten H-invarianten Zentrums. Während Matczuk nur H-prime Modulalgebren verwendet verallgemeinern wir seine Konstruktion auf H-semiprime Modulalgebren. Zum Abschluß vergleichen wir unsere Konstruktion mit Cohens Martindale Quotientenring Q_H für Modulalgebren in [Coh85] und zeigen, daß der zentrale Abschluß $\widehat{A}$ isomorph zu einem Unterring von Q_H ist während das erweiterte H-invariante Zentrum $Z(\widehat{A})^H$ isomorph zu $Z(Q_H)^H$ ist.

Im vierten Kapitel dieser Arbeit wenden wir uns der in [Coh85] gestellten Frage zu, ob das Smash-Produkt $A\#H$ einer semiprimen Modulalgebra A und einer halbeinfachen Hopfalgebra H semiprim ist. Dabei untersuchen wir zuerst wann das Smash-Produkt prim ist und verallgemeinern mit Proposition 4.1.1 einen Satz von Bergen, Cohen und Fishman in [BCF90]. Im nächsten Abschnitt untersuchen wir modultheoretische notwendige Bedingungen für ein semiprimes Smash-Produkt. Falls $A\#H$ semiprim ist, stellen wir gewisse modultheoretische Eigenschaften von A als $A\#H$-Modul fest, die als Primeigenschaften von Moduln angesehen werden können. Zum Abschluß geben wir einige hinreichende Bedingungen für ein semiprimes Smash-Produkt an. Wir zeigen, daß das Smash-Produkt $A\#H$ semiprim sein muß, sofern die Modulalgebra A kommutativ und semiprim ist und sofern H eine halbeinfache Hopfalgebra in Charakteristik 0 ist. Genauer zeigen wir zuerst in Satz 4.3.2, daß A semiprim schon $A\#H$ semiprim impliziert, sofern A kommutativ und ganz über A^H ist und sofern es ein Integral t in H gibt, so daß $\varepsilon(t)$ kein Nullteiler in A ist. Abschließend zeigen wir, daß das Smash-Produkt für alle halbeinfachen kohalbeinfachen triangulären Hopfalgebren und semiprimen Modulalgebren semiprim ist. Genauer zeigen wir, daß die Klasse der sogenannten starken halbeinfachen Hopfalgebren abgeschlossen ist gegenüber Drinfeld Twists. Nach einem Satz von Etinghof und Gelaki sind gerade alle halbeinfachen kohalbeinfachen triangulären Hopfalgebren über algebraisch-abgeschlossenen Körpern Drinfeld Twists von Gruppenringen und somit stark halbeinfach.

Danksagung

Herrn Prof. Dr. Robert Wisbauer möchte ich herzlich für seine Anregungen, seine Geduld und seine stete Gesprächsbereitschaft danken. Insbesondere danke ich Ihm dafür, daß er mich als Doktorand angenommen hat, trotz der räumlichen Distanz und trotz meines ungewöhnlichen Lebensweges.

Herrn Dr. Alexander Chamrad-Seidel danke ich für seine Freundschaft, die uns über die gemeinsame Schul- und Studienzeit hinaus begleitet hat. Ganz besonders danke ich ihm auch für das Durchlesen meiner Arbeit und für die Korrektur zahlloser Fehler, durch die die Darstellung dieser Arbeit erheblich verbessert worden ist.

Meinem portugiesischen Kollegen Luís António Teixeira de Oliveira möchte ich für Beispiel 2.1.6 danken.

Dem Deutschen Akademischen Auslandsdienst (DAAD) möchte ich für seine Vergabe eines Doktorandenstipendiums danken, wodurch ein einjähriger Aufenthalt an der University of Wisconsin in Milwaukee (UWM) möglich wurde, sowie für die finanzielle Unterstützung von Gastaufenthalten an der Universidad de Granada und an der National Cheng Kung University in Tainan (Taiwan). Der mathematischen Abteilung der UWM möchte ich ebenso danken, wie den Professoren A.D. Bell, I.M. Musson und M.L. Teply. Mein Dank gilt auch Professor J. Gómez Torrecillas und Dr. J. Lobillo Borrero für ihre Betreuung und Gastfreundschaft in Granada. Ganz besonders möchte ich mich bei Professor K. Beidar für die anregenden Gespräche bedanken.

Desweiteren möchte ich mich herzlich bei der mathematischen Abteilung der Universidade do Porto (UP) bedanken, die mich für die letzten eineinhalb Jahre vom Dienst befreit hat, wodurch die Fertigstellung dieser Promotionsarbeit erst ermöglicht wurde. Für weitere finanzielle Unterstützung, die die Reisen zwischen Portugal und Deutschland ermöglichten, möchte ich dem Centro de Matemática der UP sowie dem Instituto de Cooperação Científica e Tecnológica Internacional danken.

Mein Dank geht auch an das mathematische Institut der Heinrich-Heine Universität Düsseldorf für die Bereitstellung der Räumlichkeiten sowie der technischen Hilfsmittel.

Herzlich danken möchte ich meinen Eltern für ihre stete Hilfsbereitschaft und Zuneigung.

Meiner geliebten Frau Paula danke ich von ganzem Herzen für all ihr Verständnis, ihren Verzicht und ihre Liebe. Ich möchte ihr für unseren Sohn Rafael danken und hoffe, daß wir in der nächsten Zeit ein ruhigeres Leben führen werden.

Während der Erstellung dieser Promotionsarbeit habe ich in drei verschiedenen Ländern gewohnt und gearbeitet, habe geheiratet und bin Vater geworden. All den vielen Menschen, die mich auf diesem Wege begleitet und mir auf diesem Wege geholfen haben, möchte ich herzlich danken.

Definitionen und Symbole

Alle in dieser Arbeit auftretenden Ringe sind assoziativ und besitzen ein Einselement. Ringhomomorphismen bilden Einselement auf Einselement ab.

Für zwei R-Moduln X, Y über einem kommutativen Ring R bezeichne $\tau : X \otimes Y \to Y \otimes X$ den R-Isomorphismus $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ für alle $x \in X$, $y \in Y$.

Wir verweisen auf [Wis99] für modultheoretische Begriffsbildungen. Insbesondere bezeichne mit $\mathrm{Ann}_R(M)$ den Annullator eines links R-Moduls M. M heißt **treu**, falls $\mathrm{Ann}_R(M) = 0$ gilt und er heißt **prim**, falls jeder nicht-triviale Untermodul von M ein treuer $R/\mathrm{Ann}_R(M)$-Modul ist.

Ein Modul M hat endliche **Goldie (oder uniforme) Dimension**, wenn er keine unendliche innere direkte Summe von Untermoduln enthält. Es ist bekannt, daß es dann eine Zahl $n \geq 0$ gibt, so daß M keine innere direkte Summe mit mehr als n Summanden besitzt. Die Zahl n ist eine Invariante von M und wir schreiben $udim(M) = n$ dafür. Ein nicht-trivialer Untermodul N eines Moduls M heißt **wesentlich**, falls N mit jedem nicht-trivialen Untermodul L von M einen nicht-trivialen Durchschnitt besitzt. Als **Komplement** eines Untermoduls N eines Moduls M bezeichnen wir jeden Untermodul $L \subseteq M$ der maximal ist unter allen Untermoduln von M bzgl. der Eigenschaft $N \cap L = 0$.

Ein Untermodul N eines Moduls M heißt **rationaler** (oder **dichter**) Untermodul, wenn für alle Zwischenmoduln $N \subset L \subseteq M$ schon $\mathrm{Hom}_R(L/N, M) = 0$ gilt. Dazu äquivalent ist die Bedingung $\mathrm{Hom}_R(M/N, \widehat{M}) = 0$, wobei $\widehat{M}$ die selbst-injektive Hülle von M bezeichne. Rationale Untermoduln sind wesentliche Untermoduln und man nennt einen Modul M **polyform** (oder **nicht-M-singulär**), falls alle wesentlichen Untermoduln rational sind.

$$Z(A) = \{a \in A \mid ba = ab \text{ für alle } b \in B\}$$

$$\mathrm{Ann}_R(M) = \{r \in R \mid rm = 0 \text{ für alle } m \in M\}$$

$$\mathrm{Rej}(M, N) = \bigcap \{\mathrm{Ker}(f) \mid f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)\}$$

$$\mathrm{Tr}(M, N) = \sum \{\mathrm{Im}(f) \mid f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)\}$$

$N \trianglelefteq M$ $\quad$ N ist wesentlicher Untermodul von M

$$Sing({}_RM) = \{m \in M \mid \text{ es gibt } {}_RI \trianglelefteq {}_RR \text{ mit } Im = 0\}$$

$$\mathcal{L}(M) = \{N \subseteq M \mid N \text{ ist ein Untermodul von } M\}$$

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen für die gesamte Arbeit bereitgestellt. Dazu wird im ersten Abschnitt die übliche Terminologie der Hopfalgebren erklärt. Im zweiten Abschnitt wird aufgezeigt, wie die Algebren in der Modulkategorie über einer Hopfalgebra, sogenannte Modulalgebren, modultheoretisch erfaßt werden können.

1.1 Erweiterungen mit zusätzlicher Modulstruktur

Definition 1.1.1. *Wir sagen eine Erweiterung $A \subseteq B$ von R-Algebren ist eine* **Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur**, *falls A eine links B-Modulstruktur $\cdot : B \otimes A \longrightarrow A$ trägt, die die A-Wirkung erweitert, d.h. $a \cdot a' = aa'$ für alle $a, a' \in A$.*
Ist M ein links B-Modul, so definieren wir

$$M^B := \{m \in M \mid b(am) = (b \cdot a)m \, \forall b \in B, a \in A\}.$$

Mit α bezeichnen wir die B-lineare Abbildung $\alpha : B \longrightarrow A$ mit $b \longmapsto b \cdot 1_A$.

Bemerkung 1.1.2. *Es gibt viele Situationen, in denen man Erweiterungen mit Modulstruktur vorfindet: Ist A eine R-Algebra und $B = M(A)$ die Multiplikationsalgebra, so ist $A \subseteq M(A)$ eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur, $A^B = Z(A)$ und für einen A-Bimodul M sind die Elemente in M^B gerade die A-zentrierenden Elemente von M, d.h. $am = ma$ für alle $a \in A$. Ist H eine Hopfalgebra und A eine Algebra in der Kategorie der H-Moduln (eine sogenannte H-Modulalgebra), dann gibt es Erweiterungen mit zusätzlicher Modulstruktur $A \subseteq A\#H$ bzw. $A \subseteq M_H(A)$, so daß die $A\#H$-Untermoduln bzw. die $M_H(A)$-Untermoduln von A gerade die H-stabile Linksideal bzw. H-stabilen Ideale von A sind.*

Lemma 1.1.3. *Sei $A \subseteq B$ eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur.*

(1) Als links A-Moduln gilt $B = A1_B \oplus \mathrm{Ker}\,(\alpha)$.

(2) Für alle $M \in B$-Mod gilt $M^B = \mathrm{Ann}_M\,(\mathrm{Ker}\,(\alpha))$.

(3) $\Psi : \mathrm{End}_B\,(A) \longrightarrow A$ mit $\Psi(f) := (1_A)f$ ist ein Ringhomomorphismus mit Bild $\mathrm{Im}\,(\Psi) = A^B$.

(4) $\Psi_M : \mathrm{Hom}_B\,(A, M) \longrightarrow M^B$ mit $\Psi_M(f) := (1_A)f$ ist ein Isomorphismus von links A^B-Moduln.

(5) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $()^B : B$-Mod $\longrightarrow A^B$-Mod ist ein exakter Funktor.

(b) A ist projektiver links B-Modul.

(c) Es gibt ein $t \in B^B$ mit $(t)\alpha = 1_A$.

(d) Es gibt ein Idempotent $e \in B$ mit $Be \simeq A$ und $eBe \simeq A^B$.

Beweis: (1) Da $a \cdot a' = aa'$ für alle $a, a' \in A$ gilt, ist die Abbildung $\beta : A \to B$ mit $(a)\beta := a1_B$ A-linear und läßt α als A-Modulhomomorphismus zerfallen. Damit gilt $B = A1_B \oplus \mathrm{Ker}\,(\alpha)$ als A-Moduln.
(2) Ist $m \in M^B$, dann gilt für alle $b \in \mathrm{Ker}\,(\alpha)$:

$$bm = b(1_A m) = (b \cdot 1_A)m = (b)\alpha m = 0,$$

also $M^B \subseteq Ann_M(\mathrm{Ker}\,(\alpha))$. Andererseits sei $m \in Ann_M(\mathrm{Ker}\,(\alpha))$, so gilt $m \in M^B$, denn aus $B = A1_B \oplus \mathrm{Ker}\,(\alpha)$ folgt:

$$\forall b \in B, a \in A : b(am) = (ba)m = (ba)\alpha m = [b \cdot (a)\alpha]m = (b \cdot a)m,$$

(3,4) Seien $f, g \in \mathrm{End}_B\,(A)$, dann sind f und g insbesondere links A-linear und es gilt

$$\Psi(f \circ g) := (1_A)(f \circ g) := ((1_A)f)g = (1_A)f(1_A)g = \Psi(f)\Psi(g).$$

Somit ist Ψ ein Ringhomomorphismus. Ferner gilt für alle $b \in \mathrm{Ker}\,(\alpha)$:

$$b \cdot \Psi(f) = (b \cdot 1_A)f = (b)\alpha \circ f = 0.$$

Aus (2) folgt somit $\mathrm{Im}\,(\Psi) \subseteq A^B$. Andererseits sei $x \in A^B$, dann ist die Rechtsmultiplikation $R_x \in \mathrm{End}_B\,(A)$. Damit wird A^B zu einem Unterring von A und jeder links B-Modul M ist auch ein links A^B-Modul mit A^B-Untermodul M^B. Daß Ψ_M ein Isomorphismus ist folgt analog.
(5) Man überprüft leicht, daß der Isomorphismus $M^B \simeq \mathrm{Hom}_B\,(A, M)$ funktoriell in M ist, d.h. die Funktoren $()^B$ und $\mathrm{Hom}_B\,(A, -)$ sind isomorph. Somit gilt $(a) \Leftrightarrow (b)$.
$(b) \Rightarrow (c)$ Ist ${}_BA$ projektiv, dann zerfällt α und es gibt eine B-lineare Abbildung $\beta : A \longrightarrow B$ mit $\beta\alpha = id_A$. Sei $t := (1_A)\beta$, dann gilt folglich $(t)\alpha = 1_A$ und

$t \in B^B$ nach (4).
$(c) \Rightarrow (b)$ gibt es ein $t \in B^B$ mit $(t)\alpha = 1_A$, dann definieren wir $\beta : A \longrightarrow B$ mit $(a)\beta = at$. Da t ein Element aus B^B ist, ist β B-linear und läßt α zerfallen, d.h. ${}_BA$ ist projektiv. $(b) \Leftrightarrow (d)$ ist klar. ∎

Die Ringerweiterung $A \subseteq A \otimes A^{op} =: A^e$ ist eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur. Anhand von Eigenschaft $(5.b)$ sehen wir, daß in dieser Situation separable Algebren A gekennzeichnet werden.

Definition 1.1.4. *Sei A eine R-Algebra. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Alg}\,(A, R)$ die R-linearen Algebrenhomomorphismen $\lambda : A \longrightarrow R$ mit $\lambda(1_A) = 1_R$. Eine R-Algebra A heißt* **augmentiert**, *falls $\mathrm{Alg}\,(A, R) \neq \emptyset$.*

Bemerkung 1.1.5. *Ist A eine augmentierte R-Algebra und $\lambda \in \mathrm{Alg}\,(A, R)$, dann ist die Erweiterung $R \subseteq A$ eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur, wobei λ eine Modulstruktur auf R induziert. Wir bezeichnen die durch λ induzierte A-Modulstruktur auf R mit R_λ. Aus 1.1.3 folgt $A = R1_A \oplus \mathrm{Ker}\,(\lambda)$ und insbesondere ist A auch ein treuer R-Modul.*

Im Folgenden sei A stets eine augmentierte R-Algebra und $\lambda \in \mathrm{Alg}\,(A, R)$.

Definition 1.1.6. *Sei M ein A-Modul. Dann heißt ein Element m aus M* λ-invariant, *falls $am = \lambda(a)m$ für alle $a \in A$ gilt. Die Menge der λ-invarianten Elemente von M bezeichnen wir mit M_λ. Rechtsseitige Begriffe werden analog definiert.*

Man beachte, daß M_λ in der Notation von Definition 1.1.1 mit M^A übereinstimmt. Wir wenden unsere Erkenntnisse über Erweiterungen mit zusätzlicher Modulstruktur aus Satz 1.1.3 nun an und erhalten:

Satz 1.1.7. *Sei A eine augmentierte R-Algebra, $M \in A - Mod$ und $\lambda \in \mathrm{Alg}\,(A, R)$. Dann gilt:*

$$M_\lambda = \mathrm{Ann}_M\,(\mathrm{Ker}\,(\lambda)) \simeq \mathrm{Hom}_A\,(R_\lambda, M) \ \textit{(als links A-Moduln).}$$

Ferner ist $()_\lambda : A - Mod \to A - Mod$, $M \mapsto M_\lambda$ ein links-exakter Funktor, isomorph zum Funktor $\mathrm{Hom}_A\,(R_\lambda, -)$, und folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) Der Funktor $()_\lambda : A - Mod \longrightarrow R - Mod$ ist exakt.

(b) R_λ ist projektiver links A-Modul.

(c) Es gibt ein Element $t \in A_\lambda$ mit $\lambda(t)$ invertierbar in R.

Bemerkung 1.1.8. *Sei I ein Ideal von R, dann ist $\mathrm{Hom}_R\,(A, I)$ ein links (bzw. rechts) A-Modul mittels $h \rightharpoonup f : [x \mapsto f(xh)]$ (bzw. $f \leftharpoonup h : [x \mapsto f(hx)]$).*

Insbesondere ist also auch A^* ein links (bzw. rechts) A-Modul. Lemma 1.1.7 beschreibt insbesondere die λ-Invarianten von A und A^*. Es gilt:

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \text{r.ann}\,(\text{Ker}\,(\lambda)) \simeq \text{Hom}_A\,(R_\lambda, A) \\ A^*{}_\lambda &= \text{Ann}_{A^*}\,(\text{Ker}\,(\lambda)) = R\lambda \end{aligned}$$

Um $A^*_\lambda = R\lambda$ zu sehen, sei bemerkt, daß

$$A^*_\lambda = \text{Ann}_{A^*}\,(\text{Ker}\,(\lambda)) = \text{Hom}_R\,(A/\text{Ker}\,(\lambda), A)$$

gilt. Aus $a = \lambda(a)+b$ für alle $a \in A$ mit $b \in \text{Ker}(\lambda)$ folgt für ein $f \in A^*_\lambda : (a)f = (1_A)f\lambda(a)$, d.h. $f \in R\lambda$. Andererseits gilt natürlich $r\lambda \in \text{Ann}_{B^*}\,(\text{Ker}\,(\lambda))$, da λ ein Algebrenhomomorphismus ist.

Als offensichtliche Folgerung erhalten wir, daß A^* stets nicht-triviale λ-Elemente enthält. Dagegen kann A keine nicht-trivialen λ-invarianten Elemente besitzen, falls A prim (z.B. nullteilerfrei) und $A \neq R$ ist. Später werden wir sehen, daß eine Hopfalgebra, die endlich erzeugt und projektiv über einem Grundring R ist, stets nicht-triviale ε-invariante Elemente enthält (wobei ε die Koeinheit von H bezeichnet). Folglich gibt es keine prime (z.B. nullteilerfreie) Hopfalgebra $H \neq R$, die endlich erzeugt und projektiv über R ist.

Zum Abschluß dieses Abschnittes legen wir noch einige Notationen fest.

Der Standard-Morita-Kontext eines R-Moduls M ist der Morita-Kontext $(R, {}_RM_S, {}_SM^*{}_R, S)$ mit $S = \text{End}_R\,(M)$, $M^* = \text{Hom}_R\,(M, R)$ und den Abbildungen:

$$\begin{aligned} (,): \quad & M \otimes_S M^* \longrightarrow R, \quad m \otimes f \mapsto (m)f \\ [,]: \quad & M^* \otimes_R M \longrightarrow S, \quad f \otimes m \mapsto [x \mapsto (x)fm] = f \circ R_m \end{aligned}$$

wobei $R_m \in \text{Hom}_R(R, M)$ die Abbildung $r \mapsto rm$ bezeichne. Da $\text{Hom}_{B-}(A, B) \simeq B^B$ gilt, ist der Standard-Morita-Kontext von A als links B-Modul gerade (B, A, B^B, A^B) mit den Abbildungen:

$$\begin{aligned} (,): \quad & A \otimes_{A^B} B^B \longrightarrow B, \quad a \otimes b \mapsto ab \\ [,]: \quad & B^B \otimes_B A \longrightarrow A^B, \quad b \otimes a \mapsto b \cdot a \end{aligned}$$

Insbesondere haben Standard-Morita-Kontexte gute Eigenschaften, wenn $\text{Hom}_R\,(M, N) \neq 0$ gilt für alle $0 \neq N \subseteq M$. Für Erweiterungen mit zusätzlicher Modulstruktur bedeutet dies gerade, daß A^B mit jedem B-stabilen Linksideal einen nicht-trivialen Durchschnitt hat. Wir sagen in diesem Falle, daß A^B **groß in** A ist.

1.2 Hopfalgebren über Ringen

Wir verweisen auf die einschlägige Literatur [Abe80], [Kap75], [Mon92], [Par73], [Sch95], [Swe69a] bzgl. der üblichen hopfalgebraischen Terminologie.

Definition 1.2.1. *Eine* **koassoziative R-Koalgebra mit Koeinheit** *ist ein R-Modul C mit zwei R-linearen Abbildungen $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ (Komultiplikation) und $\varepsilon : C \longrightarrow R$ (Koeinheit), so daß folgende Diagramme kommutativ sind:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "1\otimes\Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes 1"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon\otimes 1"'] \arrow[r, "1\otimes\varepsilon"] & C \otimes R \\
& C \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

Für ein $c \in C$ verwenden die sogenannte Sweedler-Notation:

$$\Delta(c) = \sum_{(c)} c_1 \otimes c_2.$$

Ist C eine R-Koalgebra und A eine R-Algebra, dann ist $\mathrm{Hom}_R\,(C, A)$ eine R-Algebra durch das sogenannte **Konvolutionsprodukt**: für alle $f, g \in \mathrm{Hom}_R\,(C, A)$ ist $f \star g$ gegeben durch $(f \star g)(c) := \sum_{(c)} f(c_1)g(c_2)$ für alle $c \in C$. Ist ε die Koeinheit von C und $\eta : R \to A$ die Einheit von A, so ist $\eta \circ \varepsilon \in \mathrm{Hom}_R\,(C, A)$ die Einheit dieser Algebra. Insbesondere ist $C^* = \mathrm{Hom}_R\,(C, R)$ eine R-Algebra mit Einheit ε.

Seien M und C R-Moduln, N ein R-Untermodul von M. Bezeichne mit $\iota_N : N \to M$ die Inklusion. Dann heißt N **C-reiner** R-Untermodul von M, falls die kanonische R-lineare Abbildung $\iota_N \otimes id_C : N \otimes C \to M \otimes C$ injektiv ist.

Definition 1.2.2. *Sei C eine R-Koalgebra.*

(1) *Ein C-reiner R-Untermodul $K \subseteq C$ heißt* **Koideal** *von C, wenn $\varepsilon(K) = 0$ und $\Delta(K) \subseteq K \otimes C + C \otimes K$ gilt.*

(2) *Ein R-Modul heißt links* **C-Komodul***, falls es eine R-lineare Abbildung $\rho_M : M \longrightarrow C \otimes M$ gibt, so daß folgende Diagramme kommutativ sind:*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "\rho_M"'] & C \otimes M \arrow[d, "1\otimes\rho_M"] \\
C \otimes M \arrow[r, "\Delta\otimes 1"'] & C \otimes C \otimes M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[dr, "\simeq"'] & C \otimes M \arrow[d, "\varepsilon\otimes 1"] \\
& R \otimes M
\end{tikzcd}$$

Analog werden rechts C-Komoduln definiert.

(3) *Ein C-reiner R-Untermodul $N \subseteq M$ eines links C-Komodul ist ein* **C-Unterkomodul***, wenn $\rho_M(N) \subseteq C \otimes N$ gilt.*

Definition 1.2.3. *Sei A eine R-Algebra. A heißt* **R-Bialgebra***, wenn A eine R-Koalgebra ist, so daß die Komultiplikation Δ und die Koeinheit ε Algebrenhomomorphismen sind. Eine R-Bialgebra A heißt* **R-Hopfalgebra***, falls die*

Identität $id \in \mathrm{End}_R(A)$ ein Inverses S bzgl. des Konvolutionsproduktes besitzt. Man nennt S die **Antipode** *der Hopfalgebra und für alle $h \in H$ gilt:*

$$\sum_{(h)} h_1 S(h_2) = \varepsilon(h) = \sum_{(h)} S(h_1) h_2.$$

Man sagt, die Hopfalgebra habe eine bijektive Antipode, wenn die Antipode S eine bijektive Abbildung ist.

Wie in der Einleitung erwähnt, sind Gruppenring $R[G]$ und $U(\mathfrak{g})$ Beispiele von Hopfalgebren. Für ein Monoid M dagegen ist der **Halbgruppenring** $R[M]$ eine R-Bialgebra. Die Komultiplikation bzw. Koeinheit von $R[M]$ ist durch $\Delta(m) = m \otimes m$ bzw. $\varepsilon(m) = 1$ für alle $m \in M$ gegeben.

Definition 1.2.4. *Sei H eine R-Hopfalgebra.*

(1) Ein H-reiner R-Untermodul $I \subseteq H$ heißt **Hopfideal** *von H, wenn I ein Ideal und Koideal ist mit $S(I) \subseteq I$.*

(2) Ein R-Modul heißt links H**-Hopfmodul***, falls M ein links H-Modul sowie ein links H-Komodul ist, so daß die Komodulstruktur ρ_M von M ein links H-Modulhomomorphismus ist.*

(3) Ein H-reiner R-Untermodul $N \subseteq M$ eines links H-Hopfmoduls ist ein H**-Unterhopfmodul** *, wenn N ein H-Untermodul und H-Unterkomodul von M ist.*

Es gilt folgender Fundamentalsatz für Hopfalgebren.

Satz 1.2.5. *Sei H eine R-Hopfalgebra. Dann ist jeder links H-Hopfmodul M als links H-Hopfmodul isomorph zu $H \otimes M^{coH}$ mit $M^{coH} = \{m \in M \mid \rho_M(m) = 1 \otimes m\}$. Wobei der Isomorphismus durch die H-Wirkung $h \otimes m \mapsto hm$ gegeben ist.*

Beweis: Man kann den Beweis von [Sch95] übertragen. ■

Als Korollar erhalten wir:

Folgerung 1.2.6. *Zu jedem links (bzw. rechts) H-Unterhopfmodul M einer R-Hopfalgebra H gibt es ein Ideal I von R mit $M = IH$.*

Beweis: Man bemerke zuerst, daß $H^{coH} = R1_H$ gilt. Für einen links Unterhopfmodul M von H ist somit $M^{coH} \subseteq H^{coH} = R1_H$ und damit gibt es ein Ideal I in R mit $M^{coH} = I1_H$. Aus dem Fundamentalsatz folgt somit $M = HI$. ■

Ist C eine R-Koalgebra, dann ist $C^* := \mathrm{Hom}_R(C, R)$ eine R-Algebra. C ist ein rechts C^*-Modul durch die folgende Wirkung: $c \leftharpoondown f := \sum_{(c)} f(c_1)c_2$ für alle $c \in C, f \in C^*$. Koalgebren C, die projektiv als R-Modul sind, haben die Eigenschaft, daß jedes Element $c \in C$ in einem, als R-Modul endlich erzeugten, Unterkomodul liegt, der durch $c \leftharpoonup C^*$ gegeben ist. Für allgemeinere Koalgebren bzw. Hopfalgebren muß dies nicht mehr der Fall sein, wie das nachfolgende Beispiel zeigen wird.

Beispiel 1.2.7. *Sei R ein kommutativer Ring. Betrachtet man $R = \mathfrak{g}$ als triviale Liealgebra, so ist ihre Einhüllende $U(\mathfrak{g}) \simeq R[X]$ und induziert eine Hopfalgebrenstruktur auf $R[X]$. Genauer gilt:*

$$\Delta(X) = 1 \otimes X + X \otimes 1\,,\ \varepsilon(X) = 0\,,\ S(X) = -X.$$

In der gesamten Arbeit betrachten wir den Polynomring $R[X]$ als R-Hopfalgebra mit obiger Komultiplikation, Koeinheit und Antipode. Dagegen hätte man $R[X]$ auch als Halbgruppenring $R[\mathbb{N}]$ (und somit als R-Bialgebra) auffassen können, was wir aber hier nicht tun wollen.

Sei $a \in R$ und sei $I := < aX >$ das von aX aufgespannte Ideal in $R[X]$. Für die Komultiplikation und die Koeinheit angewandt auf aX gilt:

$$\Delta(aX) = a\Delta(X) = 1 \otimes aX + aX \otimes 1 \in H \otimes I + I \otimes H \quad \textit{sowie} \quad \varepsilon(aX) = 0.$$

Da Δ und ε Algebrenhomomorphismen sind und da I ein Ideal in $R[X]$ ist, gilt $\Delta(I) \subseteq H \otimes I + I \otimes H$ und $\varepsilon(I) = 0$. Damit ist I ein Koideal, wobei man beachte, daß I $R[X]$-rein ist, denn $R[X]$ ist projektiv. Ferner ist I ein Hopfideal, denn $S(aX) = aS(X) = -aX$ impliziert $S(I) = I$. Somit besitzt die Faktoralgebra $H := R[X]/I$ eine, durch Δ, ε und S induzierte, R-Hopfalgebrenstruktur.

Sei $\overline{} : R[X] \longrightarrow H$ die kanonische Projektion und bezeichne mit $\overline{\Delta}, \overline{\varepsilon}, \overline{S}$ die induzierten hopfalgebraischen Strukturen. Wir zeigen nun zuerst, daß jedes Element aus H in einem als R-Modul endlich erzeugten Unterkomodul von H liegt. Sei $n \geq 1$ und sei $H_n := \bigoplus_{i=0}^n R\overline{X}^i$ dann gilt

$$\overline{\Delta}(\overline{X}^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overline{X}^k \otimes \overline{X}^{n-k} \in H_n \otimes H_n.$$

Damit folgt aber gerade $H_n \subseteq H_n \oplus H_n \subseteq H \otimes H_n$. Da H_n ein direkter Summand von H ist, ist H_n auch H-rein und damit ein Unterkomodul von H. Als direkte Summe von $n+1$ zyklischen R-Moduln ist H_n endlich erzeugter R-Modul. Sei $\overline{f(X)}$ ein beliebiges Element aus H mit einem Polynom $f(X)$ n-ten Grades. Dann ist $\overline{f(X)} \in H_n$ enthalten. Damit ist jedes Element von H in einem als R-Modul endlich erzeugten Unterkomodul von H enthalten. Andererseits sind diese Unterkomoduln nicht notwendigerweise von der Form $\overline{f(X)} \leftharpoonup H^*$, denn wir können H^* wie folgt schreiben:

$$H^* = \mathrm{Hom}_R\,(H, R) \simeq \mathrm{Hom}_R\,(R \oplus (R/Ra)^{(\mathbb{N})}, R) \simeq R \oplus \mathrm{Hom}_R\,(R/Ra, R)^{(\mathbb{N})}.$$

Und angenommen es gilt $\mathrm{Hom}_R\,(R/Ra, R) = 0$, z.B. wenn R ein Integritätsbereich ist und a von Null verschieden, dann gilt $H^* \simeq R$ und die H^*-Modulstruktur *von H ist gleich seiner R-Modulstruktur. Insbesondere ist $\overline{X}^n \leftharpoonup H^* = R\overline{X}^n$ kein Unterkomodul von H.*

Ferner weisen wir noch auf folgende Zerlegungseigenschaft hin:

Lemma 1.2.8. *Sei R ein kommutativer Ring mit einer Ringzerlegung $R = R_1 \times \cdots \times R_n$. Ist $(H, \Delta, \varepsilon, S)$ eine R-Hopfalgebra, dann gibt es R_i-Hopfalgebren $(H_i, \Delta_i, \varepsilon_i, S_i)$, so daß $H = H_1 \times \cdots \times H_n$ als R-Algebra mit Komultiplikation $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$, Koeinheit $\varepsilon = \varepsilon_1 \times \cdots \times \varepsilon_n$ und Antipode $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ gilt.*

Beweis: Aus der Zerlegung $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ folgt, daß jeder R-Modul M eine Zerlegung in $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ mit R_i-Moduln M_i besitzt. Ferner gelten für zwei R-Moduln M, N:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(M, N) &= \mathrm{Hom}_{R_1}(M_1, N_1) \times \cdots \times \mathrm{Hom}_{R_n}(M_n, N_n) \\ M \otimes_R N &= (M_1 \otimes_{R_1} N_1) \times \cdots \times (M_n \otimes_{R_n} N_n) \end{aligned}$$

daraus folgt die Behauptung. ■

Im Folgenden wenden wir uns der Struktur von Moduln über Hopfalgebren zu. Sei H eine R-Hopfalgebra mit Koeinheit ε, Komultiplikation Δ und Antipode S. Wir bezeichnen die ε-invarianten Elemente eines links H-Moduls M mit M^H. Für $M = H$ schreiben wir $\int^l$ anstelle von H^H. Diese Schreibweise werden wir auch gelegentlich für Bialgebren verwenden.

Proposition 1.2.9. *Sei H eine R-Hopfalgebra und seien M, N links H-Moduln mit Modulstrukturen $\psi_M : H \otimes M \to M$ und $\psi_N : H \otimes N \to N$. Dann gilt*

(1) $M \otimes N$ trägt zwei H-Linksmodulstrukturen:

(i) **die diagonale H-Modulstruktur***:*

$$\psi_{M \otimes N} : H \otimes M \otimes N \xrightarrow{(1 \otimes \tau \otimes 1)(\Delta \otimes 1 \otimes 1)} H \otimes M \otimes H \otimes N \xrightarrow{\psi_M \otimes \psi_N} M \otimes N$$

(ii) **die rechts triviale H-Modulstruktur***:*

$$\psi_{\langle M \otimes N \rangle} : H \otimes M \otimes N \xrightarrow{\psi_M \otimes 1} M \otimes N$$

Wir schreiben, $\langle M \otimes N \rangle$ für $M \otimes N$, falls die rechts triviale Struktur gemeint ist.

(2) Als links H-Moduln gilt $\langle H \otimes M \rangle \simeq H \otimes M$ durch $h \otimes m \longmapsto \sum_{(h)} h_1 \otimes (h_2 \cdot m)$ mit Umkehrabbildung $h \otimes m \longmapsto \sum_{(h)} h_1 \otimes (S(h_2) \cdot m)$.

(3) Ist die Antipode von H bijektiv, dann gilt $\langle H \otimes M \rangle \simeq M \otimes H$ als links H-Modul durch $h \otimes m \longmapsto \sum_{(h)} (h_1 \cdot m) \otimes h_2$ mit Umkehrabbildung $m \otimes h \longmapsto \sum_{(h)} h_2 \otimes (S^{-1}(h_1) \cdot m)$.

Beweis: (1) ist leicht nachzuprüfen.
(2,3) Wir rechnen die H-Linearität der gegebenen Abbildungen aus (3) nach. Sei ϕ die Abbildung von $\langle H \otimes M \rangle$ nach $M \otimes H$ mit $(h \otimes m)\phi := \sum_{(h)} (h_1 \cdot m) \otimes h_2$ für alle $h \in H$ und $m \in M$. Für alle $g \in H$ gilt:

$$(gh \otimes m)\phi = \sum_{(g,h)} (g_1 h_1 \cdot m) \otimes g_2 h_2 = g \left(\sum_{(h)} (h_1 \cdot m) \otimes h_2 \right) = g(h \otimes m)\phi.$$

Damit ist ϕ links H-linear. Sei ϕ^{-1} die Abbildung von $M \otimes H$ nach $\langle H \otimes M \rangle$ mit $\phi^{-1}(m \otimes h) = \sum_{(h)} h_2 \otimes (S^{-1}(h_1) \cdot m)$. Für alle $g \in H$ gilt:

$$\begin{aligned}
(g(m \otimes h))\phi^{-1} &= (\sum_{(g)} (g_1 \cdot m) \otimes g_2 h)\, \phi^{-1} \\
&= \sum_{(g,h)} g_3 h_2 \otimes (S^{-1}(g_2 h_1) g_1 \cdot m) \\
&= \sum_{(g,h)} g_3 h_2 \otimes (S^{-1}(h_1) S^{-1}(g_2) g_1 \cdot m) \\
&= \sum_{(h)} g h_2 \otimes (S^{-1}(h_1) \cdot m) \\
&= g(m \otimes h)\phi^{-1}
\end{aligned}$$

Damit ist ϕ^{-1} H-linear. ϕ^{-1} ist invers zu ϕ, denn

$$(h \otimes m)\phi\phi^{-1} = \left(\sum_{(h)} (h_1 \cdot m) \otimes h_2 \right) \phi^{-1} = \sum_{(h)} h_3 \otimes (S^{-1}(h_2) h_1 \cdot m) = h \otimes m.$$

Ähnlich zeigt man $(m \otimes h)\phi^{-1}\phi = m \otimes h$.
Analog rechnet man Eigenschaft (2) nach. ■

Die Hom-Tensor Relationen $\mathrm{Hom}_R(M, N) \simeq \mathrm{Hom}_H(\langle H \otimes_R M \rangle, N)$ und obiger Isomorphismus $\langle H \otimes M \rangle \simeq H \otimes M$ induzieren eine natürlich links H-Modulstruktur auf $\mathrm{Hom}_R(M, N)$:

Proposition 1.2.10. *Seien $M, N \in H - Mod$.*

(1) $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ ist ein links H-Modul durch

$$(h \cdot f) : m \longmapsto \sum_{(h)} h_1 \cdot f(S(h_2) \cdot m)$$

für alle $m \in M, h \in H, f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$.

(2) *Ferner haben wir natürliche Isomorphismen zwischen den Funktoren*

$$\mathrm{Hom}_H(M \otimes N, -) \simeq \mathrm{Hom}_H(M, \mathrm{Hom}_R(N, -)) \text{ (siehe [Par72, Lemma 4]).}$$

(3) $\mathrm{Hom}_R(M, N)^H = \mathrm{Hom}_H(M, N)$

(4) *Ist M projektiver H-Modul und N projektiv als R-Modul, dann ist $M \otimes N$ projektiv in H-Mod (siehe [Far00, Lemma 1.4] bzw. Aussage (2)).*

(5) $\mathrm{Hom}_R(H, N)$ *trägt eine weitere links H-Modulstruktur, die durch*

$$(h \cdot f) : g \longmapsto f(gh)$$

für alle $g, h \in H$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(H, N)$ gegeben ist und die wir mit $\langle \mathrm{Hom}_R(H, N) \rangle$ bezeichnen.

(6) *Als links H-Moduln gilt $\langle \mathrm{Hom}_R(H, N) \rangle \simeq \mathrm{Hom}_R(H, N)$ (siehe [Par72, Lemma 6]).*

(7) *Hat H eine bijektive Antipode, so trägt $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ eine weitere H-Linksmodulstruktur, die durch*

$$(h \cdot f) : m \longmapsto \sum_{(h)} h_2 \cdot f(S^{-1}(h_1) \cdot m)$$

für alle $h \in H$, $m \in M$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ definiert ist.

Analog kann man rechts H-Moduln studieren und erhält analoge Aussagen wie oben. Insbesondere ist das Tensorprodukt zweier H-Rechtsmoduln wieder ein H-Rechtsmodul.

Proposition 1.2.11. *Ist $M \in H - Mod$ mit links H-Modulstruktur ψ_M, dann definiert*

$$M \otimes H \xrightarrow{\tau} H \otimes M \xrightarrow{S \otimes 1} H \otimes M \xrightarrow{\psi_M} M$$

eine rechts H-Modulstruktur auf M. Diese Zuordnung definiert einen exakten Funktor von H-Mod nach Mod-H.
Ist $M \in$ Mod-H mit rechts H-Modulstruktur ψ_M, dann definiert

$$H \otimes M \xrightarrow{\tau} M \otimes H \xrightarrow{1 \otimes S} M \otimes H \xrightarrow{\psi_M} M$$

eine links H-Modulstruktur auf M. Diese Zuordnung definiert einen exakten Funktor von Mod-H nach H-Mod. Besitzt H eine bijektive Antipode, dann kann auf M eine weitere links H-Modulstruktur durch

$$H \otimes M \xrightarrow{\tau} M \otimes H \xrightarrow{1 \otimes S^{-1}} M \otimes H \xrightarrow{\psi_M} M$$

definiert werden. In diesem Fall sind H-Mod und Mod-H äquivalent.

1.3 Modulalgebren

Definition 1.3.1. *Sei H eine R-Hopfalgebra und A eine R-Algebra. Dann heißt A links H-***Modulalgebra***, falls A ein links H-Modul ist, so daß die Multiplikation $\mu_A : A \otimes A \longrightarrow A$ und die Einheit $\eta_A : R \longrightarrow A$ links H-Modulhomomorphismen sind. Äquivalent dazu ist, daß*

$$\forall h \in H, \forall a, b \in A \ : h \cdot (ab) = \sum_{(h)} (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b) \ \text{ sowie } \ h \cdot 1_A = \varepsilon(h) 1_A$$

gilt. Analog seien rechts H-Modulalgebren definiert, d.h. $A \in Mod - H$ mit

$$(ab) \cdot h = \sum_{(h)} (a \cdot h_1)(b \cdot h_2) \ \text{ sowie } \ 1_A \cdot h = 1_A \varepsilon(h)$$

für alle $h \in H$ und $a, b \in A$.

Lemma 1.3.2. *Sei H eine R-Hopfalgebra und A eine links H-Modulalgebra, dann ist A^{op} eine rechts H-Modulalgebra. Ist A eine rechts H-Modulalgebra, so ist A^{op} eine links H-Modulalgebra.*

Beweis: Ist A eine links H-Modulalgebra, dann folgt aus 1.2.11, daß A eine rechts H-Modulstruktur besitzt durch $a * h := S(h) \cdot a$ für alle $a \in A$ und $h \in H$. Wir bezeichnen die Multiplikation von A^{op} mit $\cdot^{op}$. Für alle $a, b \in A^{op}$ und $h \in H$ gilt:

$$(a \cdot^{op} b) * h = S(h) \cdot (ba) = \sum_{(h)} (S(h_2) \cdot b)(S(h_1) \cdot a) = \sum_{(h)} (a * h_1) \cdot^{op} (b * h_2).$$

Ebenso gilt $1_A * h = S(h) \cdot 1_A = \varepsilon(h) 1_A$, d.h. A^{op} ist eine rechts H-Modulalgebra. Ist A eine rechts H-Modulalgebra, so zeigt man analog, daß A^{op} eine links H-Modulalgebra ist. ■

Bemerkung 1.3.3. *Die triviale links (oder rechts) H-Modulalgebra ist $A = R$. Nicht jede R-Algebra, die auch links H-Modul ist, ist eine links H-Modulalgebra. Beispielsweise ist H selber ein H-Modul über sich durch Multiplikation, aber H ist im Allgemeinen keine links oder rechts H-Modulalgebra mit dieser H-Wirkung. Dagegen definiert die Linksadjunktion von H auf sich selbst durch $h \cdot_{adl} g := \sum_{(h)} h_1 g S(h_2)$ eine links H-Modulstruktur auf H und H ist mit dieser Struktur eine links H-Modulalgebra. Die R-Algebra $H^* = \mathrm{Hom}_R(H, R)$ ist nach 1.2.10 ein links H-Modul und wird mit dieser H-Wirkung zu einer links H-Modulalgebra.*

Beispiel 1.3.4. *Sei A eine R-Algebra. Eine R-lineare Abbildung $\delta \in \mathrm{End}_R(A)$ heißt Derivation, falls $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$ gilt für alle $a, b \in A$. Für jede Derivation δ kann man $R[X]$ durch $X \cdot a := \delta(a)$ auf A wirken lassen. Trägt $R[X]$*

die in 1.2.7 definierte Hopfalgebrenstruktur, dann zeigt man leicht, daß A eine links $R[X]$-Modulalgebra ist durch die von δ induzierte Wirkung. Umgekehrt, ist A eine links $R[X]$-Modulalgebra, dann folgt aus $\Delta(X) = 1 \otimes X + X \otimes 1$, daß der Endomorphismus $a \mapsto X \cdot a$ eine Derivation ist. Allgemeiner heißen Elemente $h \in H$ einer Hopfalgebra H **primitiv**, *falls $\Delta(h) = 1 \otimes h + h \otimes 1$ und $\varepsilon(h) = 0$ gilt. Ist A eine links H-Modulalgebra, so wirkt jedes primitive Element von H wie eine Derivation auf A.*

Modulalgebren als Moduln über Smash-Produkten

Sei H eine R-Hopfalgebra und A eine links H-Modulalgebra. Auf dem Tensorprodukt beider Algebren werden wir eine neue Multiplikation einführen, so daß ein Ring entsteht, dessen Linksmoduln gerade die links H- und links A-Moduln sind, deren A-Modulstruktur Homomorphismen in H-Mod sind. Dazu gehen wir etwas allgemeiner vor.

Definition 1.3.5. *Seien A und B R-Algebren mit Multiplikation μ_A bzw. μ_B. Sei $\nu : B \otimes A \longrightarrow A \otimes B$ eine R-lineare Abbildung. Dann definieren wir:*

$$\mu : (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \xrightarrow{1 \otimes \nu \otimes 1} (A \otimes A) \otimes (B \otimes B) \xrightarrow{\mu_A \otimes \mu_B} A \otimes B.$$

Wird $A \otimes B$ durch μ zu einer assoziativen R-Algebra mit Einselement $1_A \otimes 1_B$, dann schreiben wir $A \#_\nu B$ und nennen diesen Ring das **Smash-Produkt** *von A und B bzgl. ν.*

Eine Kennzeichnung von Smash-Produkten wurde von Caenepeel, Ion, Militaru und Zhu gegeben:

Satz 1.3.6 ([CIMZ00, Theorem 2.5]). *Seien A,B und ν wie in 1.3.5. Dann definiert ν genau dann ein Smash-Produkt auf A und B wenn folgende Aussagen gelten:*

(i) $\nu(b \otimes 1_A) = 1_A \otimes b$ und $\nu(1_B \otimes a) = a \otimes 1_B$ für alle $a \in A, b \in B$.

(ii) Folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
B \otimes B \otimes A \arrow[r, "\mu_B \otimes 1"] \arrow[dd, "1 \otimes \nu"'] & B \otimes A \arrow[dr] & & B \otimes A \arrow[dl, "\nu"'] & B \otimes A \otimes A \arrow[l, "1 \otimes \mu_A"'] \arrow[dd, "\nu \otimes 1"] \\
& & A \otimes B & & \\
B \otimes A \otimes B \arrow[r, "\nu \otimes 1"'] & A \otimes B \otimes B \arrow[ur, "1 \otimes \mu_B"] & & A \otimes A \otimes B \arrow[ul, "\mu_A \otimes 1"'] & A \otimes B \otimes A \arrow[l, "1 \otimes \nu"]
\end{tikzcd}$$

Aus der Bedingung (i) ergibt sich, daß die Abbildung $A \longrightarrow A \#_\nu B$ mit $a \mapsto a \# 1_B$ ein Ringhomomorphismus ist. Wir untersuchen nun, wann diese Abbildung eine Einbettung ergibt.

Lemma 1.3.7. *Sei R ein kommutativer Ring und M, N zwei R-Moduln. Sei $m \in M$ und $\varphi_m : N \to N \otimes_R M$ mit $n \mapsto n \otimes m$.*

(1) $\operatorname{Ker}(\varphi_m) = \operatorname{Ann}_R(m)N \;\Leftrightarrow\; N \otimes_R -$ *ist exakt bzgl* $Rm \hookrightarrow M$

(2) φ_m *ist injektiv* $\Leftrightarrow$ $N \otimes_R -$ *ist exakt bzgl* $Rm \hookrightarrow M$ *und* $\operatorname{Ann}_R(m) \subseteq \operatorname{Ann}_R(N)$.

Beweis: Sei $I := \operatorname{Ann}_R(m)$ und $\pi : N \to N/IN$ die kanonische Projektion, $i : Rm \to M$ die Inklusion und $\sigma : N/IN \simeq N \otimes_R R/I \simeq N \otimes_R Rm$ der R-Isomorphismus $\sigma(n + IN) = n \otimes m$. Dann haben wir in Diagrammform:

$$\begin{array}{ccccccc} & & N & \xrightarrow{\pi} & N/IN & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker}(1 \otimes i) & \longrightarrow & N \otimes Rm & \xrightarrow{1 \otimes i} & N \otimes M \end{array}$$

Es gilt: $\varphi_m = (1 \otimes i) \circ \sigma \circ \pi$. Somit ist $\operatorname{Ker}(\varphi_m) = \pi^{-1}\sigma^{-1}(\operatorname{Ker}(1 \otimes i)) \supseteq IN$. Daher gilt: $\operatorname{Ker}(\varphi_m) = IN \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(1 \otimes i) = 0 \Leftrightarrow N \otimes -$ ist exakt bzgl. $i : Rm \hookrightarrow M$. Und ferner ist φ_m injektiv genau dann, wenn $N \otimes -$ exakt ist bzgl. obiger Folge und $IN = 0$, d.h $\operatorname{Ann}_R(m) \subseteq \operatorname{Ann}_R(N)$ gilt. ■

Man beachte, daß für eine R-Algebra A schon $\operatorname{Ann}_R(1_A) = \operatorname{Ann}_R(A)$ gilt. Aus obigem Lemma folgt:

Folgerung 1.3.8. *Sei $A\#_\nu B$ ein Smash-Produkt von A und B bzgl. ν. Dann gibt es einen Ringhomomorphismus $\varepsilon_B : B \longrightarrow A\#_\nu B$ mit $b \mapsto 1_A\#b$ und folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) ε_B *ist injektiv;*

(b) $-\otimes_R B$ *ist exakt bzgl.* $R1_A \hookrightarrow A$ *und* $\operatorname{Ann}_R(A) \subseteq \operatorname{Ann}_R(B)$.

Insbesondere ist ε_B eine Einbettung, wenn B ein flacher und A ein treuer R-Modul ist, oder wenn A eine augmentierte R-Algebra ist. Analoge Aussagen gelten für $\varepsilon_A : A \longrightarrow A\#_\nu B$ mit $a \mapsto a\#1_B$.

Lemma 1.3.9. *Sei $A\#_\nu B$ ein Smash-Produkt von A und B bzgl. ν. Dann ist $A \subseteq A\#_\nu B$ genau dann eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur, wenn A eine links B-Modulstruktur $\lambda : B \otimes A \longrightarrow A$ hat, so daß folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccccc} B \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\nu \otimes 1} & A \otimes B \otimes A & \xrightarrow{1 \otimes \lambda} & A \otimes A \\ \Big\downarrow{\scriptstyle 1 \otimes \mu_A} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_A} \\ B \otimes A & & \xrightarrow[\lambda]{\hspace{6em}} & & A \end{array}$$

Ausgeschrieben bedeutet das Diagramm für alle $a, a' \in A$ und $b \in B$ mit $\nu(b \otimes a) = \sum_i a_i \otimes b_i$:

$$b \cdot (aa') = \sum_i a_i(b_i \cdot a')$$

Beweis: Angenommen $A \subseteq A\#_\nu B$ ist eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur, dann gibt es eine links $A\#_\nu B$-Modulstruktur $\cdot$. Der Ringhomomorphismus $\varepsilon_B : B \longrightarrow A\#_\nu B$ induziert ferner eine links B-Modulstruktur auf A. Seien $a, a' \in A$ und $b \in B$ mit $\nu(b \otimes a) = \sum_i a_i \otimes b_i$, dann gilt:

$$b \cdot (a'a) = (1\#b) \cdot [(a\#1) \cdot a'] = \left(\sum_i a_i\#b_i\right) \cdot a' = \sum_i (a_i\#1) \cdot (1\#b_i) \cdot a' = \sum_i a_i(b_i \cdot a').$$

Andererseits sei A ein B-Modul mit $\cdot : B \otimes A \longrightarrow A$. Dann definieren wir eine links $A\#_\nu B$-Wirkung auf A durch $(a\#b) * x := a(b \cdot x)$ für $a, x \in A$ und $b \in B$. Diese Wirkung setzt die A-Wirkung auf A fort und es gilt für $a, \tilde{a}, x \in A$ und $b, \tilde{b} \in B$ mit $\nu(b \otimes \tilde{a}) =: \sum_i \tilde{a}_i \otimes b_i$:

$$\begin{aligned}(a\#b) * [(\tilde{a}\#\tilde{b}) * x] &= a(b \cdot (\tilde{a}(\tilde{b} \cdot x))) \\ &= \sum_i a\tilde{a}_i \left(b_i\tilde{b} \cdot x\right) \\ &= (\sum_i a\tilde{a}_i\#b_i\tilde{b}) * x = [(a\#b)(\tilde{a}\#\tilde{b})] * x.\end{aligned}$$

■

Definition 1.3.10. *Sei A eine links H-Modulalgebra. Sei ${}_{(A,H)}\mathcal{M}$ die Kategorie, deren Objekte M links A-Moduln und links H-Moduln sind, so daß deren A-Modulstruktur $\lambda : A \otimes M \longrightarrow M$ ein links H-Modulhomomorphismus ist, und deren Morphismen links A-lineare und links H-lineare Abbildungen sind. Analog sei ${}_H\mathcal{M}_A$ definiert. Ist A eine rechts H-Modulalgebra, so sind $\mathcal{M}_{(A,H)}$ und ${}_A\mathcal{M}_H$ analog definiert.*

Satz 1.3.11. *Sei A eine H-Modulalgebra. Der R-Modul $A \otimes H$ trägt die diagonale H-Linksmodulstruktur $\psi_{A\otimes H} : H \otimes A \otimes H \longrightarrow A \otimes H$ sowie die rechts triviale A-Linksmodulstruktur $\mu_A \otimes 1_H : A \otimes A \otimes H \longrightarrow A \otimes H$. Die Komposition dieser beiden Strukturen ergibt eine assoziative Multiplikation auf $A \otimes H$*

$$\mu : (A \otimes H) \otimes (A \otimes H) \xrightarrow{1\otimes\psi_{A\otimes H}} A \otimes A \otimes H \xrightarrow{\mu_A \otimes 1} A \otimes H$$

mit Einselement $1_A \otimes 1_H$, wobei

$$\mu : (a \otimes h) \otimes (b \otimes g) \longmapsto \sum_{(h)} a(h_1 \cdot b) \otimes (h_2 g).$$

Für diese Ringstruktur auf $A \otimes H$ schreiben wir $A\#H$ und es gilt:

(1) $A\#H = A\#_\nu H$ ist das Smash-Produkt von A und H bzgl. ν, wobei ν definiert ist durch

$$\nu : H \otimes A \xrightarrow{\Delta\otimes 1} H \otimes H \otimes A \xrightarrow{1\otimes\tau} H \otimes A \otimes H \xrightarrow{\psi_A \otimes 1} A \otimes H$$

und führt ein Element $h \otimes a$ in ein Element $\sum_{(h)}(h_1 \cdot a) \otimes h_2$ über.

(2) A ist Unterring von $A\#H$ durch $a \mapsto a\#1$;

(3) $A \subseteq A\#H$ ist eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur, wobei $A\#H$ auf A durch $a\#h \cdot b := a(h \cdot b)$ wirkt und A zu einem zyklischen $A\#H$-Linksmodul macht. Die links $A\#H$-Untermoduln von A sind genau die H-stabilen Linksideale von A.

(4) ${}_{(A,H)}\mathcal{M} = A\#H - Mod$.

(5) $A^H \simeq \mathrm{End}_{A\#H}(A)$ ist ein Ring.

(6) $M^H \simeq \mathrm{Hom}_{A\#H}(A, M)$ für alle $M \in A\#H$-Mod.

(7) Die Abbildung $\varepsilon_H : H \longrightarrow A\#H$ mit $h \mapsto 1\#h$ ist ein Ringhomomorphismus. Ist ${}_RH$ flach, so gilt $\mathrm{Ker}\,(\varepsilon_H) = \mathrm{Ann}_R\,(A)H$.

Beweis: Die Ringstruktur von $A\#H$ folgt aus (1), denn sei

$$\mu := (\mu_A \otimes 1)(1 \otimes \psi_{A\otimes H}) : A \otimes H \otimes A \otimes H \longrightarrow A \otimes H,$$

dann gilt wie man leicht verifiziert $\mu = (\mu_A \otimes \mu_H)(1 \otimes \nu \otimes 1)$ für das angegebene ν. Offensichtlich erfüllt ν Eigenschaft (i) aus 1.3.6. Um Eigenschaft (ii) nachzuprüfen seien $a, b \in A$ und $h, g \in H$:

$$\nu(\mu_H \otimes 1)(h \otimes g \otimes a) = \sum_{(hg)} h_1 g_1 \cdot a \otimes h_2 g_2 = (1 \otimes \mu_H)(\nu \otimes 1)(1 \otimes \nu)(h \otimes g \otimes a).$$

$$\nu(1 \otimes \mu_A)(h \otimes a \otimes b) = \sum_{(h)} h_1 \cdot (ab) \otimes h_2 = \sum_{(h)} (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b) \otimes h_3 = (\mu_A \otimes 1)(1 \otimes \nu)(\nu \otimes 1)(h \otimes a \otimes b).$$

Demnach kommutieren beide Teildiagramme aus 1.3.6(ii) und $A\#_\nu B = A\#H$ ist eine assoziative Algebra mit Einselement $1_A\#1_H$.
(2) folgt aus 1.3.8, da H augmentiert ist;
(3) Wir prüfen die Bedingung aus 1.3.9 nach. Nach Definition einer H-Modulalgebra ist A ein links H-Modul und erfüllt

$$h \cdot (ab) = \sum_{(h)} (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b) \quad \text{für alle } a, b \in A \text{ und } h \in H.$$

Damit erfüllt ν gerade die Bedingung in 1.3.9. Somit ist nach 1.3.9 $A \subseteq A\#H$ eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur.
(4) Auf jedem Modul $M \in {}_{(A,H)}\mathcal{M}$ definiert man eine links $A\#H$-Modulstruktur durch

$$(a\#h) \cdot m := a(hm) \quad \text{für alle } a \in A, m \in M \text{ und } h \in H,$$

so daß M zu einem links $A\#H$-Modul wird. Umgekehrt ist $M \in A\#H$-Mod, dann ist M auch links A und links H-Modul durch ε_A und ε_H. Da $h(am) = (1\#h)(a\#1)m = \sum_{(h)} (h_1 \cdot a)(h_2 m)$ gilt, ist die A-Modulstruktur $A \otimes M \longrightarrow M$ ein links H-Modulhomomorphismus, d.h. $M \in {}_{(A,H)}\mathcal{M}$.
Aussagen (5) und (6) folgen aus 1.1.3.

(7) folgt aus 1.3.7.
■

Analog trägt $H \otimes A$ eine Ringstruktur, falls A eine rechts H-Modulalgebra ist. In diesem Fall lautet die Multiplikation: $(h\otimes a)(g\otimes b) := \sum_{(g)} hg_1 \otimes (a \cdot g_2)b$ und $\mathcal{M}_{(A,H)} = Mod - H \otimes A$. Ferner kann man $\nu : A \otimes H \longrightarrow H \otimes A$ mit $\nu(a \otimes g) := \sum_{(g)} g_1 \otimes ag_2$ wählen, so daß $H \otimes A$ durch ν zu einem assoziativen Ring $H\#_\nu A$ wird mit $\mathcal{M}_{(A,H)} = Mod - H\#_\nu A$.

Bemerkung 1.3.12. *Sei A eine R-Algebra und G eine Gruppe, deren Elemente wie Automorphismen auf A wirken. Für die Wirkung eines Elementes $g \in G$ auf ein Element $a \in A$ benutzen wir die übliche Schreibweise a^g. Dann ist A eine links $R[G]$-Modulalgebra durch $g \cdot a := a^g$, denn $g \cdot (ab) = (ab)^g = a^g b^g$ gilt ebenso wie $1^g = 1$ (man erinnere sich an die Komultiplikation im Gruppenring $\Delta(g) = g\otimes g$ sowie an die Koeinheit $\varepsilon(g) = 1$). Das Smash-Produkt $A\#R[G]$ ist gleich dem Schiefgruppenring $A{*}G$, denn $A\#R[G] \simeq A^{(G)} = A{*}G$ als R-Modul und ihre Multiplikationen stimmen überein.*
Ist δ eine Derivation von A, dann ist A eine links $R[X]$-Modulalgebra, wobei X wie δ auf A wirkt (siehe 1.3.4). Das Smash-Produkt $A\#R[X]$ ist isomorph zum Differentialoperatorring $A[X;\delta]$, denn $A\#R[X] \simeq A[X,\delta]$ durch $\Psi : a\#X^n \mapsto aX^n$ als links A-Moduln. Da

$$(1\#X)(a\#1) = (1 \cdot a)\#X + (X \cdot a)\#1 = a\#X + \delta(a)\#1$$

in $A\#R[X]$ und $Xa = aX + \delta(a)$ in $A[X;\delta]$ gelten, ist Ψ ein Ringhomomorphismus.
Sogenannte "crossed products" $A\#_\sigma H$ einer Hopfalgebren H und einer Algebra A auf die H wirkt mit Kozykel $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(H\otimes H, A)$ sind Verallgemeinerungen von Smash-Produkten jedoch im Allgemeinen keine Smash-Produkte im Sinne von 1.3.6, denn der Homomorphismus $\varepsilon_H : H \longrightarrow A\#_\sigma H$ muß kein Ringhomomorphismus mehr sein (siehe [Mon92, Kapitel 7]). Ebenso muß $A \subseteq A\#_\sigma H$ keine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur sein, da A im Allgemeinen kein H-Modul sein muß (für kokommutatives H gilt dies genau dann, wenn $\sigma(H \otimes H) \subseteq Z(A)$ gilt [Mon92, 7.1.12]).

Proposition 1.3.13. *Sei A eine H-Modulalgebra und seien $M, N, L \in {}_H\mathcal{M}_A$. Dann gilt:*

1. $\mathrm{Hom}_{-A}(M,N)$ *ist ein links H-Modul mit*

$$\mathrm{Hom}_{-A}(M,N)^H = \mathrm{Hom}_{H-A}(M,N).$$

2. *Für alle $g \in \mathrm{Hom}_{-A}(M,N), f \in \mathrm{Hom}_{-A}(N,L)$ und $h \in H$ gilt:*

$$h \cdot (f \circ g) = \sum_{(h)} (h_1 \cdot f) \circ (h_2 \cdot g)$$

3. $\mathrm{End}_{-A}(M)$ *ist eine links H-Modulalgebra.*

4. $M \in \mathrm{End}_{-A}(M)\#H$*-Mod.*

Beweis: (1) Nach 1.2.10 hat $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ eine links H-Modulstruktur durch

$$(h \cdot f) : m \mapsto \sum_{(h)} h_1 \cdot f(S(h_2) \cdot m).$$

Ist $f \in \mathrm{Hom}_{-A}(M,N)$, so ist $(h \cdot f)$ auch rechts A-linear,

$$\begin{aligned}
(h \cdot f)(ma) &= \sum_{(h)} h_1 \cdot f(S(h_2) \cdot (ma)) \\
&= \sum_{(h)} h_1 \cdot f[(S(h_3) \cdot m)(S(h_2) \cdot a)] \\
&= \sum_{(h)} h_1 \cdot [f(S(h_3) \cdot m)(S(h_2) \cdot a)] \\
&= \sum_{(h)} [h_1 \cdot f(S(h_4) \cdot m)]\,[h_2 S(h_3) \cdot a] \\
&= \sum_{(h)} [h_1 \cdot f(S(h_2) \cdot m)]\,a = (h \cdot f)(m)a
\end{aligned}$$

Aus $\mathrm{Hom}_H(M,N) = \mathrm{Hom}_R(M,N)^H$ folgt leicht $\mathrm{Hom}_{H-A}(M,N) = \mathrm{Hom}_{-A}(M,N)^H$.
(2) Seien $h \in H$, $f \in \mathrm{Hom}_{-A}(M,N), g \in \mathrm{Hom}_{-A}(N,L)$ und $m \in M$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{(h)} (h_1 \cdot f) \circ (h_2 \cdot g)(m) &= \sum_{(h)} h_1 \cdot f(S(h_2) \cdot h_3 \cdot g(S(h_4) \cdot m)) \\
&= \sum_{(h)} h_1 \cdot f(g(S(h_2) \cdot m)) = (h \cdot (f \circ g))(m)
\end{aligned}$$

Also $h \cdot (f \circ g) = \sum_{(h)} (h_1 \cdot f) \circ (h_2 \cdot g)$.
(3) folgt aus (2) und aus

$$h \cdot id_M(m) = \sum_{(h)} h_1 \cdot id_M(S(h_2) \cdot m) = \left(\sum_{(h)} h_1 S(h_2) \right) \cdot m = \varepsilon(h) m,$$

d.h. $h \cdot id_M = \varepsilon(h) id_M$.
(4) klar, denn für alle $h \in H$, $f \in \mathrm{End}_{-A}(M)$ und $m \in M$ gilt:

$$h \cdot f(m) = \sum_{(h)} h_1 \cdot f(\varepsilon(h_2) m) = \sum_{(h)} h_1 \cdot f(S(h_2) \cdot h_3 \cdot m) = \sum_{(h)} (h_1 \cdot f)(h_2 \cdot m).$$

■

Hat H eine bijektive Antipode, dann wird wie in 1.2.10 $\mathrm{Hom}_{R-}(M,N)$ für $M,N \in A\#H$-Mod zu einem links H-Modul durch

$$(h \cdot f) : m \mapsto \sum_{(h)} h_2 \cdot (S^{-1}(h_1) \cdot m) f$$

für alle $h \in H$ und $m \in M$. Analog zu letzter Proposition zeigt man

Proposition 1.3.14. *Sei H eine R-Hopfalgebra mit bijektiver Antipode, sei A eine H-Modulalgebra und seien $M, N, L \in A\#H$-Mod, so gilt:*

1. $\operatorname{Hom}_{A-}(M, N)$ *ist ein links H-Modul mit*
$$\operatorname{Hom}_{A-}(M, N)^H = \operatorname{Hom}_{A\#H}(M, N).$$

2. *Für alle $g \in \operatorname{Hom}_{A-}(M, N), f \in \operatorname{Hom}_{A-}(N, L)$ und $h \in H$ gilt:*
$$h \cdot (f \circ g) = \sum_{(h)} (h_1 \cdot f) \circ (h_2 \cdot g)$$

3. $\operatorname{End}_{A-}(M)$ *ist eine links H-Modulalgebra.*

4. $M \in {}_H\mathcal{M}_{\operatorname{End}_{A-}(M)}$.

Als wichtige Folgerung halten wir fest, daß der Biendomorphismenring eines $A\#H$-Moduls eine links H-Modulalgebra ist.

Folgerung 1.3.15. *Sei H eine R-Hopfalgebra mit bijektiver Antipode, A eine links H-Modulalgebra und $M \in A\#H$-Mod. Dann ist $\operatorname{Biend}_{A-}(M)$ eine links H-Modulalgebra und der natürliche Ringhomomorphismus $A \longrightarrow \operatorname{Biend}_{A-}(M)$ ist ein Homomorphismus von links H-Modulalgebren mit Kern $\operatorname{Ann}_A(M)$.*

Beweis: Nach 1.3.14(3) ist $\operatorname{End}_{A-}(M)$ eine links H-Modulalgebra und nach 1.3.13(3) ist $\operatorname{Biend}_{A-}(M)$ eine links H-Modulalgebra. Sei $\varphi : A \longrightarrow \operatorname{Biend}_{A-}(M)$ der natürliche Ringhomomorphismus $a \mapsto L_a : [m \mapsto am]$. Wir prüfen die H-Linearität von φ nach. Seien $h \in H, a \in A$ und $m \in M$. Dann gilt

$$\varphi(ha)(m) = (ha)m = \sum_{(h)} h_1(a(S(h_2)m)) = (h \cdot L_a)(m) = [h \cdot \varphi](a)(m),$$

d.h. $\varphi(h \cdot a) = h \cdot \varphi(a)$. Und somit ist φ links H-linear, d.h. φ ist ein H-Modulalgebrenhomomorphismus. ■

Modulalgebren als Moduln über Multiplikationsalgebren

Während die links $A\#H$-Modulstruktur von A das Studium der H-stabilen Linksideale von A ermöglicht, wollen wir nun die H-stabilen zweiseitigen Ideale von A betrachten.

Ist a ein Element aus A, so bezeichnet $L_a \in \operatorname{End}_R(A)$ die Abbildung $L_a(b) = ab$ und $R_a \in \operatorname{End}_R(A)$ die Abbildung $R_a(b) = ba$ für alle $b \in A$. Wir nennen L_a bzw. R_a die Links- bzw. Rechtsmultiplikation mit a. Die **Multiplikationsalgebra** $M(A)$ einer R-Algebra A ist die von den Links- bzw. Rechtsmultiplikationen aufgespannte Unteralgebra von $\operatorname{End}_R(A)$. Sei $B \subseteq \operatorname{End}_R(A)$ eine Unteralgebra von $\operatorname{End}_R(A)$, die die Multiplikationsalgebra $M(A)$ enthält.

Dann ist die Erweiterung $A \subseteq B$ eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur und A ist ein zyklischer treuer links B-Modul (hier wird A mit seinem Bild in $M(A)$ unter der Abbildung $a \mapsto L_a$ identifiziert). Ist A eine H-Modulalgebra, so kann man beispielsweise für B die von $M(A)$ und von der H-Wirkung erzeugte Unteralgebra von $\mathrm{End}_R(A)$ betrachten.

Definition 1.3.16. *Die* **H-Multiplikationsalgebra** *(oder* **erweiterte Multiplikationsalgebra***)* $M_H(A)$ *von* A *ist die von den* H*-Wirkungen und von den Links- sowie Rechtsmultiplikationen aufgespannte Unteralgebra von* $\mathrm{End}_R(A)$*, d.h.*

$$M_H(A) = \langle \{L_a, R_b, L_h \mid a, b \in A, h \in H\} \rangle \subseteq \mathrm{End}_R(A)$$

wobei $L_h \in \mathrm{End}_R(A)$ *die Abbildung* $L_h(a) = h \cdot a$ *bezeichnet.*

Bemerkung 1.3.17. *Hat* A *weitere Strukturen, z.B. Involution oder Graduierung, so kann auch die von diesen Wirkungen aufgespannte Unteralgebra betrachtet werden. Viele Ergebnisse gelten allgemein für solche Zwischenalgebren* $M(A) \subseteq B \subseteq \mathrm{End}_R(A)$*, weshalb wir gelegentlich diese größere Allgemeinheit wählen.*

Der nachfolgende Satz stellt $M_H(A)$ als Bild von Smash-Produkten dar.

Satz 1.3.18. *Sei* A *eine* H*-Modulalgebra und sei* $A^e := A \otimes A^{op}$*.*

1. *Sei* $\nu : H \otimes A^e \longrightarrow A^e \otimes H$ *definiert durch*

$$\nu(h \otimes a \otimes b) := \sum_{(h)} (h_1 \cdot a) \otimes (h_3 \cdot b) \otimes h_2.$$

   Dann ist $A^e \#_\nu H$ *ein Smash-Produkt.*

2. *Sei* $\sigma : A^{op} \otimes (A\#H) \longrightarrow (A\#H) \otimes A^{op}$ *definiert durch*

$$\sigma(b \otimes a\#h) := \sum_{(h)} a\#h_1 \otimes (S(h_2) \cdot b),$$

   dann ist $(A\#H)\#_\sigma A^{op}$ *ein Smash-Produkt.*

3. *Die beiden Smash-Produkte sind isomorphe Ringe durch*

$$\begin{array}{cccccc} \Psi & : & A^e\#_\nu H & \longrightarrow & (A\#H)\#_\sigma A^{op} \\ & & a \otimes x \otimes h & \mapsto & \sum_{(h)} a \otimes h_1 \otimes S(h_2) \cdot x \\ \Psi^{-1} & : & (A\#H)\#_\sigma A^{op} & \longrightarrow & A^e\#_\nu H \\ & & a \otimes h \otimes x & \mapsto & \sum_{(h)} a \otimes (h_2 \cdot x) \otimes h_1 \end{array}$$

   Ferner haben wir einen surjektiven Ringhomomorphismus:

$$\Phi : A^e\#_\nu H \longrightarrow M_H(A) \quad a \otimes b \otimes h \mapsto L_a \circ R_b \circ L_h$$

Beweis: Für $a, b \in A$ sei ab das Produkt in A, während $a \cdot^{op} b := ba$ das Produkt in A^{op} sei. Eigenschaft (i) von 1.3.6 ist offensichtlich in (1) und (2) erfüllt.
(1)Seien $a, b, x, y \in A$ und $h, g \in H$. Im Folgenden lassen wir das Summenzeichen in der Komultiplikation weg.

$$\begin{aligned}(1 \otimes \mu_H)(\nu \otimes 1)(1 \otimes \nu)(h \otimes g \otimes (a \otimes b)) &= (1 \otimes \mu_H)(\nu \otimes 1)(h \otimes (g_1 \cdot a \otimes g_3 \cdot b) \otimes g_2) \\ &= (1 \otimes \mu_H)((h_1 g_1 \cdot a) \otimes (h_3 g_3 \cdot b) \otimes h_2 \otimes g_2) \\ &= h_1 g_1 \cdot a \otimes h_3 g_3 \cdot b \otimes h_2 g_2 \\ &= \nu(\mu_H \otimes 1)(h \otimes g \otimes (a \otimes b)).\end{aligned}$$

Damit gilt $(1 \otimes \mu_H)(\nu \otimes 1)(1 \otimes \nu) = \nu(\mu_H \otimes 1)$, d.h. das linke Teildiagramm von 1.3.6(ii) kommutiert. Sei $\gamma_1 := (\mu_{A^e} \otimes 1)(1 \otimes \nu)(\nu \otimes 1)$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\gamma_1(h \otimes (x \otimes y) \otimes (a \otimes b)) &= (\mu_{A^e} \otimes 1)(1 \otimes \nu)((h_1 \cdot x \otimes h_3 \cdot y) \otimes h_2 \otimes (a \otimes b)) \\ &= (\mu_{A^e} \otimes 1)((h_1 \cdot x \otimes h_5 \cdot y) \otimes (h_2 \cdot a \otimes h_4 \cdot b) \otimes h_3) \\ &= (h_1 \cdot x)(h_2 \cdot a) \otimes (h_4 \cdot b)(h_5 \cdot y) \otimes h_3 \\ &= ((h_1 \cdot (xa)) \otimes (h_3 \cdot (by)) \otimes h_2) \\ &= \nu(1 \otimes \mu_{A^e})(h \otimes (x \otimes y) \otimes (a \otimes b)).\end{aligned}$$

Somit gilt $(\mu_{A^e} \otimes 1)(1 \otimes \nu)(\nu \otimes 1) = \nu(1 \otimes \mu_{A^e})$, d.h. das rechte Teildiagramm von 1.3.6(ii) kommutiert und $A^e \#_\nu H$ ist ein Smash-Produkt.

(2)Seien $a, b, x, y \in A$ und $h, g \in H$.

$$\begin{aligned}(1 \otimes \mu_{A^{op}})(\sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(x \otimes y \otimes a\#h) &= (1 \otimes \mu_{A^{op}})(\sigma \otimes 1)(x \otimes a\#h_1 \otimes S(h_2) \cdot y) \\ &= (1 \otimes \mu_{A^{op}})(a\#h_1 \otimes S(h_2) \cdot x \otimes S(h_3) \cdot y) \\ &= a\#h_1 \otimes (S(h_3) \cdot y)(S(h_2) \cdot x)) \\ &= a\#h_1 \otimes S(h_2)(yx) \\ &= \sigma(\mu_{A^{op}} \otimes 1)(x \otimes y \otimes a\#h).\end{aligned}$$

Damit gilt $(1 \otimes \mu_{A^{op}})(\sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma) = \sigma(\mu_{A^{op}} \otimes 1)$, d.h. das linke Teildiagramm von 1.3.6(ii) kommutiert. Sei $\gamma_2 := (\mu_{A\#H} \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(\sigma \otimes 1)$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\gamma_2(x \otimes a\#h \otimes b\#g) &= (\mu_{A\#H} \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(a\#h_1 \otimes S(h_2) \cdot x \otimes b\#g) \\ &= (\mu_{A\#H} \otimes 1)(a\#h_1 \otimes b\#g_1 \otimes S(g_2)S(h_2) \cdot x) \\ &= a(h_1 \cdot b)\#h_2 g_1 \otimes S(g_2)S(h_3) \cdot x \\ &= a(h_1 \cdot b)\#(h_2 g)_1 \otimes S((h_2 g)_2) \cdot x \\ &= \sigma(x \otimes a(h_1 \cdot b)\#h_2 g) \\ &= \sigma(1 \otimes \mu_{A\#H})(x \otimes a\#h \otimes b\#g).\end{aligned}$$

Somit gilt $(\mu_{A\#H} \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(\sigma \otimes 1) = \sigma(1 \otimes \mu_{A\#H})$, d.h. das rechte Teildiagramm von 1.3.6(ii) kommutiert. Somit ist $A\#H\#_\sigma A^{op}$ ein Smash-Produkt.

(3) Seien $a, b, x, y \in A$ und $h, g \in H$ dann gilt:

$$\begin{aligned}
\Psi((a \otimes x \otimes h)(b \otimes y \otimes g)) &= \Psi(a(h_1 \cdot b) \otimes (h_3 \cdot y)x \otimes h_2 g) \\
&= a(h_1 \cdot b) \otimes h_2 g_1 \otimes S(h_3 g_2) \cdot [(h_4 \cdot y)x] \\
&= [(a \otimes h_1)(b \otimes g_1)] \otimes S(g_2)[S(h_2) \cdot [(h_3 \cdot y)x]] \\
&= [(a \otimes h_1)(b \otimes g_1)] \otimes S(g_2)[y(S(h_2) \cdot x)] \\
&= [(a \otimes h_1)(b \otimes g_1)] \otimes [S(g_3) \cdot y][S(h_2 g_2) \cdot x] \\
&= [(a \otimes h_1)(b \otimes g_1)] \otimes [(S(h_2 g_2) \cdot x] \cdot^{op} [S(g_3) \cdot y] \\
&= [a \otimes h_1 \otimes S(h_2) \cdot x][b \otimes g_1 \otimes S(g_2) \cdot y] \\
&= \Psi(a \otimes x \otimes h)\Psi(b \otimes y \otimes g).
\end{aligned}$$

Somit ist Ψ ein Ringhomomorphismus. Da $\Psi\Psi^{-1} = id = \Psi^{-1}\Psi$ gilt, bestimmt Ψ einen Ringisomorphismus zwischen $A^e \#_\nu H$ und $(A\#H)\#_\sigma A^{op}$.

Wir haben wohl-definierte Abbildungen $L_{A^e} : A^e \longrightarrow \operatorname{End}_R(A)$, und $L_H : H \longrightarrow \operatorname{End}_R(A)$. Sei μ die Multiplikation von $\operatorname{End}_R(A)$, so ist $\Phi = \mu \circ (L_{A^e} \otimes L_H)$ wohl-definiert. Nach Definition ist $\operatorname{Im}(\Phi) = M_H(A)$ und Φ damit surjektiv. Um zu zeigen, daß Φ ein Ringhomomorphismus ist beachte, daß für alle $h \in H, a, b, x \in A$

$$h \cdot (axb) = \sum_{(h)} (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot x)(h_3 \cdot b)$$

gilt und damit auch

$$L_h \circ L_a \circ R_b = \sum_{(h)} L_{h_1 \cdot a} \circ R_{h_3 \cdot b} \circ L_{h_2}.$$

Nach Definition der Multiplikation in $A^e \#_\nu H$ folgt daraus, daß Φ ein Ringhomomorphismus ist. ■

Proposition 1.3.19. *Sei A eine links H-Modulalgebra. Dann gilt:*

(1) Die $M_H(A)$-Untermoduln von A sind genau die H-stabilen Ideale von A.

(2) $\operatorname{End}_{M_H(A)}(A) \simeq Z(A) \cap A^H =: Z(A)^H$.

(3) Ist A kommutativ, dann ist $A\#H \longrightarrow M_H(A)$ mit $a\#h \mapsto L_a \circ L_h$ ein surjektiver Ringhomomorphismus mit Kern $\operatorname{Ann}_{A\#H}(A)$.

(4) Ist H kokommutativ, dann ist A^e eine links H-Modulalgebra. Das in 1.3.18 definierte Smash-Produkt $A^e \#_\nu H$ von A^e und H bzgl. ν ist dann identisch mit dem Smash-Produkt $A^e \# H$ von A^e und H, wie es in 1.3.11 eingeführt worden ist.

Beweis: (1) Dies gilt nach Definition.
(2) Da $A \subseteq M_H(A)$ eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur ist, gilt nach 1.1.3 $\operatorname{End}_{M_H(A)}(A) \simeq A^B$, wobei $B := M_H(A)$. Nach Definition ist

$$A^B = \{x \in A \mid \forall F \in M_H(A) \forall a \in A : F(ax) = F(a)x\}.$$

Sei $x \in A^B$, dann gilt für alle $h \in H$:

$$h \cdot x = L_h(x) = L_h(1_A)x = (h \cdot 1_A)x = \varepsilon(h)x,$$

d.h. $x \in A^H$. Ferner gilt für alle $a \in A$:

$$xa = R_a(x) = (R_a \cdot 1_A)x = ax,$$

d.h. $x \in Z(A)$. Andererseits sei $x \in Z(A)^H$, dann gilt für alle $a \in A$ und $h \in H$:

$$L_h(ax) = h \cdot (ax) = \sum_{(h)} (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot x) = (h \cdot a)x = L_h(a)x$$

und für $b \in A$:

$$R_b(ax) = axb = abx = R_b(a)x.$$

Damit und mit $L_b(ax) = bax = L_b(a)x$ ist $x \in A^B$.
(3) Ist A kommutativ, dann wird $M_H(A)$ von $\{L_a, L_h | a \in A, h \in H\}$ erzeugt.
(4) A^e ist stets ein links H-Modul durch die in 1.2.9 eingeführte diagonale links H-Modulstruktur. Sei $\Delta^{op} = \tau\Delta$ Angenommen H ist kokommutativ. Aus $\Delta = \Delta^{op}$ und der Koassoziativität von Δ folgt

$$(\Delta \otimes \Delta)\Delta = (1 \otimes \Delta \otimes 1)(1 \otimes \Delta^{op})\Delta.$$

In der Sweedler-Notation bedeutet dies gerade für ein $h \in H$:

$$\sum_{(h)} h_1 \otimes h_2 \otimes h_3 \otimes h_4 = \sum_{(h)} h_1 \otimes h_3 \otimes h_4 \otimes h_2.$$

Seien $a \otimes x, b \otimes y \in A^e$ und $h \in H$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
h \cdot ((a \otimes x)(b \otimes y)) &= h \cdot (ab \otimes yx) \\
&= \sum_{(h)} h_1 \cdot (ab) \otimes h_2 \cdot (yx) \\
&= \sum_{(h)} (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b) \otimes (h_3 \cdot y)(h_4 \cdot x) \\
&= \sum_{(h)} (h_1 \cdot a)(h_3 \cdot b) \otimes (h_4 \cdot y)(h_2 \cdot x) \\
&= \sum_{(h)} [(h_1 \cdot a) \otimes (h_2 \cdot x)][(h_3 \cdot b) \otimes (h_4 \cdot y)] \\
&= \sum_{(h)} [h_1 \cdot (a \otimes x)][h_2 \cdot (b \otimes y)]
\end{aligned}$$

Ferner gilt $h \cdot (1 \otimes 1) = \varepsilon(h)(1 \otimes 1)$, so daß A^e eine links H-Modulalgebra ist. Betrachten wir ν aus 1.3.18. Da H kokommutativ ist, gilt für alle $h \in H$ und $a, x \in A$:

$$\nu(h \otimes (a \otimes x)) = \sum_{(h)} (h_1 \cdot a) \otimes (h_3 \cdot x) \otimes h_2 = \sum_{(h)} [h_1 \cdot (a \otimes x)] \otimes h_2.$$

Damit stimmt diese Abbildung ν mit der in 1.3.11(1) definierten Abbildung überein, d.h. $A^e \#_\nu H = A^e \# H$. ■

Kapitel 2

Integrale in Hopfalgebren

In diesem Kapitel werden Integrale von Hopfalgebren untersucht. Es stellt sich heraus, daß die Existenz nicht-trivialer Integrale eine Endlichkeitsbedingungen darstellt. Wir behandeln die Frage nach der Existenz von nicht-trivialen Homomorphismen zwischen einer Modulalgebra und ihrem Smash-Produkt. Insbesondere finden wir Kriterien für die Separabilität des Smash-Produktes und leiten schließlich eine Kennzeichnung von separablen Hopfalgebren daraus ab.

2.1 Integrale als Endlichkeitsbedingungen

Sei H eine R-Bialgebra mit Koeinheit ϵ. Dann bezeichnet man die Elemente von $H_\epsilon =: \int_l$ als **Links-Integrale**. Betrachtet man R durch ε als rechts H-Modul, so bezeichnet man die Elemente $H_\epsilon =: \int_r$ als Rechts-Integrale von H. Aus 1.1.7 folgt, daß eine nicht-triviale prime (z.B. nullteilerfreie) R-Hopfalgebra H keine nicht-trivialen Links- oder Rechts-Integrale enthält. Wir werden zuerst der Frage nach der Existenz nicht-trivialer Integrale nachgehen. Als "Fallstudie" stellen wir einen Satz über Integrale in einem Halbgruppenring voran.

Satz 2.1.1. *Sei R ein kommutativer Ring und H ein Monoid. Dann besitzt die Bialgebra $R[H]$ genau dann von Null verschiedene Links-(bzw. Rechts-)Integrale, wenn es eine endliche nicht-leere Teilmenge $X \subseteq H$ gibt mit $hX = X$ (bzw. $Xh = X$) für alle $h \in H$.*

Beweis: Angenommen $R[H]$ besitzt ein nicht-triviales Links-Integral $0 \neq t = \sum_{h\in H} r_h h$. Setze $X := \{h \in H \mid r_h \neq 0\}$. Dann ist X eine endliche Menge. Für alle $g \in H$ gilt $\varepsilon(g) = 1$. Somit folgt $gt = \varepsilon(g)t = t$, d.h.

$$\sum_{k\in X} r_k gk = gt = t = \sum_{h\in X} r_h h$$

Da die Elemente aus H eine multiplikativ abgeschlossene Basis von $R[H]$ bilden, erhalten wir durch Koeffizientenvergleich für alle $h \in H$:

$$r_h = \sum_{k \in X, gk = h} r_k.$$

Da r_h von Null verschieden ist, gibt es also (mindestens) ein $k \in X$ mit $gk = h$, d.h. $X \subseteq gX$. Andererseits gilt $|X| \geq |gX|$ und somit gilt $X = gX$.
Sei andererseits eine endliche Teilmenge X gegeben mit $gX = X$ für alle $g \in H$, dann ist $t := \sum_{h \in X} h$ ein Links-Integral, denn alle $g \in H$ bewirken eine Permutation der Elemente von X, so daß $gt = t$ gilt. ■

Eine Halbgruppe H heißt **links kürzbar**, falls $xy = xz$ schon $y = z$ impliziert für alle $x, y, z \in H$.

Folgerung 2.1.2. *Ist H ein links kürzbares Monoid und ist R ein kommutativer Ring, dann besitzt $R[H]$ genau dann ein nicht-triviales Links-Integral, wenn H eine endliche Gruppe ist.*

Beweis: Sei e das neutrale Element von H. Angenommen $R[H]$ besitzt ein nicht-triviales Links-Integral, dann gibt es nach Satz 2.1.1 eine endliche Teilmenge X, so daß $hX = X$ für alle $h \in H$ gilt. Insbesondere gibt es zu jedem $h \in X$ ein $g \in X$ mit $hg = h$. Damit gilt aber auch $hg = he$, so daß $g = e$ folgt, denn H war als links kürzbar vorausgesetzt. Damit ist e in X und somit auch jedes Element $g \in H$ in X enthalten. Denn es gilt $g = ge \in gX = X$. Dies bedeutet, daß $H = X$ endlich ist. Ein endliches links kürzbares Monoid ist aber eine Gruppe, denn aus der Kürzungseigenschaft und der Endlichkeit des Monoids gibt es für jedes Element $g \in H$ eine Zahl $n \geq 1$, so daß $g^n = e$ gilt. Damit ist g^{n-1} ein Inverses zu g.
Ist H eine endliche Gruppe, dann kann man $X := H$ setzen und erhält die Existenz eines nicht-trivialen Links-Integrals mit Satz 2.1.1. ■

Bemerkung 2.1.3. *Für ein beliebiges Monoid H mit links Nullelement, d.h. einem Element $0 \in H$ mit $h0 = 0$ für alle $h \in H$ kann man $X := \{0\}$ in 2.1.1 setzten unabhängig ob H endlich oder unendlich ist. Aus Folgerung 2.1.2 sieht man dagegen, daß Gruppen schon endlich sein müssen, wenn ihr Gruppenring ein nicht-triviales Links-Integral enthält. Wir werden sehen, daß jede projektive Hopfalgebra über einem Integritätsbereich schon endlich erzeugt sein muß, wenn sie ein nicht-triviales Links-Integral enthält.*

Zuerst vermerken wir, daß endlich erzeugte, projektive Hopfalgebren stets nicht-triviale Integrale besitzen.

Definition 2.1.4 ([Par73, Definition 3.1]). *Sei I ein R-Progenerator eines kommutativen Ringes R. Eine R-Algebra A heißt* **I-Frobenius Erweiterung** *von R, wenn A als R-Modul endlich erzeugt und projektiv und wenn es einen Isomorphismus $A \simeq \mathrm{Hom}_R(A, I)$ von links A-Moduln gibt. Für $I = R$ spricht man einfach von* **Frobenius Erweiterungen**.

Für eine R-Hopfalgebra H, die endlich erzeugt und projektiv als R-Modul ist, ist H^* ebenfalls eine R-Hopfalgebra (siehe [Par71]). Wir bezeichnen die Integrale von H^* mit $\int_{H^*}^{l}$ bzw. $\int_{H^*}^{r}$.

Satz 2.1.5. *Sei H eine Hopfalgebra, die als R-Modul endlich erzeugt und projektiv ist. Dann besitzt H nicht-triviale Links- und Rechts-Integrale und H ist eine I^*-Frobenius Algebra mit $I = \int_l$. Ferner gilt $\int_l \simeq \int_r \simeq \int_{H^*}^{l} \simeq \int_{H^*}^{r}$. Ist die Picardgruppe von R trivial, so ist H eine Frobenius Algebra und $I \simeq R$.*

Beweis: Nach [Par73, Satz 2.13] ist $I \simeq (H^*)^{coH}$, nach [Par73, Satz 3.12] ist $(H^*)^{coH}$ ein R-Progenerator und nach [Par73, Satz 3.13] ist H eine I^*-Frobenius Erweiterung von R. Die Isomorphie der Integralräume wurde in [CDM01, Cor.3.5] gezeigt. Ist die Picardgruppe trivial so folgt die letzte Behauptung aus [Par71]. ■

Bemerkung 2.1.6. *Satz 2.1.5 gilt nicht mehr für endlich dimensionale Bialgebren. Wie in 2.1.1 gezeigt, besitzt ein Halbgruppenring $k[H]$ eines Monoids H über einem Körper k genau dann ein nicht-triviales Links-Integral, wenn H eine endliche Menge X enthält mit $hX = X$ für alle $h \in H$. Ist H ein links einfaches Monoid, d.h. H ist das einzige Linksideal von H, und ist H keine Gruppe, dann kann es eine solche Menge X nicht geben. Einfache Halbgruppen lassen sich leicht konstruieren (siehe [How95, Theorem 3.3.1]). Als Beispiel nehme man das Monoid $H = \{e, x, y\}$ mit folgender Multiplikationstabelle:*

$\cdot$	e	x	y
e	e	x	y
x	x	x	x
y	y	y	y

Dann gibt es keine nicht-leere Teilmenge $X \subseteq H$ mit $hX = X$ für alle $h \in H$. Ist k ein beliebiger Körper, so ist $k[H]$ eine 3-dimensionale Bialgebra ohne Links-Integrale.

Wir zitieren eine Beobachtung von M.E.Sweedler

Satz 2.1.7. *Eine Hopfalgebra H über einem Körper k, die ein nicht-triviales endlich dimensionales Links- oder Rechtsideal enthält ist endlich dimensional. Dies ist insbesondere der Fall, wenn H ein nicht-triviales Links- oder Rechts-Integral besitzt.*

Beweis: Die erste Aussage folgt aus [Swe69b, 2.7]. Das von einem Links-Integral $0 \neq t \in \int_l$ erzeugte Ideal $Ht = Rt$ ist zyklisch. ■

Wir verallgemeinern Sweedler's Beobachtung auf Hopfalgebren, die projektiv als Modul über einem Integritätsbereich sind. Zuerst ein wichtiges und vielleicht bekanntes Lemma:

Lemma 2.1.8. *Über einem Integritätsbereich ist jeder projektive Modul mit endlicher Goldie Dimension endlich erzeugt.*

Beweis: Sei R ein Integritätsbereich, Q sein Quotientenkörper und M ein projektiver R-Modul mit endlicher Goldie Dimension n. Dann gilt $n = dim_Q(M \otimes Q)$. Sei p ein Primideal von R und sei R_p die Lokalisierung von R nach p. Da R ein Integritätsbereich ist, gilt $R \subseteq R_p \subseteq Q$ und damit:

$$M \otimes_R Q \simeq (M \otimes_R R_p) \otimes_{R_p} Q = M_p \otimes_{R_p} Q.$$

Da M projektiv und R_p lokal ist, ist M_p frei. Somit gibt es eine Indexmenge Λ mit $M_p \simeq R_p^{(\Lambda)}$ als R_p-Modul und es folgt

$$M \otimes_R Q \simeq R_p^{(\Lambda)} \otimes_{R_p} Q \simeq Q^{(\Lambda)}$$

als Q-Modul. Aus $dim_Q(M \otimes Q) = n$ folgt $|\Lambda| = n$. Somit hat M lokal konstanten Rang n und nach einem Satz von Vasconcelos [Vas69, Proposition 1.3] ist M endlich erzeugt. ■

Proposition 2.1.9. *Sei H eine projektive R-Hopfalgebra mit nicht-trivialem Links- oder Rechts-Integral t in H. Dann ist ${}_RH$ in jedem der folgenden Fälle endlich erzeugt:*

(1) R ist ein Integritätsbereich.

(2) $\varepsilon(t)$ ist kein Nullteiler in R und R ist noethersch.

(3) Die zu t assoziierte Abbildung $\varphi \in \mathrm{Hom}_H(R, H)$ ist injektiv und

(i) R ist ein endliches Produkt von Integritätsbereichen oder

(ii) R ist ein selbst-injektiver semiperfekter Ring.

Beweis: (1) Sei $t \in \int_l$ ein Integral und $\varphi : R \longrightarrow H$ die dazugehörige H-lineare Abbildung. Da H projektiv ist als R-Modul, ist H torsionsfrei und somit φ injektiv. Damit ist aber auch $\overline{\varphi} := \varphi \otimes 1 : Q \simeq R \otimes_R Q \longrightarrow H \otimes_R Q$ injektiv. $H \otimes Q$ ist eine Q-Hopfalgebra und $\overline{\varphi}$ eine nicht-triviale $H \otimes Q$-lineare Abbildung. Nach Sweedler's Beobachtung 2.1.7 ist $H \otimes Q$ endlich dimensionaler Q-Vektorraum, d.h. ${}_RH$ hat endliche uniforme Dimension. Nach obigem Lemma ist H endlich erzeugt.
(2) Nach Voraussetzung ist H und somit auch H^{op} ein projektiver R-Modul. Sei $\{f_i, e_i\}_{i \in I}$ eine duale Basis von H^{op} mit $f_i \in \mathrm{Hom}_R(H^{op}, R)$ und $e_i \in H^{op}$, so daß alle $h \in H$ in der Form

$$h = \sum_{i \in I} (h) f_i e_i$$

geschrieben werden können, wobei nur endlich viele der Elemente $(h)f_i$ ungleich Null sind. Sei $H^e := H \otimes H^{op}$. Mittels des Isomorphismuses $H \otimes R \simeq H$, können wir $1_H \otimes f_i$ als ein Element in $\mathrm{Hom}_{H-}(H^e, H)$ betrachten. Dadurch wird H^e zu einem projektiven links H-Modul mit dualer Basis $\{1_H \otimes f_i, 1 \otimes e_i\}_{i \in I}$, d.h. für alle $u \in H^e$ gilt:

$$u = \sum_{i \in I} (u)(1_H \otimes f_i) \cdot (1 \otimes e_i),$$

wobei nur endlich viele der Elemente $(u)(1_H \otimes f_i)$ ungleich Null sind. Sei nun $u := \sum_{(t)} S(t_1) \otimes t_2 \in H^e$. Wie wir in 2.4.1 sehen werden ist u ein H-zentrierendes Element in H^e, d.h. es gilt

$$(h \otimes 1)u = \sum_{(t)} hS(t_1) \otimes t_2 = \sum_{(t)} S(t_1) \otimes t_2 h = (1 \otimes h)u$$

für alle $h \in H$. Dann gilt folgende Identität in H:

$$[(1 \otimes h)u](1_H \otimes f_i) = [(h \otimes 1)u](1_H \otimes f_i) = h[u](1_H \otimes f_i),$$

d.h. ist $[u](1_H \otimes f_i) = 0$, so muß auch $[(1 \otimes h)u](1_H \otimes f_i) = 0$ gelten. Sei

$$J := \{i \in I \mid [u](1_H \otimes f_i) \neq 0\}$$

Dann ist J endlich und jeder Index $i \in I$, für den $[(1 \otimes h)u](1_H \otimes f_i)$ ungleich Null ist, ist schon in J enthalten. Bezeichne $\mu : H^e \longrightarrow H$ die Multiplikation, dann erhalten wir für alle $h \in H$:

$$\begin{aligned} h\varepsilon(t) = \mu((h \otimes 1)u) &= \mu\left(\sum_{i \in I} [(1 \otimes h)u](1 \otimes f_i) \cdot (1 \otimes e_i)\right) \\ &= \mu\left(\sum_{(t)} \sum_{i \in J} S(t_1) \otimes e_i(t_2 h) f_i\right) \\ &= \sum_{(t)} \sum_{i \in J} (t_2 h) f_i S(t_1) e_i. \end{aligned}$$

Damit ist $\varepsilon(t)H$ in dem endlich erzeugten Untermodul $\sum_{(t)} \sum_{i \in J} RS(t_1)e_i$ enthalten. Ist R noethersch, dann ist auch $\varepsilon(t)H$ als R-Modul endlich erzeugt. Da $\varepsilon(t)$ kein Nullteiler in R und H in einem freien R-Modul enthalten ist, ist die Abbildung $h \mapsto \varepsilon(t)h$ ein R-Isomorphismus zwischen H und $\varepsilon(t)H$, d.h. H ist endlich erzeugt.

(3) Besitzt R eine Zerlegung $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ mit Ringen R_i, so kann auch H in ein Produkt $H = H_1 \times \cdots \times H_n$ mit R_i-Hopfalgebren H_i zerlegt werden. Ebenso läßt sich die Abbildung φ in injektive Abbildungen $\varphi_i : R_i \longrightarrow H_i$ zerlegen. Damit folgt (3.i) aus (1).

(3.ii) Nach obiger Zerlegung kann man ohne Einschränkung R als lokal und selbst-injektiv annehmen. Da R injektiv ist, ist $R \simeq \mathrm{Im}\,(\varphi)$ ein direkter Summand von H als R-Modul und daher $\mathrm{Im}\,(\varphi) \not\subseteq \mathrm{Rad}\,(H) = JH$, wobei $J =$

Jac (R). Sei $\bar{H} := H/JH \simeq H \otimes_R R/J$. Dann ist $\bar{H}$ eine R/J-Hopfalgebra und φ kann zu einer Abbildung $0 \neq \overline{\varphi} : R/J \longrightarrow \bar{H}$. hochgehoben werden. Nun ist aber R/J ein Körper und $\overline{\varphi}(1)$ ein nicht-triviales Integral, d.h. $\bar{H}$ ist endlich dimensional über R/J nach 2.1.7. Ein Satz von Lazard ([Laz74, Proposition 5]) besagt, daß ein projektiver R-Modul H über einem kommutativen Ring R endlich erzeugt ist, falls H/JH endlich erzeugt ist. In unserem Fall ist H/JH endlich dimensional über R/J, d.h. H/JH ist auch endlich erzeugt als R-Modul. Nach Lazards Satz muß somit H als R-Modul endlich erzeugt sein. ■

Über noetherschen Integritätsbereichen erhält man auch Sweedlers Beobachtung bezüglich endlich erzeugter Linksideale.

Proposition 2.1.10. *Sei R ein noetherscher Integritätsbereich und H eine R-Hopfalgebra mit ${}_RH$ projektiv. Besitzt H ein, als R-Modul, endlich erzeugtes, nicht-triviales Links- oder Rechtsideal I, so ist H als R-Modul endlich erzeugt. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn H ein nicht-triviales Links- oder Rechts-Integral hat.*

Beweis: Sei $0 \neq L \subseteq H$ ein, als R-Modul, endlich erzeugtes Linksideal von H. Dann ist $M := L \leftharpoonup H^*$ ein, als R-Modul, endlich erzeugter links H-Hopfmodul (siehe [Swe69b, Seite 107 Ex.(3)]). Nach Folgerung 1.2.6 wissen wir, daß es ein Ideal I von R gibt mit $M = HI$. Sei $0 \neq x \in I$ ein beliebiges Element, dann ist die Abbildung $h \mapsto hx$ von H nach M eine injektive R-lineare Abbildung, denn da R ein Integritätsbereich ist und da H ein projektiver R-Modul ist, ist H torsionsfrei. Somit ist H isomorph zu einem R-Untermodul des endlich erzeugten Moduls M und muß damit selber endlich erzeugt sein, da R noethersch vorausgesetzt war. ■

Bemerkung 2.1.11. *Wie nach 2.1.1 bemerkt, gelten Aussagen 2.1.7, 2.1.9 und 2.1.10 nicht mehr für Bialgebren. Denn ist k ein beliebiger Körper und H ein Monoid mit Nullelement N, z.B. $H = (K, \cdot)$ die multiplikative Halbgruppe eines Körpers K inklusive der Null, dann besitzt $k[H]$ ein nicht-triviales Links- und Rechts-Integral, nämlich $t = N$, aber $k[H]$ ist genau dann endlich-dimensional, wenn H endlich ist.*

Im Allgemeinen gelten Aussagen 2.1.9 und 2.1.10 nicht mehr für beliebige Hopfalgebren:

Proposition 2.1.12. *Sei R ein kommutativer Ring, $R[X]$ der Polynomring über R und $I :=< aX >$ das von aX erzeugte Ideal in $R[X]$ für ein Element $0 \neq a \in R$. Dann ist $H := R[X]/I$ eine kommutative, kokommutative R-Hopfalgebra mit Integral $0 \neq \overline{a} \in H$, wobei $\overline{a} = (a + I)/I$ das Bild von a unter der Projektion $R[X] \longrightarrow H$ bezeichnet.*

(1) $_RH$ ist genau dann endlich erzeugt, wenn a in R invertierbar ist.

(2) $_RH$ ist genau dann projektiv, wenn Ra von einem Idempotent erzeugt wird.

Beweis: Aus 1.2.7 folgt, daß $R[X]$ eine R-Hopfalgebra ist mit $\Delta(X) = 1 \otimes X + X \otimes 1$, $\varepsilon(X) = 0$ und $S(X) = -X$. Ferner ist $I :=< aX >$ ein Hopfideal, denn es gilt

$$\Delta(I) \subseteq H \otimes I + I \otimes H, \varepsilon(I) = 0 \text{ und } S(I) = I.$$

Damit ist $H := R[X]/I$ eine R-Hopfalgebra. Sei $\overline{} : R[X] \longrightarrow H$ die Projektion. Wir bezeichnen mit $\overline{\Delta}, \overline{\varepsilon}$ und $\overline{S}$ die induzierten hopfalgebraischen Strukturen von H. Sei $f(X) \in R[X]$. Dann gibt es ein $b_0 \in R$ und ein $g(X) \in R[X]$ mit $f(X) = b_0 + Xg(X)$ und es gilt

$$f(X)a - \varepsilon(f(X))a = f(X)a - b_0 a = aXg(X) \in I,$$

d.h. $\overline{f(X)}\overline{a} = \overline{\varepsilon}(\overline{f(X)})\overline{a}$. Somit ist $\overline{a}$ ein Integral in H.
(1) Als R-Modul gilt $_RH \simeq R \oplus (R/Ra)^{(\mathbb{N})}$. Somit ist $_RH$ genau dann endlich erzeugt, wenn $R/Ra = 0$, d.h. wenn a in R invertierbar ist.
(2) $_RH$ ist genau dann projektiv, wenn R/Ra projektiv ist oder äquivalent, wenn Ra direkter Summand von R ist, d.h. wenn Ra von einem Idempotent erzeugt wird. ■

Als Folgerung erhalten wir:

Folgerung 2.1.13. *Zu jedem kommutativen Ring R, der ein Idempotent ungleich 0 und 1 zuläßt, gibt es eine projektive R-Hopfalgebra H, die ein nichttriviales Links-Integral besitzt, aber die nicht endlich erzeugt als R-Modul ist.*

Beweis: Hat R ein Idempotent $e \notin \{0,1\}$, dann wähle $a = e$ in obiger Propositon 2.1.12 und $H = R[X]/ < eX >$ ist eine projektive nicht-endlich erzeugte R-Hopfalgebra mit nicht-trivialem Integral $\overline{e}$. ■

Abschließend wollen wir noch untersuchen, wie sich Integrale auf Kogeneratoreigenschaften von H in H-Mod auswirken. Seien M, N R-Moduln so heiße N **stark koerzeugt** von M, wenn N in eine direkte Summe von M einbettet.

Proposition 2.1.14. *Sei H eine flache R-Hopfalgebra, so daß R von H als links H-Modul stark koerzeugt wird. Dann werden auch alle links H-Moduln von H stark koerzeugt, welche als R-Modul flach und isomorph zu einem Untermodul eines freien R-Moduls sind.*

Beweis: Sei $\varphi : R \longrightarrow H^{(\Lambda)}$ eine injektive H-lineare Abbildung für eine Indexmenge Λ. Sei M ein, als R-Modul flacher, links H-Modul. Angenommen es gibt eine Einbettung $i : M \hookrightarrow R^{(\Omega)}$. Dann wird $H \otimes M$ zu einem links H-Modul durch die diagonale H-Struktur. Aus 1.2.9 folgt, daß $H \otimes M \simeq \langle H \otimes M \rangle$ als links H-Modul gilt, wobei $\langle H \otimes M\rangle$ den links H-Modul mit rechts trivialer H-Struktur bezeichnet. Da ${}_RM$ flach ist, ist

$$0 \longrightarrow R \otimes M \xrightarrow{\varphi \otimes 1} H^{(\Lambda)} \otimes M \simeq (H \otimes M)^{(\Lambda)} \simeq \langle H \otimes M\rangle^{(\Lambda)}$$

exakt in H-Mod. Da ${}_RH$ flach ist, folgt

$$0 \longrightarrow \langle H \otimes M\rangle \xrightarrow{1 \otimes i} \langle H \otimes R^{(\Omega)}\rangle \simeq H^{(\Omega)}$$

Damit gilt $M \simeq R \otimes M \hookrightarrow H^{(\Lambda \times \Omega)}$ in H-Mod, d.h. M wird von H als H-Modul stark koerzeugt. ■

Folgerung 2.1.15. *Sei R ein QF Ring und H eine projektive R-Hopfalgebra. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Jeder als R-Modul projektive links H-Modul wird von H als H-Modul koerzeugt.

(b) H koerzeugt R als H-Modul.

(c) es gibt eine injektive H-lineare Abbildung $\varphi : R \longrightarrow H$.

(d) H ist endlich erzeugt als R-Modul.

(e) H ist eine Frobenius R-Algebra.

Insbesondere gilt: Ist R halbeinfach, so ist ${}_RH$ genau dann endlich erzeugt, wenn H ein Kogenerator in H-Mod ist.

Beweis: Jeder QF Ring R hat eine Zerlegung $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ mit lokalen QF Ringen R_i. Somit gibt es auch eine Zerlegung $H = H_1 \times \cdots \times H_n$ mit projektiven R_i-Hopfalgebren H_i.
$(a) \Rightarrow (b)$ ist trivial;
$(b) \Rightarrow (c)$ Wird R von H als H-Modul koerzeugt, so wird auch jede Komponente R_i von H_i als H_i-Modul koerzeugt. Da R_i ein lokaler QF Ring ist und somit einen wesentlichen einfachen Sockel besitzt, ist R_i ein kozyklischer R-Modul und somit auch als H-Modul kozyklisch. Damit gibt es eine injektive H_i-lineare Abbildungen $\varphi_i : R_i \longrightarrow H_i$. Die Zusammensetzung $\varphi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : R \longrightarrow H$ ist eine injektive H-lineare Abbildung.
$(c) \Rightarrow (a)$ folgt aus 2.1.14.
$(c) \Leftrightarrow (d)$ Es gibt genau dann eine injektive H-lineare Abbildung $\varphi : R \longrightarrow H$, wenn es injektive H_i-lineare Abbildungen $\varphi_i : R_i \longrightarrow H_i$ gibt. Nach 2.1.9 impliziert die Existenz einer injektiven H_i-linearen Abbildung $\varphi_i : R_i \longrightarrow H_i$ schon, daß H_i ein endlich erzeugter R_i-Modul. Falls andererseits H_i über R_i endlich erzeugt ist, dann folgt aus 2.1.5, daß es ein nicht-triviales Links-Integral $t_i \in H_i$ gibt. Da die Picardgruppe von R_i trivial ist, ist $\int_{H_i}^{l} \simeq R_i$ (siehe [Par71]) und

man kann $\mathrm{Ann}_{R_i}(t_i) = 0$ annehmen. Somit ist die zu t_i gehörige Abbildung $\varphi_i : R_i \longrightarrow H_i$ injektiv. Folglich gilt: ${}_RH$ ist endlich erzeugt genau dann, wenn es eine injektive H-lineare Abbildung $\varphi : R \longrightarrow H$ gibt.
$(e) \Rightarrow (d)$ ist trivial, denn nach Definition sind Frobenius Algebren endlich erzeugt (siehe 2.1.4).
$(d) \Rightarrow (e)$ Pareigis zeigt in [Par71], daß jede als R-Modul endlich erzeugte projektive R-Hopfalgebra über einem Ring mit trivialer Picardgruppe eine Frobenius Algebra ist. Die Picardgruppe eines QF-Ringes ist trivial und nach Annahme ist H als R-Modul endlich erzeugt und projektiv. Somit folgt (e) aus [Par71]. ■

2.2 Homomorphismen zwischen einer Modulalgebra und ihrem Smash-Produkt

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, kann die Existenz nicht-trivialer Integrale in einer R-Hopfalgebra H als Endlichkeitsbedingung für H als R-Modul angesehen werden. Integrale stehen in Bijektion zu H-linearen Abbildungen von R nach H. Wir werden sehen, daß auch die Existenz nicht-trivialer Homomorphismen zwischen einer links H-Modulalgebra A und $A\#H$ eine Endlichkeitsbedingung für H sein kann.

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einem Beispiel. Sei G ein Monoid, dessen Elemente wie R-Algebrenhomomorphismen auf eine R-Algebra A wirken. Auf dem A-Modul $A^{(G)}$ definieren wir eine Multiplikation durch $(a * h)(b * g) := ab^h * hg$ für alle $a, b \in A$ und $g, h \in G$, wobei ein Element aus $A^{(G)}$ in der Form $\sum_{g \in G} a * g$ geschrieben wird. Die neu entstandene R-Algebra heißt der **Schief-Halbgruppenring** von A und G, und wir bezeichnen ihn mit $A * G$. A ist ein links $A * G$-Modul durch $(a * g)x = ax^g$ und man prüft leicht nach, daß $A \subseteq A * G$ wieder eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur ist. Man kann $A * G$ auch als Smash-Produkt der Algebra A und der Bialgebra $R[G]$ verstehen.

Lemma 2.2.1. *Sei G ein Monoid, dessen Elemente wie R-Algebrenhomomorphismen auf eine R-Algebra A wirken. Dann gibt es genau dann einen nicht-trivialen $A * G$-Homomorphismus $\varphi : A \longrightarrow A * G$, wenn die Bialgebra $R[G]$ ein Links-Integral enthält. Falls G eine Gruppe ist, muß G in diesem Fall schon endlich sein.*

Beweis: Der Beweis läuft analog zu 2.1.1. ■

Wir brauchen zunächst folgendes Lemma:

Lemma 2.2.2. *Sei H eine R-Hopfalgebra und sei P ein links H-Modul, der projektiv als R-Modul ist. Dann gilt $\langle H \otimes P \rangle^H = \int_l \otimes P$.*

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es einen Indexmenge Λ und einen zerfallenden Epimorphismus $\pi : R^{(\Lambda)} \longrightarrow P$. Die Abbildung

$$1 \otimes \pi : \langle H \otimes R^{(\Lambda)} \rangle \longrightarrow \langle H \otimes P \rangle$$

ist ein zerfallender links H-Modulhomomorphismus und induziert eine zerfallende R-lineare Abbildung

$$p : \mathrm{Hom}_H\,(R, \langle H \otimes R^{(\Lambda)} \rangle) \longrightarrow \mathrm{Hom}_H\,(R, \langle H \otimes P \rangle).$$

Betrachte folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_H\,(R, \langle H \otimes P \rangle) \arrow[r, hook, "p"] \arrow[d, "\varphi_1"] & \mathrm{Hom}_H\,(R, \langle H \otimes R^{(\Lambda)} \rangle) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\varphi_2"] & \mathrm{Hom}_H\,(R, H)^{(\Lambda)} \arrow[d, "\varphi_3"] \\
\langle H \otimes P \rangle \arrow[r, hook, "1\otimes\pi"] & \langle H \otimes R^{(\Lambda)} \rangle \arrow[r, "\simeq"] & H^{(\Lambda)}
\end{tikzcd}$$

Wobei φ_1, φ_2 und φ_3 die Auswertungshomomorphismen sind, die die entsprechenden Homomorphismen am Element 1_R auswerten. Die Bilder der φ_i entsprechen gerade den Untermoduln der H-invarianten Elemente (siehe 1.1.7). Nun gilt

$$\mathrm{Im}\,(\varphi_3) = \langle H^{(\Lambda)} \rangle^H = \int_l^{(\Lambda)} = \int_l H^{(\Lambda)}$$

und somit folgt

$$\langle H \otimes R^{(\Lambda)} \rangle^H = \mathrm{Im}\,(\varphi_2) = \int_l \otimes R^{(\Lambda)}.$$

Schließlich gilt

$$\langle H \otimes P \rangle^H = \mathrm{Im}\,(p\varphi_1) = \mathrm{Im}\,(\varphi_2(1 \otimes \pi)) = \left(\int_l \otimes R^{(\Lambda)} \right) (1 \otimes \pi) = \int_l \otimes P.$$

■

Sei A eine H-Modulalgebra und $\alpha : A\#H \longrightarrow A$ die Projektion gegeben durch $a\#h \longmapsto a\varepsilon(h)$.

Proposition 2.2.3. *Sei H eine R-Hopfalgebra und A eine H-Modulalgebra. Dann gilt*

$$\mathrm{Hom}_{A\#H}\,(A, A\#H) \simeq (A\#H)^H = r.ann_{A\#H}(\mathrm{Ker}\,(\alpha)).$$

Angenommen die Antipode von H ist bijektiv und $_RA$ ist projektiv, dann gilt

$$(A\#H)^H = \left(1\# \int_l \right) (A\#1)\,.$$

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus 1.1.3, da $A \subseteq A\#H$ eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur ist. Falls ${}_RA$ projektiv und die Antipode von H bijektiv ist, so gilt nach Lemma 2.2.2 $\langle H \otimes A\rangle^H \simeq \int_l \otimes A$. Aus 1.2.9 folgt, daß die Abbildung

$$\phi : \langle H \otimes A\rangle \longrightarrow A\#H \quad \text{mit } h\#a \mapsto (h_1 \cdot a) \otimes h_2$$

ein Isomorphismus von links H-Moduln definiert. Das Bild von ϕ läßt sich als $(h \otimes a)\phi = (1\#h)(a\#1)$ schreiben, so daß

$$(A\#H)^H = \left(\int_l \otimes A\right)\phi = \left(1\# \int_l\right)(A\#1)$$

gilt. ■

Der folgende Satz zeigt den Zusammenhang zwischen Integralen und Homomorphismen zwischen einer Modulalgebra und ihrem Smash-Produkt auf.

Satz 2.2.4. *Sei H eine R-Hopfalgebra mit bijektiver Antipode und sei A eine, als R-Modul projektive, H-Modulalgebra. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *(a) Es gibt einen nicht-trivialen links $A\#H$-linearen Homomorphismus $\phi : A \longrightarrow A\#H$.*
- *(b) Es gibt eine nicht-triviale links H-lineare Abbildung $\varphi : R \longrightarrow H$ mit* $\mathrm{Ker}\,(\varphi)A \neq A$.
- *(c) Es gibt ein $t \in \int_l$, so daß die Abbildung $A \longrightarrow A\#H$ mit $a \longmapsto a\#t$ nicht-trivial ist.*

Ist $\int_l$ zyklischer R-Modul, dann ist A genau dann isomorph zu einem Linksideal von $A\#H$, wenn es ein $t \in \int_l$ gibt mit $\mathrm{Ann}_R\,(t) \subseteq \mathrm{Ann}_R\,(A)$.

Beweis: Nach 2.2.3 gilt $(A\#H)^H = (1\# \int_l)(A\#1)$ unter den gegebenen Bedingungen.
$(a) \Rightarrow (c)$ Sei $0 \neq \phi \in \mathrm{Hom}_{A\#H}\,(A, A\#H)$. Dann ist $(1_A)\phi \in (A\#H)^H$, und nach 2.2.3 gibt es $t_1, \ldots, t_k \in \int_l$ und $a_1, \ldots, a_k \in A$ mit $0 \neq (1_A)\phi = \sum_{i=1}^k (1\#t_i)(a_i\#1)$, d.h. ϕ ist durch $a \mapsto \sum_{i=1}^k (a\#t_i)(a_i\#1)$ gegeben. Insbesondere ist für mindestens ein $t \in \{t_1, \ldots, t_k\}$ die Abbildung $a \mapsto a\#t$ nicht trivial.
$(c) \Rightarrow (b)$ Sei $t \in \int_l$ und $R_t : A \longrightarrow A\#H$ die Abbildung $(a)R_t = a\#t$. Da A ein flacher R-Modul ist, folgt aus Lemma 1.3.7(1) $\mathrm{Ker}\,(R_t) = \mathrm{Ann}_R\,(t)A \neq A$. Sei $\varphi : R \longrightarrow H$ die zu t assoziierte H-lineare Abbildung mit $(r)\varphi = rt$. Dann gilt $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathrm{Ann}_R\,(t)$ und die Behauptung folgt.
$(b) \Rightarrow (a)$ Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_H\,(R, H)$ und $\phi := 1_A \otimes \varphi : A \simeq A \otimes R \longrightarrow A\#H$. ϕ ist links $A\#H$-linear. Aus der Annahme $\mathrm{Ker}\,(\varphi)A \neq A$ und der Voraussetzung ${}_RA$ flach folgt $\phi \neq 0$ mit 1.3.7(1).

Ist $\int_l$ zyklisch, dann ist jede Abbildung $\phi \in \mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H)$ von der Gestalt $x \mapsto (x\#t)(a\#1)$ für ein $t \in \int_l$ und $a \in A$. Ist ϕ injektiv, dann muß auch $R_t : x \mapsto x\#t$ injektiv sein, d.h. man kann sich auf injektive $A\#H$-lineare Abbildungen der Form R_t beschränken. Nach 1.3.7(2) ist R_t genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Ann}_R(t) \subseteq \mathrm{Ann}_R(A)$. ■

Folgerung 2.2.5. *Sei R ein Integritätsbereich und H eine, als R-Modul, projektive R-Hopfalgebra. Dann ist ${}_RH$ genau dann endlich erzeugt, wenn die Antipode von H bijektiv ist und es eine, als R-Modul, projektive H-Modulalgebra A gibt mit* $\mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H) \neq 0$.

Beweis: Ist ${}_RH$ endlich erzeugt projektiv, so ist die Antipode von H bijektiv. Aus 2.1.5 folgt $\int_l \simeq R$ da die Picardgruppe von R trivial ist. Somit gibt es ein Links-Integral t mit $\mathrm{Ann}_R(t) = 0$ und jede als R-Modul projektive Modulalgebra A kann nach 2.2.4 in $A\#H$ eingebettet werden.
Andererseits folgt aus 2.2.3 und aus der Annahme $\mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H) \neq 0$ für eine projektive Modulalgebra A über einer Hopfalgebra H mit bijektiver Antipode, daß es ein nicht-triviales Links-Integral t gibt. Aus 2.1.9(1) folgt nun, daß H ein endlich erzeugter R-Modul ist. ■

Insbesondere hat man folgende Dichotomie, die bisher in der Literatur noch nicht beachtet worden ist.

Satz 2.2.6. *Sei H eine projektive R-Hopfalgebra mit bijektiver Antipode über einem Integritätsbereich R. Dann gilt genau eine der nachfolgenden Aussagen:*

(I) Jede H-Modulalgebra A mit ${}_RA$ projektiv ist isomorph zu einem Linksideal von $A\#H$.

(II) Jede H-Modulalgebra A mit ${}_RA$ projektiv erfüllt $\mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H) = 0$.

Wobei Fall (I) genau dann eintritt, wenn ${}_RH$ endlich erzeugt ist.

Inwieweit dieser Satz für Hopfalgebren gilt, deren Antipode nicht bijektiv ist, ist mir nicht bekannt. Über Ringen mit nicht-trivialen Idempotenten gilt 2.2.6 nicht:

Beispiel 2.2.7. *Sei $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ ein Produkt von Ringen und seien H_i R_i-Hopfalgebren. Dann ist $H = H_1 \times \cdots \times H_n$ eine R-Hopfalgebra (siehe 1.2.8) und die links H-linearen Abbildungen zwischen R und H sind bestimmt durch:*

$$\mathrm{Hom}_H(R, H) \simeq \mathrm{Hom}_{H_1}(R_1, H_1) \times \cdots \times \mathrm{Hom}_{H_k}(R_n, H_n).$$

Damit existieren Integrale in der R-Hopfalgebra H genau dann, wenn sie in mindestens einer der Hopfalgebren H_i existieren. Ist jede Hopfalgebren H_i projektiv als R_i-Modul, so ist auch H projektiv als R-Modul. Nehmen wir als Beispiel einen Körper k und setzen $R_1 = R_2 = k$ sowie $H_1 = k$ und $H_2 = k[X]$.

Dann ist $R = k \times k$ ein halbeinfacher Ring, $H = k \times k[X]$ ist eine R-Hopfalgebra mit komponentenweisen Operationen (siehe 1.2.8). Insbesondere besitzt H eine bijektive Antipode, da die Antipoden von H_1 und H_2 bijektiv sind. Betrachten wir R als triviale H-Modulalgebra, dann gilt $R\#H \simeq H$ und

$$\mathrm{Hom}_H\,(R, H) \simeq \mathrm{Hom}_k\,(k, k) \times \mathrm{Hom}_{k[X]}\,(k, k[X]) \simeq k,$$

d.h. es gibt nicht-triviale H-lineare Abbildungen zwischen R und H. Da es keine $k[X]$-linearen Homomorphismen von k nach $k[X]$ gibt, kann R nicht in H eingebettet werden. Dies bedeutet, daß die Dichotomie aus 2.2.6 nicht mehr für Hopfalgebren über halbeinfachen Ringen gilt.

Abschließend weisen wir noch auf ein Kriterium zur Projektivität von A als $A\#H$-Modul hin.

Definition 2.2.8. *Ein Element $a \in A$ einer H-Modulalgebra A über einer R-Hopfalgebra H heißt ein* **Spur-1 Element**, *falls es ein Links-Integral $t \in \int_l$ gibt mit $t \cdot a = 1$.*

Spur-1 Elemente stehen in engem Zusammenhang mit der Projektivität von A als $A\#H$-Modul.

Proposition 2.2.9. *Sei H eine R-Hopfalgebra und A eine H-Modulalgebra.*

(1) Besitzt A ein Spur-1 Element, so ist A ein projektiver $A\#H$-Modul.

(2) Hat H eine bijektive Antipode, ist $\int_l$ zyklisch und ist A projektiv, als R- und als $A\#H$-Modul, so besitzt A ein Spur-1 Element.

Beweis: (1) Sei $t \in \int_l$ und $a \in A$ mit $t \cdot a = 1$. Die Abbildung $\beta : A \longrightarrow A\#H$ mit $(x)\beta := (x\#t)(a\#1)$ ist links $A\#H$-linear, denn für alle $x \in A$ und $h \in H$ gilt:

$$\begin{aligned} h(x)\beta = (1\#h)(x\#t)(a\#1) &= \left(\sum_{(h)} (h_1 \cdot x)\#(h_2 t)\right)(a\#1) \\ &= \left(\sum_{(h)} (h_1 \cdot x)\#\varepsilon(h_2) t\right)(a\#1) \\ &= ((h \cdot x)\#t)(a\#1) = (h \cdot x)\beta. \end{aligned}$$

Nun läßt β die Abbildung α zerfallen, denn es gilt

$$(x)\beta\alpha = [(x\#t)(a\#1)]\alpha = x(t \cdot a) = x,$$

für alle $x \in A$. Damit ist A ein projektiver links $A\#H$-Modul.
(2) Angenommen A ist ein projektiver links $A\#H$-Modul. Dann zerfällt α, d.h. es gibt eine $A\#H$-lineare Abbildung $\beta : A \longrightarrow A\#H$ mit $(x)\beta\alpha = x$ für alle

$x \in A$. Aus dem Isomorphismus $\mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H) \simeq (A\#H)^H$ in 2.2.3, der β auf $(1)\beta$ abbildet folgt $(1)\beta \in (A\#H)^H$. Nach Voraussetzung besitzt H eine bijektive Antipode und A ist ein projektiver R-Modul. Somit kann $(A\#H)^H$ mit $(1\# \int_l)(A\#1)$ identifiziert werden (siehe 2.2.3) und, da $\int_l$ zyklisch ist, gibt es ein $t \in \int_l$ und ein $a \in A$ mit $(1)\beta = (1\#t)(a\#1)$. Aus der Eigenschaft $(1)\beta\alpha = 1$ und obiger Darstellung von $(1)\beta$ folgt $t \cdot a = 1$, d.h. A besitzt ein Spur-1 Element. ■

2.3 Separable Smash-Produkte

Definition 2.3.1. *Sei $S \subseteq T$ eine Ringerweiterung. Eine exakte Folge von links T-Moduln heißt (T,S)*-**exakt***, falls sie in S-Mod zerfällt. Ein links T-Modul M heißt (T,S)*-**halbeinfach** *(oder auch* **relativ halbeinfach***), falls jede (T,S)-exakte Folge in $\sigma[_TM]$ zerfällt. Ist T ein (T,S)-halbeinfacher links T-Modul, so sagen wir, daß T links* **relativ halbeinfach** *über S ist. Sei $m : T \otimes_S T \longrightarrow T$ mit $m(x \otimes y) := xy$ die durch die Multiplikation induzierte T-bilineare Abbildung. T heißt* **separabel** *über S, falls m als T-Bimodulhomomorphismus zerfällt, d.h. falls es eine T-bilineare Abbildung $\varphi : T \longrightarrow T \otimes_S T$ gibt mit $m \circ \varphi = id_T$ (siehe [HS66, Def. 2]). Äquivalent dazu ist, daß es ein* **Separabilitätsidempotent** *$\sum_i x_i \otimes_S y_i \in T \otimes_S T$ gibt mit $\sum_i x_i y_i = 1$ und $\sum_i tx_i \otimes_S y_i = \sum_i x_i \otimes_S y_i t$ für alle $t \in T$.*

Bemerkung 2.3.2. *Ist T separabel über S, dann ist T ein (T,S)-halbeinfacher links (bzw. rechts) T-Modul ([HS66, Prop 2.6]). Insbesondere ist dann auch jeder links oder rechts T-Modul (T,S)-halbeinfach. Also insbesondere auch S, falls S eine T-Modulstruktur besitzt. In dieser Situation lassen sich homologische Eigenschaften von S-Mod auf T-Mod übertragen. Angewandt auf $T = A\#H$ und $S = A$ für eine H-Modulalgebra A stellen wir nun die Frage, wann A ein $(A\#H, A)$-halbeinfacher Modul ist. Im Folgenden werden wir hinreichende Bedingungen dazu angeben.*

Ist $A \subseteq B$ eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur, dann bezeichnet $\alpha : B \longrightarrow A$ die B-lineare Abbildung $(b)\alpha := b \cdot 1_A$.

Satz 2.3.3. *Sei $A \subseteq B$ eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur. Angenommen es gibt eine B-bilineare Abbildung $\varphi : B \longrightarrow B \otimes_A B$, so daß für*

$$\phi : B \xrightarrow{\varphi} B \otimes_A B \xrightarrow{m} B \xrightarrow{\alpha} A$$

$\phi(1_B) = 1_A$ gilt. Dann ist A ein (B,A)-halbeinfacher B-Modul. Hier sei $m : B \otimes_A B \longrightarrow B$ die B-bilineare Abbildung $x \otimes y \mapsto xy$.

Beweis: Man beachte, daß $m\varphi : B \longrightarrow B$ eine B-bilineare Abbildung ist und somit $c := m\varphi(1_B) \in Z(B)$. Dann gilt $c \cdot a = a$ für alle $a \in A$, denn die

Abbildung $\phi = \alpha m \varphi : B \longrightarrow A$ ist links B-linear und somit gilt für alle $a \in A$:

$$a = a \cdot 1_A = a \cdot (1_B)\phi = (a)\phi = (((a)\varphi)m)\alpha = (ca)\alpha = (ca) \cdot 1_A = c \cdot a.$$

Als Folgerung erhalten wir, daß c auf alle Moduln in $\sigma[{}_BA]$ wie die Identität wirkt. Denn ist $N \in \sigma[{}_BA]$, dann gibt es eine Indexmenge Λ und einen B-Untermodul $I \subseteq A^{(\Lambda)}$, so daß N isomorph zu einem B-Untermodul von $A^{(\Lambda)}/I$ ist. Ohne Einschränkung identifizieren wir N mit einem Untermodul von $A^{(\Lambda)}/I$. Für $n \in N$ gibt es Elemente $a_\lambda \in A$ mit $n = (a_\lambda)_\Lambda + I$. Folglich gilt

$$c \cdot n = (c \cdot a_\lambda)_\Lambda + I = (a_\lambda)_\Lambda + I = n \quad (\dagger)$$

Sei $\varphi(1_B) =: \sum_i x_i \otimes y_i \in B \otimes_A B$ und sei $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ für zwei B-Moduln M, N. Aus der Gleichung $\sum_i bx_i \otimes y_i = \sum_i x_i \otimes y_i b$ für alle $b \in B$ folgt

$$\tilde{f} : [m \mapsto \sum_i x_i \cdot f(y_i \cdot m)] \in \mathrm{Hom}_B(M, N).$$

Falls $M, N \in \sigma[{}_BA]$ und falls N ein direkter Summand von M als A-Modul ist mit A-linearer Projektion $\pi : M \longrightarrow N$, dann ist $\tilde{\pi}$ eine B-lineare Projektion. Denn gilt $\pi(n) = n$ für alle $n \in N$, so folgt $(\dagger)$:

$$\tilde{\pi}(n) = \sum_i x_i \cdot \pi(y_i \cdot n) = \sum_i x_i \cdot (y_i \cdot n) = c \cdot n = n.$$

Damit ist jeder Modul in $\sigma[{}_BA]$ ein (B, A)-halbeinfacher B-Modul, d.h. A ist (B, A)-halbeinfach. ■

Wir wenden obigen Satz auf die Situation an, in der B ein Smash-Produkt ist.

Folgerung 2.3.4. *Sei $A\#_\nu B$ ein Smash-Produkt von A und B bzgl. ν, so daß $A \subseteq A\#_\nu B$ eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur ist. Angenommen es gibt eine B-bilineare Abbildung $\psi : B \longrightarrow B \otimes_R B$ mit $\psi(1_B) = \sum_i x_i \otimes y_i$, und für alle $a \in A$ gilt:*

$$(\bigstar) \qquad (\nu \otimes 1_B)(1_B \otimes \nu)\left(\sum_i x_i \otimes y_i \otimes a\right) = \sum_i a \otimes x_i \otimes y_i.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(1) Gibt es ein zentrales Element $z \in Z(A)$ mit $\sum_i x_i \cdot (z(y_i \cdot 1_A)) = 1_A$, dann ist A ein $(A\#_\nu B, A)$-halbeinfacher $A\#_\nu B$-Modul.

(2) Ist B separabel über R mit einem Separabilitätsidempotent $\sum_i x_i \otimes y_i$, das die obige Bedingung $(\bigstar)$ bzgl. ν erfüllt, dann ist $A\#_\nu B$ separabel über A.

Beweis: (1) Betrachte die Abbildung

$$\varphi : A\#_\nu B \xrightarrow{1_A \otimes \psi} A \otimes B \otimes B \xrightarrow{1_A \otimes 1_B \otimes z \otimes 1_B} (A\#_\nu B) \otimes_A (A\#_\nu B)$$

Dann ist φ links $A\#_\nu B$-linear, denn

$$\varphi(a\#b) = \sum_i (a\#bx_i) \otimes_A (z \otimes y_i) = (a\#b)\varphi(1_A\#1_B)$$

gilt für alle $a \in A$ und $b \in B$. Ferner ist φ B-bilinear, da ψ B-bilinear ist. Für jedes i gibt es Elemente $a_{ij} \in A$ und $y_{ij} \in B$ mit $\nu(y_i \otimes a) = \sum_j a_{ij} \otimes y_{ij}$, und für jedes Paar (i,j) gibt es Elemente $a_{ijk} \in A$ und $x_{ijk} \in B$, so daß $\nu(x_i \otimes a_{ij}) = \sum_k a_{ijk} \otimes x_{ijk}$. Nach obiger Bedingung an ν und ψ gilt:

$$\sum_i a \otimes x_i \otimes y_i = (\nu \otimes 1)(1 \otimes \nu)\left(\sum_i x_i \otimes y_i \otimes a\right) = \sum_{i,j,k} a_{ijk} \otimes x_{ijk} \otimes y_{ij}.$$

Damit folgt die rechts A-Linearität von φ:

$$\varphi(1\#1)(a\#1) = \sum_{i,j}(1\#x_i)\otimes_A(za_{ij}\otimes y_{ij}) = \sum_{i,j,k}(a_{ijk}\#x_{ijk})\otimes_A(z\otimes y_{ij}) = (a\#1)\varphi(1\#1).$$

Somit ist φ $A\#_\nu B$-bilinear. Sei $m : (A\#_\nu B) \otimes_A (A\#_\nu B) \longrightarrow A\#_\nu B$ die Multiplikation, so gilt

$$m\varphi(1\#1) \cdot 1_A = \sum_i (1\#x_i)(z\#y_i) \cdot 1_A = \sum_i (x_i \cdot (z(y_i \cdot 1_A))) = 1_A.$$

Damit folgt die Behauptung (1) aus 2.3.3.
Gilt (2), d.h. $\sum_i x_i y_i = 1_B$, so kann man $z = 1_A$ in (1) wählen und erhält mit obigem φ:

$$m\varphi(1_A\#1_B) = \sum_i (1_A\#x_i)(1_A\#y_i) = 1_A\#\left(\sum_i x_i y_i\right) = 1_A\#1_B,$$

d.h. $A\#_\nu B$ ist separabel über A. ■

Wir prüfen nach, wann die Voraussetzungen für $A\#H/A$ erfüllt sind.

Lemma 2.3.5. *Sei $_RH$ eine R-Hopfalgebra und A eine links H-Modulalgebra. Sei $\nu : H \otimes A \longrightarrow A \otimes H$ die Abbildung $h \otimes a \mapsto \sum_{(h)} h_1 a \otimes h_2$, durch die die Multiplikation auf $A\#H$ definiert wird (siehe 1.3.11). Sei $h \in H$ und $a \in A$. Dann gilt:*

$$(\nu \otimes 1_H)(1_H \otimes \nu)\left(\sum_{(h)} S(h_1) \otimes h_2 \otimes a\right) = \sum_{(h)} a \otimes S(h_1) \otimes h_2$$

Ist $t \in \int_r$, dann ist die Abbildung $\psi : H \longrightarrow H \otimes H$ mit $h \mapsto \sum_{(t)} hS(t_1) \otimes t_2$ eine H-bilineare Abbildung und erfüllt die Bedingung (★) aus 2.3.4 bzgl. ν.

Beweis: Die erste Behauptung folgt leicht:

$$
\begin{aligned}
(\nu\otimes 1_H)(1_H\otimes\nu)\left(\sum_{(h)} S(h_1)\otimes h_2\otimes a\right) &= (\nu\otimes 1)\left(\sum_{(h)} S(h_1)\otimes h_2 a\otimes h_3\right)\\
&= \left(\sum_{(h)} S(h_2)h_3 a\otimes S(h_1)\otimes h_4\right)\\
&= \sum_{(h)} a\otimes S(h_1)\otimes h_2
\end{aligned}
$$

Ist $t\in\int_r$, dann werden wir in 2.4.1 sehen, daß ψ H-bilinear ist. Wie wir soeben gesehen habe, erfüllt das Element $\psi(1_H)=\sum_{(t)} S(t_1)\otimes t_2$ die Bedingung ($\bigstar$) aus 2.3.4 bzgl. ν. ■

Folgerung 2.3.6. *Sei H eine R-Hopfalgebra und A eine H-Modulalgebra.*

(1) Gibt es ein $t\in\int_r$ und ein $z\in Z(A)$ mit $S(t)z=1_A$, so ist A ein projektiver $(A\#H,A)$-halbeinfacher $A\#H$-Modul. Unter dieser Voraussetzung gilt ferner:

- *(i) $A\#H$ ist relativ halbeinfach über A, falls A Generator in $A\#H$-Mod ist.*
- *(ii) $A\#H$ ist separabel über A, falls $z\in Z(A)^H$ oder H kokommutativ ist.*

(2) $A\#H$ ist separabel über A, falls H separabel über R ist.

Beweis: Nach Lemma 2.3.5 ist die Abbildung

$$\psi: H\longrightarrow H\otimes H \quad\text{mit}\quad h\longmapsto \sum_{(t)} hS(t_1)\otimes t_2$$

eine H-bilineare Abbildung, die die Bedingung ($\bigstar$) aus 2.3.4 bzgl. ν.
(1) Aus $\sum_{(t)} S(t_1)(z(t_2 1_A)) = \sum_{(t)} S(t_1)(\varepsilon(t_2)z) = S(t)z = 1$ und aus 2.3.4 folgt, daß A ein $(A\#H,A)$-halbeinfacher $A\#H$-Modul ist. Somit ist jeder $A\#H$-Modul in $\sigma[{}_{A\#H}A]$ relativ halbeinfach, und falls A Generator ist, dann ist also auch $A\#H$ relativ halbeinfach. Dies zeigt (1.i). Ferner ist z ein Spur-1 Element, da $S(t)$ ein Links-Integral in H ist, und nach 2.2.9 ist A projektiv.
(1.ii) Ist H kokommutativ, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{(t)}(1\#S(t_1))(z\#t_2) = \sum_{(t)} S(t_2)z\#S(t_1)t_3 = \sum_{(t)} S(t_3)z\#S(t_1)t_2 &= S(t)z\#1_H\\
&= 1_A\#1_H
\end{aligned}
$$

Ist $z \in Z(A)^H$, dann folgt

$$\begin{aligned}\sum_{(t)}(1\#S(t_1))(z\#t_2) &= \sum_{(t)} S(t_2)z\#S(t_1)t_3 \\ &= \sum_{(t)} \varepsilon(t_2)z\#S(t_1)t_3 \\ &= \varepsilon(t)z\#1_H = S(t)z\#1_H = 1_A\#1_H\end{aligned}$$

In beiden Fällen läßt die Abbildung φ aus dem Beweis zu 2.3.4 die Multiplikationsabbildung m zerfallen, d.h. $A\#H/A$ ist separabel.
(2) folgt aus 2.3.4. ■

Bemerkung 2.3.7. *Die Beobachtung 2.3.6(1)(ii) wurde in [CF92, Theorem 1.11] (siehe auch [CF94]) für verschränkte Produkte ("crossed products") gezeigt, unter der Voraussetzung, daß H eine Frobenius R-Hopfalgebra ist, also insbesondere projektiv und endlich erzeugt über R. Wie gesehen, kommt man auch ohne diese Voraussetzung aus.*

Über einer Hopfalgebra mit bijektiver Antipode ist die Existenz eines Rechts-Integrals t und eines zentralen Elementes z mit $S(t)z = 1$ gerade dazu äquivalent, daß A ein zentrales Spur-1 Element besitzt.

Lemma 2.3.8. *Sei H eine R-Hopfalgebra mit bijektiver Antipode und sei A eine H-Modulalgebra. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) Es gibt ein $t \in \int_r$ und ein $z \in Z(A)$ mit $S(t)z = 1$.

(b) A besitzt ein zentrales Spur-1 Element.

Beweis: $(a) \Rightarrow (b)$ Seien $t \in \int_r$ und $z \in Z(A)$ mit $S(t)z = 1$. Für alle $h \in H$ gilt:

$$hS(t) = S(S^{-1}(h))S(t) = S(tS^{-1}(h)) = \epsilon(h)S(t),$$

d.h. $S(t) \in \int_l$. Somit ist z ein zentrales Spur-1 Element.
$(b) \Rightarrow (a)$ Seien $z \in Z(A)$ und $t \in \int_l$ mit $tz = 1$. Für alle $h \in H$ gilt:

$$S^{-1}(t)h = S^{-1}(t)S^{-1}(S(h)) = S^{-1}(S(h)t) = S^{-1}(t)\epsilon(h),$$

d.h. $t' := S^{-1}(t) \in \int_r$ und es gilt $S(t')z = tz = 1$. ■

Folgerung 2.3.9. *Sei H eine kokommutative R-Hopfalgebra mit $\int_l$ zyklisch und sei A eine kommutative, als R-Modul projektive, H-Modulalgebra. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $A\#H$ ist separabel über A.

(b) A ist projektiver $A\#H$-Modul;

(c) A besitzt ein Spur-1 Element;

Beweis: $(a) \Rightarrow (b)$ Separable Erweiterungen sind relativ halbeinfache Erweiterungen. Damit ist A als $A\#H$-Modul projektiv.
$(b) \Leftrightarrow (c)$ Eine kokommutative Hopfalgebra hat eine bijektive Antipode. Dies sieht man wie in [Mon92, 1.5.12 bzw. 1.5.11], wo R ein Körper ist. Aus Satz 2.2.9 folgt, daß A ein Spur-1 Element besitzt.
$(c) \Rightarrow (a)$ Lemma 2.3.8 zeigt, daß es Elemente $t \in \int_r$ und $z \in Z(A)$ gibt $S(t)z = 1$. Da H kokommutativ ist, folgt aus 2.3.6(1.ii), daß $A\#H$ separabel über A ist. ■

Bemerkung 2.3.10. $(b) \Rightarrow (a)$ *gilt im Allgemeinen nicht mehr für Bialgebren. Wir geben ein konkretes Beispiel. Wir betrachten das multiplikative Monoid* $M = (\mathbb{Z}_3, \cdot)$. *Um Verwirrungen zu vermeiden, nennen wir die Elemente von* M *um und schreiben* $t := \overline{0}$, $e := \overline{1}$ *und* $x := \overline{2}$. *Das Element* t *ist ein Integral in der* $\mathbb{Z}_2$*-Bialgebra* $B := \mathbb{Z}_2[M]$. *Aus* $\varepsilon(t) = 1$ *und 1.1.7 folgt, daß* $\mathbb{Z}_2$ *ein projektiver* B*-Modul ist. Dies impliziert eine Zerlegung* $B = Bt \oplus B(e+t)$ *von* B *als links* B*-Modul (man beachte, daß* e *die Einheit von* B *ist). Der direkte Summand* $B(e+t)$ *enthält den echten wesentlichen* B*-Untermodul* $B(e+x) = \mathbb{Z}_2(e+x)$. *Angenommen* B *wäre separabel über* $\mathbb{Z}_2$, *dann wäre* B *auch relativ halbeinfach. Somit müßte* $B(e+x)$, *als* B*-Modul, ein direkter Summand von* $B(e+t)$ *sein, was aber unmöglich ist, da* $B(e+x)$ *wesentlich in* $B(e+t)$ *liegt. Sei* $A := \mathbb{Z}_2$. *Dann ist* A *eine kommutative Modulalgebra über der kokommutativen Bialgebra* B. *Das Smash-Produkt* $A\#B$ *ist hier isomorph zu* B. *Wie schon erwähnt ist* $A\#B$ *nicht separabel über* A, *aber* A *ist ein projektiver* $A\#B$*-Modul.*

Untersuchen wir die Bedingung $z \in Z(A)^H$ in 2.3.6(1.ii), so stellen wir folgenden Sachverhalt fest:

Proposition 2.3.11. *Sei* H *eine* R*-Hopfalgebra und* A *eine links* H*-Modulalgebra. Angenommen, es gibt ein Links- oder Rechts-Integral* t *in* H. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Es gibt ein $z \in Z(A)^H$ *mit* $S(t)z = 1_A$.

(b) $\varepsilon(t)$ *ist invertierbar in* A.

Beweis: $(a) \Rightarrow (b)$ Gibt es ein Element $z \in Z(A)^H$ mit $S(t)z = 1_A$, so ist z das Inverse zu $\varepsilon(t)$, denn es gilt $S(t)z = \varepsilon(t)z$.
$(b) \Rightarrow (a)$ Sei $z = \varepsilon(t)^{-1} \in A$. Aus $\varepsilon(t) \in R1_A \subseteq Z(A)$ folgt, daß z ein links und rechts Inverses von $\varepsilon(t)$ ist. Für alle $a \in A$ gilt:

$$az - za = z\varepsilon(t)(az - za) = z(a - a) = 0,$$

d.h. $z \in Z(A)$. Für alle $h \in H$ gilt:

$$hz - \varepsilon(h)z = z\varepsilon(t)[hz - \varepsilon(h)z] = z[h(\varepsilon(t)z) - \varepsilon(h)(\varepsilon(t)z)] = z[h1_A - \varepsilon(h)1_A] = 0,$$

d.h. $z \in A^H$. Somit folgt $S(t)z = \varepsilon(t)z = 1_A$ mit $z \in Z(A)^H$. ■

Aus 2.3.11 und 2.3.6(1.ii) folgt:

Folgerung 2.3.12. *Ist A eine H-Modulalgebra über einer R-Hopfalgebra H, so daß es ein Links- oder Rechts-Integral t gibt mit $\varepsilon(t)$ invertierbar in A, dann ist $A\#H$ separabel über A.*

Beweis: Ist $t \in \int_r$ mit $\varepsilon(t)$ invertierbar in A, dann gibt es nach 2.3.11 ein $z \in Z(A)^H$ mit $S(t)z = 1$. Nach 2.3.6(1.ii) ist $A\#H$ separabel über A.
Ist $t \in \int_l$ mit $\varepsilon(t)$ invertierbar in A, dann ist $S(t) \in \int_r$ mit $\varepsilon(S(t)) = \varepsilon(t)$ invertierbar in A. Somit folgt die Behauptung wie oben. ■

Bemerkung 2.3.13. *Man vergleiche obiges Korollar mit der Anforderung der Existenz von $|G|^{-1}$ in A in der Theorie der Gruppenwirkungen, wenn G eine endliche Gruppe ist, die auf A wirkt. Sei $t := \sum_{g\in G} g \in R[G]$. Da $\varepsilon(t) = |G|$ invertierbar ist in A, ist nach obigem Korollar 2.3.12 der Schiefgruppenring $A * G$ separabel über A. Die anscheinend schwächere Anforderung, daß A $|G|$-torsionsfrei ist, erlaubt es uns, A nach den Potenzen von $|G|$ in A zu lokalisieren, wodurch dann in der lokalisierten Algebra A' die Gruppenordnung invertierbar wird, so daß $A' * G$ separabel über A' ist. Analog: ist A eine H-Modulalgebra und t ein Links- oder Rechts-Integral, so daß $\varepsilon(t)$ kein Nullteiler in A ist, dann kann A nach $\{1, \varepsilon(t), \varepsilon(t)^2, \ldots\}$ lokalisiert werden und man erhält eine H-Modulalgebra A' für die $A'\#H$ separabel über A' ist.*

2.4 Separable Hopfalgebren

Bezeichne $C_{H\otimes H}(H)$ die Menge der H-zentralen Elemente von $H \otimes H$, d.h.

$$C_{H\otimes H}(H) := \left\{ \sum_i x_i \otimes y_i \in H \otimes H \mid \sum_i hx_i \otimes y_i = \sum_i x_i \otimes y_i h \quad \forall h \in H \right\}.$$

Der Auswertungs-Homomorphismus

$$\Psi : \mathrm{Hom}_{H-H}(H, H \otimes H) \longrightarrow C_{H\otimes H}(H) \text{ mit } \varphi \mapsto \varphi(1_H)$$

ist ein Isomorphismus. Wir haben folgende Korrespondenz zwischen Integralen und H-zentralen Elementen:

Lemma 2.4.1. *Folgende R-lineare Homomorphismen existieren*

$$\begin{array}{rccccc} i^l : & \int_l & \longrightarrow & C_{H\otimes H}(H), & t & \mapsto & (1 \otimes S)\Delta(t) \\ p^l : & C_{H\otimes H}(H) & \longrightarrow & \int_l, & \sum_i x_i \otimes y_i & \mapsto & (1 \otimes \varepsilon)\left(\sum_i x_i \otimes y_i\right) \end{array}$$

mit $p^l \circ i^l = id_{\int_l}$.

Beweis: Das Bild von i^l liegt in $C_{H\otimes H}(H)$, denn ist $t \in \int_l$ und $h \in H$, so gilt:

$$\Delta(t) \otimes h = \sum_{(h)} \Delta(\varepsilon(h_1)t) \otimes h_2 = \sum_{(h)} \Delta(h_1 t) \otimes h_2 = \sum_{(h,t)} h_1 t_1 \otimes h_2 t_2 \otimes h_3.$$

Somit folgt:

$$\sum_{(t)} t_1 \otimes S(t_2)h = \sum_{(h,t)} h_1 t_1 \otimes S(h_2 t_2) h_3 = \sum_{(h,t)} h_1 t_1 \otimes S(t_2) S(h_2) h_3 = \sum_{(t)} h t_1 \otimes S(t_2).$$

Damit ist $i^l(t) \in C_{H\otimes H}(H)$.
Wir zeigen nun, daß $p^l(u)$ ein Links-Integral ist für ein $u \in C_{H\otimes H}(H)$. Sei $u = \sum_i x_i \otimes y_i \in C_{H\otimes H}(H)$. Für alle $h \in H$ gilt

$$\sum_i h x_i \otimes y_i = \sum_i x_i \otimes y_i h \in H \otimes H.$$

Wir wenden $(1 \otimes \varepsilon)$ auf dieses Element an und erhalten:

$$h p^l(u) = \sum_i h x_i \varepsilon(y_i) = \sum_i x_i \varepsilon(y_i h) = \varepsilon(h) p^l(u).$$

Damit ist $p^l(u) \in \int_l$ gezeigt. ■

Analog erhalten wir auch Homomorphismen bzgl. $\int_r$ und $C_{H\otimes H}(H)$:

$$\begin{array}{llcllcl} i^r: & \int_r & \longrightarrow & C_{H\otimes H}(H) & t & \mapsto & (S \otimes 1)\Delta(t) \\ p^r: & C_{H\otimes H}(H) & \longrightarrow & \int_r & \sum_i x_i \otimes y_i & \mapsto & (\varepsilon \otimes 1)\left(\sum_i x_i \otimes y_i\right) \end{array}$$

mit $p^r \circ i^r = id_{\int_r}$.

Links- bzw. Rechts-Integrale stehen also in einem engen Zusammenhang zu H-zentrierenden Elementen von $H \otimes H$.

Als Konsequenz aus den Ergebnissen der letzten Abschnitte erhalten wir nun eine Charakterisierung von separablen R-Hopfalgebren H, die keine a priori Anforderungen an ${}_RH$ stellt und die bekannte Charakterisierungen von halbeinfachen Hopfalgebren über Körpern, bzw. von endlich erzeugt projektiven separablen Hopfalgebren verallgemeinert.

Satz 2.4.2. *Für eine R-Hopfalgebra H sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) H ist separabel über R.

(b) H ist links oder rechts relativ halbeinfach über R.

(c) $A\#H$ ist separabel über A für alle H-Modulalgebren A.

(d) A ist projektiver $A\#H$-Modul für alle H-Modulalgebren A.

(e) R ist projektiv als links oder rechts H-Modul.

(f) es gibt ein Links- oder Rechts-Integral t mit $\varepsilon(t)$ invertierbar in R.

Erfüllt H eine der obigen Aussagen, so ist H eine Azumaya Algebra über seinem Zentrum und somit eine PI-Algebra, endlich erzeugt projektiv und separabel über seinem Zentrum. Ist ${}_RH$ projektiv und eine der obigen Aussagen ist erfüllt, so ist ${}_RH$ endlich erzeugt.

Beweis: $(a) \Rightarrow (b)$ folgt aus [Wis96, 28.5];
$(b) \Rightarrow (e)$ aus [Wis96, 20.5] folgt, daß R ein (H, R)-projektiver H-Modul ist. Somit zerfällt ε in H-Mod, d.h. R ist projektiv als links bzw. als rechts H-Modul;
$(e) \Rightarrow (f)$ folgt aus $\mathrm{Hom}_{H-}(R, H) \simeq \int_l$ bzw. $\mathrm{Hom}_{-H}(R, H) \simeq \int_r$;
$(f) \Rightarrow (c)$ folgt aus 2.3.12;
$(c) \Rightarrow (a)$ trivial mit $A = R$;
$(c) \Rightarrow (d)$ ist klar mit [Wis96, 28.5 und 20.5];
$(d) \Rightarrow (e)$ trivial für $A = R$.
Ist H separabel über R, dann ist auch H separabel über seinem Zentrum und somit Azumaya (siehe [Wis96, 28.4]). Zentrale Azumaya Algebren sind insbesondere endlich erzeugt und projektiv und somit PI (siehe [Wis96, 28.1]). Daß projektive separable Erweiterungen endlich erzeugt sind, folgt aus [Wis96, 28.5].
■

Bemerkung 2.4.3. *Die Äquivalenz $(a) \Leftrightarrow (f)$ wurde auch in [KS00, Corollary 5.2] bzw. in [Par73] für Hopf-Frobenius Algebren gezeigt, d.h. endlich erzeugt projektive Hopfalgebren, die auch Frobenius sind. Wie wir sehen, sind solche starken Voraussetzungen nicht nötig.*

Wie aus 2.1.1 folgt, gilt $(f) \Rightarrow (a)$ nicht mehr für Bialgebren über Körpern. Denn ist M ein unendliches Monoid mit links Nullelement $t \in N$, dann kann $X = \{t\}$ in 2.1.1 gewählt werden. Ist k ein beliebiger Körper, dann ist $k[M]$ eine unendlich-dimensionale Bialgebra, die ein Links-Integral t besitzt mit $\varepsilon(t) = 1$. Auch gilt die Implikation $(f) \Rightarrow (b)$ nicht mehr für Bialgebren wie in 2.3.10 bemerkt wird. Eigenschaft (b) des obigen Satzes wird oft auch als Maschkes-Eigenschaft bezeichnet. Beim Studium von halbeinfachen Hopfalgebren spielt diese Eigenschaft eine zentrale Rolle und reicht oft alleine aus um bestimmte Ergebnisse zu erzielen, weswegen wir uns auf diese Eigenschaft beschränken werden. Halbeinfache Hopfalgebren H hingegen sind, wie wir gleich sehen werden, endlich erzeugt und projektiv über R sowie separable Frobenius R-Algebren und machen R selbst schon halbeinfach.

Ist A eine augmentierte R-Algebra, so ist jedes Ideal I von R auch ein A-Untermodul von R. Ist I ein direkter Summand von R als A-Modul, so ist er auch direkter Summand als R-Modul. Damit folgt, ist A eine halbeinfache augmentierte R-Algebra, so ist R halbeinfach. Insbesondere ist also jede halbeinfache augmentierte R-Algebra projektiv als R-Modul.

Proposition 2.4.4. *Eine R-Hopfalgebra H ist genau dann halbeinfach (als Ring), wenn H über R separabel und R halbeinfach ist. Insbesondere ist jede halbeinfache R-Hopfalgebra auch endlich erzeugt und projektiv über R.*

Beweis: Daß H über R separabel und R halbeinfach eine hinreichende Bedingung für H halbeinfach ist, ist klar. Andererseits ist H halbeinfach als Ring, dann ist R ein projektiver links H-Modul und somit nach 2.4.2 ist H über R separabel. Aus obiger Bemerkung folgt R halbeinfach. Ist H halbeinfach, dann ist also R ebenfalls halbeinfach und somit ist ${}_RH$ projektiv. Da H über R separabel ist, folgt auch ${}_RH$ endlich erzeugt. ■

Bemerkung 2.4.5. *Die Tatsache, daß halbeinfache Hopfalgebren über Körpern endlich dimensional sind, war bekannt (siehe [Swe69b, Bemerkung nach 2.7]); allerdings impliziert schon die Existenz eines Integrals, daß die Hopfalgebra endlich dimensional ist). Obige Verallgemeinerung zeigt, daß alleine die Anforderung "H ist halbeinfach" schon ${}_RH$ endlich erzeugt impliziert, ohne a priori Anforderungen an R oder ${}_RH$ zu stellen.*

Separable R-Hopfalgebren, die nicht halbeinfach sind, lassen sich leicht angeben:

Beispiel 2.4.6. *Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $n \geq 1$. Sei $R := \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ die klassische Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ nach $\{1, n, n^2, \ldots\}$. Dann ist $H := R[G]$ eine separable R-Hopfalgebra nach 2.4.2, da $n = |G| = \varepsilon(t)$ (mit $t = \sum_{g \in G} g$) invertierbar ist in R. Aber H ist nicht halbeinfach, da R kein Körper ist.*

Ist H eine R-Hopfalgebra, dann ist ein reiner R-Untermodul K von H eine **Unterhopfalgebra**, wenn K eine Unteralgebra von H ist mit $\Delta(K) \subseteq K \otimes K$ und $S(K) \subseteq K$. Eine Unterhopfalgebra K von H heißt **normal**, wenn K gegenüber der links und rechts Adjunktion abgeschlossen ist, d.h. wenn für alle $h \in H$ und $k \in K$: $\sum_{(h)} h_1 k S(h_2) \in K$ und $\sum_{(h)} S(h_1) k h_2 \in K$. Für normale Unterhopfalgebren wird der Quotient $\overline{H} = H/K^+H$ mit $K^+ := K \cap \mathrm{Ker}\,(\varepsilon)$ zu einer R-Hopfalgebra. Ferner gilt auch $K^+H = HK^+$. Folgender Satz erweitert [Lin01, Theorem 3.10] von Hopfalgebren über Körpern zu Hopfalgebren über Ringen (ohne Projektivitätsbedingungen):

Proposition 2.4.7. *Sei H eine R-Hopfalgeba, K eine normale Unterhopfalgebra mit Quotientenhopfalgebra $\overline{H} := H/K^+H$ wobei $K^+ = K \cap \mathrm{Ker}\,(\varepsilon)$. Angenommen K und $\overline{H}$ sind separabel über R, dann ist H separabel über R.*

Beweis: Sei t ein Links-Integral von K mit $\varepsilon(t) = 1$ und sei $\overline{s}$ ein Links-Integral in $\overline{H}$ mit $\overline{\varepsilon}(\overline{s}) = \varepsilon(s) = 1$. Dann gilt auch $\varepsilon(st) = 1$. Wir zeigen nun, daß st ein Links-Integral in H ist. Sei $h \in H$, dann folgt aus $\overline{h}\overline{s} = \varepsilon(h)\overline{s}$ in $\overline{H}$, daß es ein $x \in K^+H$ gibt mit

$$hs - \varepsilon(h)s = x \in K^+H = HK^+.$$

Nun gilt $K^+t = 0$, d.h. $hst - \varepsilon(h)st = xt = 0$. Nach 2.4.2 ist H separabel über R. ■

Lemma 2.4.8. *Sei H eine R-Hopfalgebra und K eine normale Unterhopfalgebra mit Quotient $\overline{H}$. Ist H separabel über R, so ist $\overline{H}$ separabel über R, und falls ${}_KH$ frei ist, ist auch K separabel über R.*

Beweis: Es gilt $\overline{H} = H/K^+H \simeq H \otimes_K R$ und sei f der folgende Ringhomomorphismus

$$f := 1 \otimes \varepsilon : \ H \simeq H \otimes_K K \longrightarrow H \otimes_K R.$$

f ist surjektiv. Da H separabel über R, ist H separabel über K nach [HS66, Prop 2.5(1)] und nach [HS66, Prop. 2.4] ist $f(H)$ separabel über $f(K)$. Aus $f(H) \simeq \overline{H}$ und $f(K) \simeq R$ folgt $\overline{H}$ separabel über R.
Um zu zeigen, daß K separabel über R ist, falls H über K frei ist, kann man den Beweis von [Mon92, 2.2.2(2)] auf unsere Situation übertragen. ■

Proposition 2.4.9. *Sei H eine projektive R-Hopfalgebra über einem lokalen Ring R, und sei K eine normale Unterhopfalgebra von H, ${}_RK$ endlich erzeugt mit Quotient $\overline{H}$. Dann ist H genau dann separabel über R, wenn K und $\overline{H}$ separabel über R sind.*

Beweis: Sind K und $\overline{H}$ separabel über R, dann ist nach 2.4.7 auch H separabel über R. Andererseits sei H separabel über R. Dann ist H auch endlich erzeugt, da H ein projektiver R-Modul ist. Nach [KS99, Lemma 5.2] ist H ein freier links (und rechts) K-Modul. Somit sind K und $\overline{H}$ separabel über R nach 2.4.8.
■

Kapitel 3

Lokalisierungen von Modulalgebren

In diesem Kapitel wird der Frage nachgegangen, inwieweit die Wirkung einer Hopfalgebra auf eine Modulalgebra auf einen Quotientenring dieser Modulalgebra erweitert werden kann. Dabei untersuchen wir zuerst torsionstheoretische Quotientenringe und wenden unsere Ergebnisse auf den maximalen Quotientenring einer Modulalgebra an. An dieser Stelle werden wir dann Eigenschaften von Neumann regulärer Modulalgebren betrachten. Danach werden wir einen zentralen Abschluß von H-semiprimen Modulalgebren konstruieren, der nach Konstruktion eine Modulalgebra sein wird. Schließlich vergleichen wir unsere Konstruktion mit der Konstruktion des Martindale Quotientenringes für Modulalgebren.

3.1 Quotientenringe von Modulalgebren

Sei A eine R-Algebra, I eine Teilmenge von A und $a \in A$. Dann setzt man $Ia^{-1} := \{b \in A \mid ba \in I\}$. Für Ia^{-1} findet man auch oft die Notation $(a : I)$ in der Literatur.

Definition 3.1.1. *Eine nicht-leere Menge $\mathcal{F}$ von Linksidealen eines Ringes A heißt* **Gabriel-Topologie***, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) $\forall I \in \mathcal{F}, \forall J \subseteq A : [I \subseteq J \Rightarrow J \in \mathcal{F}]$.

(ii) $\forall I, J \in \mathcal{F} : I \cap J \in \mathcal{F}$.

(iii) $\forall I \in \mathcal{F}, a \in A : Ia^{-1} \in \mathcal{F}$.

(iv) $\forall J \subseteq A : [\{\exists I \in \mathcal{F}, \forall a \in I : Ja^{-1} \in \mathcal{F}\} \Rightarrow J \in \mathcal{F}]$

Linksideale $I \in \mathcal{F}$ bezeichnet man auch als $\mathcal{F}$-dichte Linksideale.

Es ist bekannt, daß Gabriel-Topologien $\mathcal{F}$ auf A und erbliche Torsionstheorien τ in A-Mod in Bijektion zueinander stehen (siehe [Ste75, VI.5.1]). Jeder erblichen Torsionstheorie τ wird dabei die Gabriel-Topologie

$$\mathcal{F}_\tau := \{I \subseteq A \mid A/I \text{ ist } \tau\text{-torsion}\}$$

zugeordnet. Jeder Gabriel-Topologie $\mathcal{F}$ wird die, durch die Torsionsklasse

$$\{M \in A - Mod \mid \forall m \in M \ \ \mathrm{Ann}_R\,(m) \in \mathcal{F}\}$$

definierte erbliche Torsionstheorie $\tau_\mathcal{F}$ zugeordnet.

Definition 3.1.2. *Sei $\mathcal{F}$ eine Gabriel-Topologie auf A, sei τ die zu $\mathcal{F}$ assoziierte Torsionstheorie und sei M ein links A-Modul mit $\overline{M} := M/\tau(M)$. Sei $E(\overline{M})$ die injektive Hülle von $\overline{M}$ in A-Mod. Dann ist der Quotientenmodul $Q_\mathcal{F}(M)$ von M definiert als Zwischenmodul $\overline{M} \subseteq Q_\mathcal{F}(M) \subseteq E(\overline{M})$ mit $Q_\mathcal{F}(M)/\overline{M} = \tau(E(\overline{M})/\overline{M})$.*

Proposition 3.1.3. *Seien $A, \mathcal{F}$ und τ wie oben. Dann gilt für jeden τ-torsionsfreien links A-Modul M mit injektiver Hülle $E(M)$:*

$$Q_\mathcal{F}(M) = \{x \in E(M) \mid \exists I \in \mathcal{F} \ : \ Ix \subseteq M\}$$

Für $M = A$ ist $Q_\mathcal{F}(A)$ ein Ring. Wir sind daran interessiert, die H-Wirkung einer H-Modulalgebra A auf einen Quotientenring $Q_\mathcal{F}(A)$ fortzusetzen. Im speziellen Fall, wo der injektive Kogenerator der zu $\mathcal{F}$ gehörigen Torsionstheorie eine $A\#H$-Modulstruktur besitzt, können wir die H-Wirkung direkt fortsetzen:

Lemma 3.1.4. *Sei H eine R-Hopfalgebra mit bijektiver Antipode und A eine links H-Modulalgebra. Sei $M \in A\#H - Mod$ mit ${}_AM$ injektiv und $A \subseteq M$. Sei $\mathcal{F}$ die Gabriel-Topologie der von M koerzeugten Torsionstheorie in A-Mod. Dann ist $Q_\mathcal{F}(A)$ eine H-Modulalgebra mit A als Untermodulalgebra.*

Beweis: Ohne Einschränkung kann angenommen werden, daß M zyklisch über seinem Endomorphismenring ist. Sonst betrachte man den Modul $\tilde{M} := M^M = \prod_{x\in M} M_x$, mit $M_x = M$. $\tilde{M}$ ist injektiv und koerzeugt dieselbe Torsionstheorie wie M. In [Ste75, IX.3.2] wurde gezeigt, daß $\tilde{M}$ zyklisch über seinem Endomorphismenring ist. Sei $\psi : A \longrightarrow Q_\mathcal{F}(A)$ die Einbettung von A in $Q_\mathcal{F}(A)$ und sei $\eta : A \longrightarrow \mathrm{Biend}_{A-}\,(M)$ der kanonische Ringhomomorphismus $a \longmapsto L_a : [m \mapsto am]$. M ist ein treuer A-Modul und somit ist η injektiv. Nach Satz [Ste75, IX.3.3] gibt es einen Ringisomorphismus $\lambda : Q_\mathcal{F}(A) \simeq \mathrm{Biend}_{A-}\,(M)$, so daß $\lambda\psi = \eta$ gilt. In 1.3.15 haben wir gezeigt, daß $\mathrm{Biend}_{A-}\,(M)$ eine links H-Modulalgebrenstruktur besitzt, so daß η H-linear ist. Der Isomorphismus λ induziert eine H-Modulalgebrenstruktur auf $Q_\mathcal{F}(A)$ durch $hq := \lambda^{-1}(h\lambda(q))$. Aus der H-Linearität von η und aus $\psi = \lambda^{-1}\eta$ können wir nun folgern, daß auch ψ H-linear ist. Ebenfalls verifiziert man, daß $Q_\mathcal{F}(A)$ eine links H-Modulalgebra ist, da $\mathrm{Biend}_{A-}\,(M)$ eine Modulalgebra ist. ■

Um die H-Wirkung fortzusetzen, wäre es wünschenswert, daß $\mathcal{F}$ eine Basis aus H-stabilen Idealen besäße.

Definition 3.1.5. *Sei H eine R-Hopfalgebra, A eine links H-Modulalgebra und $\mathcal{F}$ eine Gabriel-Topologie auf A. Ist I ein Linksideal von A, so bezeichnen wir das größte H-stabile Linksideal, welches in I enthalten ist, mit I_H und definieren $\mathcal{F}_H := \{I \in \mathcal{F} \mid I_H \in \mathcal{F}\}$.*

Im Allgemeinen muß $\mathcal{F}_H$ keine Gabriel-Topologie mehr sein, da nicht klar ist, ob Ia^{-1} für ein $a \in A$ und ein $I \in \mathcal{F}_H$ wieder ein H-stabiles Linksideal enthält. Ist H endlich erzeugt als R-Modul so halten wir fest:

Lemma 3.1.6. *Sei H eine endlich erzeugte R-Hopfalgebra, A eine links H-Modulalgebra und sei $\mathcal{F}$ eine Gabriel-Topologie auf A. Dann ist $\mathcal{F}_H$ eine Gabriel-Topologie auf A.*

Beweis: Wir folgen dem Beweis von V.Selvan [Sel94, Lemma 2.1.7]. Eigenschaften (i) und (ii) von 3.1.1 folgen unmittelbar. Sei $\{h_1, \ldots, h_n\}$ ein R-Erzeugendensystem für H. Wir zeigen Eigenschaft 3.1.1(iii). Sei $I \in \mathcal{F}_H$ und sei $a \in A$. Wir müssen zeigen, daß Ia^{-1} ein H-stabiles Linksideal aus $\mathcal{F}$ enthält. Weil H endlich erzeugt ist und $I_H \in \mathcal{F}$ gilt:

$$K := \bigcap_{i=1}^{n} I_H(h_i a)^{-1} = \bigcap_{h \in H} I_H(ha)^{-1} \subseteq I_H(1 \cdot a)^{-1} = I_H a^{-1} \subseteq Ia^{-1}.$$

Da K ein endlicher Durchschnitt von Linksidealen aus $\mathcal{F}$ ist, gilt $K \in \mathcal{F}$. Ferner gilt $K(Ha) \subseteq I_H$. Sei $g \in H$, $1 \leq i \leq n$ und $k \in K$, dann gilt

$$(gk)(h_i a) = \sum_{(g)} g_1(k(S(g_2)h_i a)) \in H(K(Ha)) \subseteq I_H,$$

d.h. $gk \in I_H(h_i a)^{-1}$ für alle i. Somit ist $gk \in K$ für alle $g \in H$, d.h. K ist H-stabil. Damit ist $K \in \mathcal{F}_H$ und $K \subseteq (Ia^{-1})_H \subseteq Ia^{-1}$.
Eigenschaft (iv) : Sei J ein Linksideal von A, so daß es ein $I \in \mathcal{F}_H$ gibt mit $Ja^{-1} \in \mathcal{F}_H$ für alle $a \in I$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß I H-stabil ist. Sonst gehe man zu I_H über. Dann gilt: $(Ja^{-1})_H \in \mathcal{F}$ und $K := \bigcap_{i=1}^{n} (J(h_i a)^{-1})_H \in \mathcal{F}$ für alle $a \in I$.Es gilt $K(Ha) \subseteq J$, und, da alle $(J(h_i a)^{-1})_H$ H-stabil sind, ist auch K H-stabil. Als Produkt zweier H-stabiler Ideale ist auch KI H-stabil. Und aus $Ka \subseteq J$ für alle $a \in I$ folgt $Ka \subseteq KI \subseteq J_H$. Damit ist aber $K \subseteq J_H a^{-1}$ für alle $a \in I$. Da $\mathcal{F}$ eine Gabriel-Topologie ist, folgt $J_H \in \mathcal{F}$, d.h. $\mathcal{F}_H$ erfüllt Eigenschaft (iv). ■

Satz 3.1.7. *Sei H eine endlich erzeugte R-Hopfalgebra mit bijektiver Antipode, A eine links H-Modulalgebra und $\mathcal{F}$ eine Gabriel-Topologie auf A mit assoziierter Torsionstheorie τ. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *$Q_{\mathcal{F}}(A)$ ist eine links H-Modulalgebra, $\tau(A)$ ist H-stabil und $A/\tau(A)$ ist eine Untermodulalgebra von $Q_{\mathcal{F}}(A)$.*

(b) *$Q_{\mathcal{F}}(A) = Q_{\mathcal{F}_H}(A)$ und $\tau(A) = \tau_H(A)$.*

Beweis: $(a) \Rightarrow (b)$ Sei ${}_RH$ endlich erzeugt mit Erzeugendensystem $\{h_1, \ldots, h_n\}$. Sei $\overline{A} := A/\tau(A)$. Nach 3.1.6 ist $\mathcal{F}_H$ eine Gabriel-Topologie und da $\mathcal{F}_H$ ein Unterfilter von $\mathcal{F}$ ist, gilt $Q_{\mathcal{F}_H}(A) \subseteq Q_{\mathcal{F}}(A)$. Wir zeigen $Q_{\mathcal{F}}(A) \subseteq Q_{\mathcal{F}_H}(A)$. Für ein Element $q \in Q_{\mathcal{F}}(A)$ setzen wir

$$I := \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}(h_i q)^{-1}.$$

Dann gilt $I(Hq) \subseteq \overline{A}$ und I ist H-stabil. Folglich gilt $I \in \mathcal{F}_H$. Nun impliziert $Iq \subseteq \overline{A}$ nach Proposition 3.1.3 $q \in Q_{\mathcal{F}_H}(A)$.
$(b) \Rightarrow (a)$ Ohne Einschränkung kann $\tau(A) = \tau_H(A) = 0$ angenommen werden. Dann gilt:

$$Q_{\mathcal{F}}(A) = Q_{\mathcal{F}_H}(A) \simeq \varinjlim_{I \in \mathcal{F}_H} \mathrm{Hom}_{A-}(I, A) \simeq \varinjlim_{I_H \in \mathcal{F}_H} \mathrm{Hom}_{A-}(I_H, A).$$

Nach 1.3.14(1) sind alle $\mathrm{Hom}_{A-}(I_H, A)$ links H-Moduln, und somit ist der direkte Limes dieser H-Moduln ein links H-Modul. Die Modulalgebreneigenschaft folgt aus 1.3.14(2). ■

Definition 3.1.8 (Selvan [Sel94]). *Sei H eine R-Hopfalgebra. Eine Gabriel-Topologie $\mathcal{F}$ auf einer links H-Modulalgebra A heißt* H**-invariant***, wenn $\mathcal{F} = \mathcal{F}_H$ gilt.*

Eine Gabriel-Topologie ist H-invariant genau dann, wenn sie eine Basis von H-stabilen Linksidealen besitzt. Nach Satz 3.1.7 erlaubt eine H-invariante Gabriel-Topologie eine Fortsetzung der H-Wirkung auf den Quotientenring von A.

Um die Wirkung einer Hopfalgebra auf den Quotientenring einer Modulalgebra fortsetzen zu können wählt Montgomery eine andere Bedingung.

Definition 3.1.9 (Montgomery [Mon92]). *Sei H eine R-Hopfalgebra, A eine links H - Modulalgebra und $\mathcal{F}$ eine Gabriel-Topologie auf A. Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_R(A)$ heißt $\mathcal{F}$-stetig, wenn Urbilder von $\mathcal{F}$-dichten Linksidealen unter f wieder $\mathcal{F}$-dicht sind. Wir sagen, daß H* $\mathcal{F}$**-stetig** *auf A wirkt, falls für alle $h \in H$ der Endomorphismus $L_h : a \mapsto ha$ $\mathcal{F}$-stetig ist.*

In der Torsionstheorie sind Kompatibilitätsbedingungen bzgl. einer Torsionstheorie und eines Ringhomomorphismus schon länger studiert worden (siehe [Gol86], [Lou76], [BJV95]).

Definition 3.1.10 (Louden [Lou76]). *Wir sagen, eine Gabriel-Topologie $\mathcal{F}$ auf einer links H-Modulalgebra A ist* **kompatibel** *mit der Einbettung $A \hookrightarrow A\#H$, falls*

$$\tilde{\mathcal{F}} := \{I \subseteq A\#H \mid I \cap (A\#1) \in \mathcal{F}\}$$

eine Gabriel-Topologie auf $A\#H$ ist.

K.Louden nennt kompatible Torsionstheorien für Ringerweiterungen $R \subseteq S$ S-gut (siehe [Lou76, S. 517]). Wir folgen hier der Terminologie von [BJV95].

Satz 3.1.11. *Sei H eine R-Hopfalgebra, A eine links H-Modulalgebra und $\mathcal{F}$ eine Gabriel-Topologie auf A. Betrachte folgende Aussagen:*

(i) $\mathcal{F}$ ist H-invariant.

(ii) H wirkt $\mathcal{F}$-stetig auf A.

(iii) $\mathcal{F}$ ist kompatibel mit der Einbettung $A \hookrightarrow A\#H$.

Dann gilt $(i) \Rightarrow (ii)$ und ihre Umkehrung, wenn $_RH$ endlich erzeugt ist. Ist die Antipode von H bijektiv, so gilt $(ii) \Rightarrow (iii)$.

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$ Ist $h \in H$ und $I \in \mathcal{F}$, so ist $I_H \in \mathcal{F}$ und damit $hI_H \subseteq I_H \subseteq I$, d.h. $I_H \subseteq Ih^{-1} \in \mathcal{F}$.
Ist $_RH$ endlich erzeugt und sei $\{h_1 \ldots, h_n\}$ ein R-Erzeugendensystem, dann ist für alle $I \in \mathcal{F}$ auch $J := \bigcap_{i=1}^n Ih_i^{-1} \in \mathcal{F}$. Ferner prüft man leicht nach, daß J H-stabil ist, d.h. $J \subseteq I_H \in \mathcal{F}$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sei τ die zu $\mathcal{F}$ assoziierte Torsionstheorie, M ein links $A\#H$-Mod und $m \in \tau(M)$. Dann existiert ein $I \in \mathcal{F}$ mit $Im = 0$. Sei $h \in H$ und $\Delta(h) = \sum_{k=1}^n h_k \otimes h_k'$. Für alle $1 \leq k \leq n$ gibt es, nach Voraussetzung, ein $I_k \in \mathcal{F}$ mit $S^{-1}(h_k')I_k \subseteq I$. Für alle $x \in J := I_1 \cap \cdots \cap I_n \in \mathcal{F}$ gilt:

$$x(hm) = \sum_{k=1}^n h_k[(S^{-1}(h_k')x)m] \in \sum_{k=1}^n h_k(Im) = 0.$$

Dies impliziert $J(hm) = 0$ und somit $hm \in \tau(M)$, da $J \in \mathcal{F}$ ist. Der Torsionsuntermodul $\tau(M)$ ist also H-stabil und somit ein $A\#H$-Modul. In [Lou76, Theorem 2.5] wurde gezeigt, daß τ genau dann kompatibel mit der Einbettung $A \hookrightarrow A\#H$ ist, wenn $\tau(M)$ für jeden $A\#H$-Modul ein links $A\#H$-Modul ist. ■

Der Folgende Satz ist ein spezieller Fall von [Lou76, Theorem 2.7]:

Satz 3.1.12. *Sei H eine R-Hopfalgebra, A eine links H-Modulalgebra und $\mathcal{F}$ eine Gabriel-Topologie auf A. Angenommen $A\#H$ ist flach als rechts A-Modul und $\mathcal{F}$ ist kompatibel zur Einbettung $A \hookrightarrow A\#H$, dann ist $Q_{\mathcal{F}}(A)$ ein links $A\#H$-Modul.*

Beweis: Nach [Lou76, Theorem 2.7] ist $Q_{\mathcal{F}}(A) \simeq Q_{\tilde{\mathcal{F}}}(A) \in A\#H$-Mod. Dies induziert auch eine links $A\#H$-Modulstruktur auf $Q_{\mathcal{F}}(A)$. ■

3.2 Maximale Quotientenringe und Von Neumann reguläre Modulalgebren

Sei $Q_{max}(A)$ der maximale Quotientenring einer H-Modulalgebra A. Bekanntlich ist $Q_{max}(A)$ links selbst-injektiv und von Neumann regulär, falls A links nicht-singulär war. Es stellt sich die Frage, wann die H-Wirkung von A auf $Q_{max}(A)$ fortgesetzt werden kann. In [Rum93] behauptet D.Rumynin, daß dies stets der Fall sei, wenn H eine halbeinfache Hopfalgebra über einem Körper ist. Wie Rumynin jedoch später bestätigte, ist eine Lücke in seinem Beweis. Im Folgenden werden wir Rumynins Ansatz erläutern. Sei $E(A)$ die injektive Hülle von A als $A\#H$-Modul. Die grundlegende Idee in [Rum93] ist, die von $E(A)$ koerzeugte Torsionstheorie in A-Mod mit der Lambek Torsionstheorie in A-Mod, also der von der injektiven Hülle $\widehat{A}$ von A in A-Mod koerzeugten Torsionstheorie, zu vergleichen. Lemma 3.2.2 impliziert, daß $E(A)$ injektiv in A-Mod ist, wenn $A\#H_A$ flach ist.

Lemma 3.2.1. *Sei H eine, als R-Modul flache, R-Hopfalgebra. Für jede links H-Modulalgebra A ist ${}_AA\#H$ flach. Hat H eine bijektive Antipode, so ist auch $A\#H$ flach als rechts A-Modul.*

Beweis: Sei $M \in Mod - A$. Dann gilt $M \otimes_A A\#H \simeq M \otimes_R H$ als R-Moduln. Da $- \otimes_R H$ ein exakter Funktor ist, ist auch $- \otimes_A A\#H$ exakt. Besitzt H eine bijektive Antipode, so gilt $A\#H \simeq H \otimes_R A$ als rechts A-Moduln (siehe [Mon92, 7.2.11] oder [Gru96, 1.17]). Ist nun $M \in A - Mod$, dann gilt

$$A\#H \otimes_A M \simeq H \otimes_R A \otimes_A M \simeq H \otimes_R M$$

als R-Moduln. Da $H \otimes_R -$ ein exakter Funktor ist, ist also auch $A\#H \otimes_A -$ exakt. ■

In Zusammenhang mit der Flachheit der Hopfalgebra, steht folgendes nützliche Lemma.

Lemma 3.2.2. *Sei $S \subseteq T$ eine Ringerweiterung mit T_S flach, dann ist jeder injektive links T-Modul auch ein injektiver links S-Modul.*

Beweis: Sei M ein injektiver links T-Modul und sei folgendes Diagramm in S-Mod gegeben:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & K \\ & M & \end{tikzcd}$$

Tensorieren wir mit $T \otimes_S -$, so erhalten wir ein Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_T \otimes id"] & K \arrow[d, "1_T \otimes id"] \\
0 \arrow[r] & T \otimes_S L \arrow[r, "id \otimes f"] \arrow[d, "id \otimes g"] & T \otimes_S K \\
& T \otimes_S M \arrow[d, "\psi"] & \\
& M &
\end{tikzcd}$$

wobei $\psi : T \otimes_S M \longrightarrow M$ die T-lineare Abbildung $\psi(t \otimes m) = tm$ bezeichnet. Da M ein injektiver T-Modul ist, gibt es eine T-lineare Abbildung $h : T \otimes_S K \longrightarrow M$ mit $(id \otimes f)h = (id \otimes g)\psi$. Ferner gilt für alle $x \in L$:

$$(x)(1_T \otimes id)(id \otimes g)\psi = 1_T(x)g = (x)g,$$

d.h. $g = (1_T \otimes id)(id \otimes g)\psi$. Definieren wir $h' := (1_T \otimes id)h : K \longrightarrow M$, so gilt $fh' = g$. Ferner ist h' auch S-linear, da $(1_T \otimes id)$ und h S-linear waren. Somit ist M als links S-Modul injektiv. ■

Für den Rest dieses Abschnittes sei folgende Notation festgelegt: Sei H eine, als R-Modul flache, R-Hopfalgebra mit bijektiver Antipode, A eine links H-Modulalgebra. Sei $\widehat{A}$ die injektive Hülle von A in A-Mod, $\mathcal{D}$ die Gabriel-Topologie der Lambek Torsionstheorie, $E(A)$ die injektive Hülle von A in $A\#H$-Mod, $\mathcal{L}$ die Gabriel-Topologie der von $E(A)$ koerzeugten Torsionstheorie.

Es sei an die Notation $\mathcal{F}_H$ erinnert (siehe 3.1.5).

Proposition 3.2.3. *Mit obigen Bezeichnungen gelten folgende Aussagen:*

(1) $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}$

(2) $\mathcal{L}_H = \mathcal{D}_H$.

(3) $Q_{\mathcal{L}}(A)$ *ist eine links* H*-Modulalgebra mit Untermodulalgebra* A.

Beweis: (1) Nach Lemma 3.2.1 ist $A\#H_A$ flach, und nach 3.2.2 ist $E(A)$ ein injektiver A-Modul. Damit kann die Einbettung von A nach $E(A)$ zu einem Homomorphismus φ von $\widehat{A}$ nach $E(A)$ hochgehoben werden, dessen Kern trivial sein muß, da A wesentlich in $\widehat{A}$ liegt. Die Injektivität von $\widehat{A}$ läßt φ zerfallen, so daß $\widehat{A}$ isomorph zu einem direkten Summanden von $E(A)$ ist. Damit folgt unmittelbar $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}$.

(2) Die Inklusion $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}$ impliziert gerade $\mathcal{L}_H \subseteq \mathcal{D}_H$. Sei nun $I \in \mathcal{D}_H$ und $f \in \mathrm{Hom}_{A-}(A/I, E(A))$. Sei $(1)f = q \in E(A)$, dann gilt $Iq = 0$ und auch $I(Hq) = 0$, denn für alle $h \in H, x \in I$ gilt

$$x(hq) = \sum_{(h)} h_2[(S^{-1}(h_1)x)q] = 0,$$

da I H-stabil ist. Sei $K := A\#Hq$ und $k := \sum_i a_i(h_iq) \in A \cap K$ mit $a_i \in A$ und $h_i \in H$. Da $\mathcal{D}$ eine Gabriel-Topologie ist, gibt es ein Ideal $J \in \mathcal{D}$ mit $0 \neq Jk \subseteq I$ und $0 \neq Ja_i \subseteq I$ für alle i. Dies ist aber ein Widerspruch zu $Jk = \sum_i Ja_i(h_iq) \subseteq I(Hq) = 0$. Somit ist $K \cap A = 0$, und, da A wesentlicher $A\#H$-Untermodul von $E(A)$ ist, folgt $K = 0$. Damit müssen aber auch q bzw. f gleich Null sein. Folglich ist $I \in \mathcal{L}_H$.
(3) folgt aus 3.1.4.
■

Um die H-Wirkung einer H-Modulalgebra A auf ihren maximalen Quotientenring fortzusetzen, versuchte Rumynin in [Rum93] $Q_{max}(A) = Q_{\mathcal{L}}(A)$ zu zeigen. Wir zeigen, daß, falls die H-Wirkung auf $Q_{max}(A)$ fortgesetzt werden kann, $Q_{max}(A) = Q_{\mathcal{L}}(A)$ folgt.

Satz 3.2.4. *Sei H eine endlich erzeugte, flache R-Hopfalgebra mit bijektiver Antipode und A eine links H-Modulalgebra. Der maximale Quotientenring $Q_{max}(A)$ ist genau dann eine links H-Modulalgebra mit A als Untermodulalgebra, wenn $Q_{max}(A) = Q_{\mathcal{L}}(A)$ gilt.*

Beweis: Sei $\{h_1, \ldots, h_n\}$ ein Erzeugendensystem für H. $\mathcal{L}_H$ ist ein Unterfilter von $\mathcal{L}$, weshalb $Q_{\mathcal{L}_H}(A)$ ein Unterring von $Q_{\mathcal{L}}(A)$ ist. Sei $q \in Q_{\mathcal{L}}(A)$. Da nach 3.1.4 $Q_{\mathcal{L}}(A)$ eine H-Modulalgebra ist, gilt mit 3.1.7 $Q_{\mathcal{L}}(A) = Q_{\mathcal{L}_H}(A)$. Aus 3.2.3(2) folgt nun $\mathcal{D}_H = \mathcal{L}_H$ und somit $Q_{\mathcal{L}}(A) = Q_{\mathcal{D}_H}(A)$. Es gilt $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}$ und $Q_{\mathcal{L}}(A) \subseteq Q_{\mathcal{D}}(A) = Q_{max}(A)$. Ferner ist A bzgl. beider Torsionstheorien torsionsfrei. Damit folgt aus 3.1.7, daß $Q_{max}(A)$ genau dann eine links H-Modulalgebra ist, wenn $Q_{max}(A) = Q_{\mathcal{D}_H}(A)$ gilt. Wie oben gezeigt gilt $Q_{\mathcal{D}_H}(A) = Q_{\mathcal{L}}(A)$, so daß die Behauptung folgt. ■

Bemerkung 3.2.5. *Ist R semilokal, so ist die Anforderung: "H ist flach und endlich erzeugt als R-Modul mit bijektiver Antipode" äquivalent zu "H ist endlich erzeugt und projektiv als R-Modul". Denn nach [Laz74] ist ein endlich erzeugter, flacher Modul M über einem kommutativen Ring R projektiv, falls M/JM projektiv ist als R/J-Modul (mit $J = \mathrm{Jac}\,(R)$). Nach einem Satz von Pareigis (siehe [Par71]), ist die Antipode einer, als R-Modul, projektiven Hopfalgebra bijektiv.*

Kann die Hopf-Wirkung auf den maximalen Quotientenring $Q_{max}(A)$ einer nicht-singulären Modulalgebra fortgesetzt werden, so werden wir sehen, daß auch $A\#H$ nicht-singulär ist und $Q_{max}(A\#H) \simeq Q_{max}(A)\#H$ gilt. Dazu benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 3.2.6. *Sei $S \subseteq T$ eine Ringerweiterung mit T von Neumann regulär, ${}_ST$ injektiv und $\mathrm{Hom}_S\,(T/S, T) = 0$. Dann ist S links nicht-singulär und $T \simeq Q_{max}(S)$ als Ringe.*

Beweis: Aus der Eigenschaft $\mathrm{Hom}_S(T/S, T) = 0$ und ${}_ST$ injektiv schließen wir, daß S ein rationaler S-Untermodul von T ist, d.h. T ist ein links Quotientenring im Sinne von [Fai67, Kapitel 8]. Nach Satz [Fai67, 8.3] ist S links nicht-singulär, da T von Neumann regulär ist. Somit ist $Q_{max}(S) = E(S)$ als links S-Moduln (siehe [Fai67, 8.1+2]). Da T ein links Quotientenring von S ist, folgt aus der Maximalität von $Q_{max}(S)$, daß es eine Einbettung $\iota : T \hookrightarrow Q_{max}(S)$ gibt mit $\iota\mid_S = id_S$ (siehe [GW89, Ex. 4ZI]). Damit ist T isomorph zu einem wesentlichen, injektiven S-Untermodul von $Q_{max}(S) = E(S)$, und somit muß $T \simeq Q_{max}(S)$ gelten. ■

Satz 3.2.7. *Sei H eine endlich erzeugte projektive R-Hopfalgebra mit Links-Integral t und sei A eine links H-Modulalgebra, so daß $\varepsilon(t)$ invertierbar ist in A und die H-Wirkung auf $Q_{max}(A)$ fortgesetzt werden kann. Ist A links nicht-singulär, dann ist $A\#H$ links nicht-singulär mit $Q_{max}(A\#H) \simeq Q_{max}(A)\#H$.*

Beweis: Nach Annahme ist A links nicht-singulär. Somit ist der maximale Quotientenring $Q := Q_{max}(A) = \widehat{A}$ von Neumann regulär und links selbst-injektiv. Die Invertierbarkeit von $\varepsilon(t)$ in A (und somit auch in Q) impliziert die Separabilität von $Q\#H$ über Q. Wie wir in Satz 3.2.9 sehen werden, ist $Q\#H$ von Neumann regulär. Aus der Voraussetzung, daß H ein endlich erzeugter projektiver R-Modul ist, folgern wir, daß $Q\#H$ ein endlich erzeugter projektiver Q-Modul ist und somit insbesondere injektiv. Die Separabilität von $Q\#H$ über Q impliziert aber, daß $Q\#H$ relativ halbeinfach über Q ist, und somit ist $Q\#H$ auch injektiv als $Q\#H$-Modul, d.h. $Q\#H$ ist links selbst-injektiv. Wenden wir den exakten Funktor $-\otimes_R H$ auf die exakte Folge

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow Q \longrightarrow Q/A \longrightarrow 0$$

an, so erhalten wir insbesondere $Q\#H/A\#H \simeq (Q/A)\otimes_R H$ als links A-Modul. Da ${}_RH$ ein direkter Summand eines freien Moduls R^k mit $k \geq 1$ ist und da A dicht in Q liegt, folgt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{A\#H}(Q\#H/A\#H, Q\#H) &\subseteq \mathrm{Hom}_{A-}((Q/A)\otimes_R H, Q\otimes_R H)\\ &\subseteq \mathrm{Hom}_{A-}(((Q/A)^k, Q^k) = 0.\end{aligned}$$

Somit ist $A\#H$ ein dichter $A\#H$-Untermodul in $Q\#H$. Aus der Invertierbarkeit von $\varepsilon(t)$ in A folgt mit 2.3.6 die Separabilität von $A\#H$ über A. Dies impliziert insbesondere, daß $A\#H$ relativ halbeinfach über A ist. Daraus können wir schließen, daß $Q\#H$ ein injektiver $A\#H$-Modul ist, denn $Q\#H$ ist, als A-Modul, ein direkter Summand von Q^k und damit injektiver A-Modul. Nach Lemma 3.2.6 ist $A\#H$ links nicht-singulär und $Q_{max}(A\#H) \simeq Q_{max}(A)\#H$. ■

Falls die Wirkung einer Hopfalgebra H auf den von Neumann regulären Quotientenring Q einer nicht-singulären Modulalgebra A fortgesetzt werden kann, so haben wir in Satz 3.2.7 gesehen, daß auch $Q\#H$, als maximaler Quotientenring des nicht-singulären Ringes $A\#H$, von Neumann regulär ist, sofern $A\#H$ über A separabel war. Wir wollen nun genauer untersuchen, wann sich die von Neumann Regularität auf das Smash-Produkt überträgt. Ist G eine Gruppe und A ein Ring, dann ist bekannt, daß der Gruppenring $A[G]$ genau dann von Neumann regulär ist, falls G lokal endlich, A von Neumann regulär und die Ordnung jeder endlichen Untergruppe in A invertierbar ist (siehe z.B. [Lam76, Appendix 2, Prop. 2]), wobei eine Gruppe lokal endlich heißt, wenn alle endlich erzeugten Untergruppen, endlich (als Menge) sind. In [AAd95] wird der Frage nachgegangen, wann ein Schiefgruppenring $R * G$ von Neumann regulär ist. Dort werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, aber eine vollständige Kennzeichnung wie für Gruppenringe bleibt aus. In diesem Abschnitt werden wir mit Hilfe der Ergebnisse aus I.3 hinreichende Bedingungen dafür geben, wann das Smash Produkt $A\#H$ von Neumann regulär ist.

Proposition 3.2.8. *Sei $S \subseteq T$ eine Ringerweiterung, so daß T relativ halbeinfach über S ist. Ist S von Neumann regulär, dann ist auch T von Neumann regulär.*

Beweis: Dies zeigt man wie in [Wis96, 20.12]. ■

Ist A eine links H-Modulalgebra, dann sagen wir, daß H endlich auf A wirkt, falls das Bild des durch die H-Modulstruktur induzierten Ringhomomorphismus $H \longrightarrow \mathrm{End}_R(A)$ ein endlich erzeugter R-Modul ist.

Satz 3.2.9. *Sei H eine R-Hopfalgebra und A eine von Neumann reguläre links H-Modulalgebra. Angenommen es gibt ein $t \in \int_r$ und ein zentrales Element $z \in A$, so daß $S(t)z = 1_A$. Dann gilt:*

(1) Wirkt H lokal endlich auf A, dann ist A ein regulärer Modul in $\sigma[{}_{A\#H}A]$.

(2) Ist H kokommutativ oder $\varepsilon(t)$ invertierbar in A oder H über R separabel, dann ist $A\#H$ von Neumann regulär.

In beiden Fällen ist A^H von Neumann regulär und $()^H : \sigma[{}_{A\#H}A] \longrightarrow A^H$ eine Äquivalenz.

Beweis: Aus der Voraussetzung $S(t)z = 1$ folgt mit 2.3.6, daß A ein $(A\#H, A)$-halbeinfacher $A\#H$-Modul ist. Ferner ist $S(t)$ ein Links-Integral in H, weshalb A ein (zentrales) Spur-1 Element besitzt und somit mit 2.2.9(1) ein projektiver $A\#H$-Modul ist.
(1) Sei I ein H-stabiles Linksideal von A, welches ein endlich erzeugter $A\#H$-Untermodul ist. Wirkt H lokal endlich auf A, so ist I auch endlich erzeugt als A-Modul. Damit ist I aber, als A-Modul, ein direkter Summand von A, denn A war als von Neumann regulär vorausgesetzt. Nach Voraussetzung war A ein $(A\#H, A)$-halbeinfacher Modul. Somit ist I auch ein direkter Summand von A

als $A\#H$-Modul. Nach [Wis91, 37.4] ist A ein regulärer $A\#H$-Modul.
(2) Aus 2.3.6 und 2.3.12 folgt aus allen drei Eigenschaften, daß $A\#H$ separabel über A ist. Mit 3.2.8 folgt die Behauptung.
Sei $A\#H$ von Neumann regulär. Da A isomorph zu einem direkten Summanden von $A\#H$ ist, ist A wie im ersten Fall ein regulärer $A\#H$-Modul. In beiden Fällen ist also A ein projektiver, regulärer $A\#H$-Modul. Da A ein zyklischer, projektiver, regulärer links $A\#H$-Modul ist, folgt nach [Wis91, 37.8], daß A Generator in $\sigma[{}_{A\#H}A]$ und somit $()^H \simeq \mathrm{Hom}_{A\#H}(A, -) : \sigma[{}_{A\#H}A] \to A^H - Mod$ eine Äquivalenz ist. ■

Mit 3.2.9 kann man nun [AAd95, Theorem 1.3] verallgemeinern. Ist A eine H-Modulalgebra und K eine Unterhopfalgebra von H, so ist A auch eine K-Modulalgebra.

Folgerung 3.2.10. *Sei H eine kokommutative R-Hopfalgebra und A eine links H-Modulalgebra. Angenommen jede endliche Teilmenge von H ist in einer, als R-Modul endlich erzeugten, Unterhopfalgebra K von H enthalten, so daß A ein zentrales Spur-1 Element als K-Modulalgebra besitzt. Ist A von Neumann regulär, dann auch $A\#H$.*

Beweis: Sei $x := \sum_{i=1}^{k} a_i\#h_i \in A\#H$. Nach Voraussetzung gibt es eine Unterhopfalgebra K von H mit ${}_RK$ endlich erzeugt und $h_i \in K$ für alle i. Nach Voraussetzung besitzt A ein zentrales Spur-1 Element z zu einem Links-Integral $t \in K$. Da H und somit K kokommutativ ist, ist die Antipode von K bijektiv, d.h. $t' := S^{-1}(t)$ ist ein Rechts-Integral und es gilt $S(t')z = tz = 1_A$. Ist A von Neumann regulär, dann ist nach 3.2.9 auch $A\#K$ von Neumann regulär und es gibt ein Element $y \in A\#K \subseteq A\#H$ mit $xyx = x$ (es gilt $A\#K \subseteq A\#H$, da nach Definition einer Unterhopfalgebra K ein reiner R-Untermodul von H ist). Damit ist $A\#H$ von Neumann regulär, denn zu jedem Element $x \in A\#H$ gibt es ein Element $y \in A\#H$ mit $xyx = x$. ■

Bemerkung 3.2.11. *Die Aussage [AAd95, Theorem 1.3] besagt für eine Gruppe G, die auf einen Ring A wirkt: Ist G eine lokal endliche Gruppe und A von Neumann regulär, so daß A zu jeder endlichen Untergruppe $K \subseteq G$ ein Element $z \in Z(A)$ besitzt mit $\sum_{k\in K} z^k = 1_A$, dann ist $A * G$ von Neumann regulär.*
Um diesen Satz in unsere Sprache zu übersetzen, wählt man $R = \mathbb{Z}$ und $H = \mathbb{Z}G$. Dann ist H eine kokommutative (freie) R-Hopfalgebra. Ist G lokal endlich, so ist jede endliche Menge von G in einer endlichen Untergruppe K von G enthalten und RK ist eine endlich erzeugte freie Unterhopfalgebra von H. Die Bedingung $\sum_{k\in K} z^k = 1_A$ für ein $z \in Z(A)$ besagt gerade, daß A ein zentrales Spur-1 Element bzgl. K besitzt. Damit folgt [AAd95, Theorem 1.3] aus obigem Satz.

Im Folgenden wollen wir untersuchen, wann der Fixring A^H einer H-Modulalgebra A von Neumann regulär ist. Zuerst eine einfache Beobachtung die [AAd95, Prop 2.8] verallgemeinert:

Folgerung 3.2.12. *Sei H eine R-Hopfalgebra, A eine links H-Modulalgebra. Angenommen A ist isomorph zu einem Linksideal von $A\#H$ und ein Generator in $A\#H$-Mod. Dann ist $A\#H$ genau dann von Neumann regulär, wenn A^H von Neumann regulär ist.*

Beweis: Sei I ein endlich erzeugtes Linksideal in einem Ring S, so daß $IS = S$ gilt, d.h. I ist Generator in S-Mod. Nach Voraussetzung ist S von Neumann regulär, so daß I projektiv ist. Somit ist auch $\mathrm{End}_S(I)$ von Neumann regulär. Da I Generator ist, ist I_T endlich erzeugt projektiv mit $T := \mathrm{End}_S(I)$. Ist T von Neumann regulär, so ist auch $\mathrm{End}(I_T) \simeq S$ von Neumann regulär. Angewandt auf unsere Situation ist $S = A\#H, I = A$ und $\mathrm{End}_{A\#H}(A) \simeq A^H$. ■

Bemerkung 3.2.13. *Die Bedingung an A in [AAd95, Prop 2.8] ist, daß A eine G-Galoiserweiterung von A^G ist. Dies ist äquivalent dazu, daß A ein Generator in $A * G$-Mod ist und außerdem muß dann G schon endlich sein, d.h. A ist isomorph zu einem Linksideal von $A * G$ (siehe [AAd95, S. 173]). Über einem Körper ist obige Bedingung an A gerade gleich bedeutend damit, daß $A^H \subseteq A$ eine H^*-Galoiserweiterung ist.*

Es sei an die Definition eines semi-projektiven R-Moduls M erinnert: M ist **semi-projektiv**, wenn $\mathrm{Hom}_R(M, Mf) = \mathrm{End}_R(M)f$ für alle $f \in \mathrm{End}_R(M)$. Aus dem Isomorphismus $()^H \simeq \mathrm{Hom}_{A\#H}(A, -)$ folgt, daß eine links H-Modulalgebra A genau dann semi-projektiver $A\#H$-Modul ist, wenn $(Ax)^H = A^H x$ für alle $x \in A^H$. Wir kennzeichnen nun, wann der Fixring A^H einer links H-Modulalgebra A von Neumann regulär ist.

Proposition 3.2.14. *Sei H eine R-Hopfalgebra und A eine links H-Modulalgebra. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) A^H ist von Neumann regulär.

(b) A ist semi-projektiver $A\#H$-Modul und jedes von einem H-invarianten Element erzeugte Linksideal ist ein direkter Summand von A als $A\#H$-Modul.

Beweis: $(a) \Rightarrow (b)$ Nach [Wis96, 5.9] ist A intern-projektiver $A\#H$-Modul, also insbesondere semi-projektiv. Die Linksideale Ax mit $x \in A^H$ sind gerade die Bilder unter $A\#H$-Endomorphismen. Satz [Wis96, 7.6] besagt, daß die Bilder der Endomorphismen eines Moduls mit von Neumann regulärem Endomorphismenring direkte Summanden sind. Damit folgt die Behauptung aus dem Isomorphismus $A^H \simeq \mathrm{End}_{A\#H}(A)$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sei $0 \neq x \in A^H$. Dann ist nach Voraussetzung Ax ein direkter Summand von A als $A\#H$-Modul, d.h. es gibt ein H-stabiles Linksideal I von A mit $A = Ax \oplus I$. Dann gilt auch:

$$A^H = (1)(\mathrm{Hom}_{A\#H}(A, Ax) \oplus \mathrm{Hom}_{A\#H}(A, I)) = (Ax)^H \oplus I^H = A^H x \oplus I^H,$$

wobei in letzter Gleichung ausgenutzt wird, daß A semi-projektiv ist. Damit ist jedes zyklische Linksideal von A^H ein direkter Summand, d.h. A^H ist von Neumann regulär. ■

Der Arbeit [GOPV81] folgend untersuchen wir, wann A^H selbst-injektiv und von Neumann regulär ist, wenn A diese Eigenschaften besitzt. Als Konsequenz aus 3.2.2 erhalten wir:

Folgerung 3.2.15. *Sei A eine links H-Modulalgebra mit A^H von Neumann regulär. Ist A links selbst-injektiv, dann ist auch A^H links selbst-injektiv.*

Folgerung 3.2.16. *Sei H eine R-Hopfalgebra und A eine links H-Modulalgebra, so daß es ein Rechts-Integral $t \in \int^r$ gibt und ein Element $z \in Z(A)$ mit $S(t)z = 1$. Ist A von Neumann regulär und links selbst-injektiv, dann ist auch A^H von Neumann regulär und links selbst-injektiv.*

Beweis: Da A ein Spur-1 Element enthält, ist A nach 2.2.9 projektiver $A\#H$-Modul, also insbesondere semi-projektiv. Nach 3.2.9 ist A ein $(A\#H, A)$-halbeinfacher $A\#H$-Modul. Ist A von Neumann regulär und ist $x \in A^H$, dann ist Ax ein direkter Summand als A-Modul. Die Voraussetzung, daß A ein $(A\#H, A)$-halbeinfacher $A\#H$-Modul ist, impliziert, daß Ax, als $A\#H$-Modul, ein direkter Summand ist. Nach 3.2.14 ist A^H von Neumann regulär und nach 3.2.15 ist A^H auch links selbst-injektiv. ■

3.3 Der Zentrale Abschluß einer Modulalgebra

In diesem Abschnitt sei A eine R-Algebra und $B \subseteq \mathrm{End}_R(A)$ eine R-Unteralgebra, die die Multiplikationsalgebra $M(A)$ von A enthält. Dann ist $A \subseteq B$ eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur. Man beachte, daß die B-invarianten Elemente M^B für einen links B-Modul M schon A-zentrierend sind. Insbesondere gilt $A^B \subseteq Z(A)$.

Definition 3.3.1. *A heiße B-**semiprim**, falls es keine nilpotenten B-stabilen Ideale enthält und B-**prim**, falls das Produkt zweier nicht-trivialer B-stabiler Ideale nicht-trivial ist.*

Für $B = M_H(A)$ spricht man einfach von H-primen, bzw. H-semiprimen Modulalgebren. Es sei an die Definition eines rationalen (oder dichten) Untermoduls sowie an die Definition eines polyformen Moduls erinnert (siehe [Wis96, 10.8]): Ein Untermodul N eines Moduls M heißt **rational**, falls M/N ein Torsionsmodul in der von der selbst-injektiven Hülle $\widehat{M}$ koerzeugten Torsionstheorie in $\sigma[M]$ ist. M heißt **polyform**, falls jeder wesentliche Untermodul von M rational ist.

Lemma 3.3.2. *Sei A B-semiprim, dann sind folgende Aussagen für ein B-stabiles Ideal I von A äquivalent:*

(a) I ist ein rationaler B-Untermodul von A.

(b) I ist ein wesentliches B-stabiles Ideal von A.

(c) $l_B(I) := \sum\{{}_BK \subseteq {}_BA \mid KI = 0\} = 0$.

(d) $r_B(I) := \sum\{{}_BK \subseteq {}_BA \mid IK = 0\} = 0$.

Beweis: $(a) \Rightarrow (b)$ rationale Untermoduln sind stets wesentlich;
$(b) \Rightarrow (a)$ Sei K ein B-stabiles Ideal von A, das I enthält, und $f \in \mathrm{Hom}_B(K/I, A)$. Dann ist $f(K/I)$ ebenfalls ein B-stabiles Ideal von A. Somit ist aber $N := f(K/I) \cap I$ ein nilpotentes Ideal mit $N^2 = 0$, denn $N^2 \subseteq f(K/I)I = f(KI/I) = 0$, da f rechts A-linear und I ein Ideal ist. Damit gilt $N = 0$, denn A war B-semiprim, und folglich ist $f(K/I) = 0$, denn I war wesentlich. Dies zeigt $\mathrm{Hom}_B\,(K/I, A) = 0$, d.h. I ist rational in A.
$(b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$ Für alle B-stabilen Ideale K gilt $(K \cap I)^2 \subseteq KI \subseteq K \cap I$. Angenommen I ist wesentlich. Ist K ein B-stabiles Ideal mit $KI = 0$, dann ist also auch $(K \cap I)^2 = 0$. Da A B-semiprim ist, folgt $K \cap I = 0$. Nun ist I aber wesentlich und damit gilt $K = 0$, d.h. $l_B(I) = 0$. Andererseits sei $l_B(I) = 0$ und K ein B-stabiles Ideal mit $K \cap I = 0$, dann wäre auch $KI = 0$ und somit $K \subseteq l_B(I) = 0$. Damit ist I wesentlich. Analog zeigt man $(b) \Leftrightarrow (d)$. ■

Folgerung 3.3.3. *Seien A und B wie oben.*

(1) Ist A B-semiprim, dann ist A ein polyformer B-Modul und A^B ist reduziert.

(2) Ist A B-prim, dann ist A ein monoformer B-Modul und A^B ist ein Integritätsbereich.

(3) A ist genau dann B-semiprim und uniformer B-Modul, wenn A B-prim ist.

Beweis: (1) Aus Lemma 3.3.2[$(a) \Leftrightarrow (b)$] folgt, daß A polyform ist. Sei $x \in A^B \subseteq Z(A)$ nilpotent vom Grad $k \geq 1$, dann gilt für $I = Ax$, gerade $I^k = (Ax)^k = Ax^k = 0$. I ist ein B-stabiles nilpotentes Ideal und somit gleich 0, d.h. $x = 0$. Dies zeigt, daß A^B reduziert ist.
(2) Sei A B-prim und I ein nicht-triviales B-stabiles Ideal von A. Dann gilt

$l_B(I)I = 0 \Rightarrow l_B(I) = 0$, und somit ist I nach Lemma 3.3.2 ein rationaler B-Untermodul von A. Gilt $xy = 0$ für $x, y \in A^B$, so gilt auch $(Ax)(Ay) = 0$ und damit $x = 0$ oder $y = 0$, d.h. A^B ist Integritätsbereich.
(3) Ist A B-prim, so ist A monoform und somit uniform als B-Modul. Andererseits sei A B-semiprim und uniform als B-Modul und seien I, J B-stabile Ideale mit $IJ = 0$, dann ist auch $(I \cap J)^2 = 0$. Nun ist A B-semiprim, weshalb $I \cap J = 0$ gelten muß. Andererseits ist A uniform, so daß $I = 0$ oder $J = 0$ folgt. Damit ist A ist B-prim. ■

Semiprime Ringe können dadurch gekennzeichnet werden, daß sie subdirekte Produkte von Primringe sind. Wir werden eine analoge Aussage für B-semiprime Algebren zeigen.

Definition 3.3.4. *Ein B-stabiles Ideal $P \subseteq A$ heißt* **prim**, *wenn für je zwei B-stabile Ideale I und J, $IJ \subseteq P$ schon $I \subseteq P$ oder $J \subseteq P$ impliziert. Ein B-stabiles Ideal P heißt* **semiprim**, *wenn $I^2 \subseteq P$ auch schon $I \subseteq P$ impliziert für alle B-stabile Ideale I von A.*

A ist B-prim (bzw. B-semiprim) genau dann, wenn 0 ein primes (bzw. semiprimes) B-stabiles Ideal ist. Ist I ein B-stabiles Ideal von A, dann gibt es einen Ringhomomorphismus $\Theta : B \longrightarrow \operatorname{End}_R(A/I)$ mit $M(A/I) = \Theta(M(A))$. Setzt man $B/I := \Theta(B)$, dann ist $A/I \subseteq M(A/I) \subseteq B/I$ wieder eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur. Mit dieser Notation beweist man leicht das nachfolgende Lemma:

Lemma 3.3.5. *Seien A und B wie oben und sei P ein B-stabiles Ideal von A. Dann ist P genau dann prim (bzw. semiprim), wenn A/P B/P-prim (bzw. B/P-semiprim) ist.*

Die Idee für den nachfolgenden Beweis stammt aus [MS99, 8.13].

Proposition 3.3.6. *Ein B-stabiles Ideal von A ist genau dann B-semiprim, wenn es Durchschnitt von primen B-stabilen Idealen ist.*

Beweis: $\Rightarrow$: Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß A B-semiprim ist. Sei

$$I := \bigcap \{P \mid P \text{ ist ein primes } B\text{-stabiles Ideal von } A\}.$$

Angenommen $I \neq 0$. Dann gibt es ein $0 \neq x_1 \in I$. Sei $I_1 := B \cdot x_1$. so gilt $0 \neq I_1 \subseteq I$. Aus der Voraussetzung A B-semiprim folgt $(I_1)^2 \neq 0$. Somit enthält $(I_1)^2$ ein Element $x_2 \neq 0$. Sei $I_2 := B \cdot x_2$. Wiederum ist $(I_2)^2 \neq 0$, d.h. wir können ein Element $0 \neq x_3 \in (I_2)^2$ wählen. Führen wir diesen Prozess fort, so erhalten wir eine Familie von Elementen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ungleich Null und eine absteigende Kette von B-stabilen Idealen ungleich Null:

$$I \supseteq I_1 \supseteq (I_1)^2 \supseteq I_2 \supseteq (I_2)^2 \supseteq \cdots \supseteq (I_{m-1})^2 \supseteq I_m \supseteq \ldots$$

Betrachten wir nun folgende Menge von B-stabilen Idealen:

$$\mathcal{Z} := \{P \subseteq A \mid P \text{ ist } B\text{-stabiles Ideal und für alle } m : I_m \not\subseteq P\}.$$

$\mathcal{Z}$ ist nicht leer, denn 0 ist in $\mathcal{Z}$ enthalten. Sei nun $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots$ eine aufsteigende Kette von B-stabile Idealen in $\mathcal{Z}$. Angenommen es gibt ein $m \geq 1$ mit $I_m \subseteq \bigcup P_i$. Nach Definition gilt $I_m = B \cdot x_m$ und somit $x_m \in \bigcup P_i$. Somit gibt es ein $k \geq 1$ mit $x_m \in P_k$ und damit $I_m \subseteq P_k$. Ein Widerspruch zu $P_k \in \mathcal{Z}$. Somit ist $\bigcup P_i \in \mathcal{Z}$ und Zorn's Lemma kann angewandt werden. Sei P ein maximales Element von $\mathcal{Z}$. Wir zeigen nun, daß P ein primes B-stabiles Ideal ist. Seien K, L zwei B-stabile Ideale mit $KL \subseteq P$. Ohne Einschränkung können wir $P \subseteq K$ und $P \subseteq L$ annehmen. Angenommen $L \neq P \neq K$, dann gilt aufgrund der Maximalität von P $K, L \notin \mathcal{Z}$, d.h. es gibt $k, l \geq 1$ mit $I_k \subseteq K$ und $I_l \subseteq L$. Ohne Einschränkung sei $l \leq k$, dann ist $I_{k+1} \subseteq (I_k)^2 \subseteq I_k I_l \subseteq KL \subseteq P$, ein Widerspruch zu $P \in \mathcal{Z}$. Folglich gilt $P = L$ oder $P = K$, d.h. P ist primes B-stabiles Ideal. Dies impliziert aber $I \subseteq P$, also $I_m \subseteq P$ für alle m - ein Widerspruch. Somit muß der Durchschnitt I aller primen B-stabilen Ideale gleich Null sein.
Die Umkehrung ist klar, denn sei $I^2 = 0$ für ein B-stabiles Ideal, dann ist I in jedem primen B-stabilen Ideal enthalten und damit gleich Null. ■

Aus 3.3.6 folgt, daß A genau dann B-semiprim ist, wenn A subdirektes Produkt von B/I-primen Algebren A/I ist.

Im Folgenden werden wir die Konstruktion des erweiterten Zentroids und des zentralen Abschlusses, wie sie in [Wis96, Kapitel 32] ausgeführt worden ist, auf unsere Situation $A \subseteq M(A) \subseteq B \subseteq \mathrm{End}_R(A)$ verallgemeinern.

Satz 3.3.7. *Sei A B-semiprim und sei $\widehat{A}$ die selbst-injektive Hülle von A als B-Modul. Dann gilt:*

(1) Die Abbildung $\Psi : \mathrm{End}_B(\widehat{A}) \longrightarrow \widehat{A}^B$ mit $\Psi(f) := (1_A)f$ ist ein Isomorphismus und macht $\widehat{A}^B$ zu einem kommutativen, selbst-injektiven, von Neumann regulärer Ring mit Unterring A^B.

(2) Es gibt eine Bijektion zwischen folgenden Mengen:

(i) den wesentlich abgeschlossenen B-stabilen Idealen von A;

(ii) den zentralen Idempotenten von $\widehat{A}$;

(iii) den zentralen Idempotenten von $\widehat{A}^B$.

(3) $\widehat{A}^B$ ist genau dann ein Körper, wenn A B-prim ist.

(4) $\widehat{A}^B$ ist genau dann endliches Produkt von Körpern, wenn A als B-Modul endliche Goldie Dimension hat.

(5) Ist A^B groß in A, so ist $\widehat{A}^B = Q_{max}(A^B)$ und A ist nicht-singulär als A^B-Modul

Beweis: (1) Wir wissen aus 3.3.3, daß A ein polyformer B-Modul ist. Somit folgt

$$\mathrm{End}_B\,(\widehat{A}) = \mathrm{Hom}_B\,(A,\widehat{A}) \simeq \widehat{A}^B$$

Für ein $f \in \mathrm{End}_B\,(\widehat{A})$ gilt: $f = 0$ genau dann, wenn $(1_A)f = 0$. Durch Ψ erhält $\widehat{A}^B$ also eine Ringstruktur mit $(1)f(1)g = (1)(f \circ g)$ für alle $f, g \in \mathrm{End}_B\,(\widehat{A})$. Ferner sei $I := (A)f^{-1} \cap (A)g^{-1} \cap A$. Dann gilt für alle $x, y \in I$

$$(xy)(f \circ g) = (x(y)f)g = (x)g(y)f = ((x)gy)f = (xy)(g \circ f).$$

Somit ist $f \circ g - g \circ f \in \mathrm{Hom}_B\,(\widehat{A}/I^2, \widehat{A})$. Als Durchschnitt von zwei wesentlichen Untermoduln, ist I selber ein wesentliches B-stabiles Ideal und es gilt somit $l_B(I) = 0$ (siehe 3.3.2). Damit ist aber auch I^2 ein wesentlicher Untermodul von A, denn es gilt $l_B(I^2) = l_B(I) = 0$ und nach 3.3.2 ist I^2 damit rational. Da $\widehat{A}$ polyform ist, folgt $f \circ g = g \circ f$ und $\mathrm{End}_B\,(\widehat{A}) \simeq \widehat{A}^B$ ist kommutativ. Als Endomorphismenring eines selbst-injektiven polyformen Moduls ist $\widehat{A}^B$ selbst-injektiv und von Neumann regulär und besitzt A^B als Unterring (siehe [Wis96, 11.2]).
(2) folgt aus [Wis96, 12.7];
(3) und (4) folgen aus (2);
(5) Nach [Wis96, 11.5(1)] ist $\widehat{A}^B = Q_{max}(A^B)$. Sei $a \in A$ und I ein wesentliches Ideal von A^B mit $aI = 0$. Sei $J := (B \cdot a)^B = (B \cdot a) \cap A^B$, so ist $JI = 0$ und damit $J = 0$, da A^B nicht-singulär ist. Nach Voraussetzung ist A^B groß. Damit folgt $B \cdot a = 0$ und somit $a = 0$, d.h. A ist nicht-singulär als A^B-Modul. ■

Satz 3.3.8. *Sei A B-semiprim und sei $\widehat{A}$ die selbst-injektive Hülle von A als B-Modul. Dann gilt:*

(1) $\widehat{A} = Q_{\mathcal{D}}(A)$ ist der torsionstheoretische Quotientenring bzgl. der Lambek Torsionstheorie $\mathcal{D}$ in $\sigma[_BA]$ und $\widehat{A}^B \simeq \varinjlim\{\mathrm{Hom}_B\,(I,A) |_B I \trianglelefteq {}_BA\}$.

(2) $\widehat{A} = A\mathrm{Hom}_B\,(A,\widehat{A}) \simeq A\widehat{A}^B$ wird zu einem Ring durch folgende Multiplikation

$$\forall a, b \in A; s, t \in \widehat{A}^B : (as) \cdot (bt) := (ab)st,$$

der A als Unterring enthält.

Sei $\widehat{B} :=< B, \widehat{A}^B > \subseteq \mathrm{End}_R\,(\widehat{A})$. Dann ist $\widehat{A} \subseteq M(\widehat{A}) \subseteq \widehat{B}$ eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur und es gilt:

(3) $\widehat{A}$ ist $\widehat{B}$-semiprim und ein selbst-injektiver $\widehat{B}$-Modul.

(4) $\widehat{A}$ ist nicht-singulärer $\widehat{A}^B$-Modul.

(5) Ist A B-prim, so ist $\widehat{A}$ $\widehat{B}$-prim.

Man nennt $\widehat{A}$ den **zentralen Abschluß** *von A bzgl. B und $\widehat{A}^B$ das* **erweiterte Zentrum** *von A bzgl. B.*

Beweis: (1) Aus der Beobachtung, daß A ein polyformer B-Modul ist, folgt aus [Wis96, 9.13] $\widehat{A} = Q_{\mathcal{D}}(A)$. Aus [Wis96, 9.17] folgt die Darstellung für den Endomorphismenring.
(2) Da jeder injektive Modul in $\sigma[{}_BA]$ A-erzeugt ist, gilt $\widehat{A} = A\mathrm{Hom}_B\,(A, \widehat{A})$. Letzterer Term ist isomorph zum Endomorphismenring von $\widehat{A}$ durch [Wis96, 9.17]. Wir verifizieren die Wohldefiniertheit oben angegebener Multiplikation: Sei $\sum_{i=1}^n a_i s_i = 0$ mit $a_i \in A, s_i \in \widehat{A}^B$, dann gilt für alle $bt \in A\widehat{A}^B$ aufgrund der Definition und der Tatsache, daß die s_i und t rechts A-linear sind

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i s_i\right) \cdot (bt) = \sum_{i=1}^n (a_i b) s_i t = \left(\sum_{i=1}^n a_i s_i\right) tb = 0$$

Aus der Kommutativität von $\widehat{A}^B$ (3.3.7(1)) und der links A-Linearität der s_i folgt

$$(bt) \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i s_i\right) = \sum_{i=1}^n (ba_i) t s_i = b\left(\sum_{i=1}^n a_i s_i\right) t = 0.$$

Die Assoziativität und Distributivität der Multiplikation folgt aus der Assoziativität und Distributivität von A und $\widehat{A}^B$. A ist ein Unterring von $A\widehat{A}^B = \widehat{A}$ durch $a \longmapsto a1_A$, da A polyform ist und somit $\mathrm{Hom}_B\,(\widehat{A}/A, \widehat{A}) = 0$ gilt.
(3) Nach Definition ist $\widehat{A}$ ein links B-Modul, so daß die B-Wirkung durch einen Ringhomomorphismus $\Theta : B \longrightarrow \mathrm{End}_R\,(\widehat{A})$ dargestellt werden kann. Da $\widehat{A}$ den treuen B-Modul A enthält, ist $\widehat{A}$ selber treu, so daß Θ injektiv ist und wir B mit $\Theta(B)$ identifizieren können. Sei $\widehat{B} := < B, \widehat{A}^B >$. Aus der Voraussetzung $M(A) \subseteq B$ folgt $M(\widehat{A}) = M(A)\widehat{A}^B \subseteq \widehat{B}$. Damit ist $\widehat{A} \subseteq \widehat{B}$ eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur. Sei I ein nicht-triviales $\widehat{B}$-stabiles Ideal in $\widehat{A}$, dann ist I ein B-Untermodul von $\widehat{A}$ und $0 \neq I \cap A$, da A wesentlicher B-Untermodul von $\widehat{A}$ ist. $I \cap A$ ist somit ein nicht-triviales B-stabiles Ideal und in I enthalten. Damit kann I nicht nilpotent sein, denn sonst wäre $I \cap A$ ein nilpotentes B-stabiles Ideal, was der Voraussetzung widersprechen würde, daß A B-semiprim ist.
Jeder $\widehat{B}$-Endomorphismus von $\widehat{A}$ ist auch B-linear. Andererseits ist jedes $f \in \mathrm{End}_B\,(\widehat{A}) \simeq \widehat{A}^B$ aufgrund der Kommutativität von $\widehat{A}^B$ auch $\widehat{B}$-linear. Somit gilt $\mathrm{End}_{\widehat{B}}\,(\widehat{A}) = \mathrm{End}_B\,(\widehat{A})$ und aus der Selbst-Injektivität von $\widehat{A}$ als B-Modul, folgt die Selbst-Injektivität von $\widehat{A}$ als $\widehat{B}$-Modul.
(4) folgt aus [Wis96, 11.11(5)].
(5) Seien I, J nicht-triviale $\widehat{B}$-stabile Ideale in $\widehat{A}$. Dann sind diese auch B-stabil. Nach Definition ist A wesentlicher B-Untermodul von $\widehat{A}$ und besitzt somit einen nicht-leeren Schnitt mit I bzw. J. Damit sind $(I \cap A)$ und $(J \cap A)$ B-stabile Ideale von A, deren Produkt in IJ enthalten ist. Nach Voraussetzung ist A B-prim, weshalb $IJ \subseteq (I \cap A)(J \cap A) \neq 0$ gilt. Damit ist $\widehat{A}$ B-prim. ■

Bemerkung 3.3.9. *Eigenschaft (4) verallgemeinert [CKW00, Theorem 3.7.].*

Dort wird gezeigt, daß der H-invariante Martindale Quotientenring Q_H einer H-Modulalgebra nicht-singulär ist über $Z(Q_H)^H$.

Alle obigen Ergebnisse können jetzt also auf $B = M_H(A)$ für eine H-Modulalgebra A und eine R-Hopfalgebra H angewandt werden. Anstelle von B-prim bzw. B-semiprim spricht man in diesem Fall von H-prim bzw. H-semiprim. Man prüft leicht nach, daß $A^B = Z(A) \cap A^H$ gilt. Anstelle von A^B schreiben wir $Z(A)^H$.

Folgerung 3.3.10. *Sei H eine R-Hopfalgebra und A eine H-semiprime H-Modulalgebra. Sei $\widehat{A}$ die selbst-injektive Hülle von A als $M_H(A)$-Modul. Dann gelten die folgenden Eigenschaften.*

(1) A ist ein polyformer $M_H(A)$-Modul, subdirektes Produkt von H-primen Modulalgebren, und $Z(A)^H$ ist reduziert.

(2) $\widehat{A}$ ist eine H-semiprime H-Modulalgebra, selbst-injektiver $M_H(\widehat{A})$-Modul und nicht-singulärer Modul über dem selbst-injektiven von Neumann regulärer Ring $Z(\widehat{A})^H$.

(3) Ist $Z(A)^H$ groß in A, so ist $Z(\widehat{A})^H = Q_{max}(Z(A)^H)$ und A ist nicht-singulär als $Z(A)^H$-Modul

Beweis: (1) folgt aus 3.3.3 und 3.3.6.
(2) folgt aus 3.3.8 und 3.3.7. Beachte, daß

$$M_H(\widehat{A}) =< M_H(A), Z(\widehat{A})^H >= \widehat{M_H(A)} \subseteq \mathrm{End}_R\,(\widehat{A}).$$

Wir müssen nur noch nachprüfen, daß $\widehat{A}$ eine H-Modulalgebra ist. Als H-Modul ist $\widehat{A} = (A)\mathrm{Hom}_{M_H(A)}\,(A, \widehat{A}) = AZ(\widehat{A})^H$ und die H-Struktur ist gegeben durch $h \cdot (as) = (h \cdot a)s$. Seien $as, bt \in \widehat{A}$ und $h \in H$, dann gilt:

$$h\cdot[(as)(bt)] = (h\cdot(ab))st = \sum_{(h)}(h_1\cdot a)(h_2\cdot b)st = \sum_{(h)}[(h_1\cdot a)s][(h_2\cdot b)t] = \sum_{(h)}[h_1\cdot(as)][h_2\cdot(bt)].$$

(3) folgt aus 3.3.7. ■

Folgerung 3.3.11. *Sei A eine H-semiprime H-Modulalgebra über einer R-Hopfalgebra H. Dann gelten folgende Aussagen:*

1. *Die wesentlich abgeschlossenen H-stabilen Ideale von A, die zentralen Idempotenten von $\widehat{A}$ und die zentralen Idempotenten von $Z(\widehat{A})^H$ stehen in Bijektion zueinander.*

2. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

   (a) Jede direkte Summe von nicht-trivialen H-stabilen Idealen in A ist endlich.

(b) $\widehat{A}$ *ist ein endliches Produkt von* H*-primen* H*-Modulalgebren.*

(c) $Z(\widehat{A})^H$ *ist ein endliches Produkt von Körpern.*

3. A *ist genau dann* H*-prim, wenn* $Z(\widehat{A})^H$ *ein Körper ist.*

Bemerkung 3.3.12. *In [Mat91] konstruiert Matczuk den zentralen Abschluß einer* H*-primen Modulalgebra* A *direkt als die von* A *und* $Z(Q_H)^H$ *erzeugte Unteralgebra von Cohens Martindale Quotientenring* Q_H*. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß seine Konstruktion mit der unsrigen zusammenfällt.*

Definition 3.3.13. *Eine* H*-Modulalgebra* A *heiße* H**-zentral abgeschlossen**, *wenn* $\widehat{A} = A$ *gilt.*

Aus 3.3.8(4) folgt:

Folgerung 3.3.14. *Sei* A *eine* H*-semiprime* H*-Modulalgebra, dann ist* $\widehat{A}$ H*-zentral abgeschlossen.*

Bemerkung 3.3.15. *Ist* A H*-prim, so ist* $\widehat{A}$ H*-prim und* $Z(\widehat{A})^H$ *ein Körper. Dann kann man zu* $\bar{H} := H \otimes_R Z(\widehat{A})^H$ *übergehen, so daß* $\widehat{A}$ *eine* $\bar{H}$*-prime* $\bar{H}$*-Modulalgebra über dem Körper* $k := Z(\widehat{A})^H$ *ist. War* H/R *separabel, so ist auch* $\bar{H}/k$ *separabel und damit endlich dimensional und halbeinfach. Man kann also Fragen bzgl.* H*-prime Modulalgebren über separable Hopfalgebren* H *auf* H*-prime* H*-zentral abgeschlossene Modulalgebren über halbeinfachen Hopfalgebren über Körpern* k *reduzieren.*

3.4 Der Martindale Quotientenring einer Modulalgebra

Der Martindale-Quotientenring einer semiprimen Algebra A ist wie folgt definiert: Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Ideale mit trivialem linken (und rechten) Annulator. Der linke bzw. rechte Martindale-Quotientenring von A wird definiert als

$$Q^l(A) := \varinjlim\{\mathrm{Hom}_{A-}(I, A) | I \in \mathcal{F}\}$$

$$Q^r(A) := \varinjlim\{\mathrm{Hom}_{-A}(I, A) | I \in \mathcal{F}\}$$

Die Elemente von $Q^r(A)$ können als Äquivalenzklassen von Homomorphismen aufgefaßt werden. Seien I und J zwei Ideale in $\mathcal{F}$ und $f : I \to A$ und $g : J \to A$ zwei Homomorphismen. f und g sind äquivalent, falls f und g auf $I \cap J$ übereinstimmen. Wir schreiben $[f : I \to A]$ für eine solche Äquivalenzklasse. $Q^r(A)$ wird durch folgende Operationen zu einem Ring:

$$[f : I \longrightarrow A] + [g : J \longrightarrow A] := [f + g : I \cap J \longrightarrow A]$$

$$[f : I \longrightarrow A] \cdot [g : J \longrightarrow A] := [g \circ f : IJ \longrightarrow A]$$

für alle $[f : I \longrightarrow A]$ und $[g : J \longrightarrow A] \in Q^r(A)$. A wird durch $a \mapsto [L_a : A \to A]$ zu einem Unterring von $Q^r(A)$, wobei L_a die Linksmultiplikation mit dem Element a bezeichnet. Um die Konstruktion auf H-Modulalgebren zu übertragen, beschränkte sich Cohen in [Coh85] auf den Filter von H-stabilen Idealen von A mit trivialem linken und rechten Annullator. Wir betrachten hier folgende Konstruktion: Sei $\mathcal{F}_H$ der Filter der H-stabilen Ideale von A mit trivialem linken Annullator und setze

$$Q^r_H(A) := \varinjlim \{\mathrm{Hom}_{-A}\,(I, A) | I \in \mathcal{F}_H\}$$

$$Q^l_H(A) := \varinjlim \{\mathrm{Hom}_{A-}\,(I, A) | I \in \mathcal{F}_H\}$$

Die nachfolgende Beobachtung wurde zuerst von M.Cohen in [Coh85] gezeigt. Wir geben einen kurzen Beweis.

Proposition 3.4.1. *Sei H eine R-Hopfalgebra und A eine links H-Modulalgebra. Dann ist $Q^r_H(A)$ eine H-Modulalgebra, die A als Untermodulalgebra enthält. Hat H eine bijektive Antipode, so ist auch $Q^l_H(A)$ eine H-Modulalgebra.*

Beweis: Nach Lemma 1.3.13 ist $\mathrm{Hom}_{-A}\,(I, A) \in H$-Mod für alle H-stabilen Ideale I. Als direkter Limes von links H-Moduln, ist somit auch $Q^r_H(A) \in H$-Mod. Ferner impliziert gerade Lemma 1.3.13(3) die Bedingung einer links H-Modulalgebra für $Q^r_H(A)$. A ist eine H-Untermodulalgebra von $Q^r_H(A)$ und die Wirkung von H auf $Q^r_H(A)$, eingeschränkt auf A, ist dieselbe wie die von H, denn für alle $h \in H$ und $a, x \in A$ gilt:

$$\begin{aligned}(h \cdot L_a)(x) &= \sum_{(h)} h_1 \cdot L_a(S(h_2) \cdot x)\\ &= \sum_{(h)} h_1 \cdot (a(S(h_2) \cdot x))\\ &= \sum_{(h)} (h_1 \cdot a)(h_2 S(h_3) \cdot x) = (h \cdot a)x = L_{h \cdot a}(x).\end{aligned}$$

für alle $h \in H, a, x \in A$.
Falls H eine bijektive Antipode besitzt, dann trägt $\mathrm{Hom}_{A-}\,(I, A)$ eine links H-Modulstruktur und man zeigt analog, daß $Q^l_H(A)$ eine links H-Modulalgebra ist. ■

Lemma 3.4.2. *Sei A eine links H-Modulalgebra Dann gilt:*

$$\begin{aligned} Z(Q^r_H(A)) &\simeq \varinjlim \{\mathrm{Hom}_{M(A)}\,(I, A) \mid I \in \mathcal{F}_H\} \quad \textit{und}\\ Q^r_H(A)^H &\simeq \varinjlim \{\mathrm{Hom}_{H-A}\,(I, A) \mid I \in \mathcal{F}_H\}.\end{aligned}$$

Ist die Antipode von H bijektiv, so gilt:

$$\begin{aligned} Z(Q^l_H(A)) &\simeq \varinjlim \{\mathrm{Hom}_{M(A)}\,(I, A) \mid I \in \mathcal{F}_H\} \quad \textit{und}\\ Q^l_H(A)^H &\simeq \varinjlim \{\mathrm{Hom}_{A\#H}\,(I, A) \mid I \in \mathcal{F}_H\}.\end{aligned}$$

Beweis: Sei $[q : I \longrightarrow A] \in Z(Q^r_H(A))$. Dann gilt für alle $a \in A$ und $i \in I$

$$q(ai) = q \circ L_a(i) = L_a \circ q(i) = aq(i).$$

Also ist q links A-linear und damit ein $M(A)$-Homomorphismus. Umgekehrt sei $[q : I \longrightarrow A] \in Q^r_H(A)$ ein $M(A)$-Homomorphismus. Sei $[p : J \longrightarrow A] \in Q^r_H(A)$, dann gilt für alle $x \in J, y \in I$:

$$q(p(xy)) = q(p(x)y) = p(x)q(y) = p(xq(y)) = p(q(xy)).$$

Somit gilt $qp = pq$ eingeschränkt auf $JI \in \mathcal{F}_H$. Dies impliziert $[q : I \longrightarrow A] \in Z(Q^r_H(A))$.
Sei $[q : I \longrightarrow A] \in Q^r_H(A)^H$. Dann gilt für alle $h \in H$ und $x \in I$:

$$q(h \cdot x) = \sum_{(h)} \varepsilon(h_1)q(h_2 \cdot x) = \sum_{(h)} (h_1 \cdot q)[h_2 \cdot x] = \sum_{(h)} h_1 \cdot q[S(h_2)h_3 \cdot x] = h \cdot q(x)$$

d.h. q ist H-linear und damit $q \in \mathrm{Hom}_{H-A}(I, A)$. Umgekehrt sei $q : I \longrightarrow A$ eine links H-lineare rechts A-lineare Abbildung. Für alle $h \in H$ und $x \in I$ gilt:

$$(h \cdot q)[x] = \sum_{(h)} h_1 \cdot q(S(h_2) \cdot x) = \left(\sum_{(h)} h_1 S(h_2) \right) q(x) = \varepsilon(h)q(x),$$

d.h. $[q : I \longrightarrow A] \in Q^r_H(A)^H$. Besitzt H eine bijektive Antipode, so zeigt man die Aussagen für $Q^l_H(A)$ analog. ■

Folgerung 3.4.3. *Sei A eine H-Modulalgebra . Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) $Z(Q^r_H)^H \simeq \varinjlim \{\mathrm{Hom}_{M_H(A)}(I, A) \mid I \in \mathcal{F}_H\}$

(2) Ist A H-semiprim, so gilt $Z(Q^r_H)^H \simeq Z(\widehat{A})^H$.

(3) Hat H eine bijektive Antipode, so gilt $Z(Q^l_H)^H \simeq Z(Q^r_H)^H$.

Beweis: (1) folgt aus 3.4.2.
(2) folgt aus 3.3.8 und 3.3.2, da für A H-semiprim

$$\mathcal{F}_H = \{I \subseteq A \mid \ I \text{ ist ein wesentliches } H\text{-stabiles Ideal}\}$$

gilt.
(3) folgt wiederum aus 3.4.2. ■

Matczuk definiert den zentralen Anschluß einer Modulalgebra A, als den von A und $Z(Q)^H$ erzeugten Unterring des Martindale Quotientenringes $Q := Q^r_H(A)$ von A. Wir zeigen nun, daß Matczuks Definition mit der unseren übereinstimmt.

Satz 3.4.4. *Sei A eine H-Modulalgebra und $Q := Q^r_H(A)$ der rechte Martindale Quotientenring von A. Ist A H-semiprim, so ist der zentrale Abschluß $\widehat{A}$ als H-Modulalgebra isomorph zu der von A und $Z(Q)^H$ aufgespannte Unteralgebra von Q:*

$$\widehat{A} \simeq < A, Z(Q)^H > \subseteq Q$$

Beweis: Nach 3.3.8 ist $\widehat{A} = AZ(\widehat{A})^H$. Der Isomorphismus $Z(\widehat{A})^H \simeq Z(Q)^H$ aus 3.4.3 ist wie folgt gegeben: zu jedem $x \in Z(\widehat{A})^H$ definieren wir $L_x : A \longrightarrow \widehat{A}$ mit $a \longmapsto xa$. L_x ist $M_H(A)$-linear, da $x \in Z(\widehat{A})^H$. Sei $I_x := (A)L_x^{-1} \cap A$, dann ist I_x ein wesentliches H-stabiles Ideal. Nach 3.4.2 gilt $[L_x : I_x \longrightarrow A] \in Z(Q)^H$. Ist andererseits $[q : I \longrightarrow A] \in Z(Q)^H$, dann gibt es eine eindeutige Erweiterung $\overline{q} \in \mathrm{End}_{M_H(A)}(\widehat{A}) \simeq Z(\widehat{A})^H$. Wir haben Ringisomorphismen

$$\begin{array}{ll} Z(\widehat{A})^H \longrightarrow Z(Q)^H, & x \mapsto [L_x : I_x \longrightarrow A] \quad \text{und} \\ Z(Q)^H \longrightarrow Z(\widehat{A})^H & [q : I \longrightarrow A] \mapsto \overline{q}(1_A). \end{array}$$

Sei $\tilde{A} := < A, Z(Q)^H > \subseteq Q$ die von A und $Z(Q)^H$ aufgespannte Unteralgebra in Q. Dann definieren wir

$$\Phi : \widehat{A} \longrightarrow \tilde{A} \quad \text{mit} \quad ax \longmapsto [L_{ax} : I_x \longrightarrow A].$$

Wir zeigen, daß Φ wohldefiniert ist. Sei $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ in $\widehat{A}$ mit $a_i \in A, x_i \in Z(\widehat{A})^H$. Wir setzen $I := I_{x_1} \cap \cdots \cap I_{x_n}$, wobei die Ideale I_{x_k}, wie oben, als $I_{x_k} := (A)L_{x_k}^{-1} \cap A$ definiert sind. Als endlicher Durchschnitt von wesentlichen H-stabilen Idealen ist I wieder ein wesentliches H-stabiles Ideal von A. Für alle $b \in I$ gilt dann:

$$\sum_{i=1}^n L_{a_i x_i}(b) = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) b = 0.$$

Da $I \in \mathcal{F}_H$, folgt $\Phi(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = [\sum_{i=1}^n L_{a_i x_i} : I \longrightarrow A] = 0$. Dies zeigt, daß Φ wohldefiniert ist. Aus der Definition von $\tilde{A}$ und dem obigen Isomorphismus zwischen $Z(\widehat{A})^H$ und $Z(Q)^H$ folgt die Surjektivität von Φ. Für ein Element $q = \sum_{i=1}^n a_i x_i \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ verschwindet $f := \sum_{i=1}^n L_{a_i} \circ L_{x_i}$ auf dem wesentlichen H-stabilen Ideal $I = I_{x_1} \cap \cdots \cap I_{c_n}$. Damit ist aber $f \in \mathrm{Hom}_{M_H(A)}(A/I, \widehat{A})$ und damit gleich Null, denn A ist ein polyformer $M_H(A)$-Modul. Dies impliziert insbesondere $q = f(1_A) = 0$. Φ ist also injektiv. Da die L_x im Zentrum von Q liegen, sieht man, daß Φ ein Ringhomomorphismus ist. Ferner, da H auf $Z(\widehat{A})^H$ und $Z(Q)^H$ trivial wirkt, ist Φ also auch H-linear, d.h. Φ ist ein Isomorphismus von H-Modulalgebren. ■

Kapitel 4

Semiprime Smash-Produkte

In diesem Kapitel wird der Frage nachgegangen, ob das Smash Produkt $A\#H$ einer semiprimen Modulagebra A und einer halbeinfachen Hopfalgebra H selbst wieder semiprim ist. Im ersten Abschnitt werden modultheoretische Folgerungen für A als $A\#H$-Modul untersucht, falls $A\#H$ semiprim ist. Schließlich wird obige Frage im letzten Abschnitt positiv beantwortet unter der zusätzlichen Annahme, daß A kommutativ und H kohalbeinfach ist. Weitere Fälle werden am Ende dieses Kapitels betrachtet.

Sei A eine Algebra und G eine endliche Gruppe, die auf A wirkt. Wenn A kein Einselement besitzt, stellt sich die Frage, ob es immer Fixelemente in A gibt. Ein klassischer Satz von Bergman und Isaacs besagt, daß falls $|G|$ kein Nullteiler in A und der Fixring A^G nilpotent ist, die Algebra A selber schon nilpotent sein muß (siehe [BI73]). Als Korollar erhalten wir unter obiger Situation: Ist A semiprim, dann ist A^G semiprim und hat mit jedem G-stabilen Linksideal (oder G-stabilen Rechtsideal) einen von Null verschiedenen Durchschnitt. Unter Benutzung dieses Korollares zeigten Fischer und Montgomery in [FM78], daß in der obigen Situation der Schiefgruppenring $A * G$ semiprim ist, falls A semiprim ist. Analog dazu zeigten Cohen und Rowen in [CR83], daß das Smash-Produkt $A\#(kG)^*$ einer semiprimem G-graduierte k-Algebra A semiprim ist (mit G einer endliche Gruppe und k einem Körper).

Nimmt man Gruppenwirkungen und Graduierungen als Standardbeispiele für Modulalgebren bzw. Komodulalgebren, so stellt sich die Frage, ob die Einzelergebnisse von Fischer und Montgomery bzw. von Cohen und Rowen allgemeiner für Modulalgebren über endlich dimensionalen Hopfalgebren gelten. In [Coh85] stellt Cohen genau diese

Frage: Ist für eine halbeinfache k-Hopfalgebra H und eine semiprime links H-Modulalgebra A das Smash Produkt $A\#H$ semiprim ?

Montgomery greift diese Frage in ihrem Buch [Mon92] auf und stellt sie allgemeiner für verschränkte Produkte. Cohen wiederholt ihre Frage auf einer Konferenz in Murcia 1998. Bis heute scheint es keine vollständige Antwort auf diese Frage zu geben. Die Voraussetzung "H halbeinfach" ist dabei natürlich. Denn ist H eine endlich dimensionale Hopfalgebra über einem Körper k, so daß für alle semiprimen H-Modulalgebren A das Smash-Produkt $A\#H$ semiprim ist, dann ist auch $k\#H \simeq H$ semiprim. Eine endlich dimensionale semiprime Algebra ist aber halbeinfach.

Beim Studium dieser Frage, erweist sich eine Beobachtung von Amitsur als sehr nützlich:

Satz 4.0.5. *Sei (S, M, N, T) ein Morita-Kontext mit bilinearen Abbildungen $(,) : M \otimes_T N \longrightarrow S$ und $[,] : N \otimes_S M \longrightarrow T$, so daß folgende Bedingung erfüllt ist*

$$\text{für alle } 0 \neq t \in T : (Mt, N) \neq 0.$$

Ist S prim bzw. semiprim, dann ist auch T prim bzw. semiprim.

Beweis: Ist S prim, so folgt die Behauptung aus [Ami71, Theorem 27]; ist S semiprim, so folgt sie aus [Ami71, Corollary 21]. ■

4.1 Prime Smash-Produkte

Bevor wir weiter untersuchen, unter welchen Voraussetzungen das Smash-Produkt semiprim ist, betrachten wir zuerst einmal, wann es prim ist.

Proposition 4.1.1. *Sei $A \subseteq B$ eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur. Angenommen ${}_BA$ ist isomorph zu einem Linksideal von B. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) B ist ein Primring

(b) A ist ein treuer, primer links B-Modul.

(c) A ist ein treuer links B-Modul, A^B ist ein Primring und B^B ist ein treues Rechtsideal.

Beweis: $(b) \Rightarrow (a)$ Der Annullator eines primen Moduls ist ein Primideal. Somit folgt $(b) \Rightarrow (a)$, wenn A ein treuer, primer B-Modul ist.
$(a) \Rightarrow (b)$ Ist nun B ein Primring, dann ist jedes Linksideal treu und somit auch ein primer links B-Modul. Nach Voraussetzung ist A isomorph zu einem Linksideal von B und muß somit treu und prim sein.
$(a) + (b) \Rightarrow (c)$ Wir können Amitsurs Satz 4.0.5 auf den Standard-Morita-Kontext (B, A, B^B, A^B) von A anwenden (siehe Definition vor Abschnitt 1.2). Da A, als links B-Modul, in B eingebettet werden kann, gibt es ein Element $t \in B^B$ mit $at \neq 0$ für alle $0 \neq a \in A$. Damit ist die Bedingung in 4.0.5 erfüllt, denn für alle $0 \neq x \in A^B$ gilt $0 \neq xt \in AxB^B = (Ax, B^B)$. Als nicht-triviales Rechtsideal eines Primringes ist B^B treu.

$(c) \Rightarrow (a)$ Wir wenden Satz 4.0.5 auf den Morita-Kontext (A^B, B^B, A, B) an. Ist $b \in B$ mit $[B^B b, A] = B^B b \cdot A = 0$, dann folgt $B^B b = 0$, da A links treuer B-Modul ist. Andererseits ist aber B^B auch ein treues Rechtsideal, weshalb $b = 0$ folgt. Aus 4.0.5 und A^B prim folgt nun B prim. ■

Als Folgerung erhalten wir damit einen Satz von Bergen, Cohen und Fischman. Wir benötigen allerdings nicht, daß der Grundring ein Körper ist, oder daß H endlich dimensional ist.

Folgerung 4.1.2 ([BCF90, Theorem 3.1]). *Sei H eine R-Hopfalgebra, A eine links H-Modulalgebra, so daß A isomorph zu einem Linksideal von $A\#H$ ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $A\#H$ ist ein Primring;

(b) A ist ein treuer, primer links $A\#H$-Modul;

(c) A ist ein treuer links $A\#H$-Modul, A^H ist Primring und $(A\#H)^H$ ist ein treues Rechtsideal.

4.2 Notwendige Bedingungen

Ist A eine Algebra auf die eine Gruppe G wirkt, so gilt

$$A^G \cap I = I^G \simeq \mathrm{Hom}_{A*G}(A, I)$$

für alle G-stabilen Linksideale I von A. A heißt $|G|$-torsionsfrei, wenn $|G|1_A$ kein Nullteiler in A ist. Aus Bergman und Isaacs Satz folgt also, falls A semiprim und $|G|$-torsionsfrei ist, daß A^G semiprim ist und daß es zu jedem nicht-trivialen $A * G$-Untermodul I von A einen nicht-trivialen $A * G$-Homomorphismus von A nach I gibt. Modultheoretisch bedeutet dies, $\mathrm{Hom}_{A*G}(A, I) \neq 0$ für alle nicht-trivialen G-stabilen Linksideale I von A. Moduln mit dieser Eigenschaft werden in der Literatur *retractable* oder *selbst-treu* genannt. Falls $A \subseteq B$ eine Erweiterung mit zusätzlicher Modulstruktur ist und A obige Eigenschaft als B-Modul besitzt, dann sagen wir, daß A^B groß in A ist. Wie die nächste Proposition zeigt, haben Linksideale (bzw. allgemeiner Untermoduln eines direkten Produktes) eines semiprimen Ringes diese Eigenschaft.

Proposition 4.2.1. *Sei S ein semiprimer Ring und M ein links S-Modul, der von S koerzeugt wird, dann ist $\mathrm{End}_S(M)$ semiprim und $\mathrm{Hom}_S(M, N) \neq 0$ für alle nicht-trivialen Untermoduln N von M.*

Beweis: Wir wenden Amitsurs Satz 4.0.5 auf den Standard Morita-Kontext (S, M, M^*, T) mit $M^* := \mathrm{Hom}_S(M, S)$ und $T := \mathrm{End}_S(M)$ an. Dabei ist $(,) : M \otimes_T M^* \longrightarrow S$ durch die Auswertung $(m, f) := (m)f$ gegeben. Sei $0 \neq f \in T = \mathrm{End}_S(M)$. Nach Voraussetzung wird M von S koerzeugt, d.h. es

gibt einen Homomorphismus $g \in M^*$ mit $(M)fg \neq 0$. Somit ist $(Mf, M^*) \supseteq (M)fg \neq 0$. Nun folgt aus 4.0.5, daß $T = \mathrm{End}_S(M)$ semiprim ist.
Um die zweite Eigenschaft zu sehen, sei Λ eine Indexmenge, so daß M isomorph zu einem Untermodul des direkten Produktes S^Λ ist. Mit $\pi_\lambda : S^\Lambda \longrightarrow S$, für ein $\lambda \in \Lambda$, sei die Projektion auf die λ-Komponenten bezeichnet. Sei N ein nicht-trivialer Untermodul von M und sei $0 \neq n = (a_\lambda)_\Lambda$ ein von Null verschiedenes Element von N. Dann gibt es einen Index $\mu \in \Lambda$ mit $a_\mu \neq 0$. Nach Voraussetzung ist S semiprim und somit gilt $a_\mu S a_\mu \neq 0$, d.h. es gibt ein Element $s \in S$ mit $a_\mu s a_\mu \neq 0$. Sei $R_{sn} : S \longrightarrow N$ die Abbildung $a \longmapsto asn$, dann ist die Komposition $\pi_\mu R_{sn}$ ein nicht-trivialer Homomorphismus von S^Λ nach N, denn

$$(n)\pi_\mu R_{sn} = a_\mu sn = (a_\mu s a_\lambda)_\Lambda$$

ist ungleich Null. Die Einschränkung auf M liefert einen nicht-trivialen Homomorphismus von M nach N. ■

Für eine R-Algebra A, auf die eine endliche Gruppe G wirkt, ist die Abbildung $a \longmapsto \sum_{g\in G} a * g$ von A nach $A * G$ injektiv und $A * G$-linear, so daß A isomorph zu einem Linksideal von $A * G$ ist. Wie angemerkt, zeigen Fisher und Montgomery, daß der Schief-Gruppenring $A * G$ semiprim ist, sofern A semiprim und $|G|$-torsionsfrei ist. Nach Proposition 4.2.1 ist damit A^G semiprim und groß in A, d.h. wir erhalten die aus Bergman und Isaacs Satz gefolgerte Konsequenz wiederum aus dem Satz von Fisher und Montgomery. Ist A eine H-Modulalgebra und H eine R-Hopfalgebra, dann sehen wir, daß A^H semiprim und groß in A ist, sofern $A\#H$ semiprim ist und es eine Einbettung $A \subseteq A\#H$ als links $A\#H$-Moduln gibt.

Wir werden nun die aufgetretene modultheoretische Eigenschaft etwas genauer analysieren. Ein R-Modul M heißt **kompressibel**, wenn M in jeden seiner nicht-trivialen Untermoduln eingebettet werden kann. Zelmanowitz nennt einen R-Modul M **schwach kompressibel**, falls es zu jedem nicht-trivialen Untermodul N von M einen Homomorphismus $f : M \longrightarrow N$ gibt mit $f|_N \neq 0$ (siehe [Zel95]).

Satz 4.2.2. *Sei M ein links R-Modul. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) M ist schwach kompressibel.

(b) Für alle nicht-trivialen $N \subseteq M$ gilt $N \cap \mathrm{Rej}(M, N) = 0$.

(c) Für alle nicht-trivialen $N \subseteq M$ gilt $\mathrm{Hom}_R(M, N)^2 \neq 0$.

(d) M erfüllt die folgenden beiden Bedingungen:

(i) Für alle nicht-trivialen $N \subseteq M$ gilt $\mathrm{Hom}_R(M, N) \neq 0$.

(ii) Für alle nicht-trivialen $f \in \mathrm{End}_R(M)$ gilt $f\mathrm{Hom}_R(M, Mf) \neq 0$.

M ist insbesondere dann schwach kompressibel, falls $\mathrm{End}_R(M)$ *semiprim ist und für alle nicht-trivialen* $N \subseteq M$ $\mathrm{Hom}_R(M,N) \neq 0$ *gilt.*

Beweis: $(a) \Rightarrow (b)$ Sei $K := N \cap \mathrm{Rej}(M,N)$, dann gilt $K\mathrm{Hom}_R(M,K) = 0$, d.h. es gibt keinen Homomorphismus $f : M \longrightarrow K$ mit $f\mid_K \neq 0$. Damit muß $K = 0$ sein.
$(b) \Rightarrow (d)$ Ist N nicht-trivial, so gilt $\mathrm{Hom}_R(M,N) \neq 0$, da andernfalls $\mathrm{Rej}(M,N) = M$ und damit $N = 0$ folgen würde. Ist $0 \neq f \in \mathrm{End}_R(M)$, dann ist $N := (M)f$ nicht-trivial und damit $N \cap \mathrm{Rej}(M,N) = 0$, d.h. $Mf\mathrm{Hom}_R(M,Mf) \neq 0$.
$(d) \Rightarrow (c)$ Sei N ein nicht-trivialer Untermodul von M. Dann gibt es einen nicht-trivialen Homomorphismus $f : M \longrightarrow N$ und aus $0 \neq f\mathrm{Hom}_R(M,Mf) \subseteq \mathrm{Hom}_R(M,N)^2$ folgt die Behauptung.
$(c) \Rightarrow (a)$ Sei N ein nicht-trivialer Untermodul von M, dann gilt $\mathrm{Hom}_R(M,N)^2 \neq 0$, d.h. es gibt $f,g \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ mit $fg \neq 0$. Da das Bild von f in N liegt, folgt also $g\mid_N \neq 0$.
Wie wir aus Eigenschaft (d) sehen, sind Moduln M mit $\mathrm{End}_R(M)$ semiprim und $\mathrm{Hom}_R(M,N) \neq 0$ für nicht-triviale $N \subseteq M$ schwach kompressibel. ■

Moduln, die unsere, aus dem Satz von Bergman und Isaacs abgeleitete, modultheoretische Eigenschaft besitzen, sind also schwach kompressibel. Identifizieren wir $\mathrm{Hom}_{A\#H}(A,I)$ mit I^H für ein H-stabiles Linksideal I einer H-Modulalgebra A, dann folgt aus Eigenschaft 4.2.2(c), daß A genau dann, als $A\#H$-Modul, schwach kompressibel ist, falls A^H kein nilpotentes Linksideal von der Form I^H enthält mit I einem nicht-trivialen H-stabilen Linksideal.

Für Moduln, die einer schwachen Projektivitätsbedingung genügen, erhalten wir sogar eine Umkehrung.

Proposition 4.2.3. *Ein semi-projektiver R-Modul M ist genau dann schwach kompressibel, wenn* $\mathrm{End}_R(M)$ *semiprim ist und für alle nicht-trivialen $N \subseteq M$ auch* $\mathrm{Hom}_R(M,N) \neq 0$ *gilt.*

Beweis: Ist M schwach kompressibel, dann gilt $\mathrm{Hom}_R(M,N) \neq 0$ für alle nicht-trivialen $N \subseteq M$. Sei $0 \neq f \in \mathrm{End}_R(M)$, dann gilt nach 4.2.2(d.ii) $f\mathrm{Hom}_R(M,Mf) \neq 0$. Nun gilt aber $\mathrm{Hom}_R(M,Mf) = \mathrm{End}_R(M)f$, da M semi-projektiv ist. Damit erhalten wir $f\mathrm{End}_R(M)f \neq 0$ für alle nicht-trivialen $f \in \mathrm{End}_R(M)$, d.h. $\mathrm{End}_R(M)$ ist semiprim. Die Umkehrung wurde schon in 4.2.2 gezeigt. ■

Eine H-Modulalgebra A ist genau dann semi-projektiv als $A\#H$-Modul, wenn $(Ax)^H = A^Hx$ für alle $x \in A^H$ gilt. Wie wir wissen, ist A insbesondere dann ein projektiver, und damit semi-projektiver, $A\#H$-Modul, wenn $A\#H$ über A separabel ist.

Folgerung 4.2.4. *Sei A eine H-Modulalgebra, so daß $(Ax)^H = A^Hx$ für alle $x \in A^H$ gilt. Dann ist A^H genau dann semiprim und groß in A, wenn A ein schwach kompressibler $A\#H$-Modul ist.*

Beweis: Dies folgt aus 4.2.3. ■

Bemerkung 4.2.5. *Der Annullator* $\mathrm{Ann}_R(M)$ *eines schwach kompressiblen* R*-Moduls* M *ist insbesondere ein semiprimes Ideal. Um dies zu sehen, sei* I *ein Ideal in* R *mit* $I^2 \subseteq \mathrm{Ann}_R(M)$ *und sei* $f : M \longrightarrow IM$*. Dann gilt* $(IM)f = I(M)f \subseteq I^2M = 0$*, d.h.* $f\,|_{IM} = 0$*. Damit muß* $IM = 0$ *gelten, falls* M *schwach kompressibel war, und somit folgt* $I \subseteq \mathrm{Ann}_R(M)$*. Wir wir in 4.2.1 gesehen haben, gilt die Umkehrung, wenn* M *von* $R/\mathrm{Ann}_R(M)$ *koerzeugt wird.*

In vielen Fällen ist A isomorph zu einem Linksideal von $A\#H$. Falls $A\#H$ separabel über A ist, so wird A sogar ein projektiver $A\#H$-Modul. In diesem Fall ist A auch ein projektiver $A\#H/\mathrm{Ann}_{A\#H}(A)$-Modul und wird von diesem Faktorring koerzeugt. Abschließend stellen wir fest, daß für H-Modulalgebren A, die von $A\#H/\mathrm{Ann}_{A\#H}(A)$ koerzeugt werden, unsere bisher betrachteten Eigenschaften zusammenfallen.

Folgerung 4.2.6. *Sei* A *eine* H*-Hopfalgebra, so daß* A *von* $A\#H/\mathrm{Ann}_{A\#H}(A)$ *koerzeugt wird, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) A^H *ist semiprim und groß in* A*.*

(b) A *ist ein schwach kompressibler* $A\#H$*-Modul.*

(c) $\mathrm{Ann}_{A\#H}(A)$ *ist ein semiprimes Ideal.*

Erfüllt A *eine der äquivalenten Bedingungen, so ist* A H*-semiprim.*

Beweis: $(a) \Rightarrow (b)$ folgt aus 4.2.2.
$(b) \Rightarrow (c)$ folgt aus Bemerkung 4.2.5.
$(c) \Rightarrow (a)$ folgt aus Proposition 4.2.1.
Angenommen A erfüllt eine der äquivalenten Bedingungen $(a) - (c)$ und angenommen I ist ein nilpotentes H-stabiles Ideal. Dann ist auch I^H nilpotent und somit gleich Null, da A^H semiprim ist. Damit folgt aber auch $I = 0$, denn A^H ist groß in A. ■

Obiger Satz ist ohne die Voraussetzung an A falsch. Dazu geben wir ein Beispiel einer H-Modulalgebra A an, die treu und prim als $A\#H$-Modul ist, d.h. $\mathrm{Ann}_{A\#H}(A)$ ist sogar ein Primideal, aber deren Invariantenring A^H nicht groß in A ist.

Beispiel 4.2.7. *Es gibt eine links* H*-Modulalgebra* A *über einer Hopfalgebra* H *über einem Körper der Charakteristik* 0 *mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $A\#H$ *ist ein Primring.*

(2) A^H *ist ein Körper, aber nicht groß in* A*.*

(3) A ist ein Integritätsbereich, sowie ein treuer, primer $A\#H$-Modul, der projektiv in $\sigma[_{A\#H}A]$ ist.

Sei $R = k$ ein Körper mit $char(k) = 0$. Sei $A = k[[t]]$ der Potenzreihenring über k. A ist ein kommutativer uniserieller, noetherscher Integritätsbereich mit maximalem Ideal At. Alle nicht-trivialen Ideale von A sind von der Form At^n mit $n \geq 0$. Man beachte auch, daß alle Elemente $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ mit $a_0 \neq 0$ invertierbar sind in A. Wir definieren folgende Derivation δ auf A durch

$$\delta\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) := \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n.$$

Man beachte, daß $\mathrm{Ker}\,(\delta) = k$ gilt. Wir lassen die Hopfalgebra $H := k[X]$ (siehe 1.2.7) durch δ auf A wirken, d.h. $Xf(t) = \delta(f(t))$ für alle $f(t) \in A$. Jedes Ideal At^n ist H-stabil, denn $\delta(t^n) = nt^n \in At^n$. Somit sind gerade die H-stabilen Ideale von A die Ideale At^n und A ist als links $A\#H$-Modul uniseriell und noethersch. Wie in 1.3.12 bemerkt, gilt $A[X,\delta] \simeq A\#H$.
(1) Da A nullteilerfrei ist, ist $A[X,\delta]$ ein Primring (siehe [MR01, 1.2.9(iii)] oder [Goo80, pp 1847]).
(2) Sei $f(t) \in A^H$, so gilt: $0 = \varepsilon(X)f(t) = Xf(t) = \delta(f(t))$, also insbesondere $f(t) = a_0 \in \mathrm{Ker}\,(\delta) = k$. Ist andererseits $a_0 \in k$, so gilt

$$\forall n \geq 1 \;:\; X^n a_0 = \delta^n(a_0) = 0 = \varepsilon(X^n)a_0,$$

d.h $a_0 \in A^H$ und folglich $A^H = k$. Damit folgt aber $I^H = 0$ für alle echten H-stabilen Ideale I von A, d.h. A^H ist nicht groß in A.
(3) Wir zeigen zuerst, daß A selbst-projektiver $A\#H$-Modul ist. Dazu müssen wir zeigen, daß $(A/I)^H = (A^H + I)/I$ gilt. Sei $n \geq 1$, $I = At^n$ und $f(t) + I \in (A/I)^H$. Aus

$$0 + I = \varepsilon(X)f(t) + I = Xf(t) + I = \delta(f(t)) + I,$$

folgt, mit $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$

$$\delta(f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k t^k \in I = At^n,$$

d.h. $a_k = 0$ für $1 \leq k < n$. Damit ist $f(t) + I = a_0 + I \in (A^H + I)/I$.
Somit ist der Funktor $(\ \ )^H$ exakt auf allen exakten Folgen

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0,$$

d.h. A ist selbst-projektiv. Da A ein zyklischer $A\#H$-Modul ist, ist A auch projektiv in $\sigma[_{A\#H}A]$.
Wir zeigen nun, daß jeder Untermodul At^m, mit $m \geq 0$, treu ist. Dazu sei $\sum_{i=0}^{n} g_i(t)\#X^i \in \mathrm{Ann}_{A\#H}\,(At^m)$ mit $g_i(t) \in A$. Dann gilt für alle $k \geq m$:

$$0 = \sum_{i=0}^{n} g_i(t)X^i t^k = \sum_{i=0}^{n} g_i(t)k^i t^k = \left[\sum_{i=0}^{n} k^i g_i(t)\right] t^k.$$

Damit folgt $\sum_{i=0}^{n} k^i g_i(t) = 0$ *für alle* $k \geq m$, *denn* A *ist ein Integritätsbereich. Schreibt man diese Gleichungen für* $m \leq k \leq m+n$ *in Matrixform so ergibt sich:*

$$\begin{pmatrix} 1 & m & m^2 & \cdots & m^n \\ 1 & m+1 & (m+1)^2 & \cdots & (m+1)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (m+n) & (m+n)^2 & \cdots & (m+n)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0(t) \\ g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir bezeichnen mit M *die obige Matrix. Die Determinante von* M *ist gerade die Vandermodesche Determinante und es gilt:*

$$det(M) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (i-j) \neq 0.$$

Damit existiert $M^{-1} \in \mathbb{Q}^{(n+1,n+1)} \subseteq k^{(n+1,n+1)}$, *da alle Einträge von* M *ganze Zahlen sind und* $char(k) = 0$, *also* $\mathbb{Q} \subseteq k$ *gilt. Demnach muß für alle* $i = 0, ..., n$ $g_i(t) = 0$ *gelten und* $\mathrm{Ann}_{A\#H}(At^m) = 0$. *Damit ist* A *ein treuer primer* $A\#H$-*Modul.*

4.3 Hinreichende Bedingungen

Zuerst geben wir eine Lösung auf unsere Frage, falls A eine semiprime kommutative H-Modulalgebra, $A^H \subseteq A$ eine ganze Erweiterung und $\varepsilon(t)$ kein Nullteiler in A ist, wobei t ein Links- oder Rechts-Integral in H sei. Für eine Algebra A mit Gruppenwirkung G entspricht die Bedingung an das Integral t der Annahme, daß A $|G|$-torsionsfrei ist. Wir erinnern daran, daß eine Ringerweiterung $S \subseteq T$, mit S zentral in T, **ganz** heißt, falls jedes Element $t \in T$ Nullstelle eines normierten Polynoms über S ist.

Lemma 4.3.1. *Jeder kommutative, semiprime Ring* T, *der eine ganze Erweiterung eines von Neumann regulären Unterrings* S *ist, ist von Neumann regulär.*

Beweis: Nach [Lam98, 3.7.1] ist ein semiprimer kommutativer Ring genau dann von Neumann regulär, wenn jedes seiner Primideale maximal ist. Angenommen S ist von Neumann regulär. Sei P ein Primideal von T und M ein maximales Ideal von T, welches P enthält. Das Ideal $S \cap P$ ist ein Primideal und nach Annahme somit maximal, d.h. $S \cap P = S \cap M$. Da T ganz über S ist folgt aus Satz [Kun97, VI.2.3(c)], daß $P = M$ gilt, d.h. P ist maximal. Somit ist jedes Primideal von T maximal. Nach Voraussetzung ist T semiprim und somit auch von Neumann regulär. ■

Satz 4.3.2. *Sei* H *eine, als* R-*Modul flache,* R-*Hopfalgebra mit einem Links- oder Rechts-Integral* t *und sei* A *eine kommutative semiprime* H-*Modulalgebra, so daß* $\varepsilon(t)$ *kein Nullteiler in* A *und die Erweiterung* $A^H \subseteq A$ *eine ganze Ringerweiterung ist. Dann ist* $A\#H$ *semiprim.*

Beweis: Nehmen wir zuerst an, daß $\varepsilon(t)$ in A invertierbar ist. Die $M_H(A)$-Modulstruktur von A ist gleich seiner $A\#H$-Modulstruktur, denn A ist kommutativ. Ebenso gilt $A^H = Z(A)^H$. Sei $\widehat{A}$ der zentrale Abschluß (siehe 3.3.8). Da $\widehat{A} \subseteq Q^r_H(A) \subseteq Q_{max}(A)$ (siehe 3.4.4), ist $\widehat{A}$ auch kommutativ und semiprim. Nach Voraussetzung ist A/A^H eine ganze Erweiterung. Sei $as \in \widehat{A} = A\widehat{A}^H$. Nach Annahme gibt es ein normiertes Polynom

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} r_i X^i \in A^H[X]$$

mit $f(a) = 0$. Definieren wir das normierte Polynom

$$\tilde{f}(X) := \sum_{i=0}^{n} r_i s^{n-i} X^i \in \widehat{A}^H[X],$$

so gilt $\tilde{f}(as) = f(a)s^n = 0$. Da die Menge der ganzen Elemente gegen Summen abgeschlossen ist, impliziert dies, daß $\widehat{A}^H \subseteq \widehat{A}$ eine ganze Erweiterung ist. Nach 3.3.7 ist $\widehat{A}^H$ von Neumann regulär. Lemma 4.3.1 besagt nun, daß auch $\widehat{A}$ von Neumann regulär ist. Aus der Invertierbarkeit von $\varepsilon(t)$ in A folgt auch die Invertierbarkeit von $\varepsilon(t)$ in $\widehat{A}$. Nach Satz 3.2.9(2)ist $\widehat{A}\#H$ von Neumann regulär. Sei $I \subseteq A\#H$ ein Ideal mit $I^2 = 0$. Dann ist auch $\tilde{I} := I(\widehat{A}^H\#1)$ ein Ideal von $\widehat{A}\#H$. Da $\widehat{A}^H\#1$ zentral in $\widehat{A}\#H$ liegt, folgt $\tilde{I}^2 = 0$. Wie oben gezeigt ist $\widehat{A}\#H$ von Neumann regulär, also insbesondere semiprim, weshalb $\tilde{I} = 0$ und somit auch $I = 0$ gelten muß (da H flach), d.h. $A\#H$ ist semiprim.
Ist $\varepsilon(t)$ nicht invertierbar in A, dann geht man zur Lokalisierung $A[\varepsilon(t)^{-1}]$ über und läßt H trivial auf $\varepsilon(t)^{-1}$ wirken. Wie man leicht nachprüft, ist $A[\varepsilon(t)^{-1}]$ semiprim und ganz über $(A[\varepsilon(t)^{-1}])^H = A^H[\varepsilon(t)^{-1}]$. Nach obigem Argument ist $A[\varepsilon(t)^{-1}]\#H = A\#H[\varepsilon(t)^{-1}\#1]$ semiprim und somit auch $A\#H$. ■

Ein klassischer Satz über Gruppenwirkungen besagt, daß für eine kommutative Algebra A, auf die eine endlichen Gruppe G wirkt, die Erweiterung $A^G \subseteq A$ ganz ist. Dieser Satz wurde von Zhu auf Modulalgebren übertragen. Genauer besagt Zhus Satz [Zhu96, Theorem 2.1] für eine kommutative H-Modulalgebra A, daß A über A^H ganz ist, falls H eine halbeinfache Hopfalgebra über einem Körper k ist, so daß die Charakteristik von k die Dimension der Hopfalgebra nicht teilt und die Antipode S von H eine Involution ist. Etinghof und Gelaki zeigten in [EG98], daß letztere beide Bedingungen an die Hopfalgebra H äquivalent dazu sind, daß H eine halbeinfache, kohalbeinfache Hopfalgebra ist (wobei H genau dann kohalbeinfach ist, wenn H^* halbeinfach ist).

Folgerung 4.3.3. *Ist H eine halbeinfache, kohalbeinfache Hopfalgebra über einem Körper k und A eine kommutative semiprime H-Modulalgebra, dann ist $A\#H$ semiprim.*

Beweis: Nach [EG98, Corollary 3.2] ist eine Hopfalgebra H genau dann halbeinfach und kohalbeinfach, wenn $S^2 = id$ und $char(k) \nmid dim_k(H)$ gilt. Nach

[Zhu96, Theorem 2.1.] ist A über A^H ganz. In Satz 2.4.4 zeigten wir, daß halbeinfache Hopfalgebren H insbesondere separabel über k sind, d.h. es gibt ein Links-Integral t in H mit $\varepsilon(t) = 1$. Damit ist $\varepsilon(t)$ auch in allen links H-Modulalgebren invertierbar. Somit folgt die Behauptung aus 4.3.2. ■

Bemerkung 4.3.4. *Nach einem Satz von Larson und Radford (siehe [Sch95, 3.14]) ist jede halbeinfache Hopfalgebra über einem Körper der Charakteristik* 0 *kohalbeinfach. Dies gilt auch, wenn* $char(k) >> dim(H)$. *Abschätzungen werden in [EG98, 4.2] gegeben.*

Wir versuchen nun die Kommutativität abzuschwächen. Dazu benötigen wird zuerst drei Lemmata. Ein Ring S heißt links **Goldie Ring**, wenn S als links S-Modul endliche Goldie Dimension besitzt und S der aufsteigenden Kettenbedingung für links Annullatoren genügt.

Lemma 4.3.5. *Sei* T *ein semiprimer Ring mit zentralem Unterring* S. *Hat* T *endliche Goldie Dimension als links oder rechts* T*-Modul, so hat auch* S *endliche Goldie Dimension.*

Beweis: Sei $Sc_1 \oplus \cdots \oplus Sc_n$ eine direkte Summe von zyklischen Idealen von S. Da alle jedes Element c_i in $Ann_T(c_j)$ enthalten ist, mit i ungleich j, ist auch $\sum_{i \neq j} Tc_i \subseteq Ann_T(c_j) = Ann_T(Tc_j)$ und somit impliziert $Tc_j(\sum_{i \neq j} Tc_i) = 0$ gerade $Tc_j \cap (\sum_{i \neq j} Tc_i) = 0$, da T semiprim ist. Damit ist $Tc_1 \oplus \cdots \oplus Tc_n$ direkt und $n \leq min\{udim(_TT), udim(T_T)\}$. Somit hat S endliche Goldie Dimension. ■

Ein Ring A heißt **PI-Ring**, falls er einer Polynomidentität genügt, d.h. falls es ein Polynom $f(X_1, \ldots, X_k)$ in nicht-miteinander kommutierenden Unbestimmten X_i gibt und dessen Koeffizienten gleich 1 oder -1 sind, so daß für alle $a_1, \ldots, a_k \in A$ $f(a_1, \ldots a_k) = 0$ gilt (siehe [Row80]).

Lemma 4.3.6. *Jeder semiprime Goldie PI-Ring* T, *der eine ganze Erweiterung eines zentralen von Neumann regulären Unterrings* S *ist, ist halbeinfach artinsch.*

Beweis: Da auch $S \subseteq Z(T)$ eine ganze Erweiterung von kommutativen semiprimen Ringen ist, folgt aus Lemma 4.3.1, daß $Z(T)$ von Neumann regulär ist. Nach 4.3.5 hat $Z(T)$ endliche Goldie Dimension und ist somit halbeinfach artinsch. Nach [MR01, 13.6.14] ist T endlich erzeugt über $Z(T)$ und somit selbst artinsch und damit auch halbeinfach. ■

Lemma 4.3.7. *Sei* M *ein links* R*-Modul und* $S = \mathrm{End}_R(M)$. *Angenommen* S *ist rechts nicht-singulär und* $\mathrm{Hom}_R(M, N) \neq 0$ *für alle nicht-trivialen Untermoduln* $N \subseteq M$, *dann ist* M_S *nicht-singulär.*

Beweis: Sei $m \in Sing(M_S)$. Dann gibt es ein wesentliches Rechtsideal I von S mit $mI = 0$. Das Rechtsideal I annulliert dann auch $\mathrm{Hom}_R(M, Rm)$, denn es gilt $\mathrm{Hom}_R(M, Rm)I \subseteq \mathrm{Hom}_R(M, RmI) = 0$. S war als rechts nicht-singulär vorausgesetzt, so daß das Linksideal $\mathrm{Hom}_R(M, Rm)$ gleich Null sein muß. Nach Annahme gilt damit $m = 0$, d.h. M ist ein nicht-singulärer rechts S-Modul. ■

Wir folgen der gängigen Konvention und nennen Elemente regulär, wenn sie keine Nullteiler sind. Ist $\mathcal{C}$ eine Teilmenge von zentralen regulären Elementen eines Ringes S, dann bezeichne mit $S[\mathcal{C}^{-1}]$ die klassische (zentrale) Lokalisierung bei der alle Elemente in $\mathcal{C}$ invertiert werden.

Satz 4.3.8. *Sei H eine separable, als R-Modul flache, R-Hopfalgebra und A eine semiprime Goldie PI H-Modulalgebra mit $A^H \subseteq Z(A)$. Angenommen, A ist ganz über A^H. Dann ist $A\#H$ genau dann semiprim, wenn A nicht-singulär über A^H ist. In diesem Fall ist $Q_{cl}(A) = A[\mathcal{C}^{-1}]$ wobei $\mathcal{C}$ die regulären Elemente von A^H bezeichnet.*

Beweis: Angenommen, A ist nicht-singulär über A^H. Nach Lemma 4.3.5 hat A^H endliche Goldie Dimension und ist somit ein kommutativer semiprimer Goldie Ring. Sei $\mathcal{C}$ die Menge der regulären Elemente von A^H. Dann ist die klassische Lokalisierung $Q := A^H[\mathcal{C}^{-1}]$ ein halbeinfacher artinscher Ring. A ist ein Unterring von $A[\mathcal{C}^{-1}]$, da A nicht-singulär über A^H ist. Als klassische Lokalisierung ist $A[\mathcal{C}^{-1}]$ ebenfalls ein semiprimer Goldie PI-Ring. $A[\mathcal{C}^{-1}]$ ist ganz über Q, da $A^H \subseteq A$ eine ganze Erweiterung ist. Nach Lemma 4.3.6 ist $A[\mathcal{C}^{-1}]$ nun halbeinfach artinsch und somit gilt $Q_{cl}(A) = A[\mathcal{C}^{-1}]$. Nach 2.3.6 ist $Q_{cl}(A)\#H$ separabel über $Q_{cl}(A)$ und muß damit halbeinfach sein, da $Q_{cl}(A)$ halbeinfach ist. Ferner fassen wir $Q_{cl}(A)\#H$ als klassische Lokalisation von $A\#H$ auf, denn da $\mathcal{C}^{-1}\#1$ im Zentrum von $Q_{cl}(A)\#H$ liegt, gilt

$$Q_{cl}(A)\#H = A[\mathcal{C}^{-1}]\#H = A\#H(\mathcal{C}^{-1}\#1) = A\#H[(\mathcal{C}\#1)^{-1}].$$

Jedes nilpotente Ideal I von $A\#H$ kann zu einem nilpotenten Ideal $\tilde{I}$ von $Q_{cl}(A)\#H$ erweitert werden. Damit ist aber $\tilde{I}$ und somit auch I gleich Null (da H flach ist). Folglich ist $A\#H$ semiprim.
Nehmen wir andererseits an, daß $A\#H$ semiprim ist. Aufgrund der Tatsache, daß H separabel ist, folgt, daß A ein projektiver $A\#H$-Modul ist (siehe 2.4.2). Damit ist A isomorph zu einem direkten Summanden von $A\#H$. Proposition 4.2.1 besagt nun, daß A^H semiprim und groß in A ist. Insbesondere ist A^H auch links und rechts nicht-singulär, denn A^H ist kommutativ. Aus 4.3.7 folgt schließlich, daß A nicht-singulärer A^H-Modul ist. ■

Als nächstes zeigen wir, daß für sogenannte trianguläre halbeinfache kohalbeinfache Hopfalgebren, das Smash-Produkt semiprim ist, sofern A semiprim war. Dazu zuerst eine Definition. Eine R-Hopfalgebra H heißt links **stark halbeinfach**, falls für jede H-semiprime links H-Modulalgebra A das Smash

Produkt $A\#H$ semiprim ist. Das Smash-Produkt einer semiprimen Modulalgebra und einer stark halbeinfachen Hopfalgebra ist also semiprim. Kriterien, wann eine halbeinfache Hopfalgebra stark halbeinfach ist, werden in [MS99] und [OPQ92] gegeben. Allerdings sind diese Kriterien schwer zu verifizieren. Über einem Körper ist jede kommutative oder kokommutative halbeinfache Hopfalgebra stark halbeinfach. Ferner ist jede halbeinfache Hopfalgebra H mit einer endlichen Kette von normalen Unterhopfalgebren H_i dessen Quotienten H_{i+1}/H_i entweder kommutativ oder kokommutativ sind, stark halbeinfach (siehe [MS99, 8.16]). Alle bisher bekannten halbeinfachen Hopfalgebren sind stark halbeinfach. Wir werden zeigen, daß die Klasse der stark halbeinfachen Hopfalgebren abgeschlossen ist gegenüber Drinfeld Twists. Danach erhalten wir unter Anwendung eines Satzes von Etinghof und Gelaki, der alle triangulären halbeinfachen kohalbeinfachen Hopfalgebren als Drinfeld Twists von Gruppenringen klassifiziert, unsere gewünschte Aussage.

Definition 4.3.9. *Sei H eine R-Hopfalgebra. Ein* **Drinfeld Twist** *für H ist ein invertierbares Element $J \in H \otimes H$, so daß*

$$(J \otimes 1)(\Delta \otimes 1)(J) = (1 \otimes J)(1 \otimes \Delta)(J) \tag{4.3.1}$$

$$(\varepsilon \otimes 1)(J) = 1 = (1 \otimes \varepsilon)(J) \tag{4.3.2}$$

gilt. Wir schreiben formal $J =: \sum J^1 \otimes J^2$ und $J^{-1} =: Q =: \sum Q^1 \otimes Q^2$ (wobei wir die Summierungsindizes weglassen).

Lemma 4.3.10. *Ist $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ eine R-Hopfalgebra und J ein Drinfeld Twist, dann ist $(H^J, \mu, \eta, \Delta^J, \varepsilon, S^J)$ ebenfalls eine R-Hopfalgebra, wobei als R-Algebra $H^J = H$ gilt, sowie*

(i) $\Delta^J := J\Delta J^{-1}$ *,d.h. für alle $h \in H : \Delta^J(h) = J\Delta(h)J^{-1}$.*

(ii) $S^J := USU^{-1}$*, d.h. für alle $h \in H : S^J(h) = US(h)U^{-1}$*
mit $U := \sum J^1 S(J^2)$ und $U^{-1} = \sum S(Q^1)Q^2$.

Beweis: Dies wurde in [Maj95, 2.3.4 und Absatz vor 2.3.5] gezeigt. ■

Offensichtlich gilt $\Delta^J(h)J = J\Delta(h)$ für alle $h \in H$.

Lemma 4.3.11. *Sei J ein Drinfeld Twist für eine R-Hopfalgebra H. Dann ist J^{-1} ein Drinfeld Twist für H^J.*

Beweis: Man beachte, daß $(\Delta \otimes 1)(J^{-1})$ ein Inverses für $(\Delta \otimes 1)(J)$ ist, da Δ ein Algebrenhomomorphismus ist. Wir formen Gleichung (4.3.1) um:

$$\begin{aligned}
& (J \otimes 1)(\Delta \otimes 1)(J) = (1 \otimes J)(1 \otimes \Delta)(J) \\
\Leftrightarrow\quad & 1 \otimes 1 \otimes 1 = (1 \otimes J)(1 \otimes \Delta)(J)(\Delta \otimes 1)(J^{-1})(J^{-1} \otimes 1) \\
\Leftrightarrow\quad & (1 \otimes \Delta)(J^{-1})(1 \otimes J^{-1}) = (\Delta \otimes 1)(J^{-1})(J^{-1} \otimes 1) \\
\Leftrightarrow\quad & (1 \otimes J^{-1})(1 \otimes \Delta^J)(J^{-1}) = (J^{-1} \otimes 1)(\Delta^J \otimes 1)(J^{-1})
\end{aligned}$$

wobei letzte Umformung aus der Relation $J^{-1}\Delta^J = \Delta J^{-1}$ folgt. Damit gilt Gleichung (4.3.1) für J^{-1} in H^J. Die Gleichung (4.3.2) folgt, da ε ein Algebrenhomomorphismus ist. ■

Definition 4.3.12. *Sei A eine links H-Modulalgebra mit Multiplikation μ und J ein Drinfeld Twist für H, dann definieren wir eine neue Multiplikation $\mu^J := \mu J^{-1} : A \otimes A \longrightarrow A$ auf A mit*

$$a \cdot_J b := \mu^J(a \otimes b) := \mu(J^{-1}(a \otimes b)) = \sum (Q^1 \cdot a)(Q^2 \cdot b) \quad \text{für alle } a, b \in A,$$

wobei die H-Wirkung auf A mit $\cdot$ bezeichnet wird.

Aussage (3) der nächsten Proposition ist ein Speziallfall eines allgemeineren Satzes [Maj97, 2.9].

Proposition 4.3.13. *Sei J ein Drinfeld Twist einer R-Hopfalgebra H und sei A eine links H-Modulalgebra. Dann gilt:*

(1) A^J wird durch μ^J zu einer links H^J-Modulalgebra.

(2) Die H-stabilen Linksideal von A sind genau die H^J-stabilen Linksideale von A^J.

(3) Die Smash Produkte $A\#H$ und $A^J\#H^J$ sind isomorph als R-Algebren.

Beweis: (1) folgt aus [Maj95, 2.3.8].
(2) Seien $a, b \in A$. Die Multiplkation zweier Element a und b aus A läßt sich durch $ab = \sum (J^1 \cdot a) \cdot_J (J^2 \cdot b)$ ausdrücken. Damit ist jedes H^J-stabile Linksideal von A^J auch ein H-stabiles Linksideal von A. Die Umkehrung folgt mit dem gleichen Argument, da nach Lemma 4.3.11 J^{-1} ein Drinfeld Twist von H^J ist und da $H = H^{J^{J^{-1}}}$, $A = A^{J^{J^{-1}}}$ und $\mu = \mu^{J^{J^{-1}}}$ gilt.
(3) Wir definieren die Abbildung

$$\varphi : A\#H \longrightarrow A^J\#H^J,\ a\#h \mapsto \sum (J^1 \cdot a)\#(J^2 h).$$

Man rechnet leicht nach, daß für alle $h \in H$

$$\varphi(1\#h) = 1\# \sum \varepsilon(J^1) J^2 h = 1\#h$$

gilt, und daß somit φ eingeschränkt auf $1\#H$ die Identität liefert. Ferner gilt für alle $a \in A, h \in H$:

$$\varphi(a\#h) = (J^1 \cdot a)\#J^2 h = [(J^1 \cdot a)\#J^2][1\#h] = \varphi(a\#1)\varphi(1\#h). \qquad (4.3.3)$$

Für $\Delta^J(h)$ schreiben wir $\Delta^J(h) = \sum_{(h)} h_{(1')} \otimes h_{(2')}$. Seien $a, b \in A$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(a\#1)\varphi(b\#1) &= \sum (J^1 \cdot a\#J^2)(j^1 \cdot b\#j^2) \quad \text{mit } j \text{ einer Kopie von } J \\
&= \sum (J^1 \cdot a) \cdot (J^2_{(1')} j^1 \cdot b)\#J^2_{(2')} j^2 \quad \text{Multiplikation in } A^J\#H^J \\
&= \sum (J^1 \cdot a) \cdot_J (j^1 J^2_{(1)} \cdot b)\#j^2 J^2_{(2)} \quad \text{wegen } \Delta^J j = j\Delta \\
&= \sum (j^1 J^1_{(1)} \cdot a) \cdot_J (j^2 J^1_{(2)} \cdot b)\#J^2 \quad \text{wegen (4.3.1)} \\
&= \sum (J^1_{(1)} \cdot a)(J^1_{(2)} \cdot b)\#J^2 \quad \text{wegen } j\mu^J = \mu \\
&= \sum J^1 \cdot (ab)\#J^2 \quad \text{da } A \text{ } H\text{-Modulalgebra} \\
&= \varphi(ab\#1) \quad (\dagger)
\end{aligned}$$

Ferner gilt für $h \in H$ und $a \in A$:

$$\begin{aligned}
\varphi(1\#h)\varphi(a\#1) &= \sum (1\#h)[(J^1 \cdot a)\#J^2] \\
&= \sum h_{(1')} J^1 \cdot a\#h_{(2')} J^2 \\
&= \sum J^1 h_{(1)} \cdot a\#J^2 h_{(2)} \quad \text{wegen } \Delta^J J = J\Delta \\
&= \varphi\left(\sum h_1 \cdot a\#h_2\right) = \varphi((1\#h)(a\#1)). \quad (\ddagger)
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned}
\varphi((a\#h)(b\#g)) &= \sum \varphi(a(h_1 \cdot b)\#1)\varphi(1\#h_2 g) \quad \text{wegen (4.3.3)} \\
&= \sum \varphi(a\#1)\varphi((h_1 \cdot b)\#1)\varphi(1\#h_2)\varphi(1\#g) \quad \text{wegen } (\dagger) \\
&= \sum \varphi(a\#1)\varphi((1\#h)(b\#1))\varphi(1\#g) \quad \text{wegen (4.3.3)} \\
&= \sum \varphi(a\#1)\varphi(1\#h)\varphi(b\#1)\varphi(1\#g) \quad \text{wegen } (\ddagger) \\
&= \varphi(a\#h)\varphi(b\#g)
\end{aligned}$$

Somit ist φ ein Ringhomomorphismus. Ebenso zeigt man, daß

$$\psi : A^J\#H^J \longrightarrow A\#H \quad \text{mit} \quad a\#h \longmapsto Q^1 \cdot a\#Q^2 h$$

ein Ringhomomorphismus ist und offensichtlich gilt $\psi = \varphi^{-1}$. ■

Folgerung 4.3.14. *Ist H eine stark halbeinfache Hopfalgebra, so ist auch H^J stark halbeinfach für jeden Drinfeld Twist J für H.*

Beweis: Ist A eine links H^J-Modulalgebra, dann ist $A^{J^{-1}}$ nach 4.3.13(1) eine links H-Modulalgebra. Ist A H^J-semiprim, so ist nach 4.3.13(2) $A^{J^{-1}}$ H-semiprim. Aus 4.3.13(3) folgt nun $A^{J^{-1}}\#H = A^{J^{-1}}\#H^{J^{J^{-1}}} \simeq A\#H^J$. Da H stark halbeinfach ist, folgt, daß $A^{J^{-1}}\#H$ und somit auch $A\#H^J$ semiprim ist. ■

Eine Hopfalgebra heißt **triangulär**, falls es ein invertierbares Element $\mathcal{R} \in H \otimes H$ gibt mit

$$(\Delta \otimes 1)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}, (1 \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}, \Delta^{cop} = \mathcal{R}\Delta\mathcal{R}^{-1} \text{ und } \mathcal{R}^{-1} = \tau(\mathcal{R})$$

wobei $\tau : H \otimes H \longrightarrow H \otimes H$ den R-Isomorphismus $x \otimes y \longmapsto y \otimes x$ bezeichnet und für $\mathcal{R} = \sum a_i \otimes b_i$ seien

$$\mathcal{R}_{13} := \sum a_i \otimes 1 \otimes b_i, \mathcal{R}_{23} := \sum 1 \otimes a_i \otimes b_i, \mathcal{R}_{12} := \sum a_i \otimes b_i \otimes 1$$

Elemente aus $H \otimes H \otimes H$.

P.Etinghof und S.Gelaki klassifizieren in [EG00] halbeinfach kohalbeinfache trianguläre Hopfalgebren über algebraisch-abgeschlossenen Körpern als Drinfeld Twists von Gruppenringen. Demnach erhalten wir als Korollar:

Folgerung 4.3.15. *Jede triangulär halbeinfache kohalbeinfache Hopfalgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist stark halbeinfach.*

Beweis: Nach einem Satz von Etinghof und Gelaki [EG00, Corollary 6.2] gibt es eine Gruppe G und einen Drinfeld Twist $J \in k[G] \otimes k[G]$ mit $H \simeq k[G]^J$. Da $k[G]$ kokommutativ ist, ist $k[G]$ stark halbeinfach (siehe [MS99, 8.16]). Nach 4.3.14 ist H stark halbeinfach. ■

Eine Hopfalgebra heißt **einfach**, falls sie keine echte nicht-triviale normale Unterhopfalgebra enthält. Die einzigen bisherigen bekannten einfachen, halbeinfachen Hopfalgebren über einem Körper k sind Gruppenringe $k[G]$ von endlichen einfachen Gruppen G, duale Gruppenringe $k[G]^*$ und Drinfeld Twists $k[G]^J$. Nach 4.3.14 sind die Hopfalgebren $k[G]^J$ stark halbeinfach. Da $k[G]^*$ kommutativ ist, ist diese Hopfalgebra wieder mit [MS99, 8.16] stark halbeinfach. Die Frage, ob es weitere einfache, halbeinfache Hopfalgebren gibt, wird in [And01, Question 2.3] aufgeworfen.

Jede endlich-dimensionale Hopfalgebra besitzt eine Normalreihe

$$0 = H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = H$$

von Unterhopfalgebren H_i von H, so daß deren Quotienten H_{i+1}/H_i^+ einfache Hopfalgebren sind. Ist H eine halbeinfache Hopfalgebra, so können diese Quotienten ebenfalls halbeinfach gewählt werden (siehe 2.4.9). Da wir nun von allen bekannten einfachen, halbeinfachen Hopfalgebren wissen, daß sie stark halbeinfach sind, wäre es wünschenswert, den Abschluß der Klasse der stark halbeinfache Hopfalgebren gegenüber Erweiterungen zeigen zu können.

Literaturverzeichnis

[AAd95] R. Alfaro, P. Ara, and A. del Rio, *Regular Skew group rings*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **58** (1995), 167–182.

[Abe80] E. Abe, *Hopf Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[Ami71] S.A. Amitsur, *Rings of quotients and Morita Contexts*, J. Algebra **12** (1971), 273–298.

[And01] N. Andruskiewitsch, *About finite dimensional Hopf algebras*, erscheint in Contemporary Math. (2001), 57 S.

[BCF90] J. Bergen, M. Cohen, and D. Fischman, *Irreducible actions and faithful actions of Hopf algebras*, Israel J. Math. **72** (1990), no. 1-2, 5 – 18.

[Ber85] G. Bergman, *Everybody knows what a Hopf algebra is*, Contemp. Math. **43** (1985), 25–48.

[BI73] G.M. Bergman and I.M. Isaacs, *Rings with fixed-point-free group actions*, Proc. London Math. Soc. **27** (1973), no. 3, 69–87.

[BJV95] J.L. Bueso, P. Jara, and A. Verschoren, *Compatibility, stability, and sheaves*, Pure and Applied Math., vol. 185, Marcel Dekker, New York, 1995.

[CDM01] S. Caenepeel, E. DeGroot, and G. Militaru, *Frobenius Functors of the second kind*, Preprint, erscheint in Comm. Algebra (2001).

[CF92] M. Cohen and D. Fishman, *Semisimple extensions and Elements of Trace 1*, J. Algebra **149** (1992), 419–437.

[CF94] ———, *Erratum to "Semisimple extensions and Elements of Trace 1"*, J. Algebra **165** (1994), 242.

[CIMZ00] S. Caenepeel, B. Ion, G. Militaru, and S. Zhu, *The Factorization Problem and the Smash biproduct of Algebras and Coalgebras*, Algebras Repr. Theory **3** (2000), 19–42.

[CKW00] M. Cohen, A. Koryukin, and S. Westreich, *On generalized invariants of injective nonsingular module algebras*, J. Algebra **223** (2000), 489–510.

[CM01] M. Cabrera and A.A. Mohammed, *Extended Centroid and central closure of multiplicatively semiprime Algebras*, Comm. Algebra **29** (2001), no. 3, 1215–1233.

[Coh85] M. Cohen, *Hopf algebras acting on semiprime algebras*, Contemp. Math. **43** (1985), 49–61.

[CR83] M. Cohen and L.H. Rowen, *Group graded rings*, Comm. Algebra **11** (1983), 1253–1270.

[EG98] P. Etinghof and S. Gelaki, *On finite dimensional semisimple and cosemisimple Hopf algebras in positive characteristic*, Int. Math. Res. Notices (1998), no. 16, 851–861.

[EG00] ______, *The classification of triangular semisimple and cosemisimple Hopf algebras over an algebraically closed field*, Int. Math. Res. Notices (2000), no. 5, 223–234.

[Fai67] C. Faith, *Lectures on injective Modules and Qoutient Rings*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 49, Springer, 1967.

[Far00] R. Farnsteiner, *Geometric Methods in the Representation Theory of Cocommutative Hopf Algebras*, Ergänzungsreihe E00-001, SFB 343, Univ. Bielefeld, 2000.

[FM78] J.W. Fisher and S. Montgomery, *Semiprime skew group rings*, J. Algebra **52** (1978), 241–247.

[Gol86] J.S. Golan, *Torsion Theories*, Longman, 1986.

[Goo80] K. Goodearl, *Incompressible critical modules*, Commun. Algebra **8** (1980), 1845–1851.

[GOPV81] J.M. Goursaud, J. Osterburg, J.L. Pascaud, and J. Valette, *Points Fixes des Anneaux Reguliers Auto-Injectifs a gauche*, Comm. Algebra **9** (1981), no. 13, 1343–1394.

[Gru96] R. Gruschka, *Zur Modulstruktur von Hopf-Modul-Algebren*, Diplomarbeit, Heinrich-Heine Universität Düsseldorf, 1996.

[GW89] K.R. Goodearl and R.B. jun. Warfield, *An introduction to noncommutative Noetherian rings*, LMS Student Texts, vol. 16, Cambridge Uinv. Press, 1989.

[How95] J.M. Howie, *Fundamentals of semigroup theory*, LMS Monographs (New Series), vol. 12, Oxford Science Publ., 1995.

[HS66] K. Hirata and K. Sugano, *On semisimple extensions and separable extensions over non commutative rings*, J. Math. Soc. Japan **18** (1966), no. 4, 360–373.

[Kap75] I. Kaplansky, *Bialgebras*, Lecture notes, University of Chicago, 1975.

[KS99] L. Kadison and A. A. Stolin, *Frobenius systems and Hopf algebras over rings*, Chalmers preprint **20** (1999).

[KS00] ______, *Separability and Hopf Algebras*, Contemp. Math. **259** (2000), 279–298.

[Kun97] E. Kunz, *Einführung in die algebraische Geometrie*, Vieweg Studium, Aufbaukurs Mathematik., vol. 87, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1997.

[Lam76] J. Lambek, *Lectures on rings and modules*, Chelsea Publ., New York, 1976.

[Lam98] T.Y. Lam, *Lectures on modules and rings*, Graduate Texts Math., vol. 189, Springer, 1998.

[Laz74] D. Lazard, *Liberté des Gros Modules Projectifs*, J. Algebra **31** (1974), 437–451.

[Lin01] V. Linchenko, *On H-module Algebras*, Preprint, 2001.

[Lou76] K. Louden, *Torsion Theories and Ring extensions*, Comm. Algebra **4** (1976), no. 6, 503–532.

[Maj95] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge Univ. Press, 1995.

[Maj97] ______, *Quasi-$*$-structure on q-Poincare Algebras*, J. Geom Phys. **22** (1997), no. 1, 14–58.

[Mat91] J. Matczuk, *Centrally Closed Hopf Module Algebras*, Comm. Algebra **19** (1991), no. 7, 1909–1918.

[Mon92] S. Montgomery, *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 82, AMS, 1992.

[MR01] J.C. McConnell and J.C. Robson, *Noncommutative noetherian rings*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 30, AMS, Providencs, Rhode Island, 2001.

[MS99] S. Montgomery and H.-J. Schneider, *Prime ideals in Hopf Galois extensions*, Israel J. Math. **112** (1999), 187–235.

[OPQ92] J. Osterburg, D.S. Passman, and D. Quinn, *A Connes spectrum for Hopf algebras*, Contemp. Math. **130** (1992), 311–334.

[Par71] B. Pareigis, *When Hopf algebras are Frobenius algebras*, J. Algebra (1971), no. 18, 588–596.

[Par72] ______, *On the cohomology of modules over Hopf algebras*, J. Algebra (1972), no. 22, 161–182.

[Par73] ______, *Endliche Hopf-Algebren*, Vorlesungsausarbeitung, Algebra Berichte, Verlag UNI-Druck - Verlag R.Fischer, München, 1973.

[Row80] L.H. Rowen, *Polynomial Identities in Ring Theory*, Academic Press, 1980.

[Rum93] D. Rumynin, *Maximal Quotient Algebra of a Hopf-Module Algebra*, Algebra and Logic **32** (1993), no. 5, 300–308.

[Sch95] H.-J. Schneider, *Lectures on Hopf Algebras*, Trabajos de Matematica, Serie "B", No. 31/95, Univ. Cordoba, Cordoba, Argentina, 1995.

[Sel94] V. Selvan, *Study of torsion theories of Hopf module algebras and their smash products*, PhD Thesis, The Ramanujan Inst. Adv. Studies Math., University of Madras, India, 1994.

[Ste75] B. Stenström, *Rings of Quotients*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften., vol. 217, Springer-Verlag, 1975.

[Swe69a] M.E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Benjamin, New York, 1969.

[Swe69b] ______, *Integrals for Hopf Algebras*, Ann. Math. **89** (1969), 323–335.

[Vas69] W. Vasconcelos, *On projective modules of finite rank*, Proc. Amer. Math. Soc. **22** (1969), 430–433.

[Wis91] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Reading, 1991.

[Wis96] ______, *Modules and algebras: bimodule structure and group actions on algebras*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics., vol. 81, Addison Wesley Longman Ltd., Harlow, Essex, 1996.

[Wis99] ______, *Introduction to Coalgebras and Comodules*, Lecture Notes., Heinrich-Heine Universität Düsseldorf, Düsseldorf, 1999.

[Zel95] J. Zelmanowitz, *A class of modules with semisimple behavior*, Abelian Groups and Modules. (A. Facchini and C. Menini, eds.), Kluwer Acad. Publ., 1995, pp. 491–400.

[Zhu96] S. Zhu, *Integrality of Module Algebras over its invariants*, J. Algebra **180** (1996), 187–205.

Index