Zur Modul-Struktur von Hopf-Galois-Erweiterungen

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von
Alexander Chamrad-Seidel
aus Düsseldorf

Düsseldorf
2001

Gedruckt mit Genehmigung
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

1.Referent: Prof. Dr. Robert Wisbauer
2.Referent: Prof. Dr. Fritz Grunewald

Tag der mündlichen Prüfung: 18.07.2001

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Hopfalgebren und deren Wirkungen und Kowirkungen treten in vielen Bereichen der Mathematik in natürlicher Weise auf. Exemplarisch möchte ich hier die Theorie der Algebraischen Gruppen(schemata), Lie-Gruppen, Quantengruppen, Invarianten-Theorie, Algebraischen Topologie, (nicht-kommutativen) Galoistheorie etc. nennen. Obschon das Interesse insbesondere an nicht-kommutativen Hopfalgebren seit Drind'felds Berkeley-Vortrag [29] stark zugenommen hat, sind noch immer wesentliche Strukturfragen in der Theorie der Hopfalgebren offen. Auch die von Irving Kaplansky in [34] aufgeworfenen Vermutungen über Hopfalgebren sind zum Teil noch immer nicht zufriedenstellend beantwortet (man vgl. [61] für eine schöne Einführung).
In der letzten Zeit hat das Interesse an Hopf- und Koalgebren über Ringen und damit verbunden eine allgemeinere kategorielle Sichtweise stark zugenommen (z.B. [12], [13], [26], [10], [74]).

Diese Arbeit untersucht die Modultheorie, die bei der Kowirkung einer Hopfalgebra H auf einer (H-Komodul-)Algebra A und dual dazu bei der Wirkung von H auf einer (H-Modul-)Koalgebra C auftritt, wobei H eine Hopfalgebra über einem kommutativen Grundring ist. Insbesondere interessieren wir uns dabei für H-Galois- und H-Ko-Galois-Erweiterungen.
Verbunden ist mit solchen Erweiterungen einerseits ein geometrischer Aspekt (siehe [33, chapter 5] oder [49, Theorem 8.5.7 und Bemerkungen] für eine Einführung), andererseites hat die Theorie direkte Auswirkungen auf Strukturfragen von Hopfalgebren ([49, section 8.5]). Dabei ist insbesondere die erste Vermutung von Kaplansky (vgl. [34]) über die Struktur einer Hopfalgebra über ihren Unterhopfalgebren zu nennen.

Anders als im Fall von H-Wirkungen auf Algebren, die Gruppenwirkungen verallgemeinern, ist die Modultheorie, die bei den hier betrachteten (Ko-)Wirkungen auftritt, noch nicht ausreichend untersucht und verstanden worden. Das liegt zum Teil daran, daß die Modul-Kategorien, die in diesen Zusammenhängen auftreten, im allgemeinen keine vollen Modulkategorien

(der Form R-Mod für einen geeigneten Ring R) sind, zum anderen an der Tatsache, daß die involvierten Funktoren sich nicht direkt als Hom-Funktoren verstehen lassen.
In dieser Arbeit zeigen wir, daß ein modultheoretischer Ansatz dennoch fruchtbar ist. Unter sehr schwachen Voraussetungen treten Modulkategorien des Typs $\sigma[M]$ auf, die in [71] und in [72] eingehend untersucht wurden, wobei $\sigma[M]$ für einen R-Modul M über einem Ring R die volle Unterkategorien der M-suberzeugten R-Moduln bezeichnet.

Ist A eine H-Komodulalgebra, so ist die Kategorie $\mathcal{M}_A^H$ der $(A$-$H)$-Bimoduln - das sind die Moduln, welche die H-Kowirkung auf A reflektieren - gerade von diesem Typ, falls z.B. H projektiv über dem Grundring R ist. Und im Falle einer über R nicht endlich erzeugten Hopfalgebra H ist diese Kategorie keine volle Modulkategorie über einem geeigneten Ring (hier dem Smash-Produkt $A^{op}\#H^*$), sondern eine echte (volle) Unterkategorie, so daß die Eigenschaften von A als $(A$-$H)$-Bimodul - hier meine ich vornehmlich Projektivitäts- und Generator-Eigenschaften - von Natur aus "lokale" Eigenschaften sind. Genauer gesagt charakterisieren wir in der Kette von Modulkategorien

$$\sigma[A] \subseteq \sigma[A \otimes H] = \mathcal{M}_A^H \subseteq A^{op}\#H^*\text{-Mod}$$

solche Eigenschaften von A in $\sigma[A \otimes H]$.
Betrachtet man im Gegensatz dazu eine H-**Modul**-Algebra A, so entspricht die Kategorie der Bimoduln, welche die H-Wirkung auf A reflektieren, immer schon der vollen Modulkategorie über dem Smash-Produkt $A\#H$-Mod (man vgl. [49, Chapter 4]).

Ausgangspunkt für die Betrachtung von H-Kowirkungen auf einer Algebra über einem beliebigen Grundring war nicht zuletzt die geometrische Fragestellung. Die im folgenden ungeklärten Begriffe erklärt [33].
Sei X ein affines R-Schema (R ein kommutativer Ring) und G ein affin algebraisches R-Gruppenschema, das auf X frei operiert, d.h. die kanonische Abbildung $can : X \times G \to X \times X,\ can(x, g) = (x, x \cdot g)$ (auf rationalen Punkten) ist eine abgeschlossene Einbettung. Oberst hat in [51] ein darstellungstheoretisches Kriterium angegeben, wann der Quotient X/G ein affines Schema ist. Stellt man sich auf den algebraischen Standpunkt, daß die Kategorie der R-Schemata dual zu der Kategorie der kommutativen R-Algebren ist, und ein affin algebraisches R-Gruppenschema unter dieser Zuordnung einer affinen kommutativen Hopfalgebra entspricht, so kann man dieses "geometrische" Affinitäts-Kriterium rein algebraisch studieren. Die obige Situation

übersetzt sich wie folgt:
Dem affinen R-Gruppenschema G entspricht eine affine Hopfalgebra H (über dem kommutativen Grundring R) und dem affinen Schema X eine affine R-Algebra A mit einer H-Koaktion $\rho : A \to A \otimes H$, so daß A eine H-Komodul-Algebra wird. In A liegt die Unteralgebra der unter der H-Koaktion invarianten Elemente $B := \{a \in A \mid \rho(a) = a \otimes 1\}$. Diese entspricht dem affinen Quotienten. Die kanonische Einbettung induziert unter dieser Zuordnung die natürliche Abbildung $can : A \otimes_B A \to A \otimes H, \quad a \otimes b \mapsto (a \otimes 1)\rho(b)$.
In den Bemerkungen nach Corollary 5.13 bemerkt J.C. Jantzen in [33], daß für ein R-Gruppenschema G mit einem Untergruppenschema H über einem Grundkörper R der Quotient G/H genau dann affin ist, wenn die Induktion ind_H^G von H-Moduln zu G-Moduln exakt ist. Betrachtet man die Situation allgemeiner über einem Grundring R für R-flache Gruppenschemata G und H, so impliziert die Affinität des Quotienten G/H nur noch die Exaktheit des Induktionsfunktors. Nach geeigneter Übersetzung (vgl. auch [58, Introduction]) ist das Studium von H-Komodulalgebren also geeignet, solche Fragen zu analysieren. Die Frage, was über einem Grundring noch richtig bleibt, war motivierend für die Betrachtungen im ersten Kapitel.

Wegweisend für diese Arbeit waren die Arbeiten von H.-J. Schneider (siehe [58], [59]) und von Yokio Doi (siehe [25], [23], [27]). Grundlegende Vorarbeiten für die Theorie der Hopf- und Koalgebren über allgemeinen (und speziellen) Grundringen, die wir in der Arbeit benutzen, wurden von Robert Wisbauer in [73] und [74] geleistet. Auch die Ergebnisse von Khaled Al-Takhman über allgemeine Kotensorfunktoren aus [2] waren sehr hilfreich.

In den letzten Jahren hat die hier betrachtete Situation eine Reihe von Verallgemeinerungen erfahren. Y. Doi und M. Koppinen haben unabhängig voneinander simultane (und verträgliche) Wirkungen und Kowirkungen einer Hopfalgebra auf einer Algebra und einer Koalgebra studiert ([27] und [35]). Die dort interessanten sog. Doi-Koppinen-Kategorien sind auch vom Typ $\sigma[M]$. Tomasz Brzeziński hat diesen Ansatz in [8] und [9] verallgemeinert. Er hat Doi-Koppinen-Kategorien unter das Konzept der "entwining structures" subsumiert und konnte mit diesem (wegen [57]) tatsächlich allgemeineren Ansatz große Teile der (Doi-Koppinen-)Theorie entwickeln. Noch allgemeiner lassen sich die hier untersuchten Kategorien als allgemeine Komodul-Kategorien über Koringen verstehen. Das wird zur Zeit noch entwickelt, doch sind schon wichtige Ergebnisse erzielt worden (man vgl. [10], [31] oder [75]).

Bei all diesen Ansätzen sind die jeweils betrachteten Modulkategorien (unter sehr schwachen Voraussetzungen) vom Typ $\sigma[M]$ für einen geeigneten Modul M. Dennoch werden beim Studium dieser verallgemeinerten Situationen hauptsächlich (allgemein) kategorielle und funktorielle Überlegungen angestellt.

Es zeigt sich, daß in dem Fall, der hier untersucht wird, die auftretenden Funktoren - nach geeigneter Übersetzung - tatsächlich Funktoren sind, die in der Modultheorie in natürlicher Weise auftreten, nämlich Hom-Funktoren. Das versetzt uns in die Lage, die Theorie, die in [71] entwickelt wurde, an vielen Stellen anwenden zu können.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt: Im ersten Kapitel untersuchen wir H-Erweiterungen $A^{coH} \subset A$ für eine R-Hopfalgebra H über einem (zunächst) beliebigen kommutativen Grundring R. Wir zeigen in 1.1.10, daß die assoziierte Modulkategorie $\mathcal{M}_A^H$ der $(A$-$H)$-Bimoduln die Kategorie $\sigma[A \otimes H]$ ist und identifizieren die Unteralgebra der koinvarianten Elemente $A^{coH} \subset A$ mit dem Endomorphismenring $\mathrm{Hom}_A^H(A, A)$ in 1.1.14. Nachdem wir die natürliche Adjunktion zwischen den Kategorien $\mathcal{M}_A^H$ und $\mathcal{M}_{A^{coH}}$ in 1.1.15 erklärt haben (als eine Instanz der natürlichen Hom-Tensor-Relation), können wir schon sehr früh die Ergebnisse im Fall einer über R endlich erzeugten, projektiven Hopfalgebra H erklären. Das geschieht in Abschnitt 1.2.
Danach untersuchen wir interne Eigenschaften von A als $(A$-$H)$-Bimodul - wobei wir im Hinblick auf die Adjunktion in erster Linie an Projektivitäts- und Generatoreigenschaften interessiert sind. Wir definieren in 1.1.16 H-Galois-Erweiterungen und erklären die modultheoretische Bedeutung der Definition.
In Abschnitt 1.3 stellen wir die Ergebnisse aus der Arbeit [47] von C. Menini und M. Zuccoli sowie aus unser gemeinsamen Arbeit [45] vor, die für unsere Betrachtungen relevant sind. Wir charakterisieren in 1.3.3 treu-flache H-Galois-Erweiterungen über beliebigen Grundringen als solche, bei denen wir eine natürliche (sprich durch den $\mathrm{Hom}_A^H(A, -)$-Funktor induzierte) Äquivalenz zwischen den Kategorien $\mathcal{M}_A^H$ und $\mathcal{M}_{A^{coH}}$ vorliegen haben. In 1.3.4 geben wir ein Beispiel einer flachen, nicht treu-flachen H-Galois-Erweiterung. Das beantwortet eine Frage von C. Menini nach der Existenz einer solchen Erweiterung. Bis hierhin sind die Ergebnisse im wesentlichen bekannt und dienen als Einführung in den Problemkreis.

In Abschnitt 1.4 beweisen wir das Theorem I aus dem Artikel [58] von Schnei-

der, welches in der direkten Folge das Theorem über affine Quotienten von Oberst aus [51] auf den Fall nicht-kommutativer Hopfalgebren (mit bijektiver Antipode) verallgemeiernt. Wir geben einen neuen Beweis und können das Resultat in verschiedene Richtungen erweitern.
Besonders interessant ist in diesem Zusammenhang die Kennzeichnung der Generatoreigenschaft von $A \otimes H$ in $\mathcal{M}_A^H$ in 1.4.1 und die neue Kennzeichnung eines totalen Integrals in 1.4.7, die neue Aspekte in die Theorie der H-Erweiterungen bringen. Die Beweise dieser Ergebnisse zeigen sehr schön, wie die "Trivialität" (die sich aus dem Fundamentalsatz für Hopfalgebren ergibt) der Kategorie der Hopfmoduln ausgenutzt werden kann, um Aussagen über $(A\text{-}H)$-Bimoduln zu erzielen. Durch diese Resultate wird der Beweis der Hauptresultate 1.4.9 und 1.4.11 sehr vereinfacht.

In Abschnitt 1.5 untersuchen wir Ko-Frobenius-Hopfalgebren. Hier sind wir in erster Linie an der Kennzeichnung einer Ko-Frobenius-Hopfalgebra als Generator in der Kategorie der Links- oder Rechts-H-Komoduln interessiert. Dieser Teil motiviert sich durch die Tatsache, daß wir zuerst bei der trivialen H-Komodulalgebra R untersuchen wollen, wann der Subgenerator $H \simeq R \otimes_R H$ in $\mathcal{M}_R^H$ ein Generator ist, da sich diese Tatsache als bedeutsam für die Theorie in Abschnitt 1.4 herausgestellt hat. Ausgehend von der Kennzeichnung einer Ko-Frobenius-Hopfalgebra über einem Körper aus dem Theorem von Lin-Larson-Sweedler (1.5.1) benutzen wir lokal-global Argumente, um dieses Ergebnis in 1.5.12 auch für einen Grund-QF-Ring zu erhalten. Auf dem Weg dorthin ist der Satz 1.5.10 bemerkenswert, der zeigt, daß eine Hopfalgebra H, die Generator in der Kategorie $\mathcal{M}^H$ der Rechts-H-Komoduln ist, schon eine bijektive Antipode S_H besitzt, wenn nur H über R projektiv und der Grundring R artinsch ist.

In Abschnitt 1.6 erklären und verallgemeinern wir die Hauptergebnisse aus dem Artikel [20] von Cohen, Raianu und Westreich. Unser Hauptresultat ist hier 1.6.14. Bei Vorhandensein eines totalen Integrals $t : H \to A$ stellt es für eine Unterhopfalgebra $K \subset H$ einen Zusammenhang her zwischen der H-Erweiterung $A^{coH} \subset A$ und der assoziierten K-Erweiterung $A^{coH} \subset A\Box_H K$. Falls K das Koradikal von H enthält, so ist $A^{coH} \subset A$ genau dann eine H-Galois-Erweiterung, wenn dies für $A^{coH} \subset A\Box_H K$ gilt.
Im Fall $K = R[G]$, wobei G die Gruppe der gruppenähnlichen Elemente ist, war dies über einem Grundkörper R in [20] untersucht worden. Während in [20] ein Beweis über die Koradikal-Filtrierung der Hopfalgebra geführt wird, benutzen wir rein funktorielle und modultheoretische Überlegungen.

Die Ergebnisse aus [20] erhalten wir in 1.6.15 als Korollar aus Theorem 1.6.14. Auch die Theoreme 3.1 und 4.2 aus [53] können wir erweitern. Dort werden Semi-Invarianten einer H-Komodulalgebra A über einer endlich-dimensionalen Hopfalgebra H studiert und für kohalbeinfaches H wird der erste Teil unseres Theorems [20] erzielt. Neu an unseren Untersuchungen ist Satz 1.6.4. Dort wird das Studium der K-Semi-Invarianten funktoriell in die Adjunktion der $(A\text{-}H)$-Bimoduln aus 1.1.15 eingebunden. Zum Abschluß dieses Teils geben wir in 1.6.16 noch ein Gegenbeispiel zu Theorem 2.8 aus [12].

Das zweite Kapitel behandelt den dualen Fall einer H-Wirkung auf einer Koalgebra C, so daß die Wirkung mit der Koalgebra-Struktur verträglich ist. Wir erklären zuerst die Modulkategorie der $(H\text{-}C)$-Bimoduln, die in diesem Zusammenhang die interessanten Eigenschaften reflektiert. In 2.1.6 definieren wir den Funktor $-\otimes_H R : \mathcal{M}_H^C \to \mathcal{M}^{\overline{C}}$ und die Faktor-Koalgebra $\overline{C} := C \otimes_H R$ der Koinvarianten von C und zitieren in 2.1.7 die natürliche Adjunktion zwischen den Kategorien $\mathcal{M}_H^C$ und $\mathcal{M}^{\overline{C}}$, die durch den Funktor der Koinvarianten induziert wird. Dies dient zur Einführung.

Das Neue an unseren Untersuchungen ist, daß wir auch in dem dualen Fall die Adjunktion zwischen den Kategorien $\mathcal{M}_H^C$ und $\mathcal{M}^{\overline{C}}$ über einen kleinen Umweg (vgl. 2.2.2) als eine Adjunktion verstehen können, die in der Modultheorie ausgiebig untersucht wird - die Adjunktion der kontravarianten Hom-Funktoren (vgl. [71, 45.10]). Wir zeigen, daß der Funktor $\mathrm{Hom}_H^C(-, C)$ als Komposition der Funktoren $-\otimes_H R$ und $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ verstanden werden kann. Dadurch - anders als in Kapitel 1 - erzielen wir die interessanten Ergebnisse nur in dem Fall, in dem der Funktor $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ "besonders gute" Eigenschaften (sprich Treuheit und Exaktheit) besitzt, also der Grundring ein QF-Ring ist.

Durch diese Sichtweise reduziert sich unsere Betrachtung in Abschnitt 2.2, in dem wir einen neuen Beweis für das Theorem II aus [58] geben, auf das Studium von Injektivitäts- und Kogenerator-Eigenschaften der Koalgebra C in der Kategorie $\mathcal{M}_H^C$ der $(H\text{-}C)$-Bimoduln, bzw. in der Kategorie $\mathcal{M}^{\overline{C}}$. In 2.2.12 definieren wir Ko-Galois-Erweiterungen $C \to \overline{C}$ und erklären, welche modultheoretische Bedeutung diese Definition hat.

In Abschnitt 2.3 haben wir die Ergebnisse aus Abschnitt 1.6 dualisiert. Bei einer Surjektion von Hopfalgebren $\pi : H \to L$ bringen wir dort eine Ko-Erweiterung der Form $C \to \overline{C}$ in Beziehung zu der assoziierten Ko-

Erweiterung $C \otimes_H L \to \overline{C}$. Bei Vorhandensein eines totalen Kointegrals $\kappa : C \to H$ (vgl. Definition 2.2.13) können wir in dem Fall, daß eine Algebrasurjektion $L \to H/Jac(H)$ existiert, zeigen, daß die Ko-Erweiterung $C \to \overline{C}$ genau dann ko-galoisch ist, wenn dies für die Ko-Erweiterung $C \otimes_H L \to \overline{C}$ gilt. Auch hier verwenden wir funktorielle Überlegungen und modultheoretische Schlußweisen.

In Kapitel 3 schließlich betrachten wir die Probleme bei der Quotiententheorie für Hopfalgebren aus unserer Sichtweise. Für eine Unterhopfalgebra K in einer Hopfalgebra H gibt es im allgemeinen keine Hopfalgebra, die als Quotient dieser Einbettung anzusehen wäre. Es existieren Faktorobjekte von H, die noch die Struktur einer Faktor-Koalgebra tragen, nämlich $\overline{H} := H \otimes_K R$ und $\overline{H}' := R \otimes_K H$.
In den Grundlagen erklären wir die Konzepte der (einseitigen) Normalität einer Einbettung von Hopfalgebren und erklären, warum sich die Untersuchungen aus den Kapiteln 1 und 2 eignen, um die Probleme auf dem Gebiet der Quotiententheorie zu untersuchen. Wir können die Ergebnisse aus [59] anders verstehen und in speziellen Fällen einige neue Kennzeichnungen und Hinweise geben.

Meinem Lehrer Prof. Dr. Robert Wisbauer möchte ich von ganzem Herzen für die vielen Anregungen und die Gespräche danken, die wir über die hier vorgestellten Probleme geführt haben. Wichtiger als diese aber waren für mich seine ständige Gesprächsbereitschaft und seine ruhige Art, Mathematik zu vermitteln, aus der ich viel gelernt habe. Auch dafür bedanke ich mich ganz herzlich.
Mein Dank gilt auch Prof. Pepe Gomez Torrecillas, der mir in Granada immer wieder interessante Anregungen gab. In diesem Zusammenhang danke ich auch dem DAAD, der den wissenschaftlichen Austausch mit der Universität von Granada im Rahmen des Forschungsprojekts *Acciones Integradas* gefördert hat.
Ich danke auch ganz herzlich Prof. Claudia Menini, die sich mit mir in Ferrara und Bonn viele Gedanken über die Arbeiten von Prof. Y. Doi gemacht hat. Dabei danke ich auch der Universität von Ferrara, die mir einen Aufenthalt am dortigen mathematischen Institut ermöglichte.

Preliminarien

In diesem Abschnitt tragen wir einige Notationen und Ergebnisse (ohne Beweis) zusammen, die in der ganzen Arbeit Verwendung finden.

R ist immer als ein kommutativer, assoziativer Ring mit Eins vorausgesetzt. Alle Tensorprodukte, die keinen Index tragen, sind als Tensorprodukte über R zu verstehen. Ebenso bedeutet "linear" ohne weitere Spezifikation im folgenden immer "R-linear".

Für eine assoziative R-Algebra A_R mit Eins bezeichnen wir die Kategorie der unitären Links- (resp. Rechts-) A-Moduln mit ${}_A\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}_A$). Für die (Rechts-) A-Modulstrukturabbildung auf einem A-Modul M verwenden wir die Bezeichnung $\mu_M : M \otimes A \to M$. Das Zentrum von A bezeichen wir mit $Z(A)$, also

$$Z(A) := \{a \in A \mid ab = ba \text{ für alle } b \in A\}.$$

Ist ${}_AM$ ein unitärer Links-A-Modul, so bezeichnen wir mit $\sigma[{}_AM]$ die volle Unterkategorie von A-Mod, deren Objekte die von M suberzeugten A-Moduln sind, also die A-Moduln U, die Untermodul eines M-erzeugten Moduls sind. Für eine umfassende Darstellung der Theorie der Kategorien vom Typ $\sigma[{}_AM]$ verweisen wir auf [71] und [72].

Für eine koassoziative R-Koalgebra C_R bezeichnen wir die Kategorie der kounitären Rechts- (resp. Links-) C-Komoduln mit $\mathcal{M}^C$ (resp. ${}^C\mathcal{M}$). Ist N ein Recht-C-Komodul, so schreiben wir für die R-lineare Komodulstrukturabbildung $\rho_N : N \to N \otimes C$. Für die grundlegenden Definitionen für R-Koalgebren und R-Hopfalgebren über einem Grundring R und eine gute Einführung in die Theorie verweisen wir auf [73, chapter 2], [74] und auf [15, chapter 7].

Ist C_R eine R-Koalgebra mit Komultiplikation Δ_C, so benutzen wir die folgende Variante der Sweedler-Notation [64] für die Wirkung der Komultiplikation auf ein Element $c \in C$, d.h. wir benutzen folgende Darstellung für das Element $\Delta_C(c) \in C \otimes C$:

$$\Delta_C(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

Häufig wollen wir die Voraussetzungen so vorgeben, daß die Kategorie der Rechts-C-Komoduln über einer R-Koalgebra C mit der Kategorie der von C suberzeugten Links-C^*-Moduln identifiziert werden kann, daß also $\mathcal{M}^C =$

$\sigma[_{C^*}C]$ gilt. Hinreichend dafür ist, daß C die sog. α-Bedingung erfüllt, d.h. daß für alle R-Moduln M die R-lineare Abbildung

$$\alpha_M : M \otimes C \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(C,R),M), \quad m \otimes c \mapsto [f \mapsto f(c)m]$$

injektiv ist. Dies ist z.B. der Fall, wenn C über R projektiv ist (vgl. [74] oder [30]).

Ist C eine Koalgebra über R und ist $\rho_M : M \to M \otimes C$ ein Rechts-C-Komodul und $\rho_N : N \to C \otimes N$ ein Links-C-Komodul, so ist das Kotensorprodukt $M \Box_C N$ von M und N über C erklärt als Kern der R-linearen Abbildung

$$\gamma := \rho_M \otimes id - id \otimes \rho_N : M \otimes N \to M \otimes C \otimes N,$$

also durch die exakte Folge von R-Moduln

$$0 \to M \Box_C N \to M \otimes N \xrightarrow{\gamma} M \otimes C \otimes N.$$

Eine Analyse der elementaren Eigenschaften des Kotensorproduktes zweier C-Komoduln für eine R-Koalgebra C über einem Grundring R findet sich in [2, Kapitel 2]. Insbesondere werden wir für einen Rechts-C-Komodul N häufig den Kotensor-Funktor $N \Box_C - : {}^C\mathcal{M} \to \mathcal{M}_R$ betrachten. Wir nennen einen Modul $N \in \mathcal{M}^C$ *(treu-) koflach*, wenn der Funktor $N \Box_C -$ (treu-) exakt ist.

Ist $\rho_N : N \to N \otimes C$ ein Rechts-C-Komodul und $n \in N$, so verwenden wir für die Darstellung des Elementes $\rho_N(n) \in N \otimes C$ die Schreibweise $\rho_N(n) = \sum n_{(0)} \otimes n_{(1)}$.

Ist C eine R-Koalgebra und A eine R-Algebra, so können wir den R-Modul $\mathrm{Hom}_R(C,A)$ mit der Struktur einer assoziativen R-Algebra versehen. Dies geschieht durch die Festlegung der Multiplikation

$$f * g(c) := \sum f(c_{(1)}) \cdot g(c_{(2)}) \quad \text{für } f,g \in \mathrm{Hom}_R(C,A), c \in C.$$

Die Multiplikation $*$ heißt das *Konvolutionsprodukt* auf $\mathrm{Hom}_R(C,A)$.

Sei H eine R-Hopf Algebra mit Multiplikation μ_H, Einheit 1_H, Komultiplikation Δ_H, Koeinheit ε_H und Antipode S_H. Wenn keine Unklarheiten auftreten können, werden wir den Index weglassen.

Sind M, N Rechts-H-Komoduln über H, so können wir das Tensorprodukt $M \otimes N$ mit der trivialen von N induzierten Rechts-H-Komodulstruktur versehen, also

$$\rho^{tr}_{M \otimes N} := id_M \otimes \rho_N : M \otimes N \to M \otimes N \otimes H.$$

Da H eine Hopfalgebra ist, existiert eine weitere, die sogenannte (ko-)diagonale Komodulstruktur auf dem Tensorprodukt:

$$\rho^c_{M\otimes N} : M \otimes N \to M \otimes N \otimes H, \quad m \otimes n \mapsto \sum m_{(0)} \otimes n_{(0)} \otimes n_{(1)} n_{(1)}.$$

Wenn es uns angebracht erscheint und Mißverständnisse vermieden werden sollen, werden wir das Tensorprodukt $M \otimes N$, wenn es mit dieser Komodulstruktur versehen ist, mit $M \otimes^c N$ bezeichnen.

Analog werden wir, wenn wir es für nötig halten, das Tensorprodukt zweier Rechts-H-Moduln U und V, wenn wir es mit der diagonalen H-Modulstruktur

$$\mu^c_{U\otimes V} : (U \otimes V) \otimes H \to U \otimes V, \quad u \otimes v \otimes h \mapsto \sum uh_{(1)} \otimes vh_{(2)}$$

versehen, mit $U \otimes_c V$ bezeichnen.

Für eine Hopfalgebra H über einem Grundring R gilt das *Fundamental-Theorem für Hopfmoduln*, welches besagt, daß die Kategorien der (H,H)-Bimoduln und der R-Moduln über den Funktor der Koinvarianten äquivalent sind. Für eine Darstellung dieses Resultats vergleiche man [60, Theorem 2.1]. Ist H über R flach, so ist die Kategorie der Rechts- oder Links-H-Komoduln eine Grothendieck-Kategorie (vgl. [73]). In diesem Fall ist auch die Kategorie der Hopfmoduln eine Grothendieck-Kategorie und H ist ein projektiver Generator für die Kategorie der Hopfmoduln.

Die Antipode S von H definiert einen kanonischen Funktor $\mathcal{S} : {}^H\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^H$, der einem Links-$H$-Komodul $\rho_U : U \to H \otimes_R U$ den Rechts-H-Komodul U^S mit H-Komodulstruktur

$$\rho_{U^S} = (id \otimes S) \circ \tau \circ \rho_U : U^S \longrightarrow U^S \otimes_R H$$

zuordnet und die Morphismen unverändert läßt. Ist die Antipode S bijektiv mit inverser Abbildung $\overline{S}$, so ist $\mathcal{S}$ eine kategorische Äquivalenz mit inversem Funktor $\bar{\mathcal{S}} : \mathcal{M}^H \to {}^H\mathcal{M}$,

$$\rho_V : V \longrightarrow V \otimes_R H \quad \longmapsto \quad \rho_{\bar{S}V} = (\bar{S} \otimes id) \circ \tau \circ \rho_{\bar{S}V} : {}^{\bar{S}}V \longrightarrow H \otimes_R {}^{\bar{S}}V.$$

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein (ko- oder kontravarianter) Funktor, der rechts adjungiert ist zum Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Wir nennen ein Objekt $A \in \mathcal{C}$ *(F,G)-statisch*, wenn der natürliche Morphismus $G(F(A)) \to A$ ein Isomorphismus in $\mathcal{C}$ ist. Wir nennen ein Objekt $B \in \mathcal{D}$ *(F,G)-adstatisch*, falls der natürliche Morphismus $B \to F(G(B))$ ein Isomorphismus in $\mathcal{D}$ ist. Wenn klar ist, welches Paar adjungierter Funktoren gemeint ist, sprechen wir einfach nur von statischen und adstatischen Objekten.

Kapitel 1

$(A$-$H)$-Bimoduln

In diesem Kapitel studieren wir die H-Kowirkung einer R-Hopfalgebra H auf einer H-Komodulalgebra A. In den Abschnitten 1.1, 1.2 und 1.3 werden die modultheoretischen Grundlagen erklärt. Wir tragen Ergebnisse aus verschiedenen Artikeln (neben anderen [73], [58], [25], [23], [47], [45], [36]) zusammen, um zuerst den Stand der Theorie darzustellen. Danach, im wesentlichen beginnend mit Abschnitt 1.4, können wir darauf aufbauend neue Ergebnisse vorstellen.

1.1 Grundlagen

H sei im folgenden eine koassoziative, kounitäre R-Hopfalgebra mit Antipode S. Sei A eine Rechts-H-Komodul Algebra, d.h. A ist eine R-Algebra mit Multiplikation $\mu_A : A \otimes_R A \to A$ und Einheit 1_A und A ist ein Rechts-H-Komodul mit Strukturabbildung $\varrho_A : A \to A \otimes_R H$, so daß ϱ_A ein Algebrenmorphismus ist.

In dieser Situation ist die Kategorie der $(A$-$H)$-Bimoduln ein natürliches Objekt, und die Eigenschaften dieser Kategorie sind eng mit den Eigenschaften von A verknüpft. Kategorien vom Typ $\mathcal{M}_A^H$ wurden und werden als Verallgemeinerung von relativen Hopfmoduln (man vgl. [23]) ausgiebig studiert. Heute wird das Studium solcher Kategorien unter dem allgemeineren Konzept der Doi-Koppinen-Kategorien (siehe z.B. [11]) oder unter Komodul-Kategorien von Koringen (z.B. [31]) betrieben. Trotzdem gehen bei diesen Verallgemeinerungen wesentliche Eigenschaften verloren. Dies ist für uns auch ein Grund, zuerst einmal die Modultheorie im "einfachen" Fall der $(A$-$H)$-Bimoduln zu verstehen.

In diesem Abschnitt führen wir die Kategorie der $(A\text{-}H)$-Bimoduln ein, zeigen, daß sie als Modulkategorie vom Typ $\sigma[M]$ aufgefaßt werden kann, und erklären die natürlichen Adjunktionen, die durch die Vergiß-Funktoren induziert werden.

Ist N ein Rechts-A-Modul, so können wir $N \otimes_R H$ als Rechts-$A \otimes_R H$-Modul auffassen durch $(n \otimes h)(a \otimes k) := na \otimes hk$ und als Rechts-A-Modul auffassen durch, $(n \otimes h) \cdot a := (n \otimes h)\varrho_A(a)$.

1.1.1 Definition. *Sei H eine R-Hopfalgebra und A eine Rechts-H-Komodulalgebra über R.*

(1) Ein R-Modul M heißt rechts $(A\text{-}H)$-Bimodul, *wenn $\mu_M : M \otimes_R A \to M$ ein Rechts-A-Modul, $\varrho_M : M \to M \otimes_R H$ ein Rechts-H-Komodul, und zudem ϱ_M A-linear ist, d.h.*

$$\varrho_M(ma) = \varrho_M(m) \cdot a \ (= \varrho_M(m)\varrho_A(a)) \ \textit{für } m \in M,\ a \in A.$$

Äquivalent dazu ist, daß μ_M rechts H-kolinear ist, wobei $M \otimes_R^c A$ die diagonale Komodul-Struktur trägt.

(2) Mit $\mathcal{M}_A^H$ bezeichnen wir die Kategorie, deren Objekte die $(A\text{-}H)$-Bimoduln sind und deren Morphismen zwischen $(A\text{-}H)$-Bimoduln M und N die linearen Abbildungen sind, die sowohl A-linear, als auch H-kolinear sind. Die Menge der Morphismen zwischen M und N bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}_A^H(M, N)$.

Bemerkungen:

(1) $\mathcal{M}_A^H$ ist eine additive Kategorie mit Kernen und Kokernen und ist abgeschlossen unter (unendlichen) direkten Summen. $\mathcal{M}_A^H$ ist eine Grothendieck-Kategorie, wenn H über R flach ist (vgl. [73]).

(2) Wir können auch die Kategorie der (links-rechts-)$(A\text{-}H)$-Bimoduln ${}_A\mathcal{M}^H$ betrachten (vgl. [58, section 3]). Besitzt die Hopfalgebra H eine bijektive Antipode S_H mit inverser Abbildung $\overline{S}_H$, so ist auch die duale Algebra H^{op} eine Hopfalgebra (mit der gleichen Koalgebra-Struktur wie H und Antipode $\overline{S}_H$) und es gilt ${}_A\mathcal{M}^H = \mathcal{M}_{A^{op}}^{H^{op}}$.

Natürlich können wir einen $(A\text{-}H)$-Bimodul als A-Rechtsmodul oder als H-Rechtskomodul betrachten, d.h. wir können jeweils eine Struktur vergessen. Umgekehrt kann man jedem A-Rechtsmodul und jedem H-Rechts-Komodul in natürlicher Weise einen induzierten $(A\text{-}H)$-Bimodul zuordnen.
Die nächsten Sätze zeigen, daß dies funktoriell erreicht werden kann.

1.1.2 Satz. *Sei H eine R-Hopfalgebra mit H_R flach und A eine Rechts-H-Komodulalgebra.*

(1) Für jeden Rechts-A-Modul N ist $N \otimes_R H$ ein $(A$-$H)$-Bimodul mit den Strukturabbildungen

$$\begin{aligned} \varrho_{N \otimes_R H} &: N \otimes_R H \to (N \otimes_R H) \otimes_R H, \quad n \otimes c \mapsto n \otimes \Delta c, \\ \mu_{N \otimes_R H} &: (N \otimes_R H) \otimes_R A \to N \otimes_R H, \quad n \otimes c \otimes a \mapsto (n \otimes c)\varrho_A(a). \end{aligned}$$

Für jeden $(A$-$H)$-Bimodul M ist die Strukturabbildung $\varrho_M : M \to M \otimes_R H$ ein $(A$-$H)$-Bimodulmorphisms.

(2) Ist $\alpha : N_1 \to N_2$ ein (Epi-)Morphismus in $\mathcal{M}_A$, dann ist die induzierte Abbildung

$$\alpha \otimes id_H : N_1 \otimes_R H \to N_2 \otimes_R H$$

ein (Epi-)Morphismus von $(A$-$H)$-Bimoduln.

(3) Für jeden Rechts-H-Komodul L wird $L \otimes^c_R A$ zu einem $(A$-$H)$-Bimodul mit den Strukturabbildungen

$$\begin{aligned} \mu_{L \otimes^c_R A} &: (L \otimes^c_R A) \otimes_R A \to L \otimes^c_R A, \quad l \otimes a \otimes b \mapsto l \otimes ab, \\ \varrho_{L \otimes^c_R A} &: L \otimes^c_R A \to (L \otimes^c_R A) \otimes_R H, \quad l \otimes a \mapsto \sum l_{(0)} \otimes a_{(0)} \otimes l_{(1)} a_{(1)}. \end{aligned}$$

Für jeden $(A$-$H)$-Bimodul M ist die Strukturabbildung $\mu_M : M \otimes^c_R A \to M$ ein $(A$-$H)$-Bimodulmorphismus.

(4) Ist $\beta : L_1 \to L_2$ ein (Epi-)Morphismus von H-Komoduln, so ist

$$\beta \otimes id_A : L_1 \otimes^c_R A \to L_2 \otimes^c_R A$$

ein (Epi-)Morphismus von $(A$-$H)$-Bimoduln.

Beweis. Das ist leicht zu verifizieren. (vgl. [24, Example 1.1, 1.2]). $\boxed{qed}$

Als eine erste Anwendung erhalten wir:

1.1.3 Korollar. *Ist der Rechts-H-Komodul G ein Generator in $\mathcal{M}^H$, dann ist $G \otimes^c_R A$ mit den Strukturen aus 1.1.2,(3) ein Generator in $\mathcal{M}^H_A$.*

Beweis. Sei M ein $(A$-$H)$-Bimodul. Dann existiert ein Epimorphismus $\pi : G^{(\Lambda)} \to M$ in $\mathcal{M}^H$. Daraus erhalten wir einen induzierten Epimorphismus in $\mathcal{M}^H_A$

$$G^{(\Lambda)} \otimes^c A \to M \otimes^c A \to M.$$

$\boxed{qed}$

1.1.4 Bemerkung:
Nach 1.1.2 sind sowohl $A \otimes_c H$, als auch $H \otimes^c A$ Objekte in $\mathcal{M}_A^H$. Man rechnet nach, daß im Falle einer bijektiven Antipode S von H mit inverser Abbildung $\overline{S}$ die beiden Objekte in $\mathcal{M}_A^H$ isomorph sind durch den $(A$-$H)$-Isomorphismus

$$\Theta : H \otimes^c A \to A \otimes_c H, \quad h \otimes a \mapsto \sum a_{(0)} \otimes h a_{(1)},$$

der invers ist zur Abbildung $a \otimes h \mapsto \sum h\overline{S}(a_{(1)}) \otimes a_{(0)}$.

1.1.5 Definition. *Sei A eine Rechts-H-Komodulalgebra. Wir bezeichnen den Funktor, der bei einem $(A$-$H)$-Bimodul die H-Komodulstruktur vergißt, mit $\mathcal{U}^H : \mathcal{M}_A^H \to \mathcal{M}_A$. Den Funktor, der die A-Struktur vergißt, bezeichnen wir mit $\mathcal{U}_A : \mathcal{M}_A^H \to \mathcal{M}^H$.*

1.1.6 Satz. *Sei H eine R-Hopfalgebra mit H_R flach und A eine Rechts-H-Komodulalgebra. Dann gilt:*

(1) Der Funktor $\mathcal{U}^H : \mathcal{M}_A^H \to \mathcal{M}_A$ ist links adjungiert zum Funktor $- \otimes_R H : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_A^H$. Das bedeutet, daß für $M \in \mathcal{M}_A^H$ und $N \in \mathcal{M}_A$ die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_A^H(M, N \otimes_R H) \to \mathrm{Hom}_A(M, N), \; f \mapsto (id \otimes \varepsilon) \circ f,$$

ein (in M und N funktorieller) R-Isomorphismus mit inverser Abbildung $h \mapsto (h \otimes id) \circ \varrho$ ist.

(2) Der Funktor $\mathcal{U}_A : \mathcal{M}_A^H \to \mathcal{M}^H$ ist rechts adjungiert zum Funktor $- \otimes_R^c A : \mathcal{M}^H \to \mathcal{M}_A^H$. Das bedeutet, daß für $N \in \mathcal{M}^H$ und $M \in \mathcal{M}_A^H$ die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_A^H(N \otimes_R^c A, M) \to \mathrm{Hom}^H(N, M), \; g \mapsto [n \mapsto g(n \otimes 1_A)],$$

ein (in M und N funktorieller) R-Isomomorphismus mit inverser Abbildung $f \mapsto \mu_M \circ (f \otimes id_A)$ ist.

Beweis. (1) Das ist leicht nachzuweisen (vgl. [74, 3.12]) oder [48]).
(2) ist dual zu (1). $\boxed{qed}$

Bemerkung: Es ist interessant zu bemerken, daß Eigenschaften, die über die Hom-Funktoren gekennzeichnet werden können, wie z.B. Projektivitäts- oder Generatoreigenschaften, durch diese Adjunktionen eng verknüpft werden.

Ist beispielsweise N ein projektives Objekt (resp. ein Generator) in $\mathcal{M}^H$, dann ist $N \otimes^c A$ ein projektives Objekt (resp. ein Generator) in $\mathcal{M}_A^H$. Das gibt einen alternativen Beweis für 1.1.3.

Wir wollen nun verstehen, warum die Kategorie $\mathcal{M}_A^H$ der $(A$-$H)$-Bimoduln als eine Kategorie vom Typ $\sigma[M]$ aufgefaßt werden kann. Dazu benötigen wir die folgende Überlegung.

Jeder Modul $M \in \mathcal{M}_A^H$ ist als Rechts-H-Komodul ein Links-H^*-Modul. Wenn wir die Rechts-A-Struktur als Links-Wirkung von A^{op} auffassen, haben wir insgesamt eine Linkswirkung

$$(A^{op} \otimes_R H^*) \otimes_R M \to M, \quad (a \otimes f) \otimes m \mapsto (1_A \otimes f)\varrho_M(m \cdot a).$$

Man kann leicht nachrechnen, daß M bzgl. der normalen Ringstruktur auf $A^{op} \otimes_R H^*$ mit dieser Wirkung im allgemeinen kein Modul über diesem Ring wird. Jedoch kann eine neue Multiplikation auf $A^{op} \otimes_R H^*$ definiert werden, so daß diese Linkswirkung eine Modulstruktur auf M induziert (vgl. [47, Definition 3.3]).

1.1.7 Definition. *Sei A eine Rechts-H-Komodulalgebra. Wir definieren auf dem R-Modul $A \otimes_R H^*$ eine Multiplikation durch:*

$$(a \otimes \gamma)(b \otimes \chi) = \sum b_{(0)} a \otimes (b_{(1)} \leftharpoondown \gamma) * \chi,$$

für $a, b \in A$, $\gamma, \chi \in H^*$ und $a \leftharpoondown \gamma := [h \mapsto \gamma(ha)]$.

Damit wird $A \otimes_R H^*$ eine R-Algebra mit Einheit $1_A \# \varepsilon_H$, die wir mit $A^{op} \# H^*$ bezeichnen. Sie heißt das (linke) Smash-Produkt von A und H. *Für die Elemente $a \otimes f \in A^{op} \# H^*$ schreiben wir $a \# f$.*

Durch nachrechnen sieht man:

1.1.8 Lemma. *Sei A eine Rechts-H-Komodulalgebra und die Hopfalgebra H projektiv in R-Mod.*

(1) Jeder $(A$-$H)$-Bimodul ist ein Links-$A^{op} \# H^*$-Modul und die $(A$-$H)$-Bimodulmorphismen sind genau die $A^{op} \# H^*$-Modul-Morphismen.

(2) Die Abbildungen

$$A^{op} \to A^{op} \# H^*, a \mapsto a \# \varepsilon_H \text{ und } H^* \to A \# H^*, k \mapsto 1_A \# k$$

sind Algebra-Morphismen. Insbesondere ist jeder Links-$A^{op} \# H^*$-Modul ein Rechts-A-Modul und ein links H^*-Modul.

Beweis. Wir verweisen auf [21] oder [47]. $\boxed{qed}$

Es gibt noch ein Smash-Produkt, das im allgemeinen größer ist als $A^{op}\#H^*$. Beachtet man die Bedeutung der Integrale für die Strukturtheorie, so scheint es natürlicher zu sein. Die folgende Definition findet man in [24, section 4]. Auch aus der Sichtweise der (schwachen) Koringe ist dieses Smash-Produkt das natürlichere Objekt (vgl. [75]).

1.1.9 Definition. *Sei A eine Rechts-H-Komodulalgebra. Wir definieren auf dem R-Modul* $\mathrm{Hom}_R(H,A)$ *eine Multiplikation durch:*

$$f\tilde{*}g(h) = \sum f(g(h_{(2)})_{(1)}h_{(1)}g(h_{(2)})_{(0)},$$

für $f,g \in \mathrm{Hom}(H,A)$, $h \in H$. Wir bezeichnen den R-Modul $\mathrm{Hom}(H,A)$ *mit dieser Multiplikation mit $\#(H,A)$ und nennen ihn das* Doi-Koppinen-Smashprodukt von A und H.

Bemerkung: Man beachte, daß das Produkt $\tilde{*}$ auf $\mathrm{Hom}_R(H,A)$ im allgemeinen verschieden ist vom üblichen Konvolutionsprodukt auf $\mathrm{Hom}_R(H,A)$. Gleichheit gilt nur, wenn die Komodulstruktur auf A trivial ist (vgl. [24, section 4]).

Der nächste Satz verallgemeinert [21, Lemma 2.10] von Grundkörper auf Grundringe.

1.1.10 Satz. *Sei H eine projektive R-Hopfalgebra und A eine Rechts-H-Komodulalgebra. Dann gilt:*

$$\mathcal{M}_A^H = \sigma\left[{}_{A^{op}\#H^*}A \otimes_R H\right] = \sigma\left[{}_{A^{op}\#H^*}H \otimes_R^c A\right],$$

also ist die Kategorie der $(A$-$H)$-Bimoduln die Unterkategorie der Links-$A^{op}\#H^*$-Moduln, die von $A \otimes_R H$ oder $H \otimes_R^c A$ suberzeugt werden.

Beweis. Nach 1.1.2 ist $A \otimes_R H$ ein $(A$-$H)$-Bimodul, also ein $A^{op}\#H^*$-Modul. Sei nun $M \in \mathcal{M}_A^H$ und $\alpha : A^{(\Lambda)} \to M$ ein Epimorphismus in $\mathcal{M}_A$. Dann sind die Abbildungen

$$\alpha \otimes id : \ (A \otimes_R H)^{(\Lambda)} \simeq A^{(\Lambda)} \otimes_R H \to M \otimes_R H \text{ and } \varrho_M : M \to M \otimes_R H$$

Morphismen in $\mathcal{M}_A^H$. Das zeigt, daß der Bimodul M von $A \otimes_R H$ suberzeugt wird.

Um zu sehen, daß auch $H \otimes_R^c A$ ein Subgenerator für die $(A$-$H)$-Bimoduln ist, überlegt man sich, daß für jeden $(A$-$H)$-Bimodul M der Modul $M \otimes_R H$ als Rechts-H-Komodul von H erzeugt wird, da er die rechts triviale Komodulstruktur trägt. Nun induziert ein H-Komodulepimorphismus $H^{(\Lambda)} \to M \otimes_R H$ nach 1.1.2 einen Bimodulepimorphismus

$$(H \otimes^c A)^{(\Lambda)} \simeq H^{(\Lambda)} \otimes^c A \to (M \otimes H) \otimes_R^c A.$$

Da $\varrho_M : M \to M \otimes_R H$ R-zerfallend ist, erhalten wir nach Tensorieren mit A eine Einbettung $M \otimes_R^c A \subset (M \otimes_R H) \otimes_R^c A$ in $\mathcal{M}_A^H$. Aber $\mu_M : M \otimes_R^c A \to M$ ist ein Epimorphismus in $\mathcal{M}_A^H$, woraus die Behauptung folgt. $\boxed{qed}$

Bemerkung: Die natürliche Abbildung

$$\Theta : A^{op} \# H^* \to \#(H, A), \quad \Theta(a \# f)(h) := a((h)f)$$

ist ein Algebra-Morphismus. Ist H über R projektiv, so kann man $A^{op} \# H^*$ als (dichte) Unteralgebra von $\#(H, A)$ auffassen. Dann stimmen die Kategorien $\mathcal{M}_A^H$ und $\sigma[_{\#(H,A)} A \otimes H]$ überein (siehe z.B. [73]). Das bedeutet, wir können die $(A$-$H)$-Bimoduln auch als eine Unterkategorie von $\#(H, A)$-Mod auffassen. Dann werden (totale) Integrale $t : H \to A$ (vgl. 1.4.5) spezielle Elemente des Ringes, über dem die Bimoduln betrachtet werden.

Von besonderem Interesse sind natürlich die Unterbimoduln von A selber.

1.1.11 Definition. *Sei H über R-flach. Ein (Rechts-)Ideal $I \subset A$ heißt* H-kostabil, *wenn $\rho_A(I) \subseteq I \otimes H$ gilt, wenn I also ein H-Unterkomodul von A ist.*

Bemerkung:

(1) Die $\mathcal{M}_A^H$-Untermoduln von A sind genau die Rechtsideale $I \subseteq A$, die H-kostabil sind.

(2) A ist zyklischer (also insbesondere endlich erzeugter) $A^{op} \# H^*$-Modul durch den $A^{op} \# H^*$-Epimorphismus

$$\begin{array}{rccc} \pi : & A^{op} \# H^* & \longrightarrow & A \\ & a \# f & \longmapsto & a f(1_H). \end{array}$$

Um die Struktur von A als A-H-Bimodul untersuchen zu können, ist die folgende Begriffsbildung entscheidend.

1.1.12 Definition. *Für einen Modul $M \in \mathcal{M}_A^H$ definieren wir die Menge der* Koinvarianten von M *durch*

$$M^{coH} = \{m \in M \mid \rho_M(m) = m \otimes 1_H\}.$$

Speziell für die Koinvarianten von A benutzen wir die Bezeichnung

$$B := A^{coH} = \{a \in A \mid \rho_A(a) = a \otimes 1_H\}.$$

Bemerkung: Der Endomorphismenring $(\mathrm{End}_A^H(A), \cdot)$ von A als A-H-Bimodul wirkt von rechts, da wir die Morphismen von rechts an die Elemente aus A schreiben. Falls man die Morphismen von links an die Elemente aus A schreibt, und für die Komposition die Schreibweise $f \circ g(a) := f(g(a))$ benutzt, so wirkt $(\mathrm{End}_A^H(A), \circ) = (\mathrm{End}_A^H(A), \cdot)^{op}$ natürlich von links auf A.

Der nächste Satz zeigt, daß die Zuordnung der Koinvarianten zu einem Bimodul funktoriell ist und daß sich dieser Funktor insbesondere mit dem $\mathrm{Hom}_A^H(A, -)$-Funktor identifizieren läßt. Damit wird die Unteralgebra B der koinvarianten Elemente von A gerade mit dem Endomorphismenring $(\mathrm{End}_A^H(A), \circ)$ identifiziert (also wirken die Elemente aus B von links als Endomorphismen auf A).

1.1.13 Definition. *Sei H eine R-Hopfalgebra. Ist A eine Rechts-H-Komodulalgebra und $B = A^{coH}$ die Unteralgebra der Koinvarianten, so nennt man die Ringerweiterung $B \subset A$ eine H-*Erweiterung.

1.1.14 Satz. *Sei H eine als R-Modul projektive R-Hopfalgebra und A eine Rechts-H-Komodulalgebra mit $B := A^{coH}$. Dann gilt:*

(1) Für jedes $M \in \mathcal{M}_A^H$ induziert der Auswertungshomomorphismus einen funktoriellen R-Isomorphismus

$$\phi_M : \mathrm{Hom}_A^H(A, M) \to M^{coH}, \quad f \mapsto f(1_A)$$

mit inverser Abbildung $\omega_M : m \mapsto [a \mapsto (a \otimes \varepsilon_H)m]$.

(2) Speziell erhält man einen R-Algebrenisomorphismus

$$\phi_A : (End_A^H(A), \circ) \simeq B.$$

(3) M^{coH} ist ein Rechts-B-Untermodul von M und ϕ_M ist ein rechts B-Modulmorphismus.

Beweis. [45, 2.1] oder [47, 3.15]. $\boxed{qed}$

Bemerkung: Ein $A^{op}\#H^*$-Untermodul $U \subseteq A$ ist genau dann voll invarianter Untermodul, falls $B \cdot U = U$ gilt, da die Elemente aus B als Endomorphismen von A in $\mathcal{M}_A^H$ auf A von links wirken. Speziell ist jedes zweiseitige Ideal in A voll invariant. Ist A kommutativ, so ist damit jeder $A^{op}\#H^*$-Untermodul von A voll invariant.

Der nachfolgende Satz ist entscheidend für unsere Untersuchungen. Es ist Satz 2.2 in [25].

1.1.15 Satz. *Sei H eine R-Hopfalgebra mit H_R projektiv und A sei eine H-Komodulalgebra mit $B := A^{coH}$. Dann bilden die Funktoren*

$$- \otimes_B A : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_A^H \quad \textit{und} \quad \mathrm{Hom}_A^H(A, -) : \mathcal{M}_A^H \to \mathcal{M}_B$$

ein adjungiertes Funktor-Paar. Das bedeutet, daß für $M \in \mathcal{M}_B$ und $N \in \mathcal{M}_A^H$ die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_A^H(M \otimes_B A, N) \to \mathrm{Hom}_B(M, N^{coH}), \; f \mapsto [m \mapsto f(m \otimes_B 1_A)],$$

ein (in M und N funktorieller) R-Isomorphismus mit inverser Abbildung $h \mapsto [m \otimes_B a \mapsto h(m) \cdot a]$ ist.

Beweis. Das ist nun klar, da wir die Unteralgebra der Koinvarianten $B \subset A$ gerade als den Endomorphismenring von A als $(A$-$H)$-Bimodul identifiziert haben. Also ist die Aussage eine Instanz der natürlichen Adjunktion von Hom- und Tensor-Funktor (vgl. [71, 45.8]). $\boxed{qed}$

An dieser Stelle können wir schon den Begriff der Galois-Erweiterung einführen. Dazu die nächste Definition aus [49, 8.1.1] samt Bemerkungen.

1.1.16 Definition. *Sei H eine R-Hopfalgebra und $B \subset A$ eine H-Erweiterung. Wir nennen die Erweiterung $B \subset A$* H-galoisch *oder eine* H-Galois-Erweiterung, *wenn die natürliche Abbildung*

$$\beta : A \otimes_B A \to A \otimes H, \quad a \otimes_B b \mapsto \sum ab_{(0)} \otimes b_{(1)}$$

ein Isomorphismus ist.

Bemerkungen:

(1) Man rechnet leicht nach, daß die Abbildung β ein Morphismus in $\mathcal{M}_A^H$ ist.

(2) Der Terminus "Galois-Erweiterung" geht auf die Arbeiten von Chase und Sweedler aus den späten 60er Jahren zurück (siehe [17]), in denen sie die Galois-Theorie für Gruppenwirkungen auf kommutativen Ringen auf Hopfalgebra-Kowirkungen verallgemeinert haben. Einen guten Überblick gibt [49, chapter 8].

(3) Im Fall einer Körpererweiterung $k \subseteq F = E^G \subseteq E$, wobei eine endliche Gruppe G auf E via Automorphismen operiert, ist $F \subseteq E$ genau dann eine $(kG)^*$-Galoiserweiterung in unserer Sprechweise, wenn es eine klassische Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe G ist, also wenn $[E : F] = |G|$ gilt (vgl. [49, 8.1.2]).

Die Bedeutung der Definition wird verständlicher, wenn man sich überlegt, daß sich β mit dem folgenden Auswertungshomomorphismus in $\mathcal{M}_A^H$ identifizieren läßt (vgl. dazu auch [45, 2.3]):

1.1.17 Lemma. *Sei H eine R-Hopfalgebra mit H_R projektiv und $B \subset A$ eine H-Erweiterung. Dann existieren für $M \in \mathcal{M}_A^H$ natürliche $(A$-$H)$-Morphismen*

$$\Psi_M : \mathrm{Hom}_A^H(A, M) \otimes_B A \to M, \quad f \otimes a \mapsto f(a) \quad \textit{und}$$

$$\beta_M : M^{coH} \otimes_B A \to M, \quad m \otimes_B a \mapsto ma,$$

die durch das folgende kommutative Diagramm verbunden sind:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}_A^H(A, M) \otimes_B A & \stackrel{\Psi_M}{\to} & M & \qquad & f \otimes a & \mapsto & f(a) \\
\downarrow_{\phi_M \otimes id} & & \| & & \downarrow & & \| \\
M^{coH} \otimes_B A & \stackrel{\beta_M}{\to} & M & & f(1_A) \otimes_B a & \mapsto & f(1_A)a,
\end{array}$$

wobei $\phi_M \otimes id$ nach 1.1.14 ein R-Isomorphismus ist.

Bemerkung: In unserer Sprechweise ist eine H-Galoiserweiterung also eine H-Erweiterung, bei der das Objekt $A \otimes H$ in $\mathcal{M}_A^H$ statisch ist bezüglich der natürlichen Adjunktion aus 1.1.15. Insbesondere ist die "Galois-Abbildung" $\beta = \beta_{A \otimes H}$ bis auf Isomorphie gerade die Auswertung der $(A$-$H)$-Morphismen von A nach $A \otimes H$. Dabei benötigen wir die Feststellung, daß für die Koinvarianten von $A \otimes H$ wegen 1.1.6,(1) gilt: $(A \otimes H)^{coH} \simeq A$.

1.2 Der endliche Fall

Hopf-Galois-Erweiterungen wurden zuerst für endliche Hopfalgebren H (d.h. über R endlich erzeugt und projektiv) und für kommutative R-Algebren A untersucht (vgl. [36] und [69]). Auch wenn in der Definition einer Hopf-Galois-Erweiterung, die Kreimer und Takeuchi geben, die kanonische Abbildung β nur surjektiv zu sein braucht, überlegt man sich leicht, daß bei endlich erzeugt, projektivem H β automatisch bijektiv wird, falls es surjektiv wird (bei endlich erzeugt projektivem H ist $A \otimes H$ immer Generator in $\mathcal{M}_A^H$ und die Antipode von H ist bijektiv nach [54]. Nun verfolge man die Argumentation aus 1.4.8).
Den wesentlichen Unterschied im Fall, daß H über R endlich erzeugt und projektiv ist, zum allgemeinen Fall zeigt das nächste Lemma. Denn dann ist die Kategorie der Bimoduln $\mathcal{M}_A^H$ die volle Modulkategorie über dem Smash-Produkt $A^{op}\#H^*$. Wir zitieren [15, Proposition 8.1.2].

1.2.1 Lemma. *Sei A eine H-Komodulalgebra und die Hopfalgebra H über R endlich erzeugt und projektiv. Dann gilt $A^{op}\#H^*$-Mod $= \mathcal{M}_A^H$.*

Für endlich erzeugt, projektives H beschreibt der nächste Satz nicht-kommutative H-Galois-Erweiterungen $A^{coH} \subseteq A$. Es ist Satz 1.1 in [69] verbunden mit [36, 1.7, 1.8]. Man bemerke, daß im endlichen Fall die Galois-Eigenschaft genau einer Generator-Eigenschaft entspricht.

1.2.2 Satz. *Sei H eine über R endlich erzeugte, projektive Hopfalgebra und $A^{coH} \subset A$ eine H-Erweiterung. Dann sind äquivalent:*

(a) $\beta : A \otimes_{A^{coH}} A \to A \otimes H, \quad a \otimes_{A^{coH}} b \mapsto \sum ab_{(0)} \otimes b_{(1)}$ *ist surjektiv;*

(b) $A^{coH} \subset A$ *ist eine H-Galois-Erweiterung, d.h. β ist ein Isomorphismus;*

(c) *A ist links (oder rechts) endlich erzeugt, projektiv über A^{coH} und es gibt einen Algebrenisomorphismus* $A^{op}\#H^* \simeq \mathrm{End}_{A^{coH}}(A)$*;*

(d) *A ist ein Generator in* $A^{op}\#H^*$-Mod $= \mathcal{M}_A^H$.

Beweis. Das wird in [69, Satz 1.1] und [36, 1.7 und 1.8] bewiesen. $\boxed{qed}$

Ist man zudem noch an kommutativen Galois-Erweiterungen interessiert - oder setzt zumindest voraus, daß der Ring der koinvarianten Elemente kommutativ ist, so reicht die Galois-Eigenschaft von $A^{coH} \subset A$ schon aus, um die Adjunktion aus 1.1.15 zu einer Äquivalenz zu machen.

Wir halten dazu das folgende Resultat fest, welches im wesentlichen [36, 1.10] ist. Wir erklären hier zusätzlich nur die modultheoretischen Charakterisierungen (Kennzeichnung (d) und (e)), um unsere späteren Ergebnisse zu motivieren. Ein ähnliches Ergebnis findet sich auch in [76, Theorem 2.1].

1.2.3 Satz. *Sei H eine über R endlich erzeugte, projektive Hopfalgebra und $A^{coH} \subset A$ eine H-Erweiterung mit A^{coH} kommutativ. Dann sind äquivalent:*

(a) *$A^{coH} \subset A$ ist eine (treu-flache) H-Galois-Erweiterung;*

(b) *A ist links (oder rechts) treu-flach über A^{coH} und β ist surjektiv;*

(c) *A^{coH} ist direkter Summand von A in $\mathcal{M}_{A^{coH}}$ und β ist surjektiv;*

(d) *A ist ein Generator in $\mathcal{M}_A^H$;*

(e) *A ist ein projektiver Generator in $\mathcal{M}_A^H$.*

Beweis. Wir zeigen nur (d) $\Rightarrow$ (e) und verweisen für die restlichen Kennzeichnungen auf 1.2.2 und [36, 1.9 und 1.10].

Ist A^{coH} kommutativ und A ein Generator in $\mathcal{M}_A^H$, dann ist $A_{A^{coH}}$ endlich erzeugt und projektiv, denn $\mathcal{M}_A^H$ ist eine volle Modulkategorie (nach 1.2.1). Nun ist wegen $1_A \in A$ jedoch $A_{A^{coH}}$ ein treuer Modul in $\mathcal{M}_{A^{coH}}$ und mit der Kommutativität folgt aus [71, 18.11], daß $A_{A^{coH}}$ ein Generator in $\mathcal{M}_{A^{coH}}$ ist. Also ist A über dem Endomorphismenring $\mathrm{End}_{A^{coH}}(A)$ endlich erzeugt und projektiv. Aus dem Dichtigkeits-Satz (vgl. [71, 15.7]) folgt nun, daß A auch in $\mathcal{M}_A^H$ projektiv ist. $\boxed{qed}$

Bemerkungen:

(1) Dieser Satz findet insbesondere Anwendung bei Galois-Erweiterungen, deren Koinvarianten trivial (also isomorph zum Grundring) sind. Solche Erweiterungen werden z.B. in [18] betrachtet.

(2) Beispiel 2.17 in [70] zeigt, daß im nicht-kommutativen Fall H-Erweiterungen $A^{coH} \subset A$ einer endlich dimensionalen Hopfalgebra H über einem Körper k existieren mit der Eigenschaft, daß A über A^{coH} treuflach ist, jedoch A kein Generator in $\mathcal{M}_A^H$ ist.

Soweit die "endliche Theorie" - wir sind im weiteren jedoch an H-Galois-Erweiterungen $A^{coH} \subset A$ für Hopfalgebren H interessiert, die nicht notwendigerweise endlich erzeugt über dem Grundring sein müssen.

1.3 A als A-H-Bimodul

In diesem Abschnitt untersuchen wir Projektivitäts- und Generatoreigenschaften von A als $(A\text{-}H)$-Bimodul und diskutieren die Ergebnisse aus [47] und aus [46]. Am Ende dieses Abschnitts geben wir in 1.3.4 ein Beispiel einer flachen, nicht treu-flachen Hopf-Galois-Erweiterung. Von besonderem Interesse sind für uns dabei H-Galois-Erweiterungen, da in diesem Fall A ein Subgenerator für die Kategorie $\mathcal{M}_A^H$ ist. Dies gilt allgemeiner schon für solche H-Erweiterungen, bei denen die kanonische Abbildung β nur surjektiv ist, wie das nächste Lemma zeigt.

1.3.1 Lemma. *Sei A eine H-Komodul-Algebra und $B := A^{coH}$, wobei H eine über R projektive R-Hopfalgebra bezeichnet. Falls die kanonische Abbildung*

$$\beta : A \otimes_B A \to A \otimes H, \quad a \otimes_B b \mapsto (a \otimes 1_A)\rho_A(b)$$

surjektiv ist, dann gilt $\sigma[_{A^{op}\#H^*}A] = \mathcal{M}_A^H$

Beweis. Das ist klar, da die kanonische Abbildung β bis auf Isomorphie gerade der Evaluation der Morphismen von A nach $A \otimes H$ entspricht (vgl. 1.1.17). Also entspricht die Surjektivität von β der Tatsache, daß $A \otimes H$ von A in $\mathcal{M}_A^H$ erzeugt wird. Dann gilt aber $\sigma[_{A^{op}\#H^*}A] = \sigma[_{A^{op}\#H^*}A \otimes H] = \mathcal{M}_A^H$ $\boxed{qed}$

Wir geben in den nächsten beiden Sätzen im Fall eines Grundringes R und einer H-Erweiterung $A^{coH} \subseteq A$ mit H_R projektiv eine Darstellung der Hauptresultate aus [47] und aus unserer gemeinsamen Arbeit [46]. Im wesentlichen kann man die gleiche Argumentation beibehalten wie in [47]. In 1.3.2 werden flache H-Galois-Erweiterungen durch eine Generator-Eigenschaft gekennzeichnet und in 1.3.3 werden treu-flache H-Galois-Erweiterungen $A^{coH} \subseteq A$ als solche H-Erweiterungen gekennzeichnet, bei denen der Funktor $(-)^{coH}$ eine Äquivalenz beschreibt.

1.3.2 Satz. *Sei A eine H-Komodulalgebra und H_R projektiv. Dann sind äquivalent:*

(a) A ist Generator in $\mathcal{M}_A^H$;

(b) der Funktor $\mathrm{Hom}_A^H(A, -) : \mathcal{M}_A^H \to \mathrm{Mod}\text{-}A^{coH}$ *ist treu;*

(c) die Abbildung $\beta_M : M^{coH} \otimes_{A^{coH}} A \to M$, $m \otimes a \mapsto ma$ ist für jeden Modul $M \in \mathcal{M}_A^H$ ein Isomorphismus;

(d) *die Abbildung* $\Psi_M : \mathrm{Hom}_A^H(A, M) \otimes_{A^{coH}} A \to M,\ f \otimes a \mapsto f(a)$ *ist für jeden Modul* $M \in \mathcal{M}_A^H$ *ist ein Isomorphismus;*

(e) *die Abbildung* $\beta : A \otimes_{A^{coH}} A \to A \otimes_R H,\ a \otimes b \mapsto (a \otimes 1_H)\varrho_A(b)$ *ist ein Isomorphismus, d.h.* ${}_{A^{coH}}A$ *ist* H*-Galois, und* ${}_{A^{coH}}A$ *ist flach.*

Beweis. $(a) \Leftrightarrow (b)$ Das gilt allgemeiner in Grothendieck-Kategorien (vgl. [71, 13.6]).

$(a) \Leftrightarrow (d)$ wird in [47, Theorem 2.2 und 2.3] bewiesen.

$(c) \Leftrightarrow (d)$ ist klar mit 1.1.17.

$(d) \Leftrightarrow (e)$ Das wird in [47, 3.22] gezeigt. Vergleiche auch [46, 2.4]. $\boxed{qed}$

Der nächste Satz charakterisiert A als einen Progenerator (d.h. einen endlich erzeugten, projektiven Generator) in der Kategorie $\mathcal{M}_A^H$. Wir beschreiben damit also die durch den $\mathrm{Hom}_A^H(A, -)$-Funktor induzierte Äquivalenz zwischen $\mathcal{M}_A^H$ und A^{coH}-Mod. Er charakterisiert wegen $(d)(iii)$ auch sog. *"treu-flache* H*-Galoiserweiterungen"* $A^{coH} \subset A$.

1.3.3 Satz. *Sei* A *eine* H*-Komodulalgebra und* H_R *projektiv. Dann sind äquivalent:*

(a) A *ist Progenerator in* $\mathcal{M}_A^H$*;*

(b) *der Funktor* $\mathrm{Hom}_A^H(A, -) : \mathcal{M}_A^H \to \mathrm{Mod}\text{-}A^{coH}$ *ist eine Äquivalenz;*

(c) *der Funktor* $(-)^{coH} : \mathcal{M}_A^H \to \mathrm{Mod}\text{-}A^{coH}$ *ist eine Äquivalenz;*

(d) A *ist treu-flacher* A^{coH}*-Modul und es gilt*

  (i) $\beta_M : M^{coH} \otimes_{A^{coH}} A \to M,\ m \otimes a \mapsto ma$ *ist für jeden Modul* $M \in \mathcal{M}_A^H$ *ein Isomorphismus, oder*

  (ii) $\Psi_M : \mathrm{Hom}_A^H(A, M) \otimes_{A^{coH}} A \to M,\ f \otimes a \mapsto f(a)$ *ist für jeden Modul* $M \in \mathcal{M}_A^H$ *ein Isomorphismus, oder*

  (iii) $\beta : A \otimes_{A^{coH}} A \to A \otimes_R H,\ a \otimes b \mapsto (a \otimes 1_H)\varrho_A(b)$ *ist ein Isomorphismus, d.h.* ${}_{A^{coH}}A$ *ist* H*-Galois.*

Beweis. $(a) \Leftrightarrow (b)$ Wir bemerken zuerst, daß A immer endlich erzeugt in $\mathcal{M}_A^H$ ist. Also folgt dieser Teil aus der Charakterisierung von Progeneratoren in Modul-Kategorien (vgl. [71, 46.2]).

$(b) \Leftrightarrow (c)$ ist klar mit 1.1.17.

$(a), (b) \Rightarrow (d)(i)$ ist klar. Die Treu-flachheit von A als Links-A^{coH}-Modul folgt aus der Tatsache, daß der zu $\mathrm{Hom}_A^H(A, -)$ inverse Funktor gerade der Tensorfunktor $- \otimes_{A^{coH}} A$ ist. Die Isomorphie von β_M haben wir schon in 1.3.2 gesehen.

$(d)(i) \Leftrightarrow (d)(ii)$ ist wieder 1.1.17.

$(d)(ii) \Rightarrow (d)(iii)$ ist klar.

$(d)(iii) \Leftrightarrow (b)$ ist eine Instanz des (sehr allgemeinen) Barr-Beck-Theorems [4] oder des treu-flachen Abstiegs (vgl. [44]). Ein Beweis für den hier betrachteten Spezialfall findet sich zum Beispiel in [45, 2.6]. $\boxed{qed}$

An dieser Stelle ist es angebracht, ein Beispiel anzuführen. Es klärt eine Frage von C. Menini nach der Existenz einer flachen, nicht treuflachen Hopf-Galoiserweiterung $A^{coH} \subset A$ einer Hopfalgebra H. Es ist in [3] das Beispiel in den Bemerkungen nach 1.10 und in [70] das Beispiel 1.13.

1.3.4 Beispiel. *Sei $R := \mathbb{Z}_2$, $A := R^{(3,3)}$ und $G := \{id, \varphi\}$ die zyklische Untergruppe von Aut(A), die erzeugt wird von $\varphi \in$ Aut(R) mit*

$$\varphi(M) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

für $M \in A$. Sei $H := (R[G])^*$ die zur Gruppenalgebra $R[G]$ duale Hopfalgebra. Dann induziert die Gruppenwirkung von $G \subset$ Aut(A) auf A eine Links-Wirkung des Gruppenringes $R[G]$. Da $R[G]$ endlich-dimensional ist, entspricht diese Wirkung einer Rechts-Kowirkung von H auf A. Mit diesen Strukturen gilt:

(1) A ist ein Generator in ${}_A\mathcal{M}^H$, also flach über A^{coH}.

(2) A ist nicht projektiv in ${}_A\mathcal{M}^H$, also nicht treu-flach über A^{coH}.

Beweis. Man überlegt sich zuerst, daß A durch die G-Wirkung zu einer (Links-) $R[G]$-Modulalgebra wird (vgl. [49, Example 4.1.6]) und daß dies einer Rechts-$(R[G])^*$-Kowirkung entspricht (vgl. [49, Bemerkung vor 4.1.3]). Wie in [49, 4.1.6] kann man $A\#H^* = A\#R[G]$ mit dem Schiefgruppenring $A * G$ identifizieren. Da H endlich dimensional ist, gilt ${}_A\mathcal{M}^H = A\#H^*$-Mod $= A * G$-Mod (nach [49, Example 8.5.2]). In [70, 1.13] wird gezeigt, daß A in $A * G$-Mod ein Generator, aber nicht projektiv ist. Wegen 1.3.3 kann A damit nicht treu-flach über A^{coH} sein. $\boxed{qed}$

Bemerkungen:

(1) Das Fehlen der Projektivitätseigenschaft von A in diesem Beispiel beruht wesentlich auf der Tatsache, daß die Gruppenordnung in R nicht invertierbar ist.

(2) In der Arbeit [7] wird ein Beispiel einer flachen, nicht treu-flachen H-Galoiserweiterung angeführt.

1.4 Schneiders Theorem I neu verstanden

In diesem Abschnitt nehmen wir an, daß die **Antipode** S der Hopfalgebra H **bijektiv** ist mit Umkehrabbildung $\bar{S}$.

In [58, Theorem I] verallgemeinert Schneider das Resultat von Oberst über affine Quotienten [51] auf den nicht-kommutativen Fall. Der Beweis benutzt Hopfalgebraische Techniken, wie sie auch schon von Doi in [25] benutzt wurden, um Oberst' Resultat im kommutativen Fall (vgl. [25, Theorem 3.2]) zu beweisen. Die Aussage selber ist jedoch eine Aussage über Äquivalenzen von gewissen Modulkategorien des Typs $\sigma[M]$ für geeignete M, also von Natur aus den Methoden der Modultheorie für solche Kategorien zugänglich. Wir werden im folgenden die Theorie so weit entwickeln, daß wir in der Lage sind, Schneiders Ergebnis modultheoretisch darzustellen und in verallgemeinerter Form zu beweisen. Von besonderer Bedeutung für das Verständnis des Resultats ist die folgende Beobachtung. Sie charakterisiert das Objekt $A \otimes H$ als Generator in der Kategorie der $(A\text{-}H)$-Bimoduln durch eine Forderung an den H-Komodul A. Der Beweis beruht wesentlich auf der Tatsache, daß die Kategorie der Hopfmoduln nach dem Fundamental-Theorem für Hopfmoduln trivial ist. Daher kann man ein ähnliches Resultat für allgemeine Doi-Koppinen-Kategorien (oder Koringe) nicht erwarten.

1.4.1 Satz. *Sei H eine Hopfalgebra mit bijektiver Antipode S, H_R sei flach und A sei eine Rechts-H-Komodulalgebra. Dann sind äquivalent:*

(a) $A \otimes_R H$ ist ein Generator in $\mathcal{M}_A^H$;

(b) $A \otimes_R H$ erzeugt das Objekt A in $\mathcal{M}_A^H$;

(c) A ist H-erzeugt als rechts H-Komodul.

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$ ist trivial.

$(b) \Rightarrow (c)$ Nach Voraussetzung erzeugt $A \otimes_R H$ den Bimodul A in $\mathcal{M}_A^H$. Vergisst man die A-Struktur, so ist A auch in $\mathcal{M}^H$ von $A \otimes_R H$ erzeugt. Da $A \otimes_R H$ als H-Komodul die rechts triviale Komodulstruktur trägt, wird $A \otimes_R H$ von H in $\mathcal{M}^H$ erzeugt. Kombiniert man diese Tatsachen, so erhält man, daß A von H in $\mathcal{M}^H$ erzeugt wird.

$(c) \Rightarrow (a)$ Es sei $\phi : H^{(\Lambda)} \to A$ ein Epimorphismus in $\mathcal{M}^H$ und $M \in \mathcal{M}_A^H$ mit der rechts A-Modulstruktur $\mu_M : M \otimes_R^c A \to M$. Da M ein rechts H-Komodul ist, wird der Modul $M \otimes_R^c H$ mit den Strukturen aus 1.1.2 ein Hopf-Modul, d.h. ein Objekt in $\mathcal{M}_H^H$. Nach dem *Fundamental-Theorem für Hopf-Moduln* ist $M \otimes_R^c H$ in $\mathcal{M}_H^H$ von H erzeugt. Vergißt man die H-Modulstruktur, so erhält man, daß H diesen Modul in $\mathcal{M}^H$ erzeugt. Sei $\psi : H^{(\Omega)} \to M \otimes_R^c H$ ein Epimorphismus in $\mathcal{M}^H$.
Dann erhalten wir in $\mathcal{M}^H$ eine surjektive Abbildung

$$\left(H^{(\Omega)}\right)^{(\Lambda)} \longrightarrow (M \otimes_R^c H)^{(\Lambda)} \simeq M \otimes_R^c H^{(\Lambda)}.$$

Fügt man daran die Surjektion

$$M \otimes_R^c H^{(\Lambda)} \xrightarrow{id \otimes \phi} M \otimes_R^c A \xrightarrow{\mu_M} M,$$

so erhalten wir, daß jeder $(A$-$H)$-Bimodul als H-Komodul von H erzeugt wird.
Ist nun $\theta : H^{(\Lambda)} \to M$ ein solcher Epimorphismus in $\mathcal{M}^H$ für ein $M \in \mathcal{M}_A^H$, so erhalten wir mit 1.1.2(4) einen Epimorphismus

$$(H \otimes_R^c A)^{(\Lambda)} \simeq H^{(\Lambda)} \otimes_R^c A \xrightarrow{\theta \otimes id} M \otimes_R^c A \xrightarrow{\mu_M} M$$

in $\mathcal{M}_A^H$. Aus der Bijektivität der Antipode, die den $(A$-$H)$-Isomorphismus $H \otimes_R^c A \simeq A \otimes_R H$ ergibt (vgl. 1.1.4), folgt nun, daß $A \otimes_R H$ ein Generator in $\mathcal{M}_A^H$ ist. $\boxed{qed}$

Bemerkung: Ist die Antipode von H nicht bijektiv, so zeigt der Beweis von $(c) \Rightarrow (a)$, daß immer noch gilt:

A ist H-erzeugt in $\mathcal{M}^H \Rightarrow H \otimes^c A$ ist Generator in $\mathcal{M}_A^H$.

Der nächste Satz ist technischer Natur. Wir werden ihn benutzen, um den Kotensor-Funktor $A\square_H-$ mit dem Funktor der H-Koinvarianten in Verbindung zu bringen. Er verallgemeinert das Lemma 3.1 aus [58].

1.4.2 Satz. *Sei H eine Hopfalgebra über R mit bijektiver Antipode S und seien U und V Rechts-H-Komoduln.*
Dann induziert die Identität auf $U \otimes V$ einen R-linearen Isomorphismus

$$U \Box_H {}^{\bar{S}}V \longrightarrow (U \otimes_R^c V)^{coH},$$

der in U und V funktoriell ist.

Beweis. Der Modul $U \otimes_R^c V$ ist, versehen mit der diagonalen Komodulstruktur $\varrho_{U \otimes_R^c V}$, ein Rechts-$H$-Komodul. Betrachten wir nun das folgende Diagramm von R-Moduln, in dem die horizontalen Pfeile gerade die definierenden Folgen für das Kotensorprodukt und die Koinvarianten sind:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & U\Box_H({}^{\bar{S}}V) & \longrightarrow & U \otimes_R ({}^{\bar{S}}V) & \overset{\varrho_U \otimes id_V - id_U \otimes \varrho_{\bar{S}V}}{\longrightarrow} & U \otimes_R H \otimes_R ({}^{\bar{S}}V) \\
 & & \vdots\gamma & & \downarrow id_{U\otimes V} & & \downarrow id_U \otimes \psi \\
0 & \longrightarrow & (U \otimes_R^c V)^{coH} & \longrightarrow & U \otimes_R^c V & \overset{\varrho_{U\otimes^c V} - \iota}{\longrightarrow} & (U \otimes_R^c V) \otimes_R H,
\end{array}$$

wobei $\psi : H \otimes_R ({}^{\bar{S}}V) \to V \otimes_R H, h \otimes v \mapsto \sum v_{(0)} \otimes hv_{(1)}$ ein R-Isomorphismus mit inverser Abbildung $\psi^{-1} : V \otimes_R H \to H \otimes_R ({}^{\bar{S}}V), v \otimes h \mapsto \sum h\bar{S}(v_{(1)}) \otimes v_{(0)}$ ist und $\iota : U \otimes_R V \to U \otimes_R V \otimes_R H, \quad u \otimes v \mapsto u \otimes v \otimes 1_H$ die kanonische Einbettung bezeichnet.
Dann kommutiert das rechte Rechteck mit den vertikalen R-Isomorphismen $id_{U\otimes V}$ and $id_U \otimes \psi$, denn die Elemente werden wie folgt abgebildet:

$$\begin{array}{ccc}
u \otimes v & \mapsto & \sum u_{(0)} \otimes u_{(1)} \otimes v - \sum u \otimes \bar{S}(v_{(1)}) \otimes v_{(0)} \\
\downarrow & & \downarrow \\
u \otimes v & \mapsto & \sum u_{(0)} \otimes v_{(0)} \otimes u_{(1)}v_{(1)} - u \otimes v \otimes 1_H
\end{array}$$

Wegen der Kern-Eigenschaft von $(U \otimes_R V)^{coH}$ existiert ein R-linearer Isomorphismus $\gamma : U\Box_H({}^{\bar{S}}V) \to (U \otimes_R V)^{coH}$, der das Diagramm kommutativ ergänzt. $\boxed{qed}$

Das nächste Resultat wird im Beweis von 1.4.11 benutzt, ist jedoch unabhängig davon interessant. Es setzt Projektivität von A als Objekt in $\mathcal{M}_A^H$ in Bezug zu Koflachheit von A als Objekt in $\mathcal{M}^H$. Der Satz ist eine Verfeinerung von Corollary 3.2 in [58].

1.4.3 Satz. *Sei H eine Hopfalgebra über R mit ${}_RH$ projektiv. Die Antipode S von H sei bijektiv. A sei eine Rechts-H-Komodulalgebra, die als R-Algebra flach ist. Dann sind äquivalent:*

(a) *A ist projektiv in $\mathcal{M}_A^H$;*

(b) *der Funktor* $\mathrm{Hom}^H(R,-) : \mathcal{M}_A^H \longrightarrow R\text{-Mod}$ *ist exakt;*

(c) *der Funktor* $(-\Box_H R) : \mathcal{M}_A^H \longrightarrow R\text{-Mod}$ *ist exakt;*

(d) *der Funktor* $(R\Box_H -) \circ \bar{\mathcal{S}} : \mathcal{M}_A^H \longrightarrow R\text{-Mod}$ *ist exakt;*

(e) *${}^{\bar{S}}A$ ist koflach als Links-H-Komodul;*

(f) *A ist koflach als Rechts-H-Komodul;*

(g) *A^{op} ist koflach als Rechts-H-Komodul;*

(h) *A ist projektiv in ${}_A\mathcal{M}^H$.*

Beweis. Nach unseren Vorüberlegungen in 1.1.14(1) ist Exaktheit des Koinvarianten-Funktors $(-)^{coH} : \mathcal{M}_A^H \to \text{Mod-}A^{coH}$ gerade gleichbedeutend mit der Exaktheit des Hom-Funktors $\mathrm{Hom}_A^H(A,-) : \mathcal{M}_A^H \to \text{Mod-}A^{coH}$. Die letzte Eigenschaft kennzeichnet gerade die Projektivität von A in $\mathcal{M}_A^H$.

$(a) \Leftrightarrow (b)$ folgt aus dem Isomorphismus $\mathrm{Hom}_A^H(A,-) \simeq \mathrm{Hom}^H(R,-)$ aus 1.1.6,(2) mit $N := R$.

$(a) \Leftrightarrow (c)$ Nach 1.4.2 ist der Funktor $(-\Box_H R)$ kanonisch isomorph zu dem Funktor $(-)^{coH}$.

$(c) \Leftrightarrow (d)$ ist klar, da die Antipode S bijektiv ist, und daher der Funktor $\bar{\mathcal{S}}$ eine Äquivalenz ist (man vgl. mit den Preliminarien).

$(a) \Rightarrow (e)$ Aus dem kanonischen Isomorphismus in 1.4.2 können wir für A und einen H-Komodul M folgern, daß $M\Box_H {}^{\bar{S}}A \simeq (M \otimes_R A)^{coH}$ gilt. Aber dieser Isomorphismus ist in M funktoriell und nach Voraussetzung ist $(- \otimes_R A)^{coH}$ als Komposition der exakten Funktoren $- \otimes_R A$ (A ist R-flach) und $(-)^{coH}$ exakt. Damit ist auch $-\Box_H {}^{\bar{S}}A$ exakt, was bedeutet, daß ${}^{\bar{S}}A$ als Links-H-Komodul koflach ist.

$(e) \Rightarrow (a)$ Zuerst bemerkt man, daß die A-Multiplikation $\mu_M : M \otimes_R^c A \to M$ für jedes $M \in \mathcal{M}_A^H$ eine H-kolineare Abbildung ist und in $\mathcal{M}^H$ durch $\nu_M : M \to M \otimes_R^c A,\ m \mapsto m \otimes 1_A$ zerfällt. Wir müssen zeigen, daß unter der Voraussetzung, daß ${}^{\bar{S}}A$ koflach ist, der links exakte Funktor $(-)^{coH}$ Epimorphismen in $\mathcal{M}_A^H$ erhält.
Sei also $f : M \to N$ ein Epimorphismus in $\mathcal{M}_A^H$. Wir betrachten das kommutative Diagramm, in dem die vertikalen Pfeile Epimorphismen sind:

$$\begin{array}{ccc} M \otimes^c A & \stackrel{f\otimes id}{\longrightarrow} & N \otimes^c A \\ \downarrow\mu_M & & \downarrow\mu_N \\ M & \stackrel{f}{\longrightarrow} & N. \end{array}$$

Da $(-)^{coH}$ links exakt ist und μ_M und μ_N in $\mathcal{M}^H$ zerfallen, erhalten wir das folgende Diagramm, in dem die vertikalen Pfeile immer noch epimorph sind:

$$\begin{array}{ccc} (M \otimes^c A)^{coH} & \stackrel{(f\otimes id)^{coH}}{\longrightarrow} & (N \otimes^c A)^{coH}. \\ \downarrow\mu_M^{coH} & & \downarrow\mu_N^{coH} \\ M^{coH} & \stackrel{f^{coH}}{\longrightarrow} & N^{coH} \end{array}$$

Daraus können wir ablesen, daß f^{coH} surjektiv ist, falls $(f \otimes id)^{coH}$ surjektiv ist. Aus dem funktoriellen Isomorphismus $(- \otimes_R^c A)^{coH} \simeq -\Box_H{}^{\bar{S}}A$ aus 1.4.2 erhalten wir $(f \otimes id)^{coH} = f\Box_H{}^{\bar{S}}A$.
Nach Voraussetzung ist $-\Box_H{}^{\bar{S}}A$ exakt, erhält also Epimorphismen. Daraus folgt die Behauptung.

$(e) \Leftrightarrow (f)$ ist wieder klar, da S bijektiv ist.

$(f) \Leftrightarrow (g)$ ist trivial, da H und H^{op} dieselbe Koalgebra-Struktur und A und A^{op} dieselbe Komodul-Struktur tragen.

$(g) \Leftrightarrow (h)$ folgt aus $(a) \Leftrightarrow (e)$ angewandt auf die Rechts-H^{op}-Komodulalgebra A^{op}. $\boxed{qed}$

Bemerkung: Der Beweis von $(a) \Leftrightarrow (e)$ folgt dem Beweis von *Satz 5.8* in Oberst [51].

Für nicht-R-flaches A erhalten wir mit derselben Beweisidee das folgende Korollar.

1.4.4 Korollar. *Sei H eine R-Hopfalgebra, projektiv über R, mit bijektiver Antipode. A sei eine Rechts-H-Komodulalgebra. Dann sind äquivalent:*

(a) A ist relativ projektiv in $\mathcal{M}_A^H$, d.h. der Funktor $\mathrm{Hom}_A^H(A,-)$ ist exakt auf R-zerfallenden, exakten Folgen in $\mathcal{M}_A^H$;

(b) A ist relativ koflach, d.h. der Funktor $A\Box_H-$ ist (links und rechts) exakt auf R-zerfallenden, exakten Folgen in $\mathcal{M}^H$.

Beweis. Natürlich ist der Funktor $- \otimes_R A$ immer relativ exakt (auch für nicht R-flaches A) und der Funktor $-\Box_H{}^{\bar{S}}A$ ist immer links exakt auf R-zerfallenden Folgen. Also können wir den Beweis von $(a) \Leftrightarrow (e)$ im letzten Resultat einfach mit R-zerfallenden Folgen führen. $\boxed{qed}$

Das Konzept des (totalen) Integrals einer H-Komodulalgebra A hat sich bei dem Studium von Strukturfragen als bedeutsam erwiesen (vgl. [25]). Es verallgemeinert die Definition eines Integrals auf einer Hopfalgebra (vgl. [49, Definition 2.4.4]).

1.4.5 Definition. *Sei H eine R-Hopfalgebra und A eine Rechts-H-Komodulalgebra. Eine (rechts) H-kolineare Abbildung $t : H \to A$ heißt ein* Integral *für A. Gilt ferner $t(1_H) = 1_A$, so nennen wir t ein* totales Integral.

Die Bedeutung der Existenz eines totalen Integrals bei einer H-Erweiterung $A^{coH} \subset A$ zeigt die folgende Charakterisierung. Es ist Theorem 1.6 aus [25]. Interessant ist dabei, daß (f) ohne Forderungen an die Antipode von H nicht gleichwertig ist. Dieser Seitenwechsel erklärt sich bei der Beschreibung von Äquivalenzen zwischen Doi-Koppinen-Kategorien durch allgemeine Kotensor-Funktoren über Koringen.

Dabei nennen wir ein Objekt $M \in \mathcal{M}^H$ *relativ injektiv in $\mathcal{M}^H$*, falls der Funktor $\mathrm{Hom}^H(-, M)$ exakt ist auf allen exakten Folgen

$$0 \to U \to V \to W \to 0$$

in $\mathcal{M}^H$, die als Folge in R-Mod zerfallen.

1.4.6 Satz. *Sei H eine R-Hopfalgebra und A eine Rechts-H-Komodulalgebra mit Strukturabbildung $\rho_A : A \to A \otimes H$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) es existiert ein totales Integral $t : H \to A$;

(b) A ist relativ injektiv in $\mathcal{M}^H$;

(c) jeder Modul $U \in \mathcal{M}_A^H$ ist relativ injektiv in $\mathcal{M}^H$;

(d) es existiert eine Abbildung $\pi : A \otimes H \to A$ in ${}_A\mathcal{M}^H$ mit der Eigenschaft $\pi \circ \rho_A = id_A$.

Ist die Antipode S_H von H bijektiv, so ist zu (a) bis (d) auch äquivalent:

(e) jeder Modul in $V \in {}_A\mathcal{M}^H$ ist relativ injektiv in $\mathcal{M}^H$;

(f) die Strukturabbildung $\rho_A : A \to A \otimes H$ zerfällt in $\mathcal{M}_A^H$.

Beweis. Das wird in [25, Theorem 1.6] bewiesen. $\boxed{qed}$

Wir können dieser Kennzeichnung eines totalen Integrals von Doi mit Teil (b) des nächsten Satzes 1.4.7 einen interssanten und neuen Aspekt hinzufügen, falls die Hopfalgebra eine bijektive Antipode besitzt. Diese Beobachtung ist es auch, die den Beweis des Hauptergebnisses 1.4.9 wesentlich vereinfacht. Ein Beweis für die Charakterisierung (b) ergibt sich implizit aus Theorem 2.5 der Arbeit [13] von Caenepeel, Militaru und Zhu. Die grundlegende Vorarbeit für diese Beobachtung im Fall einer H-Erweiterung $B \subset A$ wurde von Doi jedoch schon in [26, Theorem 1] geleistet. Wir geben hier einen direkten Beweis, der wie in 1.4.1 wieder die Trivialität der Kategorie der Hopfmoduln ausnutzt.

1.4.7 Satz. *Sei H eine Hopfalgebra über R mit bijektiver Antipode S_H und ${}_RH$ sei projektiv. Weiter sei A eine Rechts-H-Komodulalgebra. Dann sind äquivalent:*

(a) A ist relativ injektiv in $\mathcal{M}^H$, d.h. es existiert ein totales Integral $t : H \to A$;

(b) $A \otimes H$ ist ein projektiver Generator in $\mathcal{M}_A^H$ und A ist projektiv in $\mathcal{M}_A^H$.

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$ Falls A relativ injektiv ist, so zerfällt die R-zerfallende Abbildung $\rho_A : A \to A \otimes H$ in $\mathcal{M}^H$ und A ist ein H-direkter Summand in $A \otimes H$. Als solcher ist A natürlich von $A \otimes H$ in $\mathcal{M}^H$ erzeugt. Doch $A \otimes H$ trägt die triviale H-Komodulstruktur und ist damit H-erzeugt in $\mathcal{M}^H$. Damit ist $A \otimes H$ ein Generator in $\mathcal{M}_A^H$ nach unserem Ergebnis 1.4.1.

Um die Projektivität von $A \otimes H$ zu verstehen, benutzen wir zuerst die Adjunktion von $- \otimes_R^c A$ mit dem Funktor $\mathcal{U}_A$ aus 1.1.6,(2), um das Problem auf die Projektivität von H bzgl. exakter Folgen $M \to L \to 0$ in $\mathcal{M}_A^H$ zu reduzieren. Dabei geht ein, daß wir nach 1.1.4 einen Isomorphismus $A \otimes H \simeq H \otimes^c A$ in $\mathcal{M}_A^H$ haben, da die Antipode von H bijektiv ist.
Sei also $M \xrightarrow{p} L \to 0$ eine exakte Folge in $\mathcal{M}_A^H$ und $f : H \to L$ eine Abbildung in $\mathcal{M}^H$. Wenn wir mit $- \otimes_R^c H$ tensorieren, erhalten wir das folgende Diagramm in der Kategorie der H-Hopfmoduln $\mathcal{M}_H^H$ (vergleiche 1.1.2):

$$\begin{array}{ccccc} & & H \otimes^c H & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle f \otimes id} & & \\ M \otimes^c H & \stackrel{p \otimes id}{\to} & L \otimes^c H & \to & 0 \end{array}$$

Nach Vorraussetzung ist H in R-Mod ein projektiver Generator. Damit ist $H \otimes H$ nach dem Fundamental-Theorem für Hopf-Moduln ein projektiver

Generator in $\mathcal{M}_H^H$, wobei $H \otimes H$ die rechts-trivialen Strukturen trägt. Nach dem Fundamentalsatz gilt jedoch, daß die kanonische Abbildung

$$\beta_{H\otimes H} : H \otimes H \to H \otimes_c H, \quad a \otimes b \mapsto \sum ab_{(1)} \otimes b_{(2)}$$

ein Isomorphismus in der Kategorie der Hopfmoduln ist ($R \simeq H^{coH} \subset H$ ist nach dem Fundamentalsatz eine (treu-flache) H-Galois-Erweiterung). Und mit dem Isomorphismus $\Theta : H \otimes^c H \to H \otimes_c H$ aus 1.1.4 (die Antipode S_H von H ist bijektiv) ist auch $H \otimes^c H$ ein projektiver Generator in $\mathcal{M}_H^H$ und es existiert eine rechts-H-kolineare, rechts-H-lineare Abbildung $\alpha : H \otimes_R^c H \to M \otimes_R^c H$ mit der Eigenschaft $(p \otimes id) \circ \alpha = (f \otimes id)$. Bezeichnen wir mit $i_1 : H \to H \otimes_R^c H, \quad a \mapsto a \otimes 1_H$ die Einbettung in den ersten Tensoranden, so gilt für die Komposition der Abbildungen $\zeta := \mu_M \circ (id \otimes t) \circ \alpha \circ i_1 : H \to M$ und $\psi := \mu_L \circ (id \otimes t) \circ (f \otimes id) \circ i_1 : H \to L$ gerade $f(a) = \psi(a)$ und $p \circ \zeta(a) = f(a)$ für $a \in H$. Man überzeugt sich, daß ζ und ψ rechts-H-kolineare Abbildungen sind. Damit ist $\mathrm{Hom}^H(H, -)$ exakt auf exakten Folgen in $\mathcal{M}_A^H$ und folglich $A \otimes H$ projektiv in $\mathcal{M}_A^H$. Als direkter Summand von $A \otimes H$ in $\mathcal{M}_A^H$ (vgl. 1.4.6) ist dann auch A projektiv in $\mathcal{M}_A^H$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Als Generator erzeugt $A \otimes H$ natürlich A, sagen wir durch $\psi : (A \otimes H)^k \to A \to 0$. Da A projektiv ist, ist A direkter Summand in $(A \otimes H)^k$. Aber $A \otimes H$ ist immer ein relativ injektiver H-Komodul, da A relativ R-injektiv ist (1.1.6, (1)). Diese Eigenschaft vererbt sich jedoch auf endliche direkte Summen und direkte Summanden. $\boxed{qed}$

Als direkte Folge erhalten wir eine Verallgemeinerung der Theoreme [25, Theorem 2.5] und [26, Theorem 3]. Wir können die Voraussetzung $t(H) \subset Z(A)$ dort durch die Forderung der Bijektivität der Antipode S_H von H ersetzen.

1.4.8 Satz. *Sei H eine R-Hopfalgebra mit bijektiver Antipode S_H, die als R-Modul projektiv ist. A sei eine H-Komodulalgebra. Existiert ein totales Integral $t : H \to A$ und ist die kanonische Abbildung $\beta : A \otimes_B A \to A \otimes H$ surjektiv, so ist β bijektiv und $A^{coH} \subset A$ ist eine H-Galois-Erweiterung.*

Beweis. Nach 1.4.7 ist $A \otimes H$ ein Generator in $\mathcal{M}_A^H$, wenn ein totales Integral existiert. Wir haben β in 1.1.17 als Auswertung der Morphismen $\mathrm{Hom}_A^H(A, A \otimes H) \otimes_{A^{coH}} A \to A \otimes H$ gekennzeichnet. Ist β surjektiv, so erzeugt A den Generator $A \otimes H$ und ist damit selbst ein Generator in $\mathcal{M}_A^H$. Dann ist β aber schon ein Isomorphismus. $\boxed{qed}$

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist das nachfolgende Theorem. Es verbindet die Kennzeichnung der Äquivalenz in 1.3.3 mit den Kennzeichnungen (1) und (5), welche (nach [49, 8.5.6]) den schwierigen und interessanten Teil von Schneiders Theorem I aus [58] ausmachen. Es erklärt den Defekt aus [33, Corollary 5.13], warum über beliebigen Ringen die Exaktheit der Induktion von G-Moduln zu X-Moduln nicht gleichbedeutend ist zur Affinität des Quotienten X/G. Der Defekt ist gerade das Fehlen der Generator-Eigenschaft von $A \otimes H$ in $\mathcal{M}_A^H$. Eine Diskussion des Ergebnisses findet sich in [49, 8.5.6]. Mit Hilfe von 1.4.7 sind wir in der Lage, einen neuen und sehr kurzen Beweis geben zu können.

1.4.9 Theorem.
Sei H eine Hopfalgebra über R mit bijektiver Antipode und ${}_RH$ sei projektiv. Weiter sei A eine Rechts-H-Komodulalgebra. Betrachten wir die Aussagen:

(1) A ist relativ injektiv als rechts H-Komodul und die kanonische Abbildung $\beta : A \otimes_{A^{coH}} A \to A \otimes_R H,\ a \otimes b \mapsto (a \otimes 1_A)\varrho_A(b)$ ist surjektiv.

(2) A ist ein (endlich erzeugter) projektiver Generator in $\mathcal{M}_A^H$;

(3) $\mathrm{Hom}_A^H(A, -) : \mathcal{M}_A^H \to \text{Mod-}A^{coH}$ ist eine Äquivalenz von Kategorien;

(4) $\mathrm{Hom}_A^H(A, -) : {}_A\mathcal{M}^H \to A^{coH}\text{-Mod}$ ist eine Äquivalenz von Kategorien;

(5) $\mathrm{Hom}_A^H(A, -) : \mathcal{M}_A^H \to \text{Mod-}A^{coH}$ ist exakt und die Abbildung $\Psi_{A \otimes_R H} : \mathrm{Hom}_A^H(A, A \otimes_R H) \otimes_{A^{coH}} A \to A \otimes_R H$ ist surjektiv.

Dann gilt:
$(1) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Rightarrow (5)$ *und* $(1) \Rightarrow (4)$.

Ist A als Rechts-H-Komodul von H erzeugt, so gilt auch:
$(5) \Rightarrow (1)$ *und* $(4) \Rightarrow (1)$ *und die fünf Aussagen sind äquivalent.*

Beweis. $(1) \Rightarrow (2)$ Ist A relativ injektiv, so ist A nach 1.4.7 projektiv in $\mathcal{M}_A^H$ und $A \otimes H$ ist ein (projektiver) Generator in $\mathcal{M}_A^H$. Die Surjektivität von β ist nach 1.1.17 gleichbedeutend damit, daß $A \otimes H$ in $\mathcal{M}_A^H$ von A erzeugt wird. Also erzeugt A einen Generator in $\mathcal{M}_A^H$ und es gilt (2).

$(2) \Leftrightarrow (3)$ Das gilt allgemeiner für abelsche Kategorien und findet sich zum Beispiel in ([71, 46.2]).

$(2) \Rightarrow (5)$ Da A projektiv in $\mathcal{M}_A^H$ ist, ist der Funktor $\mathrm{Hom}_A^H(A, -)$ exakt. Die Surjektivität von $\Psi_{A \otimes_R H}$ rührt daher, daß A nach (2) ein Generator in $\mathcal{M}_A^H$ ist.

(1) $\Rightarrow$ (4) Man kann aus der Bijektivität der Antipode S leicht folgern, daß auch die Abbildung $\beta^{A^{op}}$ surjektiv ist. Damit folgt die Behauptung aus (1) $\Rightarrow$ (3) angewandt auf A^{op} als Rechts-H^{op}-Komodul-Algebra.

Ferner gilt falls A H-erzeugt in $\mathcal{M}^H$ ist:

(5) $\Rightarrow$ (1) Da wir annehmen, daß A als Rechts-H-Komodul von H erzeugt wird, ist $A \otimes H$ nach 1.4.1 ein Generator in $\mathcal{M}_A^H$. Aber $A \otimes H$ ist immer ein relativ injektiver H-Komodul, da A relativ R-injektiv ist (1.1.6,(1) mit $N := A$ und $A := R$). A ist endlich erzeugt in $\mathcal{M}_A^H$ und projektiv, also ein direkter Summand in $(A \otimes_R H)^k$ in der Kategorie $\mathcal{M}_A^H$ für ein geeignetes k. Vergißt man die A-Struktur, so ist A ein H-kolinearer Summand in $(A \otimes_R H)^k$. Relative Injektivität vererbt sich auf endliche direkte Summen und auf direkte Summanden. Damit ist A relativ injektiv in $\mathcal{M}^H$. Die Surjektivität von β folgt aus der Surjektivität von $\Psi_{A \otimes_R H}$ mit 1.1.17.

(1) $\Leftrightarrow$ (4) folgt nun aus (1) $\Leftrightarrow$ (3) angewandt auf A^{op} als Rechts-H^{op}-Komodul-Algebra. $\boxed{qed}$

Bemerkungen:

(1) Die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) ist gerade Schneiders Theorem [58, 3.5]. Man sieht leicht, daß unsere Techniken (nach aller Vorarbeit) einen sehr viel kürzeren Beweis für dieses Resultat liefern. Schneider zeigt bei seinem Beweis, daß die Einheit Adjunktion $M^{coH} \otimes_B A \to M$ für $M \in \mathcal{M}_A^H$ ein Isomorphismus ist. Das ist nach der Annahme in (1) gerade die Tatsache, daß A ein Generator in $\mathcal{M}_A^H$ ist.

(2) Es ist eine interessante Frage, ob Koflachheit von A als Rechts-H-Komodul schon bewirkt, daß A von H in $\mathcal{M}^H$ erzeugt wird. Damit könnten wir bei (5) $\Rightarrow$ (1) auf die zusätzliche Voraussetzung verzichten.

Nichtsdestotrotz erhalten wir die Äquivalenz von (1) bis (5) in vielen allgemeinen Situationen. Das nächste Lemma stellt eine Auswahl an Bedingungen dar, in denen A als Komodul von H erzeugt wird.

1.4.10 Lemma. *Sei A eine Rechts-H-Komodul-Algebra und H_R projektiv. Dann ist A als Rechts-H-Komodul von H erzeugt, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(1) A ist schwach H-injektiv in $\mathcal{M}^H$;

(2) A ist relativ injektiv in $\mathcal{M}^H$;

(3) *H ist endlich erzeugt (und projektiv) über dem Ring R;*

(4) *R ist ein QF-Ring und H ist eine Ko-Frobenius-Hopfalgebra;*

(5) *H ist relativ kohalbeinfach über R, z.B.* $H = R[G]$, *der Gruppenring einer (nicht notwendig endlichen) Gruppe G.*

Beweis. (1) wird in ([71], 16.11) bewiesen.

(2) ist äquivalent zu der Tatsache, daß A ein H-kolinearer direkter Summand in $A \otimes_R H$ ist. Und als trivialer H-Komodul ist $A \otimes_R H$ natürlich H-erzeugt.

Unter den Voraussetzungen in (3) und (4) ist H ein Generator in der Kategorie $\mathcal{M}^H$ nach [46, 3.9]. In beiden Fällen ist die Antipode von H bijektiv.

Im Fall (5) ist jede H-Komodulalgebra A relativ injektiv in $\mathcal{M}^H$, da ein totales Integral $t : H \to R$ existiert. $\boxed{qed}$

Als eine Folgerung aus dem Theorem, bzw. den damit verbundenen Überlegungen, erhalten wir nun einen rein modultheoretischen Beweis von Schneiders Theorem I in [58] über affine Quotienten im Fall, daß der Grundring R ein QF-Ring ist.

1.4.11 Theorem.
Sei $_RH$ *eine Hopfalgebra über einem QF-Ring R und* $_RH$ *projektiv. Die Antipode von H sei bijektiv. Für eine H-Komodul-Algebra A, die über R flach ist, sind äquivalent:*

(a) *A ist ein projektiver Generator in* $\mathcal{M}_A^H$;

(b) $\mathrm{Hom}_A^H(A, -) : \mathcal{M}_A^H \to \text{Mod-}A^{coH}$ *ist eine kategorielle Äquivalenz;*

(c) $\mathrm{Hom}_A^H(A, -) : {}_A\mathcal{M}^H \to A^{coH}\text{-Mod}$ *ist eine kategorielle Äquivalenz;*

(d) *A ist injektiv in* $\mathcal{M}^H$ *und die Abbildung* $\beta : A \otimes_{A^{coH}} A \to A \otimes_R H$, $a \otimes b \mapsto (a \otimes 1_A)\varrho_A(b)$ *ist surjektiv.*

Falls eine dieser Aussagen erfüllt ist, ist A als Rechts-H-Komodul von H erzeugt.

Beweis. $(a) \Leftrightarrow (b)$ gilt allgemein für abelsche Kategorien. Ein Beweis findet sich sich zum Beispiel in ([71, 46.2]).

$(a) \Rightarrow (d)$ Da A projektiv in $\mathcal{M}_A^H$ ist, ist der Funktor $\mathrm{Hom}_A^H(A, -)$ exakt. Dies ist jedoch nach 1.4.3 gleichbedeutend mit der Tatsache, daß A koflach in $\mathcal{M}^H$ ist. Nach Voraussetzung ist A flach als R-Modul und R ein QF-Ring.

Aus [73] folgt, daß A ein injektives Objekt in $\mathcal{M}^H$ ist. Die Surjektivität von β ist eine Folge der Tatsache, daß $A \otimes H$ von A erzeugt wird.

$(d) \Rightarrow (a)$ Nach [73] ist Injektivität von A gleichbedeutend mit der Tatsache, daß A koflach ist als Rechts-H-Komodul. Nach 1.4.3 bedeutet dies gerade, daß der Funktor $\mathrm{Hom}_A^H(A, -)$ exakt ist, d.h. A ist projektiv in $\mathcal{M}_A^H$. Aber A ist H-erzeugt als H-Komodul, da A injektiv in $\mathcal{M}^H$ ist ([71, 16.11]). Also können wir unsere Charakterisierung 1.4.9 benutzen um den Beweis zu vervollständigen.

$(b) \Rightarrow (c)$ Da (b) äquivalent zu (d) ist, können wir A als H-erzeugt in $\mathcal{M}^H$ annehmen. Also bringt uns unser Resultat 1.4.9 die Behauptung.

$(c) \Rightarrow (b)$ Wenn wir die Äquivalenz von (b) und (d) auf A^{op} und H^{op} anwenden, erhalten wir, daß A als Rechts-H-Komodul von H erzeugt wird. Damit gibt uns 1.4.9 die Behauptung. $\boxed{qed}$

1.5 H als Generator in $\mathcal{M}^H$

Bei den Untersuchungen in den vorangegangenen Abschnitten hat sich gezeigt, daß der Frage, ob $A \otimes H$ ein Generator in der Kategorie der $(A$-$H)$-Bimoduln ist, wesentliche Bedeutung zukommt. In 1.4.1 konnten wir eine Charakterisierung dieser Eigenschaft geben. Um das Problem näher zu beleuchten, untersuchen wir in diesem Abschnitt die Frage für den Spezialfall der H-Komodulalgebra R, d.h. wir betrachten den Grundring selber als eine (triviale) H-Komodulalgebra. Dann reduziert sich die Frage, ob $A \otimes H$ ein Generator in der Kategorie $\mathcal{M}_A^H$ ist, auf die Frage, ob die Hopfalgebra H selber die H-Komoduln erzeugt, da ja $\mathcal{M}_R^H = \mathcal{M}^H$ und $H \simeq H \otimes R$ in $\mathcal{M}^H$ gilt.
Es wird untersucht, wie sich die Eigenschaft, daß eine Hopfalgebra H ein Generator in der Kategorie der H-Komoduln ist, auf die Struktur von H auswirkt. Insbesondere wird der Frage nachgegangen, welche Rolle Integrale (im Sinne von Abe [1, 3.3.1]) dabei spielen. Die Eigenschaft, daß H Generator in der Kategorie der Komoduln ist (wir sprechen kurz von *der Generatoreigenschaft*), ist in dem Fall, daß der Grundring R ein Körper ist, bekannt: sie charakterisiert H gerade als Ko-Frobenius-Hopfalgebra.
Das Hauptresultat dieses Abschnitts wird der Satz sein, in dem wir zeigen, daß diese Äquivalenz schon für einen Grund-QF-Ring gilt. Ein wesentlicher Bestandteil des Beweises und unabhängig davon ein interessantes neues Resultat ist die Tatsache, daß die Antipode einer Hopfalgebra H, die Gene-

rator in der Kategorie der H-Komoduln ist, schon bijektiv sein muß, wenn der Grundring nur artinsch ist. Zum Beweis entwickeln wir ein lokal-global Argument in den Sätzen 1.5.5 bis 1.5.10.

Zuerst nun ein Satz, der das bekannte Theorem von Lin-Larson-Sweedler-Sullivan (vgl. [22, Theorem 2]) aus der Theorie der Hopfalgebren in Verbindung bringt mit der Eigenschaft, die wir in diesem Abschnitt untersuchen - nämlich, daß H die Rechts-H-Komoduln erzeugt.

1.5.1 Theorem.
Sei H eine Hopfalgebra über dem Körper R. Dann sind äquivalent:

- *(a) H ist eine Rechts-Ko-Frobenius-Hopfalgebra;*
- *(b) H ist ein projektiver Generator in der Kategorie $\mathcal{M}^H$;*
- *(c) es existiert eine rechts-H-kolineare Abbildung $0 \neq t : H \to R$;*
- *(d) $((H^*)^{rat})^{coH} \neq 0$;*
- *(e) H ist ein Generator in $\mathcal{M}^H$;*
- *(f) die linksseitigen Aussagen von (a) - (e).*

Ist eine der Aussagen erfüllt, so ist die Antipode S von H bijektiv.

Beweis. Die Äquivalenz von $(a), (b), (c)$, (d) und (f) ist in Teilen in verschiedenen Arbeiten bewiesen worden. (vergleiche z. B. [46, 3.9]).

Die Tatsache $(b) \Rightarrow (e)$ ist trivial und - da $R \in \mathcal{M}^H$, was $(e) \Rightarrow (c)$ zeigt- ist der Beweis fertig.

Falls eine der äquivalenten Bedingungen des Satzes für eine Hopfalgebra H gilt, so ist bekannt, daß die Antipode von H bijektiv sein muss. Das wurde von Radford [55, Proposition 2] gezeigt und von Calinescu in [16] vereinfacht. $\boxed{qed}$

Der Satz macht schon deutlich, daß die Existenz von kolinearen Abbildungen zwischen H und R und die Tatsache, daß H ein Generator in $\mathcal{M}^H$ ist, eng miteinander verbunden sind. In der Tat können wir dazu die folgende Charakterisierung festhalten:

1.5.2 Satz. *Sei H eine Hopfalgebra, die flach über dem Grundring R ist. Dann sind äquivalent:*

- *(a) H ist ein Generator in $\mathcal{M}^H$;*

(b) es existiert eine surjektive rechts-H-kolineare Abbildung $t : H^k \to R$.

Beweis. R ist ein zyklischer H^*-Modul, denn wegen $\varepsilon_H(r) = r\varepsilon_H(1_H) = (r \cdot \varepsilon_H)(1_H) = 1_R$ wird R als H^*-Modul schon von $R \cdot \varepsilon_H \subset H^*$ erzeugt.
Da R insbesondere auch ein Objekt in $\mathcal{M}^H$ ist, ist $(a) \Rightarrow (b)$ trivial.

Wir zeigen $(b) \Rightarrow (a)$. Sei M ein Rechts-H-Komodul. Mit der diagonalen H-Komodulstruktur wird der Modul $M \otimes_R^c H$ ein Rechts-(H, H)-Bimodul (vgl. 1.1.2 (3) mit $A = H$), sprich ein Rechts-H-Hopfmodul. Da H ein (projektiver) Generator in der Kategorie der H-Hopfmoduln ist, ist $M \otimes^c H$ als Hopfmodul von H erzeugt. Das heißt, es existiert eine rechts-H-lineare und rechts-H-kolineare Abbildung $\Psi : H^{(\Lambda)} \to (M \otimes_R^c H)^k \simeq M \otimes_R^c H^k$. Komponieren wir Ψ mit der rechts-H-kolinearen Abbildung $id_M \otimes t : M \otimes_R^c H^k \to M \otimes_R^c R \simeq M$, so erhalten wir eine Surjektion $\Phi : H^{(\Lambda)} \to M$ in $\mathcal{M}^H$. Das bedeutet gerade, daß M als Komodul von H erzeugt wird. $\boxed{qed}$

Wir studieren nun Hopfalgebren, die durch Skalarerweiterungen des Grundrings entstehen. Wir nennen die so aus einer Hopfalgebra H entstehenden Hopfalgebren *Skalar-Erweiterungen von H*. Insbesondere zeigen wir, daß sich die Generator-Eigenschaft von H auf jede Skalarerweiterung von H überträgt.

Seien also R und S kommutative, assoziative Ringe mit Eins und $\varphi : R \to S$ ein unitärer Ringhomomorphismus. H sei eine Hopfalgebra über R, die nicht notwendig projektiv über R zu sein braucht. Wir definieren ausgehend von φ eine S-Hopfalgebra H_S wie folgt.

1.5.3 Satz und Definition. *Sei $(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \epsilon_H, S_H)$ eine Hopfalgebra über R und $\varphi : R \to S$ ein unitärer Ringhomomorphismus kommutativer Ringe. Wir versehen den R-Modul $H_S = H \otimes_R S$ mit der trivialen S-Modulstruktur. Durch die folgende Festlegung trägt H_S die Struktur einer S-Hopfalgebra:*

$\mu_{H_S} : H_S \otimes_S H_S \simeq H \otimes_R H \otimes_R S \overset{\mu_H \otimes id_S}{\longrightarrow} H \otimes_R S = H_S,$

$\eta_{H_S} : S \simeq R \otimes_R S \overset{\eta_H \otimes id_S}{\longrightarrow} H \otimes_R S = H_S,$

$\Delta_{H_S} : H_S = H \otimes_R S \overset{\mu_H \otimes id_S}{\longrightarrow} H \otimes_R H \otimes_R S \simeq H_S \otimes_S H_S,$

$\epsilon_{H_S} : H_S = H \otimes_R S \overset{\epsilon_H \otimes id_S}{\longrightarrow} R \otimes_R S \simeq S,$ *und*

$S_{H_S} : H_S = H \otimes_R S \overset{\epsilon_H \otimes id_S}{\longrightarrow} H \otimes_R S = H_S.$

H_S heißt die Skalar-Erweiterung von H bzgl. S.

Beweis. Das ist leicht nachzurechnen (vgl. [73]). $\boxed{qed}$

Eine wesentliches Merkmal der Generatoreigenschaft von H ist, daß sie bei Skalar-Erweiterungen erhalten bleibt. Das zeigt der nächste Satz.

1.5.4 Satz. *Sei $\varphi : R \to S$ eine unitäre Abbildung zwischen kommutativen Ringen und H eine Hopfalgebra, die über R projektiv ist. Dann gilt:*

(1) H_S ist eine S-Hopfalgebra, die über S projektiv ist;

(2) Ist H ein Generator in $\mathcal{M}^H$, so ist H_S ein Generator in $\mathcal{M}^{H_S}$.

Beweis. Die erste Aussage beruht auf 1.5.3 und der Tatsache, daß $-\otimes_R S$ ein rechts exakter Funktor ist, der insbesondere zerfallende Folgen respektiert.

Für (2) benutzen wir die Charakterisierung der Generator-Eigenschaft 1.5.2, um eine surjektive Abbildung $t : H^k \to R$ in $\mathcal{M}^H$ zu erhalten. Man kann leicht bestätigen, daß die induzierte Abbildung $t \otimes id_S : H_S^k \to S$ eine surjektive, rechts H_S-kolineare Abbildung ist. Damit folgt der Beweis aus der Kennzeichnung der Generatoreigenschaft in 1.5.2. $\boxed{qed}$

Als nächstes wollen wir lokal-global Techniken benutzen. Wir können in unserem Grundring R nach jedem maximalen Ideal m lokalisieren und erhalten so lokale Ringe R_m, die insbesondere als flache Skalarerweiterung des Grundrings angesehen werden können, d.h. die kanonische Abbildung $\varphi_m : R \to R_m$ ist flach, oder R_m ist flach als R-Modul. Somit können wir die Ergebnisse des letzten Abschnitts benutzen, um die Skalarerweiterungen $H_m := H_{R_m} = H \otimes_R R_m$ zu studieren.
Für den Fall, daß die Hopfalgebra H endlich erzeugt (und projektiv) über dem Grundring R ist, wurden lokal-global Argumente bereits von Pareigis in [54, section 4] benutzt, um zu untersuchen, wann eine Bialgebra eine Frobenius-Algebra ist.
Leider tritt im unendlichen Fall der Defekt auf, daß wir den Isomorphismus $(H_m)^* \simeq H_m^*$ für ein maximales Ideal $m \subset R$ nicht mehr etablieren können. Im endlich erzeugten Fall wird dadurch die lokale mit der globalen Komodultheorie für H verbunden.
Wir sind jedoch in der glücklichen Lage, mit den Ergebnissen des letzten Abschnitts zeigen zu können, daß sich zumindest die Generatoreigenschaft von H auf alle Lokalisierungen H_m überträgt. Das ist der Grund dafür, daß wir nun zuerst den Spezialfall untersuchen, indem H eine Hopfalgebra über einem lokalen Ring R ist.

1.5.5 Satz. *Sei H eine Hopfalgebra, flach über dem lokalen Grundring R. Ist H ein Generator in der Kategorie der Rechts-H-Komoduln $\mathcal{M}^H$, dann existiert ein surjektives Rechts-Integral, i.e. eine rechts-H-kolineare und surjektive Abbildung $t : H \to R$.*

Beweis. Da R ein zyklischer H^*-Modul ist und H ein Generator in $\mathcal{M}^H$ ist, existiert eine surjektive, rechts-H-kolineare Abbildung

$$\Theta : H^n \to R.$$

Wir nehmen an, daß Θ durch die Komponentenabbildungen $\Theta = (t_1, \ldots, t_n)$ gegeben ist. Wenn keines der t_i surjektiv ist, dann enthält keiner der R-Untermoduln $Im(t_i) \subseteq R$ ein invertierbares Element in R. Da R nach Voraussetzung lokal ist, bedeutet das, daß für alle $i \leq n$ gilt: $Im(t_i) \subseteq Jac(R)$. Dann gilt aber auch $Im(\Theta) = \sum_i Im(t_i) \subseteq Jac(R)$, im Widerspruch zur Surjektivität von Θ. Also existiert ein $i \leq n$, so daß $Im(t_i)$ ein invertierbares Element aus R enthält. Damit ist $t_i : H \to R$ ein surjektives Integral für H. $\boxed{qed}$

Das nächste Korrollar verallgemeinert die Aussage 1.5.5 auf semiperfekte Ringe.

1.5.6 Satz. *Sei R ein semiperfekter Ring und H eine R-Hopfalgebra, die über R flach ist. Ist H Generator in $\mathcal{M}^H$, so existiert ein surjektives Rechtsintegral für H.*

Beweis. Da R semiperfekt ist, gibt es eine Zerlegung $R = \bigoplus_{i=1}^n R_i$ von R mit lokalen Ringen R_i . Wir definieren für $i \leq n$ Skalarerweiterungen von H durch $H_i := H \otimes_R R_i$. Dann ist H_i eine Hopfalgebra über dem lokalen Ring R_i und es gilt in R-Mod: $H = H \otimes R = H \otimes (\bigoplus_{i=1}^n R_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^n H_i$. Mit Hilfe von 1.5.5 erhalten wir für $1 \leq i \leq n$ surjektive rechts-H_i-kolineare Abbildungen $t_i : H_i \to R_i$. Man zeigt leicht, daß durch $t := \bigoplus_i t_i : \bigoplus_{i=1}^n H_i \to \bigoplus_{i=1}^n R_i$ eine rechts-H-kolineare, surjektive Abbildung definiert wird. $\boxed{qed}$

Im folgenden untersuchen wir, wie sich die Generatoreigenschaft von H auf die Antipode auswirkt. Wir benutzen lokal-global Argumente, um zu zeigen, daß über einem noetherschen Grundring die Antipode einer Hopfalgebra H, die Generator in der Kategorie der H-Komoduln ist, schon injektiv sein muß. Dabei benötigen wir, daß der Grundring noethersch ist, um die Integrale von

H mit den Elementen des koinvarianten Anteils von $(H^*)^{rat}$ zu identifizieren (vergleiche [46, 3.4]).
Falls der Grundring lokal perfekt ist, so können wir zeigen, daß die Generatoreigenschaft von H ausreicht, um die Surjektivität der Antipode zu garantieren. Fügen wir diese Ergebnisse zusammen, so erhalten wir die Bijektivität der Antipode für lokal perfekte, noethersche Ringe R, sofern H Generator in $\mathcal{M}^H$ ist. Für den Fall, daß R ein Körper ist, ist dieses Ergebnis bekannt (vergleiche 1.5.1). In [46] wird - mit anderen Methoden - die Bijektivität der Antipode von Ko-Frobenius-Hopfalgebren H über QF-Ringen gezeigt.

1.5.7 Satz. *Sei H eine R-Hopfalgebra, flach über R, und R noethersch. Ist H Generator in $\mathcal{M}^H$, so ist die Antipode von H injektiv.*

Beweis. Sei H ein Generator in $\mathcal{M}^H$. Wir geben ein lokal-global Argument. Nehmen wir an, wir hätten schon nach einem maximalen Ideal $m \subset R$ lokalisiert, und H ist eine der lokalsierten Hopfalgebren H_m über dem Ring R_m mit Antipode S (das bedeutet, wir lassen den Index weg). Nach 1.5.4 wissen wir, daß H ein Generator in $\mathcal{M}^H$ ist. Nun impliziert 1.5.5 die Existenz eines surjektiven Rechts-Integrals $t : H \to R$.
Wir bezeichnen den rationalen Teil von H^* mit T. Es ist bekannt, daß T ein rechts H-Hopfmodul ist (siehe z.B. [46, Lemma 3.3]). Man beachte, daß hier die Rechts-H-Struktur auf T durch die Antipode von H induziert ist. Nach dem Fundamentalsatz von Hopfmoduln existiert daher ein Hopfmodul-Isomorphismus

$$\theta : T^{coH} \otimes_R H \simeq T.$$

Wir können nach [46, 3.4] T^{coH} mit dem Modul der Rechts-Integrale von H identifizieren (an dieser Stelle benötigen wir, daß R noethersch ist) und erhalten in unserem Fall $t \in T^{coH}$.
Da t surjektiv ist, ist der von t erzeugte zyklische R-Modul frei, also $R \cdot t \simeq R$. Denn aus $t(h) = 1_R$ (mit $h \in H$ geeignet) folgt, daß $r \neq s$ in R schon $r \cdot t \neq s \cdot t$ impliziert, wie die Rechnung

$$(r \cdot t)(h) = r \cdot t(h) = r \cdot 1_R = r \neq s = s \cdot t(h) = (s \cdot t)(h)$$

zeigt. Also haben wir eine exakte Folge von R-Moduln

$$0 \longrightarrow R \cdot t \longrightarrow T^{coH}.$$

Angenommen, die Antipode S von H ist nicht injektiv. Dann existiert ein $a \in H$ mit $S(a) = 0$. Nach der Definition der H-Modulstruktur auf T gilt dann für jedes $t \otimes h \in T^{coH} \otimes_R H$

$$0 = S(a) \cdot \theta(t \otimes h) = \theta(t \otimes h) \cdot a = \theta(t \otimes (h \cdot a)),$$

da $T^{coH} \otimes_R H$ die rechts triviale H-Modulstruktur trägt.
Das bedeutet für den R-Endomorphismus $R_a : T \to T, \quad t \mapsto t \cdot a$, daß er die Nullabbildung ist.
Betrachten wir das folgende Diagramm von R-Moduln:

$$\begin{array}{ccccccc}
H & \overset{\simeq}{\to} & R \cdot t \otimes_R H & \rightarrowtail & T^{coH} \otimes_R H & \overset{\simeq}{\to} & T \\
\downarrow^{R_a} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow^{R_a} \\
H & \overset{\simeq}{\to} & R \cdot t \otimes_R H & \rightarrowtail & T^{coH} \otimes_R H & \overset{\simeq}{\to} & T
\end{array}$$

Da die Rechtsmultiplikation mit a in H Null ist, muß schon $a = 0$ gelten. Das bedeutet jedoch, daß S injektiv ist.
Da wir für jede der lokalisierten Hopfalgebren argumentieren können, daß die (lokalisierte) Antipode injektiv ist, muß auch die Antipode der Hopfalgebra, von der wir ausgegangen sind, injektiv sein. $\boxed{qed}$

Als nächstes beweisen wir, daß die Antipode einer Hopfalgebra mit der Generatoreigenschaft surjektiv ist, falls der Grundring lokal perfekt ist. Dabei bedeutet *lokal perfekt* für einen kommutativen Ring, daß alle Lokalisierungen R_m nach den maximalen Idealen $m \subset R$ perfekte Ringe sind. Eine wesentliche Eigenschaft, die wir uns zunutze machen wollen, ist die, daß das Jacobson-Radikal mR_m einer jeden Lokalisierung R_m schon t-nilpotent ist. Das ermöglicht uns, Nakayamas Lemma auf nicht endlich erzeugte Moduln anzuwenden (vgl. [72, 43.5]).

1.5.8 Satz. *Sei H eine Hopfalgebra, flach über dem lokal perfekten Ring R. Ist H ein Generator in $\mathcal{M}^H$, so ist die Antipode S von H surjektiv.*

Beweis. Wir führen den Beweis wieder mit einem lokal-global Argument. Sei $m \subset R$ ein maximales Ideal in R und $H_m = H \otimes_R R_m$ die lokalisierte Hopfalgebra über R_m mit Antipode $S_m : H_m \to H_m$. Nach Voraussetzung ist R_m ein perfekter Ring, also ist sein Jacobson-Radikal mR_m t -nilpotent (vgl. dazu [71, 43.4]). Wenn wir zu den Quotienten übergehen, so erhalten wir jeweils eine Abbildung $\overline{S_m} : H_m/mH_m \to H_m/mH_m$, wie das folgende Diagramm verdeutlicht:

$$\begin{array}{ccc}
H_m & \xrightarrow{S_m} & H_m \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_m \otimes_{R_m} R_m/mR_m & \xrightarrow{\overline{S_m}} & H_m \otimes_{R_m} R_m/mR_m \\
\downarrow^{\simeq} & & \downarrow^{\simeq} \\
H_m/mH_m & \xrightarrow{\overline{S_m}} & H_m/mH_m
\end{array}$$

Da H nach Voraussetzung ein Generator in $\mathcal{M}^H$ ist, wissen wir aus 1.5.2, daß auch $H/mH \simeq H_m/mH_m$ ein Generator in $\mathcal{M}^{H/mH}$ ist. Aber $\overline{S_m}$ ist die Antipode der Hopfalgebra H_m/mH_m über dem Körper R/mR und damit nach 1.5.1 bijektiv.
Damit gilt für das Bild der Abbildung S_m: $Im(S_m) + mH_m = H_m$.
Weiter ist mR_m t-nilpotent und $mH_m \simeq H \otimes_{R_m} mR_m$. Also folgt, daß das Radikal mH_m des R_m-Moduls H_m klein in H_m ist (zur Definition vgl. [71, 19.2]). Das bedeutet $Im(S_m) = H_m$ für jedes maximale Ideal m in R. Also ist die Antipode S von H surjektiv. $\boxed{qed}$

Nun ist eine Anmerkung angebracht. Wir erhalten Bijektivität der Antipode in einer Hopfalgebra mit der Generatoreigenschaft aus 1.5.7 und 1.5.8 für Ringe, die noethersch und lokal perfekt sind. Solche Ringe sind jedoch schon artinsch, wie das nächste Lemma zeigt.

1.5.9 Lemma. *Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Dann sind äquivalent:*

(a) R ist lokal perfekt and noethersch;

(b) R ist artinsch.

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$ In [72, 18.15] werden kommutative, lokal perfekte Ringe durch die Tatsache gekennzeichnet, daß $R/Jac(R)$ regulär und $Jac(R)$ t-nilpotent ist. Nach Voraussetzung ist R noethersch und damit bleiben alle Faktorringe von R noethersch. Das bedeutet jedoch, daß $R/Jac(R)$ ein regulärer noetherscher Ring ist, also schon (artinsch) halbeinfach (nach z.B. [71, 37.5]). Ein Ring mit t-nilpotentem Radikal, für den $R/Jac(R)$ halbeinfach ist, ist nach [71, 43.9] schon perfekt. Also ist R ein kommutativer, noetherscher und perfekter Ring - und damit artinsch, denn R erfüllt die absteigende Kettenbedingung für endlich erzeugte (Links-) Ideale (vgl. [71, 43.11]).

$(b) \Rightarrow (a)$ ist trivial, da Lokalisierungen von artinschen Ringen artinsch bleiben - was insbesondere perfekt impliziert. $\boxed{qed}$

Also erhalten wir das nächste Korollar. Es stellt eine Verallgemeinerung (auf artinsche Grund-Ringe) für Ergebnisse über die Bijektivität der Antipode einer Ko-Frobenius-Hopfalgebra H dar .

1.5.10 Korollar. *Sei H eine Hopfalgebra über dem artinschen Grundring R und ${}_RH$ flach. Ist H ein Generator in $\mathcal{M}^H$, so ist die Antipode von H bijektiv.*

Beweis. Das folgt aus 1.5.7 zusammen mit 1.5.8. $\boxed{qed}$

Als nächstes beschreiben wir Konsequenzen für die Komoduln über H, die sich daraus ergeben, daß H eine bijektive Antipode S besitzt. Die wesentliche Beobachtung ist die folgende:

1.5.11 Satz. *Sei H eine Hopfalgebra, flach über R, mit bijektiver Antipode S. Ist H ein Generator in $\mathcal{M}^H$, so ist H auch ein Generator in ${}^H\mathcal{M}$ (und vice versa).*

Beweis. Wir betrachten die kategorische Äquivalenz $\mathcal{S} : {}^H\mathcal{M} \to \mathcal{M}^H$ mit inversem Funktor $\bar{\mathcal{S}} : \mathcal{M}^H \to {}^H\mathcal{M}$, die wir in den Preliminarien erklärt haben. Durch diese Äquivalenz wissen wir, daß H genau dann ein Generator in $\mathcal{M}^H$ ist, wenn $\bar{\mathcal{S}}(H) = {}^{\bar{S}}H$ ein Generator in ${}^H\mathcal{M}$ ist.
Der kanonische Isomorphismus $S : H \to {}^{\bar{S}}H, \quad a \mapsto S(a)$ in ${}^H\mathcal{M}$, wobei H die natürliche Links-H-Struktur trägt, die durch Δ induziert wird, zeigt, daß dann auch H ein Generator in ${}^H\mathcal{M}$ ist. $\boxed{qed}$

Nun sind wir in der Lage, unser Hauptresultat dieses Abschnitts zu beweisen. Es charakterisiert H als Generator in der Kategorie der Rechts-H-Komoduln über einem Grund-QF-Ring. Dabei benötigen wir die Projektivität von H über R, um die Kategorie der Rechts-H-Komoduln mit der Kategorie $\sigma[{}_{H^*}H]$ zu identifizieren.

1.5.12 Theorem.
Sei H eine Hopfalgebra, projektiv über dem Grund-QF-Ring R. Wir setzen $T = (H^*)^{rat}$. Dann sind äquivalent:

(a) H ist ein Generator in $\mathcal{M}^H$;

(b) es existiert eine rechts-H-kolineare, surjektive Abbildung $t : H \to R$;

(c) H ist eine links semiperfekte Hopfalgebra;

(d) H ist rechts eine (Quasi)-Ko-Frobenius-Hopfalgebra;

(e) H ist ein projektiver Generator in $\mathcal{M}^H$;

(f) T^{coH} ist ein freier R-Modul vom Rang Eins.

(g) die linksseitigen Aussagen von (a) - (f).

Ist eine der äquivalenten Bedingungen für eine Hopfalgebra H erfüllt, so ist die Antipode von H bijektiv.

Beweis. Die Äquivalenz von $(c), (d), (e), (f)$ und (g) findet man z. B. in [46, 3.9].

$(e) \Rightarrow (a)$ ist trivial.

$(b) \Rightarrow (a)$ erhalten wir aus 1.5.2.

$(a) \Rightarrow (b)$ folgt aus 1.5.6.

$(a) \Rightarrow (d)$ Sei H ein Generator in $\mathcal{M}^H$. Dann ist die Antipode von H bijektiv nach 1.5.10. Folglich ist H auch Generator in der Kategorie der Links-H-Komoduln nach 1.5.11. Als Generator ist H insbesondere flach über dem Endomorphismenring, das bedeutet, H ist flach über H^* von links und von rechts. Nun ist H jedoch injektiv in $\mathcal{M}^H$ und in ${}^H\mathcal{M}$ (an dieser Stelle benötigen wir die QF-Eigenschaft von R), was H^* zu einem links- und rechtsselbstinjektiven Ring macht (vgl. [71, 17.14]). Dann folgt die Behauptung, wenn man sich überlegt, daß H rechts eine Quasi-Ko-Frobenius-Hopfalgebra im Sinne von [46] ist, d.h. daß H als Rechts-H^*-Modul von H^* koerzeugt wird.
Da R ein QF-Ring ist, ist der Sockel von H_{H^*} wesentlich. Nun ist H^* selbstinjektiv, also reicht es zu zeigen, daß jeder einfache Untermodul von H_{H^*} in ein Produkt der Form $(H^*)^I$ einbettet.

Sei also $U \in {}^H\mathcal{M}$ endlich erzeugter Unterkomodul von H. Dann existiert nach [73] ein endlich erzeugter Rechts-H-Komodul V mit der Eigenschaft $V \simeq U^* \in \mathcal{M}^H$. Da H Generator in $\mathcal{M}^H$ ist, existiert ein Epimorphismus $H^{(I)} \to V$ in $\mathcal{M}^H$. Also bettet $U \simeq V^*$ in ein Produkt $(H^*)^I$ ein.

Diese Beweisidee stammt aus dem Beweis von [32, Theorem 2.6]. Der Beweis dort wird für Koalgebren über Körpern geführt. Er bleibt jedoch über QF-Ringen gültig. $\boxed{qed}$

1.6 K-Semi-Invarianten

In dem Artikel [20] betrachten Cohen, Raianu und Westreich H-Kowirkungen auf einer H-Komodulalgebra A über einem Körper k und reduzieren die Frage, ob $A^{coH} \subset A$ eine Hopf-Galois-Erweiterung ist, im Fall einer punktierten Hopfalgebra H mit einem totalen Integral $t : H \to A$ auf die Frage, ob der Ring der Semi-Invarianten $A_G := A\Box_H k[G]$ stark G-graduiert ist, wobei G die Gruppe der gruppenähnlichen Elemente in H bezeichnet. Sie verallgemeinern damit die Untersuchungen aus [53] und [11], in denen ähnliche Ergebnisse für eine kohalbeinfache und endlich dimensionale Hopfalgebra H erzielt werden.

Wir werden in diesem Abschnitt die in den Abschnitten 1.1. - 1.3 studierte Situation so verallgemeinern, daß die Untersuchungen aus [20] als Studium von Äquivalenzen zwischen geeigneten Bimodulkategorien verstanden werden können.
In diesem Abschnitt bezeichnet R zuerst einen beliebigen kommutativen Ring mit Eins. Später werden wir voraussetzen, daß R ein Körper ist, um unser Hauptergebnis 1.6.14 beweisen zu können.

Sei H wieder eine über R flache R-Hopfalgebra und K eine Unter-Hopfalgebra mit der Einbettung $\iota : K \to H$. Dann trägt K in natürlicher Weise die Strukturen eines Rechts- und Links-H-Komoduls durch die Strukturabbildungen

$$\rho^l_K : K \xrightarrow{\Delta_K} K \otimes K \xrightarrow{\iota\otimes id} H \otimes K$$

und

$$\rho^r_K : K \xrightarrow{\Delta_K} K \otimes K \xrightarrow{id\otimes\iota} K \otimes H.$$

Die Abbildung $\iota : K \to H$ wird mit diesen Strukturen eine Rechts-, bzw. Links-H-Komodulabbildung. Sei A wieder eine rechts H-Komodulalgebra. Dann definieren wir die (verallgemeinerten) K-Semi-Invarianten von A bzgl. der Unter-Hopfalgebra K in H wie folgt (vgl. [20, section 1]):

1.6.1 Definition. *Für eine Unterhopfalgebra $K \subset H$ und eine Rechts-H-Komodulalgebra A nennen wir die Algebra $A_K := A\Box_H K$ die (Algebra der)* K-Semi-Invarianten von A, *also*

$$A_K = \left\{\sum a_i \otimes l_i \in A \otimes K \mid \sum \rho_A(a_i) \otimes l_i = \sum a_i \otimes \rho^l_K(l_i)\right\}.$$

Bemerkung:

(1) Im Fall $K = R$ entsprechen die R-Semi-Invarianten von A gerade der Unteralgebra A^{coH} der koinvarianten Elemente von A. In [52] wird für A_K die Notation $A(K)$ benutzt.

(2) Im Fall $K = R[G]$ für die Gruppe $G = G(H)$ der gruppenähnlichen Elemente von H wird $A_{R[G]}$ ein G-graduierter Ring. Für eine endlichdimensionale Hopfalgebra H über einem Körper R sind die $R[G]$-Semi-Invarianten als Semi-Invarianten in [11] studiert worden. Wir können auch die Ergebnisse aus [11] mit unserem Ansatz verallgemeinern.

Die Bedeutung der K-Semi-Invarianten liegt darin, daß sie nicht nur eine Unteralgebra in A sind, falls A über R flach ist, sondern sogar eine K-Komodulalgebra, so daß es Sinn macht, die Kategorie der A_K-K-Bimoduln zu studieren. Es stellt sich heraus, daß wir eine natürliche adjungierte Situation zwischen den Kategorien $\mathcal{M}_A^H$ und $\mathcal{M}_{A_K}^K$ vorliegen haben, die die Adjunktion aus Satz 1.1.15 verallgemeinert. Um dies zu zeigen, müssen wir einige Vorüberlegungen anstellen.

1.6.2 Satz. *Sei H eine über R flache R-Hopfalgebra mit einer Unter-Hopfalgebra $\iota : K \to H$ und sei $\rho_A : A \to A \otimes H$ eine Rechts-H-Komodulalgebra. Wenn wir K mit der natürlichen Links-H-Komodulstruktur $\rho_K^l : K \to H \otimes K$ versehen, wird $A_K := A\Box_H K$ eine Unteralgebra von $A \otimes K$ und sogar eine Rechts-K-Komodulalgebra. Identifizieren wir A mit $A\Box_H H$, so können wir, falls A über R flach ist, A_K als Unteralgebra von A auffassen.*

Beweis. Natürlich ist $A \otimes K$ eine R-Algebra mit komponentenweiser Multiplikation und A_K ist nach Definition ein R-Untermodul von $A \otimes K$. Wir zeigen, daß das Produkt von zwei Elementen aus A_K wieder in A_K liegt. Für $a \otimes k \in A_K = A\Box_H K$ gilt $\rho_A(a) \otimes l = a \otimes \rho_K^l(l)$. Seien nun also $a \otimes k$ und $b \otimes l$ in $A\Box_H K$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\rho_A(ab) \otimes kl &= \rho_A(a)\rho_A(b) \otimes kl \\
&= (\rho_A(a) \otimes k)(\rho_A(b) \otimes l) \\
&= (a \otimes \rho_K^l(k))(b \otimes \rho_K^l(l)) \\
&= ab \otimes \rho_K^l(k)\rho_K^l(l) \\
&= ab \otimes \rho_K^l(kl).
\end{aligned}$$

Das zeigt, daß A_K eine Unter-R-Algebra von $A \otimes K$ ist.

Wir definieren eine K-Komodulstruktur auf $A \otimes K$ durch die Einschränkung der K-Komodulstruktur von $A \otimes K$ auf $A\Box_H K$.

$$\rho_B : A\Box_H K \to (A\Box_H K) \otimes K, \quad a \otimes k \mapsto a \otimes \Delta_K(k) = \sum a \otimes k_{(1)} \otimes k_{(2)}.$$

Um zu zeigen, daß diese Abbildung wohldefiniert ist, müssen wir zeigen, daß $\sum a \otimes k_{(1)} \otimes k_{(2)}$ in $A_K \otimes K$ liegt. Da $a \otimes k \in A_K$ ist, gilt $\sum a_{(0)} \otimes a_{(1)} \otimes k = \sum a \otimes \iota(k_{(1)}) \otimes k_{(2)}$ in $A \otimes H \otimes K$. Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned}
[(\rho_A \otimes id) \otimes id](a \otimes \Delta(k)) &= \textstyle\sum a_{(0)} \otimes a_{(1)} \otimes k_{(1)} \otimes k_{(2)} \\
&= [id \otimes id \otimes \Delta_K](\textstyle\sum a_{(0)} \otimes a_{(1)} \otimes k) \\
&= [id \otimes id \otimes \Delta_K](\textstyle\sum a \otimes \iota(k_{(1)}) \otimes k_{(2)}) \\
&= (\textstyle\sum a \otimes \iota(k_{(1)}) \otimes k_{(2)_{(1)}} \otimes k_{(2)_{(2)}}) \\
&= (\textstyle\sum a \otimes \iota(k_{(1)}) \otimes k_{(2)} \otimes k_{(3)}) \\
&= [id \otimes (\rho^l_K \otimes id)](a \otimes \Delta(k)).
\end{aligned}$$

Also ist A_K ein K-Unterkomodul von $A \otimes K$, und es genügt zu zeigen, daß ρ_{A_K} eine Algebra-Abbildung ist. Das ist jedoch klar wegen:

$$\begin{aligned}
\rho_{A_K}(ab \otimes kl) &= ab \otimes \Delta_K(kl) \\
&= ab \otimes \Delta_K(k)\Delta_K(l) \\
&= (a \otimes \Delta_K(k))(b \otimes \Delta_K(l)) \\
&= \rho_{A_K}(a \otimes k)\rho_{A_K}(b \otimes l).
\end{aligned}$$

Wenn wir die Einbettung $\iota : K \to H$ als Abbildung von Links-H-Komoduln auffassen, so können wir mit $A\Box_H-$ kotensorieren und erhalten eine Abbildung $A\Box_H\iota : A\Box_H K \to A\Box_H H \simeq A$. Das folgende kommutative Diagramm zeigt, daß diese Abbildung auch ein Algebra-Morphismus ist:

$$\begin{array}{ccccccc}
A_K = & A\Box_H K & \xrightarrow{A\Box_H\iota} & A\Box_H H & \simeq & A \\
& \cap & & & & \| \\
& A \otimes K & \xrightarrow{id_A \otimes \varepsilon} & A \otimes R & \simeq & A.
\end{array}$$

Wenn wir A als flach über R voraussetzen, ist das Kotensorprodukt links exakt. Wir erhalten also eine Einbettung $A\Box_H\iota : A\Box_H K \to A\Box_H H \simeq A$ und können A_K als Unteralgebra von A auffassen. $\boxed{qed}$

Als nächstes bemerken wir, daß der Funktor $-\Box_H K : \mathcal{M}_A^H \longrightarrow \mathcal{M}_{A_K}^K$ rechts adjungiert ist zum Funktor $-\otimes_{A_K} A : \mathcal{M}_{A_K}^K \longrightarrow \mathcal{M}_A^H$. Diese Aussage gilt sehr viel allgemeiner für Doi-Koppinen-Kategorien, falls die involvierten Hopfalgebren, Koalgebren und Algebren durch geeignete Morphismen verbunden sind. Ein Beweis hierfür findet sich in der Arbeit [12] von Raianu und Caenepeel. Verallgemeinert wird in [8] gezeigt, daß bei einem (geeigneten) Morphismus zwischen zwei gegeben "entwining structures" eine adjungierte Situation zwischen den zugehörigen Modulkategorien vorliegt. Für Koringe, die durch einen geeignet zu definierenden Koring-Morphismus verbunden sind, hat Torrecillas das entsprechende Resultat in der Arbeit [31] festgehalten. Wir geben hier ohne Beweis nur die induzierten Strukturen für die Objekte in den jeweiligen Kategorien an.

1.6.3 Lemma.

(1) Sei U ein Objekt in $\mathcal{M}_{A_K}^K$. Dann wird $U \otimes_{A_K} A$ ein Objekt in $\mathcal{M}_A^H$ mit den Strukturabbildungen

$$\begin{aligned}
\rho &: U \otimes_{A_K} A \to (U \otimes_{A_K} A) \otimes H, \quad u \otimes_{A_K} a \mapsto \sum u_{(0)} \otimes_{A_K} a_{(0)} \otimes u_{(1)} a_{(1)}, \\
\mu &: (U \otimes_{A_K} A) \otimes A \to U \otimes_{A_K} A, \quad u \otimes_{A_K} a \otimes b \mapsto u \otimes_{A_K} ab.
\end{aligned}$$

(2) Sei M ein Objekt in $\mathcal{M}_A^H$. Dann wird $M\Box_H K$ ein Objekt in $\mathcal{M}_{A_K}^K$ mit den Strukturabbildungen

$$\begin{aligned}
\rho &: M\Box_H K \to (M\Box_H K) \otimes K & m \otimes k &\mapsto \sum m \otimes k_{(1)} \otimes k_{(2)}, \\
\mu &: (M\Box_H K) \otimes (A\Box_H K) \to M\Box_H K, & (m \otimes k) \otimes (a \otimes l) &\mapsto ma \otimes kl.
\end{aligned}$$

Wir zitieren nun Theorem 1.1 und 1.3 aus [12], angewandt auf unseren Spezialfall. Bemerkenswert und neu ist Teil (3) des Satzes. Wir zeigen dort, daß die Adjunktion, die wir in Satz 1.1.15 betrachtet haben, über die hier untersuchte Adjunktion "faktorisiert". Dadurch wird ersichtlich, daß die funktoriellen Eigenschaften von A als H-Komodul - hier meine ich vornehmlich Projektivitäts- und Generatoreigenschaften - verbunden sind mit den entsprechenden Eigenschaften von A_K als K-Komodul. Dies werden wir in 1.6.14 ausnutzen, um die Ergebnisse von Cohen aus [20] zu erklären und zu verallgemeinern.

1.6.4 Satz. *Sei H eine Hopfalgebra, A eine Rechts-H-Komodulalgebra und K eine Unterhopfalgebra in H mit der Einbettung $\iota : K \to H$. Setzen wir $B := A_K$, dann gilt:*

(1) Die Funktoren

$$-\otimes_B A : \mathcal{M}_B^K \longrightarrow \mathcal{M}_A^H \quad \textit{und} \quad -\square_H K : \mathcal{M}_A^H \longrightarrow \mathcal{M}_B^K$$

bilden ein adjungiertes Funktorpaar.
Die Einheit der Adjunktion ist für $U \in \mathcal{M}_B^K$ gegeben durch

$$\eta_U : U \to (U \otimes_B A)\square_H K, \quad u \mapsto \sum (u_{(0)} \otimes_B 1_A) \otimes u_{(1)}$$

und die Koeinheit ist für $M \in \mathcal{M}_A^H$ gegeben durch

$$\rho_M : (M \square_H K) \otimes_B A \to M, \quad m \otimes k \otimes_B a \mapsto ma\varepsilon(k).$$

(2) Es gibt einen Isomorphismus

$$B^{coK} = (A\square_H K)\square_K R \simeq A\square_H (K\square_K R) \simeq A\square_H R = A^{coH}.$$

(3) Die Adjunktionen faktorisieren wie folgt (das heißt die oberen und die unteren Pfeile ergeben jeweils ein kommutatives Diagramm):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_A^H \arrow[rr, shift left, "-\square_H R"] \arrow[dr, shift left, "-\square_H K"] & & \mathcal{M}_{A^{coH}} \arrow[ll, shift left, "-\otimes_{A^{coH}} A"] \arrow[dl, shift left, "-\otimes_{B^{coK}} B"] \\
& \mathcal{M}_B^K \arrow[ul, shift left, "-\otimes_B A"] \arrow[ur, shift left, "-\square_K R"] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Die Aussage (1) steht - wie gesagt - in allgemeinerer Form in [12, Theorem 1.1, Theorem 1.3], wobei in der dort verwendeten Notation A:= K, D:= K, B:= B und A' := H, D' := H, B' := A gesetzt werden muß und die dort involvierten Morphismen $\alpha : A \to A'$, $\beta : B \to B'$ und $\delta : D \to D'$ jeweils die kanonischen Einbettungen $\alpha := \iota : K \to H$, $\beta := \theta \circ (id_A \otimes \varepsilon_K) : B \to A$ und $\delta := \iota : K \to H$ sind.
(2) Die Isomorphie $B^{coK} \simeq A^{coH}$ rührt daher, daß man in diesem Fall die beteiligten Kotensorprodukte assoziieren darf. Das ist gerechtfertigt, da $K\square_K R$ ${}_R A$-rein in $K \otimes R$ ist (sogar R-direkter Summand) und R natürlich R-flach ist (vgl. [2, II.3.4, (3)]).
(3) ist mit dem Argument aus (2) nun klar. $\boxed{qed}$

Als nächstes wollen wir den Funktor $-\square_H K$ näher untersuchen. Er ist von besonderem Interesse, weil es sich dabei im allgemeinen nicht - wie bei den "normalen" Koinvarianten - um einen Hom-Funktor handelt. Eine wichtige Eigenschaft ist natürlich die Exaktheit. Die nächsten Lemmata und Sätze dienen dazu, diese zu verstehen.

1.6.5 Lemma. *Sei H eine Hopfalgebra über R mit bijektiver Antipode S und $\iota : K \to H$ eine Einbettung von Hopfalgebren. A sei wieder eine Rechts-H-Komodulalgebra und U sei ein Rechts-H-Komodul. Dann induziert die Identität auf $U \otimes A \otimes K$ einen (in U funktoriellen) R-linearen Isomorphismus*

$$U \square_H{}^{\bar{S}}(A \otimes^c K) \longrightarrow (U \otimes^c A) \square_H{}^{\bar{S}} K.$$

Beweis. Betrachten wir das nachfolgende Diagramm von R-Moduln, wobei die Zeilen gerade die definierenden Folgen für die jeweiligen Kotensorprodukte darstellen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & U \square_H (A \otimes^c K) & \longrightarrow & U \otimes A \otimes K & \overset{\rho_U \otimes id - id \otimes \rho_{AK}}{\longrightarrow} & U \otimes H \otimes A \otimes K \\ & & & & \downarrow id & & \downarrow id \otimes \Theta \otimes id \\ 0 & \longrightarrow & (U \otimes^c A) \square_H K & \longrightarrow & U \otimes A \otimes K & \overset{\rho_{UA} \otimes id - id \otimes \rho_K}{\longrightarrow} & U \otimes A \otimes H \otimes K, \end{array}$$

mit dem $(A$-$H)$-Isomorphismus $\Theta : H \otimes^c A \to A \otimes_c H$ aus 1.1.4. Die Komodulstrukturabbildung ρ_{UA} ist die diagonale Komodulstruktur auf $U \otimes^c A$ und ρ_{AK} bezeichnet die Links-H-Komodulstruktur auf $A \otimes^c K$, die von der rechts diagonalen Komodulstruktur durch den Funktor $\bar{\mathcal{S}}$ (vgl. den Beweis zu 1.5.11) induziert wird. Dann kommutiert das rechte Rechteck mit den Abbildungen $id_{U \otimes A \otimes K}$ und $id \otimes \Theta \otimes id$, denn die Elemente werden folgendermaßen abgebildet:

$$\begin{array}{ccc} u \otimes a \otimes k & \longmapsto & \sum u_{(0)} \otimes u_{(1)} \otimes a \otimes k - \sum u \otimes \bar{S}(a_{(1)} k_{(2)}) \otimes a_{(0)} \otimes k_{(1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ u \otimes a \otimes k & \longmapsto & \sum u_{(0)} \otimes a_{(0)} \otimes u_{(1)} a_{(1)} \otimes k - u \otimes a \otimes \bar{S}(k_{(2)}) \otimes k_{(1)}. \end{array}$$

Aus der Kern-Eigenschaft von $(U \otimes^c A) \square_H K$ folgt die Existenz eines R-linearen Isomorphismus $\gamma : U \square_H{}^{\bar{S}}(A \otimes^c K) \longrightarrow (U \otimes^c A) \square_H{}^{\bar{S}} K$, der das Diagramm kommutativ macht. $\boxed{qed}$

Nun können wir die Exaktheit des Funktors $-\square_H K$ auf der Kategorie $\mathcal{M}_A^H$ durch Koflachheit des Moduls $A \otimes^c K$ in $\mathcal{M}^H$ charakterisieren.

1.6.6 Satz. *Sei H eine über R projektive R-Hopfalgebra mit bijektiver Antipode S und K eine Unterhopfalgebra in K, die ebenfalls eine bijektive Antipode hat. Weiter sei A eine R-flache Rechts-H-Komodulalgebra. Dann sind äquivalent:*

(a) Der Funktor $-\square_H K : \mathcal{M}_A^H \to R$-Mod ist exakt;

(b) der Funktor $-\square_H{}^{\bar{S}} K : \mathcal{M}_A^H \to R$-Mod ist exakt;

(c) der Funktor $-\Box_H{}^{\bar{S}}(A \otimes^c K) : \mathcal{M}^H \to R$*-Mod ist exakt;*

(d) der Funktor $(A \otimes^c K)\Box_H - : {}^H\mathcal{M} \to R$*-Mod ist exakt.*

Beweis. Da K und ${}^{\bar{S}}K$ als links H-Komoduln isomorph sind (durch S), gilt $(a) \Leftrightarrow (b)$.

$(c) \Leftrightarrow (d)$ ist klar, da $\mathcal{S}$ eine Äquivalenz zwischen $\mathcal{M}^H$ und ${}^H\mathcal{M}$ ist.

$(a) \Rightarrow (c)$ Aus dem kanonischen Isomorphismus für A und einen Rechts-H-Komodul M aus 1.6.5 erhalten wir, daß $M\Box_H{}^{\bar{S}}(A \otimes^c K) \simeq (M \otimes^c A)\Box_H{}^{\bar{S}}K$ gilt. Aber dieser Isomorphismus ist funktoriell in M und nach Voraussetzung ist die Komposition der Fuktoren $(- \otimes^c A)$ und $-\Box_H{}^{\bar{S}}K$ exakt (${}_RA$ ist flach). Dann ist auch $-\Box_H{}^{\bar{S}}(A \otimes^c K)$ ein exakter Funktor, was gerade die Koflachheit von ${}^{\bar{S}}(A \otimes^c K)$ als Links-H-Komodul bedeutet.

$(c) \Rightarrow (d)$ Für jedes $M \in \mathcal{M}_A^H$ zerfällt die A-Modul-Strukturabbildung $\mu_M : M \otimes_R A \to M$ in $\mathcal{M}^H$ durch die H-kolineare Abbildung $\nu_M : M \to M \otimes_R A, m \mapsto m \otimes 1_A$. Wir müssen zeigen, daß unter der Annahme, daß ${}^{\bar{S}}(A \otimes^c K)$ koflach ist, der Funktor $-\Box_H{}^{\bar{S}}K$ Epimorphismen in $\mathcal{M}_A^H$ erhält.
Sei also $f : M \to N$ ein Epimorphismus in $\mathcal{M}_A^H$. Dann betrachten wir das folgende Diagramm mit vertikalen Epimorphismen:

$$\begin{array}{ccc} M \otimes A & \xrightarrow{f \otimes id} & N \otimes A \\ \downarrow \mu_M & & \downarrow \mu_N \\ M & \xrightarrow{f} & N. \end{array}$$

Da $-\Box_H{}^{\bar{S}}K$ links exakt ist, und da μ_M und μ_N in $\mathcal{M}^H$ zerfallen, haben wir das folgende kommutierende Diagramm, in dem die vertikalen Abbildungen immer noch Epimorphismen sind:

$$\begin{array}{ccc} (M \otimes A)\Box_H{}^{\bar{S}}K & \xrightarrow{(f \otimes id)\Box_H{}^{\bar{S}}K} & (N \otimes A)\Box_H{}^{\bar{S}}K. \\ \downarrow \mu_M\Box_H{}^{\bar{S}}K & & \downarrow \mu_N\Box_H{}^{\bar{S}}K \\ M\Box_H{}^{\bar{S}}K & \xrightarrow{f\Box_H{}^{\bar{S}}K} & N\Box_H{}^{\bar{S}}K. \end{array}$$

Wir wissen, daß $f\Box_H{}^{\bar{S}}K$ surjektiv ist, wenn $(f \otimes id)\Box_H{}^{\bar{S}}K$ surjektiv ist. Aber der funktorielle Isomorphismus $(- \otimes_R A)\Box_H{}^{\bar{S}}K \simeq -\Box_H{}^{\bar{S}}(A \otimes^c K)$ aus 1.6.5 zeigt, daß $(f \otimes id)\Box_H{}^{\bar{S}}K = f\Box_H{}^{\bar{S}}(A \otimes^c K)$ gilt.
Nach Voraussetzung ist $-\Box_H{}^{\bar{S}}(A \otimes^c K)$ exakt, erhält also Epimorphismen. Daraus folgt die Behauptung. $\boxed{qed}$

In 1.4.7 haben wir gesehen, daß die Existenz eines totalen Integrals $t : H \to A$ insbesondere den Funktor $(-)^{coH}$ der H-Koinvarianten exakt macht. Hier halten wir nun fest, daß bei der Existenz eines totalen Integrals $t : H \to A$ für jede Unterhopfalgebra $K \subset H$ ein totales Integral $t_K : K \to A_K$ existiert. Damit werden die Funktoren der K-Koinvarianten $(-)^{coK} : \mathcal{M}^K_{A_K} \to \mathcal{M}_{A_K^{coK}}$ für jede Unterhopfalgebra $K \subset H$ exakt.

1.6.7 Satz. *Sei H eine R-Hopfalgebra und A eine Rechts-H-Komodulalgebra. Dann sind äquivalent:*

(a) *Es existiert ein totales Integral $t : H \to A$;*

(b) *für jede Unter-Hopfalgebra $K \subset H$ existiert ein totales Integral $t_K : K \to A_K$.*

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$ Sei $t : H \to A$ ein totales Integral und $K \subset H$ eine Unter-Hopfalgebra. Wenn wir mit $-\square_H K$ kotensorieren, so erhalten wir eine K-kolineare Abbildung $t_K := t\square_H K : H\square_H K \to A\square_H K$. Wir identifizieren K mit $H\square_H K$ und haben somit eine Abbildung $t_K : K \to A_K$, die K-kolinear ist und immer noch $t_K(1_K) = t\square_H K(1_H \otimes 1_K) = t(1_H)\otimes 1_K = 1_A \otimes 1_K = 1_{A_K}$ erfüllt.

$(b) \Rightarrow (a)$ ist klar. $\boxed{qed}$

Falls R ein Körper ist, so ist die Existenz eines totalen Integrals $t : H \to A$ sogar äquivalent zur Exaktheit des Funktors der Koinvarianten $(-)^{coH} : \mathcal{M}^H_A \to \mathcal{M}_{A^{coH}}$. An dieser Stelle ist interessant, daß die Existenz eines totalen Integrals auch die Exaktheit des Funktors $-\square_H K : \mathcal{M}^H_A \to \mathcal{M}^K_{A_K}$ für jede Unter-Hopfalgebra K in H bewirkt. Wir halten dazu das folgende Lemma fest:

1.6.8 Lemma. *Sei R ein Körper (oder ein halbeinfacher Ring), H eine R-Hopfalgebra und A eine Rechts-H-Komodulalgebra. Existiert ein totales Integral $t : H \to A$, dann ist für jede Unter-Hopfalgebra $K \subset H$ der Funktor $-\square_H K : \mathcal{M}^H_A \to \mathcal{M}^K_{A_K}$ exakt.*

Beweis. Wenn ein totales Integral $t : H \to A$ existiert, so ist jeder $(A$-$H)$-Bimodul als H-Komodul injektiv. Damit zerfällt jede exakte Folge in $\mathcal{M}^H_A$ als Folge in $\mathcal{M}^H$ nach 1.4.6. An dieser Stelle benötigen wir, daß in R-Mod alle exakten Folgen zerfallen, also R halbeinfach ist. Aber auf H-kolinear zerfallenden Folgen ist der Funktor $-\square_H K$ exakt. $\boxed{qed}$

Der nächste Satz zeigt, daß der Subgenerator $K \otimes B \in \mathcal{M}_B^K$ dank unserer Wahl statisch ist bzgl. der Adjunktion aus 1.6.4, daß also der durch die Adjunktion bestimmte Morphismus $K \otimes B \to ((K \otimes B) \otimes_B A)\square_H K$ ein Isomorphismus in $\mathcal{M}_B^K$ ist. Das wird in den speziellen Situationen, die wir untersuchen, deshalb wichtig, da $K \otimes B$ dort ein Generator für die Kategorie $\mathcal{M}_B^K$ wird.

1.6.9 Lemma. *Sei R ein Körper (oder ein halbeinfacher Ring), H eine R-Hopfalgebra und A eine Rechts-H-Komodulalgebra. Für eine Unterhopfalgebra $K \subset H$ setzen wir $B := A_K$. Dann gilt in $\mathcal{M}_B^K$ (mit $b = a \otimes l \in B = A\square_H K$):*

$$\begin{array}{rcccl} K \otimes B & \simeq & ((K \otimes B) \otimes_B A)\square_H K & \simeq & (K \otimes A)\square_H K, \\ k \otimes b & \mapsto & \sum k_{(1)} \otimes b_{(0)} \otimes_B 1_A \otimes k_{(2)} b_{(1)} & \mapsto & \sum k_{(1)} \otimes a \otimes k_{(2)} l = k \otimes a \otimes l \end{array}$$

Beweis. Daß die linke Abbildung in $\mathcal{M}_B^K$ ist, ist klar, denn sie ist durch die Einheit der Adjunktion gegeben (vgl. 1.6.4, (1)). Bei der rechten Abbildung haben wir $K \otimes B \otimes_B A$ mit $K \otimes A$ in $\mathcal{M}_A^H$ identifiziert. Dabei ist $\sum b_{(0)} \otimes b_{(1)} = \sum a_{(0)} \otimes a_{(1)} \otimes l$ für $b = a \otimes l \in A\square_H K$. Aber wir haben den Algebra-Morphismus $id \otimes \varepsilon_K : A\square_H K \to A \otimes R \simeq A$ (vgl. 1.6.2). Das bedeutet, daß unter dieser Identifikation die Elemente folgendermaßen abgebildet werden:

$$\sum k_{(1)} \otimes (a_{(0)} \otimes a_{(1)}) \otimes_B 1_A \otimes k_{(2)} l \mapsto \sum k_{(1)} \otimes a_{(0)} \varepsilon(a_{(1)}) \otimes k_{(2)} l.$$

Das erklärt die rechte Abbildung.

Nun gilt für $a \otimes l \in A\square_H K$ jedoch $\sum a_{(0)} \otimes a_{(1)} \varepsilon(l) = a \otimes l$ und für $k \otimes a \otimes l \in (K \otimes A)\square_H K$ gilt in $K \otimes A \otimes H \otimes K$:

$$\sum k_{(1)} \otimes a_{(0)} \otimes k_{(2)} a_{(1)} \otimes l = \sum k \otimes a \otimes l_{(1)} \otimes l_{(2)}.$$

Das bedeutet aber für $k \in K$ und $a \otimes l \in A\square_H K$ die Gleichheit

$$\begin{array}{rcl} \sum k_{(1)} \otimes a \otimes k_{(2)} l & = & \sum k_{(1)} \otimes a_{(0)} \otimes k_{(2)} a_{(1)} \varepsilon(l) \\ & = & (id_K \otimes id_A \otimes id_H \otimes \varepsilon)(\sum k_{(1)} \otimes a_{(0)} \otimes k_{(2)} a_{(1)} \otimes l) \\ & = & (id_K \otimes id_A \otimes id_H \otimes \varepsilon)(\sum k \otimes a \otimes l_{(1)} \otimes l_{(2)}) \\ & = & k \otimes a \otimes l. \end{array}$$

Also handelt es sich bei der Abbildung tatsächlich um die von der Identität induzierte Abbildung. Aus [2, II.2.1] folgt, daß diese Abbildung ein Isomorphismus ist. $\boxed{qed}$

Der nächste Satz verallgemeinert das Theorem 3.1 in [11, section 3]. Dort wird H als endlich-dimensionale kohalbeinfache Hopfalgebra über einem Körper R vorausgesetzt und K ist die Gruppenalgebra $R[G]$, wobei G die Gruppe der gruppenähnlichen Elemente in H bezeichnet. Mit diesen Voraussetzungen besitzt K eine bijekitve Antipode und es existiert ein totales Integral $t : H \to A$. Bemerkenswert ist dabei, daß unser Beweis nicht elementweise geführt wird, sondern funktorielle Überlegungen benutzt. Er verallgemeinert das Theorem 3.1 in [53] auf nicht endlichdimensionale Hopfalgebren. Er verallgemeinert auch das Lemma 3.4 aus [58] im Fall eines Grundkörpers R von der trivialen Einbettung der Hopfalgebren $R \subset H$ auf die Einbettung einer beliebigen Unterhopfalgebra $K \subset H$.

1.6.10 Satz. *Sei R ein Körper, H eine R-Hopfalgebra und A eine Rechts-H-Komodulalgebra. Für eine Unterhopfalgebra $K \subset H$ mit bijektiver Antipode S_K setzen wir $B := A_K$. Existiert ein totales Integral $t : H \to A$, so ist für $U \in \mathcal{M}_B^K$ der natürliche Morphismus der Adjunktion*

$$\eta_U : U \to (U \otimes_B A)\square_H K$$

ein Isomorphismus in $\mathcal{M}_B^K$.

Beweis. Nach 1.6.7 existiert ein totales Integral $t_K : K \to B$. Damit wird nach 1.4.7 $B \otimes K$ zu einem (projektiven) Generator in der Kategorie $\mathcal{M}_B^K$. Da die Antipode von K als bijektiv vorausgesetzt ist, haben wir den Isomorphismus $\Theta : B \otimes K \simeq K \otimes^c B$ aus 1.1.4. Wegen 1.6.9 ist $G := K \otimes B$ damit ein statischer Generator in $\mathcal{M}_B^K$. Sei U aus $\mathcal{M}_B^K$ beliebig und die Folge

$$G^{(\Lambda)} \to G^{(\Gamma)} \to U \to 0$$

exakt in $\mathcal{M}_B^K$. Da die Funktoren $- \otimes_B A$ und $-\square_H K$ mit direkten Summen vertauschen und der Funktor $-\square_H K$ nach Voraussetzung exakt ist (vgl. 1.6.8), erhalten wir das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} G^{(\Lambda)} & \to & G^{(\Gamma)} & \to & U & \to & 0 \\ \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \\ ((G \otimes_B A)\square_H K)^{(\Lambda)} & \to & ((G \otimes_B A)\square_H K)^{(\Gamma)} & \to & (U \otimes_B A)\square_H K & \to & 0 \end{array}$$

in $\mathcal{M}_B^K$, in dem die Morphismen α und β wegen 1.6.9 Isomorphismen sind. Aus dem Kern-Kokern-Lemma folgt die Behauptung. $\boxed{qed}$

Aus der Existenz eines totalen Integrals ergibt sich auch der folgende Isomorphismus:

1.6.11 Satz. *Sei R ein Körper, H eine R-Hopfalgebra, A eine Rechts-H-Komodulalgebra und $K \subset H$ eine Unter-Hopfalgebra. Existiert ein totales Integral $t : H \to A$, dann ist für alle $V \in \mathcal{M}_{A^{coH}}$ der von der Identität induzierte natürliche Morphismus*

$$V \otimes_{B^{coK}} (A \Box_H K) \to (V \otimes_{A^{coH}} A) \Box_H K$$

ein Isomorphismus in $\mathcal{M}_{A^{coH}}$.

Beweis. Wir setzen $B := A_K$, so daß $B^{coK} = A^{coH}$ gilt. Sei $V \in \mathcal{M}_{B^{coK}}$ und die Folge

$$(1) \quad (B^{coK})^{(\Gamma)} \to (B^{coK})^{(\Lambda)} \to V \to 0$$

exakt in $\mathcal{M}_{B^{coK}}$. Durch Tensorieren mit $- \otimes_{B^{coK}} B$ erhalten wir bis auf Isomorphie eine exakte Folge

$$(2) \quad B^{(\Gamma)} \to B^{(\Lambda)} \to V \otimes_{B^{coK}} B \to 0$$

in $\mathcal{M}_B^K$. Durch Tensorieren von (1) mit $- \otimes_{A^{coH}} A$ erhalten wir bis auf Isomorphie eine exakte Folge in $\mathcal{M}_A^H$

$$(3) \quad A^{(\Gamma)} \to A^{(\Lambda)} \to V \otimes_{A^{coH}} A \to 0,$$

die in $\mathcal{M}^H$ zerfällt, da jeder Bimodul als H-Komodul injektiv ist. Also bleibt (3) exakt, wenn wir mit $-\Box_H K$ kotensorieren. Wir erhalten eine exakte Folge

$$(4) \quad (A^{(\Gamma)})\Box_H K \to (A^{(\Lambda)})\Box_H K \to (V \otimes_{A^{coH}} A)\Box_H K \to 0$$

in $\mathcal{M}_B^K$, die mit der Folge (2) durch das folgende kommutative Diagramm verbunden ist, da $-\Box_H K$ mit direkten Summen vertauscht:

$$\begin{tikzcd}
B^{(\Gamma)} \arrow[r] \arrow[d, equal] & B^{(\Lambda)} \arrow[r] \arrow[d, equal] & V \otimes_{B^{coK}} B \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
(A \Box_H K)^{(\Gamma)} \arrow[r] & (A \Box_H K)^{(\Lambda)} \arrow[r] & (V \otimes_{A^{coH}} A)\Box_H K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dann ist α ein Isomorphismus und es gilt für alle $V \in \mathcal{M}_{A^{coH}}$ der Isomorphismus in $\mathcal{M}_B^K$:

$$V \otimes_{B^{coK}} (A \Box_H K) \simeq (V \otimes_{A^{coH}} A)\Box_H K.$$

$\boxed{qed}$

Wir benötigen noch das folgende technische Lemma. Es zitiert bekannte Ergebnisse aus der Theorie. Dabei bezeichnet für eine R-Koalgebra C das *Koradikal* C_0 *von* C die Summe der einfachen Unterkoalgebren von C (vgl. [49, 5.1.5]).

1.6.12 Lemma. *Sei R ein Körper, H eine R-Hopfalgebra und H_0 das Koradikal von H. Weiter sei $U \in \mathcal{M}^H$ mit Strukturabbildung $\rho_H : U \to U \otimes H$.*

(1) Es gilt $Soc({}_{H^*}H) = H_0$.

(2) Für jede Unterkoalgebra $C \subset H$ gilt $U \square_H C = \rho_U^{-1}(U \otimes C)$.

(3) Es gilt $U \square_H H_0 = Soc({}_{H^*}U)$.

Beweis. (1) steht in [73] oder in [49, 5.1.8].

(2) findet sich in [53, Bemerkung nach Corollary 4.1].

(3) ist in [58, Bemerkung nach Proposition 1.1]. $\boxed{qed}$

Die folgende Beobachtung hat uns den modultheoretischen Zugang zu dem nachfolgenden Theorem ermöglicht.

1.6.13 Lemma. *Sei R ein Körper und H eine R-Hopfalgebra. $K \subset H$ sei eine Unterhopfalgebra, die das Koradikal H_0 von H enthält. Dann gilt für einen Modul $U \in \mathcal{M}^H$:*

$$U \square_H K = 0 \quad \textit{impliziert} \quad U = 0.$$

Beweis. Sei $H_0 \to K$ die Einbettung vom Koradikal H_0 in K in $\mathcal{M}_R$. Wenn wir mit dem rechts H-Komodul U kotensorieren, so erhalten wir die exakte Folge $0 \to U \square_H H_0 \to U \square_H K$ in $\mathcal{M}_R$, da der Kotensorfunktor in diesem Fall links exakt ist (R ist ein Körper). Nach Lemma 1.6.12 ist $U \square_H H_0$ aber gerade der Sockel von U als H-Komodul, und als solcher ungleich Null, falls U nicht der Nullmodul ist, da die Kategorie $\mathcal{M}^H$ lokal artinsch ist (R ist als Körper vorausgesetzt). Also kann $U \square_H K = 0$ nur gelten, wenn $U = 0$ gilt. $\boxed{qed}$

Wir haben nun alle notwendigen Mittel zusammengetragen, um die Hauptergebnisse (Theorem 1.3 und Theorem 1.4) aus [20] neu zu verstehen und zu verallgemeinern. Vor allem ist dabei interessant, daß wir hier völlig andere Beweis-Methoden benutzen. Während Cohen, Raianu und Westreich einen Induktionsbeweis über die Koradikal-Filtrierung führen, beschränken wir uns auf rein funktorielle Überlegungen. Der erste Teil des Resultates verallgemeinert außerdem das Theorem 4.2 aus [53] auf nicht endlich-dimensionale Hopfalgebren. Es gilt das folgende

1.6.14 Theorem.
Sei R ein Körper, H eine R-Hopfalgebra, K eine Unterhopfalgebra in H mit bijektiver Antipode S_K und A eine H-Komodulalgebra. Wir nehmen an, daß ein totales Integral $t : H \to A$ existiert und setzen $B := A_K$.
Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} F_1 &:= -\Box_H R, & G_1 &:= - \otimes_{A^{coH}} A, \\ F_2 &:= -\Box_H K, & G_2 &:= - \otimes_B A, \\ F_3 &:= -\Box_K R, & G_3 &:= - \otimes_{B^{coK}} B, \end{aligned}$$

betrachten wir noch einmal das folgende Diagramm adjungierter Funktoren aus 1.6.4:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_A^H \arrow[rr, shift left, "-\Box_H R"] \arrow[dr, shift left, "-\Box_H K"] & & \mathcal{M}_{A^{coH}} \arrow[ll, shift left, "-\otimes_{A^{coH}} A"] \arrow[dl, shift left, "-\otimes_{B^{coK}} B"] \\ & \mathcal{M}_B^K \arrow[ul, shift left, "-\otimes_B A"] \arrow[ur, shift left, "-\Box_K R"] & \end{tikzcd}$$

Dann gilt:

(1) Beschreibt das Paar (F_1, G_1) eine Äquivalenz von Kategorien, dann auch die Paare (F_2, G_2) und (F_3, G_3).

(2) Gilt $H_0 \subset K$ und ist (F_3, G_3) eine Äquivalenz, so ist auch (F_1, G_1) (und damit auch (F_2, G_2)) eine Äquivalenz.

Beweis. (1) Sei $-\Box_H R : \mathcal{M}_A^H \longrightarrow \mathcal{M}_{A^{coH}}$ eine Äquivalenz von Kategorien. Um die Äquivalenz $-\Box_K R : \mathcal{M}_B^K \longrightarrow \mathcal{M}_{B^{coK}}$ zu erhalten, reicht es wegen 1.3.3 zu zeigen, daß B ein Generator in der Kategorie $\mathcal{M}_B^K$ der (B-K)-Bimoduln ist, da nach 1.6.7 ein totales Integral $t_K : K \to B$ existiert, welches B projektiv in $\mathcal{M}_B^K$ macht. Hier benutzen wir die Kennzeichnung der Projektivität von B in $\mathcal{M}_B^K$ aus 1.4.7.
Sei also $U \in \mathcal{M}_B^K$. Dann ist $U \otimes_B A \in \mathcal{M}_A^H$ und dieser Modul ist A-erzeugt, da A nach Voraussetzung ein projektiver Generator in $\mathcal{M}_A^H$ ist. Betrachten wir eine kurze exakte Folge in $\mathcal{M}_A^H$ der Gestalt $A^{(\Lambda)} \to U \otimes_{A_K} A \to 0$. Dann

zerfällt diese Folge in $\mathcal{M}^H$ - jeder Bimodul ist injektiv als H-Komodul nach 1.4.6 - und wir erhalten eine kurze exakte Folge $B^{(\Lambda)} \to (U \otimes_B A)\Box_H K \to 0$ in $\mathcal{M}_B^K$, wenn wir mit $-\Box_H K$ kotensorieren. Mit dem Isomorphismus $(U \otimes_B A)\Box_H K \simeq U$ in $\mathcal{M}_B^K$ aus 1.6.10 folgt, daß das Paar (F_2, G_2) eine Äquivalenz beschreibt. Mit 1.6.11 folgt, daß auch das Paar (F_3, G_3) eine Äquivalenz beschreibt, da für $U \in \mathcal{M}_{A^{coH}}$ gilt: $F_2(G_1(U)) \simeq G_3(U)$.

(2) Nach Voraussetzung ist B ein projektiver Generator in $\mathcal{M}_B^K$ und es reicht zu zeigen, daß A ein Generator in $\mathcal{M}_A^H$ ist, da ein totales Integral $t : H \to A$ existiert, welches A projektiv in $\mathcal{M}_A^H$ macht.
Betrachten wir den durch die Adjunktion aus 1.6.4 gegebenen Isomorphismus zwischen den Bifunktoren

$$\mathrm{Hom}_A^H((- \otimes_B A), -) \simeq \mathrm{Hom}_B^K(-, (-\Box_H K)).$$

Sei $E \in \mathcal{M}_A^H$ ein einfacher Modul und $\mathrm{Hom}_A^H(A, E) = 0$. Da A in $\mathcal{M}_A^H$ projektiv ist, reicht es zu zeigen, daß $E = 0$ sein muß (vgl. [71, 18.5]). Benutzen wir die Isomorphie der Bifunktoren, so gilt

$$\mathrm{Hom}_A^H((B \otimes_B A), E) \simeq \mathrm{Hom}_B^K(B, (E\Box_H K)) = 0.$$

Da B ein (endlich erzeugter) projektiver Generator in $\mathcal{M}_B^K$ ist, beschreibt der Funktor $\mathrm{Hom}_B^K(B, -)$ eine Äquivalenz. Also folgt aus $\mathrm{Hom}_B^K(B, (E\Box_H K)) = 0$ schon, daß $E\Box_H K = 0$ gilt. Nach Voraussetzung gilt $H_0 \subset K$. Dann ist der Funktor $-\Box_H K$ nach 1.6.13 treu und es muß schon $E = 0$ gelten. Damit ist A Generator in $\mathcal{M}_A^H$. $\boxed{qed}$

Als Korollar erhalten wir die Ergebnisse (Theorem 1.3 und 1.4) aus [20]:

1.6.15 Korollar. *Sei R ein Körper, H eine R-Hopfalgebra und A eine H-Komodulalgebra, so daß ein totales Integral $t : H \to A$ existiert. G bezeichne die Menge der gruppenähnlichen Elemente in H und $A_G := A_{R[G]}$:*

(1) Ist $A^{coH} \subset A$ eine H-Galoiserweiterung, so ist auch $A^{coH} = A_G^{coR[G]} \subset A_G$ eine $R[G]$-Galoiserweiterung, d.h. A_G ist stark G-graduiert.

(2) Ist H punktiert, so ist $A^{coH} \subset A$ genau dann eine H-Galoiserweiterung, falls A_G stark G-graduiert ist.

Beweis. (1) ist Teil (1) aus Theorem 1.6.14, angewandt auf die Unterhopfalgebra $R[G] \subset H$.
(2) Ist H eine punktierte Hopfalgebra, so ist das Koradikal $H_0 = R[G]$ von H eine Unterhopfalgebra mit bijektiver Antipode. Also können wir Teil (2) von Theorem 1.6.14 anwenden. $\boxed{qed}$

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch bemerken, daß sich bei den in diesem Zusammenhang angestellten Untersuchungen herausgestellt hat, daß das Hauptergebnis Theorem 2.8 aus [12] fehlerhaft ist. Dort wird die Äquivalenz zwischen zwei beliebigen Doi-Koppinen-Kategorien charakterisiert, deren Hopfalgebren, Koalgebren und Algebren durch geeignete Morphismen verbunden sind. Der Fehler liegt darin, daß die Autoren die Exaktheit der involvierten Funktoren auf einer Bimodul-Kategorie mit der Exaktheit der Funktoren auf einer vollen (Ko-)Modulkategorie vermischen.

1.6.16 Gegenbeispiel zu [12, Theorem 2.8]. *Sei H eine nicht kohalbeinfache Hopfalgebra über dem Körper k, so gibt die natürliche Äquivalenz*

$$-\Box_H k : \mathcal{M}_H^H \longrightarrow \mathcal{M}_k^k,$$

die das Fundamentale Theorem für Hopf Moduln beschreibt, ein Gegenbeispiel zu Theorem 2.8 in [12].

Beweis. Setzt man (in der in [12] verwendeten Notation) $A = B = D := k$ und $A' = B' = D' := H$, so impliziert die Äquivalenz $-\Box_H k : \mathcal{M}_H^H \to \mathcal{M}_k^k$ nach Theorem 2.8, daß der Funktor $-\Box_H k$ exakt wird. Damit ist k jedoch als H-Komodul koflach (oder injektiv), was bedeutet, daß H eine kohalbeinfache Hopfalgebra ist - im Widerspruch zur Wahl von H. $\boxed{qed}$

Eine richtige Darstellung des Sachverhalts in der etwas allgemeineren Variante der "entwining structures" findet sich bei T. Brzeziński in Theorem 3.10 in [8]. Dort werden Äquivalenzen von Modul-Kategorien für "entwined structures" über die (Treu-) Exaktheit der beteiligten Funktoren, verbunden mit einer verallgemeinerten Galois-Bedingung, charakterisiert.

Kapitel 2

Der duale Fall - (H-C)-Bimoduln

In diesem Kapitel diskutieren wir den Fall einer H-Wirkung einer Hopfalgebra H auf einer Koalgebra C. Die Theorie kann dual zu der Theorie im vorangegangenen Kapitel entwickelt werden. Unser Hauptaugenmerk liegt auf der Tatsache, daß auch im dualen Fall modultheoretische Überlegungen helfen, die Theorie besser zu verstehen und an vielen Stellen zu verallgemeinern. Eine solche Sichtweise ist in der Literatur noch nicht systematisch verfolgt worden. Für die Einführung bedienen wir uns wieder verschiedener Artikel, unter anderem [58], [48] und [23].

Da ein wesentlicher Aspekt die Treu-Exaktheit des Funktors $\mathrm{Hom}(-, R)$ ist, erhalten wir die wesentlichen Ergebnisse in diesem Kapitel in dem Fall, daß der Grundring ein QF-Ring ist.

2.1 Grundlagen

Sei H wie bisher eine Hopfalgebra über dem Ring R und C eine Rechts-H-Modul-Koalgebra über R. Wir bezeichnen die Komultiplikation von C mit Δ (oder mit Δ_C, falls nicht klar ist, welche Komultiplikation gemeint ist) und die Koeinheit mit ε (resp. mit ε_C). Die H-Modulstruktur von C wird mit $\mu_C : C \otimes H \to C$ bezeichnet. Kennzeichnend für eine H-Modul-Koalgebra ist, daß die Abbildung μ_C ein Morphismus von Koalgebren ist.

Auch in dieser Situation gibt es eine Kategorie, die eng mit dem Objekt C verbunden ist - die Kategorie der H-C-Bimoduln. Dazu die folgende Definition:

2.1.1 Definition. *Sei H eine R-Hopfalgebra und C eine Rechts-H-Modulkoalgebra über R.*

(1) *Ein R-Modul M heißt* rechts (H-C)-Bimodul, *wenn $\mu_M : M \otimes_R H \to M$ ein Rechts-H-Modul, $\varrho_M : M \to M \otimes_R C$ ein Rechts-C-Komodul, und zudem ϱ_M H-linear ist, d.h.*

$$\varrho_M(mh) = \varrho_M(m) \cdot h \ (= \varrho_M(m)\Delta_H(h)) \text{ für } m \in M,\ h \in H.$$

Äquivalent dazu ist, daß μ_M rechts C-kolinear ist, wobei $M \otimes_R^c H$ mit der diagonalen Komodul-Struktur versehen ist.

(2) *Mit $\mathcal{M}_H^C$ bezeichnen wir die Kategorie, deren Objekte die (H-C)-Bimoduln sind und deren Morphismen zwischen (H-C)-Bimoduln M und N die linearen Abbildungen sind, die sowohl H-linear, als auch C-kolinear sind. Die Menge der Morphismen zwischen M und N bezeichnen wir mit* $\mathrm{Hom}_H^C(M, N)$.

Bemerkungen:

(1) Man überlegt sich leicht, daß auch $\mathcal{M}_H^C$ eine additive Kategorie mit Kokernen ist und abgeschlossen ist unter (unendlichen) direkten Summen. Falls C über R flach ist, so besitzt $\mathcal{M}_H^C$ auch Kerne.

(2) Wir können auch die Kategorie ${}^C\mathcal{M}_H$ der (rechts-links)-(H-C)-Bimoduln betrachten (vgl. [58, section 4]). Ist die Antipode S_H der Hopfalgebra H bijektiv mit inverser Abbildung $\overline{S}_H$, so ist die duale Koalgebra H^{cop} eine Hopfalgebra mit Antipode $\overline{S}_H$ und es gilt ${}^C\mathcal{M}_H = \mathcal{M}_{H^{cop}}^{C^{cop}}$.

Natürlich können wir einen (H-C)-Bimodul als H-Rechtsmodul oder als C-Rechtskomodul betrachten, d.h. wir können jeweils eine Struktur vergessen. Umgekehrt kann man jedem C-Rechtsmodul und jedem H-Rechts-Komodul in natürlicher Weise einen induzierten (H-C)-Bimodul zuordnen. Dazu - dual zu 1.1.2 - die nächsten Definitionen und Sätze.

2.1.2 Definition. *Sei C eine Rechts-H-Modulkoalgebra. Wir bezeichnen den Funktor, der bei einem (H-C)-Bimodul die C-Komodulstruktur vergißt, mit $\mathcal{U}^C : \mathcal{M}_H^C \to \mathcal{M}_H$. Den Funktor, der die H-Struktur vergißt, bezeichnen wir mit $\mathcal{U}_H : \mathcal{M}_H^C \to \mathcal{M}^C$.*

2.1.3 Satz.

(1) Für jeden Rechts-H-Modul N ist $N \otimes_R C$ ein $(H$-$C)$-Bimodul mit den Strukturabbildungen

$$\begin{aligned} \varrho_{N\otimes_R C} &: N \otimes_R C \to (N \otimes_R C) \otimes_R C, \quad n \otimes c \mapsto n \otimes \Delta c\,, \\ \mu_{N\otimes_R C} &: (N \otimes_R C) \otimes_R H \to N \otimes_R C, \quad n \otimes c \otimes h \mapsto (n \otimes c)\Delta_H(h)\,. \end{aligned}$$

Für jeden $(H$-$C)$-Bimodul M ist die Strukturabbildung $\mu_M : M \otimes_R H \to M$ ein $(H$-$C)$-Bimodulmorphisms.

(2) Ist $\alpha : N_1 \to N_2$ ein (Epi-)Morphismus in $\mathcal{M}_H$, dann ist die induzierte Abbildung

$$\alpha \otimes id_C : N_1 \otimes_R C \to N_2 \otimes_R C$$

ein (Epi-)Morphismus von $(H$-$C)$-Bimoduln.

(3) Für jeden Rechts-C-Komodul L wird $L \otimes^c_R H$ zu einem $(H$-$C)$-Bimodul mit den Strukturabbildungen

$$\begin{aligned} \mu_{L\otimes^c_R H} &: (L \otimes^c_R H) \otimes_R H \to L \otimes^c_R H, \quad l \otimes h \otimes k \mapsto l \otimes hk\,, \\ \varrho_{L\otimes^c_R H} &: L \otimes^c_R H \to (L \otimes^c_R H) \otimes_R C, \quad l \otimes h \mapsto \sum l_{(0)} \otimes h_{(0)} \otimes l_{(1)} h_{(1)}. \end{aligned}$$

Für jeden $(H$-$C)$-Bimodul M ist die Strukturabbildung $\varrho_M : M \to M \otimes C$ ein $(H$-$C)$-Bimodulmorphisms.

(4) Ist $\beta : L_1 \to L_2$ ein (Epi-)Morphismus von C-Komoduln, so ist

$$\beta \otimes id_H : L_1 \otimes^c_R H \to L_2 \otimes^c_R H$$

ein (Epi-)Morphismus von $(H$-$C)$-Bimoduln.

Beweis. Das ist - dual zu 1.1.2 - leicht zu verifizieren. $\boxed{qed}$

2.1.4 Satz. *Sei C eine Rechts-H-Modulkoalgebra.*

(1) Der Funktor $\mathcal{U}^C : \mathcal{M}^C_H \to \mathcal{M}_H$ ist links adjungiert zum Funktor $-\otimes_R C : \mathcal{M}_H \to \mathcal{M}^C_H$. Das bedeutet, daß für $M \in \mathcal{M}^C_H$ und $N \in \mathcal{M}_H$ die Abbildung

$$\mathrm{Hom}^C_H(M, N \otimes_R C) \to \mathrm{Hom}_H(M, N), \; f \mapsto (id \otimes \varepsilon) \circ f,$$

ein (in M und N funktorieller) R-Isomorphismus mit inverser Abbildung $h \mapsto (h \otimes id) \circ \varrho$ ist.

(2) Der Funktor $\mathcal{U}_H : \mathcal{M}_H^C \to \mathcal{M}^C$ ist rechts adjungiert zum Funktor $-\otimes_R^c H : \mathcal{M}^C \to \mathcal{M}_H^C$. Das bedeutet, daß für $N \in \mathcal{M}^C$ und $M \in \mathcal{M}_H^C$ die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_H^C(N \otimes_R^c H, M) \to \mathrm{Hom}^C(N, M), \; g \mapsto [n \mapsto g(n \otimes 1_H)],$$

ein (in M und N funktorieller) R-Isomomorphismus mit inverser Abbildung $f \mapsto \mu_M \circ (f \otimes id_H)$ ist.

Beweis. Vgl. [48, 2.15]. $\boxed{qed}$

2.1.5 Bemerkungen:

(1) Es ist interessant zu bemerken, daß Eigenschaften, die über die Hom-Funktoren gekennzeichnet werden können, wie Projektivitäts-/Injektivitäts- oder Ko-/Generatoreigenschaften, durch diese Adjunktionen miteinander verknüpft werden.

- Ist beispielsweise P ein projektives Objekt (resp. ein Generator) in $\mathcal{M}^C$, dann ist $P \otimes_R^c H$ ein projektives Objekt (resp. ein Generator) in $\mathcal{M}_H^C$.
- Ist dual dazu Q ein injektives Objekt (resp. ein Kogenerator) in $\mathcal{M}_H$, so ist $Q \otimes C$ ein injektives Objekt (resp. ein Kogenerator) in $\mathcal{M}_H^C$.

(2) Analog zu 1.1.7 kann man ein Smash-Produkt $H^{op} \otimes_R C^*$ definieren, dessen Multiplikation durch:

$$(k \otimes c)(h \otimes d) = \sum h_{(0)} k \otimes (h_{(1)} \rightharpoondown c) * d,$$

für $k, h \in H$, $c, d \in C^*$ gegeben ist (man vgl. [47, Definition 3.3]). Durch Nachrechnen sieht man, daß jeder (H-C)-Bimodul ein Modul über dieser Algebra wird.

(3) Wie in 1.1.10 kann man zeigen, daß die Kategorie der (H-C)-Bimoduln eine Kategorie vom Typ $\sigma[M]$ ist. Genauer sind die (H-C)-Bimoduln genau die von $H \otimes C$ oder von $C \otimes^c H$ suberzeugten Bimoduln.

(4) Es gilt die duale Aussage zu 1.1.4. Ist die Antipode S von H bijektiv, so existiert ein Isomorphismus in $\mathcal{M}_H^C$:

$$C \otimes^c H \to H \otimes C, \quad c \otimes h \mapsto \sum h_{(1)} \otimes ch_{(2)},$$

mit inverser Abbildung $h \otimes c \mapsto \sum c\overline{S}(h_{(2)} \otimes h_{(1)}$.

Dual zu der Definition der koinvarianten Elemente bei einer H-Komodulalgebra definieren wir in dieser Situation eine ausgezeichnete Faktor-Koalgebra $\overline{C}$ von C und zeigen, daß eine natürliche adjungierte Situation zwischen der Kategorie der (H-C)-Bimoduln und der Kategorie der Komoduln über dieser Koalgebra $\overline{C}$ vorliegt.

2.1.6 Definition. *Für einen Modul $M \in \mathcal{M}_H^C$ definieren wir den Modul der* Koinvarianten von M *durch*

$$\overline{M} = M \otimes_H R.$$

Die Koinvarianten $\overline{C} = C \otimes_H R$ von C tragen zudem die Struktur einer Koalgebra und wir erhalten einen Koalgebraepimorphismus

$$p : C \to \overline{C}, \quad c \to c \otimes_H 1_R.$$

Beweis. [58, section 4] $\boxed{qed}$

2.1.7 Satz. *Sei C eine Rechts-H-Modulkoalgebra, die flach über R ist. Dann bilden die Funktoren*

$$- \otimes_H R : \mathcal{M}_H^C \to \mathcal{M}^{\overline{C}} \quad \textit{und} \quad - \Box_{\overline{C}} C : \mathcal{M}^{\overline{C}} \to \mathcal{M}_H^C$$

ein adjungiertes Funktor-Paar. Das bedeutet, daß für $U \in \mathcal{M}_H^C$ und für $V \in \mathcal{M}^{\overline{C}}$ die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_H^C(U, V\Box_{\overline{C}}C) \to \mathrm{Hom}^{\overline{C}}(U \otimes_H R, V), \quad f \mapsto [u \otimes_H r \mapsto (id_U \otimes \varepsilon_C) f(u) r]$$

ein (in U und V funktorieller) R-Isomorphismus ist mit inverser Abbildung $g \mapsto [u \mapsto g(u \otimes_H 1_R)]$.
Die Koeinheit und die Einheit der Adjunktion sind also durch die natürlichen Abbildungen

$$\phi_X : X \longrightarrow (X \otimes_H R)\Box_{\overline{C}}C, \quad x \mapsto \sum (x_{(0)} \otimes_H 1_R) \otimes x_{(1)}$$

für $X \in \mathcal{M}_H^C$ und durch

$$\psi_Y : (Y\Box_{\overline{C}}C) \otimes_H R \longrightarrow Y, \quad (\sum y_i \otimes c_i) \otimes_H r \mapsto \sum y_i \varepsilon(c_i) r$$

für $Y \in \mathcal{M}^{\overline{C}}$ gegeben.

Beweis. Das steht in [58, section 4]. $\boxed{qed}$

Bemerkung: In der gleichen Weise sieht man, daß der Funktor $C\Box_{\overline{C}}- : {}^{\overline{C}}\mathcal{M} \longrightarrow {}^{C}\mathcal{M}_H$ rechts adjungiert zum Funktor $- \otimes_H R : {}^{C}\mathcal{M}_H \longrightarrow {}^{\overline{C}}\mathcal{M}$ ist (vgl. [58, section 4]).

2.2 Schneiders Theorem II

In diesem Abschnitt werden wir die Kennzeichnung der Äquivalenz in Theorem II aus [58] mit ähnlichen Methoden beschreiben, wie wir dies in Kapitel 1 mit der Äquivalenz von Theorem I desselben Artikels gemacht haben. Da in der dualen Situation jedoch in natürlicher Weise Dualitäten dort auftreten, wo in Kapitel 1 Äquivalenzen ins Spiel kamen, müssen wir einen kleinen Umweg in Kauf nehmen.
Die wesentliche Idee, die den modultheoretischen Zugang zu diesem Teil der Theorie erschließt, ist in den nächsten Sätzen zusammengefaßt. Dabei ist zu beachten, daß R an einigen Stellen als QF-Ring vorausgesetzt ist. Mit $(-)^*$ bezeichnen wir den Funktor $\mathrm{Hom}_R(-,R)$.

2.2.1 Satz. *Sei C eine Rechts-H-Modulkoalgebra. Dann gilt:*

(1) Es gibt für $U \in \mathcal{M}_H^C$ einen natürlichen R-Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_H^C(U,C) \simeq (U \otimes_H R)^*, \quad f \mapsto [u \otimes_H r \mapsto \varepsilon_C(f(u))r].$$

(2) Speziell für den Endomorphismenring von $C \in \mathcal{M}_H^C$ ist dieser Isomorphismus ein Algebrenisomorphismus:

$$(\mathrm{Hom}_H^C(C,C), \circ)^{op} \simeq ((C \otimes_H R)^*, *) = (\overline{C}^*, *).$$

(3) Der Isomorphismus aus (1) *ist auch ein Isomorphismus von Rechts-$\overline{C}^*$-Moduln.*

Beweis. (1) Wir benutzen die funktorielle Identität

$$\mathrm{Hom}_H^C(-,C) \simeq \mathrm{Hom}_H(-,R)$$

aus 2.1.4. Für einen Modul $U \in \mathcal{M}_H$ können wir den Modul $\mathrm{Hom}_H(U,R)$ als Kern von α in der R-exakten Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_H(U,R) \to \mathrm{Hom}_R(U,R) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}_R(U \otimes H, R)$$

identifizieren, wobei $\alpha(f) := [f \circ \mu_U] - [(id \otimes \varepsilon_H) \circ (f \otimes id)]$ gilt. Diese Folge ist in das nachstehende kommutative Diagramm eingebunden, wobei $\gamma_U : \mathrm{Hom}_H(U,R) \to (U \otimes_H R)^*$ durch $f \mapsto [u \otimes_H r \mapsto f(u)r]$ gegeben ist. Die zweite Zeile ist die Anwendung des $\mathrm{Hom}_R(-,R)$-Funktors auf die definierende Zeile für das Tensorprodukt als Kokern.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \mathrm{Hom}_H(U,R) & \to & \mathrm{Hom}_R(U,R) & \stackrel{\alpha}{\to} & \mathrm{Hom}_R(U\otimes H,R) \\ & & \downarrow\gamma_U & & \downarrow = & & \downarrow = \\ 0 & \to & (U\otimes_H R)^* & \to & U^* & \stackrel{\alpha}{\to} & (U\otimes H)^* \end{array}$$

Damit ist γ_U ein Isomorphismus.

(2) Seien $\zeta, \phi \in \mathrm{Hom}_H^C(C,C)$. Mit $\phi \cdot \zeta$ bezeichnen wir das Produkt in $(\mathrm{Hom}_H^C(C,C), \circ)^{op}$, also gilt $(\phi\cdot\zeta)(c) := \zeta(\phi(c))$ für $c \in C$. Für $f, g \in \overline{C}^*$ ist das Produkt gegeben durch die Konvolution

$$f * g(c\otimes_H r) := \sum f(c_{(1)}\otimes_H r)g(c_{(2)}\otimes_H 1_R).$$

Mit dem von γ_C aus (1) induzierten Isomorphismus

$$\gamma' : \mathrm{Hom}_H^C(C,C) \to \overline{C}^*, \quad \zeta \mapsto [c\otimes_H r \mapsto \varepsilon(\zeta(c))r]$$

rechnen wir nach:

$$\begin{array}{rcl} \gamma'(\zeta) * \gamma'(\phi)(c\otimes_H r) & = & \sum \gamma'(\zeta)(c_{(1)}\otimes_H r)\gamma'(\phi)(c_{(2)}\otimes_H 1_R) \\ & = & \sum \varepsilon(\zeta(c_{(1)}))r\varepsilon(\phi(c_{(2)})) \\ \zeta \text{ ist } C\text{-kolinear} & = & \sum \varepsilon(\zeta(c)_{(1)})\varepsilon(\phi(\zeta(c)_{(2)}))r \\ & = & \sum \varepsilon(\phi(\varepsilon(\zeta(c)_{(1)})\zeta(c)_{(2)}))r \\ & = & \varepsilon(\phi(\zeta(c)))r \\ & = & \gamma'(\zeta\cdot\phi)(c\otimes_H r). \end{array}$$

(3) Der Modul $\mathrm{Hom}_H(U,R)$ ist ein Rechts-$\overline{C}^*$-Modul via

$$\mathrm{Hom}_H(U,R)\otimes \overline{C}^* \to \mathrm{Hom}_H(U,R),\ f\otimes\zeta \mapsto \varepsilon_C\circ\zeta\circ\theta\circ(f\otimes id_C)\circ\rho_U,$$

wobei θ den kanonischen Isomorphismus $R\otimes_R C \simeq C$ bezeichnet.
Der Modul $(U\otimes_H R)^*$ ist ein Rechts-$\overline{C}^*$-Modul via

$$(U\otimes_H R)^*\otimes\overline{C}^* \to (U\otimes_H R)^*,\ g\otimes\zeta\mapsto g\circ\theta\circ(id\otimes\zeta)\circ\rho_{U\otimes_H R},$$

wobei θ hier den kanonischen Isomorphismus $(U\otimes_H R)\otimes_R R \simeq U\otimes_H R$ bezeichnet. Also gilt mit γ aus (1):

$$\begin{array}{rcl} \gamma(f\cdot\zeta)(u\otimes_H r) & = & \varepsilon((f\cdot\zeta)(u))r \\ & = & \sum\varepsilon(\zeta(f(u_{(0)})u_{(1)}))r \\ & = & \sum\varepsilon(f(u_{(0)}))r\varepsilon(\zeta(u_{(1)})) \\ & = & (\gamma(f)\cdot\zeta)(u\otimes_H r), \end{array}$$

und γ ist $\overline{C}^*$-linear. $\boxed{qed}$

Der nächste Satz veranschaulicht den Sachverhalt noch einmal in einem Diagramm.

2.2.2 Satz. *Sei C eine Rechts-H-Modulkoalgebra. Dann faktorisiert der kontravariante Funktor* $\mathrm{Hom}_H^C(-, C)$ *über die Funktoren* $- \otimes_H R$ *und* $(-)^*$ *wie folgt:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_H^C \arrow[rr, "Hom_H^C(-{,}C)"] \arrow[dr, "-\otimes_H R"'] & & \mathcal{M}_{\overline{C}^*} \\
& \mathcal{M}^{\overline{C}} \arrow[ur, "(-)^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Nach 2.2.1 gilt $\mathrm{Hom}_H^C(U, C) \simeq (U \otimes_H R)^*$ für $U \in \mathcal{M}_H^C$. Diese Isomorphie gilt nach 2.2.1,(3) in $\mathcal{M}_{\overline{C}^*}$ und ist natürlich. $\boxed{qed}$

Da der Funktor $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ bei einem QF-Ring R eine Dualität auf den endlich erzeugten R-Moduln bewirkt, legt der Satz 2.2.2 für einen Grund-QF-Ring R nahe, daß die funktoriellen Eigenschaften - wie Exaktheit oder Treuheit - der Funktoren $\mathrm{Hom}_H^C(-, C)$ und $-\otimes_H R$ eng miteinander verknüpft sind. Dies ist in der Tat richtig (vgl. 2.2.15), und ein wesentlicher Aspekt dabei ist die Tatsache, daß die Eigenschaften wie Exaktheit oder Treuheit der Funktoren $\mathrm{Hom}_H^C(-, C)$ und $- \otimes_H R$ schon auf der Menge der endlich erzeugten Objekte in $\mathcal{M}_H^C$, bzw. $\mathcal{M}^{\overline{C}}$ bestimmt sind.

Um das einzusehen, benötigen wir zuvor die folgenden Endlichkeitsaussagen. Die erste ergibt sich als natürliche Verallgemeinerung aus dem Endlichkeitssatz für Komoduln über einer Koalgebra. Die zweite erklärt sich im Zusammenhang mit quasi-endlichen Koalgebren, wie sie bei der Charakterisierung von Äquivalenzen von Komodulkategorien auftreten (vgl. [66] und [2]).

Dabei ist ein *endlich erzeugter* (H-C)-Bimodul M ein Modul $M \in \mathcal{M}_H^C$, der als Modul über dem Smash-Produkt $H^{op} \# C^*$ endlich erzeugt ist.

2.2.3 Satz. *Sei C eine R-flache Rechts-H-Modulkoalgebra und der Grundring R noethersch. Dann gilt:*

(1) Jeder endlich erzeugte (H-C)-Bimodul ist endlich erzeugt als H-Modul.

(2) Ist der (H-C)-Bimodul U endlich erzeugt in $\mathcal{M}_H^C$, so ist die Menge der Homomorphismen $\mathrm{Hom}_H^C(U, C)$ *ein endlich erzeugter R-Modul.*

Beweis. (1) Es reicht natürlich, nur zyklische Moduln zu betrachten. Sei also $U = (H^{op}\#C^*) \cdot u \in \mathcal{M}_H^C$ ein zyklischer (H-C)-Bimodul. Es gilt aber $(H^{op}\#C^*) \cdot u = (C^* \cdot u) \cdot H$. Nach dem Endlichkeitssatz für Komoduln über noetherschen Ringen (vgl. [73]) ist $C^* \cdot u$ endlich erzeugt über R. Also ist U endlich erzeugt über H.

(2) Nach (1) ist U endlich erzeugt über H. Dann ist $U \otimes_H R$ endlich erzeugt über R. Da R noethersch ist, ist $(U \otimes_H R)^*$ endlich erzeugter R-Modul. Mit dem Isomorphismus aus 2.2.1 ist dann $\mathrm{Hom}_H^C(U, C) \simeq (U \otimes_H R)^*$ endlich R-erzeugt. $\boxed{qed}$

Im folgenden benutzen wir die nachstehende Definition eines starken Kogenerators in einer Kategorie vom Typ $\sigma[M]$.

2.2.4 Definition. *Sei M ein R-Modul. Ein Modul Q in $\sigma[M]$ heißt* starker Kogenerator in $\sigma[M]$, *wenn für jeden Modul N aus $\sigma[M]$ eine geeignete Indexmenge Λ existiert, so daß N R-linear in eine direkte Summe $Q^{(\Lambda)}$ eingebettet werden kann. N heißt dann* stark Q-koerzeugt.

Eine Koalgebra über einem Körper (oder einem artinschen Ring) ist ein starker Kogenerator in der Kategorie der Komoduln(vgl. [73]). Das nächste Lemma zeigt, daß für eine Koalgebra über einem artinschen Ring jeder Kogenerator in der Kategorie der Komoduln ein starker Kogenerator ist.

2.2.5 Lemma. *Sei C eine Koalgebra, projektiv über dem artinschen Ring R. Ist Q ein Kogenerator in der Kategorie $\mathcal{M}^C$ der Rechts-C-Komoduln, so ist Q ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}^C$.*

Beweis. Da C_R projektiv ist, können wir die Kategorien $\mathcal{M}^C$ und $\sigma[_{C^*}C]$ identifizieren. Ein Kogenerator Q in $\sigma[_{C^*}C]$ enthält bis auf Isomorphie einen minimalen Kogenerator, etwa $\bigoplus_\Lambda \hat{E}_\lambda$, wobei $\{E_\lambda\}_\Lambda$ ein minimales Repräsentantensystem der einfachen Moduln in $\sigma[_{C^*}C]$ darstellt. Da die Kategorie der C-Komoduln über einem artinschen Ring lokal noethersch ist, ist $\bigoplus_\Lambda \hat{E}_\lambda$ (bis auf Isomorphie) injektiv, und damit direkter Summand in Q. Ist N ein Objekt in $\mathcal{M}^C$, so ist die injektive Hülle $\hat{N}$ von N in $\mathcal{M}^C$ gerade die direkte Summe der injektiven Hüllen der einfachen Untermoduln von N, da $\mathcal{M}^C$ lokal artinsch ist. Hier benötigen wir erneut, daß R artinsch Ring. Man kann $\hat{N}$ also in eine direkte Summe von $\bigoplus_\Lambda \hat{E}_\lambda$ einbetten. Dann kann $N \subset \hat{N}$ jedoch in eine direkte Summe von Q eingebettet werden. $\boxed{qed}$

Bemerkung: Die Aussage des Lemmas gilt allgemeiner für jede abelsche Kategorie, die lokal von endlicher Länge ist.

Der nachfolgende Satz ist das duale Resultat zu 1.4.1. Er ist ähnlich zentral für die hier entwickelte Theorie. Wieder gehen wir den Umweg über die Kategorie der Hopfmoduln. Diesmal stellen wir zudem die QF-Forderung an den Grundring R, damit H über die Äquivalenz aus dem Fundamentalsatz ein starker injektiver Kogenerator in der Kategorie $\mathcal{M}_H^H$ der Hopfmoduln wird.

2.2.6 Satz. *Sei H eine R-Hopfalgebra mit bijektiver Antipode S_H, H_R flach und C eine Rechts-H-Modulkoalgebra, die über dem QF-Ring R projekiv ist. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $C \otimes_R H$ ist ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$;

(b) $C \otimes_R H$ koerzeugt C stark in $\mathcal{M}_H^C$;

(c) C ist stark H-koerzeugt als rechts H-Modul.

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$ ist trivial.

$(b) \Rightarrow (c)$ Da C als R-Modul projektiv ist, wird C von R stark in R-Mod koerzeugt. Damit ist aber $C \otimes_R H$ als rechts H-Modul stark H-koerzeugt und die Aussage ist mit (b) klar.

$(c) \Rightarrow (a)$ Wir bemerken zuerst, daß H in der Kategorie der H-H-Bimoduln ein starker Kogenerator ist. Hier benutzen wir das Fundamental-Theorem für Hopfmoduln und die Tatsache, daß R ein QF-Ring und damit insbesondere ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_R$ ist. Weiter ist zu bemerken, daß C als projektiver R-Modul über einem QF-Ring auch ein injektiver R-Modul ist.
Sei M ein Modul in $\mathcal{M}_H^C$. Der Modul $M \otimes_R^c H$ wird dann ein Objekt in $\mathcal{M}_H^H$ und ist als solches stark H-koerzeugt, sagen wir durch $\psi : M \otimes H \to H^{(\Gamma)}$. Ist $\phi : C \to H^{(\Lambda)}$ ein (R-zerfallender) Monomorphismus in $\mathcal{M}_H$, so erhalten wir durch Komposition den folgenden Monomorphismus in $\mathcal{M}_H$:

$$M \xrightarrow{\varrho_M} M \otimes_R C \xrightarrow{id \otimes \phi} M \otimes H^{(\Lambda)} \simeq (M \otimes H)^{(\Lambda)} \xrightarrow{(\psi)^{(\Lambda)}} (H^{(\Gamma)})^{(\Lambda)}.$$

Damit ist jeder (H-C)-Bimodul als H-Modul stark H-koerzeugt.
Ist nun $M \in \mathcal{M}_H^C$ beliebig und $\theta : M \to H^{(\Omega)}$ eine Einbettung in $\mathcal{M}_H$, dann ist $M \otimes C \xrightarrow{id \otimes \theta} H^{(\Omega)} \otimes C \simeq (H \otimes C)^{(\Omega)}$ eine Einbettung (C ist projektiv und damit flach) in $\mathcal{M}_H^C$. Setzen wir noch die Komodulstrukturabbildung $\varrho_M : M \to M \otimes C$ davor, folgt die Behauptung, da aufgrund der bijektiven Antipode $H \otimes_c C \simeq C \otimes^c H$ in $\mathcal{M}_H^C$ gilt. $\boxed{qed}$

Bemerkung: Der Beweis zeigt, daß ohne Bijektivität der Antipode unter den gegebenen Voraussetzungen immer noch gilt:

C ist stark H-koerzeugt in $\mathcal{M}_H \Rightarrow H \otimes C$ ist starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$.

Der nächste Satz zeigt, daß wir uns für eine kategorielle Äquivalenz zwischen $\mathcal{M}_H^C$ und $\mathcal{M}^{\overline{C}}$, die durch die Funktoren $- \otimes_H R$ und $-\Box_{\overline{C}} C$ beschrieben wird, auf die endlich erzeugten Objekte zurückziehen können. Doch zuerst eine Definition.

2.2.7 Definition. *Sei H eine über R projektive R-Hopfalgebra und C eine R-flache Rechts-H-Modulkoalgebra. Wir bezeichnen mit $\mathcal{E}_H^C$ die volle Unterkategorie der endlich erzeugten Objekte in $\mathcal{M}_H^C$ und mit $\mathcal{E}^{\overline{C}}$ die volle Unterkategorie der endlich erzeugten Objekte in $\mathcal{M}^{\overline{C}}$.*

2.2.8 Satz. *Sei H eine über R projektive R-Hopfalgebra und C eine Rechts-H-Modulkoalgebra, die über R projekiv ist. Ist für alle $U \in \mathcal{E}_H^C$ die natürliche Abbildung*

$$\phi_U : U \to (U \otimes_H R)\Box_{\overline{C}} C, \quad u \mapsto \sum (u_{(0)} \otimes_H 1_R) \otimes u_{(1)},$$

und für alle $V \in \mathcal{E}^{\overline{C}}$ die natürliche Abbildung

$$\psi_V : (V\Box_{\overline{C}} C) \otimes_H R \to V, (\sum v_i \otimes c_i) \otimes_H r \mapsto \sum v_i \varepsilon(c_i) r,$$

ein Isomorphismus, so beschreiben die Funktoren $- \otimes_H R$ und $-\Box_{\overline{C}} C$ eine Äquivalenz zwischen $\mathcal{M}_H^C$ und $\mathcal{M}^{\overline{C}}$.

Beweis. Die natürlichen Abbildungen der Adjunktion stehen in 2.1.7. Die Kernidee ist hier, daß die beiden Funktoren $- \otimes_H R$ und $-\Box_{\overline{C}} C$ mit direkten Limites vertauschen (vgl. [71, 24.11] und [2, II.1.3]). Schreiben wir einen Modul $U = \varinjlim U_\lambda$ aus $\mathcal{M}_H^C$ als direkten Limes seiner endlich erzeugten Untermoduln, so gilt

$$\begin{aligned} (U \otimes_H R)\Box_{\overline{C}} C &= ((\varinjlim U_\lambda) \otimes_H R))\Box_{\overline{C}} C \\ &\simeq (\varinjlim (U_\lambda \otimes_H R))\Box_{\overline{C}} C \\ &\simeq \varinjlim ((U_\lambda \otimes_H R)\Box_{\overline{C}} C) \\ &\simeq \varinjlim (U_\lambda) = U. \end{aligned}$$

Für einen Modul $V \in \mathcal{M}^{\overline{C}}$ geht der Beweis analog. $\boxed{qed}$

Die nächsten beiden Sätze erklären die Beziehung zwischen den modultheoretischen Begriffen, die hier zur Kennzeichnung der Äquivalenz benutzt werden sollen, und den Kennzeichnungen in Theorem II aus [58]. Der erste Satz erweitert Corollary 4.2 aus [58]. Sie sind dual zu den Sätzen 1.4.3 und 1.1.17 zu sehen. Bemerkenswert ist bei dem nächsten Satz die Tatsache, daß die Exaktheit des Funktors $-\otimes_H R : \mathcal{M}_H^C \to \mathcal{M}^{\overline{C}}$ "nur" äquivalent zur Flachheit von C als Rechts-H-Modul ist. Im Fall, daß der Funktor eine Äquivalenz beschreibt, wird C jedoch über H projektiv (wie wir in 2.2.15 sehen werden). Als wir die Theorie der (A-H)-Bimoduln entwickelt haben, war (zumindest über einem QF-Ring) die Exaktheit des Funktors $-\Box_H R : \mathcal{M}_A^H \to \mathcal{M}_{A^{coH}}$ schon äquivalent mit der Injektivität von A in $\mathcal{M}^H$.

2.2.9 Satz. *Sei H eine projektive R-Hopfalgebra mit bijektiver Antipode, R ein QF-Ring. C sei eine R-projektive H-Modulkoalgebra und $\overline{C}$ sei R-flach. Dann sind äquivalent:*

(a) C ist flach als Rechts-H-Modul;

(b) der Funktor $-\otimes_H R : \mathcal{M}_H^C \to \mathcal{M}^{\overline{C}}$ ist exakt;

(c) C ist ein injektives Objekt in $\mathcal{M}_H^C$.

Beweis. $(a) \Leftrightarrow (b)$ steht bei Schneider [58] in Corollary 4.2.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sei

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

exakt in $\mathcal{M}_H^C$. Dann ist die Folge

$$0 \longrightarrow U \otimes_H R \longrightarrow V \otimes_H R \longrightarrow W \otimes_H R \longrightarrow 0$$

exakt in $\mathcal{M}^{\overline{C}}$, da $-\otimes_H R$ nach (b) ein exakter Funktor ist. Wegen $\mathrm{Hom}_H^C(-, C) \simeq (-\otimes_H R)^*$ aus 2.2.1 und der Exaktheit von $(-)^*$ ist dann auch die Folge

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_H^C(W, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_H^C(V, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_H^C(U, C) \longrightarrow 0$$

exakt in R-Mod (oder in $\mathcal{M}_{\overline{C}^*}$.) Damit ist C injektiv in $\mathcal{M}_H^C$.

$(c) \Rightarrow (b)$ Ist umgekehrt C injektiv in $\mathcal{M}_H^C$ und die Folge

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

exakt in $\mathcal{M}_H^C$, dann ist auch die Folge

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_H^C(W, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_H^C(V, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_H^C(U, C) \longrightarrow 0$$

exakt in $\mathcal{M}_{\overline{C}^*}$. Aus der Isomorphie in 2.2.1 folgt, daß die Folge

$$0 \longrightarrow (U \otimes_H R)^* \longrightarrow (V \otimes_H R)^* \longrightarrow (W \otimes_H R)^* \longrightarrow 0$$

exakt ist in $\mathcal{M}_{\overline{C}^*}$ oder in R-Mod. Da R Kogenerator in R-Mod ist, entdeckt der Funktor $(-)^*$ exakte Folgen. Also ist auch die Folge

$$0 \longrightarrow U \otimes_H R \longrightarrow V \otimes_H R \longrightarrow W \otimes_H R \longrightarrow 0$$

exakt in R-Mod und der Funktor $- \otimes_H R$ ist exakt. $\boxed{qed}$

Der nächste Satz identifiziert die Injektivität der kanonischen Abbildung $\gamma : C \otimes H \to C\square_{\overline{C}}C$ (Bedingnung (b) in [58, Theorem 4.5]) als eine Kogenerator-Eigenschaft.

2.2.10 Satz. *Sei H eine über R projektive R-Hopfalgebra, R ein QF-Ring, und C eine H-Modulkoalgebra mit C_R projektiv. Dann sind äquivalent:*

(a) die Abbildung $\gamma : C \otimes H \to C\square_{\overline{C}}C, \quad c \otimes h \mapsto \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}h$, ist injektiv;

(b) C koerzeugt $C \otimes H$ stark in $\mathcal{M}_H^C$.

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$ Die Einbettung $C\square_{\overline{C}}C \to C \otimes_R C$ ist eine Abbildung in $\mathcal{M}_H^C$, wenn man $C \otimes_R C$ mit der rechts-trivialen C-Kostruktur und der rechts-trivialen H-Modulstruktur versieht. Dieser Modul ist stark C-koerzeugt in $\mathcal{M}_H^C$, da C in R-Mod direkter Summand in $R^{(\Lambda)}$ für eine geeignete Indexmenge Λ ist. Ist die kanonische Abbildung γ injektiv, so folgt (b).

$(b) \Rightarrow (a)$ Sei $C \otimes H$ stark C-koerzeugt in $\mathcal{M}_H^C$. Dann gilt für alle endlich erzeugten Untermoduln U von $C \otimes H$, daß die Auswertung

$$\Phi_U : U \to \mathrm{Hom}_{\overline{C}^*}(\mathrm{Hom}_H^C(U, C), C)$$

ein Monomorphismus ist (vgl. [71, 45.10]).
Für endlich erzeugtes U gilt nach 2.2.1 die Isomorphie $\mathrm{Hom}_H^C(U, C) \simeq (U \otimes_H R)^*$ in $\mathcal{M}_{\overline{C}^*}$ und für endlich R-erzeugtes $V \in \mathcal{M}^{\overline{C}}$ die Isomorphie $(V^*)^* \simeq V$ in $\mathcal{M}^{\overline{C}}$. Aus der Eindeutigkeit der Adjunktion folgt für endlich erzeugtes $V \in \mathcal{M}^{\overline{C}}$ dann auch $\mathrm{Hom}_{\overline{C}^*}(V^*, C) \simeq V\square_{\overline{C}}C$. Insgesamt gilt also bis auf Isomorphie, daß wir eine Einbettung

$$U \to (U \otimes_H R)\square_{\overline{C}}C$$

in $\mathcal{M}_H^C$ haben. Da die Funktoren $-\otimes_H R$ und $-\Box_{\overline{C}}C$ mit direkten Limites vertauschen und der direkte Limes von Monomorphismen wieder monomorph ist ([71, 24.4]), folgt insgesamt (bis auf natürliche Isomorphismen):

$$\begin{array}{rcl} C\otimes H = \varinjlim U_\lambda & \xrightarrow{\varinjlim(\Phi_{U_\lambda})} & \varinjlim((U_\lambda \otimes_H R)\Box_{\overline{C}}C) \\ & \simeq & (\varinjlim(U_\lambda \otimes_H R))\Box_{\overline{C}}C \\ & \simeq & ((\varinjlim U_\lambda)\otimes_H R))\Box_{\overline{C}}C \\ & \simeq & ((C\otimes H)\otimes_H R)\Box_{\overline{C}}C \\ & \simeq & C\Box_{\overline{C}}C. \end{array}$$

$\boxed{qed}$

Bemerkenswert ist auch die Tatsache, daß die kanonische Abbildung γ schon ein Isomorphismus ist, wenn C ein starker Kogenerator in der Kategorie $\mathcal{M}_H^C$ ist.

2.2.11 Satz. *Sei H eine projektive R-Hopfalgebra, R ein QF-Ring, und C eine H-Modulkoalgebra mit C_R projektiv. Ist C ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$, so ist die Abbildung*

$$\gamma : C\otimes H \to C\Box_{\overline{C}}C, \quad c\otimes h \mapsto \sum c_{(1)}\otimes c_{(2)}h,$$

ein Isomorphismus in $\mathcal{M}_H^C$.

Beweis. Ist C starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$, so sind die endlich erzeugten Moduln in $\mathcal{M}_H^C$ reflexiv nach [71, 47.6]. Wir können den Beweis zu 2.2.10 wiederholen, wobei wir nun von Isomorphismen $U \simeq (U\otimes_H R)\Box_{\overline{C}}C$ ausgehen.

$\boxed{qed}$

In Analogie zu der Terminologie der Galois-Erweiterungen aus Kapitel 1, werden H-Erweiterungen der Form $C \to \overline{C}$ dann *kogaloisch* genannt, wenn die kanonische Abbildung $\gamma : C\otimes H \to C\Box_{\overline{C}}C$ eine Bijektion ist. Wir halten das in einer Definition fest.

2.2.12 Definition. *Sei H eine R-Hopfalgebra, C eine Rechts-H-Modulkoalgebra mit C_R flach. Dann heißt die H-Erweiterung $C \to \overline{C}$* kogaloisch, *wenn die kanonische Abbildung*

$$\gamma : C\otimes H \to C\Box_{\overline{C}}C, \quad c\otimes h \mapsto \sum c_{(1)}\otimes c_{(2)}h,$$

ein Isomorphismus in $\mathcal{M}_H^C$ ist.

Bemerkungen:

(1) Wenn wir die Kategorie der rechts-links (H-C)-Bimoduln ${}^{C}\mathcal{M}_H$ betrachten, so ist auch in diesem Fall eine natürliche Abbildung

$$\gamma' : C \otimes H \longrightarrow C \square_{\overline{C}} C, \quad c \otimes h \mapsto \sum c_{(1)} h \otimes c_{(2)},$$

assoziiert.

(2) Ist die Antipode S_H von H bijektiv, so ist die Abbildung

$$\Phi : C \otimes H \longrightarrow C \otimes H, \quad c \otimes h \mapsto \sum c h_{(1)} \otimes S_H(h_{(2)}),$$

bijektiv und es gilt $\gamma' = \gamma \circ \Phi$ (vgl. [58, 4.4]). Also ist γ' genau dann injektiv (resp. surjektiv, bijektiv), wenn dies für γ gilt.

Wir können in diesem Zusammenhang auch das duale Resultat zu 1.4.8 festhalten. Der Satz erklärt, warum in Theorem 2.2.15 die Injektivität der kanonischen Abbildung $\gamma : C \otimes H \to C \square_{\overline{C}} C$ unter den gegebenen Voraussetzungen schon die Bijektivität von γ erzwingt. Doch zuerst dualisieren wir den Begriff des totalen Integrals aus 1.4.5.

2.2.13 Definition. *Sei H eine R-Hopfalgebra und C eine Rechts-H-Modulkoalgebra. Eine rechts-H-lineare Abbildung $\kappa : C \to H$ nennen wir ein* Kointegral für C. *Ist κ augmentiert (d.h. es gilt $\varepsilon_H \circ \kappa = \varepsilon_C$), so nennen wir κ ein* totales Kointegral.

2.2.14 Satz. *Sei H eine projektive R-Hopfalgebra, R ein QF-Ring, und C eine H-Modulkoalgebra mit C_R projektiv. Existiert ein totales Kointegral $\kappa : C \to H$ und ist die kanonische Abbildung $\gamma : C \otimes H \to C \square_{\overline{C}} C$ injektiv, dann ist γ schon bijektiv, d.h. die H-Erweiterung $C \to \overline{C}$ ist kogaloisch.*

Beweis. Nach [23, Theorem 4] oder [58, Remark 4.3] ist C als H-Modul relativ projektiv, falls ein totales Kointegral existiert. Dann zerfällt die Modulstrukturabbildung $\mu_C : C \otimes H \to C$ in $\mathcal{M}_H$ und C ist von H stark koerzeugt in $\mathcal{M}_H$, da $C \otimes H$ die rechts triviale H-Modulstruktur trägt. Nach 2.2.6 ist nun $C \otimes H$ ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$. Mit 2.2.10 folgern wir aus der Injektivität von γ, daß C den starken Kogenerator $C \otimes H$ stark in $\mathcal{M}_H^C$ koerzeugt, also selber ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$ ist. Nun folgt die Bijektivität von γ aus 2.2.11. $\boxed{qed}$

Wir sind nun in der Lage, das Hauptergebnis dieses Abschnitts zu formulieren und zu beweisen. Es kennzeichnet die Äquivalenz zwischen der Kategorie der Rechts-$\overline{C}$-Komoduln mit der Kategorie der (H-C)-Bimoduln aus [58, Theorem II] durch interne modultheoretische Eigenschaften der H-Modulkoalgebra C. Dadurch ergibt sich eine völlig neue Sichtweise auf diesen Teil der Theorie. Es erweitert auch die Ergebnisse aus [38] für nicht endlich dimensionale Hopf Algebren. Es beschreibt treu-koflache Kogalois-Erweiterungen.

2.2.15 Theorem.
Sei H eine R-Hopfalgebra, projektiv über dem QF-Ring R mit bijektiver Antipode S_H. C sei eine Rechts-H-Modulkoalgebra mit C_R projektiv und $\overline{C}$ sei R-flach. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) *der Funktor $-\otimes_H R : \mathcal{M}_H^C \longrightarrow \mathcal{M}^{\overline{C}}$ ist eine Äquivalenz von Kategorien;*

(b) *C ist starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$ und (starker) Kogenerator in $\mathcal{M}^{\overline{C}}$;*

(c) *C ist projektiv als Rechts-H-Modul und die natürliche Abbildung*

$$\gamma : C \otimes H \longrightarrow C \square_{\overline{C}} C, \quad c \otimes h \mapsto \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} h,$$

ist injektiv;

(d) *C ist injektiv und starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$.*

Beweis. $(a) \Rightarrow (d)$ Beschreibt $- \otimes_H R$ eine Äquivalenz, so ist $C \in \mathcal{M}_H^C$ nach 2.2.9 injektiv. Ist $U \in \mathcal{M}_H^C$ mit $U \simeq (U \otimes_H R) \square_{\overline{C}} C$, so existiert eine exakte Folge in $\mathcal{M}^{\overline{C}}$ der Form

$$0 \longrightarrow U \otimes_H R \longrightarrow \overline{C}^{(\Lambda)},$$

da $\overline{C}$ ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}^{\overline{C}}$ ist. Wenden wir den Funktor $-\square_{\overline{C}} C$ an, so erhalten wir bis auf Isomorphie die exakte Folge in $\mathcal{M}_H^C$

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow C^{(\Lambda)}.$$

Damit ist C ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$.
Einfacher überlegt man sich, daß bei einer Äquivalenz die Eigenschaften "injektiv" und "starker Kogenerator" erhalten bleiben. Da R ein QF-Ring ist, ist $\overline{C}$ ein injektiver, starker Kogenerator in $\mathcal{M}^{\overline{C}}$, der durch die Äquivalenz auf den Modul $C \in \mathcal{M}_H^C$ abgebildet wird.

(d) $\Rightarrow$ (a) Wir bemerken zuerst, daß die Objekte C in $\mathcal{M}_H^C$ und $\overline{C}$ in $\mathcal{M}^{\overline{C}}$ jeweils (ad-)statische Objekte sind. Das bedeutet, daß die natürlichen Abbildungen der Adjunktion

$$\phi_C : C \longrightarrow (C \otimes_H R)\Box_{\overline{C}}C \quad \text{und} \quad \psi_{\overline{C}} : (\overline{C}\Box_{\overline{C}}C) \otimes_H R \longrightarrow \overline{C}$$

Isomorphismen sind. Da C nach Voraussetzung ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$ ist, existiert für jeden Modul X in $\mathcal{M}_H^C$ eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow C^{(\Lambda)} \longrightarrow C^{(\Omega)}$$

in $\mathcal{M}_H^C$ für geeignete Indexmengen Λ und Ω. Weiter ist C injektiv in $\mathcal{M}_H^C$, wodurch der Funktor $- \otimes_H R$ nach 2.2.9 (links) exakt wird. Da der Tensorfunktor $-\Box_{\overline{C}}C$ für R-flaches C und R-flaches $\overline{C}$ immer links exakt ist (vgl. [2, II.1.4]), erhalten wir mit den natürlichen Abbildungen der Adjunktion insgesamt das folgende kommutative Diagramm in $\mathcal{M}_H^C$:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & C^{(\Lambda)} & \longrightarrow & C^{(\Omega)} \\
 & & \downarrow\phi_X & & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\
0 & \longrightarrow & (X \otimes_H R)\Box_{\overline{C}}C & \longrightarrow & ((C \otimes_H R)\Box_{\overline{C}}C)^{(\Lambda)} & \longrightarrow & ((C \otimes_H R)\Box_{\overline{C}}C)^{(\Omega)}.
\end{array}$$

Damit ist $\phi_X : X \to (X \otimes_H R)\Box_{\overline{C}}C$ für alle $X \in \mathcal{M}_H^C$ ein Isomorphismus. Verwendet man die Tatsache, daß $\overline{C}$ in $\mathcal{M}^{\overline{C}}$ ein adstatischer (starker) Kogenerator ist, so sieht man für Y in $\mathcal{M}^{\overline{C}}$ analog an dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & (Y\Box_{\overline{C}}C) \otimes_H R & \longrightarrow & ((\overline{C}\Box_{\overline{C}}C) \otimes_H R)^{(\Lambda)} & \longrightarrow & ((\overline{C}\Box_{\overline{C}}C) \otimes_H R)^{(\Omega)} \\
 & & \downarrow\psi_Y & & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\
0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & \overline{C}^{(\Lambda)} & \longrightarrow & \overline{C}^{(\Omega)},
\end{array}$$

daß auch $\psi_Y : (Y\Box_{\overline{C}}C) \otimes_H R \to Y$ ein Isomorphismus für alle $Y \in \mathcal{M}^{\overline{C}}$ ist.

(b) $\Rightarrow$ (c) Ist C starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$, so ist die kanonische Abbildung $\gamma : C \otimes H \longrightarrow C\Box_{\overline{C}}C$ bijektiv nach 2.2.11. Ist C Kogenerator in $\mathcal{M}^{\overline{C}}$, so ist $\overline{C}$ direkter Summand in einer direkten Summe $C^{(\Gamma)}$, da $\overline{C}$ injektiv und C starker Kogenerator in $\mathcal{M}^{\overline{C}}$ ist (vgl. 2.2.5). Die in $\mathcal{M}^{\overline{C}}$ zerfallende Folge $0 \longrightarrow \overline{C} \longrightarrow C^{(\Gamma)}$ wird über den Funktor $-\Box_{\overline{C}}C$ bis auf Isomorphie auf die (in $\mathcal{M}_H^C$ zerfallende) Folge $0 \longrightarrow C \longrightarrow (C\Box_{\overline{C}}C)^{(\Gamma)}$ abgebildet. Mit dem Isomorphismus γ erhalten wir, daß C H-direkter Summand in der direkten Summe $(C \otimes H)^{(\Gamma)}$ ist. Damit ist C als Rechts-H-Modul projektiv.

(c) $\Rightarrow$ (d) Als projektiver Rechts-H-Modul zerfällt die Modulstruktur-Abbildung $\mu_C : C \otimes H \to C$ in $\mathcal{M}_H$. Damit ist C stark H-koerzeugt in $\mathcal{M}_H$

und mit 2.2.6 ist $C \otimes H$ ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$. Nun impliziert die Injektivität von γ nach 2.2.10, daß C (starker) Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$ wird. Die Injektivität von C in $\mathcal{M}_H^C$ folgt aus der Projektivität von C in $\mathcal{M}_H$ mit 2.2.9.

$(a) \Rightarrow (c)$ Hier müssen wir einen kleinen Umweg über die Kategorie der rechts-links-(H-C)-Bimoduln in Kauf nehmen und die Tatsache ausnutzen, daß die Antipode S_H von H bijektiv ist. Die Abbildung γ ist nach Voraussetzung ein Isomorphismus. Aus der Bijektivität von S_H folgt, daß auch die Abbildung γ' bijektiv ist (vgl. Bemerkung (2) vor dem Theorem 2.2.15). Da der Funktor $-\Box_{\overline{C}}C$ bei einer Äquivalenz treu-exakt ist auf $\mathcal{M}^{\overline{C}}$, ist C ein injektiver Kogenerator in der Kategorie der Links-$\overline{C}$-Komoduln ${}^{\overline{C}}\mathcal{M}$ (vgl. [2, IV.3.2]). Also existiert ein Schnitt in ${}^{\overline{C}}\mathcal{M}$ der Form $s : \overline{C} \longrightarrow C^{(\Lambda)}$. Dieser wird über den Funktor $C\Box_{\overline{C}}-$ auf den in ${}^{C}\mathcal{M}_H$ zerfallenden Morphismus $C\Box_{\overline{C}}s : \overline{C} \simeq C\Box_{\overline{C}}\overline{C} \longrightarrow (C\Box_{\overline{C}}C)^{(\Lambda)}$ abgebildet. Da γ' rechts-H-linear ist, ist C bis auf Isomorphie rechts-H-direkter Summand in $C \otimes H$.

$(a), (c), (d) \Rightarrow (b)$ Da C_H projektiv ist, ist C in Mod-H stark H-koerzeugt. Damit ist $C \otimes H$ nach 2.2.6 ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$, der über die Äquivalenz auf das Objekt $(C \otimes H) \otimes_H R \simeq C \in \mathcal{M}^{\overline{C}}$ abgebildet wird. Die Eigenschaft "Kogenerator" bleibt bei der Äquivalenz jedoch erhalten. Zusammen mit (d) ist C also ein (starker) Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$ und in $\mathcal{M}^{\overline{C}}$ - und wegen 2.2.5 ist C auch starker Kogenerator in $\mathcal{M}^{\overline{C}}$.

$\boxed{qed}$

2.3 Duale Semi-Invarianten

Wie in Kapitel 1 können wir auch im dualen Fall einer H-Wirkung auf einer Koalgebra C verallgemeinerte Semi-Invarianten definieren. Wir sind sogar in der Lage, mit unseren modultheoretischen Methoden ein zu [20, Theorem 1.3, 1.4] duales Resultat zu erhalten. Erinnert man sich daran, daß ein wesentliches Ergebnis für punktierte Hopfalgebren erzielt werden konnte (man vgl. 1.6.15), so können wir den dualen Begriff zu *punktiert*, der noch nicht hinreichend geklärt und definiert ist, etwas mit Leben füllen. Doch zuerst müssen wir etwas Vorarbeit leisten.

Ist H eine R-Hopfalgebra und L eine Faktorhopfalgebra mit der surjektiven Abbildung $\pi : H \to L$, so können wir L in natürlicher Weise mit einer Rechts-und einer Links-H-Modulstruktur versehen durch

$$\mu_L^r : L \otimes H \xrightarrow{id\otimes\pi} L \otimes L \xrightarrow{\mu_L} L$$

und

$$\mu_L^l : H \otimes L \xrightarrow{\pi\otimes id} L \otimes L \xrightarrow{\mu_L} L$$

Die Abbildung π wird bei diesen Strukturen eine links, bzw. eine rechts H-lineare Abbildung. Ist nun C eine Rechts-H-Modulkoalgebra, so können wir dual zu 1.6.1 die (verallgemeinerten) L-Semi-Invarianten von C definieren.

2.3.1 Definition. *Für eine Faktor-Hopfalgebra $\pi : H \to L$ und eine Rechts-H-Modulkoalgebra C nennen wir die Koalgebra $C^L := C \otimes_H L$ die (Koalgebra der) L*-Semi-Invarianten von *C.*

Bemerkung: Im Fall $L = R$ entsprechen die R-Semi-Invarianten C^R gerade den Koinvarianten $\overline{C}$ aus 2.1.6.

Man überlegt sich nun wieder, daß die L-Semi-Invarianten von C nicht nur eine Faktor-Koalgebra von C darstellen, sondern eine L-Modulkoalgebra sind, so daß es Sinn macht, die Kategorie der L-C^L-Bimoduln $\mathcal{M}_L^{C^L}$ zu untersuchen.
Die wesentliche Feststellung ist wie in 1.6.4 in Kapitel 1 die Tatsache, daß die Adjunktion 2.1.4 in natürlicher Weise über $\mathcal{M}_L^D$ faktorisiert. Also bemerken wir zuerst wieder, daß der Funktor $- \otimes_H L : \mathcal{M}_H^C \longrightarrow \mathcal{M}_L^{C^L}$ links adjungiert ist zu dem Funktor $-\square_{C^L} C : \mathcal{M}_L^{C^L} \longrightarrow \mathcal{M}_H^C$. Im nächsten Lemma geben wir die induzierten Strukturen an.

2.3.2 Lemma. *Sei $\pi : H \to L$ eine Surjektion von R-Hopfalgebren und C eine Rechts-H-Modulkoalgebra, die über R flach ist. Wir bezeichnen die Faktorkoalgebra der L-Semi-Invarianten mit $D := C^L$. Dann gilt:*

(1) Ist U ein Objekt in $\mathcal{M}_L^D$, so ist $U\square_{C^L}C$ ein Objekt in $\mathcal{M}_H^C$ mit den Strukturabbildungen

$$\rho : U\square_{C^L}C \to (U\square_{C^L}C) \otimes C, \quad u \otimes c \mapsto \sum u \otimes c_{(1)} \otimes c_{(2)},$$
$$\mu : (U\square_{C^L}C) \otimes H \to U\square_{C^L}C, \quad u \otimes c \otimes h \mapsto \sum u\pi(h_{(1)}) \otimes ch_{(2)}.$$

(2) Ist V ein Objekt in $\mathcal{M}_H^C$, so wird $V \otimes_H L$ ein Objekt in $\mathcal{M}_L^D$ mit den Strukturabbildungen

$$\rho : V \otimes_H L \to (V \otimes_H L) \otimes (C \otimes_H L), \quad v \otimes l \mapsto \sum v_{(0)} \otimes l_{(1)} \otimes v_{(1)} \otimes l_{(2)},$$
$$\mu : (V \otimes_H L) \otimes L \to V \otimes_H L, \quad v \otimes l \otimes m \mapsto v \otimes lm.$$

Der nächste Satz zeigt nun, daß die Adjunktion, die wir in 2.1.4 betrachtet haben, über die nun untersuchte Adjunktion faktorisiert:

2.3.3 Satz. *Sei $\pi : H \to L$ eine Hopfalgebrasurjektion, C eine R-flache Rechts-H-Modulkoalgebra. Wir setzen wieder $D := C^L$ und bezeichnen die kanonische Projektion von C nach D mit $p : C \to D, c \mapsto c \otimes_H 1_L$. Dann gilt:*

(1) Der Funktor $- \otimes_H L : \mathcal{M}_H^C \longrightarrow \mathcal{M}_L^D$ ist links adjungiert zum Funktor $-\square_D C : \mathcal{M}_L^D \longrightarrow \mathcal{M}_H^C$. Die Einheit der Adjunktion ist für $U \in \mathcal{M}_H^C$ gegeben durch

$$\eta_U : U \to (U \otimes_H L)\square_D C, \quad u \mapsto \sum u_{(0)} \otimes_H 1_L \otimes u_{(1)},$$

und die Koeinheit ist für $V \in \mathcal{M}_L^D$ gegeben durch

$$\rho_V : (V\square_D C) \otimes_H L \to V, \quad v \otimes c \otimes_H l \mapsto vl\varepsilon(c).$$

(2) Es gibt einen Isomorphismus von Koalgebren
$\overline{D} = D \otimes_L R = (C \otimes_H L) \otimes_L R \simeq C \otimes_H (L \otimes_L R) \simeq C \otimes_H R = \overline{C}$.

(3) Die Adjunktionen faktorisieren wie folgt (das bedeutet, daß jeweils die oberen und die unteren Pfeile ein kommutatives Diagramm beschreiben):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_H^C \arrow[rr, shift left, "-\otimes_H R"] \arrow[dr, shift left, "-\otimes_H L"] & & \mathcal{M}^{\overline{C}} \arrow[ll, shift left, "-\square_{\overline{C}} C"] \arrow[dl, shift left, "-\square_{\overline{D}} D"] \\
& \mathcal{M}_L^D \arrow[ul, shift left, "-\square_D C"] \arrow[ur, shift left, "-\otimes_L R"] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Auch diese Aussage erhält man - wie die duale Aussage 1.6.4 - als Ergebnis der Untersuchungen in [12, Theorem 1.1, 1.3]. Dabei setzen wir diesmal $A := H, B := H, D := C, A' := L, B' := L, D' := D$ und für die Morphismen $\alpha := \pi$, $\beta := \pi$, $\delta := p$. $\boxed{qed}$

Unser nächstes Ziel ist es nun, das Theorem 1.6.14 zu dualisieren. Das verlangt noch etwas Vorarbeit. Wir erinnern zuerst an die Definition in 2.2.13 und halten das duale Ergebnis zu 1.6.7 fest.

2.3.4 Satz. *Sei H eine R-Hopfalgebra und C eine Rechts-H-Modulkoalgebra. Dann sind äquivalent:*

(a) C besitzt ein totales Kointegral $\kappa : C \to H$;

(b) jede Faktor-Hopfalgebra L von H besitzt ein totales Kointegral $\kappa^L : C^L \to L$;

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$ Ist $\kappa : C \to H$ augmentiert und rechts-H-linear, so erhalten wir eine rechts-L-lineare Abbildung $\kappa^L := \kappa \otimes_H L : C \otimes_H L \to H \otimes_H L$, indem wir mit $- \otimes_H L$ tensorieren. Identifizieren wir $H \otimes_H L$ mit L, so haben wir eine rechts-L-lineare Abbildung von C^L nach L. Diese ist wegen

$$\begin{aligned}
\varepsilon_L \circ \kappa^L(c \otimes l) &= \varepsilon_L(\pi(\kappa(c))l) \\
&= \varepsilon_L(\pi(\kappa(c)))\varepsilon_L(l) \\
&= \varepsilon_H(\kappa(c))\varepsilon_L(l) \\
&= \varepsilon_C(c)\varepsilon_L(l) \\
&= \varepsilon_{C^L}(c \otimes l)
\end{aligned}$$

auch augmentiert.

$(b) \Rightarrow (a)$ ist klar. $\boxed{qed}$

2.3.5 Satz. *Sei R ein Körper, H eine R-Hopfalgebra und C eine Rechts-H-Modulkoalgebra. Existiert eine augmentierte, rechts-H-lineare Abbildung $\kappa : C \to H$, so ist für jede Faktorhopfalgebra $\pi : H \to L$ der Funktor $- \otimes_H L : \mathcal{M}_H^C \to \mathcal{M}_L^{C^L}$ exakt.*

Beweis. Wenn eine solche Abbildung existiert, so zerfällt jede exakte Folge in $\mathcal{M}_H^C$ als Folge in $\mathcal{M}_H$ (vgl. [23, Theorem 4]). Damit ist der Funktor $- \otimes_H L$ exakt auf $\mathcal{M}_H^C$ für jeden H-Modul L. $\boxed{qed}$

Wir müssen noch zeigen, daß das Objekt $L \otimes D \in \mathcal{M}_L^D$ adstatisch ist, daß also die natürliche Abbildung der Adjunktion $((L \otimes D)\Box_D C) \otimes_H L \simeq L \otimes D$ ein Isomorphismus in $\mathcal{M}_L^D$ ist. Das ist deshalb von großer Bedeutung, da $L \otimes D$ nicht nur ein Subgenerator für die Kategorie $\mathcal{M}_L^D$ ist, sondern in den gleich zu untersuchenden speziellen Situationen ein Kogenerator in $\mathcal{M}_L^D$ wird. Dazu das nächste Lemma.

2.3.6 Lemma. *Sei R ein Körper, H eine R-Hopfalgebra und C eine Rechts-H-Modulkoalgebra. Für eine Faktorhopfalgebra $\pi : H \to L$ bezeichnen wir die L-Semi-Invarianten C^L wieder mit D. Dann ist die natürliche Abbildung $((L \otimes D)\Box_D C) \otimes_H L \simeq L \otimes D$ ein Isomorphismus in $\mathcal{M}_L^D$.*

Beweis. Das geht dual zu 1.6.9. $\boxed{qed}$

Wir erhalten auch die zu 1.6.10 und 1.6.11 dualen Resultate, die wir im folgenden Satz zusammenfassen.

2.3.7 Satz. *Sei R ein Körper, H eine R-Hopfalgebra und C eine Rechts-H-Modulkoalgebra. Für eine Faktorhopfalgebra $\pi : H \to L$ mit bijektiver Antipode S_L bezeichnen wir die L-Semi-Invarianten C^L wieder mit D. Existiert eine augmentierte, rechts-H-lineare Abbildung $\kappa : C \to H$, dann gilt:*

(1) für $V \in \mathcal{M}_L^D$ ist der Morphismus der Adjunktion

$$(V \Box_D C) \otimes_H L \xrightarrow{\simeq} V, \quad v \otimes c \otimes l \mapsto v\varepsilon(c)l$$

ein Isomorphismus in $\mathcal{M}_L^D$.

(2) für $W \in \mathcal{M}^{\overline{C}}$ ist der Morphismus

$$(W \Box_{\overline{C}} C) \otimes_H L \xrightarrow{\simeq} W \Box_{\overline{C}} (C \otimes_H R) \simeq W$$

ein Isomorphismus in $\mathcal{M}^{\overline{C}}$.

Beweis. (1) Nach 2.3.4 existiert eine augmentierte, rechts-L-lineare Abbildung $\kappa^L : D \to L$. Damit wird D projektiver Rechts-L-Modul und mit 2.2.6 ist $D \otimes L$ ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_L^D$. Aus der Bijektivität der Antipode S_L folgt, daß auch $Q := L \otimes D \simeq D \otimes L$ ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_L^D$ wird. Die Funktoren $- \otimes_H L$ und $- \Box_D C$ vertauschen mit direkten Summen und der Funktor $- \otimes_H L$ ist nach 2.3.5 exakt. Also folgt die Behauptung, wenn wir für $V \in \mathcal{M}_L^D$ auf eine exakte Folge der Form

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow Q^{(\Lambda)} \longrightarrow Q^{(\Gamma)}$$

den Funktor $(-\Box_D C) \otimes_H L$ anwenden und die Isomorphie aus 2.3.6 anwenden.

(2) Es gilt $\overline{D} = D \otimes_L R = C \otimes_H R = \overline{C}$. Sei $W \in \mathcal{M}^{\overline{C}}$ und die Folge

$$(1) \quad 0 \longrightarrow W \longrightarrow \overline{D}^{(\Lambda)} \longrightarrow \overline{D}^{(\Gamma)}$$

exakt in $\mathcal{M}^{\overline{D}} = \mathcal{M}^{\overline{C}}$. Durch Anwendung des (links-exakten) Funktors $-\Box_{\overline{D}} D$ erhalten wir aus (1) die exakte Folge

$$(2) \quad 0 \longrightarrow W \Box_{\overline{D}} D \longrightarrow D^{(\Lambda)} \longrightarrow D^{(\Gamma)}$$

in $\mathcal{M}_L^D$. Wenn wir (1) mit $-\Box_{\overline{C}} C$ kotensorieren, so erhalten wir die in $\mathcal{M}_H^C$ exakte Folge

$$(3) \quad 0 \longrightarrow W\Box_{\overline{C}} C \longrightarrow C^{(\Lambda)} \longrightarrow C^{(\Gamma)},$$

die nach Voraussetzung in $\mathcal{M}_H$ zerfällt. Also bleibt (3) exakt, wenn wir mit $-\otimes_H L$ tensorieren und wir erhalten die Folge

$$(4) \quad 0 \longrightarrow (W\Box_{\overline{C}} C) \otimes_H L \longrightarrow (C^{(\Lambda)}) \otimes_H L \longrightarrow (C^{(\Gamma)}) \otimes_H L$$

in $\mathcal{M}_L^D$. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (W\Box_{\overline{C}} C) \otimes_H L & \longrightarrow & (C^{(\Lambda)}) \otimes_H L & \longrightarrow & (C^{(\Gamma)}) \otimes_H L \\ & & \downarrow_{\alpha} & & \downarrow_{\beta} & & \downarrow_{\gamma} \\ 0 & \longrightarrow & W\Box_{\overline{D}} D & \longrightarrow & D^{(\Lambda)} & \longrightarrow & D^{(\Gamma)} \end{array}$$

folgt die Behauptung, da $-\otimes_H L$ mit direkten Summen vertauscht, also β und γ Isomorphismen sind.

$\boxed{qed}$

Wir benötigen noch ein technisches Lemma, welches eine direkte Konsequenz aus dem Lemma von Nakayama ist.

2.3.8 Lemma. *Sei R ein Körper, H eine R-Hopfalgebra und C eine Rechts-H-Modulkoalgebra. Mit $Jac(H)$ bezeichnen wir das Jacobson-Radikal der R-Algebra H. Sei $I \subseteq Jac(H)$ ein Hopfideal in H und $L := H/I$ die zugehörige Faktorhopfalgebra. Dann gilt für einen endlich erzeugten Modul $V \in \mathcal{M}_H$:*

$$V \otimes_H L = 0 \quad \textit{impliziert} \quad V = 0.$$

Beweis. Nach [71, 12.11] gilt $V \otimes_H L = V \otimes_H H/I \simeq V/VI$. Nun folgt aus dem Lemma von Nakayama (vgl. [71, 21.13]) aber gerade $V \neq VI$ für $I \subseteq Jac(H)$ und $V \in \mathcal{M}_H$ endlich erzeugt. Also kann $V \otimes_H L = 0$ nur für $V = 0$ gelten. $\boxed{qed}$

Wir haben nun alle nötigen Vorarbeiten geleistet, um das Theorem 1.6.14 zu dualisieren. Wir formulieren dazu das folgende

2.3.9 Theorem.
Sei R ein Körper, H eine R-Hopfalgebra und C eine Rechts-H-Modulkoalgebra. Wir nehmen an, daß eine augmentierte, rechts-H-lineare Abbildung $\kappa : C \to H$ existiert. Für eine Faktorhopfalgebra L mit bijektiver Antipode S_L setzen wir wieder $D := C^L$.

Mit den Abkürzungen

$$
\begin{aligned}
F_1 &:= - \otimes_H R, & G_1 &:= -\square_{\overline{C}} C,\\
F_2 &:= - \otimes_H L, & G_2 &:= -\square_D C,\\
F_3 &:= - \otimes_L R, & G_3 &:= -\square_{\overline{D}} D,
\end{aligned}
$$

betrachten wir noch einmal das folgende Diagramm adjungierter Funktoren aus 2.3.3:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_H^C \arrow[rr, shift left, "-\otimes_H R"] \arrow[dr, shift left, "-\otimes_H L"] & & \mathcal{M}^{\overline{C}} \arrow[ll, shift left, "-\square_{\overline{C}} C"] \arrow[dl, shift left, "-\square_{\overline{D}} D"] \\
& \mathcal{M}_L^D \arrow[ul, shift left, "-\square_D C"] \arrow[ur, shift left, "-\otimes_L R"] &
\end{tikzcd}
$$

Dann gilt:

(1) Beschreibt das Paar (F_1, G_1) eine Äquivalenz von Kategorien, dann auch die Paare (F_2, G_2) und (F_3, G_3).

(2) Ist $L = H/I$ mit $I \subset Jac(H)$ und ist (F_3, G_3) eine Äquivalenz, so ist auch (F_1, G_1) (und damit auch (F_2, G_2)) eine Äquivalenz.

Beweis. (1) Beschreibt der Funktor $- \otimes_H R$ eine Äquivalenz zwischen $\mathcal{M}_H^C$ und $\mathcal{M}^{\overline{C}}$, dann ist C als Rechts-H-Modul projektiv nach 2.2.15. Mit [23, Corollary 1] existiert dann eine H-lineare, augmentierte Abbildung $\kappa : C \to H$ und nach 2.3.4 existiert eine L-lineare Abbildung $\kappa^L : D \to L$, die D projektiv macht als Rechts-L-Modul. Mit 2.2.9 wird D ein injektives Objekt in $\mathcal{M}_L^D$. Es reicht also zu zeigen, daß D ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_L^D$ ist. Sei also U ein Modul aus $\mathcal{M}_L^D$. Dann ist $U\square_D C$ ein Modul in $\mathcal{M}_H^C$ und als solcher stark von C koerzeugt. Betrachten wir die kurze exakte Folge $0 \to U\square_D C \to C^{(\Lambda)}$, dann zerfällt diese Folge in $\mathcal{M}_H$, da alle Moduln in $\mathcal{M}_H^C$ projektiv sind in $\mathcal{M}_H$ (vgl. [23, Theorem 4]). Wenn wir mit $- \otimes_H L$ tensorieren, erhalten wir die exakte Folge $0 \to (U\square_D C) \otimes_H L \to D^{(\Lambda)}$ in $\mathcal{M}_L^D$. Mit dem Isomorphismus $U \simeq (U\square_D C) \otimes_H L$ für $U \in \mathcal{M}_L^D$ aus 2.3.7 erhalten wir (mit 2.2.9) die Kennzeichnung (d) aus unserem Theorem 2.2.15. Damit beschreibt das Paar von Funktoren (F_2, G_2) eine Äquivalenz. Aus 2.3.7 folgt, daß auch das Paar (F_3, G_3) eine Äquivalenz beschreibt, da für $V \in \mathcal{M}^{\overline{C}}$ gilt: $G_3(V) \simeq F_2(G_1(V))$.

(2) Nach Voraussetzung ist C als H-Modul projektiv, und es genügt zu zeigen, daß C ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$ ist (Kennzeichnung (d) aus

2.2.15). Wir zeigen zuerst, daß C ein Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$ ist und überlegen uns dann, daß C in dieser Situation auch schon ein starker Kogenerator ist. Nach Voraussetzung ist C (mit 2.2.9) injektiv in $\mathcal{M}_H^C$. Nach [71, 14.6 und 16.5] ist C ein Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$ wenn für jeden einfachen Modul $E \in \mathcal{M}_H^C$ gilt: $\mathrm{Hom}_H^C(E, C) \neq 0$. Wir benutzen für den einfachen Modul $E \in \mathcal{M}_H^C$ die Isomorphie

$$\mathrm{Hom}_H^C(E, D \Box_D C) \simeq \mathrm{Hom}_L^D(E \otimes_H L, D).$$

Nehmen wir an, daß $\mathrm{Hom}_H^C(E, C) = 0$ gilt. Da D ein injektiver Kogenerator in $\mathcal{M}_L^D$ ist, gilt dann schon $E \otimes_H L = 0$. Aber E ist endlich erzeugt in $\mathcal{M}_H^C$, damit nach 2.2.3 auch in $\mathcal{M}_H$. Also muß mit unserer Voraussetzung $I \subset Jac(H)$ wegen 2.3.8 schon $E = 0$ gelten und C ist Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$. Wir erklären nun noch, warum C ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$ ist.
Sei dazu U ein beliebiger endlich erzeugter Modul in $\mathcal{M}_H^C$ und $0 \to U \xrightarrow{\phi} C^\Lambda$ exakt in $\mathcal{M}_H^C$ für eine geeignete Indexmenge Λ (dabei bezeichnet C^Λ das Produkt in der Kategorie $\mathcal{M}_H^C$). Dann zerfällt die Folge als Folge von H-Moduln und das Bild von U unter ϕ liegt schon in C^k für ein geeignetes $k \in I\!N$, da U als H-Modul endlich (ko-)erzeugt ist. Mit [71, 47.6] ist U ein reflexiver Modul, also $U \simeq (U \otimes_H R) \Box_{\overline{C}} C$ in $\mathcal{M}_H^C$. Mit 2.2.11 folgt die Bijektivität von γ. Dann ist C ein starker, injektiver Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$.

$\boxed{qed}$

Kapitel 3

Quotiententheorie für Hopfalgebren

In den letzten Jahren wurde von vielen Mathematikern versucht, eine Quotiententheorie für Hopfalgebren zu entwickeln. Man vgl. die einschlägigen Arbeiten [39], [41], [68], [59] oder [49, chapter 3] um einen Überblick zu bekommen.
Ein wegweisendes Ergebnis liegt mit dem Satz von Nichols-Zoeller vor [49, section 3.1], der im Fall einer endlich-dimensionalen Hopfalgebra H über einem Körper k zeigt, daß H über jeder Unterhopfalgebra frei ist. Auch im kommutativen Fall sind mit dem Theorem von Takeuchi (vgl. [67, Theorem 5]) die Fragen weitgehend geklärt. Es besagt, daß eine kommutative Hopfalgebra treu-flach oder stärker ein projektiver Generator über jeder Unterhopfalgebra ist. Eine vereinfachte Darstellung dieses Resultats findet sich in [41].

Die allgemeine Theorie ist jedoch noch weit davon entfernt, abgeschlossen und zufriedenstellend entwickelt zu sein. So hat Peter Schauenburg in [56] ein Beispiel einer Hopfalgebra H konstruiert, die eine Unterhopfalgebra K enthält, über der H als Modul nicht treu-flach ist. Dabei beruht der Defekt wesentlich auf der Tatsache, daß die Unterhopfalgebra keine bijektive Antipode besitzt.

Elementare offene Fragen sind beispielsweise die folgenden:

- Ist eine Hopfalgebra treu-flach über einer endlichdimensionalen Unterhopfalgebra (vgl. Masuoka, [39, 1.15])?

- Ist eine Hopfalgebra treu-flach über jeder normalen Unterhopfalgebra (vgl. Schneider, [59, Seite 3338])?

Wir wollen in diesem Abschnitt die Resultate der vorherigen Kapitel verwenden, um die Probleme bei diesen Fragen aus unserer Sicht zu erklären. Dabei ergeben sich neue Beweise und Verallgemeinerungen für bekannte Resultate.

3.1 Grundlagen

Sei im folgenden R ein QF-Ring und K eine Unterhopfalgebra in der Hopfalgebra H und L eine Faktorhopfalgebra von H. Wir nehmen in diesem Kapitel an, daß K, H und L **als R-Moduln projektiv** sind. Die folgenden Überlegungen zeigen, daß mit den Untersuchungen aus den vorangegangenen Kapiteln Aussagen über die Struktur einer Hopfalgebra H als Modul über ihren Unterhopfalgebren, bzw. als Komodul über ihren Faktorhopfalgebren gemacht werden können.

Man kann eine Hopfalgebra H bei einer Hopfalgebrasurjektion $\pi : H \to L$ als rechts bzw. links L-Komodul auffassen mit den Strukturabbildungen

$$\rho_H^l : H \xrightarrow{\Delta_H} H \otimes H \xrightarrow{\pi \otimes id} L \otimes H$$

und

$$\rho_H^r : H \xrightarrow{\Delta_H} H \otimes H \xrightarrow{id \otimes \pi} H \otimes L.$$

H wird durch diese Strukturen sogar eine Rechts-, bzw. Links-L-Komodulalgebra, wie sie in Kapitel 1 untersucht wurden. In diesem Sinne können wir die Kategorie $\mathcal{M}_H^L$ der H-L-Bimoduln als eine Kategorie der Form $\mathcal{M}_A^H$ verstehen und die Ergebnisse aus Kapitel 1 benutzen.

Umgekehrt wird H bei einer Einbettung von Hopfalgebren $\iota : K \to H$ durch die K-Modulstrukturabbildungen

$$\mu_H^l : K \otimes H \xrightarrow{\iota \otimes id} H \otimes H \xrightarrow{\mu_H} H$$

und

$$\mu_H^r : H \otimes K \xrightarrow{id \otimes \iota} H \otimes H \xrightarrow{\mu_H} H$$

zu einer Rechts- bzw. Links-K-Modulkoalgebra. Also ist die Kategorie $\mathcal{M}_K^H$ der K-H-Bimoduln unter dieser Betrachtungsweise eine Kategorie der Form $\mathcal{M}_H^C$, wie wir sie in Kapitel 2 untersucht haben.
Ein Problem bei der Entwicklung der Quotiententheorie für Hopfalgebren ist die Tatsache, daß der "natürliche Quotient" zu einer Einbettung $\iota : K \to H$ von Hopfalgebren im allgemeinen keine Hopfalgebra mehr zu sein braucht. Er

trägt noch die Struktur einer (einseitigen) Faktor-H-Modulkoalgebra. Wesentlich ist hier zu bemerken, daß die Wahl der Seite entscheidend mit eingeht. Dual dazu ist das natürliche Unterobjekt bei einer Surjektion von Hopfalgebren $\pi : H \to L$ im allgemeinen nur eine (einseitige) Koidealunteralgebra von H. Die Einleitung in [39, section 0] gibt darüber Aufschluß. Dies ist der Grund, warum die Struktur einer Hopfalgebra als Modul über ihren Koidealunteralgebren so ausgiebig studiert wurde ([39], [41], [68], [40]).

Dabei ist eine rechts Koidealunteralgebra U in einer Hopfalgebra H eine Unteralgebra $U \subset H$, die zusätzlich noch $\Delta|_U : U \to U \otimes H$ erfüllt, also ein Rechts-Koideal in H ist (man vgl. [68]). In diesem Zusammenhang tritt auch das Konzept (vgl. ebda) der Koideal-Linksideale auf. Ein Koideal-Linksideal $J \subset H$ ist ein Linksideal J in einer Hopfalgebra H, welches zusätzlich $\Delta(J) \subset J \otimes H + H \otimes J$ und $\varepsilon(J) = 0$ erfüllt, also auch die Bedingungen an ein Koideal in H erfüllt. Die andersseitigen Konzepte werden analog definiert. Man bemerke, daß eine Unterhopfalgebra $K \subset H$ auf beiden Seiten eine Koidealunteralgebra ist. Ebenso ist ein Hopfideal $J \subset H$ sowohl Koideal-Linksideal, als auch Koideal-Rechtsideal in H.

Um zu garantieren, daß bei einer Einbettung von Hopfalgebren der assoziierte Quotient wieder eine Hopfalgebra ist, und dazu dual bei einer Surjektion von Hopfalgebren die assoziierte Unteralgebra die Struktur einer Hopfalgebra trägt, hat Schneider in [59] die Konzepte der *Normalität*, bzw. *Konormalität* eingeführt. Vor dem Hintergrund von Gruppenalgebren kann man diese Konzepte gut verstehen (vgl. [18, 4.15]).
Auch wenn Kaplansky vermutete, daß - wie im Fall von Gruppenalgebren - eine Hopfalgebra frei über ihren Unterhopfalgebren ist, so war schon damals von Oberst und Schneider ein Gegenbeispiel konstruiert worden (man vgl. [50, Proposition 10] oder [49, Example 3.5.2]). Trotzdem zeigt das Theorem von Nichols-Zoeller, daß zumindest im endlich dimensionalen Fall diese Vermutung richtig ist. Die Frage der (Treu-)Flachheit einer Hopfalgebra über ihren Unterhopfalgebren ist für weite Teile der Theorie jedoch ausreichend. Vergleicht man mit Gruppenalgebren, so ist für Fragen der Treu-Flachheit die Normalität der Untergruppe nicht notwendig. Für Hopfalgebren ist diese Frage noch nicht geklärt.
In der Arbeit [68] schlägt Takeuchi ein einseitiges Konzept von Normalität vor und kann zeigen, daß der einseitige Quotient bei einer Einbettung von Hopfalgebren immer einseitig normal ist.
Eine gute Zusammenfassung dieses Ansatzes stellt [49, 3.4] dar. Wir no-

tieren hier die wesentlichen Definitionen, da der Sprachgebrauch nicht ganz einheitlich ist. Die nächste Definition ist Definition 3.4.1 in [49] verbunden mit Definition 1.2 aus [68].

3.1.1 Definition. *Sei R ein kommutativer Ring, H_R eine Hopfalgebra, die über R projektiv ist.*

(1) Die links adjungierte Aktion *von H auf sich selbst ist gegeben durch*

$$(\mathrm{ad}_l h)(k) := \sum h_{(1)} k S(h_{(2)}), \quad k, h \in H.$$

(2) Die rechts adjungierte Aktion *von H auf sich selbst ist gegeben durch*

$$(\mathrm{ad}_r h)(k) := \sum S(h_{(1)}) k h_{(2)}, \quad k, h \in H.$$

(3) Eine rechts Koidealunteralgebra $A \subseteq H$ heißt (rechts) normal, *wenn $(\mathrm{ad}_r H)(A) \subset A$.*

(4) Eine links Koidealunteralgebra $B \subseteq H$ heißt (links) normal, *wenn $(\mathrm{ad}_l H)(B) \subseteq B$ gilt.*

(5) Eine Unterhopfalgebra $K \subseteq H$ heißt normal, wenn K jeweils als einseitige Koidealunteralgebra links und rechts normal ist.

Im Fall einer Gruppenalgebra oder einer universellen Einhüllenden ergeben diese Aktionen gerade die klassischen adjungierten Aktionen.
Dual dazu definieren wir Normalität bei einer Surjektion von Hopfalgebren. Wir übernehmen weitgehend Definition 1.2 aus [68] und Definition 3.4.5 aus [49]. Daß diese Konzepte wirklich dual zueinander sind, wird im Anschluß an Definition 3.4.5 in [49] erklärt.

3.1.2 Definition. *Sei R ein kommutativer Ring, H_R eine Hopfalgebra, die über R projektiv ist.*

(1) Die links adjungierte Koaktion *von H auf sich selbst ist gegeben durch*

$$\nu_l : H \to H \otimes H, \quad h \mapsto \sum h_{(1)} S(h_{(3)}) \otimes h_{(2)}.$$

(2) Die rechts adjungierte Koaktion *von H auf sich selbst ist gegeben durch*

$$\nu_r : H \to H \otimes H, \quad h \mapsto \sum h_{(2)} \otimes S(h_{(1)}) h_{(3)}.$$

(3) Ein Koideal-Linksideal $I \subseteq H$ heißt (links) normal, *wenn $\nu_l(I) \subseteq H \otimes I$.*

(4) *Ein Koideal-Rechtsideal $J \subseteq H$ heißt* (rechts) normal, *wenn $\nu_r(J) \subseteq J \otimes H$ gilt.*

(5) *Ein Hopfideal $I \subseteq H$ heißt normal, wenn I links und rechts normal ist.*

In [59] betrachtet Schneider normale Hopfunteralgebren bzw. normale Hopfideale (vgl. Definition 1.1 in [59]). Dabei ist die wesentliche Feststellung, daß bei einer normalen Einbettung $K \subseteq H$ von Hopfalgebren der einseitige Quotient $\overline{H} := H \otimes_K R$ (man vgl. 2.1.6) eine Faktorhopfalgebra ist und insbesondere $H \otimes_K R = R \otimes_K H$ gilt. Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß das Koideal-Rechtsideal K^+H ein (normales) Hopfideal ist und $K^+H = HK^+$ gilt (vgl. [59, Lemma 1.3]) mit $K^+ := K \cap \mathrm{Kern}(\varepsilon_H)$. Dual dazu ist bei einem normalen Hopfideal $I \subseteq H$ die Unteralgebra der (einseitigen) Koinvarianten $H^{coH/I} := H \Box_{H/I} R$ eine normale Unterhopfalgebra in H und es gilt $H^{coH/I} = {}^{coH/I}H$ (siehe ebda).
Die entscheidenden Beobachtungen im Zusammenhang mit einseitiger Normalität sind die Sätze 1.3 und 1.4 in [68]. Wir zitieren hier nur die für uns interessanten Folgerungen, die sich aus diesen Sätzen zusammen mit [49, Lemma 3.4.2] ergeben.

3.1.3 Satz. *Sei R ein Ring und alle betrachteten Hopfalgebren seien als R-Moduln projektiv.*

(1) *Sei $\pi : H \to L$ eine Surjektion von Hopfalgebren. Dann ist die Links-Koidealunteralgebra $H^{coL} = H \Box_L R$ (links) normal, und die Rechts-Koidealunteralgebra ${}^{coL}H = R \Box_L H$ (rechts) normal.*

(2) *Ist $K \subseteq H$ eine Einbettung von Hopfalgebren, dann ist das Koideal-Linksideal HK^+ (links) normal und das Koideal-Rechtsideal K^+H ist (rechts) normal.*

(3) *Ist $B \subseteq H$ eine (rechts) normale Rechts-Koidealunteralgebra, so ist das Koideal-Linksideal HB^+ ein Hopfideal. Analog ist bei einer (links) normalen Links-Koidealunteralgebra $B \subseteq H$ das Koideal-Rechtsideal B^+H ein Hopfideal.*

(4) *Ist $I \subseteq H$ ein (links) normales Koideal-Linksideal, so ist die Rechts-Koidealunteralgebra $B := R \Box_{H/I} H$ eine Unterhopfalgebra. Analog ist bei einem (rechts) normalen Koideal-Rechtsideal die Links-Koidealunteralgebra $B := H \Box_{H/I} R$ eine Unterhopfalgebra.*

Beweis. Das wird in [49, 3.4.2] und in [68, 1.3 und 1.4] im Fall eines Grundkörpers gezeigt. Die Beweise gelten auch über einem Grundring. $\boxed{qed}$

Bemerkungen:

(1) Das wichtige an diesem Satz ist die Tatsache, daß bei einer Unterhopfalgebra $K \subseteq H$ die Rechts-Koidealunteralgebra der Links-Koinvarianten ${}^{co\overline{H}}H := R\Box_{\overline{H}}H$ eine Unterhopfalgebra von H ist, wenn $\overline{H} := H/HK^+$ gilt. Analog wird die Links-Koidealunteralgebra der Rechts-Koinvarianten $H^{co\overline{H}} := H\Box_{\overline{H}}R$ eine Unterhopfalgebra, falls $\overline{H} := H/K^+H$ gilt.

(2) Dual gilt bei einer Surjektion von Hopfalgebren $\pi : H \to L$, daß $(H^{coL})^+H$ und $H({}^{coL}H)^+$ Hopfideale in H sind.

Wir benötigen noch ein technisches Lemma, welches in unserer Sichtweise Generator-, bzw. Kogeneratoraussagen im Fall von Unter-, bzw. Faktorhopfalgebren macht. Es findet sich im Verlauf des Beweises zu Theorem 2.1 in [59].

3.1.4 Lemma. *Sei H eine Hopfalgebra über dem Ring R und H_R projektiv.*

(1) Sei K in H eine Unterhopfalgebra mit K_R projektiv und $\iota : K \to H$ die zugehörige Einbettung. Bezeichnen wir mit $\overline{H} := H/HK^+ = H \otimes_K R$ die assoziierte Faktorkoalgebra, so ist die kanonische Abbildung

$$\gamma : K \otimes H \to H\Box_{\overline{H}}H, \quad k \otimes h \mapsto \sum k_{(1)} \otimes k_{(2)}h$$

injektiv, d.h. H koerzeugt $K \otimes H$ in der Kategorie $\mathcal{M}_K^H$.

(2) Sei L eine Faktorhopfalgebra von H, L über R projektiv und $\pi : H \to L$ die zugehörige Projektion. Wir bezeichnen die Rechts-Koinvarianten mit $H^{coL} := H\Box_L R$. Dann ist die natürliche Abbildung

$$\beta : H \otimes_{H^{coL}} H \to H \otimes L, \quad a \otimes b \mapsto \sum ab_{(1)} \otimes \pi(b_{(2)})$$

surjektiv, d.h. H erzeugt $H \otimes L$ in der Kategorie $\mathcal{M}_H^L$.

Beweis. (1) Die Abbildung

$$\beta'_{H\otimes H} : H \otimes H \to H \otimes H, \quad a \otimes b \mapsto \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}b,$$

komponiert mit der Einbettung $\iota \otimes id$, ist injektiv, und das Bild dieser Abbildung liegt in $H\Box_{\overline{H}}H$.

(2) Betrachten wir wieder den kanonischen Isomorphismus

$$\beta_{H\otimes H} : H \otimes H \to H \otimes H, \quad a \otimes b \mapsto \sum ab_{(1)} \otimes b_{(2)}$$

und komponieren diesen mit $id \otimes \pi : H \otimes H \to H \otimes D$, so erhalten wir eine surjektive Abbildung, die über $H \otimes_{H^{coL}} H$ faktorisiert. $\boxed{qed}$

3.2 Exakte Folgen von Quantengruppen

In diesem Abschnitt wollen wir die Haupt-Ergebnisse aus [59] in unserer Sichtweise darstellen und beweisen. Doch zuerst benötigen wir noch eine (elementare) Aussage über den Zusammenhang zwischen den natürlichen Abbildungen bei H-(Ko-)Erweiterungen und (Ko-)Generator-Eigenschaften.
Wir formulieren im ersten Teil des nächsten Satzes eine Verallgemeinerung von Theorem 1.7 aus [36]. Die Endlichkeits-Bedingung an H ist hier durch eine Generator-Bedingung ersetzt worden. Nach unseren Überlegungen aus Abschnitt 1.5 gilt die Aussage also schon für Quasi-Ko-Frobenius-Hopfalgebren.
Der zweite Teil ist das duale Resultat Theorem 2.3 aus [59]. Wir geben hier einen sehr kurzen neuen Beweis.

3.2.1 Satz. *Sei R ein QF-Ring, H eine R-Hopfalgebra und H_R projektiv. A sei eine H-Komodulalgebra und C sei eine H-Modulkoalgebra, die über R projektiv ist. Dann gilt:*

(1) Ist H ein Generator in $\mathcal{M}^H$ und die natürliche Abbildung

$$\beta : A \otimes_{A^{coH}} A \to A \otimes H, \quad a \otimes b \mapsto \sum ab_{(0)} \otimes b_{(1)}$$

surjektiv, dann ist β bijektiv, also $A^{coH} \subset A$ eine H-Galois-Erweiterung und A ist Generator in $\mathcal{M}_A^H$.

(2) Ist H ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H$ und die natürliche Abbildung

$$\gamma : C \otimes H \to C \square_{\overline{C}} C, \quad c \otimes d \mapsto \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} d$$

injektiv, dann ist γ bijektiv und $C \to \overline{C}$ eine H-Kogalois-Erweiterung. C ist dann auch ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$.

Beweis. Im Fall (1) ist die Antipode S_H von H bijektiv wegen 1.5.10. Aus der Adjunktion in 1.1.6,(1), folgt, daß $H \otimes A$ ein Generator in $\mathcal{M}_A^H$ ist. Wegen 1.1.4 ist dann auch $A \otimes H$ ein Generator in $\mathcal{M}_A^H$, der von A in $\mathcal{M}_A^H$ erzeugt wird, da β surjektiv ist. Dann ist auch A ein Generator in $\mathcal{M}_A^H$ und β ist bijektiv.

Im Fall (2) ist H eine Frobenius-Algebra - insbesondere ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H$ - und daher endlich erzeugt über R (vgl. [54]). Die Antipode von H ist dann bijektiv (ebda) und wegen 2.1.4,(1), ist $H \otimes C$ ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$. Dann ist auch $C \otimes H$ (vgl. 2.1.5, (4)) ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$, der von C koerzeugt wird (man vgl. 2.2.10). Also ist C ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_H^C$ und γ ist bijektiv (wegen 2.2.11). $\boxed{qed}$

Jetzt können wir die Haupt-Ergebnisse aus [59] darstellen. Wir geben Beweise aus unserer modul-theoretischen Sicht.

3.2.2 Satz. *Sei R ein QF-Ring, $\iota : K \to H$ eine Einbettung von R-Hopfalgebren und K_R und H_R projektiv. Weiter sei die Antipode S_K von K bijektiv. Wir fassen H als Rechts-K-Modulkoalgebra auf und bezeichnen mit $\overline{H}$ die Faktorkoalgebra $H \otimes_K R$ der Rechts-Koinvarianten. Dann gilt:*

(1) Ist $K \otimes H$ ein Kogenerator in der Kategorie $\mathcal{M}_K^H$, so ist H koflach als Rechts-$\overline{H}$-Komodul.

(2) Ist K normal und $K \otimes H$ ein Kogenerator in der Kategorie $\mathcal{M}_K^H$, so ist H treu-koflach als Rechts-$\overline{H}$-Komodul.

(3) Ist K normal und K_R endlich erzeugt und projektiv, so ist H ein projektiver Generator in $\mathcal{M}_K$.

Beweis. (1) Ist $K \otimes H$ ein Kogenerator in der Kategorie $\mathcal{M}_K^H$, so folgt aus 2.2.10 mit der Injektivität von $\gamma : K \otimes H \to H \Box_{\overline{H}} H$ aus 3.1.4, daß H ein Kogenerator in $\mathcal{M}_K^H$ ist. Dann ist H schwach injektiv in $\mathcal{M}_{\overline{H}^*}$ und der Funktor $\mathrm{Hom}_{\overline{H}^*}(-, H)$ ist exakt. Auf der Menge der endlich erzeugten Objekte in $\mathcal{M}^{\overline{H}}$ gilt der funktorielle Isomorphismus $\mathrm{Hom}_{\overline{H}^*}(-, H) \simeq (-)^* \Box_{\overline{H}} H$, da R ein QF-Ring ist. Damit ist H koflach in $\mathcal{M}^{\overline{H}}$.

(2) Ist K normal, so ist $\overline{H}$ nach 3.1.3 eine Hopfalgebra. Nach [23, Theorem 2] zerfällt die Projektion $p : H \to \overline{H}$ in $\mathcal{M}^{\overline{H}}$, da H koflach in $\mathcal{M}^{\overline{H}}$ ist (nach (1)). Also ist H treu-koflach als Rechts-$\overline{H}$-Komodul.

(3) Nach [54] ist K eine Frobenius-Algebra und insbesondere starker Kogenerator in $\mathcal{M}_K$. Wie in 3.2.1 folgt, daß H ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_K^H$ ist. Mit (2) ist H demnach ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_K^H$ und in $\mathcal{M}^{\overline{H}}$ und wir können das Theorem 2.2.15 anwenden. Daraus folgt, daß H_K projektiv ist. Da K eine Frobenius-Algebra ist, zerfällt die Einbettung $\iota : K \to H$ in $\mathcal{M}_K$ und H erzeugt K in $\mathcal{M}_K$, ist also auch ein Generator in dieser Kategorie.

$\boxed{qed}$

Im Fall einer Hopf-Surjektion können wir den dualen Satz formulieren. Dabei nennen wir die Faktor-Hopfalgebra $L \simeq H/I$ von H normal, wenn das Hopfideal I normal ist im Sinne von 3.1.2.

3.2.3 Satz. *Sei R ein QF-Ring, $\pi : H \to L$ eine Surjektion von R-Hopfalgebren und H_R und L_R projektiv. Wir nehmen an, daß die Antipode*

S_L von L bijektiv ist. Wir fassen H als Rechts-L-Komodulalgebra auf und bezeichnen mit H^{coL} die Unteralgebra der Rechts-Koinvarianten $H\square_L R$ von H. Dann gilt:

(1) Ist $H \otimes L$ ein Generator in der Kategorie $\mathcal{M}_H^L$, so ist H flach als Rechts-H^{coL}-Modul.

(2) Ist L normal und $H \otimes L$ ein Generator in der Kategorie $\mathcal{M}_H^L$, so ist H treu-flach als Rechts-H^{coL}-Modul, falls die Antipode von H^{coL} bijektiv ist.

(3) Ist L normal und L_R endlich erzeugt und projektiv, so ist H treu-koflach in $\mathcal{M}^L$.

Beweis. (1) Nach 3.1.4 erzeugt H den Modul $H \otimes L$ in $\mathcal{M}_H^L$. Ist $H \otimes L$ ein Generator in $\mathcal{M}_H^L$, so ist damit auch H ein Generator in $\mathcal{M}_H^L$. Als solcher ist H flach über dem Endomorphismenring $\mathrm{Hom}_H^L(H, H)$, den wir in Kapitel 1 mit der Unteralgebra der Rechts-Koinvarianten H^{coL} identifiziert haben.

(2) Nach (1) ist H flach über der Unterhopfalgebra H^{coL} (vgl. 3.1.3). Hat diese eine bijektive Antipode, so folgt aus [68, Corollary 3.5], daß H treu-flach als Rechts-H^{coL}-Modul ist.

(3) Ist L_R eine endlich erzeugte und projektive Hopfalgebra über dem QF-Ring R, so ist L eine Ko-Frobenius-Hopfalgebra und als solche ein Generator in der Kategorie der L-Komoduln $\mathcal{M}^L$. Dann ist $H\otimes L$ über die Adjunktionen 1.1.6,(2), automatisch ein Generator in $\mathcal{M}_H^L$. Die Kategorie $\mathcal{M}_H^L$ ist in dieser Situation jedoch eine volle Modulkategorie isomorph zu $H^{op}\#L^*$-Mod (vgl. 1.2.1), und als Generator in einer vollen Modulkategorie ist H endlich erzeugt und projektiv über dem Endomorphismenring H^{coL}. Man beachte, daß H^{coL} wegen 3.1.3 eine Unterhopfalgebra in H ist. Die Einbettung $H^{coL} \to H$ ist eine Abbildung in der Kategorie $\mathcal{M}_{H^{coL}}^H$. Da H projektiv als Rechts-H^{coL}-Modul ist, ist jedes Objekt in $\mathcal{M}_{H^{coL}}^H$ projektiv in $\mathcal{M}_{H^{coL}}$ wegen [23, Theorem 4, Corollary 1]. Also zerfällt die Einbettung in $\mathcal{M}_{H^{coL}}$ und H ist endlich erzeugter projektiver Generator in $\mathcal{M}_{H^{coL}}$, insbesondere also treu-flacher Rechts-H^{coL}-Modul. Mit dem Argument in [65, 1.5] folgt, daß H treu-koflach in $\mathcal{M}^L$ ist. Dabei betrachten wir für $V \in {}^L\mathcal{M}$ die Isomorphismen $H \otimes_{H^{coL}} (H\square_L V) \simeq (H \otimes_{H^{coL}} H)\square_L V \simeq (H \otimes L)\square_L V \simeq H \otimes (L\square_L V) \simeq H \otimes V$. $\boxed{qed}$

Im "nicht normalen" Fall können wir allgemeiner die folgenden Resultate festhalten. Dabei ist zu beachten, daß wir uns damit von dem Studium der

Kategorien, wie wir sie in den Kapiteln 1 und 2 betrachtet haben, lösen, und uns nun allgemeinen Doi-Koppinen-Kategorien zuwenden (man vgl. hierzu [12]). Wir wollen die Resultate trotzdem erwähnen, ohne die dazu notwendige Theorie zu entwickeln, um einen Ausblick geben zu können.

3.2.4 Satz. *Sei R ein QF-Ring, $\iota : K \to H$ eine Einbettung von R-Hopfalgebren und K_R und H_R projektiv. Ist die K-Modul-Koalgebra $\overline{H} := R \otimes_K H$ R-projektiv und ein Generator in der Kategorie $\mathcal{M}^{\overline{H}}$, und besitzt die Unterhopfalgebra der Koinvarianten $H^{co\overline{H}}$ eine bijektive Antipode, so ist H treu-flach als $H^{co\overline{H}}$-Modul.*

Beweis. Die Beweisidee folgt 3.2.3. Ist $\overline{H}$ ein Generator in $\mathcal{M}^{\overline{H}}$, so wird $H \otimes \overline{H}$ ein Generator in der Kategorie $\mathcal{M}_H^{\overline{H}}(H)$ (siehe [12]). Wie in 3.1.4 wird dann auch H ein Generator in $\mathcal{M}_H^{\overline{H}}(H)$ und damit flach über der Unterhopfalgebra $H^{co\overline{H}}$. Hat diese eine bijektive Antipode, so folgt Treu-Flachheit von H über $H^{co\overline{H}}$ wieder aus [68, Corollary 3.5]. $\boxed{qed}$

Und dual dazu erhalten wir den Satz:

3.2.5 Satz. *Sei R ein QF-Ring, $\pi : H \to L$ eine Surjektion von R-Hopfalgebren und H_R und L_R projektiv. Ist die Unteralgebra der (Links-)Koinvarianten ${}^{coL}H$ ein Kogenerator in der Kategorie $\mathcal{M}_{{}^{coL}H}$, so ist H treu-koflach über $H/H({}^{coL}H)^+$.*

Beweis. Wir folgen der Argumentation in 3.2.2. Ist ${}^{coL}H$ ein Kogenerator in der Kategorie $\mathcal{M}_{{}^{coL}H}$, so wird $H \otimes {}^{coL}H$ ein Kogenerator in der Kategorie $\mathcal{M}_{{}^{coL}H}^{H}(H)$. Wie in 3.1.4 wird H ein Kogenerator in dieser Kategorie und damit koflach in $\mathcal{M}^{H/H({}^{coL}H)^+}$. Aber $H/H({}^{coL}H)^+$ ist eine Faktor-Hopfalgebra von H nach 3.1.3. Wegen [23, Theorem 2] zerfällt die Projektion in $\mathcal{M}^{H/H({}^{coL}H)^+}$ und H ist treu-koflach in $\mathcal{M}^{H/H({}^{coL})^+}$. $\boxed{qed}$

Wir können für eine endlich dimensionale Unterhopfalgebra K einer Hopfalgebra H in Hinblick auf die Frage aus der Einleitung, ob eine Hopfalgebra treu-flach über ihren endlich dimensionalen Unterhopfalgebren ist, den folgenden Satz formulieren. Der erste Teil ist interessant, da er eine Aussage macht über die Zuordnung, die in [68] studiert wird. Einer Links-Koideal-Unteralgebra $U \subset H$ wird dort das Koideal-Rechtssideal U^+H zugeordnet und einem Koideal-Rechtsideal J umgekehrt die Links-Koideal-Unteralgebra $H \square_{H/J} R$.

3.2.6 Satz. *Sei R Körper und K eine endlich-dimensionale Unterhopfalgebra der Hopfalgebra H. Mit $\pi : H \to \overline{H} := R \otimes_K H$ bezeichnen wir die Koalgebra-Projektion. Dann gilt:*

(1) Es gilt $K = H^{co\overline{H}}$.

(2) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

  (a) H ist treu-flach über K;

  (b) H ist frei als rechts K-Modul;

  (c) H ist Kogenerator in $\mathcal{M}^{\overline{H}}$;

Beweis. (1) Wir wissen aus (den Bemerkungen zu) 3.1.3, daß $H^{co\overline{H}}$ eine Unterhopfalgebra von H wird, die wir nun mit L bezeichnen. Man rechnet leicht nach, daß $K \subseteq L$ gilt, also können wir die Einbettung der Hopfalgebren $K \subseteq L$ untersuchen. Man rechnet weiter nach, daß die Koinvarianten $\overline{L} := L/LK^+$ trivial sind, also $\overline{L} = R$ gilt. Dann haben wir eine Äquivalenz von Kategorien $- \otimes_K R : \mathcal{M}_K^L \longrightarrow \mathcal{M}_R$, da K endlich dimensional ist. Die Einbettung $K \subseteq L$ ergibt einen Isomorphismus $K \simeq L$ in $\mathcal{M}_K^L$. Dann gilt schon $K = L = H^{co\overline{H}}$.

(2) Wegen [59, Theorem 2.4]) und [68, Corollary 3.5]) ist H genau dann treuflach über K, wenn H frei ist als Rechts-K-Modul. Wegen 3.1.4,(1) ist die natürliche Abbildung $\gamma : K \otimes H \to H \square_{\overline{H}} H$ immer injektiv. Ist H frei über K, so folgt aus 2.2.15, daß H ein Kogenerator in $\mathcal{M}^{\overline{H}}$ ist. Da K endlich dimensional ist, ist $K \otimes H$ ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_K^H$. Also ist wegen 3.1.4 auch H ein starker Kogenerator in $\mathcal{M}_K^H$. Ist H Kogenerator in $\mathcal{M}^{\overline{H}}$, so folgt aus 2.2.15, daß H über K projektiv - und dann auch treu-flach ist. $\boxed{qed}$

Literaturverzeichnis

[1] E. Abe, *Hopf Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge (1980).

[2] K. Al-Takhman, *Äquivalenzen zwischen Komodul-Kategorien von Koalgebren über Ringen*, Dissertation, Düsseldorf (1999).

[3] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø, *Galois actions on rings and finite Galois coverings*, Math. Scand. 65, 5-32 (1989).

[4] M. Barr, J. Beck, *Acyclic Models and Triples*, Proc. of the Conference on Categorical Algebra in La Jolla, 1965, Springer, New York (1966).

[5] M. Beattie, S. Dăscălescu, S. Raianu, *Galois Extensions for Co-Frobenius Hopf Algebras*, J. Algebra 198, 164-183 (1997).

[6] M. Beattie, S. Dăscălescu, L. Grünenfelder, C. Năsaăsescu, *Finiteness Conditions, Co-Frobenius Hopf Algebras, and Quantum Groups*, J. Algebra 200, 312-333 (1998).

[7] A.D. Bell, *Comodule algebras and Galois extensions relative to polynomial algebras, free algebras, and enveloping algebras*, Comm. Algebra 28, No.1, 337-362 (2000).

[8] T. Brzeziński, *On modules associated to coalgebra-Galois extensions*, J. Algebra 215, 290-317 (1999).

[9] T. Brzeziński, *Coalgebra-Galois extensions from the extension theory point of view.*, in Hopf Algebras and Quantum Groups, 47-68, S. Caenepeel und F. Van Oystaeyen (Ed.), Marcel Dekker, New York (2000).

[10] T. Brzeziński, *The Structure of Corings*, erscheint in Algebras and Representation Theory.

[11] S. Caenepeel, S. Raianu, F. Van Oystaeyen, *Induction and Coinduction for Hopf Algebras: Applications*, J. Algebra 165, 204-222 (1994).

[12] S. Caenepeel, S. Raianu, *Induction functors for the Doi-Koppinen unified Hopf modules* in "Abelian Groups and Modules", 73 - 94, A. Facchini und C. Menini (Ed.), Kluwer Acadademic Publishers, Dordrecht (1995).

[13] S. Caenepeel, G. Militaru, S. Zhu, *A Maschke Type Theorem for Doi-Hopf Modules and Applications*, J. Algebra 187, 388-412 (1997).

[14] S. Caenepeel, G. Militaru, S. Zhu, *Doi-Hopf Modules, Yetter-Drinfel'd Modules and Frobenius Type Properties*, Trans. Amer. Math. Soc. 349, 4311-4342 (1997).

[15] S. Caenepeel, *Brauer Groups, Hopf Algebras and Galois Theory*, K-Monographs in Mathematics, Kluwer Academic Publishers (1998).

[16] C. Calinescu, *Integrals for Hopf Algebras*, Dissertation, Universität Bucharest (1998).

[17] S.U. Chase, M.E. Sweedler, *Hopf Algebras and Galois Theory*, Lect. Notes in Mathematics 97, Springer (1996).

[18] L.N. Childs, *Taming Wild Extensions: Hopf Algebras ans Local Galois Module Theory*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 80 (2000).

[19] C. Chuanren, C. Huixiang, *Coactions, Smash Products, and Hopf Modules*, J. Algebra 167, 85-99 (1994).

[20] M. Cohen, S. Raianu, S. Westreich, *Semiinvariants for Hopf Algebra Actions*, Israel J. Math. 88, 279-306 (1994).

[21] S. Dascalescu, C. Năstăsescu, B. Torrecillas, *Co-Frobenius Hopf Algebras: Integrals, Doi-Koppinen Modules and Injective Objects*, J. Algebra 220 542-560 (1999).

[22] Y. Doi, *Homological Coalgebra*, J. Math. Soc. Japan 33 (1981).

[23] Y. Doi, *On the structure of relative Hopf modules*, Comm. Algebra 11, 243-255 (1983).

[24] Y. Doi, *Cleft comodule algebras and Hopf modules*, Comm. Algebra 12(10), 1155-1169 (1984).

[25] Y. Doi, *Algebras with total integrals*, Comm. Algebra 13, 2137-2159 (1985).

[26] Y. Doi, *Hopf Extensions of Algebras and Maschke Type Theorems*, Israel J. Math. 72, 99-108 (1990).

[27] Y. Doi, *Unifying Hopf-Modules*, J. Algebra 153, 373-385 (1992).

[28] S. Donkin, *On Projective Modules for Algebraic Groups,* J. London Math. Soc. 54, 75-88 (1996).

[29] V.G. Drind'feld, *Quantum Groups*, Proc. of the International Congress of Mathematicians, Volume I, 798-820, AMS, Berkeley (1987).

[30] J. Gómez Torrecillas, *Coalgebras and Comodules over a commutative ring*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 43, 591-603 (1998).

[31] J. Gómez Torrecillas, *Separable functors in corings*, preprint

[32] J. Gómez Torrecillas, C. Năstăsescu, *Quasi-co-Frobenius Coalgebras*, J. Algebra 174, 909-923 (1995). AMS, Berkeley (1987).

[33] J.C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, Academic Press (1987).

[34] I. Kaplansky, *Bialgebras*, Lecture Notes in Mathematics, University of Chicago, Chicago (1975).

[35] M. Koppinen, *Variations on the smash product with applications to group graded rings*, J. pure and appl. Algebra 104(1), 61-80 (1995).

[36] H.F. Kreimer, M. Takeuchi, *Hopf Algebras and Galois Extensions of an Algebra*, Indiana Univ. Math. J. 30, 675-692 (1981).

[37] B.J. Lin, *Semiperfect Coalgebras,* J. Algebra 49, 357-373 (1977).

[38] G. Liu, *Morita theorems for Hopf comodule coalgebras,* Chin. Sci. Bull. 41, Nr. 12, 969-972 (1996).

[39] A. Masuoka, *Quotient Theory of Hopf Algebras*, WO

[40] A. Masuoka, *Freeness of Hopf Algebras over Coideal Subalgebras*, Comm. Algebra 20(5), 1353-1373 (1992).

[41] A. Masuoka, D. Wigner, *Faithful Flatness of Hopf Algebras*, J. Algebra 170, 156-164 (1994).

[42] S.-H. Ng, *On the projectivity of module coalgebras*, Proc. Am. Math. Soc. 126, Nr. 11, 3191-3198 (1998).

[43] C. Menini, G. Militaru, *Integrals, quantum Galois extensions and the affineness criterion for quantum Yetter-Drinfel'd modules*, arxiv-preprint math.QA/0106067 (2000) erscheint in J. Algebra.

[44] C. Menini, D. Ştefan, *Descent Theory and Amitsur Cohomoly of Triples*, preprint (2000).

[45] C. Menini, A. Seidel, B. Torecillas, R. Wisbauer, *A-H-bimodules and equivalences*, erscheint in Comm. Algebra (2001).

[46] C. Menini, B. Torrecillas, R. Wisbauer, *Strongly Rational Comodules and Semiperfect Hopf Algebras over QF Rings*, J. pure and appl. Algebra 155, No.2-3, 237-255 (2001).

[47] C. Menini, M. Zuccoli, *Equivalence Theorems and Hopf-Galois Extensions*, J. Algebra 194, 245-274 (1997).

[48] G. Militaru, *Functors for relative Hopf modules. Applications.*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 41, 497 - 512 (1996).

[49] S. Montgomery, *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, American Mathematical Society (1993).

[50] U. Oberst, H.-J. Schneider, *Untergruppen formeller Gruppen von endlichem Index*, J. Algebra 31, 10-44 (1974).

[51] U. Oberst, *Affine Quotientenschemata nach affinen, algebraischen Gruppen und induzierte Darstellungen*, J. Algebra 44, 503-538 (1977)

[52] F. Van Oystaeyen, Y. H. Zhang, *Endomorphism Rings of H-comodule Algebras*, Bull. Belg. Math. Soc. 3, 125-131 (1996).

[53] F. Van Oystaeyen, Y. H. Zhang, Y.H. Xu, *Inductions and Coinductions for Hopf extensions*, Science in China (Series A), Vol. 39(3), 246-263 (1996).

[54] B. Pareigis, *When Hopf Algebras are Frobenius Algebras*, J. Algebra 18, 588-596 (1971).

[55] D.E. Radford, *Finiteness Conditions for a Hopf Algebra with a Nonzero Integral,* J. Algebra 46, 189-195 (1977).

[56] P. Schauenburg, *Faithful Flatness over Hopf Subalgebras - Counterexample*, in "Interactions between ring theory and representations of algebras", 331-344, Proc. conf. Murcia, Spain, F. van Oystaeyen and M. Saorin (Ed.), Marcel Dekker (2000).

[57] P. Schauenburg, *Doi-Koppinen Hopf modules versus entwined modules*, New York J. Math. 6, 325-329 (2000).

[58] H.-J. Schneider, *Principal homogenous spaces for arbitrary Hopf algebras*, Israel J. Math. 72, 167-195 (1990).

[59] H.-J. Schneider, *Some remarks on exact sequences of Quantum Groups*, Comm. Algebra 21 (9), 3337-3357 (1993).

[60] H.-J. Schneider, *Lectures on Hopf Algebras*, Lecture Notes, Universidad Nacional de Cordoba (1994).

[61] Y. Sommerhäuser, *On Kaplansky's conjectures*, preprint gk-mp-9806/55 (1998).

[62] J.B. Sullivan, *The uniqueness of integrals for Hopf algebras and some existence theorems of integrals for commutative Hopf algebras*, J. Algebra 19, 426-440 (1971).

[63] M.E. Sweedler, *Integrals for Hopf Algebras,* Ann. Math. 89, 323-335 (1969).

[64] M.E. Sweedler, *Hopf Algebras,* W.A. Benjamin, Inc., (1969).

[65] M. Takeuchi, *A note on geometrically reductive groups*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 20, 387-396 (1973).

[66] M. Takeuchi, *Morita theorems for categories of comodules*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 24, 629-644 (1977).

[67] M. Takeuchi, *Relative Hopf Modules - Equivalences and Freeness Criteria*, J. Algebra 60, 452-471 (1979).

[68] M. Takeuchi, *Quotient Spaces for Hopf Algebras*, Comm. Algebra 22(7), 2503-2523 (1994).

[69] K.-H. Ulbrich, *Galois-Erweiterungen von nicht-kommutativen Ringen*, Comm. Algebra 10(6), 655-672 (1982).

[70] B. Wilke, *Zur Modulstruktur von Ringen über Schiefgruppenringen*, Algebra-Berichte 73, Jg. 21, München (1994).

[71] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Reading (1991).

[72] R. Wisbauer, *Modules and Algebras: Bimodule structure and group actions on algebras*, Pitman Monographs PAM 81, Addison Wesley Longman, Essex (1996).

[73] R. Wisbauer, *Introduction to coalgebras and comodules*, Lecture notes, Düsseldorf (1996).

[74] R. Wisbauer, *Semiperfect coalgebras over rings*, Algebras and Combinatorics, ICA'97, Hong Kong, K.P. Shum, E. Taft, Z.X. Wan (ed), Springer Singapore, 487-512 (1999).

[75] R. Wisbauer, *Weak Corings*, erscheint in J. Algebra (2001).

[76] Y. Zhang, *Hopf Frobenius Extensions of Algebras*, Comm. Algebra 20(7), 1907-1915 (1992).