

# DUALITÄTSSÄTZE FÜR HOPF-ALGEBREN ÜBER RINGEN

Inaugural-Dissertation  
zur  
Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von  
JAWAD Y. ABUHLAIL  
aus Dora, Palästina

Düsseldorf  
2001

Gedruckt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf und Unterstützung des Deutschen Akademischen Austauschdienstes.

1. Referent: ..... Prof. Dr. Robert Wisbauer

2. Referent: ..... Prof. Dr. Otto Kerner

Tag der mündlichen Prüfung 16.7.2001

Diese Arbeit widme ich  
dem Andenken an meinen Vater  
**YOUNES ABUHLAIL**  
(1938 -1992)



# Inhaltsverzeichnis

|                                                                |            |
|----------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Einleitung</b>                                              | <b>1</b>   |
| <b>1 Grundlagen</b>                                            | <b>7</b>   |
| 1.1 Hopf-Algebren . . . . .                                    | 7          |
| 1.2 Komoduln . . . . .                                         | 12         |
| <b>2 Messende <math>\alpha</math>-Paare</b>                    | <b>15</b>  |
| 2.1 $\alpha$ -Paare . . . . .                                  | 15         |
| 2.2 Rationale Darstellungen . . . . .                          | 27         |
| 2.3 Induktionsfunktoren für $\mathcal{P}_m^\alpha$ . . . . .   | 43         |
| 2.4 Stetige duale Koalgebren . . . . .                         | 56         |
| 2.5 Hopf-Paare . . . . .                                       | 65         |
| 2.6 Klassische Dualitäten . . . . .                            | 72         |
| <b>3 Dualität zwischen den Moduln und den Komoduln</b>         | <b>79</b>  |
| 3.1 Duale Komoduln . . . . .                                   | 79         |
| 3.2 Stetige duale Komoduln . . . . .                           | 84         |
| 3.3 Koreflexive Komoduln . . . . .                             | 87         |
| 3.4 Duale Doi-Koppinen-Hopf-Moduln . . . . .                   | 93         |
| 3.5 Dualitätssätze für die verschränkten Produkte . . . . .    | 100        |
| <b>4 Folgen über Moduln: ein koalgebraischer Aspekt</b>        | <b>107</b> |
| 4.1 Vorbereitung . . . . .                                     | 107        |
| 4.2 Linear rekursive Folgen über noetherschen Ringen . . . . . | 113        |
| 4.3 Linear rekursive Folgen über artinschen Ringen . . . . .   | 115        |
| <b>A Die linear schwache Topologie</b>                         | <b>121</b> |
| <b>Literaturverzeichnis</b>                                    | <b>127</b> |
| <b>Index</b>                                                   | <b>137</b> |



# Einleitung

Der Begriff **Hopf-Algebra** geht auf eine Arbeit von H. Hopf über Mannigfaltigkeiten [Hop41] zurück und spielt eine große Rolle in weiten Bereichen der Mathematik, etwa in der Algebraischen Topologie, der Theorie der Affinen Algebraischen Gruppen und Quantengruppen und in der Mathematischen Physik. Während die grundlegenden Arbeiten (etwa [Swe69], [Kap75], [Abe80]) Hopf-Algebren über Körpern betrachtet haben, gewinnen Hopf-Algebren über beliebigen (*kommutativen*) Ringen in letzter Zeit zunehmend an Interesse. Die Motivation dafür ist nicht das Interesse an Verallgemeinerung als Selbstzweck, sondern ist durch die vielfältigen Anwendungen (z.B. in der Kodierungstheorie) bedingt, die ein besseres Verständnis für die modultheoretischen Aspekte der Theorie der Hopf-Algebren über beliebigen Ringen erfordern.

Ziel dieser Arbeit ist es, Dualitätssätze aus der Theorie der Hopf-Algebren über Körpern auf beliebige Grundringe zu erweitern. Dazu zählen insbesondere die *klassischen Dualitätssätze* zwischen den Gruppen und den (kommutativen) Hopf Algebren (siehe Satz II) und Dualitätssätze für die sogenannten *verschränkten Produkte* (siehe Satz III). Die erzielten Ergebnisse werden wir u.a. auf konkrete Beispiele aus der Theorie der Affinen Algebraischen Gruppen, der Gruppen-Ringe und der Linear Rekursiven Folgen anwenden. Insbesondere verfeinern und erweitern wir die in [AG-TW2000] und [AG-TL2001] erzielten Ergebnisse.

$R$  sei ein kommutativer Ring. Wir betrachten  $R$  immer als einen linear topologischen Ring mit der *diskreten Topologie*. Jeder  $R$ -Koalgebra  $C$  ist eine *duale*  $R$ -Algebra zugeordnet, nämlich  $C^* := \text{Hom}_R(C, R)$  mit dem sogenannten *Konvolutionsprodukt*. Auch wenn  $R$  ein *Körper* ist, die Multiplikation einer  $R$ -Algebra  $A$  induziert im Allgemeinen keine  $R$ -Koalgebra-Struktur auf  $A^* := \text{Hom}_R(A, R)$ . Ist  $R$  ein Körper, dann enthält  $A^*$  jedoch eine *größte*  $R$ -Koalgebra, die sogenannte **stetige duale  $R$ -Koalgebra**

$$A^\circ := \{f \in A^* \mid \exists I \triangleleft A, \text{ so dass } A/I \text{ e.e. als } R\text{-Modul, und } f(I) = 0 \}.$$

Die Theorie der *dualen Paare*, wie  $(C^*, C)$  und  $(A, A^\circ)$ , über Körpern ist gut entwickelt, doch lassen sich die über Körpern vorliegenden *Dualitätsbeziehungen* (siehe Paragraph 2.2) nicht ohne weiteres auf beliebige Grundringe übertragen.

Ist  $C$  eine *flache*  $R$ -Koalgebra, dann ist die Kategorie der  $C$ -Rechtskomoduln eine Grothendieck-Kategorie (siehe z.B. [Wis99]). In [G-T98] hat J. Gómez-Torrecillas die sogenannten **rationale Systeme** studiert (im Körper-Fall wurden diese u.a. von D. Radford

[Rad73] betrachtet). Für jedes *rationale System*  $(A, C)$  hat er Kategorie-Isomorphismen

$$\mathcal{M}^C \simeq \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}) = \sigma[{}_AC] \quad (1)$$

erzielt, wobei  $\mathcal{M}^C$  die Kategorie der  $C$ -Rechtskomoduln,  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  die Kategorie der  **$C$ -rationalen  $A$ -Linksmoduln** und  $\sigma[{}_AC]$  die Kategorie der  **$C$ -suberzeugten  $A$ -Linksmoduln** sind. Für den Spezialfall  $A = C^*$  entsprechen seine Voraussetzungen die *Projektivität* von  ${}_RC$  und man gewinnt die -unabhängig davon- von R. Wisbauer [Wis99] erhaltenen Ergebnisse.

In Zusammenarbeit mit J. Gómez-Torrecillas und J. Lobillo [AG-TL2001] haben wir die Voraussetzungen auf die rationalen Systeme abgeschwächt, die sogenannte  $\alpha$ -Bedingung eingeführt und für jedes *rationale System*  $(A, C)$  die Kategorie-Isomorphismen (1) erzielt. Im Spezialfall  $A = C^*$  entsprechen unsere Voraussetzungen die *lokal Projektivität* von  ${}_RC$  im Sinne von B. Zimmermann-Huignes [Z-H76].

In der vorliegenden Arbeit erweist sich die  $\alpha$ -Bedingung bei den Dualisierungen über *beliebigen* Ringen als vorteilhaft:

**Die Kategorie der messenden  $\alpha$ -Paare.** Betrachte ein Paar  $P = (V, W)$  aus  $R$ -Moduln  $V, W$  mit einer  $R$ -bilinearen Form

$$\alpha : V \times W \longrightarrow R, \quad (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle .$$

Ist für jeden  $R$ -Modul  $M$  die induzierte  $R$ -lineare Abbildung

$$\alpha_M^P : M \otimes W \longrightarrow \text{Hom}_R(V, M), \quad m \otimes w \longmapsto [v \longmapsto m \langle v, w \rangle]$$

injektiv, dann sagen wir  $P$  erfüllt die  $\alpha$ -Bedingung (oder  $P$  ist ein  $\alpha$ -Paar).

Wir sagen ein  $R$ -Modul  $W$  erfüllt die  $\alpha$ -Bedingung, falls  $(W^*, W)$  ein  $\alpha$ -Paar ist. G. Garfinkel hat diese Moduln in [Gar76] **universell torsionsfrei** genannt. In [Z-H76] hat B. Zimmermann-Huignes diese durch die dagnannten **lokal projektiven** Moduln charakterisiert (siehe Lemma 2.1.15).

Ein **messendes Paar**  $P = (A, C)$  besteht aus einer  $R$ -Algebra  $A$  und einer  $R$ -Koalgebra  $C$ , so dass die induzierte  $R$ -lineare Abbildung  $\kappa_P : A \longrightarrow C^*$  ein Algebra-Morphismus ist. Sind  $(A, C), (B, D)$  messende Paare, so besteht ein **Morphismus von messenden Paaren**  $(\xi, \theta) : (B, D) \longrightarrow (A, C)$  aus einem Algebra-Morphismus  $\xi : A \longrightarrow B$  und einem Koalgebra-Morphismus  $\theta : D \longrightarrow C$ , so dass

$$\langle a, \theta(d) \rangle = \langle \xi(a), d \rangle \quad \text{für alle } a \in A \text{ und } d \in D.$$

Mit  $\mathcal{P}_m$  bezeichnen wir die Kategorie der messenden Paare mit den oben beschriebenen Morphismen und mit der üblichen Komposition von Paaren. Mit  $\mathcal{P}_m^\alpha \subset \mathcal{P}_m$  bezeichnen wir die *volle* Unterkategorie der messenden  $\alpha$ -Paare. Wir nennen eine  $R$ -Koalgebra  $C$  eine  **$\alpha$ -Koalgebra**, falls  $(C^*, C)$  ein  $\alpha$ -Paar ist (gleichbedeutend, wenn  ${}_RC$  lokal projektiv ist). Ist  $A$  eine  $R$ -Algebra (bzw. eine  $R$ -Bialgebra, eine  $R$ -Hopf-Algebra), so dass die Klasse der

$R$ -koendlichen  $A$ -Ideale ein Filter ist und  $(A, A^\circ)$  die  $\alpha$ -Bedingung erfüllt, so nennen wir  $A$  eine  $\alpha$ -**Algebra** (bzw.  $\alpha$ -**Bialgebra**,  $\alpha$ -**Hopf-Algebra**). ■

Mit Hilfe von [Wis] zeigen wir, dass unsere Voraussetzungen in [AG-TL2001, Theorem 2.11] notwendig sind, und charakterisieren die messenden  $\alpha$ -Paare:

**Satz I.** (Satz 2.2.16) *Für jedes messende Paar  $P = (A, C)$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i)  $P$  erfüllt die  $\alpha$ -Bedingung, also ist  $P \in \mathcal{P}_m^\alpha$ ;
- (ii)  ${}_R C$  ist lokal projektiv und  $\kappa_P(A) \subseteq C^*$  ist dicht (bzgl. der endlichen Topologie);
- (iii) es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^C &\simeq \text{Rat}^C({}_A \mathcal{M}) = \sigma[{}_A C] \\ &\simeq \text{Rat}^C({}_{C^*} \mathcal{M}) = \sigma[{}_{C^*} C]. \end{aligned} \quad (2)$$

Die Kategorie-Isomorphismen (2) zeigen, dass für  $(A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  die Kategorie der  $C$ -Rechtskomoduln eine Grothendieck-Kategorie vom Typ  $\sigma[M]$  ist, und wir können die gut entwickelte Theorie dieser Kategorien (siehe [Wis88]) zur Betrachtung von Fragestellungen in der Kategorie der  $C$ -Rechtskomoduln heranziehen.

Als Anwendung von den Kategorie-Isomorphismen (2) führen wir im Paragraphen 2.3 zu jedem Morphismus in der Kategorie  $\mathcal{P}_m^\alpha$  einen *Induktionsfunktork* ein:

**Induktionsfunktoren.** Seien  $P = (A, C), Q = (B, D) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  und  $(\xi, \theta) : (B, D) \longrightarrow (A, C)$  ein Morphismus in  $\mathcal{P}_m^\alpha$ . Dann bekommen wir einen *Induktionsfunktork*

$$\text{Ind}_P^Q(-) := \text{Sp}(\sigma[{}_B D], \text{Hom}_{A-}(B, -)) : \sigma[{}_A C] \longrightarrow \sigma[{}_B D]. \quad (3)$$

Außerdem induziert der Koalgebra-Morphismus  $\theta : D \longrightarrow C$  einen kovarianten Funktor, den *Koinduktionsfunktork*

$$-\square_C D : \mathcal{M}^C \longrightarrow \mathcal{M}^D$$

(siehe 2.3.23). Bezeichne  $A^e$  die *Einhüllende-Algebra* von  $A$ , so bekommen wir Funktor-Isomorphismen

$$\text{Ind}_P^Q(-) \simeq -\square_C D \simeq \text{Hom}_{A^e-}(A, - \otimes_R D) \quad (4)$$

(vgl. Proposition 2.3.12 und Satz 2.3.27). ■

Die Kategorie  $\mathcal{P}_m$  umfaßt als Unterkategorien sowohl die Kategorie der Hopf-Paare  $\mathcal{P}_{Hop}$ , die M. Takeuchi in [Tak77] beim Studium der formalen Gruppen-Schemata eingeführt hat, als auch die von S. Majid betrachtete Kategorie der **Bialgebra-Paare**  $\mathcal{P}_{Big}$  [Maj90]. Beide Kategorien haben sich beim Studium der affinen algebraischen Gruppen bzw. Quantengruppen sowohl über Körpern, als auch für *spezielle Konstruktionen* über beliebigen Grundringen als nützlich erwiesen (siehe auch [FRT89], [Tak92], [vDae93]). Im Paragraphen 2.5 führen wir die *vollen* Unterkategorie der  $\alpha$ -Bialgebra-Paare  $\mathcal{P}_{Big}^\alpha \subset \mathcal{P}_{Big}$  und die Unterkategorie der  $\alpha$ -Hopf-Paare  $\mathcal{P}_{Hopf}^\alpha \subset \mathcal{P}_{Hopf}$  ein und betrachten Dualitätssätze in

diesen Kategorien. Dabei spielt die folgende Aussage eine große Rolle, die als Verallgemeinerung von der entsprechenden Aussage von C. Chen und W. Nichols [CN90, Lemma 3] anzusehen ist:

**Lemma.** ([AG-TW2000], [AG-TL2001]) Sei  $R$  noethersch. Eine  $R$ -Algebra  $A$  ist genau dann eine  $\alpha$ -Algebra, wenn  $A^\circ \subset R^A$  rein ist (im Sinne von Cohn). Ist  $A$  eine  $\alpha$ -Algebra (bzw.  $\alpha$ -Bialgebra,  $\alpha$ -Hopf-Algebra), dann ist  $A^\circ$  eine  $R$ -Koalgebra (bzw.  $R$ -Bialgebra,  $R$ -Hopf-Algebra). Ist  $R$  außerdem erblich, dann ist jede  $R$ -Algebra eine  $\alpha$ -Algebra. ■

Im Paragraphen 2.5 betrachten wir die Induktionsfunktoren in der Kategorie der  $\mathcal{P}_{Hopf}^\alpha$ . Die wichtigsten Beispiele von solchen Funktoren sind die *Induktionsfunktoren* in der Theorie der Affinen Algebraischen Gruppen bzw. der Quantengruppen, die bei der Betrachtung von den sogenannten induzierten Darstellungen auftauchen (siehe [CPS77], [Don80], [Sch90], [PW91], [APW91]).

Mit Hilfe der Aussagen in [Jan87, Chapter 2] bekommen wir im Paragraphen 2.6 die folgende Version des *klassischen Dualitätssatzes* zwischen den Gruppen und den kommutativen Hopf-Algebren (siehe [Mon93, 9.3] für den Körper-Fall):

**Satz II. Klassischer Dualitätssatz** (Satz 2.6.12, Satz 2.6.18). Bezeichnet  $\mathbf{CHopf}_R$  die Kategorie der kommutativen  $R$ -Hopf-Algebren und  $\mathbf{Gr}$  die Kategorie der Gruppen. Für jede Gruppe  $G$  sei  $RG$  der Gruppen-Ring von  $G$ .

(1) Ist  $R$  noethersch und erblich, so gibt es eine Dualität zwischen  $\mathbf{Gr}$  und  $\mathbf{CHopf}_R$  mittels der rechts adjungierten kontravarianten Funktoren

$$\Phi : \mathbf{Gr} \longrightarrow \mathbf{CHopf}_R, G \longmapsto (RG)^\circ \text{ und } \Psi : \mathbf{CHopf}_R \longrightarrow \mathbf{Gr}, H \longmapsto \text{Alg}_R(H, R).$$

(2) Sei  $G$  ein affines Gruppen-Schema mit Koordinaten-Ring  $R(G)$  und bezeichne mit  ${}_G\mathcal{M}$  die Kategorie der  $G$ -Linksmoduln. Ist  $R(G)$  lokal projektiv in  ${}_R\mathcal{M}$ , dann haben wir Kategorie-Äquivalenzen

$${}_G\mathcal{M} \approx \mathcal{M}^{R(G)} \simeq \text{Rat}^{R(G)}({}_{R(G)*}\mathcal{M}) = \sigma[{}_{R(G)*}R(G)]. \quad (5)$$

Bezeichne  $hy(G)$  die Hyperalgebra von  $G$ , dann ist  $\mathfrak{G} := (hy(G), R(G)) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  genau dann, wenn  ${}_R R(G)$  lokal projektiv und  $G$  zusammenhängend sind.

Die im zweiten Kapitel entwickelten Techniken benutzen wir im dritten Kapitel zunächst bei der Betrachtung einer natürlichen Fragestellung beim Studium von Dualitäten, nämlich die *(Ko)Reflexivität* von  $\text{Ko}(\text{Moduln})$  und  $\text{Ko}(\text{Algebren})$ . Ist  $P = (A, C)$  ein messendes Paar, so induziert  $P$  auf  $A$  zwei Topologien, die sogenannte **linear schwache Topologie**  $A[\mathfrak{T}_{ts}(C)]$  (siehe [Köt66]) und die  $C$ -adische Topologie  $\mathcal{T}_C(A)$  (siehe [AW97], [Ber94]). Wir bemerken, dass die zwei Topologien übereinstimmen und benützen die Kenntnisse über diese Topologien beim Studium der Kategorie der  $C$ -Komoduln (im Anhang sind die Eigenschaften der linear schwachen Topologie *über beliebigen Ringen* bereitgestellt). Im Paragraphen 3.3 geben wir sowohl algebraische als auch topologische Charakterisierungen für

die (ko)reflexiven (Ko)Algebren und (Ko)Moduln. Dabei verallgemeinern wir u.a. Resultate aus [Taf72], [Taf77], [Rad73] und [Wit79] vom Körper-Fall auf beliebige Grundringe.

Im Paragraphen 3.4 erweitern wir die endlichen Versionen der Dualitätssätze für die *dualen Doi-Koppinen-Hopf-Moduln* und die *cleft H-Erweiterungen* auf eine nicht endliche Situation (siehe Propositionen 3.4.9, 3.4.14).

Im Paragraphen 3.5 beschäftigen wir uns mit Dualitätssätzen für die *verschränkten Produkte*, die unabhängig von R. Blattner, M. Cohen, S. Montgomery [BCM86] und Y. Doi, M. Takeuchi [DT86] eingeführt wurden. Die sogenannten *Dualitätssätze* für verschränkte Produkte haben ihre Wurzeln u.a. in der Theorie der Gruppen-Ringe, etwa dem Cohen-Montgomery-Dualitätssatz [CM84].

In [BM85] haben R. Blattner und S. Montgomery den Cohen-Montgomery-Dualitätssatz auf einen nicht endlichen Dualitätssatz für die Wirkungen von Hopf-Algebren auf Algebren über Körpern erweitert und dabei eine endliche Version, die Van den Bergh [vdB84] erzielte, verallgemeinert. Dieser, so genannte *Blattner-Montgomery-Dualitätssatz*, wurde in [CN90] von C. Chen und W. Nichols auf Dedekind-Ringe übertragen und in [AG-TL2001, Theorem 3.2] auf beliebige noethersche Ringe erweitert. Die folgende Aussage erweitert Dualitätssätze von C. Chen für das verschränkte Produkt  $A \#_{\sigma} H$  über Grundkörper [Che93, Corollary 4] und über Dedekind-Ringe [Che93, Corollary 5] auf beliebige *noethersche* Ringe unter sehr schwachen Bedingungen:

**Satz III.** (*Satz 3.5.14*) Seien  $R$  noethersch,  $H$  eine  $R$ -Hopf-Algebra mit bijektiver Antipode,  $U \subset H^*$  eine  $H$ -Rechtsuntermodul-Algebra und  $A \#_{\sigma} H$  ein  $H$ -verschränktes Produkt mit invertierbarem Kozykel. Nehme außerdem an, dass  $U$  die **RL-Bedingung** (3.20) bzgl.  $H$  und zwei weitere Bedingungen (3.21, 3.22) erfüllt. Ist  $U \subset R^H$  ( $A \otimes_R H$ )-rein (z.B. falls  $H$  eine  $\alpha$ -Hopf-Algebra und  $U \subset H^{\circ}$  eine  $R$ -Unterbialgebra sind), dann gibt es einen  $R$ -Algebra-Isomorphismus

$$(A \#_{\sigma} H) \# U \simeq A \otimes_R (H \# U).$$

Als Korollar von Satz III (mit  $\sigma$  trivial) erweitern wir die von C. Chen [Che93] verbesserte Version des Blattner-Montgomery-Dualitätssatzes auf beliebige noethersche Ringe und verfeinern damit [AG-TL2001, Theorem 3.2]:

**Satz IV.** (*Folgerung 3.5.17*) Seien  $R$  noethersch,  $H$  eine  $R$ -Hopf-Algebra mit bijektiver Antipode und  $U \subset H^{\circ}$  eine  $R$ -Unterbialgebra. Sei  $A$  eine  $H$ -Linksmodul-Algebra, so dass  $A$   $U$ -lokal-endlich ist (im Sinne von Blattner-Montgomery [BM85]). Erfüllt  $U$  die RL-Bedingung (3.20) bzgl.  $H$ , so haben wir einen Algebra-Isomorphismus

$$(A \# H) \# U \simeq A \# (H \otimes_R U).$$

In letzter Zeit gewinnen die *linear rekursiven Folgen* über Ringen und Moduln bei Betrachtungen in der Kodierungstheorie mehr an Interesse (siehe [HN99], [KKMMN99]). Im letzten Kapitel benutzen wir unsere Ergebnisse über die dualen Koalgebren und die dualen Komoduln um Resultate von E. Taft et. al. ([PT80], [LT90], [Taf95]) bzw. L. Grünenfelder

et. al. ([GO93], [GK97]) über die linear rekursiven Folgen vom Körper-Fall auf beliebige *noethersche* (bzw. *artinsche*) Ringe zu verallgemeinern. Wir verallgemeinern auch Aussagen von A. Mikhalev et. al. etwa [KKMN95, 14.15]:

**Satz V.** *Bezeichne mit  $\mathcal{L}^{<k>}$  (bzw.  $\mathbf{D}^{<k>}$ ,  $\mathbf{R}^{<k>}$ ) den  $R[x_1, \dots, x_k]$ -Modul der linear rekursiven  $(k)$ -Folgen, (bzw. der nicht-ausgearteten  $(k)$ -Folgen, der reversiblen  $(k)$ -Folgen).*

*(1) Ist  $R$  noethersch, dann ist  $\mathcal{L}^{<k>}$  eine  $R$ -Bialgebra mit dem Hadamard Produkt und eine  $R$ -Hopf-Algebra mit dem Hurwitz-Produkt.*

*(2) Sei  $R$  artinsch. Dann ist  $\mathbf{R}^{<k>}$  eine  $R$ -Hopf-Algebra und  $\mathbf{D}^{<k>}$  ist eine  $R$ -Bialgebra mit dem Hadamard-Produkt. Außerdem gibt es einen  $R$ -Bialgebra-Isomorphismus*

$$\mathcal{L}^{<k>} \simeq \mathbf{D}^{<k>} \oplus \mathbf{R}^{<k>}.$$

Es sei erwähnt, dass die in dieser Arbeit entwickelten Techniken und Mittel auch die Betrachtung der Kategorie der Komoduln eines Korings (d.h. eine “Koalgebra” über einem *nicht notwendig kommutativen* Ring) ermöglichen (siehe [Abu]). Unabhängig davon sind auch J. Gómez-Torrecillas und J. Lobillo zu ähnlichen Ergebnissen gekommen ([G-TL]).

\* \* \* \* \*

Herrn Prof. Dr. R. Wisbauer, unter dessen Anleitung diese Dissertation entstand, bin ich zu größtem Dank verpflichtet. Ich danke ihm nicht nur für die wertvollen Anregungen bei der Anfertigung dieser Arbeit, sondern auch für seine stete Förderung und Betreuung.

Sehr zu schätzen weiß ich den Deutschen Akademischen Austauschdienst (DAAD) für die großzügige finanzielle Unterstützung, durch die das Forschungsprojekt erst möglich wurde.

Herzlich danken möchte ich auch:

Herrn Prof. Dr. O. Kerner für die Übernahme des Koreferates,  
dem Mathematischen Institut der *Heinrich-Heine Universität*  
(Düsseldorf) für die freundliche Arbeitsatmosphäre,

Herrn Prof. Dr. J. Gómez-Torrecillas und Herrn Dr. J. Lobillo von  
*Universidad de Granada* für fruchtbare Diskussionen und wertvolle  
Anregungen,

dem Programm *Acciones Integradas*, durch das die Zusammenarbeit  
mit den spanischen Kollegen gefördert wurde,

Herrn Ch. Lomp, der sich Zeit genommen hat, eine vorläufige Version  
dieser Arbeit durchzulesen und zu korrigieren,  
verschiedenen Mathematikern, die mir durch Zusenden von Arbeiten  
und Preprints geholfen haben.

Natürlich geht mein besonderer Dank an meine Mutter und meine Geschwister, *Umayya*, *Abla*, *Basel*, *Maisa'* und *Mu'taz*, für ihre ständige Unterstützung. Meiner Frau *Lubna* bin ich überaus für ihr Verständnis und die ständige Ermutigung dankbar. Meine lieben Kinder *Younes* und *Shatha*: Ich hoffe wir werden in Zukunft mehr Zeit gemeinsam verbringen.

# Kapitel 1

## Grundlagen

In diesem Kapitel stellen wir die benötigten Begriffe und Aussagen aus der Theorie der Hopf-Algebra bereit. Ohne besonderen Hinweis werden wir die in [Swe69], [Abe80] und [Mon93] entwickelten Begriffe und Notationen verwenden. Die nicht-definierten Begriffe aus der Ring- bzw. Modultheorie findet man u.a. in [Wis88].

Wenn nicht anders vermerkt ist, bezeichne  $R$  einen assoziativen *kommutativen* Ring mit  $1_R \neq 0_R$ . Mit einem  $R$ -Modul  $M$  meinen wir einen *unitären*  $R$ -Bimodul mit  $rm = mr$  für alle  $r \in R, m \in M$ . Die Kategorie der  $R$ -Moduln wird mit  ${}_R\mathcal{M}$  bezeichnet. Mit  $-\otimes-$  bzw.  $\text{Hom}(-, -)$  meinen wir  $-\otimes_R-$  bzw.  $\text{Hom}_R(-, -)$ . Für jeden  $R$ -Modul  $M$  bezeichne  $M \otimes R \xrightarrow{\vartheta_M^r} M$  und  $R \otimes M \xrightarrow{\vartheta_M^l} M$  die kanonischen Isomorphismen. Für  $M_1, \dots, M_n \in {}_R\mathcal{M}$  und  $\varpi \in S_n$  bezeichne  $M_1 \otimes \dots \otimes M_n \xrightarrow{\tau_\varpi} M_{\varpi(1)} \otimes \dots \otimes M_{\varpi(n)}$  den kanonischen Isomorphismus. Insbesondere setzen wir  $\tau := \tau_{(12)}$ .

Wir betrachten  $R$  immer als einen linear topologischen Ring mit der diskreten Topologie. Wenn nicht anders vermerkt ist, betrachten wir für jeden  $R$ -Modul  $W$  den *dualen*  $R$ -Modul  $W^* := \text{Hom}_R(W, R)$  als einen linear topologischen  $R$ -Modul mit der endlichen Topologie (siehe A.0.1). Für jeden  $R$ -Modul  $E$  und jede Menge  $\Lambda$  identifizieren das direkte Produkt  $E^\Lambda$  mit dem  $R$ -Modul *aller* Abbildungen von  $\Lambda$  nach  $E$ .

Einen  $R$ -Modul  $M$  nennen wir **endlich**, falls  $M$  endlich erzeugt und projektiv in  ${}_R\mathcal{M}$  ist. Ist  $A$  eine  $R$ -Algebra und ist  $M$  ein  $A$ -Links- bzw.  $A$ -Rechtsmodul, dann nennen wir einen  $A$ -Untermodul  $N \subset M$   **$R$ -koendlich**, falls  $M/N$  e.e. in  ${}_R\mathcal{M}$  ist.

### 1.1 Hopf-Algebren

Der Begriff *Hopf-Algebra* geht auf eine Arbeit von H. Hopf [Hop41] zurück und spielt eine wichtige Rolle in verschiedenen Bereichen der Mathematik und der Mathematischen Physik.

Die Kategorie der  $R$ -Algebren bezeichnen wir mit  $\mathbf{Alg}_R$ . Wenn nicht anders vermerkt ist, dann besitzt eine  $R$ -Algebra jede  $R$ -Algebra  $A$  ein Einselement (eine Einheit  $\eta : R \rightarrow A$ ). Für  $R$ -Algebren  $A, B$  bezeichne  $\text{Alg}_R(A, B)$  die Menge der Algebra-Morphismen von  $A$  nach  $B$ .

Dual zu  $R$ -Algebren sind  $R$ -Koalgebren. Die Definitionen werden so gegeben, dass diese *Dualität* unmittelbar ersichtlich ist.

**1.1.1.** Eine *koassoziative  $R$ -Koalgebra* ist ein  $R$ -Modul  $C$  mit einer  $R$ -linearen Abbildung (**Komultiplikation**)  $\Delta : C \longrightarrow C \otimes_R C$ , so dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes_R C \\ \Delta \downarrow & & \downarrow id \otimes \Delta \\ C \otimes_R C & \xrightarrow{\Delta \otimes id} & C \otimes_R C \otimes_R C \end{array} .$$

Existiert  $\varepsilon \in C^*$ , so dass

$$\vartheta_C^r \circ (id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = id_C = \vartheta_C^l \circ (\varepsilon \otimes id_C) \circ \Delta,$$

dann nennt man  $\varepsilon$  **Koeinheit** von  $C$ . Wenn nicht anders vermerkt ist, nehmen wir an, dass jede  $R$ -Koalgebra eine Koeinheit hat.

**Notation.** Sei  $(C, \Delta)$  eine  $R$ -Koalgebra. Für  $c \in C$  benützen wir Sweedler-Heinemann's  $\Sigma$ -Notation [Swe69]:

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2 \in C \otimes C.$$

Mit Hilfe der Koassoziativität von  $C$  definieren wir  $\Delta_n$  durch Induktion als

$$\Delta_1 := \Delta, \quad \Delta_{n+1} := (\Delta \otimes id^n) \circ \Delta_n : C \longrightarrow C^{n+1}, \quad c \longmapsto \sum c_1 \otimes \dots \otimes c_{n+1} \text{ für } n \geq 1.$$

**1.1.2. Kategorie der  $R$ -Koalgebren.** Für zwei  $R$ -Koalgebren  $(C, \Delta_C)$  und  $(D, \Delta_D)$  (mit Koeinheiten  $\varepsilon_C, \varepsilon_D$ ) heißt eine  $R$ -lineare Abbildung  $f : D \longrightarrow C$  ein **Koalgebra-Morphismus**, falls

$$\Delta_C \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_D \quad (\text{und } \varepsilon_C \circ f = \varepsilon_D).$$

Die Menge der  $R$ -Koalgebra-Morphismen von  $D$  nach  $C$  bezeichnen wir mit  $\text{Cog}_R(D, C)$ . Mit  $\mathbf{Cog}_R$  bezeichnen wir die Kategorie der koassoziativen  $R$ -Koalgebren mit Morphismen den Koalgebra-Morphismen. Eine  $R$ -Koalgebra  $C$  heißt **endlich**, falls  ${}_R C$  endlich erzeugt und projektiv ist.

**1.1.3. Definition.** Seien  $M, N$   $R$ -Moduln. Ein  $R$ -Untermodule  $K \subset M$  heißt  $N$ -rein, falls die kanonische  $R$ -lineare Abbildung  $\iota_K \otimes id_N : K \otimes N \longrightarrow M \otimes N$  injektiv ist. Ist  $K \subset M$   $N$ -rein für jeden  $R$ -Modul  $N$ , dann heißt  $K$  ein reiner  $R$ -Untermodule (im Sinne von Cohn).

Wie man leicht sieht, ist schon die Definition von Unterstrukturen einer  $R$ -Koalgebra (z.B. Unterkokalgebren) subtil. Dabei erweist sich ggf. das folgende Lemma als nützlich:

**1.1.4. Lemma.** ([Bou72, I.2.7, Proposition 7]) Ist  $K \subset M$  ein reiner  $R$ -Unterm modul (im Sinne von Cohn), dann ist

$$(K \otimes M) \cap (M \otimes K) = K \otimes K.$$

**Notation.** Sei  $M$  ein  $R$ -Moduln. Für jeden  $R$ -Unterm modul  $M' \subset M$  bezeichnet  $\iota_{M'} : M' \hookrightarrow M$  bzw.  $\pi_{M'} : M \rightarrow M/M'$  die Einbettung bzw. die Projektion in  ${}_R\mathcal{M}$ .

Sind  $M, N$   $R$ -Moduln,  $M' \xrightarrow{\iota_{M'}} M$  und  $N' \xrightarrow{\iota_{N'}} N$   $R$ -Unterm moduln, so bezeichnen wir mit  $\text{Im}(\iota_{M'} \otimes id_N)$  bzw.  $\text{Im}(id_M \otimes \iota_{N'})$  das kanonische Bild von  $\iota_{M'} \otimes id_N : M' \otimes N \rightarrow M \otimes N$  bzw.  $id_M \otimes \iota_{N'} : M \otimes N' \rightarrow M \otimes N$ .

**1.1.5. Definition.** Sei  $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$  eine  $R$ -Koalgebra. Einen  $R$ -Unterm modul  $K \subset C$  nennen wir:

- eine  **$R$ -Unterkoalgebra**, falls  $K \subset C$  rein ist und  $\Delta_C(K) \subset K \otimes K$ ;
- ein  **$C$ -Koideal**, falls  $J \subset \text{Ke}(\varepsilon_C)$  und

$$\Delta_C(K) \subset \text{Im}(\iota_K \otimes id_C) + \text{Im}(id_C \otimes \iota_K);$$

ein  **$C$ -Rechts-Koideal** (bzw.  **$C$ -Links-Koideal**,  **$C$ -Bikoideal**), falls  $K \subset C$   $C$ -rein ist und  $\Delta_C(K) \subset K \otimes_R C$  (bzw.  $\Delta_C(K) \subset C \otimes_R K$ ,  $\Delta_C(K) \subset (K \otimes_R C) \cap (C \otimes_R K)$ ).

**1.1.6.** Für jede  $R$ -Algebra  $(A, \mu)$  setze  $\mu^{op} := \mu \circ \tau$ . Dann ist  $A^{op} := (A, \mu^{op})$  eine  $R$ -Algebra, die **invers-isomorphe Algebra** von  $A$ . Eine  $R$ -Algebra  $A$  ist genau dann kommutativ, wenn  $A = A^{op}$  ist. Ist  $(C, \Delta, \varepsilon)$  eine  $R$ -Koalgebra, dann setzen wir  $\Delta^{cop} := \tau \circ \Delta$ . Offensichtlich ist  $C^{cop} := (C, \Delta^{cop}, \varepsilon)$  eine  $R$ -Koalgebra, die **invers-isomorphe Koalgebra** von  $C$ . Eine  $R$ -Koalgebra  $C$  heißt **kokommutativ**, falls  $C = C^{cop}$ . Die Kategorie der kommutativen  $R$ -Algebren (bzw. kokommutativen  $R$ -Koalgebren) bezeichnen wir mit  **$\mathbf{CAlg}_R$**  (bzw.  **$\mathbf{CCog}_R$** ).

**1.1.7.** Sind  $A, B$  assoziative  $R$ -Algebren, dann ist  $A \otimes_R B$  eine assoziative  $R$ -Algebra mit der induzierten Multiplikation. Haben  $A, B$  Einheiten  $\eta_A, \eta_B$ , dann ist  $\eta_{A \otimes B} := \eta_A \otimes \eta_B$  eine Einheit für  $A \otimes_R B$ . Für jede  $R$ -Algebra  $A$  nennt man  $A^e := A \otimes_R A^{op}$  die **Einhüllende-Algebra** von  $A$ .

Analog, sind  $(C, \Delta_C), (D, \Delta_D)$  koassoziative  $R$ -Koalgebren, dann ist  $C \otimes_R D$  eine koassoziative  $R$ -Koalgebra mit Komultiplikation

$$\Delta_{C \otimes_R D} : C \otimes_R D \xrightarrow{\Delta_C \otimes_R \Delta_D} (C \otimes_R C) \otimes_R (D \otimes_R D) \xrightarrow{\tau_{(23)}} (C \otimes_R D) \otimes_R (C \otimes_R D).$$

Haben  $C, D$  Koeinheiten  $\varepsilon_C, \varepsilon_D$ , dann ist  $\varepsilon_{C \otimes_R D} := \vartheta_R \circ (\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D)$  Koeinheit für  $C \otimes_R D$ . Für jede  $R$ -Koalgebra  $C$  nennt man  $C^e := C \otimes_R C^{cop}$  die **Einhüllende-Koalgebra** von  $C$ .

**1.1.8. Die Konvolutionsalgebra.** Für jede koassoziative  $R$ -Koalgebra  $(C, \Delta_C)$  (mit Koeinheit  $\varepsilon_C$ ) und jede assoziative  $R$ -Algebra  $(A, \mu_A)$  (mit Einheit  $\eta_A$ ) ist  $\text{Hom}_R(C, A)$  eine assoziative  $R$ -Algebra, die **Konvolutionsalgebra**, mit dem **Konvolutionsprodukt**

$$(f \star g)(c) = (\mu_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C)(c) = \sum f(c_1)g(c_2) \quad \forall f, g \in \text{Hom}_R(C, A), \quad c \in C \quad (1.1)$$

(und der Einheit  $\eta_A \circ \varepsilon_C$ ). Außerdem gibt es einen Bifunktor

$$\mathrm{Hom}_R(-, -) : \mathbf{Cog}_R \times \mathbf{Alg}_R \longrightarrow \mathbf{Alg}_R, (C, A) \longmapsto (\mathrm{Hom}_R(C, A), \star).$$

Somit ist jeder  $R$ -Koalgebra die **duale  $R$ -Algebra**  $C^* := (\mathrm{Hom}_R(C, R), \star)$  zugeordnet. Betrachten wir den Grundring  $R \simeq R \otimes R$  als eine  $R$ -Koalgebra, so ist  $R \simeq R^*$  die duale  $R$ -Algebra von  $R$ .

**1.1.9.** ([Par73, Satz 1.14]) Ist  $(A, \mu_A, \eta_A)$  eine *endliche*  $R$ -Algebra, dann wird  $A^*$  eine *endliche*  $R$ -Koalgebra durch

$$\mu_A^* : A \longrightarrow (A \otimes A)^* \simeq A^* \otimes A^*.$$

Bezeichne  $\mathfrak{E}_R$  die Kategorie der endlichen  $R$ -Algebren, so gibt es einen Bifunktor

$$\mathrm{Hom}_R(-, -) : \mathfrak{E}_R \times \mathbf{Cog}_R \longrightarrow \mathbf{Cog}_R, (A, C) \longmapsto \mathrm{Hom}_R(A, C) \simeq A^* \otimes C.$$

Für die *nicht endliche* Situation siehe Proposition 2.4.9.

**1.1.10. Lemma.** ([Miy75, Lemma 1], [Wis2000, 12.6, 12.7]) Die Kategorie  $\mathbf{Cog}_R$  hat Koprodukte und ist kovollständig, wobei die direkten Summen und die direkten Limites von  ${}_R\mathcal{M}$  induziert sind.

**1.1.11. Bialgebren.** Sei  $(H, \mu, \eta)$  eine  $R$ -Algebra mit einer  $R$ -Koalgebra-Struktur vermöge  $(H, \Delta, \varepsilon)$ . Sind  $\Delta, \varepsilon$  Algebra-Morphismen (gleichbedeutend  $\mu, \eta$  Koalgebra-Morphismen), so nennt man  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$  eine  **$R$ -Bialgebra**.

Einen *reinen*  $R$ -Untermodul  $U \subseteq H$  nennen wir eine  **$R$ -Unterbialgebra**, wenn er zugleich eine  $R$ -Unteralgebra und eine  $R$ -Unterkoalgebra ist.

Für  $R$ -Bialgebren  $H$  und  $Y$  heißt eine  $R$ -lineare Abbildung  $f : H \longrightarrow Y$ , die zugleich ein Algebra-Morphismus als auch ein Koalgebra-Morphismus ist, ein **Bialgebra-Morphismus**. Die Menge der Bialgebra-Morphismen von  $H$  nach  $Y$  bezeichnen wir mit  $\mathrm{Big}_R(H, Y)$ . Die Kategorie der  $R$ -Bialgebren mit Morphismen den Bialgebra-Morphismen bezeichnen wir mit  $\mathbf{Big}_R$ . Für zwei  $R$ -Bialgebren  $H$  und  $K$  ist  $H \otimes_R K$  eine  $R$ -Bialgebra mit der üblichen Multiplikation, der üblichen Einheit und der Koalgebra-Struktur gegeben in 1.1.7. Die Kategorie der *kommutativen* (bzw. *kokommutativen*)  $R$ -Bialgebren bezeichnen wir mit  $\mathbf{CBig}_R$  (bzw.  $\mathbf{CCBig}_R$ ).

**1.1.12. Hopf-Algebren.** Eine  **$R$ -Hopf-Algebra** ist eine  $R$ -Bialgebra  $(H, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$  mit einer  $R$ -linearen Abbildung (**Antipode**)  $S_H : H \longrightarrow H$ , so dass

$$\sum S_H(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H = \sum h_1S_H(h_2) \text{ für alle } h \in H$$

(gleichbedeutend  $S_H$  ist invertierbar in  $(\mathrm{End}_R(H), \star)$  mit Inversem  $id_H$ ). Ist  $S_H$  invertierbar in  $(\mathrm{End}_R(H), \circ)$ , dann bezeichnen wir das Inverse mit  $\overline{S}_H$ . Ist  $H$  *endlich*, dann ist  $S$  bijektiv ([Par71]). Ist  $H$  kommutativ oder kokommutativ, dann ist  $S^2 = id_H$  (siehe [Swe69, 4.0.1.]).

Einen *reinen*  $R$ -Unterm modul  $U \subseteq H$  nennen wir eine  **$R$ -Hopf-Unteralgebra**, falls er eine  $R$ -Unterbialgebra ist und  $S_H(U) \subseteq U$ .

Sind  $H$  bzw.  $Y$   $R$ -Hopf-Algebren mit Antipoden  $S_H$  bzw.  $S_Y$ , dann gilt für jeden Bialgebra-Morphismus  $f : H \longrightarrow Y : S_Y \circ f = f \circ S_H$ , d.h. die Verträglichkeit der Bialgebra-Morphismen mit der Antipode ist immer gewährleistet ([Swe69, 4.0.4.]) und die  $R$ -Hopf-Algebren bilden somit eine *volle* Unterkategorie  $\mathbf{Hopf}_R \subset \mathbf{Big}_R$ . Die Morphismen in  $\mathbf{Hopf}_R$  nennt man auch **Hopf-Algebra-Morphismen**. Mit  $\mathbf{CHopf}_R$  (bzw.  $\mathbf{CCHopf}_R$ ) bezeichnen wir die Kategorie der kommutativen (bzw. kokommutativen)  $R$ -Hopf-Algebren.

Sind  $H$  eine  $R$ -Hopf-Algebra mit Antipode  $S_H$  und  $K$  eine  $R$ -Hopf-Algebra mit Antipode  $S_K$ , dann ist  $H \otimes_R K$  eine  $R$ -Hopf-Algebra mit Antipode  $S_{H \otimes K} := S_H \otimes S_K$ .

**1.1.13. Definition.** Sei  $H$  eine  $R$ -Bialgebra. Ein zweiseitiges Ideal, das auch ein  $H$ -Koideal ist, nennt man ein **Bi-Ideal**. Ist  $H$  eine  $R$ -Hopf-Algebra mit Antipode  $S_H$  und ist  $J \subset H$  ein **Bi-Ideal** mit  $S_H(J) \subset J$ , dann heißt  $J$  ein **Hopf-Ideal**.

**1.1.14. Beispiel.** ([Mon93, Example 1.5.6]) Sei  $R$  ein Körper von Charakteristik  $\neq 2$ . Betrachte die 4-dimensionale  $R$ -Algebra

$$H_4 := \langle 1, g, x, gx \mid g^2 = 1, x^2 = 0, xg = -gx \rangle \quad (1.2)$$

und setze

$$\begin{aligned} \Delta(g) &= g \otimes g, & \Delta(x) &= g \otimes x + x \otimes 1, \\ \varepsilon(g) &= 1, & \varepsilon(x) &= 0, \\ S(g) &= g (= g^{-1}), & S(x) &= -gx. \end{aligned}$$

Dann ist  $H_4$  eine *nicht-kommutative nicht-kokommutative*  $R$ -Hopf-Algebra und wird **Sweedler'sche Hopf-Algebra** genannt.

Die folgende Aussage läßt sich leicht nachweisen (vgl. [Swe69, 1.4.7, 4.3.1]):

#### 1.1.15. Der Homomorphie-Satz

1. Seien  $D, C$   $R$ -Koalgebren. Für jeden Koalgebra-Morphismus  $f : D \longrightarrow C$  ist  $\text{Ke}(f)$  ein  $D$ -Koideal. Für jedes  $D$ -Koideal  $K \subset \text{Ke}(f)$  bekommt  $D/K$  eine eindeutig bestimmte  $R$ -Koalgebra-Struktur, so dass die kanonische Projektion  $\pi_K : D \longrightarrow D/K$  ein Koalgebra-Morphismus ist. Außerdem existiert ein eindeutig bestimmter Koalgebra-Morphismus  $\bar{f} : D/K \longrightarrow C$ , so dass  $\bar{f} \circ \pi_K = f$ .
2. Seien  $H, Y$   $R$ -Bialgebren ( $R$ -Hopf-Algebren). Für jeden Bialgebra-Morphismus  $f : H \longrightarrow Y$  ist  $\text{Ke}(f)$  ein  $H$ -Bi-Ideal ( $H$ -Hopf-Ideal) und es existiert eine eindeutig bestimmte  $R$ -Bialgebra-Struktur ( $R$ -Hopf-Algebra-Struktur) auf  $H/K$ , so dass  $\pi_K : H \longrightarrow H/K$  ein Bialgebra-Morphismus ist. Außerdem existiert ein Bialgebra-Morphismus  $\bar{f} : H/K \longrightarrow Y$ , so dass  $\bar{f} \circ \pi_K = f$ .

**1.1.16.** Als triviales Beispiel einer  $R$ -Hopf-Algebra ergibt sich der Grundring  $R$  mit der trivialen Algebra-Struktur und

$$\Delta_R := \vartheta_R : R \simeq R \otimes R, \quad \varepsilon_R := id_R =: S_R.$$

Ist  $C$  eine  $R$ -Koalgebra, dann ist  $\varepsilon_C \in \text{Cog}_R(C, R)$  und daher ist  $C^+ := \text{Ke}(\varepsilon_C) \subset C$  nach dem Homomorphie-Satz 1.1.15 ein  $C$ -Koideal und  $C/C^+$  ist eine  $R$ -Koalgebra. Ist  $H$  eine  $R$ -Bialgebra (bzw.  $R$ -Hopf-Algebra), dann ist  $\varepsilon_H : H \rightarrow R$  ein Bialgebra-Morphismus (bzw. Hopf-Algebra-Morphismus) und folglich ist  $H^+ := \text{Ke}(\varepsilon_H)$  ein Bi-Ideal (bzw. Hopf-Ideal) und  $H/H^+ \simeq R$  als  $R$ -Bialgebren (bzw.  $R$ -Hopf-Algebren).

## 1.2 Komoduln

**Notation.** Seien  $S, T$  zwei Ringe. Für jeden  $(S, T)$ -Bimodul  ${}_S U_T$  und alle  $L \in {}_T \mathcal{M}$ ,  $N \in {}_S \mathcal{M}$  bezeichne  $\zeta^l$  den funktoriellen Isomorphismus:

$$\zeta^l : \text{Hom}_{T-}(L, \text{Hom}_{S-}(U, N)) \rightarrow \text{Hom}_{S-}(U \otimes_T L, N), \quad \delta \mapsto [u \otimes l \mapsto \delta(l)(u)].$$

Für jeden  $(T, S)$ -Bimodul  ${}_T U_S$  und alle  $L \in \mathcal{M}_T$ ,  $N \in \mathcal{M}_S$  bezeichne  $\zeta^r$  den funktoriellen Isomorphismus:

$$\zeta^r : \text{Hom}_{-T}(L, \text{Hom}_{-S}(U, N)) \rightarrow \text{Hom}_{-S}(L \otimes_T U, N), \quad \delta \mapsto [l \otimes u \mapsto \delta(l)(u)].$$

Für die Betrachtungen in dieser Arbeit erweist sich auch die folgende Version der Definition von  $A$ -Moduln einer  $R$ -Algebra  $A$  als vorteilhaft:

**1.2.1. Moduln.** Sei  $(A, \mu)$  eine  $R$ -Algebra (nicht notwendig mit Einheit). Unter einem  $A$ -Linksmodul  $M$  verstehen wir einen  $R$ -Modul  $M$  mit einer  $R$ -linearen Abbildung

$$\rho_M : M \rightarrow \text{Hom}_R(A, M), \quad \rho_M(m)(a) = am \text{ für alle } a \in A, m \in M,$$

so dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\rho_M} & \text{Hom}_R(A, M) & & \\ \rho_M \downarrow & & \downarrow (\mu, M) & & \\ \text{Hom}_R(A, M) & \xrightarrow{(A, \rho_M)} & \text{Hom}_R(A, \text{Hom}_R(A, M)) & \xrightarrow{\zeta^l} & \text{Hom}_R(A \otimes A, M) \end{array}$$

Ist außerdem  $AM = M$ , dann heißt  $M$  **unitär**. Ist  $\rho_M$  injektiv, so nennen wir  $M$   **$A$ -treu**. Hat  $A$  Einheit dann ist jeder unitäre  $A$ -Linksmodul  $M$   $A$ -treu und  $\rho_M : M \rightarrow \text{Hom}_R(A, M)$  ist ein zerfallender  $R$ -Monomorphismus.

Seien  $(M, \rho_M), (N, \rho_N)$   $A$ -Linksmoduln. Mit der obigen Bezeichnung nennen wir eine  $R$ -lineare Abbildung  $f : M \rightarrow N$  einen  **$A$ -Modul-Morphismus** (kurz  $A$ -linear), falls

$$\rho_N \circ f = (A, f) \circ \rho_M.$$

Den  $R$ -Modul der  $A$ -linearen Abbildungen von  $M$  nach  $N$  bezeichnen wir mit  $\text{Hom}_{A-}(M, N)$ . Mit  ${}_A\mathcal{M}$  bezeichnen wir die Kategorie der unitären  $A$ -Linksmoduln mit Morphismen den  $A$ -linearen Abbildungen. Die Kategorie der  $A$ -treuen  $A$ -Linksmoduln mit Morphismen den  $A$ -linearen Abbildungen bezeichnen wir mit  ${}_A\widetilde{\mathcal{M}}$ .

Analog definieren wir die Kategorie der  $A$ -Rechtsmoduln. Für  $A$ -Rechtsmoduln  $M, N$  bezeichne  $\text{Hom}_{-A}(M, N)$  den  $R$ -Modul der  $A$ -linearen Abbildungen von  $M$  nach  $N$ . Die Kategorie der unitären  $A$ -Rechtsmoduln bezeichnen wir mit  $\mathcal{M}_A$ . Mit  $\widetilde{\mathcal{M}}_A$  bezeichnen wir die Kategorie der  $A$ -treuen  $A$ -Rechtsmoduln.

**1.2.2. Bimoduln.** Seien  $(A, \mu_A), (B, \mu_B)$   $R$ -Algebren,  $M$  sowohl ein  $A$ -Linksmodul durch  $\rho_M^A : M \longrightarrow \text{Hom}_R(A, M)$  als auch ein  $B$ -Rechtsmodul durch  $\rho_M^B : M \longrightarrow \text{Hom}_R(B, M)$  und betrachte den induzierten  $B$ -Rechtsmodul  $\text{Hom}_R(A, M)$  und den induzierten  $A$ -Linksm-

odul  $\text{Hom}_R(B, M)$ . Mann nennt  $M$  einen  $(A, B)$ -**Bimodul**, falls  $\rho_M^A$   $B$ -linear (gleichbedeutend  $\rho_M^B$   $A$ -linear) ist. Sind  $M, N$   $(A, B)$ -Bimoduln, dann nennt man eine  $R$ -lineare Abbildung  $f : M \longrightarrow N$  einen  $(A, B)$ -**Bimodul-Morphismus** (kurz  $(A, B)$ -**bilinear**), falls  $f$   $A$ -linear und  $B$ -linear ist. Den  $R$ -Modul der  $(A, B)$ -bilinearen Abbildungen von  $M$  nach  $N$  bezeichnen wir mit  $\text{Hom}_{A-, -B}(M, N)$ . Einen  $(A, B)$ -Bimodul  $M$  nennen wir **biunitär**, falls  ${}_AM$  und  $M_B$  unitär sind. Mit  ${}_A\mathcal{M}_B$  bezeichnen wir die Kategorie der biunitären  $(A, B)$ -Bimoduln mit Morphismen den  $(A, B)$ -bilinearen Abbildungen. Ein  $(A, B)$ -Bimodul  $M$  ist  $(A, B)$ -treu, falls  $M$   $A$ -treu und  $B$ -treu ist. Die Kategorie der  $(A, B)$ -treuen  $(A, B)$ -Bimoduln mit Morphismen die  $(A, B)$ -bilinearen Abbildungen bezeichnen wir mit  ${}_A\widetilde{\mathcal{M}}_B$ .

Dual zu Moduln über Algebren sind Komoduln über Koalgebren:

**1.2.3. Komoduln.** Sei  $(C, \Delta)$  eine  $R$ -Koalgebra (nicht notwendig mit Koeinheit). Ein  $C$ -**Rechtskomodul** ist ein  $R$ -Modul  $M$  mit einer  $R$ -linearen Abbildung

$$\varrho_M : M \longrightarrow M \otimes_R C, \quad m \longmapsto \sum m_{<0>} \otimes m_{<1>},$$

so dass

$$(\varrho_M \otimes id_C) \circ \varrho_M = (id_M \otimes \Delta) \circ \varrho_M.$$

Ist  $\varrho_M$  injektiv, dann nennen wir  $M$  **kounitär**. Hat  $C$  eine Koeinheit  $\varepsilon$ , dann ist  $M$  nach ([CC94, Lemma 1.1.]) kounitär genau dann, wenn

$$\vartheta_M^r \circ (id_M \otimes \varepsilon) \circ \varrho_M = id_M.$$

In diesem Falle ist  $\varrho_M$  ein zerfallender  $R$ -Monomorphismus. Für  $C$ -Rechtskomoduln  $M, N$  heißt eine  $R$ -lineare Abbildung  $f : M \longrightarrow N$  ein **Komodul-Morphismus** (kurz  $C$ -**kolinear**), falls

$$\varrho_N \circ f = (f \otimes i_C) \circ \varrho_M.$$

Die Menge der  $C$ -kolinearen Abbildungen von  $M$  nach  $N$  bezeichnen wir mit  $\text{Hom}^C(M, N)$ . Die Kategorie der kounitären  $C$ -Rechtskomoduln mit Morphismen den  $C$ -kolinearen Abbildungen bezeichnen wir mit  $\mathcal{M}^C$ . Für  $N \in \mathcal{M}^C$  nennen wir einen  $R$ -Untermodul  $K \subset N$  mit einer  $C$ -Rechtskomodul-Struktur vermöge  $\varrho_K : K \rightarrow K \otimes C$  einen  **$C$ -Unterkomodul** von  $M$ , falls  $K \xrightarrow{\iota_K} N$   $C$ -klinear ist.

Ein (*kounitärer*)  $C$ -Linkskomodul ist ein  $R$ -Modul mit einer (*injektiven*)  $R$ -linearen Abbildung

$$\varrho_M : M \rightarrow C \otimes_R M, \quad m \mapsto \sum m_{<-1>} \otimes m_{<0>},$$

so dass

$$(id_C \otimes \varrho_M) \circ \varrho_M = (\Delta_C \otimes id_M) \circ \varrho_M.$$

Für zwei  $C$ -Linkskomoduln  $M, N$  bezeichne  ${}^C\text{Hom}(M, N)$  die Menge der  $C$ -kolinearen Abbildungen von  $M$  nach  $N$ . Die Kategorie der kounitären  $C$ -Linkskomoduln mit Morphismen den  $C$ -kolinearen Abbildungen bezeichnen wir mit  ${}^C\mathcal{M}$ .

**1.2.4. Proposition.** ([Wis99, 3.14]) Sei  $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$  eine  $R$ -Koalgebra.

1. Jeder kounitäre  $C$ -Komodul  $(M, \varrho_M)$  induziert einen kovarianten Funktor

$$- \otimes_R M : {}_R\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^C, \quad K \mapsto (K \otimes M, id_K \otimes \varrho_M).$$

Außerdem ist  $(- \otimes_R M, \text{Hom}^C(M, -))$  ein adjungiertes Paar mittels der in  $K \in {}_R\mathcal{M}$  und  $N \in \mathcal{M}^C$  funktoriellen Isomorphismus

$$\Phi_{K,N} : \text{Hom}^C(K \otimes_R M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(K, \text{Hom}^C(M, N)), \quad g \mapsto [k \mapsto g(k \otimes -)]$$

mit Inversem  $h \mapsto [k \otimes m \mapsto h(k)(m)]$ .

2. Der **kofreie Funktor**

$$- \otimes_R C : {}_R\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^C, \quad K \mapsto (K, id_K \otimes \Delta_C)$$

ist rechts-adjungiert zum Vergissfunktor  $F : \mathcal{M}^C \rightarrow {}_R\mathcal{M}$  mittels der in  $K \in {}_R\mathcal{M}$  und  $(M, \varrho_M) \in \mathcal{M}^C$  funktoriellen Isomorphismus

$$\Psi_{K,M} : \text{Hom}_R(M, K) \rightarrow \text{Hom}^C(M, K \otimes_R C), \quad h \mapsto (h \otimes id_C) \circ \varrho_M$$

mit Inversem  $f \mapsto [\vartheta_K^r \circ (id_K \otimes \varepsilon_C) \circ f]$ .

Dual zu Bimoduln von  $R$ -Algebren sind Bikomoduln von  $R$ -Koalgebren:

**1.2.5. Bikomoduln.** Seien  $C, D$   $R$ -Koalgebren und  $M \in {}_R\mathcal{M}$  zugleich ein (kounitärer)  $D$ -Linkskomodul vermöge  $\varrho_M^D : M \rightarrow D \otimes M$  und ein (kounitärer)  $C$ -Rechtskomodul durch  $\varrho_M^C : M \rightarrow M \otimes C$ . Dann nennen wir  $M$  einen (bikounitären)  $(D, C)$ -**Bikomodul**, falls  $\varrho_M^D : M \rightarrow D \otimes M$   $C$ -klinear (gleichbedeutend  $\varrho_M^C : M \rightarrow M \otimes C$   $D$ -klinear) ist. Für  $(D, C)$ -Bikomoduln  $M, N$  nennt man eine  $R$ -lineare Abbildung  $f : M \rightarrow N$ , die zugleich  $D$ -klinear und  $C$ -klinear ist, einen  $(D, C)$ -**Bikomodul-Morphismus** (kurz  $(D, C)$ -**biklinear**). Die Menge der  $(D, C)$ -biklinearen Abbildungen von  $M$  nach  $N$  bezeichnen wir mit  ${}^D\text{Hom}^C(M, N)$ . Die Kategorie der bikounitären  $(D, C)$ -Bikomoduln mit Morphismen den  $(D, C)$ -biklinearen Abbildungen bezeichnen wir mit  ${}^D\mathcal{M}^C$ .

# Kapitel 2

## Messende $\alpha$ -Paare

In diesem Kapitel führen wir die Kategorie der messenden Paare  $\mathcal{P}_m$  über beliebigen Ringen ein. Diese Kategorie umfaßt als Unterkategorien mehrere Kategorien von *dualen Paaren*, die in der Theorie der Hopf-Algebren betrachtet sind. Wir zeigen außerdem, dass sich wichtige Dualitätssätze im Körper-Fall auf eine Unterkategorie von  $\mathcal{P}_m$ , nämlich die Kategorie der messenden  $\alpha$ -Paare  $\mathcal{P}_m^\alpha$ , übertragen lassen. U.a. erweitern und verfeinern wir die Aussagen von [AG-TW2000] und [AG-TL2001].

### 2.1 $\alpha$ -Paare

Beim Studium der Kategorie der Komoduln einer  $R$ -Koalgebra  $C$  haben wir in Zusammenarbeit mit J. Gómez-Torrecillas und J. Lobjillo [AG-TL2001] die sogenannte  $\alpha$ -*Bedingung* für ein messendes Paar  $P = (A, C)$  eingeführt und dabei Aussagen aus [G-T98] und [Wis99] unter dieser schwächeren Bedingung erzielt. Diese Bedingung erweist sich als eine natürliche Voraussetzung beim Studium der *Dualitätssätze* für Hopf-Algebren über beliebigen Ringen. In diesem Zusammenhang erweitern wir die Beobachtungen in [AG-TL2001] über die  $\alpha$ -*Paare* und stellen ihre elementaren Eigenschaften bereit. Dabei erweisen sich die linear schwache Topologie als nützlich (siehe den Anhang).

**2.1.1. Die Kategorie  $\mathcal{P}$ .** Betrachte ein **Paar**  $P = (V, W)$  von  $R$ -Moduln mit einer  $R$ -bilinearen Form

$$\alpha : V \times W \longrightarrow R, (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle .$$

Ist die induzierte  $R$ -lineare Abbildung  $\kappa_P : V \longrightarrow W^*$  bzw.  $\chi_P : W \longrightarrow V^*$  injektiv, so heißt  $P$  **links-nicht-ausgeartet** bzw. **rechts-nicht-ausgeartet**. Sind  $\kappa_P$  und  $\chi_P$  injektiv, so nennt man  $P$  **nicht-ausgeartet**.

Sind  $(V, W)$  und  $(V', W')$  zwei Paare, so besteht ein **Paar-Morphismus**

$$(\xi, \theta) : (V', W') \longrightarrow (V, W)$$

aus  $R$ -linearen Abbildungen  $\xi : V \longrightarrow V'$  und  $\theta : W' \longrightarrow W$ , so dass

$$\langle \xi(v), w' \rangle = \langle v, \theta(w') \rangle \quad \text{für alle } v \in V \text{ und } w' \in W' .$$

Die Paare mit den Paar-Morphismen (und mit der üblichen Komposition von Paaren) bilden eine Kategorie  $\mathcal{P}$ .

Für jedes Paar  $(V, W) \in \mathcal{P}$  betrachten wir  $W^*$  mit der *endlichen Topologie*  $W^*[\mathfrak{T}_{ls}(W)]$  und  $V$  mit der induzierten *linear schwachen Topologie*  $V[\mathfrak{T}_{ls}(W)]$  (siehe den Anhang).

**2.1.2. Die Kategorie  $\mathcal{P}^\alpha$ .** Ein Paar  $P = (V, W)$  nennen wir ein  $\alpha$ -**Paar** (oder sagen  $P$  erfüllt die  $\alpha$ -**Bedingung**), falls für jeden  $R$ -Modul  $M$  die folgende  $R$ -lineare Abbildung injektiv ist:

$$\alpha_M^P : M \otimes W \longrightarrow \text{Hom}_R(V, M), \quad m \otimes w \longmapsto [v \longmapsto \langle v, w \rangle m]. \quad (2.1)$$

Ist das Paar vom Kontext eindeutig bestimmt, so schreiben wir auch  $\alpha_M$  statt  $\alpha_M^P$ . Mit  $\mathcal{P}^\alpha \subset \mathcal{P}$  bezeichnen wir die *volle* Unterkategorie, deren Objekte die  $\alpha$ -Bedingung erfüllen. Ein Paar  $P = (V, W)$  nennen wir **dicht**, falls  $\kappa_P(V) \subseteq W^*$  dicht ist.

**2.1.3.** Wir sagen ein  $R$ -Modul  $W$  **erfüllt die  $\alpha$ -Bedingung**, falls  $(W^*, W)$  ein  $\alpha$ -Paar ist, also wenn für jeden  $R$ -Modul  $M$  die folgende  $R$ -lineare Abbildung injektiv ist:

$$\alpha_M^W : M \otimes W \longrightarrow \text{Hom}_R(W^*, M), \quad m \otimes w \longmapsto [f \longmapsto f(w)m]. \quad (2.2)$$

Solche Moduln hat G. Garfinkel in [Gar76] **universell torsionsfrei** genannt und wurden von B. Zimmermann-Huignes in [Z-H76] durch die dagesannten **lokal projektiven** Moduln charakterisiert (siehe Lemma 2.1.15).

**2.1.4. Annulatoren.** Sei  $P = (V, W)$  ein Paar. Für Teilmengen  $X \subseteq V, K \subseteq W$  setze

$$X^\perp := \{w \in W \mid \langle X, w \rangle = 0\} \text{ und } K^\perp := \{v \in V \mid \langle v, K \rangle = 0\}.$$

Wir sagen eine Untermenge  $X \subseteq V$  (bzw.  $K \subseteq W$ ) ist **orthogonal abgeschlossen** bezüglich  $P$ , falls  $X = X^{\perp\perp}$  (bzw.  $K = K^{\perp\perp}$ ) ist.

*2.1.5. Bemerkung.* Sei  $P = (V, W) \in \mathcal{P}^\alpha$ . Dann ist  $W \subset V^*$  und daher ist  $W$  insbesondere  $R$ -koerzeugt. Ist  $M$  ein beliebiger  $R$ -Modul, dann haben wir für jeden  $R$ -Untermodul  $N \subset M$  das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} N \otimes W & \xrightarrow{\alpha_N^P} & \text{Hom}_R(V, N) \\ \downarrow \iota_N \otimes id_W & \nearrow \alpha_M^P & \\ M \otimes_R W & & \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist  $\alpha_N^P : N \otimes W \longrightarrow \text{Hom}_R(V, N)$  injektiv und daher ist  $N \subset M$  ein  $W$ -reiner  $R$ -Untermodul.  $M$  ist aber ein beliebiger  $R$ -Modul und daher ist  ${}_R W$  flach. Ist  $R$  perfekt, dann ist  ${}_R W$  projektiv.

Eine wichtige Beobachtung für die  $\alpha$ -Paare ist:

**2.1.6. Lemma.** Sei  $P = (V, W) \in \mathcal{P}^\alpha$ . Für jeden  $R$ -Modul  $M$  und jeden  $R$ -Untermodul  $K \subset M$  gilt für  $\sum m_i \otimes w_i \in M \otimes W$ :

$$\sum m_i \otimes w_i \in K \otimes W \iff \sum \langle v, w_i \rangle m_i \in K \text{ für alle } v \in V. \quad (2.3)$$

**Beweis.** Nach Bemerkung 2.1.5 ist  ${}_R W$  flach und wir bekommen ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K \otimes W & \xrightarrow{\iota_K \otimes id_W} & M \otimes W & \xrightarrow{\pi \otimes id_W} & M/K \otimes W \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_K^P & & \downarrow \alpha_M^P & & \downarrow \alpha_{M/K}^P \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(V, K) & \xrightarrow{(V, \iota_K)} & \text{Hom}_R(V, M) & \xrightarrow{(V, \pi)} & \text{Hom}_R(V, M/K) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Offensichtlich ist  $\sum \langle v, w_i \rangle m_i \in K$  für alle  $v \in V$  genau dann, wenn

$$\sum m_i \otimes w_i \in \text{Ke}((V, \pi) \circ \alpha_M) = \text{Ke}(\alpha_{M/K} \circ (\pi \otimes id_W)) = \text{Ke}(\pi \otimes id_W) = K \otimes W.$$

**2.1.7. Proposition.** 1. Sei  $P = (V, W)$  ein Paar.

- (a) Sei  $W' \subset W$  ein  $R$ -Untermodul und betrachte das induzierte Paar  $P' := (V, W')$ . Ist  $P' \in \mathcal{P}^\alpha$ , dann ist  $W' \subset W$  rein. Ist  $P \in \mathcal{P}^\alpha$ , dann ist  $P' \in \mathcal{P}^\alpha$  genau dann, wenn  $W' \subset W$  rein ist.
- (b) Seien  $V' \subset V$ ,  $W' \subset W$   $R$ -Untermoduln, so dass  $\langle V', W' \rangle = 0$  und betrachte das Paar  $Q := (V/V', W')$ . Ist  $P \in \mathcal{P}^\alpha$ , dann ist  $Q \in \mathcal{P}^\alpha$  genau dann, wenn  $W' \subset W$  rein ist.

2. Seien  $Q = (Y, W)$  ein Paar,  $\xi : V \longrightarrow Y$  eine  $R$ -lineare Abbildung,  $P := (V, W)$  das induzierte Paar und betrachte die folgenden Aussagen:

- (i)  $Q \in \mathcal{P}^\alpha$  und  $P$  ist dicht.
- (ii)  $Q \in \mathcal{P}^\alpha$  und  $\kappa_P(V) \subset \kappa_Q(Y)$  ist dicht.
- (iii)  $P \in \mathcal{P}^\alpha$ .
- (iv)  $Q \in \mathcal{P}^\alpha$  und  $W \xrightarrow{\chi_P} V^*$  ist eine Einbettung.

Es gilt immer (i)  $\implies$  (ii)  $\implies$  (iii)  $\implies$  (iv). Ist  $R$  ein injektiver Kogenerator, dann sind alle vier Aussagen äquivalent.

**Beweis.** 1. Die Aussage folgt aus der Kommutativität des folgenden Diagramms für jeden  $R$ -Modul  $M$

$$\begin{array}{ccc} M \otimes W' & \xrightarrow{\alpha_M^Q} & \text{Hom}_R(V/V', M) \\ \downarrow id_M \otimes \iota_{W'} & \searrow \alpha_{M'}^{P'} & \downarrow \\ M \otimes W & \xrightarrow{\alpha_M^P} & \text{Hom}_R(V, M) \end{array}$$

2. Betrachte für jeden  $R$ -Modul  $M$  das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M \otimes W & \xrightarrow{\alpha_M^Q} & \text{Hom}_R(Y, M) \\ & \searrow \alpha_M^P & \downarrow (\xi, M) \\ & & \text{Hom}_R(V, M) \end{array}$$

(i)  $\implies$  (ii) trivial.

(ii)  $\implies$  (iii) Sei  $Q \in \mathcal{P}^\alpha$  und nehme an  $\kappa_P(V) \subset \kappa_Q(Y)$  liege dicht. Sei  $\sum_{i=1}^n m_i \otimes w_i \in \text{Ke}(\alpha_M^P)$ . Nach Voraussetzung existiert für jedes  $y \in Y$  ein  $v \in V$ , so dass  $\kappa_Q(y)(w_i) = \kappa_P(v)(w_i)$  für  $i = 1, \dots, n$  und es folgt daher:

$$\begin{aligned} \alpha_M^Q\left(\sum_{i=1}^n m_i \otimes w_i\right)(y) &= \sum_{i=1}^n \langle y, w_i \rangle m_i = \sum_{i=1}^n \langle v, w_i \rangle m_i \\ &= \alpha_M^P\left(\sum_{i=1}^n m_i \otimes w_i\right)(v) = 0. \end{aligned}$$

Damit ist  $\text{Ke}(\alpha_M^P) = \text{Ke}(\alpha_M^Q) = 0$ , also ist  $\alpha_M^P$  injektiv. Der  $R$ -Modul  $M$  ist nach Wahl beliebig und somit ist  $P \in \mathcal{P}^\alpha$ .

(iii)  $\implies$  (iv) trivial.

Sei  $R$  ein injektiver Kogenerator. Ist  $W \xrightarrow{\chi^P} V^*$  eine Einbettung, dann gilt nach Proposition A.0.5 (1)  $\overline{\kappa_P(V)} = \text{AnKe}(\kappa_P(V)) = \text{An}(V^\perp) = \text{An}\{0_W\} = W^*$ , also ist  $P$  dicht.

Über noetherschen Ringen ergibt sich die folgende interessante Beobachtung:

**2.1.8. Proposition.** *Seien  $V$  ein  $R$ -Modul,  $RV$  der freie  $R$ -Modul mit Basis  $V$ ,  $W \subset V^*$  ein  $R$ -Untermodul und betrachte das Paar  $P := (V, W)$ . Ist  $R$  noethersch, dann gilt:*

1. Für jeden  $R$ -Modul  $M$  ist die folgende  $R$ -lineare Abbildung injektiv

$$\beta_M : M \otimes R^V \longrightarrow M^V, \quad m \otimes f \longmapsto [v \longmapsto f(v)m], \quad (2.4)$$

also ist  $\tilde{P} := (RV, R^V)$  ein  $\alpha$ -Paar.

2. für einen beliebigen  $R$ -Modul  $M$  ist  $\alpha_M^P$  injektiv genau dann, wenn  $W \subseteq R^V$   $M$ -rein ist.

3. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i)  $P \in \mathcal{P}^\alpha$ ;

(ii)  $\alpha_M^P$  ist injektiv für jeden endlich präsentierten  $R$ -Modul  $M$ ;

(iii)  $W \subset R^V$  ist rein.

4. Sei  $R$  erblich. Dann ist  $\check{P} := (V, V^*) \in \mathcal{P}^\alpha$ . Außerdem ist  $P \in \mathcal{P}^\alpha$  genau dann, wenn  $W \subset V^*$  ein reiner  $R$ -Untermodul ist.

**Beweis.** 1. Sei  $M$  ein beliebiger  $R$ -Modul und schreibe  $M$  als direkten Limes seiner endlich erzeugten  $R$ -Untermoduln  $M = \varinjlim_\Lambda M_\lambda$  ([Wis88, 24.7]). Für jedes  $\lambda \in \Lambda$  ist  $M_\lambda$  e.p. in  ${}_R\mathcal{M}$  und nach ([Wis88, 25.4]) ist

$$\beta_{M_\lambda} : M_\lambda \otimes R^V \longrightarrow M_\lambda^V$$

ein Isomorphismus. Außerdem stimmt für jedes  $\lambda \in \Lambda$  die Einschränkung von  $\beta_M$  auf  $M_\lambda$  mit  $\beta_{M_\lambda}$  überein und somit ist die folgende Abbildung injektiv:

$$\beta_M = \varinjlim \beta_{M_\lambda} : \varinjlim M_\lambda \otimes R^V \longrightarrow \varinjlim M_\lambda^V \subset M^V$$

Offensichtlich ist  $\check{P} \in \mathcal{P}^\alpha$  genau dann, wenn  $\beta_M$  injektiv ist für jedes  $M \in {}_R\mathcal{M}$ .

2. folgt aus (1).
3. Nach [Wis88, 34.5] ist  $W \subset R^V$  genau dann rein, wenn  $W \subset R^V$   $M$ -rein ist für jeden endlich präsentierten  $R$ -Modul  $M$ . Die Aussage folgt dann aus (2).
4. Nach [Wis88, 39.13] ist ein noetherscher Ring erblich genau dann, wenn jeder  $R$ -Untermodul eines  $R$ -koerzeugten  $R$ -Moduls flach ist. Daher induziert der kanonische Epimorphismus  $RV \longrightarrow V \longrightarrow 0$  einen reinen Monomorphismus  $V^* \hookrightarrow R^V$ . Laut (1) ist die kanonische Abbildung  $\beta_M : M \otimes R^V \longrightarrow M^V$  injektiv für jedes  $M \in {}_R\mathcal{M}$  und daher folgt die Aussage aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} M \otimes W & \xrightarrow{\alpha_M^P} & \text{Hom}_R(V, M) & \hookrightarrow & M^V \\ \downarrow \text{id} \otimes \iota_W & \nearrow \alpha_M^{\check{P}} & & \nearrow \beta_M & \\ M \otimes V^* & \hookrightarrow & M \otimes R^V & & \end{array}$$

**2.1.9. Lemma.** ([Bou74, II-3.6, III-4.2]) Sind

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \text{ und } 0 \longrightarrow N' \xrightarrow{\tilde{f}} N \xrightarrow{\tilde{g}} N'' \longrightarrow 0$$

exakte Folgen in  ${}_R\mathcal{M}$ , dann ist

$$\text{Ke}(g \otimes \tilde{g}) \simeq \text{Im}(f \otimes \text{id}_N) + \text{Im}(\text{id}_M \otimes \tilde{f})$$

und man bekommt einen kanonischen  $R$ -Isomorphismus

$$(M \otimes N) / \text{Ke}(g \otimes \tilde{g}) \simeq M / M' \otimes N / N'. \quad (2.5)$$

Sind außerdem  $M, N$   $R$ -Algebren und  $g, \tilde{g}$  Algebra-Morphismen, dann ist (2.5) ein Algebra-Isomorphismus.

**2.1.10. Folgerung.** *Sei  $R$  noethersch.*

1. *Seien  $X, X'$  Mengen und  $E \subseteq R^X$ ,  $E' \subseteq R^{X'}$   $R$ -Untermodule. Ist  $E' \subseteq R^{X'}$   $E$ -rein (oder ist  $E \subseteq R^X$   $E'$ -rein), dann ist die folgende  $R$ -lineare Abbildung injektiv:*

$$\delta : E \otimes E' \longrightarrow R^{X \times X'}, \quad f \otimes f' \longmapsto [(x, x') \longmapsto f(x)f'(x')]. \quad (2.6)$$

2. *Seien  $W, W'$   $R$ -Moduln,  $X \subset W^*$ ,  $X' \subset W'^*$   $R$ -Untermodule und betrachte die kanonischen  $R$ -linearen Abbildungen*

$$\psi : X \otimes X' \longrightarrow (W \otimes W')^* \text{ und } \phi : W \otimes W' \longrightarrow (X \otimes X')^*.$$

*Sind  ${}_R W$  flach und  $\text{Ke}(X) \subset W$  ein reiner  $R$ -Untermodule (oder sind  ${}_R W'$  flach und  $\text{Ke}(X') \subset W'$  rein), dann ist*

$$\text{Ke}(\psi(X \otimes X')) \simeq \text{Ke}(X) \otimes W' + W \otimes \text{Ke}(X'). \quad (2.7)$$

**Beweis.** 1. Die Aussage folgt aus Proposition 2.1.8 (1).

2. Seien  ${}_R W$  flach und  $\text{Ke}(X) \subset W$  ein reiner  $R$ -Untermodule. Betrachte die Einbettungen  $E := W/\text{Ke}(X) \hookrightarrow R^X$ ,  $E' := W'/\text{Ke}(X') \hookrightarrow R^{X'}$  und das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W \otimes W' & \xrightarrow{\phi} & (X \otimes X')^* \\ \pi \otimes \pi' \downarrow & & \downarrow \iota \\ W/\text{Ke}(X) \otimes W'/\text{Ke}(X') & \xrightarrow{\delta} & R^{X \times X'} \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist  $W/\text{Ke}(X)$  flach und somit ist  $\delta$  nach (1) injektiv. Es folgt somit aus Lemma 2.1.9:

$$\begin{aligned} \text{Ke}(\psi(X \otimes X')) &:= \text{Ke}(\phi) &= \text{Ke}(\delta \circ (\pi \otimes \pi')) \\ &= \text{Ke}(\pi_X \otimes \pi_{X'}) &= \text{Ke}(X) \otimes W' + W \otimes \text{Ke}(X') \end{aligned}$$

**Notation.** Seien  $Y, Z$   $R$ -Moduln und betrachte die kanonische  $R$ -lineare Abbildung

$$\delta : Y^* \otimes Z^* \longrightarrow (Y \otimes Z)^*.$$

Für beliebige  $f \in Y^*$ ,  $g \in Z^*$ , setzen wir  $f \underline{\otimes} g = \delta(f \otimes g)$ , also

$$(f \underline{\otimes} g)(\sum y_i \otimes z_i) := \sum f(y_i)g(z_i) \text{ für jedes } \sum y_i \otimes z_i \in Y \otimes Z.$$

**2.1.11. Lemma.** Sind  $P = (V, W)$ ,  $P' = (V', W') \in \mathcal{P}^\alpha$ , so ist auch  $P \otimes P' := (V \otimes V', W \otimes W') \in \mathcal{P}^\alpha$ .

**Beweis.** Für  $M \in {}_R\mathcal{M}$  betrachte das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M \otimes W \otimes W' & \xrightarrow{\alpha_M^{P \otimes P'}} & \text{Hom}(V \otimes V', M) \\ \alpha_{M \otimes W}^{P'} \downarrow & & \uparrow \zeta^l \\ \text{Hom}(V', M \otimes W) & \xrightarrow{(V', \alpha_M^P)} & \text{Hom}(V', \text{Hom}(V, M)) \end{array}$$

wobei  $\zeta^l$  der kanonische Isomorphismus ist. Für jeden  $R$ -Modul  $M$  sind  $\alpha_{M \otimes W}^{P'}$  und  $\alpha_M^P$  nach Voraussetzung injektiv und folglich ist  $\alpha_M^{P \otimes P'}$  injektiv.

**2.1.12. Definition.** Ein  $R$ -Modul  $W$  heißt **infinitesimal flach**, falls  $W$  ein direkter Limes von *endlichen*  $R$ -Untermoduln ist. Wir nennen  $W$  **stark flach** (kurz **s-flach**), falls  $W$  ein direkter Limes von *projektiven*  $R$ -Untermoduln ist.

**2.1.13. Lemma.** Sei  $W$  ein  $R$ -Modul.

1. Erfüllt  $W$  die  $\alpha$ -Bedingung, dann erfüllt jeder reine  $R$ -Untermodul  $K \subset W$  die  $\alpha$ -Bedingung. Ist  $R$   $W$ -injektiv, dann ist jeder die  $\alpha$ -Bedingung erfüllende  $R$ -Untermodul ein reiner  $R$ -Untermodul.
2. Sei  $W = \varinjlim_\Lambda W_\lambda$  für ein (mit der Inklusion) direktes System von  $R$ -Untermoduln  $\{W_\lambda\}_\Lambda$ . Ist  $R$   $W$ -injektiv, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
  - (a)  $W_\lambda$  erfüllt die  $\alpha$ -Bedingung für jedes  $\lambda \in \Lambda$ .
  - (b)  $W$  erfüllt die  $\alpha$ -Bedingung und  $W_\lambda \subset W$  ist ein reiner  $R$ -Untermodul für jedes  $\lambda \in \Lambda$ .
3. U.a. erfüllt  $W$  die  $\alpha$ -Bedingung, falls
  - ${}_R W$  projektiv ist, oder
  - $W$  ein direkter Limes von projektiven direkten Summanden ist, oder
  - $R$   $W$ -injektiv und  ${}_R W$  s-flach ist.
4. Ist  $R$  perfekt, dann erfüllt  $W$  die  $\alpha$ -Bedingung genau dann, wenn  ${}_R W$  projektiv ist. Ist  $R$  noethersch, dann erfüllt  $W$  die  $\alpha$ -Bedingung genau dann, wenn  $W \subset R^{W^*}$  ein reiner  $R$ -Untermodul ist. Ist  $(W^*, W^{**}) \in \mathcal{P}^\alpha$  (z.B. falls  $R$  noethersch und erblich ist), dann erfüllt  $W$  die  $\alpha$ -Bedingung genau dann, wenn die kanonische Abbildung  $\Phi_W : W \longrightarrow W^{**}$  ein reiner Monomorphismus ist.

**Beweis.** 1. Standard.

2. Die Implikation (b)  $\implies$  (a) ist trivial. Sei  $R$   $W$ -injektiv. Sei  $M$  ein beliebiger  $R$ -Modul und nehme an  $\sum_{j=1}^k m_j \otimes w_j \in \text{Ke}(\alpha_M^W)$ . Dann existiert  $\lambda_0 \in \Lambda$ , so dass  $\{w_1, \dots, w_k\} \subset W_{\lambda_0}$ .  $R$  ist aber  $W$ -injektiv und somit existiert für jedes  $f \in W_{\lambda_0}^*$  ein  $g \in W^*$ , so dass  $\iota_{\lambda_0}^*(g) = f$  und daher

$$\alpha_M^{W_{\lambda_0}}\left(\sum_{j=1}^k m_j \otimes w_j\right)(f) = \sum_{j=1}^k f(w_j)m_j = \sum_{j=1}^k g(w_j)m_j = \alpha_M^W\left(\sum_{i=1}^k m_j \otimes w_j\right)(g) = 0.$$

Nach Voraussetzung ist  $\alpha_M^{W_{\lambda_0}}$  injektiv, also ist  $\sum_{j=1}^k m_j \otimes w_j = 0$ . Somit ist  $(W^*, W) \in \mathcal{P}^\alpha$ .

3. Sei  ${}_R W$  projektiv mit dualer Basis  $\{(f_i, w_i)\}_I \subset W^* \times W$ . Dann gilt für jeden  $R$ -Modul  $M$  und jedes  $\sum_{j=1}^k m_j \otimes w_j \in \text{Ke}(\alpha_M^W)$ :

$$\sum_{j=1}^k m_j \otimes w_j = \sum_{j=1}^k m_j \otimes \left(\sum_I f_i(w_j)w_i\right) = \sum_I \left(\sum_{j=1}^k f_i(w_j)m_j\right) \otimes w_i = \sum_I 0 \otimes w_i = 0.$$

Daher erfüllt  $W$  die  $\alpha$ -Bedingung. Die übrigen Aussagen lassen sich analog zu (2) leicht nachweisen.

4. Die Äquivalenzen folgen aus Propositionen 2.1.7, 2.1.8 und Bemerkung 2.1.5.

**2.1.14. Lokal projektive Moduln.** Ein  $R$ -Modul  $W$  heißt **lokal projektiv** (im Sinne von B. Zimmermann-Huignes [Z-H76]), falls es für jedes Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\iota} & W & & \\ & & \searrow & & \downarrow g' & \searrow g & \\ & & & & L & \xrightarrow{\pi} & N \longrightarrow 0 \\ & & g' \circ \iota & & & & \end{array}$$

mit exakten Reihen,  ${}_R F$  e.e. und jede  $R$ -lineare Abbildung  $g : W \longrightarrow N$  eine  $R$ -lineare Abbildung  $g' : W \longrightarrow L$  existiert, so dass das entstehende Viereck kommutativ ist.

Das folgende Lemma charakterisiert die  $R$ -Moduln, die die  $\alpha$ -Bedingung erfüllen.

**2.1.15. Lemma.** ([Gar76, Theorem 3.2], [Z-H76, Theorem 2.1]) Für einen  $R$ -Modul  $W$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $W$  erfüllt die  $\alpha$ -Bedingung;

2.  $W$  ist lokal projektiv;
3.  $W$  ist ein reiner  $R$ -Untermodule eines lokal projektiven  $R$ -Moduls;
4. für jedes  $w \in W$  existiert eine endliche Untermenge  $\{(w_1, f_1), \dots, (w_n, f_n)\} \subset W \times W^*$ , so dass  $w = \sum_{j=1}^n f_j(w_j)w$  (d.h.  $W$  ist ein **Spur-Modul** im Sinne von J. Ohm und D. Rush [OR72]).

**2.1.16. Folgerung.** Ist  $R$  ein injektiver Kogenerator, dann sind für jedes Paar  $(V, W)$  die folgenden Aussage äquivalent:

- (i)  $W$  erfüllt die  $\alpha$ -Bedingung und  $\kappa_P(V) \subset W^*$  ist dicht.
- (ii)  $(V, W)$  ist ein  $\alpha$ -Paar.
- (iii)  $W$  erfüllt die  $\alpha$ -Bedingung und  $W \subset V^*$ .

Ist  $R$  ein QF Ring, dann ist weiter dazu äquivalent:

- (iv)  ${}_R W$  ist projektiv und  $W \subset V^*$ .
- (v)  $W \subset R^V$  ist ein reiner  $R$ -Untermodule.

**2.1.17. Bemerkung.** Sei  $P = (V, W)$ . Ist  $R$  halbeinfach (z.B. ein Körper), dann ist  ${}_R W$  projektiv und somit sind nach Folgerung 2.1.16 die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1)  $P$  ist ein  $\alpha$ -Paar.
- (2)  $P$  ist ein dichtes Paar (d.h.  $\kappa_P(V) \subset W^*$  ist dicht).
- (3)  $W \subset V^*$ .

## Messende $\alpha$ -Paare

**2.1.18. Definition.** ([Swe69]) Seien  $A, B$   $R$ -Algebren,  $C$  eine  $R$ -Koalgebra und betrachte den natürlichen Isomorphismus

$$\Psi : \text{Hom}_R(C \otimes_R A, B) \longrightarrow \text{Hom}_R(A, \text{Hom}(C, B)), \quad f \longmapsto [a \longmapsto f(- \otimes a)].$$

Ist  $\phi : C \otimes_R A \longrightarrow B$  ein  $R$ -Morphismus, so dass  $\kappa := \Psi(\phi) : A \longrightarrow (\text{Hom}_R(C, B), \star)$  ein Algebra-Morphismus ist, so sagt man  $(C, \phi)$  **mißt**  $A$  **nach**  $B$ .

**2.1.19. Messende Paare.** Seien  $A$  eine  $R$ -Algebra,  $C$  eine  $R$ -Koalgebra mit einer  $R$ -linearen Abbildung  $\phi : C \otimes_R A \longrightarrow R$ . Mißt  $(C, \phi)$   $A$  nach  $R$ , also ist  $\kappa := \Psi(\phi) : A \longrightarrow C^*$  ein Algebra-Morphismus, so nennen wir das Paar  $P = (A, C)$  ein **messendes Paar**.

Mit  $\mathcal{P}_m \subset \mathcal{P}$  bezeichnen wir die Unterkategorie, deren Objekte die messenden Paare sind. Sind  $(A, C), (B, D)$  messende Paare, so ist ein Paar-Morphismus

$$(\xi, \theta) : (B, D) \longrightarrow (A, C)$$

ein Morphismus in  $\mathcal{P}_m$ , falls  $\xi : A \longrightarrow B$  ein Algebra-Morphismus und  $\theta : D \longrightarrow C$  ein Koalgebra-Morphismus sind.

Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$ . Sind  $J \triangleleft A$  ein Ideal und  $D \xhookrightarrow{\iota} C$  eine  $R$ -Unterkoalgebra mit  $\langle J, D \rangle = 0$ , dann nennen wir  $Q := (A/J, D)$  ein **Unterpaar** von  $P$ . Offensichtlich ist  $Q \in \mathcal{P}_m$  und

$$(\pi, \iota) : (A/J, D) \longrightarrow (A, C)$$

ist ein Morphismus in  $\mathcal{P}_m$ . Setzen wir  $C^\perp := \{a \in A, \langle a, C \rangle = 0\}$ , so ist  $C^\perp$  ein zweiseitiges  $A$ -Ideal und  $(A/C^\perp, C) \subset (A, C)$  ein links-nicht-ausgeartetes Unterpaar.

Mit  $\mathcal{P}_m^\alpha \subset \mathcal{P}_m$  bezeichnen wir die *volle* Unterkategorie der **messenden  $\alpha$ -Paare**. Ist  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ , dann erfüllt jedes Unterpaar  $Q \subset P$  die  $\alpha$ -Bedingung (vgl. Proposition 2.1.7 (1-b)).

**2.1.20.** Ist  $(A, C)$  ein messendes Paar, so ist  $C$  ein *unitärer*  $A$ -Bimodul durch

$$a \rightharpoonup c := \sum c_1 \langle a, c_2 \rangle \quad \text{und} \quad c \leftharpoonup a := \sum \langle a, c_1 \rangle c_2 \quad \forall a \in A, c \in C. \quad (2.8)$$

Ist  $P$  links-nicht-ausgeartet, dann ist  $C$  ein treuer  $A$ -Bimodul. Offensichtlich ist  $C$  ein unitärer und somit ein *A-treuer*  $A$ -Bimodul.

**2.1.21.** Seien  $A$  eine  $R$ -Algebra und  $M$  ein  $A$ -Linksmodul. Für jeden  $R$ -Linksmodul ( $A$ -Linksmodul)  $N$  betrachten wir  $\text{Hom}_R(M, N)$  als einen kanonischen  $A$ -Rechtsmodul ( $A$ -Bimodul) vermöge

$$(fa)(m) = f(am) \quad (\text{und} \quad (af)(m) = af(m)) \quad \text{für alle } a \in A, f \in \text{Hom}_R(M, N) \text{ und } m \in M. \quad (2.9)$$

Ist  $M$  ein  $A$ -Rechtsmodul und  $N$  ein  $R$ -Modul ( $A$ -Rechtsmodul), dann betrachten wir  $\text{Hom}_R(M, N)$  als einen kanonischen  $A$ -Linksmodul ( $A$ -Bimodul) durch

$$(af)(m) = f(ma) \quad (\text{und} \quad (fa)(m) = f(m)a) \quad \text{für alle } a \in A, f \in \text{Hom}_R(M, N) \text{ und } m \in M. \quad (2.10)$$

*2.1.22. Bemerkung.* Seien  $P = (A, C)$  ein messendes Paar,  $M$  ein beliebiger  $R$ -Modul, und betrachte  $M \otimes_R C$  mit der von  ${}_A C$  induzierten  $A$ -Linksmodul-Struktur und  $\text{Hom}_R(A, M)$  mit der kanonischen  $A$ -Linksmodul-Struktur. So gilt für beliebige  $\sum m_i \otimes c_i \in M \otimes C$  und  $a, \tilde{a} \in A$ :

$$\begin{aligned} \alpha_M^P(a \rightharpoonup \sum m_i \otimes c_i)(\tilde{a}) &= \sum \langle \tilde{a}, a \rightharpoonup c_i \rangle m_i = \sum \langle \tilde{a}a, c_i \rangle m_i \\ &= \alpha_M^P(m_i \otimes c_i)(\tilde{a}a) = (a \rightharpoonup \alpha_M^P(m_i \otimes c_i))(\tilde{a}), \end{aligned}$$

also ist  $\alpha_M^P$   $A$ -linear.

**2.1.23. Lemma.** Seien  $P = (A, C), Q = (B, D) \in \mathcal{P}_m$  und  $(\xi, \theta) : (B, D) \longrightarrow (A, C)$  ein Morphismus in  $\mathcal{P}$ .

1. Setze  $P \otimes P := (A \otimes A, C \otimes C)$  und nehme an  $\chi_{P \otimes P} : C \otimes C \hookrightarrow (A \otimes A)^*$  sei eine Einbettung. Ist  $\xi$  ein Algebra-Morphismus, dann ist  $\theta$  ein Koalgebra-Morphismus. Ist  $A$  kommutativ, dann ist  $C$  kokommutativ.

2. Sei  $B \xrightarrow{\kappa_Q} D^*$  eine Einbettung. Ist  $\theta$  ein Koalgebra-Morphismus, dann ist  $\xi$  ein Algebra-Morphismus. Ist  $C$  kokommutativ und  $A \subseteq C^*$ , dann ist  $A$  kommutativ.

**Beweis.** 1. Ist  $\xi$  ein Algebra-Morphismus, so gilt für beliebige  $d \in D$ ,  $a, \tilde{a} \in A$ :

$$\begin{aligned}
 \chi_{P \otimes P}(\sum \theta(d)_1 \otimes \theta(d)_2)(a \otimes \tilde{a}) &= \sum \langle a, \theta(d)_1 \rangle \langle \tilde{a}, \theta(d)_2 \rangle \\
 &= \langle a\tilde{a}, \theta(d) \rangle \\
 &= \langle \xi(a\tilde{a}), d \rangle \\
 &= \langle \xi(a)\xi(\tilde{a}), d \rangle \\
 &= \sum \langle \xi(a), d_1 \rangle \langle \xi(\tilde{a}), d_2 \rangle \\
 &= \sum \langle a, \theta(d_1) \rangle \langle \tilde{a}, \theta(d_2) \rangle \\
 &= \chi_{P \otimes P}(\sum \theta(d_1) \otimes \theta(d_2))(a \otimes \tilde{a}).
 \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist  $\chi_{P \otimes P} : C \otimes C \hookrightarrow (A \otimes A)^*$  eine Einbettung und somit ist  $\sum \theta(d)_1 \otimes \theta(d)_2 = \sum \theta(d_1) \otimes \theta(d_2)$  für jedes  $d \in D$ , also ist  $\theta$  ein Koalgebra-Morphismus.

Ist  $A$  kommutativ, dann gilt für alle  $c \in C$  und  $a, \tilde{a} \in A$ :

$$\begin{aligned}
 \chi_{P \otimes P}(\sum c_1 \otimes c_2)(a \otimes \tilde{a}) &= \sum \langle a, c_1 \rangle \langle \tilde{a}, c_2 \rangle = \langle a\tilde{a}, c \rangle \\
 &= \langle \tilde{a}a, c \rangle = \sum \langle a, c_2 \rangle \langle \tilde{a}, c_1 \rangle \\
 &= \chi_{P \otimes P}(\sum c_2 \otimes c_1)(a \otimes \tilde{a}).
 \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist  $\chi_{P \otimes P}$  injektiv und daher ist  $\sum c_1 \otimes c_2 = \sum c_2 \otimes c_1$  für jedes  $c \in C$ , also ist  $C$  kokommutativ.

2. Analog zu (1). ■

Mit Hilfe von Lemma 2.1.11 ergibt sich die folgende Aussage:

**2.1.24. Lemma.** Für  $P = (A, C), Q = (B, D) \in \mathcal{P}_m$  gilt:

1.  $P \otimes Q := (A \otimes B, C \otimes D) \in \mathcal{P}_m$ .
2. Sind  $P, Q \in \mathcal{P}_m^\alpha$ , dann ist  $P \otimes Q \in \mathcal{P}_m^\alpha$ .

**2.1.25. Bemerkung.** Sei  $A$  eine  $R$ -Algebra. Ist  $M$  ein  $A$ -Linksmodul (bzw.  $A$ -Rechtsmodul,  $A$ -Bimodul), dann stimmen die  $A$ -Rechtsuntermoduln (bzw. die  $A$ -Linksuntermoduln, die  $A$ -Unterbimoduln) von  $M^*$  und die  $RA$ -Rechtsuntermoduln (bzw. die  $RA$ -Linksuntermoduln, die  $RA$ -Unterbimoduln) von  $M^*$  überein.

**Notation.** Für jede  $R$ -Algebra  $A$  setzen wir

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_A &:= \{I \triangleleft A \mid I \text{ ist ein } R\text{-koendliches } \textit{zweiseitiges } A\text{-Ideal}\}, \\
 \mathcal{E}_A &:= \{I \triangleleft A \mid A/I \text{ ist endlich erzeugt und projektiv in } {}_R\mathcal{M}\},
 \end{aligned}$$

**2.1.26. Lemma.** ([AG-TW2000, Proposition 2.6]) *Ist  $R$  noethersch, dann gilt für jede  $R$ -Algebra  $A$ :*

$$\begin{aligned} A^\circ &:= \{f \in A^* \mid \exists I \triangleleft A \text{ ein } R\text{-koendliches Ideal, so dass } f(I) = 0\} \\ &= \{f \in A^* \mid \exists I \subset A \text{ ein } R\text{-koendliches } A\text{-Rechts- bzw. } A\text{-Linksideal mit } f(I) = 0\} \\ &= \{f \in M^* \mid Af \text{ bzw. } fA \text{ ist e.e. in } {}_R\mathcal{M}\} \\ &= \{f \in M^* \mid AfA \text{ ist e.e. in } {}_R\mathcal{M}\}. \end{aligned}$$

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir Paare verschiedener Art. Zwei von diesen Paaren sind von besonderem Interesse und spielen eine große Rolle bei den von uns betrachteten Dualitätssätzen: für jede  $R$ -Koalgebra  $C$  das kanonische Paar  $(C^*, C)$  und für jede  $R$ -Algebra  $A$ , für die  $\mathcal{K}_A$  ein Filter ist, das kanonische Paar  $(A, A^\circ)$ .

**2.1.27. Definition.** Eine  $R$ -Koalgebra  $C$  nennen wir eine  $\alpha$ -**Koalgebra**, falls das kanonische Paar  $(C^*, C)$  die  $\alpha$ -Bedingung erfüllt (gleichbedeutend wenn  ${}_R C$  lokal projektiv ist). Mit  $\mathbf{Cog}_R^\alpha \subset \mathbf{Cog}_R$  bezeichnen wir die *volle* Unterkategorie der  $\alpha$ -Koalgebren. Eine  $R$ -Algebra (bzw.  $R$ -Bialgebra,  $R$ -Hopf-Algebra)  $A$  nennen wir eine  $\alpha$ -**Algebra** (bzw.  $\alpha$ -**Bialgebra**,  $\alpha$ -**Hopf-Algebra**), wenn  $\mathcal{K}_A$  ein Filter ist und  $(A, A^\circ)$  ein  $\alpha$ -Paar ist. Mit  $\mathbf{Alg}_R^\alpha \subset \mathbf{Alg}_R$  (bzw.  $\mathbf{Big}_R^\alpha \subset \mathbf{Big}_R$ ,  $\mathbf{Hopf}_R^\alpha \subset \mathbf{Hopf}_R$ ) bezeichnen wir die *volle* Unterkategorie der  $\alpha$ -Algebren (bzw. Unterkategorie der  $\alpha$ -Bialgebren, Unterkategorie der  $\alpha$ -Hopf-Algebren).

Ist  $(A, \mu_A, \eta_A)$  eine endliche  $R$ -Algebra, dann ist  $(A^*, \mu_A^*, \eta_A^*)$  eine  $R$ -Koalgebra (siehe 1.1.9). Ist  $A$  *nicht endlich*, so ist die kanonische  $R$ -lineare Abbildung  $\delta : A^* \otimes A^* \longrightarrow (A \otimes A)^*$  nicht surjektiv und somit induziert  $(A^*, \mu_A^*, \eta_A^*)$  (auch im Körper-Fall) im Allgemeinen keine  $R$ -Koalgebra-Struktur auf  $A^*$ . Ist  $R$  ein Körper und  $A$  eine  $R$ -Algebra (bzw.  $R$ -Bialgebra,  $R$ -Hopf-Algebra), dann ist  $(A^\circ, \mu_A^\circ, \eta_A^\circ)$  eine  $R$ -Koalgebra [Swe69, Proposition 6.0.2] (bzw.  $R$ -Bialgebra,  $R$ -Hopf-Algebra [Swe69, Seiten 122-123]). Diese Aussage wurde in [CN90] auf Dedekind-Ringe verallgemeinert und in [AG-TW2000] auf *erbliche noethersche* Ringe erweitert:

**2.1.28. Lemma.** ([AG-TW2000], [AG-TL2001]) *Sei  $A$  eine  $R$ -Algebra (bzw.  $R$ -Bialgebra,  $R$ -Hopf-Algebra). Ist  $R$  noethersch, dann gilt:*

1.  *$A$  ist eine  $\alpha$ -Algebra genau dann, wenn  $A^\circ \subset R^A$  rein ist. Ist  $R$  außerdem erblich, dann ist  $\mathbf{Alg}_R^\alpha = \mathbf{Alg}_R$ .*
2. *Ist  $A$  eine  $\alpha$ -Algebra (bzw. eine  $\alpha$ -Bialgebra, eine  $\alpha$ -Hopf-Algebra), dann ist  $A^\circ$  eine  $R$ -Koalgebra (bzw. eine  $R$ -Bialgebra, eine  $R$ -Hopf-Algebra).*

Lemma 2.1.28 wird in Satz 2.4.5 verfeinert.

## 2.2 Rationale Darstellungen

Das Konzept der rationalen Darstellungen bzw. der rationalen Moduln geht auf die Theorie der Affinen Algebraischen Gruppen zurück (siehe z.B. [Voi77], [Yan77], [Don85]). In [Swe69, Seite 37] wurde für jedes *dichte Paar*  $(A, C)$  über einem Körper die Kategorie der *C-rationalen A-Linksmoduln*  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  mit der Kategorie der *C-Rechtskomoduln* identifiziert. Die Identifizierung der beiden Kategorien wurde in [G-T98] auf *rationale Systeme*  $(A, C)$  über beliebigen Ringen verallgemeinert, und auf die Kategorie  $\sigma[{}_AC]$  der *C-suberzeugten A-Linksmoduln* erweitert. Das kanonische Paar  $(C^*, C)$  ist ein *rationales System* im Sinne von [G-T98] genau dann, wenn  ${}_RC$  projektiv ist, und man gewinnt die auch in [Wis99] erzielten Kategorie-Isomorphismen  $\mathcal{M}^C \simeq \text{Rat}^C({}_{C^*}\mathcal{M}) = \sigma[{}_{C^*}C]$ .

In [AG-TL2001] haben wir die  $\alpha$ -Bedingung für messende Paare eingeführt und für jedes messende  $\alpha$ -Paar  $(A, C)$  die Kategorie-Isomorphismen  $\mathcal{M}^C \simeq \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}) = \sigma[{}_AC]$  erzielt. Für  $A = C^*$  entspricht die  $\alpha$ -Bedingung laut Lemma 2.1.15 die *lokal Projektivität* von  ${}_RC$ .

In diesem Paragraphen charakterisieren wir die messende  $\alpha$ -Paare  $(A, C)$  als diejenigen, für die  ${}_RC$  die  $\alpha$ -Bedingung erfüllt (gleichbedeutend  ${}_RC$  lokal projektiv) und  $\kappa_P(A) \subset C^*$  dicht ist (Satz 2.2.16). Wir beschäftigen uns sowohl mit algebraischen als auch mit topologischen Charakterisierungen der rationalen Darstellungen für messende  $\alpha$ -Paare (Proposition 2.2.26). Außerdem behandeln wir auch den Fall in dem die  $R$ -Algebra  $A$  keine Einheit hat (Satz 2.2.13).

Zunächst definieren wir die Kategorien vom Typ  $\sigma[M]$ . Für eine ausführliche Betrachtung von solchen Kategorien sei auf [Wis88] und [Wis96] verwiesen.

**2.2.1. Subgeneratoren.** Seien  $A$  eine  $R$ -Algebra und  $M \in {}_A\mathcal{M}$ . Ein  $A$ -Linksmodul  $N$  ist *M-suberzeugt*, oder  $K$  ist ein **Subgenerator** für  $N$ , falls  $N$  isomorph ist zu einem  $A$ -Untermodul eines  $K$ -erzeugten  $A$ -Linksmoduls (gleichbedeutend, wenn  $N$  Kern eines Homomorphismus zwischen  $K$ -erzeugten  $A$ -Linksmoduln ist). Mit  $\sigma[{}_AK]$  bezeichnen wir die *volle* Unterkategorie von  ${}_A\mathcal{M}$ , deren Objekte die von  $K$  suberzeugten  $A$ -Linksmoduln sind. Nach Definition ist  $\sigma[{}_AK]$  die *kleinste* volle Grothendieck Unterkategorie von  ${}_A\mathcal{M}$ , die  $K$  enthält. Außerdem haben wir einen Präradikal

$$\text{Sp}(\sigma[{}_AK], -) : {}_A\mathcal{M} \longrightarrow \sigma[{}_AC], \quad M \longmapsto \sum \{f(U) \mid U \in \sigma[{}_AK] \text{ und } f \in \text{Hom}_{A-}(U, M)\}. \quad (2.11)$$

Für jeden  $A$ -Linksmodul  $M$  ist  $\text{Sp}(\sigma[{}_AK], M) \subset M$  der *größte*  $A$ -Untermodul, der von  $K$  suberzeugt wird.

Analog definiert man für jeden  $A$ -Rechtsmodul  $K$  die Kategorie der  $K$ -suberzeugten  $A$ -Rechtsmoduln  $\sigma[K_A]$ .

**Notation.** Seien  $A$  eine  $R$ -Algebra und  $N$  ein  $A$ -Linksmodul (bzw. ein  $A$ -Rechtsmodul). Für Untermengen  $X, Y \subset N$  setzen wir

$$(Y : X) := \{a \in A \mid aX \subset Y\} \text{ (bzw. } (Y : X) := \{a \in A \mid Xa \subset Y\}).$$

Ist  $Y = \{0_N\}$ , dann setzen wir auch  $\text{An}_A(X) := (0_N : X)$ . Ist  $N$  ein  $A$ -Bimodul, so setzen wir für jede Untermenge  $X \subset N$ :

$$\text{An}_A^l(X) := \{a \in A \mid aX = 0_N\} \text{ und } \text{An}_A^r(X) := \{a \in A \mid Xa = 0_N\}.$$

**2.2.2. Die  $C$ -adische Topologie.** Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$  und betrachte  $C$  als einen  $A$ -Linksmodul durch  $(\rightarrow)$  in (2.8). Dann ist die Klasse der  $A$ -Linksideale

$$\mathcal{B}_{C-}(0_A) := \{\text{An}_A^l(W) \mid W \subset C \text{ ist eine endliche Untermenge}\}$$

Umgebungsbasis der  $0_A$  einer links-linearen Topologie, der  **$C$ -adischen Topologie**  $\mathcal{T}_{C-}(A)$ , und  $(A, \mathcal{T}_{C-}(A))$  ist eine links-linear topologische  $R$ -Algebra (siehe [AW97], [Ber94]). Ein  $A$ -Linksideal  $I \triangleleft_l A$  ist offen bzgl.  $\mathcal{T}_{C-}(A)$  genau dann, wenn  $A/I$   $C$ -suberzeugt ist. Außerdem stimmen die diskreten  $(A, \mathfrak{T})$ -Linksmoduln und die  $C$ -suberzeugten  $A$ -Linksmoduln überein genau dann, wenn  $\mathfrak{T} = \mathcal{T}_{C-}(A)$  ist. Damit ist für jeden  $A$ -Linksmodul  $N$

$$\text{Sp}(\sigma[A_C], N) = \{n \in N \mid \exists F = \{c_1, \dots, c_k\} \subset C \text{ mit } (0_C : F) \subset (0_N : n)\}.$$

Die Kategorie  $\sigma[A_C]$  der  $C$ -suberzeugten  $A$ -Linksmoduln und die Kategorie der diskreten  $(A, \mathcal{T}_{C-}(A))$ -Moduln stimmen dann überein.

Betrachten wir  $C$  als einen  $A$ -Rechtsmodul vermöge  $(\leftarrow)$  in (2.8), so definiert man analog die  **$C$ -adischen rechts-linear Topologie**  $\mathcal{T}_{-C}(A)$  (siehe [AW97], [Ber94]). Die Kategorie der  $C$ -suberzeugten  $A$ -Rechtsmoduln  $\sigma[C_A]$  und die Kategorie der diskreten  $(A, \mathcal{T}_{-C}(A))$ -Moduln stimmen dann überein.

**2.2.3. Die linear schwache Topologie.** Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$  und setze für jede Untermenge  $K \subset C$  bzw.  $I \subset A$ :

$$K^\perp := \{a \in A \mid \langle a, K \rangle = 0\} \text{ bzw. } I^\perp := \{c \in C \mid \langle I, c \rangle = 0\}.$$

Dann ist die Klasse der  $R$ -Untermoduln von  $A$ :

$$\mathcal{F}(0_A) := \{K^\perp \mid K \subset C \text{ ist ein endlich erzeugter } R\text{-Untermodul}\}$$

eine Filterbasis und induziert somit auf  $A$  eine Topologie, die **linear schwache Topologie**  $A[\mathfrak{T}_{ls}(C)]$ , so dass  $(A, A[\mathfrak{T}_{ls}(C)])$  ein linear topologischer  $R$ -Modul und  $\mathcal{F}(0_A)$  eine Umgebungsbasis der  $0_A$  wird (siehe den Anhang).

**2.2.4. Lemma.** Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$ .

1. Die linear schwache Topologie  $A[\mathfrak{T}_{ls}(C)]$  und die  $C$ -adische Topologie  $\mathcal{T}_{C-}(A)$  stimmen überein. Insbesondere ist  $(A, A[\mathfrak{T}_{ls}(C)])$  eine linear topologische  $R$ -Algebra. Ein  $A$ -Linksmodul  $M$  ist genau dann  $(A, A[\mathfrak{T}_{ls}(C)])$ -diskret, wenn  ${}_A M$   $C$ -suberzeugt ist.
2.  $\mathcal{T}_{C-}(A)$  ist genau dann Hausdorff, wenn  $A \xrightarrow{\kappa_P} C^*$ .

3. Ist  $\kappa_P(A) \subset C^*$  dicht und ist  $R$   $C$ -injektiv, dann ist  $\hat{A} \simeq C^*$ , wobei  $\hat{A}$  die Vollständigung von  $A$  bzgl.  $A[\mathfrak{I}_{ls}(C)]$  ist.
4.  $C^*[\mathfrak{I}_{ls}(C)]$  ist Hausdorff. Ist  $R$   $C$ -injektiv, dann ist  $C^*[\mathfrak{I}_{ls}(C)]$  vollständig.

**Beweis.** 1. Sei  $U$  eine Umgebung der  $0_A$  bzgl.  $A[\mathfrak{I}_{ls}(C)]$ . Dann existiert ein endlich erzeugter  $R$ -Untermodul  $K \subset C$ , so dass  $K^\perp \subset U$ . Es gilt aber für jedes  $a \in (0_C : K)$

$$\langle a, c \rangle = \langle a, \sum \varepsilon(c_1)c_2 \rangle = \varepsilon(a \rightarrow c) = 0,$$

und daher  $(0_C : K) \subseteq K^\perp \subset U$ , also ist  $U$  eine Umgebung der  $0_A$  bzgl.  $\mathcal{T}_{C-}(A)$ . Andererseits, sei  $U$  eine Umgebung der  $0_A$  bzgl.  $\mathcal{T}_{C-}(A)$ . Dann existiert eine endliche Menge  $W = \{c_1, \dots, c_k\}$ , so dass  $(0_C : W) \subseteq U$ . Sei  $\Delta(c_i) = \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} \otimes \tilde{c}_{ij}$  für  $i = 1, \dots, k$  und setze  $F := \{\tilde{c}_{ij} \mid j = 1, \dots, n_i, i = 1, \dots, k\}$ . Dann ist  $F^\perp \subseteq (0_C : W) \subset U$ , also ist  $U$  eine Umgebung der  $0_A$  bzgl.  $A[\mathfrak{I}_{ls}(C)]$ . Daher ist  $A[\mathfrak{I}_{ls}(C)] = \mathcal{T}_{C-}(A)$ . Die Aussage folgt dann aus 2.2.2.

2. Bezeichnet  $\mathcal{C}^f$  die Menge der endlich erzeugten  $R$ -Untermoduln von  $C$ , so gilt nach (1):

$$\overline{0_A} := \bigcap \{K^\perp \mid K \in \mathcal{C}^f\} = \left(\bigcup \{K \in \mathcal{C}^f\}\right)^\perp = C^\perp = Ke(\kappa_P).$$

3. Betrachte für jeden endlich erzeugten  $R$ -Untermodul  $K \xrightarrow{\iota_K} C$  die  $R$ -lineare Abbildung

$$\varphi_K : A \longrightarrow K^*, \quad a \longmapsto [k \longmapsto \langle a, k \rangle].$$

Nach Voraussetzung ist  $\iota_K^* : C^* \longrightarrow K^*$  surjektiv und  $\kappa_P(A) \subset C^*$  ist dicht und somit ist  $\varphi_K$  surjektiv, also ist  $A/K^\perp \simeq K^*$ . Schreibe  $C = \varinjlim K_\lambda$  für ein direktes System  $\{K_\lambda\}_\Lambda$  von endlich erzeugten  $R$ -Untermoduln von  $C$ . Dann gilt:

$$\hat{A} := \varinjlim A/K_\lambda^\perp \simeq \varinjlim K_\lambda^* \simeq \text{Hom}_R(\varinjlim K_\lambda, R) \simeq C^*.$$

4. folgt schon aus (3) und (4). ■

Als Korollar von Lemma 2.2.4 und Proposition A.0.5 bekommen wir die folgende Aussage:

**2.2.5. Folgerung.** Ist  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$ , dann sind für jeden  $R$ -Untermodul  $Y \subset A$  die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $Y \subset A$  ist dicht bezüglich  $A[\mathfrak{I}_{ls}(C)]$ .
2.  $Y \subset A$  ist dicht bezüglich der endlichen Topologie auf  $\text{End}_{\mathbb{Z}}(C)$ .

Ist  $R$  ein injektiver Kogenerator und ist  $C \xrightarrow{\chi_P} A^*$  eine Einbettung, dann ist weiter dazu äquivalent:

3.  $Y^\perp := \{c \in C \mid \langle a, c \rangle = 0 \text{ für jedes } a \in Y\} = 0$ .

Für jedes  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  charakterisieren wir im Folgenden die Kategorie der  $C$ -Rechtskomoduln als die Kategorie der  $C$ -suberzeugten  $A$ -Linksmoduln  $\sigma[A C]$ . Durch diese Charakterisierung können wir die guten Kenntnisse über die Kategorien vom Typ  $\sigma[M]$  (siehe [Wis88]) zum Studium der Kategorie  $\mathcal{M}^C$  heranziehen.

**2.2.6.** Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  ( $A$  nicht notwendig mit Einheit). Einen  $A$ -Linksmodul  $(M, \rho_M)$  nennen wir  **$C$ -rational**, falls  $(M, \rho_M)$   $A$ -treu (d.h. wenn  $\rho_M : M \longrightarrow \text{Hom}_R(A, M)$  injektiv ist), und für jedes  $m \in M$  ein eindeutig bestimmtes Element  $\sum m_i \otimes c_i \in M \otimes_R C$  existiert, so dass

$$am = \sum m_i \langle a, c_i \rangle \text{ für alle } a \in A \text{ und } m \in M.$$

Betrachte die Einbettung

$$\alpha_M^P : M \otimes C \hookrightarrow \text{Hom}_R(A, M), \quad m \otimes c \longmapsto [a \longmapsto \langle a, c \rangle m].$$

Für jeden  $A$ -treuen  $A$ -Linksmodul  $(M, \rho_M)$  nennen wir

$$\text{Rat}^C({}_A M) := \{m \in M \mid \rho_M(m) \in \alpha_M(M \otimes_R C)\}$$

den  **$C$ -rationalen Untermodul** von  $M$  und jedes  $m \in \text{Rat}^C({}_A M)$  ein  **$C$ -rationales Element**. Einen  $A$ -treuen  $A$ -Linksmodul  $M$  nennen wir  **$C$ -rational-frei**, falls  $\text{Rat}^C({}_A M) = 0$ .

Mit  $\text{Rat}^C({}_A \widetilde{\mathcal{M}}) \subset {}_A \widetilde{\mathcal{M}}$  bezeichnen wir die *volle* Unterkategorie der  $C$ -rationalen  $A$ -Linksmoduln. Die Kategorie der *unitären*  $C$ -rationalen  $A$ -Linksmoduln bezeichnen wir mit  $\text{Rat}^C({}_A \mathcal{M})$ .

Analog definiert man die Kategorie der  $C$ -rationalen  $A$ -Rechtsmoduln  ${}^C \text{Rat}(\widetilde{\mathcal{M}}_A)$ . Die Kategorie der *unitären*  $C$ -rationalen  $A$ -Rechtsmoduln bezeichnen wir mit  ${}^C \text{Rat}(\mathcal{M}_A)$ .

Analog zu [G-T98, Proposition 2.9] bekommen wir:

**2.2.7. Lemma.** Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ . Für jeden  $A$ -treuen  $A$ -Linksmodul  $M$  gilt:

1.  $\text{Rat}^C({}_A M) \subset M$  ist ein  $A$ -Untermodul.
2. Für jeden  $A$ -Untermodul  $N \subset M$  gilt  $\text{Rat}^C({}_A N) = N \cap \text{Rat}^C({}_A M)$ .
3.  $\text{Rat}^C(\text{Rat}^C({}_A M)) = \text{Rat}^C({}_A M)$ .
4. Für jedes  $L \in {}_A \widetilde{\mathcal{M}}$  und jedes  $f \in \text{Hom}_{A-}(M, L)$  ist  $f(\text{Rat}^C({}_A M)) \subseteq \text{Rat}^C({}_A L)$ .

**Beweis.** 1. Seien  $b \in A$  und  $m \in \text{Rat}^C({}_A M)$  mit  $\varrho_M(m) = \sum m_i \otimes c_i \in M \otimes C$ . Dann gilt für jedes  $a \in A$ :

$$a(bm) = (ab)(m) = \sum m_i \langle ab, c_i \rangle = \sum m_i \langle a, bc_i \rangle,$$

also ist  $bm \in \text{Rat}^C({}_A M)$  mit  $\varrho_M(bm) = \sum m_i \otimes bc_i \in M \otimes C$ .

2. Offensichtlich ist  $\text{Rat}^C({}_A N) \subseteq N \cap \text{Rat}^C({}_A M)$ . Auf der anderen Seite, ist  $m \in N \cap \text{Rat}^C({}_A M)$ , dann existiert  $\sum m_i \otimes c_i \in M \otimes C$ , so dass  $\sum m_i < a, c_i > = am \in N$  für alle  $a \in A$ . Nach Lemma 2.1.6 ist  $\sum m_i \otimes c_i \in N \otimes C$ , d.h.  $m \in \text{Rat}^C({}_A N)$ .
3. folgt aus (1) und (2).
4. Seien  $L \in {}_A \widetilde{\mathcal{M}}$  und  $f \in \text{Hom}_{A-}(M, L)$ . Ist  $m \in \text{Rat}^C({}_A M)$  mit  $\varrho_M(m) = \sum m_i \otimes c_i \in M \otimes C$ , dann gilt für jedes  $a \in A$ :

$$af(m) = f(am) = f(\sum m_i < a, c_i >) = \sum f(m_i) < a, c_i >,$$

also ist  $f(m) \in \text{Rat}^C({}_A L)$  mit  $\varrho_L(f(m)) = \sum f(m_i) \otimes c_i \in L \otimes C$ . ■

**2.2.8. Lemma.** Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$  ( $A$  nicht notwendig mit Einheit).

1. Ist  $(M, \varrho_M)$  ein  $C$ -Rechtskomodul, dann wird  $M$  ein  $A$ -Linksmodul durch

$$\rho_M : M \xrightarrow{\alpha_M \circ \varrho_M} \text{Hom}_R(A, M)$$

Hat  $A$  eine Einheit und ist  $M$  kounitär, dann ist  ${}_A M$  unitär (und folglich  $A$ -treu).

2. Seien  $(M, \varrho_M), (N, \varrho_N)$   $C$ -Rechtskomoduln und betrachte die induzierten  $A$ -Linksmodul-Strukturen  $(M, \rho_M), (N, \rho_N)$ . Ist  $f : M \rightarrow N$   $C$ -kolinear, dann ist  $f$   $A$ -linear.
3. Seien  $N$  ein  $C$ -Rechtskomodul und  $K$  ein  $C$ -Unterkomodul. Betrachten wir die induzierten  $A$ -Linksmodul-Strukturen  $(N, \rho_N), (K, \rho_K)$ , dann ist  $K \subset N$  ein  $A$ -Untermodule.

**Beweis.** 1. Setze  $P \otimes P := (A \otimes A, C \otimes C)$  und betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\rho_M} & & \text{Hom}(A, M) & (2.12) \\
 \downarrow \rho_M & \searrow \varrho_M & \xrightarrow{\varrho_M} & M \otimes C & \searrow \alpha_M \\
 & M \otimes C & \xrightarrow{\varrho_M \otimes id_C} & M \otimes C \otimes C & \searrow \alpha_M^{P \otimes P} \\
 & \downarrow \varrho_M & \downarrow id_M \otimes \Delta & & \\
 & M \otimes C & & & \\
 & \swarrow \alpha_M & & & \\
 \text{Hom}(A, M) & \xrightarrow{(A, \rho_M)} & \text{Hom}(A, \text{Hom}(A, M)) & \xrightarrow{\zeta^l} & \text{Hom}(A \otimes A, M) \\
 & & & & \downarrow (\mu, M)
 \end{array}$$

Das rechte Trapez ist offensichtlich kommutativ und nach Definition von  $\rho_M$  sind alle anderen Trapeze kommutativ. Nach Voraussetzung ist das innere Rechteck kommutativ und somit ist das äußere Rechteck kommutativ, also ist  $(M, \rho_M)$  ein  $A$ -Linksmodul. Hat  $A$  ein Einselement, dann ist  $\kappa_P(1_A) = \varepsilon_C$  und somit ist für jedes  $m \in M$  :  $1_A m = \varepsilon_C m = \sum m_{<0>} \varepsilon_C(m_{<1>}) = m$ , also ist  ${}_A M$  unitär.

2. Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 \rho_M \searrow & & \swarrow \rho_N \\
 \text{Hom}_R(A, M) & \xrightarrow{(A, f)} & \text{Hom}_R(A, N) \\
 \alpha_M \nearrow & & \nwarrow \alpha_N \\
 M \otimes C & \xrightarrow{f \otimes id_C} & N \otimes C
 \end{array}
 \quad (2.13)$$

Das untere Trapez ist offensichtlich kommutativ und die Dreiecke sind nach Definition von  $\rho_M, \rho_N$  kommutativ. Ist  $f$   $C$ -kolinear, dann ist das äußere Rechteck kommutativ und folglich ist das obere Trapez kommutativ, also ist  $f$   $A$ -linear.

3. trivial. ■

**2.2.9. Lemma.** Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  ( $A$  nicht notwendig mit Einheit).

1. Ist  $(M, \rho_M) \in {}_A\widetilde{\mathcal{M}}$   $C$ -rational, dann wird  $M$  ein kounitärer  $C$ -Rechtskomodul durch

$$\varrho_M : M \xrightarrow{\alpha_M^{-1} \circ \rho_M} M \otimes C$$

2. Seien  $(M, \rho_M), (N, \rho_N) \in {}_A\widetilde{\mathcal{M}}$   $C$ -rational und betrachte  $(M, \varrho_M), (N, \varrho_N) \in \mathcal{M}^C$  (vgl. (1)). Dann ist  $\text{Hom}^C(M, N) = \text{Hom}_{A-}(M, N)$ .

3. Sei  $(N, \rho_N) \in {}_A\widetilde{\mathcal{M}}$   $C$ -rational und betrachte den induzierten  $C$ -Rechtskomodul  $(N, \varrho_N)$ . Ist  $K \subset N$  ein  $A$ -Untermodul, dann wird  $K$  ein kounitärer  $C$ -Unterkomodul und es gilt außerdem  $\varrho_K = (\varrho_N)|_K$ .

**Beweis.** 1. Ist  $(M, \rho_M)$   $C$ -rational, dann ist  $\rho_M(M) \subset \alpha_M(M \otimes C)$  (nach Definition). Außerdem ist  $\alpha_M$  injektiv und somit ist  $\varrho_M := \alpha_M^{-1} \circ \rho_M : M \rightarrow M \otimes C$  wohl definiert. Setzen wir  $P \otimes P := (A \otimes A, C \otimes C)$ , dann bekommen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Hom}_R(A, M) & \\
 \rho_M \uparrow & \swarrow \alpha_M & \\
 M & \xrightarrow{\varrho_M} & M \otimes C
 \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist  $M$  ein  $A$ -treuer  $A$ -Linksmodul (d.h.  $\rho_M$  ist injektiv) und somit ist  $\varrho_M$  injektiv. Das rechte Trapeze in Diagramm (2.12) ist offensichtlich kommutativ und nach Definition von  $\varrho_M$  sind alle anderen Trapeze kommutativ. Nach Voraussetzung ist  $M$  ein  $A$ -Linksmodul und somit ist das äußere Rechteck kommutativ. Laut Lemma 2.1.11 ist  $\alpha_M^{P \otimes P}$  injektiv und daher ist das innere Rechteck kommutativ, also ist  $(M, \varrho_M)$  ein kounitärer  $C$ -Rechtskomodul.

2. Seien  $M, N \in \text{Rat}^C({}_A\widetilde{\mathcal{M}})$  und  $f : M \longrightarrow N$   $A$ -linear. Das untere Trapez in Diagramm (2.13) ist offensichtlich kommutativ und nach Definition von  $\varrho_M, \varrho_N$  sind die Dreiecke kommutativ.  $P$  erfüllt die  $\alpha$ -Bedingung und somit ist  $\alpha_N$  injektiv. Ist  $f$   $A$ -linear, dann ist das obere Trapez kommutativ und daher ist das äußere Rechteck kommutativ, also ist  $f$   $C$ -kolinear. Daher ist  $\text{Hom}_{A-}(M, N) \subseteq \text{Hom}^C(M, N)$  und die Gleichung folgt dann aus Lemma 2.2.8 (2).
3. Sei  $(N, \rho_N)$  ein  $C$ -rationaler  $A$ -Linksmodul. Ist  $K \subset N$  ein  $A$ -Untermodule, dann ist nach Lemma 2.2.7 (2)  $\text{Rat}^C(K) = K \cap \text{Rat}^C(M) = K$ , also ist  $K$  ein  $C$ -rationaler  $A$ -Linksmodul. Nach (1) ist  $K$  dann ein kounitärer  $C$ -Rechtskomodul vermöge einer  $R$ -linearen Abbildungen  $\varrho_K : K \longrightarrow K \otimes_R C$ . Außerdem ist  $K \xrightarrow{\iota_K} N$  nach Voraussetzung  $A$ -linear und somit  $C$ -kolinear (nach (2)), d.h.  $K \subset N$  ist ein  $C$ -Unterkomodul. Nach Bemerkung 2.1.5 ist  ${}_R C$  flach und folglich ist  $\varrho_K = (\varrho_N)|_K$ . ■

**2.2.10. Folgerung.** Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ .

1. Für jeden unitären  $A$ -Linksuntermodul bzw.  $A$ -Rechtsuntermodul  $D \subset A^*$  gilt

$$\text{Rat}^C({}_A D) = C \cap D \text{ bzw. } {}^C \text{Rat}(D_A) = C \cap D.$$

2. Sei  $R$  noethersch. Ist  $A^\circ$   $C$ -rational, dann ist  $C = A^\circ$ .

**Beweis.** 1. Sei  $D \subset A^*$  ein  $A$ -Linksuntermodul. Nach Lemma 2.2.7 ist  $C \cap D$  ein  $C$ -rationaler  $A$ -Linksmodul, also  $C \cap D \subseteq \text{Rat}^C({}_A D)$ . Andererseits, ist  $f \in \text{Rat}^C({}_A D)$  mit  $\varrho_D(f) = \sum f_i \otimes c_i \in D \otimes C$ , dann gilt für jedes  $a \in A$  :

$$f(a) = (af)(1_A) = \sum f_i(1_A) \langle a, c_i \rangle,$$

also ist  $f = \sum f_i(1_A) c_i \in C$ . Daher ist  $C \cap D = \text{Rat}^C({}_A D)$ . Die entsprechende Aussage für einen  $A$ -Rechtsuntermodul  $D \subset A^*$  folgt nach Symmetrie.

2. Ist  $R$  noethersch, dann ist  $A^\circ \subset A^*$  ein  $A$ -Unterbimodul. Offensichtlich ist  $C \xrightarrow{\chi_P} A^\circ$  und es gilt nach (1):  $A^\circ = \text{Rat}^C({}_A A^\circ) = C \cap A^\circ = C$ . ■

**2.2.11.** Seien  $A$  eine  $R$ -Algebra,  $C$  eine  $R$ -Koalgebra und  $\kappa : A \longrightarrow C^*$  ein *Algebra-Anti-Morphismus*. Dann nennen wir  $P := (A, C)$  ein **getwistetes messendes Paar**. Insbesondere ist für jede  $R$ -Koalgebra  $C$  die Paare  $(C^{*op}, C)$  und  $(C^*, C^{cop})$  getwistete messende Paare.

**2.2.12.** Für jede  $R$ -Koalgebra  $C$  ist

$$\Psi : (C^*, \star) \longrightarrow (\text{End}^C(C, C), \circ), \quad f \longmapsto [c \longmapsto \sum f(c_1) c_2]$$

ein Algebra-Anti-isomorphismus. Ist  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ , dann ist nach Lemma 2.2.9  $\text{End}_{A-}(C) = \text{End}^C(C, C)$  und folglich ist  $(\text{End}_{A-}(C), \circ)$  anti-isomorph zu  $C^*$  als  $R$ -Algebren. Ist  $P$  ein getwistetes messendes  $\alpha$ -Paar, dann ist  $(\text{End}_{A-}(C), \circ) \simeq C^*$  als  $R$ -Algebren.

**2.2.13. Satz.** Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$  ( $A$  nicht notwendig mit Einheit). Erfüllt  $C$  die  $\alpha$ -Bedingung und ist  $\kappa_P(A) \subset C^*$  dicht, dann ist jeder  $C$ -Rechtskomodul ein unitärer  $A$ -Linksmodul und es gibt Kategorie-Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^C &\simeq \text{Rat}^C({}_A\widetilde{\mathcal{M}}) = \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}) = \sigma[{}_AC] \\ &\simeq \text{Rat}^C({}_{C^*}\widetilde{\mathcal{M}}) = \text{Rat}^C({}_{C^*}\mathcal{M}) = \sigma[{}_C{}^*C]. \end{aligned}$$

**Beweis. Schritt 1.**  $\mathcal{M}^C \simeq \text{Rat}^C({}_A\widetilde{\mathcal{M}})$ .

Nach Voraussetzung und Proposition 2.1.7 (2) erfüllt  $P$  die  $\alpha$ -Bedingung, also ist  $P \in \mathcal{P}_m^\alpha$ . Nach Lemmata 2.2.8 und 2.2.9 bekommen wir die kovarianten Funktoren

$$\begin{aligned} {}_A(-) : \quad \mathcal{M}^C &\longrightarrow \text{Rat}^C({}_A\widetilde{\mathcal{M}}), & (-)^C : \quad \text{Rat}^C({}_A\widetilde{\mathcal{M}}) &\longrightarrow \mathcal{M}^C, \\ (M, \varrho_M) &\longmapsto (M, \alpha_M \circ \varrho_M), & (M, \rho_M) &\longmapsto (M, \alpha_M^{-1} \circ \rho_M), \end{aligned}$$

die als Identität auf die Morphismen wirken. Offensichtlich ist

$$(-)^C \circ {}_A(-) \simeq \text{id}_{\mathcal{M}^C} \text{ und } {}_A(-) \circ (-)^C \simeq \text{id}_{\text{Rat}^C({}_A\widetilde{\mathcal{M}})},$$

d.h.  $\text{Rat}^C({}_A\widetilde{\mathcal{M}}) \simeq \mathcal{M}^C$ .

**Schritt 2.**  $\text{Rat}^C({}_A\widetilde{\mathcal{M}}) = \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$ .

Seien  $(N, \rho_N) \in \text{Rat}^C({}_A\widetilde{\mathcal{M}})$  und  $n \in N$  und nehme an  $\varrho_N(n) = \sum_{i=1}^k n_i \otimes c_i$ . Nach Voraussetzung ist  $\kappa_P(A) \subset C^*$  dicht und es existiert daher  $a \in A$ , so dass  $\kappa_P(a)(c_i) = \varepsilon(c_i)$  für  $i = 1, \dots, k$ . Hiermit ist

$$n = \sum_{i=1}^k n_i \varepsilon(c_i) = \sum_{i=1}^k n_i \langle a, c_i \rangle = an \in N,$$

also ist  $N$  ein unitärer  $A$ -Linksmodul.

**Schritt 3.**  $\mathcal{M}^C \simeq \sigma[{}_AC]$ .

Sei  $(N, \varrho_N) \in \mathcal{M}^C$ . Ist  $R^{(\Lambda)} \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0$  eine freie Darstellung von  $N$  in  ${}_R\mathcal{M}$ , dann ist

$$C^{(\Lambda)} \simeq R^{(\Lambda)} \otimes_R C \xrightarrow{\pi \otimes \text{id}} N \otimes_R C \longrightarrow 0$$

ein Epimorphismus in  $\mathcal{M}^C$ , also ist  $N \otimes C$   $C$ -erzeugt in  $\mathcal{M}^C$ . Außerdem ist  $\varrho_N : N \longrightarrow N \otimes_R C$  injektiv und ist offensichtlich  $C$ -kolinear, also ist  $N \hookrightarrow N \otimes C$  ein  $A$ -Untermodule (nach Lemma 2.2.8). Somit ist  $\mathcal{M}^C \subset \sigma[{}_AC]$ . Nach Bemerkung 2.1.5 ist  ${}_RC$  flach und somit ist  $\mathcal{M}^C$  ein Grothendieck-Kategorie (siehe z.B. [Wis99]). Die Kategorie  $\sigma[{}_AC]$  ist aber die kleinste abgeschlossene Unterkategorie von  ${}_A\mathcal{M}$ , die  $C$  enthält. Daraus folgt  $\mathcal{M}^C = \sigma[{}_AC]$ .

**Schritt 4.**  $C^*$  hat Einheit und somit ist jeder unitäre  $C^*$ -Linksmodul  $A$ -treu. Nach Voraussetzung ist  $(C^*, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  und wir bekommen wie oben gezeigt:

$$\mathcal{M}^C \simeq \text{Rat}^C({}_{C^*}\widetilde{\mathcal{M}}) = \text{Rat}^C({}_{C^*}\mathcal{M}) = \sigma[{}_C{}^*C]. \blacksquare$$

Als Korollar von Lemma 2.1.13 und Satz 2.2.13 bekommen wir:

**2.2.14. Folgerung.** *Sei  $C$  eine  $\alpha$ -Koalgebra. Ist  $C^\square := \text{Rat}^C(C^*C^*) \subset C^*$  dicht, dann ist jeder  $C$ -Rechtskomodul  $N$  ein unitärer  $C^\square$ -Linksmodul (d.h.  $C^\square N = N$ ) und es gibt Kategorie-Isomorphismen*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^C &\simeq \text{Rat}^C(C^\square \widetilde{\mathcal{M}}) = \text{Rat}^C(C^\square \mathcal{M}) = \sigma[C^\square C] \\ &\simeq \text{Rat}^C(C^* \widetilde{\mathcal{M}}) = \text{Rat}^C(C^* \mathcal{M}) = \sigma[C^* C]. \end{aligned}$$

**2.2.15. Lemma.** ([Wis2000, 3.14.]) *Seien  $T$  ein Ring,  $D$  ein  $T$ -Linksmodul und betrachte  $\text{End}_{\mathbb{Z}}(D) \subset D^D$  mit der endlichen Topologie. Für Unterringe  $A \subset B \subseteq \text{End}_{\mathbb{Z}}(D)$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1.  $A \subset B$  liegt dicht;
2. für jede endliche Menge  $F = \{d_1, \dots, d_k\} \subset D$  existiert für jedes  $b \in B$  ein  $a \in A$ , so dass  $bd_i = ad_i$  für  $i = 1, \dots, k$ .
3.  $\sigma[A D] = \sigma[B D]$ .

**2.2.16. Satz.** *Für jedes messendes Paar  $P = (A, C)$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i)  $P \in \mathcal{P}_m^\alpha$ .
- (ii)  $C$  ist eine  $\alpha$ -Koalgebra (gleichbedeutend  ${}_R C$  ist lokal projektiv) und  $\kappa_P(A) \subset C^*$  ist dicht.
- (iii) Es gibt Kategorie-Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^C &\simeq \text{Rat}^C({}_A \widetilde{\mathcal{M}}) = \text{Rat}^C({}_A \mathcal{M}) = \sigma[A C] \\ &\simeq \text{Rat}^C(C^* \widetilde{\mathcal{M}}) = \text{Rat}^C(C^* \mathcal{M}) = \sigma[C^* C]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

*Ist  $R$  ein injektiver Kogenerator, dann ist weiter dazu äquivalent:*

- (iv)  $C$  ist eine  $\alpha$ -Koalgebra und  $C \xrightarrow{\chi_P} A^*$  ist eine Einbettung.

**Beweis.** (ii)  $\implies$  (iii) Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 2.2.13 (da  $A$  ein Einselement hat und  $\kappa(1_A) = \varepsilon_C$ ).

(iii)  $\implies$  (ii) Nach Voraussetzung ist  $\mathcal{M}^C \simeq \text{Rat}^C(C^* \mathcal{M}) = \sigma[C^* C]$  und es folgt [Wis], dass  $C$  die  $\alpha$ -Bedingung erfüllt (gleichbedeutend  ${}_R C$  lokal projektiv ist laut Lemma 2.1.15). Außerdem ist nach Voraussetzung  $\sigma[A C] \simeq \sigma[C^* C]$  und daher ist  $\kappa_P(A) \subseteq C^*$  nach Lemma 2.2.15 dicht.

(ii)  $\implies$  (i) folgt aus Proposition 2.1.7.

(i)  $\implies$  (iv) trivial.

Sei  $R$  ein injektiver Kogenerator.

(iv)  $\implies$  (ii). Ist  $C \xrightarrow{\chi_P} A^*$ , dann gilt nach Proposition A.0.5:

$$\overline{\kappa_P(A)} = \text{AnKe}(\kappa_P(A)) = \text{An}(A^\perp) = \text{An}(0_C) = C^*,$$

also ist  $\kappa_P(A) \subset C^*$  dicht. ■

Als Korollar von Proposition 2.1.7 und Satz 2.2.16 bekommen wir:

**2.2.17. Folgerung.** Seien  $Q = (B, C) \in \mathcal{P}_m$ ,  $\xi : A \longrightarrow B$  ein Algebra-Morphismus und betrachte das induzierte messende Paar  $P := (A, C)$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $P \in \mathcal{P}_m^\alpha$ .
- (ii)  $Q \in \mathcal{P}_m^\alpha$  und  $\kappa_P(A) \subset \kappa_Q(B)$  ist dicht.
- (iii)  $C$  erfüllt die  $\alpha$ -Bedingung und  $\kappa_P(A) \subset C^*$  ist dicht.
- (iv) es gibt Kategorie-Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^C &\simeq \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}) = \sigma[{}_AC] \\ &\simeq \text{Rat}^C({}_{C^*}\mathcal{M}) = \sigma[{}_{C^*}C] \\ &\simeq \text{Rat}^C({}_B\mathcal{M}) = \sigma[{}_BC]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

**2.2.18. Folgerung.** Sei  $C$  eine  $\alpha$ -Koalgebra. Für jede  $R$ -Koalgebra  $D \subseteq C$  gilt:

1.  $D \subseteq C$  ist eine  $R$ -Unterkoalgebra genau dann, wenn  $Q := (C^*, D) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ . In diesem Falle ist  $D$  eine  $\alpha$ -Koalgebra,  $\iota_D^*(C^*) \subseteq D^*$  liegt dicht und es gibt Kategorie-Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^D &\simeq \text{Rat}^D({}_{D^*}\mathcal{M}) = \sigma[{}_{D^*}D] \\ &\simeq \text{Rat}^D({}_{C^*}\mathcal{M}) = \sigma[{}_{C^*}D]. \end{aligned}$$

2. Sei  $R$   $C$ -injektiv. Dann ist  $D \subseteq C$  eine  $R$ -Unterkoalgebra genau dann, wenn  $D$  eine  $\alpha$ -Koalgebra ist.
3. Ist  $D \subseteq C$  eine  $R$ -Unterkoalgebra, dann gilt:

$$D = C \iff \mathcal{M}^D = \mathcal{M}^C \iff {}_{C^*}C \text{ } D\text{-rational ist.}$$

**Beweis.** 1. Die Aussage folgt aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} M \otimes D & \xrightarrow{id_M \otimes \iota_D} & M \otimes C \\ \alpha_M^D \downarrow & \searrow \alpha_M^Q & \downarrow \alpha_M^C \\ \text{Hom}_R(D^*, M) & \xrightarrow{(\iota_D^*, M)} & \text{Hom}_R(C^*, M) \end{array}$$

und Satz 2.2.16.

2. Standard.

3. Es genügt zu zeigen:  $C \in \text{Rat}^D({}_{C^*}\mathcal{M}) \implies D = C$ .

Sei  $C \in \text{Rat}^D({}_{C^*}\mathcal{M}) \simeq \mathcal{M}^D$ . Dann existiert eine  $R$ -lineare Abbildung

$$\varrho : C \longrightarrow C \otimes_R D, \quad c \longmapsto \sum_{i=1}^{k_c} c_i \otimes d_i,$$

so dass  $g \rightharpoonup c = \sum_{i=1}^{k_c} \langle g, d_i \rangle c_i$  für jedes  $g \in C^*$ .

Betrachte das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varrho} & C \otimes D \\ & \searrow \Delta_C & \downarrow id_C \otimes \iota \\ & & C \otimes C \end{array} \quad (2.16)$$

und das  $\alpha$ -Paar  $P := (C^* \otimes C^*, C \otimes C)$  (vgl. Lemma 2.1.11). Ist  $c \in C$ , dann gilt für alle  $f, g \in C^*$ :

$$\begin{aligned} \chi_P(\sum c_1 \otimes c_2)(f \otimes g) &= \sum f(c_1)g(c_2) = f(g \rightharpoonup c) \\ &= f(\sum_{i=1}^{k_c} \langle g, d_i \rangle c_i) = \chi_P(\sum_{i=1}^{k_c} c_i \otimes \iota(d_i))(f \otimes g), \end{aligned}$$

und somit ist  $\sum c_1 \otimes c_2 = \sum_{i=1}^{k_c} c_i \otimes \iota(d_i)$  für jedes  $c \in C$ , also ist Diagramm (2.16) kommutativ. Folglich gilt für jedes  $c \in C$ :

$$c = \sum \varepsilon(c_1)c_2 = \sum_{i=1}^{k_c} \varepsilon(c_i)\iota(d_i) \in \iota(D).$$

Daher ist  $C = D$ . ■

Als Korollar von Lemma 2.1.24 und Satz 2.2.16 bekommen wir:

**2.2.19. Folgerung.** Sind  $P = (A, C), Q = (B, D) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ , dann ist  $P \otimes Q := (A \otimes B, C \otimes D) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ . Insbesondere ist  $C \otimes D$  eine  $\alpha$ -Koalgebra,  $\kappa_{P \otimes Q}(A \otimes B) \subset (C \otimes D)^*$  liegt dicht und es gibt Kategorie-Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{C \otimes D} &\simeq \text{Rat}^{C \otimes D}(A \otimes B \mathcal{M}) = \sigma[A \otimes B C \otimes D] \\ &\simeq \text{Rat}^{C \otimes D}(C^* \otimes D^* \mathcal{M}) = \sigma[C^* \otimes D^* C \otimes D]. \end{aligned}$$

**2.2.20. Birationale Moduln.** Seien  $P = (A, C), Q = (B, D) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  und betrachte  $P \otimes Q := (A \otimes B, C \otimes D) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  (vgl. Lemma 2.1.24). Sei  $(M, \rho_M^A, \rho_M^B)$  ein  $(A, B)$ -treuer  $(A, B)$ -Bimodul. Dann ist  ${}^D\text{Rat}(M_B)$  ein  $A$ -Linksmodul,  $\text{Rat}^C({}_A M)$  ist ein  $B$ -Rechtsmodul und wir nennen

$$\text{Rat}^C({}_A({}^D\text{Rat}(M_B))) = {}^D\text{Rat}(M_B) \cap \text{Rat}^C({}_A M) = {}^D\text{Rat}((\text{Rat}^C({}_A M))_B) \quad (2.17)$$

den  $(D, C)$ -**birationalen Unterbimodul** von  $M$ . Wir nennen  $M$   $(D, C)$ -**birational**, falls  $M = \text{Rat}^C({}_A({}^D\text{Rat}(M_B)))$ .

Mit  ${}^D\text{Rat}^C({}_A \widetilde{\mathcal{M}}_B) \subset {}_A \widetilde{\mathcal{M}}_B$  bezeichnen wir die volle Unterkategorie der  $(D, C)$ -birationalen  $(A, B)$ -Bimoduln. Die Kategorie der *unitären*  $(D, C)$ -birationalen  $(A, B)$ -Bimoduln bezeichnen wir mit  ${}^D\text{Rat}^C({}_A \mathcal{M}_B)$ .

Als Verallgemeinerung von der entsprechenden Aussage [DNR, Theorem 2.3.3] im Körper-Fall bekommen wir:

**2.2.21. Satz.** *Seien  $P = (A, C), Q = (B, D) \in \mathcal{P}_m$  ( $A, B$  nicht notwendig mit Einheiten). Sind  $C, D$   $\alpha$ -Koalgebren und liegen  $\kappa_P(A) \subset C^*$  und  $\kappa_Q(B) \subset D^*$  dicht, dann gilt es Kategorie-Isomorphismen*

$$\begin{aligned} {}^D\mathcal{M}^C &\simeq {}^D\text{Rat}^C({}_A\widetilde{\mathcal{M}}_B) &= {}^D\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}_B) &= \sigma[A(D \otimes C)_B] \\ \parallel &\simeq {}^D\text{Rat}^C({}_{C^*}\widetilde{\mathcal{M}}_{D^*}) &= {}^D\text{Rat}^C({}_{C^*}\mathcal{M}_{D^*}) &= \sigma[C^*(D \otimes C)_{D^*}]. \\ \mathcal{M}^{C \otimes D^{cop}} &\simeq \text{Rat}^{C \otimes D^{cop}}({}_{A \otimes B^{op}}\widetilde{\mathcal{M}}) &= \text{Rat}^{C \otimes D^{cop}}({}_{A \otimes B^{op}}\mathcal{M}) &= \sigma[A \otimes B^{op} C \otimes D^{cop}] \\ &\simeq \text{Rat}^{C \otimes D^{cop}}({}_{C^* \otimes D^{*op}}\widetilde{\mathcal{M}}) &= \text{Rat}^{C \otimes D^{cop}}({}_{C^* \otimes D^{*op}}\mathcal{M}) &= \sigma[C^* \otimes D^{*op} C \otimes D^{cop}]. \end{aligned}$$

**Beweis.** Offensichtlich haben wir einen Kategorie-Isomorphismus  ${}^D\mathcal{M}^C \simeq \mathcal{M}^{C \otimes D^{cop}}$  und daher läßt sich die Aussage aus Lemma 2.1.24 und Satz 2.2.13 mühelos ableiten.

**2.2.22. Folgerung.** *Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$  ( $A$  nicht notwendig mit Einheit) und betrachte das **Einhüllende-Paar**  $P^e := (A^e, C^e) \in \mathcal{P}_m$ . Ist  $C$  eine  $\alpha$ -Koalgebra und ist  $\kappa_P(A) \subset C^*$  dicht, dann bekommen wir Kategorie-Isomorphismen:*

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{M}^C \simeq \mathcal{M}^{C^e} &\simeq {}^C\text{Rat}^C({}_A\widetilde{\mathcal{M}}_A) &= {}^C\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}_A) &= \sigma[A(C \otimes C)_A]. \\ &\simeq \text{Rat}^{C^e}({}_{A^e}\widetilde{\mathcal{M}}) &= \text{Rat}^{C^e}({}_{A^e}\mathcal{M}) &= \sigma[A^e C^e]. \end{aligned}$$

Eine große Rolle beim Studium der Kategorie der rationalen Darstellungen eines  $P \in \mathcal{P}_m^\alpha$  spielt der:

**2.2.23. Endlichkeitssatz.** Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ .

1. Ist  $M \in \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  (bzw.  $M \in {}^C\text{Rat}(\mathcal{M}_A)$ ,  $M \in {}^C\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}_A)$ ), dann existiert für jede endliche Menge  $\{m_1, \dots, m_k\} \subset M$  ein  $N \in \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  (bzw.  $N \in {}^C\text{Rat}(\mathcal{M}_A)$ ,  $N \in {}^C\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}_A)$ ), so dass  ${}_R N$  e.e. ist.
2. Jede endliche Menge von  $C$  ist in einem  $C$ -Rechtskoideal (bzw. einem  $C$ -Linkskoideal, einem  $C$ -Bikoideal) enthalten, die jeweils e.e. in  ${}_R\mathcal{M}$  sind.

**Beweis.** 1. Seien  $M \in \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  und  $\{m_1, \dots, m_k\} \subset M$ . Dann ist  $Am_i \subset M$  ein  $A$ -Untermodule und somit ist ein  $C$ -Unterkomodul. Außerdem ist  $m_i \in Am_i$  und es existiert eine Teilmenge  $\{(m_{ij}, c_{ij})\}_{j=1}^{n_i} \subset Am_i \times C$ , so dass  $\varrho_M(m_i) = \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij} \otimes c_{ij}$

für  $i = 1, \dots, k$ . Offensichtlich ist dann  $N := \sum_{i=1}^k Am_i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} Rm_{ij} \subset M$  ein  $C$ -Unterkomodul und enthält  $\{m_1, \dots, m_k\}$ .

Die entsprechende Aussage für  $M \in {}^C\text{Rat}(\mathcal{M}_A)$  bzw.  $M \in {}^C\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}_A)$  folgt aus analogen Argumenten.

2. Die Aussage ist ein Spezialfall von (1). ■

Für jedes  $(A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  folgt aus den Kategorie-Isomorphismen (2.14) und [Wis99, 2.9]:

**2.2.24. Folgerung.** Sei  $(A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ .

1.  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  ist  $(A, R)$ -endlich (d.h. ein  $C$ -rationaler  $A$ -Linksmodul ist genau dann e.e. in  ${}_A\mathcal{M}$ , wenn er e.e. in  ${}_R\mathcal{M}$  ist).
2. Ist  $R$  perfekt, dann erfüllt jeder  $C$ -rationale  $A$ -Linksmodul die absteigende Ketten-Bedingung bzgl. der endlich erzeugten  $A$ -Untermoduln.
3. Ist  $R$  noethersch, dann ist jeder  $C$ -rationale  $A$ -Linksmodul lokal noethersch.
4. Ist  $R$  artinsch, dann hat jeder endlich erzeugte  $C$ -rationale  $A$ -Linksmodul endliche Länge.

**2.2.25. Proposition.** Sei  $R$  noethersch. Ist  $(A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ , dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $A/\text{An}_A^l(C)$  ist e.e. in  ${}_R\mathcal{M}$ .
2.  ${}_RC$  ist endlich erzeugt;
3.  $C_{C^*}$  ist endlich erzeugt;
4.  $\mathcal{M}^C \simeq {}_{A/\text{An}_A^l(C)}\mathcal{M}$ .

**Beweis.** (1)  $\implies$  (2) Betrachte  $C$  mit der  $A$ -Linksmodul-Struktur. Nach Voraussetzung ist  $R$  noethersch und somit ist  $C \xrightarrow{\chi_P} (A/\text{An}_A^l(C))^*$  e.e. in  ${}_R\mathcal{M}$ .

(2)  $\implies$  (3) trivial.

(3)  $\implies$  (4) Nach 2.2.12 ist  $(\text{End}_{A-}(C), \circ) \simeq C^{*op}$  als  $R$ -Algebren. Nach Satz 2.2.16 ist  $\mathcal{M}^C \simeq \sigma[{}_{C^*}C]$  und die Aussage folgt aus [Wis88, 15.4].

(4)  $\implies$  (1) Nach Voraussetzung ist  $A/\text{An}_A^l(C) \in \mathcal{M}^C$  und daher ist der endlich erzeugte  $A$ -Linksmodul  $A/\text{An}_A^l(C)$  nach Folgerung 2.2.24 (1) e.e. in  ${}_R\mathcal{M}$ . ■

Die folgende Aussage gibt topologische Charakterisierungen der  $C$ -rationalen  $A$ -Linksmoduln. Dabei erweitern wir die von D. Radford in [Rad73, 2.2] gegebenen Charakterisierungen im Körper-Fall auf beliebige (artinsche) Ringe (siehe auch [LR97, Proposition 1.4.4]).

**2.2.26. Proposition.** Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  und betrachte  $A$  mit der  $C$ -adischen Topologie  $\mathcal{T}_{C-}(A) = A[\mathfrak{T}_{ls}(C)]$  (siehe Lemma 2.2.4). Ist  $M$  ein unitärer  $A$ -Linksmodul, dann sind für jedes  $m \in M$  die folgenden Aussagen äquivalent:

1. es existiert eine endliche Menge  $W = \{c_1, \dots, c_k\} \subset C$ , so dass  $(0 : W) \subset (0 : m)$  ist;

2.  $Am$  ist  $C$ -suberzeugt;
3.  $m \in \text{Rat}^C({}_A M)$ .
4. es existiert ein endlich erzeugter  $R$ -Unterm modul  $K \subset C$ , so dass  $K^\perp \subset (0 : m)$ .  
Ist  $R$  artinsch, dann sind dazu weiter äquivalent:
5.  $(0 : Am)$  enthält einen  $R$ -koendlichen abgeschlossenen  $R$ -Unterm modul von  $A$ ;
6.  $(0 : Am)$  ist ein  $R$ -koendliches abgeschlossenes  $A$ -Ideal;
7.  $(0 : m)$  enthält ein  $R$ -koendliches abgeschlossenes  $A$ -Ideal;
8.  $(0 : m)$  ist ein  $R$ -koendliches abgeschlossenes  $A$ -Linksideal.

**Beweis.** (1)  $\implies$  (2) Nach 2.2.2 ist  $m \in N := Sp(\sigma[{}_A C], M)$ . Also ist  $Am \subset N$  ein  $A$ -Unterm modul und daher  $C$ -suberzeugt.

(2)  $\implies$  (3) Nach Voraussetzung und Satz 2.2.16 ist  $m \in Am \subset \text{Rat}^C({}_A M)$ .

(3)  $\implies$  (4) Sei  $\varrho(m) = \sum_{i=1}^k m_i \otimes c_i$  und setze  $K := \sum_{i=1}^k Rc_i \subset C$ . Dann ist offensichtlich  $K^\perp \subset (0 : m)$ .

(4)  $\implies$  (1) Für jeden  $R$ -Unterm modul  $K \subseteq C$  ist  $(0 : K) \subseteq K^\perp$ .

Sei  $R$  artinsch.

(3)  $\implies$  (5). Nach Lemma 2.2.9 ist  $\text{Rat}^C({}_A M)$  ein rationaler  $A$ -Linksmodul. Nehme an  $\varrho_M(m) = \sum_{i=1}^k m_i \otimes c_i \in \text{Rat}^C({}_A M) \otimes C$ ,  $\varrho_M(m_i) = \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij} \otimes c_{ij}$  für  $i = 1, \dots, k$  und setze  $K := \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} Rc_{ij}$ . Dann gilt für jedes  $a \in K^\perp$  und beliebiges  $b \in A$ :

$$a(bm) = a\left(\sum_{i=1}^k \langle b, c_i \rangle m_i\right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \langle b, c_i \rangle \langle a, c_{ij} \rangle m_{ij} = 0,$$

d.h.  $K^\perp \subseteq (0 : Am)$ . Der  $R$ -Modul  $K$  ist e.e. und es folgt aus  $A/K^\perp \hookrightarrow K^*$ , dass  $K^\perp \subset A$  ein  $R$ -koendlicher  $R$ -Unterm modul ist. Außerdem ist  $K^\perp$  laut Lemma A.0.4 (1) abgeschlossen.

Ist  $R$  artinsch, dann folgen die Implikationen (5)  $\implies$  (6)  $\implies$  (7)  $\implies$  (8)  $\implies$  (4) aus Lemma A.0.4 (4). ■

**2.2.27. Lemma.** Sei  $C$  eine  $R$ -koerzeugte  $R$ -Koalgebra und betrachte  $C^*$  mit der endlichen Topologie. Für jedes  $f \in C^*$  ist

$$\xi_f^r : C^* \longrightarrow C^*, \quad g \longmapsto g \star f \quad \text{bzw.} \quad \xi_f^l : C^* \longrightarrow C^*, \quad g \longmapsto f \star g$$

stetig. Ist  $R$  ein injektiver Kogenerator, dann ist  $\xi_f^r(X) \subset C^*$  (bzw.  $\xi_f^l(X) \subset C^*$ ) abgeschlossen für jeden abgeschlossenen  $R$ -Unterm modul  $X \subset C^*$ .

**Beweis.** Betrachte für jedes  $f \in C^*$  die  $R$ -linearen Abbildungen

$$\theta_f^l : C \longrightarrow C, c \longmapsto f \rightharpoonup c \text{ bzw. } \theta_f^r : C \longrightarrow C, c \longmapsto c \leftharpoonup f.$$

Dann gilt für jedes  $g \in C^*$  und  $c \in C$

$$((\theta_f^l)^*(g))(c) = g(\theta_f^l(c)) = g(f \rightharpoonup c) = \sum g(c_1)f(c_2) = (g \star f)(c).$$

Somit ist  $\xi_f^r = (\theta_f^l)^*$  und analog  $\xi_f^l = (\theta_f^r)^*$ . Die Aussage folgt dann aus Lemma A.0.7. ■

Ist  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ , dann ist die Grothendieck Kategorie  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}) \simeq \sigma[{}_A C]$  im Allgemeinen nicht abgeschlossen gegen Erweiterungen:

**2.2.28. Beispiel.** Seien  $R$  ein Körper,  $V$  ein  $R$ -Vektorraum mit  $\dim(V) = \infty$  und betrachte die  $R$ -Koalgebra  $C := R \oplus V$  mit  $\Delta(v) = 1 \otimes v + v \otimes 1$ ,  $\varepsilon(v) = 1_R$ . Sei  $I \subset V^*$  ein nicht abgeschlossener  $R$ -Untervektorraum und betrachte die exakte Folge

$$0 \longrightarrow V^*/I \longrightarrow C^*/I \longrightarrow C^*/V^* \longrightarrow 0.$$

Nach [Rad73, Seite 520] sind  $V^*/I$  und  $C^*/V^*$  rational, während  $C^*/I$  nicht rational ist.

**2.2.29. Lemma.** ([Swe69, Lemma 6.1.1, Corollary 6.1.2]) Sei  $I \triangleleft A$  ein Ideal.

1. Sei  $M$  ein endlich erzeugter  $A$ -Linksmodul ( $A$ -Rechtsmodul). Ist  ${}_A I$  ( $I_A$ ) e.e., dann ist auch  $IM \subset M$  ( $MI \subset M$ ) ein endlich erzeugter  $A$ -Untermodule. Ist  $I \subset A$   $R$ -koendlich, dann ist  $IM \subset M$  ( $MI \subset M$ ) ein  $R$ -koendlicher  $A$ -Untermodule.
2. Ist  ${}_A I$  ( $I_A$ ) e.e., dann ist  ${}_A I^n$  ( $I_A^n$ ) e.e. für jedes  $n \geq 1$ . Ist außerdem  $I \subset A$   $R$ -koendlich, dann ist  $I^n \subset A$   $R$ -koendlich.

Die folgende Aussage verallgemeinert [Rad73, 2.5] vom Körper-Fall auf QF Ringe.

**2.2.30. Proposition.** Seien  $R$  ein QF Ring,  $C$  eine projektive  $R$ -Koalgebra und

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von  $C^*$ -Linksmoduln. Sind  $N, L \in \text{Rat}^C({}_{C^*}\mathcal{M})$  und ist  ${}_{C^*}(0 : l)$  e.e. für jedes  $l \in L$ , dann ist  $M$   $C$ -rational.

**Beweis.** Seien  $m \in M$  und  $\{f_1, \dots, f_k\}$  ein Erzeugendensystem von  ${}_{C^*}(0 : \pi(m))$ . Nach Voraussetzung ist  $\pi(m)$   $C$ -rational und es existieren nach Proposition 2.2.26  $R$ -koendliche abgeschlossene Ideale  $J_i \subset (0 : f_i m)$  für  $i = 1, \dots, k$ . Damit gilt für das  $R$ -koendliche abgeschlossene Ideal  $J := \bigcap_{i=1}^k J_i \triangleleft C^*$ :

$$J(0 : \pi(m)) \rightharpoonup m = (J \star f_1 + \dots + J \star f_k) \rightharpoonup m = 0,$$

also ist  $J(0 : \pi(m)) \subseteq (0 : m)$ . Nach Lemmata 2.2.27, 2.2.29 und A.0.7 (3.d) ist  $J(0 : \pi(m)) = \sum_{i=1}^k J \star f_i$   $R$ -koendlich und abgeschlossen. Nach Lemma A.0.4 (4) ist  $(0 : m) \triangleleft_l C^*$   $R$ -koendlich und abgeschlossen, also ist  $m \in \text{Rat}^C({}_{C^*}M)$  nach Proposition 2.2.26. ■

**2.2.31. Definition.** Eine  $R$ -Algebra  $A$  heißt **fast links-noethersch** (bzw. **fast rechts-noethersch**, **fast noethersch**), falls jedes  $R$ -koendliche  $A$ -Linksideal (bzw.  $A$ -Rechtsideal, zweiseitige  $A$ -Ideal) e.e. in  ${}_A\mathcal{M}$  (bzw.  $\mathcal{M}_A$ ,  ${}_A\mathcal{M}_A$ ) ist.

Als Korollar von Satz 2.2.13 und Proposition 2.2.30 bekommen wir:

**2.2.32. Folgerung.** Seien  $R$  ein QF Ring und  $C$  eine projektive  $R$ -Koalgebra. Ist  $C^*$  fast links-noethersch (bzw. fast rechts-noethersch), dann ist die Kategorie  $\text{Rat}^C(C^*C) \simeq \sigma[C^*C]$  (bzw.  ${}^C\text{Rat}(\mathcal{M}_{C^*}) \simeq \sigma[C_{C^*}]$ ) abgeschlossen gegen Erweiterungen.

## Dualitätsbeziehungen zwischen Unterstrukturen

Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$ . Als Anwendung von unseren Ergebnissen in diesem Paragraphen und den Beobachtungen über die linear schwache Topologie  $A[\mathfrak{T}_{ls}(C)]$  im Anhang übertagen wir die für *dichte Paare*  $(A, C)$  über Körpern (siehe [Swe69], [Abe80], und [DNR, 1.5.29]) bekannten Dualitätsbeziehungen zwischen den Unterstrukturen von  $A$  und den Unterstrukturen von  $C$  auf die messenden  $\alpha$ -Paare über beliebigen kommutativen Ringen.

Als Schlussfolgerung von Lemmata 2.2.8, 2.2.9 und Proposition A.0.5 bekommen wir:

**2.2.33. Proposition.** Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$ .

1. Sei  $K \subset C$  ein  $R$ -Untermodul.

Ist  $K$  ein  $C$ -Rechtskoideal (bzw.  $C$ -Linkskoideal,  $C$ -Bikoideal), dann ist  $K^\perp = \text{An}_A^r(K)$  ein  $A$ -Rechtsideal (bzw.  $K^\perp = \text{An}_A^l(K)$  ein  $A$ -Linksideal).

Ist  $K$  ein  $C$ -Koideal, dann ist  $K^\perp \subset A$  eine  $R$ -Unteralgebra mit Einheit  $1_A$ .

2. Sei  $P \in \mathcal{P}_m^\alpha$ .

(a) Für jeden  $R$ -Untermodul  $I \subset A$  gilt:

Ist  $I \subset A$  ein  $A$ -Rechtsideal (bzw.  $A$ -Linksideal), dann ist  $I^\perp \subset C$  ein  $C$ -Rechtskoideal (bzw.  $C$ -Linkskoideal).

Ist  $I \triangleleft A$  ein zweiseitiges Ideal (und ist  $I^\perp \subset C$  rein), dann ist  $I^\perp \subset C$  ein  $C$ -Bikoideal (bzw. eine  $R$ -Unterkoalgebra).

(b) Sei  $R$  ein injektiver Kogenerator. Für einen abgeschlossenen  $R$ -Untermodul  $I \subset A$  gilt:

$I$  ist ein  $A$ -Rechtsideal (bzw.  $A$ -Linksideal) genau dann, wenn  $I^\perp \subset C$  ein Rechtskoideal (bzw. Linkskoideal) ist.

$I$  ist ein zweiseitiges Ideal (und  $I^\perp \subset C$  ist rein) genau dann, wenn  $I^\perp \subset C$  ein Bikoideal (eine  $R$ -Unterkoalgebra) ist.

**2.2.34. Lemma.** 1. Seien  $R$  ein QF Ring,  $C$  eine projektive  $R$ -Koalgebra und  $A \subset C^*$  eine  $R$ -Unteralgebra (mit  $\varepsilon_C \in A$ ). Ist  $\text{Ke}(A) \subset C$  rein, dann ist  $\Delta_C(\text{Ke}(A)) \subset \text{Ke}(A) \otimes C + C \otimes \text{Ke}(A)$  ( $\text{Ke}(A) \subset C$  ist ein Koideal).

2. Seien  $R$  noethersch,  $B$  eine  $\alpha$ -Algebra und betrachte das  $\alpha$ -Paar  $(B, B^\circ)$ . Ist  $A \subset B$  eine  $\alpha$ -Unteralgebra mit  $1_B \in A$ , dann ist  $\mu_B^\circ(A^\perp) \subset A^\perp \otimes B^\circ + B^\circ \otimes A^\perp$  und daher ist  $A^\perp \subset B^\circ$  ein Koideal.

**Beweis.** 1. Sei  $A \subset C^*$  eine  $R$ -Unteralgebra und betrachte die  $R$ -lineare Abbildung

$$\psi : A \otimes A \longrightarrow (C \otimes C)^*.$$

Ist  $\text{Ke}(A) \subset C$  rein, dann folgt aus Folgerung 2.1.10 und Lemma A.0.7 (3.c):

$$\text{Ke}(A) \subseteq \text{Ke}(\Delta_C^*(\psi(A \otimes A))) = \Delta_C^{-1}(\text{Ke}(A) \otimes C + C \otimes \text{Ke}(A)), \quad (2.18)$$

also ist  $\Delta_C(\text{Ke}(A)) \subset \text{Ke}(A) \otimes C + C \otimes \text{Ke}(A)$ . Ist  $\varepsilon_C \in A$ , dann ist  $\varepsilon_C(\text{Ke}(A)) = 0$ , also  $\text{Ke}(A) \subset C$  ist ein  $C$ -Koideal.

2. Die Einbettung  $\iota_A : A \hookrightarrow B$  ist ein Algebra-Morphismus und somit ist  $\iota_A^\circ : B^\circ \longrightarrow A^\circ$  ein Koalgebra-Morphismus (vgl. Lemma 2.1.23 (1)). Nach dem Homomorphie-Satz 1.1.15 ist  $A^\perp := \text{Ke}(\iota_A^\circ) \subset B^\circ$  ein  $B^\circ$ -Koideal. ■

Aus Propositionen 2.2.33, 2.2.34 und A.0.5 ergibt sich die folgende Aussage:

**2.2.35. Folgerung.** Seien  $R$  ein QF Ring,  $A$  eine  $\alpha$ -Algebra,  $P = (A, A^\circ)$  und betrachte  $A$  mit der linear schwachen Topologie  $A[\mathfrak{T}_{ls}(A^\circ)]$ . Ein abgeschlossener  $R$ -Untermodul  $I \subset A$  ist ein  $A$ -Rechtsideal ( $A$ -Linksideal) genau dann, wenn  $I^\perp := \text{An}(I) \cap A^\circ$  ein  $A^\circ$ -Rechtskoideal ( $A^\circ$ -Linkskoideal). Außerdem ist  $I \subset A$  ein  $A$ -Ideal (und  $\text{An}(I) \cap A^\circ \subset A^\circ$  ist rein) genau dann, wenn  $\text{An}(I) \cap A^\circ \subset A^\circ$  ein  $A^\circ$ -Bikoideal (eine  $R$ -Unterkoalgebra) ist.

Nach Propositionen 2.2.33 und A.0.5 bekommen wir:

**2.2.36. Folgerung.** Seien  $R$  ein injektiver Kogenerator und  $C$  eine  $\alpha$ -Koalgebra. Bezeichne  $\mathcal{C}$  die Menge der  $R$ -Untermodule von  $C$  und  $\mathcal{H}$  die Menge der  $R$ -Untermodule von  $C^*$ , dann induzieren die Ordnungsumkehrenden Abbildungen

$$\text{An}(-) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{H} \text{ und } \text{Ke}(-) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{C} \quad (2.19)$$

*Bijektionen*

$$\begin{aligned} \{K \subset C \text{ ein } C\text{-Rechtskoideal}\} &\leftrightarrow \{I \triangleleft_r C^* \text{ ein abgeschlossenes Rechtsideal}\} \\ \{K \subset C \text{ ein } C\text{-Linkskoideal}\} &\leftrightarrow \{I \triangleleft_l C^* \text{ ein abgeschlossenes Linksideal}\} \\ \{K \subset C \text{ eine Unterkoalgebra}\} &\leftrightarrow \{I \triangleleft C^* \text{ ein abgeschlossenes Ideal, } \text{Ke}(I) \subset C \text{ rein}\}. \end{aligned}$$

## 2.3 Induktionsfunktoren für $\mathcal{P}_m^\alpha$

Ziel dieses Paragraphen ist es, für geeignete Paare aus  $\mathcal{P}_m^\alpha$ , verschiedene (Ko)Induktionsfunktoren als Induktionsfunktoren zwischen Kategorien vom Typ  $\sigma[M]$  zu beschreiben. Eine große Rolle dabei spielt der Kotensorfunktorkomplex, der sich für Paare aus  $\mathcal{P}_m^\alpha$  in Form eines geeigneten Hom-Funktors beschreiben läßt.

## Der Kotensorfunktork

Dual zum *Tensorprodukt* von Moduln haben J. Milnor und J. Moore in [MM65] das *Kotensorprodukt* von Komoduln eingeführt. Für nähere Betrachtungen des Kotensorprodukts, siehe auch [Guz85] und [Alt99].

**2.3.1.** Seien  $C$  eine  $R$ -Koalgebra,  $(M, \varrho_M) \in \mathcal{M}^C$ ,  $(N, \varrho_N) \in {}^C\mathcal{M}$  und betrachte die  $R$ -lineare Abbildung

$$\bar{\varrho}_{M,N} := \varrho_M \otimes id_N - id_M \otimes \varrho_N : M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R C \otimes_R N.$$

Das **Kotensorprodukt** von  $M$  und  $N$  (Schreibweise  $M \square_C N$ ) ist definiert durch die Exaktheit der folgenden Folge in  ${}_R\mathcal{M}$ :

$$0 \longrightarrow M \square_C N \longrightarrow M \otimes_R N \xrightarrow{\bar{\varrho}_{M,N}} M \otimes_R C \otimes_R N.$$

Sind  $M, M' \in \mathcal{M}^C$  und  $N, N' \in {}^C\mathcal{M}$ , dann definiert man das **Kotensorprodukt** von  $f \in \text{Hom}^C(M, M')$  und  $g \in {}^C\text{Hom}(N, N')$  als die  $R$ -lineare Abbildung

$$f \square_C g : M \square_C N \longrightarrow M' \square_C N',$$

die das folgende Diagramm kommutativ ergänzt:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M \square_C N & \longrightarrow & M \otimes N & \xrightarrow{\bar{\varrho}_{M,N}} & M \otimes C \otimes N \\ & & \downarrow f \square_C g & & \downarrow f \otimes g & & \downarrow f \otimes id_C \otimes g \\ 0 & \longrightarrow & M' \square_C N' & \longrightarrow & M' \otimes N' & \xrightarrow{\bar{\varrho}_{M',N'}} & M' \otimes C \otimes N' \end{array} \quad (2.20)$$

**2.3.2. Definition.** Seien  $C$  eine  $R$ -Koalgebra und  $U$  ein  $C$ -Rechtskomodul.

1. Für  $W \in \mathcal{M}^C$  heißt  $U$   **$W$ -injektiv**, falls für jeden *Monomorphismus*  $f : V \longrightarrow W$  in  $\mathcal{M}^C$  die induzierte Mengen-Abbildung

$$\text{Hom}^C(W, U) \longrightarrow \text{Hom}^C(V, U) \longrightarrow 0$$

surjektiv ist. Ist  $U$   $W$ -injektiv für jedes  $W \in \mathcal{M}^C$ , dann nennt man  $U$  einen **injektiven  $C$ -Rechtskomodul**.

2. Für  $W \in \mathcal{M}^C$  heißt  $U$   **$W$ -projektiv**, falls für jeden *Epimorphismus*  $g : W \longrightarrow V$  in  $\mathcal{M}^C$  die induzierte Mengen-Abbildung

$$\text{Hom}^C(U, W) \longrightarrow \text{Hom}^C(U, V) \longrightarrow 0$$

surjektiv ist. Ist  $U$   $W$ -projektiv für jedes  $W \in \mathcal{M}^C$ , dann nennt man  $U$  einen **projektiven  $C$ -Rechtskomodul**.

**2.3.3.** Sei  $C$  eine *flache*  $R$ -Koalgebra. Wir nennen eine Folge von  $C$ -Rechtskomoduln  $(C, R)$ -**exakt**, wenn sie exakt in  $\mathcal{M}^C$  und zerfallend in  ${}_R\mathcal{M}$  ist. Einen Funktor  $F : \mathcal{M}^C \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$  nennen wir  $(C, R)$ -**exakt**, falls  $F$  exakt ist bezüglich aller  $(C, R)$ -exakten Folgen von  $C$ -Rechtskomoduln ist.

**2.3.4. Definition.** Sei  $C$  eine *flache*  $R$ -Koalgebra.

1. Einen  $C$ -Rechtskomodul  $U$  nennen wir  $(C, R)$ -**injektiv**, falls  $\text{Hom}^C(-, U) : \mathcal{M}^C \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$   $(C, R)$ -exakt ist.
2. Die  $R$ -Koalgebra  $C$  nennen wir  $(C, R)$ -**kohalbeinfach**, falls jeder  $C$ -Rechtskomodul  $(C, R)$ -injektiv ist.
3. Man nennt  $C$  **kohalbeinfach**, falls jeder  $C$ -Rechtskomodul injektiv ist.

Das folgend Lemma lässt sich leicht nachweisen:

**2.3.5. Lemma.** Sei  ${}_R C$  eine flache  $R$ -Koalgebra. Für jedes  $M \in \mathcal{M}^C$  (bzw.  $N \in {}^C\mathcal{M}$ ) ist der **Kotensorfunktor**

$$M \square_C - : {}^C\mathcal{M} \longrightarrow {}_R\mathcal{M} \quad (\text{bzw. } - \square_C N : \mathcal{M}^C \longrightarrow {}_R\mathcal{M})$$

$(C, R)$ -linksexakt. Ist  ${}_R M$  (bzw.  ${}_R N$  flach), so ist  $M \square_C -$  (bzw.  $- \square_C N$ ) linksexakt.

**2.3.6. Definition.** Sei  $C$  eine *flache*  $R$ -Koalgebra (und damit  $\mathcal{M}^C$  eine *abelsche* Kategorie). Ein  $C$ -Rechtskomodul  $M$  heißt **koflach**, falls der Funktor  $M \square_C - : {}^C\mathcal{M} \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$  exakt ist.

**2.3.7. Lemma.** (vgl. [Sch90], [Tak73]) Seien  $C$  eine  $R$ -Koalgebra und  $M \in \mathcal{M}^C$ ,  $N \in {}^C\mathcal{M}$ . Ist  ${}_R W$  flach oder sind  ${}_R C$  flach und  $M$  (bzw.  $N$ ) koflach, dann gibt es Isomorphismen von  $R$ -Moduln

$$W \otimes_R (M \square_C N) \simeq (W \otimes_R M) \square_C N \quad \text{und} \quad (M \square_C N) \otimes_R W \simeq M \square_C (N \otimes_R W). \quad (2.21)$$

Mit Hilfe von Lemma 2.3.7 lässt sich die folgende Aussage mühelos ableiten:

**2.3.8. Folgerung.** Seien  $C, D$   $R$ -Koalgebren und  $(M, \varrho_M^C, \varrho_M^D) \in {}^C\mathcal{M}^D$ .

1. Sei  ${}_R C$  flach. Für jedes  $N \in {}^D\mathcal{M}$  ist  $M \square_D N$  ein  $C$ -Linkskomodul durch

$$\varrho_M^C \square_D \text{id}_N : M \square_D N \longrightarrow (C \otimes_R M) \square_D N \simeq C \otimes_R (M \square_D N).$$

2. Sei  ${}_R D$  flach. Für jedes  $L \in \mathcal{M}^C$  ist  $L \square_C M$  ein  $D$ -Rechtskomodul durch

$$\text{id}_L \square_C \varrho_M^D : L \square_C M \longmapsto L \square_C (M \otimes_R D) \simeq (L \square_C M) \otimes_R D.$$

**2.3.9. Bemerkung.** (vgl. [Alt99, Lemma II.2.5, Folgerung II.2.6]) Sei  $C$  eine flache  $R$ -Koalgebra. Für jedes  $M \in \mathcal{M}^C$  ist  $\varrho_M : M \longrightarrow M \square_C C$  ein Isomorphismus in  $\mathcal{M}^C$  mit Inversem  $m \otimes c \longmapsto m\varepsilon(c)$  und es gilt außerdem

$$M \otimes_R - : M \square_C (C \otimes -) : {}_R\mathcal{M} \longrightarrow {}_Z\mathcal{M}.$$

Ist  $M$  koflach in  $\mathcal{M}^C$ , dann ist  ${}_R M$  flach.

Die Assoziativität des Kotensorprodukts gilt im Allgemeinen nicht (siehe [GP87]). Allerdings läßt sich die Koassoziativität in Spezialfällen zeigen, etwa:

**2.3.10. Lemma.** (vgl. [Alt99]) Seien  $C, D$  flache  $R$ -Koalgebren,  $N \in {}^D\mathcal{M}$ ,  $M \in {}^C\mathcal{M}^D$  und  $L \in \mathcal{M}^C$ . Ist  $L \in \mathcal{M}^C$  (bzw.  $N \in {}^D\mathcal{M}$ ) koflach, dann haben wir einen  $R$ -Isomorphismus

$$(L \square_C M) \square_D N \simeq L \square_C (M \square_D N). \quad (2.22)$$

**2.3.11. Lemma.** Seien  $A$  eine  $R$ -Algebra,  $N, M$   $A$ -Linksmoduln und betrachten  $A$  und  $\text{Hom}_R(N, M)$  mit den kanonischen  $A^e$ -Linksmodul-Strukturen. Dann gibt es einen in  $M$  und  $N$  funktoriellen-Isomorphismus

$$\text{Hom}_{A^e-}(A, \text{Hom}_R(N, M)) \simeq \text{Hom}_{A^e-}(N, M).$$

**Beweis.** Der Isomorphismus ist gegeben durch

$$\Phi_{N,M} : \text{Hom}_{A^e-}(A, \text{Hom}_R(N, M)) \longrightarrow \text{Hom}_{A^e-}(N, M), \quad f \longmapsto f(1_A)$$

mit Inversem

$$\Psi_{N,M} : \text{Hom}_{A^e-}(N, M) \longrightarrow \text{Hom}_{A^e-}(A, \text{Hom}_R(N, M)), \quad g \longmapsto [a \longmapsto ag(-)].$$

Es läßt sich leicht nachweisen, dass  $\Phi_{N,M}$  und  $\Psi_{N,M}$  funktoriell in  $M$  und  $N$  sind.

Im Körper-Fall läßt sich der Kotensorfunktorktor als geeigneten Hom-Funktorktor beschreiben (z.B. [AW, Proposition 3.1]). Über beliebigen Ringen bekommen wir die folgende Aussage:

**2.3.12. Proposition.** Seien  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$ ,  $(M, \varrho_M) \in \mathcal{M}^C$ ,  $(N, \varrho_N) \in {}^C\mathcal{M}$  und betrachte  $A$  und  $M \otimes_R N$  mit den kanonischen  $A^e$ -Linksmodul-Strukturen.

1. Ist  $\alpha_{M \otimes N}^P$  injektiv, dann gilt für  $\sum m_i \otimes n_i \in M \otimes_R N$ :

$$\sum m_i \otimes c_i \in M \square_C N \iff \sum a m_i \otimes c_i = \sum m_i \otimes n_i a \quad \forall a \in A.$$

2. Ist  $P \in \mathcal{P}_m^\alpha$ , dann gibt es einen in  $M$  und  $N$  funktoriellen Isomorphismus

$$M \square_C N \simeq \text{Hom}_{A^e-}(A, M \otimes_R N).$$

**Beweis.** 1. Sei  $\alpha_{M \otimes N}^P$  injektiv und setze  $\psi := \alpha_{M \otimes N}^P \circ \tau_{(23)}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 & \sum m_i \otimes n_i \in M \square_C N \\
 \iff & \sum m_{i<0>} \otimes m_{i<1>} \otimes n_i = \sum m_i \otimes n_{i<-1>} \otimes n_{i<0>}, \\
 \iff & \psi(\sum m_{i<0>} \otimes m_{i<1>} \otimes n_i)(a) = \psi(\sum m_i \otimes n_{i<-1>} \otimes n_{i<0>})(a) \quad \forall a \in A \\
 \iff & \sum m_{i<0>} < a, m_{i<1>} > \otimes n_i = \sum m_i \otimes < a, n_{i<-1>} > n_{i<0>} \quad \forall a \in A \\
 \iff & \sum a m_i \otimes n_i = \sum m_i \otimes n_i a \quad \forall a \in A.
 \end{aligned}$$

2. Der Isomorphismus ist gegeben durch

$$\gamma_{M,N} : M \square_C N \longrightarrow \text{Hom}_{A^e-}(A, M \otimes_R N), m \otimes n \longmapsto [a \longmapsto a m \otimes n (= m \otimes n a)].$$

mit Inversem

$$\beta_{M,N} : \text{Hom}_{A^e-}(A, M \otimes_R N) \longrightarrow M \square_C N, f \longmapsto f(1_A).$$

Es ist leicht zu zeigen, dass  $\gamma_{M,N}$  und  $\beta_{M,N}$  funktoriell in  $M, N$  sind. ■

**2.3.13. Lemma.** ([Wis96, 15.7], [Bou74, II, 4.2, Proposition 2]) Seien  $A$  eine  $R$ -Algebra,  $K, K'$   $A$ -Linksmoduln,  $L$  ein  $R$ -Modul und betrachte die  $R$ -lineare Abbildung

$$v : \text{Hom}_{A-}(K, K') \otimes_R L \longrightarrow \text{Hom}_{A-}(K, K' \otimes_R L), h \otimes l \longmapsto h(-) \otimes l. \quad (2.23)$$

1. Ist  ${}_R L$  projektiv (bzw. endlich), dann ist  $v$  injektiv (bzw. bijektiv).
2. Sind  ${}_R L$  flach und  ${}_A K$  e.e. (bzw. e.p.), dann ist  $v$  injektiv (bzw. bijektiv).
3. Sei  ${}_A K$   $K'$ -projektiv. Ist  ${}_A K$  e.e. oder ist  ${}_R L$  e.p., dann ist  $v$  ein bijektiv.

**2.3.14.** ([Wis2000, 14.12]) Seien  ${}_R C$  eine flache  $R$ -Koalgebra,  $M$  ein  $C$ -Linksmodul und betrachte die  $R$ -lineare Abbildung

$$\gamma : M^* \longrightarrow \text{Hom}_R(M, C), f \longmapsto [m \longmapsto f(m_{<-1>}) m_{<0>}]. \quad (2.24)$$

Ist  ${}_R M$  e.p., dann ist  $M^* \otimes_R C \simeq \text{Hom}_R(M, C)$  (siehe Lemma 2.3.13) und daher bekommt  $M^*$  eine  $C$ -Rechtskomodul-Struktur durch

$$\varrho_{M^*} : M^* \xrightarrow{\gamma} \text{Hom}_R(M, C) \simeq M^* \otimes_R C. \quad (2.25)$$

Analog, ist  $M \in \mathcal{M}^C$  und ist  ${}_R M$  e.p., so bekommt  $M^*$  eine  $C$ -Linksmodul-Struktur.

Mit Hilfe von Lemmata 2.3.11, 2.3.13 ergibt sich aus Proposition 2.3.12 unmittelbar die folgende Aussage:

**2.3.15. Folgerung.** Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ .

1. Seien  $M, N \in \mathcal{M}^C$ . Sind  ${}_R M$  flach und  ${}_R N$  e.p., oder ist  ${}_R N$  endlich, dann gibt es in  $M, N$  funktorielle Isomorphismen

$$\begin{aligned} M \square_C N^* &\simeq \operatorname{Hom}_{A^e-}(A, M \otimes_R N^*) \simeq \operatorname{Hom}_{A^e-}(A, \operatorname{Hom}_R(N, M)) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{A-}(N, M) = \operatorname{Hom}^C(N, M). \end{aligned}$$

2. Sind  $M \in \mathcal{M}^C$ ,  $N$  ein  $C$ -Bikomodule und betrachten wir  $N$  mit der induzierten  $A^e$ -Linksmodul-Struktur, dann gibt es  $R$ -Isomorphismen

$$M \square_C N \simeq \operatorname{Hom}_{A^e-}(A, M \otimes_R N) \simeq M \otimes_R \operatorname{Hom}_{A^e-}(A, N),$$

falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a)  ${}_{A^e} A$  e.p. (z.B.  $A$  eine affine  $R$ -Algebra [Wis96, 23.6]) und  ${}_R M$  flach ist; oder
  - (b)  ${}_{A^e} A$   $N$ -projektiv und e.e. ist; oder
  - (c)  ${}_{A^e} A$   $N$ -projektiv und  ${}_R M$  e.p. ist; oder
  - (d)  ${}_R M$  endlich ist.
3. Sind  $N \in {}^C \mathcal{M}$ ,  $M$  ein  $C$ -Bikomodule und betrachten wir  $M$  mit der induzierten  $A^e$ -Linksmodul-Struktur, dann gibt es  $R$ -Isomorphismen

$$M \square_C N \simeq \operatorname{Hom}_{A^e-}(A, M \otimes_R N) \simeq \operatorname{Hom}_{A^e-}(A, M) \otimes_R N,$$

falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a)  ${}_{A^e} A$  e.p. (z.B.  $A$  eine affine  $R$ -Algebra [Wis96, 23.6]) und  ${}_R N$  flach sind; oder
- (b)  ${}_{A^e} A$   $M$ -projektiv und e.e. ist; oder
- (c)  ${}_{A^e} A$   $M$ -projektiv und  ${}_R N$  e.p. sind; oder
- (d)  ${}_R N$  endlich ist.

Für jedes  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  ergibt sich aus [Wis88, 16.3] die folgenden Charakterisierungen der injektiven Objekte in  $\mathcal{M}^C \simeq \operatorname{Rat}^C({}_A \mathcal{M}) = \sigma[{}_A C]$ :

**2.3.16. Lemma.** Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ . Für jedes  $U \in \operatorname{Rat}^C({}_A \mathcal{M})$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1.  $U$  ist injektiv in  $\operatorname{Rat}^C({}_A \mathcal{M})$ .
- 2.  $\operatorname{Hom}^C(-, U) \simeq \operatorname{Hom}_A(-, U) : \operatorname{Rat}^C({}_A \mathcal{M}) \longrightarrow {}_R \mathcal{M}$  ist exakt;
- 3.  $U$  ist  $C$ -injektiv in  $\operatorname{Rat}^C({}_A \mathcal{M})$ .
- 4.  $U$  ist  $K$ -injektiv für jeden (endlich erzeugten, zyklischen)  $A$ -Linksuntermodul  $K \subset C$ .

5. jede exakte Folge  $0 \longrightarrow U \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow 0$  in  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  zerfällt.
6. jede exakte Folge  $0 \longrightarrow U \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow 0$  in  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$ , in der  $N$  Faktormodul von  $C$  (oder  $A$ ) ist, zerfällt.

Das folgende Lemma spielt eine große Rolle beim Studium der injektiven Objekten in der Kategorie  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  für ein  $(A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ :

**2.3.17. Lemma.** *Sei  $(A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ . Ist  $R$  ein QF Ring, dann ist ein  $R$ -flacher  $C$ -rationaler  $A$ -Linksmodul  $M$  genau dann injektiv in  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$ , wenn  $M$  koflach in  $\mathcal{M}^C$  ist.*

**Beweis.** Nach Satz 2.2.16 haben wir die Kategorie-Isomorphismen

$$\sigma[{}_AC] = \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}) \simeq \mathcal{M}^C$$

und daher folgt die Aussage aus [Wis2000, 18.8].

**2.3.18. Lemma.** *Ist  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ , so respektiert  $- \otimes_R C : {}_R\mathcal{M} \longrightarrow \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  die injektiven Objekte.*

**Beweis.** Nach Satz 2.2.16 ist  $\mathcal{M}^C \simeq \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}) = \sigma[{}_AC]$ , also ist  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}) \subset {}_A\mathcal{M}$  eine abgeschlossene Unterkategorie. Der exakte Vergissfunktor  $F : \mathcal{M}^C \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$  ist nach Proposition 1.2.4 links-adjungiert zu  $- \otimes C : {}_R\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^C$  und die Aussage folgt daher aus [Wis88, 45.6].

**2.3.19. Proposition.** *Seien  $(A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  und  $M \in \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$ .*

1.  $M$  ist ein  $A$ -Untermodul eines injektiven  $C$ -rationalen  $A$ -Linksmoduls.
2. Ist  $M$  injektiv in  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$ , dann wird  $M$  von  $C$ -erzeugt in  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$ .
3.  $M$  ist injektiv in  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  genau dann, wenn ein injektiver  $R$ -Modul  $X$  existiert, so dass  $M$  ein direkter Summand von  $X \otimes_R C$  in  ${}_A\mathcal{M}$  ist.
4. Sei  $M$  injektiv in  ${}_R\mathcal{M}$ . Dann ist  $M$  genau dann injektiv in  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$ , wenn  $\varrho_M : M \longrightarrow M \otimes_R C$  zerfallend in  ${}_A\mathcal{M}$  ist.
5. Sei  $R$  noethersch. Dann ist  $M$  injektiv in  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  genau dann, wenn  $M^{(\Lambda)}$  injektiv in  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  ist für jede Indexmenge  $\Lambda$ . Außerdem ist der direkte Limes von injektiven Objekten in  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  injektiv.
6. Sei  $A$  separabel (d.h.  ${}_AeA$  sei projektiv). Dann ist  $M \in \mathcal{M}^C$  koflach genau dann, wenn  ${}_RM$  flach ist.

**Beweis.** 1. Sei  $M \in \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  und bezeichne mit  $E(M)$  die injektive Hülle von  $M$  in  ${}_R\mathcal{M}$ . Nach Lemma 2.3.18 ist  $E(M) \otimes_R C$  injektiv in  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$ . Offensichtlich ist  $(\iota_M \otimes id_C) \circ \varrho_M : M \hookrightarrow E(M) \otimes_R C$   $A$ -linear und die Aussage folgt.

2. Sei  $(M, \varrho_M) \in \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  injektiv. Nach Lemma 2.3.16 existiert ein  $A$ -Epimorphismus  $\beta : M \otimes_R C \longrightarrow M$ , so dass  $\beta \circ \varrho_M = \text{id}_M$ . Ist

$$R^{(\Lambda)} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

eine freie Darstellung von  $M$  in  ${}_R\mathcal{M}$ , dann bekommen wir eine exakte Folge in  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$ :

$$C^{(\Lambda)} \simeq R^{(\Lambda)} \otimes_R C \xrightarrow{\beta \circ (\pi \otimes \text{id}_C)} M \longrightarrow 0.$$

3. Sei  $X$  ein injektiver  $R$ -Modul, so dass  ${}_AM$  ein direkter Summand von  $X \otimes_R C$  ist. Nach Lemma 2.3.18 ist  $X \otimes_R C$  injektiv in  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  und folglich ist  $M$  injektiv in  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$ . Andererseits, sei  $M$  injektiv in  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  und bezeichne mit  $E(M)$  die injektive Hülle von  $M$  in  ${}_R\mathcal{M}$ . Dann bekommen wir eine exakte Folge in  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{(\iota \otimes \text{id}_C) \circ \varrho_M} E(M) \otimes C \quad (2.26)$$

Nach Lemma 2.3.16 zerfällt (2.26) in  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  und die Aussage folgt.

4. Folgt aus Lemmata 2.3.16 und 2.3.18.
5. Nach Folgerung 2.2.24 ist  ${}_AC$  lokal noethersch und somit folgt die Aussage aus der Gleichung  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}) = \sigma[{}_AC]$  und [Wis88, 27.3].
6. Ist  $M \in \mathcal{M}^C$  koflach, dann ist  ${}_RM$  flach (nach Bemerkung 2.3.9). Sei  ${}_eA$  projektiv. Ist  ${}_RM$  flach, dann ist nach Proposition 2.3.12

$$M \square_C - \simeq \text{Hom}_{A^e} (A, -) \circ (M \otimes_R -)$$

exakt, also ist  $M$  koflach. ■

**2.3.20. Folgerung.** Sei  $(A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ . Ist  $R$  halbeinfach (z.B. ein Körper), dann gilt:

1.  $M \in \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  ist injektiv genau dann, wenn  ${}_AM$  ein direkter Summand von  ${}_AC^{(\Lambda)}$  für eine Indexmenge  $\Lambda$  ist.
2. Ist  $A$  separabel, dann ist  $C$  kohalbeinfach.

## Induktionsfunktoren in $\mathcal{P}_m^\alpha$

Bei seinem Studium der induzierten Darstellungen von Quantengruppen, hat Z. Lin ([Lin93, 3.2], [Lin94]) eine Art von *Induktionsfunktoren* für *zulässige Hopf-Paare* über Dedekind-Ringen betrachtet. Als Inspiration für diesen Aspekt gelten die Induktionsfunktoren in der Theorie der Affinen Algebraischen Gruppen bzw. der Quantengruppen. Wir verallgemeinern seinen Ansatz auf Induktionsfunktoren für die Kategorie  $\mathcal{P}_m^\alpha$  und zeigen

dabei, dass diese Funktoren isomorph sind zu Induktionsfunktoren zwischen Kategorien vom Typ  $\sigma[M]$  und sich außerdem als Kompositionen von geeigneten Hom-Funktoren und Spur-Funktoren beschreiben lassen.

Wir betrachten zunächst Induktionsfunktoren zwischen Kategorien vom Typ  $\sigma[M]$ .

**2.3.21.** Seien  $A, B$   $R$ -Algebren und  $\xi \in \text{Alg}_R(A, B)$ . Dann bekommen wir kovariante Funktoren, den  **$\xi$ -Restriktionsfunkt**

$$(-)_\xi : {}_B\mathcal{M} \longrightarrow {}_A\mathcal{M}, (M, \varphi_M) \longmapsto (M, \varphi_M \circ (\xi \otimes id_M)) \quad (2.27)$$

und den kovarianten  **$\xi$ -Induktionsfunkt**

$$\text{Hom}_{A-}(B, -) : {}_A\mathcal{M} \longrightarrow {}_B\mathcal{M}. \quad (2.28)$$

Außerdem ist  $((-)_\xi, \text{Hom}_{A-}(B, -))$  ein adjungiertes Paar mittels der in  $M \in {}_B\mathcal{M}$  und  $N \in {}_A\mathcal{M}$  funktoriellen kanonischen Isomorphismen

$$\text{Hom}_{A-}(M_\xi, N) \simeq \text{Hom}_{A-}(B \otimes_B M, N) \simeq \text{Hom}_{B-}(M, \text{Hom}_{A-}(B, N)).$$

Betrachten wir den kovarianten Funktor

$$B \otimes_A - : {}_A\mathcal{M} \longrightarrow {}_B\mathcal{M}, M \longmapsto (B \otimes_A M, \mu_B \otimes id_M),$$

so ist  $(B \otimes_A -, (-)_\xi)$  ein adjungiertes Paar mittels der in  $M$  und  $N$  funktoriellen kanonischen Isomorphismen

$$\text{Hom}_{B-}(B \otimes_A N, M) \simeq \text{Hom}_{A-}(N, \text{Hom}_{B-}(B, M)) \simeq \text{Hom}_{A-}(N, M_\xi).$$

**2.3.22. Der Induktionsfunkt**  $\text{Ind}_K^L(-)$ . Seien  $A, B$   $R$ -Algebren und  $\xi : A \longrightarrow B$  ein Algebra-Morphismus. Sind  $K$  ein  $A$ -Linksmodul und  $L$  ein  $B$ -Linksmodul, dann bekommen wir einen kovarianten Funktor, den **Induktionsfunkt**

$$\text{Ind}_K^L(-) := \text{Sp}(\sigma[{}_B L], \text{Hom}_{A-}(B, -)) : \sigma[{}_A K] \longrightarrow \sigma[{}_B L]. \quad (2.29)$$

**2.3.23.** Seien  $C, D$   $R$ -Koalgebren und  $\theta : D \longrightarrow C$  ein Koalgebra-Morphismus. Dann bekommen wir einen kovarianten Funktor, den  **$\theta$ -Korestriktionsfunkt**

$$(-)^\theta : \mathcal{M}^D \longrightarrow \mathcal{M}^C, (M, \varrho_M) \longmapsto (M, (id_M \otimes \theta) \circ \varrho_M). \quad (2.30)$$

Sind  ${}_R C, {}_R D$  flach, dann ist  $(-)^\theta$  exakt. Andererseits, betrachte  $D$  als einen  $C$ -Linkskomodul vermöge

$$\varrho_D^C : D \xrightarrow{\Delta_D} D \otimes D \xrightarrow{\theta \otimes id} C \otimes D.$$

Sei  ${}_R D$  flach. Für jedes  $M \in \mathcal{M}^C$  wird das Kotensorprodukt  $M \square_C D$  ein  $D$ -Rechtskomodul durch

$$M \square_C D \xrightarrow{id \square_C \Delta_D} M \square_C (D \otimes_R D) \simeq (M \square_C D) \otimes_R D.$$

und man bekommt einen kovarianten Funktor, den  **$\theta$ -Koinduktionsfunkt**

$$-\square_C D : \mathcal{M}^C \longrightarrow \mathcal{M}^D, M \longmapsto M \square_C D.$$

**2.3.24.** Seien  $P = (A, C)$ ,  $Q = (B, D) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ . Für jeden Morphismus

$$(\xi, \theta) : (B, D) \longrightarrow (A, C)$$

in  $\mathcal{P}_m^\alpha$  nennen wir den kovarianten Funktor

$$\text{Ind}_P^Q(-) : \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}) \longrightarrow \text{Rat}^D({}_B\mathcal{M}), \quad M \longmapsto \text{Rat}^D({}_B\text{Hom}_{A-}(B, M)).$$

den **Induktionsfunktor** von  $P$  nach  $Q$ .

**2.3.25. Proposition.** Seien  $P = (A, C)$ ,  $Q = (B, D) \in \mathcal{P}_m$  und

$$(\xi, \theta) : (B, D) \longrightarrow (A, C)$$

ein Morphismus in  $\mathcal{P}_m$ .

1. Ist  ${}_RD$  flach, dann ist  $((-)^{\theta}, -\square_C D)$  ein adjungiertes Paar von kovarianten Funktoren.

2. Sind  $P, Q \in \mathcal{P}_m^\alpha$  und ist  $B$  kommutativ, dann gilt für jeden  $N \in {}_A\mathcal{M}$

$$\text{Rat}^D({}_B\text{Hom}_{A-}(B, N)) = \text{Rat}^D({}_B\text{Hom}_{A-}(B, \text{Rat}^C({}_A N))).$$

**Beweis.** 1. Analog zu [Wis2000, 19.7.1] gibt es einen in  $N \in \mathcal{M}^D$  und  $L \in \mathcal{M}^C$  funktoriellen Isomorphismus

$$\Phi_{N,L} : \text{Hom}^D(N, L \square_C D) \longrightarrow \text{Hom}^C(N^{\theta}, L), \quad f \longmapsto (id_L \square_C \theta) \circ f$$

mit Inversem  $g \longmapsto (g \square_C id_D) \circ \varrho_N$ .

2. Ist  $g \in \text{Rat}^D({}_B\text{Hom}_{A-}(B, N))$ , dann gilt für alle  $a \in A$  und  $b \in B$  :

$$\begin{aligned} a(g(b)) &= g(a \rightarrow b) &= g(\xi(a)b) \\ &= g(b\xi(a)) &= (\xi(a)g)(b) \\ &= \sum g_{<0>}(b) <\xi(a), g_{<1>}> &= \sum g_{<0>}(b) <a, \theta(g_{<1>})>. \end{aligned}$$

Damit ist  $g(B) \subseteq \text{Rat}^C({}_A N)$  und die Aussage folgt. ■

**2.3.26.** Seien  $P = (A, C)$ ,  $Q = (B, D) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ ,  $(\xi, \theta) : (B, D) \longrightarrow (A, C)$  ein Morphismus in  $\mathcal{P}_m^\alpha$  und bezeichne die Einschränkungen vom  $\xi$ -Restriktionsfunktor  $(-)_\xi : {}_B\mathcal{M} \longrightarrow {}_A\mathcal{M}$  auf  $\text{Rat}^D({}_B\mathcal{M}) = \sigma[{}_BD]$  auch mit  $(-)_\xi$ . Mittels der Kategorie-Isomorphismen  $\mathcal{M}^C \simeq \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}) = \sigma[{}_AC]$  und  $\mathcal{M}^D \simeq \text{Rat}^D({}_B\mathcal{M}) = \sigma[{}_BD]$  (vgl. Satz 2.2.16) bekommen wir eine

Funktor-Äquivalenz  $(-)^{\theta} \approx (-)_{\xi}$ . Außerdem bekommen wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \xleftarrow{(-)^D} & & \xleftarrow{\text{Sp}(\sigma[B D], -)} & & & \\
 \mathcal{M}^D & \xrightarrow{B(-)} & \text{Rat}^D({}_B \mathcal{M}) & \xlongequal{\quad} & \sigma[B D]^{\subset} & \xrightarrow{\iota_D} & {}_B \mathcal{M} \\
 \uparrow \scriptstyle (-)^{\theta} & \uparrow \scriptstyle -\square_C D & \uparrow \scriptstyle (-)_{\xi} & \uparrow \scriptstyle \text{Ind}_P^Q(-) & \uparrow \scriptstyle (-)_{\xi} & \uparrow \scriptstyle \text{Ind}_C^D(-) & \uparrow \scriptstyle (-)_{\xi} \\
 \mathcal{M}^C & \xrightarrow{A(-)} & \text{Rat}^C({}_A \mathcal{M}) & \xlongequal{\quad} & \sigma[A C]^{\subset} & \xrightarrow{\iota_C} & {}_A \mathcal{M} \\
 & \xleftarrow{(-)^C} & & \xleftarrow{\text{Sp}(\sigma[A C], -)} & & & \\
 & & & & & & \text{Hom}_{A-}(B, -)
 \end{array}
 \tag{2.31}$$

**2.3.27. Satz.** Seien  $P = (A, C)$ ,  $Q = (B, D) \in \mathcal{P}_m^{\alpha}$  und  $(\xi, \theta) : (B, D) \longrightarrow (A, C)$  ein Morphismus in  $\mathcal{P}_m^{\alpha}$ . Mittels der Kategorie-Isomorphismen  $\mathcal{M}^C \simeq \text{Rat}^C({}_A \mathcal{M}) = \sigma[A C]$  und  $\mathcal{M}^D \simeq \text{Rat}^D({}_B \mathcal{M}) = \sigma[B D]$  (vgl. Satz 2.2.16) sind die folgenden Funktoren äquivalent

$$\begin{array}{lll}
 -\square_C D & : & \mathcal{M}^C \longrightarrow \mathcal{M}^D, \\
 \text{Ind}_P^Q(-) & : & \text{Rat}^C({}_A \mathcal{M}) \longrightarrow \text{Rat}^D({}_B \mathcal{M}), \\
 \text{Hom}_{A^e-}(A, - \otimes_R D) & : & \text{Rat}^C({}_A \mathcal{M}) \longrightarrow \text{Rat}^D({}_B \mathcal{M}), \\
 \text{Ind}_C^D(-) & : & \sigma[A C] \longrightarrow \sigma[B D].
 \end{array}$$

**Beweis.** Betrachte für jedes  $N \in \mathcal{M}^C$  die *injektive*  $R$ -lineare Abbildung

$$\gamma_N := (\alpha_N^Q)|_{N \square_C D} : N \square_C D \longrightarrow \text{Hom}_R(B, N), \quad \sum n_i \otimes d_i \longmapsto [b \longmapsto \sum \langle b, d_i \rangle n_i].$$

Dann gilt für alle  $a \in A$  und  $b \in B$  :

$$\begin{aligned}
 \gamma_N(\sum n_i \otimes d_i)(ab) &= \sum \langle ab, d_i \rangle n_i \\
 &= \sum \langle b, d_i \leftarrow a \rangle n_i \\
 &= \gamma_N(\sum n_i \otimes d_i \leftarrow a)(b) \\
 &= \gamma_N(\sum a n_i \otimes d_i)(b) \quad (\text{vgl. Lemma 2.3.12 (1)}) \\
 &= \sum \langle b, d_i \rangle a n_i \\
 &= a(\gamma_N(\sum n_i \otimes d_i)(b))
 \end{aligned}$$

also ist  $\gamma_N(N \square_C D) \subset \text{Hom}_{A-}(B, N)$ . Außerdem gilt für beliebiges  $\sum n_i \otimes d_i \in N \square_C D$  und  $\tilde{b}, b \in B$  :

$$\begin{aligned}
 \gamma_N(\tilde{b}(\sum n_i \otimes d_i))(b) &= \gamma_N(\sum n_i \otimes \tilde{b} \rightarrow d_i)(b) = \sum \langle b, \tilde{b} \rightarrow d_i \rangle n_i \\
 &= \sum \langle \tilde{b} b, d_i \rangle n_i = \gamma_N(\sum n_i \otimes d_i)(\tilde{b} b) \\
 &= (\tilde{b} \gamma_N(\sum n_i \otimes d_i))(b),
 \end{aligned}$$

d.h.  $\gamma_N$  ist  $B$ -linear. Nach Bemerkung 2.1.5 ist  ${}_R D$  flach und somit ist nach Folgerung 2.3.8  $N \square_C D \in \mathcal{M}^D$ . Nach Lemma 2.2.7 (4) ist dann  $\gamma_N(N \square_C D) \subset \text{Rat}^D({}_B \text{Hom}_{A-}(B, N))$ . Betrachte die  $R$ -lineare Abbildung

$$\beta_N : \text{Rat}^D({}_B \text{Hom}_{A-}(B, N)) \longrightarrow N \square_C D, f \longmapsto \sum f_{<0>}(1_B) \otimes f_{<1>}.$$

Ist  $f \in \text{Rat}^D({}_B \text{Hom}_{A-}(B, N))$  beliebig, dann gilt für alle  $a \in A$  und  $b \in B$ :

$$\begin{aligned} \gamma_N(\sum a f_{<0>}(1_B) \otimes f_{<1>})(b) &= \sum (\xi(a) f_{<0>})(1_B) \langle b, f_{<1>} \rangle \\ &= \sum f_{<0><0>}(1_B) \langle \xi(a), f_{<0><1>} \rangle \langle b, f_{<1>} \rangle \\ &= \sum f_{<0>}(1_B) \langle \xi(a), f_{<1>1} \rangle \langle b, f_{<1>2} \rangle \\ &= \sum f_{<0>}(1_B) \langle \xi(a)b, f_{<1>} \rangle \\ &= \sum f_{<0>}(1_B) \langle a \rightharpoonup b, f_{<1>} \rangle \\ &= \sum f_{<0>}(1_B) \langle b, f_{<1>} \leftarrow a \rangle \\ &= \gamma_N(\sum f_{<0>}(1_B) \otimes f_{<1>} \leftarrow a)(b), \end{aligned}$$

also ist  $\sum a(f_{<0>}(1_B)) \otimes f_{<1>} = \sum f_{<0>}(1_B) \otimes f_{<1>} \leftarrow a$  (da  $\gamma_N := \alpha_N^Q : N \otimes_R D \longrightarrow \text{Hom}_R(B, N)$  injektiv ist). Laut Proposition 2.3.12 (1) ist dann  $\sum f_{<0>}(1_B) \otimes f_{<1>} \in N \square_C D$ , also ist  $\beta$  wohl definiert. Außerdem gilt für alle  $f \in \text{Rat}^D({}_B \text{Hom}_{A-}(B, N))$  und  $b \in B$ :

$$\begin{aligned} (\gamma_N \circ \beta_N)(f)(b) &= \gamma_N(\sum f_{<0>}(1_B) \otimes f_{<1>})(b) \\ &= \sum f_{<0>}(1_B) \langle b, f_{<1>} \rangle \\ &= (bf)(1_B) = f(b). \end{aligned}$$

Daher ist  $\gamma_N \circ \beta_N = id$ . Offensichtlich ist  $\beta_N \circ \gamma_N = id$ , also sind  $\gamma_N, \beta_N$  Isomorphismen. Es ist leicht zu zeigen, dass  $\gamma_N$  und  $\beta_N$  funktoriell in  $N$  sind und daher ist  $-\square_C D \approx \text{Ind}_P^Q(-)$ . Die Äquivalenz  $\text{Ind}_P^Q(-) \approx \text{Ind}_C^D(-)$  bzw.  $-\square_C D \approx \text{Hom}_{A^e-}(A, - \otimes_R D)$  folgt aus Satz 2.2.16 bzw. Proposition 2.3.12 (2). ■

**2.3.28. Beispiel.** betrachte das triviale Paar  $P = (R, R) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ . Ist  $Q = (B, D) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  und betrachten wir den trivialen Morphismus in  $\mathcal{P}_m^\alpha$

$$(\eta_B, \varepsilon_D) : (B, D) \longrightarrow (R, R),$$

so gilt für jedes  $M \in \mathcal{M}^R \simeq {}_R \mathcal{M}$

$$\text{Ind}_P^Q(-) := \text{Rat}^D({}_B \text{Hom}_R(B, -)) \simeq - \otimes_R D.$$

Bezeichne  $F \simeq (-)^\varepsilon : \mathcal{M}^D \longrightarrow {}_R \mathcal{M}$  den Vergissfunktorkomplex, dann ist  $(F, \text{Ind}_P^Q(-))$  ein adjungiertes Paar.

**2.3.29. Universelle Eigenschaft.** Seien  $P = (A, C), Q = (B, D) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  und

$$(\xi, \theta) : (B, D) \longrightarrow (A, C)$$

ein Morphismus in  $\mathcal{P}_m^\alpha$ . Dann hat  $\text{Ind}_P^Q(-)$  die folgende universelle Eigenschaft: Sind  $N \in \mathcal{M}^D, M \in \mathcal{M}^C$  und  $\phi \in \text{Hom}^C(N^\theta, M)$ , dann existiert ein eindeutig bestimmtes  $\tilde{\phi} \in \text{Hom}^D(N, \text{Ind}_P^Q(M))$ , so dass  $\phi(n) = \tilde{\phi}(n)(1_B)$  für jedes  $n \in N$ .

Im Folgenden zeigen wir einige Eigenschaften des Induktionsfunktors:

**2.3.30.** Seien  $P = (A, C)$ ,  $Q = (B, D) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  und

$$(\xi, \theta) : (B, D) \longrightarrow (A, C)$$

ein Morphismus in  $\mathcal{P}_m^\alpha$ .

1. Ist  $\{N_\lambda\}_\Lambda$  ein direktes System in  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$ , so gilt

$$\text{Ind}_P^Q(\varinjlim N_\lambda) \simeq \varinjlim N_\lambda \square_C D \simeq \varinjlim (N_\lambda \square_C D) = \varinjlim \text{Ind}_P^Q(N_\lambda),$$

also respektiert  $\text{Ind}_P^Q(-)$  direkte Limites.

2.  $\text{Rat}^D(-)$  und  $\text{Hom}_{A-}(B, -)$  sind links-exakt und somit ist  $\text{Ind}_P^Q(-) := \text{Rat}^D(-) \circ \text{Hom}_{A-}(B, -)$  links-exakt. Ist  ${}_AB$  projektiv und ist  $\text{Rat}^D(-)$  exakt, dann ist  $\text{Ind}_P^Q(-)$  exakt.
3.  $\text{Ind}_P^Q(-) \simeq -\square_C D$  ist genau dann exakt, wenn  $D$  koflach in  ${}^C\mathcal{M}$  ist. Ist  $R$  ein QF Ring, dann ist  $\text{Ind}_P^Q(-)$  exakt genau dann, wenn  $D$  injektiv in  ${}^C\text{Rat}(\mathcal{M}_A)$  ist.
4. Nach Lemma 2.3.25 (1) ist  $((-)^{\theta}, -\square_C D)$  adjungiert und daher respektiert  $\text{Ind}_P^Q(-) \simeq -\square_C D$  inverse Limites, also direkte Produkte und Kerne. Offensichtlich ist  $(-)^{\theta} : \mathcal{M}^D \longrightarrow \mathcal{M}^C$  exakt und somit respektiert  $\text{Ind}_P^Q(-)$  injektive Objekte. Insbesondere gilt: Ist  $C$  injektiv in  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$ , dann ist  $D \simeq C \square_C D \simeq \text{Ind}_P^Q(C)$  injektiv in  $\text{Rat}^D({}_B\mathcal{M})$ .
5. Sei  $A$  separabel. Dann ist  $\text{Ind}_P^Q(-) \simeq \text{Hom}_{Ae-}(A, - \otimes_R D)$  exakt und  $D$  ist koflach in  ${}^C\mathcal{M}$ . Ist  $R$  ein QF Ring, dann ist  $D$  injektiv in  ${}^C\mathcal{M}$ .

Folgende Aussage hat Y. Doi [Doi81, Proposition 5] für den Körper-Fall bewiesen:

**2.3.31. Proposition.** Seien  $P = (A, C)$ ,  $Q = (B, D) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  und

$$(\xi, \theta) : (B, D) \longrightarrow (A, C)$$

ein Morphismus in  $\mathcal{P}_m^\alpha$ . Ist  $R$  ein QF Ring, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Der Funktor  $\text{Ind}_P^Q(-) : \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}) \longrightarrow \text{Rat}^D({}_B\mathcal{M})$  ist exakt;
2.  $D$  ist koflach in  ${}^C\mathcal{M}$ .
3.  $D$  ist injektiv in  ${}^C\text{Rat}(\mathcal{M}_A)$ .
4. Jeder injektiver  $D$ -Linkskomodul, der flach in  ${}_R\mathcal{M}$  ist, ist injektiv in  ${}^C\text{Rat}(\mathcal{M}_A)$ .

**Beweis.** (1)  $\iff$  (2) Folgt aus dem Funktor-Isomorphismus  $\text{Ind}_P^Q(-) \simeq -\square_C D : \mathcal{M}^C \longrightarrow \mathcal{M}^D$ .

(2)  $\iff$  (3)  ${}_R D$  ist flach und somit folgt die Äquivalenz aus Lemma 2.3.17.

(2)  $\implies$  (4) Sei  $M$  ein  $D$ -Linkskomodul. Ist  $M$  injektiv in  ${}^D\text{Rat}(\mathcal{M}_B)$  und flach in  ${}_R\mathcal{M}$ , dann ist  $M$  koflach in  ${}^D\mathcal{M}$  (nach Lemma 2.3.17). Außerdem haben wir einen Funktor-Isomorphismus

$$-\square_C M \simeq (-\square_C D)\square_D M : \mathcal{M}^C \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$$

(vgl. Lemma 2.3.10). Nach Voraussetzung sind  $-\square_C D : \mathcal{M}^C \longrightarrow \mathcal{M}^D$  und  $-\square_D M : \mathcal{M}^D \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$  exakt und daher ist  $-\square_C M$  exakt. Nach Lemma 2.3.17 ist  $M$  injektiv in  ${}^C\text{Rat}(\mathcal{M}_A)$ .

(4)  $\implies$  (3)  $R$  ist injektiv und somit ist  $D$  injektiv in  ${}^D\text{Rat}(\mathcal{M}_B) \simeq {}^D\mathcal{M}$ . Nach Voraussetzung ist  $D$  dann injektiv in  ${}^C\text{Rat}(\mathcal{M}_A)$ . ■

## 2.4 Stetige duale Koalgebren

Jeder  $R$ -Koalgebra  $C$  ist eine *duale  $R$ -Algebra* zugeordnet, nämlich  $C^*$  mit dem Konvolutionsprodukt (1.1). Ist  $A$  eine endliche  $R$ -Algebra, dann ist  $A^*$  eine  $R$ -Koalgebra. Ist  $A$  nicht endlich, dann induziert  $\mu_A$  auf  $A^*$  im Allgemeinen (auch wenn  $R$  ein Körper ist) keine  $R$ -Koalgebra-Struktur. Ist  $R$  ein *Körper* und betrachten wir eine  $R$ -Algebra  $A$  mit der koendlichen Topologie  $\text{Cf}(A)$  (siehe 2.4.4), so ist der Charaktermodul  $A^\circ$  der stetigen Abbildungen von  $A$  nach  $R$  eine  $R$ -Koalgebra. Diese Aussage wurde in [CN90] auf *Dedekind-Ringe* und in [AG-TW2000] auf beliebige *noethersche erbliche* Ringe erweitert.

Dieser Paragraph befaßt sich mit  $R$ -Koalgebra-Strukturen auf dem Charaktermodul  $A_{\mathfrak{F}}^\circ$  einer  $R$ -Algebra  $A$ , versehen mit einer linearen Topologie  $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$  induziert von einem Filter  $\mathfrak{F} \subset \mathcal{K}_A$  über einem beliebigen (noetherschen) Ring.

**2.4.1.** Sei  $A$  eine  $R$ -Algebra und betrachte die Klasse der  $R$ -koendlichen *zweiseitigen*  $A$ -Ideale  $\mathcal{K}_A$ . Jeder Filter  $\mathfrak{F} \subset \mathcal{K}_A$  induziert auf  $A$  eine Topologie  $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$ , so dass  $(A, \mathfrak{T}(\mathfrak{F}))$  eine linear topologische  $R$ -Algebra ist und  $\mathfrak{F}$  eine Umgebungsbasis der  $0_A$  wird. Mit

$$A_{\mathfrak{F}}^\circ := \{f \in A^* \mid \exists I \in \mathfrak{F}, \text{ so dass } f(I) = 0\} = \varprojlim_{\mathfrak{F}} (A/I)^*$$

bezeichnen wir den **Charaktermodul** der stetigen  $R$ -linearen Abbildungen von  $A$  nach  $R$  und mit

$$\widehat{A}_{\mathfrak{F}} := \varprojlim \{A/I \mid I \in \mathfrak{F}\}$$

die Vervollständigung von  $A$  bzgl.  $\mathfrak{F}$ . Ist  $A_{\mathfrak{F}}^\circ$  eine  $R$ -Koalgebra, so nennt man  $A_{\mathfrak{F}}^\circ$  die **stetige duale  $R$ -Koalgebra von  $A$  bzgl.  $\mathfrak{F}$** .

**2.4.2. Bemerkung.** (vgl. [CG-RTvO2001, Proposition 3.1]) Seien  $R$  noethersch und  $A$  eine  $R$ -Algebra. Sei  $I$  ein  $R$ -koendliches  $A$ -Linksideal,  $A/I = \sum_{i=1}^k R(a_i + I)$ , und betrachte das *zweiseitiges*  $A$ -Ideal

$$J := \bigcap_{i=1}^k (I : a_i) = (I : A) \subset (I : 1_A) = I.$$

Dann ist

$$\varphi_I : A \longrightarrow \text{End}_R(A/I), \quad a \longmapsto [b + I \longmapsto ab + I]$$

ein Algebra-Morphismus mit  $\text{Ke}(\varphi_I) = J$ , also ist  $J$  ein  $R$ -koendliches  $A$ -Ideal.

Analog zeigt man, dass jedes  $R$ -koendliche  $A$ -Rechtsideal ein  $R$ -koendliches *zweiseitiges*  $A$ -Ideal enthält. ■

**2.4.3. Lokal endliche Moduln.** Seien  $R$  noethersch und  $A$  eine  $R$ -Algebra. Ein  $A$ -Linksmodul  $M$  heißt **lokal endlich**, falls  $Am$  e.e. ist für jedes  $m \in M$ . Mit  $\text{Loc}({}_A\mathcal{M}) \subset {}_A\mathcal{M}$  bezeichnen wir die *volle* Unterkategorie der lokal endlichen  $A$ -Linksmoduln. Für jeden  $A$ -Modul  $M$  ist  $\text{Loc}(M) \subset M$  ein  $A$ -Untermodule (da der Grundring  $R$  noethersch ist) und wir bekommen ein Präradikal

$$\text{Loc}(-) : {}_A\mathcal{M} \longrightarrow \text{Loc}({}_A\mathcal{M}), \quad M \longmapsto \{m \in M \mid Am \text{ e.e. in } {}_R\mathcal{M}\}$$

mit Prätorsionsklasse  $\text{Loc}({}_A\mathcal{M})$ . Analog definiert man die Kategorie der lokal endlichen  $A$ -Rechtsmoduln  $\text{Loc}(\mathcal{M}_A)$ .

**Notation.** Sei  $A$  eine  $R$ -Algebra. Für jeden  $A$ -Linksmodul (bzw.  $A$ -Rechtsmodul)  $M$  setzen wir

$$\mathcal{K}_M := \{L \subset M \mid L \text{ ist ein } A\text{-Untermodule und } M/L \text{ ist e.e. in } {}_R\mathcal{M}\}.$$

**2.4.4. Die koendliche Topologie.** Sei  $R$  noethersch. Für jede  $R$ -Algebra  $A$  ist  $\mathcal{K}_A$  offensichtlich ein Filter und induziert auf  $A$  somit sowohl eine rechts lineare Topologie als auch eine links-lineare Topologie, die sogenannten **koendlichen Topologie**, so dass  $\mathcal{K}_A$  Umgebungsbasis der  $0_A$  wird. Wir werden beide Topologien mit  $\text{Cf}(A)$  bezeichnen. Ist  $A^\circ := A^\circ_{\mathcal{K}_A}$  eine  $R$ -Koalgebra, so nennt man  $A^\circ$  **die stetige duale  $R$ -Koalgebra** von  $A$ . Wir setzen außerdem  $\widehat{A} := \widehat{A}_{\mathcal{K}_A}$ .

Betrachte  $A$  mit der links linearen Topologie  $\text{Cf}(A)$ . Sei  $M$  eine  $A$ -Linksmodul und betrachte den Filter den  $R$ -koendlichen  $A$ -Untermodule  $\mathcal{K}_M$ . Sei  $L \subset M$  ein  $R$ -koendlicher  $A$ -Untermodule und betrachte die  $R$ -lineare Abbildung

$$\varphi_L : A \longrightarrow \text{End}_R(M/L), \quad a \longmapsto [m + L \longmapsto am + L].$$

Dann ist  $A/\text{Ke}(\varphi_L) \hookrightarrow \text{End}_R(M/L)$  und somit ist

$$I_L := \text{Ke}(\varphi_L) = \{a \in A \mid aM \subseteq L\}$$

ein  $R$ -koendliches *zweiseitiges*  $A$ -Ideal. Ist  $m \in M$  beliebig, dann ist  $I_L := (L : M) \subset (L : m)$ , also ist  $(L : m)$  offen bzgl.  $\text{Cf}(A)$ . Daher bekommt  $M$  eine Topologie  $\text{Cf}(M)$ , die **koendliche Topologie**, so dass  $(M, \text{Cf}(M))$  ein linear topologischer  $(A, \text{Cf}(A))$ -Linksmodul und  $\mathcal{K}_M$  eine Umgebungsbasis der  $0_M$  ist.

Analog definiert man für jeden  $A$ -Rechtsmodul  $M$  die koendliche Topologie  $\text{Cf}(M)$ .

Die folgende Aussage erweitert [AG-TW2000, 1.11] und [AG-TL2001, Remark 2.14]:

**2.4.5. Satz.** *Seien  $R$  noethersch,  $A$  eine  $R$ -Algebra,  $C \subseteq A^\circ$  ein  $A$ -Unterbimodul und betrachte das Paar  $P := (A, C)$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1.  $C$  erfüllt die  $\alpha$ -Bedingung und  $\kappa_P(A) \subset C^*$  liegt dicht.
2.  $(A, C)$  ist ein  $\alpha$ -Paar;
3.  $C \subset R^A$  ist rein (im Sinne von Cohn);
4.  $C$  ist eine  $R$ -Koalgebra und  $(A, C) \in \mathcal{P}_\alpha^m$ .

*Ist  $R$  ein QF Ring, dann ist weiter dazu äquivalent*

5.  ${}_R C$  ist projektiv.

**Beweis.** Die Äquivalenz (2)  $\iff$  (3) folgt aus Proposition 2.1.8 (3).

(1)  $\implies$  (2) folgt aus Proposition 2.1.7 (2).

(3)  $\implies$  (4) Ist  $C \subset R^A$  rein, dann ist  $C$  nach [AG-TW2000, 1.11] eine  $R$ -Koalgebra. Es gilt außerdem für alle  $f \in C$  und beliebige  $a, \tilde{a} \in A$ :

$$\kappa_P(a\tilde{a})(f) = f(a\tilde{a}) = \sum f_1(a)f_2(\tilde{a}) = (\kappa_P(a) \otimes \kappa_P(\tilde{a}))(\Delta(f)) = (\kappa_P(a) \star \kappa_P(\tilde{a}))(f)$$

und

$$\kappa_P(1_A)(f) = f(1_A) = \varepsilon_C(f) \text{ für alle } f \in C.$$

Somit ist  $\kappa_P : A \longrightarrow C^*$  ein Algebra-Morphismus, also ist  $P \in \mathcal{P}_m$ . Nach Proposition 2.1.8 erfüllt  $P$  die  $\alpha$ -Bedingung, also ist  $P \in \mathcal{P}_\alpha^m$ .

(4)  $\implies$  (1) ergibt sich aus Satz 2.2.16.

Sei  $R$  ein QF Ring.

(1)  $\implies$  (5) folgt aus Bemerkung 2.1.5.

(5)  $\implies$  (1) Ist  $C$  projektiv, dann erfüllt  $C$  die  $\alpha$ -Bedingung nach Lemma 2.1.13 (3). Betrachte den  $R$ -Untermodule  $\kappa_P(A) \subset C^*$ . Nach Proposition A.0.5 (1) gilt:

$$\overline{\kappa_P(A)} := \text{AnKe}(\kappa_P(A)) = \text{An}(A^\perp) = \text{An}(0_C) = C^*,$$

also ist  $\kappa_P(A) \subset C^*$  dicht.

**Notation.** Für  $R$ -Algebren  $A, B$  und jedes  $\xi \in \text{Hom}_R(A, B)$ , setzen wir  $\xi^\circ := \xi|_{B^\circ}^*$ .

**2.4.6. Lemma.** Seien  $R$  noethersch,  $A, B$   $\alpha$ -Algebren und  $\zeta : A \longrightarrow B$  ein Algebra-Morphismus. Dann bekommen wir einen Morphismus in  $\mathcal{P}_m^\alpha$

$$(\zeta, \xi^\circ) : (B, B^\circ) \longrightarrow (A, A^\circ).$$

**Beweis.** Ist  $f \in B^\circ$ , dann existiert ein  $R$ -koendliches  $B$ -Ideal  $I \triangleleft B$ , so dass  $f \in (B/I)^*$ . Nach Voraussetzung ist  $R$  noethersch und somit ist  $\xi^{-1}(I) \subset A$  ein  $R$ -koendliches  $A$ -Ideal, also ist  $\xi^\circ(f) \in A^\circ$  und wir bekommen ein Paar-Morphismus

$$(\zeta, \xi^\circ) : (B, B^\circ) \longrightarrow (A, A^\circ).$$

$\zeta$  ist ein Algebra-Morphismus und nach Folgerung 2.1.10 (1) haben wir eine kanonische Einbettung  $A^\circ \otimes A^\circ \hookrightarrow (A \otimes A)^*$ . Es folgt dann aus Lemma 2.1.23 (1), dass  $\xi^\circ : B^\circ \longrightarrow A^\circ$  ein Koalgebra-Morphismus ist.

Dual zur Konvolutionsalgebra hat D. Radford [Rad73] die *Konvolutionskoalgebra* über Körpern eingeführt. Über beliebigen noetherschen Ringen erweist sich die folgende Version seiner Definition als sinnvoll:

**2.4.7.** Sei  $R$  noethersch. Sind  $C$  eine  $R$ -Koalgebra und  $A$  eine  $\alpha$ -Algebra, dann nennen wir  $A \star C := A^\circ \otimes_R C$  die **Konvolutionskoalgebra** von  $A$  und  $C$ . Im Spezialfall  $C = R$  ergibt sich  $A \star R \simeq A^\circ$ .

Das folgende Resultat verallgemeinert u.a. Aussagen von D. Radford [Rad73] über die Konvolutionskoalgebra vom Körper-Fall auf  $\alpha$ -Algebren und  $\alpha$ -Koalgebren über noetherschen Ringen:

**2.4.8.** Seien  $R$  noethersch,  $C$  eine  $\alpha$ -Koalgebra und  $A$  eine  $\alpha$ -Algebra. Dann sind  $(A, A^\circ)$ ,  $(C^*, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  und somit ist laut Folgerung 2.2.19  $P := (A \otimes C^*, A \star C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ . Nach [Rad73] sind die folgenden Abbildungen Algebra-Morphismen:

$$\begin{aligned} \beta & : \text{Hom}_R(C, A) \longrightarrow (A^\circ \otimes C)^*, & f & \longmapsto [h \otimes c \longmapsto h(f(c))]. \\ \gamma & : A \otimes C^* \longrightarrow \text{Hom}_R(C, A), & a \otimes g & \longmapsto [c \longmapsto g(c)a]. \end{aligned}$$

Nach Folgerung 2.2.17 ist  $Q := (\text{Hom}_R(C, A), A \star C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ ,  $\gamma(A \otimes C^*) \subset \beta(\text{Hom}_R(C, A))$  liegt dicht und wir bekommen Kategorie-Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{A \star C} & \simeq \text{Rat}^{A \star C}_{(A \otimes C^*)}(\mathcal{M}) & = & \sigma[A \otimes C^* A \star C] \\ & \simeq \text{Rat}^{A \star C}_{(A \star C)^*}(\mathcal{M}) & = & \sigma[(A \star C)^* A \star C] \\ & \simeq \text{Rat}^{A \star C}_{(\text{Hom}_R(C, A))}(\mathcal{M}) & = & \sigma[\text{Hom}_R(C, A) A \star C]. \end{aligned}$$

**2.4.9. Proposition.** Ist  $R$  noethersch, dann gibt es Bifunktoren

$$- \star - : \mathbf{Alg}_R^\alpha \times \mathbf{Cog} \longrightarrow \mathbf{Cog}_R \text{ und } - \star - : \mathbf{Alg}_R^\alpha \times \mathbf{Cog}_R^\alpha \longrightarrow \mathbf{Cog}_R^\alpha. \quad (2.32)$$

**Beweis.** Ist  $A \in \mathbf{Alg}_R^\alpha$ , dann ist  $A^\circ$  nach Satz 2.4.5 eine  $\alpha$ -Koalgebra. Ist  $C$  eine  $R$ -Koalgebra (bzw.  $\alpha$ -Koalgebra), dann ist  $A \star C := A^\circ \otimes C$  eine  $R$ -Koalgebra (bzw.  $\alpha$ -Koalgebra nach Folgerung 2.2.19). Analog zu [Par73] zeigt man, dass 2.32 Bifunktoren sind.

**2.4.10. Definition.** Sei  $A$  eine  $R$ -Algebra und betrachte die Klasse der  $R$ -koendlichen  $A$ -Ideale  $\mathcal{K}_A$ .

1. Einen Filter  $\mathfrak{F} = \{I_\lambda\}_\Lambda \subset \mathcal{K}_A$  nennen wir:
  - $\alpha$ -Filter**, falls  $(A, A_\mathfrak{F}^\circ)$  ein  $\alpha$ -Paar ist;
  - kofinitär**, falls für jedes  $I_\lambda \in \mathfrak{F}$  ein  $I_\varkappa \subset I_\lambda$  für ein  $\varkappa \in \Lambda$  existiert, so dass  $A/I_\varkappa$  endlich in  ${}_R\mathcal{M}$  ist;
  - $R$ -c-koerzeugt**, falls  $A/I$   $R$ -koerzeugt für jedes  $I \in \mathfrak{F}$  ist.
2. Wir nennen  $A$  :
  - $\alpha$ -Algebra**, falls  $\mathcal{K}_A$  ein  $\alpha$ -Filter ist;
  - kofinitär**, falls  $\mathcal{K}_A$  ein kofinitärer Filter ist;
  - $R$ -c-koerzeugt**, falls  $A/I$   $R$ -koerzeugt für jedes  $I \in \mathcal{K}_A$  ist.

**2.4.11. Definition.** ([Tak81]) Eine  $R$ -Koalgebra  $C$  heißt **infinitesimal flach**, falls  $C = \varinjlim C_\lambda$  für ein (mit der Inklusion) direktes System von *endlichen*  $R$ -Unterkoalgebren  $\{C_\lambda\}_\Lambda$  ist.

**2.4.12. Proposition.** Seien  $A$  eine  $R$ -Algebra,  $\mathfrak{F} \subset \mathcal{K}_A$  ein Filter und setze  $P := (A, A_\mathfrak{F}^\circ)$ .

1. Ist  $\mathfrak{F}$   $R$ -c-koerzeugt, dann ist  $\mathfrak{T}(F)$  genau dann Hausdorff, wenn  $\kappa_P : A \longrightarrow A_\mathfrak{F}^{\circ*}$  eine Einbettung ist.
2. Ist  $R$  noethersch und ist  $\mathfrak{F}$  ein  $\alpha$ -Filter, dann ist  $A_\mathfrak{F}^\circ$  eine  $\alpha$ -Koalgebra,  $(A, A_\mathfrak{F}^\circ) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  und  $\kappa_P(A) \subset A_\mathfrak{F}^{\circ*}$  liegt dicht.

**Beweis.** 1. Ist  $A/I$   $R$ -koerzeugt für jedes  $I \in \mathfrak{F}$ , dann folgt aus A.0.3 (1)

$$\overline{0_A} = \bigcap_{I \in \mathfrak{F}} I = \bigcap_{I \in \mathfrak{F}} \text{KeAn}(I) = \text{Ke}\left(\bigcup_{I \in \mathfrak{F}} \text{An}(I)\right) = \text{Ke}(A_\mathfrak{F}^\circ) = \text{Ke}(\kappa_P).$$

2. Jedes  $I \in \mathfrak{F}$  ist ein zweiseitiges  $A$ -Ideal und somit ist  $A_\mathfrak{F}^\circ \subset A^\circ$  ein  $A$ -Unterbimodul. Die Aussage folgt dann aus Satz 2.4.5.

Die folgende Aussage erweitert die entsprechenden Beobachtungen in [Lar98] (bzw. [AG-TL2001]) über *kofinitäre  $R$ -Algebren* über Dedekind-Ringen (bzw. noetherschen Ringen) auf *kofinitäre Filter* für Algebren über beliebigen Ringen:

**2.4.13. Proposition.** *Seien  $A$  eine  $R$ -Algebra,  $\mathfrak{F} \subset \mathcal{K}_A$  ein Filter,  $P := (A, A_{\mathfrak{F}}^{\circ})$  und betrachte  $A$  als eine linear topologische  $R$ -Algebra mit der induzierten Topologie  $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$ . Ist  $\mathfrak{F}$  kofinitär, dann gilt:*

1.  $\mathfrak{T}(F)$  ist Hausdorff genau dann, wenn  $\kappa_P : A \longrightarrow A_{\mathfrak{F}}^{\circ*}$  eine Einbettung ist.
2.  $A_{\mathfrak{F}}^{\circ}$  ist eine infinitesimal flache  $\alpha$ -Koalgebra,  $P \in \mathcal{P}_m^{\alpha}$  und  $\kappa_P(A) \subset A_{\mathfrak{F}}^{\circ*}$  liegt dicht.
3.  $\widehat{A} \simeq A_{\mathfrak{F}}^{\circ*}$  als linear topologische  $R$ -Algebren.

**Beweis.** 1. Für jedes  $I \in \mathcal{E}_A$  ist  $A/I$  endlich erzeugt und projektiv, insbesondere ist  $A/I$   $R$ -koerzeugt und es gilt daher

$$\overline{0}_A := \bigcap_{I \in \mathfrak{F}} I = \bigcap_{I \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{E}_A} I = \bigcap_{I \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{E}_A} \text{KeAn}(I) = \text{Ke}\left(\bigcup_{I \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{E}_A} \text{An}(I)\right) = \text{Ke}(A_{\mathfrak{F}}^{\circ}) = \text{Ke}(\kappa_P).$$

2. Für  $I, J \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{E}_A$  setze  $I \leq J$ , falls  $I \supseteq J$  und betrachte den kanonischen Algebra-Epimorphismus  $\pi_{I,J} : A/J \longrightarrow A/I$ . Dann ist

$$\{((A/I)^*, \pi_{I,J}^*) \mid I \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{E}(A), \pi_{I,J}^* : (A/I)^* \hookrightarrow (A/J)^*\}$$

ein direktes System von  $R$ -Koalgebren mit Koalgebra-Morphismen  $\pi_{I,J}^* : (A/I)^* \longrightarrow (A/J)^*$ . Nach Lemma 1.1.10 ist  $A_{\mathfrak{F}}^{\circ} = A_{\mathfrak{F} \cap \mathcal{E}(A)}^{\circ} \simeq \varprojlim_{\mathfrak{F} \cap \mathcal{E}(A)} (A/I)^*$  eine  $R$ -Koalgebra. Für jedes  $I \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{E}(A)$  ist  $A/I$  eine endliche  $R$ -Algebra und daher ist  $(A/I)^* \hookrightarrow A_{\mathfrak{F}}^{\circ}$  eine  $R$ -Unterkoalgebra, also ist  $A_{\mathfrak{F}}^{\circ} = \varprojlim_{\mathfrak{F} \cap \mathcal{E}_A} (A/I)^*$  eine infinitesimal flache  $R$ -Koalgebra.

Sei  $M$  ein beliebiger  $R$ -Modul. Ist  $\sum_{i=1}^k m_i \otimes g_i \in \text{Ke}(\alpha_M^P)$ , dann existiert  $I \in \mathfrak{F}$ , so dass  $\{g_1, \dots, g_n\} \subset \text{An}(I)$ . Ist  $\{(a_l + I, f_l)\}_{l=1}^k$  eine duale Basis für  $(A/I)^*$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \otimes g_i &= \sum_{i=1}^n m_i \otimes \left( \sum_{l=1}^k g_i(a_l + I) f_l \right) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \otimes \left( \sum_{l=1}^k g_i(a_l) f_l \right) \\ &= \sum_{l=1}^k \left( \sum_{i=1}^n g_i(a_l) m_i \right) \otimes f_l = 0. \end{aligned}$$

Daher ist  $P$  ein  $\alpha$ -Paar und die Aussage folgt aus Satz 2.4.5.

3. Für jedes  $I \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{E}_A$  ist  $A/I$  endlich und somit ist

$$\widehat{A} = \varprojlim_{\mathfrak{F} \cap \mathcal{E}_A} A/I \simeq \varprojlim_{\mathfrak{F} \cap \mathcal{E}_A} (A/I)^{**} \simeq (\varprojlim_{\mathfrak{F} \cap \mathcal{E}_A} (A/I)^*)^* =: (A_{\mathfrak{F}}^{\circ})^*.$$

Aus Propositionen 2.4.12, 2.4.13 und Satz 2.2.16 ergibt sich die folgende Aussage:

**2.4.14. Folgerung.** *Seien  $A$  eine  $R$ -Algebra,  $\mathfrak{F} \subset \mathcal{K}_A$  ein Filter und betrachte  $A$  als eine linear topologische  $R$ -Algebra mit der induzierten Topologie  $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$ . Sind  $R$  noethersch und  $\mathfrak{F}$  ein  $\alpha$ -Filter, oder ist  $\mathfrak{F}$  kofinitär gibt es Kategorie-Isomorphismen*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{A^\circ_{\mathfrak{F}}} &\simeq \text{Rat}^{A^\circ_{\mathfrak{F}}}(A\mathcal{M}) &= \sigma[A A^\circ_{\mathfrak{F}}] \\ &\simeq \text{Rat}^{A^\circ_{\mathfrak{F}}}(A^{\circ*}_{\mathfrak{F}}\mathcal{M}) &= \sigma[A^{\circ*}_{\mathfrak{F}} A^\circ_{\mathfrak{F}}]. \end{aligned}$$

**2.4.15. Folgerung.** *([AG-TL2001, Proposition 2.15]) Seien  $R$  noethersch und  $A$  eine  $\alpha$ -Algebra. Es gibt eine 1-1 Korrespondenz*

$$\{P = (A, C) \mid P \in \mathcal{P}_m^\alpha\} \longleftrightarrow \{C \mid C \subseteq A^\circ \text{ ist eine } R\text{-Unterkoalgebra}\}.$$

**2.4.16.** Seien  $A, B$   $R$ -Algebren,  $\mathfrak{F}_A \subset \mathcal{K}_A$ ,  $\mathfrak{F}_B \subset \mathcal{K}_B$  Filter und setze

$$\mathfrak{F}_A \times \mathfrak{F}_B := \{\text{Im}(\iota_I \otimes id_B) + \text{Im}(id_A \otimes \iota_J) \mid I \in \mathfrak{F}_A, J \in \mathfrak{F}_B\}. \quad (2.33)$$

Offensichtlich ist  $\mathfrak{F}_A \times \mathfrak{F}_B$  eine Filterbasis. Sei  $\mathfrak{F}$  der von  $\mathfrak{F}_A \times \mathfrak{F}_B$  erzeugte Filter. Daher induziert  $\mathfrak{F}_A \times \mathfrak{F}_B$  auf  $A \otimes B$  eine Topologie  $\mathfrak{T}(\mathfrak{F}_A \times \mathfrak{F}_B)$ , so dass  $(A \otimes B, \mathfrak{T}(\mathfrak{F}_A \times \mathfrak{F}_B))$  eine linear topologische  $R$ -Algebra ist und  $\mathfrak{F}_A \times \mathfrak{F}_B$  eine Umgebungsbasis der  $0_{A \otimes B}$  wird.

Mit Hilfe von Lemma 2.1.9 lassen sich [AG-TL2001, Proposition 4.9, Theorem 4.10] auf die folgende allgemeinere Aussage erweitern:

**2.4.17. Satz.** *Seien  $A, B$   $R$ -Algebren,  $\mathfrak{F}_A \subset \mathcal{K}_A$ ,  $\mathfrak{F}_B \subset \mathcal{K}_B$  Filter und betrachte die kanonische  $R$ -lineare Abbildung  $\delta : A^* \otimes B^* \longrightarrow (A \otimes B)^*$  und sei  $\mathfrak{F} \subset \mathcal{K}_{A \otimes B}$  der von  $\mathfrak{F}_A \times \mathfrak{F}_B$  erzeugte Filter.*

1. *Sind  $\mathfrak{F}_A$  und  $\mathfrak{F}_B$  kofinitär, dann ist  $\mathfrak{F}$  kofinitär und  $(A \otimes B)^\circ_{\mathfrak{F}_A \times \mathfrak{F}_B}$  ist eine  $R$ -Koalgebra. Ist  $R$  noethersch, dann induziert  $\delta$  einen Koalgebra-Isomorphismus*

$$A^\circ_{\mathfrak{F}_A} \otimes B^\circ_{\mathfrak{F}_B} \simeq (A \otimes B)^\circ_{\mathfrak{F}_A \times \mathfrak{F}_B}. \quad (2.34)$$

2. *Sei  $R$  noethersch. Sind  $\mathfrak{F}_A \subset \mathcal{K}_A$  ein  $\alpha$ -Filter und  $\mathfrak{F}_B \subset \mathcal{K}_B$  ein kofinitärer Filter, dann ist  $\mathfrak{F} \subset \mathcal{K}_{A \otimes B}$  ein  $\alpha$ -Filter,  $(A \otimes B)^\circ_{\mathfrak{F}_A \times \mathfrak{F}_B}$  ist eine  $R$ -Koalgebra und  $\delta$  induziert einen Koalgebra-Isomorphismus*

$$A^\circ_{\mathfrak{F}_A} \otimes B^\circ_{\mathfrak{F}_B} \simeq (A \otimes B)^\circ_{\mathfrak{F}_A \times \mathfrak{F}_B}.$$

**2.4.18. Proposition.** *Seien  $R$  noethersch und  $A$  eine  $R$ -Algebra.*

1. *Jeder  $A^\circ$ -suberzeugte  $A$ -Linksmodul ist lokal endlich.*
2. *Ist  $A$   $R$ -c-koerzeugt, dann ist  $\sigma[A A^\circ] = \text{Loc}(A\mathcal{M})$ .*
3. *Ist  $A$  eine ( $R$ -c-koerzeugte)  $\alpha$ -Algebra, dann gibt es Kategorie-Isomorphismen*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{A^\circ} &\simeq \text{Rat}^{A^\circ}(A\mathcal{M}) &= \sigma[A A^\circ] & (= \text{Loc}(A\mathcal{M})). \\ &\simeq \text{Rat}^{A^\circ}(A^{\circ*}\mathcal{M}) &= \sigma[A^{\circ*} A^\circ] \end{aligned}$$

**Beweis.** 1. Sei  $M \in \sigma[A^\circ]$ . Dann existiert nach 2.2.2 für jedes  $m \in M$  eine endliche Menge  $W = \{f_1, \dots, f_k\} \subset A^\circ$ , so dass  $(0 : W) \subset (0 : m)$ . Wähle für jedes  $i = 1, \dots, k$  ein  $R$ -koendliches  $A$ -Ideal  $J_i \subset \text{Ke}(f_i)$  aus und betrachte das  $R$ -koendliche  $A$ -Ideal  $J := \bigcap_{i=1}^k J_i$ . Ist  $a \in J$ , dann gilt für jedes  $\tilde{a} \in A$  und  $i = 1, \dots, k$  :  $(a \rightarrow f_i)(\tilde{a}) = f_i(\tilde{a}a) = 0$ . Folglich ist  $J \subset (0 : W) \subset (0 : m)$  und somit ist  $Am \simeq A/(0 : m)$  e.e. in  ${}_R\mathcal{M}$ . Daher ist  ${}_AM$  lokal endlich.

2. Nach (1) ist  $\sigma[A^\circ] \subset \text{Loc}({}_A\mathcal{M})$ . Sei  $A$   $R$ -c-koerzeugt. Sei  $N$  ein lokal endlicher  $A$ -Linksmodul. Für jedes  $n \in N$  ist  $A/(0 : n) \simeq An$  e.e. in  ${}_R\mathcal{M}$  und es existiert nach Bemerkung 2.4.2 ein  $R$ -koendliches  $A$ -Ideal  $I \subset (0 : n)$ . Nach Voraussetzung ist  $A/I$   $R$ -koerzeugt und somit ist  $I = \text{KeAn}(I)$ . Ist  $\text{An}(I) \simeq (A/I)^* = \sum_{i=1}^k Rg_i$  und setzen wir  $W := \{g_1, \dots, g_k\}$ , dann gilt für jedes  $a \in (0 : W)$  :  $g_i(a) = (a \rightarrow g_i)(1_A) = 0$ . Daher ist  $(0 : W) \subset \text{KeAn}(I) = I \subset (0 : n)$ . Also ist  ${}_AN$   $A^\circ$ -suberzeugt.

3. Die Kategorie-Isomorphismen folgen aus Satz 2.2.16 (und (2)).

**2.4.19. Proposition.** *Seien  $R$  noethersch und  $A$  eine  $R$ -Algebra.*

1. *Ist  $A$  proper (d.h. die kanonische Abbildung  $\lambda_A : A \rightarrow A^*$  sei injektiv), dann ist  $\text{Cf}(A)$  Hausdorff.*
2. *Sei  $A$   $R$ -c-koerzeugt. Dann ist  $A$  proper genau dann, wenn  $\text{Cf}(A)$  Hausdorff ist.*
3. *Ist  $R$  ein QF Ring, dann gilt:*

$$A \text{ ist proper} \iff \text{Cf}(A) \text{ Hausdorff ist} \iff A^\circ \subset A^* \text{ dicht ist.}$$

**Beweis.** 1. Offensichtlich ist  $\overline{0_A} := \bigcap_{\mathcal{K}_A} I \subset \text{Ke}(\lambda_A)$  und die Aussage folgt.

2. Nehme an  $\text{Cf}(A)$  sei Hausdorff. Ist  $A$  nicht proper, dann existiert  $0 \neq \tilde{a} \in A$ , so dass  $f(\tilde{a}) = 0$  für jedes  $f \in A^\circ$ . Ist  $I \triangleleft A$  ein beliebiges  $R$ -koendliches  $A$ -Ideal, dann ist  $\tilde{a} \in \text{KeAn}(I) = I$  (vgl. A.0.3 (1)) und daher ist  $\bigcap_{\mathcal{K}_A} I \neq 0$  (Widerspruch).

3. Nach Proposition A.0.5 (1) gilt

$$\overline{A^\circ} = \text{AnKe}(A^\circ) = \text{An}\left(\text{Ke}\left(\bigcup_{\mathcal{K}_A} \text{An}(I)\right)\right) = \text{An}\left(\bigcap_{\mathcal{K}_A} \text{KeAn}(I)\right) = \text{An}\left(\bigcap_{\mathcal{K}_A} I\right).$$

Somit ist  $A^\circ \subset A^*$  dicht genau dann, wenn  $\bigcap_{\mathcal{K}_A} I = 0$  ist.

**2.4.20. Folgerung.** *Seien  $R$  noethersch,  $A, B$   $R$ -Algebren und  $\xi : A \rightarrow B$  ein Algebra-Morphismus.*

1. Seien  $A, B$   $R$ - $c$ -koerzeugte  $\alpha$ -Algebren. Setzen wir  $P := (A, A^\circ)$  und  $Q := (B, B^\circ)$ , dann gilt für jeden  $A^\circ$ -Rechtskomodul  $N$  :

$$\text{Ind}_P^Q(N) = \{f \in \text{Hom}_{A-}(B, N) \mid Bf \text{ ist e.e. in } {}_R\mathcal{M}\}.$$

2. Seien  $\mathfrak{F}_A \subset \mathcal{K}_A$ ,  $\mathfrak{F}_B \subset \mathcal{K}_B$   $R$ - $c$ -koerzeugte  $\alpha$ -Filter und  $\xi : A \longrightarrow B$  ein  $(\mathfrak{T}(\mathfrak{F}_A), \mathfrak{T}(\mathfrak{F}_B))$ -stetiger Algebra-Morphismus. Setzen wir  $P := (A, A_{\mathfrak{F}_A}^\circ)$  und  $Q := (B, B_{\mathfrak{F}_B}^\circ)$ , dann gilt für jedes  $N \in \mathcal{M}^{A_{\mathfrak{F}_A}^\circ}$  :

$$\text{Ind}_P^Q(N) = \{f \in \text{Hom}_{A-}(B, N) \mid (0 : f) \supset \tilde{I} \text{ für ein } \tilde{I} \in \mathfrak{F}_B\}.$$

**2.4.21. Lemma. (Satz von Krull)** Sei  $A$  ein kommutativer noetherscher Ring. Für jeden endlich erzeugten  $A$ -Modul  $M$  und jedes  $A$ -Ideal  $I \triangleleft A$  gilt:

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} MI^{k+1} = \{m \in M \mid \exists b \in I, \text{ so dass } m(1_A - b) = 0\}.$$

Die folgende Aussage wurde in [Swe69, 6.1.3] für *kommutative affine Algebren* über Körpern gezeigt:

**2.4.22. Lemma.** Seien  $R$  ein QF Ring und  $A$  eine kommutative noethersche  $R$ -Algebra. Ist jedes maximale  $A$ -Ideal  $R$ -koendlich, dann ist  $A^\circ \subset A^*$  dicht.

**Beweis.** Sei  $0 \neq a \in A$  beliebig und betrachte das  $A$ -Ideal  $J := (0 : a)$ . Sei  $\mathfrak{m} \triangleleft A$  ein maximales  $A$ -Ideal, so dass  $J \subset \mathfrak{m}$ .  $A$  ist noethersch und somit ist  $\mathfrak{m}_A$  endlich erzeugt. Ist  $a \in \bigcap_{k \geq 0} \mathfrak{m}^{k+1}$ , dann existiert nach Lemma 2.4.21 ein  $b \in \mathfrak{m}$ , so dass  $a(1_A - b) = 0$  und folglich  $1_A \in \mathfrak{m}$  (Widerspruch). Daher existiert  $k \geq 0$ , so dass  $a \notin \mathfrak{m}^{k+1}$ . Nach Voraussetzung ist  $\mathfrak{m} \subset A$   $R$ -koendlich und damit ist Lemma 2.2.29 zufolge  $\mathfrak{m}^{k+1}$   $R$ -koendlich, also ist  $a \notin \bigcap_{\mathcal{K}_A} I$ . Da  $0 \neq a \in A$  nach Auswahl beliebig ist, gilt  $\bigcap_{\mathcal{K}(A)} I = 0$ , also ist  $A^\circ \subset A^*$  nach Lemma 2.4.19 dicht.

**2.4.23. Definition.** Der Ring  $R$  ist erblich (bzw. halberblich), falls jedes (bzw. jedes endlich erzeugte) Ideal  $I \triangleleft R$  projektiv ist.

**2.4.24. Satz.** Sei  $R$  erblich und noethersch.

1. Alle  $R$ -Algebren erfüllen die  $\alpha$ -Bedingung, also ist  $\mathbf{Alg}_R^\alpha = \mathbf{Alg}_R$ .
2. Es gibt eine Dualität zwischen  $\mathbf{Alg}_R$  und  $\mathbf{Cog}_R$  mittels der rechts adjungierten kontravarianten Funktoren

$$(-)^* : \mathbf{Cog}_R \longrightarrow \mathbf{Alg}_R, \quad (-)^\circ : \mathbf{Alg}_R \longrightarrow \mathbf{Cog}_R.$$

**Beweis.** 1. Sei  $A$  eine beliebige  $R$ -Algebra. Nach [AG-TW2000, Proposition 2.11] ist  $A^\circ \subset R^A$  rein und somit ist  $(A, A^\circ)$  nach Proposition 2.1.8 ein  $\alpha$ -Paar.

2. Für jede  $R$ -Algebra  $A$  ist die kanonische Abbildung  $\lambda_A : A \longrightarrow A^{\circ*}$  ein Algebra-Morphismus und für jede  $R$ -Koalgebra  $C$  ist die kanonische Abbildung  $\Phi_C : C \longrightarrow C^{*\circ}$  ein Koalgebra-Morphismus (vgl. Lemma 2.4.6). Außerdem ist jedes für jedes  $A \in \mathbf{Alg}_R$  und jedes  $C \in \mathbf{Cog}_R$

$$\Upsilon_{A,C} : \mathbf{Alg}_R(A, C^*) \longrightarrow \mathbf{Cog}_R(C, A^{\circ}), \quad \xi \longmapsto \xi^{\circ} \circ \Phi_C$$

ein Isomorphismus mit Inversem

$$\Psi_{A,C} : \mathbf{Cog}_R(C, A^{\circ}) \longrightarrow \mathbf{Alg}_R(A, C^*), \quad \theta \longmapsto \theta^* \circ \lambda_A.$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass  $\Upsilon_{A,C}$  und  $\Psi_{A,C}$  funktoriell in  $A$  und  $C$  sind.

## 2.5 Hopf-Paare

Das Konzept eines *Hopf-Paares* wurde von M. Takeuchi in [Tak77, Seite 15] über beliebigen Ringen eingeführt. In [Maj90, 1.4] hat S. Majid die sogenannten *Bialgebra-Paare* im Körper-Fall betrachtet. Die Bialgebra-Paare bzw. die Hopf-Paare haben sich beim Studium der affinen algebraischen Gruppen bzw. Quantengruppen über beliebigen Ringen vorteilhaft erwiesen (siehe auch [FRT89], [Tak92], [Tak95]). Im Folgenden fassen wir die Kategorie der Hopf-Paare  $\mathcal{P}_{Hopf}$  und die Kategorie der Bialgebra-Paare  $\mathcal{P}_{Big}$  als Unterkategorien der Kategorie der messenden Paare  $\mathcal{P}_m$  auf. Außerdem betrachten wir Dualitätssätze für die *vollen* Unterkategorien der  $\alpha$ -Hopf-Paare  $\mathcal{P}_{Hopf}^{\alpha} \subset \mathcal{P}_{Hopf}$  und der Kategorie der  $\alpha$ -Bialgebra-Paare  $\mathcal{P}_{Big}^{\alpha} \subset \mathcal{P}_{Big}$ .

**2.5.1. Die Kategorie  $\mathcal{P}_{Big}$ .** Betrachte ein Paar von  $R$ -Bialgebren  $P = (H, K)$ . Sind die induzierten Abbildungen  $\kappa_P : H \longrightarrow K^*$  und  $\chi_P : K \longrightarrow H^*$  Algebra-Morphismen, so nennt man  $P$  ein **Bialgebra-Paar**. Sind  $(H, K), (Y, K)$  Bialgebra-Paare, so heißt ein Morphismus in  $\mathcal{P}_m$

$$(\xi, \theta) : (Y, Z) \longrightarrow (H, K)$$

ein Morphismus von Bialgebra-Paaren, falls  $\xi : H \longrightarrow Y$  und  $\theta : Z \longrightarrow K$  Bialgebra-Morphismen sind. Mit  $\mathcal{P}_{Big} \subset \mathcal{P}_m$  bezeichnen wir die Unterkategorie der Bialgebra-Paaren. Mit  $\mathcal{P}_{Big}^{\alpha} \subset \mathcal{P}_{Big}$  bezeichnen wir die volle Unterkategorie der  $\alpha$ -Bialgebren-Paare.

Ist  $P = (H, K) \in \mathcal{P}_{Big}$ ,  $Z \subset K$  eine  $R$ -Unterbialgebra und  $J \subset H$  ein  $H$ -Bi-Ideal mit  $\langle J, Z \rangle = 0$ , dann ist  $Q = (H/J, Z)$  ein Bialgebra-Paar,

$$(\pi_J, \iota_Z) : (H/J, Z) \longrightarrow (H, K)$$

ein Morphismus in  $\mathcal{P}_{Big}$  und wir nennen  $Q \subset P$  ein **Bialgebra-Unterpaar**. Offensichtlich ist  $\mathcal{P}_{Big}^{\alpha} \subset \mathcal{P}_{Big}$  abgeschlossen gegen Unterpaare.

**2.5.2. Die Kategorie  $\mathcal{P}_{Hopf}$ .** Ein **Hopf-Paar**  $P = (H, K)$  ist ein Bialgebra-Paar mit  $H, K$  Hopf-Algebren. Mit  $\mathcal{P}_{Hopf} \subset \mathcal{P}_{Big}$  bezeichnen wir die *volle* Unterkategorie der Hopf-Paare. Mit  $\mathcal{P}_{Hopf}^\alpha \subset \mathcal{P}_{Hopf}$  bezeichnen wir die *volle* Unterkategorie, deren Objekte die  $\alpha$ -Bedingung erfüllen.

Sind  $P = (H, K)$  ein Hopf-Paar,  $Z \subset K$  eine  $R$ -Hopf-Unteralgebra und  $J \subset H$  ein Hopf-Ideal mit  $\langle J, Z \rangle = 0$ , dann ist  $Q = (H/J, Z)$  ein Hopf-Paar,

$$(\pi_J, \iota_Z) : (H/J, Z) \longrightarrow (H, K)$$

ein Morphismus in  $\mathcal{P}_{Hopf}$  und man nennt  $Q \subset P$  ein **Hopf-Unterpaar** von  $(H, K)$ . Offensichtlich ist  $\mathcal{P}_{Hopf}^\alpha \subset \mathcal{P}_{Hopf}$  abgeschlossen gegen Unterpaare.

**2.5.3.** Eine  $R$ -Bialgebra (bzw. eine  $R$ -Hopf-Algebra)  $H$  nennen wir eine  $\alpha$ -**Bialgebra** (bzw.  $\alpha$ -**Hopf-Algebra**), falls die Klasse der  $R$ -koendlichen  $H$ -Ideale  $\mathcal{K}_H$  ein  $\alpha$ -Filter ist. Mit  $\mathbf{Big}_R^\alpha \subset \mathbf{Big}_R$  (bzw.  $\mathbf{Hopf}_R^\alpha \subset \mathbf{Hopf}_R$ ) bezeichnen wir die volle Unterkategorie der  $\alpha$ -Bialgebren (bzw. der  $\alpha$ -Hopf-Algebren). Ist  $\mathcal{K}_H$  ein kofinitärer Filter, so nennen wir  $H$  eine **kofinitäre  $R$ -Bialgebra** (bzw. eine **kofinitäre  $R$ -Hopf-Algebra**). Ist  $R$  noethersch und ist  $H$  eine  $\alpha$ -Bialgebra (bzw. eine  $\alpha$ -Hopf-Algebra), dann ist das Paar  $(H, H^\circ)$  ein  $\alpha$ -Bialgebra-Paar (bzw. ein  $\alpha$ -Hopf-Paar).

**2.5.4. Bemerkungen.** 1. (vgl. [Tak92]) Ist  $P = (H, K)$  ein Hopf-Paar, dann gilt

$$\langle S_H(h), k \rangle = \langle h, S_K(k) \rangle \quad \text{für alle } h \in H \text{ und } k \in K.$$

2. Sei  $R$  noethersch. Ist  $P = (H, K)$  ein Bialgebra-Paar (bzw. ein Hopf-Paar), dann ist  $\kappa_P(H) \subset K^\circ$  und  $\chi_P(K) \subset H^\circ$ . Ist  $(H, K) \in \mathcal{P}_{Big}$  und  $H \in \mathbf{Big}_R^\alpha$  (bzw.  $K \in \mathbf{Big}_R^\alpha$ ), dann ist  $\chi_P : K \longrightarrow H^\circ$  (bzw.  $\kappa_P : H \longrightarrow K^\circ$ ) ein Bialgebra-Morphismus.

Beim Studium der induzierten Darstellungen für Quantengruppen haben Z. Lin [Lin93] und M. Takeuchi [Tak94] die sogenannten *zulässigen Filter* von Idealen einer  $R$ -Hopf-Algebra betrachtet. Im Folgenden verallgemeinern wir die dort gewonnen Aussagen auf die *zulässigen  $\alpha$ -Filter* von Idealen einer  $R$ -Bialgebren (bzw.  $R$ -Hopf-Algebra).

**2.5.5. Zulässige Filter.** Seien  $H$  eine  $R$ -Bialgebra,  $\mathfrak{F} \subset \mathcal{K}_H$  ein Filter und betrachte die induzierten linear topologische  $R$ -Algebren  $(H, \mathfrak{T}(\mathfrak{F}))$  und  $(H \otimes H, \mathfrak{T}(\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}))$  (vgl. 2.4.16). Wir nennen  $\mathfrak{F}$  **zulässig**, falls  $\Delta : H \longrightarrow H \otimes H$  und  $\varepsilon : H \longrightarrow R$  stetig sind, also wenn  $\mathfrak{F}$  die folgenden Axiome erfüllt:

$$(A1) \quad \forall I, J \in \mathfrak{F} \text{ existiert } L \in \mathfrak{F}, \text{ so dass } \Delta_H(L) \subseteq \text{Im}(\iota_I \otimes id_H) + \text{Im}(id_H \otimes \iota_J) \quad (2.35)$$

und

$$(A2) \quad \exists I \in \mathfrak{F}, \text{ so dass } \text{Ke}(\varepsilon_H) \supset I. \quad (2.36)$$

Ist  $H$  eine  $R$ -Hopf-Algebra, dann heißt ein Filter  $\mathfrak{F} \subset \mathcal{K}_H$  **zulässig**, falls (A1, A2) und

$$(A3) \quad \text{für jedes } I \in \mathfrak{F} \text{ existiert } J \in \mathfrak{F}, \text{ so dass } S_H(J) \subseteq I \quad (2.37)$$

erfüllt sind (d.h. wenn  $\Delta_H, \varepsilon_H$  und  $S_H : H \longrightarrow H$  stetig sind).

**2.5.6. Lemma.** *Sei  $R$  noethersch. Für jede  $R$ -Bialgebra bzw.  $R$ -Hopf-Algebra  $H$  ist  $\mathcal{K}_H$  ein zulässiger Filter.*

**Beweis.** Sei  $H$  eine  $R$ -Bialgebra. Offensichtlich ist  $\mathcal{K}_H$  ein Filter. Außerdem ist  $H \simeq R \oplus \text{Ke}(\varepsilon_H)$ , also ist  $\text{Ke}(\varepsilon_H) \in \mathcal{K}_H$ . Seien  $I, J \in \mathcal{K}_H$  und setze  $L := \text{Im}(\iota_I \otimes \text{id}_H) + \text{Im}(\text{id}_H \otimes \iota_J)$ . Nach Lemma 2.1.9 ist  $(H \otimes H)/L \simeq H/I \otimes H/J$  und daher ist  $L \in \mathcal{K}_{H \otimes H}$ . Nach Definition ist  $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$  ein Algebra-Morphismus und somit ist  $\Delta^{-1}(L) \triangleleft H$  ein  $R$ -koendliches Ideal. Daher ist  $\mathcal{K}_H$  zulässig.

Ist  $H$  eine  $R$ -Hopf-Algebra, dann ist  $S_H : H \rightarrow H$  ein Algebra-Anti-Morphismus. Ist  $I \triangleleft H$  ein  $R$ -koendliches Ideal, dann ist  $S_H^{-1}(I) \triangleleft H$  ein  $R$ -koendliches Ideal.

**2.5.7. Proposition.** *Seien  $H$  eine  $R$ -Bialgebra (bzw.  $R$ -Hopf-Algebra) und  $\mathfrak{F} \subset \mathcal{K}_H$  ein zulässiger Filter.*

1. *Ist  $R$  noethersch und ist  $\mathfrak{F}$  ein  $\alpha$ -Filter, dann ist  $H_{\mathfrak{F}}^{\circ}$  eine  $R$ -Bialgebra (bzw. eine  $R$ -Hopf-Algebra) und  $(H, H_{\mathfrak{F}}^{\circ})$  ein  $\alpha$ -Bialgebra-Paar (bzw. ein  $\alpha$ -Hopf-Paar).*
2. *Ist  $F$  kofinitär, dann ist  $H_{\mathfrak{F}}^{\circ}$  eine infinitesimal flache  $R$ -Bialgebra ( $R$ -Hopf-Algebra) und  $(H, H_{\mathfrak{F}}^{\circ})$  ein  $\alpha$ -Bialgebra-Paar ( $\alpha$ -Hopf-Paar).*

**Beweis.** 1. Sei  $H$  eine  $R$ -Bialgebra.  $H_{\mathfrak{F}}^{\circ} \subset H^{\circ}$  ist ein  $H$ -Unterbimodul und somit ist nach Satz 2.4.5 eine  $R$ -Koalgebra. Sind  $f \in \text{An}(I), g \in \text{An}(J)$  für  $I, J \in \mathfrak{F}$ , dann existiert nach 2.35 ein  $L \in \mathfrak{F}$ , so dass  $\Delta(L) \subseteq \text{Im}(\iota_I \otimes \text{id}_H + \text{id}_H \otimes \iota_J)$ . Daher ist  $\Delta^{\circ}(f \otimes g)(L) = (f \otimes g)(\Delta(L)) = 0$ , d.h.  $f \star g \in \text{An}(L) \subset H_{\mathfrak{F}}^{\circ}$ . Nach 2.36 ist  $\varepsilon_H \in H_{\mathfrak{F}}^{\circ}$  und daher ist  $H_{\mathfrak{F}}^{\circ} \subset H^*$  eine  $R$ -Unteralgebra. Man sieht leicht, dass  $\Delta^{\circ} : H_{\mathfrak{F}}^{\circ} \otimes H_{\mathfrak{F}}^{\circ} \rightarrow H_{\mathfrak{F}}^{\circ}$  und  $\eta^{\circ} : H_{\mathfrak{F}}^{\circ} \rightarrow R$  Koalgebra-Morphismen sind, also ist  $H_{\mathfrak{F}}^{\circ}$  eine  $R$ -Bialgebra. Ist  $H$  eine  $R$ -Hopf-Algebra mit Antipode  $S$ , dann folgt aus 2.37  $S^{\circ}(H_{\mathfrak{F}}^{\circ}) \subseteq H_{\mathfrak{F}}^{\circ}$ . Damit ist  $H_{\mathfrak{F}}^{\circ}$  eine  $R$ -Hopf-Algebra mit Antipode  $S^{\circ}$ .

2. Vgl. [Tak94].

Aus Lemma 2.5.6 und Proposition 2.5.7 ergibt sich das folgende Korollar:

**2.5.8. Folgerung.** *Sei  $R$  noethersch. Ist  $H$  eine  $\alpha$ -Bialgebra (bzw.  $\alpha$ -Hopf-Algebra), dann ist  $H^{\circ}$  eine  $R$ -Bialgebra (bzw.  $R$ -Hopf-Algebra). Ist  $H$  kofinitär, dann ist  $H^{\circ}$  eine infinitesimal flache  $R$ -Bialgebra ( $R$ -Hopf-Algebra).*

**2.5.9. Proposition.** *Seien  $H$  eine  $R$ -Bialgebra und  $\mathfrak{F} \subset \mathcal{K}_H$  ein zulässiger Filter. Ist  $R$  ein injektiver Kogenerator, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1.  $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$  ist Hausdorff;
2. Die kanonische  $R$ -lineare Abbildung  $\lambda : H \rightarrow H_{\mathfrak{F}}^{\circ*}$  ist injektiv;
3.  $H_{\mathfrak{F}}^{\circ} \subset H^*$  ist dicht;
4.  $\sigma_{[H_{\mathfrak{F}}^{\circ} H]} = \sigma_{[H^* H]}$ .

**Beweis.** Die Äquivalenz (1)  $\iff$  (2) folgt aus Proposition 2.4.13. Die Äquivalenz (2)  $\iff$  (3) folgt aus Proposition A.0.5 (2). Nach Voraussetzung ist  $\mathfrak{F}$  zulässig und somit ist  $H^\circ_{\mathfrak{F}} \subset H^*$  eine  $R$ -Unteralgebra. Daher folgt die Äquivalenz (3)  $\iff$  (4) aus Lemma 2.2.15.

**2.5.10. Folgerung.** Seien  $H, K$   $R$ -Bialgebren ( $R$ -Hopf-Algebren) mit zulässigen Filtern  $\mathfrak{F}_H \subset \mathcal{K}_H$ ,  $\mathfrak{F}_K \subset \mathcal{K}_K$  und betrachte die kanonische  $R$ -lineare Abbildung  $\delta : H^* \otimes K^* \longrightarrow (H \otimes K)^*$  und den von  $\mathfrak{F}_H \times \mathfrak{F}_K$  induzierte Filter  $\mathfrak{F} \subset \mathcal{K}_{A \otimes B}$ .

1. Sind  $\mathfrak{F}_H$  und  $\mathfrak{F}_K$  kofinitär, dann ist  $\mathfrak{F}$  kofinitär und  $(H \otimes K)^\circ_{\mathfrak{F}_H \times \mathfrak{F}_K}$  ist eine  $R$ -Bialgebra (bzw.  $R$ -Hopf-Algebra). Ist  $R$  noethersch, dann induziert  $\delta$  einen Bialgebra-Isomorphismus (bzw. Hopf-Algebra-Isomorphismus)

$$H^\circ_{\mathfrak{F}_H} \otimes K^\circ_{\mathfrak{F}_K} \simeq (H \otimes K)^\circ_{\mathfrak{F}_H \times \mathfrak{F}_K}. \quad (2.38)$$

2. Sei  $R$  noethersch. Sind  $\mathfrak{F}_K$  ein  $\alpha$ -Filter und  $\mathfrak{F}_H$  kofinitär, dann ist  $\mathfrak{F}$  ein  $\alpha$ -Filter,  $(H \otimes K)^\circ_{\mathfrak{F}_H \times \mathfrak{F}_K}$  ist eine  $R$ -Bialgebra ( $R$ -Hopf-Algebra) und  $\delta$  induziert einen Bialgebra-Isomorphismus (Hopf-Algebra-Isomorphismus)

$$H^\circ_{\mathfrak{F}_H} \otimes K^\circ_{\mathfrak{F}_K} \simeq (H \otimes K)^\circ_{\mathfrak{F}_H \times \mathfrak{F}_K}.$$

**2.5.11. Satz.** Sei  $R$  noethersch.

1. Ist  $H$  eine  $\alpha$ -Bialgebra ( $\alpha$ -Hopf-Algebra), dann ist  $(H, H^\circ) \in \mathcal{P}_{Big}^\alpha$  ( $(H, H^\circ) \in \mathcal{P}_{Hopf}^\alpha$ ). Ist außerdem  $H$  kommutativ (kokommutativ), dann ist  $H^\circ$  kokommutativ (kommutativ).
2. Ist  $R$  erblich, dann gibt es selbst-adjungierte kontravariante Funktoren

$$\begin{array}{llll} (-)^\circ : & \mathbf{Big}_R & \longrightarrow & \mathbf{Big}_R \cdot \quad (-)^\circ : & \mathbf{Hopf}_R & \longrightarrow & \mathbf{Hopf}_R \cdot \\ & \mathbf{CBig}_R & \longrightarrow & \mathbf{CCBig}_R \cdot & \mathbf{CCBig}_R & \longrightarrow & \mathbf{CBig}_R \\ & \mathbf{CCBig}_R & \longrightarrow & \mathbf{CBig}_R & \mathbf{CCHopf}_R & \longrightarrow & \mathbf{CHopf}_R \end{array}$$

**Beweis.** 1. Ist  $H$  eine  $\alpha$ -Bialgebra ( $\alpha$ -Hopf-Algebra), dann ist  $H^\circ$  nach Folgerung 2.5.8 eine  $R$ -Bialgebra ( $R$ -Hopf-Algebra). Offensichtlich ist dann  $(H, H^\circ) \in \mathcal{P}_{Big}^\alpha$  (bzw.  $(H, H^\circ) \in \mathcal{P}_{Hopf}^\alpha$ ). Die Dualität zwischen der Kommutativität und der Kokommutativität folgt aus Lemma 2.1.23.

2. Ist  $R$  erblich, dann ist für jede  $R$ -Bialgebra (bzw.  $R$ -Hopf-Algebra)  $H$  der stetige duale  $R$ -Modul  $H^\circ \subset R^H$  rein ([AG-TW2000, Proposition 2.11]), also ist jede  $R$ -Bialgebra (bzw.  $R$ -Hopf-Algebra) eine  $\alpha$ -Bialgebra (bzw. eine  $\alpha$ -Hopf-Algebra). Außerdem ist

$$\Upsilon_{H,K} : \mathbf{Big}_R(H, K^\circ) \longrightarrow \mathbf{Big}_R(K, H^\circ), \quad f \longmapsto [k \longmapsto f(-)(k)]$$

ein Isomorphismus ist mit Inversem

$$\Psi_{H,K} : \mathbf{Big}_R(K, H^\circ) \longrightarrow \mathbf{Big}_R(H, K^\circ), \quad g \longmapsto [h \longmapsto g(-)(h)].$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass  $\Upsilon_{H,K}$  und  $\Psi_{H,K}$  funktoriell in  $H, K$  sind.

## Induktionsfunktoren in $\mathcal{P}_{Hopf}$

Die sogenannten *Induktionsfunktoren* tauchen in verschiedenen Bereichen der Mathematik in verschiedenen Formen auf. Als interessante Beispiele ergeben sich die Induktionsfunktoren in der Theorie der Affinen Algebraischen Gruppen bzw. der Quantengruppen. Im Folgenden betrachten wir Induktionsfunktoren für die Kategorie der  $\alpha$ -Hopf-Paare bzw.  $\alpha$ -Bialgebra-Paare, die wichtige Situationen subsumieren (siehe [Don80], [APW91], [Lin93, 3.2]). Wir zeigen außerdem, dass diese Funktoren als Funktoren zwischen Kategorien vom Typ  $\sigma[M]$  anzusehen sind (vgl. 2.3.22).

**2.5.12. Definition.** Sei  $H$  eine  $R$ -Bialgebra.

Für jeden  $H$ -Linksmodul  $M$  nennt man den  $R$ -Untermodul

$$M^H := \{m \in M \mid hm = \varepsilon(h)m \text{ für alle } h \in H\}$$

den **Invariantenuntermodul** von  $M$ .

Für jeden  $H$ -Rechtskomodul  $M$  nennt man

$$M^{coH} := \{m \in M \mid \varrho_M(m) = m \otimes 1_H\}$$

den **Koinvariantenuntermodul** von  $M$ .

**2.5.13.** Sei  $H$  eine  $R$ -Bialgebra. Sind  $M, N$   $H$ -Rechtsmoduln, dann ist  $M \otimes_R N$  ein  $H$ -Rechtsmodul mit der *kanonischen*  $H$ -Modul-Struktur

$$(m \otimes n)h := \sum mh_1 \otimes nh_2 \text{ für alle } m \in M, n \in N \text{ und } h \in H. \quad (2.39)$$

Sind  $M, N$   $H$ -Linksmoduln, dann ist  $M \otimes N$  analog ein  $H$ -Linksmodul mit der *kanonischen*  $H$ -Linksmodul-Struktur

$$h(m \otimes n) := \sum h_1m \otimes h_2n \text{ für alle } m \in M, n \in N \text{ und } h \in H.$$

Außerdem ist der Grundring  $R$  ein  $H$ -Bimodul vermöge

$$hr := \varepsilon(h)r = rh \text{ für alle } h \in H, r \in R.$$

**2.5.14.** Sei  $K$  eine  $R$ -Bialgebra. Sind  $M, N$   $K$ -Rechtskomoduln, so ist  $M \otimes_R N \in {}^K\mathcal{M}$  mit der *kanonischen*  $K$ -Rechtskomodul-Struktur vermöge

$$\psi : M \otimes N \longrightarrow M \otimes N \otimes K, \quad m \otimes n \longmapsto \sum m_{<0>} \otimes n_{<0>} \otimes m_{<1>}n_{<1>}. \quad (2.40)$$

Sind  $M, N$   $K$ -Linksmoduln, dann ist analog  $M \otimes N \in \mathcal{M}^K$  mit der *kanonischen*  $K$ -Linksmodul-Struktur induziert von

$$\varrho : M \otimes N \longrightarrow K \otimes M \otimes N, \quad m \otimes n \longmapsto \sum m_{<-1>}n_{<-1>} \otimes m_{<0>} \otimes n_{<0>}.$$

Außerdem ist der Grundring  $R$  ein  $K$ -Bikomodul durch

$$R \longrightarrow R \otimes K, \quad r \longmapsto r \otimes 1_K \text{ und } R \longrightarrow K \otimes R, \quad r \longmapsto 1_K \otimes r.$$

**2.5.15. Lemma.** Seien  $P = (H, K) \in \mathcal{P}_{Big}$ ,  $(M, \varrho_M)$  ein  $K$ -Rechtskomodul und betrachte  $M$  mit der induzierten  $H$ -Linksmodul-Struktur. Ist  $\alpha_M^P : M \otimes K \longrightarrow \text{Hom}_R(H, M)$  injektiv, dann ist  $M^H = M^{\text{co}K}$ .

**Beweis.** Ist  $m \in M^K$ , dann gilt für jedes  $h \in H$  :

$$hm = \langle h, 1_K \rangle m = \varepsilon_H(h)m \text{ für jedes } h \in H,$$

also ist  $m \in M^H$ . Andererseits, ist  $m \in M^H$  und ist  $\varrho_M(m) = \sum m_{<0>} \otimes m_{<1>}$ , dann gilt für jedes  $h \in H$  :

$$\begin{aligned} \alpha_M^P(\sum m_{<0>} \otimes m_{<1>})(h) &= \sum \langle h, m_{<1>} \rangle m_{<0>} = hm \\ &= \varepsilon_H(h)m = \langle h, 1_K \rangle m \\ &= \alpha_M^P(m \otimes 1_K)(h). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist  $\alpha_M^P$  injektiv und daher ist  $\varrho_M(m) = \sum m_{<0>} \otimes m_{<1>} = m \otimes 1_K$ , also ist  $m \in M^K$ . Somit ist  $M^H = M^{\text{co}K}$ .

**2.5.16. Lemma.** Sei  $H$  eine  $R$ -Hopf-Algebra und  $M, N \in {}_H\mathcal{M}$ . Dann ist  $\text{Hom}_R(M, N)$  ein  $H$ -Linksmodul vermöge

$$(hf)(m) = \sum h_1 f(S_H(h_2)m) \text{ für alle } h \in H, m \in M \text{ und } f \in \text{Hom}_R(M, N). \quad (2.41)$$

Außerdem ist  $\text{Hom}_{H-}(M, N) = \text{Hom}_R(M, N)^H$ .

**Beweis.** Sind  $h, \tilde{h} \in H$ , dann gilt für beliebige  $f \in \text{Hom}_R(M, N)$  und  $m \in M$  :

$$\begin{aligned} ((h\tilde{h})f)(m) &:= \sum (h\tilde{h})_1 f(S_H((h\tilde{h})_2)m) = \sum h_1 \tilde{h}_1 f(S_H(h_2 \tilde{h}_2)m) \\ &= \sum h_1 \tilde{h}_1 f(S_H(\tilde{h}_2)S_H(h_2)m) = \sum h_1 ((\tilde{h}f)(S_H(h_2)m)) \\ &= (h(\tilde{h}f))(m). \end{aligned}$$

Daher ist  $\text{Hom}_R(M, N)$  ein  $H$ -Linksmodul.

Ist  $f \in \text{Hom}_{H-}(M, N)$ , dann gilt für alle  $h \in H$  und  $m \in M$  :

$$(hf)(m) := \sum h_1 f(S_H(h_2)m) = \sum h_1 S_H(h_2)f(m) = (\varepsilon(h)1_H)f(m) = (\varepsilon(h)f)(m),$$

also ist  $f \in \text{Hom}_R(M, N)^H$ . Andererseits, ist  $g \in \text{Hom}_R(M, N)^H$ , dann gilt für jedes  $h \in H$  und  $m \in M$  :

$$\begin{aligned} g(hm) &= g(\sum \varepsilon(h_1)h_2m) = \sum (\varepsilon(h_1)g)(h_2m) \\ &= \sum (h_1g)(h_2m) = \sum h_{11}(g(S_H(h_{12})h_2m)) \\ &= \sum h_1(g(S_H(h_{21})h_{22}m)) = \sum h_1g(\varepsilon(h_2)1_Hm) \\ &= (\sum h_1\varepsilon(h_2))g(m) = hg(m), \end{aligned}$$

also ist  $g \in \text{Hom}_{H-}(M, N)$ .

Das folgende Lemma verallgemeinert die entsprechenden Aussagen in [Lin93, Seite 165] und [Lin94, Seite 103]:

**2.5.17. Lemma.** *Seien  $P = (H, K)$ ,  $Q = (Y, Z) \in \mathcal{P}_{Hopf}^\alpha$ ,*

$$(\xi, \theta) : (Y, Z) \longrightarrow (H, K)$$

*ein Morphismus in  $\mathcal{P}_{Hopf}^\alpha$  und  $N \in {}_H\mathcal{M}$ .*

1.  $\text{Hom}_R(Y, N)$  ist ein  $H$ -Linksmodul vermöge

$$(hf)(y) = \sum h_1 f(S_Y(\xi(h_2)y)) \text{ für alle } h \in H, f \in \text{Hom}_R(Y, N) \text{ und } y \in Y. \quad (2.42)$$

2. Betrachten wir  $\text{Hom}_R(Y, N)$  mit der kanonischen  $Y$ -Linksmodul-Struktur, dann gilt

$$h(yf) = y(hf) \text{ für alle } h \in H, y \in Y \text{ und } f \in \text{Hom}_R(Y, N).$$

Daher ist  $\text{Hom}_R(Y, N)^H \subseteq \text{Hom}_R(Y, N)$  ein  $Y$ -Linksuntermodul.

3. Ist  ${}_H N$   $K$ -rational, dann ist  $N \otimes Z$  ein  $K$ -Rechtskomodul vermöge

$$\psi : N \otimes Z \longrightarrow N \otimes Z \otimes K, \quad n \otimes z \longmapsto \sum n_{<0>} \otimes z_2 \otimes n_{<1>} S_K(\theta(z_1)). \quad (2.43)$$

**Beweis.** 1.  $\xi : H \longrightarrow Y$  ist ein Hopf-Algebra-Morphismus und somit gilt

$$\xi(S_H(h)) = S_Y(\xi(h)) \text{ für jedes } h \in H.$$

Betrachten wir den  $H$ -Linksmodul  $Y_\xi$ , dann stimmt die  $H$ -Wirkung auf  $\text{Hom}_R(Y_\xi, N)$  in (2.41) mit der in (2.42) überein und daher ist  $\text{Hom}_R(Y, N)$  nach Lemma 2.5.16 ein  $H$ -Linksmodul.

2. trivial.

3. Offensichtlich ist  $Z$  ein  $K$ -Rechtskomodul vermöge

$$\varrho_Z : Z \longrightarrow Z \otimes K, \quad z \longmapsto \sum z_2 \otimes S_K(\theta(z_1)) \text{ für jedes } z \in Z.$$

Nach Lemma 2.2.9 ist  $N$  ein  $K$ -Rechtskomodul und somit ist  $(N \otimes Z, \psi)$  laut 2.5.14 ein  $K$ -Rechtskomodul.

**2.5.18.** Seien  $P = (H, K)$ ,  $Q = (Z, Y) \in \mathcal{P}_{Hopf}^\alpha$ ,

$$(\xi, \theta) : (Y, Z) \longrightarrow (H, K)$$

ein Morphismus in  $\mathcal{P}_{Hopf}^\alpha$ . Für jedes  $N \in \text{Rat}^K({}_H\mathcal{M})$  betrachte  $N \otimes Z$  mit der  $K$ -Rechtskomodul-Struktur (2.43). Betrachten wir den Induktionsfunktor

$$\text{Ind}_P^Q(-) : \text{Rat}^K({}_H\mathcal{M}) \longrightarrow \text{Rat}^Z({}_Y\mathcal{M}), \quad N \longmapsto \text{Rat}^Z({}_Y\text{Hom}_{H-}(Y, N))$$

so gilt gibt es in  $N$  funktorielle Isomorphismen

$$\begin{aligned}
(N \otimes_R Z)^{coK} &\simeq (N \otimes_R Z)^H && \text{(Lemma 2.5.15);} \\
&\simeq (\text{Rat}^Z({}_Y \text{Hom}_R(Y, N))^H && \text{(Beispiel 2.3.28);} \\
&= \text{Rat}^Z({}_Y (\text{Hom}_R(Y, N)^H)) \\
&= \text{Ind}_P^Q(N) && \text{(Lemma 2.5.16);} \\
&\simeq N \square_K Z && \text{(Satz 2.3.27);} \\
&\simeq \text{Hom}_{H^e}(H, N \otimes_R Z). && \text{(Proposition 2.3.12).}
\end{aligned}$$

**2.5.19. Folgerung.** Seien  $P = (H, K)$ ,  $Q = (Y, Z) \in \mathcal{P}_{Hopf}^\alpha$  und

$$(\xi, \theta) : (Y, Z) \longrightarrow (H, K)$$

ein Morphismus in  $\mathcal{P}_{Hopf}^\alpha$ . Seien  $M \in \mathcal{M}^Z$ ,  $N \in \mathcal{M}^K$  und betrachte  $M^\theta \otimes_R N$  mit der kanonischen  $K$ -Rechtskomodul-Struktur. Ist  ${}_R M$  flach, dann gibt es einen  $Z$ -Komodul-Isomorphismus

$$\text{Ind}_P^Q(M^\theta \otimes_R N) \simeq (M^\theta \otimes_R N) \square_K Z \simeq M \otimes_R (N \square_K Z) \simeq M \otimes_R \text{Ind}_P^Q(N).$$

## 2.6 Klassische Dualitäten

Über einem Körper  $R$  hat man eine *Dualität* zwischen den Gruppen und den kommutativen  $R$ -Hopf-Algebren (vgl. [Abe80], [Mon93, 9.3]). In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit dieser Dualität über (*erblichen*) *noetherschen* Ringen. Wir wenden außerdem unsere Ergebnisse im Paragraphen 2.2 auf die Kategorie der  $G$ -Moduln eines affinen Gruppen-Schema an.

**Notation.** Seien  $M$  ein  $R$ -Modul,  $G$  eine Menge,  $RG$  der freie  $R$ -Modul mit Basis  $G$  und betrachte den  $R$ -Modul-Isomorphismen

$$\text{Hom}_R(RG, M) \simeq M^G \simeq \{f : G \longrightarrow M \text{ eine beliebige Abbildung}\}$$

Für  $N \in {}_R \mathcal{M}$  und jedes  $\gamma \in \text{Hom}_R(M, N)$  setzen wir

$$\gamma_\bullet : M^G \longrightarrow N^G, f \longmapsto \gamma \circ f.$$

Andererseits, setzen wir für jede Menge  $G'$  und jede Mengen-Abbildung  $\xi : G \longrightarrow G'$

$$\xi^\bullet : M^{G'} \longrightarrow M^G, g \longmapsto g \circ \xi.$$

**2.6.1.  $G$ -Moduln.** Sei  $(G, \mu, e)$  ein Monoid. Unter einem unitären (bzw.  $G$ -treuen)  $G$ -Linksmodul verstehen wir einen unitären (bzw.  $RG$ -treuen)  $RG$ -Linksmodul. Sind  $M, N$   $G$ -Linksmoduln, so wird eine  $RG$ -lineare Abbildung von  $M$  nach  $N$   $G$ -linear genannt. Den  $R$ -Modul der  $G$ -linearen Abbildungen von  $M$  nach  $N$  bezeichnen wir mit  $\text{Hom}_{G-}(M, N)$ . Die Kategorie der unitären (bzw.  $G$ -treuen)  $G$ -Linksmoduln mit Morphismen den  $G$ -linearen Abbildungen bezeichnen wir mit  ${}_G \mathcal{M}$  (bzw.  ${}_G \widetilde{\mathcal{M}}$ ).

Analog definiert man die Kategorien der unitären (bzw.  $G$ -treuen)  $G$ -Rechtsmoduln  $\mathcal{M}_G$  (bzw.  $\widetilde{\mathcal{M}}_G$ ). Für  $G$ -Rechtsmoduln  $M, N$  bezeichnen wir mit  $\text{Hom}_{-G}(M, N)$  den  $R$ -Modul der  $G$ -linearen Abbildungen von  $M$  nach  $N$ .

**2.6.2.** Sind  $G, G'$  Monoide, so ist mit einem unitären (bzw.  $(G, G')$ -treuen)  $(G, G')$ -**Bimodul** ein unitärer (bzw.  $(RG, RG')$ -treuer)  $(RG, RG')$ -Bimodul gemeint. Sind  $M, N$   $(G, G')$ -Bimoduln, so nennen wir eine  $(RG, RG')$ -bilineare Abbildung. Mit  $\text{Hom}_{(G, G')}$  bezeichnen wir den  $R$ -Modul von  $M$  nach  $N$ . Die Kategorie der unitären (bzw.  $(G, G')$ -treuen)  $(G, G')$ -Bimoduln mit den  $(G, G')$ -bilinearen Abbildungen bezeichnen wir mit  ${}_G\mathcal{M}_{G'}$  (bzw.  ${}_G\widetilde{\mathcal{M}}_{G'}$ ).

**2.6.3. Definition.** Sei  $(C, \Delta, \varepsilon)$  eine  $R$ -Koalgebra. Nach [Gru69] nennen wir

$$\mathcal{G}(C) := \{0 \neq x \in C \mid \Delta(x) = x \otimes x \text{ und } \varepsilon(x) = 1\}$$

die Menge der **gruppen-ähnlichen** Elemente von  $C$ . Sind  $x, y \in \mathcal{G}(C)$ , so bezeichne

$$P_{(x,y)}(c) := \{c \in C \mid \Delta(c) = x \otimes c + c \otimes y\}$$

die Menge der  $(x, y)$ -**primitiven** Elemente in  $C$ . Ist  $H$  eine  $R$ -Bialgebra, so werden die  $(1, 1)$ -primitiven Elemente in  $H$  **primitiv** genannt.

Das folgende Lemma läßt sich leicht nachprüfen:

**2.6.4. Lemma.** Sei  $C$  eine  $R$ -Koalgebra.

1. Ist  $D$  eine  $R$ -Koalgebra und  $f : D \longrightarrow C$  ein Koalgebra-Morphismus, dann ist  $f(\mathcal{G}(D)) \subseteq \mathcal{G}(C)$ .
2. Sind  $\{0_R, 1_R\}$  die einzigen Idempotenten in  $R$  und ist  $\Delta(x) = x \otimes x$ , dann ist  $\varepsilon(x) = 1_R$ , also ist  $x \in \mathcal{G}(C)$ .
3. Sind  $x, y \in \mathcal{G}(C)$  und ist  $c \in P_{(x,y)}(C)$ , dann ist  $\varepsilon(c) = 0$ .
4. Für jede  $R$ -Koalgebra  $C$  haben wir eine Bijektion

$$\text{Cog}_R(R, C) \leftrightarrow \mathcal{G}(C), \quad f \mapsto f(1_R) \text{ und } x \mapsto [1_R \mapsto x] \quad \forall f \in \text{Cog}_R(R, C), \quad x \in \mathcal{G}(C).$$

5. Sind  $R$  noethersch und  $A$  eine  $\alpha$ -Algebra, dann ist

$$\text{Alg}_R(A, R) = \mathcal{G}(A^\circ) = \text{Cog}_R(R, A^\circ).$$

**2.6.5.** Für jede Menge  $G$  ist  $RG$ , der freie  $R$ -Modul mit Basis  $G$ , eine *kokommutative*  $R$ -Koalgebra  $\mathcal{K}(G) = (RG, \Delta_g, \varepsilon_g)$ , wobei

$$\Delta_g(x) = x \otimes x \text{ und } \varepsilon_g(x) = 1 \text{ für jedes } x \in G.$$

Ist  $(G, \mu_G, e_G)$  ein Monoid, dann induziert  $\mu_G$  bzw.  $e_G$  auf  $RG$  eine Multiplikation  $\mu$  bzw. eine Einheit  $\eta$ , so dass  $\mathcal{K}(G) = (RG, \mu, \eta, \Delta_g, \varepsilon_g)$  eine  $R$ -Bialgebra wird. Ist  $G$  eine Gruppe, dann ist  $RG$  eine  $R$ -Hopf-Algebra mit Antipode

$$S_g : RG \longrightarrow RG, \quad x \longmapsto x^{-1} \text{ für jedes } x \in G.$$

Ist  $H$  eine  $R$ -Bialgebra, dann ist  $\Delta_H(1_H) = 1_H$  und es gilt für alle  $x, y \in \mathcal{G}(H)$  :

$$\Delta_H(xy) = \Delta_H(x)\Delta_H(y) = (x \otimes x)(y \otimes y) = xy \otimes xy,$$

also ist  $x, y \in \mathcal{G}(H)$  ein Monoid. Ist  $H$  eine  $R$ -Hopf-Algebra und ist  $x \in \mathcal{G}(H)$ , dann ist  $x^{-1} := S_H(x) \in \mathcal{G}(H)$ , also ist  $\mathcal{G}(H)$  eine Gruppe.

**Notation.** Mit **Ens** (bzw. **Mon**, **Gr**) bezeichnen wir die Kategorie der Mengen (bzw. Kategorie der Monoide, Kategorie der Gruppen).

**2.6.6. Proposition.** ([Gru69]) *Es gibt kovariante Funktoren*

$$\begin{array}{llll} \mathcal{K}(-) & : \mathbf{Ens} & \longrightarrow & \mathbf{CCog}_R, & \mathcal{G}(-) & : \mathbf{CCog}_R & \longrightarrow & \mathbf{Ens} \\ & : \mathbf{Mon} & \longrightarrow & \mathbf{CCBialg}_R, & & : \mathbf{CCBialg}_R & \longrightarrow & \mathbf{Mon} \\ & : \mathbf{Gr} & \longrightarrow & \mathbf{CCHopf}_R, & & : \mathbf{CCHopf}_R & \longrightarrow & \mathbf{Gr}. \end{array}$$

Außerdem ist  $(\mathcal{K}(-), \mathcal{G}(-))$  ein adjungiertes Paar. Ist  $R$  ein Integritätsbereich, dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus  $\mathcal{G}(-) \circ \mathcal{K}(-) \simeq id$ .

**2.6.7.** ([Abe80, Theorem 2.1.3]) Sei  $L$  eine  $R$ -Lie-Algebra und bezeichne mit  $U(L)$  die **universelle Einhüllende** von  $L$ . Betrachten wir die  $R$ -Algebra  $U(L)$  mit der üblichen Multiplikation und der üblichen Einheit, so wird  $U(L)$  eine  $R$ -Hopf-Algebra durch

$$\Delta_p(l) := 1 \otimes l + l \otimes 1, \quad \varepsilon_p(l) := 0 \quad \text{und} \quad S_p(x) := -l \quad \text{für jedes } l \in L.$$

**2.6.8. Repräsentative Abbildungen.** Seien  $R$  noethersch,  $(G, \mu, e)$  ein Monoid (bzw. eine Gruppe) und setze

$$\mathcal{R}(G) := \{f \in R^G \mid GfG \text{ ist e.e. in } {}_R\mathcal{M}\}.$$

Man nennt jedes  $f \in \mathcal{R}(G)$  eine **repräsentative Abbildung**. Wir nennen  $G$  ein  **$\alpha$ -Monoid** (bzw. eine  **$\alpha$ -Gruppe**), falls  $(RG, \mathcal{R}(G))$  ein  $\alpha$ -Paar.

Als Konsequenz von Lemma 2.1.26 und Folgerung 2.5.8 bekommen wir:

**2.6.9. Folgerung.** *Sei  $R$  noethersch. Ist  $G$  ein  $\alpha$ -Monoid, dann ist  $\mathcal{R}(G) \simeq (RG)^\circ$  eine  $R$ -Bialgebra. Ist  $G$  eine  $\alpha$ -Gruppe, dann ist  $\mathcal{R}(G)$  eine  $R$ -Hopf-Algebra mit Antipode*

$$S : \mathcal{R}(G) \longrightarrow \mathcal{R}(G), \quad S(f)(x) = f(x^{-1}) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{R}(G), x \in G.$$

Als Schlussfolgerung von Satz 2.4.5 bekommen wir:

**2.6.10. Folgerung.** *Seien  $R$  noethersch,  $G$  ein Monoid und  $C \subset \mathcal{R}(G)$  ein  $G$ -Unterbimodul. Ist  $P = (RG, C)$  ein  $\alpha$ -Paar, dann ist  $C$  eine  $R$ -Koalgebra und wir bekommen Kategorie-Isomorphismen*

$$\begin{aligned} M^C &\simeq \text{Rat}^C({}_G\mathcal{M}) &= \sigma[{}_RG C] \\ &\simeq \text{Rat}^C({}_C{}^*\mathcal{M}) &= \sigma[{}_C{}^*C]. \end{aligned}$$

**Notation.** Für jedes Monoid  $G$  bezeichne  $\text{Loc}({}_G\mathcal{M})$  ( $\text{Loc}(\mathcal{M}_G)$ ) die Kategorie der lokal endlichen  $G$ -Linksmoduln ( $G$ -Rechtsmoduln).

Als Schlussfolgerung von Proposition 2.4.18 bekommen wir:

**2.6.11. Proposition.** *Seien  $R$  noethersch und  $G$  ein Monoid.*

1. *Jeder  $\mathcal{R}(G)$ -suberzeugte  $G$ -Linksmodul ist lokal endlich.*
2. *Ist  $RG$   $R$ -c-koerzeugt, dann ist  $\sigma[{}_A\mathcal{R}(G)] = \text{Loc}({}_G\mathcal{M})$ . Ist außerdem  $G$  ein  $\alpha$ -Monoid, dann gibt es Kategorie-Isomorphismen*

$$\mathcal{M}^{\mathcal{R}(G)} \simeq \text{Rat}^{\mathcal{R}(G)}({}_G\mathcal{M}) = \sigma[{}_G\mathcal{R}(G)] = \text{Loc}({}_G\mathcal{M}).$$

Die folgende Aussage überträgt die klassische Dualität zwischen den kommutativen  $R$ -Bialgebren ( $R$ -Hopf-Algebren) und den Monoiden (Gruppen) vom Körper-Fall auf beliebige erbliche noethersche Ringe (siehe [Mon93, 9.3]).

**2.6.12. Satz.** *Ist  $R$  noethersch und erblich, dann gibt es eine Dualität zwischen den Monoiden (Gruppen) und den kommutativen  $R$ -Bialgebren ( $R$ -Hopf-Algebren) mittels der rechts adjungierten kontravarianten Funktoren*

$$\begin{array}{llll} \mathcal{R}(-) & : \mathbf{Mon} & \longrightarrow & \mathbf{CBig}_R, & \text{Alg}_R(-, R) & : \mathbf{CBig}_R & \longrightarrow & \mathbf{Mon}, \\ & : \mathbf{Gr} & \longrightarrow & \mathbf{CHopf}_R, & & : \mathbf{CHopf}_R & \longrightarrow & \mathbf{Gr}. \end{array}$$

**Beweis.** Ist  $R$  noethersch und erblich, dann erfüllt jede  $R$ -Algebra die  $\alpha$ -Bedingung (Lemma 2.1.28 (1)). Ist  $G$  ein Monoid (eine Gruppe), dann ist  $\mathcal{K}(G) = (RG, \mu, \eta, \Delta_g, \varepsilon_g)$  nach 2.6.5 eine *kokommutative*  $R$ -Bialgebra ( $R$ -Hopf-Algebra) und  $\mathcal{R}(G) = (RG)^\circ$  ist nach Satz 2.5.11 eine *kommutative*  $R$ -Bialgebra ( $R$ -Hopf-Algebra). Ist  $H$  eine  $R$ -Bialgebra ( $R$ -Hopf-Algebra), dann ist  $H^\circ$  nach Satz 2.5.11 eine  $R$ -Bialgebra (bzw.  $R$ -Hopf-Algebra) und daher ist  $\text{Alg}_R(H, R) = \mathcal{G}(H^\circ)$  ein Monoid (eine Gruppe). Man sieht leicht, dass wir Funktor-Isomorphismen haben

$$\mathcal{R}(-) \simeq (-)^\circ \circ \mathcal{K}(-) \text{ und } \text{Alg}_R(-, R) \simeq \mathcal{G}(-) \circ (-)^\circ.$$

Die Aussage folgt dann aus Satz 2.5.11 und 2.6.6.

## Affine Gruppen-Schemata

Die affinen Gruppen-Schemata wurden von J. Jantzen [Jan87] eingeführt. Ist  $G$  ein affines Gruppen-Schema mit *Koordinaten-Ring*  $R(G)$ , dann sind die Kategorie der  $G$ -Linksmoduln und die Kategorie der  $R(G)$ -Rechtskomoduln äquivalent [Jan87]. Ist  ${}_R R(G)$  lokal projektiv, so erweitern wir diese Kategorie-Äquivalenz auf die Kategorie der  $R(G)$ -rationalen  $R(G)^*$ -Linksmoduln  $\text{Rat}^{R(G)}({}_{R(G)^*}\mathcal{M}) = \sigma[{}_{R(G)^*}R(G)]$ . Damit kann man die Kategorie  ${}_G\mathcal{M}$  als eine Grothendieck-Kategorie vom Typ  $\sigma[M]$  betrachten und die gut entwickelte Theorie solchen Kategorien (siehe [Wis88], [Wis96]) zum Studium der Kategorie  ${}_G\mathcal{M}$  heranziehen.

**Notation.** Mit **Ens** (bzw. **Mon**, **Gr**) bezeichnen wir die Kategorie der Mengen (bzw. Kategorie der Monoide, Kategorie der Gruppen).

**2.6.13.** Unter einem  **$R$ -Funktork** (bzw. **Monoid-Funktork**, **Gruppen-Funktork**) verstehen wir einen Funktor von der Kategorie der *kommutativen*  $R$ -Algebren  $\mathbf{CAlg}_R$  in **Ens** (bzw. **Mon**, **Gr**).

Ein **affines Schema** (bzw. **affines Monoid-Schema**, **affines Gruppen-Schema**) ist ein *darstellbarer* Funktor (bzw. Monoid-Funktork, Gruppen-Funktork)

$$\begin{aligned} G = \mathrm{Alg}_R(H, -) &: \mathbf{CAlg}_R &\longrightarrow \mathbf{Ens}, \\ &: \mathbf{CAlg}_R &\longrightarrow \mathbf{Mon}, \\ &: \mathbf{CHopf}_R &\longrightarrow \mathbf{Gr}. \end{aligned}$$

Die *kommutative*  $R$ -Algebra (bzw.  $R$ -Bialgebra,  $R$ -Hopf-Algebra)  $R(G) := H$  nennt man den **Koordinaten-Ring** von  $G$ . Mit  $\mathbf{Aff}_R$  (bzw.  $\mathbf{AffMon}_R$ ,  $\mathbf{AffGr}_R$ ) bezeichnen wir die Kategorie deren Objekte die affinen Schemata (bzw. die affinen Monoid-Schemata, die affinen Gruppen-Schemata) mit Morphismen den *natürlichen Transformationen*.

**2.6.14.  $G$ -Moduln.** (vgl. [Jan87, 2.7]) Sei  $G = \mathrm{Alg}_R(H, -)$  ein affines Gruppen-Schema. Zu einem  $R$ -Modul  $M$  betrachte den Gruppen-Funktork

$$M_a : \mathbf{CAlg}_R \longrightarrow \mathbf{Gr}, \quad M_a(A) := (M \otimes_R A, +).$$

Dann heißt  $M$  ein  **$G$ -Linksmodul**, falls  $G(A)$  auf  $M_a(A) := M \otimes_R A$ , für jede kommutative  $R$ -Algebra  $A$ , durch  $R$ -lineare Abbildungen wirkt. Die Kategorie der  $G$ -Moduln mit Morphismen den  $G$ -linearen Abbildungen bezeichnen wir mit  ${}_G\mathcal{M}$ .

**2.6.15. Lemma.** ([Wis88, 44.3]) Seien  $\mathfrak{C}$  eine Kategorie und  $F : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbf{Ens}$  ein kovarianter Funktor. Für  $A \in \mathfrak{C}$  bezeichne  $\underline{\mathrm{Nat}}(\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, -), F)$  die Klasse der funktoriellen Morphismen zwischen  $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, -)$  und  $F$ , dann ist die folgende **Yoneda-Abbildung** bijektiv:

$$\underline{\mathrm{Nat}}(\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, -), F) \longrightarrow F(A), \quad \phi \longmapsto \phi_A(\mathrm{id}_A).$$

Mit Hilfe von Yoneda-Lemma läßt sich die folgende Aussage beweisen:

**2.6.16. Proposition.** (vgl. [Jan87, Chapter 2]) Sei  $R$  ein beliebiger Ring.

1. Es gibt Kategorie-Äquivalenzen

$$\mathbf{AffMon}_R \approx (\mathbf{CAlg}_R)^{op} \quad \text{und} \quad \mathbf{AffGr}_R \approx (\mathbf{CHopf}_R)^{op}.$$

2. Sei  $G$  ein affines Gruppen-Schema mit Koordinaten-Ring  $R(G)$ . Dann sind die Kategorie der  $G$ -Linksmoduln  ${}_G\mathcal{M}$  und Kategorie der  $R(G)$ -Rechtskomoduln  $\mathcal{M}^{R(G)}$  äquivalent.

**2.6.17.** Seien  $G$  ein affines Gruppen-Schema mit Koordinaten-Ring  $R(G)$  und setze  $\omega := \text{Ke}(\varepsilon_{R(G)})$ . Dann induziert  $\mathfrak{F}_\omega := \{\omega^n \mid n \geq 1\}$  auf  $R(G)$  eine lineare Topologie  $\mathfrak{T}(\mathfrak{F}_\omega)$ . Nach [Jan87, 7.7] ist

$$hy(G) := \{f \in R(G)^* \mid f(\omega^n) = 0 \text{ für ein } n \geq 1\} \quad (2.44)$$

eine  $R$ -Unteralgebra von  $R(G)^*$ . Wir nennen  $hy(G)$  die **Hyperalgebra** von  $G$ . Daher bekommen wir ein messendes Paar  $\mathfrak{G} = (hy(G), R(G))$ . Ist  $hy(G) \subset R(G)^*$  dicht, so nennen wir  $G$  **zusammenhängend**. Ist  $R(G)/\omega^n$  endlich in  ${}_R\mathcal{M}$  für jedes  $n \geq 1$ , dann heißt  $G$  **infinitesimal flach**. Wir sagen  $G$  erfüllt die  $\alpha$ -Bedingung oder  $G$  ist ein affines  $\alpha$ -**Gruppen-Schema**, falls  $(hy(G), R(G))$  die  $\alpha$ -Bedingung erfüllt. Wir nennen  $G$  lokal projektiv, falls  ${}_R R(G)$  **lokal projektiv** ist.

**2.6.18. Satz.** *Sei  $G$  ein affines Gruppen-Schema mit Koordinaten-Ring  $R(G)$ .*

1. *Ist  $R(G)$  lokal projektiv, dann gibt es Kategorie-Äquivalenzen*

$${}_G\mathcal{M} \approx \mathcal{M}^{R(G)} \simeq \text{Rat}^{R(G)}({}_{R(G)^*}\mathcal{M}) = \sigma[{}_{R(G)^*}R(G)].$$

2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (a)  *$G$  ist ein affines  $\alpha$ -Gruppen-Schema;*
- (b)  *$G$  ist lokal projektiv und zusammenhängend.*
- (c) *Es gibt Kategorie-Äquivalenzen*

$$\begin{aligned} {}_G\mathcal{M} &\approx \mathcal{M}^{R(G)} \simeq \text{Rat}^{R(G)}({}_{R(G)^*}\mathcal{M}) = \sigma[{}_{R(G)^*}R(G)] \\ &\simeq \text{Rat}^{R(G)}({}_{hy(G)}\mathcal{M}) = \sigma[{}_{hy(G)}R(G)] \end{aligned}$$

3. *Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (i)  *$G$  ist zusammenhängend, also ist  $hy(G) \subset R(G)^*$  dicht;*
- (ii)  *$\sigma[{}_{hy(G)}R(G)] = \sigma[{}_{R(G)^*}R(G)]$ .*

*Ist  $R$  ein injektiver Kogenerator, so ist weiter dazu äquivalent:*

- (iii)  *$R(G) \hookrightarrow hy(G)^*$ ;*
- (iv)  *$\mathfrak{T}(\mathfrak{F}_\omega)$  ist Hausdorff.*

**Beweis.** 1. Die Äquivalenz  ${}_G\mathcal{M} \approx \mathcal{M}^{R(G)}$  folgt aus [Jan87, Chapter 2] und die Kategorie-Isomorphismus folgen aus Satz 2.2.13.

2. Folgt aus Satz 2.2.16.

3.  $hy(G) \subset R(G)^*$  ist eine  $R$ -Unteralgebra und somit folgt die Äquivalenz (i)  $\iff$  (ii) aus Lemma 2.2.15.

Sei  $R$  ein injektiver Kogenerator.

Die Äquivalenz (i)  $\iff$  (iii) folgt aus Proposition A.0.5 (2). Betrachte das messende Paar  $\mathfrak{G} := (hy(G), R(G))$ . Dann gilt nach A.0.3 (1):

$$\overline{0_{R(G)}} = \bigcap_{n \geq 1} \omega^n = \bigcap_{n \geq 1} \text{KeAn}(\omega^n) = \text{Ke}\left(\bigcup_{n \geq 1} \text{An}(\omega^n)\right) = \text{Ke}(hy(G)) = \text{Ke}(\chi_{\mathfrak{G}}).$$

Also ist  $\mathfrak{T}(\mathfrak{F}_{\omega})$  Hausdorff genau dann, wenn  $R(G) \xrightarrow{\chi_{\mathfrak{G}}} hy(G)^*$  (und wir bekommen (iii)  $\iff$  (iv)).

### 2.6.19. Der Induktionsfunktork für affine $\alpha$ -Gruppen-Schemata.

**Induktionsfunktork.** Seien  $G, \tilde{G}$  affine  $\alpha$ -Gruppen-Schemata und  $\varphi : G \longrightarrow \tilde{G}$  ein Morphismus in  $\mathbf{AffGr}_R$ . Dann induziert  $\varphi$  einen Hopf-Algebra-Morphismus  $\varphi_{\#} : R(\tilde{G}) \longrightarrow R(G)$  (*Komorphismus* genannt) und wir bekommen einen Morphismus in  $\mathcal{P}_m^{\alpha}$

$$(\varphi_{\#}^*, \varphi_{\#}) : (R(\tilde{G})^*, R(\tilde{G})) \longrightarrow (R(G)^*, R(G)).$$

Nach Satz 2.6.18 sind  ${}_G\mathcal{M} \approx \sigma[{}_{R(G)}R(G)]$ ,  ${}_{\tilde{G}}\mathcal{M} \approx \sigma[{}_{R(\tilde{G})}R(\tilde{G})]$  und daher haben wir den *Induktionsfunktork*

$$\text{Ind}_{\tilde{G}}^{\tilde{G}}(-) := \text{Ind}_{R(G)}^{R(\tilde{G})}(-) : {}_G\mathcal{M} \longrightarrow {}_{\tilde{G}}\mathcal{M}, \quad M \longmapsto \text{Rat}^{R(\tilde{G})}({}_{R(\tilde{G})} \text{Hom}_{R(G)^*} (R(\tilde{G})^*, M)).$$

**2.6.20. Folgerung.** *Sei  $G$  ein affines Monoid-Schema (bzw. ein affines Gruppen-Schema) mit Koordinaten-Ring  $R(G)$ .*

1. *Sind  $R$  noethersch,  ${}_{R(G)}\omega$  e.e. und  $hy(G) \subset R^{R(G)}$  rein, dann ist  $hy(G)$  eine  $R$ -Bialgebra (bzw.  $R$ -Hopf-Algebra) und  $(R(G), hy(G)) \in \mathcal{P}_{Bis}^{\alpha}$  (bzw.  $(R(G), hy(G)) \in \mathcal{P}_{Hopf}^{\alpha}$ ).*
2. *Ist  $G$  infinitesimal flach, dann ist  $hy(G)$  eine infinitesimal flache  $R$ -Bialgebra (bzw.  $R$ -Hopf-Algebra) und  $(R(G), hy(G)) \in \mathcal{P}_{Bis}^{\alpha}$  (bzw.  $(R(G), hy(G)) \in \mathcal{P}_{Hopf}^{\alpha}$ ).*

**Beweis.** 1. Ist  ${}_{R(G)}\omega$  e.e., dann ist  $\mathfrak{F}_{\omega} \subset \mathcal{K}_{R(G)}$ , (vgl. Lemma 2.2.29), also ist  $hy(G) \subset R(G)^{\circ}$  ein  $R(G)$ -Unterbimodul und die Aussage folgt aus Proposition 2.5.7 (1).

2. Sei  $G$  infinitesimal flach. Analog zu [Mon93, Lemma 9.2.1] ist  $\mathfrak{F}_{\omega} \subset \mathcal{K}_{R(G)}$  ein zulässiger Filter und die Aussage folgt aus Proposition 2.5.7 (2).

# Kapitel 3

## Dualität zwischen den Moduln und den Komoduln

In diesem Kapitel wird die Dualität zwischen den *Wirkungen* von Algebren und den *Kowirkungen* von  $R$ -Koalgebren untersucht. Im Paragraphen 3.1 wird für jedes messende  $\alpha$ -Paar  $P = (A, C)$  die Dualität zwischen den  $A$ -Moduln und den  $C$ -Komoduln untersucht. Im Paragraphen 3.2 untersuchen wir für jede  $\alpha$ -Algebra  $A$  über einem noetherschen Ring die Dualität zwischen den  $A$ -Moduln und den  $A^\circ$ -Komoduln. Im Paragraphen 3.3 beschäftigen wir uns mit der natürlichen Fragestellung bei Dualitätssätzen der *(Ko)Reflexivität*. Im Paragraphen 3.4 führen wir eine *nicht endliche* Version der Dualitätssätze für Doi-Koppinen-Hopf-Moduln. Paragraph 3.5 ist der Dualitätssätze für die sogenannten *verschränkten Produkte* gewidmet.

### 3.1 Duale Komoduln

Für jedes  $(A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  untersuchen wir in diesem Paragraphen die *Dualität* zwischen der Kategorie der  $A$ -Rechtsmoduln ( $A$ -Linksmoduln) und der Kategorie der  $C$ -Rechtskomoduln ( $C$ -Linkskomoduln).

**3.1.1.** Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$ . Nach Lemma 2.2.8 ist  $\mathcal{M}^C \subset {}_A\mathcal{M}$  eine Unterkategorie und somit bekommen wir einen kontravarianten Funktor

$$(-)^* : \mathcal{M}^C \longrightarrow \mathcal{M}_A, (N, \varrho_N) \longmapsto (N^*, \rho_{N^*}), \quad (3.1)$$

wobei

$$\rho_{N^*} : N^* \longrightarrow \text{Hom}_R(A, N^*), f \longmapsto [a \longmapsto [n \longmapsto \sum f(n_{<0>}) < a, n_{<1>} >]]. \quad (3.2)$$

Erfüllt  $P$  die  $\alpha$ -Bedingung, so bekommen wir (nach Lemma 2.2.9) einen kontravarianten Funktor

$$(-)^r : \mathcal{M}_A \longrightarrow \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}) \simeq \mathcal{M}^C, M \longmapsto M^r := \text{Rat}^C({}_A M^*).$$

Sind  $M, N$   $A$ -Rechtsmoduln und ist  $f \in \text{Hom}_{A-}(M, N)$ , so ist  $f^* \in \text{Hom}_{-A}(N^*, M^*)$  und wir bezeichnen mit  $f^r \in \text{Hom}^C(N^r, M^r)$  die Einschränkung von  $f^*$  auf  $N^r \subset N^*$  (vgl. Lemmata 2.2.7 (4), 2.2.9). Für jeden  $A$ -Rechtsmodul  $M$  nennen wir den  $C$ -Rechtskomodul  $M^r$  den **dualen  $C$ -Komodul von  $M$  bzgl.  $P$** .

**3.1.2. Satz.** *Für jedes Paar  $(A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  gibt es eine Dualität zwischen der Kategorie der  $C$ -Rechtskomoduln und der Kategorie der  $A$ -Rechtsmoduln mittels der rechts adjungierten kontravarianten Funktoren*

$$(-)^* : \mathcal{M}^C \longrightarrow \mathcal{M}_A \text{ und } (-)^r : \mathcal{M}_A \longrightarrow \mathcal{M}^C.$$

**Beweis.** Für jeden  $C$ -Rechtskomodul  $N$  ist die kanonische Abbildung  $\Phi_N : N \longrightarrow N^{**}$   $A$ -linear und folglich ist  $\Phi_N(N) \subseteq N^{r*}$  (nach Lemma 2.2.7 (4)). Andererseits ist für jeden  $A$ -Rechtsmodul  $M$  die kanonische Abbildung  $\lambda_M : M \longrightarrow M^{r*}$   $A$ -linear. Es ist leicht nachzuprüfen, dass es (in  $M \in \mathcal{M}_A$  und  $N \in \mathcal{M}^C$ ) funktorielle Homomorphismen gibt

$$\begin{aligned} \Upsilon_{N,M} &: \text{Hom}_{-A}(M, N^*) \longrightarrow \text{Hom}^C(N, M^r), & f &\longmapsto f^r \circ \Phi_N, \\ \Psi_{N,M} &: \text{Hom}^C(N, M^r) \longrightarrow \text{Hom}_{-A}(M, N^*), & g &\longmapsto g^* \circ \lambda_M. \end{aligned}$$

Außerdem ist  $\Upsilon_{N,M}$  bijektiv mit Inversem  $\Psi_{N,M}$ .

**Notation.** Für jede  $R$ -Algebra  $A$  bezeichne mit  $\mathcal{M}_A^f$  ( ${}_A\mathcal{M}^f$ ) die Kategorie der *endlich erzeugten*  $A$ -Rechtsmoduln ( $A$ -Linksmoduln).

**3.1.3. Lemma.** *Sei  $R$  noethersch. Für jedes  $(A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  gibt es eine Dualität zwischen  $\text{Rat}^C(\mathcal{M}_A^f)$  und  ${}^C\text{Rat}(\mathcal{M}_A^f)$  mittels der rechts adjungierten kontravarianten Funktoren*

$${}^C\text{Rat}(\mathcal{M}_A^f) \longrightarrow \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}^f) \longrightarrow {}^C\text{Rat}(\mathcal{M}_A^f) \text{ und } (-)^* : (-)^* : \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}^f) .$$

**Beweis.** Sei  $M \in {}^C\text{Rat}(\mathcal{M}_A^f)$  (bzw.  $M \in \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}^f)$ ). Laut Folgerung 2.2.24 ist  ${}_R M$  e.e. und somit ist  ${}_A M^*$  (bzw.  $M_A^*$ ) endlich erzeugt. Nach Voraussetzung ist  $R$  noethersch, also ist  ${}_R M$  e.p. und  $M^*$  wird nach 2.3.14 ein  $C$ -rationaler  $A$ -Linksmodul (bzw. ein  $C$ -rationaler  $A$ -Rechtsmodul). Die Dualität zwischen  ${}^C\text{Rat}(\mathcal{M}_A^f)$  und  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}^f)$  folgt dann aus Satz 3.1.2.

D. Radford [Rad73] hat -im Körper-Fall- für jedes Paar messende  $P = (A, C)$  die sogenannten  $P$ -Rechtspaare (bzw.  $P$ -Linkspaare) eingeführt. Im Folgenden betrachten wir die Dualitätsbeziehungen für solche Paare.

**3.1.4.** Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$ . Ein Paar aus  $R$ -Moduln  $Q = (M, N)$  heißt ein  **$P$ -Rechtspaar** (bzw.  **$P$ -Linkspaar**), falls  $M$  ein  $A$ -Rechtsmodul,  $N$  ein  $C$ -Rechtskomodul (bzw.  $M$  ein  $A$ -Linksmodul,  $N$  ein  $C$ -Linksmodul) und die induzierte Abbildung  $\kappa_Q : M \longrightarrow N^*$   $A$ -linear ist. Mit  $\mathcal{Q}_P^r \subset \mathcal{P}$  (bzw.  $\mathcal{Q}_P^l \subset \mathcal{P}$ ) bezeichnen wir die Kategorie der  $P$ -Rechtspaare (bzw. die Kategorie der  $P$ -Linkspaare) mit den im Folgenden erklärten Morphismen: sind  $(M, N), (M', N')$   $P$ -Rechtspaare (bzw.  $P$ -Linkspaare), dann ist ein Paar-Morphismus

$$(\xi, \theta) : (N, N') \longrightarrow (M, M')$$

ein Morphismus in  $\mathcal{Q}_P^r$  (bzw. in  $\mathcal{Q}_P^l$ ), falls  $\zeta : M \longrightarrow M'$   $A$ -Linear und  $\theta : N' \longrightarrow N$   $C$ -kolinear ist.

Ein  **$P$ -Bi-Paar** ist ein Paar  $P = (M, N)$ , wobei  $M$  ein  $A$ -Bimodul,  $N$  ein  $C$ -Bikomodul und  $\kappa_Q : M \longrightarrow N^*$   $A$ -bilinear ist. Mit  $\mathcal{Q}_P$  bezeichnen wir die Kategorie der  $P$ -Bi-Paare: sind  $(M, N)$ ,  $(M', N')$   $P$ -Bi-Paare, dann ist ein Paar-Morphismus

$$(\xi, \theta) : (N, N') \longrightarrow (M, M')$$

ein Morphismus in  $\mathcal{Q}_P$ , falls  $\xi : M \longrightarrow M'$   $A$ -bilinear und  $\theta : N' \longrightarrow N$   $C$ -bikolinear ist. Insbesondere ist jedes messende Paar  $P$  selbst ein  $P$ -Bi-Paar.

**3.1.5.** Seien  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$ ,  $Q = (M, N) \in \mathcal{Q}_P^r$  und setze für jedes  $m \in M$  :

$$\begin{aligned} \xi_m : A &\longrightarrow M, & a &\longmapsto ma && \text{für alle } a \in A, \\ \theta_m : N &\longrightarrow C, & n &\longmapsto \sum \langle m, n_{<0>} \rangle n_{<1>} && \text{für alle } n \in N. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle  $a \in A$  und  $n \in N$  :

$$\langle \xi_m(a), n \rangle = \langle ma, n \rangle = \langle m, an \rangle = \sum \langle m, n_{<0>} \rangle \langle a, n_{<1>} \rangle = \langle a, \theta_m(n) \rangle .$$

Offensichtlich ist  $\zeta_m : A \longrightarrow M$   $A$ -linear. Außerdem gilt für alle  $n \in N$ ,  $a \in A$  :

$$\begin{aligned} \alpha_N^P(\sum \theta_m(n)_1 \otimes \theta_m(n)_2)(a) &= \sum \theta_m(n)_1 \langle a, \theta_m(n)_2 \rangle \\ &= a \rightharpoonup \theta_m(n) \\ &= \sum \langle m, n_{<0>} \rangle a \rightharpoonup n_{<1>} \\ &= \sum \langle m, n_{<0>} \rangle n_{<1>1} \langle a, n_{<1>2} \rangle \\ &= \sum \langle m, n_{<0><0>} \rangle n_{<0><1>} \langle a, n_{<1>} \rangle \\ &= \alpha_N^P(\sum \theta_m(n_{<0>}) \otimes n_{<1>})(a). \end{aligned}$$

Ist  $\alpha_N^P : N \otimes C \longrightarrow \text{Hom}_R(A, N)$  injektiv, dann ist

$$\sum \theta_m(n)_1 \otimes \theta_m(n)_2 = \sum \theta_m(n_{<0>}) \otimes n_{<1>} \text{ für jedes } n \in N,$$

also ist  $\theta_m : N \longrightarrow C$   $C$ -kolinear und

$$(\xi_m, \theta_m) : (M, N) \longrightarrow (A, C)$$

ist ein Morphismus in  $\mathcal{Q}_P^r$ .

**Notation.** Seien  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$  und  $Q = (M, N) \in \mathcal{Q}_P^r$ . Für  $R$ -Untermoduln  $L \subset M$ ,  $K \subset N$  setzen wir

$$\begin{aligned} K^\perp &:= \{m \in M \mid \langle m, K \rangle = 0\}, & \text{An}_M(K) &:= \{m \in M \mid \theta_m(k) = 0 \ \forall k \in K\}, \\ L^\perp &:= \{n \in N \mid \langle L, n \rangle = 0\}, & \text{An}_N(L) &:= \{n \in N \mid \theta_m(n) = 0 \ \forall m \in L\}. \end{aligned}$$

Als Schlussfolgerung von Lemmata 2.2.8 und 2.2.9 läßt sich das folgende Lemma mühelos ableiten:

**3.1.6. Lemma.** Seien  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$  und  $Q = (M, N) \in \mathcal{Q}_P^r$  (bzw.  $Q \in \mathcal{Q}_P^l$ ,  $Q \in \mathcal{Q}_P$ ).

1. Für jeden  $C$ -Rechtsunterkomodul (bzw.  $C$ -Linksunterkomodul,  $C$ -Unterbikomodul)  $K \subset N$  ist  $K$  ein  $A$ -Linksuntermodul (bzw.  $A$ -Rechtsuntermodul,  $A$ -Unterbimodul) und  $K^\perp \subset M$  ist ein  $A$ -Rechtsuntermodul (bzw.  $A$ -Linksuntermodul,  $A$ -Unterbimodul).
2. Sei  $(A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ . Ist  $L \subset M$  ein  $A$ -Rechtsuntermodul (bzw.  $A$ -Linksuntermodul,  $A$ -Unterbimodul), dann ist  $L^\perp \subset N$  ein  $C$ -Rechtsunterkomodul (bzw.  $C$ -Linksunterkomodul,  $C$ -Unterbikomodul).

**3.1.7.** Ist  $C$  eine  $\alpha$ -Koalgebra, dann erhalten wir nach Satz 3.1.2 rechts adjungierte kontravariante Funktoren

$$\begin{aligned} (-)^* &: \mathcal{M}^C \longrightarrow \mathcal{M}_{C^*}, & N &\longmapsto N^*, \\ (-)^\square &: \mathcal{M}_{C^*} \longrightarrow \mathcal{M}^C, & M &\longmapsto M^\square := \text{Rat}^C({}_C M^*). \end{aligned}$$

**3.1.8. Lemma.** Seien  $R$  ein injektiver Kogenerator und  $C$  eine  $\alpha$ -Koalgebra. Sind  $M$  ein  $C^*$ -Rechtsmodul,  $L \subset M$  ein  $C^*$ -Untermodule und ist  $M^\square \subset M^*$  dicht, dann ist  $L^\square \subset L^*$  dicht.

**Beweis.** Nach Lemma 2.2.7 ist  $\iota_L^*(M^\square) \subset L^\square$  und es folgt aus Lemma A.0.7 (3.b):  $\iota_L^*(M^\square) = \iota_L^*(\overline{M^\square}) = \iota_L^*(M^*) = L^*$ .

**3.1.9. Definition.** Eine  $R$ -Koalgebra  $C$  heißt **rechts semiperfekt** (**links semiperfekt**), falls jeder einfache  $C$ -Rechtskomodul ( $C$ -Linksmodul) eine projektive Hülle in  $\mathcal{M}^C$  (in  ${}_C \mathcal{M}$ ) hat.

**3.1.10. Lemma.** Für jedes  $(A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $C$  ist rechts-semiperfekt;
2. Jeder einfache Modul in  $\text{Rat}^C({}_A \mathcal{M})$  hat eine projektive Hülle;
3.  $\text{Rat}^C({}_A \mathcal{M})$  hat eine aus komplementierten (lokalen) projektiven  $A$ -Linksmoduln bestehende Generatormenge;
4. Jeder endlich erzeugte Modul in  $\text{Rat}^C({}_A \mathcal{M})$  hat eine projektive Hülle.  
Ist  $R$  perfekt, dann ist weiter dazu äquivalent:
5.  $\text{Rat}^C({}_A \mathcal{M})$  hat eine aus endlich erzeugten projektiven  $A$ -Linksmoduln bestehende Generatormenge.

**Beweis.** Nach Satz 2.2.16 ist  $\mathcal{M}^C \simeq \text{Rat}^C({}_A \mathcal{M}) = \sigma[{}_A C]$  und daher folgt die Aussage aus [Wis99, 2.11].

M. Takeuchi hat in [Tak74] u.a. die Kategorie der lokal endlichen  $A$ -Moduln einer kommutativen  $R$ -Algebra über einem Körper  $R$  studiert. Im Folgenden übertragen wir manche Eigenschaften dieser Kategorie auf die Kategorie  $\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M})$  für ein Paar  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  mit  $A$  kommutativ über einem beliebigen Grundring.

**3.1.11. Proposition.** *Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ . Ist  $A$  kommutativ, dann gibt es einen Funktor-Isomorphismus*

$$\text{Hom}_A(-, C) \simeq (-)^r : \mathcal{M}_A^f \longrightarrow \mathcal{M}^C.$$

**Beweis. Schritt 1.** Sei  $M \in \mathcal{M}_A^f$  beliebig und betrachte  $\text{Hom}_A(M, C)$  mit der kanonischen  $A$ -Modul induzierten von  $M_A$ . Für beliebiges  $f \in \text{Hom}_A(M, C)$  ist  $N := f(M) \subset C$  ein  $A$ -Unterm modul und folglich ein  $C$ -Bikoideal.  $N_A$  ist e.e. und nach Folgerung 2.2.24 e.e.

in  ${}_R\mathcal{M}$ . Nehme an  $N = \sum_{i=1}^l Rc_i$  mit  $\Delta(c_i) = \sum_{j=1}^{l_i} c_{ij} \otimes \tilde{c}_{ij}$  für jedes  $i = 1, \dots, k$  und setze

$K := \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{l_i} Rc_{ij}$ . Dann ist  $K^\perp \subset (0 : f)$  und daher ist  $f$  laut Proposition 2.2.26  $C$ -rational.

Nach Wahl ist  $f \in \text{Hom}_A(M, C)$  beliebig, also ist  $\text{Hom}_A(M, C) \in \text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}) \simeq \mathcal{M}^C$ .

**Schritt 2.**  $(-)^r \simeq \text{Hom}_A(-, C)$ .

Sind  $N \in \mathcal{M}^C$ ,  $M \in \mathcal{M}_A$  und betrachten wir  $\text{Hom}_A(M, C)$  als einen  $C$ -Komodul wie im Schritt (1) gezeigt wurde, so folgt die Aussage aus den funktoriellen Isomorphismen:

$$\begin{aligned} \text{Hom}^C(N, \text{Hom}_A(M, C)) &= \text{Hom}_A(N, \text{Hom}_A(M, C)) && \text{(Lemma 2.2.9 (2))} \\ &\simeq \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N, C)) \\ &\simeq \text{Hom}_A(M, \text{Hom}^C(N, C)) && \text{(Lemma 2.2.9 (2))} \\ &\simeq \text{Hom}_A(M, N^*) && \text{(Proposition 1.2.4 (2))} \\ &\simeq \text{Hom}^C(N, M^r) && \text{(Satz 3.1.2)} \end{aligned}$$

Als Schlussfolgerung von Proposition 3.1.11 bekommen wir:

**3.1.12. Folgerung.** 1. *Seien  $R$  noethersch,  $A$  eine  $\alpha$ -Algebra und betrachte den Funktor*

$$(-)^0 = \text{Rat}^{A^\circ}(-) \circ (-)^* : \mathcal{M}_A \longrightarrow \mathcal{M}^{A^\circ}, \quad M \longmapsto M^0 := \text{Rat}^{A^\circ}({}_A M^*)$$

(siehe 3.2.1). *Ist  $A$  kommutativ, dann gibt es einen funktoriellen Isomorphismus*

$$\text{Hom}_A(-, A^\circ) \simeq (-)^0 : \mathcal{M}_A^f \longrightarrow \mathcal{M}^{A^\circ}.$$

2. *Ist  $C$  eine kokommutative  $\alpha$ -Koalgebra, dann gibt es einen funktoriellen Isomorphismus*

$$\text{Hom}_{C^*}(-, C) \simeq (-)^\square : \mathcal{M}_{C^*}^f \longrightarrow \mathcal{M}^C.$$

**3.1.13. Folgerung.** *Sei  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ , wobei  $A$  kommutativ und noethersch ist. Ist  $(-)^r : \mathcal{M}_A^f \longrightarrow \sigma[{}_A C]$  exakt, dann ist  $C$  ein injektiver  $A$ -Modul.*

**Beweis.** Nach dem *Baer'schen Kriterium* (siehe [Wis88, 16.4]) genügt es zu zeigen, dass  $C$   $A$ -injektiv ist. Ist  $I$  ein  $A$ -Ideal, dann ist  $I_A$  e.e. und nach Voraussetzung ist die folgende Mengen-Abbildung surjektiv

$$A^r \xrightarrow{\iota^r} I^r \longrightarrow 0.$$

Nach Proposition 3.1.11 ist  $\mathrm{Hom}_A(-, C) \simeq (-)^r$  und daher ist

$$\mathrm{Hom}_A(A, C) \xrightarrow{(\iota, C)} \mathrm{Hom}_A(I, C) \longrightarrow 0$$

eine surjektive Mengen-Abbildung, also ist  $C$   $A$ -injektiv und folglich ein injektiver  $A$ -Modul.

## 3.2 Stetige duale Komoduln

In diesem Paragraphen betrachten wir die *dualen Komoduln* von Moduln einer  $\alpha$ -Algebra über einem noetherschen Ring. Diese wurden im Körper-Fall von verschiedenen Autoren betrachtet (etwa [Tak74], [Liu94], [GK97] und [Lu98]) und von R. Larson [Lar98] über Dedekind-Ringen.

**3.2.1.** Seien  $R$  noethersch,  $A$  eine  $R$ -Algebra,  $\mathfrak{F} \subset \mathcal{K}_A$  ein Filter und betrachte  $A$  mit der induzierten linearen Topologie  $\mathfrak{T}(\mathfrak{F})$ .

1. Ist  $\mathfrak{F}$  ein  $\alpha$ -Filter, dann ist  $A_{\mathfrak{F}}^{\circ}$  nach Proposition 2.4.12 (2) eine  $R$ -Koalgebra und  $(A, A_{\mathfrak{F}}^{\circ}) \in \mathcal{P}_m^{\alpha}$ . Nach Satz 3.1.2 bekommen wir rechts adjungierte kontravariante Funktoren

$$\begin{aligned} (-)^* &: \mathcal{M}^{A_{\mathfrak{F}}^{\circ}} \longrightarrow \mathcal{M}_A, & M &\longmapsto M^*, \\ (-)_{\mathfrak{F}}^0 &: \mathcal{M}_A \longrightarrow \mathcal{M}^{A_{\mathfrak{F}}^{\circ}}, & M &\longmapsto M_{\mathfrak{F}}^0 := \mathrm{Rat}^{A_{\mathfrak{F}}^{\circ}}({}_A M^*). \end{aligned}$$

Für jedes  $M \in \mathcal{M}_A$  nennen wir  $M_{\mathfrak{F}}^0$  den **dualen Komodul von  $M$  bzgl.  $\mathfrak{F}$** . Ist  $A$  eine  $\alpha$ -Algebra, so nennen wir  $M^0 := \mathrm{Rat}^{A^{\circ}}({}_A M^*)$  den **dualen Komodul von  $M$** .

2. Für jeden  $A$ -Rechtsmodul  $M$  nennen wir

$$M_{\mathfrak{F}}^{\circ} := \{f \in M^* \mid f(MI) = 0 \text{ für ein } I \in \mathfrak{F}\} = \varprojlim_{\mathfrak{F}} (M/MI)^*$$

den **stetigen dualen Modul von  $M$  bzgl.  $\mathfrak{F}$** . Sind  $A_{\mathfrak{F}}^{\circ}$  eine  $R$ -Koalgebra und  $M_{\mathfrak{F}}^{\circ}$  ein  $A_{\mathfrak{F}}^{\circ}$ -Rechtskomodul, so nennen wir  $M_{\mathfrak{F}}^{\circ}$  den **stetig dualen Komodul von  $M$  bzgl.  $\mathfrak{F}$** .

**Notation.** Seien  $R$  noethersch,  $A$  eine  $(\alpha)$ -Algebra und  $M, N$   $A$ -Rechtsmoduln. Für jede  $A$ -lineare Abbildung  $\gamma : M \longrightarrow N$  bezeichnen wir mit  $\gamma^{\circ} : N^{\circ} \longrightarrow M^{\circ}$  ( $\gamma^0 : N^0 \longrightarrow M^0$ ) die Einschränkung von  $\gamma^*$  auf  $N^{\circ}$  (auf  $N^0$ ).

**3.2.2. Lemma.** *Seien  $R$  noethersch und  $A$  eine  $R$ -Algebra. Für jeden  $A$ -Rechtsmodul  $M$  gilt:*

$$\begin{aligned} M^\circ &:= \{f \in M^* \mid f(MI) = 0 \text{ für ein } R\text{-koendliches } A\text{-}(Rechts)\text{Ideal } I \subset A\} \\ &= \{f \in M^* \mid Af \text{ ist e.e. in } {}_R\mathcal{M}\} (= \text{Loc}({}_A M^*)) \\ &= \{f \in M^* \mid f(L) = 0 \text{ für einen } R\text{-koendlichen } A\text{-Untermodul } L \subset M\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

**Beweis.** Sei  $f \in M^*$  mit  $f(MI) = 0$  für ein  $R$ -koendliches  $A$ -Rechtsideal  $I$ . Ist  $\{a_1 + I, \dots, a_k + I\}$  ein Erzeugendensystem für  $A/I$ , dann ist  $\{a_1 f, \dots, a_k f\}$  ein Erzeugendensystem für  $Af$ , also ist  $f \in \text{Loc}({}_A M^*)$ .

Sei  $f \in \text{Loc}({}_A M^*)$  und nehme an  $Af = \sum_{i=1}^k Rf_i$  für  $\{f_1, \dots, f_k\} \subset M^*$ . Dann ist  $L := \text{Ke}(Af) = \bigcap_{i=1}^k \text{Ke}(f_i) \subset M$  ein  $A$ -Rechtsuntermodul und es gilt außerdem  $M/L \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^k M/\text{Ke}(f_i)$ , also ist  $L \subset M$  ein  $R$ -koendlicher  $A$ -Untermodul.

Sei  $f \in (M/L)^* \simeq \text{An}(L)$  für einen  $R$ -koendlichen  $A$ -Untermodul  $L \subseteq M$ . Dann ist  $(L : M)$  ein  $R$ -koendliches *zweiseitiges*  $A$ -Ideal (vgl. 2.4.4) und es gilt außerdem  $f(MI_L) \subseteq f(L) = 0$ , also ist  $f \in M^\circ$ .

Die folgende Aussage verallgemeinert die entsprechende Aussage [DNR, Corollary 2.2.16] für das kanonische Paar  $(C^*, C)$  im Körper-Fall auf die Kategorie  $\mathcal{P}_m^\alpha$  über beliebigen noetherschen Ringen:

**3.2.3. Proposition.** *Seien  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ ,  $N \in {}^C\text{Rat}(\mathcal{M}_A)$  und betrachte das  $P$ -Linkspaar  $Q := (N^*, N)$ . Betrachte für jedes  $f \in N^*$  die  $R$ -lineare Abbildung*

$$\theta_f : N \longrightarrow C, \quad \theta_f(n) = \sum n_{<-1} f(n_{<0>}).$$

*Ist  $R$  noethersch, dann gilt:*

$$\begin{aligned} \text{Rat}^C({}_A N^*) &= \text{Sp}(\sigma[{}_A C], {}_A N^*) := \sum \{ \text{Im}(g) \mid g \in \text{Hom}_{A-}(U, N^*), U \in \sigma[{}_A C] \} \\ &= \{f \in N^* \mid Af \text{ ist e.e.}\} (= \text{Loc}({}_A N^*)) \\ &= \{f \in N^* \mid \exists I \subset A \text{ ein } R\text{-koendliches (Rechts)ideal mit } f(NI) = 0\} \\ &= \{f \in N^* \mid \exists L \subset N \text{ ein } R\text{-koendlicher } A\text{-Untermodul mit } f(L) = 0\} \\ &= \{f \in N^* \mid \exists L \subset N \text{ ein } R\text{-koendlicher } C\text{-Unterkomodul mit } f(L) = 0\} \\ &= \{f \in N^* \mid \theta_f(N) \text{ ist e.e. in } {}_R\mathcal{M}\}. \end{aligned}$$

**Beweis.** Die Gleichung  $\text{Rat}^C({}_A N^*) = \text{Sp}(\sigma[{}_A C], {}_A N^*)$  folgt aus Satz 2.2.16. Offensichtlich ist  $\text{Rat}^C({}_A N^*) \subseteq \text{Loc}({}_A N^*)$ .

Nach Lemmata 2.2.8, 2.2.9 und 3.2.2 ist  $f \in \text{Loc}({}_A N^*) \iff f(NI) = 0$  für ein  $R$ -koendliches Ideal  $I \triangleleft A \iff f(L) = 0$  für einen  $R$ -koendlichen  $A$ -Untermodul  $L \subset N \iff f(L) = 0$  für einen  $R$ -koendlichen  $C$ -Unterkomodul  $L \subset N$ .

Sei  $f \in N^*$  mit  $f(L) = 0$  für einen  $R$ -koendlichen  $C$ -Unterkomodul  $L \subset N$ . Analog zu 3.1.5 ist  $\theta_f : N \rightarrow C$   $C$ -kolinear. Bemerke  $\theta_f(L) = 0$  und somit existiert ein Komodul-Morphismus  $\overline{\theta}_f : N/L \rightarrow C$ , so dass  $\overline{\theta}_f \circ \pi = \theta_f$ . Somit ist  $\theta_f(N) = \overline{\theta}_f(N/L)$  e.e. in  ${}_R\mathcal{M}$ .

Für jedes  $f \in N^*$  ist  $\theta_f(N) \subset C$  ein  $C$ -Linkskoideal. Ist  $\theta_f(N)$  e.e. in  ${}_R\mathcal{M}$ , dann ist  $(\theta_f(N))^*$  ein  $C$ -Rechtskomodul (nach 2.3.14). Außerdem gilt für jedes  $n \in N$ :

$$\varepsilon(\theta_f(n)) = \varepsilon\left(\sum n_{<-1>} f(n_{<0>})\right) = f\left(\sum \varepsilon(n_{<-1>}) n_{<0>}\right) = f(n),$$

also ist  $f \in (\theta_f(N))^* \subset \text{Rat}^C({}_A N^*)$ .

Als Spezialfall von Proposition 3.2.3 bekommen wir:

**3.2.4. Folgerung.** *Sei  $R$  noethersch. Für jede  $\alpha$ -Koalgebra  $C$  gilt:*

$$\begin{aligned} \text{Rat}^C({}_C C^*) &= \text{Sp}(\sigma[{}_C C^*, {}_C C^*) := \sum \{\text{Im}(g) \mid g \in \text{Hom}_{C^*}(U, C^*), U \in \sigma[{}_C C^*]\} \\ &= \{f \in C^* \mid C^* \star f \text{ ist e.e. in } {}_R\mathcal{M}\} \\ &= \{f \in C^* \mid \exists I \subset C^* \text{ ein } R\text{-koendliches (Rechts)ideal mit } f(CI) = 0\} \\ &= \{f \in C^* \mid \exists K \subset C \text{ ein } R\text{-koendlicher } C^*\text{-Untermodule mit } f(K) = 0\} \\ &= \{f \in C^* \mid \exists K \subset C \text{ ein } R\text{-koendlicher } C\text{-Linkskoideal mit } f(K) = 0\} \\ &= \{f \in C^* \mid f \rightarrow C \text{ ist e.e. in } {}_R\mathcal{M}\}. \end{aligned}$$

**3.2.5. Kofreie Komoduln.** Einen  $C$ -Rechtskomodul  $(M, \varrho_M)$  nennt man **kofrei**, falls  $K \in {}_R\mathcal{M}$  existiert, so dass  $(M, \varrho_M) \simeq (K \otimes_R C, id_K \otimes \Delta_C)$  als  $C$ -Rechtskomoduln ist. Bemerke, ist  $K = R^{(\Lambda)}$  ein freier  $R$ -Modul, dann ist  $M \simeq R^{(\Lambda)} \otimes C \simeq C^{(\Lambda)}$  als  $C$ -Rechtskomoduln.

**3.2.6. Lemma.** *Seien  $R$  noethersch und  $A$  eine kofinitäre  $R$ -Algebra. Sei  $M$  ein  $R$ -Modul und betrachte den  $A$ -Rechtsmodul  $N := M \otimes A$ . Dann ist  $N^\circ \simeq M^* \otimes A^\circ$  und  $N^\circ$  wird ein kofreier  $A^\circ$ -Rechtskomodul.*

**Beweis.** Ist  $N \simeq M \otimes_R A$  als  $A$ -Rechtsmoduln, so gibt es Isomorphismen in  ${}_A\mathcal{M}$ :

$$\begin{aligned} N^\circ &:= \varinjlim \{((M \otimes_R A)/(M \otimes_R A)I)^* \mid I \in \mathcal{K}_A\} \\ &= \varinjlim \{((M \otimes_R A)/(M \otimes_R A)\tilde{I})^* \mid \tilde{I} \in \mathcal{E}_A\} \quad (A \text{ ist kofinitär}) \\ &= \varinjlim \{((M \otimes_R A)/(M \otimes_R \tilde{I}))^* \mid \tilde{I} \in \mathcal{E}_A\} \\ &\simeq \varinjlim \{(M \otimes_R A/\tilde{I})^* \mid \tilde{I} \in \mathcal{E}_A\} \quad (\text{nach Lemma 2.1.9}); \\ &\simeq \varinjlim \{M^* \otimes_R (A/\tilde{I})^* \mid \tilde{I} \in \mathcal{E}_A\} \quad (A/\tilde{I} \text{ ist e.e. und projektiv in } {}_R\mathcal{M}); \\ &\simeq M^* \otimes_R \varinjlim \{(A/\tilde{I})^* \mid \tilde{I} \in \mathcal{E}_A\} \\ &\simeq M^* \otimes_R A^\circ, \quad (A \text{ ist kofinitär}) \end{aligned}$$

und  $N^\circ$  wird ein kofreier  $A^\circ$ -Rechtskomodul durch

$$id_{M^*} \otimes \mu_A^\circ : M^* \otimes A^\circ \rightarrow M^* \otimes A^\circ \otimes A^\circ.$$

Im Widerspruch zu [Wit79, Corollary 2] zeigt das folgende Beispiel, dass für eine beliebig  $R$ -Algebra  $A$  das Präradikal  $\text{Loc}(-) : {}_A\mathcal{M} \longrightarrow \text{Loc}({}_A\mathcal{M})$  im Allgemeinen kein Torsionsradikal ist:

**3.2.7. Gegenbeispiel.** (vgl. [Mon93, Seite 155]) Sei  $R$  ein Körper und betrachte die  $R$ -Hopf-Algebra  $H := R[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$ , mit der üblichen Multiplikation, der üblichen Einheit und der Komultiplikation, Koeinheit bzw. Antipode definiert auf die Erzeuger durch

$$\Delta(x_i) = 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1, \quad \varepsilon(x_i) = 0, \quad S(x^i) := (-1)^i x^i.$$

Betrachten wir  $H$  mit der koendlichen Topologie  $\text{Cf}(H)$ , so ist  $(H, \text{Cf}(H))$  eine links-lineare topologische  $R$ -Algebra mit Präradikal  $\text{Loc}(-) : {}_H\mathcal{M} \longrightarrow {}_H\mathcal{M}$  und Prätorsionsklasse  $\text{Loc}({}_H\mathcal{M})$  (siehe 2.4.4 und Proposition 2.4.18). Betrachten wir das  $H$ -Ideal  $\omega := Ke(\varepsilon_H)$ , dann ist  $H/\omega \simeq R$  während  $\dim(H/\omega^2) = \infty$ , also  $\omega^2 \notin \mathcal{K}_H$ . Daher ist  $\text{Cf}(H)$  keine Gabriel-Topologie und daher ist  $\text{Loc}({}_H\mathcal{M})$  nicht abgeschlossen gegen Erweiterungen (siehe [Ste75, Chapter VI, Theorem 5.1, Lemma 5.3]).

### 3.3 Koreflexive Komoduln

In [Taf72], [Taf77] hat E. Taft einen algebraischen Aspekt für die Untersuchung der *koreflexiven* Koalgebren über Körpern (d.h. Koalgebren  $C$  mit  $C \simeq C^{*\circ}$ ) entwickelt. Unabhängig davon haben R. Heyneman und D. Radford [Rad73], [HR74] die koreflexiven Koalgebren mit Hilfe der *linear schwachen Topologie*  $C^*[\mathfrak{T}_{ls}(C)]$  studiert. In diesem Paragraphen studieren wir für jedes  $(A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  über einem beliebigen *noetherschen* Ring die *koreflexiven*  $C$ -Komoduln. Wir erzielen sowohl algebraische als auch topologische Charakterisierungen für die koreflexiven Komoduln. Unsere Ergebnisse werden wir dann bei der Betrachtung der koreflexiven Koalgebren anwenden und verallgemeinern u.a. Resultate aus den oben genannten Artikeln und aus [Wit79].

Im Folgenden führen wir für jedes  $P \in \mathcal{P}_m$  und jedes  $Q = (M, N) \in \mathcal{Q}_P^r$  auf  $M$  eine Topologie  $\mathfrak{T}_N(M)$  ein, so dass  $(M, \mathfrak{T}_N(M))$  ein linear topologischer  $(A, \mathcal{T}_{-C}(A))$ -Modul wird.

**3.3.1.** Seien  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$ ,  $Q = (M, N) \in \mathcal{Q}_P^r$  und betrachte  $C$  mit der kanonischen  $A$ -Rechtsmodul-Struktur und  $A$  mit der rechts-linearen  $C$ -adischen Topologie  $\mathcal{T}_{-C}(A)$  (vgl. 2.2.2). Sind  $K \subset N$  ein  $R$ -Untermodul und  $m \in \text{An}_M(K)$ , dann gilt für beliebige  $n \in K$  und  $a \in A$ :

$$\begin{aligned} \theta_{ma}(n) &:= \sum \langle ma, n_{<0>} \rangle n_{<1>} \\ &= \sum \langle m, an_{<0>} \rangle n_{<1>} \\ &= \sum \langle m, n_{<0>} \rangle \langle a, n_{<0>} \rangle n_{<1>} \\ &= \sum \langle m, n_{<0>} \rangle \langle a, n_{<1>} \rangle n_{<1>} \\ &= [(\alpha_C^P \circ \Delta_C^{\text{cop}})(\sum \langle m, n_{<0>} \rangle n_{<1>})](a) \\ &= [(\alpha_C^P \circ \Delta_C^{\text{cop}})(\theta_m(n))](a) = 0, \end{aligned}$$

also ist  $\text{An}_M(K) \subset M$  ein  $A$ -Untermodul. Sei  $K = \sum_{i=1}^l Rn_i \subset N$  ein beliebiger endlich erzeugter  $R$ -Untermodul mit  $\varrho_N(n_i) = \sum_{j=1}^{l_i} n_{ij} \otimes c_{ij}$  für  $i = 1, \dots, l$  und setze  $W := \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{l_i} Rc_{ij}$ . Sei  $m \in M$  beliebig. Ist  $a \in \text{An}_A^r(K)$ , dann gilt für  $i = 1, \dots, l$ :

$$\begin{aligned}
 \theta_{ma}(n_i) &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{l_i} \langle ma, n_{ij} \rangle c_{ij} \\
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{l_i} \langle m, an_{ij} \rangle c_{ij} \\
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{n_{ij}} \langle m, n_{ij} \rangle \langle a, n_{ij} \rangle c_{ij} \\
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{n_{ij}} \langle m, n_{ij} \rangle \langle a, c_{ij} \rangle c_{ij} \\
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{l_i} \langle m, n_{ij} \rangle (c_{ij} \leftarrow a) = 0,
 \end{aligned}$$

also ist  $(\text{An}_M(K) : m) \supset \text{An}_A^r(W)$  und daher ist offen bzgl. der  $C$ -adischen Topologie  $\mathcal{T}_{-C}(A)$ . Dann ist

$$\mathcal{B}(0_M) := \{\text{An}_M(K) \mid K \subset N \text{ ist ein endlich erzeugter } R\text{-Untermodul}\}$$

eine aus  $A$ -Untermoduln von  $M$  bestehende Umgebungsbasis der  $0_M$  und  $M$  bekommt eine Topologie  $\mathfrak{T}_N(M)$ , so dass  $(M, \mathfrak{T}_N(M))$  ein linear topologischer  $(A, \mathcal{T}_{-C}(A))$ -Modul ist.

**3.3.2.** Seien  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$  und  $Q = (M, N) \in \mathcal{Q}_P^r$ . Dann ist

$$\mathcal{F}(0_M) := \{K^\perp \mid K \subset N \text{ ist ein endlich erzeugter } R\text{-Untermodul}\}$$

eine aus  $R$ -Untermoduln bestehende Filterbasis und induziert auf  $M$  somit eine Topologie, die *linear schwache Topologie*  $M[\mathfrak{T}_{ls}(N)]$ , so dass  $(M, M[\mathfrak{T}_{ls}(N)])$  ein linear topologischer  $R$ -Modul und  $\mathcal{F}(0_M)$  eine Umgebungsbasis der  $0_M$  wird (siehe den Anhang).

**3.3.3.** Seien  $R$  noethersch,  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$  und bezeichne mit  $\text{Cf}(C^*)$  die *koendliche Topologie* auf  $C^*$  (siehe 2.4.4). Dann induziert der Algebra-Morphismus  $\kappa_P : A \longrightarrow C^*$  auf  $A$  eine lineare Topologie  $\kappa_P\text{-Cf}(A)$  mit Umgebungsbasis der  $0_A$ :

$$\mathcal{B}_{\kappa_P}(0_A) := \{\kappa_P^{-1}(J) \mid J \triangleleft C^* \text{ ist ein } R\text{-koendliches zweiseitiges Ideal}\}.$$

Nach Definition ist  $\kappa_P\text{-Cf}(A)$  die *feinste* lineare Topologie  $\mathfrak{T}$  auf  $A$ , so dass  $(A, \mathfrak{T})$  eine linear topologische  $R$ -Algebra und  $\kappa_P : A \longrightarrow C^*$   $(\mathfrak{T}, \text{Cf}(C^*))$ -stetig ist.

**3.3.4.** Sei  $Q = (M, N) \in \mathcal{Q}_P^r$  und betrachte  ${}_A N^*$  mit der  $R$ -koendlichen Topologie  $\text{Cf}(N^*)$ . Dann induziert die  $A$ -lineare Abbildung  $\kappa_Q : M \longrightarrow N^*$  auf  $M$  eine Topologie  $\kappa_Q\text{-Cf}(M)$  mit Umgebungsbasis der  $0_M$

$$\mathcal{B}_{\kappa_Q}(0_M) := \{\kappa_Q^{-1}(L) \mid L \subset N^* \text{ ist ein } R\text{-koendlicher } A\text{-Untermodul}\}.$$

Klar ist  $\kappa_Q\text{-Cf}(M)$  ein linear topologischer  $\text{Cf}(A)$ -Rechtsmodul und ist die *feinste* Topologie  $\mathfrak{T}$  auf  $M$ , so dass  $(M, \mathfrak{T})$  ein linear topologischer  $(A, \text{Cf}(A))$ -Rechtsmodul ist und  $\kappa_Q : M \longrightarrow N^* (\mathfrak{T}, \text{Cf}(N^*))$ -stetig ist.

**3.3.5. Lemma.** Seien  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$  und  $Q = (M, N) \in \mathcal{Q}_P^r$ .

1. Die linear schwache Topologie  $M[\mathfrak{T}_{ls}(N)]$  und die Topologie  $\mathfrak{T}_N(M)$  stimmen überein. Somit ist  $M$ , versehen mit der linear schwachen Topologie, ein linear topologischer  $(A, \mathcal{T}_{-C}(A))$ -Rechtsmodul.
2. Ist  $R$  noethersch und erfüllt  $P$  die  $\alpha$ -Bedingung, dann ist  $M[\mathfrak{T}_{ls}(N)] \leq \kappa_Q\text{-Cf}(M) \leq \text{Cf}(M)$ .

**Beweis.** 1. Sei  $U \subset M$  eine Umgebung der  $0_M$  bzgl.  $M[\mathfrak{T}_{ls}(N)]$ . Dann existiert ein endlich erzeugter  $R$ -Untermodule  $K \subset N$ , so dass  $K^\perp \subseteq U$ . Ist  $m \in \text{An}_M(K)$ , dann gilt für beliebiges  $n \in K$  :

$$\langle m, n \rangle = \langle m, \sum n_{<0>} \varepsilon(n_{<1>}) \rangle = \varepsilon\left(\sum \langle m, n_{<0>} \rangle n_{<1>}\right) = \varepsilon(\theta_m(n)) = 0.$$

Somit ist  $\text{An}_M(K) \subseteq K^\perp \subseteq U$ , also ist  $U$  eine Umgebung der  $0_M$  bzgl.  $\mathfrak{T}_N(M)$ .

Andererseits, ist  $U \subset M$  eine Umgebung der  $0_M$  bzgl.  $\mathfrak{T}_N(M)$ , dann existiert ein endlich erzeugter  $R$ -Untermodule  $K = \sum_{i=1}^l Rn_i \subset N$ , so dass  $\text{An}_M(K) \subseteq U$ . Nehme an  $\varrho_N(n_i) = \sum_{j=1}^{l_i} n_{ij} \otimes c_{ij}$  und setze  $W := \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{l_i} Rn_{ij}$ . Dann ist  $W^\perp \subseteq \text{An}_M(K) \subseteq U$ , also ist  $U$  eine Umgebung der  $0_M$  bzgl.  $M[\mathfrak{T}_{ls}(N)]$ . Daher ist  $M[\mathfrak{T}_{ls}(N)] = \mathfrak{T}_N(M)$ .

2. Sei  $U \subset M$  eine Umgebung der  $0_M$  bezüglich  $M[\mathfrak{T}_{ls}(N)]$ . Dann existiert ein endlich erzeugter  $R$ -Untermodule  $K \subset N$ , so dass  $K^\perp \subseteq U$ . Nach Voraussetzung ist  $P \in \mathcal{P}_m^\alpha$  und daher existiert nach dem Endlichkeitssatz 2.2.23 ein  $A$ -Untermodule  $\tilde{K} \subset N$ , so dass  $K \subseteq \tilde{K}$  und  ${}_R\tilde{K}$  e.e. in  ${}_R\mathcal{M}$  ist. Außerdem ist  $N^*/\text{An}(\tilde{K}) \hookrightarrow \tilde{K}^*$  und somit ist  $\text{An}(\tilde{K}) \subset N^*$  ein  $R$ -koendlicher  $A$ -Untermodule und  $\kappa_Q^{-1}(\text{An}(\tilde{K})) := \tilde{K}^\perp \subseteq K^\perp \subset U$ , also ist  $U$  eine Umgebung der  $0_M$  bezüglich  $\kappa_Q\text{-Cf}(M)$ .

Ist  $U \subset M$  eine Umgebung der  $0_M$  bezüglich  $\kappa_Q\text{-Cf}(M)$ , dann existiert ein  $R$ -koendlicher  $A$ -Untermodule  $L \subset N^*$ , so dass  $\kappa_Q^{-1}(L) \subseteq U$ . Dann ist  $M/\kappa_Q^{-1}(L) \hookrightarrow N^*/L$ , und daher ist  $\kappa_Q^{-1}(L) \subset M$  ein  $R$ -koendlicher  $A$ -Untermodule, also ist  $U$  eine Umgebung der  $0_M$  bezüglich  $\text{Cf}(M)$ .

**3.3.6. Definition.** Seien  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m$  und  $Q = (M, N) \in \mathcal{Q}_P^r$  mit  $N \subset M^*$ .

1. Ist  $P \in \mathcal{P}_m^\alpha$ , dann nennen wir  $Q$  **schwach-koreflexiv**, wenn  $N = M^r$  ist.
2. Ist  $R$  noethersch, dann nennen wir  $Q$  **koreflexiv**, falls  $M[\mathfrak{T}_{ls}(N)] = \text{Cf}(M)$  ist.

3. Wir nennen  $Q$  **proper** (bzw. **schwach-reflexiv**, **reflexiv**), wenn  $\kappa_Q : M \longrightarrow N^*$  injektiv (bzw. surjektiv, bijektiv) ist.

**3.3.7. Definition.** 1. Seien  $C$  eine  $R$ -Koalgebra,  $N$  ein  $C$ -Rechtskomodul und nehme  $N$  sei  $R$ -koerzeugt.

- (a) Erfüllt  $C$  die  $\alpha$ -Bedingung, dann nennen wir  $N$  **schwach-koreflexiv**, falls  $N = N^{*\square}$  ist.
  - (b) Ist  $R$  noethersch, dann nennen wir  $N$  **koreflexiv**, falls  $N^*[\mathfrak{T}_{ls}(N)] = \text{Cf}(N^*)$  ist.
2. Seien  $R$  noethersch und  $A$  eine  $R$ -Algebra. Einen  $A$ -Rechtsmodul  $M$  nennen wir: **proper** (bzw. **schwach-reflexiv**, **reflexiv**), wenn die kanonische  $A$ -lineare Abbildung  $\lambda_M : M \longrightarrow M^{\circ*}$  injektiv (bzw. surjektiv, bijektiv) ist.

**3.3.8. Bemerkungen.** 1. Betrachte den Grundring  $R$  als eine triviale  $R$ -Bialgebra. Dann ist  $R^* \simeq R$ ,  $\mathcal{M}_R \simeq \mathcal{M}^R$  und es gilt für jeden  $R$ -(Ko-)Modul  $N : N^{**} = \text{Rat}^R(N^{**}) = \text{Loc}(R^*N^{**})$ . Somit ist  $N$  genau dann (ko)reflexiv, wenn  $N$  reflexiv ist im üblichen Sinne, also wenn die kanonische  $R$ -lineare Abbildung  $\Phi_N : N \longrightarrow N^{**}$  bijektiv ist.

2. Für jedes  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  ist  $C = A^r$  (nach Folgerung 2.2.10 (1)) und somit ist  $P \in \mathcal{Q}_P^r$  schwach-koreflexiv.

**3.3.9. Definition.** Seien  $A$  eine  $R$ -Algebra,  $M$  ein  $A$ -Linksmodul (bzw.  $A$ -Rechtsmodul) und betrachte die Klasse der  $R$ -koendlichen  $A$ -Untermoduln  $\mathcal{K}_M$ . Wir nennen  $M$   **$R$ -c-koerzeugt**, falls  $M/L$   $R$ -koerzeugt ist für jedes  $L \in \mathcal{K}_M$ .

Analog zum Beweis von Proposition 2.4.19 bekommen wir:

**3.3.10. Proposition.** Seien  $R$  noethersch,  $A$  eine  $R$ -Algebra und  $M$  ein  $A$ -Rechtsmodul.

- 1. Ist  $M$  proper, dann ist  $\text{Cf}(M)$  Hausdorff.
- 2. Sei  $M$   $R$ -c-koerzeugt. Dann ist  $\text{Cf}(M)$  Hausdorff genau dann, wenn  $M$  proper ist.
- 3. Ist  $R$  ein QF Ring, dann gilt:

$$M \text{ ist proper} \iff \text{Cf}(M) \text{ Hausdorff ist} \iff M^\circ \subset M^* \text{ dicht ist.}$$

**3.3.11. Satz.** Seien  $R$  noethersch,  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  und  $Q = (M, N) \in \mathcal{Q}_P^r$  mit  $N \subset M^*$ .

- 1. Ist  $Q$  koreflexiv, dann ist  $M^r = M^\circ$ .
- 2. Sei  $M$   $R$ -c-koerzeugt.

- (a) Ist  $N \stackrel{x_Q}{\simeq} M^\circ$ , dann ist  $Q$  koreflexiv.

(b) Sei  $Q$  schwach koreflexiv. Dann ist  $Q$  koreflexiv genau dann, wenn  $N \stackrel{\chi_Q}{\simeq} M^\circ$  ist.

**Beweis.** 1. Sei  $f(L) = 0$  für einen  $R$ -koendlichen  $A$ -Unterm modul  $L \subset M$  und nehme an  $M/L = \sum_{i=1}^k R(m_i + L)$ . Nach Voraussetzung ist  $M[\mathfrak{T}_{ls}(N)] = \text{Cf}(M)$  und somit ist  $L$  offen bezüglich  $M[\mathfrak{T}_{ls}(N)]$ . Nach Folgerung A.0.6 ist  $\xi_{m_i} : A \rightarrow M(A[\mathfrak{T}_{ls}(C)], M[\mathfrak{T}_{ls}(N)])$ -stetig für  $i = 1, \dots, k$  und es existieren somit endlich erzeugte  $R$ -Untermodule  $Z_1, \dots, Z_k \subseteq C$ , so dass  $Z_i^\perp \subseteq \xi_{m_i}^{-1}(L)$ . Daher ist  $(\sum_{i=1}^k Z_i)^\perp = \bigcap_{i=1}^k Z_i^\perp \subseteq (0 : f)$ , also ist  $f \in M^r$  (nach Proposition 2.2.26). Offensichtlich ist  $M^r \subset M^\circ$  und die Aussage folgt.

2. Sei  $M$   $R$ -c-koerzeugt.

(a) Nehme an  $N \stackrel{\chi_Q}{\simeq} M^\circ$ . Ist  $L \subset M$  ein  $R$ -koendlicher  $A$ -Unterm modul und ist  $\{f_1, \dots, f_k\}$  ein Erzeugendensystem von  $\text{An}(L) \simeq (M/L)^*$ , dann existieren nach Voraussetzung  $\{n_1, \dots, n_k\} \subset N$ , so dass  $\chi_Q(n_i) = f_i$ . Nach A.0.3 gilt dann

$$\left(\sum_{i=1}^k Rn_i\right)^\perp = \bigcap_{i=1}^k \text{Ke}(f_i) = \text{Ke}\left(\sum_{i=1}^k Rf_i\right) = \text{KeAn}(L) = L,$$

also ist  $L$  offen bzgl.  $M[\mathfrak{T}_{ls}(N)]$ . Daher ist  $\text{Cf}(M) \leq M[\mathfrak{T}_{ls}(N)]$ . Laut Lemma 3.3.5 ist  $M[\mathfrak{T}_{ls}(N)] \leq \text{Cf}(M)$  und somit ist  $M[\mathfrak{T}_{ls}(N)] = \text{Cf}(M)$ , d.h.  $Q$  ist koreflexiv.

(b) Die Aussage folgt aus (1) und (a).

**3.3.12. Folgerung.** Seien  $R$  noethersch,  $C$  eine  $\alpha$ -Koalgebra und  $N$  ein  $R$ -koerzeugter  $C$ -Rechtskomodul.

1. Ist  $N$  koreflexiv, dann ist  $N^{*\square} = N^{*\circ} := \text{Loc}(C^*N^{**})$ .

2. Sei  $N^*$   $R$ -c-koerzeugt.

(a) Ist  $N \simeq N^{*\circ}$ , dann ist  $N$  koreflexiv.

(b) Sei  $N$  schwach-koreflexiv. Dann ist  $N$  genau dann koreflexiv, wenn  $N \simeq N^{*\circ}$  ist.

**3.3.13. Satz.** Seien  $R$  noethersch und  $P = (A, C) \in \mathcal{P}_m^\alpha$ .

1. Ist  $P$  koreflexiv, dann ist  $C = A^\circ$ .

2. Ist  $R$  artinsch, dann ist  $P$  koreflexiv genau dann, wenn alle  $R$ -koendlichen  $A$ -Ideale abgeschlossen sind bzgl.  $A[\mathfrak{T}_{ls}(C)] = \mathcal{T}_{-C}(A)$ .

3. Ist  $A$   $R$ - $c$ -koerzeugt, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $P$  ist koreflexiv;
- (ii)  $C = A^\circ$ .
- (iii) jeder lokal endlicher  $A$ -Linksmodul ist  $C$ -rational, also  $\text{Loc}({}_A\mathcal{M}) \simeq \sigma[{}_AC]$ .

**Beweis.** 1. Nach Folgerung 2.2.10 (1) ist  $C = A^r$  und die Aussage folgt daher aus Satz 3.3.11 (1).

2. Sei  $R$  artinsch. Dann ist laut Folgerung A.0.4 jedes  $R$ -koendliche abgeschlossene  $A$ -Ideal offen und die Aussage folgt.

3. (i)  $\iff$  (ii) folgt aus Satz 3.3.11 (3).

(ii)  $\implies$  (iii) Nach Proposition 2.4.18 (2) ist  $\text{Loc}({}_A\mathcal{M}) = \sigma[{}_AA^\circ]$  und die Aussage folgt aus  $C = A^\circ$ .

(iii)  $\implies$  (ii) Seien alle lokal endlichen  $A$ -Linksmoduln  $C$ -rational. Dann ist insbesondere  ${}_AA^\circ$   $C$ -rational und es folgt aus Folgerung 2.2.10 (2)  $C = A^\circ$ .

**3.3.14. Folgerung.** Seien  $R$  noethersch und  $C$  eine  $\alpha$ -Koalgebra.

- 1. Ist  $C$  koreflexiv, dann induziert die kanonische Abbildung  $\phi_C : C \longrightarrow C^{**}$  einen Isomorphismus  $C \xrightarrow{\Phi_C} C^{*\circ}$ .
- 2. Sei  $R$  artinsch. Dann ist  $C$  koreflexiv genau dann, wenn alle  $R$ -koendlichen  $C^*$ -Ideal abgeschlossen sind bzgl. der endlichen Topologie.
- 3. Ist  $C^*$   $R$ - $c$ -koerzeugt, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
  - (i)  $C$  ist koreflexiv;
  - (ii)  $C \simeq C^{*\circ}$ ;
  - (iii) jeder lokal endliche  $C^*$ -Linksmodul ist  $C$ -rational.

Als Schlussfolgerung von Lemma 3.2.2 und Satz 3.3.13 (3) bekommen wir:

**3.3.15. Proposition.** Sei  $R$  noethersch. Ist  $A$  eine  $R$ - $c$ -koerzeugte  $\alpha$ -Algebra  $(M, \phi_M)$  ein  $A$ -Rechtsmodul, dann sind für jedes  $f \in M^*$  die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1.  $f \in M^\circ$ .
- 2.  $\phi_M^*(f) \in M^\circ \otimes A^\circ$ .
- 3.  $\phi_M^*(f) \in M^\circ \otimes A^*$ .
- 4.  $Af$  ist e.e. in  ${}_R\mathcal{M}$ .
- 5.  $f(MI) = 0$  für ein  $R$ -koendliches  $A$ -(Rechts)-Ideal.

6.  $f(L) = 0$  für einen  $R$ -koendlichen  $A$ -Unterm modul  $L \subset M$ .

Analog zu [Taf72] bekommen wir die folgende Aussage:

**3.3.16. Folgerung.** *Sei  $R$  ein QF Ring.*

1. *Eine projektive  $R$ -Koalgebra  $C$  ist genau dann koreflexiv, wenn  $C^*$  eine reflexive  $R$ -Algebra ist.*
2. *Sei  $A$  eine  $\alpha$ -Algebra. Ist  $A$  schwach-reflexiv, dann ist  $A^\circ$  eine koreflexive  $R$ -Koalgebra.*

**3.3.17. Beispiel.** ([Lin77, Example 5]) Seien  $R$  ein Körper und betrachte die  $R$ -Hopf-Algebra  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$  mit abzählbarer Basis  $\{h_0, h_1, h_2, \dots\}$  und

$$\begin{aligned} \mu(h_n \otimes h_k) &:= \binom{n+k}{n} h_{n+k}, & \Delta(h_n) &:= \sum_{i+j=n} h_i \otimes h_j, & S(h_n) &:= (-1)^n h_n. \\ \eta(1_R) &:= h_0, & \varepsilon(h_n) &:= \delta_{0,n}, \end{aligned}$$

1.  $H^* \simeq R[[x]]$  ist ein Hauptideal-Ring und es gilt

$$\mathcal{M}^H \simeq \text{Rat}^H({}_H \mathcal{M}) = \{M \in {}_H \mathcal{M} \mid M \text{ ist ein Torsionsmodul}\}.$$

Somit ist  $\text{Rat}^H(-)$  ein Radikal und  $\text{Rat}^H({}_H \mathcal{M})$  ist abgeschlossen gegen Erweiterungen.

2.  $H^\square := \text{Rat}^H({}_H H^*) = 0$ .
3. Es gibt keine endlich-dimensionalen ungleich-Null projektiven  $H$ -Rechtskomoduln.
4.  $H \simeq H^{*\circ}$ , also ist  $H$  eine koreflexive  $R$ -Koalgebra.

## 3.4 Duale Doi-Koppinen-Hopf-Moduln

Die sogenannten Doi-Koppinen-Hopf-Moduln wurden von Y. Doi [Doi92] und M. Koppinen [Kop95] eingeführt und gelten als Subsumierung von verschiedenen Arten von Moduln (etwa den *Hopf-Moduln*, den *Dimoduln* und den *Yetter-Drinfeld-Moduln*). In diesem Paragraphen führen wir eine *nicht endliche* Version der dualen Doi-Koppinen-Hopf-Moduln über kommutativen Ringen ein. Unabhängig davon wurden diese von L. Zhang ([Zha97]) über Körpern betrachtet.

Als Vorbereitung dafür übertragen wir zunächst die benötigten Aussagen vom Körper-Fall auf beliebige noethersche Ringe.

**3.4.1. Definition.** Sei  $H$  eine  $R$ -Bialgebra.

1. Eine  **$H$ -Rechtsmodul-Algebra** ist eine  $R$ -Algebra  $(A, \mu_A, \eta_A)$  mit einer  $H$ -Rechtsmodul-Struktur vermöge  $\phi_A : A \otimes H \longrightarrow A$ , so dass  $\mu_A$  und  $\eta_A$   $H$ -linear sind, d.h.

$$a\tilde{a} \leftarrow h = \sum (ah_1)(\tilde{a}h_2) \text{ und } 1_A h = \varepsilon(h)1_A \text{ für alle } a, \tilde{a} \in A \text{ und } h \in H. \quad (3.4)$$

Analog definiert man die  $H$ -Linksmodul-Algebren.

2. Eine  **$H$ -Rechtsmodul-Koalgebra** ist eine  $R$ -Koalgebra  $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$  mit einer  $H$ -Rechtsmodul-Struktur vermöge  $\phi_C : C \otimes_R H \longrightarrow C$ , so dass  $\Delta_C$  und  $\varepsilon_C$   $H$ -linear sind (gleichbedeutend  $\phi_C$  ist ein Koalgebra-Morphismus), d.h.

$$\Delta_C(ch) = \sum c_1 h_1 \otimes c_2 h_2 \text{ und } \varepsilon_C(ch) = \varepsilon_C(c)\varepsilon_H(h) \quad \forall c \in C, h \in H. \quad (3.5)$$

Analog definiert man die  $H$ -Linksmodul-Koalgebren.

### 3.4.2. Definition. Sei $H$ eine $R$ -Bialgebra.

1. Eine  **$H$ -Rechtskomodul-Algebra** ist eine  $R$ -Algebra  $A$  mit einer  $H$ -Rechtskomodul-Struktur vermöge  $\varrho_A : A \longrightarrow A \otimes_R H$ , so dass  $\mu_A$  und  $\eta_A$   $H$ -kolinear sind (gleichbedeutend  $\varrho_A$  ein Algebra-Morphismus ist), d.h.

$$\varrho_A(a\tilde{a}) = \sum a_{<0>} \tilde{a}_{<0>} \otimes a_{<1>} \tilde{a}_{<1>} \text{ und } \varrho_A(1_A) = 1_A \otimes 1_H. \quad (3.6)$$

Analog definiert man die  $H$ -Linksmodul-Algebren.

2. Eine  **$H$ -Rechtskomodul-Koalgebra** ist eine  $R$ -Koalgebra  $C$ , die auch ein  $H$ -Rechts-

komodul vermöge  $\varrho_C : C \longrightarrow C \otimes H$ , so dass  $\Delta_C$  und  $\varepsilon_C$   $H$ -kolinear sind, d.h.

$$\sum c_{<0>1} \otimes c_{<0>2} \otimes c_{<1>} = \sum c_{1<0>} \otimes c_{2<0>} \otimes c_{1<1>} c_{2<1>}, \quad \sum \varepsilon(c_{<0>}) c_{<1>} = \varepsilon(c) 1_H. \quad (3.7)$$

Analog definiert man die  $H$ -Linksmodul-Koalgebren.

**3.4.3. Lemma.** Seien  $R$  noethersch und  $H$  eine  $R$ -Bialgebra. Ist  $A$  eine  $H$ -Rechtsmodul-Algebra (bzw.  $H$ -Linksmodul-Algebra), dann ist  $A^\circ \subset A^*$  ein  $H$ -Linksuntermodul (bzw.  $H$ -Rechtsuntermodul).

**Beweis.** Sei  $A$  eine  $H$ -Rechtsmodul-Algebra. Ist  $f \in A^\circ$ , dann gilt für beliebige  $h \in H$  und  $a, \tilde{a} \in A$ :

$$\begin{aligned} (\tilde{a}(hf))(a) &= (hf)(a\tilde{a}) \\ &= f((a\tilde{a})h) \\ &= f(\sum (ah_1)(\tilde{a}h_2)) \\ &= \sum f_1(ah_1) f_2(\tilde{a}h_2) \\ &= [\sum (h_2 f_2)(\tilde{a})(h_1 f_1)](a). \end{aligned}$$

Daher ist  $hf \in \text{Loc}({}_A A^*) = A^\circ$  für jedes  $h \in H$ , also ist  $A^\circ \subset A^*$  ein  $H$ -Linksuntermodul.

Ist  $A$  eine  $H$ -Linksmodul-Algebra, dann zeigt man analog, dass  $A^\circ \subset A^*$  ein  $H$ -Rechtsuntermodul ist.

**3.4.4. Lemma.** (vgl. [Mon93, Example 4.1.10.]) Sei  $H$  eine  $R$ -Bialgebra und betrachte  $H^*$  als einen  $H$ -Bimodul mit der regulären  $H$ -Biwirkung.

1.  $H^*$  ist sowohl eine  $H$ -Rechtsmodul-Algebra als auch eine  $H$ -Linksmodul-Algebra.

2. Seien  $R$  noethersch und  $H$  eine  $\alpha$ -Bialgebra.

(a)  $H^\circ \subset H^*$  ist eine  $H$ -Rechtsuntermodul-Algebra und eine  $H$ -Linksuntermodul-Algebra.

(b) Ist  $U \subseteq H^\circ$  eine  $R$ -Unterbialgebra, dann ist  $H$  sowohl eine  $U$ -Linksmodul-Algebra als auch eine  $U$ -Rechtsmodul-Algebra vermöge

$$f \rightharpoonup h := \sum f(h_2)h_1 \text{ und } h \leftharpoonup f := \sum f(h_1)h_2 \text{ für alle } f \in U, h \in H.$$

**3.4.5. Proposition.** Seien  $R$  noethersch,  $H$  eine  $\alpha$ -Bialgebra und  $A$  eine  $\alpha$ -Algebra. Ist  $A$  eine  $H$ -Linkskomodul-Algebra (bzw.  $H$ -Rechtskomodul-Algebra), dann ist  $A^\circ$  eine  $H^\circ$ -Linkskomodul-Koalgebra (bzw.  $H^\circ$ -Rechtsmodul-Koalgebra).

**Beweis.** Sei  $A$  eine  $H$ -Linkskomodul-Algebra vermöge eines Algebra-Morphismus  $\varrho : A \rightarrow H \otimes A$  und betrachte die kanonische  $R$ -lineare Abbildung  $\delta : H^\circ \otimes A^\circ \rightarrow (H \otimes A)^\circ$ . Dann sind  $(H \otimes A, H^\circ \otimes A^\circ), (A, A^\circ) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  und wir haben einen Paar-Morphismus

$$(\varrho, \varrho^\circ \circ \delta) : (H \otimes A, H^\circ \otimes A^\circ) \rightarrow (A, A^\circ).$$

Außerdem ist  $A^\circ \otimes A^\circ \hookrightarrow (A \otimes A)^*$  und es folgt aus der Voraussetzung und Lemma 2.1.23 (1), dass  $\varrho^\circ \circ \delta : H^\circ \otimes A^\circ \rightarrow A^\circ$  ein Koalgebra-Morphismus ist, also ist  $(A^\circ, \varrho^\circ \circ \delta)$  eine  $H^\circ$ -Linkskomodul-Koalgebra.

Ist  $A$  eine  $H$ -Rechtskomodul-Algebra, so zeigt man analog, dass  $A^\circ$  eine  $H^\circ$ -Rechtsmodul-Koalgebra ist.

**3.4.6. Proposition.** Seien  $R$  noethersch und  $H$  eine  $\alpha$ -Bialgebra. Dann ist für jede  $H$ -Rechtskomodul-Koalgebra (bzw.  $H$ -Linkskomodul-Koalgebra)  $C$  die duale  $R$ -Algebra  $C^*$  eine  $H^\circ$ -Rechtsmodul-Algebra (bzw.  $H^\circ$ -Linksmodul-Algebra).

**Beweis.** Sei  $C$  eine  $H$ -Rechtskomodul-Koalgebra vermöge  $\varrho_C : C \rightarrow C \otimes H$ . Dann ist  $C$  nach Lemma 2.2.8 ein  $H^*$ -Linksmodul und  $C^*$  ist ein  $H^*$ -Rechtsmodul.  $H^\circ \subset H^*$  ist eine  $R$ -Unteralgebra und somit ist  $C^*$  ein  $H^\circ$ -Rechtsmodul vermöge

$$\phi : C^* \otimes H^\circ \rightarrow C^*, f \otimes g \mapsto [c \mapsto f(c_{<0>})g(c_{<1>})].$$

Sind  $f, f' \in C^*$  und  $g \in H^\circ$ , dann gilt für beliebiges  $c \in C$  :

$$\begin{aligned} ((f \star f')g)(c) &:= \sum (f \star f')(gc) \\ &= \sum (f \star f')(c_{<0>})g(c_{<1>}) \\ &= \sum f(c_{<0>1})f'(c_{<0>2})g(c_{<1>}) \\ &= \sum f(c_{1<0>})f'(c_{2<0>})g(c_{1<1>}c_{2<1>}) \quad (\text{vgl. 3.7}) \\ &= \sum f(c_{1<0>})g_1(c_{1<1>})f'(c_{2<0>})g_2(c_{2<1>}) \\ &= \sum (fg_1)(c_1)(f'g_2)(c_2) \\ &= (\sum (fg_1) \star (f'g_2))(c). \end{aligned}$$

Außerdem gilt für alle  $g \in H^\circ$  und  $c \in C$  :

$$(\varepsilon_C g)(c) := \varepsilon_C(gc) = \sum \varepsilon_C(c_{<0>})g(c_{<1>}) = g(\varepsilon_C(c_{<0>})c_{<1>}) = g(1_H)\varepsilon(c) = (\varepsilon_{H^\circ}(g)1_{C^*})(c).$$

Daher ist  $C^*$  eine  $H^\circ$ -Rechtsmodul-Algebra.

Ist  $C$  eine  $H$ -Linkskomodul-Koalgebra, dann ist  $C^*$  analog eine  $H^\circ$ -Linkskomodul-Algebra.

Im Folgenden führen wir für jede  $R$ -c-koerzeugte  $\alpha$ -Bialgebra  $H$  über einem noetherschen Grundring  $R$  und jede  $H$ -Rechtsmodul-Koalgebra ( $H$ -Linkskomodul-Koalgebra)  $C$  eine  $H^\circ$ -Rechtskomodul  $R$ -Algebra ( $H^\circ$ -Linkskomodul-Algebra)  $C^\circ$  ein, die eine große Rolle bei den Dualisierungen in diesem Paragraphen spielt. Diese wird bei unseren *nicht endlichen* Dualitätssätzen die Rolle von  $C^*$  in den endlichen Versionen übernehmen.

**3.4.7. Proposition.** *Seien  $R$  noethersch und  $H$  eine  $R$ -c-koerzeugte  $\alpha$ -Bialgebra. Ist  $C$  eine  $H$ -Rechtsmodul-Koalgebra (bzw.  $H$ -Linkskomodul-Koalgebra), dann ist*

$$C^\circ := \{f \in C^* \mid \exists \text{ ein } R\text{-koendliches Ideal } I \triangleleft A, \text{ so dass } f(CI) = 0 \text{ (bzw. } f(IC) = 0)\} \quad (3.8)$$

eine  $H^\circ$ -Rechtskomodul-Algebra (bzw.  $H^\circ$ -Linkskomodul-Algebra).

**Beweis.** Sei  $C$  eine  $H$ -Rechtsmodul-Koalgebra vermöge  $\phi_C : C \otimes H \longrightarrow C$ . Nach Proposition 2.4.18 und Lemma 3.2.2 ist  $C^\circ = \text{Loc}({}_H C^*) = \text{Rat}^{H^\circ}({}_H C^*)$ , also ist ein  $H^\circ$ -Rechtskomodul. Sind  $f, g \in C^\circ$ , dann gilt für beliebige  $h \in H$  und  $c \in C$  :

$$\begin{aligned} [h(f \star g)](c) &= (f \star g)(ch) \\ &= (f \otimes g)(\sum c_1 h_1 \otimes c_2 h_2) \\ &= \sum f(c_1 h_1)g(c_2 h_2) \\ &= \sum (h_1 f)(c_1)(h_2 g)(c_2) \\ &= \sum [f_{<0>}(c_1)f_{<1>}(h_1)][g_{<0>}(c_2)g_{<1>}(h_2)] \\ &= [\sum (f_{<1>} \star g_{<1>})(h)(f_{<0>} \star g_{<0>})](c), \end{aligned} \quad 3.5$$

also ist  $f \star g \in \text{Loc}({}_H C^*) = C^\circ$ . Nach Voraussetzung ist  $\phi_C : C \otimes H \longrightarrow C$  ein Koalgebra-Morphismus und somit ist  $\phi_C^* : C^* \longrightarrow (C \otimes H)^*$  ein Algebra-Morphismus. Daher ist  $\phi_C^\circ : C^\circ \longrightarrow C^\circ \otimes H^\circ$  ein Algebra-Morphismus, also ist  $C^\circ$  eine  $H^\circ$ -Rechtskomodul-Algebra.

Analog bekommt man die entsprechende Aussage für die  $H$ -Linkskomodul-Koalgebren.

**3.4.8. Ein Links-Rechts-Doi-Koppinen-Datum**  $(H, A, C)$  besteht aus einer  $R$ -Bialgebra  $H$ , einer  $H$ -Linkskomodul-Algebra  $(A, \varrho_A)$  und einer  $H$ -Rechtsmodul-Koalgebra  $(C, \phi_C)$ . Ein  $(H, A, C)$ -**Doi-Koppinen-Rechts-Linksmodul** ist ein Tripel  $(M, \phi_M, \varrho_M)$ , wobei  $(M, \varphi_M)$  ein  $A$ -Rechtsmodul und  $(M, \varrho_M)$  ein  $C$ -Linkskomodul sind, so dass

$$\varrho_M(ma) = \sum m_{<-1>}a_{<-1>} \otimes m_{<0>}a_{<0>} \text{ für alle } a \in A \text{ und } m \in M. \quad (3.9)$$

Mit  ${}^C\mathcal{M}(H)_A$  bezeichnen wir die Kategorie der Rechts-Links-Doi-Koppinen-Moduln mit Morphismen den  $A$ -linearen  $C$ -kolinearen Abbildungen.

Ein Rechts-Links-Doi-Koppinen-Datum  $(H, A, C)$  besteht aus einer  $R$ -Bialgebra  $H$ , einer  $H$ -Rechtskomodul-Algebra  $(A, \varrho_A)$  und einer  $H$ -Linksmodul-Koalgebra  $(C, \phi_C)$ . Die Kategorie der  $(H, A, C)$ -Links-Rechtsmoduln  ${}_A\mathcal{M}^C(H)$  hat als Objekte  $(N, \varphi_N, \varrho_N) \in {}_A\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^C$ , so dass

$$\varrho_M(an) = \sum a_{<0>} n_{<0>} \otimes a_{<1>} n_{<1>} \text{ für alle } a \in A \text{ und } n \in N \quad (3.10)$$

und hat als Morphismen die  $A$ -linearen  $C$ -kolinearen Abbildungen.

Analog definiert man die Kategorien  ${}_A^C\mathcal{M}(H)$  und  $\mathcal{M}_A^C(H)$  (siehe [CMZ97]). Für eine  $R$ -Bialgebra (bzw.  $R$ -Hopf-Algebra)  $H$  stimmen die Kategorie  $\mathcal{M}_H^H(H)$  und die Kategorie der  $H$ -Rechtsbimoduln ( $H$ -Hopf-Rechtsmoduln) im Sinne von [Abe80, Chapter 3, 1.3] ([Swe69]) überein.

**3.4.9. Proposition.** *Seien  $R$  noethersch,  $H$  eine  $R$ -c-koerzeugte  $\alpha$ -Bialgebra,  $A$  eine  $R$ -c-koerzeugte  $\alpha$ -Algebra und  $(H, A, C)$  ein Links-Rechts-Doi-Koppinen-Datum.*

1.  $(H^\circ, C^\circ, A^\circ)$  ein Rechts-Links-Doi-Koppinen-Datum.
2. Es gibt einen kontravarianten Funktor

$$(-)^\circ : {}^C\mathcal{M}(H)_A \longrightarrow {}^{C^\circ}\mathcal{M}(H^\circ)^{A^\circ}, \quad M \longmapsto M^\circ. \quad (3.11)$$

3. Ist  $(C^\circ, C)$  ein  $\alpha$ -Paar, dann gibt es einen kontravarianten Funktor:

$$(-)^\diamond : {}^{C^\circ}\mathcal{M}(H^\circ)^{A^\circ} \longrightarrow {}^C\mathcal{M}(H)_A, \quad N \longmapsto N^\diamond := {}^C\text{Rat}(N_{C^\circ}^*). \quad (3.12)$$

Außerdem sind die kontravarianten Funktoren (3.11) und (3.12) rechts adjungiert.

**Beweis.** 1. Folgt aus Propositionen 3.4.5 und 3.4.7.

2. Sei  $(M, \varphi_M, \varrho_M) \in {}^C\mathcal{M}(H)_A$ . Laut Propositionen 2.4.18 und 3.3.15 ist  $(M^\circ, \varphi_M^\circ)$  ein  $A^\circ$ -Rechtskomodul.  $M \in {}^C\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{C^*}$  und daher ist  $M^*$  ein  $C^*$ -Linksmodul. Nach Proposition 3.4.7 ist  $C^\circ \subset C^*$  eine  $R$ -Unteralgebra und damit ist  $M^*$  ein  $C^\circ$ -Linksmodul. Außerdem gilt für beliebige  $a \in A, f \in C^\circ, g \in M^\circ$  und  $m \in M$ :

$$\begin{aligned} [a(fg)](m) &= (fg)(ma) \\ &= (f \otimes g)(\varrho_M(ma)) \\ &= \sum (f \otimes g)(m_{<-1>} a_{<-1>} \otimes m_{<0>} a_{<0>}) \\ &= \sum f(m_{<-1>} a_{<-1>}) g(m_{<0>} a_{<0>}) \\ &= \sum [(a_{<-1>} f)(m_{<-1>})][(a_{<0>} g)(m_{<0>})] \\ &= \sum [f_{<0>}(m_{<-1>}) f_{<1>}(a_{<-1>})][g_{<0>}(m_{<0>}) g_{<1>}(a_{<0>})] \\ &= \sum [g_{<0>}(m f_{<0>})][g_{<1>}(a f_{<1>})] \\ &= (\sum (f_{<1>} g_{<1>})(a)(f_{<0>} g_{<0>}))(m), \end{aligned}$$

d.h.  $fg \in \text{Loc}({}_A M^*) = M^\circ$ . Daher ist  $M^\circ$  ein  $C^\circ$ -Linksmodul.

Sind  $f \in C^\circ$  und  $g \in M^\circ$ , dann gilt wie oben gezeigt für  $\phi_M^\circ : M^\circ \longrightarrow M^\circ \otimes A^\circ$  :

$$\phi_M^\circ(fg)(m \otimes a) = (fg)(ma) = (\sum f_{<0>}g_{<0>} \otimes f_{<1>}g_{<1>})(m \otimes a).$$

Nach Folgerung 2.1.10 (1) ist die kanonische  $R$ -lineare Abbildung  $\delta : M^\circ \otimes A^\circ \longrightarrow (M \otimes A)^*$  injektiv und daher ist

$$\phi_M^\circ(fg) = \sum f_{<0>}g_{<0>} \otimes f_{<1>}g_{<1>},$$

also ist  $M^\circ$  ein  $(H^\circ, C^\circ, A^\circ)$ -Doi-Koppinen-Links-Rechtsmodul (vgl. (3.10)).

Seien  $M, N \in {}^C\mathcal{M}(H)_A$ ,  $h \in {}^C\text{Hom}_{-A}(M, N)$  und betrachte  $M^\circ, N^\circ \in {}_{C^\circ}\mathcal{M}^{A^\circ}(H^\circ)$ . Nach Lemmata 2.2.8 und 2.2.9 ist  $h^\circ : N^\circ \longrightarrow M^\circ$   $A^\circ$ -kolinear und  $C^\circ$ -linear.

3. Nehme an  $(C^\circ, C)$  erfüllt die  $\alpha$ -Bedingung. Sei  $N \in {}_{C^\circ}\mathcal{M}^{A^\circ}(H^\circ)$ . Dann ist  $N^*$  ein  $C^\circ$ -Rechtsmodul und somit ist  $N^\diamond := {}^C\text{Rat}(N_{C^\circ}^*) \in {}^C\mathcal{M}$  (vgl. Lemma 2.2.9). Andererseits ist  $N \in \mathcal{M}^{A^\circ}$  und somit ist  $N \in {}_A\mathcal{M}$  und  $N^* \in \mathcal{M}_A$ . Ist  $g \in N^\diamond$ , dann gilt für beliebige  $a \in A$ ,  $f \in C^\circ$  und  $n \in N$  :

$$\begin{aligned} ((ga)f)(n) &= (ga)(fn) \\ &= g(a(fn)) \\ &= \sum g(f_{<0>}n_{<0>}) \langle a, f_{<1>}n_{<1>} \rangle \\ &= \sum (gf_{<0>})(n_{<0>}) \langle af_{<1>}, n_{<1>} \rangle \\ &= \sum f_{<0>}(g_{<-1>}g_{<0>}(n_{<0>}))f_{<1>}(a_{<-1>}) \langle a_{<0>}, n_{<1>} \rangle \\ &= \sum f_{<0>}(g_{<-1>}f_{<1>}(a_{<-1>}))g_{<0>}(n_{<0>}) \langle a_{<0>}, n_{<1>} \rangle \\ &= \sum (a_{<-1>}f)(g_{<-1>}g_{<0>}(a_{<0>}n)) \\ &= [\sum f(g_{<-1>}a_{<-1>})(g_{<0>}a_{<0>})](n), \end{aligned}$$

also ist  $N^\diamond \subset N^*$  ist ein  $A$ -Unterm modul.

Seien  $M \in {}^C\mathcal{M}(H)_A$  und  $N \in {}_{C^\circ}\mathcal{M}(H^\circ)^{A^\circ}$  und betrachte die kanonischen  $R$ -linearen Abbildungen

$$\lambda_M : M \longrightarrow M^{\circ*} \text{ und } \lambda_N : N \longrightarrow N^{\diamond*}.$$

Offensichtlich sind  $\lambda_M$   $C^\circ$ -linear und  $\lambda_N$   $A$ -linear und daher gilt nach Lemma 2.2.7

$$\lambda_M(M) \subset M^{\diamond\diamond} \text{ und } \lambda_N(N) \subset N^{\diamond\diamond}.$$

Man sieht leicht, dass wir in  $M, N$  funktorielle Morphismen haben:

$$\begin{aligned} \Phi_{M,N} : {}^C\text{Hom}_{-A}(M, N^\diamond) &\longrightarrow {}^{A^\circ}\text{Hom}_{C^\circ-}(N, M^\circ), & f &\longmapsto f^\circ \circ \lambda_N, \\ \Psi_{M,N} : {}^{A^\circ}\text{Hom}_{C^\circ-}(N, M^\circ) &\longrightarrow {}^C\text{Hom}_{-A}(M, N^\diamond), & g &\longmapsto g^\diamond \circ \lambda_M. \end{aligned}$$

Außerdem ist  $\Phi_{M,N} \circ \Psi_{M,N} = id$ ,  $\Psi_{M,N} \circ \Phi_{M,N} = id$  und die Aussage folgt.

Inspiziert von [Liu94] und im Widerspruch zu [Abe80, Seite138] zeigt das folgende Beispiel, dass für eine  $R$ -Hopf-Algebra  $H$  über einem Körper die duale  $R$ -Koalgebra  $A^\circ$  einer  $H$ -Modul-Algebra  $A$  im Allgemeinen *keine*  $H^\circ$ -Komodul-Koalgebra ist.

**3.4.10. Gegenbeispiel.** Seien  $R$  ein Körper und  $H$  eine *koreflexive*  $R$ -Hopf-Algebra mit  $\dim(H) = \infty$  (z.B. die  $R$ -Hopf-Algebra von Beispiel 3.3.17). Nach Lemma 3.4.4 ist  $H^*$  eine  $H$ -Rechtsmodul-Algebra. Ist  $H \simeq H^{*\circ}$  eine  $H^\circ$ -Rechtskomodul-Koalgebra, dann existiert ein  $R$ -koendliches Ideal  $J \triangleleft H$ , so dass

$$0 = \langle 1_H, H^* \leftarrow J \rangle = \langle J, H^* \rangle.$$

Daher ist aber  $J = 0$  (Widerspruch, da  $\dim(H) = \infty$ ).

## Cleft $H$ -Erweiterungen

Die Hopf-Galois-Erweiterungen wurden von S. Chase und M. Sweedler [CS69] für die auf eine *kommutative*  $R$ -Algebra wirkenden  $R$ -Hopf-Algebren eingeführt und gelten als Verallgemeinerung von den klassischen Galois-Erweiterungen über Körpern (siehe [Mon93, 8.1.2]). In [KT81] haben H. Kreimer und M. Takeuchi diese auf die *nicht kommutative* Situation erweitert.

**3.4.11.  $H$ -Erweiterungen.** ([Doi85]) Seien  $H$  eine  $R$ -Bialgebra und  $B$  eine  $H$ -Rechtskomodul-Algebra. Setzen wir  $A := B^{coH}$ , so ist  $A$  eine  $R$ -Algebra und man nennt die  $R$ -Algebra-Erweiterung  $A \subset B$  eine  **$H$ -Rechtserweiterung**.

Ein (**totales**) **Integral** für  $B$  ist eine  $H$ -kolineare Abbildung  $\gamma : H \longrightarrow B$  (mit  $\gamma(1_H) = 1_B$ ). Existiert für  $B$  ein in  $(\text{Hom}_R(H, B), \star)$  invertierbares Integral, dann nennt man  $A \subset B$  eine **cleft  $H$ -Rechtserweiterung**.

**3.4.12. Beispiel.** Sei  $H$  eine  $R$ -Bialgebra. Nach [DT86, Corollary 6] ist  $H/R$  genau dann eine *cleft  $H$ -Erweiterung*, wenn  $H$  eine  $R$ -Hopf-Algebra ist. In diesem Falle ist  $id_H$  ein invertierbares Integral für  $H$  mit Inversem  $S_H$  (der Antipode von  $H$ ).

**3.4.13.  $H$ -Koerweiterungen.** Seien  $H$  eine  $R$ -Bialgebra und  $D$  eine  $H$ -Rechtsmodul-Koalgebra. Dann ist  $H^+ := \text{Ke}(\varepsilon_H)$  ein  $H$ -Koideal,  $DH^+$  ist ein  $D$ -Koideal und  $C := D/DH^+$  ist eine  $H$ -Rechtsmodul-Koalgebra mit der induzierten  $H$ -Modul-Struktur. Man nennt den kanonischen Koalgebra-Epimorphismus  $\pi : D \longrightarrow C$  eine  **$H$ -Rechtskoerweiterung** von  $D$ .

**ung** von  $D$ .

Ein (**totales**) **Kointegral** für  $D$  ist eine  $H$ -lineare Abbildung  $\phi : D \longrightarrow H$  (mit  $\varepsilon_H \circ \phi = \varepsilon_D$ ). Eine  $H$ -Rechtskoerweiterung  $\pi : D \longrightarrow C$  heißt **cocleft**, falls ein in  $(\text{Hom}_R(D, H), \star)$  invertierbares Kointegral existiert.

Als Schlussfolgerung von unseren Ergebnissen in diesem Paragraphen bekommen wir die folgende Aussage:

**3.4.14. Proposition.** Seien  $R$  noethersch und  $H$  eine  $R$ -c-koerzeugte  $\alpha$ -Hopf-Algebra mit bijektiver Antipode. Sei  $D$  eine  $H$ -Rechtsmodul-Koalgebra und setze  $C := D/DH^+$ . Ist  $\pi : D \longrightarrow C$  eine (cocleft)  $H$ -Rechtskoerweiterung, dann ist  $\pi^\circ : C^\circ \hookrightarrow D^\circ$  eine (cleft)  $H^\circ$ -Rechtserweiterung.

**Beweis.** Sei  $D$  eine  $H$ -Rechtsmodul-Koalgebra vermöge  $\varphi_D : D \otimes H \longrightarrow D$ . Nach Proposition 3.4.7 ist  $D^\circ$  eine  $H^\circ$ -Rechtskomodul-Algebra durch  $\varphi_D^\circ : D^\circ \longrightarrow D^\circ \otimes H^\circ$ . Es gilt außerdem  $C^* = (D^*)^H$  und folglich ist (nach Lemma 2.5.15)  $(D^\circ)^{coH^\circ} = (D^\circ)^H = C^\circ$ , also ist  $\pi^\circ : C^\circ \hookrightarrow D^\circ$  eine  $H^\circ$ -Rechtserweiterung.

Ist  $\psi : D \longrightarrow H$  ein Kointegral für  $D$ , dann ist  $\psi$  nach Definition  $H$ -linear und somit ist  $\psi^\circ \in \text{Hom}_{H-}(H^\circ, D^\circ) = \text{Hom}^{H^\circ}(H^\circ, D^\circ)$  (nach Lemma 2.2.9), also ist  $\psi^\circ$  ein Integral für  $D^\circ$ .

Sei  $\psi$  invertierbar in  $(\text{Hom}_R(D, H), \star)$  mit Inversem  $\psi^{-1} : D \longrightarrow H$ . Analog zu [Zha98] bekommen wir

$$\psi^{-1}(dh) = S_H(h)d \text{ für alle } h \in H \text{ und } d \in D.$$

Ist  $f \in H^\circ$ , dann gilt für alle  $d \in D$  und  $h \in H$  :

$$\begin{aligned} (h(\psi^{-1})^\circ(f))(d) &= ((\psi^{-1})^\circ(f))(dh) &= f(\psi^{-1}(dh)) \\ &= f(S(h)\psi^{-1}(d)) &= \sum f_1(S(h))f_2(\psi^{-1}(d)) \\ &= \sum (S^\circ(f_1))(h)((\psi^{-1})^\circ(f_2))(d) &= (\sum S^\circ(f_1)(h)(\psi^{-1})^\circ(f_2))(d), \end{aligned}$$

d.h.  $(\psi^{-1})^\circ \in \text{Loc}({}_H D^*) = D^\circ$ . Außerdem gilt für alle  $f \in H^\circ$  und  $d \in D$  :

$$\begin{aligned} ((\psi^\circ \star (\psi^{-1})^\circ)(f))(d) &= ((\psi^\circ \underline{\otimes} (\psi^{-1})^\circ)(\Delta(f)))(d) \\ &= (\sum \psi^\circ(f_1) \star (\psi^{-1})^\circ(f_2))(d) \\ &= (\sum \psi^\circ(f_1) \underline{\otimes} (\psi^{-1})^\circ(f_2))(d_1 \otimes d_2) \\ &= \sum \psi^\circ(f_1)(d_1)(\psi^{-1})^\circ(f_2)(d_2) \\ &= \sum f_1(\psi(d_1))f_2((\psi^{-1})(d_2)) \\ &= \sum f(\psi(d_1)(\psi^{-1})(d_2)) \\ &= f((\psi \star (\psi^{-1}))(d)) \\ &= f(\varepsilon_D(d)1_H) \\ &= \varepsilon_{H^\circ}(f)\varepsilon_D(d) = id_{\text{Hom}_R(H^\circ, D^\circ)}(f)(d), \end{aligned}$$

also ist  $\psi^\circ \star (\psi^{-1})^\circ = id_{\text{Hom}_R(H^\circ, D^\circ)}$ . Analog zeigt man, dass  $(\psi^{-1})^\circ \star \psi^\circ = id_{\text{Hom}_R(H^\circ, D^\circ)}$ . Damit ist  $\psi^\circ$   $\star$ -invertierbar mit Inversem  $(\psi^{-1})^\circ$ , also ist  $\pi^\circ : C^\circ \hookrightarrow D^\circ$  eine *cleft*  $H$ -Rechtserweiterung.

## 3.5 Dualitätssätze für die verschränkten Produkte

Verschränkte Produkte wurden unabhängig von Y. Doi, M. Takeuchi [DT86, Lemma 10] und R. Blattner, M. Cohen und S. Montgomery [BCM86] eingeführt und haben ihre Wurzeln u.a. in der Theorie der Gruppen-Ringe befinden, etwa der Cohen-Montgomery-Dualitätssatz ([CM84]).

**3.5.1. Definition.** ([BM89]) Seien  $H$  eine  $R$ -Bialgebra und  $A$  eine  $R$ -Algebra. Eine **schwache  $H$ -Linkswirkung** auf  $A$  ist eine  $R$ -lineare Abbildung

$$w : H \otimes A \longrightarrow A, \quad h \otimes a \longmapsto ha, \quad (3.13)$$

so dass die induzierte  $R$ -lineare Abbildung

$$\kappa : A \longrightarrow \text{Hom}_R(H, A), \quad a \longmapsto [h \longmapsto ha]$$

ein Algebra-Morphismus ist und  $1_H a = a$  für alle  $a \in A$ .

**3.5.2.** ([BCM86], [DT86]) Seien  $H$  eine  $R$ -Bialgebra,  $A$  eine  $R$ -Algebra mit einer schwachen  $H$ -Linkswirkung  $w : H \otimes_R A \longrightarrow A$  und  $\sigma \in \text{Hom}_R(H \otimes H, A)$ . Betrachte den  $R$ -Modul  $A \#_\sigma H := A \otimes_R H$  und setze

$$(a \#_\sigma h)(\tilde{a} \#_\sigma \tilde{h}) = \sum a(h_1 \tilde{a}) \sigma(h_2 \otimes \tilde{h}_1) \#_\sigma h_3 \tilde{h}_2. \quad (3.14)$$

Dann ist  $A \#_\sigma H$  eine (nicht unbedingt assoziative)  $R$ -Algebra und hat im Allgemeinen keine Einheit. Ist  $A \#_\sigma H$  eine *assoziative*  $R$ -Algebra mit Einheit  $1_A \#_\sigma 1_H$ , dann heißt  $A \#_\sigma H$  ein  **$H$ -verschränktes Produkt**.

**3.5.3. Definition.** Seien  $H$  eine  $R$ -Bialgebra,  $A$  eine  $R$ -Algebra mit einer schwachen  $H$ -Linkswirkung  $w : H \otimes_R A \longrightarrow A$  und  $\sigma \in \text{Hom}_R(H \otimes H, A)$ . Dann sagt man:

1.  $\sigma$  ist **normal**, falls

$$\sigma(h \otimes 1_H) = \varepsilon(h) 1_A = \sigma(1_H \otimes h) \text{ für alle } h \in H. \quad (3.15)$$

2.  $\sigma$  ist ein **Kozykel**, falls

$$\sum (h_1 \sigma(k_1 \otimes l_1)) \sigma(h_2 \otimes k_2 l_2) = \sum \sigma(h_1 \otimes k_1) \sigma(h_2 k_2 \otimes l) \text{ für alle } h, k, l \in H. \quad (3.16)$$

3.  $\sigma$  erfüllt die **getwistete Modul-Bedingung**, wenn

$$\sum (h_1 (k_1 a)) \sigma(h_2 \otimes k_2) = \sum \sigma(h_1 \otimes k_1) ((h_2 k_2) a) \quad \forall h, k \in H, a \in A. \quad (3.17)$$

**3.5.4. Bemerkung.** Sind  $H$  eine *kokommutative*  $R$ -Bialgebra und  $A$  eine *kommutative*  $H$ -Linksmodul-Algebra, dann erfüllt jedes  $\sigma \in \text{Hom}_R(H \otimes H, A)$  die getwistete Modul-Bedingung (3.17).

**3.5.5. Lemma.** ([BCM86], [DT86, Lemma 10]) Seien  $H$  eine  $R$ -Bialgebra,  $A$  eine  $R$ -Algebra mit einer schwachen  $H$ -Linkswirkung  $w : H \otimes_R A \longrightarrow A$  und  $\sigma \in \text{Hom}_R(H \otimes H, A)$ .

1.  $1 \#_\sigma 1$  ist genau dann eine Einheit für  $A \#_\sigma H$ , wenn  $\sigma$  normal ist.
2. Sei  $\sigma$  normal. Dann ist  $A \#_\sigma H$  genau dann assoziativ, wenn  $\sigma$  ein Kozykel ist und die getwistete Modul-Bedingung (3.17) erfüllt.

**3.5.6. Linkssmash-Produkt** ([Swe69, Seiten 155-156]) Seien  $H$  eine  $R$ -Bialgebra und  $A$  eine  $H$ -Linksmodul-Algebra vermöge einer  $H$ -Linkswirkung  $w_A : H \otimes_R A \longrightarrow A$ . Dann ist

$$\sigma \in H \otimes_R H \longrightarrow A, \quad h \otimes k \longmapsto \varepsilon(h)\varepsilon(k)1_A$$

ein *trivialer* normaler Kozykel und erfüllt die getwistete Modul-Bedingung (3.17). Nach Lemma 3.5.5 ist  $A \# H := A \#_\sigma H$  eine assoziative  $R$ -Algebra mit Einheit  $1_A \# 1_H$  und Multiplikation

$$(a \# h)(\tilde{a} \# \tilde{h}) = \sum a(h_1 \tilde{a}) \# h_2 \tilde{h}.$$

Man nennt die  $R$ -Algebra  $A \# H$  das **Smashprodukt-Algebra**. Ist die  $H$ -Linkswirkung auf  $A$  auch *trivial*, dann ist  $A \# H = A \otimes_R H$  als  $R$ -Algebren.

**3.5.7. Beispiel.** Sei  $A$  eine  $R$ -Algebra. Wirkt eine Gruppe  $G$  auf  $A$  durch  $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}_R(A)$ , dann ist der Schief-Gruppenring  $A \star G = A \# RG$  eine  $R$ -Algebra mit Multiplikation

$$(ag)(\tilde{a}\tilde{g}) = a(g\tilde{a}) \star g\tilde{g} \text{ für alle } a, \tilde{a} \in A \text{ und } g, \tilde{g} \in G.$$

**3.5.8. Das Rechtssmash-Produkt.** Sei  $H$  eine  $R$ -Bialgebra und betrachte  $H^*$  als einen  $H$ -Rechtsmodul mit der regulären  $H$ -Rechtswirkung. Sind  $B$  eine  $H$ -Rechtskomodul-Algebra und  $U \subseteq H^*$  eine  $H$ -Rechtsuntermodul-Algebra, dann ist  $B \# U := B \otimes_R U$  eine assoziative  $R$ -Algebra mit der Multiplikation

$$(b \# f)(\tilde{b} \# \tilde{f}) = \sum b\tilde{b}_{<0>} \# ((f\tilde{b}_{<1>}) \star \tilde{f}) \text{ für alle } b, \tilde{b} \in B \text{ und } f, \tilde{f} \in U. \quad (3.18)$$

**3.5.9. Die Algebra  $\#(H, B)$ .** ([Doi84]) Seien  $H$  eine  $R$ -Bialgebra,  $B$  eine  $H$ -Rechtskomodul-Algebra und setze  $\#(H, B) := (\text{Hom}_R(H, B), \hat{\star})$ , wobei

$$(f\hat{\star}g)(h) = \sum f(g(h_2)_{<1>}h_1)g(h_2)_{<0>} \text{ für alle } f, g \in \text{Hom}_R(H, B) \text{ und } h \in H. \quad (3.19)$$

Dann ist  $\#(H, B)$  eine assoziative  $R$ -Algebra mit Einheit  $\eta_B \circ \varepsilon_H$ .

**3.5.10. Bemerkungen.** Seien  $H$  eine  $R$ -Bialgebra,  $A \subset B$  eine  $H$ -Rechtserweiterung und  $U \subset H^*$  eine  $H$ -Rechtsuntermodul-Algebra.

1. Ist  $\varrho_B$  trivial (d.h.  $\varrho_B(b) = b \otimes 1_H$  für alle  $b \in B$ ), dann ist  $\#(H, B) = (\text{Hom}_R(H, B), \star)$ .
2. Ist  ${}_R H$  endlich, dann ist  $B$  eine  $H^*$ -Linksmodul-Algebra und es gibt einen Algebra-Isomorphismus  $\#(H, B) \simeq B \# H^*$ .
3. Wir haben Einbettungen von  $R$ -Algebren

$$\begin{aligned} B &\hookrightarrow \#(H, B), \quad b \longmapsto [h \longmapsto \varepsilon(h)b] \\ U &\hookrightarrow \#(H, B), \quad f \longmapsto [h \longmapsto f(h)1_B]. \end{aligned}$$

4.  $\#(H, B)$  ist eine  $H$ -Linksmodul-Algebra, vermöge

$$(hf)(k) = f(kh) \text{ für alle } h, k \in H \text{ und } f \in \#(H, B).$$

Es gilt außerdem  $(\#(H, B))^H = A$ .

**3.5.11. Definition.** Seien  $H$  eine  $R$ -Hopf-Algebra und  $U \subseteq H^*$  eine  $H$ -Rechtsuntermodul-Algebra. Man sagt  $U$  erfüllt die **RL-Bedingung** bzgl.  $H$ , falls für jedes  $f \in U$  gilt:

$$\exists \{(h_i, f_i)\} \subset H \times U, \text{ so dass } h \leftarrow f = \sum k_i(f_i \rightarrow h) \text{ für jedes } h \in H. \quad (3.20)$$

**3.5.12. Beispiele.** ([Mon93, 9.4.6., 9.4.7.]) Seien  $H$  eine  $R$ -Bialgebra und  $U \subseteq H^*$  eine  $H$ -Rechtsuntermodul-Algebra. Ist  $H$  endlich und ist  $U = H^*$ , oder ist  $H$  kokommutativ, dann erfüllt  $U$  die RL-Bedingung bzgl.  $H$ .

**3.5.13. Lemma.** ([Che93, Theorem 3]) Seien  $H$  eine  $R$ -Hopf-Algebra mit bijektiver Antipode,  $U \subseteq H^*$  eine  $H$ -Rechtsuntermodul-Algebra und  $A \#_\sigma H$  ein verschränktes Produkt mit invertierbarem Kozykel. Nehme außerdem an, dass  $U$  die RL-Bedingung (3.20) bezüglich  $H$  erfüllt und es für jedes  $(a, h) \in A \times H$  Unterklassen  $\{a_u, f_u\}, \{a_w, g_w\} \subset A \times U$  existieren mit

$$\sum (\bar{S}(l_2)a)\sigma(\bar{S}(l_1) \otimes h) = \sum_u f_u(l)a_u \text{ für jedes } l \in H, \quad (3.21)$$

$$\sum \sigma^{-1}(l_3 \otimes \bar{S}(l_2))(l_4a)\sigma(l_5 \otimes \bar{S}(l_1)h) = \sum_w f_w(l)a_w \text{ für jedes } l \in H. \quad (3.22)$$

Sind die folgenden  $R$ -linearen Abbildungen injektiv:

$$\begin{aligned} \alpha: (A \otimes H) \otimes U &\rightarrow \text{Hom}_R(H, A \otimes H), & (a \otimes h) \otimes f &\mapsto [k \mapsto f(k)(a \otimes h)] \\ \beta: A \otimes (H \otimes U) &\rightarrow \text{End}_{-A}(H \otimes_R A), & a \otimes (h \otimes f) &\mapsto [(k \otimes \tilde{a}) \mapsto h(fk) \otimes a\tilde{a}], \end{aligned} \quad (3.23)$$

dann gibt es einen  $R$ -Algebra-Isomorphismus

$$(A \#_\sigma H) \# U \simeq A \otimes_R (H \# U). \quad (3.24)$$

Die folgende Aussage verallgemeinert [Che93, Corollary 4] (bzw. [Che93, Corollary 5]) von Körpern (bzw. Dedekind-Ringen) auf beliebige noethersche Ringe unter sehr schwachen Bedingungen:

**3.5.14. Satz.** Seien  $R$  noethersch,  $H$  eine  $R$ -Hopf-Algebra mit bijektiver Antipode,  $U \subset H^*$  eine  $H$ -Rechtsuntermodul-Algebra und  $A \#_\sigma H$  ein  $H$ -verschränktes Produkt mit invertierbarem Kozykel. Nehme außerdem an, dass  $U$  die RL-Bedingung (3.20) bzgl.  $H$  und die Bedingungen (3.21, 3.22) erfüllt. Ist  $U \subset R^H (A \otimes_R H)$ -rein (z.B. falls  $H$  eine  $\alpha$ -Hopf-Algebra und  $U \subseteq H^\circ$  eine  $R$ -Unterbialgebra sind), dann gibt es einen  $R$ -Algebra-Isomorphismus

$$(A \#_\sigma H) \# U \simeq A \otimes_R (H \# U).$$

**Beweis.** Sei  $U \subset H^*$  eine  $H$ -Rechtsuntermodul-Algebra und betrachte das Paar  $P := (H, U)$ . Ist  $U \subset R^H$  ( $A \otimes_R H$ )-rein, dann ist  $\alpha : (A \otimes H) \otimes U \longrightarrow \text{Hom}_R(H, A \otimes H)$  nach Proposition 2.1.8 (2) injektiv. Wir bemerken, dass die  $R$ -lineare Abbildung

$$\epsilon : \text{Hom}_R(H, A \otimes H) \longrightarrow \text{End}_{-A}(H \otimes A), \quad g \longmapsto [k \otimes \tilde{a} \longmapsto \tau(g(k_2))(k_1 \otimes \tilde{a})] \quad (3.25)$$

bijektiv ist mit Inversem

$$\epsilon^{-1} : \text{End}_{-A}(H \otimes A) \longrightarrow \text{Hom}_R(H, A \otimes H), \quad f \longmapsto [k \longmapsto \tau(f(k_2 \otimes 1_A))(1_A \otimes \bar{S}(k_1))]$$

(siehe [Che93, Lemma 1]). Außerdem gilt für  $a \otimes (h \otimes f) \in A \otimes (H \otimes U)$  und  $k \in H$  :

$$\begin{aligned} (\epsilon \circ \alpha)(a \otimes (h \otimes f))(k \otimes \tilde{a}) &= \tau[\alpha(a \otimes (h \otimes f))(k_2)](k_1 \otimes \tilde{a}) \\ &= \sum f(k_2)(h \otimes a)(k_1 \otimes \tilde{a}) \\ &= \sum hf(k_2)k_1 \otimes a\tilde{a} \\ &= h(fk) \otimes a\tilde{a} \\ &= \beta(a \otimes (h \otimes f))(k \otimes \tilde{a}). \end{aligned}$$

Daher ist  $\beta = \epsilon \circ \alpha$  und ist somit injektiv genau dann, wenn  $\alpha$  injektiv ist.

Ist  $H^\circ \subset R^H$  rein, dann ist  $H^\circ$  eine  $R$ -Hopf-Algebra. Ist  $U \subset H^\circ$  eine  $R$ -Unterbialgebra, dann ist  $U \subset H^\circ$  nach Definition rein, also ist  $U \subset R^H$  rein. Die Aussage folgt dann aus Lemma 3.5.13.

Folgende Definition wurde von R. Blattner und S. Montgomery in [BM85, Definition 1.3] für  $R$ -Hopf-Algebren und  $R$ -Hopf-Unteralgebren über Körpern formuliert.

**3.5.15. Definition.** Seien  $R$  noethersch,  $H$  eine  $\alpha$ -Bialgebra, und  $U \subset H^\circ$  eine  $R$ -Unterbialgebra. Eine  $H$ -Linksmodul-Algebra  $A$  heißt  **$U$ -lokal-endlich**, falls für jedes  $a \in A$  eine endliche Teilmenge  $\{f_1, \dots, f_k\} \subset U$  existiert, so dass  $\bigcap_{i=1}^k \text{Ke}(f_i) \subset (0 : a)$ .

Das folgende Lemma verallgemeinert [BM85, Lemma 1.5] vom Körper-Fall auf die Kategorie  $\mathbf{Big}_R^\alpha$  für einen beliebigen noetherschen Ring  $R$ .

**3.5.16. Lemma.** Seien  $R$  noethersch und  $H$  eine  $\alpha$ -Bialgebra. Ist  $U \subset H^\circ$  eine  $R$ -Unterbialgebra, dann ist eine  $H$ -Linksmodul-Algebra  $A$  genau dann  $U$ -lokal-endlich, wenn  $A$  eine  $U$ -Rechtskomodul-Algebra ist.

**Beweis.** Nach Voraussetzung ist  $H^\circ \subset R^H$  rein. Nach Definition ist jede  $R$ -Unterbialgebra  $U \subset H^\circ$  ein reiner  $R$ -Untermodule und folglich ist  $(H, U) \in \mathcal{P}_m^\alpha$  (vgl. Proposition 2.1.8). Sei  $A$  eine  $U$ -lokal-endliche  $H$ -Linksmodul-Algebra. Dann existiert für jedes  $a \in A$  eine Menge  $W = \{f_1, \dots, f_k\}$ , so dass  $\bigcap_{i=1}^k \text{Ke}(f_i) \subseteq (0 : a)$ . Ist  $h \in \text{An}_H^l(W)$ , dann ist  $f_i(h) = (hf_i)(1_H) = 0$  für  $i = 1, \dots, k$ , also ist  $\text{An}_H^l(W) \subseteq \bigcap_{i=1}^k \text{Ke}(f_i) \subseteq (0 : a)$ . Nach 2.2.2 ist dann  $A \in \sigma_{[H]U} \simeq \text{Rat}_{(H)\mathcal{M}}^U \simeq \mathcal{M}^U$  (vgl. Satz 2.2.16). Es läßt sich leicht nachprüfen, dass  $A$  eine  $U$ -Rechtskomodul-Algebra ist.

Andererseits, sei  $(A, \varrho)$  eine  $U$ -Rechtskomodul-Algebra. Ist  $a \in A$  mit  $\varrho(a) = \sum_{j=1}^n a_j \otimes g_j \in A \otimes_R U$ , dann ist offensichtlich  $\bigcap_{j=1}^n \text{Ke}(g_j) \subset (0 : a)$ , also ist  ${}_H A$   $U$ -lokal-endlich. Es läßt sich mühelos ableiten, dass  $A$  eine  $H$ -Linksmodul-Algebra ist.

Die folgende Aussage überträgt die in [Che93] verbesserte Version des bekannten *Blattner-Montgomery-Dualitätssatzes* [BM85] auf beliebige noethersche Ringe. In der originalen Aussage, die in [AG-TL2001, 3.2] auf beliebige noethersche Ringe erweitert wurde, war  $U \subset H^\circ$  eine  $R$ -Hopf-Unteralgebra mit bijektiver Antipode.

**3.5.17. Folgerung.** *Seien  $R$  noethersch,  $H$  eine  $\alpha$ -Hopf-Algebra mit bijektiver Antipode und  $U \subseteq H^\circ$  eine  $R$ -Unterbialgebra. Ist  $A$  eine  $U$ -lokal-endliche  $H$ -Linksmodul-Algebra und erfüllt  $U$  die  $RL$ -Bedingung bzgl.  $H$  (3.20), dann gibt es einen  $R$ -Algebra-Isomorphismus*

$$(A \# H) \# U \simeq A \otimes (H \# U).$$

**Beweis.** Nach Lemma 3.5.16 ist  $A$  eine  $U$ -Rechtskomodul-Algebra. Für den *trivialen* Kozykel  $\sigma(h \otimes k) := \varepsilon(h)\varepsilon(k)1_A$  ist  $A \#_\sigma H = A \# H$  und die Bedingungen (3.21, 3.22) sind erfüllt. Die Aussage folgt daher aus Satz 3.5.14.

**3.5.18. Folgerung.** ([AG-TL2001]) *Seien  $R$  noethersch,  $G$  eine Gruppe und nehme an  $(RG)^\circ \subset R^{RG}$  sei rein (das gilt insbesondere, falls  $|G| < \infty$  oder wenn  $R$  erblich ist). Wirkt  $G$  auf eine  $R$ -Algebra  $A$  als eine Automorphismengruppe, dann gibt es einen  $R$ -Algebra-Isomorphismus*

$$(A \# RG) \# (RG)^\circ \cong A \otimes (RG \# (RG)^\circ).$$

Ist  $|G| = n < \infty$ , dann ist  $(RG)^\circ = (RG)^*$  und es gilt

$$(A \# RG) \# (RG)^* \cong A \otimes (RG \# (RG)^*) \simeq A \otimes M_n(R) \simeq M_n(A). \quad (3.26)$$

**3.5.19. Lemma.** ([DT86, Theorems 9, 11], [BM89, Theorem 1.18], [DT89, 1.1.]) *Sei  $H$  eine  $R$ -Bialgebra.*

1. *Ist  $B/A$  eine cleft  $H$ -Rechtserweiterung mit totalem invertierbarem Integral  $\gamma : H \longrightarrow B$ , dann ist  $A$  eine  $H$ -Linksmodul-Algebra vermöge*

$$ha = \sum \gamma(h_1)a\gamma^{-1}(h_2) \text{ für alle } h \in H \text{ und } a \in A. \quad (3.27)$$

*Außerdem ist  $B \simeq A \#_\sigma H$  ist ein  $H$ -verschränktes Produkt mit invertierbarem Kozykel*

$$\sigma(h \otimes k) = \sum \gamma(h_1)\gamma(k_1)\gamma^{-1}(h_2k_2) \text{ mit } \sigma^{-1}(h \otimes k) = \sum \gamma(h_1k_1)\gamma^{-1}(k_2)\gamma^{-1}(h_2). \quad (3.28)$$

2. *Sei  $H$  eine  $R$ -Hopf-Algebra. Ist  $B \simeq A \#_\sigma H$  ein  $H$ -verschränktes Produkt mit invertierbarem Kozykel  $\sigma \in \text{Hom}_R(H \otimes H, A)$ , dann ist  $B/A$  eine cleft  $H$ -Rechtserweiterung mit invertierbarem totalem Integral*

$$\gamma : H \longrightarrow A \#_\sigma H, \quad \gamma(h) = 1_A \# h \text{ mit } \gamma^{-1}(h) = \sum \sigma^{-1}(S(h_2) \otimes h_3) \#_\sigma S(h_1).$$

Außerdem ist

$$\nu : A \#_{\sigma} H \longrightarrow H \otimes_R A, \quad a \#_{\sigma} h \longmapsto \sum h_4 \otimes [\bar{S}(h_3)a] \sigma(\bar{S}(h_2), h_1) \quad (3.29)$$

ein Isomorphismus von  $A$ -Rechtsmoduln mit Inversem

$$\nu^{-1} : H \otimes_R A \longrightarrow A \#_{\sigma} H, \quad h \otimes a \longmapsto \sum \sigma^{-1}(h_2, \bar{S}(h_1)) a \#_{\sigma} h_3. \quad (3.30)$$

Mit Hilfe von Lemma 3.5.19 läßt sich die folgende Version von Satz 3.5.14 für *cleft*  $H$ -Rechtserweiterungen ableiten:

**3.5.20. Satz.** *Seien  $R$  noethersch,  $H$  eine  $R$ -Hopf-Algebra mit bijektiver Antipode,  $B/A$  eine cleft  $H$ -Rechtserweiterung mit invertierbarem totalem Integral  $\gamma : H \longrightarrow B$  und  $U \subseteq H^*$  eine  $H$ -Rechtsuntermodul-Algebra. Nehme außerdem an, dass  $U$  die RL-Bedingung (3.20) erfüllt und es für jedes  $(a, h) \in A \times H$  Unterklassen  $\{(a_u, g_u)\}, \{(a_w, g_w)\} \subset A \times U$  existieren, so dass*

$$\sum \gamma(\bar{S}(l_2)) a \gamma(h_1) \gamma^{-1}(\bar{S}(l_1) h_2) = \sum g_u(l) a_u \text{ für jedes } l \in H. \quad (3.31)$$

$$\sum \gamma^{-1}(\bar{S}(l_3)) a \gamma(\bar{S}(l_2) h_1) \gamma^{-1}(l_4 \bar{S}(l_1) h_2) = \sum f_w(l) a_w \text{ für jedes } l \in H. \quad (3.32)$$

Ist  $U \subset R^H$  ( $A \otimes_R H$ )-rein (z.B. falls  $H$  eine  $\alpha$ -Hopf-Algebra und  $U \subset H^\circ$  eine  $R$ -Unterbialgebra sind), dann gibt es einen  $R$ -Algebra-Isomorphismus

$$B \# U \simeq A \otimes_R (H \# U). \quad (3.33)$$

# Kapitel 4

## Folgen über Moduln: ein koalgebraischer Aspekt

Wegen Anwendungen in der Kodierungstheorie gewinnen die linear rekursiven Folgen über beliebigen Ringen und Moduln in letzter Zeit mehr an Interesse (siehe [HN99], [KKMMN99]). Als Anwendung von unseren Ergebnissen im zweiten und dritten Kapitel über die stetigen dualen Koalgebren und die stetigen dualen Komoduln verallgemeinern wir Resultate über die *linear rekursiven Folgen* über Körpern (siehe [PT80], [LT90], [Taf95]) und über Vektorräumen (vgl. [GO93], [GK97]) auf beliebige noethersche Ringe und Moduln. Dabei erweitern wir die schon in [AG-TW2000] gewonnenen Aussagen über die linear rekursiven Folgen auf die lineare rekursiven  $(k)$ -Folgen. Als Referenz für die Theorie der linear rekursiven Folgen über Moduln dient die umfassende Arbeit von A. Mikhalev et. al. [KKMN95].

### 4.1 Vorbereitung

Für jeden  $R$ -Modul  $M$  setze

$$M[\mathbf{x}] := M[x_1, \dots, x_k] \text{ und } M[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] := M[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}].$$

Wir betrachten den Polynomring  $R[\mathbf{x}]$  und den Ring der *Laurent-Polynome*  $R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$  als  $R$ -Algebren mit der üblichen Multiplikation und der üblichen Einheit. Für jeden  $R$ -Modul  $M$  sind  $M[\mathbf{x}]$  und  $M[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$   $R[\mathbf{x}]$ -Moduln mit den von  $M$  induzierten Modul-Strukturen und wir haben außerdem einen kanonischen  $R$ -Modul-Isomorphismen

$$M[\mathbf{x}] \simeq M \otimes_R R[\mathbf{x}] \simeq M^{(\mathbb{N}^k)} \text{ und } M[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] \simeq M \otimes_R R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] \simeq M^{(\mathbb{Z}^k)}.$$

Für jedes  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$  bzw.  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{Z}^k$  setzen wir  $\mathbf{x}^{\mathbf{n}} := x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$  bzw.  $\mathbf{x}^{\mathbf{z}} := x_1^{z_1} \dots x_k^{z_k}$ .

**4.1.1.** Für einen  $R$ -Modul  $M$  und  $k \geq 1$  sei

$$\mathcal{S}_M^{<k>} := \{u : \mathbb{N}^k \longrightarrow M\} \simeq M^{\mathbb{N}^k}$$

der  $R$ -Modul der  $k$ -Folgen über  $M$ . Ist  $M$  (bzw.  $k$ ) nicht erwähnt, so ist  $M = R$  (bzw.  $k = 1$ ) gemeint.

Setzen wir für  $f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i}} r_{\mathbf{i}} \mathbf{x}^{\mathbf{i}} \in R[\mathbf{x}]$  und  $w \in \mathcal{S}_M^{<k>}$  :

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow w = u \in \mathcal{S}_M^{<k>}, \text{ wobei } u(\mathbf{n}) := \sum_{\mathbf{i}} r_{\mathbf{i}} w(\mathbf{i} + \mathbf{n}) \text{ für alle } \mathbf{n} \in \mathbb{N}^k, \quad (4.1)$$

so wird  $\mathcal{S}_M^{<k>}$  ein  $R[\mathbf{x}]$ -Modul. Für Untermengen  $I \subset R[\mathbf{x}]$  und  $L \subset \mathcal{S}_M^{<k>}$  betrachte die Annulator-Untermodule

$$\begin{aligned} \text{An}_{\mathcal{S}_M^{<k>}}(I) &= \{w \in \mathcal{S}_M^{<k>} \mid f(\mathbf{x}) \rightarrow w = 0 \text{ für jedes } f(\mathbf{x}) \in I\}, \\ \text{An}_{R[\mathbf{x}]}(L) &= \{h(\mathbf{x}) \in R[\mathbf{x}] \mid h(\mathbf{x}) \rightarrow u = 0 \text{ für jedes } u \in L\}. \end{aligned}$$

Bemerke,  $\text{An}_{\mathcal{S}_M^{<k>}}(I) \subset \mathcal{S}_M^{<k>}$  ist ein  $R[\mathbf{x}]$ -Untermodule und  $\text{An}_{R[\mathbf{x}]}(L) \triangleleft R[\mathbf{x}]$  ist ein Ideal.

**4.1.2. Definition.** Ein Polynom  $f(y) \in R[y]$  heißt **normiert**, falls der leitende Koeffizient von  $f(y)$  gleich  $1_R$  ist. Ein Ideal  $I \triangleleft R[\mathbf{x}]$  nennt man **normiert**, falls  $I$  eine nicht leere Menge von normierten Polynomen

$$E = \{f_j(x_j) = x_j^{l_j} + r_{l_j-1}^{(j)} x_j^{l_j-1} + \dots + r_1^{(j)} x_j + r_0^{(j)} \mid j = 1, \dots, k\} \quad (4.2)$$

enthält. In diesem Falle nennt man ein solches System von Polynomen (4.2) ein **System von elementaren Polynomen** und das Ideal  $(f_1(x_1), \dots, f_k(x_k)) \triangleleft R[\mathbf{x}]$  ein **elementares Ideal**.

**4.1.3. Definition.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Eine  $k$ -Folge  $u \in \mathcal{S}_M^{<k>}$  heißt **linear rekursiv**, falls  $\text{An}_{R[\mathbf{x}]}(u)$  ein normiertes Ideal ist, also wenn  $\text{An}_{R[\mathbf{x}]}(u)$  eine Menge von normierten Polynomen  $E = \{f_1(x_1), \dots, f_k(x_k)\}$  enthält. In diesem Falle nennt man die normierten Polynome  $f_1(x_1), \dots, f_k(x_k)$  **elementare charakteristische Polynome** von  $u$ . Den  $R[\mathbf{x}]$ -Modul der linear rekursiven  $k$ -Folgen über  $M$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{L}_M^{<k>}$ .

**4.1.4.** ([MN96, Seite 170]) Die **lexikographische lineare Ordnung** ( $\preceq$ ) auf  $\mathbb{N}^k$  ist definiert wie folgt: Für  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$ ,  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$  setzen wir  $\mathbf{i} \preceq \mathbf{n}$ , wenn die erste von Null verschiedene Zahl in der Folge von ganzen Zahlen

$$(n_1 + \dots + n_k) - (i_1 + \dots + i_k), \quad n_1 - i_1, \dots, n_k - i_k$$

positiv ist.

Seien  $M$  ein  $R$ -Modul,  $E = \{f_1(x_1), \dots, f_k(x_k)\}$  eine Menge von normierten Polynomen in  $R[\mathbf{x}]$  mit  $\text{Grad}(f_j(x_j)) = l_j$  für jedes  $j = 1, \dots, k$  und setze  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_k)$ ,  $\mathbf{1} := (1, \dots, 1)$ . Betrachte die von ( $\leq$ ) auf  $\mathbb{N}^k$  induzierte **partielle Ordnung** und das **Polyeder**

$$\Pi_E = \Pi(\mathbf{l}) := \{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^k \mid \mathbf{i} \leq \mathbf{l} - \mathbf{1}\}.$$

Das **Anfangspolyeder** einer  $k$ -Folge  $\omega \in \mathcal{S}_M^{<k>}$  definiert man als

$$\omega(\Pi_E) := \{\omega(\mathbf{i}) \mid \mathbf{i} \in \Pi_E\}.$$

Für  $l = l_1 \cdot \dots \cdot l_k$  bilden die Punkte des polyeders  $\Pi_E$  eine Kette

$$\mathbf{0} = \mathbf{i}_0 \preceq \mathbf{i}_1 \preceq \dots \preceq \mathbf{i}_{l-1},$$

und wir können  $\omega(\Pi_E)$  als einen **Anfangsvektor**  $(\omega(\mathbf{0}), \omega(\mathbf{i}_1), \dots, \omega(\mathbf{i}_{l-1})) \in M^l$  schreiben. Sei  $\omega \in \text{An}_{\mathcal{S}_M^{<k>}}(f_1(x_1), \dots, f_k(x_k))$  und schreibe für jedes  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$

$$x_j^{n_j} = h_j(x_i) f_j(x_j) + a_j(x_j),$$

wobei  $\text{Grad}(a_j(x_j)) < l_j$ . Setzen wir

$$g^{(\mathbf{n})}(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^k a_j(x_j) = \sum_{\mathbf{i} \in \Pi_E} r_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n})} \mathbf{x}^{\mathbf{i}},$$

und  $v := \mathbf{x}^{\mathbf{n}} \omega = g^{(\mathbf{n})}(\mathbf{x}) \omega$ , so ist dann

$$\omega(\mathbf{n}) = v(\mathbf{0}) = \sum_{\mathbf{i} \in \Pi_E} r_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n})} \omega(\mathbf{i}) \text{ für jedes } \mathbf{n} \in \mathbb{N}^k,$$

also ist  $\omega$  durch das Anfangspolyeder  $\omega(\Pi_E)$  eindeutig bestimmt.

**4.1.5. Die Impulsfolge.** Sei  $E = \{f_1(x_1), \dots, f_k(x_k)\}$  eine Menge von normierten Polynomen in  $R[\mathbf{x}]$ ,  $\mathbf{f} := (f_1, \dots, f_k)$  und setze  $I_{\mathbf{f}} := (f_1(x_1), \dots, f_k(x_k))$ . Betrachte für jedes  $\mathbf{t} \in \Pi_E$  die Folgen in  $\text{An}_{\mathcal{S}_R^{<k>}}(I_{\mathbf{f}})$  bestimmt durch das Anfangspolyeder

$$e_{\mathbf{t}}^{\mathbf{f}}(\mathbf{i}) = \delta_{\mathbf{i}, \mathbf{t}} \text{ für alle } \mathbf{i} \in \Pi_E.$$

Man nennt  $e_{\mathbf{1}-1}^{\mathbf{f}}$  die **Impulsfolge** von  $\text{An}_{\mathcal{S}_R^{<k>}}(f_1, \dots, f_k)$ .

**4.1.6. Beispiel.** Die **Fibonacci Folge**  $\omega = (0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$  ist eine linear rekursive Folge über  $\mathbb{Z}$  mit Anfangsvektor  $(0, 1)$  und elementarem charakteristischem Polynom  $f(x) := x^2 - x - 1 \in \mathbb{Z}[x]$ . Also ist  $\omega \in \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$  und es gilt

$$\omega(0) = 0, \omega(1) = 1, \omega(n+2) = \omega(n+1) + \omega(n) \text{ für alle } n \geq 2.$$

**4.1.7. Beispiel. (Geometrische Progression)** Seien  $M$  ein  $R$ -Modul,  $m \in M$ ,  $q \in R$  und betrachte  $w \in \mathcal{S}_M$ :

$$w(n) := q^n m \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist  $w \in \mathcal{L}_M$  mit  $w(0) = m$  und mit elementarem charakteristischem Polynom  $f(x) = x - q$ . Außerdem ist  $\text{An}_{R[x]}(w) = R[x](x - q) + R[x]\text{An}_R(m)$ .

**4.1.8. Beispiel. (Arithmetische Progression)** Seien  $M$  ein  $R$ -Modul,  $\{m_0, m_1, \dots, m_k\} \subset M$  und betrachte

$$w \in \mathcal{S}_M^{<k>}, w(\mathbf{n}) := m_0 + n_1 m_1 + \dots + n_k m_k \text{ für alle } \mathbf{n} \in \mathbb{N}^k.$$

Dann ist  $w \in \mathcal{L}_M^{<k>}$  mit elementaren charakteristischen Polynomen  $\{(x_1 - 1)^2, \dots, (x_k - 1)^2\}$ .

- 4.1.9. Lemma.** 1. Ist  $I \triangleleft R[\mathbf{x}]$  ein normiertes Ideal, so ist  $R[\mathbf{x}]/I$  e.e. in  ${}_R\mathcal{M}$ .
2. Sei  $R$  noethersch. Ein  $R[\mathbf{x}]$ -Ideal  $I$  ist  $R$ -koendlich genau dann, wenn  $I$  ein normiertes Ideal ist. Insbesondere ist  $R[\mathbf{x}]$  eine kofinitäre  $R$ -Algebra.

**Beweis.** 1. Sei  $I \triangleleft A$  ein normiertes Ideal, das eine Menge von normierten Polynomen  $E = \{f_1(x_1), \dots, f_k(x_k)\}$  enthält. Ist  $\text{Grad}(f_j(x_j)) = l_j$  für  $j = 1, \dots, k$ , dann ist  $\{1 + I, x_1 + I, \dots, x_1^{l_1-1} + I, \dots, x_k + I, \dots, x_k^{l_k-1} + I\}$  offensichtlich ein Erzeugendensystem für  $A/I$ .

2. Sei  $I \triangleleft R[\mathbf{x}]$  ein  $R$ -koendliches Ideal und setze  $I_j := I \cap R[x_j]$  für jedes  $j = 1, \dots, k$ . Dann ist  $R[x_j]/I_j \hookrightarrow R[\mathbf{x}]/I$  und daher ist  $I_j \triangleleft R[x_j]$   $R$ -koendlich für  $j = 1, \dots, k$ . Betrachte die Kette

$$R\{1 + I_j\} \subset \sum_{i=0}^1 R\{x_j^i + I_j\} \subset \sum_{i=0}^2 R\{x_j^i + I_j\} \subset \dots$$

von  $R$ -Untermoduln von  $R[x_j]/I_j$ . Dann ist der endlich erzeugte  $R$ -Modul  $R[x_j]/I_j$  ist noethersch und somit existiert eine positive natürliche Zahl  $l_j$ , so dass

$$\sum_{i=0}^{l_j-1} R\{x_j^i + I_j\} = \sum_{i=0}^{l_j} R\{x_j^i + I_j\}.$$

Damit existiert eine Menge  $\{r_{l_j-1}^{(j)}, \dots, r_1^{(j)}, r_0^{(j)}\} \subset R$ , so dass

$$f_j(x_j) = x_j^{l_j} - r_{l_j-1}^{(j)} x_j^{l_j-1} - \dots - r_1^{(j)} x_j - r_0^{(j)} \in I_j.$$

Somit enthält  $I$  eine Menge von normierten Polynomen  $E := \{f_1(x_1), \dots, f_k(x_k)\}$ , also ist  $I \triangleleft R[\mathbf{x}]$  ein normiertes Ideal.

Setzen wir  $\tilde{I}_j := (f_j(x_j))$ , dann ist  $R[x_j]/\tilde{I}_j$  endlich erzeugt frei in  ${}_R\mathcal{M}$  und daher ist  $R[x_j]$  eine kofinitäre  $R$ -Algebra für  $j = 1, \dots, k$ . Nach Induktion folgt aus Satz 2.4.17 (1), dass

$$R[\mathbf{x}] \simeq R[x_1] \otimes \dots \otimes R[x_k]$$

eine kofinitäre  $R$ -Algebra ist.

**4.1.10. Definition.** Sei  $U(R) = \{r \in R \mid r \text{ ist invertierbar}\}$  die Einheitengruppe von  $R$ . Ein normiertes Polynom  $q(x) \in R[x]$  nennt man **reversibel**, falls  $q(0) \in U(R)$ . Ein Ideal  $I \triangleleft R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$  nennen wir **reversibel**, falls  $I$  eine Menge von reversiblen Polynomen  $\tilde{E} = \{q_1(x_1), \dots, q_k(x_k)\}$  enthält.

Das folgende Lemma verallgemeinert die entsprechende Aussage für den Körper-Fall [LT90, Seite 123]:

**4.1.11. Lemma.** ([AG-TL2001, Lemma 4.12]) Für ein reversibles Polynom  $q(x) \in R[x]$  gilt:

$$R[x]/(q(x)) \simeq R[x, x^{-1}]/(q(x)).$$

**Beweis.** Sei  $q(x) = r_0 + r_1x + \dots + r_{n-1}x^{n-1} + x^n$  ein reversibles Polynom. Bemerke, dass

$$R[x, x^{-1}]/(q(x)) \simeq R[x, y]/(yx - 1, q(x)).$$

Setze  $I := (yx - 1, q(x))$  und betrachte den  $R$ -Algebra-Morphismus

$$\Psi : R[x] \longrightarrow R[x, y]/I, \quad x \longmapsto x + I.$$

Dann ist  $\text{Ke}(\Psi) = I \cap R[x] = R[x]q(x)$  und  $\Psi$  ist offensichtlich surjektiv genau dann, wenn  $y + I \in \text{Im}(\Psi)$ . Es gilt aber:

$$\begin{aligned} yq(x) - x^{n-1}(yx - 1) &= r_0y + r_1yx + \dots + r_{n-1}yx^{n-1} + x^{n-1} \\ &= r_0y + r_1 + \dots + r_{n-1}x^{n-2} + x^{n-1} \pmod{I}, \end{aligned}$$

und somit

$$y = -r_0^{-1} [r_1 + \dots + r_{n-1}x^{n-2} + x^{n-1}] \pmod{I},$$

also ist  $y + I \in \text{Im}(\Psi)$ .

**4.1.12. Lemma.** 1. Ist  $I \triangleleft R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$  ein reversibles Ideal, dann ist  $R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]/I$  e.e. in  ${}_R\mathcal{M}$ .

2. Sei  $R$  noethersch. Ist  $I \triangleleft R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$   $R$ -koendlich, so ist  $I$  ein reversibles Ideal. Insbesondere ist  $R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$  eine kofinitäre  $R$ -Algebra.

**Beweis.** 1. Sei  $\tilde{E} = \{q_1(x_1), \dots, q_k(x_k)\} \subseteq I$  eine Menge von reversiblen Polynomen und setze  $I_j := I \cap R[x_j, x_j^{-1}]$  für jedes  $j = 1, \dots, k$ . Das Polynom  $q_j(x_j) \in I_j$  ist normiert und folglich ist  $R[x_j, x_j^{-1}]/(q_j(x_j)) \simeq R[x_j]/(q_j(x_j))$  e.e. in  ${}_R\mathcal{M}$  (siehe Lemmata 4.1.9 (1) und 4.1.11). Damit ist

$$R[x_j, x_j^{-1}]/I_j \simeq (R[x_j, x_j^{-1}]/(q_j(x_j)))/(I_j/(q_j(x_j)))$$

e.e. in  ${}_R\mathcal{M}$ . Für  $j, l = 1, \dots, k$ , setze

$$T_l := \begin{cases} R[x_j, x_j^{-1}], & \text{falls } l \neq j, \\ I_j, & \text{falls } l = j \end{cases} \quad \text{und } T := \sum_{j=1}^k \left( \bigotimes_{l=1}^k T_l \right).$$

Dann ist

$$R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]/T \simeq R[x_1, x_1^{-1}]/I_1 \otimes \dots \otimes R[x_k, x_k^{-1}]/I_k$$

und somit sind  $R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]/T$  und folglich  $R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]/I$  e.e. in  ${}_R\mathcal{M}$ .

2. Sei  $I \triangleleft R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$  ein  $R$ -koendliches Ideal. Für jedes  $j = 1, \dots, k$  haben wir eine Einbettung

$$R[x_j]/(R[x_j] \cap I) \hookrightarrow R[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}]/I$$

und somit ist  $I_j := R[x_j, x_j^{-1}] \cap I \triangleleft R[x_j, x_j^{-1}]$  ein  $R$ -koendliches Ideal. Daher ist aber auch  $R[x_j] \cap I_j \triangleleft R[x_j]$   $R$ -koendlich und enthält laut Lemma 4.1.9 (2) ein normiertes Polynom  $f_j(x_j) = x^{l_j} + r_{l_j-1}^{(j)} x^{l_j-1} + \dots + r_1^{(j)} x_j + r_0^{(j)}$ . Für  $j = 1, \dots, k$  ist der Ring von Laurent-Polynomen  $R[x_j, x_j^{-1}]$  eine  $R$ -Hopf-Algebra mit bijektiver Antipode

$$S_j : R[x_j, x_j^{-1}] \longrightarrow R[x_j, x_j^{-1}], \quad x_j \longmapsto x_j^{-1}.$$

Somit ist  $R[x_j, x_j^{-1}]/S_j(I_j) \simeq R[x_j, x_j^{-1}]/I_j$ , also ist  $S_j(I_j) \triangleleft R[x_j, x_j^{-1}]$   $R$ -koendlich. Daher ist auch  $R[x_j] \cap S_j(I_j) \triangleleft R[x_j]$   $R$ -koendlich und enthält nach Lemma 4.1.9 (2) ein normiertes Polynom  $g_j(x_j) = \tilde{r}_0^{(j)} + \tilde{r}_1^{(j)} x_j + \dots + \tilde{r}_{t_j-1}^{(j)} x_j^{t_j-1} + x_j^{t_j}$ .

Setzen wir

$$\begin{aligned} q_j(x_j) &:= x_j^{t_j} (f_j(x_j) + S(g_j(x_j))) \\ &= 1 + \tilde{r}_{t_j-1} x_j + \dots + (r_0 + \tilde{r}_0) x_j^{t_j} + \dots r_{l_j-1} x_j^{t_j+l_j-1} + x_j^{l_j+t_j}, \end{aligned}$$

so ist  $q_j(x_j) \in R[x_j] \cap I_j$  und  $\tilde{E} := \{q_1(x_1), \dots, q_k(x_k)\} \subset I$ , also ist  $I$  ein reversibles Ideal.

**Behauptung:**  $R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$  ist kofinitär.

Sei  $I \triangleleft R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$  ein  $R$ -koendliches Ideal. Wie oben gezeigt enthält  $I$  eine Menge von reversiblen Polynomen  $\tilde{E} = \{q_1(x_1), \dots, q_k(x_k)\}$ . Nach Lemma 4.1.11 haben wir für  $j = 1, \dots, k$  den Isomorphismus

$$R[x_j, x_j^{-1}]/(q_j(x_j)) \simeq R[x_j]/(q_j(x_j)),$$

also ist  $R[x_j, x_j^{-1}]/(q_j(x_j))$  ein endlicher  $R$ -Modul. Damit ist  $R[x_j, x_j^{-1}]$  eine kofinitäre  $R$ -Algebra und es folgt nach Induktion aus Satz 2.4.17 (1), dass

$$R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] \simeq R[x_1, x_1^{-1}] \otimes \dots \otimes R[x_k, x_k^{-1}]$$

eine kofinitäre  $R$ -Algebra ist.

*4.1.13. Bemerkung.* Nach Anfertigung dieser Arbeit wurde uns bekannt, dass die Aussagen von Lemmata 4.1.9 (2) und 4.1.12 (2) auch für *nicht notwendig noethersche* kommutative Ringe gelten (siehe [Kur]).

## 4.2 Linear rekursive Folgen über noetherschen Ringen

In einer Reihe von Artikeln haben E. Taft et. al. (etwa [PT80], [LT90], [Taf95]) einen koalgebraischen Aspekt für das Studium der linear rekursiven Folgen über Körpern entwickelt. Außerdem hat L. Grünenfelder et. al. ([GO93], [GK97]) die linear rekursiven Folgen über einem *endlich dimensional*en Vektorraum  $V$  über einem Körper betrachtet. Linear rekursive Folgen über beliebigen Ringen und Moduln wurden in einer Reihe von Artikeln bei A. Nechaev et. al. studiert (z.B. [Nec96], [KKMN95], [Nec93]).

In diesem Paragraphen betrachten wir einen koalgebraischen Aspekt für das Studium der linear rekursiven Folgen von Moduln über *beliebigen noetherschen* Ringen und Moduln.

**4.2.1. Bialgebra-Strukturen auf  $R[\mathbf{x}]$ .** Betrachte den Polynomring  $R[\mathbf{x}]$ . Mit der üblichen Multiplikation und dem üblichen Einselement ist  $G = \{x_j^n \mid n \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, k\}$  ein Monoid und daher wird  $R[\mathbf{x}] = RG$  eine kokommutative  $R$ -Bialgebra (vgl. 2.6.5) mit Komultiplikation  $\Delta_g$  und Koeinheit  $\varepsilon_g$ :

$$\begin{aligned} \Delta_g : R[\mathbf{x}] &\longrightarrow R[\mathbf{x}] \otimes R[\mathbf{x}], & x_j^s &\longmapsto x_j^s \otimes x_j^s, & \forall s \geq 0, j = 1, \dots, k, \\ \varepsilon_g : R[\mathbf{x}] &\longrightarrow R, & x_j^s &\longmapsto 1_R, & \forall s \geq 0, j = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Betrachten wir die Elemente der Basis  $G$  als primitive Elemente, so wird  $R[\mathbf{x}]$  eine *kokommutative*  $R$ -Hopf-Algebra mit Komultiplikation  $\Delta_p$ , Koeinheit  $\varepsilon_g$  und Antipode  $S_p$ :

$$\begin{aligned} \Delta_p : R[\mathbf{x}] &\longrightarrow R[\mathbf{x}] \otimes R[\mathbf{x}], & x_j^s &\longmapsto \sum_{t=0}^s \binom{s}{t} x_j^t \otimes x_j^{s-t}, & \forall s \geq 0, j = 1, \dots, k, \\ \varepsilon_p : R[\mathbf{x}] &\longrightarrow R, & x_j^s &\longmapsto \delta_{s,0}, & \forall s \geq 0, j = 1, \dots, k, \\ S_p : R[\mathbf{x}] &\longrightarrow R[\mathbf{x}], & x_j^s &\longmapsto (-x_j)^s, & \forall s \geq 0, j = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

**4.2.2. Bemerkungen.** 1. Ist  $R$  ein Integritätsbereich, dann läßt sich analog zum Körper-Fall ([CG93]) zeigen, dass die zwei  $R$ -Bialgebra-Strukturen auf  $R[\mathbf{x}]$  in 4.2.1 die einzigen möglichen  $R$ -Bialgebra-Strukturen auf  $R[\mathbf{x}]$  mit der üblichen Multiplikation und der üblichen Einheit sind.

2. Betrachtet man  $R[\mathbf{x}]$  als  $R$ -Bialgebra mit Komultiplikation  $\Delta_g$ , so erhält  $R[\mathbf{x}]$  keine  $R$ -Hopf-Algebra-Struktur, weil in einer  $R$ -Hopf-Algebra die gruppen-ähnlichen Elemente invertierbar sein müssen.

Ist  $M$  ein beliebiger  $R$ -Modul, dann gibt es offensichtlich einen  $R[\mathbf{x}]$ -Isomorphismus

$$\Phi_M : M[\mathbf{x}]^* \longrightarrow \mathcal{S}_{M^*}^{<k>}, \quad \varkappa \longmapsto [\mathbf{n} \longmapsto [m \longmapsto \varkappa(m\mathbf{x}^{\mathbf{n}})]] \quad (4.3)$$

mit Inversem  $u \longmapsto [x^{\mathbf{n}}m \longmapsto u(\mathbf{n})(m)]$ .

**4.2.3. Proposition.** *Ist  $R$  noethersch, dann gibt es für jeden  $R$ -Modul  $M$  einen  $R[\mathbf{x}]$ -Modul-Isomorphismus*

$$M[\mathbf{x}]^\circ \simeq \mathcal{L}_{M^*}^{<k>}. \quad (4.4)$$

**Beweis.** Betrachte den  $R[\mathbf{x}]$ -Modul-Isomorphismus  $\Phi_M : M[\mathbf{x}]^* \longrightarrow \mathcal{S}_{M^*}^{<k>}$  (4.3). Sei  $\varkappa \in M[\mathbf{x}]^\circ$ . Dann existiert ein  $R$ -koendliches  $R[\mathbf{x}]$ -Ideal  $I \triangleleft R[\mathbf{x}]$ , so dass  $I \rightarrow \varkappa = 0$ . Daher ist  $I \rightarrow \Phi(\varkappa) = \Phi(I \rightarrow \varkappa) = 0$ , also ist  $I \subset \text{An}_{R[\mathbf{x}]}(\Phi(\varkappa))$ . Nach Lemma 4.1.9 (2) ist  $I$  ein normiertes Ideal, also ist  $\Phi(\varkappa) \in \mathcal{L}_{M^*}^{<k>}$ .

Andererseits, sei  $u \in \mathcal{L}_{M^*}^{<k>}$ . Nach Definition ist  $J := \text{An}_{R[\mathbf{x}]}(u)$  ein normiertes Ideal und nach Lemma 4.1.9 (1) ist  $J \triangleleft R[\mathbf{x}]$   $R$ -koendlich. Daher gilt für  $\varkappa := \Phi^{-1}(u) : J \rightarrow \varkappa = J \rightarrow \Phi^{-1}(u) = \Phi^{-1}(J \rightarrow u) = 0$ , also ist  $\varkappa \in M[\mathbf{x}]^\circ$ .

#### 4.2.4. Die Koalgebra-Struktur auf $\mathcal{L}^{<k>}$ .

Sei  $R$  noethersch. Nach Lemma 4.1.9 (2) ist  $R[\mathbf{x}]$  eine kofinitäre  $R$ -Algebra und somit ist  $R[\mathbf{x}]^\circ$  nach Proposition 2.4.13 eine  $R$ -Koalgebra mit Komultiplikation bzw. Koeinheit induziert von der üblichen Multiplikation bzw. der üblichen Einheit von  $R[\mathbf{x}]$  und gegeben durch

$$\begin{aligned} \mu^\circ : R[\mathbf{x}]^\circ &\rightarrow R[\mathbf{x}]^\circ \otimes_R R[\mathbf{x}]^\circ, & f &\mapsto [x_i^s \otimes x_j^t \mapsto f(x_i^s x_j^t), \quad i, j = 1, \dots, k, s, t \geq 0. \\ \eta^\circ : R[\mathbf{x}]^\circ &\rightarrow R, & f &\mapsto f(1_R). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Der  $R[\mathbf{x}]$ -Isomorphismus (4.4) induziert auf  $\mathcal{L}^{<k>}$  eine  $R$ -Koalgebra-Struktur, die wir im Folgenden wie in [KKMN95, Proposition 14.16] erklären:

Sei  $u \in \mathcal{L}^{<k>}$ ,  $\{f_1(x_1), \dots, f_k(x_k)\} \subseteq \text{An}_{R[\mathbf{x}]}(u)$  eine Menge von elementaren charakteristischen Polynomen mit  $\text{Grad}(f_j(x_j)) = l_j$  und setze  $\mathbf{f} := (f_1, \dots, f_k)$ ,  $\mathbf{l} := (l_1, \dots, l_k)$ . So gilt für alle  $\mathbf{i}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^k$ :

$$u(\mathbf{i} + \mathbf{n}) = (\mathbf{x}^{\mathbf{i}} u)(\mathbf{n}) = \left( \sum_{\mathbf{t} \leq \mathbf{l} - \mathbf{1}} (\mathbf{x}^{\mathbf{i}} \rightarrow u)(\mathbf{t}) \cdot e_{\mathbf{t}}^{\mathbf{f}} \right)(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{t} \leq \mathbf{l} - \mathbf{1}} (\mathbf{x}^{\mathbf{t}} \rightarrow u)(\mathbf{i}) \cdot e_{\mathbf{t}}^{\mathbf{f}}(\mathbf{n}).$$

Somit sind die Komultiplikation und die Koeinheit von  $\mathcal{L}^{<k>}$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{L}^{<k>}} : \mathcal{L}^{<k>} &\longrightarrow \mathcal{L}^{<k>} \otimes_R \mathcal{L}^{<k>}, & u &\longmapsto \sum_{\mathbf{t} \leq \mathbf{l} - \mathbf{1}} (\mathbf{x}^{\mathbf{t}} \rightarrow u) \otimes e_{\mathbf{t}}^{\mathbf{f}}, \\ \varepsilon_{\mathcal{L}^{<k>}} : \mathcal{L}^{<k>} &\longrightarrow R, & u &\longmapsto u(\mathbf{0}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

**4.2.5. Das Hadamard-Produkt.** Betrachte die  $R$ -Bialgebra  $(R[\mathbf{x}], \mu, \eta, \Delta_g, \varepsilon_g)$ . Dann ist  $\mathcal{S}^{<k>} \simeq R^{\mathbb{N}^k} \simeq R[\mathbf{x}]^*$  eine  $R$ -Algebra mit dem *Hadamard Produkt*

$$*_g : \mathcal{S}^{<k>} \otimes \mathcal{S}^{<k>} \longrightarrow \mathcal{S}^{<k>}, \quad u \otimes v \longmapsto [\mathbf{n} \mapsto u(\mathbf{n})v(\mathbf{n})] \quad (4.7)$$

und der Einheit

$$\eta_g : R \longrightarrow \mathcal{S}^{<k>}, \quad 1_R \longmapsto [\mathbf{n} \mapsto 1_R] \text{ für jedes } \mathbf{n} \in \mathbb{N}^k. \quad (4.8)$$

Ist  $R$  noethersch, dann ist  $R[\mathbf{x}]$  nach Lemma 4.1.9 (2) eine kofinitäre  $R$ -Algebra und somit ist  $R[\mathbf{x}]^\circ$  nach Folgerung 2.5.8 eine  $R$ -Bialgebra. Durch den Isomorphismus  $\mathcal{L}^{<k>} \simeq R[\mathbf{x}]^\circ$  (4.4) wird  $\mathcal{L}^{<k>}$  eine  $R$ -Bialgebra mit der Koalgebra-Struktur gegeben in (4.6), dem Hadamard-Produkt (4.7) und der Einheit (4.8).

**4.2.6. Das Hurwitz-Produkt.** Betrachte die  $R$ -Hopf-Algebra  $(R[\mathbf{x}], \mu, \eta_p, \Delta_p, \varepsilon_p, S_p)$ . Dann bekommt  $\mathcal{S}^{<k>} \simeq R[\mathbf{x}]^* \simeq R[[x_1, \dots, x_k]]$  eine  $R$ -Algebra-Struktur mit dem *Hurwitz-Produkt*

$$*_p : \mathcal{S}^{<k>} \otimes \mathcal{S}^{<k>} \longrightarrow \mathcal{S}^{<k>}, \quad u \otimes v \longmapsto [\mathbf{n} \mapsto \sum_{\mathbf{t} \leq \mathbf{i}} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{t}} u(\mathbf{t}) v(\mathbf{n} - \mathbf{t})] \quad (4.9)$$

und der Einheit

$$\eta_p : R \longrightarrow \mathcal{S}^{<k>}, \quad 1_R \longmapsto [\mathbf{n} \longmapsto \delta_{\mathbf{n}, \mathbf{0}}] \text{ für jedes } \mathbf{n} \in \mathbb{N}^k. \quad (4.10)$$

Ist  $R$  noethersch, dann ist  $R[\mathbf{x}]$  nach Lemma 4.1.9 (2) eine kofinitäre  $R$ -Algebra und somit ist  $R[\mathbf{x}]^\circ$  nach Folgerung 2.5.8 eine  $R$ -Hopf-Algebra. Daher induziert der Isomorphismus (4.4) eine  $R$ -Hopf-Algebra-Struktur auf  $\mathcal{L}^{<k>} \simeq R[\mathbf{x}]^\circ$  mit der Koalgebra-Struktur (4.6), dem Hurwitz-Produkt (4.9), der Einheit (4.10) und der Antipode

$$S : \mathcal{L}^{<k>} \longrightarrow \mathcal{L}^{<k>}, \quad u \longmapsto [\mathbf{i} \longmapsto (-1)^{\mathbf{i}} u(\mathbf{i})].$$

*4.2.7. Bemerkung.* In [CV95] haben U. Cerruti und F. Vaccarino mit Mitteln aus der Matrizen-Theorie gezeigt, dass die linear rekursiven Folgen (für  $k = 1$ ) über *beliebigen* Ringen eine  $R$ -Algebra bildet sowohl mit dem Hadamard-Produkt als auch mit dem Hurwitz-Produkt.

Aus Lemma 3.2.6 bekommen wir das folgende Korollar:

**4.2.8. Folgerung.** *Sei  $R$  noethersch. Für jeden  $R$ -Modul  $M$  haben Isomorphismen von  $R[\mathbf{x}]$ -Moduln*

$$\mathcal{L}_{M^*}^{<k>} \simeq M[\mathbf{x}]^\circ \simeq M^* \otimes R[\mathbf{x}]^\circ \simeq M^* \otimes_R \mathcal{L}^{<k>}.$$

*Insbesondere ist  $M[\mathbf{x}]^\circ$  ( $\mathcal{L}_{M^*}^{<k>}$ ) ein kofreier  $R[\mathbf{x}]^\circ$ -Komodul ( $\mathcal{L}^{<k>}$ -Komodul).*

## 4.3 Linear rekursive Folgen über artinschen Ringen

In diesem Paragraphen betrachten wir die reversiblen  $k$ -Folgen über Moduln von artinschen Ringen. Wir verallgemeinern dabei Aussagen aus [LT90] und [KKMN95] über die Struktur der Algebra der linear rekursiven Folgen vom Körper-Fall auf beliebige artinsche Ringe.

**4.3.1. Bifolgen.** Für einen  $R$ -Modul  $M$  und  $k \geq 0$  sei

$$\tilde{\mathcal{S}}_M^{<k>} = \{\tilde{\nu} : \mathbb{Z}^k \longrightarrow M\}$$

der  $R$ -Modul der  $k$ -Bifolgen über  $M$ . Ist  $M$  (bzw.  $k$ ) nicht erwähnt, so ist  $M = R$  (bzw.  $k = 1$ ) gemeint. Setzen wir für  $\tilde{w} \in \tilde{\mathcal{S}}_M^{<k>}$  und  $f(\mathbf{x}) = (\sum_{\mathbf{i}} r_{\mathbf{i}} \mathbf{x}^{\mathbf{i}}) \in R[\mathbf{x}]$  :

$$f(\mathbf{x}) \rightharpoonup \tilde{w} = \tilde{\nu} \in \tilde{\mathcal{S}}_M^{<k>}, \text{ wobei } \tilde{\nu}(\mathbf{z}) := \sum_{\mathbf{i}} r_{\mathbf{i}} \tilde{w}(\mathbf{i} + \mathbf{z}) \text{ für alle } \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^k,$$

so wird  $\tilde{\mathcal{S}}_M^{<k>}$  ein  $R[\mathbf{x}]$ -Modul. Für Untermengen  $I \subset R[\mathbf{x}]$  und  $Y \subset \tilde{\mathcal{S}}_M^{<k>}$  betrachte die

$$\begin{aligned} \text{An}_{\tilde{\mathcal{S}}_M^{<k>}}(I) &= \{\tilde{w} \in \tilde{\mathcal{S}}_M^{<k>} \mid g(\mathbf{x}) \rightarrow \tilde{w} = 0 \text{ für jedes } g(\mathbf{x}) \in I\}, \\ \text{An}_{R[\mathbf{x}]}(Y) &= \{h(\mathbf{x}) \in R[\mathbf{x}] \mid h(\mathbf{x}) \rightarrow \tilde{v} = 0 \text{ für jedes } \tilde{v} \in Y\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist  $\text{An}_{\tilde{\mathcal{S}}_M^{<k>}}(I) \subset \mathcal{S}_M^{<k>}$  ein  $R[\mathbf{x}]$ -Untermodule und  $\text{An}_{R[\mathbf{x}]}(Y) \triangleleft R[\mathbf{x}]$  ist ein Ideal.

**4.3.2. Definition.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Eine  $k$ -Bifolge  $\tilde{w} \in \tilde{\mathcal{S}}_M^{<k>}$  heißt **linear rekursiv**, falls  $\text{An}_{R[\mathbf{x}]}(\tilde{w})$  ein normiertes Ideal ist. Den  $R[\mathbf{x}]$ -Modul der linear rekursiven  $k$ -Bifolgen über  $M$  bezeichnen wir mit  $\tilde{\mathcal{L}}_M^{<k>}$ .

**4.3.3. Reversible Folgen.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul.

1. Eine  $k$ -Bifolge  $\tilde{u}$  heißt ein **Reverses** von  $u \in \mathcal{S}_M^{<k>}$ , falls  $\tilde{u}|_{\mathbb{N}^k} = u$  und  $\text{An}_{R[\mathbf{x}]}(\tilde{u}) = \text{An}_{R[\mathbf{x}]}(u)$ .
2. Eine linear rekursive  $k$ -Folge nennen wir **reversibel**, falls  $u$  ein Reverses  $\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{L}}_M^{<k>}$  besitzt.

Mit  $\mathbf{R}_M^{<k>} \subset \mathcal{L}_M^{<k>}$  bezeichnen wir den  $R[\mathbf{x}]$ -Untermodule der reversiblen  $k$ -Folgen über  $M$ .

**4.3.4. Lemma.** (vgl. [KKMN95, Proposition 14.11]) Sei  $R$  artinsch.

1. Jedes normierte Ideal  $I \triangleleft R[\mathbf{x}]$  enthält eine Menge von normierten Polynomen

$$E' = \{x_j^{t_j} q_j(x_j) \mid q_j(x_j) \text{ ist reversibel für jedes } j = 1, \dots, k\}. \quad (4.11)$$

2. Sind  $M$  ein  $R$ -Modul und  $\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{L}}_M^{<k>}$ , dann ist  $\text{An}_{R[\mathbf{x}]}(\tilde{u})$  ein reversibles Ideal.

**Beweis.** 1. Laut [AM69, 8.7] ist jeder kommutative artinsche Ring (bis auf Isomorphie) eine direkte Summe von lokalen artinschen Ringen. Sei  $R$  o.E. ein lokaler artinscher Ring und bezeichne mit  $U(R)$  die Menge der Einheitengruppe von  $R$ . Das Jacobsonradikal von  $R$

$$J(R) = \{r \in R \mid r \text{ ist nicht invertierbar in } R\}$$

ist nilpotent, also existiert eine positive natürliche Zahl  $n$ , so dass  $J(R)^n = 0$ . Sei  $I$  ein normiertes Ideal  $E = \{g_1(x_1), \dots, g_k(x_k)\} \subset I$  eine Menge von normierten Polynomen. Ist  $g_j(x_j) = f_j(x_j) \pmod{J(R)[x_j]}$  für  $j = 1, \dots, k$ , dann ist  $g_j(x_j) \mid f_j(x_j)^n$ , also ist  $f_j(x_j)^n \in I$ . Schreiben wir  $f_j(x_j)^n = x_j^{t_j} q_j(x_j)$  mit  $(x_j, q_j(x_j)) = 1$ , dann ist  $q_j(0) \in U(R)$ , also ist  $q_j(x_j)$  ein reversibles Polynom für jedes  $j = 1, \dots, k$ . Daher ist  $E' := \{f_j(x_j)^n = x_j^{t_j} q_j(x_j), j = 1, \dots, k\} \subset I$  und die Aussage folgt.

2. Nach (1) enthält  $\text{An}_{R[\mathbf{x}]}(\tilde{u})$  eine Menge von normierten Polynomen

$$E' = \{x_j^{t_j} q_j(x_j) \mid q_j(x_j) \text{ ist reversibel für } j = 1, \dots, k\}.$$

Offensichtlich ist  $\tilde{E} := \{q_j(x_j) \mid j = 1, \dots, k\} \subset \text{An}_{R[\mathbf{x}]}(\tilde{u})$ , also ist  $\text{An}_{R[\mathbf{x}]}(\tilde{u})$  ein reversibles Ideal.

**4.3.5. Lemma.** ([KKMN95, 14.11]) Für  $u \in \mathcal{S}_M^{<k>}$  gilt:

1. Ist  $\text{An}_{R[\mathbf{x}]}(u)$  reversibel, dann ist  $u$  reversibel. Ist  $\tilde{E} = \{q_1(x_1), \dots, q_k(x_k)\} \subseteq \text{An}_{R[\mathbf{x}]}(u)$  eine Menge von reversiblen Polynomen, dann ist das Reverse von  $u$  durch  $\tilde{E}$  eindeutig bestimmt.
2. Ist  $R$  artinsch, dann ist  $u$  genau dann reversibel, wenn  $\text{An}_{R[\mathbf{x}]}(u) \triangleleft R[\mathbf{x}]$  ein reversibles Ideal ist.

Für jeden  $R$ -Modul  $M$  haben wir einen Isomorphismus von  $R[\mathbf{x}]$ -Moduln

$$\Psi_M : M[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]^* \longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}_{M^*}^{<k>}, \tilde{\varphi} \longmapsto [\mathbf{z} \longmapsto [m \longmapsto \tilde{\varphi}(\mathbf{x}^{\mathbf{z}} m)]] \quad (4.12)$$

mit Inversem  $\tilde{u} \longmapsto [\mathbf{x}^{\mathbf{z}} m \longmapsto \tilde{u}(\mathbf{z})(m)]$ .

Analog zum Beweis von Proposition 4.2.3 bekommen wir:

**4.3.6. Proposition.** Ist  $R$  artinsch, dann induziert der  $R[\mathbf{x}]$ -Isomorphismus (4.12) für jeden  $R$ -Modul  $M$  einen  $R[\mathbf{x}]$ -Isomorphismus

$$M[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]^\circ \simeq \tilde{\mathcal{L}}_{M^*}^{<k>. \quad (4.13)$$

**Beweis.** Betrachte den  $R[\mathbf{x}]$ -Modul-Isomorphismus  $\Psi_M : M[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]^* \longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}_{M^*}^{<k>}$  (4.12). Sei  $\varkappa \in M[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]^\circ$ . Dann ist  $I \rightarrow \varkappa = 0$  für ein  $R$ -koendliches  $R[\mathbf{x}]$ -Ideal  $I \triangleleft R[\mathbf{x}]$  und somit ist  $I \rightarrow \Psi(\varkappa) = \Psi(I \rightarrow \varkappa) = 0$ . Nach Lemma 4.1.12 (2) ist  $I$  ein reversibles Ideal, also enthält  $I$  eine Menge von reversiblen Polynomen  $\tilde{E} = \{q_1(x_1), \dots, q_k(x_k)\}$ . Die reversiblen Polynome  $q_j(x_j)$  sind nach Definition normiert, also ist  $\Psi(\varkappa) \in \tilde{\mathcal{L}}_{M^*}^{<k>}$ .

Andererseits, sei  $\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{L}}_{M^*}^{<k>}$ . Dann ist  $\text{An}_{R[\mathbf{x}]}(\tilde{u})$  nach Definition ein normiertes Ideal und enthält nach Lemma 4.3.4 (1) eine Menge  $E' = \{x_j^{t_j} q_j(x_j) \mid j = 1, \dots, k\}$ , wobei  $q_j(x_j)$  ein reversibles Polynom für  $j = 1, \dots, k$  ist. Für  $j = 1, \dots, k$  gilt daher für  $\Psi^{-1}(\tilde{u})$  und beliebiges  $g(x_j, x_j^{-1}) \in M[x_j, x_j^{-1}]$ :

$$(q_j(x_j) \Psi^{-1}(u))(g(x_j, x_j^{-1})) = (x_j^{t_j} q_j(x_j) \Psi^{-1}(u))(x_j^{-t_j} g(x_j, x_j^{-1})) = 0.$$

Nach Lemma 4.1.12 (1) ist das reversible Ideal  $\tilde{I} := (q_1(x_1), \dots, q_k(x_k)) \triangleleft R[\mathbf{x}]$   $R$ -koendlich, also ist  $\Psi^{-1}(u) \in M[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]^\circ$ .

**4.3.7. Definition.** (vgl. [KKMN95, 5.18, 5.23]) Eine  $k$ -Folge  $u \in \mathcal{S}_M^{<k>}$  nennen wir **ausgeartet**, falls  $\mathbf{x}^{\mathbf{t}} u = 0$  für ein  $\mathbf{t} \in \mathbb{N}^k$ . Mit  $\mathbf{D}_M^{<k>}$  bezeichnen wir den  $R[\mathbf{x}]$ -Modul der ausgearteten  $k$ -Folgen über  $M$ .

Die folgende Proposition verallgemeinert die Aussage [KKMN95, Proposition 5.27] über die  $R[\mathbf{x}]$ -Modul-Struktur der *periodischen Folgen* über einem Modul auf die  $R[x]$ -Modul-Struktur der linear rekursiven Folgen von Moduln über artinschen Ringen:

**4.3.8. Proposition.** *Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Ist  $R$  artinsch, dann gibt es  $R[\mathbf{x}]$ -Isomorphismen*

$$\mathcal{L}_M^{<k>} \simeq \mathbf{D}_M^{<k>} \oplus \tilde{\mathcal{L}}_M^{<k>} \simeq \mathbf{D}_M^{<k>} \oplus \mathbf{R}_M^{<k>}. \quad (4.14)$$

**Beweis.** Sei  $k = 1$  und  $u \in \mathcal{L}_M$ . Dann ist  $\text{An}_{R[x]}(u)$  ein normiertes Ideal und enthält nach Lemma 4.3.4 ein normiertes Polynom der Form  $p(x) = x^t q(x)$  für ein  $t \geq 0$  und ein reversibles Polynom  $q(x) = x^l + r_{l-1}x^{l-1} + \dots + r_1x + r_0$ , also es gilt

$$r_0u(i+t) + r_1u(i+t+1) + \dots + r_{l-1}u(i+t+l-1) + u(i+t+l) = 0 \text{ für alle } i \geq 0.$$

Analog zu [LT90] (siehe auch [KKMN95, 14.11]) konstruieren wir durch *Backsolving* eine Bifolge

$$\tilde{u}(i) := \begin{cases} u(i), & i \geq t+l \\ -r_0^{-1}(r_1u(i+1) + \dots + r_{l-1}u(i+l-1) + u(i+l)), & i \in \mathbb{Z} \text{ und } i < t+l. \end{cases} \quad (4.15)$$

Offensichtlich ist  $\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{L}}_M$ . Für  $k > 1$  existiert für jedes  $u \in \mathcal{L}_M^{<k>}$  eine Menge von reversiblen Polynomen  $E' = \{x^{t_j}q_j(x_j) \mid j = 1, \dots, k\} \subset \text{An}_{R[\mathbf{x}]}(u)$  und wir bekommen wie oben gezeigt und durch *Backsolving* mittels  $q_j(x_j)$  entlang der  $j$ -ten Reihe für  $j = 1, \dots, k$  ein  $\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{L}}_M^{<k>}$ . Auf dieser Weise bekommen wir einen  $R[\mathbf{x}]$ -Modul-Morphismus

$$\gamma : \mathcal{L}_M^{<k>} \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_M^{<k>}, \quad u \longmapsto \tilde{u} \quad (4.16)$$

mit  $\text{Ke}(\gamma) = \mathbf{D}_M^{<k>}$ . Andererseits gibt es einen  $R[\mathbf{x}]$ -Modul-Morphismus

$$\beta : \tilde{\mathcal{L}}_M^{<k>} \longrightarrow \mathcal{L}_M^{<k>}, \quad \tilde{w} \longmapsto \tilde{w}|_{\mathbb{N}^k}, \quad (4.17)$$

und es gilt  $\gamma \circ \beta = \text{id}_{\tilde{\mathcal{L}}_M^{<k>}}$ . Daher zerfällt die exakte Folge von  $R[\mathbf{x}]$ -Moduln

$$0 \longrightarrow \mathbf{D}_M^{<k>} \longrightarrow \mathcal{L}_M^{<k>} \xrightarrow{\gamma} \tilde{\mathcal{L}}_M^{<k>} \longrightarrow 0,$$

und wir bekommen einen  $R[\mathbf{x}]$ -Modul-Isomorphismus

$$\mathcal{L}_M^{<k>} \simeq \mathbf{D}_M^{<k>} \oplus \tilde{\mathcal{L}}_M^{<k>}. \quad (4.18)$$

Ist  $u \in \mathbf{R}_M^{<k>}$ , dann existiert ein Reverses  $\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{L}}_M^{<k>}$ . Angenommen  $\tilde{w} \in \tilde{\mathcal{L}}_M^{<k>}$  ist auch ein Reverses von  $u$ , dann ist nach Definition  $\tilde{u}|_{\mathbb{N}^{<k>}} = u = \tilde{w}|_{\mathbb{N}^{<k>}}$  und man zeigt durch *Backsolving*, dass  $\tilde{u} = \tilde{w}$ , also ist das Reverse von  $u$  eindeutig bestimmt. Offensichtlich ist  $\text{Im}(\beta) = \mathbf{R}_M^{<k>}$  und somit ist  $\tilde{\mathcal{L}}_M^{<k>} \xrightarrow{\beta} \mathbf{R}_M^{<k>}$  als  $R[\mathbf{x}]$ -Moduln.

**4.3.9. Die  $R$ -Hopf-Algebra  $\mathbf{R}^{<k>}$ .** Betrachten wir  $G = \{x_j^z \mid j = 1, \dots, k, z \in \mathbb{Z}\}$  als Gruppe mit der üblichen Multiplikation, so wird der Ring der Laurent-Polynome  $R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] \simeq RG$  nach 2.6.5 eine kokommutative  $R$ -Hopf-Algebra  $(R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}], \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$  mit Komultiplikation  $\Delta$ , Koeinheit  $\varepsilon$  und Antipode  $S$  :

$$\begin{aligned} \Delta &: R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] \longrightarrow R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] \otimes R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}], & x_j^z &\longmapsto x_j^z \otimes x_j^z, & \forall j = 1, \dots, k, z \in \mathbb{Z}, \\ \varepsilon &: R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] \longrightarrow R, & x_j^z &\longmapsto \delta_{z,0}, & \forall j = 1, \dots, k, z \in \mathbb{Z}, \\ S &: R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] \longrightarrow R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}], & x_j^z &\longmapsto x_j^{-z}, & \forall j = 1, \dots, k, z \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Somit ist  $\tilde{\mathcal{S}}^{<k>} \simeq R^{\mathbb{Z}^k} \simeq R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]^*$  eine  $R$ -Algebra mit dem *Hadamard Produkt*

$$\star : \tilde{\mathcal{S}}^{<k>} \otimes \tilde{\mathcal{S}}^{<k>} \longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}^{<k>}, \quad \tilde{u} \otimes \tilde{v} \longmapsto [\mathbf{z} \longmapsto \tilde{u}(\mathbf{z})\tilde{v}(\mathbf{z})] \text{ für alle } \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{\mathcal{S}}^{<k>} \quad (4.20)$$

und der Einheit

$$\eta : R \longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}^{<k>}, \quad 1_R \longmapsto [\mathbf{z} \longmapsto 1_R] \text{ für jedes } \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^k. \quad (4.21)$$

Ist  $R$  noethersch, dann ist  $R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$  nach Lemma 4.1.12 (2) eine kofinitäre  $R$ -Algebra und somit ist  $R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]^\circ$  nach Folgerung 2.5.8 eine  $R$ -Hopf-Algebra. Ist  $R$  artinsch, so bekommt  $\tilde{\mathcal{L}}^{<k>}$  durch den Isomorphismus  $\tilde{\mathcal{L}}^{<k>} \simeq R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]^\circ$  (4.13) eine  $R$ -Hopf-Algebra-Struktur mit dem Hadamard-Produkt (4.20), der Einheit (4.21) und der Antipode

$$S_{\tilde{\mathcal{L}}^{<k>}} : \tilde{\mathcal{L}}^{<k>} \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}^{<k>}, \quad \tilde{u} \longmapsto [\mathbf{z} \longmapsto \tilde{u}(-\mathbf{z})] \text{ für alle } \tilde{u} \in \tilde{\mathcal{L}}^{<k>}, \quad z \in \mathbb{Z}.$$

Außerdem wird  $\mathbf{R}^{<k>}$  eine  $R$ -Hopf-Algebra mit der  $R$ -Koalgebra-Struktur (4.6), dem Hadamard-Produkt (4.7), der Einheit 4.8 und der Antipode

$$S_{\mathbf{R}^{<k>}} : \mathbf{R}^{<k>} \longrightarrow \mathbf{R}^{<k>}, \quad u \longmapsto [\mathbf{n} \longmapsto \gamma(u)(-\mathbf{n})] \text{ für alle } u \in \mathbf{R}^{<k>}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^k.$$

Außerdem ist  $\beta : \tilde{\mathcal{L}}^{<k>} \longrightarrow \mathbf{R}^{<k>}$  ein Hopf-Algebra-Isomorphismus.

Der folgende Satz erweitert die entsprechenden Aussagen im Körper-Fall [LT90, Seite 124] (siehe auch [KKMN95, 14.15]) auf beliebige *artinsche* Ringe:

**4.3.10. Satz.** *Ist  $R$  artinsch, dann gibt es Bialgebra-Isomorphismen*

$$\mathcal{L}^{<k>} \simeq \mathbf{D}^{<k>} \oplus \tilde{\mathcal{L}}^{<k>} \simeq \mathbf{D}^{<k>} \oplus \mathbf{R}^{<k>}.$$

**Beweis.** Betrachte den  $R[\mathbf{x}]$ -Isomorphismus  $\mathcal{L}^{<k>} \simeq \mathbf{D}^{<k>} \oplus \tilde{\mathcal{L}}^{<k>}$  (4.18). Mit Hilfe von Lemmata 4.1.11 und 4.3.4 zeigt man analog zu [LT90, Seite 123], dass  $\beta : \tilde{\mathcal{L}}^{<k>} \longrightarrow \mathcal{L}^{<k>}$  (4.17) und  $\gamma : \mathcal{L}^{<k>} \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}^{<k>}$  (4.16) Bialgebra-Morphismen sind. Offensichtlich ist  $\text{Ke}(\gamma) = \mathbf{D}^{<k>} \subset \mathcal{L}^{<k>}$  eine  $R$ -Unterbialgebra. Nach 4.3.9 gibt es einen Hopf-Algebra-Isomorphismus  $\tilde{\mathcal{L}}^{<k>} \simeq \mathbf{R}^{<k>}$  und die Aussage folgt.

Aus Satz 2.4.17 und Folgerung 2.5.10 ergibt sich unmittelbar die folgende Aussage:

**4.3.11. Folgerung.** *Sei  $R$  noethersch die  $R$ -Bialgebra (bzw. die  $R$ -Hopf-Algebra)  $R[\mathbf{x}]^\circ$  und die  $R$ -Hopf-Algebra  $R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]^\circ$ . Ist  $A$  eine  $\alpha$ -Algebra (bzw.  $\alpha$ -Bialgebra,  $\alpha$ -Hopf-Algebra), dann haben wir Koalgebra-Isomorphismen (bzw. Bialgebra-Isomorphismen, Hopf-Algebra-Isomorphismen)*

$$A[\mathbf{x}]^\circ \simeq A^\circ \otimes_R R[\mathbf{x}]^\circ \text{ und } A[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]^\circ \simeq A^\circ \otimes_R R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]^\circ.$$

# Anhang A

## Die linear schwache Topologie

Dieser Anhang ist der Betrachtung der **linear schwachen Topologie** gewidmet (siehe [Köt66]). Wir stellen die Eigenschaften dieser Topologie induziert von einem *dualen* Paar über einem beliebigen kommutativen Ring bereit. Die entsprechenden Aussagen im Körper-Fall findet man u.a. in [Rad73], [HR74] und [LR97, Anhang A]. Für die benötigten Definitionen und Aussagen aus der Theorie der (linear) topologischen Moduln dient u.a. [Ste75].

$R$  bezeichne nach wie vorher einen assoziativen *kommutativen* Ring mit  $1_R \neq 0_R$ . Wir betrachten  $R$  immer als einen linear topologischen Ring mit der *diskreten Topologie*. Für die Betrachtung der Kategorie der *Paare* über  $R$  siehe Paragraph 2.1.

**A.0.1. Die endliche Topologie.** Seien  $E$  ein  $R$ -Modul,  $W$  eine Menge und betrachte  $E$  mit der diskreten Topologie und  $E^W$  mit der **Produkttopologie**. Identifiziere das direkte Produkt  $E^W$  mit der Menge der Abbildung von  $W$  nach  $E$  und sei  $Z \subset E^W$  ein  $R$ -Untermodule. Für jede Teilmenge  $F \subset W$  setze

$$F^\perp := \{f \in Z \mid f(w) = 0_E \text{ für jedes } w \in F\}.$$

Dann ist

$$\mathcal{B}_f(0_Z) := \{F^\perp \mid F = \{w_1, \dots, w_k\} \subset W \text{ ist eine endliche Teilmenge}\},$$

eine aus  $R$ -Untermodule von  $Z$  bestehende Filterbasis und induziert auf  $Z$  eine Topologie, die sogenannte **endliche Topologie**  $\mathfrak{T}(\mathcal{B}_f(0_Z))$ , so dass  $Z$  ein linear topologischer  $R$ -Modul und  $\mathcal{B}_f(0_Z)$  eine Umgebungsbasis der  $0_Z$  sind. Die **abgeschlossene Hülle** für eine Teilmenge  $X \subset Z$  ist gegeben durch

$$\overline{X} = \bigcap \{X + F^\perp \mid F \subset W \text{ ist eine endliche Teilmenge}\}. \quad (\text{A.1})$$

Somit liegt  $X \subset Y \subseteq Z$  **dicht** genau dann, wenn für jede endliche Untermenge  $F = \{w_1, \dots, w_k\} \subset W$  und jedes  $f \in Y$  ein  $g \in X$  existiert, so dass  $f(w_i) = g(w_i)$  für  $i = 1, \dots, k$ .

**A.0.2. Die linear schwache Topologie.** Sei  $P = (V, W)$  ein Paar von  $R$ -Moduln mit einer bilinearen Form

$$\alpha : V \times W \longrightarrow R, (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle.$$

Betrachten wir  $W^* \subset R^W$  (bzw.  $V^* \subset R^V$ ) mit der *endlichen Topologie*, so induziert  $\alpha$  auf  $V$  (bzw. auf  $W$ ) eine eindeutig bestimmte lineare Topologie, die **linear schwache Topologie**  $V[\mathfrak{T}_{ls}(W)]$  (bzw.  $W[\mathfrak{T}_{ls}(V)]$ ), so dass die induzierte Abbildung  $\kappa_P : V \longrightarrow W^*$  (bzw.  $\chi_P : W \longrightarrow V^*$ ) stetig ist. Außerdem ist  $V[\mathfrak{T}_{ls}(W)]$  (bzw.  $W[\mathfrak{T}_{ls}(V)]$ ) genau dann *Hausdorff*, wenn  $V \xrightarrow{\kappa_P} W^*$  (bzw.  $W \xrightarrow{\chi_P} V^*$ ) eine Einbettung ist.

Eine wichtige Rolle bei der Betrachtung der linear schwachen Topologien spielen die:

**A.0.3. Annulator-Bedingungen** ([Wis88, 28.1]) Sei  $N$  ein  $R$ -Modul.

1. Für jeden  $R$ -Unterm modul  $L \subset N$  gilt

$$\text{KeAn}(L) = L \iff N/L \text{ } R\text{-koerzeugt ist.} \quad (\text{A.2})$$

2. Ist  $R$   $N$ -injektiv, dann ist

$$\text{An}(L_1 \cap L_2) = \text{An}(L_1) + \text{An}(L_2) \text{ für alle } R\text{-Unterm oduln } L_1, L_2 \subset N. \quad (\text{A.3})$$

3. Ist  $R$  injektiv, oder sind  ${}_R N$  e.e. und  $R$  FP-injektiv, dann gilt für jeden endlich erzeugten  $R$ -Unterm modul  $X \subset N^* : \text{AnKe}(X) = X$ .

Im Folgenden sei  $P = (V, W)$  ein Paar,  $W \subset V^*$  und betrachte  $V$  mit der linear schwachen Topologie  $V[\mathfrak{T}_{ls}(W)]$ .

**A.0.4. Lemma.** 1. Für  $X \subset V$  gilt  $\overline{X} \subseteq X^{\perp\perp}$ . Somit sind alle orthogonal abgeschlossenen  $R$ -Unterm oduln von  $V$  abgeschlossen.

2. Ist  $R$  noethersch, dann sind alle offenen  $R$ -Unterm oduln von  $V$   $R$ -koendlich.
3. Sei  $X \subset V$  ein  $R$ -Unterm modul, so dass  $V/X$   $R$ -koerzeugt ist. Ist  $\chi_P(X^\perp) = \text{An}(X)$ , dann ist  $X$  abgeschlossen. Ist  $R$  noethersch und ist  $X$  außerdem  $R$ -koendlich, dann ist  $X$  offen.
4. Sei  $R$  artinsch.

(a) Jeder  $R$ -koendliche abgeschlossene  $R$ -Unterm modul  $X \subset V$  ist offen.

(b) Sind  $X \subset Y \subset V$   $R$ -Unterm oduln und ist  $X \subset V$  abgeschlossen und  $R$ -koendlich, dann ist auch  $Y \subset V$  abgeschlossen und  $R$ -koendlich.

5. Ist  $V \subset W^*$ , dann gilt:

- (a) Seien  $R$  injektiv, oder  ${}_R W$  endlich erzeugt und  $R$  FP-injektiv. Dann ist jeder endlich erzeugte  $R$ -Untermodul  $X \subset V$  abgeschlossen.
- (b) Seien  $R$  ein QF Ring und  ${}_R W$  endlich erzeugt. Dann sind alle  $R$ -Untermodule von  $V$  abgeschlossen.

**Beweis.** 1. Ist  $\tilde{x} \in \overline{X}$ , dann gibt es für jedes  $w \in X^\perp : x_w \in X$  und  $v_w \in \{w\}^\perp$ , so dass  $\tilde{x} = x_w + v_w$  (vgl. A.1). Damit ist  $\langle \tilde{x}, w \rangle = 0$ ; also ist  $\overline{X} \subseteq X^{\perp\perp}$ . Ist  $X$  orthogonal abgeschlossen, dann ist  $\overline{X} \subseteq X^{\perp\perp} = X$  und folglich ist  $X$  abgeschlossen.

2. Sei  $X \subset V$  ein offener  $R$ -Untermodul. Nach Definition existiert ein endlich erzeugter  $R$ -Untermodul  $K \subset W$ , so dass  $K^\perp \subset X$ . Ist  $R$  noethersch, dann ist  ${}_R K^*$  endlich erzeugt in  ${}_R \mathcal{M}$  und  $K^\perp \subset V$  ist  $R$ -koendlich. Folglich ist  $X \subset V$   $R$ -koendlich.
3. Sei  $X \subset V$  ein  $R$ -Untermodul, so dass  $V/X$   $R$ -koerzeugt ist. Ist  $\text{An}(X) = \chi_P(X^\perp)$ , dann gilt nach A.0.3 (1):

$$X = \text{KeAn}(X) = \text{Ke}(\chi_P(X^\perp)) = X^{\perp\perp}.$$

Nach (1) ist  $X$  abgeschlossen. Ist  $R$  noethersch und ist  $X \subset V$  außerdem  $R$ -koendlich, dann ist  $X^\perp = \text{An}(X) \simeq (V/X)^*$  e.e. in  ${}_R \mathcal{M}$  und somit ist  $X = (X^\perp)^\perp$  offen.

4. Seien  $R$  artinsch und  $X \subset V$  ein  $R$ -Untermodul.
- (a) Ist  $V/X$  endlich koerzeugt, so ist  $X \subset V$  offen genau dann, wenn  $X$  abgeschlossen ist ([Ber89, 2.6]). Die artinschen Ringe sind aber dadurch gekennzeichnet, dass jeder endlich erzeugte  $R$ -Modul endlich koerzeugt ist ([Wis88, 31.4]) und die Aussage folgt.
- (b) Sei  $X \subset V$   $R$ -koendlich und abgeschlossen. Dann ist  $X$  nach (a) offen und damit ist auch  $Y \supset X$  offen und folglich abgeschlossen. Offensichtlich ist  $Y \subset V$   $R$ -koendlich.

5. Sei  $V \xrightarrow{\kappa_P} W^*$  eine Einbettung.

- (a) Ist  $X \subset V$  ein endlich erzeugter  $R$ -Untermodul, dann gilt nach A.0.3 (3):  $X^{\perp\perp} = V \cap \text{AnKe}(X) = X$  und somit ist  $X$  nach (1) abgeschlossen.
- (b) Ist  ${}_R W$  e.e., dann sind alle  $R$ -Untermodule von  $V$  e.e. und die Aussage folgt aus (a).

Die folgende Aussage bestimmt die abgeschlossenen bzw. offenen  $R$ -Untermodule von  $V$  bzgl.  $V[\mathfrak{T}_{ls}(W)]$ :

**A.0.5. Proposition.** *Sei  $R$  ein injektiver Kogenerator.*

1. Für jeden  $R$ -Untermodul  $X \subseteq V$  ist  $\overline{X} = X^{\perp\perp}$ .

2. Für  $R$ -Untermodule  $X \subset Y \subseteq V$  liegt  $X$  dicht in  $Y$  genau dann, wenn  $X^\perp = Y^\perp$ . Insbesondere ist  $X \subset V$  dicht genau dann, wenn  $X^\perp = 0$  ist.

3. Die Menge der abgeschlossenen  $R$ -Untermodule von  $V$  ist gegeben durch

$$\mathcal{C}(V) = \{K^\perp \mid K \subset W \text{ ist ein beliebiger } R\text{-Untermodule}\}.$$

4. Ist  $R$  ein QF Ring, dann ist die Menge der offenen  $R$ -Untermodule von  $V$  gegeben durch

$$\mathcal{O}(V) = \{K^\perp \mid K \subset W \text{ ist ein endlich erzeugter } R\text{-Untermodule}\}.$$

**Beweis.** 1. Nach Lemma A.0.4 (1) ist  $\overline{X} \subseteq X^{\perp\perp}$ . Auf der anderen Seite, sei  $\tilde{v} \in X^{\perp\perp} \setminus \overline{X}$ . Dann existiert ein endlich erzeugter  $R$ -Untermodule  $K \subset W$ , so dass  $\tilde{v} \notin X + K^\perp$ . Nach Voraussetzung ist  $V/(X + K^\perp)$   $R$ -koerzeugt, also ist  $\tilde{v} \notin X + K^\perp = \text{KeAn}(X + K^\perp)$  (vgl. A.2). Daher existiert  $\delta \in V^*$ , so dass  $\delta(X + K^\perp) = 0$  und  $\delta(\tilde{v}) \neq 0$ . Nach Voraussetzung ist  $R$  injektiv und es folgt aus A.0.3 (3):  $\delta \in \text{An}(K^\perp) = \text{AnKe}(\chi_P(K)) = \chi_P(K)$ , d.h. es existiert  $w \in K$ , so dass  $\delta = \chi_P(w)$ . Nach Wahl von  $\delta$  ist  $w \in X^\perp$ . Nach Voraussetzung ist aber  $\tilde{v} \in X^{\perp\perp}$  und daher

$$0 = \langle \tilde{v}, w \rangle = \chi_P(w)(\tilde{v}) = \delta(\tilde{v}) \neq 0$$

(Widerspruch). Daraus folgt  $\tilde{v} \in \overline{X}$ .

2. Es liegt  $X$  dicht in  $Y$  genau dann, wenn  $\overline{X} = \overline{Y}$ . Die Aussage folgt dann schon aus (1).

3. folgt aus (1) und Lemma A.0.4.

4. Für jeden endlich erzeugten  $R$ -Untermodule  $K \subset W$  ist  $K^\perp$  nach Definition offen. Andererseits, ist  $X \subset V$  ein offener  $R$ -Untermodule, dann ist  $X$  abgeschlossen, also ist  $X = X^{\perp\perp}$ . Nach Lemma A.0.4 (2) ist  $X \subset V$   $R$ -koendlich und somit ist  $X^\perp \xrightarrow{\chi_P} \text{An}(X) \simeq (V/X)^*$  e.e. in  ${}_R\mathcal{M}$ .

**A.0.6. Folgerung.** Seien  $(V, W), (V', W')$  rechts-nicht-ausgearteten Paare und betrachte  $V$  bzw.  $V'$  mit der linear schwachen Topologie  $V[\mathfrak{T}_{ls}(W)]$  bzw.  $V'[\mathfrak{T}_{ls}(W')]$ . Ist

$$(\xi, \theta) : (V', W') \longrightarrow (V, W)$$

ein Paar-Morphismus (siehe 2.1.1), dann gilt:

1. Für jeden  $R$ -Untermodule  $K' \subset W'$  ist  $\xi^{-1}(K'^\perp) = (\theta(K'))^\perp$ . Insbesondere ist  $\xi : V \longrightarrow V'$  stetig.
2. Ist  $R$  ein injektiver Kogenerator, dann ist  $\xi^{-1}(Y') \subset V$  abgeschlossen für jeden abgeschlossenen  $R$ -Untermodule  $Y' \subset V'$ .

**Beweis.** 1. Trivial.

2. Ist  $Y' \subset V'$  abgeschlossen dann existiert nach Proposition A.0.5 (3) ein  $R$ -Unterm modul  $K' \subset W'$ , so dass  $Y' = K'^{\perp}$ . Nach (1) gilt aber  $\xi^{-1}(Y') = \xi^{-1}(K'^{\perp}) = (\theta(K'))^{\perp}$ , also ist  $\xi^{-1}(Y') \subset V$  abgeschlossen bzgl.  $V[\mathfrak{T}_{ls}(W)]$ .

**A.0.7. Lemma.** *Seien  $W, W'$   $R$ -koerzeugte  $R$ -Moduln,  $\theta : W' \longrightarrow W$  eine  $R$ -lineare Abbildung und betrachte  $W^*$  und  $W'^*$  mit den endlichen Topologien. Es gilt:*

1.  $\theta^{*-1}(\text{An}(K')) = \text{An}(\theta(K'))$  für jeden  $R$ -Unterm modul  $K' \subset W'$ . Insbesondere ist  $\theta^* : W^* \longrightarrow W'^*$  stetig.
2. Ist  $R$   $W$ -injektiv, dann ist  $\theta^*(\text{An}(K)) = \text{An}(\theta^{-1}(K))$  für jeden  $R$ -Unterm modul  $K \subseteq W$ .
3. Ist  $R$  ein injektiver Kogenerator, dann gilt:
  - (a)  $\theta^* : W^* \longrightarrow W'^*$  ist **linear abgeschlossen** (also ist  $\theta^*(X) \subset W'^*$  abgeschlossen für jeden abgeschlossenen  $R$ -Unterm modul  $X \subset W^*$ ).
  - (b)  $\overline{\theta^*(X)} = \theta^*(\overline{X})$  für jeden  $R$ -Unterm modul  $X \subset W^*$ .
  - (c)  $\text{Ke}(\theta^*(X)) = \theta^{-1}(\text{Ke}(X))$  für jeden  $R$ -Unterm modul  $X \subset W^*$ .
  - (d) jede endliche Summe von abgeschlossenen  $R$ -Unterm moduln von  $W^*$  ist abgeschlossen.

**Beweis.** 1. Klar.

2. Sei  $K \subseteq W$  ein  $R$ -Unterm modul. Offensichtlich ist  $\theta^*(\text{An}(K)) \subset \text{An}(\theta^{-1}(K))$ . Andererseits, betrachte die induzierte  $R$ -lineare Abbildung

$$0 \longrightarrow W'/\theta^{-1}(K) \hookrightarrow W/K.$$

Nach Voraussetzung ist  $R$   $W$ -injektiv und somit ist es  $W/K$ -injektiv ([Wis88, 16.2]). Der Epimorphismus

$$(W/K)^* \longrightarrow (W'/\theta^{-1}(K))^* \longrightarrow 0$$

induziert dann einen Epimorphismus

$$\text{An}(K) \xrightarrow{\theta^*} \text{An}(\theta^{-1}(K)) \longrightarrow 0.$$

3. Sei  $R$  ein injektiver Kogenerator.

- (a) Ist  $X \subset W^*$  ein abgeschlossener  $R$ -Unterm modul, dann existiert nach Proposition A.0.5 (3) ein  $R$ -Unterm modul  $K \subset W$ , so dass  $X = \text{An}(K)$ . Nach (2) ist  $\theta^*(X) = \theta^*(\text{An}(K)) = \text{An}(\theta^{-1}(K))$ , also ist  $\theta^*(X) \subset W'^*$  abgeschlossen bzgl.  $W'^*[\mathfrak{T}_{ls}(W')]$ . Daher ist  $\theta^* : W^* \longrightarrow W'^*$  linear abgeschlossen.

(b) Sei  $X \subset W^*$  ein  $R$ -Untermodul. Nach (a) ist  $\theta^*$  linear abgeschlossen, also ist  $\overline{\theta^*(X)} \subseteq \theta^*(\overline{X})$ . Nach (1) ist  $\theta^{*-1}(\overline{\theta^*(X)})$  abgeschlossen und somit ist  $\overline{X} \subset \theta^{*-1}(\overline{\theta^*(X)})$ , also  $\theta^*(\overline{X}) \subseteq \overline{\theta^*(X)}$  und die Aussage folgt.

(c) Es gilt für jeden  $R$ -Untermodul  $X \subset W^*$  :

$$\begin{aligned} \text{Ke}(\theta^*(X)) &= \text{KeAnKe}(\theta^*(X)) &= \text{Ke}(\overline{\theta^*(X)}) \\ &= \text{Ke}(\theta^*(\overline{X})) &= \text{Ke}(\theta^*(\text{AnKe}(X))) \\ &= \theta^{-1}(\text{KeAnKe}(X)) &= \theta^{-1}(\text{Ke}(X)). \end{aligned}$$

(d) Sei  $\{X_1, \dots, X_l\}$  eine endliche Menge von abgeschlossenen  $R$ -Untermoduln von  $W^*$ . Für jedes  $i = 1, \dots, l$  existiert nach Proposition A.0.5 (3) ein  $R$ -Untermodul  $K_i \subset W$ , so dass  $X_i = \text{An}(K_i)$ . Nach Voraussetzung ist  $R$   $W$ -injektiv und es folgt nach Induktion aus A.0.3 (2):

$$\sum_{i=1}^l X_i = \sum_{i=1}^l \text{An}(K_i) = \text{An}\left(\bigcap_{i=1}^l K_i\right),$$

also ist  $\sum_{i=1}^l X_i \subset W^*$  abgeschlossen.

# Literaturverzeichnis

- [Abe80] E. Abe, *Hopf algebras*, Cambridge Tracts in Mathematics **74**, Cambridge University Press (1980).
- [Abu] J. Y. Abuhlail, *Rational modules for corings*, preprint.
- [AG-TL2001] J. Y. Abuhlail, J. Gómez-Torrecillas and F. Lobillo, *Duality and rational modules in Hopf algebras over commutative rings*, J. Algebra **240**, 165-184 (2001).
- [AG-TW2000] J. Y. Abuhlail, J. Gómez-Torrecillas and R. Wisbauer, *Dual coalgebras of algebras over commutative rings*, J. Pure Appl. Algebra **153**, 107-120 (2000).
- [Alt99] K. Al-Takhman, *Äquivalenzen zwischen Komodul-Kategorien von Koalgebren über Ringen*, **Dissertation**, Heinrich-Heine Universität, Düsseldorf (1999).
- [AM69] M. Atiya and I. McDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, Reading Mass (1969).
- [APW91] H. Andersen, P. Polo and K. Wen, *Representation of quantum algebras*, Invent. Math. **104**, 1-59 (1991).
- [APW90] H. Andersen, P. Polo and K. Wen, *Injective modules for quantum algebras*, Am. J. Math. **114**, 571-604 (1990).
- [AT80] H. Allen and D. Trushin, *A generalized Frobenius structure for coalgebras with applications to character theory*, J. Algebra **62**, 430-449 (1980).
- [AT78] H. Allen and D. Trushin, *Coproper coalgebras*, J. Algebra **54**, 203-215 (1978).
- [AW] L. Abrams and C. Weibel, *Cotensor products for modules*, **erscheint in** Trans. Am. Math. Soc.
- [AW97] T. Albu and R. Wisbauer, *M-density, M-adic completion and M-subgeneration*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **98** (1997), 141-159.

- [Bar74] M. Barr, *Coalgebras over a commutative ring*, J. Algebra **32**, 600-610 (1974).
- [BM89] R. Blattner and S. Montgomery, *Crossed products and Galois extensions of Hopf algebras*, Pac. J. Math. **137**, 37-54 (1989).
- [BCM86] R. Blattner, M. Cohen and S. Montgomery, *Crossed products and inner actions of Hopf algebras*, Trans. Am. Math. Soc. **298**, 671-711 (1986).
- [BDR97] M. Beattie, S. Dăscălescu and Ş. Raianu, *Galois extensions for co-Frobenius Hopf algebras*, J. Algebra **198**, 164-183 (1997).
- [Ber94] J. Berning, *Beziehungen zwischen links-linearen Toplogien und Modul kategorien*, **Dissertation**, Universität Düsseldorf (1994).
- [Ber89] J. Berning, *Linear topologische und linear kompakte Moduln*, **Diplomarbeit**, Universität Düsseldorf (1989).
- [BM85] R. Blattner and S. Montgomery, *A duality theorem for Hopf module algebras*, J. Algebra **95**, 153-172 (1985).
- [Bou74] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics, Algebra I, Chapters 1-3*, Hermann (1974).
- [Bou72] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics, Commutative Algebra, Chapters 1-7*, Hermann (1972).
- [CC94] C. Cai and H. Chen, *Coactions, Smash products and Hopf modules*, J. Algebra **167**, 85-89 (1994).
- [CG-RTvO2001] J. Cuadra, J. Rozas, B. Torrecillas and F. Van Oystaeyen, *The Brauer group of irreducible coalgebras*, J. Algebra **238**, 643-664 (2001).
- [CG93] W. Chin and J. Goldman, *Bialgebras of linearly recursive sequences*, Commun. Algebra **21**, 3935-3952 (1993).
- [Che93] C. Chen, *A duality theorem for crossed products of Hopf algebras*, Commun. Algebra **21**, 2885-2903 (1993).
- [CM84] M. Cohen, S. Montgomery, *Group-graded rings, smash products, and group actions*, Trans. Am. Math. Soc. **282**, 237-258 (1984).
- [CMZ] S. Caenepeel, G. Militaru, and S. Zhu, *Generalized Hopf modules and nonlinear equations*, **Buch** (in Vorbereitung).
- [CMZ97] S. Caenepeel, G. Militaru, and S. Zhu, *Crossed modules and Doi-Hopf modules*, Isr. J. Math. **100**, 221-247 (1997).

- [CN90] C. Chen and W. Nichols, *A duality theorem for Hopf module algebras over Dedekind rings*, Commun. Algebra **18**, 3209-3221 (1990).
- [CP91] L. Cerlienco and F. Piras, *On the continuous dual of a polynomial bialgebra*, Commun. Algebra **19**, 2707-2727 (1991).
- [CPS83] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, *Detecting rational cohomology of algebraic groups*, J. Lond. Math. Soc. **28**, 293-300 (1983).
- [CPS77] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, *Induced modules and affine quotients*, Math. Ann. **230**, 1-14 (1977).
- [CR95] S. Caenepeel and Ş. Raianu, *Induction functors for the Doi-Koppinen unified Hopf modules*, A. Facchini et al. (ed.), Abelian groups and modules, Dordrecht: Kuwe Academic Publishers, Math. Appl., Dodr. **343**, 73-94 (1995).
- [CS69] S. Chase and M. Sweedler, *Hopf algebras and Galois theory*, Lect. Notes Math. **97**, Berlin: Springer-Verlag (1969).
- [CV95] U. Cerruti and F. Vaccarino, *R-Algebras of linear recurrent sequences*, J. Algebra **175**, 332-338 (1995).
- [DM92] Y. Doi and A. Masuoka, *Generalization of cleft comodule algebras*, Commun. Algebra **20**, 3703-3721 (1992).
- [DMR96] S. Dăscălescu, G. Militaru and Ş. Raianu, *Crossed coproducts and cleft coextensions*, Commun. Algebra **24**, 1229-1243 (1996).
- [DNR] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu and Ş. Raianu, *Hopf algebras: an introduction*, **Buch** (in Vorbereitung).
- [DNT99] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu and B. Torrecillas, *Co-Frobenius Hopf algebras, Doi-Koppinen modules and injective objects*, J. Algebra **220**, 542-560 (1999).
- [Doi92] Y. Doi, *Unifying Hopf modules*, J. Algebra **153**, 373-385 (1992).
- [Doi89] Y. Doi, *Equivalent crossed products for a Hopf algebra*, Commun. Algebra **17**, 3053-3085 (1989).
- [Doi85] Y. Doi, *Algebras with total integrals*, Commun. Algebra **13**, 2137-2159 (1985).
- [Doi84] Y. Doi, *Cleft comodule algebras and Hopf modules*, Commun. Algebra **12**, 1155-1169 (1984).

- [Doi83] Y. Doi, *On the structure of relative Hopf modules*, Commun. Algebra **11**, 243-255 (1983).
- [Doi81] Y. Doi, *Homological coalgebra*, J. Math. Soc. Japan **33**, 31-50 (1981).
- [Don85] S. Donkin, *Rational representations of algebraic groups*, Lecture Notes in Mathematics **1140**, Berlin: Springer-Verlag (1985).
- [Don80] S. Donkin, *Hopf complements and injective comodules for algebraic groups. Tensor products and filtrations*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **40**, 298-319 (1980).
- [Dri85] V. Drinfel'd, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Sov. Math. Dokl. **32**, 256-258 (1985).
- [DRvO96] S. Dăscălescu, Ş. Raianu and F. Van Oystaeyen, *Some remarks on a theorem of H.-J. Schneider*, Commun. Algebra **24**, 4477-4493 (1996).
- [DRZ95] S. Dăscălescu, Ş. Raianu and Y. Zhang, *Finite Hopf-Galois coextensions, crossed coproducts and duality*, J. Algebra **178**, 400-413 (1995).
- [DT89] Y. Doi and M. Takeuchi, *Hopf-Galois extensions of algebras, the Miyashita-Ulbrich action, and the Azumaya algebras*, J. Algebra, **121**, 488-516 (1989).
- [DT86] Y. Doi and M. Takeuchi, *Cleft comodule algebras for a bialgebra*, Commun. Algebra **14**, 801-817 (1986).
- [FRT89] N. Reshetikhin, L. Takhtadzhyan and L. Faddeev, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*. Leningrad Math. J. **1**, 193-225 (1990).
- [Gar76] G. Garfinkel, *Universally torsionless and trace modules*, J. Amer. Math. Soc. **215**, 119-144 (1976).
- [GK97] L. Grünenfelder and T. Košir, *Koszul cohomology for finite families of comodule maps and applications*, Commun. Algebra, **25**, 459-479 (1997).
- [GO93] L. Grünenfelder and M. Omladič, *Linearly recursive sequences and polynomial operatorss*, Linear Algebra Appl. **182**, 127-145 (1993).
- [GP87] L. Grünenfelder and R. Paré, *Families parametrized by coalgebras*, J. Algebra **107**, 316-375 (1987).
- [GR71] L. Gruson and M. Raynaud, *Critères de platitude et de projectivè*, Inv. Math. **13**, 1-89 (1971).
- [Gre76] J. A. Green, *Locally finite representations*, J. Algebra. **41**, 137-171 (1976).

- [Gru69] L. Grünenfelder, *Über die Struktur von Hopf-Algebren*, **Dissertation**, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich (1969).
- [G-T98] J. Gómez-Torrecillas, *Coalgebras and comodules over a commutative ring*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **43**, 591-603 (1998).
- [G-TJM96] J. Gómez-Torrecillas, P. Jara, and L. Merino, *Locally finite representations of algebras*, Commun. Algebra **24**, 4581-4601 (1996).
- [G-TL] J. Gómez-Torrecillas and J. Lobillo, *personlicher Kontakt*.
- [Guz85] F. Guzman, *Cointegratin and relative cohomology for comodules*, **Dissertation**, Syracuse University USA (1985).
- [HN99] T. Honold and A. Nechaev, *Weighted modules and representations of codes*, Probl. Inf. Transm. **35**, 205-223 (1999).
- [Hop41] H. Hopf, *Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen*, Ann. of Math. **42**, 22-52 (1941).
- [HR74] R. Heyneman and D. Radford, *Reflexivity and coalgebras of finite type*, J. Algebra **28**, 215-246 (1974).
- [HS70] R. Heyneman and M. Sweedler, *Affine Hopf algebras. II.*, J. Algebra **16**, 271-297 (1970).
- [HS69] R. Heyneman and M. Sweedler, *Affine Hopf algebras. I.*, J. Algebra **13**, 192-241 (1969).
- [Jan87] J. Jantzen, *Representations of algebraic groups*, Pure and Applied Mathematics **131**, Boston: Academic Press (1987).
- [Kap75] I. Kaplansky, *Bialgebras*, Lecture Notes in Math., University of Chicago (1975).
- [KKMMN99] V. Kurakin, A. Kuzamin, V. Markov, A. Mikhalev, and A. Nechaev, *Linear codes and polylinear recurrences over finite rings and modules (a survey)*, Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes, M. Fossorier et. al. (ed.), Lect. Notes Comput. Sci. **1719**, Berlin: Springer-Verlag, 365-391 (1999).
- [KKMN95] V. Kurakin, A. Kuzmin, A. Mikhalev and A. Nechaev, *Linear recurring sequences over rings and modules*, J. Math. Sci., New York, **76**, 2793-2915 (1995).
- [Kop95] M. Koppinen, *Variations on the smash product with applications to group-graded rings*, J. Pure Appl. Algebra **104**, 61-80 (1995).

- [Kop92] M. Koppinen, *A duality theorem for crossed products of Hopf algebras*, J. Algebra **146**, 153-174 (1992).
- [Kos66] B. Kostant, *Groups over  $\mathbb{Z}$* , Proc. Sympos. Pure Math. **9**, 90-98 (1966).
- [Köt66] G. Köthe, *Topologische lineare Räume I*, Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften **107**, Berlin: Springer-Verlag (1966).
- [KT81] H. Kreimer and M. Takeuchi, *Hopf Algebras and Galois extensions of an algebra*, Indiana Univ. Math. J. **30**, 675-692 (1981).
- [Kur] V. Kurakin, *Hopf algebras of linear recurring sequences over rings and modules*, preprint.
- [Lar98] R. Larson, *Topological Hopf algebras and braided monoidal categories*, Appl. Categ. Struct. **6**, 139-150 (1998).
- [Lar73] R. Larson, *Coseparable Hopf algebras*, J. Pure App. Algebra **3**, 261-267 (1973).
- [Lin94] Z. Lin, *A Mackey decomposition theorem and cohomology for quantum groups at roots of 1*, J. Algebra **166**, 100-129 (1994).
- [Lin93] Z. Lin, *Induced representations of Hopf algebras: applications to quantum groups at roots of 1*, J. Algebra **154**, 152-187 (1993).
- [Lin77] B. Lin, *Semiperfect coalgebras*, J. Algebra **49**, 357-373 (1977).
- [Liu94] G. Liu, *The Duality between Modules and Comodules*, Acta Math. Sin. **37**, 150-154 (1994).
- [LR97] L. Lambe and D. Radford, *Introduction to the quantum Yang-Baxter equation and quantum groups: an algebraic approach*, Mathematics and its Applications **423**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers (1997).
- [LT90] R. Larson and E. Taft, *The algebraic structure of linearly recursive sequences under Hadamard product*, Isr. J. Math. **72**, 118-132 (1990).
- [Lu98] D. Lu, *Monoidal functors on the category of representations of a triangular Hopf algebra*, Sci. China (Ser. A), **412**, 139-146 (1998).
- [Mac71] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics **5**, New York: Springer-Verlag (1971).
- [Mad83] A. Mader, *Completions via duality*, Abelian group theory, Proc. Conf., Honolulu 1983, Lect. Notes Math. **1006**, 562-568 (1983).

- [Mad82] A. Mader, *Duality and completions of linearly topologized modules*, Math. Z. **179**, 325-335 (1982).
- [Maj95] S. Majid, *Quantum groups*, Cambridge University Press (1995).
- [Maj90] S. Majid, *More examples of bicrossproduct and double cross product Hopf algebras*, Isr. J. Math. **72**, 133-148 (1990).
- [Miy75] H. Miyamoto, *A note on coreflexive coalgebras*, Hiroshima Math. J. **5**, 17-22 (1975).
- [MM65] J. Milnor and J. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. Math. II Ser. **81**, 211-264 (1965).
- [MN96] A. Mikhalev and A. Nechaev, *Linear recurring sequences over modules*, Acta Appl. Math. **42**, 161-202 (1996).
- [Mol77] R. Molnar, *Semi-direct products of Hopf algebras*, J. Algebra **47**, 29-51 (1977).
- [Mon93] S. Montgomery, *Hopf algebras and their Actions on Rings*, Reg. Conf. Series in Math. **82**, AMS (1993).
- [MR99] C. Menini and Ş. Raianu, *Morphisms of Relative Hopf Modules, Smash Products and Duality*, J. Algebra **219**, 547-570 (1999).
- [MSTW] C. Menini, A. Seidel, B. Torrecillas and R. Wisbauer, *A-H-bimodules and equivalences*, preprint.
- [MTW2001] C. Menini, B. Torrecillas and R. Wisbauer, *Strongly rational comodules and semiperfect Hopf algebras over QF Rings*, J. Pure Appl. Algebra **155**, 237-255 (2001).
- [Nec96] A. Nechaev, *Polylinear recurring sequences over modules and quasi-Frobenius modules*, First international Tainan-Moscow algebra workshop, Proceedings of the international conference, Y. Fong et al. (ed.), Berlin: de Gruyter, 283-298 (1996).
- [Nec93] A. Nechaev, *Linear recurrent sequences over quasi-Frobenius modules*, Russ. Math. Surv. **48**, 209-210 (1993).
- [Nec92] A. Nechaev, *Linear recurring sequences over commutative rings*, Discrete Math. Appl. **2**, 659-683 (1992).
- [NT94] C. Nastasescu and B. Torrecillas, *Torsion theories for coalgebras*, J. Pure Appl. Algebra **97**, 203-220 (1994).

- [NT93] C. Nastasescu and B. Torrecillas, *Graded coalgebras*, Tsukuba J. Math. **17**, 461-479 (1993).
- [OR72] J. Ohm and D. Rush, *Content modules and algebras*, Math. Scan. **31**, 49-68 (1972).
- [Par73] B. Pareigis, *Endliche Hopf-Algebren*, Algebra Berichte (1973).
- [Par71] B. Pareigis, *When Hopf algebras are Frobenius algebras*, J. Algebra **18**, 588-596 (1971).
- [PT80] B. Peterson and E. Taft, *The Hopf algebra of linearly recursive sequences*, Aequationes Math. **20**, 1-17 (1980).
- [PW91] B. Parshall and J. Wang, *Quantum linear groups*, Mem. Am. Math. Soc. **439** (1991).
- [Rad73] D. Radford, *Coreflexive coalgebras*, J. Algebra **26**, 512-535 (1973).
- [Row88] L. Rowen, *Ring Theory*, Vol. 1, Academic Press (1988).
- [Sch95] H.-J. Schneider, *Lectures on Hopf algebras I*, Universidad Nacional de Cordoba (1995).
- [Sch94] H.-J. Schneider, *Hopf Galois extensions, crossed products and Clifford theory*, Advances in Hopf algebras, Bergen-Montgomery (ed.), New York: Marcle Dekker, Lecture Notes Pure Applied Maths **158**, 267-297 (1994).
- [Sch90] H.-J. Schneider, *Principal homogenous spaces for arbitrary Hopf algebras*, Isr. J. Math., **72**, 167-195 (1990).
- [Ste75] B. Stenström, *Rings of quotients, An introduction to methods of ring theory*, Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen **217**, Springer-Verlag (1975).
- [Sul78] J. Sullivan, *Simply connected groups, the hyperalgebra and Verma's conjecture*, Am. J. Math. **100**, 1015-1019 (1978).
- [Swe69] M. Sweedler, *Hopf algebras*, New York: Benjamin, (1969).
- [Taf95] E. Taft, *Linearly recursive tableaux*, Congr. Numerantium **107**, 33-36 (1995).
- [Taf94] E. Taft, *Algebraic aspects of linearly recursive sequences*, Advances in Hopf algebras, Bergen-Montgomery (ed.), New York: Marcle Dekker, Lecture Notes Pure Applied Maths **158**, 299-317 (1994).

- [Taf77] E. Taft, *Reflexivity of algebras and coalgebras II*, Commun. Algebra **5**, 1549-1560 (1977).
- [Taf72] E. Taft, *Reflexivity of algebras and coalgebras*, Am. J. Math. **94**, 1111-1130 (1972).
- [Tak95] M. Takeuchi, *q-Representations of quantum groups*, Canad. Math. Soc., Conf. Proc. **16**, 347-385 (1995).
- [Tak94] M. Takeuchi, *The quantum hyperalgebras of  $Sl_q(2)$* , Algebraic groups and their generalizations: quantum and infinite-dimensional methods, W. Haboush et al. (ed.), Providence, RI: AMS. Proc. Symp. Pure Math. **56(II)**, 121-134 (1994).
- [Tak92] M. Takeuchi, *Some topics in  $GL_q(n)$* , J. Algebra **147**, 379-410 (1992).
- [Tak85] M. Takeuchi, *Topological Coalgebras*, J. Algebra **97**, 505-539 (1985).
- [Tak81] M. Takeuchi, *Matched pairs of groups and bismash products of Hopf algebras*, Commun. Algebra **9**, 841-882 (1981).
- [Tak77] M. Takeuchi, *The  $\#$ -product of group extensions applied to Long's theory of dimodule algebras*, Algebra Berichte **34** (1977).
- [Tak74] M. Takeuchi *Tangent coalgebras and hyperalgebras I*; Jap. J. Math. **42**, 1-144 (1974).
- [Tak73] M. Takeuchi, *A note on geometrically reductive groups*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I A **20**, 387-396 (1973).
- [TvOZ98] B. Torrecillas, F. Van Oystaeyen and Y. Zhang, *Coflat monomorphisms of coalgebras*, J. Pure Appl. Algebra **128**, 171-183 (1998).
- [Ulb90] K.-H. Ulbrich, *Smash products and comodules of linear maps*, Tsukuba J. Math. **14**, 371-378 (1990).
- [vDae93] A. Van Daele, *Dual pairs of Hopf  $\ast$ -Algebras*, Bull. Lond. Math. Soc. **25**, 209-230 (1993).
- [vdB84] M. Van Den Bergh, *A duality theorem for Hopf algebras*, Methods in ring theory, Dordrecht, NATO ASI Ser., Series C **129**, 517-522 (1984).
- [vDZ99] A. Van Daele and Y. Zhang, *Galois theory for multiplier Hopf algebras with integrals*, Algebr. Represent. Theory **2**, 83-106 (1999).
- [Voi77] D. Voigt, *Induzierte Darstellungen in der Theorie der endlichen, algebraischen Gruppen*, Lecture Notes in Mathematics **592**, Berlin: Springer-Verlag (1977).

- [vOZ96] F. Van Oystaeyen and Y. Zhang, *Induction functors and stable Clifford theory for Hopf modules*, J. Pure Appl. Algebra **107**, 337-351 (1996).
- [vOZ93] Freddy Van Oystaeyen and B. Zhou, *Coinduced functors and semi-invariants for Hopf algebras*, J. Egypt. Math. Soc. **1**, 1-16 (1993).
- [Wis] R. Wisbauer, *On the category of comodules over corings*, preprint.
- [Wis2000] R. Wisbauer, *Introduction to Coalgebras and Comodules*, Lecture Notes.
- [Wis99] R. Wisbauer, *Semiperfect coalgebras over rings*, Algebra and Combinatorics. Papers from the International Congress ICAC'97 Hongkong, K.-P. Shum et al. (ed.), Singapor: Springer-Verlag, 487-512 (1999).
- [Wis96] R. Wisbauer, *Modules and Algebras : Bimodule Structure and Group Action on Algebras*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **81**, Addison Wesley Longman Limited (1996).
- [Wis88] R. Wisbauer, *Grundlagen der Modul- und Ringtheorie*, München: Verlag Reinhard Fischer (1988); *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Reading (1991).
- [Wisc75] M. Wischnewsky, *On linear representations of affine groups. I*, Pac. J. Math. **61**, 551-572 (1975).
- [Wisc76] M. Wischnewsky, *Categorical methods in the theory of linear representations of affine groups*, Cah. Topol. Geom. Differ. **16**, 331-334 (1976).
- [Wit79] L. Witkowski, *On coalgebras and linearly topological rings*, Colloq. Math. **40**, 207-218 (1979).
- [Woo97] D. Woodcock, *Schur algebras and global bases: New proofs of old vanishing theorems*, J. Algebra **191**(1), 331-370 (1997).
- [Yan77] H. Yanagihara, *Theory of Hopf algebras attached to group schemes*, Lecture Notes in Mathematics **614**, Berlin: Springer-Verlag (1977).
- [Zha97] L. Zhang, *The duality of relative Hopf modules*, Acta Math. Sinica **40**, 73-79 (1998).
- [Zha98] L. Zhang,, *The duality between Hopf Galois Extensions und Hopf Cogalois extensions*, J. Nanjing University, Math. Biq. **15**, 131-136 (1998).
- [Yok82] K. Yokogawa, *On dual Hopf Galois extension*, Proc. 15th Symp. Ring theory, Takarazuka/Jap. 1982, 84-92 (1982).
- [Z-H76] B. Zimmermann-Huignes, *Pure submodules of direct products of free modules*, Math. Ann. **224**, 233-245 (1976).

# Index

- $(-)_\xi$ , 51
- $(A, B)$ -treuer Bimodul, 13
- $(C, R)$ -injektiver Komodul, 45
- $(C, R)$ -kohalbeinfache Koalgebra, 45
- $(G, G')$ -Bimodul, 73
- $-\square_C D$ , 51
- $A$ -treuer Modul, 30
- $A[\mathfrak{I}_{ls}(C)]$ , 28
- $A\#H$ , 102
- $A\#_\sigma H$ , 101
- $A\star C$ , 59
- $A\star G$ , 102
- $A^\circ$ , 25, 26, 57
- $A^e$ , 9
- $A^{op}$ , 9
- $A_\mathfrak{F}^\circ$ , 56
- $B\#U$ , 102
- $C$ -adische Topologie  $\mathcal{T}_C(A)$ , 28
- $C$ -adische Topologie  $\mathcal{T}_{C-}(A)$ , 28
- $C^\square$ , 35
- $C^\circ$ , 96
- $C^{cop}$ , 9, 33
- $C^e$ , 9
- $G$ -Modul, 72
- $G$ -lineare Abbildung, 12
- $H$ -Erweiterung, 99
- $H$ -Koerweiterung, 99
- $H$ -verschränktes Produkt, 105
- $H^\square$ , 93
- $H^\circ$ -Erweiterung, 99
- $M$ -suberzeugter Modul, 27
- $M[\mathfrak{I}_{ls}(N)]$ , 88
- $M[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ , 107
- $M[\mathbf{x}]$ , 107
- $M[\mathbf{x}]^\circ$ , 113
- $M\square_C N$ , 44
- $M^r$ , 80
- $M^0$ , 83
- $M^H$ , 69
- $M^\square$ , 82
- $M^\circ$ , 92
- $M^{coH}$ , 69
- $M_\mathfrak{F}^\circ$ , 84
- $M_a$ , 76
- $N$ -reiner Untermodul, 8
- $N^\diamond$ , 97
- $P$ -Bi-Paar, 81
- $P$ -Linkspaar, 80
- $P$ -Rechtspaar, 80
- $P^e$ , 38
- $P_{(x,y)}$ , 73
- $R$ -c-koerzeugt, 60
- $R$ -c-koerzeugte Algebra, 62, 97
- $R$ -c-koerzeugter Filter, 60
- $R$ -c-koerzeugter Modul, 90
- $R$ -koendlicher  $A$ -Untermodul, 7
- $R$ -koendlicher Untermodul, 7
- $R[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ , 107
- $R[\mathbf{x}]$ , 107
- $U$ -lokal-endliche Algebra, 104
- $U(L)$ , 74
- $V[\mathfrak{I}_{ls}(W)]$ , 122
- $W$ -injektiver Komodul, 44
- $W$ -projektiver Komodul, 44
- $W[\mathfrak{I}_{ls}(V)]$ , 122
- $W^*[\mathfrak{I}_{ls}(W)]$ , 16
- $\#(H, B)$ , 102
- $\tilde{\mathcal{L}}_{M^*}^{<k>}$ , 117
- $\tilde{\mathcal{S}}_{M^*}^{<k>}$ , 117
- $\Delta^{cop}$ , 9

- $\Pi(\mathbf{I})$ , 108  
 $\Pi_E$ , 108  
 $\alpha$ -Algebra, 26, 60  
 $\alpha$ -Bedingung, 16  
 $\alpha$ -Bialgebra, 26, 66  
 $\alpha$ -Bialgebra-Paar, 67  
 $\alpha$ -Filter, 60  
 $\alpha$ -Gruppe, 74  
 $\alpha$ -Hopf-Algebra, 26, 66  
 $\alpha$ -Hopf-Paar, 67  
 $\alpha$ -Koalgebra, 26  
 $\alpha$ -Monoid, 74  
 $\alpha$ -Paar, 16  
 $\alpha_M$ , 16  
 $\alpha_M^P$ , 16  
 $\alpha_M^W$ , 16  
 $\chi_P$ , 15  
 $\kappa_P$ , 15  
 $\kappa_P\text{-Cf}(A)$ , 88  
 $\lambda_M$ , 90  
 $\mathbf{AffGr}_R$ , 76, 78  
 $\mathbf{AffMon}_R$ , 76  
 $\mathbf{Aff}_R$ , 76  
 $\mathbf{Alg}_R$ , 7, 64  
 $\mathbf{Big}_R$ , 10, 68  
 $\mathbf{Big}_R^\alpha$ , 66, 104  
 $\mathbf{CAlg}_R$ , 9, 76  
 $\mathbf{CBig}_R$ , 10, 68, 76  
 $\mathbf{CCBialg}_R$ , 74  
 $\mathbf{CCBig}_R$ , 10, 68  
 $\mathbf{CCHopf}_R$ , 11, 68, 74  
 $\mathbf{CCog}_R$ , 9, 74  
 $\mathbf{CHopf}_R$ , 11, 68, 76  
 $\mathbf{Cog}_R$ , 8, 64  
 $\mathbf{Cog}_R^\alpha$ , 26  
 $\mathbf{D}_M^{<k>}$ , 117  
 $\mathbf{Ens}$ , 74  
 $\mathbf{Gr}$ , 74  
 $\mathbf{Hopf}_R$ , 68  
 $\mathbf{Hopf}_R^\alpha$ , 66  
 $\mathbf{Mon}$ , 74  
 $\mathbf{R}^{<k>}$ , 119  
 $\mathbf{R}_M^{<k>}$ , 116  
 $\mathcal{E}_A$ , 25  
 $\mathcal{G}(C)$ , 73  
 $\mathcal{K}(G)$ , 75  
 $\mathcal{K}_A$ , 25  
 $\mathcal{K}_H$ , 66  
 $\mathcal{K}_M$ , 57  
 $\mathcal{L}^{<k>}$ , 114  
 $\mathcal{L}_{M^*}^{<k>}$ , 113  
 $\mathcal{L}_M^{<k>}$ , 108  
 $\mathcal{M}^C$ , 14  
 $\mathcal{M}_A$ , 13  
 $\mathcal{M}_A^C(H)$ , 97  
 $\mathcal{M}_G$ , 72  
 $\mathcal{M}_H^H(H)$ , 97  
 $\mathcal{P}$ , 16  
 $\mathcal{P}^\alpha$ , 16  
 $\mathcal{P}_{Big}$ , 65  
 $\mathcal{P}_{Big}^\alpha$ , 65  
 $\mathcal{P}_{Hopf}$ , 66  
 $\mathcal{P}_{Hopf}^\alpha$ , 66  
 $\mathcal{P}_m$ , 23  
 $\mathcal{P}_m^\alpha$ , 24  
 $\mathcal{Q}_P^l$ , 80  
 $\mathcal{Q}_P^r$ , 80, 81  
 $\mathcal{R}(G)$ , 74  
 $\mathcal{S}_M^{<k>}$ , 107  
 $\mathcal{T}_C(A)$ , 28  
 $\mathcal{T}_{-C}(A)$ , 28  
 $\text{An}_A(X)$ , 28  
 $\text{An}_A^l(X)$ , 28  
 $\text{An}_A^r(X)$ , 28  
 $\text{An}_M(K)$ , 81  
 $\text{An}_N(L)$ , 81  
 $\text{An}_{\mathcal{S}_M^{<k>}}(I)$ , 108  
 $\text{Cf}(A)$ , 57, 63  
 $\text{Cf}(C^*)$ , 88  
 $\text{Cf}(M)$ , 58  
 $\text{Ind}_C^D(-)$ , 53  
 $\text{Ind}_K^L(-)$ , 51  
 $\text{Ind}_P^Q(-)$ , 52  
 $\text{Loc}(\mathcal{M}_A)$ , 57  
 $\text{Loc}({}_A\mathcal{M})$ , 62

- $\text{Loc}({}_G\mathcal{M})$ , 75  
 $\text{Rat}^C({}_AM)$ , 30  
 $\text{Rat}^C({}_A\widetilde{\mathcal{M}})$ , 30  
 $\omega(\Pi_E)$ , 108  
 $\overline{X}$ , 121  
 $\rho_M$ , 12  
 $\sigma[M]$ , 27  
 $\sigma[{}_AA^\circ]$ , 62, 92  
 $\sigma[{}_AC]$ , 28  
 $\tau$ , 7  
 $\tau_\varpi$ , 7  
 $\theta_f$ , 85  
 $\theta_f^l$ , 41  
 $\theta_f^r$ , 41  
 $\theta_m$ , 81  
 $\vartheta_M^l$ , 7  
 $\vartheta_M^r$ , 7  
 $\widehat{A}$ , 57  
 $\widehat{A}_{\mathfrak{F}}$ , 56  
 $\widetilde{\mathcal{M}}_A$ , 13  
 $\mathcal{M}_G$ , 72  
 $\xi_f^l$ , 40  
 $\xi_f^r$ , 40  
 $\xi_m$ , 81  
 ${}^C\mathcal{M}(H)_A$ , 96  
 ${}^C\mathcal{M}$ , 14  
 ${}^C\text{Rat}(\mathcal{M}_A)$ , 30  
 ${}^C\text{Rat}(\widetilde{\mathcal{M}}_A)$ , 30  
 ${}^D\mathcal{M}^C$ , 14  
 ${}^D\text{Rat}^C({}_A\mathcal{M}_B)$ , 37  
 ${}^D\text{Rat}^C({}_A\widetilde{\mathcal{M}}_B)$ , 37  
 ${}_A\mathcal{M}^C(H)$ , 97  
 ${}_A\widetilde{\mathcal{M}}$ , 13  
 ${}_A\widetilde{\mathcal{M}}_B$ , 13  
 ${}_A^C\mathcal{M}(H)$ , 97  
 ${}_G\mathcal{M}$ , 72  
 ${}_G\mathcal{M}_{G'}$ , 73  
 ${}_G\widetilde{\mathcal{M}}$ , 72  
 ${}_G\mathcal{M}_{G'}$ , 73  
 $f\Box_C g$ , 44  
 $f^r$ , 80  
 $hy(G)$ , 77  
 $k$ -Bifolgen, 115  
 $k$ -Folgen, 108  
 $\widetilde{\mathcal{L}}_M^{<k>}$ , 116  
 $A(-)$ , 34  
 ${}_A\mathcal{M}$ , 13  
 $(C,R)$ -exakte Folge, 45  
 $(C,R)$ -exakter Funktor, 45  
 $(x,y)$ -primitives Element, 73  
 $\text{Loc}({}_A\mathcal{M})$ , 57  
  
 $A$ -treuer Modul, 12  
abgeschlossene Hülle, 121  
affine Algebra, 48  
affines  $\alpha$ -Gruppen-Schema, 77  
affines Gruppen-Schema, 78  
affines Monoid-Schema, 78  
Anfangspolyeder, 108, 109  
Anfangsvektor, 109  
Annulator-Bedingungen, 122  
Annulatoren, 16  
Antipode, 10  
Arithmetische Progression, 109  
ausgeartete Folge, 117  
  
Backsolving, 118  
Bi-Ideal, 11  
Bialgebra, 10  
Bialgebra-Morphismus, 10  
Bialgebra-Paar, 65  
Bialgebra-Unterpaar, 65  
Bikoideal, 9  
bikolineare Abbildung, 14  
Bikomodul, 14  
Bikomodul-Morphismus, 14  
birationaler Bimodul, 37  
biunitärer Bimodul, 13  
  
Charaktermodul, 56  
cleft  $H$ -Erweiterung, 99, 105, 106  
cocleft  $H$ -Koerweiterung, 99  
  
dichte Untermenge, 121  
dichter Untermodul, 29  
dichtes Paar, 16, 18

- Dimodul, 93
- diskrete Topologie, 121
- Doi-Koppinen-Datum, 96, 97
- Doi-Koppinen-Hopf-Modul, 96
- duale Algebra, 10
- dualer Komodul, 80, 84
- Dualität, 75, 80
  
- Einhüllende-Algebra, 9
- Einhüllende-Koalgebra, 9
- Einhüllendes-Paar, 38
- elementares charakteristisches Polynom, 108
- endliche Koalgebra, 8
- endliche Topologie, 121
- endlicher Modul, 7
- Endlichkeitssatz, 38, 89
- erblicher Ring, 68
  
- fast-noethersche Algebra, 42
- Fibonacci Folge, 109
- FP-injektiver Ring, 122
  
- Geometrische Progression, 109
- getwistete Modul-Bedingung, 101
- getwistetes messendes Paar, 33
- gruppen-ähnliches Element, 73
- Gruppen-Funktor, 76
  
- Hadamard-Produkt, 114, 119
- Hausdorff-Topologie, 29, 60, 61, 67, 122
- Hopf-Algebra, 10
- Hopf-Algebra-Morphismus, 11
- Hopf-Ideal, 11, 66
- Hopf-Modul, 93, 97
- Hopf-Paar, 66
- Hopf-Unteralgebra, 11
- Hopf-Unterpaar, 66
- Hurwiz-Produkt, 115
- Hyperalgebra, 77
  
- Impulsfolge, 109
- Induktionsfunktor, 51, 52, 78
- infinitesimal flache affines Gruppen-Schema, 77
- infinitesimal flache affines Monoid-Schema, 77
- infinitesimal flache Bialgebra, 67, 78
- infinitesimal flache Hopf-Algebra, 67, 78
- infinitesimal flache Koalgebra, 60, 61
- infinitesimal flacher  $A$ -Modul, 21
- infinitesimal flaches Gruppen-Schema, 78
- infinitesimal flaches Monoid-Schema, 78
- injektiver Komodul, 44, 48
- Integral, 99
- Invariantenuntermodul, 69
- invers-isomorphe Algebra, 9
- invers-isomorphe Koalgebra, 9
  
- Kategorie der  $\alpha$ -Algebren, 26
- Kategorie der  $\alpha$ -Bialgebren, 26
- Kategorie der  $\alpha$ -Hopf-Algebren, 26
- Kategorie der  $\alpha$ -Koalgebren, 26
- Kategorie der messenden  $\alpha$ -Paare, 24
- Kategorie der messenden Paare, 23
- Kategorie der Paare, 16
- Klassische Dualitäten, 72
- Koalgebra, 8
- Koalgebra-Morphismus, 8
- koassoziative Koalgebra, 8
- Koeinheit, 8
- koendliche Topologie, 57, 58, 88
- kofinitäre Algebra, 60, 112
- kofinitäre Bialgebra, 66
- kofinitäre Hopf-Algebra, 66
- kofinitärer Filter, 60
- koflacher Komodul, 45
- kofreier Funktor, 14
- kofreier Komodul, 86
- kohalbeinfache Koalgebra, 45, 50
- Koideal, 9
- Koinduktionsfunktor, 51
- Kointegral, 99
- Koinvariantenuntermodul, 69
- kokommutative Koalgebra, 9
- kolineare Abbildung, 13
- Komodul, 13
- Komodul-Algebra, 94

- Komodul-Koalgebra, 94
- Komodul-Morphismus, 13
- Komorphismus, 78
- komplementierter Modul, 82
- Komultiplikation, 8
- Konvolutionsalgebra, 9
- Konvolutionskoalgebra, 59
- Konvolutionsprodukt, 9
- Koordinaten-Ring, 76, 78
- koreflexive Koalgebra, 93
- koreflexiver Komodul, 90
- koreflexives Paar, 89
- Korestriktionsfunktork, 51
- Kotensorfunktork, 45
- Kotensorprodukt, 44
- kounitärer Komodul, 13
- Kozykel, 101
- Krull'sches Durchschnitt-Lemma, 64
  
- Laurent-Polynome, 107
- Lemma von Yoneda, 76
- lexikographische lineare Ordnung, 108
- Lie-Algebra, 74
- linear abgeschlossener Morphismus, 125
- linear rekursive Bifolge, 116
- linear rekursive Folge, 108
- linear schwache Topologie, 16, 28, 88, 122
- links semiperfekte Koalgebra, 82
- Linkskoideal, 9
- lokal endlicher  $A$ -Modul, 57
- lokal projektive Koalgebra, 35
- lokal projektiver Modul, 16
- lokal projektives affines Gruppen-Schema, 77
  
- messendes Paar, 23
- Modul-Algebra, 94
- Modul-Koalgebra, 94
- Modul-Morphismus, 12
- Monoid-Funktork, 76
  
- normiertes Ideal, 108
- normiertes Polynom, 108
  
- orthogonal abgeschlossene Untermenge, 16
  
- Paar, 15
- Paar-Morphismus, 15
- partielle Ordnung, 108
- Polyeder, 108
- primitives Element, 73
- Produkt-Topologie, 121
- projektiver Komodul, 44, 93
- proper Algebra, 63
- proper Modul, 90
- proper Paar, 90
  
- rational-freier Modul, 30
- rationaler Modul, 30
- rationales Element, 30
- rechts semiperfekte Koalgebra, 82
- Rechtskoideal, 9
- Rechtssmash-Produkt, 102
- reflexive Algebra, 93
- reflexiver Modul, 90
- reflexives Paar, 90
- reiner Untermodul, 8
- repräsentative Abbildung, 74
- Restriktionsfunktork, 51
- Reverses, 116
- reversible Folge, 116
- reversibles Ideal, 110, 116
- reversibles Polynom, 110
- RL-Bedingung, 103
  
- s-flacher Modul, 21
- Schief-Gruppenring, 102
- schwach-koreflexiver Komodul, 90
- schwach-koreflexives  $(A, C)$ -Paar, 89
- schwach-reflexive Algebra, 93
- schwach-reflexiver Modul, 90
- schwach-reflexives Paar, 90
- schwache Wirkung, 100
- separable Algebra, 50, 55
- Smashprodukt, 102
- Spur-Modul, 23
- stark flacher Modul, 21
- stetige duale Koalgebra, 56, 57

stetiger dualer Komodul, 84  
stetiger dualer Modul, 84  
suberzeugter Modul, 27  
Subgenerator, 27  
Sweedler'sche Hopf-Algebra, 11  
System von elementaren Polynomen, 108  
  
totales Integral, 99  
totales Kointegral, 99  
  
unitärer Modul, 12  
universell torsionsfreier Modul, 16  
universelle Algebra, 74  
Unterbialgebra, 10  
Unterkoalgebra, 9  
Unterkomodul, 14  
Unterpaar, 24  
  
Vergissfunktork, 54  
verschränktes Produkt, 101  
Vervollständigung, 29  
  
Yetter-Drinfeld-Modul, 93  
Yoneda-Abbildung, 76  
  
zulässiger Filter, 66, 67