Konjugationsklassen
in
2-dimensionalen kristallographischen Gruppen

Inaugural–Dissertation

zur
Erlangung des Doktortitels
der
Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Heinrich–Heine–Universität Düsseldorf

vorgelegt von

ANTJE MEISER

aus Essen

Düsseldorf
2001

Gedruckt mit Genehmigung der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Heinrich–Heine–Universität Düsseldorf

Referent: Prof. Dr. Fritz Grunewald
Korreferent: Prof. Dr. Wilhelm Singhof

Tag der mündlichen Prüfung: 06.07.2001

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und sei S ein Erzeugendensystem von G. Dann lassen sich für G folgende Zeta-Funktionen definieren

$$\zeta_{prim}^{G,S}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

und

$$\zeta^{G,S}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$$

mit $s \in \mathbb{C}$. Die Koeffizienten a_n und b_n sind definiert als

$$a_n = \text{Anzahl der primitiven Konjugationsklassen der Wortnorm } n$$

und

$$b_n = \text{Anzahl der Konjugationsklassen der Wortnorm } n.$$

Eine Konjugationsklasse heißt primitiv, falls sie kein Element enthält, das eine echte Potenz eines anderen Elementes aus G ist. Die Wortnorm eines Elementes aus G ist das Minimum der Längen der Worte, die das Element darstellen. Und die Wortnorm einer Konjugationsklasse ist das Minimum der Wortnormen der Elemente dieser Konjugationsklasse. Damit hängen die Zeta-Funktionen von dem gewählten Erzeugendensystem S ab. Diese Begriffe werden in den Abschnitten 1.1 und 1.2 genauer definiert. Über die hier gemachten Definitionen hinaus gibt es noch andere Möglichkeiten, eine Zeta-Funktion für endlich erzeugte Gruppen zu definieren. In [Aut90] wird z.B. ein anderer Ansatz für Fuchssche Gruppen verfolgt. Darauf wird im Abschnitt 1.4 näher eingegangen.

In dieser Arbeit wird $\zeta_{prim}^{G,S}(s)$ und $\zeta^{G,S}(s)$ für die 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen untersucht. Diese Gruppen sind die Bewegungsgruppen einer 2-dimensionalen Figur in der Ebene. Es gibt 17 solcher Gruppen, wenn man die Gruppen nicht mitzählt, die nur Bewegungen in eine Richtung enthalten. Die 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen lassen sich als Erweiterungen von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ durch endliche Gruppen darstellen. Die in dieser Arbeit verwendeten Erzeugendensysteme S enthalten alle die Erzeugenden x und y, die jeweils $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ als Untergruppe erzeugen. Abschnitt 2.1 enthält eine Liste dieser Erzeugendensysteme, die im Folgenden als zugehörige Erzeugendensysteme bezeichnet werden.
Für die Zeta-Funktionen der 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen mit diesen Erzeugendensystemen gilt der folgender Satz.

Satz: *Sei G eine 2-dimensionale kristallographische Gruppe und S das zugehörige Erzeugendensystem. Dann sind die Zeta-Funktionen $\zeta_{prim}^{G,S}(s)$ und $\zeta^{G,S}(s)$ für $s \in \mathbb{C}$*

mit Re$(s) > 2$ absolut konvergent. Beide Zeta-Funktionen besitzen eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$.

Zum Beweis dieser Aussage werden $\zeta_{prim}^{G,S}(s)$ und $\zeta^{G,S}(s)$ für jede dieser Gruppen berechnet. Dazu müssen die Worte, die die Elemente von G repräsentieren, genauer untersucht werden. Für jedes Wort wird geprüft, ob es konjugiert ist zu einem bereits untersuchten Wort oder zu einem kürzeren Wort, und ob es primitiv ist oder nicht. Mit diesen Informationen lassen sich dann die Zeta-Funktionen berechnen. Die meisten der dabei auftretenden unendlichen Reihen konvergieren gegen Funktionen, die sich aus der Riemannschen Zeta-Funktion $\zeta(s)$ zusammensetzen. Weiter kommen noch Reihen der Form $H_\varphi(2,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)(n+2)^{-s}$ und $F(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n + x)^{-s}$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ vor. Bei der genaueren Untersuchung der allgemeineren Reihe $H_d(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(n+x)^{-s}$ erhält man den folgenden Satz

Satz: *Sei $s \in \mathbb{C}$. Sei $D_d(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n n^{-s}$ eine Dirichlet-Reihe, sodass*

1. *$D_d(s)$ konvergiert absolut für $s \in \mathbb{C}$ mit Re$(s) > \alpha$ für ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}$*
2. *$D_d(s)$ hat eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$.*

Weiter sei $x \in \mathbb{R}^+$ und

$$H_d(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x+n)^{-s}.$$

Dann hat $H_d(x,s)$ eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$.

Und für die Reihe $F(x,s)$ gilt der folgende Satz.

Satz: *Es sei $s \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}^+$. Weiter sei*

$$F(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n + x)^{-s}.$$

$F(x,s)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$.

Beide Sätze werden mit einer Methode nach Weil [Wei76] bewiesen. Damit hat dann jede der berechneten Zeta-Funktionen eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$.

Da für die Berechnung der Zeta-Funktionen die Worte, die die Elemente einer 2-dimensionalen kristallographischen Gruppe repräsentieren, untersucht werden, sind mit der Erstellung der Liste dieser Worte bereits alle Informationen zur Berechnung der Wachstumsfunktion vorhanden. Die Wachstumsfunktion ist definiert als die formale Potenzreihe

$$W_{G,S}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

mit den Koeffizienten

$$c_n = \text{ Anzahl der Elemente von } G \text{ der Wortnorm } n.$$

Auch die Wachstumsfunktion ist wieder von dem gewählten Erzeugendensystem S abhängig. Es zeigt sich die folgende Aussage.

Satz: *Es sei G eine 2-dimensionale kristallographische Gruppe und S das zugehörige Erzeugendensystem. Dann ist die Wachstumsfunktion $W_{G,S}(z)$ rational.*

Wendet man den Taubersatz von Ikehara auf die erhaltenen Zeta-Funktionen an, so lässt sich noch eine Aussage über das Wachstum der Koeffizienten a_n und b_n machen.

Satz: *Es sei G eine 2-dimensionale kristallographische Gruppe und S das zugehörige Erzeugendensystem. Es seien a_n und b_n die Koeffizienten der Zeta-Funktionen. Dann gibt es $\alpha_{prim} \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass*

$$\sum_{n \leq x}^{\infty} a_n \sim \frac{\alpha_{prim}}{2} \cdot x^2$$

und

$$\sum_{n \leq x}^{\infty} b_n \sim \frac{\alpha}{2} \cdot x^2.$$

Weiter sind α und $\pi^2 \cdot \alpha_{prim}$ rational.

Es wird nun der Aufbau der Arbeit näher beschrieben.
Zu Beginn werden im Kapitel 1 die verwendeten Begriffe definiert. Zunächst wird eine kurze Einführung in die kombinatorische Gruppentheorie gegeben. Dann werden die Zeta-Funktionen eingeführt. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird noch kurz auf andere Definitionen einer Zeta-Funktion für endlich präsentierte Gruppen eingegangen.
Kapitel 2 enthält eine Beschreibung der 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen. Für jede dieser Gruppen wird eine endliche Präsentation angegeben. Damit wird jeder Gruppe ein Erzeugendensystem zugeordnet, das dann immer für diese Gruppe im weiteren Verlauf der Arbeit verwendet wird. Weiter wird hier der Hauptsatz über die Zeta-Funktionen der 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen formuliert. Schließlich wird noch die Vorgehensweise bei der Berechnung der Zeta-Funktionen erläutert, d.h. es wird der Aufbau der einzelnen Abschnitte des Kapitels 5 näher beschrieben.
Um die Berechnungen der Zeta-Funktionen übersichtlich zu halten, werden im Kapitel 3 allgemeine Aussagen bewiesen, die in mehreren Berechnungen angewendet werden. So enthält z.B. jede 2-dimensionale kristallographische Gruppe die Gruppe

$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ als Untergruppe. Die Worte, die nur aus den Erzeugenden von $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ gebildet werden und kurz in ihren Äquivalenzklassen sind, werden daher vorab aufgelistet und auf Primitivität untersucht. Ebenso gibt es Relationen, die in mehreren 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen gelten. Es kommen immer wieder Erzeugende vor, die einen der Erzeugenden der Untergruppe $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ invertieren. Auch Relationen der Form $x^t = x^{\varepsilon_x}y^{\varepsilon_y}$ treten in mehreren 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen auf, wobei x einer der Erzeugenden von $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ist, t ein weiterer Erzeugender der Gruppe und $\varepsilon_x, \varepsilon_y \in \{-1, 1\}$ ist. Die Auswirkungen dieser Relationen auf die Worte, die die Elemente der Gruppe darstellen, werden ebenfalls in Kapitel 3 vorab betrachtet.
Im darauf folgenden Kapitel werden dann Funktionen und Reihen näher betrachtet, die bei der Berechnung der einzelnen Zeta-Funktionen für die 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen eine Rolle spielen. Es werden die Definitionen der Eulerschen Funktion und der Riemannschen Zeta-Funktion angegeben. Weiter wird die Reihe $H_d(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(n+x)^{-s}$ untersucht. Der Beweis der Konvergenz wird analog zu einem Konvergenzbeweis einer ähnlichen Reihe in [Wei76] geführt. Mit derselben Beweismethode wird auch die Konvergenz der Reihe $F(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n + x)^{-s}$ gezeigt.
Im Kapitel 5 werden dann die einzelnen Zeta-Funktionen der 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen berechnet. Dazu werden zunächst die Worte, die die Elemente jeder einzelnen Gruppe repräsentieren, aufgelistet. Diese werden dann auf Primitivität untersucht und in Konjugationsklassen eingeteilt. Mit den dadurch gewonnenen Informationen lassen sich die Koeffizienten der Zeta-Funktionen bestimmen und die Zeta-Funktionen berechnen. Zur Übersicht befinden sich am Anfang des Kapitels Listen der berechneten Funktionen $\zeta_{prim}^{G,S}(s)$ und $\zeta^{G,S}(s)$.
Da bei der Berechnung der Zeta-Funktionen bereits für jede Gruppe die Worte, die die Elemente der Gruppe bezüglich des gewählten Erzeugendensystems repräsentieren, aufgelistet wurden, können im Kapitel 6 die Wachstumsfunktionen der 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen berechnet werden. Es werden zuerst einige allgemeine Aussagen zur Berechnung gezeigt, bevor dann eine Liste der berechneten Wachstumsfunktionen angegeben wird.
Schließlich wird im Kapitel 7 der Taubersatz von Ikehara auf die berechneten Zeta-Funktionen angewendet. Dadurch lässt sich die Anzahl der primitiven Konjugationsklassen bzw. der Konjugationsklassen überhaupt bei wachsender Wortnorm asymptotisch beschreiben.

Zum Schluß möchte ich mich insbesondere bei Herrn Prof. Fritz Grunewald für das interessante Thema dieser Arbeit und die geduldige Unterstützung bei der Erstellung der Arbeit bedanken. Außerdem möchte ich mich bei Christine Priplata, Colin Stahlke, Wolfgang Huntebrinker und Dietrich Burde dafür bedanken, dass sie mir stets freundlich zur Seite gestanden haben. Einen entscheidenden Beitrag zur Fertigstellung der Arbeit haben auch Thorsten und Dominic Meiser geleistet, wofür ich ihnen sehr dankbar bin.

1 Grundlegende Definitionen

In diesem Kapitel wird der Begriffsapparat für diese Arbeit bereitgestellt. Dazu werden zunächst einige Aspekte der kombinatorischen Gruppentheorie dargestellt. Dazu gehört der Begriff des Wortes und die Definition einer Wortnorm. Anschließend wird der Begriff der primitiven Konjugationsklasse eingeführt und eine Wortnorm für Konjugationsklassen definiert. Weiter werden die in dieser Arbeit untersuchten Zeta-Funktionen angegeben. Schließlich werden noch kurz andere Ansätze einer Definition einer Zeta-Funktion für endlich präsentierte Gruppen vorgestellt.

1.1 Worte

In diesem Abschnitt werden nur einige Grundbegriffe der kombinatorischen Gruppentheorie eingeführt. Eine ausführlichere Darstellung findet sich z.B. in [LS77].
Es sei nun $G = \langle S, R \rangle$ eine endlich erzeugte Gruppe. Die Elemente von S heißen *Erzeugende* von G. Weiter sei $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$. Die Elemente von $S \cup S^{-1}$ werden *Buchstaben* genannt. Schließlich bezeichnet man die Elemente von R als *Relationen*. Buchstaben werden durch einfaches Hintereinanderschreiben miteinander verknüpft. Diese Verknüpfung wird im Folgenden immer ohne Operationszeichen dargestellt.
Ein *Wort* w entsteht durch Hintereinanderschreiben von Buchstaben

$$w = s_1 \dots s_n.$$

Das zu w *inverse Wort* w^{-1} ist durch $w^{-1} = s_n^{-1} \dots s_1^{-1}$ definiert. Weiter wird das *leere Wort* mit e bezeichnet. $|w| = n$ heißt die *Länge* von w. Die Länge des leeren Wortes ist gleich 0, die Länge der Buchstaben ist gleich 1. Die Buchstaben sind die einzigen Worte der Länge 1.
Jedes Wort stellt ein Gruppenelement $g \in G$ dar. Und zwar erhält man g aus $w = s_1 \dots s_n$, in dem man die Buchstaben s_i in der Reihenfolge, in der sie in w vorkommen, mit der Gruppenoperation verknüpft. Es ist also

$$g = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n,$$

wobei $\cdot$ die Operation in G darstellt. Dabei können mehrere Worte dasselbe Gruppenelement darstellen, aber zwei Gruppenelemente können nicht durch dasselbe Wort dargestellt werden.
Im weiteren Verlauf der Arbeit wird meist nicht mehr zwischen dem Wort und dem von diesem Wort dargestellten Gruppenelement unterschieden. Diese mögliche Zweideutigkeit vereinfach die Sprache, da dadurch z.B. von der Potenz eines Wortes w gesprochen werden kann anstelle von einem Wort, das die Potenz des von dem Wort w dargestellten Gruppenelements darstellt.
In einem *reduzierten Wort* gibt es keine Teilwörter der Form ss^{-1} bzw. $s^{-1}s$, wobei

s und s^{-1} zueinander inverse Buchstaben sind. Durch Streichen von Teilwörtern der obigen Form kann man aus jedem Wort ein reduziertes Wort erzeugen. Die Länge des reduzierten Wortes wird als *reduzierte Länge* $l(w)$ bezeichnet. Offensichtlich gilt $l(w) \leq |w|$.
Eine weitere Möglichkeit ein Wort zu verkürzen besteht in der *Dehn-Reduktion* des Wortes. Dabei bezeichnet man r_l als *langen Relationenteil*, falls es ein $r \in R$ gibt mit $r = r_l r_k$ oder $r = r_k r_l$ und $|r_k| < |r_l|$. r_k heißt dann *kurzer Relationenteil*. Ersetzt man nun in einem Wort alle langen Relationenteile durch die Inversen der entsprechenden kurzen Relationenteile, so nennt man dieses Wort *Dehn-reduziert*. Ein Dehn-reduziertes Wort stellt immer noch dasselbe Element von G dar, ist aber kürzer als das ursprüngliche Wort.
Es läßt sich nun eine Äquivalenzrelation zwischen Worten definieren. Zwei Worte w_1 und w_2 heißen *äquivalent*, wenn w_2 durch endlich viele Umformungen von folgender Form aus w_1 entsteht

- Streichen oder Hinzufügen eines Teilwortes der Form ss^{-1} oder $s^{-1}s$
- Ersetzen eines langen Relationenteils durch das Inverse des entsprechenden kurzen Relationenteils bzw. Ersetzen eines kurzen Relationenteils durch das Inverse des entsprechenden langen Relationenteils.

D.h. zwei Worte sind genau dann äquivalent, wenn sie dasselbe Gruppenelement darstellen. Hierbei handelt es sich offensichtlich um eine Äquivalenzrelation. Jede Äquivalenzklasse stellt genau ein Element aus G dar. Diese Zuordnung ist bijektiv. Damit kann man jetzt für ein Gruppenelement eine Länge definieren.

Definition 1.1.1 *Für $g \in G$ heißt*

$$\| g \| := \min\{|w| \mid w \textit{ liegt in der Äquivalenzklasse, die } g \textit{ darstellt}\}$$

die Wortnorm *von g. Ein Wort w aus der Äquivalenzklasse, die g darstellt, heißt* kurz*, falls $|w| = \| g \|$.*

Das Problem besteht nun darin, einen geeigneten kurzen Repräsentanten einer Äquivalenzklasse auszuwählen. Es kann nämlich mehrere kurze Wörter in einer Äquivalenzklasse geben.

1.2 Primitive Konjugationsklassen

Für ein Element $g \in G$ bezeichnet $\{g\}$ die Konjugationsklasse von g, d.h. $\{g\} = \{hgh^{-1} \mid h \in G\}$. Mit Hilfe der im vorigen Abschnitt definierten Wortnorm eines Elementes $g \in G$ lässt sich nun auch die Wortnorm einer Konjugationsklasse definieren.

Definition 1.2.1 *Die* Wortnorm *einer Konjugationsklasse ist definiert als*

$$\| \{g\} \| := min\{\| h \| \mid h \in \{g\}\}.$$

Sei w ein Wort aus einer Äquivalenzklasse, die ein Element aus $\{g\}$ darstellt. Dann heißt w kurz in seiner Konjugationsklasse*, wenn $|w| = \| \{g\} \|$.*

Auch hier besteht wieder das Problem, einen geeigneten kurzen Repräsentanten einer Konjugationsklasse auszuwählen, da es mehrere Worte geben kann, die kurz sind in derselben Konjugationsklasse. Als nächstes werden jetzt die primitiven Konjugationsklassen definiert.

Definition 1.2.2 *Ein Element $g \in G$ heißt* primitiv*, wenn aus $g = h^n$ mit $h \in G$ bereits $n = 1$ folgt. Eine Konjugationsklasse $\{g\}$ heißt* primitiv*, wenn alle Elemente aus $\{g\}$ primitiv sind.*

Insbesondere kann ein Element $g \in G$ von endlicher Ordnung n nicht primitiv sein, da dann $g^{n+1} = g$. Damit sind auch alle Konjugationsklassen, die ein Element von endlicher Ordnung enthalten, nicht primitiv. Damit eine Konjugationsklasse $\{g\}$ primitiv ist, genügt es zu zeigen, dass sie ein primitives Element enthält, da alle Elemente, die zu einem primitiven Element konjugiert sind, selbst primitiv sind.

1.3 Zeta-Funktionen

Es sei $G = \langle S, R \rangle$ eine endlich erzeugte Gruppe. Ziel dieser Arbeit ist es, Aussagen über die Verteilung von Konjugationsklassen zu machen. Da in einigen Gruppen, z.B. Fuchsschen Gruppen, jede Konjugationsklasse einen kurzen Repräsentanten enthält, der die Potenz eines kurzen Repräsentanten einer primitiven Konjugationsklasse ist, und diese Beziehung eindeutig ist, liegt es nahe, zunächst die primitiven Konjugationsklassen zu betrachten. Daher wird zuerst die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$a_n = \text{Anzahl der primitiven Konjugationsklassen der Wortnorm } n$$

definiert. Mit Hilfe dieser Folge kann nun eine Zeta-Funktion über primitive Konjugationsklassen definiert werden:

$$\zeta_{prim}^{G,S}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

mit $s \in \mathbb{C}$. Ebenso lässt sich durch die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \text{Anzahl der Konjugationsklassen der Wortnorm } n$$

eine Zeta-Funktion über alle Konjugationsklassen definieren. Es ist

$$\zeta^{G,S}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$$

mit $s \in \mathbb{C}$.

1.4 Andere Ansätze

Es gibt noch andere Möglichkeiten, auf der Grundlage von Konjugationsklassen eine Zeta-Funktion für endlich erzeugte Gruppen zu definieren. So untersucht Autenrieth in [Aut90] die Zeta-Funktion

$$\zeta_G(z) := \prod_{\{g\} prim} (1 - z^{\|\{g\}\|})$$

für Fuchssche Gruppen G. Auch diese Definition hängt von dem gewählten Erzeugendensystem ab. Er zeigt, dass diese Zeta-Funktion für nichtexzeptionelle Fuchssche Gruppen mit den von ihm gewählten Erzeugendensystemen rational ist. Diese Definition lehnt sich an die Defintion einer Zeta-Funktion an, die von Ruelle [Rue76] und Pollicott [Pol85] verwendet wird.

Gromov betrachtet in [Gro87] eine Zeta-Funktion, die auf stabilen Konjugationsklassen basiert. Allerdings wird dort eine etwas andere Definition der Wortnorm verwendet.

2 2-dimensionale kristallographische Gruppen

Zuerst werden in diesem Kapitel die 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen eingeführt. Dabei wird jeder Gruppe ein Erzeugendensystem zugeordnet, das dann im weiteren Verlauf dieser Arbeit bei der Berechnung der Zeta-Funktionen dieser Gruppe verwendet wird. Weiter werden die Hauptsätze über die Zeta-Funktionen für 2-dimensionale kristallographische Gruppen formuliert und die Beweisführung näher erläutert. D.h. es wird der Aufbau der einzelnen Abschnitte von Kapitel 5 beschrieben.

2.1 Endliche Präsentationen

Um aus einer 2-dimensionalen Figur ein Muster der Ebene zu bilden, ohne die Figur selbst zu verändern, benötigt man Rotationen, Translationen und Gleitreflektionen. Diese Operationen bilden für jede Figur eine Gruppe. Diese Gruppen lassen sich in 24 Isomorphieklassen einteilen. Jede Klasse repräsentiert eine Möglichkeit, eine Figur in der Ebene zu wiederholen. 7 Klassen verschieben die Figur nur auf einem Streifen und nicht in der ganzen Ebene. Diese Gruppen sind also weniger interessant. Daher werden in dieser Arbeit nur die übrigen 17 sogenannten *2-dimensionalen kristallographischen Gruppen* betrachtet.
Bereits die alten Ägypter und Chinesen kannten viele dieser Gruppen. Die Mauren verwendeten alle 17 Möglichkeiten bei der Gestaltung der Alhambra auf Granada. Aber auch modernere Künstler wie z.B. M.C. Escher verwenden die 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen bei der Gestaltung ihrer Bilder.
In dieser Arbeit werden für die 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen die Bezeichnungen von Hermann und Mauguin [HL52] verwendet, die in der Literatur am häufigsten gebraucht werden. Eine ausführliche Beschreibung der 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen findet sich bei Coxeter und Moser [CM84]. Es wird jetzt für jede der 17 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen ein Erzeugendensystem ausgewählt. Diese Erzeugendensysteme finden sich in einem Artikel von du Sautoy [dSMS99]. Den ausgewählten Erzeugendensystemen liegt zu Grunde, dass die Gruppen Erweiterungen von $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ durch endliche Gruppen sind. D.h. in jedem der ausgewählten Erzeugendensysteme kommen die Erzeugenden x und y vor, die $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ als Untergruppe in den 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen erzeugen. Die folgende Liste enthält alle 17 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen und die zugehörigen ausgewählten Erzeugendensysteme. Dabei wird folgende Schreibweise verwendet:

$$x^r = r^{-1}xr,$$

wobei x und r beliebige Elemente der Gruppe sind.

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{p1} & = \langle x, y & \mid [x,y] \rangle \\
\mathbf{p2} & = \langle x, y, r & \mid [x,y], r^2, x^r = x^{-1}, y^r = y^{-1} \rangle \\
\mathbf{pm} & = \langle x, y, m & \mid [x,y], m^2, x^m = x, y^m = y^{-1} \rangle \\
\mathbf{pg} & = \langle x, y, t & \mid [x,y], t^2 = x, y^t = y^{-1} \rangle \\
\mathbf{p2mm} & = \langle x, y, p, q & \mid [x,y], [p,q], p^2, q^2, x^p = x, x^q = x^{-1}, y^p = y^{-1}, y^q = y \rangle \\
\mathbf{p2mg} & = \langle x, y, m, t & \mid [x,y], t^2, m^2 = y, x^t = x, x^m = x^{-1}, y^t = y^{-1}, m^t = m^{-1} \rangle \\
\mathbf{p2gg} & = \langle x, y, u, v & \mid [x,y], u^2 = x, v^2 = y, x^v = x^{-1}, y^u = y^{-1}, (uv)^2 \rangle \\
\mathbf{cm} & = \langle x, y, t & \mid [x,y], t^2, y^t = y^{-1}, x^t = xy \rangle \\
\mathbf{c2mm} & = \langle x, y, m, r & \mid [x,y], m^2, r^2, y^m = y^{-1}, x^m = xy, y^r = y^{-1}, x^r = x^{-1}, \\
 & & \quad r^m = r^{-1} \rangle \\
\mathbf{p4} & = \langle x, y, r & \mid [x,y], r^4, y^r = x^{-1}, x^r = y \rangle \\
\mathbf{p4mm} & = \langle x, y, r, m & \mid [x,y], r^4, m^2, y^r = x^{-1}, x^r = y, x^m = y, r^m = r^{-1} \rangle \\
\mathbf{p4gm} & = \langle x, y, r, t & \mid [x,y], r^4, t^2, y^r = x^{-1}, x^r = y, x^t = y, r^t = r^{-1}x^{-1} \rangle \\
\mathbf{p3} & = \langle x, y, r & \mid [x,y], r^3, x^r = x^{-1}y, y^r = x^{-1} \rangle \\
\mathbf{p31m} & = \langle x, y, r, t & \mid [x,y], r^2, t^2, (tr)^3, x^r = x, y^t = y, x^t = x^{-1}y, y^r = xy^{-1} \rangle \\
\mathbf{p3m1} & = \langle x, y, r, m & \mid [x,y], r^3, m^2, r^m = r^{-1}, x^r = x^{-1}y, y^r = x^{-1}, x^m = x^{-1}, \\
 & & \quad y^m = x^{-1}y \rangle \\
\mathbf{p6} & = \langle x, y, r & \mid [x,y], r^6, x^r = y, y^r = x^{-1}y \rangle \\
\mathbf{p6mm} & = \langle x, y, r, m & \mid [x,y], r^6, m^2, y^r = x^{-1}y, x^r = y, x^m = x^{-1}, y^m = x^{-1}y, \\
 & & \quad r^m = r^{-1}y \rangle
\end{array}
$$

2.2 Zeta-Funktionen

Es wird zuerst die primitive Zeta-Funktion

$$\zeta_{prim}^{G,S}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

mit den Koeffizienten

$$a_n = \text{ Anzahl der primitiven Konjugationsklassen der Wortnorm } n$$

betrachtet. Für diese Zeta-Funktion gilt der folgende Satz.

Satz 2.2.1 *Es sei G eine 2-dimensionale kristallographische Gruppe und es sei S das in Abschnitt 2.1 für G ausgewählte Erzeugendensystem. Weiter sei $s \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

- $\zeta_{prim}^{G,S}(s)$ *konvergiert absolut für $Re(s) > 2$.*
- $\zeta_{prim}^{G,S}(s)$ *besitzt eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$.*
- *Bei $s = 2$ liegt ein Pol 1. Ordnung von $\zeta_{prim}^{G,S}(s)$.*

Für die Zeta-Funktion

$$\zeta^{G,S}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$$

mit den Koeffizienten

$$b_n = \text{ Anzahl der Konjugationsklassen der Wortnorm } n$$

gilt ein entsprechender Satz.

Satz 2.2.2 *Es sei G eine 2-dimensionale kristallographische Gruppe und es sei S das in Abschnitt 2.1 für G ausgewählte Erzeugendensystem. Weiter sei $s \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

- $\zeta^{G,S}(s)$ *konvergiert absolut für* $Re(s) > 2$.
- $\zeta^{G,S}(s)$ *besitzt eine meromorphe Fortsetzung nach ganz* $\mathbb{C}$.
- *Bei* $s = 2$ *liegt ein Pol 1. Ordnung von* $\zeta^{G,S}(s)$.

Beide Sätze werden bewiesen, in dem die Zeta-Funktionen aller 17 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen berechnet werden. Die dabei auftretenden Funktionen werden dann hinsichtlich der Aussagen der beiden obigen Sätze untersucht. Dies geschieht in den folgenden Kapiteln.
Für die 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen lassen sich die Konjugationsklassen nicht eindeutig aus den primitiven Konjugationsklassen erzeugen. So sind z.B. in pm die Worte x und mx kurz in ihren primitiven Konjugationsklassen. Aber es ist $(mx)^2 = x^2$. D.h. die Konjugationsklasse $\{x^2\}$ lässt sich aus den primitiven Konjugationsklassen $\{x\}$ und $\{mx\}$ erzeugen. Daher gibt es für 2-dimensionale kristallographische Gruppen keinen direkten Zusammenhang zwischen den Koeffizienten von $\zeta^{G,S}_{prim}(s)$ und $\zeta^{G,S}(s)$, und es müssen beide Zeta-Funktionen für jede Gruppe einzeln ausgerechnet werden.

2.3 Beweisführung

Es sei $G = \langle S, R\rangle$ eine 2-dimensionale kristallographische Gruppe, wobei S das in Abschnitt 2.1 für G ausgewählte Erzeugendensystem ist. Für die Berechnung von $\zeta^{G,S}_{prim}(s)$ bzw. $\zeta^{G,S}(s)$ ist es notwendig, die Anzahl der primitiven Konjugationsklassen bzw. der Konjugationsklassen überhaupt der Wortnorm n für jedes $n \geq 1$ zu bestimmen.
Im ersten Schritt wird zunächst für jedes Element $g \in G$ aus der g darstellenden Äquivalenzklasse ein kurzes Wort ausgewählt. Dazu werden zuerst die Worte untersucht, die nur aus x, y und ihren Inversen erzeugt werden. Danach werden die Worte betrachtet, die aus den Erzeugenden x,y, einem weiteren Erzeugenden und

ihren Inversen gebildet werden. Am Ende steht die Untersuchung der Worte, die aus allen Buchstaben gebildet werden. Dabei wird festgestellt, ob ein Wort äquivalent ist zu einem kürzeren Wort oder zu einem bereits untersuchten Wort. Ist dies nicht der Fall, ist das Wort ein geeigneter kurzer Repräsentant seiner Äquivalenzklasse. Dieses Vorgehen ist sinnvoll, da die Erzeugenden x und y in jedem der hier ausgewählten Erzeugendensysteme der 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen vorkommen. Da x und y in allen Gruppen miteinander vertauschbar sind, besitzen die aus x, y und ihren Inversen erzeugten Worte eine einfache Struktur. Je mehr Erzeugende man hinzunimmt, um so komplizierter kann die Struktur werden. Bei der Untersuchung dieser Worte kann man aber oft auf Erkenntnisse zurückgreifen, die Teilwörter betreffen, die bereits als Wörter untersucht worden sind. Weiter können oft auch Ergebnisse aus anderen Gruppen verwendet werden, da viele 2-dimensionale kristallographische Gruppen andere 2-dimensionale kristallographische Gruppen als Untergruppen enthalten. Schließlich erhält man eine Liste der Worte, die die Elemente von G darstellen.

Im zweiten Schritt werden die Worte dieser Liste in Konjugationsklassen eingeteilt und aus jeder primitiven Konjugationsklasse wird ein kurzer Repräsentant ausgewählt. Dazu wird jedes Wort zunächst auf Primitivität untersucht. Ist ein Wort nicht primitiv, so ist die Untersuchung dieses Wortes beendet, da es in keiner primitiven Konjugationsklasse liegen kann. Ist das Wort dagegen primitiv, so wird es mit allen Buchstaben und gegebenenfalls mit bestimmten Wörtern konjugiert, um festzustellen, ob es konjugiert ist zu

- einem kürzeren Wort
- einem bereits untersuchten gleichlangen Wort.

Ist das Wort konjugiert zu einer dieser Möglichkeiten, dann ist auch die Untersuchung dieses Wortes beendet, da

- es nicht kurz ist in seiner Konjugationsklasse
- es bereits einen Repräsentanten gleicher Länge dieser Konjugationsklasse gibt.

Trifft dies aber alles nicht zu, so ist dieses primitive Wort ein geeigneter kurzer Repräsentant der von ihm erzeugten primitiven Konjugationsklasse.

In einem letzten Schritt werden dann aus diesen Informationen die Koeffizienten der Zeta-Funktion $\zeta^{G,S}(s)$ bestimmt. Dazu müssen noch die nicht primitiven Worte in Konjugationsklassen eingeteilt werden.

Da es Typen von Relationen gibt, die in mehreren der ausgewählten Präsentationen der 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen vorkommen, werden die von der speziellen Gruppe unabhängigen Auswirkungen dieser Relationen auf die Ergebnisse der Schritte 1 bis 3 vor den einzelnen Berechnungen im Kaptitel 3 untersucht.

Um nun schließlich $\zeta_{prim}^{G,S}(s)$ bzw. $\zeta^{G,S}(s)$ zu berechnen, muß nur noch die Länge der ausgewählten kurzen Repräsentanten der (primitiven) Konjugationsklassen festgestellt werden und in die Formel für $\zeta_{prim}^{G,S}(s)$ bzw. $\zeta^{G,S}(s)$ eingetragen werden. Abschließend müssen die dabei auftretenden unendlichen Reihen noch auf Konvergenz untersucht werden. Da nur wenige verschiedene unendliche Reihen vorkommen, wird das Konvergenzverhalten dieser Reihen vorab in Kapitel 4 behandelt. Die einzelnen Berechnungen werden dann in Kapitel 5 durchgeführt.

3 Einige Relationen

Einige Typen von Relationen kommen in mehreren der ausgewählten Präsentationen der 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen vor. Um nicht bei jeder Gruppe, in deren Präsentation eine dieser Relationen vorkommt, die gleichen Untersuchungen neu durchführen zu müssen, werden die Auswirkungen dieser Relationen auf die Worte, die die Gruppenelemente darstellen, und gegebenenfalls auf das Verhalten dieser Worte unter Konjugation, in den Abschnitten dieses Kapitels allgemein untersucht. Insbesondere werden in diesem Kapitel die kurzen Repräsentanten der in jeder 2-dimensionalen kristallographischen Gruppe enthaltenen Untergruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ betrachtet.

3.1 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Jede 2-dimensionale kristallographische Gruppe enthält die Untergruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, die aus den Translationen x und y gebildet wird. Dabei gilt $[x, y] = 1$. Der folgende Satz gibt die kurzen Repräsentanten der Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ an.

Satz 3.1.1 *1. Gilt in einer 2-dimensionalen kristallographischen Gruppe keine Relation der Form $x^t = x^{\varepsilon_x} y^{\varepsilon_y}$ bzw. $y^t = x^{\varepsilon_x} y^{\varepsilon_y}$ mit $\varepsilon_x, \varepsilon_y \in \{-1, 1\}$, so sind die Worte*

$$x^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

die kurzen Repräsentanten der Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2. Gilt in einer 2-dimensionalen kristallographischen Gruppe eine Relation der Form $x^t = x^{\varepsilon_x} y^{\varepsilon_y}$ bzw. $y^t = x^{\varepsilon_x} y^{\varepsilon_y}$ mit $\varepsilon_x, \varepsilon_y \in \{-1, 1\}$, so sind die kurzen Repräsentanten der Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ von folgender Form

$$x^{-\varepsilon_x a} y^{\varepsilon_y b}, x^{\varepsilon_x a} y^{-\varepsilon_y b} \text{ mit } a, b \geq 0$$

$$x^{\varepsilon_x a} y^{\varepsilon_y b}, x^{-\varepsilon_x a} y^{-\varepsilon_y b} \text{ mit } a, b \geq 1 \text{ und } \min(a, b) \leq 2$$

Beweis: Die freie abelsche Gruppe wird in jeder 2-dimensionalen kristallographischen Gruppe durch die Erzeugenden x und y als Untergruppe erzeugt. Damit gibt es in jeder 2-dimensionalen kristallographischen Gruppe die Worte $x^a y^b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Es muß jetzt nur noch untersucht werden, ob diese Worte auch kurz sind in ihren Äquivalenzklassen.

1. Wenn in der 2-dimensionalen kristallographischen Gruppe keine Relation der Form $x^t = x^{\varepsilon_x} y^{\varepsilon_y}$ bzw. $y^t = x^{\varepsilon_x} y^{\varepsilon_y}$ mit $\varepsilon_x, \varepsilon_y \in \{-1, 1\}$ gilt, so gibt es keine Möglichkeit, Teilwörter von $x^a y^b$ durch kürzere Worte zu ersetzen. Damit sind die Worte der Form $x^a y^b$ die kurzen Repräsentanten der Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2. i. Da genau einer der Exponenten das umgekehrte Vorzeichen im Vergleich zur rechten Seite der zusätzlichen Relation hat, gibt es keine Möglichkeit, Teilworte von $x^{-\varepsilon_x a} y^{\varepsilon_y b}$ und von $x^{\varepsilon_x a} y^{-\varepsilon_y b}$ durch kürzere Worte zu ersetzen. Damit sind diese Worte kurze Repräsentanten der Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

   ii. Es sei $m = \min(a, b)$ und es sei $x^t = x^{\varepsilon_x} y^{\varepsilon_y}$. Dann gilt

$$x^{\varepsilon_x a} y^{\varepsilon_y b} = t^{-1} x^m t x^{\varepsilon_x a - \varepsilon_x m} y^{\varepsilon_y b - \varepsilon_b m}.$$

   Damit $x^{\varepsilon_x a} y^{\varepsilon_y b}$ kürzer ist als $t^{-1} x^m t x^{\varepsilon_x (a-m)} y^{\varepsilon_y (b-m)}$, muß

$$a + b \leq 2 + m + a - m + b - m$$

   gelten. Dies ist genau dann der Fall, wenn $m = \min(a, b) \leq 2$ ist. Dasselbe gilt natürlich für $x^{-\varepsilon_x a} y^{-\varepsilon_y b}$.
   Genauso lässt sich die Behauptung zeigen, falls $y^t = x^{\varepsilon_x} y^{\varepsilon_y}$. □

Bei der Untersuchung dieser Worte auf Primitivität erhält man das folgende Ergebnis:

Satz 3.1.2 *Für die Untergruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gilt:*

1. *Die Worte*

$$x^a, y^a$$

   sind für $|a| > 1$ nicht primitiv.

2. *Die Worte*

$$x^a y^b$$

   sind für $(|a|, |b|) > 1$ nicht primitiv.

Beweis:

1. Ist $|a| > 1$, so gibt es offensichtlich ein anderes Wort in der Gruppe, so dass das zu untersuchende Wort eine Potenz dieses Wortes ist.

2. Es sei $(|a|, |b|) = t > 1$. Dann ist $a = t \cdot a'$ und $b = t \cdot b'$ und man erhält

$$x^a y^b = (x^{a'} y^{b'})^t.$$

□

Inwiefern diese Worte zueinander konjugiert sind, hängt ausschließlich von den weiteren Erzeugenden und den weiteren Relationen der Gruppe ab, da die Konjugation eines der obigen Worte mit x oder y aufgrund der Relation $[x, y] = 1$ wieder dieses Wort ergibt. Daher muß diese Frage für jede Gruppe neu untersucht werden.

3.2 Invertierende Erzeugende

Es sei r ein Erzeugender einer 2-dimensionalen kristallographischen Gruppe, sodass $x^r = x^{-1}$. Wenn diese Relation gilt, lässt sich eine Aussage über die Ordnung von r machen:

Satz 3.2.1 *Wenn $x^r = x^{-1}$, dann ist r von gerader oder unendlicher Ordnung.*

Beweis: Sei $k = 2 \cdot k' + 1$ die endliche Ordnung von r.
Aus der Relation $x^r = x^{-1}$ folgt, dass $xr = rx^{-1}$ und $xr^{-1} = r^{-1}x^{-1}$.
Es ist $xr^2 = rx^{-1}r = r^2x$ oder allgemeiner $xr^{2k'} = r^{2k'}x$.
Da aber $r^{2k'} = r^{-1}$ und x von unendlicher Ordnung, ist dies ein Widerspruch zu $xr^{-1} = r^{-1}x^{-1}$. □

Bei den in dieser Arbeit ausgewählten Präsentationen der 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen kommen nur 2 der möglichen Fälle vor

- die Ordnung von r ist gleich 2
- die Ordnung von r ist unendlich, aber $r^2 = y$.

Deshalb werden auch nur diese beiden Fälle im Weiteren betrachtet. Falls die Ordnung von r unendlich ist, lassen sich Worte, in denen der Betrag des Exponenten von r größer als 1 ist, durch das Ersetzen des Teilwortes r^2 durch das Wort y verkürzen. Falls die Ordnung von r gleich 2 ist, können Wörter, in denen der Betrag des Exponenten von r größer als 1 ist, ebenfalls verkürzt werden. Daher werden im Folgenden nur Worte betrachtet, in denen der Exponent von r gleich 1 oder -1 ist. Das Ergebnis dieser Untersuchung stellt der folgende Satz dar.

Satz 3.2.2 *Es sei $x^r = x^{-1}$. Weiter sei die Ordnung von r entweder gleich 2 oder, falls die Ordnung von r unendlich ist, sei $r^2 = y$. Dann gilt:*

1. *Ist die Ordnung von r gleich 2, so sind die Worte rx^a nicht primitiv.*
2. *Die Worte $r^{\pm 1}x^a y^b$ sind für $|a| \geq 2$ konjugiert zu kürzeren Worten.*
3. *Falls die Ordnung von r gleich 2 ist und zusätzlich gilt $y^r = y^{-1}$, so sind die Worte $rx^a y^b$ nicht primitiv.*
4. *Falls die Ordnung von r gleich 2 ist und zusätzlich gilt $y^r = y$, so sind die Worte $rx^a y^b$ für $|b| = (2k+1)|b'|$ mit $k \geq 1$, $|b'| \geq 1$ nicht primitiv.*

Analoge Aussagen kann man natürlich zeigen, falls r den Erzeugenden y invertiert.

Beweis: Aus der Relation $x^r = x^{-1}$ folgt insbesondere $xr = rx^{-1}$ und $rx = x^{-1}r$ bzw. r^{-1}x= $x^{-1}r^{-1}$. Diese Beziehung wird in den einzelnen Teilbeweisen immer wieder verwendet.

1. Es ist
$$(rx^a)^2 = rx^a rx^a = rrx^{-a}x^a = r^2 = e.$$
D.h. rx^a ist von endlicher Ordnung und damit nicht primitiv.

2. Es ist
$$r^{\pm 1}x^a y^b = x^{-1}r^{\pm 1}y^b x^{a-1} \quad \text{falls } a \geq 1$$
bzw.
$$r^{\pm 1}x^a y^b = xr^{\pm 1}y^b x^{a+1} \quad \text{falls } a \leq -1.$$
Demach ist $r^{\pm 1}x^a y^b \sim r^{\pm 1}x^{a-2}y^b$, wenn $a \geq 2$, bzw. $r^{\pm 1}x^a y^b \sim r^{\pm 1}x^{a+2}y^b$, wenn $a \leq -2$. D.h. $r^{\pm 1}x^a y^b$ ist für $|a| \geq 2$ konjugiert zu kürzeren Worten.

3. Es ist
$$(rx^a y^b)^t = rx^a y^b rx^a y^b = rrx^{-a}y^{-b}x^a y^b = r^2 = e.$$
D.h. $rx^a y^b$ ist von endlicher Ordnung und damit nicht primitiv.

4. Es ist
$$\begin{aligned} rx^a y^{(2k+1)b'} &= y^{2kb'} rx^a y^{b'} \\ &= (y^{2b'})^k (rx^a y^{b'}) \\ &= (r^2 y^{2b'})^k (rx^a y^{b'}) \\ &= (rrx^{-a}x^a y^{b'} y^{b'})^k (rx^a y^{b'}) \\ &= (rx^a y^{b'} rx^a y^{b'})^k (rx^a y^{b'}) \\ &= (rx^a y^{b'})^{2k+1}. \end{aligned}$$
D.h. $rx^a y^{(2k+1)b'}$ läßt sich für $k \geq 1$ und $|b'| \geq 1$ als Potenz eines anderen Wortes schreiben. □

3.3 Die Relation $x^t = x^{\varepsilon_x} y^{\varepsilon_y}$

Sei t ein Erzeugender einer 2-dimensionalen kristallographischen Gruppe mit $t^2 = e$ und es sei $x^t = x^{\varepsilon_x} y^{\varepsilon_y}$ mit $\varepsilon_x, \varepsilon_y \in \{-1, 1\}$ eine Relation dieser Gruppe. Dann lassen sich in einem kurzen Wort nicht alle x auf einer Seite von t zusammenfassen.
Betrachtet man zunächst nur die Worte, die aus x und t gebildet werden, so sind diese allgemein von der Form
$$t^{\varepsilon_0} x^{a_1} t^{\varepsilon_1} \ldots x^{a_k} t^{\varepsilon_k}$$
mit $a_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\varepsilon_i = 1$ für $0 < i < k$ und $\varepsilon_0, \varepsilon_k \in \{0, 1\}$. Mit Hilfe der Relation $x^t = x^{\varepsilon_x} y^{\varepsilon_y}$ kann man das Wort $x^a t x^b t x^c$ wie folgt so umformen, dass ein zu $x^a t x^b t x^c$ äquivalentes Wort entsteht
$$x^a t x^b t x^c = x^a x^{\varepsilon_x b} y^{\varepsilon_y b} x^c = x^{a+c} x^{\varepsilon_x b} y^{\varepsilon_y b} = x^{a+c} t x^b t.$$

Daraus folgt, dass alle Worte, die nur aus den Erzeugenden x und t gebildet werden, äquivalent sind zu Worten der Form $t^{\varepsilon_0}x^atx^bt^{\varepsilon_1}$ mit $a,b \in \mathbb{Z}$ und $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \in \{0,1\}$. Nun ist aber $tx^atx^bt^\varepsilon = x^{\varepsilon_x a}y^{\varepsilon_y a}x^bt^\varepsilon = x^bx^{\varepsilon_x a}y^{\varepsilon_y a}t^\varepsilon = x^btx^att^\varepsilon$. D.h. bei Worten der Form $tx^atx^bt^\varepsilon$ lässt sich das führende t ans Ende verschieben, wobei die Länge nicht größer wird. Also sind nur noch die Worte der Form

$$x^atx^bt^\varepsilon$$

mit $a,b \in \mathbb{Z}$ und $\varepsilon \in \{0,1\}$ zu betrachten. Aus der Relation $x^t = x^{\varepsilon_x}y^{\varepsilon_y}$ folgt, dass ein kurzes Wort das Teilwort tx^at nur dann enthalten kann, wenn $|a| \geq 3$. Weiter kann in einem kurzen Wort kein Teilwort der Form $x^atx^{-\varepsilon_x b}, x^{-\varepsilon_x a}tx^b, x^{-a}tx^{\varepsilon_x b}$ oder $x^{\varepsilon_x a}tx^{-b}$ mit $a,b \geq 1$ vorkommen, da z.B. für $b \geq a$

$$x^atx^{-\varepsilon_x b} = tx^{\varepsilon_x a}y^{\varepsilon_y a}x^{-\varepsilon_x b} = tx^{-\varepsilon_x(b-a)}y^{\varepsilon_y a}$$

und für $b < a$

$$x^atx^{-\varepsilon_x b} = tx^{\varepsilon_x(a-b)}y^{\varepsilon_y a} = ttx^{a-b}ty^{\varepsilon_y(a-(a-b))} = x^{a-b}ty^{\varepsilon_y b}$$

ein zu $x^atx^{-\varepsilon_x b}$ äquivalentes kürzeres Wort liefert. Genauso kann man zeigen, dass auch die anderen Teilwörter nicht auftreten können. Fasst man all diese Überlegungen zusammen, so kommt man zu folgendem Ergebnis:

Satz 3.3.1 *In einer 2-dimensionalen kristallographischen Gruppe G gelte $t^2 = e$ und $x^t = x^{\varepsilon_x}y^{\varepsilon_y}$ mit $\varepsilon_x, \varepsilon_y \in \{-1,1\}$. Die kurzen Repräsentanten von Elementen aus G, die nur aus den Erzeugenden x und t gebildet werden, lassen sich so wählen, dass sie von einer der folgenden Formen sind:*

1. *tx^b mit $b \in \mathbb{Z}$*
2. *x^at mit $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$*
3. *$x^atx^{\varepsilon_x b}, x^{-a}tx^{-\varepsilon_x b}$ mit $a,b \geq 1$*
4. *tx^bt mit $|b| \geq 3$*
5. *$x^atx^{\varepsilon_x b}t, x^{-a}tx^{-\varepsilon_x b}t$ mit $a \geq 1$ und $b \geq 3$*

Beweis: Ausgehend von den obigen Überlegungen erhält man diese Aussage aus der allgemeinen Form der kurzen Worte $x^atx^bt^\varepsilon$, wenn

1. $\varepsilon = 0$, $a = 0$ und $b \neq 0$
2. $\varepsilon = 0$, $a \neq 0$ und $b = 0$

3. $\varepsilon = 0$, $a \neq 0$ und $b \neq 0$
   In diesem Fall liefern die vier Möglichkeiten $x^a t x^{\varepsilon_x b}$, $x^{\varepsilon_x a} t x^b$, $x^{-a} t x^{-\varepsilon_x b}$ und $x^{-\varepsilon_x a} t x^{-b}$ nur zwei nicht zueinander äquivalente Worte.

4. $\varepsilon = 1$ und $a = 0$

5. $\varepsilon = 1$ und $a \neq 0$
   Wie oben bleiben auch hier nur zwei nicht zueinander äquivalente Worte von den vier Möglichkeiten übrig. □

Nimmt man jetzt den Erzeugenden y hinzu und ist $y^t = y^\sigma$ mit $\sigma \in \{-1, 1\}$, so ist

$$t^{\varepsilon_0} x^{a_1} y^{b_1} t^{\varepsilon_1} \ldots x^{a_k} y^{b_k} t^{\varepsilon_k}$$

mit $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_i = 1$ für $0 < i < k$ und $\varepsilon_0, \varepsilon_k \in \{0, 1\}$ die allgemeine Form der Worte aus diesen drei Erzeugenden. Analog zu oben zeigt man, dass $|a_i| \geq 3$ sein muß, wenn $\varepsilon_{i-1} = \varepsilon_i = 1$. Da $y^a t y^b = y^{a+\sigma b} t$ ist, gibt es zu jedem dieser Worte ein äquivalentes gleichlanges Wort, sodass $b_i = 0$ für $i \geq 2$ ist in diesem Wort. Für die möglichen Teilwörter $t^{\varepsilon_0} x^a y^b t^{\varepsilon_1}$ am Anfang eines solchen Wortes gilt, wenn $a', b' \geq 1$, $m = \min(a', b')$ und z.B. $\varepsilon_0 = 1$ ist,

$$\begin{aligned} t x^{\varepsilon_x a'} y^{\varepsilon_y b'} t^{\varepsilon_1} &= t t x^m t x^{\varepsilon_x (a'-m)} y^{\varepsilon_y (b'-m)} t^{\varepsilon_1} \\ &= x^m t x^{\varepsilon_x (a'-m)} y^{\varepsilon_y (b'-m)} t^{\varepsilon_1} \\ &= \begin{cases} x^m y^{\sigma \varepsilon_y (b'-m)} t^{\varepsilon'} & \text{für } m = a' \text{ und } \varepsilon' \in \{0, 1\} \\ x^m t x^{\varepsilon_x (a'-m)} t^{\varepsilon_1} & \text{für } m = b' \end{cases} \end{aligned}$$

D.h. diese Worte sind äquivalent zu kürzeren Worten. Für $t^{\varepsilon_0} x^{-\varepsilon_x a'} y^{-\varepsilon_y b'} t^{\varepsilon_1}$ und für $\varepsilon_1 = 1$ zeigt man diese Aussage entsprechend. Damit kommen nur

$$t^{\varepsilon_0} x^{\varepsilon_x a} y^{-\varepsilon_y b} t^{\varepsilon_1} \quad \text{und} \quad t^{\varepsilon_0} x^{-\varepsilon_x a} y^{\varepsilon_y b} t^{\varepsilon_1}$$

mit $a, b \geq 1$ als mögliche Teilwörter am Anfang eines solchen Wortes in Frage. Aus dem obigen Satz folgt nun, dass sich damit die kurzen Repräsentanten von Elementen von G so wählen lassen, dass sie von folgender Form sind:

$$t^{\varepsilon_0} x^{\varepsilon_x a} y^{-\varepsilon_y b} t^{\varepsilon_1} x^c \quad \text{oder} \quad t^{\varepsilon_0} x^{-\varepsilon_x a} y^{\varepsilon_y b} t^{\varepsilon_1} x^{-c}$$

mit $a, b, c \geq 0$.
Lassen sich weiter $y^{-\varepsilon_y b} t^{\varepsilon_1} x^c$ bzw. $y^{\varepsilon_y b} t^{\varepsilon_1} x^{-c}$ mit Hilfe der Relation $y^t = y^\sigma$ so umformen, dass diese Teilwörter gleich $t^{\varepsilon_1} (x^{\varepsilon_x c} y^{\varepsilon_y b})^{\pm 1}$ sind, so gibt es wie oben gezeigt zu $t^{\varepsilon_0} x^{\varepsilon_x a} y^{-\varepsilon_y b} t^{\varepsilon_1} x^c$ und $t^{\varepsilon_0} x^{-\varepsilon_x a} y^{\varepsilon_y b} t^{\varepsilon_1} x^{-c}$ äquivalente kürzere Worte. Damit lassen sich in diesem Fall die kurzen Repräsentanten von Elementen aus G, die nur aus den Erzeugenden x, y und t gebildet werden, so wählen, dass sie von der Form

$$t^{\varepsilon_0} x^{\varepsilon_x a} y^{-\varepsilon_y b} t^{\varepsilon_1} \quad \text{und} \quad t^{\varepsilon_0} x^{-\varepsilon_x a} y^{\varepsilon_y b} t^{\varepsilon_1}$$

mit $a, b \geq 1$ und $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \in \{0, 1\}$ sind.

4 Funktionen und Reihen

Bei der Berechnung der Zeta-Funktionen der 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen treten einige bekannte Funktionen immer wieder auf. Die Riemannsche Zeta-Funktion und die Eulersche φ-Funktion spielen dabei eine wichtige Rolle. In den folgenden Abschnitten werden allgemeine Eigenschaften dieser Funktionen und der auftretenden unendlichen Reihen angegeben. Einen großen Raum nimmt dabei die Untersuchung der Reihen $H_d(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(n+x)^{-s}$ und $F(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+x)^{-s}$ ein.

4.1 Riemannsche Zeta-Funktion

Die *Riemannsche Zeta-Funktion* ist definiert als die Dirichlet-Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

wobei $s \in \mathbb{C}$. Eine äquivalente Definition lieferte Euler durch das Produkt

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Über das Konvergenzverhalten von $\zeta(s)$ gibt der folgende Satz Auskunft.

Satz 4.1.1 *$\zeta(s)$ ist absolut konvergent für $Re(s) > 1$ und besitzt eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$. An der Stelle $s = 1$ hat $\zeta(s)$ einen Pol 1. Ordnung.*

Dieser Satz wird unter anderem in [Tit67] bewiesen, wo auch eine detailliertere Beschreibung der Riemannschen Zeta-Funktion zu finden ist.

4.2 Eulersche Funktion

Die *Eulersche Funktion* $\varphi(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ ist definiert als die Anzahl der positiven ganzen Zahlen m, für die gilt:

$$0 < m \leq n \quad \text{und} \quad (m,n) = 1.$$

$\varphi(n)$ besitzt folgende Eigenschaft:

Lemma 4.2.1 *Für $n \geq 3$ ist $\varphi(n)$ gerade.*

Beweis: Es sei $1 \leq a < \frac{n}{2}$ mit $(a,n) = 1$. Dann ist $\frac{n}{2} < n-a < n$ und $(n-a,n) = 1$. Also gibt es zu jedem a mit $1 \leq a < \frac{n}{2}$ und $(a,n) = 1$ ein b mit $\frac{n}{2} < b < n$ und $(b,n) = 1$.
Falls $n \geq 4$ gerade ist, so ist $(\frac{n}{2}, n) \neq 1$. □

Für eine genauere Untersuchung der Eulerschen Funktion siehe z.B. [HW54].
Bei der Berechnung der Zeta-Funktionen für die einzelnen 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen tritt die Eulersche Funktion in folgendem Kontext auf:
Gesucht ist die Anzahl der Zerlegungen einer positiven ganzen Zahl n in zwei teilerfremde Summanden. Sei $n = a + b$ mit $a, b \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ eine solche Zerlegung. Da $(a,b) = 1$, ist auch $(a,n) = 1 = (b,n)$. Umgekehrt gibt es zu jedem a mit $(a,n) = 1$ ein b, nämlich $b = n-a$, so dass $a+b = n$ und $(a,b) = 1$. Also ist die Anzahl solcher Zerlegungen von n gerade die Anzahl der zu n teilerfremden ganzen Zahlen m mit $0 < m \leq n$, und damit gleich $\varphi(n)$.
Für die spätere Berechnung der Zeta-Funktionen ist das Verhalten von $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) n^{-s}$ von Interesse.

Satz 4.2.2 *Für $Re(s) > 2$ gilt*

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) n^{-s}.$$

Dieser Satz wird unter anderem in [HW54] bewiesen.

4.3 Binomischer Lehrsatz

Bei der Untersuchung der Reihe $H_d(x,s) \sum_{n=0}^{\infty} d_n (n+x)^{-s}$ und der Reihe $F(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + x)^{-s}$ spielt der Binomische Lehrsatz eine wichtige Rolle. Aus Formelsammlungen ist folgende Aussage bekannt:

Satz 4.3.1 *Sei $s \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$(n+x)^s = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{s}{i} n^{s-i} x^i$$

konvergiert für $|x| < n$.

Dabei ist der Binomialkoeffizient $\binom{s}{i}$ wie folgt definiert:

$$\binom{s}{i} = \frac{s(s-1)\cdots(s-i+2)(s-i+1)}{i!}.$$

Im folgenden Abschnitt wird eine Variante dieser Aussage benötigt.

Satz 4.3.2 *Sei $s \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$(n+x)^s = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-s+i-1}{i} n^{s-i}(-x)^i$$

konvergiert für $|x| < n$.

Beweis: $\sum_{i=0}^{\infty} \binom{-s+i-1}{i} n^{s-i}(-x)^i$ entsteht aus $\sum_{i=0}^{\infty} \binom{s}{i} n^{s-i}x^i$ durch Umformen der einzelnen Summanden. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\binom{s}{i} n^{s-i}x^i &= \frac{s(s-1)\cdots(s-i+2)(s-i+1)}{i!} \cdot n^{s-i}x^i \\
&= (-1)^i \frac{-s(-s+1)\cdots(-s+i-2)(-s+i-1)}{i!} \cdot n^{s-i}x^i \\
&= \frac{(-s+i-1)\cdots(-s+i-1-i+1)}{i!} \cdot n^{s-i}(-x)^i \\
&= \binom{-s+i-1}{i} \cdot n^{s-i}(-x)^i
\end{aligned}$$

□

4.4 $H_d(x, s)$

Weil betrachtet in [Wei76] die Reihe

$$H(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} (x+n)^{-s}$$

für $x > 0$ und $Re(s) > 1$. Er zeigt, dass $H(x, s)$ eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$ besitzt.
Im Folgenden soll die Beweismethode von Weil angewendet werden auf die erweiterte Reihe

$$H_d(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x+n)^{-s}.$$

Es soll damit folgender Satz bewiesen werden:

Satz 4.4.1 *Sei $s \in \mathbb{C}$. Sei $D_d(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n n^{-s}$ eine Dirichlet-Reihe, sodass*

1. *$D_d(s)$ konvergiert absolut für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > \alpha$ für ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}$*
2. *$D_d(s)$ hat eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$.*

Weiter sei $x \in \mathbb{R}^+$ und

$$H_d(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x+n)^{-s}.$$

Dann hat $H_d(x,s)$ eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$.

Beweis: Es sei $N \geq 0$. Um eine Aussage über $H_d(x,s)$ machen zu können, wird folgende Gleichung betrachtet:

Hilfssatz 4.4.1 *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.4.1 gilt:*

$$H_d(x,s) - \sum_{i=0}^{N} \binom{s+i-1}{i} D_d(s+i)(-x)^i$$

$$= d_0 x^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n n^{-s} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-s} - \sum_{i=0}^{N} \binom{s+i-1}{i} \left(\frac{-x}{n}\right)^i \right]$$

Das Verhalten von $H_d(x,s)$ hängt also maßgeblich von der rechten Seite dieser Gleichung ab. Eine genauere Untersuchung dieser Reihe liefert

Hilfssatz 4.4.2 *Die Reihe*

$$\Lambda_N(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n n^{-s} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-s} - \sum_{i=0}^{N} \binom{s+i-1}{i} \left(\frac{-x}{n}\right)^i \right]$$

konvergiert absolut für $Re(s) > -N - 1 + \alpha$.

Da N beliebig gewählt werden kann, konvergiert Λ_N also auch für $Re(s) < 0$.
Da nun alle Teile der Gleichung aus Hilfssatz 4.4.1 meromorph sind auf ganz $\mathbb{C}$ bzw. eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$ besitzen, muß auch $H_d(x,s)$ eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$ haben. □

Nun müssen nur noch die Hilfssätze bewiesen werden.

Beweis von Hilfssatz 4.4.1: Um die Gleichung des Hilfssatzes zu beweisen, wird die rechte Seite der Gleichung näher betrachtet.

$$d_0 x^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n n^{-s} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-s} - \sum_{i=0}^{N} \binom{s+i-1}{i} \left(\frac{-x}{n}\right)^i \right]$$

$$
\begin{aligned}
&= d_0 x^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n n^{-s} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} d_n n^{-s} \sum_{i=0}^{N} \binom{s+i-1}{i} \left(\frac{-x}{n}\right)^{i} \\
&= d_0 x^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (n+x)^{-s} - \sum_{i=0}^{N} \binom{s+i-1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} d_n n^{-(s+i)} (-x)^{i} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} d_n (n+x)^{-s} - \sum_{i=0}^{N} \binom{s+i-1}{i} D_d(s+i)(-x)^{i} \\
&= H_d(x,s) - \sum_{i=0}^{N} \binom{s+i-1}{i} D_d(s+i)(-x)^{i}
\end{aligned}
$$

□

Für den Beweis von Hilfssatz 4.4.2 sind zwei weitere Hilfssätze nötig.

Hilfssatz 4.4.3 *Die Folge* $\left|\binom{s+j+N}{j+N+1}\right|_{j\geq 0}$ *ist für* $Re(s) > 1$ *monoton wachsend.*

Beweis: Da alle Folgenglieder den selben Imaginärteil haben, wird in der folgenden Rechnung nur der Realteil betrachtet. Sei $Re(s) = s'$.

$$
\begin{aligned}
& \binom{s'+j+N}{j+N+1} < \binom{s'+j+1+N}{j+N+2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{(s'+j+N)(s'+j+N-1)\cdots(s'+j+N-j-N-1+1)}{(j+N+1)!} \\
& < \frac{(s'+j+1+N)(s'+j+1+N-1)\cdots(s'+j+1+N-j-N-2+1)}{(j+N+2)!} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{(s'+j+N)(s'+j+N-1)\cdots s'}{(j+N+1)!} < \frac{(s'+j+1+N)(s'+j+N)\cdots s'}{(j+N+2)!} \\
\Leftrightarrow\ & 1 < \frac{s'+j+1+N}{j+N+2} \\
\Leftrightarrow\ & j+N+2 < s'+j+1+N \\
\Leftrightarrow\ & 1 < s'
\end{aligned}
$$

□

Hilfssatz 4.4.4 *Es sei* $s \in \mathbb{C}$, $n, N \in \mathbb{N}$ *und* $x \in \mathbb{R}$. *Weiter seien* x *und* n *so gewählt, dass* $|\frac{x}{n}| < 1$. *Dann ist die Reihe*

$$
h_N(s,n,x) := (-x)^{N+1} \sum_{i=N+1}^{\infty} \binom{s+i-1}{i} \left(\frac{-x}{n}\right)^{i-N-1}
$$

absolut konvergent für $Re(s) > 1$.

Beweis: Durch Umnummerierung der Reihe erhält man

$$h_N(s, n, x) = (-x)^{N+1} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{s+j+N}{j+N+1} \left(\frac{-x}{n}\right)^j .$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Und es sei $k > l \geq 0$. Da nach Hilfssatz 4.4.3 die Folge $\left|\binom{s+j+N}{j+N+1}\right|_{j\geq 0}$ für $Re(s) > 1$ monoton wachsend ist, gilt

$$\begin{aligned}
&\left| \left|(-x)^{N+1}\right| \sum_{j=l}^{k} \left| \binom{s+j+N}{j+N+1} \left(\frac{-x}{n}\right)^j \right| \right| \\
\leq & \left| \binom{s+k+N}{k+N+1} \right| \left|(-x)^{N+1}\right| \sum_{j=l}^{k} \left| \left(\frac{-x}{n}\right)^j \right| \\
= & \left| \binom{s+k+N}{k+N+1} \right| \left|(-x)^{N+1}\right| \sum_{j=l}^{k} \left| \frac{x}{n} \right|^j
\end{aligned}$$

Da $\left|\frac{x}{n}\right|^j > \left|\frac{x}{n}\right|^{j+1}$ ist, gibt es zu jedem ε ein $n(\varepsilon)$, so dass für alle $k > l \geq n(\varepsilon)$ gilt

$$\left| \binom{s+k+N}{k+N+1} \right| \left|(-x)^{N+1}\right| \sum_{j=l}^{k} \left| \frac{x}{n} \right|^j < \varepsilon.$$

□

Beweis von Hilfssatz 4.4.2: Sei n_0 minimal, sodass $\frac{x}{n} < 1$ für alle $n \geq n_0$. Zu jedem fest gewählten x gibt es ein n_0 mit dieser Eigenschaft.
Dann ist mit Hilfe von Satz 4.3.2

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=n_0}^{\infty} d_n n^{-s} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-s} - \sum_{i=0}^{N} \binom{s+i-1}{i} \left(\frac{-x}{n}\right)^i \right] \\
=& \sum_{n=n_0}^{\infty} d_n n^{-s} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \binom{s+i-1}{i} \left(\frac{-x}{n}\right)^i - \sum_{i=0}^{N} \binom{s+i-1}{i} \left(\frac{-x}{n}\right)^i \right] \\
=& \sum_{n=n_0}^{\infty} d_n n^{-s} \left[\sum_{i=N+1}^{\infty} \binom{s+i-1}{i} \left(\frac{-x}{n}\right)^i \right] \\
=& \sum_{n=n_0}^{\infty} d_n n^{-s} \left[\left(\frac{-x}{n}\right)^{N+1} \sum_{i=N+1}^{\infty} \binom{s+i-1}{i} \left(\frac{-x}{n}\right)^{i-N-1} \right] \\
=& \sum_{n=n_0}^{\infty} d_n n^{-(s+N+1)} \left[(-x)^{N+1} \sum_{i=N+1}^{\infty} \binom{s+i-1}{i} \left(\frac{-x}{n}\right)^{i-N-1} \right]
\end{aligned}$$

Für die Konvergenz der Reihe ist das Verhalten des Ausdrucks in den eckigen Klammern entscheidend. Deshalb wurde

$$h_N(s,n,x) := (-x)^{N+1} \sum_{i=N+1}^{\infty} \binom{s+i-1}{i} \left(\frac{-x}{n}\right)^{i-N-1}$$

bereits vorab untersucht. Nach Hilfssatz 4.4.4 konvergiert $h_N(s,n,x)$ absolut.
Da in der folgenden Differenz zweier Partialsummen die Reihe $h_N(s,n,x)$ nur endlich oft auftritt, wobei s und x immer den gleichen Wert haben, gibt es ein n_1, so dass für alle n mit $n' \leq n \leq n''$ gilt

$$|h_N(s,n,x)| \leq |h_N(s,n_1,x)|.$$

Damit gilt dann für $n_0 \leq n' \leq n''$:

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{n=n_0}^{n'} \left| d_n n^{-(s+N+1)} h_N(s,n,x) \right| - \sum_{n=n_0}^{n''} \left| d_n n^{-(s+N+1)} h_N(s,n,x) \right| \right| \\
&= \sum_{n=n'}^{n''} \left| d_n n^{-(s+N+1)} h_N(s,n,x) \right| \\
&= \sum_{n=n'}^{n''} \left| d_n n^{-(s+N+1)} \right| |h_N(s,n,x)| \\
&\leq \sum_{n=n'}^{n''} \left| d_n n^{-(s+N+1)} \right| |h_N(s,n_1,x)| \\
&= |h_N(s,n_1,x)| \sum_{n=n'}^{n''} \left| d_n n^{-(s+N+1)} \right|
\end{aligned}$$

Laut Voraussetzung konvergiert $D_d(s)$ absolut für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > \alpha$. Und da das Hinzufügen von endlich vielen Summanden das Konvergenzverhalten nicht verändert, konvergiert damit auch Λ_N für $Re(s+N+1) > \alpha$, d.h. für $Re(s) > -N-1+\alpha$. □

4.5 $H_\varphi(x,s)$

Die Anwendung des Satzes 4.4.1 für $a_n = \varphi(n)$ liefert

Satz 4.5.1 *Sei $x \in \mathbb{R}^+$ und $s \in \mathbb{C}$. Die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)(n+x)^{-s}$$

hat eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$.

Beweis: Da nach 4.2.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)n^{-s}$ absolut konvergent ist für $Re(s) > 2$, kann Satz 4.4.1 angewendet werden. □

-

4.6 $F(x,s)$

Mit Hilfe der im Abschnitt 4.4 angewendeten Beweismethode nach Weil läßt sich auch zeigen, dass die Reihe

$$F(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n + x)^{-s}$$

mit $x \in \mathbb{R}^+$ eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$ besitzt. Dazu wird diese Aussage zunächst für den Fall $x = 0$ bewiesen.

Satz 4.6.1 *Es sei $s \in \mathbb{C}$. Weiter sei*

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n)^{-s}.$$

$F(s)$ konvergiert absolut für $Re(s) > 0$ und besitzt eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$.

Beweis: $F(s)$ läßt sich wie folgt umschreiben

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty}(2^{-s})^n.$$

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergiert absolut für $|z| < 1$. Also konvergiert $F(s)$ absolut, falls $|2^{-s}| < 1$ gilt. Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn $Re(s) > 0$ ist. Damit gilt

$$F(s) = \frac{1}{1 - 2^{-s}}$$

und somit besitzt $F(s)$ eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$. □

Nun kann diese Aussage für die Reihe $F(x,s)$ bewiesen werden.

Satz 4.6.2 *Es sei $s \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}^+$. Weiter sei*

$$F(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n + x)^{-s}.$$

$F(x,s)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$.

Beweis: Es sei $N \geq 0$. Es wird folgende Gleichung betrachtet:

Hilfssatz 4.6.1 *Es sei $s \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt:*

$$F(x,s) - \sum_{i=0}^{N} \binom{s+i-1}{i} F(s+i)(-x)^i$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-ns} \left[\left(1 + \frac{x}{2^n}\right)^{-s} - \sum_{i=0}^{N} \binom{s+i-1}{i} \left(\frac{-x}{2^n}\right)^{-s} \right]$$

Um etwas über $F(x,s)$ heraus zu finden, wird die rechte Seite dieser Gleichung näher untersucht. Es gilt folgende Aussage:

Hilfssatz 4.6.2 *Es sei $s \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}^+$. Dann konvergiert die Reihe*

$$\Lambda_N = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-ns} \left[\left(1 + \frac{x}{2^n}\right)^{-s} - \sum_{i=0}^{N} \binom{s+i-1}{i} \left(\frac{-x}{2^n}\right)^{-s} \right]$$

absolut für $Re(s) > -(N+1)$.

Da N beliebig gewählt werden kann, konvergiert Λ_N für $Re(s) < 0$. Damit sind alle Teile der Gleichung aus Hilfssatz 4.6.1 meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ bzw. besitzen eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$. Also besitzt auch $F(x,s)$ eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$. $\square$

Die verwendeten Hilfssätze lassen sich genauso beweisen wie die entsprechenden Hilfssätze im Abschnitt 4.4.

5 Berechnungen der Zeta-Funktionen

In diesem Kapitel werden nun die Berechnungen der Zeta-Funktionen für die einzelnen 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen durchgeführt. Dabei werden die Ergebnisse der letzten zwei Kapitel verwendet. In den ersten Abschnitten dieses Kapitels stehen Listen der berechneten Zeta-Funktionen. Diese Listen dienen nur der Übersicht.

5.1 Liste der $\zeta_{prim}^{G,S}$

Die folgende Liste dient lediglich der Übersicht. Sie beinhaltet die berechneten Zeta-Funktionen $\zeta_{prim}^{G,S}$ der 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen bzgl. des in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystems S. In den nächsten Abschnitten werden dann die jeweiligen Berechnungen ausgeführt.

p1

$$\zeta_{prim}^{p1,S}(s) = 4 \cdot \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

p2

$$\zeta_{prim}^{p2,S}(s) = 2 \cdot \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

pm

$$\zeta_{prim}^{pm,S}(s) = 2 \cdot \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+2)^{-s} + 1$$

pg

$$\zeta_{prim}^{pg,S}(s) = 2 \cdot \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 1 + 2^{-(s-1)}$$

p2mm

$$\zeta_{prim}^{p2mm,S}(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+2)^{-s} + 1$$

p2mg

$$\zeta_{prim}^{p2mg,S}(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + 1 + 2^{-s}$$

p2gg

$$\zeta_{prim}^{p2gg,S}(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 3$$

cm

$$\zeta_{prim}^{cm,S}(s) = 2 \cdot \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2(3-2^{-s})\zeta(s) + 2\sum_{n=6}^{\infty} \varphi(n)(n+2)^{-s} - 5 - 2^{-(s-1)} - 4 \cdot 3^{-s} - 2 \cdot 5^{-s}$$

c2mm

$$\zeta_{prim}^{c2mm,S}(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + (3-2^{-s})\zeta(s) + \sum_{n=6}^{\infty} \varphi(n)(n+2)^{-s} + \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+2)^{-s} - 2 - 2^{-s} - 3^{-s} - 5^{-s}$$

p4

$$\zeta_{prim}^{p4,S}(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

p4mm

$$\zeta_{prim}^{p4mm,S}(s) = \frac{1}{2}\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+2)^{-s} + \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+3)^{-s} + \frac{1}{2} - 2^{-(s+1)}$$

p4gm

$$\zeta_{prim}^{p4gm,S}(s) = \frac{1}{2}\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} - \frac{1}{2} + 3 \cdot 2^{-(s+1)}$$

p3

$$\zeta_{prim}^{p3,S}(s) = 2 \cdot \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

p31m

$$\zeta_{prim}^{p31m,S}(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} - 1 + 2^{-(s-1)}$$

p3m1

$$\zeta_{prim}^{p3m1,S}(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} - 2^{-s}$$

p6

$$\zeta_{prim}^{p6,S}(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

p6mm

$$\zeta_{prim}^{p6mm,S}(s) = \frac{1}{2}\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+2)^{-s} - \frac{1}{2} - 2^{-(s+1)}$$

5.2 Liste der $\zeta^{G,S}$

Die folgende Liste dient lediglich der Übersicht. Sie beinhaltet die berechneten Zeta-Funktionen $\zeta^{G,S}$ der 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen bzgl. des in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystems S. Die einzelnen Berechnungen werden in den nächsten Abschnitten ausgeführt.

p1

$$\zeta^{p1,S}(s) = 4 \cdot \zeta(s-1)$$

p2

$$\zeta^{p2,S}(s) = 2 \cdot \zeta(s-1) + 1 + 2^{-(s-1)} + 3^{-s}$$

pm

$$\zeta^{pm,S}(s) = 2 \cdot \zeta(s-1) + 5 \cdot \zeta(s) - 3 - 2^{-s}$$

pg

$$\zeta^{pg,S}(s) = 2 \cdot \zeta(s-1) + 5 \cdot \zeta(s) - 2$$

p2mm

$$\zeta^{p2mm,S}(s) = \zeta(s-1) + 5 \cdot \zeta(s) - 2 + 2^{-s} + 2 \cdot 3^{-s} + 4^{-s}$$

p2mg

$$\zeta^{p2mg,S}(s) = \zeta(s-1) + 5 \cdot \zeta(s) - 2 + 2^{-s} + 3^{-s}$$

p2gg

$$\zeta^{p2gg,S}(s) = \zeta(s-1) + 5 \cdot \zeta(s) + 2^{-(s-1)}$$

cm

$$\zeta^{cm,S}(s) = 3 \cdot \zeta(s-1) + 2^{-s}\zeta(s) + 1 + 2 \cdot 3^{-s}$$

c2mm

$$\zeta^{c2mm,S}(s) = \frac{5}{2} \cdot \zeta(s-1) + \frac{1}{2}(5 + 2^{-s})\zeta(s) - 1 - 2^{-s} - 2 \cdot 3^{-s} - 4^{-(s-1)} - 5^{-(s-1)}$$

p4

$$\zeta^{p4,S}(s) = \zeta(s-1) + 2 + 3 \cdot 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s}$$

p4mm

$$\zeta^{p4mm,S}(s) = \frac{1}{2} \cdot \zeta(s-1) + \frac{1}{2}(7 + 2^{-s})\zeta(s) - 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s}$$

p4gm

$$\zeta^{p4gm,S}(s) = \frac{1}{2} \cdot \zeta(s-1) + \frac{1}{2}(9 + 2^{-s})\zeta(s) - 1 + 2^{-s} + 3^{-s}$$

p3

$$\zeta^{p3,S}(s) = 2 \cdot \zeta(s-1) + 2 + 2^{-(s-2)}$$

p31m

$$\zeta^{p31m,S}(s) = \zeta(s-1) + 5 \cdot \zeta(s) - 3 + 2^{-s} + 2 \cdot 3^{-s}$$

p3m1

$$\zeta^{p3m1,S}(s) = \zeta(s-1) + (2 + 2^{-s})\zeta(s) + 2^{-(s-1)}$$

p6

$$\zeta^{p6,S}(s) = \zeta(s-1) + 2 + 2^{-(s-1)} + 3^{-(s-1)} + 4^{-s}$$

p6mm

$$\zeta^{p6mm,S}(s) = \frac{1}{2}\zeta(s-1) + \frac{1}{2}(11 + 2^{-s})\zeta(s) - 3 + 3^{-(s-1)} + 4^{-s}$$

5.3 p1

Der folgende Satz beinhaltet die Liste der Worte, die die Elemente von

$$p1 = \langle x, y \mid [x, y] \rangle$$

bzgl. des in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystems S darstellen.

Satz 5.3.1 *Die Elemente von* p1 *werden bzgl. des ausgewählten Erzeugendensystems S durch die folgenden kurzen Worte dargestellt:*
Worte aus den Erzeugenden x und y:

$$x^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

Beweis: $p1$ ist mit dem ausgewählten Erzeugendensystem die freie abelsche Gruppe aus zwei Erzeugenden. Damit erhält man nach Satz 3.1.1 genau die angegebenen Worte als kurze Repräsentanten der Äquivalenzklassen der Elemente aus $p1$. □

Für die primitive Zeta-Funktion ergibt sich damit

Satz 5.3.2 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für* p1 *ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta^{p1,S}_{prim}(s) = 4 \cdot \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

Beweis: Da $p1$ isomorph ist zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, folgt aus Satz 3.1.2 zusammen mit Abschnitt 4.2, dass es 4 primitive Konjugationsklassen der Wortnorm 1 und $4 \cdot \varphi(n)$ primitive Konjugationsklassen je Wortnorm $n \geq 2$ gibt. Zusammen mit Satz 4.2.2 ist dann

$$\begin{aligned}\zeta_{prim}^{p1,S}(s) &= 4 + 4\sum_{n=2}^{\infty} \varphi(n) n^{-s} \\ &= 4\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) n^{-s} \\ &= 4 \cdot \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

Und damit folgt für die Zeta-Funktion

Satz 5.3.3 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für* $p1$ *ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta^{p1,S}(s) = 4 \cdot \zeta(s-1)$$

Beweis: Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass es $4n$ Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 1$ gibt. Es ist also

$$\begin{aligned}\zeta^{p1,S}(s) &= 4\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n^{-s} \\ &= 4 \cdot \zeta(s-1) \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

5.4 p2

Der folgende Satz beinhaltet die Liste der Worte, die die Elemente von

$$p2 = \left\langle x, y, r \mid [x, y], r^2, x^r = x^{-1}, y^r = y^{-1} \right\rangle$$

bzgl. des in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystems S darstellen.

Satz 5.4.1 *Die Elemente von* p2 *werden bzgl. des ausgewählten Erzeugendensystems S durch die folgenden kurzen Worte dargestellt:*

1. *Worte aus den Erzeugenden x und y:*

$$x^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

2. *Worte aus den Erzeugenden x, y und r:*

$$rx^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

Beweis:

1. Da r die Erzeugenden x und y invertiert, folgt die Behauptung aus Satz 3.1.1.

2. Da r die Erzeugenden x und y beim Vertauschen invertiert und r Ordnung 2 hat, kann in jedem kurzen Wort der Erzeugende r nur einmal auftreten. Aus demselben Grund lassen sich die Erzeugenden x und y alle auf einer Seite von r sammeln. Man erhält also die Worte $rx^a y^b$ als kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Äquivalenzklasse in $p2$. □

Für die primitive Zeta-Funktion ergibt sich damit

Satz 5.4.2 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für* p2 *ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta_{prim}^{p2,S}(s) = 2 \cdot \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

Beweis:

1. Zueinander inverse Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ liegen in derselben Konjugationsklasse, da durch Konjugation mit r ein Element aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in sein Inverses überführt wird. Es gibt also 2 primitive Konjugationsklassen der Wortnorm 1 und $2 \cdot \varphi(n)$ primitive Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 2$.

2. Nach Satz 3.2.2 sind die Worte $rx^a y^b$ von endlicher Ordnung und liegen damit nicht in einer primitiven Konjugationsklasse.

Zusammen mit Satz 4.2.2 ist dann

$$\begin{aligned}\zeta_{prim}^{p2,S}(s) &= 2 + 2\sum_{n=2}^{\infty} \varphi(n) n^{-s} \\ &= 2 \cdot \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

Und damit folgt für die Zeta-Funktion

Satz 5.4.3 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für $p2$ ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta^{p2,S}(s) = 2 \cdot \zeta(s-1) + 1 + 2^{-(s-1)} + 3^{-s}$$

Beweis:

1. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass es $2n$ Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 1$ gibt.

2. Da r die Erzeugenden x und y invertiert, sind die Worte $rx^a y^b$ für $|a| > 1$ bzw. für $|b| > 1$ konjugiert zu kürzeren Worten. Weiter gilt $rx^a y^b \sim rx^{a'} y^{b'}$, wenn $|a| = |a'|$ und $|b| = |b'|$. Damit sind die Worte r, rx, ry und rxy kurz in ihrer jeweiligen Konjugationsklasse.

Es ist also

$$\begin{aligned}\zeta^{p2,S}(s) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n^{-s} + 1 + 2 \cdot 2^{-s} + 3^{-s} \\ &= 2 \cdot \zeta(s-1) + 1 + 2^{-(s-1)} + 3^{-s} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

5.5 pm

Der folgende Satz beinhaltet die Liste der Worte, die die Elemente von

$$pm = \left\langle x, y, m \mid [x,y], m^2, x^m = x, y^m = y^{-1} \right\rangle$$

bzgl. des in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystems S darstellen.

Satz 5.5.1 *Die Elemente von pm werden bzgl. des ausgewählten Erzeugendensystems S durch die folgenden kurzen Worte dargestellt:*

1. *Worte aus den Erzeugenden x und y:*

$$x^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

2. *Worte aus den Erzeugenden x, y und m:*

$$mx^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

Beweis:

1. Da m mit x vertauschbar ist und den Erzeugenden y invertiert, folgt die Behauptung aus Satz 3.1.1.

2. Da m mit x vertauschbar ist, den Erzeugenden y beim Vertauschen invertiert und m Ornung 2 hat, kann in jedem kurzen Wort der Erzeugende m nur einmal auftreten. Aus demselben Grund lassen sich die Erzeugenden x und y alle auf einer Seite von m sammeln. Man erhält also die Worte $mx^a y^b$ als kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Äquivalenzklasse in pm. $\square$

Für die primitive Zeta-Funktion ergibt sich damit

Satz 5.5.2 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für pm ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta_{prim}^{pm,S}(s) = 2 \cdot \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+2)^{-s} + 1$$

Beweis:

1. Da x nur y in sein Inverses überführt, gibt es 3 primitive Konjugationsklassen der Wortnorm 1 und $2 \cdot \varphi(n)$ primitive Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 2$.

2. Nach Satz 3.2.2 gilt:

   - $mx^a y^b$ ist für $a = 0$ nicht primitiv
   - $mx^a y^b$ ist für $|b| \geq 2$ konjugiert zu einem kürzeren Wort mit
   - $mx^{(2k+1)a'} y^b$ ist für $k \geq 1$ und $|a'| \geq 1$ nicht primitiv.

   Damit bleiben nur noch die Worte $mx^{\pm 2^a}$, $mx^{\pm 2^a}y$, $mx^{\pm 2^a}y^{-1}$ für $a \geq 0$ als mögliche kurze Repräsentanten einer primitiven Konjugationsklasse übrig. Worte, die sich nur durch das Vorzeichen des Exponenten von y unterscheiden, liegen in derselben Konjugationsklasse. D.h. es gibt 2 primitive Konjugationsklassen der Wortnormen $2^n + 1$ und $2^n + 2$ mit $n \geq 0$.

Zusammen mit Satz 4.2.2 ist dann

$$\zeta_{prim}^{pm,S}(s) = 3 + 2\sum_{n=2}^{\infty}\varphi(n)n^{-s} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+2)^{-s}$$
$$= 2\cdot\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+2)^{-s} + 1 \quad \text{für } Re(s) > 2$$

□

Und damit folgt für die Zeta-Funktion

Satz 5.5.3 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für pm ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta^{pm,S}(s) = 2\cdot\zeta(s-1) + 5\cdot\zeta(s) - 3 - 2^{-s}$$

Beweis:

1. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass es $2n+1$ Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 1$ gibt.
2. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass die Worte mx^a und mx^ay mit $a \in \mathbb{Z}$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.

Es ist also

$$\zeta^{pm,S}(s) = 2\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot n^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} + 1 + 2^{-s} + 2\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} + 2\sum_{n=3}^{\infty} n^{-s}$$
$$= 2\cdot\zeta(s-1) + 5\cdot\zeta(s) - 3 - 2^{-s} \quad \text{für } Re(s) > 2$$

□

5.6 pg

Der folgende Satz beinhaltet die Liste der Worte, die die Elemente von

$$pg = \left\langle x, y, t \mid [x,y], t^2 = x, y^t = y^{-1} \right\rangle$$

bzgl. des in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystems S darstellen.

Satz 5.6.1 *Die Elemente von pg werden bzgl. des ausgewählten Erzeugendensystems S durch die folgenden kurzen Worte dargestellt:*

1. *Worte aus den Erzeugenden x und y:*

$$x^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

2. *Worte aus den Erzeugenden x, y und t:*

$$tx^a y^b, t^{-1}x^{-a}y^b \text{ mit } a \geq 0 \text{ und } b \in \mathbb{Z}$$

Beweis:

1. Da t mit x vertauschbar ist und den Erzeugenden y invertiert, folgt die Behauptung aus Satz 3.1.1.

2. Da t mit x vertauschbar ist und den Erzeugenden y beim Vertauschen invertiert, kann in jedem kurzen Wort der Erzeugende t nur einmal auftreten. Aus demselben Grund lassen sich die Erzeugenden x und y alle auf einer Seite von t sammeln. Da aber $t^2 = x$, kann der Betrag des Exponenten von t nicht größer als 1 sein. Weiter sind Worte, in denen der Exponent von x und der Exponent von t unterschiedliche Vorzeichen haben, äquivalent zu kürzeren Worten. Damit erhält man die Worte $tx^a y^b, t^{-1}x^{-a}y^b$ mit $a \geq 0$ und $b \in \mathbb{Z}$ als kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Äquivalenzklasse. □

Für die primitive Zeta-Funktion ergibt sich damit

Satz 5.6.2 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für pg ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta_{prim}^{pg,S}(s) = 2 \cdot \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 1 + 2^{-(s-1)}$$

Beweis:

1. Da t den Erzeugenden y in sein Inverses überführt, liegen Worte, die sich nur durch das Vorzeichen des Exponenten von y unterscheiden, in derselben Konjugationsklasse. Der Erzeugende x ist nicht primitiv, da $x = t^2$. Daher gibt es 1 primitive Konjugationsklasse der Wortnorm 1 und $2 \cdot \varphi(n)$ primitive Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 2$.

2. Es wird zunächst $tx^a y^b$ betrachtet. Nach Satz 3.2.2 ist $tx^a y^b$ für $|b| \geq 2$ konjugiert zu einem kürzeren Wort. Weiter ist $tx^a y^b$ für $b = 0$ und $a \geq 1$ nicht primitiv, da $tx^a = t^{2a+1}$. Da t den Erzeugenden y in sein Inverses überführt, liegen $tx^a y$ und $tx^a y^{-1}$ in derselben Konjugationsklasse. Es ist aber

$$tx^a y = (t^2)^a ty = (t^2 y^{-1} y)^a ty = (tyty)^a ty = (ty)^{2a+1}$$

D.h. $tx^a y$ ist nicht primitiv für $a \geq 1$. Dieselben Aussagen gelten für $t^{-1}x^{-a}y^b$. Daher erhält man 2 primitive Konjugationsklassen der Wortnorm 1 und 2 primitive Konjugationsklassen der Wortnorm 2.

Zusammen mit Satz 4.2.2 ist dann

$$\begin{aligned}\zeta^{pg,S}_{prim}(s) &= 1 + 2\sum_{n=2}^{\infty}\varphi(n)n^{-s} + 2 + 2\cdot 2^{-s}\\ &= 2\cdot\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 1 + 2^{-(s-1)} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

Und damit folgt für die Zeta-Funktion

Satz 5.6.3 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für pg ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta^{pg,S}(s) = 2\cdot\zeta(s-1) + 5\cdot\zeta(s) - 2$$

Beweis:

1. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass es $2n+1$ Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 1$ gibt.

2. Nach den Bemerkungen im Beweis des vorigen Satzes zu diesen Worten sind die Worte t, t^{-1}, ty, $t^{-1}y$, tx^a, $t^{-1}x^{-a}$, tx^ay und $t^{-1}x^{-a}y$ mit $a \geq 1$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse.

Es ist also

$$\begin{aligned}\zeta^{pg,S}(s) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot n^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} + 2 + 2\cdot 2^{-s} + 2\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} + 2\sum_{n=3}^{\infty} n^{-s}\\ &= 2\cdot\zeta(s-1) + 5\cdot\zeta(s) - 2 \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

5.7 p2mm

Der folgende Satz beinhaltet die Liste der Worte, die die Elemente von

$$p2mm = \left\langle x, y, p, q \mid [x, y], [p, q], p^2, q^2, x^p = x, x^q = x^{-1}, y^p = y^{-1}, y^q = y \right\rangle$$

bzgl. des in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystems S darstellen.

Satz 5.7.1 *Die Elemente von p2mm werden bzgl. des ausgewählten Erzeugendensystems S durch die folgenden kurzen Worte dargestellt:*

1. *Worte aus den Erzeugenden x und y:*

$$x^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

2. *Worte aus den Erzeugenden x, y und p:*

$$px^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

3. *Worte aus den Erzeugenden x, y und q*

$$qx^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

4. *Worte aus den Erzeugenden x, y, p und q:*

$$pqx^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

Beweis:

1. Da p und q jeweils einen der Erzeugenden x und y invertieren und mit dem anderen vertauschbar sind, folgt die Behauptung aus Satz 3.1.1.

2. Die Gruppe pm wird von p, x und y in $p2mm$ als Untergruppe erzeugt. Nach Satz 5.5.1 werden die Elemente von pm durch die kurzen Worte $px^a y^b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ repräsentiert.

3. Genauso erzeugen q, x und y die Gruppe pm als Untergruppe von $p2mm$. Wieder nach Satz 5.5.1 werden die Elemente von pm durch die kurzen Worte $qx^a y^b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ repräsentiert.

4. Aus den zwei vorherigen Punkten und der Relation $[p, q]$ folgt, dass die Worte $pqx^a y^b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ kurze Repräsentanten von Elementen von $p2mm$ sind. □

Für die primitive Zeta-Funktion ergibt sich damit

Satz 5.7.2 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für p2mm ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta_{prim}^{p2mm,S}(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+2)^{-s} + 1$$

Beweis:

1. Da p den Erzeugenden y invertiert und q den Erzeugenden x, liegen Worte, die sich nur durch ein Vorzeichen im Exponenten von x oder y unterscheiden, in derselben Konjugationsklasse. Daher gibt es 2 primitive Konjugationsklassen der Wortnorm 1 und $\varphi(n)$ primitive Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 2$.

2. Nach Satz 5.5.2 kommen die Worte $px^{\pm 2^a}$ und $px^{\pm 2^a}y$ für $a \geq 0$ als Repräsentanten einer primitiven Konjugationsklasse in Frage. Durch Konjugation mit q liegen aber Worte, die sich nur durch das Vorzeichen im Exponenten von x unterscheiden in derselben Konjugationsklasse. Daher gibt es 1 primitive Konjugationsklasse der Wortnormen $2^n + 1$ und $2^n + 2$ mit $n \geq 0$.

3. Analog zu dem vorherigen Punkt kann man zeigen, dass es 1 primitive Konjugationsklasse der Wortnormen $2^n + 1$ und $2^n + 2$ mit $n \geq 0$ gibt.

4. Nach Satz 3.2.2 sind die Worte py^b und qx^a von endlicher Ordnung. Da p und q Ordnung 2 haben und p mit x und q mit y vertauschbar ist und $[p, q] = 1$ ist, sind auch die Worte pqx^ay^b von endlicher Ordnung. Daher kann es keinen kurzen Repräsentanten einer primitiven Konjugationsklasse geben, in dem p und q zusammen auftreten.

Zusammen mit Satz 4.2.2 ist dann

$$\begin{aligned}\zeta_{prim}^{p2mm,S}(s) &= 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \varphi(n)n^{-s} + 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+2)^{-s} \\ &= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+2)^{-s} + 1 \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

Und damit folgt für die Zeta-Funktion

Satz 5.7.3 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für p2mm ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta^{p2mm,S}(s) = \zeta(s-1) + 5 \cdot \zeta(s) - 2 + 2^{-s} + 2 \cdot 3^{-s} + 4^{-s}$$

Beweis:

1. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass es $n + 1$ Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 1$ gibt.

2. Nach den Bemerkungen im Beweis des vorigen Satzes zu diesen Worten sind die Worte px^a und px^ay mit $a \geq 0$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse.

3. Analog zum vorherigen Punkt sind die Worte qy^a und qxy^a mit $a \geq 0$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse.

4. Daraus ergibt sich für diese Worte, dass nur die Worte pq, pqx, pqy und $pqxy$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.

Es ist also

$$\begin{aligned}\zeta^{p2mm,S}(s) = &\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} + 2 + 2 \cdot 2^{-s} + 2\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} + 2\sum_{n=3}^{\infty} n^{-s} \\ &+ 2^{-s} + 2 \cdot 3^{-s} + 4^{-s} \\ = &\zeta(s-1) + 5 \cdot \zeta(s) - 2 + 2^{-s} + 2 \cdot 3^{-s} + 4^{-s} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

5.8 p2mg

Der folgende Satz beinhaltet die Liste der Worte, die die Elemente von

$$p2mg = \left\langle x, y, m, t \mid [x,y], t^2, m^2 = y, x^t = x, x^m = x^{-1}, y^t = y^{-1}, m^t = m^{-1} \right\rangle$$

bzgl. des in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystems S darstellen.

Satz 5.8.1 *Die Elemente von p2mg werden bzgl. des ausgewählten Erzeugendensystems S durch die folgenden kurzen Worte dargestellt:*

1. *Worte aus den Erzeugenden x und y:*

$$x^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

2. *Worte aus den Erzeugenden x, y und t:*

$$t x^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

3. *Worte aus den Erzeugenden x, y und m:*

$$m x^a y^b, m^{-1} x^a y^{-b} \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \geq 0$$

4. *Worte aus den Erzeugenden x, y, t und m:*

$$t m x^a y^b, t m^{-1} x^a y^{-b} \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \geq 0$$

Beweis:

1. Da sowohl t als auch m einen der Erzeugenden x und y invertiert und mit dem anderen vertauschbar ist, folgt die Behauptung aus Satz 3.1.1.

2. $p2mg$ enthält die Gruppe pm als Untergruppe. Und zwar wird hier pm durch x, y und t erzeugt. Nach Satz 5.5.1 sind damit die Worte tx^ay^b mit $a, b \in \mathbb{Z}$ kurz in ihrer jeweiligen Äquivalenzklasse.

3. Ebenso enthält $p2mg$ die Gruppe pg als Untergruppe. Und zwar wird hier pg durch x, y und m erzeugt. Nach Satz 5.6.1 sind damit die Worte mx^ay^b und $m^{-1}x^ay^{-b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \geq 0$ kurz in ihrer jeweiligen Äquivalenzklasser.

4. Aus den zwei vorherigen Punkten und der Relation $m^t = m^{-1}$ folgt, dass die kurzen Repräsentanten von Elementen aus $p2mg$, die aus allen vier Erzeugenden gebildet werden, gerade die Worte tmx^ay^b udn $tm^{-1}x^ay^{-b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \geq 0$ sind. □

Für die primitive Zeta-Funktion ergibt sich damit

Satz 5.8.2 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für p2mg ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit Re$(s) > 2$:*

$$\zeta_{prim}^{p2mg,S}(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + 1 + 2^{-s}$$

Beweis:

1. Worte, die nur von x und y erzeugt werden und sich lediglich durch ein Vorzeichen im Exponenten von x oder y unterscheiden, liegen in derselben Konjugationsklasse. Da y nicht primitiv ist, gibt es 1 primitive Konjugationsklasse der Wortnorm 1 und $\varphi(n)$ primitive Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 2$.

2. Nach Satz 5.5.2 können die Worte $tx^{\pm 2^a}$ und $tx^{\pm 2^a}y$ für $a \geq 0$ Repräsentanten einer primitiven Konjugationsklasse sein. Aber die Konjugation mit m von $tx^{a'}y$ mit a' beliebig liefert:
$$mtx^{a'}ym^{-1} = tm^{-1}x^{a'}m^2m^{-1} = tx^{-a'}.$$
D.h. $tx^{a'}y$ mit a' beliebig ist konjugiert zu einem kürzeren Wort. Damit sind nur $tx^{\pm 2^a}$ mit $a \geq 0$ Repräsentanten einer primitiven Konjugationsklasse, d.h. man erhält 2 primitive Konjugationsklassen der Wortnorm $2^n + 1$ mit $n \geq 0$.

3. Aus Satz 5.6.2 folgt, dass nur die Worte m, m^{-1}, mx und $m^{-1}x^{-1}$ Repräsentanten einer primitiven Konjugationsklasse sein können. Konjugation mit t bzw. mt zeigt aber, dass $m \sim m^{-1}$ und $mx \sim m^{-1}x^{-1}$. Es gibt also 1 primitive Konjugationsklasse der Wortnorm 1 und 1 der Wortnorm 2.

4. Durch Konjugation mit t zeigt sich, dass $tmx^ay^b \sim tm^{-1}x^ay^{-b}$. Damit müssen nur noch die Worte tmx^ay^b betrachtet werden. Nach Satz 3.2.2 sind diese Worte sowohl für $b > 1$ als auch für $|a| > 1$ konjugiert zu kürzeren Worten. Konjugation mit m zeigt, dass $tmx^ay^b \sim tm^{-1}x^{-a}y^b$. Diese Worte sind aber für $b \geq 1$ äquivalent zu $tmx^{-a}y^{b-1}$, d.h. zu kürzeren Worten. Weiter folgt durch Konjugation mit tm, dass $tmx^a \sim tmx^{-a}$. Schließlich ist $(tm)^2 = e$ und $(tmx)^2 = e$, d.h. diese Worte sind nicht primitiv.

Zusammen mit Satz 4.2.2 ist dann

$$\begin{aligned}\zeta_{prim}^{p2mg,S}(s) &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \varphi(n) n^{-s} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + 1 + 2^{-s} \\ &= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + 1 + 2^{-s} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

Und damit folgt für die Zeta-Funktion

Satz 5.8.3 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für p2mg ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta^{p2mg,S}(s) = \zeta(s-1) + 5 \cdot \zeta(s) - 2 + 2^{-s} + 3^{-s}$$

Beweis:

1. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass es $n+1$ Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 1$ gibt.

2. Nach den Bemerkungen im Beweis des vorigen Satzes zu diesen Worten sind nur die Worte tx^a mit $a \in \mathbb{Z}$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse.

3. Aus Satz 5.6.3, der Relation $x^m = x^{-1}$ und der Tatsache, dass t sowohl m als auch y invertiert, folgt, dass nur die Worte my^a und mxy^a mit $a \geq 0$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.

4. Aus den Bermerkungen im Beweis des vorigen Satzes zu diesen Worten folgt, dass die Worte tm und tmx kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.

Es ist also

$$\begin{aligned}\zeta^{p2mg,S}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} + 1 + 2\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} \\ &= \zeta(s-1) + 5 \cdot \zeta(s) - 2 + 2^{-s} + 3^{-s} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

5.9 p2gg

Der folgende Satz beinhaltet die Liste der Worte, die die Elemente von

$$pg = \left\langle x, y, u, v \mid [x, y], u^2 = x, v^2 = y, x^v = x^{-1}, y^u = y^{-1}, (uv)^2 \right\rangle$$

bzgl. des in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystems S darstellen.

Satz 5.9.1 *Die Elemente von p2gg werden bzgl. des ausgewählten Erzeugendensystems S durch die folgenden kurzen Worte dargestellt:*

1. *Worte aus den Erzeugenden x und y:*

$$x^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

2. *Worte aus den Erzeugenden x, y und u:*

$$ux^a y^b, u^{-1}x^{-a}y^b \text{ mit } a \geq 0 \text{ und } b \in \mathbb{Z}$$

3. *Worte aus den Erzeugenden x, y und v:*

$$vx^a y^b, v^{-1}x^a y^{-b} \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \geq 0$$

4. *Worte aus den Erzeugenden x, y, u und v:*

$$uvx^{-a}y^b, u^{-1}vx^a y^b, uv^{-1}x^{-a}y^{-b}, u^{-1}v^{-1}x^a y^{-b} \text{ mit } a, b \geq 0$$

Beweis:

1. Da u und v einen der Erzeugenden x und y invertieren und mit dem anderen vertauschbar sind, folgt die Behauptung aus Satz 3.1.1.

2. Die Gruppe pg wird in $p2gg$ von u, x und y als Untergruppe erzeugt. Nach Satz 5.6.1 sind dann die Worte $ux^a y^b$ und $u^{-1}x^{-a}y^b$ mit $a \geq 0$ und $b \in \mathbb{Z}$ kurz in ihrer jeweiligen Äquivalenzklasse.

3. Genauso wird die Gruppe pg in $p2gg$ von v, x und y als Untergruppe erzeugt. Wieder nach Satz 5.6.1 sind damit die Worte $vx^a y^b$ und $v^{-1}x^a y^{-b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \geq 0$ kurz in ihrer jeweiligen Äquivalenzklasse.

4. Aus den zwei vorherigen Punkten und der Relation $(uv)^2$ folgt, dass die kurzen Repräsentanten von Elementen von $p2gg$, die aus allen vier Erzeugenden gebildet werden, die Worte $uvx^{-a}y^b$, $u^{-1}vx^a y^b$, $uv^{-1}x^{-a}y^{-b}$ und $u^{-1}v^{-1}x^a y^{-b}$ mit $a, b \geq 0$ sind. □

Für die primitive Zeta-Funktion ergibt sich damit

Satz 5.9.2 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für p2gg ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta_{prim}^{p2gg,S}(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 3$$

Beweis:

1. Da u den Erzeugenden y invertiert und v den Erzeugenden x, liegen Worte, die sich nur durch ein Vorzeichen im Exponenten von x oder y unterscheiden, in derselben Konjugationsklasse. Die Erzeugenden x und y selbst sind nicht primitiv. Es gibt also $\varphi(n)$ primitive Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 2$.

2. Nach Satz 5.6.2 kommen nur die Worte u, u^{-1}, uy und $u^{-1}y$ als Repräsentanten einer primitiven Konjugationsklasse in Frage. Konjugation mit v zeigt aber, dass $u \sim u^{-1}y$ und $u^{-1} \sim uy$. Es gibt also nur 2 primitive Konjugationsklassen der Wortnorm 1.

3. Wie im vorherigen Punkt zeigt man, dass es 2 primitive Konjugationsklassen der Wortnorm 1 gibt.

4. Diese Worte sind nicht primitiv. So ist z.B.

$$(uvx^{-a}y^b)^2 = uvx^{-a}y^b uvx^{-a}y^b = uvuvx^a y^{-b} x^{-a} y^b = e$$

   Analog läßt sich die Aussage für die anderen Worte zeigen.

Zusammen mit Satz 4.2.2 ist dann

$$\begin{aligned} \zeta_{prim}^{p2gg,S}(s) &= \sum_{n=2}^{\infty} \varphi(n) n^{-s} + 2 + 2 \\ &= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 3 \quad \text{für } Re(s) > 2 \end{aligned}$$

□

Und damit folgt für die Zeta-Funktion

Satz 5.9.3 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für p2gg ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta^{p2gg,S}(s) = \zeta(s-1) + 5 \cdot \zeta(s) + 2^{-(s-1)}$$

Beweis:

1. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass es $n+1$ Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 1$ gibt.

2. Aus Satz 5.6.3 folgt, dass die Worte ux^a, $u^{-1}x^{-a}$, ux^ay und $u^{-1}x^{-a}y$ mit $a \geq 0$ als kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse in Frage kommen. Allerdings zeigt die Konjugation mit v, dass Worte, die den Erzeugenden y enthalten, konjugiert sind zu kürzeren Worten.

3. Analog zu den Aussagen des vorigen Punktes folgt, dass die Worte vy^a und $v^{-1}y^{-a}$ mit $a \geq 0$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.

4. Aus den beiden vorherigen Punkten folgt, dass Worte, die die Erzeugenden u und v und mindestens einen der beiden Erzeugenden x und y enthalten, konjugiert sind zu kürzeren Worten. Weiter ist $uv \sim u^{-1}v^{-1}$ und $u^{-1}v \sim uv^{-1}$. Also sind nur uv und $u^{-1}v$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse.

Es ist also

$$\begin{aligned}\zeta^{p2gg,S}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} + 4 + 4\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} + 2 \cdot 2^{-s} \\ &= \zeta(s-1) + 5 \cdot \zeta(s) + 2^{-(s-1)} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

5.10 cm

Der folgende Satz beinhaltet die Liste der Worte, die die Elemente von

$$cm = \left\langle x, y, t \mid [x, y], t^2, y^t = y^{-1}, x^t = xy \right\rangle$$

bzgl. des in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystems S darstellen.

Satz 5.10.1 *Die Elemente von cm werden bzgl. des ausgewählten Erzeugendensystems S durch die folgenden kurzen Worte dargestellt:*

1. *Worte aus den Erzeugenden x und y:*

$$x^{-a}y^b, x^ay^{-b} \text{ mit } a, b \geq 0$$
$$x^ay^b, x^{-a}y^{-b} \text{ mit } a, b \geq 1 \text{ und } \min(a, b) \leq 2$$

2. *Worte aus den Erzeugenden x und t:*

$$tx^a, x^at \text{ mit } a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$
$$x^atx^b, x^{-a}tx^{-b} \text{ mit } a, b \geq 1$$
$$tx^at \text{ mit } |a| \geq 3$$
$$x^atx^bt, x^{-a}tx^{-b}t \text{ mit } a \geq 1 \text{ und } b \geq 3$$

3. *Worte aus den Erzeugenden y und t:*

$$ty^a \text{ mit } a \in \mathbb{Z}$$

4. *Worte aus den Erzeugenden x, y und t:*

$$tx^ay^{-b}, tx^{-a}y^b, x^ay^{-b}t, x^{-a}y^bt \text{ mit } a, b \geq 1$$
$$tx^ay^{-b}t, tx^{-a}y^bt \text{ mit } a \geq 3 \text{ und } b \geq 1$$

Beweis:

1. Die Behauptung fogt aus Satz 3.1.1.
2. Nach Satz 3.3.1 sind die angegebenen Worte kurze Repräsentanten von Elementen aus *cm*.
3. Da t den Erzeugenden y beim Vertauschen invertiert, kann in jedem kurzen Wort, das aus den Erzeugenden y und t gebildet wird, der Erzeugende t nur einmal auftreten. Aus demselben Grund lassen sich alle auftretenden y auf einer Seite von t sammeln. Man erhält also die Worte ty^a als kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Äquivalenzklasse.
4. Aus Abschnitt 3.3 folgt, dass die angegebenen Worte kurze Repräsentanten von Elementen von *cm* sind. □

Für die primitive Zeta-Funktion ergibt sich damit

Satz 5.10.2 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für cm ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\begin{aligned}\zeta_{prim}^{cm,S}(s) = 2 \cdot \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2(3 - 2^{-s})\zeta(s) + 2\sum_{n=6}^{\infty} \varphi(n)(n+2)^{-s} \\ - 5 - 2^{-(s-1)} - 4 \cdot 3^{-s} - 2 \cdot 5^{-s}\end{aligned}$$

Beweis:

1. Allgemein gilt für $a', b' \in \mathbb{Z}$
$$tx^{a'}y^{b'}t = x^{a'}y^{a'-b'}$$
Zusammen mit der Tatsache, dass t nur y in sein Inverses überführt, folgt daraus, dass es 3 primitive Konjugationsklassen der Wortnorm 1 und $2 \cdot \varphi(n)$ primitive Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 2$ gibt, die von den Worten $x^{-a}y^b$ und $x^a y^{-b}$ mit $(a, b) = 1$ repräsentiert werden.
Aus der obigen Gleichung folgt, dass $x^a y^b$ für $a = 1$ und $b \geq 1$ und für $a = 2$ und $b \geq 2$ konjugiert ist zu kürzeren Worten. Da $x^2 y = (xt)^2$ ist, ist $x^2 y$ nicht primitiv. $x^a y^b$ kann also nur für $a \geq 3$ Repräsentant einer primitiven Konjugationsklasse sein. Wegen $\min(a, b) \leq 2$ muß dann $b = 1$ oder $b = 2$ sein. Es ist aber nach der obigen Gleichung $x^3y^2 \sim x^3 y$. Weiter ist $x^a y^2$ für gerade a nicht primitiv. Analoge Aussagen lassen sich für $x^{-a}y^{-b}$ beweisen. Damit repräsentieren $x^a y^b$ und $x^{-a}y^{-b}$ für geeignete a und b 2 primitive Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 4$ und 2 primitive Konjugationsklassen der ungeraden Wortnorm $n \geq 7$.

2. Es ist $tx^a \sim x^a t$. Und damit erzeugt tx^a zwei primitive Konjugationsklassen für jede Wortnorm $n \geq 2$.
Die Worte $x^a t x^b$ und $x^{-a}tx^{-b}$ sind konjugiert zu tx^{a+b} bzw. $tx^{-(a+b)}$. Also liegen diese Worte in den von tx^a erzeugten primitiven Konjugationsklassen.
Weiter ist $tx^a t \sim x^a$, d.h. diese Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten.
Schließlich müssen noch die Worte $x^a t x^b t$ und $x^{-a}tx^{-b}t$ mit $b \geq 3$ betrachtet werden. Es ist $x^a t x^b t \sim t x^a t x^b$ und $x^{-a}tx^{-b}t \sim tx^{-a}tx^{-b}$, d.h. diese Worte sind für $a \leq 2$ konjugiert zu kürzeren Worten. Weiter ist $x^a t x^b t = x^{a+b}y^b$ und $x^{-a}tx^{-b}t = x^{-(a+b)}y^{-b}$. Also sind diese Worte für $(a + b, b) > 1$ nicht primitiv. Die Bedingung $(a + b, b) = 1$ ist aber gleichbedeutend mit der Bedingung $(a, b) = 1$. $x^a t x^b t$ und $x^{-a}tx^{-b}t$ erzeugen damit $2 \cdot \varphi(n)$ primitive Konjugationsklassen für jede Wortnorm $n + 2 \geq 8$.

3. Konjugiert man ty^a mit x^a, so erhält man $x^{-a}ty^a x^a = x^{-a}ttx^a t = t$. Damit sind diese Wörter konjugiert zu kürzeren Wörtern. t selbst ist nicht primitiv.

4. Zunächst ist $tx^a y^{-b} \sim x^a y^{-b} t$ und $tx^{-a}y^b \sim x^{-a}y^b t$. Konjugation mit y liefert $y^{-1}tx^a y^{-b} y = tyx^a y^{-(b-1)} = xtx^{a-1}y^{-(b-1)}$ bzw. $tx^{-a}y^b = x^{-1}tx^{-(a-1)}y^{b-1}$. Also sind diese Worte konjugiert zu kürzeren Worten.
Die Worte $tx^a y^{-b} t$ und $tx^{-a}y^b t$ sind ebenfalls konjugiert zu kürzeren Worten.

Zusammen mit Satz 4.2.2 ist dann
$$\zeta_{prim}^{cm,S}(s) = 3 + 2\sum_{n=2}^{\infty} \varphi(n)n^{-s} + 2\sum_{n=4}^{\infty} n^{-s} + 2\sum_{n=3}^{\infty}(2n+1)^{-s} + 2\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2\sum_{n=6}^{\infty} \varphi(n)(n+2)^{-s} \\
&= 2 \cdot \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2(3-2^{-s})\zeta(s) + 2\sum_{n=6}^{\infty} \varphi(n)(n+2)^{-s} \\
&- 5 - 2^{-(s-1)} - 4 \cdot 3^{-s} - 2 \cdot 5^{-s} \quad \text{für } Re(s) > 2
\end{aligned}
$$

Nach 4.5.1 hat $\zeta_{prim}^{cm,S}$ damit eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$. □

Und damit folgt für die Zeta-Funktion

Satz 5.10.3 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für cm ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta^{cm,S}(s) = 3 \cdot \zeta(s-1) + 2^{-s}\zeta(s) + 1 + 2 \cdot 3^{-s}$$

Beweis:

1. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass es $2n+5$ Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 6$ und 3 Konjugationsklasse der Wortnorm 1, 5 der Wortnorm 2, 9 der Wortnorm 3, 11 der Wortnorm 4 und 13 Konjugationsklassen der Wortnorm 5 gibt.

2. Die Worte tx^a mit $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ sind sogar Repräsentanten einer primitiven Konjugationsklasse. Ebenfalls aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass x^atx^b mit $a \cdot b > 0$ und tx^at konjugiert sind zu kürzeren Worten. Weiter folgt, dass $x^atx^bt \sim x^btx^at$ ist. Daher sind die Worte x^atx^bt nur für $|a| \geq |b| \geq 3$ und $a \cdot b > 0$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse.

3. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass diese Worte konjugiert sind zu kürzeren Worten. Nur t ist ein kurzer Repräsentant seiner Konjugationsklasse.

4. Diese Worte sind ebenfalls konjugiert zu kürzeren Worten.

Es ist also

$$
\begin{aligned}
\zeta^{cm,S}(s) &= 2\sum_{n=6}^{\infty} n \cdot n^{-s} + 5\sum_{n=6}^{\infty} n^{-s} + 3 + 5 \cdot 2^{-s} + 9 \cdot 3^{-s} + 11 \cdot 4^{-s} + 13 \cdot 5^{-s} \\
&+ 2\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} + 2\sum_{n=4}^{\infty}(n-3)(2n)^{-s} + 2\sum_{n=4}^{\infty}(n-3)(2n+1)^{-s} + 1 \\
&= 3 \cdot \zeta(s-1) + 2^{-s}\zeta(s) + 1 + 2 \cdot 3^{-s} \quad \text{für } Re(s) > 2
\end{aligned}
$$

□

5.11 c2mm

Der folgende Satz beinhaltet die Liste der Worte, die die Elemente von

$$c2mm = \langle x, y, m, r \mid [x,y], m^2, r^2, y^m = y^{-1}, x^m = xy, y^r = y^{-1}, x^r = x^{-1}, \\ r^m = r^{-1} \rangle$$

bzgl. des in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystems S darstellen.

Satz 5.11.1 *Die Elemente von c2mm werden bzgl. des ausgewählten Erzeugendensystems S durch die folgenden kurzen Worte dargestellt:*

1. *Worte aus den Erzeugenden x und y:*

$$x^{-a}y^b, x^a y^{-b} \text{ mit } a, b \geq 0$$

$$x^a y^b, x^{-a}y^{-b} \text{ mit } a, b \geq 1 \text{ und } \min(a,b) \leq 2$$

2. *Worte aus den Erzeugenden x und m:*

$$mx^a, x^a m \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$$

$$x^a m x^b, x^{-a} m x^{-b} \text{ mit } a, b \geq 1$$

$$mx^a m \text{ mit } |a| \geq 3$$

$$x^a m x^b m, x^{-a} m x^{-b} m \text{ mit } a \geq 1 \text{ und } b \geq 3$$

3. *Worte aus den Erzeugenden y und m:*

$$my^a \text{ mit } a \in \mathbb{Z}$$

4. *Worte aus den Erzeugenden x, y und m:*

$$mx^a y^{-b}, mx^{-a}y^b, x^a y^{-b} m, x^{-a} y^b m \text{ mit } a, b \geq 1$$

$$mx^a y^{-b} m, mx^{-a} y^b m \text{ mit } a \geq 3 \text{ und } b \geq 1$$

5. *Worte aus den Erzeugenden x, y und r:*

$$rx^{-a}y^b, rx^a y^{-b} \text{ mit } a, b \geq 0$$

$$rx^a y^b, rx^{-a} y^{-b} \text{ mit } a, b \geq 1 \text{ und } \min(a,b) \leq 2$$

6. *Worte aus den Erzeugenden x, m und r:*

$$rmx^a, rx^am \text{ mit } a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$
$$rx^amx^b, rx^{-a}mx^{-b} \text{ mit } a, b \geq 1$$
$$rmx^am \text{ mit } |a| \geq 3$$
$$rx^amx^bm, rx^{-a}mx^{-b}m \text{ mit } a \geq 1 \text{ und } b \geq 3$$

7. *Worte aus den Erzeugenden y, m und r:*

$$rmy^a \text{ mit } a \in \mathbb{Z}$$

8. *Worte aus den Erzeugenden x, y,m und r:*

$$rmx^ay^{-b}, rmx^{-a}y^b, rx^ay^{-b}m, rx^{-a}y^bm \text{ mit } a, b \geq 1$$
$$rmx^ay^{-b}m, rmx^{-a}y^bm \text{ mit } a \geq 3 \text{ und } b \geq 1$$

Beweis: In *c2mm* wird die Gruppe *cm* durch die Erzeugenden x, y und m als Untergruppe erzeugt. Die Worte der Punkte 1. - 5. sind nach Satz 5.10.1 die kurzen Repräsentanten der Elemente von *cm*.
Da der Erzeugende r selbstinvers ist und die anderen Erzeugenden entweder invertiert oder mit ihnen vertauschbar ist, kann in jedem kurzen Wort der Erzeugende r nur einmal auftreten. Aus demselben Grund gibt es zu jedem Wort ein äquivalentes Wort gleicher Länge, in dem der Erzeugende r am Anfang steht. Lässt man nun in einem solchen Wort den Erzeugenden r weg, so muß das daraus resultierende Wort ein Wort aus *cm* sein. Wenn man vor jedes Wort aus *cm* den Erzeugenden r schreibt, so erhält man umgekehrt einen kurzen Repräsentanten eines Wortes aus *c2mm*. Dies ergibt genau die Worte der Punkte 6. - 10. □

Für die primitive Zeta-Funktion ergibt sich damit

Satz 5.11.2 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für c2mm ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta_{prim}^{c2mm,S}(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + (3 - 2^{-s})\zeta(s) + \sum_{n=6}^{\infty} \varphi(n)(n+2)^{-s} + \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 2)^{-s} - 2 - 2^{-s} - 3^{-s} - 5^{-s}$$

Beweis:

1. Da diese Worte in der Untergruppe cm von $c2mm$ liegen, folgt aus Satz 5.10.2 und der Tatsache, dass r sowohl x als auch y invertiert, dass es 2 primitive Konjugationsklassen der Wortnorm 1, $\varphi(n)$ primitive Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 2$, 1 primitive Konjugationsklasse für jede Wortnorm $n \geq 4$ und 1 primitive Konjugationsklasse für jede ungerade Wortnorm $n \geq 7$ gibt.

2. Auch diese Wörter sind Wörter der Untergruppe cm. Weil r den Erzeugenden x invertiert, gibt es damit 1 primitive Konjugationsklasse für jede Wortnorm $n \geq 2$ und $\varphi(n)$ primitive Konjugationsklassen für jede Wortnorm $n + 2 \geq 8$.

3. Diese Worte sind bereits in cm konjugiert zu kürzeren Worten bzw. nicht primitiv.

4. Diese Worte sind ebenfalls bereits in cm konjugiert zu kürzeren Worten.

5. Da r die Erzeugenden x und y beide invertiert und die Ordnung von r gleich 2 ist, sind nach Satz 3.2.2 die Worte $rx^a y^b$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ von endlicher Ordnung und damit nicht primitiv.

6. Es ist $xrmx^a x^{-1} = rx^{-1}mx^{a-1} = rmy^{-1}x^{a-2}$ und $xrx^a mx^{-1} = rx^{a-2}y^{-1}m$. D.h. diese Worte sind für $|a| \geq 2$ konjugiert zu kürzeren Worten. Weiter ist $rmx \sim rmx^{-1} \sim rxm \sim rx^{-1}m$. Man erhält also 1 primitive Konjugationsklasse der Wortnorm 3.
   Durch Konjugation mit r erhält man $rx^a mx^b \sim rx^{-a}mx^{-b}$. Und da $rx^a mx^b = x^{-a}rmx^b$ und $a, b \geq 1$, sind diese Worte konjugiert zu kürzeren Worten.
   Ebenso ist $rmx^a m = mrx^a m$ konjugiert zu einem kürzeren Wort.
   Schließlich ist $xrx^a mx^b mx^{-1} = rx^{a-1}mx^{b-1}y^{-1}m$ und außerdem $rx^a mx^b m \sim rx^{-a}mx^{-b}m$, d.h. diese Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten.

7. Konjugation mit r liefert $rmy^a \sim rmy^{-a}$. Da aber
   $$(rmy^a)^{2k} = y^{2ka}$$
   und damit
   $$(rmy^a)^{2k+1} = y^{2k}rmy^a = rmy^{(2k+1)a},$$
   gibt es jeweils 1 primitive Konjugationsklasse für jede Wortnorm $2^n + 2$ mit $n \geq 0$.

8. Konjugation mit r bzw. m zeigt, dass $rmx^a y^{-b} \sim rmx^{-a}y^b \sim rx^{-a}y^b m \sim rx^a y^{-b}m$. Weiter ist $xrmx^a y^{-b}x^{-1} = rmx^{a-2}y^{-(b+1)}$, d.h. für $a > 1$ sind diese Worte konjugiert zu kürzeren Worten. Es ist aber
   $$(rmx)^{2k} = y^{-k}$$

und damit

$$(rmx)^{2k+1} = rmxy^{-k}.$$

D.h. $rmxy^{-b}$ ist für alle b nicht primitiv.
Die Worte $rmx^a y^{-b} m$ und $rmx^{-a} y^b m$ sind konjugiert zu kürzeren Worten.

Zusammen mit Satz 4.2.2 ist dann

$$\begin{aligned}
\zeta_{prim}^{c2mm,S}(s) &= 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \varphi(n) n^{-s} + \sum_{n=4}^{\infty} n^{-s} + \sum_{n=3}^{\infty} (2n+1)^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \\
&\quad + \sum_{n=6}^{\infty} \varphi(n)(n+2)^{-s} + 3^{-s} + \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 2)^{-s} \\
&= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + (3 - 2^{-s})\zeta(s) + \sum_{n=6}^{\infty} \varphi(n)(n+2)^{-s} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (2^n+2)^{-s} - 2 - 2^{-s} - 3^{-s} - 5^{-s} \quad \text{für } Re(s) > 2
\end{aligned}$$

Nach 4.5.1 hat $\zeta_{prim}^{c2mm,S}$ damit eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$. □

Und damit folgt für die Zeta-Funktion

Satz 5.11.3 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für c2mm ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta^{c2mm,S}(s) = \frac{5}{2} \cdot \zeta(s-1) + \frac{1}{2}(5 + 2^{-s})\zeta(s) - 1 - 2^{-s} - 2 \cdot 3^{-s} - 4^{-(s-1)} - 5^{-(s-1)}$$

Beweis:

1. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass es $n+3$ Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 6$ und 2 Konjugationsklasse der Wortnorm 1, 3 der Wortnorm 2, 5 der Wortnorm 3, 6 der Wortnorm 4 und 7 Konjugationsklassen der Wortnorm 5 gibt.

2. Aus Satz 5.10.3 und der Tatsache, dass r den Erzeugenden x invertiert, folgt, dass die Worte mx^a mit $a \geq 1$ und $x^a m x^b m$ für $a \geq b \geq 3$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.

3. Diese Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten. Nur m ist ein kurzer Repräsentant seiner Konjugationsklasse.

4. Diese Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten.

5. Da r, x und y die Gruppe $p2$ als Untergruppe von $c2mm$ erzeugen, kommen nach Satz 5.4.3 die Worte r, rx, ry und rxy als kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse in Frage. Allerdings ist $mrxym = rx$.

6. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass nur rmx ein kurzer Repräsentant seiner Konjugationsklasse ist. Alle anderen Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten.

7. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass die Worte rmy^a mit $a \geq 0$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.

8. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass die Worte $rmxy^{-b}$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.

Es ist also

$$\begin{aligned}\zeta^{c2mm,S}(s) &= 2\sum_{n=6}^{\infty} n \cdot n^{-s} + 3\sum_{n=6}^{\infty} n^{-s} + 2 + 3 \cdot 2^{-s} + 5 \cdot 3^{-s} + 6 \cdot 4^{-s} + 7 \cdot 5^{-s} + 1 \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} + \sum_{n=4}^{\infty}(n-3)(2n)^{-s} + \sum_{n=4}^{\infty}(n-3)(2n+1)^{-s} + 1 + 2 \cdot 2^{-s} \\ &\quad + 3^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} + \sum_{n=4}^{\infty} n^{-s} \\ &= \frac{5}{2} \cdot \zeta(s-1) + \frac{1}{2}(5 + 2^{-s})\zeta(s) - 1 - 2^{-s} - 2 \cdot 3^{-s} - 4^{-(s-1)} - 5^{-(s-1)}\end{aligned}$$

für $Re(s) > 2$

□

5.12 p4

Der folgende Satz beinhaltet die Liste der Worte, die die Elemente von

$$p4 = \left\langle x, y, r \mid [x,y], r^4, y^r = x^{-1}, x^r = y \right\rangle$$

bzgl. des in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystems S darstellen.

Satz 5.12.1 *Die Elemente von p4 werden bzgl. des ausgewählten Erzeugendensystems S durch die folgenden kurzen Worte dargestellt:*

1. *Worte aus den Erzeugenden x und y:*

$$x^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

2. *Worte aus den Erzeugenden x, y und r:*

$$rx^a y^b, r^{-1}x^a y^b, r^2 x^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

Beweis:

1. Da es in $p4$ keine Relation der Form $x^r = x^{\varepsilon_x} y^{\varepsilon_y}$ bzw. $y^r = x^{\varepsilon_x} y^{\varepsilon_y}$ gibt, folgt die Behauptung aus Satz 3.1.1.

2. Aufgrund der Relationen $y^r = x^{-1}$ und $x^r = y$ lassen sich die Erzeugenden x und y alle auf einer Seite von r sammeln. Da die Ordnung von r gleich 4 ist, können nur die Zahlen 1, -1 und 2 als Exponenten von r auftreten. Man erhält damit die Worte $rx^a y^b, r^{-1}x^a y^b, r^2 x^a y^b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ als kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Äquivalenzklasse. □

Für die primitive Zeta-Funktion ergibt sich damit

Satz 5.12.2 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für $p4$ ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta_{prim}^{p4,S}(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

Beweis:

1. Konjugiert man $x^a y^b$ mit einer Potenz von r, so sieht man, dass $x^a y^b \sim x^b y^{-a} \sim x^{-b} y^a \sim x^{-a} y^{-b}$. Damit gibt es 1 primitive Konjugationsklasse der Wortnorm 1 und $\varphi(n)$ primitive Konjugationsklassen für jede Wortnorm $n \geq 2$.

2. Es sei $\varepsilon = -1, 1, 2$. Die Worte $r^\varepsilon x^a y^b$ sind nicht primitiv. Denn für $\varepsilon \neq 2$ ist $(r^\varepsilon x^a y^b)^4 = (r^2 x^{a'} y^{b'})^2$, wobei a' und b' von ε abhängen. Da aber r^2 die Erzeugenden x und y invertiert, ist $(r^2 x^{a'} y^{b'})^2 = e = (r^2 x^a y^b)^2$.

Zusammen mit Satz 4.2.2 ist dann

$$\begin{aligned}\zeta_{prim}^{p4,S}(s) &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \varphi(n) n^{-s} \\ &= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

Und damit folgt für die Zeta-Funktion

Satz 5.12.3 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für p4 ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta^{p4,S}(s) = \zeta(s-1) + 2 + 3 \cdot 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s}$$

Beweis:

1. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass es n Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 1$ gibt.

2. Betrachtet man die Konjugationsklassen, in denen diese Worte liegen, so stellt sich heraus, dass die Worte r, r^{-1}, r^2, rx, $r^{-1}x$, r^2x und r^2xy kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.

Es ist also

$$\begin{aligned} \zeta^{p4,S}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n^{-s} + 2 + 3 \cdot 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} \\ &= \zeta(s-1) + 2 + 3 \cdot 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} \quad \text{für } Re(s) > 2 \end{aligned}$$

□

5.13 p4mm

Der folgende Satz beinhaltet die Liste der Worte, die die Elemente von

$$p4mm = \left\langle x, y, r, m \mid [x, y], r^4, m^2, y^r = x^{-1}, x^r = y, x^m = y, r^m = r^{-1} \right\rangle$$

bzgl. des in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystems S darstellen.

Satz 5.13.1 *Die Elemente von p4mm werden bzgl. des ausgewählten Erzeugendensystems S durch die folgenden kurzen Worte dargestellt:*

1. *Worte aus den Erzeugenden x und y:*

$$x^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

2. *Worte aus den Erzeugenden x, y und r:*

$$rx^a y^b, r^{-1}x^a y^b, r^2 x^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

3. *Worte aus den Erzeugenden x, y und m:*

$$mx^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

4. *Worte aus den Erzeugenden x, y, r und m:*

$$mrx^a y^b, mr^{-1}x^a y^b, mr^2 x^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

Beweis: Die Gruppe $p4mm$ enthält die Gruppe $p4$ als Untergruppe. Sie wird von x, y und r erzeugt. Die Worte der Punkte 1. und 2. sind gerade die Worte, die die Elemente aus $p4$ repräsentieren.
Da m den Erzeugenden r invertiert und die Erzeugenden x und y vertauscht, lassen sich in den Äquivalenzklassen die kurzen Repräsentanten so wählen, dass sie mit m beginnen, gegebenenfalls gefolgt von einer Potenz von r und mit Potenzen von x und y enden. Also sind die Worte der Punkte 3. und 4. kurze Repräsentanten von Elementen von $p4mm$. □

Für die primitive Zeta-Funktion ergibt sich damit

Satz 5.13.2 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für p4mm ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta_{prim}^{p4mm,S}(s) = \frac{1}{2}\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+2)^{-s} + \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+3)^{-s} + \frac{1}{2} - 2^{-(s+1)}$$

Beweis:

1. Diese Worte stellen Elemente aus $p4$ dar. Daher folgt aus Satz 5.12.2, dass $x^a y^b \sim x^b y^{-a} \sim x^{-b} y^a \sim x^{-a} y^{-b}$. Konjugiert man jetzt $x^a y^b$ mit m, so erhält man $x^b y^a$. Damit liegen $x^a y^b$, $x^b y^{-a}$, $x^{-b} y^a$, $x^{-a} y^{-b}$, $x^b y^a$, $x^a y^{-b}$, $x^{-a} y^b$ und $x^{-b} y^{-a}$ in einer Konjugationsklasse. Außerdem ist $(mx)^2 = xy$, d.h. xy ist nicht primitiv. Es gibt also 1 primitive Konjugationsklasse der Wortnorm 1 und $\frac{1}{2}\varphi(n)$ primitive Konjugationsklassen je Wortnorm $n \geq 3$.

2. Auch diese Worte stellen Elemente aus $p4$ dar. In Satz 5.12.2 wird bereits gezeigt, dass diese Worte nicht primitiv sind.

3. Es sei jetzt $a, b \geq 0$. Dann sind $mx^a y^{-b}$ und $mx^{-a} y^b$ konjugiert zu kürzeren Worten, da $mx^a y^{-b} = x^{-b} m x^a$ und $mx^{-a} y^b = x^b m x^{-a}$.
Konjugiert man $mx^a y^b$ mit m, r, r^{-1} und r^2, so erhält man $mx^a y^b \sim mx^b y^a \sim mr^2 x^b y^{-a} \sim mr^2 x^{-b} y^a \sim mx^{-a} y^{-b}$. Außerdem ist $mx^a y^b = x^b m x^a \sim mx^{a+b}$. D.h. mx^a, mx^{-a}, my^a, my^{-a}, $mx^{a'} y^{b'}$, $mx^{-a'} y^{-b'}$, $mx^{b'} y^{a'}$ und $mx^{-b'} y^{-a'}$ mit $a' + b' = a$ liegen in einer Konjugationsklasse. Es ist aber

$$(mx^b)^{2k+1} = mx^{(k+1)b} y^{kb}.$$

Wenn also $a = (k+1)b + kb = (2k+1)b$ ist, ist die Konjugationsklasse $\{mx^a\}$ nicht primitiv. Damit repräsentieren die Worte mx^{2^b} mit $b \geq 0$ primitive Konjugationsklassen der Wortnorm $2^b + 1$.

4. Es seien auch hier $a, b \geq 0$. Konjugiert man $mrx^a y^b$ und $mr^{-1}x^a y^b$ mit m, r, r^{-1} und r^2, so zeigt sich, dass sich diese Worte auf 3 Konjugationsklassen verteilen:

   i. $mry^b, mry^{-b}, mr^{-1}x^b, mr^{-1}x^{-b}$

   ii. $mrx^a, mrx^{-a}, mr^{-1}y^a, mr^{-1}y^{-a}$

   iii. $mrx^a y^b, mrx^a y^{-b}, mrx^{-a} y^b, mrx^{-a} y^{-b}$,
   $mr^{-1}x^a y^b$, $mr^{-1}x^a y^{-b}$, $mr^{-1}x^{-a} y^b$, $mr^{-1}x^{-a} y^{-b}$

   Betrachtet man nun diese Konjugationsklassen, so gilt

   i. Es ist
   $$(mry^a)^{2k} = ((mry^a)^2)^k = (y^{2a})^k = y^{2ka}$$
   und damit
   $$(mry^a)^{2k+1} = y^{2ka} mry^a = mx^{2ka} ry^a = mry^{(2k+1)a}.$$
   Damit repräsentieren die Worte mry^{2^b} mit $b \geq 0$ primitive Konjugationsklassen der Wortnorm $2^b + 2$.

   ii. Es gilt
   $$mrx^a = x^{-1} mrx^{a-1}.$$
   D.h. diese Worte sind für $a > 1$ konjugiert zu kürzeren Worten. Da $(mrx)^2 = e$ ist, ist mrx nicht primitiv.

   iii. Zunächst ist $mrx^a y^b = x^{-1} mry^b x^{a-1}$, d.h. für $a > 1$ sind diese Worte konjugiert zu kürzeren Worten. Für $a = 1$ gilt
   $$(mrxy^b)^{2k} = ((mrxy^b)^2)^k = (y^{2b})^k = y^{2kb}$$
   und damit
   $$(mrxy^b)^{2k+1} = y^{2kb} mrxy^b = mx^{2kb} rxy^b = mrxy^{(2k+1)b}.$$
   Damit repräsentieren die Worte $mrxy^{2^b}$ mit $b \geq 0$ primitive Konjugationsklassen der Wortnorm $2^b + 3$.

   Schließlich gilt für die Worte $mr^2 x^a y^b$:
   $$mr^2 x^a y^b = r^{-1} my^{-a} x^b r$$
   für $a, b \in \mathbb{Z}$. Also sind diese Worte konjugiert zu kürzeren Worten.

Zusammen mit Satz 4.2.2 ist dann

$$\begin{aligned}\zeta_{prim}^{p4mm,S}(s) &= 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\varphi(n)n^{-s} + \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+2)^{-s} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+3)^{-s} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+2)^{-s} + \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+3)^{-s} \\ &\quad + \frac{1}{2} - 2^{-(s+1)} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

Und damit folgt für die Zeta-Funktion

Satz 5.13.3 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für p4mm ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta^{p4mm,S}(s) = \frac{1}{2}\zeta(s-1) + \frac{1}{2}(7+2^{-s})\zeta(s) - 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s}$$

Beweis:

1. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass es $n+1$ Konjugationsklassen der Wortnorm $2n$ und n Konjugationsklassen der Wortnorm $2n-1$ mit $n \geq 1$ gibt.
2. Aus Satz 5.12.3 und der Tatsache, dass m den Erzeugenden r invertiert, folgt, dass nur die Worte r, r^2, rx, r^2x und r^2xy kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.
3. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass die Worte mx^a mit $a \geq 0$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.
4. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass die Worte mry^a und $mrxy^a$ mit $a \geq 0$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.

Es ist also

$$\begin{aligned}\zeta^{p4mm,S}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\cdot(2n)^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty}n(2n-1)^{-s} + 1 + 2\cdot 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}n^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty}n^{-s} + \sum_{n=3}^{\infty}n^{-s} \\ &= \frac{1}{2}\zeta(s-1) + \frac{1}{2}(7+2^{-s})\zeta(s) - 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

5.14 p4gm

Der folgende Satz beinhaltet die Liste der Worte, die die Elemente von

$$p4gm = \left\langle x, y, r, t \mid [x, y], r^4, t^2, y^r = x^{-1}, x^r = y, x^t = y, r^t = r^{-1}x^{-1} \right\rangle$$

bzgl. des in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystems S darstellen.

Satz 5.14.1 *Die Elemente von p4gm werden bzgl. des ausgewählten Erzeugendensystems S durch die folgenden kurzen Worte dargestellt:*

1. *Worte aus den Erzeugenden x und y:*

$$x^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

2. *Worte aus den Erzeugenden x, y und r:*

$$rx^a y^b, r^{-1}x^a y^b, r^2 x^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

3. *Worte aus den Erzeugenden x, y und t:*

$$tx^a y^b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}$$

4. *Worte aus den Erzeugenden x, y, r und t:*

$$\begin{gathered} trx^a y^{-b}, r^{-1}tx^a y^b \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \geq 0 \\ tr^{-1}x^a y^b, rtx^{-a} y^b \text{ mit } a \geq 0 \text{ und } b \in \mathbb{Z} \\ tr^2 x^a y^{-b}, r^2 tx^{-a} y^b \text{ mit } a, b \geq 0 \\ rtr^{-1}x^a y^b, r^{-1}trx^{-a} y^{-b} \text{ mit } a, b \geq 0 \end{gathered}$$

Beweis: Die Gruppe $p4gm$ enthält die Gruppe $p4$ als Untergruppe. Dabei wird $p4$ von x, y und r erzeugt. Die Worte der Punkte 1. und 2. stellen gerade die Elemente aus $p4$ dar.
Aufgrund der Relation $x^t = y$ sind Worte, die nur aus den Erzeugenden x, y und t gebildet werden, äquivalent zu Worten, die mit t beginnen. Und da t Ordnung 2 hat, kann auch nur ein t auftreten und zwar mit dem Exponenten 1. Man erhält also die Worte $tx^a y^b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ als kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Äquivalenzklasse. Nimmt man nun noch den Erzeugenden r hinzu, so sind diese Worte äquivalent zu Worten, die mit einem Teilwort w' aus t und r beginnen und in denen die Erzeugenden t und r nicht weiter auftreten. Allerdings sind die Worte $w = w'x^a y^b$ aufgrund der Relation $r^t = r^{-1}x^{-1}$ für bestimmte Vorzeichen von a und b äquivalent zu kürzeren Worten. □

Für die primitive Zeta-Funktion ergibt sich damit

Satz 5.14.2 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für p4gm ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta_{prim}^{p4gm,S}(s) = \frac{1}{2}\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} - \frac{1}{2} + 3 \cdot 2^{-(s+1)}$$

Beweis:

1. Diese Worte stellen Elemente aus $p4$ dar. Daher folgt aus Satz 5.12.2, dass $x^a y^b \sim x^b y^{-a} \sim x^{-b} y^a \sim x^{-a} y^{-b}$. Konjugiert man jetzt $x^a y^b$ mit t, so erhält man $x^b y^a$. Damit liegen $x^a y^b$, $x^b y^{-a}$, $x^{-b} y^a$, $x^{-a} y^{-b}$, $x^b y^a$, $x^a y^{-b}$, $x^{-a} y^b$ und $x^{-b} y^{-a}$ in einer Konjugationsklasse. Aufgrund der Relation $r^t = r^{-1} x^{-1}$ ist x^{-1} nicht primitiv. Weiter ist $xy = (tx)^2$, d.h. xy ist ebenfalls nicht primitiv. Es gibt also $\frac{1}{2}\varphi(n)$ primitive Konjugationsklassen je Wortnorm $n \geq 3$.

2. Auch diese Worte stellen Elemente aus $p4$ dar. In Satz 5.12.2 wird bereits gezeigt, dass diese Worte nicht primitiv sind.

3. Da $tx^a y^b = x^b t x^a$ ist, ist $tx^a y^b$ konjugiert zu kürzeren Worten, wenn a und b unterschiedliche Vorzeichen haben.
   Seien ab jetzt $a, b \geq 0$. Da $tx^a y^b = x^b t x^a$ ist, sind $tx^{a'} y^{b'} \sim tx^a$ mit $a', b' \geq 0$ und $a' + b' = a$. Es gilt aber

   $$(tx^b)^{2k} = x^{kb} y^{kb}$$

   und daher

   $$(tx^b)^{2k+1} = x^{kb} y^{kb} t x^b = tx^{(k+1)b} y^{kb} \sim tx^{(2k+1)b}.$$

   Entsprechende Aussagen lassen sich zeigen, wenn $a, b < 0$ sind. Damit repräsentieren die Worte $tx^{\pm 2^b}$ mit $b \geq 0$ primitive Konjugationsklassen, d.h. es gibt 2 primitive Konjugationsklassen je Wortnorm $2^n + 1$ mit $n \geq 0$.

4. Zunächst sind alle Worte, in denen der Erzeugende r zweimal auftritt, konjugiert zu kürzeren Worten, da sich diese Worte so umformen lassen, dass sie mit einer Potenz von r beginnen und enden, wobei sich die Länge höchstens um 1 vergrößert.
   Betrachtet man die übrigen Worte, so stellt man als erstes fest, dass $trx^a y^b \sim rtx^a y^b$ und $tr^{-1} x^a y^b \sim r^{-1} t x^a y^b$. Außerdem ist $trx^a y^b \sim tr^{-1} x^{-b} y^{-(a+1)} \sim tr^{-1} x^{-b} y^{a-1}$ bzw. $tr^{-1} x^a y^b \sim trx^{-(b-1)} y^{-a} \sim trx^{b+1} y^{-a}$. D.h. die Worte $trx^a y^b$ und $tr^{-1} x^a y^b$ sind konjugiert zu try^c oder $tr^{-1} x^c$, wobei $c = a$ oder b. Nun ist aber $y^{-1} = (tr)^2$ und $x = (tr^{-1})^2$. Damit sind try^c und $tr^{-1} x^c$ für $c \geq 1$ nicht primitiv. Es bleiben also 2 primitive Konjugationsklassen der Wortnorm 2 übrig.

Zusammen mit Satz 4.2.2 ist dann

$$\begin{aligned}\zeta_{prim}^{p4gm,S}(s) &= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\varphi(n)n^{-s} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + 2\cdot 2^{-s} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} - \frac{1}{2} + 3\cdot 2^{-(s+1)} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

Und damit folgt für die Zeta-Funktion

Satz 5.14.3 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für p4gm ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta^{p4gm,S}(s) = \frac{1}{2}\zeta(s-1) + \frac{1}{2}(9+2^{-s})\zeta(s) - 1 + 2^{-s} + 3^{-s}$$

Beweis:

1. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass es $n+1$ Konjugationsklassen der Wortnorm $2n$ und n Konjugationsklassen der Wortnorm $2n-1$ mit $n \geq 1$ gibt.

2. Aus Satz 5.12.3 und der Relation $r^t = r^{-1}x^{-1}$ folgt, dass nur die Worte r, r^{-1}, r^2 und r^2x kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.

3. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass die Worte tx^a mit $a \in \mathbb{Z}$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.

4. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass die Worte try^{-a} und trx^a mit $a \geq 0$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind. Alle anderen Worte sind entweder konjugiert zu diesen Worten oder konjugiert zu kürzeren Worten.

Es ist also

$$\begin{aligned}\zeta^{p4gm,S}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\cdot(2n)^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty}n(2n-1)^{-s} + 2 + 2^{-s} + 3^{-s} \\ &\quad + 1 + 2\sum_{n=2}^{\infty}n^{-s} + 2\sum_{n=2}^{\infty}n^{-s} \\ &= \frac{1}{2}\zeta(s-1) + \frac{1}{2}(9+2^{-s})\zeta(s) - 1 + 2^{-s} + 3^{-s} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

5.15 p3

Der folgende Satz beinhaltet die Liste der Worte, die die Elemente von

$$p3 = \left\langle x, y, r \mid [x, y], r^3, x^r = x^{-1}y, y^r = x^{-1} \right\rangle$$

bzgl. des in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystems S darstellen.

Satz 5.15.1 *Die Elemente von* $p3$ *werden bzgl. des ausgewählten Erzeugendensystems* S *durch die folgenden kurzen Worte dargestellt:*

1. *Worte aus den Erzeugenden* x *und* y*:*

$$x^a y^b, x^{-a} y^{-b} \text{ mit } a, b \geq 0$$
$$x^{-a} y^b, x^a y^{-b} \text{ mit } a, b \geq 1 \text{ und } \min(a, b) \leq 2$$

2. *Worte aus den Erzeugenden* x*,* y *und* r*:*

$$r x^a y^b, x^a y^b r^{-1} \text{ mit } a \cdot b \geq 0$$
$$r^{-1} x^a y^b, x^a y^b r \text{ mit } a \cdot b \geq 0 \text{ und } a \neq 0$$
$$x^a r y^b, y^b r^{-1} x^a \text{ mit } a \cdot b > 0$$
$$r x^a y^b r^{-1} \text{ mit } a \cdot b > 0 \text{ und } |b| \geq 3$$
$$r^{-1} x^a y^b r \text{ mit } a \cdot b > 0 \text{ und } |a| \geq 3$$

Beweis:

1. Da in $p3$ die Relation $x^r = x^{-1}y$ gilt, folgt die Behauptung aus Satz 3.1.1.

2. Nimmt man jetzt den Erzeugenden r hinzu, so lassen sich auf Grund der Relationen von $p3$ die Erzeugenden x und y nicht alle auf einer Seite von r sammeln. Zunächst lassen sich folgende allgemeine Aussagen machen:

   i. Da $y^r = x^{-1}$ ist, repräsentieren die Worte $r^{-1}y^a$ und $x^{-a}r^{-1}$ dieselben Elemente von $p3$. Dasselbe gilt für die Worte $y^a r$ und $r x^{-a}$. Dabei ist $a \in \mathbb{Z}$. Aus demselben Grund kann es auch die Teilworte $y^b r x^a$ und $x^a r^{-1} y^b$ mit $a, b \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ nicht geben. Weiter kann es damit auch keine Teilworte der Form $r x^a r^{-1}$ und $r^{-1} y^a r$ mit $a \in \mathbb{Z}$ geben.
   Die Worte $r^{-1} x^a r = r y^a r^{-1}$ sind wegen der Relation $x^r = x^{-1}y$ für $|a| \leq 2$ äquivalent zu kürzeren Worten. Damit sind auch alle Worte, die $r^{-1} x^a r$ mit $|a| \leq 2$ als Teilwort enthalten, äquivalent zu kürzeren Worten.

ii. Es kann keine kurzen Worte geben, in denen der Erzeugende r und die Erzeugenden x und y auftreten und die Exponenten von x und y unterschiedliche Vorzeichen haben. Diese Worte sind äquivalent zu kürzeren Worten, in denen die Exponenten von x und y dasselbe Vorzeichen haben.

iii. Es kann keine kurzen Worte geben, in denen der Erzeugende r zweimal mit demselben Exponenten auftritt. Diese Worte sind äquivalent zu kürzeren Worten, in denen der Erzeugende r nur noch einmal mit diesem Exponenten vorkommt.

iv. Worte, in denen der Erzeugende r zweimal auftritt und eine Potenz von r zwischen zwei Potenzen von x oder zwei Potenzen von y oder zwischen einer Potenz von x und einer von y steht, brauchen nicht betrachtet zu werden. Diese Worte sind immer äquivalent zu Worten, in denen die Potenzen von r eine Potenz von x und eine Potenz von y einrahmen, ohne dass sich die Länge ändert.

Aus diesen Aussagen und der Tatsache, dass die Worte $rx^a y^b r^{-1}$ und $r^{-1}x^a y^b r$ nicht als Teilworte längerer Worte auftreten können, ergeben sich die obigen Formen für die kurzen Repräsentanten von Elementen aus $p3$, die aus den Erzeugenden r, x und y gebildet werden. Die Worte $rx^a y^b r^{-1}$ und $r^{-1}x^a y^b r$ können nicht als Teilworte längerer Worte auftreten, da solche Worte entweder äquivalent wären zu kürzeren Worten oder aber äquivalent wären zu den Worten gleicher Länge $r^{-1}x^{a'}y^{b'}r$ bzw. $rx^{a'}y^{b'}r^{-1}$. Es ist z.B. für $c \geq 1$

$$rx^a y^b r^{-1} y^c = rx^a y^b x^{-c} r^{-1} = rx^{a-c} y^b r^{-1}$$

und mit $d = \min(c, a)$ ist

$$rx^a y^b r^{-1} x^c = ry^b r^{-1} y^{-a} x^c = ry^b r x^{-d} r y^{-(a-d)} x^{c-d} = ry^{b+d} r^{-1} y^{-(a-d)} x^{c-d}$$

und hier ist die Länge um d kleiner. □

Für die primitive Zeta-Funktion ergibt sich damit

Satz 5.15.2 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für $p3$ ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta_{prim}^{p3,S}(s) = 2 \cdot \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

Beweis:

1. Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Konjugiert man $x^a y^b$ mit einer Potenz von r, so sieht man, dass $x^a y^b \sim x^b y^{-(a+b)} \sim x^{-(a+b)} y^a$. Also ist $x^a y^b$ konjugiert zu einem kürzeren Wort, falls a und b unterschiedliche Vorzeichen haben. Es gibt somit $2 \cdot \varphi(n)$ primitive Konjugationsklassen für jede Wortnorm $n \geq 1$.

2. Es ist $rx^a y^b = y^{-a} r y^b$, $r^{-1} x^a y^b = x^{-b} r^{-1} x^a$, $x^a y^b r = x^a r x^{-b}$ und $x^a y^b r^{-1} = y^b r^{-1} y^{-a}$. Da a und b dasselbe Vorzeichen haben, sind diese Worte damit für $a \neq 0 \neq b$ konjugiert zu kürzeren Worten. Falls $a = 0$ oder $b = 0$, sind diese Worte nicht primitiv, da z.B.

   $$(rx^a)^3 = y^{-a} r r x^a r x^a = y^{-a} r^{-1} x^a r x^a = y^{-a} x^{-a} y^a x^a = e$$

   und

   $$(ry^b)^3 = (r^{-1} x^{-a} r^{-1})^3 = r^{-1} x^{-a} r x^{-a} r x^{-a} r^{-1} = x^a y^{-a} x^{-a} y^a r r^{-1} = e.$$

   Die anderen Fälle kann man analog zeigen.
   Da $x^a r y^b \sim r x^a y^b$ und $y^b r^{-1} x^a \sim r^{-1} x^a y^b$, liegen diese Worte in bereits untersuchten Konjugationsklassen.
   Die Worte $r x^a y^b r^{-1}$ und $r^{-1} x^a y^b r$ sind offensichtlich konjugiert zu kürzeren Worten.

Zusammen mit Satz 4.2.2 ist dann

$$\begin{aligned} \zeta_{prim}^{p3,S}(s) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) n^{-s} \\ &= 2 \cdot \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \quad \text{für } Re(s) > 2 \end{aligned}$$

□

Und damit folgt für die Zeta-Funktion

Satz 5.15.3 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für p3 ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta^{p3,S}(s) = 2 \cdot \zeta(s-1) + 2 + 2^{-(s-2)}$$

Beweis:

1. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass es $2n$ Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 1$ gibt.

2. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass die Worte rx^a, ry^a, $r^{-1}x^a$ und $r^{-1}y^a$ mit $a \geq 0$ mögliche kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind. Es gilt aber
$$rx^a = x^{-1}ryx^{a-1},$$
d.h. rx^a ist für $a > 1$ konjugiert zu kürzeren Worten. Analoge Aussagen lassen sich für die andere Worte zeigen. Damit sind nur r, r^{-1}, rx, ry, $r^{-1}x$ und $r^{-1}y$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse.

Es ist also
$$\begin{aligned}\zeta^{p3,S}(s) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n^{-s} + 2 + 4 \cdot 2^{-s} \\ &= 2 \cdot \zeta(s-1) + 2 + 2^{-(s-2)} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

5.16 p31m

Der folgende Satz beinhaltet die Liste der Worte, die die Elemente von
$$p31m = \left\langle x, y, r, t \mid [x, y], r^2, t^2, (tr)^3, x^r = x, y^t = y, x^t = x^{-1}y, y^r = xy^{-1} \right\rangle$$
bzgl. des in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystems S darstellen.

Satz 5.16.1 *Die Elemente von p31m werden bzgl. des ausgewählten Erzeugendensystems S durch die folgenden kurzen Worte dargestellt:*

1. *Worte aus den Erzeugenden x und y:*
$$\begin{gathered} x^a y^b, x^{-a}y^{-b} \text{ mit } a, b \geq 0 \\ x^{-a}y^b, x^a y^{-b} \text{ mit } a, b \geq 1 \text{ und } \min(a, b) \leq 2 \end{gathered}$$
2. *Worte aus den Erzeugenden x und r:*
$$rx^a \text{ mit } a \in \mathbb{Z}$$
3. *Worte aus den Erzeugenden y und r:*
$$\begin{gathered} ry^a, y^a r \text{ mit } a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \\ y^a ry^{-b}, y^{-a}ry^b \text{ mit } a, b \geq 1 \\ ry^a r \text{ mit } |a| \geq 3 \\ y^a ry^{-b}r, y^{-a}ry^b r \text{ mit } a \geq 1, b \geq 3 \end{gathered}$$

4. *Worte aus den Erzeugenden x, y und r:*

$$rx^a y^b, rx^{-a} y^{-b}, x^a y^b r, x^{-a} y^{-b} r \ \mathit{mit}\ a, b \geq 1$$

5. *Worte aus den Erzeugenden x und t:*

$$tx^a, x^a t \ \mathit{mit}\ a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$
$$x^a tx^{-b}, x^{-a} tx^b \ \mathit{mit}\ a, b \geq 1$$
$$tx^a t \ \mathit{mit}\ |a| \geq 3$$
$$x^a tx^{-b} t, x^{-a} tx^b t \ \mathit{mit}\ a \geq 1, b \geq 3$$

6. *Worte aus den Erzeugenden y und t:*

$$ty^a \ \mathit{mit}\ a \in \mathbb{Z}$$

7. *Worte aus den Erzeugenden x, y und t:*

$$tx^a y^b, tx^{-a} y^{-b}, x^a y^b t, x^{-a} y^{-b} t \ \mathit{mit}\ a, b \geq 1$$

8. *Worte aus den Erzeugenden x oder y und r und t:*

$$rtx^a, trx^a, x^a rt, x^a tr \ \mathit{mit}\ a \in \mathbb{Z}$$
$$trtx^a, x^a trt, trx^a t \ \mathit{mit}\ a \in \mathbb{Z}$$
$$rty^a, y^a tr \ \mathit{mit}\ a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$
$$x^a rtx^b, x^a trx^b, x^a trtx^b \ \mathit{mit}\ a \cdot b < 0$$
$$x^a trx^b t, trx^a tx^b \ \mathit{mit}\ a \cdot b < 0$$
$$y^a rty^b, y^a try^b \ \mathit{mit}\ a \cdot b < 0$$

9. *Worte aus den Erzeugenden x, y, r und t:*

$$rx^a y^b t, tx^a y^b r \ \mathit{mit}\ a \cdot b > 0$$

Beweis:

1. Die Behauptung folgt aus Satz 3.1.1 angewendet auf die Relationen $x^t = x^{-1}y$ und $y^r = xy^{-1}$.

2. Da r mit x vertauschbar ist und r Ordnung 2 hat, kann der Erzeugende r nur einmal und nur mit dem Exponenten 1 in einem kurzen Wort vorkommen. Aus demselben Grund gibt es zu jedem kurzen Wort, das nur aus den Erzeugenden x und r gebildet wird, ein äquivalentes kurzes Wort, in dem r der erste Buchstabe des Wortes ist.

3. Da $y^r = xy^{-1}$ ist, folgt die Behauptung aus Satz 3.3.1.

4. Da r mit x vertauschbar ist, ist jedes Wort, in dem r zwischen einer Potenz von x und einer von y steht, äquivalent zu einem gleichlangen Wort, in dem die Potenzen von x und y nebeneinander stehen. Damit kann man die kurzen Worte auch so wählen, dass der Erzeugende r entweder der erste oder der letzte Buchstabe des Wortes ist. Die Vorzeichen der Exponenten von x und y können dabei nicht verschieden sein, da solche Worte äquivalent sind zu kürzeren Worten. Kommt der Erzeugende r zweimal vor, so sind diese Worte äquivalent zu gleichlangen Worten, die nur aus den Erzeugenden t und x gebildet werden und die daher als Repräsentanten ihrer jeweiligen Äquivalenzklasse ausgewählt werden.

5. Da $x^t = x^{-1}y$ ist, folgt die Behauptung aus Satz 3.3.1.

6. Da t mit y vertauschbar ist und t Ordnung 2 hat, kann der Erzeugende t nur einmal und nur mit dem Exponenten 1 in einem kurzen Wort vorkommen. Aus demselben Grund gibt es zu jedem kurzen Wort, das nur aus den Erzeugenden y und t gebildet wird, ein äquivalentes kurzes Wort, in dem t der erste Buchstabe des Wortes ist.

7. Da t mit y vertauschbar ist, ist jedes Wort, in dem t zwischen einer Potenz von x und einer von y steht, äquivalent zu einem gleichlangen Wort, in dem die Potenzen von x und y nebeneinander stehen. Damit kann man die kurzen Worte auch so wählen, dass der Erzeugende t entweder der erste oder der letzte Buchstabe des Wortes ist. Die Vorzeichen der Exponenten von x und y können dabei nicht verschieden sein, da solche Worte äquivalent sind zu kürzeren Worten. Kommt der Erzeugende t zweimal vor, so sind diese Worte äquivalent zu gleichlangen Worten, die nur aus den Erzeugenden r und y gebildet werden und die daher als Repräsentanten ihrer jeweiligen Äquivalenzklasse ausgewählt werden.

8. In einem kurzen Wort, in dem die Erzeugenden r und t vorkommen, kann die Anzahl der vorkommenden r und t nicht größer als 3 sein, da sonst das Wort aufgrund der Relation $(tr)^3$ äquivalent ist zu einem kürzeren Wort. Weiter ist $rtx^a = y^{-a}rt$ und $x^atr = try^{-a}$. Außerdem sind Worte, die Teilworte der Form tx^at oder ry^ar enthalten, wegen der Relationen $x^t = x^{-1}y$ und $y^r = xy^{-1}$

äquivalent zu kürzeren Worten. Schließlich können in einem kurzen Wort nicht mehr als zwei durch andere Erzeugende voneinander getrennte Potenzen von x bzw. y vorkommen, da solche Worte äquivalent sind zu Worten, die ein Teilwort der Form rx^ay^b, x^ay^br, tx^ay^b oder x^ay^bt mit $a \cdot b < 0$ enthalten, und diese Worte wiederum sind äquivalent zu kürzeren Worten. Zieht man all dies in Betracht, so bleiben nur die genannten Worte übrig als kurze Repräsentanten von Elementen aus $p31m$, die aus den Erzeugenden r, t und x oder y gebildet werden.

9. Worte, in denen einer der Erzeugenden r und t alleine zwischen einer Potenz von x und einer Potenz von y steht, sind immer äquivalent zu Worten, in denen die Potenzen von x und y nebeneinander stehen. Zusammen mit den Überlegungen aus dem vorigen Punkt folgt dann, dass die genannten Worte die kurzen Repräsentanten von Elementen aus $p31m$ sind, die aus den Erzeugenden r, t, x und y gebildet werden. $\square$

Für die primitive Zeta-Funktion ergibt sich damit

Satz 5.16.2 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für $p31m$ ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta_{prim}^{p31m,S}(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} - 1 + 2^{-(s-1)}$$

Beweis:

1. Konjugiert man x^ay^b mit $a, b \in \mathbb{Z}$ mit den Erzeugenden r und t, so sieht man, dass $x^ay^b \sim x^{a+b}y^{-b} \sim x^{-(a+b)}y^a \sim x^{-b}y^{-a} \sim x^by^{-(a+b)} \sim x^{-a}y^{a+b}$. Daraus folgt, dass x^ay^b konjugiert sind zu kürzeren Worten, falls a und b unterschiedliche Vorzeichen haben. Weiter ist $y = (tx)^2$ und $x = (ry)^2$. D.h. es gibt $\varphi(n)$ primitive Konjugationsklassen je Wortnorm $n \geq 2$.

2. Die Worte rx^a, ry^a, y^ar mit $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ und rx^ay^b, $rx^{-a}y^{-b}$, x^ay^br und $x^{-a}y^{-b}r$ mit $a, b \geq 1$ liegen in denselben Konjugationsklassen. Offensichtlich ist $ry^a \sim y^ar$, $rx^ay^b \sim x^ay^br$ und $rx^{-a}y^{-b} \sim x^{-a}y^{-b}r$. Weiter ist

$$y^{-a}rx^ay^by^a = ry^ax^{-a}x^ay^{a+b} = ry^{2a+b}.$$

D.h. es ist $rx^a \sim ry^{2a}$ und $rx^ay^b \sim ry^{2a+b}$. Also erzeugt ry^a eine Konjugationsklasse für jedes $|a| \geq 1$, wobei für $|a| \geq 2$ das Wort ry^a nicht kurz ist in seiner Konjugationsklasse. Da für $a \geq 0$ und $b \geq 1$

$$(rx^ay^b)^{2k} = ((rx^ay^b)^2)^k = x^{2ka+kb}$$

und damit

$$(rx^ay^b)^{2k+1} = x^{2ka+kb}rx^ay^b = rx^{(2k+1)a+kb}y^b$$

und weiter $rx^{(2k+1)a+kb}y^b \sim ry^{(2k+1)(2a+b)}$ ist, ist eine Konjugationsklasse nur dann primitiv, wenn sie ein Wort der Form ry^{2^a} mit $a \geq 0$ enthält. In diesen Konjugationsklassen ist $rx^{2^{a-1}}$, falls $a \geq 1$ ist, und ry, falls $a = 0$ ist, kurz. Entsprechende Aussagen gelten, wenn a und b negativ sind. Der Erzeugende r ist nicht primitiv. Es gibt also 2 primitive Konjugationsklassen der Wortnorm 2 und 2 primitive Konjugationsklassen je Wortnorm $2^n + 1$ mit $n \geq 0$.

3. Die Worte ry^a und y^ar sind bereits im vorigen Punkt betrachtet worden. Die Worte y^ary^{-b}, $y^{-a}ry^b$ und ry^ar sind konjugiert zu kürzeren Worten. Konjugiert man $y^ary^{-b}r$ mit dem Erzeugenden t, so erhält man

$$ty^ary^{-b}rt = y^atx^{-b}y^bt = x^by^a.$$

Und genauso ist $y^{-a}ry^br \sim x^{-b}y^{-a}$. D.h. diese Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten.

4. Diese Worte sind bereits im Punkt 2. betrachtet worden.

5. Offensichtlich ist $tx^a \sim x^at$. Weiter ist

$$trtx^art = trtrx^at = trtrtx^{-a}y^a = rx^{-a}y^a = y^{-a}r.$$

D.h. $tx^a \sim ry^{-a}$, und diese Konjugationsklasse wurde bereits in Punkt 2. behandelt.
Die Worte x^atx^{-b}, $x^{-a}tx^b$ und tx^at sind konjugiert zu kürzeren Worten. Konjugiert man $x^atx^{-b}t$ mit r, so erhält man

$$rx^atx^{-b}tr = x^arx^by^{-b}r = x^ay^b.$$

Und genauso ist $x^{-a}tx^bt \sim x^{-a}y^{-b}$. D.h. diese Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten.

6. Es ist

$$trty^art = trtrx^ay^{-a}t = trtrtx^{-a} = rx^{-a}.$$

D.h. $ty^a \sim rx^{-a}$, und diese Konjugationsklasse wurde bereits in Punkt 2. behandelt.

7. Wieder ist

$$trtx^ay^brt = trtrx^{a+b}y^{-b}t = trtrtx^{-(a+b)}y^a = rx^{-(a+b)}y^a = x^{-b}y^{-a}r.$$

Und natürlich ist $tx^ay^b \sim x^ay^bt$ und $tx^{-a}y^{-b} \sim x^{-a}y^{-b}t$. Damit liegen diese Worte in Konjugationsklassen, die bereits in Punkt 2. behandelt wurden.

8. Offensichtlich ist $rtx^a \sim trx^a \sim x^a rt \sim x^a tr$. Weiter ist

$$(rtx^a)^3 = rtrx^a trx^a tx^a = rtrtx^{-a}y^a rtx^{-a}y^a x^a = trry^{-a}ty^a = e.$$

D.h. diese Worte sind nicht primitiv.
Es ist $trtx^a \sim x^a trt$ und $trtx^a = trx^{-a}y^a t = ty^{-a}rt$, d.h. diese Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten. $trx^a t$ ist ebenfalls konjugiert zu einem kürzeren Wort.
Da $rty^a \sim y^a tr$ und $trrty^a rt = y^a rt = rx^a y^{-a} t = rtx^{-a}$, liegen diese Worte in einer bereits behandelten Konjugationsklasse.
Die Worte $x^a rtx^b$, $x^a trx^b$ und $x^a trtx^b$ sind wegen $a \cdot b < 0$ konjugiert zu kürzeren Worten.
Es ist $x^a trx^b t = try^{-a}x^b t$ und $trx^a tx^b = tx^a y^{-b} rt$. Und damit sind diese Worte auch konjugiert zu kürzeren Worten.
Schließlich sind $y^a rty^b$ und $y^a try^b$ wegen $a \cdot b < 0$ konjugiert zu kürzeren Worten.

9. Es gilt

$$rrx^a y^b tr = y^b tx^{-a} y^a r = y^b try^{-a}$$

und

$$rtx^a y^b rr = rx^{-a} y^a ty^b = y^{-a} rty^b.$$

D.h. diese Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten.

Zusammen mit Satz 4.2.2 ist dann

$$\begin{aligned}
\zeta_{prim}^{p31m,S}(s) &= \sum_{n=2}^{\infty} \varphi(n) n^{-s} + 2 \cdot 2^{-s} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 1)^{-s} \\
&= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 1)^{-s} - 1 + 2^{-(s-1)} \quad \text{für } Re(s) > 2
\end{aligned}$$

□

Und damit folgt für die Zeta-Funktion

Satz 5.16.3 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für $p31m$ ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta^{p31m,S}(s) = \zeta(s-1) + 5 \cdot \zeta(s) - 3 + 2^{-s} + 2 \cdot 3^{-s}$$

Beweis:

1. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass es $n+1$ Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 1$ gibt.

2. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass die Worte rx^a mit $a \in \mathbb{Z}$ und rx^ay, $rx^{-a}y^{-1}$ mit $a \geq 0$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.

3. Diese Worte sind entweder konjugiert zu bereits untersuchten Worten oder konjugiert zu kürzeren Worten.

4. Diese Worte sind in den Konjugationsklassen des Punktes 2. enthalten.

5. Diese Worte liegen entweder in den Konjugationsklassen von Punkt 2. oder sind konjugiert zu kürzeren Worten.

6. Diese Worte sind in den Konjugationsklassen des Punktes 2. enthalten.

7. Diese Worte sind in den Konjugationsklassen des Punktes 2. enthalten.

8. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass nur die Worte rtx^a mit $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ mögliche kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind. Es ist aber
$$rtx^a = rx^{-1}ytx^{a-1} = x^{-1}rytx^{a-1}.$$
Also sind nur die Worte rt, rtx und rtx^{-1} kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse.

9. Diese Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten.

Es ist also

$$\begin{aligned}\zeta^{p31m,S}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} + 1 + 2\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} + 2\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} + 2^{-s} + 2 \cdot 3^{-s} \\ &= \zeta(s-1) + 5 \cdot \zeta(s) - 3 + 2^{-s} + 2 \cdot 3^{-s} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

5.17 p3m1

Der folgende Satz beinhaltet die Liste der Worte, die die Elemente von

$$\begin{aligned}p3m1 = \langle x, y, r, m \mid [x, y], r^3, m^2, r^m = r^{-1}, x^r = x^{-1}y, y^r = x^{-1}, x^m = x^{-1}, \\ y^m = x^{-1}y\Big\rangle\end{aligned}$$

bzgl. des in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystems S darstellen.

Satz 5.17.1 *Die Elemente von p3m1 werden bzgl. des ausgewählten Erzeugendensystems S durch die folgenden kurzen Worte dargestellt:*

1. *Worte aus den Erzeugenden x und y:*

$$x^a y^b, x^{-a} y^{-b} \text{ mit } a, b \geq 0$$
$$x^{-a} y^b, x^a y^{-b} \text{ mit } a, b \geq 1 \text{ und } \min(a, b) \leq 2$$

2. *Worte aus den Erzeugenden x, y und r:*

$$r x^a y^b, x^a y^b r^{-1} \text{ mit } a \cdot b \geq 0$$
$$r^{-1} x^a y^b, x^a y^b r \text{ mit } a \cdot b \geq 0 \text{ und } a \neq 0$$
$$x^a r y^b, y^b r^{-1} x^a \text{ mit } a \cdot b > 0$$
$$r x^a y^b r^{-1} \text{ mit } a \cdot b > 0 \text{ und } |b| \geq 3$$
$$r^{-1} x^a y^b r \text{ mit } a \cdot b \geq 0 \text{ und } |a| \geq 3$$

3. *Worte aus den Erzeugenden x und m:*

$$m x^a \text{ mit } a \in \mathbb{Z}$$

4. *Worte aus den Erzeugenden y und m:*

$$m y^a, y^a m \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$$
$$y^a m y^b, y^{-a} m y^{-b} \text{ mit } a, b \geq 1$$
$$m y^a m \text{ mit } |a| \geq 3$$
$$y^a m x^b m, y^{-a} m y^{-b} m \text{ mit } a \geq 1, b \geq 3$$

5. *Worte aus den Erzeugenden x, y und r:*

$$m x^a y^b, m x^{-a} y^{-b}, x^a y^b m, x^{-a} y^{-b} m \text{ mit } a, b \geq 1$$

6. *Worte aus den Erzeugenden x oder y und r und t:*

$$r m x^a, r^{-1} m x^a, x^a r m, x^a r^{-1} m \text{ mit } a \in \mathbb{Z}$$
$$r^{-1} m y^a, r y^a m \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$$
$$x^a r m x^b, x^a r^{-1} m x^b \text{ mit } a \cdot b > 0$$
$$y^a r y^b m, m y^a r y^b, y^a r^{-1} y^b m \text{ mit } a \cdot b < 0$$
$$r y^a m y^b \text{ mit } a \cdot b > 0$$

Beweis:

1. Die Behauptung folgt aus Satz 3.1.1 angewendet auf die Relationen $x^r = x^{-1}y$ und $y^m = x^{-1}y$.

2. Die Elemente r, x und y erzeugen die Gruppe $p3$ als Untergruppe in $p3m1$. Nach Satz 5.15.1 werden die Elemente von $p3$ durch die Worte diese Punktes repräsentiert.

3. Da m den Erzeugenden x invertiert und m Ordnung 2 hat, kann m nur einmal und nur mit dem Exponenten 1 in einem kurzen Wort vorkommen. Aus demselben Grund gibt es zu jedem kurzen Wort, das nur aus den Erzeugenden x und m gebildet wird, ein äquivalentes kurzes Wort, in dem m der erste Buchstabe des Wortes ist.

4. Da $y^m = x^{-1}y$ ist, folgt die Behauptung aus Satz 3.3.1.

5. Nach Abschnitt 3.3 können nur

   - $mx^ay^b, mx^{-a}y^{-b}, x^ay^bm, x^{-a}y^{-b}m$ mit $a, b \geq 1$
   - $mx^ay^bm, mx^{-a}y^{-b}m$ mit $a \geq 1$ und $b \geq 3$

   kurze Worte sein, die Elemente aus $p3m1$ repräsentieren. Es ist aber $mx^ay^bm = r^{-1}y^ax^br$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, d.h. für die Elemente, die von diesen Worten repräsentiert werden, ist bereits ein kurzer Repräsentant ausgewählt worden.

6. In einem kurzen Wort, in dem die Erzeugenden r und m gemeinsam vorkommen, kann jeder der Erzeugenden r und m jeweils nur einmal vorkommen, da das Wort sonst aufgrund der Relation $r^m = r^{-1}$ äquivalent wäre zu einem kürzeren Wort. Steht in einem Wort eine Potenz von x zwischen dem Erzeugenden m und einer Potenz von r, so ist dieses Wort äquivalent zu einem gleichlangen Wort, in dem m neben der Potenz von r steht. Worte, in denen Teilworte der Form y^ar und $r^{-1}y^a$ auftreten, und Worte, die zu solchen Worten äquivalent sind, sind äquivalent zu Worten, die aus den Erzeugenden r, m und x gebildet werden. Die Vorzeichen der Exponenten von x und y ergeben sich dann aus den Relation $x^r = x^{-1}y$ und $y^m = x^{-1}y$. $\square$

Für die primitive Zeta-Funktion ergibt sich damit

Satz 5.17.2 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für* p3m1 *ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta_{prim}^{p3m1,S}(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} - 2^{-s}$$

Beweis:

1. Da $p3m1$ die Gruppe $p3$ als Untergruppe enthält, folgt aus Satz 5.15.2, dass $x^a y^b \sim x^b y^{-(a+b)} \sim x^{-(a+b)} y^a$. Konjugiert man diese Worte mit m, so erhält man zusätzlich $x^a y^b \sim x^{-(a+b)} y^b \sim x^a y^{-(a+b)} \sim x^b y^a$. Also sind die Worte $x^a y^b$ mit $a \cdot b < 0$ konjugiert zu kürzeren Worten. Weiter ist $(my)^2 = x^{-1} y^{-1}$ bzw. $(my^{-1})^2 = xy$. D.h. es gibt 1 primitive Konjugationsklasse der Wortnorm 1 und $\varphi(n)$ primitive Konjugationsklassen je Wortnorm $n \geq 3$.

2. Diese Worte repräsentieren Elemente von $p3$ und liegen nach Satz 5.15.2 nicht in primitiven Konjugationsklassen.

3. Die Worte mx^a mit $a \in \mathbb{Z}$ sind nicht primitiv, da $(mx^a)^2 = e$.

4. Die Worte my^a, $y^a m$ mit $a \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ und $y^{a'} m y^{b'}$ mit $a' \cdot b' > 0$ und $a' + b' = a$ liegen in derselben Konjugationsklasse. Da
$$(mx^a y^b)^{2k} = x^{-kb} y^{2kb}$$
und daher
$$(mx^{kb} y^b)^{2k+1} = my^{(2k+1)b},$$
gibt es 2 primitive Konjugationsklassen für jede Wortnorm $2^n + 1$ mit $n \geq 0$. Die Worte $my^a m$ sind offensichtlich konjugiert zu kürzeren Worten. Und für die Worte $y^a m y^b m$ bzw. $y^{-a} m y^{-b} m$ gilt
$$r^{-1} y^m y^b m r = x^{-a} r^{-1} m m x^{-b} y^b r = x^{-a} r^{-1} r y^{-b} = x^{-a} y^{-b},$$
d.h. diese Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten.

5. Es gilt $mx^a y^b \sim x^a y^b m$ und $mx^{-a} y^{-b} \sim x^{-a} y^{-b} m$. Weiter ist
$$xmx^a y^b x^{-1} = ymx^{a-1} y^{b-1}$$
und analog $x^{-1} m x^{-a} y^{-b} x = y^{-1} m x^{-(a-1)} y^{-(b-1)}$, d.h. diese Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten.

6. Die Worte rmx^a, $r^{-1} m x^a$, $x^a r m$, $x^a r^{-1} m$, $x^{a'} r m x^{b'}$ und $x^{a'} r^{-1} m x^{b'}$ mit $a' + b' = a$ liegen alle in derselben Konjugationsklasse. Es ist aber
$$rrmx^a r^{-1} = r^{-1} m r^{-1} y^{-a} = my^{-a},$$
d.h. diese Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten.
Weiter ist $r^{-1} m y^a$ konjugiert zu $r y^a m$. Da
$$r^{-1} r^{-1} m y^a r = rmrx^{-a} = mx^{-a},$$
sind auch diese Worte konjugiert zu kürzeren Worten.
Schließlich liegen auch die Worte $y^a r y^b m$, $my^a r y^b$, $y^a r^{-1} y^b m$ und $r y^a m y^b$ in einer Konjugationsklasse, in der es ein kürzeres Wort gibt.

Zusammen mit Satz 4.2.2 ist dann

$$\begin{aligned}\zeta_{prim}^{p3m1,S}(s) &= 1 + \sum_{n=3}^{\infty}\varphi(n)n^{-s} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} \\ &= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} - 2^{-s} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

Und damit folgt für die Zeta-Funktion

Satz 5.17.3 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für p3m1 ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta^{p3m1,S}(s) = \zeta(s-1) + (2+2^{-s})\zeta(s) + 2^{-(s-1)}$$

Beweis:

1. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass es $2n+1$ Konjugationsklassen der Wortnorm $2n$ und $2n-1$ Konjugationsklassen der Wortnorm $2n-1$ mit $n \geq 1$ gibt.
2. Aus Satz 5.15.3 folgt, dass die Worte r, r^{-1}, rx, ry, $r^{-1}x$ und $r^{-1}y$ mögliche kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind. Konjugiert man diese Worte aber mit m, x und y, so zeigt sich, dass $r \sim r^{-1}$, $rx \sim r^{-1}y$ und $ry \sim r^{-1}x$.
3. Diese Worte sind für $|a| \geq 1$ konjugiert zu kürzeren Worten. Also ist nur m ein kurzer Repräsentant seiner Konjugationsklasse.
4. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass die Worte my^a mit $|a| \geq 1$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.
5. Diese Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten.
6. Diese Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten.

Es ist also

$$\begin{aligned}\zeta^{p3m1,S}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(2n)^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)(2n-1)^{-s} + 2 + 2\cdot 2^{-s} + 2\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \\ &= \zeta(s-1) + (2+2^{-s})\zeta(s) + 2^{-(s-1)} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

5.18 p6

Der folgende Satz beinhaltet die Liste der Worte, die die Elemente von

$$p6 = \left\langle x, y, r \mid [x, y], r^6, x^r = y, y^r = x^{-1}y \right\rangle$$

bzgl. des in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystems S darstellen.

Satz 5.18.1 *Die Elemente von p6 werden bzgl. des ausgewählten Erzeugendensystems S durch die folgenden kurzen Worte dargestellt:*

1. *Worte aus den Erzeugenden x und y:*

$$x^a y^b, x^{-a} y^{-b} \text{ mit } a, b \geq 0$$
$$x^{-a} y^b, x^a y^{-b} \text{ mit } a, b \geq 1 \text{ und } \min(a, b) \leq 2$$

2. *Worte aus den Erzeugenden x oder y und r:*

$$rx^a, x^a r, r^{-1}x^a, x^a r^{-1}, r^2 x^a, x^a r^2, r^{-2}x^a, x^a r^{-2}, r^3 x^a \text{ mit } a \in \mathbb{Z}$$
$$y^a r, r^{-1}y^a, r^2 y^a, y^a r^{-2}, r^3 y^a \text{ mit } a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$
$$x^a r x^b, x^a r^{-1} x^b, y^a r y^b, y^a r^{-1} y^b \text{ mit } a \cdot b > 0$$
$$x^a r^2 x^b, x^a r^{-2} x^b, y^a r^2 y^b, y^a r^{-2} y^b \text{ mit } a \cdot b < 0$$
$$rx^a r^{-1} \text{ mit } |a| \geq 3$$
$$rx^a r^2 \text{ mit } a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$
$$x^a r x^b r, y^a r^{-1} y^b r^{-1}, x^a r x^b r^2, y^a r^{-1} y^b r^{-2} \text{ mit } a \cdot b > 0$$
$$ry^a r^2 y^b \text{ mit } a \cdot b < 0$$
$$x^a r x^b r^{-1}, y^a r^{-1} y^b r \text{ mit } a \cdot b > 0, |b| \geq 3$$

3. *Worte aus den Erzeugenden x, y und r:*

$$y^b r x^a, x^a r^{-1} y^b \text{ mit } a \cdot b < 0$$

Beweis:

1. Die Behauptung folgt aus Satz 3.1.1 angewendet auf die Relation $y^r = x^{-1}y$.

2. Besteht das Wort aus einer Potenz von x oder y und zwei Potenzen von r, so können dabei keine Potenzen von r auftreten, so dass durch die Relation $x^r = y$ die Potenz von x in eine Potenz von y bzw. die Potenz von y in eine Potenz von x umgewandelt werden kann. Treten in einem Wort zwei Potenzen von x bzw. y und zwei Potenzen r^{ε_1} und r^{ε_2} von r auf, so muß $|\varepsilon_1 + \varepsilon_2| \geq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$ oder $|\varepsilon_1 + \varepsilon_2| = 0$ gelten. Die Vorzeichen der Exponenten von x bzw. y werden durch die Relation $y^r = x^{-1}y$ bestimmt.

3. Die Behauptung folgt aus denselben Gründen wie im vorigen Punkt. □

Für die primitive Zeta-Funktion ergibt sich damit

Satz 5.18.2 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für* p6 *ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta_{prim}^{p6,S}(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

Beweis:

1. Konjugiert man $x^a y^b$ mit den verschiedenen Potenzen von r, so zeigt sich, dass die Worte $x^a y^b$, $x^{a+b}y^{-a}$, $x^b y^{-(a+b)}$, $x^{-a}y^{-b}$, $x^{-(a+b)}y^a$ und $x^{-b}y^{a+b}$ in einer Konjugationsklasse liegen. Demnach sind die Worte $x^a y^b$ konjugiert zu kürzeren Worten, wenn a und b unterschiedliche Vorzeichen haben. Es gibt also $\varphi(n)$ primitive Konjugationsklassen je Wortnorm $n \geq 1$.

2. Es ist
$$rx^a \sim x^a r \sim y^a r \sim x^a r x^b \sim y^a r y^b \sim y^b r x^a.$$
Da $yrx^a y^{-1} = rx^{a-1}$, sind diese Worte konjugiert zu r, und r ist von endlicher Ordnung, d.h. nicht primitiv. Genauso ist
$$r^{-1}x^a \sim x^a r^{-1} \sim r^{-1}y^a \sim x^a r^{-1} x^b \sim y^a r^{-1} y^b \sim x^a r^{-1} y^b$$
und weiter sind diese Worte konjugiert zu dem Buchstaben r^{-1}, der wieder von endlicher Ordnung und damit nicht primitiv ist. Offensichtlich ist auch
$$r^2 x^a \sim x^a r^2 \sim r^2 y^a \sim x^a r^2 x^b \sim y^a r^2 y^b \sim x^a r x^b r.$$
Konjugation von $r^2 x^a$ mit x zeigt, dass diese Worte konjugiert sind zu r^2 oder zu $r^2 x$ je nach dem, ob a gerade oder ungerade ist. Sowohl r^2 als auch $r^2 x$ sind von endlicher Ordnung und damit nicht primitiv. Analog zeigt man, dass
$$r^{-2}x^a \sim x^a r^{-2} \sim y^a r^{-2} \sim x^a r^{-2} x^b \sim y^a r^{-2} y^b$$

und dass diese Worte konjugiert sind zu r^{-2} oder $r^{-2}x$, welche wieder von endlicher Ordnung und damit nicht primitiv sind. Weiter ist

$$r^3x^a \sim r^3y^a \sim rx^ar^2 \sim x^arx^br^2 \sim y^ar^{-1}y^br^{-2} \sim ry^ar^2y^b.$$

Diese Worte sind nun alle konjugiert zu r^3x oder r^3, die wiederum von endlicher Ordnung und damit nicht primitiv sind . Schließlich ist

$$x^arx^br^{-1} \sim y^ar^{-1}y^br.$$

Diese Worte sind nun konjugiert zu x^by^a, d.h. zu kürzeren Worten.

3. Für diese Worte gilt mit $a, b \geq 1$

$$y^{-1}y^brx^{-a}y = y^brx^{-(a-1)}$$

und

$$yx^{-a}r^{-1}y^by^{-1} = x^{-(a-1)}r^{-1}y^b.$$

Entsprechende Aussagen gelten für $y^{-b}rx^a$ und $x^ar^{-1}y^{-a}$. Damit sind diese Worte konjugiert zu kürzeren Worten.

Zusammen mit Satz 4.2.2 ist dann

$$\begin{aligned}\zeta_{prim}^{p6,S}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)n^{-s} \\ &= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

Und damit folgt für die Zeta-Funktion

Satz 5.18.3 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für p6 ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta^{p6,S}(s) = \zeta(s-1) + 2 + 2^{-(s-1)} + 3^{-(s-1)} + 4^{-s}$$

Beweis:

1. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass es n Konjugationsklassen der Wortnorm $n \geq 1$ gibt.

2. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass die Worte r, r^{-1}, r^2, r^2x, r^{-2}, $r^{-2}x$, r^3 und r^3x kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.

3. Diese Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten.

Es ist also

$$\begin{aligned}\zeta^{p6,S}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n^{-s} + 2 + 2 \cdot 2^{-s} + 3 \cdot 3^{-s} + 4^{-s} \\ &= \zeta(s-1) + 2 + 2^{-(s-1)} + 3^{-(s-1)} + 4^{-s} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

5.19 p6mm

Der folgende Satz beinhaltet die Liste der Worte, die die Elemente von

$$\begin{aligned}p6mm = \langle x, y, r, m \mid [x,y], r^6, m^2, y^r = x^{-1}y, x^r = y, x^m = x^{-1}, y^m = x^{-1}y,\\ r^m = r^{-1}y\Big\rangle\end{aligned}$$

bzgl. des in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystems S darstellen.

Satz 5.19.1 *Die Elemente von p6mm werden bzgl. des ausgewählten Erzeugendensystems S durch die folgenden kurzen Worte dargestellt:*

1. *Worte aus den Erzeugenden x und y:*

$$\begin{gathered}x^a y^b, x^{-a} y^{-b} \text{ mit } a, b \geq 0 \\ x^{-a} y^b, x^a y^{-b} \text{ mit } a, b \geq 1 \text{ und } \min(a,b) \leq 2\end{gathered}$$

2. *Worte aus den Erzeugenden x oder y und r:*

$$\begin{gathered}rx^a, x^a r, r^{-1} x^a, x^a r^{-1}, r^2 x^a, x^a r^2, r^{-2} x^a, x^a r^{-2}, r^3 x^a \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \\ y^a r, r^{-1} y^a, r^2 y^a, y^a r^{-2}, r^3 y^a \text{ mit } a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \\ x^a r x^b, x^a r^{-1} x^b, y^a r y^b, y^a r^{-1} y^b \text{ mit } a \cdot b > 0 \\ x^a r^2 x^b, x^a r^{-2} x^b, y^a r^2 y^b, y^a r^{-2} y^b \text{ mit } a \cdot b < 0 \\ rx^a r^{-1} \text{ mit } |a| \geq 3 \\ rx^a r^2 \text{ mit } a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \\ x^a r x^b r, y^a r^{-1} y^b r^{-1}, x^a r x^b r^2, y^a r^{-1} y^b r^{-2} \text{ mit } a \cdot b > 0 \\ ry^a r^2 y^b \text{ mit } a \cdot b < 0 \\ x^a r x^b r^{-1}, y^a r^{-1} y^b r \text{ mit } a \cdot b > 0, |b| \geq 3\end{gathered}$$

3. *Worte aus den Erzeugenden x, y und r:*

$$y^b r x^a, x^a r^{-1} y^b \text{ mit } a \cdot b < 0$$

4. *Worte aus den Erzeugenden x und m:*

$$m x^a \text{ mit } a \in \mathbb{Z}$$

5. *Worte aus den Erzeugenden y und m:*

$$m y^a, y^a m \text{ mit } a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

$$y^a m y^b, y^{-a} m y^{-b} \text{ mit } a, b \geq 1$$
$$m y^a m \text{ mit } |a| \geq 3$$
$$y^a m y^b m, y^{-a} m y^{-b} m \text{ mit } a \geq 1, b \geq 3$$

6. *Worte aus den Erzeugenden x, y und m:*

$$m x^a y^b, m x^{-a} y^{-b}, x^a y^b m, x^{-a} y^{-b} m \text{ mit } a, b \geq 1$$

$$m x^a y^b m, m x^{-a} y^{-b} m \text{ mit } a, b \geq 1$$

7. *Worte aus den Erzeugenden r und m:*

$$rm, mr, r^{-1}m, mr^{-1}, r^2 m, mr^2, r^{-2}m, mr^{-2}, r^3 m, mr^{-3}$$

$$rmr^{-1}, r^{-1}mr, rmr^{-2}, r^{-2}mr, r^{-1}mr^2, r^2 mr^{-1}$$

8. *Worte aus den Erzeugenden x, r und m:*

$$rmx^a, x^a rm, r^{-1}mx^a \text{ mit } a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

$$r^2 m x^a \text{ mit } a \in \mathbb{Z}\backslash\{-2, 0\}$$
$$r^{-2} m x^a, r^3 m x^a, m x^a r^3 \text{ mit } a > 0$$
$$mrx^a, mr^{-1}x^a, x^a mr^{-1}, mr^2 x^a, x^a mr^2, mr^{-2} x^a \text{ mit } a < 0$$
$$rmx^a r^{-1}, rmr^{-1}x^a, r^2 m x^a r^{-1}, r^2 m r^{-1} x^a, r^{-1} m x^a r^2 \text{ mit } a > 0$$
$$rmr^{-2}x^a, r^{-1}mr^2 x^a \text{ mit } a < 0$$
$$x^a r x^b m, x^a r^{-1} x^b m \text{ mit } a \cdot b > 0$$
$$rmx^a r^{-1} x^b, x^a r^2 m x^b, x^a r^{-2} m x^b, r^2 m x^a r^{-1} x^b \text{ mit } a, b > 0$$
$$x^a m r^2 x^b, x^a m r^{-2} x^b, x^a r x^b m r^{-1}, r x^a m r^{-2} x^b, r^{-1} x^a m r^2 x^b \text{ mit } a, b < 0$$
$$xmr^2, mr^3 x$$

9. *Worte aus den Erzeugenden y, r und m:*

$$r^{-1}my^a, r^{-2}my^a, mr^2y^a \text{ mit } a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

$$rmy^a, my^ar, mry^a, r^2my^a, r^2y^am, r^3my^a \text{ mit } a > 0$$

$$mr^{-1}y^a, r^{-1}y^am, mr^{-2}y^a, my^ar^{-2}, r^{-2}y^am \text{ mit } a < 0$$

$$r^{-1}mry^a, r^{-1}mr^2y^a, r^{-2}mry^a, y^{-1}r^2y^am \text{ mit } a > 0$$

$$rmr^{-1}y^a, rmr^{-2}y^a \text{ mit } a < 0$$

$$my^ary^b, y^ary^bm, y^amy^br, r^2y^amy^b \text{ mit } a, b > 0$$

$$r^{-1}y^amy^b, my^ar^{-1}y^b, y^ar^{-1}y^bm, y^ar^{-1}y^bmr^2, r^{-2}y^amy^b, y^amy^br^{-2} \text{ mit } a, b < 0$$

$$my^ar^2y^{-b}, y^ar^2mr^{-1}y^{-b} \text{ mit } a, b > 0$$

$$r^2mr^{-1}y^{-1}$$

10. *Worte aus den Erzeugenden x, y, r und m:*

$$xy^amr^2 \text{ mit } a > 0$$

$$rmx^ay^b, r^{-2}mx^ay^b, r^3mx^ay^b, mx^ar^2y^b \text{ mit } a, b > 0$$

$$x^ay^bmr^{-1} \text{ mit } a, b < 0$$

Beweis:

1. Die Behauptung folgt aus Satz 3.1.1 angewendet auf die Relationen $y^r = x^{-1}y$ und $y^m = x^{-1}y$.

2. Die Buchstaben x, y und r erzeugen die Gruppe $p6$ als Untergruppe in $p6mm$. Daher folgt die Behauptung aus 5.18.1.

3. Die Buchstaben x, y und r erzeugen die Gruppe $p6$ als Untergruppe in $p6mm$. Daher folgt die Behauptung aus 5.18.1.

4. Da m den Erzeugenden x invertiert und m Ordnung 2 hat, kann der Erzeugende m nur einmal in einem kurzen Wort auftreten und zwar mit dem Exponenten 1 und alle vorkommenden Potenzen von x lassen sich auf einer Seite von m zusammenfassen.

5. Die Behauptung folgt aus Satz 3.3.1 angewendet auf die Relation $y^m = x^{-1}y$.

6. Die Behauptung folgt aus Abschnitt 3.3 angewendet auf die Relation $y^m = x^{-1}y$.

7. Wendet man die Relation $r^m = r^{-1}y$ auf die möglichen Worte aus r und m an, so sieht man, dass die obigen Worte kurze Worte in ihrer jeweiligen Äquivalenzklasse sind und dass alle möglichen Worte durch die obigen Worte repräsentiert werden.

8. – 10. Jedes kurze Wort, in dem die Erzeugenden r, m und mindestens einer der Erzeugenden x und y vorkommen, ist äquivalent zu einem Wort der Form

$$r^\varepsilon m x^a y^b \text{ mit } \varepsilon \in \{-2,-1,1,2,3\} \text{ und } a,b \in \mathbb{Z}.$$

Diese Worte sind eindeutig, d.h. zwei solche Worte sind nicht äquivalent zueinander. Geht man umgekehrt von den Worten $r^\varepsilon m x^a y^b$ aus und bestimmt für alle ε und alle a, b die dazu äquivalenten kurzen Worte, so zeigt sich, dass die Worte, die in den Punkten 8. bis 10. aufgezählt sind, gerade die kurzen Worte aus den Erzeugenden r, m, x und y sind. □

Für die primitive Zeta-Funktion ergibt sich damit

Satz 5.19.2 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für $p6mm$ ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta_{prim}^{p6mm,S}(s) = \frac{1}{2}\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+2)^{-s} - \frac{1}{2} - 2^{-(s+1)}$$

Beweis:

1. Diese Worte liegen in der Untergruppe $p6$ von $p6mm$. Aus Satz 5.18.2 und der Tatsache, dass $mx^ay^bm = x^{-(a+b)}y^b$ ist, folgt, dass x^ay^b, $x^{a+b}y^{-a}$, $x^by^{-(a+b)}$, $x^{-a}y^{-b}$, $x^{-(a+b)}y^a$, $x^{-b}y^{a+b}$, $x^{-(a+b)}y^b$, $x^{-b}y^{-a}$, $x^ay^{-(a+b)}$, $x^{a+b}y^{-b}$, x^by^a und $x^{-a}y^{a+b}$ in einer Konjugationsklasse liegen. Damit sind diese Worte konjugiert zu kürzeren Worten, wenn $a \cdot b < 0$. Da $y = (rm)^2$ und $xy \sim x^{-1}y^2 = (my)^2$ ist, gibt es $\frac{1}{2}\varphi(n)$ primitive Konjugationsklassen je Wortnorm $n \geq 3$.

2. Diese Worte repräsentieren Elemente der Untergruppe $p6$ in $p6mm$. Aus Satz 5.18.2 folgt, dass diese Worte entweder nicht primitiv sind oder konjugiert sind zu kürzeren Worten.

3. Diese Worte repräsentieren ebenfalls Elemente von $p6$ und sind damit nach Satz 5.18.2 entweder nicht primitiv oder konjugiert zu kürzeren Worten.

4. Die Worte mx^a sind nicht primitiv, da $(mx^a)^2 = e$.

5. Offensichtlich liegen die Worte my^a, $y^a m$ und $y^{a'} m y^{b'}$ mit $a' \cdot b' > 0$ und $a' + b' = a$ in derselben Konjugationsklasse. Weiter ist
$$(mx^a y^b)^{2k} = x^{-kb} y^{2kb}$$
und damit
$$(mx^{kb} y^b)^{2k+1} = x^{-kb} y^{2kb} m x^{kb} y^b = m y^{(2k+1)b}.$$
D.h. es gibt 2 primitive Konjugationsklassen für jede Wortnorm $2^n + 1$ mit $n \geq 0$.
Die Worte $my^a m$ sind konjugiert zu kürzeren Worten. Und Konjugation mit r zeigt, dass $y^a m y^b m$ bzw. $y^{-a} m y^{-b} m$ konjugiert ist zu $x^a y^b$ bzw. $x^{-a} y^{-b}$, d.h. zu kürzeren Worten.

6. Es gilt $mx^a y^b \sim x^a y^b m$ und $mx^{-a} y^{-b} \sim x^{-a} y^{-b} m$. Und es gilt
$$xmx^a y^b x^{-1} = xymx^a y^{b-1} = ymx^{a-1} y^{b-1}$$
bzw.
$$x^{-1} m x^{-a} y^{-b} x = x^{-1} y^{-1} m x^{-a} y^{-(b-1)} = y^{-1} m x^{-(a-1)} y^{-(b-1)}.$$
D.h. diese Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten.
Die Worte $mx^a y^b m$ und $mx^{-a} y^{-b} m$ sind ebenfalls konjugiert zu kürzeren Worten.

7. Zunächst ist $rm \sim mr$, $r^{-1} m \sim mr^{-1}$, $r^2 m \sim mr^2$, $r^{-2} m \sim mr^{-2}$ und $r^3 m \sim mr^3$. Weiter ist $r^{-1} r^2 m r = ym$, $rr^{-2} m r^{-1} = my^{-1}$ und $r^{-1} r^3 m r = rym$, d.h. diese Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten.

8. – 10. Die Worte dieser Punkte verteilen sich auf 2 Konjugationsklassen. Das Kriterium ist dabei die Summe der Beträge der in einem Wort vorkommenden Exponenten des Erzeugenden r. Es gilt

   i. Worte, für die die Summe der Beträge der Exponenten des Erzeugenden r gleich 2 sind, sind für geeignete Exponenten von x und y konjugiert.
   ii. Worte, für die die Summe der Beträge der Exponenten des Erzeugenden r gleich 1 oder 3 sind, sind für geeignete Exponenten von x und y konjugiert.

   Es werden zunächst die Worte betrachtet, für die die Summe der Beträge der Exponenten von r gleich 2 ist. Diese Worte enthalten entweder $r^{\pm 2}$ oder sie enthalten r und r^{-1}, wobei zwischen diesen Teilwörtern der Erzeugende m steht. In beiden Fällen ist das Wort w äquivalent zu einem Wort w', für das gilt:

   i. w' beginnt entweder mit r und endet mit r^{-1} oder beginnt mit r^{-1} und endet mit r.

ii. $l(w') \leq l(w) + 2$, da beim Vertauschen von r bzw. r^{-1} mit m maximal 2 Buchstaben dazukommen.

Damit ist w konjugiert zu einem Wort w'', dessen Länge nicht größer ist als die Länge von w und in dem der Erzeugende r nicht vorkommt. Diese Worte wurden bereits in den vorherigen Punkten betrachtet.
Die Worte, für die die Summe der Beträge der Exponenten von r gleich 1 oder 3 ist, sind konjugiert zu rmx^a für geeignetes $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Es sei zunächst $a = 2b$ mit $b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Dann gilt:

$$rmx^{2b} = rx^{-b}mx^b = x^{-b}y^b rmx^b.$$

D.h. $rmx^{2b} \sim rmy^b$. Da $y = (rm)^2$ ist, ist rmy^b sowohl für positive als auch für negative b nicht primitiv. Sei jetzt $a = 2b + 1$. Dann ist $rmx^{2b+1} \sim rmxy^b$ und $rmx^{-(2b+1)} \sim rmx^{-1}y^{-b}$, wobei jetzt $b \geq 0$ ist. Außerdem ist $(mr^2y)rmx^{-1}y^{-b}(y^{-1}r^{-2}m) = rmxy^{b-1}$ für $b \geq 1$ und $(rmx^{-1})^2 = e$. Es müssen also nur die Worte $rmxy^b$ mit $b \geq 0$ betrachtet werden. Es gilt

$$(rmx^a)^{2k} = y^{k(a+1)}$$

und damit

$$(rmx^a)^{2k+1} = y^{k(a+1)}rmx^a = rmx^a y^{k(a+1)}.$$

Also ist $rmxy^b$ nicht primitiv, wenn b gerade ist. Weiter gilt

$$(rmx^a y^c)^{2k} = y^{k(a+2c+1)}$$

und damit

$$(rmx^a y^c)^{2k+1} = y^{k(a+2c+1)}rmx^a y^c = rmx^a y^{(2k+1)c+k(a+1)}.$$

Folglich ist $rmxy^b$ nicht primitiv, wenn $b = (2k+1)c + 2k$ ist. $rmxy^b$ repräsentiert damit eine primitive Konjugationsklasse, wenn

$$\begin{aligned} b &\neq (2k+1)c + 2k \\ b + 1 &\neq (2k+1)(c+1) \\ b + 1 &= 2^l \\ b &= 2^l - 1 \end{aligned}$$

Diese Worte sind dann auch kurz in ihrer jeweiligen Konjugationsklasse. Es gibt somit eine primitive Konjugationsklasse für jede Wortnorm $2^n + 2$ mit $n \geq 0$.

Zusammen mit Satz 4.2.2 ist dann

$$\begin{aligned}\zeta_{prim}^{p6mm,S}(s) &= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\varphi(n)n^{-s} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+2)^{-s} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)^{-s} + \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+2)^{-s} - \frac{1}{2} - 2^{-(s+1)}\end{aligned}$$

für $Re(s) > 2$

□

Und damit folgt für die Zeta-Funktion

Satz 5.19.3 *Es sei S das in Abschnitt 2.1 für* p6mm *ausgewählte Erzeugendensystem. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$:*

$$\zeta^{p6mm,S}(s) = \frac{1}{2}\zeta(s-1) + \frac{1}{2}(11 + 2^{-s})\zeta(s) - 3 + 3^{-(s-1)} + 4^{-s}$$

Beweis:

1. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass es $n+1$ Konjugationsklassen der Wortnorm $2n$ und n Konjugationsklassen der Wortnorm $2n-1$ mit $n \geq 1$ gibt.

2. Aus Satz 5.18.3 und der Relation $r^m = r^{-1}y$ folgt, dass die Worte r, r^2, r^2x, r^3 und r^3x kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.

3. Diese Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten.

4. Diese Worte sind für $|a| > 1$ konjugiert zu kürzeren Worten. Da $ymxy^{-1} = m$ ist, ist nur m ein kurzer Repräsentant seiner Konjugationsklasse.

5. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass die Worte my^a mit $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.

6. Diese Worte sind konjugiert zu kürzeren Worten.

7. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass die Worte rm und $r^{-1}m$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.

8. – 10. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt, dass die Worte rmx, rmx^{-1}, rmy^a, rmy^{-a} und $rmxy^a$ mit $a \geq 1$ kurze Repräsentanten ihrer jeweiligen Konjugationsklasse sind.

Es ist also

$$\begin{aligned}\zeta^{p6mm,S}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(2n)^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} n(2n-1)^{-s} + 1 + 2^{-s} + 2\cdot 3^{-s} + 4^{-s} + 1 \\ &\quad + 2\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} + 2\cdot 2^{-s} + 2\cdot 3^{-s} + 2\sum_{n=3}^{\infty} n^{-s} + \sum_{n=4}^{\infty} n^{-s} \\ &= \frac{1}{2}\zeta(s-1) + \frac{1}{2}(11 + 2^{-s})\zeta(s) - 3 + 3^{-(s-1)} + 4^{-s} \quad \text{für } Re(s) > 2\end{aligned}$$

□

6 Wachstumsfunktionen

Zur Berechnung der Zeta-Funktionen werden die Worte, die die Elemente einer 2-dimensionalen kristallographischen Gruppe repräsentieren, untersucht. Damit sind alle Informationen für die Berechnung der Wachstumsfunktion für diese Gruppen bereits vorhanden. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden noch einige allgemeine Aussagen zur Berechnung der Wachstumsfunktion gemacht, bevor dann im zweiten Abschnitt die Wachstumsfunktionen der 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen angegeben werden.

6.1 Berechnung der Wachstumsfunktion

Die *Wachstumsfunktion* einer Gruppe G ist definiert als die formale Potenzreihe

$$W_G(z) := \sum_{g \in G} z^{\|g\|} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n,$$

wobei b_n die Anzahl der Elemente von G ist, die die Wortnorm n haben. Um die Zeta-Funktionen der 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen zu berechnen, werden die Worte untersucht, die die Elemente der Gruppe repräsentieren. D.h. es wird zunächst eine Liste dieser Worte angegeben. Aus dieser Liste kann man den Koeffiezienten b_n der Wachtumsfunktion ablesen.
Die meisten Worte einer 2-dimensionalen kristallographischen Gruppe sind von einer der folgenden Formen

1. Es kommt genau eine Potenz von einem der Erzeugenden x oder y vor.

2. Es kommen genau zwei Potenzen von einem der Erzeugenden x oder y vor oder es kommt genau eine Potenz von x und eine Potenz von y vor.

Der Beitrag eines solchen Wortes zur Wachstumsfunktion läßt sich wie folgt berechnen:

1. Es sei a der Exponent von x oder y und m die Länge des Wortes, falls $a = 0$ ist. Es gibt damit ein oder zwei Worte der Länge $m + a$ mit $a \neq 0$, je nach dem ob $a = \pm a'$ mit $a' \in \mathbb{N}$ oder $a \in \mathbb{Z}$ ist. Also liefern Worte von dieser Form den Summanden
$$\alpha \sum_{n=m+1}^{\infty} z^n = \alpha \left(\frac{1}{1-z} - \sum_{n=0}^{m} z^n \right),$$
wobei $\alpha \in \{1, 2\}$ ist und $|z| < 1$ ist.

2. Es seien a und b die Exponenten von x bzw. y und m die Länge des Wortes, falls $a = 0 = b$ ist. Damit gibt es $\alpha \cdot (a+b+m)$ viele Worte der Länge $a+b+m+1$

mit $a, b \neq 0$, wobei α gleich 1, 2 oder 4 ist je nach dem, ob a bzw. b in $\mathbb{Z}$ oder in $\pm\mathbb{N}$ liegen. Also liefern Worte von dieser Form den Summanden

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} n z^{m+1+n} = \alpha z^{m+1} \frac{z}{(1-z)^2} = \alpha \frac{z^{m+2}}{(1-z)^2},$$

wobei $|z| < 1$ ist.

Da es in jeder 2-dimensionalen kristallographischen Gruppe nur endlich viele Worte gibt, die nicht von einer der obigen Formen sind, erhält man den folgenden Satz.

Satz 6.1.1 *Es sei G eine 2-dimensionale kristallographische Gruppe und S das zugehörige Erzeugendensystem. Dann ist die Wachstumsfunktion $W_{G,S}(z)$ rational.*

Die Liste der Wachstumsfunktionen im nächsten Abschnitt zeigt diese Aussage.

6.2 Liste der Wachstumsfunktionen

Die folgende Liste beinhaltet die Wachstumsfunktionen der 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen.

p1

$$W_{p1}(z) = \frac{(1+z)^2}{(1-z)^2}$$

p2

$$W_{p2}(z) = \frac{(1+z)^3}{(1-z)^2}$$

pm

$$W_{pm}(z) = \frac{(1+z)^3}{(1-z)^2}$$

pg

$$W_{pg}(z) = \frac{(1+z)(3z+1)}{(1-z)^2}$$

p2mm

$$W_{p2mm}(z) = \frac{(1+z)^4}{(1-z)^2}$$

p2mg

$$W_{p2mg}(z) = \frac{(1+z)^2(3z+1)}{(1-z)^2}$$

p2gg

$$W_{p2gg}(z) = \frac{(1+3z)^2}{(1-z)^2}$$

cm

$$W_{cm}(z) = \frac{(1+z)(2z^4-2z^3+3z^2+2z+1)}{(1-z)^2}$$

c2mm

$$W_{c2mm}(z) = \frac{(1+z)^2(2z^4-2z^3+3z^2+2z+1)}{(1-z)^2}$$

p4

$$W_{p4}(z) = \frac{(1+z)^4}{(1-z)^2}$$

p4mm

$$W_{p4mm}(z) = \frac{(1+z)^5}{(1-z)^2}$$

p4gm

$$W_{p4gm}(z) = \frac{z^4+13z^3+12z^2+5z+1}{(1-z)^2}$$

p3

$$W_{p3}(z) = \frac{2z^5+2z^3+9z^2+4z+1}{(1-z)^2}$$

p31m

$$W_{p31m}(z) = \frac{-2z^6+5z^5+6z^4+11z^3+11z^2+4z+1}{(1-z)^2}$$

p3m1

$$W_{p3m1}(z) = \frac{4z^5+2z^4+11z^3+15z^2+5z+1}{(1-z)^2}$$

p6

$$W_{p6}(z) = \frac{(1+z)(3z^4+3z^3+8z^2+3z+1)}{(1-z)^2}$$

p6mm

$$W_{p6mm}(z) = \frac{z^7-2z^6+4z^5+22z^4+26z^3+19z^2+5z+1}{(1-z)^2}$$

7 Anwendung des Taubersatzes

Mit Hilfe eines Spezialfalles des Taubersatzes von Ikehara läßt sich eine Aussage über das Wachstum der Koeffizienten der Zeta-Funktionen der 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen machen. Zunächst wird im ersten Abschnitt dieses Kapitels der Spezialfall des Taubersatzes angegeben. Im zweiten Abschnitt wird dann dieser Satz auf die ausgerechneten Zeta-Funktionen angewendet.

7.1 Taubersatz von Ikehara

Der folgende Satz ist ein Spezialfall des Taubersatzes von Ikehara.

Satz 7.1.1 *Es sei $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ eine Dirichlet-Reihe, die die folgenden Voraussetzungen erfüllt:*

1. *$a_n \geq 0$ für alle n,*
2. *$D(s)$ konvergiert absolut für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$,*
3. *$D(s)$ hat eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$,*
4. *$D(s)$ hat bei $s = 2$ einen Pol 1. Ordnung,*
5. *Auf der Geraden $Re(s) = 2$ liegt kein weiterer Pol von $D(s)$.*

Dann gilt

$$\sum_{n \leq x} a_n \sim \frac{\alpha}{2} \cdot x^2$$

für $x \to \infty$. Dabei ist α das Residuum von $D(s)$ bei $s = 2$.

Eine ausführliche Behandlung des Taubersatzes von Ikehara findet sich in [Del55].

7.2 Anwendung auf Zeta-Funktionen

Es sei G eine 2-dimensionale kristallographische Gruppe und S das im Abschnitt 2.1 ausgewählte Erzeugendensystem von G. Es seien

$$\zeta_{prim}^{G,S}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

und

$$\zeta^{G,S}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$$

die zu G gehörigen Zeta-Funktionen. Dann läßt sich über das Wachstum der Koeffizienten a_n und b_n folgende Aussage machen:

Satz 7.2.1 *Es sei G eine 2-dimensionale kristallographische Gruppe und es sei S das zugehörige Erzeugendensystem. Weiter seien a_n und b_n die Koeffizienten der Zeta-Funktionen. Dann gibt es $\alpha_{prim}, \alpha \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\sum_{n \le x}^{\infty} a_n \sim \frac{\alpha_{prim}}{2} \cdot x^2$$

und

$$\sum_{n \le x}^{\infty} b_n \sim \frac{\alpha}{2} \cdot x^2.$$

Weiter sind α und $\pi^2 \cdot \alpha_{prim}$ rational.

Beweis: Die Reihen $\zeta_{prim}^{G,S}(s)$ und $\zeta^{G,S}(s)$ erfüllen die Voraussetzungen des Taubersatzes von Ikehara. Da a_n die Anzahl der primitiven Konjugationsklassen und b_n die Anzahl der Konjugationsklassen überhaupt der Wortnorm n sind, sind diese per Definition größer oder gleich 0. Im Kapitel 5 wurde gezeigt, dass für alle 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen G mit den in Abschnitt 2.1 ausgewählten Erzeugendensystemen S die Zeta-Funktionen $\zeta_{prim}^{G,S}(s)$ und $\zeta^{G,S}(s)$ für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 2$ absolut konvergent sind und eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$ besitzen. Bei genauerer Betrachtung der Zeta-Funktionen sieht man, dass auch die Voraussetzungen 4. und 5. erfüllt sind.
Nach dem Taubersatz sind α_{prim} bzw. α die Residuuen von $\zeta_{prim}^{G,S}(s)$ und $\zeta^{G,S}(s)$ an der Stelle $s = 2$. Da $res_2 \zeta(s-1) = 1$ und $res_2 \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \frac{6}{\pi^2}$, sind $\pi^2 \cdot \alpha_{prim}$ und α rational. □

Literatur

[Aut90] M. Autenrieth. Konjugationsproblem in Fuchsschen Gruppen. Diplomarbeit, Georg-August-Universität Göttingen, 1990.

[Bar88] H.-J. Bartsch. *Taschenbuch mathematischer Formeln.* Verlag Harri Deutsch, 1988.

[CM84] H.S.M. Coxeter and W.O.J. Moser. *Generators and relations for discrete groups.* Springer-Verlag, 1984.

[Del55] H. Delange. Théorèmes taubèriens et applications arithmetiques. *Mém. Soc. Roy. Sci. Liège*, pages 5 – 87, 1955.

[dSMS99] M.P.F. du Sautoy, J.J. McDermott, and G.C. Smith. Zeta-funktions of crystallographic groups and analytic continuation. *Prc. London Math. Soc.*, 79(3):511 – 534, 1999.

[FL88] W. Fischer and I. Lieb. *Funktionentheorie.* vieweg studium, 1988.

[Gro87] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in Group Theory*, pages 75 – 263. Springer-Verlag, 1987.

[HL52] N.F.M. Henry and K. Lonsdale. *International Tables for X-ray Crystallography I.* Birmingham, 1952.

[HW54] G.H. Hardy and E.M. Wright. *An introduction to the theory of numbers.* Clarendon Press, 1954.

[LS77] R.C. Lyndon and P. Schupp. *Combinatorial Group Theory.* Springer-Verlag, 1977.

[Pol85] M. Pollicott. Asymptotic distribution of closed geodesics. *Israel J. Math.*, 52(3):209 – 224, 1985.

[Rue76] D. Ruelle. Zeta-funktions for expanding maps and anosov flows. *Invent. Math.*, 34:231 – 242, 1976.

[Tit67] E.C. Titchmarsh. *Riemann Zeta-Function.* Clarendon Press, second edition, 1967.

[Wei76] A. Weil. *Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker.* Springer-Verlag, 1976.