

Der Einfluss von Dispersionskompensation auf Solitonen in optischen Übertragungsstrecken

Inaugural-Dissertation

zur

**Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf**

vorgelegt von

Tobias Schäfer

aus Neckargartach

**Düsseldorf
2001**

Gedruckt mit der Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent: Prof. Dr. K.-H. Spatschek

Koreferent: Prof. Dr. R. Grauer

Tag der mündlichen Prüfung: 5. Februar 2001

Elektronisch veröffentlicht unter:

<http://www.ulb.uni-duesseldorf.de/diss/mathnat/2001/schaefer>

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	5
2. DM-Solitonen in der Numerik	9
2.1. Die NLSE und DM-Solitonen	9
2.2. Eigenschaften der DM-Solitonen	10
2.3. Numerisches Aufspüren von DM-Solitonen	13
3. Theoretische Modelle für DM-Solitonen	16
3.1. Überblick über die theoretischen Modelle	16
3.2. Charakteristische Skalen und Längen	17
3.3. Störungstheorie im Frequenzbereich	18
3.3.1. Herleitung der Gabbitov-Turitsyn Gleichung mit Lie-Transformation	18
3.3.2. Anwendungen der Gabbitov-Turitsyn-Gleichung auf eine symmetrische Dispersionsstufe	23
3.4. Erweiterung der Momentenmethode	25
3.4.1. Gleichungen für höhere Momente	25
3.4.2. Das geschlossene Gleichungssystem für höhere Momente	26
3.4.3. Bestimmung des Chirps	27
3.5. Gemittelte Gleichungen und Gauß-Hermite-Entwicklung	29
3.5.1. Gemittelte Gauß-Hermite-Entwicklung mit linearen Gleichungen für T und M	29
3.5.2. Betrachtung einer symmetrischen Dispersionsabbildung	30
3.5.3. Beschreibung der Energie-Quasiimpuls-Charakteristik	31
3.5.4. Gemittelte Gauß-Hermite-Entwicklung mit nichtlinearen Gleichungen für T und M	33
3.5.5. Beschreibung der periodischen Lösung	34
3.5.6. Analytische Beziehung für die Energie-Quasiimpuls-Charakteristik	35
3.6. Dynamisches Modell des DM-Solitons	38
3.6.1. Entwicklung in Gauß-Hermite-Eigenfunktionen	38
3.6.2. Neue Interpretation der Gleichungen für T und M	39

Inhaltsverzeichnis

3.6.3.	Lösung der Gleichung für die Gaußmode	40
3.6.4.	Störungstheorie für höhere Moden	40
3.6.5.	Approximation der Startverteilung	41
3.6.6.	Verhalten der Koeffizienten in Abhängigkeit von z	42
3.6.7.	Stabilität der approximativen Lösung	44
4.	Modellierung realer Übertragungsstrecken	46
4.1.	Die verallgemeinerte Schrödingergleichung	47
4.1.1.	Dispersion zweiter und dritter Ordnung	48
4.1.2.	Verlust in der Fiber	49
4.1.3.	Nichtlineare Terme	49
4.2.	Die dimensionslose Form der verallgemeinerten NLSE	50
4.3.	Ausbreitung eines Einzelpulses in der Fiber	51
5.	Vergleich und Bewertung der Modelle	53
6.	Zusammenfassung und Ausblick	55
A.	Herleitung der Gleichungen für höhere Momente	56
B.	Berechnung des Quasiimpulses	58
B.1.	Lösung des linearen Problems	58
B.2.	Berechnung von $\langle \frac{N^2}{T} \rangle$	58
B.3.	Berechnung von $\langle \frac{d}{T} \rangle$	59
C.	Die lineare Approximation der $E(k)$-Kurve	63
Literatur		64

1. Einleitung

Die Aufgabe der Kommunikationstechnik scheint auf den ersten Blick sehr einfach: Ein Signal, welches der Sender aussendet, soll am Empfänger möglichst unverändert ankommen. Auf dem Weg dazwischen wird es jedoch in der Regel von verschiedenen Effekten gestört, deren Wirkung man durch geeignete Vorkehrungen zu minimieren versucht. In Glasfaserkabeln ist das wichtigste Problem die Dämpfung des Signals, zu deren Kompensation man Verstärker einsetzt. Außerdem wirken die Dispersion und die Kerr-Nichtlinearität auf den Puls, durch welche dessen Form verändert wird [4],[13].

Eine Möglichkeit ist den Einfluss dieser Effekte einzeln zu minimieren. Bei der Dispersion kann dies beispielsweise dadurch geschehen, dass man ein Material benutzt, welches nur eine sehr geringe Dispersion besitzt. Derartige Materialien sind mittlererweile verfügbar, die bestehenden Netzwerke müssten dann jedoch (unter erheblichem Aufwand) ausgetauscht werden. Als Alternative bietet sich an, zusätzliche Glasfaserkabel (im Folgenden auch als "Fiber" bezeichnet) einzusetzen, deren Dispersion das entgegengesetzte Vorzeichen besitzt. Diese so genannte "Dispersionskompensation" ist effektiv und Kosten sparend. Die Wirkung der Nichtlinearität ist dagegen an die Amplitude des Pulses gekoppelt: Will man im fast linearen Bereich arbeiten, so muss auf die Vorteile höherer Energien (z.B. besseres Signal-Rauschverhältnis) verzichtet werden.

Eine alternative Vorgehensweise ist, nicht zu versuchen, den jeweiligen Einfluss von Nichtlinearität und Dispersion für sich alleine zu minimieren, sondern, anschaulich gesprochen, die Wirkung beider derart zu balancieren, dass der Puls eben aufgrund dieser Balance nahezu unverändert am Empfänger eintrifft. Stabile Pulse, welche durch ein derartiges Zusammenspiel von Dispersion und Nichtlinearität möglich werden, sind in vielen Bereichen der Physik als Solitonen bekannt. In der Regel werden unter diesem Begriff Lösungen einer integrierbaren partiellen Differentialgleichung verstanden. Lösungen, welche ähnliche Eigenschaften aufweisen, aber zu nichtintegrierbaren partiellen Differentialgleichungen gehören, werden gelegentlich im Unterschied hierzu als solitäre Wellen bezeichnet. Gerade im Bereich der Optik hat sich jedoch auch für diese Lösungen der Begriff des Solitons durchgesetzt und wird entsprechend auch in der vorliegenden Arbeit benutzt werden. Aufgrund ihrer nichtlinearen Natur können sie sehr energiereich sein, was für die Übertragung von Information einen großen Vorteil in Hinblick auf ein Signal-Rauschverhältnis bedeutet. Allerdings sind in speziellen Fiberlines unter Umständen auch hohe Energien notwendig, um Solitonen zu erzeugen.

Solitonen in Lichtwellenleitern werden seit etwa 27 Jahren diskutiert [20]. Die bereits vorhandenen Netze bestehen jedoch aus Fibern mit sehr hoher Dispersion, so dass die Nichtlinearität bei den zur Zeit in der Praxis genutzten Pulsleistungen zu schwach ist, diese ausgleichen zu können. Daher bietet sich auch hier wie bei der oben erwähnten "linearen" Technik an, zusätzliche Fibern zur Dispersionskompensation einzusetzen. Das sich dann ergebende System hat eine mittlere Gesamtdispersion, welche man durch Wahl der kompensierenden Fibern variieren kann. Charakteristisch für eine solche Übertragungstrecke ist demnach, dass sie aus Teilstrecken mit hoher lokaler Dispersion wechselnden Vorzeichens und einer niedrigen oder ver-

1. Einleitung

schwindenden Gesamtdispersion besteht. Die Gesamtdispersion kann dann wieder, anschaulich gesprochen, die Nichtlinearität balancieren und ein Soliton bilden.

Für die mathematische Beschreibung der Pulsübertragung in einer Fiberstrecke ist es notwendig, ein geeignetes mathematisches Modell zu benutzen. Sie wird für die Anwendungen auf die Kommunikationstechnik bei dem heutigen Stand in hinreichender Genauigkeit durch die kubisch nichtlineare Schrödingergleichung (NLSE von “nonlinear Schrödinger equation”) beschrieben. Das entsprechende Modell für eine periodische Anordnung zweier Fibern wechselnder Dispersion gestattet periodische Lösungen [30], welche zum Teil Eigenschaften besitzen, die denen “klassischer Solitonen” sehr ähnlich sind. Diese periodischen Lösungen sind der grundlegende Gegenstand der vorliegenden Arbeit und werden im Folgenden als “DM-Solitonen” (von “dispersion-managed solitons”) bezeichnet.

Da sie durch eine Balance der mittleren Dispersion und der Nichtlinearität gekennzeichnet sind, ist letztere naturgemäß ein wesentlicher Bestandteil ihrer mathematischen Beschreibung. Sie tritt als entsprechender Term in der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung in Erscheinung. Für die NLSE ist eine Inverse Streutheorie im Falle konstanter Koeffizienten bekannt [47]. Mit ihrer Hilfe lassen sich Existenz und wesentliche Eigenschaften klassischer Solitonen verstehen. In dem vorliegenden Fall von Systemen mit Dispersionskompensation variieren hingegen die Faktoren vor der Dispersion und vor der Nichtlinearität. Zwar ist das System in gewissen Spezialfällen noch stückweise integrierbar, im allgemeinen Fall jedoch ist keine Inverse Streutransformation und auch kein anderes Verfahren bekannt, mit welchem man das System exakt beschreiben und alle Eigenschaften der DM-Solitonen analytisch verstehen kann.

Somit besteht nicht nur ein praktisches, sondern auch ein theoretisches Interesse darin, die Pulsausbreitung in dispersionskompensierten Glasfaserübertragungssystemen mit Hilfe geeigneter Modelle analytisch zu verstehen. Ein Ziel der Entwicklung der entsprechenden Modelle ist dabei die Erklärung möglichst vieler der besonderen Eigenschaften der DM-Solitonen. Eine derartige besondere Eigenschaft sei hier als Beispiel genannt: DM-Solitonen besitzen eine charakteristische Energie E und einen sog. Quasiimpuls k . Erstaunlicherweise ist die Beziehung zwischen E und k nahezu linear und wir werden im Laufe der Arbeit sehen, wie dies analytisch verstanden werden kann.

Andererseits ist die Entwicklung von vereinfachten Modellen - in dem Sinne, dass man nicht mehr die PDE (von engl. “partial differential equation”, hier und im Folgenden ist die kubisch nichtlineare Schrödingergleichung gemeint) numerisch lösen muss, sondern deren Lösung durch einfachere Gleichungen approximieren kann - auch von praktischem Interesse. Die numerische Integration der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung ist zwar möglich und für einen speziellen Parametersatz, beispielsweise einer spezifizierten Fiberline (also einer Konfiguration von Glasfaserkabeln mit eventuellen zusätzlichen Bauelementen wie Verstärkern und Dämpfungsgliedern), nicht besonders aufwendig. Möchte man jedoch unter vielen möglichen Linearkonfigurationen diejenigen mit den besten Übertragungscharakteristiken herausfinden, so hat man ein Optimierungsproblem in einem unter Umständen hochdimensionalen Raum. In diesem Fall kann eine Reduktion der Rechenzeit für eine Konfiguration aufgrund der Tatsa-

1. Einleitung

che, dass man nicht die volle PDE, sondern ein vereinfachtes Modell löst, sehr viel Rechenzeit sparen.

Welche mathematischen Methoden gibt es, ein derartiges nichtlineares System approximativ zu beschreiben? Eine naheliegende Möglichkeit ist die Reduktion der partiellen Differentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen mittels Variationsprinzipien [5]. Diese Methode setzt eine “gute” Ansatzfunktion voraus, welche in der Regel durch physikalische Intuition und Motivation aus der Numerik gewonnen wird. Außerdem ist es schwierig, die Güte der Approximation festzustellen. Dennoch können mit Hilfe dieser Methode wichtige Ergebnisse schnell erzielt werden; es ist dann jedoch ratsam, Ergebnisse mit Hilfe anderer Methoden zu bestätigen und verstehen zu versuchen. Im hier betrachteten Falle können beispielsweise die für das System charakteristischen gewöhnlichen Differentialgleichungen für Breite und Phase des Pulses mit Hilfe eines Variationsprinzips hergeleitet werden und durch Betrachtung von Momenten [6], [34] der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung verstanden werden. Die nächste naheliegende Methode ist, sich die Periodizität des Systems zu Nutze zu machen und über die Einzelelemente zu mitteln. Dies kann beispielsweise mit Störungstheorie [11], einem Mehrskalenformalismus [2] oder der Lie-Transformation [10] erfolgen. Im Falle von nicht zu großen Pulsenergien liefern diese Mittelungsmethoden gute Approximationen der Lösung der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung.

Da man nur an lokalisierten Lösungen interessiert ist, bietet sich eine Entwicklung nach den Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators an [26]. Eine solche Entwicklung kann man mit den genannten Mittelungsmethoden kombinieren [25], [44]. Für höhere Energien jedoch ist dieses Vorgehen nicht mehr hinreichend genau. Daher wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit auch ein “dynamisches” Modell (im Gegensatz zu den gemittelten Modellen) entwickelt [35]. Es benutzt ebenfalls die Entwicklung nach den Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators, nicht aber eine Mittelung.

Um einzuschätzen, welche Modelle für welche Anwendungen sinnvoll sind und wie genau sie die charakteristischen Eigenschaften der DM-Solitonen beschreiben, werden in der vorliegenden Arbeit Gleichungen hergeleitet, welche die kubisch nichtlineare Schrödingergleichung auf ein einfacheres System reduzieren. Es werden verschiedene Anwendungen vorgestellt, wobei analytische Ergebnisse mit numerischen Simulationen der PDE verglichen werden.

Folgender Aufbau wurde gewählt: Zunächst werden im ersten Kapitel die DM-Solitonen als mathematische Objekte, also als Lösungen einer speziellen Form der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung, vorgestellt, und es wird kurz beschrieben, mit welchem Verfahren man sie numerisch gewinnen kann. Dann wird auf einige ihrer faszinierenden, augenscheinlich nichttrivialen Eigenschaften eingegangen, gleichermaßen als Motivation für den theoretischen Erklärungsbedarf.

Im dritten Kapitel werden dann die verschiedenen theoretischen Modelle dargestellt, mit welchen man die Eigenschaften der DM-Solitonen analytisch zu verstehen versucht. Zentrale Ergebnisse der Arbeit sind dabei die Herleitung der Korrektur 1. Ordnung für die Integralgleichung im Frequenzbereich (3.30) [10], die Erweiterung der Momentenmethode unter Einbeziehung höherer Momente (3.43-3.49) [42], die analytische Formel für die Energie-Quasiimpuls-

1. Einleitung

Charakteristik (3.96) und die Interpretation der Wahl der TM -Gleichungen (Gleichungen für Pulsbreite und Chirp, s.u.) [35], welche eine neue Einsicht in die fast zwei Jahre währende Diskussion, welche Form der TM -Gleichungen (linear oder nichtlinear) denn die “sinnvollere” wäre, liefert und die Reduktion der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung auf ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen (3.114, 3.115) [24].

Im vierten Kapitel wird gezeigt, dass die entwickelten Modelle nicht nur für die Beschreibung der DM-Solitonen genutzt werden können, sondern auch für den allgemeineren Fall der Pulsausbreitung in dissipativen Fiberlines und Konfigurationen, welche ebenfalls Verstärker enthalten, von Bedeutung sind. Dazu muss zunächst das Modell der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung diskutiert werden, um zu verstehen, welchen Gültigkeitsbereich die gewählten Modelle haben. Hier wird auch diskutiert, welche weiteren physikalischen Effekte in zukünftige Modellen einbezogen werden müssen, wenn sich die gegenwärtig äußerst schnelle Entwicklung zu immer kürzeren Pulsen in der Kommunikationstechnik weiter fortsetzt.

Letztlich werden die beschriebenen Modelle zusammenfassend verglichen und auf ihre Anwendbarkeit in Hinblick auf verschiedene Fragestellungen bewertet. Außerdem wird ein Ausblick auf mögliche Verallgemeinerungen der hier vorgestellten Methoden gegeben.

Im Anhang sind Details zu den teilweise langen analytischen Rechnungen zu finden, auf deren Darstellung im Hauptteil der Arbeit verzichtet wurde.

2. DM-Solitonen in der Numerik

2.1. Die NLSE und DM-Solitonen

Wir betrachten als Modell für die Pulsausbreitung im Lichtwellenleiter die kubisch nichtlineare Schrödingergleichung in der dimensionslosen Form [3]:

$$iA_z + d(z)A_{tt} + c(z)|A|^2A = 0. \quad (2.1)$$

Hierin bedeutet t die Zeit und z misst die Ausbreitung im Lichtwellenleiter, A ist die komplexwertige Funktion $A(z, t)$. Die Koeffizienten d und c sollen im Folgenden, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, für periodische Funktionen mit der Periodizitätslänge L stehen. Unter einem *DM-Soliton* soll dann eine Lösung von (2.1) verstanden werden, welche die Form

$$A(z, t) = F(z, t) \exp(ikz), \quad F(z, t) = F(z + L, t) \quad (2.2)$$

besitzt. Die Konstante k bezeichnen wir in Analogie zum Blochtheorem als *Quasiimpuls*. Offenbar genügt dann $F(z, t)$ der Beziehung

$$iF_z - kF + d(z)F_{tt} + c(z)|F|^2F = 0. \quad (2.3)$$

Die wichtigste Feststellung ist, dass es - in der numerischen Simulation und damit innerhalb der dort erreichbaren Genauigkeit - derartige DM-Solitonen überhaupt gibt [37], [8]. Betrachten wir als Beispiel eine symmetrische Dispersionskonfiguration (im Folgenden auch als "Dispersionsabbildung" bezeichnet) im (idealisierenden) verlustfreien Fall (d.h. $c(z) = const.$, z.B. $c(z) = 1$) mit der Periodizitätslänge $L = 1$. Für die Dispersion nehmen wir folgende Gestalt an:

$$d(z) = \begin{cases} d + \langle d \rangle & \text{für } 0 \leq z < \frac{1}{4} \\ -d + \langle d \rangle & \text{für } \frac{1}{4} \leq z < \frac{3}{4} \\ d + \langle d \rangle & \text{für } \frac{3}{4} \leq z < 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

Abbildung 2.1 zeigt eine periodische Lösung in der numerischen Simulation der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung zunächst in nichtlogarithmischer Auftragung der $|A|$ -Achse. Die Existenz solcher periodischen Lösungen ist eine mathematisch nichttriviale Frage, welche im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt werden soll. Des Weiteren ergibt sich die Frage nach möglichen weiteren, periodischen Lösungen. Von der Existenz eines antisymmetrischen DM-Solitons wird in [32] berichtet. Das antisymmetrische Soliton ist insofern von großer Bedeutung, als es mit seiner Existenz klar ist, dass nicht nur *eine* periodische Lösung existiert. Andererseits ist die Frage nach einer Charakterisierung aller periodischer Lösungen der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung mit periodischen Koeffizienten noch ungeklärt.

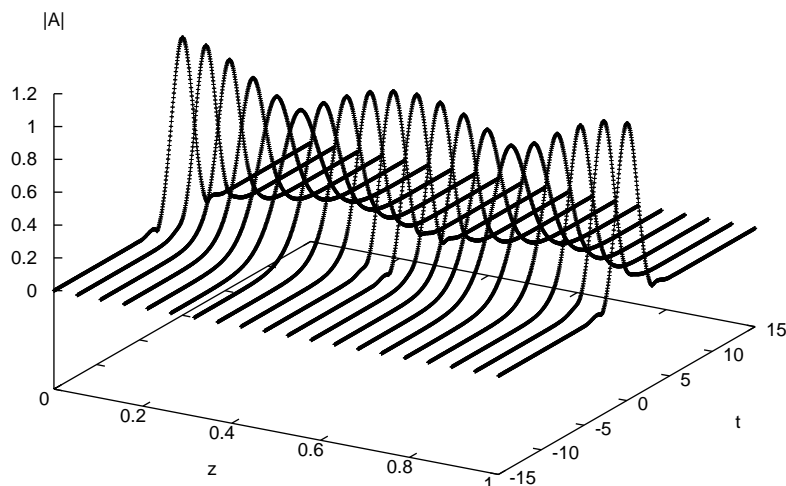


Abbildung 2.1: Numerisches DM-Soliton innerhalb einer Periode der Dispersionsabbildung (nichtlogarithmische $|A|$ -Achse)

2.2. Eigenschaften der DM-Solitonen

Betrachten wir im Detail ein typisches DM-Soliton als Ergebnis der numerischen Simulation der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung, wobei als Dispersionsprofil die oben eingeführte symmetrische Dispersionsstufe benutzt wurde. Das DM-Soliton in Abbildung 2.1 hat offenbar die gleiche Periode wie die Funktion $d(z)$. Aus der Abbildung ist weiterhin erkennbar, dass sich die Pulsbreite und -amplitude des DM-Solitons zwar innerhalb einer Periode verändert, die Pulsform jedoch nahezu unverändert bleibt.

Diese Feststellung, welche aufgrund der numerischen Simulation gewonnen wurde, dass die periodische Lösung selbstähnlich ist, ist für die Entwicklung einer geeigneten mathematischen Beschreibung der DM-Solitonen äußerst wichtig. Dies wird noch an mehreren Stellen der Arbeit deutlich werden. In der Literatur wird diese besondere Eigenschaft oft als “Atmen” des Solitons bei seiner z -Dynamik beschrieben [39], [36].

Abbildung 2.1 gibt einen Einblick in das Verhalten des Puls-kerns. Man kann erkennen, dass er lokalisiert ist und etwa die Form einer Gaußglocke hat. Das Verhalten der Ränder jedoch wird in dieser Abbildung kaum deutlich. Daher bietet es sich an, für das gleiche Soliton die Amplitude in logarithmischem Maßstab noch einmal aufzutragen. Dann (Abbildung 2.2) sieht man noch eine andere wichtige Eigenschaft des DM-Solitons, welche die Pulsränder betrifft. Jetzt ist erkennbar, dass das DM-Soliton interessante Strukturen aufweist: Offenbar gibt es in der

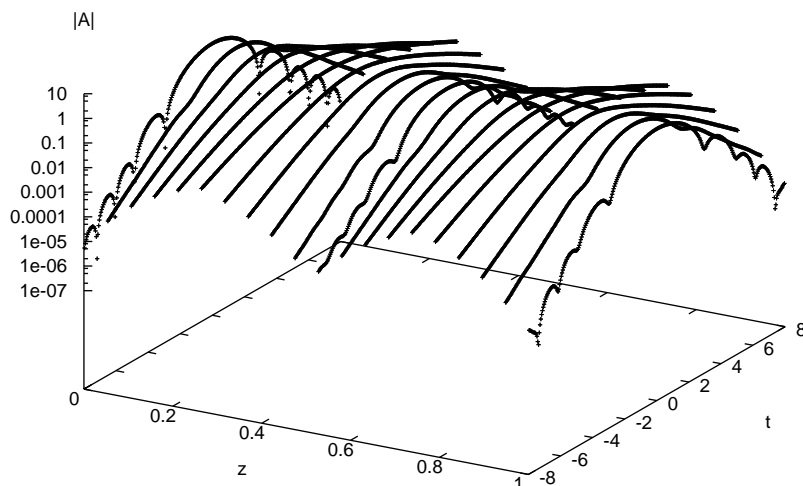


Abbildung 2.2: Numerisches DM-Soliton innerhalb einer Periode der Dispersionsabbildung (logarithmische $|A|$ -Achse).

Umgebung von den Mittelpunkten der einzelnen Fiberstücke zu gewissen t -Werten starke Einschnitte (Nullstellen) der Amplitude, welche in einer logarithmischen Auftragung naturgemäß besonders auffallen. Wir werden später sehen, dass die Oszillationen der im Zeitbereich weiter außen liegende Bereiche des Pulses als Einflüsse höherer Hermitemoden auf den gaußartigen Kern des DM-Solitons verstanden werden können.

In der obigen Abbildung ist lediglich die Amplitude dargestellt. Sie ist offenbar periodisch. Die Lösung hat sich jedoch nach Durchlaufen einer Dispersionsabbildung um einen Faktor $\exp(ikL)$ (im hier betrachteten Fall ist $L = 1$) verändert. Dieser Faktor verändert lediglich die Phase und tritt in den Abbildungen, welche die Amplitude darstellen nicht in Erscheinung. Bemerkenswert ist hierbei, dass der Phasenfaktor *konstant* ist, also keine Zeitabhängigkeit aufweist. Man bezeichnet daher k in Analogie zu der entsprechenden Begriffsbildung in der Festkörperphysik als “Quasiimpuls”. Die Bedeutung des Quasiimpulses liegt nun darin, dass man mit seiner Hilfe die DM-Solitonen charakterisieren kann, wie wir im Folgenden sehen werden.

Es stellt sich nun die Frage, ob es zu einer speziellen Dispersionsabbildung lediglich ein oder mehrere DM-Solitonen gibt. Bei der vorliegenden Diskussion beschränken wir uns auf Parameterbereiche, in denen eine einparametrische Familie von symmetrischen Lösungen existiert. Aus diesem Grund werden wir meist Fälle mit $\langle d \rangle \geq 0$ betrachten. Es sei jedoch erwähnt, dass es ebenfalls Solitonen im Bereich $\langle d \rangle < 0$ gibt [31], [15], [22]. In diesem Bereich genügt die

2. DM-Solitonen in der Numerik

Angabe einer Größe, sei es nun k , die anfängliche Pulsbreite oder die Energie

$$E(z) = \int |A(z,t)|^2 dt, \quad \frac{dE}{dz} = 0, \quad (2.5)$$

um ein Element der Familie zu kennzeichnen. Dementsprechend gibt es einen Zusammenhang zwischen dem Quasiimpuls und der Energie. Bestimmt man diesen numerisch, so ergibt sich die Abbildung 2.3. Dieser Zusammenhang ist charakteristisch für die Familie von Lösungen.

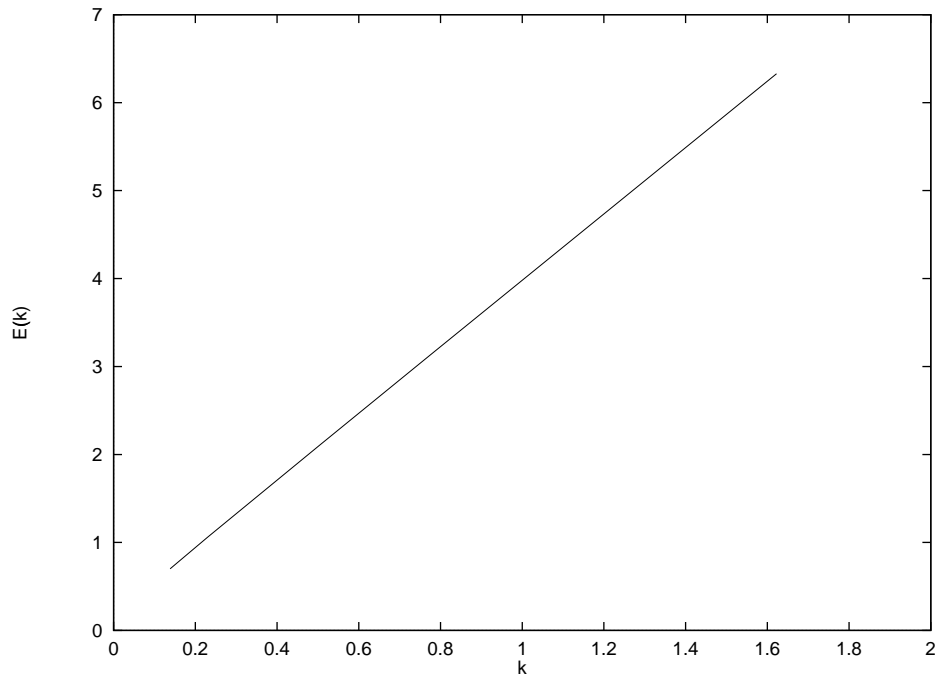


Abbildung 2.3: Zusammenhang zwischen Energie E und Quasiimpuls k in der numerischen Simulation.

Eine geeignete Theorie sollte in der Lage sein, ihn gut zu approximieren. Es ist auf den ersten Blick sehr erstaunlich, dass ein nichtlineares System eine so scheinbar einfache Charakteristik besitzt. In der Tat werden wir später das fast lineare Verhalten sogar analytisch verstehen können. Außerdem sei erwähnt, dass es es numerisch aufwendig ist, die in Abbildung 2.3 dargestellte Beziehung zu erhalten: Schließlich muss man für jeden Punkt eine periodische Lösung einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung suchen, was im vorliegenden Fall nicht einfach ist.

2.3. Numerisches Aufspüren von DM-Solitonen

Wie findet man ein DM-Soliton numerisch? Das Problem ist nicht ganz einfach: Schließlich handelt es sich um eine periodische Lösung einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung. Eine beliebige Anfangsbedingung über die Fiberstrecke zu integrieren ist einfach: Man kann sich eines Standardintegrationsverfahrens bedienen. So wurde in der Arbeit ein Split-Step-Integrator benutzt. Um jedoch diejenige Anfangsbedingung zu finden, welche eine periodische Lösung darstellt, bieten sich zwei Wege an:

Zum einen fängt man mit einer lokalisierten Anfangsbedingung (Gauß-Glocke oder Sekans hyperbolicus) an und integriert über sehr viele Perioden. Im Falle der integrierbaren nichtlinearen Schrödingergleichung [47] mit konstanten Koeffizienten weiß man aufgrund der Inversen Streutransformation, dass eine solche Anfangsbedingung, wenn sie geeignet gewählt wurde, auf ein Soliton “relaxiert”, also der Nichtsolitonenanteil in Form von Strahlung von dem Soliton getrennt wird. Es ergibt sich die Frage, ob sich DM-Solitonen ähnlich verhalten. In dem numerischen Experiment hierzu wurde wieder eine symmetrische Dispersionsabbildung betrachtet und eine anfängliche Gaußverteilung über viele Perioden integriert. Wie die folgende Abbildung 2.4 zeigt, ergeben sich Oszillationen in der Amplitude des Pulses, die mit zunehmender Anzahl der Integrationen geringer werden. Die Relaxation einer anfänglichen

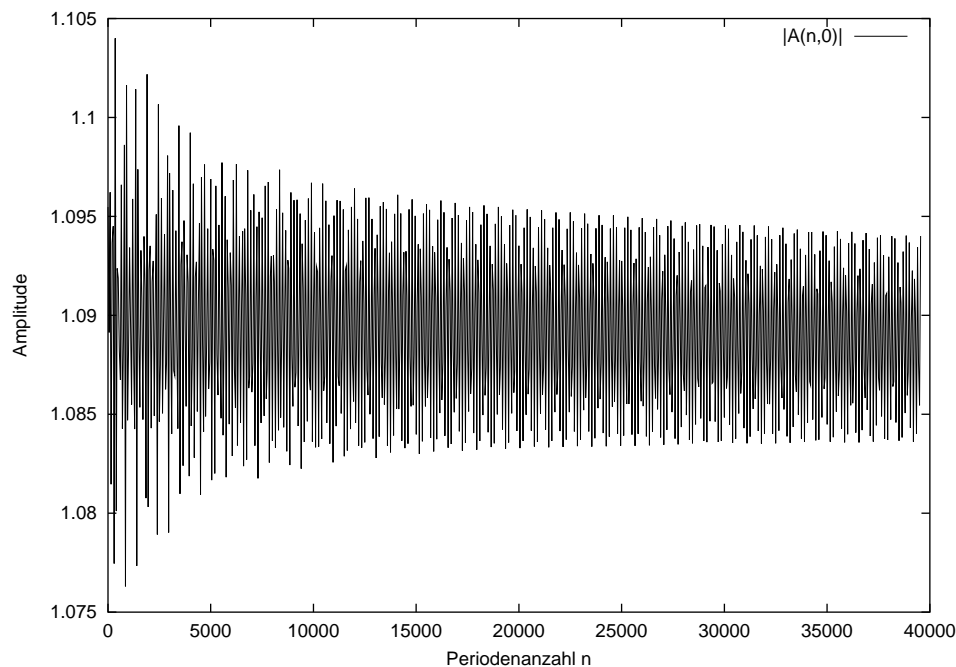


Abbildung 2.4: Entwicklung der Amplitude einer Gaußverteilung bei Integration über viele Perioden. Neben starken anfänglichen Oszillationen ist eine schwache Konvergenz erkennbar.

2. DM-Solitonen in der Numerik

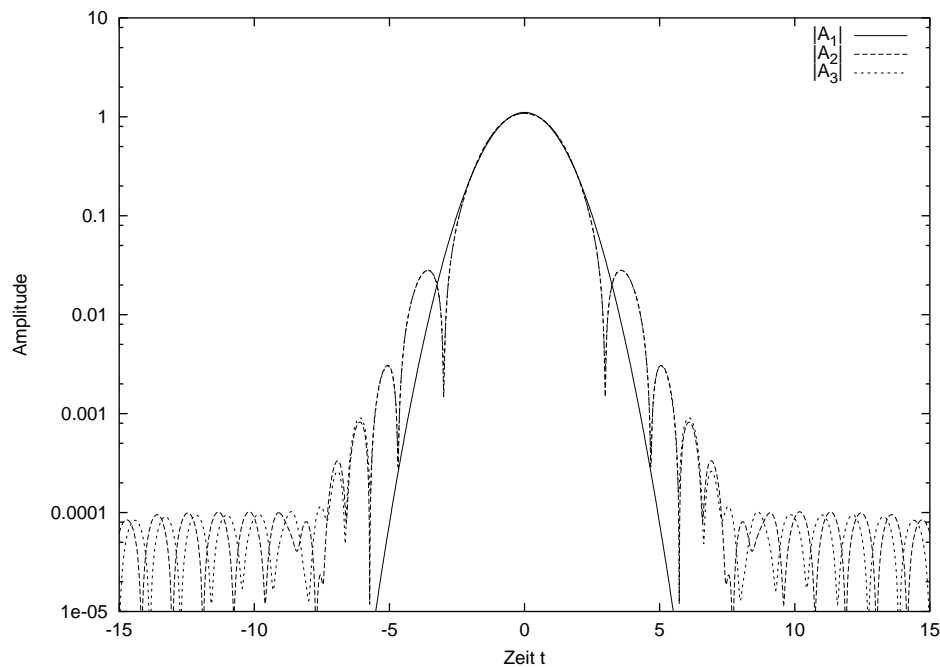


Abbildung 2.5: Vergleich der Amplitude der Anfangsverteilung ($|A_1|$) mit der Amplitude der Verteilung nach 31200 Perioden ($|A_2|$) und nach 31600 Perioden ($|A_3|$) der symmetrischen Dispersionsabbildung. Im Zentrum der Verteilung hat sich schon deutlich ein DM-Soliton herausgebildet, wogegen die Verteilung am Rand noch kein stationäres Verhalten zeigt.

Gaußverteilung auf ein DM-Soliton geht also sehr langsam vonstatten. Dies ist analog zum Verhalten der integrierbaren Schrödingergleichung zu sehen [23]. Interessant ist hierbei, dass die Oszillationen der Amplitude zu Beginn ein fast-periodisches Verhalten zeigen. Abbildung 2.6 zeigt einen Ausschnitt der Amplitudenoszillationen und vergleicht diesen mit einem um 209 Perioden verschobenen Ausschnitt. Des Weiteren ist auch eine Analogie zur aus der Inversen Streutheorie bekannten Strahlung erkennbar: Die Lösung relaxiert auf das DM-Soliton, indem Pulsanteile, die nicht zur periodischen Lösung gehören, in den bezüglich der Zeit weiter außen liegenden Bereich der Verteilung wandern. Im Rahmen der Inversen Streutheorie kann dies durch den Strahlungsterm im Kern der Marchenko-Integralgleichung [47] verstanden werden. Das Verhalten der DM-Solitonen ist insofern erstaunlich und vom theoretischen Standpunkt aus gesehen sehr interessant, da es sehr ähnlich zu dem der klassischen Solitonen der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung mit konstanten Koeffizienten ist. Aufgrund der langsamen Konvergenz ist dieses Verfahren jedoch ungeeignet dafür, ein DM-Soliton numerisch zu bestimmen. Hierfür mag man einem anderen Standardverfahren den Vorzug geben: Beginnt man mit einer lokalisierten Anfangsbedingung, die kein Soliton ist, so verändern sich jeweils nach einer Periode Halbwertsbreite und Pulshöhe. Man kann die Schwankungen nutzen, in-

2. DM-Solitonen in der Numerik

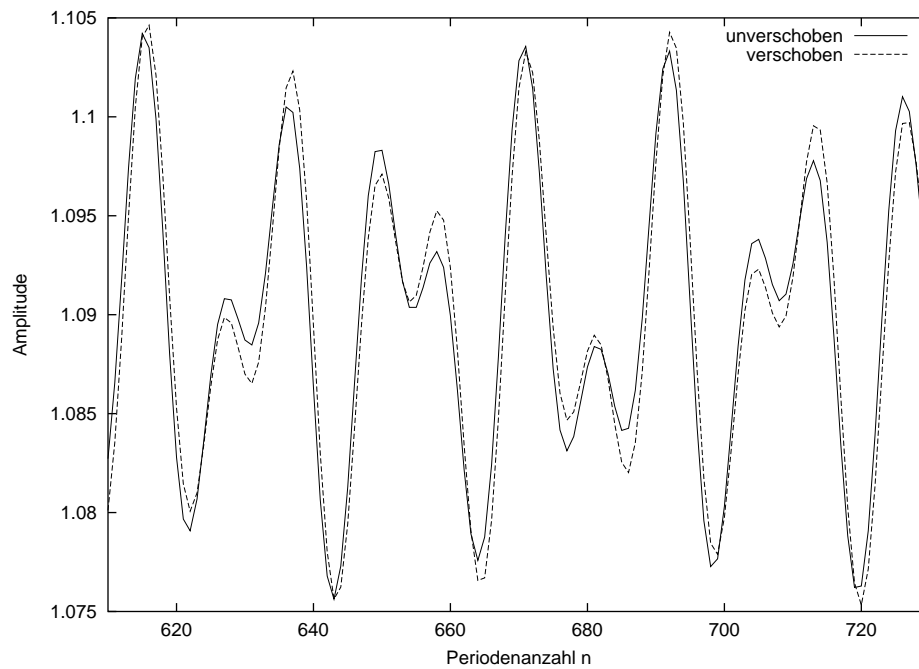


Abbildung 2.6: Fast-Periodizität der Amplitudenoszillationen. Die zweite Kurve ist um 209 Perioden nach rechts gegenüber der ersten verschoben worden.

dem man über Maximum und Minimum mittelt. Auch Mittelung durch zwei Wendepunkte ist erfolgreich [7]. Bei beiden Verfahren ist es jedoch notwendig, die entstehende “Strahlung” durch einen geeigneten Filtermechanismus in der Numerik zu eliminieren.

Der Aufwand für einen derartigen Prozess des numerischen “Solitonzüchtens” ist offenbar sehr stark davon abhängig, wie gut die Anfangsbedingung schon die richtige Lösung approximiert. Auch hier kann die Theorie, die im Folgenden dargestellt werden wird, gute Dienste leisten, wenn mit ihrer Hilfe leicht eine gute Startverteilung gefunden werden kann.

3. Theoretische Modelle für DM-Solitonen

3.1. Überblick über die theoretischen Modelle

In den vergangenen Jahren sind verschiedene Modelle vorgestellt worden, um die Pulsausbreitung in Lichtwellenleitern und speziell DM-Solitonen zu beschreiben [8]. Im Folgenden werden diejenigen Modelle diskutiert, welche im Rahmen der vorliegenden Arbeit benutzt, weiterentwickelt oder entworfen wurden.

Das erste Modell, welches auf einer Störungstheorie im Frequenzbereich basiert, ist als Gabitov-Turitsyn Gleichung [11] bekannt. In Erweiterung dieses Modells wird hier eine alternative Herleitung mittels Lie-Transformation präsentiert, welche neben der Gleichung noch eine Korrektur in erster Ordnung liefert [10].

In der Vergangenheit hat sich die Betrachtung von Momenten der Schrödingergleichung auch für die Beschreibung der DM-Solitonen bewährt [6]. Man kann zeigen, dass unter der Annahme einer parabolischen Phase die grundlegenden Gleichungen für Pulsbreite T und Chirp M direkt aus den Momentengleichungen der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung gewonnen werden können [34], [43]. Daher wird die Frage untersucht, ob die Methode für höhere Momente erweitert werden kann.

Die Störungstheorie im Zeitbereich stellt eine konsequente Anwendung des Wissens über den linearen Teil der Schrödingergleichung dar [25]. In der vorliegenden Arbeit wird ein etwas anderer Weg beschritten: mit einer gewöhnlichen Störungstheorie anstelle eines Mehrskalensformalismus und dann auf die Berechnung des Quasiimpulses von DM-Solitonen angewendet. Bei dieser Herangehensweise werden die linearen Gleichungen für T und M benutzt. Durch die Betrachtung von Momenten oder auch durch Variationsprinzipien wird jedoch die nichtlineare Version der Gleichungen für T und M nahegelegt. In der Tat kann man auch mit letzterer eine gemittelte Gleichung herleiten.

Alle Mittelungsverfahren können in nullter Ordnung jedoch nicht die Struktur des Pulses innerhalb einer Periode im Detail beschreiben. Dafür müssten höhere Ordnungen in die Modelle mit einbezogen werden, was zu sehr komplizierten Ausdrücken führt. Eine Alternative ist, auf eine Approximation via Mittelung zu verzichten. Dies führt auf ein nicht gemitteltes, dynamisches Modell. Seine Herleitung ermöglicht neben einer detaillierten Beschreibung des Pulses innerhalb einer Periode ebenfalls, die Wahl der TM -Gleichungen besser zu verstehen.

3.2. Charakteristische Skalen und Längen

Die Grundidee der verschiedenen Störungstheorien, die im Folgenden dargestellt werden, besteht im Wesentlichen darin, die Nichtlinearität als Störgröße zu betrachten. Dies kann man unter verschiedenen Blickwinkeln tun, da man bei der Ausgangsgleichung

$$iA_z + d(z)A_{tt} + c(z)|A|^2A = 0$$

drei Freiheiten (z , t , $|A|$) hat, das Problem zu skalieren und für die entsprechende Methode geeignet zu formulieren. Betrachten wir den Fall kleiner Nichtlinearität, den wir formal in der Form

$$iA_z + d(z)A_{tt} + \varepsilon c(z)|A|^2A = 0 \tag{3.1}$$

schreiben können und nehmen dabei an, dass die Funktionen d und c eine Periode der Ordnung 1 haben. Transformieren wir nun $z \rightarrow z/\varepsilon$, so erhalten wir

$$iA_z + \frac{1}{\varepsilon}d\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)A_{tt} + c\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)|A|^2A = 0 \tag{3.2}$$

so dass die Koeffizienten nun eine Periode der Ordnung ε aufweisen. Während (3.1) für eine gewöhnliche Störungstheorie geeignet ist, kann man (3.2) für die Anwendung eines Mehrskalformalismus [2] oder Lie-Transformation [11] benutzen. Da in diesem Fall die Dispersion groß ist (daher die Bezeichnung ‘‘Dispersionsmanagement’’), ist die *Guiding-Center-Theory* von Hasegawa und Kodama [16], [17], [18] auf den vorliegenden Fall nicht anwendbar [34]. Somit ist verständlich, dass die Gestalt der DM-Solitonen stark von dem Größenverhältnis der sie bestimmenden Parameter, insbesondere vom Verhältnis der lokalen Dispersion d zur mittleren Dispersion $\langle d \rangle$ abhängt. Würden wir große mittlere Dispersionen betrachten, so würde Gleichung (3.2) bis zur Ordnung ε^2 in die integrable Form der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung übergehen [47]. Dieser Bereich wird in der *Guiding-Center-Theory* beschrieben. Als Lösungen erhält man klassische Solitonen, also z.B. Lösungen mit einem Sekans-Hyperbolicus-Profil. Verringert man die mittlere Dispersion, so kommt man in den hier interessierenden Bereich des Dispersionmanagements, wobei die DM-Solitonen unterschiedliche Formen der Einhüllenden aufweisen, wie die folgenden Abbildungen 3.1 und 3.2 zeigen. Hier ist zu bemerken, dass die entsprechenden Simulationen mit umso höherer Genauigkeit bewerkstelligt werden müssen, je größer $|t|$ ist. Daher ist es schwierig, verlässliche Aussagen über die Asymptotik für $t \rightarrow \infty$ zu machen. Allerdings lassen sich die Ergebnisse mit den numerischen Simulationen der im nächsten Paragraphen hergeleiteten Integralgleichung vergleichen [8].

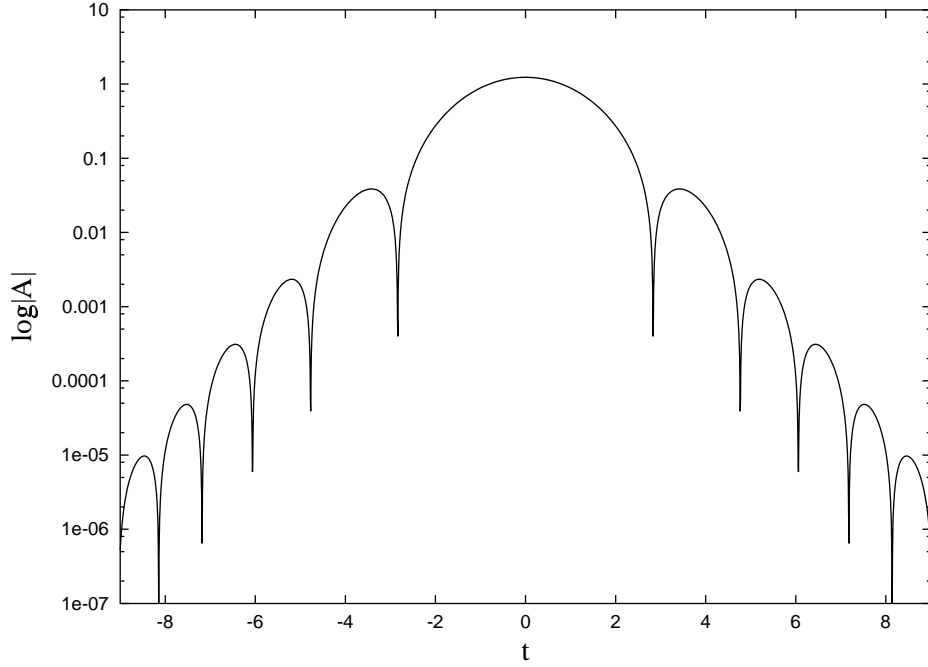


Abbildung 3.1: Numerisches DM-Soliton für die Parameter $L = 0.1$, $d = 50.0$ und $\langle d \rangle = 0.15$.

3.3. Störungstheorie im Frequenzbereich

3.3.1. Herleitung der Gabitov-Turitsyn Gleichung mit Lie-Transformation

Bei der hier gewählten Form der Störungstheorie im Frequenzbereich gehen wir von (3.2) aus, schreiben aber im Folgenden in den Argumenten lediglich z . Wir teilen die auftretenden Koeffizienten in einen konstanten und einen variierenden Teil auf:

$$d(z) = \langle d \rangle + \tilde{d}(z), \quad c(z) = \langle c \rangle + \tilde{c}(z). \quad (3.3)$$

Die Klammern $\langle \dots \rangle$ bedeuten dabei Mittelung (Integration) über eine Periode. Um die Lie-Transformation zu nutzen, muss man zuerst eine geeignete Transformation anwenden, um sich des Faktors $\frac{1}{\varepsilon}$ vor dem Dispersionskoeffizienten zu entledigen. In [34] wurde gezeigt, dass die Linsentransformation ein geeigneter Wegbereiter für eine Lie-Transformation ist, welche im Raum der Entwicklungskoeffizienten einer Entwicklung nach Hermite-Eigenfunktionen operiert. Für eine Störungstheorie im Frequenzbereich ist daher eine Fourier-ähnliche Transformation erfolversprechend:

$$A(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega u_{\omega}(\omega, z) \exp[-i\omega t - i\omega^2 \tilde{d}_1 + i\omega^2 \frac{\langle \tilde{c} \tilde{d}_1 \rangle}{\langle c \rangle}], \quad (3.4)$$

3. Theoretische Modelle für DM-Solitonen

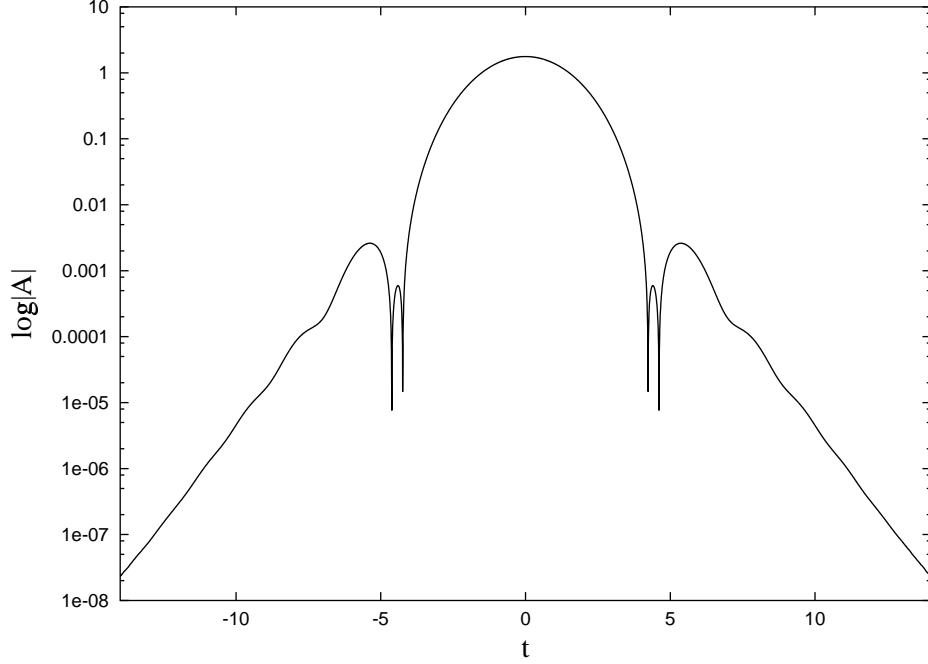


Abbildung 3.2: Numerisches DM-Soliton für die Parameter $L = 0.1$, $d = 50.0$ und $\langle d \rangle = 0.90$.

wobei

$$\frac{d}{dz}\tilde{d}_1 = \tilde{d} \rightarrow \tilde{d}_1 = \int_0^z dz \tilde{d}(z) + d_{10}, \quad (3.5)$$

und die Integrationskonstante d_{10} so festgelegt wird, dass für die Funktion \tilde{d}_1 gilt: $\langle \tilde{d}_1 \rangle = 0$. Nach der Transformation erhält man eine Integro-Differentialgleichung im Frequenzbereich für die Funktion u_ω ,

$$i \frac{du_\omega}{dz} - \langle d \rangle \omega^2 u_\omega + J_\omega = 0, \quad (3.6)$$

wobei der Integralterm J_ω durch

$$J_\omega(\omega, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega) F u_{\omega_1} u_{\omega_2} u_{\omega_3}^* \quad (3.7)$$

gegeben ist. Der Kern F hängt von allen Frequenzen und der Ausbreitungskoordinate z ab:

$$F(\omega_1, \omega_2; \omega_3, \omega; z) = \tilde{c}(z) \exp[-i\beta d_1(z) + i\beta \frac{\langle \tilde{c} \tilde{d}_1 \rangle}{\langle c \rangle}], \quad (3.8)$$

$$\beta = \omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 - \omega^2. \quad (3.9)$$

Offenbar ist u_ω aufgrund der Terme $\omega^2 \tilde{d}_1$ und $\omega^2 \langle \tilde{c} \tilde{d}_1 \rangle / \langle c \rangle$ nicht die Fourier-Transformierte. Der Grund für die zusätzlichen Terme ist, dass das Ergebnis am Ende im Grenzfall kleiner

3. Theoretische Modelle für DM-Solitonen

Dispersionschwankungen mit dem von Hasegawa und Kodama [19] konsistent sein soll. Um die Gleichung durch Anwendung der Lie-Transformation zu mitteln, schreibt man (3.6) im Zeitbereich, indem man die inverse Fourier-Transformation

$$u(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega u_{\omega}(\omega, z) \exp[-i\omega t] \quad (3.10)$$

benutzt und erhält

$$\frac{du}{dz} = X[u, u^*; z] = i\langle d \rangle u_{tt} + iJ. \quad (3.11)$$

Die Schreibweise $X[u, u^*; z]$ bedeutet dabei, dass X ein Ausdruck ist, in welchem u und u^* , sowie deren Ableitungen in t , also z.B. u_{tt} auftreten und die Koeffizienten eine explizite Abhängigkeit von z haben.

Der Term J ist dabei durch

$$J = F(i\partial_{t_1}, i\partial_{t_2}; -i\partial_{t_3}, -i\partial_t = i(\partial_{t_1} + \partial_{t_2} + \partial_{t_3}); z) \{u(t_1)u(t_2)u^*(t_3)\} |_{t_i=t} \quad (3.12)$$

gegeben, wobei man den Operator F dadurch erhält, dass man in dem Ausdruck (3.8) die Substitution $\omega \rightarrow i\partial_t$ vornimmt. Die erste Differentiation $i\partial_{t_1}$ in dem Operator F wirkt dabei lediglich auf den ersten Faktor $u(t_1)$. Nachdem alle Differentiationen vorgenommen wurden, hat man $t_i = t, i = 1, 2, 3$ zu setzen. Die Exponentialfunktion in (3.8) ist als Potenzreihenentwicklung zu verstehen und entsprechend lässt sich J als Summe von Differentialoperatoren darstellen.

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Gleichung (3.11) mit Hilfe einer Lie-Transformation [29],[19] auf die Form

$$\frac{dv}{dz} = Y[v, v^*] \quad (3.13)$$

bringen, bei welcher die rechte Seite nicht explizit von z abhängt. Natürlich ist $v = v(z, t)$, aber die Koeffizienten auf der rechten Seite der Gleichung sollen nicht mehr von z abhängen. Für die Lie-Transformation benutzt man den Ansatz

$$u = e^{\phi \nabla} v = v + \phi + \frac{1}{2} \phi \nabla \phi + \dots, \quad (3.14)$$

wobei $\phi = \phi[v, v^*; z]$, die Erzeugende der Transformation, eine explizite Abhängigkeit von z und außerdem auch von v, v^* und allen deren Ableitungen nach t enthält. Außerdem soll ϕ periodisch sein und die gleiche Periode wie die Koeffizienten d und c besitzen. Die Richtungsableitung $\phi \nabla$ ist dabei als

$$\phi \nabla = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\phi_{nt} \frac{\partial}{\partial v_{nt}} + \phi_{nt}^* \frac{\partial}{\partial v_{nt}^*} \right] \quad (3.15)$$

3. Theoretische Modelle für DM-Solitonen

definiert, wobei $\phi_{nt} = \partial^n \phi / \partial t^n$, $v_{nt} = \partial^n v / \partial t^n$. Um ϕ und Y zu bestimmen, machen wir davon Gebrauch, dass die Koeffizienten eine Periode ε besitzen. Daher ist eine Entwicklung von Y und ϕ in der Form

$$Y = Y_0 + Y_1 + Y_2 \dots, \quad \phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 \dots, \quad O(Y_n) = O(\phi_n) = \varepsilon^n \quad (3.16)$$

sinnvoll, da sich dann aufgrund von

$$O\left(\frac{d}{dz}\phi_n\right) = O(\phi_{n-1}) \quad (3.17)$$

die unbekanntes Y_n und ϕ_n bestimmen lassen. In der nullten Ordnung erhält man auf diese Weise:

$$Y_0 + \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = X. \quad (3.18)$$

und nach Integration über eine Periode wegen der Periodizität von ϕ und somit aller ϕ_n , also $\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \rangle = 0$,

$$Y_0 = \langle X \rangle = i \langle d \rangle v_{tt} + i \langle J \rangle, \quad (3.19)$$

$$\langle J \rangle = \langle F \rangle \{v(t_1)v(t_2)v^*(t_3)\}|_{t_i=t}. \quad (3.20)$$

Dies ergibt dann wiederum eine Gleichung für ϕ_1

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = i\tilde{J} = iJ - i \langle J \rangle, \quad \phi_1 = \phi_{10} + i\tilde{J}_1 \quad (3.21)$$

wobei

$$\frac{\partial}{\partial z}\tilde{J}_1 = \tilde{J}, \quad \langle \tilde{J}_1 \rangle = 0. \quad (3.22)$$

Die Integrationskonstante $\phi_{10}[v, v^*]$ wird erst in der nächsten Ordnung festgelegt. In der ersten Ordnung erhält man entsprechend

$$Y_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \frac{1}{2}[\phi_1, \frac{\partial \phi_1}{\partial z}] + [\phi_1, \langle X \rangle] \quad (3.23)$$

und nach Integration über eine Periode

$$Y_1 = \frac{1}{2}\langle [\phi_1, \frac{\partial \phi_1}{\partial z}] \rangle + [\langle \phi_1 \rangle, \langle X \rangle]. \quad (3.24)$$

Hier stehen die eckigen Klammern für die üblichen Poissonklammern unter Berücksichtigung der Definition (3.15). Im Falle von moderatem Dispersionsmanagement, wenn die lokalen Variationen der Dispersion nicht allzu groß sind, kann man die Integrationskonstante ϕ_{10} derart wählen, dass Y_1 verschwindet [19]. In dem vorliegenden Fall ist nicht klar, ob dies ebenfalls möglich ist. Allerdings ist in der Beziehung (3.23) die Beschreibung von moderatem Dispersionsmanagement als Spezialfall enthalten. In diesem Fall steht vor dem variierenden Teil der

3. Theoretische Modelle für DM-Solitonen

Dispersion (vgl. (3.2)) noch ein ϵ , so dass man F in (3.8) in eine Taylorreihe entwickeln kann und dabei dann in der nullten und ersten Ordnung

$$F \approx \tilde{c} \left(1 - i\beta \tilde{d}_1 + i\beta \frac{\langle \tilde{c} \tilde{d}_1 \rangle}{\langle c \rangle} \right) \quad (3.25)$$

erhält. Mittelt man über eine Periode, so heben sich die beiden Terme, in denen \tilde{d}_1 steht, hinweg, wir erhalten

$$\langle F \rangle \approx \langle c \rangle. \quad (3.26)$$

Daraus folgt, dass $\langle F \rangle$ keine Ableitungsoperatoren mehr enthält. Die Gleichung (3.21) ist eine Gleichung in *nullter* Ordnung in ϵ , so dass hier ebenfalls nur der erste Term in der Entwicklung (3.25) zum Tragen kommt. Daher kann man

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = i\tilde{c} v^2 v^*, \quad \phi_1 = \phi_{10} + i\tilde{c}_1 v^2 v^* \quad (3.27)$$

schreiben, wobei $d\tilde{c}_1/dz = \tilde{c}$, $\langle \tilde{c}_1 \rangle = 0$. Wählt man an dieser Stelle die Konstante $\phi_{10} = 0$ und setzt die Ausdrücke (3.25) - (3.27) in die Definition von Y_1 (3.24) ein, so folgt in dieser Näherung

$$Y_1 = 0, \quad (3.28)$$

also das Ergebnis, welches in diesem Fall auch durch direktes Anwenden der Lie-Transformation [19] oder einen Mehrskalenformalismus [45] erhalten werden kann.

Insgesamt haben wir eine Gleichung im Frequenzbereich für die langsame Veränderung der Lösung, also für v in (3.14), erhalten, und zwar

$$i \frac{\partial v_\omega(z)}{\partial z} = \omega^2 \langle d \rangle v_\omega(z) - \frac{1}{(2\pi)^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega - \omega_3) \langle F(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega) \rangle v_{\omega_1} v_{\omega_2} v_{\omega_3}^*. \quad (3.29)$$

Gleichung (3.29) ist die sogenannte *Gabitov-Turitsyn*-Gleichung [11] und kann ebenfalls mit Hilfe eines Mehrskalenformalismus [2] oder gewöhnlicher Störungstheorie hergeleitet werden. Die hier vorgestellte Herleitung mittels Lie-Transformation liefert direkt die dynamische Korrektur im Frequenzbereich in der Form

$$u_\omega = v_\omega + \frac{i}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega - \omega_3) \tilde{F}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega) v_{\omega_1} v_{\omega_2} v_{\omega_3}^* \quad (3.30)$$

mit $\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial z} = \tilde{F} = F - \langle F \rangle$ und $\langle \tilde{F}_1 \rangle = 0$. Ein Vorteil der Lie-Transformation ist außerdem, dass sich die vorgestellten Rechnungen einfach auf höhere Ordnungen verallgemeinern lassen.

Die in diesem Kapitel vorgestellte Methode ist sehr allgemein: Sie nutzt es aus, dass die Nicht-linearität klein ist und in nullter Ordnung das System durch seine linearen Eigenschaften bestimmt wird. In nullter Ordnung lässt sich das System leicht mit Fouriertransformation lösen.

In der ersten Ordnung erhält man dann eine Integralgleichung, welche zeigt, wie die Eigenschaften des linearen Systems durch die Nichtlinearität verändert werden. Bei dieser Methode wurden keine besonderen Annahmen über die Pulsform gemacht. Lediglich müssen alle notierten Integrale existieren, insofern müssen die Integranden hinreichend schnell im Unendlichen verschwinden. Entscheidend jedoch ist, dass die Ergebnisse sowohl für einen Pulse wie auch mehrere Pulse gültig sind.

Die Gabitov-Turitsyn-Gleichung ist das Ergebnis einer störungstheoretischen Entwicklung. Es wurde gezeigt, dass man mit Hilfe der Lie-Transformation leicht die Korrektur in der nächsten Ordnung bestimmen kann. Dies ist, da der Kleinheitsparameter der Entwicklung an die Schwäche der Nichtlinearität gekoppelt ist, für die Beschreibung der Ausbreitung eines Signals mit größeren Amplituden wichtig.

Dennoch bleibt zu bemerken, dass die analytische Auswertung der Gabitov-Turitsyn-Gleichung und der höheren Ordnungen im Allgemeinen sehr kompliziert ist. Im Falle einer symmetrischen Dispersionsabbildung kann man, dies wird das folgende Kapitel zeigen, zumindest den Kern der Integralgleichung bestimmen.

3.3.2. Anwendungen der Gabitov-Turitsyn-Gleichung auf eine symmetrische Dispersionsstufe

Im Falle einer symmetrischen, konstanten Dispersionsabbildung hängt \tilde{d}_1 linear von z ab, und \tilde{F}_1 lässt sich analytisch berechnen. Dabei gehen wir wieder vom verlustfreien Fall $c(z) = \text{const.} = I_0$ aus. Zunächst erhält man

$$\left\langle \frac{F}{I_0} \right\rangle = \langle e^{2iB\tilde{d}_1} \rangle = \frac{e^{\frac{iBd}{2}} - e^{-\frac{iBd}{2}}}{iBd} = \frac{\sin \Theta}{\Theta}, \quad \Theta = \frac{Bd}{2}, \quad (3.31)$$

$$\frac{\tilde{F}}{I_0} = \exp[i\Theta(4z-1)] - \frac{\sin \Theta}{\Theta}, \quad z \leq \frac{1}{2}, \quad (3.32)$$

$$\frac{\tilde{F}}{I_0} = \exp[-i\Theta(4z-3)] - \frac{\sin \Theta}{\Theta}, \quad z \geq \frac{1}{2}. \quad (3.33)$$

Daraufhin folgt für \tilde{F}_1

$$\frac{\tilde{F}_1}{I_0} = \frac{\exp[i\Theta(4z-1)]}{4i\Theta} - \frac{\sin \Theta}{\Theta} z - \frac{\exp[-i\Theta]}{4i\Theta}, \quad z \leq \frac{1}{2}, \quad (3.34)$$

$$\frac{\tilde{F}_1}{I_0} = -\frac{\exp[-i\Theta(4z-3)]}{4i\Theta} - \frac{\sin \Theta}{\Theta} z + \frac{2\exp[i\Theta] - \exp[-i\Theta]}{4i\Theta}, \quad z \geq \frac{1}{2}. \quad (3.35)$$

Obwohl in dem vorliegenden Fall der Kern der Gabitov-Turitsyn-Gleichung analytisch bestimmt wurde, ist ein Lösen der Gleichung auf analytischem Wege dennoch schwierig. Numerisch lässt sich die Gleichung einfach iterieren und z.B. dazu nutzen, eine geeignete Startverteilung für das ‘‘Züchten’’ eines DM-Solitons zu erhalten [2],[8]. Eine weitere Möglichkeit

3. Theoretische Modelle für DM-Solitonen

ist, ein solches Iterationsverfahren ebenfalls analytisch zu nutzen, also z.B. von einer Gauß-Verteilung auszugehen, sie in die Gleichung einzusetzen und die erste Iterierte zu bestimmen [27]. Trotz ihrer Komplexität ist die Gabbitov-Turitsyn-Gleichung und die Korrektur in erster Ordnung dennoch aufgrund ihrer Allgemeinheit von Bedeutung: Sie macht keine Aussagen über die spezielle Gestalt der Pulsform, ist daher auch für Systeme gültig, in denen mehrere Pulse auch nichtlinear miteinander wechselwirken. Im Folgenden soll jedoch die Betrachtung auf die DM-Solitonen, welche im 2. Kapitel der Arbeit vorgestellt worden sind, konzentriert werden. In diesem Fall kann man die zusätzliche Information des einen Maximums eines lokalisierten Pulses nutzen, um andere Modelle zu entwerfen, die zwar nicht so allgemein sind, jedoch weitergehende, zum Teil sogar analytische Aussagen ermöglichen.

3.4. Erweiterung der Momentenmethode

Momentengleichungen, also Gleichungen integraler Größen der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung haben sich auch für die Betrachtung von DM-Solitonen als sehr interessant erwiesen. Zum einen konnte mit ihnen auf rein analytischem Wege eine notwendige Bedingung für die Existenz periodischer Lösungen der NLSE hergeleitet werden [28]. Zum anderen wurden unter der Annahme einer parabolischen Phase und einer um das Phasenextremum lokalisierten Amplitude aus den Momentengleichungen die *TM*-Gleichungen direkt gewonnen [34]. Deswegen wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit der Versuch unternommen, diesen Ansatz störungstheoretisch zu verallgemeinern.

Im vorliegenden Kapitel soll gezeigt werden, dass es in der Tat wieder möglich ist, ein geschlossenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu erhalten, wenn man höhere Momente in die Untersuchungen miteinbezieht. Der Reiz der Betrachtung von Momentengleichungen liegt darin, dass man im Wesentlichen die spezielle Form der zugrundeliegenden partiellen Differentialgleichung nutzt, um weitergehende Aussagen zu gewinnen.

3.4.1. Gleichungen für höhere Momente

Wir betrachten dazu die kubisch nichtlineare Schrödingergleichung in der Form

$$iA_z + dA_{tt} + c|A|^2A = 0, \quad A(z, t) = a(z, t) \exp(\phi(z, t)) \quad (3.36)$$

und definieren folgende Momente:

$$E(z) = \int a^2(z, t) dt, \quad (3.37)$$

$$T(z) = \int t^2 a^2(z, t) dt, \quad T_2(z) = \int t^4 a^2(z, t) dt, \quad T_4(z) = \int t^6 a^2(z, t) dt, \dots, \quad (3.38)$$

$$P(z) = \int a^4(z, t) dt, \quad P_2(z) = \int t^2 a^4(z, t) dt, \quad P_4(z) = \int t^4 a^4(z, t) dt, \dots, \quad (3.39)$$

$$\Omega(z) = \int a_t^2(z, t) dt, \quad \Omega_2(z) = \int t^2 a_t^2(z, t) dt, \dots, \quad (3.40)$$

$$M(z) = \int t a^2(z, t) \phi_t(z, t) dt, \quad Q(z) = \int a^2(z, t) \phi_t^2(z, t) dt. \quad (3.41)$$

Nun machen wir folgenden Ansatz, welche einer Reduktion der Freiheitsgrade des Systems entspricht:

$$\phi(z, t) = \frac{1}{2} \psi(z) t^2 + \frac{1}{12} \varepsilon \beta(z) t^4. \quad (3.42)$$

Die Annahme einer Phase der Form (3.42) und einer hinreichend schnell verschwindenden Amplitude, welche um das Extremum der Phase (hier bei $t = 0$) lokalisiert sein soll, sind die

3. Theoretische Modelle für DM-Solitonen

einzigsten Voraussetzungen, welche für die folgenden Rechnungen vonnöten sind. Insbesondere werden keine Annahmen über die konkrete Gestalt der Amplitude gemacht.

Durch Einsetzen und Ausrechnen (Details sind im Anhang zu finden), erhält man die Bewegungsgleichungen für die Momente:

$$\frac{d}{dz}E = 0, \quad (3.43)$$

$$\frac{d}{dz}T = 4dM, \quad \frac{d}{dz}T_2 = 8d\psi T_2 + \frac{8}{3}\varepsilon\beta dT_4, \quad (3.44)$$

$$\frac{d}{dz}P = -2d\psi P - 2d\varepsilon\beta P_2, \quad \frac{d}{dz}P_2 = 2d\psi P_2 - \frac{2}{3}\varepsilon\beta dP_4, \quad (3.45)$$

$$\frac{d}{dz}\Omega = -4d(\psi\Omega + \varepsilon\beta\Omega_2) + 2d\varepsilon\beta E, \quad \frac{d}{dz}\Omega_2 = -\frac{8}{3}d\varepsilon\beta\Omega_4 + 6d\beta T, \quad (3.46)$$

$$\frac{d}{dz}M = 2dQ + 2d\Omega - \frac{c}{2}P, \quad (3.47)$$

$$\frac{d}{dz}Q = 4d(\psi\Omega + \varepsilon\beta\Omega_2) - 2d\varepsilon\beta E - c(\psi P + \varepsilon\beta P_2). \quad (3.48)$$

Die Gleichungen werden durch folgenden Relationen, welche man ebenfalls durch direktes Ausrechnen erhält, ergänzt:

$$M = \psi T + \frac{1}{3}\varepsilon\beta T_2, \quad Q = \psi^2 T + \frac{2}{3}\psi\varepsilon\beta T_2. \quad (3.49)$$

Berechnet man nun die z -Abhängigkeit von T_4 und P_4 , so stößt man auf Relationen, in denen wiederum höhere Momente auftreten. Andererseits kann man die Kleinheit von ε ausnutzen, um das Gleichungssystem zu schließen, wie der folgende Abschnitt zeigen wird.

3.4.2. Das geschlossene Gleichungssystem für höhere Momente

In der Gleichung für Q_z treten beispielsweise Ω_2 und P_2 nur mit dem Faktor ε auf. Daher kann man in den Gleichungen für Ω_{2z} und P_{2z} die zu ε proportionalen Terme vernachlässigen, wenn man die Gleichungen z.B. in (3.48) einsetzt. Natürlich hat man hier gegebenenfalls numerisch zu überprüfen, ob die zu ε proportionalen Terme wirklich von der Ordnung ε sind, also nicht z.B. $O(P_4/P_2) = \varepsilon^{-1}$ ist. Falls dies nicht der Fall ist, so kann man aufgrund der speziellen Struktur des Gleichungssystems im Rahmen der gewählten Näherung die Gleichungen für T_{2z} , P_{2z} und Ω_{2z} durch

$$T_{2z} = 8d\psi T_2, \quad P_{2z} = 2d\psi P_2, \quad \Omega_{2z} = 0 \quad (3.50)$$

ersetzen. Damit hat man dann für die elf Unbekannten $E, T, M, Q, \Omega, P, P_2, T_2, \Omega_2, \psi, \beta$ in der Tat elf Gleichungen gefunden, wodurch das Gleichungssystem vollständig ist. Da E die Pulsennergie darstellt, welche eine Konstante der Bewegung ist, bietet es sich an, die anderen

3. Theoretische Modelle für DM-Solitonen

Größen auf die Energie zu beziehen. Aus diesem Grunde führt man folgende Notation ein, welche sich stärker an der physikalischen Bedeutung der Größen orientiert:

$$T_{int}^2 = \frac{T}{E}, \quad M_{int} = \frac{1}{2} \frac{M}{TE}, \quad (3.51)$$

$$\Omega_{RMS}^2 = \Omega_{mod}^2 + \Omega_{phase}^2 = \frac{\Omega}{E} + \frac{Q}{E}, \quad (3.52)$$

$$P_{RMS} = \frac{P}{E}, \quad K_1 = \frac{P_2}{E}, \quad S_2 = \frac{T_2}{T}, \quad \Omega_{2p} = \frac{\Omega_2}{E}. \quad (3.53)$$

Daraus erhält man sofort die transformierten Gleichungen

$$\frac{d}{dz} \Omega_{mod}^2 = -4d\psi \Omega_{mod}^2 + 2d\beta\epsilon(1 - 2\Omega_{2p}), \quad (3.54)$$

$$\frac{d}{dz} \Omega_{phase}^2 = 4d\psi \Omega_{RMS}^2 - c\psi P_{RMS} + \epsilon\beta(4d\Omega_{2p} - 2d - cK_1), \quad (3.55)$$

$$\frac{d}{dz} P_{RMS} = -2d\psi P_{RMS} - 2d\epsilon\beta K_1, \quad (3.56)$$

$$\frac{d}{dz} T_{int} = 4dM_{int}, \quad (3.57)$$

$$\frac{d}{dz} (T_{int} M_{int}) = d(\Omega_{phase}^2 + \Omega_{mod}^2) - \frac{c}{4} P_{RMS}, \quad (3.58)$$

$$\Omega_{phase}^2 = \psi^2 T_{int}^2 + \frac{1}{2} \psi \epsilon \beta S_2 T_{int}^2, \quad (3.59)$$

$$\Omega_{2pz} = 0, \quad (3.60)$$

$$\frac{S_2}{T_{int}^2} = const., \quad (3.61)$$

$$\frac{K_1}{T_1} = const.. \quad (3.62)$$

3.4.3. Bestimmung des Chirps

Es soll nun gezeigt werden, wie man mit Hilfe der hergeleiteten Gleichungen Aussagen über die Phasenfunktion $\phi(z, t)$ machen kann. Dabei ist insbesondere der Chirp, also die Funktion $\psi(z)$ interessant, da er den maßgeblichen Anteil der zeitlichen Veränderung der Phase beschreibt. Im Fall $\epsilon = 0$ erhält man aus (3.49) die Beziehung

$$\psi(t) = \frac{M(z)}{T(z)}, \quad (3.63)$$

3. Theoretische Modelle für DM-Solitonen

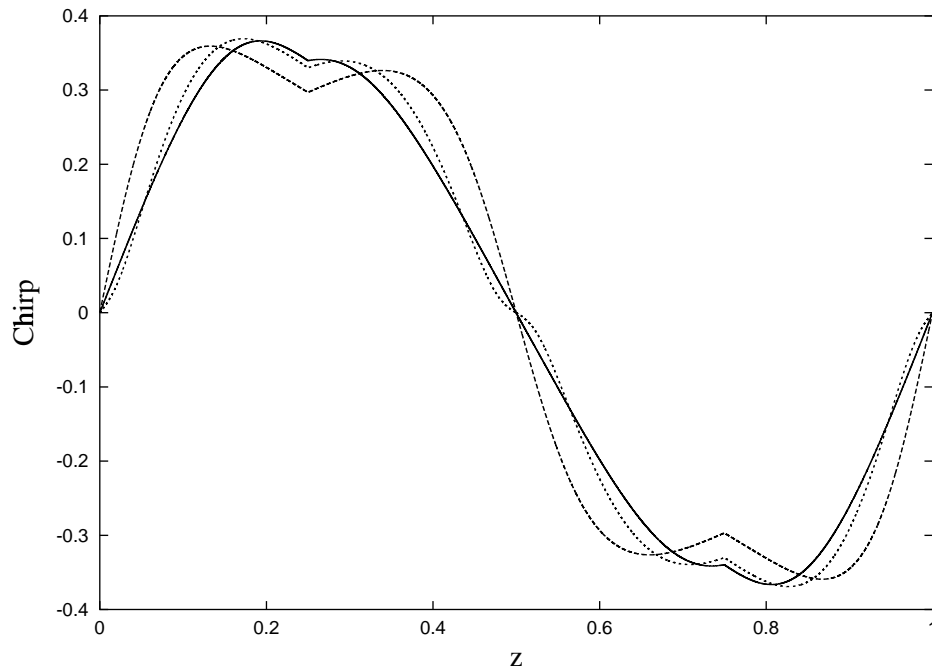


Abbildung 3.3: Bestimmung des Chirps, also von $\psi(z)$ mit verschiedenen Methoden. Die durchgezogene Linie stellt das Ergebnis der numerischen Simulation der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung dar. Die gestrichelte Linie zeigt das Ergebnis für die Simulation ohne die Berücksichtigung höherer Momente, die gepunktete Linie das Ergebnis der Simulation von (3.49).

welche für die Berücksichtigung höherer Momente durch (3.49) ersetzt werden muss. Vergleicht man dann (3.49) mit (3.63) numerisch, so sieht man eine deutliche Verbesserung: Betrachten wir Abb. 3.3, so wird ein deutlicher Unterschied zwischen der numerischen Simulation (durchgezogene Linie) der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung und der Approximation im Falle $\varepsilon = 0$, also unter Berücksichtigung von M und T (gestrichelte Linie) deutlich. Nimmt man höhere Momente (Punkte), wie oben beschrieben, hinzu, so wird der Abstand der Kurven geringer.

Die Momentenmethode ist daher gut geeignet, den Chirp zu beschreiben. Dennoch sind die auftretenden Gleichungen kompliziert und schwierig analytisch zu lösen. Entscheidend war bei der Entwicklung dieses Modells, dass die Amplitude lokalisiert war: Dies machte eine Taylorentwicklung der Phase sinnvoll. Daher liegt die Frage nahe, diese Lokalisation der Amplitude weiter auszuschöpfen, indem man die Funktion nach einem Funktionensystem entwickelt, welches aus lokalisierten Funktionen besteht. Wir werden in den nächsten Kapitel sehen, dass sich mit diesem Verfahren in der Tat interessante Ergebnisse erzielen lassen.

3.5. Gemittelte Gleichungen und Gauß-Hermite-Entwicklung

3.5.1. Gemittelte Gauß-Hermite-Entwicklung mit linearen Gleichungen für T und M

Ausgangspunkt für die Störungstheorie im Zeitbereich ist die Feststellung, dass für nicht zu große Pulsenergien die Nichtlinearität als klein (von der Ordnung ε) angenommen werden kann. Des Weiteren rechnen wir mit einer mittleren Dispersion der gleichen Größenordnung. Die Grundgleichung (2.1) nimmt dann die folgende Form an:

$$iA_z + d(z)A_{tt} + \varepsilon c(z)|A|^2A = 0, \quad d(z) = \tilde{d}(z) + \varepsilon \langle d \rangle. \quad (3.64)$$

In der nullten Ordnung ist das System linear. Da wir nach Pulslösungen suchen, liegt es nahe, die Lösung nach einem vollständigen Funktionensystem zu entwickeln, das die Randbedingungen (hier das Verschwinden im Unendlichen) erfüllt. Hier bietet sich das Eigenfunktionensystem $\{f_n\}$ des harmonischen Oszillators an [26]:

$$(f_n)_{xx} - x^2 f_n = \lambda_n f_n, \quad \lambda_n = -1 - 2n, \quad f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x). \quad (3.65)$$

In einer “naiven” Entwicklung der Form

$$iA_z + \tilde{d}(z)A_{tt} = 0, \quad A(z, t) = \sum B_n(z) f_n(t) \quad (3.66)$$

erhält man gekoppelte Differentialgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten B_n . Es ist jedoch bekannt, dass man durch eine Linsentransformation [38] in der Form

$$A(z, t) = \frac{1}{\sqrt{T(z)}} Q\left(x = \frac{t}{T(z)}, z\right) \exp\left(i \frac{M(z)}{T(z)} t^2\right). \quad (3.67)$$

die gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten entkoppelt, wenn man T und M als Lösung von

$$T_z = 4\tilde{d}(z)M, \quad M_z = \frac{\tilde{d}}{T^3} \quad (3.68)$$

wählt [25]. Setzt man nämlich (3.67) und (3.68) in (3.66) ein und entwickelt anstelle von A jetzt das Feld Q in der Form $Q(z, t) = \sum B_n(z) f_n(t)$, so erhält man:

$$iB_n(z) + \frac{\tilde{d}}{T^2} \lambda_n B_n = 0. \quad (3.69)$$

Die Lösung des Systems ist einfach

$$B_n(z) = B_n(0) \exp(iR(z)\lambda_n), \quad R'(z) = \frac{\tilde{d}(z)}{T^2(z)}. \quad (3.70)$$

3. Theoretische Modelle für DM-Solitonen

Für die nächste Ordnung liefert die Entwicklung $b_n = B_n + \varepsilon a_n$ ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die a_n :

$$ia_{nz} + \frac{\tilde{d}}{T^2} \lambda_n a_n = \phi_n. \quad (3.71)$$

Hier hängt die rechte Seite ϕ_n von der Lösung der nullten Ordnung ab, und zwar

$$\phi_n(z) = -\frac{\langle d \rangle}{T^2} \lambda_n B_n + \langle d \rangle (4M^2 - \frac{1}{T^2}) \sum_m S_{nm} B_m \quad (3.72)$$

$$-\frac{c}{T} \sum_{mlk} B_m B_l B_k^* V_{mkl} - \frac{2\langle d \rangle M}{T} i B_n - \frac{4\langle d \rangle M}{T} i \sum_m K_{nm} B_m,$$

$$S_{nm} = \int f_n x^2 f_m x, \quad K_{nm} = \int f_n x f_m x, \quad V_{nmlk} = \int f_n f_m f_l f_k. \quad (3.73)$$

Die Gleichungen (3.71) lassen sich z.B. mittels Variation der Konstanten lösen und zusammen mit der Periodizitätsbedingung für A (und mithin für Q) sowie der Annahme, dass der Quasiimpuls k ebenfalls von der Ordnung ε ist. Man erhält eine Bedingung an den Startvektor der nullten Ordnung $\{B_n(0)\}$

$$kB_n(0) + \int_0^L \phi_n(\xi) \exp(-iR(\xi)\lambda_n) d\xi = 0. \quad (3.74)$$

3.5.2. Betrachtung einer symmetrischen Dispersionsabbildung

Betrachtet man wieder eine symmetrische Dispersionsabbildung in der Form (2.4), so kann man die Bedingung (3.74) durch Symmetrieüberlegungen beträchtlich vereinfachen. Man wählt zunächst $M(0) = 0$. Dann ist T achsensymmetrisch zu $z = 0.5$ und M ist punktsymmetrisch zu $(0.5/0)$. Man sieht dann, dass die in (3.74) auftretenden Koeffizienten alle reell sind. (3.74) ist ein nichtlineares Gleichungssystem für die $B_n(0)$ und k , welches schwierig zu lösen ist. Es enthält, da es durch die Betrachtung der ersten Ordnung entstanden ist, den Kleinheitsparameter ε nicht mehr. Eine naheliegende Möglichkeit, es weiter zu vereinfachen, ist, nach einer Lösung zu suchen, bei welcher der Entwicklungskoeffizient B_0 sehr viel größer als die anderen ist. Man erhält dann ein System in der folgenden Form:

$$-kB_n(0) + r_n B_n(0) + \sum_{m>0} C_{nm} B_m(0) + T_n = 0, \quad (3.75)$$

$$r_n = \langle d \rangle \langle \frac{1}{T^2} \rangle \lambda_n, \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} C_{nm} = & S_{nm} \langle d \rangle \langle \frac{1}{T^2} \cos[R(\lambda_m - \lambda_n)] \rangle \\ & + B_0(0)^2 V_{mn00} \langle \frac{c}{T} (\cos[R(2\lambda_0 - \lambda_m - \lambda_n)] + 2 \cos[R(\lambda_m - \lambda_n)]) \rangle \\ & - 4 \langle d \rangle (S_{nm} \langle M^2 \cos[R(\lambda_m - \lambda_n)] \rangle + K_{nm} \langle \frac{M}{T} \sin[R(\lambda_m - \lambda_n)] \rangle), \end{aligned}$$

$$T_n = \langle d \rangle B_0(0) S_{n0} \left\langle \frac{1}{T^2} \cos[R(\lambda_0 - \lambda_n)] \right\rangle + V_{000n} B_0(0)^3 \left\langle \frac{c}{T} \cos[R(\lambda_0 - \lambda_n)] \right\rangle \\ - 4 \langle d \rangle B_0(0) (S_{n0} \langle M^2 \cos[R(\lambda_0 - \lambda_n)] \rangle + K_{n0} \left\langle \frac{M}{T} \sin[R(\lambda_0 - \lambda_n)] \right\rangle).$$

Das System (3.75) ist jedoch immer noch nichtlinear: Schneiden wir es nach s Moden ab, so erhalten wir s Gleichungen für die $s + 1$ Parameter $k, B_0(0), B_2(0), \dots$. Das System ist deswegen noch nichtlinear, da Produkte $k B_n(0)$ auftreten. Allerdings kann man $B_0(0)$ als eine die Lösungsfamilie parametrisierende Größe auffassen und die erste Gleichung für $n = 0$ nutzen, um k in der Form

$$k = r_0 + \frac{T_0}{B_0(0)} + \sum_{m>0} C_{0m} \frac{B_m(0)}{B_0(0)} \equiv k^{(0)} + k^{(1)} \quad (3.77)$$

zu schreiben, wobei $k^{(0)} = r_0 + T_0/B_0(0)$ gesetzt wurde. Da wir Beiträge höherer Ordnung in den $B_n(0)$ für $n > 0$ vernachlässigen, können wir in den anderen $s - 1$ Gleichungen $k^{(0)}$ benutzen. Man erhält dann ein $(s - 1)$ -dimensionales *lineares* algebraisches System für die Parameter $(B_2(0), \dots, B_{2(s-1)}(0))$.

Zu bemerken ist, dass die Entwicklung immer noch einen “künstlichen” Parameter $T(0)$ enthält. Aus dem Vorangegangenen wird klar, dass sie für jedes $T(0)$ gültig ist, da die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators ein vollständiges Funktionensystem bilden. Andererseits kann für ein spezielles Soliton eine spezielle Wahl für $T(0)$ günstiger sein als eine andere, insbesondere, wenn man nicht das unendliche Gleichungssystem, sondern wie oben ein abgeschnittenes betrachtet. Wir werden im nächsten Abschnitt auf die Frage nach einem möglichst “günstigen” $T(0)$ zurückkommen.

3.5.3. Beschreibung der Energie-Quasiimpuls-Charakteristik

Betrachten wir die Störungstheorie im Zeitbereich und die Gleichung (3.75). Es ist naheliegend, in erster Näherung eine Approximation allein mit der nullten Mode zu versuchen. Allerdings ist dann das Ergebnis noch von dem Parameter $T(0)$ abhängig. Erinnern wir uns an dessen Rolle: Er ist frei wählbar, da das System der Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators vollständig ist. Wie kann man sich umgekehrt diese Freiheit zu nutze machen, oder, anders gefragt, wie hat man $T(0)$ möglichst günstig zu wählen? Folgende Wahl von $T(0)$ bietet sich an: Man wählt $T(0)$ derart, dass - in dem Gleichungssystem (3.75), welches nach zwei Moden abgeschnitten wird - $B_2(0) = 0$ wird. Die Bedingung gibt eine zusätzliche Gleichung. Man wird die Berechnung der $E(k)$ -Kurve also folgendermaßen vornehmen:

1. Wahl eines $B_0(0)$
2. Bestimmung von $T(0)$ aus der Bedingung $B_2 = 0$
3. Berechnung von $k \approx r_0 + T_0/B_0(0)$ und $E \approx B_0(0)^2$

3. Theoretische Modelle für DM-Solitonen

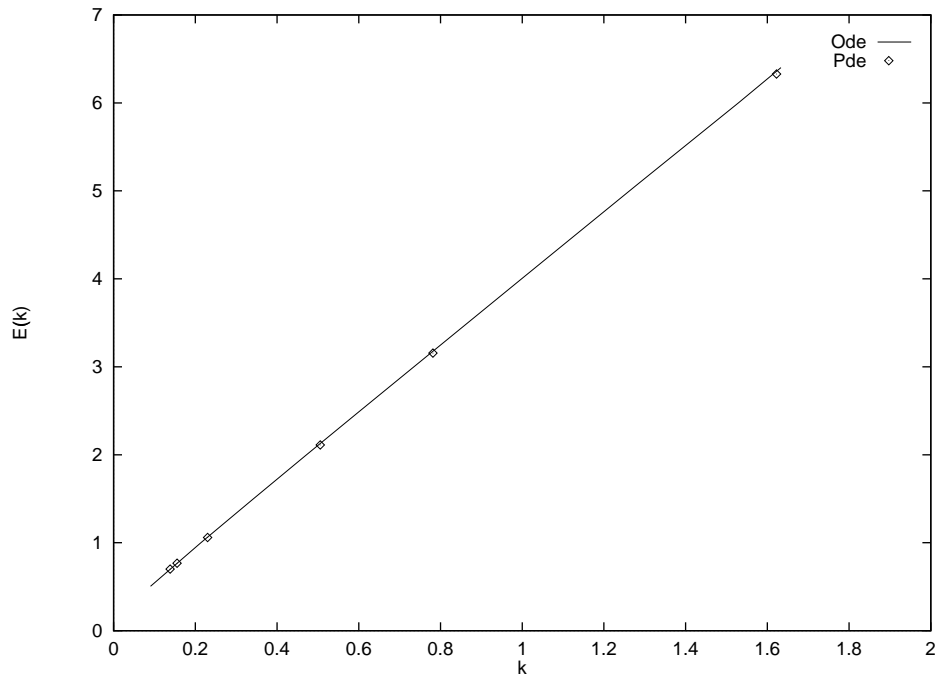


Abbildung 3.4: $E(k)$ im Modell der Störungstheorie im Zeitbereich. $T(0)$ wurde für jeden Punkt optimal bestimmt. Die Ergebnisse des Modells (ODE) werden mit numerischen Simulationen (PDE) verglichen.

Das Ergebnis der Berechnung ist in Abb. 3.4 dargestellt. Man sieht, dass man mit Hilfe des in diesem Abschnitt vorgestellten Modells, die $E(k)$ -Kurve sehr gut approximieren kann. Das Modell arbeitet mit der “linearen Version” der TM -Gleichungen (3.68), in welchen die nullte Ordnung separiert. Dies bedeutet jedoch auch, dass in diesen TM -Gleichungen noch keine Information über das nichtlineare Verhalten des Systems vorhanden ist. Diese folgt erst aus der Periodizitätsbedingung (3.74), welche von recht komplizierter Gestalt ist. Daher muss man bei der Erstellung der $E(k)$ -Kurve nach dem eben erläuterten Schema implizite nichtlineare Gleichungen lösen. Dies stellt gegenüber der PDE-Lösung eine deutliche Vereinfachung dar. Im folgenden Abschnitt werden wir eine ähnliche Gauß-Hermite-Entwicklung betrachten, welche die TM -Gleichungen mit einem zusätzlichen, nichtlinearen Term benutzt. In diesem Fall ist schon Information über die Wirkung der Nichtlinearität in der Lösung der TM -Gleichung, welche dann entsprechend komplizierter wird, enthalten. Wir werden sehen, dass es dann sogar möglich ist, die $E(k)$ -Kurve analytisch in einer Parameterdarstellung zu beschreiben.

3.5.4. Gemittelte Gauß-Hermite-Entwicklung mit nichtlinearen Gleichungen für T und M

Die Anwendung der Methode der gemittelten Gauß-Hermite-Entwicklung schließt unmittelbar an die Darstellung in [40], [34] an. Daher sollen hier nur sehr kurz die wesentlichen Aspekte dieser Vorgehensweise behandelt werden. Wir gehen wieder von Gleichung (2.1) aus und machen folgenden Ansatz:

$$A(z, t) = \frac{N}{\sqrt{T(z)}} Q\left(x = \frac{t}{T(z)}, z\right) \exp\left(i \frac{M(z)}{T(z)} t^2\right). \quad (3.78)$$

Die Linsentransformation (3.78) unterscheidet sich von der Linsentransformation (3.67) dadurch, dass ein zusätzlicher Parameter N eingeführt wurde. Wir werden später sehen, weshalb dies hier sinnvoll ist. Die Funktionen T und M sind wieder zunächst frei und sollen später geeignet gewählt werden. Wir setzen daher (3.78) zunächst in allgemeiner Form, also ohne T und M zu spezifizieren, in (2.1) ein und erhalten als Gleichung für Q :

$$\begin{aligned} iQ_z + \frac{d}{T^2}(Q_{xx} - x^2Q) &= (TM_z - MT_z + 4dM^2 - \frac{d}{T^2})x^2Q \\ &+ i\frac{T_z - 4dM}{T} \left[\frac{1}{2}Q + xQ_x \right] + \frac{cN^2}{T}|Q|^2Q. \end{aligned} \quad (3.79)$$

In die Gleichung setzen wir die *nichtlinearen* gewöhnlichen Differentialgleichungen für T und M ein [41], also

$$\frac{dT}{dz} = 4d(z)M, \quad \frac{dM}{dz} = \frac{d(z)}{T^3} - \frac{c(z)N^2}{T^2} \quad (3.80)$$

Hierzu sei bemerkt, dass sich die Gleichungen von der linearen Version (3.68) unterscheiden. In den letzten Jahren wurden in verschiedenen Modellen beide Gleichungen in der Linsentransformation benutzt und es war unklar, welche Beschreibung die "bessere" wäre. Für die linearen Gleichungen spricht, dass sie - wie oben beschrieben - die Koordinaten darstellen, in welchen das lineare System separiert [25]. Die nichtlinearen Gleichungen treten bei Benutzung eines Variationsprinzips und der Betrachtung der Momente auf. Im Abschnitt über das dynamische Modell kommen wir auf die Frage nach der Wahl der TM -Gleichungen zurück. Jetzt entwickeln wir $Q = \sum_n b_n(z) f_n(x)$ mit $x = \frac{t}{T(z)}$ wieder in Gauß-Hermite-Eigenfunktionen. Nach einer Phasentransformation $b_n(z) = B_n(z) \exp[iR(z)\lambda_n]$ mit $dR/dz = d(z)/T(z)^2 - \langle d/T^2 \rangle$ und einer Mittelung in der Form $B_n = U_n + \eta_n \dots$, wobei die U_n die langsame Skala und die η_n die schnell veränderliche Skala darstellen, erhält man als gemittelte Gleichung für die U_n

$$\begin{aligned} i\frac{dU_n}{dz} + \langle \frac{d}{T^2} \rangle \lambda_n U_n + \sum_m \langle \beta(z) e^{2i(n-m)R(z)} \rangle S_{n,m} U_m + \\ \sum_{m,l,k} \langle \beta(z) e^{2i(n+k-l-m)R(z)} \rangle U_m U_l U_k^* V_{n,m,l,k} = 0. \end{aligned} \quad (3.81)$$

3.5.5. Beschreibung der periodischen Lösung

Ein DM-Soliton wird durch eine stationäre Lösung der Gleichung (3.81) beschrieben. Also macht man den Ansatz $U_n = F_n \exp(ikz)$ und erhält ein algebraisches System für die F_n :

$$\begin{aligned}
 & -kF_n + \left\langle \frac{d}{T^2} \right\rangle \lambda_n F_n + \sum_m \langle \beta(z) e^{2i(n-m)R(z)} \rangle S_{n,m} F_m + \\
 & \sum_{m,l,k} \langle \beta(z) e^{2i(n+k-l-m)R(z)} \rangle F_m F_l F_k^* V_{n,m,l,k} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

Jetzt gehen wir wieder von der Annahme $|F_0| \gg |F_n|$ aus und betrachten zunächst zwei Moden F_0 und F_2 . Die vollen nichtlinearen Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned}
 kF_0 = & + \left\langle \frac{d}{T^2} \right\rangle F_0 + \langle \beta \rangle S_{0,0} F_0 + \langle \beta e^{-4iR} \rangle S_{2,0} F_2 + \\
 & \langle \beta \rangle |F_0|^2 F_0 V_{0,0,0,0} + 2 \langle \beta e^{-4iR} \rangle |F_0|^2 F_2 V_{2,0,0,0} + \langle \beta e^{4iR} \rangle F_0^2 F_2^* V_{2,0,0,0} + \\
 & 2 \langle \beta \rangle |F_2|^2 F_0 V_{2,2,0,0} + \langle \beta e^{-8iR} \rangle F_2^2 F_0^* V_{2,2,0,0} + \langle \beta e^{-4iR} \rangle |F_2|^2 F_2 V_{2,2,2,0},
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

$$\begin{aligned}
 kF_2 = & + \lambda_2 \left\langle \frac{d}{T^2} \right\rangle F_2 + \langle \beta e^{4iR} \rangle S_{2,0} F_0 + \langle \beta \rangle S_{2,2} F_2 + \\
 & \langle \beta e^{4iR} \rangle |F_0|^2 F_0 V_{2,0,0,0} + 2 \langle \beta \rangle |F_0|^2 F_2 V_{2,2,0,0} + \langle \beta e^{8iR} \rangle F_0^2 F_2^* V_{2,2,0,0} + \\
 & 2 \langle \beta e^{4iR} \rangle |F_2|^2 F_0 V_{2,2,2,0} + \langle \beta e^{-4iR} \rangle F_2^2 F_0^* V_{2,2,2,0} + \langle \beta \rangle |F_2|^2 F_2 V_{2,2,2,2}.
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

Nehmen wir nun an, dass wir nach einer Lösung suchen, die möglichst *nahe* an eine Gaußverteilung angepasst ist. In dem vorliegenden Modell haben wir außer F_0 keine freien Parameter mehr. Schließlich wurde ja der Amplitudenparameter N eingeführt, so dass die Wahl von F_0 noch frei ist. Im Idealfall wäre es wünschenswert, F_0 so zu wählen, dass $F_2 = 0$ ist. Erstaunlicherweise ist dies sogar möglich, wie wir sehen, wenn wir die Gleichungen für $F_2 = 0$ noch einmal anschreiben:

$$kF_0 = \left\langle \frac{d}{T^2} \right\rangle F_0 + \langle \beta \rangle S_{0,0} F_0 + \langle \beta \rangle |F_0|^2 F_0 V_{0,0,0,0}, \tag{3.85}$$

$$0 = \langle \beta e^{4iR} \rangle S_{2,0} F_0 + \langle \beta e^{4iR} \rangle |F_0|^2 F_0 V_{2,0,0,0}. \tag{3.86}$$

Macht man von

$$S_{2,0} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad V_{2,0,0,0} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Gebrauch, so folgt aus (3.86)

$$|F_0|^2 = \frac{S_{2,0}}{V_{2,0,0,0}} = \sqrt{2\pi} \tag{3.87}$$

und damit für den Quasiimpuls in dieser Näherung

$$k = -\left\langle \frac{d}{T^2} \right\rangle + \frac{5}{2} \left\langle \frac{N^2}{T} \right\rangle \quad (3.88)$$

Nun können wir in die Betrachtungen auch höhere Moden F_n mit einbeziehen, wobei wir mittels $|F_n| \ll F_0$ die Gleichungen linearisieren. Damit können wir unter der Annahme, dass die F_n reell sind, leicht die F_n aus einem linearen Gleichungssystem bestimmen. Für einen späteren Vergleich mit dem dynamischen Modell notieren wir hier die expliziten Formeln unter Berücksichtigung von F_4 und F_6 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_4 \\ F_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

mit

$$a_{11} = k - \left\langle \frac{d}{T^2} \right\rangle \lambda_4 - \langle \beta \rangle S_{44} - F_0^2 V_{4,4,0,0} (2\langle \beta \rangle + \langle \beta e^{16iR} \rangle), \quad (3.90)$$

$$a_{22} = k - \left\langle \frac{d}{T^2} \right\rangle \lambda_6 - \langle \beta \rangle S_{66} - F_0^2 V_{6,6,0,0} (2\langle \beta \rangle + \langle \beta e^{24iR} \rangle), \quad (3.91)$$

$$a_{12} = -\langle \beta e^{-4iR} \rangle S_{6,4} - F_0^2 V_{6,4,0,0} (2\langle \beta e^{-4iR} \rangle + \langle \beta e^{20iR} \rangle), \quad (3.92)$$

$$a_{21} = -\langle \beta e^{4iR} \rangle S_{6,4} - F_0^2 V_{6,4,0,0} (2\langle \beta e^{4iR} \rangle + \langle \beta e^{20iR} \rangle), \quad (3.93)$$

$$b_1 = F_0^3 V_{4,0,0,0} \langle \beta e^{8iR} \rangle, \quad b_2 = F_0^3 V_{6,0,0,0} \langle \beta e^{12iR} \rangle. \quad (3.94)$$

3.5.6. Analytische Beziehung für die Energie-Quasiimpuls-Charakteristik

Jetzt soll die Beziehung (3.88) weiter ausgewertet werden. Zunächst ist dies (wie auch im Falle der Benutzung der linearen Gleichungen für T und M) numerisch (also durch Integration der TM -Gleichungen) möglich.

In dem Fall einer symmetrischen Dispersionsstufe ist die Versuchung groß, die Integration von N^2/T und d/T^2 für kleine Nichtlinearität analytisch zu beschreiten. In diesem Fall kann man die Gleichungen (3.101, 3.108) in erster Näherung (wobei $\langle d \rangle$ und N^2 als klein angenommen werden) lösen und so die auftretenden Integrale berechnen. Die Rechnungen sind direkt, jedoch ein wenig länglich und daher ausführlicher im Anhang B dargestellt. Das Ergebnis ist

$$\left\langle \frac{d}{T^2} \right\rangle \approx \frac{N^2}{T(0)} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \quad \left\langle \frac{N^2}{T} \right\rangle \approx \frac{1}{yT(0)} \text{Arcsinh}(y), \quad y = \frac{d}{2T(0)^2}. \quad (3.95)$$

Die Ergebnisse können mit früheren Resultaten [34], welche $T(0)$ und N^2 in Beziehung setzen, kombiniert werden:

$$k = 2 \frac{\langle d \rangle}{d} y \left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{5}{2} \frac{1}{y} \text{Arcsinh}(y)}{\frac{2}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{1}{y} \text{Arcsinh}(y)} \right), \quad (3.96)$$

3. Theoretische Modelle für DM-Solitonen

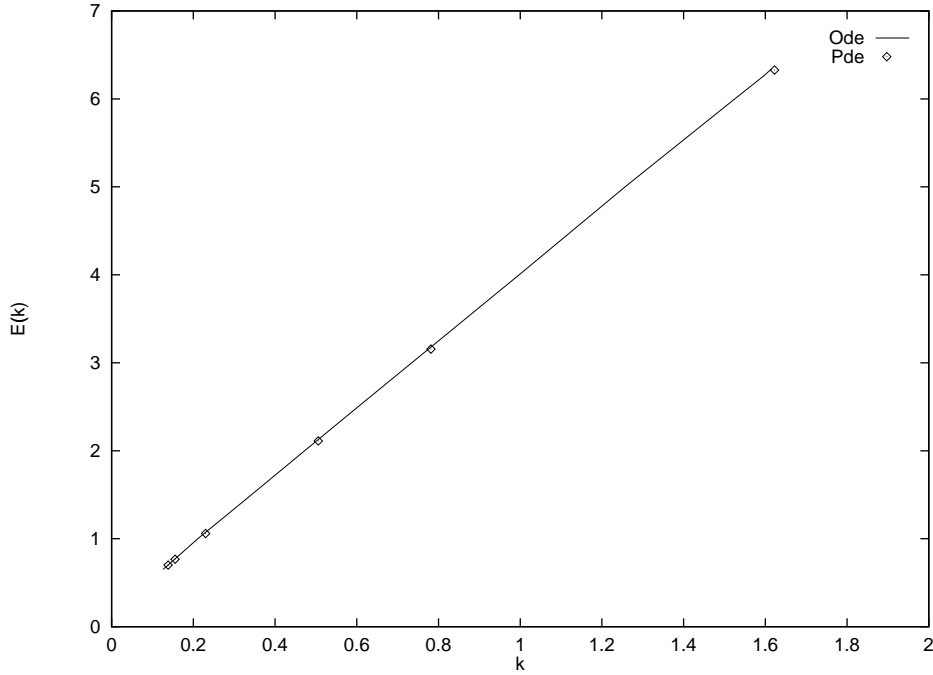


Abbildung 3.5: $E(k)$ im nichtlinearen Modell. Zu jedem $T(0)$ wurde das entsprechende N^2 numerisch bestimmt. Danach konnten k und E berechnet werden.

$$E = 4\sqrt{\pi} \frac{\langle d \rangle}{\sqrt{d}} \frac{\sqrt{y}}{\frac{2}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{1}{y} \text{Arcsinh}(y)}. \quad (3.97)$$

Als Ergebnis erhalten wir somit eine Parametrisierung der $E(k)$ -Kurve. Bevor wir sie jedoch mit der Numerik vergleichen, bemerken wir, dass wir sie in einem weiten Bereich (d.h. für viele Werte von k) durch eine Gerade in der Form $E(k) = \alpha k + \beta$ approximieren können. Um einen analytischen Ausdruck für die Steigung und den Achsenabschnitt der Geraden zu finden, beachten wir, dass beide Ausdrücke in (3.96) and (3.97) eine Singularität ζ im Punkt

$$\frac{2}{\sqrt{1+\zeta^2}} - \frac{1}{\zeta} \text{Arcsinh}(\zeta) = 0. \quad (3.98)$$

besitzen. Daher liegt es nahe, die Steigung der Geraden durch $\alpha = E'(\zeta)/k'(\zeta)$ zu approximieren, was

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+\zeta^2}{\zeta^2}} \pi d. \quad (3.99)$$

ergibt. Mit den entsprechenden Rechnungen für den Achsenabschnitt erhält man

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\pi \zeta (1+\zeta^2)} \frac{\langle d \rangle}{\sqrt{d}}. \quad (3.100)$$

3. Theoretische Modelle für DM-Solitonen

Details der Rechnungen sind im Anhang C zu finden. Wir sehen also, dass sowohl es bei Benutzung der linearen TM -Gleichungen (3.68) wie auch der nichtlinearen TM -Gleichungen möglich ist, den Zusammenhang zwischen Quasiimpuls, also der Phasenverschiebung bei Durchlaufen einer Periode der Dispersionsabbildung, und der Pulsenergie zu beschreiben. Im letzteren Falle konnten die Rechnungen jedoch weiter analytisch beschriftet werden, so dass man die Linearität der $E(k)$ -Kurve verstehen konnte.

3.6. Dynamisches Modell des DM-Solitons

3.6.1. Entwicklung in Gauß-Hermite-Eigenfunktionen

Im vorhergegangenen Modell haben wir zuerst die Kleinheit der Nichtlinearität ausgenutzt und dann die entstehenden nichtlinearen Gleichungen um die nullte Mode linearisiert. Die Linearisierung um die nullte Mode ist von der Größe der Nichtlinearität zunächst unabhängig. Entscheidend ist allein, dass das DM-Soliton nahe bei einem Gaußpuls liegt. Dieser kann gegebenenfalls aber eine Amplitude besitzen, welche nicht mehr eine kleine Nichtlinearität zur Folge hat. Man kann auch hier wieder mit einer Linsentransformation in ein geeignetes Koordinatensystem übergehen, so dass - wenn die Gleichung in den entsprechenden neuen Koordinaten geschrieben wird - möglichst viel Energie in dem Entwicklungskoeffizient der nullten Mode enthalten ist. Die Linsentransformation benutzen wir in der schon bekannten Form und sei zur Erinnerung noch einmal notiert (vergl. (3.78))

$$A(z, t) = \frac{N}{\sqrt{T(z)}} Q\left(x = \frac{t}{T(z)}, z\right) \exp\left(i \frac{M(z)}{T(z)} t^2\right).$$

In die oben schon einmal angeschriebene Gleichung für Q

$$\begin{aligned} iQ_z + \frac{d}{T^2}(Q_{xx} - x^2Q) &= (TM_z - MT_z + 4dM^2 - \frac{d}{T^2})x^2Q \\ &+ i\frac{T_z - 4dM}{T} \left[\frac{1}{2}Q + xQ_x\right] + \frac{cN^2}{T}|Q|^2Q \end{aligned}$$

setzen wir jetzt jedoch nicht schon die bekannten Gleichungen für T und M ein, sondern nehmen einen anderen Blickwinkel ein und überlegen ohne Zuhilfenahme anderer Techniken (wie Variationsverfahren oder Momentenmethode), welche Gleichungen für T und M gewählt werden sollten. Um wieder eine Gleichung zu erhalten, welche der Form nach der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung ähnlich ist, kann man den Term $\sim i$ auf der rechten Seite durch die Wahl

$$T_z = 4d(z)M \tag{3.101}$$

eliminieren. Es ist wichtig an dieser Stelle zu bemerken, dass diese Wahl der Gleichung für T_z sich von der in (3.68) für nichtverschwindendes $\langle d \rangle$ unterscheidet. Für M ist dagegen die Wahl nicht so einfach. Daher lassen wir im Moment noch M_z in den Gleichungen stehen und entwickeln in (3.79) Q wieder in der Form $Q(z, t) = \sum b_n(z) f_n(x)$. Wir erhalten ein unendlich dimensionales System gekoppelter nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$b_{nz} = i\frac{d}{T^2}\lambda_n b_n + i\left(\frac{d}{T^2} - TM_z\right) \sum_m S_{n,m} b_m + i\frac{cN^2}{T} \sum_{mlk} b_m b_l b_k^* V_{m,l,k,n}. \tag{3.102}$$

3.6.2. Neue Interpretation der Gleichungen für T und M

Die Idee, um das System geeignet zu approximieren, ist, es für die Wahl von M nach zwei Moden abzuschneiden. Unter Berücksichtigung von B_0 und B_2 erhält man dann

$$B_{0z} = i\frac{d}{T^2}\lambda_0 B_0 + i\left(\frac{d}{T^2} - TM_z\right)(S_{0,0}B_0 + S_{2,0}B_2) \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} & + i\frac{cN^2}{T}(|B_0|^2 B_0 V_{0,0,0,0} + 2|B_0|^2 B_2 V_{2,0,0,0} + B_0^2 B_2^* V_{2,0,0,0} \\ & + |B_2|^2 B_2 V_{2,2,2,0} + 2|B_2|^2 B_0 V_{2,2,0,0} + B_2^2 B_0^* V_{2,2,0,0}), \\ B_{2z} = & i\frac{d}{T^2}\lambda_2 B_2 + i\left(\frac{d}{T^2} - TM_z\right)(S_{2,0}B_0 + S_{2,2}B_2) \quad (3.104) \\ & + i\frac{cN^2}{T}(|B_0|^2 B_0 V_{2,0,0,0} + 2|B_0|^2 B_2 V_{2,2,0,0} + B_0^2 B_2^* V_{2,2,0,0} \\ & + |B_2|^2 B_2 V_{2,2,2,2} + 2|B_2|^2 B_0 V_{2,2,2,0} + B_2^2 B_0^* V_{2,2,2,0}). \end{aligned}$$

In diesem Modell, welches lediglich zwei Moden berücksichtigt, ist es klar, dass man M so wählen wird, dass möglichst viel der vorhandenen Energie in der nullten Mode konzentriert ist. Wir zeigen jetzt, dass es im vorliegenden Fall sogar möglich ist, M so zu wählen, dass $B_2 = 0$ ist: Man erhält dann nämlich folgendes System

$$\begin{aligned} B_{0z} = & i\frac{d}{T^2}\lambda_0 B_0 + i\left(\frac{d}{T^2} - TM_z\right)S_{0,0}B_0 + i\frac{cN^2}{T}|B_0|^2 B_0 V_{0,0,0,0}, \\ 0 = & i\left(\frac{d}{T^2} - TM_z\right)S_{2,0}B_0 + i\frac{cN^2}{T}|B_0|^2 B_0 V_{2,0,0,0}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Die erste Gleichung hat

$$(|B_0(z)|^2)_z = 0, \text{ oder } |B_0(z)|^2 = |B_0(0)|^2 \quad (3.106)$$

zur Folge. Benutzt man

$$S_{2,0} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad V_{2,0,0,0} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad (3.107)$$

so erhält man als Gleichung für M

$$M_z = \frac{d}{T^3} - \frac{c}{T^2} \frac{N^2 |B_0|^2}{2\sqrt{2\pi}}. \quad (3.108)$$

Die Gleichung enthält lediglich $|B_0|$, welches gemäß (3.106) konstant ist. Also können die Gleichungen für M und T unabhängig von der für B_0 gelöst werden. Das Gleichungssystem (3.101,3.108) entspricht (3.80), welches schon in früheren Arbeiten mit anderen Methoden hergeleitet wurde [34]. Um mit der Notation übereinzustimmen, wurde oben der Parameter N eingeführt. Er macht es möglich, für $|B_0(0)|$ einen festen Wert zu wählen und zwar

$|B_0|^2 = 2\sqrt{2\pi}$, wodurch dann (3.108) die in der Literatur übliche Gestalt erhält. Diese Herleitung der gewöhnlichen Differentialgleichungen für T und M wirft ein völlig neues Licht auf diese Gleichungen: Bei dem eben dargestellten Vorgehen wurden sie gewonnen, indem versucht wurde, sie so zu bestimmen, dass das System sich möglichst nahe an einem Gaußpuls verhält. Der Vorteil dieser Herangehensweise liegt auf der Hand: Man hat immer noch das *volle* Gleichungssystem der gewöhnlichen Differentialgleichungen zur Verfügung und kann (anders als in der Herleitung durch ein Variationsverfahren) - zumindest numerisch - abschätzen, wie groß der Fehler ist, welchen man durch ein eventuelles Trunkieren macht.

Hier wird nun verständlich, weshalb die Momentengleichungen und die Variationsverfahren, welche die nichtlinearen Gleichung für T und M liefern so erfolgreich sind: In diesen nichtlinearen Gleichungen ist schon viel Information über die Wirkung der Nichtlinearität auf das System enthalten: Sie entsprechen effektiv einem (geschickt gewählten) Zwei-Moden-Modell, bei dem die eine Mode aufgrund des gewählten Koordinatensystems verschwindet. Benutzt man dagegen die linearen Gleichungen für T und M (3.68), so muss man, um die Wirkung der Nichtlinearität zu verstehen, Gleichungen für die Entwicklungskoeffizienten (wie beispielsweise (3.74) in die Betrachtung mit einbeziehen, da in den linearen Gleichungen für T und M dann keine Information über die Nichtlinearität enthalten sind.

3.6.3. Lösung der Gleichung für die Gaußmode

Die Gleichung für B_0 lässt sich nun leicht lösen:

$$B_0(z) = B_0(0) \exp(i\phi(z)), \quad \phi(z) = \lambda_0 \rho(z) + N^2 V_0 |B_0|^2 \tau(z). \quad (3.109)$$

Hier wurden die Abkürzungen

$$\rho(z) = \int_0^z \frac{d(\xi)}{T(\xi)^2} d\xi, \quad \tau(z) = \int_0^z \frac{c(\xi)}{T(\xi)} d\xi, \quad (3.110)$$

sowie $V_0 = 5/4\sqrt{2\pi}$ eingeführt. Die Periodizitätsbedingung ergibt

$$B_0(z) = \exp(ikz) \tilde{B}_0(z), \quad \tilde{B}_0(0) = \tilde{B}_0(L). \quad (3.111)$$

Mit den Bezeichnungen $\langle \rho \rangle := L\rho(L)$ und $\langle \tau \rangle := L\tau(L)$ erhalten wir für k

$$k = \lambda_0 \langle \rho \rangle + N^2 V_0 |B_0|^2 \langle \tau \rangle. \quad (3.112)$$

was genau der Beziehung (3.88) entspricht.

3.6.4. Störungstheorie für höhere Moden

In dem eben diskutierten Modell wurden lediglich zwei Moden berücksichtigt. Weitere Moden können mit Hilfe von Störungstheorie in die Betrachtung mit einbezogen werden. Dazu

machen wir den Ansatz:

$$b_0 = (B_0(0) + a_0) \exp(i\phi), \quad b_n = a_n \exp(i\phi). \quad (3.113)$$

Hier wird o.B.d.A. $B_0(0)$ als reel angenommen. Alle $|a_i|$ sein im Vergleich zu B_0 klein. Dann erhält man ein gekoppeltes System *linearer* gewöhnlicher Differentialgleichungen. Für a_0 folgt:

$$\begin{aligned} ia_{0z} - \phi_z a_0 + \frac{d}{T^2} \lambda_0 a_0 + \frac{cN^2}{T} \tilde{V} \sum_m S_{m,0} a_m + \\ \frac{cN^2}{T} B_0^2 \sum_m V_{m,0,0,0} (2a_m + a_m^*) = 0. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Der entsprechende Ausdruck für die höheren Moden ist durch

$$\begin{aligned} ia_{nz} - \phi_z a_n + \frac{d}{T^2} \lambda_n a_n + \frac{cN^2}{T} \tilde{V} \sum_m S_{m,n} a_m + \frac{cN^2}{T} B_0^2 \cdot \\ \sum_m V_{m,0,0,n} (2a_m + a_m^*) = -\frac{cN^2 B_0}{T} (\tilde{V} S_{n,0} + V_{0,0,0,n} B_0^2) \end{aligned} \quad (3.115)$$

gegeben. Das in diesem Abschnitt diskutierte Modell wurde als *dynamisch* bezeichnet, weil es auch die Veränderung der Pulsform innerhalb einer Periode beschreibt, da die $a_n(z)$ für $n > 0$ berechnet werden können. Wir werden darauf zurückkommen, wenn wir das Modell mit anderen in konkreten Anwendungen vergleichen.

3.6.5. Approximation der Startverteilung

Jetzt soll die periodische Lösung der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung im Falle einer symmetrischen Dispersionsstufe approximiert werden. Wir gehen wie folgt vor: Wir betrachten vier Moden und lösen die gewöhnlichen Gleichungen numerisch und bestimmen die Anfangswerte $B_0(0)$, $a_n(0)$, $n \in \{0, 4, 6\}$, die zu einer periodischen Lösung der *linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen* (3.114, 3.115) gehören. Das Ergebnis wird dann mit einer periodischen Lösung der partiellen Differentialgleichung verglichen. Damit dies möglich ist, muss aus der numerisch durch Mittelung gewonnenen periodischen Lösung der NLSE der Parameter $T(0)$ gewonnen werden. Dies kann ebenfalls leicht numerisch erfolgen, da einerseits $T(0)$ und N^2 so gewählt sein müssen, dass die Gleichungen für T und M periodisch sind und dass andererseits wegen

$$A(0, t) = \frac{N}{\sqrt{T(0)}} \sum_n b_n f_n \left(\frac{t}{T(0)} \right)$$

3. Theoretische Modelle für DM-Solitonen

die Gleichung

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2\pi}\sqrt{T(0)}}} \int A(0,t) f\left(\frac{t}{T(0)}\right) dt \quad (3.116)$$

folgt. Durch die zwei Bedingungen werden $T(0)$ und N^2 bestimmt. Es lassen sich dann auch die Entwicklungskoeffizienten b_n der Entwicklung in Gauß-Hermite-Eigenfunktionen aus der numerischen Lösung der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung berechnen und mit den Ergebnissen der linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen vergleichen. Wenden wir die Methode zunächst auf die Approximation der Pulsform dreier typischer DM-Solitonen (im Folgenden als “Soliton 1”, “Soliton 2” und “Soliton 3” bezeichnet) an. Dabei bietet sich an, diese Methode mit der Methode der gemittelten Hermite-Entwicklung unter Berücksichtigung der nichtlinearen Gleichungen für T und M zu vergleichen. Der folgenden Tabelle können die entsprechenden Werte für die einzelnen Solitonen entnommen werden.

Nr	(T_0, N)	$ B_{4,num} $	$ B_{4,lin} $	$ B_{4,av} $	$ B_{6,num} $	$ B_{6,lin} $	$ B_{6,av} $
1	(0.7592, 1.4241)	0.1259	0.1258	0.1019	0.1300	0.1345	0.0444
2	(1.1428, 0.7048)	0.0946	0.0935	0.1101	0.0346	0.0358	0.0286
3	(1.8405, 0.3423)	0.0520	0.0486	0.0411	0.0238	0.0210	0.0214

Dabei wurden T_0 und N nach dem eben erläuterten Verfahren mit Hilfe von (3.116) gewonnen. Die $B_{n,num}$ sind die Koeffizienten, welche man nach numerischer Integration der NLSE (also durch das im zweiten Kapitel beschriebene Verfahren des “Solitonen-Züchtens”) erhält, die B_{lin} welche durch die periodische Lösung der linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen (3.114, 3.115) gewonnen werden und die $B_{n,av}$ die Koeffizienten, welche die gemittelte Hermite-Entwicklung (3.89) liefert. Man sieht deutlich, dass im Bereich höherer Leistung, also höherer Nichtlinearität, das dynamische Modell die Startverteilung besser approximiert als die gemittelte Hermite-Entwicklung. Betrachten wir die entsprechenden Pulsformen, indem wir aus den Entwicklungskoeffizienten das Feld $A(0,t)$ bestimmen. Blickt man auf den rechten Teil der Abbildungen 3.6-3.8, so sieht man, dass für die Approximation der weiter außen liegenden Pulsbereiche mehr Koeffizienten in der Gauß-Hermiteentwicklung berücksichtigt werden müssen. Andererseits ist der Maßstab logarithmisch, so dass in der Tat in diesen Bereichen die Amplitude nur noch sehr klein ist. Des Weiteren erkennt man, dass für geringe Gesamtenergien (wie bei Soliton 3) beide Methoden, also die periodische Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen und die Methode der gemittelten Hermite-Koeffizienten gute Approximationen liefern. Für sehr große Amplituden (was einer großen Pulsleistung entspricht), wie im Falle von Soliton 1, ist dagegen das dynamische Modell (also die gewöhnlichen Differentialgleichungen) dem gemittelten vorzuziehen.

3.6.6. Verhalten der Koeffizienten in Abhängigkeit von z

Innerhalb der Line, also im Bereich von $0 < z < 1$, wenn wir wieder von einer symmetrischen Dispersionsstufe ausgehen, können wir von dem Modell der gemittelten Hermitekoeffizienten

3. Theoretische Modelle für DM-Solitonen

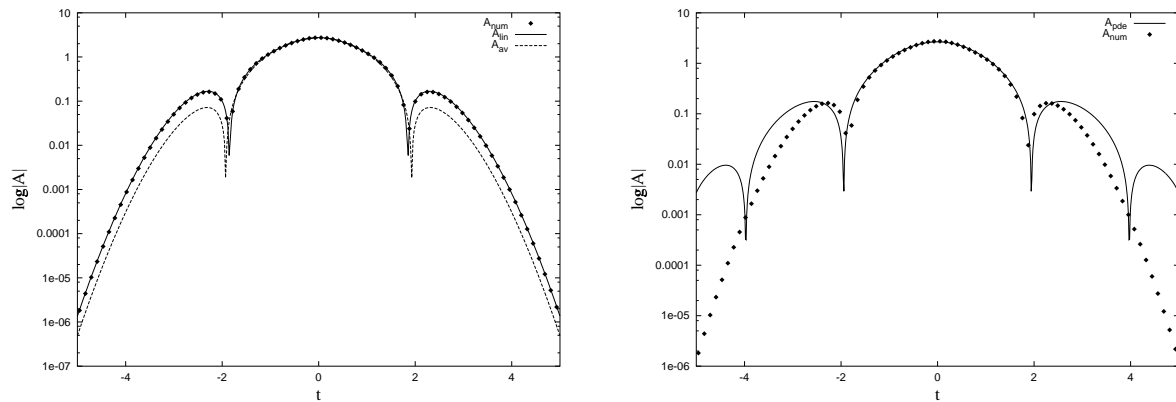


Abbildung 3.6: Vergleich der PDE-Lösung mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen und der Methode der gemittelten Hermite-Koeffizienten für das erste Soliton. Die linke Abbildung zeigt die Approximation der Verteilung, wie sie durch Berücksichtigung der Koeffizienten b_0 , b_4 und b_6 entsteht, die rechte in wie weit die drei Koeffizienten die periodische Lösung der PDE approximieren.

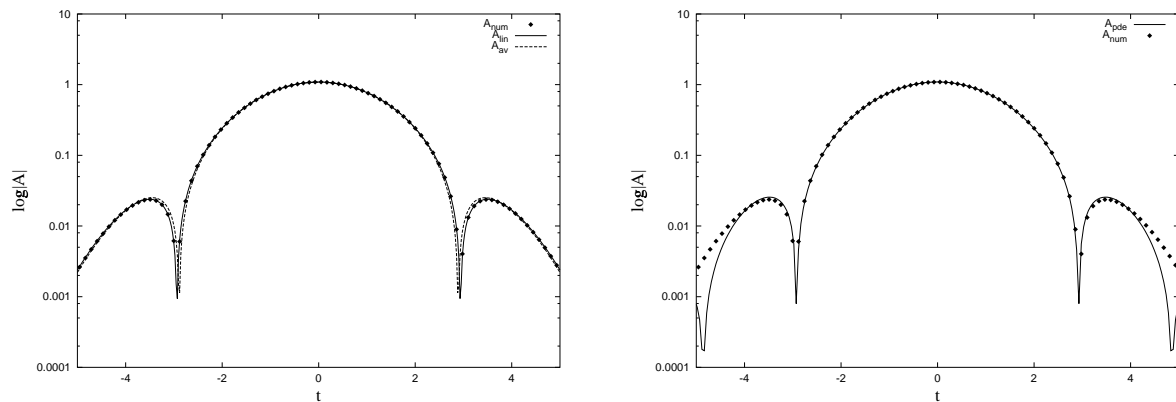


Abbildung 3.7: Vergleich der PDE-Lösung mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen und der Methode der gemittelten Hermite-Koeffizienten für das zweite Soliton.

keine Aussagen erwarten. Das dynamische Modell hingegen beschreibt auch die Details der Pulsausbreitung in diesem Bereich, wie Abbildung (3.9) darstellt. Offenbar ändern sich die Moden innerhalb der Line sehr stark. Bei der Abbildung 3.9 wurde ein stark nichtlinearer Bereich gewählt (Soliton 1). In diesem Bereich sind die Einflüsse von b_4 und b_6 von ähnlicher Größenordnung. Führt man die entsprechenden Simulationen für die anderen Solitonen aus, so zeigt sich, dass neben dem gaußartigen Kern die vierte Mode dominiert.

Die große Variation der Moden innerhalb einer Periode der Dispersionsabbildung ist auch der Grund dafür, dass das dynamische Modell für die Approximation der Startverteilung bes-

3. Theoretische Modelle für DM-Solitonen

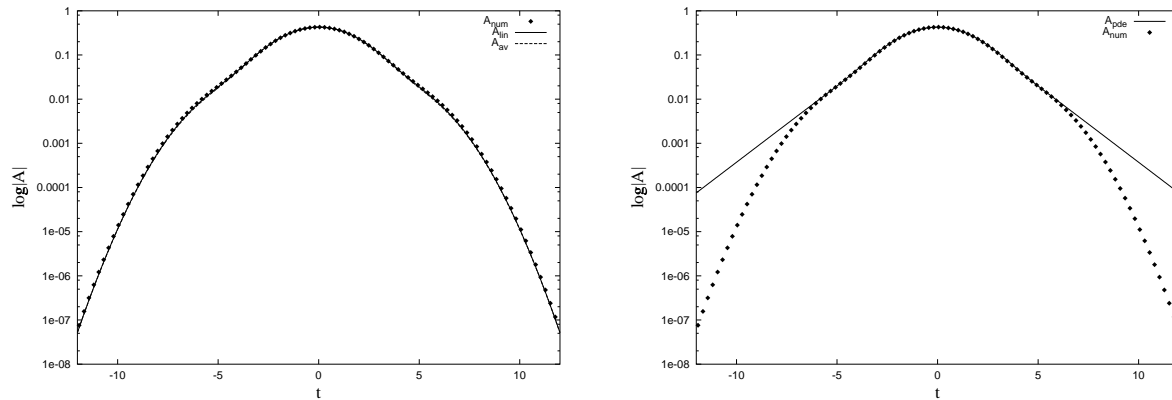


Abbildung 3.8: Vergleich der PDE-Lösung mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen und der Methode der gemittelten Hermite-Koeffizienten für das dritte Soliton.

ser geeignet ist als die gemittelten Modelle. Würden sich die höheren Moden innerhalb einer Periode nicht stark ändern, so gäbe die nullte Ordnung der Modelle, welche eine gemittelte Gauß-Hermite-Entwicklung benutzen, eine sehr gute Beschreibung des Systems. Abbildung 3.9 macht jedoch deutlich, dass eine Hinzunahme der ersten Korrektur der gemittelten Gleichungen deren Approximation entscheidend verbessern würde. Eine solche ist zwar prinzipiell möglich, und zwar in beiden Modellen, sowohl bei der Entwicklung in Hermite-Moden mit Hilfe der linearen Gleichungen für T und M [25] wie auch im Rahmen der Entwicklung in Hermite-Moden mit Hilfe der nichtlinearen Gleichungen und Mittelung durch Lie-Transformation [44]. Ihre konkrete Anwendung ist jedoch aufwendig und die entstehenden Terme sind kompliziert.

3.6.7. Stabilität der approximativen Lösung

Die linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen stellen nur eine Approximation des nicht-linearen Systems dar. Daher stellt sich die Frage, wie sich die Approximation für große z verhält. Betrachten wir hierzu ein System von nur zwei Moden und zwar b_0 und b_4 . Geht man von einem DM-Soliton als Anfangsverteilung aus und integriert es über zwei Perioden, so ergibt sich das in Abb. 3.10 dargestellte Bild. Offenbar gibt das ODE-Modell den anfänglichen Verlauf der Kurve gut wieder, wird jedoch mit zunehmendem z schlechter. Dies liegt an den beiden Näherungen, welche bei der Herleitung des Modells gemacht wurden: Zum einen wurden die Einflüsse der höheren Hermite-Moden nicht berücksichtigt, zum anderen wurde das System unter der Annahme, dass $|b_0| \ll |b_4|$ ist, linearisiert. Damit stellt sich eine entscheidende Frage: Wird sich für sehr große z die ODE-Kurve völlig von der PDE-Kurve trennen, ja vielleicht sogar die nullte Mode beeinflussen? Um dies mit Hilfe einer numerischen Simulation zu klären, wurde im Folgenden nicht nur über eine, sondern über viele (tausend) Perioden die ODE-Lösung simuliert. In der Abbildung 3.11 ist deswegen auch jeweils nur der

3. Theoretische Modelle für DM-Solitonen

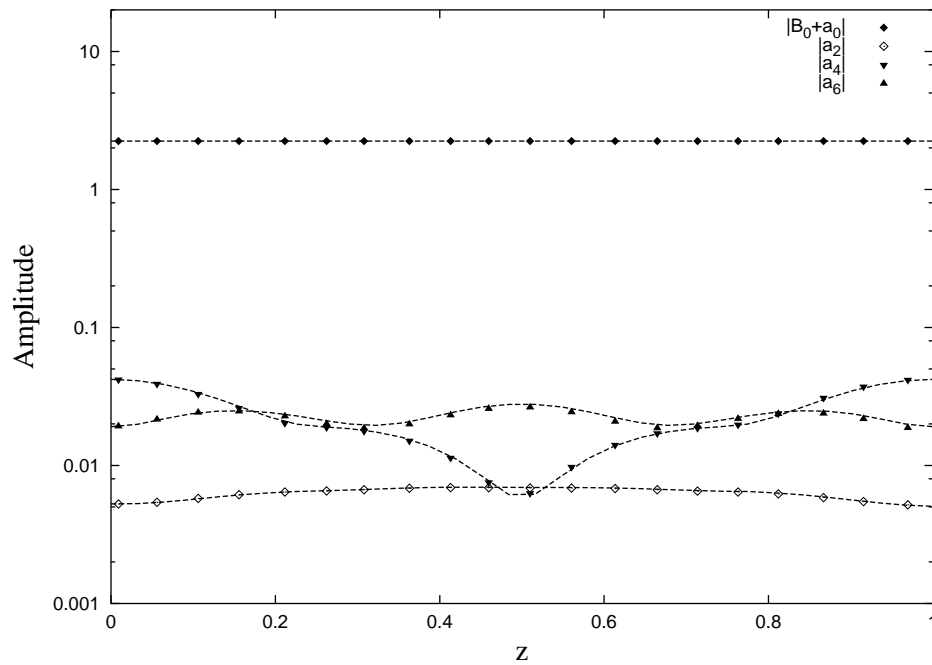


Abbildung 3.9: Vergleich der Entwicklungskoeffizienten der PDE zum ODE-Modell. Punkte stehen für die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen und Linien für die entsprechenden Ergebnisse aus den numerischen Simulationen der NLSE.

Wert der betreffenden Größen an dem Start- bzw. Endpunkt der Dispersion abgebildet. Daher wird die Lösung der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung durch eine Linie dargestellt: Das DM-Soliton ist ja eine periodische Lösung. Betrachtet man das Ergebnis der numerischen Simulation für $|b_0|$, so sieht man, dass die Approximation um die PDE-Lösung oszilliert. Der Koeffizient $|b_4|$ zeigt ebenfalls oszillatorisches Verhalten. Also bleibt auch für große z die Lösung des ODE-Modells in der Nähe des DM-Solitons.

4. Modellierung realer Übertragungsstrecken

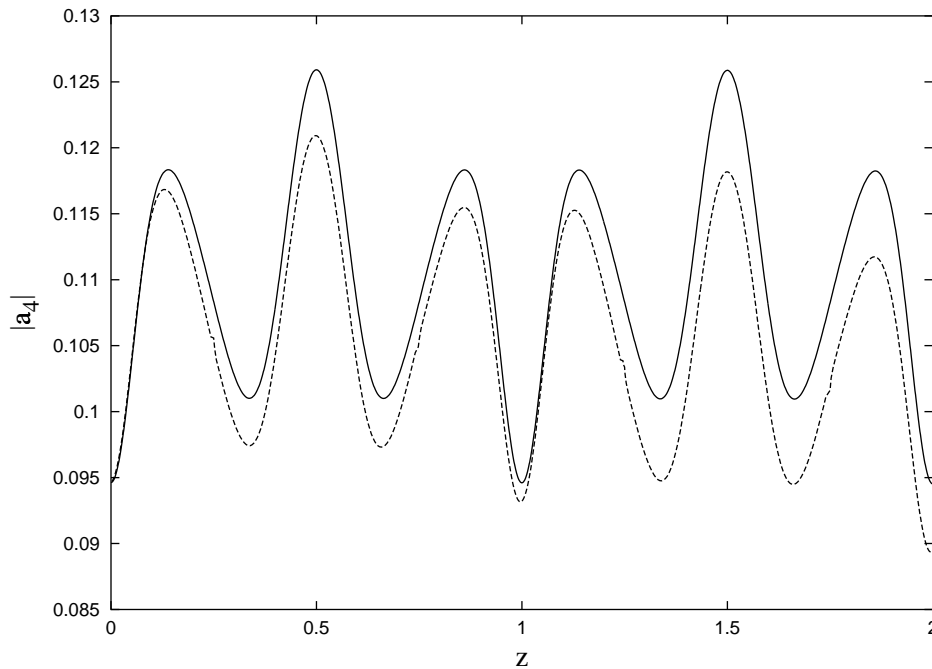


Abbildung 3.10: Vergleich der Entwicklung von b_4 in der PDE-Simulation für ein DM-Soliton (durchgezogene Linie) und der Vorhersage der gewöhnlichen Differentialgleichungen für ein Modell mit den beiden Moden $b_0 = B_0 + a_0$ und a_4 .

4. Modellierung realer Übertragungsstrecken

Nach der theoretischen Beschreibung soll nun ein Ausblick auf eine mögliche Anwendung der hier entwickelten Techniken zur Beschreibung realer Übertragungsstrecken (also unter Berücksichtigung von Dissipation, Verstärkung und gegebenenfalls weiterer physikalischer Effekte) in der Telekommunikation gegeben werden. Dazu wird im Folgenden kurz die verallgemeinerte NLSE vorgestellt und in diesem Zusammenhang der Gültigkeitsbereich der oben behandelten Gleichung (2.1) betrachtet. Danach zeigen wir an einem Beispiel, der Anwendung der Störungstheorie mit höheren Moden im Rahmen des dynamischen Modells, wie auch bei realen Systemen die entwickelten Methoden eingesetzt werden können. Hier wiederum zeigt sich, dass es sinnvoll sein kann, zunächst ein stark abstrahiertes System (wie z.B. die verlustfreie symmetrische Dispersionsstufe) zu betrachten und die entwickelten Methoden später auf reale, technologisch interessante Probleme anzuwenden.

4. Modellierung realer Übertragungsstrecken

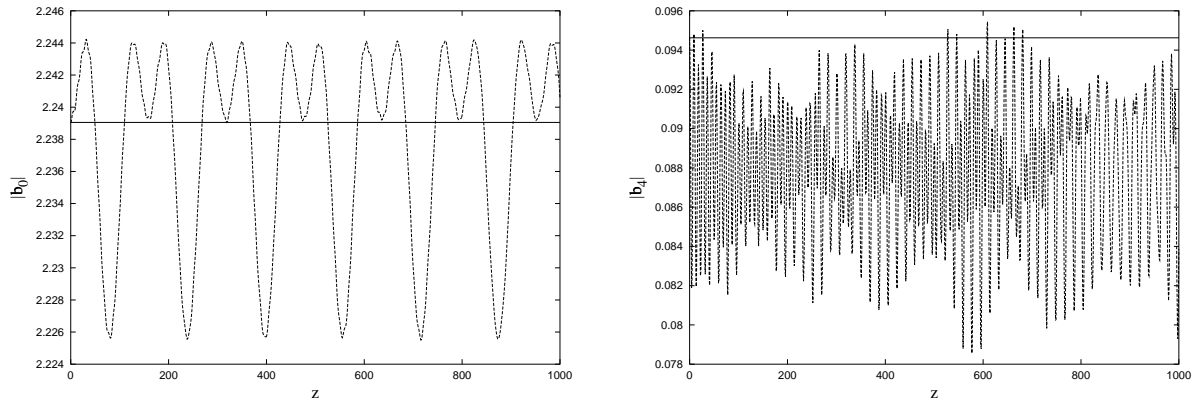


Abbildung 3.11: Stabilität der approximativen Lösung. In der linken Abbildung ist $|b_0|$ als Resultat der linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen (gestrichelte Linie) im Vergleich mit der PDE-Lösung (durchgezogene Linie) dargestellt. Es sind nur Werte an den Start- bzw. Endpunkten der Dispersionsabbildung angegeben. Die rechte Abbildung stellt den gleichen Sachverhalt für $|b_4|$ dar.

4.1. Die verallgemeinerte Schrödingergleichung

Ausgehend von den Maxwellgleichungen leitet man die verallgemeinerte Schrödingergleichung also Gleichung für den langsam veränderlichen Anteil der Amplitude des elektrischen Feldes $|A|$ her. Sie beschreibt damit die Ausbreitung eines Signals in einem Lichtwellenleiter und ist durch

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\alpha}{2}A + \frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{1}{6}\beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} = i\gamma \left(|A|^2 A + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial T} (|A|^2 A) - T_R A \frac{\partial |A|^2}{\partial T} \right) \quad (4.1)$$

gegeben [3]. In der Gleichung (4.1) beschreibt $|A|$ die Amplitude der Einhüllenden des elektrischen Feldes. $A(z, t)$ ist wie bisher eine komplexwertige Funktion, die von der Ausbreitungsstrecke z und der Zeit t abhängt, β_2 und β_3 die Dispersionen zweiter und dritter Ordnung; γ ist der nichtlineare Koeffizient, ω_0 die Trägerfrequenz und T_R die Ramanzeitkonstante. Auf die Bedeutung dieser Term wird weiter unten noch eingegangen. Der Einfluss der Kopplung von zu verschiedenen Polarisationen gehörenden Schwingungsmoden (sog. Polarisationsmodendispersion) [33] [14] ist hierbei schon in der Herleitung der Gleichung vernachlässigt worden, was für heutige Übertragungssysteme zulässig ist [4]. Um abzuschätzen, welche Terme für die Pulsausbreitung in Glasfaserkabeln in der Gleichung (4.1) vernachlässigbar sind, müssen charakteristische Größen für die in ihr auftretenden Koeffizienten und für das in die Faser eingespeiste Signal betrachtet werden. Zur Abschätzung der vorkommenden Größenordnungen soll daher eine spezielle Faser als Beispiel betrachtet werden, und zwar Corning[®] SMF-28[™] [9].

4.1.1. Dispersion zweiter und dritter Ordnung

Der Hersteller der Fiber Corning[®] SMF-28[™] gibt für die Dispersion folgende Beziehung an:

$$D(\lambda) = \frac{S_z}{4} \left(\lambda - \frac{\lambda_z^4}{\lambda^3} \right). \quad (4.2)$$

Hierbei werden D in ps/(nm·km), die Nulldispersionswellenlänge λ_z und die Trägerwellenlänge λ in nm und der Nulldispersionslope S_z in ps/(nm²·km) gemessen. Nun muss man den Zusammenhang zwischen den technischen Größen D und S_0 und den physikalischen Größen β_2 und β_3 herstellen. Dazu muss kurz etwas zu der physikalischen Bedeutung der Größen im Rahmen der oben schon angedeuteten Herleitung von (4.1) gesagt werden. Bei der Begründung des Modells ist A die langsam veränderliche Einhüllende des elektrischen Feldes, welches sich daher mit der Trägerfrequenz ω_0 in der Form

$$B(z, t) = A(z, t) \exp[i(\beta_0 z - \omega_0 t)] \quad (4.3)$$

schreiben lässt. Dabei wurde die Funktion $\beta(\omega) = \bar{n}(\omega) \frac{\omega}{c}$ (wenn \bar{n} für den effektiven Brechungsindex der in der Fiber angeregten Mode steht) in eine Taylorreihe entwickelt [4]:

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6}\beta_3(\omega - \omega_0)^3 + \dots, \quad \beta_m = \left. \frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right|_{\omega=\omega_0}. \quad (4.4)$$

Die Gruppengeschwindigkeit v_g ist ebenfalls eine Funktion von ω , die durch $v_g(\omega) = (d\beta/d\omega)^{-1}$ gegeben ist. Mithin ist $v_g(\omega_0) = \beta_1^{-1}$. Der sogenannte Dispersionsparameter D ist definiert durch

$$D(\omega) = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{v_g} \right) = \frac{d\omega}{d\lambda} \frac{d^2 \beta}{d\omega^2} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \frac{d^2 \beta}{d\omega^2}, \quad (4.5)$$

wobei unter λ die durch $2\pi c/\omega$ definierte Wellenlänge zu verstehen ist. Dies bezieht sich natürlich auf die Lichtausbreitung außerhalb der Glasfaser, also auf den Laser, bevor er in die Faser eintritt. Damit folgt als Beziehung zwischen D und β_2

$$\beta_2 = -\frac{\lambda_0^2}{2\pi c} D(\omega_0). \quad (4.6)$$

Der Slope S ist definiert als $S = dD/d\lambda$. Damit folgt dann

$$S = \frac{dD}{d\lambda} = \frac{4\pi c}{\lambda^3} \frac{d^2 \beta}{d\omega^2} + \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^4} \frac{d^3 \beta}{d\omega^3}. \quad (4.7)$$

Dies ergibt wiederum für die Dispersion dritter Ordnung die Gleichung

$$\beta_3 = \frac{\lambda_0^4}{(2\pi c)^2} \left(S(\omega_0) + \frac{2}{\lambda} D(\omega_0) \right). \quad (4.8)$$

4. Modellierung realer Übertragungstrecken

Aus der Herstellerangabe bezüglich der Dispersion erhält man dann für den Slope

$$\beta_3 = \frac{S_z}{16\pi^3 c^2} (3\lambda_0^4 - 5\lambda_z^4). \quad (4.9)$$

Damit folgt für die typische Dispersion zweiter und dritter Ordnung einer solchen Fiber

$$\beta_2 = 21.7709\text{ps}^2/\text{km}, \quad \beta_3 = 0.0164078\text{ps}^3/\text{km}, \quad (4.10)$$

wenn man von $S_z = 0.09\text{ps}/(\text{nm}^2\text{km})$ und $\lambda_z = 1310\text{nm}$ ausgeht und den Laser üblicherweise mit $\lambda_0 = 1550\text{nm}$ betreibt. In der vorliegenden Arbeit wurde bei allen Simulationen von einer konstanten Dispersion der einzelnen Fibernetze angenommen. Es sei an dieser Stelle jedoch erwähnt, dass in letzter Zeit auch Fiberkonfigurationen mit zufällig verteilten Dispersionen untersucht worden sind [1].

4.1.2. Verlust in der Fiber

Wenden wir uns nun dem Verlust zu, welcher durch den Koeffizienten α in (4.1) beschrieben wird. Berücksichtigt man lediglich den Verlustterm $\frac{\alpha}{2}A$, so sieht man, dass das Amplitudenquadrat $|A|^2$ nach Durchlaufen einer Fiberstrecke L um den Faktor $\exp(-\alpha)$ abgenommen hat. Die Tatsache, den Verlust im Allgemeinen auf die Amplitude zu beziehen, gibt daher auch Anlass, in (4.1) den Faktor $\frac{1}{2}$ vor den Verlustterm zu schreiben. In der Praxis wird der Verlust meist in dB/km angegeben und so folgt

$$e^{-\alpha} = 10^{\frac{\alpha_{dB}}{10}}, \quad \alpha = -\frac{\ln(10)}{10} \alpha_{dB}. \quad (4.11)$$

Für die hier als Beispiel gewählte Fiber ist $\alpha_{dB} = 0.3\text{dB/km}$ anzusetzen, woraus dann $\alpha = -0.0691\text{km}^{-1}$ folgt.

4.1.3. Nichtlineare Terme

In (4.1) erkennt man drei nichtlineare Terme. Der erste Term $\gamma|A|^2A$ hat seine physikalische Ursache in dem Kerreffekt, der Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit den Hüllenelektronen der den Kern der Fiber konstituierenden Atome. Der nichtlineare Koeffizient ist definiert durch [3]:

$$\gamma = \frac{n_2 \omega_0}{c A_{eff}}, \quad (4.12)$$

wobei wieder ω_0 die Frequenz des Trägerstrahls und A_{eff} der effektive Fiberquerschnitt ist. In einer Monomodefiber geht man in der Regel von einem gaußartigen Abfallen der Intensität in radialer Richtung aus, was es erlaubt

$$A_{eff} = \pi w^2 \quad (4.13)$$

4. Modellierung realer Übertragungsstrecken

anzunehmen. w ist dabei der sogenannte Breitenparameter, welche ebenfalls von Herstellern von Glasfaserkabeln angegeben wird. Im vorliegenden Fall führt $w=5.2\mu\text{m}$ auf $A_{eff} = 84.95\mu\text{m}^2$. Nimmt man für n_2 einen Standardwert von $2.3 \cdot 10^{-16}\text{cm}^2/\text{W}$ an, so folgt $\gamma = 1.0975(\text{Wkm})^{-1}$.

Die beiden weiteren nichtlinearen Terme beschreiben das sogenannte Self-Steepening und den Ramaneffekt. Die auftretende Ramankonstante T_R wird in der Regel mit 5 fs abgeschätzt.

4.2. Die dimensionslose Form der verallgemeinerten NLSE

Um abzuschätzen, welche Terme in dem Bereich, welcher für Anwendungen in der Telekommunikation interessant ist, wichtig sind, muss man Annahmen über die Übertragungsparameter machen und dann die Gleichung (4.1) auf eine dimensionslose Form bringen, um die Größenverhältnisse der Terme bestimmen zu können. Ein aktuelle Größenordnung für die Datenübertragung auf einem Kanal sind 40 Gbit/s. Dies bedeutet, dass im Zeitbereich zwischen den einzelnen Bits ein Abstand von $T_{slot}=25\text{ps}$ erreicht werden muss. Daher sollte die Halbwertsbreite eines Bits auf jeden Fall deutlich kleiner als dieser Wert sein, typisch sind beispielsweise $T_{FWHM} = 5\text{ps}$. Die maximale Intensität (oder Amplitudenquadrat) P_{peak} des Pulses kann man aus der mittleren Leistung bestimmen, welche in der Telekommunikationstechnik benutzt wird. Nimmt man einen Gaußpuls an, so ist der Zusammenhang zwischen der mittleren Leistung P_{mean} und der maximalen Intensität durch

$$P_{mean} = \frac{1}{4} P_{peak} \frac{T_{FWHM}}{T_{slot}} \sqrt{\frac{\pi}{\ln 2}} \quad (4.14)$$

gegeben. Dabei wurde angenommen, dass gleichviel Nullen und Einsen in dem Signal vorhanden sind. Für die mittlere Leistung kommt bei den heutigen technischen Anwendungen ein Bereich bis etwa 50mW in Frage. Diese Angabe ist jedoch mit sehr viel Vorsicht zu sehen, da sich das Gebiet auch in Hinblick auf die experimentellen Möglichkeiten sehr stark entwickelt. Grundsätzlich sind höhere Pulsenergien zwar mit einem größeren Einfluss der Nichtlinearitäten auf die Ausbreitung verbunden, aber in der Praxis dennoch wünschenswert, weil sie einen größeren Verstärkerabstand ermöglichen, was für den Aufbau einer Fiberline erheblich kostengünstiger ist. Daher berechnen wir im Beispiel als obere Grenze für die auftretenden nichtlinearen Faktoren alle konkreten Werte mit $P_{mean} = 50 \text{ mW}$. Dies entspricht $P_{peak} = 42.579 \text{ mW}$.

Um die verallgemeinerte Schrödingergleichung (4.1) dimensionslos zu machen, normieren wir zunächst alle auftretenden Zeiten mit T_{FWHM} und alle Leistungen mit P_{peak} . Dies entspricht einer Transformation

$$\tilde{A} = \frac{A}{\sqrt{P_{peak}}}, \quad t = \frac{T}{T_{FWHM}} \quad (4.15)$$

mit welcher dann

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} \tilde{A} + \frac{1}{Z_{Disp2}} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial t^2} - i \frac{1}{Z_{Disp3}} \frac{\partial^3 \tilde{A}}{\partial t^3} =$$

4. Modellierung realer Übertragungstrecken

$$i \frac{1}{Z_{nl}} |\tilde{A}|^2 \tilde{A} - \frac{1}{Z_{ss}} \frac{(\partial |\tilde{A}|^2 \tilde{A})}{\partial t} - i \frac{1}{Z_R} \left(\frac{\partial |\tilde{A}|^2}{\partial t} \right) A \quad (4.16)$$

folgt. Dabei wurden die charakteristischen Längen

$$Z_{Disp2} = \frac{2T_{FWHM}^2}{\beta_2}, \quad Z_{Disp3} = \frac{6T_{FWHM}^3}{\beta_3}, \quad (4.17)$$

$$Z_{nl} = \frac{1}{\gamma P_{peak}}, \quad Z_{ss} = \frac{\omega_0 T_{FWHM}}{\gamma P_{peak}}, \quad Z_R = \frac{T_{FWHM}}{T_R} \frac{1}{\gamma P_{peak}} \quad (4.18)$$

eingeführt, für welche die oben angegebenen Parameter folgende Werte ergeben:

charakteristische Länge	Z_{Disp2}	Z_{Disp3}	Z_{nl}	Z_{ss}	Z_R
Wert (km)	2.297	$4.5 \cdot 10^4$	21.40	$1.3 \cdot 10^5$	$2.1 \cdot 10^4$

Um die Gleichung dimensionslos zu machen, kann man sich aussuchen, mit welcher Länge das geschehen soll: Entweder wählt man die physikalische Länge der Fiber oder eine der oben definierten charakteristischen Längen. Entscheidend für die physikalische Interpretation ist das Verhältnis der oben angegebenen Größen. Aufgrund der hier gewählten Parameter wird deutlich, dass es sinnvoll ist, zunächst in der Grundgleichung (4.1) den linearen Term mit der Dispersion 3. Ordnung und die nichtlinearen Self-Steepening- und Ramanterme zu vernachlässigen. Die Bedeutung dieser Terme mit nimmt mit abnehmender Pulsbreite zu. Insofern ist eine zukünftige Erweiterung aller analytischen Beschreibungen auf die verallgemeinerte NLSE wünschenswert.

4.3. Ausbreitung eines Einzelpulses in der Fiber

Für die Übertragung in Glasfaserkabeln ist neben der Suche nach periodischen Lösungen auch das folgende Anfangswertproblem interessant: Man hat einen senderseitigen Ausgangspuls $A(t, 0)$, (welchen man in die Fiberline einspeist) und möchte wissen, wie er sich in z entwickelt.

Daher ergibt sich die Frage, ob sich die in der vorliegenden Arbeit dargestellten Modelle auch für die Ausbreitung eines Pulses in einer Glasfaser anwenden lassen, welcher nicht eine periodische Lösung des Systems sein muss. Um dies zu untersuchen, gehen wir von einer reinen Gaußverteilung aus und integrieren sie über einige Perioden der Dispersionsabbildung. Wir analysieren die Mode $|b_4|$. In der Abbildung 4.1 wird erkennbar, dass die vierte Hermitemode, welche zu Beginn null ist, offenbar aufgrund der Nichtlinearität in der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung angeregt wird. Bei einem linearen System würde die Pulsenergie in der Ausgangsmode verbleiben. Die Nichtlinearität dagegen bewirkt, dass die Pulsenergie auch auf andere Moden verteilt wird. Die Verteilung der Energie findet jedoch so statt, dass der größte Anteil der Energie in der nullten Mode, also dem Gaußanteil verbleibt. Dies gilt bei den hier

4. Modellierung realer Übertragungsstrecken

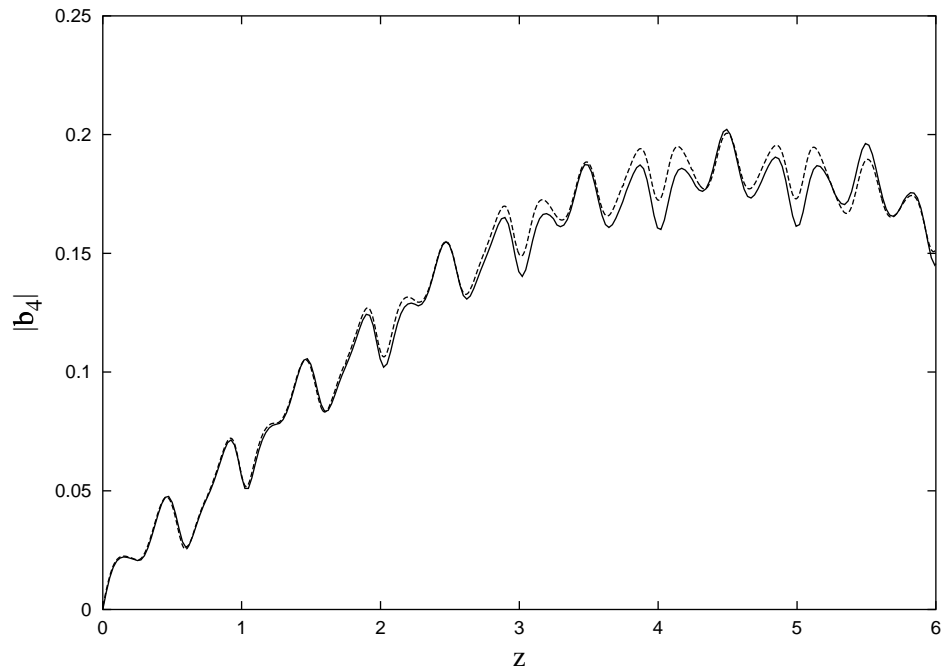


Abbildung 4.1: Vergleich der Entwicklung von b_4 in der PDE-Simulation für ein DM-Soliton (durchgezogene Linie) und der Vorhersage der gewöhnlichen Differentialgleichungen für ein Modell mit den beiden Moden b_0 und b_4 für eine anfängliche Gaußverteilung.

gewählten Parametern, bei denen die Anfangsverteilung in der Nähe eines DM-Solitons liegt. Die vierte Mode ist dabei die wichtigste von allen Korrekturen, da, das Koordinatensystem so gewählt wurde, dass die zweite Mode weitgehend unterdrückt wird. Bei einer anderen Wahl des Koordinatensystems kann sie jedoch die - nach der nullten Mode - nächstwichtigste Rolle spielen [21].

Daher ist im vorliegenden Fall die 4. Mode ein guter Test für die Approximation der Beschreibung der Pulsausbreitung im Rahmen des ODE-Modells. Abbildung 4.1 zeigt in der Tat, dass sich mit Hilfe der gewöhnlichen Differentialgleichungen Aussagen über b_4 machen lassen. Insofern ist es sinnvoll, die gewöhnlichen Differentialgleichungen (3.114,3.115) nicht nur für DM-Solitonen, sondern für die Pulsausbreitung in Glasfaserkabeln allgemein zu verwenden. In der Tat kann man sie nicht nur für periodische Systeme, sondern auch für nichtperiodische Übertragungsstrecken mit Erfolg einsetzen. Dies wurde am Beispiel des Modells einer real existierenden Fiberline erprobt [24].

5. Vergleich und Bewertung der Modelle

In den vorangegangenen Kapiteln wurden verschiedene Modelle vorgestellt, welche ein gemeinsames Ziel verbindet: Es sollte eine möglichst gute wie praktische Approximation der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung gefunden werden, um wesentliche Eigenschaften der DM-Solitonen als periodische Lösungen der NLSE zu verstehen.

Das erste Modell stellte eine neue Herleitung der Gabitov-Turitsyn-Gleichung dar, welche außerdem eine Korrektur in höherer Ordnung lieferte. Der Nachteil dieser Vorgehensweise ist die Komplexität der verbleibenden Integralgleichung, der Vorteil seine Universalität. Es wurden bei der Herleitung der Gleichung keine Voraussetzungen über die Pulsform gemacht. Insofern ist die Gleichung ebenfalls noch gültig, wenn ein aus mehreren Pulsen bestehendes Signal betrachtet wird. Die durch die Nichtlinearität bedingte Wechselwirkung mehrerer Pulse untereinander ist in der Tat für die Kommunikationsübertragung ein sehr wichtiger Aspekt [46], [12], [24]. Insofern ist die Gabitov-Turitsyn-Gleichung und ihre Korrektur für künftige Anwendungen mit komplizierteren Signalen wertvoll. Für DM-Solitonen ist die Gleichung insofern bedeutend, dass man sie einerseits numerisch lösen kann, um eine Näherung für DM-Solitonen zu erhalten [2], andererseits zumindest einen Iterationsschritt analytisch ausführen kann [27]. Insofern gibt die hier hergeleitete Korrektur erster Ordnung die Möglichkeit, diese Verfahren in Zukunft noch zu verbessern.

Gleiches gilt auch für die Verfeinerung der Momentenmethode, welche als zweites Modell dargestellt wurde. Sie bietet sich insbesondere für die Beschreibung der Phase an: dies wurde am Beispiel der Betrachtung des Chirps deutlich. Beide Modelle sind, verhältnismäßig komplex und erlauben nur wenige analytische Aussagen. Andererseits sind für ihre Herleitung nur schwache Voraussetzungen nötig. Insofern motivieren sie auch zu versuchen, mehr Information über das System zu nutzen, um ein geeignetes Modell zu finden.

Die Entwicklung des Pulses in Hermite-Eigenfunktionen stellt einen systematischen Zugang dar, welcher davon getragen wird, dass der Puls lokalisiert ist, das DM-Soliton sogar in manchen Fällen selbst sehr gaußähnlich ist. Historisch standen dabei zunächst gemittelte Modelle im Vordergrund, wobei es unklar war, welche Version der TM -Gleichungen (linear oder nicht-linear) nun die bessere ist [21]. In der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, dass beide Modelle das System gleich gut beschreiben. Dennoch ist sind mit den nichtlinearen TM -Gleichungen leichter analytische Resultate zu erzielen, da sich die Wirkung der Nichtlinearität schon in den gewöhnlichen Differentialgleichungen zeigt und nicht erst bei Hinzunahme der Gleichungen für die Entwicklungskoeffizienten. Somit konnte auch mit Hilfe der nichtlinearen TM -Gleichungen eine analytische Formel für die Energie-Quasimoment-Charakteristik hergeleitet werden. Wählt man die nichtlinearen Gleichungen, so kann man diese Charakteristik sogar analytisch im Rahmen der gewählten Näherung bestimmen.

Bei den gemittelten Modellen mit Hermite-Entwicklung war es jedoch auch immer notwendig, eine zusätzliche Näherung einzuführen, nämlich dass die Energie des Pulses hauptsächlich in der nullten Mode, welche den gaußartigen Kern des DM-Solitons darstellt, konzentriert ist. Diese Feststellung war der Ausgangspunkt für die Entwicklung des dynamischen Modells,

5. Vergleich und Bewertung der Modelle

welches ein neues Licht auf die Bedeutung der Wahl der TM -Gleichungen geworfen hat. Mit seiner Hilfe wurde klar, dass die Wahl der nichtlinearen TM -Gleichungen im Zweimodenmodell (also nullte und zweite Hermitemode) ein dynamisches Verschwinden der zweiten Mode zur Folge hat. Es wurde gezeigt, dass man dies als ein Verfahren zur Bestimmung der TM -Gleichungen interpretieren kann: Mit Hilfe der Linsentransformation werden zusätzliche Funktionen eingeführt. Von der Freiheit, die Funktionen nach Belieben wählen zu können wird dann später Gebrauch gemacht, um das System möglichst stark zu vereinfachen. Insofern entspricht dann die Wahl der Gleichungen für T und M zusammen mit der Linsentransformation der Wahl eines Koordinatensystems, in dem das DM-Soliton “möglichst gaußartig” beschrieben werden kann.

Da das dynamische Modell nur von der Annahme ausgeht, dass die nullte Mode erheblich mehr Energie beinhaltet als die höheren Moden, ist es auch in der Lage, die Pulsausbreitung innerhalb einer Periode detailliert zu beschreiben, was mit den gemittelten Modellen nicht möglich ist. Diese detaillierte Beschreibung innerhalb einer Periode geschieht mit Hilfe eines Systems gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen. Ihre Lösung erlaubt eine sehr gute Approximation des periodischen DM-Solitons. Außerdem können sie ebenfalls auf das Anfangswertproblem für die Ausbreitung eines lokalisierten Eingangssignals benutzt werden und beschreiben ebenfalls das Entstehen höherer Moden bei Einspeisung eines reinen Gaußpulses. Aus diesem Grund können die gewöhnlichen Differentialgleichungen des dynamischen Modells auch zur Beschreibung nichtperiodischer Pulse in Glasfaserkabeln dienen, was ihre Anwendbarkeit für die Praxis erweitert.

6. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden verschiedene Modelle zur Beschreibung von DM-Solitonen erörtert. Wir haben gesehen, dass es durch geeignete Approximationen möglich ist, die Ausbreitung eines Pulses in einem Lichtwellenleiter durch einfache Modelle zu verstehen. Die Modelle wurden auf die Beschreibung periodischer Lösungen einer symmetrischen Dispersionsstufe angewandt und es wurde gezeigt, dass man auf diese Weise gewisse Eigenschaften der DM-Solitonen sogar analytisch verstehen kann. Jetzt sollen noch einige weiterführende Fragen angesprochen werden, die von hohem Interesse sind, aber in der vorliegenden Arbeit nicht behandelt werden konnten.

Zum einen ist die Frage nach einem mathematischen Existenzbeweis des DM-Solitons offen. Damit verbunden ist die Möglichkeit, dass es noch weitere Lösungsfamilien geben könnte. Auch die Tatsache, dass sich das DM-Soliton in vielerlei Hinsicht wie ein klassisches Soliton der integrierbaren kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung verhält, ist erstaunlich und gibt Anlass, in Hinblick auf eine Verallgemeinerung der Inversen Streutransformation zu forschen. Bezüglich der Pulsausbreitung in Glasfaserkabeln ist in der vorliegenden Arbeit gezeigt worden, dass für einen hinreichend lokalisierten Puls (was bei einer Einzelpulsausbreitung in der Glasfaser in der Praxis immer gegeben ist), die NLSE durch ein nichtlineares System zweier gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen und ein zusätzliches lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen erstaunlich gut approximiert werden kann. Da eine weitere Vereinfachung kaum möglich scheint, wird man versuchen, andere - für die Praxis relevante - Effekte in die dargestellten Modelle miteinzubeziehen.

Hier gibt es im Wesentlichen zwei wichtige Richtungen. Die eine bezieht sich auf zusätzliche Terme in der Gleichung wie den Ramanterm oder den Term für die Dispersion dritter Ordnung, welche wichtiger werden, wenn in der Praxis immer kürzere Pulse benutzt werden, um möglichst hohe Bitraten zu erhalten. Die Erweiterung der bestehenden Modelle ist nichttrivial, da die um diese Terme erweiterte NLSE weniger Symmetrien besitzt.

Die andere Richtung ist die Betrachtung eines Signals, was aus mehreren Pulsen besteht. Durch die Nichtlinearität gibt es auch eine Wechselwirkung der Pulse untereinander, in manchen Parameterbereichen im Falle des Modells einer realen Line sogar eine nichtlineare Wechselwirkung zwischen Signal und dem Verstärkerrauschen [24].

Die Tatsache, dass in Glasfasersystemen, welche auf dem Prinzip der Dispersionskompensation basieren, die Nichtlinearität zwar klein und dennoch wichtig ist, macht diese Systeme zu einem Paradebeispiel für die Anwendung von Störungstheorien. Viele der aufgeworfenen Fragen entstammen der Praxis, nämlich dem Ziel, viele Daten schnell zu übertragen. Das Spannungsfeld zwischen Theorie, numerischen Simulationen und der praktischen Anwendbarkeit machen die eigentliche Faszination dieses Arbeitsgebiets aus. Letztere lässt auf noch viele interessante Entwicklungen in den nächsten Jahren hoffen.

A. Herleitung der Gleichungen für höhere Momente

In dem vorliegenden Abschnitt sollen die Bewegungsgleichungen für die höheren Momente der Schrödingergleichung hergeleitet werden. Dazu gehen wir von der NLSE in der Form

$$iA_z + dA_{tt} + c|A|^2A = 0$$

aus und zerlegen das komplexe Feld $A(z, t) = a(z, t) \exp(\phi(z, t))$ in Amplitude und Phase. Aus der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung folgen dann unmittelbar die entsprechenden Gleichungen für a und ϕ :

$$aa_z = -d \frac{\partial}{\partial t}(a^2 \phi_t), \quad \phi_z = d \frac{a_{tt}}{a} = d\phi_t^2 + ca^2. \quad (\text{A.1})$$

Bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen für die höheren Momente der kubisch nichtlinearen Schrödingergleichung werden wir auch noch die entsprechenden Ausdrücke für a_{tz} und ϕ_{tz} benötigen:

$$a_{zt} = -3da_t\phi_{tt} - 2d\phi_t a_{tt} - da\phi_{ttt}, \quad \phi_{zt} = d \frac{a_{ttt}a - a_t a_{tt}}{a^2} - 2d\phi_t\phi_{tt} + 2caa_t. \quad (\text{A.2})$$

Damit kann man leicht die Ableitungen nach z von den Momenten bestimmen. So folgt:

$$\frac{d}{dz}E = 2 \int aa_z dt = -2d \int \frac{\partial}{\partial t}(a^2 \phi_t) dt = 0. \quad (\text{A.3})$$

Die letzte Gleichheit gilt dabei unter der hier stets gemachten Annahme, dass lokalisierte Verteilungen betrachtet werden, welche für betragsmäßig große Zeiten hinreichend schnell verschwinden. Entsprechend folgt:

$$\frac{d}{dz}T = 2 \int t^2 aa_z dt = -2d \int t^2 \frac{\partial}{\partial t}(a^2 \phi_t) dt = 4d \int t a^2 \phi_t dt = 4dM. \quad (\text{A.4})$$

Die folgenden Rechnungen verlaufen analog, sind jedoch teilweise aufwendiger.

$$\frac{d}{dz}M = 2d \int \phi_t^2 a^2 dt + 2d \int a_t^2 dt - \frac{c}{2} \int a^4 dt = 2dQ + 2d\Omega - \frac{c}{2}P, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{d}{dz}Q = 4d \int \phi_{tt} a_t^2 dt - d \int \phi_{ttt} a^2 dt - c \int \phi_{tt} a^4 dt, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{d}{dz}\Omega = -4d \int \phi_{tt} a_t^2 dt + d \int \phi_{ttt} a^2 dt, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{d}{dz}P = -2d \int \phi_{tt} a^4 dt, \quad \frac{d}{dz}T_2 = 8d \int t^3 \phi_t a^2 dt, \quad (\text{A.8})$$

A. Herleitung der Gleichungen für höhere Momente

$$\frac{d}{dz}P_2 = 4d \int t\phi_t a^4 dt - 2d \int t^2\phi_{tt} a^4 dt, \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{d}{dz}\Omega_2 = 4d \int (t\phi_t - t^2\phi_{tt}) a_t^2 dt + d \int a^2(t^2\phi_{ttt} + 2t\phi_{ttt}) dt. \quad (\text{A.10})$$

Nun machen wir den Ansatz, dass die Phase im Wesentlichen durch den Chirp (die Funktion vor dem t^2 in der Taylorentwicklung von ϕ) und eine Korrektur höherer Ordnung in der Form $\varepsilon\beta t^4$ bestimmt ist:

$$\phi(z, t) = \frac{1}{2}\psi(z)t^2 + \frac{1}{12}\varepsilon\beta(z)t^4. \quad (\text{A.11})$$

Dies kann man in die Gleichungen für die höheren Momente einsetzen. Damit folgt dann:

$$\frac{d}{dz}Q = 4d(\psi\Omega + \varepsilon\beta\Omega_2) - 2d\varepsilon\beta E - c(\psi P + \varepsilon\beta P_2), \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{d}{dz}\Omega = -4d(\psi\Omega + \varepsilon\beta\Omega_2) + 2d\varepsilon\beta E, \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{d}{dz}P = -2d\psi P - 2d\varepsilon\beta P_2, \quad \frac{d}{dz}T_2 = 8d\psi T_2 + \frac{8}{3}d\varepsilon\beta T_4, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{d}{dz}P_2 = 2d\psi P_2 - \frac{2}{3}d\varepsilon\beta P_4, \quad \frac{d}{dz}\Omega_2 = -\frac{8}{3}d\varepsilon\beta\Omega_4 + 6d\varepsilon\beta T. \quad (\text{A.15})$$

In den letzten beiden Gleichungen wurden zwei weitere Momente, nämlich $P_4 = \int t^4 a^4 dt$ und $\Omega_4 = \int t^4 a_t^2 dt$ eingeführt. Zwei weitere Relationen erhalten wir unmittelbar aus den Definitionen von M und Q :

$$M = \int t a^2 \phi_t = \int t a^2 (\psi t + \frac{1}{3}\varepsilon\beta t^3) dt = \psi T + \frac{1}{3}\varepsilon\beta T_2, \quad (\text{A.16})$$

$$Q = \int a^2 \phi_t^2 dt = \int a^2 (\psi t + \frac{1}{3}\varepsilon\beta t^3)^2 dt = \psi^2 T + \frac{2}{3}\psi\varepsilon\beta T_2. \quad (\text{A.17})$$

Hier wurde bei der Berechnung von Q ein Term der Ordnung ε^2 vernachlässigt. Damit sind alle notwendigen Bewegungsgleichungen für die höheren Momente bestimmt worden.

B. Berechnung des Quasiimpulses

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Formeln (3.95), die im Folgenden zur Erinnerung noch einmal angeschrieben werden,

$$\langle \rho \rangle \approx \frac{c_0 N^2 |B_0|^2}{2\sqrt{2\pi} T(0)} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \quad \langle \tau \rangle \approx \frac{1}{y T(0)} \text{Asinh}(y), \quad y = \frac{d}{2T(0)^2}$$

zu begründen. Dabei gehen wir von den Gleichungen

$$T_z = 4d(z)M, \quad M_z = \frac{d}{T^3} - \frac{N^2}{T^2}$$

und einer symmetrischen Dispersionsstufe (2.4) aus, wobei die mittlere Dispersion $\langle d \rangle$ und die Nichtlinearität N^2 als klein angenommen werden. Damit wird das Problem einer Störungsrechnung zugänglich.

B.1. Lösung des linearen Problems

Die linearen Gleichungen

$$T_z = 4\tilde{d}(z)M, \quad M_z = \frac{\tilde{d}}{T^3}$$

können direkt integriert werden. Die Lösung ist dann durch

$$T^{(0)}(z) = T(0) \sqrt{1 + 4 \left(\frac{R(z)}{T(0)^2} \right)^2}, \quad M^{(0)}(z) = \frac{R(z)/T(0)^3}{\sqrt{1 + 4 \left(\frac{R(z)}{T(0)^2} \right)^2}} \quad (\text{B.1})$$

gegeben, wobei

$$R(z) = \begin{cases} dz & \text{für } 0 \leq z < \frac{1}{4} \\ -dz + \frac{1}{2}d & \text{für } \frac{1}{4} \leq z < \frac{3}{4} \\ dz - d & \text{für } \frac{3}{4} \leq z < 1 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

die akkumulierte lineare Dispersion darstellt.

B.2. Berechnung von $\langle \frac{N^2}{T} \rangle$

Da N^2 als klein angenommen wird, gilt wegen $R(z) = R(\frac{1}{2} - z)$:

$$\langle \frac{N^2}{T} \rangle \approx \langle \frac{N^2}{T(0)} \rangle = 2N^2 \left(\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{T(0)} + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{T(0)} \right). \quad (\text{B.3})$$

B. Berechnung des Quasiimpulses

Hiermit folgt

$$\left\langle \frac{N^2}{T^{(0)}} \right\rangle = 4N^2 \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{T^{(0)} \sqrt{1 + 4 \left(\frac{dz}{T^{(0)}} \right)^2}} = \frac{N^2}{T^{(0)}} \frac{1}{y} \operatorname{Asinh}(y), \quad y = \frac{d}{2T^{(0)}}. \quad (\text{B.4})$$

B.3. Berechnung von $\left\langle \frac{d}{T} \right\rangle$

Die folgende Bestimmung von $\left\langle \frac{d}{T} \right\rangle$ ist ein wenig aufwendiger. Dies liegt daran, dass man die Lösung der nichtlinearen Gleichungen für T und M in erster Ordnung explizit benutzen muss. Denn auf ähnliche Weise wie eben erhält man

$$\left\langle \frac{d}{T} \right\rangle = 4 \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\langle d \rangle}{(T^{(0)})^2} + 2 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{2dT^{(1)}}{(T^{(0)})^3} - 2 \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{2dT^{(1)}}{(T^{(0)})^3}. \quad (\text{B.5})$$

Hier lässt sich das erste Integral direkt bestimmen und es folgt

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\langle d \rangle}{(T^{(0)})^2} = \frac{\langle d \rangle}{2d} \operatorname{atn}(y), \quad y = \frac{d}{2T^{(0)}}. \quad (\text{B.6})$$

Die Schwierigkeit liegt also in der Berechnung von

$$\mathcal{R} := \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{2dT^{(1)}}{(T^{(0)})^3} - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{2dT^{(1)}}{(T^{(0)})^3}. \quad (\text{B.7})$$

Um die Integration auszuführen, sei zunächst die explizite Form von $T^{(1)}$ angeschrieben, welche bereits in [34] hergeleitet wurde. Im Folgenden schreiben wir zur Abkürzung $\tilde{T} = T^{(0)}\left(\frac{1}{4}\right)$ und entsprechend $\tilde{T}^{(1)} = T^{(1)}\left(\frac{1}{4}\right)$. Des Weiteren bezeichnen wir zur Unterscheidung die Einschränkung von T auf ersten Abschnitt für $0 \leq z < \frac{1}{4}$ mit T_1 und entsprechend die Einschränkung von T auf den zweiten Abschnitt für $\frac{1}{4} \leq z \leq \frac{1}{2}$ mit T_2 . Außerdem sei daran erinnert, dass T stetig, also insbesondere in $z = \frac{1}{4}$ stetig ist. Mit diesen Bezeichnungen folgt:

$$\begin{aligned} 2AT_1^{(0)}(z)T_1^{(1)}(z) &= \delta b_1 - \delta a_1(T_1^{(0)}(z))^2 - \tilde{c}_1 T_1^{(0)}(z) + 2\left(2A\left(z - \frac{1}{4}\right) + \sqrt{A\tilde{T}^2 - B}\right) \cdot \\ &\quad \left(2\delta a_1\left(z - \frac{1}{4}\right) + \frac{2A\tilde{T}\tilde{T}^{(1)} + \delta a_1\tilde{T}^2 + \tilde{c}_1\tilde{T} - \delta b_1}{2\sqrt{A\tilde{T}^2 - B}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\tilde{c}_1}{2\sqrt{A}} \log\left[\frac{\sqrt{A(T_1^{(0)}(z))^2 - B} + \sqrt{A}T_1^{(0)}(z)}{\sqrt{A\tilde{T}^2 - B} + \sqrt{A}\tilde{T}}\right]\right), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

B. Berechnung des Quasiimpulses

$$\begin{aligned}
2AT_2^{(0)}(z)T_2^{(1)}(z) &= \delta b_2 - \delta a_2(T_2^{(0)}(z))^2 - \tilde{c}_2 T_2^{(0)}(z) + 2(-2A(z - \frac{1}{4}) + \sqrt{A\tilde{T}^2 - B}) \cdot \\
&\quad (-2\delta a_2(z - \frac{1}{4}) + \frac{2A\tilde{T}\tilde{T}^{(1)} + \delta a_2\tilde{T}^2 + \tilde{c}_2\tilde{T} - \delta b_2}{2\sqrt{A\tilde{T}^2 - B}} + \\
&\quad \frac{\tilde{c}_2}{2\sqrt{A}} \log\left[\frac{\sqrt{A(T_2^{(0)}(z))^2 - B} + \sqrt{A}T_2^{(0)}(z)}{\sqrt{A\tilde{T}^2 - B} + \sqrt{A}\tilde{T}}\right]), \tag{B.9}
\end{aligned}$$

wobei folgende weitere abkürzende Ausdrücke eingeführt wurden:

$$A = \frac{d^2}{\tilde{T}^2} + 4d^2M^{(0)}, \quad B = d^2, \tag{B.10}$$

$$\delta a_1 = \frac{2d\langle d \rangle}{\tilde{T}^2} - \frac{2d^2\tilde{T}^{(1)}}{\tilde{T}^3} + 8d\langle d \rangle(M^{(0)}(\frac{1}{4}))^2 + 8d^2M^{(0)}(\frac{1}{4})M^{(1)}(\frac{1}{4}) - \frac{\tilde{c}_1}{\tilde{T}}, \tag{B.11}$$

$$\delta a_2 = -\frac{2d\langle d \rangle}{\tilde{T}^2} - \frac{2d^2\tilde{T}^{(1)}}{\tilde{T}^3} - 8d\langle d \rangle(M^{(0)}(\frac{1}{4}))^2 + 8d^2M^{(0)}(\frac{1}{4})M^{(1)}(\frac{1}{4}) - \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{T}}, \tag{B.12}$$

$$\delta b_1 = 2d\langle d \rangle, \quad \delta b_2 = -2d\langle d \rangle, \quad \tilde{c}_1 = 2N^2d, \quad \tilde{c}_2 = -2N^2d. \tag{B.13}$$

Mit Hilfe der Relation $T_2^{(0)}(\frac{1}{2} - z) = T_1^{(0)}(z)$ folgt dann eine erhebliche Vereinfachung für die Berechnung von \mathcal{R}

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= 2d \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2A(T_1^{(0)}(z))^4} [(\delta b_2 - \delta b_1) - (\delta a_2 - \delta a_1)(T_1^{(0)}(z))^2 - (\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1)T_1^{(0)}(z) + \\
&\quad 2(2A(z - \frac{1}{4}) + \sqrt{A\tilde{T}^2 - B})(2(z - \frac{1}{4})(\delta a_2 - \delta a_1) + \\
&\quad \frac{(\delta a_2 - \delta a_1)\tilde{T}^2 - (\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1)\tilde{T} - (\delta b_2 - \delta b_1)}{2\sqrt{A\tilde{T}^2 - B}} + \\
&\quad \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1}{2\sqrt{A}} \log\left[\frac{\sqrt{A(T_1^{(0)}(z))^2 - B} + \sqrt{A}T_1^{(0)}(z)}{\sqrt{A\tilde{T}^2 - B} + \sqrt{A}\tilde{T}}\right)]. \tag{B.14}
\end{aligned}$$

Aus (B.12,B.13) erhält man

$$\delta b_2 - \delta b_1 = -4d\langle d \rangle, \quad \delta a_2 - \delta a_1 = 4 \left(\frac{N^2d}{\tilde{T}} - \frac{d\langle d \rangle}{T(0)^2} \right), \quad \tilde{c}_2 - \tilde{c}_1 = -4N^2d \tag{B.15}$$

und kann so mit Hilfe von $\tilde{T} = T(0)\sqrt{1 + \frac{d^2}{4T(0)^4}}$ die Terme in dem Ausdruck für \mathcal{R} erheblich vereinfachen

$$\frac{(\delta a_2 - \delta a_1)\tilde{T}^2 - (\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1)\tilde{T} - (\delta b_2 - \delta b_1)}{2\sqrt{A\tilde{T}^2 - B}} = -\frac{\langle d \rangle d}{T(0)^2}. \tag{B.16}$$

B. Berechnung des Quasiimpulses

Damit lässt sich \mathcal{R} in der folgenden Form schreiben

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & \frac{d}{A}(-4d\langle d \rangle I_1 - (\delta a_2 - \delta a_1) I_2 + 4dN^2 I_3 + 8A(\delta a_2 - \delta a_1) I_4 + \\ & 4A\left(\frac{d\langle d \rangle}{T(0)^2} - \frac{2N^2 d}{\tilde{T}}\right) I_5 + 2\sqrt{A}(\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1) I_6, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

wobei man für die auftretenden Integrale I_i mit $i \in \{1 \dots 6\}$ analytische Ausdrücke erhält (wieder ist $y = \frac{d}{2T(0)^2}$)

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{(T_1^{(0)}(z))^4} = \frac{1}{8T(0)^4} \left(\frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{y} \text{atn}(y) \right), \quad (\text{B.18})$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{(T_1^{(0)}(z))^2} = \frac{1}{2d} \text{atn}(y), \quad (\text{B.19})$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{(T_1^{(0)}(z))^3} = \frac{1}{4T(0)^3} \frac{1}{1+y^2}, \quad (\text{B.20})$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{z^2}{(T_1^{(0)}(z))^4} = \frac{T(0)^2}{16d^3} \left(\text{atn}(y) - \frac{y}{1+y^2} \right), \quad (\text{B.21})$$

$$I_5 = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{z}{(T_1^{(0)}(z))^4} = \frac{1}{8d^2} \frac{y^2}{1+y^2}, \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{z}{(T_1^{(0)}(z))^4} \log \left[\frac{\frac{2d}{T(0)^2} z + \sqrt{1 + \left(\frac{2d}{T(0)^2} z\right)^2}}{\frac{d}{2T(0)^2} + \sqrt{1 + \frac{d^2}{4T(0)^4}}} \right] \\ &= \frac{1}{16dT(0)^2} \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{y} \log(y + \sqrt{1+y^2}) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Setzt man dies ein, so folgt nach einer Reihe rein algebraischer Umformungen

$$\mathcal{R} = \frac{\langle d \rangle}{2T(0)^2} \left(1 - \frac{1}{y} \text{atn}(y) \right) - \frac{N^2}{2T(0)} \left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{1}{y} \log(y + \sqrt{1+y^2}) \right) \quad (\text{B.24})$$

und damit für $\left\langle \frac{d}{T^2} \right\rangle$

$$\left\langle \frac{d}{T^2} \right\rangle = \frac{\langle d \rangle}{T(0)^2} - \frac{N^2}{T(0)} \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{y} \log(y + \sqrt{1+y^2}) \right). \quad (\text{B.25})$$

B. Berechnung des Quasiimpulses

Das Ergebnis lässt sich weiter vereinfachen, wenn man berücksichtigt, dass für den Fixpunkt einer symmetrischen Dispersionsstufe ein besonderer Zusammenhang zwischen $\langle d \rangle$ und N^2 besteht [34]

$$N^2 = \frac{\langle d \rangle}{T(0)} \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{1}{y} \log(y + \sqrt{1+y^2})}. \quad (\text{B.26})$$

Damit folgt dann das verblüffend einfache Ergebnis

$$\left\langle \frac{d}{T^2} \right\rangle = \frac{N^2}{T(0)\sqrt{1+y^2}}. \quad (\text{B.27})$$

C. Die lineare Approximation der $E(k)$ -Kurve

Die analytische Formel für die Parametrisierung der Abhängigkeit der Energie E vom Quasiimpuls k des DM-Solitons hat die Form (3.96)

$$k(y) = \frac{Z(y)}{N(y)}, \quad E(y) = \frac{\tilde{Z}(y)}{N(y)}, \quad (\text{C.1})$$

mit

$$Z(y) = 2 \frac{\langle d \rangle}{d} y \left(-\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{5}{2} \frac{1}{y} \text{Arcsinh}(y) \right), \quad (\text{C.2})$$

$$\tilde{Z}(y) = 4\sqrt{\pi} \frac{\langle d \rangle}{d} \sqrt{y}, \quad N(y) = \frac{2}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{1}{y} \text{Arcsinh}(y). \quad (\text{C.3})$$

Um eine Approximation für die lineare $E(k)$ -Kurve zu erhalten, machen wir den Ansatz $E(y) \approx \alpha k(y) + \beta$. Er soll an der Singularität ζ des Nenners $N(y)$ ausgewertet werden. Dann gilt

$$\alpha = \lim_{y \rightarrow \zeta} \frac{E'(y)}{k'(y)} \quad \beta = \lim_{y \rightarrow \zeta} \left(E(y) - \frac{E'(y)}{k'(y)} k(y) \right). \quad (\text{C.4})$$

Benutzt man die spezielle Struktur der Funktionen $E(y)$ und $k(y)$, so folgt

$$\alpha = \frac{\tilde{Z}(\zeta)}{Z(\zeta)}, \quad \beta = \frac{\tilde{Z}'(\zeta)Z(\zeta) - Z'(\zeta)\tilde{Z}(\zeta)}{N'(\zeta)Z(\zeta)}. \quad (\text{C.5})$$

Wertet man die Ausdrücke aus, so erhält man

$$Z'(\zeta) = \frac{\langle d \rangle}{d} \frac{3+5\zeta^2}{\sqrt{1+\zeta^2}^3}, \quad Z(\zeta) = 8 \frac{\langle d \rangle}{d} \frac{\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}}, \quad (\text{C.6})$$

$$\tilde{Z}'(\zeta) = 2\sqrt{\pi} \frac{\langle d \rangle}{\sqrt{d}} \frac{1}{\sqrt{\zeta}}, \quad \tilde{Z}(\zeta) = 4\sqrt{\pi} \frac{\langle d \rangle}{\sqrt{d}} \sqrt{\zeta}, \quad (\text{C.7})$$

$$N'(\zeta) = \frac{1-\zeta^2}{\zeta(\sqrt{1+\zeta^2}^3)} \quad (\text{C.8})$$

und damit durch Einsetzen das gewünschte Ergebnis

$$\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{d} \sqrt{\frac{1+\zeta^2}{\zeta}}, \quad \beta = \frac{\sqrt{\pi} \langle d \rangle}{2 \sqrt{d}} \sqrt{\zeta} \sqrt{1+\zeta^2}. \quad (\text{C.9})$$

Literatur

- [1] F. K. Abdullaev and B. B. Baizakov, *Disintegration of a soliton in a dispersion-managed communication line with random parameters*, Opt. Lett. **25** (2000) 93–95.
- [2] M. J. Ablowitz and G. Biondini, *Multiscale pulse dynamics in communication systems with strong dispersion management*, Opt. Lett. **23** (1998) 1668–1670.
- [3] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, San Diego, 1995.
- [4] G. P. Agrawal, *Fiber-optic communication systems*, John Wiley & Sons, New York, 1997.
- [5] D. Anderson, *Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers*, Phys. Rev. A **27** (1983) 3135–3145.
- [6] P.-A. Bélanger and N. Bélanger, *RMS characteristics of pulses in nonlinear dispersive lossy fibers*, Opt. Comm. **117** (1995) 56–60.
- [7] A. Berntsson, *Nonlinear Pulse Propagation in Optical Fibers*, Chalmers University of Technology, Göteborg, 1998.
- [8] V. Cautaerts, A. Maruta, and Y. Kodama, *On the dispersion managed soliton*, Chaos **10** (2000) 515–528.
- [9] Corning, *Product Information*, <http://www.corning.com>, New York, 2000.
- [10] I. Gabitov, T. Schäfer, and S. K. Turitsyn, *Lie-transform averaging in nonlinear optical transmission systems with strong and rapid periodic dispersion variations*, Phy. Lett. A **265** (2000) 274–281.
- [11] I. Gabitov and S. K. Turitsyn, *Averaged pulse dynamics in a cascaded transmission system with passive dispersion compensation*, Opt. Lett. **21** (1996) 327–329.
- [12] T. Georges, *Soliton interaction in dispersion-managed links*, J. Opt. Soc. Am. B **15** (1998) 1553–1560.
- [13] A. Ghatak and K. Thyagarajan, *Introduction to Fiber Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [14] N. Gisin and J. P. Pellaux, *Polarization mode dispersion: time versus frequency domains*, Opt. Comm. **89** (1992) 316–323.
- [15] V. S. Grigoryan and C. R. Menyuk, *Dispersion-managed solitons at normal average dispersion*, Opt. Lett. **23** (1998) 609–611.

- [16] A. Hasegawa and Y. Kodama, *Guiding-center soliton in optical fibers*, Opt. Lett. **15** (1990) 1443–1445.
- [17] A. Hasegawa and Y. Kodama, *Guiding-Center Soliton*, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 161–164.
- [18] A. Hasegawa and Y. Kodama, *Guiding-center soliton in fibers with periodically varying dispersion*, Opt. Lett. **15** (1991) 1385–1387.
- [19] A. Hasegawa and Y. Kodama, *Solitons in optical communications*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [20] A. Hasegawa and F. Tappert, *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion*, Appl. Phys. Lett. **23** (1973) 142–144.
- [21] H. A. Haus and Y. Chen, *Dispersion-managed solitons as nonlinear Bloch waves*, J. Opt. Soc. Am. B **16** (1999) 889–894.
- [22] J. N. Kutz and Stephen G. Evangelides, Jr., *Dispersion-managed breathers with average normal dispersion*, Opt. Lett. **23** (1998) 685–687.
- [23] E. A. Kuznetsov, A. V. Mikhailov, and I. A. Shimokhin, *Nonlinear interaction of solitons and radiation*, Physica D **87** (1995) 201–215.
- [24] E. W. Laedke, T. Schäfer, A. Posth, C. Karle, K. H. Spatschek, M. Gunkel, and S. K. Turitsyn, *Optimization of dispersion-managed optical fiber lines*, Journal of the University of Applied Sciences Mittweida **8** (2000) 63–70.
- [25] T. I. Lakoba and D. J. Kaup, *Hermite-Gaussian expansion for pulse propagation in strongly dispersion managed fibers*, Phys. Rev. E **58** (1998) 6728–6741.
- [26] P. Larzaridis, G. Debarge, and P. Gallion, *Exact solutions for linear propagation of chirped pulses using a chirped Gauss-Hermite orthogonal basis*, Opt. Lett. **22** (1997) 685–687.
- [27] P. M. Lushnikov, *Dispersion-managed soliton in optical fibers with zero average dispersion*, Opt. Lett. **25** (2000) 1144–1146.
- [28] P. M. Lushnikov, *On the Boundary of the Dispersion-Managed Soliton Existence*, JETP Lett. **72** (2000) 111–114.
- [29] A. H. Neyfeh, *Perturbation Methods*, Wiley-International, New York, 1973.
- [30] J. H. B. Nijhof, N. J. Doran, W. Forysiak, and A. Berntson, *Energy enhancement of dispersion-managed solitons and WDM*, Electr. Lett. **34** (1998) 481–482.

- [31] J. H. B. Nijhof, W. Forysiak, and N. J. Doran, *Dispersion-managed solitons in the normal dispersion regime: a physical interpretation*, Opt. Lett. **23** (1998) 1674–1676.
- [32] C. Paré, V. Roy, F. Lesage, P. Mathieu, and P.-A. Bélanger, *Coupled-field description of zero-average dispersion amangement*, Phys. Rev. E **60** (1999) 4836–4842.
- [33] C. D. Poole, J. H. Winters, and J. A. Nagel, *Dynamical equation for polarization dispersion*, Opt. Lett. **16** (1991) 372–374.
- [34] T. Schäfer, *Modelle für das mittlere Verhalten von Solitonen in Systemen mit stark variierender Dispersion (Diplomarbeit)*, Heinrich-Heine-Universität, Düsseldorf, 1998.
- [35] T. Schäfer, V. K. Mezentsev, K. H. Spatschek, and S. K. Turitsyn, *The dispersion-managed soliton as a ground state of a macroscopic nonlinear quantum oscillator*, Proc. Roy. Soc. A (2000) *in press*.
- [36] E. G. Shapiro and S. K. Turitsyn, *Theory of guiding-center breathing soliton propagation in optical communication systems with strong dispersion management*, Opt. Lett. **22** (1997) 1544–1546.
- [37] N. Smith, N. J. Doran, F. M. Knox, and W. Forysiak, *Energy-scaling characteristics of solitons in strongly dispersion-managed fibers*, Opt. Lett. **21** (1996) 1981–1983.
- [38] V. I. Talanov, *Focusing of light in cubic media*, JETP Letters **11** (1970) 199–201.
- [39] S. K. Turitsyn, *Theory of average pulse propagation in high-bit-rate optical transmission systems with strong dispersion management.*, JETP Letters **65** (1997) 845–851.
- [40] S. K. Turitsyn, *Breathing self-similar dynamics and oscillatory tails of the chirped dispersion-managed soliton*, Phys. Rev. E **58** (1998) R1256–R1259.
- [41] S. K. Turitsyn, I. Gabitov, E. W. Laedke, V. K. Mezentsev, S. L. Musher, E. G. Shapiro, T. Schäfer, and K. H. Spatschek, *Variational approach to optical pulse propagation in dispersion compensated transmission systems*, Opt. Comm. **151** (1998) 117–135.
- [42] S. K. Turitsyn, T. Schäfer, and V. K. Mezentsev, *Generalized momentum method to describe high-frequency solitary wave propagation in systems with varying dispersion*, Phys. Rev. E **58** (1998) R5264–R5267.
- [43] S. K. Turitsyn, T. Schäfer, and V. K. Mezentsev, *Generalized Root-Mean-Square Momentum Method to Describe Chirped Retrun-to-Zero Signal Propagation in Dispersion-Managed Fiber Links*, IEEE Phot. Techn. Lett. **11** (1999) 203–205.
- [44] S. K. Turitsyn, T. Schäfer, K. H. Spatschek, and V. K. Mezentsev, *Path-averaged chirped optical soliton in dispersion-managed fiber communication lines*, Opt. Comm. **163** (1999) 122–158.

- [45] T.-S. Yang and W. L. Kath, *Analysis of enhanced-power solitons in dispersion-managed optical fibers*, Opt. Lett. **22** (1997) 985–987.
- [46] T. Yu, E. A. Golovchenko, A. N. Pilipetskii, and C. R. Menyuk, *Dispersion-managed soliton interactions in optical fibers*, Opt. Lett. **22** (1997) 793–795.
- [47] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, *Exact theory of two-dimensional self-focussing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*, Zh. Eksp. Teor. Fiz **61** (1971) 118–134.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mir in den vergangenen Jahren zur Seite gestanden sind. Die Menschen, denen wir begegnen, hinterlassen nicht nur Spuren in unserer Geschichte, sondern auch in unserem Herzen. Herrn Prof. Dr. K. H. Spatschek danke ich für die großartige Unterstützung in den vergangenen Jahren. Er hat in mir die Faszination für theoretische Fragestellungen in der Physik geweckt und er gab mir alle Möglichkeiten, dieser Faszination in der Arbeit am Institut nachzuspüren. Herrn Prof. Dr. R. Grauer danke ich für die wunderbare Zusammenarbeit und die vielen Anregungen in Hinblick auf die verschiedensten Forschungsgebiete. Allen Kollegen in Düsseldorf möchte ich zunächst für die wunderbare Stimmung und Freundlichkeit danken. Darüberhinaus danke ich Herrn Dr. Wenk für die Betreuung des Computernetzes, Herrn Zügge für die Hilfe bei technischen Problemen, Frau E. Gröters und Frau R. Gerardi für die Hilfe bei allen organisatorischen Fragen. Besonderer Dank gebührt Herrn Dr. E. W. Laedke, Alexander Posth, Christoph Karle und Fabio Mancin sowie allen Freunden und Kollegen in Aston und Los Alamos, mit welchen die Zusammenarbeit nicht nur fruchtbar, sondern sehr herzlich war. Ebenso danke ich meinen Eltern, meinem Bruder und Ana Karcz, die mich auf meinem Weg immer begleitet haben.

Die lange Zeit zusammen im Institut mit Kai Germaschewski, Sylvie Defrasne und Dmitry Lesnik haben mich ganz besonders geprägt, deswegen an dieser Stelle ein “Vielen lieben Dank!”, “Merci beaucoup!” und “Bolshoj spasibo!”. Ein ganz besonders lieber Dank an Yoko Morita: “Doomo arigatoo!”, Marc Strasser und Susana Martinez: “Muchas gracias” nicht zuletzt auch wegen ihrer tollen Unterstützung bei der Vorbereitung auf die mündliche Prüfung.