

Entwicklung der η_i -Instabilität in driftkinetischer Beschreibung

Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von
Oliver Sieks
aus Düsseldorf

Düsseldorf
1999

Gedruckt mit Genehmigung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Erster Berichterstatter: Prof. Dr. K. H. Spatschek

Zweiter Berichterstatter: Prof. Dr. R. Bessenrodt

Tag der mündlichen Prüfung: 3. November 1999

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Die η_i -Instabilität	3
2	Modell	5
2.1	Driftkinetische Beschreibung	5
2.2	Geometrie	6
2.3	Skalierung	9
2.3.1	Annahmen	10
2.3.2	Überführung in dimensionslose Größen	11
2.4	Grundgleichungen	13
2.4.1	Driften	13
2.4.2	Dynamik der Elektronen	15
2.4.3	Quasineutralität	15
2.4.4	Dynamik der Ionen	18
3	Lineare Behandlung	20
3.1	Dispersionsrelation	20
3.1.1	Linearisierung der Vlasov-Gleichung	20
3.1.2	Auswertung mit Hilfe der Z -Funktion	23
3.2	Lokale Approximation	25
3.2.1	Lokales Instabilitätskriterium	26
3.2.2	Abhängigkeit von der Wellenzahl	27
3.3	Nichtlokale Behandlung	29
3.3.1	Diskretisierung	29
3.3.2	Lösungsbedingung	30
3.3.3	Struktur der instabilen Moden	30
3.4	Vergleich zwischen lokaler und nichtlokaler Rechnung	34
3.5	Einfluß der Magnetfeldkonfiguration	35
3.5.1	Homogenes Magnetfeld	36

3.5.2	Verscherung	37
4	Nichtlineares Verhalten und Transport	38
4.1	Plasmasimulation	38
4.1.1	Numerische Behandlung	38
4.1.2	Diagnostik	41
4.1.3	Verhalten der Mode	42
4.2	Relaxation ins Gleichgewicht	45
4.3	Einfluß kinetischer Effekte	48
4.4	Einsatz der Instabilität und Skalengesetze	50
4.5	Getriebene stationäre Zustände	53
4.5.1	Teilchen- und Wärmediffusion	56
4.5.2	Fluktuationen und Spektren	59
5	Zusammenfassung	64
	Anhang	66
A	Numerische Methoden	66
A.1	Integration der kinetischen Gleichung	66
A.1.1	Transformation auf Invariante	67
A.2	Lösung der Poissongleichung	70
A.3	Interpolation und <i>Operator Splitting</i>	71
A.4	Nullstellensuche in der komplexen Ebene	73
A.4.1	Newton-Verfahren	73
A.4.2	Komplexe Bisektion	74
A.4.3	<i>Downhill Walk</i>	74
B	Vergleich mit SOC-Modellen	77
B.1	Sandhaufensimulationen	77
B.2	Analogien zwischen Sandhaufen und Plasmen	80

1 Einleitung

Seit der Entdeckung der Kernfusion besteht ein großer Traum der Physik darin, die beim Verschmelzungsprozeß zweier Wasserstoffatome freiwerdende Energie nutzbar zu machen und damit über eine praktisch unerschöpfliche, abfall- und risikoarme Energiequelle zu verfügen. Gleichzeitig ist dies eine große Herausforderung für die Wissenschaft, da enorme physikalische und technische Schwierigkeiten zu überwinden sind. Das Hauptproblem bei der Fusion unter kontrollierten Bedingungen ist, daß zur Verschmelzung zweier Kerne die Coulomb-Abstoßung zwischen ihnen überwunden werden muß. Dazu sind entweder hohe Dichten n oder hohe Temperaturen T erforderlich, die außerdem noch über einen hinreichend langen Zeitraum τ herrschen müssen. Als erstes Ziel wird die Fusion mit den Wasserstoffisotopen Deuterium ${}^2_1\text{D}$ und Tritium ${}^3_1\text{T}$ angesehen. Hier ist die Potentialschwelle niedriger, da die Neutronen des Kerns die gegenseitige Abstoßung verringern [1]. Für die D-T-Reaktion gilt das *Lawson-Kriterium* [2,3]

$$n \cdot \tau \cdot T \gtrsim 10^{20} \frac{\text{s}}{\text{m}^3} \cdot 3 \cdot 10^7 \text{ K},$$

für die D-D-Reaktion liegt die Lawsonzahl mit $10^{22} \text{ s m}^{-3} \cdot 10^8 \text{ K}$ noch höher. Um das notwendige Produkt aus Dichte und Einschlußzeit zu erreichen, gibt es zwei verschiedene Ansätze:

- ▶ einerseits die *Trägheitsfusion*, die mit hochkomprimierten Deuterium-Perlen, sogenannten *pellets*, arbeitet und die erforderliche Lawsonzahl in erster Linie durch große Dichten erreichen will,
- ▶ andererseits den *magnetischen Einschluß*, bei dem mit geringeren Dichten, dafür aber hohen Temperaturen und langen Einschlußzeiten gearbeitet wird. Innerhalb dieser Gruppe gibt es die beiden Hauptrichtungen der *Tokamaks* und der *Stellaratoren*.

Der vielversprechendere Ansatz scheint zur Zeit der magnetische Einschluß zu sein. Hierbei wird das Wasserstoffgas ionisiert, also in den *Plasma*-Zustand überführt. In einem starken Magnetfeld werden die elektrisch geladenen Teilchen durch die Lorentzkraft auf Spiralbahnen um die Feldlinien gezwungen, an denen sie wie Perlen auf einer Schnur aufgereiht sind. Die möglichen Magnetfeldkonfigurationen sind dadurch stark eingeschränkt, daß einerseits die Maxwellgleichung $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ erfüllt sein muß, andererseits die Linien geschlossen sein sollen und nicht auf die Wände des Plasma-Behälters stoßen

dürfen, da an diesen Stellen sonst Verluste auftreten. Alle Konfigurationen, die diesen beiden Bedingungen genügen, sind topologisch einem Torus äquivalent. Die beiden Hauptrichtungen unterscheiden sich darin, daß Tokamaks eine toroidale Symmetrie aufweisen, Stellaratoren dagegen von vorneherein asymmetrisch aufgebaut sind. Den Stellaratoren ist es deswegen möglich, den Einschluß mit einem komplexen, aber stationären Magnetfeld zu erreichen, während in Tokamaks ein zusätzliches poloidales Feld durch den toroidalen Plasmastrom erzeugt wird.

Obwohl jedes einzelne Teilchen um „seine“ Feldlinie gyriert und deshalb die Maschine theoretisch nie verlassen dürfte, stellt sich heraus, daß ein Plasma mit etwa 10^{20} miteinander wechselwirkenden Protonen und Elektronen sich keineswegs so verhält. Es findet im Gegenteil ein Transport von Teilchen und Energie aus dem Zentrum in den Plasmarand und von dort aus auf die Wände statt, der einen Verlust von Dichte und Wärme mit sich bringt und die Lawsonzahl verringert. Dafür sind zwei unterschiedliche Mechanismen verantwortlich:

- ▶ *Stoßbestimmter Transport* erfolgt durch Kollisionen der Elektronen bzw. Ionen untereinander, bei denen Energie übertragen wird oder die Teilchen von ihren Feldlinien heruntergeworfen werden. Dieser Transport ist in der Regel *diffusiv*, das heißt proportional zum Dichtegradienten; er wird auch als *normaler Transport* bezeichnet. Da in Fusionsplasmen die mittleren freien Weglängen in der Regel sehr groß sind, spielt er nur eine untergeordnete Rolle.
- ▶ *Kollektiver Transport* bezeichnet alle Phänomene, die durch die langreichweitige Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Teilchen entstehen. Dazu gehören die unterschiedlichsten Wellen und Instabilitäten. Obwohl er in Fusionsplasmen den bestimmenden Teil ausmacht, wird er aus historischen Gründen auch *anomaler Transport* genannt.

In dieser Arbeit wird ein Mechanismus, der zum anomalen Transport beiträgt, untersucht, nämlich die η_i -*Instabilität*. Diese Mode wird im nächsten Abschnitt zunächst allgemein beschrieben. Zur mathematischen Behandlung wird hier ein driftkinetisches Modell verwendet, das in Kapitel 2 eingeführt wird. Anschließend werden in Kapitel 3 analytische Aussagen gemacht, die sich aber wegen der Komplexität der Gleichungen auf den linearen Bereich beschränken müssen. Anhand einer numerischen Simulation, die in Abschnitt 4.1 und im Anhang A.1 beschrieben ist, wird in Kapitel 4 das nichtlineare Regime

untersucht und der durch die η_i -Moden verursachte Transport behandelt. Dabei wird der Zusammenhang mit kritischer Selbstorganisation diskutiert, ein Zustand, der in Anhang B ausführlicher dargestellt wird. In Kapitel 5 werden schließlich die wichtigsten Ergebnisse zusammengefaßt.

1.1 Die η_i -Instabilität

Die η_i -Instabilität ist eine Driftmode, das heißt, eine Ionenwelle, die durch den Gradienten des Ionen-Drucks getrieben wird und sich senkrecht zu ihm und annähernd senkrecht zum Magnetfeld ausbreitet. Sie wird aus diesem Grund auch als *Ionentemperaturgradient-* oder *ITG-Instabilität* bezeichnet. In einem Tokamak oder in zylindrischen Plasmaentladungen erfolgt die Ausbreitung ungefähr – unter einem kleinen Winkel – in poloidaler Richtung; eine solche Driftwelle läßt sich als langgestreckte Spirale um den Plasmakern herum vorstellen. Eine anschauliche Darstellung findet sich z. B. bei Chen [4, Kapitel 6.8].

Die Driftwelle koppelt an die longitudinale thermische Bewegung der Ionen, das heißt, daß unter bestimmten Umständen die Transitdrift entlang der Magnetfeldlinien Energie an die transversale Driftwelle abgibt, die dann exponentiell anwächst: die η_i -Mode wird instabil. Dabei werden zwei verschiedene Mechanismen unterschieden. Zum einen gibt es den Effekt der ungünstigen Krümmung der Magnetfeldlinien, zum anderen den des ungünstigen Verhältnisses zwischen Dichte- und Temperaturgradienten. Diese beiden Fälle werden in der Literatur als *toroidale Mode* bzw. *slab-Mode* bezeichnet [5].

In dieser Arbeit wird die *slab-Mode* der η_i -Instabilität behandelt. Hierbei ist das Verhältnis von Temperatur- zu Dichtegradient ein kritischer Wert, weswegen der dimensionslose Parameter

$$\eta_i := \frac{d \log T_i}{d \log n_i} = \frac{n_i}{T_i} \frac{dT_i}{dn_i} \quad (1)$$

eingeführt wird, der der Mode ihren Namen gegeben hat. Der Index i steht dabei für „Ionen“. Analog läßt sich auch η_e für Elektronen definieren, die dazugehörige Mode ist jedoch von geringerer Bedeutung. Niedrige Werte von η_i wirken stabilisierend, während beim Überschreiten eines Schwellenwertes η_{ic} , dessen genauer Wert je nach betrachteter Konfiguration zwischen 2/3 und 2 variiert, die Instabilität auftritt. Eine umfangreiche Zusammenstellung von Ergebnissen für die toroidale wie für die *slab-Mode* findet sich bei Horton [6].

Eine erste Beschreibung der η_i -Instabilität erfolgte bereits 1967 durch Coppi, Rosenbluth und Sagdeev [7]. Seitdem wurde diese Mode in diversen Ex-

perimenten identifiziert, sowohl in Laborentladungen wie der *Columbia Linear Machine* [8] als auch in Tokamaks. Bei letzteren wurde die Entdeckung gemacht, daß bei *pellet fueling*, also dem Einschließen kleiner Deuteriumkügelchen in das Fusionsplasma, der Einschluß unerwartet verbessert wird, während bei Neutralteilchen-Injektion (*neutral beam injection*, NBI) die Lawsonzahl unter den Erwartungen bleibt. Für diese Effekte wird die η_i -Instabilität verantwortlich gemacht, da in dem einen Fall η_i herab-, im anderen heraufgesetzt wird.

Eine Vielzahl von Artikeln beschäftigt sich mit analytischen und numerischen Untersuchungen, beispielsweise [6, 9–15], um nur einige zu nennen. Die Bedeutung der η_i -Mode wird in den letzten Jahren offenbar immer höher eingeschätzt. Sehr intensiv wird darüberhinaus seit einiger Zeit das Phänomen der kritischen Selbstorganisation diskutiert, das zuerst in ganz anderem Zusammenhang, nämlich bei zellulären Automaten, beobachtet wurde.

Einige Aspekte der η_i -Instabilität sind bisher wenig behandelt worden. Die Mehrzahl der Untersuchungen stützt sich auf eine MHD-Approximation, während kinetische Rechnungen etwas vernachlässigt wurden. Hier wird deshalb ein driftkinetisches Modell betrachtet, um Unterschiede zwischen diesen beiden Ansätzen untersuchen zu können. Dabei werden die Rechnungen in einer stark vereinfachten Geometrie durchgeführt, so daß quantitative Aussagen für konkrete Fusionsexperimente nicht zu erwarten sind, andererseits aber schon qualitative Ergebnisse erhofft werden können.

Ein Schwerpunkt liegt auf der nichtlokalen Rechnung, das heißt der Einbeziehung der globalen Struktur der Gradienten und der endlichen Ausdehnung des Plasmas. Insbesondere wird die Auswirkung dieser unterschiedlichen Behandlung auf den Einsatz und die Stärke der Instabilität geprüft.

Der andere große Themenkreis dieser Arbeit dreht sich um die nichtlinearen Effekte. Anhand des Relaxationsprozesses der anfänglichen Profile können marginal stabile Zustände untersucht und der anomale Transport bestimmt werden. Weitere aufschlußreiche Daten werden bei flußgetriebenen Simulationen gewonnen; dabei wird auch der Zusammenhang mit kritischer Selbstorganisation diskutiert.

2 Modell

Ein Fusionsplasma enthält elektrisch geladene Teilchen, nämlich einerseits die negativen Elektronen, andererseits verschiedene Sorten positiver Ionen unterschiedlicher Kernmasse und Ionisationsstufe. In dieser Arbeit beschränkt sich das Modell auf den einfachsten Fall, nämlich ein vollständig ionisiertes Wasserstoffplasma, in dem sich also nur Elektronen und Protonen befinden. Wenn im folgenden von „Ionen“ die Rede ist, so sind damit die ${}^1_1\text{H}^+$ -, oder, was die Rechnungen nicht weiter beeinflusst, die ${}^2_1\text{D}^+$ -Kerne gemeint. Die physikalischen Größen, die sich auf die verschiedenen Teilchensorten beziehen, werden wie allgemein üblich durch die tief- oder hochgestellten Indizes i bzw. e gekennzeichnet. Beide Teilchensorten wechselwirken miteinander über die Coulomb-Anziehung, verhalten sich aber ansonsten recht unterschiedlich: Die Elektronen reagieren aufgrund ihrer geringen Masse praktisch augenblicklich auf Änderungen im Potential, während die Ionen größere Trägheit und Impuls besitzen und deshalb über eine Newtonsche Bewegungsgleichung berechnet werden.

2.1 Driftkinetische Beschreibung

Zur Beschreibung der Ionenbewegung in der η_i -Instabilität wird in dieser Arbeit ein *driftkinetischer Ansatz* verwendet. Bei kinetischen Modellen wird die Entwicklung der Verteilungsfunktion eines Teilchens im Phasenraum betrachtet, so daß Orts- und Geschwindigkeitskoordinate unabhängige Variable sind. Fluid- oder magneto hydrodynamische (MHD-) Modelle gehen dagegen davon aus, daß die Verteilung nicht wesentlich vom thermodynamischen Gleichgewicht abweicht und die wichtigen Effekte der Dynamik durch Bilden der Momente Dichte und Druck eingefangen werden können. Die Geschwindigkeit bzw. der Strom der magnetischen Flüssigkeit wird damit zu einer abhängigen Variablen. Ob eine Fluid-Approximation gerechtfertigt ist, steht dabei *a priori* nicht unbedingt fest (siehe zum Beispiel bei Jenko [16]).

Der vollständige Satz der Entwicklungsgleichungen für die $1, 2, \dots, N$ -Teilchen-Verteilungsfunktionen folgt aus der Liouvillegleichung, also der Inkompressibilität der Lagrangedichte im Phasenraum (vgl. Goldstein [17, S. 297]). Um diese Hierarchie abubrechen, muß zunächst für die Stöße der Teilchen untereinander, die Quellen und Senken in der Kontinuitätsgleichung bilden, eine geeignete Annahme gemacht werden (vgl. Balescu [18]). In der von Vlasov [19] eingeführten Form werden sie einfach zu null gesetzt. Ein solches

stoßfreies Plasma liegt dann vor, wenn die mittleren freien Weglängen für Stöße größer als die makroskopischen Abmessungen des Experiments sind. Ein *Hochtemperaturplasma* kann als stoßfrei angenommen werden, denn in einem Tokamak können Teilchen oft mehrere toroidale Umläufe zurücklegen, ohne mit einem anderen zu stoßen. Die Entdeckung, daß trotzdem Transport stattfindet und dieser noch dazu den bestimmenden Anteil ausmacht, gehörte zu den großen Überraschungen der frühen Fusionsforschung.

Auf diese Weise entsteht eine sechsdimensionale, nichtlineare, zeitabhängige partielle Differentialgleichung, die wenig Hoffnung auf vollständige Lösung läßt. Auch eine numerische Integration verlangt eine Rechenleistung, die heute und in absehbarer Zukunft nicht möglich ist. Deshalb werden verschiedene Annahmen gemacht, die diese Gleichung vereinfachen; eine Rechtfertigung für die unterschiedlichen Approximationen wird in Abschnitt 2.3 unternommen.

Es wird insbesondere ausgenutzt, daß sich die Bewegung eines Teilchens im Plasma aus einer schnellen Spiralbewegung mit dem *Larmorradius* ρ um die Magnetfeldlinien und einer langsameren *Drift* senkrecht dazu zusammensetzt. Da die interessante Dynamik durch die Drift beschrieben wird, kann die schnelle Gyration absepariert werden, so daß nicht mehr die Verteilung der Teilchen selbst beschrieben wird, sondern die der Gyrationen zentren. Dabei wird die senkrechte Drift als bekannte Funktion der anderen Variablen eingesetzt. Wenn schließlich alle abhängigen Größen, insbesondere das elektrische Potential, am Ort des Gyrationen zentrums betrachtet werden, so daß in dieser Hinsicht die Larmorradien als unendlich klein angenommen werden, entsteht die hier verwendete *driftkinetische Gleichung*.

2.2 Geometrie

Ein Torus ist topologisch ein Zylinder, der so gebogen ist, daß die beiden Endflächen wieder aufeinandergesetzt sind. Das Plasma gleicht in seiner Form also dem Schlauch eines Autoreifens, wobei bei heutigen Fusionsmaschinen die kleinen Radien, also die „Dicke“ des Schlauches, in der Größenordnung von etwa einem Meter liegen (Tabelle 1 auf Seite 11). Im Torus gibt es die drei Hauptrichtungen *toroidal* (am Zylinder entlang), *poloidal* (um den Zylinder herum) und *radial* (von der Zylinderachse nach außen). In dieser Arbeit wird das Plasma in einer stark vereinfachten Geometrie betrachtet, die nur lose der eines Fusionsexperiments entspricht. Dazu wird wie in Abbildung 1 auf der nächsten Seite ein poloidaler Querschnitt des Torus „aufgebogen“ und

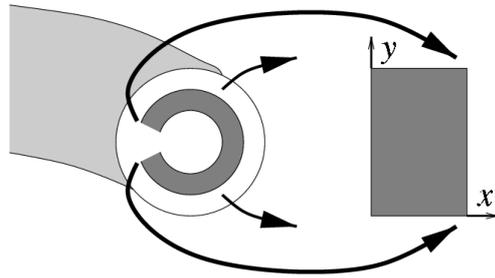


Abbildung 1: Transformation von toroidaler in slab-Geometrie

mit einem kartesischen Koordinatensystem versehen. Die auf diese Weise entstehende rechtwinklige Plasma-„Scheibe“ wird als *slab*-Geometrie bezeichnet; sie ist in Abbildung 2 dargestellt. Die radiale Richtung entspricht hier der x -, die poloidale der y -Koordinate.

Da der Dichte- und Temperatenausgleich entlang der Feldlinien sehr viel schneller erfolgt als senkrecht dazu, ist das Plasma in toroidaler Richtung wesentlich homogener als in poloidaler oder radialer, und die wichtige Dynamik einer Driftwelle spielt sich in in einem *poloidalen Querschnitt* ab. Aus diesem Grund wird das vorliegende Modell auf eine x - y -Ebene beschränkt. Die z -Koordinate wird nicht berücksichtigt, und alle Ableitungen nach z werden gleich 0 gesetzt.

Andererseits kann eine ITG-Mode nicht genau senkrecht zum \mathbf{B} -Feld entstehen, weil die Anregungsenergie der Instabilität der parallelen thermischen Bewegung der Ionen entnommen wird. Dieser Energieaustausch würde verhindert, wenn die Ausbreitungsrichtung senkrecht zum Magnetfeld festgelegt wäre. Hier wird deswegen ein fester Winkel θ zwischen \mathbf{e}_{\parallel} und \mathbf{e}_y vorgegeben, der etwas kleiner als 90° ist. Das führt dazu, daß $\partial_z = 0$ ist, aber ∂_{\parallel} einen von null verschiedenen Anteil hat, nämlich die Projektion auf die y -Achse. Diese auf den ersten Blick paradoxe Situation ist notwendig, weil sonst überhaupt keine Dynamik entstünde; eine „richtige“ Behandlung erfordert eine Berücksichtigung der z -Koordinate, aber eine solche räumlich dreidimensionale kinetische Rechnung sprengt die derzeitigen Möglichkeiten der numerischen Behandlung.

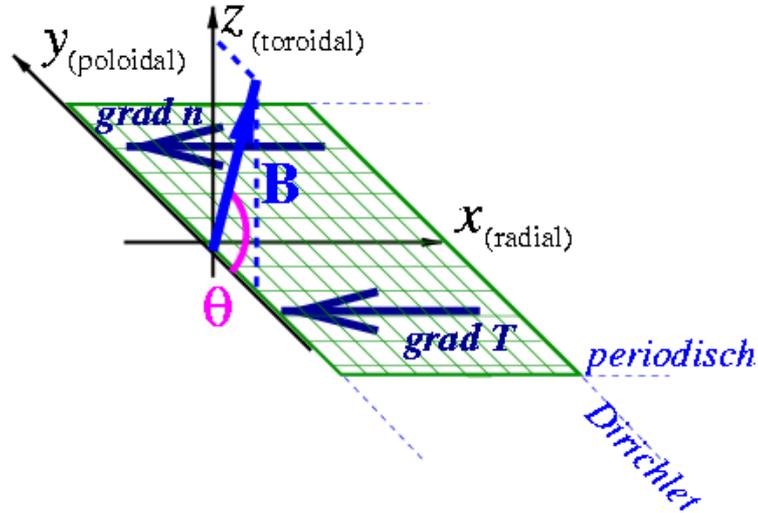


Abbildung 2: Koordinatensystem in slab-Geometrie

Ein gegebener Vektor \mathbf{a} spaltet sich also durch Projektion auf \mathbf{e}_{\parallel} und die Ebene senkrecht zu \mathbf{e}_{\parallel} in Parallel- und Normalkomponenten auf. Die Transformation zwischen kartesischen und Magnetfeldkoordinaten ist durch

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\parallel} &= \sin \theta \mathbf{a}_z + \cos \theta \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_{\perp} &= \mathbf{a}_x + \sin \theta \mathbf{a}_y \end{aligned} \quad (2)$$

gegeben. Entsprechendes gilt für die Gradienten ∇_{\parallel} und ∇_{\perp} . Da nur die x - y -Ebene betrachtet wird, haben die Vektoren in diesem Modell keine z -Komponente, und es ist

$$\begin{aligned} a_{\parallel} &= \cos \theta a_y \\ \nabla_{\parallel} &= \cos \theta \partial_y \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{a} \times \mathbf{B} = B \sin \theta (a_y \mathbf{e}_x - a_x \mathbf{e}_y).$$

Wie in Abbildung 2 angegeben, werden in y -Richtung periodische Randbedingungen angenommen. Auf den Außenrändern werden dagegen Dichte und Potential vorgeschrieben; das entspricht Dirichlet-Randbedingungen in x -Richtung.

Die hier durchgeführten Rechnungen und Simulationen gehen von einem anfänglichen Gleichgewicht aus, das nur von der radialen Koordinate in vorgegebener Weise abhängt und in y konstant ist. Es müssen daher Dichte- und

Temperaturprofile als Anfangswerte gewählt werden, die möglichst gut denen in einem wirklichen Fusionsplasma entsprechen. Leider macht aber im Experiment die Bestimmung besonders der Ionenwerte große Schwierigkeiten, und es liegen keine verwendbaren Daten derartiger Profile vor [20]. Für das Temperaturprofil wird eine Gaußsche Glockenkurve

$$T_i(x) = T_0 (0,2 + 0,8 \exp(-\beta x^2)) \quad (3)$$

angenommen, bei der der Parameter β die Form bestimmt. Eine solche Gaußfunktion wird hier zwar willkürlich gewählt, ist aber von den tatsächlichen Temperaturverläufen vermutlich nicht allzuweit entfernt. Die Flanke des Plasmas wird darüberhinaus künstlich symmetrisiert, indem der „linke“ Teil der Glockenkurve für $x < 0$ dazugenommen wird. Dies wie auch die endliche Temperatur am Rand dienen dazu, Schwierigkeiten in der Numerik, die beispielsweise bei Division durch null entstehen können, zu vermeiden.

Für das Dichteprofil $n_i(x)$ kann ebenfalls eine beliebige Funktion angenommen werden. Um einen besseren Vergleich mit anderen Rechnungen zu ermöglichen, wird es hier so gewählt, daß der Wert von η_i über den ganzen Radius konstant ist. Aus der Definition (1) ergibt sich daher die Bedingung

$$n_i(x) = T_i(x)^{1/\eta_i} . \quad (4)$$

Beispiele für solche Profile sind in Abbildung 12 auf Seite 40 dargestellt.

2.3 Skalierung

Die η_i -Mode ist in erster Linie für Fusionsexperimente interessant. Es ist daher sinnvoll und gerechtfertigt, sich in das in einem solchen Plasma vorliegende Regime zu begeben und für die Skalenverhältnisse entsprechende Annahmen zu machen. Alle Größen im Plasma können damit auf dimensionslose Variable transformiert werden, die dann bis auf wenige Ausnahmen einen Zahlenwert von der Größenordnung 1 haben.

Zum Vergleich sind in Tabelle 1 auf Seite 11 typische Werte einiger Fusionsexperimente angegeben, nämlich von JET in Abingdon (England), TEXTOR in Jülich (Deutschland) und TORE-Supra in Cadarache (Frankreich). Da sich die Operationsbereiche im Laufe der Lebenszeit eines Experiments immer wieder verschieben, können die Werte nur als Anhaltspunkte für die Größenordnungen dienen.

2.3.1 Annahmen

Bei Ionen-Driftwellen handelt es sich um relativ langsame, räumlich ausgedehnte Moden. Zu ihrer Untersuchung wird ein Regime angenommen, das sich durch folgende Charakteristika auszeichnet:

1. Die räumlichen Skalen sind groß gegenüber den Gyroradien: $a \sim L_T \sim L_n \gg \rho_i$

Dies ist die Definition eines *magnetisierten Plasmas*. Als räumliche Skalen dienen der kleine Radius a wie auch die Längen $L_n = n/|\nabla n|$ und $L_T = T/|\nabla T|$, auf denen sich Dichte und Temperatur ändern. In Fusionsexperimenten mit ihren Magnetfeldstärken im Tesla-Bereich ist diese Annahme sehr gut erfüllt.

2. Die Larmorradien sind groß gegenüber der effektiven Reichweite des Potentials, die durch die *Debye-Länge* (siehe Tabelle 3) gegeben ist: $\frac{\lambda_D}{\rho_i} \ll 1$.

Äquivalent dazu ist, daß der dimensionslose Parameter $\nu := \frac{\omega_{ci}}{\omega_{pi}} \approx 2,2 \frac{\lambda_D}{\rho_i}$ klein ist. Diese Bedingung bedeutet die *Quasineutralität* des Plasmas; sie erfordert eine hohe Teilchendichte und ist in Fusionsplasmen in der Regel gut erfüllt.

3. Die Zeitskalen sind groß gegenüber den Gyrationzeiten: $\frac{\omega}{\omega_{ci}} \ll 1$.

Hier ist ω die Frequenz der untersuchten Schwingung. Diese Annahme heißt *Driftnäherung*. Durch die relativ langsame Bewegung der Driftwellen ist sie für Ionen praktisch immer gerechtfertigt.

4. Ionen und Elektronen haben die gleiche Temperatur: $T_i = T_e$.

In *Hochtemperatur-Plasmen* sind die Ionen so heiß, daß ihre Temperatur nicht gegenüber der der Elektronen vernachlässigt und etwa $T_i \approx 0$ oder $T_i \ll T_e$ gesetzt werden darf. Ionendichte und besonders -temperatur sind allerdings in Experimenten äußerst schwer zu messen, so daß meistens eine Annahme der Art $T_i = T_e$ gemacht werden muß. Diese ist zwar sicher nicht streng erfüllt, ändert aber für die Rechnungen zur η_i -Instabilität die Ergebnisse nicht qualitativ, wie sich im nachhinein herausstellt. Dafür werden die Gleichungen wesentlich übersichtlicher.

5. Die Ionengeschwindigkeiten sind nichtrelativistisch: $v_{th} \ll c$.

		TEXTOR	TORE Supra	JET
a	[m]	1,75	0,8	0,8 bis 2,1
B	[T]	2,8	4,0	3,45
n_i	[m ⁻³] Rand	10 ¹⁷	1 · 10 ¹⁹	
	Zentrum	10 ¹⁹	5 · 10 ¹⁹	4 · 10 ¹⁹
T_i	[eV] Rand	10	100	
	Zentrum	100	4 000	1 860
ω_{ci}	[GHz]	0,27	0,38	0,33
ω_{pi}	[GHz]	0,4 bis 4,2	4,2 bis 9,3	8,3
ν		0,6 bis 0,06	0,09 bis 0,04	0,04
v_{th}	[km/s]	40 bis 140	140 bis 875	597
ϱ_i	[mm]	0,026 bis 0,083	0,058 bis 0,35	0,29
λ_D	[mm]	0,074 bis 0,023	0,024 bis 0,067	0,05
Stand		1994	1999	1994

Tabelle 1: *Typische Operationsbereiche einiger Fusionsexperimente (oben) und die daraus abgeleiteten Größen (unten). Der kleine Radius a ist ein Maß für die makroskopischen räumlichen Skalen. Entnommen aus [21] für JET, [22] für TEXTOR, [23] für TORE-Supra.*

Da die thermische Geschwindigkeit der Ionen selbst im Plasmakern nur in der Größenordnung von einigen hundert km/s liegt, können alle Rechnungen nicht-relativistisch durchgeführt werden.

6. Die Fluktuationen des Magnetfelds sind klein gegenüber dem Feld selbst.

In dieser *elektrostatistischen Rechnung* wird das elektrische Feld durch $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ ausgedrückt. Dadurch treten neben der Gyrationbewegung keine weiteren Lorentzkräfte auf, die elektromagnetische Wechselwirkung beschränkt sich auf die Coulombkraft.

2.3.2 Überführung in dimensionslose Größen

Die physikalischen Variablen sollen zunächst in eine dimensionslose Form gebracht werden. In Tabelle 3 auf der nächsten Seite sind einige Größen, die für die Ionen charakteristisch sind, zusammengefaßt. Hier werden die *Gyra-*

Elektronenmasse	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kg
Ionenmasse	$m_i = 1836 \cdot m_e$	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg
Ladung	$\pm q$	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C
Boltzmannfaktor	k_B	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$8,8854 \cdot 10^{-12}$ Vm/As

Tabelle 2: Naturkonstanten

Gyrofrequenz	$\omega_{ci} = \frac{qB}{m_i}$
Plasmafrequenz	$\omega_{pi} = \sqrt{\frac{\bar{n}_0 q^2}{\epsilon_0 m_i}}$
relative Feldstärke	$\nu = \frac{\omega_{ci}}{\omega_{pi}}$
Thermische Geschwindigkeit	$v_{th} = \sqrt{\frac{2T_0}{m_i}}$
Schallgeschwindigkeit	$c_s = \sqrt{\frac{T_0}{m_i}}$
Gyrationsradius	$\rho_i = \frac{1}{2\pi} \frac{v_{th}}{\omega_{ci}}$
Debye-Länge	$\lambda_D = \frac{c_s}{\omega_{pi}} = \sqrt{\frac{T_0 \epsilon_0}{\bar{n}_0 q^2}}$

Tabelle 3: Wichtige Plasmagrößen

tionsperiode $1/\omega_{ci}$ für die Zeit, die Ionen-Schallgeschwindigkeit¹ c_s für die Geschwindigkeit und die Länge c_s/ω_{ci} , die bis auf einen Faktor $\sqrt{8}\pi$ der Gyrationsradius ρ_i ist, für die räumlichen Skalen benutzt. Weiter sind Temperatur und Potential in Energieeinheiten angegeben und auf eine mittlere Energie T_0 bezogen; die Dichte wird mit einer mittleren Dichte \bar{n} normiert. Zur besseren Unterscheidung werden die ursprünglichen, dimensionsbehafteten Größen mit einem Zirkumflex versehen. Damit ergeben sich folgende Transfor-

¹Als „Schallgeschwindigkeit“ wird hier $c_s := \sqrt{T_0/m_i}$ bezeichnet. Tatsächlich breitet sich eine Ionen-Schallwelle mit $\sqrt{(T_{0,i} + T_{0,e})/m_i}$ aus, bei ungefähr gleicher Ionen- und Elektronentemperatur also mit $\sqrt{2T_0/m_i}$, der thermischen Geschwindigkeit der Ionen. Um die Gleichungen nicht unnötig mit einem Faktor $\sqrt{2}$ zu belasten, wird hier trotzdem mit c_s normiert.

mationen in die neuen, jetzt ohne besondere Kennzeichnung geschriebenen Variablen:

$$\begin{aligned}
 \hat{t} &\rightarrow \frac{1}{\omega_{ci}} t & \Rightarrow & \quad \partial_i \rightarrow \omega_{ci} \partial_t \\
 \hat{v}_{\parallel} &\rightarrow c_s v_{\parallel} \\
 \hat{x} &\rightarrow \frac{c_s}{\omega_{ci}} x & \Rightarrow & \quad \hat{\nabla} \rightarrow \frac{\omega_{ci}}{c_s} \nabla \\
 \hat{T} &\rightarrow \frac{T_0}{k_B} T \\
 \hat{\phi} &\rightarrow \frac{T_0}{q} \phi \\
 \hat{n}_i &\rightarrow \bar{n} n_i .
 \end{aligned} \tag{5}$$

2.4 Grundgleichungen

Zur Beschreibung eines zweikomponentigen Plasmas werden die Bewegungsgleichungen der Ionen und der Elektronen benötigt. Beide sind miteinander durch das von allen Teilchen erzeugte elektrische Potential gekoppelt, das so eine dritte Bedingung liefert. Schließlich wird im driftkinetischen Modell die senkrechte Bewegung der Ionen als Funktion der unabhängigen Variablen betrachtet, so daß die relevanten Driften in die Impulsgleichung eingesetzt werden müssen.

2.4.1 Driften

Die Bewegung der Gyrationen senkrecht zum Magnetfeld wird als *Drift* bezeichnet. Sie besteht aus mehreren Anteilen; ihnen ist gemeinsam, daß sie – bis auf die diamagnetische Drift – dadurch hervorgerufen werden, daß sich aus unterschiedlichen Gründen der Larmorradius während einer Gyrationperiode ändert, so daß das Teilchen Phasen verschiedener Krümmung durchläuft und sich die Gyrationenkurve nicht zu einem Kreis schließt. Dies kann einfach durch ein Gyrieren um ein bewegtes, driftendes Zentrum beschrieben werden.

Die elektrische oder $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift entsteht durch eine \mathbf{E} -Feldkomponente senkrecht zu \mathbf{B} und ist in der Regel die dominante Drift. Wegen der elektro-

statischen Annahme wird das \mathbf{E} -Feld als $\hat{\mathbf{E}} = -\hat{\nabla}\hat{\phi}$ geschrieben; die Umrechnung auf dimensionslose Einheiten geschieht durch

$$\hat{\mathbf{E}} = -\frac{\omega_{ci} T_0}{c_s q} \nabla \phi = -B c_s \nabla \phi, \quad (6)$$

und damit läßt sich die $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift durch

$$\hat{\mathbf{v}}_{E \times B} = \frac{\hat{\mathbf{E}} \times \mathbf{B}}{B^2} = -c_s \nabla \phi \times \mathbf{e}_{\parallel} =: c_s \mathbf{v}_{E \times B} \quad (7)$$

ausdrücken. In der hier verwendeten Geometrie ist $\mathbf{v}_{E \times B} = \sin \theta (-\mathbf{e}_x \partial_y \phi + \mathbf{e}_y \partial_x \phi)$.

Die Polarisationsdrift entsteht durch die Trägheit der Ionen bei zeitlich veränderlichen Feldern. Sie ist normalerweise wesentlich kleiner als die $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift, muß aber berücksichtigt werden, wenn der führende Beitrag verschwindet. In den hier verwendeten Einheiten ergibt sich

$$\hat{\mathbf{v}}_{pol} = \frac{1}{\omega_{ci} B} \frac{d\hat{\mathbf{E}}_{\perp}}{d\hat{t}} = -c_s \frac{d\nabla_{\perp} \phi}{dt} =: c_s \mathbf{v}_{pol} \quad (8)$$

Laut (2) muß hier $\nabla_{\perp} = \partial_x + \sin \theta \partial_y$ eingesetzt werden. Elektronen zeigen aufgrund ihrer geringen Masse praktisch keine Polarisationsdrift.

Die diamagnetische Drift nimmt eine Sonderstellung ein, denn sie wird durch die kollektive Bewegung der Plasmateilchen hervorgerufen; ein einzeln betrachtetes Teilchen zeigt keine diamagnetische Drift. Eine anschauliche Darstellung findet sich bei Chen [4]. Es ist

$$\hat{\mathbf{v}}_{dia} = c_s \frac{\nabla p_i}{p_i} =: c_s \mathbf{v}_{dia}. \quad (9)$$

Andere Driften entstehen etwa durch inhomogene Magnetfelder oder auch durch Gravitationskräfte. Im betrachteten Modell spielen sie keine Rolle. Eine kompakte Zusammenfassung findet sich zum Beispiel bei Schmidt [24, S. 50].

2.4.2 Dynamik der Elektronen

Die Bewegung der Elektronen erfolgt praktisch ausschließlich entlang der Magnetfeldlinien, da ihr Gyrationradius um den Faktor $\sqrt{m_i/m_e} \approx 42$ kleiner ist als der der Ionen. Hier wird die *adiabatische Näherung* verwendet, in der die Elektronen als eindimensionale Flüssigkeit, die wie in einem dünnen Rohr an „ihrer“ Feldlinie entlang fließt, betrachtet werden. Die Geschwindigkeit der Elektronen v^e ist dann gleich ihrem parallelen Anteil v_{\parallel}^e , und ihre Beweglichkeit ist nahezu unendlich groß. Dann gilt die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \hat{v}_{\parallel}^e}{\partial t} = \frac{q}{m_e} \hat{E}_{\parallel} - \frac{k_B \hat{T}^e}{m_e n} \partial_{\parallel} \hat{n} \quad (10)$$

oder, in dimensionslosen Variablen,

$$\underbrace{\frac{m_e}{m_i}}_{\approx 0} \frac{\partial v_{\parallel}^e}{\partial t} = -\frac{1}{T^e} \partial_{\parallel} \phi - \frac{1}{n} \partial_{\parallel} n. \quad (11)$$

Da die Trägheit der Elektronen klein ist, kann die linke Seite vernachlässigt werden, und es balancieren sich in der adiabatischen Näherung immer die elektrostatische Kraft und der Druckgradient. Integration ergibt die Verteilung der Elektronen,

$$n^e = n_0 e^{\frac{\phi}{T^e}} \approx n_0 \left(1 + \frac{\phi}{T^e} \right). \quad (12)$$

2.4.3 Quasineutralität

Ein Plasma hat eine starke Tendenz, elektrisch neutral zu bleiben. Bildet sich an einem Ort eine positive Ionenladung, so sammeln sich die beweglichen Elektronen um sie herum und schirmen die Ladung ab. Umgekehrt verdrängt eine negative Wolke die Elektronen aus ihrer Umgebung. Die Reichweite der elektrischen Wechselwirkung ist deswegen nur von der Ordnung der *Debye-Länge* $\lambda_D = c_s/\omega_{pi}$. Ist diese kleiner als die typische Längenskala im Plasma, im vorliegenden Fall also $\lambda_D \ll \varrho_i$ oder, gleichbedeutend damit, $\nu \ll 1$, so wird von *Quasineutralität* gesprochen. Das bedeutet aber nicht, daß $n_i \equiv n_e$ ist, sondern nur, daß es sich bei $n_i - n_e$ um eine kleine Größe handelt.

Dies ist wichtig für die Berechnung des Potentials im Plasma. Dazu werden zunächst die Kontinuitätsgleichungen $\partial_t n + \nabla \cdot (\mathbf{v}n) = 0$ der Elektronen und der Ionen miteinander kombiniert:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}^i) - \frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}^e) \\
 &= \frac{\partial n_i}{\partial t} + \partial_{\parallel} (n_i v_{\parallel}^i) + \mathbf{v}_{\perp}^i \cdot \nabla_{\perp} n_i + n_i \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp}^i \\
 &\quad - \frac{\partial n_e}{\partial t} - \partial_{\parallel} (n_e v_{\parallel}^e) - \mathbf{v}_{\perp}^e \cdot \nabla_{\perp} n_e - n_e \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp}^e.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Die senkrechte Geschwindigkeit setzt sich für die Ionen aus $\mathbf{v}_{E \times B}$ und \mathbf{v}_{pol} zusammen, für die Elektronen ist sie gleich $\mathbf{v}_{E \times B}$, wobei die $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift für beide Spezies gleich ist. Da $\mathbf{v}_{E \times B}$ auch bei den Ionen den dominanten Anteil stellt, wird die Polarisationsdrift gegen sie vernachlässigt. Eine Ausnahme bildet nur der Divergenzterm: Weil $\nabla \cdot \mathbf{v}_{E \times B} = 0$ gilt, muß in nächster Ordnung \mathbf{v}_{pol} berücksichtigt werden. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial n_i}{\partial t} + \partial_{\parallel} (n_i v_{\parallel}^i) + \mathbf{v}_{E \times B} \cdot \nabla_{\perp} n_i + n_i \nabla \cdot \mathbf{v}_{pol} \\
 &\quad - \frac{\partial n_e}{\partial t} - \partial_{\parallel} (n_e v_{\parallel}^e) - \mathbf{v}_{E \times B} \cdot \nabla_{\perp} n_e \\
 &= \frac{\partial n_i}{\partial t} - \frac{\partial n_e}{\partial t} + \partial_{\parallel} (j_{\parallel}) + \mathbf{v}_{E \times B} \cdot \nabla_{\perp} (n_i - n_e) + n_i \nabla \cdot \mathbf{v}_{pol}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Hier steht \mathbf{j} für $n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e$, während $\hat{\mathbf{j}} = q(\hat{n}_i \hat{\mathbf{v}}_i - \hat{n}_e \hat{\mathbf{v}}_e)$ ist. Für $\partial_{\parallel} j_{\parallel}$ ergibt sich aus der Maxwellgleichung

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \hat{\mathbf{B}} &= \hat{\mathbf{j}} + \epsilon_0 \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial t} \\
 \Rightarrow 0 &= \hat{j}_{\parallel} - \epsilon_0 \hat{\partial}_t \hat{\partial}_{\parallel} \hat{\phi}
 \end{aligned} \tag{15}$$

in dimensionslosen Einheiten der Ausdruck

$$\begin{aligned}
 0 &= \bar{n} c_s j_{\parallel} - \epsilon_0 \omega_{ci} \frac{\omega_{ci} T_0}{c_s q} \partial_t \partial_{\parallel} \phi \\
 \Rightarrow 0 &= j_{\parallel} - \frac{\epsilon_0}{\bar{n}} \frac{\omega_{ci}^2}{c_s^2} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pi}^2} \frac{T_0}{q} \partial_t \partial_{\parallel} \phi \\
 &= j_{\parallel} - \left(\frac{\omega_{ci}}{\omega_{pi}} \right)^2 \underbrace{\frac{q^2 \bar{n}}{\epsilon_0 m_i}}_{\nu^2} \underbrace{\frac{m_i}{T_0}}_{1/c_s^2} \frac{T_0 \epsilon_0}{q^2 \bar{n}} \partial_{\parallel} \partial_t \phi \\
 &= j_{\parallel} - \nu^2 \partial_{\parallel} \partial_t \phi . \\
 \Rightarrow \partial_{\parallel} j_{\parallel} &= \nu^2 \partial_{\parallel}^2 \partial_t \phi .
 \end{aligned} \tag{16}$$

Der Term $\partial_t n_e$ lässt sich durch (12) als

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \frac{n_0}{T^e} \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{17}$$

ausdrücken Die Divergenz der Polarisationsdrift folgt aus (8):

$$n^i \nabla \cdot \mathbf{v}_{pol} \approx n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_{pol} = -n_0 \Delta_{\perp} \frac{\partial \phi}{\partial t} , \tag{18}$$

mit der Abkürzung $\Delta_{\perp} := \partial_x^2 + \sin^2 \theta \partial_y^2$. Schließlich gilt noch im Plasma die *Poissongleichung*

$$\hat{\Delta} \hat{\phi} = \frac{q}{\epsilon_0} [\hat{n}^e - \hat{n}^i] \tag{19}$$

oder, in der dimensionslosen Form,

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \left(\frac{\omega_{ci}}{c_s} \right)^2 \frac{T_0}{q} \Delta \phi = \frac{q}{\epsilon_0} \bar{n} [n^e - n^i] \\
 \Rightarrow &\underbrace{\left(\frac{\omega_{ci}}{\omega_{pi}} \right)^2}_{\nu^2} \underbrace{\frac{q^2 \bar{n}}{\epsilon_0 m_i}}_{\omega_{pi}^2} \underbrace{\frac{m_i}{T_0}}_{1/c_s^2} \frac{T_0 \epsilon_0}{q^2 \bar{n}} = n^e - n^i \\
 &\Rightarrow \nu^2 \Delta \phi = n^e - n^i .
 \end{aligned} \tag{20}$$

Durch Einsetzen in (14) entsteht dann

$$0 = \frac{\partial n_i}{\partial t} - \frac{n_0}{T^e} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nu^2 \partial_{\parallel}^2 \partial_t \phi - \nu^2 \mathbf{v}_{E \times B} \cdot \nabla_{\perp} \Delta \phi - n_0 \Delta_{\perp} \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{21}$$

Jetzt wird aufgrund der Quasineutralität $\nu^2 \approx 0$ angenommen. Außerdem wird $\Delta_{\perp} \approx \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ gesetzt, nicht aber $\partial_{\parallel} = 0$; dies wird in [25, S. 326] begründet. Dadurch ergibt sich schließlich

$$0 = \frac{\partial n_i}{\partial t} - \frac{n_0}{T_e} \frac{\partial \phi}{\partial t} - n_0 \Delta \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (22)$$

und durch Integration

$$0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\phi}{T_e} + \frac{n_1}{n_0}. \quad (23)$$

2.4.4 Dynamik der Ionen

Die Bewegung der Ionen wird durch die *Vlasov-Gleichung* aus [19] beschrieben. In der driftkinetischen Approximation ist die Vlasov-Gleichung die Bewegungsgleichung für die Ionen-*Gyrationszentren*. Diese sind im folgenden immer stillschweigend gemeint, wenn von „Ionen“ die Rede ist. Ihre Geschwindigkeit setzt sich aus dem parallelen Anteil v_{\parallel} und der senkrechten Drift zusammen. Während v_{\parallel} , jetzt ohne Index i geschrieben, eine unabhängige Variable ist, wird v_{\perp} als bekannt angenommen und als Funktion der anderen Größen, insbesondere des Potentials $\phi(x, y)$, geschrieben. Der bestimmende Anteil ist die $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift, denn die wesentlich kleinere Polarisationsdrift kann hier vernachlässigt werden. Die Gleichung für die Verteilungsfunktion $f(x, y, v_{\parallel})$ der Ionen lautet damit

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \hat{\nabla} \cdot (\hat{\mathbf{v}} f) + \frac{(\hat{F}_L)_{\parallel}}{m_i} \frac{\partial f}{\partial \hat{v}_{\parallel}}. \quad (24)$$

Hier ist $\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{e}_{\parallel} + \mathbf{v}_{E \times B}$; die Polarisationsdrift ist von niedrigerer Ordnung und wird in der Vlasovgleichung vernachlässigt. Der parallele Anteil der Coulombkraft ist

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{F}}_L}{m_i} \right)_{\parallel} = \frac{q}{m_i} \hat{E}_{\parallel} = -\frac{q}{m_i} \hat{\nabla}_{\parallel} \hat{\phi} = -\omega_{ci} c_s \partial_{\parallel} \phi. \quad (25)$$

In dimensionslosen Variablen wird (24) zu

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} + v_{\parallel} \partial_{\parallel} f + \mathbf{v}_{E \times B} \cdot \nabla f - \partial_{\parallel} \phi \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} \quad (26)$$

und in der *slab*-Geometrie zu

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} - \partial_y \phi \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + (v_{\parallel} \cos \theta + \partial_x \phi \sin \theta) \frac{\partial f}{\partial y} - \cos \theta \partial_y \phi \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}}. \quad (27)$$

Mit (23) und (27) liegen die Grundgleichungen vor, die das driftkinetische System beschreiben. In Kapitel 3 soll versucht werden, anhand ihrer linearisierten Formen analytische Aussagen zu treffen. Eine vollständig analytische Behandlung ist zwar auch in diesem Fall nicht möglich, dennoch gelingt es, die Dispersionsrelation auf eine algebraische Gleichung zurückzuführen, die dann mit vertretbarem Aufwand numerisch gelöst werden kann. In Abschnitt 4.1 wird eine Simulation des vollständigen, nichtlinearen Gleichungssystems vorgestellt.

3 Lineare Behandlung

Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll sich das System lokal im thermodynamischen Gleichgewicht befinden. Die Ionen gehorchen dann der *Maxwell-Boltzmann-Verteilung*

$$f^{(0)}(x, v_{\parallel}) = \frac{n_i(x)}{\sqrt{2\pi T_i(x)}} \exp\left(-\frac{v_{\parallel}^2}{2T_i(x)}\right). \quad (28)$$

Diese löst auf jeden Fall, unabhängig von der für $T_i(x)$ und $n_i(x)$ gewählten Form, die Differentialgleichung (27), so daß ein stationärer Zustand vorliegt. Er kann je nach der gewählten Konfiguration stabil oder instabil sein. Liegt der zweite Fall vor, so führt eine kleine Störung dazu, daß sich das System aus der Gleichgewichtslage entfernt und ein exponentielles Anwachsen der Mode stattfindet.

In diesem Kapitel soll das Einsetzen und die Stärke des Anwachsens bestimmt werden. In der ersten Phase der Instabilität sind die Abweichungen von den ungestörten Größen klein, und das Verhalten wird von den Differentialgleichungen (23) und (27) schon in ihrer linearisierten Form gut beschrieben. Ihre Lösungen sind dann Exponentialfunktionen, und die Zeitentwicklung verläuft proportional zu $\exp(-i\omega t)$ mit einer komplexen Frequenz ω , die aus der reellen Frequenz $\Re(\omega)$ und der *Anwachsrate* $\gamma = \Im(\omega)$ besteht. Die Anwachsrate bestimmt die Stärke der Instabilität; für $\gamma \leq 0$ ist das System linear stabil, und eine kleine Störung wird gedämpft oder wächst zumindest nicht weiter an.

3.1 Dispersionsrelation

Die Dispersionsrelation für eine bestimmte Welle ist eine Gleichung zwischen der komplexen Frequenz ω und der Wellenzahl k , in die die restlichen Größen, wie zum Beispiel η_i , als Parameter eingehen. Eine solche Beziehung soll hier weitgehend analytisch hergeleitet oder zumindest in eine solche Form gebracht werden, daß sie sich anschließend numerisch einfach lösen läßt.

3.1.1 Linearisierung der Vlasov-Gleichung

In der linearen Näherung wird angenommen, daß sich das System in der Nähe des Ausgangszustands befindet. Die Verteilungsfunktion $f(x, y, v_{\parallel})$ setzt sich dann aus der Maxwell-Boltzmann-Funktion (28) und einer im Vergleich dazu

kleinen Störung $\varepsilon f^{(1)}(x, y, v_{\parallel}, t)$ zusammen. Diese Funktion ist so gewählt, daß $f^{(0)}$ und $f^{(1)}$ dieselbe Größenordnung haben und $\varepsilon \ll 1$ ist. Ebenso verhält sich die Dichte; das Potential ist dagegen im Gleichgewicht null, so daß $\phi = \varepsilon \phi_1$ ist. Allgemein gilt

$$\begin{aligned} f(x, y, v_{\parallel}, t) &= f^{(0)}(x, v_{\parallel}) + \varepsilon f^{(1)}(x, y, v_{\parallel}, t), \\ n_i(x, y, t) &= \int f^{(0)}(x, v_{\parallel}) + \varepsilon \int f^{(1)}(x, y, v_{\parallel}, t) \\ &= n_0(x) + \varepsilon n_1(x, y, t) \end{aligned}$$

und

$$\phi(x, y, t) = \varepsilon \phi_1(x, y, t). \quad (29)$$

Die Gleichgewichtsgrößen sind zeitlich konstant und ändern sich räumlich nur auf großen Skalen. Die gestörten Größen fluktuieren dagegen räumlich und zeitlich schnell. So ist zum Beispiel $n_0 \gg \varepsilon n_1$ bzw. $n_0 \sim n_1$, aber da die Variationslänge von n_1 kleiner als die von n_0 ist, kompensiert das Ableiten den Unterschied zwischen beiden. Das bedeutet, daß sowohl ∇n_0 als auch $\nabla \varepsilon n_1$ in derselben Größenordnung liegen und beide mit den Dichtestörungen εn_1 vergleichbar sind. Für die Dichten und ihre Gradienten gilt dann also

$$n_0 \gg \varepsilon n_1 \sim \nabla n_0 \sim \varepsilon \nabla n_1 \sim \varepsilon \frac{d}{dt} n_1, \quad (30)$$

die anderen Variablen verhalten sich entsprechend.

Die Zeitabhängigkeit ist in den linearisierten Differentialgleichungen automatisch durch $\exp(-i\omega t)$ mit $\omega \in \mathbb{C}$ gegeben. Außerdem soll die Störung die Randbedingungen erfüllen und wird daher periodisch in y angenommen:

$$f^{(1)}(x, y, t) = f_1(x) e^{i(-\omega t + ky)}. \quad (31)$$

Formal kann dann $\partial_y \rightarrow ik$ und $\partial_t \rightarrow -i\omega$ ersetzt werden. Die Wellenzahl k bezieht sich hier immer auf die poloidale Richtung, der Index y wird der besseren Übersicht wegen nicht geschrieben. Zunächst wird die Vlasov-Gleichung (27) auf Seite 19 linearisiert, indem (29) und (31) eingesetzt und dann die Terme, die von Ordnung ε^2 oder höher sind, vernachlässigt werden. Da alle Beiträge nullter Ordnung verschwinden, bleiben nur diejenigen in $\mathcal{O}(\varepsilon)$ übrig. Es ergibt sich nach Division durch ε :

$$0 = -i\omega f_1(x) - ik \sin \theta \phi \partial_x f^{(0)} + ik v_{\parallel} \cos \theta f_1(x) - ik \cos \theta \phi \partial_{v_{\parallel}} f^{(0)},$$

3 Lineare Behandlung

also

$$f_1(x) = \phi \frac{\partial_x f_0(x) + \cos \theta \partial_{v_{\parallel}} f^{(0)}}{-\frac{\omega}{k} + v_{\parallel} \cos \theta} \quad \text{für } \Im(\omega) \neq 0. \quad (32)$$

Die hier auftretenden Ableitungen der Maxwellverteilung $f^{(0)}$ sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(0)}(x, v_{\parallel})}{\partial x} &= \frac{n'_0}{n_0} f^{(0)} - \frac{1}{2} \frac{T'_i}{T_i} f^{(0)} + f^{(0)} \partial_x \left(-\frac{v_{\parallel}^2}{2T_i} \right) \\ &= f^{(0)} \left(\frac{n'_0}{n_0} - \frac{1}{2} \frac{T'_i}{T_i} + T_i \frac{v_{\parallel}^2}{2T_i^2} \right) \\ &= f^{(0)} \frac{n'_0}{n_0} \left(1 - \frac{1}{2} \eta_i \left[1 - \frac{v_{\parallel}^2}{T_i} \right] \right) \end{aligned} \quad (33)$$

und

$$\frac{\partial f^{(0)}(x, v_{\parallel})}{\partial v_{\parallel}} = -\frac{v_{\parallel}}{T_i} f^{(0)}. \quad (34)$$

Die abhängigen Variablen werden im folgenden ohne ihre Argumente geschrieben, um die Gleichungen etwas übersichtlicher zu halten. Der Strich bezeichnet die Ableitung nach x . Durch Einsetzen von (33) und (34) in (32) entsteht für die Fluktuationen der Verteilungsfunktion der Ausdruck

$$\begin{aligned} f_1 &= \phi f^{(0)} \frac{\sin \theta \frac{n'_0}{n_0} \left(1 - \frac{1}{2} \eta_i \left[1 - \frac{v_{\parallel}^2}{T_i} \right] \right) - \cos \theta \frac{v_{\parallel}}{T_i}}{-\frac{\omega}{k} + v_{\parallel} \cos \theta} \\ &= \phi f^{(0)} \frac{-\frac{v_{\parallel}}{T_i} \cos \theta T_i + \left(\frac{\omega}{k} - \frac{\omega}{k} \right) \frac{1}{T_i}}{-\frac{\omega}{k} + v_{\parallel} \cos \theta} + \phi f^{(0)} \frac{\sin \theta \frac{n'_0}{n_0} \left(1 - \frac{1}{2} \eta_i \left[1 - \frac{v_{\parallel}^2}{T_i} \right] \right)}{-\frac{\omega}{k} + v_{\parallel} \cos \theta} \\ &= -\frac{\phi f^{(0)}}{T_i} + \frac{\phi f^{(0)}}{T_i} \frac{\omega - kT_i \sin \theta \frac{n'_0}{n_0} \left(1 - \frac{1}{2} \eta_i \left[1 - \frac{v_{\parallel}^2}{T_i} \right] \right)}{\omega - kv_{\parallel} \cos \theta}. \end{aligned} \quad (35)$$

3.1.2 Auswertung mit Hilfe der Z -Funktion

Aus (35) ergibt sich die Ionendichte durch Integration über v_{\parallel} . Das dabei auftretende Integral läßt sich nicht elementar integrieren, kann aber auf die Form

$$G(\zeta) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{e^{-s^2}}{\zeta - s} \quad (36)$$

zurückgeführt werden. Es gilt

$$\zeta G(\zeta) - 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{se^{-s^2}}{\zeta - s} \quad (37)$$

und

$$\zeta(\zeta G(\zeta) - 1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{s^2 e^{-s^2}}{\zeta - s} \quad (38)$$

(vgl. [25] 4.3.14–4.3.16). Diese G -Funktion hängt mit der *Plasma-Dispersionsfunktion* oder *Fried-Conte-Funktion*

$$Z(\zeta) := 2ie^{-\zeta^2} \int_{-\infty}^{i\zeta} ds e^{-s^2} \quad (39)$$

über die Beziehung

$$G(\zeta) = Z(-\zeta) \quad \text{für } \Im(\zeta) < 0 \quad (40)$$

(vgl. [25] 4.3.13 und [4] 7-118) zusammen. Allerdings muß beachtet werden, daß (40) nur in der unteren komplexen Halbebene gilt. Durch die Singularität bei $s = \zeta$ im Integranden weist G einen Schnitt an der reellen Achse auf, während Z holomorph ist, so daß sich die beiden Funktionen auf der oberen Halbebene um das Residuum des Poles unterscheiden:

$$G(\zeta) = Z(-\zeta) - 2i\sqrt{\pi}e^{-\zeta^2} \quad \text{für } \Im(\zeta) > 0. \quad (41)$$

3 Lineare Behandlung

Andererseits läßt sich wegen der Punktsymmetrie $G(-\zeta) = -G(\zeta)$ die Funktion G auf ganz $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ durch

$$G(\zeta) = \begin{cases} -Z(\zeta) & \text{für } \Im(\zeta) > 0 \\ Z(-\zeta) & \text{für } \Im(\zeta) < 0 \end{cases} \quad (42)$$

ausdrücken. Die Z -Funktion aber ist im wesentlichen das Gaußsche Fehlerintegral mit einem komplexen Argument. Sie kann zwar auch nicht geschlossen integriert werden, läßt sich aber numerisch einfach und schnell berechnen (hier mittels [26]; siehe dazu auch [27]).

Mit den Abkürzungen

$$\zeta := \frac{\omega}{k \cos \theta v_{th}} = \frac{v_{phase}}{(v_{th})_y}, \quad (43)$$

$$a := \frac{v_{th} \tan \theta n'_0}{2 n_0} \quad (44)$$

und

$$s := \frac{v_{\parallel}}{v_{th}} = \frac{v_{\parallel}}{\sqrt{2T_i}} \Rightarrow dv_{\parallel} = ds v_{th} \quad (45)$$

kann die Dichte durch die Plasma-Dispersionsfunktion und damit die Gaußsche Fehlerfunktion ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} n_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{\parallel} f_1 \\ &= -\frac{n_0 \phi}{T_i} + \frac{\phi}{T_i} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{\parallel} f^{(0)} \frac{\frac{\omega}{k \cos \theta v_{th}} - \frac{T_i \tan \theta n'_0}{v_{th} n_0} \left(1 - \frac{1}{2} \eta_i \left[1 - \frac{v_{\parallel}^2}{T_i} \right] \right)}{\frac{\omega}{k \cos \theta v_{th}} - \frac{v_{\parallel}}{v_{th}}} \\ &= -\frac{n_0 \phi}{T_i} + \frac{\phi}{T_i} \int_{-\infty}^{+\infty} ds v_{th} \frac{n_0}{\sqrt{\pi} v_{th}} e^{-s^2} \frac{\zeta - a(1 - \frac{1}{2} \eta_i)}{\zeta - s} \\ &\quad - \frac{\phi}{T_i} \int_{-\infty}^{+\infty} ds v_{th} \frac{n_0}{\sqrt{\pi} v_{th}} e^{-s^2} \frac{a \frac{\eta_i}{2} \frac{2s^2 v_{th}^2}{v_{th}^2}}{\zeta - s} \\ &= \frac{n_0 \phi}{T_i} \left\{ -1 + \frac{\zeta}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{e^{-s^2}}{\zeta - s} - a \left(1 - \frac{\eta_i}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{e^{-s^2}}{\zeta - s} \right. \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}} a \eta_i \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{s^2 e^{-s^2}}{\zeta - s} \Big\},$$

also

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{\phi}{T_i} \left\{ -1 + \zeta G(\zeta) - a \left(1 - \frac{\eta_i}{2} \right) G(\zeta) - a \eta_i \zeta (\zeta G(\zeta) - 1) \right\}. \quad (46)$$

Durch Einsetzen von (46) in (23) auf Seite 18 entsteht die *Dispersionsrelation*

$$0 = \phi''(x) - k^2 \phi(x) + \mathcal{D}(\omega, x, k) \phi(x) \quad (47)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &:= - \left[\frac{1}{T^e} + \frac{1}{T^i} \right] + \frac{1}{T^i} \left\{ G(\zeta) \left[\zeta - a \left(1 - \frac{\eta_i}{2} \right) \right] - a \eta_i \zeta (\zeta G(\zeta) - 1) \right\} \\ T^e &\equiv T^i \frac{1}{T} \left\{ -2 + G(\zeta) \left[\zeta - a \left(1 - \frac{\eta_i}{2} \right) \right] - a \eta_i \zeta (\zeta G(\zeta) - 1) \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

Die Abkürzung \mathcal{D} ist hier eine Funktion von x , k und ω sowie den festen Parametern η_i , θ etc., wobei die beiden Variablen k und ω nur in ζ , also in der Kombination ω/k auftreten.

3.2 Lokale Approximation

Die *lokale Approximation* besteht darin, daß ungeachtet der Dirichlet-Randbedingungen sowie der Variation in radialer Richtung von n_i , T_i und folglich η_i eine Fourier-Transformation in x durchgeführt, also die Ersetzung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow -k_x^2 \quad (49)$$

vorgenommen wird. Das ist äquivalent mit einer Betrachtung des Plasmas an nur einer Stelle im Raum unter Annahme einer konstanten globalen Situation. In diesem Fall wird (47) zu einer rein algebraischen Gleichung, in der x zusammen mit k , k_x und ω nur als Parameter auftritt:

$$0 = -(k_x^2 + k^2) + \mathcal{D} \left(\frac{\omega}{k}, x \right). \quad (50)$$

Die Lösung dieser Gleichung kann numerisch zum Beispiel durch das Newton-Verfahren (siehe Anhang A.4.1) relativ einfach durchgeführt werden. Bei

einem vorgegebenen Profil entsteht so eine Kurve $\omega(x)$, die Moden haben dann abhängig vom Ort unterschiedliche Frequenzen und Anwachsraten (Abbildung 3). Es läßt sich ein instabiler Bereich ausmachen, in dem ω positiven Imaginärteil hat, also anwachsende Lösungen existieren.

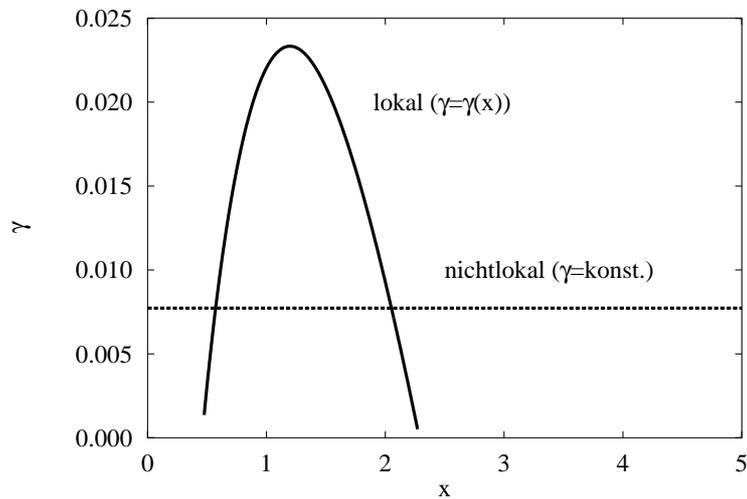


Abbildung 3: Anwachsraten $\gamma(x)$ in lokaler Approximation als Funktion der radialen Koordinate x . Profile wie in Abbildung 12 auf Seite 40 ($\eta_i = 8,0, \beta = 0,55$); Wellenzahlen $k_x = 0, k = -1,2$. Die durch nichtlokale Rechnung unter sonst gleichen Bedingungen bestimmte Anwachsraten ist zum Vergleich als Linie eingezeichnet.

3.2.1 Lokales Instabilitätskriterium

Für den Fall, daß wie hier eine Fourier-Transformation in x durchgeführt werden kann, läßt sich die Existenz von Lösungen mit positivem Imaginärteil auch analytisch nachweisen. Das wird in von Goldston und Rutherford [28, S. 468 ff.] mit Hilfe der *Nyquist-Diagrammanalyse* durchgeführt. Auf die hier verwendete Geometrie übertragen ergibt sich ein *lokaler Schwellenwert*

$$\eta_{ic} = 2 \frac{1}{1 - 16 \cot^2 \theta \left(\frac{T_i}{T_i'} \right)^2}. \quad (51)$$

Dieser Wert liegt bei starken Temperaturgradienten knapp über 2, steigt aber, wenn das Temperaturprofil zu flach wird, bis ∞ an und wird bei allzu kleinem

∇T_i sogar negativ. In diesem Fall ist keine η_i -Instabilität möglich. Allgemein ist das System lokal instabil, wenn η_i über der Kurve des Schwellenwertes liegt. In Abbildung 4 ist zu sehen, daß der auf diese Weise begrenzte instabile Bereich mit dem aus der Dispersionsrelation (47) auf Seite 25 erhaltenen Gebiet $\{x : \gamma(x) \geq 0\}$ übereinstimmt. Die Driftwelle wird sich nach dieser lokalen Vorhersage also im Bereich $0,5 \lesssim x \lesssim 2$ ausbreiten.

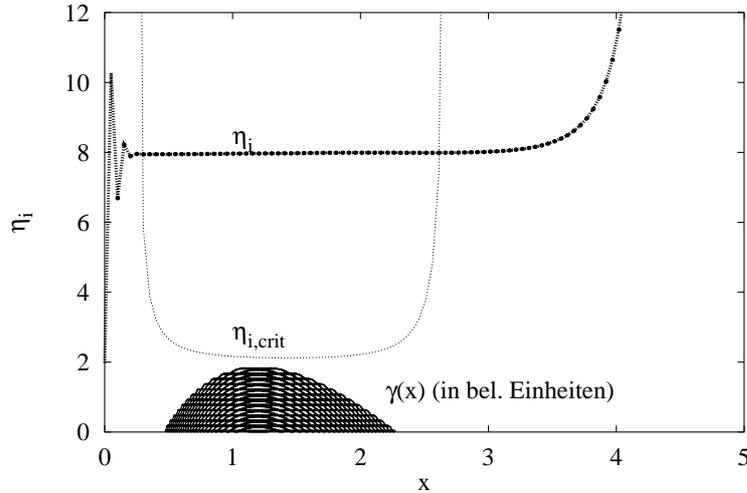


Abbildung 4: Kritischer Parameter η_i und lokaler Schwellenwert $\eta_{i,c}$ zu Beginn der Simulation ($t = 0$). Zum Vergleich ist die Anwachsrate $\gamma(x)$ für $k = -1,2$ als schraffierte Fläche eingezeichnet, aber gegenüber Abb. 3 stark überhöht dargestellt.

3.2.2 Abhängigkeit von der Wellenzahl

Die Tatsache, daß \mathcal{D} nicht einzeln von ω und k abhängt, sondern nur von $\zeta = \omega/k$, hat zur Folge, daß der Beitrag des Laplace-Operators $\Delta\phi$ in (50) nicht vernachlässigt werden darf. Andernfalls ergäbe sich – unabhängig von der tatsächlichen Form von \mathcal{D} – jedenfalls eine Lösung $\omega/k = \zeta_0(x, \eta_i, \theta)$, und damit wäre $\omega = \zeta_0 k$. Das heißt, daß die Anwachsrate proportional zu k steigen würde, die Instabilität also auf den kleinstmöglichen Skalen stattfände, was offensichtlich unphysikalisch ist. Wird jedoch den Term k^2 in (50) beibehalten, so wird die Instabilität für große k wieder gedämpft. Es zeigt sich ein Maximum $k \approx -1$, also eine bevorzugte Wellenlänge in poloidaler Richtung von ca. $6\varrho_i$ (Abbildung 5 auf der nächsten Seite).

Auf der anderen Seite stellt sich heraus, daß bei festgehaltenem k die Anwachsrate mit steigender radialer Wellenzahl k_x sinkt, während sie für $k_x = 0$ maximal wird. Das bedeutet, daß bei freien Rändern in x in dieser Richtung gar keine Struktur entsteht, was einer unendlich großen Wellenlänge entspricht, bei Dirichlet-Randbedingungen dagegen die jeweils größtmögliche Wellenlänge bevorzugt wird. Deswegen hat das „Einengen“ der Mode auf einen radialen Bereich, entweder durch Ränder auf einem konstanten Potential oder durch variierende Gradienten und damit eine endliche Größe der instabilen Zone, eine dämpfende Wirkung. Dies ist ein Hinweis, daß die lokale Approximation zu große Anwachsrate liefert. Im folgenden Abschnitt wird daher die volle radiale Abhängigkeit der Profile berücksichtigt.

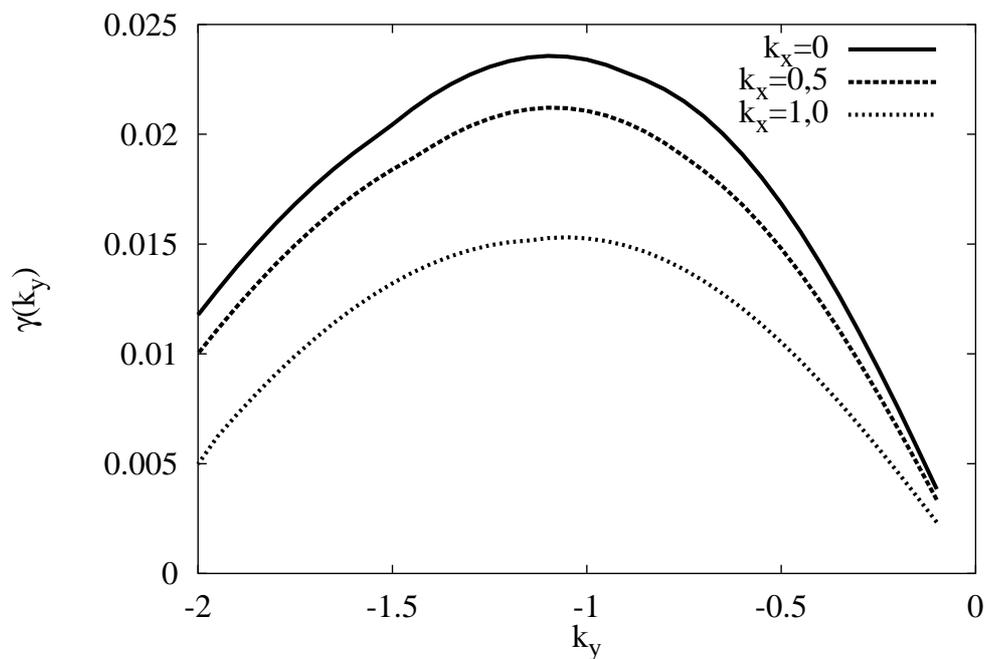


Abbildung 5: Abhängigkeit der lokalen Anwachsrate von den Wellenzahlen k und k_x . Es ist jeweils nur das Maximum über x von $\gamma(x)$ aufgetragen. Parameter wie in Abbildung 3 auf Seite 26. Die Driftbewegung verläuft in $(-y)$ -Richtung, daher ist k bei positiv gewählter Frequenz negativ.

3.3.2 Lösungsbedingung

Das System (52) hat also nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante von \mathfrak{M} verschwindet. Damit ergibt sich eine Lösbarkeitsbedingung

$$|\mathfrak{M}|(\omega, k) = 0, \quad (54)$$

die zur Bestimmung von $\omega(k)$ dient und damit die Anwachsrate γ liefert. Da es sich bei \mathfrak{M} um eine Dreibandmatrix handelt, ist die Berechnung ihrer Determinante $|\mathfrak{M}|$ dadurch möglich, daß sie auf die Form

$$\mathfrak{M}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (55)$$

transformiert wird. Es ist dann

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= h^2 D_1 - 2, \\ \lambda_i &= (h^2 D_i - 2) - \frac{1}{\lambda_{i-1}} \quad \text{für } i = 2 \dots n \end{aligned}$$

und

$$|\mathfrak{M}| = |\mathfrak{M}'| = \prod_{i=1}^n \lambda_i. \quad (56)$$

Die Funktion $|\mathfrak{M}|$ hängt dabei in recht komplizierter Weise von der komplexen Größe ω sowie den reellen Parametern k und η_i ab. Die Bestimmung der Nullstellen ist dadurch nicht ganz einfach; die verwendeten Algorithmen werden im Anhang A.4 vorgestellt. Es ergibt sich durch diese Auswertung ein Satz von möglichen Werten für ω , und durch Variation von k entsteht eine Ortskurve der Frequenz in der komplexen Ebene. Der Punkt mit dem größten Imaginärteil bestimmt das lineare Anwachsverhalten der Mode. Durch das so gefundene k ist die poloidale Struktur der Mode bestimmt; für die radiale muß dagegen tatsächlich ein $\phi \in \ker \mathfrak{M}$ berechnet werden. Dazu wird im nächsten Abschnitt 3.3.3 die Methode der *inversen Vektoriteration* angewandt.

3.3.3 Struktur der instabilen Moden

Die Instabilität besitzt eine Struktur in radialer wie in poloidaler Richtung. In y handelt es sich um einfache linear unabhängige Fourierkomponenten, deren

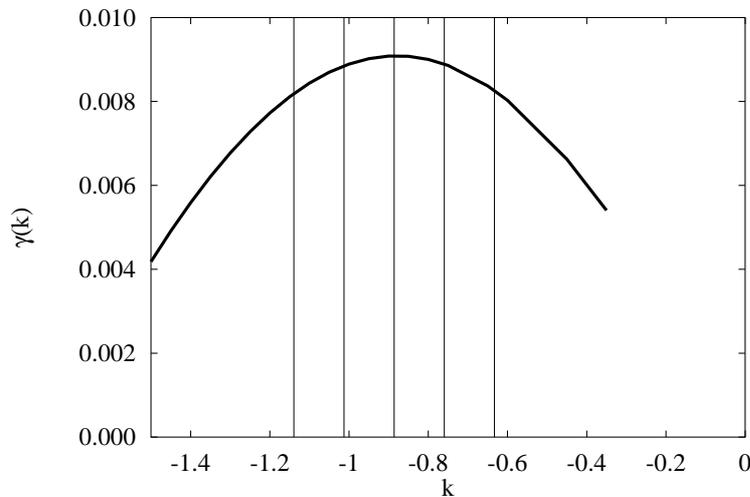


Abbildung 6: Abhängigkeit der Anwachsrate von der Wellenzahl k bei $\eta_i = 8,0$ in nichtlokaler Rechnung. Die senkrechten Linien stellen einige zugängliche k -Werte bei einem Gitter wie in Lauf * (Tabelle 5) dar.

Anwachsrate von der Wellenzahl k abhängt. Abbildung 6 zeigt den instabilen Bereich.

In der Numerik bestimmt die Schrittweite des Berechnungsgitters die möglichen Moden. Bei den durchgeführten Simulationen liegen in der Regel mehrere zugängliche Wellenlängen im instabilen Bereich, so daß ein Gemisch von instabilen Moden entsteht. Die k -Werte, die am oder nahe beim Maximum der Kurve $\gamma(k)$ liegen, bestimmen – nach einer kurzen Anfangsphase, in der durch die zufällige Initialstörung alle Moden gleichmäßig angeregt sind – die Dynamik des Systems. Die grobe Diskretisierung im k -Raum schränkt hier also die möglichen Wellenlängen ein. Andererseits ist die Kurve $\gamma(k)$ in der Nähe des Maximums relativ flach, so daß zwei oder drei Moden mit sehr ähnlichen Anwachsrateen miteinander konkurrieren können.

Quasilineare Simulation Das Auftreten mehrerer Wellenzahlen mit positiven und ungefähr gleich starken Anwachsrateen hat zur Folge, daß sich unter Umständen bis zum Eintritt in den nichtlinearen Bereich keine Mode durchgesetzt hat und noch immer ein Gemisch verschiedener Fourierkomponenten vorliegt. Abbildung 7 zeigt, daß in y -Richtung neben einem deutlich ausgeprägten Maximum und seiner Vielfachen noch eine zweite, schwächere Mode

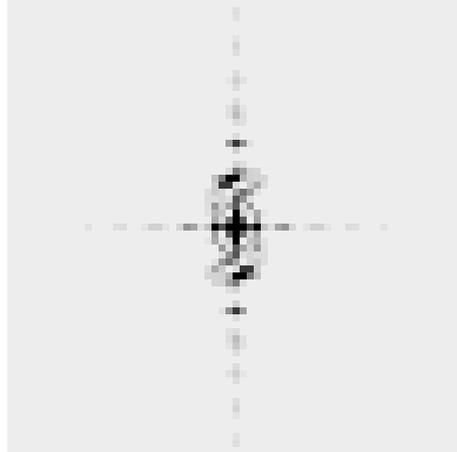


Abbildung 7: *Fouriertransformierte des Potentials in Abbildung 14(a) auf Seite 43. Die Schwärzung der Punkte entspricht dem Betrag der Spektralkomponenten. In der Mitte des Diagramms liegt die $(0; 0)$ -Mode; dargestellt sind in den beiden Richtungen k_x (horizontal) bzw. k (vertikal) nur jeweils 64 Spektralkomponenten*

mit kleinerem k vorliegt, für die bei genauem Hinsehen auch eine Harmonische zu erkennen ist.

Das Entstehen einer reinen Sinuswelle kann jedoch durch eine künstliche Linearisierung erzwungen werden. Das geschieht dadurch, daß eine numerische Simulation wie in Kapitel 4.1 durchgeführt wird. Bei jedem Zeitschritt findet aber eine Renormierung statt, indem die Abweichung von der Gleichgewichtsverteilung gleichmäßig an jedem Punkt mit $\varepsilon_R / \|\phi\|$ multipliziert wird, wobei $\varepsilon_R \ll 1$ ein fester Faktor ist. Auf diese Weise wird die Dynamik bewahrt, aber die Amplitude der Störung kleingehalten, so daß das System den linearen Bereich nie verläßt. Nach einiger Zeit sind alle Moden außer der am stärksten instabilen weggedämpft, und die lineare Anwachsrate kann direkt am jetzt konstanten Wert ($\varepsilon_R / \|\phi\|$) abgelesen werden. Die Mode bildet in poloidaler Richtung für $t \rightarrow \infty$ eine harmonische Schwingung. In Abbildung 8 auf der nächsten Seite ist die Struktur zur Zeit $t = 9\,800$ dargestellt, was offenbar noch nicht hinreichend nahe an $t = \infty$ liegt, denn die Welle weist in y -Richtung eine leichte Schwebung auf. Zu einem noch späteren Zeitpunkt stellt sich dann ein reiner Sinus ein.

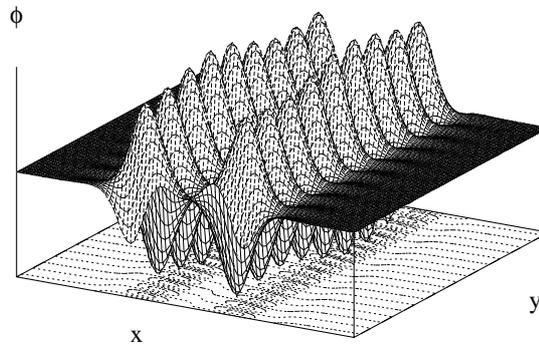


Abbildung 8: Ausbildung einer harmonischen Welle in y -Richtung bei quasilinearer Simulation (3d-Darstellung und Isokonturlinien des Potentials bei $t = 9800$).

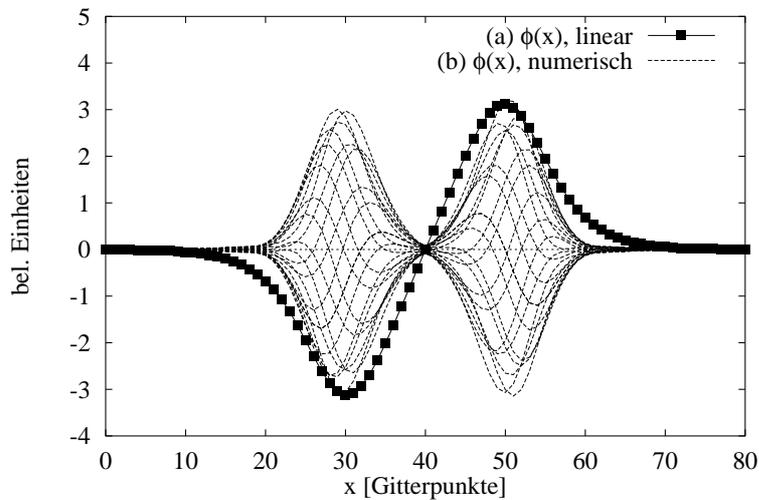


Abbildung 9: Radiale Mode des Potentials: (a) in linearer Rechnung. Dargestellt ist eine Linearkombination der Moden für $k = 1$ und $k = -1$, die durch inverse Vektoriteration erhalten wurden. (b) aus numerischer, quasilinearer Simulation bei $t = 9800$. Die Profile der Simulation an mehreren y -Querschnitten sind übereinandergedruckt, um die Struktur als Einhüllende sichtbar zu machen.

Inverse Vektoriteration In radialer Richtung ist die Struktur komplizierter, da die Randbedingungen und die räumliche Inhomogenität in (47) eine sinusartige Funktion verbieten. Die möglichen Moden sind die Eigenvektoren von \mathfrak{M} in (53), die durch *inverse Vektoriteration* berechnet werden können. Dabei wird ausgenutzt, daß bei der numerischen Bestimmung von ω nur ein Approximativwert für die Nullstelle gefunden wird. Dadurch ist $|\mathfrak{M}|$ zwar sehr klein, aber nicht genau null. Zur Bestimmung einer Lösung ϕ muß also ein Eigenvektor von \mathfrak{M} zum kleinsten Eigenwert gefunden werden, so daß $\mathfrak{M} \cdot \phi \approx 0$ gilt. Ist aber ϕ ein Eigenvektor von \mathfrak{M} zum Eigenwert λ , so ist es auch einer der Inversen \mathfrak{M}^{-1} zu λ^{-1} , dem größten Eigenwert von \mathfrak{M}^{-1} . Durch wiederholtes Anwenden von \mathfrak{M}^{-1} auf einen beliebig gewählten Vektor ϕ_0 , dessen Projektion auf den gesuchten Eigenvektor ϕ natürlich nicht 0 sein darf, entsteht eine Folge, die gegen ϕ konvergiert,

$$\phi = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathfrak{M}^{-1})^k \phi_0. \quad (57)$$

Ein Vergleich mit einem Querschnitt durch das Potential in der numerischen Simulation zeigt dabei eine gute Übereinstimmung der Strukturen (Abbildung 9 auf der vorherigen Seite).

3.4 Vergleich zwischen lokaler und nichtlokaler Rechnung

Wird zu jedem Wert von η_i die jeweils maximale Anwachsrate γ aufgetragen, so entsteht ein Bifurkationsdiagramm wie in Abbildung 10 auf der nächsten Seite. Da die Lösbarkeitsbedingung (54) je nach den Parametern auch mehr als eine Lösung zuläßt, können mehrere Zweige entstehen. Insbesondere ist zu jedem ζ auch ζ^* eine Lösung, so daß ein an der η_i -Achse gespiegelter Zweig auftritt. Die Instabilität wird aber nur durch die maximale Anwachsrate bestimmt.

Eine Gegenüberstellung der Rechnung unter Berücksichtigung der Profile mit der lokalen Approximation zeigt deutlich den stabilisierenden Einfluß der Nichtlokalität: die nichtlokale Anwachsrate liegt wesentlich unter dem Maximum der Kurve $\gamma(x)$ aus der lokalen Näherung. Ein Vergleich mit den numerischen Daten wie in Abbildung 10 auf der nächsten Seite zeigt eine gute Übereinstimmung mit der nichtlokalen Rechnung, die hier mit einer Matrixgröße von 50×50 ausgeführt worden ist. Die lokale Näherung erweist sich dagegen als zu grob, da die vorhergesagten Anwachsrate durchweg wesentlich zu hoch liegen.

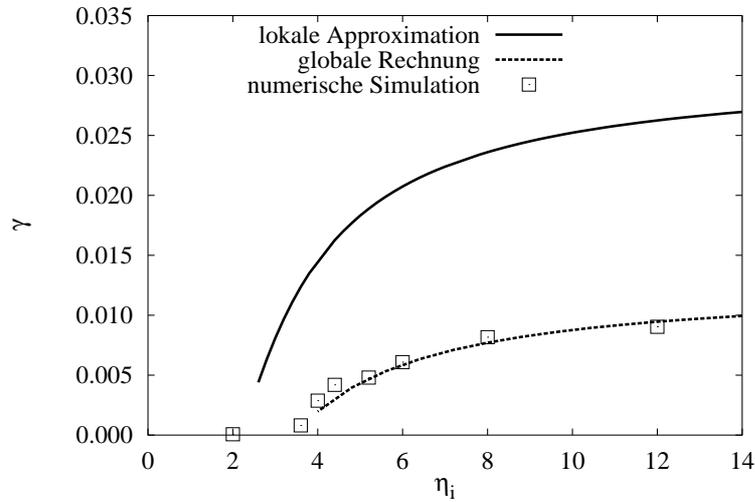


Abbildung 10: Vergleich der Bifurkationskurven $\gamma(\eta_i)$ in lokaler und nichtlokaler Rechnung mit der numerisch ermittelten Anwachsrate. Die nichtlokale Anwachsrate wurde für $k = -1,2$ berechnet, die lokale ist $\max_{k,x} \gamma(x, k)$.

Daneben ist auch der Einsatzpunkt der Instabilität unterschiedlich. In der lokalen Näherung ergibt sich ein Schwellenwert von etwa $\eta_{ic} = 2$. Dies entspricht auch den beispielsweise bei Horton [6] aufgeführten Fluidrechnungen. Bei den hier durchgeführten Simulationen, mit denen die nichtlokale Rechnung gut übereinstimmt, wird dagegen der wesentlich höhere Wert von $\eta_{ic} \approx 3,65$ gefunden. In Abschnitt 4.4 wird das Verhalten am Einsatzpunkt der Instabilität weiter untersucht.

3.5 Einfluß der Magnetfeldkonfiguration

Die Bewegungsgleichung (27) hängt vom Winkel θ zwischen dem Magnetfeld \mathbf{B} und der Ausbreitungsrichtung der Welle, also zwischen \mathbf{e}_{\parallel} und \mathbf{e}_y , ab. In diesem Abschnitt wird der Einfluß von θ auf die Stärke der Instabilität untersucht.

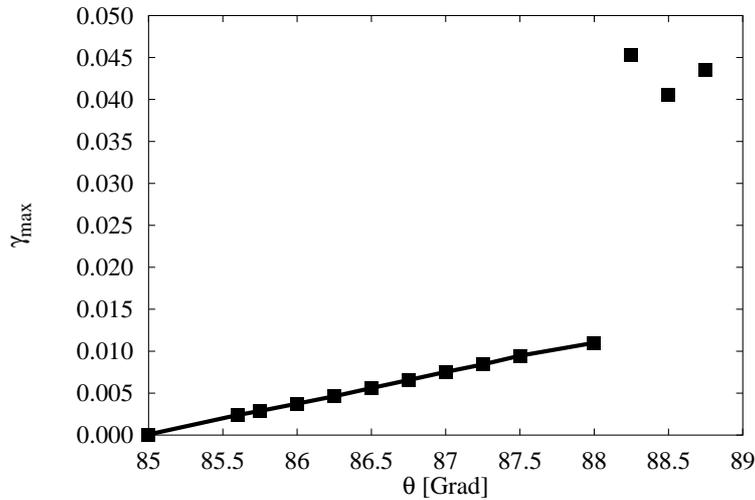


Abbildung 11: *Abhängigkeit der linearen, nichtlokalen Anwachsrate vom Winkel der Magnetfeldlinien. Aufgetragen ist $\max_k \gamma$ bei $\eta_i = 6$.*

3.5.1 Homogenes Magnetfeld

Zunächst wird die Mode bei verschiedenen konstanten Winkeln betrachtet. Es zeigt sich, daß die Anwachsrate mit θ steigt, daß aber die η_i -Mode nur in einem eng begrenzten Bereich existieren kann. Dieses Verhalten ist in Abbildung 11 zu sehen: Für $\theta \lesssim 85^\circ$ sinkt γ unter null, während für Winkel in der Nähe von 90° die Algorithmen zur Nullstellensuche aus Anhang A.4 versagen und keine sinnvollen Lösungen der Dispersionsgleichung finden. Physikalisch betrachtet liegt das daran, daß bei $\theta = 90^\circ$ keine Koppelung zwischen der parallelen Bewegung und der Driftwelle mehr möglich ist; vom „technischen“ Standpunkt aus gesehen verschwinden die Nenner in (43) und (44), so daß \mathcal{D} in (50) undefiniert ist.

In dieser Arbeit wurden daher alle linearen und numerischen Rechnungen mit einem Winkel von 87° , der etwa in der Mitte des möglichen Intervalls für θ liegt, durchgeführt. Auf diese Weise lassen sich die einzelnen Anwachsrate miteinander vergleichen. Darüberhinaus zeigt sich auch, daß eine Änderung des Winkels auf den Einsatzpunkt der Instabilität keinen meßbaren Einfluß hat; der Schwellenwert η_{ic} hängt nicht oder nur sehr schwach von θ ab.

3.5.2 Verscherung

Unter *magnetischer Verscherung* (*magnetic shear*) wird eine Variation der Richtung des \mathbf{B} -Feldes mit der radialen Koordinate verstanden. In Tokamaks wird dadurch eine Nichtlokalität in x -Richtung erzwungen und damit die Entstehung von ausgedehnten Moden verhindert. In *slab*-Geometrie läßt sich Verscherung wie zum Beispiel in [29] dadurch einführen, daß

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z + \frac{x}{L_s} \mathbf{e}_y \quad (58)$$

gesetzt wird, wobei L_s die Verscherungslänge ist. In der Bewegungsgleichung müssen dann die Ersetzungen $\cos \theta \rightarrow \frac{x}{L_s}$ und $\sin \theta \rightarrow 1$ vorgenommen werden. Da die Dispersionsrelation (52) aber sowieso von x abhängt, entsteht dadurch keine zusätzliche Komplikation für die Rechnungen. Andererseits stellt sich auch heraus, daß die Anwachsrate nicht wesentlich durch die Verscherung beeinflusst wird; das System verhält sich etwa so, als ob es einen gleichbleibenden, mittleren Wert für θ aufwiese. Das liegt daran, daß die Nichtlokalität in den globalen Profilen ja bereits berücksichtigt ist; das zusätzliche Einführen einer radialen Variation von θ ändert diese Situation also nicht mehr grundlegend.

4 Nichtlineares Verhalten und Transport

Von großem Interesse für das Verhalten eines Fusionsplasmas ist der anomale Transport von Wärme und Teilchen durch die η_i -Instabilität. Dazu muß die Mode in ihrer maximalen Ausbildung betrachtet werden, wenn die Störungen nicht mehr klein gegenüber der Ionendichte selbst sind, und die lineare Näherung zusammenbricht. Die Nichtlinearitäten verhindern dann ein weiteres Anwachsen und sorgen für eine Sättigung der Mode.

Aussagen können aufgrund der komplizierten Struktur der Gleichungen (23) und (27) und der Profile nicht mehr analytisch gemacht werden, sondern nur aus den numerisch gewonnenen Daten abgeleitet werden. Unter den „klinischen“ Bedingungen der Simulation können zwei unterschiedliche Situationen untersucht werden: zum einen die Relaxation aus einer überkritischen Ausgangskonfiguration, zum anderen der flußgetriebene Transport, bei dem ein superkritisches Profil durch Energie- oder Teilchenzufuhr aufrechterhalten wird.

4.1 Plasmasimulation

Kernstück der nichtlinearen Untersuchungen der η_i -Instabilität ist die Simulation des Plasmas durch die numerische Lösung der Gleichungen (23) und (27) als Anfangswertproblem. In diesem Abschnitt werden Numerik, verschiedene Ausgangskonfigurationen und die beobachteten Größen zusammen mit einigen typischen Simulationsverläufen vorgestellt. Eine ausführliche Diskussion der numerischen Methoden findet sich im Anhang.

4.1.1 Numerische Behandlung

Zur numerischen Integration des Systems wird ein Semi-Lagrange-Verfahren verwendet, das in A.1 detailliert beschrieben wird. Die Berechnung findet auf Gittern statt, die in x und y gleichmäßig unterteilt sind, während die Geschwindigkeitskoordinate v_{\parallel} laut (82) auf den kanonischen Impuls I projiziert wird. In dieser Richtung werden wegen des exponentiellen Abfalls der Verteilungsfunktion mit wachsendem Impuls die Abstände mit wachsendem I größer gewählt, so daß sich in jeder „Scheibe“ etwa gleichviel Masse befindet.

Als Anfangsbedingung wird die auf (x, y, I) transformierte Verteilung

$$F_0(x, I) = \frac{n_i(x)}{\sqrt{2\pi T_i(x)}} \cdot \exp\left(-\frac{v_{\parallel}^2(I, x)}{2 T_i(x)}\right) \quad (59)$$

mit der in Anhang A.1 beschriebenen Transformation

$$v_{\parallel}(I, x) = I + x \cot \theta \quad (60)$$

angesetzt. Dann ist auch

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} n_i(x) dx \approx \sum_I \Delta I F_0(x, I), \quad (61)$$

wobei die Diskretisierung leichte Abweichungen von der Normierung mit sich bringt.

Die für $n_i(x)$ und $T_i(x)$ gewählten Profile entsprechen denen auf Seite 9 (Gleichungen (3) und (4), Abbildung 12 auf der nächsten Seite). Die Randbedingungen sind in Tabelle 4 aufgeführt. Sie sind insofern problematisch, als für ϕ und f getrennte, aber miteinander verträgliche Bedingungen vorgegeben werden müssen. In y ist das durch die Wahl periodischer Randbedingungen ohne weiteres möglich, in x entstehen jedoch Schwierigkeiten. Die Forderung $\phi = 0$ auf dem Rand bedeutet, daß dort $(\mathbf{E})_y = 0$ und damit $(\mathbf{v}_{E \times B})_x = 0$ ist; es findet also kein Transport über den rechten oder linken Rand hinaus statt. Andererseits erfordert die Interpolationsmethode, daß für $f(x)$ entweder die ersten oder die zweiten Ableitungen vorgegeben werden. Das stellt eine zusätzliche Bedingung an das Gleichungssystem, das damit möglicherweise überbestimmt wird. Als Kompromiß werden „natural splines“ angesetzt (das heißt, die zweiten Ableitungen sind 0) und eine Pufferzone rechts und links der Instabilitätszone verwendet. Damit ist natürlich ein Verlust an Recheneffizienz verbunden.

	x (radial)	y (poloidal)
f	$f''(x) = 0$	periodisch
ϕ	Dirichlet	periodisch

Tabelle 4: Randbedingungen für die Plasmasimulation

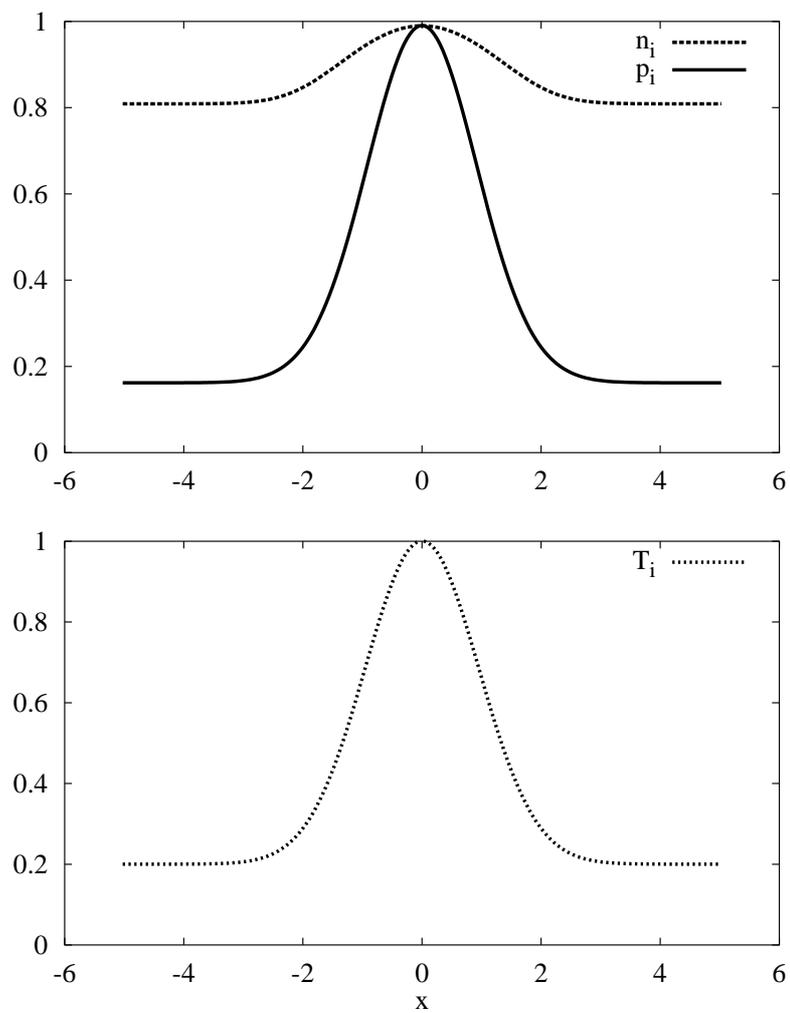


Abbildung 12: Typische Ausgangskonfigurationen für die Plasmasimulationen (zu Tabelle 5, Spalte *)

Parameter	①	②	③	④	⑤	⑥	* ⑦	⑧
Kantenlängen								
L_x	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0	10,0	10,0	10,0
L_y	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0
L_I	23,6	23,6	23,6	23,6	23,6	23,6	23,6	23,6
Gitterpunkte								
N_x	119	119	119	119	119	49	199	49
N_y	200	200	200	200	200	100	200	100
N_I (adaptiv)	45	45	45	45	45	41	33	41
Profilparameter								
η_i	2,0	2,8	3,6	4,0	4,4	6,0	8,0	12,0
β	0,10	0,10	0,40	0,40	0,40	0,55	0,55	0,55

Tabelle 5: Parameter der verwendeten Simulationen. Das Zeichen * markiert den Referenzlauf.

4.1.2 Diagnostik

Um aus der Datenflut der dreidimensionalen, zeitlich variierenden Felder sinnvolle Schlüsse zu ziehen, werden verschiedene Größen aufgezeichnet und ausgewertet.

1. Zeitreihen

- ▶ die L_2 -Norm des Potentials, die die Gesamt-Stärke oder „Amplitude“ der Fluktuationen angibt,

$$\|\phi\|_2 = \sqrt{\frac{1}{N_x \cdot N_y} \sum_x \sum_y |\phi(x, y)|^2}. \quad (62)$$

- ▶ das Signal einer „virtuellen Sonde“, das heißt, die Potentialfluktuationen $\phi(x_0, y_0)$ an einer festen Stelle.
- ▶ der Energiegehalt des Plasmas an dieser Stelle,

$$Q(x_0, y_0) = \int dv_{\parallel} v_{\parallel}^2 f(x_0, y_0, v_{\parallel}). \quad (63)$$

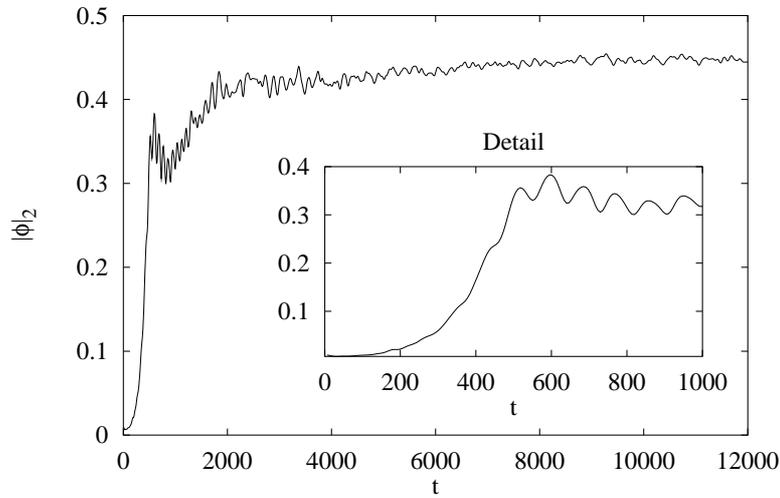


Abbildung 13: *Anwachsen der Störung in einem typischen Lauf. Parameter siehe Spalte * in Tabelle 5.*

2. eindimensionale Felder

- ▶ radiale Profile von Dichte, Temperatur und Druck:

$$n_i(x) = \frac{1}{N_y} \sum_y n_i(x, y), \quad (64)$$

entsprechend für T_i etc.

- ▶ die Verteilungsfunktion an der virtuellen Sonde,

$$f_{x_0, y_0}(v_{\parallel}) = f(x_0, y_0, v_{\parallel}). \quad (65)$$

3. zweidimensionale Felder

- ▶ Momentaufnahmen von Potential, Dichte, Temperatur, Dichtestörung etc. zu verschiedenen Zeitpunkten.

4.1.3 Verhalten der Mode

Zur Orientierung sind typische Amplitudenverläufe während verschiedener Simulationen in Abbildung 13 und 15 gezeigt. Momentaufnahmen von verschiedenen Feldern zu einem späten Zeitpunkt finden sich in Abbildung 14.

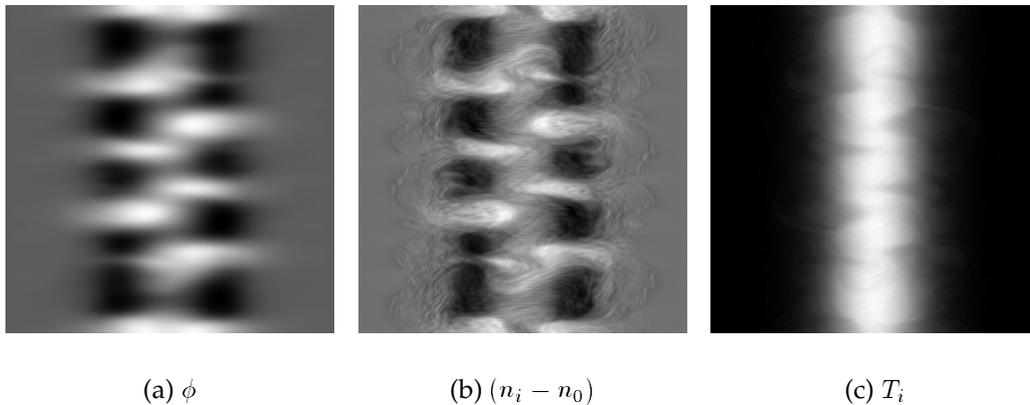


Abbildung 14: *Potential, Dichtestörung und Temperatur zur Zeit $t=2\,000$ (Lauf *). Horizontal aufgetragen ist x , vertikal y (am unteren Bildrand ist $y = 0$).*

Man sieht, daß die vorherrschende Struktur aus zwei Zügen von Driftwellen besteht, die sich auf der linken und der rechten Flanke der Verteilung bewegen, und zwar in unterschiedlicher Richtung – für $x < 0$ mit positiver Geschwindigkeit, das heißt von unten nach oben, für $x > 0$ entsprechend entgegengesetzt, aber mit der gleichen Driftgeschwindigkeit. Die Instabilität verläuft praktisch immer in vier Phasen:

1. Ausprägung der Instabilität, in Abb. 13 etwa bis $t = 100$. Da zu Beginn dem Feld eine zufällige Störung mitgegeben wird, konkurriert eine Vielzahl von Moden miteinander. Im Verlauf der ersten Phase werden die stabilen gedämpft, und es bleiben einige wenige instabile Moden übrig.
2. Exponentielles Anwachsen, hier für $100 \lesssim t \lesssim 500$. Dieser Phase wird bestimmt von den linearen Termen in der Bewegungsgleichung (27). Durch Variation des Parameters η_i ergeben sich unterschiedliche Anfangsbedingungen, die auch zu unterschiedlichem Wachstum der Störungen führen (Abbildung 15). In diesem Bereich kann die Anwachsrates aus der logarithmischen Darstellung an der Steigung der Regressionsgeraden abgelesen werden; sie stimmt sehr gut mit den Vorhersagen der linearen Rechnung in Kapitel 3 überein, wie Abbildung 10 auf Seite 35 zeigt. Abweichungen entstehen noch durch die Mischung mehrerer instabiler Moden.

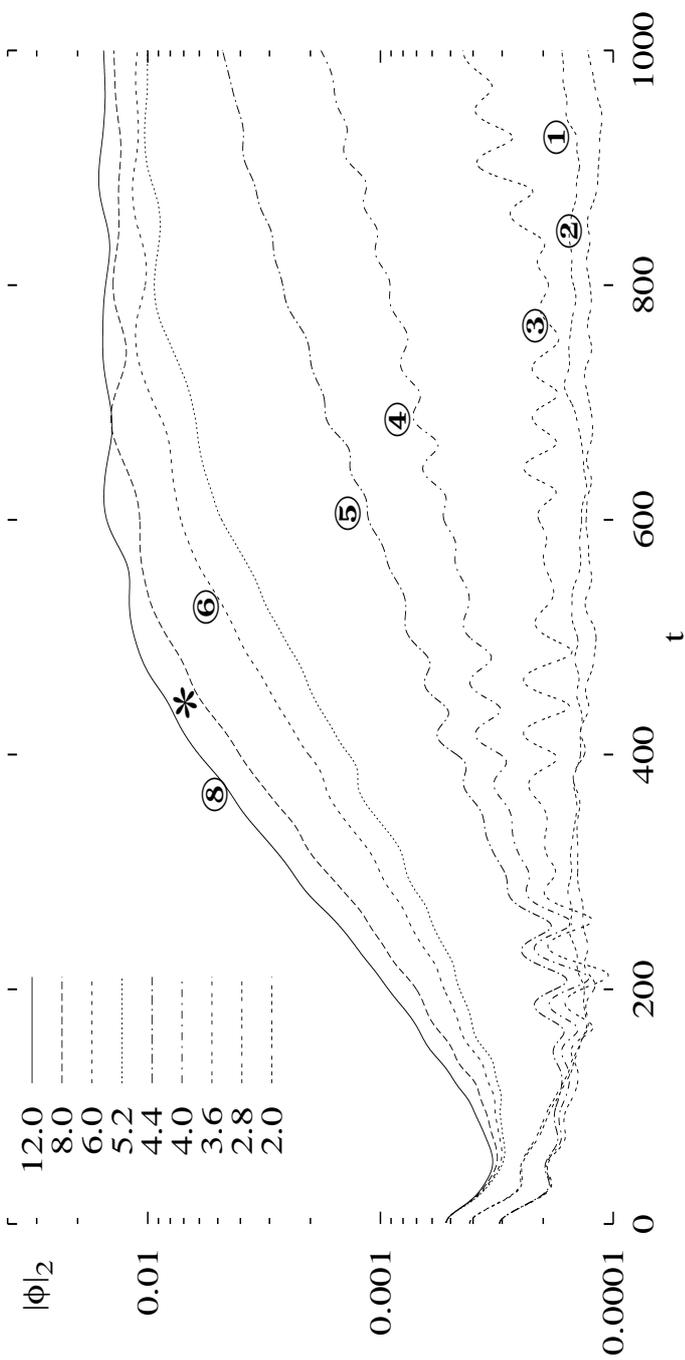


Abbildung 15: Anwachsen der Störung $\|\phi\|_2$ bei verschiedenen Werten von η_i (vgl. Tabelle 5). Die Amplitude ist logarithmisch aufgetragen.

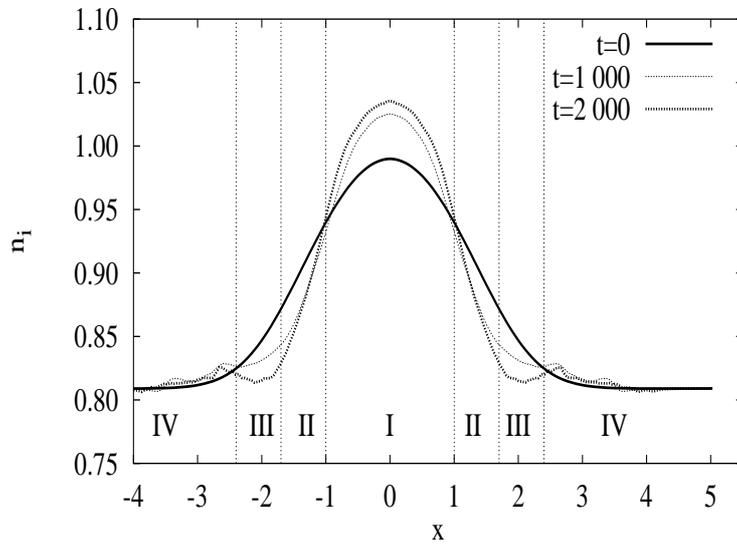
3. Transportphase von etwa $t = 500$ bis $t = 5000$, gekennzeichnet durch eine unregelmäßige Amplitudenkurve bei weiterem, schwachen Anwachsen. Die Störung ist hier nicht mehr klein gegenüber der Gleichgewichtsverteilung, die lineare Näherung also nicht mehr gültig. Der erzeugte Teilchen- und Wärmetransport verändert die Dichte- und Temperaturprofile deutlich. Eine Untersuchung dieser Phase wird in Abschnitt 4.2 durchgeführt.
4. Sättigung für $t \gtrsim 5000$. Die Mode ist maximal ausgebildet. Sie zeigt eine sehr langsame Schwingung, in deren Rhythmus periodisch Wärme und Dichte transportiert wird; über lange Zeiten ist der gemittelte Transport jedoch Null, so daß sich die Profile nicht mehr ändern.

4.2 Relaxation ins Gleichgewicht

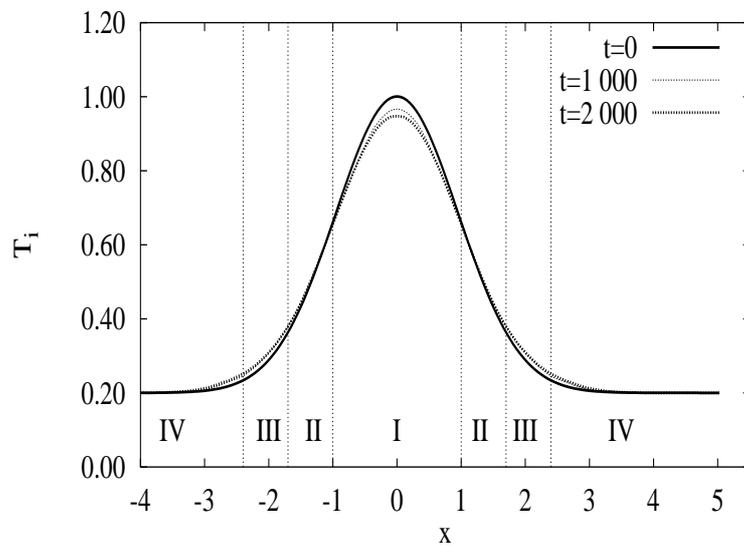
In diesem Kapitel wird stellvertretend für die durchgeführten Simulationen der in Tabelle 5 mit * gekennzeichnete Lauf mit den Ausgangsprofilen in Abbildung 12 untersucht. Zur Orientierung ist in Abbildung 13 der zeitliche Verlauf der Amplitude aufgetragen.

Das lineare Anwachsen der Mode ist nach etwa 10^3 Zeitschritten abgeschlossen. Danach beginnt eine Transportphase, in deren Verlauf eine deutliche Änderung der Profile auftritt, wie in Abbildung 16 auf der nächsten Seite zu sehen ist. Das System relaxiert schließlich in einen gesättigten Zustand, in dem ohne äußere Einwirkung keine langfristige Änderung der Profile mehr stattfindet. In der Entwicklung der Instabilität lassen sich für $t \gtrsim 5000$ nur noch langsame, periodische Schwankungen der Störungsamplitude erkennen. Ein Vergleich mit den Feldern n_i und ϕ zeigt, daß es sich hierbei um den Effekt der Wechselwirkung der beiden Wellenzüge auf der rechten und der linken Flanke handelt.

In diesem stationären Zustand liegt eine etwas flachere Temperaturkurve als zu Beginn vor. Wesentlich deutlicher sind die Änderungen in n_i , denn hier kommt es durch den Transport von Masse von den Außenbezirken des Plasmas in die Mitte zu einem Aufsteilen des Profils. Dabei ändert sich der Druckgradient kaum, da sich in dieser Hinsicht die beiden Effekte ungefähr kompensieren; andererseits findet durch die Umverteilung von Dichte und Energie eine Erniedrigung des η_i -Profils statt, zu dem sowohl die Abflachung des T -Profils als auch die Erhöhung des Dichtegradienten beitragen. Es entsteht sogar ein Bereich, in dem Dichte- und Temperaturgradient entgegengerichtet sind.



(a) Dichte n_i



(b) Temperatur T_i

Abbildung 16: Gemittelte radiale Ionenprofile der Simulation zu verschiedenen Zeiten. Zu beachten ist, daß die n_i -Achse nicht bei 0 beginnt.

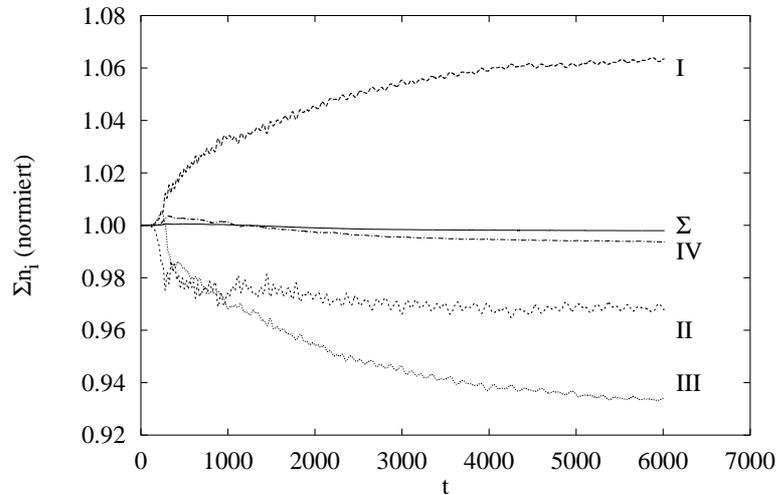


Abbildung 17: Summe der Dichte der einzelnen Gebiete in Abb. 16, über die Zeit aufgetragen und auf 1 bei $t = 0$ normiert. Die Gesamtdichte ist mit Σ bezeichnet.

setzt sind und η_i folglich negativ ist, wie in Abbildung 18 auf der nächsten Seite zu sehen ist.

Einen Überblick über den Dichteaustausch gibt Abbildung 17. Hier sind die Teilchenzahlen in vier verschiedenen Bereichen aufsummiert und ihre Entwicklung gegen die Zeit dargestellt, wobei die Dichten so normiert wurden, daß die Kurven für $t = 0$ bei 1 beginnen. Die Bereiche entstehen durch willkürliche Aufteilung der radialen Länge in mehrere Zonen, die in Abbildung 16 auf der vorherigen Seite durch senkrechte Linien voneinander getrennt und mit I bis IV bezeichnet sind. Die symmetrisch zueinander liegenden Zonen werden zu jeweils einer zusammengefaßt. Zunächst ist zu erkennen, daß der Transport nicht gleichmäßig, sondern im Rhythmus der Driftwelle erfolgt. In unregelmäßigen Abständen finden dabei auch etwas größere Schübe statt; dieser *intermittenter Transport* wird in Abschnitt 4.5 weiter untersucht. Weiter ist zu sehen, daß bei gleichbleibender Gesamtdichte Teilchen von der äußeren Instabilitätsregion in die Mitte transportiert werden. Ganz außen, in der Pufferzone, bleibt die Dichte wiederum nahezu unverändert. Interessant ist das Verhalten in der Flanke (Bereich II): Zu Beginn der Simulation wird hier noch Dichte abgetragen und nach innen gebracht. Danach hat sich das Profil so eingestellt, daß die Teilchen von außen in den Kern hineintransportiert werden, ohne sich in der Zwischenregion abzulagern.

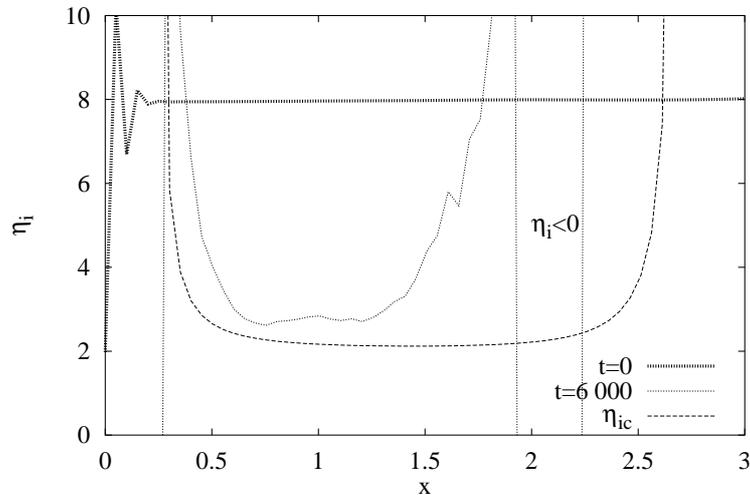


Abbildung 18: Kritischer Parameter η_i zu Beginn der Simulation und im relaxierten Zustand im Vergleich zum Schwellenwert η_{ic} . Bei $x \approx 0$ treten Ungenauigkeiten beim Bilden der numerischen Ableitung und der anschließenden Division auf. In der äußeren Instabilitätszone entsteht ein Gebiet mit umgekehrtem Gradienten in n_i , daher wird η_i dort negativ. Bei $n'_i(x) = 0$ hat η_i eine Polstelle.

4.3 Einfluß kinetischer Effekte

Abbildung 18 zeigt, daß der anfänglich hohe Wert von η_i drastisch abgebaut wird und sich der kritischen Kurve $\eta_{ic}(x)$ aus (51) annähert, aber nie unter diese Schwelle sinkt. Wenn für die Profile im relaxierten Zustand durch Einsetzen von $n_i(x)$ bzw. $\eta_i(x)$ in (50) die lokale Anwachsrate $\gamma(x)$ berechnet wird, so ist diese innerhalb des Bereichs der Mode zwar reduziert, aber nach wie vor positiv (Abbildung 19 auf der nächsten Seite). Das bedeutet, daß kein *marginal stabiles* Profil mit $\gamma(x) \equiv 0$ oder gar ein *subkritisches* Zustand mit $\gamma(x) \leq 0 \forall x$ erreicht wird. Stattdessen stellt sich ein *superkritisches*, nah-marginales Profil ein, wie etwa auch im Fluidmodell [30] oder der Teilchensimulation [5]. Dagegen wird in [31], ebenfalls ein Fluidmodell, ein subkritisches Verhalten beobachtet.

Vom nichtlokalen Standpunkt aus scheint der Zustand ebenfalls superkritisch. Dazu werden die zu verschiedenen Zeitpunkten vorliegenden Profile in die Gleichung (54) eingesetzt und so die jeweiligen Anwachsrate ermittelt,

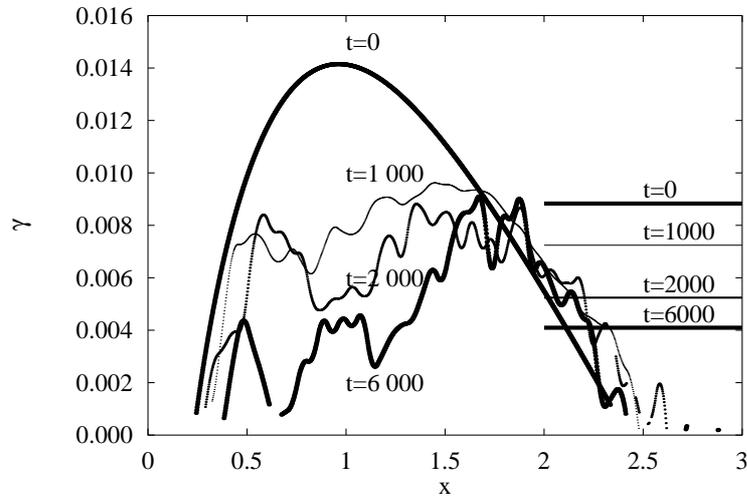


Abbildung 19: Lineare Anwachsrate für Profile zu verschiedenen Zeiten. Die Kurven zeigen $\gamma(x)$ in lokaler Approximation, die waagerechten Striche die x -unabhängigen Werte für γ in nichtlokaler Rechnung.

die in Abbildung 19 als waagerechte Striche eingezeichnet sind. Auch diese bleiben positiv und konvergieren nicht gegen null.

Zur Erklärung dieses überraschenden Verhaltens muß bedacht werden, daß die lineare Rechnung nur dann gilt, wenn die Verteilungsfunktion schwach von der Maxwell-Verteilung abweicht. Durch die kinetischen Effekte entsteht in nichtlinearer Rechnung aber bei der Ausbildung der Driftwelle ein „Loch“ bei der entsprechenden resonanten Geschwindigkeit $v_{\parallel} \approx v_{dia} / \cos \theta$, und dadurch liefern (50) und (54) zu hohe Werte für γ . Das läßt sich nachweisen, indem die relaxierte Verteilung künstlich „maxwellisiert“, die Simulation also mit den erreichten Profilen wieder von Anfang an gestartet wird. Dies führt in der Tat erneut zu einer instabilen Situation, in der eine Driftwelle zunächst anwächst und später sättigt. Die entsprechenden Anwachsrate stimmen tatsächlich gut mit den linear ermittelten überein (Tabelle 6), sie liegen sogar noch etwas darüber. Das superkritische Verhalten ist also ein Artefakt, das durch die Annahme maxwellverteilter Ionen entsteht. In „Wirklichkeit“ befindet sich das System in einem marginal stabilen, vielleicht sogar subkritischen, Zustand.

Profil	linear	numerisch
0	0,0088	0,0099
1000	0,0072	0,0091
2000	0,0052	0,0077
6000	0,0042	0,0061

Tabelle 6: Vergleich der linear berechneten, nichtlokalen Anwachsrate mit der numerischen Anwachsrate bei gleichen Ausgangsprofilen. Die Nummer des Profils bezieht sich auf die Zeit t in Abb. 16 und 19

4.4 Einsatz der Instabilität und Skalengesetze

Abbildung 15 auf Seite 44 zeigt, daß sowohl das Anwachsen als auch die erreichte Stärke der Instabilität von der Ausgangskonfiguration, die durch den Wert η_i bestimmt ist, abhängt. In diesem Abschnitt soll der Einsatzpunkt η_{ic} und das Verhalten bei Überschreiten dieser Schwelle bestimmt werden. Als Amplitude A wird laut (62) die L_2 -Norm der Fluktuationen des Potentials bezeichnet; die Sättigungsamplitude $A_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \|\phi\|_2 \rangle$ ist dann entsprechend der zeitlich gemittelte Wert über $A(t)$ nach dem Erreichen einer gewissen Stärke, die hier auf $A(t) \geq 0,005$ festgesetzt wurde. Wie in Abbildung 20 auf der nächsten Seite zu sehen ist, steigt die Sättigungsamplitude mit wachsendem η_i . Allerdings ist ihre Bestimmung gerade bei geringen Anwachsrate mit Fehlern behaftet, so daß für $\eta_i \lesssim 5$ keine Punkte aufgetragen werden können und deshalb deren Zahl insgesamt nicht ausreicht, um einen funktionalen Zusammenhang abzuleiten.

Ergiebiger ist die Untersuchung des Gesamttransports Γ . Als Maß dafür wird die Dichtemenge genommen, die während des gesamten Relaxationsprozesses die Linie $x = 1$ überquert. Dieser Wert ist in Abbildung 21 auf der nächsten Seite für verschiedene Parameter η_i aufgetragen, und zwar für die ersten 2000 Zeitschritte; danach fällt der Transport praktisch auf 0 ab. Da es sich um eine zeitlich integrierte Größe handelt, sind die Fehler hier kleiner als bei der Bestimmung der Sättigungsamplitude. Zunächst kann so der Schwellenwert η_{ic} bestimmt werden, der bei etwa 3,65 liegt. Durch Anpassen an ein Potenzgesetz ergibt sich dann die in der Abbildung eingezeichnete Kurve $0,0014 (\eta_i - \eta_{ic})^{2/3}$.

Mit dieser zusätzlichen Information kann nun auch in Abbildung 20 auf der nächsten Seite eine Regression versucht werden. Es zeigt sich, daß – unter der Annahme, daß die Sättigungsamplitude einer Potenz von $(\eta_i - \eta_{ic})$ proportional ist – die Punkte durch eine Kurve $\sim (\eta_i - \eta_{ic})^{1/3}$ gut angenähert werden.

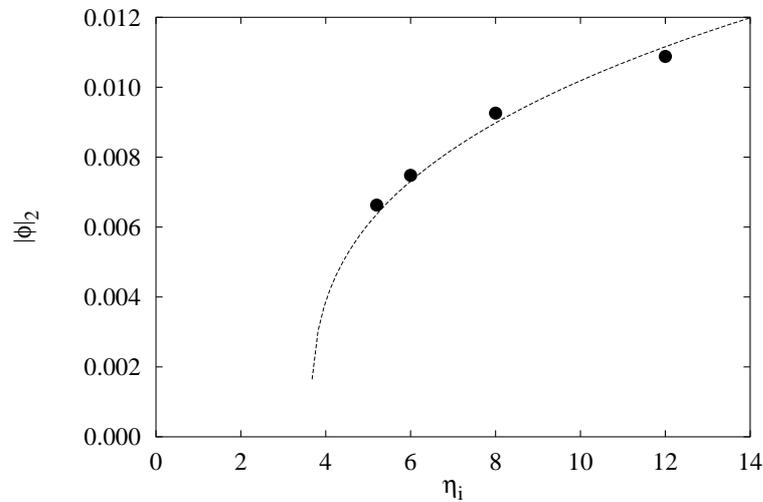


Abbildung 20: Sättigungsamplitude $A := \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi\|_2$ der η_i -Instabilität bei verschiedenen Ausgangskonfigurationen. Die angepasste Kurve ist proportional zu $(\eta_i - \eta_{ic})^{1/3}$ mit $\eta_{ic} = 3,65$.

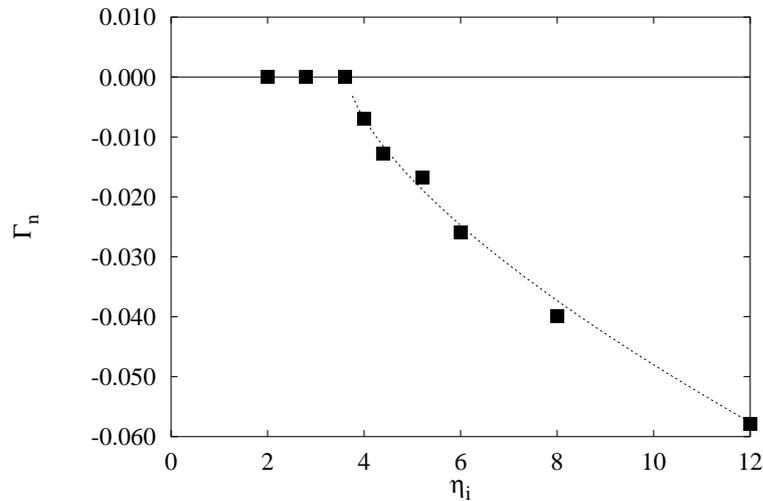


Abbildung 21: Gesamttransport während der Relaxationsphase (bis $t = 2000$) für verschiedene Werte von η_i . Der Transport erfolgt von außen nach innen, deswegen ist Γ negativ. Die Punkte werden durch eine Kurve $\sim (\eta_i - \eta_{ic})^{2/3}$ mit $\eta_{ic} = 3,65$ approximiert.

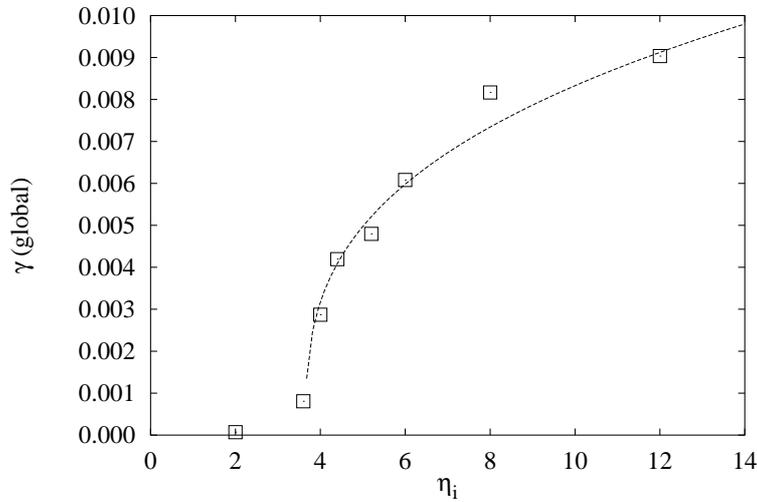


Abbildung 22: Anwachsrate der Instabilität als Funktion von η_i . Die angepasste Kurve ist proportional zu $(\eta_i - \eta_{ic})^{1/3}$ mit $\eta_{ic} = 3,65$.

Schließlich soll eine solche Aussage über die Anwachsrate γ , die in Abbildung 22 gegen η_i aufgetragen ist, gemacht werden. Hier stellt sich heraus, daß γ ebenfalls der dritten Wurzel aus $(\eta_i - \eta_{ic})$ folgt. Es ergeben sich damit die Relationen

$$\begin{aligned} \gamma &\sim \sqrt[3]{\eta_i - \eta_{ic}}, \\ A_\infty &\sim \gamma \end{aligned}$$

und

$$\Gamma \sim \gamma^2. \tag{66}$$

Das bedeutet, daß die gemittelte Amplitude einer nichtlinearen Differentialgleichung mit quadratischen Termen folgt, also

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \gamma A + \sigma A^2 + \mathcal{O}(A^3). \tag{67}$$

In der Sättigung ist $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$, und es gilt dann $A_\infty \approx (-\sigma^{-1}) \gamma$. Der Transport Γ ist dagegen durch das Quadrat der Fluktuationen gegeben.

4.5 Getriebene stationäre Zustände

Um das Transportverhalten genauer zu untersuchen, wird eine zweite Serie von Simulationen durchgeführt, in denen ein konstanter Energie- und Teilchenfluß bei festen Gradienten vorgegeben wird. Das geschieht hier dadurch, daß eine stabile, relaxierte Situation als Ausgangskonfiguration genommen wird, in der dann in bestimmten Gebieten lokale Druckerhöhungen erzeugt werden. Es werden also in festen Zeitabständen τ_P Pulse aufgesetzt, die durch ihre Stärke $\Pi_{\Delta_P, \bar{T}}$ und ihre räumliche Form $\Sigma(x, y)$ charakterisiert sind:

$$f(x, y, v_{\parallel}) \rightarrow f(x, y, v_{\parallel}) + \Sigma(x, y) \Pi_{\Delta_P, \bar{T}}(v_{\parallel}) \tau_P. \quad (68)$$

Hier sei Δ_P die Dichtemenge, die bei einer Temperatur \bar{T} zugeführt wird. Der Puls soll im Geschwindigkeitsraum eine Maxwell-Verteilung sein, also

$$\Pi_{\Delta_P, \bar{T}}(v_{\parallel}) = \frac{\Delta_P}{\sqrt{2\pi\bar{T}}} \exp\left(-\frac{v_{\parallel}^2}{2\bar{T}}\right). \quad (69)$$

Für die Pulsform Σ werden hier zwei Funktionen verwendet, die durch die Symbole \bullet und \odot gekennzeichnet sind. Die eine ist eine punktförmige Quelle an einer frei wählbaren Stelle (x_0, y_0) . Damit die Änderung nicht zu singular ist, erhalten die vier nächsten Nachbarn des Rechengitters jeweils ein Viertel der Dichte des Zentralpunktes:

$$\odot : \quad \Sigma(x, y) = \frac{1}{2} \delta_{x, x_0} \delta_{y, y_0} + \frac{1}{8} (\delta_{x+\Delta x, x_0} \delta_{y-\Delta y, y_0} + \delta_{x+\Delta x, x_0} \delta_{y+\Delta y, y_0} + \delta_{x-\Delta x, x_0} \delta_{y-\Delta y, y_0} + \delta_{x-\Delta x, x_0} \delta_{y+\Delta y, y_0}). \quad (70)$$

Dabei sind Δx und Δy die jeweiligen Schrittweiten des Gitters. Der Mittelpunkt (x_0, y_0) sollte sich auf der Innenseite des instabilen Bereichs befinden, allerdings noch innerhalb der Mode, damit die zusätzliche Dichte sofort weitertransportiert werden kann und sich nicht an einem Punkt ansammelt.

Die andere Möglichkeit ist eine Reihe über die ganze poloidale Länge bei einer festen radialen Position x_0 ,

$$\bullet : \quad \Sigma(x, y) = \frac{1}{L_y} \delta_{x, x_0}. \quad (71)$$

Hier kann zum Beispiel $x_0 = 0$ gewählt werden. Beide Formfunktionen sind schematisch in Abbildung 23 auf der nächsten Seite dargestellt.

Zwei verschiedene Möglichkeiten bieten sich an: einmal die Dichtezufuhr bei einer Temperatur \bar{T} , zum anderen eine reine Temperaturerhöhung ohne

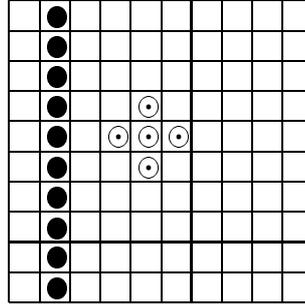


Abbildung 23: Verschiedene Formen für Dichtepulse auf dem Rechengitter der Plasmasimulation

	R	A	B	C	D
L_x	8,0	16,0	16,0	16,0	8,0
N_x	39	79	79	79	39
Δt	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
η_i	8,0	6,0	12,0	8,0	8,0
α	0,073	0,037	0,055	0,055	0,055
β	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55
Stärke Δ_P	0	0,5	0,5	0,5	0,1
Form $\Sigma(x, y)$	—	●	●	●	⊙
Intervall τ_P		1	1	1	1
Start bei $t =$		1 000	1 000	1 000	1 000

Tabelle 7: Parameter der verwendeten flußgetriebenen Simulationen. Der Buchstabe R bezeichnet einen ungetriebenen Vergleichslauf

Dichteänderung. In zweiten Fall werden zwei Pulse $\Pi_{-\delta, \bar{T}_0}^1$ und $\Pi_{\delta, \bar{T}_1}^2$ mit unterschiedlicher Temperatur und negativer bzw. positiver Masse aufgesetzt. Diese Möglichkeit scheint interessanter, da der Energietransport in der kinetischen Gleichung, also eine Änderung in der Verteilung $f(v_{\parallel})$, über den Coulomb-term ebenso wie über die Konvektion erfolgen kann. Der Mechanismus des Dichtetransports ist dagegen auf die $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift beschränkt: Die lokalen Änderungen in der Ionendichte bewirken über (23) Fluktuationen im Potential. Die Teilchen driften entlang der Isopotentialflächen, der „Höhenlinien“ von ϕ , die aber wegen der Poissongleichung nicht stark von den Flächen $n_i = \text{const.}$ abweichen und deshalb nur Gebiete ungefähr gleicher Dichte miteinander verbinden.

Es zeigt sich tatsächlich, daß ein Treiben der Simulation durch Zuführen von Teilchen Schwierigkeiten mit sich bringt, da das System schon bei schwachen Quellen nicht in der Lage ist, die zusätzliche Dichte abzuführen. In diesem Kapitel wird deswegen die Anregung nur über eine Temperaturerhöhung durchgeführt. Ein weiteres Problem wurde bereits auf Seite 39 angesprochen: die Randbedingungen verbieten einen Transport über die radialen Grenzen hinaus, so daß die zugeführte Energie das System nicht verlassen kann. Als Ausweg bietet sich an, die Wärme am Rand aktiv zu dissipieren, was aber andererseits eine zusätzliche Komplikation im Modell und im numerischen Code mit sich bringt. Hier wurde die einfache, aber wenig effiziente Lösung gewählt, den Pufferbereich groß genug zu halten, der dann für ausreichend lange Zeiten als Wärme- und Teilchenreservoir dient.

Die entsprechenden Parameter sind in Tabelle 7 für verschiedene Läufe, deren Kennbuchstaben in den Abbildungen wiederzufinden sind, angegeben. Jedesmal wird von einer Situation wie in Kapitel 4.2 ausgegangen und die Relaxation in stabile Profile abgewartet, bevor die Dichte- oder Temperaturpulse zugeführt werden. Das bedeutet, daß anfangs nicht viel passiert; da die Temperaturerhöhung genau bei $x = 0$, also im stabilen Bereich, geschieht, sammelt sich die zusätzliche Energie einfach in der Kernregion an. Erst wenn die injizierte Wärmemenge groß genug wird, diffundiert sie in den Bereich der Instabilität und wird dann von der η_i -Mode weiter nach außen transportiert.

Das Verhalten des getriebenen Modells ist in Abbildung 24 auf der nächsten Seite zu sehen. Hier sind die Potentialfluktuationen zusammen mit dem Referenzlauf R aufgetragen. Während die ungetriebene Kurve R ihre Form, eine Überlagerung harmonischer Wellen, beibehält, zeigen die anderen Zeitreihen in dem dargestellten Bereich ein Umschlagen in den transportierenden Zustand. Dies ist daran zu erkennen, daß die Kurven plötzlich einen unregelmäßigen, „zitternden“ Charakter bekommen, wobei der Einsatzpunkt von dem jeweiligen Lauf und damit der betrachteten Konfiguration abhängt. Ein solches Verhalten kann ein Hinweis auf stoßweisen oder *intermittenten* Transport sein, der auch in anderen Simulationen gefunden wird, zum Beispiel in [32]. Dort zeigen Garbet *et al.*, daß ein solcher intermittenter Transport in einem Fluid-Modell auftritt und besonders gut beobachtet werden kann, wenn das System durch einen festen Fluß getrieben wird.

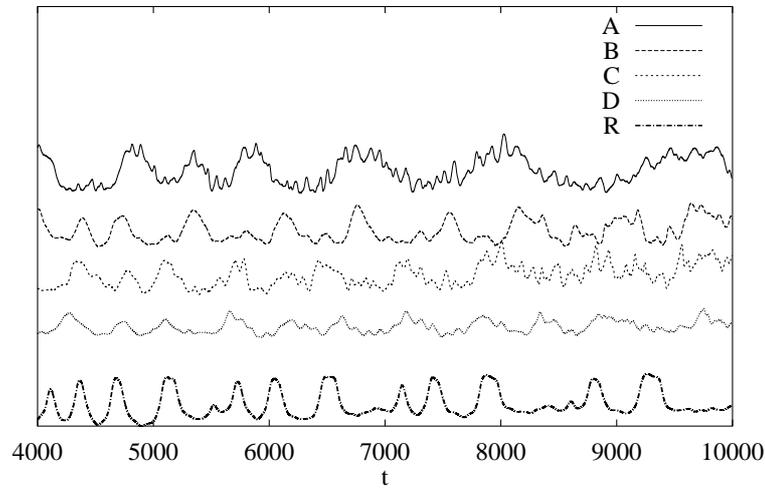


Abbildung 24: Potential ϕ an einem festen Punkt für die Simulationen in Tabelle 7 (Auszug)

4.5.1 Teilchen- und Wärmediffusion

Wichtig für den Einschluß des Plasmas ist der radiale Transport. Deshalb wird in diesem Abschnitt untersucht, wieviele Teilchen pro Zeiteinheit eine Radialfläche, im betrachteten Modell also eine Linie konstanter x -Koordinate, überqueren. Ist

$$\mathbf{j}_x(x) = \frac{1}{L_y} \int dy \int d^3v \mathbf{v}_x f(x, y, v) \quad (72)$$

der mittlere Teilchenstrom in x -Richtung, so läßt er sich dank der Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial}{\partial t} n_i(\mathbf{r}) + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ durch

$$j(x) = - \int_{-\infty}^x d\xi \frac{\partial n_i(\xi)}{\partial t} \quad (73)$$

ausdrücken, wobei sich $n_i(x)$ auf die poloidal gemittelte Dichte bezieht. Dieses Stromprofil ist für verschiedene Zeiten in Abbildung 25(a) auf Seite 58 aufgetragen. Jede Zeile entspricht dabei dem Mittelwert von $j(x)$ über 1000 Gyrozyklen. Positive j bedeuten einen Transport nach rechts, zu höheren x -Werten, negative dann entsprechend nach links – wobei zu beachten ist, daß der Betrachter in Abbildung 25 „von hinten“ auf das Diagramm sieht, so daß rechts

und links im Bild vertauscht sind. Es ist zu erkennen, daß das System zu Beginn der Simulation in den relaxierten Zustand findet: während einiger tausend Zeitschritte findet ein Dichtetransport statt, und zwar in die Mitte hinein. Das entspricht dem Aufsteilen der Dichtekurve in Abbildung 16 auf Seite 46.

Analog zu (73) läßt sich der Wärmestrom durch

$$\chi(x) = - \int_{-\infty}^x d\xi \left(n_i(\xi) \frac{\partial T_i(\xi)}{\partial t} - S_T(\xi) \right) \quad (74)$$

eingeführen. Da das System geheizt wird, taucht hier in der Kontinuitätsgleichung ein Quellterm S_T auf. Abbildung 25(b) zeigt die entsprechende zeitliche Entwicklung. Im Gegensatz zum Teilchentransport fällt χ nicht auf null ab, sondern bleibt endlich und nach außen gerichtet und führt so die in der Mitte kontinuierlich anwachsende Energie nach außen ab.

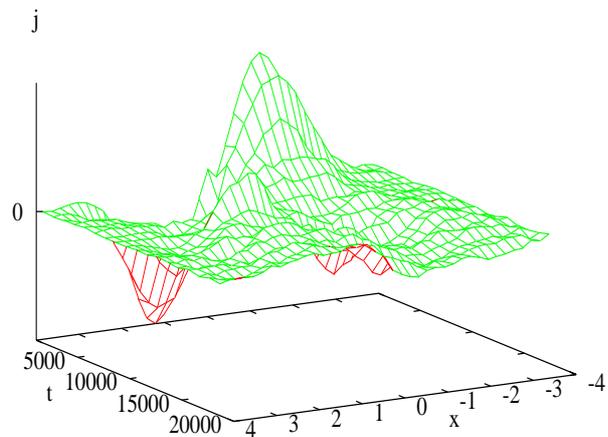
Der *Diffusionskoeffizient* und die *Wärmeleitfähigkeit* werden dadurch definiert, daß die entsprechenden Ströme auf den Druckgradienten bezogen werden, also

$$D_n(x) = \frac{j(x)}{p'(\xi)|_{\xi=x}} \quad (75)$$

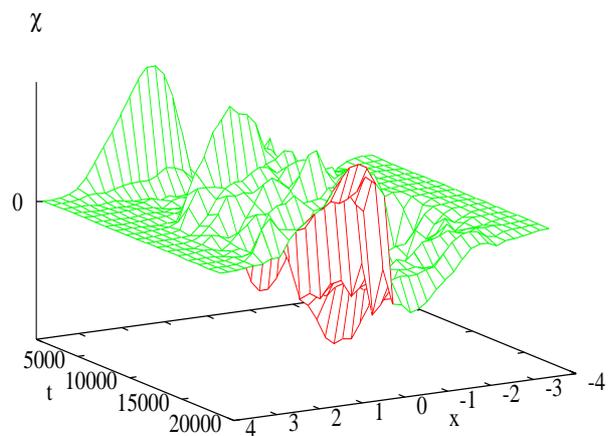
beziehungsweise

$$D_T(x) = \frac{\chi(x)}{p'(\xi)|_{\xi=x}}. \quad (76)$$

Bei einem *diffusiven Prozeß* streben D_n und D_T gegen einen zeitunabhängigen Diffusionskoeffizienten $\lim_{t \rightarrow \infty} D_n$, der dann die Stärke des Transports bestimmt. Das ist in Abbildung 26 auf Seite 59 zu sehen. Hier wurde, um die Diffusion zu einem bestimmten Zeitpunkt in jeweils einer einzigen Größe zusammenzufassen, wie in Abschnitt 4.4 der Strom über die Grenzlinie $x = 1$ hinweg ausgewertet, wobei der Druckgradient über das Intervall $x \in [0; 3]$ gemittelt wurde. Dabei treten die üblichen Probleme durch die Ungenauigkeiten der numerischen Ableitungen in t und in x auf, so daß die Ergebnisse starke Schwankungen aufweisen. Da der Dichtetransport entgegen dem Druckgradienten stattfindet, ist D_n negativ, geht nach der Relaxationsphase aber schnell gegen 0. Der Diffusionskoeffizient D_T strebt gegen einen zeitlich konstanten Wert.



(a) Teilchenstrom



(b) Wärmestrom

Abbildung 25: Zeitlicher Verlauf der Dichte- und Wärmestromprofile (Lauf B), jeweils über 1 000 Zeitschritte gemittelt.

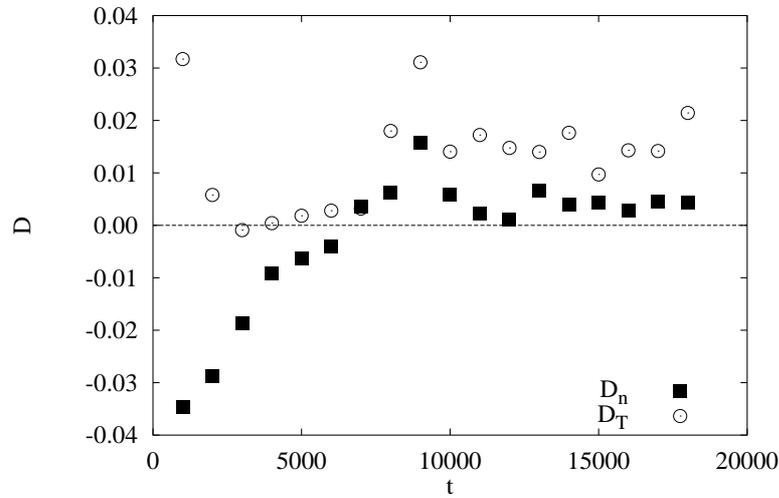


Abbildung 26: Zeitliche Entwicklung der mittleren Diffusionskoeffizienten für n_i und T_i (Lauf B), jeweils über 1 000 Zeitschritte gemittelt

4.5.2 Fluktuationen und Spektren

Weitergehenden Aufschluß über den Charakter des Transports verspricht eine Fourieranalyse der Fluktuationen. Dabei ist insbesondere wieder das Signal der „Plasmasonde“ interessant, also das Potential an einem festen Punkt (x_0, y_0) . Die Spektren der Amplitude (62) haben dagegen durch die Mittelung über y bereits einen Teil ihres Informationsgehalts verloren. In Abbildung 27 auf der nächsten Seite sind die Transformatierten der Kurven aus Abbildung 24 auf Seite 56 dargestellt, also das an der Sonde gemessene Potential nach der anfänglichen Relaxationsphase. Deutlich ist die Spitze der Driftwelle und ihrer Harmonischen zu erkennen. Beim Vergleich des Diagramms muß beachtet werden, daß manche Autoren das *power spectrum* einer Meßgröße verwenden, hier aber die Beträge der Fourierkoeffizienten selbst aufgetragen sind. Dieser Unterschied macht in der logarithmischen Darstellung einen Faktor 2 im Anstieg aus. Die Transformation wurde mit den Routinen aus dem `fftpack` von Swaztrauber [33] durchgeführt.

Das Spektrum der getriebenen Simulationen zeigt tatsächlich interessante Abweichungen gegenüber dem der ungetriebenen. Bei niedrigen Frequenzen ist der Verlauf deutlich flacher. In beiden Situationen tritt dann – bei $f \approx 0,02$ – ein Knick auf, und die Kurve fällt darüber stärker ab. Lineare Regression in dem doppeltlogarithmischen Auftrag zeigt, daß sich im ungetriebenen Fall

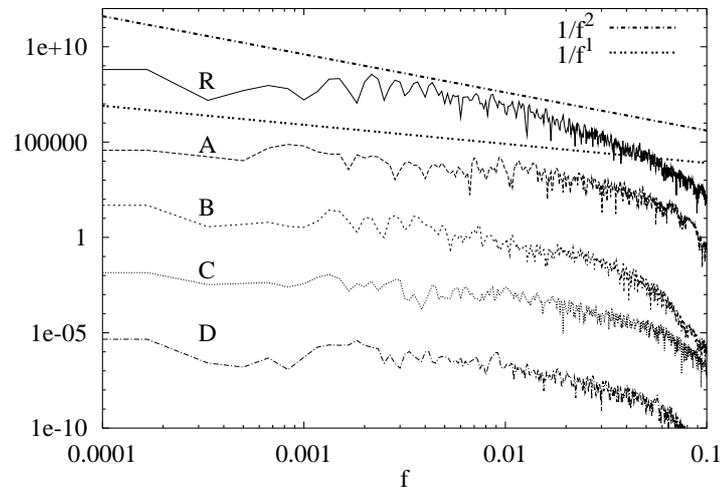


Abbildung 27: *Fourierspektren der Kurven in Abb. 24 (jeweils um 10^2 versetzt)*

ein Bereich etwa proportional zu $1/f^2$, im getriebenen zu $1/f$ ausgebildet. Diese beiden Potenzgesetze sind zum Vergleich in Abbildung 27 eingezeichnet. Einen solchen $1/f$ -Abfall zeigen alle getriebenen Simulationen bis auf den Lauf B, denn bei diesem ist η_i relativ klein, so daß die Transportphase erst bei $t \approx 8\,000$ beginnt und die Zeitreihe dadurch dem Fall R ähnelt.

Spektrern, die proportional zu $1/f^\alpha$ abfallen, werden als $1/f$ - oder *rosa Rauschen* bezeichnet. Dabei muß $\alpha > 0$, aber nicht notwendig $\alpha = 1$ sein. Diese beiden Merkmale, nämlich einerseits das Auftreten von rosa Rauschen, andererseits das Zerfallen des Spektrums in mehrere Bereiche, die unterschiedlichen Potenzgesetzen gehorchen, werden oft in Zusammenhang mit sogenannter *kritischer Selbstorganisation* beobachtet. Dabei handelt es sich um einen Zustand, der zuerst bei ganz anderen Systemen, nämlich bei Modellen granularer Medien, beobachtet wurde, seitdem aber auch in anderen Zusammenhängen, unter anderem bei Plasmasimulationen, diskutiert wird. Der kritischselbstorganisierte Zustand wird in Anhang B ausführlich dargestellt.

Eine weitergehende Analyse der gewonnenen Daten läßt allerdings Zweifel am Auftreten räumlich und zeitlich ausgedehnter Prozesse, sogenannter *Lawinen*, und damit am Vorliegen kritischer Selbstorganisation aufkommen. Die Diagnose steht hier leider vor dem Problem, daß, im Gegensatz zu Sandhaufenmodellen, in denen jede einzelne Zelle zu einem gegebenen Zeitpunkt entweder aktiv oder inaktiv ist und in denen so die Größe von Lawinen sinnvoll definiert und gemessen werden kann, die Bestimmung von Transporter-

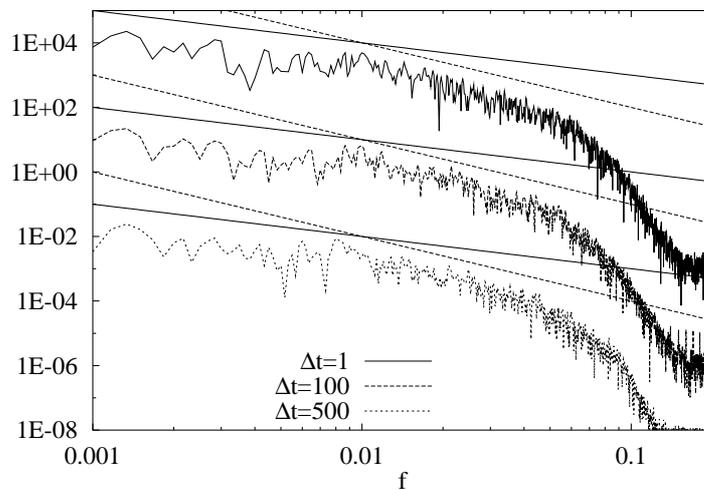
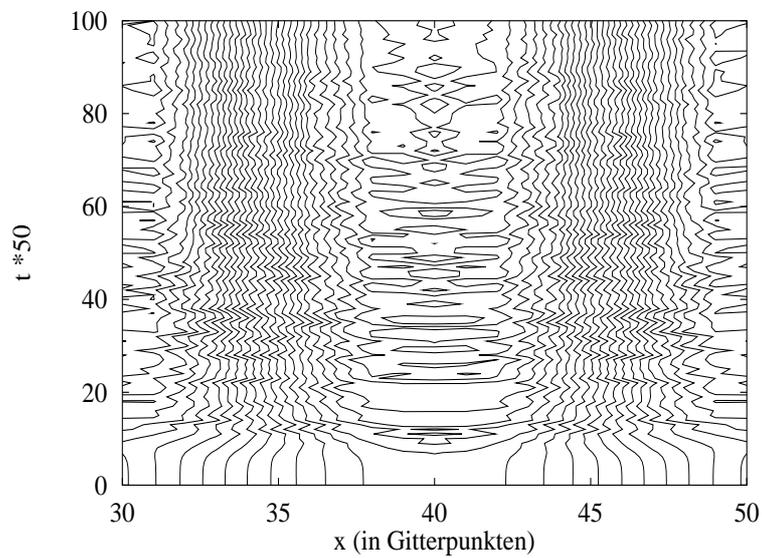


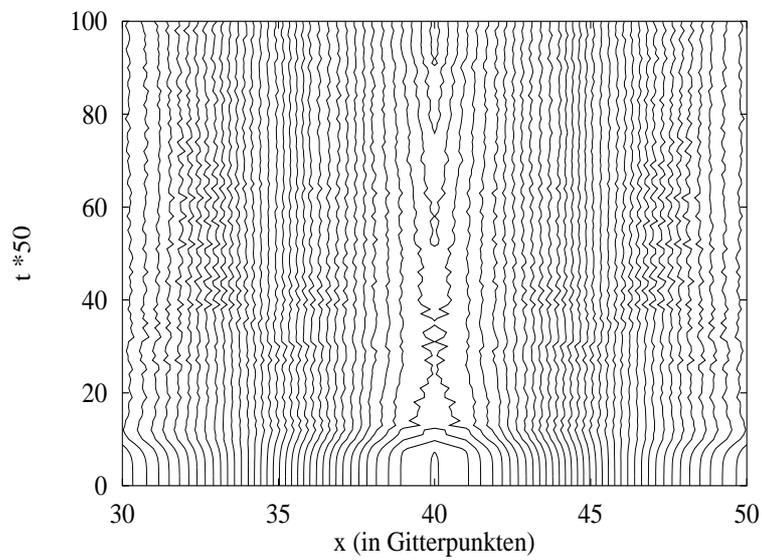
Abbildung 28: Spektren der getriebenen Simulation D bei unterschiedlichen Anregungsfrequenzen. Zum Vergleich sind die Funktionen f^{-1} und f^{-2} eingezeichnet.

eignissen und ihrer räumlichen und zeitlichen Ausdehnung schwierig ist. Am einfachsten ist noch das visuelle Erkennen in einer Darstellung wie Abbildung 29. Dort ist in horizontaler Richtung die Radialkoordinate, in vertikaler Richtung die Zeit aufgetragen. Gezeigt sind jeweils die Konturen gleicher Dichte bzw. Temperatur. Es sind deutlich Versetzungen der Linien zu sehen, die einzelne Transportereignisse kennzeichnen. Bei genauerer Untersuchung bewegen sich diese Stellen ungefähr mit der für das System charakteristischen Geschwindigkeit, nämlich der senkrechten Komponente der thermischen bzw. Schallgeschwindigkeit. Der Transport verläuft aber offensichtlich nur entlang einer eindimensionalen Linie; selbst in Ausschnittsvergrößerungen haben die Ereignisse zu einem bestimmten Zeitpunkt keine räumliche Ausdehnung.

Ein anderes Indiz für eine räumliche Ausdehnung ist die Wechselwirkung der Lawinen untereinander. Wird dem System zwischen zwei Transportereignissen genug Zeit zum Relaxieren gegeben, so geht jede Lawine einzeln ab; wenn aber im Gegenteil ein ständiger Fluß aufrechterhalten wird, überlappen sich die aktiven Bereiche. Dieser Unterschied muß sich im Spektrum dadurch bemerkbar machen, daß der $1/f$ -Bereich seine Größe ändert. Wie jedoch Abbildung 28 zeigt, hat eine Variation der Treiberfrequenz keine Auswirkungen auf das Spektrum: Die drei Kurven weisen kaum Unterschiede auf, insbeson-



(a) Dichte



(b) Temperatur

Abbildung 29: Konturlinien der zeitlichen Entwicklung der poloidal gemittelten Profile für Lauf A

dere verschieben sich die Grenzen zwischen den einzelnen Bereichen unterschiedlicher Abfallstärke nicht.

Demnach findet in dem System intermittenter Transport statt, es gibt aber keinen Hinweis auf einen SOC-Zustand. Weder zeigt sich in den Spektren ein Einfluß der Treiberfrequenz auf das Transportverhalten, noch sind in den Raumzeitdiagrammen flächenhafte Strukturen zu sehen. Das bedeutet, daß es in diesem Modell nicht so ist, daß Elementarzellen lokal wechselwirken und dadurch komplexe Gebilde mit einer räumlichen Ausdehnung entstehen. Stattdessen sorgt bereits die Driftwelle für das Ausbilden einer ausgedehnten Struktur mit großer Korrelationslänge. Der Transport wird durch diese globale Mode verursacht und nicht durch einen Elementartransport von Zelle zu Zelle. Die Abwesenheit von kritischer Selbstorganisation und die Bildung ausgedehnter Wellenzüge unterstreichen die Notwendigkeit, die η_i -Mode in ihrer globalen Form zu betrachten. Dadurch wird nochmals der zusätzliche Aufwand, den die nichtlokale Rechnung in Kapitel 3 bedeutet, gerechtfertigt.

5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die η_i -Instabilität in einem driftkinetischen Modell in *slab*-Geometrie analytisch und numerisch behandelt, um verschiedene Aspekte dieser für Fusionsapparaturen relevanten Mode zu untersuchen. Allerdings sind wegen der dabei notwendigen Vereinfachungen die erhaltenen Resultate nicht ohne weiteres auf ein komplexes Plasma-Experiment übertragbar. Qualitativ relevante Aussagen können dennoch gemacht werden.

Es wurde ein numerisches Verfahren entwickelt, das die Lagrange-Struktur der Bewegungsgleichung ausnutzt und erlaubt, die partielle nichtlineare Differentialgleichung mit relativ geringen Rechnerkapazitäten zu integrieren. Die Plasmasimulation zeigt die Entstehung einer Ionen-Driftwelle, die in poloidaler Richtung mit der diamagnetischen Geschwindigkeit um das Plasma herumläuft. Bei „ungünstigen“ Konfigurationen wächst die Mode exponentiell an, wobei Energie aus der parallelen thermischen Bewegung der Ionen entnommen wird, bis schließlich nichtlineare Effekte zu Sättigung führen.

Für kleine Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht wird der Einsatz und die Stärke der Instabilität durch die linearisierten Gleichungen gut beschrieben. Dabei zeigt sich eine hervorragende Übereinstimmung der analytischen Voraussagen mit den numerischen Rechnungen. Die Instabilität tritt in diesem Modell bei einem kritischen Wert von $\eta_{ic} \approx 3,65$ ein. Sowohl die Anwachsrate als auch die Sättigungsamplitude nehmen mit der dritten Wurzel aus $(\eta_i - \eta_{ic})$ zu. Der Dichtetransport ist proportional zum Quadrat der Fluktuationen.

Besondere Aufmerksamkeit wurde dem Unterschied zwischen einer lokalen und einer radial globalen Behandlung der Mode gewidmet. Die lineare Rechnung zeigt einen deutlichen Unterschied zwischen den beiden Ansätzen. Durch die Berücksichtigung der nichtlokalen Struktur der Profile und der radialen Begrenzung wird das Anwachsen der η_i -Instabilität erheblich gebremst. Die auf diese Weise erhaltenen Anwachsrate werden ebenso wie die berechnete radiale Struktur von der Numerik bestätigt, im Gegensatz zu den Vorhersagen der lokalen Approximation. Eine nichtlokale Rechnung ist wegen des Verzichts auf eine Fouriertransformation in radialer Richtung und der dadurch notwendigen Lösung der Differentialgleichung deutlich aufwendiger als die lokale Näherung, muß aber offensichtlich für eine korrekte Behandlung der η_i -Instabilität durchgeführt werden.

Die Berücksichtigung eines verscherten Magnetfeldes hat dagegen in diesem Modell keinen qualitativen Einfluß auf die Mode. Zwar hängt die An-

wachsrates von dem Winkel zwischen den Feldlinien und der Ausbreitungsrichtung ab, jedoch wirkt sich die durch Verscherung eingeführte zusätzliche Nichtlokalität nicht weiter dämpfend auf die Instabilität aus. Zum einen liegt das daran, daß die Rechnungen bereits nichtlokal durchgeführt worden sind, zum anderen macht sich hier die übermäßige Vereinfachung der Geometrie bemerkbar: zur korrekten Behandlung müßte die z -Koordinate und der Einfluß der Verscherung auf die toroidalen Moden eingeführt werden.

Obwohl im vorliegenden Modell ein stoßfreies Plasma angenommen wird und die Vlasov-Gleichung keine Stöße zwischen Teilchen vorsieht, zeigt die numerische Simulation im nichtlinearen Bereich einen Teilchen- und Energietransport. Anhand der Änderungen in den Dichte- und Temperaturprofilen wurde dieser anomale Transport bestimmt. Das System relaxiert in einen Zustand, in dem η_i in der Nähe des lokal kritischen Wertes liegt (*near marginal stability*). Dabei bleibt der Ionendruck p_i annähernd konstant; die Änderung geschieht einerseits durch einen Dichtetransport ins Zentrum und ein damit verbundenes Aufsteilen der n_i -Kurve, andererseits durch eine Diffusion von Wärme in die äußeren Gebiete. Diese beiden Prozesse kompensieren sich in Hinblick auf p_i , sorgen aber für eine Erniedrigung von η_i . Es zeigt sich ein deutlicher Unterschied zwischen kinetischer und MHD-Theorie: Wie die numerische Lösung der driftkinetischen Gleichung ergibt, sind die relaxierten Profile stabil, obwohl sie in einer Flüssigkeitsrechnung noch deutlich superkritisch wären.

Der Transport von Wärme und Teilchen verläuft nicht gleichmäßig, sondern zeigt intermittenten Charakter. Das ist besonders gut zu sehen, wenn das System in stationärem Zustand durch einen festen Fluß getrieben wird. Ein solches Verhalten wird oft mit kritischer Selbstorganisation in Zusammenhang gebracht; auch die Spektren der zeitlichen Fluktuationen scheinen darauf hinzudeuten. Eine genauere Untersuchung zeigt jedoch keine eindeutigen Hinweise auf zeitlich und räumlich ausgedehnte Transportereignisse, sogenannte Lawinen. Durch die Struktur der linearen Mode, deren Ausdehnung in der Größenordnung der Systemlängen und eben nicht einer mikroskopischen Skala liegt, sind die Korrelationslängen bereits groß. So kann hier zwar von einer Selbstorganisation gesprochen werden, die aber anders zu verstehen ist als der SOC-Zustand in zellulären Automaten.

Anhang

A Numerische Methoden

A.1 Integration der kinetischen Gleichung

Die Lösung der driftkinetischen Gleichung erfolgt durch die *Methode der Charakteristiken* oder *Semi-Lagrange-Methode* analog zu Ghizzo, Feix, Bertrand et. al. [34, 35]. Es wird dabei ausgenutzt, daß sich die Bewegungsgleichung (27) in der Form

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial t} + \underbrace{(-\partial_y \phi) \sin \theta}_{\dot{x}} \frac{\partial f}{\partial x} + \underbrace{(v_{\parallel} \cos \theta + \partial_x \phi \sin \theta)}_{\dot{y}} \frac{\partial f}{\partial y} + \underbrace{(-\partial_y \phi) \cos \theta}_{\dot{v}_{\parallel}} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \dot{v}_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} \\ &= \frac{df}{dt}. \end{aligned} \tag{77}$$

als vollständige Zeitableitung schreiben läßt. So kann die Verteilungsfunktion f als Dichtefunktion einer inkompressiblen Flüssigkeit im Phasenraum angesehen werden, deren Elemente sich auf Trajektorien $(x(t), y(t), v_{\parallel}(t))$, den *Charakteristiken* der Differentialgleichung, bewegen. Die Geschwindigkeiten im Phasenraum $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{v}_{\parallel})$ werden dann formal über (77) eingeführt; es sind keine „wirklichen“ Geschwindigkeiten im physikalischen Sinn. Ein Punkt im Phasenraum bewegt sich während der Zeitspanne Δt um $(\Delta x, \Delta y, \Delta v_{\parallel})$. Sind die Geschwindigkeiten $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{v}_{\parallel})$ jeweils von der Größenordnung 1, so gilt

$$\Delta x := \dot{x} \Delta t = \mathcal{O}(\Delta t),$$

entsprechend auch für Δy und Δv_{\parallel} . Damit läßt sich für kleine Δt die Funktion f durch

$$\begin{aligned} &f(t, x - \Delta x, y - \Delta y, v_{\parallel} - \Delta v_{\parallel}) \\ &= f(t, x, y, v_{\parallel}) - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} - \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} - \Delta v_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \end{aligned} \tag{78}$$

in eine Taylorreihe entwickeln, wobei die partiellen Ableitungen jeweils an der Stelle (t, x, y, v_{\parallel}) genommen werden. Der Umstand, daß f entlang einer Trajektorie konstant bleibt, bedeutet, daß die Entwicklung in der Zeit durch

eine Verschiebung entlang der Charakteristiken ersetzt werden kann, wie in Abbildung 30 schematisch dargestellt wird. Durch Umformen von (77) entsteht nämlich

$$\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \Delta v_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} = -\Delta t \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (79)$$

und durch Kombination mit (78) ergibt sich bis zur ersten Ordnung

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t, x, y, v_{\parallel}) &= f(t, x, y, v_{\parallel}) + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &\stackrel{(79)}{=} f(t, x, y, v_{\parallel}) - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} - \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} - \Delta v_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \end{aligned} \quad (80)$$

also

$$f(t + \Delta t, x, y, v_{\parallel}) = f(t, x - \Delta x, y - \Delta y, v_{\parallel} - \Delta v_{\parallel}) + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (81)$$

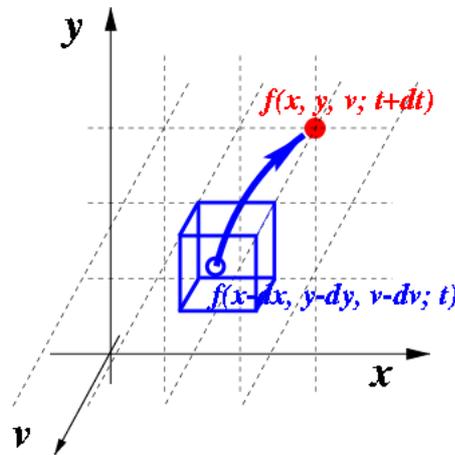


Abbildung 30: Verschiebung der Verteilungsfunktion entlang der Charakteristiken der Differentialgleichung

A.1.1 Transformation auf Invariante

Eine Verbesserung der Numerik wird von Manfredi *et al.* [35] vorgeschlagen. Dabei wird ausgenutzt, daß die Charakteristiken von (77) außer f eine weitere Konstante der Bewegung besitzen, mit deren Hilfe sich die Behandlung der

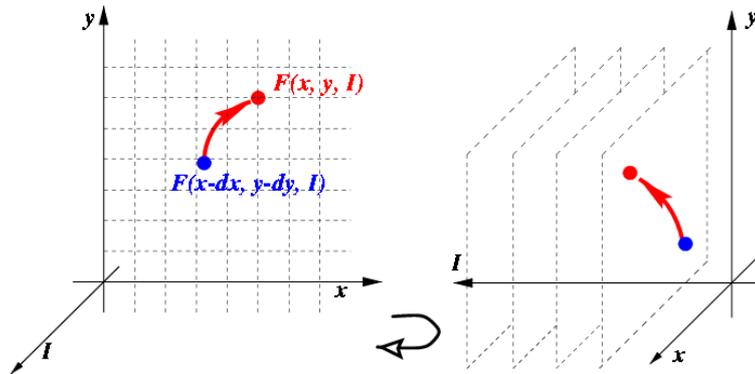


Abbildung 31: Verschiebung der Verteilungsfunktion im Raum x, y, I , wobei I eine Konstante der Bewegung ist. Das rechte Bild ist gegenüber dem linken um 90° in Pfeilrichtung gedreht.

Differentialgleichung vereinfachen lässt, nämlich den kanonischen Impuls in v_{\parallel} -Richtung,

$$I(v_{\parallel}, x, y) := v_{\parallel} - x \cot \theta. \quad (82)$$

Werden in die totale Zeitableitung $\dot{I} = \dot{v}_{\parallel} - \dot{x} \tan \theta$ die entsprechenden Ausdrücke aus (77) eingesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \underbrace{-\partial_y \phi \cos \theta}_{\dot{v}_{\parallel}} - \underbrace{(-\partial_x \phi) \sin \theta}_{\dot{x}} \tan \theta \\ &= 0, \end{aligned}$$

so daß I eine Invariante entlang einer Trajektorie ist. Durch die Transformation

$$\begin{aligned} f(x, y, v_{\parallel}) &=: F(x, y, I(v_{\parallel}, x, y)) =: F_I(x, y) \\ v_{\parallel} &= I + x \cot \theta \end{aligned}$$

entsteht nun statt (27) als Entwicklungsgleichung der Verteilungsfunktion:

$$0 = \frac{\partial F_I}{\partial t} - \partial_y \phi \sin \theta \frac{\partial F_I}{\partial x} + \left(I \cos \theta + x \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \partial_x \phi \sin \theta \right) \frac{\partial F_I}{\partial y} + \underbrace{\dot{I} \frac{\partial v_{\parallel}}{\partial I} F_I}_{=0}. \quad (83)$$

Da aber $\dot{I} = 0$ ist, wird (81) zu

$$F_I(t + \Delta t, x, y) = F_I(t, x - \Delta x, y - \Delta y) + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (84)$$

Das bedeutet, daß die Verschiebung – wie in Abbildung 31 verdeutlicht – nur innerhalb von „Scheiben“ mit konstantem I stattfindet. Dadurch werden einige Vorteile für die Numerik gewonnen:

- ▶ Eine grobe Diskretisierung im I -Raum geht zwar auf Kosten der Genauigkeit, da die Verteilungsfunktion nicht mehr ausreichend aufgelöst wird, sie kann aber – da keine Information in dieser Richtung transportiert wird – nicht zu numerischen Instabilitäten führen.
- ▶ Aus dem gleichen Grund ist es möglich, die Punkte in I mit beliebigen Abständen zu wählen und etwa den Bereich höherer Dichte um $v_{\parallel} = 0$ besser als den nur schwach besetzten „Schwanz“ der Maxwell-Verteilung aufzulösen. Durch diese Methode ist es möglich, mit einer sehr geringen Anzahl von „Scheiben“ auszukommen und dennoch zufriedenstellende Ergebnisse zu erzielen. In der Tat zeigen Simulationen mit unterschiedlich diskretisierten I -Räumen, daß etwa 25 Gitterpunkte ausreichen; eine feinere Diskretisierung ergibt keine abweichenden Aussagen.
- ▶ Der Algorithmus läßt sich parallelisieren, wobei zwischen den einzelnen Prozessen nur ein Mindestmaß an Kommunikation erforderlich ist, wie in Abbildung 32 auf der nächsten Seite schematisch dargestellt wird. Es muß in jedem Zeitschritt nur jeweils die Summe der Verteilungen in den einzelnen zugewiesenen „Scheiben“ gebildet und dem koordinierenden Prozeß mitgeteilt werden; dieser löst dann die Poissongleichung und übermittelt das daraus resultierende Potential. Es werden dabei keine Parallelrechner mit *shared memory* benötigt. Andererseits entstehen neue Kosten durch die Verwaltung der Teilfelder und die Kommunikation zwischen den Prozessen, aber immerhin ließ sich bei Verwendung von vier durch ein LAN verbundenen Workstations die Rechenzeit etwa um den Faktor 3 reduzieren.

Diesen Gewinnen stehen leider auch Nachteile gegenüber:

- ▶ Die Transformation (82) erzeugt eine Schiefelage des Rechengitters im $x-v_{\parallel}$ -Raum. Um dadurch erzeugte Randeffekte zu neutralisieren, muß einerseits die Verteilung in I symmetrisch sein, andererseits auch ein

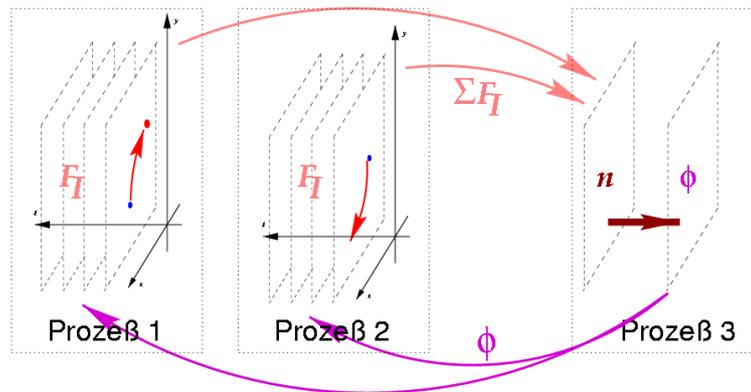


Abbildung 32: Berechnung und Übermittlung der Felder im parallelisierten Algorithmus

großer Teil des „Maxwell-Schwanzes“ einbezogen werden. Dadurch wird die Zahl der Punkte in I wieder erhöht.

- Die Parallelisierung ist nur dann effizient, wenn wenig Daten zwischen den Prozessen ausgetauscht werden müssen. Jede zusätzlich eingeführte Diagnose ist nicht nur umständlich im Code zu implementieren, sondern drückt auch durch das notwendige Sammeln und Weitergeben von Informationen die Rechenleistung.

A.2 Lösung der Poissongleichung

Die Lösung der Poissongleichung (23) ist ein in der numerischen Mathematik häufig auftretendes Problem, zu dem es ausgereifte und leistungsfähige Standardmethoden gibt. Die diskretisierte Form der Differentialgleichung lautet

$$\begin{aligned}
 -\frac{(n_1)_k^j}{(n_0)_k} &= \frac{\phi_k^{j-1} - 2\phi_k^j + \phi_k^{j+1}}{\Delta y^2} + \frac{\phi_{k-1}^j - 2\phi_k^j + \phi_{k+1}^j}{\Delta x^2} - \frac{1}{(T_\epsilon)_k} \phi_k^j \\
 \Rightarrow -\Delta y^2 \frac{(n_1)_k^j}{(n_0)_k} &= \phi_k^{j-1} - 2\phi_k^j + \phi_k^{j+1} \\
 &+ \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \phi_{k-1}^j + \left(\frac{-2\Delta y^2}{\Delta x^2} - \frac{\Delta y^2}{(T_\epsilon)_k} \right) \phi_k^j + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \phi_{k+1}^j. \quad (85)
 \end{aligned}$$

In y -Richtung läßt sich dies sofort durch einen Exponentialansatz lösen, in x -Richtung verbieten jedoch sowohl die Koeffizienten als auch die Dirichlet-Randbedingungen eine Fourier-Transformation. Das Gleichungssystem kann

aber mit dem Verfahren der *zyklischen Reduktion* gelöst werden, das in *Numerical Recipes* [36, Kapitel 17.4] beschrieben wird. In dieser Arbeit wird die Routine `genbun` aus dem *Fishpack*-Paket [37] verwendet.

A.3 Interpolation und Operator Splitting

Zur Berechnung der Funktion f auf dem Rechengitter zum jeweils nächsten Zeitpunkt $t + \Delta t$ an einer Position (x, y) im Phasenraum wird nach (84) nur der Wert an der um $(\Delta x, \Delta y)$ rückversetzten Stelle benötigt, wobei die Koordinate I nicht berücksichtigt werden muß. Da dieser Verschiebungsvektor aber im allgemeinen kein Vielfaches der Gitterabstände ist, muß $f(t, x - \Delta x, y - \Delta y)$ durch Interpolation aus den Werten von f auf den Gitterplätzen selbst gewonnen werden. Es stellt sich heraus, daß die Wahl einer geeigneten Methode dafür von großer Bedeutung ist. Eine lineare Interpolation beispielsweise erzeugt eine viel zu hohe numerische Dissipation, die Verteilungsfunktion wird in unzulässiger Weise geglättet. Deshalb werden hier kubische *Spline*-Funktionen verwendet. Es entsteht dabei allerdings das Problem, daß eine solche Interpolation in mehr als einer Dimension nicht einfach möglich ist. Als Ausweg bietet sich das *Operator-Splitting* an; die Verschiebung (84) wird dabei in zwei Schritten, für jede Raumrichtung getrennt, ausgeführt. Werden die Operationen des Verschiebens in x - bzw. y -Richtung symbolisch mit \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} und die Lösung der Poissongleichung mit \mathfrak{P} bezeichnet, so läßt sich jeder Zeitschritt als

$$F(t + \Delta t) = \mathfrak{X} \circ \mathfrak{Y} \circ \mathfrak{P} F(t). \quad (86)$$

darstellen. Auch dieses Verfahren ist in erster Ordnung in Δt genau:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{Y}F_I)(t, x, y) &:= F_I(t, x, y - \Delta y) \\ &= F_I(t, x, y) - \Delta y \frac{\partial F_I}{\partial y} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ (\mathfrak{Y}F_I)(t, x - \Delta x, y) &= \tilde{F}_I(t, x, y) - \Delta x \frac{\partial (\mathfrak{Y}F_I)}{\partial x} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &= F_I(t, x, y) - \Delta y \frac{\partial F_I}{\partial y} - \Delta x \frac{\partial F_I}{\partial x} - \underbrace{\Delta x \Delta y \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial y}}_{\mathcal{O}(\Delta t^2)} \\ &\stackrel{(79)}{=} F_I(t + \Delta t, x, y) + \mathcal{O}(\Delta t^2). \end{aligned}$$

Ein zu grober Zeitschritt Δt führt dadurch naturgemäß zu Ungenauigkeiten. Die Methode der Charakteristiken hat aber die Eigenschaft, daß dies

kein „Explodieren“ des Systems auslöst. Das liegt daran, daß solche numerischen Instabilitäten bei impliziten oder expliziten Integratoren dann entstehen, wenn bei Verletzung des Courant-Friedrichs-Lewy-Kriteriums [36, S. 838] Information aus der Vergangenheit benutzt wird, die durch die Differentialgleichung nicht schnell genug transportiert wird, so daß sie noch gar nicht an dem zu berechnenden Punkt angelangt sein kann. Ein solcher Effekt ist hier aber ausgeschlossen, da die Ausbreitung der Information genau gemäß der Charakteristiken, an denen entlang auch integriert wird, erfolgt.

A.4 Nullstellensuche in der komplexen Ebene

Die Suche nach Wurzeln einer komplexen Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ist wesentlich verschieden von derselben Aufgabe im reellen Fall. Es gibt nämlich dann keinen Algorithmus, der eine Nullstelle in einem vorgegebenen Gebiet sicher findet. Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kann dagegen immer der Zwischenwertsatz (ZWS, vgl. [38, Abschnitt 3.1.4.1.6]) herangezogen werden: Wenn zwei Punkte a und b mit $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ gegeben sind und f stetig ist, liegt mindestens eine Nullstelle im Intervall $A = [a; b]$ vor. Indem A rekursiv immer weiter halbiert wird, muß diese Nullstelle notwendigerweise innerhalb einer vorgegebenen Genauigkeit δ gefunden werden. Wenn also gesichert ist, daß A höchstens eine Wurzel enthält, ist diese Bisektionsmethode absolut sicher und benötigt $\mathcal{O}(\log_2 1/\delta)$ Funktionsaufrufe. Es gibt auch andere, schnellere Methoden, wie etwa das im nächsten Abschnitt A.4.1 beschriebene Newtonverfahren, aber bei diesen ist der Erfolg nicht garantiert.

Leider funktioniert dies nicht bei komplexen Funktionen, da es in \mathbb{C} kein Äquivalent zum ZWS gibt. Daher werden hier einige numerische Methoden vorgestellt, die für die Lösung der Dispersionsrelation in Kapitel 3 verwendet wurden.

A.4.1 Newton-Verfahren

Das *Newton-Verfahren* ist eine Approximationsmethode, bei dem ein anfänglicher Versuchswert z_0 immer weiter verbessert wird, bis eine zufriedenstellende Genauigkeit erreicht ist. Ein Iterationsschritt $z_i \rightarrow z_{i+1}$ sieht dabei wie folgt aus:

1. Bestimmung der Ableitung $f'(z_i)$. Diese kann entweder in geschlossener Form angegeben werden, falls das möglich ist, oder numerisch mittels

$$f'(z_i) = \frac{1}{h}(f(z_i + h) - f(z_i)) \quad (87)$$

bestimmt werden. Hier ist h ein vorgegebener kleiner Wert.

2. Bestimmung des nächsten Punktes

$$z_{i+1} = z_i - \frac{f(z_i)}{f'(z_i)}. \quad (88)$$

3. Abbruch mit Erfolg, falls $|f(z_i)| < \epsilon$, oder mit Fehler, falls $i > i_{max}$.

Dieses Verfahren funktioniert ebenso für reelle wie für komplexe Funktionen. Dank der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (siehe beispielsweise Abschnitt 3.4.5.2 in [38]) ist es sogar egal, ob h reell, imaginär oder gemischt komplex gewählt wird. Darüberhinaus ist die Konvergenz von quadratischer Ordnung und daher sehr schnell. Leider hängt der Erfolg sehr von der Wahl des Anfangswertes ab. Bei einer gegebenen Funktion zerfällt die komplexe Ebene in Attraktionsbassins für das Newtonverfahren. Liegt der Startpunkt außerhalb des Konvergenzbereiches, so streben die z_i gegen einen anderen Attraktor, der auch periodisch oder der Punkt ∞ sein kann. Im komplexen Fall ist dies durch die zwei Freiheitsgrade wesentlich schlimmer als im reellen, da die Attraktionsbassins sehr „dünn“ sein können. Bei den Funktionen in Abschnitt 3.3 zeigt sich, daß das Newtonverfahren im allgemeinen nicht die gesuchte Nullstelle findet.

A.4.2 Komplexe Bisektion

Die *komplexe Bisektion* nutzt das „Nullstellen-Zählintegral“ meromorpher Funktionen aus. Es ist besonders vorteilhaft, wenn f als geschlossener Ausdruck bekannt ist. Eine nähere Beschreibung findet sich in [39], [40] oder [41]. Es hat sich aber gezeigt, daß ihre Anwendung für das in Kapitel 3 vorliegende Problem nicht sehr effizient ist. Auf eine eingehende Diskussion wird deshalb hier verzichtet.

A.4.3 Downhill Walk

Beim *downhill walk* handelt es sich um einen Spezialfall des *simulierten Aushärtens* (*simulated annealing*), das in [36] beschrieben wird. Diese Methode wird verwendet, um globale Extrema einer Funktion $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ zu finden. Sie erweist sich besonders in hohen Dimensionen $N \gg 1$ als äußerst wirkungsvoll. Der Begriff des „Aushärtens“ ist der Metallverarbeitung entlehnt: Ein Werkstück aus einer Metallegierung kann durch Glühen und Abkühlen dazu gebracht werden, daß seine Kristallstruktur sich so verändert, daß die innere Energie ein Minimum annimmt. Der Stahl erhält so besondere mechanische und magnetische Härte (siehe etwa bei Rohr und Wiele [42]).

Das simulierte Aushärten startet wie das Newtonverfahren mit einer Anfangskonfiguration, die iterativ verbessert wird:

1. Wahl einer kleinen, *zufälligen* Konfigurationsänderung Δ (mit $\Delta \in \mathbb{R}^N$).

2. Bestimmung des nächsten Punktes durch die Regel

$$\begin{aligned}
 W &:= g(z_i + \Delta) - g(z_i) \\
 z_{i+1} &= \begin{cases} z_i + \Delta & \text{für } W < 0 \\ & \text{oder } W \geq 0 \text{ und } e^{-W/T} > \text{rand}([0; 1]) \\ z_i & \text{sonst} \end{cases} \quad (89)
 \end{aligned}$$

3. Erniedrigung des Parameters T .

Dabei wird $g(z_i)$ als die Energie einer Konfiguration z_i betrachtet, und W spielt die Rolle einer Energieänderung. Der neue Punkt $z_i + \Delta$ wird also akzeptiert, wenn die Differenz W negativ ist, mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit aber auch bei positiven Werten von W , um damit ein Steckenbleiben in lokalen Minima zu vermeiden. Der Parameter T , der den Part der virtuellen Temperatur übernimmt, wird im Verlauf des Verfahrens allmählich verringert, so daß es immer schwieriger wird, zu höheren Werten von g zurückzukehren. Dies wird fortgesetzt, bis schließlich ein Minimum gefunden wird oder aber T unter eine vorgegebene Schranke fällt und das System damit „einfriert“.

Diese Prozedur kann durch die Identifikationen $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ und $g(z) \equiv |f(z)|^2$ auch auf das Problem der Nullstellensuche von f angewandt werden. Dabei zeigt sich, daß sie auch für diesen Spezialfall $N = 2$ gut funktioniert. Es muß noch entschieden werden, wie die „Konfigurationsänderungen“ Δ zu wählen sind. Der natürlichste Weg ist, kleine Schritte in der Ebene mit vorgegebener Weite und in zufälliger Richtung zu tun. Aus Gründen der Skaleninvarianz muß dann die Schrittweite $|\Delta|$ proportional zu T abnehmen. Auf diese Art wird das Verfahren zu einem *random walk* in einer hügeligen Landschaft mit einer wachsenden Tendenz talwärts, hin zu kleineren Werten von $|f|^2$. In diesem Bild läßt sich $1/T$ als eine stetig zunehmende Müdigkeit vorstellen.

Methode	Funktionsaufrufe		CPU-Zeit	
	f_1	f_2	f_1	f_2
Newton	4	—	0,0 s	—
Komplexe Bisektion	223	3493	0,3 s	13,2 s
„downhill walk“	97	1738	0,2 s	8,3 s
„downhill skiing“	14	160	0,1 s	1,6 s

Tabelle 8: Vergleich der verschiedenen Algorithmen zur Nullstellensuche für zwei ausgewählte Testfunktionen

Eine Verbesserung kann dadurch erreicht werden, daß in jeder n . Iteration (mit n in der Größenordnung von 5 bis 10) Schritt 1 von oben ersetzt wird durch

1a. Wahl der Änderung

$$\Delta = -\frac{f(z_i)}{f'(z_i)}. \quad (90)$$

Die Ableitung $f'(z_0)$ wird dabei wie in (87) berechnet. Danach wird das Kriterium (89) entsprechend auf den Punkt $z_i + \Delta$ angewandt. Diese eingestreuten Newton-Schritte sorgen für eine rasche Konvergenz, während die zufälligen Schritte die Attraktionsbassins finden und den Algorithmus dadurch robuster machen. Dies ist weniger ein *random walk* zu Fuß als ein Ski-Langlauf: Von Zeit zu Zeit, und wenn es das Terrain erlaubt, kann eine schnelle Schußfahrt ins Tal getan werden.

Tabelle 8 vergleicht die vorgestellten Methoden anhand zweier verschiedener komplexer Funktionen. Die erste ist eine einfache lineare Testfunktion, die zweite ein reales Beispiel aus Kapitel 3, bei dem das Newton-Verfahren leider versagt. Die CPU-Zeit wurde auf einem Intel 80586-Prozessor bei 100 MHz gemessen; sie ist dabei nur als grober Approximativwert zu verstehen.

B Vergleich mit SOC-Modellen

In den letzten Jahren gewinnt der Begriff der kritischen Selbstorganisation (*self organized criticality* oder *SOC*) unter anderem in der Plasmaphysik an Bedeutung. Ursprünglich wurde er von Bak, Tang und Wiesenfeld (BTW) [43–46] bei Untersuchungen an „numerischen Sandhaufen“ geprägt. In diesem Abschnitt wird ein BTW-artiges Modell vorgestellt, an dem sich das Auftreten von kritischer Selbstorganisation sowie die dabei entstehenden Spektren erklären lassen. Anschließend soll der Zusammenhang mit Plasmasimulationen diskutiert werden.

B.1 Sandhaufensimulationen

Granulare Medien, wie etwa Sand, Kies oder Getreide, verhalten sich in mancher Hinsicht anders als „klassische“ Festkörper oder Flüssigkeiten. Sie formen beispielsweise Haufen mit festen, materialabhängigen Böschungswinkeln; sie können fließen, tun dies aber im Gegensatz zu einer Flüssigkeit nur an der Oberfläche; und sie zeigen Instabilitäten in Form von „Lawinen“, also plötzlichen, massiven Transportprozessen, die lange Phasen scheinbarer Ruhe durchbrechen. Mit Hilfe relativ einfacher Computermodelle können einige dieser typischen Verhaltensweisen modelliert werden.

Bei dem ursprünglichen Modell von Bak, Tang und Wiesenfeld handelt es sich um einen eindimensionalen zellulären Automaten, das heißt eine Kette von Zellen $i = 1 \dots N$, die jeweils eine gewisse Menge „Sand“ enthalten und denen damit eine Höhe h_i zugeordnet ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll die Folge der h_i monoton fallen. Die Zeitentwicklung erfolgt in diskreten Schritten nach folgenden Regeln:

1. markiere alle Zellen i mit $(h_i - h_{i+1}) > \nabla_{krit}$ als instabil
2. „kippe“ die instabilen Zellen: $h_i \rightarrow (h_i - J)$, $h_{i+1} \rightarrow (h_{i+1} + J)$.

Der kritische Gradient ∇_{krit} und die „Korngröße“ J bestimmen dann das Verhalten des Systems: während ∇_{krit} über stabile und instabile Zustände entscheidet, gibt J den Elementartransport und damit auch den maximal möglichen Transport pro Zeiteinheit an. Ist das Profil des Sandhaufens zu steil, so daß das System superkritisch ist, dann relaxiert er in einen Zustand mit $(h_i - h_{i+1}) \leq \nabla_{krit}$ für alle i . Dabei spielt das Verhältnis von J zu ∇_{krit} eine

Rolle: Für $\nabla_{krit} > J$ kann der Ausgleich fein genug erfolgen, so daß die Steigung nahe bei dem kritischen Gradienten liegt und das System bei marginaler Stabilität zur Ruhe kommt. Für $\nabla_{krit} \leq J$ jedoch ist der mittlere Gradient kleiner als ∇_{krit} , es wird ein subkritischer Zustand erreicht.

Zusätzlich erfolgt ein „Regen“ von Sandkörnern auf den Haufen:

3. Befindet sich das System in einem stabilen Zustand, wird ein Korn der Größe Δ_R auf die Spitze des Haufens gelegt: $h_1 \rightarrow h_1 + \Delta_R$.

Im marginal stabilen Zustand wird nun durch jedes zusätzliche Sandkorn der kritische Gradient lokal überschritten, so daß ein Kippen in die nächste Zelle stattfindet, wo sich dieser Prozeß wiederholt. Jedes fallende Korn wird auf diese Weise sofort bergab transportiert. Im subkritischen Fall jedoch bleiben die zusätzlichen Körner zunächst irgendwo liegen. Es können sich dann Lawinen entwickeln, an denen viele Zellen gleichzeitig beteiligt sind. Die Korrelationslänge, die im marginalen Fall genau eine Zellenbreite beträgt, wächst jetzt stark an, und es treten Strukturen auf allen räumlichen Skalen bis hin zur Systemgröße auf. Gleichzeitig werden in den Spektren der Zeitreihen von Transportgrößen bzw. Aktivität typische $1/f$ -Frequenzbereiche beobachtet. Dieser Zustand wird von BTW als *selbstorganisiert kritisch* bezeichnet.

Über den hier vorgestellten „Sandhaufen“ hinaus gibt es eine Vielzahl von mehr oder weniger abweichenden Modellen, etwa das von Zhang [47] und Manna [48], das Zugmodell [49], das Oslo-Modell [50], das von Markošová [51, 52] oder das Erdbebenmodell [53]. Alle diese Systeme zeigen SOC-Phänomene, unterscheiden sich aber beispielsweise durch die Anzahl der Dimensionen, durch die Gestalt der Transportregeln und der Treiber, durch einen unterschiedlich großen Anteil von Zufall und Determinismus in den Regeln etc. Kritische Selbstorganisation tritt aber auch in anderen zellulären Automaten auf, etwa dem klassischen *Game of Life* von Conway [54,55] oder dem *forest fire*-Modell [56].

Alle vorgestellten Systeme zeichnen sich dadurch aus, daß durch ihre Konstruktion nur lokale Wechselwirkungen auftreten können, da jede Zelle immer nur von ihren unmittelbaren Nachbarn beeinflusst wird. Trotzdem entstehen zusammenhängende Muster von aktiven Zellen, bei Sandhaufenmodellen also etwa Lawinen, bei denen ganze Gebiete gleichzeitig instabil werden. Eine visuelle Darstellung solcher zellulärer Automaten erinnert an das Verhalten von ferromagnetischen Stoffen bei Abkühlen unter die Curie-Temperatur, bei denen lokale Domänen sich auszudehnen beginnen, bis sie die Dimension des ganzen Systems erreichen. Im Gegensatz zu einem solchen *Phasenübergang*

entstehen bei der kritischen Selbstorganisation diese langreichweitigen Korrelationen aber nicht durch Änderung eines äußeren Parameters, sondern bilden ein inhärentes Merkmal des Systems, das – zumindest in gewissen Grenzen – bei beliebiger Wahl der Größen ∇_{krit} , J und Δ_R auftritt.

Bak, Tang und Wiesenfeld beobachteten in den von ihnen untersuchten zellulären Automaten ein typisches Frequenzverhalten verschiedener Meßgrößen, bei dem sich das gesamte Spektrum in mehrere, voneinander abgegrenzte Bereiche aufteilt. Zwischen einem konstanten Bereich bei niedrigen und einem raschen Abfallen bei hohen Frequenzen tritt in einem mittleren Frequenzbereich $1/f$ -Rauschen auf. Wenn in einem System Ereignisse wie etwa Lawinen auf allen Längenskalen auftreten, aber keine Skala ausgezeichnet sein soll, wie dies in einem SOC-Zustand gefordert wird, dann muß die Anzahl der Ereignisse einer bestimmten Größenklasse umgekehrt proportional zu deren Größe selbst sein, da nur so unabhängig von der Skala immer die gleiche Anzahl von Zellen aktiv ist und immer der gleiche Transport erfolgt. Daher wird das Auftreten dieses Frequenzverhaltens allgemein als Indiz für das Vorliegen von kritischer Selbstorganisation gewertet. Auf der Suche nach solchen Zuständen wurde $1/f$ -Rauschen bereits in vielen, sehr unterschiedlichen Systemen gefunden, vom interplanetaren Magnetfeld [57] über die Verteilung der Primzahlen [58] bis hin zu Erdbeben und der Verteilung von Regenfällen [59].

Das bedeutet aber nun nicht unbedingt, daß die Natur grundsätzlich oder bevorzugt selbstorganisiert kritisch ist. Ein $1/f$ -Abfall des Spektrums kann auf verschiedene Weise entstehen, zum Beispiel auch auf eine der folgenden Arten:

- ▶ Die Fouriertransformierte der θ -Stufenfunktion enthält die ungeraden Frequenzanteile mit Koeffizienten $\sim 1/n$. Allgemein hat jede diskontinuierliche Funktion $1/f$ -Anteile in ihrem Spektrum.
- ▶ Da eine Integration in der Zeit eine Multiplikation mit $1/f$ im Fourierraum bedeutet, führt zeitliches Aufsummieren von weißem Rauschen, also einer gleichverteilten Zufallsgröße, zu einem rosa Rauschen. Insbesondere weist ein *random walk* ein $1/f$ -Spektrum auf.

Deshalb kann es passieren, daß das beobachtete Spektrum nicht von den Transportphänomenen, sondern schon durch den Treiber hervorgerufen wird. In der Tat läßt sich relativ einfach ein völlig künstliches Signal aus Pseudo-Zufallszahlen konstruieren, das SOC-Spektren verblüffend ähnlich sieht, aber als eindimensionales System garantiert keine Selbstorganisation aufweist.

Das heißt, daß das Auftreten eines $1/f$ -Bereichs allein noch kein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen von kritischer Selbstorganisation ist. Es ist daher eine gewisse Vorsicht bei der Deutung von Frequenzverläufen geboten. Besonders, wenn die Daten aus einer reinen Zeitreihe ohne Verbindung zu einem räumlich ausgedehnten Modell stammen, kann ein rosa Rauschen durch eine rein zufällige Verteilung von Ereignissen entstehen und braucht in keiner Weise auf kritische Selbstorganisation zurückzuführen sein. Es müssen noch zusätzliche Merkmale mit erscheinen, die zwei Mechanismen sicherstellen, nämlich

- ▶ die Unabhängigkeit von äußeren Parametern und
- ▶ die Koppelung von räumlichen und zeitlichen Ereignissen.

Für den ersten Punkt ist wichtig, daß der Effekt der Anregung von dem der Relaxation getrennt werden kann. Das bedeutet, daß die kritische Selbstorganisation durch eine Erhöhung der Treiberfrequenz nicht zerstört werden darf. Hwa und Kardar [60] zeigen, daß unter diesen Umständen ein mittlerer $1/f^\alpha$ -Bereich durch das Überlappen von einzelnen Lawinen entsteht, dessen Breite mit der Stärke des Transports zunimmt, während er bei zeitlich und räumlich voneinander getrennten Transportprozessen – einzeln herabgleitenden Körnern – verschwindet. In selbstorganisierten Zuständen muß also eine Änderung der Treiberfrequenz eine deutliche Änderung im Spektrum bewirken, während bei einer durch zufällige Anregung oder aber auch durch Schocks entstandenen Kurve das Spektrum unabhängig davon ist.

B.2 Analogien zwischen Sandhaufen und Plasmen

In letzter Zeit gewinnen Sandhaufenmodelle auch für die Plasmaphysik an Bedeutung, da die charakteristischen Phänomene – intermittenter Transport sowie rosa Rauschen – in diversen Simulationen beobachtet werden (etwa in [31], [32] oder [30]). Eine grobe Analogie zwischen Sandhaufen und Plasmen kann wie in [61] durch eine Korrespondenz laut Tabelle 9 auf der nächsten Seite hergestellt werden; die Plasmaprofile entsprechen dem Höhenprofil des Sandhaufens, während die Elementarzellen mit lokalen Wirbeln gleichgesetzt werden. Das Bewegen eines „Korns“ von einer Zelle zur nächsten ist dann der durch Fluktuationen induzierte Transport, und das „Herabregnen“ von Sandkörnern wird entweder durch Addition eines Hintergrundrauschens oder durch Heizung bzw. Teilcheninjektion an ausgewählten Stellen simuliert.

Sandhaufenmodell	Plasma
Zellennummer i	radiale Koordinate x
Zellengröße	lokale Driftturbulenz („eddy“)
Sandhöhe h_i	Druck $p_i(x)$ / Temperatur $T_i(x)$
Steigung $(h_i - h_{i+1})$	lokale Gradienten
Durchschnittsneigung des Haufens	mittlere Temperatur / Dichte-Profile
krit. Gradient ∇_{krit}	kritischer lokaler Gradient/ Schwellenwert η_{ic}
Korngröße J	lokaler Transport j
zufälliger Sandregen Δ_R	Heizung / Dichtepulse oder Hintergrund-Fluktuationen
Lawine	Transportereignis

Tabelle 9: Analogie zwischen Sandhaufen- und Plasmamodellen

Im Modell von BTW erfolgt jedes neue Hinzufügen eines Sandkorns erst dann, wenn das System vollständig relaxiert ist, das heißt, wenn alle Zellen wieder ihren stabilen Zustand erreicht haben. Da dies im Plasmamodell aber nicht festzustellen ist, muß es genügen, zwischen je zwei Pulsen „ausreichend lange“ zu warten, so daß eine Trennung der Zeitskalen gewährleistet wird. Der andere Extremfall ist das Hinzufügen eines Pulses bei *jedem* Zeitschritt; dies entspricht dem konstanten, kontinuierlichen Quellterm bei Garbet [32]. Einen Mittelweg wählen Carreras *et al.* in [31]; dort wird in einer Fluid-Rechnung eine Störung in festen Zeitabständen auf den Plasmadruck gegeben. Diese ist dabei radial lokalisiert, wobei die Position zufällig festgelegt wird, so daß das Profil über den ganzen poloidalen Querschnitt gleichzeitig und gleichmäßig gestört wird. In Abschnitt 4.5 dieser Arbeit wird die Wartezeit zwischen 1 und 500 Zeitschritten variiert.

In der Analogie zwischen Sandhaufen- und Plasmasimulationen gibt es einige problematische Punkte. Die Tatsache, daß trotz völlig unterschiedlicher zugrundeliegender Mechanismen das Transportverhalten so ähnlich ist, läßt einerseits auf eine große Universalität von Intermittenz und kritischer Selbstorganisation schließen. Andererseits ist durch die Verschiedenartigkeit der betrachteten Modelle die Vergleichbarkeit sehr eingeschränkt, und quantitative Aussagen werden unmöglich. Auch in Sandhaufen gibt es nämlich „eingebaute“ Parameter, wie etwa die Größe und die Form der Körner, und es zeigen durchaus nicht alle Konfigurationen aller Regeln einen SOC-Zustand. Eine Übertragung dieser Parameter auf die Plasmasimulation ist schwer bis unmöglich. So besteht zwischen den beiden Modellen zum Beispiel der fun-

damentale Unterschied, daß der „numerische Sandhaufen“ ein zellulärer Automat ist, und daß von der Größe des Elementartransports von einer Zelle zur nächsten das Verhalten wesentlich abhängt. Das Plasma besitzt dagegen eine langreichweitige Wechselwirkung und kollektive Moden, ist also gerade kein zellulärer Automat. In einem turbulenten System kann zwar die durchschnittliche Ausdehnung eines Wirbels mit der Zellengröße identifiziert werden, aber das Vorhandensein einer Driftwelle sorgt von vornherein für große Korrelationslängen. So gesehen befindet sich das Plasma immer in einem selbstorganisierten Zustand.

Ein anderer kritischer Punkt ist die ungenaue Korrespondenz zwischen „Höhe“ einerseits und „Druck/Temperatur“ andererseits in Tabelle 9: Das Sandprofil ist bereits durch nur eine Zustandsgröße, die Höhe, vollständig bestimmt, in dem „Plasma“ dieser Arbeit aber gibt es Dichte, Temperatur, Druck und η_i , von denen zwei Größen unabhängig sind. Davon hängt natürlich auch die gewählte Vorschrift, nach der der zelluläre Automat konstruiert wird, ab. Welche Kombination dieser Größen die Rolle der „Höhe“ spielt, ist *a priori* unklar.

Schließlich stellt sich die Frage, wie sich kritische Selbstorganisation in der Fusionsforschung bemerkbar machen würde. Ein SOC-Zustand bedeutete ja, daß sich Profile weitgehend unabhängig von äußeren Parametern einstellen und der Transport selbstorganisiert, also unabhängig von der Konfiguration des Systems, stattfände. Eine Einwirkung darauf könnte höchstens unterhalb der Skala der Zellen geschehen, indem die Regeln des zellulären Automaten geändert werden. Übertragen auf das Plasma könnte also nur auf der Ebene der Mikroturbulenz überhaupt Einfluß auf den Transport genommen werden. Das widerspricht aber in bemerkenswerter Weise den bisher gewonnenen, experimentellen Erkenntnissen über Plasmaeinschluß, insbesondere in der sogenannten *H-Mode*, bei der eine Veränderung in den Profilen zu einer deutlichen Verbesserung des Einschlusses führt [62, 63].

Index

- Amplitude, 41
Anfangsbedingungen, 39, 43
Anwachsen, 42, 44, 45
Anwachsrate, 20, 27, 28, 32, 34, 37, 49, 50
Approximation
 adiabatische, 15
 elektrostatische, 11
 lokale, 34
Ausbreitungsrichtung, 7
Bewegungsgleichung, 15, 66
Charakteristiken, Methode der, 66, 67, 71
Columbia Linear Machine, 4
Coulombterm, 54
Courant-Friedrichs-Lewy-Kriterium, 72
cubic splines, 39, 71
Curie-Temperatur, 78
Debye-Länge, 10, 15
Diffusion, 57
Diffusionskoeffizient, 57
Diskretisierung, 31, 39, 69
Dispersionsrelation, 25, 29, 37, 73
Dissipation, numerische, 71
downhill skiing, 76
downhill walk, 74
Drift, 6, 13, 18
 diamagnetische, 14
 elektrische, 13, 14, 16, 18, 54, 83
 Polarisations-, 14, 17, 18
 Transit-, 3
Driftgeschwindigkeit, 43
driftkinetische Gleichung, 6, 54, 66
Driftnäherung, 10
Driftwelle, 7, 10, 43, 47, 49, 59, 82
 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift, *siehe* Drift, elektrische
Eigenvektor, 34
Erdbeben, 79
 η_i -Instabilität, 2–5, 10, 38, 51, 64, 83
Fishpack, 71
Fluktuationen, 21
forest fire, 78
Fourier-Transformation, 25, 26, 70
Fried-Conte-Funktion, 23
Fusionsplasma, *siehe* Plasma
Game of Life, 78
Gleichgewicht, 20
Gleichung
 driftkinetische, *siehe* driftkinetische Gleichung
 Poisson-, *siehe* Poissongleichung
Gyration, 6
Gyrationsperiode, 11
Gyrationsradius, 6, 12, 15
Gyrationszentren, 13
H-Mode, 82
Hierarchie, 5
Impuls, 5, 38, 68
Intermittenz, 81
Interpolation, 39, 71
inverse Vektoriteration, 30
ITG-Instabilität, *siehe* η_i -Instabilität
JET, 9
Konstante der Bewegung, 67
Kontinuitätsgleichung, 5
Konvektion, 54

- Korrelationslänge, 78
- Lösbarkeitsbedingung, 30, 34
- Laplace-Operator, 27
- Larmorradius, *siehe* Gyrationradius
- Lawinen, 60, 78
- Lawson-Kriterium, 1
- Linearisierung (künstliche), 32
- Liouvillegleichung, 5
- lokale Approximation, 25
- magnetischer Einschluß, 1
- Maxwell-Verteilung, 20, 49, 53, 69
- Mode
 - slab-, 3
 - toroidale, 3
- Modell
 - driftkinetisches, 5
 - Fluid-, 5, 48, 55, 81
 - magnetohydrodynamisches, *siehe* Modell, MHD und Modell, Fluid-
 - MHD, 4, 5
- Momente, 5
- neutral beam injection*, 4
- Neutralteilchen-Injektion, 4
- Newton-Verfahren, 73
- Nichtlinearitäten, 4, 38
- Nullstelle, 73
- Nyquist-Diagrammanalyse, 26
- Operationsbereiche, 11
- Operator-Splitting*, 71
- Parallelisierung, 69, 70
- pellet fueling*, 4
- Phasenübergang, 78
- Phasenraum, 5, 66, 71
- Plasma, 1, 4–6
 - Hochtemperatur-, 6, 10
 - magnetisiertes, 10
 - stoßfreies, 6
 - Wasserstoff-, 5
- Plasma-Dispersionsfunktion, 24
- Poissongleichung, 17, 54, 69–71
- poloidaler Querschnitt, 7
- Potentialfluktuationen, 41, 55
- Primzahlen, 79
- Profil, 39, 40, 42, 82
 - marginale, 48, 49, 78
 - subkritisches, 48, 49, 78
 - superkritisches, 38, 48
- Pufferzone, 39, 55
- Pulse, 53
- Quasineutralität, 10, 15
- Randbedingungen, 8, 21, 28, 39, 55
- random walk*, 75, 76, 79
- Rauschen
 - rosa, 60, 79, 80
 - weißes, 79
- Rechengitter, 31, 54, 69, 71
- Referenzlauf, 31, 40–43, 45
- Regime, 10
- Relaxation, 55, 80
- Sättigung, 45
- Schallgeschwindigkeit, 61
- Schwellenwert, 3, 26, 35, 36, 48, 50–52, 64
- Selbstorganisation, kritische, 3, 4, 60, 63, 65, 77, 79–82
- Semi-Lagrange-Methode, 66
- shared memory*, 69
- simulated annealing*, *siehe* simuliertes Aushärten
- simuliertes Aushärten, 74
- slab*-Geometrie, 7, 8, 18, 37

-
- SOC, *siehe* Selbstorganisation, kritische
 Sonde, 41
 Spektrum, 59, 60, 79
 1/f, *siehe* Rauschen, rosa, 78, 79
 Spiralbewegung, 6
splines, *siehe cubic splines*
 Störung, 20
 Stellarator, 1
 Stufenfunktion, 79

 TEXTOR, 9
 thermische Geschwindigkeit, 61
 Tokamak, 1, 6
 TORE-Supra, 9
 Trägheitsfusion, 1
 Transport, 6, 39, 47, 50, 61, 63
 anomaler, 2, 38
 Dichte-, 54
 diffusiver, 2
 Elementar-, 63, 77, 82
 Energie-, 54
 flußgetriebener, 38, 53
 intermittenter, 47, 55, 63
 kollektiver, 2
 normaler, 2
 radialer, 56
 Stärke des, 57
 stoßbestimmter, 2
 Treiber, 79

 Verscherung, magnetische, 37
 Verteilungsfunktion, 38, 42, 66, 68,
 69, 71
 Vlasov-Gleichung, 5, 18

 Wärmeleitfähigkeit, 57
 Wellenzahl, 21, 27, 28, 31
 Wirbel, 82

 Z-Funktion, 23

 zellulärer Automat, 4, 77, 82
 Zustand
 sub-, super-, marginal kritischer,
 siehe Profil, —
 Zwischenwertsatz, 73
 zyklische Reduktion, 71

Literatur

- [1] THOMPSON, W. B.: *Thermonuclear Reaction Rates*. Proc. of the Physical Society, 70:1–5, 1957.
- [2] LAWSON, J. D.: *Some Criteria for a Power Producing Thermonuclear Reactor*. Proc. of the Physical Society, 70:6–10, 1957.
- [3] BROCKHAUS (Herausgeber): *Naturwissenschaft und Technik*. F. A. Brockhaus, Wiesbaden, 1983.
- [4] CHEN, F. F.: *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Band 1. Plenum Press, New York, 1984.
- [5] KISHIMOTO, Y., T. TAJIMA, W. HORTON, M. J. LEBRUN und J. Y. KIM: *Theory of self-organized critical transport in tokamak plasmas*. Physics of Plasmas, 3(4):1289–1307, April 1996.
- [6] HORTON, W.: *Nonlinear drift waves and transport in magnetized plasma*. Physics Reports, 192:2, 1990.
- [7] COPPI, B., M. N. ROSENBLUTH und R. Z. SAGDEEV: *Instabilities due to Temperature Gradients in Complex Magnetic Field Configurations*. Phys. Fluids, 10:582, 1967.
- [8] SEN, A. K., B. SONG und J. CHEN: *Summary of Ion Temperature Gradient Instability Studies in the Columbia Linear Machine*. Physica Scripta, 52:467–470, 1995.
- [9] DONG, J. Q., Y. Z. ZHANG und S. M. MAHAJAN: *Studies of instability and transport in sheared-slab plasmas with very weak shear*. Phys. Plasmas, 4(9):3334, September 1997.
- [10] DONG, J. Q. und W. HORTON: *Studies of impurity mode and ion temperature gradient mode in toroidal plasmas*. Phys. Plasmas, 2(9):3412, September 1995.
- [11] PARK, H.-B., E.-G. HEO, W. HORTON und D.-I. CHOI: *Test particle simulations for transport in toroidal plasmas*. Phys. Plasmas, 4(9):3273, September 1997.
- [12] HAMAGUCHI, S. und W. HORTON: *Fluctuation spectrum and transport from ion temperature gradient driven modes in sheared magnetic fields*. Phys. Fluids B, 2(8):1833, August 1990.

-
- [13] HORTON, W., R. D. ESTES und D. BISKAMP: *Fluid simulations of ion pressure gradient driven modes*. Plasma Physics, 22:663, 1980.
- [14] CONNOR, J. W.: *Transport due to Ion pressure Gradient Turbulence*. Nuclear Fusion, 26(2):193, 1986.
- [15] JARMEN, A.: *Toroidal ion temperature gradient mode stability at large temperature gradients*. Physica Scripta, 56(6):623, Dezember 1997.
- [16] JENKO, F.: *Numerische Modellierung von stoßfreier Driftwellenturbulenz*. Doktorarbeit, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching, 1998.
- [17] GOLDSTEIN, H.: *Klassische Mechanik*. Aula-Verlag, Wiesbaden, 9. Auflage, 1987.
- [18] BALESCU, R.: *Transport Processes in Plasmas*, Band 1. North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [19] VLASOV, A. A.: *The Vibrational Properties of an Electron Gas*. Soviet Physics Uspekhi, 93(3/4):721, Mai/Juni 1968.
- [20] HOBIRK, J.: *persönliche Mitteilung*.
- [21] KEILHACKER, M.: *The JET programme to 1996 and beyond*. In: *Contributions to high-temperature plasma physics [64]*. Akademie-Verlag, Berlin, 1994.
- [22] HINTZ, E., P. BOGEN, H. A. CLAASSEN, H. GERHAUSER, J. D. HEY, K. HÖTHKER, Y. T. LIE, P. MERTENS, A. POSPIESZCZYK, D. RUSBÜLDT, U. SAMM, R. SCHORN, B. SCHWEER, M. TOKAR' und B. UNTERBERG: *Properties of the edge plasma in TEXTOR – with ohmic heating – and the role of light impurities*. In: *Contributions to high-temperature plasma physics [64]*. Akademie-Verlag, Berlin, 1994.
- [23] BEYER, P.: *persönliche Mitteilung*.
- [24] SCHMIDT, G.: *Physics of high-temperature plasmas*. Academic Press, New York, 2. Auflage, 1979.
- [25] SPATSCHEK, K. H.: *Theoretische Plasmaphysik*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1990.
- [26] BLÜMING, M.: *plasdis3*. Code zur Berechnung der Plasma-Dispersionsfunktion, 1996.

- [27] STOER, J.: *Einführung in die Numerische Mathematik I*. Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [28] GOLDSTON, R. J. und P. H. RUTHERFORD: *Introduction to Plasma Physics*. Inst. Phys. Publ., Bristol, 1995.
- [29] NAULIN, V.: *Nichtlinearer Transport in ebenen Driftwellenmodellen*. Doktorarbeit, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, 1995.
- [30] BEYER, P., Y. SARAZIN, X. GARBET, P. GHENDRIH und S. BENKADDA: *2D and 3D boundary turbulence studies*. Plasma Phys. and Controlled Fusion, 41:A757, 1999.
- [31] CARRERAS, B. A., D. NEWMAN, V. E. LYNCH und P. H. DIAMOND: *A model realization of self-organized criticality for plasma confinement*. Physics of Plasmas, 3(8):2903–2911, August 1996.
- [32] GARBET, X., Y. SARAZIN, P. BEYER, P. GHENDRIH, R. E. WALTZ, M. OTTAVIANI und S. BENKADDA: *Flux driven turbulence in tokamaks*. in Vorbereitung, 1999.
- [33] SWARZTRAUBER, P.: *fftpack Version 4*. In: <ftp://elib.zib-berlin.de/netlib/fftpack/>. National Center for Atmospheric Research, Boulder, 1985.
- [34] GHIZZO, A., P. BERTRAND, M. SHOUCRI, E. FIJALKOW und M. R. FEIX: *An Eulerian Code for the Study of the Drift-Kinetic-Vlasov Equation*. Journal of Comp. Physics, 108:105–121, März 1993.
- [35] MANFREDI, G., M. SHOUCRI, M. R. FEIX, P. BERTRAND, E. FIJALKOW und A. GHIZZO: *The Numerical Integration of the Vlasov Equation Possessing an Invariant*. Journ. Comp. Phys., 121:298, 1995.
- [36] PRESS, W. H., S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING und B. P. FLANNERY: *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Second Auflage, 1966.
- [37] ADAMS, J., P. SWARZTRAUBER und R. SWEET: *genbun*. In: *fishpack*, <ftp://elib.zib-berlin.de/netlib/fishpack/>. Green Mountain Software, Denver, 1983.
- [38] BRONSTEIN und SEMENDJAJEW: *Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner Verlag, Stuttgart - Leipzig; Verlag Nauka, Moskau, 25. Auflage, 1991.

-
- [39] FRIEDEL, H.: *Dynamische Kontrolle chaotischer Zustände in Niedertemperaturplasmen*. Doktorarbeit, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, 1997.
- [40] SIEKS, O.: *A non-local model for the ion temperature gradient instability*. *Physica*, 20(2):205, 1998.
- [41] SIEKS, O.: *Root Finding in the Complex Plane*. <http://www.thphy.uni-duesseldorf.de/~sieks/findroot.html>, 1998.
- [42] ROHR, B. und H. WIELE (Herausgeber): *Lexikon der Technik*. VEB Bibliographisches Institut Leipzig, 1984.
- [43] BAK, P., C. TANG und K. WIESENFELD: *Self-Organized Criticality: An Explanation of $1/f$ -Noise*. *Phys. Rev. Letters*, 59(4):381–384, Juli 1987.
- [44] BAK, P., C. TANG und K. WIESENFELD: *Self-Organized Criticality*. *Physical Review A*, 38(1):364–374, Juli 1988.
- [45] TANG, C. und P. BAK: *Critical exponents and Scaling Relations for Self-Organized Critical Phenomena*. *Physical Review Letters*, 60(23):2347–2350, Juni 1988.
- [46] BAK, P. und K. CHEN: *The Physics of Fractals*. *Physica D*, 38:5–12, 1989.
- [47] ZHANG, Y.-C.: *Scaling Theory of Self-Organized Criticality*. *Physical Review Letters*, 63(5):470, Juli 1989.
- [48] MANNA, S. S.: *Critical exponents of the sand pile models in two dimensions*. *Physica A*, 179:249–268, 1991.
- [49] SOUSA VIERA, M. DE: *Self-organized criticality in a deterministic mechanical model*. *Physical Review A*, 46:6288, 1992.
- [50] CHRISTENSEN, K., A. CORRAL, V. FRETTE, J. FEDER und T. JØSSANG: *Tracer dispersion in a self-organized critical system*. *Physical Review Letters*, 77(107), 1996.
- [51] MARKOŠOVÁ, M., M. H. JENSEN, K. B. LAURITSEN und K. SNEPPEN: *Onset of criticality and transport in a driven diffusive system*. *Physical Review E*, 55:2085–2092, 1997.
- [52] BOETTCHER, S. und M. PACZUSKI: *Broad universality in self-organized critical phenomena*. *Physica D*, 107:171–173, 1997.

- [53] CEVA, H.: *On the asymptotic behavior of an earthquake model*. Physics Letters A, 245:413–418, August 1998.
- [54] BERLEKAMP, E. R., J. H. CONWAY und R. K. GUY: *Winning Ways*, Band 2. Academic Press, London, 1982.
- [55] BAGNOLI, F., R. RECHTMAN und S. RUFFO: *Some Facts of Life*. Physica A, 171:249–264, 1991.
- [56] DROSSEL, B. und F. SCHWABL: *Self-Organized Critical Forest-Fire Model*. Physical Review Letters, 69(11):1629–1632, September 1992.
- [57] MATTHAEUS, W. H. und M. L. GOLDSTEIN: *Low-Frequency $1/f$ Noise in the Interplanetary Magnetic Field*. Phys. Rev. Letters, 57(4):495–498, 1986.
- [58] WOLF, M.: *$1/f$ noise in the distribution of prime numbers*. Physica A, 241:493–499, Juli 1997.
- [59] ANDRADE, R. F. S., H. J. SCHELLNHUBER und M. CLAUSSEN: *Analysis of rainfall records: possible relation to self-organized criticality*. Physica A, 254:557–568, 1998.
- [60] HWA, T. und M. KARDAR: *Avalanches, hydrodynamics, and discharge events in models of sandpiles*. Physical Review A, 45(10):7002–7023, 1992.
- [61] NEWMAN, D. E., B. A. CARRERAS, P. H. DIAMOND und T. S. HAHM: *The dynamics of marginality and self-organized criticality as a paradigm for turbulent transport*. Physics of Plasmas, 3(5):1858–1866, Mai 1996.
- [62] BEYER, P.: *Modellrechnungen zum L-H-Übergang in Tokamak-Plasmen*. Doktorarbeit, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, 1995.
- [63] O. GRUBER *et al.*: *Overview of ASDEX Upgrade Results*. In: IAEA conference, 1998.
- [64] SPATSCHEK, K. H. und J. UHLENBUSCH (Herausgeber): *Contributions to high-temperature plasma physics*. Akademie-Verlag, Berlin, 1994.