Über die Semicharakteristik homogener Räume

Inaugural-Dissertation

zur
Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Christian Löffelsend

aus Düsseldorf

April 2011

aus dem mathematischen Institut
der Heinrich-Heine Universität Düsseldorf

Gedruckt mit der Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent: Prof. Dr. Wilhelm Singhof
Koreferent: Priv.-Doz. Dr. Markus Szymik

Tag der mündlichen Prüfung: 25.05.2011

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung :

Sei X eine geschlossene, orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $2n+1$ und $\mathbb{F}$ ein Körper. Wir definieren die $\mathbb{F}$-Semicharakteristik als

$$k(X;\mathbb{F}) = \sum_{i=0}^{n} \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^i(X;\mathbb{F}) \mod 2.$$

Die $\mathbb{F}$-Semicharakteristik nimmt also die Werte 0 oder 1 an; sie ist im Gegensatz zur Euler-Charakteristik abhängig von der Wahl des Körpers $\mathbb{F}$. Kervaire zeigte, dass X parallelisierbar ist, genau dann wenn X stabil parallelisierbar ist und $k(X;\mathbb{F}_2) = 0$ gilt. Sei G ein kompakte, zusammenhängende Lie-Gruppe und sei H eine abgeschlossene Untergruppe. In den bekannten Fällen ist die $\mathbb{F}$-Semicharakteristik von G/H, für $\dim G/H$ ungerade, fast immer Null. Diese Arbeit setzt die Untersuchung der $\mathbb{F}$-Semicharakteristik von G/H fort. Der Fokus liegt dabei hauptsächlich auf dem geometrischen interessanten Fall $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$, aber auch die Fälle der $\mathbb{F}_p$- und der $\mathbb{R}$-Semicharakteristik werden behandelt.

Wir widmen uns in dieser Arbeit zwei Fragestellungen: Bricht die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz mit Koeffizienten in $\mathbb{F}$ zur Faserung $G/H \to BH \to BG$ zusammen? Und verschwindet die $\mathbb{F}$-Semicharakteristik von G/H? Eine positive Antwort auf die erste Frage lässt uns $\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{F})$ besser verstehen und erleichtert so die Beantwortung der zweiten. Wir werden jedoch hauptsächlich Fälle betrachten, in denen wir nur die zweite Frage beantworten können. Viele bekannte Arbeiten zeigen, dass die erste Frage häufig, aber bei weitem nicht immer eine positive Antwort besitzt. Wir werden die Frage in weiteren noch unbekannten Fällen beantworten können und Fälle aufführen, in denen die Spektralsequenz sicher nicht zusammenbricht; namentlich, wenn $G = Spin(n)$, mit $n \geq 10$ gilt. Wir erarbeiten meist technische Bedingungen, die zum Zusammenbruch der Spektralsequenz führen und die häufig in der von uns betrachteten Situation erfüllt sind.

Die zweite Fragestellung betrachtend, versuchen wir den E_2-Term der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zu verstehen. Im Zuge dieser Arbeit gelangen wir dann zu tieferem Verständnis der Differentiale der Spektralsequenz und können so den E_∞-Term besser verstehen. Mit diesen neuen Methoden können wir bekannte Resultate vervollständigen und eine Vielzahl neuer Fälle ergründen: Die $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik von G/H verschwindet, wenn $\dim G/H$ ungerade ist, H eine kompakte, zusammenhängende Lie-Gruppe ist und eine der folgenden, hinreichenden Bedingungen gilt:

- $G = SU(n)$ und H ist eine abgeschlossene Untergruppe von G, mit $(n - \mathrm{Rang}\, H)$ ist größer als 2.
- $G = Sp(n)$ oder $SO(n)$ und H ist das Bild einer irreduziblen, symplektischen bzw. reellen Darstellung einer Lie-Gruppe, mit $\mathrm{Rang}\, H \geq 4$.
- H' sei eine abgeschlossene Untergruppe von $Sp(2n+1)$, mit $-1 \notin H'$ und H sei die durch die Projektion induzierte Untergruppe in $G := PSp(2n+1)$.
- H sei eine abgeschlossene Untergruppe von $SU(n) \subset Spin(2n) =: G$.

Abstract:

Let X be a closed orientable manifold of dimension $2n+1$ and $\mathbb{F}$ a field. We define the $\mathbb{F}$-semicharacteristic by

$$k(X;\mathbb{F}) = \sum_{i=0}^{n} \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^i(X;\mathbb{F}) \mod 2.$$

The $\mathbb{F}$-semicharacteristic takes values in 0 and 1; in contrast to the Euler-characteristic it depends on the choice of the field $\mathbb{F}$. Kervaire showed, that X is parallelizable, if and only if X is stably parallelizable and $k(X;\mathbb{F}_2) = 0$. Let G be a compact, connected Lie group and H a closed Lie subgroup. In known cases for $\dim G/H$ odd the $\mathbb{F}$-semicharacteristic of G/H almost always is zero. This thesis continues the investigation on the $\mathbb{F}$-semicharacteristic of G/H. It is focused upon mainly the case $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$, but the cases of the $\mathbb{F}_p$ and $\mathbb{R}$-semicharacteristic are also treated.

This thesis addresses two Problems: Does the Eilenberg-Moore spectral sequence associated to the fibre bundle $G/H \to BH \to BG$ with coefficients in $\mathbb{F}$ collapse? And does the $\mathbb{F}$-semicharacteristic of G/H vanish? A positive answer to the first question lets us understand $\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{F})$ better and it makes the second question easier to answer. But we will mainly treat cases in which we only can answer the second question. Many known results show that often there is a positive answer to the first question. We will give an answer to this question in cases unknown so far and will give examples where the spectral sequence will not collapse; one particular case being $G = Spin(n)$, for $n \geq 10$. We will develop technical conditions which lead to the collapse of the spectral sequence and are often fulfilled in the given situations.

With a look upon the second question, we try to understand the E_2-page of the Eilenberg-Morre spectral sequence better. In the course of this thesis we will get a deeper understanding of the differentials of the spectral sequence and so will learn more about the E_∞-page. With these new techniques we can complete known results and answer a variety of new cases: The $\mathbb{F}_2$-semicharacteristic vanishes if $\dim G/H$ is odd, H is a compact, connected Lie group and one of the following sufficient conditions is fullfilled:

- $G = SU(n)$ and H is a closed subgroup of G, with $(n - \operatorname{rank} H)$ is bigger than 2.
- $G = Sp(n)$ or $SO(n)$ and H is the image of a real resp. symplectic, irreducible representation of a Lie group of $\operatorname{rank} H \geq 4$.
- Let H' be a closed subgroup of $Sp(2n+1)$, with $-1 \notin H'$ and let H be the subgroup induced by the projection onto $G := PSp(2n+1)$.
- Let H be a closed subgroup of $SU(n) \subset Spin(2n) =: G$.

Einleitung

Sei G eine kompakte, zusammenhängende Lie-Gruppe und sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G. Dann ist der homogene Raum G/H eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. In den Arbeiten [Sin82] und [SW86] untersuchen Singhof bzw. Singhof und Wemmer die Frage, unter welchen Bedingungen ein homogener Raum G/H parallelisierbar ist. Nach [Ada60], [Ker56] und [Ker57] ist eine geschlossene Mannigfaltigkeit M genau dann parallelisierbar, wenn sie stabil parallelisierbar ist und eine der folgenden Bedingungen gilt: $\dim M$ ist gerade und die Euler-Charakteristik verschwindet oder $\dim M$ ist ungerade und die $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik verschwindet oder $\dim M$ ist gleich $1, 3$ oder 7. Dabei ist die $\mathbb{F}$-Semicharakteristik einer topologischen Mannigfaltigkeit X, mit ungerader Dimension, definiert durch

$$k(X;\mathbb{F}) = \sum_{i=0}^{n} \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^i(X;\mathbb{F}) \mod 2.$$

Die $\mathbb{F}$-Semicharakteristik nimmt also die Werte 0 oder 1 an und ist im Gegensatz zur Euler-Charakteristik abhängig von der Wahl des Körpers $\mathbb{F}$. Bei den Untersuchungen in [Sin82],[Sin85] und [SW86] zeigt sich, dass es sehr viele homogene Räume ungerader Dimension gibt, deren $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik verschwindet. In der folgenden Arbeit wollen wir die Kohomologie homogener Räumer so explizit wie möglich bestimmen und versuchen nach Gründen in der algebraischen Struktur von $\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{F}_2)$ zu suchen, die zum Verschwinden der $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik führen.

Die beiden Theoreme von Eilenberg und Moore [McC01, 7.6, 7.14] erlauben folgende Aussage: Sind $H \subset G$ kompakte Lie-Gruppen, dann gibt es eine Spektralsequenz $E_r^{*,*}$ mit

$$E_2^{*,*} \cong \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F})}(\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}),\mathbb{F}),$$

die als Algebra gegen $\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{F})$ konvergiert. Gerade in Fällen in denen $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F})$ und $\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F})$ Polynomalgebren über $\mathbb{F}$ sind, ist der E_2-Term rechnerisch zu bestimmen. Ein Zusammenbrechen der Spektralsequenz ist in dieser Situation häufig, aber nicht sicher. Zuerst wollen wir uns mit Fällen beschäftigen, in denen das Zusammenbrechen der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz durch die bekannte Theorie abgedeckt ist. Später dann sollen Beispiele folgen, in denen wir das Zusammenbrechen der Spektralsequenz, in bisher unbekannten Fällen, selbst herleiten oder für die Bestimmung der $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik gar nicht benötigen. Gerade im letzten Fall brauchen wir ein tieferes Verständnis für die Differentiale der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung

$$G/H \to BH \to BG,$$

welches wir im Laufe dieser Arbeit erlangen werden. In vielen Fällen können wir den E_∞-Term so genau bestimmen, dass wir ein Verschwinden der $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik herleiten können. Insbesondere widmen wir uns den Fällen in denen G eine der Gruppen $SO(n), SU(n), Sp(n), PSp(2n+1)$ und $Spin(2n)$ ist. Interessant sind besonders die letzten beiden Fälle, dass $\mathrm{H}^*(BSpin(2n);\mathbb{F}_2)$ meist keine Polynomalgebra ist und $\mathrm{H}^*(BPSp(2n+1);\mathbb{F}_2)$ ein bisher wenig behandelter Fall ist. Es sei bemerkt, dass die Algebrenstruktur von $\mathrm{H}^*(BPSp(2n);\mathbb{F}_2)$ gänzlich unbekannt ist, wärend die Stuktur als graduierter $\mathbb{F}_2$-Modul nur in den Fällen n ungerade bestimmt ist [KT76], weshalb diese Fälle keine Erwähnung finden sollen.

Auf den kommenden Seiten folgt die Festsetzung der Notation und ein Übersicht über die einzelnen Kapitel.

Notation

Allgemeines: Für Inklusionen jeder Art werden wir das Symbol ι reservieren, für Projektionen das Symbol π.

Indizes: Die Buchstaben i, j, k, l, m, n, r und ℓ sind in dieser Arbeit für Indexvariablen reserviert. Tauchen i oder j ohne weitere Beschreibung auf, so gehen wir davon aus, dass i bzw. j aus einer nicht näher definierten Indexmenge I bzw. J stammen. Es wird im weiteren, wenn nicht anders erwähnt $k \leq n$ gelten.

Topologie: Abbildungen zwischen topologischen Räumen seien stets stetig. Ist X ein topologischer Raum und R ein kommutativer Ring, so ist $\mathrm{C}_*(X; R)$ bzw. $\mathrm{C}^*(X; R)$ der singuläre Kettenkomplex bzw. Kokettenkomplex und $\mathrm{H}_*(X; R)$ bzw. $\mathrm{H}^*(X; R)$ die singuläre Homologie bzw. Kohomologie mit Koeffizienten in R.

Lie-Gruppen: Lie-Gruppen werden wir üblicherweise mit G, H bezeichnen und, sofern nicht anders vermerkt, davon ausgehen, dass G und H kompakt und zusammenhängend sind. Meistens wird dabei $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe sein. Ist ρ eine komplexe, reelle bzw. symplektische Darstellung von G, dann benennen wir den induzierten Homomorphismus $G \to SU(n)$, $G \to SO(n)$ bzw. $G \to Sp(n)$ ebenfalls mit ρ. Mit T_G bezeichnen wir einen maximalen Torus von G. Ist G eine der klassischen Lie-Gruppen, so treffen wir für T_G eine feste Wahl, wie in Abschnitt 1.2 beschrieben und nennen diese Wahl Standardtorus. Als *p-Torus* von G werden wir eine elementarabelsche p-Gruppe $Q \subset G$ bezeichnen . In dieser Notation soll ein 0-Torus für einen normalen Torus stehen.

Wir sagen, dass eine Lie-Gruppe G *keine p-Torsion besitzt*, wenn $H_*(G; \mathbb{Z})$ keine p-Torsion besitzt.

Wir sagen, dass eine Lie-Gruppe G einfach ist, wenn sie eine einfache Lie-Algebra besitzt. Eine Lie-Gruppe G heißt halb-einfach, wenn ihre Lie-Algebra das Produkt von einfachen Lie-Algebren ist.

Wir sagen, dass eine Lie-Gruppe G *prim* zu A_k (bzw. B_k, C_k, D_k) ist, wenn die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G keinen Faktor A_k (bzw. B_k, C_k, D_k) besitzt.

Ist G eine Lie-Gruppe, dann bezeichnen wir mit BG den klassifizierenden Raum von G.

Homogene Räume: Ist $\rho : H \to G$ ein nicht notwendig injektiver Homomorphismus von Lie-Gruppen, dann schreiben wir G/ρ für den homogenen Raum $G/\operatorname{Bild}\rho$.

Endliche Gruppen: Mit $\mathbb{Z}_n$ bezeichnen wir die zyklische Gruppe mit n Elementen. Mit $\mathcal{S}_n$ bezeichnen wir die Gruppe der Permutationen auf n Elementen, also die n-te symmetrische Gruppe.

Ringe: Seien R und S Ringe mit 1, sei S ein R-Linksmodul bzw. R-Rechtsmodul, sei $y \in R$ und sei 1_S das Einselement in S, dann schreiben wir für $y \cdot 1_S$ bzw. $1_S \cdot y \in S$ abkürzend y. Sind $y_1, \dots, y_n \in R$, dann bezeichnen wir mit $(y_1, \dots, y_n)$ das von

$y_1, \dots, y_n$ erzeugte Ideal, genauso ist $(y_1, \dots, y_n) \subset S$, dass von $y_1 \cdot 1_S, \dots, y_n \cdot 1_S$ bzw. $1_S \cdot y_1, \dots, 1_S \cdot y_n$ erzeugte Ideal.

Körper: Ist p eine Primzahl, dann bezeichnen wir mit $\mathbb{F}_p$ den Körper mit p Elementen. Manchmal werden wir verallgemeinernd $\mathbb{F}_0$ für $\mathbb{Q}$ schreiben. Schreiben wir nur $\mathbb{F}$, so steht dies für einen Körper $\mathbb{F}_p$, mit $p \in \mathbb{N}$ prim oder 0.

Matrizen: Sei $\mathbb{F}$ ein Körper und sei $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$. Mit $\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$ bezeichnen wir die Diagonalmatrix mit den Einträgen $a_1, \dots, a_n$ auf der Hauptdiagonalen. Mit E_n bezeichnen wir die $n \times n$-Einheitsmatrix über dem Körper $\mathbb{F}$.

Algebren: Ist $\mathbb{F}$ ein Körper und A ein $\mathbb{F}$-Modul, dann definieren wir

$$|A| := \dim_{\mathbb{F}}(A).$$

Ist A ein graduierter R-Modul und ist $a \in A^n$, dann sei $Da := n$ der Grad von a. Ein differentiell graduierter R-Modul A ist ein graduierter R-Modul mit einem Differential $d_A : A^p \to A^{p+1}$, sodass $d_A \circ d_A = 0$ gilt. Wenn es zu keinen Missverständnissen führt, schreiben wir auch nur d statt d_A. Die Kategorie der differentiell graduierten R-Moduln bezeichnen wir mit $DGMod_R$. Ist A ein bigraduierter R-Modul und ist $a \in A^{p,q}$, dann sei $Da := (p, q)$ der Bigrad, $D_e a = p$ der externe und $D_i a = q$ der interne Grad von a. Zuletzt sei $D_t a = D_i a + D_e a$ der Totalgrad von a. Ein differentiell bigraduierter R-Modul A ist ein bigraduierter R-Modul mit einem Differential

$$d : \bigoplus_{p+p'=n} A^{p,p'} \to \bigoplus_{q+q'=n+1} A^{q,q'},$$

sodass $d \circ d = 0$ gilt. Sowohl im Fall von graduierten, als auch im Fall von bigraduierten R-Modulen A werden wir davon ausgehen, dass Elemente $a \in A$ stets homogen sind. Ist $A^{*,*}$ eine bigraduierter R-Modul, so bezeichnen wir mit $Tot(A)^*$ den induzierten graduierten R-Modul der gegeben ist durch $Tot(A)^n = \bigoplus\limits_{p+q=n} A^{p,q}$. Eine graduierte R-Algebra ist ein graduierter R-Modul, mit einem Produkt $\psi : A^p \otimes A^q \to A^{p+q}$ und einer Einheit $\eta : R \to A$. Ist $a, b \in A$, so schreiben wir meist $a \cdot b$ für $\psi(a, b)$. Wir sagen, dass A^* graduiert kommutativ ist, wenn $a \cdot b = (-1)^{Da \cdot Db} b \cdot a$ gilt. Eine differentiell graduierte Algebra A besitzt ein Differential d mit Grad $+1$. Das Differential sei mit dem Produkt auf A verträglich, das heißt die *Leibniz-Regel*

$$d(ab) = d(a)b + (-1)^{Da} a d(b)$$

gilt. Die Kategorie der differentiell graduierten R-Algebren kürzen wir mit $DGAlg_R$ ab. Wir sagen, dass A *zusammenhängend* ist, wenn $|A^0| = 1$ und $|A^n| = 0$ für $n < 0$ gilt. Eine bigraduierte R-Algebra A ist ein bigraduierter R-Modul mit Produkt $\psi : A^{p,p'} \otimes A^{q,q'} \to A^{p+q,p'+q'}$. Wir sagen, dass $A^{*,*}$ graduiert kommutativ ist, wenn $Tot(A)^*$ graduiert kommutativ ist.

Moduln: Ist $A \in \mathrm{DGAlg_R}$, dann ist ein Linksmodul N über A ein differentiell graduierter R-Modul, sodass die Linksoperation $\phi : A \otimes N \to N$ ein Morphismus in

$DGMod_R$ ist und das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes N \arrow[r, "\psi\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\phi"] & A \otimes N \arrow[d, "\phi"] \\
A \otimes N \arrow[r, "\phi"] & N
\end{tikzcd}
$$

kommutiert. Die Kategorie der Linksmoduln N über A bezeichnen wir mit DG_AMod. Die Kategorie der Rechtsmoduln M über A kürzen wir durch $DGMod_A$ ab.

Spezielle Algebren: Das Symbol Λ wählen wir für eine äußere Algebra über $\mathbb{F}_p$ in endlich vielen Erzeugern. Ist A ein $\mathbb{F}$-Algebra, so schreiben wir $\wedge_A(e_1, \ldots, e_n)$ für die äußere Algebra über A in den Erzeugern $e_1, \ldots, e_n$, während Γ eine Algebra der geteilten Potenzen über $\mathbb{F}_p$ bezeichnet, ebenfalls in endlich vielen Veränderlichen. Ist A eine $\mathbb{F}$-Algebra, so schreiben wir $\Gamma_A(e_1, \ldots, e_n)$ für die Algebra der geteilten Potenzen über A in den Erzeugern $e_1, \ldots, e_n$. Genaueres findet sich in Definition 2.50. Wir sagen, dass eine $\mathbb{F}$-Algebra A ein einfaches System von Erzeugern $(x_1, \ldots, x_n)$ hat, wenn die Elemente 1 und $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ mit $i_1 < \ldots < i_n$ ein Vektorraum Basis von A bilden. Wir schreiben $A = \Delta(x_1, \ldots, x_n)$.

Kapitelübersicht

Kapitel 1: befasst sich mit kompakten Lie-Gruppen, ihren Darstellungen, ihrer kohomologischen Struktur und der kohomologischen Struktur ihrer klassifizierenden Räume. Im **Abschnitt 1.1** werden Konzepte der Darstellungstheorie wiederholt und für unsere Zwecke, die kohomologische Betrachtung, aufbereitet. Der **Abschnitt 1.2** wiederholt bekannte Resultate über die Kohomologie von G und BG, für G eine klassische Lie-Gruppe.
Während die gesamte Information einer Darstellung in den Gewichten codiert ist und so die Information über den induzierten Homomorphismus in der reellen Kohomologie hergeleitet werden kann, ist dies in der Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$ nicht immer so. Wir führen deshalb in **Abschnitt 1.3** eine Verallgemeinerung der Gewichte einer Darstellung ein, die p-Gweichte, die diesen Defekt korrigieren sollen. Ist T die Untergruppe der Diagonalmatrizen von $U(n)$ und $\iota : T \to U(n)$ die Inklusion, dann bildet die induzierte Abbildung $B\iota^* : \mathrm{H}^*(BU(n); \mathbb{F}) \to \mathrm{H}^*(BT; \mathbb{F})$ die Erzeuger von $\mathrm{H}^*(BU(n); \mathbb{F})$ auf die elementarsymmetrischen Polynome in $\mathrm{H}^*(BT; \mathbb{F})$ ab. Symmetrische Polynome tauchen so immer wieder bei der Betrachtung der Kohomologie homogener Räume auf, sodass wir in **Abschnitt 1.4** ein kombinatorisches Fundament legen wollen, welches uns das Rechnen mit speziellen symmetrischen Polynomen erleichtern soll. Gleichzeitig untersuchen wir die irreduziblen Darstellungen $SO(n) \to U(n)$, $Sp(n) \to U(2n)$ und $SO(3) \to SU(2n+1)$ und berechnen die induzierten Abbildungen in der Kohomologie der klassifizierenden Räume, für den späteren Gebrauch, explizit. Immer wieder tauchen Muster in den Gewichten einer Darstellung auf, die sich in der Kohomologie induzierten Abbildung widerspiegeln. Diesem Sachverhalt ist der **Abschnitt 1.5** gewidmet. Nicht alle Lie-Gruppen G sind von der Art, dass $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_p)$ eine verständliche Struktur besitzt. In manchen Fällen ist die Kohomologie-Algebra sogar völlig unbekannt. In dieser Arbeit wollen wir die schwersten Fälle von Lie-Gruppen außen vor lassen und treffen in **Abschnitt 1.6** eine breite Auswahl von Lie-Gruppen, die annehmbare Eigenschaften besitzen.

Kapitel 2: Befasst sich mit dem algebraischen Handwerkszeug, welches wir im Laufe dieser Arbeit benötigen werden. Es umfasst bekannte Ergebnisse genauso wie Weiterentwicklungen dieser Resultate. Der **Abschnitt 2.1** widmet sich der kommutativen Algebra und dem Funktor Tor als abgeleiteten Funktor des Tensorprodukts über differentiell graduierten Algebren. Mit der Bar-Konstruktion wird eine Möglichkeit der Berechnung gegeben. Der **Abschnitt 2.2** gibt bekannte Resultate über allgemeine Spektralsequenzen an und führt spezielle Spektralsequenzen auf; namentlich die Doppelkomplex-, die Eilenberg-Moore-, die Bockstein- und die Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz auf. Mit der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz werden auch die bekanntesten Bedingungen angegeben, die zum Zusammenbrechen der Spektralsequenz im E_2-Term führen. Der kurze **Abschnitt 2.3** beschäftigt sich mit Poincaré-Algebren, Algebren die Poincaré-Dualität erfüllen. Sie werden uns später eine zusätzliche Struktur in einigen Spektralsequenzen geben und manchmal ein Argument dafür liefern, dass die Vektorraum-Dimension einer Algebra durch 2 oder 4 teilbar ist.
Neben der Bar-Konstruktion gibt es weitere Möglichkeiten die Torsions-Produkte $\mathrm{Tor}_A(M,N)$ aus Abschnitt 2.1 zu berechnen, wenn A eine Polynomalgebra über $\mathbb{F}$ ist und $N = \mathbb{F}$ gilt. gestellt werden. Die in **Abschnitt 1.4** vorgestelle Koszul-Auflösung ist eine solche Variante. Wir werden in dieser Situation neue Resultate über den Koszul-Komplex und Folgerungen für $\mathrm{Tor}_A(M,\mathbb{F})$ hergeleitet. Wir zeigen: Ist $|M \otimes_A \mathbb{F}|$ endlich und $B := \mathrm{Tor}_A(M,\mathbb{F})$, dann ist $|B|$ eine endliche $\mathbb{F}$-Algebra und $Tot(B)^*$ erfüllt die Pointcaré-Dualität. Weiter werden wir Bedingungen angegeben, unter denen $|B|$ eine durch 2 bzw. 4 teilbare Zahl ist. Sei $\mathcal{K}$ ein Koszul-Komplex und freier $\mathbb{Z}$ Modul. Wir leiten eine Bockstein-Spektralsequenz her, die $\mathrm{H}(\mathcal{K} \otimes \mathbb{F}_p)$ und $\mathrm{H}(\mathcal{K} \otimes \mathbb{Q})$ in Verbindung setzt. Die im **Abschnitt 1.5** vorgestellte Tate-Auflösung verallgemeinert die zuvor besprochene Koszul-Auflösung. Sie lässt im Vergleich zur Koszul-Auflösung des vorherigen Abschnitt zu, dass A der Quotient einer Polynomalgebra modulo einer regulären Sequenz ist.

Kapitel 3: In diesem Kapitel wird die $\mathbb{F}$-Semicharakteristik einer Mannigfaltigkeit noch einmal definiert. In Abschnitt **3.1** werden einige der bekanntesten Resultate über die $\mathbb{F}$-Semicharakteristik vorgestellt. Abschnitt **3.2** zeigt einige kurze Folgerungen, die sich aus dem voran gegangenen Abschnitt und unseren bisherigen Überlegungen herleiten lassen und endet mit Beispielen und Bemerkungen.

Kapitel 4: Untersucht man die Kohomologie homogener Räume G/H dann finden sich immer wiederkehrende Strukturen. Meist esistiert eine Algebra A und eine nicht-triviale äußere Algebra Λ, sodass $\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{F}) \cong A \otimes \Lambda$ gilt. In solchen Fällen ist die $\mathbb{F}$-Semicharakteristik leicht als Null zu identifizieren. Oft ist $|\,\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{F})|$ sogar durch eine große Potenz von 2 teilbar. In diesem Kapitel werden nun einige Beispiele gezeigt, unter denen die gerade erwähnen Eigenschaften auftauchen und wann sie nicht zu finden sind.

Kapitel 5: In diesem Kapitel wollen wir folgenden Satz beweisen:

Satz. *Sei G eine Lie-Gruppe, für die $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[y_1,\ldots,y_n]$ eine Polynomalgebra ist und sei $H \subset G$, sodass $y_n = 0 \in \mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_2)$ gilt. Dann gilt in der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zu Faserung $G/H \to BH \to BG$ mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$: Es existiert ein Element $e_n \in E_2^{-1,*}$, welches bis in den E_∞-Term überlebt und es gibt für $i \geq 2$ bigraduierte Algebren T_i, sodass $E_r \cong T_r \otimes \wedge(e_n)$ als bigraduierte Algebra gilt.*

$$\text{Für } t \in T_r \otimes 1 \text{ folgt } d_r(t) \in T_t \otimes 1.$$

Damit gibt es eine bigraduierte Algebra T_∞ und der E_∞-Term ist als bigraduierte Algebra isomorph zu $T_\infty \otimes \wedge(e_n)$.

Dieser Satz wird uns später in vielen Fällen auf die $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik von G/H schließen lassen. Das gesamte Kapitel beschäftigt sich mit dem Beweis des Satzes. Eine Übersicht über den langen Beweise findet sich am Anfang des Kapitels.

Kapitel 6: Dieses Kapitel nutzt die algebraischen Möglichkeiten, die bis zu diesem Zeitpunkt hergeleitet sind um die $\mathbb{F}_p$-Semicharakteristik verschiedener homogener Räume zu betrachten. Die $\mathbb{F}_p$-Semicharakteristk bietet im Fall $p = 2$ noch viele weiße Flecken auf der Landkarte und so behandelt dieses Kapitel stichprobenartig verschiedenste Fälle, für die die reelle oder $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristk bereits bekannt ist, die $\mathbb{F}_p$-Semicharakteristk hingegen nicht. Im **Abschnitt 6.1** wollen wir unsere Techniken jedoch erst einmal testen und eine altbekannte Aussage über die Euler-Charakteristik homogener Räume beweisen. In **Abschnitt 6.2** folgen dann Aussagen über die $\mathbb{F}_p$-Semicharakteristik in vier speziellen Fällen, in denen bisher keine Aussagen existierten.

Von den vielen Arbeiten über die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz stechen einige besonderes heraus. Jede von ihnen besitzt besondere Merkmale, mit denen sie sich gegenüber den anderen abgrenzt. Dies ist zum einen die Arbeit [Mun74] die das Zusammenbrechen der Spektralsequenz unter den allgemeinsten algebraischen Voraussetzungen vorhersagt. Die Arbeit [Wol77], die das Zusammenbrechen der Spektralsequenz zur Faserung $G/H \to BH \to BG$ in recht beschränkten Fällen bestimmt, aber fast ausschließlich geometrisch argumentiert. Die Arbeit [Smi67] die den Fokus auf die homologische und nicht die kohomologische Eilenberg-Moore-Spektralsequenz legt. Und die Arbeit [GM74] die es ermöglich die Differentiale der Spektralsequenz genauer zu untersuchen.

Kapitel 7: Die Arbeit [GM74] steht im Zentrum der Betrachtung. Durch einen Ansatz der sich von den sonstigen zuvor genannten Arbeiten unterscheidet, bietet die Arbeit eine neue Betrachtungsweise der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz. Während manches schwerer zu untersuchen ist, wird auch manches leichter und hier ist der Punkt an dem wir ansetzen wollen. **Abschnitt 7.1** wiederholt Definitionen und zentrale Aussagen der Arbeit [GM74] um im Folgenden leichteren Zugriff auf die Ergebnisse zu bieten. Während sich Kapitel 5 damit beschäftig, was über die Differentiale der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zu Faserung $G/H \to BH \to BG$ zu sagen ist, wenn $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2)$ eine Polynomalgebra ist, widmet sich **Abschnitt 7.1.1** dem Fall, dass $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2)$ eine Polynom Algebra geteilt durch ein reguläres Ideal ist. Dieser Fall tritt insbesondere auf, wenn $G = Spin(n)$ gilt. Der gesamte Abschnitt besteht aus dem langen Beweis, der letztendlich handliche Resultate über das d_2 Differential liefern wird. Der **Abschnitt 7.2** führt kurz Notation ein, die wir später in **Abschnitt 7.3**

brauchen werden um ein neues Produkt zu definieren. Das sogenannte $\cup_1$-Produkt ist ein spezielles Produkt auf $\mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^n;\mathbb{F}_2)$, der Kohomologie des klassifizierenden Raumes einer elementarabelschen 2-Gruppe, welches die Berechnung einzelner Differentiale in der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung $G/\mathbb{Z}_2^n \to B\mathbb{Z}_2^n \to BG$ ermöglicht. Wir folgen zur Definition des $\cup_1$-Produktes den Anleitungen von [GM74]. In **Abschnitt 7.4** werden wir einige gebräuchliche Rechnungen mit den $\cup_1$-Produkten vorführen, die wir in **Abschnitt 7.5** nutzen werden um Bedingungen aufzuführen, die zum Zusammenbrechen der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz führen. Insbesondere betrachten wir den eher unerforschten Fall von homogenen Räumen $X = G/\mathbb{Z}_2^n$; sowohl die Kohomologie, als auch das Verhalten der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz ist bisher wenig bis gar nicht beschrieben.

Kapitel 8: Diese Kapitel befasst sich mit einem Resultat aus [Sin82]: Für einen homogenen Raum $SU(n)/G$ mit ungerader Dimension, kann unter schwachen technischen Bedingungen, eine genaue Aussage über die $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik gemacht werden. Im Zuge des **Abschnittes 8.1** werden wir zeigen, dass auch diese Bedingungen fallen gelassen werden können und wir so exakte Aussagen über die $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik von $SU(n)/G$ treffen können. Genauer:

Satz. *Ist $\rho : G \to SU(n)$ eine Darstellung von G und ist $\dim SU(n)/\rho$ ungerade, dann ist die Semicharakteristik von $SU(n)/\rho$ über $\mathbb{F}_2$ gleich Null oder $SU(n)/\rho$ ist homöomorph zu $SU(n)/(SU(k) \times SU(n-k))$ oder einer Sphäre.*

Der **Abschnitt 8.2** beginnt damit die Methoden aus [Sin82] auf den Fall $SO(n)/H$ und $Sp(n)/H$ zu übertragen und kommt zum Resultat:

Satz. *Ist $\rho : G \to SO(n)$ eine irreduzible, reelle Darstellung und ist $\dim SO(n)/\rho$ ungerade, dann ist die Semicharakteristik von $SO(n)/\rho$ über $\mathbb{F}_2$ gleich Null. Ist $\rho : G \to Sp(n)$ eine irreduzible, symplektische Darstellung und ist $\dim Sp(n)/G$ ungerade, dann ist die Semicharakteristik von $Sp(n)/\rho$ über $\mathbb{F}_2$ gleich Null oder $Sp(n)/G$ ist homöomorph zu $Sp(4)/\rho$, mit $\rho : Sp(1)\times SO(4) \to Sp(4)$ der irreduzible, symplektische Darstellung.*

Im Fall $\rho : Sp(1) \times SO(4) \to Sp(4)$ irreduzibel und symplektisch können wir keine Aussage über $k(Sp(n)/\rho;\mathbb{F}_2)$ treffen. Wir schließen den Abschnitt damit, die ungewöhnliche Struktur von $\mathrm{H}^*(B\,\mathrm{Bild}\,\rho;\mathbb{F}_2)$ zu untersuchen.

Kapitel 9: untersucht die Lie-Gruppen $PSp(2n+1)$, ihre klassifizierenden Räume und ihre 2-Tori. Die Algebra $\mathrm{H}^*(PSp(2n+1);\mathbb{F}_2)$ ist eine Polynomalgebra. In **Abschnitt 9.1** sei Q ein spezieller maximaler 2-Torus. Wir werden zeigen, dass der Homomorphismus $\mathrm{H}^*(BPSp(2n+1);\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$ einige besondere Eigenschaften besitzt, insbesondere bilden die Erzeuger von $\mathrm{H}^*(BPSp(2n+1);\mathbb{F}_2)$ eine reguläre Sequenz in $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$. Später werden wir zeigen, dass die homogenen Räume die aus komplexen, reellen oder symplektischen Darstellungen entstehen eine verschwindende $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik haben. In **Abschnitt 9.2** werden wir folgenden Satz zeigen:

Satz. *Ist $H' \subset Sp(2n+1)$ eine abgeschlossene Untergruppe, mit $-1 \notin H'$ und ist H die induzierte Untergruppe von $PSp(2n+1)$, dann ist $k(PSp(2n+1)/H;\mathbb{F}_2) = 0$.*

Kapitel 10: Wir widmen und den Lie-Gruppen $Spin(n)$. Zuerst fassen wir bekannte Resultate zur Kohomologie von $Spin(n)$ und $BSpin(n)$ zusammen. Der **Abschnitt 10.1** untersucht die maximalen 2-Tori von $Spin(n)$, $n \geq 10$. Wir zeigen, dass es im Gegensatz zu vielen anderen Lie-Gruppen mindestens zwei Konjugationsklassen von 2-Tori gibt. Wir werden sogar zeigen, dass es in $Spin(n)$ zwei 2-Tori Q_1 und Q_2 gibt, sodass $Spin(n)/Q_1$ und $Spin(n)/Q_2$ nicht homöomorph zueinander sind. Dennoch wird immer gelten, dass für jeden 2-Torus Q in $Spin(n)$ mit $-1 \in Q$ die $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik von $Spin(n)/Q$ verschwindet, falls $\dim Spin(n) = \dim Spin(n)/Q$ ungerade ist.

Der **Abschnitt 10.2** gibt für Untergruppen $G \subset SU(n) \subset Spin(2n)$ an, wie sich die Algebra $\mathrm{H}^*(Spin(2n)/G;\mathbb{F}_2)$ in Abhängigkeit von $\mathrm{H}^*(SU(n)/G;\mathbb{F}_2)$ verhält. Genauer:

Satz. *Sei G eine abgeschlossene Untergruppe von $SU(n)$. Dann ist*

$$\mathrm{H}^*(Spin(n')/G;\mathbb{F}_2) \cong \Lambda \otimes \mathrm{H}^*(SU(n)/G;\mathbb{F}_2)$$

als graduierter $\mathbb{F}_2$-Modul, für $n \geq 5, n' \geq 2n$ und Λ eine nicht-trivialen äußere Algebra.

Diese Erkenntnis lässt uns darauf leicht folgern, dass $|\,\mathrm{H}^*(Spin(n)/G;\mathbb{F}_2)|$ im Allgemeinen durch 'größere' Potenzen von 2 teilbar ist und somit, im Fällen in denen $Spin(n')/G$ ungerade Dimension besitzt, die $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik verschwindet. In **Abschnitt 10.3** können wir weiter noch folgern, dass für $\dim Spin(n')/G = 4k+1$ die Semicharakteristik unabhängig vom Körper $\mathbb{F}_p$ gleich Null ist. Und wir werden beweisen können, dass gilt

Satz. *Sei Q ein 2-Torus und T ein Torus in $Spin(2n)$ und sei $\dim Spin(2n)/Q$ bzw. $\dim Spin(2n)/T$ ungerade, dann gilt*

$$k(Spin(2n)/Q;\mathbb{F}_2) = 0$$

bzw.

$$k(Spin(2n)/T;\mathbb{F}_2) = 0.$$

Kapitel 11: Diese Kapitel widmet sich der Tatsache, dass $Spin(10)$ zwei Konjugationsklassen von maximalen 2-Tori besitzt. Wir werden die Abbildung $B\rho^*$: $\mathrm{H}^*(BSU(16);\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(BSpin(10);\mathbb{F}_2)$, die durch die Spin-Darstellung $\rho : Spin(10) \to SU(16)$ induziert wird, bestimmen. Erst aufwendige Rechnungen und genau Analyse der beiden 2-Tori wird zu einem Ergebnis führen. Verblüffenderweise zeigt sich entgegen aller genannten Komplikationen, dass die Struktur von $\mathrm{H}^*(SU(16)/Spin(10);\mathbb{F}_2)$ recht einfach ist.

Kapitel 12: Dieses Kapitel gibt Anregungen, wie die in dieser Arbeit hergeleiteten Methoden genutzt werden können um nicht nur $\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{F}_p)$ zu berechnen, sondern auch um Aussagen über $K^*(G/H;\mathbb{F}_p)$ zu treffen, der K-Theorie mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$.

Kapitel 13: HIer zeigen wir einige offene Probleme auf, die im Laufe dieser Arbeit zum Vorschein gekommen sind. Sie sollen eine Inspiration für weitere Untersuchungen geben.

Danksagung

Ich bedanke mich herzlich bei Herrn Professor Dr. Wilhelm Singhof für seine hervorragende Betreuung und das interessante Thema. Er ist immer bereit gewesen mir bei allen Fragen zu helfen, seien sie mathematisch oder nicht-mathematisch gewesen.

Daniel Appel, Ferit Deniz, Christian Liedtke und Mark Ullmann möchte ich für das Interesse an meiner Arbeit und den Kommentaren zur schriftlichen Fassung danken.

Besonders möchte ich meinen Eltern Rolf und Angelika Löffelsend danken, dass sie mir das Studium der Mathematik und diese Arbeit ermöglich haben. Bei meinen Freunden Alexander Düfert und Thomas Decker bedanke ich mich für all die motivierenden Gespräche. Nicht zuletzt bedanke ich mich bei Viktoria Baur, die mir in den schweren Stunden, die mit dieser Arbeit einhergegangen sind, immer zur Seite gestanden hat.

Kapitel 1

Die Topologie kompakter Lie-Gruppen

Dieses Kapitel setzt die Grundlagen der Darstellungstheorie kompakter Lie-Gruppen voraus, wie sie zum Beispiel in [BtD85] zu finden sind. Die Serre-Spektralsequenz wird ebenfalls als bekannt vorausgesetzt, sie wird zum Beispiel in [McC01, §5] beschrieben. Wir werden zudem oft mit dem klassifizierenden Raum BG einer Lie-Gruppe G arbeiten; einen Einstig in die Theorie der klassifizierenden Räume bietet [Hus94, §4]. Als letztes ist es hilfreich aber nicht notwendig ein wenig Wissen über Hopf-Algebren zu besitzen, wie es unteranderem in [MM65] beschrieben ist.

Ist $\iota : H \hookrightarrow G$ ein Monomorphismus von Lie-Gruppen, dann trägt die induzierte Abbildung $\iota^* : \mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}) \to \mathrm{H}^*(H;\mathbb{F})$ nur wenig Information über ι. Zum Beispiel induziert die Inklusion $\iota : S^1 \to SU(2)$ die triviale Abbildung $\iota : \mathrm{H}^*(SU(2);\mathbb{F}) \to \mathrm{H}^*(S^1;\mathbb{F})$. Sei BG der klassifizierende Raum von G, dann induziert $\iota : H \hookrightarrow G$ eine Abbildung $B\iota : BH \hookrightarrow BG$. Der Homomorphismus $B\iota^* : \mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}) \to \mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F})$ trägt soviel Information, dass es in vielen Fällen ausreicht um $\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{F})$ zu bestimmen. Ist $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, dann kann mittels der Arbeiten von Cartan [Car50a] und [Car50b] und der Kenntnis der Abbildung $B\iota^*$ die Kohomologiealgebra $\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{R})$ vollständig bestimmt werden. Ist $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$, dann kann mittels der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz [McC01, 7] die Struktur von $\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{F}_p)$ gut approximiert werden; oft lässt sich die Struktur als graduierter Modul rechnerisch herleiten.

Motiviert durch diese Tatsache werden wir in diesem Kapitel für kompakte Lie-Gruppen G bekannte Resultate über $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{F})$ und $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F})$ zusammenfassen.

1.1 Darstellungen von kompakten Lie-Gruppen

Eine komplexe Darstellung einer kompakten Lie-Gruppe G auf einem endlich dimensionalem, komplexen Vektorraum V ist eine stetige Operation

$$\rho : G \times V \to V$$

von G auf V, sodass für alle $g \in G$ die Abbildung $l_g : v \mapsto \rho(g, v)$ linear ist. Wie in [BtD85, II.2] werden wir reelle und quarternionische Darstellungen als komplexe Darstellungen mit zusätzlicher Struktur betrachten: Eine Darstellung V besitzt eine reelle Struktur, wenn es eine konjugiert lineare G-äquivariante Abbildung $\mathcal{J} : V \to V$ gibt, mit $\mathcal{J}^2 = \mathrm{id}$. Eine Darstellung V besitzt eine quarternionische Struktur, wenn es eine konjugiert lineare G-äquivariante Abbildung $\mathcal{J} : V \to V$ gibt, mit $\mathcal{J}^2 = -\mathrm{id}$. Da G kompakt ist, können wir nach [BtD85, III] ein komplexe Darstellung ρ als Homomorphismus von Lie-Gruppen $\rho : G \to U(n)$ betrachten, den wir ebenfalls als Darstellung bezeichnen. Ist G halb-einfach, so können wir ρ sogar als Homomorphismus $G \to SU(n)$ auffassen. Der induzierte Homomorphismus $\rho : G \to U(n)$ einer reellen bzw. symplektischen Darstellung faktorisiert über $O(n)$ bzw. $Sp(n/2)$. Die so entstehenden Abbildungen $\rho : G \to O(n)$ bzw. $\rho : G \to Sp(n/2)$ bezeichnen wir auch als reelle bzw. symplektische Darstellungen. Ist G zusammenhängend, so können wir eine reelle Darstellung als Homomorphismus $\rho : G \to SO(n)$ auffassen.

Der Torus

Der maximale Torus T_G einer kompakten Lie-Gruppe G ist eine wichtige Untergruppe von G. Eine Darstellung $\rho : G \to U(n)$ ist eindeutig bestimmen, wenn wir die Einschränkung auf den maximalen Torus $\rho|_{T_G} : T_G \to U(n)$ kennen. Wir werden später beschreiben, wie uns die induzierte Abbildung $T_G \to T_{U(n)}$ oft reichen wird, um den Homomorphismus $\mathrm{H}^*(BU(n); \mathbb{F}) \to \mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F})$ bestimmen zu können. Erst einmal müssen wir die Kohomologie eines Torus T und seines klassifizierenden Raumes BT aber genauer untersuchen und die von einem Homomorphismus $T \to T'$ induzierte Abbildung $\mathrm{H}^*(BT'; \mathbb{F}) \to \mathrm{H}^*(BT; \mathbb{F})$ bestimmen.

Sei T ein Torus und $\exp : \mathfrak{V} \to T$ die universelle Überlagerung. Sei $\Gamma = \exp^{-1}(1)$ das Einheitsgitter in $\mathfrak{V}$ und $\Gamma^* := \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z})$, dann gilt

$$\Gamma^* \cong \mathrm{H}^1(T; \mathbb{Z})$$

und für einen kommutativen Ring R gilt

$$\Gamma^* \otimes R \cong \mathrm{H}^1(T; R).$$

Weiter identifizieren wir $\mathfrak{V}^*$ mit $\mathrm{H}^1(T, \mathbb{R})$ und Γ^* mit den ganzzahligen Linearformen auf $\mathfrak{V}$.

Seien T_i,T'_j als Lie-Gruppen isomorph zu S^1 und sei $T = \times_{i=1}^n T_i$ und $T' = \times_{j=1}^{n'} T'_j$. Es gilt $\mathrm{H}^*(T_i; \mathbb{Z}) = \wedge(x_i)$ und $\mathrm{H}^*(T'_j; \mathbb{Z}) = \wedge(x'_j)$. Die Algebra $\mathrm{H}^*(T; \mathbb{Z})$ ist nach der Künneth-Formel isomorph zu

$$\otimes_{i=1}^n \mathrm{H}^*(T_i; \mathbb{Z}) \cong \otimes_{i=1}^n \wedge (x_i) \cong \wedge(x_1, \ldots, x_n).$$

Für einen Homomorphismus $\psi : T \to T'$ gibt es $\alpha_{i,j} \in \mathbb{Z}$, sodass ψ gegeben ist durch

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (\prod_{i=1}^n t_i^{\alpha_{i,1}}, \ldots, \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha_{i,n}}).$$

Der Homomorphismus ψ indiziert einen Homomorphismus $\psi^* : \mathrm{H}^*(T'; \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(T; \mathbb{Z})$, der wie folgt gegeben ist:

$$\psi(x'_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} x_i$$

Die universelle Überlagerung von T und T' können wir mit $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ identifizieren. Die durch ψ induzierte Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist durch die Matrix $(\alpha_{i,j})$ gegeben.

Die Weyl-Gruppe

Sei $N_G(T_G)$ der Normalisator von T_G in G und $Z_G(T_G)$ der Zentralisator von T_G in G. Mit W_G bezeichnen wir die Weyl-Gruppe von G, die wir algebraisch als Quotient

$$W_G := N_G(T_G)/Z_G(T_G)$$

betrachten. Geometrisch sehen wir W_G als die Gruppe der Automorphismen

$$\left\{\varphi : T \to T \mid \varphi(t) = gtg^{-1} \text{ für } g \in G\right\}.$$

Gewichte

Sei $\rho : G \times V \to V$ eine Darstellung und $\lambda : T_G \to S^1$ ein Homomorphismus. Wir sagen, dass λ ein Gewicht von ρ ist, wenn

$$V_\lambda := \{v \in V \mid \rho(t) \cdot v = \lambda(t) \cdot v \text{ für alle } t \in T_G\}$$

nicht leer ist. Sei $P(\rho)$ die Menge der Gewichte von ρ. Nach [Bou05, IX.4.3] gilt

$$V = \bigoplus_{\lambda \in P(\rho)} V_\lambda$$

und W_G operiert auf $P(\rho)$ durch $w(\lambda) = \lambda \circ w^{-1}$. Ist $\mathfrak{V}_G$ die universelle Überlagerung von T_G, so werden wir λ häufig als Element in $\mathfrak{V}_G^*$ betrachten, sodass

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{V}_G \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\exp"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\exp"] \\
T_G \arrow[r, "\lambda"] & S^1
\end{tikzcd}$$

kommutiert. So betrachtet ist ein Gewicht eine ganzzahlige Linearform auf $\mathfrak{V}_G$.

Sei $\rho : G \to U(n)$ eine Darstellung und sei T_j der 1-dimensionale Torus der aus den Diagonalmatrizen besteht, die überall auf der Diagonalen den Wert 1 besitzen und nur an der j-ten Position einen Wert $t_j \in \mathbb{C}$, mit $|t_j| = 1$. Dann ist $T_{U(n)} = \times_{j=1}^n T_j$ ein maximaler Torus von $U(n)$ und wie in Abschnitt 1.1 besitzt $H^*(T_{U(n)}; \mathbb{Z})$ eine kanonische Basis (x'_j). Sei T_G ein maximaler Torus von G und sei ρ so gewählt, dass $\rho(T_G) \subset T_{U(n)}$ gilt. Sei (x_i) eine Basis von $\mathrm{H}^*(T_G\mathbb{Z})$, dann induziert ρ eine Abbildung $\rho^* : \mathrm{H}^*(T_{U(n)}; \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(T_G\mathbb{Z})$. Wir bezeichnen $w'_j := \rho^*(x'_j)$ als Gewicht von ρ bezüglich der Basis (x_i).

Der Zusammenhang zwischen beiden Definitionen gibt sich wie folgt: Sei ρ eine Darstellung von G, T_G ein maximaler Torus von G und w'_j ein Gewicht von ρ bzgl. einer Basis (x'_j) von $\mathrm{H}^*(T_G; \mathbb{Z})$. Ist $t \in T_G$ und $t' \in \exp^{-1}(t) \subset \mathfrak{V}_G$, dann ist $\rho(t)$ gleich einer Diagonalmatrix mit Eigenwerten $e^{2\pi i w'_j(t')}$ und $w_j : T_G \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i w'_j(t')}$ ist wohldefiniert und ein Gewicht der Darstellung ρ im Sinne der ersten Beschreibung.

1.2 Die Kohomologie von Lie-Gruppen

Seien $H \subset G$ Lie-Gruppen. Die Kenntnis von $\mathrm{H}^*(G; \mathbb{F})$, sowie von $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F})$ und $\mathrm{H}^*(BH; \mathbb{F})$ können wir in folgenden Kapiteln oft nutzen um $\mathrm{H}^*(G/H; \mathbb{F})$ teilweise oder gar vollständig zu bestimmen. Für die klassischen Lie-Gruppen führt der nächste Abschnitt bekannte Ergebnisse über die Kohomologie von Lie-Gruppen in kompakter Form auf; die Verweise auf die Herkunft sind angeführt. Wir werden in diesem Abschnitt für die klassischen Lie-Gruppen ausgewählte maximale Tori angeben, die wir als Standardtori bezeichnen. Für diese Tori T lässt sich eine Basis von $\mathrm{H}^*(T;\mathbb{Z})$ wählen, sodass die Gewicht einer Darstellung bzgl. dieser Basis besonders leicht anzugeben sind.

Ist

$$F \to E \to B$$

ein Faserbündel, so identifizieren wir die Transgression τ wie üblich mit der Abbildung $d_{q+1} : E^{0,q}_{q+1} \to E^{q+1,0}_{q+1}$ in der Serre-Spektralsequenz. Für $u \in \mathrm{H}^q(F)$ und $v \in \mathrm{H}^{q+1}(B)$ schreiben wir $\tau(u) = v$, wenn $u \in E^{0,q}_{q+1} \subset \mathrm{H}^q(F)$ und $\tau(u) = [v] \in E^{q+1,0}_{q+1}$ gilt. Wir nennen $u \in \mathrm{H}^q(F)$ *transgressiv*, wenn es ein $v \in \mathrm{H}^{q+1}(B)$ gibt, mit $\tau(u) = v$. Sei EG der universelle Raum einer kompakten Lie-Gruppe G und BG der klassifizierende Raum. Wir nennen die Faserung

$$G \to EG \to BG$$

die *universelle Faserung*. Ist $u \in \mathrm{H}^q(G)$, dann sagen wir, dass u *universell transgessiv* ist, wenn es transgeressiv in der universellen Faserung ist. Ist u universell transgessiv, so ist u transgressiv in jeder Faserung mit Faser G [Bor67, 18]. Wir schreiben die Transgression in der universelle Faserung als τ_G.

1.2.1 Allgemeines

Sei G eine Lie-Gruppe und sei $m : G \times G \to G$ die Multiplikation auf G. Dann induziert m mittels des Künneth-Theorems eine Abbildung $m^* : \mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}) \to \mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}) \otimes \mathrm{H}^*(G;\mathbb{F})$. Diese Abbildung ist im Sinne von [MM65] ein Koprodukt auf $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{F})$. Zusammen mit dem $\cup$-Produkt wird $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{F})$ nach [Bor67, I.6] so zu einer Hopf-Algebra, mit einem einfachen System von Erzeugern.

Lie-Untergruppen

Sei $\iota : H \hookrightarrow G$ eine Inklusion. Die Abbildung ι induziert eine Abbildung $B\iota : BH \to BG$ und $B\iota$ induziert wiederum einen Homomorphismus $B\iota^* : \mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}) \to \mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F})$. Die $\mathbb{F}$-Algebra $\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F})$ wird durch den Homomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}) \times \mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}) & \to & \mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}) \\ (x,y) & \mapsto & x \cup B\iota^*(y) \end{array}$$

zu einem $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F})$-Rechtsmodul. Sei $y \in \mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F})$ und sei 1_H das Einselement von $\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F})$, dann schreiben wir für $1_H \cdot y$ meist nur y. Ist $B\iota^*$ injektiv, so sehen wir $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F})$ als Unteralgebra von $\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F})$, indem wir wie zuvor die Elemente $y \in \mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F})$ als Elemente $1_H \cdot y \in \mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F})$ betrachten.

Der Torus T

Sei T ein n-dimensionaler Torus. Es gilt wie zuvor $\mathrm{H}^*(T;\mathbb{Z}) \cong \wedge(x_1,\ldots,x_n)$. Weiter gilt nach [Bor55], dass $\mathrm{H}^*(BT;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t_1,\ldots,t_n]$, mit $Dt_i = 2$. Wir können die t_i so wählen, dass der Isomorphismus $\tau_T : \mathrm{H}^1(T;\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(BT;\mathbb{Z})$ die Elemente x_i auf t_i schickt. Ein Homomorphismus $\psi : T \to T'$ induziert den Homomorphismus

$$\psi^* : \mathrm{H}^*(T';\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(T;\mathbb{Z}).$$

Via der Abbildungen τ_T und $\tau_{T'}$ induziert ψ so auch eine Abbildung

$$B\psi^* : \mathrm{H}^*(BT';\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(BT;\mathbb{Z}).$$

Der p-Torus Q

Wie zuvor bezeichnen wir die Lie-Gruppe $Q := \mathbb{Z}_p^n$ als p-Torus und n als den Rang von Q. Es gilt

$$\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_p) \cong \otimes_{i=1}^n \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_p;\mathbb{F}_p) \cong \otimes_{i=1}^n \mathbb{F}_p[q_i] \cong \mathbb{F}_p[q_1,\dots,q_n].$$

Dabei ist $Dt_i = 1$. Ein Homomorphismus von p-Tori $\psi : Q \to Q'$ induziert einen Homomorphismes

$$B\psi^* : \mathrm{H}^*(BQ';\mathbb{F}_p) \to \mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_p).$$

1.2.2 Spezielle Lie-Gruppen

Die unitäre Gruppe $U(n)$ und die spezielle unitäre Gruppe $SU(n)$

Standardtorus: Die Matrizen $\mathrm{diag}(t_1,\dots,t_n)$ für $t_i \in S^1$ bilden einen maximalen Torus $T_{U(n)}$ in $U(n)$, den wir als Standardtorus von $U(n)$ bezeichnen. Der Standardtorus $T_{SU(n)}$ in $SU(n)$ sei $\{\mathrm{diag}(t_1,\dots,t_n)\}$ für $t_i \in S^1$ und $t_1 \cdot \dots \cdot t_n = 1$.

p-Standardtorus: Seien ξ_p die Menge der p-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$. Für $\alpha_i \in \xi_p$ bilden die Matrizen $\mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ den maximalen p-Standardtorus in $U(n)$. Die Elemente des p-Standardtorus in $SU(n)$ ist die Menge der Elemente $\mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ eines p-Standardtorus von $U(n)$, für die gilt $\prod_i \alpha_i = 1$.

Kohomologie: Die Lie-Gruppe $U(n)$ hat keine p Torsion, d.h $\mathrm{H}^*(U(n);\mathbb{Z})$ ist torsionsfrei [Bor55, 10]. Es gilt $\mathrm{H}^*(U(n),\mathbb{Z}) = \wedge_{\mathbb{Z}}(x_1,\dots,x_n)$ mit $Dx_i = 2i-1$. Seien c_i die i-ten Chern-Klassen des zur universellen Faserung assoziierten komplexen Vektorbündels über $BU(n)$. Es gilt $c_i = \tau_{U(n)}(x_i)$ und es gilt weiter $\mathrm{H}^*(BU(n),\mathbb{F}) = \mathbb{F}[c_1,\dots,c_n]$, wobei $Dc_i = Dx_i + 1 = 2i$ gilt [BH58, 9.1].

Ist T der Standardtorus von $U(n)$ und $\iota : T \hookrightarrow U(n)$ die kanonische Einbettung, dann ist $B\iota^*(c_i) = \sigma_i(t_1,\dots,t_n) \in \mathrm{H}^*(BT;\mathbb{F})$, die i-te elementarsymmetrische Funktion [Bor55, 10].

Auch die Lie-Gruppe $SU(n)$ besitzt keine p-Torsion und es gilt $\mathrm{H}^*(SU(n),\mathbb{Z}) = \wedge_{\mathbb{Z}}(x_2',\dots,x_n')$ mit $Dx_i = 2i-1$. Mit [Bor67, 18.1] wissen wir also, dass die Erzeuger x_i universell transgressiv sind. Sei $\iota : SU(n) \hookrightarrow U(n)$ die Inklusion, dann gilt $\iota^*(x_i) = x_i'$ für $2 \le i \le n$ und $\iota^*(x_1) = 0$. Zusammen mit dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
SU(n) \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & ESU(n) \arrow[r] \arrow[d] & BSU(n) \arrow[d] \\
U(n) \arrow[r] & EU(n) \arrow[r] & BU(n)
\end{tikzcd}$$

und der Serre-Spektralsequenz sehen wir also, dass wir $\mathrm{H}^*(BSU(n);\mathbb{Z})$ als

$$\mathrm{H}^*(BU(n);\mathbb{Z})/\operatorname{Kern}(B\iota^*) \cong \mathbb{Z}[c_2,\ldots,c_n]$$

betrachten können, wobei $\operatorname{Kern}(B\iota^*)$ das von c_1 erzeugte Ideal ist. Anstatt eine Basis von $\mathrm{H}^*(BT_{SU(n)};\mathbb{Z})$ zu wählen, wird es uns viel rechnerische Komplikationen ersparen, wenn wir $\mathrm{H}^*(BT_{SU(n)};\mathbb{Z})$ als $\mathrm{H}^*(BT_{U(n)};\mathbb{Z})/(t_1+\ldots+t_n)$ betrachten.

Die orthogonale Gruppe $O(n)$ und die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n)$

Die Gruppe $O(n)$ bzw. $SO(n)$ besitzt 2-Torsion für $n \geq 3$ [Bor55, 10]. Es lässt sich erahnen, dass die Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ von $O(n)$ und $BO(n)$ bzw. von $SO(n)$ und $BSO(n)$ recht kompliziert ist. Wie beschränken uns deshalb darauf die Kohomologie mit Koeffizienten in einem Körper anzugeben; wir betrachten den Fall $\mathbb{F}=\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}=\mathbb{F}_p$, $p\neq 2$ getrennt.

Standardtorus: In unserer Wahl des Standardtorus $T_{SO(n)}$ und $T_{O(n)}$ von $SO(n)$ und $O(n)$ halten wir uns an die üblichen Konventionen: Sei $\mu : S^1 \xrightarrow{\cong} SO(2)$ der kanonische Isomorphismus. Ist $n=2k$, so sei

$$\begin{pmatrix} \mu(\exp^{2\pi i t_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & \mu(\exp^{2\pi i t_k}) \end{pmatrix}$$

der Standardtorus. Und für $n=2k+1$ sei

$$\begin{pmatrix} \mu(\exp^{2\pi i t_1}) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu(\exp^{2\pi i t_k}) & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

der Standardtorus.

Kohomologie $\mathrm{H}^*(SO(2k+1),\mathbb{F}_p)$ **für** $p\neq 2$**:** Es gilt

$$\mathrm{H}^*(SO(2k+1);\mathbb{F}_p) = \wedge_{\mathbb{F}_p}(x_1,\ldots,x_k),$$

wobei $Dx_i = 4i-1$ gilt. Seien p_i die i-ten Pontrjagin-Klassen des zur universellen Faserung assoziierten reellen Vektorbündels über $BSO(2k+1)$. Es gilt $p_i = \tau_{SO(2k+1)}(x_i)$ und es gilt weiter $\mathrm{H}^*(BSO(2k+1),\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p[p_1,\ldots,p_k]$, mit $Dp_i = Dx_i+1 = 4i$ [BH58, 9.3].

Ist T der Standardtorus von $SO(2k+1)$ und $\iota : T \hookrightarrow SO(2k+1)$ die kanonische Einbettung, dann gilt $B\iota^*(p_i) = \sigma_i(t_1^2,\ldots,t_k^2)$, die i-te elementarsymmetrische Funktion in den Quadraten [Bor55, 10].

Kohomologie $\mathrm{H}^*(SO(2k),\mathbb{F}_p)$ **für** $p\neq 2$**:** In diesem Fall gilt

$$\mathrm{H}^*(SO(2k);\mathbb{F}_p) = \wedge_{\mathbb{F}_p}(x_1,\ldots,x_{k-1},u),$$

wobei $Dx_i = 4i-1$ und $Du = 2k-1$. Sei p_i die i-te Pontrjagin-Klasse des zur universellen Faserung assoziierten reellen Vektorbündels über $BSO(2k+1)$ und e

die Euler-Poincaré Klasse. Es gilt $p_i = \tau_{SO(2k)}(x_i)$ und $e = \tau_{SO(2k)}(u)$. Es gilt weiter $\mathrm{H}^*(BSO(2k), \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p\,[p_1, \ldots, p_{k-1}, e]$, wobei $Dp_i = Dx_i{+}1 = 4i$ und $De = Du{+}1 = 2k$ gilt [BH58, 9.3, 5.5].

Ist T der Standardtorus von $SO(2k)$ und $\iota : T \hookrightarrow SO(2k+1)$ die kanonische Einbettung, dann gilt $B\iota^*(p_i) = \sigma_i(t_1^2, \ldots, t_k^2)$, die i-te elementarsymmetrische Funktion in den Quadraten und $B\iota^*(e) = t_1 \cdot \ldots \cdot t_k$ [Bor55, 10].

2-Standardtorus: Für den 2-Standardtorus von $O(n)$ müssen wir keine Fallunterscheidung vornehmen und setzen ihn $\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ für $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$. Für den 2-Standardtorus von $SO(n)$ soll gelten $\prod \varepsilon_i = 1$.

Kohomologie $\mathrm{H}^*(SO(n), \mathbb{F}_2)$: Die Kohomologie von $SO(n)$ ist eine Hopf-Algebra der Form $\triangle_{\mathbb{F}_2}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ mit $Dx_i = i$ [Bor55, 10]. Die genaue Ringstruktur drückt sich etwas unübersichtlich wie folgt aus:

$$\mathrm{H}^*(SO(n); \mathbb{F}_2) \cong \bigotimes_{i \text{ ungerade}} \mathbb{F}_2\,[\beta_i]\,/(\beta_i^{p_i}),$$

wobei $D\beta_i = i$ und p_i die kleinste Potenz von 2 ist, sodass $p_i \cdot i \geq n$ [Hat02, 3.D]. Sei w_i die i-te Stiefel-Whitney-Klasse des zur universellen Faserung assoziierten reellen Vektorbündels über $BSO(2k+1)$. Es gilt $w_i = \tau_{SO(n)}(x_i)$. Es gilt weiter $\mathrm{H}^*(BSO(n), \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2\,[w_2, \ldots, w_n]$, wobei $Dw_i = i$ gilt [BH58, 9.2].

Ist $Q_{O(n),2}$ der 2-Standardtorus von $O(n)$ und $\iota : Q_{O(n),2} \hookrightarrow O(n)$ die kanonische Einbettung, dann gilt $B\iota^*(w_i) = \sigma_i(q_1, \ldots, q_n)$, die i-te elementarsymmetrische Funktion [Bor55, 10], wobei $q_j \in \mathrm{H}^*(BQ_{O(n),2}, \mathbb{F}_2)$. Wie auch schon bei der Betrachtung von $SU(n)$, identifizieren wir $\mathrm{H}^*(BSO(n); \mathbb{F}_2)$ mit $\mathrm{H}^*(BSO(n); \mathbb{F}_2)/w_1$. Und ebenso identifizieren $\mathrm{H}^*(BQ_{SO(n),2}; \mathbb{F}_2)$ mit $\mathrm{H}^*(BQ_{O(n),2}; \mathbb{F})/(q_1 + \ldots + q_n)$.

Die symplektische Gruppe $Sp(n)$

Standardtorus: Die Matrizen $\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)$, für t_i komplex und $|t_i| = 1$, bilden einen maximalen Torus in $Sp(n)$, den wir als Standardtorus von $Sp(n)$ bezeichnen.

2-Standardtorus: Die Matrizen $\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, mit $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, bilden einen maximalen 2-Torus in $Sp(n)$, den wir als 2-Standardtorus von $Sp(n)$ bezeichnen.

Kohomologie: Die Lie-Gruppe $Sp(n)$ hat keine p Torsion, d.h. $\mathrm{H}^*(Sp(n); \mathbb{Z})$ ist torsionsfrei. Es gilt $\mathrm{H}^*(Sp(n), \mathbb{Z}) = \wedge_{\mathbb{Z}}(x_1, \ldots, x_n)$ mit $Dx_i = 4i - 1$. Sei p_i die i-te Pontrjagin-Klasse des des zur universellen Faserung assoziierten reellen Vektorbündels über über $BSp(n)$. Es gilt $p_i = \tau_{Sp(n)}(x_i)$ und es gilt weiter $\mathrm{H}^*(BSp(n), \mathbb{F}) = \mathbb{F}\,[p_1, \ldots, p_n]$, wobei $Dp_i = Dx_i + 1 = 4i$ [BH58, 9.6].

Ist T der maximale Standardtorus von $Sp(n)$ und $\iota : T \hookrightarrow Sp(n)$ die kanonische Einbettung, dann gilt $B\iota^*(p_i) = \sigma_i(t_1^2, \ldots, t_n^2)$, die i-te elementarsymmetrische Funktion in den Quadraten.[Bor55, 10].

Andere Lie-Gruppen

Wir werden im Laufe dieser Arbeit noch weitere Lie-Gruppen untersuchen, namentlich: Die Spin-Gruppen $Spin(n)$ und die projektiven, symplektischen Gruppen $PSp(n)$. Im zweiten Fall beschränken wir uns auf ungerade n. In beiden Fällen ist die Kohomologie des klassifizierenden Raumes jedoch schwieriger zu beschreiben und wir widmen den beiden Gruppen deshalb eigene Kapitel.

1.3 Mehr über Gewichte

Wie werden in diesem Abschnitt die Notation von Gewichten noch ein weiteres mal an unsere Bedürfnisse anpassen. Wir werden so eine einheitliche Notation für p-Gewichte einführen können, einem Analogon von normalen Gewichten auf p-Tori, anstelle von Tori.

Sei G eine kompakte Lie-Gruppe und $\rho : G \to U(n)$ eine Darstellung. Sei T_G ein maximaler Torus von G, sodass $\rho : T_G \subset T_{U(n)}$ gilt. Sei (x'_j) die Standardbasis von $\mathrm{H}^*(T_{U(n)}; \mathbb{Z})$ und (x_i) eine Basis von $\mathrm{H}^*(T_G; \mathbb{Z})$ und seien (w'_j) die Gewichte von ρ bzgl. (x_i). Die (x'_j) induzieren via der Transgression eine Basis (t_j) von $\mathrm{H}^*(BT_{U(n)}; \mathbb{Z})$, genauso wie die (x_i) eine Basis (s_i) von $\mathrm{H}^*(BT_G; \mathbb{Z})$ induzieren. Die Darstellung ρ induziert einen Homomorphismus $\rho|_T : T_G \to T_{U(n)}$, die Einschränkung auf die Tori. Wir werden in Zukunft die Elemente $w_j := B\rho|_T(t_j) \in \mathrm{H}^*(BT_G; \mathbb{Z})$ als Gewichte bezeichnen. Es gilt $\tau_{T_G}(w'_j) = w_j$. Da wir häufig die Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{F}$ betrachten werden, werden wir auch die Projektion von w_j auf $\mathrm{H}^*(BT_G; \mathbb{F})$ als Gewichte bezeichnen und ebenfalls mit w_j benennen.

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] & U(n) \\ T_G \arrow[u, "\iota_G"] \arrow[r, "\rho|_T"] & T_{U(n)} \arrow[u, "\iota_{U(n)}"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert und induziert das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}) \arrow[d, "B\iota_G^*"'] & \mathrm{H}^*(BU(n); \mathbb{F}) \arrow[l, "B\rho^*"'] \arrow[d, "\iota_{BU(n)^*}"] \\ \mathrm{H}^*(BT_G; \mathbb{F}) & \mathrm{H}^*(BT_{U(n)}; \mathbb{F}). \arrow[l, "B\rho|_T^*"'] \end{tikzcd}$$

Die Gewicht einer Darstellung werden für uns, wie in der Darstellungtheorie, eine wichtige Rolle spielen. Denn die Abbildung $B\iota_{U(n)}^*$ ist uns bekannt. Kennen wir nun die Gewichte von ρ bzgl. einer Basis (s_i) von $\mathrm{H}^*(BT_G\mathbb{Z})$ und haben wir den Homomorphismus $B\iota_G^*$ verstanden, so können wir $B\rho^*$ häufig bestimmen. Es wird Situationen geben, in denen wir trotz all dieses Wissen nicht auf $B\rho^*$ schließen können, z.B. wenn $B\iota_G^*$ nicht injektiv ist. Dies tritt zum Beispiel im Fall $G = Spin(n), n \geq 10$ auf.

Sei $Q_{U(n),p}$ der p-Standardtorus von $U(n)$ und sei $q_j \in \mathrm{H}^*(BQ_{U(n),p}; \mathbb{F}_p)$ der Erzeuger der zu $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, \alpha_i, 1, \dots, 1)$, α_i an der i-ten Position, assoziiert ist. Sei $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_p)$ eine Polynomalgebra, dann sind nach [Qui71b] alle maximalen p-Tori in G konjugiert zueinander. Sei $Q_{G,p}$ ein maximaler p-Torus, sodass $\rho(Q_{G,p}) \subset Q_{U(n),p}$ gilt. Die Darstellung ρ induziert einen Homomorphismus $\rho|_Q : Q_{G,p} \to Q_{U(n),p}$ und dieser den Homomorphismus $B\rho|_Q^* : \mathrm{H}^*(BQ_{U(n)};\mathbb{F}_p) \to \mathrm{H}^*(BQ_G;\mathbb{F}_p)$. Sei (r_i) eine Basis von $\mathrm{H}^*(BQ_G;\mathbb{F}_p)$, dann bezeichnen wir $w_j := B\rho|_Q(q_j) \in \mathrm{H}^*(BQ_G;\mathbb{F}_p)$ als p-Gewicht von ρ bzgl. der Basis (r_i).

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] & U(n) \\ Q_{G,p} \arrow[u, "\iota_G"] \arrow[r, "\rho|_T"] & Q_{U(n),p} \arrow[u, "\iota_{U(n)}"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert und induziert das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}) \arrow[d, "B\iota_G^*"'] & \mathrm{H}^*(BU(n);\mathbb{F}) \arrow[l, "B\rho^*"'] \arrow[d, "B\iota_{U(n)}^*"] \\ \mathrm{H}^*(BQ_{G,p};\mathbb{F}) & \mathrm{H}^*(BQ_{U(n),p};\mathbb{F}). \arrow[l, "B\rho|_Q^*"'] \end{tikzcd}$$

Wie auch schon bei dem normalen Torus, können wir in manchem Fällen durch die Kenntnis der p-Gewichte und der Homomorphismen $B\iota_G^*$ und $B\iota_{U(n)}^*$ den Homomorphismus $B\rho^*$ bestimmen. Insbesondere in den Fällen, in denen ein maximaler p-Torus nicht in einen maximalen Torus einzubetten ist, wird $B\iota^* : \mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_p) \to \mathrm{H}^*(BT_G;\mathbb{F}_p)$ nicht injektiv sein. Aber in manchen dieser Fälle ist $B\iota^* : \mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_p) \to \mathrm{H}^*(BQ_{G,p};\mathbb{F}_p)$ injektiv. Zwei Beispiel für diese Situation sind $G = SO(n), p = 2$ oder $G = Spin(n), n = 7, 8, 9, p = 2$. Deshalb wird auch die Studie von p-Gewichten immer wieder eine Rolle spielen. Die p-Gewichte sind leider nicht immer aus den Gewichten herzuleiten und auch nicht aus der Darstellungstheorie abzulesen. Ein Beispiel werden wir in Abschnitt 1.4.2 sehen.

1.4 Spezielle Darstellungen

Ist $\rho : G \to U(2n)$ eine komplexe Darstellung mit symplektischer Struktur, dann faktorisiert ρ über $Sp(n)$; das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\rho'"'] & U(2n) \\ & Sp(n) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

Dabei ist $\iota : Sp(n) \to U(2n)$ die Inklusion. Wir werden im Folgenden sehen, dass der Homomorphismus $\mathrm{H}^*(BU(2n);\mathbb{F}_p) \to \mathrm{H}^*(BSp(n);\mathbb{F}_p)$ surjektiv ist. Kennen wir also $B\rho^*$, dann können wir auch leicht $B\rho'^*$ bestimmen.

Ist $\rho : G \to U(n)$ eine komplexe Darstellung mit reeller Struktur, dann faktorisiert ρ über $SO(n)$; das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\rho'"'] & U(n) \\ & SO(n) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

Ist $p \neq 2$ und ist n ungerade, dann werden wir sehen, dass der Homomorphismus $\mathrm{H}^*(BU(n);\mathbb{F}_p) \to \mathrm{H}^*(BSO(n);\mathbb{F}_p)$ surjektiv ist. Und wir können mit $B\rho^*$ leicht $B\rho'^*$ bestimmen. In allen anderen Fällen können wir durch einfache Zusatzüberlegungen auch den Homomorphismus $B\rho'^*$ von $B\rho^*$ ableiten.

Die Lie-Gruppe $SU(2)$ und ihr Quotient $SO(3) \cong SU(2)/\{1,-1\}$, bilden die kleinsten nicht abelschen Lie-Gruppen. Sie spielen in der Darstellungstheorie von Lie-Gruppen aus diesem Grund eine wichtige Rolle. Weshalb wir den irreduziblen Darstellungen $SU(2) \to SU(n)$ und den irreduziblen treuen Darstellungen $SO(3) \to SU(2n+1)$ mit reeller Struktur einen Abschnitt widmen, indem wir die induzierten Homomorphismen $\mathrm{H}^*(BSU(n);\mathbb{F}) \to \mathrm{H}^*(BSU(2);\mathbb{F})$ und $\mathrm{H}^*(BSU(2n+1);\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(BSO(3);\mathbb{F}_2)$ bestimmen wollen. Im zweiten Fall betrachten wie nur Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$, da für $p \neq 2$ die Isomorphie $\mathrm{H}^*(BSU(2);\mathbb{F}_p) \cong \mathrm{H}^*(BSO(3);\mathbb{F}_p)$ gilt [Bor55, 10].

1.4.1 Standarddarstellungen

Wir bezeichnen mit $\sigma_\ell(x_1,\dots,x_n)$ die ℓ-te elementarsymmetrische Funktion in n Veränderlichen und einigen uns auf die Konvention $\sigma_\ell(x_1,\dots,x_n) = 0$ für $\ell < 0$ und $\ell > n$ und $\sigma_0(x_1,\dots,x_n) = 1$. Wir werden im Laufe dieses Abschnittes einige kombinatorische Lemma beweisen, die durch die Fragstellung dieses Abschnittes motiviert sind, aber auch im weiteren immer wieder hilfreich sein werden.

Lemma 1.1.

$$\sigma_\ell(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=0}^{\ell} \sigma_i(x_1,\dots,x_k)\sigma_{\ell-i}(x_{k+1},\dots,x_n)$$

Beweis. Es gilt

$$\sigma_\ell(x_1,\dots,x_{n-1},x_n) = \sigma_\ell(x_1,\dots,x_{n-1}) + \sigma_{\ell-1}(x_1,\dots,x_{n-1}) \cdot x_n. \tag{1.1}$$

Angenommen, wir haben die Aussage bereits für k und n gezeigt, dann wollen wir sie nun für $k-1$ und n zeigen.

$$\begin{aligned}
&\sigma_\ell(x_1,\dots,x_n)\\
=\;& \sum_{i=0}^{\ell} \sigma_i(x_1,\dots,x_k)\sigma_{\ell-i}(x_{k+1},\dots,x_n)\\
\stackrel{(1.1)}{=}\;& \sum_{i=0}^{\ell} (\sigma_i(x_1,\dots,x_{k-1}) + \sigma_{i-1}(x_1,\dots,x_{k-1}) \cdot x_k)\sigma_{\ell-i}(x_{k+1},\dots,x_n)\\
=\;& \sum_{i=0}^{\ell} \sigma_i(x_1,\dots,x_{k-1})\sigma_{\ell-i}(x_{k+1},\dots,x_n)\\
&+ \sum_{i=0}^{\ell} \sigma_{i-1}(x_1,\dots,x_{k-1})\sigma_{\ell-i}(x_{k+1},\dots,x_n) \cdot x_k\\
=\;& \sum_{i=0}^{\ell} \sigma_i(x_1,\dots,x_{k-1})\sigma_{\ell-i}(x_{k+1},\dots,x_n)\\
&+ \sum_{i=0}^{\ell} \sigma_i(x_1,\dots,x_{k-1})\sigma_{\ell-(i+1)}(x_{k+1},\dots,x_n) \cdot x_k\\
=\;& \sum_{i=0}^{\ell} \sigma_i(x_1,\dots,x_{k-1})\sigma_{\ell-i}(x_{k+1},\dots,x_n) + \sigma_{\ell-(i+1)}(y_1,\dots,y_{k-1}) \cdot y_k)\\
\stackrel{(1.1)}{=}\;& \sum_{i=0}^{\ell} \sigma_l(x_1,\dots,x_{k-1})\sigma_{\ell-i}(x_k,\dots,x_n)
\end{aligned}$$

□

Standarddarstellung der symplektischen Gruppen.

Sei $\rho : Sp(n) \to U(2n)$ die kanonische Darstellung, sei $T_{Sp(n)}$ der Standardtorus von $Sp(n)$ und $T_U(2n)$ der von $U(2n)$. Dann gilt $\rho(T_{Sp(n)}) \subset T_{U(2n)}$. Und ρ eingeschränkt auf die Tori ist gegeben durch

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_n, t_n^{-1}).$$

Wollen wir nun $B\rho^* : H^*(BU(2n); \mathbb{Z}) \to H^*(BSp(n); \mathbb{Z})$ bestimmen, so betrachten wir wieder das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} Sp(n) \arrow[r] & U(2n) \\ T_{Sp(n)} \arrow[u, "\iota_{Sp(n)}"] \arrow[r] & T_{U(2n)}. \arrow[u, "\iota_{U(2n)}"'] \end{tikzcd}$$

Aus dem vorherigen Abschnitt kennen wir die Homomorphismen $B\iota^*_{Sp(n)}$ und $B\iota^*_{U(2n)}$. Seien (x'_i) die Erzeuger von $\mathrm{H}^*(BT_U; \mathbb{Z})$ und (x_j) die von $\mathrm{H}^*(BT_{Sp(n)}; \mathbb{Z})$. Der Homomorphismus $\mathrm{H}^*(BT_{U(2n)}; \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(BT_{Sp(n)}; \mathbb{Z})$ schickt die Elemente x'_{2i} auf x_i und die x'_{2i+1} auf $-x_i$. Wir interssieren uns also dafür, wie $\sigma_\ell(x_1, -x_1, \ldots, x_n, -x_n), \ell = \{1, \ldots, 2n\}$ sich durch symmetrische Polynome in $\mathrm{H}^*(BT_{Sp(n)}; \mathbb{Z})$ ausdrückt.

Lemma 1.2. *Sei $\sigma_i := \sigma_i(x_1, \ldots, x_n)$. Es gilt*

$$\sigma_\ell(x_1, \ldots, x_n, -x_1, \ldots, -x_n) = \begin{cases} 0 & \text{für } \ell \text{ ungerade} \\ (-1)^j \sigma_j^2 + 2 \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \sigma_i \sigma_{2j-i} & \text{für } \ell = 2j. \end{cases}$$

Beweis. Es gilt

$$\sigma_\ell(-x_1, \ldots, -x_n) = \begin{cases} -\sigma_i & \text{für } \ell \text{ ungerade} \\ \sigma_i & \text{für } \ell \text{ gerade.} \end{cases}$$

Aus dem vorherigen Lemma folgern wir:

$$\begin{aligned} & \sigma_\ell(x_1, \ldots, x_n, -x_1, \ldots, -x_n) \\ = \quad & \sum_{i=0}^{\ell} \sigma_i(-x_1, \ldots, -x_n) \sigma_{\ell-i}(x_1, \ldots, x_n) \\ = \quad & \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \sigma_i(x_1, \ldots, x_n) \sigma_{\ell-i}(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Für ℓ ungerade heben sich all unsere Summanden weg. Für $\ell = 2j$ gilt

$$\sum_{i=0}^{2j} (-1)^i \sigma_i \sigma_{2j-i} \quad = \quad 2 \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \sigma_i \sigma_{2j-i} + (-1)^j \sigma_j^2$$

□

Der Homomorphismus $B\iota_{Sp}^*$ schickt $p_\ell \in \mathrm{H}^*(BSp(n);\mathbb{Z})$ auf $\sigma_\ell(x_1^2,\ldots,x_n^2) \in \mathrm{H}^*(BT_{Sp};\mathbb{Z})$. Wir wollen nun berechnen, wie sich dies als Polynom von elementarsymmertischen Funktionen in $\mathrm{H}^*(BT_{Sp};\mathbb{Z})$ ausdrückt.

Lemma 1.3. *Sei $\sigma_i := \sigma_i(x_1,\ldots,x_n)$. Es gilt*

$$\sigma_\ell(x_1^2,\ldots,x_n^2) = \sigma_\ell^2 + 2\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^i\sigma_{\ell-i}\sigma_{\ell+i}.$$

Beweis. Es ist klar, dass die Formel für $n=\ell$ gilt:

$$\sigma_n(x_1^2,\ldots,x_n^2) = x_1^2\cdot\ldots\cdot x_n^2 = \sigma_\ell^2$$

Definiere $\sigma_i(n) := \sigma_i(x_1,\ldots,x_n)$. Sei die Formel für festes n und alle ℓ bereits bewiesen, dann zeigen wir die Gültigkeit für $n+1$. Wir zeigen genauer

$$\sigma_\ell(x_1^2,\ldots,x_{n+1}^2) = \sigma_\ell(n+1)^2 + 2\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^i\sigma_{\ell-i}(n+1)\sigma_{\ell+i}(n+1).$$

Die linke Seite können wir zu

$$\sigma_\ell(x_1^2,\ldots,x_n^2) + x_{n+1}^2\sigma_{\ell-1}(x_1^2,\ldots,x_n^2)$$

umformen, was nach Induktionsvoraussetzung gleich zu

$$\begin{aligned} & \sigma_\ell(n)^2 + 2\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^i\sigma_{\ell-i}(n)\sigma_{\ell+i}(n) \\ + \quad & x_{n+1}^2\sigma_{\ell-1}(n)^2 + 2x_{n+1}^2\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^i\sigma_{\ell-i-1}(n)\sigma_{\ell+i-1}(n) \end{aligned}$$

ist. Die rechte Seite ist die Summe aus

$$\begin{aligned} \sigma_\ell(n+1)^2 &= (\sigma_\ell(n) + x_{n+1}\sigma_{\ell-1}(n-1))^2 \\ &= \sigma_\ell(n)^2 + 2x_{n+1}\sigma_{\ell-1}(n)\sigma_\ell(n) + x_{n+1}^2\sigma_{\ell-1}(n)^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & 2\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^i\sigma_{\ell-i}(n+1)\sigma_{\ell+i}(n+1) \\ = \quad & 2\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^i\sigma_{\ell-i}(n)\sigma_{\ell+i}(n) \\ + \quad & 2x_{n+1}\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^i(\sigma_{\ell-i}(n)\sigma_{\ell+i-1}(n) + \sigma_{\ell-i-1}(n)\sigma_{\ell+i}(n)) \\ + \quad & 2x_{n+1}^2\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^i\sigma_{\ell-i-1}(n)\sigma_{\ell+i-1}(n). \end{aligned}$$

Vergleichen wir nun die beiden Umformungen, so bleibt uns nur noch zu zeigen, dass

$$0 = \sigma_{\ell-1}(n)\sigma_\ell(n) + \sum_{i=1}^{\ell}(-1)^i(\sigma_{\ell-i}(n)\sigma_{\ell+i-1}(n) + \sigma_{\ell-i-1}(n)\sigma_{\ell+i}(n))$$

gilt. Nun folgt $\sigma_{k-i-1}(n)\sigma_{k+i}(n) = 0$ für $i=\ell$ und der gesamte Term entpuppt sich als Teleskopsumme. $\square$

Verbinden wir das vorherige Lemma mit Lemma 1.2 so erhalten wir:

Korollar 1.4. $\sigma_{2\ell}(x_1, -x_1, \ldots, x_n, -x_n) = (-1)^\ell \sigma_\ell(x_1^2, \ldots, x_n^2)$.

Und wir können dem Korollar entnehmen, dass der Homomorphismus $B\rho_T^* \circ B\iota^*$: $\mathrm{H}^*(BSp(n);\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(BU(2n);\mathbb{Z})$ die Elemente $c_{2\ell}$ auf $(-1)^\ell B\iota_{Sp}^*(p_\ell)$ und die Elemente $c_{2\ell+1}$ auf Null schickt. Und so muss gelten:

$$B\rho^*(c_i) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \text{ ungerade} \\ (-1)^\ell p_\ell & \text{für } i = 2\ell. \end{cases}$$

Ist $\rho : G \to U(2n)$ eine komplexe Darstellung mit symplektischer Struktur und $\rho' : G \to Sp(n)$ die induzierte symplektische Darstellung, dann gilt also:

$$B\rho'^*(p_\ell) = (-1)^\ell B\rho^*(c_{2\ell})$$

Die Standarddarstellung der orthogonalen Gruppen.

Sei $\rho : O(n) \to U(n)$ die kanonische Darstellung, sei $T_{SO(n)}$ der Standardtorus von $SO(n)$ und $T_U(n)$ der von $U(n)$. Dann gilt $\rho(T_{SO(n)}) \subset T_{U(n)}$. Und ρ eingeschränkt auf die Tori ist für $n = 2k+1$ gegeben durch

$$(t_1, \ldots, t_k) \mapsto (t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_k, t_k^{-1}, 1)$$

und für $n = 2k$ durch

$$(t_1, \ldots, t_k) \mapsto (t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_k, t_k^{-1}).$$

Wie befinden uns also in einer Situation, die analog zu der ist, die wir auch schon im Unterabschnitt zu den symplektischen Gruppen behandelt haben.

Sei $p \neq 2$. Wieder mit Korollar 1.4 leiten wir den Homomorphismus $B\rho^* : \mathrm{H}^*(BU(2n+1);\mathbb{F}_p) \to \mathrm{H}^*(BO(2n+1);\mathbb{F}_p)$, induziert durch $\rho : SO(2n+1) \to U(2n+1)$, her. Es gilt:

$$B\rho^*(c_i) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \text{ ungerade} \\ (-1)^\ell p_\ell & \text{für } i = 2\ell. \end{cases}$$

Ist $\rho : G \to U(2n+1)$ eine komplexe Darstellung mit reeller Struktur und $\rho' : G \to O(2n+1)$ die induzierte reelle Darstellung, dann gilt also:

$$B\rho'^*(p_\ell) = (-1)^\ell B\rho^*(c_{2\ell})$$

Sei weiter $p \neq 2$. Wir berechnen, dass der Homomorphismus $B\rho^* : \mathrm{H}^*(BU(2n);\mathbb{F}_p) \to \mathrm{H}^*(BO(2n);\mathbb{F}_p)$ gegeben ist durch:

$$B\rho^*(c_i) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \text{ ungerade} \\ (-1)^\ell p_\ell & \text{für } i = 2\ell,\ \ell \neq n \\ e^2 & \text{für } i = 2n. \end{cases}$$

Ist $\rho : G \to U(2n)$ eine komplexe Darstellung mit reeller Struktur und $\rho' : G \to O(2n)$ die induzierte reelle Darstellung, dann gilt also:

$$B\rho'^*(p_\ell) = (-1)^\ell B\rho^*(c_{2\ell})$$

und

$$B\rho'^*(e^2) = (-1)^\ell B\rho^*(c_{2n}).$$

Es gilt $B\rho'^*(e^2) = B\rho'^*(e)^2$. Da für zwei Elemente a, b in einem Polynomring über $\mathbb{F}_p$ aus der Tatsache $a^2 = b^2$ folgt $a = \pm b$, muss es ein bis auf Vorzeichen eindeutiges Element $\sqrt{B\rho^*(c_{2n})} \in \mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_p)$, sodass $(\sqrt{B\rho^*(c_{2n})})^2 = B\rho^*(c_{2n})$ gilt. Und es folgt:

$$B\rho'^*(e) = \sqrt{B\rho^*(c_{2n})}.$$

Sei $p = 2$, sei $Q_{O(n),2}$ der 2-Standardtorus von $O(n)$ und $Q_{U(n),2}$ der von $U(n)$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
O(n) \arrow[r, "\rho"] & U(n) \\
Q_{O(n),2} \arrow[u, "\iota_{O(n)}"] \arrow[r, "\rho|_Q"] & Q_{U(n),2} \arrow[u, "\iota_{U(n)}"']
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Dabei ist $\rho|_Q$ die Identität. Wir kennen $B\iota^*_{O(n)}$ und $B\iota^*_{U(n)}$ und können so $B\rho^* : \mathrm{H}^*(BU(n); \mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(BO(n); \mathbb{F}_2)$, berechnen:

$$B\rho^*(c_i) = w_i^2$$

Ist $\rho : G \to U(n)$ eine komplexe Darstellung mit reeller Struktur und $\rho' : G \to SO(n)$ die induzierte reelle Darstellung, dann gilt analog zum vorherigen Absatz:

$$B\rho'^*(w_i) = \sqrt{B\rho^*(c_i)}.$$

Hier ist $\sqrt{B\rho^*(c_i)}$ eindeutig, da wir keine Wahl eine Vorzeichens über $\mathbb{F}_2$ haben.

Bemerkung 1.5. Mit den Rechnungen dieses Abschnittes können ebenso die Abbildungen $\mathrm{H}^*(BSp(n); \mathbb{F}) \to \mathrm{H}^*(BU(n); \mathbb{F})$ und $\mathrm{H}^*(BSO(2n); \mathbb{F}) \to \mathrm{H}^*(BSU(n); \mathbb{F})$ bestimmt werden. ◇

1.4.2 Darstellungen von $SU(2)$ und $SO(3)$

Die irreduziblen Darstellungen $\rho_n : SU(2) \to U(n)$ sind nach [BtD85, II.5] wie folgt beschrieben: Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SU(2),$$

sei $R = \mathbb{C}[x, y]$ der Polynomring in zwei Unbekannten und sei R_n der Vektorraum der homogenen Polynome im Grad $n - 1$. Sei $P(x, y) \in R_n$, dann operiert $SU(2)$ auf R_n durch $A \cdot P(x, y) = P(a_{11}x + a_{21}y, a_{12}x + a_{22}y)$. Sei $x \in \mathrm{H}^*(T_{SU(2)}; \mathbb{Z})$ ein Erzeuger, dann sind die Gewichte von ρ bzgl. x gegeben durch

$$nx, (n-2)x, \ldots, -(n-2)x, -nx \in \mathrm{H}^2(BT_{SU(2)}; \mathbb{Z}),$$

wie wir auch noch einmal detailliert in [BtD85, VI.5] nachlesen können. An dortiger Stelle sind Gewichte natürlich in der klassischen Beschreibung gegeben.

Da so die Abbidung $\mathrm{H}^*(BT_{U(n)}; \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(BT_{SU(2)}; \mathbb{Z})$ kennen, können wir jetzt ohne weiteres alle Informationen die wir über $B\rho^*$ wissen wollen herleiten. Nun wollen wir aber auch die irreduziblen Darstellungen $\rho : SO(3) \to U(n)$ untersuchen. Da für $p \neq 2$ die Isomorphie $\mathrm{H}^*(SU(2); \mathbb{F}_p) \cong \mathrm{H}^*(SO(3); \mathbb{F}_p)$ und $\mathrm{H}^*(BSU(2); \mathbb{F}_p) \cong$

$\mathrm{H}^*(BSO(3); \mathbb{F}_p)$ gilt, interessiert uns nur der Fall $p = 2$. Wir beginnen zuerst mit der Geometrie:

Die irreduziblen Darstellungen von $SO(3)$ sind gerade die irreduziblen Darstellungen $\rho_n : SU(2) \to U(n)$, die über $SO(3)$ faktorisieren. Also alle ρ_n mit n ungerade. Wir schauen uns nun zuerstes die Projektion $\rho : SU(2) \to SO(3)$ an und werden die Urbilder des 2-Standardtorus von $SO(3)$ suchen. Wir betrachten $SU(2) \cong Sp(1) \subset \mathbb{H}$. Sei $\mathbb{H}^*$ der rein imaginäre 3-dimensionale Unterraum von $\mathbb{H}$, dann definieren wir $\rho' : \mathbb{H} \times \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}^*$ durch $\rho(h,r) = hrh^{-1}$ und erhalten hieraus die induzierte Abbildung $\rho' : \mathbb{H} \to GL(3,\mathbb{R})$. Die Projektion ρ ergibt sich als Einschränkung von ρ' auf ρ, also $\rho = \rho'|_{SU(2)} : SU(2) \to SO(3)$.

Wir rechnen nun nach:

$$\begin{array}{rcl}
\rho(\{1,-1\}) & = & \mathrm{diag}(1,1,1) \\
\rho(\{i,-i\}) & = & \mathrm{diag}(1,-1,-1) \\
\rho(\{j,-j\}) & = & \mathrm{diag}(-1,1,-1) \\
\rho(\{k,-k\}) & = & \mathrm{diag}(-1,-1,1)
\end{array}$$

Sei $A_{2k+1} \in SU(2k+1)$ die Matrix a_{ij} gegeben durch

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & j = 2k+1-i \\ 1 & i = j, j \geq k+1 \\ -1 & i = j, j \leq k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiter definieren wir $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a, a_1', a_2', \ldots) \in U(4k+3)$ als die Diagonalmatrix (a_{ij}) mit

$$a_{ii} = \begin{cases} a_1 & \text{für } i \text{ ungerade und } i \leq 2k+1 \\ a_2 & \text{für } i \text{ gerade und } i \leq 2k+1 \\ a & \text{für } i = 2k+2 \\ a_1' & \text{für } i \text{ ungerade und } i \geq 2k+3 \\ a_2' & \text{für } i \text{ gerade und } i \geq 2k+3. \end{cases}$$

Bis auf konjugation mit A_{4k+3} gilt:

$$\begin{array}{rcl}
\rho_{4k+3}(\{-1,1\}) & = & E_{4k+3} \\
\rho_{4k+3}(\{-i,i\}) & = & \mathrm{diag}(-1,1,\ldots,-1,1,-1,\ldots) \\
\rho_{4k+3}(\{-j,j\}) & = & \mathrm{diag}(-1,1,\ldots,1,-1,1,\ldots) \\
\rho_{4k+3}(\{-k,k\}) & = & \mathrm{diag}(1,1,\ldots,-1,-1,-1,\ldots).
\end{array}$$

Folgend sei $\mathrm{diag}'(a_1, a_2, \ldots, a, a_1', a_2', \ldots) \in U(4k+1)$ die Diagonalmatrix (a_{ij}) mit

$$a_{ii} = \begin{cases} a_1 & \text{für } i \text{ ungerade und } i \leq 2kn \\ a_2 & \text{für } i \text{ gerade und } i \leq 2kn \\ a & \text{für } i = 2k+1 \\ a_1' & \text{für } i \text{ gerade und } i \geq 2k+2 \\ a_2' & \text{für } i \text{ ungerade und } i \geq 2k+2. \end{cases}$$

Bis auf Konjugation mit A_{4k+1} gilt:

$$\begin{array}{rcl} \rho_{4k+1}(\{-1,1\}) & = & E_{4k+1} \\ \rho_{4k+1}(\{-i,i\}) & = & \mathrm{diag}'(1,-1,\ldots,1,-1,1,\ldots) \\ \rho_{4k+1}(\{-j,j\}) & = & \mathrm{diag}'(-1,1,\ldots,1,-1,1,\ldots) \\ \rho_{4k+1}(\{-k,k\}) & = & \mathrm{diag}'(-1,-1,\ldots,1,1,1,\ldots). \end{array}$$

Sei Q der 2-Standardtorus von $SO(3)$ und Q^{2k+1} der von $U(2k+1)$. Sei

$$\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[x_1,x_2,x_3]/(x_1+x_2+x_3)$$

und

$$\mathrm{H}^*(BQ^{2k+1};\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[y_1,\ldots,y_{2k+1}].$$

Wir lesen nun ab:

Lemma 1.6. *Die* 2*-Gewichte der Darstellung* ρ_{4k+3} *bzgl. der Basis* x_1, x_2 *sind* k*-mal* 0 *und jeweils* $k+1$*-mal* x_1, x_2 *und* $x_1 + x_2 \in \mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$.

Und genauso gilt:

Lemma 1.7. *Die* 2*-Gewichte der Darstellung* ρ_{4k+1} *bzgl. der Basis* x_1, x_2 *sind* $k+1$*-mal* 0 *und jeweils* k*-mal* x_1, x_2 *und* $x_1 + x_2 \in \mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$.

Durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^*(BSO(3);\mathbb{F}_2) \arrow[d] & \mathrm{H}^*(BU(2k+1);\mathbb{F}_2) \arrow[l] \arrow[d] \\ \mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2) & \mathrm{H}^*(BQ^{2k1};\mathbb{F}_2), \arrow[l] \end{tikzcd}$$

können wir $B\rho^*_{2k+1}$ nun so genau berechnen, wir wir es benötigen.

1.5 Noch mehr über die Gewichte

Wir werden in diesem Abschnitt einige Aussagen zeigen, die es uns ermöglichen aus besonderen Eigenschaften der Gewichte einer Darstellung ρ etwas über den Homomorphismus $B\rho^*$ sagen zu können. Alle diese Aussagen lassen sich auch auf p-Gewichte übertragen, wir werden diesen Fall im Folgenden aber nicht mehr explizit ansprechen.

Sei (x'_i) eine Basis von $\mathrm{H}^*(BT_G;\mathbb{F})$ und seien $w_1, w_2 \in \mathrm{H}^*(BT_G;\mathbb{F})$ Gewichte der Darstellung ρ bzgl. der Basis (x'_i). Gilt $w_1 + w_2 = 0$, dann sagen wir, dass w_1 und w_2 invers zueinander sind. Dies ist kein ungewöhnlicher Sachverhalt. Eine jede selbst-konjugierte Darstellung besitzt nach [BtD85, II.6,VI.4] zwei Gewichte, die in $\mathrm{H}^2(BT_G;\mathbb{Z})$ invers zueinander sind. Aber auch in andern Situationen, insbesondere über einem Körper endlicher Charakteristik, tritt dieser Fall auf. Wir wollen nun schauen, wie sich der von $\psi : T_G \to U(n)$ induzierte Homomorphismus $B\psi^*$ verhält, wenn ein oder mehrere Gewichte invers zueinander sind.

Lemma 1.8. *Sei* $\sigma_\ell := \sigma_\ell(x_1,\ldots,x_n,y_1,-y_1,\ldots,y_k,-y_k)$*, dann gilt für* $2\ell+1 > n$

$$\sigma_{2\ell+1} \equiv 0 \quad \mathit{in} \quad \mathbb{F}\left[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_k\right]/\sigma_1,\ldots,\sigma_n.$$

Beweis. Wir wollen die Aussage nun für ℓ beweisen und nehmen an, dass für $\ell' < \ell$ bereits gezeigt ist

$$\sigma_{2\ell'+1} \equiv \sigma_{2\ell'+1}(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{in} \quad \mathbb{F}\left[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k\right]/(\sigma_1, \ldots, \sigma_{2\ell'}). \tag{1.2}$$

Aus (1.2) folgt insbesondere:

$$\sigma_{2\ell'+1}(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{F}\left[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k\right]/(\sigma_1, \ldots, \sigma_{2\ell'+1}). \tag{1.3}$$

In $\mathbb{F}\left[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k\right]/(\sigma_1, \ldots, \sigma_{2\ell})$ gilt damit:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{2\ell+1}(x_1, \ldots, x_n, y_1, -y_1, \ldots, y_k, -y_k) \\
= \sum_{i=0}^{2\ell+1} \; & \sigma_i(x_1, \ldots, x_n)\sigma_{2\ell+1-i}(y_1, -y_1, \ldots, y_k, -y_k) \\
\overset{1.2}{=} \sum_{i=0}^{\ell} \; & \sigma_{2i+1}(x_1, \ldots, x_n)\sigma_{2(\ell-i)}(y_1, -y_1, \ldots, y_k, -y_k) \\
\overset{(1.3)}{=} \; & \sigma_{2\ell+1}(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

Für $2\ell + 1 > n$ gilt $\sigma_{2\ell+1}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ und damit $\sigma_{2\ell+1} \equiv 0$. □

Wir können das vorherige Lemma anwenden um folgende Aussage zu beweisen:

Korollar 1.9. *Sei G eine Lie-Gruppe und sei $\rho : G \to U(n+2k)$ eine treue Darstellung. Seien $w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}, w'_{n+1}, \ldots, w_{n+k}, w'_{n+k} \in \mathrm{H}^*(BT_G; \mathbb{Z})$ die Gewichte der Darstellung ρ bezüglich einer Basis von $\mathrm{H}^*(BT_G; \mathbb{F}_p)$. Und sei w_{n+i} invers zu w'_{n+i}, dann gilt für $2\ell + 1 > n$:*

$$c_{2\ell+1} \equiv 0 \in \mathrm{H}^*(BT_G; \mathbb{F}_p)/(c_1, \ldots, c_n)$$

Korollar 1.10. *Gegeben die Situation des vorherigen Lemmas. Zudem sei der Homomorphismus $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_p) \to \mathrm{H}^*(BT_G; \mathbb{F}_p)$ injektiv, dann gilt:*

$$c_{2\ell+1} \equiv 0 \in \mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_p)/(c_1, \ldots, c_n)$$

Das kommende Lemma ist durch folgendes Situation motiviert: Seien $\rho' : G \to U(n)$ und $\psi : S^1 \to U(1)$, $\psi(s) = s^m, m \in \mathbb{Z}$ Darstellungen. Sei (x_i) eine Basis von $\mathrm{H}^*(BT_G; \mathbb{Z})$ und x ein Erzeuger von $\mathrm{H}^*(BS^1; \mathbb{Z})$. Seien $(w_j) \in \mathrm{H}^*(BT_G; \mathbb{Z})$ die Gewichte von ρ' bzgl. (x_i) und sei w das Gewicht von ψ bzgl. x. Die Gewichte der Darstellung $\rho := \rho' \otimes \psi : G \times S^1 \to U(n)$ bzgl. der Basis $x_1, \ldots, x_n, x$ sind gleich $(w_i + w) \in \mathrm{H}^*(BT_G \times BS^1; \mathbb{Z})$. Sei $\rho|_T : T_G \times S^1 \to T_{U(n)}$ die Einschränkung auf die Tori und seien (t_i) die Erzeiger von $\mathrm{H}^*(BT_{U(n)}; \mathbb{Z})$, dann gilt $B\rho|_T^*(t_i) = w_i + w$. Wie wollen nun ersteinmal analysieren, wie sich $\sigma_\ell(w_1 + w, \ldots, w_n + w)$ als Polynom in der Veränderlichen w über den symmetrischen Polynomen in den Veränderlichen (w_i) ausdrückt. Dafür beweisen wir erst ein technisches Lemma und führen es dann auf die Situation zurück, die wir betrachten wollen.

Lemma 1.11. *Es gilt*

$$\sigma_\ell(z_1 + z, \ldots, z_n + z) = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{n-i}{n-\ell} \sigma_i(z_1, \ldots, z_n) z^{\ell-i}, \tag{1.4}$$

in $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n, z]$.

Beweis. Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$ operiert auf $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$ und hält dabei die elementarsymmetrischen Polynome $\sigma_\ell(z_1, \ldots, z_n)$ fest, damit hält die Operation von $\mathcal{S}_n$ auf den ersten n Veränderlichen von $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n, z]$ auch die Polynome $\sigma_\ell(z_1 + z, \ldots, z_n + z)$ fest. So können wir $\sigma_\ell(z_1 + z, \ldots, z_n + z)$ als Polynom in einer Veränderlichen z und mit Koeffizienten in den symmetrischen Polynomnen betrachten. Weiter ist klar, dass die Summanden von $\sigma_\ell(z_1 + z, \ldots, z_n + z)$ Monome der Form $z_1^{\varepsilon_1} \ldots z_n^{\varepsilon_n} z^{\ell-i}$ sind, mit $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$ und $\sum \varepsilon_j = i$. Beides zusammen lässt uns folgern, dass gelten muss

$$\sigma_\ell(z_1 + z, \ldots, z_n + z) = \sum_{i=0}^{\ell} n_i \sigma_i(z_1, \ldots, z_n) z^{\ell-i},$$

für $n_l \in \mathbb{N}$ geeignet. Dieses n_l wollen wir nun bestimmen.

Wir zählen, dass $\sigma_\ell(z_1, \ldots, z_n)$ genau $\binom{n}{\ell}$ Summanden besitzt. Und

$$(z_{j_1} + z) \cdot \ldots \cdot (z_{j_\ell} + z)$$

hat $\binom{\ell}{i}$ Summanden der Form $z_1^{\varepsilon_1} \ldots z_n^{\varepsilon_n} z^{\ell-i}$. Damit hat $\sigma_\ell(z_1 + z, \ldots, z_n + z)$ genau $\binom{\ell}{i}\binom{n}{\ell}$ Summanden dieser Form. Weiter besitzt $\sigma_i(z_1, \ldots, z_n)$ gerade $\binom{n}{i}$ Summanden. Nun rechnen wir nach

$$\frac{\binom{n}{\ell}\binom{\ell}{i}}{\binom{n}{i}} = \binom{n-i}{n-\ell}$$

und es folgt $n_i = \binom{n-i}{n-\ell}$, also

$$\sigma_\ell(z_1 + z, \ldots, z_n + z) = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{n-i}{n-\ell} \sigma_i(z_1, \ldots, z_n) z^{\ell-i}.$$

□

Korollar 1.12. *Sei $Dx_i = Dx = 2$. Sei $w_1, \ldots, w_n, w \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k, x]$, mit $Dw_i = Dw = 2$. Es gilt*

$$\sigma_\ell(w_1 + w, \ldots, w_n + w) = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{n-i}{n-\ell} \sigma_i(w_1, \ldots, w_n) w^{\ell-i}.$$

Beweis. Sei $f : \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n, z] \to \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n, x]$ der Homomorphismus der z_i auf w_i schickt und z auf w. Wenden wir auf (1.4) den Homomorphismus f an, so beweist dies unsere Aussage. □

Aus diesem Korollar können wir nun eine geometrische Aussage herleiten und behalten dafür die vorherige Notation bei:

Lemma 1.13. *Sei R entweder $\mathbb{Z}$ oder ein Körper $\mathbb{F}_p$. Ist $\iota : T_G \hookrightarrow G$ die Inklusion und ist $B\iota^* : \mathrm{H}^*(BG; R) \to \mathrm{H}^*(BT_G; R)$ injektiv, dann folgt:*

$$B\rho(c_\ell) = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{n-i}{n-\ell} B\rho'(c_i) w^{\ell-i} \in \mathrm{H}^*(B(G \times S^1); R)$$

1.6 Typen von Lie-Gruppen

Sei G eine Lie-Gruppe. Wir haben in den vergangenen Abschnitten schon gesehen, dass $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F})$ manchmal eine Polynomalgebra ist. Es ist schwer eine Abschätzung darüber zu geben, wie häufig dieser Fall auftritt. Für viele kompakte Lie-Gruppen G ist $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F})$ bisher gänzlich unbekannt. Auf Grund der einfachen Struktur ist eine Polynomalgebra für und von einem rechnerischen Vorteil. Wir wollen die Lie-Gruppen die die Eigenschaft haben, dass $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F})$ eine Polynomalgebra ist deshalb besonders hervorheben.

Definition 1.14. Wir bezeichnen mit $LieP_p$ die Kategorie, die als Objekte die kompakte Lie-Gruppe G besitzt, für die $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_p)$ eine Polynomalgebra ist. Die Morphismen sind die Homomorphismen von Lie-Gruppen. ◇

Jede kompakte Lie-Gruppe ist nach [Bor55, 9] in $LieP_0$.

Die kompakten, zusammenhängenden, einfachen Lie-Gruppen G in $LieP_2$, sind durch [Kon75, 5.2] vollständig gegeben. Es sind die Gruppen:

- $SU(n)$, $Sp(n)$, für $n \geq 2$;
- $Spin(7)$, $Spin(8)$, $Spin(9)$;
- G_2, F_4;
- $SU(n)/C_l$, für $n \geq 3$ und l ungerade;
- $PSp(n)$ für n ungerade;
- $SO(n)$ für $n \geq 5$.

Wir haben zuvor schon häufiger gesehen, dass wenn $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_p) \to \mathrm{H}^*(BT_G;\mathbb{F}_p)$ injektiv ist, wir durch die Gewichte einer Darstellung $\rho : G \to U(n)$ und via des kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}) \arrow[d] & \mathrm{H}^*(BU(n);\mathbb{F}) \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathrm{H}^*(BT_G;\mathbb{F}) & \mathrm{H}^*(BT_{U(n)}G;\mathbb{F}) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

viel über $B\rho^*$ sagen können. In allen dem Autor bekannten Fällen, ist die Injektivität des Homomorphismus $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_p) \to \mathrm{H}^*(BT_G;\mathbb{F}_p)$ äquivalent zu einer noch besseren Eigenschaft, die wir nun definieren wollen. Wir brauchen jedoch zuerst ein wenig Notation aus der kommutativen Algebra:

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Seien $y_1, \ldots, y_n \in R$. Die Sequenz $y_1, \ldots, y_n$ wird *reguläre Sequenz der Länge* n genannt, wenn das Ideal $(y_1, \ldots, y_n) \neq R$ ist und für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Restklasse $\bar{y_k}$ von y_k in $R/(y_1, \ldots, y_{k-1})$, kein Nullteiler in $R/(y_1, \ldots, y_{k-1})$ ist. Sei R noethersch, $y_1, \ldots, y_n$ eine reguläre Sequenz in R und $\sigma \in \mathcal{S}_n$, dann ist nach [Eis95, 17.2] auch die Sequenz $y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}$ regulär.

Ist eine Lie-Gruppe $G \in LieP_p$, dann sind nach [Qui71b] alle maximalen p-Tori Q_G konjugiert zueinander. Analog zum Abschnitt 1.2.1 ist $\mathrm{H}^*(BQ_G;\mathbb{F}_p)$ ein $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_p)$-Modul. Wie zuvor betrachten wir einen 0-Torus als normalen Torus und $\mathbb{F}_0 = \mathbb{R}$.

Definition 1.15. Wir bezeichnen mit $LieQ_p$ die Kategorie, die als Objekte die kompakte Lie-Gruppe G besitzt, die folgende Eigenschaft haben: $G \in LieP_p$ und G besitzt einen maximalen p-Torus, sodass $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_p)$ und $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_p)$ die selbe Krull-Dimension besitzen. Zudem soll gelten: Sind $y_1,\dots,y_n$ die Erzeuger von $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_p)$ dann ist $y_1,\dots,y_n$ eine reguläre Sequenz in $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_p)$. Die Morphismen sind die Homomorphismen von Lie-Gruppen. $\diamond$

Die symmetrischen Polynome $\sigma_\ell(x_1,\dots,x_n), \ell = 1,\dots,n$ bilden eine reguläre Sequenz in $\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$. Damit können wir durch den Abschnitt 1.2.2 und das Lemma 1.17 sehen, dass die Elemente in der linken Spalte eine reguläre Sequenz in der Polynomalgebra der rechen Spalte bilden:

Elemente	Algebra	
$c_1,\dots,c_n$	$\mathrm{H}^*(BT_{U(n)};\mathbb{F}_p)$	
$p_1,\dots,p_n$	$\mathrm{H}^*(BT_{Sp(n)};\mathbb{F}_p)$	
$p_1,\dots,p_k$	$\mathrm{H}^*(BT_{SO(2k+1)};\mathbb{F}_p)$	$p \neq 2$
$p_1,\dots,p_{k-1},e$	$\mathrm{H}^*(BT_{SO(2k)};\mathbb{F}_p)$	$p \neq 2$
$w_1,\dots,w_n$	$\mathrm{H}^*(BQ_{SO(n)};\mathbb{F}_2)$	

Ist $G \in LieQ_p$, dann ist $G \in LieP_p$. Für $p = 0$ gilt auch die Umkehrung, wie wir gleich sehen werden.

Satz 1.16. *Ist $G \in LieP_2$ einfach, dann ist $G \in LieQ_2$*

Wir benötigen zuerst noch das Lemma [Eis95, 17.7]:

Lemma 1.17. *Ist $y_1,\dots,y_n$ eine reguläre Sequenz in $\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$, dann ist ebenso $y_1^{p_1},\dots,y_n^{p_n}$ mit $p_1,\dots,p_n \in \mathbb{N}$ eine reguläre Sequenz in $\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$.*

Beweis des Satzes. Sei $\sigma_i := \sigma_i(t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{F}[t_1,\dots,t_n]$, dann ist $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ eine reguläre Sequenz in $\mathbb{F}[t_1,\dots,t_n]$ für alle Körper $\mathbb{F}$, nach [Mac79, I.2]. Für die Lie-Gruppen $Sp(n)$, mit $n \geq 2$, $SU(n)/C_l$, mit $n \geq 3$ und l ungerade, sowie $SO(n)$ mit $n \geq 5$, können wir die Aussage aus dem Abschnitt 1.2.2 und dem vorherigen Lemma herleiten. Für die Lie-Gruppen $Spin(7)$, $Spin(8)$, $Spin(9)$ finden wir die Bestätigung in kommendem Korollar 11.1. Die Aussage für $PSp(n)$ für n ungerade sehen wir in Lemma 9.3. Dass F_4 und G_2 in $LieQ_2$ liegen, finden wir in [Bor61, 6.2] bestätigt. $\square$

Es ist anzunehmen, dass die Kategorie $LieP_p$ und $LieQ_p$ gleich sind. Ein Beweis hierfür steht jedoch aus. Zuletzt führen wir eine noch strengere Bedingung an eine Lie-Gruppe ein. Die Bedingung scheint im ersten Moment nicht mit den vorherigen vereinbar zu sein. Wir werden jedoch im Anschluss die Verbindung aufzeigen.

Definition 1.18. Mit $LieR_p$ bezeichnen wir die Kategorie der Lie-Gruppen G, sodass $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}_p)$ eine äußere Algebra erzeugt von Elementen in ungeraden Graden ist. $\diamond$

Das auch diese Eigenschaft nicht ungewöhnlich ist, zeigt das kommende Lemma.

Lemma 1.19. *Ist G eine kompakte Lie-Gruppe und hat $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{Z})$ keine p-Torsion, so ist $G \in LieR_p$.*

Der Beweis des Lemma folgt aus [Bor55, 9]. Im selben Artikel, zwei Kapitel später [Bor55, 11] können wir ablesen, welche kompakten Lie-Gruppen p-Torsion besitzen. Wir werden diese Information nicht benötigen und geben deshalb die Liste nicht an.

Den Kreis können wir nun durch [Bor55, 10] schließen: Die Weyl Gruppe $W(G)$ operiert auf dem maximalen Torus T_G von G und induziert eine Operation auf der Polynomalgebra $\mathrm{H}^*(BT_G;\mathbb{F})$. Ist $G \in LieR_p$ und $\iota : T_G \hookrightarrow G$ die Inklusion des Torus, so bildet $B\iota^*$ die Polynomalgebra $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F})$ isomorph auf $\mathrm{H}^*(BT_G;\mathbb{F})^{W(G)}$, den unter $W(G)$ invarianten Polynomen, ab. Insbesondere zeigt sich, dass $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F})$ selbst eine Polynomalgebra in der selben Anzahl von Veränderlichen wie $\mathrm{H}^*(BT_G;\mathbb{F})$ ist und so folgt: $G \in LieQ_p$

Kapitel 2

Algebraische Hilfsmittel

Dieses Kapitel enthält alle Hilfsmittel aus der kommutativen und homologischen Algebra, sowie der Theorie von Spektralsequenzen, die wir später benötigen werden. Dabei wird eine grundlegende Kenntnis der homologischen Algebra voraus gesetzt, wie sie in den ersten Kapiteln von [McL75] zu finden ist. Auch ein Verständnis der allgmeinen Theorie von Spektralsequenzen ist nötig, da eine Einführung in dieser Arbeit nicht gegeben wird. Hilfreich ist hier [McC01, §2].

2.1 Allgemeines

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Wir betrachten wir Polynomalgebren $R[y_1, \ldots, y_n]$ als graduierte Algebren über R. Es gelte stets $Dy_i \geq 1$, aber nicht notwendig $Dy_i = 1$. Wählen wir ein $a \in R[y_1, \ldots, y_n]$, so ist a homogen. Es sei $A^+ := \{a \in A \mid Da > 0\}$. Seien A und B Polynomalgebren und sei B ein A-Modul. Sei weiter $y \in A$ und 1_B das Eiselement von B, dann schreiben wir für $y \cdot 1_B \in B$ abkürzend y. Sei $A = R[y_1, \ldots, y_n]$ und B eine Polynomalgebra über R. Ist B ein A-Modul, dann sei $B/A := A/(y_1, \ldots, y_n)$.

2.1.1 Kommutative Algebra

Im vorangegangenen Kapitel haben wir bereits gesehen, dass reguläre Sequenzen ein wichtige Rolle spielen werden: Zum Beispiel um den von $\iota : H \hookrightarrow G$ induzierten Homomorphismus $B\iota^* : \mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}) \to \mathrm{H}^*(BH; \mathbb{F})$ zu bestimmen. Um später witere Untersuchungen machen zu können, ob eine Lie-Gruppe $G \in LieQ_p$ ist, wollen wir einige nützliche Aussagen beweisen. Seien $H \subset G$ Lie-Gruppen in $LieP_p$ und sei $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}) = \mathbb{F}[y_1, \ldots, y_n]$. In späteren Aussagen wird die Bedingung $|\,\mathrm{H}^*(BH; \mathbb{F})/(y_1, \ldots, y_n)| < \infty$ immer wieder von Wichtigkeit sein und auch der Untersuchung dieses Sachverhaltes ist dieser Abschnitt bestimmt.

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Seien $y_1, \ldots, y_n \in R$. Die Sequenz $y_1, \ldots, y_n$ wird *reguläre Sequenz der Länge* n genannt, wenn das Ideal $(y_1, \ldots, y_n) \neq R$ ist und für $k \in \{1, \ldots, n\}$, die Restklasse $\bar{y_k}$ von y_k in $R/(y_1, \ldots, y_{k-1})$, kein Nullteiler in $R/(y_1, \ldots, y_{k-1})$ ist.

Sei R noethersch und $y_1, \ldots, y_n$ eine reguläre Sequenz in R, nach [Eis95, 17.2] ist für jedes $\sigma \in \mathcal{S}_n$ die Sequenz $y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}$ regulär. Sei I ein Ideal in R. Wir sagen, dass I regulär ist, wenn es eine reguläre Sequenz $y_1, \ldots, y_n \in R$ gibt, sodass $(y_1, \ldots, y_n) = I$ gilt.

Lemma 2.1. *Sei $A = \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ und $(y_1, \ldots, y_n) \subset A$ mit $|A/(y_1, \ldots, y_n)| < \infty$, dann ist $y_1, \ldots, y_n$ eine reguläre Sequenz.*

Beweis. Da $|A/(y_1, \ldots, y_n)|$ endlich ist, gibt es $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ mit $x_1^{p_1}, \ldots, x_n^{p_n} \in (y_1, \ldots, y_n)$. Weiter ist $x_1^{p_1}, \ldots, x_n^{p_n}$ eine reguläre Sequenz. Nach [Eis95, 17.7] ist für jeden Ring A und jedes echte Ideal $(y_1, \ldots, y_n) \subset A$, das eine reguläre Sequenz der Länge n enthält, die Sequenz $y_1, \ldots, y_n$ selbst regulär. Somit folgt die Aussage. $\square$

Lemma 2.2. *Ist $y_1, \ldots, y_n$ eine reguläre Sequenz in $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$, dann ist ebenso $y_1^{p_1}, \ldots, y_n^{p_n}$ mit $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ eine reguläre Sequenz in $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$.*

Die Aussage entspricht [Eis95, 17.7].

Lemma 2.3. *Sei $A = \mathbb{F}[y_1, \ldots, y_n]$ und $B = \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ ein A-Modul. Ist $y_1, \ldots, y_n$ eine reguläre Sequenz in B, dann ist B ein freier A-Modul.*

Die Aussage leitet sich her aus [Bau68, 3.5, 3.9, 3.10]. Wir werden im Folgenden eine Verallgemeinerung des Tensorproduktes $\otimes_R$ benötigen. Genauer das Tensorprodukt $\otimes_A$ über einer differentiellen graduierten Algebra über R. Wir werden diesen Tensorprodukt hier definieren und leichte Folgerungen beweisen. Sei $M \in \mathrm{DGMod_A}$ und $N \in \mathrm{DG_AMod}$, mit Strukturabbildungen ϕ bzw. ψ. Wir definieren $M \otimes_A N$ wie üblich durch die exakte Sequenz

$$M \otimes_R A \otimes_R N \xrightarrow{\phi \otimes 1 - 1 \otimes \psi} M \otimes_R N \to M \otimes_A N \to 0.$$

Lemma 2.4. *Sei $A = \mathbb{F}[y_1, \ldots, y_n]$ eine Polynomalgebra und $B = \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ ein A-Modul, mit $y_1, \ldots, y_n$ einer regulären Sequenz in B. Sei $z_1, \ldots, z_r \in A$, sodass $|B/(z_1, \ldots, z_r)| < \infty$ gilt, dann gilt auch $|A/(z_1, \ldots, z_r)| < \infty$.*

Beweis. Da B freier A-Modul ist, gilt als A-Modul

$$\begin{aligned} B &\cong A \otimes_A B \\ &\cong A \otimes_{\mathbb{F}} B/(y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Damit ist $B/(z_1, \ldots, z_r)$ als A-Modul isomorph zu $A/(z_1, \ldots, z_r) \otimes_{\mathbb{F}} B/(y_1, \ldots, y_n)$ und unsere Aussage folgt, da $|B/(y_1, \ldots, y_n)|$ nach [MS05, I.4] endlich ist. $\square$

Lemma 2.5. *Sei $A_1 = \mathbb{F}[w_1, \ldots, w_n]$, sei $A_2 = \mathbb{F}[y_1, \ldots, y_k]$ ein A_1-Modul und sei $A_3 = \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_l]$ ein A_2-Modul, sodass $|A_2/A_1^+| < \infty$ und $|A_3/A_2^+| < \infty$, dann ist auch $|A_3/A_1^+| < \infty$.*

Beweis. Da $|A_2/(w_1, \ldots, w_n)| < \infty$ gilt, gibt es ein $r \in \mathbb{N}$, sodass $y_i^r \in (w_1, \ldots, w_n) \subset A_2$ liegt. Da $|A_3/(y_1, \ldots, y_k)| < \infty$ ist, folgt $|A_3/(y_1^r, \ldots, y_k^r)| < \infty$ und die Aussage folgt. $\square$

Sei $\iota : H \hookrightarrow G$ eine Inklusion in $LieR_p$. Seien Q_H bzw. Q_G maximale p-Tori von H bzw. G, so gewählt, dass $\rho(Q_H) \subset Q_G$ gilt. Sei

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_p) &= \mathbb{F}[y_1, \ldots, y_n], \\ \mathrm{H}^*(BH; \mathbb{F}_p) &= \mathbb{F}[y_1', \ldots, y_k'], \\ \mathrm{H}^*(BQ_G; \mathbb{F}_p) &= \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]. \end{aligned}$$

Da $G \in LieR_p$ ist, ist $|\operatorname{H}^*(BQ_G;\mathbb{F}_p)/(y_1,\ldots,y_n)|$ endlich und da die Inklusion von Q_H in Q_G injektiv ist, ist $|\operatorname{H}^*(BQ_H;\mathbb{F}_p)/(x_1,\ldots,x_n)|$ auch endlich. Nach Lemma 2.5 ist auch also auch $|\operatorname{H}^*(BQ_H;\mathbb{F}_p)/(y_1,\ldots,y_n)|$ endlich. Mit Lemma 2.4 folgt dann aber auch, dass $|\operatorname{H}^*(BQ_H;\mathbb{F}_p)/(y_1,\ldots,y_n)|$ endlich ist. Wir fassen zusammen:

Lemma 2.6. *Sei $\iota : H \hookrightarrow G$ eine Inklusion von Lie-Gruppen, sei $H, G \in LieR_p$ und sei $\operatorname{H}^*(BG;\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}[y_1,\ldots,y_n]$, dann gilt*

$$|\operatorname{H}^*(BH;\mathbb{F}_p)/(y_1,\ldots,y_n)| < \infty.$$

2.1.2 Der Funktor Tor

Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und sei $A \in \mathrm{DGAlg}_R$.

Genau wie wir schon das Tensorprodukt über A in Abschnitt 2.1.1 definiert haben, wollen wir nun auch den abgeleiteten Funktor Tor verallgemeinern.

Definition 2.7. Wir sagen, ein Komplex

$$\ldots \to (P^{n-1}, d_{n-1}) \to (P^n, d_n) \to (P^{n+1}, d_{n+1}) \to \ldots$$

in $\mathrm{DG_AMod}$ ist *eigentlich* exakt, wenn die Sequenz als R-Modul exakt ist und wenn die Sequenz

$$\ldots \to Z^{n-1} \to Z^n \to Z^{n+1} \to \ldots$$

exakt als R-Modul ist, mit $Z^n = \mathrm{Kern}(d_n)$. ◇

Lemma 2.8. *Ist $(P^\bullet, d_\bullet)^*$ eigentlich exakt, dann ist*

$$\ldots \to \operatorname{H}^\bullet(P^{p-1}) \to \operatorname{H}^\bullet(P^p) \to \operatorname{H}^\bullet(P^{p+1}) \to \ldots$$

exakt.

Beweis. Definiere $B^n := \mathrm{Bild}(d_n)$, dann ist

$$\to B^{n-1} \to B^n \to B^{n+1} \to$$

ein Komplex von R-Moduln. Und

$$0 \to Z^* \to P^* \to B^* \to 0$$

ist eine kurze exakte Sequenz von Komplexen. Da P^* eigentlich exakt ist, folgt aus der langen exakten Kohomologiesequenz, dass $\operatorname{H}^n(B^*) = 0$ ist. Der Komplex B^* ist also exakt. Aus der kurzen exakten Sequenz von Komplexen

$$0 \to B^{*-1} \to Z^* \to (\operatorname{H}(P^\bullet))^* \to 0$$

resultiert dann die Exaktheit des gesuchten Komplexes. □

Ein Epimorphismus $g : N'^* \to N^*$ in $\mathrm{DG_AMod}$ heißt *eigentlich*, wenn zu jedem $a \in N^p$ mit $d^p(a) = 0$ ein $b \in N'^p$ existiert, mit $g(b) = a$ und $d^p(b) = 0$. Ein $\tilde{N} \in \mathrm{DG_AMod}$ heißt *eigentlich projektiv*, wenn zu jedem Morphismus $\sigma : \tilde{N} \to N$ und zu jedem eigentlichen Epimorphismus $\nu : N' \to N$ ein Homomorphismus $\tilde{\sigma} : \tilde{N} \to N'$ existiert, sodass

$$\begin{tikzcd} & \tilde{N} \arrow[dl, "\tilde{\sigma}"'] \arrow[d, "\sigma"] \\ N' \arrow[r, "\nu"] & N \end{tikzcd}$$

kommutiert. Sei $N \in \mathrm{DG_AMod}$. Eine ***eigentlich projektive Auflösung von N*** ist eine eigentlich exakte Sequenz

$$\ldots \to P^n \to \ldots \to P^0 \to N \to 0$$

in der Kategorie $\mathrm{DG_AMod}$, mit P^i eigentlich projektiv. Im folgenden Abschnitt werden wir sehen, dass es genügend eigentlich projektive Auflösungen gibt.

Definition 2.9. Sei $A \in \mathrm{DGAlg_R}$, sei $M \in \mathrm{DGMod_A}$ und $N \in \mathrm{DG_AMod}$, dann definieren wir wie üblich

$$\mathrm{Tor}_A^{*,*}(M,N) := \mathrm{H}^{*,*}(P^* \otimes_A N^*),$$

wobei P^* eine eigentlich Projektive Auflösung von M ist. Der bigraduierte Modul $\mathrm{Tor}_A^{*,*}(M,N)$ ist bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl des P^*. ◇

Lemma 2.10. *Seien A, N, N' Polynomalgebren, sodass N und N' dieselbe Anzahl Veränderlichen besitzen. Sei N ein A-Modul und N' ein freier N-Modul, dann gilt*

$$\mathrm{Tor}_A(\mathbb{F}, N') \cong \mathrm{Tor}_A(\mathbb{F}, N) \otimes_{\mathbb{F}} N'/N^+$$

als N-Modul.

Beweis. Da N' ein freier N-Modul ist gilt

$$N' \cong N \otimes_N N' \cong N \otimes_{\mathbb{F}} N'/N^+$$

als N-Modul. Damit folgt, dass $N' \cong N \otimes_{\mathbb{F}} N'/N^+$ als A-Modul gilt. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_A(N', \mathbb{F}) &= \mathrm{H}(P \otimes_A N') \\ &\cong \mathrm{H}(P \otimes_A (N \otimes_{\mathbb{F}} N'/N^+)) \\ &\cong \mathrm{H}(P \otimes_A N) \otimes_{\mathbb{F}} N'/N^+ \\ &\cong \mathrm{Tor}_A(\mathbb{F}, N) \otimes_{\mathbb{F}} N'/N^+ \end{aligned}$$

als N-Modul, wobei P eine A-freie und eigentlich projektive Auflösung von $\mathbb{F}$ ist. □

Die Bar-Konstruktion

Sei $\mathbb{F}$ ein Körper. Sei $A \in \mathrm{DGAlg_{\mathbb{F}}}$ zusammenhängend und sei $A^+ := \{a \in A \mid Da > 0\}$. Sei $M \in \mathrm{DGMod_A}$ und $N \in \mathrm{DG_AMod}$. Um $\mathrm{Tor}_\Gamma(M,N)$ bestimmen zu können benötigen wir eine eigentlich projektive Auflösung von N. In diesem Abschnitt wollen wir ein Verfahren vorstellen, wie wir eine solche Auflösung immer konstruieren können. Die sogenannte Bar-Konstruktion ist damit von enormem theoretischen Interesse. Sie ist jedoch sehr kompliziert und weit davon entfernt eine minimale Auflösung zu sein; die Bar-Auflösung ist immer unendlich lang. Wir werden in kommenden Abschnitten noch andere Auflösungen angeben, die zwar nur in speziellen Situationen angewandt werden können, aber mit denen man wesentlich leichter rechnen kann. Genauer sind diese speziellen Situtionen die, in denen $N = \mathbb{F}$ gilt und Γ eine Polynomalgebra oder der Quotient einer Polynomalgebra modulo einer regulären Sequenz ist.

Definiere
$$\mathcal{B}^{-n}(M, A, N) = M \otimes_{\mathbb{F}} A^+ \otimes_{\mathbb{F}} \ldots \otimes_{\mathbb{F}} A^+ \otimes_{\mathbb{F}} N$$
mit n-Faktoren A^+. Die typischen Elemente in $B^{-n}(M, A, N)$, $n > 0$, schreiben wir als sogenannte 'Bars'

$$\mu\,[\alpha_1|\ldots|\alpha_n]\,\nu := \mu \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_n \otimes \nu$$

und die in $B^0(M, A, N)$ als $\mu\,[]\,\nu$. Wir definieren den Bigrad eines Elementes durch

$$D\mu\,[\alpha_1|\ldots|\alpha_n]\,\nu := (-n, D\mu + D\alpha_1 + \ldots + D\alpha_n + D\nu)$$

und werden $B^{*,*}(M, A, N)$ fortan als bigraduierten Modul betrachten. Wir benutzen im Folgenden die Schreibweise $\bar{\alpha} = (-1)^{1+\mathrm{grad}(\alpha)}\alpha$ und halten uns ansonsten an die Konventionen, wie Sie auch in [McL75] zu finden ist. Seien d_M, d_A und d_N die Differentiale auf M, A und N. Wir definieren ein inneres Differential $d_{0,-n} : \mathcal{B}^{-n}(M, A, N) \to \mathcal{B}^{-n}(M, A, N)$ durch

$$\begin{aligned} d_{0,-n}(\mu[\alpha_1|\ldots|\alpha_n]\nu) &= d_M(\mu)[\alpha_1|\ldots|\alpha_n]\nu \\ &- \sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}[\bar{\alpha_1}|\ldots|\bar{\alpha_{i-1}}|d_A(\alpha_i)|\alpha_{i+1}|\ldots|\alpha_n]\nu \\ &- \bar{\mu}[\bar{\alpha_1}|\ldots|\bar{\alpha_n}]d_N(\nu) \end{aligned}$$

und ein äußeres Differential $d_{1,-n} : \mathcal{B}^{-n}(M, A, N) \to \mathcal{B}^{-n+1}(M, A, N)$ durch

$$\begin{aligned} d_{1,-n}(\mu[\alpha_1|\ldots|\alpha_n]\nu) &= \bar{\mu}\alpha_1[\alpha_2|\ldots|\alpha_n]\nu \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\mu}[\bar{\alpha_1}|\ldots|\bar{\alpha_{i-1}}|\bar{\alpha_i}\alpha_{i+1}|\ldots|\alpha_n]\nu \\ &+ \bar{\mu}[\bar{\alpha_1}|\ldots|\bar{\alpha_{n-1}}]\bar{\alpha_n}\nu. \end{aligned}$$

In den meisten Fällen werden wir nur d_0 bzw. d_1 anstelle von $d_{0,-n}$ bzw. $d_{1,-n}$ schreiben.

Der Komplex $B^*(M, A, A)$ ist nach [McC01, 7.8] eine A-freie und eigentlich projektive Auflösung von $M \in DGMod_A$. Wir definieren ein Multiplikation auf $B^*(M, A, N)$, das sogenannte Shuffle-Prudukt:

$$[\alpha_1|\ldots|\alpha_p]\nabla[\alpha_{p+1}|\ldots|\alpha_{p+q}] = \sum_{\sigma}(-1)^{e(\sigma)}[\alpha_{\sigma^{-1}(1)}|\ldots|\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}],$$

hierbei durchläuft σ alle (p, q)-Shuffle und $e(\sigma) = \sum D_t[\gamma_i] \cdot D_t[\gamma_{p+j}]$ für alle $\sigma(i) > \sigma(p + j)$. Es ist zu beachten, dass $D_t[\gamma_i] = D\gamma_i - 1$ gilt. Das so definierte Produkt induziert ein Prdulkt auf

$$\mathrm{Tor}_A^{*,*}(M, N) \cong \mathrm{H}^{*,*}(\mathcal{B}^{*,*}(M, A, A) \otimes_A N) \cong \mathrm{H}^{*,*}(\mathcal{B}^{*,*}(M, A, N)),$$

welches nach [McC01, 7.9] mit dem natürlichen in [McL75, X.12] gegebenen Produkt auf $\mathrm{Tor}_A^{*,*}(M, N)$ übereinstimmt. Die Isomorphie ist also eine Isomorphie von bigraduierte $\mathbb{F}$-Algebren.

Bemerkung 2.11. Ist $D\gamma_i$ gerade so gilt: $e(\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma)$, dem üblichen Signum auf der Menge der Permutationen. $\diamond$

Durch den Bar-Komplex ist eine Möglichkeit gegeben die Elemente einer A-Auflösung von M explizit niederzuschreiben und damit auch die Repräsentanten von Elementen in $\mathrm{Tor}_A^{*,*}(M,N)$: Im Folgenden werden wir Elemente in $\mathrm{Tor}_A^{*,*}(M,N)$ immer durch einen Repräsentanten in $\mathcal{B}^{*,*}(M,A,N)$ ausdrücken.

2.2 Spektralsequenzen

Wir werden immer wieder mir Spektralsequenzen arbeiten. Wir führen in diesem Abschnitt alle Spektralsequenzen, die im Laufe dieser Arbeit ihre Anwendung finden, auf. Nur die Serre-Spektralsequenz setzen wir als bekannt voraus; eine Referenz für diese Spektralsequenz ist [McC01, §5].

Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und A ein R-Modul. Eine *absteigende Filtrierung* F^* von A ist eine Familie von Untermoduln $\{F^pA\}$, mit $p \in \mathbb{Z}$, sodass

$$A \supset \ldots \supset F^{p-1} \supset F^p \supset F^{p+1} \supset \ldots$$

gilt. Ist A ein graduierter Modul, so definieren wir $F^pA^n := F^pA \cap A^n$. Wir bezeichnen mit

$$E_0^{p,q}(A,F) := F^pA^{p+q}/F^{p+1}A^{p+q}$$

das zu (A,F) *assoziierte graduierte Objekt*. Ist (A,d) ein differentiell graduierter R-Modul, so gelte für eine Filtrierung F stets $d(F^pA) \subset F^pA$. Da das Differential die Filtrierung respektiert, besitzt $\mathrm{H}(A,d)$ die Filtrierung

$$F^p\,\mathrm{H}(A,d) := \mathrm{Bild}(\mathrm{H}(F^pA,d) \to \mathrm{H}(A,d)).$$

Wir sagen, dass eine Filtrierung F eines R-Modul A *ausschöpfend* ist, wenn gilt $A = \bigcup_p F^pA$. Ein Filtrierung F eines differentiellen Modul (A,d) ist *schwach konvergent*, wenn $F^pA \cap \mathrm{Kern}(d) = \bigcap_r (F^pA \cap d^{-1}(F^{p+r}A))$ ist. Für eine Filtrierung F von (A,d) sind die Eigenschaften ausschöpfend und schwach konvergent gegeben, wenn F *beschränkt* ist, das heißt, wenn es für jedes n ein $s = s(n)$ und ein $t = t(n)$ gibt, sodass gilt

$$\{0\} = F^sA^n \subset F^{s-1}A^n \subset \ldots F^{t+1}A^n \subset F^tA^n = A^n.$$

Ein filtrierter R-Modul induziert auf die übliche Weise eine Spektralsequenz:

Satz 2.12. *Sei (A,d,F) eine filtrierter, differentiell graduierter R-Modul, wobei F eine ausschöpfende und schwach konvergente Filtrierung ist. Dann konvergiert die zu (A,d,F) assoziierte Spektralsequenz gegen* $\mathrm{H}(A,d)$. *Das heißt, es gilt:*

$$E_\infty^{p,q} \cong E_0^{p,q}(\mathrm{H}(A,d),F) = F^p\,\mathrm{H}^{p+q}(A,d)/F^{p+1}\,\mathrm{H}^{p+q}(A,d)$$

als bigraduierte R-Moduln.

Ist A eine differentiell graduierte R-Algebra, mit Produkt $m : A \otimes_{\mathbb{F}} A \to A$, so stellen wir an eine Filtrierung die zusätzliche Bedingung, dass

$$m(F^pA \otimes_{\mathbb{F}} F^{p'}A) \subset F^{p+p'}A$$

gilt. In diesem Fall induziert das Produkt m ein Produkt m_r auf $E_r^{*,*}$, dem r-ten Term der induzierten Spektralsequenz, das mit dem Differential d_r auf $E_r^{*,*}$ verträglich ist. Wir sagen, dass die zu (A, d, F) assoziierte Spektralsequenz als Algebra gegen $\mathrm{H}(A, d)$ konvergiert, wenn gilt: $E_\infty^{p,q} \cong E_0^{p,q}(A, F)$ als bigraduierte R-Algebren.

Satz 2.13. *Sei (A, d, F) eine filtrierte, differentiell graduierte R-Algebra, sodass F ausschöpfend und schwach konvergent ist. Dann konvergiert die zu (A, d, F) assoziierte Spektralsequenz als Algebren gegen* $\mathrm{H}(A)$.

Die Aussagen entsprechen den Sätzen [McC01, 2.6, 2.14, 3.2].

2.2.1 Doppelkomplexe

Sei $(M^{*,*}, d_0, d_1)$ ein Doppelkomplex, sodass

$$\begin{array}{ccc} M^{p,q+1} & \xrightarrow{d_0} & M^{p+1,q+1} \\ {\scriptstyle d_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle d_1} \\ M^{p,q} & \xrightarrow{d_0} & M^{p+1,q} \end{array}$$

kommutiert. Definiere

$$\mathrm{H}_I^{p,q}(M) := \mathrm{Kern}(d_0 : M^{p,q} \to M^{p+1,q}) / \, \mathrm{Bild}(d_0 : M^{p-1,q} \to M^{p,q})$$

und

$$\mathrm{H}_{II}^{p,q}(M) := \mathrm{Kern}(d_1 : M^{p,q} \to M^{p,q+1}) / \, \mathrm{Bild}(d_1 : M^{p,q-1} \to M^{p,q}).$$

Weiter sei $\bar{d_0}$ das von d_0 auf H_{II} induzierte Differential, genau wie $\bar{d_1}$ das von d_1 auf H_I induzierte ist. Es gibt zwei gängige Möglichkeiten einen Doppelkomplex zu filtrieren: Die Spaltenfiltrierung

$$F_I^p(M)^t = \bigoplus_{r \geq p} M^{r,t-r}$$

und die Zeilenfiltrierung

$$F_{II}^p(M)^t = \bigoplus_{r \geq p} M^{t-r,r},$$

die zu folgenden Aussagen führen:

Satz 2.14. *Sei $(M^{*,*}, d_0, d_1)$ ein Doppelkomplex, dann gibt es zwei Spektralsequenzen, ${}_IE_r^{*,*}$ und ${}_{II}E_r^{*,*}$ mit*

$${}_IE_2^{*,*} = \mathrm{H}_I^{*,*}(\mathrm{H}_{II}(M), \bar{d_0}) \text{ und } {}_{II}E_2^{*,*} = \mathrm{H}_{II}^{*,*}(\mathrm{H}_I(M), \bar{d_1}).$$

Die Spektralsequenz ${}_IE_r^{*,*}$ wird von F_I und ${}_{II}E_r^{*,*}$ wird von F_{II} induziert. Ist F_I bzw. F_{II} ausschöpfend und schwach konvergent, so konvergieren die Spektralsequenzen gegen $\mathrm{H}(M)$.

Die Aussagen entsprechen den Sätzen [McC01, 2.15, 3.2].

Satz 2.15. *Sei R eine $\mathbb{F}$-Algebra und seien $(A, d_0), (B, d_1)$ differentiell graduierte R-Algebren, dann ist $M^{p,q} = A^p \otimes_R B^q$ ein Doppelkomplex. Sind die Bedingungen des vorherigen Lemma erfüllt, so konvergiert die Spektralsequenz als Algebra gegen $\mathrm{H}(M)$.*

Beweis. Beide Filterungen respektieren die Multiplikation auf M, d.h.

$$F_I^p(M) \otimes_R F_I^{p'}(M) \subset F_I^{p+p'}(M) \text{ und } F_{II}^p(M) \otimes_R F_{II}^{p'}(M) \subset F_{II}^{p+p'}(M).$$

Womit unsere Aussage aus dem vorherigen Satz und [McC01, 2.14] folgt. □

Lemma 2.16. *Sei R eine $\mathbb{F}$-Algebra und seien $(A, d_0), (B, d_1)$ differentiell graduierte R-Algebren, sodass A azyklisch ist und B^q ein flacher R-Linksmodul für alle q. Sei $M = A \otimes_R B$ wie zuvor, dann ist $\mathrm{H}(M) \cong \mathrm{H}(\mathrm{H}^0(A) \otimes_R B, \bar{d}_1)$ als Algebra.*

Beweis. Durch die Bedingung der Flachheit ist $(A^* \otimes B^q, d_0)$ azyklisch für alle q, d.h. $\mathrm{H}_I^{0,q}(M) \cong \mathrm{H}^0(A) \otimes B^q$ und $\mathrm{H}_I^{p,q}(M) = 0$ für $p > 0$. Aus den vorherigen Sätzen folgt

$$_{II}E_2^{*,*} = \mathrm{H}(\mathrm{H}^0(A) \otimes B, \bar{d}_1).$$

Da die Spektralsequenz in $_{II}E_2^{0,*}$ konzentriert ist, kollabiert sie im E_2-Term und es gibt kein multiplikatives Extensionsproblem. □

2.2.2 Die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz

Dieser Abschnitt listet die beiden Theoreme von Eilenberg und Moore auf. Als erstes führen wir das zweite Theorem von Eilenberg und Moore auf, das wir auf Koeffizienten in einem Körper $\mathbb{F}$ beschränken.

Satz 2.17. *Sei $\pi : E \to B$ eine Faserung mit zusammenhängender Faser F und Basis B und sei $f : X \to B$ eine stetige Funktion. Sei E_f der Totalraum der Pullback-Faserung von π über f:*

$$\begin{tikzcd} E_f \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Dann gilt

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{C}^*(B;\mathbb{F})}(\mathrm{C}^*(X;\mathbb{F}), \mathrm{C}^*(E;\mathbb{F})) \cong \mathrm{H}^*(E_f;\mathbb{F})$$

als graduierte Algebren.

Die Multiplikation entspricht auf der linken Seite dem Shuffle-Prudukt und auf der rechten Seite dem $\cup$-Produkt, wie in [Smi67, 3.4] nachzulesen ist. Die linke Seite lässt sich meistens nicht berechnen, aber das erste Theorem von Eilenberg und Moore liefert in vielen Fällen eine überschaubare Approximation:

Satz 2.18. *Seien A und $\mathrm{H}(A)$ flache R-Moduln und M, N zwei Moduln über A. Es existiert eine Spektralsequenz im zweiten Quadranten, mit*

$$E_2^{*,*} = \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}(A)}^{*,*}(\mathrm{H}(M), \mathrm{H}(N))$$

die gegen $\mathrm{Tor}_A^{*,*}(M, N)$ konvergiert.

Bemerkung 2.19. Wie in [McC01, 7.6, 7.17] nachzulesen ist, konvergiert für $R = \mathbb{F}$ die Spektralsequenz als Algebra und das induzierte Produkt auf dem E_2-Term ist das durch das Shuffle-Produkt induzierte. ◇

Das Zusammenbrechen der Spektralsequenz

Es gibt vielfältige Bedingungen, unter den die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz im E_2-Term zusammenbricht, die bekanntesten seien hier aufgelistet. Die Arbeit von Gugenheim und May findet hier keine Erwähnung, da sie im Kapitel 7 ausführlich besprochen wird. Die erste Aussage die wir uns anschauen wollen stammt aus [Mun74] und bietet die wohl umfassendste Aussage zum Zusammenbruch der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz:

Satz 2.20 (Munkholm)**.** *Sei $\pi : E \to B$ eine Faserung mit zusammenhängender Faser F und zusammenhängender, einfachzusammenhängender Basis B und sei $f : X \to B$ eine stetige Funktion. Sei E_f der Totalraum der Pullback-Faserung von π über f:*

$$\begin{array}{ccc} E_f & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Seien $\mathrm{H}^*(E,\mathbb{F})$, $\mathrm{H}^*(X,\mathbb{F})$ und $\mathrm{H}^*(B,\mathbb{F})$ Polynomalgebren in höchstens abzählbar vielen Variablen. Ist die Charakteristik von $\mathbb{F}$ gleich 2, so setzen wir zusätzlich voraus, dass Sq^1 auf $\mathrm{H}^*(E,\mathbb{F})$ und $\mathrm{H}^*(X,\mathbb{F})$ verschwindet. Dann gilt

$$\mathrm{H}^*(E_f,\mathbb{F}) \cong \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(B;\mathbb{F})}(\mathrm{H}^*(E;\mathbb{F}),\mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}))$$

als graduierte Moduln.

Ein ähnlicher Satz ist durch [Wol77] für Lie-Gruppen $H \subset G$ und Faserungen $G/H \to BH \to BG$ bewiesen worden, der jedoch die Geometrie der der Lie-Gruppen ausnutzt und wie folgt lautet:

Satz 2.21 (Wolf)**.** *Sei $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$ oder $\mathbb{Q}$ und sei sei G eine kompakte Lie-Gruppe ohne p-Torsion und H eine abgeschlossene Untergruppe, dann kollabiert die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung $G/H \hookrightarrow BH \xrightarrow{Bi} BG$ im E_2-Term und so gilt*

$$\mathrm{H}^*(G/H,\mathbb{F}) \cong \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F})}(\mathbb{F},\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}))$$

als graduierte Moduln.

Bemerkung 2.22. Ist $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ so ist nach [Car50a] und [Car50b] die Isomorphie sogar ein Isomorphie von Algebren. $\diamond$

Ein weiteres Hilfsmittel stammt aus [Bau68]:

Lemma 2.23 (Baum)**.** *Seien H, G Lie-Gruppen ohne p-Torsion und sei $\rho : H \to G$ ein injektiver Homomorphismus. Sei T_H der maximale Torus von H. Die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ zur Faserung $G/H \hookrightarrow BH \to BG$ kollabiert genau dann im E_2-Term, wenn sie auch für die Faserung $G/T_H \hookrightarrow BT_H \to BG$ im E_2-Term kollabiert.*

2.2.3 Die Bockstein-Spektralsequenz

Der Name Bockstein-Spektralsequenz wird für viele verschiedene Spektralsequenzen gebraucht. In diesem Abschnitt betrachten wir nur die topologische Bockstein-Spektralsequenz. In Abschnitt 2.4.5 werden wir einen weiteren Fall betrachten.

Lemma 2.24. *Ist X ein topologischer Raum und $\mathbb{F}_p$ ein endlicher Körper, dann existiert eine Spektralsequenz (E_r^*, d_r) von Algebren, mit $E_1^n \cong \mathrm{H}^n(X;\mathbb{F}_p)$ und $d_r : E_r^n \to E_r^{n+1}$, die gegen $(\mathrm{H}^*(X)/\mathit{Torsion}) \otimes \mathbb{F}_p$ konvergiert. Dabei gilt*

$$E_r^n \cong \mathrm{Bild}(\mathrm{H}^n(X;\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot p^{r-1}} \mathrm{H}^n(X;\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}))$$

und $d_r = \beta^r$ ist der Bockstein-Homomorphismus zur kurzen exakten Sequenz

$$\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(p^r)^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}.$$

Die Gesamtheit der Aussagen wird durch [McC01, 2.2, 10.1] abgedeckt.

2.2.4 Die Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz

Sei X ein topologischer Raum vom Homotopietyp eines CW-Komplexes. Die ursprünglich in [AH61] vorgestellte Spektralsequenz, verbindet die singuläre Kohomologie von X mit der topologischen komplexen K-Theorie von X. Eine Verallgemeinerung auf andere Kohomologietheorien und allgemeinere Räume ist möglich, für diese Arbeit aber nicht notwendig. Wir bezeichnen mit $K^*(X)$ die komplexe, topologische, $\mathbb{Z}_2$-graduierte K-Theorie von X.

Satz 2.25 (Atiyah, Hirzebruch)**.** *Sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum vom Homotopietyp eines CW-Komplexes, dann existiert eine Spektralsequenz mit*

$$E_2^{p,q} \cong \mathrm{H}^p(X; K^q(x_0)),$$

die gegen $K^*(X)$ konvergiert. Die Spektralsequenz ist multiplikativ, das Differential d_2 aus Gradgründen gleich Null und das Differential d_3 ist gleich der Sq^3-Operation auf $\mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z})$.

Die Aussage ist in der Arbeit [AH61] zu finden.

2.3 Poincaré-Dualität

Es ist meist schwierig etwas über die Differentiale einer Spektralsequenz zu sagen. Und jede zusätzliche Struktur hilft uns weiter die Differentiale besser zu verstehen, wie zum Beispiel in einer Spektralsequenz von Algebren. Wir führen in diesem Abschnitt den Begriff der Poincaré-Algebra ein, einer Verallgemeinerung der Poincaré-Dualität der Kohomologiealgebra einer Mannigfaltigkeit. Ist der E_2-Term einer Spektralsequenz eine Poincaré-Algebra, dann sind unter leichten Bedingungen auch die E_r-Terme Poincaré-Algebren und auch die Differentiale erfüllen dann ein Art Dualität.

Sei $\mathbb{F}$ ein Körper und sei A eine graduiert kommutative zusammenhängende $\mathbb{F}$-Algebra, mit $|A| < \infty$. Wir sagen A ist eine *Poincaré-Algebra* bzw. *PD-Algebra* von formaler Dimension h, wenn $A^i = 0$ für $i > h$ und $|A^h| = 1$ gilt. Und wenn das Produkt $A^i \otimes_{\mathbb{F}} A^{h-i} \to A^h$ eine nicht singuläre Paarung ist. Einen Erzeuger $[A]$ von A^h nennen wir eine Fundamentalklasse von A. Wir verwenden das Symbol $[A]$ in Anlehnung an die Fundamentalklasse $[X]$ einer topologischen Mannigfaltigkeit.

Beispiel 2.26. Ist X eine topologische, kompakte, geschlossene, n-dimensionale Mannigfaltigkeit, dann ist $\mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2)$ eine PD-Algebra und die Fundamentalklasse liegt in $\mathrm{H}^n(X;\mathbb{F}_2)$. ◇

Bemerkung 2.27. Ist A^* eine graduiert kommutative, zusammenhängende $\mathbb{F}$-Algebra. Dann ist äquivalent:

- Der Annulator von $A^+ := \{a \in| Da > 0\}$ ist 1-dimensional
- A ist eine Poincaré-Algebra

◇

Lemma 2.28. *Seien A, B graduiert kommutative, zusammenhängende $\mathbb{F}$-Algebren, dann ist $A \otimes_{\mathbb{F}} B$ genau dann eine Poincaré-Algebra, wenn A und B Poincaré-Algebren sind. Eine Fundamentalklasse von $A \otimes_{\mathbb{F}} B$ ist gegeben durch $[A] \otimes_{\mathbb{F}} [B]$.*

Beweis. Sind A, B zwei PD-Algebren, dann ist auch $A \otimes B$ eine PD-Algebra. Angenommen der Annulator $\mathrm{Ann}(A^+)$ ist nicht 1-dimensional, dann ist auch $\mathrm{Ann}((A \otimes B)^+)$ nicht 1-dimensional, was zu einem Widerspruch führt. Für B verhält es sich ebenso. □

Lemma 2.29. *Sei (A, d) eine differentielle PD-Algebra mit formaler Dimension h, mit $d(A^{h-1}) = 0$, dann ist auch $d(A)$ eine PD-Algebra.*

Der Beweis ist in [CHS57, 3] zu finden.

Lemma 2.30. *Sei (A, d) wie im vorherigen Lemma. Ist h gerade, so ist $|A| \equiv |d(A)| \mod 4$. Ist h ungerade und existiert kein $a \in A^{(h-1)/2}$ mit $a \cdot d(a) = [A]$, dann gilt $|A| \equiv |H(A)| \mod 4$.*

Beweis. Sei $a_1, \ldots, a_p \in A^i$ eine Vektorraumbasis von $\mathrm{Bild}(d)^i$. Da A eine PD-Algebra, ist existieren $a'_1, \ldots, a'_p \in A^{h-i}$ mit

$$a_i a'_j = \begin{cases} [A] & \text{, falls } i = j \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Sei $b_1, \ldots, b_p \in A^{i-1}$ mit $d(b_i) = a_i$. Definiere $b'_i := d(a'_i)$, dann gilt $0 = d(a'_i b_j) = a'_i a_j \pm b'_i b_j$, womit folgt

$$b'_i b_j = \begin{cases} \pm[A] & \text{, falls } i = j \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Damit folgt $|\,\mathrm{Bild}(d)^{h-i+1}| \geq |\,\mathrm{Bild}(d)^i|$. Vertauschen wir die Rollen von a_i und b'_i, ebenso von a'_i und b_i so folgt mit der selben Rechnung, dass $|\,\mathrm{Bild}(d)^{h-i+1}| \leq |\,\mathrm{Bild}(d)^i|$. Zusammen sehen wir

$$|\,\mathrm{Bild}(d)^{h-i+1}| = |\,\mathrm{Bild}(d)^i|. \tag{2.1}$$

Sei nun $\alpha_i := |A^i|$ und $\beta_i := |\operatorname{Bild}(d)^i|$. Es gilt $\beta_0 = \beta_1 = \beta_h = \beta_{h+1} = 0$ und

$$\begin{aligned}
|\operatorname{H}(A)| &= \sum_{i=0}^{h} |\operatorname{Kern}(d)^i| - |\operatorname{Bild}(d)^i| \\
&= \sum_{i=0}^{h} (\alpha_i - \beta_{i+1}) - \beta_i \\
&= |A| - \sum_{i=0}^{h} (\beta_{i+1} + \beta_i) \\
&\overset{(2.1)}{=} \begin{cases} |A| - 4\sum_{i=0}^{h/2} \beta_i & \text{für } h \text{ gerade} \\ |A| - 4\sum_{i=0}^{(h-1)/2} \beta_i + 2\beta_{(h+1)/2} & \text{für } h \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

Für h gerade ist unsere Behauptung also gezeigt. Sei h nun ungerade. Durch den Isomorphismus $d : \operatorname{Kobild}(d)^{(h-1)/2} \to \operatorname{Bild}(d)^{(h+1)/2}$ erhalten wir auf $\operatorname{Bild}(d)^{(h+1)/2}$ eine nicht ausgeartete Bilinearform

$$\langle a, b \rangle := a \cdot d^{-1}(b).$$

Durch die Annahme, dass es kein $a \in A^{(h-1)/2}$ mit $a \cdot d(a) = [A]$ gibt, ist diese Bilinearform symplektisch. Nach [Lan02, XV.8] folgt damit: $|\operatorname{Bild}(d)^{(h+1)/2}|$ ist gerade, und die Aussage folgt. □

Lemma 2.31. *Sei (A, F) eine filtrierte, graduierte Algebra und sei F ausschöpfend. Es gebe ein s mit $F^s A = 0$. Sei $E_0^{*,*}(A, F)$ eine PD-Algebra mit formaler Dimension h. Dann ist auch A eine PD-Algebra mit formaler Dimension h.*

Beweis. Sei $[A]$ ein Erzeuger von A^h. Wir wollen zeigen, dass es zu jedem $x \in A^q$ ein $y \in A^{h-q}$ gibt, mit $xy = [A]$. Da F ausschöpfend ist, gibt es ein p, mit $x \in F^p A^q$. Da F nach oben beschränkt ist können, wir dieses p so wählen, dass

$$0 \neq x \in F^p A^q / F^{p+1} A^q.$$

Es gibt also ein $y \in A^{h-q}$ und ein p', mit $y \in F^{p'} A^{h-q}$ und $xy = [E_0]$, mit $E_0 := E_0^{*,*}(A, F)$. Das heißt aber auch, dass

$$0 \neq xy \in A^h.$$

Was unsere Behauptung bestätigt. □

Korollar 2.32. *Sei (A, d, F) eine filtrierte, differentiell graduierte Algebra, mit F ausschöpfend. Es gebe ein s mit $F^s A = 0$ und die zu (A, d, F) assoziierte Spektralsequenz $(E_r^{*,*}, d_r)$ konvergiere gegen $\operatorname{H}(A)$. Ist $E_2^{*,*}$ ein PD-Algebra mit formaler Dimension h, dann ist auch $\operatorname{H}(A, d)$ eine PD-Algebra mit formaler Dimension h.*

Beweis. Aus Satz 2.13 folgt, dass $(E_r^{*,*}, d_r)$ als Algebra konvergiert und aus Lemma 2.29 folgt, dass $E_r^{*,*}$ eine PD-Algebra ist. Also ist

$$E_\infty^{*,*} \cong E_0^{*,*}(A, F)$$

eine PD-Algebra. Da F eine ausschöpfende, nach oben beschränkte Filtrierung ist, ist auch die induzierte Filtrierung auf $\operatorname{H}(A)$ ausschöpfend und nach oben beschränkt. Mit dem vorherigen Lemma ist auch $\operatorname{H}(A)$ eine PD-Algebra. □

2.4 Der Koszul-Komplex

Sei $\mathbb{F}$ ein Körper. Der Koszul-Komplex wird uns eine bessere Möglichkeit geben $\mathrm{Tor}_\Gamma(M,\mathbb{F})$ zu berechnen, falls Γ eine Polynomalgebra ist.

Sei A ein kommutativer Ring und y ein Element in A. Mit $\mathcal{K}_A^*(y)$ bezeichnen wir den Komplex:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{K}_A^p(y) & := 0 & \text{für } p \neq 0,-1 \\ \mathcal{K}_A^0(y) & := A & \\ \mathcal{K}_A^{-1}(y) & := A & \end{array}$$

Es ist dabei dienlich den Erzeuger von $\mathcal{K}_A^{-1}(y)$ als e_y zu bezeichnen. Das Differential $d : \mathcal{K}_A^{-1}(y) \to \mathcal{K}_A^0(y)$ ist gegeben durch $d(e_y) = y$. Ist $y_1, \ldots, y_n \in A$, dann definieren wir den Tensorproduktkomplex

$$\mathcal{K}_A(y_1,\ldots,y_n) := \mathcal{K}_A(y_1) \otimes_A \ldots \otimes_A \mathcal{K}_A(y_n).$$

Wir schreiben e_i für e_{y_i}. Es gilt $e_i \otimes e_j = -e_j \otimes e_i$, $i \neq j$. Abgeleitet von der Tatsache, dass $\mathcal{K}_A^{-p}(y_1,\ldots,y_n)$ isomorph zum äußeren Produkt $\wedge^p A^n$ ist schreiben wir meist $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ für $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p}$. Sei $i_1 < \ldots < i_p$ dann bilden die $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ eine A-Modul Basis von $\mathcal{K}_A^{-p}(y_1,\ldots,y_n)$.

Ist M ein A-Modul, so schreiben wir $\mathcal{K}_M(y_1,\ldots,y_n)$ für den Tensorproduktkomplex $\mathcal{K}_A(y_1,\ldots,y_n) \otimes_A M$. Auf diesem Komplex ergibt sich das Differential $d : \mathcal{K}_M^{-p}(y_1,\ldots,y_n) \to \mathcal{K}_M^{-p+1}(y_1,\ldots,y_n)$ durch die Definition als

$$d(\mu \otimes e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{e_{i_k}} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \otimes (x_{i_k} \otimes \mu).$$

Durch das übliche äußere Produkt

$$\mathcal{K}_A^p(y_1,\ldots,y_n) \otimes \mathcal{K}_A^{p'}(y_1,\ldots,y_n) \to \mathcal{K}_A^{p+p'}(y_1,\ldots,y_n),$$

wird der Komplex $\mathcal{K}_A(y_1,\ldots,y_n)$ zu einem Ring oder anders ausgedrückt ist der Ring $\mathcal{K}_A^*(y_1,\ldots,y_n)$ als Ring isomorph zu $\wedge^* A^n$. Für $a \in \mathcal{K}_A^p(y_1,\ldots,y_n)$ und $b \in \mathcal{K}_A^{p'}(y_1,\ldots,y_n)$ gilt

$$a \cdot b = (-1)^{p \cdot p'} b \cdot a.$$

Wir rechnen nach, dass das Differential das Produkt respektiert, das heißt die Leibniz-Regel

$$d(a \cdot b) = d(a) \cdot b + (-1)^p a \cdot d(b)$$

gilt, wobei $a \in \mathcal{K}_A^p(y_1,\ldots,y_n)$ gilt.

Ist A ein graduierter Ring und M ein graduierter A-Modul, so wird $\mathcal{K}_M^{*,*}(y_1,\ldots,y_n)$ zu einem bigraduierten A-Modul, durch

$$\begin{array}{rcl} De_i & = & (-1, Dy_i) \\ D\mu & = & (0, D\mu). \end{array}$$

Mit $\mathcal{K}_M^{p,q}(y_1,\ldots,y_n)$ bezeichnen wir die Menge der Elemente vom Bigrad (p,q). Das äußere Produkt wird so zu einem bigraduierten Produkt

$$\mathcal{K}_M^{p,q}(y_1,\ldots,y_n) \otimes \mathcal{K}_M^{p',q'}(y_1,\ldots,y_n) \to \mathcal{K}_M^{p+p',q+q'}(y_1,\ldots,y_n).$$

Mit $\mathrm{H}\,\mathcal{K}^*(y_1,\ldots,y_n)$ bezeichnen wir die Homologie des Komplexes $\mathcal{K}^*(y_1,\ldots,y_n)$. Ist A ein graduierter Ring und M ein graduierter A-Modul, so besitzt auch die Homologie $\mathrm{H}^{p,q}\,\mathcal{K}^{*,*}(y_1,\ldots,y_n)$ die induzierte Bigraduierung.

2.4.1 Der Koszul-Komplex als Auflösung

Sei $A = \mathbb{F}[y_1, \ldots, y_n]$ eine Polynomalgebra. Dabei sei entweder Dy_i gerade oder $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$. Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass wir den Koszul-Komplex als A-freie Auflösung von $\mathbb{F}$ betrachten können. Gesehen als differentielle Algebra mit trivialem Differential ist der Koszul-Komplex eine eigentlich projektive Auflösung von $\mathbb{F}$. Wir werden ihn also nuntzen können um für einen A-Modul N die Algebra $\mathrm{Tor}_A(\mathbb{F}, N)$ zu berechnen.

Definiere den injektiven Homomorphismus $\theta : \mathcal{K}_A^{-n}(y_1, \ldots, y_n) \to \mathcal{B}^{-n}(\mathbb{F}, A, A)$ durch

$$\theta(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}) = \sum_\sigma (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)}[y_{i_{\sigma^{-1}(1)}}| \ldots |y_{i_{\sigma^{-1}(p)}}].$$

Es gilt $d \circ \theta = \theta \circ d$, genau wie $\theta(a \wedge b) = \theta(a)\nabla\theta(b)$. Der Komplex $\mathcal{K}_A^*(y_1, \ldots, y_n)$ ist nach [Wei94, 4.5.5] eine A-freie Auflösung von $\mathbb{F}$ der Länge n und θ ist eine Abbildung von Komplexen. Beide Auflösungen sind projektiv. Es existiert also eine Abbildung $\nu : \mathcal{B}^{-n}(A, \mathbb{F}) \to \mathcal{K}_A^{-n}(y_1, \ldots, y_n)$. Nach [CE56, V.1.2] ist $\theta\circ\nu$ bzw. $\nu\circ\theta$ kettenhomotop zur Identität. Ist N ein A-Moldul, dann induziert θ einen Isomorphismus

$$\theta^* : \mathrm{H}^*(\mathcal{K}_A^*(y_1, \ldots, y_n) \otimes_A N) \to \mathrm{H}^*(\mathcal{B}^{-n}(\mathbb{F}, A, N)$$

von graduierten $\mathbb{F}$-Algebren.

Mit Rechtfertigung des Isomorphismus θ werden wir das Element $e_i = e_{y_i}$ im Koszul-Komplex häufig mit dem assoziierten Element $[y_i]$ in der Bar-Konstruktion bezeichnen und anstelle von $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ werden wir folglich $[y_{i_1}]\nabla \ldots \nabla[y_{i_p}]$ schreiben. So können wir auch weiterhin unsere Konvention beibehalten, dass wir Elemente in $\mathrm{Tor}_A^{*,*}(\mathbb{F}, N)$ als Repräsentanten in $\mathcal{B}^{*,*}(\mathbb{F}, A, N)$ schreiben.

2.4.2 Eigenschaften des Koszul-Komplexes

In diesem Abschnitt sei R ein kommutative Ringe mit 1 und A der Polynomring $R[x_1, \ldots, x_n]$. Wir wollen in diesem Abschnitt einige Eigenschaften des Koszul-Komplexes herleiten, die sich durch leichte Rechnungen ergründen lassen.

Lemma 2.33. *Sei $y_1, \ldots, y_n \in A$ und sei*

$$\tilde{y_n} = y_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i$$

mit $\alpha_i \in A$, dann gilt

$$\mathcal{K}_A(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) \cong \mathcal{K}_A(y_1, \ldots, y_{n-1}, \tilde{y_n})$$

als Komplex von A-Moduln.

Beweis. Sei d das Differential von $\mathcal{K}_A(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ und d' das Differential von $\mathcal{K}_A(y_1, \ldots, y_{n-1}, \tilde{y_n})$. Definiere den Isomorphismus

$$F : \mathcal{K}_A(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) \to \mathcal{K}_A(y_1, \ldots, y_{n-1}, \tilde{y_n})$$

von A-Moduln durch $F(e_i) = e_i$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und

$$F(e_n) = e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i.$$

Sei $I = \{i_1, \ldots, i_p\} \subset \{1, \ldots, n-1\}$ und definiere $e_I := e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$. Um zu zeigen, dass F ein Isomorphismus von Komplexen ist bleibt noch zu zeigen, dass $F \circ d' = d \circ F$. Es gilt

$$d' \circ F(e_n) = d'(e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i) = \tilde{y_n} - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i = y_n = F(y_n) = F \circ d(e_n),$$

und weiter folgt

$$\begin{aligned} d' \circ F(e_I \wedge e_n) &= d'(e_I \wedge F(e_n)) \\ &= d'(e_I) \wedge F(e_n) + (-1)^{|I|} e_I \wedge d' \circ F(e_n) \\ &= d(e_I) \wedge F(e_n) + (-1)^{|I|} e_I \wedge F \circ d(e_n), \end{aligned}$$

genauso wie

$$\begin{aligned} F \circ d(e_I \wedge e_n) &= F(d(e_I) \wedge e_n + (-1)^{|I|} e_I \wedge d(e_n)) \\ &= F \circ d(e_I) \wedge F(e_n) + (-1)^{|I|} F(e_I) \wedge F \circ d(e_n) \\ &= d(e_I) \wedge F(e_n) + (-1)^{|I|} e_I \wedge F \circ d(e_n), \end{aligned}$$

womit unsere Aussage vollständig bewiesen ist. □

Korollar 2.34. *Liegt y_n im Ideal $(y_1, \ldots, y_{n-1})$, dann gibt es Elemente $\alpha_i \in A$, sodass $y_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i$ gilt. Dann gilt:*

$$\mathcal{K}_A(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) \cong \mathcal{K}_A(y_1, \ldots, y_{n-1}, 0)$$

als Komplex von A-Moduln. Und es gibt ein $b \in \mathcal{K}_A^{-1, Dy_n}(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)$, sodass

$$\mathrm{H}\, \mathcal{K}_A(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) \cong \mathrm{H}\, \mathcal{K}_A(y_1, \ldots, y_{n-1}) \otimes \wedge([b])$$

als A-Moduln. Ist A eine graduierte Algebra, so gilt die Isomorphie als bigraduiert A-Algebra.

Beweis. Das Element b ist gegeben durch $e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i$ und das Element $[b]$ ist die Klasse von b. □

Lemma 2.35. *Sei $y \in A$ und $y\, \mathrm{H}^0\, \mathcal{K}_A^*(y_1, \ldots, y_n) = 0$. Dann gilt für alle $p < 0$ ebenfalls $y\, \mathrm{H}^p\, \mathcal{K}_A^*(y_1, \ldots, y_n) = 0$.*

Beweis. Es gibt ein $a \in \mathcal{K}_A^{-1}(y_1, \ldots, y_n)$ mit $d(a) = y$. Sei nun $b \in \mathrm{H}\, \mathcal{K}_A^p(y_1, \ldots, y_n)$ und b' ein geeigneter Repäsentant von b in Kern(d). Dann gilt nach der Leibniz-Regel: $d(ab') = d(a)b' = yb'$. Also ist $yb' \in$ Bild(d). □

Sei $y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_m \in A$, dann gilt als Algebra

$$\mathcal{K}^*(y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_m) \cong \mathcal{K}^*(y'_1, \ldots, y_n) \otimes \mathcal{K}_A^*(y_1, \ldots, y'_m).$$

Sei $\mathcal{K}_A := \mathcal{K}(y'_1, \ldots, y_n)$ und $\mathcal{K}'_A := \mathcal{K}_A(y_1, \ldots, y'_m)$ und sei d bzw. d' das Differential auf $\mathcal{K}_A$ bzw. $\mathcal{K}'_A$. Dann können wir $\mathcal{K}^*(y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_m)$ als den Doppelkomplex

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}_A^{p+1} \otimes_A {\mathcal{K}'_A}^q \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes d'"] & \mathcal{K}_A^{p+1} \otimes_A {\mathcal{K}'_A}^{q+1} \\ \mathcal{K}_A^p \otimes_A {\mathcal{K}'_A}^q \arrow[u, "d \otimes \mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes d'"] & \mathcal{K}_A^p \otimes_A {\mathcal{K}'_A}^{q+1} \arrow[u, "d \otimes \mathrm{id}"'] \end{tikzcd}$$

betrachten.

Lemma 2.36. *Sei $y, y_1, \dots, y_n \in A$, dann gilt*

$$\mathrm{H}\,\mathcal{K}_A(y, y_1, \dots, y_n) \cong \mathrm{H}\,\mathcal{K}_{A/(y)}(y_1, \dots, y_n)$$

als graduierte Algebra.

Beweis. Wir betrachten $\mathcal{K}_A(y, y_1, \dots, y_n)$ als Doppelkomplex $\mathcal{K}_A(y) \otimes_A \mathcal{K}_A(y_1, \dots, y_n)$. Es gilt

$$\begin{aligned} & \mathrm{H}\,\mathcal{K}_A(y) \otimes_A \mathcal{K}_A(y_1, \dots, y_n) \\ \cong \quad & A/(y) \otimes_A \mathcal{K}_A(y_1, \dots, y_n) \\ \cong \quad & \mathcal{K}_{A/(y)}(y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.14 ist die oberste Zeile aber der E_2-Term der zweiten dort vorgestellten Spektralsequenz. Da $\mathcal{K}_A(y)$ azyklisch ist, folgt mit Lemma 2.16 die Aussage. □

2.4.3 Torsions-Produkte mit endlicher Dimension

Wir haben zuvor definiert, was es bedeutet, dass eine Algebra Poincaré-Dualität erfüllt. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass für $\mathbb{F}$ ein Körper, $A = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_k]$ eine Polynomalgebra und $y_1, \dots, y_n \in A$, die Algebra $\mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_A(y_1, \dots, y_n)$ die Poincaré-Dualität erfüllt, falls sie endliche dimensional ist. Dabei sagen wir, dass $\mathrm{H}\,\mathcal{K}_A(y_1, \dots, y_n)$ eine PD-Algebra ist, wenn $Tot(\mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_A(y_1, \dots, y_n))^*$ eine PD-Algebra ist.

Lemma 2.37. *Sei $\mathrm{H}\,\mathcal{K}_A(y_1, \dots, y_n)$ eine PD-Algebra und $\tilde{y} \in A$, dann ist auch $\mathrm{H}\,\mathcal{K}_A(y_1, \dots, y_n, \tilde{y})$ eine PD-Algebra.*

Beweis. Sei d das Differential auf $\mathcal{K}_A^{*,*}(y_1, \dots, y_n)$ und d' das Differential auf $\mathcal{K}_A^{*,*}(\tilde{y})$. Dann betrachten wir $\mathcal{K}_A^{*,*}(y_1, \dots, y_n, \tilde{y})$, wie im vorherigen Abschnitt, als Doppelkomplex

$$\mathcal{K}_A^{*,*}(y_1, \dots, y_n) \otimes \mathcal{K}_A^{*,*}(\tilde{y}).$$

Sei $\bar{d}' = \mathrm{id} \otimes d' : \mathrm{H}^{p,*}\,\mathcal{K}_A(y_1, \dots, y_n) \otimes_A \mathcal{K}^{-1,*}(A) \to \mathrm{H}^{p,*}\,\mathcal{K}_A(y_1, \dots, y_n) \otimes_A \mathcal{K}^{0,*}(A)$. Da $\mathcal{K}^{q,*}(A) = A, q \in \{-1, 0\}$, können wir $\bar{d}'$ als die Multiplikation mit dem Element $\tilde{y}$ auf $\mathrm{H}^{p,*}\,\mathcal{K}_A(y_1, \dots, y_n)$ betrachten. Aus Satz 2.15 erhalten wir eine Spektralsequenz mit

$$E_2^{p,q} \cong \mathrm{H}^{p,q}(\mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_A(y_1, \dots, y_n) \otimes_A \mathcal{K}_A^{*,*}(\tilde{y}); \bar{d}'),$$

die als Algebra gegen $\mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_A(y_1, \dots, y_n, \tilde{y})$ konvergiert. $\mathrm{H}\,\mathcal{K}_A^{*,*}(y_1, \dots, y_n) \otimes_A \mathcal{K}_A^{*,*}(\tilde{y})$ ist als differentielle Algebra isomorph zu $\mathrm{H}^{p,*}\,\mathcal{K}_A(y_1, \dots, y_n) \otimes_{\mathbb{F}} \wedge(e_{\tilde{y}})$ und so eine PD-Algebra, da $\mathrm{H}\,\mathcal{K}_A^{*,*}(y_1, \dots, y_n)$ eine PD-Algebra ist. Es gilt

$$\bar{d}'(\mathrm{H}\,\mathcal{K}_A^{*,*}(y_1, \dots, y_n) \otimes_A \mathcal{K}_A^{*,*}(\tilde{y}))^{h-1}) = 0,$$

da das Element mit Totalgrad h in $\mathrm{H}\,\mathcal{K}_A^{*,*}(y_1, \dots, y_n) \otimes_A \mathcal{K}_A^{-1,*}$ liegt, also nicht im Bild con $\bar{d}'$ liegen kann. Nach Lemma 2.29 ist somit $\mathrm{H}^{*,*}(\mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_A(y_1, \dots, y_n) \otimes_A \mathcal{K}_A^{*,*}(\tilde{y}); \bar{d}')$ eine PD-Algebra. Nach [Ser67, IV.1] gilt

$$|\,\mathrm{H}^{p,q}(\mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_A(y_1, \dots, y_n) \otimes_A \mathcal{K}_A^{*,*}(\tilde{y}); \bar{d}')| = |\,\mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_A(y_1, \dots, y_n)|$$

und so ist $E_2^{*,*} = E_\infty^{*,*}$. Da $E_\infty^{*,*}$ eine PD-Algebra ist folgt mit Lemma 2.31, dass auch $\mathrm{H}_A^{*,*}(y_1, \dots, y_n, \tilde{y})$ eine PD-Algebra ist. □

Korollar 2.38. *Sei $\tilde{y} \in A$ und sei $\mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_A(y_1, \ldots, y_n)$ eine PD-Algebra mit formaler Dimension h, dann ist $\mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_A(y_1, \ldots, y_n, \tilde{y})$ eine PD-Algebra mit formaler Dimension $h + D\tilde{y} - 1$.*

Satz 2.39. *Gegeben der Koszul Komplex $\mathcal{K}_A^{*,*}(y_1, \ldots, y_n)$. Ist $|A/(y_1, \ldots, y_n)|$ endlich, so ist auch $|\,\mathrm{H}^{p,*}\,\mathcal{K}_A(y_1, \ldots, y_n)|$ endlich und $\mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_A(y_1, \ldots, y_n)$ ist eine PD-Algebra.*

Beweis. Wir finden ein $l \in \mathbb{N}$, sodass $0 \equiv x_i^l \in \mathrm{H}_A^{0,*}(y_1, \ldots, y_n) = A/(y_1, \ldots, y_n)$ für alle i gilt. Nach [MS05, I.4] ist

$$\mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_A(x_1^l, \ldots, x_k^l) = \mathrm{H}^{0,*}\,\mathcal{K}_A(x_1^l, \ldots, x_k^l)$$

ein PD-Algebra, also ist nach unserem vorherigen Lemma auch $\mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_A(x_1^l, \ldots, x_k^l, y_1)$ eine PD-Algebra. Induktiv sehen wir, dass $\mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_A(x_1^l, \ldots, x_k^l, y_1, \ldots, y_n)$ die Poincaré-Dualität erfüllt. Aus Korollar 2.34 wissen wir aber, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_A(x_1^l, \ldots, x_k^l, y_1, \ldots, y_n) &\cong \mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_A(0, \ldots, 0, y_1, \ldots, y_n) \\ &\cong \mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_A(y_1, \ldots, y_n) \otimes_{\mathbb{F}} \wedge(e_1, \ldots, e_k) \end{aligned}$$

als $\mathbb{F}$-Algebra gilt, mit $De_i = (-1, Dx_i^l)$. Mit Lemma 2.28 können wir sehen, dass schon $\mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_A(y_1, \ldots, y_n)$ eine PD-Algebra sein muss. □

Korollar 2.40. *Unter den Bedingungen des letzten Satzes gilt: $\mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_A(y_1, \ldots, y_n)$ ist eine PD-Algebra mit formaler Dimension*

$$h = \sum_j (Dy_j - 1) - \sum_i (Dx_i - 1).$$

Die Fundamentalklasse liegt im Bigrad $(-(n-k), h + (n-k))$.

Beweis. $\mathrm{H}^{0,*}\,\mathcal{K}_A(x_1^l, \ldots, x_k^l)$ ist eine PD-Algebra mit formaler Dimension

$$(l-1) \cdot \sum_i Dx_i$$

und mit dem vorherigen Korollar sehen wir, dass $\mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_A(x_1^l, \ldots, x_k^l, y_1, \ldots, y_n)$ formale Dimension

$$(l-1) \cdot \sum_i Dx_i + \sum_j (Dy_j - 1)$$

hat. Dabei ist die formale Dimension von $\wedge(x_1^l, \ldots, x_k^l)$ gleich $\sum_i (l \cdot Dx_i - 1)$ und zusammenfassend erhalten wir unsere Formel. □

2.4.4 Konsequenzen für Tor

In diesem Abschnitt sei $\mathbb{F}$ ein Körper, $A = \mathbb{F}[y_1, \ldots, y_n]$ und $B = \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k]$ ein A-Modul, sodass $y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_k$ in geraden Graden liegen oder $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 2$ gilt.

Sei X eine topologische Mannigfaltigkeit, dann ist klar, dass für s ungerade, $p \neq 2$ und $x \in \mathrm{H}^s(X; \mathbb{F}_p)$ gilt $x^2 = 0$. Für $x \in \mathrm{H}^s(X; \mathbb{F}_2)$ können wir weder für s gerade noch für s ungerade folgern, dass $x^2 = 0$ gilt. Mit diesem Sachverhalt im Kopf, wirkt das folgende Lemma verblüffend, lässt aber schon vermuten, dass ein Tor-Term nicht gut geeignet ist um $\mathrm{H}^*(X; \mathbb{F}_p)$ zu modellieren. Dies können wir als heuristische Erklärung sehen, weshalb die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ komplizierter ist als mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$, für $p \neq 2$.

Lemma 2.41. *Sei $s < 0$ und gelte s ungerade oder* $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 2$. *Für $x \in \mathrm{Tor}_A^{s,*}(B, \mathbb{F})$ gilt $x^2 = 0$.*

Beweis. Wir beweisen, dass für ein $x \in \mathcal{K}_B^s(y_1, \ldots, y_n)$ bereits gilt $x^2 = 0$. Sei $J = \{j_1, \ldots, j_{-s}\} \subset \{1, \ldots, n\}$ und sei $e_J := e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{-s}}$, dann gilt

$$e_J^2 = (e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{-s}})^2 = e_{i_1}^2 \wedge \ldots \wedge e_{i_{-s}}^2 = 0, \tag{2.2}$$

da schon $e_{i_l}^2 = 0$ gilt, fuer alle l.

Sei nun $J_i := \{j_{i,1}, \ldots, j_{i,-s}\} \subset \{1, \ldots, n\}$, sei $e_{J_i} := e_{j_{i,1}} \wedge \ldots \wedge e_{j_{i,-s}}$ und sei $a_i \in B$, sodass $x = \sum_i a_i e_{J_i}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x^2 &= (\sum_i a_i e_{J_i})^2 \\ &= \sum_i (a_i e_{J_i})^2 + \sum_{i \neq l} a_i a_l (e_{J_i} e_{J_l} + e_{J_l} e_{J_i}). \end{aligned}$$

Die erste Summe ist gleich Null nach (2.2). Ist s ungerade oder ist $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 2$, so gilt $e_{J_i} e_{J_l} = -e_{J_l} e_{J_i}$. Damit ist auch die zweite Summe gleich Null.

□

Ist $\mathrm{Tot}^*(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B, \mathbb{F}))$ eine PD-Algebra mit formaler Dimension $2h$, dann induziert das Produkt auf $\mathcal{K}_B^*(y_1, \ldots, y_n)$ eine nicht ausgeartete Biliniearform

$$\mathrm{Tot}^h(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B, \mathbb{F})) \times \mathrm{Tot}^h(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B, \mathbb{F})) \to \mathbb{F} = \mathrm{Tot}^{2h}(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B, \mathbb{F})).$$

Ist h gerade und hat $\mathbb{F}$ eine Charakteristik ungleich 2, so ist die Form symmetrisch und ist h ungerade oder hat $\mathbb{F}$ die Charakteristik 2 so ist die Form nach dem vorherigen Lemma symplektisch. Nach [Lan02, XV.8] besitzt jeder symplektische Raum gerade Vektorraum-Dimension.

Lemma 2.42. *Sei $\mathbb{F}$ ein Körper. Sei $A := \mathbb{F}[y_1, \ldots, y_n]$ und sei $B := \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k]$ ein A-Modul und sei Dy_i und Dx_j gerade für alle i, j. Ist $d := |\,\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B, \mathbb{F})|$ endlich, dann ist d durch 2 teilbar, falls $n-k \geq 1$ gilt und falls eine der folgenden Bedingungen gilt:*

- *$(n-k)$ ist nicht durch 4 teilbar*
- *Die formale Dimension h von $\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B, \mathbb{F})$ nicht durch 4 teilbar ist*

Beweis. Da Dy_i und Dx_j gerade sind, besitzen h und $(n-k)$ nach Korollar 2.40 die selbe Parität. Aus der Poincaré-Dualität folgt:

$$|\,\mathrm{Tor}_A^{i,*}(B, \mathbb{F})| = |\,\mathrm{Tor}_A^{-(n-k)-i,*}(B, \mathbb{F})| \tag{2.3}$$

und

$$|\,\mathrm{Tot}^i(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B, \mathbb{F}))| = |\,\mathrm{Tot}^{h-i}(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B, \mathbb{F}))| \tag{2.4}$$

Ist $(n-k)$ ungerade, so ist

$$\begin{aligned} |\,\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B, \mathbb{F})| &= \sum_{i=-(n-k)}^{0} |\,\mathrm{Tor}_A^{i,*}(B, \mathbb{F})| \\ &\overset{(2.3)}{=} \sum_{i=-(n-k-1)/2}^{0} 2|\,\mathrm{Tor}_A^{i,*}(B, \mathbb{F})| \end{aligned}$$

gerade. Ist $h = 4\ell + 2$, dann induziert die Poincaré-Dualität eine nicht-ausgeartete, symplektische Form

$$\mathrm{Tot}^{2\ell+1}(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F})) \times \mathrm{Tot}^{2\ell+1}(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F})) \to \mathbb{F}.$$

Das heißt $\mathrm{Tot}^{2\ell+1}(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F}))$ ist gerade. Somit ist

$$\begin{aligned} |\,\mathrm{Tot}^*(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F}))| &= \sum_{i=0}^{h} |\,\mathrm{Tot}^i(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F}))| \\ &\overset{(2.4)}{=} \sum_{i=0}^{2\ell} 2|\,\mathrm{Tot}^i(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F}))| + |\,\mathrm{Tot}^{2\ell+1}(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F}))| \end{aligned}$$

gerade. Ist $(n-k) = 4\ell'+2$, dann ist $\mathrm{Tor}_A^{2\ell'+1}(B,\mathbb{F})$ konzentriert in ungeraden Graden. Es gilt also $\mathrm{Tot}^{2\ell}(\mathrm{Tor}_A^{2\ell'+1,*}(B,\mathbb{F})) = \emptyset$. Ist $h = 4\ell$ und ist $a \in \mathrm{Tot}^{2\ell}(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F}))$, dann kann a^2 nicht die Fundamentalklasse sein und da $\mathrm{Tot}^{4\ell}(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F}))$ genau 1-dimensional ist gilt damit $a^2 = 0$. Und die Poincaré-Dualität induziert wiederum ein nicht-Ausgeartete, symplektische Form

$$\mathrm{Tot}^{2\ell}(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F})) \times \mathrm{Tot}^{2\ell}(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F})) \to \mathbb{F}$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} |\,\mathrm{Tot}^*(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F}))| &= \sum_{i=0}^{h} |\,\mathrm{Tot}^i(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F}))| \\ &\overset{(2.4)}{=} \sum_{i=0}^{2\ell-1} 2|\,\mathrm{Tot}^i(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F}))| + |\,\mathrm{Tot}^{2\ell}(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F}))| \end{aligned}$$

ist gerade. □

Korollar 2.43. *Sei $A := \mathbb{F}_2[y_1,\dots,y_n]$ und sei $B := \mathbb{F}_2[x_1,\dots,x_k]$ ein A-Modul. Ist $d := |\,\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F}_2)|$ endlich, dann ist d durch 2 teilbar, falls $n-k \geq 1$ gilt.*

Beweis. Ist die formale Dimension h ungerade, so gehen wir wie im Beweis des vorherigen Lemmas vor. Es gilt nach Lemma 2.41: $a^2 = 0$ für alle $a \in \mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F}_2)$. Damit gilt für $h = 2\ell$, dass die Poincaré-Dualität eine nicht-ausgeartete, symplektische Form

$$\mathrm{Tot}^{\ell}(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F}_2)) \times \mathrm{Tot}^{\ell}(\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F}_2)) \to \mathbb{F}_2$$

induziert. Damit ist wie zuvor $|\,\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F})|$ gerade. □

Lemma 2.44. *Seien $A := \mathbb{F}_2[y_1,\dots,y_n]$ und $A' := \mathbb{F}_2[y_1,\dots,y_n,y]$ und sei $B := \mathbb{F}_2[x_1,\dots,x_k]$ ein A' und damit auch ein A-Modul und sei Dy_i und Dx_j gerade für alle i,j. Ist $|\,\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F})|$ endlich und gerade, dann ist $|\,\mathrm{Tor}_{A'}^{*,*}(B,\mathbb{F})|$ durch 4 teilbar, falls $n-k \geq 1$ gilt und mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

- *$(n-k)$ ist nicht durch 4 teilbar*
- *$h + Dy$ ist nicht durch 4 teilbar, für h die formale Dimension von $\mathrm{Tor}_A(B,\mathbb{F})$.*

Beweis. Sei d_0 das Differential auf dem Komplex $\mathcal{K}_B(y)$ und d_1 das auf $\mathcal{K}_B(y_1,\dots,y_n)$. Die Spaltenfiltrierung auf dem Doppelkomplex

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}_B^p(y_1,\dots,y_n)\otimes_B\mathcal{K}_B^{-1}(y) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes d_1"] & \mathcal{K}_B^p(y_1,\dots,y_n)\otimes_B\mathcal{K}_B^{0}(y) \\
\mathcal{K}_B^{p-1}(y_1,\dots,y_n)\otimes_B\mathcal{K}_B^{-1}(y) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes d_1"] \arrow[u, "d_0\otimes\mathrm{id}"] & \mathcal{K}_B^{p-1}(y_1,\dots,y_n)\otimes_B\mathcal{K}_B^{0}(y) \arrow[u, "d_0\otimes\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

induziert nach Satz 2.14 eine Spektralsequenz E_r die gegen $\mathrm{Tor}_{A'}(B,\mathbb{F})$ konvergiert. Es gilt

$$E_1^{*,*}\cong\mathrm{Tor}_A(B,\mathbb{F})\otimes_B\mathcal{K}_B^*(y),$$

dass Differential ist gegeben durch $d_1(a\otimes e_y)=ay$ und $d_1(a)=0$, für $a\,\mathrm{Tor}_A(B,\mathbb{F})$, Aus Gradgründen bricht die Spektralsequenz im E_2-Term zusammen. $\mathrm{Tot}(E_1)$ ist als Algebra isomorph zu $\mathrm{Tor}_A(B,\mathbb{F})\otimes_{\mathbb{F}}\wedge(e_y)$ und damit eine PD-Algebra. Da $|\mathrm{Tor}_A(B,\mathbb{F})|$ gerade ist, ist $|E_1^{*,*}|$ durch 4 teilbar.

Ist $(n-k)$ ungerade, dann liegt die Fundamentalklasse von $\mathrm{Tor}_{A'}(B,\mathbb{F})$ in geradem Grad und nach Lemma 2.30 ist dann auch $H(E_1,d_1)$ durch 4 teilbar. Sei $(n-k)=4\ell+2$. Wenn es ein $a\in\mathrm{Tor}_A^{p,*}(B,\mathbb{F})$ gibt, sodass $d_1(a\otimes e_y)\cdot(a\otimes e_y)$ gleich der Fundamentalklasse von E_1 ist, dann muss $p=-(2\ell+1)$ sein. Aber in diesem Fall gilt nach Lemma 2.41:

$$d_1(a\otimes e_y)\cdot(a\otimes e_y)=a^2y\otimes e_y=0$$

Also können wir wieder mit Lemma 2.30 folgern, dass $H(E_1,d_1)$ durch 4 teilbar ist.

Sei nun $(n-k)=4\ell$ und angenommen es ein $a\in\mathrm{Tor}_A^{p,*}(B,\mathbb{F})$, sodass $d_1(a\otimes e_y)\cdot(a\otimes e_y)$ gleich der Fundamentalklasse von E_1 ist, dann muss $p=-(2\ell)$ sein. Ist h die formale Dimension von $\mathrm{Tor}_A(B,\mathbb{F})$, dann ist die Formale Dimension von E_1 gleich $h'=h+Dy-1$. Sei nun $Da=(-2\ell,r)$, dann ist

$$Dd_1(a\otimes e_y)\cdot(a\otimes e_y)=(-4\ell-1,2r+2Dy)$$

Die Fundamentalklasse von E_1 liegt im Bigrad

$$(-4\ell-1,h'+4\ell+1)=(-4\ell-1,h+Dy+4\ell).$$

Da r und Dy gerade Zahlen sind, würde die Tatsache das $h+Dy$ nicht durch 4 teilbar ist der Existenz von a widersprechen. Was unsere Aussage bestätigt. □

Korollar 2.45. *Seien $A:=\mathbb{F}_2[y_1,\dots,y_n]$ und $A':=\mathbb{F}_2[y_1,\dots,y_n,y]$ und sei $B:=\mathbb{F}_2[x_1,\dots,x_k]$ ein A' und damit auch ein A-Modul. Ist $|\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F})|$ endlich und gerade, dann ist $|\mathrm{Tor}_{A'}^{*,*}(B,\mathbb{F})|$ durch 4 teilbar, falls $n-k\geq 1$ gilt.*

Beweis. Da nach Lemma 2.41 gilt $a^2=0$ für alle $a\in\mathrm{Tor}_A^{*,*}(B,\mathbb{F}_2)$, gilt auch stets

$$d(a\otimes e_y)\cdot(a\otimes e_y)=0.$$

Und damit folgt unsere Aussage sofort aus Lemma 2.30. □

2.4.5 Eine spezielle Bockstein-Spektralsequenz

Sei $A = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k]$. Wir schreiben in diesem Abschnitt kurz $\mathcal{K}_A$ für $\mathcal{K}_A^{*,*}(y_1, \ldots, y_n)$. Nun ist $\mathcal{K}_A$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul und so ist

$$0 \to \mathcal{K}_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \overset{1\otimes\cdot p}{\to} \mathcal{K}_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \to K_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Diese liefert uns eine langen exakte Sequenz in der Kohomologie und somit ein exaktes Paar, was uns zur folgenden Spektralsequenz führt:

Lemma 2.46. *Es existiert eine Spektralsequenz* (E_r, d_r), *mit*

$$E_1^* \cong \mathrm{H}^*(\mathcal{K}_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p)$$

die gegen $(\mathrm{H}^*(\mathcal{K}_A)/\mathit{Torsion}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$ *konvergiert.*

Der Beweis ist in [Bro61, 1.1] zu finden.

Korollar 2.47. *Ist* $|\,\mathrm{H}^*(\mathcal{K}_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p)|$ *endlich, so folgt dass* $|\,\mathrm{H}^*(\mathcal{K}_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})|$ *endlich ist. Weiter ist* $|\,\mathrm{H}^*(\mathcal{K}_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p)|$ *genau dann durch* 2 *teilbar, wenn* $|\,\mathrm{H}^*(\mathcal{K}_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})|$ *es ist.*

Wir wollen nun zeigen, dass die Spektralsequenz eine multiplikative Spektralsequenz ist. Eine mögliche Methode ist der in unserem Fall sehr komplizierte Ansatz [Mas54] von Massey. Wir leiten die Multiplikativität deshalb aus einem sogenannten Cartan-Eilenberg System wie in [CE56] her. Für ein Paar (s, t) mit $-\infty \leq s \leq t \leq \infty$, definieren wir

$$\mathrm{H}(s,t) := \mathrm{H}^*(\mathcal{K}_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_{p^{t-s}})$$

und für $s \leq s'$ und $t \leq t'$ definieren wir den Homomorphismus $\mathrm{H}(s,t) \to \mathrm{H}(s',t')$ durch die induzierte Abbildung die auf $\mathbb{F}_{p^{t-s}} \to \mathbb{F}_{p^{t'-s'}}$ durch $1 \mapsto p^{s-s'}$ gegeben ist. Für $s \leq t \leq u$ sei $\delta : \mathrm{H}(s,t) \to \mathrm{H}(t,u)$ gegeben durch den Verbindungshomomorphismus in der lange exakten Sequenz, die durch

$$0 \to \mathbb{F}_{u-t} \to \mathbb{F}_{u-s} \to \mathbb{F}_{t-s} \to 0$$

induziert wird.

Lemma 2.48. *Es existiert eine Spektralsequenz* (E_r, d_r), *mit*

$$E_1^* \cong \mathrm{H}^*(\mathcal{K}_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p)$$

die als $\mathbb{F}_p$*-Algebra gegen* $(\mathrm{H}^*(\mathcal{K}_A)/\mathit{Torsion}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$ *konvergiert.*

Beweis. Die leicht nachzuprüfenden Axiome (AP.1)-(AP.5) von [CE56, XV.7] sind erfüllt und so definiert $\mathrm{H}(s,t)$ ein Cartan-Eilenberg System. Und wir erhalten eine Spektralsequenz von $\mathbb{F}_p$-Moduln. Durch [Dou59, II] erhalten wir die Produktstruktur, sobald wir die dortigen Axiome (AAP.1) und (AAP.2) nachgewiesen haben. Für $p, p', r \geq 0$ induziert das Produkt

$$m : \mathcal{K}_A \otimes \mathcal{K}_A \to \mathcal{K}_A$$

ein wohldefiniertes Produkt

$$m : \mathrm{H}(p, p+r) \otimes \mathrm{H}(p', p'+r) \to \mathrm{H}(p+p', p+p'+r).$$

Die folgenden langwierigen, aber gradlinigen Rechnungen wollen wir nicht aufführen. $\square$

Korollar 2.49. *Ist $n-k$ eine gerade Zahl, so ist $\ell = |\operatorname{H}^*(K_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p)|$ genau dann durch 4 teilbar, wenn ℓ endlich ist und $|\operatorname{H}^*(K_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})|$ durch 4 teilbar ist.*

Beweis. Nach Satz 2.39 ist $E_1^* = \operatorname{H}^*(K_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p)$ eine Poincaré-Algebra. Nach dem vorherigen Lemma konvergiert die Spektralsequenz als Algebra und mit Lemma 2.29 ist auch E_r^* eine Poincaré-Algebra. Da $(n-k)$ gerade ist tauchen nicht triviale Differentiale also immer paarweise auf, also ist $|E_r|$ genau dann durch 4 teilbar, wenn $|E_{r+1}|$ es ist. □

2.5 Die Tate-Auflösung

Sei $A = \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$. Der Koszul-Komplex hat uns eine Möglichkeit gegeben eine A-freie Auflösung von $\mathbb{F}$ zu konstruieren. Sei nun $y_1, \ldots, y_k$ eine reguläre Sequenz in A und sei $\bar{A} = A/(y_1, \ldots, y_k)$, dann wollen wir in diesem Abschnitt eine Möglichkeit kennen lernen, eine $\bar{A}$-frei Auflösung von $\mathbb{F}$ zu konstruieren. Weiter werden wir die bigraduierte Algebra $\operatorname{Tor}_{\bar{A}}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ untersuchen.

Mit der Bar-Auflösung haben wir bereits eine mögliche Auflösung gefunden. Da diese aber sehr groß ist, sind wir auf der Suche nach einer anderen, kleineren Auflösung. Diese werden wir mit der Bar-Auflösung vergleichen. Für diesen Vergleich führen wir noch etwas Notation ein: Wir wollen für eine graduierte Algebra A definieren, was ein System von geteilten Potenzen ist.

Definition 2.50. Sei $A = \sum_{i \geq 0} A^i$ eine zusammenhängende, graduierte $\mathbb{F}$-Algebra und I ein Ideal in A. Wir sagen, dass A *ein System von geteilten Potenzen auf I besitzt*, wenn es für jedes Element $x \in I^i$ und jedes $p \in \mathbb{N}_0$ ein $x^{(p)} \in I^{p \cdot i}$ existiert, sodass $x^{(0)} = 1$, $x^{(1)} = x$ und folgende Axiome erfüllt sind:

$$x^{(p)} x^{(q)} = \binom{p+q}{p} x^{(p+q)} \tag{2.5}$$

$$(x+y)^{(p)} = \sum_{i+j=p} x^{(i)} y^{(j)} \tag{2.6}$$

$$(xy)^{(p)} = x^p y^{(p)} = x^{(p)} y^p \tag{2.7}$$

$$(x^{(p)})^{(q)} = \frac{(pq)!}{q!(p!)^q} x^{(pq)} \tag{2.8}$$

◇

Beispiel 2.51. Die Algebra der geteilten Potenzen $\Gamma := \Gamma(y_1, \ldots, y_k)$ über einem Körper $\mathbb{F}$ besitzt ein System von geteilten Potenzen auf ganz Γ. ◇

In den meisten Fällen werden wir mit differenziellen Algebren arbeiten und erweiterten unsere Definition deshalb:

Definition 2.52. Sei $A = \sum_{i \geq 0} A^i$ eine zusammenhängende, differenzielle graduierte $\mathbb{F}$-Algebra und I ein Ideal in A, sodass A ein System von geteilten Potenzen auf I besitzt. Wir sagen, das Differential d auf A *ist verträglich mit dem System der geteilten Potenzen auf I*, falls für alle $x \in I$ gilt:

$$d(x^{(p)}) = d(x) \cdot x^{(p-1)} \tag{2.9}$$

◇

Diese neue Struktur finden sich auf den Komplexen $\mathcal{B}^{*,*}(A, A, \mathbb{F})$ und $\mathcal{B}^{*}(\mathbb{F}, A, \mathbb{F})$ wieder, wie in [BK94, 4.1] nachzulesen ist:

Satz 2.53 (Brüderle, Kunz)**.** *Sei R ein Körper oder die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und sei A eine graduierte R-Algebra. Die beiden differentiell graduierten Algebren $\mathcal{B}^{*,*}(A, A, R)$ bzw. $\mathcal{B}^{*,*}(R, A, R)$ besitzt ein eindeutiges System von geteilten Potenzen auf den Idealen $\mathcal{B}^{-2n,*}(A, A, R)$ bzw. $\mathcal{B}^{-2n,*}(R, A, R)$. Das Differential d_e ist verträglich mit dieser Struktur.*

Kommen wir nun zu der Konstruktion der angesprochenen Auflösung. Nach [Tat57, 4] gilt:

Satz 2.54 (Tate)**.** *Sei $A = \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ und sei $c_{i,j} \in A$, sodass $y_i := \sum_j x_j c_{i,j}$ eine reguläre Sequenz von homogenen Polynomen in A ist. Sei J das Ideal $(y_1, \ldots, y_k)$ in A und sei $\bar{c_{i,j}}$ die Restklasse von $c_{i,j}$ in $\bar{A} := A/J$. Definiere die bigraduierte Algebra*

$$\mathcal{T} := \wedge([x_1], \ldots, [x_n]) \otimes_{\mathbb{F}} \Gamma(v_1, \ldots, v_k) \otimes_{\mathbb{F}} \bar{A}.$$

Dabei sei $\bar{A}$ konzentriert im Bigrad $(0, *)$, es sei $D[x_i] = (-1, Dx_i)$ und $Dv_i = (-2, Dy_i)$. Vermöge des Differentials d,

$$\begin{array}{lcll} d([x_i]) & = & x_i, & \\ d(v_i) & = & \sum_j [x_i] \bar{c_{i,j}}, & \\ d(a) & = & 0 & \text{für } a \in \bar{A}, \end{array}$$

wird $\mathcal{T}$ zu einer $\bar{A}$-freien Auflösung von $\mathbb{F}$.

Aus dem selben Beweis leiten wir folgendes Korllar her, welches den vorherigen Satz verallgemeinert:

Korollar 2.55. *Sei $A = \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ und sei $\ell \leq n$. Sei $c_{i,j} \in A$,*

$$y_i := \sum_j x_j c_{i,j} \qquad , i \in \{1, \ldots, \ell\}$$

und

$$y_i := x_i + \sum_j x_j c_{i,j} \qquad , i \notin \{1, \ldots, \ell\},$$

sodass die y_i eine reguläre Sequenz von homogenen Polynomen in A bilden. Sei J das Ideal $(y_1, \ldots, y_k)$ in A und sei $\bar{c_{i,j}}$ die Restklasse von $c_{i,j}$ in $\bar{A} := A/J$. Definiere die bigraduierte Algebra

$$\mathcal{T} := \wedge([x_1], \ldots, [x_n]) \otimes_{\mathbb{F}} \Gamma(v_{\ell+1}, \ldots, v_k) \otimes_{\mathbb{F}} \bar{A}.$$

Dabei sei $\bar{A}$ konzentriert im Bigrad $(0, *)$, es sei $D[x_i] = (-1, Dx_i)$ und $Dv_i = (-2, Dy_i)$. Vermöge des Differentials d,

$$\begin{array}{lcll} d([x_i]) & = & x_i, & \\ d(v_i) & = & \sum_j [x_i] \bar{c_{i,j}}, & \\ d(a) & = & 0 & \text{für } a \in \bar{A}, \end{array}$$

wird $\mathcal{T}$ zu einer $\bar{A}$-freien Auflösung von $\mathbb{F}$.

Mit der Notation des vorherigen Satzes definiere $\theta : \mathcal{T} \to \mathcal{A}^{*,*}(\bar{A}, \bar{A}, \mathbb{F})$ durch $\theta(a) = a$ für $a \in \bar{A}$, $\theta([x_i]) = [x_i]$ und

$$\theta(v_j^{(p)}) = (\sum_{i=1}^{n} [\bar{c_{i,j}}|x_i])^{(p)}.$$

Die Abbildung θ ist ein injektiver Homomorphismus von Algebren. Nach [Tat57, §2] gilt $dv_j^{(p)} = dv_j \cdot v_j^{(p-1)}$ und nach Satz 2.53 gilt

$$d_e \left((\sum_{i=1}^{n} [\bar{c_{i,j}}|x_i])^{(p)} \right) = d_e[\bar{c_{i,j}}|x_i] \nabla (\sum_{i=1}^{n} [\bar{c_{i,j}}|x_i])^{(p-1)}$$

und wir folgern, dass Θ ein injektiver Homomrphismus von differentiellen Algebren mit einem System von geteilten Potenzen auf $\mathcal{T}^{2*}$ bzw. $\mathcal{B}^{2*,*}(\bar{A}, \bar{A}, \mathbb{F})$ ist. Da $\mathcal{T}$ und $\mathcal{B}^{*,*}(\bar{A}, \bar{A}, \mathbb{F})$ insbesondere projektive Auflösungen sind, existiert eine Abbildung $\nu : \mathcal{B}^{-n}(\bar{A}, \bar{A}, \mathbb{F}) \to \mathcal{T}$. Nach [CE56, V.1.2] ist $\theta \circ \nu$ bzw. $\nu \circ \theta$ kettenhomotop zur Identität. Ist N ein $\bar{A}$-Moldul, dann induziert θ einen Isomorphismus

$$\theta^* : \mathrm{H}^*(\mathcal{T} \otimes_A N) \to \mathrm{H}^*(\mathcal{B}^{-n}(\mathbb{F}, \bar{A}, N))$$

von graduierten $\mathbb{F}$-Algebren.

Zuletzt folgern wir nun mit der Vorrede und [Tat57, 6]:

Lemma 2.56. *Sei $A = \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ und $y_1, \ldots, y_k$ eine reguläre Sequenz in A. Sei $J = (y_1, \ldots, y_k)$ und sei $c_{i,j} \in A$, sodass*

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} x_i$$

Sei $\bar{A} = A/J$ und $\bar{c_{i,j}}$ die Restklasse von $c_{i,j}$ in $\bar{A}$. Dann ist

$$\mathrm{Tor}_{\bar{A}}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cong \wedge([x_1], \ldots, [x_n]) \otimes_{\mathbb{F}} \Gamma(v_1, \ldots, v_k),$$

als bigraduierte Algebra, mit v_i die Klasse das Repräsentanten $\sum_{i=1}^{n} [\bar{c_{i,j}}|x_i]$.

Kapitel 3

Semicharakteristik

Sei X eine geschlossene, orientierbare Mannigfaltigkeit ungerader Dimension und $\mathbb{F}$ ein Körper. Die $\mathbb{F}$-*Semicharakteristik* $k(X;\mathbb{F})$ ist definiert durch

$$k(X;\mathbb{F}) = \sum_i \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^{2i}(X;\mathbb{F}) \mod 2.$$

Sie nimmt also die Werte 0 oder 1 an. Die $\mathbb{F}$-Semicharakteristik ist im Gegensatz zur Euler-Charakteristik abhängig von der Wahl des Körpers $\mathbb{F}$. Wir schreiben Semicharakteristik anstatt $\mathbb{F}$-Semicharakteristik, wenn die Wahl des Körpers eindeutig ist.

3.1 Bekannte Resultate

Sei $w_i(X)$ die i-te Stiefel-Whitney-Klasse und $[X] \in \mathrm{H}_n(X;\mathbb{F})$ die Fundamentalklasse der n-dimensionalen, geschlossene, orientierbaren Mannigfaltigkeit X, dann gilt nach [MLP69]:

Satz 3.1 (Milnor, Lusztig, Peterson). *Ist X eine geschlossene, orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $2n+1$, mit n gerade, dann gilt*

$$k(X;\mathbb{R}) - k(X;\mathbb{F}_2) = \langle w_2(X) w_{2n-1}(X), [X] \rangle.$$

In demselben Text wird auch ein direktes Korollar aufgeführt:

Korollar 3.2. *Gilt im vorherigen Fall die Gleichheit $k(X;\mathbb{R}) = k(X;\mathbb{F}_2)$, so folgt*

$$k(X;\mathbb{R}) = k(X;\mathbb{F}_p)$$

für p beliebig.

Der Beweis setzt sich zusammen aus [MLP69] und [Bro62]. In [Sto74] finden wir folgende Aussage:

Satz 3.3 (Stong). *Gibt es eine freie $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-Operation auf X, so ist $k(X;\mathbb{F}_2) = 0$.*

Diese $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-Operationen lassen sich im Fall das $H \subset SU(n)$ gilt und $X = SU(n)/H$ ist, vergleichsweise gut konstruieren. Singhof leitet hieraus die folgenden Aussagen zur $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik von X her. Alle sind in [Sin85] zu finden:

Satz 3.4 (Singhof). *Sei H eine zusammenhängende einfache Lie-Untergruppe von $SU(n)$ und ist $\dim(SU(n)/H)$ ungerade, so ist $k(SU(n)/H;\mathbb{F}_2) = 0$ oder $SU(n)/H$ ist diffeomorph zu einer Sphäre.*

Satz 3.5 (Singhof). *Sei H eine zusammenhängende halb-einfache Lie-Untergruppe von $SU(n)$ und ist $\dim(SU(n)/H)$ ungerade. Ist H prim zu A_1 und C_2, dann ist $k(SU(n)/H;\mathbb{F}_2) = 0$ oder $SU(n)/H$ ist diffeomorph zu $SU(n)/(SU(k) \times SU(n-k))$ oder zu einer Sphäre.*

Satz 3.6 (Singhof). *Sei H eine zusammenhängende Untergruppe von G und sei $\operatorname{Rang} G \geq 9 \cdot 2^{8 \operatorname{Rang} H + 16}$. Dann ist $k(G/H;\mathbb{F}_2) = 0$.*

Eine Aussage zur $\mathbb{R}$-Semicharakteristik folgt aus [Bec81]:

Satz 3.7 (Becker). *Sei G/H ein $4n+1$ dimensionaler homogener Raum, dann gilt:*

$$k(G/H;\mathbb{R}) = \begin{cases} |W_G|/|W_H|, & \operatorname{Rang} G = \operatorname{Rang} H + 1 \\ 0, & \operatorname{Rang} G > \operatorname{Rang} H + 1 \end{cases}$$

3.2 Folgerungen und Bemerkungen

Wir behalten die Notation des vorherigen Abschnittes bei und widmen uns noch einmal der Formel

$$k(X;\mathbb{R}) - k(X;\mathbb{F}_2) = \langle w_2(X) w_{2n-1}(X), [X] \rangle.$$

Ist $w_2(X) = 0$, so ist natürlich die Gleichheit von $k(X;\mathbb{R})$ und $k(X;\mathbb{F}_2)$ gegeben. Singhof und Wemmer untersuchen in [SW86, 4.2], wann für $X = G/H$ ein homogener Raum gilt: $w_2(X) = 0$. Die untersuchung, wann $w_{2n-1}(X) = 0$ gilt, scheint viel komplizierter. Aber in [BH58, 7] sehen wir, dass alle Stiefel-Whitney Klassen von G/H im Bild von $B\rho^* : \mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_2) \to (G/H;\mathbb{F}_2)$ liegen, wobei $\rho : G/H \to BH$ die charakteristische Abbildung ist. Nach Satz 2.17 gibt für R ein kommutativer Ring mit 1 einen Isomorphismus

$$\Theta : \operatorname{Tor}_{C^*(BG;R)}(\mathrm{C}^*(BH;R), R) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^*(G/H;R)$$

von R-Algebra. Zusammen mit Satz 2.18 folgt, dass alle Stiefel-Whitney Klassen in

$$\operatorname{Tor}^{0,*}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_2), \mathbb{F}_2)$$

liegen. Liegt das Urbild von $[X]^*$, dem dualen der Fundamentalklasse in $\mathrm{H}_*(G/H;R)$, unter Θ im externe Grad kleiner als Null, so gilt $\langle w_2(X) w_{2n-1}(X), [X] \rangle = 0$, da ein Urbild von $w_2(X)$ und $w_{2n-1}(X)$ unter Θ im externen Grad 0 liegt. Dies beschreiben wir in folgendem Lemma noch einmal:

Lemma 3.8. *Sei $H \hookrightarrow G$ eine Inklusion in $LieQ_2$, mit H abgeschlossen in G. Sei $X = G/H$, mit $\dim G/H = 2n+1$ und n gerade. Sei $R := \mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2)$ und $S := \mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_2)$, mit $\operatorname{Rang} S < \operatorname{Rang} R$, dann ist $k(X;\mathbb{F}) = k(X;\mathbb{F}_2)$.*

Beweis. Nach Lemma 2.6 und Korollar 2.40 ist $|\operatorname{Tor}^{*,*}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_2), \mathbb{F}_2)|$ endlich. Damit sitzt ein Urbild FK der Fundamentalklasse unter Θ nach Korollar 2.40 im Bigrad $(\operatorname{Rang} H - \operatorname{Rang} G, *)$. Diese Fundamentalklasse FK liegt im höchsten Grad, überlebt also bis in den E_∞-Term. Da w_2 und w_{2n-1} aber im Bigrad $(0,*)$ liegen und es dort kein multiplikatives Extensionsproblem gibt ist $w_2 w_{2n-1}$ nicht die Fundamentalklasse, also gleich Null. $\square$

Lemma 3.9. *Seien $H \subset G$ Lie-Gruppen, mit H abgeschlossen in G. Sei $X = G/H$, mit $\dim G/H = 2n+1$ und n gerade. Sei $\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_2)$ eine Polynomalgebra mit Erzeugern in geraden Graden, dann ist $k(X;\mathbb{F}) = k(X;\mathbb{F}_2)$.*

Beweis. Da

$$\mathrm{Tor}^{0,*}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_2;\mathbb{F}_2) \cong \mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_2)/\,\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2)$$

nur Elemente von geradem Grad enthält ist $w_{2n+1} = 0$. □

Beispiel 3.10. Sei $X = SU(3)/SO(3)$, dann sind die E_2-Terme der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz gegeben durch

$$E_2^{*,*} = \wedge([c_3])$$

im Fall $R = \mathbb{Q}$, mit $D[c_3] = (-1,6)$ und

$$E_2^{*,*} = \mathbb{F}_2[w_2,w_3]/w_2^2,w_3^2$$

im Fall $R = \mathbb{F}_2$, mit $Dw_2 = (0,2)$ und $Dw_3 = (0,3)$. Beide Spektralsequenzen kollabieren im E_2-Term aus Mangel an möglichen Differentialen. Es gilt $w_2w_3 \neq 0$. Und so folgt:

$$\langle w_2(X)w_{2n-1}(X),[X]\rangle = 1$$

Wir sehen was sich schon an der $\mathbb{Q}$- und die $\mathbb{F}_2$-Kohomologie selbst ablesen lässt: $k(X;\mathbb{F}) \neq k(X;\mathbb{F}_2)$. ◇

Beispiel 3.11. Aus dem vorherigen Abschnitt wissen wir, dass für homogene Räume $X = G/H$ und $\dim X = 4n+1$ gilt:

$$k(X;\mathbb{R}) = \begin{cases} 0 & \text{für Rang}\, H < \text{Rang}\, G - 1 \\ |W(G)|/|W(H)| & \text{für Rang}\, H = \text{Rang}\, G - 1 \end{cases}$$

Für $\dim X = 4n+3$ gilt die Formel nicht. Mit Lemma 1.3 und der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz berechnet sich, dass

$$k(SO(12)/SU(6);\mathbb{R}) = 1,$$

gilt, aber es gilt ebenfalls

$$|W(SO(12))|/|W(SU(6))| = 0,$$

was ein Gegenbeispiel für die Existenz dieser Formel im Fall $\dim X = 4n+3$ ist. Auch $X = SO(20)/SU(10)$ zeigt sich als Gegenbeispiel. Gegebenenfalls lassen sich weitere Gegenbeispiele in $X = SO(2(4n+1))/SU(4n+1)$ finden. ◇

Kapitel 4

Kompakte Lie-Gruppen

Dieses kurze Kapitel beschäftigt sich ausschließlich mit Beispielen, die uns ein Gefühl für das geben sollen, was uns in den kommenden Kapitzeln erwartet.

4.1 Beispiele

Untersucht man die Kohomologie eines homogenen Raumes, so wird man häufig feststellen, dass $\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{F})$ eine oder beide der folgenden Eigenschaften erfüllt:

- Es gibt eine $\mathbb{F}$-Algebra A und eine nicht-triviale äußere Algebra Λ, sodass $\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{F}) = A \otimes \Lambda$ gilt.
- Ist $h := \operatorname{Rang} G - \operatorname{Rang} H$, dann ist $|\,\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{F})|$ durch 2^h teilbar.

Der Wert $|\Lambda|$ ist eine Potenz von 2. Ist $|\Lambda| \geq 4$, so ist auch $|\,\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{F})|$ durch 4 teilbar und im Fall $\dim G/H$ ungerade, verschwindet die $\mathbb{F}$-Semicharakteristik. Der Tatsache, dass die Eigenschaften so häufig erfüllt sind wollen wir diesen Abschnitt widmen. Wir wollen aber auch Beispiele aufführen, in denen die Eigenschaften nicht erfüllt sind.

Im Zusammenhang mit der ersten Eigenschaft fällt sofort die von Borel formuliert Aussage [Bor67, I.7.3] auf:

Lemma 4.1 (Borel)**.** *Sei $p \neq 2$ und seien $H \subset G$ Lie-Gruppen. Sei*

$$\mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}_p) = \wedge(x_1, \ldots, x_n),$$

wobei Dx_i ungerade ist. Sei weiter $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$ die Projektion. Dann gibt es Unteralgebren A und Λ von $\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{F}_p)$, sodass $\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{F}_p) \cong A \otimes \Lambda$ gilt. Weiter ist π^* injektiv auf Λ ist und $\pi^*(A) = 0$.

Das Lemma gibt aber keine Auskunft, ob Λ nicht trivial ist. Es sollen nun Beispiele folgen, in denen $\Lambda = 0$ gilt.

Beispiel 4.2. Sei

$$\begin{array}{cccc} \iota' : & T^3 & \hookrightarrow & T^6 \\ & (t_1, t_2, t_3) & \mapsto & (t_1, t_2, t_3, t_1t_2, t_1t_3, t_2t_3) \end{array}$$

und sei $\iota'' : T^6 \subset SU(6)^6$ die Inklusion des maximalen Torus. Definiere $\iota = \iota'' \circ \iota'$. Es gilt $\mathrm{H}^*(BSU(2)^6; \mathbb{R}) = \mathbb{R}[y_1, \ldots, y_6]$, $Dy_i = 4$ und $\mathrm{H}^*(BT^3; \mathbb{R}) = \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$, $Dx_i = 2$. Die Abbildung ι induziert einen Homomorphismus $B\iota^*$, der wie folgt gegeben ist:

$$\begin{array}{rccc} B\iota^* : & \mathrm{H}^*(BSU(2)^6; \mathbb{R}) & \to & \mathrm{H}^*(BT^3; \mathbb{R}) \\ & y_1 & \mapsto & x_1^2 \\ & y_2 & \mapsto & x_2^2 \\ & y_3 & \mapsto & x_3^2 \\ & y_4 & \mapsto & (x_1 + x_2)^2 \\ & y_5 & \mapsto & (x_1 + x_3)^2 \\ & y_6 & \mapsto & (x_2 + x_3)^2 \end{array}$$

Nach 2.22, dem Satz von Cartan gilt:

$$\mathrm{H}^*(SU(2)^6/T^3; \mathbb{R}) = \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BSU(6);\mathbb{R})}(\mathbb{R}; \mathrm{H}^*(BT^3; \mathbb{R})).$$

Sei $A := \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3] / (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$, dann ist der rechte Term nach Lemma 2.36 als Algebra isomorph zu

$$\mathrm{H}\,\mathcal{K}_A(x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3).$$

Mit einer leichten, aber längeren Rechnung sehen wir:

i	0	2	5	7	8	10	13	15
$\lvert \mathrm{H}^i(SU(2)^6/T^3; \mathbb{R}) \rvert$	1	3	8	6	6	8	3	1

Die Kohomologie in den nicht genannten Graden ist gleich Null. Nun sehen wir, dass $\mathrm{H}^i(SU(2)^6/T^3; \mathbb{R})$ aus Gradgründen nicht isomorph zum Produkt aus einer nicht-trivialen äußeren Algebra und einer weiteren Algebra sein kann. Es gilt $3 = \operatorname{Rang} SU(2)^6 - \operatorname{Rang} T^3$, aber $\lvert \mathrm{H}^i(SU(2)^6/T^3; \mathbb{R}) \rvert$ ist nur durch 4 und nicht durch $8 = 2^3$ teilbar. Die zweite Eigenschaft ist also nicht erfüllt.

Sei $n \geq 3$ und $N := n + \binom{n}{2}$. Sei $\iota' : T^n \to T^N$ geben durch

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (t_1, \ldots, t_n, t_1t_2, t_1t_3, \ldots, t_1t_n, t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}t_n).$$

Sei $\iota'' : T^N \to SU(2)^N$ die Inklusion des maximalen Torus und definiere $\iota = \iota'' \circ \iota'$. Für $n = 3, 4, 5, 6$ ist $SU(N)^N/\iota$ ein homogener Raum, für den gilt: $\lvert \mathrm{H}^i(SU(2)^N/\iota; \mathbb{R}) \rvert$ ist durch 4, aber nicht durch 2^{N-n} teilbar. Vermutlich ist für $n > 6$ die zweite Eigenschaft nie erfüllt. $\diamond$

Beispiele zu finden, in denen die Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ nicht in eine Produkt aus einer äußeren Algebra und einer weiteren Algebra zerfällt, ist schwieriger. Das folgende Beispiel ist rechnerisch so aufwendig, dass die Rechnungen mit dem Computer durchgeführt wurden. Es ist von den Beispielen, welche der Autor gefunden hat, jenes mit $\dim G/H$ minimal:

Beispiel 4.3. Sei $\iota : SU(3)^3 \hookrightarrow SU(9)$ die Standardeinbettung, dann gibt es keine Algebra A und keine nicht-triviale, äußere Algebra Λ, sodass $\mathrm{H}^*(SU(9)/SU(3)^3; \mathbb{F}_2) \cong A \otimes \Lambda$ gilt. $\diamond$

Zerfällt $\mathrm{H}^*(G/H; \mathbb{F})$ in das Produkt aus einer äußeren Algebra und einer weiteren Algebra und ist die äußere Algebra nicht zu klein, dann ist $k(G/H; \mathbb{F}) = 0$. Bei der Suche nach einer äußeren Algebra, die Unteralgebra von $\mathrm{H}^*(G/H; \mathbb{F})$ ist, dürfen wir uns nicht zu sehr auf die Suche nach einem Λ wie in Lemma 4.1 beschränken. Es gibt Fälle in denen Λ trivial ist, aber A selbst eien äußere Algebra. Der einfachste Fall lautet wie folgt:

Beispiel 4.4. Sei $\pi : SU(2) \twoheadrightarrow SU(2)/S^1 \sim S^2$ die Projektion. Es ist nun schnell zu sehen: $\mathrm{H}^*(SU(2)/S^1; \mathbb{F}) \cong A \otimes \Lambda$ mit $A = \wedge(x)$ und $\Lambda = 0$. Es gilt $\pi^*(x) = 0$. $\diamond$

Wir wollen nun ein technisches Lemma aufführen, welches uns ein einfaches, hinreichendes Kriterium gibt, mit dem wir in einigen Spezialfällen zeigen können, dass die $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik eines homogenen Raumes mit ungerader Dimension verschwindet.

Lemma 4.5. *Seien $H \subset G$ zwei Lie-Gruppen, sodass $\mathrm{H}^*(G; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[y_1, \ldots, y_n]$, $\mathrm{H}^*(H; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_k]$ gilt. Gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$, sodass*

$$|\mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_k] / (y_1, \ldots, \hat{y_i}, \ldots, y_n)|$$

endlich ist, dann ist $|\operatorname{Tor}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BH; \mathbb{F}_2), \mathbb{F}_2)|$ durch 4 teilbar.

Beweis. Das Korollar von Lemma 2.42 zeigt, dass $|H\mathcal{K}_{\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_2)}(y_1, \ldots, \hat{y_i}, \ldots, y_n)|$ durch 2 teilbar ist. Mit dem Korollar von Lemma 2.44 können wir dann zeigen, dass $|H\mathcal{K}_{\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_2)}(y_1, \ldots, y_n)|$ durch 4 teilbar ist. $\square$

Dieses Lemma, so praktisch es auch ist, kann nicht immer angewendet werden: Seien $H \subset G$ Lie-Gruppen und sei $\mathrm{H}^*(BH; \mathbb{F}) = \mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_k]$ und $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}) = \mathbb{F}_2[y_1, \ldots, y_n]$. Die Annahme es gäbe immer ein y_i, sodass

$$|\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k] / (y_1, \ldots, \hat{y_i}, \ldots, y_n)| < \infty$$

erfüllt ist, muss verworfen werden: Es folgt ein Gegenbeispiel welches die genannte Vermutung widerlegt; aufgrund des rechnerischen Aufwandes ist es mit dem Computer berechnet.

Beispiel 4.6. Sei $\iota' : T^8 \hookrightarrow T^9$ gegeben durch $(t_1, \ldots, t_8) \mapsto (t_1, \ldots, t_8, t_7 t_8)$ und sei $\iota'' \circ \iota' : T^9 \to U(9)$ die die Inklusion des maximalen Torus. Die Abbildung $\iota := \iota'' \circ \iota'$ induziert den Homomorphismus $B\iota^* : \mathrm{H}^*(BU(9); \mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(BT^8; \mathbb{F}_2)$ und es gilt für alle $i \in \{1, \ldots, 9\}$:

$$|\,\mathrm{H}^*(BT^8; \mathbb{F}_2)/(c_1, \ldots, \hat{c_i}, \ldots, c_n)| = \infty$$

$\diamond$

Kapitel 5

Zur Eilenberg-Moore-Spektralsequenz

Gegeben die Lie-Guruppen $H \subset G$. Dann ist der E_2-Term der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz mit Koeffizienten in einem Körper $\mathbb{F}$ (siehe Abschnitt 2.2.2), gegeben durch

$$E_2 \cong \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F})}(\mathbb{F}, \mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}), \mathbb{F}).$$

Sei nun $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}[y_1, \dots, y_n]$ und sei $0 = y_n \in \mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F})}(\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}), \mathbb{F}) &= \mathrm{H}\,\mathcal{K}_{\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F})}(y_1, \dots, y_n) \\ &\cong \mathrm{H}\,\mathcal{K}_{\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F})}(y_1, \dots, y_{n-1}) \otimes \wedge([y_n]), \end{aligned}$$

als bigraduierte Algebra. Dabei ist $D[y_n] = (-1, Dy_n)$. Wir wollen uns in diesem Kapitel auf den Körper $\mathbb{F}_2$ beschränken und folgenden Satz beweisen:

Satz 5.1. *Sei $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ und seien $H \subset G$ wie zuvor. Dann gilt in der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zu Faserung $G/H \to BH \to BG$ mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$: Das Element $[y_n] \in E_2$ überlebt bis in den E_∞-Term und es gibt für $i \geq 2$ bigraduierte Algebren T_i, sodass $E_r \cong T_r \otimes \wedge([y_n])$ als bigraduierte Algebra gilt.*

$$\text{Für } t \in T_r \otimes 1 \text{ folgt } d_r(t) \in T_t \otimes 1. \tag{5.1}$$

Damit gibt es eine bigraduierte Algebra T_∞ und der E_∞-Term ist als bigraduierte Algebra isomorph zu $T_\infty \otimes \wedge([y_n])$.

Da die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz eine Spektralsequenz von Algebren ist, folgt aus der Tatsache, dass für ein $t \in T_r \otimes 1$ auch $d_r(t) \in T_r \otimes 1$ gilt ebenfalls, dass für ein $t \in T_r \otimes [y_n]$ auch $d_r(t) \in T_r \otimes [y_n]$ gilt. Damit ist $H(E_r, d_r)$ isomorph zu $H(T_r, d_r) \otimes \wedge([y_n])$ und $T_{r+1} = H(T_r, d_r)$. Wir müssen also nur untersuchen, dass die Differentiale die gesuchte Eigenschaft (5.1) haben und damit beginnen wir im nächsten Abschnitt.

Da wir im Folgenden nur die Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ benötigen, werden wir uns auf dies Wahl beschränken. Mit einem Mehraufwand welcher durch Vorzeichen entsteht, lässt sich die Aussge vermutlich auch für andere Körper beweisen.

Wir werden dabei wie folgt vorgehen: In Satz 2.17 sehen wir, dass wir die Kohomologie von G/H als die Homologie des Doppelkomplexes

$$B^{*,*} := \mathcal{B}^{*,*}(\mathbb{F}_2, \mathrm{C}^*(BG;\mathbb{F}_2), \mathrm{C}^*(BH;\mathbb{F}_2))$$

auffassen können. Die Differentiale der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz können wir also bestimmen, indem wir die Differentiale der Spektralsequenz bestimmen, die zur Spaltenfiltrierung von $B^{*,*}$ assoziiert ist. Salopp beschrieben entstehen das Differential d_r in einer Doppelkomplex-Spektralsequenz durch Ketten $b_1, \ldots, b_r \in B^{*,*}$, für die gilt $d_0(b_1) = 0$ und $d_1(b_i) = d_0(b_{i+1})$; später folgt eine genaue Beschreibung. Durch die Untersuchung dieser Folgen werden wir zuerst exemplarisch die Eigenschaft (5.1) für das d_2 Differential herleiten und werden dann zeigen, dass wir für bestimmte Folgen in $B^{*,*}$ die Eigenschaft (5.1) für d_r zeigen können. Zu diesem Zeitpunkt wissen wir dann wie eine Folge aussehen müsste, aber wir wissen noch nicht ob die so gewählte Folge auch wirklich existiert und so bleibt uns zuletzt auch noch die Existenz zu bestätigen. Was den Beweis komplettiert.

5.1 Doppelkomplexe

Sei $\mathbb{F}$ ein Körper und $(A^{p,q}, d_0', d_1')$ ein Doppelkomplex über $\mathbb{F}$. Das Diagram

$$\begin{tikzcd} A^{p-1,q} \arrow[r, "d_1'"] & A^{p,q} \\ A^{p-1,q-1} \arrow[u, "d_0'"] \arrow[r, "d_1'"] & A^{p,q-1} \arrow[u, "d_0'"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert. Die Spaltenfiltrierung dieses Komplexes induziert wie in Satz 2.14 beschrieben eine Spektralsequenz E_r, die gegen $H(A)$ konvergiert. Nach [KS72, 2.1] gilt folgende Aussage, die in [McC01, 8.30] ausführlich bewiesen wird:

Lemma 5.2. *Sei $a_1, \ldots, a_s \in A^{*,*}$, sodass $d_0'(a_1) = 0$ und $d_1'(a_i) = d_0'(a_{i+1})$ gilt. In der Spektralsequenz E_r überlebt a_1 bis in den E_s-Term und d_s bildet die Klasse von a_1 auf die Klasse von $d_1'(a_s)$ ab.*

Sei von nun an $A^{*,*}$ konzentriert in nicht-positiven externen Graden. Wir sagen, ein $a_1 \in \operatorname{Kern} d_0'$ lässt sich bis zur Länge s fortsetzen, wenn es eine Folge $a_2, \ldots, a_s \in A^{*,*}$ gibt, sodass $d_1'(a_i) = d_0'(a_{i+1})$ gilt. Wir sagen, dass a_1 sich maximal bis zur Länge s fortsetzen lässt, wenn sich keine Folge $a_2, \ldots, a_{s+1} \in A^{*,*}$ mit dieser Eigenschaft finden lässt. Wir sagen, dass sich a_1 bis zur Länge ∞ fortsetzen lässt, wenn es eine Folge $a_2, \ldots, a_s \in A^{*,*}$ gibt und $a_s \in A^{0,*}$ liegt.

Lemma 5.3. *Lässt sich ein Element a_1 maximal bis zu Länge s fortsetzen, dann ist $d_s([a_1]) \neq 0$*

Beweis. Wir beweisen den Fall $s = 2$. Sei $a_1 \in A^{p,q}$ und $a_2 \in A^{p+1,q-1}$. Angenommen $d_2([a_1]) = 0$. Das bedeutet, dass die die Klasse von $d_1'([a_2])$ in E_2 verschwindet. Was wiederum bedeutet, dass es ein $b \in A^{p+1,q-1}$ und ein $e \in A^{p+2,q-2}$ gibt, sodass $d_1'(b) + d_0'(e) = d_1'(a_2)$ gilt. Das heißt aber, dass sich a_1 durch die Folge $a_1, a_2 + b, e$ bis zur Länge 3 fortsetzen lässt. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung, dass sich a_1 maximal bis zur Länge 2 fortsetzen lässt. □

Im Folgenden werden wir für das Shuffle-Produkt in der Bar-Konstruktion $[a]\nabla[b]$ nur $[a][b]$ schreiben.

Sei X ein CW-Komplex, dann besitzt der singuläre Kokettenkomplex $C^*(X, \mathbb{F})$ ein $\cup_1$-Produkt, eine $\mathbb{F}$ lineare Abbildung

$$\cup_1 : C^p(X; \mathbb{F}) \otimes C^q(X; \mathbb{F}) \to C^{p+q-1}(X; \mathbb{F}),$$

welches die Hirschformeln erfüllt:

$$\begin{aligned} d(a \cup_1 b) &= a \cup b - (-1)^{Da} b \cup a - d(a) \cup_1 b - (-1)^{Da} a \cup_1 d(b), \\ (a \cup b) \cup_1 c &= (-1)^{Da} a \cup (b \cup_1 c) + (-1)^{Db \cdot Dc} (a \cup_1 c) \cup b. \end{aligned}$$

Sind $a, b \in \operatorname{Kern} d$, so gilt natürlich $d(a \cup_1 b) = a \cup b - (-1)^{Da} b \cup a$.

Seien X, Y zwei CW-Komplexe und sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Sei $C^*(X; \mathbb{F}_2)$ der singuläre Kettenkomplex von X mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$. Vermöge f wird $C^*(X; \mathbb{F}_2)$ zu einem $C^*(Y; \mathbb{F}_2)$-Modul. Weiter soll $\mathrm{H}^*(Y; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[y_1, \ldots, y_n]$ gelten. Der Komplex

$$\mathcal{B}^{*,*}(\mathbb{F}_2; C^*(Y; \mathbb{F}_2); C^*(X; \mathbb{F}_2))$$

ist ein Doppelkomplex. Sei (E_r, d_r) die zur Spaltenfiltrierung assoziierte Spektralseuqenz. Seien $v_1, \ldots, v_n$ Repräsentanten von $y_1, \ldots, y_n$ in $C^*(Y; \mathbb{F}_2)$. Sei $v := [v_1] \ldots [v_k] \in E_0^{-k.*}$, $k \leq n$. Es gilt $d_0'(v) = d_0(v) = 0$ und wir nehmen an, dass $d_1([v]) = 0$ gilt. Wir wollen untersuchen wohin d_2 die Klasse von v in E_2 abbildet. Dann ist $d_1'(v)$ gleich

$$\sum_{i<j} [v_i v_j + v_j v_i][v_1] \ldots [\hat{v_i}] \ldots [\hat{v_j}] \ldots [v_k] + \sum_i [v_1] \ldots [\hat{v_i}] \ldots [v_k] v_i.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & d_0'(\sum_{i<j} [v_i \cup_1 v_j][v_1] \ldots [\hat{v_i}] \ldots [\hat{v_j}] \ldots [v_k]) \\ = \quad & \sum_{i<j} [v_i v_j + v_j v_i][v_1] \ldots [\hat{v_i}] \ldots [\hat{v_j}] \ldots [v_k]. \end{aligned}$$

Das Element

$$\sum_{i<j} [v_i \cup_1 v_j][v_1] \ldots [\hat{v_i}] \ldots [\hat{v_j}] \ldots [v_k]$$

existiert immer, damit liegen $d_1'(v)$ und

$$\sum_i [v_1] \ldots [\hat{v_i}] \ldots [v_k] v_i$$

in der selben Klasse in E_1 und da $d_1([v]) = 0$ gilt, muss es Urbilder v_i' von v_i unter d in $C^*(X; \mathbb{F}_2)$ geben und es gilt

$$\begin{aligned} & d_0'(\textstyle\sum_i [v_1] \ldots [\hat{v_i}] \ldots [v_k] v_i') \\ = \quad & \textstyle\sum_i [v_1] \ldots [\hat{v_i}] \ldots [v_k] v_i. \end{aligned}$$

Damit gilt für a_2, definiert als

$$\sum_{i<j} [v_i \cup_1 v_j][v_1] \ldots [\hat{v_i}] \ldots [\hat{v_j}] \ldots [v_k] + \sum_i [v_1] \ldots [\hat{v_i}] \ldots [v_k] v_i',$$

dass $d_1'(v) = d_0'(a_2)$ gilt. Nun rechnen wir nach, $d_1'(a_2)$ ist gleich:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i<j} [v_1]\dots[\hat{v_i}]\dots[\hat{v_i}]\dots[v_k]v_iv_j' + v_jv_i' && (5.2)\\
+ & \sum_{i<j} [v_1]\dots[\hat{v_i}]\dots[\hat{v_j}]\dots[v_k]v_i \cup_1 v_j && (5.3)\\
+ & \sum_{\substack{i<j\\ i\neq l\neq j}} [v_i \cup_1 v_j][v_1]\dots[\hat{v_i}]\dots[\hat{v_j}]\dots[\hat{v_l}]\dots[v_k]v_l && (5.4)\\
+ & \sum_{\substack{i<j\\ i\neq l\neq j}} [v_iv_j + v_jv_i][v_1]\dots[\hat{v_i}]\dots[\hat{v_j}]\dots[\hat{v_l}]\dots[v_k]v_l' && (5.5)\\
+ & \sum_{i<j<k} [(v_i \cup_1 v_j)v_k + v_k(v_i \cup_1 v_i)][v_1]\dots[\hat{v_i}]\dots[\hat{v_j}]\dots[\hat{v_l}]\dots[v_k] && (5.6)
\end{aligned}$$

Wir rechnen weiter, dass $d_0((v_i \cup_1 v_j) \cup_1 v_k)$ gleich

$$(v_i \cup_1 v_j)v_k + v_k(v_i \cup_1 v_j) + (v_i \cup_1 v_k)v_j + v_j(v_i \cup_1 v_k) + (v_j \cup_1 v_k)v_i + v_i(v_j \cup_1 v_k)$$

ist und so wird das Element

$$\sum_{i<j<k} [(v_i \cup_1 v_j) \cup_1 v_k][v_1]\dots[\hat{v_i}]\dots[\hat{v_j}]\dots[\hat{v_l}]\dots[v_k]$$

mittels d_0' auf (5.6) abgebildet. Weiter bildet d_0' das Element

$$\sum_{\substack{i<j\\ i\neq l\neq j}} [v_i \cup_1 v_j][v_1]\dots[\hat{v_i}]\dots[\hat{v_j}]\dots[\hat{v_l}]\dots[v_k]v_l'$$

auf (5.4)+(5.5) ab. Damit folgt, dass $d_1'(a_2)$ und

$$\sum_{i<j} [v_1]\dots[\hat{v_i}]\dots[\hat{v_i}]\dots[v_k]v_iv_j' + v_jv_i' + v_i \cup_1 v_j$$

in der selben Klasse in E_1 liegen.

Sei $I = \{i_1, \dots, i_l\} \subset \{1, \dots, n\}$ und definiere $[y_I] := [y_{i_1}]\dots[y_{i_l}]$. Sei $x_I \in \mathrm{H}^*(X; \mathbb{F}_2)$, sodass für

$$a = \sum_{|I|=l} [y_I]x_I \in E_1$$

gilt: $d_1(a) = 0$. Aus unseren voran gegangenen Überlegungen können wir folgern:

Lemma 5.4. *Ist a wie zuvor. Dann existieren für $J \subset I$, $|J| = l-2$ Elemente $x_J \in \mathrm{H}^*(X; \mathbb{F}_2)$ und es existiert ein Element*

$$b = \sum_{J\subset I, |J|=l-2} [y_J]x_J \in E_1,$$

sodass die Klasse von a in E_2 durch d_2 auf die Klasse von b in E_2 abgebildet wird.

Mit diesem Lemma haben wir also schon einmal einen Anfang des Satzes 5.1 bewiesen. Den Rest dieses Kapitels wollen wir dafür verwenden eine ähnliche Aussage auch für höhere Differentiale zu beweisen.

5.2 Konstruktion

Wir haben in Abschnitt 2.4.1 gesehen, dass es einen injektiven Homomorphismus von Kettenkomplexen

$$\theta : \mathcal{K}^{-n}_{\mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2)}(y_1, \ldots, y_n) \to \mathcal{B}^{-n}(\mathbb{F}, \mathrm{H}^*(Y;\mathbb{F}_2), \mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2))$$

gibt, der e_{y_i} auf $[y_i]$ schickt und dass θ ein Homologieisomorphismus ist. Wir nennen Elemente aus dem Bild von θ Koszul-Elemente.

Sei $\alpha = \{i_1, \ldots, i_\ell\}$ eine geordnete Sequenz $\{1, \ldots, n\}$ und sei v_i ein Repräsentant von y_i in $\mathrm{C}^*(Y;\mathbb{F}_2)$. Dann definiere

$$v_\alpha = ((v_{i_1} \cup_1 v_{i_2}) \cup_1 \ldots) \cup_1 v_{i_\ell}.$$

In [GM74, 2.2] lesen wir nach, dass gilt:

$$d(v_\alpha) = \sum_{\beta \subset \alpha} v_\beta v_{\alpha-\beta}$$

Für $\alpha = \{i_1, \ldots, i_\ell\} \subset \{1, \ldots, n\}$ sei $w_\alpha \in \mathrm{C}^*(X;\mathbb{F}_2)$ im Kern von d, sodass

$$a_1 := \sum_{|\alpha|=\ell} [v_{i_1}] \ldots [v_{i_\ell}] w_\alpha \in \mathcal{B}^{-\ell,*}(\mathbb{F}_2, \mathrm{C}^*(Y;\mathbb{F}_2), \mathrm{C}^*(X;\mathbb{F}_2))$$

homogen ist und im Kern von d'_0 liegt.

Weiter werden α_i, β und γ ebenfalls geordnete Sequenzen in $\{1, \ldots, n\}$ sein.

In dem was kommt, wollen wir nun versuchen eine Folge zu konstruieren, die a_1 fortsetzt. Diese Konstruktion ist ein rechnerisch sehr aufwendiger Prozess und die Notation scheint im ersten Moment sehr unübersichtlich. Dennoch wird sich bei genauerer Betrachtung die Natürlichkeit des Verfahrens zeigen.

Wir wollen eine Reihe von Urbildern benennen, von denen a priori nicht sicher ist, ob sie wirklich existieren. Dies soll uns vorerst nicht stören, da wir erst einmal nur Notation einführen wollen. Die Existenz soll uns später kümmern. Für $|\beta| = \ell$ sei $w^{(0)}_\beta := w_\beta$. Sei $\beta \subset \{1, \ldots, n\}$, mit $|\beta| = \ell - 1$. Sei $w^{(1)}_\beta$ ein Urbild von

$$\sum_{\substack{|\gamma| = 1 \\ \gamma \cap \beta = \emptyset}} v_\gamma w^{(0)}_{\gamma+\beta},$$

dabei sei $\gamma + \beta$ die Vereinigung der beiden Sequenzen γ und β. Für $\beta \subset \{1, \ldots, n\}$, mit $|\beta| = \ell - 2$, sei $w^{(2)}_\beta$ ein Urbild von

$$\sum_{\nu=1}^{2} \sum_{\substack{|\gamma| = \nu \\ \gamma \cap \beta = \emptyset}} v_\gamma w^{(2-\nu)}_{\gamma+\beta}.$$

Induktiv definieren wir dann für $|\beta| = k$ das Element $w^{(k)}_\beta$ als Urbild von

$$\sum_{\nu=1}^{k} \sum_{\substack{|\gamma| = \nu \\ \gamma \cap \beta = \emptyset}} v_\gamma w^{(k-\nu)}_{\gamma+\beta}.$$

Es sei noch bemerkt, dass die Existenz der $w_\alpha^{(i+1)}$ von der Wahl der $w_\alpha^{(i)}$ abhängt. Wir werden später zeigen, wie die $w_\alpha^{(i)}$ gewählt werden können, sodass $w_\alpha^{(i+1)}$ existiert, falls es eine Fortsetzung bis zur Länge $i+1$ gibt.

Mit diesen Definitionen wollen wir nun eine Folge angeben, mit der sich a_1 fortsetzen lässt. Die Länge bis zu der sich a_1 fortsetzen lässt wird davon abhängen, ob die zuvor eingeführten Urbilder existieren. Auf dies gehen wir nach der Konstruktion genau ein. Wir definieren

$$\sum_{\binom{k}{0}} := \sum_{|\alpha|=\ell} \left(\sum_{\alpha_1 \subset \ldots \subset \alpha_{\ell-k}=\alpha} [v_{\alpha_1}][v_{\alpha_2-\alpha_1}]\ldots[v_{\alpha_{n-k}-\alpha_{n-k-1}}]w_\alpha \right), \tag{5.7}$$

dabei laufe die innere Summe über alle Teilmengen, sodass $\alpha_{i+1}-\alpha_i \neq \emptyset$ gilt und das kleinste Element in $\alpha_i - \alpha_{i-1}$ sei kleiner als das kleinste in $\alpha_{i+1}-\alpha_i$ ist; diese Bedingung bezeichnen wir als Bedingung (α). Salopp ausgedrückt ist (5.7) die Summe über alle Shuffle-Produkte bei denen die v_{i_j} auf $n-k$ Bars verteilt sind und insgesamt k-viele $\cup_1$ Produkte auftauchen. Es gilt dabei

$$a_1 = \sum_{\binom{0}{0}}.$$

Beispiel 5.5. Ist $n=\ell=4$ und $w_\alpha = 0$, dann gilt:

$$\sum_{\binom{0}{0}} = [v_1][v_2][v_3][v_4]$$

und

$$\sum_{\binom{1}{0}} = \begin{array}{rl} & [v_1 \cup_1 v_2][v_3][v_4] \\ + & [v_1 \cup_1 v_3][v_2][v_4] \\ + & [v_1 \cup_1 v_4][v_2][v_3] \\ + & [v_1][v_2 \cup_1 v_3][v_4] \\ + & [v_1][v_2 \cup_1 v_4][v_3] \\ + & [v_1][v_2][v_3 \cup_1 v_4] \end{array}$$

Weiter gilt:

$$\sum_{\binom{2}{0}} = \begin{array}{rlrl} & & + & [v_1 \cup_1 v_2][v_3 \cup_1 v_4] \\ & [(v_1 \cup_1 v_2) \cup_1 v_3][v_4] & + & [v_1 \cup_1 v_3][v_2 \cup_1 v_4] \\ + & [(v_1 \cup_1 v_2) \cup_1 v_4][v_3] & + & [v_1 \cup_1 v_4][v_2 \cup_1 v_3] \\ + & [(v_1 \cup_1 v_3) \cup_1 v_4][v_2] & + & [v_1 \cup_1 v_4][v_2 \cup_1 v_3] \\ + & [v_1][(v_2 \cup_1 v_2) \cup_1 v_4] & + & [v_1 \cup_1 v_3][v_2 \cup_1 v_4] \\ & & + & [v_1 \cup_1 v_2][v_3 \cup_1 v_4] \end{array}$$

und

$$\sum_{\binom{3}{0}} = [((v_1 \cup_1 v_2) \cup_1 v_3) \cup_1 v_4]$$

$\diamond$

In allen folgenden Summen gelte stets die Bedingung (α). Wir definieren für $i \leq k$

$$\sum_{\binom{k}{i}} = \sum_{|\alpha|=\ell-i} \left(\sum_{\alpha_1 \subset \ldots \subset \alpha_{\ell-k}=\alpha} [v_{\alpha_1}][v_{\alpha_2-\alpha_1}]\ldots[v_{\alpha_{n-k-i}-\alpha_{n-k-i-1}}]w_\alpha^{(i)} \right)$$

und für $i+j \leq k$ und $j \geq 1$ die Summe

$$\sum_{\binom{k}{j\cdot i}} = \sum_{|\alpha|:=\ell-i-j} \sum_{\substack{\beta \cap \alpha = \emptyset \\ |\beta| = j}} \sum_{\alpha_1 \subset \ldots \subset \alpha_{\ell-k} = \alpha} [v_{\alpha_1}][v_{\alpha_2-\alpha_1}] \ldots [v_{\alpha_{n-\ell}-\alpha_{n-\ell-1}}] v_\beta w_\alpha^{(i)}$$

und für $i \leq k$ definieren wir zuletzt die Summe

$$\sum_{\binom{k'}{i}} := \sum_{|\alpha|=\ell-i} \sum_{\substack{\gamma_1 \subset \gamma_2 \subset \alpha \\ |\gamma_2| \leq k-i+1}} \sum_{\alpha_1 \subset \ldots \subset \alpha_{\ell-k-1} = (\alpha - \gamma_2)}$$

über die Elemente

$$[v_{\gamma_1} v_{\gamma_2-\gamma_1} + v_{\gamma_2-\gamma_1} v_{\gamma_1}][v_{\alpha_1}][v_{\alpha_2-\alpha_1}] \ldots [v_{\alpha_{\ell-k-1}-\alpha_{\ell-k-2}}] w_\alpha^{(i)},$$

dabei sei das kleinste Element in γ_1 kleiner als das kleinste in $\gamma_2 - \gamma_1$ und $|\gamma_1|, |\gamma_2| \geq 1$.

Wir können nun nachrechnen, dass gilt:

$$d_1 \left(\sum_{\binom{k}{i}} \right) = \sum_{\binom{(k+1)'}{i}} + \sum_{j=1}^{k-i+1} \sum_{\binom{k+1}{j\cdot i}} .$$

Ebenso rechnen wir nach:

$$d_0 \left(\sum_{\binom{k}{i}} \right) = \sum_{\binom{(k+1)'}{i}} + \sum_{j=1}^{i} \sum_{\binom{k+1}{j\cdot(i-j)}} ,$$

dabei ist $\sum_{\binom{(k+1)'}{k+1}} = 0$. Hiermit können wir folgern:

$$d_1 \left(\sum_{i=0}^{k} \sum_{\binom{k}{i}} \right) = d_0 \left(\sum_{i=0}^{k+1} \sum_{\binom{k+1}{i}} \right).$$

Es sei noch bemerkt, dass üblicherweise für $|\alpha| = \ell$ viele der w_α gleich Null sein werden. Damit sind für $|\alpha| = \ell - i$ auch viele der $w_\alpha^{(i)}$ gleich Null.

Nun haben wir aber schon zuvor erwähnt, dass die Existenz von $w_\alpha^{(i)}$ für alle $|\alpha| = \ell - i$ nicht sicher ist. Existieren für alle $i < s$ die Elemente $w_\alpha^{(i)}$ für alle $|\alpha| \geq \ell - i$, dann existiert auch $\sum_{\binom{k}{i}}$ und a_1 lässt sich durch

$$a_{k+1} = \sum_{j=0}^{k} \sum_{\binom{k}{j}}, \qquad k = 0, \ldots, s-1$$

bis zu einer Länge von s fortsetzen. Wir nennen diese so konstruierte Kette $a_1, \ldots, a_s$ eine Fortsetzung der Form (K). Wir sehen auch, dass die $\sum_{\binom{s+1}{i}}$ für $i \leq s$ existieren und da gilt

$$d_1'(a_s) + d_0' \left(\sum_{i=0}^{s} \sum_{\binom{s+1}{i}} \right) = \sum_{i=1}^{s+1} \sum_{\binom{s+1}{i\cdot(s+1-i)}} =: K_{s+1},$$

folgt, dass $d_1(a_{s+1})$ und K_{s+1} in der selben Klasse in $E_1 = \mathcal{B}(\mathbb{F}_2, \mathrm{H}^*(Y;\mathbb{F}_2), \mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2))$ liegen und die Klasse von K_{s+1} ein Koszul-Element ist.

Wir wollen nun zeigen, dass sich jedes a_1 bis zu maximalen Länge s in der Form (K) fortsetzen lässt. Wir haben bereit in Lemma 5.4 gezeigt, dass die Aussage für $s = 2$ richtig ist. Wir finden also ein a_2 wie gesucht. Nehmen wir nun an, dass wir a_1 bis a_3 fortsetzen können, aber nicht in der gesuchten Form (K). Es gilt, dass d_2 die Klasse von a_1 auf Null abbildet. Die Klasse von $d_1'(a_2)$ ist gleich der Klasse von K_2 und verschwindet im E_2-Term. Dies wiederum bedeutet, dass es ein $e \in E_1$ gibt, sodass $d_1(e)$ die Klasse von K_2 in E_1 trifft. Wir haben aber gesehen, dass K_2 ein Koszul-Element ist. Es gibt also ein $K_2' \in \mathcal{K}_{\mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2)}(y_1, \ldots, y_n)$, sodass $\theta(K_2') = K_2$ gilt. Nun sehen wir aber auch, dass es ein $e' \in \mathcal{K}_{\mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2)}(y_1, \ldots, y_n)$ gibt, mit $d(e') = K_2'$. Sei also $e := \theta(e')$, dann ist e ein Koszul-Element und $d_1(e) = K_2$. Es gibt also für $|\alpha| = \ell - 1$ Elemente $b_\alpha \in \mathrm{C}^*(X;\mathbb{F}_2)$, sodass

$$b_1 = \sum_{|\alpha|=\ell-1} [v_{i_1}] \ldots [v_{i_{\ell-1}}] b_\alpha$$

ein Repräsentant von e in E_0 ist. Wir ersetzen die Folge a_1, a_2 gegen die Folge $a_1, a_2 + b_1$. Die zweite Folge besitzt auch die gesuchte Form und $d_1'(a_2 + b_1)$ verschwindet in E_1. Das heißt es gibt ein a_3 mit $d_0'(a_3) = d_1'(a_2 + b_1)$. Das bedeutet es gibt alle $w_\alpha^{(2)}$, für $|\alpha| = \ell - 2$ und die Folge $a_1, a_2 + b_1, a_3$ besitzt die Form (K).

Dies können wir induktiv fortsetzen: Besitzen alle a_1 die sich bis zur Länge s fortsetzen lassen eine Fortsetzung der Form (K) und d_s von der Klasse von a_1 ist Null, dann ist die Klasse von $d_1'(a_s)$ gleich Null. Das heißt es gibt Folgen $a_{1,i}, \ldots, a_{i,i}$, $i < s$, sodass

$$d_1'(a_s) + d_1'(a_{s-1,s-1}) + \ldots + d_1'(a_{1,1}) = 0 \in E_1$$

gilt. $d_1'(a_s) + d_1'(a_{s-1,s-1}) + \ldots + d_1'(a_{1,1})$ ist ein Koszul-Element in E_1. Das heißt $a_{1,1}$ muss wie zuvor auch ein Koszul-Element in E_1 sein. Es gibt also ein a_{s+1}, sodass die Folge

$$(a_1), (a_2 + a_{1,s-1}), \ldots, (a_s + a_{s-1,s-1} + \ldots + a_{1,1}), (a_{s+1})$$

die Form (K) besitzt. Und es folgt:

Lemma 5.6. *Ein Element a_1, dass sich bis maximal zur Länge s fortsetzen lässt, lässt sich durch eine Folge $a_1, \ldots, a_s$ der Form (K) fortsetzen.*

Nach der Einführung von ein wenig neuer Notation können wir dann einen Satz beweisen, der unsere anfängliche Behauptung bestätigt. Wir sagen, dass ein Koszul-Element a in $E_1^{-\ell,*}$ im von $[y_1], \ldots, [y_{n-1}]$ erzeugten Ideal liegt, wenn es $b_\alpha \in \mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2)$ gibt, sodass

$$a = \sum_{|\alpha|=\ell} [y_{i_1}] \ldots [y_{i_\ell}] b_\alpha$$

gilt, mit $\alpha \subset \{1, \ldots, n-1\}$.

Satz 5.7. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung von CW-Komplexen. Sei $\mathrm{H}^*(Y;\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[y_1, \ldots, y_n]$ und sei $0 = y_n \in \mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2)$. Sei $a_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{F}_2, \mathrm{C}^*(Y;\mathbb{F}_2), \mathrm{C}^*(X;\mathbb{F}_2))$, sodass die Klasse von a_1 in E_1 ein Koszul-Element ist, dass im von $[y_1], \ldots, [y_{n-1}]$ erzeugten Ideal liegt. Lässt sich a_1 bis zur Länge s fortsetzen, dann gibt es eine Folge $a_1, \ldots, a_s$, sodass die Klasse von $d_1'(a_s)$ in E_1 ein Koszul-Element ist und im von $[y_1], \ldots, [y_{n-1}]$ erzeugten Ideal liegt.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage für den Fall $s = 3$. Wir wissen aus Lemma 5.4, dass die Aussage für $s = 2$ gilt. Die Klasse von $d'_1(a_2)$ in E_1 ist also ein Koszul-Element im von $[y_1], \dots, [y_{n-1}]$ erzeugten Ideal. Sei wie zuvor $b_1 \in E_0$ ein Element, sodass die Klasse von $d'_1(b_1)$ gleich der Klasse von $d'_1(a_2)$ in E_1 ist. Die Klasse von b_1 in E_1 ist ein Koszul-Element. Für ein Koszul-Element $e \in E_1$ gilt:

$$d_1(e_\nabla[y_n]) = d_1(e)\nabla[y_n] \tag{5.8}$$

Das heißt, ist e_0, e_1 im von $[y_1], \dots, [y_{n-1}]$ erzeugten Ideal und ist $b_1 = e_0 + e_1[y_n]$, dann ist $d_1(b_1) = d_1(e_0) + d_1(e_1)[y_n]$. Wir können b_1 also so wählen, dass die Klasse von b_1 im von $[y_1], \dots, [y_{n-1}]$ erzeugten Ideal liegt. Das Element $d'_1(a_2 + b_1)$ lässt sich also durch ein a_3 so fortsetzen, dass die Klasse von $d'_1(a_3)$ wieder ein Koszul-Element im von $[y_1], \dots, [y_{n-1}]$ erzeugten Ideal ist. Für höhere s verläuft der Beweis analog. □

Der Satz 5.1 zeigt sich nun mit der Bemerkung nach dem Satz und der vorherigen Aussage. Und mit dem selben Beweis lässt sich auch eine etwas allgemeinere Aussage zeigen.

Korollar 5.8. *Seien $H \subset G$ Lie-Gruppen und sei $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[y_1, \dots, y_n]$. Sei weiter y_n im Ideal $(y_1, \dots, y_{n-1}) \subset \mathrm{H}^*(BH; \mathbb{F}_2)$. Dann gilt in der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zu Faserung $G/H \to BH \to BG$: Es gibt für $i \geq 2$ bigraduierte Algebren T_i und ein Element b, mit $Db = D[y_n]$, sodass $E_r \cong T_r \otimes \wedge(b)$ gilt und ist $t \in T_r \otimes 1$, so ist $d_r(t) \in T_t \otimes 1$. Damit gibt es ein T_∞ und E_∞ ist als bigraduierte Algebra isomorph zu $T_\infty \otimes \wedge(b)$.*

Beweis. Aus Korollar 2.34 folgt die Existenz eines b (siehe im Beweis des Korollars 2.34) und eines $T_2 = \mathrm{H}^* \mathcal{K}_{\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_2)}(y_1, \dots, y_{n-1})$. Der Beweis des Korollars 5.8 unterscheidet sich nur in einem Punkt von unseren vorherigen Überlegungen und zwar genau darin, dass (5.8) nicht gilt. Wir ändern also nur den Beweis von Satz 5.7 ab: Wir haben zu zeigen, dass ein geeignetes b_1 existiert, sodass die Klasse von b_1 ein Koszul-Element im von $[y_1], \dots, [y_{n-1}]$ erzeugten Ideal ist. Nehmen wir an, dass die Klasse von b_1 in E_1 die Form $e_0 + e_1[y_n]$ besitzt, mit e_0, e_1 im von $[y_1], \dots, [y_{n-1}]$ erzeugten Ideal. Dann ist

$$d_1([b_1]) = d_1(e_0) + d_1(e_1)[y_n] + e_1 d_1([y_n])$$

und dies soll gleich der Klasse von $d'_1(a_2)$ sein. Es muss also gelten $d_1(e_1) = 0$. Wir wissen aus Lemma 2.35, dass es ein e' im von $[y_1], \dots, [y_{n-1}]$ erzeugten Ideal gibt, sodass $d_1(e_1) = d_1([y_n])$ gilt. Es folgt also:

$$d_1([b_1] + e') = d_1(e_0)$$

Wir sehen also, dass wir b_1 so wählen können, dass die Klasse von b_1 in E_1 im von $[y_1], \dots, [y_{n-1}]$ erzeugten Ideal liegt. Dies vervollständigt die Aussage. □

Kapitel 6

Erste Schritte

Wie der Titel dieses Kapitels schon andeutet, wollen wir beginnen die ersten nichttrivialen Aussagen über die Semicharakteristik homogener Räume zu treffen. Zuerst zeigen wir dafür einige Hilfssätze und arbeiten uns dann mit einer Aussage über die Euler-Charakteristik warm. Zuletzt folgt eine Reihe leichter Resultate und Folgerungen. Zuerst beginnen wir jedoch damit ein wenig Werkzeug in Form von Lemmata zu beweisen.

Wir wollen zuerst das von Baum bewiesene Lemma 2.23 verallgemeinern.

Lemma 6.1. *Seien H, G Lie-Gruppen in $LieQ_p$ und sei $\rho : H \to G$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen, sodass p nicht $|\mathrm{Kern}(\rho)|$ teilt. Sei Q_H ein maximaler p-Torus in H, dann kollabiert die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$ zur Faserung $G/H \to BH \to BG$ genau dann, wenn die Spektralsequenz mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$ zur Faserung $G/Q_H \to BQ_H \to BG$ kollabiert.*

Der Beweis verläuft analog zum Beweis von [McC01, 8.6].

Lemma 6.2. *Sind $H \subset G$ Lie-Gruppen in $LieQ_p$, dann ist*

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_p)}(\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_p), \mathbb{F}_p)$$

endlich und erfüllt die Poincaré-Dualität.

Es sei bemerkt, dass mit dem Lemma nichts über das Zusammenbrechen der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz gesagt wird.

Beweis des Lemmas. Mit Lemma 2.6 ist $\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_p)/\,\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_p)$ endlich dimensional und mit Satz 2.39 folgt daraus unsere Aussage. □

Sei $t \in \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_p)}(\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_p), \mathbb{F}_p)$ das Element mit höchstem Totalgrad, dann überlebt t bis in den E_∞-Term, da $d_r(t) = 0$ gilt. Und damit gilt konvergiert die Spektralsequenz nach dem vorherigen Lemma und und Lemma 2.29 als Poincaré-Algebra.

Beispiel 6.3. Das typische Beispiel für das vorherige Lemma ist gegeben, wenn $\iota : SO(k) \to SO(n)$ ein beliebiger, injektiver Lie-Gruppen Homomorphismus ist. Dann ist $\mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BSO(n);\mathbb{F}_p)}(\mathrm{H}^*(BSO(k);\mathbb{F}_p), \mathbb{F}_p)$ eine PD-Algebra, auch wenn der Zusammenbruch der Eienberg-Moore Spektralsequenz zur Faserung $SO(n)/\iota \to BSO(k) \to BSO(n)$, insbesondere für $p = 2$ unsicher, ist. ◇

Lemma 6.4. *Sei $\iota : H \hookrightarrow G$ die Inklusion zweier Lie-Gruppen in $\mathrm{Lie}R_p$, mit $\dim G/H$ ungerade. Gilt*

$$\operatorname{Rang} G - \operatorname{Rang} H \neq \dim G/H \pmod 4,$$

dann gilt:

$$k(G/H; \mathbb{F}_p) = k(G/H; \mathbb{Q})$$

Beweis. Definiere $\mathrm{Tor}^{*,*} := \mathrm{Tor}^{*,*}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_p)}(\mathrm{H}^*(BH; \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_p)$. Die PD-Algebra $\mathrm{Tor}^{*,*}$ ist der E_1-Term einer Bockstein-Spektralsequenz wie in Lemma 2.48. Sei $x \in \mathrm{Tor}^{2n+1,*}$ und $y \in \mathrm{Tor}^{2n+2,*}$ und seien x_r und y_r die von x und y induzierten Elemente im E_r-Term der Spektralsequenz. Der E_r-Term ist nach Lemma 2.29 ebenfalls eine PD-Algebra. Angenommen es gilt $d_r(x_r) = y_r$ und $x_r y_r$ ist gleich der Fundamentalklasse in E_r. Dann muss der Totalgrad von x_r gleich $2n$ und der von y_r gleich $2n+1$ sein. Da $\mathrm{H}^*(BH; \mathbb{F}_p)$ und $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_p)$ aber in geraden Graden konzentriert sind, widerspricht dies der Annahme, dass $x \in \mathrm{Tor}^{2n+1,*}$ und $y \in \mathrm{Tor}^{2n+2,*}$. Es kann solche x_r und y_r also nicht geben; durch Induktion und mit Lemma 2.30 folgt also: $|E_1| - |E_\infty|$ durch 4 teilbar und damit unsere Aussage. $\square$

6.1 Euler-Charakteristik

Um ein wenig mit den Techniken vertraut zu werden leiten wir in diesem Abschnitt ein altbekanntes Resultat über die Euler-Charakteristik homogener Räume her. Der am Ende dieses Abschnitts zu findende Satz war zum ersten Mal in [HS41] zu finden. Der hiesige Beweis unterscheidet sich von anderen bekannten Beweisen.

Ist X ein topologischer Raum, dann sei $\chi(X)$ die Euler-Charakteristik, also die Wechselsumme der Bettizahlen, von X.

Lemma 6.5. *Sei G eine kompakte Lie-Gruppe und $T \subset T_G$ ein Torus von G, mit $\operatorname{Rang} T < \operatorname{Rang} G$ und $\operatorname{Rang} G - \operatorname{Rang} T$ gerade, dann ist $|\mathrm{H}^*(G/T; \mathbb{Q})|$ durch 4 teilbar.*

Beweis. Es gilt nach Lemma 1.19: $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{F}[y_1, \dots, y_n]$, mit Dy_i gerade. Sei T' ein Torus von G mit $\operatorname{Rang} T' = \operatorname{Rang} T + 1$ und $T \subset T'$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[dr] & G \\ & T' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

kommutiert und wir können eine Basis von $\mathrm{H}^*(BT; \mathbb{Q})$ und $\mathrm{H}^*(BT'; \mathbb{Q})$ wählen mit $x \in \mathrm{H}^*(BT'; \mathbb{Q})$, sodass

$$\mathrm{H}^*(BT'; \mathbb{Q}) \cong \mathrm{H}^*(BT; \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}[x]$$

gilt. Wir erhalten das induzierte kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^*(BT; \mathbb{Q}) & \mathrm{H}^*(BG; \mathbb{Q}) \arrow[l] \arrow[d] \\ & \mathrm{H}^*(BT; \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}[x]. \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Es gilt $\mathrm{H}^*(G/T';\mathbb{Q}) = \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{Q})}(\mathrm{H}^*(BT';\mathbb{Q}),\mathbb{Q})$. Und da G/T' ungerade Dimension hat und $\mathrm{H}^*(G/T';\mathbb{Q})$ eine PD-Algebra ist, ist $|\,\mathrm{H}^*(G/T';\mathbb{Q})|$ durch 2 teilbar. Nach [Ser67, IV.1] ist

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{Q})}(\mathrm{H}^*(BT;\mathbb{Q}),\mathbb{Q}) \cong \mathrm{H}(\mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{Q})}(\mathrm{H}^*(BT';\mathbb{Q}),\mathbb{Q}) \otimes \mathcal{K}(x)),$$

als graduierter Modul. Und nach Lemma 2.44 ist damit $\mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{Q})}(\mathrm{H}^*(BT;\mathbb{Q}),\mathbb{Q})$ durch 4 teilbar, da die formale Dimension h von $\mathrm{H}^*(G/T';\mathbb{Q})$ ungerade ist und so auch $h - Dx$ ungerade ist. □

Lemma 6.6. *Sei G eine kompakte Lie-Gruppe und H eine Lie-Untergruppe von G, mit $\mathrm{Rang}\,H + 1 \leq \mathrm{Rang}\,G$, dann ist die Euler-Charakteristik $\chi(G/H) = 0$.*

Beweis. Da $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{Q})$ und $\mathrm{H}^*(BT';\mathbb{Q})$ in geraden Graden konzentriert sind, liegen die Elemente von $\mathrm{Tor}^{i,*}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{Q})}(\mathbb{Q};\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{Q}))$ für gerade i in geraden Graden und für ungerade i in ungeraden Graden. Damit ist auch $\mathrm{H}^*(H/T_H;\mathbb{Q})$ in geraden Graden konzentriert. Nach [McC01, 8.5] gilt:

$$\mathrm{Tor}^{i,*}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{Q})}(\mathbb{F};\mathrm{H}^*(BT_H;\mathbb{Q})) \cong \mathrm{Tor}^{i,*}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{Q})}(\mathbb{Q};\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F})) \otimes \mathrm{H}^*(H/T_H;\mathbb{Q}),$$

als $\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{Q})$-Modul. Für $k := \mathrm{Rang}\,G - \mathrm{Rang}\,H$ folgern wir:

$$\begin{aligned}
\chi(G/T_H) &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i|\,\mathrm{Tor}^{i,*}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{Q})}(\mathbb{F};\mathrm{H}^*(BT_H;\mathbb{Q}))| \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i|\,\mathrm{Tor}^{i,*}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{Q})}(\mathbb{F};\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{Q})) \otimes \mathrm{H}^*(H/T_H;\mathbb{Q})| \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i|\,\mathrm{Tor}^{i,*}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{Q})}(\mathbb{F};\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{Q}))| \cdot |\,\mathrm{H}^*(H/T_H;\mathbb{Q})| \\
&= \chi(G/H) \cdot |\,\mathrm{H}^*(H/T_H;\mathbb{Q})|
\end{aligned}$$

Aus dem vorherigen Lemma wissen wir, dass $\chi(G/T_H) = 0$ gilt. Aus dem kommenden Lemma 6.10 sehen wir, dass $|\,\mathrm{H}^*(H/T_H;\mathbb{Q})| \neq 0$ ist und so muss $\chi(G/H) = 0$ gelten. □

Korollar 6.7. *Sind $H \subset G$ kompakte Lie-Gruppen, mit $\mathrm{Rang}\,G - \mathrm{Rang}\,H$ gerade und größer als Null, dann gilt $|\,\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{F}_p)|$ ist durch 4 teilbar.*

Bevor wir nun weiter machen können, benötigen wir zuerst noch ein technisches Lemma:

Lemma 6.8. *Sei $A := \mathbb{F}_p[x_1,\ldots,x_n]$, mit $Dx_1 = \ldots = Dx_n = 1$ und $y_1,\ldots,y_n$ eine reguläre Sequenz in A, dann gilt*

$$|A/(y_1,\ldots,y_n)| = Dy_1 \cdot \ldots \cdot Dy_n.$$

Beweis. Sei $B := |A/(y_1,\ldots,y_n)|$. Der Koszul-Komplex $\mathcal{K}_A(y_1,\ldots,y_n)$ ist eine freie Auflösung von B. Sei $I \subset \{1,\ldots,n\}$. Definiere $DI = \sum_{j\in I_i} j$. Dann gilt nach [Eis05, 1.2], dass

$$|B_s| = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sum_{I_i}\binom{n+s+DI_i}{n+s}. \tag{6.1}$$

Ist $y_i' := x_1^{Dy_i}$ und $B' = A/(y_1', \ldots, y_n')$, dann gilt die Formel (6.1) ebenfalls, wenn wir B_s gegen B_s' austauschen. Also folgt $|B| = |B'|$, wobei wir $|B'|$ direkt als

$$Dy_1' \cdot \ldots \cdot Dy_n' = Dy_1 \cdot \ldots \cdot Dy_n$$

ablesen können. □

Korollar 6.9. *Sei $A := \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$, mit $Dx_1 = \ldots = Dx_n = 2$ und $y_1, \ldots, y_n$ eine reguläre Sequenz in A, mit $Dy_i = 2a_i$ gerade, dann gilt*

$$|A/(y_1, \ldots, y_n)| = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Lemma 6.10. *Ist G eine kompakte, zusammenhängende Lie-Gruppe und T_G ein maximaler Torus in G, dann gilt $\chi(G/T_G) = |W(G)|$*

Beweis. Da wir die singuläre Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ betrachten, können wir annehmen, dass G einfach zusammenhängend ist. Wir zeigen nur die Fälle, in denen G eine einfache Lie-Gruppe ist, alle anderen Fälle lassen sich auf diesen Fall zurückführen. Und hier beschränken wir uns abermals auf die komplizierteren Fälle, die exzeptionellen Lie-Gruppen. Alle anderen lassen sich in Abschnitt 1.2.2 ablesen. Nach [Bou02] gilt

G	$\|W(G)\|$
E_6	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$
E_7	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$
E_8	$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$
F_4	$2^7 \cdot 3^2$
G_2	$2^2 \cdot 3$

Die Erzeuger von $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{Q})$ werden nach [Bor55, 9.A] transgressiv auf die Erzeuger von $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{Q})$ abgebildet. Der Grade der Erzeuger von $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{Q})$ werden in [Bor55, 11.1 & 11.2] gegeben und zusammen ergibt sich:

G	Grad
T^n	$2, \ldots, 2$
E_6	$4, 10, 12, 16, 18, 24$
E_7	$4, 12, 16, 20, 24, 28, 36$
E_8	$4, 16, 24, 28, 36, 38, 48, 58$
F_4	$4, 12, 16, 24$
G_2	$4, 12$

Gemeinsam mit dem vorherigen Lemma lesen wir ab:

$$|\,\mathrm{H}^*(BT_G;\mathbb{Q})/\,\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{Q})| = |W(G)|.$$

□

Lemma 6.11. *Sind $H \subset G$ kompakte Lie-Gruppen, mit* $\operatorname{Rang} G = \operatorname{Rang} H$*, dann gilt $\chi(G/H) = |W(G)|/|W(H)|$.*

Beweis. Aus dem vorherigen Lemma ist bekannt, dass $\chi(G/T_G) = |\,\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{Q})| = |W(G)|$. Ein maximaler Torus T_G von G ist gleichzeitig ein maximaler Torus von H und es gilt

$$Tor^{i,*}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{Q})}(\mathbb{F};\mathrm{H}^*(BT_G;\mathbb{Q})) \cong Tor^{i,*}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{Q})}(\mathbb{Q};\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F})) \otimes \mathrm{H}^*(H/T_G;\mathbb{Q}),$$

womit folgt, dass $|\,\mathrm{H}^*(G/T_G;\mathbb{Q})| = |\,\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{Q})| \cdot |\,\mathrm{H}^*(H/T_G;\mathbb{Q})|$, also $|W(G)| = |\,\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{Q})| \cdot |W(H)|$. Hieraus folgt, da die Euler-Charakteristik unabhängig von der Charakteristik des Körpers ist, unsere Aussage. □

Insgesamt folgt damit:

Satz 6.12. *Sei $X = G/H$ ein homogener Raum. Dann ist*

$$\chi(X) = \begin{cases} |W(G)|/|W(H)| & \text{, wenn } \operatorname{Rang} G = \operatorname{Rang} H \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

6.2 $\mathbb{F}_p$-Semicharakteristik

Seien $H \subset G$ Lie-Gruppen und sei $G \in LieP_p$, dann haben wir in Korollar 5.8 gesehen: Sei E_r die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung $G/H \to BH \to BG$. Ist $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p[y_1,\dots,y_n]$ und liegt $y_n \in \mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_p)$ im Ideal $(y_1,\dots,y_{n-1})$ von $\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_p)$, dann gibt es ein $b \in E_2$, mit $Db = D[y_n]$ und eine bigraduierte Algebra T_∞, sodass der E_∞-Term der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung $G/H \to BH \to BG$ als Algebra isomorph zu $T_\infty \otimes \wedge(b)$ ist. Es gilt also $|E_\infty| = 2|T_\infty|$ und können wir zeigen, dass $|T_\infty|$ gerade ist, dann wissen wir, dass $|\,\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{F}_p)|$ durch 4 teilbar ist. Ist $\dim G/H$ ungerade, dann folgt also, dass die $\mathbb{F}_p$-Semicharakteristik von G/H verschwindet. Es folgen zwei Kriterien, die dazu führen, dass $|T_\infty|$ gerade ist.

Satz 6.13. *Seien $H \subset G$ Lie-Gruppen und sei $G \in LieP_p$. Sei $\dim G/H$ ungerade und liege y_n im von $(y_1,\dots,y_{n-1})$ erzeugten Ideal in $\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_p)$. Die $\mathbb{F}_p$-Semicharakteristik von G/H verschwindet, wenn eine der folgenden hinreichenden Bedingungen gilt:*

- *y_{n-1} liegt im von $(y_1,\dots,y_{n-2})$ erzeugten Ideal in $\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_p)$*
- *$|\,\mathrm{H}^*\mathcal{K}_{\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_p)}(y_1,\dots,y_{n-1})|$ ist durch 2 teilbar*

Beweis. Im ersten Fall gibt es b_{n-1}, b_n, mit $Db_i = D[y_i]$, $i \in \{n-1, n\}$, und ein T_2, sodass der E_2-Term gegeben ist durch $T_2 \otimes \wedge(b_{n-1}, b_n)$. Induktiv folgt, dass der E_∞ isomorph zu $T_\infty \otimes \wedge(b_{n-1}, b_n)$ ist. Insgesamt ist $|E_\infty|$ damit durch 4 teilbar. Im zweiten Fall ist $|T_2|$ durch 2 teilbar und mit Satz 5.1 ist $|T_i|$ induktiv durch 2 teilbar und damit auch $|T_\infty|$. Also ist $|E_\infty|$ damit durch 4 teilbar. □

Dieser Abschnitt stellt nun eine Reihe von Situationen vor, in denen eine der beiden Bedingungen des vorherigen Satzes erfüllt ist und wir so auf die $\mathbb{F}_p$-Semicharakteristik schließen können. Für die meisten aufgezeigten Beispiele ist die $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik bekannt, jedoch ist die $\mathbb{F}_p$-Semicharakteristik, $p \neq 2$ unbekannt. Und auch die $\mathbb{R}$-Semicharakteristik ist in den betrachteten Situationen häufig noch nicht ergründet.

Am Ende des Kapitels werden wir Aussagen zur Hand haben, die uns mit etwas rechnerischen Aufwand in vielen Fällen etwas über die $\mathbb{F}_p$-Semicharakteristik eines homogenen Raumes verraten. Als abschließende Bemerkung ist aber zu erwähnen, dass Aussagen über die $\mathbb{F}_p$-Semicharakteristik im Fall $\dim G/H = 4n+3$ und $\operatorname{Rang} G - \operatorname{Rang} H = 4l+1$ immer noch weit davon entfernt sind vollständig zu sein. Sollte es Fälle geben, in den $k(G/H;\mathbb{F}_p) = 1$ gilt, für $\operatorname{Rang} G - \operatorname{Rang} H \geq 3$, dann sollte am besten unter eben genannten Voraussetzungen gesucht werden.

6.2.1 Selbstkonjugierte Darstellungen

Betrachten wir die Gewichte einer Darstellung $\rho : G \to SU(n)$, wie in Abschnitt 1.1, als Elemente in $\mathrm{H}^*(BT_G;\mathbb{Z})$ und zeigt sich, dass sowohl ein Gewicht w als auch eine Gewicht $-w$ auftaucht, so liefert uns Lemma 1.8 eine interessante Möglichkeit auf die $\mathbb{F}_p$-Semicharakteristik zu schließen. Dies tritt zum Beispiel auf, wenn ρ eine reelle oder symplektische Darstellung ist:

Lemma 6.14. *Sei G eine kompakte, einfache Lie-Gruppe $LieR_p$ und $\rho : G \hookrightarrow SU(n)$ eine treue, reelle oder symplektische Darstellung. Sei $\mathrm{Rang}\, G + 2 < n$ und $X := SU(n)/\rho$ und dim X ungerade, dann gilt $k(X;\mathbb{F}_p) = 0$.*

Beweis. Wir betrachten die induzierte Abbildung $\rho : T_G \hookrightarrow T_{SU(n)}$, da ρ nach [BtD85, VI.4] selbstkonjugiert ist, gibt es Erzeuger $t_1, t_1', t_2, t_2' \in \mathrm{H}^*(BT_{SU(n)};\mathbb{F}_p)$ mit

$$B\rho^*(t_1) = -B\rho^*(t_2) \text{ und } B\rho^*(t_1') = -B\rho^*(t_2').$$

Mit Lemma 1.8 folgt also, dass für $n_2 \leq n$ die größte ungerade Zahl und $n_1 := n_2 - 2$ gilt

$$c_{n_i} = 0 \text{ in } \mathrm{H}^*(BT_G;\mathbb{F}_p)/(c_2, \ldots, c_{n_i-1}), \text{ für } i = 1, 2$$

und damit auch $c_{n_i} = 0$ in $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_p)/c_2, \ldots, c_{n_i-1}$, $i = 1, 2$. Der Satz 6.13 bestätigt dann unsere Aussage. □

Über dem Körper $\mathbb{F}_2$ werden die Anwendungsmöglichkeiten sogar noch vielfältiger. Da $1 = -1$ ist, reicht es schon zwei Paare identische Gewichte zu finden, um Lemma 1.8 anwenden zu können. Nun soll nur eines von vielen möglichen Beispielen folgen:

Korollar 6.15. *Sei H eine kompakte, einfache Lie-Gruppe in $LieR_p$, sei $\ell \geq 2$ und sei $G(n) = SO(n), SU(n)$ oder $Sp(n)$. Ist $\rho : H \hookrightarrow G(n)$ eine treue Darstellung, dann ist*

$$k(G(\ell n)/\ell\rho, \mathbb{F}_2) = 0.$$

Beweis. Auch in diesem Fall werden viele zu einander inverse 2-Gewichte auftauchen und wir können den selben Beweis wie im vorherigen Lemma benutzen. □

6.2.2 Einfache Lie-Gruppen

Ist G eine einfache Lie-Gruppe und $\rho : G \to SU(n)$ eine treue Darstellung, dann lässt sich häufig mit einem einfachen Trick zeigen, dass $k(SU(n)/\rho;\mathbb{F}_p) = 0$ gilt.

Lemma 6.16. *Sei $k + 2 \leq n$ und sei $\rho : SU(k) \to SU(k)$ eine Darstellung mit $\mathrm{ggT}(|\operatorname{Kern}\rho|, p) = 1$. Ist $\dim SU(n)/\rho$ ungerade, dann ist $k(SU(n)/\rho;\mathbb{F}_p) = 0$.*

Beweis. Seien $\mathrm{H}^*(BSU(n);\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p[c_2, \ldots, c_n]$ und $\mathrm{H}^*(BSU(k);\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p[c_2', \ldots, c_k']$. Um die Aussage zu zeigen, suchen wir $i_1 < i_2 \leq n$, sodass c_{i_1}, c_{i_2} in dem Ideal $(c_1, \ldots, \bar{c_{i_1}}, \ldots, \bar{c_{i_2}}, \ldots, c_n)$ in $\mathrm{H}^*(BSU(k);\mathbb{F}_p)$ liegt, mit Satz 6.13 folgt dann die Aussage.

Ist $i \leq k$, dann gilt $c_i = \alpha_i c_i' + C_i$ in $\mathrm{H}^*(BSU(k);\mathbb{F}_p)$, mit $\alpha_i \in \mathbb{F}_p$ und $C_i \in \mathbb{F}_p[c_2', \ldots, c_{i-1}']$. Ist $i > k$, dann gilt $c_i = C_i$ in $\mathrm{H}^*(BSU(k);\mathbb{F}_p)$, mit $C_i \in \mathbb{F}_p[c_2', \ldots, c_k']$. Es ist somit klar, dass es ein $i_1 \in \{2, \ldots, k+1\}$ gibt, sodass

$$c_{i_1} = 0 \text{ in } \mathbb{F}_p[c_2', \ldots, c_{i_1}']/(c_2, \ldots, c_{i_1-1}).$$

Genaus können wir uns überlegen, dass es ein $i_2 \in \{i_1+1, \ldots, k+2\}$ gibt, mit

$$c_{i_2} = 0 \text{ in } \mathbb{F}_p[c'_2, \ldots, c'_{i_2}]/(c_2, \ldots, c_{i_2-1}).$$

□

Nun wollen wir erst einmal alle einfachen Lie-Gruppen in $LieR_p$ bestimmen. Mittels [BB65, 7.12] können wir berechnen, dass für C_ℓ eine Untergruppe des Zentrums C_n von $SU(n)$, die Lie-Gruppe $SU(n)/C_\ell$ genau dann in $LieR_p$ liegt, wenn $\mathrm{ggT}(\ell, n) = 1$ gilt. Wir wissen bereits, dass $Sp(n)$ in $LieR_p$ liegt, für alle p und nach [BB65, 8.9] wissen wir, dass $PSp(n)$ in $LieR_p$ liegt, für $p \neq 2$. $Spin(n)$, $SO(n)$, $PSO(2n)$ und $Ss(4n)$, liegen alle in $LieR_p$, für $p \neq 2$. Für $p = 2$ wissen wir bereits, dass $SO(n)$, $n \geq 3$ nicht in $LieR_2$ liegt. $Spin(n)$ liegt in $LieR_2$ für $n \leq 6$, diese Gruppen sind aber als Lie-Gruppe isomorph zu Gruppen die wir bereits betrachtet haben. In [BB65, 8.7] sehen wir, dass für $n \geq 2$ die Gruppen $PSO(2n)$ nicht in $LieR_2$ liegen. Und aus [IKT76] sehen wir, dass $Ss(4n)$ nicht in $LieR_2$ liegt.

Es bleibt uns also die exzeptionellen, einfachen Lie-Gruppen zu betrachten. Mit $\mathrm{Ad}\, G$ bezeichnen wir den Quotienten von G nach dem Zentrum. In [Kon77] können wir nachlesen, dass alle exzeptionellen, einfachen Lie-Gruppen, bis auf die unten genannten keine p-Torsion besitzen und somit nach Lemma 1.19 in $LieR_p$ liegen. Die exzeptionellen, einfachen Lie-Gruppen G mit p-Torsion, kurz (G, p), sind folgende:

$(G_2, 2), (F_4, 2)$	[Bor54]
$(\mathrm{Ad}\, E_6, 2), (E_i, 2), i = 6, 7, 8$	[Tod73], [KM75], [KMS76]
$(F_4, 3)$	[Ara61]
$(E_6, 3)$	[KM80], [Tod73]
$(E_7, 3), (\mathrm{Ad}\, E_7, 3), (E_8, 3)$	[KM77]
$(\mathrm{Ad}\, E_6, 3), (E_8, 3)$	[Kon77]

Die Quellen geben an, wo die Kohomolgie $\mathrm{H}^*(G; \mathbb{F}_p)$ nachzulesen ist und zeigen uns, dass die jeweiligen Gruppen nicht in $LieR_p$ liegen. In [Bor55, 11.1 & 11.2] lesen wir nach, dass wenn die exzeptionelle, einfache Lie-Gruppe G in $LieR_p$ liegt, dann besitzt $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_p)$ Erzeuger in folgenden Graden:

G	Grad
E_6	$4, 10, 12, 16, 18, 24$
E_7	$4, 12, 16, 20, 24, 28, 36$
E_8	$4, 16, 24, 28, 36, 38, 48, 58$
F_4	$4, 12, 16, 24$
G_2	$4, 12$

Korollar 6.17. *Sei G eine einfache Lie-Gruppe in $LieR_p$ und sei $\rho : G \hookrightarrow SU(n)$ eine treue Darstellung. Sei $\mathrm{Rang}\, G + 2 \leq n$ und $X := SU(n)/\rho$, dann gilt $k(X; \mathbb{F}_p) = 0$.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p[y_1, \ldots, y_n]$. Ist G eine Lie-Gruppe deren Lie-Algebra nicht isomorph zu D_{2k} ist, dann wissen wir aus der Vorrede und aus Abschnitt 1.2.2, dass gilt $Dy_1 < \ldots < Dy_n$. Wir können also den selben Beweis wie im vorherigen Lemma benutzen um zu zeigen, dass es eine Algebra A gibt, sodass

$$Tor_{\mathrm{H}^*(BSU(n); \mathbb{F}_p)}(\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_p) = \wedge(y_{i_1}, y_{i_2}) \otimes A,$$

gilt. Mit Satz 6.13 folgt die Aussage. Ist die Lie-Algebra von G isomorph zu D_{2k}, so ist ρ nach [BtD85, VI.5] eine reelle Darstellung und aus Lemma 6.14 folgt unsere Aussage. □

Bemerkung 6.18. Mit etwas vorsichtigeren Überlegungen, die dem selben Prinzip folgen, lässt sich in vielen Fällen eine noch wesentlich größere äußere Algebra in $\mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BSU(n);\mathbb{F}_p)}(\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_p),\mathbb{F}_p)$ finden. Ein typisches Beispiel und das mit der größten äußeren Algebra sind die komplexen Stiefel-Mannigfaltigkeiten der Form $X = SU(n)/SU(k)$. Hier gilt $\mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z}) \cong \Lambda$, mit Λ einer äußeren Algebra mit $(n-k-1)$ Erzeugern. $\diamond$

6.2.3 Verallgemeinerte Grassmann-Mannigfaltigkeiten

Sei $n_1+\ldots+n_\ell = m$. Seien $\mathrm{id}_i : SU(n_i) \to SU(n_i)$ die triviale Darstellung und sei $\rho := \oplus_i \mathrm{id}_i : \times_i SU(n_i)_i \to SU(n)$, dann bezeichnen wir $X := SU(n)/\rho$ als verallgemeinere Grassmann-Mannigfaltigkeit. Für diese homogenen Räume können wir in den meisten Fällen die $\mathbb{F}_p$-Semicharakteristik bestimmen.

Lemma 6.19. *Sei $n_1+n_2+n_3 = n$ und $\rho : SU(n_1)\times SU(n_2)\times SU(n_3) \hookrightarrow SU(n)$ die Inklusion. Dann gilt: $|\,\mathrm{H}^*(SU(n)/\rho;\mathbb{F}_p)|$ ist durch 4 teilbar ist.*

Beweis. Sei $\mathrm{H}^*(BU(n);\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p[c_1,\ldots,c_n]$ und $\mathrm{H}^*(BU(n_i);\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[c_1^{(i)},\ldots,c_{n_i}^{(i)}]$, dann gilt

$$\mathrm{H}^*(BSU(n_i);\mathbb{F}_p) \cong \mathrm{H}^*(BU(n_i);\mathbb{F}_p)/(c_1^{(i)}).$$

Sei $X' = U(n)/(U(n_1)\times U(n_2)\times U(n_3))$. Die zur Faserung

$$X' \to BU(n_1)\times BU(n_2)\times BU(n_3) \to BU(n)$$

assoziierte Eilenberg-Moore-Spektralsequenz kollabiert nach Satz 2.21 im E_2-Term. Und so gilt

$$|\,\mathrm{H}\mathcal{K}_{\otimes_i \mathbb{F}_p[c_1^{(i)},\ldots,c_{n_i}^{(i)}]}(c_1,c_2,\ldots,c_n)| < \infty. \tag{6.2}$$

Die Algebra $\mathrm{H}^*(SU(n)/\rho;\mathbb{F}_p)$ ist nach dem selben Satz isomorph zu

$$\mathrm{H}\mathcal{K}_{\otimes_i \mathbb{F}_p[c_1^{(i)},\ldots,c_{n_i}^{(i)}]/(c_1^{(i)})}(c_2,\ldots,c_n),$$

was nach Lemma 2.36 als Algebra isomorph ist zu

$$\mathrm{H}\mathcal{K}_{\otimes_i \mathbb{F}_p[c_1^{(i)},\ldots,c_{n_i}^{(i)}]}(c_2,\ldots,c_n,c_1^{(1)},c_1^{(2)},c_1^{(3)}).$$

Da $\sum_i c_1^{(i)} = c_1$ gilt, ist dies wiederum isomorph zu

$$\mathrm{H}\mathcal{K}_{\otimes_i \mathbb{F}_p[c_1^{(i)},\ldots,c_{n_i}^{(i)}]}(c_1,c_2,\ldots,c_n,c_1^{(2)},c_1^{(3)}).$$

Durch (6.2) sehen wir auch, dass

$$\mathrm{H}\mathcal{K}_{\otimes_i \mathbb{F}_p[c_1^{(i)},\ldots,c_{n_i}^{(i)}]}(c_1,c_2,\ldots,c_n)$$

endliche $\mathbb{F}_p$-Dimension hat. Damit hat

$$\mathrm{H}\mathcal{K}_{\otimes_i \mathbb{F}_p[c_1^{(i)},\ldots,c_{n_i}^{(i)}]}(c_1,c_2,\ldots,c_n,c_1^{(2)})$$

nach [Ser67, IV.1] endliche durch 2 teilbare $\mathbb{F}_p$-Dimension. Weiter hat dann

$$\mathrm{H}\mathcal{K}_{\otimes_i \mathbb{F}_p[c_1^{(i)},\ldots,c_{n_i}^{(i)}]}(c_1,c_2,\ldots,c_n,c_1^{(2)}) \otimes \mathcal{K}_{\otimes_i \mathbb{F}_p[c_1^{(i)},\ldots,c_{n_i}^{(i)}]}(c_1^{(3)})$$

durch 4 teilbare $\mathbb{F}_p$-Dimension. Die Fundamentalklasse von dieser PD-Algebra liegt im äußeren Grad -1, also folgern wir mit Lemma 2.44 die Teilbarkeit durch 4 von

$$\mathrm{H}\,\mathcal{K}_{\otimes_i \mathbb{F}_p[c_1^{(i)},\ldots,c_{n_i}^{(i)}]}(c_1, c_2, \ldots, c_n, c_1^{(2)}, c_1^{(3)}).$$

Da der letzte Ausdruck wie schon erwähnt, als Algebra isomorph zu $\mathrm{H}^*(SU(n)/\rho;\mathbb{F}_p)$ ist, folgt unsere Aussage. □

Mit der selben Technik folgern wir auch:

Korollar 6.20. *Sei $\ell \geq 3$ und sei $\sum_{i=1}^{\ell} n_i = n$ und $\sum_i SU(n_i) \hookrightarrow SU(n)$ die Inklusion. Dann gilt dass $|\mathrm{H}^*(SU(n)/\rho;\mathbb{F}_p)|$ durch 4 teilbar ist, falls $\mathrm{ggT}(\ell-1,4) \neq 1$ gilt.*

Beweis. Die Bedingung $\mathrm{ggT}(\ell-1,4) \neq 1$ stellt gerade sicher, dass wir Lemma 2.44 anwenden können. Und sonst gehen wir wie im vorherigen Lemma vor. □

Bemerkung 6.21. Aus Lemma 2.44 folgt die Teilbarkeit durch 4 für $p = 2$ ohne die Einschränkung an ℓ. Da wir später jedoch eine allgemeinerer Aussage über die $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik homogener Räume $SU(n)/G$ treffen wollen, beschäftigen wir uns jetzt nicht genauer damit. ◇

Sei $p \geq 5$ oder $p = 0$ und seien G_1, G_2, G_3 drei kompakte einfache Lie-Gruppe in $LieR_p$, die prim zu A_k sind; diese Bedingung stellt sicher, dass die Menge der Untergruppen des Zentrums überschaubar bleibt. Sei weiter $\rho_i : G_i \to SU(n_i)$ eine treue Darstellung und $\rho_i' : G_i \times S^1 \to U(n_i)$ die induzierte, irreduzible Darstellung. Betrachten wir das Zentrum von G_i, welches in [Bor55, 11] abzulesen ist, so sehen wir, dass der Kern von ρ_i' trivial ist oder isomorph zum Produkt von zyklischen Gruppen mit 2 oder 3 Elementen. Sei $A_i := \mathrm{H}^*(BS^1;\mathbb{F}_p)$. Das heißt, die Projektion $\pi_i : G_i \times S^1 \to G_i' := (G_i \times S^1)/\mathrm{Kern}\,\rho'$ induziert einen Isomorphismus

$$B\pi_i^* : \mathrm{H}^*(BG_i';\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^*(BG_i \times S^1;\mathbb{F}_p) \cong \mathrm{H}^*(BG_i;\mathbb{F}_p) \otimes A_i.$$

Seien z_i die Erzeuger von A_i, dann gilt für $X := SU(n)/\rho_1 + \rho_2 + \rho_3$ die Isomorphie

$$\mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_p) \cong \mathrm{H}\,\mathcal{K}_{\otimes_i \mathrm{H}^*(BG_i';\mathbb{F}_p)/z_i}(c_2, \ldots, c_n).$$

Lemma 6.22. *Sei $p \geq 5$ oder $p = 0$ und seien G_1, G_2, G_3 drei kompakte halbeinfache Lie-Gruppen in $LieR_p$, die prim zu A_k sind. Seien weiter $\rho_i : G_i \to SU(n_i)$ eine treue Darstellung, sodass für $l := n - \mathrm{Rang}(G_1 \times G_2 \times G_3)$ gilt: $l \geq 2$ und $\mathrm{ggT}(l-1,4) = 1$. Dann gilt für $X := SU(n_1+n_2+n_3)/\rho_1 + \rho_2 + \rho_3$, dass $|\mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_p)|$ durch 4 teilbar ist.*

Beweis. Die Lie-Gruppe $G := \times_i G_i$ liegt in $LieR_p$ und mit Satz 2.39 sehen wir, dass

$$E_2 = \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_p)}(\mathrm{H}^*(BSU(n);\mathbb{F}_p), \mathbb{F}_p)$$

endliche $\mathbb{F}_p$-Dimension besitzt. Mit dem selben Trick wie im vorherigen Lemma zeigen wir, dass $|E_2|$ durch 4 teilbar ist. Und da G in $LieR_p$ liegt, kollabiert die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz nach Satz 2.20. □

Bemerkung 6.23. Ähnliche Aussagen lassen sich natürlich auch im dem Fall treffen in dem G_1, G_2, G_3 nicht prim zu A_k ist. In diesem Fall werden aber weitere Bedingungen an p gestellt. ◇

Bemerkung 6.24. Auf die selbe Art lässt sich für $\rho_i : G \to SU(n_i)$ reelle bzw. symplektische Darstellungen und $X := SO(n)/\rho_1 + \rho_2 + \rho_3$ und $n = n_1 + n_2 + n_3$ bzw. $X := Sp(n)/\rho_1 + \rho_2 + \rho_3$ und $2n = n_1 + n_2 + n_3$ eine vergleichbare Aussage zeigen. $\diamond$

Bemerkung 6.25. Wir zeigen nun, dass die Bedingung $\ell \geq 3$ aus Lemma 6.20 nicht zu vernachlässigen ist:

$$Tor_{\mathrm{H}^*(BSU(n+k);\mathbb{F}_2)}(\mathbb{F}_2; \mathrm{H}^*(BSU(n) \times BSU(k); \mathbb{F}_2))$$

ist als Algebra isomorph zu $\mathrm{H}^*(SU(n+k)/SU(n) \times SU(k), \mathbb{F}_2)$. Wäre die $\mathbb{F}_2$-Dimension dieser Algebra durch 4 teilbar, so wäre die $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik gleich 0. Nach [Sto84, 3] gilt aber

$$k(SU(n+k)/SU(n) \times SU(k); \mathbb{F}_2) = \binom{\lfloor n/2 \rfloor + \lfloor k/2 \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor} \text{ in } \mathbb{F}_2.$$

$\diamond$

Zuletzt noch ein Lemma, das etwas mehr technischen Aufwand benötigt und stellvertretend für viel Beispiele sein solle, welche sich aus den bisherigen algebraischen Möglichkeiten konstruieren lassen:

Lemma 6.26. *Seien G, G' Lie-Gruppen in $LieR_p$. Sei $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$ und $\mathrm{H}^*(BG'; \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[x'_1, \ldots, x'_{n'}]$. Seien $\rho : G \to SU(n_1)$ und $\rho' : G' \to SU(n_2)$ Monomorphismen, sodass es ein $i \in \{1, \ldots, n_1\}$ gibt mit*

$$|\mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]/(c_2, \ldots, \hat{c}_i, \ldots, c_{n_1})| < \infty.$$

Ist $X = SU(n_1 + n_2)/(\rho + \rho')$ und ist $\dim(X) = 4m + 1$ und $Dc_i = 4l$, $l \in \mathbb{N}$ dann ist $|\mathrm{H}^*(X; \mathbb{F}_p)|$ durch 4 teilbar.

Beweis. Definiere $f : \mathbb{F}_p[c_2, \ldots, c_{n_1}] \to \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n] \otimes \mathbb{F}_p[z]$ durch $f(c_j) = B\rho^*(c_j)$ für $i \neq j$ und $f(c_i) = B\rho^*(c_i) + z^l$, wobei $Dz = 4$ gilt. Dann ist

$$|\mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n, z]/(c_2, \ldots, c_{n_1})| < \infty$$

und mit Lemma 2.5 und Satz 2.39 gilt auch

$$|\mathrm{H}\,\mathcal{K}_{A'}(c_2, \ldots, c_{n_1+n_2})| < \infty,$$

für $A' = \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_{n'}, z]$. Sei $A := \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_{n'}]$, dann gilt

$$\mathrm{H}\,\mathcal{K}_{A'}(c_2, \ldots, c_{n_1+n_2}, z) \cong \mathrm{H}\,\mathcal{K}_A(c_2, \ldots, c_{n_1+n_2}).$$

Der Grad der Fundamentalklasse von $\mathrm{H}\,\mathcal{K}_{A'}(c_2, \ldots, c_{n_1+n_2})$ ist gleich $4m - 4l + 2$ und wir sind mit Lemma 2.42 und 2.44 fertig. $\square$

6.2.4 Nicht-einfache Lie-Gruppen

Zuletzt folgt noch ein sehr kurzer Abschnitt über den Fall in dem wir den homogenen Raum $X = G/H$ betrachten und G keine einfache Lie-Gruppe ist.

Sei G' eine kompakte, halbeinfache Lie-Gruppe in $LieP_p$ und seien G'', H kompakte, halbeinfache Lie-Gruppen in $LieR_p$. Seien $\rho : H \hookrightarrow G'$ und $\rho' : H \to G''$ Homomorphismen von Lie-Gruppen, wobei ρ injektiv ist, dann ist $\rho + \rho' : H \to G' \times G''$

injektiv. Da $\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_p)$ konzentriert in geraden Graden ist, operiert Sq_1 trivial auf dieser Algebra und es gilt nach Satz 2.20:

$$\mathrm{H}^*(G'/H;\mathbb{F}_p) \cong \mathrm{H}\,\mathcal{K}_{\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_p)}(y_1,\dots,y_n),$$

als graduierter $\mathbb{F}_p$-Modul, wobei $y_1,\dots,y_n$ die Erzeuger von $\mathrm{H}^*(BG';\mathbb{F}_p)$ sind. Sind weiter $y'_1,\dots,y'_{n'}$ die Erzeuger von $\mathrm{H}^*(BG'';\mathbb{F}_p)$, dann gilt ebenfalls nach Satz 2.20:

$$\mathrm{H}^*(G'\times G''/H;\mathbb{F}_p) \cong \mathrm{H}\,\mathcal{K}_{\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_p)}(y_1,\dots,y_n,y'_1,\dots,y'_{n'})$$

Ist $\dim(G'\times G'')/H = 4\ell+1$, dann ist $|\,\mathrm{H}^*(G'\times G''/H;\mathbb{F}_p)|$ nach Lemma 2.44 durch 4 teilbar: G'' liegt $LieR_p$ und wir lesen in [Bor55, 11] nach, dass es einen Erzeuger y' in $\mathrm{H}^{4*}(BG'';\mathbb{F}_p)$ existiert. Ist hingegen $\dim(G'\times G'')/H = 4\ell+3$, dann ist $|\,\mathrm{H}^*(G'\times G''/H;\mathbb{F}_p)|$ nach Lemma 2.44 durch 4 teilbar, falls $\mathrm{ggT}(l-1,4)=1$ für

$$l := \mathrm{Rang}\,G' + \mathrm{Rang}\,G'' - \mathrm{Rang}\,H.$$

Kapitel 7

Die Arbeit von Gugenheim und May

7.1 Der Hauptsatz

Dieser Abschnitt wiederholt Auszüge aus der Arbeit [GM74]. Er dient der Übersicht, da einige der Bemerkungen und Beweise im Späteren aufgegriffen werden. Die Notation bleibt weitestgehend erhalten um einen Zugriff auf das Orginalwerk zu erleichtern. Da es für uns gebräuchlicher ist, werden wir in unserer Ausführung jedoch von Vorne herein damit beginnen, mit nicht positiv graduierten Komplexen zu arbeiten, wo Gugenheim und May mit nicht negativ graduierten Komplexen beginnen. Alle Komplikationen, die hierdurch entstehen werden im Text vermerkt.

Sei R ein kommutativer Ring. Sei U eine differentiell graduierte R-Algebra mit Eins. Sei M ein differentieller U-Rechtsmodul und N ein differentieller U-Linksmodul.

Sei $\mathscr{M}_U$(bzw. ${}_U\mathscr{M}$) die Kategorie der differentiellen U-Rechtsmoduln (bzw. U-Linksmoduln). Sei $\mathscr{F}\mathscr{M}_U$ die Unterkategorie von $\mathscr{M}_U$ die aus filtrierten Objekten und filtrierungserhaltenden Abbildungen besteht. Genauer, ein Objekt $X \in \mathscr{F}\mathscr{M}_U$ ist ein differentieller U-Modul zusammen mit einer absteigenden Sequenz F_pX von differentiellen U-Untermoduln, sodass X die Vereinigung der F_pX ist und $F_pX = 0$ für $p > 0$.

Manchmal wollen wir auch $F_1X \neq 0$ zulassen und benennen die Kategorie solcher filtrierten, differentiellen U-Moduln mit $\mathscr{F}^+\mathscr{M}_U$.

Wir erinnern uns, dass ein so filtrierter R-Modul X Grundlage für eine Spektralsequenz $\{E^rX\}$ ist, die mit E_0X beginnt, wobei $E_0^{p,q} = (F_pX/F_{p+1}X)_{p+q}$ ist.

Unser Ansatz für $\mathrm{Tor}_U(M,N)$ basiert auf Objekten $X \in \mathscr{F}\mathscr{M}_U$, die über M augmentiert sind, was bedeutet, dass es in $\mathscr{M}_U$ einen Morphismus $\alpha : X \to M$ gibt.

Definition 7.1. Sei $\alpha : X \to M$ ein Morphismus in $\mathscr{M}_U$, wobei $X \in \mathscr{F}\mathscr{M}_U$. Definiere ein Objekt $X_\alpha \in \mathscr{F}^+\mathscr{M}_U$ durch:

i) $X_\alpha^n = M^{n+1} \oplus X^n$ wodurch X_α zu einem $\mathbb{Z}$ graduierten R-Modul wird.

ii) $(m, x)u = (mu, xu)$ für $m \in M, x \in X$ und $u \in U$.

iii) $F_1 X_\alpha = M$ und $F_p X_\alpha = M \oplus F_p X$ für $p \leq 0$

iv) $d(m, x) = (\alpha(x) - d(m), d(x))$ für $m \in M$ und $x \in X$.

$\diamond$

X_α wird *Abbildungszylinder von* α genannt. Wir sehen, dass $E_1^{1,q} X_\alpha = \mathrm{H}^q(M)$ und $E_1^{p,q} X_\alpha = E_1^{p,q} X$. Da die U-Rechtsmodulstruktur auf $F_p X$ eine HU-Rechtsmodulstruktur auf $E_1^{p,*}$ induziert, ist $(E_1 X_\alpha, d_1)$ ein Komplex von HU-Moduln der Form

$$\ldots \to E_1^{p,*} X \to E_1^{p+1,*} X \to \ldots \to E_0^{0,*} \to HM \to 0 \tag{7.1}$$

Wir sagen, dass X_α eine *Auflösung* ist, wenn (7.1) exakt ist. Für $N \in {}_U\mathscr{M}$ geben wir $X \otimes_U N$ die induzierte Filtrierung

$$F_p(X \otimes_U N) = F_p X \otimes_U N$$

und beobachten, dass es eine Künneth Abbildung von differentiellen R-Moduln gibt:

$$\mathscr{K} : E_1 \otimes_{HU} HN \to E_1(X \otimes_U N), \mathscr{K}(\{x\} \otimes \{n\}) = \{x \otimes n\}\,. \tag{7.2}$$

Wir sagen, dass X ein Künneth Objekt ist, wenn $E_1^{p,*}$ ein flacher HU-Modul ist und (7.2) ein Isomorphismus für alle N ist. Wir definieren

$$\mathrm{Tor}_U(M, N) = \mathrm{H}(X \otimes_U N)$$

und

$$E_r(M, U, N) = E_r(X \otimes_U N),$$

wobei X eine beliebige Künneth Auflösung von M ist. Man sieht,

$$E_2(M, U, N) = \mathrm{Tor}_{HU}(HM, HN)$$

und dass $E_r(M, U, N)$ die algebraische Eilenberg-Moore-Spektralsequenz ist. Da wir es mit negativen Graden zu tun haben, liegt die Spektralsequenz im zweiten Quadranten, wodurch die Konvergenz im Allgemeinen nicht sichergestellt ist. Durch [GM74, 3] ist die Konvergenz in allen Fällen, die wir im Folgenden betrachten werden gesichert. Namentlich also die Fälle wie in Satz 2.17. Mit [GM74, 1.8] sehen wir, dass alle vorherigen Definitionen nicht von der Wahl von X abhängen.

Definition 7.2. Sei $X \in \mathscr{F}\mathscr{M}_U$. Dann wird X *spaltendes Objekt* genannt, wenn es einen bigraduierten R-Modul $\bar{X}$ gibt, mit $\bar{X}^{p,q} =$ für $p > 0$, sodass

i) $X = \bar{X} \otimes U$ als U-Rechtsmodul. Die Graduierung von X ist gegeben durch

$$X^n = \sum_{p+q+r=n} \bar{X}^{p,q} \otimes U^r \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

ii) $F_pX = \sum_{m \geq p} \bar{X}^{m,*} \otimes U$ für $p \leq 0$. Bigraduiert wird X durch

$$X^{p,q} = \sum_{i+j=q} \bar{X}^{p,i} \otimes U^j.$$

Additiv gilt $E_0^{p,q} = X^{p,q}$.

iii) Das Differential auf $X^{p,q} \subset X$ hat die Form

$$d = \sum_{r \geq 0} d_r \text{ mit } d_r : X^{p,q} \to X^{p+r,q-r+1},$$

wobei $\sum_{i+j=r} d_i d_j = 0$.

iv) Da X ein differentieller U-Modul ist und $X^{p,*}$ ein U-Untermodul von X, erfülle d_r die Leibniz-Regeln

$$\begin{aligned} d_0(xu) &= d_0(x)u + (-1)^{Dx} x d(u) \\ d_r(xu) &= d_r(x)u \end{aligned}$$

für $r < 0, x \in X$ und $u \in U$.

v) Ist $\alpha : X \to M$ ein Morphismus in $\mathscr{M}_U$, dann wird X_α ein augmentiertes spaltendes Objekt genannt. X_α ist bigraduiert durch $X_\alpha^{1,q} = M^q$ und $X_\alpha^{p,q} = X^{p,q}$ für $p < 0$. Die Notation von **iii)** setzt sich fort zu

$$d_{p+1} = \alpha : X^{p,q} \to M^{p+q} \text{ und } d_0 = -d : M^q \to M^{q-1}.$$

Die Formeln **iii)** und **iv)** behalten für X_α ihre Richtigkeit.

◇

Definition 7.3. Ein spaltendes Objekt heißt *ausgezeichnet*, wenn jedes $X^{p,q}$ ein projektiver R-Modul ist und $d_0 = 0$ auf $\bar{X}$ ist, sodass $d_0 = 1 \otimes d$ auf $X = \bar{X} \otimes U$ ist. Eine Auflösung heißt ausgezeichnet, wenn X ein ausgezeichnetes Objekt in $\mathscr{F}\mathscr{M}_U$ ist. ◇

Satz 7.4. *Sei $M \in \mathscr{M}_U$ und sei eine HU-projektive Auflösung von HM in der Form*

$$\ldots \to \bar{X}^{p,*} \otimes HU \to \bar{X}^{p+1,*} \otimes HU \to \ldots \to \bar{X}^{0,*} \otimes HU \xrightarrow{\varepsilon} HM \to 0$$

gegeben. Babei sind alle $\bar{X}^{p,q}$ projektive R-Moduln.

Dann gibt es einen filtrierten U-Rechtsmodul $X = \bar{X} \otimes U$, ein Differential d und eine Abbildung $\alpha : X \to M$, sodass X_α eine ausgezeichnete Auflösung von M ist und der Komplex $E_1 X_\alpha$ stimmt mit der gegeben Auflösung überein.

Im Folgenden werden wir den Beweis des Satzes noch einmal genau unter die Lupe nehmen. Um es später etwas leichter zu haben, wandeln wir den ursprünglichen Beweis um kleine Details in der Notation ab.

Beweis. Die Graduierung und die Filtrierung werden durch **i)** und **ii)** in Definition 7.1 gegeben und wir definieren X_α wie in **i)**, **ii)** und **iii)** von Definition 7.2, ohne dass wir α bis jetzt gegeben haben. Wir bigraduieren X und X_α wie in den zitierten Definitionen und schreiben d_r für die Komponenten des zu konstruierenden Differential auf X_α. Die Konstruktion von d auf X_α wird die Konstruktion von α beinhalten.

Wir müssen $d_0 = -d$ auf $M = X_\alpha^{1,*}$ und $d_0 = 1 \otimes d$ auf $\bar{X}^{p,*} \otimes U = X_\alpha^{p,*}$ für $p \leq 0$ setzen. Für $r > 0$ muss $d_r(xu) = d_r(x)u$ gelten, es reicht also d_r auf $\bar{X}^{p,*}$ für $1 \leq r \leq p+1$ zu definieren.

Seien ZU und ZM die Zykel von U und M.

Da $\bar{X}^{p,*}$ projektiv ist können wir die Abbildung d_1 wählen, sodass folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} \bar{X}^{0,*} \arrow[r, dotted, "d_1"] \arrow[d, hook] & ZM \arrow[d, "\pi"] \\ \bar{X}^{0,*} \otimes HU \arrow[r, "\varepsilon"] & HM \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} \bar{X}^{p,*} \arrow[r, dotted, "d_1"] \arrow[d, hook] & \bar{X}^{p+1,*} \otimes ZU \arrow[d, "\pi"] \\ \bar{X}^{p,*} \otimes HU \arrow[r, "\varepsilon"] & \bar{X}^{p+1,*} \otimes HU \end{tikzcd} \tag{7.3}$$

Mit dieser Wahl hat d_1 die gewünschte Form. Es gilt $d_0 d_1 + d_1 d_0 = 0$ da dies auf $\bar{X}^{p,*}$ gilt. Wir definieren nun d_r auf $\bar{X}^{p,*}$ für $r \geq 2$ und $p \leq -1$ durch Induktion über p und für festes p über r. Es sei $d_r = 0$ auf $\bar{X}^{p,*}$ für $r > p+1$.

Gehen wir davon aus, dass d_r auf $\bar{X}^{m,*}$ für $m > p$ bereits definiert ist und auch d_n auf $\bar{X}^{p,*}$ für $n < r$ definiert ist.

Definiere die Abbildungen $e^r : \bar{X}^{p,*} \to \bar{X}_\alpha^{p+r,*}$ und $f : \bar{X}^{p,*} \to \bar{X}_\alpha^{p+r+1,*}$ durch

$$e^r = \sum_{\substack{i+j=-r \\ i \geq 0}} d_i d_j \text{ und } f = -\sum_{\substack{i+j=-r-1 \\ i>1}} d_i d_j.$$

Da $d_0 = 0$ auf $\bar{X}^{p,*}$ sind e und f definiert. Es gilt

$$d_0 d_i = -\sum_{\substack{a+b=i \\ a>0}} d_a d_b \text{ für } d_1 d_i = \sum_{\substack{a+b=i+1 \\ a \neq 1}} d_a d_b$$

auf $\bar{X}^{m,*}$ für $m < p$, nach **iii)** in Definition 7.2. Durch Substitution und mittels Induktionsannahme folgt

$$d_0 e^r = -\sum_{\substack{i+j=-r \\ a+b=i>0 \\ a>0}} d_a d_b d_j = \sum_{a>0} \sum_{b+j=-r+a} d_a d_b d_j = 0$$

und

$$d_1 e^r = -\sum_{\substack{i+j=-r \\ a+b=i+1>1 \\ a \neq 1}} d_a d_b d_j = d_0 f - \sum_{a>1} \sum_{b+j=-r-1+a} d_a d_b d_j = d_0 f.$$

Da $d_0 e^r = 0$ gilt, folgt $e(\bar{X}^{p,*}) \subset \operatorname{Kern} d_0 = \bar{X}^{p+r,*} \otimes ZU$. Wir betrachten das folgende Diagramm, in dem die Quadrate kommutieren:

$$\begin{tikzcd} & \bar{X}^{p+r-1,*} \otimes ZU \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "d_1"] & \bar{X}^{p+r-1,*} \otimes HU \arrow[d, "\partial"] \\ \bar{X}^{p+r,*} \otimes ZU \arrow[r, "e^r"] \arrow[d, "f"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{e}^r"] & \bar{X}^{p+r,*} \otimes ZU \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "d_1"] & \bar{X}^{p+r,*} \otimes HU \arrow[d, "\partial"] \\ \bar{X}^{p+r+1,*} \arrow[r, "d_0"] & \bar{X}^{p+r+1,*} \otimes ZU \arrow[r, "\pi"] & \bar{X}^{p+r+1,*} \otimes HU \end{tikzcd} \tag{7.4}$$

Da die rechte Spalte exakt ist und $\pi d_0 = 0$ gilt, können wir eine Abbildung $\tilde{e}^r$ wählen, sodass

$$\pi e^r = \partial \pi \tilde{e}^r = \pi d_1 \tilde{e}^r.$$

Natürlich gilt $d_0 \tilde{e}^r = 0$. Es gilt $e^2 = d_1 d_1$, weshalb $\pi e^2 = \partial\partial\pi = 0$ und wir wählen $\tilde{e}^2 = 0$. Nun ersetzen wir d_{r-1} auf $\bar{X}^{p,*}$ durch $d_{r-1} - \tilde{e}^r$. Dies ändert weder d_1 ab, noch verändert es unsere Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{i+j=-r-1} d_i d_j = 0 \text{ auf } \bar{X}^{p,*}.$$

Letztendlich können wir, da $\pi(d_1 \tilde{e}^r - e^r) = 0$ und $\operatorname{Kern} \pi = \operatorname{Bild} d_0$, so wählen, dass $d_0 d_r = d_1 \tilde{e}^r - e^r$. Mit unserem modifizierten d_{r-1} ist dies äquivalent zu

$$\sum_{i+j=-r} d_i d_j = 0,$$

was unseren Beweis vervollständigt. □

Im Folgenden sei $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y_1, \ldots, y_n]$ eine Polynomalgebra. Nach [GM74, 4] ist die $\mathbb{F}_2$-Algebra $\mathrm{C}^*(BG; \mathbb{F}_2)$ eine differentielle $\mathbb{F}_2$-Algebra, die homotopiekommutativ durch $\cup_1$-Produkte ist, welche die *Hirsch Formeln* erfüllen. Das heißt, für $a, b, c \in \mathrm{C}^*(BG; \mathbb{F}_2)$ gilt

$$d(a \cup_1 b) = ab + ba + da \cup_1 b + a \cup_1 db$$

und

$$(ab) \cup_1 c = a(b \cup_1 c) + (a \cup_1 c)b.$$

7.1.1 Das d_2 Differential

In diesem Abschnitt wollen wir die Ergebnisse des letzten Abschnittes zu neuen Resultaten führen.

Sei $A := \mathbb{F}_2[y_1, \ldots, y_n]$ ein graduierte Polynomalgebra in n-Veränderlichen und $z_1, \ldots, z_k$ eine reguläre Sequenz in A, gegeben wie in Satz 2.54 und sei weiter die Algebra $\bar{A} := A/(z_1, \ldots, z_k)$. Sei weiter X ein topologischer Raum, sodass $\mathrm{H}^*(X; \mathbb{F}_2) = \bar{A}$ gilt. Sei

$$\mathcal{T} := \wedge([y_1], \ldots, [y_n]) \otimes \Gamma(v_1, \ldots, v_k) \otimes \bar{A},$$

wie in Satz 2.54 gegeben. Ist $\alpha = (i_1, \ldots, i_p)$ eine Sequenze in $\{1, \ldots, k\}$, für die $i_1 < \ldots < 1_p$ gilt, dann definieren wir $y_\alpha = [y_{i_1}] \wedge \ldots \wedge [y_{i_p}]$. Nach Satz 7.4 existiert ein Differential d auf

$$Y := \wedge([y_1], \ldots, [y_n]) \otimes \Gamma(v_1, \ldots, v_k) \otimes \mathrm{C}^*(X; \mathbb{F}_2),$$

sodass Y zu einer ausgezeichneten Auflösung von $\mathbb{F}_2$ wird. Diese Differentiale wollen wir nun auf der Unteralgebra $\wedge([y_1],\ldots,[y_n])$ bestimmen. Und später Aussagen über das Differential auf $\Gamma(v_1,\ldots,v_k)$ treffen.

Ist x'_i ein Repräsentant von y_i in $\mathrm{C}^*(X;\mathbb{F}_2)$, dann können wir aus dem Beweis von 7.4 sehen, dass

$$d_1(y_\alpha) = \sum_{(i_0)\subset\alpha} y_{\alpha-(i_0)} \otimes x'_i$$

gilt. Da $d_0(x'_i) = 0$ nach Definition von x'_i ist, gilt $e_2 = d_1 \circ d_1$ und wir rechnen

$$d_1 \circ d_1(y_\beta) = \sum_{i_j<i_k} y_{\beta-(i_j,i_k)} \otimes x'_{i_j}x'_{i_k} + x'_{i_k}x'_{i_j}.$$

Da $d_0(x'_{i_j} \cup_1 x'_{i_k}) = x'_{i_j}x'_{i_k} + x'_{i_k}x'_{i_j}$ gilt, folgt dass

$$d_0(\sum_{i_j<i_k} y_{\beta-(i_j,i_k)} \otimes x'_{i_j} \cup_1 x'_{i_k}) = d_1 \circ d_1(y_\beta)$$

und wir sehen, dass $d_1d_1(y_\alpha)$ im Bild von d_0 liegt. Es gilt also $\pi d_1d_1(y_\alpha) = 0$ und wir können $\tilde{e}_2(y_\alpha) = 0$ wählen. Somit wählen wir weiter

$$d_2(y_\alpha) = \sum_{i_j<i_k} y_{\beta-(i_j,i_k)} \otimes x'_{i_j} \cup_1 x'_{i_k}.$$

Gehen wir nun davon aus, dass wir für $r < r_0$ bereits gezeigt haben, dass gilt

$$d_r(y_\alpha) = \sum_{\beta\subset\alpha;|\beta|=r} y_{\alpha-\beta} \otimes x'_\beta,$$

mit

$$x'_\beta = (\ldots((x'_{j_1} \cup_1 x'_{j_2}) \cup_1 x'_{j_3}) \cup_1 \ldots) \cup_1 x'_{j_q}$$

und $\beta = (j_1,\ldots,j_q)$. Es gilt

$$e_r(y_\alpha) = \sum_{i+j=r;i,j>0} d_id_j(y_\alpha).$$

Ist $|\alpha| = r$, dann gilt

$$e_r(y_\alpha) = \sum_{\beta\subset\alpha} x'_\beta x'_{\alpha-\beta},$$

was nach [GM74, 2.2.vi] das selbe ist wie $d_0(x'_\alpha)$. Analog zeigen wir, für $|\alpha| > r$ gilt:

$$e_r(y_\alpha) = \sum_{\beta\subset\alpha;|\beta|=r} y_{\alpha-\beta} \sum_{\gamma\subset\beta} x'_\gamma x'_{\beta-\gamma}$$

Genauso ist

$$d_0(\sum_{\beta\subset\alpha;|\beta|=r} y_{\alpha-\beta}x'_\beta) = e_r(y_\alpha)$$

und es folgt $\pi e_r(y_\alpha) = 0$. Womit wir $\tilde{e}_r(y_\alpha) = 0$ wählen können und so sehen, dass

$$d_r(y_\alpha) = \sum_{\beta\subset\alpha;|\beta|=r} y_{\alpha-\beta}x'_\beta$$

eine mögliche Wahl ist. Wir folgern so

$$d(y_\alpha) = \sum_{\beta \subset \alpha} y_{\alpha-\beta} x'_\beta. \tag{7.5}$$

Dieses Resultat ist eine Verallgemeinerung von Lemma [GM74, 2.2], welches die Bedingung $\mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[y_1,\dots,y_n]$ voraussetzt.

Wir behalten die vorherige Notation bei und fassen zusammen:

Lemma 7.5. *Sei X eine topologischer Raum, sodass*

$$A := \mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y_1,\dots,y_n]/(z_1,\dots,z_k)$$

gilt. Dann gibt es ein Differential d auf

$$Y := \wedge([y_1],\dots,[y_n]) \otimes \Gamma(v_1,\dots,v_k) \otimes \mathrm{C}^*(X;\mathbb{F}_2),$$

sodass Y eine ausgezeichneten Ausflösung von $\mathbb{F}_2$ ist. Das Differential auf der Unteralgebra $\wedge([y_1],\dots,[y_n])$ ist wie in (7.5) gegeben.

Weiter können wir in [GM74, 3.3 & 3.5] ablesen:

Lemma 7.6. *Sei $\iota : H \hookrightarrow G$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen und sei weiter $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_2[y_1,\dots,y_n]$. Sei $Y^{*,*} = \wedge([y_1],\dots,[y_n]) \otimes_{\mathrm{C}^*(BG;\mathbb{F}_p)} \mathrm{C}^*(BH;\mathbb{F}_p)$ mit dem Differential d gegeben wie in (7.5), dann ist*

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{C}^*(BG;\mathbb{F}_p)}(\mathbb{F}_p, \mathrm{C}^*(BH;\mathbb{F}_p)) \cong \mathrm{H}(Y,d),$$

als $\mathbb{F}_p$-Algebra.

Bis zum Ende dieses Abschnittes sei für $a \in HU := \mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_p)$ das Element $a' \in U := \mathrm{C}^*(X;\mathbb{F}_p)$ ein Repräsentant von a. Sei $\bar{X}^{*,*} = \wedge([y_1],\dots,[y_n]) \otimes \Gamma(v_1,\dots,v_k)$. Der Komplex $\wedge([y_1],\dots,[y_n]) \otimes \Gamma(v_1,\dots,v_k) \otimes HU$ ist eine HU-freie Auflösung von $\mathbb{F}_p$. Nach Satz 7.4 finden wir ein Differential $d = \sum_r d_r$, sodass $X^{*,*} = \bar{X}^{*,*} \otimes U$ eine ausgezeichnete Auflösung von $\mathbb{F}_p$ ist. Wir wollen nun d_2 genauer untersuchen. Wir beschränken unsere Betrachtungen auf $p = 2$, um uns die Wirren von Vorzeichen zu ersparen. Die Konstruktion der Differentiale d_r läuft, wie im Beweis von Satz 7.4 zu sehen ist, jeweils in zwei Schritten ab: Erst wird ein vorläufiges Differential konstruiert, das wir mit d'_r bezeichnen. Bei der Konstruktion von d'_{r+1} wird dann d_r auf $d'_r - \tilde{e}^{r+1}$ festgesetzt. Wir müssen also, wenn wir d_2 betrachten wollen, d'_2 und $\tilde{e}^3$ genauer untersuchen. Kommen wir also zu d'_2:

Lemma 7.7. *Sei $HU = \mathbb{F}_2[y_1,\dots,y_n]/(z_1,\dots,z_n)$, dabei sei $z_1,\dots,z_k$ eine reguläre Sequenz in $\mathbb{F}_2[y_1,\dots,y_n]$, wie in Satz 2.54. Sei*

$$\mathcal{T} = \wedge([y_1],\dots,[y_n]) \otimes_{\mathbb{F}_2} \Gamma(v, v_2 \dots, v_k) \otimes_{\mathbb{F}_2} HU$$

die Auflösung aus Satz 2.54. Sei

$$v = \sum_{i=1}^{n} [a_i|b_i] \in \mathcal{T}^{-2,*}.$$

Dann gilt

$$d'_2(v^{(2^i)}) = d'_2(v^{(2)}) \nabla v^{(2^i-2)}$$

in $X^{*,*}$. Weiter gilt

$$d_2'(v^{(2)}) = d_2'(v)\nabla v + \sum_{i\leq j}[a_i]\nabla[a_j]b_i' \cup_1 b_j'$$

für b_i' einem Repräsentanten von b_i in U.

Beweis. Aus dem Beweis von Satz 7.4 sehen wir durch das kommutative Diagramm (7.3), dass

$$d_1([x_1|\dots|x_p]) = \sum_{i=1}^{p-1}[x_1|\dots|x_ix_{i+1}|\dots|x_p] + [x_1|\dots|x_{p-1}]x_p'$$

gilt. Wodurch wir zusammen mit Satz 2.53 folgern: $d_1(v^{(q)}) = d_1(v)\nabla v^{(q-1)}$. Es gilt

$$\begin{aligned} d_1 \circ d_1(v) &= d_1(\sum_{i=1}^{n}[a_i]b_i') \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i'b_i'. \end{aligned}$$

Nach Definition von HU ist $\sum_{i=1}^{n} a_i'b_i' = 0 \in HU$. Es gibt also ein $s \in U$, mit $d_0(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i'b_i'$ und wir wählen $d_2'(v) = s$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} d_1 \circ d_1(v^{(2)}) &= d_1(\sum_{i=1}^{n}[a_i]b_i'\nabla v) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i'b_i'\nabla v + \sum_{i<j}[a_i]\nabla[a_j]b_i'b_j' + b_j'b_i' \end{aligned}$$

und wir wählen $d_2'(v^{(2)}) = vs + \sum_{i<j}[a_i]\nabla[a_j]b_i' \cup_1 b_j'$. Und ebenso

$$\begin{aligned} d_1 \circ d_1(v^{(2^i)}) &= d_1(\sum_{i=1}^{n}[a_i]b_i'\nabla v^{(2^i-1)}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i'b_i'\nabla v^{(2^i-1)}) + \sum_{i<j}[a_i]\nabla[a_j]b_i'b_j' + b_j'b_i'\nabla v^{(2^i-2)}), \end{aligned}$$

womit wir

$$d_2'(v^{(2^i)}) = v^{(2^i-1)}s + \sum_{i<j}[a_i]\nabla[a_j]b_i' \cup_1 b_j'\nabla v^{(2^i-2)} = d_2'(v^{(2)})\nabla v^{(2^i-2)}$$

wählen. □

Um d_2 vollständig zu bestimmen, müssen wir d_3 bzw. $\tilde{e}^3$ berechnen und dafür müssen wir $(d_2 \circ d_1 + d_1 \circ d_2')(v^{(2^i)})$ kennen (Das vordere d_2 ist ohne Strich, da wir es bis zu diesem Zeitpunkt in der Induktion schon final bestimmt haben, während das zweite d_2' noch modifiziert wird). Wir berechnen zuerst $d_2 \circ d_1 + d_1 \circ d_2'(v^{(2)})$. Dafür bestimmen wir zuerst $d_2'([a_i]\nabla v)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} d_1 \circ d_1([a_i]\nabla v) &= d_1(a_i'\nabla v + \sum_{j\neq i}[a_i]\nabla[a_j]b_j') \\ &= \sum_{j=1}^{n}[a_j]b_j'a_i' + \sum_{i\neq j}[a_i]a_j'b_j' + \sum_{i\neq j}[a_j]a_i'b_j' \\ &= \sum_{j=1}^{n}[a_i]b_j'a_j' + \sum_{i\neq j}^{n}[a_j]a_i'b_j' + b_j'a_i' \end{aligned}$$

Und wir wählen $d_2'([a_i]\nabla v) = \sum_{j=1}^{n}[a_j]s' + \sum_{i\neq j}[a_j]a_i' \cup_1 b_j'$, dabei ist $d_0(s') = \sum_{j=1}^{n}[a_i]b_j'a_j'$. Und damit rechnen wir nach:

$$d_2'(\sum_i [a_i]b_i'\nabla v) = \sum_{i,j}[a_j]s'b_i' + \sum_{i\neq j}[a_j](a_i' \cup_1 b_j')b_i'$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} d_2 \circ d_1 + d_1 \circ d_2'(v^{(2)}) &= d_2(\sum_i [a_i]b_i'\nabla v) \\ &+ d_1(vs + \sum_{i<j}[a_i]\nabla[a_j]b_i' \cup_1 b_j') \\ &= \sum_{i,j}[a_j]s'b_i' + \sum_{i\neq j}[a_j](a_i' \cup_1 b_j')b_i' \\ &+ \sum_{i=1}^{n}[a_i]b_i's + \sum_{i\neq j}^{n}[a_j]a_i'(b_i' \cup_1 b_j') \end{aligned}$$

Wir wissen aus dem Beweis des Satzes 7.4, dass ein Element $\tilde{e}^3(v^{(2)})$ gibt, mit

$$d \circ \pi(\tilde{e}^3(v^{(2)})) = \pi(d_2 \circ d_1 + d_1 \circ d_2(v^{(2)}))$$

und wir setzen $d_2(v^{(2)}) = (d_2' + \tilde{e}^3)(v^{(2)})$. Rechnen wir nun

$$\begin{aligned} d_1 \circ d_1([a_i]\nabla v^{(2^i)}) &= d_1(a_i'\nabla v^{(2^i-1)} + \sum_{j\neq i}[a_i]\nabla[a_j]b_j'\nabla v^{(2^i-2)}) \\ &= (\sum_{j=1}^{n}[a_i]b_j'a_j' + \sum_{i\neq j}^{n}[a_j]a_i'b_j' + b_j'a_i')\nabla v^{(2^i-2)} \\ &+ \sum_{i\neq j\neq k\neq i}[a_i]\nabla[a_j]\nabla[a_k]b_k'b_j'\nabla v^{(2^i-3)} \end{aligned}$$

und wie sehen, dass wir $d_2'(\sum_i [a_i]b_i'\nabla v^{(2^i-1)})$ als

$$(\sum_{i,j}^{n}[a_j]s'b_i' + \sum_{i\neq j}^{n}[a_j](a_i' \cup_1 b_j')b_i')\nabla v^{(2^i-2)} + \sum_{i\neq j<k\neq i}[a_i]\nabla[a_j]\nabla[a_k](b_k' \cup_1 b_j')b_i'\nabla v^{(2^i-3)}$$

wählen können und dies können wir Umformen zu

$$d_2' \circ d_1(v^{(2)})\nabla v^{(2^i-2)} + \sum_{i<j}[a_i]\nabla[a_j](b_i' \cup_1 b_j')\nabla d_1(v)\nabla v^{(2^i-3)}.$$

Und so ist $d_2 \circ d_1 + d_1 \circ d_2'(v^{(2^i)})$ gleich

$$\begin{array}{rcr} & d_2(\sum_i [a_i] b_i' \nabla v^{(2^i-1)}) + d_1(d_2'(v^{(2)}) \nabla v^{(2^i-2)}) & \\ = & d_2' \circ d_1(v^{(2)}) \nabla v^{(2^i-2)} & (7.6) \\ + & \tilde{e}^3(d_1(v) \nabla v^{(2^i-1)}) & (7.7) \\ + & \sum_{i<j} [a_i] \nabla [a_j] (b_i' \cup_1 b_j') \nabla d_1(v) \nabla v^{(2^i-3)} & (7.8) \\ + & d_1 \circ d_2(v^{(2)}) \nabla v^{(2^i-2)} & (7.9) \\ + & \sum_{i<j} [a_i] \nabla [a_j] b_i' \cup_1 b_j' \nabla d_1(v) \nabla v^{(2^i-3)} & (7.10) \end{array}$$

Dabei heben sich (7.8) und (7.10) auf und (7.6) und (7.9) fassen sich zu

$$(d_2' \circ d_1 + d_1 \circ d_2'(v^{(2)})) \nabla v^{(2^i-2)}$$

zusammen. Nehmen wir nun induktiv an, dass $\tilde{e}^3(v^{(2^i)}) = \tilde{e}^3(v^{(2)}) \nabla v^{(2^i-2)}$ gilt. Dann können wir rechnen:

$$d_1(\tilde{e}^3(v^{(2)}) \nabla v^{(2^i-2)}) = d_1(\tilde{e}^3(v^{(2)})) \nabla v^{(2^i-2)} + \tilde{e}^3(v^{(2)}) \nabla d_1(v) \nabla v^{(2^i-3)})$$

und falls auch

$$(7.7) = \tilde{e}^3(d_1(v) \nabla v^{(2^i-1)}) = \tilde{e}^3(v^{(2)}) \nabla d_1(v) \nabla v^{(2^i-3)}, \tag{7.11}$$

gilt, dann haben wir die Gleichheit

$$\pi(\tilde{e}^3(v^{(2^i)})) = \pi(d_2 \circ d_1 + d_1 \circ d_2'(v^{(2^i)}))$$

gezeigt. Und es gilt $d_2(v^{(2^i)}) = d_2(v^{(2)}) \nabla v^{(2^i-2)}$. Es bleibt also (7.11) zu zeigen, dafür reicht es $\tilde{e}^3([a_i] \nabla v^{(2^i-1)}) = \tilde{e}^3(v^{(2)}) \nabla [a_i] \nabla v^{(2^i-3)}$ zu zeigen. Induktiv, mit einer analogen Rechnung wie zuvor, lässt sich die Gleichheit bestätigen und es gilt:

Lemma 7.8. *Sei $HU = \mathbb{F}_2[y_1, \ldots, y_n]/(z_1, \ldots, z_n)$, dabei sei $z_1, \ldots, z_k$ eine reguläre Sequenz in $\mathbb{F}_2[y_1, \ldots, y_n]$, wie in Satz 2.54. Sei*

$$\mathcal{T} = \wedge([y_1], \ldots, [y_n]) \otimes_{\mathbb{F}_2} \Gamma(v, v_2 \ldots, v_k) \otimes_{\mathbb{F}_2} HU$$

die Auflösung aus Satz 2.54. Sei

$$v = \sum_{i=1}^{n} [a_i | b_i] \in \mathcal{T}^{-2,*}.$$

Dann gilt

$$d_2(v^{(2^i)}) = d_2(v^{(2)}) \nabla v^{(2^i-2)}$$

in $X^{*,*}$.

Sei $M \in \mathcal{M}_U$ und seien $a_1 \in X^{p,*} \otimes M$ und $a_1 \in X^{p+1,*} \otimes M$, sodass $d_0(a_1) = 0$ und $d_1(a_1) = d_0(a_2)$ gilt, dann ist $d(a_1 - a_2) = \sum_{i=1}^{\infty} d_{i+1}(a_1) - d_i(a_2)$. Filtrieren wir $X^{*,*} \otimes M$ wie in Definition 7.2, dann liegen $a_1 - a_2$ und a_1 in der selben Klasse von $E_0^p = F^p(X^{*,*} \otimes M)/F^{p+1}(X^{*,*} \otimes M)$. Und ebenso liegen $d(a_1 - a_2)$ und $d_2(a_1) - d_1(a_2)$ in der selben Klasse. Mit der Notation von [McC01, 2.6] liegt $a_1 - a_2 \in Z_2^{p,*}$ und so sehen wir, dass das 2te Differential der induzierten Spektralsequenz die Klasse von a_1 auf die Klasse von $d_2(a_1) - d_1(a_2)$ abbildet. Dies beweist uns den folgenden Satz, in dem wir mit d_i nicht mehr länger die Differentiale auf $X^{*,*}$, sondern die in der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz bezeichnen.

Satz 7.9. *Sei $z_1, \ldots, z_k$ eine reguläre Sequenz in $\mathbb{F}_2[y_1, \ldots, y_n]$ wie 2.54, sei $F \to E \to B$ eine Faserung und sei $\mathrm{H}^*(B; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[y_1, \ldots, y_n]/(z_1, \ldots, z_k)$. Sei*

$$\mathcal{T} = \wedge([y_1], \ldots, [y_n]) \otimes_{\mathbb{F}_2} \Gamma(v, v_2 \ldots, v_k) \otimes_{\mathbb{F}_2} \mathrm{H}^*(B; \mathbb{F}_2)$$

und sei E_r die zur Faserung gehörende Eilenberg-Moore-Spektralsequenz und gelte weiter $d_1(v) = 0$ in $E_1 = \mathcal{T}$, dann gilt

$$d_2(v^{(2^i)}) = d_2(v^{(2)}) \nabla v^{(2^i - 2)}$$

in $E_2 = \mathrm{H}(\mathcal{T}, d_1)$.

Eine ähnliche Aussage wird voraussichtlich auch für die d_3 Differentiale in der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zu zeigen sein. Während die Aussage für höhere Differentiale kaum noch richtig sein kann, gerade da der externe Grad von $d_5(v^{(2)})$ positiv ist! Ob in solchen Situationen gilt $d_5(v^{(2^i)}) = d_5(v^{(4)}) \nabla v^{(2^i - 4)}$, was eine plausible Vermutung wäre, liegt aber außerhalb der von Autor betrachteten Überlegungen. Eine Verallgemeinerung auf Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$ ist vorstellbar, aber vom Autor nicht nachgeprüft.

7.2 Gruppen-Algebren

Dieser kurze Abschnitt umfasst die Notation für Gruppenalgebren, die wir im nächsten Abschnitt brauchen werden.

Sei z_i ein Erzeuger von $\mathbb{Z}_p$ und sei $\mathbb{Z}_p^k = \times_{i=1}^k \mathbb{Z}_p$, erzeugt von $z_1, \ldots, z_k$. Die Gruppenalgebra $A := \mathbb{F}_p[\mathbb{Z}_p^k]$ mit dem üblichen Produkt φ und mit der üblichen Einheit $\eta : \mathbb{F}_p \to A$ ist eine $\mathbb{F}_p$-Algebra im Sinne von [MM65]; sie wird als Algebra ebenfalls von $z_1, \ldots, z_k$ erzeugt. Mit dem Ko-Produkt Δ gegeben durch $\Delta(z) = z \otimes z$ und der üblichen Ko-Einheit $\varepsilon : A \to \mathbb{F}_p$ wird A zu einer Ko-Algebra. Beide Strukturen sind miteinander verträglich und somit genügt A der Definition einer Hopf-Algebra von [MM65].

Die duale Hopf-Algebra A^* besitzt die Erzeuger $z_1^*, \ldots, z_k^*$, das Produkt φ^* gegeben durch

$$\varphi^*(z_i^*, z_j^*) = \begin{cases} z_i^* & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

und das Ko-Produkt $\nabla(z) = z^* \otimes 1^* + 1^* \otimes z^*$. Wir werden oft $z_i^* z_j^*$ anstatt $\varphi^*(z_i^*, z_j^*)$ schreiben.

7.3 Das $\cup_1$-Produkt

Sei X ein topologischer Raum vom Homotopietyp eines Eilenberg-MacLane Raum $K(\mathbb{Z}_2^k, 1)$. Gugenheim und May geben in ihrer Arbeit [GM74] eine Konstruktion eines Morphismus

$$g : \mathrm{C}^*(X; \mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(X; \mathbb{F}_2)$$

von differentiellen Algebren an, sodass Hg ein Isomorphismus ist. Sie geben weiter einen effektiven Weg an für Zykel $z_1, z_2 \in \mathrm{C}^*(X; \mathbb{F}_2)$ das $g(z_1 \cup_1 z_2) \in \mathrm{H}^*(X; \mathbb{F}_2)$ zu bestimmen. Sind z_1', z_1'' Repräsentanten von z_1 und z_2', z_2'' Repräsentanten von z_2 in $\mathrm{C}^*(K(\mathbb{Z}_2^k, 1); \mathbb{F}_2)$, dann besitzt g nach [GM74, 2.4] die Eigenschaft

$$g(z_1' \cup_1 z_2') = g(z_1'' \cup_1 z_2'').$$

Mit einem solchen g erhalten wir also ein Produkt

$$\begin{array}{rccc} \cup_1 : & \mathrm{H}^p(X;\mathbb{F}_2) \otimes \mathrm{H}^q(X;\mathbb{F}_2) & \to & \mathrm{H}^{p+q-1}(X;\mathbb{F}_2) \\ & z_1 \otimes z_2 & \mapsto & z_1 \cup_1 z_2 := g(z_1' \cup_1 z_2') \end{array}$$

welches nach [GM74, A.21] unabhängig von der expliziten Wahl von X ist. Für dieses Vorhaben im Fall $X = B\mathbb{Z}_2^k$ liefert der Appendix von [GM74] alle nötigen Informationen.

Wir werden nun die Bar-Konstruktion benutzen, werden jedoch im Gegensatz zu Abschnitt 2.1.2 von einer nicht negativen externen Graduierung ausgehen; wir schreiben $\mathcal{B}_{*,*}(M, U, N)$, mit unteren Indizies. Für $\alpha = [\alpha_1|\dots|\alpha_p] \in \mathcal{B}_{p,*}(\mathbb{F}_2, U, \mathbb{F}_2), p \geq 0$ gilt also $D\alpha = (p, D\alpha_1 + \dots + D\alpha_p)$. Seien $z_1, z_2 \in \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^k; \mathbb{F}_2)$ dann berechnet sich $z_1 \cup_1 z_2$ wie folgt:

Die Notation ist aus dem Appendix von [GM74] übernommen. Die Konstruktion selbst läuft ähnlich eines Beispiels welches am Ende jenes Appendix' angegeben ist. Sie ist jedoch langwierig und technisch aufwendig und soll hier nicht aufgezeigt werden. Es werden nur die Resultate präsentiert. Sei $\mathbb{F}_2[\mathbb{Z}_2^k]$ die Gruppen-Algebra mit Erzeugern $v_1, \dots, v_k$, wie in Abschnitt 7.2. Sei $\Gamma(y_1, \dots, y_k)$ die Algebra der geteilten Potenzen über $\mathbb{F}_2[\mathbb{Z}_2]$ mit $Dy_i = 1$, sei $\mathcal{B}_{*,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2[\mathbb{Z}_2^k], \mathbb{F}_2)$ der Bar-Komplex mit $D[v_i] = (1, 0)$ und sei weiter

$$\bar{\Theta} : \Gamma(y_1, \dots, y_k) \to \mathcal{B}_{*,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2[\mathbb{Z}_2^k], \mathbb{F}_2)$$

der Homomorphismus von Hopf-Algebren der $y_i^{(p)}$ auf

$$[v_i]^{(p)} = \underbrace{[v_i|\dots|v_i]}_{p-mal}$$

schickt. Bezüglich des Totalgrades ist $\bar{\Theta}$ graderhaltend. Der duale Homomorphismus

$$\bar{\Theta}^* : \mathcal{B}_{*,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2[\mathbb{Z}_2^k]^*, \mathbb{F}_2) \to \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_k] \cong \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{F}_2)$$

ist surjektiv, schickt $[v_i^*]^{(p)}$ auf x_i^p und $[v^*]$ auf Null, für zerlegbare v. Seien nun $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \in \{v_1^*, \dots, v_k^*\}$. Dann definieren wir auf $\mathcal{B}_{*,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2[\mathbb{Z}_2^k]^*, \mathbb{F}_2)$ ein Produkt, welches auch mit $\cup_1$ bezeichnet werden soll, sodass $[\alpha_1|\dots|\alpha_p] \cup_1 [\beta_1|\dots|\beta_q]$ gleich

$$\sum_{r=1}^{p} \sum_{s=1}^{q} [\alpha_1|\dots|\alpha_{r-1}|\beta_1|\dots|\beta_{s-1}|\varphi^*(\alpha_r, \beta_s)|\beta_{s+1}|\dots|\beta_q|\alpha_{r+1}|\dots|\alpha_p]$$

gilt, mit

$$\varphi^*(\alpha_r, \beta_s) = \begin{cases} \alpha_r & \text{für } \alpha_r = \beta_s \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wie in Abschnitt 7.2 beschrieben. Im Weiteren werden wir nur $\alpha_r\beta_s$ statt $\varphi^*(\alpha_r, \beta_s)$ schreiben.

Seien nun $z_1, z_2 \in \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^k; \mathbb{F}_2)$ und seien $[\alpha_1|\dots|\alpha_p]$ bzw. $[\beta_1|\dots|\beta_q]$ Urbilder von z_1 bzw. z_2 unter $\bar{\Theta}$, dann gelte

$$z_1 \cup_1 z_2 := \bar{\Theta}^*([\alpha_1|\dots|\alpha_p] \cup_1 [\beta_1|\dots|\beta_q]).$$

Durch die Multilinearität ist $\bar{\Theta}^*$ vollständig beschrieben und somit auch das $\cup_1$-Produkt auf $\mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^k; \mathbb{F}_2)$.

7.4 Berechnung von $\cup_1$-Produkten

In diesem Abschnitt wollen wir nun mit unserem gerade gewonnen $\cup_1$-Produkt auf $\mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^k;\mathbb{F}_2)$ rechnen. Wir werden nützliche Formeln herleiten und diese für verschiedene Aussagen über die Differentiale der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz nutzen.

Lemma 7.10. *Für $y_1, y_2, y_3 \in \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^n;\mathbb{F}_2)$ gelten die Hirsch-Formeln:*

$$(y_1 y_2) \cup_1 y_3 = (y_1 \cup_1 y_3)y_2 + y_1(y_2 \cup_1 y_3)$$

$$y_1 \cup_1 (y_2 y_3) = (y_1 \cup_1 y_2)y_3 + y_2(y_1 \cup_1 y_3)$$

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A an, dass y_1, y_2, y_3 Monome sind. Dies können wir machen, da $\bar{\Theta}^*$ liniear ist. Sei $x_1, \cdots, x_k$ eine Basis von $\mathrm{H}^1(B\mathbb{Z}_2^k;\mathbb{F}_2)$ und sei weiter $\alpha_1, \cdots, \alpha_{p+q}, \beta_1, \cdots, \beta_r \in \{x_1, \cdots, x_k\}$. Ein Urbild von α_i bzw. β_i unter Θ sei $[\alpha_i']$ bzw. $[\beta_i']$. Seien $y_1 = \alpha_1 \cdots \alpha_p$, $y_2 = \alpha_{p+1} \cdots \alpha_{p+q}$, $y_3 = \beta_1 \cdots \beta_r$ Monome in Polynomalgebra $\mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^k;\mathbb{F}_2)$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \cdots \alpha_p \alpha_{p+1} \cdots \alpha_{p+q} \cup_1 \beta_1 \cdots \beta_r \\
= \ & \bar{\Theta}^*(\left[\alpha_1'|..|\alpha_{p+q}'\right] \cup_1 [\beta_1'|..|\beta_r'])\\
= \ & \bar{\Theta}^*(\sum_{k=1}^{p+q}\sum_{l=1}^{r}\left[\alpha_1'|..|\alpha_{k-1}'|\beta_1'|..|\beta_{l-1}'|\alpha_k'\beta_l'|\beta_{l+1}'|..|\beta_r'|\alpha_{k+1}'|..|\alpha_{p+q}'\right])\\
= \ & \bar{\Theta}^*(\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{r}\left[\alpha_1'|..|\alpha_{k-1}'|\beta_1'|..|\beta_{l-1}'|\alpha_k'\beta_l'|\beta_{l+1}'|..|\beta_r'|\alpha_{k+1}'|..|\alpha_{p+q}'\right])\\
& +\bar{\Theta}^*(\sum_{k=p+1}^{p+q}\sum_{l=1}^{r}\left[\alpha_1'|..|\alpha_{k-1}'|\beta_1'|..|\beta_{l-1}'|\alpha_k'\beta_l'|\beta_{l+1}'|..|\beta_r'|\alpha_{k+1}'|..|\alpha_{p+q}'\right])\\
= \ & (\bar{\Theta}^*\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{r}\left[\alpha_1'|..|\alpha_{k-1}'|\beta_1'|..|\beta_{l-1}'|\alpha_k'\beta_l'|\beta_{l+1}'|..|\beta_r'|\alpha_{k+1}'|..|\alpha_p'\right])\alpha_{p+1}..\alpha_{p+q}\\
& +\alpha_1..\alpha_p(\bar{\Theta}^*\sum_{k=p+1}^{p+q}\sum_{l=1}^{r}\left[\alpha_{p+1}'|..|\alpha_{k-1}'|\beta_1'|..|\beta_{l-1}'|\alpha_k'\beta_l'|\beta_{l+1}'|..|\beta_r'|\alpha_{k+1}'|..|\alpha_{p+q}'\right])\\
= \ & \alpha_1 \cdots \alpha_p(\alpha_{p+1} \cdots \alpha_{p+q} \cup_1 \beta_1 \cdots \beta_r) + (\alpha_1 \cdots \alpha_p \cup_1 \beta_1 \cdots \beta_r)\alpha_{p+1} \cdots \alpha_{p+q}
\end{aligned}$$

Und für den zweiten Fall ebenso. $\square$

Korollar 7.11. *Für $x, y \in \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^k;\mathbb{F}_2)$ gilt*

$$x^2 \cup_1 y = 0.$$

Beweis. Aus den Hirsch-Formeln und der Kommutativität von $\mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^k;\mathbb{F}_2)$ folgt

$$x^2 \cup_1 y = x(x \cup_1 y) + (x \cup_1 y)x = 2(x \cup_1 y)x = 0.$$

$\square$

Beispiel 7.12. Gegeben die Inklusion $\iota : \mathbb{Z}_2^3 \hookrightarrow O(3)$. Sei $w_3 \in \mathrm{H}^3(BO(3);\mathbb{F}_2)$. Es gilt $w_3 \cup_1 w_3 = \mathrm{Sq}_1(w_3) = \mathrm{Sq}^2(w_3)$ nach [McC01, 8.14] und $\mathrm{Sq}^2(w_3) = w_2 w_3$ nach [BS53, 7.1]. Dies wollen wir nun selbst nachrechnen. Seien x_1, x_2, x_3 die Erzeuger von

$\mathrm{H}^1(B\mathbb{Z}_2^3;\mathbb{F}_2)$, sodass $B\iota^*(w_3) = x_1x_2x_3$ gilt. Sei $[\alpha_1|\alpha_2|\alpha_3]$ ein Urbild von $x_1x_2x_3$ unter $\bar{\Theta}^*$. Dann ist $[\alpha_1|\alpha_2|\alpha_3] \cup_1 [\alpha_1|\alpha_2|\alpha_3]$ gleich

$$\begin{array}{rlclcl} & [\alpha_1\alpha_1|\alpha_2|\alpha_3|\alpha_2|\alpha_3] & + & [\alpha_1|\alpha_1\alpha_2|\alpha_3|\alpha_2|\alpha_3] & + & [\alpha_1|\alpha_2|\alpha_1\alpha_3|\alpha_2|\alpha_3] \\ + & [\alpha_1|\alpha_2\alpha_1|\alpha_2|\alpha_3|\alpha_3] & + & [\alpha_1|\alpha_1|\alpha_2\alpha_2|\alpha_3|\alpha_3] & + & [\alpha_1|\alpha_1|\alpha_2|\alpha_2\alpha_3|\alpha_3] \\ + & [\alpha_1|\alpha_2|\alpha_1\alpha_3|\alpha_2|\alpha_3] & + & [\alpha_1|\alpha_2|\alpha_1|\alpha_2\alpha_3|\alpha_3] & + & [\alpha_1|\alpha_2|\alpha_1|\alpha_2|\alpha_3\alpha_3] \\ & & & & & \\ = & [\alpha_1|\alpha_2|\alpha_3|\alpha_2|\alpha_3] & + & [\alpha_1|\alpha_1|\alpha_2|\alpha_2|\alpha_3] & + & [\alpha_1|\alpha_2|\alpha_1|\alpha_2|\alpha_3] \end{array}$$

Dies wird mit Θ^* auf $x_1x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_3 = (x_1x_2x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ abgebildet, was gerade $w_2w_3 \in \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^3;\mathbb{F}_2)$ entspricht. ◇

Bemerkung 7.13. Es ist schnell zu sehen, dass unsere neue Kohomologie-Operation $\cup_1 : \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^n;\mathbb{F}_2) \times \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^n;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^n;\mathbb{F}_2)$ kommutativ ist, sie ist jedoch nicht assoziativ:

$$(xy \cup_1 zw) \cup_1 yz = 0 \cup_1 yz = 0,$$

aber

$$xy \cup_1 (zw \cup_1 yz) = xy \cup_1 yzw = xyzw,$$

für x, y, z, w Erzeuger von $\mathrm{H}^1(B\mathbb{Z}_2^4;\mathbb{F}_2)$.

Das $\cup_1$ Produkt kommutiert auch nicht mit Homomorphismen von Algebren. Seien x_1, x_2, x_3 Erzeuger von $\mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^3;\mathbb{F}_2)$ und seien x_1', x_2' Erzeuger von $\mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^2;\mathbb{F}_2)$. Sei weiter $\phi : \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^3;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^2;\mathbb{F}_2)$ gegeben durch $\phi(x_1) = x_1', \phi(x_2) = x_2'$ und $\phi(x_3) = x_2'$, dann gilt

$$\phi(\sigma_2(x_1,x_2,x_3) \cup_1 \sigma_1(x_1,x_2,x_3)) = 0 \neq x_1'x_2' = \phi(\sigma_2(x_1,x_2,x_3)) \cup_1 \phi(\sigma_1(x_1,x_2,x_3)).$$

Für $\phi : \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^n;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^{n'};\mathbb{F}_2)$ und $e \in \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^n;\mathbb{F}_2)$ gilt aber natürlich $\phi(e \cup_1 e) = \phi(e) \cup_1 \phi(e)$. Alles andere würde zu einem Widerspruch mit der Tastsache $\phi(e \cup_1 e) = \phi(\mathrm{Sq}_1(e)) = \mathrm{Sq}_1(\phi(e)) = \phi(e) \cup_1 \phi(e)$ führen. Dabei ist in Erinnerung zu halten, dass $\mathrm{Sq}_1(e) = \mathrm{Sq}^{De-1}(e)$ gilt. ◇

Lemma 7.14. *Seien $x_1, \ldots, x_k$ Erzeuger $\mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^k;\mathbb{F}_2)$ und seien $y, y' \in \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^k;\mathbb{F}_2)$ symmetrische Polynome in $x_1, \ldots, x_n$, dann ist auch $y \cup_1 y'$ ein symmetrisches Polynom.*

Beweis. Aus den Hirsch-Formel sehen wir, dass wir unsere Aussage nur für die elementarsymmetrischen Funktionen zeigen müssen. Seien y, y' Elementarsymmetrische Funktionen, sei $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_k$ und sei $s = x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(\ell)}$ ein Summand von y und $s' = x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(\ell')}$ einer von y' und S ein weiteres Element der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_k$. Dann ist klar $S(s \cup_1 s') = S(s) \cup_1 S(s')$. Damit folgt aber $S(y \cup_1 y') = S(y) \cup_1 S(y')$, was auch bedeutet, dass $S(y \cup_1 y') = y \cup_1 y'$ gilt, also $y \cup_1 y'$ ein symmetrisches Polynom ist. □

Nun wollen wir uns der Berechnung von $\cup_1$-Produkten von symmetrischen Polynomen widmen und fangen mit einer Reihe technischer Aussagen an. Wir bezeichnen mit $\sigma_i(x_1, \ldots, x_n)$ das Elementarsymmetrische Polynom vom Grad i in n Erzeugern.

Lemma 7.15. *Es gilt*

$$\sum_{l=1}^{n} \sigma_i(x_1, \ldots, \hat{x}_l, \ldots, x_n) = (n-i)\sigma_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Beweis. Klar ist, dass $\sum \sigma_i(x_1, \ldots, \hat{x}_l, \ldots, x_n)$ ein symmetrisches Polynom ist. Das Polynom hat den Grad i und die Summanden sind Monome, die den Faktor x_i mit Multiplizität 1 oder 0 haben, womit gelten muss, dass $\sum \sigma_i(x_1, \ldots, \hat{x}_l, \ldots, x_n) = \alpha\sigma_i(x_1, \ldots, x_n)$ mit $\alpha \in \mathbb{N}$ geeignet. Nehmen wir nun an, dass die Formel für $n-1$ bereits gezeigt ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \textstyle\sum_{l=1}^{n} \sigma_i(x_1, \ldots, \hat{x}_l, \ldots, x_n) \\
= \; & \sigma_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) \\
& + \textstyle\sum_{l=1}^{n-1} \sigma_i(x_1, \ldots, \hat{x}_l, \ldots, x_n) \\
= \; & \sigma_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) \\
& + \textstyle\sum_{l=1}^{n-1} \sigma_i(x_1, \ldots, \hat{x}_l, \ldots, x_{n-1}) \\
& + x_n \textstyle\sum_{l=1}^{n-1} \sigma_{i-1}(x_1, \ldots, \hat{x}_l, \ldots, x_{n-1})
\end{aligned}$$

Wir nutzen hierbei die Rechenregeln aus Lemma 1.1. Zählen wir nun die Summanden im unteren Term, unter Annahme unserer Induktionsvoraussetzung, so ergibt sich:

$$\frac{(n-1)!}{(n-i-1)!i!} + (n-i-1)\frac{(n-1)!}{(n-i-1)!i!} + (n-i)\frac{(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!} = (n-i)\frac{n!}{(n-i)!i!}$$

Da $\sigma_i(x_1, \ldots, x_n)$ genau $n!/(n-i)!i!$ Summanden hat folgt $\alpha = (n-i)$. $\square$

Lemma 7.16. *Es gilt*

$$\sigma_i(x_1, \ldots, x_n) \cup_1 \sigma_n(x_1, \ldots, x_n) = (n-i+1)\sigma_{i-1}(x_1, \ldots, x_n)\sigma_n(x_1, \ldots, x_n)$$

Beweis. Sei $y \in \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^n; \mathbb{F}_2)$, dann gilt durch Lemma 7.10

$$x_1 \ldots x_n \cup_1 y = \sum_{l=1}^{n} x_1 \ldots \hat{x}_l \ldots x_n (x_l \cup_1 y).$$

Ist nun $y = \sigma_i(x_1, \ldots, x_n)$ so gilt $x_l \cup_1 y = x_l \sigma_{i-1}(x_1, \ldots, \hat{x}_l, \ldots, x_n)$, da für alle Summanden s von y, die keinen Faktor x_l besitzen $x_l \cup_1 s = 0$ gilt. Somit folgt insgesamt

$$x_1 \ldots x_n \cup_1 \sigma_i(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n \cdot \sum_{l=1}^{n} \sigma_{i-1}(x_1, \ldots, \hat{x}_l, \ldots, x_n),$$

was zusammen mit dem vorherigen Lemma dasselbe ist wie

$$(n-i+1)\sigma_n(x_1, \ldots, x_n)\sigma_{i-1}(x_1, \ldots, x_n).$$

$\square$

Damit können wir sofort folgern, wenn i und n eine unterschiedliche Parität haben ist $\sigma_i(x_1, \ldots, x_n) \cup_1 \sigma_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$ über $\mathbb{F}_2$. Die Techniken des Beweises verhelfen uns noch zu einer weiteren Aussage:

Korollar 7.17. *Es gilt*

$$\sigma_1(x_1, \ldots, x_n) \cup_1 \sigma_j(x_1, \ldots, x_n) = j \cdot \sigma_j(x_1, \ldots, x_n)$$

Beweis. Wir rechnen:

$$
\begin{aligned}
& \sigma_1(x_1,\ldots,x_n) \cup_1 \sigma_j(x_1,\ldots,x_n) \\
= & \textstyle\sum_{l=1}^n x_l \cup_1 \sigma_j(x_1,\ldots,x_n) \\
= & \textstyle\sum_{l=1}^n x_l \sigma_{j-1}(x_1,\ldots,\hat{x}_l,\ldots,x_n) \\
= & \textstyle\sum_{l=1}^n \sigma_j(x_1,\ldots,x_n) - \sigma_j(x_1,\ldots,\hat{x}_l,\ldots,x_n) \\
= & n \cdot \sigma_j(x_1,\ldots,x_n) - \textstyle\sum_{l=1}^n x_l \sigma_j(x_1,\ldots,\hat{x}_l,\ldots,x_n) \\
= & n \cdot \sigma_j(x_1,\ldots,x_n) - (n-j) \cdot \sigma_j(x_1,\ldots,x_n) \\
= & j \cdot \sigma_j(x_1,\ldots,x_n)
\end{aligned}
$$

□

Lemma 7.18. *Sei $i \leq j \leq n$, wobei i und j unterschiedliche Parität haben, dann gilt über $\mathbb{F}_2$:*

$$\sigma_i(x_1,\ldots,x_n) \cup_1 \sigma_j(x_1,\ldots,x_n) = 0.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass die Aussage für alle $n' < n$ bereits gezeigt ist. Das letzte Korollar bietet einen Induktionsanfang. Durch die Kommutativität von $\cup_1$ können wir annehmen es gilt: $i \leq j \leq n$. Das Lemma 7.16 bietet dann einen Iduktionsanfang. Der Induktionsschritt ergibt sich fir folgt:

$$
\begin{aligned}
& \sigma_i(x_1,\ldots,x_n) \cup_1 \sigma_j(x_1,\ldots,x_n) \\
= & \sigma_i(x_1,\ldots,x_{n-1}) \cup_1 \sigma_j(x_1,\ldots,x_{n-1}) \\
& + x_n(\sigma_{i-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) \cup_1 \sigma_j(x_1,\ldots,x_{n-1})) \\
& + x_n(\sigma_i(x_1,\ldots,x_{n-1}) \cup_1 \sigma_{j-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})) \\
& + x_n \cdot \sigma_{i-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) \cdot \sigma_{j-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) \\
& + x_n^2(\sigma_{i-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) \cup_1 \sigma_{j-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})),
\end{aligned}
$$

was sich nach der Induktionsvoraussetung vereinfacht zu

$$
\begin{aligned}
& x_n(\sigma_{i-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) \cup_1 \sigma_j(x_1,\ldots,x_{n-1})) \\
+ \; & x_n(\sigma_i(x_1,\ldots,x_{n-1}) \cup_1 \sigma_{j-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})) \\
+ \; & x_n(\sigma_{i-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) \cdot \sigma_{j-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})).
\end{aligned}
$$

Da $\sigma_i(x_1,\ldots,x_n) \cup_1 \sigma_j(x_1,\ldots,x_n)$ nach Lemma 7.14 ein symmetrisches Polynom ist, muss der letzte Ausdruck gleich Null oder $x_n \ldots x_1 = \sigma_n(x_1,\ldots,x_n)$ sein. Die zweite Möglichkeit ist jedoch auszuschließen.

□

Hierdurch können wir weiter folgern:

Lemma 7.19. *Sei $i \leq j \leq n$, wobei i und j dieselbe Parität haben, dann gilt*

$$\sigma_i(x_1,\ldots,x_n) \cup_1 \sigma_j(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{t=0}^{n} \sigma_{i-t-1}(x_1,\ldots,x_n) \cdot \sigma_{j+t}(x_1,\ldots,x_n).$$

Beweis. Wir schreiben abkürzend $\sigma_i(n)$ für $\sigma_i(x_1,\ldots,x_n)$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
& \sigma_i(n) \cup_1 \sigma_j(n) \\
= & \sigma_i(n-1) \cup_1 \sigma_j(n-1) \\
& + x_n(\sigma_{i-1}(n-1-1) \cup_1 \sigma_j(n-1-1)) \\
& + x_n(\sigma_i(n-1-1) \cup_1 \sigma_{j-1}(n-1-1)) \\
& + x_n \cdot \sigma_{i-1}(n-1) \cdot \sigma_{j-1}(n-1) \\
& + x_n^2(\cdot \sigma_{i-1}(n-1) \cup_1 \sigma_{j-1}(n-1)).
\end{aligned}
$$

Mit dem vorherigen Lemma vereinfacht sich sich dies zusammen mit der Tatsache, dass $i-1$ und j bzw. i und $j-1$ unterschiedliche Parität haben zu

$$\begin{array}{rl} & \sigma_i(n-1) \cup_1 \sigma_j(n-1) \\ + & x_n \cdot \sigma_{i-1}(n-1) \cdot \sigma_{j-1}(n-1) \\ + & x_n^2 \cdot \sigma_{i-1}(n-1) \cup_1 \sigma_{j-1}(n-1). \end{array}$$

Gehen wir nun induktiv davon aus, dass die Formel bereits für alle $n' < n$ gezeigt wurde. Wir sehen dabei im weiteren Bewies, dass wir durch Lemma 7.16 und Korollar 7.17 einen Induktionsanfang gegeben haben. Aus Platzgründen schreiben wir vorübergehend σ_i statt $\sigma_i(n-1)$.

$$\begin{array}{rllll} & \sigma_i(n) \cup_1 \sigma_j(n) & +\sigma_{i-1}(n) \cup_1 \sigma_{j+1}(n) & +\sigma_{i-1}(n) \cdot \sigma_j(n) & \\ = & \sigma_i \cup_1 \sigma_j & +\sigma_{i-1} \cup_1 \sigma_{j+1} & +\sigma_{i-1} \cdot \sigma_j & (7.12) \\ + & x_n \sigma_{i-1} \cdot \sigma_{j-1} & +x_n \sigma_{i-2} \cdot \sigma_j & +x_n(\sigma_{i-1} \cdot \sigma_{j-1} + \sigma_{i-2} \cdot \sigma_j) & (7.13) \\ + & x_n^2 \sigma_{i-1} \cup_1 \sigma_{j-1} & +x_n^2 \sigma_{i-2} \cup_1 \sigma_j & +x_n^2 \sigma_{i-2} \cdot \sigma_{j-1}. & (7.14) \end{array}$$

Dabei sind die Zeilen (7.12) und (7.14) nach Induktionsannahme gleich Null und die Zeile (7.13) hebt sich auf, sodass gilt

$$\sigma_i(n) \cup_1 \sigma_j(n) + \sigma_{i-1}(n) \cup_1 \sigma_{j+1}(n) + \sigma_{i-1}(n) \cdot \sigma_j(n) = 0,$$

was unsere Aussage bestätigt. □

Bemerkung 7.20. Natürlich stimmt unsere Formel im Spezialfall $i = j$ mit der Formel von Wu Wen Tsün [Bor53, 7.1] überein, die wie folgt lautet:

$$\begin{array}{rl} & \sigma_i(x_1, \ldots, x_n) \cup_1 \sigma_i(x_1, \ldots, x_n) \\ = & \mathrm{Sq}^{i-1} \sigma_i(x_1, \ldots, x_n) \\ = & \sum_{t=0}^{n-1} \binom{i-(i-1)-t-1}{t} \sigma_{i-t-1}(x_1, \ldots, x_n) \cdot \sigma_{i+t}(x_1, \ldots, x_n) \\ = & \sum_{t=0}^{n-1} \sigma_{i-t-1}(x_1, \ldots, x_n) \cdot \sigma_{i+t}(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

◇

7.5 Quotienten nach elementar-abelschen 2-Gruppen

In diesem Abschnitt wollen wir die zuvor gefundenen Resultate in konkreten geometrischen Fällen anwenden. Zuerst sei jedoch ein Wort der Warnung ausgesprochen: Selbst für eine Lie-Gruppe $G \in \mathit{LieR}_2$ können wir im Allgemeinen keine $\cup_1$-Struktur auf $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_2)$ einführen.

Wir haben schon in Lemma 6.1 gesehen: Ist $G' \in \mathit{LieR}_2$ und $G \to G'$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen und Q ein maximaler 2-Torus von G, dann kollabiert die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung $G'/Q \to BQ \to BG'$ genau dann, wenn es die Spektralsequenz zur Faserung $G'/G \to BG \to BG'$ es tut. Insbesondere zeigt sich aber ein Problem: Kollabiert die erste Spektralsequenz nicht, so können wir keine Aussage über die Differentiale in der zweiten machen. Wir werden uns hier also darauf beschränken neue Aussagen über das Kollabieren der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung $G/\mathbb{Z}_2^n \to B\mathbb{Z}_2^n \to BG$ zu machen.

Am Anfang des vergangenen Abschnitts haben wir einen Morphismus von differentiellen Algebren $g : \mathrm{C}^*(B\mathbb{Z}_2^k;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^k;\mathbb{F}_2)$ vorgestellt, sodass Hg ein Isomorphismus ist. Sei $G \in LieP_2$, mit $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[y_1,\ldots,y_n]$ und $\iota : \mathbb{Z}_2^k \to G$ eine Untergruppe. Sei $\bar{X}^{*,*} = \wedge([y_1],\ldots,[y_n])$. Wir haben am Ende des Abschnitts 7.1 gesehen, dass es einen differentiell bigraduierten $\mathbb{F}_2$-Modul $X^{*,*} = \bar{X}^{*,*} \otimes \mathrm{C}^*(BG;\mathbb{F}_2)$ gibt, der eine ausgezeichnete Auflösung von $\mathbb{F}_2$ ist. Ebenfalls wurde gezeigt, dass $\mathrm{H}^*(G/\mathbb{Z}_2^k;\mathbb{F}_2) \cong \mathrm{H}^*(X \otimes \mathrm{C}^*(B\mathbb{Z}_2^k;\mathbb{F}_2))$ als Algebra ist. Nun gilt nach [GM74, 1.8] vermöge der Abbildung g die Isomorphie

$$\mathrm{H}(X \otimes \mathrm{C}^*(B\mathbb{Z}_2^k;\mathbb{F}_2)) \cong \mathrm{H}(X \otimes \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^k;\mathbb{F}_2)) \tag{7.15}$$

von Algebren. Dabei ist das Differential auf $X \otimes \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^k;\mathbb{F}_2)$, nach Lemma 7.6 wie folgt gegeben:

Sei $\alpha = (i_1,\ldots,i_p)$ eine Sequenz in $\{1,\ldots,n\}$ mit $i_1 < \ldots < i_p$. Sei $y_\alpha = [y_{i_1}] \wedge \ldots \wedge [y_{i_p}]$, mit $y_\emptyset = 1$ und sei $x_i' \in \mathrm{C}^*(BG;\mathbb{F}_2)$ ein Repräsentant von y_i. Definiere $x_\emptyset = 0$ und

$$x_\alpha = (\ldots((u_{i_1} \cup_1 u_{i_2}) \cup_1 u_{i_3}) \cup_1 \ldots) \cup_1 u_{i_p},$$

und es gilt

$$d(y_\alpha) = \sum_{\beta \subset \alpha} y_{\alpha\setminus\beta} \otimes g(B\iota^*(u_\beta)). \tag{7.16}$$

Dass wir $g(B\iota^*(u_\beta))$ berechnen können, wollen wir uns nun zu Nutze machen:

Satz 7.21. *Sei $\mathbb{Z}_2^k = Q \subset SU(n) \subset Sp(n)$. Dann gilt*

$$\mathrm{H}^*(SU(n)/Q;\mathbb{F}_2) \cong \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BSU(n);\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2),\mathbb{F}_2)$$

und

$$\mathrm{H}^*(Sp(n)/Q;\mathbb{F}_2) \cong \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BSp(n);\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2),\mathbb{F}_2)$$

Insbesondere kollabieren die zu den Faserungen

$$Q \hookrightarrow SU(n) \to SU(n)/Q$$

und

$$Q \hookrightarrow Sp(n) \to Sp(n)/Q$$

assoziierten Eilenberg-Moore-Spektralsequenz im E_2-Term.

Beweis. Sei Q' der maximale 2-Torus von $SU(n)$ und $\iota' : Q' \hookrightarrow SU(n)$ die Inklusion, dann gilt $B\iota'^*(c_i) = \sigma_i(x_1,\ldots,x_n)^2 \in \mathrm{H}^*(BQ';\mathbb{F}_2)$. Für $\iota : Q \to Q' \to SU(n)$ gilt also, dass es ein $z_i \in \mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$ gibt, sodass $B\iota^*(c_i) = z_i^2$, damit gilt nach Korollar 7.11, dass $B\iota^*(c_i \cup_1 c_j) = B\iota^*(c_i) \cup_1 B\iota^*(c_j) = 0$ für $i,j \in \{1,\ldots,n\}$. Also ist das Differential d auf $X \otimes \mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2) = \wedge([y_1],\ldots,[y_n]) \otimes \mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} d(y_\alpha) &= \sum_{\beta\subset\alpha, |\beta|=1} y_{\alpha\setminus\beta} \otimes g(B\iota^*(u_\beta)) \\ &= \sum_j [y_{i_1}] \wedge \ldots \wedge \widehat{[y_{i_j}]} \wedge \ldots \wedge [y_{i_p}] \otimes B\iota'^*(c_i). \end{aligned}$$

Das heißt aber, dass

$$\mathrm{H}(X \otimes \mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)) \cong \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BSU(n);\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2),\mathbb{F}_2)$$

als Algebra gilt, die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz kollabiert also. Der Fall $Sp(n)$ verläuft analog. $\square$

Aus Lemma 6.1 folgt damit:

Korollar 7.22. *Sei $G = SU(n)$ oder $Sp(n)$ und $H \in LieR_2$ und $\rho : H \to G$ ein Homomorphismus mit $|Kern(\rho)|$ ist nicht durch 2 teilbar, dann kollabiert die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zu Faserung $G/H \to BH \to BG$.*

Lemma 7.23. *Sei $G \in LieP_2$, sodass alle Erzeuger von $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2)$ Grad 2 oder mehr besitzen und sei $Q = \mathbb{Z}_2$ eine Untergruppe von G. Die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ zur Faserung $G/Q \to BQ \to BG$ kollabiert.*

Beweis. Da $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[y_1,\ldots,y_n]$ und $\mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2;\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[z]$ nach Voraussetzung gilt, gibt es einen Erzeuger y_{i_0} von kleinstem Grad, mit $0 \neq y_{i_0} \in \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2;\mathbb{F}_2)$. Wie beschrieben, existiert eine differentiell graduierte Algebra $Y := \wedge([y_1],\ldots,[y_n]) \otimes \mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$, sodass $\mathrm{H}\,Y = \mathrm{H}^*(G/Q;\mathbb{F}_2)$. Sei $\alpha = (i_1,\ldots,i_p)$ eine Sequenz in $\{1,\ldots,n\}$ mit $i_1 < \ldots < i_p$. Sei $y_\alpha = [y_{i_1}] \wedge \ldots \wedge [y_{i_p}]$, mit $y_\emptyset = 1$, und sei $D\alpha = i_1 + \ldots + i_p$ und $|\alpha| := p$. Das Differential d ist dabei wie folgt gegeben: Sei

$$d_p(y_\alpha) = \sum_{\substack{\beta \subset \alpha \\ |\beta| = p}} y_{\alpha/\beta} z^{D\beta - |\beta|},$$

dann ist $d = \sum_p d_p$. Nun ist $z^{D\beta-|\beta|}$ entweder Null oder $D\beta - |\beta| \geq Dy_{i_0}$. Das heißt $d_p(y_\alpha)$ ist für alle $p \geq 2$ durch $z^{Dy_{i_0}}$ teilbar. Sei also $a_1 \in Y$ im Kern von d_1 und sei b_1 der Quotient a_1 geteilt durch $z^{Dy_{i_0}}$. Dann gibt es ein $a_2 := b_1 \wedge y_{i_0} \in Y$, sodass $d_2(a_1)+d_1(a_2) = 0$ gilt. Und weiter gibt es ein $a_3 \in Y$, sodass $d_3(a_1)+d_2(a_2)+d_1(a_3) = 0$ gilt. Induktiv gibt es ein $a_p \in Y$, sodass $d_p(a_1) + \ldots + d_1(a_p) = 0$ gilt. Filtrieren wir Y durch $F^pY = \oplus_{i=0}^p Y^{p,*}$, dann hat der E_2-Term der assoziierten Spektralsequenz die Form

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BH;\mathbb{F}_2),\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[z]/z^{Dy_{i_0}} \otimes \wedge([y_1],\ldots,\widehat{[y_{i_0}]},\ldots,[y_n]).$$

Und wir sehen, dass $|E_2|$ gleich $|HY|$ ist uns so kollabiert die Spektralsequenz im E_2-Term. □

Bemerkung 7.24. Wie üblich haben wir selbst wenn die Spektralsequenz im E_2-Term zusammen bricht eine multiplikatives Extensionsproblem. ◇

Lemma 7.25. *Sei $G \in LieQ_2$ und sei $\mathbb{Z}_2^k$ eine Untergruppe von T_G, dann kollabiert die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung $G/\mathbb{Z}_2^k \to B\mathbb{Z}_2^k \to BG$ im E_2-Term.*

Beweis. Sei $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y_1,\ldots,y_n]$ und $B\iota^* : \mathrm{H}^*(BT_G;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^k;\mathbb{F}_2)$ die durch die Inklusion induzierte Abbildung. Ist $x \in \mathrm{H}^*(BT_G;\mathbb{F}_2)$, dann ist x ein Quadrat in $\mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^k;\mathbb{F}_2)$ und damit folgt auch, dass y_i ein Quadrat in $\mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^k;\mathbb{F}_2)$ ist. Also ist nach Korollar 7.11 das Produkt $y_i \cup_1 y_j = 0$ in $\mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^k;\mathbb{F}_2)$. □

Zusammen mit Lemma 6.1 erlaubt das letzte Lemma ein Zusammenbrechen einer Vielzahl von Eilenberg-Moore-Spektralsequenzen zur Faserung $G/H \to BH \to BG$ vorherzusagen.

Kapitel 8

Quotienten der klassischen Lie-Gruppen

In der Arbeit [Sin85] gibt Singhof für die meisten homogenen Räume X, die Quotient von $SU(n)$ sind die Semicharakteristik $k(X;\mathbb{F}_2)$ an. Einige Fälle können mit den dort vorgestellten Techniken nicht bewältigt werden, diese Fälle wollen wir im ersten Abschnitt behandeln und ihre $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik bestimmen. Im zweiten Abschnitt werden Quotient von $SO(n)$ und $Sp(n)$ betrachtet. Ist $G = SO(n)$ oder $Sp(n)$ und $\rho : H \to G$ eine irreduzible Darstellung, dann werden wir $k(G/H;\mathbb{F}_2)$, bis auf eine einzige Ausnahme, bestimmen.

8.1 Quotienten von $SU(n)$

In [Sin85] wird der folgende Satz bewiesen:

Satz 8.1 (Singhof)**.** *Sei H eine zusammenhängende halbeinfache Untergruppe von $SU(n)$, sodass $\dim(SU(n)/H)$ ungerade ist und H prim zu A_1 und C_2 ist. Dann gilt einer der folgenden Fälle: $k(SU(n)/H;\mathbb{F}_2) = 0$ oder $SU(n)/H$ ist entweder diffeomorph zu $SU(n)/SU(k) \times SU(n-k)$ oder einer Sphäre.*

Wir werden nun beweisen, dass die Einschränkungen, dass G prim zu A_1 und C_2 ist, umgangen werden kann. Hierfür führen wir zuerst etwas Notation ein und sammeln einige Resultate.

Definition 8.2. Mit einer *Standarddarstellung* einer einfachzusammenhängenden klassischen Lie-Gruppe meinen wir einen der natürlichen Homomorphismen $SU(n) \to SU(n)$, $Sp(n) \to SU(2n)$ oder $Spin(n) \to SU(n)$. Wir sagen, dass eine Darstellung $\rho : G \to SU(n)$ *bis auf Isomorphie eine Standarsdarstellung* ist, wenn es $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$ und $\phi \in \mathrm{Aut}(SU(n))$ gibt, sodass $\phi \circ \rho \circ \psi$ eine Standarddarstellung ist. Eine Darstellung ist bis auf Isomorphie eine Standarddarstellung, genau dann wenn sie konjugiert zu einer Standarddarstellung, zum Automorphismus $A \mapsto \bar{A}$ von $SU(n)$ oder zu einer der beiden Spindarstellungen von $Spin(8)$ ist. $\diamond$

Lemma 8.3. *Sei $\rho : G \to SU(n)$ eine Darstellung, sodass es kein $g \in G$ gibt, für welches $\rho(g)$ den Eigenwert 1 mit Multiplizität $n-2$ und den Eigenwert -1 mit Multiplizität 2 besitzt. Dann gibt es eine freie $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-Operation auf $SU(n)/G$.*

Beweis. Sei $\mathcal{G}$ erzeugt von $\mathrm{diag}(-1,-1,1,\ldots,1)$ und $\mathrm{diag}(1,-1,-1,1,\ldots,1)$. Dann ist $\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Wir zeigen, dass $\mathcal{G}$ frei auf $SU(n)/G$ operiert. Angenommen es gäbe ein $1 \neq h \in \mathcal{G}$ und ein $g \in SU(n)$, mit

$$\begin{array}{rrcl} & h \cdot (g \cdot G) & = & g \cdot G \\ \Leftrightarrow & g^{-1}hg & \in & G. \end{array}$$

Da alle Elemente in $\mathcal{G}$, außer der 1 jedoch den Eigenwert -1 mit Multiplizität 2 und den Eigenwert 1 mit Multiplizität $n-2$ haben, widerspricht dies der Annahme und $\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ operiert frei auf $SU(n)/G$. □

Satz 8.4 (Singhof)**.** *Sei G eine einfachzusammenhängende, halbeinfache, kompakte Lie-Gruppe und $\rho : G \to SU(n)$ eine irreduzible Darstellung, mit diskretem Kern. Existiert eine komplexe Zahl b und ein $g \in G$, sodass $\rho(g)$ den Eigenwert b mit Multiplizität $n-1$ und den Eigenwert $-b$ mit Multiplizität 1 hat, so gilt eine der folgenden Aussagen:*

- *$G = SU(n)$ und ρ ist konjugiert zu id_G oder $\bar{\mathrm{id}}_G$.*
- *$G = Spin(n)$ mit n ungerade und ρ ist konjugiert zum natürlichen Homomorphismus $Spin(n) \to SO(n) \to SU(n)$.*

Lemma 8.5. *Sei $\psi : SU(2) \to SU(2)$, $\phi : SU(2n) \to SU(2n)$ und $\rho = \psi \otimes \phi : SU(2) \times SU(2n) \to SU(4n)$, so gibt es kein $g \in SU(2) \times SU(2n)$, sodass $\rho(g)$ den Eigenwert 1 mit Multiplizität $n-2$ und den Eigenwert -1 mit Multiplizität 2 hat.*

Beweis. Seien T_2 und T_{2n} die Standardtori in $SU(2)$ und $SU(2n)$, dann liegt $\rho(T_2 \times T_{2n})$ in T_{4n} dem Standardtorus von $SU(4n)$. Sei nun $s = (s_1, s_2) \in T_2$ und $t = (t_1, \ldots, t_{2n}) \in T_{2n}$. Dann folgt mit der Tatsache $s_1 = \bar{s}_2$ unsere Aussage. □

Zusammenfassend halten wir fest:

Korollar 8.6. *Sei G eine einfachzusammenhängende, halbeinfache, kompakte Lie-Gruppe und $\phi : G \to SU(n)$ eine irreduzible Darstellung, mit diskretem Kern und sei $\psi : SU(2) \to SU(2)$ die Identität. Definiere $\rho = \psi \otimes \phi$. Existiert ein $g \in G$, sodass $\rho(g)$ den Eigenwert 1 mit Multiplizität $n-2$ und den Eigenwert -1 mit Multiplizität 2 hat, so gilt eine der folgenden Aussagen:*

- *$G = SU(n)$ mit n ungerade und ϕ ist konjugiert zu id_G oder $\bar{\mathrm{id}}_G$.*
- *$G = Spin(n)$ mit n ungerade und ϕ ist konjugiert zum natürlichen Homomorphismus $Spin(n) \to SO(n) \to SU(n)$.*

Satz 8.7 (Singhof)**.** *Sei G eine einfachzusammenhängende, halbeinfache, kompakte Lie-Gruppe und $\rho : G \to SU(n)$ eine irreduzible Darstellung, mit diskretem Kern. Sei G einfach oder prim zu A_1. Existiert eine komplexe Zahl b und ein $g \in G$, sodass $\rho(g)$ den Eigenwert b mit Multiplizität $n-2$ und den Eigenwert $-b$ mit Multiplizität 2 hat, so gilt eine der folgenden Aussagen:*

- *ρ ist bis auf Isomorphie eine Standdarddarstellung.*
- *$G = SU(2)$ und dim $\rho = 5$.*
- *$G = SU(3)$ und ρ hat das höchste Gewicht $2\bar{w}_1$ oder $2\bar{w}_2$.*

Die Fälle aus Satz 8.7 sind bereits von Singhof ergründet worden. Es bleibt also nur die Fälle aus Korollar 8.6 unter die Lupe nehmen um ein vollständige Aussage treffen zu können, im Fall dass $\rho : G \to SU(n)$ irreduzibel ist. Wir zeigen dafür die allgemeinere Aussage:

Lemma 8.8. *Sein $n \geq 3$. Sei $\psi : SU(2) \to SU(2)$ die Identität, H eine halbeinfache kompakte Lie-Gruppe und $\phi : H \to SU(n)$ eine treue Darstellung, sodass auch die irreduzible Darstellung $\rho = \psi \otimes \phi : SU(2) \times H \to SU(2n)$ treu ist. Sei $X = SU(2n)/\psi$. Dann gibt es eine graduierte Algebra A, sodass $\mathrm{H}^*(X; \mathbb{F}_2) \cong A \otimes \wedge([c_3], \ldots, [c_{2n-1}])$ als graduierter Modul.*

Bemerkung 8.9. Ist im vorherigen Lemma n ungerade, dann ist ρ immer treu. $\diamond$

Beweis des Lemmas. Seien $\iota_1 : S^1 \times H \to SU(2) \times H$ und $\iota_2 : U(n) \times U(n) \to U(2n)$ die Standardinjektion. Sei $\mu : S^1 \times SU(n) \to U(n)$ und sei $\mu' : S^1 \times SU(n) \to U(n)$ gegeben durch $\mu(s, A) = sA$ und $\mu'(s, A) = \bar{s}A$, dann kommutiert

$$\begin{tikzcd}
& S^1 \times H \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "(\mathrm{id},\phi)"] & SU(2) \times H \arrow[d, "\rho"] \\
H \arrow[ur, "(1,\mathrm{id})"] \arrow[dr, "\phi\times\phi"'] & S^1 \times SU(n) \arrow[d, "\mu\times\mu'"] & SU(2n) \arrow[d] \\
& U(n) \times U(n) \arrow[r, "\iota_2"] & U(2n).
\end{tikzcd}$$

Für Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ gilt $B\mu^*(c_i) = B\mu'^*(c_i)$, womit nach Lemma 1.2 folgt, dass

$$B(\mu \times \mu')^* \circ B\iota_2^*(c_i) = 0$$

ist, für i ungerade. Aus dem Diagramm und der Tatsache, dass $B\iota_1^*$ injektiv ist folgt damit, dass $B\rho^*(c_i) = 0$ für $i \geq 3$ ungerade. Betrachten wir nun die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung $X \to BSU(2) \times BH \to BSU(2n)$, dann gilt

$$E_2^{*,*} = Tor_{\mathrm{H}^*(SU(2n);\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BSU(2) \times BH; \mathbb{F}_2)) \cong A_2 \otimes \wedge([c_3], \ldots, [c_{2n-1}]),$$

mit A_2 einer bigraduierten Algebra. Mit Korollar 5.8 sehen wir, dass es eine bigraduierte Algebra A_∞ gibt, sodass $E_\infty \cong A_\infty \otimes \wedge([c_3], \ldots, [c_{2n-1}])$ als graduierter Modul gilt. $\square$

Und sehen wir auch, dass $|E_\infty|$ durch 2^{n-1} teilbar ist und $k(SU(2n)/\rho; \mathbb{F}_2) = 0$ gilt.

Zusammen mit [Sin85, 1] gilt dann: Ist G eine halbeinfache kompakte Lie-Gruppe und $\rho : G \to SU(n)$ eine irreduzible Darstellung, so gilt $k(SU(n)/\rho; \mathbb{F}_2) = 0$. Kommen wir zu den Fällen, in denen ρ nicht irreduzibel ist. Die Einschränkung in Satz 8.1 auf G prim zu C_2 rührt alleine aus dem Lemma:

Lemma 8.10 (Singhof)**.** *Sei H eine Untergruppe von $SU(n)$. Wir nehmen an, dass H keine Matrix enthält, die konjugiert zu $\mathrm{diag}(b, \ldots, b, -b)$ oder $\mathrm{diag}(b, \ldots, b, -b, -b)$ mit $b \in \mathbb{C}$ ist. Sei $X = SU(2n+m)/(Sp(n) \times H)$ mit $n \geq 3$ und sie $\dim(X)$ ungerade. Dann ist $k(X; \mathbb{F}_2) = 0$.*

Wir wollen nun zeigen, dass die Einschränkung $n \geq 3$ nicht nötig ist.

Lemma 8.11. *Sei H eine Untergruppe von $SU(n)$. Sei $X = SU(4+n)/(Sp(2) \times H)$ mit $\dim(X)$ ungerade. Dann ist $k(X;\mathbb{F}_2) = 0$.*

Beweis. Wir nehmen vorerst an, dass $H = SU(n)$ gilt. Sei $\iota : SU(n) \times Sp(2) \to SU(n+4)$ und sei $\iota_T : T_{SU(n)} \times T_{Sp(2)} \to T_{SU(n+4)}$ die Einschränkung der Inklusion auf die maximalen Tori. Sei $\mathrm{H}^*(T_{SU(n+4)};\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_{n+4}]$ und $\mathrm{H}^*(BT_{SU(n)} \times T_{Sp(2)};\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[x'_1,\ldots,x'_n,z_1,z_2]$, dann ist die Abbildung

$$B\iota_T^* : \mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_{n+4}] \to \mathbb{F}_2[x'_1,\ldots,x'_n,z_1,z_2]$$

gegeben durch

$$B\iota^*(x_i) = \begin{cases} x'_i & \text{für } i = 1,\ldots,n \\ z_1 & \text{für } i = n+1, n+2 \\ z_2 & \text{für } i = n+3, n+4. \end{cases}$$

Sei $\sigma_i := \sigma_i(x'_1,\ldots,x'_n,z_1,z_1,z_2,z_2)$, dann folgt mit Lemma 1.8, dass σ_{2j+1}für $2j+1 > n$ im von $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ erzeugten Ideal liegt. Damit gilt

$$B\iota^*(c_{2j+1}) \in (B\iota^*(c_2),\ldots,B\iota^*(c_n)) \tag{8.1}$$

für $2j+1 > n$. Sei nun H eine kompakte Untergruppe von $SU(n)$ und $\iota : H \times Sp(2) \to SU(n+4)$. Dann faktorisiert ι über $SU(n) \times Sp(2)$ und so sehen wir, dass (8.1) auch in diesem Fall gilt. Es folgt

$$\mathrm{H}\,\mathcal{K}_{\mathrm{H}^*(BSp(2)\times BH;\mathbb{F}_2)}(c_2,\ldots,c_{n+4})$$

$$\cong \begin{cases} \mathrm{H}\,\mathcal{K}_{\mathrm{H}^*(BSp(2)\times BH;\mathbb{F}_2)}(c_2,\ldots,c_n,c_{n+2},c_{n+4}) \\ \qquad \otimes \wedge([c_{n+1}],[c_{n+3}]) & \text{für } n \text{ gerade} \\ \\ \mathrm{H}\,\mathcal{K}_{\mathrm{H}^*(BSp(2)\times BH;\mathbb{F}_2)}(c_2,\ldots,c_{n+1},c_{n+3}) \\ \qquad \otimes \wedge([c_{n+2}],[c_{n+4}]) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Mit Korollar 5.8 bleibt die äußere Algebra $\wedge([c_{n+1}],[c_{n+3}])$ bzw. $\wedge([c_{n+2}],[c_{n+4}])$ bis in den E_∞-Term erhalten und so gilt $|E_\infty|$ ist durch 4 teilbar und somit auch $|\mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2)|$. □

Insgesamt folgern wir damit

Satz 8.12. *Sei H eine zusammenhängende halbeinfache Untergruppe von $SU(n)$, sodass $\dim(SU(n)/H)$ ungerade ist, dann ist $k(SU(n)/H;\mathbb{F}_2) = 0$ oder $SU(n)/H$ ist entweder diffeomorph zu $SU(n)/SU(k) \times SU(n-k)$ oder einer Sphäre.*

8.2 Quotienten von $SO(n)$ und $Sp(n)$

In diesem Abschnitt wollen wir die Ergebnisse des vorherigen Abschnittes für reelle und symplektische Darstellungen wiederholen. Leider tun sich hier zusätzliche Hindernisse auf und wir müssen uns mit Einschränkungen begnügen.

Nach [BtD85] folgt, dass $\rho \otimes \psi$ genau dann eine reelle Darstellung ist, wenn ρ und ψ beides reelle oder beides symplektische Darstellungen sind. Genauso ist $\rho \otimes \psi$ genau dann eine symplektische Darstellung, wenn eine Darstellung symplektisch und die andere reell ist. Bedingt durch diese Tatsache, betrachten wir die Fälle der reellen und symplektischen Darstellungen nicht einzeln, sondern parallel.

Korollar 8.13. *Sei G eine einfachzusammenhängende, halbeinfache, kompakte Lie-Gruppe und $\rho : G \to SU(n)$ eine irreduzible reelle Darstellung, mit diskretem Kern. Existiert eine komplexe Zahl b und ein $g \in G$, sodass $\rho(g)$ den Eigenwert b mit Multiplizität $n-1$ und den Eigenwert $-b$ mit Multiplizität 1 hat, so ist $G = Spin(n)$ mit n ungerade und ρ ist konjugiert zum natürlichen Homomorphismus $Spin(n) \to SO(n) \to SU(n)$.*

Korollar 8.14. *Sei G eine einfachzusammenhängende, halbeinfache, kompakte Lie-Gruppe. Es gibt keine irreduzible symplektische Darstellung$\rho : G \to SU(n)$, mit diskretem Kern, sodass eine komplexe Zahl b und ein $g \in G$ existieren, sodass $\rho(g)$ den Eigenwert b mit Multiplizität $n-1$ und den Eigenwert $-b$ mit Multiplizität 1 hat.*

Beide Aussagen sind eine direkte Folgerung aus Satz 8.4.

Korollar 8.15. *Sei G eine einfachzusammenhängende, halbeinfache, kompakte Lie-Gruppe und $\rho : G \to SU(n)$ eine irreduzible reelle Darstellung, mit diskretem Kern. Sei G einfach oder prim zu A_1. Existiert eine komplexe Zahl b und ein $g \in G$, sodass $\rho(g)$ den Eigenwert b mit Multiplizität $n-2$ und den Eigenwert $-b$ mit Multiplizität 2 hat, so gilt eine der folgenden Aussagen:*

- *ρ ist bis auf Isomorphie die Darstellung $Spin(n) \to SO(n) \to SU(n)$.*
- *$G = SU(2)$ und $\dim \rho = 5$.*

Beweis. Die Aussage stimmt mit Satz 8.7 überein. Die Darstellungen von $SU(3)$ mit höchstem Gewicht $\bar{w}_1$ und $\bar{w}_2$ sind jedoch konjugiert zueinander und so nicht selbstkonjugiert. □

Korollar 8.16. *Sei G eine einfachzusammenhängende, halbeinfache, kompakte Lie-Gruppe und $\rho : G \to SU(n)$ eine irreduzible symplektische Darstellung, mit diskretem Kern. Sei G einfach oder prim zu A_1. Existiert eine komplexe Zahl b und ein $g \in G$, sodass $\rho(g)$ den Eigenwert b mit Multiplizität $n-2$ und den Eigenwert $-b$ mit Multiplizität 2 hat, so gilt: ρ ist bis auf Isomorphie die Darstellung $Sp(n) \to SU(2n)$.*

Beweis. Die Aussage stimmt mit Satz 8.7 überein, doch ist die irreduzible Darstellung $\rho : SU(2) \to SU(5)$ von reellen Typ, kann also nach [BtD85] nicht symplektisch sein. □

Korollar 8.17. *Sei G eine einfachzusammenhängende, halbeinfache, kompakte Lie-Gruppe und $\rho : G \to SU(n)$ eine irreduzible reelle Darstellung, mit diskretem Kern. Sei G einfach oder prim zu A_1. Existiert eine komplexe Zahl b und ein $g \in G$, sodass $\rho(g)$ den Eigenwert b mit Multiplizität $n-2$ und den Eigenwert $-b$ mit Multiplizität 2 hat, so gilt folgende Aussagen:*

- *ρ ist bis auf Isomorphie die Darstellung $Sp(n) \to SU(2n)$.*

Lemma 8.18. *Sei $\rho : G \to SU(n)$ eine reelle Darstellung. Existiere keine komplexe Zahl b und kein $g \in G$, sodass $\rho(g)$ den Eigenwert b mit Multiplizität $n-2$ und den Eigenwert $-b$ mit Multiplizität 2. Dann gibt es eine freie $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-Operation auf $SO(n)/G$.*

Dies wird analog zum Beweis von Lemma 8.3 gezeigt.

Lemma 8.19. *Sei $\rho : G \to SU(2n)$ eine symplektische Darstellung. Existiert keine komplexe Zahl b und kein $g \in G$, sodass $\rho(g)$ den Eigenwert b mit Multiplizität $2n-4$ und den Eigenwert $-b$ mit Multiplizität 4, dann gibt es eine freie $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-Operation auf $Sp(n)/G$.*

Beweis. Sei ρ so gewählt, dass $\rho(G) \subset Sp(n) \hookrightarrow SU(2n)$. Sei $\mathcal{G}$ erzeugt von den Elementen $\operatorname{diag}(-1,-1,1,\dots,1)$ und $\operatorname{diag}(1,-1,-1,1,\dots,1)$ in $Sp(n)$. Sei $h \in \mathcal{G}$ und $g \in Sp(n)$, sodass

$$\begin{aligned} h \cdot (g \cdot G) &= g \cdot G \\ \Leftrightarrow g^{-1}hg &\in G. \end{aligned}$$

Da alle Elemente in $\mathcal{G} \setminus \{1\}$, betrachtet als Elemente von $SU(2n)$, jedoch den Eigenwert -1 mit Multiplizität 4 und den Eigenwert 1 mit Multiplizität $2n-4$ haben, widerspricht dies der Annahme und $\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ operiert frei auf $SU(n)/G$. $\square$

Hiermit folgern wir zwei Aussagen:

Lemma 8.20. *Ist $G = G_1 \times G_2$ und ist $\rho : G \to SU(n)$ eine irreduzible reelle Darstellung, dann gilt für $X := SO(n)/\rho$, dass $k(X;\mathbb{F}_2) = 0$.*

Beweis. Seien $\rho_1 : G_1 \to SU(k_1)$ und $\rho_2 : G_2 \to SU(k_2)$ irreduzible Darstellungen, die beide vom reellen oder symplektischen Typ sind, sodass $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ und $n = k_1k_2$ gilt. Wir wollen unsere Argumentation auf Lemma 8.18 zurückziehen. Im Fall in dem ρ_1 und ρ_2 symplektisch sind, sind die einzigen kritischen Fälle die, in denen beide Darstellungen bis auf Isomorphie Standarddarstellungen sind. Eine Untersuchung dieser Fälle zeigt genauer, dass $\rho = \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} : Sp(1) \times Sp(1) \to SU(4)$ der einzig Sonderfall ist. Nun gilt aber

$$Sp(1) \times Sp(1)/\operatorname{Kern}(\rho) \cong SO(4)$$

und so folgt $SO(4)/\rho = *$. Ebnenso verhält es sich, wenn beide Darstellungen ρ_1 und ρ_2 reellen Typ besitzen. $\square$

Schwieriger wird es, wenn wir uns den symplektischen Fall anschauen.

Lemma 8.21. *Ist $G = G_1 \times G_2$ und ist $\rho : G \to SU(2n)$ eine irreduzible symplektische Darstellung, dann gilt für $X := Sp(n)/\rho$, dass $k(X) = 0$ oder $G_1 = Sp(1)$ und $G_2 = SO(4)$ ist.*

Beweis. Seien $\rho_1 : G_1 \to SU(k_1)$ und $\rho_2 : G_2 \to SU(k_2)$ irreduzible Darstellungen. Sei o.B.d.A ρ_1 reell und ρ_2 symplektisch, sodass $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ und $n = k_1k_2$ gilt. Wir wollen unsere Argumentation auf Lemma 8.19 zurückziehen. Wie zuvor sind die einzigen kritischen Fälle die, in denen ρ_1 und ρ_2 bis auf Isomorphie Standarddarstellungen sind. Genauer sind $\rho : Sp(1) \times SO(n) \to SU(2n)$ die einzige Fälle in denen $\operatorname{Bild}\rho$ Matrizen enthält, die viermal den Eigenwert -1 und sonst den Eigenwert 1 haben. Wir betrachten zuerst den Fall n gerade und $n \geq 6$. Wir wollen nun eine freie $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ Operation auf $Sp(n)/\rho$ finden. Definiere Matrizen in $Sp(n)$:

$$\alpha := \operatorname{diag}(-1,1,\dots,1)$$

und

$$\beta := \operatorname{diag}(1,1,i,i,i,i,1,\dots,1).$$

Betrachten wir nun α und β als Elemente in $SU(2n)$, dann folgt mit Lemma 8.17, dass $\operatorname{Bild}\rho$ keine Matrix mit den selben Eigenwerten wie α, β enthält. Gleiches zeigt sich für $\alpha\beta = \beta\alpha$. Andererseits liegen $\alpha^2 = 1$ und $\beta^2 = (\alpha\beta)^2$ im Bild von ρ:

$$\rho(1, \operatorname{diag}(1, 1, 1, 1, -1, \ldots, -1, 1, \ldots, 1)) = \beta^2$$

mit 8-mal -1. So folgt, dass $\langle \alpha, \beta \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ frei auf $Sp(n)/\rho$ operiert.

Im Fall n ungerade ist ρ treu und wir können $\mathrm{H}^*(Sp(n)/\rho; \mathbb{F}_2)$ mit der selben Technik wie in Lemma 8.8 berechnen:

$$\mathrm{H}^*(Sp(n)/\rho; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[w_2, \ldots, w_n]/w_2^4, \ldots, w_n^4$$

mit w_i den universellen Stiefel-Whitney-Klassen von $BSO(n)$. □

Satz 8.22. *Ist $\rho : G \to SO(n)$ eine irreduzible, reelle Darstellung und ist $\dim SU(n)/G$ ungerade, dann ist die Semicharakteristik von $SO(n)/\rho$ über $\mathbb{F}_2$ gleich Null. Ist $\rho : G \to Sp(n)$ eine irreduzible, symplektische Darstellung und ist $\dim SU(n)/G$ ungerade, dann ist die Semicharakteristik von $Sp(n)/\rho$ über $\mathbb{F}_2$ gleich Null oder G ist homöomorph zu $Sp(4)/\rho$, wobei $\rho : Sp(1) \times SO(4) \to Sp(4)$ die irreduzible, symplektische Darstellung ist.*

Nun wollen wir uns zuletzt noch dem einen Fall widmen, den wir im letzten Satz nicht ergründen konnten. Dieser Fall stellt sich sehr hartnäckig seiner Untersuchung entgegen, weshalb nur eine Reihe von Einsichten, aber kein vollständiges Resultat folgt. Die hier vorgeführte Ergebnisse sind vom Autor nachgeprüft, gerade die Herleitung wird hier jedoch nicht in aller Ausführlichkeit gezeigt. Sei $\rho : Sp(1) \times SO(4) \to Sp(4)$ wie im Lemma zuvor. Und sei $G = (Sp(1) \times SO(4))/\operatorname{Kern}\rho$. Die Gruppe G ist als Lie-Gruppe isomorph zu

$$(Sp(1) \times Sp(1) \times Sp(1))/\langle (1, -1, -1), (-1, 1, -1) \rangle.$$

Da G eine abgeschlossene Untergruppe von $Sp(4)$ ist, hat der maximal 2-Torus einen Rang von 4 oder weniger. Mit $(-1, -1, -1)$, $(1, i, i), (1, j, j)$ sind die Erzeuger eines 2-Torus vom Rang 3 gegeben. Wir wollen nun zeigen, dass der maximale 2-Torus von G den Rang 3 besitzt. Die durch ρ induzierte Darstellung $\rho' : G \to Sp(4)$ ist treu und irreduzibel. Hat der maximale 2-Torus von G einen Rang von 4, so gleicht er bis auf Konjugation dem maximalen 2-Torus von $Sp(4)$. Das heißt wir können annehmen, dass für ρ' bis auf Isomorphie gilt: Es gibt ein $g \in G$ mit $\rho'(g) = \operatorname{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Die Verknüpfung

$$\psi : G \xrightarrow{\rho'} Sp(4) \xrightarrow{\iota} SU(8)$$

induziert die irreduzible Darstellung, die uns auch durch $\rho : Sp(1) \times SO(4) \to SU(8)$ gegeben wird. Wir können also annehmen, dass es $(g', g'') \in SU(2) \times SO(4)$ gibt, mit $\rho(g', g'') = \operatorname{diag}(-1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Sind α, α^{-1} die Eigenwerte von g' und $\beta_1, \beta_2, \beta_3, (\beta_1\beta_2\beta_3)^{-1}$ die Eigenwerte von g'', dann sind die Eigenwerte von $\rho(g', g'')$ gleich $\alpha\beta_1, \alpha\beta_2, \alpha\beta_3, \alpha(\beta_1\beta_2\beta_3)^{-1}, \alpha^{-1}\beta_1, \alpha^{-1}\beta_2, \alpha^{-1}\beta_3, \alpha^{-1}(\beta_1\beta_2\beta_3)^{-1}$. Wir sehen, dass $\rho(g')$ nicht $\operatorname{diag}(-1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ sein kann. Und es folgt

Lemma 8.23. *Der maximale 2-Torus von*

$$G = (SU(2) \times SU(2) \times SU(2))/\langle (-1, -1, 1), (-1, 1, -1) \rangle$$

hat Rang 3*. Es gibt mindestens* 3 *Konjugationsklassen von maximalen* 2*-Tori, welche erzeugt werden von*

$$\begin{array}{lll} -1, & (i,i,1), & (j,j,1) \\ -1, & (i,1,i), & (j,1,j) \\ -1, & (1,i,i), & (1,j,j). \end{array}$$

Die Abbildung

$$\phi : SO(4) \to SO(4) \times Sp(1) \xrightarrow{\rho} SU(8) \leftarrow Sp(4)$$

induziert eine Abbildung $B\phi^* : \mathrm{H}^*(BSp(4); \mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(BSO(4); \mathbb{F}_2)$, für die gilt

$$\begin{array}{lll} p_1 & \mapsto & 0 \\ p_2 & \mapsto & w_2^4 \\ p_3 & \mapsto & w_3^4 \\ p_4 & \mapsto & w_4^4. \end{array}$$

Ohne die genauen Rechnungen hier anzugeben, können wir aus [BB65, 2.8,3.2,3.3] folgern, dass gilt

$$\mathrm{H}^*(G; \mathbb{F}_2) \cong \wedge(x_1, x_2, x_3) \otimes \mathbb{F}_2/(z^4),$$

mit $Dx_i = i$, $Dz = 1$ und $Dz^2 = 2$. Die Elemente x_1, z und z^2 sind primitiv Erzeuger, über x_2 und x_3 können wir keine Aussage machen. Nach [McC01, 7.29] gibt es eine homologie Spektralsequenz E^r, mit

$$E^2_{*,*} \cong \mathrm{Tor}_{H_*(G;\mathbb{F}_2)}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2), \tag{8.2}$$

die gegen $H_*(BG; \mathbb{F}_2)$ konvergiert. Nach dem vorherigen Lemma folgt mit [Qui71b], dass $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_2)$ eine Krull-Dimension von 3 hat. Sind die Elemente x_2 und x_3 nicht primitiv in $\mathrm{H}^*(G; \mathbb{F}_2)$, dann ist $x_2^*, x_3^* \in H_*(G; \mathbb{F}_2)$ zerlegbar und E^2 ist das Tensorprodukt von drei Algebren der geteilten Potenzen. Nicht-triviale Differentiale in der Spektralsequenz führen dazu, dass $(E^\infty)^*$ eine Krull-Dimension kleiner als 3 besitzt, was nicht sein kann. Sind alle Differentiale trivial, dann ist $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_2)$ eine Polynomalgebra mit drei Erzeugern. Versuchen wir mit diesem Wissen die Differentiale in der Serre-Spektralsequenz zur universellen Faserung zu finden, so führt dies zu einem wiederspruch. Wir können also folgern, dass x_2, x_3 oder beide primitiv sind. Das heißt aber auch, dass die Spektralsequenz (8.2) nicht im E^2-Term zusammenbrechen kann.

Kapitel 9

Die Gruppen $PSp(2n+1)$

Die symplektische Gruppe $Sp(n)$ besitzt ein Zentrum welches isomorph zu $\mathbb{Z}_2$ ist und von $-1 \in Sp(n)$ erzeugt wird. Die projektive symplektische Gruppe $PSp(n)$ ist gleich $Sp(n)/(-1)$. Wir beschränken uns auf die Gruppen $PSp(2n+1)$, da die Algebrenstruktur von $\mathrm{H}^*(BPSp(2n);\mathbb{F}_2)$ nahezu unbekannt ist. Die Struktur von $\mathrm{H}^*(BPSp(2n);\mathbb{F}_2)$ als graduierter Vektorraum lässt sich für den Fall n ungerade in [KT76] finden. Wir können in [Kon75] nachlesen, dass

$$\mathrm{H}^*(BPSp(2n+1);\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y_2, y_3, y_8, y_{12}, \ldots, y_{8n+4}]$$

gilt, mit $Dy_i = i$. Sei $\pi : Sp(2n+1) \to PSp(2n+1)$ die Projektion. Wir werden später zeigen, dass wir die y_{4i} so wählen, dass $B\pi^*(y_{4i}) = p_i + P_i \in \mathrm{H}^*(BSp(2n+1);\mathbb{F}_2)$ gilt, mit P_i aus dem von $p_4, \ldots, p_{4(i-1)}$ erzeugten Ideal in $\mathrm{H}^*(BSp(2n+1);\mathbb{F}_2)$. Im Allgemein ist $P_i \neq 0$. Ist T der Standardtorus von $Sp(2n+1)$, so ist $T' := \pi(T)$ ein maximaler Torus von $PSp(2n+1)$ und wir definieren die Inklusion $\iota : T' \hookrightarrow PSp(2n+1)$.

9.1 Die Kohomologie-Algebra $\mathrm{H}^*(BPSp(2n+1);\mathbb{F}_2)$

In seiner Arbeit [Kon75] definiert Kono einen maximalen 2-Torus von $PSp(2n+1)$. Diese Definition wollen wir wiederholen und zeigen, dass dieser 2-Torus bis auf Konjugation eindeutig ist. Sei

- $L = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset Sp(1)$,
- $\tilde{L}(n) = \{\alpha \cdot E_n; \alpha \in L\}$ für $E_n = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$,
- $\tilde{Q}_0(n) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in Sp(n); \varepsilon_i = \pm 1\}$,
- $\tilde{Q}(n) = \{A \cdot B; A \in \tilde{L}(n), B \in \tilde{Q}_0(n)\}$,
- $L(n) = \tilde{L}(n)/\Delta(n)$ für $\Delta(n) = \{\pm E_n\}$
- $Q(n) = \tilde{V}(n)/\Delta(n)$.

Es gilt $Q(n) \cong \mathbb{Z}_2^{n+1}$ und die Krull-Dimension von $\mathrm{H}^*(BPSp(2n+1);\mathbb{F}_2)$ ist $2n+2$. Da $\mathrm{H}^*(BPSp(2n+1);\mathbb{F}_2)$ keine nilpotenten Elemente enthält, folgt mit [Qui71b, I], dass der maximale Rang einer 2-Untergruppe von $PSp(2n+1)$ genau $2n+2$ ist. $Q(2n+1)$ ist also eine maximale 2-Untergruppe. Nach [Qui71b, II] stehen die Konjugationsklassen der maximalen 2-Untergruppen in 1-zu-1 Korrespondenz zu den minimalen Primidealen des Rings $\mathrm{H}^*(BPSp(2n+1);\mathbb{F}_2)$, welcher aber nur ein minimales Primideal besitzt, nämlich (0). Deshalb ist $Q(2n+1)$ bis auf Konjugation eindeutig.

Wir definieren $e_i := \pi(\mathrm{diag}(1,\ldots,1,-1,1,\ldots,1)) \in PSp(n)$, mit einer -1 an der i-ten Position und $i \in \{1,\ldots,n\}$. Definiere weiter $e_I := \pi(\mathrm{diag}(i,\ldots,i))$ und $e_J := \pi(\mathrm{diag}(j,\ldots,j))$, für $i,j \in Sp(1)$. Ist T der Standardtorus von $Sp(n)$, dann gilt $e_1,\ldots,e_{n-1},e_I \in \pi(T)$. Definiere Q' als den von $e_1,\ldots,e_{n-1},e_I$ erzeugte 2-Torus. Weiter definieren wir Q'' als den von e_J erzeugten 2-Torus in $PSp(n)$. Wir definieren $Q = Q' \times Q''$ als den 2-Standardtorus von $PSp(n)$. Es gilt dann

$$\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_n,x_I,x_J]/(x_1+\ldots+x_n),$$

mit x_i dem zu e_i assoziierten Erzeuger und x_I bzw. x_J dem zu I bzw. J assoziierten.

Lemma 9.1. *Die Krull-Dimension von* $\mathrm{H}^*(BT';\mathbb{F}_2)/(y_2,\hat{y_3},y_8,\ldots,y_{8n+4})$ *ist* 0.

Beweis. Aus Gradgründen sehen wir $y_3 = 0$ in $\mathrm{H}^*(BT';\mathbb{F}_2)$. Die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung $PSp(2n+1)/T' \to BT' \to BPSp(2n+1)$ kollabiert nach Satz 2.20 im E_2-Term, da Sq_1 trivial auf $\mathrm{H}^*(BT';\mathbb{F}_2)$ operiert. Es gilt

$$E_2^{*,*} \cong \wedge([y_3]) \otimes \mathrm{H}\,\mathcal{K}_{\mathrm{H}^*(BT';\mathbb{F}_2)}(y_2,y_8,\ldots,y_{8n+4}).$$

Wäre die Krull-Dimension nicht 0, so hätte der $E_2^{*,*}$ und somit auch $E_\infty^{*,*}$-Term der Spektralsequenz eine unendliche Vektorraum-Dimension; es gibt keine Differentiale, da E_2 im äußeren Grad 0 und -1 konzentriert ist. Die widerspricht jedoch der Tatsache, dass die Vektorraum-Dimension der singulären Kohomologie von E_∞ gleich der von $PSp(2n+1)/T'$ ist, welche endlich ist. □

Aus Lemma 2.1 folgern wir so:

Korollar 9.2. *Die Sequenz* $y_2,y_8,\ldots,y_{8n+4}$ *ist regulär in* $\mathrm{H}^*(BT';\mathbb{F}_2)$ *und somit auch in* $\mathrm{H}^*(BQ';\mathbb{F}_2)$.

Es folgt, dass die Krull-Dimension von $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)/(y_2,y_3,y_8,\ldots,y_{8n+4})$ gleich 0 oder 1 sein muss. Da $(y_2,y_8,\ldots,y_{8n+4})$ regulär in $\mathrm{H}^*(BQ';\mathbb{F}_2)$ ist, ist die Sequenz auch regulär in $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$. Betrachen wir nun den Fall, dass y_3 ein Nullteiler in $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)/(y_2,y_8,\ldots,y_{8n+4})$ ist, dann gilt

$$|Tor^{p,*}_{\mathrm{H}^*(BPSp(2n+1);\mathbb{F}_2)}(\mathbb{F}_2,\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)| = \begin{cases} \infty & \text{für } p = 0,1 \\ 0 & \text{für } p \neq 0,1 \end{cases}$$

Aus Gradgründen kann wie im vorherigen Beweis kein Differential d_r, $r \geq 2$, in der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung $PSp(2n+1)/Q \to BQ \to BPSp(2n+1)$ existieren und so kollabiert die Spektralsequenz im E_2-Term. Damit folgt dass $\mathrm{H}^*(PSp(2n+1)/Q;\mathbb{F}_2)$ unendliche $\mathbb{F}_2$-Dimension hat, was ein Widerspruch zur Tatsache ist, dass $PSp(2n+1)/Q$ eine endlich dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Also folgt:

Lemma 9.3. *Die Sequenz* $y_2,y_3,y_8,\ldots,y_{8n+4} \in \mathrm{H}^*(BPSp(2n+1);\mathbb{F}_2)$ *ist regulär in* $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$*. Das heißt,* $PSp(2n+1)$ *liegt in* $LieQ_2$*.*

In Abschnitt 7.3 haben wir ein $\cup_1$ Produkt auf $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$ hergeleitet und wir wollen nun $y_i \cup_1 y_j$ in $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2), i,j \in \{2,3\}$ berechnen. Hierfür betrachten wir zuerst die Diagonalabbildung $\iota : Sp(1) \to Sp(2n+1)$, die uns die Abbildung $\iota' : PSp(1) \to PSp(2n+1)$ induziert. In [Kon75, 3.3] lesen wir nach, dass $B\iota'^*(y_2) = w_2$ und $B\iota'^*(y_3) = w_3$. Da die Steenrod-Operationen mit stetigen Abbildungen kommutieren, erfahren wir zusammen mit [Bor53, 7.1], dass gilt:

$$\mathrm{Sq}_1(y_2) = y_2 \cup_1 y_2 = y_3 \text{ und } \mathrm{Sq}_2(y_3) = y_3 \cup_1 y_3 = y_2 y_3.$$

Sei T der Standardtorus von $Sp(2n+1)$. Wir betrachten die Weyl-Gruppe $W_{SP(2n+1)}$ geometrisch als

$$\left\{\varphi : T \to T \mid \varphi(t) = gtg^{-1} \text{ für } g \in G\right\}.$$

Ein $\varphi \in W_{SP(2n+1)}$ induziert eine Konjugation φ' auf $PSp(2n+1)$ und es gilt $\varphi'(Q') = Q'$. Das heißt, dass Bild von $\mathrm{H}^*(BSp(2n+1);\mathbb{F}_2)$ in $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$ ist invariant unter den Operationen von φ, den Vertauschungen der Erzeuger x_i. Sei E_{2n+1} die Projektion der Einheitsmatrix in $PSp(2n+1)$. Die Konjugation mit $\sqrt{1/2}(i+j)E_{2n+1}$ vertauscht die Erzeuger e_I mit e_J von $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$. Die Konjugation mit $\sqrt{1/2}(i+k)E_{2n+1}$ bzw. $\sqrt{1/2}(j+k)E_{2n+1}$ vertauscht e_I mit $e_I e_J = e_J e_I \in PSp(2n+1)$ bzw. e_J mit $e_I e_J = e_J e_I \in PSp(2n+1)$. Damit ist das Bild von $\mathrm{H}^*(BSp(2n+1);\mathbb{F}_2)$ in $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$ auch invariant unter dieser Operation.

Wir finden einen Torus T von $PSp(2n+1)$, sodass

$$\begin{array}{ccc} Q' & \longrightarrow & Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & PSp(2n+1) \end{array}$$

kommutiert. Aus dieser Tatsache folgt, dass y_2 ein Quadrat in $\mathrm{H}^*(BQ';\mathbb{F}_2)$ sein muss. Durch die Weyl-Gruppe, die invariant auf $\mathrm{H}^*(BQ';\mathbb{F}_2)$ operiert, folgt, dass $y_2 = x_I^2$ oder Null ist. Mittels der Projektion von $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$ auf $\mathrm{H}^*(BQ';\mathbb{F}_2)$ und durch die Invarianz unter der Vertauschung von x_I, x_J und $x_I + x_J$ folgt also, dass

$$y_2 = e_I e_J + e_I^2 + e_J^2 \in \mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$$

gilt. Da die Steenrod-Operationen auf der Kohomologie mit der Abbildung $\mathrm{H}^*(BPSp(2n+1);\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$ kommutieren folgt somit, dass in $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$ gilt:

$$y_2 = e_I^2 + e_I e_J + e_J^2 \qquad \text{und} \qquad y_3 = e_I^2 e_J + e_I e_J^2.$$

Die Polynome y_2 und y_3 erzeugen die unter der Vertauschung von x_I, x_J und $x_I + x_J$ invarianten Polynome in $\mathbb{F}_2[x_I, x_J]$.

Definiere $\sigma_i := \sigma_i(x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_{2n}] = \mathrm{H}^*(BQ';\mathbb{F}_2)$. Viele Indizien sprechen dafür, dass gilt:

$$y_{4i} = \sigma_i^4 + \sigma_1^4 \sigma_{i-1}^4 \in \mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$$

Alle Überlegungen erlauben jedoch keinen letztendlichen Beweis, weshalb bis auf das kleine Beispiel 9.7 keine Ansätze folgen sollen.

Es folgen nun noch zwei Aussagen über die Semicharakteristik der homogene Räume G/H, wobei $G = SO(N), SU(n)$ oder $Sp(N)$ ist und $H = PSp(n)$.

Lemma 9.4. *Sei $\rho : PSp(2n+1) \to SU(N)$ eine irreduzible Darstellung, dann gilt $|\operatorname{H}^*(SU(N)/PSp(2n+1); \mathbb{F}_2)|$ ist durch 4 teilbar. Ist ρ eine symplektische Darstellung, dann ist auch $|\operatorname{H}^*(Sp(N')/PSp(2n+1); \mathbb{F}_2)|$ durch 4 teilbar, für $N' = N/2$.*

Beweis. Wir beweisen nur den ersten Fall: Die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung $BSU(N)/Q(2n+1) \to BQ(2n+1) \to BSU(N)$ kollabiert nach Korollar 7.11 im E_2-Term. Damit kollabiert nach Lemma 6.1 auch die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Fasrung $BSU(N)/PSp(2n+1) \to BPSp(2n+1) \to BSU(N)$ im E_2-Term. Mit dem selben Beweis wie in Lemma 6.16 folgt die Aussage. □

Lemma 9.5. *Ist $\rho : PSp(2n+1) \to SU(N)$ eine reelle Darstellung, dann gilt $|\operatorname{H}^*(SO(N)/PSp(2n+1); \mathbb{F}_2)|$ ist durch 16 teilbar.*

Beweis. Wir können einfach nachrechnen, dass es $i, j, l \in \{2, \dots, 7\}$ geben muss, mit $i < j < l$ und

$$w_p = 0 \in \operatorname{H}^*(Q_{PSp(2n+1)}; \mathbb{F}_2)/(w_2, \dots, w_{p-1}) \text{ für } p = i, j, l. \tag{9.1}$$

Nun ist $|\operatorname{H}^*(BQ_{SO(N)}; \mathbb{F}_2)/w_2, \dots, w_N|$ endlich und nach Lemma 2.5 ist ebenfalls $|\operatorname{H}^*(BQ_{PSp(2n+1)}; \mathbb{F}_2)/w_2, \dots, w_N| < \infty$. Aus Satz 2.39 folgt somit, dass ebenfalls $|\operatorname{Tor}_{\operatorname{H}^*(BSO(N))}(\operatorname{H}^*(BQ_{PSp(2n+1)}); \mathbb{F}_2)| < \infty$ und nach Lemma 2.4 ist damit auch $|\operatorname{Tor}_{\operatorname{H}^*(BSO(N))}(\operatorname{H}^*(BPSp(2n+1)); \mathbb{F}_2)| < \infty$. Wieder nach Satz 2.39 und (9.1) ist

$$E_2^{*,*} = \operatorname{Tor}_{\operatorname{H}^*(BSO(N))}(\operatorname{H}^*(BPSp(2n+1)); \mathbb{F}_2) \cong A \otimes \wedge([w_i], [w_j], [w_l]),$$

mit A einer PD-Algebra. Nach Lemma 2.42 ist $|A|$ durch 2 teibar und nach Lemma 5.8 konvergiert $E_2^{*,*}$ gegen $E_\infty^{*,*}$ mit

$$E_\infty^{*,*} \cong A_\infty \otimes \wedge([w_i], [w_j], [w_l]).$$

Da nun auch $|A_\infty^{*,*}|$ durch 2 teilbar ist folgt die Aussage. □

9.2 Untergruppen von $PSp(2n+1)$ ohne -1

Sei $\pi : Sp(2n+1) \to PSp(2n+1)$ die Projektion. Wir wollen nun zeigen, dass wir die y_{4i} so wählen können, dass $B\pi^*(y_{4i}) = p_{4i} + P_i \in \operatorname{H}^*(BSp(2n+1); \mathbb{F}_2)$ gilt, mit P_i aus dem von $p_4, \dots, p_{4(i-1)}$ erzeugten Ideal in $\operatorname{H}^*(BSp(2n+1; \mathbb{F}_2)$. Darauf werden wir zeigen, dass P_i im Allgemeinen nicht Null ist.

Kommen wir zur ersten Behauptung und betrachten wir die Faserung

$$\mathbb{Z}_2 \to Sp(2n+1) \to PSp(2n+1)$$

und die nach [Bor67, 17] induzierte Homotopiefaserung

$$Sp(2n+1) \to PSp(2n+1) \to B\mathbb{Z}_2. \tag{9.2}$$

Sei $\operatorname{H}^*(Sp(2n+1); \mathbb{F}_2) = \wedge(e_3, \dots, e_{8n-3})$ und $\operatorname{H}^*(B\mathbb{Z}_2; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[z]$. Dann wissen wir nach [BB65], dass die zur Faserung (9.2) assoziierte Serre-Spektralsequenz im E_4-Term kollabiert und die nicht-trivialen Differentiale gegeben sind durch $d_3(e_3) = z^4$ gegeben sind. Es gilt $\operatorname{H}^*(PSp(2n+1); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[a]/a^4 \otimes \wedge(b_7, \dots, b_{8n-3})$. Wir wissen also, dass $\pi^*(b_{4i-1}) = e_{4i-1}$. Nach [Kon75, 4.4] wissen wir, dass die b_{4i-1} universell transgressiv sind und so folgt unsere Behauptung aus dem Digramm

$$\begin{array}{ccccc} Sp(2n+1) & \longrightarrow & ESp(2n+1) & \longrightarrow & BSp(2n+1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ PSp(2n+1) & \longrightarrow & EPSp(2n+1) & \longrightarrow & BPSp(2n+1) \end{array}$$

und dem induzierten Homomorphismus von Serre-Spektralsequenzen.

Sei nun $H \subset Sp(2n+1)$ eine kompakte Untergruppe, mit $-1 \notin H$. Dann ist die Abbildung $\rho : H \to Sp(2n+1) \to PSp(2n+1)$ injektiv. Es gilt, da ρ über $Sp(2n+1)$ faktorisiert, dass $0 = y_2 = y_3 \in \mathrm{H}^*(BH; \mathbb{F}_2)$. Der E_2-Term der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung

$$PSp(2n+1)/\rho \to BH \to BSp(2n+1)$$

hat somit die Form

$$E_2^{*,*} \cong A \otimes \wedge([y_2], [y_3]),$$

mit A geeignet. Damit folgt nach Korollar 5.8:

Satz 9.6. *Sei $H \subset Sp(2n+1)$ eine kompakte Untergruppe, mit $-1 \notin H$ und $\rho : H \to PSp(2n+1)$ die induzierte Inklusion, dann ist $k(PSp(2n+1)/H; \mathbb{F}_2) = 0$.*

Wie zu Anfang des Abschnitts gezeigt, gilt $B\rho^*(y_{4i}) = p_{4i} + P_i$. Wir werden nun zeigen, dass im Allgemeinen $P_i \neq 0$ gilt:

Beispiel 9.7. Sei $\rho : Sp(2) \to PSp(3)$ wie im vorherigen Lemma, dann gilt nach unserer Vorrede $B\rho^*(y_8) = p_8$ oder $p_8 + p_4^2$. Nehmen wir nun an, dass $B\rho^*(y_{12}) = 0$ ist, dann würde gelten: Der E_2-Term der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung

$$PSp(3)/\rho \to BSp(2) \to PSp(3)$$

ist gegeben durch

$$E_2^{*,*} \cong \wedge([y_2], [y_3], [y_{12}]) \otimes \mathbb{F}_2[p_4].$$

Alle Differentiale in dieser Spektralsequenz sind Null, was aber nicht sein kann. Als einziger Ausweg bleibt $B\rho^*(y_{12}) = p_4^3 \in \mathrm{H}^*(BSp(2); \mathbb{F}_2)/(p_8)$ bzw. $B\rho^*(y_{12}) = p_4 p_8 \in \mathrm{H}^*(BSp(2); \mathbb{F}_2)/(p_8 + p_4^2)$. Dies zeigt, dass $B\pi^*(y_{12}) = p_{12} + P_3$ gilt, mit $P_3 \neq 0$. $\diamond$

Kapitel 10

Die Spin-Gruppen

In dieser Arbeit folgen wir der Konstruktion der Spin-Gruppen, wie sie in [BtD85, I.6] beschrieben ist. Es folgt eine kurze Zusammenfassung. Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $e_1, \ldots, e_n$ die kanonische Basis von V. Sei $q : V \to \mathbb{R}$ die quadratische Form $x \mapsto -|x|^2$. Sei C_n die zu (V, q) assoziierte Clifford-Algebra. Sei $\alpha : C_n \to C_n$ der kanonische Automorphismus, mit $\alpha^2 = \mathrm{id}$ und $\alpha(x) = -x$ für $x \in V \subset C_n$. Die Algebra C_n ist $\mathbb{Z}_2$-graduiert und C_n^0 sei die Unteralgbra die nur aus Elementen im Grad 0 besteht, also den Elementen $x \in C_n$ mit $\alpha(x) = x$. Für $x \in C_n$ sei $\bar{x}$ das Konjugierte von x und $N(x) = x\bar{x} = -q(x) \cdot 1$ die Norm von C_n. Seien C_n^* die Einheiten von C_n.

$$\Gamma_n = \left\{ x \in C_n^* \mid \alpha(x) \cdot v \cdot x^{-1} \in V \text{ für alle } v \in V \right\}$$

bezeichnet die Clifford-Gruppe von C_n und $\rho : \Gamma_n \to Aut(V)$ die Abbildung $\rho(x)v = \alpha(x)vx^{-1}$ für $v \in V$. Nun sei $Pin(n)$ der Kern von $N : \Gamma_n \to \mathbb{R}^*$ und $\rho : Pin(n) \to O(n)$ die Projektion. Dann gilt:

$$Spin(n) = \rho^{-1}(SO(n)) \subset C_n^0$$

10.1 Die Kohomologie der Spin-Gruppen

Nach Borel [Bor54, IV] ist die Struktur von $\mathrm{H}^*(Spin(n); \mathbb{F}_2)$ wie folgt gegeben:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $3, 5, 6, \ldots, n-1$ die Folge von 3 bis $n-1$ ohne die Potenzen von 2 und sein $s(n)$ die größte Potenz von 2 die kleiner als n ist. Dann ist

$$\mathrm{H}^*(Spin(n); \mathbb{F}_2) \cong \Delta(u_3, u_5, u_6, \ldots, u_{n-1}, u),$$

wobei $D(u) = 2s(n) - 1$ und $D_i = i$. Es gilt

$$\mathrm{Sq}^i\, u_j = \begin{cases} \binom{Du_j}{i} u_k & \text{falls } i \leq Du_j, \text{ wobei } i + Du_j = Du_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $u \cdot u = 0$.

Die Struktur von $\mathrm{H}^*(BSpin(n);\mathbb{F}_2)$ finden wir bei [Qui71a]. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $h(n)$ gegeben durch die Tabelle

n	$h(n)$
$8l+1$	$4l+0$
$8l+2$	$4l+1$
$8l+3$	$4l+2$
$8l+4$	$4l+2$
$8l+5$	$4l+3$
$8l+6$	$4l+3$
$8l+7$	$4l+3$
$8l+8$	$4l+3.$

Ist n eindeutig, dann schreiben wir h statt $h(n)$. Die Zahl 2^h ist die Dimension der Spin-Darstellung von $Spin(n)$. Sei $w_2 \in \mathrm{H}^1(BSO(n);\mathbb{F}_2)$, dann ist nach Quillen die Sequenz J_n, gegeben durch

$$w_2, \mathrm{Sq}^1 w_2, \ldots, \mathrm{Sq}^{2^{h-2}} \mathrm{Sq}^{2^{h-3}} \ldots \mathrm{Sq}^1 w_2,$$

regulär in $\mathrm{H}^*(BSO(n);\mathbb{F}_2)$ und es gilt

$$\mathrm{H}^*(BSpin(n),\mathbb{F}_2) \cong \mathrm{H}^*(BSO(n),\mathbb{F}_2)/J_n \otimes \mathbb{F}_2\,[y_{2^h}]\,,$$

wobei $Dy_{2^h} = 2^h$. Ist $\iota : \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow Spin(n)$ mit $\iota(-1) = -1$ und $\mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2;\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[z]$, dann gilt $Bi^*(y_{2^h}) = z^{2^h}$. Wir schreiben für J_n nur J, falls n eindeutig ist. Und für y_{2^h} nur y, falls h eindeutig ist.

10.1.1 Kantenhomomorphismen

Gegeben die Faserung

$$\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\iota} Spin(n) \xrightarrow{\pi} SO(n),$$

dann ist

$$B\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{B\iota} BSpin(n) \xrightarrow{B\pi} BSO(n) \tag{10.1}$$

nach [Bor67, 17.III] eine Homotopiefaserung.

Die Kantenhomomorphismen in der zu (10.1) assoziierten Serre-Spektralsequenz mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ sind nach [McC01, 5.9] gegeben durch

$$\mathrm{H}^q(BSO(n),\mathbb{F}_2) = E_2^{q,0} \twoheadrightarrow E_3^{q,0} \twoheadrightarrow \ldots \twoheadrightarrow E_{q+1}^{q,0} = E_\infty^{q,0} \subset \mathrm{H}^q(BSpin(n),\mathbb{F}_2)$$

und

$$\mathrm{H}^q(BSpin(n),\mathbb{F}_2) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,q} = E_{q+1}^{0,q} \subset \ldots \subset E_2^{0,q} = \mathrm{H}^q(B\mathbb{Z}_2,\mathbb{F}_2).$$

Die Abbildung $\pi^* : \mathrm{H}^*(BSO(n);\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(BSpin(n);\mathbb{F}_2)$ ist also durch die Projektion $\mathrm{H}^*(BSO(n);\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(BSO(n);\mathbb{F}_2)/J$ induziert.

Nach [Bor53, 7.1] gilt in $\mathrm{H}^*(BSO(n);\mathbb{F}_2)$:

$$\mathrm{Sq}^i w_j = \sum_{t=0}^{i} \binom{j-i+t-1}{t} w_{i-t} w_{j+t} \tag{10.2}$$

was sich für den Spezialfall $i = j-1$ überträgt in $\mathrm{Sq}^{j-1} w_j = \sum_{t=0}^{j-1} w_{j-1-t} w_{j+t}$. Wie üblich gilt $\mathrm{Sq}^k xy = \sum_{i+j=k} \mathrm{Sq}^i x \cdot \mathrm{Sq}^j y$. Mit beiden Tatsachen vereint lässt sich berechnen, dass $B\phi^*(J_{n+1}) = J_n$ für $\phi : SO(n) \hookrightarrow SO(n+1)$ die Inklusion.

Lemma 10.1. *Sei $\phi : SO(n) \hookrightarrow SO(n+1)$ die Inklusion und $\phi' : Spin(n) \to Spin(n+1)$ die induzierte Abbildung. Sei weiter $A_n := \mathrm{H}^*(BSO(n);\mathbb{F}_2)/J_n$. Dann ist*

$$B\phi'^*|_{A_{n+1}} : \mathrm{H}^*(BSpin(n+1);\mathbb{F}_2)|_{A_{n+1}} \to \mathrm{H}^*(BSpin(n);\mathbb{F}_2)$$

gegeben durch die Projektion $\mathrm{H}^*(BSO(n+1);\mathbb{F}_2)/J_{n+1} \to \mathrm{H}^*(BSO(n);\mathbb{F}_2)/J_n$.

Beweis. Gegeben das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
B\mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & BSpin(n) \arrow[r, "B\pi_n"] \arrow[d, "B\phi'"] & BSO(n) \arrow[d, "B\phi"] \\
B\mathbb{Z}_2 \arrow[r] & BSpin(n+1) \arrow[r, "B\pi_{n+1}"] & BSO(n+1),
\end{tikzcd}$$

dann ist die Abbildung $B\phi^*$ und

$$B\pi_n^* : \mathrm{H}^*(BSO(n);\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(BSpin(n);\mathbb{F}_2)|_{A_n}$$

surjektiv für alle n und unsere Aussage über $B\phi'^*$ folgt aus dem Homomorphiesatz. □

Es ist zu bemerken, dass wir nichts darüber sagen, ob $B\phi'^*(y_{2^{h(n+1)}})$ im Allgemeinen in der Unteralgebra $\mathbb{F}_2[y_{2^{h(n)}}]$ von $\mathrm{H}^*(BSpin(n);\mathbb{F}_2)$ liegt. Ganz im Gegenteil werden wir in Abschnitt 11.1 Beispiele sehen, die einer solchen Vermutung widersprechen.

10.1.2 2-Tori in $Spin(n)$

Wir werden in diesem Abschnitt eine spezielle Klasse von maximalen 2-Tori in $Spin(n)$ untersuchen und zeigen, dass es für $n \geq 10$ immer zwei nicht zueinander konjugierte maximale 2-Tori gibt.

Sei Q ein 2-Torus von $Spin(n)$. Da -1 im Zentrum von $Spin(n)$ liegt, ist -1 ein Element jedes maximalen 2-Torus von $Spin(n)$. Sei $\pi : Spin(n) \to SO(n)$ die natürliche Projektion und Q ein maximaler 2-Torus in $Spin(n)$ mit Rang k. Dann ist $\pi(Q)$ ein 2-Torus in $SO(n)$ mit Rang $k-1$. Nun liegt $\pi(Q)$ in einem maximalen 2-Torus und es gibt ein $g \in SO(n)$, sodass $\mu_g(Q)$ von Diagonalmatrizen erzeugt wird. Sei $\tilde{g} \in \pi^{-1}(g)$. Dann sind die Elemente von $\pi(\tilde{g}Q\tilde{g}^{-1})$ Diagonalmatrizen. Seien $e_i \in Spin(n) \subset C_n$ die Erzeuger der n-ten Clifford-Algebra zur quadratischen Form $x \mapsto -|x|^2$. Es gilt

$$\pi(e_i) = \pi(-e_i) = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1),$$

mit der -1 an der i-ten Position. Wir werden auch für die Matrix $\pi(e_i)$ nur e_i schreiben. Wir können also o.B.d.A davon ausgehen, dass die Elemente eines 2-Torus in $Spin(n)$ die Form $t = \pm e_{i_1} \dots e_{i_p}$ besitzen, mit $i_1 < \dots < i_p$ und wir definieren $|t| := p$. Es gilt dann $|t| = |\pi(t)|$, wobei $|\pi(t)|$ wie zuvor die Vielfacheit des Eigenwert -1 sein soll. Da $Spin(n) \subset C_n^0$ gilt, muss für $t \in Q$ gelten , dass $|t|$ gerade ist. Für $t \in Q$ mit $|t| = 4l+2$ gilt $t^2 = -1$, da $e_ie_je_ie_j = -1 \in Spin(n)$ gilt. Also muss p durch 4 teilbar sein. Insgesamt folgt damit:

Lemma 10.2. *Sei Q ein 2-Torus in $SO(n)$ der maximal unter der Bedingung ist, dass für alle $t \in Q$ der Wert $|t|$ durch 4 teilbar ist. Dann gibt es genau einen maximalen 2-Torus Q' in $Spin(n)$, sodass $\pi(Q') = Q$ gilt.*

Wir identifizieren die maximalen 2-Tori in $Spin(n)$ deshalb mit den 2-Tori Q von $SO(n)$ die maximal unter der Bedingung sind, dass für alle $t \in Q$ der Wert $|t|$ durch 4 teilbar ist. O.B.d.A. werden wir davon ausgehen, dass die Elemente eines solchen 2-Torus stets Diagonalmatrizen mit ein 1 und -1 auf der Diagonalen sind. Wir werden also im Weiteren spezielle 2-Tori von $SO(n)$ untersuchen, aber stets von 2-Tori in $Spin(n)$ sprechen, gerechtfertigt durch die vorherige Identifikation.

Nach [Qui71b] wissen wir, dass der Rang eines maximalen 2-Torus in einer Lie-Gruppe G gleich der Krull-Dimension von $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2)$ ist und nach [Qui71a] folgt:

$$\mathrm{H}^*(BSpin(n);\mathbb{F}_2) \cong \mathrm{H}^*(BSO(n);\mathbb{F}_2)/J \otimes \mathbb{F}_2[z],$$

wobei J von der regulären Sequenz $w_2, \mathrm{Sq}^1 w_2, \ldots, \mathrm{Sq}^{2^{h-2}} \mathrm{Sq}^{2^{h-3}} \ldots \mathrm{Sq}^2 \mathrm{Sq}^1 w_2$ erzeugt wird. Alle unbekannten Symbole sind in Abschnitt 10.1 oder in [Qui71b] erklärt. Wir rechenen:

n	h	$\dim \mathrm{H}^*(BSpin(n);\mathbb{F}_2)$	$\mathrm{Rang}\, Spin(n)$
$8k+1$	$4k+0$	$4k+1$	$4k$
$8k+2$	$4k+1$	$4k+1$	$4k+1$
$8k+3$	$4k+2$	$4k+1$	$4k+1$
$8k+4$	$4k+2$	$4k+2$	$4k+2$
$8k+5$	$4k+3$	$4k+2$	$4k+2$
$8k+6$	$4k+3$	$4k+3$	$4k+3$
$8k+7$	$4k+3$	$4k+4$	$4k+3$
$8k+8$	$4k+3$	$4k+5$	$4k+4$

(10.3)

Wir werden nun verschiedene 2-Tori in $SO(n)$ definieren. Sei $\alpha_\ell \subset SO(n)$ der von

$$e_1e_2e_3e_4,\ \ e_3e_4e_5e_6,\ \ \ldots\ \ ,\ \ e_{2\ell-1}e_{2\ell}e_{2\ell+1}e_{2\ell+2}$$

erzeugte 2-Torus. Sei $\beta \subset SO(8)$ der von

$$e_1e_2e_3e_4,\ \ e_3e_4e_5e_6,\ \ e_5e_6e_7e_8,\ \ e_1e_3e_5e_7$$

erzeugte 2-Torus. Sei $\beta' \subset SO(7)$ der von

$$e_1e_2e_3e_4,\ \ e_3e_4e_5e_6,\ \ e_1e_3e_5e_7$$

erzeugte 2-Torus. Sei $\gamma_\ell \subset SO(8\ell)$ der von

$$e_1e_2e_3e_4,\ \ e_3e_4e_5e_6,\ \ \ldots\ \ ,\ \ e_{8n-3}e_{8n-2}e_{8n-1}e_{8n},\ \ e_1e_3e_5e_7\ldots e_{8n-3}e_{8n-1}$$

und $\gamma'_\ell \subset SO(8\ell-1)$ der von

$$e_1e_2e_3e_4,\ \ e_3e_4e_5e_6,\ \ \ldots\ \ ,\ \ e_{8n-5}e_{8n-4}e_{8n-3}e_{8n-2},\ \ e_1e_3e_5e_7\ldots e_{8n-3}e_{8n-1}$$

erzeugte 2-Torus.

Mit $\ell\beta$ bezeichnen wir den 2-Torus der das ℓ-fache Produkt eines 2-Torus vom Typ β ist. Wir schreiben $\ell\beta+\alpha_1$ für das Produkt eines 2-Torus vom Typ $\ell\beta$ und eines 2-Torus vom Typ α_1.

Anhand der Liste (10.3) können wir nun überprüfen, dass die 2-Tori Q_1 und Q_2 der folgenden Liste maximale 2-Toti in $Spin(n)$ sind:

n	Q_1	Q_2
$8k+1$	$k\beta$	γ_k
$8k+2$	$k\beta$	α_{4k}
$8k+3$	$k\beta$	α_{4k}
$8k+4$	$k\beta+\alpha_1$	α_{4k+1}
$8k+5$	$k\beta+\alpha_1$	α_{4k+1}
$8k+6$	$(k-1)\beta+2\beta'$	α_{4k+2}
$8k+7$	$k\beta+\beta'$	γ_k'
$8k+8$	$(k+1)\beta$	γ_k

Mit länglichen, elementaren Rechnungen lässt sich nun zeigen, dass die beiden 2-Tori in jeder Zeile nicht zueinander konjugiert sind. Es lässt sich aber noch mehr zeigen: Die homogenen Räume $SO(n)/Q_1$ und $SO(n)/Q_2$ sind nicht homöomorph zueinander. Da aus der zweiten Aussage die erste folgt, beschäftigen wir uns nur mit dem schwierigeren Resultat. Für den Beweis brauchen wir noch ein wenig Handwerkszeug. Wir können nun zusammenfassend folgern:

Lemma 10.3. *Sei $n \geq 8k$ und sei Q ein 2-Torus vom Typ $k\beta$ in $SO(n)$ und $\iota : Q \to SO(n)$ die Inklusion, dann ist $w_4, w_6, w_7 \in \mathrm{H}^*(BSO(n);\mathbb{F}_2)$ regulär in $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$.*

Beweis. Die Elemente $w_4, w_6, w_7 \in \mathrm{H}^*(BSO(n);\mathbb{F}_2)$ bilden eine reguläre Sequenz in $\mathrm{H}^*(BSO(8k);\mathbb{F}_2)$. Sei $G := \times_{i=1}^{k} SO(8)$, dann bilden die Element $w_4, w_6, w_7 \in \mathrm{H}^*(BSO(8k);\mathbb{F}_2)$ eine reguläre Sequenz in $\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2)$. Weiter bilden die Elemente $w_4, w_6, w_7 \in \mathrm{H}^*(BSO(8);\mathbb{F}_2)$ eine reguläre Sequenz in $\mathrm{H}^*(B\beta;\mathbb{F}_2)$. Die Kombination dieser drei Argumente beweist unsere Aussage. $\square$

Lemma 10.4. *Sei $Q \subset SO(n)$ ein maximaler 2-Torus von $Spin(n)$, sodass die Elemente $w_2, w_3, w_5 \in \mathrm{H}^*(BSO(n);\mathbb{F}_2)$ gleich 0 in $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$ ist und $w_4 \neq 0$ in $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$. Dann ist $\mathrm{H}^*(SO(n)/Q;\mathbb{F}_2)$ im Grad kleiner oder gleich 4 isomorph zu $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)/(w_4) \otimes \mathbb{F}_2[\beta]$, als Algebra mit $D\beta = 1$.*

Beweis. Die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ zur Faserung $SO(n) \to ESO(n) \to BSO(n)$ besitzt den E_2-Term

$$E_2 \cong \wedge([w_2], \dots, [w_n]).$$

Die Spektralsequenz kollabiert. Vegleichen wir dies nun mit der Ringstruktur von $\mathrm{H}^*(SO(n);\mathbb{F}_2)$ aus Abschnitt 1.2.2, die wie folgt gegeben ist:

$$\mathrm{H}^*(SO(n);\mathbb{F}_2) \cong \bigotimes_{i \text{ ungerade}} \mathbb{F}_2\left[\beta_i\right]/(\beta_i^{p_i}),$$

wobei $D\beta_i = i$ und p_i die kleinste Potenz von 2 ist, sodass $p_i \cdot i \geq n$. Wir sehen also, dass es ein multiplikatives Extensionsproblem gibt, welches wir aber sofort lösen können. Es ist aus Gradgründen klar, dass $[w_2]$ das zu β_1 korrespondierende Element in E_0 ist und im Grad kleiner oder gleich 4 ist das multiplikative Extensionsproblem durch $[w_2]^2 = [w_3]$ gelöst.

Weiter besitzt die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ zur Faserung $SO(n)/Q \to BQ \to BSO(n)$ einen E_2-Term, der im Totalgrad kleiner oder gleich 4 als Algebra isomorph zu

$$E_2 \cong \mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)/(w_4) \otimes \wedge([w_2],[w_3],[w_5]).$$

Alle Differentiale im Totalgrad kleiner gleich 4 sind trivial und kein Element dieses Bereiches liegt im Bild eines Differentials. Das heißt, auch der E_∞-Term ist als Algebra im Totalgrad kleiner oder gleich 4 isomorph zu $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)/(w_4) \otimes \wedge([w_2],[w_3],[w_5])$. Durch den Homomorphismus $\mathrm{H}^*(SO(n)/Q;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(SO(n);\mathbb{F}_2)$ können wir auch hier das Extensionproblem im Grad kleiner oder gleich 4 lösen und sehen unsere Behauptung bestätigt. □

Satz 10.5. *In $Spin(n)$, $n \geq 10$ gibt es 2-Tori Q_1' und Q_2', sodass $Spin(n)/Q_1'$ nicht homöomorph zu $Spin(n)/Q_2'$ ist.*

Beweis. Sei $Q_i = \pi(Q_i')$. Es gilt $Spin(n)/Q_1' \sim SO(n)/Q_1$ und ebenso $Spin(n)/Q_2' \sim SO(n)/Q_2$. Wir betrachten zuerst die Fälle $n = 8k+j$, $j \in \{2,\dots,6\}$, und behandeln exemplarisch den Fall $j = 2$. Sei Q_1 ein 2-Torus vom Typ α_{4k}. Sei $\iota : Q_1 \to SO(n)$ die Inkluision. Dann gilt

$$B\iota^*(w_i) = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 2 \text{ oder } i \text{ ungerade} \\ \neq 0 & \text{für } i \text{ gerade}, i > 2. \end{cases}$$

Die Lie-Gruppe $SO(n)$ ist in $LieR_2$, also hat nach Lemma 2.6 die Algebra $A := \mathrm{H}^*(BQ_1;\mathbb{F}_2)/w_2,\dots,w_n$ endliche $\mathbb{F}_2$-Dimension, also ist $w_4, w_6, \dots, w_n$ nach Lemma 2.1 eine reguläre Sequenz in $\mathrm{H}^*(BQ_1;\mathbb{F}_2)$ und es gilt:

$$Tor_{\mathrm{H}^*(BSO(n);\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BQ_1;\mathbb{F}_2),\mathbb{F}_2) \cong \wedge([w_2],[w_3],[w_5],\dots,[w_{n-1}]) \otimes A \tag{10.4}$$

ist der E_2-Term der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung $Q_1 \to SO(n) \to SO(n)/Q_1$. Die Spektralsequenz kollabiert im E_2-Term, da sie als Algebra von den Elementen in $E_2^{0,*}$ und $E_2^{-1,*}$ erzeogt wird und $d_r(E_2^{0,*}) = d_r(E_2^{-1,*}) = 0$, für $r \geq 2$, gilt.

Ist Q_2 ein 2-Torus vom Typ $k\beta$ und $\iota' : Q_2 \to SO(n)$ die Inklusion, so gilt $w_2 = w_3 = w_5 = 0$ in $\mathrm{H}^*(BQ_2;\mathbb{F}_2)$. Aber w_4, w_6, w_7 bilden nach dem vorherigen Lemma eine reguläre Sequenz. Die $\mathbb{F}_2$-Dimension des E_2-Term der Spektralsequenz ist im Totalgrad kleiner oder gleich 7 geringer als die $\mathbb{F}_2$-Dimension von (10.4) und damit gilt dies auch im E_∞-Term. Damit kann die Homologie von $SO(n)/Q_1$ und $SO(n)/Q_2$ nicht übereinstimmen.

Kommen wir nun zu den Fällen, in denen $n = 8k+j$ gilt, mit $j \in \{7,\dots,9\}$. Wir betrachten o.B.d.A. den Fall $j = 8$. Sei Q_1 ein 2-Torus vom Typ γ_k und Q_2 ein 2-Torus vom Typ $k\beta$.

Definiere

$$\begin{aligned} \sigma_i &:= \sigma_i(x_1, x_1+x_2, \dots, x_{4n-2}+x_{4n-1}, x_{4n-1}) \\ \sigma_i' &:= \sigma_i(x_1+x_{4n}, x_1+x_2+x_{4n}, \dots, x_{4n-2}+x_{4n-1}+x_{4n}, x_{4n-1}+x_{4n}) \\ \bar{\sigma}_i &:= \sigma_i(x_1, x_1+x_{4n}, x_1+x_2, x_1+x_2+x_{4n}, \\ &\qquad \dots, x_{4n-2}+x_{4n_1}, x_{4n-2}+x_{4n_1}+x_{4n}, x_{4n-1}, x_{4n-1}+x_{4n}). \end{aligned}$$

Für $w_i \in \mathrm{H}^*(BSO(8k);\mathbb{F}_2)$ gilt $w_i = \bar{\sigma}_i \in \mathrm{H}^*(BQ_1;\mathbb{F}_2)$.

Mit Lemma 1.11 können wir nun rechnen:

$$\begin{array}{rcll}
\sigma_1' & = & \sigma_1 & = 0 \\
\sigma_2' & = & \sigma_2 & \\
\sigma_3' & = & \sigma_3 & \\
\sigma_4' & = & \sigma_4 + z\sigma_3 + z^2\sigma_2 & \\
\sigma_5' & = & \sigma_5 & \\
\sigma_6' & = & \sigma_6 + z\sigma_5 + z^4\sigma_2 & \\
\sigma_7' & = & \sigma_7 + z^2\sigma_5 + z^4\sigma_3 &
\end{array}$$

Und mit Lemma 1.1 folgt dann:

$$\begin{array}{rcl}
\bar{\sigma}_1 & = & 0 \\
\bar{\sigma}_2 & = & 0 \\
\bar{\sigma}_3 & = & 0 \\
\bar{\sigma}_4 & = & z\sigma_3 + z^2\sigma_2 + \sigma_2^2 \\
\bar{\sigma}_5 & = & 0 \\
\bar{\sigma}_6 & = & \sigma_3^2 + \sigma_2^3 + z\sigma_5 + z^4\sigma_2 \\
\bar{\sigma}_7 & = & z\sigma_3^2 + z^2\sigma_5 + z^2\sigma_2\sigma_3 + z^4\sigma_3
\end{array}$$

Wir rechnen, dass

$$\bar{\sigma}_7 + z\bar{\sigma}_6 = z\sigma_2^3 + z^2\sigma_2\sigma_3 + z^4\sigma_3 + z^5\sigma_2$$

und

$$\bar{\sigma}_7 + z\bar{\sigma}_6 + z^3\bar{\sigma}_4 = z\sigma_2^3 + z^2\sigma_2\sigma_3 + z^3\sigma_2^2.$$

in $\mathrm{H}^*(BQ_1;\mathbb{F}_2)$ gilt. Und letztendlich sehen wir, dass

$$\bar{\sigma}_7 + z\bar{\sigma}_6 + z^3\bar{\sigma}_4 + z\sigma_2\bar{\sigma}_4 = 0$$

gilt und somit liegt $\bar{\sigma}_7$ im von $\bar{\sigma}_4$ und $\bar{\sigma}_6$ erzeugten Ideal in $\mathrm{H}^*(BQ_1;\mathbb{F}_2)$. Die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung $SO(8k)/Q_1 \to BQ_1 \to BSO(8k)$ besitzt den E_2-Term

$$Tor_{\mathrm{H}^*(BSO(n);\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BQ_1;\mathbb{F}_2),\mathbb{F}_2),$$

der nach den vorherigen Überlegungen, im Totalgrad kleiner gleich 7 isomorph zu

$$\wedge([w_2],[w_3],[w_5],[w_7]) \otimes \mathrm{H}^*(BQ_1;\mathbb{F}_2)/(w_4)$$

ist. Wie zuvor bleibt dieser Modul bis in den E_∞-Term unverändert. Mit dem selben Argument wie im vorherigen Fall folgt die Aussage. □

Lemma 10.6. *Sei $Q \subset SO(n)$ ein 2-Torus in $Spin(n)$. Dann gilt: $w_2 \in \mathrm{H}^*(BSO(n);\mathbb{F}_2)$ ist gleich 0 in $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$.*

Beweis. Sei Q ein 2-Torus vom Rang $\ell+1$ und wir nehmen an, dass wir die Aussage bereit für einen 2-Torus Q' vom Rang ℓ gezeigt haben. Seien die Erzeuger $x_1,\dots,x_{\ell+1}$ von $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$ so gewählt, dass gilt:

$$\mathrm{H}^*(BQ';\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[x_1,\dots,x_\ell] \subset \mathbb{F}_2[x_1,\dots,x_{\ell+1}] \cong \mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$$

Seien $\beta_1,\dots,\beta_n$ die Gewichte der reellen Darstellung $Q \to SO(n)$ und seien $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ die Gewichte der induzierten Darstellung $Q' \subset Q \to SO(n)$. Nach den Eigenschaften die ein 2-Torus von $Spin(n)$ besitzen, folgern wir, dass bis auf Nummerierung folgendes gilt: Es gibt ein k, sodass $\alpha_1 = \beta_1,\dots,\alpha_{n-4k} = \beta_{n-4k}$ und $\alpha_{n-4k+1} + x_{\ell+1} =$

$\beta_{n-4k+1}, \ldots, \alpha_n + x_{\ell+1} = \beta_n$ gilt. Und von den Gewichten $\beta_{n-4k}, \ldots, \beta_n$ gibt es eine gerade Anzahl, die den Summanden x_i, $1 \leq i \leq \ell$ enthält, also gilt

$$\sigma_1(\alpha_{n-4k+1}, \ldots, \alpha_n) \quad = \quad 0 \tag{10.5}$$

Es gilt $w_2 = \sigma_2(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ und wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\sigma_2(\beta_1, \ldots, \beta_n) \quad &\overset{1.1}{=} \quad \sigma_2(\beta_1, \ldots, \beta_{n-4k}) \\
&\qquad +\sigma_1(\beta_1, \ldots, \beta_{n-4k})\sigma_1(\beta_{n-4k+1}, \ldots, \beta_n) \\
&\qquad +\sigma_2(\beta_{n-4k+1}, \ldots, \beta_n) \\
&= \quad \sigma_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-4k}) \\
&\qquad +\sigma_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-4k})(\sigma_1(\alpha_{n-4k+1}, \ldots, \alpha_n) + 4k \cdot x_{\ell+1}) \\
&\qquad +\sigma_2(\alpha_{n-4k+1} + x_{\ell+1}, \ldots, \alpha_n + x_{\ell+1}) \\
&\overset{1.11}{=} \quad \sigma_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-4k}) \\
&\qquad +\sigma_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-4k})\sigma_1(\alpha_{n-4k+1}, \ldots, \alpha_n) \\
&\qquad +\sigma_2(\alpha_{n-4k+1}, \ldots, \alpha_n) \\
&\qquad +\sigma_1(\alpha_{n-4k+1}, \ldots, \alpha_n)x_{\ell+1} \\
&\overset{10.5}{=} \quad \sigma_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-4k}) \\
&\qquad +\sigma_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-4k})\sigma_1(\alpha_{n-4k+1}, \ldots, \alpha_n) \\
&\qquad +\sigma_2(\alpha_{n-4k+1}, \ldots, \alpha_n) \\
&\overset{1.1}{=} \quad \sigma_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)
\end{aligned}$$

Und $\sigma_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ist gleich 0 nach unsere Induktionsannahme.

□

Bemerkung 10.7. Mit ein wenig mehr Rechenaufwand lässt sich die vorherige Aussage verallgemeinern, sodass gilt: $w_{2^l+1} = 0$ in $\mathrm{H}^*(BQ; \mathbb{F}_2)$. ◇

Korollar 10.8. *Ist Q ein 2-Torus in $Spin(n)$, mit $-1 \in Q$, dann gilt*

$$k(Spin(n)/Q; \mathbb{F}_2) = 0.$$

Beweis. Wir betrachten die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung $\pi(Q) \to SO(n) \to SO(n)/\pi(Q)$. Dann ist nach dem vorherigen Lemma der E_2-Term als Algebra isomorph zu $\wedge([w_2]) \otimes A_2$, mit A_2 geeignet. Nach Lemma 2.42 ist die $\mathbb{F}_2$-Dimension von A_2 gerade. Nach Satz 5.7 ist $E_i \cong \wedge([w_2]) \otimes A_i$ als Algebra und A_i ist induktiv von gerader $\mathbb{F}_2$-Dimension. Also ist $|E_\infty|$ von durch 4 teilbar. □

10.2 Quotienten von $Spin(n)$

Zuerst wollen wir nun die Kohomologie von $Spin(2n)/SU(n)$ bestimmen. Und dann analysieren wir die Differentiale in der Eilenberg-Moore-Spektalsequenz zu Faserung $Spin(2n)/SU(n) \to BSU(n) \to BSpin(n)$ um die Ergebnisse später auf die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung $Spin(n)/G \to BG \to BSpin(n)$ zu übertragen, dabei sei $G \subset SU(n)$.

Die homogenen Räume $Spin(2n)/U(n)$ und $SO(2n)/U(n)$ sind homöomorph, wir betrachten deshalb erst einmal $\iota : U(n) \to SO(2n)$. Der Homomorphismus ι induziert $B\iota^* : \mathrm{H}^*(BSO(2n);\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(BU(n);\mathbb{F}_2)$. Es gilt

$$B\iota^*(w_i) = \begin{cases} c_j & \text{für } i = 2j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt also

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BSO(2n);\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BU(n);\mathbb{F}_2), \mathbb{F}_2) \cong \wedge([w_3], [w_5], \ldots, [w_{2n-1}]).$$

Das kommutative Diagramm von Faserungen

$$\begin{tikzcd} SO(2n) \arrow[r] \arrow[d] & ESO(2n) \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & BSO(2n) \arrow[d] \\ SO(2n)/U(n) \arrow[r] & BU(n) \arrow[r] & BSO(2n) \end{tikzcd}$$

induziert einen injektiven Homomorphismus

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{id}}(B\pi^*, \mathrm{id}) : \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BSO(2n);\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BU(n);\mathbb{F}_2), \mathbb{F}_2) \to \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BSO(2n);\mathbb{F}_2)}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$$

von E_2-Termen der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz und so auch von E_∞-Termen; beide Spektralsequenzen brechen zusammen. Der Homomorphismus $\mathrm{Tor}_{\mathrm{id}}(B\pi^*, \mathrm{id})$ ist der Homomorphismus der durch die Spaltenfiltrierung von

$$\mathrm{Tor}_{C^*(BSO(2n);\mathbb{F}_2)}(C^*(BU(n);\mathbb{F}_2), \mathbb{F}_2) \to \mathrm{Tor}_{C^*(BSO(2n);\mathbb{F}_2)}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$$

entsteht. Aus der Ringstruktur von $\mathrm{H}^*(SO(2n);\mathbb{F}_2)$ können wir via dieses Homomorphismus also die Ringstruktur von $\mathrm{H}^*(SO(2n)/U(n);\mathbb{F}_2)$ herleiten. Nach Abschnitt 1.2.2 gilt

$$\mathrm{H}^*(SO(n);\mathbb{F}_2) \cong \bigotimes_{i \text{ ungerade}} [\beta_i]/(\beta_i^{p_i}),$$

wobei $D\beta_i = i$ und p_i die kleinste Potenz von 2 ist, sodass $p_i \cdot i \geq n$ gilt. Wir können nun das multiplikative Extensionsproblem der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung

$$SO(2n)/U(n) \to BU(n) \to BSO(2n)$$

lösen. Es gilt

$$\mathrm{H}^*(SO(2n)/U(n);\mathbb{F}_2) \cong \bigotimes_{i \text{ ungerade}} \mathbb{F}_2[\beta_{2i}]/(\beta_{2i}^{2p_i}),$$

wobei $D\beta_{2i} = 2i$ und $2p_i$ die kleinste Potenz von 2 ist, sodass $2p_i \cdot i \geq 2n$ gilt.

Betrachten wir nun die Serre-Spektralsequenz zur Faserung

$$S^1 \sim U(n)/SU(n) \to Spin(2n)/SU(n) \to Spin(2n)/U(n).$$

Es gilt $E_2 \cong \mathrm{H}^*(S^1, \mathbb{F}_2) \otimes \mathrm{H}^*(SO(2n)/U(n);\mathbb{F}_2)$. Sei x der Erzeuger von $\mathrm{H}^*(S^1;\mathbb{F}_2)$ im Grad 1. Wir werden später noch sehen, dass $Spin(2n)/SU(n)$ einfachzusammenhängend ist und so muss für das Differential d_2 auf E_2 gelten: $d_2(x) = \beta_2$. Der $E_3 = E_\infty$-Term ist als graduierter Modul isomorph zu $\mathrm{H}^*(Spin(2n)/U(n);\mathbb{F}_2)$. Es folgt:

Lemma 10.9. *Sei p_i die kleinste Potenz von 2, sodass gilt $p_i \cdot i \geq n$. Als graduierter Modul gilt:*

$$\mathrm{H}^*(Spin(2n)/U(n);\mathbb{F}_2) \cong \mathrm{H}^*(SO(2n)/U(n);\mathbb{F}_2)/(\beta_2) \otimes \wedge(e),$$

wobei $De = D\beta_2^{p_1} - 1 = 2^{p_1} - 1$ ist und

$$\mathrm{H}^*(SO(2n)/U(n);\mathbb{F}_2) \cong \bigotimes_{i \text{ ungerade}} \mathbb{F}_2[\beta_{2i}]/(\beta_{2i}^{2p_i}),$$

mit $D\beta_{2i} = 2i$.

Nach (10.2) gilt für $j \in \mathbb{N}$ mit $2^j + 1 \leq n$ die Gleichheit $\mathrm{Sq}^{2^{j-1}}(w_{2^{j-1}+1}) = w_{2^j+1} + V_j \in \mathrm{H}^*(BSO(n), \mathbb{F}_2)$, mit $V_j \in \mathbb{F}_2[w_2, \dots, w_{2^j}]$ geeignet. Definiere

$$y_j := \mathrm{Sq}^{2^{j-1}} \mathrm{Sq}^{2^{j-2}} \cdots \mathrm{Sq}^2 \mathrm{Sq}^1(w_2),$$

dann gilt induktiv für j mit $2^j + 1 \leq n$, dass

$$y_j = w_{2^j+1} + W_j \in \mathrm{H}^*(BSO(n), \mathbb{F}_2)$$

mit $W_j \in \mathbb{F}_2[w_2, \dots, w_{2^j}]$. Damit können wir aus Korollar 2.55 folgern:

Sei k die größte Zahl, sodass $2^k + 1 \leq n$ gilt und sei $c_{i,j} \in \mathrm{H}^*(BSpin(n);\mathbb{F}_2)$, sodass

$$y_i := \sum_j w_j c_{i,j} \qquad , i \in \{k+1, \dots, h\}$$

und

$$y_i := w_{2^i+1} + \sum_j w_j c_{i,j} \qquad , i \notin \{1, \dots, k\},$$

gilt. Sei J das Ideal $(y_1, \dots, y_k)$ in $\mathrm{H}^*(BSO(n);\mathbb{F}_2)$ und sei $\bar{c_{i,j}}$ die Restklasse von $c_{i,j}$ in $\mathrm{H}^*(BSpin(n);\mathbb{F}_2)$. Definiere die bigraduierte Algebra

$$\mathcal{T} := \Lambda \otimes \wedge([e_{2^h}]) \otimes \Gamma \otimes_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^*(BSpin(n);\mathbb{F}_2).$$

Dabei sei Λ der äußeren Algebra $\wedge([w_4], \dots, [w_n])$ ohne die Erzeuger $[w_{2^l+1}]$, für $2 \leq l \leq k$ und $D[w_i] = (-1, i)$ und Γ dei Algebra der geteilten Potenzen $\Gamma(v_{k+1}, \dots, v_{h-1})$, mit $Dv_j = (-2, 2^j + 1)$.

Vermöge des Differentials d,

$$\begin{array}{rcll} d([x_i]) &=& x_i, & \\ d(v_i) &=& \sum_j [x_i]\bar{c_{i,j}}, & \\ d(a) &=& 0 & \text{für } a \in \mathrm{H}^*(BSpin(n);\mathbb{F}_2), \end{array}$$

wird $\mathcal{T}$ zu einer $\bar{A}$-freien Auflösung von $\mathbb{F}$.

Gegeben die Inklusion $\iota : SU(n) \to Spin(2n)$, dann gilt:

$$B\iota^*(w_i) = \begin{cases} c_j & \text{für } i = 2j \\ 0 & i \text{ ungerade} \end{cases}$$

und $B\iota^*(y_{2^h})$ liegt im von $w_2, w_4, \dots, w_{2n}$ erzeugten Ideal von $\mathrm{H}^*(BSU(n);\mathbb{F}_2)$. Damit folgt:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}(\mathcal{T} \otimes \mathrm{H}^*(BSU(n);\mathbb{F}_2)) &=& \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BSpin(2n);\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BSU(n);\mathbb{F}_2), \mathbb{F}_2) \\ &=& \Lambda' \otimes \wedge([y_{2^h}]) \otimes \Gamma \end{array}$$

Dabei ist Γ wie zuvor und Λ' ist die äußere Algebra erzeugt von den $[w_i]$, mit i ungerade und $i \neq 2^l + 1$, für $1 \leq l \leq k$. Wir betrachten nun die bigraduierte Algebra $\mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BSpin(2n);\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BSU(n);\mathbb{F}_2),\mathbb{F}_2)$ als den E_2-Term der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung $Spin(2n)/SU(n) \to BSU(n) \to BSpin(2n)$ und wollen die Differentiale dieser Spektralsequenz bestimmen.

Da $E_2^{0,*}$ im Grad 0 konzentriert ist, gilt $d_r(v_i) = 0$, $i \in \{k+1,\dots,h-1\}$. Da Λ' von $E_2^{-1,*}$ erzeugt wird, gilt $d_2(\Lambda') = 0$. Wir können aus Gradgründen auch folgern, dass kein Differential gibt, welches sein Bild in $\Lambda' \otimes \wedge(v_{k+1})$ hat. Aus Lemma 10.9 folgern wir damit, dass E_∞ als graduierter Modul isomorph zu $\Lambda' \otimes \wedge([v_{k+1}])$ ist. Das Element $v_{k+1}^{(2)} \in E_2$ muss also bis in den E_∞-Term verschwunden sein. Aus Gradgründen ist die einzige Möglichkeit $d_2(v_{k+1}^{(2)}) = v_{k+2}$. Um zu zeigen, dass $d_2(v_{k+i}^{(2)}) = v_{k+i+1}$ gilt, gehen wie wie folgt vor: Wir betrachten den Homomorphismus von Faserungen

$$\begin{tikzcd} Spin(2n)/SU(n) \arrow[r] \arrow[d] & BSU(n) \arrow[r] \arrow[d] & BSpin(2n) \arrow[d] \\ Spin(2^{k+i}+4)/SU(2^{k+i-1}+2) \arrow[r] & BSU(2^{k+i-1}+2) \arrow[r] & BSpin(2^{k+i}+4). \end{tikzcd}$$

In der Spektralsequenz zur unteren Faserung gilt $d_2(v_{k+i}^{(2)}) = v_{k+i+1}$ und der induzierte Homomorphismus von Spektralsequenzen beweist unsere Aussage. Mit Satz 7.9 folgt dann $d_2(v_i^{(2^j)}) = v_{i+1}\nabla v_i^{(2^j-2)}$, $i \in \{k+1,\dots,h-2\}, j \in \mathbb{N}$. Aus Gradgrunden muss gelten $d_2(v_{h-1}^{(2^j)}) = 0$. Es folgt also $E_3 \cong \Lambda' \otimes \wedge([y_{2^h}], v_{k+1}) \otimes \Gamma(v_{h-1}^{(2)})$. Als einzige verbleibende Möglichkeiten für Differentiale bleibt nun nur noch $d_3(v_{h-1}^{(2^j)}) = [y_{2^h}]\nabla v_{h-1}^{(2^j-2)}, j \in \mathbb{N}$. Und so gilt $E_4 = E_\infty \cong \Lambda' \otimes \wedge(v_{k+1})$.

Zusammenfassend folgt also

Lemma 10.10. *Die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung $Spin(2n)/SU(n) \to BSU(n) \to BSpin(2n)$ besitzt den E_2-Term*

$$\Lambda' \otimes \wedge([y_{2^h}]) \otimes \Gamma,$$

dabei sind die nicht trivialen Differentiale gegeben durch $d_2(v_i^{(2^j)}) = v_{i+1}\nabla v_i^{(2^j-2)}$, $i \in \{k+1,\dots,h-2\}, j \in \mathbb{N}$. Der E_3-Term ist gegeben durch

$$E_3 \cong \Lambda' \otimes \wedge([y_{2^h}], v_{k+1}) \otimes \Gamma(v_{h-1}^{(2)}),$$

die nicht trivialen Differentiale sind $d_3(v_{h-1}^{(2^j)}) = [y_{2^h}]\nabla v_{h-1}^{(2^j-2)}, j \in \mathbb{N}$. Der Term $E_4 = E_\infty$ ist als Algebra isomorph zu

$$\Lambda' \otimes \wedge(v_{k+1}).$$

Sei nun $G \subset SU(n) \subset Spin(2n)$ eine Lie-Untergruppe. Es gilt

$$\begin{aligned} & \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(Spin(2n);\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2),\mathbb{F}_2) \\ \cong\ & \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(SU(n);\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2),\mathbb{F}_2) \otimes \Lambda' \otimes \wedge([y_{2^h}]) \otimes \Gamma \end{aligned}$$

und dies ist der E_2-Term der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ zur Faserung $Spin(2n)/G \to BG \to BSpin(2n)$ aus. Mit den Überlegungen die zu Lemma 5.4 führen können wir analog auch folgern, dass

$$d_2(\mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(SU(n);\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2) \otimes 1) \in \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(SU(n);\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2) \otimes 1$$

gilt. Betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} SU(n)/G \arrow[r] \arrow[d] & BG \arrow[r] \arrow[d] & BSU(n) \arrow[d] \\ Spin(2n)/G \arrow[r] & BG \arrow[r] & BSpin(2n), \end{tikzcd}$$

indem die Zeilen jeweils Faserungen sind. Die untere Faserung induziert die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz E_r, die obere induziere die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz $\bar{E}_r$. Der induzierte Homomorphismus von Spektralsequenzen der aus der Abbildung von Faserungen induziert wird, zeigt also: Kennen wir die Differentiale d_2 der Spektralsequenz $\bar{E}_2 \cong \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(SU(n);\mathbb{F}_2)}(\mathrm{H}^*(BG;\mathbb{F}_2),\mathbb{F}_2)$, so kennen wir zusammen mit dem vorherigen Lemma alle Differentiale im E_2-Term. Und es gilt

$$E_3 \cong \bar{E}_3 \otimes \Lambda' \otimes \wedge([y_{2^h}], v_{k+1}) \otimes \Gamma(v_{h-1}^{(2)}),$$

als Algebra. Nun wollen wir zeigen, dass $d_3(\bar{E}_3 \otimes 1) \in \bar{E}_3 \otimes 1$ liegt. Wir können hiefür die Argumente benutzen, die zum Beweis von Satz 5.1 führten. Wir müssen nur einen einzelenen Punkt nocheinmal überlegen und dies ist der zu Lemma 5.6 führt. Wenn wir uns aber ins Geweissen rufen, dass $d_1(v_i) = 0$ für $i \in \{k+1, \ldots, h-1\}$ gilt, so ändert sich an unseren Überlegungen nichts. Es gilt also

$$E_4 \cong \bar{E}_4 \otimes \Lambda' \otimes \wedge(v_{k+1}),$$

als Algebra. Induktiv erhalten wir so, dass $d_r\bar{E}_r \otimes 1 \in \bar{E}_r \otimes 1$ liegt und dass

$$E_\infty \cong \bar{E}_\infty \otimes \Lambda' \otimes \wedge(v_{k+1})$$

als Algebra gilt. Wir fassen damit zusammen:

Satz 10.11. *Sei G eine abgeschlossene Untergruppe von $SU(n)$, mit $n \geq 5$, dann gilt*

$$\mathrm{H}^*(Spin(2n)/G;\mathbb{F}_2 \cong \mathrm{H}^*(SU(n)/G;\mathbb{F}_2) \otimes \Lambda' \otimes \wedge(v_{k+1})$$

als graduierter $\mathbb{F}_2$-Modul.

Korollar 10.12. *Sei G eine abgeschlossene Untergruppe von $SU(n)$, mit $n \geq 5$, dann ist $k(Spin(2n)/G;\mathbb{F}_2) = 0$.*

Beispiel 10.13. Sei $n = 4m$ und $b = e_1 \cdots e_n \in Spin(n)$, dann ist $Ss(n) = Spin(n)/\langle b \rangle$ die Halb-Spin-Gruppe. Sei $\iota : SU(2m) \hookrightarrow Spin(4m)$ die Einbettung, dann gilt $\iota(-1) = b$. Sei Q der von -1 erzeugte 2-Torus in $SU(2m)$ und $\psi^* : \mathrm{H}^*(BSU(2m);\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2) := \mathbb{F}_2[z]$ die von der Inklusion induzierte Abbildung, dann gilt

$$\psi^*(w_{2j}) = \binom{2m}{j} z^{2j}.$$

Das heißt, ist r die größte Potenz von 2 in m, dann gilt $\psi^*(w_{2j})$ für $j < r$ und $\psi^*(w_{2r}) = z^{2r}$. Sei $\bar{\Delta}$ die äußere Algebra $\wedge([w_4],[w_6],\ldots,[w_{4m}])$ ohne die Erzeuger $[w_i]$ mit i einer Potenz von 2. Dann folgt mit unserem vorherigen Satz, dass

$$\mathrm{H}^*(Ss(4m);\mathbb{F}_2) \cong \bar{\Delta} \otimes \wedge(v_{k+1}) \otimes \mathbb{F}_2[z]/(z^{2r})$$

als graduierter Modul gilt. Die Struktur als Steenrod-Algebra können wir in [IKT76, 4.4] nachlesen. Sie stimmt als graduierter Modul natürlich mit unserer Berechnung überein. ◇

10.3 Folgerungen und Bemerkungen

Wir wollen nun noch einige Aussagen über die $\mathbb{F}_p$-Semicharakteristik von $Spin(2n)/G$ treffen und für einen 2-Torus $Q \subset Spin(n)$ die $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik bestimmen.

Sei $G \subset SU(n) \subset Spin(2n)$. Die Abbildung $\pi : Spin(n) \to SO(n)$ ist ein zweiblättrige Überlagerung, es gilt also $\mathrm{H}^*(Spin(2n)/G; \mathbb{Q}) \cong \mathrm{H}^(SO(2n)/G; \mathbb{Q})$ und so folgt:

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BSpin(2n);\mathbb{F}_2)}(\mathbb{F}_2; \mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_2)) \cong \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BSO(2n);\mathbb{F}_2)}(\mathbb{F}_2; \mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_2)),$$

als bigraduierte Algebra. Wir wollen den rechten Ausdruck untersuchen. Der Koszul-Komplex $\mathcal{K}^{*,*} := \mathcal{K}^{*,*}([c_1], \ldots, [c_n])$ ist eine $\mathrm{H}^*(BU(n); \mathbb{Q})$-freie Auflösung von $\mathbb{Q}$. Da $\mathrm{H}^*(BU(n); \mathbb{Q})$ ein $\mathrm{H}^*(BSO(2n); \mathbb{Q})$-freier Modul ist, ist $\mathcal{K}^{*,*}$ eine $\mathrm{H}^*(BSO(2n); \mathbb{Q})$-freie Auflösung von $\mathbb{Q}$ und wir berechnen so die Homologie des Koszul-Komplexes $\mathcal{K} \otimes_{\mathrm{H}^*(BSO(2n);\mathbb{Q})} \mathrm{H}^*(BG; \mathbb{Q})$ wie folgt:

$$\begin{aligned} & \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BSO(2n);\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}, \mathrm{H}^*(BG; \mathbb{Q})) \\ \cong\ & \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(BU(n);\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}, \mathrm{H}^*(BG; \mathbb{Q})) \otimes \mathrm{H}^*(BU(n); \mathbb{Q}) / \mathrm{H}^*(BSO(2n); \mathbb{Q}) \\ \cong\ & \mathrm{H}^*(SU(n)/G; \mathbb{Q}) \otimes \mathrm{H}^*(BS^1; \mathbb{Q}) \otimes \mathrm{H}^*(BU(n); \mathbb{Q}) / \mathrm{H}^*(BSO(2n); \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

Die unterste Zeile besitzt also eine durch 4 teilbare $\mathbb{Q}$-Dimension und somit ist $k(Spin(2n)/G; \mathbb{Q}) = 0$ und mit Abschnitt 3.2 können wir dann weiter folgern:

Korollar 10.14. *Ist* $\dim Spin(2n)/G = 4k + 1$, *dann ist* $k(Spin(2n)/G; \mathbb{F}_p) = 0$ *unabhängig von* p.

Beweis. Sei $X := Spin(2n)/G$. Sei E_r die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ zur Faserung $X \to BG \to BSpin(2n)$, dann sehen wir, dass das Element vom höchsten Totalgrad in E_∞ nicht in $E_\infty^{0,*}$ liegen kann. Das heißt aber: Das Element vom höchsten Totalgrad in $E_0^{p,q} := \mathrm{Tor}^{p,q}_{\mathrm{C}^*(BSpin(2n);\mathbb{F}_2)}(\mathbb{F}_2; \mathrm{C}^*(BG; \mathbb{F}_2))$ kann nicht in $E_0^{0,*}$ liegen. Damit folgt nach den Überlegungen aus Abschnitt 3.2, dass $\langle w_2(X) w_{4k-1}(X), [X] \rangle = 0$ gilt. Damit ist $k(Spin(2n)/G; \mathbb{Q}) = k(Spin(2n)/G; \mathbb{F}_2) = 0$ und die Aussage folgt aus Korollar 3.2. □

Und zuletzt noch eine Komposition der Aussagen des gesamten Kapitels:

Satz 10.15. *Sei* Q *ein* 2-*Torus und* T *ein Torus in* $Spin(2n)$ *und sei* $\dim Spin(2n)/Q$ *bzw.* $\dim Spin(2n)/T$ *ungerade, dann gilt*

$$k(Spin(2n)/Q; \mathbb{F}_2) = 0$$

bzw.

$$k(Spin(2n)/T; \mathbb{F}_2) = 0.$$

Beweis. Ist $-1 \in Q$ bzw. $-1 \in T$, dann folgt die Aussage durch Korollar 10.8. Liegt -1 nicht in Q bzw. T, dann faktorisiert die Inklusion $Q \to Spin(2n)$ bzw. $T \to Spin(2n)$ über $SU(n)$ und die Aussage folgt aus dem vorherigen Satz. □

Kapitel 11

Spin-Darstellungen

Der Notation von [BtD85, VI.6] folgend sind die Fundamentalen Darstellungen von $Spin(2n)$ die Darstellungen $\wedge_1, \dots, \wedge_{n-2}$ die über $SO(2n)$ faktorisieren und die beiden Halbspindarstellungen Δ_n^+, Δ_n^-. Der Darstellungsring von $Spin(2n)$ ist durch $\mathbb{Z}[\wedge_1, \dots, \wedge_{n-2}, \Delta_n^+, \Delta_n^-]$ gegeben. Der Darstellungsring von $Spin(2n+1)$ ist durch $\mathbb{Z}[\wedge_1, \dots, \wedge_{n-1}, \Delta_n]$ gegeben, dabei sind $\wedge_1, \dots, \wedge_{n-1}$ wieder die Darstellungen die über $SO(2n+1)$ faktorisieren und Δ_n ist die Spindarstellung. Wir wollen in diesem Abschnitt die induzieren Homomorphismen $B\Delta_n{}^*, B\Delta_n^{+*}$ und $B\Delta_n^{-*}$ für kleine n untersuchen. Speziell wollen wir die Einschränkung von $\Delta_{10}^+ + \Delta_{10}^- : Spin(10) \to SU(16)$ auf den maximalen Torus und 2-Torus analysieren und die induzierte Abbildung $B\Delta_{10}^{+*} : \mathrm{H}^*(BSU(16); \mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(BSpin(10); \mathbb{F}_2)$ angeben. Im Folgenden schreiben wir Δ_n' für $\Delta_n^+ + \Delta_n^-$. Bei unserem Vorhaben tritt das Problem auf, dass es in $Spin(n)$ keine kanonische Wahl für einen maximalen Torus und, wie im vorherigen Abschnitt gesehen, schon gar keine für einen maximalen 2-Torus gibt.

Im Folgenden werden wir, wie in [BtD85, VI.6] beschrieben, mit C_n die n-te Clifford-Algebra zur quadratischen Form $Q_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto -|x|^2$ bezeichnen und mit C_n' die n-te Clifford-Alegbra zur quadratischen Form $-Q_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto |x|^2$. Es gilt die Isomorphie

$$C_{n+2} \cong C_n' \otimes C_2$$

und

$$C_{n+2}' \cong C_n \otimes C_2',$$

die induziert wird durch die Abbildungen

$$\psi(e_i) = \begin{cases} e_{i-2}' \otimes e_1 e_2 & \text{für } 2 < i \leq n+2 \\ 1 \otimes e_i & \text{für } i = 1, 2 \end{cases}$$

und

$$\psi(e_i') = \begin{cases} e_{i-2} \otimes e_1' e_2' & \text{für } 2 < i \leq n+2 \\ 1 \otimes e_i & \text{für } i = 1, 2. \end{cases}$$

Dabei sei $e_1' = (1, -1)$ in C_1' und

$$e_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

in C_2'. Mit C_n^0 bezeichnen wir die Unteralgebra von C_n, die nur aus dem geraden Anteil besteht. C_{n-1} ist isomorph zu C_n^0, vermöge des Isomorphismus $a^0 + a^1 \mapsto a^0 + a^1 e_n$ für $a^\nu \in C_{n-1}^\nu$.

11.1 Die Darstellung $Spin(10) \to SU(16)$

Dieser Abschnitt umfasst sehr viele Rechnungen die langwierig und aufwendig sind. Manches Mal ist ein Computer nötig um der schieren Menge an Gleichungen und Variablen Herr zu werden. Diese Rechnungen werden im kommenden Text nicht aufgeführt, da sie viel Platz beanspruchen und keine weitere Erleuchtung in das Verständnis der Spin-Darstellungen bringen.

Indem wir die Abbildung $Spin(7) \to C_7^0 \to C_6 \to M(8\times 8, \mathbb{R})$ betrachten finden wir heraus, dass $\Delta_7 : Spin(7) \to SO(8)$ eingeschränkt auf den 2-Torus bis auf Konjugation gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
-1 &\mapsto \operatorname{diag}(-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1)\\
e_1e_2e_3e_4 &\mapsto \operatorname{diag}(-1,-1,-1,-1,+1,+1,+1,+1)\\
e_3e_4e_5e_6 &\mapsto \operatorname{diag}(+1,+1,-1,-1,-1,-1,+1,+1)\\
e_1e_3e_5e_7 &\mapsto \operatorname{diag}(-1,+1,-1,+1,-1,+1,-1,+1).
\end{aligned}$$

Sei Q_1 der von -1 und Q_2 der von $e_1e_2e_3e_4, e_3e_4e_5e_6, e_1e_3e_5e_7$ erzeugte 2-Torus in $Spin(7)$. Es sei $\mathrm{H}^*(BQ_1;\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[z]$ und $Q = Q_1 \times Q_2$. Weiter sei Q' die Projektion in $SO(7)$. Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[d] & Q \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & Q' \arrow[d]\\
SO(8) & Spin(7) \arrow[l, "\Delta_7"'] \arrow[r, "\pi"] & SO(7),
\end{tikzcd}$$

wodurch sich mit dem selben Argument wie in Lemma 10.1 zeigt, dass $B\Delta_7^*(w_i) = w_i$ für $i = 4,6,7$ und $B\Delta_7^*(w_i) = 0$ für $i = 2,3,5$ gilt. Mit Korollar 1.12 zeigt sich, dass $w_8 = z^8 + z^4w_4 + z^2w_6 + zw_7 \in \mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$. Da die Inklusion von $w_4, w_6, w_7 \in \mathrm{H}^*(BSpin(7);\mathbb{F}_2)$ in $\mathrm{H}^*(BQ;\mathbb{F}_2)$ in der Unteraglgebra $\mathrm{H}^*(BQ_2;\mathbb{F}_2)$ liegt, folgt damit, dass $B\Delta_7^*(w_8) = z_8$ sein muss. Die meiste Information über $\Delta_8 : Spin(8) \to SO(8) \times SO(8)$ erhalten wir schon durch die Komutativität des Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
Spin(7) \arrow[r, "\Delta_7"] \arrow[d, "\iota"] & SO(8) \arrow[d, "\operatorname{diag}"]\\
Spin(8) \arrow[r, "\Delta_8"] & SO(8)\times SO(8)
\end{tikzcd}$$

Wir sehen, dass gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta_8(e_1e_2e_3e_4) &= \operatorname{diag}\circ\Delta_7(e_1e_2e_3e_4)\\
\Delta_8(e_3e_4e_5e_6) &= \operatorname{diag}\circ\Delta_7(e_3e_4e_5e_6)\\
\Delta_8(e_1e_3e_5e_7) &= \operatorname{diag}\circ\Delta_7(e_1e_3e_5e_7)
\end{aligned}$$

und können über $B\Delta_8^* : \mathrm{H}^*(BSO(8)\times SO(8);\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(BSpin(8);\mathbb{F}_2)$ in Erfahrung bringen, dass $B\Delta_8^*(1\otimes w_i) = B\Delta_8^*(w_i \otimes 1) = w_i$ für $i = 4,6,7$ und $B\Delta_8^*(1\otimes w_i) = B\Delta_8^*(w_i\otimes 1) = 0$ für $i = 2,3,5$.

Um $B\Delta_8^*$ zu verstehen, bleibt also noch zu zeigen, was mit $1\otimes w_8$ und $w_8 \otimes 1$ geschieht. Angenommen $B\Delta_8'^*(1\otimes w_8) = B\Delta_8'^*(w_8\otimes 1) = y_8$, dann folgt für die

Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung

$$SO(8) \times SO(8)/Spin(8) \to BSpin(8) \to BSO(8) \times SO(8),$$

dass der E_2-Term gegeben ist durch

$$E_2^{*,*} \cong \wedge(g_2, g_2', g_3, g_3', g_4, g_5, g_5', g_6, g_7, g_8) \otimes \mathbb{F}_2\left[w_8\right],$$

wobei g_i bzw. g_i' Erzeuger im Bigrad $(-1, i)$ sind. Damit kollabiert die Spektralsequenz nach der Leibniz-Regel im E_2-Term. Es gilt aber $|E_2| = \infty$, was der Tatsache widerspricht, dass E_2 als graduierter $\mathbb{F}_2$-Modul isomorph zur Kohomologie der Mannigfaltigkeit $SO(8) \times SO(8)/Spin(8)$ ist. Zum selben Resultat kommen wir, wenn wir $B\Delta_8'^*(1 \otimes w_8) = B\Delta_8'^*(w_8 \otimes 1) = z_8 + w_8$ annehmen. Wir gehen o.B.d.A davon aus, dass $B\Delta_8'^*(1 \otimes w_8) = z_8 + w_8$ und $B\Delta_8'^*(w_8 \otimes 1) = z_8$ gilt.

Korollar 11.1. *Ist Q ein maximaler 2-Torus in $Spin(8)$, so bilden die Elemente $w_4, w_6, w_7, w_8, z_8 \in \mathrm{H}^*(BSpin(8); \mathbb{F}_2)$ eine reguläre Sequenz in $\mathrm{H}^*(BQ; \mathbb{F}_2)$.*

Beweis. Sei Q erzeugt von $-1, e_1e_2e_3e_4, e_3e_4e_5e_6, e_1e_3e_5e_7, e_1 \dots e_8$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[d] \arrow[dr] & \\
Spin(8) \arrow[r, "\Delta_8"] & SO(8) \times SO(8)
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Und bis auf Konjugation berechnen wir

$$\begin{aligned}
\Delta_8(-1) &= -1, -1 \\
\Delta_8(e_1e_2e_3e_4) &= \mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1,1,1,1,1), \mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1,1,1,1,1) \\
\Delta_8(e_3e_4e_5e_6) &= \mathrm{diag}(1,1,-1,-1,-1,-1,1,1), \mathrm{diag}(1,1,-1,-1,-1,-1,1,1) \\
\Delta_8(e_1e_3e_5e_7) &= \mathrm{diag}(-1,1,-1,1,-1,1,-1,1), \mathrm{diag}(-1,1,-1,1,-1,1,-1,1) \\
\Delta_8(e_1 \dots e_8) &= 1, -1.
\end{aligned}$$

Da die Elemente $w_4 \otimes 1, w_6 \otimes 1, w_7 \otimes 1, w_8 \otimes 1$ und $1 \otimes w_8 \in \mathrm{H}^*(B(SO(8) \times SO(8); \mathbb{F}_2)$ eine reguläre Sequenz in $\mathrm{H}^*(BQ; \mathbb{F}_2)$ bilden, gilt dies auch für die Sequenz aus der Behauptung. □

Bemerkung 11.2. Gleiches können wir auch für Q einen maximalen 2-Torus von $Spin(7)$ folgern. Und da ein maximaler 2-Torus von $Spin(8)$ auch ein maximaler 2-Torus von $Spin(9)$ ist können wir die selbe Aussage auch für $Spin(9)$ folgern. ⋄

Bis auf Konjugation wird der 2-Torus in $Spin(9)$ durch den in $Spin(8)$ gegeben. Durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Spin(8) \arrow[r] \arrow[d] & SO(8) \times SO(8) \arrow[d] \\
Spin(9) \arrow[r] & SO(16)
\end{tikzcd}$$

erfahren wir also alle Information die wir brauchen und geben nur die hieraus hergeleitete Abbildung $B\Delta_9^* : \mathrm{H}^*(BSO(16);\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(BSpin(9);\mathbb{F}_2)$ an:

$$\begin{array}{rcl} w_8 & \mapsto & w_4^2 + w_8 \\ w_{12} & \mapsto & w_6^2 + w_4 w_8 \\ w_{14} & \mapsto & w_7^2 + w_6 w_8 \\ w_{15} & \mapsto & w_7 w_8 \\ w_{16} & \mapsto & z_{16}. \end{array} \tag{11.1}$$

Auf allen anderen Erzeugern von $\mathrm{H}^*(BSO(16);\mathbb{F}_2)$ bildet $B\Delta_9^*$ auf Null ab. Wir kommen zum Etappenziel, der Abbildung $\Delta_{10}^* : \mathrm{H}^*(BSU(16);\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(BSpin(10);\mathbb{F}_2)$, die sich aber als ein harter Brocken herausstellt. Wir wissen aus den Überlegungen des vorherigen Abschnittes, dass es zwei nicht zueinander konjugierte 2-Tori in $Spin(10)$ gibt. Sei

$$Q_1 := (-1, e_1e_2e_3e_4, e_3e_4e_5e_6, e_5e_6e_7e_8, e_1e_3e_5e_7)$$

und

$$Q_2 := (-1, e_1e_2e_3e_4, e_3e_4e_5e_6, e_5e_6e_7e_8, e_7e_8e_9e_{10}).$$

Sei $\iota_i : Q_i \to Spin(10)$ und $\iota'_i : Q_i \to SU(16)$ die Inklusion. In beiden Fällen zeigt sich, dass die Abbildung $B\iota_i^* \mathrm{H}^*(BSpin(10), \mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(BQ_i, \mathbb{F}_2)$ nicht injektiv sein kann. Gegeben das kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^*(BQ_1;\mathbb{F}_2) & H^*(BQ_1;\mathbb{F}_2) \arrow[l, "="'] \\ H^*(Spin(10);\mathbb{F}_2) \arrow[u, "B\iota_1^*"] & \mathrm{H}^*(BSU(16);\mathbb{F}_2) \arrow[l] \arrow[u, "B\iota_1'^*"'] \end{tikzcd} \tag{11.2}$$

zusammen mit den Gleichungen (11.1) können wir nur herleiten:

$$\begin{array}{rcl} B\iota_1'^*(c_8) & = & B\iota_1{}^*(w_4^4 + w_8^2) \\ B\iota_1'^*(c_{12}) & = & B\iota_1{}^*(w_6^4 + w_8^2 w_4^2) \\ B\iota_1'^*(c_{14}) & = & B\iota_1{}^*(w_7^4 + w_8^2 w_6^2) \\ B\iota_1'^*(c_{15}) & = & B\iota_1{}^*(w_7^2 w_8^2) \\ B\iota_1'^*(c_{16}) & = & B\iota_1{}^*(z_{32}). \end{array}$$

Um zu einem vollständigen Ergebnis zu kommen, bleibt uns also nichts anderes übrig, als mit einer langwierigen und aufwendigen Rechnung das Bild des 2-Torus Q_2 in $SU(16)$ zu bestimmen. Bis auf Konjugation gilt für Δ_{10}:

$$\begin{array}{rcl} e_1e_2e_3e_4 & \mapsto & \mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1) \\ e_3e_4e_5e_6 & \mapsto & \mathrm{diag}(-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1) \\ e_5e_6e_7e_8 & \mapsto & \mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,1,1,1) \\ e_7e_8e_9e_{10} & \mapsto & \mathrm{diag}(-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1). \end{array} \tag{11.3}$$

Gegeben das kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^*(BQ_2;\mathbb{F}_2) & H^*(BQ_2;\mathbb{F}_2) \arrow[l, "="'] \\ H^*(Spin(10);\mathbb{F}_2) \arrow[u, "B\iota_2^*"] & \mathrm{H}^*(BSU(16);\mathbb{F}_2) \arrow[l] \arrow[u, "B\iota_2'^*"'] \end{tikzcd} \tag{11.4}$$

dann berechnen wir mittels (11.3):

$$\begin{aligned}
B{\iota'_2}^*(c_8) &= B{\iota_2}^*(w_4^4 + w_8^2 + w_6 w_{10}) \\
B{\iota'_2}^*(c_{12}) &= B{\iota_2}^*(w_6^4 + w_4^2 w_8^2 + w_{10}^2 w_4 + w_{10} w_8 w_6 + w_{10} w_6 w_4^2) \\
B{\iota'_2}^*(c_{14}) &= B{\iota_2}^*(w_6^2 w_8^2 + w_{10}^2 w_8 + w_{10} w_8 w_6 w_4 + w_{10} w_6^3 + w_{10}^2 w_4^2) \\
B{\iota'_2}^*(c_{15}) &= B{\iota_2}^*(w_{10}^3 + w_{10}^2 w_6 w_4 + w_{10} w_8 w_6^2) \\
B{\iota'_2}^*(c_{16}) &= B{\iota_2}^*(z_{32}).
\end{aligned}$$

Nun nehmen wir an, dass für $B\Delta_{10}^* : \mathrm{H}^*(BSU(16), \mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(BSpin(10), \mathbb{F}_2)$ gilt

$$\begin{aligned}
c_8 &\mapsto w_4^4 + w_8^2 + w_6 w_{10} \\
c_{12} &\mapsto w_6^4 + w_4^2 w_8^2 + w_{10}^2 w_4 + w_{10} w_8 w_6 + w_{10} w_6 w_4^2 \\
c_{14} &\mapsto w_7^4 + w_6^2 w_8^2 + w_{10}^2 w_8 + w_{10} w_8 w_6 w_4 + w_{10} w_6^3 + w_{10}^2 w_4^2 \\
c_{15} &\mapsto w_7^2 w_8^2 + w_{10}^3 + w_{10}^2 w_6 w_4 + w_{10} w_8 w_6^2 \\
c_{16} &\mapsto z_{32} \\
c_i &\mapsto 0 \qquad\qquad \text{für } i \neq 8, 12, 14, 15, 16.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Graduierung und den Folgerungen aus den Diagrammen (11.2) und (11.4) sehen wir, dass bis auf mögliche Summanden mit Faktor $w_7 w_{10}$, keine anderen Optionen bestehen. Da $0 = w_7 w_{10} \in \mathrm{H}^*(BSpin(10); \mathbb{F}_2)$ sind wir somit fertig.

Wir können nun mit dem Computer berechnen, dass in $\mathbb{F}_2[w_4, w_6, w_7, w_8, w_{10}, z_{32}]$ die Sequenz $c_8, c_{12}, c_{14}, c_{15}, c_{16}, w_7 w_{10}$ regulär ist. Sei

$$M := \mathbb{F}_2[w_4, w_6, w_7, w_8, w_{10}]/c_8, c_{12}, c_{14}, c_{15}, w_7 w_{10}$$

und Λ die äußere Algebra erzeugt von $[c_2], [c_3], [c_4], [c_5], [c_6], [c_7], [c_9], [c_{10}], [c_{11}], [c_{13}]$. Dann gilt

$$Tor_{\mathrm{H}^*(BSU(16), \mathbb{F}_2))}(\mathbb{F}_2, \mathrm{H}^*(BSpin(10), \mathbb{F}_2)) \cong \Lambda \otimes M$$

und die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung

$$SU(16)/Spin(10) \to BSpin(10) \to BSU(16)$$

kollabiert im E_2-Term. Und es folgt:

Lemma 11.3. *Als graduierter Modul ist* $\mathrm{H}^*(SU(16)/SU(10); \mathbb{F}_2)$ *isomorph zu* $\Lambda \otimes M$.

Kapitel 12

K-Theorie

In diesem Abschnitt wollen wir nun noch Fundament legen, wie unsere vorangegeangenen Überlegungen auf die K-Theorie übertragen werden können.

Sei G eine kompakte, zusammenhängende Lie-Gruppe und $R(G)$ der komplexe Darstellungsring von G. Sei $\epsilon : R(G) \to \mathbb{Z}$ die Augmentation, die ein Element $\rho \in R(G)$ auf $\dim(\rho)$ abbildet. Sei $I(G)$ der Kern von ρ und

$$\widehat{R}(G) = \lim_{\leftarrow} R(G)/I(G)^n$$

die Vervollständigung von $R(G)$, dann gilt nach [AH61] die Isomorphie $\widehat{R}(G) \cong K^0(BG) = K^*(BG)$. Hodgkin zeigt in der Arbeit [Hod75], dass es für G eine kompakte, zusammenhängende Lie-Gruppe mit $\pi_1(G)$ torsionsfrei und H eine abgeschlossene Untergruppe von G eine Spektralsequenz mit

$$E_2^{*,0} \cong \mathrm{Tor}^{*,0}_{R(G)}(\mathbb{Z}, R(H))$$

gibt, die gegen $K^*(G/H)$ konvergiert. Snaith beweist in [Sna69, 5.5], dass wenn H zusammenhängend und $\pi_1(H)$ torsionsfrei ist, die Spektralsequenz kollabiert.

Ist X ein topologischer Raum, dann sei $\tilde{K}^*(X)$, wie in [Kar78, 1.20] definiert, der Kokern der Abbildung $\alpha : \mathbb{Z} \cong K^*(P) \to K^*(X)$, induziert durch die Projektion von X auf den Punkt P. Wir bezeichnen $\tilde{K}(X)$ als reduzierte K-Theorie von X.

Sei $q \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, dann sei M^q ein Ko-Moore Raum vom Typ $(\mathbb{Z}_q, 2)$. Sei $CS^1 = D^2$ der Zylinder über S^1. Ist $q : S^1 \to CS^1$ die Multiplikation mit q verknüpft mit der Inklusion auf den Rand der Kreisscheibe, dann werden wir im weiteren davon ausgehen, dass $M^q = S^1 \cup_q CS^1$.

Wir definieren $\tilde{K}^*(X; \mathbb{F}_p)$, die reduzierte K-Theorie mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$ durch

$$\tilde{K}^i(X; \mathbb{F}_p) := \tilde{K}^i(X \wedge M^p),$$

wobei $X \wedge M^p$ das Smash-Produkt von X und M^p ist.

Ist $\eta : S^3 \to S^2$ Die Hopf-Abbildung, dann ist $0 = \eta^{**} : \tilde{K}^*(S^2) \to \tilde{K}^*(S^3)$. Womit nach [AT65, 2.7] gilt

$$\tilde{K}^i(X; \mathbb{F}_p) \cong \tilde{K}^i(X) \otimes \mathbb{F}_p \oplus \mathrm{Tor}(\tilde{K}^{i+1}(X), \mathbb{F}_p).$$

Sei $red_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ die Projektion und definiere $R_p(G) := R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$, dann induziert red_p eine Abbildung $R(G) \to R_p(G)$, auch red_p nennen wollen. Es ist klar, dass

$$\mathcal{K}^*_{R(H)}(\rho_1, \ldots, \rho_n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \cong \mathcal{K}^*_{R_p(H)}(red_p(\rho_1), \ldots, red_p(\rho_n)), \tag{12.1}$$

wobei ρ_i die fundamentalen Darstellungen von G sind. Sei $\mathcal{K}^* = \mathcal{K}^*_{R(H)}(\rho_1, \ldots, \rho_n)$. Mit der Universellen-Koeffizienten-Formel, wie in [Wei94, 3.6] sehen wir

$$\mathrm{H}^i(\mathcal{K}^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p) \cong \mathrm{H}^i\,\mathcal{K}^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \oplus \mathrm{Tor}(\mathrm{H}^{i+1}\,\mathcal{K}^*, \mathbb{F}_p).$$

Zusammen mit (12.1) gilt dann:

Lemma 12.1. *Sei G eine kompakte, zusammenhängende Lie-Gruppe und sei H eine abgeschlossene, zusammenhängende Untergruppe, mit $\pi_1(G)$ und $\pi_1(H)$ torsionsfrei, dann gilt*

$$\tilde{K}^*(G/H; \mathbb{F}_p) \cong \mathrm{Tor}_{R_p(G)}(\mathbb{F}_p, R_p(H)) - F,$$

als $\mathbb{Z}_2$-graduierter Modul. Hierbei ist F der von $1 \in R_p(H)$ erzeugte Modul im externen Grad 0.

Es folgt nun ein Beispiel, welches der Vermutung, dass es leicht zu folgernde Verbindungen zwischen $|\tilde{H}^*(G/H \wedge M^2)|$ und $|\tilde{K}^*(G/H \wedge M^2)|$ gibt.

Beispiel 12.2. Sei $X = SU(3)/SO(3)$. Es gilt $\mathrm{H}^*(X; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[w_2, w_3]/w_2^2, w_3^2$ und es folgt $\mathrm{H}^*(X \wedge M^2)$ ist als Modul gegeben durch

n	0	4	5	7
$\mathrm{H}^n(X \wedge M^2)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{F}_2$	$\mathbb{F}_2$	$\mathbb{F}_2$

Es gilt $\mathrm{Tor}_{RSU(3)}(\mathbb{Z}, RSO(3)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ mit einem Erzeuger im Grad 0 und einem im Grad 1, also $K^0(X \wedge M^2) = \mathbb{Z}$ und $K^1(X \wedge M^2) = \mathbb{F}_2$. Damit folgt, dass die Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz aus Satz 2.25 ein nicht triviales Differential $d_3 : E_3^{4,2q} \to E_3^{7,2q-2}$ besitzt. ◇

Kapitel 13

Ausblick

Vermutung I *Seien A, B Polynomalgebren über $\mathbb{F}_p$ in endlich vielen Veränderlichen. Gegeben ein Homomorphismus $A \to B$, dann wird*

$$\mathrm{H}^{*,*} := \mathrm{Tor}_A(B; \mathbb{F}_p)$$

als Algebra von $\mathrm{H}^{0,*}$ und $\mathrm{H}^{-1,*}$ erzeugt .

Die Voraussetzung von endlich vielen Veränderlichen kann nicht fallen gelassen werden. Gegeben die beiden Eilenberg-MacLane Räume $B := K(\mathbb{Z}_2, 4)$ und $X := K(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, 2)$. Nach [McC01, 6.19] sind $\mathrm{H}^*(B; \mathbb{F}_2)$ und $\mathrm{H}^*(X; \mathbb{F}_2)$ Polynomalgebren über $\mathbb{F}_2$ in abzählbar vielen Veränderlichen. Sei $f : X \to B$ stetig, $\Omega B \to PB \to P$ die Wege Faserung und

$$\begin{tikzcd} \Omega B \arrow[r] \arrow[d] & \Omega B \arrow[d] \\ E \arrow[r] \arrow[d] & PB \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

das induzierte kommutative Diagramm. Die zu diesem Diagramm assoziierte Eilenberg-Moore-Spektralsequenz hat den E_2-Term

$$E_2^{*,*} \cong \mathrm{Tor}_{\mathrm{H}^*(B;\mathbb{F}_2)}(\mathbb{F}_2, \mathrm{H}^*(X; \mathbb{F}_2)).$$

Nach [Sch71] kollabiert die Spektralsequenz nicht im E_2 Term. Da die Spektralsequenz jedoch multiplikativ ist, würde die Tatsache dass sie von $E_2^{0,*}$ und $E_2^{-1,*}$ erzeugt ist zum Zusammenbrechen der Spektralsequenz führen.

In einfachen Fällen, z.B. wenn $A = \mathbb{F}_2[y_1, y_2, y_3]$ und $B = \mathbb{F}_2[x_1, x_2]$ und $y_1 = x_1^{p_1} x_2^{q_1}, y_2 = x_1^{p_2} x_2^{q_2}$ und $y_3 = x_1^{p_3} x_2^{q_3}$ in B gilt, können wir unsere Vermutung durch einfaches Nachrechnen bestätigen.

Das Kapitel 2 beschäftigt sich ausführlich mit dem Koszul-Komplex, der uns dort hilft Torsions-Algebren zu berechnen. Induktive Ansätze die aus diesem Kapitel abgeleitet werden, scheinen hier jedoch nicht zu fruchten: Gilt die Vermutung für die Algebra $\mathrm{H}^{*,*}\,\mathcal{K}_\lambda^{*,*}(y_1, \ldots, y_n)$, dann ist nicht klar, ob

$$\mathrm{H}(\mathrm{H}\,\mathcal{K}_\lambda(y_1, \ldots, y_n) \otimes \mathcal{K}_\Lambda(y_{n+1}))$$

von Elementen mit Bigrad $(0, *)$ und $(-1, *)$ erzeugt wird. Insbesondere zeigt sich, dass sich für $\mathrm{H}\,\mathcal{K}_{\mathbb{F}[x,y]}(x^3, x^2y, xy^2, y^3)$ die Vermutung als Wahrheit bestätigt, aber

$$\mathrm{H}(\mathrm{H}\,\mathcal{K}_{\mathbb{F}[x,y]}(x^3, x^2y, xy^2) \otimes \mathcal{K}_\Lambda(y^3))$$

nicht von Elementen mit Bigrad $(0, *)$ und $(-1, *)$ erzeugt wird.

Vermutung II *Seien A, B Polynomalgebren über $\mathbb{F}_p$ in endlich vielen Veränderlichen und sei die Krull-Dimension von A um mindestens 2 größer als die von B. Gegeben ein Homomorphismus $A \to B$ und sei*

$$m := |\operatorname{Tor}_A(B; \mathbb{F}_p)| < \infty,$$

dann ist m durch 4 teilbar.

Gerade die Tatsache, dass $k(G/H; \mathbb{Q}) = 0$ und $k(G/H; \mathbb{F}_2) = 0$ in so vielen Fällen gilt, in denen die $\operatorname{Rang} H + 1 < \operatorname{Rang} G$ bestärkt die Vermutung, dass in allen Fällen die aus der Geometrie resultieren die Aussage richtig ist. Aber auch in allen dem Autor bekannten Fällen die keinen geometrischen Hintergrund haben, bewahrheitet sich die Aussage. Viele Fälle lassen sich auf die vorgestellten Sätze zurückführen. Aber auch in Fällen in denen wir diese Technik nicht anwenden können, z.B. $A = \mathbb{F}_2[y_1, y_2, y_3]$ und $y_1 = x_1^3x_2, y_2 = x_1^3 + x_1^2x_2$ und $y_3 = x_1x_2 + x_2^2$ in $B = \mathbb{F}_2[x_1, x_2]$bestätigt sich unsere Vermutung. Nach allen Überlegungen des Autors scheint es auch so zu sein, dass Vermutung I nicht hilft um Vermutung II zu bestätigen.

Problem I Am Ende des Abschnittes 4.1 wird eine Mannigfaltigkeit konstruiert, bei der sich die $\mathbb{F}_2$-Semicharakteristik und $\mathbb{R}$-Semicharakteristik unterscheiden. Für welche $X_n = SO(2 \cdot (4n + 1))/SU(4n + 1)$ gilt $k(X_n; \mathbb{F}_2) \neq k(X_n; \mathbb{R})$?

Problem II Sei $\rho : SU(2) \times SO(4) \to Sp(4)$ die irreduzible, symplektische Darstellung. Wie sieht die Kohomologie-Algebra $\mathrm{H}^*(Sp(4)/\rho; \mathbb{F}_2)$ aus und insbesondere welchen Wert hat $k(Sp(4)/\rho; \mathbb{F}_2)$?

Problem III Sei G eine einfache Lie-Gruppe, mit $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_p)$ einer Polynomalgebra und sei Q ein maximaler p-Torus in G. Durch die Inklusion $\iota : Q \to G$ wird $\mathrm{H}^*(BQ; \mathbb{F}_p)$ zu einem $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_p)$-Modul. In Abschnitt 6 wird gezeigt, dass im Fall $p = 2$ die Erzeuger von $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_p)$ eine reguläre Sequenz in $\mathrm{H}^*(BQ; \mathbb{F}_p)$ bilden. Gilt dies auch für p eine beliebige Primzahl?

Problem IV Satz 10.9 besagt, dass für G eine geschlossene Untergruppe von $SU(n)$ die Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ als $\mathbb{F}_2$-Modul gegebn ist durch den graduierten Modul $\Lambda \otimes \wedge(v_{k+1}) \otimes \mathrm{H}^*(SU(n)/G; \mathbb{F}_2)$ mit Λ einer geeigneten äußeren Algebra. Bei unserer Argumentation verschenken wir Wissen, welches wir durch feinere Beobachtungen erhalten könnten. Die Abbildungen $\mathrm{H}^*(Spin(2n)/G; \mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(Spin(2n); \mathbb{F}_2)$ und $\mathrm{H}^*(BG; \mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(Spin(2n); \mathbb{F}_2)$ können bei der Entwickelung dieser Struktur helfen. Eine weitere Hilfe ist, dass $\mathrm{H}^*(SO(2n)/U(n); \mathbb{Z})$ vollständig bekannt ist. Tipp: Die Struktur als Algebra finden wir heraus indem wir die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung $SO(2n)/U(n) \to BU(n) \to BSO(2n)$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ betrachten. Durch die Serre-Spektralsequenz zur Faserung

$$S^1 \to Spin(2n)/SU(n) \to SO(2n)/U(n)$$

mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ und die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zur Faserung

$$Spin(2n)/SU(n) \to BSU(n) \to BSpin(2n)$$

über $\mathbb{Q}$ können wir die algebraische Struktur von $\mathrm{H}^*(Spin(2n)/SU(n);\mathbb{Z})$ bestimmen.

Wie sieht die Kohomologie-Algebra $\mathrm{H}^*(Spin(2n)/G;\mathbb{Z})$ aus?

Problem V Sei $red_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ die Projektion und definiere $R_p(G) := R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$, dann induziert red_p eine Abbildung $R(G) \to R_p(G)$, die wir auch red_p nennen wollen. Gibt es auf

$$\mathcal{K}^*_{R_p(H)}(red_p(\rho_1), \ldots, red_p(\rho_n))$$

eine Art Poincaré-Dualität?

Problem VI Abschnitt 7.3 führt ein $\cup_1$-Produkt auf $\mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_2^k;\mathbb{F}_2)$ ein. Mittels der Arbeit [GM74] lässt sich ein solches $\cup_1$-Produkt auch auf $\mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}_p^k;\mathbb{F}_p)$ herleiten. Wie sieht es aus?

Problem VII Sei $\rho : Spin(10) \to SU(16)$ die Spin-Darstellung von $Spin(10)$. In Abschnitt 11.1 berechnen wir die induzierte Abbildung $B\rho^* : \mathrm{H}^*(BSU(16);\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(BSpin(10);\mathbb{F}_2)$. Ist $\rho' : Spin(11) \to Sp(16)$ die Spin-Darstellung von $Spin(11)$, wie berechnet sich dann $B\rho^*$?

Problem VIII Der Abschnitt 6.2 bietet eine Vielzahl von Lemmata, die es für gegebene Gruppen $H \subset G$ ermöglichen eine Unteralgebra von $\mathrm{H}^*(G/H;\mathbb{F}_p)$ zu finden, die isomorph zu einer äußeren Algebra ist. Welche Fälle lassen sich noch finden? Was ist mit $\mathrm{H}^*(SU(n)/\rho;\mathbb{F}_2)$, wenn $\rho : SU(k) \to SU(n)$ eine irreduzible Darstellung ist, die keine der fundamentalen Darstellungen ist?

Literaturverzeichnis

[Ada60] Adams, J. F. : *On the non-existence of elements of Hopf invariant one.* Ann. of Math. (2) 72 1960 20-104.

[AH61] Atiyah, M. F. : Hirzebruch, F. : *Vector bundles and homogeneous spaces.* Proc. Symp. Pure Math. 3 (1961), 7-38.

[AT65] Araki, S.; Toda, H. : *Multiplicative structures in mod q cohomology theories.*, Osaka J. Math. 2 (1965), 71-115.

[Ara61] Araki, S. : *Differential Hopf algebras and the cohomology* mod 3 *of the compact exceptional groups E_7 and E_8.* Ann. of Math. (2) 73 1961 404-436.

[Bau68] Baum, P. F. : *On the cohomology of homogeneous spaces.* Topology 7 (1968) 15-38.

[BB65] Baum, P. F.; Browder, W. : *The cohomology of quotients of classical groups.* Topology 3 (1965) 305-336.

[Bec81] Becker, J. C. : *The real semicharacteristic of a homogeneous space.* Illinois J. Math. 25 (1981), no. 4, 577-588.

[BH58] Borel, A.; Hirzebruch, F. : *Characteristic classes and homogeneous spaces. I.* Amer. J. Math. 80 (1958), 458-538.

[BK94] Brüderle, S.; Kunz, E. : *Divided powers and Hochschild homology of complete intersections.* Math. Ann. 299 (1994), no. 1, 57-76.

[Bor53] Borel, A. : *La cohomologie mod 2 de certains espaces homogènes.* Comment. Math. Helv. 27, (1953). 165-197.

[Bor54] Borel, A. : *Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes.* Amer. J. Math. 76, (1954). 273-342.

[Bor55] Borel, A. : *Topology of Lie groups and characteristic classes.* Bull. Amer. Math. Soc. 61 (1955), 397-432.

[Bor61] Borel, A. : *Sous-groupes commutatifs et torsion des groupes de Lie compacts connexes.* Tôhoku Math. J. (2) 13 (1961) 216-240.

[Bor67] Borel, A. : *Topics in the homology theory of fibre bundles.* Lectures given at the University of Chicago, 1954. Notes by Edward Halpern. Lecture Notes in Mathematics, No. 36 Springer-Verlag, Berlin-New York (1967)

[Bou98] Bourbaki, N. : *Lie groups and Lie algebras. Chapters 1-3.* Translated from the French. Reprint of the 1989 English translation. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, (1998), ISBN: 3-540-64242-0

[Bou02] Bourbaki, N. : *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4-6.* Translated from the 1968 French original by Andrew Pressley. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, (2002) ISBN: 3-540-42650-7

[Bou05] Bourbaki, N. : *Lie groups and Lie algebras. Chapters 7-9.* Translated from the 1975 and 1982 French originals by Andrew Pressley. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, (2005), ISBN: 3-540-43405-4

[Bro61] Browder, W. : *Torsion in H-spaces.* Ann. of Math. (2) 74 1961 24-51.

[Bro62] Browder, W. : *Remark on the Poincaré duality theorem.* Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 927-930.

[BS53] Borel, A.; Serre, J.-P. : *Sur certains sous-groupes des groupes de Lie compacts.* Comment. Math. Helv. 27, (1953). 128-139.

[BS82] Becker, J. C.; Schultz, R. E. : *The real semicharacteristic of a fibered manifold.* Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 33 (1982), no. 132, 385-403.

[BtD85] Bröcker, T.; tom Dieck, T. : *Representations of compact Lie groups.* Graduate Texts in Mathematics, 98. Springer-Verlag, New York, (1985), ISBN: 0-387-13678-9

[Car50a] Cartan, H. : *Notions d'algèbre différentielle; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie.* Colloque de topologie , Bruxelles, 1950, pp. 15-27.

[Car50b] Cartan, H. : *La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal.* Colloque de topologie , Bruxelles, 1950, pp. 57-71.

[CE56] Cartan, H.; Eilenberg, S. : *Homological algebra.*, Princeton University Press, Princeton, N. J., (1956).

[CHS57] Chern, S. S.; Hirzebruch, F.; Serre, J.-P. : *On the index of a fibered manifold.* Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 587-596.

[Dou59] Douady, A. : *La suite spectrale d'Adams : structure multiplicative.* Séminaire Henri Cartan, 11 no. 2 (1958-1959), 1-13

[Eis95] Eisenbud, D. : *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, New York, (1995). ISBN: 0-387-94268-8; 0-387-94269-6

[Eis05] Eisenbud, D. : *The geometry of syzygies. A second course in commutative algebra and algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 229. Springer-Verlag, New York, (2005), ISBN: 0-387-22215-4

[GM74] Gugenheim, V. K. A. M.; May, J. P. : *On the theory and applications of differential torsion products.* Memoirs of the American Mathematical Society, No. 142. American Mathematical Society, Providence, R.I., (1974).

[Hat02] Hatcher, A. : *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, (2002), ISBN: 0-521-79160-X; 0-521-79540-0

[Hod75] Hodgkin, L. : *The equivariant Künneth theorem in K-theorem. Topics in K-theory. Two independent contributions*, Lecture Notes in Math., Vol. 496, Springer, Berlin, (1975), 1-101.

[HS41] Hopf, H.; Samelson, H. : *Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen.* Comment. Math. Helv. 13, (1941). 240-251.

[Hus94] Husemoller, D. : *Fibre bundles. Third edition.* Graduate Texts in Mathematics, 20. Springer-Verlag, New York, (1994), ISBN: 0-387-94087-1

[IKT76] Ishitoya, K.; Kono, A.; Toda, H. : *Hopf algebra structure of mod 2 cohomology of simple Lie groups.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 12 (1976/77), no. 1, 141-167.

[Kar78] Karoubi, M. : *K-theory. An introduction.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 226. Springer-Verlag, Berlin-New York (1978), ISBN: 3-540-08090-2

[Ker56] Kervaire, M. A. : *Courbure intégrale généralisée et homotopie.* Math. Ann. 131 (1956), 219-252.

[Ker57] Kervaire, M. A. : *Relative characteristic classes.* Amer. J. Math. 79 (1957), 517-558.

[KM75] Kono, A.; Mimura, M. : *Cohomology* mod 2 *of the classifying space of th compact connected Lie group of type E_6.* J. Pure Appl. Algebra 6 (1975), 61-81.

[KM77] Kono, A.; Mimura, M. *Cohomology operations and the Hopf algebra structures of the compact, exceptional Lie groups E_7 and E_8.* Proc. London Math. Soc. (3) 35 (1977), no. 2, 345-358.

[KM80] Kono, A.; Mimura, M.: *Cohomology mod 3 of the classifying space of the Lie group E_6.* Math. Scand. 46 (1980), no. 2, 223-235.

[KMS76] Kono, A.; Mimura, M.; Shimada, N.: *On the cohomology mod 2 of the classifying space of the 1 connected exceptional Lie group E_7.* J. Pure Appl. Algebra 8 (1976), no. 3, 267-283.

[Kon75] Kono, A. : *On cohomology* mod2 *of the classifying spaces of non-simply connected classical Lie groups.* J. Math. Soc. Japan 27 (1975), 281-288.

[Kon77] Kono, A.: *Hopf algebra structure of simple Lie groups.* J. Math. Kyoto Univ. 17 (1977), no. 2, 259-298.

[KS72] Kraines, D.; Schochet, C. *Differentials in the Eilenberg-Moore spectral sequence.* J. Pure Appl. Algebra 2 (1972), no. 2, 131-148.

[KT76] Kono, A.; Mimura, M. : *Cohomology mod 2 of the classifying space of* $\mathrm{PSp}(4n+2)$. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 11 (1976), no. 2, 535-550.

[Lan02] Lang, S. : *Algebra. Revised third edition.* Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, (2002), ISBN: 0-387-95385-X

[Mac79] Macdonald, I. G. : *Symmetric functions and Hall polynomials. Oxford Mathematical Monographs.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979. viii+180 pp. ISBN: 0-19-853530-9

[Mas54] Massey, W. S. : *Products in exact couples.* Ann. of Math. (2) 59, (1954). 558-569.

[McC01] McCleary, J. :*A User's Guide to Spectral Sequences, 2ed Edition*, Cambridge University Press (2001), ISBN: 0-521-56759-9.

[McL75] MacLane, S. : *Homology. Third Corrected Printing.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 114. Springer-Verlag, Berlin-New York (1975), ISBN: 0-540-03823-X

[MLP69] Lusztig, G.; Milnor, J.; Peterson, F. P. : *Semi-characteristics and cobordism.* Topology 8 (1969), 357-359.

[MM65] Milnor, John W.; Moore, John C. : *On the structure of Hopf algebras.* Ann. of Math. (2) 81 (1965) 211-264.

[MS05] Meyer, D. M.; Smith, L. : *Poincaré duality algebras, Macaulay's dual systems, and Steenrod operations.* Cambridge Tracts in Mathematics, 167. Cambridge University Press, Cambridge, 2005. ISBN: 978-0-521-85064-3; 0-521-85064-9

[Mun74] Munkholm, H. J. : *The Eilenberg-Moore-spectral sequence and strongly homotopy multiplicative maps.* J. Pure Appl. Algebra 5 (1974), 1-50.

[Qui71a] Quillen, D. : *The mod 2 cohomology rings of extra-special 2-groups and the spinor groups.* Math. Ann. 194 (1971) 197-212.

[Qui71b] Quillen, D. : *The spectrum of an equivariant cohomology ring. I, II.* Ann. of Math. (2) 94 (1971), 549-572; ibid. (2) 94 (1971), 573-602.

[Sch71] Schochet, C. : *A two-stage Postnikov system where $E_2 \neq E_\infty$ in the Eilenberg-Moore-Spectral Sequence*, Trans. Amer. Math. Soc. 157(1971), 113-118.

[Ser67] Serre, J.-P. : *Local algebra.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2000. ISBN: 3-540-66641-9

[Sin82] Singhof, W. : *Parallelizability of homogeneous spaces. I.* Math. Ann. 260 (1982), no. 1, 101-116.

[Sin85] Singhof, W. : *On the semicharacteristics of homogeneous spaces.* Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 36 (1985), no. 142, 243-254.

[Sin93] Singhof, W. : *On the topology of double coset manifolds.* Math. Ann. 297 (1993), no. 1, 133-146.

[SW86] Singhof, W.; Wemmer, D. : *Parallelizability of homogeneous spaces. II.* Math. Ann. 274 (1986), no. 1, 157-176.

[Smi67] Smith, L. : *Homological algebra and the Eilenberg-Moore-spectral sequence.* Trans. Amer. Math. Soc. 129 (1967) 58-93.

[Sna69] Snaith, V. P. : *Massey products in K-theory. II*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 69(1971), 259-289.

[Sto74] Stong, R. E. : *Semi-characteristics and free group actions.* Compositio Math. 29 (1974), 223-248.

[Sto84] Stong, R. E. : *Semicharacteristics of oriented Grassmannians.* J. Pure Appl. Algebra 33 (1984), no. 1, 97-103.

[Sut64] Sutherland, W. A. : *A note on the parallelizability of sphere-bundles over spheres.* J. London Math. Soc. 39 1964 55-62.

[Tat57] Tate, J. : *Homology of Noetherian rings and local rings.*, Illinois J. Math. 1 (1957), 14-27.

[Tod73] Toda, H.: *Cohomology of the classifying space of exceptional Lie groups.* Manifolds-Tokyo 1973 (Proc. Internat. Conf., Tokyo, 1973), pp. 265-271. Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1975.

[Wei94] Weibel. C. A. : *An intorduction to homological algebra*, Cambridge University Press (1994), ISBN: 0-521-55987-1.

[Wol77] Wolf, J. : *The cohomology of homogeneous spaces.* Amer. J. Math. 99 (1977), no. 2, 312-340.

Erklärung

Ich versichere die vorgelegte Dissertation eigenständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt zu haben. Sie ist in der vorgelegten oder in ähnlicher Form noch bei keiner anderen Institution eingereicht worden.

Christian Löffelsend