

Zur Minimalität von Pāṇinis Śivasūtras

Eine Untersuchung mit Methoden der Formalen Begriffsanalyse

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der Philosophie (Dr. phil.)

durch die Philosophische Fakultät der

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von Wiebke Petersen

aus Düsseldorf

Betreuer: Prof. Dr. James Kilbury

Düsseldorf im Januar 2008

Tag der mündlichen Prüfung (Disputation): 11.6.2008

Inhaltsverzeichnis

1	Zum Aufbau dieser Untersuchung	1
2	Pāṇinis Grammatik des Sanskrits	5
2.1	Vedisches und klassisches Sanskrit	6
2.2	Kurze Würdigung der indischen Grammatikforschung vor Pāṇini	10
2.3	<i>Aṣṭādhyāyī</i>	17
2.4	<i>Śivasūtras</i>	25
3	Untersuchungen zur Minimalität der <i>Śivasūtras</i> – Problemstellung und Formalisierung	39
3.1	Diskussion des Forschungsstands zu den <i>Śivasūtras</i>	40
3.2	Motivierung der zentralen Fragestellungen	50
3.3	Formalisierung der <i>Śivasūtra</i> -Methode	62
4	S-Darstellbarkeit von Teilmengensystemen	71
4.1	Vorüberlegungen	71
4.2	S-Darstellbarkeit und plättbare Begriffsverbände	75
4.3	Hinreichendes Kriterium für die S-Darstellbarkeit von Teilmengensystemen	104
5	Gewinnung guter S-Alphabete	117
6	Konstruktion perfekt erweiterter S-Alphabete	143
6.1	Pāṇinis <i>Śivasūtras</i> als perfekt erweitertes S-Alphabet	144
6.2	Das Problem der minimalen Erweiterung von nicht S-darstellbaren Teilmengensystemen	156
7	Fazit und Ausblick	167

Appendix	172
A Formale Begriffsanalyse	175
A.1 Formaler Kontext	175
A.2 Formaler Begriff	177
A.3 Begriffsverband	182
A.4 Bereinigte und reduzierte Kontexte	188
A.5 Implikationen	193
B Mathematische Grundlagen	197
B.1 Mengen	197
B.2 Binäre Relationen und Äquivalenzrelationen	201
B.3 Funktionen und Abbildungen	202
B.4 Graphentheorie	204
B.5 Ordnungsrelationen	209
B.6 Verbände	213
B.7 Hüllensysteme und Galoisverbindungen	215
B.8 Listen und Sequenzen	216
B.9 Kombinatorik	217
C Kurzes Glossar	219
Literaturverzeichnis	221
Index	233

Abbildungsverzeichnis

2.1	Akṣara-samāmnāya	14
2.2	Pāṇinis <i>Śivasūtras</i> in linearer Form	25
2.3	Pāṇinis <i>Śivasūtras</i> in tabellarischer Form	26
2.4	Das 5. <i>Sūtra</i> von Pāṇinis <i>Śivasūtras</i>	29
2.5	Beispiel eines <i>Pratyāhāra</i> : $iC = \{i, u, ṛ, l, e, o, ai, au\}$	30
2.6	Interpretation der <i>Pratyāhāras</i> aus <i>Sūtra</i> 1.6.77.	31
2.7	Die in den <i>Aṣṭādhyāyī</i> vorkommenden <i>Pratyāhāras</i>	32
3.1	Kombinationsmöglichkeiten der fünf Minimalitätskriterien mit Beispielen	56
3.2	Basis der im Kontext der fünf Minimalitätskriterien gültigen Merkmalimplikationen	56
3.3	Flußdiagramm zur Überprüfung ob Pāṇinis <i>Śivasūtras</i> das 4. Minimalitätskriterium erfüllen	59
3.4	Der <i>Pratyāhāra</i> -Kontext	65
4.1	Begriffsverband des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes	78
4.2	(\mathcal{A}, Φ) -Kontext zum Begriffsverband aus Abbildung 4.1	79
4.3	S-darstellbare (\mathcal{A}, Φ) -Kontexte mit Begriffsverbänden und möglichen S-Alphabeten	80
4.4	Stufengraph zum Begriffsverband aus Abbildung 4.1	81
4.5	Gestufte Kante des Stufengraphen	85
4.6	Zwei Kanten des Stufengraphen schneiden sich in genau einem Punkt	87
4.7	Zwei Kanten des Stufengraphen schneiden sich in einer horizontalen Teilstrecke	89
4.8	Auflösung eines horizontalen, scheinbaren Konflikts	90

4.9	Zwei Kanten des Stufengraphen schneiden sich in einer vertikalen Teilstrecke	91
4.10	Auflösung eines vertikalen, scheinbaren Konflikts	92
4.11	Schnittmöglichkeiten mit einer ungestuften Kante	93
4.12	Auflösung von Konflikten zwischen Kanten mit einer gemeinsamen Ecke	94
4.13	Begriffsgraph von Pāṇinis <i>Pratyāhāra</i> -Kontext	96
4.14	Ausschnitt des Begriffsgraphen von Pāṇinis <i>Pratyāhāra</i> -Kontext, der den Graphen K^5 als Minor hat	97
4.15	Teilgraph des Begriffsgraphen von Pāṇinis <i>Pratyāhāra</i> -Kontext, der den Graphen K^5 als Minor hat	98
4.16	Der Graph <i>Würfel mit Diagonale</i> mit K^5 als Minor	99
4.17	Plättbarer, aber nicht Hasse-plättbarer Begriffsgraph des Teilmengensystems $\Phi = \{\{a, b, e\}, \{b, c, f\}, \{d, e, f\}\}$	100
4.18	Nicht plättbarer vergrößerter Graph zu Abbildung 4.17	101
4.19	Nicht S-darstellbare (\mathcal{A}, Φ) -Kontexte mit den entsprechenden Begriffsgraphen und Venn-Diagrammen der Begriffsinhalte	102
4.20	Fortsetzung von Abbildung 4.19 auf Seite 102	103
4.21	Vergleich des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes und des Hassediagramms eines S-darstellbaren (links) und eines nicht S-darstellbaren Teilmengensystems (rechts)	105
4.22	Begriffsverband eines ausgedehnten S-darstellbaren Teilmengensystems	106
4.23	Begriffsverband eines ausgedehnten nicht S-darstellbaren Teilmengensystems	107
4.24	S-Graph zu dem Hassediagramm aus Abbildung 4.21	109
4.25	Skizze zur winkelabhängigen Definition der totalen Ordnung $<_{\tau}$ aus dem Beweis von Satz 4.3.4	110
4.26	Skizze zum Beweis von Satz 4.3.4	112
5.1	Skizzen zum Beweis von Lemma 5.0.3	121
5.2	Skizzen zum Beweis von Lemma 5.0.3	123
5.3	Ebene Hassediagramme eines (\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverbands mit unterschiedlichen Rändern	124

5.4	Ebene Hassediagramme eines ausgedehnten $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ -Begriffsverbands mit unterschiedlichen resultierenden $<_{\tau}$ -Ordnungen . . .	125
5.5	Baumkanten (grau) und Kreiskanten (schwarz) des S-Graphen aus Abbildung 4.24	126
5.6	S-Graphen von S-darstellbaren Teilmengensystemen mit mehr als einem Innengebiet	127
5.7	\mathcal{A} -erschöpfende, redundanzfreie Läufe	130
5.8	Skizze zur Unabhängigkeit der S-Ordnung von der Laufrichtung durch Baumkanten	134
5.9	S-Graph mit zwei redundanzfreien, \mathcal{A} -erschöpfenden Läufen, von denen lediglich einer zu einem guten S-Alphabet führt . . .	136
5.10	S-Graph mit zwei redundanzfreien, \mathcal{A} -erschöpfenden Läufen, die beide zu guten S-Alphabeten führen	138
5.11	Bildsequenz zur Bestimmung eines guten S-Alphabets eines S-darstellbaren Teilmengensystems	139
6.1	Der gemäß den <i>Śivasūtras</i> erweiterte <i>Pratyāhāra</i> -Kontext . . .	145
6.2	Begriffsverband (ohne Begriff mit leerem Begriffsinhalt) zu dem erweiterten <i>Pratyāhāra</i> -Kontext aus Abbildung 6.1	147
6.3	Legende zur Abbildung 6.2	148
6.4	Begriffsverband des um das Element h verkleinerten <i>Pratyāhāra</i> -Kontextes	150
6.5	Skizze zur Position der Merkmalbegriffe der Kopien von h in einem optimal erweiterten Teilmengensystem zu Pāṇinis <i>Pratyāhāra</i> -Kontext	151
6.6	Begriffsverband eines Kontextes dreier unabhängiger Merkmale	153
6.7	K^5 -Tripel in Pāṇinis bereinigtem <i>Pratyāhāra</i> -Kontext	154
6.8	Begriffsverband mit $K_{3,3}$ als Minor	157
6.9	Skizze zur Definition des Ferrers-Graphen eines formalen Kontextes	158
6.10	Beispiel eines bipartiten Ferrers-Graphen	159
6.11	Beispiel eines Ferrers-Graphen, der nicht bipartit ist	161
6.12	Um b verkleinerter Kontext und Begriffsverband aus Abbildung 6.10	164

6.13 Kontexte und Begriffsverbände zu möglichen Verdopplungen von b	165
A.1 Merkmalanalyse deutscher Verwandtschaftsterme	176
A.2 Formaler Kontext zur Merkmalanalyse deutscher Verwandtschaftsterme aus Abbildung A.1	178
A.3 Formale Begriffe zum Kontext aus Abbildung A.2	181
A.4 Der Begriffsverband zum Kontext der Verwandtschaftsbeziehungen	183
A.5 Begriffsverband zum Kontext der Verwandtschaftsbeziehungen mit drei herausgehobenen Begriffen	185
A.6 Von unabhängigen Merkmalen aufgespannte Würfel in additiven Liniendiagrammen	186
A.7 Abbildung zum Satz A.3.3	187
A.8 Beispiel einer partiell geordneten Menge mit ihrer Dedekind-MacNeille-Vervollständigung	188
A.9 Bereinigter und reduzierter Kontext zu dem Kontext der Verwandtschaftsterme aus Abbildung A.2	191
A.10 Begriffsverband zum bereinigten und reduzierten Kontext der Verwandtschaftsterme aus Abbildung A.9	192
A.11 Basis der Merkmalimplikationen zum Kontext aus Abbildung A.2	194
B.1 Beispiele vollständiger Graphen: K^4 , K^6 und K^{11}	205
B.2 Beispiele vollständig bipartiter Graphen: $K_{4,7}$ und $K_{2,5}$	205
B.3 Ergebnis der Kontraktion einer Kante des Graphen $K_{3,5}$	206
B.4 Graph mit Teilgraph und Minor	206
B.5 Minore, die in plättbaren Graphen nicht vorkommen	208
B.6 Hassediagramm zu der geordneten Menge $(\mathfrak{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$	210
B.7 Zusammenhang zwischen maximalen Elementen und dem Maximum einer geordneten Menge	212

1 Zum Aufbau dieser Untersuchung

Die mehr als 2000 Jahre alte Sanskritgrammatik Pāṇinis ruft bis heute aufgrund ihres Beschreibungsumfangs und insbesondere der in ihr eingesetzten Beschreibungsmethoden unter Linguisten Bewunderung hervor:

The descriptive grammar of Sanskrit, which Pāṇini brought to its perfection, is one of the greatest monuments of human intelligence and an indispensable model for the description of languages. (Bloomfield 1929, S. 268)

Dem eigentlichen Regelwerk der Grammatik sind die *Śivasūtras* vorangestellt, die eine Lautliste bilden, auf deren Grundlage Pāṇini die in seiner Grammatik benötigten phonologischen Klassen des Sanskrits als Intervalle definiert. Neben den Lautelementen gibt es in den *Śivasūtras* auch spezielle Markerelemente, die *Anubandhas* genannt werden. Nach Pāṇini sind nur solche Intervalle zur Beschreibung von phonologischen Klassen zulässig, deren rechte Intervallgrenze von einem *Anubandha* gebildet wird.

Der Legende nach hat der Gott *Śiva* Pāṇini die *Śivasūtras* offenbart, damit dieser seine Grammatik des Sanskrits entwickeln konnte.¹ Bis heute steht die Konstruktion der *Śivasūtras* im Zentrum des Interesses (vgl. Cardona 1969; Kiparsky 2007a, 1991a; Smith 1992; Staal 1962): Es wird diskutiert, wie Pāṇini die *Śivasūtras* entwickelte, auf welches Wissen er referieren konnte, ob ein alternativer Aufbau möglich ist und welche besonderen Kriterien die von Pāṇini gewählte Konstruktion erfüllt. Eine besonders häufig gestellte Frage ist, inwiefern Pāṇinis *Śivasūtras* *minimal* sind oder ob es möglich ist, die *Śivasūtras* hinsichtlich ihrer Länge zu optimieren.

¹Deshpande (1997) diskutiert die Ursprünge dieser Legende und ihre Motivation.

Im folgenden werde ich dieses Problem mit Mitteln der Formalen Begriffsanalyse untersuchen (vgl. Ganter & Wille 1996) und beweisen, daß sich die Frage nach der Minimalität von Pāṇinis *Śivasūtras* auf jene nach der graphentheoretischen Form eines bestimmten Begriffsverbands reduzieren läßt. Darüber hinaus wird hier erstmals die Fragestellung erweitert: Es wird untersucht, inwiefern es für eine beliebige endliche Menge von endlichen Mengen möglich ist, die Elemente der Mengen in einer Liste im Stil der *Śivasūtras* so anzuordnen, daß jede der Mengen durch diese Liste repräsentiert wird. Angewandt auf das phonologische System einer Sprache besteht die Aufgabe darin, zu einer Menge von phonologischen Klassen eine bestimmte, diese Klassen repräsentierende Liste zu konstruieren.

Kapitel 2 ist Pāṇinis Grammatik des Sanskrits gewidmet. Neben einer kurzen Einführung in die *Aṣṭādhyāyī*, die das Hauptregelwerk seiner Grammatik bilden, werden insbesondere der Aufbau und die Funktionsweise der *Śivasūtras* sowie deren Aufgabe im Gesamtzusammenhang der Grammatik beleuchtet. Desweiteren erfolgt eine Einordnung von Pāṇinis Leistung in die Entwicklung der indischen Grammatikwissenschaften.

Die genaue Abgrenzung der Fragestellungen, die im Rahmen dieser Untersuchung behandelt werden sollen, erfolgt in Kapitel 3. Dort werden auch aktuelle Forschungsansätze diskutiert. Es werden eine Reihe alternativer Minimalitätsanforderungen entwickelt und bewertet, die an Listen im *Śivasūtra*-Stil gestellt werden können. Anschließend wird das Minimalitätskriterium, das meiner Auffassung nach dem Aufbau von Pāṇinis *Śivasūtras* zugrundeliegt, formalisiert.

Eine besondere Aufmerksamkeit in den *Śivasūtras* erregt der Laut *h*, der als einziger zweimal in der Lautliste auftritt. In Kapitel 4 wird formal nachgewiesen, daß es, gegeben die *Aṣṭādhyāyī*, keine Möglichkeit gibt, die Laute des Sanskrits so in einer Liste im *Śivasūtra*-Stil anzuordnen, daß kein Laut verdoppelt werden muß. Desweiteren werden allgemeine notwendige und hinreichende Bedingungen entwickelt, die eine endliche Menge von endlichen Mengen erfüllen muß, wenn es möglich ist, die Elemente der Mengen ohne Verdopplungen in einer Liste im *Śivasūtra*-Stil anzuordnen.

Die Lautliste der *Śivasūtras* ist mit *Anubandhas* durchsetzt. Da nur Intervalle, deren rechte Intervallgrenze ein *Anubandha* ist, zur Beschreibung von phonologischen Klassen zulässig sind, wird in Kapitel 5 ein allgemeines Verfahren zur Anordnung der Lautelemente entwickelt, das die Zahl der zur Repräsen-

tation einer endlichen Menge von Mengen benötigten *Anubandhas* minimiert. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß hier auf keinen Fall der Eindruck erweckt werden soll, daß Pāṇini tatsächlich eine der in dieser Untersuchung entwickelten Methoden bei der Konstruktion der *Śivasūtras* eingesetzt hat.

Während in Kapitel 5 nur die Fälle untersucht werden, in denen es nicht nötig ist, eines der Lautelemente zu verdoppeln, widmet sich Kapitel 6 den mitunter notwendigen Verdopplungen und ihrer Minimierung. Hier wird schließlich auch bewiesen, daß es sich bei den *Śivasūtras* um eine im Sinne der in Kapitel 3 entwickelten Minimalitätskriterien *perfekte* Anordnung handelt. Das bedeutet, daß es keine Möglichkeit gibt, die in den *Aṣṭādhyāyī* benötigten Lautklassen in einer Liste im *Śivasūtra*-Stil zu repräsentieren, die bei minimaler Zahl von verdoppelten Lautelementen kürzer ist als die Liste in Pāṇinis *Śivasūtras*.

Abgeschlossen wird der Hauptteil mit Kapitel 7, das zum einen ein Fazit aus dieser Untersuchung zieht und zum anderen einen Ausblick auf weitere Forschungsvorhaben gibt, die sich an die vorgelegten Ergebnisse anschließen.

Drei Anhänge vervollständigen die vorliegende Arbeit: Eine kurze Einführung in die Grundlagen der Formalen Begriffsanalyse bietet Anhang A. Die verwendeten mathematischen Begriffe werden in Anhang B definiert. Ein kurzes Glossar in Anhang C erläutert die für das Verständnis dieser Untersuchung wichtigen linguistischen Begriffe aus Pāṇinis Sanskritgrammatik und der Indologie. Es folgen das Literaturverzeichnis und der Index. Im Literaturverzeichnis finden sich zu jedem Eintrag Verweise auf die Textseiten, auf denen der Eintrag zitiert wird.² Dem alphabetischen Index geht ein Index der definierten Symbole voraus, der ihr Auffinden erleichtern soll.

²Diese Verweise sind – wie übrigens alle Verweise – in der elektronischen Fassung dieses Dokuments aktiv.

2 Pāṇinis Grammatik des Sanskrits

Ziel dieses Kapitels ist es, den Aufbau und die Funktionsweise der *Śivasūtras* zu erläutern. Dazu ist es nötig, sie im Kontext von Pāṇinis Grammatik des klassischen Sanskrits zu verorten. Die Aufgabe der *Śivasūtras* ist es, Lautklassen zur Verfügung zu stellen, auf denen die Regeln der *Aṣṭādhyāyī*, die den Hauptteil der Grammatik bilden, operieren.

Es stellt sich die Frage, warum eine mehr als 2000 Jahre alte Grammatik heute noch eine derartige Beachtung findet. In Unterkapitel 2.3, das sich mit dem Aufbau der *Aṣṭādhyāyī* beschäftigt, wird aufgezeigt, wie umfassend und in vielerlei Hinsicht modern Pāṇinis Werk aus heutiger Sicht ist. Es sei hier auch auf die zahlreichen Standardwerke zum Werk Pāṇinis (u. a. Böhtlingk 1887; Vasu 1891; Katre 1987), zur Geschichte der Linguistik (u. a. Hymes 1974), zur Grammatik des Sanskrits (u. a. Wackernagel seit 1896; Thumb 1953–58) sowie der Sanskritphilologie (u. a. Bühler 1896–1935; Liebich 1919; Staal 1985) verwiesen.¹ Einen umfangreichen Überblick über den Stand der Forschung zu Pāṇinis Grammatik liefert Cardona (1976, 1999). Es sei an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich betont, daß das Ziel dieser Arbeit die mathematische Untersuchung von Pāṇinis Methode zur Repräsentation von Lautklassen und die Induktion solcher Repräsentationen mit Mitteln der Formalen Begriffsanalyse ist, und sie somit keinen Beitrag zur historischen Sanskritforschung liefern will und kann.

Der Rest dieses Kapitels gliedert sich wie folgt: Unterkapitel 2.1 versucht eine Einordnung und Abgrenzung des von Pāṇini untersuchten Sanskrits. Die

¹Bei dem Schreiben der vorliegenden Arbeit waren außerdem die folgenden beiden Internetseiten hilfreich:

<http://www.sai.uni-heidelberg.de/~amishra/index.html>

<http://sanskrit.inria.fr>

indische Grammatikforschung nahm bereits in den Jahrhunderten vor Pāṇini eine bedeutende Stellung ein, da sie als Hilfswissenschaft der rituellen Rezitation der religiösen Texte diente. Eine kurze Erläuterung und Würdigung der Tradition der indischen Grammatikforschung erfolgt in Unterkapitel 2.2. Hier wird deutlich, daß Pāṇini bereits auf ein hohes Maß an linguistischer Konzeptualisierung zugreifen konnte. Die Unterkapitel 2.3 und 2.4 beschäftigen sich schließlich mit den *Aṣṭādhyāyī* und den *Śivasūtras*, zwei der vier Teile von Pāṇinis Grammatik.

2.1 Vedisches und klassisches Sanskrit

Sanskrit zählt zu den indoeuropäischen Sprachen. Es ist eine flektierende Sprache, die sich durch eine reiche Morphologie (z. B. gibt es acht Kasus und drei Numeri), zahlreiche Wortkomposita sowie viele Sandhi-Phänomene auszeichnet. *Sandhi* bezeichnet das Zusammentreffen zweier Wörter (äußerer Sandhi) oder Morpheme (innerer Sandhi) und die daraus resultierenden regelhaften phonetischen Veränderungen. Man unterscheidet zwischen dem älteren vedischen Sanskrit und dem jüngeren klassischen Sanskrit. Während der Begriff des *klassischen Sanskrits* zumeist auf die durch Pāṇinis Grammatik kodifizierte Sprache angewendet wird, bezeichnet man mit dem *vedischen Sanskrit* die Sprache, in der die *Veden* verfaßt sind:

Die als Veda („Wissen“) bezeichnete älteste indische Literatur besteht aus vier Abteilungen: Ṛg-, Sāma-, Yajur- und Atharveda, die jeweils der Überlieferung einer oder mehrerer vedischer Schulen angehören. Innerhalb jeder Abteilung sind einem Saṃhitā- oder Mantra-Teil [umfaßt Preis- und Opferlieder] – dem Veda im engeren Sinne – jeweils Brāhmaṇas, Āraṇyakas und Upaniṣads [Opferwissenschaft: rituelle Vorschriften und mythologische Erzählungen] sowie Sūtras angegliedert, deren Entstehung – mit gewissen Einschränkungen – einander folgenden literarischen Epochen zuzuordnen ist. (Bechert & von Simson 1993, S. 50)

Bei den Sūtras (Faden, Leitfaden) handelt es sich um Lehrstücke; sie enthalten Regelwerke der Hilfswissenschaften, die für den rituellen Umgang mit

den Veden benötigt werden. In der späten vedischen Periode (um 500 v. Chr.) werden die folgenden sieben Hilfswissenschaften (*Vedāṅga*) aufgezählt (Staal 2006, S. 106): Rituallehre (*Kalpa*) und Geometrie (*Śulba*), Astronomie und Astrologie (*Jyotiṣā*), Prosodie (*Chandas*), Phonetik und Phonologie (*Śikṣā*), Grammatik (*Vyākaraṇa*) und Etymologie (*Nirukta*). Speziell die Rituallehre basiert auf einem komplexen System von ineinandergreifenden Regeln, zu dessen Beschreibung Metaregeln und Regelordnungen verwendet werden. Ähnliche Methoden finden sich auch in Pāṇinis Grammatik (vgl. Staal 1982). Die vier letztgenannten Hilfswissenschaften dienen der Vedarezitation und -exegese und bilden die Grundlage für die Entstehung der indischen Grammatikforschung (vgl. Staal 2006, S. 106).

Eine genaue Datierung der Entstehungszeit der Veden ist schwierig: Es wird angenommen, daß „die Saṃhitās gegen Ende des zweiten Jahrtausends v. Chr. abgeschlossen waren, die Brāhmaṇas werden um 1000 v. Chr. angesetzt, die älteren, im eigentlichen Sinn vedischen Upaniṣads und Sūtras etwa zwischen 800 und 500 [v. Chr.]“ (Bechert & von Simson 1993, S. 50). Auch die Lebenszeit von Pāṇini läßt sich nicht genau datieren, es wird heute davon ausgegangen, daß er im 3. oder 4. Jahrhundert v. Chr. gelebt hat (vgl. Unterkapitel 2.3).

Die Tatsache, daß die Texte der Veden so einheitlich überliefert wurden, verdanken wir einem Wandel der religiösen Ansichten in der spätvedischen Zeit:

Die ursprünglich als Bitt- und Sühneopfer den jeweils gnädig zu stimmenden Göttern gewidmeten Riten werden in spätvedischer Zeit zu einer komplizierten Wissenschaft ausgestaltet, in der die Götter mehr und mehr ihre Personalität verlieren [...] Nicht sie [die Götter] sind es, die dem Opfer zum Erfolg verhelfen, sondern die Opferhandlung selbst führt, falls sie bis in das letzte Detail richtig ausgeführt wird, den gewünschten Effekt herbei.

(Bechert & von Simson 1993, S. 104)

Die Verse der Veden galten (und gelten) als religiöse Offenbarung, die nicht verändert werden durften und daher exakt memoriert werden mußten. Es entstand eine Kultur der mündlichen Textüberlieferung und der Rezitation der

Veden (siehe u. a. Deshpande 1995).² Es ist davon auszugehen, daß die Sprache der Veden ursprünglich ein lebendiger Volksdialekt war, die sich aber bald von den gesprochenen Sprachen und Dialekten, die dem allgemeinen Sprachwandel unterlagen, entfernte und zu einer Gelehrtensprache bzw. brahmanischen Standessprache wurde (vgl. Deshpande 1995). Im Laufe der Zeit unterlag aber auch die Gelehrtensprache einem Sprachwandel, wobei zu beachten ist, daß es hier um Zeiträume von mehreren Jahrhunderten geht:

With the passage of time the language of even the educated priestly class diverged more and more from that of the sacred hymns themselves, and it became increasingly a matter of concern that the hymns should be transmitted without corruption, in order to preserve their religious efficacy. (Coulson 1976, S. xvii)

Die *Sūtras* sind bereits weitestgehend in klassischem Sanskrit verfaßt, das auf einem anderen Dialekt als das vedische Sanskrit beruht. Im Gegensatz zum vedischen Sanskrit hat es ein anderes Sandhi-System und macht keinen Gebrauch von dem vedischen Akzentsystem. Die Sprache der Brāhmaṇas bildet eine Zwischenstufe zwischen beiden Sprachen. All diese Sprachen werden dem Althochindischen zugerechnet. Es wird angenommen, daß zur Zeit Pāṇinis das klassische Sanskrit noch allgemeine Umgangssprache der gehobenen Schichten war, während das Volk verschiedene Prākṛit-Dialekte sprach, die dem Mittelindischen zuzuordnen sind (vgl. Bechert & von Simson 1993, S. 21).³ Ein Auseinanderdriften von gesprochener Sprache und der Sprache der klassischen (religiösen) Literatur ist nach Jacobsen (1974) ein typischer Auslöser für die Entwicklung einer linguistischen Forschungstradition:

The circumstances that gave rise to grammatical study in Mesopotamia seem to have been fairly similar to those that surrounded the rise of such studies in later times in India and in the Classical

²Auch wenn es bereits früh Schriftsysteme für Sanskrit gab, so ist die Schrift ausschließlich für profane Zwecke wie Handel und Verwaltung eingesetzt worden.

³*Sanskrit* leitet sich von *Samṣkrta* (kultiviert, gepflegt, geordnet) her und setzt sich dadurch von *Prākṛit/Prākṛta* (Sprache) ab. Interessant ist, daß Buddha für seine Predigten statt des gelehrten Sanskrits die Umgangssprache seiner Zeit nutzte (vgl. Bechert & von Simson 1993, S. 69).

World: serious concern with the preservation of a classical literature written in a language that was becoming obsolete at the time.
(Jacobsen 1974, S. 41)

Pāṇinis Grammatik des klassischen Sanskrits ist so umfassend, daß sie zur verbindlichen Autorität in allen Fragen des Sprachgebrauchs wurde und dadurch vermutlich viele ältere Grammatiken vollständig verdrängte. Zu Pāṇinis Lebzeiten galt Sanskrit bereits als eine Gelehrtensprache und durch Pāṇinis Festschreibung ihrer Grammatik konnte sie sich zu einer *Lingua Franca* des Verwaltungswesens, der Wissenschaften und der Literatur entwickeln. Eine solche *Lingua Franca* wurde dringend benötigt, da sich die verschiedenen Volksdialekte schnell auseinander entwickelten.

Eine Blütezeit erlebt das klassische Sanskrit in der Literatur des ersten Jahrtausends durch Dichter wie *Kālidāsa*. Zu dieser Zeit war Sanskrit bereits seit vielen Jahrhunderten eine weitestgehend *tote* Sprache, die zumeist nicht mehr muttersprachlich erworben wurde. Eine gewisse Parallelität kann hier zu der Bedeutung des Lateins im Europa des Mittelalters gesehen werden. Coulson (1976, S. xxi) hebt allerdings hervor:

There is however, an important difference. Few would deny Cicero or Vergil a greater importance in Latin literature than any Medieval author. Conversely, few Sanskritists would deny that the centre of gravity in Sanskrit literature lies somewhere in the first millennium AD, for all that its authors were writing in a so-called ‘dead language’.

Coulson unterscheidet zwischen *erlernten* und *natürlichen* sowie *toten* und *lebendigen* Sprachen:

[I]t may be useful to make a twofold distinction – between a living and a dead language, and between a natural and a learned one. A language is natural when it is acquired and used instinctively; it is living when people choose to converse and formulate ideas in it in preference to any other. To the modern Western scholar Sanskrit is a dead as well as a learned language. To Kālidāsa or Śaṅkara it was a learned language but a living one. (Coulson 1976, S. xxi)

Heute wird das klassische Sanskrit zumeist zu den toten Sprachen gezählt. Allerdings spielt es bis heute noch eine gewisse Rolle als Wissenschaftssprache, auch wenn es inzwischen zunehmend vom Englischen verdrängt wird. Sanskrit zählt zu den 22 in der indischen Verfassung aufgeführten, offiziellen Sprachen Indiens, auch wenn bei der Volkszählung von 2001 nur noch gut 14 000 Personen Sanskrit als ihre Muttersprache angeben.⁴ Seit einigen Jahren gibt es verstärkte Bestrebungen, die Bedeutung des Sanskrits in Indien zu erhöhen. Das Jahr 1999/2000 ist in Indien zum offiziellen Sanskritjahr erklärt worden und der Umfang des Sanskritunterrichts auch an technischen Universitäten steigt.⁵ Es gibt also Bestrebungen, Sanskrit wieder den Status einer lebendigen, erlernten Sprache im Sinne Coulsons zukommen zu lassen.

2.2 Kurze Würdigung der indischen Grammatikforschung vor Pāṇini

Bevor in den Unterkapiteln 2.3 und 2.4 näher auf Pāṇinis linguistische Leistungen eingegangen werden wird, soll hier zunächst aufgezeigt werden, wie groß das Repertoire an linguistischen Konzepten und Methoden war, auf das Pāṇini zugreifen konnte. Außerdem soll die besondere Rolle der Linguistik im antiken Indien beleuchtet werden, die sie zur *śāstrānām śāstram*, der „Wissenschaft der Wissenschaften“ machte.

Den linguistischen Wissenschaften kommt im antiken Indien die Aufgabe zu, die religiösen Texte der Veden vor Einflüssen des Sprachwandels zu schützen:

Indian linguistics originated among reciters who wanted to preserve their Vedic heritage and apply it in ritual. Unconcerned with meaning, they concentrated on form and incorporated a good measure of linguistic analysis that culminated in the Sanskrit grammar of Pāṇini (which includes many Vedic forms referred to as such).
(Staal 2006, S. 108)

⁴http://censusindia.gov.in/Census_Data_2001/Census_Data_Online/Language/Statement5.htm

⁵Laut der Pressestelle der indischen Regierung gab es 1999 in Indien acht Sanskrit-Universitäten, sieben Sanskrit-Akademien und 5 000 Sanskrit-Schulen (<http://pib.nic.in/feature/fe1299/f1512991.html>).

Von den vier linguistischen Hilfswissenschaften (*Vedāṅga*) – Phonetik (*Śikṣā*),⁶ Prosodie (*Chandas*), Grammatik (*Vyākaraṇa*) und Etymologie (*Nirukta*) – erhielt die Phonetik besondere Aufmerksamkeit, da aufgrund des Sprachwandels bereits in den ersten Jahrhunderten nach dem Entstehen der vedischen Texte die gesprochene Alltagssprache stark von der Sprache der Veden abwich. Dies wurde als Problem angesehen, da in der vedischen Religion dem rituellen Rezitieren der Veden eine hohe Bedeutung zukommt. Dabei müssen die Texte in der ursprünglich vorgesehenen Form und in der Sprache des vedischen Sanskrits rezitiert werden.

Die späten vedischen Texte erzählen eine Geschichte, die verdeutlichen soll, wie wichtig die korrekte Aussprache und Akzentuierung der rituellen Ausdrücke ist (nach Deshpande 1995): Der Dämon Tvaṣṭṛ wünschte sich einen Sohn, der den Kriegsgott Indra erschlagen sollte. Aber anstatt um einen *Indra-śatrú* (einen *Indra-Erschläger*) zu bitten, bittet er um einen *Índra-śatru* und erhält einen Sohn, der von Indra erschlagen wird. Diese Anekdote eines auf einer fehlerhaften Aussprache beruhenden Mißverständnisses findet sich in zahlreichen Lehrbüchern des vedischen Sanskrits, um zu verdeutlichen, wie wichtig das Erlernen der korrekten Aussprache und Betonung ist.

Auch die Texte der *Sūtras*, die aus prägnanten, formelhaften Ausdrücken in Prosa bestehen, dienen der Rezitation. Es kann angenommen werden, daß ihre Rezitation nicht nur der mündlichen Überlieferung diene, sondern einen eigenen rituell religiösen Ursprung hat:

On a philosophical level, ritual is probably also the origin of a leading idea behind grammar as well as other disciplines such as

⁶Eine befriedigende Übertragung der Bezeichnungen für die einzelnen Hilfswissenschaften ins Deutsche ist nicht möglich, da die Grenzen der Disziplinen nicht übereinstimmen. Hier wird *Śikṣā* in Anlehnung an Deshpande (1995) mit *Phonetik* übersetzt: „[M]any modern scholars have devoted their attention to a possible distinction between phonetics and phonology in the context of the ancient traditions of Sanskrit phonetics and grammar (cf. Deshpande 1975; Bare 1976; Cardona 1983). [...] Often, the term *varṇa* is translated by the term ‚phoneme‘ in modern expositions of Sanskrit phonetics. [...] However, the term *varṇa* does not strictly refer to a phoneme in modern linguistics. For Sanskrit phoneticians, the sounds *n* and *ñ* are distinct *varṇas*, while they would be only allophones for a modern linguist. On the contrary, the sounds *a* and *ā* would be separate phonemes for a modern linguist, but they belong to the same *varṇa* for Sanskrit phoneticians and grammarians“ (Deshpande 1995, S. 76).

yoga in ancient India: that human activities, even those normally carried out in an unconscious or unselfconscious way, can be analyzed by explicit rule systems, and that performing those activities in awareness of the rules that govern them brings religious merit. (Kiparsky 1994, S. 2918)

Einen weiteren Anschlag erhält die indische Linguistik dadurch, daß sich neben der üblichen, *Samhitāpāṭha* genannten Rezitation ganzer kontinuierlicher Verse, eine weitere Rezitationsform herausbildet, die sogenannte *Padapāṭha* (*Wort-für-Wort*) Rezitation. Sie entwickelt sich nach Staal (1974) zwischen dem 10. und 7. Jahrhundert v. Chr. Für die *Padapāṭha*-Form wird der kontinuierliche Text (*Samhitā*) analysiert und in die einzelnen Bestandteile zerlegt, aus denen er aufgebaut ist. Dabei werden alle Sandhi-Prozesse rückgängig gemacht. Die Aufgabe der Rezitierenden ist es, die kontinuierliche Form mithilfe der Regelwerke aus der *Padapāṭha*-Form zu bilden. Staal (1974) zitiert folgendes Beispiel aus der Ṛgveda (10.127.2):

Samhitāpāṭha: órv aprā ámartyā niváto devý udvátaḥ //

Padapāṭha: /á/urú/aprāḥ/ámartyā/ni-vátaḥ/deví/ut-vátaḥ //

„The immortal goddess has pervaded the wide space, the depths and the heights.“

Nach Staal (1982) werden für die *Padapāṭha*-Form schon um 1000 v. Chr. einzelne Wörter noch weiter in Stamm und Suffixe zerlegt. Es gab somit bereits sehr früh Ansätze einer morphologischen Analyse. Beide Rezitationstraditionen begründen die indische Phonetik und Phonologie:

Thus, the concern of these early phoneticians and exegetes was twofold, that is, the proper pronunciation of the Vedic texts and figuring out the rules for performing sandhi operations on the word-by-word texts to produce the continuous texts. The first concern was responsible for developing the analytical study of the articulation of sounds, while the second concern was responsible for the search for features and groupings of these sounds which may be used in defining the rules of sandhi. In these two concerns can be

seen the origins of the phonetic and phonological theories of the ancient Indian phoneticians and grammarians.

(Deshpande 1995, S. 73)

Dem Ziel, die Ableitung der *Samhitāpāṭha*-Formen aus den *Padapāṭha*-Formen zu beschreiben, widmet sich vor allem die *Prātiśākhya* Literatur, die nach der Kanonisierung der vedischen Werke in den vedischen Schulen entstanden ist. Dabei handelt es sich um Lehrwerke, die in erster Linie Sammlungen umfangreicher phonologischer Regelbündel enthalten. Obwohl zahlreiche der erhaltenen *Prātiśākhyas* vermutlich ungefähr zur selben Zeit wie Pāṇinis Grammatik des klassischen Sanskrits entstanden sind, unterscheiden sie sich in ihrer Zielsetzung und dem zugrundeliegenden Sprachverständnis von letzterer in außerordentlichem Maße. Während Pāṇini eine vollständig generative Grammatik liefert, konzentrieren sich die *Prātiśākhyas* ausschließlich auf das begrenzte Korpus der Veden. Somit erheben die aufgestellten Regeln keinen Anspruch, Generalisierungen bezüglich einer unendlichen Sprache zu sein. Viele der aufgestellten Regeln sind *ad hoc* und beschreiben keine Eigenschaft des vedischen Sanskrits, wie Staal (1982) an einigen Beispielen ausführt. Das Ziel der *Prātiśākhyas* ist die Analyse der Veden und nicht die Generierung einer natürlichen Sprache. Aufgrund der fehlenden Generalisierungen mußte jede vedische Schule eine eigene *Prātiśākhya* Literatur hervorbringen:

The treatises of phonetics, generally divided into two types called *Śikṣā* and *Prātiśākhya*, deal with specific Vedic texts and their recitation, rather than Sanskrit or Vedic language as such. This makes the phonetic manuals very special in some sense. The observations contained in the phonetic manuals are of a nongeneralized, highly specific nature, and thus they provide a microscopically detailed picture of the sounds of Sanskrit as used in specific oral scriptural traditions.

(Deshpande 1995, S. 72)

Aber obwohl die *Śikṣās* und die *Prātiśākhyas* lediglich phonetische Leitfäden für die Rezitation einzelner Veden sind, weisen die phonetischen Arbeiten vor Pāṇini bereits ein hohes Maß an phonetischer und phonologischer Konzeptualisierung auf. So werden zahlreiche Konzepte wie *Konsonant*, *Vokal*, *Artikulationsort*, *Stimmhaftigkeit* und andere in der *Prātiśākhya*-Literatur verwendet

Vokale	a	ā	i	ī	u	ū	ṛ	ṝ	ḷ
	e	o	ai	au					
Konsonanten									
<i>Sparśa:</i>	k		kh		g		gh		ṅ
	c		ch		j		jh		ñ
	ṭ		ṭh		ḍ		ḍh		ṇ
	t		th		d		dh		n
	p		ph		b		bh		m
<i>Antahsthā:</i>	y		r		l		v		
<i>Ūṣman:</i>	ś		ṣ		s		h		
zusätzliche Laute:									
<i>Anusvāra:</i>	ṁ								
<i>Visarga:</i>	ḥ								
<i>Jihvāmūlīya:</i>	ḥ								
<i>Upadhmānīya:</i>	ḥ								

Abbildung 2.1: Akṣara-samāmnāya (nach Deshpande 1995, S. 74)

und zum Teil bereits präzise definiert (vgl. Staal 1995). In den Regelwerken findet sich außerdem ein, wenn auch noch nicht systematisch ausgearbeitetes, umfangreiches Methodenrepertoire, auf das Pāṇini zugreifen konnte.

Besonders deutlich wird die Fortschrittlichkeit der Konzeptualisierung an der in der Tabelle in Abbildung 2.1 wiedergegebenen Lautsammlung⁷ (*Akṣara-samāmnāya*), die sich so in nahezu allen *Śikṣās* und *Prātiśākhya*s findet etwa auf das Jahr 700 v. Chr. datiert wird (vgl. Deshpande 1995). Die Ordnung der Laute beruht auf einer genauen – und aus heutiger Sicht modernen – Analyse der Artikulationsart, des Artikulationsorts und des Artikulationsorgans.

Im folgenden sollen die Laute der *Sparśa*-Klasse, der Klasse der Verschlusslaute, näher untersucht werden: Die *Sparśa*-Laute werden in bezug auf ihre Artikulationsorte und die beteiligten Artikulationsorgane in fünf *Varga* (hier

⁷In der Tabelle sind die Laute in Form von Graphemen repräsentiert. In der mündlichen Tradition wird allen Konsonanten und Halbvokalen ein kurzes *a* angehängt, um sprechbare Silben zu erlangen.

Reihen) eingeteilt: k(a)-Varga (Velare), c(a)-Varga (Palatale), ṭ(a)-Varga (Retroflexe), t(a)-Varga (Dentale) und p(a)-Varga (Labiale). Die Reihenfolge der *Varga* untereinander ergibt sich aus dem Ort der Bildung ihrer Laute. Dabei werden die Laute der k(a)-Varga am weitesten hinten und die Laute der p(a)-Varga am weitesten vorne gebildet.⁸ Auch die Spalten der *Sparśa* bilden nach heutigem Verständnis natürliche Lautklassen, diesmal organisiert nach Merkmalen der Artikulationsart: Die erste Spalte entspricht den stimmlosen, nichtaspirierten Verschlußlauten, die zweite Spalte den stimmlosen, aspirierten, die dritte Spalte den stimmhaften, nichtaspirierten, die vierte Spalte den stimmhaften, aspirierten, und die letzte Spalte entspricht schließlich den Nasalen. Staal (1995) betont, daß das *Varga*-System der *Sparśa* das Extrakt einer generationsübergreifenden Forschung sein muß; er vergleicht es daher mit dem Mendelejewschen Periodensystem.⁹

Das Alphabet der heute in Indien verwendeten Schrift *Devanāgarī* stimmt mit dem *Varga*-System überein. Auch viele andere Schriftsysteme im indischen

⁸Die gleiche *Von-hinten-nach-vorne*-Organisation von Lauten findet sich auch in der Gruppe der Vokale und der anderen Konsonanten.

⁹Besonders interessant an diesem Vergleich ist, daß Mendelejew einen dem *Varga*-System vergleichbaren zweidimensionalen Aufbau für sein Periodensystem der Elemente vorschlägt. Die Elemente werden bezüglich *Analogie* und *Atomzahl* geordnet, wobei bis dato unbekannte Elemente angenommen werden, deren Existenz von dem Ordnungssystem vorausgesagt wird. Acht Elemente werden mit Bezeichnungen aus dem Sanskrit benannt. Da im 19. Jahrhundert Ergebnisse der Sanskritforschung und der Naturwissenschaften in denselben Medien publiziert wurden, ist es denkbar, daß Mendelejew von dem *Varga*-System inspiriert wurde (vgl. Kak 2004).

Paul Kiparsky stellt am 12.9.1996 auf der *Indology Mailing List* von *LinguistList* (<http://linguistlist.org/>) die Frage: „Why did Mendeleev use Sanskrit terminology here rather than Greek or Latin as is normal? Could it be that he knew about the Sivasutras? If he did, he must have seen that they are really a periodic system of the Sanskrit sounds, amazingly similar to his own periodic system of chemical elements even in their arrangement. So, could the Sanskrit names have been meant as homage to Panini?“ Am 29.9.1996 kommt er nach Hinweisen von Peter Wyzlic and Klaus Karttunen zu der Vermutung, daß Mendelejew über eine Bekanntschaft mit Böhtlingk, zu der Zeit da dieser an seiner Pāṇini Übersetzung arbeitete, die *Śivasūtras* kennenlernte. Kiparsky argumentiert, daß „[j]ust as Pāṇini broke the phonetic parallelism of sounds when the simplicity of the system required it, [...] so Mendeleev gave priority to isomorphism over atomic weights when they conflicted [...] In both cases, the periodicities they discovered would later be explained by a theory of the internal structure of the elements“. Kak (2004) bezweifelt jedoch, daß Mendelejews Kenntnisse von Pāṇinis Grammatik ausreichten, „to appreciate the subtle points related to the organization of the Śiva Sutras“.

Raum bauen auf dem *Varga*-System auf. Staal (2006, S. 116) argumentiert, daß sich das indische *Varga*-System nicht *trotz*, sondern gerade *wegen* der fehlenden Verschriftlichung rasant ausbreitete: „Oral knowledge spreads more easily than written knowledge especially when it is knowledge of sounds“. Nach Staal (2006) ist sogar das koreanische Schriftsystem von dem indischen *Varga*-System beeinflusst, insofern, als daß ihm dasselbe Ordnungssystem zugrunde liegt. Selbst die arabische Schrift zeigt Einflüsse der indischen Grammatiktradition, da zum Beispiel ähnliche Schriftzeichen für Laute verwendet werden, die in einer *Varga* zusammengefaßt werden müßten (vgl. Staal 2006, S. 113 ff.).

Die *Prātisākhya*s greifen das *Varga*-System auf und entwickeln auf dieser Grundlage ein technisches Vokabular, das linguistische und speziell phonetische Begriffe präzisiert. Nur mit dieser Terminologie gelingt es, die beobachtete wechselseitige Beeinflussung benachbarter Laute in zusammenhängender Rede in Systemen von *Sandhi*-Regeln zu beschreiben. Diese Regelsysteme sind Ausdruck einer beachtlichen methodologischen Leistung: Sie verwenden metasprachliche Ausdrücke (so steht zum Beispiel der erste Laut einer *Varga* für die gesamte *Varga*) und es finden sich in ihnen bereits Metaregeln, die die Verwendung anderer Regeln steuern (vgl. Staal 1975, 2006).

Der Schwachpunkt dieser Arbeiten aus moderner linguistischer Sicht ist, daß sie nicht den Versuch gemacht haben, eine natürliche Sprache zu untersuchen, sondern sich auf ein endliches Korpus beschränken; die Erweiterung auf ein unendliches Korpus leistet erst Pāṇini. Damit erfüllen die Arbeiten jedoch die Anforderungen, die an sie gestellt wurden, nämlich die Rezitation der Veden möglichst in ihrer Ursprungsform zu ermöglichen. Hierdurch wurde die Linguistik in Indien zur *Wissenschaft der Wissenschaften* (*Śāstrānām Śāstram*).

Es ist davon auszugehen, daß Pāṇini als Gelehrter Zugang zu den früheren linguistischen Werken hatte und er somit sowohl mit den Ansätzen zur phonetischen Klassifikation als auch mit den Vorläufern der metasprachlichen Methoden vertraut war. Die Erweiterung der Grammatik zu einem generativen System und der systematische Einsatz einer grammatischen Metasprache sind jedoch originäre Leistungen Pāṇinis.

2.3 *Aṣṭādhyāyī*

Dieses Unterkapitel beleuchtet den Aufbau und die Funktionsweise der *Aṣṭādhyāyī*, dem zentralen Bestandteil von Pāṇinis Grammatik. Eine detailliertere Analyse der *Aṣṭādhyāyī* findet sich zum Beispiel bei Misra (1966), Kiparsky (1980, 2002) oder auch bereits bei Kielhorn (1885). Es existieren mehrere kommentierte Übersetzungen der *Aṣṭādhyāyī*; bei der Bearbeitung dieses Texts lagen Böhrling (1887), Vasu (1891) und Katre (1987) vor.¹⁰

Eine genaue Datierung der Grammatik von Pāṇini ist schwierig, da sie wenig Verweise auf andere überlieferte Texte enthält. Staal (1995) siedelt die Grammatik zum Beispiel im 5. Jahrhundert v. Chr. an, während Kiparsky (1994) sie rund 350 v. Chr. datiert. Auch ist nicht geklärt, in welchem Umfang Pāṇini auf bereits bestehende grammatische Systeme zurückgreifen konnte und inwiefern die uns überlieferte Grammatik durch die Nachfolger Pāṇinis geändert wurde. Allerdings kann man aufgrund der ununterbrochenen oralen Tradition der indischen Gelehrten, der frühen Kanonisierung von Pāṇinis Grammatik und der großen Bedeutung, die der exakten Weitergabe der Texte zukam, annehmen, daß die heutige Version zumindest sehr nahe an Pāṇinis Originalversion heranreicht:

For a work that was traditionally handed down without breaks between words, and even recited with the rules themselves run together, the *Aṣṭādhyāyī* was transmitted with remarkable fidelity.
(Kiparsky 2007b, S. 1)

Es gibt jedoch zahlreiche Hinweise, daß einige Regeln nachträglich eingefügt wurden:

That rules have been interpolated after Pāṇini's time into the text of the *Aṣṭādhyāyī* has always been clear, both to Pāṇinīyas and to Western scholars.
(Kiparsky 1991b, S. 331)

Über die Urheberschaft einzelner Regeln werden erbitterte Kontroversen geführt (vgl. Kiparsky 2007b, 1991b; Joshi & Roodbergen 1983; Cardona

¹⁰Zusätzlich wurde auf die elektronische Fassung der *Aṣṭādhyāyī* von Anand Mishra unter <http://www.sai.uni-heidelberg.de/~amishra/> zugegriffen.

1988, 1990). Uneinigkeit herrscht auch darüber, ob die komplette Grammatik als ein Gesamtsystem von Pāṇini allein entworfen wurde. Während Bloomfield (1929, S. 274) noch davon überzeugt ist, daß „[a]lthough Pāṇini’s work has a history behind it, it is the achievement of one man“, schreibt Staal (1982, S. 25): „It is quite possible that the *Aṣṭādhyāyī* is also [...] a collective work.“

Pāṇinis Grammatik des Sanskrits unterscheidet sich grundlegend von den *Prātiśākhya*s. Es ist die älteste überlieferte indische Grammatik, die sich nicht auf das endliche Korpus der Veden beschränkt, sondern eine umfassende Beschreibung der Gelehrtensprache zu Pāṇinis Zeit liefert.

Pāṇini was describing a colloquial speech, a conservative upper class language, to be sure, but a language native to him and used in every day life by the Brahmins in his part of the North Western India. (Bloomfield 1929, S. 269)

Also war Pāṇinis Grammatik ursprünglich eine *deskriptive* Beschreibung eines aktiven Sprachgebrauchs, die erst im Nachhinein zur Norm des klassischen Sanskrits deklariert und somit zu einer *präskriptiven* Grammatik erklärt wurde (vgl. Staal 1995, S. 100).

Im Gegensatz zur den *Prātiśākhya*s beschränkt sich Pāṇinis Grammatik nicht auf vorwiegend phonetische Analysen, sondern umfaßt, zumindest in Ansätzen, alle grammatischen Disziplinen: Phonologie, Morphologie, Syntax (eingeschränkt) und Semantik (eingeschränkt) sowie ein umfangreiches Lexikon. Zusätzlich enthält die Grammatik zahlreiche Sonderregeln, die das alte vedische Sanskrit sowie verschiedene Dialekte beschreiben. Trotz ihres umfassenden Inhalts ist die Grammatik bemerkenswert kurz – sie kann innerhalb weniger Stunden rezitiert werden. Bloomfield schreibt:

This grammar [...] is one of the greatest monuments of human intelligence. It describes, with the minutest detail, every inflection, derivation, and composition, and every syntactic usage of its author’s speech. No other language, to this day, has been so perfectly described. (Bloomfield 1933, S. 11)

Pāṇinis Grammatik ist ein im Sinne Chomskys generatives System, das eine unendliche Sprache generiert und in vielerlei Hinsicht als sehr modern angesehen werden kann:

Modern linguistics acknowledges it as the most complete generative grammar of any language yet written, and continues to adopt technical ideas from it. (Kiparsky 1994, 2918)

Pāṇinis gesamte Grammatik ist in Form von *Sūtras* verfaßt, die der rituellen Rezitation dienen. Die Grammatik ist aus vier Teilen aufgebaut:

- (1) *Aṣṭādhyāyī*: Ein System von circa 4 000 grammatischen Regeln.
- (2) *Śivasūtras*: Einer Lautliste, die aufgrund ihrer besonderen Konstruktion in der Lage ist, Klassen von Lauten bereitzuhalten (siehe Unterkapitel 2.4).
- (3) *Dhātupāṭha*: Ein Verzeichnis von etwa 2 000 Verbalwurzeln.
- (4) *Gaṇapāṭha*: Liste von Gruppen nonverbaler Stämme.

Die *Aṣṭādhyāyī* (,acht Bücher‘) bestehen aus acht Büchern, die ihrerseits wieder aus jeweils vier Kapiteln (*Pāda*) aufgebaut sind.¹¹ Sie bilden den Kern der Grammatik und enthalten Regeln, die wiederum auf Mengen operieren, die von den anderen drei Teilen (*Śivasūtras*, *Dhātupāṭha*, *Gaṇapāṭha*) bereitgestellt werden.

Nach Kiparsky (1994) lassen sich vier verschiedene Arten von Regeln unterscheiden:

- Definitionsregeln (*Samjñā*), die die technischen Terme definieren;
- Metaregeln (*Paribhāṣā*), die die Anwendung und das Zusammenwirken der anderen Regeln steuern;
- Überschriften (*Adhikāra*), die über eine Vererbungshierarchie Generalisierungen erfassen;¹²

¹¹Der Aufbau der *Aṣṭādhyāyī* erlaubt eine einfache Numerierung der einzelnen *Sūtras*; 1.1.71 ist z. B. das 71. *Sūtra* im ersten Kapitel des ersten Buches. Diese Numerierung, die eher der schnellen Referenz in einem geschriebenen Werk dient, geht nicht auf Pāṇini zurück, da die *Aṣṭādhyāyī* mündlich überliefert werden sollten und dies durch das zusätzliche Erlernen der Nummern erschwert werden würde.

¹²Deo (2007) zeigt auf, daß die *Sūtras* zur Derivationsmorphologie in Pāṇinis *Aṣṭādhyāyī* eine moderne Vererbungshierarchie mit *Defaults* definieren.

- operationale Regeln (*Vṛtti*), die metasprachliche und sprachliche Ausdrücke verarbeiten.

Das erste *Sūtra* der *Aṣṭādhyāyī* ist ein Beispiel für eine definitonische Regel. Es lautet:

1.1.1 *vṛddhirādaic* (वृद्धिरादैच्)¹³

Um eine Regel zu analysieren, muß sie zunächst in die *Padapāṭha*-Form gebracht werden: *vṛddhiḥ*, *āT*, *aiC* (वृद्धिः, आत्, ऐच्). Die Großbuchstaben markieren hier metasprachlich verwendete Laute, so steht *āT* für den einzelnen Laut *ā* (*Sūtra* 1.1.70), und *aiC* bezeichnet den *Pratyāhāra*, der die Laute *ai* und *au* umfaßt (vgl. Abschnitt 2.4). Die Regel besagt demzufolge, daß der Term *Vṛddhi* die Laute *ā*, *ai* und *au* bezeichnet (*Vṛddhiḥ* bzw. genauer *Vṛddhis* ist der Nominativ Singular von *Vṛddhi*)¹⁴.

Eine genaue Beschreibung der Arbeitsweise der verschiedenen Regeln in den *Aṣṭādhyāyī* würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Hier geht es lediglich darum, die Methode zur Repräsentation von Mengen mathematisch zu analysieren, die in den *Śivasūtras* zum Einsatz kommt. Daher muß es genügen, beispielhaft die Wirkungsweise einer der operationalen Regeln zu erläutern, die auf Lautmengen operiert, welche wiederum von den *Śivasūtras* bereitgestellt werden. Auch das zuerst erläuterte definitonische *Sūtra* 1.1.1 ist ein Beispiel für eine Regel, die auf Grundlage der *Śivasūtras* definiert ist.

Die operationalen Regeln sind häufig von der Form „A wird im Kontext zwischen C und D durch B ersetzt“; dem entspricht der moderne Ausdruck

$$A \rightarrow B/C_D. \quad (2.1)$$

¹³Die *Sūtras* werden hier in lateinischer Transliteration und in *Devanāgarī* angegeben, der Schrift in der die meisten Sanskrittexte gedruckt werden. Alle *Sūtras* sind Böhtlingk (1887) entnommen.

¹⁴Die grammatische Form des Nominativ Singular von *Vṛddhi* ist *Vṛddhis*. Gesprochen oder geschrieben wird ein isoliert stehendes Wort jedoch immer in der *Pausaform*, und die lautet *Vṛddhiḥ*. Da die Wörter in der *Padapāṭha*-Form der *Sūtras* isoliert werden, stehen sie in der *Pausaform*. Stehen die Wörter, wie in der *Samhitāpāṭha*-Form, im Kontext, so erscheinen sie in der *Sandhi*-Form. Das *r* in *Sūtra* 1.1.1 läßt sich mit folgender Sandhiregel erklären: In der Sandhi-Form wird nach Vokalen außer *a* und *ā* ein *s*, das aus *ḥ* hervorgegangen ist, zu *r*.

Die hier verwendete moderne Symbolschrift kommt für Pāṇini nicht in Frage, da seine Grammatik für die mündliche Übermittlung konstruiert ist; Formeln in Symbolschrift erfüllen jedoch nur dort ihren Zweck, wo ihre kompakte Form visuell erfaßt werden kann. In einer mündlichen Tradition müssen Symbole durch metasprachliche, lauthafte Ausdrücke ersetzt werden. Pāṇini nutzt die Kasussuffixe der natürlichen Sprache und verwendet sie als metasprachliche Elemente. Die so verwendeten Kasussuffixe markieren keinen innersprachlichen Kasus, sondern die Rolle des damit markierten Elements innerhalb einer Regel. Die Bestandteile von Regeln wie (2.1) markiert Pāṇini folgendermaßen:

$$\begin{aligned} A + \text{Genitivendung}, B + \text{Nominativendung}, \\ C + \text{Ablativendung}, D + \text{Lokativendung}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ein Beispiel für eine operationale Regel aus den *Aṣṭādhyāyī* ist das *Sūtra* 6.1.77. An diesem Beispiel wird im folgenden Pāṇinis metasprachlicher Gebrauch der Kasussuffixe erläutert.

6.1.77 *iko yaṇaci* (इको यणचि)

Zunächst muß diese Regel in die *Padapāṭha*-Form gebracht werden. Dazu muß man die Sandhi-Prozesse rückgängig machen, um die einzelnen Worte zu ermitteln, aus denen das *Sūtra* gebildet ist; man erhält die *Wort-für-Wort*-Form *ikaḥ, yaṇ, aci* (इकः, यण, अचि).

In der *Padapāṭha*-Form kommen zwei overte Kasussuffixe vor: *-aḥ* (eigentlich *-as*, vgl. Fußnote 14 auf Seite 20) ist die Genitivendung und *-i* die Lokativendung. Das Wort *yaṇ* steht im Nominativ; die Nominativendung *-s* fällt in der Pausaform jedoch weg, da in Sanskrit von einem Konsonantencluster im Auslaut lediglich der erste Konsonant erhalten bleibt (*yaṇs* wird zu *yaṇ*).

Die mit den Kasussuffixen markierten Terme *ik*, *yaṇ* und *ac* sind metasprachliche Ausdrücke, die jeweils eine Liste von sprachlichen Lauten bezeichnen. Dabei steht *ik* für die Liste $\langle i, u, r, l \rangle$, *yaṇ* steht für $\langle y, v, r, l \rangle$ und *ac* steht für $\langle a, i, u, r, l, e, o, ai, au \rangle$. Die Zuordnung der metasprachlichen Ausdrücke zu den Lautlisten leisten die *Śivasūtras*. In Unterkapitel 2.4 wird ausführlich erläutert, wie die Lautlisten denotierenden Ausdrücke auf Grundlage der *Śivasūtras* interpretiert werden.

Das *Sūtra* 6.1.77 drückt aus, daß die Vokale der Klasse $\langle i, u, \dot{r}, \dot{l} \rangle$ durch ihre halbvokalischen Entsprechungen der Klasse $\langle y, v, r, l \rangle$ ersetzt werden müssen, wenn sie vor einem unähnlichen Vokal stehen. Es stellt sich die Frage, wie dem *Sūtra* die gewünschte Bedeutung zugeordnet wird. Für jedes Kasussuffix gibt es eine Metaregel in den *Aṣṭādhyāyī*, die die Interpretation der Kasusmarker in Ausdrücken der Form (2.2) festlegt. Als Beispiel sei hier das *Sūtra* zitiert, welches die Interpretation des Genitivmarkers definiert:

1.1.49 *ṣaṣṭhī sthāneyogā* (षष्ठी स्थानेयोगा) „Der Genitiv in einem *Sūtra* bezeichnet dasjenige, an dessen Stelle Etwas treten soll.“¹⁵

Diese Metaregeln garantieren, daß der Ausdruck (2.2) äquivalent ist zu „A wird im Kontext zwischen C und D durch B ersetzt“.

Um schließlich zu erreichen, daß jeder Laut der Klasse $\langle i, u, \dot{r}, \dot{l} \rangle$ nur durch den ihm entsprechenden Laut der Klasse $\langle y, v, r, l \rangle$ ersetzt wird, so daß nicht etwa *i* statt durch *y* durch *r* ersetzt wird, wird eine weitere Metaregel benötigt:

1.3.10 *yathāsamkhyamanudeśah samānām* (यथासंख्यमनुदेशः समानाम्) „Die nachfolgenden Glieder in einem *Sūtra*, wenn sie von gleicher Anzahl mit den vorhergehenden sind, entsprechen diesen der Reihe nach.“

An dem diskutierten Beispiel wird deutlich, wie die verschiedenen *Sūtras* aus den verschiedenen Büchern der *Aṣṭādhyāyī* ineinandergreifen, um eine grammatische Regel zum Ausdruck zu bringen. Mit Regeln vom Typ (2.2) werden übrigens nicht nur phonetische Prozesse, sondern auch morphologische Phänomene beschrieben. Staal stellt in seinem Artikel *The Sanskrit of Science* heraus, daß Pāṇini in den *Aṣṭādhyāyī* eine besondere Kunstsprache erschafft:

I believe that Pāṇini reached here a level of artificiality that neither the logicians nor the mathematicians attained. He did not, like the logicians, create expressions through an increasingly complex and semi-artificial but basically natural development of ordinary Sanskrit. He did not, like the mathematicians, create artificial notations which stood separate and outside the language in isolated cells. He created artificial constituents and a mechanism through

¹⁵Die Übersetzungen der *Sūtras* folgen Böhlingk (1887).

which these constituents could be integrated into a new language, the metalanguage of his grammar. That metalanguage makes use of the case-endings of the object language, but their use is formalized. (Staal 1995, S. 107)

Der Aufbau der *Aṣṭādhyāyī* folgt durchgehend ökonomischen Prinzipien (vgl. auch Unterkapitel 3.1). Dadurch sind die *Aṣṭādhyāyī* für eine Grammatik ihres Beschreibungsumfangs erstaunlich kompakt. Es ist folglich möglich, innerhalb kurzer Zeit die gesamte Grammatik des Sanskrits wiederzugeben, inklusive pragmatischer, semantischer, syntaktischer, morphologischer und phonologischer Aspekte, was auch den Aufwand des Memorierens minimiert. Der ökonomische Aufbau wird in erster Linie dadurch erreicht, daß die *Sūtras* nicht primär nach Themen geordnet werden, sondern nach ihren Bestandteilen. Alle Regeln mit einem identischen Bestandteil werden unter einer gemeinsamen Überschrift, nämlich dem geteilten Bestandteil, angeordnet. Dadurch kann aus jeder Regel der gemeinsame Bestandteil gestrichen werden, da dieser von der Überschrift geerbt wird. Eine solche Überschrift überschreibt bis zu 1000 Regeln, die thematisch nicht zusammenhängen müssen. Dieses Verfahren erlaubt auch die Bildung von Unterüberschriften, was dazu führt, daß das einzelne *Sūtra* mitunter sehr kurz wird und die meisten der für das Verständnis notwendigen Bestandteile ererbt werden müssen.

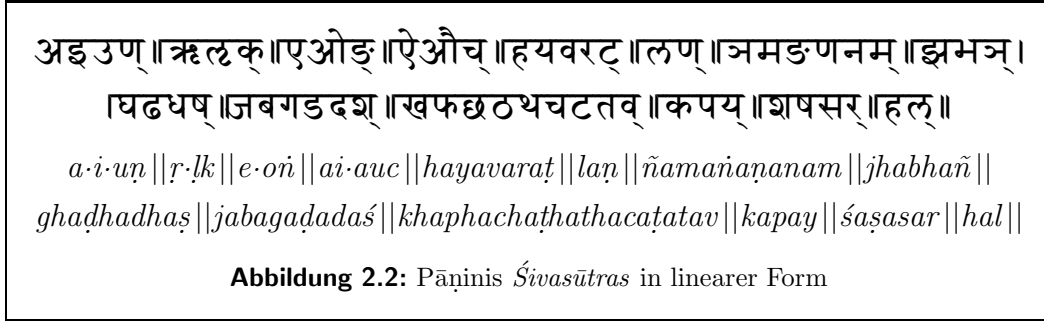
Auch für den korrekten Einsatz von Subregularitäten hält Pāṇini ein ausgeklügeltes System bereit. Er ordnet die Regeln in den *Aṣṭādhyāyī* hierarchisch bezüglich ihrer Generalität. Eine speziellere Regel blockiert die Anwendung einer generelleren und kann somit zur Beschreibung einer Subregularität genutzt werden (der Blockierungsmechanismus wird ausführlich in Kiparsky 2002 dargestellt). Die *Aṣṭādhyāyī* beschreiben somit eine nichtmonotone Vererbungshierarchie mit *Defaults*. Derartige Hierarchien spielen eine wichtige Rolle in der modernen Computerlinguistik (vgl. Copestake & Lascarides 1999; Daelemans & De Smedt 1994; Gazdar 1987). Deo (2007) zeigt am Beispiel des *Taddhita*-Abschnittes der *Aṣṭādhyāyī*, daß Pāṇini zur Beschreibung der nominalen Derivationsmorphologie ähnliche Organisationsprinzipien einsetzt wie moderne vererbungs-basierte Lexika der Computerlinguistik (vgl. Kilbury et al. 2006; Barg 1996b; Light 1994; Briscoe et al. 1993). Eine detaillierte Beschreibung

der Funktionsweise des Regelsystems der *Aṣṭādhyāyī* findet man bei Kiparsky (2002), Misra (1966) und Sharma (2002).

Pāṇinis Grammatik wurde erst im 19. Jahrhundert von westlichen Linguisten übersetzt (vgl. Wilkins 1808; Böhtlingk 1887) und erfährt seitdem auch außerhalb Indiens große Beachtung und Bewunderung.¹⁶ Zum einen gilt sie bis heute als eine der umfassendsten Grammatiken einer Einzelsprache, die darüber hinaus durch ihre Kompaktheit besticht. Zum anderen wird der Art der Darstellung hohe Anerkennung entgegengebracht. Die eingesetzten technischen Konstruktionsprinzipien sowie die verwendeten Repräsentationsmethoden nehmen viele moderne Ansätze speziell der Informatik vorweg (vgl. Bhate & Kak 1993). So fordert Ingerman (1967), daß die in der Informatik gebräuchliche *Backus-Naur-Form* (BNF) zur Definition der Syntax von Programmiersprachen in *Pāṇini-Backus-Form* umbenannt werden sollte, da in den *Aṣṭādhyāyī* bereits eine Notation verwendet wird, die äquivalent ist zu BNF. Da Pāṇinis Grammatik durch ihre mathematische Präzision besticht, erscheint es möglich, die in ihr verwendeten Methoden zur Wissensrepräsentation in der Künstlichen Intelligenz (vgl. Briggs 1985) oder zur maschinellen Sprachverarbeitung (vgl. Kak 1987) einzusetzen. Huet (2007) dämpft allerdings die Erwartungen und warnt: „[A]t present there is no serious hope to build a ‘computerized Pāṇini’ soon, and still less to use it in reverse as a parsing tool.“ Er stellt heraus, daß die Details von Pāṇinis Grammatik noch

¹⁶Es ist jedoch wichtig darauf hinzuweisen, daß die indische Grammatiktradition nach den antiken Grammatikern nicht abreißt, sondern außerhalb des indischen Raums lediglich ignoriert wird: „But what we have here is a construct due to the neglect not only of indigenous categories but also of indigenous sources.“ (Staal 2006, S. 107 f.). Zur Überlegenheit der indischen Grammatikwissenschaften über die moderne Linguistik schreibt Staal:

Linguistics developed in India in the course of almost 3000 years. At their worst, linguists in India were given to classifications and to dogmatic adherence to what earlier authorities had laid down. But at their best the Indian linguists studied Sanskrit in width as well as depth and in terms of a general scientific methodology which was remarkably consistent, explicit, and hence fruitful. Linguistics in the West, despite its early beginnings in classical antiquity, presents the image of a young science, until recently concerned with its own autonomy and eager to reach the level of the physical or the mathematical sciences. Linguistics in India has from the beginning occupied the center of scientific tradition. (Staal 1974, S. 71)



immer nicht gut genug verstanden werden, um sie in Algorithmen zu übersetzen. Hinzu kommt, daß Pāṇinis Grammatik generativ ist und somit nicht für das *Parsen* geeignet ist. Allerdings stellt er klar: „Nonetheless, Pāṇini’s grammar is ultimately the golden standard against which the generative tools underlying any Sanskrit implementation must be measured“ (Huet 2007, S. 3).

2.4 Śivasūtras

Dieses Unterkapitel erläutert den Aufbau der Śivasūtras und erklärt, wie sie genutzt werden, um die in den *Aṣṭādhyāyī* verwendeten Lautklassen zu definieren.

Abbildung 2.2 zeigt die Śivasūtras als lineare Liste von *Sūtras*, wie Pāṇini sie für die mündliche Weitergabe konstruiert hat. Eine zweidimensionale Darstellung wie in Abbildung 2.3 erleichtert den visuellen Zugang und wird daher auch in dieser schriftlich verfaßten Arbeit genutzt. Es sei aber noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Śivasūtras für die Rezitation konstruiert wurden und daher in ihrer ursprünglichen Form strikt eindimensional sein mußten.

Pāṇini verwirft das traditionelle zweidimensionale *Varga*-System (vgl. Abbildung 2.1) und ersetzt es durch die eindimensionalen Śivasūtras.¹⁷ Im Gegensatz zum *Varga*-System ordnen die Śivasūtras die Laute nicht unter externen

¹⁷Pāṇini nutzt zusätzlich zu den Śivasūtras auch das ältere *Varga*-System in den *Aṣṭādhyāyī* (*Sūtra* 1.1.69): „Alphabet [*Varga*-System] and Śiva-Sūtra complement each other“ (Faddegon 1929, S. 276).

1.	a	i	u			Ṇ
2.				ṛ	ḷ	Ḷ
3.		e	o			ṅ
4.		ai	au			Ḷ
5.	h	y	v	r		ṭ
6.					l	Ṇ
7.	ñ	m	ṅ	ṇ	n	M
8.	jh	bh				ṅ
9.			gh	ḍh	dh	Ṣ
10.	j	b	g	ḍ	d	Ṣ
11.	kh	ph	ch	ṭh	th	
			c	ṭ	t	V
12.	k	p				Y
13.			ś	ṣ	s	R
14.	h					L

Abbildung 2.3: Pāṇinis *Śivasūtras* in tabellarischer Form (nach Kiparsky 1991a)

Ähnlichkeitsgesichtspunkten – wie gleicher Artikulationsort oder gleiche Artikulationsart –, die Ordnung beruht vielmehr primär auf den Anforderungen generalisierter Regeln. So werden jene Laute nahe zueinander angeordnet, die sich in einem ähnlichen phonetischen Umfeld ähnlich verhalten. Die Ordnung basiert also in erster Linie auf dem strukturellen Verhalten der Laute in der Sprache (also auf phonologischen Aspekten) und nicht auf phonetischen Ähnlichkeiten (vgl. auch Fußnote 9, S. 15):

They are grouped on the basis of their total structural behaviour in the language and not on mere phonological similarity. They follow the order of the traditional alphabet (*varṇasamāmnāya*) as long as the order is not interfered by the overall structural behaviour. They are formed on the basis of strict economy.

(Misra 1966, S.60)

Dies entspricht der modernen phonologischen Auffassung:

This phenomenon, that the structural description and/or the structural change in rules will be met not only by a single segment, but rather by some larger set of segments R , is in fact so pervasive that it makes a great deal of sense to introduce some formal apparatus that enables us to exploit it in our characterization of the phonological system. What is required is a clever notation that lets us characterize any such $R \subset S$ [S ist die Menge der Lautsegmente], traditionally called a natural class, in a compact manner so that rules stated in terms of natural classes are just as easy, or perhaps even easier, to deal with as rules stated in terms of segments.

(Kornai 1993, S. 38)

In Pāṇinis Grammatik stehen die *Śivasūtras* vor den *Aṣṭādhyāyī*. Die Legende besagt, daß der Gott Śiva Pāṇini die *Śivasūtras* gegeben hat, damit dieser mit der Entwicklung der Grammatik beginnen konnte. Ich werde jedoch in den Kapiteln 4 bis 6 nachweisen, daß die *Śivasūtras* aus den *Aṣṭādhyāyī* ohne Inanspruchnahme zusätzlicher Hilfe gewonnen werden können. Weiterhin behaupte ich, daß meine Beweise zeigen, daß die Annahme, die *Śivasūtras* seien älter als die *Aṣṭādhyāyī* (siehe z. B. Faddegon 1929) oder vollständig unabhängig von diesen (siehe z. B. Sköld 1926), nicht haltbar ist.

Die Aufgabe der *Śivasūtras* ist es, relevante Klassen von Lauten des Sanskrits bereitzustellen, auf denen die Regeln der *Aṣṭādhyāyī* operieren können. Im folgenden werden zunächst die Bestandteile der *Śivasūtras* erläutert, um anschließend demonstrieren zu können, wie man von metasprachlichen Ausdrücken wie *ik*, *yaṇ*, *ac* (siehe *Sūtra* 1.6.77.) aus den *Sūtras* der *Aṣṭādhyāyī* zu den bezeichneten Lautklassen kommt.

Pāṇini identifiziert 42 relevante Laute in Sanskrit, die er in den *Śivasūtras* in 14 *Sūtras* organisiert (siehe Abbildung 2.3).¹⁸ Jedes *Sūtra* besteht aus einer Liste von Lautelementen, die von einem *Anubandha* abgeschlossen wird.¹⁹ Die *Anubandhas* dienen als metasprachliche Markersymbole und sind der Menge der Konsonanten entnommen.²⁰ Es ist bemerkenswert, daß sowohl ein Lautelement, nämlich *h*, als auch ein *Anubandha*, nämlich *Ṇ*, in den *Śivasūtras* mehrfach erscheint; auf diese Besonderheiten wird im Verlauf dieses Unterkapitels näher eingegangen werden. Zusätzlich tritt jeder Konsonant, der als *Anubandha* verwendet wird, auch als gewöhnliches Lautelement auf. Eine Verwechslung ist jedoch ausgeschlossen, da allen konsonantischen Lauten in den *Śivasūtras* ein kurzes *a* angehängt wird, um sie einerseits von den *Anubandhas* zu unterscheiden und um andererseits sprechbare Silben zu erlangen (vgl. Fußnote 7, S. 14). *Anubandhas* zeichnen sich also dadurch aus, daß sie Konsonanten im Silbenauslaut sind.

¹⁸Die Vokale *a*, *i* und *u* benennen in dieser Liste sowohl die kurzen als auch die langen Varianten. Dies ist insofern sinnvoll, als daß in zahlreichen Regeln des Sanskrits nicht zwischen den unterschiedlichen Vokallängen unterschieden werden muß. Um auch Vokale einer bestimmten Länge benennen zu können, führt Pāṇini in *Sūtra* 1.1.70 die *T*-Notation ein: ein Vokal gefolgt von *T* bezeichnet ausschließlich den Vokal in seiner Länge. Also bezeichnet *a* die Vokale *a* und *ā*, während *aT* lediglich *a* und *āT* lediglich *ā* bezeichnet (vgl. Diskussion zum *Sūtra* 1.1.1 auf Seite 20).

¹⁹Die Bezeichnung *Anubandha* wurde nicht von Pāṇini sondern erst von seinem Kommentator Kātyāyana (um 3. Jhd. v. Chr.) eingeführt (vgl. Sharma 2002).

²⁰Die Prinzipien, nach denen die Konsonanten für die *Anubandhas* ausgewählt werden, sind nicht geklärt. Misra (1966, S. 40 ff.) diskutiert eingehend mögliche Gründe Pāṇinis für die Auswahl und die Anordnung der Konsonanten, die als *Anubandhas* eingesetzt werden, und kommt zu dem folgenden Schluß: „[t]he order of the notational symbols can not be explained in conclusive terms“ (Misra 1966, S. 60). Einige Auswahlkriterien lassen sich jedoch vermuten. So kommt Faddegon (1929, S. 277 ff.) zu dem Ergebnis, daß phonetisch verwandte Konsonanten als *Anubandhas* zur Markierung phonetisch verwandter Lautmengen eingesetzt werden (vgl. auch Unterkapitel 3.1).

4.	ai	au		C	
5.	h	y	v	r	T
6.				l	N

Abbildung 2.4: Das 5. *Sūtra* von Pāṇinis *Śivasūtras*

In der Tabelle in Abbildung 2.3 nimmt jedes *Sūtra* eine eigene Zeile ein, nur das elfte *Sūtra* geht über zwei Zeilen. Zur besseren Unterscheidbarkeit werden die Lautelemente mit Kleinbuchstaben wiedergegeben und die *Anubandhas* (letzte Spalte) mit Großbuchstaben. Die Tabelle in Abbildung 2.4 zeigt zum Beispiel das fünfte *Sūtra*, das aus der Liste der Lautelemente *h*, *y*, *v* und *r* und dem *Anubandha* *T* besteht. Wie bereits ausgeführt, geht die Aufteilung der *Śivasūtras* in Zeilen und Spalten sowie die Markierung der *Anubandhas* durch Großschreibung zur einfacheren visuellen Verarbeitung nicht auf Pāṇini zurück (vgl. Abbildung 2.2).

Nach der Erläuterung der Bestandteile der *Śivasūtras* kann nun dargestellt werden, wie mit ihnen Lautklassen repräsentiert werden können. In Unterkapitel 2.3 ist das *Sūtra* 1.6.77 (*iko yaṇ aci*) als Beispiel für eine operationale Regel eingeführt worden. Diese Regel wird als

$$[ik]_{\text{GEN}}[yaṇ]_{\text{NOM}}[ac]_{\text{LOC}},$$

analysiert. Die in der Analyse vorkommenden metasprachlichen, technischen Ausdrücke *iK* (*ik*), *yN* (*yaṇ*) und *aC* (*ac*) werden *Pratyāhāras* genannt und bezeichnen die gewünschten Lautklassen. Jeder *Pratyāhāra* besteht aus einem Laut und einem *Anubandha*. Handelt es sich bei dem Laut um einen Konsonanten, dann wird zusätzlich der Vokal *a* zwischen Laut und *Anubandha* eingefügt. Dabei erfüllt der Vokal *a* zwei Funktionen: Er garantiert zum einen, daß jeder *Pratyāhāra* von einer sprechbaren Silbe geformt wird, was für die orale Tradition wichtig ist (vgl. wiederum Fußnote 7, S. 14). Zum anderen wird durch das eingefügte *a* garantiert, daß es zu keiner Verwechslung zwischen den metasprachlich als *Anubandhas* genutzten Konsonanten und den objektsprachlichen, lautlichen Konsonanten kommen kann. Das *Sūtra* 1.6.77

1.	a	⓪	u		Ṇ
2.				ṛ	Ḍ
3.		e	o		Ṇ
4.		ai	au		Ḍ
5.	h	y	v	r	Ṭ

Abbildung 2.5: Beispiel eines *Pratyāhāra*: $iC = \{i, u, ṛ, Ḍ, e, o, ai, au\}$

kann nun mithilfe der in Unterkapitel 2.3 diskutierten Metaregeln aus den *Aṣṭādhyāyī* in die moderne Form

$$[iK] \rightarrow [yṆ]/_ [aC]$$

übertragen werden.

Die *Pratyāhāras* werden auf Grundlage der *Śivasūtras* interpretiert: Ein *Pratyāhāra*, bestehend aus einem Laut a und einem *Anubandha* M , bezeichnet die kontinuierliche Liste von Lauten in den *Śivasūtras*, die mit dem Laut a beginnt und deren letztes Element direkt vor dem *Anubandha* M steht.²¹ Abbildung 2.5 verdeutlicht am Beispiel des *Pratyāhāra* iC die Interpretation der *Pratyāhāras*. Die in dem *Sūtra* 1.6.77. verwendeten *Pratyāhāras* sind in Abbildung 2.6 dargestellt. Obwohl in den *Śivasūtras* zwei der *Anubandhas* mit $Ṇ$ bezeichnet sind, ist die Interpretation des *Pratyāhāra* $yṆ$ eindeutig (Abbildung 2.6 links), da nur einer der beiden *Anubandhas* $Ṇ$ in der Liste

²¹Die Methode, auf Intervalle einer Liste in Form von *Pratyāhāras* zuzugreifen, nutzt Pāṇini in den *Aṣṭādhyāyī* nicht allein zur Bildung von Lautklassen. So wird zum Beispiel in *Sūtra* 4.1.2 die folgende Liste von Deklinationseendungen definiert, auf die an anderer Stelle in Form von *Pratyāhāras* zugegriffen wird (vgl. auch Misra 1966, S. 61 ff.):

सु - औ - जस्	$sU - au - Jas$	(Nominativ)
अम् - औट् - शस्	$am - auṬ - Śas$	(Akkusativ)
टा - भ्यां - भिस्	$Ṭā - bhyāṃ - bhis$	(Instrumentalis)
डे - भ्यां - भ्यस्	$Ḍe - bhyāṃ - bhyas$	(Dativ)
इसि - भ्यां - भ्यस्	$ḌasI - bhyāṃ - bhyas$	(Ablativ)
इस् - ओस् - आम्	$Ḍas - os - ām$	(Genitiv)
डि - ओस् - सुप्	$Ḍi - os - suP$	(Lokativ)

1.	a	ī	u			Ṇ	
2.				r	l		Ḳ
3.		e	o			Ṇ̇	
4.		ai	au	yṆ			Ḷ
5.	h	y	v	r		Ṭ	
6.					l		Ṇ̇
7.	ñ	m	ṅ	ṇ	n		M
8.	jh	bh					Ṇ̇
9.			gh	ḍh	dh		Ṣ
10.	j	b	g	ḍ	d		Ṩ
11.	kh	ph	ch	ṭh	th		
			c	ṭ	t		V
12.	k	p					Y
13.		ś	ṣ	s			R
14.	h						L

1.	ā	i	u			Ṇ	
2.				r	l		Ḳ
3.		e	o			Ṇ̇	
4.		ai	au				Ḷ
5.	h	y	v	r		Ṭ	
6.					l		Ṇ̇
7.	ñ	m	ṅ	ṇ	n		M
8.	jh	bh					Ṇ̇
9.			gh	ḍh	dh		Ṣ
10.	j	b	g	ḍ	d		Ṩ
11.	kh	ph	ch	ṭh	th		
			c	ṭ	t		V
12.	k	p					Y
13.		ś	ṣ	s			R
14.	h						L

Abbildung 2.6: Interpretation der *Pratyāhāras* aus *Sūtra* 1.6.77. (*iko yaṇ aci*)

hinter dem Laut *y* steht. Die Interpretation der *Pratyāhāras* legt Pāṇini in *Sūtra* 1.1.71 fest:

1.1.71 *ādirantyena sahetā* (आदिरन्त्येन सहता) „Der erste Laut und das erste Suffix einer Reihe bezeichnen, wenn sie mit dem zuletzt stehenden stummen Laut²² versehen werden, auch alles Dazwischenliegende.“

Die *Pratyāhāras* können als Abkürzungen für Intervalle aus den *Śivasūtras* aufgefaßt werden, die eine ökonomische Bezeichnung der in den *Aṣṭādhyāyī* benötigten Lautklassen ermöglichen. Es gibt in den *Aṣṭādhyāyī* hunderte von *Sūtras*, die *Pratyāhāras* verwenden. Insgesamt kommen jedoch nicht mehr als die 41 verschiedenen *Pratyāhāras* aus Abbildung 2.7 zum Einsatz. Die Abbildung gibt zu jedem *Pratyāhāra* ein *Sūtra* an, das von ihm Gebrauch macht.

Da *Ṇ* zweimal als *Anubandha* in den *Śivasūtras* auftritt, erscheint in Abbildung 2.7 zweimal der *Pratyāhāra* *aṆ*. In dem 4. *Pratyāhāra* bezeichnet *aṆ* die

²²Pāṇini verwendet die Bezeichnung ‚it‘ (hier übersetzt als ‚stummer Laut‘) für *Anubandhas* (vgl. Fußnote 19).

	<i>Pratyāhāra</i>		<i>Sūtra</i>		<i>Pratyāhāra</i>		<i>Sūtra</i>
1.	aK	अक्	6.1.101.	22.	jhaY	झय्	5.4.111.
2.	aC	अच्	1.1.10.	23.	jhaR	झर्	8.4.65
3.	aṬ	अट्	8.3.3.	24.	jhaL	झल्	6.1.180
4.	aṆ	अण्	1.1.51.	25.	jhaŚ	झश्	8.4.53.
5.	aṅ	अण्	1.1.69.	26.	jhaṢ	झष्	8.2.37.
6.	aM	अम्	8.3.6.	27.	baŚ	बश्	8.2.37.
7.	aL	अल्	1.1.56	28.	bhaŚ	भश्	8.2.37.
8.	aŚ	अश्	8.3.17.	29.	maY	मय्	8.3.33.
9.	iK	इक्	1.1.3.	30.	yaṆ	यञ्	7.3.101.
10.	iC	इच्	6.1.104.	31.	yaṅ	यण्	1.1.45.
11.	iṆ	इण्	2.4.45	32.	yaM	यम्	8.4.64.
12.	uK	उक्	8.1.70.	33.	yaY	यय्	8.4.58.
13.	eṆ	एण्	6.1.69.	34.	yaR	यर्	8.4.45.
14.	eC	एच्	1.1.48.	35.	*rĀ	र्र्	1.1.51.
15.	aiC	ऐच्	7.8.8.	36.	raL	रल्	1.2.26.
16.	khaY	खय्	7.4.61.	37.	vaL	वल्	6.1.66.
17.	khaR	खर्	8.4.55	38.	vaŚ	वश्	7.2.8.
18.	ṇaM	णम्	8.3.32.	39.	śaR	शर्	7.4.4.
19.	caR	चर्	8.4.54.	40.	śaL	शल्ल	3.1.45.
20.	chaV	छव्	8.3.7.	41.	haL	हल्	3.1.12.
21.	jaŚ	जश्	8.2.39.	42.	haŚ	हश्	6.1.64.

Abbildung 2.7: Die in den *Aṣṭādhyāyī* vorkommenden *Pratyāhāras* (Daten entnommen aus Katre 1987)

einfachen Vokale *a, i, u*, während der 5. *Pratyāhāra* alle Vokale und Halbvokale umfaßt. Diese weitere Interpretation von *aN* wird nur in einem einzigen *Sūtra* der *Aṣṭādhyāyī* benötigt, nämlich in *Sūtra* 1.1.69:

1.1.69 *aṇudit savarṇasya cāpratyayah* (अणुदित् सवर्णस्य चाप्रत्ययः)

PP: *aṇ udit savarṇasya ca apratyayah* (अण् उदित् सवर्णस्य च अप्रत्ययः)

„Die Vokale, die Halbvokale und ein Konsonant mit stummem *u* bezeichnen, wenn sie nicht Suffixe sind, zugleich ihre homogenen Laute.“

In allen anderen Fällen, in denen *aN* auftritt, ergibt sich aus dem Kontext, daß nur die engere Lesart ‚*a, i, u*‘ zulässig ist.

Besonders auffällig in Abbildung 2.7 ist der 35. *Pratyāhāra*, der einen *Anubandha* \tilde{A} verwendet, der nicht in Pāṇinis *Śivasūtras* auftritt. Nach Katre (1987) wird dieser *Pratyāhāra* nur in *Sūtra* 1.1.51 verwendet,²³ das folgendermaßen lautet:

1.1.51 *uraṇ raparah* (उरण् रपरः)

PP: *uḥ aṇ ra-parah* (उः अण् र-परः)

Vasu (1891) interpretiert diesen *Pratyāhāra* folgendermaßen: **उः** (*uḥ*) ist Genitiv Singular von **ऋ** (*r*) und wird interpretiert als „an Stelle von **ऋ** (*r*)“. **अण्** (*aṇ*) bezeichnet den *Pratyāhāra* *aN* und **र-परः** (*ra-parah*) modifiziert den *Pratyāhāra* und bedeutet „gefolgt von **र** (*ra*)“. Somit bedeutet nach Vasu (1891) das *Sūtra* 1.1.51, daß immer wenn ein Element des *Pratyāhāra* *aN* das Element *r* ersetzt, wird es von *r* gefolgt. Mit dieser Regel wird festgelegt, daß *ar* der *Guṇa* von *r* ist (*Guṇa* ist eine Ablautstufe in Sanskrit).

Folgt man Vasus Interpretation des *Sūtra* 1.1.51, dann findet sich in Pāṇinis *Aṣṭādhyāyī* kein Hinweis darauf, daß *al* der *Guṇa* von *l* ist. Diese Tatsache kann man entweder als Lücke in den *Aṣṭādhyāyī* werten, oder aber versucht die Vollständigkeit der *Aṣṭādhyāyī* zu retten, indem man *Sūtra* 1.1.51 und die *Śivasūtras* wie Katre (1987) (den großen klassischen Kommentaren *Kāśikā*

²³Hier unterläuft Katre (1987) ein Fehler bei der Auflistung der in den *Aṣṭādhyāyī* verwendeten *Pratyāhāras*: Als Beleg für den angeblichen *Pratyāhāra* wird fälschlicherweise auf *Sūtra* 1.1.51 statt auf *Sūtra* 1.1.57 verwiesen.

vṛtti und *Siddhāntakaumudī* folgend) interpretiert: Liest man in dem 6. *Sūtra* der *Śivasūtras* (*laṅ*) das *a* als *Anubandha* ($l\tilde{A}N$), dann kann man *Sūtra* 1.1.51 als *uḥ aN rĀ-paraḥ* lesen. Zusammen mit *Sūtra* 1.1.50 würde dieses *Sūtra* dann die *Guṇa*-Formen von *r* und *l* korrekt bilden. Die Frage ist also, ob *a* in *ra* in *Sūtra* 1.1.51 und in *laṅ* dem 6. *Sūtra* der *Śivasūtras* ein Bindevokal oder ein *Anubandha* ist. In meinen Augen ist es angemessener anzunehmen, daß die *Aṣṭādhyāyī* eine Lücke aufweisen und die *Guṇa*-Form von *l* nicht erklären, als anzunehmen, daß in Pāṇinis *Śivasūtras* zwei *Anubandhas* direkt aufeinanderfolgen. Denn letzteres widerspräche dem ökonomischen Aufbau der *Śivasūtras* (vgl. Kapitel 3). Hinzu kommt, daß \tilde{A} der einzige vokalische *Anubandha* wäre.

Insgesamt lassen sich 305 ($= 3 \cdot 14 + 2 \cdot 13 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 11 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 9 + 5 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 8 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1$) Paare bestehend aus einem Laut und einem *Anubandha* bilden, so daß der Laut in den *Śivasūtras* vor dem *Anubandha* steht. Die Zahl aller möglichen Lautmengen, die durch *Pratyāhāras* definiert werden, ist jedoch kleiner als 305, da der Laut *h* zweimal in den *Śivasūtras* vorkommt; so bezeichnen die *Pratyāhāras* *aL* und *aR* die gleiche Menge von Lauten. Insgesamt gibt es 10 solcher Paarungen. Wenn man zusätzlich annimmt, daß der Einsatz eines *Pratyāhāra* nur dann sinnvoll ist, wenn er eine Menge von wenigstens zwei Lauten bezeichnet, dann reduziert sich die Zahl der möglichen sinnvollen *Pratyāhāras* um weitere 14 Paare. Es bleiben somit 281 ($= 305 - 10 - 14$) mögliche *Pratyāhāras*, von denen Pāṇini nur 41 in den *Aṣṭādhyāyī* verwendet. Vergleicht man die 281 möglichen *Pratyāhāras* statt mit der Zahl der tatsächlich verwendeten *Pratyāhāras* mit der Menge der möglichen Lautmengen $2^{42} (> 2 \cdot 10^{12})$, so ist diese Zahl verschwindend klein.

Wie Kornai (1993) betont, besteht die Aufgabe der Charakterisierung des phonologischen Systems einer Sprache zunächst darin, die atomaren Lautsegmente zu isolieren. Um phonologische Regeln formulieren zu können, die über das Verhalten einzelner Segmente generalisieren, müssen schließlich natürliche Klassen der Lautsegmente identifiziert werden (vgl. auch das Zitat auf Seite 27). Eine adäquate Methode zur Repräsentation solcher natürlicher Klassen muß folgendem Anspruch genügen:

The notational devices that we use to capture natural classes are successful to the extent that they make it easier to use natural classes [...] than unnatural ones [...] in the rules.

(Kornai 1993, S. 38)

Weiter führt Kornai aus, daß die Menge der natürlichen Klassen immer zwei Bedingungen erfüllt: Zum einen ist sie relativ klein, verglichen mit der Menge aller möglichen Klassen von Lauten (vgl. auch Kornai 2008, Postulat 3.2.1), und zum anderen ist sie im Prinzip unter Schnittmengenbildung abgeschlossen (vgl. auch Kornai 2008, Postulat 3.2.2). Das heißt, die Schnittmenge zweier natürlicher Klassen ist in der Regel auch eine natürliche Klasse.

Die heute verbreitetste Methode zur Repräsentation von natürlichen Lautklassen ist ihre Charakterisierung durch distinktive Merkmale, wie sie in Jakobson et al. (1951) und Chomsky & Halle (1968) eingeführt wird.²⁴ Bei der Charakterisierung der natürlichen Klassen durch distinktive Merkmale muß die Zahl der Merkmale minimal gewählt werden, da die Zahl der bildbaren Klassen exponentiell mit der Zahl der Merkmale wächst. Wir haben gesehen, daß die Śivasūtras die Bildung von 281 möglichen Klassen erlauben. Möchte man statt der Pratyāhāra-Methode distinktive Merkmale zur Repräsentation der in den Aṣṭādhyāyī verwendeten natürlichen Klassen einsetzen und die Zahl der bildbaren Klassen nicht erhöhen, so darf man höchstens acht Merkmale einführen, denn bei neun Merkmalen ergeben sich bereits $2^9 = 512$ mögliche Klassen. Dies ist jedoch nicht möglich, wie die folgende Liste von elf in den Aṣṭādhyāyī verwendeten Pratyāhāras zeigt:²⁵

$$\begin{array}{cccccc} ba\acute{S}(27) & \subset & ja\acute{S}(21) & \subset & bha\acute{S}(28) & \subset & jha\acute{S}(25) & \subset \\ jhaY(22) & \subset & jhaR(23) & \subset & jhaL(24) & \subset & raL(36) & \subset \\ vaL(37) & \subset & haL(41) & \subset & aL(7) & & & \end{array}$$

²⁴Kornai (1993) zeigt, daß die von Clements (1985) vorgeschlagene Merkmalgeometrie eine Generalisierung beider Methoden – der merkmalsbasierten und der Pratyāhāra-Methode – ist.

²⁵Die Zahlen in den Klammern beziehen sich auf die Liste aller von Pāṇini verwendeten Pratyāhāras in Abbildung 2.7 auf Seite 32.

Denn um elf Mengen, die eine lineare Inklusionskette bilden, mit binären Merkmalen darzustellen, benötigt man bereits elf Merkmale (oder zehn, wenn man unmarkierte Klassen zuläßt).

Pāṇinis *Pratyāhāra*-Methode erfüllt Kornais Kriterien einer adäquaten Repräsentation natürlicher Klassen: Wie bereits gezeigt, ist die Zahl der mit dieser Methode darstellbaren Lautklassen (281) verschwindend klein im Vergleich zu den 2^{42} Klassen, die man aus den 42 Lauten bilden kann. In Unterkapitel 4.1 wird formal bewiesen werden, daß die Menge der *Pratyāhāras* im Prinzip unter Schnittmengenbildung abgeschlossen ist.²⁶

Die phonologischen Klassen einer Sprache stehen in Beziehung zueinander: Klassen können Teilklassen anderer Klassen sein, zwei oder mehr Klassen können gemeinsame Elemente haben und so weiter. Solche Beziehungsgeflechte werden für gewöhnlich in einer Hierarchie dargestellt, während die Repräsentation im *Śivasūtra*-Stil die Zusammenhänge in linearer Form kodiert. Die lineare Repräsentationsmethode, die auf der geschickten Verwendung von Intervallen einer Liste beruht, ist so raffiniert, daß es möglich ist, Fragen über hierarchische Relationen zu beantworten, ohne direkt auf die Elemente der Klassen zugreifen zu müssen. So haben zwei Intervalle zum Beispiel gemeinsame Elemente, wenn wenigstens eine Intervallgrenze im Inneren des anderen Intervalls liegt.²⁷ Pāṇinis Methode der Definition natürlicher Klassen als Intervalle einer Lautliste bietet neben der Linearität noch einen weiteren Vorteil, nämlich daß das Problem vermieden wird, den Klassen distinktive Merkmale zuordnen zu müssen (vgl. Clements 2001). Die Auswahl und insbesondere die Benennung der distinktiven Merkmale impliziert immer auch Aussagen

²⁶Dies ist leicht einzusehen, da *Pratyāhāras* Intervallen entsprechen, die immer unter Schnittmengenbildung abgeschlossen sind. Die einschränkende Formulierung „im Prinzip“ ist jedoch notwendig, da das zweifache Vorkommen von *h* in den *Śivasūtras* dazu führt, daß die Schnittmengen einiger durch *Pratyāhāras* darstellbarer Mengen nicht durch einen *Pratyāhāra* darstellbar sind. Beispielsweise ist $vaL \cap aM = \{h, v, r, l, \tilde{n}, m, \dot{n}, \ddot{n}, n\}$ durch keinen *Pratyāhāra* darstellbar.

²⁷Um zu testen, ob etwas im Inneren eines Intervalls liegt, muß man zwar die einzelnen Elemente des Intervalls kennen, bei häufig gebrauchten linearen Ordnungen ist es jedoch in der Regel nicht nötig, sich bewußt jedes Element des Intervalls vor Augen zu führen. Als Beispiel mag die Situation einer Suche im Lexikon dienen: Sucht man nach einem Wort, das mit *F* beginnt, und schlägt das Lexikon zunächst zufällig bei *M* auf, so weiß man, daß das gesuchte Wort irgendwo im Bereich vor dieser Seite zu suchen ist; dazu muß sich ein geübter Lexikonnutzer in der Regel nicht mühsam das gesamte Alphabet aufsuchen.

über eine Theorie, die sich nicht allein aus der Menge der zur Beschreibung der phonologischen Prozesse einer Sprache benötigten Lautklassen ergibt. Die Anordnung der Laute in der *Śivasūtra*-Liste reflektiert ihr Verhalten in phonologischen Prozessen, ohne die Einführung von möglicherweise arbiträren Merkmalen zu erfordern. Ein Ziel dieser Arbeit ist es, die Bedingungen zu identifizieren, die es erlauben, eine endliche Menge von endlichen Mengen im *Śivasūtra*-Stil linear zu kodieren.

3 Untersuchungen zur Minimalität der Śivasūtras – Problemstellung und Formalisierung

Nachdem in Kapitel 2 ein Einblick in den Aufbau von Pāṇinis Grammatik gegeben und gezeigt wurde, wie Pāṇini die *Śivasūtras* zur Repräsentation relevanter Lautklassen einsetzt, wird in diesem Kapitel die zentrale Fragestellung der vorliegenden Untersuchung entwickelt. Im Hinblick auf die *Śivasūtras* steht in der Forschung die Frage im Zentrum, wie Pāṇini zu der gewählten Reihenfolge der Laute und *Anubandhas* kam und inwiefern sich die Reihenfolge zwangsläufig aus dem Aufbau der anderen Komponenten der Grammatik ergibt. Einen Überblick über diese Forschung bietet Unterkapitel 3.1.

Für die vorliegende Untersuchung wird die Fragestellung erweitert: Es wird untersucht, ob es möglich ist, jede beliebige Menge von Lautklassen in Form von *Śivasūtras* zu repräsentieren. Der Formulierung und Motivierung der genauen Fragestellung widmet sich Unterkapitel 3.2. Dabei zeigt es sich, daß es immer möglich ist, eine endliche Menge von endlichen Mengen als *Śivasūtras* zu repräsentieren. Es ist also nötig, die Frage zu verschärfen: Gesucht ist nicht irgendeine Repräsentation in *Śivasūtra*-Form, sondern eine, die bezüglich bestimmter Minimalitätskriterien besonders gut ist. Diese Kriterien gilt es in Unterkapitel 3.2 zu bestimmen. Da die Konstruktionsprinzipien von Pāṇinis Grammatik darauf abzielen, eine möglichst ökonomische Darstellung zu gewährleisten, ist davon auszugehen, daß dies auch auf die *Śivasūtras* zutrifft. Eine Repräsentation in *Śivasūtra*-Form ist also dann gut, wenn sie möglichst ökonomisch, das heißt möglichst kurz ist.

Während die Herausarbeitung der Kriterien, die eine ökonomische Repräsentation erfüllen muß, in Unterkapitel 3.2 geleistet wird, dient Unterkapitel 3.3 der Definition dessen, was unter einer Repräsentation in *Śivasūtra*-Form formal zu verstehen ist, sowie der mathematischen Darstellung der identifizierten Minimalitätskriterien.

3.1 Diskussion des Forschungsstands zu den *Śivasūtras*

Seit dem Erscheinen der ersten Pāṇini-Übersetzungen im Westen rückt immer wieder die Frage nach dem Aufbau und der Genese der *Śivasūtras* in das Zentrum des Interesses. Die Gründe hierfür sind vielfältig. Zum einen spielt sicherlich die verhältnismäßige Einfachheit der *Pratyāhāra*-Technik im Vergleich zu vielen anderen von Pāṇini eingesetzten Techniken eine Rolle. Hinzu kommt, daß die *Śivasūtras* das aus phonetischer Sicht konsistente *Varga*-System verwerfen und durch ein phonologisch motiviertes System ersetzen, das in seiner Ausgefeiltheit die westlichen phonologischen Analysen im 19. Jahrhundert bei weitem übertrifft. Der entscheidende Grund ist aber meines Erachtens, daß bereits sehr früh erkannt oder zumindest erahnt wurde, daß Pāṇini zur grammatischen Beschreibung einer Sprache eine Kunstsprache erschaffen hat, wodurch er dem Einsatz formaler Methoden in der Linguistik den Weg bereitet, die im 19. Jahrhundert eher der Mathematik und der Logik vorbehalten waren (vgl. Staal 1975, 2006). Staal (2006) stellt die Bedeutung der Verwendung von Kunstsprachen für den wissenschaftlichen Fortschritt heraus: „[R]evolutionary progress in science often depends on the use of an artificial language. It applies to linguistics, logic, mathematics, physics and other sciences“ (Staal 2006, S. 130), und betont: „[...] the earliest artificial language was oral and did not arise in the context of mathematics but in linguistics“ (Staal 2006, S. 117).

Die Reihenfolge der Laute in den *Śivasūtras* ruft aber auch immer wieder starke Kritik an Pāṇinis Methoden hervor. In erster Linie wird moniert, daß die *Śivasūtras* die Laute nicht nach phonetischen Eigenschaften ordnen, sondern daß die Ordnung durch die Regeln der *Aṣṭādhyāyī* bestimmt wird. Stellvertretend für diese Haltung sei hier auf den frühen Kritiker Faddegon

verwiesen, der Pāṇini ‚Spitzfindigkeit‘ (*subtlety*) vorwirft. Faddegon (1929) behauptet, die folgenden beiden Thesen belegen zu können:

Proposition I: The Śiva-Sūtra has a double purport. The chief purport is a phonetical classification. The sūtra presupposes the traditional alphabet and together with this alphabet affords the means for a concise phonetical terminology. In this respect the Śiva-Sūtra deserve praise.

Proposition II: The subordinate purport of the Śiva-Sūtra is to afford the means of formulating concisely euphonic and morphological rules. Although on the whole very interesting and ingenious, this grammatical use of the Śiva-Sūtra in many cases degenerates into subtlety. (Faddegon 1929, S. 275 f.)

Aus heutiger Sicht ist es verwunderlich, daß Faddegon nicht erkennt, daß er dem Aufbau der *Śivasūtras* gerechter würde, wenn er seine Thesen umdrehte. Denn er hat richtig erkannt, warum Pāṇinis Ordnung der Laute in den *Śivasūtras* immer wieder von der phonetisch motivierten Ordnung abweicht:

In the case of the contact-consonants, namely, the alphabet shows a more logical order than the sūtra, while at the same time we can prove that the illogical order of the sūtra is due to the desire of obtaining pratyāhāras which may be useful for the formulation of the phonetical and morphological rules.

(Faddegon 1929, S. 276)

Die Zitate zeigen, daß Faddegon, wie viele andere Kritiker der *Śivasūtras*, nicht bereit ist anzuerkennen, daß die *Śivasūtras* nicht (oder zumindest nicht in erster Linie) der phonetischen Klassifikation der Laute des Sanskrits dienen, auch wenn er am Schluß zu dem Ergebnis kommt: „[S]till I am inclined to think that a more complete analysis of only this introductory sūtra might show that even in the subtlety of Pāṇini there lies genius“ (Faddegon 1929, S. 278).

Das Ordnungsprinzip, das hinter den *Śivasūtras* steht, macht Misra (1966) am Beispiel des doppelten Vorkommens des Lautes *h* deutlich:

The arrangement of *Śiva Sūtras* is thus more in consonance with the structural framework of the whole grammar than with phonetic criteria, and as such the defence put forth by Thieme, ‘The arrangement of Pāṇini’s list of sounds is explainable as due to the phonetic catalogue of sounds having been adopted to the practical requirements of the grammar in which Pāṇini wanted to refer to certain groups of sounds by short expressions,’ [Thieme 1935, S. 6] needs a modification. It is not a *phonetic catalogue*; [e. g.] the grouping of *h* with *y v r l* on one hand and with *ś ṣ s* on the other is based not so much on phonetic qualities of *h* as on its peculiar behaviour as initial and final on one hand, and medial on the other.

(Misra 1966, S. 60)

Hervorzuheben ist, daß das phonologische Verhalten des Lautes *h* seine besonderen phonetischen Eigenschaften reflektiert: „This reflects the phonetic fact that *h* is the only voiced fricative“ (Staal 1962, S. 9).

Eine mathematische Formulierung des Problems des Aufbaus der *Śivasūtras* findet sich erstmals in Staal (1962):

The problem can be expressed in mathematical terms. Let a set of n sounds be ordered as a sequence a_1, \dots, a_n . Let this sequence be interrupted at certain spots by indicatory sounds x , such that x_i is the indicatory sound following the sound a_i . Then the sequence of sounds a_i, \dots, a_j can be ‘condensed’ to $a_i x_j$. Now the question is, given a set of combinations of sounds a_1, \dots, a_m which are needed in the grammar, how to establish an ordered sequence of the above type with appropriate insertions of indicatory sounds. This was Pāṇini’s problem when he constructed the *Śivasūtra*.

(Staal 1962, S. 3)

Zu den Arbeiten, die von der Annahme ausgehen, daß der Aufbau der *Śivasūtras* primär von dem strukturellen Verhalten der Laute in den Regeln der *Aṣṭādhyāyī* bestimmt ist, gehören neben Misra (1966) auch Staal (1962), Cardona (1969) und Kiparsky (1991a). Sie stellen fest, daß die *Śivasūtras* wie die *Aṣṭādhyāyī* dem Ökonomieprinzip (*Lāghava*) folgen, das Staal folgendermaßen formuliert:

Another general principle is also implicitly used by Pāṇini. This is the famous economy criterion [...] In accordance with this principle each linguistic rule should be given in the shortest possible form, whereas the number of metalinguistic symbols should be reduced as far as possible. (Staal 1962, S. 6)

Ohne es zu benennen, beschreibt bereits Böhlingk das Ökonomieprinzip:

Die Anordnung der *Sūtra* kann uns hier und da befremden, ist aber streng durchdacht und in bewunderungswürdiger Weise durchgeführt. Erstrebt wird die möglichste Kürze und Vermeidung aller Wiederholungen, und dieses wird ohne allen Zweifel erreicht. (Böhlingk 1887, S. xvi)

Wendet man das Ökonomieprinzip auf den Aufbau der *Śivasūtras* an, so ergibt sich folgende Regel:

The reasoning from economy goes like this. To be grouped together in a *pratyāhāra*, sounds must make up a continuous segment of the list. Economy requires making the list as short as possible, which means avoiding repetitions of sounds, and using as few markers as possible. (Kiparsky 1991a, S. 1)

Bezogen auf die *Śivasūtras* folgt also aus dem Streben nach Ökonomie das Ziel, die Länge der mit *Anubandhas* durchsetzten Lautliste zu minimieren. Eine präzisere Bestimmung dieses Ziels erfolgt in Unterkapitel 3.2. Aus dem Ökonomieprinzip leitet Kiparsky folgende Strategie zur Konstruktion ökonomischer *Śivasūtras* aus den in den *Aṣṭādhyāyī* verwendeten *Pratyāhāras* ab:

Consequently, if class *A* properly includes class *B*, the elements shared with *B* should be listed last in *A*; the marker that follows can then be used to form *Pratyāhāras* for both *A* and *B*. In this way the economy principle, by selecting the shortest grammar, determines both the ordering of sounds and the placement of markers among them. (Kiparsky 1991a, S. 1 f.)

Mithilfe dieser Strategie folgert Kiparsky zum Beispiel, daß die *Pratyāhāras*

$$aK = \{a, i, u, r, l\}$$

$$iK = \{i, u, r, l\} \text{ und}$$

$$uK = \{u, r, l\}$$

die Ordnung

$$a < i < u < r, l$$

implizieren, die der Ordnung der ersten Lautelemente in Pāṇinis *Śivasūtras* entspricht. Allerdings kann in gleicher Weise aus den *Pratyāhāras*

$$jhL = \{h, s, ś, ś, p, k, t, t, c, th, th, ch, ph, kh, d, d, g, b, j, dh, dh, gh, bh, jh\}$$

$$jhR = \{s, ś, ś, p, k, t, t, c, th, th, ch, ph, kh, d, d, g, b, j, dh, dh, gh, bh, jh\}$$

$$jhY = \{p, k, t, t, c, th, th, ch, ph, kh, d, d, g, b, j, dh, dh, gh, bh, jh\}$$

$$jhŚ = \{d, d, g, b, j, dh, dh, gh, bh, jh\} \text{ und}$$

$$jhṢ = \{dh, dh, gh, bh, jh\}$$

auf die Ordnung

$$h < s, ś, ś < p, k, t, t, c, th, th, ch, ph, kh, d < d, g, b, j < dh, dh, gh, bh, jh$$

geschlossen werden, die der Ordnung der Laute in Pāṇinis *Śivasūtras* widerspricht. Kiparskys Methode führt also nicht zwangsläufig zu der Ordnung in Pāṇinis *Śivasūtras*.

In den folgenden Kapiteln wird ein generelleres Verfahren entwickelt, mit dem aus den in den *Aṣṭādhyāyī* verwendeten *Pratyāhāras* eine minimale mit *Anubandhas* durchsetzte Lautliste konstruiert werden kann.¹ Es stellt sich schließlich in Kapitel 6 heraus, daß die *Śivasūtras* zwar im Sinne des im folgenden Unterkapitel 3.2 identifizierten Minimalitätskriteriums perfekt sind, aber daß es noch andere perfekte Anordnungen gibt, da die in den *Aṣṭādhyāyī* verwendeten *Pratyāhāras* die Reihenfolge der Laute nicht vollständig determinieren. Die folgende Liste faßt alle alternativen minimalen Anordnungen zusammen:²

¹Erste Ansätze dieses Verfahrens wurden bereits in Petersen (2003, 2004b, 2005) diskutiert.

²Diese Liste findet sich auch in Unterkapitel 6.1 auf Seite 155. Dort wird auch erklärt, wie diese Liste aus Pāṇinis *Aṣṭādhyāyī* gewonnen werden kann.

$$\begin{aligned}
&\langle a, i, u, M_1, \{r, l\}, M_2, \{\langle\{e, o\}, M_3\rangle, \langle\{ai, au\}, M_4\rangle\}, \\
&h, y, v, r, M_5, l, M_6, \tilde{n}, m, \{\dot{n}, \eta, n\}, M_7, jh, bh, M_8, \\
&\{gh, dh, dh\}, M_9, j, \{b, g, d, d\}, M_{10}, \{kh, ph\}, \{ch, th, th\}, \\
&\{c, t, t\}, M_{11}, \{k, p\}, M_{12}, \{\acute{s}, \text{ṣ}, s\}, M_{13}, h, M_{14}\rangle
\end{aligned}$$

In dieser Liste fassen die Mengenklammern jeweils die Elemente zusammen, deren Reihenfolge nicht durch die in den *Aṣṭādhyāyī* verwendeten *Pratyāhāras* determiniert wird. Die M_i 's stehen für einzusetzende *Anubandhas*.

Es stellt sich die Frage, wieso Pāṇini gerade die Reihenfolge der Laute in den *Śivasūtras* gewählt hat und keine der oben dargestellten alternativen Lautordnungen. Cardona (1969) vertritt die Auffassung, daß Pāṇini immer dann, wenn die Möglichkeit dazu besteht, auf die ursprüngliche Reihenfolge der Laute in der *Akṣara-samāmnāya*-Anordnung zurückgreift (vgl. Abbildung 2.1, S. 14). Dem widerspricht Kiparsky (1991a), da so zwar zum Beispiel die Ordnung der Laute e und o erklärt werden kann, nicht aber die Reihenfolge von r und l , da l überhaupt nicht in der *Akṣara-samāmnāya*-Anordnung vorkommt. Vor allem aber lehnt Kiparsky die Erklärung Cardonas ab, da es in Pāṇinis *Aṣṭādhyāyī* keinen Hinweis darauf gibt, daß Pāṇini dem Prinzip der ‚historischen Kontinuität‘ folgt. Aus dem gleichen Grund lehnt er auch den Ansatz von Staal (1962) ab, der ein Prinzip der ‚Kontinuität homorganer Laute‘ annimmt, nach dem die Reihenfolge der Laute durch die Reihenfolge homorganer Laute bestimmt wird (z. B. $e < o$ folgt aus $i < u$). Kiparskys Ziel ist zu zeigen: „that the structure of the *Śivasūtras* is entirely explicable on systematic grounds [...] and] that no other principles are needed than those used in the construction of the rest of Pāṇini’s grammar, namely the principle of economy and the logic of the special case and the general case“ (Kiparsky 1991a, S. 3).

Dazu geht er zunächst auf den Zusammenhang von *Ökonomie* und *Generalisierung* in den *Aṣṭādhyāyī* ein. Während in Cardona (1969) und in Joshi & Kiparsky (1979) argumentiert wird, daß der ökonomische Aufbau von Pāṇinis Grammatik eine Folge der Formulierung generalisierter Regeln sei, geht Kiparsky (1991a) von dem entgegengesetzten Kausalzusammenhang aus: „The

reverse of Cardona’s formulation does hold: economy is Pāṇini’s way of achieving generalization“ (Kiparsky 1991a, S. 4).

Zahlreiche Merkmale der *Aṣṭādhyāyī* stützen Kiparskys These von dem Primat des Ökonomieprinzips (vgl. Kiparsky 1991a): So wird zum Beispiel die in Unterkapitel 2.3 beschriebene Technik der Verwendung von Überschriften zum Aufbau eines redundanzfreien Vererbungsnetzes auch eingesetzt, wenn mithilfe einer Überschrift mehrere inhaltlich völlig zusammenhanglose Regeln verkürzt werden können. Eine solche Überschrift erfaßt keine Generalisierung. Außerdem zeigt sich, daß Pāṇini systematisch Komposita verwendet, um die Länge der *Sūtras* zu reduzieren. Sogar die Wortstellung, die in Sanskrit verhältnismäßig frei ist, wird häufig so gewählt, daß die *Sandhi*-Prozesse zu *Sūtras* mit minimaler Silbenzahl führen. Nach Kiparsky (1991a) läßt sich mit dem Ökonomieprinzip auch die Anordnung derjenigen Laute in den *Śivasūtras* erklären, deren Position sich nicht aus der Forderung nach Längenminimierung der *Śivasūtras* ergibt. So müssen *e* und *o* vor *ai* und *au* stehen, damit die Menge der Diphtonge {*e, o, ai, au*} mit dem kürzeren *Pratyāhāra eC* statt dem längeren *aiN̄* bezeichnet werden kann (Kiparsky 1991a, S. 8).

Das Ökonomieprinzip kommt in den *Aṣṭādhyāyī* auch dann zum Zuge, wenn es zu Übergeneralisierungen führt. Ein solches Beispiel ist der *Pratyāhāra yaN̄*, der lediglich in *Sūtra* 7.3.101 Verwendung findet. Dieses *Sūtra* regelt zusammen mit den folgenden, daß das kurze *a* durch ein langes *ā* ersetzt (also gelängt) wird, wenn ein *Sārvadhātuka*-Suffix (das sind spezielle Flexionsuffixe) folgt, der mit einem Konsonanten des *Pratyāhāra yaN̄* beginnt (die Ausnahmen zu dieser Regel werden in den folgenden *Sūtras* geregelt). Allerdings treten nur die vier Konsonanten *m, v, y* und *bh* des *Pratyāhāra yaN̄* am Beginn eines *Sārvadhātuka*-Suffixes auf (zum Vergleich: *yaN̄* umfaßt elf Konsonanten), so daß das *Sūtra* 7.3.101 übergeneralisiert. Die Alternative, die vier Konsonanten *m, v, y* und *bh* in dem *Sūtra* einzeln aufzuzählen und somit eine restriktivere Regel zu formulieren, hätte jedoch ein längeres *Sūtra* zur Folge. Faddegon (1929, S. 277 f.) führt dieses *Sūtra* als Beispiel für die in seinen Augen „weak side of the sūtra, its subtlety“ an. Kiparsky zeigt jedoch auf, daß „overgeneralized formulations are *only* chosen where economy requires it“ (Kiparsky 1991a, S. 4).

Der Anspruch der Restriktivität tritt also hinter den Anspruch der Ökonomie zurück:

There are, then, two principles at work which, tending in opposite directions, fix the form of the grammar: the dominant principle of *simplicity*, and the subsidiary principle of *restrictiveness*:

Simplicity: Formulate grammatical generalizations in the simplest way.

Restrictiveness: Among equally simple formulations, choose the most restrictive.

Together, simplicity and restrictiveness govern all aspects of the system, including the use of *Pratyāhāras*.

(Kiparsky 1991a, S. 4)

Es ist bemerkenswert, daß Pāṇini's *Aṣṭādhyāyī*, obwohl sie konsequent nach dem formalen Ökonomieprinzip aufgebaut sind, eine Vielzahl an linguistischen Generalisierungen erfassen (z. B. die moderne Sonoritätshierarchie vgl. Kiparsky 1991a, S. 7). Dies erklärt Kiparsky wie folgt:

[T]he metalanguage is so constructed that maximization of economy in the grammar ensures generalization. This can be concluded from the fact that Pāṇini introduces abbreviatory conventions into his metalanguage if, and *only* if, they make it possible to bring out significant generalizations in the grammar. So the theoretical goal of generalization is implemented by seeking the most economical description possible in the framework of an appropriately constructed metalanguage of grammatical description. The economy requirement works “blindly” in the service of this global objective, and is not expected to yield generalizations in each local instance.

(Kiparsky 1991a, S. 4)

Er führt weiter aus, daß

the maxim *Ardhamātrālāghavena putrotsavaṃ manyante vaiyākaraṇāḥ* ‘grammarians value the saving of half a mora like the birth of a son’ has more than a grain of truth, and Cardona (1969, 41) is wrong in ridiculing the “mania for mātralāghava” as “a property of lesser original Indian grammarians [sic]”. It is quite natural to

have faith in a principle which, in concert with an appropriately designed metalanguage, reveals deep generalizations in the grammar of Sanskrit. (Kiparsky 1991a, S. 4)

Es ist also gerade die Wahl einer geeigneten Meta- oder Beschreibungssprache, die dazu führt, daß Generalisierungen erfaßt werden. Smith (1992) baut eine Skala der Ökonomieansprüche auf, deren Pole einerseits von *Brevity Per Se* – alles zielt auf ökonomische Kürze – und andererseits von *Explanatory Brevity* – keine Formulierung darf nur aus ökonomischen Gründen gewählt werden, denn alles muß auf das Erfassen von Generalisierungen ausgerichtet sein – bestimmt werden. Pāṇini Ökonomieprinzip, das Smith *Generalizing Brevity* nennt, liegt zwischen diesen Polen:

The type of brevity he was after was any brevity that could be achieved once the metalanguage is chosen. This choice of metalanguage in turn is made such that the maximization of brevity will lead to at least some generalization. Thus, on the metameta-level, the concern is to pick only those devices for the metalanguage which if applied so as to maximize brevity will yield generalization. However, it is not required that each application of the brevity principle should lead to generalization. [...] When writing the grammar itself, the brevity principle applies blindly without regard to whether in any given instance one gets generalization, no generalization, or vacuous overgeneralization. Generalizing Brevity shares with Explanatory Brevity a concern for generalization, but it is looser in that generalization need not follow upon every instance of abbreviation. On the other hand, Generalizing Brevity shares with Brevity Per Se the blind application of economy at the level of grammar-choice. The difference is at the metametalevel where Generalizing Brevity demands that some generalization follow from brevity. [...] Pāṇini does have an algorithmic way of maximizing brevity, albeit one more sophisticated than that of Brevity Per Se, the criterion of his successors.

(Smith 1992, S. 134)

Aus Sicht der modernen Computerlinguistik ist insbesondere Kiparskys und Smiths Ergebnis vielversprechend, daß Pāṇinis Grammatik bedeutende grammatikalische Generalisierungen allein dadurch erfaßt, daß ihr Aufbau konsequent einem formalen Prinzip folgt und ein angemessenes Repräsentationsformat gewählt wird. Denn ein Rückgriff auf automatische oder zumindest semi-automatische Induktionsverfahren ist immer dann unerlässlich, wenn große Datenmengen verarbeitet werden müssen. So zum Beispiel wenn es darum geht, große elektronische Lexika aufzubauen (vgl. Barg 1996a; Daelemans & Durieux 2000; Sporleder 2003), bestehende zu erweitern (vgl. Light 1994; Kilbury et al. 1994; Cahill 1998; Barg & Walther 1998) oder Grammatiken auf der Grundlage großer Korpora zu entwickeln (vgl. Briscoe & Carroll 1997; Basili et al. 1997; Barg & Kilbury 2000).

In einem Vortrag vom Oktober 2007 nennt Kiparsky Pāṇinis Ökonomieprinzip in Anlehnung an *Occam's Razor Pāṇini's Razor* und führt aus:

Pāṇini's Razor works "blindly", and need not yield a generalization in every case. If data is limited, no method of inductive reasoning is guaranteed to distinguish accidental generalizations from real ones. (Kiparsky 2007a, Folie 48)

Die in der vorliegenden Arbeit zum Einsatz kommende Formale Begriffsanalyse (vgl. Ganter & Wille 1996) zeichnet sich insbesondere dadurch aus, daß sie Zusammenhänge in Daten transparent macht, ohne sie zu interpretieren:

[Es ist] den Anwendern immer wieder klarzumachen, dass die verbandstheoretische Begriffsanalyse aufgrund ihrer formalen Natur keine inhaltlichen Interpretationen oder gar Vorhersagen bzw. Entscheidungen liefert. Allerdings kann sie durch transparentes Entfalten formaler Strukturen das Finden derartiger Interpretationen, Vorhersagen und Entscheidungen unterstützen.

(Wille 2005, S. 60)

Aufgrund ihrer Transparenz sind Verfahren, die auf Methoden der Formalen Begriffsanalyse beruhen, besonders geeignet, in der von Kiparsky beschriebenen Weise grammatikalische Generalisierungen aufzudecken.

Priss (2005) gibt einen Überblick über den erfolgreichen Einsatz begriffsanalytischer Methoden in der Linguistik, die diese Aussage stützen. Die Erfahrungen am Lehrstuhl für Computerlinguistik in Düsseldorf weisen darauf hin, daß die besondere Stärke der Formalen Begriffsanalyse für die Analyse linguistischer Daten darin besteht, Daten auf drei völlig verschiedene – aber äquivalente – Arten zu repräsentieren: tabellarisch, hierarchisch und regelbasiert (vgl. Osswald & Petersen 2002, 2003; Petersen 2004a; Petersen & Kilbury 2005; Petersen 2008).

In der vorliegenden Arbeit stehen die hierarchischen Begriffsverbände im Zentrum der Aufmerksamkeit. Allerdings wird hier erstmals weniger die in ihnen ausgedrückte Hierarchie als vielmehr der ihnen zugrundeliegende Graph analysiert. Dies ist ein bisher vernachlässigter Ansatz innerhalb der Formalen Begriffsanalyse.

3.2 Motivierung der zentralen Fragestellungen

Im Rahmen dieser Arbeit werden bezüglich der von Pāṇini entwickelten Methode zur Repräsentation von Lautklassen mit *Pratyāhāras* zwei Aspekte erörtert: Zum einen wird untersucht, ob die *Śivasūtras* Pāṇinis Ökonomieanforderungen gerecht werden. Im Unterschied zu den bisherigen Arbeiten auf diesem Gebiet (vgl. Unterkapitel 3.1) werden die Ergebnisse mathematisch bewiesen. Zum anderen wird geklärt, ob es mit Pāṇinis Methode generell möglich ist, endliche Mengen von endlichen Mengen in Form von Intervallen einer Liste ökonomisch zu repräsentieren.³ Es wird also einerseits die Repräsentationsmethode, die Pāṇini verwendet, und andererseits die konkrete Repräsentation der Lautklassen des klassischen Sanskrits in Form der *Śivasūtras* untersucht.

In Pāṇinis Grammatik findet sich keine explizite Aussage zu der Frage, nach welchen Kriterien die *Śivasūtras* konstruiert sind. Implizit läßt sich jedoch, wie in Unterkapitel 3.1 diskutiert, aus dem gesamten Aufbau der Grammatik ablesen, daß Pāṇini um eine möglichst ökonomisch kurze Darstellung bemüht war. Sein Streben nach ökonomischer Kürze läßt sich exemplarisch daran ablesen, daß, wie in Unterkapitel 2.3 beschrieben, in den *Aṣṭādhyāyī* die Länge der

³Im Rahmen dieser Arbeit werden, auch ohne daß darauf jedesmal explizit hingewiesen wird, immer nur endliche Mengen endlicher Mengen betrachtet.

Sūtras dadurch verringert wird, daß geteilte Bestandteile gestrichen werden, um sie dann von einer gemeinsamen Überschrift zu erben. Dieses Vorgehen ermöglicht es, daß die geteilten Bestandteile nur einmal in den *Aṣṭādhyāyī* erscheinen und somit Redundanzen vermieden werden. Es ist davon auszugehen, daß Pāṇini auch bei der Konstruktion der *Śivasūtras* darum bemüht war, eine möglichst kurze Darstellung zu erreichen.

Im folgenden werden verschiedene Minimalitätskriterien gewonnen, die auf die Länge von Listen im *Śivasūtra*-Stil anwendbar sind. Pāṇinis *Śivasūtras* erfüllen ein solches Kriterium, wenn es keine Möglichkeit gibt, die 42 Laute der *Śivasūtras* in einer neuen von *Anubandhas* unterbrochenen Liste, die bezüglich des Kriteriums besser ist als die *Śivasūtras*, anzuordnen, so daß alle 41 in den *Aṣṭādhyāyī* verwendeten Lautklassen aus Abbildung 2.7 auf Seite 32 bezüglich der neuen Liste als *Pratyāhāras* darstellbar sind.

Betrachtet man die *Śivasūtras* als einzelne Liste (vgl. Abbildung 2.2, S. 25), dann drängt sich zunächst die Frage auf, ob diese Liste so kurz wie möglich ist. Da in der Liste der *Śivasūtras* jedes der Elemente entweder als Laut oder als *Anubandha* fungiert, hat die Liste auch zwei interessante disjunkte Teillisten, nämlich die Lautliste und die *Anubandha*-Liste. Zu jeder der beiden Teillisten stellt sich somit ebenfalls die Frage, ob sie minimal (also so kurz wie möglich) ist. Kombiniert man die Längenkriterien der beiden Listen, so ergeben sich zwei weitere Minimalitätskriterien: Gesucht ist entweder eine *Śivasūtra*-Liste, deren Lautliste minimal ist und deren *Anubandha*-Liste nicht weiter verkürzt werden kann, oder man sucht eine möglichst kurze Gesamtliste, deren *Anubandha*-Liste minimal ist.

Zusammenfassend sind folgende fünf *Minimalitätskriterien* für eine Liste im *Śivasūtra*-Stil denkbar:

Minimalitätskriterien

- (1) Gesamtliste minimaler Länge;
- (2) Lautliste minimaler Länge;
- (3) *Anubandha*-Liste minimaler Länge;
- (4) möglichst kurze Gesamtliste, deren Lautliste von minimaler Länge ist;
- (5) möglichst kurze Gesamtliste, deren *Anubandha*-Liste von minimaler Länge ist.

Offensichtlich erfüllt jede Liste, die das 4. Minimalitätskriterium erfüllt, auch das 2. Kriterium, und analog impliziert die Erfüllung des 5. Kriteriums zwangsläufig die des 3. Kriteriums. Anhand von Beispielen soll nun untersucht werden, welche Abhängigkeiten zwischen den Minimalitätskriterien 1, 4 und 5 bestehen.

Zwei Minimalitätskriterien sind genau dann unabhängig voneinander, wenn es erstens eine Menge von Mengen gibt, zu der sich eine diese Mengen repräsentierende Liste im *Śivasūtra*-Stil konstruieren läßt, die nur das eine der beiden Minimalitätskriterien, nicht aber das andere erfüllt. Zweitens muß es eine Menge von Mengen sowie eine korrespondierende *Śivasūtra*-Liste geben, die ausschließlich das andere Minimalitätskriterium erfüllt. Darüber hinaus muß es möglich sein, mindestens zwei Mengen von Mengen mit entsprechenden Listen anzugeben, von denen die eine keines der beiden und die andere beide Kriterien erfüllt.

Als erstes Beispiel dient uns folgende Menge von Mengen:

$$\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, e\}, \{a, e, f\}, \{a, e, f, g\}\} \quad (3.1)$$

Alle Elemente dieser Menge lassen sich als *Pratyāhāras* bezüglich der folgenden Liste im *Śivasūtra*-Stil darstellen:

$$gfeaM_1bM_2cM_3dM_4 \quad (3.2)$$

Hierbei fungieren die M_i 's als *Anubandhas*:

$$\begin{aligned} \{a, b\} &\mapsto aM_2, \{a, b, c\} \mapsto aM_3, \{a, b, c, d\} \mapsto aM_4, \\ \{a, e\} &\mapsto eM_1, \{a, e, f\} \mapsto fM_1, \{a, e, f, g\} \mapsto gM_1 \end{aligned}$$

Die Lautliste dieser Liste der Länge 11 hat die Länge 7 und die *Anubandha*-Liste die Länge 4. Da sich die Mengen aus (3.1) aus genau 7 verschiedenen Lautelementen aufbauen, ist die Lautliste von Liste (3.2) notwendig minimal. Die Liste erfüllt also das 2. und, wie man leicht überprüfen kann, auch das 4. Minimalitätskriterium. Das 1., 3. und somit auch das 5. Kriterium wird von der Liste (3.2) jedoch nicht erfüllt, denn auch bezüglich der kürzeren Liste

$$gfeaM_1dcbaM_2 \quad (3.3)$$

lassen sich alle Mengen aus (3.1) als *Pratyāhāras* darstellen:

$$\begin{aligned} \{a, b\} &\mapsto bM_2, \{a, b, c\} \mapsto cM_2, \{a, b, c, d\} \mapsto dM_2, \\ \{a, e\} &\mapsto eM_1, \{a, e, f\} \mapsto fM_1, \{a, e, f, g\} \mapsto gM_1 \end{aligned}$$

Diese Liste mit insgesamt 10 Elementen, davon 2 *Anubandha*- und 8 Lautelemente, ist die kürzeste Liste, die sich zu den Mengen aus (3.1) bilden läßt; sie erfüllt also das 1. Kriterium. Außerdem gibt es keine Liste mit weniger *Anubandhas*, womit sie auch das 3. und 5. Kriterium erfüllt.

Als nächstes wird die folgende Menge von Mengen untersucht:

$$\{\{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{b, c, d\}, \{c, d, e, f\}, \{a, b, c, g\}\} \quad (3.4)$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß allein für die Darstellung der drei Mengen $\{a, b, c\}$, $\{c, d, e\}$ und $\{b, c, d\}$ drei *Anubandhas* benötigt werden. Somit muß die folgende Liste, bezüglich der alle Mengen aus (3.4) als *Pratyāhāras* darstellbar sind, das 3. Minimalitätskriterium erfüllen:

$$gabcM_1dM_2fcdeM_3 \quad (3.5)$$

Da die Mengen $\{a, b, c\}$, $\{c, d, e\}$ und $\{b, c, d\}$ bereits für drei *Anubandhas* verantwortlich sind, müssen in einer *Śivasūtra*-Liste, die das 3. Minimalitätskriterium erfüllt, die *Pratyāhāras* sowohl der Mengen $\{a, b, c\}$ und $\{a, b, c, g\}$ als auch der Mengen $\{c, d, e\}$ und $\{c, d, e, f\}$ mit demselben *Anubandha* gebildet werden. Dazu ist es nötig, mindestens zwei der Lautelemente zu verdoppeln. Folglich erfüllt die Liste (3.5) auch das 5. Minimalitätskriterium.

Die Liste (3.5) erfüllt jedoch weder das 2. noch das 1. Minimalitätskriterium, wie folgende Liste zeigt:

$$gabcM_1dM_2eM_3fM_4 \quad (3.6)$$

Auch bezüglich der Liste (3.6) lassen sich alle Mengen der Menge aus (3.4) in Form von *Pratyāhāras* darstellen. Da in der Liste (3.6) kein Laut doppelt

vorkommt, erfüllt sie das 2. Minimalitätskriterium. Darüber hinaus erfüllt diese Liste auch das 4. und das 1. Kriterium.

Man kann die beiden Beispiele zu einem dritten Beispiel zusammenfassen und erhält so eine Situation, in der die Erfüllung des 1. Minimalitätskriteriums weder mit dem Erfüllen des 4. noch des 5. Kriteriums zusammenfällt. Die Menge der Mengen sei

$$\begin{aligned} & \{\{a_1, b_1\}, \{a_1, b_1, c_1\}, \{a_1, b_1, c_1, d_1\}, \{a_1, e_1\}, \\ & \{a_1, e_1, f_1\}, \{a_1, e_1, f_1, g_1\}, \{a_2, b_2, c_2\}, \{c_2, d_2, e_2\}, \\ & \{b_2, c_2, d_2\}, \{c_2, d_2, e_2, f_2\}, \{a_2, b_2, c_2, g_2\}\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die Menge von Mengen aus (3.7) läßt sich durch die Liste

$$g_1 f_1 e_1 a_1 M_1 d_1 c_1 b_1 a_1 M_2 g_2 a_2 b_2 c_2 M_3 d_2 M_4 e_2 M_5 f_2 M_6 \quad (3.8)$$

repräsentieren, die das 1., aber weder das 4. noch das 5. Minimalitätskriterium erfüllt.

Als letztes sei noch ein triviales Beispiel konstruiert, in dem die Erfüllung des 1. Minimalitätskriteriums mit der Erfüllung der Kriterien 4 und 5 zusammenfällt. Man betrachte dazu folgende einfache Menge von Mengen:

$$\{\{a, b\}, \{a, b, c\}\} \quad (3.9)$$

Die folgende Liste repräsentiert diese Mengen und erfüllt alle fünf Minimalitätskriterien

$$cabM_1, \quad (3.10)$$

während die Liste

$$abM_1 abcM_2 \quad (3.11)$$

ebenfalls die Mengen aus (3.9) repräsentiert, aber keines der Kriterien erfüllt.

Anhand der Menge von Mengen aus (3.9) läßt sich außerdem zeigen, daß weder das 2. und das 4. Minimalitätskriterium noch das 3. und das 5. Minimalitätskriterium äquivalent sind. So erfüllt die Liste

$$cM_1aM_2bM_3 \quad (3.12)$$

zwar das 2., nicht aber das 4. Minimalitätskriterium. Entsprechend erfüllt die Liste

$$cabcabM_1 \quad (3.13)$$

das 3., nicht aber das 5. Minimalitätskriterium.

Abbildung 3.1 faßt die bisher untersuchten Beispiele zusammen. Weitere Kombinationsmöglichkeiten für die Erfüllung der fünf Minimalitätskriterien gibt es nicht, da Abbildung 3.2 eine Basis der im Kontext dieser Kriterien gültigen Merkmalimplikationen zeigt (siehe Abschnitt A.5).⁴

Die fünf Minimalitätskriterien sind so allgemein formuliert, daß sie nicht nur zur Untersuchung der speziellen von Pāṇini aufgestellten *Śivasūtras* eingesetzt werden können. Für eine beliebige Menge von Mengen stellt sich die Frage, ob sich die Elemente der Mengen so in einer von Markern (*Anubandhas*) unterbrochenen Liste anordnen lassen, daß sich jede der Mengen in Form eines *Pratyāhāra*-Intervalls darstellen läßt. Diese Frage ist zu bejahen, wie folgende Überlegung zeigt: Sei $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ eine Menge von Mengen mit $S_i = \{s_{i_1}, \dots, s_{i_{n_i}}\}$ und $M = \{M_1, \dots, M_n\}$ eine beliebige Menge mit $M \cap S_i = \emptyset$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, dann ist

$$s_{1_1}, \dots, s_{1_{n_1}}, M_1, s_{2_1}, \dots, s_{2_{n_2}}, M_2, \dots, M_{n-1}, s_{n_1}, \dots, s_{n_{n_n}}, M_n \quad (3.14)$$

eine Liste, in der sich jede Menge S_i als *Pratyāhāra*-Intervall $s_{i_1}M_i$ darstellen läßt. Man kann also die gesuchte Liste bilden, indem man einfach alle Mengen hintereinander schreibt und dazwischen Marker setzt.

⁴Die Abbildungen 3.1 und 3.2 sind das Ergebnis einer begriffsanalytischen Merkmalexploration, die nach der in Ganter & Wille (1996) beschriebenen Methode unter Zuhilfenahme des Programms ConExp durchgeführt worden ist.

Beispiel	erfüllte Minimalitätskriterien				
	1	2	3	4	5
(3.1) $\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, e\}, \{a, e, f\}, \{a, e, f, g\}\}$ $gfeaM_1bM_2cM_3dM_4$ (3.2) $gfeaM_1dcbaM_2$ (3.3)	-	+	-	+	-
(3.4) $\{\{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{b, c, d\}, \{c, d, e, f\}, \{a, b, c, g\}\}$ $gabcM_1dM_2fcdeM_3$ (3.5) $gabcM_1dM_2eM_3fM_4$ (3.6)	-	-	+	-	+
(3.7) $\{\{a_1, b_1\}, \{a_1, b_1, c_1\}, \{a_1, b_1, c_1, d_1\}, \{a_1, e_1\}, \{a_1, e_1, f_1\}, \{a_1, e_1, f_1, g_1\}, \{a_2, b_2, c_2\}, \{c_2, d_2, e_2\}, \{b_2, c_2, d_2\}, \{c_2, d_2, e_2, f_2\}, \{a_2, b_2, c_2, g_2\}\}$ $g_1f_1e_1a_1M_1d_1c_1b_1a_1M_2g_2a_2b_2c_2M_3d_2M_4e_2M_5f_2M_6$ (3.8)	+	-	-	-	-
(3.9) $\{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ $cabM_1$ (3.10) abM_1babcM_2 (3.11) $cM_1aM_2bM_3$ (3.12) $cabcabM_1$ (3.13)	+	+	+	+	+
	-	-	-	-	-
	-	+	-	-	-
	-	-	+	-	-

Abbildung 3.1: Kombinationsmöglichkeiten der fünf Minimalitätskriterien mit Beispielen

Kriterium 5	→	Kriterium 3
Kriterium 4	→	Kriterium 2
Kriterium 2 ∧ Kriterium 3	→	Kriterium 1 ∧ Kriterium 4 ∧ Kriterium 5
Kriterium 1 ∧ Kriterium 3	→	Kriterium 5
Kriterium 1 ∧ Kriterium 2	→	Kriterium 4

Abbildung 3.2: Basis der im Kontext der fünf Minimalitätskriterien gültigen Merkmalimplikationen

Ein solches Vorgehen führt in der Regel zu einer Liste, die keines der oben genannten Minimalitätskriterien erfüllt, wie das hier wiederholte Beispiel (3.1) verdeutlicht: Sei

$$\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, e\}, \{a, e, f\}, \{a, e, f, g\}\} \quad (3.15)$$

eine Menge von Mengen, dann hat die durch bloße Aneinanderreihung mit Zwischenmarkern entstehende Liste

$$abM_1abcM_2abcdM_3aeM_4aefM_5aefgM_6 \quad (3.16)$$

die Länge 24, wobei die Lautliste aus 18 und die Markerliste aus 6 Elementen besteht. Wie die Listen (3.2) und (3.3) zeigen, erfüllt diese Liste keines der fünf Minimalitätskriterien.

Es bleibt zu klären, welches der fünf Minimalitätskriterien Pāṇinis Ökonomieprinzip entspricht. In allen Untersuchungen zu Pāṇinis *Śivasūtras* wird übereinstimmend das doppelte Vorkommen des Lautes *h* in den *Śivasūtras* als ein Phänomen aufgefaßt, das besonderer Erklärung bedarf (siehe u. a. Kiparsky 1991a; Staal 1962; Faddegon 1929). Die Verdopplung eines Lautes wird als schwerwiegender empfunden als die Verwendung eines zusätzlichen *Anubandhas*. So schreibt zum Beispiel Staal:

[T]he double occurrence of *h* enables Pāṇini to combine the sound *h* on the one hand with the semivowels, nasals, and voiced stops [...], on the other hand with the fricatives. This reflects the phonetic fact that *h* is the only voiced fricative. The above analysis shows that it was impossible to solve this difficulty in any other way, as the rows could not have been ordered differently.

(Staal 1962, S. 9)

Hätte eine Möglichkeit bestanden, die Laute anders anzuordnen, ohne *h* zu verdoppeln, dann hätte Pāṇini diese Lösung nach Staal bevorzugt, auch wenn eventuell zusätzliche *Anubandhas* nötig gewesen wären.

Kiparsky schreibt: „Economy requires making the list as short as possible, which means avoiding repetitions of sounds, and using as few markers as pos-

sible“ (Kiparsky 1991a, S. 1).⁵ Allein aufgrund dieses Zitats läßt sich noch nicht entscheiden, welches der Minimalitätskriterien von Seite 51 Kiparsky für die *Śivasūtras* annimmt. Denn wie gezeigt, ist es nicht gewährleistet, daß eine Liste im *Śivasūtra*-Stil, die eine Menge von Mengen repräsentiert, das 1. Minimalitätskriterium („making the list as short as possible“) erfüllt, wenn man primär die Lautliste („avoiding repetitions of sounds“) und sekundär die *Anubandha*-Liste („using as few markers as possible“) minimiert. Häufig führt gerade die Verdopplung eines Lautes dazu, daß die Gesamtliste kürzer wird (vgl. Beispiel (3.3), S. 53). Es muß aber davon ausgegangen werden, daß Kiparsky annimmt, daß Pāṇini die Verdopplung zusätzlicher Laute ausschließlich zum Zwecke der Verkürzung der *Śivasūtras* vermeidet. Zumindest geht er mit keinem Wort auf die Möglichkeit ein und betont statt dessen, daß die Verdopplung von *h* die einzig nötige ist („[t]his is the only repetition which is necessary in the system“, Kiparsky 1991a, S. 10).

Meiner Kenntnis nach wird in der Literatur zu dem Aufbau von Pāṇinis *Śivasūtras* von niemandem die Möglichkeit in Betracht gezogen, daß es Pāṇini hingenommen hätte, lediglich zu Gunsten der Kürze der Gesamtliste Laute zu verdoppeln. Daraus schließe ich, daß allgemein Einigkeit darüber herrscht, daß Pāṇini in den *Śivasūtras* die Erfüllung des 4. Minimalitätskriteriums anstrebt und Laute nur dann verdoppelt, wenn keine andere Möglichkeit besteht, alle benötigten Lautklassen in Form von *Pratyāhāras* zu repräsentieren.

Um zu überprüfen, ob Pāṇinis *Śivasūtras* das 4. Minimalitätskriterium erfüllen, muß zunächst festgestellt werden, ob überhaupt eine Verdopplung eines Lautes nötig ist oder ob es nicht eine Anordnung gibt, deren Lautliste 42 Elemente lang ist. Falls eine Verdopplung nötig ist, muß getestet werden, ob es eine Möglichkeit gibt, einen einzelnen anderen Laut zu verdoppeln, und falls ja, ob es mit dieser alternativen Verdopplung eine Anordnung mit einer kürzeren *Anubandha*-Liste gibt. Falls *h* der geeignetste Laut für die Verdopplung ist, dann muß schließlich überprüft werden, ob es eine Alternative zu Pāṇinis Anordnung gibt, in der *h* zwar doppelt vorkommt, aber in der die *Anubandha*-Liste kürzer ist als die der *Śivasūtras*. Abbildung 3.3 faßt diese Überlegungen in einem Flußdiagramm zusammen.

⁵Dieses Zitat ist ein Ausschnitt von dem auf Seite 43 wiedergegebenen.

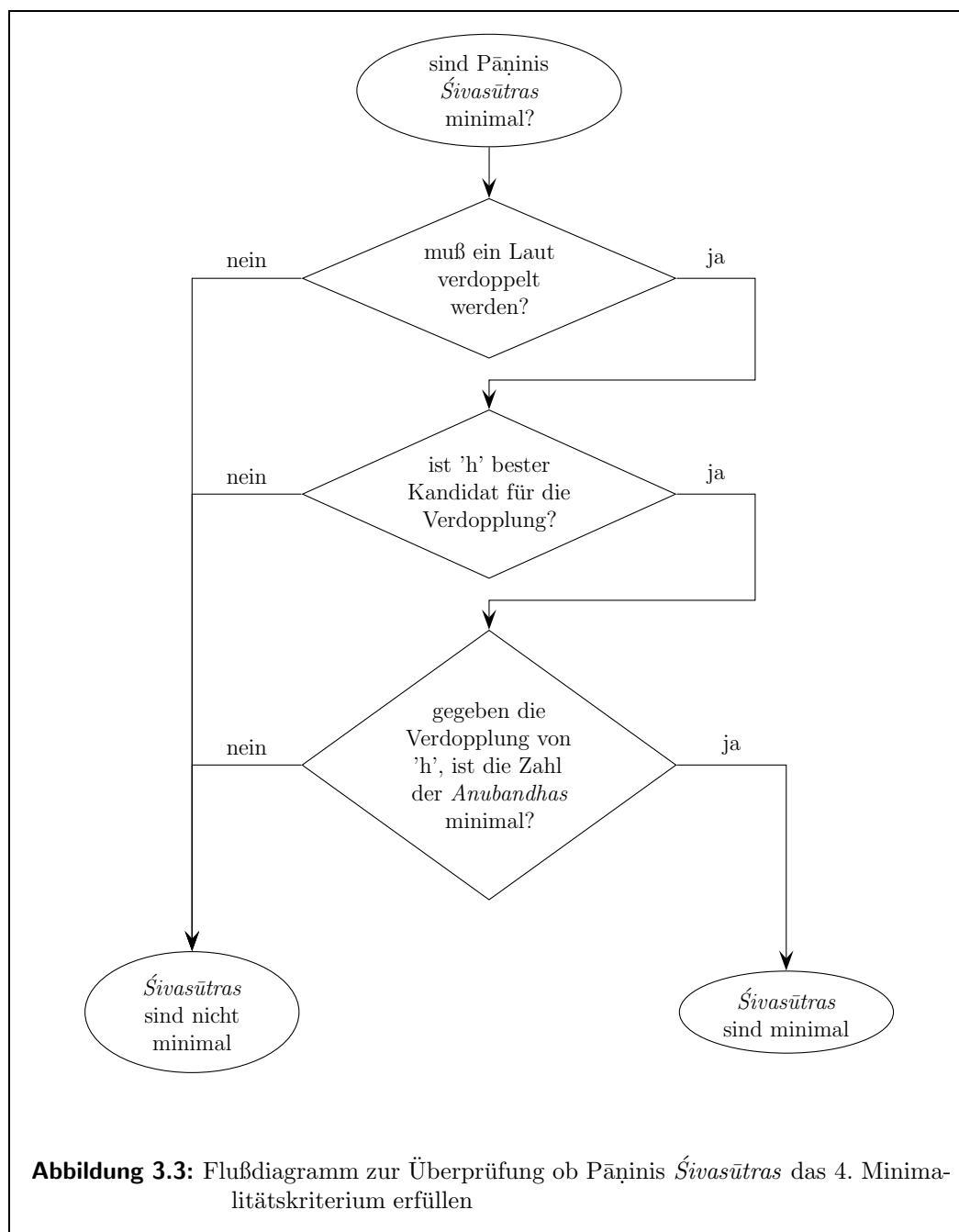


Abbildung 3.3: Flußdiagramm zur Überprüfung ob Pāṇinis Śivasūtras das 4. Minimalitätskriterium erfüllen

In dieser Arbeit wird zum einen in Anlehnung an das Flußdiagramm in Abbildung 3.3 gezeigt, daß Pāṇinis *Śivasūtras* das 4. Minimalitätskriterium erfüllen, zum anderen wird die folgende erweiterte Fragestellung untersucht:

Gibt es für jede beliebige Menge von Mengen eine Anordnung der Elemente der Mengen in einer mit Markern (*Anubandhas*) unterbrochenen Liste, so daß sich jede der Mengen als *Pratyāhāra*-Intervall darstellen läßt, wobei die Liste das 4. Minimalitätskriterium erfüllt?

Das Beispiel (3.15) auf Seite 57 zeigt, daß immer eine Liste (3.16) konstruiert werden kann, bezüglich der die Mengen als *Pratyāhāra*-Intervalle darstellbar sind. Da diese Liste von endlicher Länge ist, bildet ihre Lautliste eine obere Schranke für die Länge der Lautliste einer Liste, die das 4. Minimalitätskriterium erfüllt. Die *Anubandha*-Liste einer Liste, die das 4. Minimalitätskriterium erfüllt, ist nie länger als die Lautliste, da in einer solchen Liste nie zwei *Anubandhas* benachbart sind. Folglich muß es zu jeder Menge von Mengen eine *Śivasūtra*-Liste geben, die in bezug auf das 4. Kriterium minimal ist.

Um diese minimale Liste für eine Mengen von Mengen zu konstruieren, könnte eigentlich eine erschöpfende Suche durchgeführt werden: Angenommen, die Liste, die nach dem Prinzip der Liste (3.14) auf Seite 55 konstruiert ist, hat eine Lautliste der Länge $n + v$, wobei n die Zahl der verschiedenen Laute der Liste ist, dann bildet man alle Lautlisten mit Längen zwischen n und $n + v$. Jede dieser Lautlisten kann auf vielfältige Art durch Marker unterbrochen werden, wobei bei der Suche nach einer minimalen Liste nie mehr als ein Marker zwischen zwei benachbarte Lautelemente zu plazieren ist. Sind alle möglichen Listen konstruiert, so können jene aussortiert werden, für die sich nicht alle Mengen als *Pratyāhāra*-Intervalle darstellen lassen. Anschließend sucht man unter den verbleibenden Listen diejenigen mit den kürzesten Lautlisten heraus. Abschließend ist dann nur noch zu überprüfen, welche dieser Listen mit den wenigsten Markern auskommt.

Die erschöpfende Suche ist zwar eine theoretische Lösungsstrategie, praktisch ist sie jedoch aufgrund der riesigen Zahl der kombinatorischen Möglichkeiten nicht durchführbar, wie folgende Näherungsrechnung zeigt: Seien v und n wie zuvor. Zunächst wird die Zahl aller Lautlisten der Länge $n + v_1$ berechnet,

wobei $0 \leq v_1 \leq v$ ist. Wenn bereits feststeht, welche der n Laute verdoppelt werden, dann gibt es nahezu

$$(n + v_1)!$$

Möglichkeiten, die Laute in einer Liste anzuordnen; wobei die tatsächliche Zahl etwas kleiner sein kann, da bei einigen der Permutationen Lautelemente mit ihren eigenen Kopien vertauscht werden. Um die Zahl aller Lautlisten der Länge $n + v_1$ zu ermitteln, muß das Ergebnis noch mit

$$\binom{n}{v_1}$$

multipliziert werden, da dieser Wert die Zahl der Möglichkeiten angibt, die man bei der Auswahl der zu verdoppelnden Elemente hat. Unberücksichtigt bleibt hier, daß einzelne Elemente nicht nur verdoppelt, sondern auch verdreifacht werden könnten.

Es gibt also annähernd

$$\sum_{k=0}^v (n+k)! \binom{n}{k}$$

Lautlisten, in denen nicht mehr als v Elemente doppelt vorkommen. Nun muß nur noch berechnet werden, wie viele verschiedene Listen dadurch entstehen, daß man jede dieser Lautlisten durch Marker unterbricht. Da keine zwei Marker direkt aufeinanderfolgen sollen, gibt es für eine Lautliste mit n Elementen genau 2^n Möglichkeiten sie mit Markern zu unterbrechen.

Insgesamt müssen somit bei der erschöpfenden Suche nahezu

$$\sum_{k=0}^v 2^{n+k} (n+k)! \binom{n}{k}$$

Listen konstruiert und überprüft werden. Wenn eine Lautliste aus 30 verschiedenen Lauten besteht und wenn es eine *Śivasūtra*-Liste zu dieser Lautmenge gibt, die mit 5 Verdopplungen auskommt, dann ergeben sich mehr als 10^{55} zu überprüfende Listen. Bei einer Milliarde Überprüfungen pro Sekunde wären

mehr als $3 \cdot 10^{39}$ Jahre nötig, um alle Listen zu überprüfen – zum Vergleich: die seit dem Urknall verstrichene Zeit wird auf $15 \cdot 10^9$ Jahre geschätzt. Selbst wenn keine Verdopplung nötig ist, gibt es im Falle von 30 Lauten $2^{30} \cdot 30!$ zu überprüfende Listen, das sind immer noch mehr als $2 \cdot 10^{41}$ Listen. Angewandt auf die 42 Laute in den *Śivasūtras* erhält man mehr als 10^{67} zu überprüfende Listen, obwohl $v = 1$ gesetzt werden kann, da Pāṇinis *Śivasūtras* mit einer Verdopplung auskommen.

Zusammenfassend läßt sich festhalten, daß es zu jeder Menge von Mengen eine *Śivasūtra*-Anordnung gibt, die das 4. Minimalitätskriterium erfüllt. Allerdings belegen die Beispielberechnungen, daß die naive Strategie der erschöpfenden Suche kein praktikables Verfahren zur Konstruktion einer solchen minimalen Anordnung liefert. Im Rahmen dieser Arbeit werden daher die folgenden enger gefaßten Fragen untersucht:

- Kann man von einer Menge von Mengen entscheiden, ob eine *Śivasūtra*-Anordnung ohne Verdopplung existiert?
- Wenn eine solche Anordnung existiert, kann die minimale Zahl von Markern effektiv ermittelt werden?
- Wenn eine solche Anordnung nicht existiert, kann effektiv ermittelt werden, was die minimale Zahl von Verdopplungen von Elementen ist, so daß die Anordnung gelingt?
- Wie sieht eine Implementierung des Verfahrens aus?

3.3 Formalisierung der *Śivasūtra*-Methode

In diesem Unterkapitel werden die in Unterkapitel 3.2 formulierten zentralen Fragestellungen nach der Minimalität von Pāṇinis *Śivasūtras* und der Konstruktion minimaler *Śivasūtra*-Anordnungen zu beliebigen (endlichen) Mengen von (endlichen) Mengen formalisiert (vgl. Fußnote 3 auf Seite 50). Dazu werden zunächst die Zielstrukturen definiert, nämlich die listenförmigen Repräsentationen im *Śivasūtra*-Stil bestehend aus objektsprachlichen Elementen und metasprachlichen Markern.

Definition 3.3.1 Ein Śivasūtra-Alphabet (oder kurz S-Alphabet) ist ein Tripel $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$, bestehend aus

- einer endlichen Menge \mathcal{A} , dem Objektalphabet,
- einer endlichen Menge Σ , dem Marker- oder Anubandha-Alphabet,
- und einer totalen Ordnung $<$ auf $\mathcal{A} \cup \Sigma$,

wobei die Mengen \mathcal{A} und Σ disjunkt sind.

Als nächstes wird definiert, wann eine Teilmenge des Objektalphabets in einem S-Alphabet S-darstellbar ist.

Definition 3.3.2 Eine Teilmenge T des Objektalphabets \mathcal{A} ist genau dann in einem S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ S-darstellbar, wenn es ein Element $a \in \mathcal{A}$ und einen Marker $M \in \Sigma$ gibt, so daß $T = \{b \in \mathcal{A} \mid a \leq b < M\}$ gilt. aM wird die S-Darstellung oder Pratyāhāra von T in $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ genannt.

Die von aM dargestellte Menge $\{b \in \mathcal{A} \mid a \leq b < M\}$ wird bisweilen ebenfalls Pratyāhāra genannt (vgl. Glossar auf Seite 219).

Definition 3.3.3 Ein Paar (\mathcal{A}, Φ) , bestehend aus einer endlichen Menge \mathcal{A} und einer Menge Φ von Teilmengen von \mathcal{A} , ist ein Teilmengensystem. Es sei

$$\mathcal{H}(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \psi \mid \psi = \bigcap_{\varphi \in \Phi'} \varphi \text{ und } \Phi' \subseteq \Phi \right\} \cup \{\mathcal{A}\}$$

die Menge aller aus Φ bildbaren Schnittmengen, dann heißt $(\mathcal{A}, \mathcal{H}(\Phi))$ das zu (\mathcal{A}, Φ) gehörende Schnittmengensystem.

Der mit (\mathcal{A}, Φ) korrespondierende formale Kontext (Φ, \mathcal{A}, \ni) wird (\mathcal{A}, Φ) -Kontext genannt (vgl. Anhang A, Definition A.1.1 auf Seite 175).

Aus der Definition der formalen Begriffe (Definition A.2.3) folgt, daß die Menge der Begriffsinhalte des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes gerade $\mathcal{H}(\Phi)$ ist. Die Entscheidung, die zusätzliche Bezeichnung ‚ $\mathcal{H}(\Phi)$ ‘ einzuführen, basiert auf zwei Überlegungen: Zum einen ersetzt sie den umständlichen Ausdruck ‚Menge der Begriffsinhalte des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes‘. Zum anderen wird so deutlich, daß

Śivasūtra-Alphabet
S-Alphabet
 $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$
Objektalphabet
Markeralphabet
Anubandha-Alphabet

S-darstellbar
 aM
S-Darstellung
Pratyāhāra

(\mathcal{A}, Φ)
Teilmengensystem

$\mathcal{H}(\Phi)$
Schnittmengensystem

(\mathcal{A}, Φ) -Kontext

es nicht unbedingt notwendig ist, die Theorie der Formalen Begriffsanalyse mit all ihren Begrifflichkeiten einzusetzen, um die Optimalität von Pāṇinis *Śivasūtras* zu untersuchen. Im Rahmen dieses Kapitels werden daher sowohl begriffsanalytische als auch rein mengentheoretische Formulierungen gewählt. Es sei hier nochmals auf die Einführung in die Formale Begriffsanalyse in Anhang A verwiesen.

Der spezielle (\mathcal{A}, Φ) -Kontext, der auf den von Pāṇini in den *Aṣṭādhyāyī* genutzten *Pratyāhāras* beruht, wird *Pāṇinis Pratyāhāra-Kontext* oder kurz *Pratyāhāra-Kontext* genannt. In diesem Kontext, der in Abbildung 3.4 wiedergegeben ist, ist die Gegenstandsmenge Φ die Menge der 41 in den *Aṣṭādhyāyī* verwendeten *Pratyāhāras*, und die Merkmalmenge \mathcal{A} ist die Menge der 42 Lautelemente in Pāṇinis *Śivasūtras*.

Definition 3.3.4 *Ein S-Alphabet $(\mathcal{A}', \Sigma, <)$ korrespondiert zu einem Teilmengensystem (\mathcal{A}, Φ) genau dann, wenn $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ und wenn zusätzlich jedes Element von Φ in $(\mathcal{A}', \Sigma, <)$ S-darstellbar ist. Ein zu (\mathcal{A}, Φ) korrespondierendes S-Alphabet wird S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) genannt. Umgekehrt heißt ein Teilmengensystem (\mathcal{A}, Φ) S-darstellbar, wenn ein korrespondierendes S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) existiert.*

Wenn man zum Beispiel das Teilmengensystem (\mathcal{A}, Φ) mit

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\} \text{ und} \\ \Phi &= \{\{d, e\}, \{b, c, d, f, g, h, i\}, \{a, b\}, \{f, i\}, \\ &\quad \{c, d, e, f, g, h, i\}, \{g, h\}\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

untersucht, dann gilt: (\mathcal{A}, Φ) ist S-darstellbar und

$$a b M_1 c g h M_2 f i M_3 d M_4 e M_5 \quad (3.18)$$

ist eines der korrespondierenden S-Alphabete. Die *Pratyāhāras* von Φ bezüglich dieses S-Alphabets sind: dM_5 , bM_4 , aM_1 , fM_3 , cM_5 und gM_2 .

Die folgende Definition formuliert ein Qualitätsmerkmal für S-Alphabete, das dem 3. Minimalitätskriterium von Seite 51 ähnelt. Die beiden Kriterien sind jedoch nicht äquivalent, da wir von *guten S-Alphabeten* nicht fordern,

Pratyāhāra-Kontext

korrespondierendes
S-AlphabetS-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ)

S-darstellbar

daß sie absolut kleinste Markeralphabete haben. Bereits am Beispiel 3.3 von Seite 53 wird deutlich, daß es durchaus Situationen gibt, in denen die Verdopplung eines der Elemente des Alphabets \mathcal{A} zu S-Alphabeten mit kleineren Markeralphabeten bzw. kürzeren *Anubandha*-Listen führt.

Definition 3.3.5 *Ein S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ von (\mathcal{A}, Φ) ist genau dann ein gutes S-Alphabet, wenn es kein S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma', <')$ von (\mathcal{A}, Φ) gibt, dessen Markeralphabet Σ' weniger Elemente hat als Σ .*

Um, wie gewünscht, das 4. Minimalitätskriterium von Seite 51 formalisieren zu können, muß noch definiert werden, was unter der Verdopplung eines Elements von \mathcal{A} zu verstehen ist. Die Definition der Erweiterung eines S-Alphabets durch Verdopplung einiger seiner Elemente erlaubt außerdem die angemessene Modellierung des Phänomens des zweifachen Auftretens des Lautes h in Pāṇinis *Śivasūtras*.

Definition 3.3.6 *Eine endliche Menge $\hat{\mathcal{A}}$ ist ein erweitertes Alphabet eines Objektalphabets \mathcal{A} wenn es eine surjektive Abbildung ϑ von $\hat{\mathcal{A}}$ nach \mathcal{A} gibt. Sei $\hat{\mathcal{A}}$ ein erweitertes Alphabet von \mathcal{A} und $\hat{\Phi}$ eine Menge von Teilmengen von $\hat{\mathcal{A}}$ mit $\Phi = \{\vartheta(\hat{\varphi}) \mid \hat{\varphi} \in \hat{\Phi}\}$, dann ist $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi})$ ein erweitertes Teilmengensystem zu (\mathcal{A}, Φ) .*

Wenn $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi})$ S-darstellbar und $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Sigma}, \hat{<})$ ein S-Alphabet von $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi})$ ist, dann ist $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Sigma}, \hat{<})$ ein erweitertes S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) .

Die *Verdopplung* eines Elements a des Alphabets \mathcal{A} entspricht der Erweiterung des Alphabets um eine Kopie von a ($\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \{a'\}$, $a' \notin \mathcal{A}$) wobei die surjektive Abbildung $\vartheta : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$ wie folgt definiert ist:

$$\vartheta(b) = \begin{cases} b & \text{wenn } b \in \mathcal{A} \\ a & \text{wenn } b = a' \text{ bzw. } b \in \hat{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A} \end{cases}$$

Dann entspricht die Menge $\hat{\Phi}$ der Menge Φ bis auf die Tatsache, daß einige der Vorkommnisse von a in den Mengen von Φ durch a' ersetzt sind.

gutes S-Alphabet

erweitertes Alphabet

erweitertes Teilmengensystem

erweitertes S-Alphabet

Verdopplung

Bezogen auf das Beispiel 3.3 von Seite 53 ergibt sich folgende Situation: $gf eaM_1 dcb a' M_2$ ist ein erweitertes S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) , wobei

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \{a, b, c, d, e, f, g\} \\ \hat{\mathcal{A}} &= \{a', a, b, c, d, e, f, g\}, \\ \Phi &= \{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, e\}, \{a, e, f\}, \{a, e, f, g\}\} \text{ und} \\ \hat{\Phi} &= \{\{a', b\}, \{a', b, c\}, \{a', b, c, d\}, \{a, e\}, \{a, e, f\}, \{a, e, f, g\}\} \text{ gilt.}\end{aligned}$$

Wie in Unterkapitel 3.2 gezeigt, kann man zu jedem Teilmengensystem (\mathcal{A}, Φ) ein erweitertes S-Alphabet konstruieren, indem man das erweiterte Alphabet $\hat{\mathcal{A}}$ und die geforderte Abbildung ϑ derart wählt, daß die Mengen von $\hat{\Phi}$ paarweise disjunkt sind. Dann erhält man ein erweitertes S-Alphabet $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Sigma}, \hat{\prec})$ von (\mathcal{A}, Φ) , indem man die Mengen von $\hat{\Phi}$ beliebig linear anordnet und zwischen den Elementen von je zwei Mengen einen Marker setzt (vgl. die Diskussion auf Seite 55).

Da unser erklärtes Ziel die Generierung von S-Alphabeten ist, die dem 4. Minimalitätskriterium genügen, streben wir an, S-Alphabete in einem möglichst geringen Umfang zu erweitern; solche S-Alphabete nennen wir *optimal erweiterte S-Alphabete*.

Definition 3.3.7 *Ein erweitertes S-Alphabet $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Sigma}, \hat{\prec})$ von (\mathcal{A}, Φ) ist genau dann ein optimal erweitertes S-Alphabet oder kurz ein optimales S-Alphabet, wenn es die folgenden Bedingungen erfüllt:*

optimal erweitertes
S-Alphabet
optimales S-Alphabet

- (1) *Es existiert kein anderes erweitertes S-Alphabet $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\Sigma}, \tilde{\prec})$ von (\mathcal{A}, Φ) , dessen Objektalphabet $\tilde{\mathcal{A}}$ weniger Elemente hat als $\hat{\mathcal{A}}$;*
- (2) *$(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Sigma}, \hat{\prec})$ ist ein gutes S-Alphabet zu einem erweiterten Teilmengensystem $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi})$ von (\mathcal{A}, Φ) , und es gibt kein gutes S-Alphabet zu einem anderen erweiterten Teilmengensystem $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi}')$ von (\mathcal{A}, Φ) , das eine kleinere Markermenge hat.⁶*

⁶Hier ist zu beachten, daß innerhalb der zweiten Bedingung für optimal erweiterte S-Alphabete das erweiterte Alphabet $\hat{\mathcal{A}}$ und somit auch die Abbildung ϑ fest ist und nur die Menge $\hat{\Phi}$ variiert wird. Es steht demnach fest, welche Elemente verdoppelt werden. Die Bedingung erfaßt lediglich, daß es bei der Konstruktion von $\hat{\Phi}$ aus Φ trotz fester Abbildung ϑ mehrere Alternativen geben kann, die zu unterschiedlichen erweiterten S-Alphabeten führen.

Aus den Überlegungen aus Unterkapitel 3.2 folgt, daß es zu jedem Teilmengensystem ein optimales S-Alphabet gibt. Allerdings erfüllen optimale S-Alphabete noch nicht notwendigerweise das 4. Minimalitätskriterium von Seite 51, wie das folgende Beispiel zeigt:

Sei $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f\}$ und

$$\Phi = \{\{a, b\}, \{b, c, d\}, \{d, e\}, \{a, d, e\}, \{a, d, e, f\}\},$$

dann ist (\mathcal{A}, Φ) nicht S-darstellbar.⁷ Erweitert man (\mathcal{A}, Φ) , indem man das Element d verdoppelt, dann ist

$$d'cbM_1aM_2edM_3fM_4$$

ein erweitertes S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) mit minimalem Objektalphabet. Außerdem gibt es kein S-Alphabet mit Objektalphabet $\{a, b, c, d, d', e, f\}$, das ein erweitertes S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) ist und mit weniger als vier Markern auskommt. Demnach ist $d'cbM_1aM_2edM_3fM_4$ ein optimal erweitertes S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) . Das S-Alphabet $d'cbM_1aM_2edM_3fM_4$ erfüllt jedoch nicht das 4. Minimalitätskriterium, da es ein erweitertes S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) gibt, dessen Objektalphabet genauso groß und dessen Markeralphabet kleiner ist:

$$faedM_1cbM_2a'M_3$$

Um das 4. Minimalitätskriterium vollständig formal zu erfassen, muß also noch berücksichtigt werden, daß für die Verdopplung von Elementen mehrere Kandidaten zur Verfügung stehen können.

Definition 3.3.8 *Ein erweitertes S-Alphabet $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Sigma}, \hat{\prec})$ von (\mathcal{A}, Φ) ist genau dann ein perfekt erweitertes S-Alphabet oder kurz ein perfektes S-Alphabet, wenn es optimal ist und es kein optimal erweitertes S-Alphabet $(\hat{\mathcal{A}}', \hat{\Sigma}', \hat{\prec}')$ gibt, dessen Markeralphabet $\hat{\Sigma}'$ weniger Elemente hat als $\hat{\Sigma}$.*

Aus den Überlegungen in Unterkapitel 3.2 folgt, daß es zu jedem Teilmengensystem ein perfekt erweitertes S-Alphabet gibt und daß jedes dieser perfekt erweiterten S-Alphabete dem 4. Minimalitätskriterium von Seite 51 genügt.

⁷In Kapitel 4 wird ein Verfahren entwickelt, mit dem Teilmengensysteme auf ihre S-Darstellbarkeit hin untersucht werden können.

Nach Kornai (1993) erfüllt die Menge der natürlichen Lautklassen einer Sprache immer zwei Bedingungen (vgl. hier S. 35): Sie ist relativ klein im Vergleich zur Menge aller möglichen Mengen von Lauten, und sie ist abgeschlossen unter Schnittmengenbildung. Kornai (1993) fordert von jedem System zur Repräsentation von natürlichen Lautklassen, daß es diese beiden Bedingungen widerspiegelt. Also muß (1) die Menge der darstellbaren Klassen klein sein im Vergleich zur Potenzmenge der Lautmenge und (2) die Schnittmenge zweier darstellbarer Klassen muß darstellbar sein. Im folgenden wird der Nachweis geführt, daß zumindest S-Alphabete, die nicht erweitert sind, beide Bedingungen erfüllen.

Die Bedingung der relativen Kleinheit der Menge der darstellbaren Mengen wird von S-Alphabeten erfüllt: Die Menge der zu einem gegebenen S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ S-darstellbaren Mengen ist die Menge der zu $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ konstruierbaren *Pratyāhāras*. Ihre Mächtigkeit ist bei einem n -elementigen Objektalphabet \mathcal{A} höchstens

$$\binom{n}{2} + n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Der erste Summand kommt dadurch zustande, daß im ungünstigsten Fall auf jedes Element des Objektalphabets direkt ein Markerelement folgt. Denn dann können die *Pratyāhāras* auch direkt als Intervalle in $(\mathcal{A}, <)$ und somit als Paare aus \mathcal{A} angegeben werden. Der zweite Summand n drückt aus, daß in dem beschriebenen ungünstigsten Fall auch *Pratyāhāras* für die n einelementigen Mengen konstruiert werden können. Die Summe

$$\binom{n}{2} + n$$

ist, da sie nur quadratisch in n wächst, klein im Vergleich zu 2^n , der Zahl aller möglichen Teilmengen von \mathcal{A} . Es ist offensichtlich, daß sich dieses Verhältnis auch bei erweiterten S-Alphabeten nicht entscheidend ändert, so lange zumindest, wie die Mächtigkeit der Objektmenge des erweiterten S-Alphabets im Vergleich zur Mächtigkeit des ursprünglichen Objektalphabets nicht exponentiell zunimmt.

Die Menge der in einem nicht erweiterten S-Alphabet darstellbaren Lautklassen ist abgeschlossen unter Schnittmengenbildung: Wenn zwei Teilmengen $T_1, T_2 \in \mathcal{A}$ S-darstellbar sind in dem S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$, dann ist die Schnittmenge der beiden Mengen $T_1 \cap T_2$ (wenn sie nicht leer ist) ebenfalls S-darstellbar in $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$. Denn wenn $a_1 M_1$ die S-Darstellung von T_1 und $a_2 M_2$ die S-Darstellung von T_2 ist, dann ist $\max(a_1, a_2) \min(M_1, M_2)$ die S-Darstellung von $T_1 \cap T_2$.

Es wurde gezeigt, daß die Menge der durch *Pratyāhāras* darstellbaren Mengen eines nicht erweiterten S-Alphabets relativ klein und unter Schnittmengenbildung abgeschnitten ist. Somit bilden S-Alphabete und *Pratyāhāras* nach Kornai eine geeignete Methode zur Repräsentation der natürlichen Lautklassen einer Sprache. Wie in der Fußnote 26 auf Seite 36 dargelegt, kann die Abgeschlossenheit unter Schnittmengenbildung verloren gehen, wenn das S-Alphabet erweitert wird.

4 S-Darstellbarkeit von Teilmengensystemen

In diesem Kapitel werden formale Kriterien für die S-Darstellbarkeit von Teilmengensystemen entwickelt. Hierzu werden zunächst in Unterkapitel 4.1 einige Hilfssätze aufgestellt, die in den folgenden Unterkapiteln benötigt werden. Ein notwendiges Kriterium für die S-Darstellbarkeit eines Teilmengensystems, das auf graphentheoretischen Eigenschaften des korrespondierenden Begriffsverbands beruht, wird in Unterkapitel 4.2 formuliert. Bereits mit diesem Kriterium kann nachgewiesen werden, daß die Menge der Lautklassen, die Pāṇini in den *Aṣṭādhyāyī* mit *Pratyāhāras* bezeichnet, nicht S-darstellbar ist. Der *Hauptsatz über die S-Darstellbarkeit von Teilmengensystemen* in Unterkapitel 4.3 liefert zwei äquivalente, hinreichende Kriterien für die S-Darstellbarkeit. Mit diesen Kriterien ist es möglich, beliebige Teilmengensysteme hinsichtlich ihrer S-Darstellbarkeit zu klassifizieren.

4.1 Vorüberlegungen

Die in diesem Unterkapitel bewiesenen Sätze werden im weiteren Verlauf dieses Kapitels benötigt, um die Menge der S-darstellbaren Teilmengensysteme zu charakterisieren.

Lemma 4.1.1 *Seien $T, T_1, T_2 \subseteq \mathcal{A}$ in einem S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ S-darstellbar, dann gilt:*

- (1) *Wenn $a, b, c \in T$ mit $a < b < c$, dann ist $T \setminus \{b\}$ nicht S-darstellbar in $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$.*
- (2) *Wenn $a, b, c \in \mathcal{A}$ mit $a < b < c$ und $a, c \in T$, dann ist auch $b \in T$.*

- (3) Seien $a, b, c \in \mathcal{A}$ mit $a < c$ und $a \in T_1$, $c \in T_2$, $b \in T_1 \cap T_2$: Wenn $a, c \notin T_1 \cap T_2$, dann gilt $a < b < c$.

Beweis: Die Teilaussagen des Lemmas werden im folgenden einzeln bewiesen:

- (1) Die Aussage folgt aus einem Widerspruchsbeweis: Angenommen, dM ist die S-Darstellung von $T \setminus \{b\}$ in $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$, dann folgt aus der Definition 3.3.2 der S-Darstellung, daß $d \leq a < b < c < M$ gilt. Daraus folgt allerdings auch, daß $b \in dM$, was der Annahme $dM = T \setminus \{b\}$ widerspricht.
- (2) Die Aussage folgt unmittelbar aus dem Beweis der Aussage 1.
- (3) Angenommen, es gilt $a < c < b$, dann wäre, wegen Aussage 2, $c \in T_1$, was $c \notin T_1 \cap T_2$ widerspricht; analog läßt sich zeigen, daß $b < c < a$ zu einem Widerspruch führt. Da \mathcal{A} durch $<$ total geordnet ist, folgt Aussage 3. \square

Lemma 4.1.2 *Es sei $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ ein S-Alphabet; ferner seien $T_1, T_2, T_3 \subseteq \mathcal{A}$ mit $a \in (T_2 \cap T_3) \setminus T_1$, $b \in (T_1 \cap T_3) \setminus T_2$ und $c \in (T_1 \cap T_2) \setminus T_3$. Dann ist wenigstens eine der drei Mengen T_1, T_2, T_3 nicht S-darstellbar in $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$.*

Beweis: Es gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a < b < c$. Angenommen, alle drei Mengen T_1, T_2, T_3 sind S-darstellbar in $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$, dann gilt, wegen $a \in T_2$, $b \in T_1$ und $c \in T_1 \cap T_2$, nach Lemma 4.1.1(3) $a < c < b$. Dies widerspricht der Annahme $a < b < c$ und der Tatsache, daß $<$ nach Definition 3.3.1 eine totale Ordnung ist. \square

Lemma 4.1.3 *Wenn zwei Mengen A und B in einem S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ S-darstellbar sind, dann ist auch ihre Schnittmenge $A \cap B$, wenn sie nicht leer ist, S-darstellbar in dem S-Alphabet.*

Beweis: Sei aM die S-Darstellung von A und bM' die S-Darstellung von B in $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$, dann ist die Schnittmenge

$$A \cap B = \{s \in \mathcal{A} \mid a \leq s < M\} \cap \{s \in \mathcal{A} \mid b \leq s < M'\} = \{s \in \mathcal{A} \mid c \leq s < \tilde{M}\}$$

mit $c = \max\{a, b\}$ und $\tilde{M} = \min\{M, M'\}$ S-darstellbar und hat die S-Darstellung $c\tilde{M}$ in $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$. \square

Das folgende Lemma basiert im wesentlichen darauf, daß sich der Schnitt von drei Intervallen immer als Schnitt von nur zwei der Intervalle darstellen läßt.

Lemma 4.1.4 *Wenn (\mathcal{A}, Φ) S-darstellbar ist, dann läßt sich jedes Element von $\mathcal{H}(\Phi) \setminus \mathcal{A}$ als Schnittmenge von nicht mehr als zwei Mengen aus Φ darstellen.*

Beweis: Sei $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ ein S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) , dann bildet jedes Element aus Φ ein Intervall in $(\mathcal{A}, <)$. Angenommen, es gibt ein Element $B \in \mathcal{H}(\Phi) \setminus \mathcal{A}$, das nur als Schnittmenge von wenigstens drei Elementen aus Φ dargestellt werden kann; in Zeichen: $B = A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n$, $n \geq 3$ und $\forall i \in \{1, \dots, n\} : A_i \in \Phi$. Sei ferner $r = \max\{\min A_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ und $t = \min\{\max A_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$, dann ist $B = \{s \in \mathcal{A} \mid r \leq s \leq t\}$. Somit gibt es aber $k, l \in \{1, \dots, n\}$ mit $\min A_k = r = \max\{\min A_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ und $\max A_l = t = \min\{\max A_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$, so daß $B = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = A_l \cap A_k$. B ist also als Schnittmenge zweier Elemente aus Φ darstellbar. \square

Korollar 4.1.5 (begriffsanalytisch) *Wenn (\mathcal{A}, Φ) S-darstellbar ist, dann läßt sich jeder formale Begriff des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes in der Form (A'', A') angeben, wobei $A \subseteq \Phi$ nicht mehr als zwei Elemente hat.¹*

Beweis: Aus der Definition der formalen Begriffe A.2.3 folgt, daß jeder Begriffsinhalt eines Begriffs des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes eine Schnittmenge von Elementen aus Φ ist. Somit folgt die Aussage aus Lemma 4.1.4. \square

¹Die Definition A.2.1 der Ausdrücke A' und A'' sowie die Definition A.2.3 formaler Begriffe finden sich in Anhang A.

Die Lemmata dieses Unterkapitels formulieren lediglich notwendige Bedingungen für die S-Darstellbarkeit eines Teilmengensystems, aber keine hinreichenden. Das heißt, findet man in einem Teilmengensystem drei Mengen, die sich wie T_1 , T_2 und T_3 aus Lemma 4.1.2 verhalten, dann kann gefolgert werden, daß das Teilmengensystem nicht S-darstellbar ist. Wenn es jedoch keine drei Mengen mit den geforderten Eigenschaften gibt, dann heißt das nicht, daß das Teilmengensystem S-darstellbar sein muß.

Alle bisherigen Untersuchungen zur Minimalität von Pāṇinis *Śivasūtras* (vgl. Kiparsky 1991a; Staal 1962; Faddegon 1929) basieren im Grunde auf Kriterien, die den Aussagen der Lemmata in diesem Unterkapitel entsprechen (vgl. Unterkapitel 3.1). So folgert Kiparsky (1991a) zum Beispiel aus den *Pratyāhāras* $\{a, i, u, r, l\} = aK$, $\{i, u, r, l\} = iK$, $\{u, r, l\} = uK$ und $\{a, i, u\} = aN$, daß in den *Śivasūtras* $a < i < u < r, l$ gelten muß. Lemma 4.1.1(3) schränkt die Abfolgemöglichkeiten auf $a, i < u < r, l$ oder $r, l < u < a, i$ ein, und aus Lemma 4.1.1(2) läßt sich die weitere Einschränkung auf $a < i < u < r, l$ oder $r, l < u < i < a$ ableiten. Die endgültige Wahl der ersten Alternative begründet Kiparsky damit, daß sie die Zahl der benötigten *Anubandhas* verringert.

Im folgenden Unterkapitel wird ein neues, völlig anderes, notwendiges Kriterium für die S-Darstellbarkeit eines Teilmengensystems vorgestellt, das den Kriterien dieses Unterkapitels in mehrfacher Hinsicht überlegen ist:

Zum einen läßt es sich, wie gezeigt werden wird, sehr leicht zu einem hinreichenden Kriterium ausweiten. Es löst somit die Frage nach der S-Darstellbarkeit beliebiger Teilmengensysteme.

Darüber hinaus basiert es, anders als die Kriterien dieses Unterkapitels, nicht auf der Suche nach Mengen eines Teilmengensystems mit bestimmten Eigenschaften, was zu kombinatorischen Problemen führen und sich als nicht praktikabel herausstellen kann. Stattdessen wird gezeigt, daß die S-Darstellbarkeit eines Teilmengensystems (\mathcal{A}, Φ) von graphentheoretischen Eigenschaften des formalen Begriffsverbands des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes abhängig ist. Die S-Darstellbarkeit eines Teilmengensystems kann somit visuell erfaßt werden.

Desweiteren erlaubt die neu entwickelte Methode die direkte Konstruktion der gesuchten S-Alphabete: Ein S-Alphabet eines S-darstellbaren Teilmengensystems (\mathcal{A}, Φ) kann direkt am Begriffsverband des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes abgele-

sen werden; es ist insbesondere möglich, die Menge aller guten S-Alphabete abzulesen (vgl. Kapitel 5).

Schließlich bietet die Analyse der Begriffsverbände und ihrer Kontexte sogar die Möglichkeit, günstige Erweiterungen für nicht S-darstellbare Teilmengensysteme zu identifizieren, um zu perfekten S-Alphabeten zu gelangen (vgl. Kapitel 6).

4.2 S-Darstellbarkeit und plättbare Begriffsverbände

Um die in Satz 4.2.5 getroffene Hauptaussage dieses Unterkapitels über den Zusammenhang zwischen der S-Darstellbarkeit eines Teilmengensystems und der Plättbarkeit des korrespondierenden Begriffsverbands beweisen zu können, muß zunächst eine neue Terminologie eingeführt werden.

Definition 4.2.1 Sei \mathcal{A} eine endliche Menge und $\Phi \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{A})$ eine Menge von Teilmengen von \mathcal{A} . Es sei $\mathcal{S}(\mathcal{H}(\Phi))$ die Menge all der Elemente aus $\mathcal{H}(\Phi)$ (vgl. Definition 3.3.3, die nicht echte Obermenge eines anderen Elements aus $\mathcal{H}(\Phi)$ sind. Ferner sei $\mathcal{H}_0(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}(\Phi)$, $\mathcal{S}_0(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}(\mathcal{H}_0(\Phi))$, $\mathcal{H}_1(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}_0(\Phi) \setminus \mathcal{S}_0(\Phi)$ und $\mathcal{S}_1(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}(\mathcal{H}_1(\Phi))$. Die Mengen $\mathcal{H}_i(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}_{i-1}(\Phi) \setminus \mathcal{S}_{i-1}(\Phi)$ und $\mathcal{S}_i(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}(\mathcal{H}_i(\Phi))$ mit $i \in \mathbb{N}$ werden induktiv definiert.

Wenn $\varphi \in \mathcal{S}_i(\Phi)$, dann sagen wir, daß φ den Rang i bezüglich $(\mathcal{H}(\Phi), \supseteq)$ hat.

Lemma 4.2.2 Sei \mathcal{A} eine endliche Menge und $\Phi \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{A})$. Dann gibt es ein minimales $n \in \mathbb{N}$ mit $\forall m > n : \mathcal{H}_m(\Phi) = \emptyset$. Für dieses n ist $\{\mathcal{S}_i(\Phi)\}_{i \in \{0, \dots, n\}}$ eine Partition von $\mathcal{H}(\Phi)$.

Für die Mengen $\mathcal{H}_i(\Phi)$ und $\mathcal{S}_i(\Phi)$ gilt:

- (1) für jedes $M \in \mathcal{S}_i(\Phi)$ gibt es ein $M' \in \mathcal{S}_{i-1}(\Phi)$ mit $M' \subset M$.
- (2) für alle $M, M' \in \mathcal{S}_i(\Phi)$ mit $M \neq M'$ gibt es ein $j < i$ mit $(M \cap M') \in \mathcal{S}_j(\Phi)$.

Beweis: Die Definition von $\mathcal{S}_i(\Phi)$ garantiert, daß $\mathcal{S}_i(\Phi)$ nicht leer ist, solange $\mathcal{H}_i(\Phi) \neq \emptyset$ gilt. Da \mathcal{A} endlich ist, gibt es ein minimales $n \in \mathbb{N}$, so daß $\forall m > n :$

$\mathcal{H}_m(\Phi) = \emptyset$. Ferner folgt aus den Definitionen von $\mathcal{S}_i(\Phi)$ und $\mathcal{H}_i(\Phi)$, daß $\{\mathcal{S}_i(\Phi)\}_{i \in \{0, \dots, n\}}$ eine Partition von $\mathcal{H}(\Phi)$ ist.

Es folgt der Beweis der beiden letzten Aussagen des Lemmas:

- (1) Per Definition gilt für beliebige i , daß $\mathcal{S}_i(\Phi) \subseteq \mathcal{H}_i(\Phi)$ und $\mathcal{H}_i(\Phi) \subseteq \mathcal{H}_{i-1}(\Phi)$. Da $\{\mathcal{S}_i(\Phi)\}_{i \in \{0, \dots, n\}}$ eine Partition von $\mathcal{H}(\Phi)$ ist, gilt ferner $\mathcal{S}_i(\Phi) \cap \mathcal{S}_{i-1}(\Phi) = \emptyset$. Angenommen, es gibt ein $M \in \mathcal{S}_i(\Phi)$, so daß es kein $M' \in \mathcal{S}_{i-1}(\Phi)$ mit $M' \subset M$ gibt, dann kann es kein Element M'' in $\mathcal{H}_{i-1}(\Phi)$ geben, welches eine echte Teilmenge von M ist. Denn ein solches Element wäre, wegen $M'' \notin \mathcal{S}_{i-1}(\Phi)$, auch Element von $\mathcal{H}_i(\Phi)$, und somit würde die Definition von $\mathcal{S}_i(\Phi)$ verhindern, daß M ein Element von $\mathcal{S}_i(\Phi)$ ist.
- (2) $(M \cap M')$ ist per Definition ein Element von $\mathcal{H}(\Phi)$. Da $M, M' \in \mathcal{S}_i(\Phi)$ gilt, müssen M und M' echte Obermengen von $M \cap M'$ sein. Somit folgt die Behauptung aus der Definition von $\mathcal{S}_i(\Phi)$ und der Tatsache, daß $\{\mathcal{S}_i(\Phi)\}_{i \in \{0, \dots, n\}}$ eine Partition von $\mathcal{H}(\Phi)$ ist. \square

Definition 4.2.3 Sei (G, M, I) ein endlicher formaler Kontext, und sei $\underline{\mathcal{B}}(G, M, I)$ der korrespondierende Begriffsverband. Der Inhaltsrang eines formalen Begriffs des Kontextes wird induktiv definiert:²

- (1) Der Begriff $(\emptyset', \emptyset'')$ hat den Inhaltsrang 0.
- (2) Der Begriff (A, B) hat den Inhaltsrang $n + 1$, wenn es einen Begriff (\bar{A}, \bar{B}) vom Inhaltsrang n gibt, mit $(\bar{A}, \bar{B}) > (A, B)$, und wenn der Inhaltsrang aller Begriffe (\tilde{A}, \tilde{B}) mit $(\tilde{A}, \tilde{B}) > (A, B)$ höchstens n ist.

Der Inhaltsrang eines Begriffs entspricht der Länge der längsten aufsteigenden Kette von dem Begriff zum größten Begriff $(\emptyset', \emptyset'')$.

Lemma 4.2.4 Sei \mathcal{A} eine endliche Menge und $\Phi \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{A})$, dann ist jeder Begriffsinhalt B des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes Element von $\mathcal{H}(\Phi)$, und jedes Element von $\mathcal{H}(\Phi)$ ist ein Begriffsinhalt des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes. Ferner gilt $B \in \mathcal{S}_i(\Phi)$ genau dann, wenn B vom Inhaltsrang i ist.

²Im Gegensatz zu den übrigen begriffsanalytischen Definitionen erscheint diese Definition nicht in Anhang A, da sie nicht Ganter & Wille (1996) entnommen ist und nur in diesem Kapitel benötigt wird.

Beweis: Sei (A, B) ein formaler Begriff des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes, dann gilt wegen der Definitionen 3.3.3 und A.2.3:

$$A \subseteq \mathfrak{B}(\Phi) \quad \text{und} \quad B = \{a \in \mathcal{A} \mid \forall \varphi \in A : a \in \varphi\} = \bigcap_{\varphi \in A} \varphi .$$

Somit ist jeder Begriffsinhalt des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes ein Element von $\mathcal{H}(\Phi)$. Desweiteren gilt für jedes $\varphi \in \mathcal{H}(\Phi) : \varphi = \varphi''$, da

$$\begin{aligned} \varphi'' &= \{\psi \in \Phi \mid \forall a \in \varphi : a \in \psi\}' \\ &= \{\psi \in \Phi \mid \varphi \subseteq \psi\}' \\ &= \{a \in \mathcal{A} \mid \forall \psi \in \Phi \text{ mit } \varphi \subseteq \psi : a \in \psi\} \\ &= \bigcap_{\substack{\psi \in \Phi \\ \varphi \subseteq \psi}} \psi \\ &= \varphi \end{aligned}$$

gilt. Also ist nach Lemma A.2.5 jedes Element von $\mathcal{H}(\Phi)$ ein Begriffsinhalt des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes.

Folglich ist die Menge der Begriffsinhalte des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes gleich der Menge $\mathcal{H}(\Phi)$. Die zweite Aussage über den Rang in $(\mathcal{H}(\Phi), \supseteq)$ und den Inhaltsrang folgt unmittelbar aus den Definitionen 4.2.1 und 4.2.3. \square

Die S-Darstellbarkeit von Teilmengensystemen läßt sich auf Eigenschaften der Begriffsverbände von (\mathcal{A}, Φ) -Kontexten zurückführen. Dabei interessieren wir uns ausschließlich für Zeichnungen der Begriffsverbände und die Lage der Merkmalbegriffe in ihnen.³ Daher werden die Begriffsverbände im folgenden zumeist ausschließlich mit den Merkmalbegriffen beschriftet. Abbildung 4.1 zeigt den Begriffsverband zu dem (\mathcal{A}, Φ) -Kontext (\mathcal{A}, Φ, \ni) des Beispiels (3.17) von Seite 64.⁴ Der zugehörige (\mathcal{A}, Φ) -Kontext ist in Abbildung 4.2 wiedergegeben. Weitere Begriffsverbände von S-darstellbaren (\mathcal{A}, Φ) -Kontexten zeigt

³Merkmalbegriffe werden in Definition A.2.4 auf Seite 182 definiert. Der umstrittene Verzicht auf die Kompositionsfuge *-s* in Nominalkomposita mit *Merkmal* erfolgt hier in Anlehnung an Ganter & Wille (1996).

⁴Die Abbildung ist mit dem Programm **ConExp** erstellt worden. Fußnote 5 auf Seite 184 gibt Auskunft über die Bedeutung der unterschiedlichen Färbungen der Kreise, die hier zunächst vernachlässigt werden können.

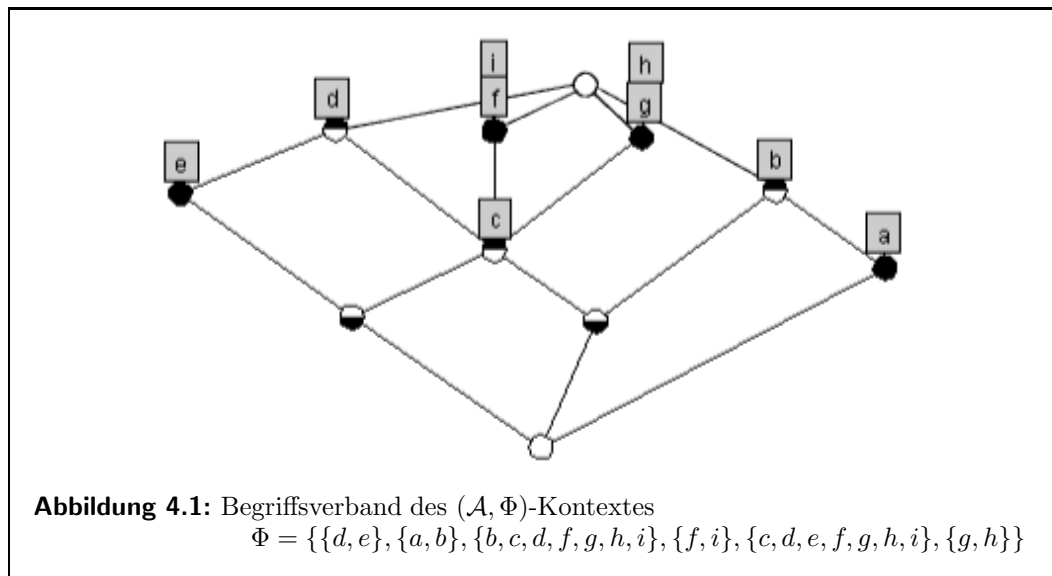


Abbildung 4.3. Zu jedem der vier Begriffsverbände sind zusätzlich der (\mathcal{A}, Φ) -Kontext und zwei mögliche S-Alphabete angegeben.

Der Graph des Hassediagramms des Begriffsverbands, kurz der *Begriffsgraph*, eines (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes gibt einen ersten Hinweis auf die Frage, ob ein Teilmengensystem S-darstellbar ist (vgl. Abbildungen 4.1 und 4.3):

Satz 4.2.5 *Ist (\mathcal{A}, Φ) S-darstellbar, dann ist der Graph des Hassediagramms der partiell geordneten Menge $(\mathcal{H}(\Phi), \supseteq)$ plättbar.*

Oder begriffsanalytisch ausgedrückt: Ist (\mathcal{A}, Φ) S-darstellbar, dann ist der Begriffsgraph des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes plättbar.⁵

Der in dieser Arbeit gelieferte Beweis dieses Satzes ist sehr lang, was zwei Ursachen hat: Zum einen werden nur elementare mathematische Konzepte, wie ‚endliche Menge‘, ‚Teilmenge‘ und ‚geordnete Menge‘ verwendet, und zum anderen ist die Darstellung sehr ausführlich.⁶

⁵Die Definition von Graphen und speziell von plättbaren Graphen findet sich im Anhang in Abschnitt B.4. Hassediagramme werden in Definition B.5.6 definiert.

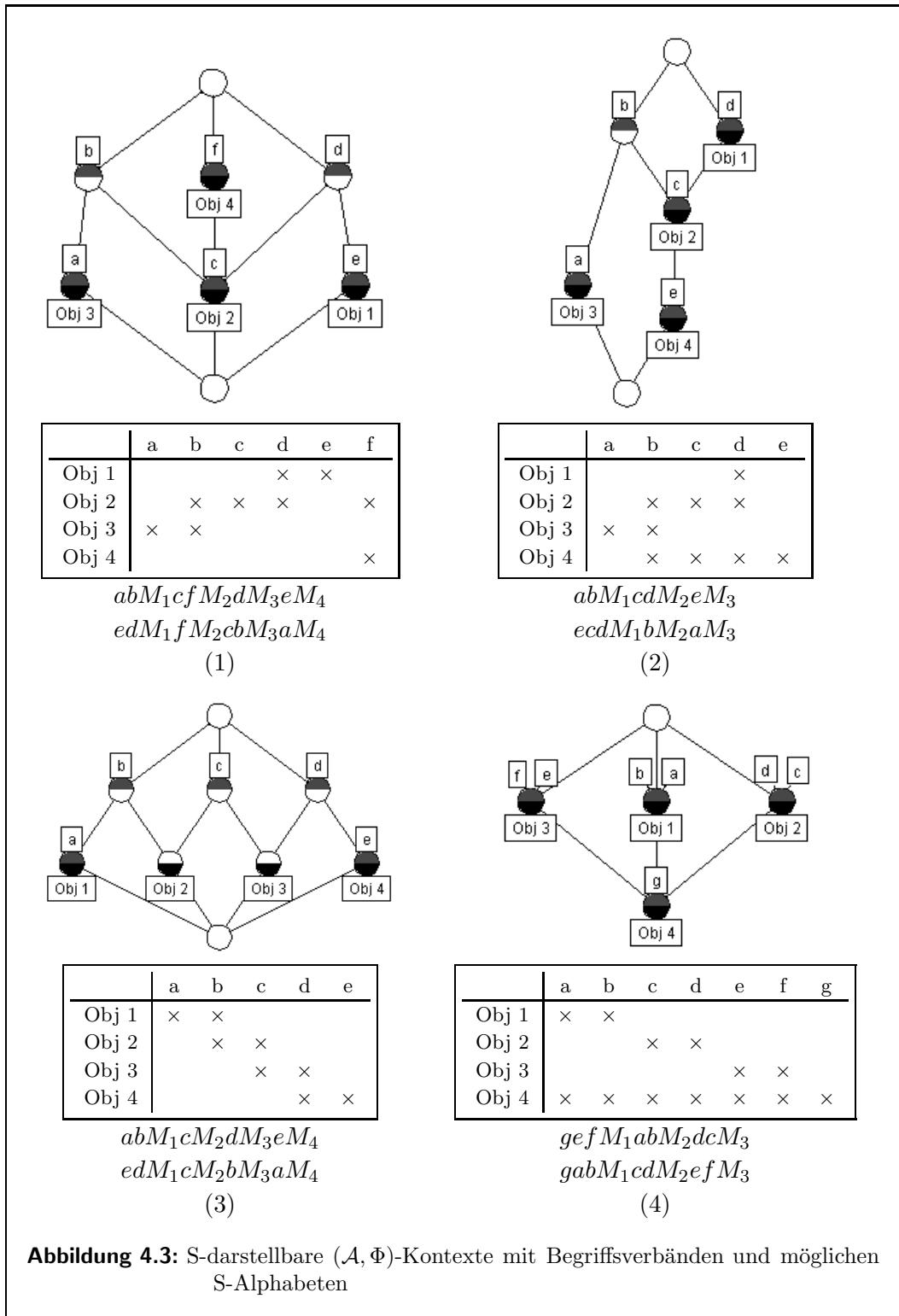
⁶Da sich diese Abhandlung nicht primär an Mathematiker richtet, habe ich mich, wo immer möglich, darum bemüht, ausschließlich allgemein bekannte mathematische Konzepte und Zusammenhänge anzuwenden und jeden Argumentationsschritt mit Beispielen zu un-

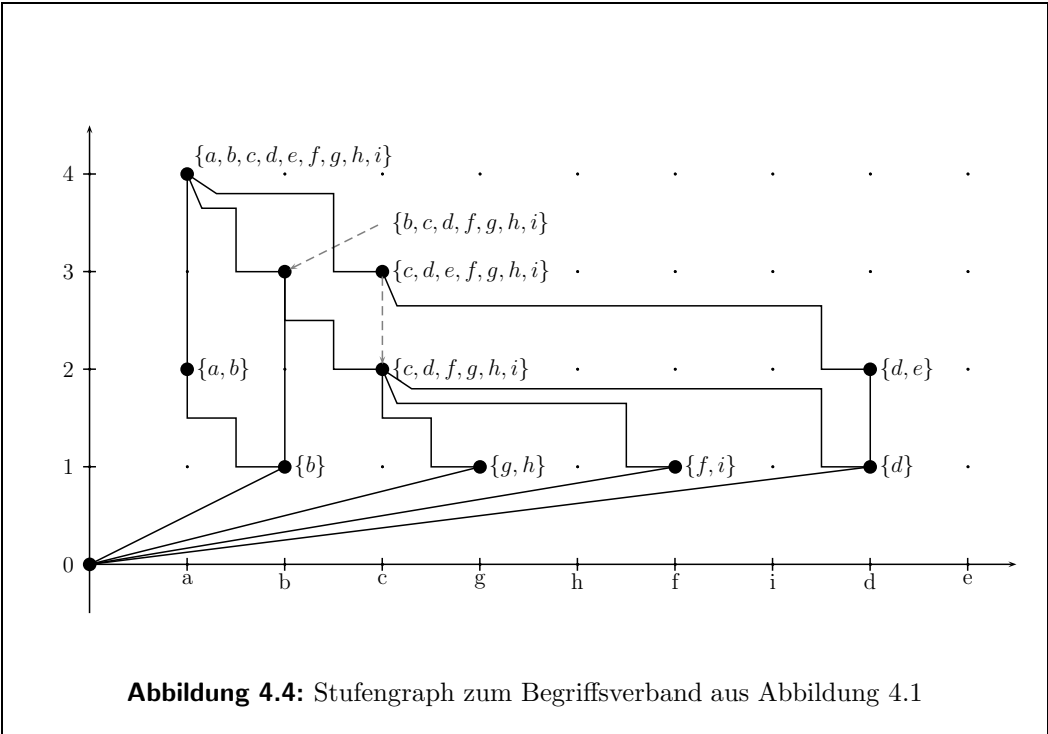
	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$\{d, e\}$				×	×				
$\{a, b\}$	×	×							
$\{b, c, d, f, g, h, i\}$		×	×	×		×	×	×	×
$\{f, i\}$						×			×
$\{c, d, e, f, g, h, i\}$			×	×	×	×	×	×	×
$\{g, h\}$							×	×	

Abbildung 4.2: (\mathcal{A}, Φ) -Kontext zum Begriffsverband aus Abbildung 4.1

Folgende Beweisskizze soll helfen, den Überblick über die Argumentation zu bewahren: Um die Plättbarkeit eines Graphen nachzuweisen, genügt es, eine ebene Zeichnung des Graphen anzufertigen, also eine Zeichnung, in der sich keine Kanten kreuzen. In dem Beweis wird zu einem beliebigen S-darstellbaren Teilmengensystem (\mathcal{A}, Φ) ein ebener Begriffsgraph (der sogenannte Stufengraph) des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes konstruiert. Abbildung 4.4 zeigt den Stufengraphen zu dem Beispiel (3.17) von Seite 64. Ein Graph ist eben (vgl. Definition B.4.14), wenn im Inneren jeder Kante weder eine Ecke des Graphen noch ein Punkt einer anderen Kante liegt. Die Besonderheit der Konstruktion des Stufengraphen liegt darin, daß die Ecken des Graphen immer auf ganzzahlige Koordinaten liegen, während die gestuften Kanten keine Punkte mit ganzzahligen Koordinaten in ihrem Inneren haben. Dies bewirkt, daß die Menge der Punkte im Inneren einer Kante kontrolliert und dadurch die Menge der potentiellen Konfliktfälle (sprich Kantenkreuzungen) minimiert wird. Zwei Kanten haben einen Konflikt miteinander, wenn sie einen gemeinsamen Punkt haben, der nicht Endpunkt beider Kanten ist. Jeder Konflikt zweier Kanten im Stufengraphen läßt sich durch die Lage ihrer Endpunkte zueinander beschreiben. Es wird bewiesen, daß, wenn (\mathcal{A}, Φ) S-darstellbar ist, nur gutartige Konflikte auftreten können, die sich durch eine leichte Verformung des Graphen beheben lassen.

termauern. Die Theorie der Minore, die in diesem Unterkapitel eingesetzt wird, stellt eine Ausnahme dar, ich hoffe jedoch, daß es mir gelingt, mit Hilfe zahlreicher Abbildungen ihre Anwendung verständlich zu machen.





Statt eine Zeichnung des Begriffsverbands zu dem Kontext (Φ, \mathcal{A}, \ni) zu konstruieren, wird eine Zeichnung des Begriffsverbands zu dem Kontext (\mathcal{A}, Φ, \in) konstruiert. Dies erlaubt eine intuitivere Definition der Abbildung τ in dem Beweis, die den formalen Begriffen Punkte in der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten zuordnet. Da der Begriffsverband von (\mathcal{A}, Φ, \in) dual zu dem von (Φ, \mathcal{A}, \ni) ist, erhält man eine Zeichnung des Begriffsverbands von (Φ, \mathcal{A}, \ni) , wenn man den konstruierten Stufengraphen um 180° dreht.

Die Konstruktion des Stufengraphen erfolgt schrittweise, beginnend mit den kleinsten Begriffen von $\underline{\mathcal{B}}(\mathcal{A}, \Phi, \in)$. Ausgehend von einem beliebigen S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ von (\mathcal{A}, Φ) werden die Elemente des Alphabets \mathcal{A} bezüglich ihrer linearen Ordnung auf der x-Achse angeordnet. Die Begriffe werden oberhalb des kleinsten Elements ihres Begriffsumfangs angeordnet, wobei die y-Koordinate durch den Rang (längste absteigende Kette zwischen dem Begriff und dem kleinsten Begriff) bestimmt wird. Der kleinste Begriff $(\emptyset'', \emptyset')$ erhält die Koordinaten $(0, 0)$ und wird mit allen Ecken verbunden, deren y-Koordinate 1 ist. Die Konstruktion der Kanten des Stufengraphen garantiert, daß im Inneren einer Kante keine Ecke des Graphen liegt. Die entstehenden Konflikte werden in einer Fallunterscheidung untersucht, die zeigt, daß es möglich ist, die Kanten des Graphen so zu zeichnen, daß es nicht zu Überschneidungen kommt.

Stufengraphen sind reine Hilfskonstruktionen, die hier nur in dem Beweis der Plättbarkeit von Begriffsverbänden S-darstellbarer Teilmengensysteme eingesetzt werden. Wenn man sich vor Augen führt, daß der Stufengraph aus Abbildung 4.4 eine um 180° gedrehte Zeichnung desselben Graphen ist, der der Zeichnung in Abbildung 4.1 zugrunde liegt, stellt sich die Frage, warum für den Beweis nicht ein Graph mit geraden Kanten konstruiert wird, der visuell leichter erfaßt werden kann.⁷ Das Problem gerader Kanten ist zum einen, daß sie Punkte mit ganzzahligen Koordinaten – und somit potentielle Ecken des Graphen – in ihrem Inneren enthalten können; zum anderen ist die Berechnung möglicher Schnittpunkte von geraden Kanten mühseliger, da dazu die Steigung der Kanten berücksichtigt werden muß. Insgesamt würde ein solcher Ansatz zu einer unübersichtlicheren Fallunterscheidung führen. Aufgrund

⁷Begradigt man alle gestuften Kanten aus Abbildung 4.4 erhält man ebenfalls eine ebene Zeichnung des Graphen.

dieser Überlegungen habe ich mich entschieden, aufwendiger konstruierte Stufengraphen einzusetzen, die eine einfachere Fallunterscheidung ermöglichen.

Beweis des Satzes 4.2.5:

Im folgenden sei (\mathcal{A}, Φ) ein S-darstellbares Teilmengensystem. Da (\mathcal{A}, Φ) S-darstellbar ist, gibt es ein S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ von (\mathcal{A}, Φ) .

In diesem Beweis wird ein Hassediagramm $((V, E), \tau)$ zur partiell geordneten Menge $(\mathcal{H}(\Phi), \subseteq)$ konstruiert, dessen Graph (V, E) eben ist. Aufgrund der besonderen Form der Kanten des Graphen, nennen wir diesen speziellen Graphen den *Stufengraphen* der partiell geordneten Menge. Dreht man diesen Graphen um 180° , so erhält man, wie in Satz 4.2.5 gefordert, ein ebenes Hassediagramm zur partiell geordneten Menge $(\mathcal{H}(\Phi), \supseteq)$.

Stufengraph

Im folgenden sei $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_m\}$ derart, daß aus $i < j$ folgt, daß $a_i < a_j$ bezüglich $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$. Ferner sei $\{\mathcal{S}_i(\Phi)\}_{i \in \{0, \dots, n\}}$ die Partition von $\mathcal{H}(\Phi)$ aus Lemma 4.2.2. Darüber hinaus wird in diesem Beweis angenommen, daß die leere Menge ein Element von $\mathcal{H}(\Phi)$ ist. Sollte dies nicht der Fall sein und somit $\bigcap_{\psi \in \Phi} \psi = T \neq \emptyset$ gelten, dann muß der Stufengraph für die Menge $\bar{\Phi} \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi \setminus T \mid \psi \in \Phi\}$ konstruiert werden. Es ist offensichtlich, daß für $\mathcal{H}(\bar{\Phi})$ die Aussage $\emptyset \in \mathcal{H}(\bar{\Phi})$ gültig ist und daß ein Hassediagramm von $(\mathcal{H}(\Phi), \subseteq)$ direkt aus einem Hassediagramm von $(\mathcal{H}(\bar{\Phi}), \subseteq)$ konstruiert werden kann.⁸

Die Ecken des gesuchten Stufengraphen sind Punkte im Cartesischen Koordinatensystem $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, deren Koordinaten durch folgende Abbildung festgelegt werden:

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{H}(\Phi) &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \{\} &\mapsto (0, 0) \\ \psi &\mapsto (i, j), \text{ wenn } \min \psi = a_i \text{ und } \psi \in \mathcal{S}_j(\Phi). \end{aligned}$$

Jedem Element ψ aus $\mathcal{H}(\Phi)$ wird von τ ein Punkt in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zugeordnet, dessen x -Koordinate die Position des kleinsten Elements von ψ in $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ widerspiegelt und dessen y -Koordinate durch den Rang von ψ in $(\mathcal{H}(\Phi), \supseteq)$ bestimmt wird. Die Eckenmenge V ist der Bildbereich der Abbildung τ .

⁸Der Graph der beiden Hassediagramme ist identisch, lediglich die den Ecken zugeordneten Begriffe variieren.

Als erstes muß gezeigt werden, daß die Abbildung τ die Bedingungen aus Definition B.5.6 über die Ecken eines Hassediagramms erfüllt. Da V der Bildbereich der Abbildung τ ist, ist $\tau : (\mathcal{H}(\Phi), \subseteq) \rightarrow V$ surjektiv. Weiter gilt, daß das Bild zweier verschiedener Elemente aus $\mathcal{H}(\Phi)$ unter τ verschieden ist; denn für je zwei beliebige Elemente $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_j(\Phi)$ gilt stets $\min(\varphi) \neq \min(\psi)$, da ansonsten aus der S-Darstellbarkeit von (\mathcal{A}, Φ) und dem Beweis des Lemmas 4.1.3 folgen würde, daß die eine Menge eine Teilmenge der anderen wäre, was wiederum $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_j(\Phi)$ widerspräche. Somit erfüllt τ die erste Bedingung der Definition eines Hassediagramms. Die zweite Bedingung folgt direkt aus der Definition von τ und der Definition der $\mathcal{S}_j(\Phi)$.

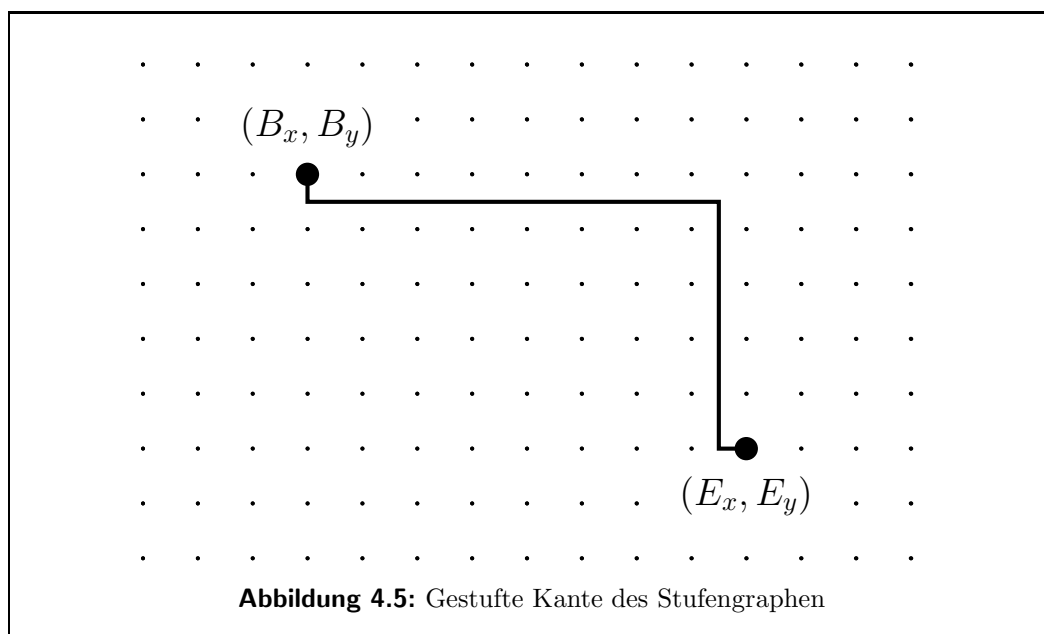
Im weiteren Verlauf des Beweises bezeichnen wir mit einem Element $\psi \in \mathcal{H}(\Phi)$ auch die zugeordnete Ecke (ψ_x, ψ_y) des Hassediagramms; also ist $\psi_x = \min_{(\mathcal{A}, <)} \psi$ und $\psi_y = t$ für $\psi \in \mathcal{S}_t(\Phi)$.

Zur Fertigstellung des Hassediagramms fehlen noch die Kanten. Sind zwei Ecken ψ und ψ' in $(\mathcal{H}(\Phi), \subseteq)$ benachbart, $\psi \prec \psi'$, dann muß es in dem zu konstruierenden Graphen eine Kante – also einen endlichen Polygonzug – geben, der die Ecken ψ und ψ' verbindet; diese Kante wird der Einfachheit halber mit $\psi \prec \psi'$ bezeichnet. Im folgenden wird gezeigt, daß es möglich ist, benachbarte Ecken so durch Kanten zu verbinden, daß im Inneren keiner dieser Kanten eine weitere Ecke oder ein Punkt einer anderen Kante liegt; der resultierende Stufengraph ist ein ebener Graph.

Die Kanten werden zunächst folgendermaßen konstruiert (siehe auch Abbildung 4.5): Seien B und E zwei benachbarte Ecken $E \prec B$ in $(\mathcal{H}(\Phi), \subseteq)$, dann gilt $E \subset B$ und somit $E_y < B_y$. Wenn E die leere Menge ist, dann werden die Ecken E und B durch eine Strecke verbunden. Wenn $E \neq \emptyset$ und $B_x < E_x$ gilt, dann werden die Ecken B und E durch den Polygonzug

$$(B_x, B_y), (B_x, B_y - \frac{1}{2}), (E_x - \frac{1}{2}, B_y - \frac{1}{2}), (E_x - \frac{1}{2}, E_y), (E_x, E_y)$$

verbunden. Ist hingegen $B_x = E_x$, dann werden die Ecken B und E wiederum durch eine Strecke verbunden. Der Fall $B_x > E_x$ tritt nicht auf, da $E \subset B$ gilt. Die beschriebene Kantenkonstruktion gewährleistet, daß im Falle von $B_x < E_x$ im Inneren der Kante $E \prec B$ keine Ecke des Graphen liegen kann, da Ecken im Stufengraphen immer ganzzahlige Koordinaten haben.



Auf folgende offensichtliche Aussagen wird im weiteren Verlauf des Beweises häufig Bezug genommen:

- i. Wenn $E \subset B$ (also insbesondere wenn $E \prec B$), dann gilt $E_y < B_y$.
- ii. Wenn $E \subset B$ (also insbesondere wenn $E \prec B$), dann gilt $E_x \geq B_x$.
- iii. Wenn $B \cap D = C \neq \emptyset$, dann gilt $\min C = \max\{\min B, \min D\}$ und $\max C = \min\{\max B, \max D\}$ (siehe Beweis von Lemma 4.1.3).
- iv. $E \subseteq B$ gilt genau dann, wenn $\min E \geq \min B$ und $\max E \leq \max B$.
- v. Wenn $E_x = B_x$ und $E_y < B_y$, dann gilt $E \subset B$.

Es bleibt zu zeigen, daß die Konstruktion des Stufengraphen gewährleistet, daß der Graph des Hassediagramms eben ist oder sich durch geringfügige Verformungen in einen ebenen Graphen umwandeln läßt. Dazu muß zunächst geklärt werden, was unter einer geringfügigen Verformung zu verstehen ist:

Zwei Kanten $E \prec B$ und $C \prec D$ liegen genau dann miteinander im *Konflikt*, wenn ihre Schnittmenge nicht leer ist. Ein solcher Konflikt ist ein *scheinbarer*

Konflikt

scheinbarer Konflikt

geringfügig

echter Konflikt

Konflikt, wenn es möglich ist, eine leere Schnittmenge zu erhalten, indem man den einen Polygonzug geringfügig verformt. Wir nennen eine Verformung *geringfügig*, wenn die Endpunkte der Kanten unverändert bleiben und kein Punkt der verformten Kante von der ursprünglichen Kante einen Abstand größer als $\frac{1}{4}$ hat. Ein Konflikt ist ein *echter Konflikt*, wenn er nicht scheinbar ist. Es ergibt sich folgender wichtiger Zusammenhang:

- vi. Wenn zwei Kanten $E \prec B$ und $C \prec D$ des Stufengraphen miteinander in einem echten Konflikt stehen, dann sind die vier Mengen E, B, C, D paarweise verschieden.

Als nächstes wird mit einem Widerspruchsbeweis nachgewiesen, daß jeder Konflikt zweier Kanten $E \prec B, C \prec D$ des Stufengraphen ein scheinbarer Konflikt ist. Aufgrund der Kantendefinitionen kann keine der Kanten der Form $\emptyset \prec A$ an einem Konflikt beteiligt sein. Es bleiben somit zwei grundlegend verschiedene Situationen, in denen ein Konflikt zwischen zwei Kanten $E \prec B$ und $C \prec D$ bestehen kann: entweder gilt $B_x < E_x$, so daß die Kante $E \prec B$ ein aus vier Strecken gebildeter Polygonzug ist, oder aber es gilt $B_x = E_x$, und die Kante $E \prec B$ besteht aus einer einfachen Strecke. In der folgenden Fallunterscheidung werden diese beiden Fälle untersucht:

1. Fall ($B_x < E_x$):

Gilt $B_x < E_x$, dann ist die Schnittmenge der Kanten $E \prec B$ und $C \prec D$ genau dann nicht leer, wenn die Kanten entweder (a) genau einen gemeinsamen Punkt haben oder ihre Schnittmenge eine Teilstrecke einer der (b) horizontalen bzw. einer der (c) vertikalen Strecken von $E \prec B$ enthält. Diese drei Fälle müssen nun im einzelnen untersucht werden:

zu (a) (Die Kanten $E \prec B$ und $C \prec D$ haben genau einen gemeinsamen Punkt:)

In Abbildung 4.6 sind die möglichen Situationen skizziert, in denen die Kanten $E \prec B$ und $C \prec D$ genau einen Schnittpunkt haben: Der gemeinsame Punkt ist entweder der Punkt E (vgl. Abbildung 4.6: δ) oder er liegt auf dem längeren horizontalen Teilstück (vgl. Abbildung 4.6: β, γ) oder dem längeren vertikalen Teilstück der Kante $E \prec B$ (vgl. Abbildung 4.6: β).

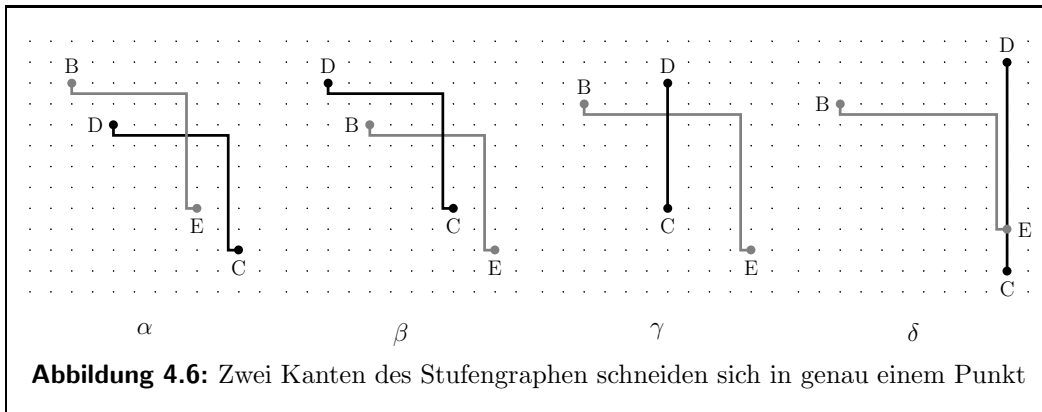


Abbildung 4.6: Zwei Kanten des Stufengraphen schneiden sich in genau einem Punkt

Wenn E der einzige gemeinsame Punkt der Kanten $E \prec B$ und $C \prec D$ ist (Abbildung 4.6:δ), dann gilt $C_x = E_x = D_x$ und $C_y < E_y < D_y$. Dann folgt aber wegen Aussage (v), daß $C \subset E \subset D$ gilt, was der Annahme $C \prec D$ widerspricht. Somit kann eine Situation wie in Abbildung 4.6:δ in einem Stufengraphen eines S-darstellbaren Teilmengensystems nicht auftreten.

Im folgenden müssen daher nur noch die Fälle α , β und γ aus Abbildung 4.6 untersucht werden. Vertauscht man die Kanten $E \prec B$ und $C \prec D$, so wird der Fall α zum Fall β . Somit sind die Fälle α und β symmetrisch. Im folgenden gelte daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit $D_y \geq B_y$. Dann muß $B_y > C_y$ gelten, da sonst die Kante $C \prec D$ vollständig oberhalb der Kante $E \prec B$ liegen würde und es somit keinen Konflikt gäbe. Da aus Aussage (ii) $D_x \leq C_x$ folgt, muß $B_x < C_x$ gelten, da ansonsten die Kante $C \prec D$ vollständig links von $E \prec B$ liegen würde. Wegen der besonderen Konstruktion der Kanten kommt es außerdem zu keinem Konflikt, wenn $E_x < C_x$ gilt. Falls $E_x = C_x$ gilt, so liegt entweder die Situation aus Abbildung 4.6:δ vor, die, wie oben gezeigt, in keinem Stufengraphen eines S-darstellbaren Teilmengensystems auftreten kann, oder aber die beiden Kanten teilen sich keinen oder mehrere Punkte. Somit wird im folgenden $C_x < E_x$ angenommen.

Aus den bisherigen Überlegungen und den Aussagen (i)–(vi) ergibt sich: $D_y \geq B_y > C_y$ und $B_x < C_x < E_x$ (bzw. $\min B < \min C < \min E$) und $D_x \leq C_x$ (bzw. $\min D \leq \min C$) und $\max E \leq \max B$. Über das Verhältnis von $\max C$ zu $\max E$ müssen weitere Überlegungen angestellt werden:

1. Angenommen, es gilt $\max C < \max E$:

Wegen $\min B < \min C \leq \max C < \max E \leq \max B$ gilt $C \subset B$; somit ist $C \subseteq (D \cap B)$. Wegen $D_y \geq B_y$ und der Verschiedenheit der vier Mengen B, C, D und E (Aussage (v)) gilt $D \not\subseteq B$. Somit ist $D \cap B$ eine echte Teilmenge von D .

Wenn $D \cap B$ eine echte Teilmenge von D ist und wenn C einerseits eine Teilmenge von $D \cap B$ und andererseits ein unterer Nachbar von D ist, dann kann C keine echte Teilmenge von $D \cap B$ sein (vgl. Definition 4.2.1 und Lemma 4.2.2); also gilt $C = B \cap D$. Wir können somit Aussage (iii) auf die Mengen B, C und D anwenden: $\max C = \min\{\max B, \max D\}$ und $\min C = \max\{\min B, \min D\} = \min D$ (wegen $\min B < \min C$). Es folgt, daß $\min D > \min B$ gilt.

Damit D keine Teilmenge von B ist, muß nach Aussage (iv) $\max D > \max B$ gelten. Es folgt $\max C = \min\{\max B, \max D\} = \max B$; dies widerspricht aber der Aussage $\max C < \max E \leq \max B$. Dies zeigt, daß die Annahme $\max C < \max E$ zu einem Widerspruch führt.

2. Angenommen, es gilt $\max C \geq \max E$:

Wegen $\min C < \min E \leq \max E \leq \max C$ gilt $E \subset C$. Somit folgt $E \subseteq (B \cap C)$ aus $E \prec B$. Wie zuvor widerspräche $E \subset (B \cap C)$ der Annahme $E \prec B$, also ist $E = (B \cap C)$. Dies aber widerspricht Aussage (iii) und $\min E > \max\{\min B, \min C\}$.

Mit der Untersuchung dieser beiden Fälle ist die Annahme widerlegt, daß die Konstruktion des Stufengraphen zu Konflikten führen kann, bei denen sich zwei Kanten in genau einem Punkt schneiden.

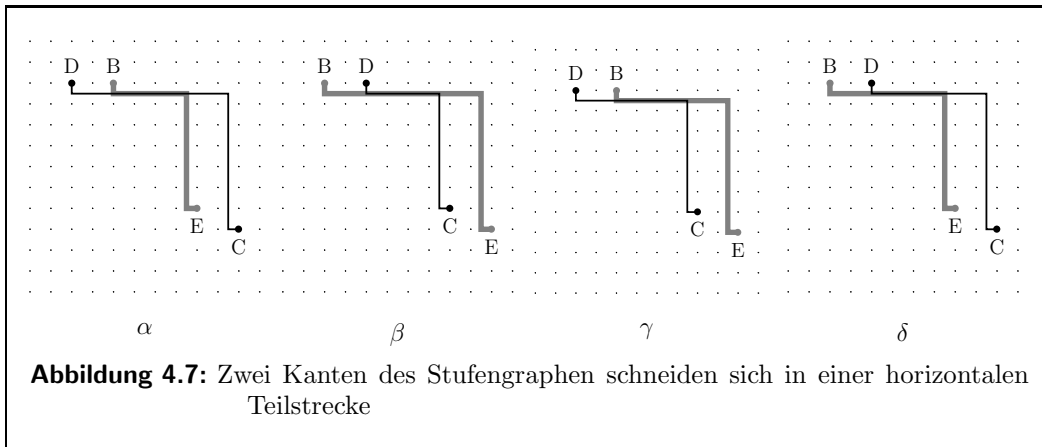


Abbildung 4.7: Zwei Kanten des Stufengraphen schneiden sich in einer horizontalen Teilstrecke

zu (b) (Die Kanten $E \prec B$ und $C \prec D$ schneiden sich in einer horizontalen Teilstrecke:)

Abbildung 4.7 zeigt die Situationen, in denen ein Teil einer horizontalen Teilstrecke von $E \prec B$ auch zur Kante $C \prec D$ gehört. Offensichtlich tritt ein solcher Fall nur dann auf, wenn $B_y = D_y$ gilt. Die Fälle γ und δ aus der Abbildung 4.7 sind symmetrisch zueinander und führen beide nur zu einem scheinbaren Konflikt, der, wie in Abbildung 4.8 angedeutet, aufgelöst werden kann, indem man das längere horizontale Teilstück der weiter rechts beginnenden Kante um $\frac{1}{4}$ anhebt und die vertikalen Teilstücke entsprechend anpaßt.

Da auch die Fälle α und β der Abbildung 4.7 symmetrisch zueinander sind, wird im folgenden angenommen, daß $B_x < D_x$ (bzw. $\min B < \min D$) und $C_x \leq E_x$ (bzw. $\min C \leq \min E$) gilt. Desweiteren muß sowohl $B_x < E_x$ (bzw. $\min B < \min E$) als auch $D_x < C_x$ (bzw. $\min D < \min C$) gelten, da sich zwei Kanten eines Stufengraphen nur dann in horizontalen Teilstrecken schneiden können, wenn beide Kanten aus einem vierteiligen Polygonzug aufgebaut sind.

Aus $B_y = D_y$ folgt $D \not\prec B$. Somit ergibt sich aus $\min B < \min D$ und Aussage (iv), daß $\max B < \max D$ gilt. Wegen $\min B < \min D < \min C \leq \min E \leq \max E \leq \max B < \max D$ folgt

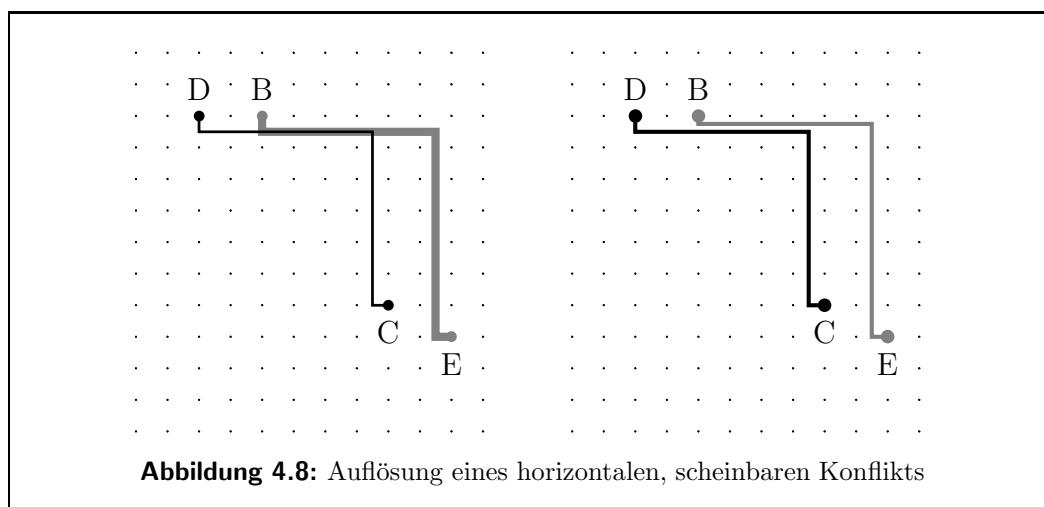


Abbildung 4.8: Auflösung eines horizontalen, scheinbaren Konflikts

ferner, daß E eine echte Teilmenge von D sein muß. Da E wegen $E \prec B$ auch eine Teilmenge von B ist, gilt somit $E \subseteq D \cap B$. Weiter folgt aus $E \prec B$ und $B_y = D_y$, daß E keine echte Teilmenge von $D \cap B$ sein kann und somit $E = D \cap B$ gilt. Aussage (iii) erzwingt $\max E = \max B (= \min\{\max B, \max D\})$ und $\min E = \min D (= \max\{\min B, \min D\})$. Aus $\min E = \min D$ und $\min D < \min C$ folgt aber auch $\min E < \min C$, was der Annahme $\min C \leq \min E$ widerspricht.

zu (c) (Die Kanten $E \prec B$ und $C \prec D$ schneiden sich in einer vertikalen Teilstrecke:)

Abbildung 4.9 zeigt die verschiedenen Situationen, in denen sich zwei Kanten einen Teil einer vertikalen Teilstrecke teilen. Der Fall ϵ aus Abbildung 4.9 ist ähnlich zu dem Fall δ aus Abbildung 4.6. Auch hier liegt ein Endpunkt einer der beiden Kanten im Inneren der anderen Kante. Es gilt $C_x = B_x = D_x$ und $C_y < B_y < D_y$. Daraus folgt aber wegen Aussage (v), daß $C \subset B \subset D$ gilt, was der Annahme $C \prec D$ widerspricht. Folglich kann eine Situation wie in ϵ nicht in einem Stufengraphen eines S-darstellbaren Teilmengensystems auftreten.

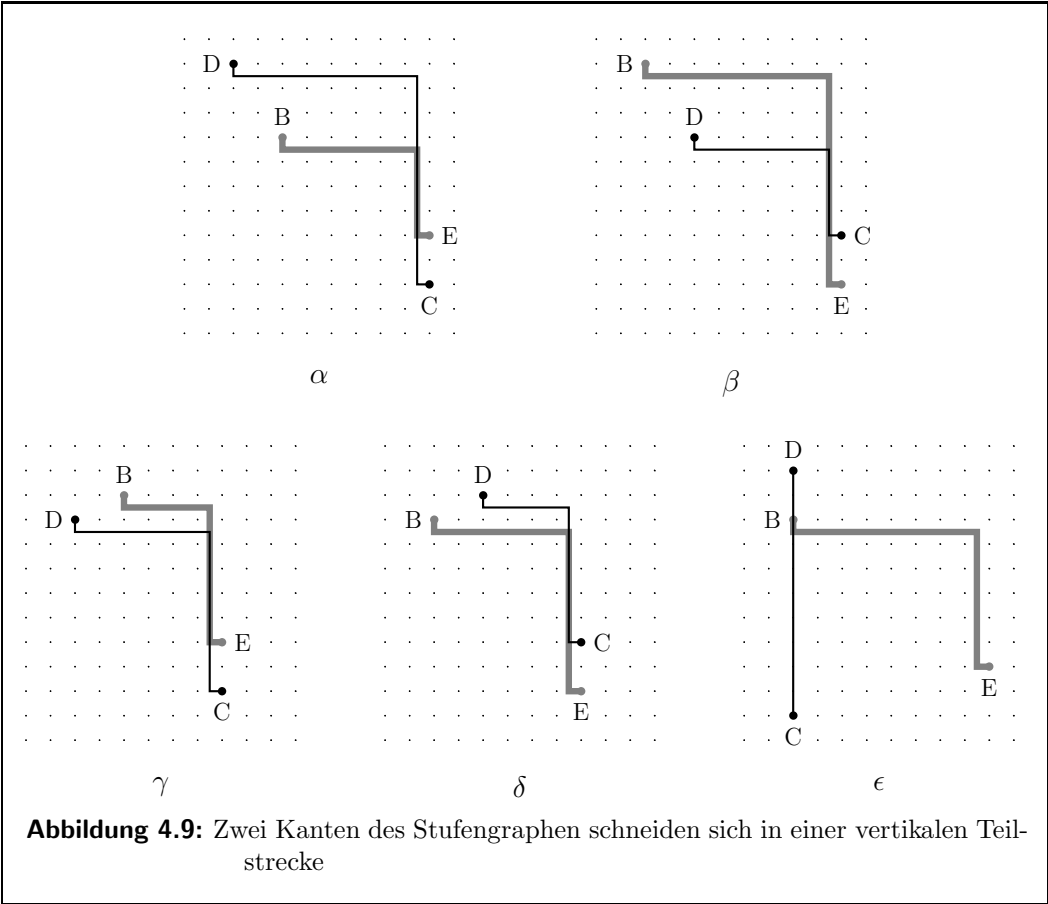


Abbildung 4.9: Zwei Kanten des Stufengraphen schneiden sich in einer vertikalen Teilstrecke

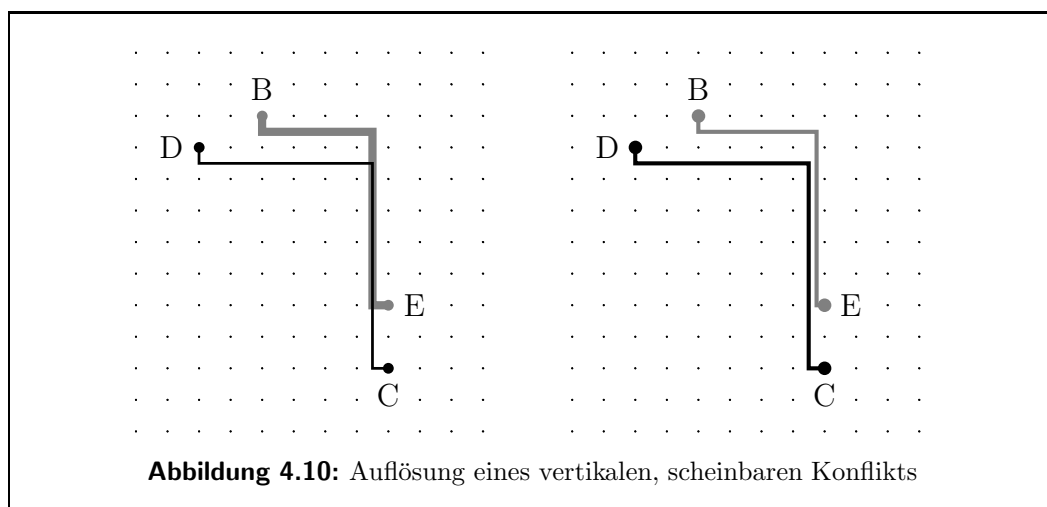
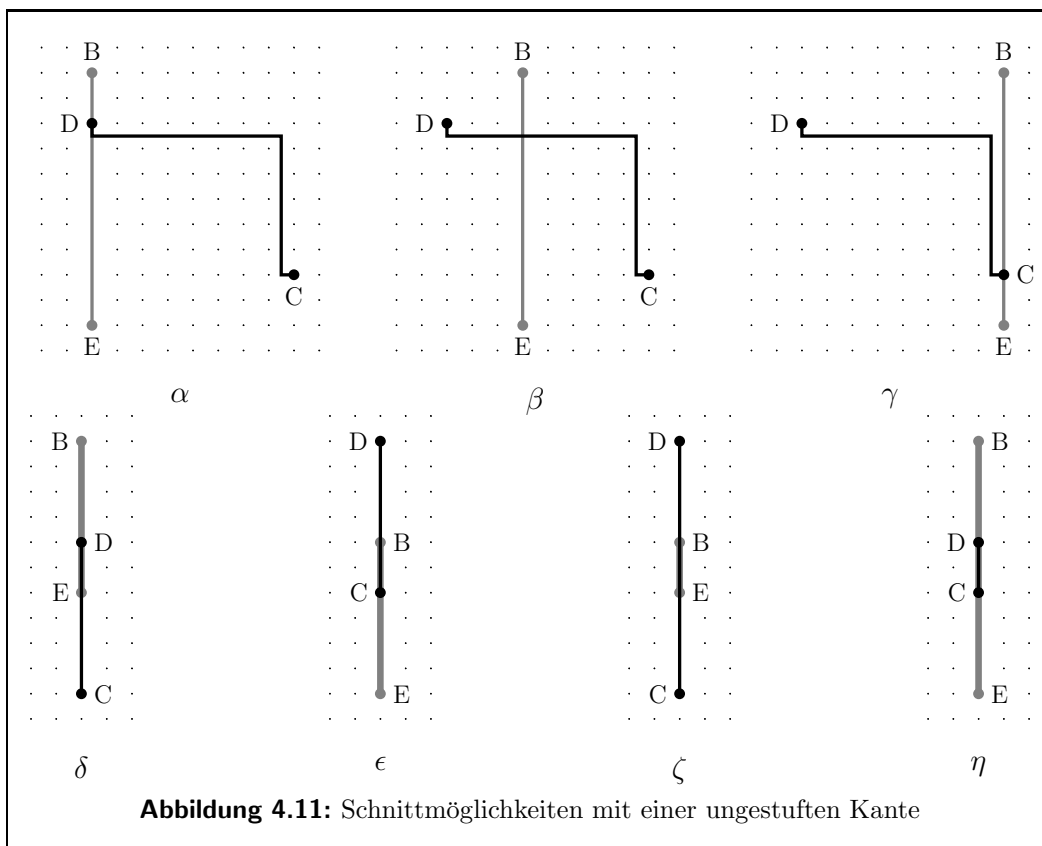


Abbildung 4.10: Auflösung eines vertikalen, scheinbaren Konflikts

Sowohl die beiden Fälle α und β als auch die beiden Fälle γ und δ aus Abbildung 4.9 sind symmetrisch zueinander. Alle vier Fälle zeichnen sich dadurch aus, daß das gemeinsame Teilstück der beiden Kanten ein Teil der jeweils längeren vertikalen Strecke der Polygonzüge ist; dazu muß $C_x = E_x$ gelten.

In Situationen wie in γ und δ ist der auftretende Konflikt nur ein scheinbarer, der aufgelöst werden kann, indem das längere vertikale Teilstück der Kante $E \prec B$ um $\frac{1}{4}$ nach rechts verschoben wird und die horizontalen Teilstücke entsprechend angepaßt werden (vgl. Abbildung 4.10).

Es müssen noch die Situationen α und β untersucht werden. Es gelte im folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit $D_y \geq B_y$ und $C_y < E_y$ (Abbildung 4.9 α). Wegen $C_x = E_x$ (bzw. $\min C = \min E$) und Aussage (iv) gilt entweder $C \subseteq E$ oder $E \subseteq C$. Aus $C_y < E_y$ folgt desweiteren $C \subset E$. Wegen $E \subset B$ und $C \subset D$ gilt $C \subseteq (B \cap D)$. Diese Aussage kann wegen $C \prec D$, $D_y \geq B_y$ und $D \neq B$ zu $C = B \cap D$ verschärft werden. Aus $C \subset E \subset B$ und $\min C = \min E$ folgt wegen der Verschiedenheit von C und E , daß $\max C < \max E \leq \max B$ gilt. Also muß $\max C < \max B$ gelten, was $\max C = \max D (= \min\{\max B, \max D\})$ impliziert. Um die Verschiedenheit von C



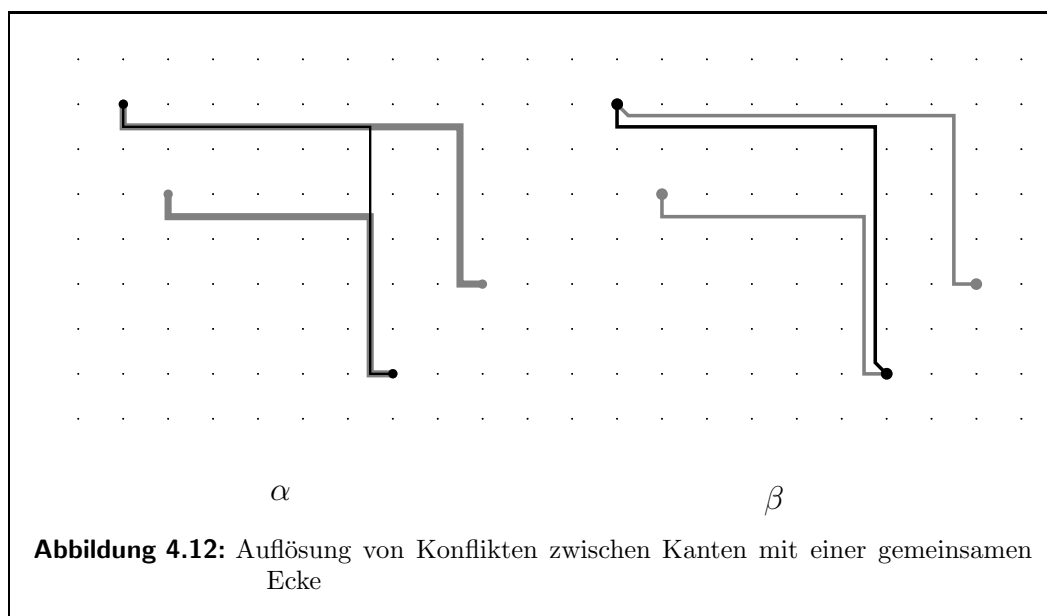
und D zu gewährleisten, folgt notwendigerweise $\min C = \min B$ ($= \max\{\min B, \min D\}$). Dies widerspricht allerdings der Annahme $C_x = E_x$ (bzw. $\min C = \min E$), da $E_x < B_x$ und somit auch $\min E < \min B$ gelten muß.

In dieser Fallunterscheidung wurde bislang gezeigt, daß eine Kante $E \prec B$ mit $B_x < E_x$ nicht mit einer anderen Kante in einem echten Konflikt stehen kann.

Zum Abschluß wird nun noch der Fall $B_x = E_x$ untersucht:

2.Fall ($B_x = E_x$):

Wenn für die Endpunkte einer Kante $E \prec B$ eines Stufengraphen $B_x = E_x$ gilt, dann besteht diese Kante per Definition aus einer einzigen



vertikalen Strecke. Abbildung 4.11 zeigt die verschiedenen Situationen, in denen eine aus einer vertikalen Strecke bestehende Kante eine andere Kante des Stufengraphen schneiden kann.

Die Situation α aus Abbildung 4.11 ist symmetrisch zur bereits diskutierten Situation ϵ aus Abbildung 4.9. Auch die Situationen β aus Abbildung 4.11 und γ aus Abbildung 4.6 sind zueinander symmetrisch. Schließlich entspricht die Situation γ aus Abbildung 4.11 der Situation δ aus Abbildung 4.6.

Die übrigen vier Fälle aus Abbildung 4.11 zeichnen sich alle dadurch aus, daß $E_x = B_x = C_x = D_x$ gilt und daß wenigstens eine Endecke einer der Kanten im Inneren der anderen Kante liegt. Es gelte daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit $C_y < E_y < D_y$. Dann muß aber wegen Aussage (v) $C \subset E \subset D$ gelten, was der Annahme $C \prec D$ widerspricht. Somit kann keine der Situationen δ , ϵ , ζ und η aus Abbildung 4.11 in einem Stufengraphen eines S-darstellbaren Teilmengensystems entstehen.

Die Fallunterscheidung hat gezeigt, daß bei der angegebenen Konstruktion des Stufengraphen eines S-darstellbaren Teilmengensystems keine echten Konflikte zwischen Kanten, die keine gemeinsame Ecke haben, entstehen. Haben zwei Kanten eine gemeinsame Ecke wie in Abbildung 4.12, dann können mögliche Konflikte wiederum – entweder durch Anhebung eines der längeren horizontalen Teilstücke oder Verschiebung eines der längeren vertikalen Teilstücke nach rechts – aufgelöst werden. Zusätzlich muß eines der kurzen Teilstücke an der gemeinsamen Ecke, wie in Abbildung 4.12 angedeutet, gekippt werden. Das Beispiel aus Abbildung 4.4 zeigt, wie durch eine vergleichbare Verformungen auch Konflikte von drei und mehr Kanten aufgelöst werden können.

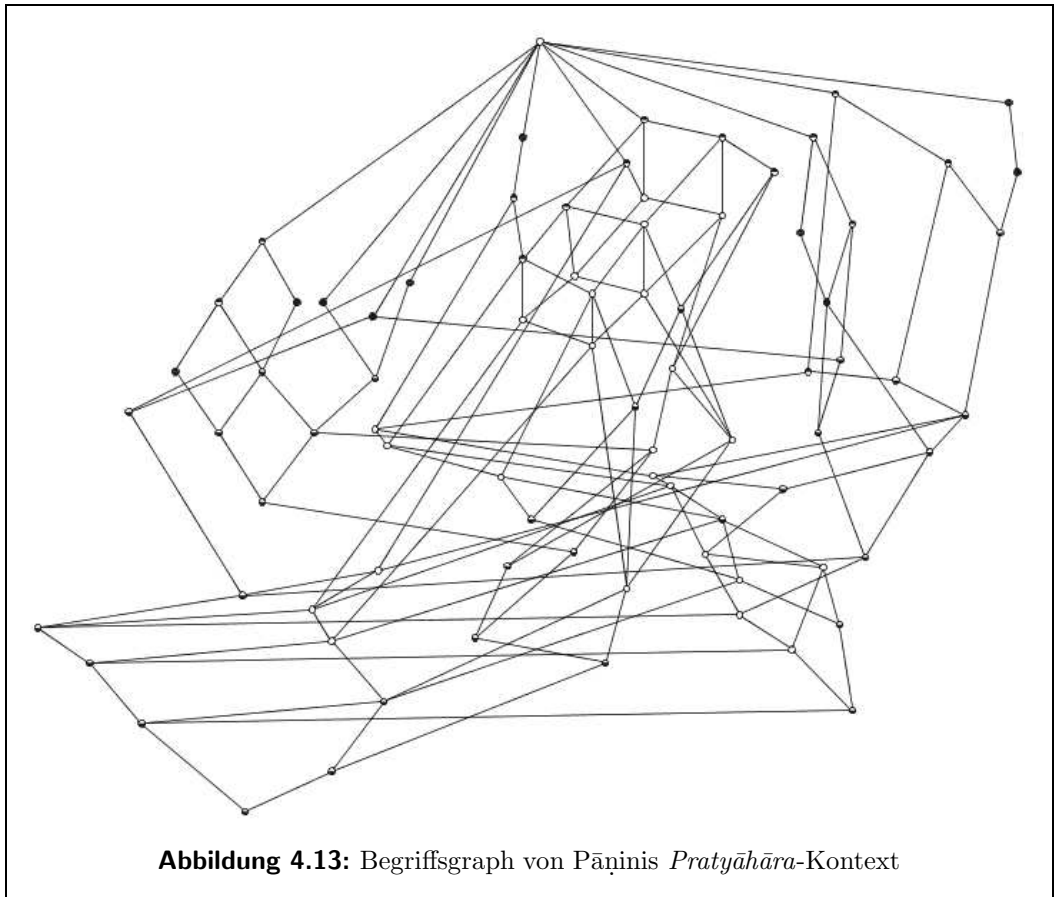
Da der Stufengraph eine Zeichnung des Hassediagramms der Menge $(\mathcal{H}(\Phi), \subseteq)$ ist, erhält man eine Zeichnung des Hassediagramms der Menge $(\mathcal{H}(\Phi), \supseteq)$, wenn man den Stufengraphen um 180° dreht. Aus Lemma 4.2.4 folgt, daß der um 180° gedrehte Stufengraph auch eine Zeichnung des Begriffsverbands des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes ist. Da gezeigt worden ist, daß jeder Stufengraph eines S-darstellbaren Teilmengensystems (\mathcal{A}, Φ) durch geringfügige Verformungen in einen ebenen Graphen umgewandelt werden kann, folgt aus der S-Darstellbarkeit eines Teilmengensystems (\mathcal{A}, Φ) , daß der Begriffsverband des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes und das Hassediagramm der Menge $(\mathcal{H}(\Phi), \supseteq)$ plättbar ist. \square

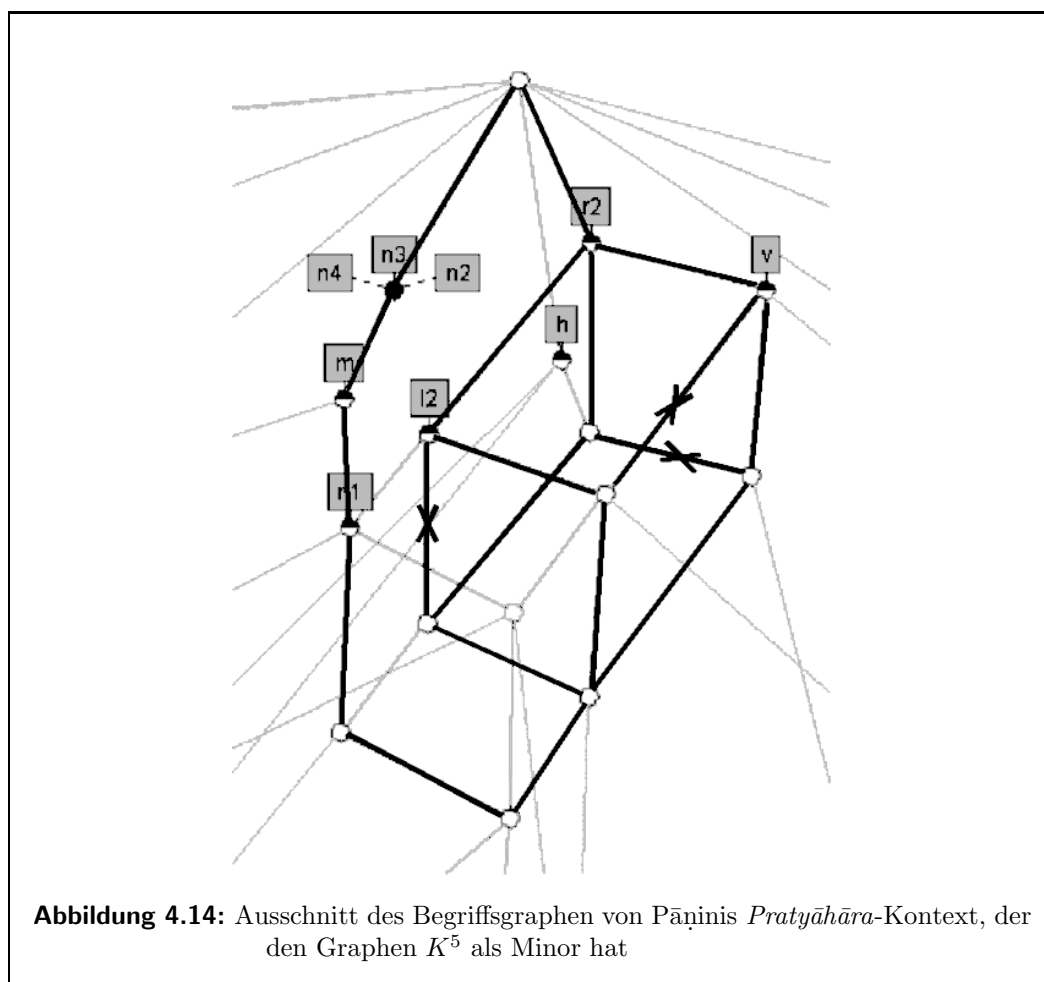
Aus dem Satz 4.2.5 läßt sich direkt folgendes Korollar ableiten, das besagt, daß die Plättbarkeit des Begriffsverbands des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes ein notwendiges Kriterium für die S-Darstellbarkeit von (\mathcal{A}, Φ) ist.

Korollar 4.2.6 *Ist der Begriffsverband eines (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes kein plättbarer Graph, dann ist (\mathcal{A}, Φ) nicht S-darstellbar.*

S-Darstellbarkeit von Pāṇinis Pratyāhāra-Kontext

Mithilfe des Korollars 4.2.6 läßt sich eine Antwort auf die Frage, ob Pāṇini gezwungen war, eines der Lautelemente in den *Śivasūtras* zu verdoppeln, geben und somit die erste Entscheidungsfrage des Flußdiagramms aus Abbildung 3.3 auf Seite 59 beantworten. Abbildung 4.13 zeigt den Begriffsgraphen zu Pāṇinis *Pratyāhāra*-Kontext. Ein Graph ist plättbar, wenn es möglich ist, eine ebene Zeichnung von ihm anzufertigen, in der kein Punkt einer Kante im





Inneren einer anderen Kante liegt. Es ist offensichtlich, daß Abbildung 4.13 keine ebene Zeichnung des Begriffsverbands zeigt; damit ist jedoch noch nichts über die prinzipielle Unmöglichkeit der Anfertigung einer ebenen Zeichnung ausgesagt. Der Satz von Kuratowski B.4.18 liefert ein Ausschlußkriterium für die Klasse der plättbaren Graphen: ist der vollständige Graph K^5 ein Minor (vgl. Definition B.4.10) eines Graphen, dann ist der Graph nicht plättbar. Mit diesem Kriterium läßt sich die folgende Aussage beweisen:

Satz 4.2.7 *Die Denotationen der Pratyāhāras, die Pāṇini in den Aṣṭādhyāyī verwendet, sind nicht S-darstellbar.*

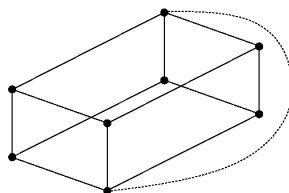


Abbildung 4.15: Teilgraph des Begriffsgraphen von Pāṇinis *Pratyāhāra*-Kontext, der den Graphen K^5 als Minor hat

Beweis: Die Aussage wird bewiesen, indem zunächst nachgewiesen wird, daß der Graph K^5 ein Minor des Begriffsgraphen von Pāṇinis *Pratyāhāra*-Kontext ist. Ein Graph \tilde{G} ist ein Minor eines Graphen G , wenn es gelingt, den Graphen \tilde{G} aus dem Graphen G zu gewinnen, indem man zunächst einige der Ecken und Kanten von G wegläßt und anschließend einige der verbleibenden Kanten kontrahiert.

Abbildung 4.14 zeigt einen Ausschnitt des Begriffsgraphen des *Pratyāhāra*-Kontextes. Läßt man alle nicht hervorgehobenen Kanten und Ecken weg und kontrahiert anschließend 6 der 7 Kanten, die nicht Teil des *Würfels* sind, dann erhält man den Graphen aus Abbildung 4.15, der die Form eines Würfelgerüsts mit Diagonale hat. Die Sequenz der Abbildungen 4.16(a)-4.16(d) zeigt, wie der Graph K^5 aus dem Graphen ‚*Würfel mit Diagonale*‘ durch Kantenkontraktionen gewonnen werden kann: von Bild zu Bild wird dazu die durch einen Kreis markierte Kante kontrahiert. Nach drei Kontraktionen erhält man schließlich den Graphen K^5 in Abbildung 4.16(d).

Somit ist K^5 ein Minor des Begriffsgraphen des *Pratyāhāra*-Kontextes, und aufgrund des Satzes von Kuratowski B.4.18 ist dieser Begriffsgraph nicht plättbar. Aus Korollar 4.2.6 ergibt sich schließlich, daß der Graph nicht der Begriffsgraph eines S-darstellbaren Teilmengensystems sein kann. \square

Satz 4.2.7 besagt, daß Pāṇini keine Möglichkeit hatte, die *Śivasūtras* so zu konstruieren, daß keines der Lautelemente doppelt vorkommt. In Pāṇinis *Śivasūtras* erscheint ein einziges Lautelement zweifach, somit ist die Zahl der Verdopplungen minimal gewählt. Es bleibt zu untersuchen, ob mit der von Pā-

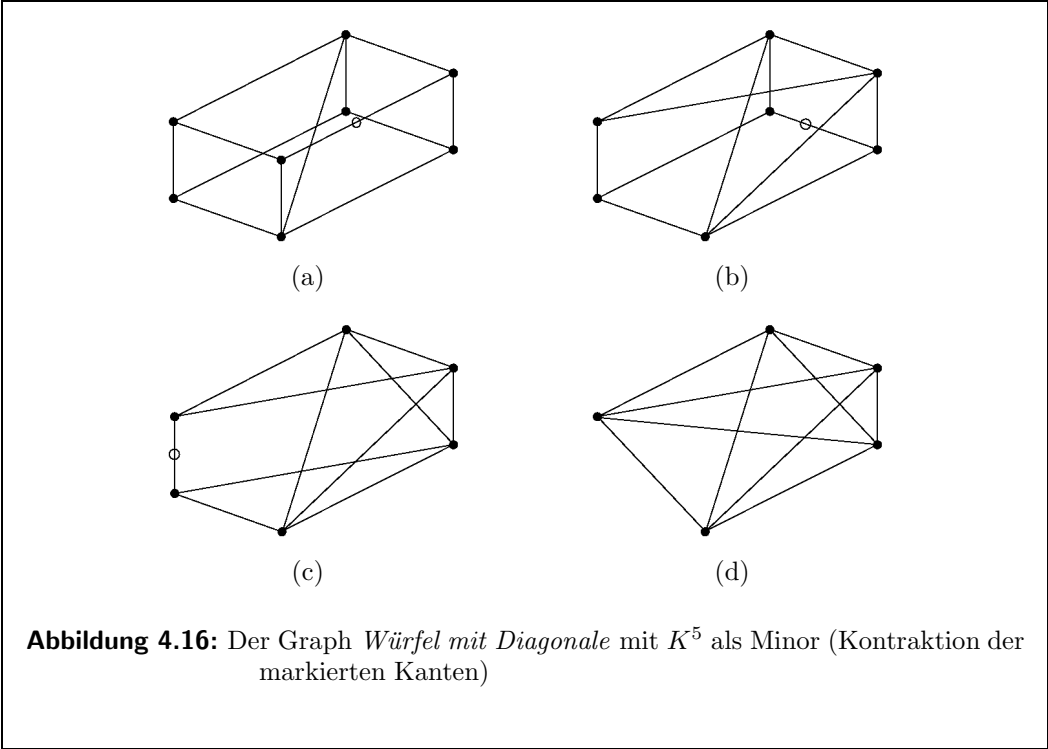


Abbildung 4.16: Der Graph *Würfel mit Diagonale* mit K^5 als Minor (Kontraktion der markierten Kanten)

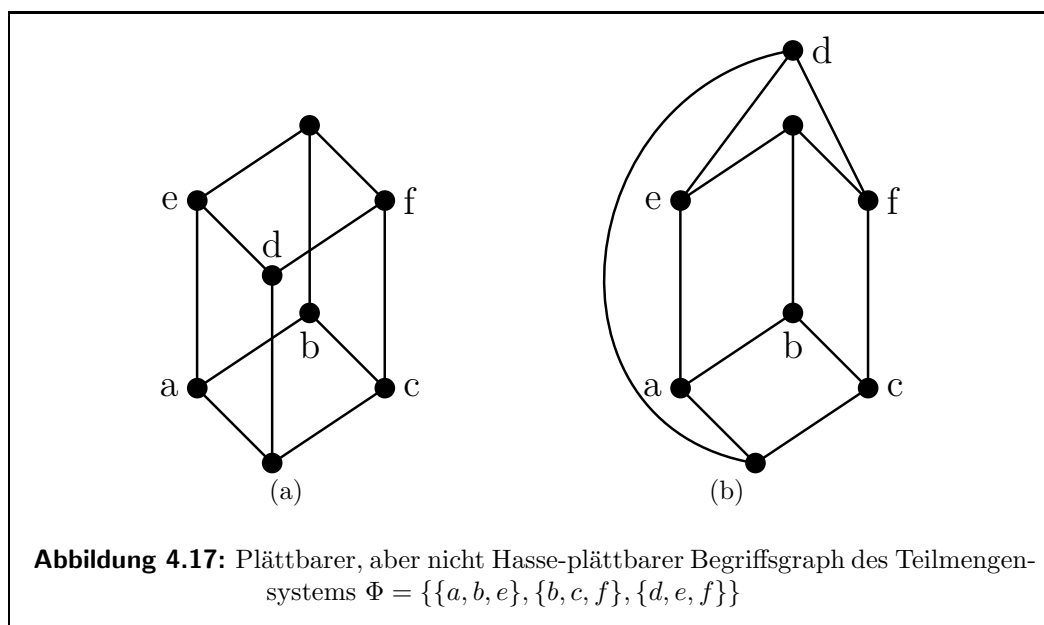


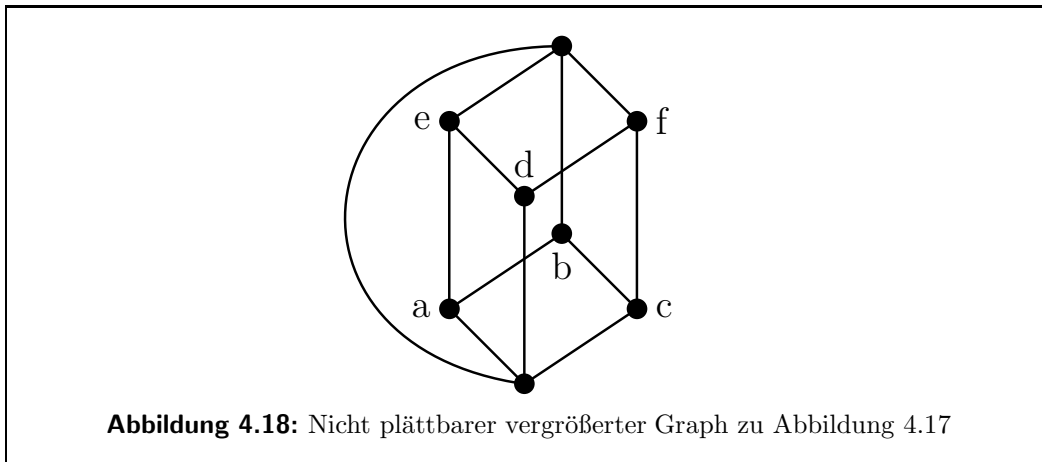
Abbildung 4.17: Plättbarer, aber nicht Hasse-plättbarer Begriffsgraph des Teilmengensystems $\Phi = \{\{a, b, e\}, \{b, c, f\}, \{d, e, f\}\}$

nini gewählten Verdopplung des Elements h auch die Zahl der Marker minimal ist. Diese Untersuchung wird jedoch erst Gegenstand des Kapitels 6 sein.

Verschärfung des Plättbarkeitskriteriums

Ziel dieser Arbeit ist es, nicht nur die Frage nach der Minimalität von Pāṇinis *Śivasūtras* zu klären, sondern auch das Problem der S-Darstellbarkeit von Teilmengensystemen allgemein zu lösen. Daher wird zunächst untersucht, ob der Satz 4.2.5 umkehrbar ist, und somit die Plättbarkeit von Begriffsgraphen von (\mathcal{A}, Φ) -Kontexten eine hinreichende Bedingung für die S-Darstellbarkeit von Teilmengensystemen ist.

Abbildung 4.17(a) zeigt den Begriffsgraphen zu dem Teilmengensystem mit $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f\}$ und $\Phi = \{\{a, b, e\}, \{b, c, f\}, \{d, e, f\}\}$. Dieses Teilmengensystem ist nicht S-darstellbar, da die drei Mengen aus Φ die Bedingungen der Mengen T_1 , T_2 und T_3 aus Lemma 4.1.2 erfüllen. Abbildung 4.17(b) zeigt jedoch, daß der Begriffsgraph zu diesem Teilmengensystem ein plättbarer Graph ist. Allerdings ist der ebene Graph in Abbildung 4.17(b) kein Hassediagramm des Begriffsverbands, da in ihm der mit d bezeichnete Knoten oberhalb des Knoten des größten Begriffs liegt.

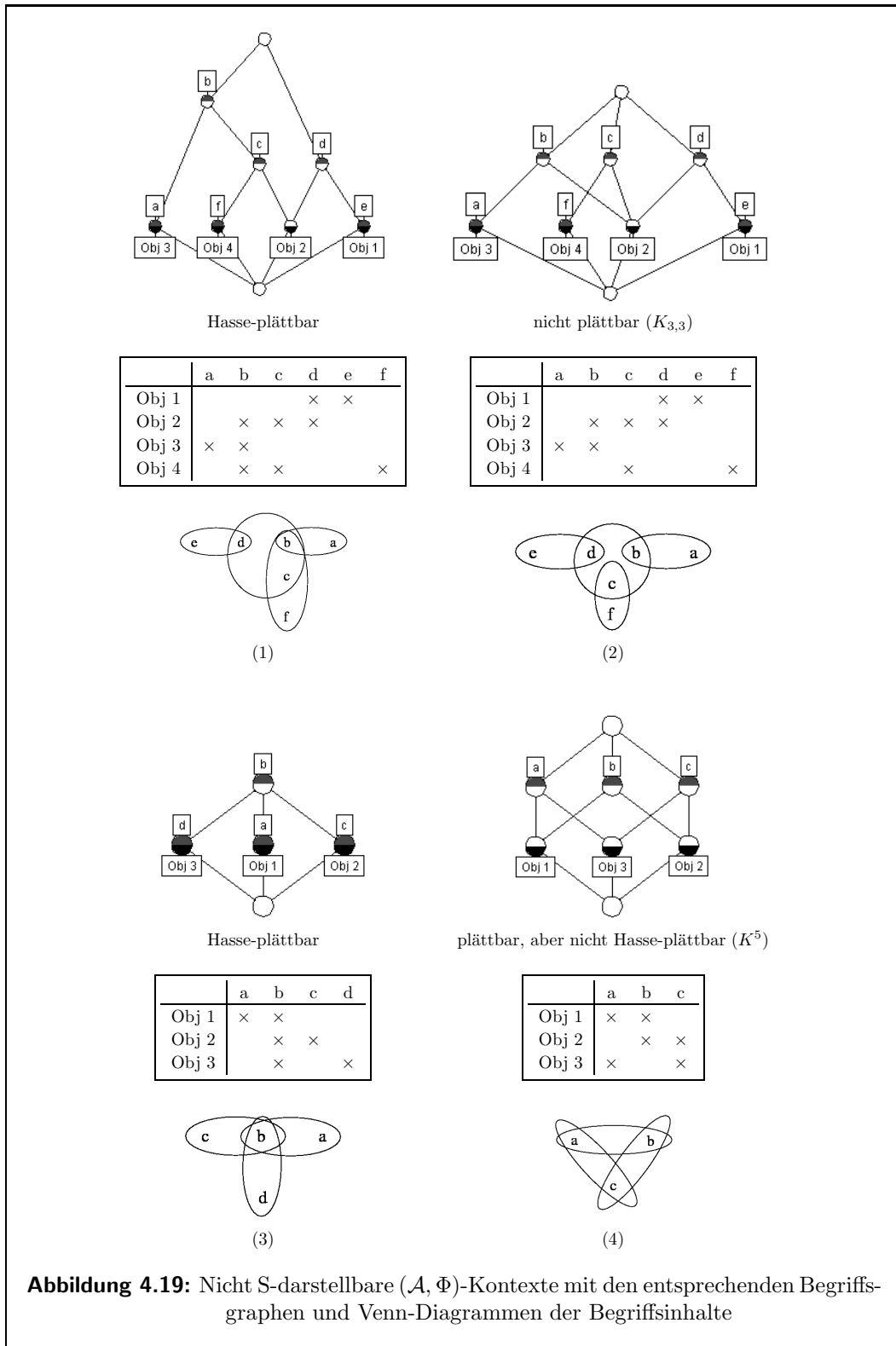


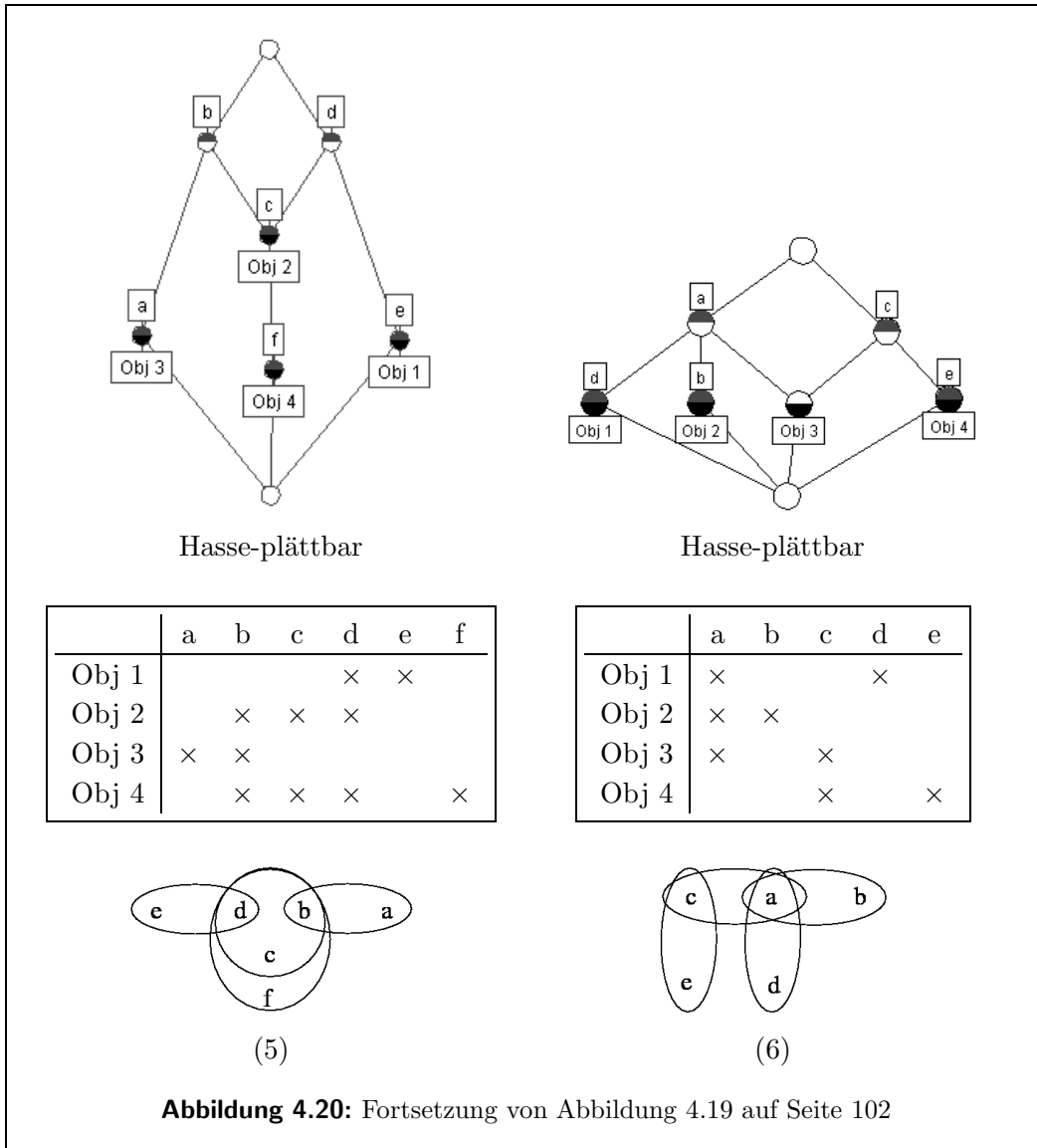
Der Satz von Platt B.6.8 besagt, daß ein Verband eben bzw. Hasse-plättbar ist, wenn der um die zusätzliche $0_V 1_V$ -Kante erweiterte Graph des Verbands plättbar ist. Das Einfügen einer zusätzlichen Kante vom kleinsten zum größten Begriff des Begriffsverbands aus Abbildung 4.17(a) verhindert die Plättbarkeit des Begriffsgraphen (vgl. Abbildung 4.18). Es entsteht wieder der Graph ‚Würfel mit Diagonale‘, der, wie Abbildung 4.16 zeigt, nicht plättbar ist.

Da die Definition des Stufengraphen garantiert, daß er die Bedingungen eines Hassediagramms erfüllt, kann Satz 4.2.5 verschärft werden:

Satz 4.2.8 (Verschärfung von Satz 4.2.5) *Wenn ein Teilmengensystem (\mathcal{A}, Φ) S-darstellbar ist, dann ist der Begriffsgraph des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes Hasse-plättbar und der um eine zusätzliche $0_V 1_V$ -Kante vergrößerte Begriffsgraph plättbar.*

Die Abbildungen 4.19 und 4.20 zeigen eine Auswahl von Begriffsgraphen von *nicht* S-darstellbaren Teilmengensystemen; zusätzlich zu den (\mathcal{A}, Φ) -Kontexten sind auch die Venn-Diagramme der Teilmengensysteme dargestellt. Diese Abbildungen zeigen, daß die in diesem Unterkapitel herausgearbeiteten Bedingungen für die S-Darstellbarkeit von Teilmengensystemen nur notwendige und keine hinreichenden Bedingungen darstellen. Die Sätze 4.2.5 und 4.2.8 sind folglich nicht umkehrbar. Mit den bisher formulierten Erkenntnissen kann lediglich erklärt werden, warum die Beispiele aus Abbildung 4.19(2) (wegen Satz





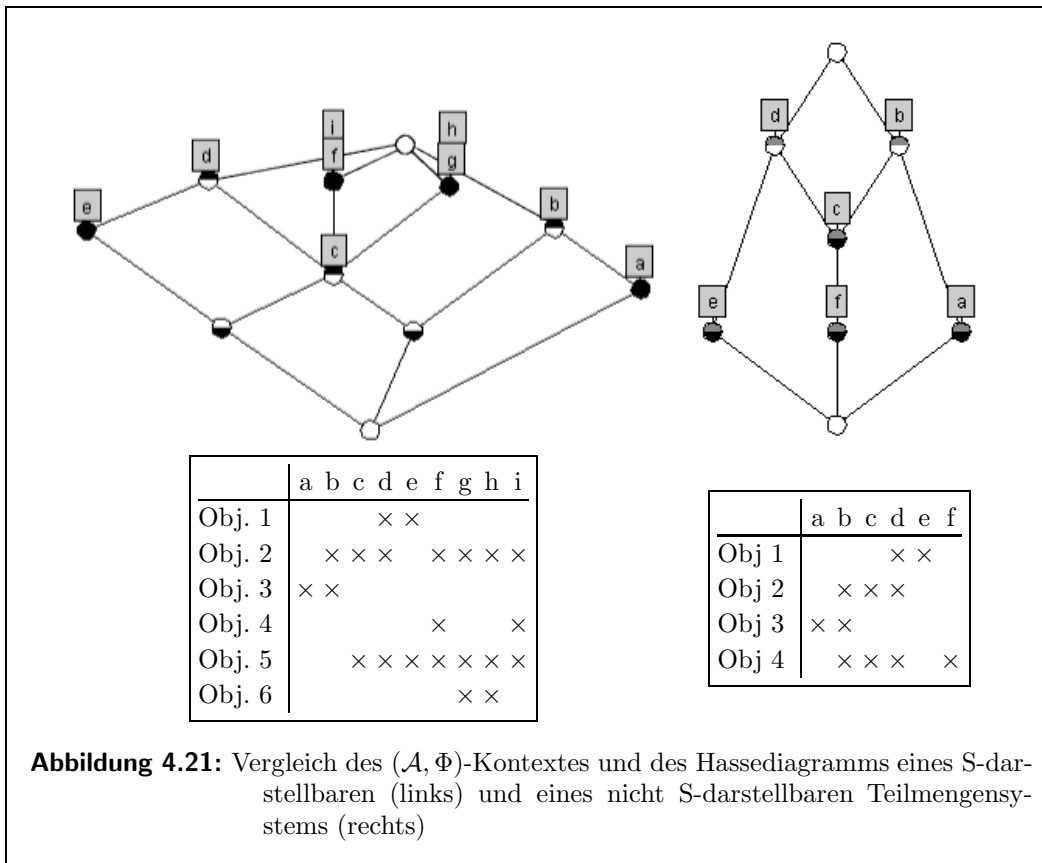
4.2.5) und Abbildung 4.19(4) (wegen Satz 4.2.8) nicht S-darstellbar sind. Die Begriffsgraphen aller anderen Beispiele sind sowohl plättbar als auch Hasse-plättbar.

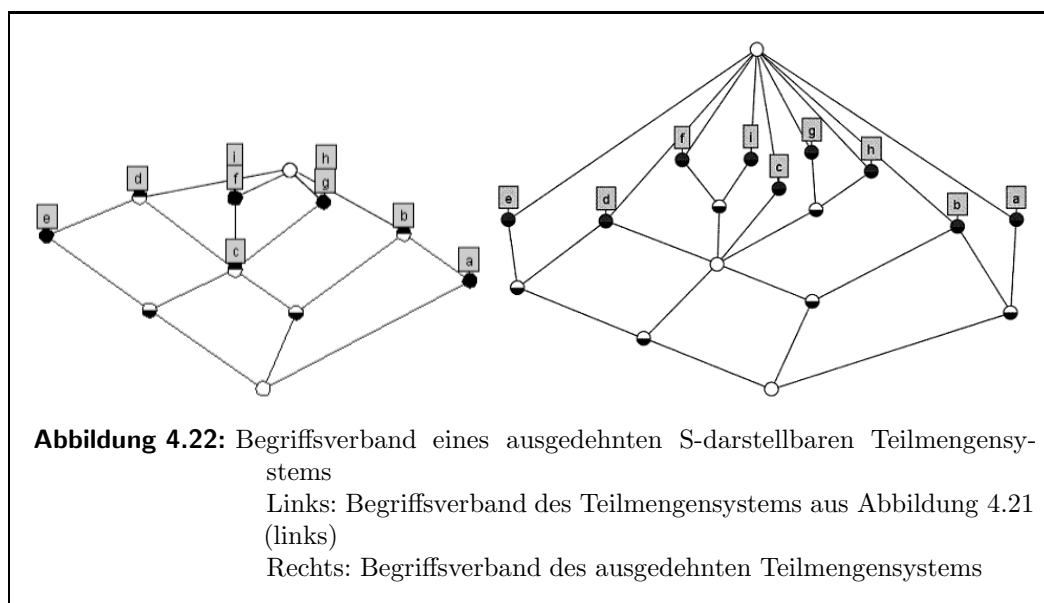
Ziel des folgenden Unterkapitels ist die Formulierung von hinreichenden Kriterien für die S-Darstellbarkeit von Teilmengensystemen.

4.3 Hinreichendes Kriterium für die S-Darstellbarkeit von Teilmengensystemen

Zur Entwicklung eines hinreichenden Kriteriums für die S-Darstellbarkeit von Teilmengensystemen werden zunächst zwei frühere Beispiele eingehender untersucht. In Abbildung 4.21 ist links der (\mathcal{A}, Φ) -Kontext und der Begriffsverband des S-darstellbaren Teilmengensystems aus Abbildung 4.1 auf Seite 78 wiedergegeben. Die rechte Seite zeigt das Beispiel des Hasse-plättbaren, aber nicht S-darstellbaren Teilmengensystems aus Abbildung 4.20(5). Dieses Teilmengensystem ist nicht S-darstellbar, denn da $\{d, e\}$ und $\{a, b\}$ Elemente von $\Phi = \{\{d, e\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, \{b, c, d, f\}\}$ sind, müssen d und e sowie a und b in einem korrespondierenden S-Alphabet benachbart sein. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, daß in dem S-Alphabet $d < e$ gilt, dann liefert $\{b, c, d\} \in \Phi$ folgende Ordnung: $a < b < c < d < e$. Da $\{b, c, d, f\} \in \Phi$ gilt, müßte f jedoch entweder direkt links oder rechts von der Sequenz bcd im S-Alphabet erscheinen oder diese Sequenz unterbrechen. Beides wird dadurch verhindert, daß f nicht Element einer der anderen Mengen aus Φ ist. Das Teilmengensystem ist also nicht S-darstellbar (obwohl sein Begriffsverband Hasse-plättbar ist).

Vergleicht man die ebenen Begriffsverbände der S-darstellbaren (\mathcal{A}, Φ) -Kontexte aus Abbildung 4.3 und Abbildung 4.21 (links) mit den ebenen Begriffsverbänden aus den Abbildungen 4.19 und 4.20, die zu nicht S-darstellbaren Teilmengensystemen gehören, dann fällt auf, daß in Abbildung 4.3 und Abbildung 4.21 (links) alle Merkmalbegriffe auf dem Rand des Graphen liegen, den man erhält, wenn man vom Begriffsgraphen die zum größten Begriff gehörende Ecke mit allen beteiligten Kanten entfernt. In den ebenen Begriffsgraphen der Abbildungen 4.19 und 4.20 liegt jeweils wenigstens ein



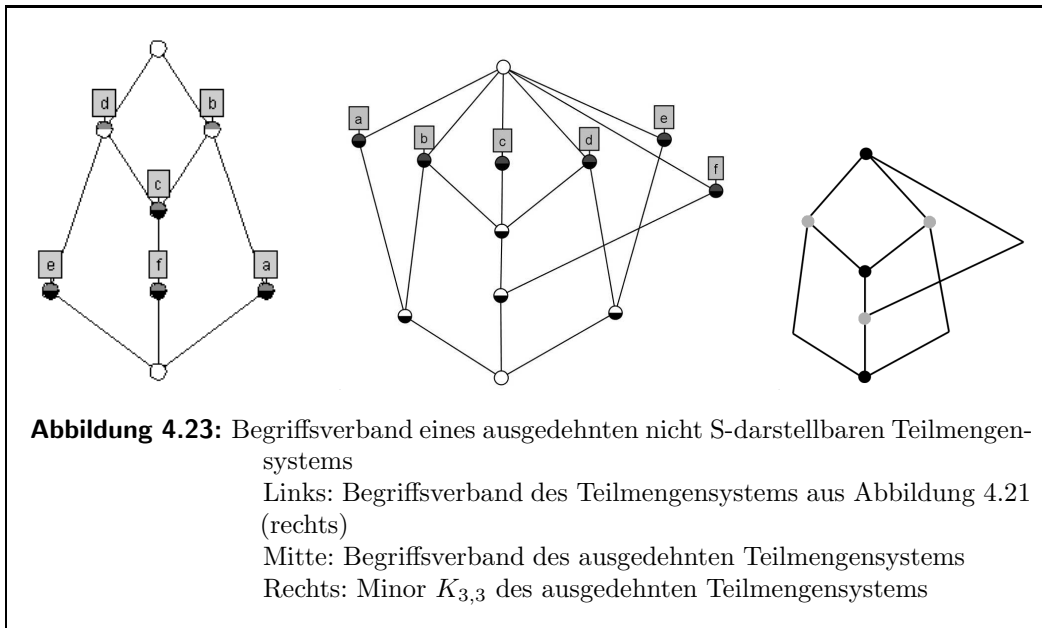


Merkmalbegriff im Inneren dieses Graphen, oder der größte Begriff ist selbst ein Merkmalbegriff.

Ziel dieses Unterkapitels ist es, diese Beobachtung formal zu beschreiben und zu beweisen, daß die beschriebene unterschiedliche Lage der Merkmalbegriffe in einer ebenen Zeichnung des Begriffsverbands die vollständige Klassifikation aller Teilmengensysteme bezüglich ihrer S-Darstellbarkeit erlaubt.

Aus der Definition A.2.4 der Merkmalbegriffe auf Seite 182 folgt, daß, wenn der größte Begriff eines Begriffsverbands einen leeren Begriffsinhalt hat, alle Koatome⁹ des Verbands Merkmalbegriffe sind. Wie Abbildung 4.21 zeigt, ist aber nicht jeder Merkmalbegriff zwangsläufig ein Koatom im Begriffsverband. Um die Situation zu vereinheitlichen, werden die betrachteten Teilmengensysteme durch Hinzunahme der aus der Grundmenge bildbaren einelementigen Mengen ausgedehnt. Die Abbildungen 4.22 und 4.23 zeigen die Begriffsverbände der ausgedehnten Teilmengensysteme zu den Beispielen aus Abbildung 4.21. Ein ausgedehntes Teilmengensystem ist genau dann S-darstellbar, wenn das ursprüngliche Teilmengensystem S-darstellbar ist.

⁹Die Koatome eines Begriffsverbands sind die direkten unteren Nachbarn des größten Begriffs (vgl. Definition B.6.2).



Lemma 4.3.1 Sei (\mathcal{A}, Φ) ein Teilmengensystem und $\tilde{\Phi} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi \cup \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \{\{a\}\}$, dann wird $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ das ausgedehnte Teilmengensystem zu (\mathcal{A}, Φ) genannt, und es gilt:

ausgedehntes Teilmengensystem

(\mathcal{A}, Φ) ist genau dann S-darstellbar, wenn $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ S-darstellbar ist.

Beweis: Sei (\mathcal{A}, Φ) ein Teilmengensystem, für das das ausgedehnte Teilmengensystem $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ S-darstellbar ist, und sei ferner $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ ein S-Alphabet von $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$; dann ist $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ auch ein S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) , da $\Phi \subseteq \tilde{\Phi}$ gilt. Denn da jedes Element von $\tilde{\Phi}$ in $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ S-darstellbar ist, muß auch jedes Element der Teilmenge Φ von $\tilde{\Phi}$ in $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ S-darstellbar sein.

Sei umgekehrt (\mathcal{A}, Φ) ein Teilmengensystem, das S-darstellbar ist, und sei $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ ein korrespondierendes S-Alphabet; dann ist $(\mathcal{A}, \Sigma_{\tilde{\Phi}}, <_{\tilde{\Phi}})$ ein S-Alphabet von $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$, wobei folgendes gilt:

$$\Sigma_{\tilde{\Phi}} \stackrel{\text{def}}{=} \{M_a \mid a \in \mathcal{A}\}$$

ist eine Menge von Markern mit $\forall a \in \mathcal{A} : M_a \notin \mathcal{A}$, und $<_{\tilde{\Phi}}$ ist eine totale Ordnung auf $\mathcal{A} \cup \Sigma_{\tilde{\Phi}}$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

- für beliebige $a, b \in \mathcal{A}$: $a <_{\tilde{\Phi}} b$ genau dann, wenn $a < b$;
- für alle $a \in \mathcal{A}$: $a <_{\tilde{\Phi}} M_a$.
- für alle $a, b \in \mathcal{A}$ folgt aus $a <_{\tilde{\Phi}} b$, auch $M_a <_{\tilde{\Phi}} b$.

Da $<_{\tilde{\Phi}}$ die Reihenfolge der Elemente aus \mathcal{A} in $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ respektiert, formen die Elemente einer jeden Menge $\varphi \in \Phi$ eine kontinuierliche Sequenz in $(\mathcal{A}, <_{\tilde{\Phi}})$. Jede kontinuierliche Sequenz aus $(\mathcal{A}, <_{\tilde{\Phi}})$ ist S-darstellbar in dem S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma_{\tilde{\Phi}}, <_{\tilde{\Phi}})$, da auf jedes Element von \mathcal{A} unmittelbar ein Markerelement aus $\Sigma_{\tilde{\Phi}}$ folgt. Somit ist sowohl jede einelementige Menge $\{a\}$ mit $a \in \mathcal{A}$ als auch jedes Element aus Φ S-darstellbar bezüglich $(\mathcal{A}, \Sigma_{\tilde{\Phi}}, <_{\tilde{\Phi}})$. Also ist $(\mathcal{A}, \Sigma_{\tilde{\Phi}}, <_{\tilde{\Phi}})$ ein S-Alphabet von $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$. \square

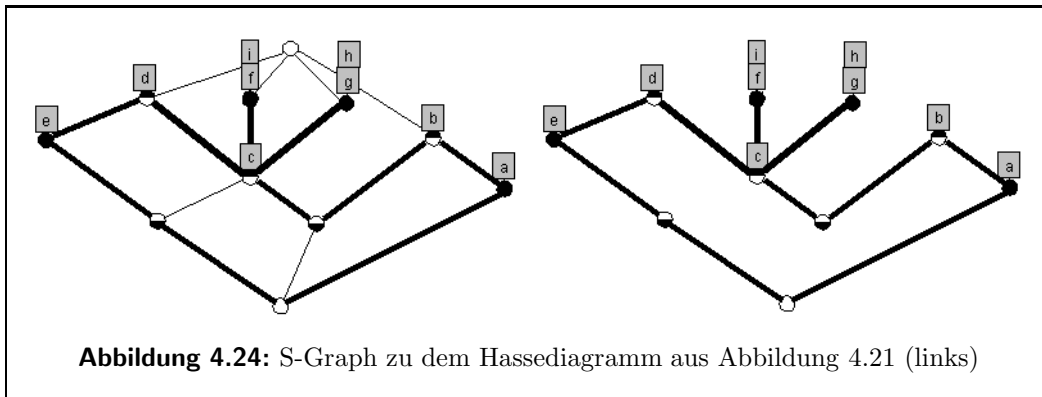
In dem Begriffsverband eines ausgedehnten Teilmengensystems $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ sind alle Merkmalbegriffe Koatome, da zu jedem $a \in \mathcal{A}$ die einelementige Menge $\{a\}$ den kleinsten Begriffsinhalt bildet, der das Merkmal a enthält. Somit liegen alle Merkmalbegriffe auf dem Rand des Graphen, den man erhält, wenn man von einer ebenen Zeichnung des Begriffsverbands die mit dem größten Begriff korrespondierende Ecke entfernt (vgl. Abbildung 4.22).

Definition 4.3.2 Sei (\mathcal{A}, Φ) ein Teilmengensystem, für das der Begriffsverband des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes Hasse-plättbar ist. Sei G eine ebene Zeichnung des Begriffsverbands, und sei \bar{G} der Graph, den man erhält, wenn man in G die Ecke wegläßt, die mit dem Begriff mit leerem Begriffsinhalt assoziiert ist. Existiert kein Begriff mit leerem Begriffsinhalt, dann ist \bar{G} der Graph G . Der Rand des Graphen \bar{G} heißt S-Graph von (\mathcal{A}, Φ) und wird mit $\Delta(G)$ bezeichnet.

Abbildung 4.24 zeigt den S-Graphen zu dem Hassediagramm aus Abbildung 4.21 (links). Er ist wie alle S-Graphen zusammenhängend:

Lemma 4.3.3 Jeder S-Graph eines Teilmengensystems ist zusammenhängend.

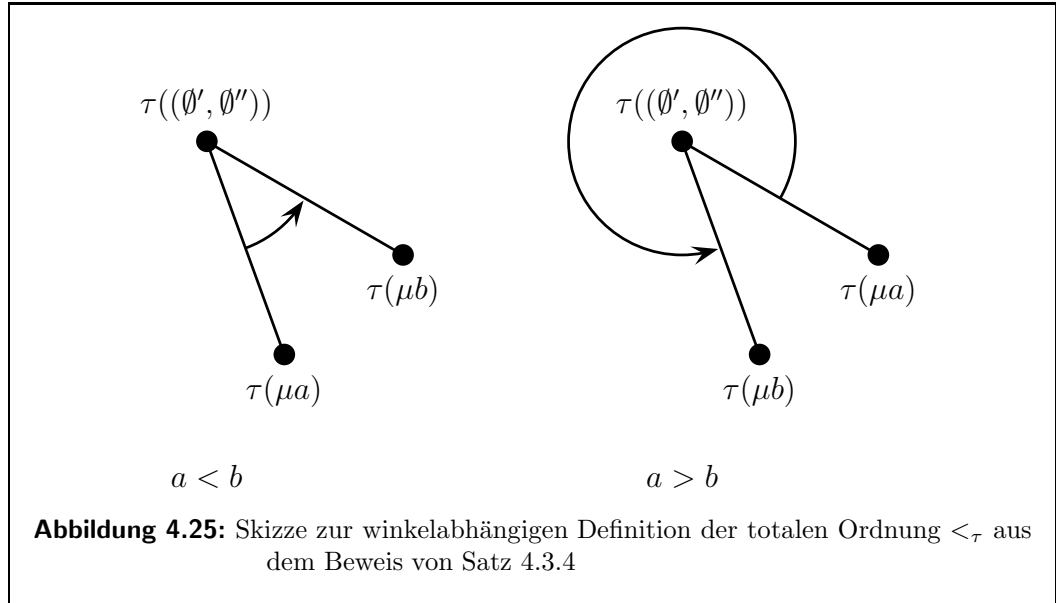
Beweis: S-Graphen sind nach Definition 4.3.2 nur für Teilmengensysteme definiert, deren korrespondierende Begriffsverbände Hasse-plättbar sind.



Sei also (\mathcal{A}, Φ) ein Teilmengensystem, dessen korrespondierender Begriffsverband Hasse-plättbar ist. Dann ist der kleinste Begriff des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes $(\emptyset'', \emptyset') = (\mathcal{A}', \mathcal{A}'') = (\mathcal{A}', \mathcal{A})$ ein Knoten eines jeden S-Graphen (vgl. Definition A.2.1 auf Seite 179). Da jeder Begriff ein Oberbegriff dieses kleinsten Begriffs ist, gibt es von jedem Knoten des Begriffsgraphen einen absteigenden Pfad zu dem Knoten des kleinsten Begriffs. Folglich ist auch der Graph, den man erhält, wenn man vom Begriffsgraphen, falls $(\emptyset', \emptyset'') = (\emptyset', \emptyset)$ gilt, den Knoten des größten Begriffs entfernt, zusammenhängend (vgl. Definition 4.3.2). Da Ränder von zusammenhängenden Graphen immer zusammenhängend sind, ist ein S-Graph eines Teilmengensystems, dessen korrespondierender Begriffsverband Hasse-plättbar ist, zusammenhängend. \square

Da S-Graphen in Abhängigkeit von ebenen Zeichnungen von Begriffsverbänden definiert sind, gibt es zu jedem Hasse-plättbaren Begriffsverband im Prinzip unendlich viele S-Graphen. Erst in Kapitel 5 wird gezeigt werden, daß alle S-Graphen eines Hasse-plättbaren Teilmengensystems isomorph sind. An dieser Stelle kann jedoch bereits festgehalten werden, daß – da alle Merkmalsbegriffe eines ausgedehnten Teilmengensystems $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ Koatome des Verbands sind – in jeder ebenen Zeichnung des $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ -Begriffsverbands für jedes $a \in \mathcal{A}$ die mit $\{a\}$ assoziierte Ecke eine Ecke des S-Graphen ist.

Aus dem Beweis des folgenden Satzes geht hervor, daß sich aus einem S-Graphen eines ausgedehnten Teilmengensystems $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ ein S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) konstruieren läßt. Somit folgt aus der Hasse-Plättbarkeit des Be-



griffsverbands des ausgedehnten Teilmengensystems die S-Darstellbarkeit von (\mathcal{A}, Φ) (vgl. Abbildung 4.22 und Abbildung 4.23).

Satz 4.3.4 Sei (\mathcal{A}, Φ) ein Teilmengensystem, und sei $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ das ausgedehnte Teilmengensystem mit $\tilde{\Phi} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi \cup \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \{\{a\}\}$. Wenn der Begriffsverband des $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ -Kontextes Hasse-plättbar ist, dann ist (\mathcal{A}, Φ) S-darstellbar.

Beweis: Sei (\mathcal{A}, Φ) ein Teilmengensystem, zu dem der Begriffsverband des ausgedehnten Teilmengensystems $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ Hasse-plättbar ist. Nach Lemma 4.3.1 folgt die S-Darstellbarkeit von (\mathcal{A}, Φ) aus der S-Darstellbarkeit von $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$. Der Satz ist somit bewiesen, wenn es gelingt, aus einem ebenen Hassediagramm des $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ -Begriffsverbands ein S-Alphabet von $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ zu konstruieren.

Nach Satz B.5.9 auf Seite 211 läßt sich zu jedem ebenen Begriffsverband ein ebenes Hassediagramm angeben, dessen Kanten einfache Strecken in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sind. Sei (G, τ) ein solches ebenes Hassediagramm des $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ -Begriffsverbands. Im folgenden wird gezeigt, daß $(\mathcal{A}, \Sigma_{\mathcal{A}}, \lt;_\tau)$ ein S-Alphabet von $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ ist. Hierbei wird $(\mathcal{A}, \Sigma_{\mathcal{A}}, \lt;_\tau)$ wie folgt definiert: $\Sigma_{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \{M_a \mid a \in \mathcal{A}\}$ ist eine Menge von Markern mit $\forall a \in \mathcal{A} : M_a \notin \mathcal{A}$, und $\lt;_\tau$ ist die totale Ordnung auf $\mathcal{A} \cup \Sigma_{\mathcal{A}}$, für die gilt:

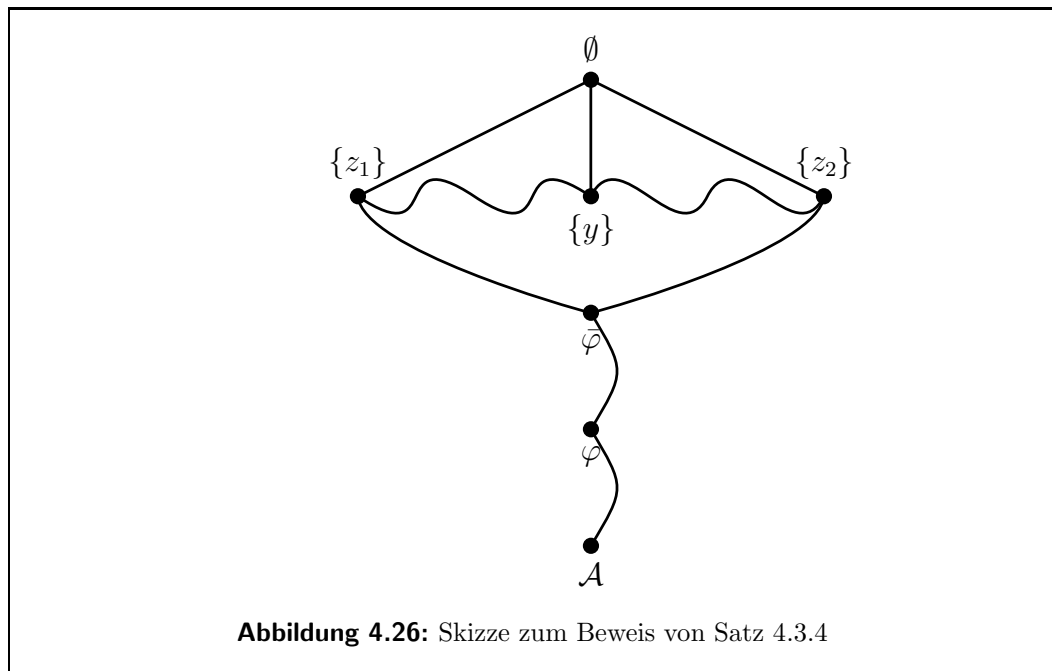
- (1) für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt $a <_\tau b$ genau dann, wenn der Winkel zwischen der Kante mit den Endpunkten $\tau((\emptyset', \emptyset''))$ und $\tau(\mu a)$ und der Kante mit den Endpunkten $\tau((\emptyset', \emptyset''))$ und $\tau(\mu b)$ kleiner als 180° ist (vgl. Abbildung 4.25);¹⁰
- (2) für alle $a \in \mathcal{A}$ gilt $a \prec_\tau M_a$.
- (3) für alle $a, b \in \mathcal{A}$ folgt aus $a <_\tau b$, auch $M_a <_\tau b$.

Da alle Merkmalbegriffe des $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ -Begriffsverbands Koatome sind, existiert für jedes $a \in \mathcal{A}$ genau eine Kante in (G, τ) mit den Endpunkten $\tau((\emptyset', \emptyset''))$ und $\tau(\mu a)$. Desweiteren läßt sich aus der Tatsache, daß (G, τ) ein ebenes Hassediagramm ist, schließen, daß die binäre Relation $<_\tau$ eine totale Ordnung auf $\mathcal{A} \cup \Sigma_{\mathcal{A}}$ ist.

In $(\mathcal{A}, \Sigma_{\mathcal{A}}, <_\tau)$ folgt auf jedes Element aus \mathcal{A} ein Markerelement aus $\Sigma_{\mathcal{A}}$. Somit sind alle Intervalle von $(\mathcal{A}, <_\tau)$ in $(\mathcal{A}, \Sigma_{\mathcal{A}}, <_\tau)$ S-darstellbar. Insbesondere sind alle einelementigen Teilmengen von \mathcal{A} in $(\mathcal{A}, \Sigma_{\mathcal{A}}, <_\tau)$ S-darstellbar. Angenommen, $(\mathcal{A}, \Sigma_{\mathcal{A}}, <_\tau)$ ist kein S-Alphabet von $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$, dann muß es demnach ein Element $\varphi \in \tilde{\Phi}$ geben, dessen Elemente kein Intervall in $(\mathcal{A}, <_\tau)$ bilden. Folglich gibt es Elemente $z_1, z_2 \in \varphi$ und $y \in \mathcal{A} \setminus \varphi$ mit $z_1 <_\tau y <_\tau z_2$. Zur Vereinfachung der Notation wird in diesem Beweis eine Ecke $\tau((A, B))$ des ebenen Hassediagramms, die zu einem formalen Begriff (A, B) gehört, lediglich mit dem Begriffsinhalt B bezeichnet.

Die Skizze in Abbildung 4.26 veranschaulicht die folgende Argumentation: Da das Hassediagramm (G, τ) zu einem ausgedehnten Teilmengensystem gehört, hat der größte Begriff des Begriffsverbands einen leeren Inhalt. Außerdem folgt, daß $\{y\}$, $\{z_1\}$ und $\{z_2\}$ Ecken des S-Graphen sind. Da jeder S-Graph nach Lemma 4.3.3 zusammenhängend ist, gibt es im S-Graphen und somit auch im Hassediagramm je einen Weg von $\{z_1\}$ nach $\{y\}$ und einen Weg von $\{y\}$ nach $\{z_2\}$, die beide weder die Ecke \emptyset noch die Ecke φ enthalten. Sei $\bar{\varphi} = \{z_1, z_2\}''$ die größte untere Schranke von $\{z_1\}$ und $\{z_2\}$, dann gibt es im Begriffsverband außerdem einen absteigenden Pfad von $\{z_1\}$ und von $\{z_2\}$ nach $\bar{\varphi}$ (vgl. Skizze in Abbildung 4.26). Falls $\varphi \neq \bar{\varphi}$ gilt, gibt es zusätzlich einen absteigenden Pfad von $\bar{\varphi}$ nach φ . Desweiteren sind die Ecken φ und $\{y\}$

¹⁰Zur Erinnerung, μa bezeichnet nach Definition A.2.4 auf Seite 182 den Merkmalbegriff von a und $(\emptyset', \emptyset'')$ ist der größte Begriff eines jeden Begriffsverbands.



durch je einen absteigenden Pfad mit der Ecke \mathcal{A} verbunden. Außerdem ist die Ecke \emptyset durch je eine Kante mit den Ecken $\{y\}$, $\{z_1\}$ und $\{z_2\}$ verbunden. In dem ebenen Graphen des Hassediagramms gibt es also einen Kreis, zu dem die Ecken \emptyset , $\{z_1\}$, $\bar{\varphi}$ und $\{z_2\}$ gehören, und der aus Kanten mit folgenden Eigenschaften gebildet wird: Je eine Kante verbindet \emptyset mit $\{z_1\}$ und mit $\{z_2\}$. Die Kanten auf den Kreisabschnitten von $\{z_1\}$ nach $\bar{\varphi}$ und von $\{z_2\}$ nach $\bar{\varphi}$ sind alle absteigend. Aus der Annahme $z_1 <_{\tau} y <_{\tau} z_2$ und der Definition der totalen Ordnung $<_{\tau}$ folgt, daß $\{y\}$ im Inneren dieses Kreises liegt. Im Äußeren des Kreises liegt die Ecke \mathcal{A} . Die entstehende Situation zeigt Abbildung 4.26.

Nach dem Jordanschen Kurvensatz muß jeder absteigende Pfad von $\{y\}$ nach \mathcal{A} den Kreis schneiden. Da der Graph des Hassediagramms aber eben ist, kann ein solcher Schnittpunkt nur eine Ecke ψ des Graphen sein. Aus den Eigenschaften der Kanten, die den Kreis bilden, folgt, daß entweder $\psi = \bar{\varphi}$ oder $\psi \subset \bar{\varphi}$ gilt. Es folgt $\psi \subseteq \bar{\varphi} \subseteq \varphi$. Da aber ψ per Definition auf einem absteigenden Pfad von $\{y\}$ nach \mathcal{A} liegt, muß $y \in \psi$ und somit auch $y \in \varphi$ gelten, was der Annahme $y \notin \varphi$ widerspricht. \square

Dieser Satz bildet zusammen mit Satz 4.2.5 die Grundlage für den Beweis des Hauptsatzes über die S-Darstellbarkeit von Teilmengensystemen, der die Aussagen der Sätze 4.2.5 und 4.3.4 zusammenfaßt.

Satz 4.3.5 (Hauptsatz über die S-Darstellbarkeit von Teilmengensystemen) *Für ein Teilmengensystem (\mathcal{A}, Φ) sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (1) (\mathcal{A}, Φ) ist S-darstellbar.
- (2) Der Begriffsverband zu dem ausgedehnten Teilmengensystem $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ ist Hasse-plättbar.
- (3) Der (\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverband ist Hasse-plättbar, und für jedes ebene Hasse-diagramm (G, τ) des (\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverbands gilt: für jedes Element a von \mathcal{A} ist $\tau(\mu a)$ eine Ecke des S-Graphen $\Delta(G)$ von (\mathcal{A}, Φ) .

Beweis: Daß Aussage (2) Aussage (1) impliziert, folgt aus Satz 4.3.4. Das Lemma 4.3.1 besagt, daß sich die S-Darstellbarkeit von (\mathcal{A}, Φ) und die S-Darstellbarkeit von $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ gegenseitig bedingen. Nach Satz 4.2.8 müssen die Begriffsverbände von S-darstellbaren Teilmengensystemen Hasse-plättbar sein. Also folgt aus der S-Darstellbarkeit eines Teilmengensystems (\mathcal{A}, Φ) die Hasse-Plättbarkeit des $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ -Begriffsverbands. Somit sind die Aussagen (1) und (2) äquivalent.

Als nächstes wird die Äquivalenz der Aussagen (2) und (3) bewiesen: Sei zunächst (\mathcal{A}, Φ) ein Teilmengensystem, so daß der Begriffsverband des ausgedehnten Teilmengensystems $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ Hasse-plättbar ist. Dann ist auch der Begriffsverband von (\mathcal{A}, Φ) als Minor des $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ -Begriffsverbands Hasse-plättbar. Es muß noch untersucht werden, was mit den Merkmalbegriffen im Begriffsverband geschieht, wenn man in einem ebenen Hassediagramm des $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ -Begriffsverbands die Begriffe wegläßt, die durch die Ausdehnung des Teilmengensystems hinzugekommen sind.

Sei $a \in \mathcal{A}$, dann ergeben sich zwei Möglichkeiten: Entweder ist der Merkmalbegriff μa von a in $\underline{\mathcal{B}}(\Phi, \mathcal{A}, \ni)$ gerade $(\{a\}', \{a\})$, oder aber es gilt $\mu a \neq (\{a\}', \{a\})$. Wenn $a \in \mathcal{A}$ mit $\mu a = (\{a\}', \{a\})$ in $\underline{\mathcal{B}}(\Phi, \mathcal{A}, \ni)$ gilt, dann sind die Begriffsverbände von Φ und $\Phi \cup \{a\}$ isomorph. Wenn andererseits

$a \in \mathcal{A}$ mit $\mu a \neq (\{a\}', \{a\})$ in $\underline{\mathcal{B}}(\Phi, \mathcal{A}, \ni)$ gilt, dann hat μa im Begriffsverband $\underline{\mathcal{B}}(\tilde{\Phi}, \mathcal{A}, \ni)$ genau einen unteren Nachbarn (A, B) ; denn hätte μa zwei untere Nachbarn mit Begriffsinhalten φ und ψ , dann wäre $\varphi \cap \psi = \{a\}$, und somit würde $\mu a = (\{a\}', \{a\})$ in $\underline{\mathcal{B}}(\Phi, \mathcal{A}, \ni)$ gelten. Wenn (A, B) der einzige untere Nachbar von μa in $\underline{\mathcal{B}}(\tilde{\Phi}, \mathcal{A}, \ni)$ ist, dann ist (B', B) der Merkmalbegriff von a in $\underline{\mathcal{B}}(\Phi, \mathcal{A}, \ni)$, da B der kleinste Begriffsinhalt in $\underline{\mathcal{B}}(\Phi, \mathcal{A}, \ni)$ ist, der a enthält. Weiter muß (A, B) als einziger unterer Nachbar von μa ebenfalls im S-Graphen von $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ liegen, da dieser nach Lemma 4.3.3 zusammenhängend ist und μa per Definition keinen oberen Nachbarn im S-Graphen haben kann. Folglich liegt (B', B) im S-Graphen von (\mathcal{A}, Φ) . Dies beweist, daß Aussage (2) Aussage (3) impliziert.

Es muß noch gezeigt werden, daß Aussage (2) aus Aussage (3) folgt. Sei (G, τ) ein ebenes Hassediagramm des (\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverbands, so daß für jedes $a \in \mathcal{A}$ die mit dem Merkmalbegriff korrespondierende Ecke zum S-Graphen gehört. (G, τ) kann zu einem ebenen Hassediagramm des $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ -Begriffsverbands erweitert werden, indem für jedes $(\{a\}', \{a\}) \notin \mathcal{B}(\Phi, \mathcal{A}, \ni)$ eine neue Ecke hinzugenommen und mit entsprechenden Kanten versehen wird; dabei kann es zu keinem Konflikt kommen, da $\tau(\mu a)$ auf dem Rand von $G \setminus \tau((\emptyset', \emptyset''))$ liegt. Somit folgt Aussage (2) aus Aussage (3). \square

Der Hauptsatz liefert zwei verschiedene Bedingungen, die jede für sich für die S-Darstellbarkeit eines Teilmengensystems hinreichend ist. Der Beweis, daß alle S-Graphen eines S-darstellbaren Teilmengensystems isomorph sind, erfolgt erst in Lemma 5.0.3 in Kapitel 5. Allerdings kann bereits aus dem Beweis des Satzes 4.3.5 geschlossen werden, daß allen S-Graphen eines S-darstellbaren Teilmengensystems gemein ist, daß sie sämtliche Merkmalbegriffe enthalten. Das heißt, sobald man eine ebene Zeichnung eines Begriffsverbands hat, in deren S-Graphen nicht alle Merkmalbegriffe liegen, weiß man, daß der Begriffsverband nicht zu einem S-darstellbaren Teilmengensystem gehören kann. In allen ebenen Zeichnungen aus den Abbildungen 4.19 und 4.20 liegt jeweils wenigstens ein Merkmalbegriff nicht auf dem S-Graphen: In Zeichnung (1) verhindert μf die S-Darstellbarkeit, in Zeichnung (3) ist es μa , in Zeichnung (5) ist es μf und in Zeichnung (6) schließlich μb .

Wir sind nun in der Lage, zu jedem beliebigen Teilmengensystem (\mathcal{A}, Φ) , dessen korrespondierender $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ -Begriffsverband Hasse-plättbar ist, anzuge-

ben, ob es möglich ist, ein S-Alphabet ohne verdoppelte Elemente von \mathcal{A} zu konstruieren, bezüglich dem jedes Element aus Φ als *Pratyāhāra* dargestellt werden kann. Aufgrund des Beweises von Satz 4.3.4 können wir sogar ein solches S-Alphabet angeben.

Wir haben bisher jedoch noch kein effizientes Verfahren, um zu entscheiden, ob ein (\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverband Hasse-plättbar ist. Mit dem Satz von Platt B.6.8 läßt sich zwar das Problem der Hasse-Plättbarkeit durch die Hinzunahme einer zusätzlichen $0_V 1_V$ -Kante auf das allgemeine Plättbarkeitsproblem von Graphen zurückführen, allerdings steht uns zur Lösung dieses allgemeineren Problems bisher nur der Satz von Kuratowski B.4.18 zur Verfügung, und es fehlt ein effektives Verfahren, um Graphen darauf zu testen, ob sie K^5 oder $K_{3,3}$ als Minor haben. Auf dieses Problem wird in Kapitel 6 eingegangen.

Außerdem ist in dieser Arbeit bisher noch nicht geklärt worden, wie man zu einem S-darstellbaren Teilmengensystem ein *gutes* S-Alphabet, also eines mit minimaler Markerzahl, konstruiert. Das S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma_{\mathcal{A}}, <_{\tau})$ aus dem Beweis von Satz 4.3.4 ist in den meisten Fällen nicht gut, da die Markermenge $\Sigma_{\mathcal{A}}$ ebenso viele Elemente hat wie die Menge \mathcal{A} . Im nächsten Kapitel wird ein Verfahren zur Konstruktion aller guten S-Alphabete eines S-darstellbaren Teilmengensystems angegeben.

Mit der Erweiterung von nicht S-darstellbaren Teilmengensystemen durch Verdopplung einzelner Elemente beschäftigt sich schließlich Kapitel 6.

5 Gewinnung guter S-Alphabete

Ein S-Alphabet eines S-darstellbaren Teilmengensystems ist *gut*, wenn es kein anderes S-Alphabet gibt, das mit weniger Markern auskommt. Das Problem der Konstruktion eines guten S-Alphabets zu einem S-darstellbaren Teilmengensystem (\mathcal{A}, Φ) läßt sich in zwei Teilaufgaben zerlegen:

- (1) Finde eine totale Ordnung $<_{\mathcal{A}}$ auf \mathcal{A} , so daß es ein gutes S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ von (\mathcal{A}, Φ) gibt, dessen Ordnung $<$ eingeschränkt auf \mathcal{A} mit der Ordnung $<_{\mathcal{A}}$ übereinstimmt.
- (2) Finde ein Verfahren, das die Markermenge Σ eines S-Alphabets $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ minimiert, ohne die Ordnung $<$ auf \mathcal{A} zu verändern.

Zur sprachlichen Vereinfachung werden zunächst S-Ordnungen und gute S-Ordnungen eingeführt:

Definition 5.0.1 Sei (\mathcal{A}, Φ) ein S-darstellbares Teilmengensystem. $(\mathcal{A}, <)$ ist eine S-Ordnung von (\mathcal{A}, Φ) genau dann, wenn $(\mathcal{A}, \Sigma_{\mathcal{A}}, <_{\Sigma})$ ein S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) ist; wobei folgendes gilt: S-Ordnung

- $\Sigma_{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \{M_a \mid a \in \mathcal{A}\}$ ist eine Menge von Markern mit $\forall a \in \mathcal{A} : M_a \notin \mathcal{A}$;
- $\forall a, b \in \mathcal{A} : a <_{\Sigma} b$ genau dann, wenn $a < b$;
- $\forall a \in \mathcal{A} : a \prec_{\Sigma} M_a$.
- $\forall a, b \in \mathcal{A} : \text{wenn } a <_{\Sigma} b, \text{ dann } M_a <_{\Sigma} b$.

Die S-Ordnung eines S-Alphabets $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ ist $(\mathcal{A}, <|_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}})$. S-Ordnung eines S-Alphabets

Eine S-Ordnung $(\mathcal{A}, <)$ eines S-darstellbaren Teilmengensystems (\mathcal{A}, Φ) heißt *gut*, wenn sie die S-Ordnung eines guten S-Alphabets von (\mathcal{A}, Φ) ist. gute S-Ordnung

Anstatt gute S-Ordnungen auf der Grundlage guter S-Alphabete zu definieren, hätte man auch umgekehrt gute S-Alphabete als S-Alphabete mit guten S-Ordnungen und minimaler Markermenge definieren können. Mithilfe der neu eingeführten Terminologie läßt sich die oben dargelegte Aufgabenstellung dieses Kapitels vereinfachen zu:

- (1) Finde zu einem S-darstellbaren Teilmengensystem (\mathcal{A}, Φ) eine gute S-Ordnung.
- (2) Finde zu einer gegebenen S-Ordnung ein S-Alphabet mit minimaler Markermenge.

Der folgende Satz löst die zweite Aufgabe:

Satz 5.0.2 Sei (\mathcal{A}, Φ) ein S-darstellbares Teilmengensystem und $(\mathcal{A}, <)$ eine S-Ordnung von (\mathcal{A}, Φ) . Definiere $\Sigma_{<, \min}$ und $<_{\min}$ wie folgt:

- $\Sigma_{<, \min} \stackrel{\text{def}}{=} \{M_a \mid \exists \varphi \in \Phi \text{ mit } a = \max_{<} \varphi\}$,¹
- $\forall a, b \in \mathcal{A} : a <_{\min} b$ genau dann, wenn $a < b$;
- Wenn $M_a \in \Sigma_{<, \min}$, dann $a \prec_{\min} M_a$.
- für alle $a, b \in \mathcal{A}$ folgt aus $M_a \in \Sigma_{<, \min}$ und $a <_{\min} b$, daß $M_a <_{\min} b$.

$(\mathcal{A}, \Sigma_{<, \min}, <_{\min})$ ist ein S-Alphabet mit minimaler Markermenge von (\mathcal{A}, Φ) , dessen S-Ordnung $(\mathcal{A}, <)$ ist.

Beweis: Es müssen zwei Aussagen bewiesen werden:

- (1) $(\mathcal{A}, \Sigma_{<, \min}, <_{\min})$ ist ein S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) .
- (2) Es gibt kein S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma', <')$ von (\mathcal{A}, Φ) mit $|\Sigma'| < |\Sigma_{<, \min}|$ und mit S-Ordnung $(\mathcal{A}, <)$.

¹ $\max_{<} \varphi$ ist das größte Element von φ bezüglich der Ordnung $<$ auf \mathcal{A} .

- zu 1) Die Definition von $<_{\min}$ und $\Sigma_{<,\min}$ garantiert, daß $<_{\min}$ eine totale Ordnung auf $\mathcal{A} \cup \Sigma_{<,\min}$ ist. Da $(\mathcal{A}, <)$ eine S-Ordnung von (\mathcal{A}, Φ) ist, bilden alle Elemente aus Φ Intervalle in $(\mathcal{A}, <)$. Da $<_{\min}$ die Elemente von \mathcal{A} in gleicher Weise ordnet wie $<$, und da $(\mathcal{A}, \Sigma_{<,\min}, <_{\min})$ so definiert ist, daß auf jedes durch ein Element aus Φ gebildete Intervall ein Markerelement folgt, bildet $(\mathcal{A}, \Sigma_{<,\min}, <_{\min})$ ein S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) .
- zu 2) Sei $(\mathcal{A}, \Sigma', <')$ ein beliebiges S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) mit S-Ordnung $(\mathcal{A}, <)$. Wenn $(\mathcal{A}, \Sigma', <')$ ein S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) ist, dann ist jedes Element von Φ in $(\mathcal{A}, \Sigma', <')$ S-darstellbar. Somit muß für jedes $\varphi \in \Phi$ gelten, daß auf das bezüglich $(\mathcal{A}, <)$ größte Element von φ ein Markerelement in $(\mathcal{A}, \Sigma', <')$ folgt. Es gilt also

$$\forall \varphi \in \Phi : \exists M \in \Sigma' \text{ mit } \max_{<} \varphi \prec' M .$$

Daraus folgt, daß die Markermenge jedes beliebigen S-Alphabets von (\mathcal{A}, Φ) mindestens ebenso mächtig ist wie $\Sigma_{<,\min}$. \square

Steht also die S-Ordnung fest, die zu einem guten S-Alphabet führt, dann kann mithilfe von Satz 5.0.2 die Markermenge minimiert werden. Die folgende Überlegung zeigt, daß die in dem vorangegangenen Kapitel entwickelten Verfahren ausreichen, um alle möglichen und somit auch alle guten S-Ordnungen eines gegebenen S-darstellbaren Teilmengensystems zu ermitteln. Zum einen ist es mit der im Beweis von Satz 4.3.4 in Unterkapitel 4.3 eingeführten Ordnung $<_{\tau}$ möglich, aus einem beliebigen ebenen Hassediagramm des Begriffsverbands des ausgedehnten Teilmengensystems ein S-Alphabet des zugrundeliegenden Teilmengensystems abzuleiten. Zum anderen ermöglicht es die im Beweis von Satz 4.2.5 in Unterkapitel 4.2 gegebene Konstruktion des Stufengraphen, zu jedem beliebigen S-Alphabet eines ausgedehnten Teilmengensystems ein ebenes Hassediagramm des Begriffsverbands zu zeichnen. Ermittelt man die Ordnung $<_{\tau}$ aus dem Stufengraphen zu einem S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ eines ausgedehnten Teilmengensystems, so erhält man die zu $<$ duale Ordnung $<^{-1}$. Folglich gibt es zu jedem S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ eines Teilmengensystems

(\mathcal{A}, Φ) ein ebenes Hassediagramm des $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ -Begriffsverbands, so daß die S-Ordnungen $(\mathcal{A}, <)$ und $(\mathcal{A}, <_{\tau})$ übereinstimmen.

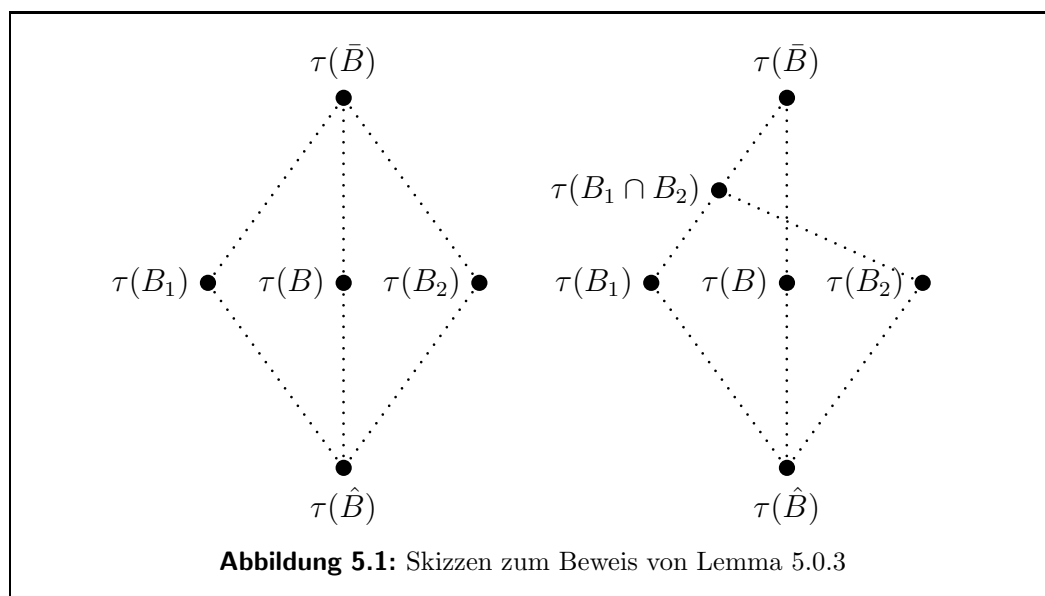
Jeder Hasse-plättbare Begriffsverband läßt sich auf unendlich viele verschiedene Arten eben zeichnen. Das bedeutet, daß es zu jedem S-darstellbaren Teilmengensystem (\mathcal{A}, Φ) unendlich viele verschiedene Zeichnungen von S-Graphen von $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ gibt, von denen jede eine S-Ordnung $(\mathcal{A}, <_{\tau})$ festlegt. Es gibt aber natürlich nicht unendlich viele S-Ordnungen zu einem Teilmengensystem (\mathcal{A}, Φ) . Unterschiedliche Zeichnungen von S-Graphen von (\mathcal{A}, Φ) können zu derselben S-Ordnung führen. Da bei der Suche nach einem guten S-Alphabet eines Teilmengensystems nicht unendlich viele Zeichnungen verglichen werden können, wird hier zunächst nachgewiesen, daß alle S-Graphen eines S-darstellbaren Teilmengensystems isomorph sind. Zwei Graphen sind nach Definition B.4.2 isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen ihren Eckenmengen gibt, die die Kanten respektiert.

Lemma 5.0.3 *Ist (\mathcal{A}, Φ) ein S-darstellbares Teilmengensystem, dann sind alle S-Graphen von (\mathcal{A}, Φ) isomorphe Graphen.*

Beweis: Sei (\mathcal{A}, Φ) ein S-darstellbares Teilmengensystem und seien (G, τ) und (G_1, τ_1) zwei ebene Hassediagramme des (\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverbands. Ferner sei $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ ein S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) . Es ist zu zeigen, daß die S-Graphen $\Delta(G)$ und $\Delta(G_1)$ isomorph sind. Die Ecken- und Kantenmengen von $\Delta(G)$ bzw. $\Delta(G_1)$ werden mit $\Delta(V)$ und $\Delta(E)$ bzw. $\Delta(V_1)$ und $\Delta(E_1)$ bezeichnet. Im folgenden wird gezeigt, daß die Abbildung $\text{iso} : V \rightarrow V_1$ mit $\tau((A, B)) \mapsto \tau_1((A, B))$ ein Graphenisomorphismus von $\Delta(G)$ nach $\Delta(G_1)$ ist.

Wenn gezeigt werden kann, daß die Abbildung iso eine Bijektion von $\Delta(V)$ auf $\Delta(V_1)$ ist, dann folgt aus der Definition des Hassediagramms, daß die Abbildung ein Graphenisomorphismus von $\Delta(G)$ nach $\Delta(G_1)$ ist. Denn für jedes Hassediagramm (G, τ) des Begriffsverbands $\underline{\mathcal{B}}(\Phi, \mathcal{A}, \ni)$ gilt nach Definition B.5.6, daß τ eine Bijektion von den Nachbarschaftsrelationen in $\underline{\mathcal{B}}(\Phi, \mathcal{A}, \ni)$ auf die Kanten in G induziert.

Um zu zeigen, daß $\text{iso} : \Delta(V) \rightarrow \Delta(V_1)$ eine Bijektion ist, muß nachgewiesen werden, daß für jeden Begriff $(A, B) \in \underline{\mathcal{B}}(\Phi, \mathcal{A}, \ni)$ gilt: $\tau((A, B))$ ist genau dann eine Ecke von $\Delta(G)$, wenn $\tau_1((A, B))$ eine Ecke von $\Delta(G_1)$ ist. Dies ist äquivalent zu der Aussage: $\tau((A, B))$ ist genau dann *keine* Ecke von $\Delta(G)$, wenn $\tau_1((A, B))$ *keine* Ecke von $\Delta(G_1)$ ist.



Zur Vereinfachung der Notation wird in diesem Beweis eine Ecke $\tau((A, B))$ kurz mit $\tau(B)$ bezeichnet. Sei (A, B) im folgenden ein formaler Begriff des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes, für den $\tau(B)$ keine Ecke von $\Delta(G)$ ist. Es wird gezeigt, daß aus der Annahme, daß (A, B) ein formaler Begriff des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes ist, für den $\tau(B)$ keine Ecke von $\Delta(G)$ ist, folgt, daß $\tau_1(B)$ keine Ecke von $\Delta(G_1)$ ist. Der Beweis, daß $\tau(B)$ keine Ecke von $\Delta(G)$ sein kann, wenn $\tau_1(B)$ keine Ecke von $\Delta(G_1)$ ist, verläuft analog.

Wenn $B = \emptyset$ gilt, dann ist $\tau_1(B)$ nach Definition 4.3.2 keine Ecke von $\Delta(G_1)$.

Wenn $B \neq \emptyset$ gilt, dann wird die Ecke $\tau(B)$ im Hasse-Diagramm (G, τ) durch zwei Ecken $\tau(B_1)$ und $\tau(B_2)$ wie in Abbildung 5.1 (links) vom Außengebiet abgeschirmt. Die gepunkteten Linien in der Abbildung repräsentieren keine einzelnen Kanten des Hasse-Diagramms, sondern aufsteigende Pfade. Damit die Ecke $\tau(B)$ in einer Situation wie in Abbildung 5.1 (links) nicht zum S-Graphen gehört, muß es zwei weitere Begriffsinhalte \bar{B} und \hat{B} geben, und zwischen den Begriffsinhalten B, B_1, B_2, \bar{B} und \hat{B} müssen die folgenden Beziehungen gelten:

- (a) $B_1 \not\preceq B_2, B_2 \not\preceq B_1,$
- (b) $B_1 \not\preceq B, B \not\preceq B_1,$

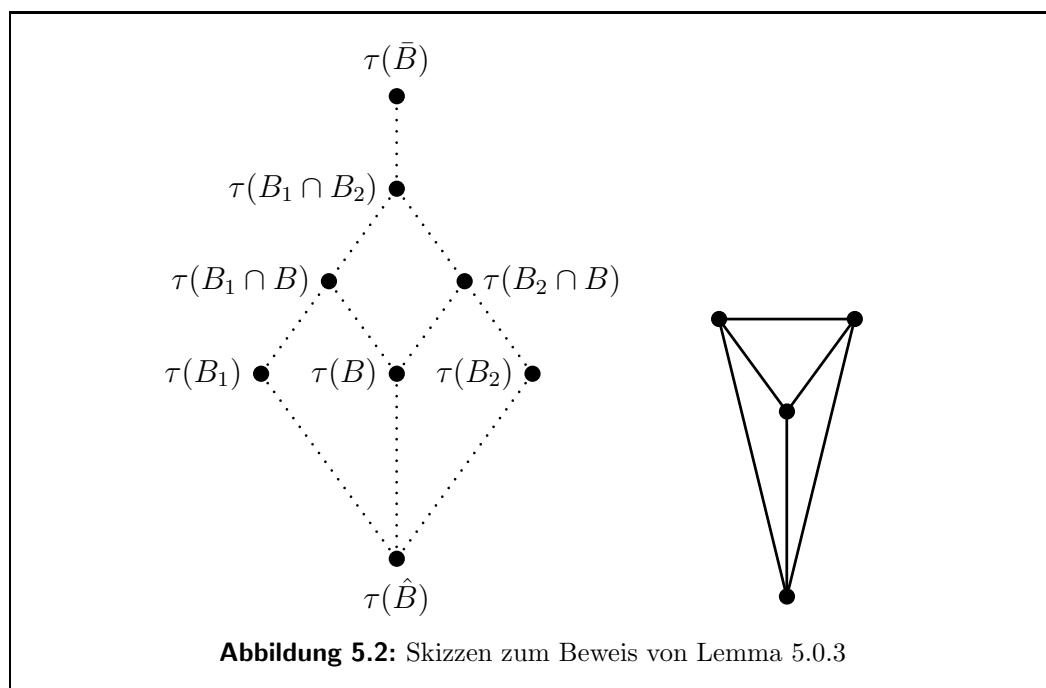
- (c) $B_2 \not\subseteq B, B \not\subseteq B_2,$
- (d) $\bar{B} \subseteq B, \bar{B} \subseteq B_1, \bar{B} \subseteq B_2,$
- (e) $\hat{B} \supseteq B, \hat{B} \supseteq B_1, \hat{B} \supseteq B_2,$
- (f) $\bar{B} \neq \emptyset.$

Da alle Begriffsinhalte des (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes im S-Alphabet $(\mathcal{A}, \Sigma, <)$ S-darstellbar sind, bilden B, B_1, B_2, \bar{B} und \hat{B} Intervalle in $(\mathcal{A}, <)$. Durch eine eingehende Untersuchung der Intervallgrenzen dieser Begriffsinhalte wird im folgenden gezeigt, daß ein Begriff, dessen Ecke aufgrund einer Situation wie in Abbildung 5.1 (links) in einem ebenen Hassediagramm des (\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverbands nicht zum S-Graphen gehört, in keinem anderen ebenen Hassediagramm des Begriffsverbands zum S-Graphen gehören kann.

Es werden folgende Aussagen über Intervalle benötigt:

- (Int. 1) Teilen sich zwei Intervalle das Maximum oder das Minimum, dann bildet eines der Intervalle eine Teilmenge des anderen.
- (Int. 2) Dann und nur dann, wenn für zwei Intervalle B_1 und B_2 sowohl $\max B_1 \geq \max B_2$ als auch $\min B_1 \leq \min B_2$ gilt, bildet B_2 eine Teilmenge von B_1 .
- (Int. 3) Gilt für zwei Intervalle B_1 und B_2 , daß $\max B_1 < \min B_2$, dann ist die Schnittmenge von B_1 und B_2 leer.

Angenommen, es gilt $\max B_2 > \max B$, dann muß $\min B_2 > \min B$ gelten, da sonst $B \subseteq B_2$ wahr wäre (Int. 2). Sei ferner angenommen, daß auch $\max B_1 > \max B$ gilt, dann muß analog $\min B_1 > \min B$ gelten. Aus $\bar{B} \subseteq B_1, \bar{B} \subseteq B_2$ und $\bar{B} \neq \emptyset$ folgt $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$; also gilt $\max(B_1 \cap B_2) = \min\{\max B_1, \max B_2\}$. Aus $\max(B_1 \cap B_2) = \min\{\max B_1, \max B_2\}$ und $\max B_2 > \max B$ und $\max B_1 > \max B$ folgt, daß $\max(B_1 \cap B_2) > \max B$. Also ist $B_1 \cap B_2$ keine Teilmenge von B (Int. 2). Dann muß aber im ebenen Hassediagramm, wie in Abbildung 5.1 (rechts) skizziert, sowohl $\tau(B_1)$ als auch $\tau(B_2)$ mit $\tau(B_1 \cap B_2)$ durch einen aufsteigenden Pfad verbunden sein. Auf keinem dieser zwei Pfade kann eine Ecke liegen, die zu einem Oberbegriff von (A, B) gehört, da $B \not\subseteq B_1 \cap B_2$ gilt. Da aber $\tau(B_1 \cap B_2)$ und $\tau(B)$ durch aufsteigende Pfade

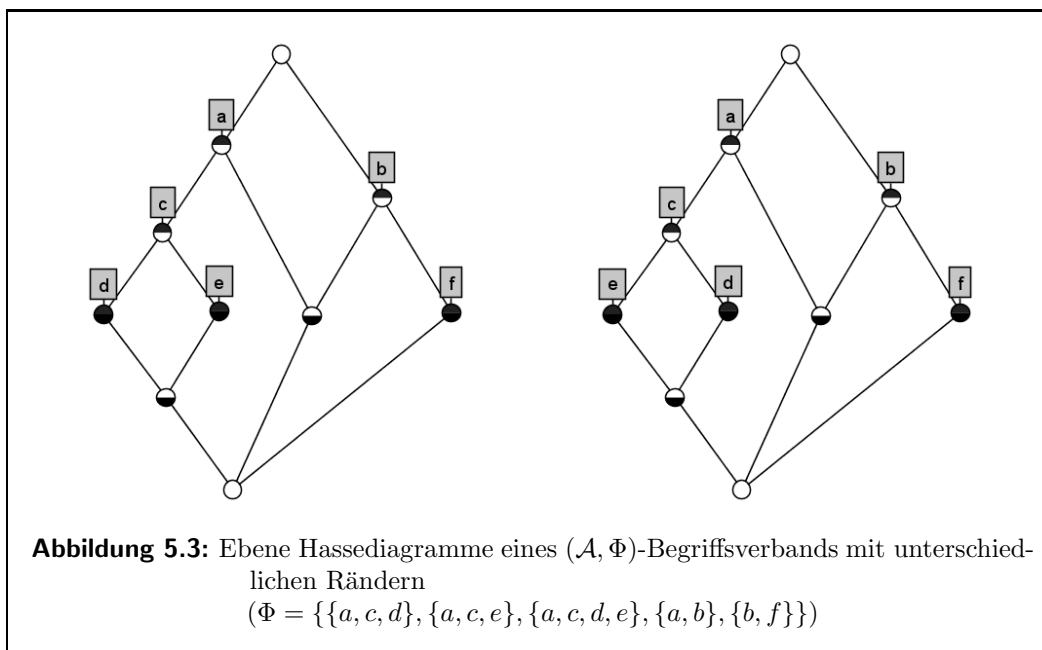


mit $\tau(\bar{B})$ verbunden sind, sind die Kanten in der Zeichnung nicht kreuzungsfrei. Somit kann in Abbildung 5.1 (links) nicht zugleich $\max B_1 > \max B$ und $\max B_2 > \max B$ gelten, wenn die Abbildung einen Ausschnitt eines ebenen Hassediagramms zeigen soll. Daß auch $\max B_1 < \max B$ und $\max B_2 < \max B$ nicht gelten kann, läßt sich analog nachweisen.

Aus den vorangegangenen Überlegungen folgt, daß in Abbildung 5.1 (links) $\max B_1 < \max B$ und $\max B_2 > \max B$ (oder analog $\max B_1 > \max B$ und $\max B_2 < \max B$) gelten muß. Es gelte im folgenden daher $\max B_1 < \max B$ und $\max B_2 > \max B$. Aus den Aussagen (d) und (f) folgt, daß $B_1 \cap B_2$ nicht leer ist. Also muß wegen (Int. 3) die Ungleichung $\max B_1 \geq \min B_2$ gelten. Und aus (Int. 2), (b) und (c) folgt weiter $\min B_1 < \min B$ und $\min B_2 > \min B$. Setzt man diese Ungleichungen zusammen, so erhält man

$$\min B_1 < \min B < \min B_2 \leq \max B_1 < \max B < \max B_2 .$$

Es folgt, daß $B \cap B_1 \neq B \cap B_2$ gilt. Im Hassediagramm müssen also $\tau(B_1 \cap B)$ bzw. $\tau(B_2 \cap B)$ auf aufsteigenden Pfaden von $\tau(B_1)$ bzw. $\tau(B_2)$ nach $\tau(B_1 \cap B_2)$

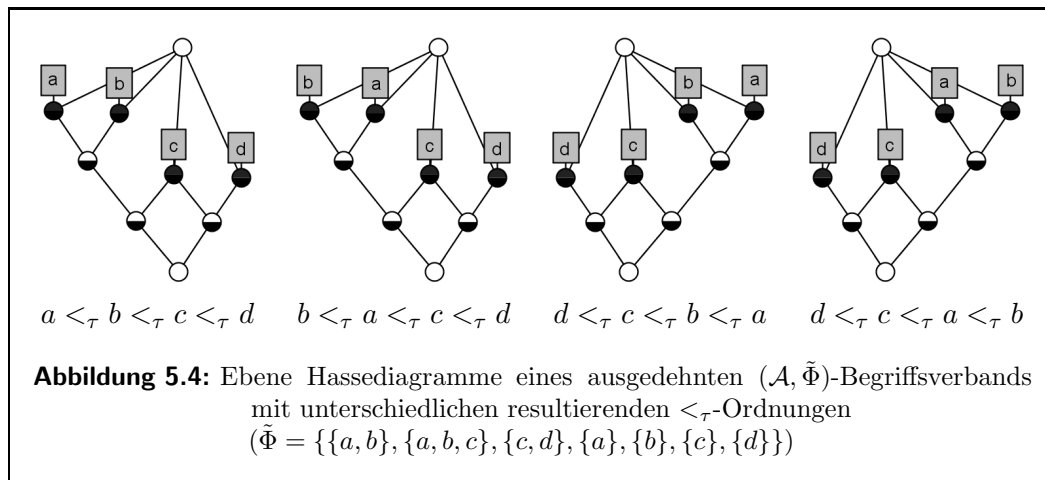


liegen (vgl. linke Skizze in Abbildung 5.2). Zugleich führen zu den Ecken $\tau(B_1 \cap B)$ und $\tau(B_2 \cap B)$ auch aufsteigende Pfade von $\tau(B)$.

Die bisherigen Überlegungen zeigen, daß, wenn eine Ecke eines formalen Begriffs mit nichtleerem Begriffsinhalt B nicht auf dem S-Graphen eines Hassediagramms (G, τ) liegt, dann ist die Ecke in eine Situation wie in Abbildung 5.2 (links) involviert. Da die Ecken $\tau(\hat{B})$, $\tau(B_1)$, $\tau(B_2)$ und $\tau(B)$ einen Dreiecksgraphen bilden, in dessen Inneren $\tau(B)$ liegt (vgl. die rechte Skizze in Abbildung 5.2), kann es kein Hassediagramm (G_1, τ_1) von $\underline{\mathcal{B}}(\Phi, \mathcal{A}, \ni)$ geben, in dem $\tau_1(B)$ auf dem S-Graphen liegt.

Somit wurde gezeigt, daß ein Begriff, dessen Ecke in einem ebenen Hassediagramm eines S-darstellbaren Teilmengensystems (\mathcal{A}, Φ) keine Ecke des S-Graphen ist, in keinem anderen ebenen Hassediagramm eine Ecke des S-Graphen sein kann. Es folgt, daß alle S-Graphen eines S-darstellbaren Teilmengensystems (\mathcal{A}, Φ) isomorph sind. \square

Abbildung 5.3 zeigt, daß sich die Aussage des Lemmas, daß alle S-Graphen eines S-darstellbaren Teilmengensystems isomorph sind, nicht auf die Ränder von Hassediagrammen allgemeiner Teilmengensysteme ausweiten läßt. In



der Abbildung sind zwei Hassediagramme des (\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverbands mit $\Phi = \{\{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, c, d, e\}, \{a, b\}, \{b, f\}\}$ abgebildet. Im linken Hassediagramm liegt die Ecke des Begriffs mit dem Begriffsinhalt $\{d, c, a\}$ auf dem Rand des Hassediagramms, während im rechten Hassediagramm die Ecke dieses Begriffs im Inneren liegt. Die S-Darstellbarkeit des Teilmengensystems ist somit eine notwendige Bedingung für die Isomorphie der S-Graphen.

Die S-Graphen eines S-darstellbaren Teilmengensystems (\mathcal{A}, Φ) sind zwar isomorph, aber die induzierten Ordnungen $<_{\tau}$ können dennoch verschieden sein (vgl. Abbildung 5.4). Um nicht jedesmal mehrere mögliche ebene Zeichnungen des $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ -Begriffsverbands betrachten zu müssen, wird der Begriff eines Laufs durch den S-Graphen eingeführt. Die verschiedenen Läufe durch den S-Graphen von (\mathcal{A}, Φ) bilden die zu verschiedenen S-Alphabeten führenden Möglichkeiten ab, den $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ -Begriffsverband in die Ebene einzubetten.

Definition 5.0.4 Sei (\mathcal{A}, Φ) ein S-darstellbares Teilmengensystem, und sei (G, τ) ein ebenes Hassediagramm des (\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverbands. Ein Lauf durch den S-Graphen $\Delta(G)$ ist eine endliche Sequenz von Ecken des S-Graphen $Q = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$ mit $v_0 = v_n = \tau((\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$, so daß $\{v_{i-1}, v_i\}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ eine Kante des S-Graphen $\Delta(G)$ ist.

Lauf

Ein Lauf Q durch den S-Graphen eines Teilmengensystems (\mathcal{A}, Φ) heißt \mathcal{A} -erschöpfender Lauf, wenn für jedes Element $a \in \mathcal{A}$ die Ecke $\tau(\mu a)$ ein Element der Sequenz Q ist.

\mathcal{A} -erschöpfender Lauf

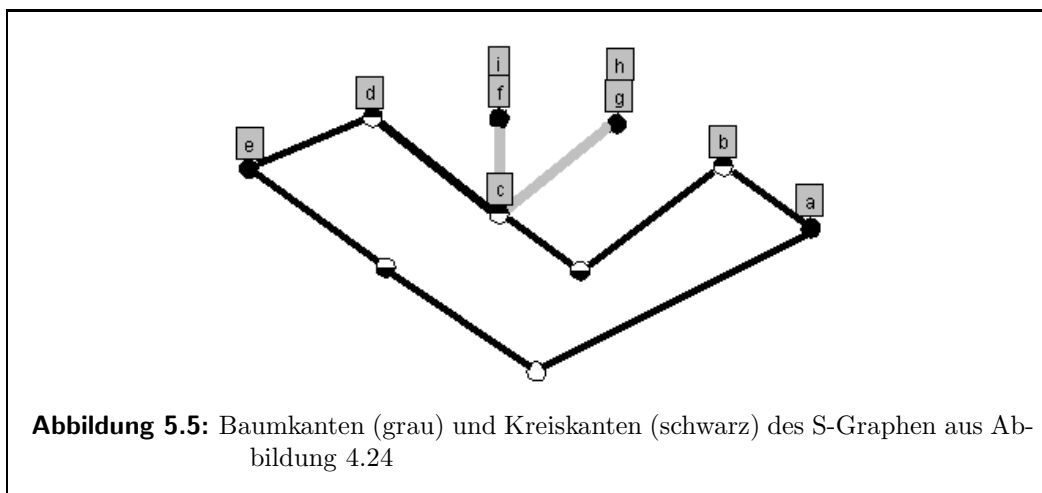


Abbildung 5.5: Baumkanten (grau) und Kreiskanten (schwarz) des S-Graphen aus Abbildung 4.24

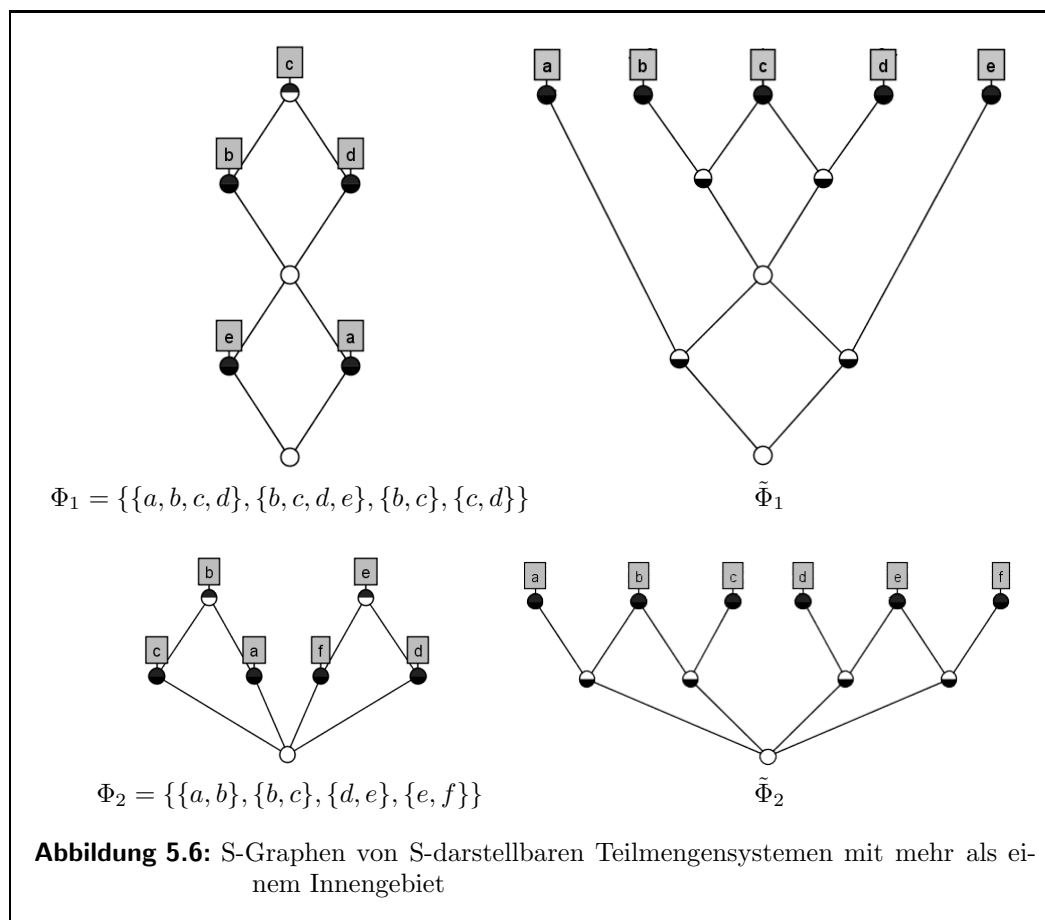
In der Definition eines Laufs Q wird nicht verlangt, daß die Ecken der Sequenz Q paarweise verschieden sind. Eine Ecke kann also während eines Laufs mehrfach erreicht werden. Allerdings werden im folgenden ausschließlich solche Läufe durch S-Graphen betrachtet, die eine Kante des S-Graphen nicht beliebig oft durchlaufen. In S-Graphen gibt es zwei prinzipiell verschiedene Typen von Kanten: sogenannte *Kreiskanten*, die zum Rand des Außen- und eines Innengebiets gehören, und sogenannte *Baumkanten*, die nur zum Rand des Außengebiets gehören. Abbildung 5.5 zeigt die Kreis- und Baumkanten des S-Graphen aus Abbildung 4.24. Die umständliche Formulierung, daß Kreiskanten „zum Rand des Außen- und eines Innengebiets gehören“, ist notwendig, da S-Graphen mehr als ein Innengebiet haben können (vgl. Abbildung 5.6).

Definition 5.0.5 Sei (\mathcal{A}, Φ) ein S-darstellbares Teilmengensystem. Ein \mathcal{A} -erschöpfender Lauf $Q = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$ wird \mathcal{A} -erschöpfender Lauf ohne Redundanzen genannt, wenn er folgende Eigenschaften hat:

- Q durchläuft jede Baumkante $\{v_i, v_j\}$ des S-Graphen genau zweimal, das heißt, es gibt genau zwei Zerlegungen von Q , $Q = u_1 \circ w_1 \circ u_2$ und $Q = z_1 \circ w_2 \circ z_2$ mit $u_1 \neq z_1$, für die gilt: $\{w_1, w_2\} = \{\langle v_i, v_j \rangle, \langle v_j, v_i \rangle\}$.
- Q durchläuft jede Kreiskante $\{v_i, v_j\}$ des S-Graphen genau einmal, das heißt, es gibt genau ein Suffix s von Q , der eines der Präfixe $\langle v_i, v_j \rangle$ oder $\langle v_j, v_i \rangle$ hat.

Kreiskante
Baumkante

\mathcal{A} -erschöpfender Lauf ohne
Redundanzen



Aus den redundanzfreien, \mathcal{A} -erschöpfenden Läufen durch den S-Graphen eines Teilmengensystems (\mathcal{A}, Φ) lassen sich S-Ordnungen von (\mathcal{A}, Φ) generieren. Zur Vereinfachung werden zunächst ausschließlich solche Teilmengensysteme behandelt, deren formale Kontexte bereinigt sind. Das heißt, es wird angenommen, daß für alle $a, b \in \mathcal{A}$ mit $a \neq b$ auch $\mu a \neq \mu b$ gilt (vgl. Definition A.2.4). Aus den S-Ordnungen der bereinigten Teilmengensysteme lassen sich sehr einfach S-Ordnungen der ursprünglichen Teilmengensysteme ableiten, da Elemente aus \mathcal{A} , deren Merkmalbegriffe übereinstimmen, in einer S-Ordnung beliebig gegeneinander ausgetauscht werden können. Man erhält also eine S-Ordnung des ursprünglichen Kontextes, indem man jedes bei der Kontextbereinigung weggefallene Element a aus \mathcal{A} als Nachbar eines Elements b in die S-Ordnung einfügt, für das $\mu a = \mu b$ gilt.

Satz 5.0.6 *Sei (\mathcal{A}, Φ) ein S-darstellbares Teilmengensystem, so daß im (\mathcal{A}, Φ) -Kontext $\mu a \neq \mu b$ für beliebige $a, b \in \mathcal{A}$ mit $a \neq b$ gilt. Sei Q ein \mathcal{A} -erschöpfender Lauf ohne Redundanzen durch den S-Graphen von (\mathcal{A}, Φ) . Ferner sei $Q_{\mathcal{A}}$ eine in Q eingebettete Sequenz, derart daß $|Q_{\mathcal{A}}| = |\mathcal{A}|$ und $\forall a \in \mathcal{A} : \tau(\mu a) \in Q_{\mathcal{A}}$.*

$Q_{\mathcal{A}}$ induziert eine totale Ordnung $<_{Q_{\mathcal{A}}}$ auf \mathcal{A} , die wie folgt definiert ist: $a <_{Q_{\mathcal{A}}} b$ gilt genau dann, wenn $\tau(\mu a)$ in der Sequenz $Q_{\mathcal{A}}$ vor $\tau(\mu b)$ steht. Die resultierende geordnete Menge $(\mathcal{A}, <_{Q_{\mathcal{A}}})$ ist eine S-Ordnung von (\mathcal{A}, Φ) .

Beweis: Sei (\mathcal{A}, Φ) ein S-darstellbares Teilmengensystem, so daß im (\mathcal{A}, Φ) -Kontext $\mu a \neq \mu b$ für beliebige $a, b \in \mathcal{A}$ mit $a \neq b$ gilt. Lemma 4.3.3 und Satz 4.3.5 garantieren, daß es zu jedem S-darstellbaren Teilmengensystem (\mathcal{A}, Φ) einen \mathcal{A} -erschöpfenden Lauf ohne Redundanzen durch den S-Graphen gibt. Sei Q ein solcher Lauf durch den S-Graphen von (\mathcal{A}, Φ) . Da in $Q_{\mathcal{A}}$ jede Ecke eines Merkmalbegriffs genau einmal vorkommt, definiert $Q_{\mathcal{A}}$ eine totale Ordnung auf den Merkmalbegriffen des (\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverbands. Da der (\mathcal{A}, Φ) -Kontext bereinigt ist, folgt, daß auch $(\mathcal{A}, <_{Q_{\mathcal{A}}})$ eine totale Ordnung ist.

Es muß noch gezeigt werden, daß $(\mathcal{A}, <_{Q_{\mathcal{A}}})$ eine S-Ordnung von (\mathcal{A}, Φ) ist, daß also jedes Element φ von Φ ein Intervall in $(\mathcal{A}, <_{Q_{\mathcal{A}}})$ bildet. Aus der Definition des Begriffsverbands und des S-Graphen folgt, daß für jedes $\varphi \in \Phi$ der Schnitt F_{φ} des von φ erzeugten Hauptfilters² des (\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverbands

²Hauptfilter werden in Definition B.5.11 auf Seite 211 definiert.

mit dem S-Graphen ein zusammenhängender Teilgraph des S-Graphen ist. Ferner ist für jedes $a \in \varphi$ die Ecke $\tau(\mu a)$ eine Ecke von F_φ , und für jede Ecke der Form $\tau(\mu a)$ von F_φ gilt, daß a ein Element von φ ist. Im folgenden wird gezeigt, daß es sowohl in Q als auch in $Q_{\mathcal{A}}$ für jedes $\varphi \in \Phi$ eine Teilsequenz gibt, die einerseits nur aus Ecken von F_φ besteht und in der andererseits alle Ecken von Merkmalbegriffen von F_φ vorkommen.

Angenommen, es gibt ein $\varphi \in \Phi$, für das es keine Teilsequenz in Q gibt, die die genannten Bedingungen erfüllt. Da der Schnitt von F_φ mit dem S-Graphen von (\mathcal{A}, Φ) zusammenhängend ist, folgt aus der Definition der \mathcal{A} -erschöpfenden Läufe ohne Redundanzen, daß es eine zweimal in Q vorkommende Ecke $\tau((A, B))$ des S-Graphen und eine Zerlegung von Q mit $Q = Q_p \circ \langle \tau((A, B)) \rangle \circ \bar{Q} \circ \langle \tau((A, B)) \rangle \circ Q_s$ geben muß, für die $B \subseteq \varphi$ und $\forall \tau((A_1, B_1)) \in \bar{Q} : B_1 \not\subseteq \varphi$ gilt. Da der S-Graph ein Teilgraph eines Hassediagramms ist, kann man ihn als gerichteten Graphen auffassen, in dem jede Kante von unten nach oben gerichtet ist. Dann gilt für jede Ecke des S-Graphen, daß sie der Endpunkt von höchstens zwei eingehenden Kanten des S-Graphen ist und daß beide Kanten, falls es zwei eingehende Kanten gibt, Kreiskanten sind. Da Q ein \mathcal{A} -erschöpfender Lauf ohne Redundanzen ist, durchläuft er jede Kreiskante genau einmal. Zusätzlich gilt für jede durchlaufene Baumkante, daß sie zunächst aufwärts und dann abwärts durchlaufen wird. Folglich muß der Lauf Q nach dem ersten Erreichen von $\tau((A, B))$ nach oben laufen; somit ist die Kante $\langle \tau((A, B)), \text{init } \bar{Q} \rangle$ aufwärts gerichtet. Vor dem zweiten Erreichen der Ecke $\tau((A, B))$ führt der Lauf Q nach unten, also ist die Kante $\langle \text{fin } \bar{Q}, \tau((A, B)) \rangle$ abwärts gerichtet. Es folgt, daß für alle $\tau((A_1, B_1)) \in \bar{Q}$ der formale Begriff (A, B) ein Unterbegriff von (A_1, B_1) im (\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverband ist und somit $B_1 \subseteq B \subseteq \varphi$ gilt, was der Annahme $B_1 \not\subseteq \varphi$ widerspricht. Es folgt, daß es für jedes $\varphi \in \Phi$ eine Teilsequenz von Q gibt, die nur aus Ecken von F_φ besteht und in der alle Ecken von Merkmalbegriffen von F_φ vorkommen. Es folgt weiter, daß unabhängig von der Wahl der in Q eingebetteten Sequenz $Q_{\mathcal{A}}$ die Elemente eines Elements φ aus Φ ein Intervall in $(\mathcal{A}, <_{Q_{\mathcal{A}}})$ bilden. Dies beweist, daß $(\mathcal{A}, <_{Q_{\mathcal{A}}})$ eine S-Ordnung von (\mathcal{A}, Φ) ist. \square

Der Satz 4.2.5 aus Unterkapitel 4.2 besagt, daß zu jeder beliebigen S-Ordnung $(\mathcal{A}, <)$ eines S-darstellbaren Teilmengensystems (\mathcal{A}, Φ) der Stufen-

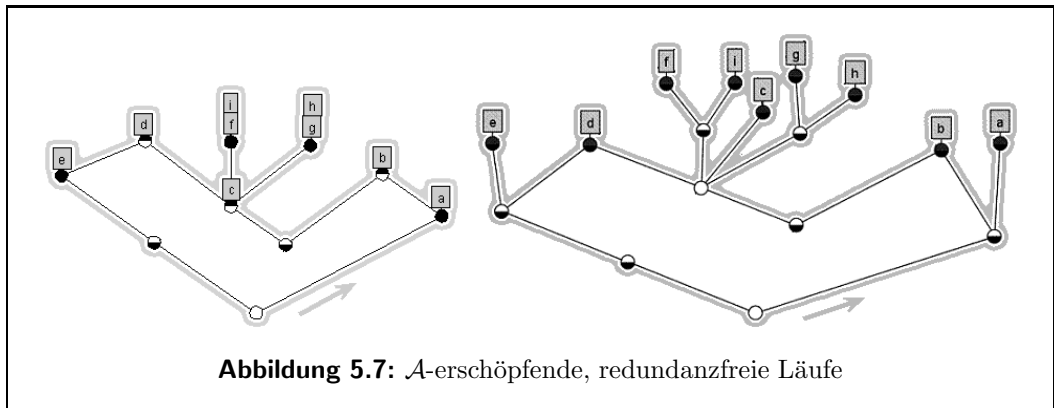


Abbildung 5.7: \mathcal{A} -erschöpfende, redundanzfreie Läufe

graph eine ebene Zeichnung des (\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverbands ist. Mit jeder ebenen Zeichnung korrespondiert ein bestimmter \mathcal{A} -erschöpfender, redundanzfreier Lauf durch den S-Graphen, nämlich der, den man erhält, wenn man den Rand wie in Abbildung 5.7 gegen den Uhrzeigersinn durchläuft. Aus diesem Lauf kann man die Sequenz $Q_{\mathcal{A}}$ aus Satz 5.0.6 so auswählen, daß die induzierte S-Ordnung gleich $(\mathcal{A}, <)$ ist. Da alle Zeichnungen des S-Graphen eines (\mathcal{A}, Φ) -Teilmengensystems isomorph sind (Lemma 5.0.3), findet man zu jeder S-Ordnung $(\mathcal{A}, <)$ einen \mathcal{A} -erschöpfenden, redundanzfreien Lauf Q durch den S-Graphen von (\mathcal{A}, Φ) , der eine eingebettete Sequenz $Q_{\mathcal{A}}$ hat, die die S-Ordnung $(\mathcal{A}, <)$ induziert. Es ist also möglich, jede beliebige S-Ordnung eines S-darstellbaren Teilmengensystems mit der in Satz 5.0.6 beschriebenen Methode zu gewinnen.

Ziel dieses Kapitels ist es, ein Verfahren zu entwickeln, mit dem aus dem S-Graphen eines S-darstellbaren Teilmengensystems, ein *gutes* S-Alphabet gewonnen werden kann. Der Satz 5.0.2 gibt an, wie eine gute S-Ordnung zu einem guten S-Alphabet erweitert wird. Desweiteren sind alle S-Ordnungen eines Teilmengensystems nach Satz 5.0.6 Einbettungen in Läufe durch den S-Graphen. Gesucht ist also ein Lauf durch den S-Graphen, in den eine gute S-Ordnung eingebettet ist. Dieses Problem läßt sich in zwei Teilprobleme zerlegen, von denen im folgenden zunächst das erste Problem gelöst werden wird:

- (1) Gesucht ist ein Verfahren, das in einem gegebenen Lauf eine eingebettete S-Ordnung identifiziert, die zu einem S-Alphabet mit minimaler Markermenge erweitert werden kann.
- (2) Gesucht ist eine Methode zur Bestimmung eines Laufs durch den S-Graphen, in dem mit dem Verfahren in (1) eine gute S-Ordnung identifiziert werden kann.

Zur Lösung des erste Problems wird zunächst von einem festen Lauf durch den S-Graphen eines Teilmengensystems (\mathcal{A}, Φ) ausgegangen und untersucht, wie man zu einer möglichst guten eingebetteten S-Ordnung kommt. Gesucht ist also eine S-Ordnung, die mit einer möglichst kleinen Markermenge zu einem S-Alphabet erweitert werden kann. Nach Satz 5.0.2 bedeutet das, daß es möglichst wenige verschiedene maximale Intervallelemente gibt. Also sollten möglichst viele maximale Intervallelemente zusammenfallen. Daraus folgt, daß wenn im (\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverband $\mu a < \mu b$ gilt, dann sollte $a < b$ in der Begriffsordnung gelten, da a in allen Elementen von Φ vorkommt, in denen auch b vorkommt, aber nicht umgekehrt. Wenn also in einem Lauf durch einen S-Graphen mit $\mu a < \mu b$ das Element $\tau(\mu a)$ sowohl vor, als auch hinter $\tau(\mu b)$ vorkommt, dann sollte das zweite Vorkommen getilgt werden.³ Das führt uns zu folgender Definition:

Definition 5.0.7 Sei (\mathcal{A}, Φ) ein Teilmengensystem, so daß für alle $a, b \in \mathcal{A}$ mit $a \neq b$ auch $\mu a \neq \mu b$ gilt. Sei ferner Q ein redundanzfreier, \mathcal{A} -erschöpfender Lauf durch den S-Graphen von (\mathcal{A}, Φ) . Dann induziert Q eine Ordnung $<_Q$ auf \mathcal{A} , die wie folgt definiert ist: Für zwei Elemente $a, b \in \mathcal{A}$ gilt $a <_Q b$ genau dann, wenn $a \neq b$ und wenn es eine Zerlegung der Sequenz Q mit $Q = Q_p \circ Q_s$ gibt, so daß $\text{init } Q_s = \tau(\mu a)$ und $\tau(\mu b) \notin Q_p$.

Lemma 5.0.8 Sei (\mathcal{A}, Φ) ein Teilmengensystem, so daß für alle $a, b \in \mathcal{A}$ mit $a \neq b$ auch $\mu a \neq \mu b$ gilt, und sei Q ein redundanzfreier, \mathcal{A} -erschöpfender Lauf durch den S-Graphen von (\mathcal{A}, Φ) . Dann ist $(\mathcal{A}, <_Q)$ eine S-Ordnung von (\mathcal{A}, Φ) , für die gilt: Wenn $Q_{\mathcal{A}}$ eine in Q eingebettete Sequenz ist, derart daß $|Q_{\mathcal{A}}| = |\mathcal{A}|$ und $\forall a \in \mathcal{A} : \tau(\mu a) \in Q_{\mathcal{A}}$ gilt, dann ist die nach Satz

³Diese Strategie zur Vermeidung unnötiger Intervallgrenzen ist vergleichbar mit der auf Seite 3.1 f. beschriebenen Strategie von Kiparsky (1991a).

5.0.2 gebildete Markermenge des S-Alphabets $(\mathcal{A}, \Sigma_{Q_{\mathcal{A}}, \min}, <_{Q_{\mathcal{A}, \min}})$ mindestens ebenso mächtig wie die ebenfalls nach Satz 5.0.2 gebildete Markermenge des S-Alphabets $(\mathcal{A}, \Sigma_{<Q, \min}, <_{Q_{\min}})$.

Beweis: Zunächst wird gezeigt, daß $(\mathcal{A}, <_Q)$ eine S-Ordnung von (\mathcal{A}, Φ) ist. Nach Satz 5.0.6 genügt es nachzuweisen, daß es eine in Q eingebettete Sequenz $Q_{\mathcal{A}}$ gibt, für die die S-Ordnung $(\mathcal{A}, <_{Q_{\mathcal{A}}})$ mit $(\mathcal{A}, <_Q)$ übereinstimmt. Im folgenden sei $Q_{\mathcal{A}}$ die in Q eingebettete Sequenz, die für jedes $a \in \mathcal{A}$ das erste Vorkommen von $\tau(\mu a)$ in Q enthält. Da $Q_{\mathcal{A}}$ die Bedingungen aus Satz 5.0.6 erfüllt, ist $(\mathcal{A}, <_{Q_{\mathcal{A}}})$ eine S-Ordnung von (\mathcal{A}, Φ) .

- (1) Wenn $a <_{Q_{\mathcal{A}}} b$ gilt, dann gilt $a <_Q b$: Wähle $Q = Q_p \circ Q_b$ so, daß $\text{init } Q_s = \tau(\mu a)$ und $\tau(\mu a) \notin Q_p$ gilt, dann ist $\text{init } Q_s$ das erste Vorkommen von $\tau(\mu a)$ in Q . Wenn $a <_{Q_{\mathcal{A}}} b$ gilt, dann muß nach der Definition von $Q_{\mathcal{A}}$ auch $\tau(\mu b) \notin Q_p$ gelten, und aus der Definition von $<_Q$ folgt $a <_Q b$.
- (2) Wenn $a <_Q b$ gilt, dann gilt $a <_{Q_{\mathcal{A}}} b$: Wenn $a <_Q b$ gilt, dann gibt es per Definition eine Zerlegung $Q = Q_p \circ Q_s$ mit $\text{init } Q_s = \tau(\mu a)$ und $\tau(\mu b) \notin Q_p$. Folglich muß vor dem ersten Auftreten der Ecke $\tau(\mu b)$ in Q die Ecke $\tau(\mu a)$ vorkommen, und es gilt $a <_{Q_{\mathcal{A}}} b$.

Somit ist $(\mathcal{A}, <_Q)$ die S-Ordnung $(\mathcal{A}, <_{Q_{\mathcal{A}}})$ von (\mathcal{A}, Φ) .

Abschließend muß noch gezeigt werden, daß für jede beliebige in Q eingebettete Sequenz $Q_{\mathcal{A}}$ mit $|Q_{\mathcal{A}}| = |\mathcal{A}|$ und $\forall a \in \mathcal{A} : \tau(\mu a) \in Q_{\mathcal{A}}$ gilt, daß die Markermenge des S-Alphabets $(\mathcal{A}, \Sigma_{<Q, \min}, <_{Q_{\min}})$ höchstens so mächtig ist, wie die Markermenge des nach Satz 5.0.2 gebildeten S-Alphabets $(\mathcal{A}, \Sigma_{Q_{\mathcal{A}}, \min}, <_{Q_{\mathcal{A}, \min}})$.

Wie gezeigt, ist $(\mathcal{A}, <_Q)$ die S-Ordnung, die man aus dem Lauf Q erhält, wenn man für jedes $a \in \mathcal{A}$ alle bis auf erste Vorkommen von $\tau(\mu a)$ in Q löscht. Eine S-Ordnung $(\mathcal{A}, <_{Q_{\mathcal{A}}})$ kann sich nur dann von $(\mathcal{A}, <_Q)$ unterscheiden, wenn es wenigstens ein $a \in \mathcal{A}$ gibt, so daß das erste Vorkommen von $\tau(\mu a)$ in Q bei der Konstruktion von $Q_{\mathcal{A}}$ gelöscht wurde. Sei a im folgenden ein solches Element von \mathcal{A} .

Da $\tau(\mu a)$ mehr als einmal in dem Lauf Q vorkommt, gibt es eine Zerlegung $Q = Q_p \circ \langle \tau(\mu a) \rangle \circ \bar{Q} \circ \langle \tau(\mu a) \rangle \circ Q_s$ mit $\tau(\mu a) \notin Q_p$ und $\tau(\mu a) \notin Q_s$. Nach

dem Beweis von Satz 5.0.6 gilt für alle $\tau(\mu b) \in \bar{Q}$, daß μb ein Oberbegriff von μa ist. Da μa kein Koatom des (\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverbands sein kann (da $\tau(\mu a)$ mehr als einmal in Q auftritt), muß es wenigstens ein $b \in \mathcal{A}$ mit $\tau(\mu b) \in \bar{Q}$ geben. Aus der Definition A.3.1 der Begriffsverbände folgt $\{a\}'' = \{b \mid \mu b \geq \mu a \text{ in } \mathcal{B}(\Phi, \mathcal{A}, \ni)\}$. Sei nun $b \in \mathcal{A}$ so gewählt, daß μb ein Koatom ist, dessen korrespondierende Ecke $\tau(\mu b)$ ein Element der Sequenz \bar{Q} ist, und daß in \bar{Q} hinter $\tau(\mu b)$ keine weitere Ecke eines Koatoms mehr erscheint. Für die S-Ordnung $(\mathcal{A}, <_Q)$ gilt dann: $\max_{<_Q} \{b\}'' = b = \max_{<_Q} \{a\}''$. Somit enthält die Markermenge $\Sigma_{<_Q, \min}$ einen gemeinsamen Marker für die beiden Mengen $\{a\}''$ und $\{b\}''$.

Wenn die eingebettete Sequenz $Q_{\mathcal{A}}$ das letzte Vorkommen von $\tau(\mu a)$ in Q enthält, so gilt für die S-Ordnung $(\mathcal{A}, <_{Q_{\mathcal{A}}})$: $\max_{<_{Q_{\mathcal{A}}}} \{b\}'' = b \neq \max_{<_{Q_{\mathcal{A}}}} \{a\}'' = a$. Dann wäre die Markermenge $\Sigma_{<_{Q_{\mathcal{A}}}, \min}$ mächtiger als die Markermenge $\Sigma_{<_Q, \min}$. Falls die eingebettete Sequenz $Q_{\mathcal{A}}$ das letzte Vorkommen von $\tau(\mu a)$ in Q nicht enthält, so teilen sich in $\Sigma_{<_{Q_{\mathcal{A}}}, \min}$ die beiden Mengen $\{a\}''$ und $\{b\}''$ wie in $\Sigma_{<_Q, \min}$ einen gemeinsamen Marker.

Zusammenfassend läßt sich festhalten, daß die Markermenge des S-Alphabets $(\mathcal{A}, \Sigma_{Q_{\mathcal{A}}, \min}, <_{Q_{\mathcal{A}, \min}})$ immer dann mächtiger ist als die Markermenge des S-Alphabets $(\mathcal{A}, \Sigma_{<_Q, \min}, <_{Q_{\min}})$, wenn die in Q eingebettete Sequenz $Q_{\mathcal{A}}$ wenigstens ein letztes Vorkommen einer mehrfach in Q vorkommenden Ecke des S-Graphen enthält. Anderenfalls ist die Markermenge $\Sigma_{<_{Q_{\mathcal{A}}}, \min}$ ebenso mächtig wie die Markermenge $\Sigma_{<_Q, \min}$. \square

Lemma 5.0.8 löst zusammen mit Satz 5.0.2 das erste Problem von Seite 130. Zur Lösung des zweiten Problems muß ein \mathcal{A} -erschöpfender, redundanzfreier Lauf Q durch den S-Graphen eines Teilmengensystems (\mathcal{A}, Φ) gefunden werden, der die Markermenge des S-Alphabets $(\mathcal{A}, \Sigma_{<_Q, \min}, <_{Q_{\min}})$ minimiert. Zwei \mathcal{A} -erschöpfende, redundanzfreie Läufe Q und Q' , die sich nicht darin unterscheiden, in welcher Richtung sie die Kreiskanten des S-Graphen durchlaufen, induzieren S-Alphabete, deren Markermengen dieselbe Mächtigkeit aufweisen. Denn da jeder \mathcal{A} -erschöpfende, redundanzfreie Lauf jede Baumkante zunächst einmal aufwärts und später abwärts durchläuft, sorgt Definition 5.0.7 einerseits dafür, daß in $(\mathcal{A}, <_Q)$ und in $(\mathcal{A}, <_{Q'})$ die Elemente aus \mathcal{A} , deren Merkmalbegriffe auf einem aufsteigenden Pfad in einem Baumbereich des S-Graphen liegen, in gleicher Weise angeordnet sind. Da andererseits in den

Baumbereichen pro Blatt ein Marker benötigt wird, ist es für die Mächtigkeit der Markermenge unerheblich, in welcher Reihenfolge die Äste durchlaufen werden.

Dieser Zusammenhang wird hier an dem Beispiel in Abbildung 5.8 verdeutlicht. Die Abbildung zeigt den S-Graphen des Teilmengensystems (\mathcal{A}, Φ) mit

$$\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\} \text{ und}$$

$$\Phi = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, d, e, f\}, \{a, b, c, d, e, f, g\}, \\ \{e\}, \{a, b, c, d, e, f, g\}, \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \{a, b, c, d, e, f, g, i\}\} .$$

Ersetzt man in dem in der linken Skizze dargestellten Lauf die Ecken der Merkmalbegriffe durch die entsprechenden Elemente von \mathcal{A} , so erhält man die Sequenz:

$$h \ g \ f \ e \ \cancel{d} \ c \ b \ \cancel{a} \ \cancel{c} \ \cancel{d} \ \cancel{f} \ g \ i.$$

Die Bestandteile der Sequenz, die nicht zu der eingebetteten S-Ordnung $(\mathcal{A}, <_Q)$ aus Definition 5.0.7 gehören, sind in der Darstellung durchgestrichen. Verfährt man entsprechend mit dem Lauf in der rechten Skizze, so erhält man die Sequenz

$$h \ g \ f \ d \ c \ a \ \cancel{b} \ \cancel{e} \ \cancel{d} \ e \ \cancel{f} \ g \ i.$$

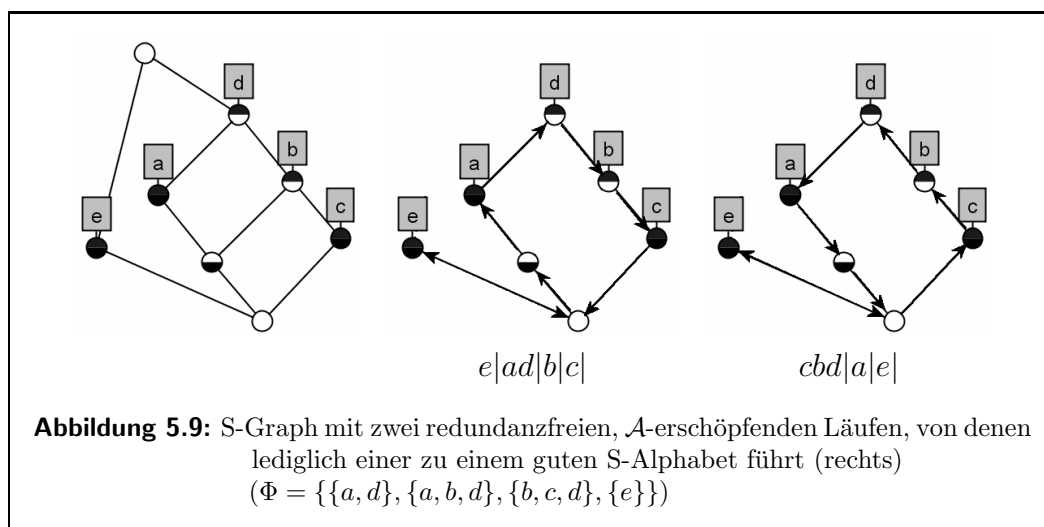
Berechnet man zu beiden S-Ordnungen ein minimales S-Alphabet gemäß Satz 5.0.2, so erhält man für die linke Skizze das S-Alphabet

$$hgfe|dcb|a|i|$$

und für die rechte Skizze

$$hgfdca|b|e|i| .$$

Die Markermengen (hier dargestellt durch senkrechte Striche) der beiden S-Alphabete unterscheiden sich nicht in ihrer Mächtigkeit.



Da also die Richtung und die Reihenfolge, in der die Baumkanten des S-Graphen durchlaufen werden, keine Rolle spielen, geht es bei der Suche nach einem Lauf, aus dem ein gutes S-Alphabet generiert werden kann, ausschließlich darum, die Richtung, in der die Kreiskanten durchlaufen werden, geschickt zu wählen. Es ist wünschenswert, die Kanten so zu durchlaufen, daß möglichst selten, direkt nachdem eine Ecke eines Merkmalbegriffs zum ersten Mal erreicht wird, der Lauf nach unten führt, da in einem solchen Fall in einem nach Satz 5.0.2 konstruierten S-Alphabet ein Marker hinter dem Merkmal eingefügt werden muß. Für Ecken von Merkmalbegriffen, die mehr als einen direkten oberen Nachbarn im Begriffsverband haben, gilt, daß der Lauf, nachdem eine solche Ecke zum ersten Mal erreicht wird, immer nach oben führt. Daher spielen derartige Ecken bei der Wahl eines geeigneten Laufs keine Rolle. Vereinfacht ausgedrückt, geht es also darum, einen Lauf durch die Kreiskanten des S-Graphen zu finden, der beim Aufwärtslaufen möglichst viele und beim Abwärtslaufen möglichst wenige Ecken von Merkmalbegriffen passiert, die genau einen oberen Nachbarn im Begriffsverband haben.

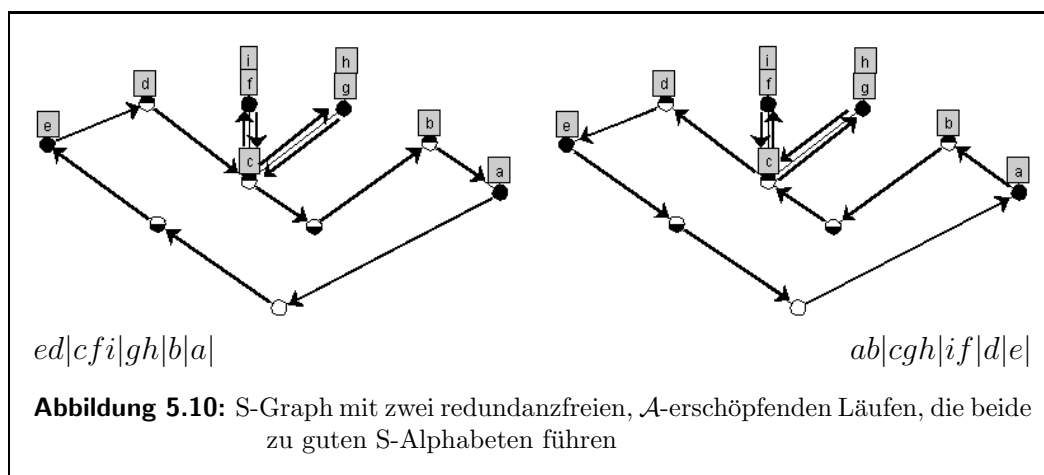
Für das in Abbildung 5.9 dargestellte Beispiel bedeutet das, daß der rechte Lauf vorzuziehen ist, da er im Abwärtslauf lediglich zwei Ecken von Merkmalbegriffen passiert, die zu Kreiskanten gehören. Für den in der mittleren Skizze dargestellten Lauf liegt die Zahl der problematischen Ecken bei drei, was da-

zu führt, daß das von diesem Lauf induzierte S-Alphabet ein Markerelement mehr benötigt als das von dem rechten Lauf induzierte.

Die Überlegungen dieses Kapitels lassen sich in folgender Anweisung zur Konstruktion eines *guten* S-Alphabets aus dem S-Graphen eines beliebigen S-darstellbaren Teilmengensystems zusammenfassen:

Um ein gutes S-Alphabet eines S-darstellbaren Teilmengensystems (\mathcal{A}, Φ) zu erlangen, zeichne den S-Graphen von (\mathcal{A}, Φ) , und verfare wie folgt:

- (1) Wähle einen redundanzfreien Lauf durch den S-Graphen, der die Ecken aller Merkmalbegriffe passiert und bei dem die Zahl der beim Abwärtslaufen durchlaufenen Ecken von Merkmalbegriffen mit genau einem oberen Nachbarn minimal ist.
- (2) Beginne mit der leeren Sequenz den gewählten Lauf ausgehend von der Ecke des kleinsten Begriffs Kante für Kante zu durchlaufen, und modifiziere dabei die Sequenz wie folgt:
 - a) Modifikation der Sequenz in Abhängigkeit von der soeben durchlaufenen Kante:
 - Endet die Sequenz bereits mit einem Markerelement, so wird sie nicht modifiziert.
 - Endet die Sequenz nicht mit einem Markerelement und wird die Kante abwärts durchlaufen, so wird ein neues, noch nicht genutztes Markerelement an die Sequenz angehängt.
 - Wird die Kante aufwärts durchlaufen, so wird die Sequenz nicht modifiziert.
 - b) Modifikation der Sequenz in Abhängigkeit von der soeben erreichten Ecke:
 - Gelangt man zu einer Ecke eines oder mehrerer Merkmalbegriffe $\mu a_1 \dots \mu a_n$, so hängt man alle Elemente a_i , die nicht bereits Elemente der Sequenz sind, in beliebiger Reihenfolge an die Sequenz an.
 - Ist die erreichte Ecke keine Ecke eines Merkmalbegriffs, so wird die Sequenz nicht modifiziert.



Das Verfahren endet, wenn die Ausgangsecke des kleinsten Begriffs wieder erreicht ist. Die konstruierte Sequenz bestehend aus Markerelementen und den Elementen von \mathcal{A} kann als totale Ordnung der Vereinigung dieser beiden Mengen aufgefaßt werden. Die Sequenz bildet ein *gutes* S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) .

Das beschriebene Verfahren wird am Beispiel des S-darstellbaren Teilmengensystems mit

$$\Phi = \{\{d, e\}, \{b, c, d, f, g, h, i\}, \{a, b\}, \{f, i\}, \{c, d, e, f, g, h, i\}, \{g, h\}\}$$

verdeutlicht, dessen Begriffsverband und S-Graph in Abbildung 4.24 auf Seite 109 dargestellt ist. Abbildung 5.10 zeigt, daß es für dieses Beispiel unerheblich ist, in welcher Richtung die Kreiskanten des S-Graphen durchlaufen werden. Es werden im Abwärtslauf durch die Kreiskanten immer zwei Ecken von Merkmalbegriffen mit genau einem oberen Nachbarn durchlaufen (links: μe und μd ; rechts: μa und μb).

Die Bildsequenz in Abbildung 5.11 veranschaulicht, wie aus dem linken Lauf in Abbildung 5.10 ein gutes S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) gewonnen wird: Der erste Merkmalbegriff, den der Lauf erreicht, ist μe , daher wird zunächst e an die leere Sequenz angehängt (1). Der Weg zum nächsten Merkmalbegriff μd führt stetig aufwärts, daher wird d direkt an die Sequenz e gehängt (2). Nach μd

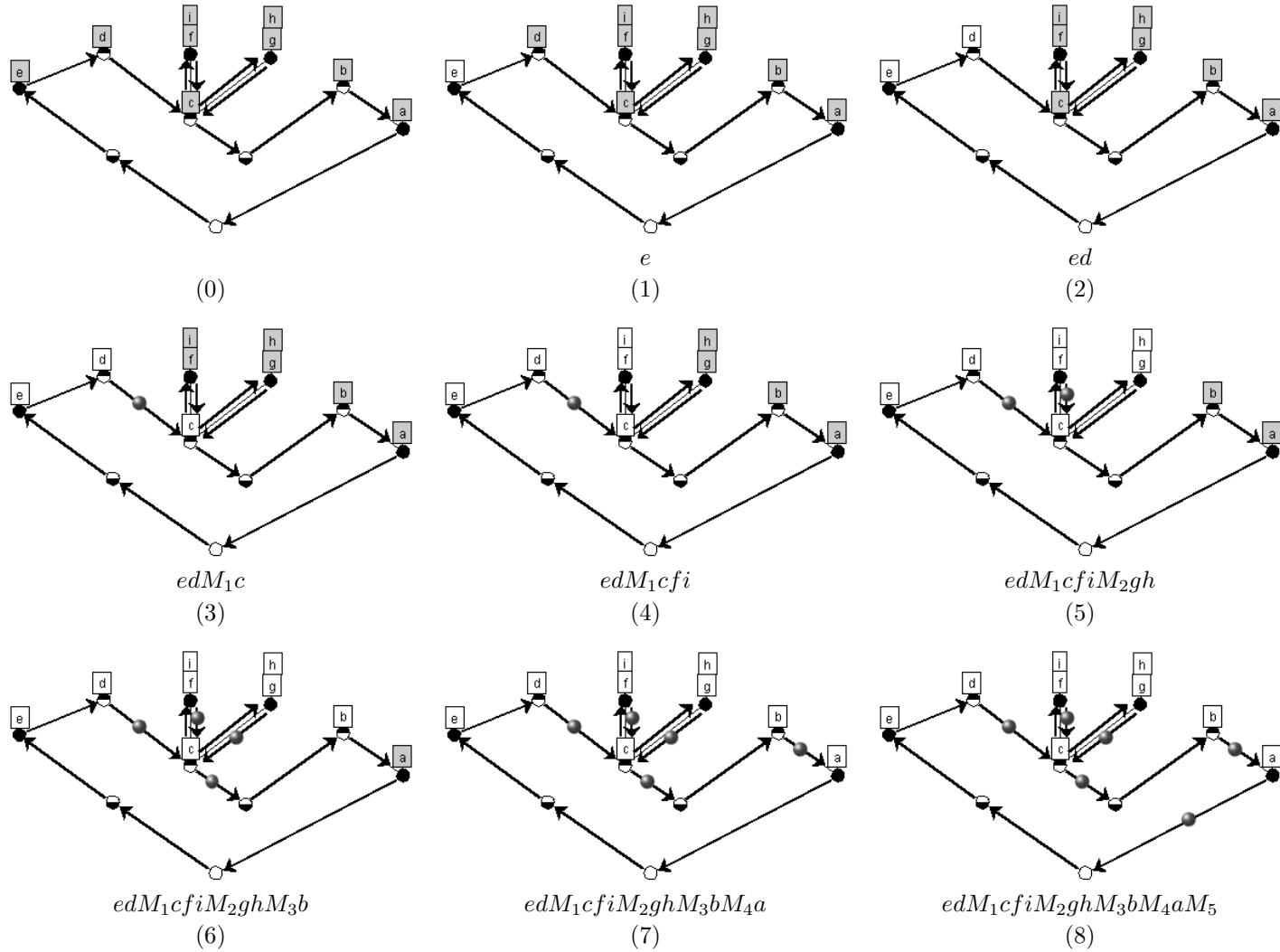


Abbildung 5.11: Bildsequenz zur Bestimmung eines guten S-Alphabets eines S-darstellbaren Teilmengensystems

führt der Lauf abwärts, daher muß ein Markerelement M_1 hinzugenommen werden, bevor das Element c für den nächsten Merkmalbegriff hinzukommt (3). Im nächsten Schritt, der aufwärts führt, und daher keine neuen Markerelemente erforderlich macht, kann die Sequenz edM_1c in beliebiger Reihenfolge um die Elemente f und i verlängert werden, da $\mu f = \mu i$ gilt (4). Folgt man dem Lauf weiter bis zur Ecke von μg , so geht es zunächst nach unten, wofür ein neues Markerelement M_2 zur Sequenz hinzugenommen werden muß. Das erneute Passieren der Ecke von μc hat keine Auswirkung auf die Sequenz. Die Elemente h und g können wiederum in beliebiger Reihenfolge angefügt werden (5). Obwohl der Lauf von μg nach μb zwei Abwärtsschritte beinhaltet, muß hierfür lediglich ein neues Markerelement M_3 sowie das Element b zur Sequenz hinzugenommen werden (6). Der nächste Schritt zu der Ecke von μa verlängert die Sequenz um einen weiteren Marker M_4 und um a (7). Der letzte Schritt führt abwärts zurück zu dem Ausgangspunkt des Laufs und somit zu der Ecke des kleinsten Begriffs des Begriffsverbands; es muß wiederum ein neues Markerelement angefügt werden (8).

Das vorgestellte Verfahren zu Konstruktion guter S-Alphabete von S-darstellbaren Teilmengensystemen ist weder deterministisch noch erschöpfend.

Aus dem Beweis von Lemma 5.0.8 auf Seite 131 wird deutlich, daß ein Verfahren, das immer das erste Vorkommen eines Elements eines \mathcal{A} -erschöpfenden, redundanzfreien Laufs auswählt, nicht erschöpfend ist. Denn immer wenn eine Ecke eines Merkmalbegriffs mehr als zweimal in dem Lauf vorkommt, ist es für die Mächtigkeit der Markermenge des induzierten S-Alphabets unerheblich, welches Vorkommen in der eingebetteten Sequenz erhalten bleibt, solange es nicht das letzte Vorkommen ist. Bezogen auf das Beispiel aus Abbildung 5.10 bedeutet das, daß c in einem guten S-Alphabet entweder unmittelbar vor der Sequenz stehen muß, die aus den Elementen f , i , g und h gebildet wird, oder zwischen der Sequenz aus den Elementen f und i und der Sequenz aus den Elementen g und h . So sind zum Beispiel auch $ed|fi|cgh|b|a|$ und $ab|gh|c|f|d|e|$ gute S-Alphabete des Teilmengensystems aus der Abbildung. Die bisherigen Überlegungen zeigen, wie das beschriebene Verfahren zu einem erschöpfenden Verfahren erweitert werden könnte.

Das vorgestellte Verfahren zur Konstruktion guter S-Alphabete von S-darstellbaren Teilmengensystemen ist nicht deterministisch. Denn zum einen kann die Reihenfolge zweier Elemente, deren korrespondierende Merkmalbe-

griffe gleich sind, im S-Alphabet frei gewählt werden. Zum anderen führen alternative Läufe, die sich nur in der Art, wie die Baumbereiche des S-Graphen durchlaufen werden, unterscheiden, zu anderen ebenfalls guten S-Alphabeten. Die Zahl der guten S-Alphabete erhöht sich noch, wenn wie in dem diskutierten Beispiel weitere geeignete Läufe existieren, die einige der Kreiskanten in entgegengesetzter Richtung durchlaufen (vgl. Abbildung 5.10).

Insgesamt erhält man für das untersuchte Teilmengensystem 32 gute S-Alphabete; diese Zahl ergibt sich wie folgt:

$$32 = \underset{f \text{ vor/nach } i}{2} \times \underset{g \text{ vor/nach } h}{2} \times \underset{\text{Ast } fi \text{ vor/nach}}{2} \times \underset{\text{Ast } gh}{2} \times \underset{\text{Lauf rechts-/linksherum}}{2} \times \underset{1./2. c}{2}$$

Genaugenommen existieren sogar unendlich viele gute S-Alphabete zu diesem Teilmengensystem, da die gewählte Markermenge natürlich durch eine beliebige andere, ebenso mächtige Menge ersetzt werden kann, deren Schnitt mit der Menge \mathcal{A} leer ist. Das entwickelte Verfahren zur Konstruktion guter S-Alphabete fixiert lediglich die Position der Markerelemente in den S-Alphabeten.

6 Konstruktion perfekt erweiterter S-Alphabete

Die vorangegangenen Kapitel haben die Charakterisierung von S-darstellbaren Teilmengensystemen und die Konstruktion guter S-Alphabete zu S-darstellbaren Teilmengensystemen behandelt. In diesem Kapitel geht es um Teilmengensysteme, die nicht S-darstellbar sind, und die Frage, wie diese erweitert werden können, um eine S-Darstellung zu erlangen. Bereits in Unterkapitel 3.2 ist gezeigt worden, daß für beliebige Teilmengensysteme eine solche Erweiterung durch Verdopplung von Elementen immer möglich ist. Hier geht es nun darum, eine Erweiterung zu finden, die die Zahl der benötigten Verdopplungen minimiert.

Das Problem der Identifizierung minimaler Erweiterungen ist insofern schwer, als daß sich S-darstellbare Teilmengensysteme dadurch auszeichnen, daß die Begriffsverbände ihrer Ausdehnungen Hasse-plättbar sind. Für den Nachweis, daß der auf Pāṇinis *Aṣṭādhyāyī* beruhende *Pratyāhāra*-Begriffsverband (vgl. Abbildung 3.4, S. 65) nicht Hasse-plättbar ist, ist in Unterkapitel 4.2 das Kriterium für die Plättbarkeit von allgemeinen Graphen von Kuratowski eingesetzt worden (vgl. Abbildung 4.14, S. 97). Kuratowskis Kriterium ist jedoch ein negatives Kriterium, das ausschließlich dazu eingesetzt werden kann, um nachzuweisen, daß ein Graph nicht plättbar ist. Im Laufe dieses Kapitels werden weitere Ergebnisse aus der aktuellen Forschung zur Plättbarkeit von Graphen und insbesondere von Begriffsverbänden dargestellt, die eingesetzt werden können, um optimale Erweiterungen von Teilmengensystemen zu finden, und so letztlich zu *perfekten* S-Alphabeten zu gelangen (vgl. Definition 3.3.8 auf Seite 68). Bevor jedoch in Unterkapitel 6.2 näher auf das allgemeine Problem der minimalen Erweiterung von Teilmengensystemen zur Erlangung perfekter S-Alphabete eingegangen wird,

untersucht das folgende Unterkapitel zunächst Pāṇinis *Pratyāhāras*, um die Frage zu klären, ob Pāṇinis *Śivasūtras* *perfekt* sind.

6.1 Pāṇinis Śivasūtras als perfekt erweitertes S-Alphabet

Für den Nachweis, daß Pāṇinis *Śivasūtras* ein *perfekt* erweitertes S-Alphabet bilden, muß zunächst gezeigt werden, daß sie *optimal* sind. Optimal erweiterte S-Alphabete müssen zwei Bedingungen erfüllen (Definition 3.3.7, S. 67): Erstens muß das Objektalphabet des S-Alphabets minimal sein und zweitens darf es kein anderes erweitertes S-Alphabet geben, das auf der Verdopplung derselben Elemente beruht, aber mit weniger Markern auskommt.

Die erste Bedingung kann für Pāṇinis *Śivasūtras* mithilfe zweier Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel nachgewiesen werden: Zum einen bilden Pāṇinis *Śivasūtras* ein erweitertes S-Alphabet, in dem lediglich ein Element, nämlich *h*, zweimal auftritt (vgl. Unterkapitel 2.4). Folglich läßt sich das Teilmengensystem, das durch die in den *Aṣṭādhyāyī* verwendeten *Pratyāhāras* definiert wird, mit einem erweiterten S-Alphabet darstellen, das mit einer Verdopplung auskommt. Somit kann nach Definition 3.3.7 ein optimal erweitertes S-Alphabet zu Pāṇinis *Pratyāhāras* kein Objektalphabet mit mehr als 43 Elementen haben. Zum anderen besagt aber Satz 4.2.7 auf Seite 97, daß das Teilmengensystem der in den *Aṣṭādhyāyī* vorkommenden *Pratyāhāras* ohne Erweiterung nicht S-darstellbar ist. Somit stellt die eine Verdopplung in den *Śivasūtras* auch eine Untergrenze für die Zahl der benötigten Verdopplungen in einem S-Alphabet von Pāṇinis *Pratyāhāras* dar. Die *Śivasūtras* erfüllen also die erste Bedingung eines *optimal* erweiterten S-Alphabets aus Definition 3.3.7 auf Seite 67.

Als nächstes wird gezeigt, daß Pāṇinis *Śivasūtras* auch die zweite Bedingung optimal erweiterter S-Alphabete erfüllen. Dazu wird Pāṇinis *Pratyāhāra*-Teilmengensystem im folgenden kurz mit (\mathcal{A}, Φ) bezeichnet; der (\mathcal{A}, Φ) -Kontext ist in Abbildung 3.4 auf Seite 65 wiedergegeben. Mit $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi})$ wird das erweiterte Teilmengensystem von (\mathcal{A}, Φ) bezeichnet, das sich aus Pāṇinis *Śivasūtras* ergibt. Die Menge $\hat{\mathcal{A}}$ besteht also aus 43 Elementen, und es gilt $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \{h'\}$, wobei \mathcal{A} die Menge der 42 verschiedenen Lautelemente der

Śivasūtras und h' die Kopie von h ist. Der $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi})$ -Kontext ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Die in Definition 3.3.6 auf Seite 66 geforderte surjektive Abbildung $\vartheta : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$ ist folgendermaßen definiert:

$$\vartheta(a) = \begin{cases} a & \text{wenn } a \neq h' , \\ h & \text{wenn } a = h' . \end{cases}$$

Um zu beweisen, daß die *Śivasūtras* auch die zweite Bedingung der Definition 3.3.7 erfüllen, muß zum einen gezeigt werden, daß die *Śivasūtras* ein gutes S-Alphabet von $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi})$ sind, und daß es zum anderen kein anders erweitertes Teilmengensystem $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi}')$ gibt, das ein gutes S-Alphabet mit kleinerer Markermenge hat.

Der Nachweis, daß die *Śivasūtras* ein gutes S-Alphabet des $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi})$ -Teilmengensystems bilden, gelingt mit den Ergebnissen des Kapitels 5: Abbildung 6.2 zeigt den $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi})$ -Begriffsverband ohne den Begriff mit leerem Begriffsinhalt.¹ Wendet man auf den S-Graphen dieses Begriffsverbands das auf Seite 137 beschriebene Verfahren zur Gewinnung guter S-Alphabete an, so geht es zunächst darum, einen Lauf durch den S-Graphen zu wählen, der, während er entlang von Kreiskanten abwärts führt, möglichst wenige Merkmalbegriffe passiert. Der in der Abbildung in der kleinen, oberen Skizze dargestellte Lauf gegen den Uhrzeigersinn erfüllt diese Bedingung. Folgt man diesem Lauf durch den S-Graphen, so müssen an 14 Positionen Markerelemente in das induzierte S-Alphabet eingefügt werden. Die Stellen, die das Einfügen eines Markerelements erforderlich machen, sind in der Abbildung durch schwarze, senkrechte Striche links neben den Merkmalen gekennzeichnet, hinter die ein Markerelement eingefügt werden muß. Die 17 gestrichelten Linien rechts neben einigen Merkmalen markieren die Stellen, an denen Markerelemente eingefügt werden müßten, wenn der S-Graph andersherum (im Uhrzeigersinn) durchlaufen würde. Aus den Überlegungen in Kapitel 5 folgt, daß der in der kleinen, oberen Skizze dargestellte Lauf gegen den Uhrzeigersinn ein gutes S-Alphabet von $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi})$ induziert. Dies ist aber gerade

¹Eine Legende zu den Beschriftungen in Abbildung 6.2 findet sich in Abbildung 6.3. Sie wird benötigt, da das Programm `ConExp`, mit dem die Zeichnungen nahezu aller Begriffsverbände dieser Arbeit erstellt worden sind, die Eingabe von Sonderzeichen nicht zuläßt.

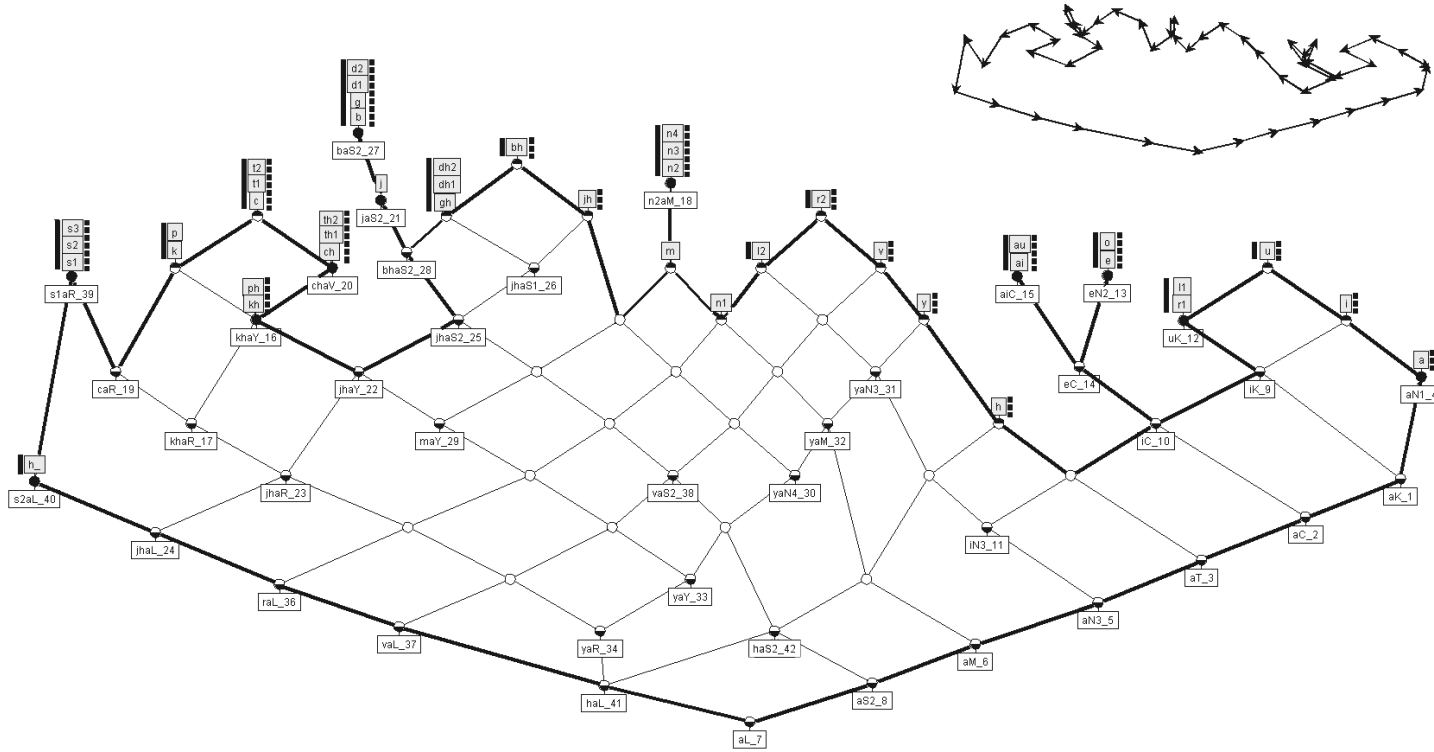


Abbildung 6.2: Begriffsverband (ohne Begriff mit leerem Begriffsinhalt) zu dem erweiterten *Pratyāhāra*-Kontext aus Abbildung 6.1

a	<i>a</i>	अ	bh	<i>bha</i>	भ	N1	\dot{N}	ण
i	<i>i</i>	इ	gh	<i>gha</i>	घ	N2	\ddot{N}	ङ
u	<i>u</i>	उ	dh1	<i>dha</i>	ढ	N3	\dot{N}	ण
r1	<i>r</i>	ऋ	dh2	<i>dha</i>	ध	N4	\tilde{N}	ञ
l1	<i>l</i>	ऌ	j	<i>ja</i>	ज	K	<i>K</i>	क
e	<i>e</i>	ए	b	<i>ba</i>	ब	C	<i>C</i>	च
o	<i>o</i>	ओ	g	<i>ga</i>	ग	T	\dot{T}	ट
ai	<i>ai</i>	ऐ	d1	<i>da</i>	ड	M	<i>M</i>	म
au	<i>au</i>	औ	d2	<i>da</i>	द	S1	\dot{S}	ष
h, h_	<i>ha</i>	ह	kh	<i>kha</i>	ख	S2	\dot{S}	श
y	<i>ya</i>	य	ph	<i>pha</i>	फ	V	<i>V</i>	व
v	<i>va</i>	व	ch	<i>cha</i>	छ	Y	<i>Y</i>	य
r2	<i>ra</i>	र	th1	<i>tha</i>	ठ	R	<i>R</i>	र
l2	<i>la</i>	ल	th2	<i>tha</i>	थ	L	<i>L</i>	ल
m	<i>ma</i>	म	c	<i>ca</i>	च			
n1	<i>ña</i>	ञ	t1	<i>ta</i>	ट			
n2	<i>na</i>	ङ	t2	<i>ta</i>	त			
n3	<i>ṇa</i>	ण	k	<i>ka</i>	क			
n4	<i>na</i>	न	p	<i>pa</i>	प			
jh	<i>jha</i>	झ	s1	<i>śa</i>	श			
			s2	<i>ṣa</i>	ष			
			s3	<i>sa</i>	स			

Abbildung 6.3: Legende zur Abbildung 6.2

der Lauf, der auch Pāṇinis *Śivasūtras* induziert. Folglich bilden die *Śivasūtras* ein gutes S-Alphabet des $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi})$ -Teilmengensystems.

Um nachzuweisen, daß es kein anderes erweitertes Teilmengensystem $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi}')$ gibt, das ein gutes S-Alphabet mit weniger als 14 Markerelementen hat, wird zunächst der in Abbildung 6.4 abgebildete Begriffsverband des Teilmengensystems (\mathcal{A}_h, Φ_h) näher untersucht. Hierbei ist (\mathcal{A}_h, Φ_h) das Teilmengensystem, das man erhält, wenn man das Element h vollständig aus dem (\mathcal{A}, Φ) -Kontext entfernt. Für (\mathcal{A}_h, Φ_h) gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_h &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A} \setminus \{h\} , \\ \Phi_h &\stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \setminus \{h\} \mid \varphi \in \Phi\} .\end{aligned}$$

Das Teilmengensystem (\mathcal{A}_h, Φ_h) ist nach Satz 4.3.5 S-darstellbar, da Abbildung 6.4 ein ebenes Hassediagramm des (\mathcal{A}_h, Φ_h) -Begriffsverbands zeigt, in dem alle Merkmalbegriffe des (\mathcal{A}_h, Φ_h) -Kontextes zum S-Graphen gehören. In der Abbildung sind wiederum die Stellen, an denen bei einem Lauf durch den S-Graphen Markerelemente in das generierte S-Alphabet eingefügt werden müßten, markiert. Hierbei markieren die grauen Striche die bei einem Lauf gegen den Uhrzeigersinn benötigten 16 Markerelemente, während die schwarzen Striche anzeigen, daß bei einem Lauf im Uhrzeigersinn 13 Marker ausreichen, um ein S-Alphabet von (\mathcal{A}_h, Φ_h) zu konstruieren. Folglich umfaßt ein gutes S-Alphabet von (\mathcal{A}_h, Φ_h) nur ein Markerelement weniger als ein gutes S-Alphabet von $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi})$. Ein Beispiel eines guten S-Alphabets von (\mathcal{A}_h, Φ_h) ist:

$$\begin{aligned}a \ i \ u \ M_1 \ r \ l \ M_2 \ e \ o \ M_3 \ ai \ au \ M_4 \\ y \ v \ r \ M_5 \ l \ M_6 \ \tilde{n} \ m \ \dot{n} \ \grave{n} \ n \ M_7 \ jh \ bh \ M_8 \ gh \ \grave{d}h \ dh \ M_9 \\ j \ b \ g \ \grave{d} \ d \ M_{10} \ kh \ ph \ ch \ \grave{t}h \ th \ c \ \grave{t} \ t \ M_{11} \ k \ p \ M_{12} \acute{s} \ \grave{s} \ s \ M_{13}\end{aligned}$$

Es stellt sich nun die Frage, ob es möglich ist, zwei Kopien von h so in das S-Alphabet von (\mathcal{A}_h, Φ_h) einzufügen, daß ein erweitertes S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) entsteht, ohne daß dazu ein zusätzlicher Marker eingefügt werden muß. Diese Frage ist zu verneinen, wie die Skizze in Abbildung 6.5 zeigt, in der wiederum der (\mathcal{A}_h, Φ_h) -Begriffsverband dargestellt ist. Die 12 grauen Kreis-

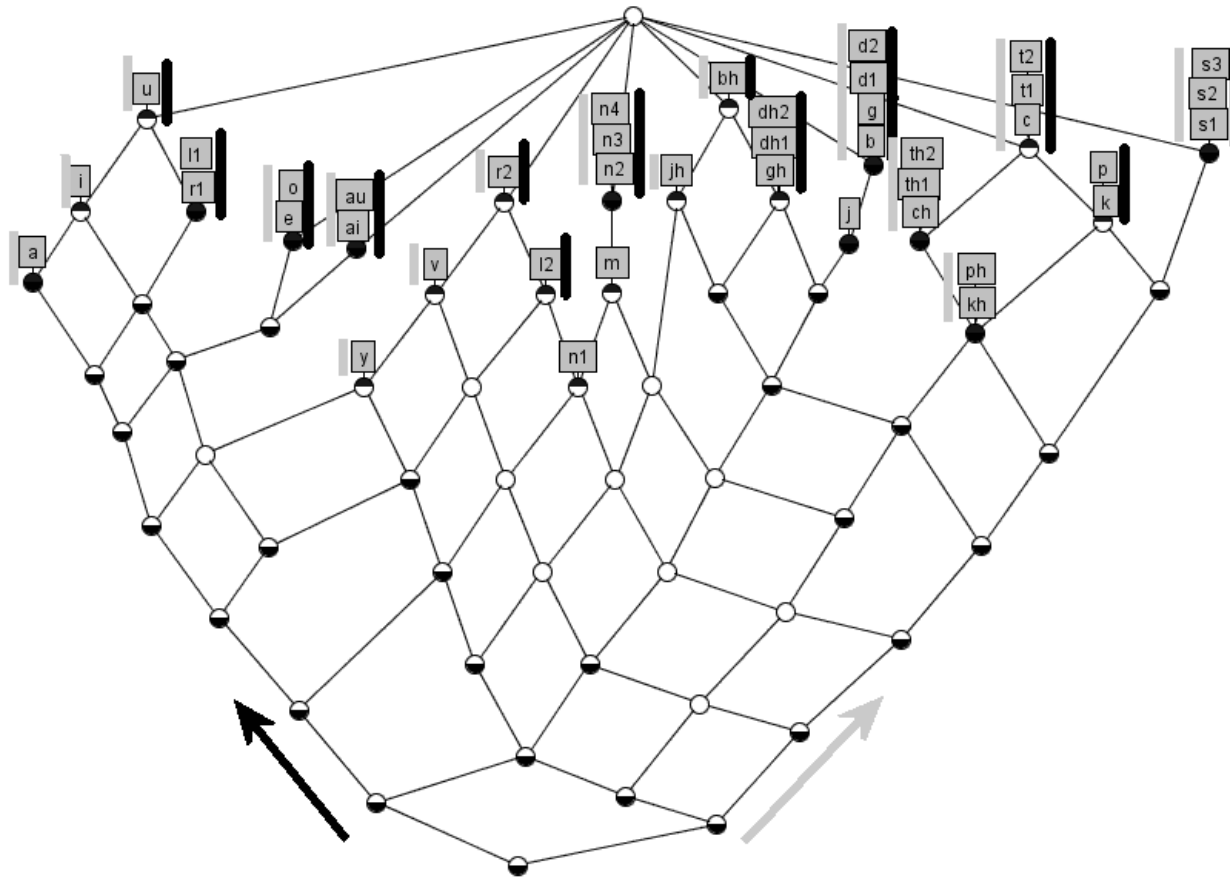


Abbildung 6.4: Begriffsverband des um das Element h verkleinerten *Pratyāhāra*-Kontextes

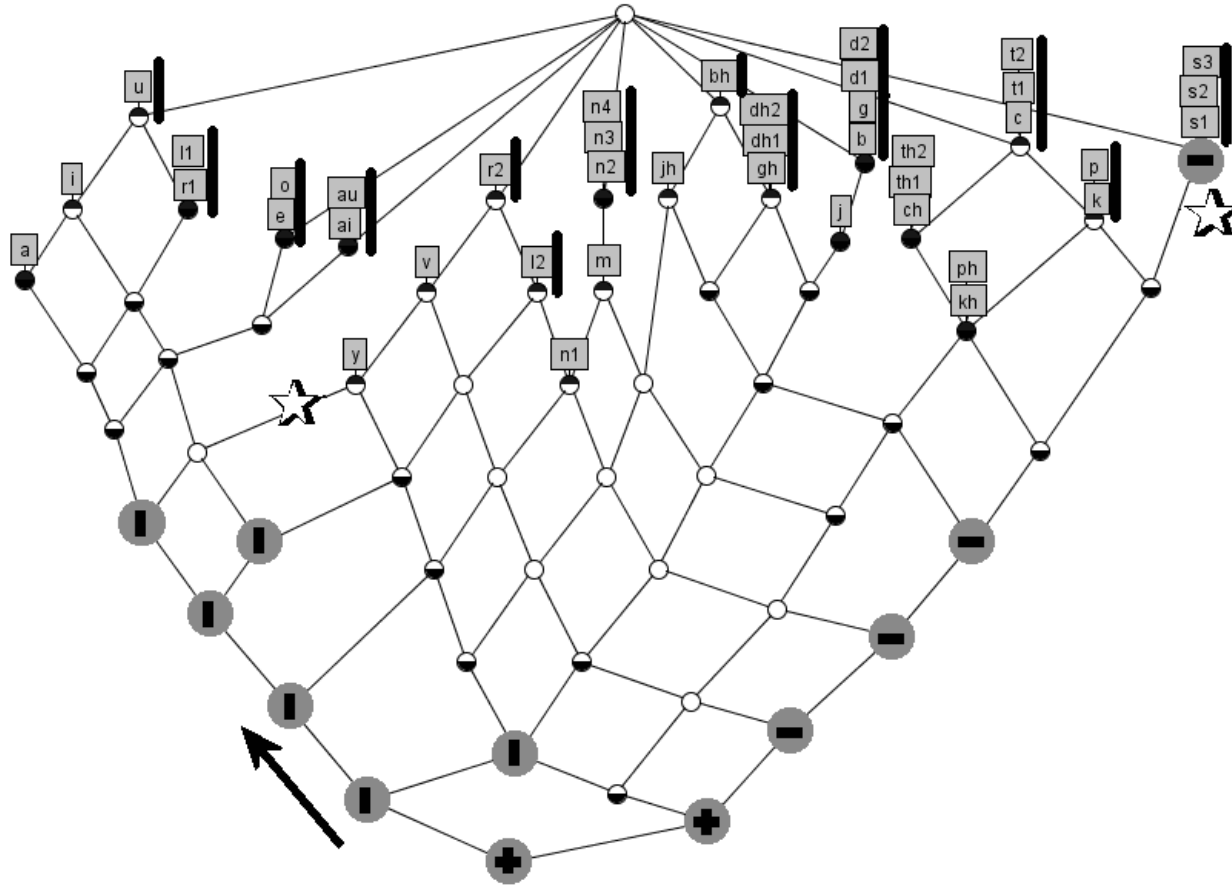


Abbildung 6.5: Skizze zur Position der Merkmalbegriffe der Kopien von *h* in einem optimal erweiterten Teilmengensystem zu Pāṇinis *Pratyāhāra*-Kontext

scheiben in der Skizze markieren die Gegenstandsbegriffe der Gegenstände, die keine Elemente von Φ sind. Sie entsprechen genau den Elementen von Φ , die h enthalten. Die Aufgabe besteht nun darin, zwei Kopien von h so auf die grau markierten Elemente von Φ_h zu verteilen, daß ein erweitertes Teilmengensystem $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi}')$ entsteht, das ein gutes S-Alphabet hat, das mit 13 Markerelementen auskommt. 13 ist eine untere Schranke für die Mächtigkeit der Markermenge, da zur S-Darstellung des kleineren Teilmengensystems (\mathcal{A}_h, Φ_h) bereits 13 Marker benötigt werden.

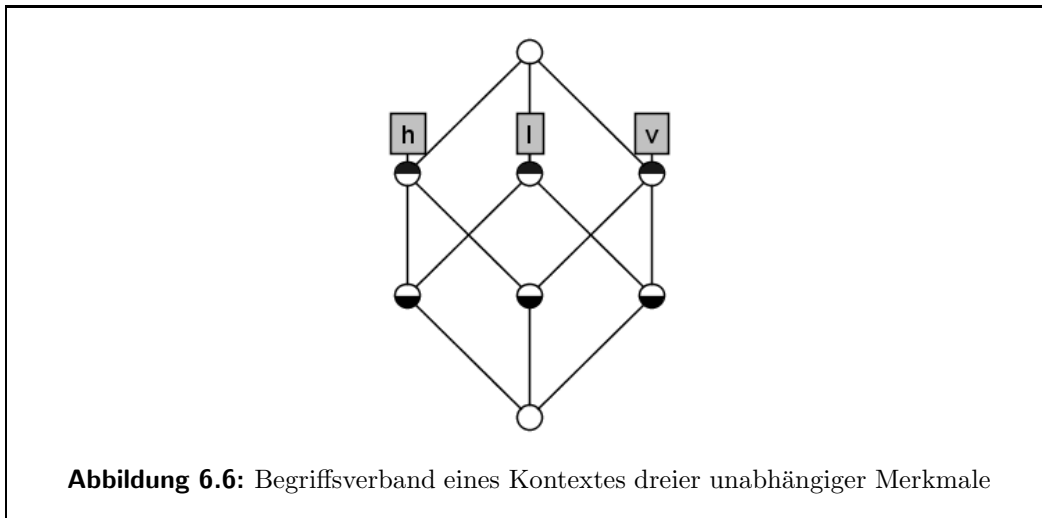
Die horizontalen und vertikalen Balken in den grauen Kreisscheiben in Abbildung 6.5 geben die einzig mögliche Verteilung der Kopien von h auf die betroffenen Gegenstandsbegriffe an, die die Plättbarkeit des Begriffsverbands erhält. Die Sterne in der Skizze markieren grob, wo die Merkmalbegriffe der Kopien von h im erweiterten $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi}')$ -Begriffsverband zu liegen kommen, wenn man die Kopien von h , wie skizziert, auf die Elemente von Φ_h verteilt. Der linke Stern markiert eine Position, an der eine Kopie von h eingefügt werden kann, ohne daß dazu ein zusätzliches Markerelement benötigt wird, da der Lauf durch den S-Graphen, der zu einem guten S-Alphabeten führt, an dieser Stelle aufwärts läuft. Die zweite Kopie von h führt jedoch zwangsläufig zu einem zusätzlichen Markerelement. Denn da die drei Mengen

$$\begin{aligned} cR &= \{c, \acute{t}, t, k, p, \acute{s}, \acute{s}, s\}, \\ \acute{s}R &= \{\acute{s}, \acute{s}, s\} \text{ und} \\ \acute{s}L &= \{\acute{s}, \acute{s}, s, h\} \end{aligned}$$

Elemente von Φ sind, muß h in einem guten S-Alphabet von $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi}')$ auf die Elemente \acute{s} , \acute{s} und s folgen und von diesen durch einen Marker getrennt werden. Es kann also kein erweitertes Teilmengensystem $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\Phi}')$ von (\mathcal{A}, Φ) geben, das ein gutes S-Alphabet mit weniger als 14 Markerelementen hat. Aus diesen Überlegungen folgt, daß Pāṇinis *Śivasūtras* ein *optimales* S-Alphabet bilden:

Satz 6.1.1 *Die Śivasūtras bilden ein optimales S-Alphabet des Teilmengensystems, das durch die in Pāṇinis Aṣṭādhyāyī verwendeten Pratyāhāras definiert wird.*

Es bleibt noch zu zeigen, daß Pāṇinis *Śivasūtras* auch ein *perfekt* erweitertes S-Alphabet bilden. Dazu ist nachzuweisen, daß es nicht möglich ist, durch die



Verdopplung eines von h verschiedenen Lautelements zu einem erweiterten S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) zu kommen, das weniger als 14 Marker enthält.

In Pāṇinis *Pratyāhāra*-Kontext sind die drei Merkmale h , v und l unabhängig voneinander (vgl. auch S. 184f. und Abbildung A.6). Das heißt, es gibt für je zwei der Merkmale einen *Pratyāhāra*, der beide Merkmale, aber nicht das dritte Merkmal enthält:

$$\begin{array}{ll} h, v \in a\overline{T}, & l \notin a\overline{T} \\ h, l \in raL, & v \notin raL \\ v, l \in va\acute{S}, & h \notin va\acute{S} \end{array}$$

Wie Abbildung 6.6 zeigt, hat ein Begriffsverband eines Kontextes, der mindestens drei unabhängige Merkmale umfaßt, eine Würfelstruktur als Minor. Wenn ein solcher Begriffsverband um die $0_V 1_V$ -Kante erweitert wird, hat er K^5 als Minor (vgl. Abbildung 4.16, S. 99). Es folgt, daß ein Begriffsverband eines Kontextes mit drei unabhängigen Merkmalen niemals Hasse-plättbar ist (vgl. Lemma 4.1.2, S. 72). Ein Tripel dreier unabhängiger Merkmale wird daher im folgenden K^5 -*Tripel* genannt. Das Programm `FCALing` erlaubt die

K^5 -Tripel

```

1 confl_triple('<h>', '<b>', '<s1>').
2 confl_triple('<h>', '<bh>', '<s1>').
3 confl_triple('<h>', '<gh>', '<s1>').
4 confl_triple('<h>', '<j>', '<s1>').
5 confl_triple('<h>', '<jh>', '<s1>').
6 confl_triple('<h>', '<l2>', '<b>').
7 confl_triple('<h>', '<l2>', '<bh>').
8 confl_triple('<h>', '<l2>', '<c>').
9 confl_triple('<h>', '<l2>', '<ch>').
10 confl_triple('<h>', '<l2>', '<gh>').
11 confl_triple('<h>', '<l2>', '<j>').
12 confl_triple('<h>', '<l2>', '<jh>').
13 confl_triple('<h>', '<l2>', '<k>').
14 confl_triple('<h>', '<l2>', '<kh>').
15 confl_triple('<h>', '<l2>', '<s1>').
16 confl_triple('<h>', '<m>', '<b>').
17 confl_triple('<h>', '<m>', '<bh>').
18 confl_triple('<h>', '<m>', '<c>').
19 confl_triple('<h>', '<m>', '<ch>').
20 confl_triple('<h>', '<m>', '<gh>').
21 confl_triple('<h>', '<m>', '<j>').
22 confl_triple('<h>', '<m>', '<jh>').
23 confl_triple('<h>', '<m>', '<k>').
24 confl_triple('<h>', '<m>', '<kh>').
25 confl_triple('<h>', '<m>', '<s1>').
26 confl_triple('<h>', '<n1>', '<b>').
27 confl_triple('<h>', '<n1>', '<bh>').
28 confl_triple('<h>', '<n1>', '<c>').
29 confl_triple('<h>', '<n1>', '<ch>').
30 confl_triple('<h>', '<n1>', '<gh>').
31 confl_triple('<h>', '<n1>', '<j>').
32 confl_triple('<h>', '<n1>', '<jh>').
33 confl_triple('<h>', '<n1>', '<k>').
34 confl_triple('<h>', '<n1>', '<kh>').
35 confl_triple('<h>', '<n1>', '<s1>').
36 confl_triple('<h>', '<n2>', '<b>').
37 confl_triple('<h>', '<n2>', '<bh>').
38 confl_triple('<h>', '<n2>', '<c>').
39 confl_triple('<h>', '<n2>', '<ch>').
40 confl_triple('<h>', '<n2>', '<gh>').
41 confl_triple('<h>', '<n2>', '<j>').
42 confl_triple('<h>', '<n2>', '<jh>').
43 confl_triple('<h>', '<n2>', '<k>').
44 confl_triple('<h>', '<n2>', '<kh>').
45 confl_triple('<h>', '<n2>', '<s1>').
46 confl_triple('<h>', '<r2>', '<b>').
47 confl_triple('<h>', '<r2>', '<bh>').
48 confl_triple('<h>', '<r2>', '<c>').
49 confl_triple('<h>', '<r2>', '<ch>').
50 confl_triple('<h>', '<r2>', '<gh>').
51 confl_triple('<h>', '<r2>', '<j>').
52 confl_triple('<h>', '<r2>', '<jh>').
53 confl_triple('<h>', '<r2>', '<k>').
54 confl_triple('<h>', '<r2>', '<kh>').
55 confl_triple('<h>', '<r2>', '<s1>').
56 confl_triple('<h>', '<v>', '<b>').
57 confl_triple('<h>', '<v>', '<bh>').
58 confl_triple('<h>', '<v>', '<c>').
59 confl_triple('<h>', '<v>', '<ch>').
60 confl_triple('<h>', '<v>', '<gh>').
61 confl_triple('<h>', '<v>', '<j>').
62 confl_triple('<h>', '<v>', '<jh>').
63 confl_triple('<h>', '<v>', '<k>').
64 confl_triple('<h>', '<v>', '<kh>').
65 confl_triple('<h>', '<v>', '<l2>').
66 confl_triple('<h>', '<v>', '<m>').
67 confl_triple('<h>', '<v>', '<n1>').
68 confl_triple('<h>', '<v>', '<n2>').
69 confl_triple('<h>', '<v>', '<s1>').
70 confl_triple('<h>', '<y>', '<b>').
71 confl_triple('<h>', '<y>', '<bh>').
72 confl_triple('<h>', '<y>', '<c>').
73 confl_triple('<h>', '<y>', '<ch>').
74 confl_triple('<h>', '<y>', '<gh>').
75 confl_triple('<h>', '<y>', '<j>').
76 confl_triple('<h>', '<y>', '<jh>').
77 confl_triple('<h>', '<y>', '<k>').
78 confl_triple('<h>', '<y>', '<kh>').
79 confl_triple('<h>', '<y>', '<l2>').
80 confl_triple('<h>', '<y>', '<m>').
81 confl_triple('<h>', '<y>', '<n1>').
82 confl_triple('<h>', '<y>', '<n2>').
83 confl_triple('<h>', '<y>', '<s1>').

```

Abbildung 6.7: K^5 -Tripel in Pāṇinis bereinigtem *Pratyāhāra*-Kontext

Berechnung aller K^5 -Tripel eines formalen Kontextes.²

Abbildung 6.7 zeigt die mit FCA_{Ling} generierte Liste der K^5 -Triple in Pāṇinis bereinigtem *Pratyāhāra*-Kontext.³ Auffällig an der Liste ist, daß jedes der K^5 -Tripel das Merkmal h enthält. Bei der Suche nach einem *perfekten* S-Alphabet für das *Pratyāhāra*-Teilmengensystem, muß das Teilmengensystem durch Verdopplung einzelner Elemente so erweitert werden, daß es S-darstell-

²Das Programm FCA_{Ling} ist ein von mir entwickeltes Programmpaket, das Methoden der Formalen Begriffsanalyse zur Bewältigung verschiedener linguistischer Aufgaben einsetzt. Näheres zu den einzelnen Modulen von FCA_{Ling} findet sich in Kilbury et al. (2006) und in Petersen (2008).

³Um den Umfang der Liste zu begrenzen, wird hier mit dem bereinigten Kontext gearbeitet (vgl. Definition A.4.1 auf Seite 188).

bar wird. Da dazu das erweiterte Teilmengensystem Hasse-plättbar sein muß, müssen in ihm alle K^5 -Tripel aus Abbildung 6.7 aufgelöst sein. Da nur h in jedem dieser Tripel vorkommt, kann lediglich durch eine Verdopplung von h jedes dieser Tripel durch die Verdopplung eines einzigen Elements aufgelöst werden. Es folgt, daß das Element h der beste Kandidat für die Verdopplung eines Elements ist. Da, wie bereits oben gezeigt, Pāṇinis *Śivasūtras* ein optimal erweitertes S-Alphabet formen, bilden sie, da sie auf der Verdopplung von h beruhen, auch ein perfekt erweitertes S-Alphabet:

Satz 6.1.2 *Die Śivasūtras bilden ein perfekt erweitertes S-Alphabet des Teilmengensystems, das durch die in Pāṇinis Aṣṭādhyāyī verwendeten Pratyāhāras definiert wird.*

Pāṇinis *Śivasūtras* sind also perfekt; allerdings gibt es weitere perfekt erweiterte S-Alphabete des *Pratyāhāra*-Teilmengensystems, die sich alle aus der folgenden Liste ablesen lassen:

$$\begin{aligned} &\langle a, i, u, M_1, \{r, l\}, M_2, \{\langle\{e, o\}, M_3\rangle, \langle\{ai, au\}, M_4\rangle\}, \\ &h, y, v, r, M_5, l, M_6, \tilde{n}, m, \{\dot{n}, \grave{n}, n\}, M_7, jh, bh, M_8, \\ &\{gh, \underline{dh}, dh\}, M_9, j, \{b, g, \underline{d}, d\}, M_{10}, \{kh, ph\}, \{ch, \underline{th}, th\}, \\ &\quad \{c, \underline{t}, t\}, M_{11}, \{k, p\}, M_{12}, \{\acute{s}, \grave{s}, s\}, M_{13}, h, M_{14} \rangle \end{aligned}$$

Die Mengenklammern fassen in dieser Liste jeweils die Elemente zusammen, deren Reihenfolge nicht durch die in den *Aṣṭādhyāyī* verwendeten *Pratyāhāras* festgelegt wird. Die Liste läßt sich direkt aus dem S-Graphen in Abbildung 6.2 auf Seite 147 ablesen.

Um zu berechnen, wie viele perfekte S-Alphabete es zu den in den *Aṣṭādhyāyī* verwendeten *Pratyāhāras* gibt, werden die Mengenklammern in der obigen Liste numeriert:

$$\begin{aligned} &\langle a, i, u, M_1, \{r, l\}_1, M_2, \{\langle\{e, o\}_2, M_3\rangle, \langle\{ai, au\}_3, M_4\rangle\}_4, \\ &h, y, v, r, M_5, l, M_6, \tilde{n}, m, \{\dot{n}, \grave{n}, n\}_5, M_7, jh, bh, M_8, \\ &\{gh, \underline{dh}, dh\}_6, M_9, j, \{b, g, \underline{d}, d\}_7, M_{10}, \{kh, ph\}_8, \{ch, \underline{th}, th\}_9, \\ &\quad \{c, \underline{t}, t\}_{10}, M_{11}, \{k, p\}_{11}, M_{12}, \{\acute{s}, \grave{s}, s\}_{12}, M_{13}, h, M_{14} \rangle \end{aligned}$$

Die Gesamtzahl der perfekten S-Alphabete ergibt sich aus dem Produkt der Anzahl der Permutationen der Elemente der Mengen:

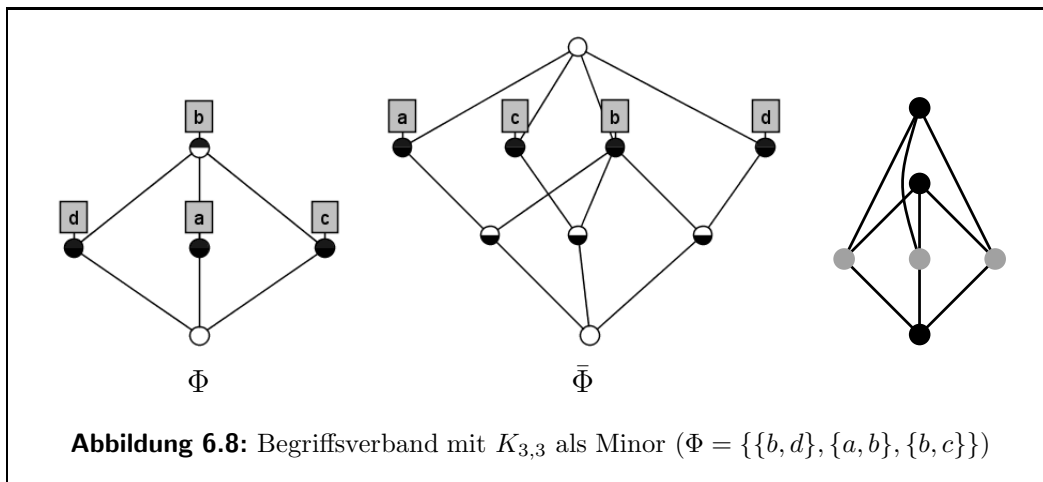
$$\begin{aligned} & 2! \times 2! \times 2! \times 2! \times 3! \times 3! \times 4! \times 2! \times 3! \times 3! \times 2! \times 3! \\ & \cup_1 \cup_2 \cup_3 \cup_4 \cup_5 \cup_6 \cup_7 \cup_8 \cup_9 \cup_{10} \cup_{11} \cup_{12} \\ & = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 6 \times 6 \times 24 \times 2 \times 6 \times 6 \times 2 \times 6 = 11\,943\,936 \end{aligned}$$

Insgesamt gibt es also nahezu zwölf Millionen perfekte S-Alphabete zu den in den *Aṣṭādhyāyī* vorkommenden *Pratyāhāras*. Gründe dafür, warum Pāṇini unter diesen gerade die *Śivasūtras* ausgewählt hat, sind in Unterkapitel 3.1 diskutiert worden.

6.2 Das Problem der minimalen Erweiterung von nicht S-darstellbaren Teilmengensystemen

Nachdem in dem vorangegangenen Unterkapitel nachgewiesen worden ist, daß Pāṇinis *Śivasūtras* auf einer minimalen Erweiterung beruhen, soll in diesem Unterkapitel ein allgemeines Verfahren entwickelt werden, mit dem Teilmengensysteme, die nicht S-darstellbar sind, minimal zu S-darstellbaren Teilmengensystemen erweitert werden können. Im Falle des durch Pāṇinis *Pratyāhāras* definierten Teilmengensystems kann eine minimale Erweiterung durch die Untersuchung der K^5 -Tripel gefunden werden. Dieses Verfahren löst jedoch das Problem nicht allgemein, wie das Beispiel aus Abbildung 6.8 zeigt. Obwohl das dem Begriffsverband zugrundeliegende Teilmengensystem nicht S-darstellbar ist, weist es keine K^5 -Tripel auf. Die Nichtplättbarkeit des Begriffsverbands des ausgedehnten Teilmengensystems in der Mitte, läßt sich mithilfe des in der rechten Skizze angedeuteten $K_{3,3}$ -Minors nachweisen.

Festzustellen, ob der Begriffsverband eines ausgedehnten Teilmengensystems K^5 oder $K_{3,3}$ als Minor hat, ist schwierig. Günstiger ist es, ein Plättbarkeitskriterium anzuwenden, das nicht auf Eigenschaften des Begriffsverbands, sondern auf Eigenschaften des zugrundeliegenden formalen Kontextes beruht, da sich solche Eigenschaften zumeist einfacher algorithmisch untersuchen lassen. Ein solches Kriterium läßt sich aus der Ferrers-Dimension eines formalen Kontextes entwickeln, die wie folgt definiert ist:



Definition 6.2.1 (Ganter & Wille 1996: Def. 83) Eine Ferrers-Relation F eines formalen Kontextes (G, M, I) ist eine Relation $F \subseteq G \times M$ mit

Ferrers-Relation

$$(g, m) \in F, (h, n) \in F, (g, n) \notin F \Rightarrow (h, m) \in F.$$

Als Ferrers-Dimension $fdim(G, M, I)$ eines Kontextes (G, M, I) bezeichnet man die kleinste Anzahl von Ferrers-Relationen $F_t \subseteq G \times M, t \in T$, mit $I = \bigcap_{t \in T} F_t$.

Ferrers-Dimension

Die Definition besagt, daß in einer Ferrers-Relation eines formalen Kontextes keine Teilkontexte der Form

×	
	×

vorkommen können.

Satz 6.2.2 (Ganter & Wille 1996: Satz 46)

Für jeden formalen Kontext (G, M, I) ist die Ferrers-Dimension des Kontextes gleich der Ordnungsdimension des Begriffsverbands $\underline{\mathcal{B}}(G, M, I)$.⁴

⁴Die Ordnungsdimension einer geordneten Menge ist die kleinste Zahl von Ketten, in deren Produkt die Menge ordnungseingebettet werden kann.

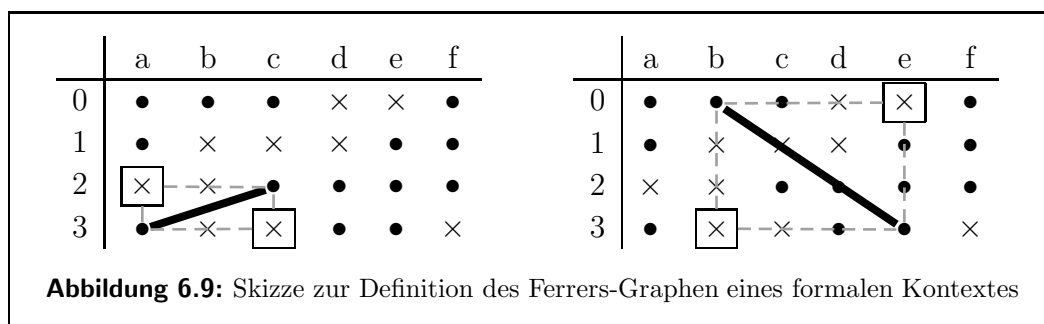


Abbildung 6.9: Skizze zur Definition des Ferrers-Graphen eines formalen Kontextes

Da die Ferrers-Dimension eines Kontextes gleich der Ordnungsdimension des Begriffsverbands ist, kann das folgende Plättbarkeitskriterium für Verbände von Baker et al. (1971) eingesetzt werden:

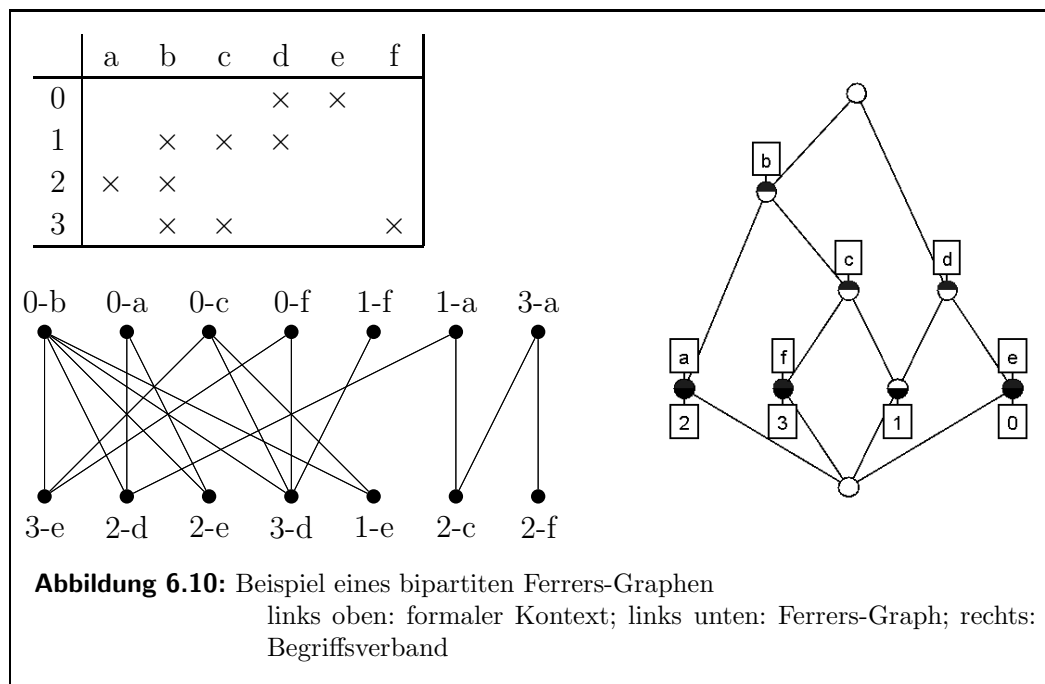
Satz 6.2.3 *Ein Verband ist genau dann plättbar, wenn seine Ordnungsdimension kleiner gleich zwei ist.*

Begriffsverbände sind also genau dann plättbar, wenn ihre Ferrers-Dimension nicht größer als zwei ist. Ausgehend von diesem Ergebnis entwickelt Zschalig (2009, 2007) ein Kriterium zur Charakterisierung plättbarer Begriffsverbände, das auf einer Eigenschaft von sogenannten Ferrers-Graphen beruht:

Definition 6.2.4 *Der Ferrers-Graph eines formalen Kontextes (G, M, I) ist $\Gamma(I)$ mit*

$$\begin{aligned} \text{Eckenmenge: } V(\Gamma(I)) &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{I} \quad \text{mit } \bar{I} \stackrel{\text{def}}{=} G \times M \setminus I \text{ und} \\ \text{Kantenmenge: } E(\Gamma(I)) &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \{(a_1, b_2), (a_2, b_1)\} \mid (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in I \}. \end{aligned}$$

Betrachtet man einen formalen Kontext als Kreuztabelle, so sind die Ecken des Ferrers-Graphen die leeren Felder der Tabelle. Zwei Ecken sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn ihre Felder der Bedingung einer Ferrers-Relation widersprechen. Abbildung 6.9 zeigt am Beispiel zweier Kanten, wie der Ferrers-Graph eines formalen Kontextes gebildet wird (der Beispielkontext entspricht dem Kontext aus Abbildung 4.19(1) auf Seite 102). In der linken Skizze müssen die beiden Ecken $(2, c)$ und $(3, a)$ des Ferrers-Graphen durch eine Kante verbunden werden, da $(2, a)$ und $(3, c)$ Elemente der Inzidenzrelation I des Kontextes sind. Als ein Beispiel für zwei nichtverbundene Ecken des



Ferrers-Graphen seien hier die Ecken $(2, c)$ und $(3, d)$ genannt. Sie sind nicht durch eine Kante im Ferrers-Graphen verbunden, da zwar $(3, c)$ ein Element der Inzidenzrelation ist, nicht aber $(2, d)$.

Der Ferrers-Graph kodiert also gewissermaßen die Stellen im formalen Kontext, die keine Ferrers-Relation bilden.

Satz 6.2.5 Sei (G, M, I) ein formaler Kontext und sei $\Gamma(I)$ der Ferrers-Graph von (G, M, I) , dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) Der Ferrers-Graph $\Gamma(I)$ ist bipartit.
- (2) Der Begriffsverband $\underline{\mathcal{B}}(G, M, I)$ ist plättbar.

Beweis: Dieser Satz wird in Zschalig (2007) und in Zschalig (2009) (Theorem 6.35) bewiesen. \square

Abbildung 6.10 zeigt den Ferrers-Graphen des formalen Kontextes aus Abbildung 6.9. Die Ecken des Graphen sind mit den Feldern der Kreuztabelle

des Kontextes beschriftet. Da der Begriffsverband dieses Kontextes plättbar ist, ist der Ferrers-Graph bipartit. Da der Merkmalbegriff von f in dem Begriffsverband des Kontextes nicht auf dem S-Graphen liegt, folgt aus dem Hauptsatz über die S-Darstellbarkeit von Teilmengensystemen (Satz 4.3.5 auf Seite 113), daß das in dem Kontext kodierte Teilmengensystem nicht S-darstellbar ist und daß der Begriffsverband des ausgedehnten Teilmengensystems nicht plättbar ist. Abbildung 6.11 zeigt zum einen den formalen Kontext und den Begriffsverband des ausgedehnten Teilmengensystems und zum anderen den korrespondierenden Ferrers-Graphen, der nicht bipartit ist, wie die Kante zwischen 2-f und 9-b zeigt.

Der Hauptsatz über die S-Darstellbarkeit von Teilmengensystemen läßt sich erweitern (vgl. auch Petersen 2009):

Satz 6.2.6 (Erweiterter Hauptsatz über die S-Darstellbarkeit von Teilmengensystemen) *Für ein Teilmengensystem (\mathcal{A}, Φ) sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (1) (\mathcal{A}, Φ) ist S-darstellbar.
- (2) Der Begriffsverband zu dem ausgedehnten Teilmengensystem $(\mathcal{A}, \tilde{\Phi})$ ist Hasse-plättbar.
- (3) Der (\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverband ist Hasse-plättbar, und für jedes ebene Hasse-diagramm (G, τ) des (\mathcal{A}, Φ) -Begriffsverbands gilt: für jedes Element a von \mathcal{A} ist $\tau(\mu a)$ eine Ecke des S-Graphen $\Delta(G)$ von (\mathcal{A}, Φ) .
- (4) Der Ferrers-Graph des ausgedehnten (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes ist bipartit.

Beweis: Die Aussage des Satzes folgt unmittelbar aus den Sätzen 4.3.5 und 6.2.5. □

Es stehen somit drei hinreichende Bedingungen für die S-Darstellbarkeit eines Teilmengensystems zur Verfügung.⁵ Im folgenden wird gezeigt, wie sich

⁵Mithilfe der Theorie der Ferrers-Graphen wäre es möglich, einen einfacheren Beweis für den zentralen Satz 4.2.5 aus Unterkapitel 4.2 über die Plättbarkeit der Hassediagramme von S-darstellbaren Teilmengensystemen zu finden. Hier wurde jedoch ein (auf der Konstruktion von Stufengraphen beruhender) konstruktiver Beweis gewählt, da auf die in dem Beweis gelieferte ebene Zeichnung eines Hassediagramms in den anderen Kapiteln zurückgegriffen wird.

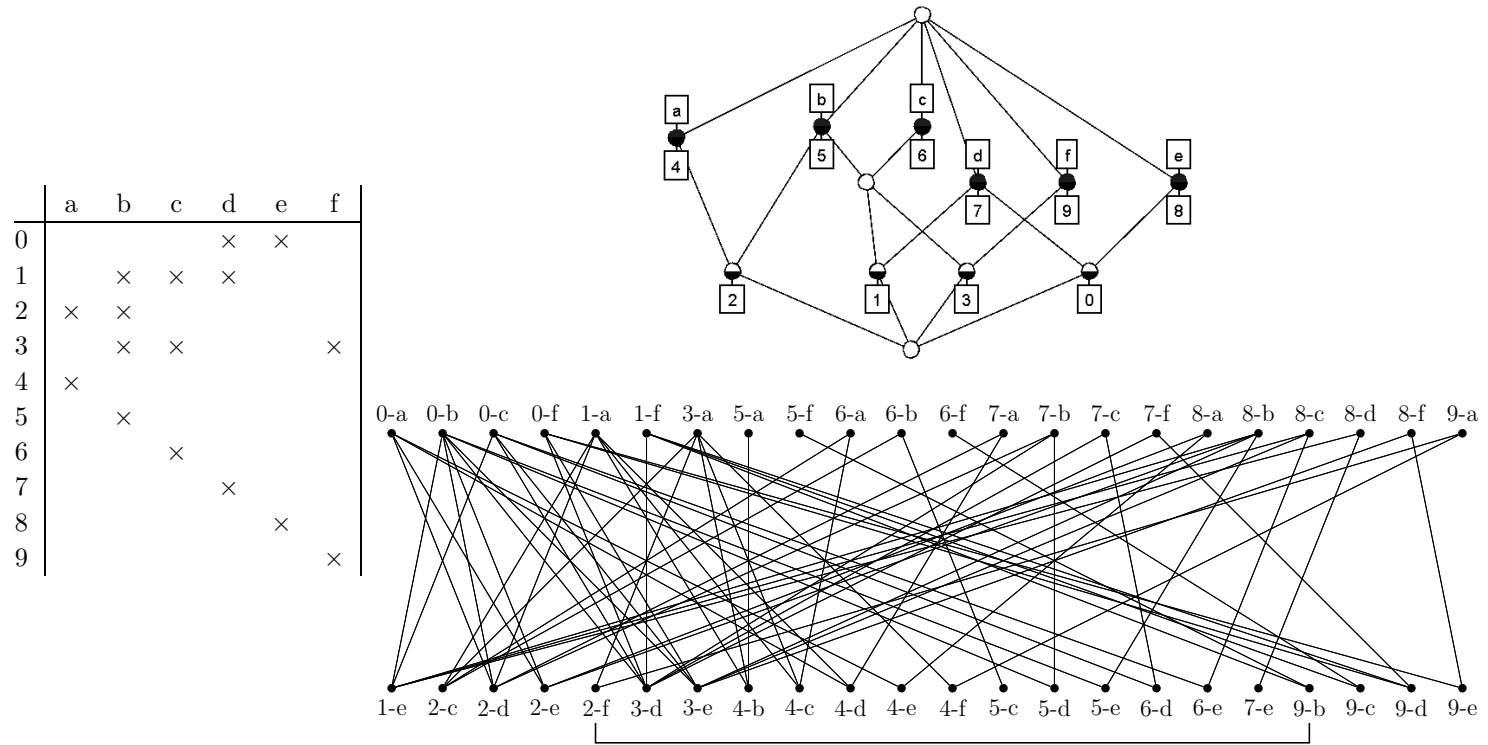


Abbildung 6.11: Beispiel eines Ferrers-Graphen, der nicht bipartit ist
 links: formaler Kontext; rechts oben: Begriffsverband; rechts unten: Ferrers-Graph

die letzte Bedingung, die darauf beruht, daß der Ferrers-Graph bipartit ist, einfach algorithmisch überprüfen läßt.

Der folgende Prolog-Code aus dem Programmpaket `FCALing` berechnet den Ferrers-Graphen eines formalen Kontextes:⁶

```
compute_ferrers_graph:-
  board:number_of_objects(GN),
  G is GN - 1,
  ferrers_rel(G),           % berechnet den Ferrers"-Graphen
  test_bipartite_initialize. % testet ob der Graph bipartit ist (s.u.)

ferrers_rel(-1).           % Abbruchbedingung
ferrers_rel(G):-
  board:number_of_attributes(MN),
  M is MN - 1,
  ferrers_rel(G,M),       % berechnet alle Kanten zu Ecken in Zeile G
  G1 is G-1,
  ferrers_rel(G1).        % wählt die nächste Zeile aus

ferrers_rel(-, -1).       % Abbruchbedingung

% (G,M) ist keine Ecke des Ferrers"-Graphen:
ferrers_rel(G,M):-
  clause(board:inzi(G,M),true),!, % (G,M) in I
  M1 is M-1,
  ferrers_rel(G,M1).

% Berechnet alle mit (G,M) inzidenten Kanten und sucht dazu alle
% (G1,M1), die gemeinsam mit (G,M) die Ferrers-Bedingung erfüllen:
ferrers_rel(G,M):-
  clause(board:inzi(G,M1),true), % (G,M1) in I
  M1=\=M,
  clause(board:inzi(G1,M),true), % (G1,M) in I
  G1=\=G,
  \+(clause(board:inzi(G1,M1),true)),% (G1,M1) nicht in I
  assert(ferrers:fr((G,M),(G1,M1))), % schreibt die Kante in die Datenbasis
  fail. % sucht nach weiteren (G1,M1)

% Wählt das nächste Feld in Zeile G aus:
ferrers_rel(G,M):-
  M1 is M-1,
  ferrers_rel(G,M1).
```

Der Ferrers-Graph ist bipartit, wenn es gelingt, alle Ecken des Graphen zwei verschiedenen Klassen so zuzuordnen, daß benachbarte Ecken in unterschiedlichen Klassen zu liegen kommen. Der folgende Prolog-Code aus `FCALing` überprüft, ob der Ferrers-Graph bipartit ist:

```
% Abbruchbedingung: alle Kanten sind analysiert und der Graph
% ist bipartit:
test_bipartite_initialize:-
  \+clause(ferrers:fr((G,M),(G1,M1)),true). % keine Kante in der Datenbasis
% Eine neue Kante wird analysiert, die erste Ecke einer Zusammenhangskomponente
% des Graphen wird willkürlich der Klasse 0 zugeordnet:
test_bipartite_initialize:-
  clause(ferrers:fr((G,M),(G1,M1)),true),
  test_bipartite((G,M),0).

% test_bipartite(E,N): Die Ecke E soll der Klasse N zugeordnet werden

% Die Ecke (G,M) gehört bereits der anderen Klasse an:
test_bipartite((G,M),N):-
  N1 is ((N+1) mod 2), % wählt die andere Klasse aus
```

⁶Jede Kante des Ferrers-Graphen wird zweimal berechnet; dies ist unnötig, vereinfacht jedoch den Code.

```

    clause(ferrers:bp((G,M),N1),true),!,
    write('not bipartite').

% Die Ecke (G,M) wird der Klasse N zugeordnet, und es wird versucht eine
% benachbarten Ecken der anderen Klasse zuzuordnen,
% mit dieser Ecke wird weitergemacht:
test_bipartite((G,M),N):-
    check_bp((G,M),N),
    N1 is ((N+1) mod 2),
    retract(ferrers:fr((G,M),(G1,M1))),
    retract(ferrers:fr((G1,M1),(G,M))),!,
    test_bipartite((G1,M1),N1),!.

% Es wird eine bereits einer Klasse zugeordneten Ecke zur neuen Startecke
% erklärt:
test_bipartite((G,M),N):-
    check_bp((G,M),N),
    clause(ferrers:fr((G2,M2),(G1,M1)),true),
    clause(ferrers:bp((G1,M1),N1),true),!,
    test_bipartite((G1,M1),N1).

% Eine Zusammenhangskomponente des Graphen ist abgearbeitet:
test_bipartite((G,M),N):-
    check_bp((G,M),N),!,
    test_bipartite_initialize.

% (G,M) ist bereits als der Klasse N angehörend eingetragen
check_bp((G,M),N):-
    clause(ferrers: bp((G,M),N),true),!.

% (G,M) wird als der Klasse N angehörend eingetragen
check_bp((G,M),N):-
    \+clause(ferrers: bp((G,M),N),true),!,
    assert(ferrers: bp((G,M),N)).

```

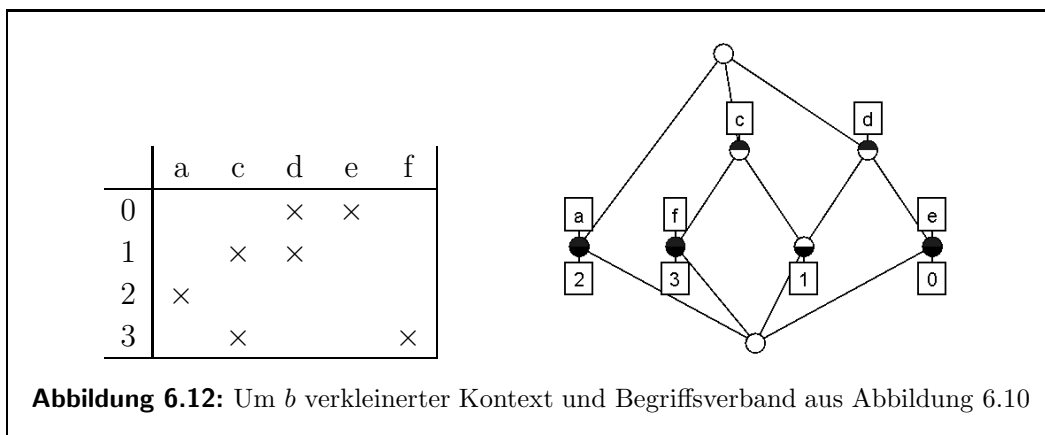
Der vorgestellte Programmcode ermöglicht es, algorithmisch zu überprüfen, ob der Ferrers-Graph eines ausgedehnten Teilmengensystems bipartit ist, und somit zu entscheiden, ob ein Teilmengensystem S-darstellbar ist.

Abschließend soll anhand des Beispiels aus den Abbildungen 6.10 und 6.11 gezeigt werden, wie die in dieser Arbeit diskutierten Resultate und Methoden eingesetzt werden können, um ein perfektes S-Alphabet eines nicht S-darstellbaren Teilmengensystems zu konstruieren. Im folgenden sei daher

$$\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f\} \quad \text{und} \quad \Phi = \{\{d, e\}, \{b, c, d\}, \{a, b\}, \{b, c, f\}\}.$$

Da der Ferrers-Graph des Kontextes des ausgedehnten Teilmengensystems in Abbildung 6.11 nicht bipartit ist, ist (\mathcal{A}, Φ) ohne Erweiterung nicht S-darstellbar. In einem S-Alphabet von (\mathcal{A}, Φ) muß daher wenigstens ein Element doppelt vorkommen.

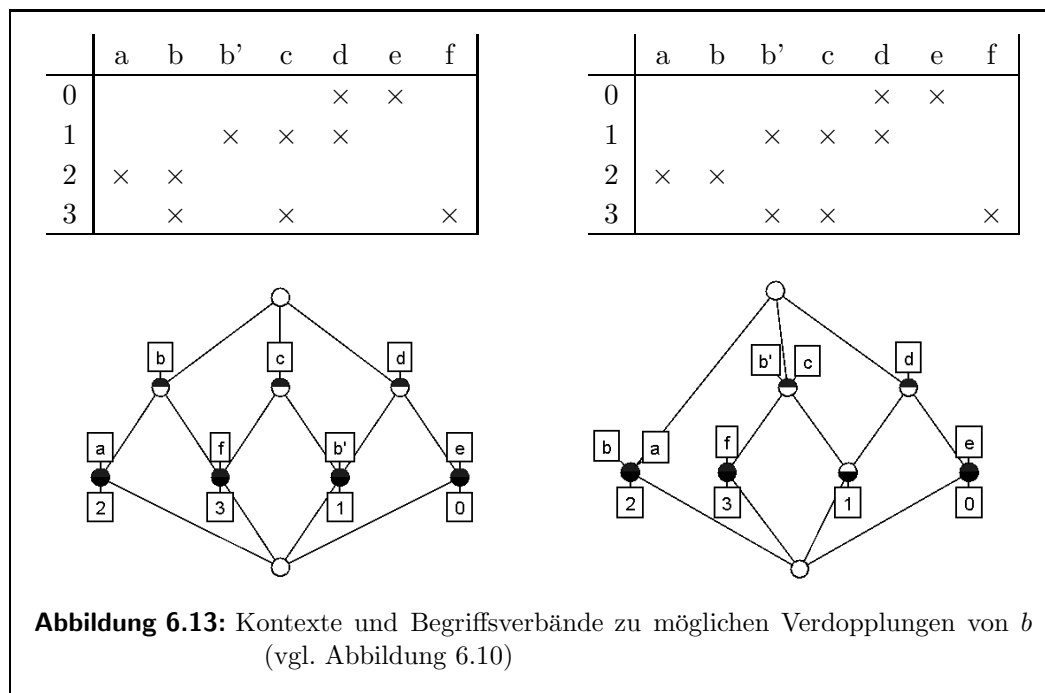
Da, wie sich leicht mit FCA_{Ling} nachprüfen läßt, der ausgedehnte Kontext keinerlei K^5 -Tripel aufweist, kann die Strategie der Analyse der K^5 -Tripel, die im Falle des *Pratyāhāra*-Kontextes zur Identifizierung des zu verdoppelnden Merkmals geführt hat (vgl. Unterkapitel 6.1), nicht eingesetzt werden. Aus



dem Ferrers-Graphen in Abbildung 6.11 kann man aber ablesen, daß die Merkmale b und f verantwortlich dafür sind, daß der Graph nicht bipartit und das Teilmengensystem somit nicht S-darstellbar ist (Satz 6.2.6). Eine Verdopplung von f ist nicht sinnvoll, da f nur in einer einzigen Menge des Teilmengensystems vorkommt. Es sollte daher versucht werden, ob b so verdoppelt werden kann, daß das Teilmengensystem S-darstellbar wird. Dazu wird zunächst überprüft, ob das Teilmengensystem S-darstellbar ist, wenn man das Merkmal b entfernt. Daß dies der Fall ist, kann entweder über den Ferrers-Graphen des um b verkleinerten ausgedehnten (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes oder direkt anhand einer Zeichnung des um b verkleinerten Begriffsverbands nachgewiesen werden. Letzteres bietet sich im Falle des vorliegenden kleinen Beispiels an. Abbildung 6.12 zeigt den Begriffsverband des um b verkleinerten Teilmengensystems.

Aus der Abbildung läßt sich zum einen entnehmen, daß das um b verkleinerte Teilmengensystem S-darstellbar ist. Zum anderen schränkt sie bereits die Reihenfolge von a, c, d, e und f in einem perfekten S-Alphabet für den Fall ein, daß ein solches durch die Verdopplung von b überhaupt erreicht werden kann. Aus dem S-Graphen des Begriffsverbands in der Abbildung 6.12 lassen sich mit dem Verfahren von Seite 137 die folgenden vier guten S-Alphabete des um b verkleinerten (\mathcal{A}, Φ) -Kontextes ablesen:

$$a|fc|d|e| \quad fc|d|e|a| \quad a|ed|c|f| \quad ed|c|f|a| .$$



Es gibt lediglich die in Abbildung 6.13 dargestellten Verdopplungsmöglichkeiten von b , die zu S-darstellbaren Teilmengensystemen führen. Der in Abbildung 6.13 (links) dargestellte erweiterte Kontext ist S-darstellbar und hat zwei gute S-Alphabete, nämlich

$$ab|fc|b'd|e| \quad \text{und} \quad ed|b'c|fb|a| .$$

Da beide S-Alphabete mit vier Markern auskommen und vier Marker bereits für die S-Darstellung des um b verkleinerten Teilmengensystems benötigt werden, sind beide S-Alphabete perfekt. Gleiches gilt auch für die guten S-Alphabete, die sich aus dem S-Graphen des Begriffsverbands in Abbildung 6.13 (rechts) ablesen lassen. Der Kontext dieses Begriffsverbands beruht ebenfalls auf einer Verdopplung von b in dem Kontext aus Abbildung 6.10. Er führt zu weiteren 16 perfekten S-Alphabeten, von denen hier nur exemplarisch

$$ab|fb'c|d|e| \quad \text{und} \quad ba|ed|cb'|f|$$

genannt seien. Weitere Verdopplungsmöglichkeiten von b , die zu S-darstellbaren Teilmengensystemen führen, existieren nicht.

Die Analysen dieses Beispiels und des *Pratyāhāra*-Kontextes zeigen, wie die unterschiedlichen Methoden, die im Rahmen dieser Arbeit zur Überprüfung der S-Darstellbarkeit von Teilmengensystemen und zur Konstruktion von S-Alphabeten entwickelt worden sind, ineinandergreifen und sich gegenseitig ergänzen. Da das Problem der Konstruktion eines perfekten S-Alphabets immer die Gefahr der kombinatorischen Explosion in sich trägt, ist es wichtig, im Einzelfall zu prüfen, welche Lösungsstrategie die jeweils effektivste ist. Hierbei kann man es sich zunutze machen, daß die vorgestellten Verfahren unterschiedliche Herangehensweisen unterstützen. So läßt sich die Frage, ob ein Ferrers-Graph bipartit ist, leicht maschinell überprüfen, während die Frage, ob alle Merkmalbegriffe auf dem S-Graphen liegen, sofort visuell beantwortet werden kann. Ein semi-automatisches Vorgehen bietet sich bei der Konstruktion perfekter S-Graphen also an.

7 Fazit und Ausblick

In der vorliegenden Untersuchung wurde erstmals formal bewiesen, daß es keine Möglichkeit gibt, die in Pāṇinis *Aṣṭādhyāyī* verwendeten *Pratyāhāras* in einer mit *Anubandhas* durchsetzten Lautliste zu repräsentieren, in der entweder kein Laut doppelt auftritt oder in der bei einem verdoppelten Laut weniger *Anubandhas* vorkommen als in Pāṇinis *Śivasūtras*. Die Liste der *Śivasūtras* zeichnet sich also dadurch aus, daß ihre Lautliste minimal ist und ihre *Anubandha*-Liste nicht weiter verkürzt werden kann. Der Beweis, daß die *Śivasūtras* in dem oben formulierten Sinne minimal sind, beruht ausschließlich auf der konkreten Menge der von Pāṇini in den *Aṣṭādhyāyī* verwendeten *Pratyāhāras* und setzt keine anderen aus den *Aṣṭādhyāyī* abgeleiteten Prinzipien voraus. Dies unterscheidet den vorliegenden Ansatz von früheren Untersuchungen zur Minimalität der *Śivasūtras*.

Einschränkend ist anzumerken, daß es mit der hier vorgestellten Methode weder beabsichtigt noch möglich ist, den konkreten Aufbau der *Śivasūtras* in Gänze zu klären. Das zentrale Ergebnis im Bezug auf die *Śivasūtras*, zu dem die vorliegende Untersuchung kommt, ist, daß Pāṇini eine von fast zwölf Millionen möglichen minimalen Anordnungen gewählt hat, die, von der Menge der zu repräsentierenden *Pratyāhāras* her betrachtet, gleichwertig sind. Warum Pāṇini gerade die Anordnung der Laute in den *Śivasūtras* gewählt hat, und wie er überhaupt bei der Konstruktion der *Śivasūtras* vorgegangen ist, war nicht Gegenstand der Untersuchung. Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, daß nicht der Eindruck erweckt werden soll, daß Pāṇini den Begriffsverband der verwendeten *Pratyāhāras* konstruiert und analysiert hat.

Die entwickelten Methoden zur Analyse von Pāṇinis *Śivasūtras* sind so allgemein gehalten, daß sie es ermöglichen, über die S-Darstellbarkeit einer beliebigen endlichen Menge von endlichen Mengen zu entscheiden; das heißt zu entscheiden, ob es möglich ist, eine Liste im Stil der *Śivasūtras* ohne verdoppelte Elemente anzugeben, bezüglich der jede der Mengen als *Pratyāhāra*

repräsentiert werden kann. Insgesamt wurden drei äquivalente, hinreichende Kriterien für die S-Darstellbarkeit einer Menge von Mengen aufgestellt. Allen drei Kriterien ist gemeinsam, daß sie auf Eigenschaften von Konstrukten der Formalen Begriffsanalyse basieren. Das erste beruht auf der Plättbarkeit bestimmter Begriffsverbände, das zweite auf Eigenschaften ebener Zeichnungen von Begriffsverbänden und das dritte auf Eigenschaften bestimmter formaler Kontexte. Ausgehend von den Kriterien zur Charakterisierung S-darstellbarer Mengen von Mengen konnte ein konkretes Verfahren zur Konstruktion von Listen im Stil der *Śivasūtras* mit minimaler Anzahl von *Anubandhas* entwickelt werden. Für den Fall, daß eine Menge von Mengen nicht S-darstellbar ist, sind Methoden für die effiziente Identifikation von Elementen, die für die Verdopplung geeignet sind, angegeben worden.

Die vorliegende Untersuchung gibt Auskunft über die Qualität von Pāṇinis *Śivasūtras*. Sie ist allerdings nicht nur für die historische Linguistik und Indologie von Interesse, sondern kann dank ihrer Generalität auch Impulse für die aktuelle linguistische und insbesondere computerlinguistische Forschung geben.

Pāṇinis Ansatz, Lautklassen durch *Pratyāhāras* zu repräsentieren, ist der modernen Beschreibung durch binäre Merkmale in mancher Hinsicht überlegen. Die Auswahl geeigneter binärer Merkmale geht in der Regel der phonologischen Analyse einer Sprache voran, was dazu führt, daß die Merkmale zumeist phonetische Qualitäten beschreiben und weniger durch die phonologischen Eigenschaften der Sprache motiviert sind. Rein aus dem phonologischen Verhalten der Laute begründete Merkmale werden sogar häufig unter dem Vorwurf, sie seien *ad hoc* gebildet, zurückgewiesen. Dies führt unter anderem dazu, daß phonologische Klassifikationen, die auf binären Merkmalen beruhen, in der Regel weniger restriktiv sind als Klassifikationen im Stil der *Śivasūtras*, da die Anzahl der bildbaren Klassen größer ist. Ein weiterer wichtiger Unterschied zwischen beiden Repräsentationsmethoden besteht darin, daß in bezug auf die binären Merkmale offensichtlich immer der Anspruch besteht, diese mit aussagekräftigen Namen zu versehen. Die Benennung der *Anubandhas* scheint hingegen arbiträr zu sein; zumindest findet sich in der einschlägigen Literatur keine Erklärung zu ihrer Auswahl. Durch den Verzicht auf bedeutungstragende Namen wird die Gefahr umgangen, mit den Namen bereits theoretische Vorannahmen in die Analyse eines Lautsystems einfließen zu lassen.

Bei dem Versuch, einige phonologische Klassifikationen mit binären Merkmalen in eine Liste im Stil der *Śivasūtras* zu übertragen (vgl. Petersen 2004b), fällt auf, daß dies in der Regel nur gelingt, wenn die Verdopplung von unverhältnismäßig vielen Lautelementen in Kauf genommen wird. Dies kann daher rühren, daß nur vollständige Klassifikationen und nicht die tatsächlich zur Beschreibung einer Sprache benötigten Klassen analysiert wurden. Es kann aber auch darauf hinweisen, daß das von Pāṇini beschriebene Lautsystem des klassischen Sanskrits eine besondere Eigenschaft hat, die seine Repräsentation in Form von *Śivasūtras* erleichtert. Eine endgültige Klärung dieser Frage steht noch aus, da bis heute keine Beschreibung einer Sprache vorliegt, die in ihrer Präzision und in ihrer Vollständigkeit an Pāṇinis *Aṣṭādhyāyī* heranreicht.

Für die Computerlinguistik ist insbesondere Pāṇinis raffinierte Methode zur Repräsentation von Mengen als Intervalle einer Liste von Interesse. Das besondere an dieser Methode ist, daß sie es erlaubt, Hierarchien linear zu kodieren. Die lineare Kodierung ist eine der Grundvoraussetzungen für die maschinelle Verarbeitung komplexer Strukturen. Aufgrund der stetig anwachsenden Datenmengen ist es in der Wissensrepräsentation und -verarbeitung notwendig, hierarchische Klassifikationen und Vererbungshierarchien einzusetzen, da sie es ermöglichen, Generalisierungen zu erfassen und Redundanzen zu vermeiden. Vererbungshierarchien werden unter anderem eingesetzt im objektorientierten Programmieren, in formalen Ontologien sowie in maschinellen Lexika. Viele Repräsentationsformate der Computerlinguistik sind eigens für die Kodierung von vererbungs-basierten Hierarchien entwickelt worden, so z. B. die Typhierarchien und -signaturen getypter, unifikationsbasierter Grammatikformalismen wie der HPSG (*head-driven phrase structure grammar*) oder die nichtmonotonen Vererbungsnetze der lexikalischen Repräsentationssprache DATR.

Die Darstellung einer vollständigen Hierarchie in einer einzelnen linearen Struktur gelingt bisher lediglich dann befriedigend, wenn die Hierarchie eine Baumstruktur bildet, da Bäume als verschachtelte Listen repräsentiert werden können.¹ Eine Folge hiervon ist, daß viele Formalismen nur baumförmige Hierarchien zulassen und somit multiple Vererbung ausschließen. Es läßt sich

¹Natürlich arbeitet die Computerlinguistik auch mit Hierarchien, die keine Bäume sind. Solche Hierarchien können aber nur mithilfe einer Menge von Constraints beschrieben werden: Dazu wird die Hierarchie zumeist in die einzelnen Elemente ihrer binären Nachbarschaftsrelation oder ihrer binären Ordnungsrelation zerlegt. Daher müssen viele Anfragen,

leicht nachweisen, daß jede endliche Menge von endlichen Mengen, die geordnet nach der Teilmengenrelation einen Baum bildet, S-darstellbar ist, aber nicht umgekehrt. Eine vielversprechende Aufgabenstellung für die weitere Forschung ist es meiner Ansicht nach daher zu klären, inwieweit die Methode der *Śivasūtras* zur Repräsentation von Hierarchien eingesetzt werden kann, um einerseits zumindest eingeschränkt multiple Vererbung zuzulassen, ohne andererseits die Vorteile einer effizienten linearen Kodierung und Verarbeitung hierarchischer Beziehungen zu verlieren. Meine Idee besteht darin, für bestimmte Einsatzzwecke die Klasse der zulässigen Hierarchien von baumförmigen auf S-darstellbare auszuweiten (siehe auch Petersen 2010). Da nach dem in der vorliegenden Untersuchung bewiesenen Hauptsatz über die S-Darstellbarkeit von Teilmengensystemen alle S-darstellbaren Teilmengensysteme Hasse-plättbar sind, bestünde ein weiterer Vorteil dieses Ansatzes, neben der effektiveren Verarbeitung, darin zu gewährleisten, daß eine ebene, kreuzungsfreie Zeichnung der Hierarchie angefertigt werden kann. Es zeigt sich immer wieder, daß kreuzungsfreie Zeichnungen von Vererbungshierarchien von den Nutzern eines Systems besser akzeptiert und verstanden werden. Viele aktuelle Systeme für das Design von Ontologien zur Wissensrepräsentation schließen genau aus diesem Grund multiple Vererbung aus, oder verbergen sie zumindest vor den Anwendern.

Es soll an dieser Stelle jedoch nicht nur auf den Gegenstand dieser Untersuchung sondern auch auf die angewandte Methodik der Formalen Begriffsanalyse eingegangen werden. Meines Erachtens nach zeigt die vorgelegte Untersuchung wieder einmal eindrücklich, welche unerwarteten Möglichkeiten der Einsatz der Formalen Begriffsanalyse in der Linguistik bietet. Wie die Beispiele in Priss (2005) oder auch meine früheren Arbeiten zur Induktion von Vererbungshierarchien (vgl. Petersen 2008) und zu Klassifikationen (vgl. Osswald & Petersen 2002, 2003) zeigen, hält die Formale Begriffsanalyse vielfältige Methoden bereit, die zur Analyse linguistischer Daten eingesetzt werden können. Insbesondere stellen die formalen Begriffsverbände ein geeignetes Bindeglied bei der Gewinnung linguistischer Repräsentationen aus Datenlisten dar. Während bisher zumeist die Lage von Begriffen im Begriffsverband (vgl. Petersen

zum Beispiel nach einer hierarchischen Teilstruktur, umständlich über rekursive Aufrufe abgearbeitet werden.

2004a, 2008) oder die Implikationen zwischen Merkmalen im formalen Kontext (vgl. Petersen & Kilbury 2005; Kilbury et al. 2006) genutzt wurden, um die gewünschten Repräsentationen zu generieren, basiert die hier vorgestellte Anwendung der Formalen Begriffsanalyse auf Eigenschaften von konkreten zweidimensionalen Zeichnungen der Begriffsverbände und auf denen der ihnen zugrundeliegenden Graphen. Darin unterscheidet sie sich von früheren. Denn auch wenn es immer wieder Bemühungen gibt, bessere Algorithmen zum Zeichnen von Begriffsverbänden zu entwickeln (vgl. u. a. Stumme & Wille 1994; Cole 2001; Zschalig 2004, 2007, 2009), so werden die Zeichnungen innerhalb der Formalen Begriffsanalyse meines Wissens nach bisher ausschließlich als Werkzeuge zur Visualisierung von Zusammenhängen behandelt.

Eine Aufgabe für die zukünftige Forschung ist, auch das phonologische System anderer Sprachen mit Pāṇinis Methode zu beschreiben.² Außerdem steht noch eine genauere Analyse der hier entwickelten alternativen Minimalitätskriterien aus. Besonders vielversprechend erscheint mir jedoch der Versuch, auch die anderen Bestandteile von Pāṇinis Grammatik mit Mitteln der Formalen Begriffsanalyse zu untersuchen. Da die *Aṣṭādhyāyī* zum einen intensiven Gebrauch von nichtmonotonen Vererbungshierarchien machen und zum anderen in ihrer Struktur auf die Vermeidung von Redundanzen zielen, bietet es sich an zu untersuchen, ob es möglich ist, aus dem Regelwerk der *Aṣṭādhyāyī* eine DATR-Theorie zu generieren. Hierbei könnte mein System FCA_{Ling} hilfreich sein, das die automatische Induktion von redundanzfreien DATR-Theorien aus Datenlisten unterstützt. Eine Hierarchie von Regeln, in der die Bestandteile von Regeln vererbt werden, wäre eine aus heutiger Sicht völlig neuartige Herangehensweise an das Problem der Organisation von Regelsystemen, obwohl eine solche Hierarchie bereits in den *Aṣṭādhyāyī* angelegt ist.³ Es könnte sich wieder einmal zeigen, daß Methoden, die Pāṇini bereits vor über 2000 Jahren entwickelt hat, erst heute wiederentdeckt werden und Eingang in die moderne Linguistik finden.

²Silke Hamann und die Autorin arbeiten zur Zeit an einem ersten Entwurf von geeigneten *Śivasūtras* des Deutschen (Petersen & Hamann 2010).

³Erste noch unveröffentlichte Untersuchungen zur Implementierung einer solchen Regelhierarchie wurden von James Kilbury durchgeführt.

Appendix

A Formale Begriffsanalyse

Ziel dieses Kapitels ist es, die für diese Arbeit wichtigsten Definitionen und Sätze der Formalen Begriffsanalyse (FBA) wiederzugeben und zu erläutern. Alle Sätze und Definitionen, die dem Buch „Formale Begriffsanalyse – Mathematische Grundlagen“ von Ganter & Wille (1996) entnommen sind, sind mit ‚GaWi96‘ gekennzeichnet. Auf die Wiedergabe der Beweise wird verzichtet.

A.1 Formaler Kontext

Um Daten mit Hilfe der FBA analysieren zu können, müssen sie in Form eines formalen Kontextes vorliegen.

Definition A.1.1 (GaWi96: Def. 18) *Ein formaler Kontext (G, M, I) besteht aus zwei Mengen G und M sowie einer binären Relation I zwischen G und M . Die Elemente von G nennen wir Gegenstände, die von M Merkmale des Kontextes.¹ Um auszudrücken, daß ein Gegenstand g mit einem Merkmal m in der Relation I steht, schreiben wir gIm oder $(g, m) \in I$ und lesen dies als „der Gegenstand g hat das Merkmal m .“ Die Relation I nennen wir auch die Inzidenzrelation des Kontextes.*

formaler Kontext

Gegenstand

Merkmal

Inzidenzrelation

Im endlichen Fall, wenn also die Menge der Gegenstände und die Menge der Merkmale endlich ist, läßt sich ein formaler Kontext als Kreuztabelle darstellen. Häufig liegen in der Linguistik die zu analysierenden Daten nicht in Form eines formalen Kontextes vor, so daß ein geeigneter Kontext zunächst konstruiert werden muß.

Zur Veranschaulichung soll uns hier ein Beispiel aus der Merkmalsemantik dienen: Die Tabelle in Abbildung A.1 zeigt eine Merkmalanalyse deutscher

¹Genauer genommen: „formale Gegenstände“ und „formale Merkmale“.

	direkt verwandt	älter	weiblich	eindeutig	andere Generation
Vater	+	+	-	+	+
Mutter	+	+	+	+	+
Bruder	+	0	-	-	-
Schwester	+	0	+	-	-
Kind	+	-	0	-	+
Sohn	+	-	-	-	+
Tochter	+	-	+	-	+
Onkel	-	+	-	-	+
Tante	-	+	+	-	+
Opa	-	+	-	-	+
Oma	-	+	+	-	+
Cousin	-	0	-	-	-
Cousine	-	0	+	-	-
Neffe	-	-	-	-	+
Nichte	-	-	+	-	+

Abbildung A.1: Merkmalanalyse deutscher Verwandtschaftsterme angelehnt an Bierwisch (1969, S. 67).

- + : trifft zu
- : trifft nicht zu
- 0 : indifferent in bezug auf das Merkmal

Verwandtschaftsterme, die an Bierwisch (1969, S. 67) angelehnt ist. In dieser Tabelle werden 15 Verwandtschaftsterme in bezug auf 5 semantische Merkmale analysiert. Die Merkmale können maximal drei Werte annehmen: trifft ein Merkmal auf einen Term zu, so erhält es für diesen Term den Wert ‚+‘; trifft es nicht zu, erhält es den Wert ‚-‘ und wenn ein Term indifferent bezogen auf ein Merkmal ist, so wird dies mit ‚0‘ markiert. Einige Merkmale bedürfen einer Erläuterung: Das Merkmal *direkt verwandt* trägt den Wert ‚+‘, wenn eine Verwandtschaft 1. Grades zwischen dem Propositus – der Bezugsperson – und dem Referenten des Verwandtschaftsterms vorliegt. Das binäre Merkmal *eindeutig* wird mit ‚+‘ bewertet, wenn der Verwandtschaftsterm jedem Propositus genau einen Referenten zuordnet, in allen anderen Fällen nimmt es den Wert ‚-‘ an. Zu dem Merkmal *älter* ist anzumerken, daß in dieser Analyse davon ausgegangen wird, daß wenn eine Person einer früheren Generation angehört, sie älter ist als Personen späterer Generationen (dies schließt zum Beispiel aus, daß eine Tante jünger ist als einer ihrer Neffen). Für eine kritische Diskussion des Einsatzes der Merkmalsemantik zur Analyse von Verwandtschaftsbeziehungen siehe Löbner (2003).

Aufgrund der Dreiwertigkeit einiger Merkmale bildet die Tabelle in Abbildung A.1 keinen formalen Kontext, da dessen Definition eine binäre Relation zwischen den Gegenständen und den Merkmalen verlangt. Eine Möglichkeit, um einen formalen Kontext zur Tabelle in Abbildung A.1 zu konstruieren, besteht darin, die Merkmale *jünger* und *männlich* hinzu zu nehmen und alle Merkmale binär zu interpretieren (ein Merkmal trifft entweder in jedem Fall zu oder es trifft nicht notwendigerweise zu). Abbildung A.2 zeigt den resultierenden Kontext in Form einer *Kreuztabelle*.

Kreuztabelle

A.2 Formaler Begriff

Begriffe werden in der FBA wie in der klassischen Begriffslehre mengensprachlich verstanden. Sie werden sowohl über ihre Extension als auch ihre Intension definiert. Ein formaler Begriff eines Kontextes ist somit ein Paar bestehend aus einer Menge von Gegenständen, seiner Extension, und einer Menge von Merkmalen, seiner Intension. Dabei besteht die Extension genau aus den Gegenständen des Kontextes, auf die alle Merkmale der Intension zutreffen, und die

	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	eindeutig	andere Generation
Vater	×	×		×		×	×
Mutter	×	×			×	×	×
Bruder	×			×			
Schwester	×				×		
Kind	×		×				×
Sohn	×		×	×			×
Tochter	×		×		×		×
Onkel		×		×			×
Tante		×			×		×
Opa		×		×			×
Oma		×			×		×
Cousin				×			
Cousine					×		
Neffe			×	×			×
Nichte			×		×		×

Abbildung A.2: Formaler Kontext zur Merkmalanalyse deutscher Verwandtschaftsterme aus Abbildung A.1

Intension wiederum umfaßt alle Merkmale des Kontextes, die die Gegenstände der Extension gemeinsam haben. Formal werden dazu zwei *Ableitungsrelationen* zwischen den Teilmengen der Gegenstandsmenge G und den Teilmengen der Merkmalmenge M des formalen Kontextes definiert:²

Ableitungsrelation

Definition A.2.1 (GaWi96: Def. 19) *Es sei $K = (G, M, I)$ ein formaler Kontext. Für eine Menge $A \subseteq G$ von Gegenständen definieren wir*

$$A' \stackrel{\text{def}}{=} \{m \in M \mid \forall g \in A : (g, m) \in I\}$$

(A' ist die Menge der gemeinsamen Merkmale der Gegenstände in A). Entsprechend ist für eine Menge $B \subseteq M$ von Merkmalen

$$B' \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid \forall m \in B : (g, m) \in I\}$$

definiert (B' ist die Menge der Gegenstände, die alle Merkmale aus B haben).

Betrachten wir den Kontext aus Abbildung A.2, so ist z. B.

$$\{\text{Neffe, Onkel}\}' = \{\text{männlich, andere Generation}\} \quad \text{und}$$

$$\{\text{männlich, andere Generation}\}' = \{\text{Sohn, Vater, Neffe, Onkel, Opa}\} .$$

Zu einer Gegenstandsmenge A findet man die Menge der gemeinsamen Merkmale A' , indem man in der Kreuztabelle des Kontextes die Zeilen der Gegenstände aus A auf an gleicher Position stehende Kreuze hin untersucht. Um zu einer Merkmalmenge B die Menge aller Gegenstände B' , auf die die Merkmale aus B zutreffen, zu ermitteln, verfährt man analog mit den entsprechenden Spalten der Kreuztabelle.

Lemma A.2.2 (teils aus GaWi96: Hilfssatz 10) *Ist (G, M, I) ein formaler Kontext und sind $A, A_1, A_2 \subseteq G$ Mengen von Gegenständen und*

²Die Ableitungsrelation wird erstmals in Birkhoff (1973, §32, 1. Auflage 1940) unter dem Begriff ‚Polarität‘ beschrieben.

B, B_1, B_2 Mengen von Merkmalen, so gilt:

- | | |
|---|---|
| 1) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A'_2 \subseteq A'_1$ | 1') $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B'_2 \subseteq B'_1$ |
| 2) $A \subseteq A''$ | 2') $B \subseteq B''$ |
| 3) $A' = A'''$ | 3') $B' = B'''$ |
| 4) $A \subseteq B' \Leftrightarrow B \subseteq A' \Leftrightarrow A \times B \subseteq I$ | |
| 5) $A''_1 = A$ und $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A \Rightarrow A''_2 = A$ | |
| 5') $B''_1 = B$ und $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B \Rightarrow B''_2 = B$. | |

Aus dem Lemma folgt, daß die Abbildung, die jeder Teilmenge A der Gegenstandsmenge G die Menge A'' zuordnet, einen Hüllenoperator auf G bildet. Ebenso definiert $B \mapsto B''$ für $B \subseteq M$ einen Hüllenoperator auf M . Folglich bildet die Menge $\{A'' \mid A \subseteq G\}$ ein Hüllensystem auf G und die Menge $\{B'' \mid B \subseteq M\}$ ein Hüllensystem auf M .³

Definition A.2.3 (GaWi96: Def. 20) *Ein formaler Begriff des Kontextes (G, M, I) ist ein Paar (A, B) mit $A \subseteq G$, $B \subseteq M$, $A' = B$ und $B' = A$. Wir nennen A den Umfang (oder die Extension) und B den Inhalt (oder die Intension) des Begriffs (A, B) . $\mathcal{B}(G, M, I)$ bezeichnet die Menge aller formalen Begriffe des Kontextes (G, M, I) .*

Der formale Kontext aus Abbildung A.2 hat 25 formale Begriffe, von denen hier drei beispielhaft dargestellt seien:

- ({Sohn, Vater, Nefte, Onkel, Opa}, {männlich, andere Generation}) ,
 ({Mutter, Tochter, Schwester, Nichte, Tante, Cousine, Oma}, {weiblich})
 ({ }, {direkt verwandt, älter, jünger, männlich, weiblich, eindeutig,
 andere Generation}) .

Abbildung A.3 zeigt die Liste aller 25 Begriffe des Kontextes aus Abbildung A.2.

³Die beiden Ableitungsoperationen bilden eine Galoisverbindung zwischen den Potenzmengenverbänden $\mathfrak{P}(G)$ und $\mathfrak{P}(M)$ (siehe auch Abschnitt B.7).

formaler Begriff

Umfang

Extension

Inhalt

Intension

$\mathcal{B}(G, M, I)$

Nr.	Extension													Intension								
	Vater	Mutter	Bruder	Schwester	Kind	Sohn	Tochter	Onkel	Tante	Opa	Oma	Cousin	Cousine	Neffe	Nichte	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	eindeutig	andere Generation
1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x							x
2	x	x			x	x	x	x	x	x	x			x	x							
3			x	x								x							x			x
4		x					x												x			x
5	x		x			x				x				x					x			
6	x					x				x				x					x			x
7					x	x	x							x	x			x				x
8							x								x			x				x
9						x								x				x				x
10	x	x						x	x	x							x					x
11		x						x									x					x
12	x									x							x					x
13	x	x	x	x	x	x	x									x						x
14	x	x			x	x	x									x						x
15		x		x												x				x		x
16		x					x									x				x		x
17	x		x			x										x				x		x
18	x					x										x				x		x
19					x	x	x									x		x				x
20							x									x		x				x
21						x										x		x				x
22	x	x														x					x	x
23		x														x				x		x
24	x															x				x		x
25																x				x		x

Abbildung A.3: Formale Begriffe zum Kontext aus Abbildung A.2

Definition A.2.4 (GaWi96: Def. 22) Für einen Gegenstand $g \in G$ schreiben wir g' statt $\{g\}'$ für den Gegenstandsinhalt $\{m \in M \mid gIm\}$ zum Gegenstand g . Entsprechend ist $m' \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid gIm\}$ der Merkmalumfang zum Merkmal m . Ferner schreiben wir γg für den Gegenstandsbegriff (g'', g') und μm für den Merkmalbegriff (m', m'') .

Die Gegenstandsinhalte entsprechen den Zeilen der Kreuztabelle eines formalen Kontextes und die Merkmalumfänge den Spalten. Der zweite der drei Begriffe weiter oben ist ein Beispiel eines Merkmalbegriffs (μ weiblich). Ein Beispiel für einen Gegenstandsbegriff ist γ Bruder:

$$\gamma\text{Bruder} = (\{\text{Bruder, Sohn, Vater}\}, \{\text{männlich, direkt verwandt}\}) .$$

Lemma A.2.5 (GaWi96: Hilfssatz 18) Jeder formale Begriff eines Kontextes (G, M, I) ist von der Form (X'', X') für eine Teilmenge $X \subseteq G$ und von der Form (Y', Y'') für eine Teilmenge $Y \subseteq M$. Umgekehrt ist jedes derartige Paar ein formaler Begriff.

Jeder Begriffsumfang ist ein Schnitt von Merkmalumfängen und jeder Begriffsinhalt ist ein Schnitt von Gegenstandsinhalten.

A.3 Begriffsverband

Die Menge aller formalen Begriffe eines Kontextes wird mit Hilfe der Begriffsordnung partiell geordnet. Diese Ordnungsrelation entspricht dem natürlichsprachlichen Verständnis von Ober- und Unterbegriffen. Oberbegriffe sind allgemeiner, umfassen somit mehr Gegenstände und werden durch weniger Merkmale charakterisiert. Der *Hauptsatz der Begriffsverbände* besagt, daß die Menge aller formalen Begriffe eines Kontextes, geordnet bezüglich der Begriffsordnung, einen vollständigen Verband bildet; dieser wird *Begriffsverband* genannt. Darüber hinaus ist jeder vollständige Verband isomorph zu dem Begriffsverband eines formalen Kontextes.

Definition A.3.1 (GaWi96: Def. 21) Sind (A_1, B_1) und (A_2, B_2) formale Begriffe eines Kontextes (G, M, I) , so heißt (A_1, B_1) Unterbegriff von (A_2, B_2) , falls $A_1 \subseteq A_2$ ist (dies ist äquivalent zu $B_2 \subseteq B_1$). (A_2, B_2) ist dann ein Oberbegriff von (A_1, B_1) , und wir schreiben $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$. Die Relation \leq

Gegenstandsinhalt

Merkmalumfang

 γg

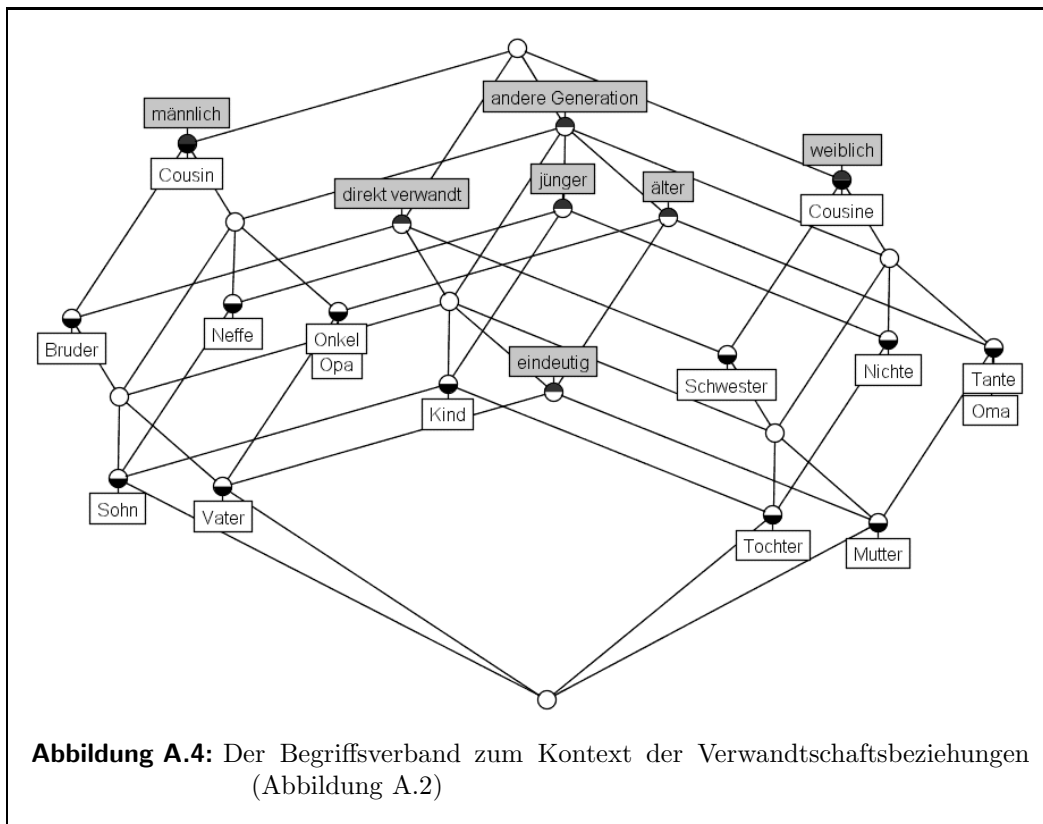
Gegenstandsbegriff

 μm

Merkmalbegriff

Unterbegriff

Oberbegriff



wird die hierarchische Ordnung (oder nur Ordnung) der Begriffe genannt. Die so geordnete Menge aller Begriffe von (G, M, I) bezeichnen wir mit $\underline{\mathcal{B}}(G, M, I)$ und nennen sie den Begriffsverband des formalen Kontextes (G, M, I) .⁴

hierarchische Ordnung
 Begriffsordnung
 $\underline{\mathcal{B}}(G, M, I)$
 Begriffsverband

Den Begriffsverband zu dem Kontext der Verwandtschaftsbeziehungen aus Abbildung A.2 zeigt Abbildung A.4. Wie üblich wird der Begriffsverband durch ein Hassediagramm dargestellt. Dabei stehen Oberbegriffe oberhalb von Unterbegriffen und sind mit diesen durch einen absteigenden Pfad verbunden. Die Definition des Begriffsverbands erlaubt eine besonders sparsame Beschriftung: Anstatt jeden Begriff mit seiner kompletten Extension und Intension zu beschriften, werden lediglich die Gegenstands- und die Merkmalbegriffe beschriftet. Der Gegenstandsbegriff eines Gegenstands g ist der kleinste Begriff,

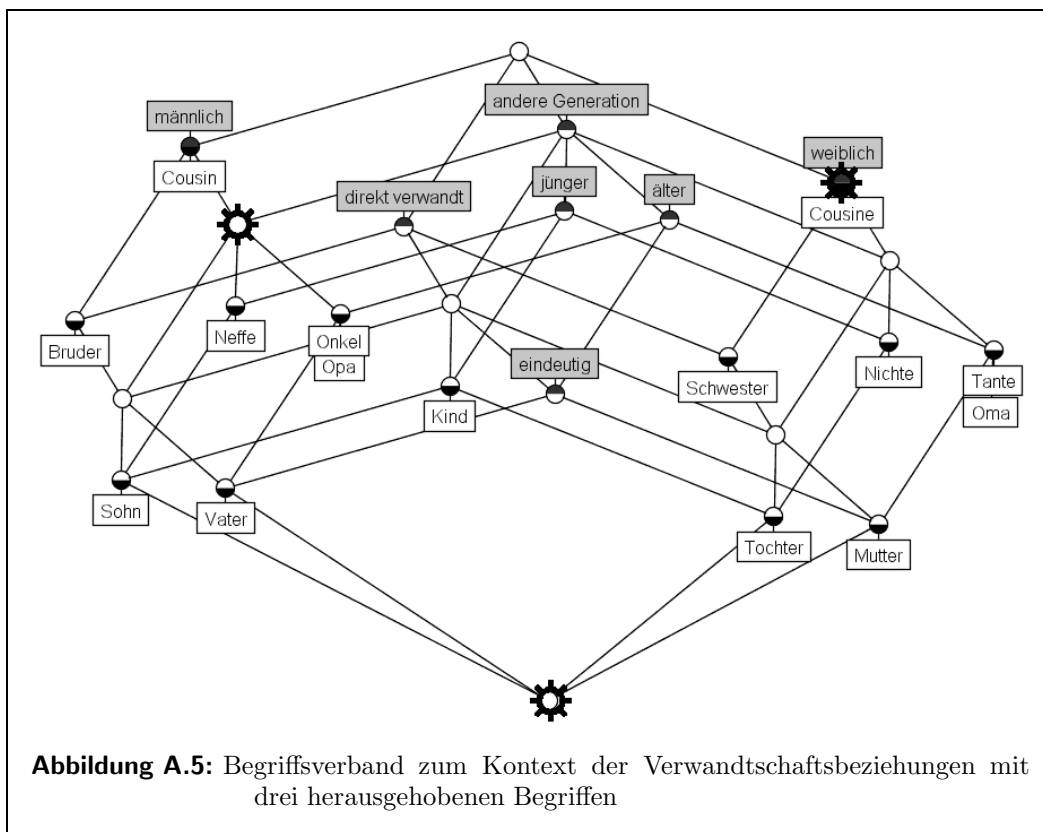
⁴Der Begriffsverband wird auch Galoisverband genannt (vgl. Fußnote 3 auf Seite 180).

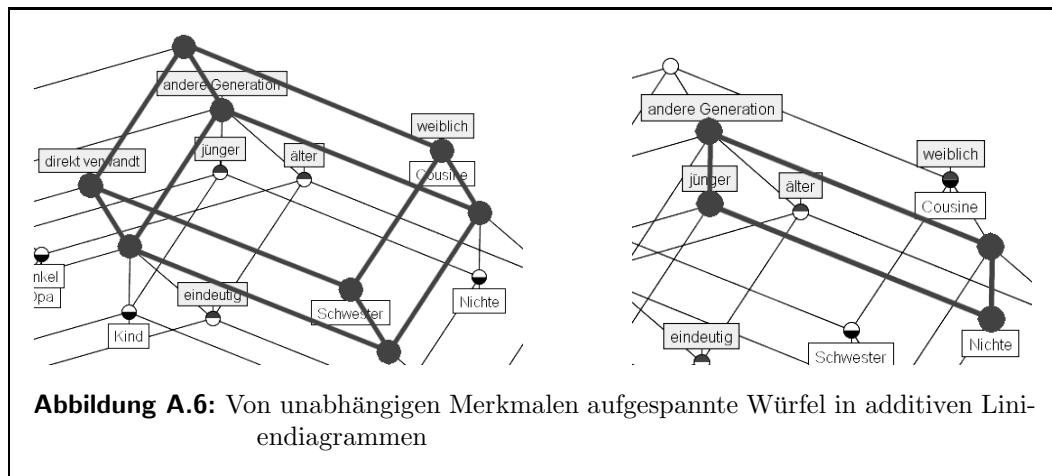
dessen Extension g umfaßt. Analog ist der Merkmalbegriff eines Merkmals m der größte Begriff, dessen Intension m umfaßt. Auf diese Art wird ein Begriffsverband zur Vererbungshierarchie: Ein beliebiger Begriff des Verbands erbt als Extension alle Gegenstände, mit denen Unterbegriffe beschriftet sind, und als Intension alle Merkmale, mit denen Oberbegriffe beschriftet sind. Diese Beschriftung der Begriffsverbände wird durch die Aussage von Lemma A.2.5 ermöglicht. Die auf Begriffsverbänden basierenden Vererbungshierarchien sind redundanzfrei, das heißt, jedes Merkmal und jeder Gegenstand erscheint genau ein einziges Mal in der Hierarchie.⁵ In Abbildung A.5 sind die drei Beispielbegriffe von Seite 180 herausgehoben dargestellt. Es handelt sich um den Merkmalbegriff von *weiblich*, den kleinsten Begriff des Verbands (mit leerer Extension) und den Begriff mit der Intension {männlich, andere Generation}.

Das Hassediagramm des Begriffsverbands in Abbildung A.4 ist in Form eines *additiven Liniendiagramms* konstruiert. Dazu ordnet man jedem irreduziblen Merkmal⁶ des formalen Kontextes einen Vektor mit negativer y -Koordinate zu. Anschließend kann man die Lage des Diagrammknotens eines Begriffs aus der Summe der Vektoren der irreduziblen Merkmale seines Begriffsinhalts berechnen. Additive Liniendiagramme zeichnen sich durch eine Vielzahl paralleler Kanten aus und geben die Struktur eines Begriffsverbands besonders gut wieder. So lassen sich Merkmale, die voneinander unabhängig sind, in additiven Liniendiagrammen daran erkennen, daß ihre Kanten einen Würfel aufspannen. Die drei voneinander unabhängigen Merkmale *weiblich*, *direkt verwandt* und *andere Generation* spannen einen dreidimensionalen Würfel und die zwei unabhängigen Merkmale *weiblich* und *jünger* spannen einen zweidimensionalen Würfel auf (vgl. Abbildung A.6). Andere Algorithmen zum Zeichnen von guten Hassediagrammen zielen zum Beispiel auf die Vermeidung von Kanten-

⁵Abbildung A.4 wurde mit dem Programm *Concept Explorer* (<http://sourceforge.net/projects/conexp>) erstellt, einem Java-Programm, das insbesondere für die graphische Darstellung kleinerer Begriffsverbände geeignet ist. Die Begriffe sind als kleine Kreise symbolisiert: Die Gegenstandsbegriffe werden zusätzlich dadurch gekennzeichnet, daß die untere Hälfte der Kreisscheibe schwarz gefärbt ist, während bei den Merkmalbegriffen die obere Kreishälfte gefüllt ist. Komplette weiße Kreise repräsentieren also Begriffe, die weder zu den Gegenstands- noch zu den Merkmalbegriffen zählen. Komplette schwarze Kreise symbolisieren all jene Begriffe, die zugleich Gegenstands- und Merkmalbegriff sind.

⁶Ein Merkmal heißt irreduzibel, wenn sein Merkmalbegriff \wedge -irreduzibel ist; siehe Definition A.4.2.





kreuzungen ab. Die Wahl des Algorithmus sollte jeweils in Abhängigkeit von den Anforderungen getroffen werden, die an die Zeichnung gestellt werden.⁷

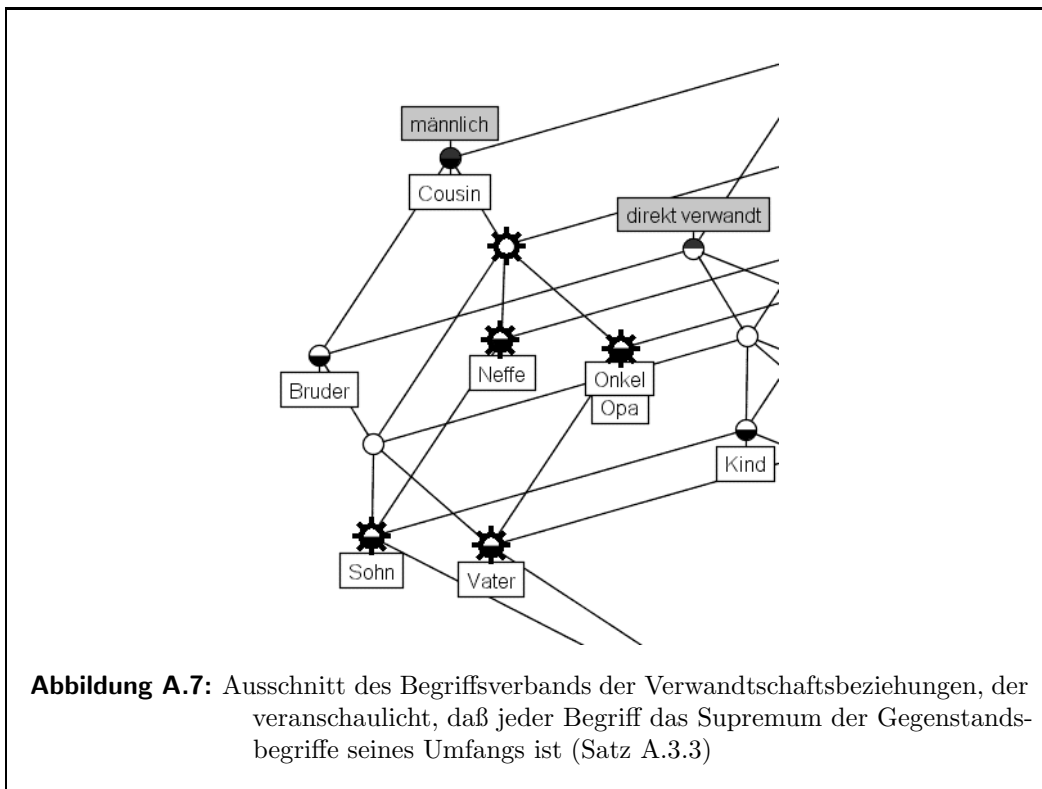
Satz A.3.2 (GaWi96: Satz 3) (Hauptsatz der Begriffsverbände) Sei (G, M, I) ein formaler Kontext, dann ist der Begriffsverband $\underline{\mathcal{B}}(G, M, I)$ ein vollständiger Verband in dem Infimum und Supremum folgendermaßen beschrieben sind: Ist T eine Indexmenge, so daß für jedes $t \in T$ (A_t, B_t) ein formaler Begriff des Kontextes (G, M, I) ist, dann gilt

$$\bigwedge_{t \in T} (A_t, B_t) = \left(\bigcap_{t \in T} A_t, \left(\bigcup_{t \in T} B_t \right)'' \right),$$

$$\bigvee_{t \in T} (A_t, B_t) = \left(\left(\bigcup_{t \in T} A_t \right)'', \bigcap_{t \in T} B_t \right).$$

Das Infimum einer Menge von formalen Begriffen eines formalen Kontextes ist ihr größter gemeinsame Unterbegriff, während das Supremum der kleinste gemeinsame Oberbegriff ist.

⁷Das Programm *Concept Explorer* erlaubt die Wahl zwischen verschiedenen Algorithmen zum Zeichnen von Liniendiagrammen.



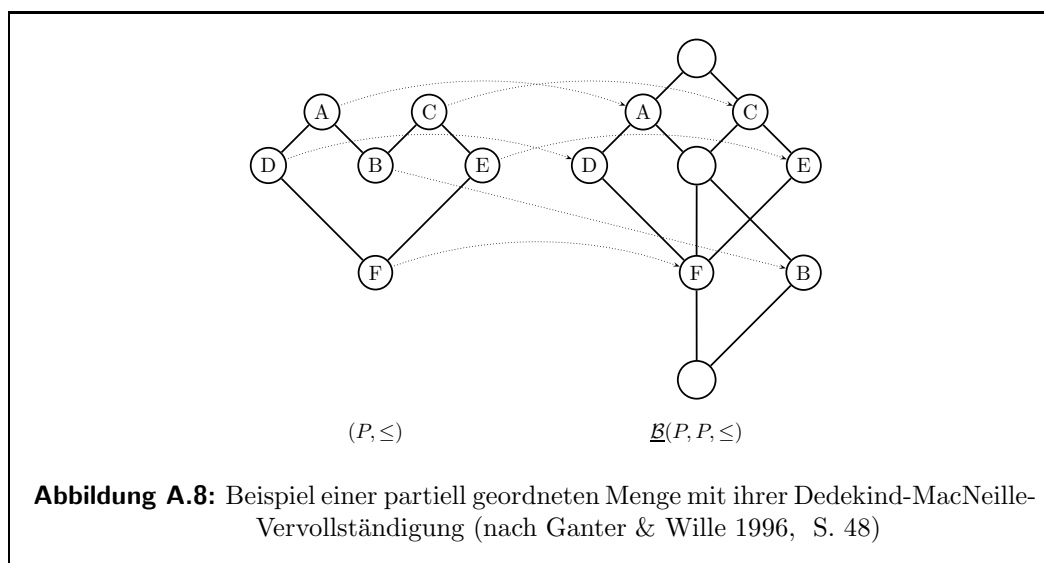
Satz A.3.3 (GaWi96: Beweis von Satz 3) Jeder formale Begriff (A, B) eines formalen Kontextes (G, M, I) ist das Supremum der Gegenstandsbegriffe seines Umfangs

$$(A, B) = \bigvee_{g \in A} (g'', g')$$

und das Infimum der Merkmalbegriffe seines Inhalts

$$(A, B) = \bigwedge_{m \in B} (m', m'').$$

Abbildung A.7 veranschaulicht die Aussage von Satz A.3.3 für den ersten der drei Begriffe von Seite 180: Der Begriff ist das Supremum der Gegenstandsbegriffe γ_{Sohn} , γ_{Neffe} , γ_{Vater} , γ_{Onkel} und γ_{Opa} .



Ein wichtiges Ergebnis der Verbandstheorie ist, daß jede partiell geordnete Menge vervollständigt werden kann. Damit ist gemeint, daß es zu jeder partiell geordneten Menge einen vollständigen Verband gibt, in den sich die geordnete Menge ordnungseinbetten läßt. Der kleinste Verband mit dieser Eigenschaft wird die Dedekind-MacNeille-Vervollständigung genannt (Davey & Priestley 1990, S. 41 ff.). Innerhalb der FBA läßt sich die Dedekind-MacNeille-Vervollständigung einer partiell geordneten Menge sehr einfach charakterisieren (Abbildung A.8 zeigt ein Beispiel einer partiell geordneten Menge mit ihrer Dedekind-MacNeille-Vervollständigung):

Satz A.3.4 (GaWi96: S. 48) Sei (P, \leq) eine partiell geordnete Menge. Der Begriffsverband von (P, P, \leq) ist die Dedekind-MacNeille-Vervollständigung von (P, \leq) .

Dedekind-
MacNeille-Vervollständigung

A.4 Bereinigte und reduzierte Kontexte

Definition A.4.1 (GaWi96: Def. 23) Ein formaler Kontext (G, M, I) heißt bereinigt, wenn für beliebige Gegenstände $g, h \in G$ aus $g' = h'$ stets $g = h$ folgt und entsprechend $m' = n' \Rightarrow m = n$ für alle $m, n \in M$ gilt.

bereinigt

Ein Kontext ist gemäß der Definition bereinigt, wenn zum einen die Gegenstandsbegriffe zweier verschiedener Gegenstände nie den gleichen Inhalt haben, und zum anderen die Merkmalbegriffe zweier verschiedener Merkmale nie den gleichen Umfang haben. Bezogen auf die Kreuztabelle eines formalen Kontextes bedeutet diese Bedingung, daß keine zwei Spalten und keine zwei Zeilen identisch sind. Somit ist unser Beispielkontext der Verwandtschaftsterme (Abbildung A.2) nicht bereinigt, da die Zeilen der Gegenstände *Onkel* und *Opa* identisch sind; gleiches gilt für die Zeilen der Gegenstände *Tante* und *Oma*. Um unseren Kontext zu bereinigen, können wir zum Beispiel die Gegenstände *Oma* und *Opa* entfernen. Aus der Definition der formalen Begriffe folgt, daß der Begriffsverband des bereinigten Kontextes isomorph zu dem des ursprünglichen Kontextes ist.

Definition A.4.2 (GaWi96: Def. 24) *Ein bereinigter Kontext (G, M, I) heißt zeilenreduziert, wenn jeder Gegenstandsbegriff \vee -irreduzibel ist, und spaltenreduziert, wenn jeder Merkmalbegriff \wedge -irreduzibel ist. Ein Kontext, der sowohl zeilen- als auch spaltenreduziert ist, ist reduziert.*

Ist ein Gegenstandsbegriff \vee -reduzibel, so sprechen wir auch von einem reduzierbaren Gegenstand und entsprechend für einen \wedge -reduzierbaren Merkmalbegriff von einem reduzierbaren Merkmal.

zeilenreduziert

spaltenreduziert

reduziert

reduzierbarer Gegenstand

reduzierbares Merkmal

Auch für reduzierte Kontexte gilt, daß der Begriffsverband des reduzierten Kontextes isomorph ist zu dem des ursprünglichen. Durch das Bereinigen und Reduzieren eines Kontextes erhält man also einen Kontext mit einer minimalen Zahl von Gegenständen und Merkmalen, ohne die Struktur des Begriffsverbands zu ändern.

Ein Gegenstand ist reduzibel, wenn sich sein Inhalt als Schnitt anderer Gegenstandsinhalte schreiben läßt. In unserem bereinigten Beispielkontext sind die Gegenstände *Cousin*, *Cousine* und *Kind* reduzibel. Die Reduzibilität eines Gegenstandes drückt sich in der Kreuztabelle des Kontextes dadurch aus, daß sich die Zeile des Gegenstands als Schnitt von Zeilen anderer Gegenstände schreiben läßt. Im Begriffsverband erkennt man einen reduziblen Gegenstandsbegriff daran, daß er das Supremum anderer Gegenstandsbegriffe ist. So ist in unserem Beispiel γ *Cousin* das Supremum von γ *Bruder*, γ *Neffe* und γ *Onkel*, entsprechend ist γ *Cousine* das Supremum von γ *Schwester*,

γ *Nichte* und γ *Tante*, und schließlich ist γ *Kind* das Supremum von γ *Sohn* und γ *Tochter*.⁸

Die Bedingungen für die Reduzibilität eines Merkmals sind analog: In der Kreuztabelle des Kontextes muß die Spalte des Merkmals sich als Schnitt von Spalten anderer Merkmale darstellen lassen, und im Begriffsverband muß der Merkmalbegriff das Infimum anderer Merkmalbegriffe sein. In unserem Beispielkontext ist nur ein Merkmal reduzibel, nämlich *eindeutig*. Der Merkmalbegriff von *eindeutig* ist das Infimum der Merkmalbegriffe von *direkt verwandt* und *älter*. Abbildung A.9 zeigt einen bereinigten und reduzierten Kontext zum Kontext der Verwandtschaftsterme (Abbildung A.2); der entsprechende Begriffsverband ist in Abbildung A.10 dargestellt.

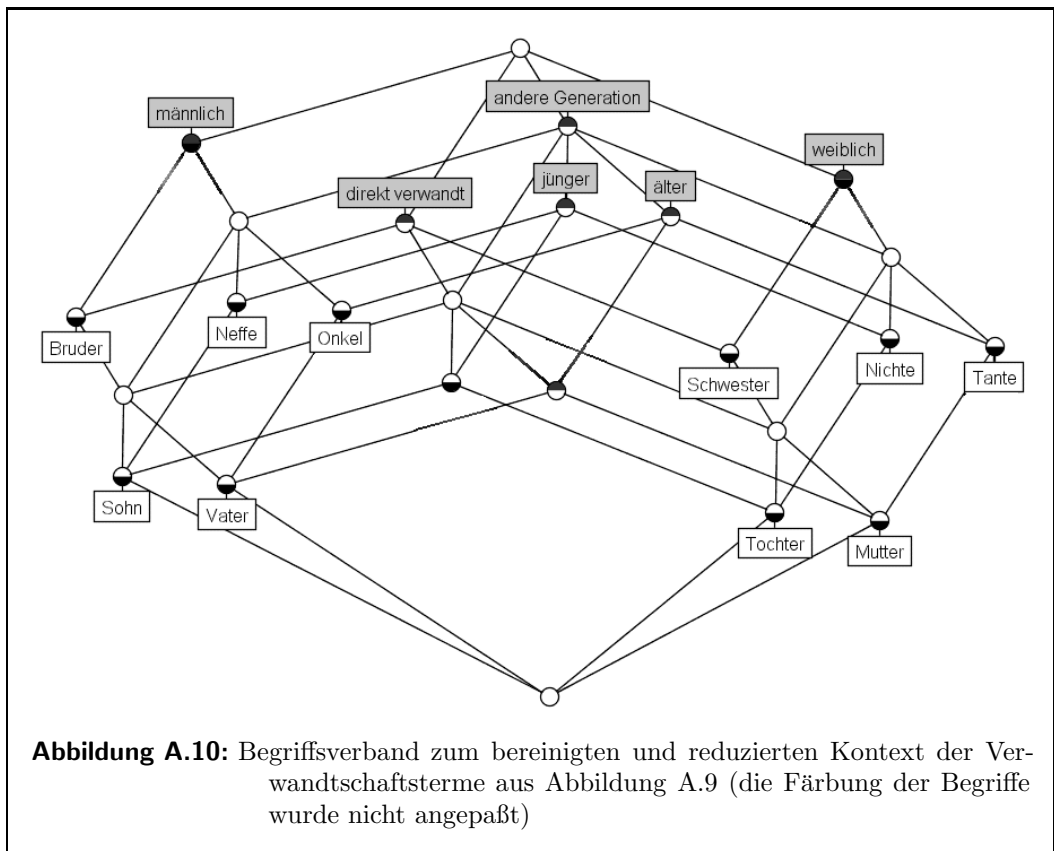
Die Reduzibilität des Merkmals *eindeutig* führt dazu, daß es sich in unserem Kontext äquivalent durch die Konjunktion der Merkmale *direkt verwandt* und *älter* ausdrücken läßt: *Eindeutige* Verwandtschaftsterme sind Funktionalbegriffe, die, gegeben eine Situation und einen Propositus, einen eindeutigen Referenten haben. Diese Eindeutigkeit ist nur gegeben, wenn der Referent älter ist als der Propositus, da Mütter und Väter mehrere Kinder haben können, aber jeder genau einen Vater und eine Mutter hat. Zusätzlich muß eine Verwandtschaft 1. Grades vorliegen (*direkt verwandt*), da zum Beispiel Großeltern immer paarweise auftreten, nämlich väterlicher- und mütterlicherseits; jeder Mensch hat zwei leibliche Großmütter und zwei leibliche Großväter. Andere ältere Verwandte wie Onkel und Tanten können in noch größerer Zahl auftreten und sind somit ebenfalls nicht eindeutig durch einen Propositus bestimmt. Im Rahmen einer Merkmalsemantik müßte man das Merkmal *eindeutig* verwerfen, da es nicht elementar ist, sondern in die Merkmale *direkt verwandt* und *älter* zerlegt werden kann (zumindest für Verwandtschaftsterme).⁹

⁸Es zeigt sich, daß der gewählte Beispielkontext nicht detailliert genug ist, um die Bedeutung der Verwandtschaftsbegriffe zu erfassen. Daß der Gegenstandsbegriff von *Kind* ein Oberbegriff der Gegenstandsbegriffe von *Tochter* und von *Sohn* ist, entspricht unserem Sprachgebrauch. Dies gilt jedoch nicht für γ *Cousin* als Oberbegriff von γ *Bruder*, γ *Neffe* und γ *Onkel* bzw. γ *Cousine* als Oberbegriff von γ *Schwester*, γ *Nichte* und γ *Tante*. Ursache hierfür ist, daß in dem Beispielkontext die Gegenstände *Cousin* bzw. *Cousine* lediglich durch die Merkmale *männlich* bzw. *weiblich* charakterisiert werden.

⁹In Kilbury et al. (2006) wird der Einsatz der FBA zur Ermittlung distinktiver Merkmale an einem Beispiel aus der Flexionsmorphologie eingehend diskutiert.

	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	andere Generation
Vater	×	×		×		×
Mutter	×	×			×	×
Bruder	×			×		
Schwester	×				×	
Sohn	×		×	×		×
Tochter	×		×		×	×
Onkel		×		×		×
Tante		×			×	×
Neffe			×	×		×
Nichte			×		×	×

Abbildung A.9: Bereinigter und reduzierter Kontext zu dem Kontext der Verwandtschaftsterme aus Abbildung A.2



A.5 Implikationen

Merkmalsimplikationen bieten neben den Begriffsverbänden eine weitere Möglichkeit die strukturellen Zusammenhänge der Daten eines formalen Kontextes aufzudecken.

Definition A.5.1 (GaWi96: S. 80) Sei (G, M, I) ein formaler Kontext. Eine Implikation zwischen Merkmalen (in M) – kurz eine Merkmalsimplikation – ist ein Paar von Teilmengen der Merkmalmenge M ; bezeichnet wird eine solche Implikation mit $A \rightarrow B$.

Merkmalsimplikation

Definition A.5.2 (GaWi96: Def. 36) Eine Teilmenge $T \subseteq M$ respektiert eine Implikation $A \rightarrow B$, wenn $A \not\subseteq T$ oder $B \subseteq T$ ist. T respektiert eine Menge \mathcal{L} von Implikationen, wenn T jede einzelne Implikation in \mathcal{L} respektiert.

respektiert

Eine Merkmalsimplikation $A \rightarrow B$ ist in einem formalen Kontext (G, M, I) gültig, wenn $A, B \subseteq M$ und wenn jeder Gegenstandsinhalt die Implikation respektiert. Man sagt dann auch, daß $A \rightarrow B$ eine Implikation des Kontextes (G, M, I) ist oder, gleichbedeutend, daß A eine Prämisse für die Konklusion B im Kontext (G, M, I) ist.

gültig

Implikation des Kontextes

Prämisse

Konklusion

Definition A.5.3 (GaWi96: Def. 37) Eine Implikation $A \rightarrow B$ folgt (semantisch) aus einer Menge \mathcal{L} von Implikationen zwischen Merkmalen in M , falls jede Teilmenge von M , die \mathcal{L} respektiert, auch $A \rightarrow B$ respektiert. Eine Implikationsfamilie \mathcal{L} wird abgeschlossen genannt, wenn jede Implikation, die aus \mathcal{L} folgt, schon zu \mathcal{L} gehört.

folgt (semantisch)

abgeschlossen

Eine Menge \mathcal{L} von Implikationen eines Kontextes (G, M, I) heißt vollständig, wenn jede Implikation von (G, M, I) aus \mathcal{L} folgt.

vollständig

Definition A.5.4 (GaWi96: Def. 39) Eine Menge \mathcal{L} von Implikationen eines Kontextes (G, M, I) heißt nichtredundant, wenn keine der Implikationen aus den übrigen folgt.

nichtredundant

Eine Menge \mathcal{L} von Implikationen eines Kontextes (G, M, I) , die nichtredundant und vollständig ist, heißt Basis der Merkmalsimplikationen.

Basis der
Merkmalsimplikationen

Abbildung A.11 zeigt eine Basis der Merkmalsimplikationen des Kontextes aus Abbildung A.2 auf Seite 178. Die Implikationen (A.1) und (A.2) bringen

$\{\text{eindeutig}\} \rightarrow \{\text{direkt verwandt, älter}\}$	(A.1)
$\{\text{direkt verwandt, älter}\} \rightarrow \{\text{eindeutig}\}$	(A.2)
$\{\text{jünger}\} \rightarrow \{\text{andere Generation}\}$	(A.3)
$\{\text{älter}\} \rightarrow \{\text{andere Generation}\}$	(A.4)
$\{\text{älter, jünger}\} \rightarrow \{\text{männlich, weiblich, eindeutig}\}$	(A.5)
$\{\text{männlich, weiblich}\} \rightarrow \{\text{älter, jünger, eindeutig}\}$	(A.6)

Abbildung A.11: Basis der Merkmalimplikationen zum Kontext aus Abbildung A.2

zum Ausdruck, daß das Merkmal *eindeutig* in die Merkmale *direkt verwandt* und *älter* zerlegt werden kann (siehe S. 190). Die Implikationen (A.5) und (A.6) haben unvereinbare Merkmale in ihren Prämissen, aus denen alles gefolgert werden kann. Der Abschluß ihrer Konklusionen, also die Menge aller Merkmale, die mit Hilfe der anderen Implikationen aus den Merkmalen der Konklusion gewonnen werden können, ist die Merkmalmenge des Kontextes selbst.

Die gültigen Merkmalimplikationen eines formalen Kontextes können direkt aus dem Begriffsverband abgelesen werden: Eine Implikation $\{m_1, m_2, \dots, m_k\} \rightarrow \{m\}$ gilt genau dann, wenn das Infimum der Merkmalbegriffe von m_1, \dots, m_k ein Unterbegriff des Merkmalbegriffs von m ist. Implikationen mit gleichen Prämissen können zu einer zusammengefaßt werden, deren Konklusion gerade die Vereinigung der Konklusionen der Einzelimplikationen ist:

$$(A \rightarrow \{m_1\}) \wedge (A \rightarrow \{m_2\}) \Leftrightarrow A \rightarrow \{m_1, m_2\}$$

Implikationen mit einelementigen Prämissen und Konklusionen können besonders leicht vom Begriffsverband abgelesen werden, denn sie gelten, wenn der Merkmalbegriff der Konklusion ein Oberbegriff des Merkmalbegriffs der Prämisse ist (vgl. Implikation (A.3) und $\mu_{\text{jünger}}$, $\mu_{\text{andere Generation}}$). Die

Implikation (A.2) ist gültig, da das Infimum von $\mu_{\text{älter}}$ und $\mu_{\text{direkt verwandt}}$ gerade $\mu_{\text{eindeutig}}$ ist.

B Mathematische Grundlagen

Ziel dieses Kapitel ist es, die Definitionen der in der vorliegenden Arbeit benötigten mathematischen Fachbegriffe zu liefern. Es ist unter dem Gesichtspunkt der Vollständigkeit verfaßt und umfaßt somit auch Definitionen allgemein bekannter Begriffe wie Schnittmenge u. ä. Es dient in erster Linie dem schnellen Nachschlagen und kann keine Gesamtdarstellungen der behandelten mathematischen Teilgebiete ersetzen.

Eine gute Einführung in die Ordnungstheorie bietet Davey & Priestley (1990) sowie Erné (1982). Zur Einführung in die Graphentheorie sei hier auf Diestel (1997) verwiesen. Für die Verbandstheorie sollen hier drei Standardwerke genannt werden, nämlich wiederum Davey & Priestley (1990), Birkhoff (1973) und Grätzer (1978). Viele der folgenden verbandstheoretischen Definitionen finden sich auch in Ganter & Wille (1996). Schließlich sei hier zur Einführung in mathematische Methoden für Linguisten noch auf Partee et al. (1990) verwiesen.

B.1 Mengen

Definition B.1.1 *Eine Menge ist eine Zusammenfassung beliebiger Objekte, genannt Elemente, zu einer Gesamtheit, wobei keines der Objekte die Menge selbst sein darf. Zwei Mengen sind gleich, g. d. w. sie dieselben Elemente enthalten. Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente enthält, nämlich die leere Menge, die mit \emptyset bezeichnet wird. Wenn x ein Element der Menge G ist, so schreibt man $x \in G$.*

Menge

gleich

leere Menge

\emptyset

\in

explizite Mengendarstellung $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ist die Menge, die genau die Elemente a_1, a_2, \dots, a_n enthält.

Beispiel: $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

implizite Mengendarstellung $\{x \mid A\}$ ist die Menge, die genau die Objekte x enthält, auf die die Aussage A zutrifft.

Beispiel: $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } x < 8 \text{ und } 1 < x\}$

Definition B.1.2 Eine Menge T ist eine Teilmenge der Menge M (in Zeichen: $T \subseteq M$), g. d. w. alle Elemente von T auch Elemente von M sind. M heißt dann Obermenge von T . Die Relation \subseteq heißt Mengeninklusion.

T ist eine echte Teilmenge von M (in Zeichen: $T \subset M$), g. d. w. $T \subseteq M$ und $T \neq M$.

Bemerkung B.1.3 Die Mengeninklusion ist eine reflexive, transitive und antisymmetrische binäre Relation (vgl. Abschnitt B.2).

Definition B.1.4 Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M :

$$\mathfrak{P}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{T \mid T \subseteq M\}.$$

Bemerkung B.1.5 Wenn eine Menge M genau n Elemente enthält, dann enthält die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ gerade 2^n Elemente.

Definition B.1.6 Die Vereinigung zweier Mengen M und N (in Zeichen: $M \cup N$) ist die Menge aller Objekte, die Element von M oder von N sind:

$$M \cup N \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}.$$

Satz B.1.7 (Eigenschaften der Vereinigung) Für beliebige Mengen M , N und P gilt:

- a) $M \cup N \supseteq M$
- b) $M \cup M = M$ (Idempotenz)
- c) $M \cup \emptyset = M$ (Neutralität)
- d) $M \cup N = N \cup M$ (Kommutativität)
- e) $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$ (Assoziativität)

Teilmenge

 \subseteq

Obermenge

Mengeninklusion

echte Teilmenge

 \subset

Potenzmenge

 $\mathfrak{P}(M)$

Vereinigung

 \cup

Definition B.1.8 Der Schnitt zweier Mengen M und N (in Zeichen: $M \cap N$) ist die Menge aller Objekte, die sowohl Element von M als auch von N sind: Schnitt
∩

$$M \cap N \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\} .$$

Satz B.1.9 (Eigenschaften des Schnitts) Für beliebige Mengen M , N und P gilt:

- a) $M \cap N \subseteq M$
- b) $M \cap M = M$ (Idempotenz)
- c) $M \cap \emptyset = \emptyset$
- d) $M \cap N = N \cap M$ (Kommutativität)
- e) $(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$ (Assoziativität)
- f) $M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$ (Distributivität)
- g) $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$ (Distributivität)
- h) $M \cup (M \cap N) = M$ (Absorption)
- i) $M \cap (M \cup N) = M$ (Absorption)

Bemerkung B.1.10 Aufgrund der Kommutativität und der Assoziativität der Schnittbildung spielt es zur Bildung des Schnitts einer Menge von Mengen keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Schnitte gebildet werden. Wir können daher ∩

$$\bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} M_i$$

für den Schnitt der Mengen M_1, M_2, \dots, M_n schreiben. Wenn \mathfrak{A} eine Menge von Mengen ist, schreiben wir

$$\bigcap_{\mathfrak{A}} A \quad \text{oder} \quad \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A \quad \text{oder} \quad \bigcap \{A \mid A \in \mathfrak{A}\} \quad \text{oder} \quad \bigcap \mathfrak{A}$$

für den Durchschnitt aller Elemente aus \mathfrak{A} .

Für die Bildung der Vereinigung einer Menge von Mengen verwenden wir analog das Symbol \cup .

Definition B.1.11 Die Differenz zweier Mengen M und N (in Zeichen: $M \setminus N$) ist die Menge aller Objekte, die Element von M , aber nicht von N sind:

$$M \setminus N \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\} .$$

Satz B.1.12 (Eigenschaften der Differenz) Für beliebige Mengen M und N gilt:

- a) $M \setminus M = \emptyset$
- b) $M \setminus \emptyset = M$
- c) $M \setminus N \subseteq M$
- d) $M \setminus N = M$ g. d. w. $M \cap N = \emptyset$
- e) $M \subseteq (M \setminus N) \cup N$
- f) $M = (M \setminus N) \cup N$ g. d. w. $N \subseteq M$

Definition B.1.13 Seien M und N beliebige Mengen, dann ist das Kreuzprodukt von M und N (in Zeichen: $M \times N$) die Menge aller geordneten Paare, deren erstes Element ein Element von M ist und deren zweites Element ein Element von N ist:

$$M \times N \stackrel{\text{def}}{=} \{(m, n) \mid m \in M \text{ und } n \in N\} .$$

Definition B.1.14 Zwei Mengen M und N heißen disjunkt, wenn

$$M \cap N = \emptyset .$$

Definition B.1.15 Eine Menge M heißt endlich, wenn sie endlich viele Elemente hat.

Sei M eine endliche Menge, dann bezeichnet $|M|$ die Anzahl der Elemente von M . $|M|$ wird auch die Mächtigkeit der Menge M genannt.

Definition B.1.16 Sei M eine Menge; eine endliche Partition P von M ist eine endliche Menge von disjunkten Teilmengen von M , $P = \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ mit $M_i \subseteq M$, so daß $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$. Die Elemente einer Partition P werden Partitionsklassen genannt.

endliche Partition

Partitionsklassen

B.2 Binäre Relationen und Äquivalenzrelationen

Definition B.2.1 Eine binäre Relation R zwischen zwei Mengen M und N ist eine Menge von Paaren (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$, also $R \subseteq M \times N$. Statt $(m, n) \in R$ schreibt man auch mRn . Ist $M = N$, so spricht man von einer binären Relation auf der Menge M . Die Relation $R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(n, m) \mid (m, n) \in R\}$ ist die zu R inverse Relation.

binäre Relation

inverse Relation

Definition B.2.2 Eine binäre Relation R auf M heißt:

reflexiv g. d. w. $\forall x \in M : xRx$,

irreflexiv g. d. w. $\forall x \in M : \neg xRx$,

symmetrisch g. d. w. $\forall x, y \in M : \text{wenn } xRy, \text{ dann } yRx$,

asymmetrisch g. d. w. $\forall x, y \in M : \text{wenn } xRy, \text{ dann } \neg yRx$,

antisymmetrisch g. d. w. $\forall x, y \in M : \text{wenn } xRy \text{ und } x \neq y, \text{ dann } \neg yRx$,

konnex g. d. w. $\forall x, y \in M : xRy \text{ oder } yRx \text{ oder } x = y$,

transitiv g. d. w. $\forall x, y, z \in M : \text{wenn } xRy \text{ und } yRz, \text{ dann } xRz$.

Definition B.2.3 Eine binäre Relation R auf einer Menge M ist eine Äquivalenzrelation, falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Ist R eine Äquivalenzrelation auf M und $a, b \in M$, so schreibt man statt aRb auch $a \sim_R b$ und sagt: a ist äquivalent zu b bezüglich R . Man kann die Elemente von M in Klassen von (bezüglich R) äquivalenten Elementen einteilen; für ein Element $a \in M$ heißt die Klasse

Äquivalenzrelation

$$[a]_R \stackrel{\text{def}}{=} \{b \mid b \in M \text{ und } a \sim_R b\}$$

die Äquivalenzklasse von a bezüglich R . Die Menge

Äquivalenzklasse

$$M/R \stackrel{\text{def}}{=} \{[a]_R \mid a \in M\}$$

Quotient *aller Äquivalenzklassen von Elementen aus M bezüglich R heißt Quotient von M bezüglich R .*

Bemerkung B.2.4 *Seien a und b Elemente einer Menge M und R eine Äquivalenzrelation auf M , dann ist M/R eine Partition von M , und es gilt:*

$$[a]_R \neq \emptyset, \quad [a]_R = [b]_R \text{ g. d. w. } a \sim_R b, \quad a \not\sim_R b \text{ g. d. w. } [a]_R \cap [b]_R = \emptyset.$$

B.3 Funktionen und Abbildungen

Abbildung
Funktion
→
Definition B.3.1 *Eine binäre Relation $f \subseteq X \times Y$ heißt Abbildung oder Funktion von X in Y (in Zeichen $f : X \rightarrow Y$), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- Für jedes $x \in X$ gibt es ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$.
- Wenn $(x, y_1), (x, y_2) \in f$, so ist $y_1 = y_2$.

$f(x)$
↦
Urbildmenge
Definitionsbereich
Bildmenge
Wertebereich
Man sagt, daß f jedem $x \in X$ ein eindeutig bestimmtes Element $y \in Y$ zuordnet; man bezeichnet dieses y häufig mit $f(x)$ und schreibt $f(x) = y$ oder $x \xrightarrow{f} y$. Die Menge X wird die Urbildmenge (oder der Definitionsbereich) und die Menge Y die Bildmenge (oder der Wertebereich) der Abbildung f genannt.

Eine binäre Relation, die die zweite der zwei Bedingungen erfüllt, nennt man partielle Abbildung oder partielle Funktion.

definiert
↓
nicht definiert
↑
Definition B.3.2 *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine partielle Abbildung. Wenn f einem Element $x \in X$ ein Element der Bildmenge zuordnet, dann sagt man, daß f an x definiert ist (in Zeichen: $f(x) \downarrow$). Wenn f einem Element $x \in X$ kein Element der Bildmenge zuordnet, dann ist f an x nicht definiert (in Zeichen: $f(x) \uparrow$).*

Bemerkung B.3.3 *Abbildungen werden häufig mithilfe von Fallunterscheidungen wie im folgenden Beispiel definiert:*

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{wenn } x \text{ gerade ist,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

f ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen in die natürlichen Zahlen, die die geraden Zahlen verdoppelt und die ungeraden auf 1 abbildet.

Definition B.3.4 *Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt injektiv, wenn aus $(x_1, y_1) \in f$ und $(x_2, y_2) \in f$ mit $x_1 \neq x_2$ immer $y_1 \neq y_2$ folgt.* injektiv

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt surjektiv, wenn es für jedes Element y der Bildmenge Y immer ein Element x der Urbildmenge X gibt, das auf y abgebildet wird. surjektiv

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt bijektiv, wenn sie surjektiv und injektiv ist. bijektiv

Definition B.3.5 *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine bijektive Abbildung. Die inverse Abbildung zu f ist* inverse Abbildung
 f^{-1}

$$f^{-1} : Y \rightarrow X \quad \text{mit} \quad f^{-1}(y) = x, \quad \text{wenn} \quad f(x) = y .$$

Definition B.3.6 *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine partielle Abbildung und $Z \subseteq X$; die Abbildung* |_Z

$$f|_Z : Z \rightarrow Y \quad \text{mit} \quad f|_Z(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in Z$$

heißt die Einschränkung von f auf Z . $f|_Z$ ist für Elemente aus $X \setminus Z$ nicht definiert. Einschränkung

Definition B.3.7 *Sei R_A eine binäre Relation auf einer Menge A und R_B eine binäre Relation auf einer Menge B . Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt Homomorphismus von (A, R_A) nach (B, R_B) , wenn für alle $x, y \in A$ aus $xR_A y$ folgt, daß $f(x)R_B f(y)$.* Homomorphismus

Die Abbildung f heißt Isomorphismus von (A, R_A) nach (B, R_B) , wenn f bijektiv ist und f und f^{-1} Homomorphismen sind. Isomorphismus

B.4 Graphentheorie

Die meisten Definitionen dieses Abschnitts sind an Diestel (1997) angelehnt.

Definition B.4.1 Ein Graph G ist ein Paar (V, E) disjunkter endlicher Mengen mit $E \subseteq [V]^2$, wobei $[V]^2$ die Menge der zweielementigen Teilmengen von V bezeichnet. Die Elemente von V werden die Ecken und die Elemente von E die Kanten des Graphen genannt.¹ Eine Ecke v heißt mit einer Kante $e = \{v_1, v_2\}$ inzident, wenn $v = v_1$ oder $v = v_2$ gilt. Die beiden mit einer Kante $e = \{v_1, v_2\}$ inzidenten Ecken v_1, v_2 heißen die Endecken der Kante; die Kante e verbindet die Ecken v_1 und v_2 . Zwei Ecken $v_1, v_2 \in V$ heißen benachbart, wenn es eine Kante $e \in E$ gibt, so daß v_1 und v_2 Endecken von e sind. Eine Kante $e = \{v_1, v_2\}$ wird häufig mit v_1v_2 bezeichnet.

Definition B.4.2 Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ zwei Graphen. G und G' sind isomorphe Graphen, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : V \rightarrow V'$ gibt, mit $\{v_1, v_2\} \in E \Leftrightarrow \{\varphi(v_1), \varphi(v_2)\} \in E'$ für alle $v_1, v_2 \in V$. Eine solche Abbildung φ heißt Graphenisomorphismus.

Definition B.4.3 Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ zwei Graphen. G' ist ein Teilgraph von G , wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$. Wir schreiben dann auch $G' \subseteq G$.

Definition B.4.4 Ein Kantenzug in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Sequenz $\langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$ von Ecken, mit $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \{v_{i-1}, v_i\} \in E$. Die Ecke v_0 ist die Anfangsecke und die Ecke v_n ist die Endecke des Kantenzuges, der ein Kantenzug zwischen v_1 und v_n ist.

Ein Kantenzug heißt Weg, wenn die Ecken der Sequenz paarweise verschieden sind. Ein Kreis ist ein geschlossener Kantenzug $\langle v_0, v_1, \dots, v_n, v_0 \rangle$, für den $\langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$ ein Weg ist.

Lemma B.4.5 Jeder Kantenzug eines Graphen zwischen zwei Ecken enthält einen Weg zwischen diesen Ecken.

Definition B.4.6 Ein nichtleerer Graph G heißt zusammenhängend, wenn

¹Die Definition der Kanten verhindert das Auftreten von ‚Mehrfachkanten‘ oder ‚Schlingen‘.

Graph

 (V, E)

Ecke

Kante

inzident

Endecke

verbindet

benachbart

isomorpher Graph

Graphenisomorphismus

Teilgraph

Kantenzug

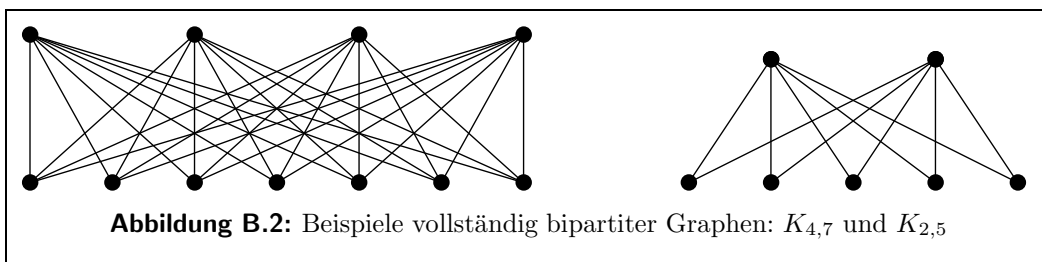
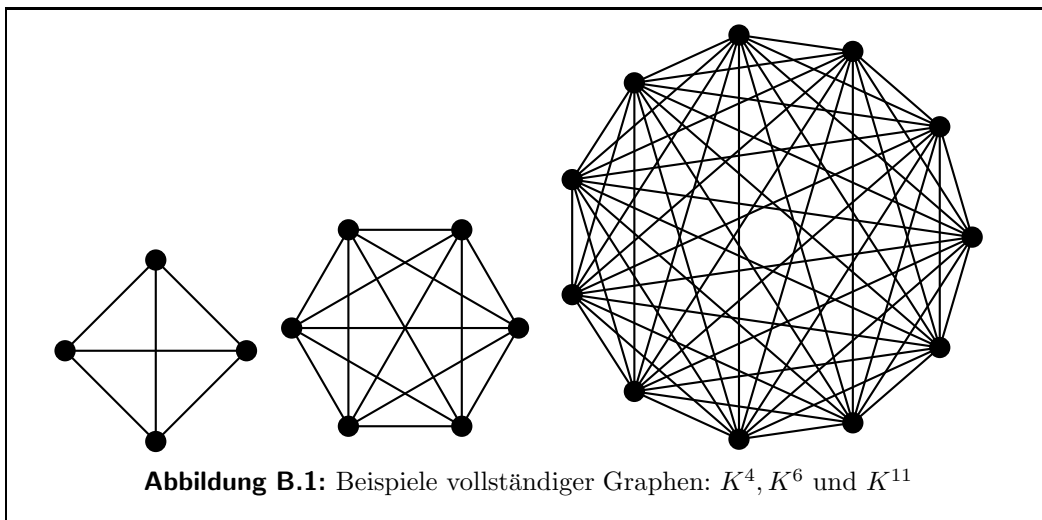
Anfangsecke

zwischen

Weg

Kreis

zusammenhängend



er für je zwei seiner Ecken einen Weg zwischen diesen Ecken enthält. Ein maximal zusammenhängender Teilgraph von G heißt Zusammenhangskomponente von G .

Zusammenhangskomponente

Definition B.4.7 Ein Graph G heißt vollständig, wenn je beliebige zwei Ecken von G benachbart sind. Ein vollständiger Graph mit n Ecken wird mit K^n bezeichnet (vgl. Abbildung B.1).

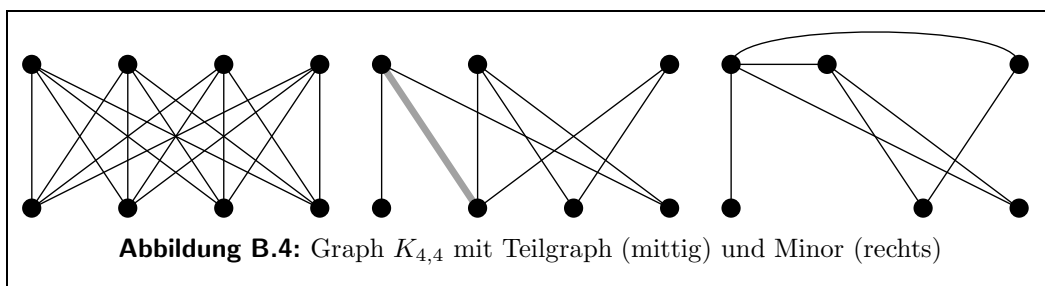
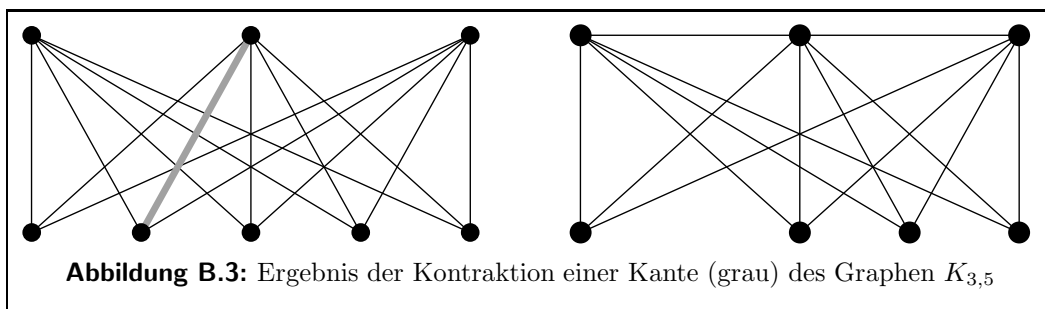
vollständig

K^n

Definition B.4.8 Ein Graph $G = (V, E)$ ist ein bipartiter Graph, wenn eine Partition von V in zwei Klassen existiert, so daß die Endecken einer jeden Kante von G in zwei verschiedenen Partitionsklassen liegen. G ist ein vollständig bipartiter Graph, wenn jede Ecke aus der einen Partitionsklasse mit

bipartiter Graph

vollständig bipartiter Graph



jeder Ecke aus der anderen Partitionsklasse benachbart ist. Ein vollständig bipartiter Graph, dessen Partitionsklassen die Mächtigkeiten m und n haben, wird mit $K_{m,n}$ bezeichnet (vgl. Abbildung B.2).

 $K_{m,n}$

Definition B.4.9 Sei e eine Kante des Graphen $G = (V, E)$. G/e bezeichnet den Graphen der aus G durch Kontraktion der Kante e entsteht. Die Kante e wird kontrahiert, indem sie durch eine neue Ecke v_e ersetzt wird, die mit jeder Ecke aus V benachbart ist, mit der wenigstens eine der Endecken von e benachbart war. Die beiden Endecken von e fallen weg (Abbildung B.3).

 G/e

Kontraktion

Definition B.4.10 Seien G und G' zwei Graphen. G' ist ein Minor von G , wenn G' aus einem Teilgraphen von G durch Kontraktion einiger (möglicherweise keiner) Kanten gewonnen werden kann (Abbildung B.4).

Minor

Definition B.4.11 Ein gerichteter Graph G ist ein Paar (V, E) , wobei V eine Menge von Ecken ist und $E \subseteq V \times V$ eine Menge von gerichteten Kanten.

gerichteter Graph

Ein gerichteter Pfad in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Se-

gerichteter Pfad

quenz $\langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$ von Ecken, mit $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \langle v_{i-1}, v_i \rangle \in E$. Handelt es sich bei dem Graphen um ein Hassediagramm, so spricht man auch von aufsteigenden und absteigenden Pfaden.

aufsteigender Pfad

absteigender Pfad

Definition B.4.12 Ein Polygonzug ist eine zum Einheitsintervall $[0, 1]$ homöomorphe Teilmenge des $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die die Vereinigung endlich vieler Strecken ist. Eine Teilmenge T des $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist homöomorph zum Einheitsintervall $[0, 1]$, wenn es eine stetige Abbildung ψ von $[0, 1]$ in T gibt. $\psi(0)$ und $\psi(1)$ heißen die Endpunkte des Polygonzuges.

Polygonzug

Definition B.4.13 Eine Zeichnung eines Graphen G ist ein Paar (V, E) endlicher Mengen mit folgenden Eigenschaften (die Elemente von V heißen Ecken und die Elemente von E Kanten):

Zeichnung

- (1) $V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- (2) jede Kante ist ein Polygonzug zwischen zwei Ecken;
- (3) verschiedene Kanten haben verschiedene Mengen von Ecken;
- (4) das Innere einer jeden Kante enthält keine Ecke;
- (5) faßt man (V, E) als Graphen auf, dann sind G und (V, E) isomorph.

Ist $v \in V$, dann bezeichnet man mit v_x die x -Koordinate von v und mit v_y die y -Koordinate von v ; es ist also $v = (v_x, v_y)$.

 v_x v_y

Definition B.4.14 Eine ebene Zeichnung (V, E) eines Graphen ist eine Zeichnung des Graphen, für die zusätzlich gilt:

ebene Zeichnung

- (6) das Innere einer jeden Kante enthält keinen Punkt einer anderen Kante.

Ein Paar (V, E) , das die ebene Zeichnung eines Graphen ist, nennt man einen ebenen Graphen.

ebener Graph

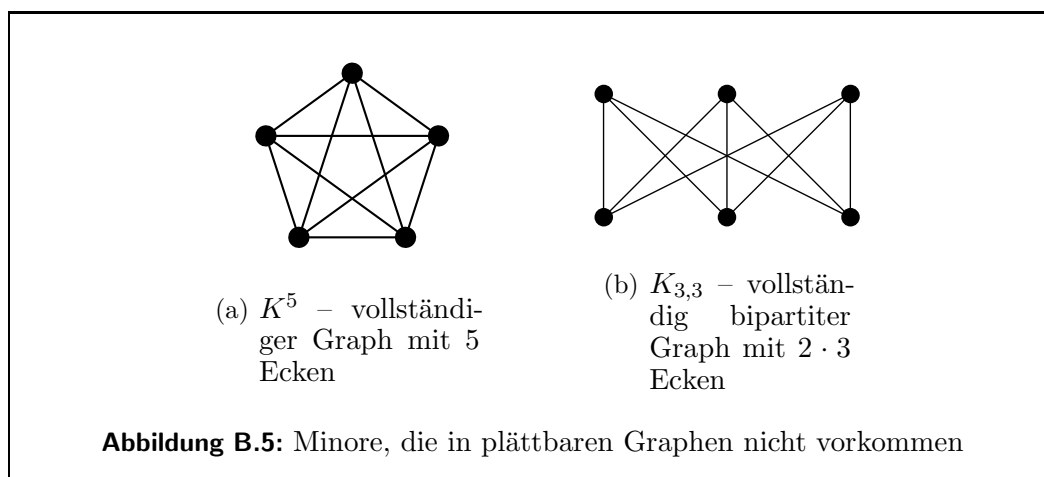
Definition B.4.15 Jeder ebene Graph G zerlegt die Euklidische Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in Gebiete. Genau eines dieser Gebiete ist unbeschränkt und wird das Außengebiet von G genannt, alle anderen Gebiete heißen Innengebiete. Der Rand eines Gebiets ist der Teilgraph von G , der aus genau den Kanten und ihren

Gebiet

Außengebiet

Innengebiet

Rand eines Gebiets



Endecken von G gebildet wird, für die gilt, daß jeder Punkt des Inneren einer Kante das Gebiet berührt.²

Der Rand des Außengebiets wird häufig auch der Rand des Graphen genannt.

Definition B.4.16 Ein Graph G heißt plättbar, wenn es eine ebene Zeichnung des Graphen gibt.

Satz B.4.17 (Fáry 1948) Zu jedem plättbare Graph gibt es eine ebene Zeichnung, in der alle Kanten einfache Strecken sind.

Satz B.4.18 (Satz von Kuratowski) Ein Graph G ist genau dann plättbar, wenn G weder K^5 noch $K_{3,3}$ als Minor enthält (vgl. Abbildung B.5).

Dieser Satz wird häufig Kuratowski zugerechnet, obwohl in Kuratowski (1930) die Aussage zunächst für topologische Minore aufgestellt wird. Erst Wagner (1937) beweist den Satz in der hier wiedergegebenen Form.

Satz B.4.19 (Jordanscher Kurvensatz) Eine einfach geschlossene Kurve zerlegt die Ebene in genau zwei disjunkte Gebiete, von denen genau eines beschränkt ist.

²Um nicht auch noch die Terminologie der Topologie einführen zu müssen, werden in einigen Definitionen anschauliche, aber hier undefinierte Begriffe wie ‚berühren‘ verwendet.

Rand eines Graphen

plättbar

B.5 Ordnungsrelationen

Definition B.5.1 (Ordnungsrelationen) Eine binäre Relation R auf einer Menge M ist eine

partielle Ordnung, wenn R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.
(Beispiel: $(\mathfrak{P}(M), \subseteq)$)

reflexiv lineare Ordnung, wenn R reflexiv, transitiv und konnex ist.
(Beispiel: (\mathbb{N}, \leq))

totale Ordnung, wenn R irreflexiv, transitiv und konnex ist.
(Beispiel: $(\mathbb{N}, <)$)

Ein Paar (M, R) bestehend aus einer Mengen M und einer (partiellen/linearen/totalen) Ordnung R heißt partiell/linear/total geordnete Menge.

geordnete Menge

Definition B.5.2 Sei (M, \leq) eine geordnete Menge, und seien a und b Elemente von M . a und b heißen vergleichbar, falls $a \leq b$ oder $b \leq a$; sonst heißen a und b unvergleichbar.

vergleichbar

unvergleichbar

Definition B.5.3 Sei (M, \leq) eine geordnete Menge. Die Ordnung \leq^{-1} , die folgendermaßen definiert ist:

$$a \leq^{-1} b \iff b \leq a$$

heißt die zu \leq duale Ordnung. Ferner ist (M, \leq^{-1}) die zu (M, \leq) dual geordnete Menge. Statt \leq^{-1} schreibt man häufig auch einfach \geq .

duale Ordnung

dual geordnete Menge

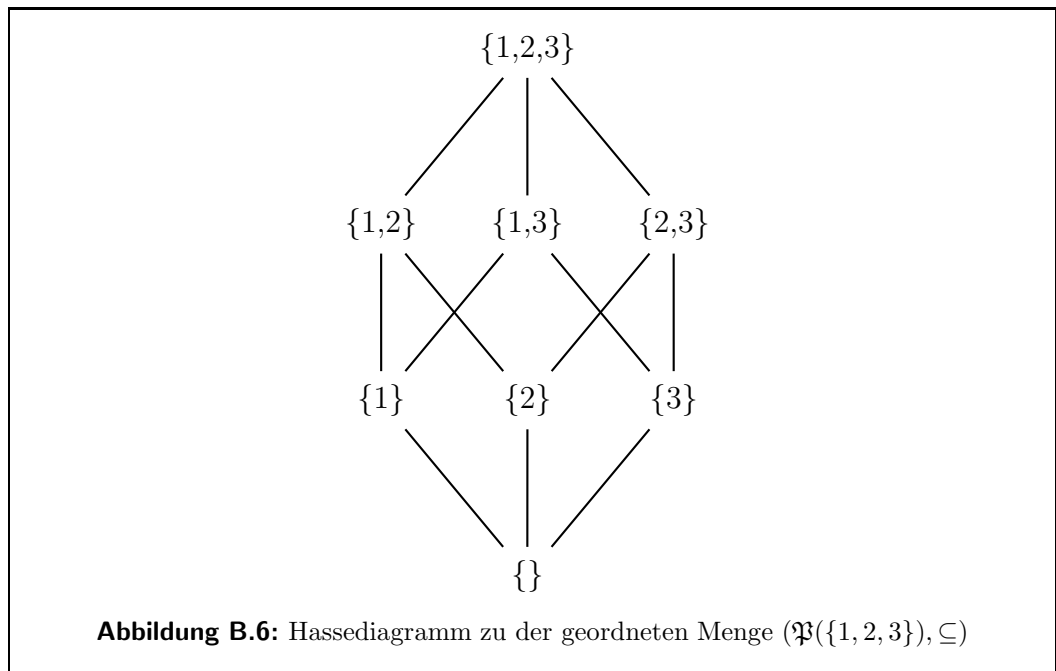
Definition B.5.4 Seien a und b zwei Elemente einer geordneten Menge (M, \leq) ; b heißt oberer Nachbar von a genau dann, wenn $a \leq b$, $a \neq b$ und es kein von a und b verschiedenes Element c aus M gibt, für das $a \leq c \leq b$ gilt. Man schreibt dann auch $a \prec b$. Wenn b ein oberer Nachbar von a ist, dann ist a ein unterer Nachbar von b .

oberer Nachbar

 \prec

unterer Nachbar

Bemerkung B.5.5 Jede reflexive Ordnung \leq auf einer Menge M legt eine natürliche Äquivalenzrelation \equiv auf M fest: Für alle $a, b \in M$ gilt $a \equiv b$, g. d. w. $a \leq b$ und $b \leq a$.



Eine endliche geordnete Menge (M, \leq) kann durch ein Hassediagramm veranschaulicht werden; dieses erhält man, indem man für jede \equiv -Äquivalenzklasse von M einen Knoten zeichnet und zwar so, daß $[a]$ unterhalb von $[b]$ liegt, wenn $a \leq b$ gilt. Zwei Knoten $[a]$ und $[b]$ werden mit einer Kante verbunden, wenn $a < b$ gilt.

Abbildung B.6 zeigt ein Hassediagramm von $(\mathfrak{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$.

Definition B.5.6 Ein Hassediagramm zu einer endlichen geordneten Menge (M, \leq) ist ein Paar $((V, E), \tau)$, bestehend aus einer Zeichnung eines Graphen (V, E) und einer surjektiven Abbildung $\tau : M \rightarrow V$, so daß für $m_1, m_2 \in M$ gilt:

- (1) $\tau(m_1) = \tau(m_2)$ genau dann, wenn $m_1 \leq m_2$ und $m_2 \leq m_1$;
- (2) $(\tau(m_1))_y < (\tau(m_2))_y$ genau dann, wenn $m_1 \leq m_2$ und $m_2 \not\leq m_1$;
- (3) $(\tau(m_1), \tau(m_2)) \in E$ genau dann, wenn m_1 ein unterer Nachbar von m_2 in (M, \leq) ist.

Definition B.5.7 Ein ebenes Hassediagramm zu einer endlichen geordneten Menge (M, \preceq) ist ein Hassediagramm $((V, E), \tau)$ zu (M, \preceq) , dessen Graph (V, E) eben ist.

ebenes Hassediagramm

Definition B.5.8 Eine endliche geordnete Menge (M, \preceq) heißt Hasse-plättbar, wenn es ein ebenes Hassediagramm zu (M, \preceq) gibt.

Hasse-plättbar

Satz B.5.9 Zu jeder Hasse-plättbaren geordneten Menge gibt es ein Hassediagramm, dessen Kanten einfache Strecken in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sind.

Definition B.5.10 Seien (M, \leq) und (N, \leq) zwei partiell geordnete Mengen. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt ordnungstreu, wenn $\forall x, y \in M$ aus $x \leq y$ auch $f(x) \leq f(y)$ folgt; f ist dann ein Ordnungshomomorphismus von (M, \leq) nach (N, \leq) .

ordnungstreu

Ordnungshomomorphismus

Wenn für f zusätzlich gilt, daß aus $f(x) \leq f(y)$ auch $x \leq y$ folgt, dann ist f eine Ordnungseinbettung.

Ordnungseinbettung

Die Abbildung f ist ein Ordnungsisomorphismus, wenn f bijektiv ist und wenn f und f^{-1} ordnungstreue Abbildungen sind.

Ordnungsisomorphismus

Definition B.5.11 Sei (M, \leq) eine geordnete Menge und $a, b \in M$, dann werden folgende Teilmengen von M definiert:

Intervall: $[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M \mid a \leq x \leq b\}$

Hauptideal: $(b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M \mid x \leq b\}$

Hauptfilter: $[a) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M \mid a \leq x\}$

b heißt Erzeuger des Hauptideals (b) und a heißt Erzeuger des Hauptfilters $[a)$.

Erzeuger des Hauptideals

Erzeuger des Hauptfilters

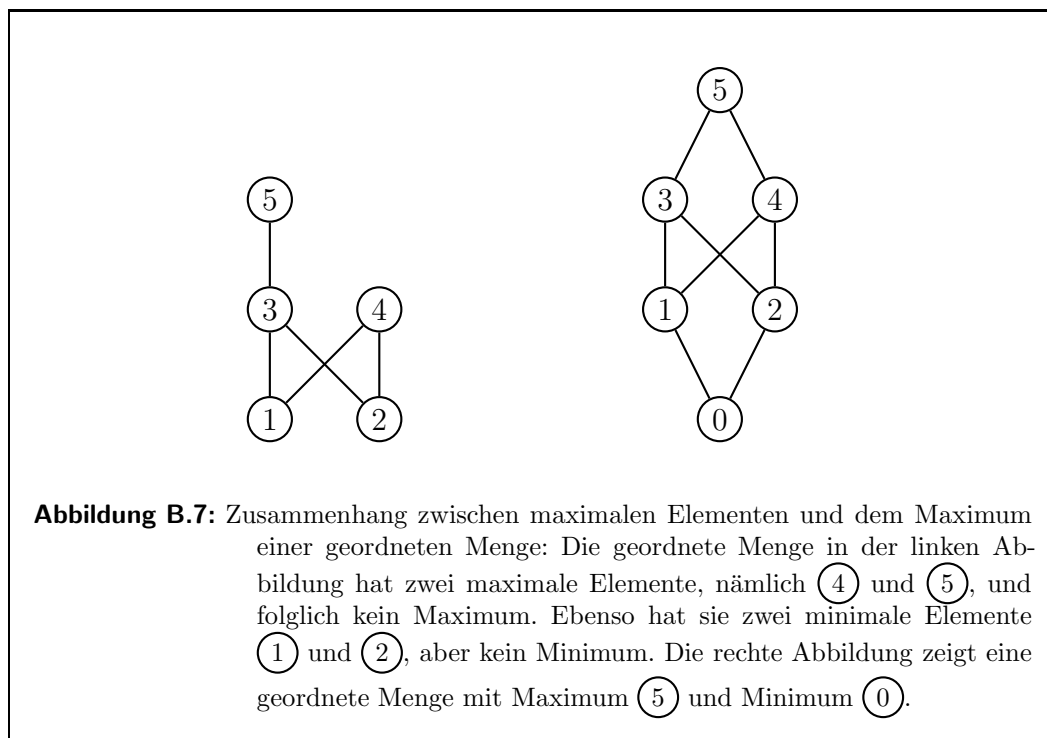
Definition B.5.12 Sei (M, \leq) eine geordnete Menge und x ein Element von M . x heißt Maximum bzw. größtes Element von M , wenn $y \leq x$ für alle $y \in M$ gilt. Entsprechend heißt x Minimum bzw. kleinstes Element von M , wenn $x \leq y$ für alle $y \in M$ gilt.

Maximum

größtes Element

Minimum

kleinstes Element



Definition B.5.13 Sei (M, \leq) eine geordnete Menge und x ein Element von M . x heißt maximales Element von M , wenn es kein von x verschiedenes Element $y \in M$ gibt, für das $x \leq y$ gilt. Entsprechend heißt x minimales Element von M , wenn es kein von x verschiedenes Element $y \in M$ gibt, für das $y \leq x$ gilt. Minimale Elemente geordneter Mengen werden häufig Blätter genannt.

Bemerkung B.5.14 Eine geordnete Menge (M, \leq) kann höchstens ein Maximum bzw. Minimum haben, aber mehrere maximale bzw. minimale Elemente (vgl. Abbildung B.7).

Hat eine geordnete Menge (M, \leq) ein Maximum bzw. Minimum, dann ist dieses Maximum bzw. Minimum ihr einziges maximales bzw. minimales Element.

Definition B.5.15 Sei (M, \leq) eine geordnete Menge und K eine Teilmenge von M , ein Element x von M ist

maximales Element

minimales Element

Blatt

- eine obere Schranke von K in M g. d. w. $\forall y \in K : y \leq x$,
- eine untere Schranke von K in M g. d. w. $\forall y \in K : x \leq y$.

obere Schranke

untere Schranke

x heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von K in M , wenn x eine obere Schranke von K ist und für jede obere Schranke $y \in M$ von K die Ungleichung $x \leq y$ gilt. Eine kleinste obere Schranke von K wird mit $\sup K$, oder $\bigvee K$ (lese \vee als ‚join‘ bzw. ‚Verbindung‘) bezeichnet.

kleinste obere Schranke
Supremum

$\sup K$

\bigvee

join

Verbindung

größte untere Schranke

Infimum

$\inf K$

\bigwedge

meet

Schnitt

$x \vee y$

$x \wedge y$

x heißt größte untere Schranke oder Infimum von K in M , wenn x eine untere Schranke von K ist und für jede untere Schranke $y \in M$ von K die Ungleichung $y \leq x$ gilt. Eine größte untere Schranke von K wird mit $\inf K$ oder $\bigwedge K$ (lese \wedge als ‚meet‘ bzw. ‚Schnitt‘) bezeichnet.

Besteht $K \subseteq M$ aus genau zwei Elementen ($K = \{x, y\}$), dann schreiben wir für das Supremum von x und y auch $x \vee y$ und für das Infimum: $x \wedge y$.

B.6 Verbände

Definition B.6.1 Eine geordnete Menge (V, \leq) ist genau dann ein Verband, wenn zu je zwei Elementen x und y aus V auch das Supremum von x und y , also $x \vee y$, und das Infimum von x und y , also $x \wedge y$, Elemente von V sind.

Verband

Definition B.6.2 Ein Verband (V, \leq) ist ein vollständiger Verband, falls für alle $K \subseteq V$ gilt, daß $\bigvee K \in V$ und $\bigwedge K \in V$. Jeder vollständige Verband hat ein größtes Element $\bigvee V$, das Einselement (1_V), und ein kleinstes Element $\bigwedge V$, das Nullelement (0_V). Die oberen Nachbarn des Nullelements nennt man die Atome und die unteren Nachbarn des Einselements die Koatome des Verbands.

vollständiger Verband

Einselement

1_V

Nullelement

0_V

Atom

Koatom

Bemerkung B.6.3 Für Verbände gelten die folgenden Aussagen:

- Da $\bigwedge \emptyset = 1_V$ und $\bigvee \emptyset = 0_V$ gilt, gibt es keinen vollständigen Verband (V, \leq) mit leerer Menge V .
- Die Ordnungsrelation eines Verbands kann aus \wedge und \vee wiedergewonnen werden:

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x = x \wedge y \quad \Leftrightarrow \quad x \vee y = y$$

- Die Operationen \vee und \wedge sind assoziativ:

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \qquad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

- Jeder nichtleere endliche Verband ist ein vollständiger Verband.
- Für jede Menge M ist $(\mathfrak{P}(M), \subseteq)$ ein vollständiger Verband; \vee entspricht \cup , und \wedge entspricht \cap .

Definition B.6.4 Für ein Element v eines vollständigen Verbands (V, \leq) definieren wir:

$$v_* \stackrel{\text{def}}{=} \bigvee \{x \in V \mid x < v\}$$

$$v^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge \{x \in V \mid v < x\}$$

v heißt \vee -irreduzibel, wenn $v_* \neq v$. v heißt \wedge -irreduzibel, wenn $v^* \neq v$.

Bemerkung B.6.5 Ein Element v eines endlichen Verbands ist genau dann \vee -irreduzibel, wenn es genau einen unteren Nachbarn hat. Es ist genau dann \wedge -irreduzibel, wenn es genau einen oberen Nachbarn hat. Die Atome eines jeden Verbands sind stets \vee -irreduzibel und die Koatome sind stets \wedge -irreduzibel. Ein vollständiger Verband, in dem jedes Element ein Supremum von Atomen ist, heißt atomistisch.

Satz B.6.6 (Dualitätsprinzip für Verbände) Ist (V, \leq) ein (vollständiger) Verband, so ist auch $(V, \leq)^d \stackrel{\text{def}}{=} (V, \geq)$ ein (vollständiger) Verband. $(V, \leq)^d$ heißt der zu (V, \leq) duale Verband.

Definition B.6.7 Ein Verband heißt ebener Verband, wenn er Hasse-plättbar ist.

Satz B.6.8 (Satz von Platt 1976) Sei V ein endlicher Verband und $G(V)$ der Graph des Hassediagramms von V . Der vergrößerte Graph $G^*(V)$ von V ist $G(V)$ mit einer zusätzlichen Kante zwischen 0_V und 1_V . Es gilt:

V ist genau dann ein ebener Verband, wenn $G^*(V)$ ein plättbarer Graph ist.

\vee -irreduzibel

\wedge -irreduzibel

atomistisch

dualer Verband

ebener Verband

vergrößerter Graph

$G^*(V)$

B.7 Hüllensysteme und Galoisverbindungen

Definition B.7.1 Ein Hüllensystem auf einer Menge G ist eine Menge von Teilmengen von G , die G enthält und gegen die Bildung von Schnitten abgeschlossen ist. $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{P}(G)$ ist also genau dann ein Hüllensystem, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $G \in \mathfrak{H}$ und
- wenn $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$, dann ist $\bigcap \mathfrak{X} \in \mathfrak{H}$.

Ein Hüllenoperator φ auf G ist eine Abbildung, die jeder Teilmenge $X \subseteq G$ eine Hülle $\varphi(X) \subseteq G$ zuordnet, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sein müssen:

- (1) Wenn $X \subseteq Y$, dann $\varphi(X) \subseteq \varphi(Y)$ (Monotonie)
- (2) $X \subseteq \varphi(X)$ (Extensivität)
- (3) $\varphi(\varphi(X)) = \varphi(X)$ (Idempotenz)

Satz B.7.2 Wenn \mathfrak{H} ein Hüllensystem auf G ist, so definiert

$$\varphi_{\mathfrak{H}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap \{Y \in \mathfrak{H} \mid X \subseteq Y\}$$

einen Hüllenoperator auf G .

Wenn φ ein Hüllenoperator auf G ist, so bildet die Menge aller Hüllen

$$\mathfrak{H}_{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi(X) \mid X \subseteq G\}$$

ein Hüllensystem auf G .

Bemerkung B.7.3 Wichtige Hüllenoperatoren, die auf binären Relationen definiert sind, sind die folgenden:

- $R \mapsto$,transitive Hülle von R ' (i. e. die kleinste Obermenge von R , die transitiv ist) transitive Hülle
- $R \mapsto$,symmetrische Hülle von R ' (i. e. die kleinste Obermenge von R , die symmetrisch ist) symmetrische Hülle

reflexive Hülle

- $R \mapsto$,reflexive Hülle von R' (i. e. die kleinste Obermenge von R , die reflexiv ist)

Galois-Verbindung

Definition B.7.4 Seien (P, \leq) und (Q, \leq) zwei geordnete Mengen und $\varphi : P \rightarrow Q$ und $\psi : Q \rightarrow P$ zwei Abbildungen. Man sagt, daß das Abbildungspaar (φ, ψ) eine Galois-Verbindung zwischen den geordneten Mengen (P, \leq) und (Q, \leq) bildet, falls gilt:

- (1) Wenn $p_1, p_2 \in P$ mit $p_1 \leq p_2$, dann $\varphi(p_1) \geq \varphi(p_2)$.
- (2) Wenn $q_1, q_2 \in Q$ mit $q_1 \leq q_2$, dann $\psi(q_1) \geq \psi(q_2)$.
- (3) Wenn $p \in P$ und $q \in Q$, dann $p \leq \psi(\varphi(p))$ und $q \leq \varphi(\psi(q))$.

B.8 Listen und Sequenzen

Sequenz

Liste

leere Sequenz

 ϵ $\langle \rangle$ M^*

Konkatenation

o

Definition B.8.1 Eine Sequenz oder eine Liste über einer Menge M ist eine endliche Folge $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ von Elementen aus M . Statt $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ wird häufig auch die einfachere Schreibweise $x_1 x_2 \dots x_n$ verwendet. Für die leere Sequenz schreibt man ϵ oder $\langle \rangle$. Die Menge aller Sequenzen über einer Menge M wird mit M^* bezeichnet.

Definition B.8.2 Die Konkatenation zweier Sequenzen $w = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ und $v = \langle b_1, b_2, \dots, b_m \rangle$ mit $n, m \geq 0$ ist

$$w \circ v = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \rangle$$

Wenn u, v und w drei Sequenzen mit $w = u \circ v$ sind, dann sagt man, daß man die Sequenz w in die Sequenzen u und v zerlegen kann; u wird dann Präfix und v Suffix von w genannt. Für jede beliebige Sequenz w gilt: $w \circ \langle \rangle = \langle \rangle \circ w = w$

zerlegen

Präfix

Suffix

 $|w|$

Länge

Definition B.8.3 $|w|$ bezeichnet die Länge der Sequenz w . Die Länge einer Sequenz wird induktiv definiert durch:

- (1) $|\langle \rangle| = 0$ und
- (2) $|w \circ \langle a \rangle| = 1 + |w|$ für $a \in M$ und $w \in M^*$.

Definition B.8.4 Eine Sequenz w hat ein Element a , wenn es Sequenzen w_p und w_s gibt, so daß $w = w_p \circ \langle a \rangle \circ w_s$.

Das erste Element einer Sequenz w wird **Initialelement** der Sequenz genannt und mit $\text{init } w$ bezeichnet. Wenn $\text{init } w = a$ gilt, dann gibt es eine Sequenz w_s , so daß $w = \langle a \rangle \circ w_s$. Initialelement
init w

Das letzte Element einer Sequenz wird **Finalelement** der Sequenz genannt und mit $\text{fin } w$ bezeichnet. Wenn $\text{fin } w = a$ gilt, dann gibt es eine Sequenz w_p , so daß $w = w_p \circ \langle a \rangle$. Finalelement
fin w

Definition B.8.5 Eine Sequenz v ist eine **Teilsequenz** einer Sequenz w , wenn es eine Zerlegung von w gibt, mit $w = w_p \circ v \circ w_s$. Teilsequenz

Eine Sequenz $v = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ ist eine **eingebettete Sequenz** einer Sequenz w , wenn es Sequenzen u_0, u_1, \dots, u_n mit $w = u_0 \circ u_1 \circ \dots \circ u_n$ gibt, so daß für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $\text{init } u_i = x_i$. eingebettete Sequenz

B.9 Kombinatorik

Satz B.9.1 Die Anzahl $P(n)$ der Permutationen von n Elementen (d. h., die Anzahl der Möglichkeiten n Elemente linear zu ordnen) ist gleich Permutation

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n .$$

Der Ausdruck $n!$ wird n Fakultät gelesen. Man definiert $0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$. n!
Fakultät

Definition B.9.2 Die für alle natürlichen Zahlen n und k definierte Funktion $\binom{n}{k}$ (gelesen: n über k) $\binom{n}{k}$
über

$$\binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{für } 0 \leq n < k \end{cases}$$

heißt Binomialkoeffizient. Binomialkoeffizient

Satz B.9.3 Die Anzahl der Möglichkeiten aus n Elementen k herauszugreifen ist gleich $\binom{n}{k}$.

C Kurzes Glossar

Dieses Glossar erläutert kurz die wichtigsten der in der vorliegenden Arbeit häufig vorkommenden linguistischen Begriffe aus Pāṇinis Sanskritgrammatik und der Indologie.

Anubandha: (1) Ein Schlußelement eines Sūtra der Śivasūtras. Die Anubandhas werden als metasprachliche Marker zur Definition der Pratyāhāras eingesetzt.

(2) Vergleiche Definition 3.3.1 auf Seite 63.

Aṣṭādhyāyī: Zentrale Komponente von Pāṇinis Sanskritgrammatik, die sich aus acht Büchern aufbaut, die insgesamt circa 4 000 Sūtras umfassen.

Padapāṭha: Rezitationsform, bei der die Wörter isoliert, das heißt, in ihrer Pausaform gesprochen werden. Die Pausaform ist die lautliche Form eines Wortes vor einer Pause, zum Beispiel wenn es am Satzende oder isoliert steht (vgl. Auslautverhärtung im Deutschen).

Pratyāhāra: (1) Ein Paar, bestehend aus einem Laut des Sanskrits und einem Anubandha, das eine Menge von Lauten denotiert. Die Pratyāhāras werden auf Grundlage der Śivasūtras interpretiert (vgl. Unterkapitel 2.4). Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird der Begriff ‚Pratyāhāra‘ sowohl für das Laut-Anubandha-Paar als auch für die denotierte Lautmenge verwendet.

(2) Vergleiche Definition 3.3.2 auf Seite 63.

Samhitāpāṭha: Rezitationsform, bei der die Wörter im Kontext eines Satzes oder eines Sūtra gesprochen werden (vgl. Sandhi).

Sandhi: Lautliche Veränderung des An- oder Auslautes eines Wortes, ausgelöst durch den Aus- oder Anlaut eines benachbarten Wortes (Beispiel aus dem Englischen: ‚the‘ in ‚the dog‘ versus ‚the animal‘).

Śivasūtras: Komponente von Pāṇinis Sanskritgrammatik, die aus 14 Sūtras besteht. Jedes Sūtra besteht aus einer Liste von Lauten des Sanskrits, die durch einen Anubandha abgeschlossen wird. Auf den Śivasūtras werden die Lautmengen denotierenden Pratyāhāras definiert.

Literaturverzeichnis

Die Seitenangaben in eckigen Klammern geben an, wo aus den Werken zitiert oder auf sie verwiesen wird.

- BAKER, K. A.; P. FISHBURN & F. S. ROBERTS (1971). Partial orders of dimension 2. *Networks*, 2:11–28. [→ S. 158]
- BARE, J. (1976). Phonetics and phonology in Pāṇini. *Natural Language Studies*, 21. [→ S. 11]
- BARG, P. (1996a). *Automatischer Erwerb von linguistischem Wissen. Ein Ansatz zur Inferenz von DATR-Theorien*. Tübingen, Germany: Niemeyer. (Dissertation, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf). [→ S. 49]
- BARG, P. (1996b). Automatic inference of DATR theories. In: H.-H. Bock & W. Polasek (Hg.), *Data Analysis and Information Systems. Statistical and Conceptual Approaches (Proceedings of the 19th Annual Conference of the GFKL, University of Basel, 1995-03-8/10)*, S. 506–515. Berlin: Springer. [→ S. 23]
- BARG, P. & J. KILBURY (2000). Incremental identification of inflectional types. In: *Proceedings of COLING 2000*, S. 49–54. San Francisco CA: Morgan Kaufmann. [→ S. 49]
- BARG, P. & M. WALTHER (1998). Processing unknown words in HPSG. In: C. Boitet & P. Whitelock (Hg.), *Proceedings of the Thirty-Sixth Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics and Seventeenth International Conference on Computational Linguistics*, S. 91–95. San Francisco CA: Morgan Kaufmann. [→ S. 49]

- BASILI, R.; M. T. PAZIENZA & M. VINDIGNI (1997). Corpus-driven unsupervised learning of verb subcategorization frames. In: *AI*IA '97: Proceedings of the 5th Congress of the Italian Association for Artificial Intelligence on Advances in Artificial Intelligence*, S. 159–170. London: Springer. [→ S. 49]
- BECHERT, H. & G. VON SIMSON (Hg.) (1993). *Einführung in die Indologie: Stand, Methoden, Aufgaben*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, zweite Auflage. [→ S. 6, 7 und 8]
- BHATE, S. & S. KAK (1993). Pāṇini's grammar and computer science. In: *Annals of the Bhandarkar Oriental Research Institute*, Band 72, S. 79–94. [→ S. 24]
- BIERWISCH, M. (1969). Strukturelle Semantik. *Deutsch als Fremdsprache*, 6(2):66–71. [→ S. 176 und 177]
- BIRKHOFF, G. (1973). *Lattice Theory*. Providence RI: American Mathematical Society, dritte Auflage. (Erste Auflage 1940). [→ S. 179 und 197]
- BLOOMFIELD, L. (1929). Review of Liebich. *Language*, 5:267–276. [→ S. 1 und 18]
- BLOOMFIELD, L. (1933). *Language*. New York: Holt, Rinehart and Winston. [→ S. 18]
- BÖHTLINGK, O. (1887). *Pāṇinis Grammatik*. Leipzig. Nachdruck Hildesheim 1964. [→ S. 5, 17, 20, 22, 24 und 43]
- BRIGGS, R. (1985). Knowledge representation in Sanskrit and artificial intelligence. *AI Magazine*, 6(1):32–39. [→ S. 24]
- BRISCOE, T. & J. CARROLL (1997). Automatic extraction of subcategorization from corpora. In: *Proceedings of the 5th ACL Conference on Applied Natural Language Processing*, S. 356–363. Washington DC. [→ S. 49]
- BRISCOE, T.; A. COPESTAKE & V. DE PAIVA (Hg.) (1993). *Inheritance, Defaults and the Lexicon*. Cambridge: Cambridge University Press. [→ S. 23]

- BÜHLER, G. (1896–1935). *Grundriß der Indo-Arischen Philologie und Altertumskunde*. Straßburg, Berlin. 23 Bände. [→ S. 5]
- CAHILL, L. (1998). Automatic extension of a hierarchical multilingual lexicon. In: *2nd Workshop on Multilinguality in the Lexicon (ECAI-98)*, S. 16–23. [→ S. 49]
- CARDONA, G. (1969). Studies in Indian grammarians I: The method of description reflected in the Śiva-Sūtras. *Transactions of the American Philosophical Society*, 59(1):3–48. [→ S. 1, 42, 45 und 47]
- CARDONA, G. (1976). *Pāṇini: A Survey of Research*. Den Haag: Mouton. [→ S. 5]
- CARDONA, G. (1983). Phonetics and phonological rules in grammars. In: *Linguistic Analysis and Some Indian Traditions*. Poona: Bhandarkar Oriental Research Institute. [→ S. 11]
- CARDONA, G. (1988). *Pāṇini: His Work and its Traditions. Background and Introduction*. Delhi: Motilal Banarsidass. [→ S. 17]
- CARDONA, G. (1990). Pāṇinian studies. In: V. N. Jha (Hg.), *New Horizons of Research in Indology*, S. 49–84. Pune. [→ S. 18]
- CARDONA, G. (1999). *Recent Research in Pāṇinian Studies*. Delhi: Motilal Banarsidass. [→ S. 5]
- CHOMSKY, N. & M. HALLE (1968). *The Sound Pattern of English*. New York: Harper and Row. [→ S. 35]
- CLEMENTS, G. N. (1985). The geometry of phonological features. *Phonology Yearbook*, 2:225–252. [→ S. 35]
- CLEMENTS, G. N. (2001). Representational economy in constraint-based phonology. In: T. A. Hall (Hg.), *Distinctive Feature Theory*, S. 71–146. New York: Mouton de Gruyter. [→ S. 36]

- COLE, R. (2001). Automated layout of concept lattices using layered diagrams and additive diagrams. *Australian Computer Science Communications*, 23(1):47–53. [→ S. 171]
- COPESTAKE, A. & A. LASCARIDES (1999). Default representation in constraint-based frameworks. *Computational Linguistics*, 25(1):55–105. [→ S. 23]
- COULSON, M. (1976). *Sanskrit. An Introduction to the Classical Language*. London: Hodder and Stoughton. [→ S. 8 und 9]
- DAELEMANS, W. & K. DE SMEDT (1994). Default inheritance in an object-oriented representation of linguistic categories. *International Journal of Human-Computer Studies*, 41(1/2):149–177. [→ S. 23]
- DAELEMANS, W. & G. DURIEUX (2000). Inductive lexica. In: F. van Eynde & D. Gibbon (Hg.), *Lexicon Development for Speech and Language Processing*, S. 115–139. Dordrecht: Kluwer. [→ S. 49]
- DAVEY, B. A. & H. A. PRIESTLEY (1990). *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge: Cambridge University Press. [→ S. 188 und 197]
- DEO, A. (2007). Derivational morphology in inheritance-based lexica: Insights from Pāṇini. *Lingua*, 117(1):175–201. [→ S. 19 und 23]
- DESHPANDE, M. M. (1975). *Critical Studies in Indian Grammarians I: The Theory of Homogeneity [Sāvāṛṇya]*. Michigan Series in South and South-east Asian Languages and Linguistics, Ann Arbor, Michigan. [→ S. 11]
- DESHPANDE, M. M. (1995). Ancient Indian phonetics. In: E. F. K. Koerner & R. E. Asher (Hg.), *Concise History of the Language Sciences: From the Sumerians to the Cognitivists*, S. 72–77. Oxford, New York, Tokyo: Elsevier. [→ S. 8, 11, 13 und 14]
- DESHPANDE, M. M. (1997). Who inspired Pāṇini? *Journal of the American Oriental Society*, 117(3):444–465. [→ S. 1]
- DIESTEL, R. (1997). *Graph Theory*. New York: Springer. [→ S. 197 und 204]

- ERNÉ, M. (1982). *Einführung in die Ordnungstheorie*. Mannheim: B.I. Wissenschaftsverlag. [→ S. 197]
- FADDEGON, B. (1929). The mnemotechnics of Pāṇini's grammar I: The Śiva-Sūtra. *Acta Orientalia*, 7:48–65. (Wieder abgedruckt in J. F. Staal 1985, S. 275-285). [→ S. 25, 27, 28, 41, 46, 57 und 74]
- FÁRY, I. (1948). On straight line representation of planar graphs. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Institutum Bolyainum, Universitatis Szegediensis)*, 11:229–233. [→ S. 208]
- GANTER, B. & R. WILLE (1996). *Formale Begriffsanalyse - Mathematische Grundlagen*. Berlin: Springer. [→ S. 2, 49, 55, 76, 77, 157, 175, 188 und 197]
- GAZDAR, G. (1987). Linguistic applications of default inheritance mechanisms. In: R. L. Johnson; P. Whitelock; H. L. Somers; M. M. Wood & P. Bennett (Hg.), *Linguistic Theory & Computer Applications*, S. 37–67. London. [→ S. 23]
- GRÄTZER, G. (1978). *General Lattice Theory*. Basel, Stuttgart: Birkhäuser. [→ S. 197]
- HUET, G. (2007). Shallow syntax analysis in Sanskrit guided by semantic nets constraints. In: *Proceedings of the International Workshop on Research Issues in Digital Libraries, Kolkata, Dec. 2006*, erscheint in der Serie Lecture Notes in Computer Science im Verlag Springer. (Vorabversion: <http://pauillac.inria.fr/~huet/PUBLIC/IWRIDL.pdf>). [→ S. 24 und 25]
- HYMES, D. (Hg.) (1974). *Studies in the History of Linguistics*. London: Bloomington. [→ S. 5 und 225]
- INGERMAN, P. Z. (1967). "Pāṇini-Backus form" suggested. *Communications of the ACM*, 10:137. [→ S. 24]
- JACOBSEN, T. (1974). Very ancient texts: Babylonian grammatical texts. In: Hymes (1974), S. 41–62. [→ S. 8 und 9]

- JAKOBSON, R.; G. FANT & M. HALLE (1951). *Preliminaries to Speech Analysis*. Cambridge MA: MIT Press. [→ S. 35]
- JOSHI, S. & P. KIPARSKY (1979). Siddha and asiddha in Pāṇinian phonology. In: D. A. Dinnsen (Hg.), *Current Approaches to Phonological Theory*, S. 223–250. Bloomington IN: Indiana University Press. [→ S. 45]
- JOSHI, S. D. & J. A. F. ROODBERGEN (1983). The structure of the Aṣṭādhyāyī. In: S. D. Joshi & S. D. Laddu (Hg.), *Proceedings of the International Seminar on Studies in the Aṣṭādhyāyī of Pāṇini*. University of Poona. [→ S. 17]
- KAK, S. (1987). Pāṇinian approach to natural language processing. *International Journal of Approximate Reasoning*, 1:117–130. [→ S. 24]
- KAK, S. (2004). Mendeleev and the periodic table of elements. *Sandhan*, 4(2):115–123. [→ S. 15]
- KATRE, S. M. (1987). *Aṣṭādhyāyī of Pāṇini*. Austin TX: University of Texas Press. [→ S. 5, 17, 32 und 33]
- KIELHORN, F. (1885). Der Grammatiker Pāṇini. *Nachrichten von der Königlich-Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August-Universität zu Göttingen*, 5:185–190. (Wieder abgedruckt in J. F. Staal 1985, S. 103–105). [→ S. 17]
- KILBURY, J.; P. NAERGER & I. RENZ (1994). Simulation lexikalischen Erwerbs. In: S. W. Felix; C. Habel & G. Rickheit (Hg.), *Kognitive Linguistik: Repräsentation und Prozesse*, S. 251–271. Opladen: Westdeutscher Verlag. [→ S. 49]
- KILBURY, J.; W. PETERSEN & C. RUMPF (2006). Inheritance-based models of the lexicon. In: D. Wunderlich (Hg.), *Advances in the Theory of the Lexicon*, S. 429–477. Berlin: Mouton de Gruyter. [→ S. 23, 154, 171 und 190]
- KIPARSKY, P. (1980). *Pāṇini as a Variationist*. Cambridge MA: The MIT Press. [→ S. 17]

- KIPARSKY, P. (1991a). Economy and the construction of the Śivasūtras. In: M. M. Deshpande & S. Bhate (Hg.), *Pāṇinian Studies*. Michigan: Ann Arbor. (Wieder abgedruckt auf: <http://www.stanford.edu/~kiparsky/Papers/siva-t.pdf>, 15 Seiten). [→ S. 1, 26, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 57, 58, 74 und 131]
- KIPARSKY, P. (1991b). On Pāṇinian studies: A reply to Cardona. *Journal of Indian Philosophy.*, 19(4):331–367. [→ S. 17]
- KIPARSKY, P. (1994). Pāṇinian linguistics. In: R. E. Asher (Hg.), *The Encyclopedia of Language and Linguistics*, Band 6, S. 2918–2923. Oxford: Pergamon Press. [→ S. 12, 17 und 19]
- KIPARSKY, P. (2002). On the architecture of Pāṇini’s grammar. Three lectures delivered at the Hyderabad Conference on the Architecture of Grammar, Jan. 2002, and at UCLA, March 2002 (<http://www.stanford.edu/~kiparsky/Papers/hyderabad.pdf>). [→ S. 17, 23 und 24]
- KIPARSKY, P. (2007a). Pāṇini’s Razor. (Abgedruckt auf: <http://www.stanford.edu/~kiparsky/Papers/paris.pdf>). Vortrag auf: “Symposium on Sanskrit and Computational Linguistics”, Paris, 29.-31.10.2007. [→ S. 1 und 49]
- KIPARSKY, P. (2007b). Pāṇini is slick, but he isn’t mean. *Nagoya Studies in Indian Culture and Buddhism: Sambhasa*, 26:1–28. [→ S. 17]
- KORNAI, A. (1993). The generative power of feature geometry. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, (8):37–46. [→ S. 27, 34, 35 und 69]
- KORNAI, A. (2008). *Mathematical Linguistics*. London: Springer. [→ S. 35]
- KURATOWSKI, K. (1930). Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fundamenta Mathematicae*, 15:271–283. [→ S. 208]
- LÖBNER, S. (2003). *Semantik*. Berlin, New York: Walter de Gruyter. [→ S. 177]

- LIEBICH, B. (1919). *Zur Einführung in die indische einheimische Sprachwissenschaft II*. Sitzungsbericht der Heidelberger Akademie der Wissenschaft. [→ S. 5]
- LIGHT, M. (1994). Classification in feature-based default inheritance hierarchies. In: H. Trost (Hg.), *Proceedings of KONVENS '94: Verarbeitung natürlicher Sprache*, S. 220–229. Wien: Österreichische Gesellschaft für Artificial Intelligence. [→ S. 23 und 49]
- MISRA, V. N. (1966). *The Descriptive Technique of Pāṇini. An Introduction*. The Hague, Paris: Mouton & Co. [→ S. 17, 24, 27, 28, 30, 41 und 42]
- OSSWALD, R. & W. PETERSEN (2002). Induction of classifications from linguistic data. In: *Proceedings of the ECAI-Workshop on Advances in Formal Concept Analysis for Knowledge Discovery in Databases*. Lyon. [→ S. 50 und 170]
- OSSWALD, R. & W. PETERSEN (2003). A logical approach to data-driven classification. In: A. Günter; R. Kruse & B. Neumann (Hg.), *Advances in Artificial Intelligence, Proceedings of the 26th Annual German Conference on AI, KI 2003, Hamburg, Germany, September 15-18, 2003*, Band 2821 von *Lecture Notes in Computer Science*, S. 267–281. Berlin, Heidelberg, New York: Springer. [→ S. 50 und 170]
- PARTEE, B.; A. TER MEULEN & R. E. WALL (1990). *Mathematical Methods in Linguistics*. Dordrecht: Kluwer. [→ S. 197]
- PETERSEN, W. (2001). A set-theoretic approach for the induction of inheritance hierarchies. In: *Preproceedings of the Joint Conference on Formal Grammar and Mathematics of Language (FG/MOL-01)*.
- PETERSEN, W. (2003). A set-theoretical investigation of Pāṇini's Śivasūtras. In: *Proceedings of the Eighth Meeting on Mathematics of Language (MOL-8)*. Bloomington IN. [→ S. 44]

- PETERSEN, W. (2004a). A set-theoretical approach for the induction of inheritance hierarchies. In: L. S. Moss & R. T. Oehrle (Hg.), *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Band 53. Elsevier. (Erstmals erschienen als Petersen 2001). [→ S. 50 und 170]
- PETERSEN, W. (2004b). A mathematical analysis of Pāṇini's Śivasūtras. *Journal of Logic, Language, and Information*, 13(4):471–489. (Erweiterte Version von Petersen 2003). [→ S. 44 und 169]
- PETERSEN, W. (2005). How formal concept lattices solve a problem of ancient linguistics. In: F. Dau; M.-L. Mugnier & G. Stumme (Hg.), *Conceptual Structures: Common Semantics for Sharing Knowledge, Proceedings of the 13th International Conference on Conceptual Structures, ICCS 2005, Kassel, Germany, July 17-22, 2005*, Band 3596 von *Lecture Notes in Computer Science*, S. 337–352. Berlin, Heidelberg, New York: Springer. [→ S. 44]
- PETERSEN, W. (2008). Type signature induction with FCAType. In: S. Yahia & E. Nguifo (Hg.), *Proceedings of CLA 2006*, Band 4923 von *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, S. 275–280. Berlin, Heidelberg, New York. [→ S. 50, 154, 170 und 171]
- PETERSEN, W. (2009). On the construction of Śivasūtras-alphabets. In: A. Kulkarni & G. Huet (Hg.), *Sanskrit Computational Linguistics*, Band 5406 von *Lecture Notes in Computer Science*, S. 78–97. Berlin, Heidelberg: Springer. [→ S. 160]
- PETERSEN, W. (2010). Linear coding of non-linear hierarchies – revitalization of an ancient classification method. In: A. Fink; B. Lausen; W. Seidel & A. Ultsch (Hg.), *Advances in Data Analysis, Data Handling and Business Intelligence (Proceedings of the 32nd Annual Conference of the Gesellschaft für Klassifikation 2008)*, Band 4 von *Studies in Classification, Data Analysis, and Knowledge Organization*, S. 307–316. Berlin, Heidelberg: Springer. [→ S. 170]

- PETERSEN, W. & S. HAMANN (2010). On the generalizability of Pāṇini's pratyāhāra-technique to other languages. Unveröffentlichtes Manuskript. [→ S. 171]
- PETERSEN, W. & J. KILBURY (2005). What feature co-occurrence restrictions have to do with type signatures. In: *Proceedings of the Joint Conference on Formal Grammar and Mathematics of Language (FG/MOL-05)*, S. 125–139. [→ S. 50 und 171]
- PLATT, C. R. (1976). Planar lattices and planar graphs. *Journal of Combinatorial Theory (B)*, 21:30–39. [→ S. 214]
- PRISS, U. (2005). Linguistic applications of formal concept analysis. In: B. Ganter; G. Stumme & R. Wille (Hg.), *Formal Concept Analysis*, Band 3626 von *Lecture Notes in Computer Science*, S. 149–160. Berlin, Heidelberg: Springer. [→ S. 49 und 170]
- SHARMA, R. N. (2002). *The Aṣṭādhyāyī of Pāṇini*, Band 1. New Delhi: Munshiram Manoharlal Publishers. 2. Auflage. [→ S. 24 und 28]
- SKÖLD, H. (1926). Facts and conjectures about the Śivasūtras. In: *Papers on Pāṇini and Indian Grammar in General*, S. 8–22. Lund & Leipzig. [→ S. 27]
- SMITH, H. (1992). Brevity in Pāṇini. *Journal of Indian Philosophy*, 20(1):133–147. [→ S. 1 und 48]
- SPORLEDER, C. (2003). *Discovering Lexical Generalisations. A Supervised Machine Learning Approach to Inheritance Hierarchy Construction*. Dissertation, Institute for Communicationg and Collaborative Systems. School of Informatics. University of Edinburgh. [→ S. 49]
- STAAL, F. J. (1962). A method of linguistic description. *Language*, 38:1–10. [→ S. 1, 42, 43, 45, 57 und 74]
- STAAL, F. J. (1974). The origin and development of linguistics in India. In: D. Hymes (Hg.), *Studies in the History of Linguistics*, S. 63–74. Bloomington, London: Indiana University Press. [→ S. 12 und 24]

- STAAL, F. J. (1975). The concept of metalanguage and its Indian background. *Journal of Indian Philosophy*, 3(3-4):315–354. [→ S. 16 und 40]
- STAAL, F. J. (1982). Ritual, grammar and the origins of science in India. *Journal of Indian Philosophy*, 10(1):3–35. [→ S. 7, 12, 13 und 18]
- STAAL, F. J. (1985). *A Reader on the Sanskrit Grammarians*. Delhi, Varanasi, Patna, Madras: Motilal Banarsidass. (Erstmals erschienen 1972 bei MIT Press, Cambridge MA). [→ S. 5]
- STAAL, F. J. (1995). The Sanskrit of science. *Journal of Indian Philosophy*, 23(1):73–127. [→ S. 14, 15, 17, 18 und 23]
- STAAL, F. J. (2006). Artificial languages across sciences and civilizations. *Journal of Indian Philosophy*, 34(1-2):87–139. [→ S. 7, 10, 16, 24 und 40]
- STUMME, G. & R. WILLE (1994). A geometrical heuristic for drawing concept lattices. In: *Graph Drawing*, Band 894 von *Lecture Notes in Computer Science*, S. 452–459. Berlin: Springer. [→ S. 171]
- THIEME, P. (1935). *Pāṇini and the Veda: Studies in the Early History of Linguistic Science in India*. Allahabad. [→ S. 42]
- THUMB, A. (1953–58). *Handbuch des Sanskrit*. Heidelberg: Carl Winter, Universitätsverlag. 3 Bände. [→ S. 5]
- VASU, S. C. (1891). *The Aṣṭādhyāyī of Pāṇini's Grammatik, Edited and Translated*. Allahabad. 2 Bände. Nachdruck: Delhi 1962. [→ S. 5, 17 und 33]
- WACKERNAGEL, J. (seit 1896). *Altindische Grammatik*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. Nichtabgeschlossene Reihe, bisher 3 Bände. [→ S. 5]
- WAGNER, K. (1937). Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. *Mathematische Annalen*, 114:570–590. [→ S. 208]
- WILKINS, C. (1808). *A Grammar of the Sanskrit Language*. London. [→ S. 24]

- WILLE, R. (2005). Allgemeine Wissenschaft und transdisziplinäre Methodologie. *Technikfolgenabschätzung — Theorie und Praxis*, 14(2):57–62. [→ S. 49]
- ZSCHALIG, C. (2004). Planarity of additively drawn concept lattices. In: *Proceedings of CLA 2004*. [→ S. 171]
- ZSCHALIG, C. (2007). Bipartite Ferrers-graphs and planar concept lattices. In: S. O. Kuznetsov & S. Schmidt (Hg.), *ICFCA*, Band 4390 von *Lecture Notes in Computer Science*, S. 313–327. Berlin: Springer. [→ S. 158, 159 und 171]
- ZSCHALIG, C. (2009). *Characterizations of Planar Lattices with Left-relations*. Dissertation, TU Dresden. Südwestdeutscher Verlag für Hochschulschriften. [→ S. 158, 159 und 171]

Index

Der Index erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder logische Konsistenz.

— Symbole —			
\downarrow	202	\bigwedge	213
\uparrow	202	\bigvee	213
\mapsto	202	\wedge	213
\rightarrow	202	γg	182
$ z$	203	μm	182
\emptyset	197	ϵ	216
\in	197	(\mathcal{A}, Φ)	63
\setminus	200	$(\mathcal{A}, \Sigma, <)$	63
\times	200	$(\mathcal{A}', \Sigma, <)$	64
\subset	198	A'	179
\subseteq	198	B'	179
\supset	199	$\mathcal{B}(G, M, I)$	180
\supseteq	200	$\underline{\mathcal{B}}(G, M, I)$	183
\supseteq	199	$\text{fin } w$	217
\supseteq	198	$f(x)$	202
λ	209	f^{-1}	203
\equiv	209	G/e	206
\circ	216	$G^*(V)$	214
$\langle \rangle$	216	(G, M, I)	175
$ w $	216	$\mathcal{H}(\Phi)$	63
0_V	213	$\mathcal{H}_i(\Phi)$	75
1_V	213	$\inf K$	213
\bigvee	213	$\text{init } w$	217
		K^n	205

$K_{m,n}$	206	Aṣṭādhyāyī	17, 219
M^*	216	Atom	213
$ M $	200	atomistisch	214
$\binom{n}{k}$	217	Außengebiet	207
$n!$	217	aufsteigender Pfad	207
$\mathfrak{P}(M)$	198	ausgedehntes	
$Q_{\mathcal{A}}$	128	Teilmengensystem	107
$\mathcal{S}_i(\Phi)$	75		
$\sup K$	213		
(V, E)	204		
v_x	207		
v_y	207		
		— B —	
		Basis	
		Merkmalimplikationen	193
		Baumkante	126
		Begriff	
		Extension	180
		formal	180
		Gegenstandsbegriff	182
		Inhalt	180
		Intension	180
		Merkmalbegriff	182
		Oberbegriff	182
		Ordnung	183
		Umfang	180
		Unterbegriff	182
		Begriffsgraph	78
		Begriffsinhalt	180
		Begriffsordnung	183
		Begriffsumfang	180
		Begriffsverband	183
		Hauptsatz	186
		bereinigt	188
		bijektiv	203
		Bildmenge	202
		Binomialkoeffizient	217
		bipartiter Graph	205
		— A —	
\mathcal{A} -erschöpfender Lauf	125		
ohne Redundanzen	126		
(\mathcal{A}, Φ) -Kontext	63		
Abbildung	202		
bijektiv	203		
injektiv	203		
invers	203		
partiell	202		
surjektiv	203		
abgeschlossen	193		
Ableitungsrelation	179		
absteigender Pfad	207		
additives Liniendiagramm	184		
Alphabet			
erweitert	66		
Anfangsecke	204		
Anubandha	63, 219		
Anubandha-Alphabet	63		
Äquivalenzklasse	201		
Äquivalenzrelation	201		

Blatt	212	Teilmengensystem	66
		Erzeuger	
— D —		Hauptfilter	211
Dedekind-MacNeille-		Hauptideal	211
Vervollständigung	188	Extension	180
definiert	202		
Definitionsbereich	202	— F —	
Diagramm		Fakultät	217
additives Liniendiagramm	184	Ferrers-Dimension	157
Differenz	200	Ferrers-Graph	158
disjunkt	200	Ferrers-Relation	157
dual geordnete Menge	209	Finalelement	217
duale Ordnung	209	formaler Begriff	180
dualer Verband	214	formaler Kontext	175
		Funktion	202
— E —		Einschränkung	203
ebene Zeichnung	207	partiell	202
ebener Graph	207		
echte Teilmenge	198	— G —	
echter Konflikt	86	Galois-Verbindung	216
Ecke	204	Gebiet	207
benachbart	204	Außen-	207
eingebettete Sequenz	217	Innen-	207
Einselement	213	Rand	207
Element		Gegenstand	175
größtes	211	reduzibel	189
kleinstes	211	Gegenstandsbegriff	182
maximal	212	Gegenstandsinhalt	182
minimal	212	gerichteter Graph	206
Endecke	204	gerichteter Pfad	206
endliche Partition	201	geringfügig	
erweitert		Verformung	86
Alphabet	66	Graph	204
S-Alphabet	66	bipartit	205

eben	207	Implikationenfamilie	
isomorph	204	abgeschlossen	193
Rand	208	Basis	193
vergrößert	214	nichtredundant	193
vollständig	205	vollständig	193
vollständig bipartit	205	Infimum	213
Graphenisomorphismus	204	Inhalt	180
gut		Inhaltsrang	76
S-Alphabet	66	Initialelement	217
S-Ordnung	117	injektiv	203
		Innengebiet	207
		Intension	180
— H —		Intervall	211
Hülle	215	inverse Abbildung	203
reflexiv	216	inzident	204
symmetrisch	215	Inzidenzrelation	175
transitiv	215	\vee -irreduzibel	214
Hüllenoperator	215	\wedge -irreduzibel	214
Hüllensystem	215	isomorpher Graph	204
Hasse-plättbar	211	Isomorphismus	203
Hassediagramm	210		
eben	211	— J —	
Hauptfilter	211	join	213
Erzeuger	211	Jordanscher Kurvensatz	208
Hauptideal	211		
Erzeuger	211	— K —	
Homomorphismus	203	K^5 -Tripel	153
		Kante	204
— I —		verbindet Ecken	204
Implikation		Kantenzug	204
Basis	193	zwischen Ecken	204
eines Kontextes	193	klassisches Sanskrit	6
folgt (semantisch)	193	Koatom	213
gültig	193	Konflikt	85
respektiert	193		

echt	86	geordnet	209
scheinbar	86	gleich	197
Konkatenation	216	leer	197
Konklusion	193	Mächtigkeit	200
Kontext		Mengeninklusion	198
bereinigt	188	Merkmal	175
formal	175	reduzibel	189
reduziert	189	Merkmalbegriff	182
spaltenreduziert	189	Merkmalimplikation	193
zeilenreduziert	189	Merkmalumfang	182
Kontraktion	206	minimales Element	212
korrespondierendes S-Alphabet	64	Minimalitätskriterium	51
Kreis	204	Minimum	211
Kreiskante	126	Minor	206
Kreuzprodukt	200		
Kreuztabelle	177	— N —	
		Nachbar	
— L —		oberer	209
Länge	216	unterer	209
Lauf	125	nicht definiert	202
leere Menge	197	nichtredundant	193
leere Sequenz	216	Nullelement	213
Liste	216		
		— O —	
— M —		Overbegriff	182
Mächtigkeit	200	Obermenge	198
Markeralphabet	63	Objektalphabet	63
maximales Element	212	optimal erweitertes S-Alphabet	67
Maximum	211	optimales S-Alphabet	67
meet	213	Ordnung	
Menge	197	dual	209
disjunkt	200	partiell	209
dual geordnet	209	reflexiv linear	209
endlich	200	total	209

Ordnungsdimension	157		
Ordnungseinbettung	211		
Ordnungshomomorphismus	211		
Ordnungsisomorphismus	211		
Ordnungsrelation	209		
ordnungstreu	211		
— P —			
Padapāṭha	219		
partiell			
Abbildung	202		
Funktion	202		
Partition			
endlich	201		
Partitionsklasse	201		
Pausaform	219		
perfekt erweitertes S-Alphabet	68		
perfektes S-Alphabet	68		
Permutation	217		
Pfad			
absteigend	207		
aufsteigend	207		
gerichtet	206		
plättbar	208		
Polygonzug	207		
Potenzmenge	198		
Präfix	216		
Prämisse	193		
Pratyāhāra	63, 219		
Pratyāhāra-Kontext	64		
— Q —			
Quotient	202		
— R —			
Rand			
eines Gebiets		207	
eines Graphen		208	
Rang		75	
reduzibel			
Gegenstand		189	
Merkmal		189	
reduziert		189	
reflexive Hülle		216	
Relation			
antisymmetrisch		201	
asymmetrisch		201	
binär		201	
invers		201	
irreflexiv		201	
konnex		201	
reflexiv		201	
symmetrisch		201	
transitiv		201	
respektiert		193	
— S —			
S-Alphabet		63	
erweitert		66	
gut		66	
korrespondierend		64	
optimal		67	
optimal erweitert		67	
perfekt		68	
perfekt erweitert		68	
von (\mathcal{A}, Φ)		64	
S-darstellbar		63, 64	
S-Darstellung		63	

S-Graph	108		
S-Ordnung	117		
eines S-Alphabets	117		
eines Teilmengensystems	117		
gut	117		
Samhitāpāṭha	219		
Sandhi	6, 219		
Sanskrit			
klassisches	6		
vedisches	6		
Satz von Kuratowski	208		
Satz von Platt	214		
scheinbar			
Konflikt	86		
Schnitt	199, 213		
Schnittmengensystem	63		
Schranke			
größte untere	213		
kleinste obere	213		
obere	213		
untere	213		
Sequenz	216		
Präfix	216		
Suffix	216		
zerlegen	216		
Zerlegung	216		
Śivasūtra-Alphabet	63		
Śivasūtras	25, 220		
spaltenreduziert	189		
Stufengraph	83		
Suffix	216		
Supremum	213		
surjektiv	203		
Sūtra	6		
symmetrische Hülle	215		
		— T —	
		Teilgraph	204
		Teilmenge	198
		echt	198
		Teilmengensystem	63
		ausgedehnt	107
		erweitert	66
		Teilsequenz	217
		transitive Hülle	215
		— U —	
		über	217
		Umfang	180
		Unterbegriff	182
		unvergleichbar	209
		Urbildmenge	202
		— V —	
		Varga	14
		Veda	6
		vedisches Sanskrit	6
		Verband	213
		atomistisch	214
		dual	214
		Dualitätsprinzip	214
		eben	214
		vollständig	213
		Verbindung	213
		Verdopplung	66
		Vereinigung	198
		Verformung	
		geringfügig	86
		vergleichbar	209
		vergrößerter Graph	214

Vervollständigung	
Dedekind-MacNeille-	188
vollständig	
bipartiter Graph	205
Graph	205
Implikationenfamilie	193
Verband	213
— W —	
Weg	204
Wertebereich	202
— Z —	
Zeichnung	207
eben	207
zeilenreduziert	189
zerlegen	216
Zerlegung	216
zusammenhängend	204
Zusammenhangskomponente	205

Lebenslauf der Autorin

Bildungsgang

- 1992–1996 Studium an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf im Diplomstudiengang Mathematik
- 1996–1997 Master Class „Complex Geometry and Topology“ am Mathematical Research Institute (MRI) in den Niederlanden
- 1997–1998 Mathematikstudium an der Universität Utrecht, Niederlande. Abschluß: „Examen Doctorale Scientiae Mathematicae“
- 1999–2004 Studium an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf im Studiengang Allgemeine Sprachwissenschaft
- seit 2004 Promotionsstudium an der Philosophischen Fakultät der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wissenschaftliche Berufstätigkeit

- 1999 Wissenschaftliche Hilfskraft am Seminar für Allgemeine Sprachwissenschaft der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
- 2000–2002 Wissenschaftliche Mitarbeiterin im Forschungsprojekt „Modellierung von Subregularitäten im Lexikon“
- 2003–2005 Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Bioinformatik und am Institut für Sprache und Information der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
- seit 2005 Wissenschaftliche Mitarbeiterin im Forschungsprojekt „Formale Modellierung von Funktionalbegriffen und Frames“