PARAMETRISCH INSTABILE WELLEN IN PLASMEN

Spatschek, K.H.
Fachbereich Physik, Universität Essen, D-4300 Essen

Es ist wohlbekannt, daß eine Vielzahl von Wellen in Plasmen instabil gegenüber Amplitudenmodulationen sind. Nach einer kurzen Übersicht über die grundsätzlichen physikalischen Mechanismen befaßt sich der Vortrag hauptsächlich mit der nichtlinearen Entwicklung solch parametrisch instabiler Wellen. Dabei wählen wir als charakteristisches Beispiel Langmuir-Wellen: Ausgehend von der allgemeinsten (hydrodynamischen) Beschreibung werden zunächst die charakteristischen Eigenschaften der stationären nichtlinearen Langmuir-Moden diskutiert. Anschließend wird das ein- und mehrdimensionale Stabilitätsverhalten untersucht und es werden Variationsprinzipien für Instabilität sowie Ljapunov-Funktionale für Stabilität angegeben.

1. Modulationsinstabilität

Für hochfrequente Wellen, die einer nichtlinearen Dispersionsbeziehung

$$D(\omega,k;|a|^2)a = 0 \tag{1}$$

gehorchen, kann unter der Voraussetzung der WKB-Näherung eine nichtlineare Schrödinger-Gleichung,

$$i\frac{\partial a}{\partial \tau} = Ha \tag{2}$$

hergeleitet werden [1]. Dabei ist H die Hamiltonfunktion eines Quasiteilchens im selbsterzeugten Feld,

$$H = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \varkappa |a|^2 \tag{3}$$

mit $\varkappa = -\left.\frac{\partial \omega}{\partial |a|^2}\right|_{|a_0|^2} \Big/ \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$ im eindimensionalen Fall. Für $\varkappa > 0$

ist das selbsterzeugte Potential anziehend. Vergrößerungen der Potentialtiefe wachsen dann instabil an. Eine entsprechende lineare Analyse, ausgehend von der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung, liefert den Einsatz der Modulationsinstabilitäten mit einer maximalen Anwachsrate oberhalb des Schwellwertes;

$$\gamma = \varkappa \, |a_o|^2 \tag{4}$$

für Störungen mit dem Wellenzahlvektor

$$K = \sqrt{2\varkappa} \, |a_o| \tag{5}$$

Die Schwellwertbedingung lautet

$$|a_o|^2 \gtrsim K^2/4\varkappa \tag{6}$$

Nichtlineare Terme können die Instabilität stoppen und wir erwarten, daß sich als stationäre nichtlineare Lösungen für $\varkappa > 0$ die sogenannten Enveloppen-Solitonen ausbilden können.

2. Grundgleichungen im Plasma

Im Plasma sind die Verhältnisse insofern komplizierter als die Reaktion auf eine Langmuir-Welle endlicher Amplitude i.a. nicht adiabatisch beschrieben werden kann. Grundsätzlich muß man daher - unter der Voraussetzung der Vernachlässigung kinetischer Effekte - von der zeitlich gemittelten Wellengleichung für die Einhüllende des elektrischen Feldes $\vec{E}$,

$$i\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla^2 \vec{E} - q \, \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) - (n_e - 1)\vec{E} = 0 \tag{7}$$

und den hydrodynamischen Gleichungen

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \, \vec{v}_i) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\vec{v}_i \cdot \nabla)\vec{v}_i = - \nabla\phi - \frac{T_i}{T_e} \nabla \ln n_i \tag{9}$$

$$n_e \nabla |E|^2 = n_e \nabla\phi - \nabla n_e \qquad (10)$$

$$\frac{1}{3} \nabla^2\phi = n_e - n_i \qquad (11)$$

ausgehen. Bei der Anschrift der Gleichungen (7-11) haben wir die folgenden Einheiten: Zeit $\sqrt{3}/\omega_{pi}$, Länge $\sqrt{3}\ \lambda_e$, Potential T_e/e, Dichte N_o, elektrisches Feld $(4\pi\ N_o\ T_e)^{1/2}$, Geschwindigkeit $c_s = (T_e/m_i)^{1/2}$, benutzt. Als Kleinheitsparameter taucht dann $\varepsilon = 2(m_e/3m_i)^{1/2}$ auf und die Größe $q = m_e c^2/3T_e - 1$ ist ein Maß für die Güte der elektrostatischen Approximation.

Offensichtlich kann man für Solitonen endlicher Amplitude keine skalierten Gleichungen [2-6] benutzen, sondern muß Elektronen- und Ionen-Nichtlinearitäten, wie im Gleichungssystem (7-11) beschrieben, voll einbeziehen. Es erweist sich dann, daß in einem weiten Mach-Zahl-Bereich M und für verschiedene Elektronen- und Ionentemperaturen Raumladungseffekte wesentlich werden. Die stationären Enveloppen-Solitonen endlicher Amplituden folgen dann aus einem zweidimensionalen Quasi-Potential-Problem [7].

3. Stabilitätskriterien für Enveloppen-Solitonen

In Verallgemeinerung des hydromagnetischen Energieprinzips, das von Bewegungsgleichungen der Form $\ddot{\xi} = F\xi$ mit selbstadjungierten Operatoren F ausgeht, diskutieren wir zur Herleitung hinreichender Instabilitätskriterien Gleichungen der Form $H_+^{-1}\ \ddot{\xi} = -\ H_-\ \xi$, wobei H_+ positiv-semidefinit ist und der Operator $H_+\ H_-$, im Gegensatz zu H_+ bzw. H_-, i.a. nicht selbstadjungiert ist [8]. Dann läßt sich die maximale Anwachsrate γ durch

$$\gamma^2 = \sup\left(-\ \frac{\langle\xi|H_-\xi\rangle}{\langle\xi|H_+^{-1}\xi\rangle}\right) \qquad (12)$$

berechnen, wobei Nebenbedingungen aufgrund der Formstabilität auftreten. Die expliziten Auswertungen für longitudinale und transversale Instabilitäten von ein- und mehrdimensionalen

Langmuir-Enveloppen-Solitonen werden im Vortrag ausführlich diskutiert [9].

Hinreichende Kriterien für Stabilität folgen aus einem Ljapunov-Funktional der Form $L = (\eta_o^2+\varepsilon^2M^2/3)I_1 - MI_2 + I_3 - L_o$, wobei η_o^2/ε die nichtlineare Frequenzverschiebung ist, die zur stationären Lösung gehört, und I_1, I_2 und I_3 Konstanten der Bewegung sind [10,11]. Durch Diskussion der Definitheitseigenschaften von L erhält man das hinreichende Stabilitätskriterium

$$\frac{\partial}{\partial \eta_o} \int dx\, G^2 \quad > \quad 0 \tag{13}$$

wobei G der Betrag der stationären Solitonenlösung ist. Auch dieses Kriterium läßt sich für alle bekannten Fälle einfach auswerten, so daß für Enveloppen-Solitonen durch Angabe der insgesamt notwendig und hinreichenden Stabilitätskriterien (12) und (13) das Stabilitätsverhalten vollständig folgt.

[1] V.I. Karpman, Nichtlineare Wellen, Akademie-Verlag, Berlin (1977).

[2] V.E. Zakharov and A.B. Shabat, Sov. Phys.-JETP 34, 62 (1972).

[3] E.A. Kuznetsov, Sov. Phys.-JETP 39, 1003 (1974).

[4] K. Nishikawa et al., Phys. Rev. Lett. 33, 148 (1974).

[5] V.I. Karpman, Phys. Scr. 11, 263 (1975).

[6] K.H. Spatschek, Phys. Fluids 21, 1032 (1978).

[7] E.W. Laedke und K.H. Spatschek, Phys. Lett. 75A, 53 (1979).

[8] E.W. Laedke und K.H. Spatschek, Phys. Rev. Lett. 41, 1798 (1978).

[9] E.W. Laedke und K.H. Spatschek, J. Plasma Phys. 22, 477 (1979).

[10] E.W. Laedke und K.H. Spatschek, Phys. Rev. Lett. 42, 1534 (1979).

[11] E.W. Laedke und K.H. Spatschek, Phys. Fluids 23, 44 (1980).