

Räume holomorpher Vektorfunktionen mit Wachstumsbedingungen und topologische Tensorprodukte

Reinhold Meise

Wloka gab 1966 in [24] handliche Kriterien für die Nuklearität gewisser Räume holomorpher Funktionen an. Er ging dabei von einer fallenden Folge zusammenhängender offener Mengen G_n in $\mathbb{C}$ aus, auf welchen Systeme $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Gewichtsfunktionen gegeben sind und bildete damit die Räume A_n und H_n . Dabei ist A_n die Menge aller in G_n holomorphen Funktionen f , für welche

$$\sup \{|f(z)|g_n(z) : z \in G_n\}$$

endlich ist, und H_n die Menge aller in G_n holomorphen Funktionen f , für welche $\int_{G_n} |f(z)|^2 h_n^2(z) dx dy$ endlich ist. Unter geeigneten Bedingungen an

die Systeme der Gewichtsfunktionen sind die aus den Räumen A_n bzw. H_n gebildeten induktiven Spektren äquivalent. Da die Räume H_n Hilbert-räume mit Kernfunktion sind, kann man beweisen, daß das aus den H_n gebildete Spektrum nuklear und somit $H = \text{ind}_{n \rightarrow} H_n \cong \text{ind}_{n \rightarrow} A_n$ ein nuklearer Raum ist.

Die Untersuchungen über die Darstellung von Distributionen durch holomorphe Funktionen (vgl. Köthe [8], Tillmann [18–21], Martineau [19], Meise [12, 13]) und der Versuch, die Topologie der Distributions-räume funktionentheoretisch zu charakterisieren, führte zu Räumen holomorpher Funktionen, die noch etwas allgemeiner sind als die von Wloka behandelten. Außerdem stellte sich bei den Untersuchungen vektorwertiger Distributionen das Problem, Räume holomorpher Vektorfunktionen mit einer geeigneten Topologie zu versehen. In der vorliegenden Arbeit werden Wlokas Ergebnisse auf den Fall beliebiger nicht wachsender Folgen von Gebieten ausgedehnt. Diese Verallgemeinerung erfolgt ohne Mühe, da die Methoden und Beweise die gleichen sind wie bei Wloka. Das Hauptergebnis dieser Note besteht darin, daß auch der Fall vektorwertiger Funktionen behandelt wird. Ist E ein Banachraum, so werden analog wie oben die Räume $A_n(E)$ und $H_n(E)$ definiert. Bedingungen an die Gewichtsfunktionen (vgl. § 2, Satz 1) garantieren, daß die mit den Räumen $A_n(E)$ bzw. $H_n(E)$ gebildeten induktiven Spektren äquivalent sind. Die Bemerkung, daß in gewissen Fällen das Tensor-

produkt mit dem induktiven Limes vertauscht, (vgl. § 1, Satz 5), erlaubt den Nachweis, daß $H(E) = \text{ind}_{n \rightarrow} H_n(E)$ zu dem Tensorprodukt $H \hat{\otimes} E$ topologisch isomorph ist (vgl. § 2, Satz 3). Durch Bildung geeigneter projektiver Limes kann man für jeden vollständigen lokalkonvexen Raum E einen Raum $H(E)$ definieren, der ebenfalls zu $H \hat{\otimes} E$ isomorph ist. Für den Fall, daß alle Gebiete G_n gleich einem Gebiet G sind, ergibt sich, daß eine Funktion $f: G \rightarrow E$ genau dann in $H(E)$ liegt, wenn für jede stetige Linearform e' auf E $e' \circ f$ aus H ist.

Falls der Raum E ein vollständiger bornologischer (DF)-Raum ist, kann für $H(E)$ eine Darstellung als induktiver Limes von Banachräumen gegeben werden. Diese Beobachtung vermittelt auch im skalaren Fall neue Einsichten. Denn hat man Gebiete G_n^j in $\mathbb{C}^{k_j}$ mit Gewichtsfunktionen g_n^j und h_n^j ($j=1,2$) und bildet man auf $G_n^1 \times G_n^2 = G_n^3$ die Gewichtsfunktionen $g_n^3 = g_n^1 \otimes g_n^2$ sowie $h_n^3 = h_n^1 \otimes h_n^2$, so sind die Räume $H(1, H(2, \mathbb{C}))$ und $H(1, \mathbb{C}) \hat{\otimes} H(2, \mathbb{C})$ zu dem Raum $H(3, \mathbb{C})$ topologisch isomorph. Dabei bezeichnet $H(j, E)$ den zum System j gebildeten Raum E -wertiger Funktionen. Für den Fall vektorwertiger Funktionen gilt ein analoger Satz. Das eben erwähnte Resultat ist auch insofern wichtig, als es in manchen Fällen die Anwendung von Induktionsschlüssen ermöglicht.

Ein reizvolles Problem, welches hier nicht behandelt wird, ist die Beschreibung der Dualräume der in dieser Arbeit betrachteten Räume. In einer Reihe von Beispielen (Köthe [7, 8], Tillmann [18], Vogt [23]) sind die Dualräume bereits bekannt. Weitere Beispiele sollen in einer späteren Note untersucht werden.

Vorbemerkung. Für jedes Paar lokalkonvexer Räume X, Y bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(X, Y)$ den Raum aller stetigen linearen Abbildungen von X in Y . Diesen Raum versehen wir mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den beschränkten Mengen von X .

§ 1. Limesdarstellungen für Räume stetiger linearer Abbildungen und Tensorprodukte

Satz 1. Ist E ein lokalkonvexer Raum und F der projektive Limes des projektiven Spektrums $\{F_\alpha, \pi_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in A}$, so ist $\{\mathcal{L}(E, F_\alpha), \varrho_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in A}$ mit

$$\varrho_{\alpha\beta}: \mathcal{L}(E, F_\beta) \rightarrow \mathcal{L}(E, F_\alpha), \quad \varrho_{\alpha\beta}(T) = \pi_{\alpha\beta} \circ T,$$

ein projektives Spektrum, und es gilt

$$\mathcal{L}\left(E, \text{proj}_{\leftarrow \alpha} F_\alpha\right) \cong \text{proj}_{\leftarrow \alpha} \mathcal{L}(E, F_\alpha).$$

Beweis. Da die Abbildungen $\varrho_{\alpha\beta}$ ($\alpha \leq \beta$) stetig sind und für $\alpha \leq \beta \leq \gamma$

$$\varrho_{\alpha\beta} \circ \varrho_{\beta\gamma}(T) = \varrho_{\alpha\beta}(\pi_{\beta\gamma} \circ T) = \pi_{\alpha\beta} \circ \pi_{\beta\gamma} \circ T = \pi_{\alpha\gamma} \circ T = \varrho_{\alpha\gamma}(T)$$

gilt, ist $\{\mathcal{L}(E, F_\alpha), \varrho_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in A}$ ein projektives Spektrum. Bezeichnet $\pi_\beta: \text{proj}_{\leftarrow \alpha} F_\alpha \rightarrow F_\beta$ die kanonische Abbildung, so ist für jedes T aus $\mathcal{L}(E, F)$ $\pi_\alpha \circ T$ ein Element von $\mathcal{L}(E, F_\alpha)$. Wegen

$$\varrho_{\alpha\beta}(\pi_\beta \circ T) = \pi_\alpha \circ \pi_\beta \circ T = \pi_\alpha \circ T$$

kann man eine Abbildung $\Phi: \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \text{proj}_{\leftarrow \alpha} \mathcal{L}(E, F_\alpha)$ definieren durch $\Phi(T) = (\pi_\alpha \circ T)_{\alpha \in A}$. Offenbar ist Φ injektiv. Ist $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ aus $\text{proj}_{\leftarrow \alpha} \mathcal{L}(E, F_\alpha)$, so ist die durch $T: x \rightarrow (T_\alpha x)_{\alpha \in A}$ auf E definierte Abbildung mit Werten in $\prod_{\alpha \in A} F_\alpha$ stetig und hat ihren Bildbereich in $\text{proj}_{\leftarrow \alpha} F_\alpha = F$, d.h. T ist aus $\mathcal{L}(E, F)$. Da $\Phi(T) = (T_\alpha)_{\alpha \in A}$ gilt, ist Φ auch surjektiv. Die Familie der Halbnormen $p = q \circ \pi_\alpha$ mit $\alpha \in A$ und einer stetigen Halbnorm q auf F erzeugt die Topologie von F . Daher ergibt sich aus der für jede beschränkte Teilmenge B von E gültigen Gleichung

$$\sup_{x \in B} p(Tx) = \sup_{x \in B} q(\pi_\alpha \circ T(x)),$$

daß die Topologie des projektiven Limes auf $\mathcal{L}(E, F)$ feiner ist als die starke Topologie τ_b . Sie ist aber auch gröber als τ_b , da die kanonischen Abbildungen $\varrho_\alpha: \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(E, F_\alpha)$, $\varrho_\alpha(T) = \pi_\alpha \circ T$ bezüglich τ_b stetig sind.

Satz 2. Sei E ein nuklearer (F) -Raum, dargestellt als projektiver Limes des reduzierten abzählbaren projektiven Spektrums $\{E_n, \pi_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus Banachräumen E_n . F sei ein vollständiger lokalkonvexer Raum, der als induktiver Limes des abzählbaren Einbettungsspektrums $\{F_n, i_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus Banachräumen F_n dargestellt ist. Dann sind $\{\mathcal{L}(E_n, F_n), j_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{\mathcal{L}(E, F_n), \gamma_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit den Abbildungen $j_{nm}(T) = i_{nm} \circ T \circ \pi_{nm}$ und $\gamma_{nm}(T) = i_{nm} \circ T$ ($n \leq m$) induktive Spektren. Ihre induktiven Limites $\text{ind}_{n \rightarrow} \mathcal{L}(E_n, F_n)$ und $\text{ind}_{n \rightarrow} \mathcal{L}(E, F_n)$ sind topologisch isomorph zu $\mathcal{L}(E, F)$.

Beweis. Wie man sofort sieht, sind die oben definierten Spektren induktiv. Bezeichnen $i_n: F_n \rightarrow F$ und $\pi_n: E \rightarrow E_n$ die kanonischen Abbildungen, so kann man die Abbildungen $\varphi_n: \mathcal{L}(E, F_n) \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$, $\psi_n: \mathcal{L}(E_n, F_n) \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ und $\sigma_n: \mathcal{L}(E_n, F_n) \rightarrow \mathcal{L}(E, F_n)$ definieren durch $\varphi_n(T) = i_n \circ T$, $\psi_n(T) = i_n \circ T \circ \pi_n$ und $\sigma_n(T) = T \circ \pi_n$. Dann gilt $\psi_n = \varphi_n \circ \varrho_n$. Ferner gilt für $m \geq n$ $\psi_m \circ j_{nm} = \psi_n$, $\varphi_m \circ \gamma_{mn} = \varphi_n$ und $(\gamma_m \circ \sigma_m) \circ j_{nm} = \gamma_n \circ \sigma_n$. Daher gibt es stetige lineare Abbildungen $\psi: \text{ind}_{n \rightarrow} \mathcal{L}(E_n, F_n) \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$, $\varphi: \text{ind}_{n \rightarrow} \mathcal{L}(E, F_n) \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ und $\sigma: \text{ind}_{n \rightarrow} \mathcal{L}(E_n, F_n) \rightarrow \text{ind}_{n \rightarrow} \mathcal{L}(E, F_n)$ mit $\psi \circ j_n = \psi_n$, $\varphi \circ \gamma_n = \varphi_n$ und $\sigma \circ j_n = \gamma_n \circ \sigma_n$. Da i_n injektiv und $\pi_n(E)$ in E_n dicht ist, sind ψ_n und φ_n injektiv. Hieraus folgt wegen $\psi \circ j_n = \psi_n$ und $\varphi \circ \gamma_n = \varphi_n$ die Injektivität von ψ und φ . ψ und

φ sind aber auch surjektiv. Denn zu jedem $T \in \mathcal{L}(E, F)$ existieren nach Grothendieck [3], S. 16, Theorem A, ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $T_n \in \mathcal{L}(E, F_n)$ mit $T = i_n \circ T_n = \varphi_n(T_n)$. Also ist $\varphi(\gamma_n(T_n)) = \varphi_n(T_n) = T$, d.h. φ ist surjektiv. Da F ein Banachraum ist, gibt es ein k und ein $T_k \in \mathcal{L}(E_k, F_n)$, so daß $T_n = T_k \circ \pi_k$. Für $l \geq \max(k, n)$ gilt daher mit $T_l = i_{n1} \circ T \circ \pi_{kl}$ $\psi_l(T_l) = T$. Also ist $\psi(j_l(T_l)) = \psi_l(T_l) = T$; d.h. ψ ist surjektiv. Aus

$$\varphi \circ \sigma \circ j_n = \varphi \circ \gamma_n \circ \sigma_n = \varphi_n \circ \sigma_n = \psi_n = \psi \circ j_n$$

und $\text{ind}_{n \rightarrow} \mathcal{L}(E_n, F_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} j_n(\mathcal{L}(E_n, F_n))$ folgt $\varphi \circ \sigma = \psi$. Da ψ und φ algebraische Isomorphismen sind, ist auch σ ein solcher.

Die Aussage, daß ψ, φ und σ topologisch sind, folgt so. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist $\mathcal{L}(E, F)$ topologisch isomorph zu $E' \hat{\otimes} F$ und daher nach Grothendieck [3], S. 44 und Köthe [6], S. 386, 28.4.(3) bornologisch. Aus einer Folgerung aus dem Graphensatz von Robertson-Robertson (Horváth [4], S. 306, Proposition 11) ergibt sich dann die Stetigkeit von ψ^{-1} . Da σ stetig ist, folgt die Stetigkeit von φ^{-1} aus $\varphi^{-1} = \sigma \circ \psi^{-1}$. Entsprechend folgt die Stetigkeit von σ^{-1} .

Satz 3. Ist der lokalkonvexe Raum E induktiver Limes des regulären induktiven Spektrums $\{E_\alpha, \pi_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in A}$, so ist für jeden lokalkonvexen Raum F $\{\mathcal{L}(E_\alpha, F), \varrho_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in A}$ mit $\varrho_{\alpha\beta}(T) = T \circ \pi_{\alpha\beta}$ ein projektives Spektrum, dessen projektiver Limes zu $\mathcal{L}(E, F)$ topologisch isomorph ist.

Der Beweis erfolgt analog wie der von Satz 2.1, § 26, in Floret – Wloka [1].

Satz 4. Seien G und F vollständige lokalkonvexe Räume. G sei tonneliert, und G' sei nuklear und vollständig. Ist F der projektive Limes des projektiven Spektrums $\{F_\alpha, \pi_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in A}$ aus vollständigen lokalkonvexen Räumen, so ist $\{G' \hat{\otimes} F_\alpha, \text{id}_{G'} \hat{\otimes} \pi_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in A}$ ein projektives Spektrum, dessen Limes zu $G' \hat{\otimes} F$ topologisch isomorph ist.

Beweis. Wir betrachten das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G' \otimes_\pi F & \xrightarrow{p} & \text{proj}_{\leftarrow \alpha} G' \hat{\otimes} F_\alpha \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ \mathcal{L}(G, F) & \xrightarrow{\Phi} & \text{proj}_{\leftarrow \alpha} \mathcal{L}(G, F_\alpha). \end{array}$$

Dabei bezeichnet Φ den in Satz 1 konstruierten Isomorphismus, während p und φ durch $\varphi(g' \otimes f)[g] = f \langle g, g' \rangle$ und $p(g' \otimes f) = (g' \otimes \pi_\alpha(f))_{\alpha \in A}$ definiert sind. Ψ ist die Einschränkung von $\prod_{\alpha \in A} \psi_\alpha$ auf $\text{proj}_{\leftarrow \alpha} G' \hat{\otimes} F_\alpha$, wobei $\psi_\alpha: G' \hat{\otimes} F_\alpha \rightarrow \mathcal{L}(G, F_\alpha)$ die üblichen Isomorphismen sind. Wie man sofort nachrechnet, ist das Diagramm kommutativ, d.h. es gilt $\Psi \circ p = \Phi \circ \varphi$.

Bezeichnet man die Fortsetzungen von p bzw. φ auf die vollständige Hülle $G' \hat{\otimes} F$ ebenfalls mit p bzw. φ , so gilt $\Psi \circ p = \Phi \circ \varphi$. Da Ψ , Φ und φ topologische Isomorphismen sind, ist auch p ein solcher.

Satz 5. Sei G ein nuklearer (F) -Raum, dargestellt als projektiver Limes eines abzählbaren nuklearen Spektrums $\{G_n, \pi_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Hilberträumen G_n , und sei der vollständige Raum E dargestellt als induktiver Limes des Einbettungsspektrums $\{E_n, i_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Banachräumen E_n . Dann sind $\{G'_n \hat{\otimes} E_n, \varphi_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{G' \hat{\otimes} E_n, \varrho_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\varphi_{nm} = \pi'_{nm} \hat{\otimes} i_{nm}$ und $\varrho_{nm} = \text{id}_{G'} \hat{\otimes} i_{nm}$ induktive Spektren, deren induktive Limes zu $G' \hat{\otimes} E$ topologisch isomorph sind.

Beweis. Wie man sofort nachprüft, sind die oben definierten Spektren induktiv. Aus der Kommutativität des folgenden Diagramms ergibt sich die Injektivität der Abbildung $\pi'_n \hat{\otimes} i_n$.

$$\begin{array}{ccc} G'_n \hat{\otimes} E_n & \xrightarrow{\beta_n} & G'_n \check{\otimes} E_n \xrightarrow{\alpha_n} \mathcal{L}(G_n, E_n) \\ \pi'_n \hat{\otimes} i_n \downarrow & & \downarrow j_n \\ G' \hat{\otimes} E & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{L}(G, E) \end{array}$$

Dabei ist β_n nach Gramsch-Vogt [2], Lemma 2.1, injektiv, α_n ist eine Isometrie, j_n injektiv nach Satz 2 und α der übliche Isomorphismus. Die Injektivität von $\text{id}_{G'} \hat{\otimes} i_n$ folgt analog. Wegen

$$\begin{aligned} \pi'_m \hat{\otimes} i_m \circ \varphi_{nm} &= (\pi'_m \circ \pi'_{nm}) \hat{\otimes} (i_m \circ i_{nm}) = \pi'_n \hat{\otimes} i_n \\ \text{id}_{G'} \hat{\otimes} i_m \circ \varrho_{nm} &= (\text{id}_{G'} \circ \text{id}_{G'}) \hat{\otimes} (i_m \circ i_{nm}) = \text{id}_{G'} \hat{\otimes} i_n \end{aligned}$$

und

gibt es stetige lineare Abbildungen $\Phi: \text{ind}_{n \rightarrow} G'_n \hat{\otimes} E_n \rightarrow G' \hat{\otimes} E$ und $p: \text{ind}_{n \rightarrow} G' \hat{\otimes} E_n \rightarrow G' \hat{\otimes} E$ mit $\Phi \circ \varphi_n = \pi'_n \hat{\otimes} i_n$ sowie $p \circ \varrho_n = \text{id}_{G'} \hat{\otimes} i_n$. Hieraus folgt, daß Φ und p injektiv sind.

Ist $u \in G' \hat{\otimes} E$, so ist $\alpha(u) \in \mathcal{L}(G, E)$, und wie im Beweis zu Satz 2 sieht man, daß es eine natürliche Zahl n und ein T_n aus $\mathcal{L}(G_n, E_n)$ gibt, so daß $T = i_n \circ T_n \circ \pi_n$ gilt. Für hinreichend großes $m \geq n$ ist π_{nm} nuklear, so daß

$$T = i_m \circ i_{nm} \circ T_n \circ \pi_{nm} \circ \pi_m = i_m \circ T_m \circ \pi_m$$

mit nuklearem T_m ; d.h. $T_m x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle g'_i, x_i \rangle e_i$, wobei $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$,

$\|g'_i\|_m \leq 1$ und $\|e_i\|_m \leq 1$. Also ist $T_m = \alpha_m \circ \beta_m \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i g'_i \otimes e_i \right)$. Aus dem obigen Diagramm ergibt sich nun, daß $\pi'_m \hat{\otimes} i_m \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i g'_i \otimes e_i \right) = u$ gilt.

Daher ist Φ surjektiv.

Das System $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von stetigen linearen Abbildungen

$$\psi_n = \varrho_n \circ (\pi'_n \otimes \text{id}_{E_n})$$

definiert eine stetige lineare Abbildung $\Psi : \text{ind}_{n \rightarrow} G'_n \hat{\otimes} E_n \rightarrow \text{ind}_{n \rightarrow} G' \hat{\otimes} E_n$ mit $\Psi \circ \varphi_n = \psi_n$. Aus

$$\begin{aligned} p \circ \Psi \circ \varphi_n &= p \circ \psi_n = p \circ \varrho_n \circ (\pi'_n \hat{\otimes} \text{id}_{E_n}) = \text{id}_{G'} \otimes i_n \circ \pi'_n \hat{\otimes} \text{id}_{E_n} \\ &= \pi'_n \hat{\otimes} i_n = \Phi \circ \varphi_n \end{aligned}$$

folgt $p \circ \Psi = \Phi$.

Da Φ und p injektiv sind, ist auch Ψ injektiv. Weil Φ surjektiv ist, muß auch p surjektiv sein, so daß Φ , Ψ und p algebraische Isomorphismen sind. Da $G' \hat{\otimes} E$ ein vollständiger bornologischer Raum ist, folgt aus der Stetigkeit von Φ schon die Offenheit. Dann ist wegen $p^{-1} = \Psi \circ \Phi^{-1}$ auch p ein topologischer Isomorphismus und damit auch Ψ .

§ 2. Holomorphe Funktionen mit Wachstumsbedingungen

Alle in diesem und den folgenden Paragraphen auftretenden linearen Räume sind Vektorräume über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Definition. Sei E ein Banachraum, G eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^N$ und $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige positive Funktion ohne Nullstellen. Wir bezeichnen mit $A(G, g, E)$ den Raum aller in G holomorphen Funktionen f mit Werten in E , für die $\sup \{ \|f(z)\|_E \cdot g(z) : z \in G \}$ endlich ist und mit $H(G, g, E)$ den Raum aller auf G holomorphen Funktionen f mit Werten in E , für die $\int_G (\|f(z)\|_E g(z))^2 d\lambda$ endlich ist. Dabei bezeichnet λ das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{C}^N = \mathbb{R}^{2N}$. Die Räume $A(G, g, E)$ bzw. $H(G, g, E)$ versehen wir mit den Normen $\|f\|_A = \sup \{ \|f(z)\|_E g(z) : z \in G \}$ und $\|f\|_H = \left(\int_G (\|f(z)\|_E g(z))^2 d\lambda \right)^{1/2}$. Statt $H(G, g, \mathbb{C})$ schreiben wir $H(G, g)$; entsprechen $A(G, g)$.

Lemma 1. Für jeden Banachraum E sind die Räume $A(G, g, E)$ und $H(G, g, E)$ vollständig. $H(G, g)$ ist ein Hilbertraum.

Beweis. Wegen der Voraussetzungen über g ist die Topologie von $A(G, g, E)$ feiner als die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von G . Hieraus ergibt sich sofort die Vollständigkeit von $A(G, g, E)$. Die Vollständigkeit von $H(G, g, E)$ folgt analog wie bei Wloka [24] Satz 6.

Lemma 2. Sei E ein Banachraum. Seien G_1 und G_2 offene Teilmengen des $\mathbb{C}^N$ mit $G_1 \subset G_2$, und seien g_1, g_2 stetige positive Funktionen ohne Nullstellen auf G_2 .

a) Ist $\int_{G_1} \left(\frac{g_1}{g_2} \right)^2 d\lambda$ endlich, so ist die Restriktionsabbildung

$$R: A(G_2, g_2, E) \rightarrow H(G_1, g_1, E)$$

definiert und stetig.

b) Gibt es zu jedem $t \in G_1$ ein N -Tupel $d_t = (d_{t1}, \dots, d_{tN})$ mit $d_{tj} > 0$ ($j = 1, \dots, N$) und eine reelle Zahl B , so daß

$$(i) \quad K(t, d_t) = \prod_{j=1}^N K(t_j, d_{tj}) \subset G_2.$$

(ii) $\pi^{-N} d_t^{-2} g_1(t) \left(\int_{K(t, d_t)} (g_2)^{-2} d\lambda \right)^{1/2} \leq B$ für alle $t \in G_1$, so ist die Restriktionsabbildung $R': H(G_2, g_2, E) \rightarrow A(G_1, g_1, E)$ definiert und stetig.

Beweis. a) Für jedes $f \in A(G_2, g_2, E)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{G_1} (\|f(z)\|_E g_1(z))^2 d\lambda &= \int_{G_1} \left(\|f(z)\|_E g_2(z) \frac{g_1(z)}{g_2(z)} \right)^2 d\lambda \\ &\leq \|f\|_{A(G_2, g_2, E)}^2 \int_{G_1} \left(\frac{g_1}{g_2} \right)^2 d\lambda \leq C^2 \|f\|_{A(G_2, g_2, E)}^2. \end{aligned}$$

Daher ist $\|R(f)\|_{H(G_1, g_1, E)} \leq C \cdot \|f\|_{A(G_2, g_2, E)}$.

b) Für jedes $f \in H(G_2, g_2, E)$ gilt

$$\begin{aligned} \|f(t)\|_E g_1(t) &= g_1(t) \pi^{-N} d_t^{-2} \left\| \int_{K(t, d_t)} f(z) d\lambda \right\|_E \\ &\leq g_1(t) \pi^{-N} d_t^{-2} \left(\int_{K(t, d_t)} (g_2)^{-2} d\lambda \right)^{1/2} \left(\int_{K(t, d_t)} (\|f(z)\|_E g_2(z))^2 d\lambda \right)^{1/2} \\ &\leq B \cdot \|f\|_{H(G_2, g_2, E)}. \end{aligned}$$

Daher ist $\|R'(f)\|_{A(G_1, g_1, E)} \leq B \cdot \|f\|_{H(G_2, g_2, E)}$.

Satz 1. Sei $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge offener Teilmengen des $\mathbb{C}^N$. Jede Menge G_n bestehe aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten. Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G_n sei für alle n die gleiche. Auf G_1 seien Folgen $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stetiger positiver Funktionen ohne Nullstellen definiert. Ferner gebe es Konstanten c_n, d_n , so daß $g_{n+1} \leq c_n g_n$ und $h_{n+1} \leq d_n h_n$. Die Räume $A(G_n, g_n, E)$ bzw. $H(G_n, h_n, E)$ bezeichnen wir mit $A_n(E)$ bzw. $H_n(E)$. Ferner gelte

(1) Zu fast jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m(n) \in \mathbb{N}$ mit $m(n) \leq n$, so daß $\int_{G_n} \left(\frac{h_n}{g_{m(n)}} \right)^2 d\lambda < \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} m(n) = \infty$.

(2) Zu fast jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $k(n) \in \mathbb{N}$ mit $k(n) \leq n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n) = \infty$, so daß es zu jedem $t \in G_n$ ein $d_t = (d_{t1}, \dots, d_{tN})$ ($d_{tj} > 0, j = 1, \dots, N$) und ein $B_n > 0$ gibt mit

$$(i) \quad K(t, d_t) \subset G_{k(n)}$$

(ii) $\pi^{-N} d_t^{-2} g_n(t) \left(\int_{K(t, d_t)} (h_{k(n)})^{-2} d\lambda \right)^{1/2} \leq B_n$ für alle $t \in G_n$. Bezeichnen

wir mit $r_{ln}: H_l(E) \rightarrow H_n(E)$ bzw. $q_{ln}: A_l(E) \rightarrow A_n(E)$ ($l \leq n$) die offensichtlichen Einschränkungabbildungen, so sind diese injektiv. Die induktiven Spektren $\{A_l(E), q_{ln}\}_{l \in \mathbb{N}}$ und $\{H_l(E), r_{ln}\}_{l \in \mathbb{N}}$ haben topologisch isomorphe induktive Limites.

Beweis. Wegen der Voraussetzungen über die Folgen $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind die Abbildungen r_{ln} und q_{ln} ($l \leq n$) definiert und stetig. Ihre Injektivität folgt aus den Zusammenhangsverhältnissen. Nach Lemma 2 sind die Einschränkungabbildungen $\hat{r}_{k(l),l}: H_{k(l)}(E) \rightarrow A_l(E)$ und $\hat{q}_{m(l),l}: A_{m(l)}(E) \rightarrow H_l(E)$ definiert, stetig und trivialerweise mit den Spektralabbildungen r_{ln} bzw. q_{ln} verträglich. Wegen $\lim_{l \rightarrow \infty} m(l) = \lim_{l \rightarrow \infty} k(l) = \infty$ sind dann aber $\text{ind}_{n \rightarrow} A_n(E)$ und $\text{ind}_{n \rightarrow} H_n(E)$ topologisch isomorph.

Bemerkung. Die Separiertheit der Topologie von $\text{ind}_{n \rightarrow} H_n(E)$ wird sich als Folgerung aus Satz 3 ergeben.

Satz 2. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist $\text{ind}_{n \rightarrow} H_n(\mathbb{C})$ ein vollständiger nuklearer (DF)-Raum, dessen starker Dualraum ein nuklearer (F)-Raum ist. $\left(\text{ind}_{n \rightarrow} H_n(\mathbb{C})\right)'$ kann als projektiver Limes des abzählbaren strikten nuklearen projektiven Spektrums $\{H_n(\mathbb{C})', r'_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dargestellt werden.

Beweis. Analog wie in Wloka [24], Satz 7, zeigt man, daß $H(G_n, h_n)$ ein separabler Hilbertraum mit stetiger Kernfunktion ist und daß die Kernfunktion $K_n(z_1, \dots, z_N; u_1, \dots, u_N)$ für jedes Produkt von Kreisen $\prod_{j=1}^N K(z_j, r_j)$, welches noch ganz in G_n enthalten ist, der folgenden Abschätzung genügt

$$K_n(z; z) \leq \left(\prod_{j=1}^N r_j^2 \pi^N \right)^{-2} \int_{K(z, r)} h_n^{-2} d\lambda.$$

Unter den gegebenen Voraussetzungen folgt daraus analog wie in Wloka [24], Satz 5, daß es zu jedem $l \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq l$ existiert, so daß die Spektralabbildung $r_{ln}: H_l(\mathbb{C}) \rightarrow H_n(\mathbb{C})$ eine Hilbert-Schmidt-Abbildung ist. Da die Verknüpfung zweier Hilbert-Schmidt-Abbildungen nuklear ist, ergibt sich, daß $\{H_l(\mathbb{C}), r_{ln}\}_{l \in \mathbb{N}}$ ein nukleares Spektrum ist. Aufgrund der Injektivität der Spektralabbildungen r_{ln} ist $\text{ind}_{n \rightarrow} H_n(\mathbb{C})$ ein separierter (LS)-Raum. Aus der Dualitätstheorie für (LS)- und $(F\bar{S})$ -Räume (Floret-Wloka [1], S. 145f.) folgt nun die Behauptung. Außerdem ergibt sich noch, daß die kanonischen Abbildungen $r_n: H_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{ind}_{k \rightarrow} H_k(\mathbb{C})$ injektiv sind.

Satz 3. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist $\left(\text{ind}_{n \rightarrow} H_n(\mathbb{C})\right) \hat{\otimes} E$ topologisch isomorph zu $\text{ind}_{n \rightarrow} H_n(E)$.

Beweis. Wegen Satz 2 und § 1 Satz 2 sind $H \hat{\otimes} E$, $\mathcal{L}(H', E)$ und $\text{ind}_{n \rightarrow} \mathcal{L}(H'_n, E)$ topologisch isomorph. Dabei haben wir $H = \text{ind}_{n \rightarrow} H_n(\mathbb{C})$ gesetzt. Wir zeigen nun, daß $\text{ind}_{n \rightarrow} \mathcal{L}(H'_n, E)$ und $\text{ind}_{n \rightarrow} H_n(E)$ topologisch isomorph sind.

a) Sei $f \in H_n(E)$ gegeben. Vermöge f kann man $U_f: E' \rightarrow H_n(\mathbb{C})$ definieren durch $U_f(e')[z] = \langle f(z), e' \rangle$. Wegen

$$\begin{aligned} \left(\int_{G_n} (\|U_f(e')[z]\| h_n(z))^2 d\lambda \right)^{1/2} &= \left(\int_{G_n} (\| \langle f(z), e' \rangle \| h_n(z))^2 d\lambda \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{G_n} (\|f(z)\|_E \|e'\|_{E'} h_n(z))^2 d\lambda \right)^{1/2} = \|e'\|_{E'} \|f\|_{H_n(E)} \end{aligned}$$

ist $U_f(e') \in H_n(\mathbb{C})$. Außerdem ergibt sich die Stetigkeit der Abbildung U_f . Daher ist auch $U'_f: H'_n(\mathbb{C}) \rightarrow E'$ stetig. Wir zeigen, daß der Bildbereich von U'_f sogar in der Einbettung von E in E' enthalten ist. Da die lineare Hülle der Menge $\Delta_n = \{\delta_z: z \in G_n\}$ in $H'_n(\mathbb{C})$ dicht liegt und U'_f stetig ist, genügt es zu zeigen, daß $U'_f(\delta_z) \in E$ für jedes $z \in G_n$. Für jedes $e' \in E'$ und jedes $z \in G_n$ gilt aber

$$\langle U'_f(\delta_z), e' \rangle = \langle \delta_z, U_f(e') \rangle = U_f(e')[z] = \langle f(z), e' \rangle,$$

so daß $U'_f(\delta_z) = f(z) \in E$ gilt.

Wegen $\|U'_f\| = \|U_f\| \leq \|f\|_{H_n(E)}$ ist die durch $\varphi_n(f) = U'_f$ definierte Abbildung $\varphi_n: H_n(E) \rightarrow \mathcal{L}(H'_n(\mathbb{C}), E)$, stetig. Da

$$\varphi_n \circ r_{ln} = \gamma_{ln} \circ \varphi_l (\gamma_{ln}: \mathcal{L}(H'_l(\mathbb{C}), E) \rightarrow \mathcal{L}(H'_n(\mathbb{C}), E))$$

gilt, induzieren die Abbildungen φ_n eine stetige lineare Abbildung $\varphi: \text{ind}_{n \rightarrow} H_n(E) \rightarrow \text{ind}_{n \rightarrow} \mathcal{L}(H'_n(\mathbb{C}), E)$.

b) Ist $u \in \mathcal{L}(H'_n(\mathbb{C}), E)$, so wird durch $f_u(z) = u(\delta_z)$ eine Abbildung von G_n in E definiert. Wegen der für jedes $e' \in E'$ gültigen Beziehung

$$\langle f_u(z), e' \rangle = \langle u(\delta_z), e' \rangle = \langle \delta_z, u'(e') \rangle = u'(e')[z]$$

ist $e' \circ f_u \in H_n(\mathbb{C})$ und daher holomorph auf G_n . Also ist $f_u: G_n \rightarrow E$ holomorph.

Für geeignetes $s \in \mathbb{N}$, $s \geq n$ ist nach Satz 1 $\hat{r}_{ns}(H_n(\mathbb{C})) \subset A_s(\mathbb{C})$. Bezeichnen wir für jedes $m \geq n$ die Einschränkung von f_u auf G_m mit $f_{u,m}$, so gilt für jedes $e' \in E'$

$$\sup \{ |\langle g_s(z) f_{u,s}(z), e' \rangle| : z \in G_s \} \leq C(e') < \infty.$$

Dann folgt aber aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, daß $\sup \{ \|f_{u,s}(z)\|_E g_s(z) : z \in G_s \}$ endlich ist, so daß $f_{u,s} \in A_s(E)$. Wegen $\hat{Q}_{st}(A_s(E)) \subset H_t(E)$ für ein geeignetes $t \geq s$, ist $\hat{Q}_{st}(f_{u,s}) = f_{u,t} \in H_t(E)$.

Aus der für alle $z \in G_t$ und alle $e' \in E'$ gültigen Gleichung

$$\langle U'_{f_{u,t}}(\delta_z), e' \rangle = \langle f_{u,t}(z), e' \rangle = \langle \gamma_{nt}(u)(\delta_z), e' \rangle$$

folgt $U'_{f_{u,i}}(\delta_z) = \gamma_{ni}(u)(\delta_z)$. Da die lineare Hülle von A_i in $H'_i(\mathbb{C})$ dicht liegt, ergibt sich $\varphi_i(f_{u,i}) = \gamma_{ni}(u)$. Hieraus folgt die Surjektivität der in a) konstruierten Abbildung.

Um die Injektivität von φ zu beweisen, nehmen wir an, daß für ein $f \in H_n(E)$ $\varphi(r_n(f)) = 0$ gilt. Nach Konstruktion von φ ist dann

$$0 = \varphi \circ r_n(f) = \gamma_n \circ \varphi_n(f).$$

Wegen der Injektivität von γ_n ist also $\varphi_n(f) = 0$. Daher ist für jedes $z \in G_n$ und jedes $e' \in E'$

$$0 = \langle \varphi_n(f)(\delta_z), e' \rangle = \langle U'_f(\delta_z), e' \rangle = \langle \delta_z, U_f(e') \rangle = \langle f(z), e' \rangle,$$

woraus $f = 0$ folgt. Also ist φ stetig und bijektiv. Aus einem Satz von Robertson-Robertson (Horváth [4], S. 306, Proposition 11) folgt, daß φ ein topologischer Isomorphismus ist.

c) Wir zeigen nun noch, daß die insgesamt nachgewiesene Isomorphie $\Phi: H \hat{\otimes} E \rightarrow \text{ind}_{n \rightarrow} H_n(E)$ die Fortsetzung der durch die natürlichen Abbildungen $\tilde{\Phi}_n: H_n(\mathbb{C}) \otimes_\pi E \rightarrow H_n(E)$ ($\tilde{\Phi}_n(f \otimes e)[z] = f(z)e$) induzierten Abbildung $\tilde{\Phi}: \text{ind}_{n \rightarrow} (H_n(\mathbb{C}) \otimes_\pi E) = H \otimes_\pi E \rightarrow \text{ind}_{n \rightarrow} H_n(E)$ auf die vollständige Hülle ist.

$h \otimes e \in H_n(\mathbb{C}) \otimes E$ wird auf ein $u \in \mathcal{L}(H'_n(\mathbb{C}), E)$ abgebildet, welches definiert ist durch $u(h') = \langle h', h \rangle e$ für $h' \in H'_n(\mathbb{C})$. Dann ist aber

$$f_u(z) = u(\delta_z) = \langle \delta_z, h \rangle e = h(z)e,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

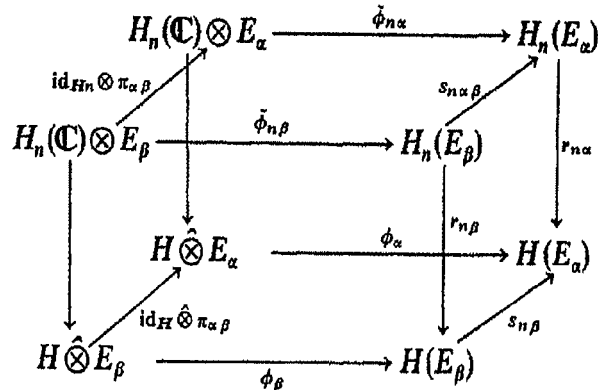
Folgerung. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist die Topologie des induktiven Limes $H(E) = \text{ind}_{n \rightarrow} H_n(E) = \text{ind}_{n \rightarrow} A_n(E)$ separiert, und $\text{ind}_{n \rightarrow} H_n(E)$ ist ein vollständiger bornologischer (DF)-Raum.

Lemma 3. Ist $\{E_\alpha, \pi_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in A}$ ein projektives Spektrum von Banachräumen, so kann man projektive Spektren $\{H(E_\alpha), s_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in A}$ und $\{A(E_\alpha), \sigma_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in A}$ definieren.

Beweis. Die Spektralabbildungen $\pi_{\alpha\beta}$ induzieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetige lineare Abbildungen $s_{n\alpha\beta}: H_n(E_\beta) \rightarrow H_n(E_\alpha)$, definiert durch $s_{n\alpha\beta}(f_\beta) = \pi_{\alpha\beta} \circ f_\beta$. Diese Abbildungen sind trivialerweise mit den Spektralabbildungen $r_{nm\alpha}: H_n(E_\alpha) \rightarrow H_m(E_\alpha)$ bzw. $r_{nm\beta}$ verträglich, d.h. es gilt $r_{nm\alpha} \circ s_{n\alpha\beta} = s_{m\alpha\beta} \circ r_{nm\beta}$. Daher induzieren die Abbildungen $s_{n\alpha\beta}$ Abbildungen $s_{\alpha\beta}: H(E_\beta) \rightarrow H(E_\alpha)$. Wegen der für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $\alpha, \beta, \gamma \in A$ mit $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ gültigen Beziehung $s_{n\alpha\beta} \circ s_{n\beta\gamma} = s_{n\alpha\gamma}$, gilt auch $s_{\alpha\beta} \circ s_{\beta\gamma} = s_{\alpha\gamma}$. Also ist $\{H(E_\alpha), s_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in A}$ ein projektives Spektrum. Für $\{A(E_\alpha), \sigma_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in A}$ verläuft die Konstruktion analog.

Satz 4. Für jeden vollständigen lokalkonvexen Raum E , der als projektiver Limes eines projektiven Spektrums $\{E_\alpha, \pi_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in A}$ aus Banachräumen E_α dargestellt ist, gilt $H \hat{\otimes} E \cong \text{proj}_{\leftarrow \alpha} H(E_\alpha)$.

Beweis. Wir bezeichnen mit $\Phi_\alpha: H \hat{\otimes} E_\alpha \rightarrow H(E_\alpha)$ den nach Satz 3 existierenden topologischen Isomorphismus und mit $\tilde{\Phi}_{n\alpha}: H_n(\mathbb{C}) \otimes_\pi E_\alpha \rightarrow H_n(E_\alpha)$ die im Beweisteil c) zu Satz 3 definierte Abbildung. Dann betrachten wir das folgende Diagramm



Da die obere Zelle für alle natürlichen Zahlen n kommutativ ist, ist es auch die untere. Daher sind $\text{proj}_{\leftarrow \alpha} H(E_\alpha)$ und $\text{proj}_{\leftarrow \alpha} H \hat{\otimes} E_\alpha$ topologisch isomorph. Nach Satz 2 und § 1, Satz 4, ist aber $\text{proj}_{\leftarrow \alpha} H \hat{\otimes} E_\alpha$ zu $H \hat{\otimes} E$ topologisch isomorph.

Bemerkung 1. Unter gewissen Voraussetzungen kann man $\text{proj}_{\leftarrow \alpha} H(E_\alpha)$ als Funktionenraum auffassen. Etwa dann, wenn $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n = G$ die Eigenschaft hat, daß zwei auf einem G_k holomorphe Funktionen f und g , deren Einschränkungen auf G übereinstimmen, schon auf G_k übereinstimmen. (Falls alle G_n gleich G sind, hat G diese Eigenschaft trivialerweise.) In dem Fall, daß G diese Einschränkungseigenschaft hat, kann man $\text{proj}_{\leftarrow \alpha} H(E_\alpha)$ mit dem folgenden Raum $F_H(G, E)$ von Funktionen identifizieren. $F_H(G, E) = \{f : f : G \rightarrow E, \text{ zu jeder stetigen Halbnorm } p \text{ auf } E \text{ existiert ein } n \in \mathbb{N} \text{ und ein } f_p \in H_n(\hat{E}_p) \text{ mit } \pi_p \circ f = f_p|G\}$. Dabei bezeichnet $\hat{E}_p$ die vollständige Hülle des in natürlicher Weise normierten Raumes $E/\text{Kern } p$ und π_p die natürliche Abbildung von E in $\hat{E}_p$.

Beweis. Wir beachten zunächst, daß für jedes $f \in H(E_\alpha)$ und jedes $z \in G$ $f(z)$ definiert werden kann, indem man ein n und ein $f_n \in H_n(E_\alpha)$ mit $r_n(f_n) = f$ findet und $f(z) = f_n(z)$ setzt. Diese Definition hängt offensichtlich nicht von der Wahl von f_n ab.

Ist $(f_\alpha)_{\alpha \in A} \in \text{proj}_{\leftarrow \alpha} H(E_\alpha)$, so sieht man leicht, daß $(f_\alpha(z))_{\alpha \in A} \in \text{proj}_{\leftarrow \alpha} E_\alpha = E$ für jedes $z \in G$. Daher kann man $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ durch $\Phi((f)_\alpha)[z] = (f_\alpha(z))_{\alpha \in A} = f(z)$

eine E -wertige Funktion auf G zuordnen. Diese Funktion ist ein Element von $F_H(G, E)$. Ist nämlich p eine stetige Halbnorm auf E , so gibt es ein $\alpha \in A$, so daß $p(x) \leq C(p) \|\pi_\alpha(x)\|_{E_\alpha}$. Daher ist π_p über E_α faktorisierbar, d.h. es gibt eine stetige lineare Abbildung $\hat{\pi}_p: E_\alpha \rightarrow \hat{E}_p$ mit $\pi_p = \hat{\pi}_p \circ \pi_\alpha$. Nun gibt es ein $f_{\alpha, n(\alpha)} \in H_{n(\alpha)}(E_\alpha)$, so daß $\pi_\alpha \circ f = f_{\alpha, n(\alpha)}|_G$. Setzt man $g = \hat{\pi}_p \circ f_{\alpha, n(\alpha)}$, so ist $g \in H_{n(\alpha)}(\hat{E}_p)$ und es gilt $g|_G = \hat{\pi}_p \circ f_{\alpha, n(\alpha)}|_G = \hat{\pi}_p \circ \pi_\alpha \circ f = \pi_p \circ f$. Also ist $f = \Phi((f_\alpha)_{\alpha \in A}) \in F_H(G, E)$. Die Injektivität von Φ ergibt sich so. Gilt $\Phi((f_\alpha)_{\alpha \in A}) = \Phi((g_\alpha)_{\alpha \in A})$, so gibt es zu jedem $\alpha \in A$ ein $n(\alpha) \in \mathbb{N}$ und ein $f_{\alpha, n(\alpha)} \in H_{n(\alpha)}(E_\alpha)$ mit $r_{n(\alpha), \alpha}(f_{\alpha, n(\alpha)}) = f_\alpha$ sowie ein $g_{\alpha, n(\alpha)} \in H_{n(\alpha)}(E_\alpha)$ mit $r_{n(\alpha), \alpha}(g_{\alpha, n(\alpha)}) = g_\alpha$. Mittels der Einschränkungseigenschaft von G folgt aus $g_{\alpha, n(\alpha)}(z) = g_\alpha(z) = f_\alpha(z) = f_{\alpha, n(\alpha)}(z)$ ($z \in G$), daß $g_{\alpha, n(\alpha)} = f_{\alpha, n(\alpha)}$ für jedes $\alpha \in A$. Dann ist aber $(f_\alpha)_{\alpha \in A} = (g_\alpha)_{\alpha \in A}$. Ist $f: G \rightarrow E$ ein Element von $F_H(G, E)$, so existiert eine Familie $(f_{\alpha, n(\alpha)})_{\alpha \in A}$ mit $f_{\alpha, n(\alpha)} \in H_{n(\alpha)}(E_\alpha)$ und $\pi_\alpha \circ f = f_{\alpha, n(\alpha)}|_G$. Weil $\pi_{\alpha\beta} \circ f_{\beta, n(\beta)}|_G = \pi_{\alpha\beta} \circ \pi_\beta \circ f = \pi_\alpha \circ f = f_{\alpha, n(\alpha)}|_G$ gilt, ist $(r_{n(\alpha), \alpha}(f_{\alpha, n(\alpha)}))_{\alpha \in A} \in \text{proj } H(E_\alpha)$. Offenbar gilt $\Phi((r_{n(\alpha), \alpha}(f_{\alpha, n(\alpha)}))_{\alpha \in A}) = f$, so daß Φ bijektiv ist.

Bemerkung 2. Falls alle Mengen G_n mit G übereinstimmen, so ist der vollständige nukleare Raum H ein abzählbarer induktiver Limes von Hilberträumen, dessen Topologie feiner ist als die der punktweisen Konvergenz. Die letzte Eigenschaft folgt daraus, daß die Punktauswertungen auf jedem Raum $H_n(\mathbb{C})$ stetige lineare Funktionale sind. Daher kann man nach Grothendieck [3], S. 80, $H \hat{\otimes} E$ für jeden vollständigen lokalkonvexen Raum E beschreiben als den Raum aller Abbildungen $f: G \rightarrow E$, für welche $e' \circ f \in H$ für jedes $e' \in E'$. Aufgrund der Bemerkung 1 hat ein solches f dann aber bereits unter jeder stetigen Halbnorm ein geeignetes Wachstumsverhalten. Es gilt also: Wenn es zu jedem $e' \in E'$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $e' \circ f \in H_n(\mathbb{C})$ bzw. $e' \circ f \in A_n(\mathbb{C})$, so gibt es auch zu jeder stetigen Halbnorm p auf E ein $k \in \mathbb{N}$, so daß

$$\int_G (p(f(z))h_k(z))^2 d\lambda < \infty \quad \text{bzw.} \quad \sup \{p(f(z))g_k(z) : z \in G\} < \infty.$$

Man könnte annehmen, daß diese Tatsache auf der Nuklearität des Raumes H beruht. Das stimmt aber nur bedingt. Der folgende Satz zeigt, daß bereits sehr schwache Bedingungen an das System von Wachstumsfunktionen (das allerdings abzählbar sein muß) genügen, um das oben entdeckte Phänomen hervorzurufen. In spezieller Gestalt findet man einen ähnlichen Satz schon bei Komura [9].

Satz 5. Sei M eine Menge, E ein lokalkonvexer Raum und $g_n: M \rightarrow \mathbb{R}$ ein fallendes System von auf M definierten Funktionen $0 < g_n(m) \leq 1$. Die Abbildung $f: M \rightarrow E$ habe die Eigenschaft, daß es zu jedem $e' \in E'$ ein $k = k(e')$ und ein $C = C(e')$ gibt, so daß $\sup \{|\langle f(m), e' \rangle| g_k(m) : m \in M\}$

$\leq C$ gilt. Dann gibt es zu jeder stetigen Halbnorm p auf E ein $k_0 = k_0(p)$ und ein $C_0 = C_0(p)$, so daß $\sup \{p(f(m))g_{k_0}(m) : m \in M\} \leq C_0$.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß E ein normierter Raum ist. Induktiv werden natürliche Zahlen n_j , reelle Zahlen C_j und ε_j sowie Punkte m_j aus M und e'_j aus E' bestimmt, die gewisse Eigenschaften haben. Da der Satz trivialerweise gilt, wenn M nur aus endlich vielen Punkten besteht, können wir annehmen, daß M keine endliche Menge ist.

Sei $\varepsilon_1 = 1/2$, $n_1 = 1$ und $C_1 = 1$ gesetzt. Nimmt man an, daß die Behauptung falsch ist, so gibt es ein m_1 aus M mit $\|f(m_1)\|g_1(m_1) > C_1$. Nach Hahn-Banach existiert dann auch ein $e'_1 \in E'$ mit $\|e'_1\| \leq 1$, für welches $|\langle f(m_1), e'_1 \rangle|g_1(m_1) > C_1$ ist.

Sind e'_{k-1} , n_{k-1} , ε_{k-1} , C_{k-1} und m_{k-1} schon bestimmt, so gibt es eine natürliche Zahl $n_k > n_{k-1}$ und ein $C_k > (C_{k-1} + 1)$, so daß $\sup \{|\langle f(m), e'_{k-1} \rangle|g_{n_k}(m) : m \in M\} \leq C_k$. $0 < \varepsilon_k \leq 1/2^k$ sei so gewählt, daß $\sup \{|\langle f(m_j), e' \rangle| : \|e'\| \leq 1, 1 \leq j \leq k-1\} \leq (2^k \varepsilon_k)^{-1}$. Aufgrund der Annahme, daß die Behauptung falsch ist, gibt es ein m_k aus M , so daß $\|f(m_k)\|g_{n_k}(m_k) > 3C_k/\varepsilon_k$ und damit auch ein $e'_k \in E'$ mit $\|e'_k\| \leq 1$ und $|\langle f(m_k), e'_k \rangle|g_{n_k}(m_k) > 3C_k/\varepsilon_k$. Nach Konstruktion der ε_k existiert $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k e'_k = e'$ mit $\|e'\| \leq 1$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} |\langle f(m_j), e' \rangle|g_{n_j}(m_j) &\geq |\langle f(m_j), \varepsilon_j e'_j \rangle|g_{n_j}(m_j) \\ &- \sum_{k=1}^{j-1} |\langle f(m_j), \varepsilon_k e'_k \rangle|g_{n_j}(m_j) - \sum_{k=j+1}^{\infty} |\langle f(m_j), \varepsilon_k e'_k \rangle| \\ &> 3C_j - \sum_{k=1}^{j-1} \varepsilon_k C_{k+1} - \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} 1/2^k \right) > C_j \rightarrow \infty; \end{aligned}$$

womit wir einen Widerspruch zur Voraussetzung erhalten haben. Ist E lokalkonvex und p eine stetige Halbnorm auf E mit Kern $p = N$, so ist E/N in natürlicher Weise normiert. Wendet man die obige Überlegung auf $\pi \circ f : M \rightarrow E/N$ ($\pi : E \rightarrow E/N$) an, so folgt die Behauptung aus der Definition der Norm in E/N .

§ 3. Der Produktsatz

Falls der vollständige lokalkonvexe Raum E ein abzählbarer induktiver Limes von Banachräumen ist, kann man $H(E)$ analog wie im Fall eines Banachraumes als induktiven Limes darstellen.

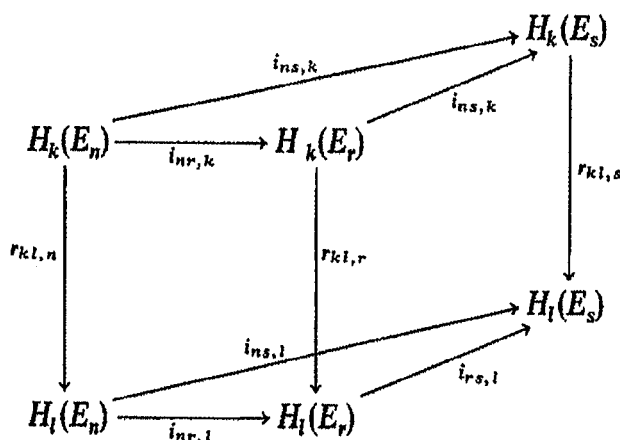
Satz 1. Ist E ein vollständiger bornologischer (DF)-Raum, dargestellt als induktiver Limes des Einbettungsspektrums $\{E_n, i_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Banachräumen, so kann man induktive Spektren $\{H_n(E_n), j_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{H(E_n), t_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}}$ definieren. Dann sind die Räume $\text{ind}_{n \rightarrow} H_n(E_n)$, $\text{ind}_{n \rightarrow} H(E_n)$, $H \hat{\otimes} E$ und $H(E)$ topologisch isomorph.

Beweis. Wir bezeichnen die Spektralabbildungen $H_n(E_k) \rightarrow H_m(E_k)$ ($n \leq m$) mit $r_{nm,k}$. Die Abbildung i_{nm} induziert eine stetige lineare Abbildung $i_{nm,k} : H_k(E_n) \rightarrow H_k(E_m)$ vermöge $i_{nm,k}(f)[z] = i_{nm}(f(z))$.

$$j_{nm} : H_n(E_n) \rightarrow H_m(E_m)$$

definieren wir durch $j_{nm} = r_{nm,m} \circ i_{nm,n}$. Dadurch wird $\{H_n(E_n), j_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}}$ zu einem induktiven Spektrum.

Wegen der Kommutativität des folgenden Diagramms ($k \leq l, n \leq r \leq s$)



gibt es stetige lineare Abbildungen $t_{nr} : H(E_n) \rightarrow H(E_r)$, die $t_{rs} \circ t_{nr} = t_{ns}$ und $t_{nr} \circ r_{k,n} = r_{k,r} \circ i_{nr,k}$ erfüllen. Dabei bezeichnet $r_{k,n} : H_k(E_n) \rightarrow \text{ind}_{j \rightarrow} H_j(E_n) = H(E_n)$. Also ist auch $\{H_n(E_n), t_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ein induktives Spektrum. Außerdem gilt

$$t_{nr} \circ r_{nn} = r_{n,r} \circ i_{nr,n} = r_{r,r} \circ r_{nr,r} \circ i_{nr,n} = r_{r,r} \circ j_{nr}.$$

Daher gibt es eine stetige lineare Abbildung

$$P : \text{ind}_{n \rightarrow} H_n(E_n) \rightarrow \text{ind}_{n \rightarrow} H(E_n) \quad \text{mit} \quad P \circ j_n = t_n \circ r_{n,n}.$$

Ähnlich kann man zeigen, daß es eine stetige lineare Abbildung $\varphi : \text{ind}_{n \rightarrow} H_n \hat{\otimes} E_n \rightarrow \text{ind}_{n \rightarrow} H_n(E_n)$ gibt. Schließlich induzieren die nach §2, Satz 3 existierenden Isomorphismen $\psi_n : H(E_n) \rightarrow H \hat{\otimes} E_n$ einen topologischen Isomorphismus $\psi : \text{ind}_{n \rightarrow} H(E_n) \rightarrow \text{ind}_{n \rightarrow} H \hat{\otimes} E_n$. Wegen §2, Satz 2, und §1,

Satz 5, sind $\text{ind}_{n \rightarrow} H \hat{\otimes} E_n$ und $\text{ind}_{n \rightarrow} H_n \hat{\otimes} E_n$ zu $H \hat{\otimes} E$ topologisch isomorph. Damit erhalten wir das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \text{ind}_{n \rightarrow} H_n \hat{\otimes} E_n & \xrightarrow{\varphi} & \text{ind}_{n \rightarrow} H_n(E_n) & \xrightarrow{P} & \text{ind}_{n \rightarrow} H(E_n) \\ & \searrow A & & \swarrow \psi & \\ & H \hat{\otimes} E & \xrightarrow{B} & \text{ind}_{n \rightarrow} H \hat{\otimes} E_n & \end{array}$$

Durch eine kleine Diagrammjagd überzeugt man sich davon, daß $P \circ \varphi = \psi^{-1} \circ B \circ A$ gilt. Daher ist φ injektiv und P surjektiv. Da P auch injektiv ist, ist φ surjektiv. Wegen $P^{-1} = \varphi \circ A^{-1} \circ B^{-1} \circ \psi$ ist P ein topologischer Isomorphismus, ebenso φ .

Bemerkung. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 gilt $\text{ind}_{n \rightarrow} A_n(E_n) \cong \text{ind}_{n \rightarrow} H_n(E_n)$ und $\text{ind}_{n \rightarrow} A_n \hat{\otimes} E_n \cong \text{ind}_{n \rightarrow} H_n \hat{\otimes} E_n$.

Beweis. Die definierenden Spektren sind nämlich äquivalent, wie sich im folgenden ergibt. Nach § 2, Satz 1, gibt es zu jedem l ein $k(l) \leq l$ mit $\lim_{l \rightarrow \infty} k(l) = \infty$, so daß die Restriktionsabbildung $\hat{r}_{k(l)l} : H_{k(l)}(E_{k(l)}) \rightarrow A_l(E_{k(l)})$ definiert und stetig ist. Bezeichnen wir mit $\tilde{i}_{nm,l} : A_l(E_n) \rightarrow A_l(E_m)$ die durch $\tilde{i}_{nm,l}(f)[z] = i_{nm}(f(z))$ definierte Abbildung, so ist $\tilde{i}_{k(l)l,l} \circ \hat{r}_{k(l)l} = s_{k(l)l}$ eine Abbildung von $H_{k(l)}(E_{k(l)})$ in $A_l(E_l)$. Entsprechend gibt es zu jedem l ein $m(l) \leq l$ und eine stetige lineare Abbildung $\hat{q}_{m(l)l} : A_{m(l)}(E_{m(l)}) \rightarrow H_l(E_{m(l)})$. $\sigma_{m(l)l} = \tilde{i}_{m(l)l,l} \circ \hat{q}_{m(l)l}$ ist dann eine stetige lineare Abbildung von $A_{m(l)}(E_{m(l)})$ in $H_l(E_l)$. Da die Abbildungen $\sigma_{m(l)l}$ und $s_{k(l)l}$ mit den entsprechenden Spektralabbildungen geeignet vertauschen, folgt die Äquivalenz der Spektren. Im anderen Fall schließt man analog.

Lemma 1. Seien für $i = 1, 2$ $G_n^{(i)}$ offene Teilmengen des $\mathbb{C}^{N_i}$ und $g_n^{(i)}, h_n^{(i)}$ stetige positive Funktionen ohne Nullstellen auf $G_n^{(i)}$. Außerdem seien für $i = 1, 2$ die Voraussetzungen von Satz 1 in § 2 erfüllt. Die Räume $H(G_n^{(i)}, h_n^{(i)}, E)$ bezeichnen wir mit $H_n(i, E)$, ebenso den induktiven Limes $\text{ind}_{n \rightarrow} H_n(i, E)$ mit $H(i, E)$. Die offenen Teilmengen $G_n = G_n^{(1)} \times G_n^{(2)}$ des $\mathbb{C}^{N_1 + N_2}$ und die Funktionensysteme $g_n = g_n^{(1)} \otimes g_n^{(2)}$ sowie $h_n = h_n^{(1)} \otimes h_n^{(2)}$ erfüllen dann die Voraussetzungen von § 1, Satz 1, und es gibt eine stetige lineare Abbildung $J : H(1, \mathbb{C}) \hat{\otimes} H(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{ind}_{n \rightarrow} H(G_n, h_n)$ mit $J(r_{n,1}(f) \otimes r_{n,2}(g)) = r_n(h)$, wobei $h(z_1, z_2) = f(z_1) \cdot g(z_2)$.

Beweis. Es gilt $g_{n+1} \leq \max(c_n^{(1)}, c_n^{(2)}) \cdot g_n$ und $h_{n+1} \leq \max(d_n^{(1)}, d_n^{(2)}) \cdot h_n$. Ferner ist für $m(n) = \min(m_1(n), m_2(n))$

$$\int_{G_n} \left(\frac{h_n^{(1)} \otimes h_n^{(2)}}{g_n^{(1)} \otimes g_n^{(2)}} \right)^2 d(\lambda_{N_1} \times \lambda_{N_2}) = \int_{G_n^{(1)}} \left(\frac{h_n^{(1)}}{g_n^{(1)}} \right)^2 d\lambda_{N_1} \cdot \int_{G_n^{(2)}} \left(\frac{h_n^{(2)}}{g_n^{(2)}} \right)^2 d\lambda_{N_2} < \infty,$$

da für ein geeignetes $C > 0$ $C \cdot g_{m(n)}^{(i)} \geq g_{\max(m_1(n), m_2(n))}^{(i)}$. Aus dem gleichen Grund ist mit $k(n) = \min(k_1(n), k_2(n))$ auch die Bedingung (2) aus § 2, Satz 1, erfüllt.

Da $H(2, \mathbb{C})$ ein vollständiger bornologischer (DF)-Raum ist, der durch das Einbettungsspektrum $\{H_n(2, \mathbb{C}), r_{nm}, 2\}_{n \in \mathbb{N}}$ dargestellt wird, folgt aus Satz 1, daß $H(1, \mathbb{C}) \hat{\otimes} H(2, \mathbb{C})$ vermöge $\varphi \circ A^{-1}$ zu $\text{ind}_{n \rightarrow} H_n(1, H_n(2, \mathbb{C}))$ topologisch isomorph ist. Wir zeigen nun, daß es eine stetige injektive lineare Abbildung $\varepsilon : \text{ind}_{n \rightarrow} H_n(1, H_n(2, \mathbb{C})) \rightarrow \text{ind}_{n \rightarrow} H(G_n, h_n)$ gibt. Dazu definieren wir zunächst $\varepsilon_n : H_n(1, H_n(2, \mathbb{C})) \rightarrow H(G_n, h_n)$ durch $\varepsilon_n(f)(z_1, z_2) = f(z_1)[z_2] \cdot \varepsilon_n(f)$ ist eine auf G_n holomorphe Funktion, da für festes $z_1 \in G_n^{(1)}$ $f(z_1)$ Element von $H_n(2, \mathbb{C})$ und damit in z_2 holomorph ist. Für festes $z_2 \in G_n^{(2)}$ ist δ_{z_2} ein stetiges lineares Funktional auf $H_n(2, \mathbb{C})$, so daß die Abbildung $z_1 \rightarrow \langle f(z_1), \delta_{z_2} \rangle = \varepsilon_n(f)(z_1, z_2)$ bezüglich z_1 holomorph ist.

Wegen

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_n(f)\|_{H(G_n, h_n)} &= \left(\int_{G_n} (|\varepsilon_n(f)(z_1, z_2)| h_n(z_1, z_2))^2 d(\lambda_{N_1} \times \lambda_{N_2}) \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{G_n^{(1)}} \left[\int_{G_n^{(2)}} (|f(z_1)[z_2]| h_n^{(2)}(z_2))^2 d\lambda_{N_2} \right]^{1/2} h_n^{(1)}(z_1)^2 d\lambda_{N_1} \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{G_n^{(1)}} (\|f(z_1)\|_{H_n(2, \mathbb{C})} h_n^{(1)}(z_1))^2 d\lambda_{N_1} \right)^{1/2} = \|f\|_{H_n(1, H_n(2, \mathbb{C}))} \end{aligned}$$

ist ε_n eine Isometrie und daher injektiv. Bezeichnen wir wie im Beweis von Satz 1 mit j_{nm} die Spektralabbildung $j_{nm} : H_n(1, H_n(2, \mathbb{C})) \rightarrow H_m(1, H_m(2, \mathbb{C}))$, so gilt offenbar $r_{nm} \circ \varepsilon_n = \varepsilon_m \circ j_{nm}$. Daher gibt es eine stetige lineare Abbildung $\varepsilon : \text{ind}_{n \rightarrow} H_n(1, H_n(2, \mathbb{C})) \rightarrow \text{ind}_{n \rightarrow} H(G_n, h_n)$ mit $\varepsilon \circ j_n = r_n \circ \varepsilon_n$. Da sowohl r_n als auch ε_n injektiv sind, ist ε injektiv. Setzen wir $J = \varepsilon \circ \varphi \circ A^{-1}$, so leistet J das Gewünschte.

Lemma 2. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 1 gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine stetige lineare injektive Abbildung $i_n : A(G_n, g_n) \rightarrow A_n(1, A_n(2, \mathbb{C}))$.*

Beweis. Wir definieren für $f \in A(G_n, g_n)$ $i_n(f)[z_1] : z_2 \rightarrow f(z_1, z_2)$. Wegen

$$\begin{aligned} \|i_n(f)[z_1]\|_{A_n(2, \mathbb{C})} &= \sup_{z_2 \in G_n^{(2)}} |i_n(f)[z_1](z_2)| g_n^{(2)}(z_2) \\ &= \sup_{z_2 \in G_n^{(2)}} |f(z_1, z_2)| g_n(z_1, z_2) \cdot (g_n^{(1)}(z_1))^{-1} \\ &\leq (g_n^{(1)}(z_1))^{-1} \sup_{(z_1, z_2) \in G_n} |f(z_1, z_2)| \cdot g_n(z_1, z_2) \\ &= (g_n^{(1)}(z_1))^{-1} \|f\|_{A(G_n, g_n)} \end{aligned}$$

ist $i_n(f)[z_1] \in A_n(2, \mathbb{C})$ und $i_n(f)$ damit eine Abbildung von $G_n^{(1)}$ in $A_n(2, \mathbb{C})$. Wir zeigen nun, daß $i_n(f)$ auf $G_n^{(1)}$ holomorph ist. Dabei beachten

wir, daß für jede Koordinate z_k , die in $G_n^{(1)}$ variiert, die durch

$$g[w](z_2) = \frac{\partial f}{\partial z_k}(w, z_2)$$

auf $G_n^{(1)}$ definierte Abbildung Werte in $A_n(2, \mathbb{C})$ hat. Dies ergibt sich durch Betrachtung der Cauchyschen Integralformel für die differenzierte Funktion ähnlich wie bei der folgenden Abschätzung. Sei $w \in G_n^{(1)}$ und $r > 0$ so gewählt, daß $\prod_{j=1}^{N_1} K(w_j, r) \subset G_n^{(1)}$. Ist $h = (0, \dots, h_k, \dots, 0)$, so folgt für

$$\begin{aligned} |h_k| &\leq \frac{r}{2} \\ g_n^{(2)}(z_2) &\left| \frac{1}{h_k} (f(w+h, z_2) - f(w, z_2)) - \frac{\partial f}{\partial z_k}(w, z_2) \right| \\ &= g_n^{(2)}(z_2) \left| \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial K(w_k, r)} f(w_1, \dots, \zeta_k, \dots, w_{N_1}, z_2) \right. \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{(\zeta_k - w_k - h_k)(\zeta_k - w_k)} - \frac{1}{(\zeta_k - w_k)^2} \right] d\zeta_k \left. \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\partial K(w_k, r)} \frac{g_n^{(2)}(z_2) |f(w_1, \dots, \zeta_k, \dots, w_{N_1}, z_2)|}{|\zeta_k - w_k|^2 |\zeta_k - w_k - h_k|} |h_k| \cdot |d\zeta_k| \\ &\leq \|f\|_{A(G_n, g_n)} \cdot r^3 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\partial K(w_k, r)} (g_n^{(1)}(w_1, \dots, \zeta_k, \dots, w_{N_1}))^{-1} |d\zeta_k| \cdot |h_k|. \end{aligned}$$

Da die rechte Seite der Ungleichung von z_2 unabhängig gegen Null konvergiert für $|h_k| \rightarrow 0$, konvergiert $h_k^{-1}(i_n(f)[w+h] - i_n(f)[w])$ gegen $g(w)$ für $|h_k| \rightarrow 0$. Somit ist $i_n(f)$ holomorph auf $G_n^{(1)}$. Wegen

$$\|i_n(f)\|_{A_n(1, A_n(2, \mathbb{C}))} = \sup_{z_1 \in G_n^{(1)}} g_n^{(1)}(z_1) \|i_n(f)[z_1]\|_{A_n(2, \mathbb{C})} \leq \|f\|_{A(G_n, g_n)}$$

ist i_n stetig. Die Injektivität von i_n ist trivial.

Satz 2. Die in Lemma 1 definierte Abbildung $J: H(1, \mathbb{C}) \hat{\otimes} H(2, \mathbb{C}) \rightarrow \varinjlim_{n \rightarrow \infty} H(G_n, h_n)$ ist ein topologischer Isomorphismus.

Beweis. Da es nach §2, Satz 1, zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $l(n) \geq n$ gibt, so daß die Einschränkungsabbildung $\hat{q}_{nl(n)}: A_n(E) \rightarrow H_{l(n)}(E)$ definiert und stetig ist, induziert die in Lemma 2 definierte Abbildung i_n eine stetige lineare Abbildung $\tilde{i}_n: A(G_n, g_n) \rightarrow H_{l(n)}(1, H_{l(n)}(2, \mathbb{C}))$. Dann gibt es aber auch zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $s(n) \geq n$ und eine Abbildung

$$I_n: H(G_n, h_n) \rightarrow H_{s(n)}(1, H_{s(n)}(2, \mathbb{C})),$$

die außerdem das folgende Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{array}{ccc}
 H(G_n, h_n) & \xrightarrow{I_n} & H_{s(n)}(1, H_{s(n)}(2, \mathbb{C})) \\
 \downarrow r_{ns(n)} & & \swarrow \varepsilon_s(n) \\
 H(G_{s(n)}, h_{s(n)}) & &
 \end{array}$$

Da I_n und ε_n mit den entsprechenden Spektralabbildungen geeignet vertauschen, folgt, daß die durch die Abbildungen ε_n induzierte Abbildung $\varepsilon: \operatorname{ind}_{n \rightarrow} H_n(1, H_n(2, \mathbb{C})) \rightarrow \operatorname{ind}_{n \rightarrow} H(G_n, h_n)$ ein topologischer Isomorphismus ist. Dann ist aber auch die in Lemma 1 definierte Abbildung $J = \varepsilon \circ \varphi \circ A^{-1}$ ein topologischer Isomorphismus.

Satz 3. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 1 sind für jeden vollständigen lokalkonvexen Raum E die Räume $H(1, H(2, E))$ und $H(1 + 2, E)$ topologisch isomorph.*

Beweis. Nach § 2, Satz 4 und Satz 2, sind beide Räume topologisch isomorph zu $H(1) \hat{\otimes} H(2) \hat{\otimes} E$.

§ 4. Beispiele und Anwendungen

Aufgrund des Produktsatzes können wir uns bei den Beispielen jeweils auf den eindimensionalen Fall beschränken. In N Variablen sind die N -fachen Tensorprodukte der angeführten Funktionen als Gewichtsfunktionen zu wählen.

1) Der Raum der auf $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ langsam wachsenden holomorphen Funktionen. Dieser Raum spielt bei der Darstellung temperierter Distributionen durch analytische Funktionen eine wichtige Rolle (vgl. Tillmann [20], Martineau [11], Schmidt [15], Meise [13]).

Wir wählen für jedes $n \in \mathbb{N}$ $G_n = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und

$$g_n(z) = h_n(z) = \begin{cases} (1 + |z|^2)^{-n} \cdot |\operatorname{Im}(z)|^n & \text{für } |\operatorname{Im}(z)| \leq 1 \\ (1 + |z|^2)^{-n} & \text{für } |\operatorname{Im}(z)| > 1. \end{cases}$$

2) Der Raum der Fourier-Laplace-Transformierten von Distributionen mit kompaktem (fastkompaktem) Träger (vgl. Yosida [25], Komura [9], Meise [13]). Dabei ist $G_n = \mathbb{C}$ und $g_n(z) = h_n(z) = (1 + |z|)^{-n} e^{-n|\operatorname{Im}(z)|}$.

3) Der Raum der auf $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ lokal langsam wachsenden holomorphen Funktionen. Dieser Raum spielt ebenfalls eine wichtige Rolle bei der Darstellung von Distributionen durch holomorphe Funktionen (vgl. Tillmann [20], Vogt [23], Konder [10], Itano [5], Martineau [11]).

Für jedes $l \in \mathbb{N}$ wählen wir

$$G_n^{(l)} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(z)| < l + \frac{1}{n}, 0 < |\operatorname{Im}(z)| < l + \frac{1}{n} \right\}$$

und

$$g_n^{(l)}(z) = h_n^{(l)}(z) = \begin{cases} |\operatorname{Im}(z)|^n & \text{für } |\operatorname{Im}(z)| \leq 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Räume $\operatorname{ind}_{n \rightarrow} H(G_n^{(l)}, h_n^{(l)})$ bilden vermöge Einschränkung ein projektives Spektrum, von dem man leicht zeigen kann, daß es reduziert ist. Der Raum der auf $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ lokal langsam wachsenden holomorphen Funktionen ist $\operatorname{proj}_{\leftarrow l} \operatorname{ind}_{n \rightarrow} H(G_n^{(l)}, h_n^{(l)})$. Ist E ein vollständiger lokalkonvexer Raum, dargestellt als projektiver Limes des projektiven Spektrums $\{E_\alpha, \pi_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in A}$ von Banachräumen E_α , so kann man zeigen, daß

$$\left(\operatorname{proj}_{\leftarrow l} \operatorname{ind}_{n \rightarrow} H(G_n^{(l)}, h_n^{(l)}) \right) \hat{\otimes} E = \operatorname{proj}_{\leftarrow l} \operatorname{proj}_{\leftarrow \alpha} \operatorname{ind}_{n \rightarrow} H(G_n^{(l)}, h_n^{(l)}, E_\alpha).$$

4) Der durch das folgende System (G_n, g_n, h_n) definierte Raum holomorpher Funktionen spielt ebenfalls eine Rolle bei der Darstellung von temperierten Distributionen durch holomorphe Funktionen. Wir wählen $G_n = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$g_n(z) = h_n(z) = \begin{cases} (1 + |z|)^{-n} e^{-n|\operatorname{Im}(z)|} \cdot |\operatorname{Im}(z)|^n & \text{für } |\operatorname{Im}(z)| \leq 1 \\ (1 + |z|)^{-n} e^{-n|\operatorname{Im}(z)|} & \text{für } |\operatorname{Im}(z)| > 1. \end{cases}$$

5) Wir beweisen den folgenden Satz:

Satz. Ist E ein vollständiger bornologischer (DF)-Raum und $f : \mathbb{C}^N \rightarrow E$ eine ganze Funktion, die unter jeder stetigen Linearform wächst wie ein Polynom, so hat f die Gestalt $f(z) = \sum_{|k| \leq m} a_k z^k$, d.h. f ist ein Polynom mit Koeffizienten in E .

Beweis. Wählen wir $G_n = \mathbb{C}^N, g_n(z) = h_n(z) = \prod_{j=1}^N (1 + |z_j|)^{-n}$, so sind die Bedingungen von § 2, Satz 1, erfüllt. Aus § 2, Bemerkung 2, folgt, daß $f \in H(E)$. Nach § 3, Satz 1, ist f sogar aus $H_n(E_n)$, wobei $E = \operatorname{ind}_{n \rightarrow} E_n, E_n$ Banachräume. Dann ist f aber auch aus $A_m(E_m)$ für ein geeignetes m , d.h. es gilt $\|f(z)\|_{E_m} \leq C g_n^{-1}(z)$. Damit folgt die Behauptung aus der Cauchyschen Abschätzungsformel.

Literatur

1. Floret, K., Wloka, J.: Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume. Lecture Notes, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968.
2. Gramsch, B., Vogt, D.: Holomorphe Funktionen mit Werten in nicht lokalkonvexen Vektorräumen. J. reine angew. Math. **243**, 159—170 (1970).

3. Grothendieck, A.: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. *Mem. Am. Math. Soc.* **16** (1955).
4. Horváth, J.: Topological vector spaces and distributions I. Reading Mass.: Addison Wesley 1965.
5. Itano, M.: On the distributional boundary values of vector-valued holomorphic functions. *J. Sci. Hiroshima Ser. A* **32**, 397—440 (1968).
6. Köthe, G.: Topologische lineare Räume I. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.
7. Köthe, G.: Dualität in der Funktionentheorie. *J. reine angew. Math.* **191**, 30—49 (1953).
8. Köthe, G.: Die Randverteilungen analytischer Funktionen. *Math. Z.* **57**, 13—33 (1952).
9. Komura, T.: Semigroups of operators in locally convex spaces. *J. Functional Analysis* **2**, 258—296 (1968).
10. Konder, P.: Funktionentheoretische Charakterisierung der Topologie in Distributionenräumen. Diss. Mainz 1970.
11. Martineau, A.: Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes. In: *Theory of Distributions*. Lisbon 1964.
12. Meise, R.: Darstellung von Distributionen durch holomorphe Funktionen. Diplomarbeit Mainz 1968.
13. Meise, R.: Räume holomorpher Funktionen mit Wachstumsbedingungen und vektorwertige Distributionen. Diss. Mainz 1970.
14. Meschkowski, H.: Hilbertsche Räume mit Kernfunktion. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1962.
15. Schmidt, E.: Funktionentheoretische Charakterisierung der Topologie im Raum der gemäßigten Distributionen. Diss. Mainz 1969.
16. Schwartz, L.: *Théorie des distributions*. Paris: Hermann 1966.
17. Schwartz, L.: *Théorie des distributions à valeurs vectorielles* I, II. *Ann. Inst. Fourier* **7**, 1—142 (1957); **8**, 1—210 (1958).
18. Tillmann, H. G.: Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen. *Math. Z.* **59**, 61—83 (1953).
19. Tillmann, H. G.: Distributionen als Randverteilungen analytischer Funktionen. *Math. Z.* **76**, 5—21 (1961).
20. Tillmann, H. G.: Darstellung der Schwartzschen Distributionen durch analytische Funktionen. *Math. Z.* **77**, 106—124 (1961).
21. Tillmann, H. G.: Darstellung vektorwertiger Distributionen durch holomorphe Funktionen. *Math. Annalen* **151**, 286—295 (1963).
22. Trèves, F.: Topological vector spaces, distributions and kernels. New York: Academic Press 1967.
23. Vogt, D.: Randverteilungen holomorpher Funktionen und die Topologie von $\mathcal{D}'$. *Math. Ann.* **196**, 281—292 (1972).
24. Wloka, J.: Reproduzierende Kerne und nukleare Räume I. *Math. Annalen* **163**, 167—188 (1966).
25. Yosida, K.: *Functional analysis*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.

Reinhold Meise
 Institut für Angewandte Mathematik
 der Universität
 D-6500 Mainz, Saarstr. 21
 Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 3. September 1971)