Math. Ann. 198, 147—159 (1972)

Darstellung temperierter vektorwertiger Distributionen durch holomorphe Funktionen I

REINHOLD MEISE

Die Distributionen wurden von Schwartz [11] als Dualräume gewisser Räume von beliebig oft differenzierbaren Funktionen eingeführt. Für die theoretische Physik erwiesen sich die temperierten Distributionen, d. h. die Elemente von $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ als wichtig. Dabei ist $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ der Raum aller beliebig oft differenzierbaren komplexwertigen Funktionen φ auf dem $\mathbb{R}^N$, für die

$$\sup_{|\alpha|\leqq n}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left(\prod_{j=1}^{N}(1+x_j^2)^m\right)|D^\alpha\varphi(x)|=\|\varphi\|_{n,m}$$

existiert für alle n und m, versehen mit der durch die Normen $\|\cdot\|_{n,m}$ erzeugten lokalkonvexen Topologie.

Tillmann gab 1961 in [15] einen Raum $H(N,\mathbb{C})$ von in $(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^N$ langsam wachsenden holomorphen Funktionen und eine lineare Abbildung $R: H(N,\mathbb{C})\to\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ an, welche surjektiv ist. Im Falle $N=1$ hat R die Gestalt

$$R(f)[\varphi]=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}}\{f(x+i\varepsilon)-f(x-i\varepsilon)\}\varphi(x)\,dx,\quad \varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}),\quad f\in H(1,\mathbb{C}).$$

Die Darstellungsabbildung R hat einen nicht-trivialen Kern, welcher für $N=1$ aus denjenigen Funktionen besteht, die Einschränkung von Polynomen auf $(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ sind. Eine Frage, die Tillmanns Arbeit offen ließ, war die, ob man den Raum $H(N,\mathbb{C})$ so topologisieren kann, daß die Abbildung R stetig und offen ist, d. h. daß $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)\cong H(N,\mathbb{C})/\mathrm{Kern}\,R$ gilt. Dieses Problem wurde von Schmidt [10] für den Fall $N=1$ gelöst.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Topologie auf $H(N,\mathbb{C})$ angegeben, welche das Gewünschte leistet. Wie sich aus Meise [9] ergibt, ist $H(N,\mathbb{C})$ unter der Topologie $\mathscr{T}$ sogar ein nuklearer vollständiger bornologischer (DF)-Raum. Die Charakterisierung aller derjenigen temperierten Distributionen mit Werten in einem quasivollständigen Raum F, welche endliche Ableitung einer langsam wachsenden stetigen F-wertigen Funktion sind, erlaubt es, Tillmanns Ergebnisse auf gewisse Vektorräume auszudehnen. Es wird gezeigt, daß es zu jedem vollständigen bornologischen (DF)-Raum E einen Raum $H(N,E)$ von auf $(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^N$ langsam wachsenden E-wertigen holomorphen Funktionen und eine stetige lineare Abbildung $R: H(N, E) \to \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E)$ gibt, welche surjektiv und offen ist. Man kann also jede temperierte Distribution mit Werten in E durch eine holomorphe E-wertige Funktion darstellen und die starke Topologie τ_b auf $\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E)$ funktionentheoretisch charakterisieren. Dies Ergebnis ist insofern interessant, als ein Beispiel von D. Vogt zeigt, daß im allgemeinen nicht jede E-wertige Distribution durch eine holomorphe Funktion dargestellt werden kann (vgl. auch Itano [6]).

In Meise [9] wurde gezeigt, daß der Raum $H(N, E)$ zu $H(N, \mathbb{C}) \hat{\otimes} E$ topologisch isomorph ist. Dieses Resultat ist grundlegend für die Bestimmung von Kern R, da es die Anwendung eines Induktionsschlusses erlaubt. Auch für den skalaren Fall ergeben sich neue Gesichtspunkte. So ist $H(p+q, \mathbb{C})$ topologisch isomorph zu $H(p, \mathbb{C}) \hat{\otimes} H(q, \mathbb{C})$, und bei entsprechender Identifizierung stimmt R_{p+q} mit $R_p \hat{\otimes} R_q$ überein.

Abschließend sei noch bemerkt, daß man jede temperierte Distribution mit Werten in einem vollständigen lokalkonvexen Raum E durch verallgemeinerte Randwerte einer in $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^N$ holomorphen E-wertigen Funktion darstellen kann. Der Beweis soll in einer späteren Note erbracht werden.

Herrn Professor Dr. H. G. Tillmann und Herrn Professor Dr. B. Gramsch möchte ich für viele Anregungen und Hinweise herzlich danken.

Vorbemerkung. Alle auftretenden Vektorräume sind lineare Räume über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Für jedes Paar E, F lokalkonvexer Räume soll der Raum $\mathscr{L}(E, F)$ aller stetigen linearen Abbildungen von E in F stets mit der starken Topologie, d. h. der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den beschränkten Mengen von E, versehen sein.

Lemma 1. *Sei E ein folgenvollständiger lokalkonvexer Raum. Die stetige Abbildung $g: \mathbb{R}^N \to E$ habe die Eigenschaft, daß für jede stetige Halbnorm q auf E $\sup_{x \in \mathbb{R}^N} q(g(x)) < \infty$. Dann wird für jedes $n \geqq 0$ und jedes $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N)$ $(\beta_j \geqq 0)$ durch*

$$T[\varphi] = (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\prod_{j=1}^{N} (1 + x_j^2)^n \right) g(x)\, D^\beta \varphi(x)\, d\lambda(x) \tag{1}$$

eine temperierte E-wertige Distribution definiert. Dabei bezeichnet λ das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^N$.

Beweis. Der Beweis erfolgt für Banachräume wie im skalaren Fall. Im allgemeinen Fall betrachtet man die vollständige Hülle der Räume $E/\text{Kern } q$.

Satz 1. *Ist E ein quasivollständiger lokalkonvexer Raum, so kann eine temperierte E-wertige Distribution T genau dann in der Form (1) dargestellt werden, wenn T eine beschränkte Abbildung ist, d. h. wenn es eine Nullumgebung U in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ gibt, so daß $T(U)$ in E beschränkt ist.*

Beweis. a) Ist T beschränkt, so gibt es eine absolutkonvexe abgeschlossene beschränkte Menge B in E, so daß $T(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)) \subset F_B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nB$. Versieht man F_B mit der durch B induzierten Norm, so ist F_B ein Banachraum und T induziert eine stetige lineare Abbildung $\hat{T}: \mathscr{S}(\mathbb{R}^N) \to F_B$. Wegen der Nuklearität von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ ist $\hat{T}$ eine nukleare Abbildung, d. h. es gibt eine gleichstetige Menge $\{y_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$, eine Familie $\{f_i : i \in \mathbb{N}\} \subset B$ und eine Folge $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l^1$, so daß $\hat{T}(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i y_i(\varphi) f_i$. Nach Friedman [2], S. 41, Theorem 13 gibt es dann stetige, gleichgradig beschränkte Funktionen $g_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, sowie ein $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ und ein $m \in \mathbb{N}_0$, so daß $y_i = D^\beta \left(\left(\prod_{j=1}^{N} (1 + x_j^2)^m \right) g_i(x) \right)$. Ist q eine stetige Halbnorm auf E, so ist $\sup_{f \in B} q(f) \leqq K_q$ mit einem geeigneten $K_q > 0$. Bezeichnen wir $\sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \mathbb{R}} |g_i(x)|$ mit M, so gilt

$$\begin{aligned} q\left(\sum_{i=n}^{m} \lambda_i g_i(x) f_i \right) &\leqq \sum_{i=n}^{m} |\lambda_i| \, q(g_i(x) f_i) \leqq \sum_{i=n}^{m} |\lambda_i| \, |g_i(x)| \, q(f_i) \\ &\leqq M \cdot K_q \cdot \sum_{i=n}^{m} |\lambda_i| . \end{aligned}$$

Daher ist $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i g_i(x) f_i$ eine stetige, unter jeder stetigen Halbnorm auf E beschränkte E-wertige Funktion. Ist $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, so gilt

$$\begin{aligned} & q\Bigg[(-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\prod_{j=1}^{N} (1 + x_j^2)^m \right) g(x) \, D^\beta \varphi(x) \, d\lambda(x) \\ & \qquad - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\prod_{j=1}^{N} (1 + x_j^2)^m \right) g_i(x) \, D^\beta \varphi(x) \, d\lambda(x) \Bigg] \\ & \leqq M \cdot K_q \sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_i| \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \left(\prod_{j=1}^{N} (1 + x_j^2)^m \right) |D^\beta \varphi(x)| \, d\lambda(x) \\ & \leqq M \cdot K_q \cdot A \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_i| . \end{aligned}$$

Also hat T eine Darstellung der Form (1).

b) Wenn T eine Darstellung der Form (1) erlaubt, so ist $g(\mathbb{R}^N) = B \subset E$ eine beschränkte Menge. Für jedes $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ mit $\|\varphi\|_{|\beta|, m+1} \leqq \frac{1}{\pi^N}$ ist $T[\varphi] \in \overline{\Gamma B}$, wie man durch Abschätzen des Integrals (1) sofort sieht. Also ist T eine beschränkte Abbildung.

Bemerkung 1. Ist E ein quasivollständiger bornologischer (DF)-Raum (ein solcher ist nach Köthe [5] S. 405, § 29,5. (3) a) stets vollständig), so ist jede stetige lineare Abbildung $T: \mathscr{S}(\mathbb{R}^N) \to E$ beschränkt. Dies beruht darauf, daß man E als abzählbaren induktiven Limes eines Einbettungsspektrums von Banachräumen E_n darstellen kann, wobei jede beschränkte Menge in einem geeigneten Raum E_n enthalten ist, und daß nach Grothendieck [3], S. 16, Theorem A $\mathscr{L}(\mathscr{S}, E)$ zu $\underset{n \to}{\operatorname{ind}}\, \mathscr{L}(\mathscr{S}, E_n)$ isomorph ist.

2. Die Fouriertransformation $\mathscr{F}$, die identische Abbildung $\mathrm{id}_{\mathscr{S}}$ und die Ableitungen $D^\beta: \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ sind Beispiele für temperierte Vektordistributionen, die keine beschränkten Abbildungen sind. Sie lassen sich also nicht in der Form (1) darstellen.

Die Räume $H(N, E)$

Wir betrachten auf $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^N$ das folgende System $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Gewichtsfunktionen. Dabei ist $g_n(z)$ für $N = 1$ definiert durch

$$g_n(z) = \begin{cases} (1 + |z|^2)^{-n} |\mathrm{Im}(z)|^n & \text{für} \quad |\mathrm{Im}(z)| \leqq 1 \\ (1 + |z|^2)^{-n} & \text{für} \quad |\mathrm{Im}(z)| > 1 \end{cases}$$

und für $N > 1$ durch $g_n(z_1, \ldots, z_N) = \prod_{j=1}^{N} g_n(z_j)$. Mittels der Gewichtsfunktionen g_n kann man für jeden Banachraum E und jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Banachraum $A_n(N, E)$ von holomorphen Funktionen definieren, indem man

$$A_n(N, E) = \Big\{ f : f : (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^N \to E, f \text{ holomorph und } \sup_{z \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^N} \|f(z)\|_E \, g_n(z) < \infty \Big\} \text{ und}$$

$$\|f\|_n = \sup_{z \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^N} \|f(z)\|_E \, g_n(z) \text{ setzt.}$$

Bezeichnet man mit $r_{nm}: A_n(N, E) \to A_m(N, E)$ die natürlichen Inklusionen, so erhält man ein induktives Spektrum, dessen Limes wir mit $H(N, E)$ bezeichnen. In Meise [9], § 2, Satz 3 und der anschließenden Folgerung wurde gezeigt, daß $H(N, \mathbb{C})$ ein nuklearer vollständiger bornologischer (DF)-Raum ist, und daß $H(N, E)$ topologisch isomorph zu $H(N, \mathbb{C}) \hat{\otimes} E$ ist.

Ist der vollständige bornologische (DF)-Raum E als induktiver Limes eines abzählbaren induktiven Einbettungsspektrums $\{E_n, i_{nm}\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Banachräumen E dargestellt, so gibt es natürliche Abbildungen $r_{nm}: A_n(N, E_n) \to A_m(N, E_m) (r_{nm}(f)[z] = i_{nm}(f(z)))$, so daß $\{A_n(N, E_n), r_{nm}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein induktives Spektrum ist. Bezeichnen wir $\operatorname{ind}_{n\to} A_n(N, E_n)$ auch mit $H(N, E)$, so gilt nach Meise [9] § 3, daß $H(N, E)$ isomorph zu $H(N, \mathbb{C}) \hat{\otimes} E$ ist. Außerdem gelten die folgenden Isomorphismen

$$H(p, \mathbb{C}) \hat{\otimes} H(q, \mathbb{C}) \hat{\otimes} E \cong H(p+q, E) \cong H(p, H(q, E)).$$

Schließlich sei noch bemerkt, daß eine Funktion $f: (\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^N \to E$ genau dann in $H(N, E)$ liegt, wenn für jedes $e' \in E'$ $e' \circ f$ aus $H(N, \mathbb{C})$ ist.

Das folgende Lemma stellt eine Verbindung zwischen den Elementen von $H(N, E)$ und den temperierten E-wertigen Distributionen auf dem $\mathbb{R}^N$ her.

Lemma 2. *Ist E ein Banachraum und $f \in A_k(N, E)$, so wird durch*

$$R_k(f)[\varphi] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_\varepsilon[\varphi] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^N} \left(\prod_{j=1}^N \sigma_j \right) f(x + i\sigma\varepsilon) \right\} \varphi(x)\, d\lambda(x)$$

$(\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$ ein Element $R_k(f)$ aus $\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E)$ definiert. Die ε-Näherungen f_ε konvergieren in $\mathscr{L}_b(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E)$ gegen $R_k(f)$.

Beweis. Bezeichnen wir mit G_ε die Menge $\{z \in \mathbb{C} : \varepsilon \cdot \operatorname{Im}(z) > 0\}$ $(\varepsilon = \pm 1)$, so ist $G_\sigma = \prod_{j=1}^N G_{\sigma_j}$ das Produkt einfach zusammenhängender Gebiete, und es gilt $(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^N = \bigcup_{\sigma \in \{-1,1\}^N} G_\sigma$. Die Einschränkung von f auf G_σ bezeichnen wir mit f_σ. In G_σ wird durch

$$f_\sigma^{[0,\dots,-1,0,\dots,0]}(z_1, \dots, z_N) = \int_{i\sigma_j}^{z_j} f_\sigma(z_1, \dots, z_{j-1}, \zeta_j, z_{j+1}, \dots, z_N)\, d\zeta_j \tag{2}$$

eine holomorphe Funktion definiert. Iterativ kann man für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ $f_\sigma^{[-\alpha]}$ definieren. Wir schätzen nun das Wachstumsverhalten der Funktionen $f_\sigma^{[-\alpha]}$ in der Nähe des $\mathbb{R}^N$ ab. Nach Voraussetzung gilt für jedes z mit $|\operatorname{Im}(z_j)| \leqq 1$ für $1 \leqq j \leqq N$,

$$\|f(z)\|_E \leqq \|f\|_k \prod_{j=1}^N \{(1 + |z_j|^2)^k |\operatorname{Im}(z_j)|^{-k}\}.$$

Wählt man in (2) als Integrationsweg die Strecke von $i\sigma_j$ nach $x_j + i\sigma_j$ und die Strecke von $x_j + i\sigma_j$ nach $x_j + iy_j$, so ergibt sich durch Induktion die folgende Abschätzung

$$\|f_\sigma^{[-k+1,\dots,-k+1]}(z)\|_E \leqq \|f\|_k \left(\prod_{j=0}^{k-2} 2^{k+3+j} \right)^N \prod_{j=1}^N \{(1 + |z_j|^2)^{2k+1} |\operatorname{Im}(z_j)|^{-1}\}.$$

Weitere Integrationen und Abschätzungen liefern für $|\mathrm{Im}(z_j)|\leqq 1$ $(1\leqq j\leqq N)$

$$\|f_\sigma^{[-k-1,\ldots,-k-1]}(x+iy)\|_E \leqq \|f\|_k \left(\prod_{j=0}^{k} 2^{k+3+j}\right)^N \left(\prod_{j=1}^{N}(1+x_j^2)^{2k+1}(3+\gamma)^N\right), \tag{3}$$

wobei $\gamma=\sup_{t\in(0,1]}|t\cdot\ln t|$. Aus (3) folgt, daß man $f_\sigma^{[-k-1,\ldots,-k-1]}$ stetig auf $\mathbb{R}^N$ fortsetzen kann und die Randwerte $f_\sigma^{[-k-1,\ldots,-k-1]}(x+i\sigma 0)=f_{\sigma,0}(x)$ eine langsam wachsende Funktion $f_{\sigma,0}$ liefern.

Ist B eine beschränkte Menge in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, so ist $\sup_{\varphi\in B}\|\varphi\|_{m,r}=M(m,r)$ endlich für beliebige natürliche Zahlen m und r. Daher gilt für alle $\varphi\in B$

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_{\mathbb{R}^N} f_\sigma(x+i\sigma\varepsilon)\,\varphi(x)\,d\lambda(x)-D^{(k+1,\ldots,k+1)}f_{\sigma,0}[\varphi]\right\|_E\\
&\leqq \|(-1)^{N(k+1)}\int_{\mathbb{R}^N}[f_\sigma^{[-k-1,\ldots,-k-1]}(x+i\sigma\varepsilon)\\
&\qquad -f_\sigma^{[-k-1,\ldots,-k-1]}(x+i\sigma 0)]\,D^{(k+1,\ldots,k+1)}\varphi(x)\,d\lambda(x)\|_E\\
&\leqq \|f\|_k\cdot N\left(\prod_{j=0}^{k}2^{k+3+j}\right)^N(3+\gamma)^{N-1}(\varepsilon+|\varepsilon\ln\varepsilon|)\\
&\qquad\cdot|D^{(k+1,\ldots,k+1)}\varphi(x)|\left(\prod_{j=1}^{N}(1+x_j^2)^{2k+1}\right)d\lambda(x)\\
&\leqq \|f\|_k\cdot C\cdot M(k+1,2k+2)\,\pi^N(\varepsilon+|\varepsilon\ln\varepsilon|).
\end{aligned}$$

Also konvergiert f_ε in $\mathscr{L}_b(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N),E)$ gegen

$$\sum_{\sigma\in\{-1,1\}^N}\left(\prod_{j=1}^{N}\sigma_j\right)D^{(k+1,\ldots,k+1)}f_{\sigma,0}.$$

Satz 2. *Ist E ein vollständiger bornologischer (DF)-Raum, dargestellt als induktiver Limes des Einbettungsspektrums $\{E_n,i_{nm}\}$ von Banachräumen E_n, so induzieren die Abbildungen $\tilde{i}_k\circ R_k: A_k(N,E_k)\to\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N),E)$ eine stetige lineare Abbildung $R: H(N,E)\to\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N),E)$, welche surjektiv ist. Dabei ist die Abbildung $\tilde{i}_k:\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N),E_k)\to\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N),E)$ gegeben durch $\tilde{i}_k(T)[\varphi]=i_k(T[\varphi])$.*

Beweis. Wie sich aus der Abschätzung (3) in Lemma 2 ergibt, ist $R_k: A_k(N,E_k)\to\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N),E_k)$ stetig. Daher ist auch $\tilde{i}_k\circ R_k$ stetig. Wegen $\tilde{i}_m\circ R_m\circ r_{nm}=\tilde{i}_n\circ R_n$ gibt es eine stetige lineare Abbildung $R: H(N,E)\to\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N),E)$ mit $R(r_n(f))=\tilde{i}_n\circ R_n(f)$. Wir zeigen nun, daß R surjektiv ist.

Ist $T\in\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N),E)$, so gibt es ein $n\in\mathbb{N}$, ein $m\in\mathbb{N}_0$, ein $\beta\in\mathbb{N}_0^N$ und eine stetige beschränkte Funktion $g:\mathbb{R}^N\to E$, so daß

$$T=\tilde{i}_n\left(D^\beta\left(\prod_{j=1}^{N}(1+x_j^2)^m g(x)\right)\right).$$

Durch Vergrößern von m kann man erreichen, daß $\int\limits_{R^N} \|g(x)\|_{E_n} d\lambda(x) = M$ endlich ist. Außerdem kann man annehmen, daß $n \geqq \max(N|\beta|, m)$, denn es gilt

$$T = \tilde{i}_r\left(D^\beta\left(\prod_{j=1}^{N} (1+x_j^2)\, i_{nr} \circ g(x)\right)\right) \quad \text{für} \quad r \geqq n.$$

Wie man leicht sieht, ist die Funktion

$$\tilde{g}(z_1, \ldots, z_N) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^N \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\prod_{j=1}^{N} (x_j - z_j)^{-1}\right) g(x_1, \ldots, x_N)\, d\lambda(x)$$

in $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^N$ holomorph, hat Werte in E_n und genügt der Abschätzung

$$\|\tilde{g}(z_1, \ldots, z_N)\|_{E_n} \leqq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^N M \prod_{j=1}^{N} |\mathrm{Im}(z_j)|^{-1}.$$

Die partiellen Ableitungen von $\tilde{g}$ genügen der Abschätzung

$$\|D^\alpha \tilde{g}(z_1, \ldots, z_N)\|_{E_n} \leqq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^N (\alpha!)\, M \prod_{j=1}^{N} |\mathrm{Im}(z_j)|^{-1-\alpha_j}.$$

Setzen wir $f(Z) = D^\beta\left(\left(\prod_{j=1}^{N} (1+z_j^2)^m\right) \tilde{g}(z)\right)$, so ist f aufgrund der obigen Abschätzungen aus $A_l(E)$ für $l \geqq \max(N|\beta|, m)$, also auch aus $A_n(E_n)$, da $\max(N|\beta|, m) \leqq n$. Nach Lemma 2 ist $R_n(f) \in \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E)$. Wir zeigen, daß $R_n(f) = D^\beta\left(\left(\prod_{j=1}^{N} (1+x_j^2)^m\right) g(x)\right)$ gilt.

Für die ε-Näherungen von f gilt nämlich

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) &= \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^N} \left(\prod_{j=1}^{N} \sigma_j\right) f_\sigma(x + i\sigma\varepsilon) \\ &= D^\beta\left(\left(\prod_{j=1}^{N} (1+x_j^2)^m\right) g_\varepsilon(x)\right) + \varepsilon \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^N} P_\sigma(x, \varepsilon) f_\sigma(x + i\sigma\varepsilon). \end{aligned} \tag{4}$$

Dabei ist $P_\sigma(x, \varepsilon)$ ein Polynom in x und ε und

$$g_\varepsilon(x) = \left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^N \int\limits_{\mathbb{R}^N} \prod_{j=1}^{N} ((t_j - x_j)^2 + \varepsilon^2)^{-1} g(t)\, d\lambda(t).$$

Da die Funktionen g_ε für $\varepsilon \in (0, 1]$ gleichmäßig beschränkt sind und $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} g_\varepsilon(x) = g(x)$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^N$, konvergiert g_ε in $\mathscr{L}_b(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E_n)$ gegen g. Weil die Differentiation und die Multiplikation mit Polynomen stetige Endomorphismen von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ sind, konvergiert in (4) der zweite Term gegen Null, falls ε gegen Null konvergiert. Also ist

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_\varepsilon = D^\beta \left(\left(\prod_{j=1}^{N} (1+x_j^2)^m \right) g(x) \right),$$

d. h. es gilt

$$R(r_n(f)) = \tilde{i}_n \circ R_n(f) = \tilde{i}_n \left(D^\beta \left(\left(\prod_{j=1}^{N} (1+x_j^2)^m \right) g(x) \right) \right) = T.$$

Nachdem nun die temperierten Distributionen mit Werten in einem vollständigen bornologischen (DF)-Raum durch holomorphe Funktionen dargestellt sind, liegt die Frage nahe, welche Beziehung zwischen der Topologie von $H(N,E)$ und der von $\mathscr{L}_b(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E)$ besteht. Darüber gibt der folgende Satz Auskunft.

Satz 3. *Ist E ein vollständiger bornologischer (DF)-Raum, so ist die in Satz 2 definierte Abbildung R auch offen, d. h. es gilt $H(N,E)/\mathrm{Kern}\, R \cong \mathscr{L}_b(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E)$.*

Beweis. Nach einer Folgerung aus einem Graphensatz von Robertson-Robertson (Horváth [4], S. 306, Proposition 11) ist R offen.

Im folgenden soll $\mathrm{Kern}\, R$ bestimmt werden.

Lemma 3. *Ist E ein lokalkonvexer Raum und hat $T \in \mathscr{L}(\mathscr{D}(\mathbb{R}), E)$ die Eigenschaft $D^p T = 0$, so ist T ein E-wertiges Polynom vom Grad kleiner als p.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach p. Sei φ_0 ein Element von $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x)\, d\lambda(x) = 1$. Dann gibt es zu jedem $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ ein eindeutig bestimmtes $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, so daß $\chi = D\psi$ für ein geeignetes $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, und daß $\varphi = \mu\varphi_0 + \chi$. Dabei ist $\mu = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, d\lambda(x)$. Gilt nun $DT = 0$ für ein $T \in \mathscr{L}(\mathscr{D}(\mathbb{R}), E)$, so folgt

$$\begin{aligned} T[\varphi] &= \mu T[\varphi_0] + T[\chi] = \mu T[\varphi_0] + T[D\psi] = \mu T[\varphi_0] - DT[\psi] \\ &= \mu T[\varphi_0] = e \cdot \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, d\lambda(x) \quad \text{mit} \quad e = T[\varphi_0] \in E. \end{aligned}$$

Ist nun $D^p T = 0$ für ein $T \in \mathscr{L}(\mathscr{D}(\mathbb{R}), E)$, so gilt für $S = DT$ $D^{p-1} S = 0$. Nach Induktionsannahme gibt es ein Polynom $f = \sum_{j=0}^{p-2} a_j x^j (a_j \in E)$, so daß $S = T_f$. Ist g ein E-wertiges Polynom vom Grad kleiner als p mit $Dg = f$, so gilt

$$D(T - T_g) = DT - DT_g = DT - T_f = S - T_f = 0.$$

Also ist $T = T_{(g+c)}$, wobei $c \in E$.

Satz 4. *Ist E ein vollständiger bornologischer (DF)-Raum und $N=1$, so besteht* Kern R *aus allen denjenigen E-wertigen Funktionen, die Einschränkung eines E-wertigen Polynoms auf* $(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ *sind.*

Beweis. Ist $g\in \operatorname{Kern} R$, so gibt es ein $k\in\mathbb{N}$ und ein $f\in A_k(1,E_k)$ mit $g=r_k(f)$. Aus Lemma 2 folgt, daß ein $(k+1)$-faches unbestimmtes Integral von f stetige, langsam wachsende Randwerte auf $\mathbb{R}$ hat. Für diese Randwerte gilt

$$D^{(k+1)}(f^{[-k-1]}(x+i0)-f^{[-k-1]}(x-i0))=0\,,$$

so daß nach Lemma 3

$$f^{[-k-1]}(x+i0)-f^{[-k-1]}(x-i0)=\sum_{j=0}^{k} a_j x^j \quad (a_j\in E_k)\,.$$

Also kann man durch Wahl geeigneter Integrationskonstanten erreichen, daß $f^{[-k-1]}$ eine ganze Funktion ist, die wie ein Polynom wächst. Eine solche Funktion ist aber ein Polynom, wie sofort aus der Cauchyschen Abschätzungsformel folgt. Wegen $f=D^{(k+1)}f^{[-k-1]}$ ist dann auch f als Polynom auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzbar. Da jedes Polynom f mit Werten in E in $H(1,E)$ liegt und aus Stetigkeitsgründen $R(f)=0$ erfüllt, ist der Satz bewiesen.

Lemma 4. *Sei E wie in Satz 4. Ist f aus $H(p,H(1,E))$ und gilt $R_1(f(z))=0$ für alle z aus $(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^p$, so gibt es eine natürliche Zahl s und Funktionen h_k aus $H(p,E)$, so daß $f(z)[w]=\sum_{k=0}^{s} w^k h_k(z)$.*

Beweis. Nach Definition von $H(p,H(1,E))$ ist $f=r_m(g)$ mit $g\in A_m(p,A_m(1,E_m))$ für ein geeignetes m. Da für jedes $z\in(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^p$ $g(z)$ ein Element von $A_m(1,E_m)$ ist, für welches $R_{1,m}(g(z))=0$ gilt, ist $g(z)$ als Funktion von w ein Polynom mit Werten in E_m. Ein solches Polynom hat aber einen Grad, der nicht größer ist als $2m$. Also ist für jedes $z\in(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^p$ $g(z)[w]=\sum_{k=0}^{2m} w^k h_k(z)$ mit $h_k(z)\in E_m$. Entwickelt man $g(z)[w]$ um den Punkt i, so erhält man

$$g(z)[w]=\sum_{k=0}^{2m}(w-i)^k f_k(z)$$

mit

$$f_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-i|=1/2}(w-i)^{-k-1}f(z)[w]\,dw\,.$$

Da die Abbildungen $I_k: A_m(1,E_m)\to E_m$ definiert durch

$$I_k(h)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-i|=1/2}(w-i)^{-k-1}h(w)\,dw$$

linear und stetig sind, sind die Funktionen $f_k = l_k \circ f$ aus $A_m(p, E_m)$. Dann gilt aber auch $h_k \in A_m(p, E_m)$, da die h_k Linearkombinationen der f_j sind.

Lemma 5. *Seien E und F vollständige bornologische (DF)-Räume und $\pi: E \to F$ eine stetige lineare surjektive Abbildung. E sei der induktive Limes des Einbettungsspektrums $\{E_n, j_{nm}\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Banachräumen E_n. Bezeichnet man* Kern $\pi \circ j_n$ *mit K_n, so kann man $\operatorname{ind}_{n\to} E_n/K_n$ definieren, und dieser Raum ist zu F und $E/$*Kern π *topologisch isomorph. Außerdem gibt es zu jeder in F beschränkten Menge B eine in E beschränkte Menge C mit $\pi(C) \supset B$.*

Beweis. Sei $K =$ Kern π und K_n wie oben. Dann ist K_n abgeschlossen in E_n und E_n/K_n ein Banachraum. Wir bezeichnen mit h_n die Restklassenabbildung $E_n \to E_n/K_n$. Für $m \geqq n$ ist $h_m(j_{nm}(x)) = 0$ genau dann, wenn $0 = \pi \circ j_m \circ j_{nm}(x) = \pi \circ j_n(x) = h_n(x)$, d. h. $j_{nm}(x) \in K_n$ genau dann, wenn $x \in K_n$. Daher existiert eine stetige injektive lineare Abbildung $\hat{j}_{nm}: E_n/K_n \to E_m/K_m$, definiert durch $\hat{j}_{nm}(h_n(x)) = h_m(j_{nm}(x))$.

Wie man leicht sieht, definiert $\{E_n/K_n, \hat{j}_{nm}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein induktives Spektrum, für welches die Spektralabbildungen $\hat{j}_n: E_n/K_n \to \operatorname{ind}_{l\to} (E_l/K_l)$ injektiv sind.

Bezeichnen wir die kanonische Abbildung $E \to E/K$ mit h, so ist $h(j_n(x)) = 0$ genau dann, wenn $h_n(x) = 0$, so daß eine injektive stetige lineare Abbildung $\sigma_n: E_n/K_n \to E/K$ existiert, welche durch $\sigma_n(h_n(x)) = h(j_n(x))$ definiert ist. Wegen

$$\sigma_m \circ \hat{j}_{nm}(h_n(x)) = \sigma_m \circ h_m \circ j_{nm}(x) = h \circ j_m \circ j_{nm}(x) = h(j_n(x)) = \sigma_n(h_n(x))$$

induzieren die σ_n eine stetige lineare Abbildung $\sigma: \operatorname{ind}_{n\to} (E_n/K_n) \to E/K$. Wegen der Injektivität von σ_n und $\sigma \circ \hat{j}_n = \sigma_n$ ist σ injektiv. Die Surjektivität von σ ist klar. Da π nach Horváth [4], S. 306, Proposition 11 sogar offen ist, ist E/K isomorph zu F und damit auch ein vollständiger bornologischer (DF)-Raum. Dann ist aber auch σ topologisch und damit auch $\hat{\pi} \circ \sigma$, wobei $\hat{\pi}: E/K \to F$ die von π induzierte Abbildung ist. Ist B in F beschränkt, so ist B bereits in einem geeigneten F_n enthalten und dort beschränkt.

$(\hat{\pi} \circ \sigma)^{-1} \circ i_n: F_n \to \operatorname{ind}_{l\to} (E_l/K_l)$ ist stetig und nach Grothendieck [3], S. 16, Theorem A sogar stetig mit Werten in einem geeigneten E_m/K_m, so daß $(\hat{\pi} \circ \sigma)^{-1} \circ i_n(B)$ in dem Banachraum E_m/K_m beschränkt ist. Dann gibt es aber eine in E_m beschränkte Menge C, so daß $h_n(C) \supset (\hat{\pi} \circ \sigma)^{-1} \circ i_n(B)$. Für C gilt dann auch $\pi(C) \supset B$.

Lemma 6. *Sind E, F und π wie in Lemma 5, so induziert π eine stetige lineare Abbildung $\hat{\pi}: H(p, E) \to H(p, F)$, welche surjektiv ist.*

Beweis. Ist $f \in H(p, F)$, so gibt es ein $f_m \in A_m(p, F_m)$, so daß $f = r_m(f_m)$. Dann gibt es aber nach Meise [9], § 3, Satz 1 und der anschließenden Bemerkung sogar ein $l \geqq m$, so daß $f = r_l\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i g_i \otimes x_i\right)$, wobei die $g_i \in A_l(p, \mathbb{C})$ mit $\|g_i\|_{A_l} \leqq 1$ und $x_i \in F_l$ mit $\|x_i\|_{F_l} \leqq 1$ und $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$. Nach Lemma 5 gibt es ein $k \geqq l$ und $e_i \in E_k$, so daß $\sup_{i \in \mathbb{N}} \|e_i\|_{E_k} \leqq C$ und $\pi \circ j_k(e_i) = i_n(x_i)$. Wir betrachten $g = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i r_{lk}(g_i) \otimes e_i$. Wie man leicht sieht, stellt g eine Funktion aus $A_k(p, E_k)$ dar, für die $\tilde{\pi} \circ r_k(g) = f$ gilt.

Satz 6. *Für jeden vollständigen bornologischen (DF)-Raum E besteht der Kern der in Satz 3 definierten Abbildung R aus dem Unterraum U aller derjenigen Funktionen $f \in H(N, E)$, welche eine Darstellung*

$$f(z) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=0}^{m_j} z_j^k h_{jk}(z_1, \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_N)$$

haben, wobei $h_{jk} \in H(N-1, E)$. Für $N = 1$ ist dabei $H(N-1, E) = E$ zu wählen.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach N. Durch Satz 4 ist der Induktionsanfang gesichert. Sei die Behauptung schon für alle vollständigen bornologischen (DF)-Räume und alle $N \leqq p$ bewiesen. Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
H(p, H(1, E)) \arrow[r, "\tilde{R}_1"] & H(p, \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}), E)) \arrow[d, "R_p"] \\
H(p+1, E) \arrow[u, "V"] \arrow[dr, "R_{p+1}"] & \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^p), \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}), E)) \arrow[d, "I"] \\
H(p, \mathbb{C}) \otimes_\pi H(1, \mathbb{C}) \otimes_\pi E \arrow[u, "\Phi"] & \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^{p+1}), E)
\end{tikzcd}$$

Dabei ist Φ die Einschränkung des oben erwähnten Isomorphismus $H(p, \mathbb{C}) \hat{\otimes} H(1, \mathbb{C}) \hat{\otimes} E \cong H(p+1, E)$, V der ebenfalls oben erwähnte Isomorphismus und I derjenige Isomorphismus, den man definieren kann, wenn man beachtet, daß $\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^{p+1}), E)$ und $\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^p), \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}), E))$ zu $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^p) \hat{\otimes} \mathscr{S}'(\mathbb{R}) \hat{\otimes} E$ isomorph sind. $\tilde{R}_1(f)[w]$ ist definiert als $R_1(f(w))$. Wie eine leichte Rechnung zeigt, gilt $I \circ R_p \circ \tilde{R}_1 \circ V \circ \Phi = R_{p \pm 1} \circ \Phi$. Da alle Abbildungen stetig sind und Bild Φ dicht liegt, gilt $I \circ R_p \circ \tilde{R}_1 \circ V = R_{p+1}$. Ist nun $f \in \operatorname{Kern} R_{p+1}$, so ist $\tilde{R}_1(V(f)) \in \operatorname{Kern} R_p$, da I ein Isomorphismus ist. Nach Induktionsvoraussetzung hat $\tilde{R}_1(V(f))$ die Gestalt

$$\tilde{R}_1(V(f))(z)=\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=0}^{m_j} z_j^k g_{jk}(z_1,\ldots,\hat{z}_j,\ldots,z_p)$$

mit $g_{jk}\in H(p-1,\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}),E))$. Aufgrund von Lemma 6 gibt es Funktionen $f_{jk}\in H(p-1,H(1,E))$ mit $\tilde{R}_1(f_{jk})=g_{jk}$. Definieren wir

$$F(z)=\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=0}^{m_j} z_j^k f_{jk}(z_1,\ldots\hat{z}_j,\ldots,z_p),$$

so ist $\tilde{R}_1(V(f)-F)=0$. Nach Lemma 4 gilt dann

$$(V(f)-F)(z)[w]=\sum_{k=0}^{s} w^k h_k(z_1,\ldots,z_p),$$

d. h.

$$V(f)(z)[w]=\sum_{k=0}^{s} w^k h_k(z_1,\ldots,z_p)+\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=0}^{m_j} z_j^k f_{jk}(z_1,\ldots,z_p)[w].$$

Damit ist gezeigt, daß U den Kern der Abbildung R umfaßt. Die Inklusion Kern $R\supset U$ folgt aus dem nächsten Satz.

Satz 7. *Ist E ein vollständiger bornologischer (DF)-Raum, so ist für jedes Paar (p,q) von natürlichen Zahlen das folgende Diagramm kommutativ*

$$\begin{array}{ccc}
H(p,\mathbb{C})\hat{\otimes} H(q,\mathbb{C})\hat{\otimes} E & \xrightarrow{R_p\hat{\otimes} R_q\hat{\otimes}\mathrm{id}_E} & \mathscr{S}'(\mathbb{R}^p)\hat{\otimes}\mathscr{S}'(\mathbb{R}^q)\hat{\otimes} E\\
\Phi\downarrow & & \downarrow I\\
H(p+q,E) & \xrightarrow[R_{p+q}]{} & \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^{p+1}),E).
\end{array}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
&R_{p+q}(\Phi(f\otimes g\otimes e))[\varphi\otimes\psi]\\
&\quad=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^{p+1}} e\cdot\left\{\sum_{\sigma\in(-1,1)^N}\left(\prod_{j=1}^{N}\sigma_j\right)f(x_1+i\sigma'\varepsilon)\,g(x_2+i\sigma''\varepsilon)\right\}\varphi(x_1)\,\psi(x_2)\\
&\qquad\qquad\cdot d\lambda(x_1)\,d\lambda(x_2)\\
&\quad=e\cdot R_p(f)[\varphi]\cdot R_q(g)[\psi]=I(R_p(f)\otimes R_q(g)\otimes e)[\varphi\otimes\psi],
\end{aligned}$$

wobei $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^p)$, $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^q)$ und $\sigma=(\sigma',\sigma'')$ mit $\sigma'\in\{-1,1\}^p$, $\sigma''\in\{-1,1\}^q$. Da $\mathscr{S}(\mathbb{R}^p)\otimes\mathscr{S}(\mathbb{R}^q)$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{p+q})$ dicht liegt, ist

$$R_{p+q}(\Phi(f\otimes g\otimes e))=I(R_p(f)\otimes R_q(g)\otimes e).$$

Die Kommutativität des Diagramms folgt nun daraus, daß alle Abbildungen stetig sind und das algebraische Tensorprodukt in dem topologischen dicht liegt.

Literatur

1. Bremermann, H.: Distributions, complex variables and Fourier transforms. Reading Mass.: Addison Wesley 1965.
2. Friedman, A.: Generalized functions and partial differential equations. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall 1963.
3. Grothendieck, A.: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Memoirs of the AMS 1966.
4. Horváth, J.: Topological vector spaces and distributions I. Reading Mass.: Addison Wesley 1965.
5. Köthe, G.: Topologische lineare Räume I. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.
6. Itano, M.: On the distributional boundary values of vector-valued holomorphic functions. J. Sci. Hiroshima Ser. A Vol. **32**, 397—440 (1968).
7. Martineau, A.: Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes. In: Theory of Distributions. Lissabon 1964.
8. Meise, R.: Räume holomorpher Funktionen mit Wachstumsbedingungen und vektorwertige Distributionen. Dissertation Mainz 1970.
9. — Räume holomorpher Vektorfunktionen mit Wachstumsbedingungen und topologische Tensorprodukte. Erscheint demnächst.
10. Schmidt, E.: Funktionentheoretische Charakterisierung der Topologie im Raume der gemäßigten Distributionen. Dissertation Mainz 1969.
11. Schwartz, L.: Théorie des distributions. Paris: Hermann 1966.
12. — Théorie des distributions à valeurs vectorielles I, II. Ann. Inst. Fourier **7**, 1—142 (1957); **8**, 1—210 (1958).
13. Tillmann, H. G.: Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen. Math. Z. **59**, 61—83 (1953).
14. — Distributionen als Randverteilungen analytischer Funktionen. Math. Z. **76**, 5—21 (1961).
15. — Darstellung der Schwartzschen Distributionen durch analytische Funktionen. Math. Z. **77**, 106—124 (1961).
16. — Darstellung vektorwertiger Distributionen durch holomorphe Funktionen. Math. Ann. **151**, 286—295 (1963).

Reinhold Meise
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität
D-6500 Mainz, Saarstr. 21
Deutschland

(Eingegangen am 29. Februar 1972)