

DER INVARIANTE KONTINUITÄTSSATZ FÜR MEROMORPHE FUNKTIONEN

Volker Aurich

There are several proofs of the general version of the Kontinuitätssatz for meromorphic functions which is invariant under biholomorphic mappings. They are considerably more complicated than the proof of the analogous theorem for holomorphic functions. We present a method of proof which is as simple as the one for holomorphic functions and which allows to extend the theorem to infinite dimensions.

Einleitung

Im Jahre 1906 veröffentlichte F. HARTOGS den mittlerweile wohlbekannten, nach ihm benannten Kontinuitätssatz für holomorphe Funktionen [13]. Eine allgemeinere, gegenüber biholomorphen Abbildungen invariante Fassung wurde 1936 von H. BEHNKE bewiesen [3]. Sie lässt sich folgendermassen formulieren:

(KS) Gegeben seien berandete analytische Flächen S_i , $i \in \mathbb{N}$, und S im $\mathbb{C}^n$, wobei $n > 1$. Die S_i mögen gegen S konvergieren und ihre Ränder ∂S_i gegen den Rand ∂S von S . Dann kann jede auf $\partial S \cup \bigcup \{ S_i : i \in \mathbb{N} \}$ holomorphe Funktion von ∂S aus holomorph nach S fortgesetzt werden.

Der Beweis solcher Sätze für meromorphe Funktionen erwies sich als wesentlich schwieriger. Den HARTOGSschen Kontinui-

tätssatz übertrug 1910 E.LEVI auf meromorphe Funktionen im $\mathbb{C}^2$ [20] und 1932 H.KNESER auf meromorphe Funktionen im $\mathbb{C}^n$ mit $n \geq 2$ [16,17]. Aussagen wie (KS) wurden für meromorphe Funktionen erst 1947 von W.ROTHSTEIN [22] und 1950 von H.BEHNKE und K.STEIN [4,5] gezeigt. Ihre Beweise sind deutlich komplizierter als BEHNKEs Beweis im holomorphen Fall.

Im folgenden wird ein Beweis von (KS) ausgeführt, der ähnlich einfach wie BEHNKEs Beweis in [3] ist; weil dabei jedoch nicht wie in [3] die Holomorphiekonvexität sondern die Pseudokonvexität benutzt wird, ist er sowohl für die holomorphen als auch für die meromorphen Funktionen gültig und gestattet überdies, den Satz nicht nur im $\mathbb{C}^n$ sondern auch in unendlichdimensionalen Banachräumen auszusprechen. Tatsächlich entstand der Beweis bei dem Versuch, Kontinuitätssätze im Unendlichdimensionalen zu beweisen. Im holomorphen Fall waren bereits erste Ansätze vorhanden, 1956 übertrug H.SOEDER den HARTOGSSchen Satz auf Banachräume [24] und 1964 benützte H.BREMERMANN zur Charakterisierung pseudokonvexer Gebiete in Banachräumen einen invarianten Kontinuitätssatz, bei dem die S_1 analytische Bilder von Kreisscheiben sind [7].

1. Der invariante Kontinuitätssatz im $\mathbb{C}^n$

Im folgenden seien $E := \mathbb{C}^n$ mit $n > 1$, $B(x,r) := \{y \in E : \|y-x\| < r\}$ für $x \in E$ und $\Delta(z,r) := \{y \in \mathbb{C} : |y-z| < r\}$ für $z \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Wie üblich nennen wir (Q,p) eine Mannigfaltigkeit über E oder einen espace étalé über E , wenn Q ein topologischer Hausdorffraum und p eine lokaltopologische Abbildung von Q nach E ist. Ein Schnitt σ von p oder von Q über einer Teilmenge $M \subseteq E$ ist eine Abbildung $\sigma: M \rightarrow Q$ mit $p \circ \sigma = \text{id}_M$.

Reduktion des Problems: Es ist gleichbedeutend, Fortsetzungssätze für holomorphe bzw. meromorphe Funktionen oder für stetige Schnitte des espace étalé $\mathcal{O}_E$ der holomorphen Funktionskeime bzw. des espace étalé $\mathcal{M}_E$ der meromorphen Funktionskeime zu beweisen, denn jede in einer Umgebung

einer Teilmenge $M \subseteq E$ holomorphe bzw. meromorphe Funktion induziert über M einen stetigen Schnitt von $\mathcal{O}_E$ bzw. $\mathcal{M}_E$, und umgekehrt kann jeder stetige Schnitt über M auf eine Umgebung von M ausgedehnt werden (siehe z.B. [12] 3.3.1) und definiert dort eine holomorphe bzw. meromorphe Funktion. Es ist wohlbekannt, dass die Existenzgebiete holomorpher oder meromorpher Funktionen und somit auch $\mathcal{O}_E$ und $\mathcal{M}_E$ pseudokonvex sind [6]. Deshalb genügt es, den invarianten Kontinuitätssatz für stetige Schnitte pseudokonvexer Mannigfaltigkeiten über E zu beweisen. Weil die Pseudokonvexität von $\mathcal{O}_E$ und $\mathcal{M}_E$ darauf beruht, dass für die holomorphen und die meromorphen Funktionen der HARTOGSSche Kontinuitätssatz gilt (vgl. Lemma 2.2.1 weiter unten), werden wir also letztlich den allgemeinen invarianten Kontinuitätssatz mit Hilfe des technischen Begriffs der Pseudokonvexität aus dem HARTOGSSchen Kontinuitätssatz in seiner einfachsten Form herleiten.

1.1 HAUPTSATZ : Ω sei eine pseudokonvexe Mannigfaltigkeit über E mit der Projektion $p: \Omega \rightarrow E$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei S_i der Abschluss eines relativ kompakten Gebietes in einer analytischen Menge A_i in E , ∂S_i sei der Rand von S_i bez. A_i . Es gebe Teilmengen S und $R \subset S$ von E , für die gilt:

$R \neq \emptyset$ und S ist zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend.

$S_1 \rightarrow S$, das soll bedeuten, dass es zu jedem Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow S$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $j \in \mathbb{N}$ und einen Weg $\gamma_j: [a, b] \rightarrow S_j$ gibt, so dass $\|\gamma(t) - \gamma_j(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \in [a, b]$.

$\partial S_1 \rightarrow R$, das soll bedeuten, dass jede ε -Umgebung von R fast alle ∂S_1 enthält.

Dann gilt:

a) Zu jedem stetigen Schnitt σ von p über $(R + B(0, r)) \cup \bigcup \{S_i : i \in \mathbb{N}\}$, $r > 0$, gibt es einen stetigen Schnitt τ von p über S mit $\tau|_R = \sigma|_R$.

b) Ist R kompakt, so gibt es zu jedem stetigen Schnitt σ von p über $R \cup \bigcup \{S_i : i \in \mathbb{N}\}$ einen stetigen Schnitt τ von p über S mit $\tau|_R = \sigma|_R$.

Der oben eingeführte Konvergenzbegriff $S_1 \rightarrow S$ ist etwas ungewöhnlich, er ist jedoch nicht sehr einschränkend und leistet das Gewünschte. In der Literatur wird die Konvergenz der S_1 gegen S unterschiedlich, teilweise auch gar nicht definiert.

Der Beweis von 1.1 zerfällt in einen rein topologischen Teil, den wir als Satz 1.2 formulieren, und einen analytischen. Wir erinnern daran, dass für die stetigen Schnitte einer Mannigfaltigkeit (Ω, p) über E der Identitätssatz gilt, d.h. zwei stetige Schnitte über einer zusammenhängenden Menge sind bereits gleich, wenn sie in einem Punkt übereinstimmen. Ausserdem lässt sich jeder stetige Schnitt über einer kompakten Menge K zu einem stetigen Schnitt über einer ε -Umgebung von K fortsetzen. Die Randdistanz eines Punktes $x \in \Omega$ ist $d_\Omega(x) := \sup \{ r > 0 : \text{Es gibt eine Umgebung } U \text{ von } x, \text{ so dass } p|_U \rightarrow B(p(x), r) \text{ topologisch ist} \}$. Ω ist genau dann pseudokonvex, wenn $-\log d_\Omega$ plurisubharmonisch ist (siehe z.B. [8], [9], [18]). Dabei soll eine Funktion ψ auf einer Teilmenge M eines reduzierten komplexen Raumes X plurisubharmonisch, kurz psh, heissen, wenn $\psi \circ h$ für jede holomorphe Abbildung $h: \Delta(0, 1) \rightarrow X$ mit $h(\Delta(0, 1)) \subset M$ subharmonisch ist und ψ nach oben halbstetig ist [8][9][18][19]. Die Randdistanz einer Menge $M \subset \Omega$ sei $d_\Omega(M) := \inf \{ d_\Omega(x) : x \in M \}$.

1.2 SATZ: Es seien S_1 , $i \in \mathbb{N}$, und S zusammenhängende Mengen in E , $R \subset S$, $R \neq \emptyset$. S sei lokal wegzusammenhängend, und es gelte $S_1 \rightarrow S$. (Ω, p) sei eine Mannigfaltigkeit über E , und σ sei ein stetiger Schnitt von p über $R \cup \bigcup \{ S_1 : i \in \mathbb{N} \}$, derart dass $d_\Omega(\sigma(\bigcup \{ S_1 : i \in \mathbb{N} \})) > 0$. Dann gibt es einen stetigen Schnitt τ von p über S mit $\tau|_R = \sigma|_R$.

Zum Beweis benötigen wir das folgende Lemma.

1.3 LEMMA: Gegeben sei eine Menge Z mit $R \subset Z \subset S$. Jeder Punkt von Z lasse sich durch einen Weg in Z mit einem Punkt in R verbinden. τ sei ein stetiger Schnitt von p über Z mit $\tau|_R = \sigma|_R$. $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$ sei ein Weg mit $a := \gamma(0) \in Z$. Ist p

ein stetiger Schnitt von p über $|\gamma| := \gamma([0,1])$ und $\rho(a) = \tau(a)$, so definieren ρ und τ einen stetigen Schnitt über $Z \cup |\gamma|$.

Beweis: Es ist zu zeigen, dass ρ und τ im gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen. Sei $b := \gamma(t_0) \in Z$ mit $t_0 \neq 0$, o.E. $t_0 = 1$. Es gibt Wege $\gamma_k: [0,1] \rightarrow Z$, $k=1,2$, mit $\gamma_k(0) \in R$, $\gamma_1(1)=a$ und $\gamma_2(1)=b$. $\mu: [0,3] \rightarrow S$ sei definiert durch $\mu(t) := \gamma_1(t)$ für $t \in [0,1]$, $\mu(t) := \gamma(t-1)$ für $t \in [1,2]$ und $\mu(t) := \gamma_2(3-t)$ für $t \in [2,3]$. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass man o.E. annehmen kann, τ sei auf $(|\gamma_1| \cup |\gamma_2|) + B(0, \varepsilon)$, ρ sei auf $|\gamma| + B(0, \varepsilon)$ und σ sei auf $B(\gamma_1(0), \varepsilon)$ sowie auf $B(\gamma_2(0), \varepsilon)$ definiert. Wegen $S_i \rightarrow S$ gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ und einen Weg $v: [0,3] \rightarrow S_j$ mit $\|\mu(t) - v(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \in [0,3]$. Aus $\tau(\gamma_k(0)) = \sigma(\gamma_k(0))$ für $k=1,2$ folgt durch mehrmaliges Anwenden des Identitätssatzes für stetige Schnitte schliesslich $\rho(b) = \tau(b)$. q.e.d.

Beweis von 1.2: M sei die Menge aller Punkte in S , die sich durch einen Weg γ in S mit einem Punkt $z \in R$ verbinden lassen, so dass es über $|\gamma|$ einen stetigen Schnitt ρ von p mit $\rho(z) = \sigma(z)$ gibt. $M \neq \emptyset$, weil $R \subset M$. Wegen 1.3 kann man alle diese Schnitte ρ zu einem Schnitt τ von p über M verheften, der auf R mit σ übereinstimmt. Weil S lokal wegzusammenhängend ist, folgt mit Hilfe des Identitätssatzes, dass M offen und τ stetig ist. Wir zeigen nun, dass jeder Punkt von $\tau(M)$ Berührpunkt von $\sigma(U\{S_i : i \in \mathbb{N}\})$ ist. Zu $y \in \tau(M)$ gibt es einen Weg $\gamma: [0,1] \rightarrow M$, so dass y durch $\tau \circ \gamma$ mit $\sigma(R)$ verbunden ist. τ lässt sich auf $|\gamma| + B(0, \varepsilon)$ für geeignetes $\varepsilon > 0$ ausdehnen. Zu jedem $\delta \in]0, \varepsilon[$ gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ und einen Weg $\gamma_j: [0,1] \rightarrow S_j$, so dass $\|\gamma_j(t) - \gamma(t)\| < \delta$ für alle t . $|\gamma|$ besteht also aus Berührpunkten von $U\{S_i : i \in \mathbb{N}\}$. Weil τ stetig ist und auf $|\gamma_j|$ mit σ übereinstimmt, ist y Berührpunkt von $\sigma(U\{S_i : i \in \mathbb{N}\})$. Wegen der Stetigkeit von d_Ω folgt nun aus den Voraussetzungen sofort $r := d_\Omega(\tau(M)) > 0$.

Um $M=S$ zu beweisen, genügt es wegen des Zusammenhangs von S , die Abgeschlossenheit von M zu zeigen. Sei x ein Häufungspunkt von M in S . Es gibt ein $y \in M$, das sich in

$S \cap B(y, r)$ durch einen Weg γ mit x verbinden lässt. Die Umkehrabbildung von $p|_{B(\tau(y), r)} \rightarrow B(y, r)$ ist ein stetiger Schnitt, dessen Beschränkung auf $|\gamma|$ gemäss 1.3 eine Fortsetzung von τ ist. Folglich ist $x \in M$. q.e.d.

Beweis von 1.1: Es ist nur Teil a) zu zeigen, denn in b) kann σ wegen der Kompaktheit von R auf eine ε -Umgebung von R ausgedehnt werden. Um a) zu beweisen, genügt es, die Bedingung (*) $d_Q(\sigma(U\{S_i : i \in \mathbb{N}\})) > 0$ in 1.2 aus den Voraussetzungen herzuleiten. Man kann o.E. annehmen, dass $\partial S_i \subset R + B(0, r/2)$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dass also $d_Q(\sigma(U\{\partial S_i : i \in \mathbb{N}\})) > r/2 > 0$. Wendet man das schwache Maximumprinzip für psh Funktionen auf $-\log d_Q$ an, so ergibt sich (*). q.e.d.

Damit ist der Hauptsatz 1.1 im Endlichdimensionalen bewiesen, und aufgrund der anfangs angestellten Überlegungen gilt ein entsprechender Fortsetzungssatz für die holomorphen und die meromorphen Funktionen.

2. Der invariante Kontinuitätssatz in Banachräumen

Die im ersten Abschnitt benützten Charakterisierungen der Begriffe pseudokonvex und psh sind in beliebigen Banachräumen richtig (siehe z.B. [7][8][9][19], zur Definition holomorpher und meromorpher Funktionen siehe [21]), und die obigen Sätze und Beweise lassen sich ohne Schwierigkeiten auf unendlichdimensionale Banachräume übertragen mit Ausnahme von zwei Stellen:

- (1) Es ist zu zeigen, dass $\mathfrak{M}_E$ pseudokonvex ist. Dass $\mathcal{O}_E$ pseudokonvex ist, hat BREMERMAN in [8] bewiesen.
- (2) Im Hauptsatz 1.1 kann man i.a. nicht mehr die Kompaktheit der analytischen Flächen S_i voraussetzen, weil unendlichdimensionale analytische Mengen nicht lokalkompakt sein müssen. Ausserdem gibt es analytische Mengen,

auf denen das schwache Maximumprinzip für psh Funktionen nicht gilt [10][21]. Man muss also die Wahl der S_1 einschränken.

Wir wenden uns zunächst dem zweiten Problem zu und beweisen eine unendlichdimensionale Fassung des invarianten Kontinuitätssatzes für stetige Schnitte pseudokonvexer Gebiete über Banachräumen. Im darauffolgenden Abschnitt werden wir dann nachweisen, dass $\mathcal{M}_E$ und der espace étalé $\mathcal{O}_E^Y$ der holomorphen Funktionskeime auf E mit Werten in gewissen Räumen Y pseudokonvex sind, was zur Folge hat, dass für die meromorphen und die Y -wertigen holomorphen Funktionen der Kontinuitätssatz ebenfalls gilt.

2.1 Der invariante Kontinuitätssatz für stetige Schnitte pseudokonvexer Gebiete über Banachräumen

Aus den Ergebnissen in [21] folgt, dass das Maximumprinzip für psh Funktionen auf zusammenhängenden, lokal durch endlich viele holomorphe Funktionen definierten analytischen Mengen A in seiner sogenannten starken Form gilt, d.h. dass jede auf A psh Funktion, die ein lokales Maximum besitzt, konstant ist. Ob auf diesen Mengen auch eine sogenannte schwache Form des Maximumprinzips gilt, wie sie im Beweis von 1.1 benötigt wird, scheint nicht bekannt zu sein. Lediglich für die lokalen Modelle solcher analytischer Mengen, also insbesondere für Gebiete in Banachräumen, können wir eine derartige Aussage beweisen.

2.1.1 LEMMA : $\pi:A \rightarrow U$ sei eine analytisch verzweigte Überlagerung eines Gebietes U in einem Banachraum F (im Sinne von [21]). B sei ein Gebiet in A , derart dass $\pi(B)$ beschränkt ist und die abgeschlossene Hülle von $\pi(B)$ bezüglich F in U liegt. Dann gilt für jede psh Funktion ψ auf B und jedes $x \in B$

$$\psi(x) \leq \sup \{ \limsup_{y \rightarrow a, y \in B} \psi(y) : a \in \partial B \} .$$

Beweis: Es seien $x \in B$ und L eine affine komplexe Gerade durch $\pi(x)$. $\pi^{-1}(L \cap U)$ ist analytisch und wegen II.3.3.7. und III.2.2.1. in [21] höchstens eindimensional. Weil π eigentlich ist, ist $B \cap \pi^{-1}(L \cap U)$ relativ kompakt in $\pi^{-1}(L \cap U)$. Die Behauptung folgt nun aus dem entsprechenden endlichdimensionalen Resultat. q.e.d.

2.1.2 DEFINITION: Eine Teilmenge S eines komplexen Banachraumes E heisst berandete analytische Fläche mit Rand ∂S , wenn es eine Abbildung $\varphi: \bar{B} \rightarrow E$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

- a) B ist ein relativ kompaktes Gebiet in einem endlichdimensionalen, reduzierten komplexen Raum, so dass $\partial B \neq \emptyset$, oder
- b) B ist ein Gebiet in einer analytischen Teilmenge A eines Gebietes in einem Banachraum, und es gibt eine analytisch verzweigte Überlagerung $\pi: A \rightarrow U$ eines Gebietes U in einem Banachraum F im Sinne von [21], so dass $\pi(B)$ beschränkt ist und die abgeschlossene Hülle von $\pi(B)$ bezüglich F in U liegt (Bemerkung: Diese Situation liegt insbesondere dann vor, wenn B ein beschränktes Gebiet in einem komplexen Banachraum ist).
- c) φ ist in $\bar{B}$ stetig und in B holomorph.
- d) $S = \varphi(\bar{B})$ und $\partial S = \varphi(\partial B)$.

Weil der Rücktransport plurisubharmonischer Funktionen durch holomorphe Abbildungen wieder plurisubharmonische Funktionen liefert (siehe z.B. [19]), gilt auf berandeten analytischen Flächen das schwache Maximumprinzip für psh Funktionen. Daraus ergibt sich unmittelbar folgende Erweiterung des Hauptsatzes 1.1.

2.1.3. HAUPTSATZ: Ω sei eine pseudokonvexe Mannigfaltigkeit über dem komplexen Banachraum E mit der Projektion $p: \Omega \rightarrow E$. In E seien eine Folge analytischer Flächen S_i , $i \in \mathbb{N}$, mit Rändern ∂S_i sowie zwei Mengen $R \subset S$ gegeben, so dass $S_i \rightarrow S$

und $\partial S_1 \rightarrow R$. S sei zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann gelten die Aussagen a) und b) aus Hauptsatz 1.1.

Aus 2.1.3 lassen sich Kontinuitätssätze für stetige Schnitte über unendlichdimensionalen HARTOGSfiguren ableiten. Der Einfachheit halber wollen wir hier nur eine Version für euklidische HARTOGSfiguren angeben; man kann jedoch entsprechende Aussagen auch für nichteuklidische HARTOGSfiguren beweisen [1].

2.1.4 KOROLLAR: E_1 und E_2 seien komplexe Banachräume.

(Ω, p) sei eine pseudokonvexe Mannigfaltigkeit über $E_1 \times E_2$.

G_1 sei ein Gebiet in E_1 , $i = 1, 2$. G_1 sei beschränkt.

a) Gegeben seien ein $r > 0$ und eine offene Menge $V \subset G_2$, $V \neq \emptyset$.

Dann kann jeder stetige Schnitt von p über

$$(\bar{G}_1 \times V) \cup ((\partial G_1 \times G_2) + B(0, r))$$

zu einem stetigen Schnitt über $\bar{G}_1 \times G_2$ fortgesetzt werden.

b) $\bar{G}_1$ sei lokal endlichdimensional zusammenhängend, d.h. jedes $x \in \bar{G}_1$ besitze eine Umgebungsbasis bez. $\bar{G}_1$ aus Mengen W mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $y \in W$ einen Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow W$ von x nach y gibt, derart dass $\gamma([0, 1])$ in einem endlichdimensionalen affinen Teilraum von $E_1 \times E_2$ liegt. Dann kann jeder stetige Schnitt von p über $(\partial G_1 \times G_2) \cup (\bar{G}_1 \times \{y\})$ für ein $y \in G_2$ zu einem stetigen Schnitt über $\bar{G}_1 \times G_2$ fortgesetzt werden.

2.2 Der invariante Kontinuitätssatz für holomorphe Abbildungen und meromorphe Funktionen auf Banachräumen

Auf Grund der im ersten Abschnitt angestellten Überlegungen lassen sich aus den Kontinuitätssätzen des vorigen Abschnittes 2.1 unmittelbar entsprechende Kontinuitätssätze für meromorphe oder holomorphe Funktionen folgern, wenn nur gesichert ist, dass deren Existenzgebiete pseudokonvex sind.

Die Pseudokonvexität der Existenzgebiete holomorpher Abbildungen oder meromorpher Funktionen ist äquivalent zur Gültigkeit eines sehr einfachen Fortsetzungssatzes. Diesen mehr oder weniger bekannten Sachverhalt wollen wir seiner Wichtigkeit halber kurz ausführen. Anschliessend werden wir diesen Fortsetzungssatz für die holomorphen Funktionen mit Werten in gewissen Räumen und die meromorphen Funktionen auf einem Banachraum beweisen.

Wir erinnern daran, dass die Pseudokonvexität einer Mannigfaltigkeit (Q, p) über einem Banachraum E nicht nur zur Plurisubharmonizität von $-\log d_Q$ äquivalent ist, sondern auch dazu, dass $-\log \delta_Q(\cdot, a)$ für jedes $a \in E$, $a \neq 0$, psh ist, wobei $\delta_Q(x, a) := \sup \{ r > 0 : \text{Es gibt } D \subset Q, \text{ so dass } x \in D \text{ und } p|_D \rightarrow p(x) + \Delta(0, r)a \text{ topologisch ist} \}$ (siehe z.B. [9]).

2.2.1 LEMMA: Y sei ein endlichdimensionaler reduzierter komplexer Raum oder eine Mannigfaltigkeit, die in einem folgenvollständigen lokalkonvexen komplexen Vektorraum modelliert ist. Der espace étalé der Y -wertigen holomorphen Funktionskeime bzw. der meromorphen Funktionskeime über einem komplexen Banachraum E ist genau dann pseudokonvex, wenn gilt:

(§) Sind $a, b \in E$ linear unabhängig, $r, s \in]0, 1[$, so kann jede in einer Umgebung von

$$H := [\{ \lambda a : s < |\lambda| < 1 \} + \Delta(0, 1)b] \cup [\Delta(0, 1)a + \Delta(0, r)b]$$

Y -wertige holomorphe Abbildung bzw. meromorphe Funktion f auf eine Umgebung von

$$P := \Delta(0, 1)a + \Delta(0, 1)b$$

holomorph mit Werten in Y bzw. meromorph fortgesetzt werden.

Beweis: Es gelte (§). (Q, p) sei das Existenzgebiet von f , d.h. diejenige Zusammenhangskomponente des espace étalé aller Funktionskeime, welche die Keime f_x , $x \in H$, enthält.

Wir zeigen, dass $-\log \delta_Q(\cdot, b)$ für jedes $b \in E$, $b \neq 0$, psh ist. D sei offen in Q und werde durch p topologisch auf $p(D)$ abgebildet. Für $x \in D$ sei $\delta(x) := \delta_Q((p|_D)^{-1}(x), b)$. I sei eine

affine komplexe Gerade in E , die $p(D)$ trifft. Wir zeigen, dass $-\log \delta|_L$ das Kriterium 1.6.3. in [14] für Subharmonizität erfüllt. Δ sei eine relativ kompakte Kreisscheibe in $L \cap p(D)$, und Q sei ein holomorphes Polynom auf L mit $-\log \delta(x) \leq \operatorname{Re} Q(x)$ für alle $x \in \partial\Delta$, o.E. seien $L := \mathbb{C}a$, $\Delta = \Delta(0,1)a$ mit $a \in E$, $a \neq 0$, a und b linear unabhängig. $E = \mathbb{C}a + \mathbb{C}b + F$ sei eine topologisch direkte Zerlegung. $\Phi(\lambda a + \mu b + c) := \lambda a + \mu |e^{-Q(\lambda a)}| b + c$ ist ein Automorphismus von E , und es gilt $K = [\partial\Delta(0,1)a + \Delta(0,1)b] \cup \Delta(0,1)a = \Phi^{-1}(\Delta \cup \{x + \Delta(0, |e^{-Q(x)}|)b : x \in \partial\Delta\})$. Wegen $\delta(x) \geq |e^{-Q(x)}|$ für $x \in \partial\Delta$ induziert f eine Y -wertige holomorphe bzw. meromorphe Funktion g auf einer Umgebung von K . Weil sich g wegen (§) auf $\overline{\Delta}(0,1)a + \Delta(0,1)b$ fortsetzen lässt, muss $\delta(x) \geq |e^{-Q(x)}|$ für jedes $x \in \Delta$ gelten. Nach 1.6.3. in [14] ist $-\log \delta|_L$ subharmonisch. Folglich ist $-\log \delta$ psh, denn δ ist nach unten halbstetig.

Die umgekehrte Implikation folgt aus 2.1.4.a). q.e.d.

2.2.2 SATZ: Y sei ein endlichdim., reduzierter Steinscher Raum oder eine pseudokonvexe Mannigfaltigkeit über einem folgenvollständigen, lokalkonvexen, komplexen Vektorraum. Dann ist der espace étalé der Y -wertigen holomorphen Funktionskeime über einem komplexen Banachraum E pseudokonvex; für die Y -wertigen holomorphen Funktionen auf E gelten also den Sätzen 2.1.3 und 2.1.4 entsprechende Fortsetzungssätze.

Beweis: Wegen 2.2.1 ist lediglich (§) zu verifizieren. Ist Y ein Steinscher Raum, so wird (§) mit Hilfe des Satzes von IGUSA (vgl. [11]) auf (§) für holomorphe Funktionen zurückgeführt. Der Beweis des zweiten Falles ergibt sich daraus, dass die Pseudokonvexität von Y gerade durch (§) charakterisiert werden kann. q.e.d.

Der Beweis von (§) für meromorphe Funktionen gestaltet sich etwas schwieriger. Im Endlichdimensionalen ist (§) ein Spezialfall des anfangs zitierten Satzes von H. KNESER in [17].

Dessen Beweis gliedert sich in zwei Teile, von denen sich der erste ohne grössere Schwierigkeiten auf unendlichdimensionale Banachräume übertragen lässt. Er kann wie folgt formuliert werden.

2.2.3 LEMMA : $W \subset E$ sei offen, $0 \in \partial W$. r, r_1 und r_2 seien positive reelle Zahlen, $r_1 < r_2$. f sei eine meromorphe Funktion auf

$$(W \times \Delta(0, r_2)) \cup (B(0, r) \times \{\lambda \in \mathbb{C} : r_1 < |\lambda| < r_2\}) \subset E \times \mathbb{C}.$$

Der Kreisring $\{0\} \times \{\lambda \in \mathbb{C} : r_1 < |\lambda| < r_2\}$ bestehe nicht nur aus Singularitäten von f . Dann lässt sich f meromorph auf eine Umgebung von $\{0\} \times \Delta(0, r_2)$ fortsetzen.

Beweisskizze: KNESERS Beweisidee besteht darin, zu zeigen, dass f als Quotient zweier holomorpher Funktionen geschrieben werden kann, und dann den HARTOGSSchen Kontinuitätssatz für holomorphe Funktionen anzuwenden.

Nach Voraussetzung gibt es eine Kreislinie $\Gamma = \{0\} \times \partial\Delta(0, r_3)$ mit $r_1 < r_3 < r_2$, die keine Singularitäten von f enthält. Es gibt dann sogar $\eta \in]0, r[$ und Zahlen r_4 und r_5 , so dass $r_1 < r_4 < r_3 < r_5 < r_2$ und f auf $B(0, \eta) \times \{\lambda \in \mathbb{C} : r_4 < |\lambda| < r_5\}$ holomorph und durch eine Konstante $K > 0$ beschränkt ist. Die Unbestimmtheitsstellen I von f in $(B(0, \eta) \cap W) \times \Delta(0, r_5)$ sind also in $(B(0, \eta) \cap W) \times \bar{\Delta}(0, r_3)$ enthalten und aus III.2.2.1. in [21] folgt, dass das Bild von I unter der Projektion auf E eine einskodimensionale analytische Menge in $B(0, \eta) \cap W$ ist. Es gibt daher eine Kugel $B(w_1, \delta)$ in $B(0, \eta) \cap W$, derart dass $B(w_1, \delta) \times \Delta(0, r_5)$ keine Unbestimmtheitsstelle von f enthält. Ist auch keine Polstelle darin enthalten, so kann man auf f den HARTOGSSchen Kontinuitätssatz anwenden, um die Behauptung des Satzes zu erhalten. Nehmen wir deshalb an, f habe dort mindestens einen Pol. Dann kann man $c \in \mathbb{C}$, $|c| > K$, so wählen, dass $f(w,) - c$ für jedes $w \in B(w_1, \delta)$ (δ geeignet verkleinert) nur einfache Nullstellen $u_1(w), \dots, u_m(w)$, $m \geq 1$, hat, die holomorph von w abhängen und in $\Delta(0, r_3)$ liegen. Die Summen der k -ten Potenzen der Nullstellen und Pole von $f(w,) - c$ lassen sich durch Cauchy-Integrale über $\{w\} \times \partial\Delta(0, r_3)$ ausdrücken, woraus durch algebraische Umfor-

mungen eine holomorphe Funktion V gewonnen wird, die sogar auf $B(0, \eta) \times \mathbb{C}$ definiert ist und die für jedes $w \in B(w_1, \delta)$ genau die gleichen Nullstellen wie $f(w, \cdot) - c$ hat. $V/f - c$ ist folglich in $B(w_1, \delta) \times \Delta(0, r_3)$ holomorph. Weil $|c| > K$, ist $V/f - c$ auch in $B(0, \eta) \times \{\lambda \in \mathbb{C} : r_4 < |\lambda| < r_5\}$ holomorph und kann deshalb auf eine Umgebung von $\{0\} \times \Delta(0, r_3)$ holomorph fortgesetzt werden. Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung. q.e.d

Um sich von der Bedingung zu befreien, dass die Grenzfläche nicht nur Singularitäten von f enthalten darf, hat H. KNESER eine Hilfsaussage bewiesen, die wir in etwas veränderter Form wiedergeben.

2.2.4 LEMMA : A sei eine echte analytische Teilmenge eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$. Dann ist die Menge

$Z := \{ \xi \in \mathbb{P}_{n-1} : A \text{ enthält einen offenen nicht leeren Teil der affinen Geraden } x + \xi \text{ für geeignetes } x \in \mathbb{C}^n \}$

mager in $\mathbb{P}_{n-1}$.

Beweis: $k_1: \Omega \times \mathbb{P}_{n-1} \rightarrow \Omega$ und $k_2: \Omega \times \mathbb{P}_{n-1} \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}$ seien die kanonischen Projektionen. Wir setzen

$$G := \{ (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{P}_{n-1} : x \in A, A \text{ enthält eine Umgebung von } x \text{ in } x + \xi \}.$$

Es gilt $Z = k_2(G)$. Wir zeigen nun zunächst, dass G eine analytische Teilmenge von $\Omega \times \mathbb{P}_{n-1}$ ist.

Sei $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{P}_{n-1}$. Wähle eine Umgebung V von x und eine holomorphe Abbildung $h: V \rightarrow F$ in einen Banachraum F mit $h^{-1}(0) = V \cap A$. $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ sei eine Karte von $\mathbb{P}_{n-1}$ bei ξ , o.E. sei $\varphi(v_0: \dots: v_{n-1}) = (v_1/v_0, \dots, v_{n-1}/v_0)$. Es gibt $r > 0$, so dass $y + t(1, \alpha) \in V$ für alle $y \in \mathbb{C}$ mit $\|y - x\| < r$, $\alpha \in \mathbb{C}^{n-1}$ mit $\|\alpha - \varphi(\xi)\| < 1$ und $t \in \Delta(0, r)$. $\mathcal{O}_b(\Delta(0, r), F)$ bezeichne den Banachraum der beschränkten holomorphen Abbildungen von $\Delta(0, r)$ nach F mit der Supremumsnorm. Definiere $\Phi: B(x, r) \times \varphi^{-1}(B(\varphi(\xi), 1)) \rightarrow \mathcal{O}_b(\Delta(0, r), F)$ durch $[\Phi(y, v)](t) := h(y + t(1, \varphi(v)))$ für $t \in \Delta(0, r)$. Φ ist holomorph, und es gilt $\Phi^{-1}(0) = G \cap (B(x, r) \times \varphi^{-1}(B(\varphi(\xi), 1)))$.

Wir kommen nun zum Beweis, dass Z mager ist. M_0 sei die Menge der regulären Punkte von G , M_1 die Menge der regulären Punkte von $G - M_0$ und für $i > 1$ sei M_i die Menge der regulären Punkte von $M_{i-2} - M_{i-1}$. Um zu zeigen, dass Z mager ist, genügt es zu beweisen, dass $k_2(C)$ für jede kompakte Menge C in einem M_j nirgends dicht ist. Nehmen wir an, es gäbe ein $j \in \mathbb{N}$ und eine kompakte Menge $C \subset M_j$, so dass $k_2(C)$ nicht nirgends dicht ist. Dann ist $m := \dim M_j \geq n-1$, und man kann einen Punkt $z \in M_j$ sowie lokale Koordinaten $u = (u_1, \dots, u_m)$ von M_j bei z finden, so dass der Rang von $[\partial k_2 / \partial u_1, \dots, \partial k_2 / \partial u_{n-1}](z)$ gleich $n-1$ ist. O.E. gelte $m = n-1$, und es sei die 0-te Komponente von k_2 in einer Umgebung U von z verschieden von 0. Wählt man im $\mathbb{P}_{n-1}$ die Karte $\varphi(v_0 : \dots : v_{n-1}) = (v_1/v_0, \dots, v_{n-1}/v_0)$, so ist $k := \varphi \circ k_2 \circ u^{-1}$ eine holomorphe Abbildung von $u(U)$ nach $\mathbb{C}^{n-1}$. Wir setzen $D := u(U)$ und definieren eine Abbildung $f: D \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ durch $f(x, \lambda) := k_1 \circ u^{-1}(x) + \lambda(1, k(x))$. Wie oben sei G in einer Umgebung von z durch eine Abbildung Φ definiert, o.E. sei Φ auf U definiert. Dann ist $f(D \times \Delta(0, r))$ eine Teilmenge von A (r wie oben). Es gilt $\det Df(u(z), \lambda) = \lambda^n \det Dk(u(z)) + \text{Potenzen von } \lambda \text{ mit einem Grad} < n$. Weil $\det Dk(u(z)) \neq 0$, gibt es also ein $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu| < r$, so dass $\det Df(u(z), \mu) = 0$. Daraus folgt, dass $f(D \times \Delta(0, r))$ und somit A eine nicht leere, offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ enthält. Das ist ein Widerspruch zu $A \neq \Omega$.
q.e.d.

Jetzt können wir den Beweis von (§) für meromorphe Funktionen zu Ende führen. Dies geschieht auf andere Weise als in [17].

2.2.5 SATZ: $E = Ca + Cb + F$ sei eine topologische direkte Zerlegung des komplexen Banachraumes E , $a \neq 0 \neq b$. Es seien $r, s \in]0, 1[$ und W ein Gebiet in F , $W \neq \emptyset$. Dann kann jede meromorphe Funktion f auf

$D := [(\{\lambda \in \mathbb{C} : s < |\lambda| < 1\}a + \Delta(0, 1)b) \cup (\Delta(0, 1)a + \Delta(0, r)b)] + W$ meromorph auf eine Umgebung von $\Delta(0, 1)a + \Delta(0, 1)b$ in E fort-

gesetzt werden.

Beweis: $A(0, s, 1) := \{\lambda \in \mathbb{C} : s < |\lambda| < 1\}$. Sei $z \in \Delta(0, 1)b$.

Wir zeigen, dass es eine meromorphe Funktion auf einer Umgebung von $\Delta(0, 1)a + z$ in E gibt, die in einer Umgebung von $A(0, s, 1)a + z$ mit f übereinstimmt.

1) O.E. sei $W = B_F(0, \varepsilon)$. Wegen III.2.1. in [21] gibt es ein $c \in B_F(0, \varepsilon/2)$, so dass für $b' := b + c$ die Menge $D \cap (z + Ca + Cb')$ nicht nur aus Singularitäten von f besteht.

2) $M := \{\lambda \in \mathbb{C} : z + \lambda(b - z) \in \Delta(0, 1)b\}$ und

$N := \{\lambda \in \mathbb{C} : z + \lambda(b - z) \in \Delta(0, r)b\}$ sind nicht leere Kreisscheiben, N liegt relativ kompakt in M . Für $\lambda \in M$ gilt $z + \lambda(b' - z) = z + \lambda(b - z) + \lambda c \in \Delta(0, 1)b + W$, weil $|\lambda| < 2$. Folglich ist f meromorph auf einer Umgebung von $[\Delta(0, 1)a + z + Nb'] \cup [A(0, s, 1)a + z + Mb']$.

3) $K \subset M$ sei zusammenhängend und kompakt, $0 \in K, \mu \in K \cap N \neq \emptyset$. $\delta := \frac{1}{3} \min \{d(K, \partial M), d(\mu, \partial M)\}$. Wegen 1) und 2.2.4 gibt es $\alpha \in \Delta(0, \delta)$, so dass in $A(0, s, 1)a + z + Mb'$ kein Geradenstück der Richtung $a + \alpha b'$ nur aus Singularitäten von f besteht.

4) Durch $T_\alpha(\lambda a + z + \nu b') := \lambda a + z + (\nu + \lambda \alpha)b'$ wird eine biholomorphe Abbildung $T_\alpha: Ca + z + Mb' \rightarrow Ca + z + Mb'$ definiert. Ist für $\rho > 0$ $K_\rho := \{\lambda \in \mathbb{C} : d(\lambda, K) < \rho \|b'\|^{-1}\}$, so gilt $\Delta(0, 1)a + z + K_\delta b' \subset T_\alpha(\Delta(0, 1)a + z + K_{2\delta} b') \subset \Delta(0, 1)a + z + Mb'$.

5) Durch $T(\lambda a + z + \nu b' + y) := T_\alpha(\lambda a + z + \nu b') + y$ wird ein Automorphismus von $E = Ca + z + Cb' + F$ definiert. $f \circ T$ ist in einer Umgebung bez. E von $A(0, s, 1)a + z + K_{2\delta} b'$ definiert und meromorph. L sei die Menge aller $\lambda \in K_{2\delta}$, derart dass es eine Umgebung U von $z + \lambda b'$ bez. $z + Cb' + F$ und eine meromorphe Fortsetzung von $f \circ T$ auf $U + \Delta(0, 1)a$ gibt. L ist offen und nicht leer, weil $\mu \in L$. Wegen 2.2.3 ist L auch abgeschlossen, also $L = K_{2\delta}$. Mit 4) folgt daraus, dass f auf eine Umgebung von $\Delta(0, 1)a + z + K_\delta b'$, also insbesondere auf eine Umgebung von $\Delta(0, 1)a + z$ meromorph fortgesetzt werden kann.

q.e.d.

2.2.6 KOROLLAR: Der espace étalé $\mathcal{M}_E$ der meromorphen Funktionskeime über einem komplexen Banachraum E ist pseudokonvex, und folglich gelten für die meromorphen Funktionen auf E den Sätzen 2.1.3 und 2.1.4 entsprechende Fortsetzungssätze.

3. Bemerkungen

Bekanntlich ist die Klasse der pseudokonvexen Gebiete über einem komplexen Banachraum E mit Schauderbasis gleich der Klasse der Existenzgebiete der holomorphen Funktionen über E (siehe z.B. [23]). Mit den Methoden in [23] kann man beweisen, dass auch die Klasse der Existenzgebiete der meromorphen Funktionen über E damit zusammenfällt [2]. Folglich gelten für die Schnitte pseudokonvexer Gebiete über E die gleichen Fortsetzungssätze wie für die holomorphen und die meromorphen Funktionen auf E . In nicht separablen Banachräumen ist dies nicht immer richtig; aus [15] kann ein Fortsetzungssatz hergeleitet werden, der für die holomorphen und die meromorphen Funktionen in $c_0(\mathbb{R})$, jedoch nicht für alle stetigen Schnitte pseudokonvexer Gebiete über $c_0(\mathbb{R})$ gilt (siehe [1]).

Literatur

- [1] AURICH, V.: Kontinuitätssätze in Banachräumen. Dissertation. München 1977
- [2] AURICH, V.: Das meromorphe Leviproblem in unendlichdimensionalen Banachräumen. Erscheint in den Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1979
- [3] BEHNKE, H.: Der Kontinuitätssatz und die Regulärkonvexität. Math. Ann. 113, 392 - 397 (1936)
- [4] BEHNKE, H., STEIN, K.: Elementarfunktionen auf Riemann-

- schen Flächen. *Canad. J. Math.* 2, 152 - 165 (1950)
- [5] BEHNKE, H., STEIN, K.: Der Severische Satz über analytische Fortsetzung von Funktionen mehrerer Veränderlichen und der Kontinuitätssatz. *Ann. Mat. Pura Appl.* 26, 297 - 313 (1954)
- [6] BEHNKE, H., THULLEN, P.: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. *Erg. der Math.* 51. Springer 1970
- [7] BREMERMAN, H.: Pseudoconvex domains in linear topological spaces. *Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Minneapolis 1964.* Springer 1965
- [8] BREMERMAN, H.: Holomorphic functionals and complex convexity in Banach spaces. *Pacific J. Math.* 7, 811 - 831 (1957)
- [9] COEURE, G.: Fonctions plurisousharmoniques sur les espaces vectoriels topologiques et applications à l'étude des fonctions analytiques. *Ann. Inst. Fourier* 20, 361 - 432 (1970)
- [10] DOUADY, A.: A remark on Banach analytic spaces. *Symp. on Infinite Dimensional Topology. Ann. Math. Stud.* 69 Princeton Univ. Press 1972
- [11] FORSTER, O.: Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln. *Math. Z.* 97, 376 - 405 (1967)
- [12] GODEMENT, R.: Théorie des faisceaux. Paris: Hermann 1958
- [13] HARTOGS, F.: Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Münchener Akademie* 36 (1906)
- [14] HÖRMANDER, L.: An introduction to complex analysis in several variables. Princeton, N.J.: van Nostrand 1966
- [15] JOSEFSON, B.: A counterexample in the Levi problem. *Proceedings on Infinite Dimensional Holomorphy.* Springer Lecture Notes 364, 168 - 177 (1974)

- [16] KNESER, H.: Der Satz von dem Fortbestehen der wesentlichen Singularitäten einer analytischen Funktion zweier Veränderlichen. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 41, 164 - 168 (1932)
- [17] KNESER, H.: Ein Satz über die Meromorphiebereiche analytischer Funktionen von mehreren Veränderlichen. Math. Ann. 106, 648 - 665 (1932)
- [18] LELONG, P.: Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques. J. d'Anal. Math. 2, 179 - 207 (1952)
- [19] LELONG, P.: Fonctions plurisousharmoniques dans espaces vectoriels topologiques. Sémin. Lelong 67/68. Springer Lecture Notes 71 (1968)
- [20] LEVI, E.: Studi sui punti singolari essenziali delle funzioni anal. di due o più var. compl.. Ann. Mat. Pura Appl. 17 (1910)
- [21] RAMIS, J.P.: Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1970
- [22] ROTHSTEIN, W.: Die invariante Fassung des Kontinuitätssatzes für meromorphe Funktionen. Arch. der Math. 1, 119 - 126 (1948)
- [23] SCHOTTENLOHER, M.: The Levi problem for domains spread over locally convex spaces with Schauder decomposition. Ann. Inst. Fourier 26, 207 - 237 (1976)
- [24] SOEDER, H.: Beiträge zur Funktionentheorie in Banachschen Räumen. Schriftenreihe des Math. Inst. der Universität Münster, Heft 9 (1956)

Volker Aurich
Math. Inst. der Universität
Theresienstr. 39
D-8000 München 2
West Germany

(Eingegangen am 27. November 1979)