Das meromorphe Leviproblem in unendlichdimensionalen Banachräumen

Von Volker Aurich

Einleitung

Im Jahre 1954 lösten K. Oka, F. Norguet und H. Bremermann das klassische Leviproblem: Jedes pseudokonvexe Gebiet über dem $\boldsymbol{C}^n$ ist das Existenzgebiet einer holomorphen Funktion. Während der letzten Jahre wurde mehrfach versucht, dieses Ergebnis auf pseudokonvexe Gebiete über unendlichdimensionalen topologischen Vektorräumen auszudehnen. Für einige Klassen von Räumen ist dies gelungen, so z. B. für Banachräume mit Schauderbasis [4, 5, 6, 12]. Daß man bei Banachräumen die Voraussetzung, daß eine Schauderbasis existiert, nicht ersatzlos streichen kann, zeigte B. Josefson in [8]: Er konstruierte im Raum $c_0(\mathrm{I})$ mit überabzählbarer Indexmenge I ein pseudokonvexes Gebiet, das nicht Holomorphiegebiet ist.

In der vorliegenden Arbeit wird das entsprechende Problem für meromorphe Funktionen untersucht: Ist jedes pseudokonvexe Gebiet über einem komplexen Banachraum E das Existenzgebiet einer meromorphen Funktion? Für $E = \boldsymbol{C}^n$ ist die Frage zu bejahen (siehe z. B. [2, 9]); man kann nämlich eine nicht konstante holomorphe Funktion konstruieren, deren Nullstellen sich „gegen jeden Randpunkt häufen", sie läßt sich deshalb weder holomorph noch meromorph fortsetzen. Wir zeigen, daß eine ähnliche Konstruktion möglich ist, wenn E ein unendlichdimensionaler Banachraum mit Schauderbasis ist; dabei stützen wir uns wesentlich auf ein Resultat in [12]. In diesem Fall besteht infolgedessen kein Unterschied zwischen pseudokonvexen Gebieten über E, Existenzgebieten holomorpher oder meromorpher Funktionen und Holomorphie- oder Meromorphiehüllen. Besitzt E keine Schauderbasis, so sind diese Begriffe wie schon im holomorphen Fall so auch im meromorphen Fall nicht mehr äquivalent; Josefsons Gebiet ist nämlich auch kein Meromorphiegebiet. Immerhin läßt sich zeigen, daß ein Gebiet über $c_0(\mathrm{I})$, I überabzählbar, genau dann das Existenzgebiet einer holomorphen Funktion ist, wenn es das Existenzgebiet einer meromorphen Funktion ist, und daß es genau dann mit seiner Holomorphiehülle übereinstimmt, wenn es mit seiner Meromorphiehülle übereinstimmt.

1. Das meromorphe Leviproblem in Banachräumen mit Schauderbasis

Ω sei ein Gebiet über einem komplexen Banachraum E vermöge der Projektion $p : \Omega \to E$, d_Ω bezeichne die Randdistanz. Für $x \in E$ sei $B(x,r) := \{y \in E : \|y - x\| < r\}$. Ist $\mathcal{W}$ eine offene Überdeckung von Ω, so sei

$$A_{\mathcal{W}} := \{f \in \mathcal{O}(\Omega) : \|f\|_W < \infty \text{ für jedes } W \in \mathcal{W}\}.$$

Ω heißt $A_{\mathcal{W}}$ - separabel, wenn $A_{\mathcal{W}}$ die Punkte in jeder Faser von p trennt, und Ω heißt $A_{\mathcal{W}}$ - konvex, wenn $d_\Omega(\hat{A}_{\mathcal{W}}(W)) > 0$ für jedes $W \in \mathcal{W}$, wobei

$$\hat{A}_{\mathcal{W}}(W) := \{x \in \Omega : |f(x)| \leq \|f\|_W \text{ für jedes } f \in A_{\mathcal{W}}\}.$$

Die folgende Aussage ist wesentlich für die weiteren Betrachtungen. Sie ist ein Spezialfall von Satz 3.1 in [12].

1.1 Satz: Jedes pseudokonvexe Gebiet Ω über einem Banachraum mit Schauderbasis besitzt eine abzählbare offene Überdeckung $\mathcal{W} = (W_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ derart, daß $W_n \subset W_{n+1}$ für alle $n \in \boldsymbol{N}$ und daß Ω $A_{\mathcal{W}}$ - separabel und $A_{\mathcal{W}}$ - konvex ist.

Damit können wir nun folgenden Satz beweisen.

1.2 Satz: Auf jedem pseudokonvexen Gebiet Ω über einem Banachraum E mit Schauderbasis gibt es eine holomorphe Funktion, die weder holomorph noch meromorph fortgesetzt werden kann.

Beweis: Wir folgen der Beweisidee im Endlichdimensionalen und konstruieren zunächst eine holomorphe Funktion auf Ω, die „in jeder Umgebung jedes Randpunktes" Nullstellen beliebig hoher Ordnung hat (vgl. [7], p. 39). Wähle eine Überdeckung $\mathcal{W}$

wie in Satz 1.1. $V_n := \hat{A}_W(W_n)$ für jedes $n \in \boldsymbol{N}$. Ω ist separabel, weil E separabel ist; es gibt also eine abzählbare dichte Teilmenge M in Ω. Wähle eine Folge $(x_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ in M, in der jeder Punkt von M unendlich oft vorkommt. Für $n \in \boldsymbol{N}$ sei B_n die Zusammenhangskomponente von x_n in $p^{-1}(B(p(x_n), d_\Omega(x_n)))$; dabei bezeichnet $p : \Omega \to E$ wieder die Projektion des Gebietes. Wegen $d_\Omega(V_n) > 0$ enthält jedes B_n einen Punkt z_n, der nicht in V_n liegt. Aus der Definition von $\hat{A}_W$ (W_n) folgt, daß es Funktionen $f_n \in A_W$ gibt mit $|f_n(z_n)| = 1$ und $\|f_n\|_{V_n} < 2^{-n}$. Wir setzen nun

$$f := \prod_{n=1}^{\infty} (1 - f_n)^n.$$

f ist eine wohldefinierte Funktion, die auf Ω holomorph ist. f verschwindet nicht überall, aber alle Ableitungen bis zur n-ten Ordnung verschwinden in z_n.

Es gibt eine abzählbare Menge Q in E derart, daß $p^{-1}(Q)$ abzählbar und dicht in Ω ist und keine Nullstelle von f enthält. Man kann eine Funktion $g \in A_W$ finden, so daß $g(x) \neq g(y)$ für alle $(x,y) \in p^{-1}(Q) \times p^{-1}(Q)$ mit $p(x) = p(y)$ und $x \neq y$ (vgl. [11], S. 235). Zu jedem solchen Paar (x,y) gibt es höchstens ein $\lambda \in \boldsymbol{C}$, das der Gleichung $f(x) + \lambda f(x) g(x) = f(y) + \lambda f(y) g(y)$ genügt. Man kann also ein $\lambda \in \boldsymbol{C}$ wählen, das keine dieser Gleichungen erfüllt. Wir setzen $h := f + \lambda g f$. h ist holomorph auf Ω.

Zunächst zeigen wir, daß h nicht holomorph fortgesetzt werden kann. Dazu nehmen wir an, daß φ ein Morphismus von Ω in ein Gebiet Ξ über E mit Projektion $q : \Xi \to E$ sei und daß h^* eine holomorphe Funktion auf Ξ sei mit $h = h^* \circ \varphi$. Es ist zu zeigen, daß φ bijektiv ist.

φ ist injektiv: Sei $\varphi(x) = \varphi(y)$. Weil φ ein Morphismus von Gebieten über E ist, gibt es Umgebungen U_x von x und U_y von y, so daß $\varphi(U_x) = \varphi(U_y)$. Da h nach Konstruktion die Punkte in jeder Faser $p^{-1}(a)$, $a \in Q$, trennt und $p^{-1}(Q)$ dicht liegt, muß $x = y$ gelten. φ ist surjektiv: Wir nehmen an, $\varphi(\Omega)$ besitze in Ξ einen Randpunkt z. Wir wählen dann eine Umgebung U von z, die durch q topologisch auf eine Kugel $B(q(z), r)$ abgebildet wird, und setzen $W := (q|U)^{-1}(B(q(z). r/2))$. Weil M in Ω dicht ist, gibt es ein $n \in \boldsymbol{N}$, so daß $\varphi(x_n) \in W$. Folglich gilt

$$d_\Omega(x_n) \leq \|q(\varphi(x_n)) - q(z)\| \leq r/2,$$

also insbesondere $B_n \subset \varphi^{-1}(U)$. Damit ist gezeigt, daß jede Umgebung von z Nullstellen von h^* beliebig hoher Ordnung enthält, daß also der Keim von h^* in z Null sein muß. Dies widerspricht $h \neq 0$.

Es bleibt noch zu beweisen, daß h auch nicht meromorph fortgesetzt werden kann. Wir nehmen wieder an, daß φ ein Morphismus von Ω in ein Gebiet Ξ über E und m eine meromorphe Funktion auf Ξ mit $h = m \circ \varphi$ ist. Die Injektivität von φ folgt wie oben. φ ist surjektiv: Wir nehmen an, der Rand von $\varphi(\Omega)$ in Ξ sei nicht leer. Wie oben gezeigt wurde, kann m in keinem Randpunkt holomorph sein. Weil außerdem jeder Randpunkt Häufungspunkt von Nullstellen von m ist, muß der Rand $\partial\varphi(\Omega)$ in der Menge S der Unbestimmtheitsstellen von m enthalten sein. S ist eine analytische Menge (siehe [10], S. 31); folglich muß $\Xi - \overline{\varphi(\Omega)}$ leer sein, denn ansonsten gäbe es einen Weg von $\Xi - \overline{\varphi(\Omega)}$ nach $\varphi(\Omega)$, der $\partial\varphi(\Omega)$ nicht trifft, was aus topologischen Gründen nicht möglich ist. Weil die Kodimension von S mindestens zwei ist ([10], S. 76), folgt aus dem zweiten Riemannschen Hebbarkeitssatz ([10], S. 27), daß m überall holomorph ist. Widerspruch! q. e. d.

1.3 Satz: Für ein Gebiet Ω über einem Banachraum E mit Schauderbasis sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Ω ist pseudokonvex.
(ii) Ω ist das Existenzgebiet einer holomorphen Funktion.
(iii) Ω ist das Existenzgebiet einer meromorphen Funktion.
(iv) Ω stimmt mit seiner Holomorphiehülle überein.
(v) Ω stimmt mit seiner Meromorphiehülle überein.

Beweis: Die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) und (i) $\Rightarrow$ (iii) ergeben sich aus 1.2; (ii) $\Rightarrow$ (iv) und (iii) $\Rightarrow$ (v) sind trivial. Wir beweisen (iv) $\Rightarrow$ (i) und (v) $\Rightarrow$ (i). Die Holomorphie-(Meromorphie-)Hülle ist der verallgemeinerte Durchschnitt der Existenzgebiete der holomorphen (meromorphen) Funktionen (siehe z. B. [3]).

Weil der verallgemeinerte Durchschnitt von pseudokonvexen Gebieten wieder pseudokonvex ist, genügt es zu überlegen, daß das Existenzgebiet jeder holomorphen (meromorphen) Funktion pseudokonvex ist. Für holomorphe Funktionen ist dies wohlbekannt, ebenso für meromorphe Funktionen, falls $E = \mathbf{C}^n$. Für beliebige Banachräume E findet sich ein Beweis in [1]. q.e.d.

2. Das meromorphe Leviproblem in $c_0(I)$ mit überabzählbarer Indexmenge I

Ist I eine Menge, so bezeichne $c_0(\mathrm{I})$ den Vektorraum aller „durch I indizierten komplexen Nullfolgen" d. h. aller Funktionen $x : \mathrm{I} \to \mathbf{C}$ mit der Eigenschaft, daß $\{\mathrm{i} \in \mathrm{I} : |x(\mathrm{i})| > r\}$ für jedes $r > 0$ endlich ist. Unter der Supremumsnorm ist $c_0(\mathrm{I})$ ein Banachraum. Wenn I abzählbar ist, besitzt $c_0(\mathrm{I})$ eine Schauderbasis, und die Ergebnisse des ersten Abschnittes kommen zur Anwendung. Deshalb setzen wir von nun an voraus, daß I überabzählbar ist.

Für $J \subset I$ betrachten wir $c_0(J)$ als Unterraum von $c_0(\mathrm{I})$; π_J bezeichne die kanonische Projektion $x \to x\,|J$ von $c_0(\mathrm{I})$ auf $c_0(J)$. Die Abbildung (π_J, π_{I-J}): $c_0(\mathrm{I}) \to c_0(J) \times c_0(I-J)$ ist ein isometrischer Isomorphismus, wenn $c_0(J) \times c_0(I-J)$ mit dem Maximum der Normen von $c_0(J)$ und $c_0(I-J)$ versehen wird.

Ω sei ein Gebiet über $c_0(I)$ mit der Projektion $p : \Omega \to c_0(I)$. Wir sagen, daß eine holomorphe (meromorphe) Funktion f auf Ω in einer Menge $U \subset \Omega$ nur von $J \subset I$ abhängt, und schreiben $dep(f, U) \subset J$, wenn es eine holomorphe (meromorphe) Funktion g auf $\pi_J \cdot p(U)$ gibt mit $f\,|U = g \cdot \pi_J \cdot p\,|U$. Wir sagen, daß f bei $x \in \Omega$ nur von J abhängt, wenn f in einer geeigneten Umgebung U von x nur von J abhängt. $O_J(\Omega)$ $(\mathcal{M}_J(\Omega))$ bezeichne den Raum der holomorphen (meromorphen) Funktionen auf Ω, die bei jedem Punkt nur von J abhängen.

2.1 Lemma: Seien $U \subset c_0(J)$ und $V \subset c_0(I-J)$, $J \subset I$, Gebiete und f eine holomorphe oder meromorphe Funktion auf $U \times V$. Gilt dann $dep(f,x) \subset J$ für ein $x \in U \times V$, so gilt sogar $dep(f, U) \subset J$.

Beweis: O. E., sei f in x holomorph. Dann ist $g(y) := f(\pi_J(y), \pi_{I-J}(x))$ die gewünschte Faktorisierung auf Grund des Identitätssatzes. q. e. d.

Das folgende wichtige Resultat stammt von Josefson [8].

2.2 Satz: Ist f holomorph auf einer Kugel B in $c_0(I)$, so gibt es eine abzählbare Menge $J \subset I$ mit $dep(f, B) \subset J$.

2.3 Korollar: Ist m meromorph in einer Umgebung von $x \in c_0(I)$, so gibt es eine abzählbare Menge $J \subset I$ mit $dep(m, x) \subset J$.

Beweis: Jede meromorphe Funktion ist lokal der Quotient zweier holomorpher Funktionen.

2.4 Korollar: Ω sei ein Gebiet über $c_0(I)$. Dann gilt:

a) $\mathcal{O}(\Omega) = \bigcup \{\mathcal{O}_J(\Omega) : J \subset I \text{ abzählbar}\}$

b) $\mathcal{M}(\Omega) = \bigcup \{\mathcal{M}_J(\Omega) : J \subset I \text{ abzählbar}\}$.

Beweis: Folgerung von 2.1, 2.2, 2.3.

In [8] konstruiert Josefson ein pseudokonvexes Gebiet Ω in $c_0(I)$, I überabzählbar, mit folgender Eigenschaft: 0 ist ein Randpunkt von Ω und besitzt eine Umgebung U, in die jede auf Ω holomorphe Funktion holomorph fortgesetzt werden kann. Berücksichtigt man 2.3, so folgt aus Josefsons Beweis, daß auch jede auf Ω meromorphe Funktion meromorph nach U fortgesetzt werden kann. Deshalb ist Ω weder das Existenzgebiet einer meromorphen Funktion noch Meromorphiehülle; trotzdem ist Ω pseudokonvex, ja sogar holomorphkonvex.

2.5 Satz: Folgende Eigenschaften sind für ein Gebiet Ω über $c_0(I)$ äquivalent.

(i) Ω ist das Existenzgebiet einer holomorphen Funktion f.

(ii) Ω ist das Existenzgebiet einer meromorphen Funktion f.

(iii) Ω ist pseudokonvex, und es gibt eine abzählbare Menge $J \subset I$ und ein Gebiet Ω_J über $c_0(J)$, so daß Ω als Gebiet über $c_0(I)$ isomorph zu $\Omega_J \times c_0(I - J)$ ist.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (iii) und (ii) $\Rightarrow$ (iii):

Ist f holomorph, so ist wohlbekannt, daß Ω pseudokonvex ist; für meromorphes f wird die Pseudokonvexität von Ω in [1] bewiesen. Gemäß 2.4 gibt es eine abzählbare Menge $J \subset I$, so daß $f \in \mathcal{M}_J(\Omega)$. p sei die Projektion von Ω nach $c_0(I)$. Wir zeigen, daß jeder Punkt von Ω eine Umgebung besitzt, die durch p topologisch auf ein Gebiet $D \times c_0(I - J)$ mit $D \subset c_0(J)$ abgebildet wird. Sei $y \in \Omega$. Dann gibt es eine Umgebung U von y, so daß U durch p topologisch auf $p(U)$ abgebildet wird und $g := f \circ (p\,|U)^{-1}$ holomorph (meromorph) über $\pi_J|p(U) : p(U) \to \pi_J \cdot p(U)$ faktorisiert werden kann. Deshalb läßt sich g auf $W := \pi_J \cdot p(U) \times$ $\times\ c_0(I - J)$ fortsetzen. Weil Ω das Existenzgebiet von f ist, gibt es einen Morphismus von W nach Ω, der W auf eine Umgebung V von y abbildet; folglich ist $p|V$ injektiv und bildet V topologisch auf W ab.

Sei nun Ω_J die Menge der Zusammenhangskomponenten der Fasern von $\pi_J \circ p$. Ω_J trage die Finaltopologie bezüglich der kanonischen Abbildung $\varphi : \Omega \to \Omega_J$. Dann gibt es eine lokaltopologische Abbildung $q : \Omega_J \to c_0(J)$ mit $\pi_J \circ p = q \circ \varphi$ d. h. Ω_J ist vermöge q ein Gebiet über $c_0(J)$. Aus der oben hergeleiteten lokalen Produktdarstellung von Ω folgt, daß $(\varphi, \pi_{I-J} \circ p)$ ein Isomorphismus von Ω und $\Omega_J \times c_{,}(I - J)$ ist.

(iii) $\Rightarrow$ (i) und (iii) $\Rightarrow$ (ii):

Ω_J ist pseudokonvex, weil Ω es ist. Da J abzählbar ist, besitzt $c_0(J)$ eine Schauderbasis; nach 1.2 ist deshalb Ω_J das Existenzgebiet einer holomorphen (meromorphen) Funktion f. Dann ist aber Ω das Existenzgebiet von $f \circ \varphi$, wobei $\varphi : \Omega \to \Omega_J$ die durch den Isomorphismus von Ω und $\Omega \times c_0(I - J)$ auf kanonische Weise induzierte Abbildung ist. q. e. d.

2.6 Korollar: Die Klasse der Holomorphiehüllen über $c_{,}(I)$ stimmt mit der Klasse der Meromorphiehüllen über $c_0(I)$ überein.

Beweis: Folgerung aus 2.5, weil man beide Hüllen als verallgemeinerten Durchschnitt von Existenzgebieten erhält. q. e. d.

Jedes konvexe Gebiet ist seine eigene Holomorphie- und Meromorphiehülle. Wegen 2.5 ist jedoch eine beschränkte Kugel in $c_0(I)$, I überabzählbar, weder das Existenzgebiet einer holomorphen noch das einer meromorphen Funktion. Wir können dies folgendermaßen zusammenfassen:

$$\underbrace{\text{Klasse der Holomorphiehüllen} = \text{Klasse der Meromorphiehüllen}}_{\text{echt enthalten in der}}$$

$$\underbrace{\begin{array}{lcl} \text{Klasse der Existenzgebiete} & = & \text{Klasse der Existenzgebiete} \\ \text{holomorpher Funktionen} & & \text{meromorpher Funktionen} \end{array}}_{\text{echt enthalten in der}}$$

Klasse pseudokonvexer Gebiete.

Literatur:

[1] V. Aurich, Kontinuitätssätze in Banachräumen. Dissertation. München 1977.

[2] H. Behnke, P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. der Math. 51 (1970). Springer.

[3] G. Coeuré, Analytic functions and manifolds in infinite dimensional spaces. North Holland 1974.

[4] S. Dineen, Ph. Noverraz, M. Schottenloher, Le problème de Levi dans certains espaces vectoriels topologiques localement convexes. Bull. Soc. Math. France 104 (1976), 87–97.

[5] L. Gruman, C. O. Kiselman, Le problème de Levi dans les espaces de Banach à base. C. R. Acad. Sci. 274 A (1972), 1296–1299.

[6] Y. Hervier, Sur le problème de Levi pour les espaces étalés banachiques. C. R. Acad. Sci. 275 A (1972), 821–824.

[7] L. Hörmander, An introduction to complex analysis in several variables. Van Nostrand 1966.

[8] B. Josefson, A counterexample to the Levi problem. In: Proceedings on Infinite Dimensional Holomorphy, S. 168–177. Springer Lectures Notes 364 (1974).

[9] J. Kajiwara, E. Sakai, Generalization of Levi-Oka's theorem concerning meromorphic functions. Nagoya Math. J. 29 (1967), 75–84.

[10] J. P. Ramis, Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe. Erg. der Math. 53 (1970). Springer.

[11] M. Schottenloher, Analytic continuation and regular classes in locally convex Hausdorff spaces. Port. Math. 33 (1974), 219–250.

[12] M. Schottenloher, The Levi problem for domains spread over locally convex spaces with a finite dimensional Schauder decomposition. Ann. Inst. Four. 26 (1976), 207–237.