# Nicht-Nuklearität von Räumen beliebig oft differenzierbarer Funktionen

Von

Reinhold Meise

Seit den Untersuchungen von Grothendieck [5], II. § 2, no. 3, Thm. 10 ist bekannt, daß der Raum $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ der auf einer offenen Teilmenge $\Omega$ des $\mathbb{R}^N$ beliebig oft differenzierbaren Funktionen nuklear ist, wenn man ihn mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz aller Ableitungen auf den kompakten Teilmengen von $\Omega$ versieht. Ist $\Omega$ eine offene Teilmenge eines reellen lokalkonvexen (Hausdorffschen) Raumes $E$, so gibt es i. allg. verschiedene Möglichkeiten für die Einführung lokalkonvexer Räume aus beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen auf $\Omega$. In [7] wurde vom Verfasser gezeigt, daß sich der Raum $\mathscr{C}^\infty_{co}(\Omega)$ der beliebig oft stetig kompakt differenzierbaren Funktionen auf $\Omega$ in mancherlei Hinsicht so verhält, wie man es vom endlichdimensionalen Fall her kennt. Insbesondere wurde gezeigt, daß $\mathscr{C}^\infty_{co}(\Omega)$ unter gewissen Voraussetzungen an $E$ ein Schwartzraum ist. Aufgrund der Nuklearitätsresultate von Boland [2] und Waelbroeck [9] im komplexen Fall war von daher die Frage naheliegend, ob Nuklearität auch bei lokalkonvexen Räumen beliebig oft stetig differenzierbarer Funktionen auf unendlichdimensionalen lokalkonvexen Räumen vorkommen kann. In der vorliegenden Note wollen wir zeigen, daß dies nicht der Fall ist, wenn der reelle lokalkonvexe Raum $E$ eine unendlichdimensionale absolutkonvexe kompakte Menge enthält.

Herrn K.-D. Bierstedt, Herrn B. Gramsch und Herrn D. Vogt möchte ich für Gespräche über den Gegenstand dieser Arbeit herzlich danken.

**1. Einführung der Räume $\mathscr{C}^\infty_{\mathfrak{S}}(\Omega)$.** Sei $E$ ein reeller lokalkonvexer Raum und $\mathfrak{S}$ ein System beschränkter Teilmengen von $E$, welches bezüglich Inklusion nach oben gerichtet ist und welches $E$ überdeckt. Dann bezeichnet man üblicherweise für einen beliebigen reellen lokalkonvexen Raum $F$ mit $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ den Raum der stetigen linearen Abbildungen von $E$ in $F$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mengen in $\mathfrak{S}$. Wir definieren induktiv für $n \in \mathbb{N}_0$ die Räume $L^n_{\mathfrak{S}}(E, F)$ durch $L^0_{\mathfrak{S}}(E, F) := F$ und $L^{n+1}_{\mathfrak{S}}(E, F) := L_{\mathfrak{S}}(E, L^n_{\mathfrak{S}}(E, F))$. Die Elemente von $L^n_{\mathfrak{S}}(E, F)$ kann man für $n \in \mathbb{N}$ in kanonischer Weise als $n$-lineare Abbildungen von $E^n$ in $F$ auffassen.

Ist $\Omega \neq \emptyset$ eine offene Teilmenge von $E$, so definieren wir wie in [7], 2.2. den Raum der beliebig oft stetig $\mathfrak{S}$-differenzierbaren Funktionen auf $\Omega$ mit Werten in

$F$ als

$$\mathscr{C}^\infty_{\mathfrak{S}}(\Omega, F) := \{f : \Omega \to F \mid \textit{für jedes } j \in \mathbb{N}_0 \textit{ gibt es } f_j \in \mathscr{C}(\Omega, L^{\mathfrak{S}}_j(E, F)), \textit{ so daß } f_0 = f \textit{ gilt, und so daß } f_j \textit{ auf } \Omega \textit{ Gâteaux differenzierbar ist mit } f'_j = f_{j+1} \textit{ für jedes } j \in \mathbb{N}_0\}.$$

Dieser Vektorraum wird topologisiert durch das folgende System von Halbnormen

$$p_{l,K,S,q}: f \to \sup_{0 \leq j \leq l} \sup_{x \in K} \sup_{y \in S^j} q(f_j(x)[y]), \tag{1}$$

wobei $l \in \mathbb{N}_0$, $K$ kompakt in $\Omega$, $S \in \mathfrak{S}$ und die stetige Halbnorm $q$ auf $F$ jeweils beliebig gewählt werden können. Statt $\mathscr{C}^\infty_{\mathfrak{S}}(\Omega, \mathbb{R})$ schreiben wir $\mathscr{C}^\infty_{\mathfrak{S}}(\Omega)$.

**2. Bemerkung.** a) Eine Anwendung der Mittelwertabschätzung (siehe [7], 2.3.) zeigt, daß jede der Funktionen $f_j$ (die man natürlich als $j$-te Ableitung von $f$ bezeichnen wird) in dem folgenden Sinn $\mathfrak{S}$-differenzierbar ist: Für jedes $a \in \Omega$ und jedes $S \in \mathfrak{S}$ gilt

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (f_j(a + th) - f_j(a) - f_{j+1}(a)[th]) = 0$$

gleichmäßig in $h \in S$. Daher stimmen die Funktionen in $\mathscr{C}^\infty_{\mathfrak{S}}(\Omega, F)$ mit den in Keller [6], 2.5.0 definierten Funktionen der Klasse $\mathscr{C}^\infty_{\mathfrak{S}}$ überein. Es sei darauf hingewiesen, daß (etwa auf (F)-Räumen) für verschiedene Systeme $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ die Vektorräume $\mathscr{C}^\infty_{\mathfrak{S}_1}(\Omega, F)$ und $\mathscr{C}^\infty_{\mathfrak{S}_2}(\Omega, F)$ übereinstimmen können, ohne daß ihre Topologien gleich sind; vgl. Keller [6], 2.9.1–2.9.4.

b) Für endlichdimensionales $E$ und dem System aller kompakten Teilmengen von $E$ als $\mathfrak{S}$ liefert $\mathscr{C}^\infty_{\mathfrak{S}}(\Omega, F)$ gerade den üblicherweise mit $\mathscr{C}^\infty(\Omega, F)$ bezeichneten lokalkonvexen Raum.

Bevor wir das angekündigte Resultat beweisen, stellen wir noch zwei Hilfssätze bereit.

**3. Lemma.** *Seien $E_1$, $E_2$ und $F$ reelle lokalkonvexe Räume und $\mathfrak{S}_j$ Systeme beschränkter Mengen in $E_j$, welche $E_j$ überdecken ($j = 1, 2$). $\pi$: $E_2 \to E_1$ sei stetig und linear, und zu jedem $S_2 \in \mathfrak{S}_2$ gebe es ein $S_1 \in \mathfrak{S}_1$ mit $\pi(S_2) \subset S_1$. Ferner sei für $\Omega_1 \neq \emptyset$ offen in $E_1$ die Menge $\Omega_2$ als $\pi^{-1}(\Omega_1)$ definiert. Dann wird durch $\pi$: $f \to f \circ \pi$ eine stetige lineare Abbildung $\pi$: $\mathscr{C}^\infty_{\mathfrak{S}_1}(\Omega_1, F) \to \mathscr{C}^\infty_{\mathfrak{S}_2}(\Omega_2, F)$ definiert.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß für $f \in \mathscr{C}^\infty_{\mathfrak{S}_1}(\Omega, F)$ die Funktion $f \circ \pi$ in $\mathscr{C}^\infty_{\mathfrak{S}_2}(\Omega_2, F)$ ist. Aufgrund der Voraussetzung ist die durch $\pi$ induzierte lineare Abbildung $\pi_1$: $L^1_{\mathfrak{S}_1}(E_1, F) \to L^1_{\mathfrak{S}_2}(E_2, F)$, $\pi_1(u) = u \circ \pi$ stetig. Hieraus folgt durch Induktion, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ die induzierte Abbildung

$$\pi_{n+1}: L^{n+1}_{\mathfrak{S}_1}(E_1, F) \to L^{n+1}_{\mathfrak{S}_2}(E_2, F), \quad \pi_{n+1}(u) := \pi_n \circ u \circ \pi,$$

stetig ist. Wir setzen außerdem $\pi_0 = \mathrm{id}_F$. Ist nun $f \in \mathscr{C}^\infty_{\mathfrak{S}_1}(\Omega_1, F)$, so ist nach Voraussetzung für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ $f^{(n)}$, die $n$-te Ableitung von $f$, in $\mathscr{C}(\Omega_1, L^n_{\mathfrak{S}_1}(E_1, F))$. Folglich ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Funktion $g_n := \pi_n \circ f^{(n)} \circ \pi$ in $\mathscr{C}(\Omega_2, L^n_{\mathfrak{S}_1}(E_2, F))$. Dann gilt für beliebiges $a \in \Omega_2$, jedes $h \in E_2$ und alle $t \in \mathbb{R}$, für die $0 < |t|$ hinreichend klein ist:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\left[g_n(a+th)-g_n(a)-g_{n+1}(a)[th]\right] \\
&=\frac{1}{t}\left[\pi_n(f^{(n)}(\pi(a)+t\pi(h)))-\pi_n(f^{(n)}(\pi(a)))-\pi_{n+1}(f^{(n+1)}(\pi(a))[th]\right] \\
&=\pi_n\left(\frac{1}{t}\left[f^{(n)}(\pi(a)+t\pi(h))-f^{(n)}(\pi(a))-f^{(n+1)}(\pi(a))[t\pi(h)]\right]\right).
\end{aligned}$$

Da $\pi_n$ stetig und linear, und da $f^{(n)}$ in $\pi(a)$ Gâteaux-differenzierbar ist, folgt hieraus die Gâteaux-Differenzierbarkeit von $g_n$ in $a$. Damit haben wir gezeigt, daß $g=f\circ\pi$ in $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}_2}^{\infty}(\Omega_2, F)$ ist, und daß für alle $x\in\Omega_2$, alle $n\in\mathbb{N}_0$ und alle $y\in E_2^n$ gilt

(2) $$(f\circ\pi)^{(n)}(x)[y]=\pi_n\circ f^{(n)}(\pi(x))[y]=f^{(n)}(\pi(x))[\pi^n(y)].$$

Die Stetigkeit von $\pi$ folgt nun aufgrund der Voraussetzungen und der Definition der Halbnormen (1) unmittelbar aus (2).

Der folgende Hilfssatz besagt, daß die Garbe der $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}^{\infty}$-Funktionen auf einem lokalkonvexen Raum $E$ eine lokalkonvexe Garbe ist (vgl. etwa Bungart [3], 6. oder auch Bierstedt, Gramsch und Meise [1], 1.1). Auf die Ausführung des einfachen Beweises verzichten wir.

**4. Lemma.** *Seien $E$ und $F$ reelle lokalkonvexe Räume; $\Omega$ und $(\Omega_i)_{i\in I}$ seien offene Teilmengen von $E$ mit $\Omega=\bigcup_{i\in I}\Omega_i$. Dann ist für jedes System $\mathfrak{S}$ wie in 1. die Abbildung*

$$J\colon \mathscr{C}_{\mathfrak{S}}^{\infty}(\Omega, F)\to\prod_{i\in I}\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}^{\infty}(\Omega_i, F),\qquad J(f):=(f\,|\,\Omega_i)_{i\in I},$$

*ein injektiver stetiger topologischer Homomorphismus.*

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu dem wesentlichen Resultat dieser Note:

**5. Satz.** *Sei $E$ ein reeller lokalkonvexer Raum und $\mathfrak{S}$ ein System beschränkter Mengen wie in 1., welches die kompakten Teilmengen von $E$ enthält. Gibt es in $E$ eine unendlichdimensionale kompakte absolutkonvexe Menge, so ist für jede offene Teilmenge $\Omega\neq\emptyset$ von $E$ der lokalkonvexe Raum $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}^{\infty}(\Omega)$ nicht nuklear.*

Beweis. a) Es genügt zu zeigen, daß $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}^{\infty}(E)$ nicht nuklear ist: Gibt es nämlich eine offene Teilmenge $\Omega\neq\emptyset$ von $E$, für die $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}^{\infty}(\Omega)$ nuklear ist, so ist für jedes $x\in E$ auch $C_{\mathfrak{S}}^{\infty}(\Omega+x)$ nuklear; denn $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}^{\infty}(\Omega)$ und $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}^{\infty}(\Omega+x)$ sind topologisch isomorph. Folglich ist $\prod_{x\in E}\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}^{\infty}(\Omega+x)$ nuklear und damit nach Lemma 4 auch $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}^{\infty}(E)$.

b) Wir zeigen, daß die Nuklearität von $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}^{\infty}(E)$ die folgende Aussage impliziert:

(3) Es gibt ein $l\in\mathbb{N}$, so daß für alle $N\in\mathbb{N}$ die kanonische Einbettung $B_N$ des Raumes $\mathscr{C}_{2\pi}^{l}(N)$ der $[0,2\pi]^N$-periodischen $l$-mal stetig differenzierbaren Funktionen in den Raum $L^2([0,2\pi]^N)$ vom Typ $\ell^{1/2}$ (vgl. Pietsch [8], 8.2.1) ist.

Dazu sei zunächst $K$ eine unendlichdimensionale absolutkonvexe kompakte Menge in $E$. Nimmt man an, daß $\mathscr{C}^\infty_\mathfrak{S}(E)$ nuklear ist, so gibt es (siehe Pietsch [8]) zu der stetigen Halbnorm $p_{0,K}$ auf $\mathscr{C}^\infty_\mathfrak{S}(E)$ eine stetige Halbnorm $p_{l,Q,S} \geqq p_{0,K}$, sodaß die kanonische Abbildung

$$\varkappa: (\mathscr{C}^\infty_\mathfrak{S}(E))_{p_{l,Q,S}} \to (\mathscr{C}^\infty_\mathfrak{S}(E))_{p_{0,K}}$$

zwischen den zugehörigen normierten Räumen vom Typ $\ell^{1/2}$ ist. Wie man leicht nachprüft, induziert die Einschränkungsabbildung

$$\varrho_K: \mathscr{C}^\infty_\mathfrak{S}(E) \to \mathscr{C}(K), \quad \varrho_K(f) := f|K,$$

eine stetige lineare Abbildung $\tilde{\varrho}_K: (\mathscr{C}^\infty_\mathfrak{S}(E))_{p_{0,K}} \to \mathscr{C}(K)$. Da die Abbildungen vom Typ $\ell^p$ die Idealeigenschaft haben (Pietsch [8], 8.2.8), ist auch $\varkappa_K := \tilde{\varrho}_K \circ \varkappa$ vom Typ $\ell^{1/2}$. Weil $\mathscr{C}(K)$ vollständig ist, kann man $\hat{\varkappa}_K$ stetig auf die vollständige Hülle $\widehat{(\mathscr{C}^\infty_\mathfrak{S}(E))}_{p_{l,Q,S}}$ von $(\mathscr{C}^\infty_\mathfrak{S}(E))_{p_{l,Q,S}}$ fortsetzen. Aus der Definition der Approximationszahlen (Pietsch [8], 8.1.1) folgt, daß die Fortsetzung $\hat{\varkappa}_K$ dann ebenfalls vom Typ $\ell^{1/2}$ ist.

Weiterhin wählen wir eine linear unabhängige Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $K$ und bezeichnen für $N \in \mathbb{N}$ die lineare Hülle von $\{x_1, \ldots, x_N\}$ mit $E_N$. $\pi_N$ sei eine fest gewählte stetige lineare Projektion von $E$ auf $E_N$. Da $\mathfrak{S}$ aus beschränkten Mengen besteht und die kompakten Teilmengen von $E$ enthält, folgt aufgrund von Bemerkung 2.b) mit Lemma 3, daß $\pi_N$ eine stetige lineare Abbildung

$$\tilde{\pi}_N: \mathscr{C}^\infty(E_N) \to \mathscr{C}^\infty_\mathfrak{S}(E), \quad \tilde{\pi}_N(f) = f \circ \pi_N,$$

induziert. Verknüpft man $\tilde{\pi}_N$ mit der kanonischen Abbildung

$$q: \mathscr{C}^\infty_\mathfrak{S}(E) \to (\mathscr{C}^\infty_\mathfrak{S}(E))_{p_{l,Q,S}},$$

so erhält man eine stetige lineare Abbildung $\sigma_N = q \circ \tilde{\pi}_N$. Diese ist offenbar stetig bezüglich der von $\mathscr{C}^l(E_N)$ auf $\mathscr{C}^\infty(E_N)$ induzierten Topologie. Da $\mathscr{C}^\infty(E_N)$ in $\mathscr{C}^l(E_N)$ dicht liegt, erhält man durch stetige Fortsetzung von $\sigma_N$ eine stetige lineare Abbildung

$$\hat{\sigma}_N: \mathscr{C}^l(E_N) \to \widehat{(\mathscr{C}^\infty_\mathfrak{S}(E))}_{p_{l,Q,S}}.$$

Also ist auch

$$(4) \qquad \lambda_N := \hat{\varkappa}_K \circ \hat{\sigma}_N: \mathscr{C}^l(E_N) \to \mathscr{C}(K)$$

vom Typ $\ell^{1/2}$.

Bezeichnet man nun das Intervall $\left[0, \frac{1}{2N}\right]$ mit $I_N$, so ist die Abbildung

$$j_N: I_N^N \to E, \quad j_N(t_1, \ldots, t_N) := \sum_{n=1}^N t_n x_n,$$

stetig und hat Werte in $K \cap E_N$, da $K$ absolutkonvex ist. Folglich ist die Abbildung

$$\tilde{j}_N: \mathscr{C}(K) \to L^2(I_N^N), \quad \tilde{j}_N(f) := f \circ j_N,$$

stetig und linear. Beachtet man schließlich noch, daß der Raum $\mathscr{C}^l_{I_N^N\text{-per}}(\mathbb{R}^N)$ der

$I_N^N$-periodischen Funktionen in $\mathscr{C}^l(\mathbb{R}^N)$ vermöge der Inklusion $i_N$,

$$i_N(f)\left[\sum_{n=1}^{N} t_n x_n\right] := f(t_1, \ldots, t_N),$$

stetig in $\mathscr{C}^l(E_N)$ eingebettet ist, so erhält man mit (4), daß die Abbildung

$$A_N = \tilde{j}_N \circ \lambda_N \circ i_N \colon \mathscr{C}^l_{I_N^N\text{-per}}(\mathbb{R}^N) \to L^2(I_N^N)$$

vom Typ $\ell^{1/2}$ ist. Die Abbildung $A_N$ ist aber nichts anderes als die Inklusion. Wendet man nun noch ein Streckungsargument an, so folgt (3).

c) Wir zeigen nun, daß die Aussage (3) falsch ist. Damit ist dann nachgewiesen, daß die Annahme der Nuklearität von $\mathscr{C}^\infty_{\mathfrak{S}}(E)$ zu einem Widerspruch führt.

Um zu zeigen, daß $B_N$ für hinreichend großes $N$ nicht vom Typ $\ell^{1/2}$ sein kann, verwenden wir eine Modifikation der Beweisidee von Gramsch [4], Bemerkung nach Lemma 1. Dazu definieren wir den Hilbertraum $H_N$ als

$$H_N = \left\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_N} \,\Big|\, \sum_{n \in \mathbb{N}_N} \left(\prod_{j=1}^{N} n_j^2\right)\left(\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^N \\ |\alpha| \leqq l}} n^{2\alpha} |a_n|^2\right) < \infty\right\}.$$

Dann ist die Abbildung $C_N \colon H_N \to \mathscr{C}^l_{2\pi}(N)$,

$$C_N((a_m)_{n \in \mathbb{N}_N}) \colon (x_1, \ldots, x_N) \to \sum_{n \in \mathbb{N}_N} a_n \prod_{j=1}^{N} \sin n_j x_j,$$

stetig, weswegen $D_N := B_N \circ C_N$ nach (3) vom Typ $\ell^{1/2}$ ist. Beachtet man, daß die Funktionen $f_n \colon x \to \prod_{j=1}^{N} \sin n_j x_j$, $n \in \mathbb{N}^N$, in $L^2([0, 2\pi]^N)$ ein Orthogonalsystem bilden, so erhält man wie im Beweis von Lemma 1 in Gramsch [4] die Approximationszahlen von $D_N$ als die fallende Umordnung der Familie

$$\left(\left(2^N \prod_{j=1}^{N} n_j \left(\sum_{|\alpha| \leqq l} n^{2\alpha}\right)^{1/2}\right)^{-1}\right)_{n \in \mathbb{N}_N}.$$

Eine einfache Anzahlabschätzung zeigt schließlich, daß diese Familie nicht in $\ell^{1/2}$ ist für $N \geqq l + 2$.

**6. Bemerkung.** a) Satz 5 wurde für reellwertige Funktionen formuliert. Er gilt ganz analog für komplexwertige Funktionen, wie eine Beweisanalyse zeigt.

b) Ist $E$ die abzählbare lokalkonvexe direkte Summe von $\mathbb{R}$, so ist jede beschränkte (also auch jede kompakte) Menge endlich dimensional. In diesem Fall ist in der Tat für jede offene Teilmenge $\Omega \neq \emptyset$ von $E$ der Raum $\mathscr{C}^\infty_{\mathfrak{S}}(\Omega)$ nuklear, falls $\mathfrak{S}$ das System der kompakten Teilmengen umfaßt. Der einfache Beweis dieser Aussage wurde in [7], 2.14 angegeben.

c) Wir bezeichnen das System der kompakten Teilmengen eines lokalkonvexen Raumes $E$ mit $co$. In [7], 2.11 wurde gezeigt, daß für jede offene Teilmenge $\Omega \neq \emptyset$ von $E$ der Raum $\mathscr{C}^\infty_{co}(\Omega)$ ein Schwartzraum ist, falls jede kompakte Menge $K$ in $E$ sehr kompakt ist (d.h., bereits kompakt in einem stetig in $E$ eingebetteten Banachraum liegt). Setzt man die Quasivollständigkeit von $E$ voraus, so ist diese Bedingung äquivalent dazu, daß $E'_{co}$ ein Schwartzraum ist (vgl. [7], 2.12). In Verbindung mit der komplexwertigen Fassung von Satz 5 und dem Nuklearitätsresultat von Boland [2] und Waelbroeck [9] erhält man hieraus das folgende Beispiel: Ist $\Omega \neq \emptyset$ eine offene Teilmenge eines komplexen (DFN)-Raumes $E$, so bildet der Raum $\mathscr{H}(\Omega)$ der auf $\Omega$ holomorphen Funktionen (versehen mit der kompakt-offenen Topologie) einen nuklearen topologischen Teilraum des nicht-nuklearen Schwartzschen Fréchetraumes $\mathscr{C}^{\infty}_{co}(\Omega)$.

**Literaturverzeichnis**

[1] K.-D. BIERSTEDT, B. GRAMSCH und R. MEISE, Approximationseigenschaft, Lifting und Kohomologie bei lokalkonvexen Produktgarben. Manuscripta Mathematica **19**, 319–364 (1976).
[2] P. J. BOLAND, An example of a nuclear space in infinite dimensional holomorphy. Arkiv f. mat. **15**, 87–91 (1977).
[3] L. BUNGART, Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas. Trans. Amer. Math. Soc. **111**, 317–344 (1964).
[4] B. GRAMSCH, Zum Einbettungssatz von Rellich bei Sobolevräumen. Math. Z. **106**, 81–87 (1968).
[5] A. GROTHENDIECK, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. **16**, reprint 1966.
[6] H. H. KELLER, Differential calculus in locally convex spaces. LNM **417** (1974).
[7] R. MEISE, Spaces of differentiable functions and the approximation property, p. 265–307, in "Functional Analysis and Approximation Theory". J. B. Prolla (Editor). North-Holland Mathematics Studies **35** (1979).
[8] A. PIETSCH, Nukleare lokalkonvexe Räume. Berlin 2. Auflage, 1969.
[9] L. WAELBROECK, The nuclearity of $\mathcal{O}(U)$, p. 425–435, in "Infinite Dimensional Holomorphy and Applications", M. C. Matos (Editor). North Holland Mathematics Studies **12** (1977).

Eingegangen am 3. 4. 1979

Anschrift des Autors:

R. Meise
Mathematisches Institut
der Universität Düsseldorf
Universitätsstr. 1
D-4000 Düsseldorf