Math. Ann. 198, 161—178 (1972)

Darstellung temperierter vektorwertiger Distributionen durch holomorphe Funktionen II

REINHOLD MEISE

Die vorliegende Note schließt an [11] an und liefert unter anderem den Beweis der dort angekündigten Behauptung, daß sich jede temperierte Vektordistribution mit Werten in einem vollständigen lokalkonvexen Raum als Randverteilung einer holomorphen Funktion darstellen läßt. Der Unterschied zu [11] besteht darin, daß stärker wachsende holomorphe Funktionen herangezogen werden. Genauer gesagt, der in [11] benutzte Raum $H(N, E)$ wird ersetzt durch den Raum $H^e(N, E)$ aller in $(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^N$ holomorphen Funktionen f, welche unter jeder stetigen Linearform e' auf E ein Wachstum der folgenden Art haben

$$|e'\circ f(z)| \leqq C \prod_{j=1}^{N} ((1+|z_j|)\, e^{|\mathrm{Im}(z_j)|} \Delta(z_j))^n ,$$

wobei

$$\Delta(z_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\mathrm{Im}(z_j)| \geqq 1 \\ |\mathrm{Im}(z_j)|^{-1} & \text{für } |\mathrm{Im}(z_j)| < 1 \end{cases}$$

und C sowie n von f und e' abhängen. $H^e(N, E)$ wird auf ähnliche Weise wie $H(N, E)$ mit einer lokalkonvexen Topologie versehen. Die Darstellungsabbildung $R: H^e(N, E) \to \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E)$, welche für $N=1$ definiert ist durch

$$R(f)[\varphi] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \{f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon)\}\, \varphi(x)\, dx, \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad f \in H^e(1, E),$$

ist dann stetig, surjektiv und offen, d. h. $\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E)$ ist isomorph zu $H^e(N, E)/\mathrm{Kern}\, R$.

Die Surjektivität von R beruht für $N=1$ auf der folgenden Bemerkung. Die Fouriertransformierte einer temperierten Vektordistribution T mit Träger in einer der Halbgeraden $[0, +\infty)$ bzw. $(-\infty, 0]$ ist Randverteilung einer in der unteren bzw. oberen Halbebene holomorphen Funktion. Da die Fouriertransformierten von Vektordistributionen mit kompaktem Träger sich zu ganzen Funktionen von einem bestimmten Wachstum fortsetzen lassen, ergibt sich die Surjektivität von R für $N=1$ daraus, daß man jede temperierte Vektordistribution S darstellen kann als $S=S_0+S_+ +S_-$, wobei S_0 kompakten Träger hat und S_+ bzw. S_- Träger in $[0,+\infty)$ bzw. $(-\infty,0]$ haben.

Wie in [11] ist die Abbildung R nicht injektiv. Kern R besteht für $N=1$ aus den Einschränkungen der Fourier-Laplace-Transformierten von Distributionen mit fastkompaktem Träger auf $(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$; d. h. f ist aus Kern R genau dann, wenn es ein $T\in\mathscr{L}(\mathscr{E}(\mathbb{R}),E)$ gibt, so daß

$$f(z)=T_x\left[\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}e^{-ixz}\right]$$

gilt. In die Bestimmung von Kern R geht ein, daß man die Fourier-Laplace-Transformierten von Vektordistributionen mit fastkompaktem Träger allein durch ihr Wachstumsverhalten beschreiben kann. Diese vektorwertige Form des Satzes von Paley-Wiener-Schwartz wird in § 1 formuliert und bewiesen. Außerdem wird auf dem Raum aller solcher Funktionen eine Topologie angegeben, welche die Fourier-Laplace-Transformation zu einem topologischen Isomorphismus macht.

Der allgemeine Fall von N Variablen läßt sich auf Grund der Ergebnisse von Meise [10] völlig auf den eindimensionalen Fall zurückführen, da $H^e(p+1,E)$ und $H^e(1)\hat{\otimes}H^e(p)\hat{\otimes}E$ topologisch isomorph sind und bei entsprechender Identifizierung R_{p+1} und $R_p\hat{\otimes}R_1\hat{\otimes}\mathrm{id}_E$ übereinstimmen. Auch die Bestimmung von Kern R in mehreren Variablen kann durch die obige Bemerkung auf einen Induktionsschluß reduziert werden.

Vorbemerkungen. (i) Alle auftretenden linearen Räume sind Vektorräume über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

(ii) Sind X und Y lokalkonvexe Räume, so bezeichnen wir mit $\mathscr{L}(X,Y)$ den Raum der stetigen linearen Abbildungen von X in Y, versehen mit der starken Topologie, d. h. der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den beschränkten Mengen in X.

(iii) Die Bezeichnungen für die verschiedenen Distributionsräume sind die gleichen wie die von Schwartz [12].

(iv) Auf dem Raum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ definieren wir die Fouriertransformation $\mathscr{F}$ durch

$$\mathscr{F}\varphi(t)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\,e^{-i\langle x,t\rangle}dx,\quad \varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^N).$$

Bekanntlich ist $\mathscr{F}$ ein topologischer Automorphismus von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$. Für jeden lokalkonvexen Raum E kann man $\mathscr{F}:\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N),E)\to\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N),E)$ definieren durch $\mathscr{F}T[\varphi]=T[\mathscr{F}\varphi]$. Die so definierte Fouriertransformation ist ein topologischer Isomorphismus.

§ 1 Der Satz von Paley-Wiener-Schwartz für Vektordistributionen

Lemma 1. *Sei* $K:[-l,l]^N \times [-l,l]^N \to \mathbb{C}$ *eine stetige Funktion. Die Funktion* $f:[-l,l]^N \to \mathbb{C}$ *werde definiert durch* $f(x)=\int\limits_{[-l,l]^N} K(x,t)\,dt$. *Dann konvergiert die Folge der Funktionen* f_m *mit*

$$f_m(x)=\sum_{n\in[-lm,lm]^N} m^{-N} K\left(x,\left(\frac{n_1}{m},\dots,\frac{n_N}{m}\right)\right)$$

gleichmäßig auf $[-l,l]^N$ *gegen* f.

Beweis. Da K beschränkt und gleichmäßig stetig ist, bilden die f_m eine gleichmäßig beschränkte Folge gleichgradig stetiger Funktionen. Also ist nach Arzela-Ascoli $\{f_m : m\in\mathbb{N}\}$ in $\mathscr{C}([-l,l]^N)$ eine relativ kompakte Menge. Da die f_m punktweise gegen f konvergieren, konvergieren sie sogar gleichmäßig gegen f.

Folgerung. *Ist* $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, *so konvergiert*

$$f_m(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2}\sum_{(n_1,\dots,n_N)\in\mathbb{Z}^N} m^{-N}\varphi\left(\frac{n_1}{m},\dots,\frac{n_N}{m}\right)\exp\left(-i\sum_{j=1}^{N}\frac{x_j n_j}{m}\right)$$

in der Topologie von $\mathscr{E}(\mathbb{R}^N)$ *gegen* $\mathscr{F}\varphi$.

Beweis. Man wende Lemma 1 für geeignete Rechtecke auf die Funktion $K(x,t)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2} e^{-i\langle x,t\rangle}\varphi(t)$ und ihre partiellen Ableitungen nach den Variablen x_j an.

Lemma 2. *Ist* E *ein lokalkonvexer Raum und* $T\in\mathscr{L}(\mathscr{E}(\mathbb{R}^N),E)$, *so wird durch* $\tilde{T}(z)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2}\cdot T_x(e^{-\langle x,z\rangle})$ *eine ganze Funktion* $\tilde{T}$ *mit Werten in* E *definiert. Zu jeder stetigen Halbnorm* p *auf* E *gibt es ein* $m_p\in\mathbb{N}^N$ *sowie positive Zahlen* C_p *und* $B_{p,j}$, *so daß*

$$p(\tilde{T}(z))\leq C_p\prod_{j=1}^{N}(1+|z_j|)^{m_p}\exp\left(\sum_{j=1}^{N}B_{p,j}|\mathrm{Im}(z_j)|\right).$$

Beweis. Für jedes $e'\in E'$ ist $e'\circ T$ aus $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^N)$. Nach Yosida [19], S. 160–161, ist dann

$$\langle\tilde{T}(z),e'\rangle=e'\circ T\left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2}e^{-i\langle x,z\rangle}\right)$$

eine ganze Funktion. Die Abschätzung folgt aus der Stetigkeit von T.

Bemerkung. $\tilde{T}$ nennen wir die Fourier-Laplace-Transformierte von T.

Satz 1. *Sei E ein folgenvollständiger lokalkonvexer Raum. Für jedes T aus $\mathscr{L}(\mathscr{E}(\mathbb{R}^N), E) \subset \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E)$ gilt $\mathscr{F}T = \tilde{T}|\mathbb{R}^N$, wobei $\tilde{T}$ die in Lemma 2 definierte ganze Funktion ist.*

Beweis. Sei φ ein beliebiges Element von $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, und f_m sei definiert wie in der Folgerung zu Lemma 1. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathscr{F}T[\varphi] &= T[\mathscr{F}\varphi] = T\left[\lim_{m\to\infty} f_m\right] = \lim_{m\to\infty} T[f_m]\\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2}\frac{1}{m^N}\sum_{n\in\mathbb{Z}^N} T_x\left[\exp\left(-i\sum_{j=1}^N \frac{1}{m}x_j n_j\right)\right]\varphi\left(\frac{n_1}{m},\dots,\frac{n_N}{m}\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\tilde{T}(x)\,\varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Das Integral existiert, weil E folgenvollständig und $\tilde{T}(x)\,\varphi(x)$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger ist.

Satz 2. (Paley-Wiener-Schwartz). *Sei E folgenvollständig und lokalkonvex. Eine ganze Funktion $f:\mathbb{C}^N\to E$ ist genau dann Fourier-Laplace-Transformierte einer Distribution $T\in\mathscr{L}(\mathscr{E}(\mathbb{R}^N), E)$, wenn f den Abschätzungen aus Lemma 2 genügt.*

Beweis. Genügt f den Abschätzungen aus Lemma 2, so definiert die Einschränkung von f auf $\mathbb{R}^N$ eine Distribution aus $\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E)$. Da die Fouriertransformation ein Automorphismus von $\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E)$ ist, gibt es eine Distribution $T\in\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E)$, für die $\mathscr{F}T = f|\mathbb{R}^N = \hat{f}$ gilt. Sei nun E zunächst ein Banachraum. Für jedes $e'\in E'$ gilt

$$\begin{aligned}e'\circ T[\varphi] &= \langle T[\varphi], e'\rangle = \langle \hat{f}[\mathscr{F}^{-1}\varphi], e'\rangle = \left\langle \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\mathscr{F}^{-1}\varphi(x)\,dx, e'\right\rangle\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\langle f(x), e'\rangle\,\mathscr{F}^{-1}\varphi(x)\,dx = \widehat{e'\circ f}[\mathscr{F}^{-1}\varphi].\end{aligned}$$

Aufgrund des klassischen Satzes von Paley-Wiener-Schwartz hat daher $e'\circ T$ für jedes $e'\in E'$ Träger in einer Kugel K. Also ist auch $\operatorname{Supp} T$ in K enthalten, d. h. T ist aus $\mathscr{L}(\mathscr{E}(\mathbb{R}^N), E)$.

Ist E ein beliebiger folgenvollständiger lokalkonvexer Raum und p eine stetige Halbnorm auf E mit Nullraum N_p, so bezeichnen wir mit E_p die vollständige Hülle des in natürlicher Weise normierten Raumes E/N_p und mit $\pi_p: E\to E_p$ die zugehörige kanonische Abbildung. $\pi_p\circ\mathscr{F}^{-1}\hat{f} = \pi_p\circ T$ hat nach den obigen Überlegungen kompakten Träger. Da dies für jede stetige Halbnorm gilt, ist $T = \mathscr{F}^{-1}\hat{f}$ aus $\mathscr{L}(\mathscr{E}(\mathbb{R}^N), E)$.

Bemerkung. Wie sich aus dem obigen Beweis ergibt, ist eine ganze Funktion $f:\mathbb{C}^N\to E$ genau dann Fourier-Laplace-Transformierte einer Distribution mit kompaktem Träger, wenn f die Abschätzungen in Lemma 2 erfüllt und dabei die Konstanten $B_{p,j}$ unabhängig von p gewählt werden können.

Der Raum $F(N, E)$

Auf $\mathbb{C}^N$ definieren wir eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Gewichtsfunktionen durch

$$g_n(z_1, \ldots, z_N) = \prod_{j=1}^{N} \{(1+|z_j|)\exp(|\mathrm{Im}(z_j)|)\}^{-n}.$$

Ist E ein Banachraum, so können wir mittels g_n den folgenden Raum $A_n(N, E)$ definieren

$$A_n(N, E) = \{f : f : \mathbb{C}^N \to E, f \text{ holomorph}, \sup_{z\in\mathbb{C}^N} \|f(z)\|_E g_n(z) < \infty\}.$$

Definieren wir auf $A_n(N, E)$ $\|f\|_n = \sup_{z\in\mathbb{C}^N} \|f(z)\|_E g_n(z)$, so wird $A_n(N, E)$ zu einem Banachraum. Für $m \geqq n$ ist $A_n(N, E)$ stetig in $A_m(N, E)$ eingebettet, so daß die Räume $A_n(N, E)$ mit den Inklusionen ein induktives Spektrum bilden. Den Raum $\operatorname{ind}_{n\to} A_n(N, E)$ bezeichnen wir mit $F(N, E)$. Aus Meise [10], § 2, Satz 2 und Satz 3, folgt, daß $F(N, \mathbb{C})$ ein vollständiger nuklearer bornologischer (DF)-Raum ist, und daß $F(N, E)$ zu $F(N, \mathbb{C}) \hat{\otimes} E$ topologisch isomorph ist.

Ist der lokalkonvexe Raum E vollständig, so kann man ihn als projektiven Limes eines projektiven Spektrums $\{E_\alpha, \pi_{\alpha\beta}\}_{\alpha\in A}$ aus Banachräumen E_α darstellen. Wie in Meise [10], § 2, Lemma 3 und Satz 4, gezeigt wurde, kann man dann $F(N, E)$ definieren als $\operatorname{proj}_{\leftarrow\alpha} F(N, E_\alpha)$ und erhält ebenfalls die topologische Isomorphie von $F(N, E)$ und $F(N, \mathbb{C}) \hat{\otimes} E$. Die Elemente von $F(N, E)$ lassen sich auch als holomorphe E-wertige Funktionen auffassen, welche die Eigenschaft haben, daß für jede stetige Halbnorm p auf E ein $n\in\mathbb{N}$ existiert, so daß $\sup_{z\in\mathbb{C}^N} p(f(z))\, g_n(z) < \infty$. Darüber hinaus gilt sogar, daß eine Funktion $f : \mathbb{C}^N \to E$ genau dann in $F(N, E)$ ist, wenn für jedes $e' \in E'$ $e' \circ f \in F(N, \mathbb{C})$ gilt (vgl. Meise [10], § 2, Bemerkung 1 und Bemerkung 2 im Anschluß an Satz 4).

Satz 3. *Ist E ein Banachraum, so definieren wir die Fourier-Laplace-Transformation $\mathscr{F}\mathscr{L} : \mathscr{L}(\mathscr{E}(\mathbb{R}^N), E) \to F(N, E)$ durch $\mathscr{F}\mathscr{L}(T)[z] = (2\pi)^{-N/2} \cdot T_x[e^{-i\langle x, z\rangle}]$. $\mathscr{F}\mathscr{L}$ ist ein topologischer Isomorphismus.*

Beweis. Da die lineare Hülle der Menge $M = \{f \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^N), f(x) = e^{-i\langle x, z\rangle}, z \in \mathbb{C}^N\}$ in $\mathscr{E}(\mathbb{R}^N)$ dicht liegt, folgt aus Satz 2, daß $\mathscr{F}\mathscr{L}$ ein algebraischer Isomorphismus ist. Wir zeigen nun die Stetigkeit. Dazu wählen wir eine Darstellung von $\mathscr{E}(\mathbb{R}^N)$ als projektiver Limes von Räumen $\mathscr{E}_l$. $\mathscr{E}_l$ ist folgendermaßen erklärt. Wir betrachten den Sobolewraum $W_2^l(l)$ aller Funktionen, die in der offenen Kugel vom Radius l um den Nullpunkt des $\mathbb{R}^N$ definiert sind und quadratintegrierbare schwache Ableitungen bis zur Ordnung l haben. $\mathscr{E}(\mathbb{R}^N)$ wird vermöge Restriktion in $W_2^l(l)$ abgebildet. Die Abschließung des Bildes in $W_2^l(l)$ bezeichnen wir mit $\mathscr{E}_l$.

Nach Wloka [18], S. 31, § 5.1, ist die Restriktionsabbildung $\tilde{j}_{l+s,l}: W_2^{l+s}(l+s) \to W_2^l(l)$ eine Hilbert-Schmidt-Abbildung, falls $s > N/2$. Da $\mathscr{E}_{l+s}$ von $\tilde{j}_{l+s,l}$ in $\mathscr{E}_l$ abgebildet wird, ist auch $j_{l+s,l} = \tilde{j}_{l+s,l}|\mathscr{E}_{l+s}: \mathscr{E}_{l+s} \to \mathscr{E}_l$ eine Hilbert-Schmidt-Abbildung. Insbesondere ist $j_{l+s,l}$ eine nukleare Abbildung, falls $s > N+1$. Aus dem Sobolewschen Lemma folgt $\operatorname{proj}_{\leftarrow l} \mathscr{E}_l = \mathscr{E}(\mathbb{R}^N)$. Nach Konstruktion ist das projektive Spektrum $\{\mathscr{E}_l, j_{ln}\}_{n\in\mathbb{N}}$ reduziert. Daher gilt nach Meise [10], § 1, Satz 2, $\mathscr{L}(\mathscr{E}(\mathbb{R}^N), E) = \operatorname{ind}_{n\to} \mathscr{L}(\mathscr{E}_n, E)$.

Ist T aus $\mathscr{L}(\mathscr{E}_n, E)$, so folgt

$$\begin{aligned}\|\mathscr{F}\mathscr{L}(T)[z]\|_E &\leqq (2\pi)^{-N/2} \|T_x[e^{-i\langle x,z\rangle}]\|_E \\ &\leqq (2\pi)^{-N/2} \|T\|_{\mathscr{L}(\mathscr{E}_n,E)} \|e^{-i\langle x,z\rangle}\|_{\mathscr{E}_n}.\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}\|e^{-i\langle x,z\rangle}\|_{\mathscr{E}_n} &= \Big(\sum_{|\alpha|\leqq n} \int_{K(0,n)} |D_x^\alpha e^{-i\langle x,z\rangle}|^2 dx\Big)^{1/2} \\ &\leqq \Big(\sum_{|\alpha|\leqq n} \int_{K(0,n)} |(-i)^{|\alpha|} z^\alpha e^{-i\langle x,z\rangle}|^2 dx\Big)^{1/2} \\ &\leqq C \cdot \Big(\sum_{|\alpha|\leqq n} |z^\alpha| \Big\{\exp\Big(n \sum_{j=1}^N |\operatorname{Im}(z_j)|\Big)\Big\}^2\Big)^{1/2} \\ &\leqq M \cdot C \cdot g_n^{-1}(z),\end{aligned}$$

wobei M und C nur von n abhängen. Daher gilt

$$\|\mathscr{F}\mathscr{L}(T)[z]\| \leqq (2\pi)^{-N/2} M \cdot C \cdot \|T\|_{\mathscr{L}(\mathscr{E}_n,E)} g_n^{-1}(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}^N$. Also ist $\mathscr{F}\mathscr{L}_n: \mathscr{L}(\mathscr{E}_n, E) \to A_n(N, E)$ stetig, und damit auch $\mathscr{F}\mathscr{L}$. Da $\mathscr{L}(\mathscr{E}(\mathbb{R}^N), E)$ und $F(N, E)$ vollständige bornologische (DF)-Räume sind, folgt nach einem Graphensatz von Robertson-Robertson (vgl. Horváth [8], S. 306, Proposition 11) die Offenheit von $\mathscr{F}\mathscr{L}$ aus der Stetigkeit und der Surjektivität.

Satz 4. *Ist E ein lokalkonvexer vollständiger Raum, so definieren wir die Fourier-Laplace-Transformation $\mathscr{F}\mathscr{L}: \mathscr{L}(\mathscr{E}(\mathbb{R}^N), E) \to F(N, E)$ analog wie in Satz 2. Aus der Kommutativität des folgenden Diagramms ergibt sich, daß $\mathscr{F}\mathscr{L}$ ein topologischer Isomorphismus ist.*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}'(\mathbb{R}^N) \hat{\otimes} E \arrow[r, "\mathscr{F}\mathscr{L}_s \hat{\otimes} \mathrm{id}_E"] \arrow[d, "\Phi"'] & F(N, \mathbb{C}) \hat{\otimes} E \arrow[d, "\Psi"] \\ \mathscr{L}(\mathscr{E}(\mathbb{R}^N), E) \arrow[r, "\mathscr{F}\mathscr{L}"'] & F(N, E) \end{tikzcd}$$

Dabei sind Φ und Ψ die natürlichen Isomorphismen.

Beweis. Ist E als projektiver Limes von Banachräumen E_α dargestellt, so kann man $\mathscr{L}(\mathscr{E}(\mathbb{R}^N), E)$ mit $\operatorname{proj}_{\leftarrow \alpha} \mathscr{L}(\mathscr{E}(\mathbb{R}^N), E_\alpha)$ identifizieren. Bei dieser Identifizierung entspricht $\mathscr{F}\mathscr{L}$ die Einschränkung der Abbildung $\prod_{\alpha \in A} \mathscr{F}\mathscr{L}_\alpha$ auf $\operatorname{proj}_{\leftarrow \alpha} \mathscr{L}(\mathscr{E}(\mathbb{R}^N), E_\alpha)$, so daß $\mathscr{F}\mathscr{L}$ stetig ist. Trivialerweise gilt $\mathscr{F}\mathscr{L}(\Phi(T \otimes e)) = \Psi(\mathscr{F}\mathscr{L}_s(T) \otimes e)$. Da $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^N) \otimes E$ in $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^N) \hat{\otimes} E$ dicht liegt und sämtliche Ableitungen stetig sind, ist das Diagramm kommutativ.

Folgerung. (Paley-Wiener-Schwartz). Ist E ein vollständiger lokalkonvexer Raum, so ist eine ganze Funktion $f: \mathbb{C}^N \to E$ genau dann Fourier-Laplace-Transformierte einer E-wertigen Distribution mit fastkompaktem Träger, wenn für jede stetige Linearform e' auf E $e' \circ f$ aus $F(N, \mathbb{C})$ ist.

Bemerkung. Ein ähnlicher Satz wie die obige Folgerung wurde von Komura in [9] bewiesen.

§ 2 Temperierte Vektordistributionen in einer Variablen

Lemma 1. *Ist T eine temperierte skalare Distribution mit Träger in $[0, +\infty)$, so hat T eine Darstellung der Form*

$$T[\varphi] = (-1)^n \int_0^\infty (1+x^2)^m g(x) \varphi^{(n)}(x)\, dx; \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \tag{1}$$

wobei g stetig und beschränkt auf $[0, +\infty)$. Durch (1) ist g eindeutig bestimmt, d. h. wenn $T[\varphi] = (-1)^n \int_0^\infty (1+x^2)^m h(x) \varphi^{(n)}(x)\, dx$ für alle φ aus $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ gilt, so ist $h = g$.

Beweis. Bekanntlich (vgl. Friedman [5], S. 41, Theorem 13) hat T eine Darstellung

$$\begin{aligned} T[\varphi] &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)^m f(x) \varphi^{(n)}(x)\, dx \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{0} (1+x^2)^m f(x) \varphi^{(n)}(x)\, dx \\ &\quad + (-1)^n \int_0^\infty (1+x^2)^m f(x) \varphi^{(n)}(x)\, dx, \end{aligned}$$

wobei f eine stetige beschränkte komplexwertige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist. Ist $\operatorname{Supp}\varphi \subset (-\infty, 0)$, so verschwinden $T[\varphi]$ und $\int_0^\infty (1+x^2)^m f(x) \varphi^{(n)}(x) dx$, so daß $\int_{-\infty}^0 (1+x^2)^m f(x) \varphi^{(n)}(x)\, dx = 0$ gilt. Dann ist aber $(1+x^2)^m f(x)$

auf $(-\infty, 0)$ ein Polynom vom Grad kleiner als n, d. h. $(1+x^2)^m f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$ für $x \in (-\infty, 0)$. Wegen

$$\int_{-\infty}^{0} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j\right) \varphi^{(n)}(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a_j (j!)\, \varphi^{(n-j-1)}(0)$$

$$= \int_{0}^{\infty} \left(-\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j\right) \varphi^{(n)}(x)\,dx$$

gilt

$$T[\varphi] = (-1)^n \int_0^\infty \left((1+x^2)^m f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j\right) \varphi^{(n)}(x)\,dx$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty (1+x^2)^m \left(f(x) - \frac{\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j}{(1+x^2)^m}\right) \varphi^{(n)}(x)\,dx.$$

$g(x) = f(x) - \dfrac{\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j}{(1+x^2)^m}$ ist eine stetige beschränkte Funktion, da f stetig und beschränkt war.

Gilt auch $T[\varphi] = (-1)^n \int_0^\infty (1+x^2)^m h(x)\, \varphi^{(n)}(x)\,dx$ für alle φ aus $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, so ist $(1+x^2)^m (g(x) - h(x)) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$ für geeignete Zahlen b_j. Aber

$$0 = \int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j\right) \varphi^{(n)}(x)\,dx = -\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j b_j (j!)\, \varphi^{(n-j-1)}(0)$$

für alle φ aus $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ impliziert $b_j = 0$ für $0 \leqq j \leqq n-1$, so daß $g(x) = h(x)$.

Lemma 2. *Sei T wie in Lemma 1. Die Funktion α aus $\mathscr{E}(\mathbb{R})$ habe ihren Träger in $[-1, \infty)$ und sei gleich 1 auf $[0, \infty)$. Dann ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(z) < 0$*

$$\tilde{T}(z) = (2\pi)^{-1/2}\, T_x[\alpha(x)\, e^{-ixz}]$$

unabhängig von α definiert. Ist T in der Form (1) dargestellt, so gilt

$$\tilde{T}(z) = (2\pi)^{-1/2} \cdot (iz)^n \int_0^\infty (1+x^2)^m g(x)\, e^{-ixz}\,dx$$

für $\operatorname{Im}(z) < 0$. Insbesondere ist $\tilde{T}(z)$ in der unteren Halbebene holomorph und genügt für $k \geqq \max(n, m)$ der Abschätzung

$$|\tilde{T}(z)| \leqq C(1+|z|)^k \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } |\operatorname{Im}(z)| \geqq 1 \\ |\operatorname{Im}(z)|^{-k} & \text{für } |\operatorname{Im}(z)| < 1. \end{cases}$$

Beweis. Ist β eine Funktion mit den gleichen Eigenschaften wie α, so ist $\operatorname{Supp}((\beta(x)-\alpha(x))\,e^{-ixz})\subset(-\infty,0]$. Aus Hörmander [7], S. 12, Theorem 1.5.4, folgt, daß $T_x[(\beta(x)-\alpha(x))\,e^{-ixz}]=0$, so daß $\tilde{T}(z)$ unabhängig von α definiert ist.

Ist T in der Form (1) dargestellt, so gilt

$$\begin{aligned}&(2\pi)^{-1/2}\,T_x[\alpha(x)\,e^{-ixz}]\\ &=(-1)^n(2\pi)^{-1/2}\int_0^\infty(1+x^2)^m g(x)\,(\alpha(x)\,e^{-ixz})^{(n)}\,dx\\ &=(-1)^n(2\pi)^{-1/2}\int_0^\infty(1+x^2)^m g(x)\,(-iz)^n e^{-ixz}\,dx\,.\end{aligned}$$

Wir schätzen nun ab:

$$\int_0^\infty(1+x^2)^m g(x)\,e^{-ixz}\,dx=\sum_{j=0}^m\int_0^\infty\binom{m}{j}x^{2j}g(x)\,e^{-ixz}\,dx=\sum_{j=0}^m f_j(z)\binom{m}{j},$$

wobei mit $z=x+iy,\ y<0$:

$$\begin{aligned}|f_j(z)|&=\left|\int_0^\infty g(t)\,t^{2j}e^{-itz}\,dt\right|\leqq M\int_0^\infty t^{2j}|e^{-itx-ty}|\,dt\\ &=M\int_0^\infty t^{2j}e^{-ty}\,dt=M\frac{(2j)!}{y^{2j+1}}\,.\end{aligned}$$

Die Abschätzung für $\tilde{T}(z)$ folgt nun aus

$$\tilde{T}(z)=(iz)^n\sum_{j=0}^m\binom{m}{j}f_j(z)\,.$$

Die Holomorphie von $\tilde{T}(z)$ in der unteren Halbebene folgt aus den bekannten Eigenschaften von Integralen mit Parameter.

Satz 1. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 2 gilt in* $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{T}(x-i\varepsilon)\,\varphi(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\tilde{T}_\varepsilon[\varphi]=\mathscr{F}T[\varphi]\,;\quad\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})\,.$$

Beweis. Sei T in der Form (1) dargestellt. Nach Lemma 2 ist

$$\tilde{T}(z)=(iz)^n\,(2\pi)^{-1/2}\int_0^\infty(1+t^2)^m g(t)\,e^{-itz}\,dt\,.$$

Daher gilt für jedes $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}(x-i\varepsilon)\,\varphi(x)\,dx \\
&= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi)^{-1/2} \int_0^{\infty} (1+t^2)^m g(t)\, D_t^n\, e^{-it(x-i\varepsilon)}\,\varphi(x)\,dt\,dx \\
&= \int_0^{\infty} (1+t^2)^m g(t)\, e^{-t\varepsilon}(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (ix+\varepsilon)^n e^{-itx}\,\varphi(x)\,dx\,dt \\
&= \int_0^{\infty} (1+t^2)^m g(t)\, e^{-t\varepsilon} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \\
&\quad \cdot \varepsilon^j (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^{n-j} e^{-itx}\,\varphi(x)\,dx\,dt \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varepsilon^j (-1)^{n-j} \int_0^{\infty} (1+t^2)^m \\
&\quad \cdot g(t)\, e^{-t\varepsilon}(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^{n-j} e^{-itx}\,\varphi(x)\,dx\,dt\,.
\end{aligned}$$

Da $(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^{n-j} e^{-itx}\,\varphi(x)\,dx = D_t^{n-j}\mathscr{F}(\varphi)\,[t]$, konvergiert der obige Ausdruck für $\varepsilon \downarrow 0$ gegen

$$(-1)^n \int_0^{\infty} (1+t^2)^m g(t)\, D_t^n \mathscr{F}(\varphi)\,[t]\,dt = T[\mathscr{F}\varphi] = \mathscr{F}T[\varphi]\,.$$

Nach Meise [11], Lemma 2, konvergiert T_ε in der starken Topologie von $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ gegen $\mathscr{F}T$.

Bemerkung. Hat eine Distribution $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ Träger in $(-\infty, 0]$, so kann man analog zu Lemma 1 beweisen, daß T in der Form

$$T[\varphi] = (-1)^n \int_{-\infty}^{0} (1+t^2)^m g(t)\, \varphi^{(n)}(t)\,dt \tag{2}$$

dargestellt werden kann, wobei n und m geeignet zu wählen sind und g eine in $(-\infty, 0]$ stetige beschränkte Funktion ist. Außerdem kann man für z aus der oberen Halbebene eine Funktion $\tilde{T}(z)$ definieren durch $\tilde{T}(z) = (2\pi)^{-1/2}\, T_x[\beta(x)\, e^{-ixz}]$, wobei $\beta \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$ auf $(-\infty, 0)$ gleich 1 ist und Träger in $(-\infty, 1]$ hat. Für $\tilde{T}$ gelten in der oberen Halbebene die gleichen Aussagen wie in Lemma 2. Auch das Analogon zu Satz 1 gilt, d. h.

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}(x+i\varepsilon)\,\varphi(x)\,dx = \mathscr{F}T[\varphi].$$

Satz 2. *Ist f eine in der unteren Halbebene holomorphe Funktion, welche den Abschätzungen aus Lemma 2 genügt, so gibt es ein $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{Supp} T \subset [0, +\infty)$, so daß $\tilde{T} = f$.*

Beweis. Nach Meise [11], Lemma 2, definiert f vermöge $S[\varphi]=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-i\varepsilon)\,\varphi(x)\,dx$ eine temperierte Distribution S. Wir setzen $T=\mathscr{F}^{-1}S$ und zerlegen T in $T=T_+ + T_-$, wobei T_+ Träger in $[0,+\infty)$ und T_- Träger in $(-\infty,0]$ haben. Nach Satz 1 und der anschließenden Bemerkung gilt

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\{\tilde{T}_-(x+i\varepsilon)-(-\tilde{T}_+(x-i\varepsilon))\}\,\varphi(x)\,dx=\mathscr{F}T_+[\varphi]+\mathscr{F}T_-[\varphi]$$
$$=\mathscr{F}(T_+ + T_-)[\varphi]=\mathscr{F}T[\varphi]=\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}S[\varphi]=S[\varphi]\,.$$

Dann gibt es nach Meise [11], Satz 4, ein Polynom p, so daß $-f=-\tilde{T}_+ + p$ und $0=\tilde{T}_- + p$. Da $p(z)=\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\delta^{(j)}\right)^{\sim}(z)$ für geeignete a_j, gilt $f=\left(T_+ - \sum_{j=0}^{n} a_j\delta^{(j)}\right)^{\sim}$.

Bemerkung 1. Ist f in der oberen Halbebene holomorph und genügt den Abschätzungen aus Lemma 2, so gibt es ein $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{Supp}T \subset(-\infty,0]$, so daß $\tilde{T}=f$.

2. Satz 2 liefert eine Verschärfung der Ergebnisse von Carmichael [3] und widerlegt gleichzeitig die dort aufgestellte Behauptung, daß man in dem oben betrachteten Fall keine Aussagen über Supp T machen könne.

Die Räume $H^e(N,E)$, $H^{e\pm}(1,E)$ und $H^{\pm}(1,E)$

Analog wie im Paragraphen 1 definierte man mittels des Systems $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Gewichtsfunktionen Räume $A_n(N,E)$ von auf $(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^N$ holomorphen Funktionen mit Werten in einem Banachraum E sowie den Raum $H^e(N,E)=\operatorname{ind}_{n\to} A_n(N,E)$. Dabei ist für $N=1$

$$h_n(z)=\begin{cases}(1+|z|)^{-n}e^{-n|\mathrm{Im}(z)|}\cdot|\mathrm{Im}(z)|^n & \text{für } |\mathrm{Im}(z)|<1\\ (1+|z|)^{-n}e^{-n|\mathrm{Im}(z)|} & \text{für } |\mathrm{Im}(z)|\geqq 1\end{cases}$$

und für $N>1$ $h_n(z_1,\dots,z_N)=\prod_{j=1}^{N} h_n(z_j)$.

Ist E ein vollständiger lokalkonvexer Raum, welcher als projektiver Limes von Banachräumen E_α dargestellt ist, so kann man nach Meise [10] $H^e(N,E)$ als $\operatorname{proj}_{\leftarrow\alpha} H^e(N,E_\alpha)$ definieren und als Raum aller E-wertigen auf $(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^N$ holomorphen Funktionen f auffassen, welche für jede stetige Halbnorm p auf E einer Abschätzung $p(f(z))\leqq C\cdot h_n^{-1}(z)$ genügen. $H^e(N,E)$ ist topologisch isomorph zu $H^e(N,\mathbb{C})\,\tilde{\otimes}\,E$. Eine Funktion $f:(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^N\to E$ liegt sogar schon dann in $H^e(N,E)$, wenn für jede stetige Linearform e' auf E $e'\circ f$ in $H^e(N,\mathbb{C})$ liegt. Mit $H^+(1,E)$ bezeichnen wir den Teilraum aller Funktionen in $H(1, E)$, welche in der unteren Halbebene verschwinden. (Zur Definition von $H(1, E)$ vgl. Meise [11].) Analog werden $H^-(1, E)$, $H^{e+}(1, E)$ und $H^{e-}(1, E)$ definiert.

Lemma 3. *Sei E ein vollständiger lokalkonvexer Raum und $T \in \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}), E)$ habe Träger in $[0, +\infty)$. Ist $\alpha \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$ wie in Lemma 2, so ist $\tilde{T}(z) = (2\pi)^{-1/2} T_x[\alpha(x)\, e^{-ixz}]$ für $\operatorname{Im}(z) < 0$ unabhängig von α definiert und ist ein Element von $H^-(1, \mathbb{C})$.*

Beweis. Sei e' eine stetige Linearform auf E. Dann ist $e' \circ T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ und $\operatorname{Supp} e' \circ T \subset [0, +\infty)$. Also gilt $e' \circ \tilde{T}(z) = (\widetilde{e' \circ T})(z)$, d. h. $e' \circ \tilde{T} \in H^-(1, \mathbb{C})$ nach Lemma 2. Insbesondere ist $\tilde{T}(z)$ unabhängig von α definiert. Wegen der obigen Bemerkung impliziert $e' \circ \tilde{T} \in H^-(1, \mathbb{C})$ für alle $e' \in E'$, daß $\tilde{T} \in H^-(1, E)$.

Bemerkung. Hat $T \in \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}), E)$ Träger in $(-\infty, 0]$, so ist $\tilde{T}(z) = (2\pi)^{-1/2}\, T_x[\beta(x)\, e^{-ixz}]$ für $\operatorname{Im}(z) > 0$ unabhängig von β definiert, und es gilt $\tilde{T} \in H^+(1, E)$.

Satz 3. *Ist E ein vollständiger lokalkonvexer Raum und $T \in \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}), E)$, so gibt es ein $f \in H^e(1, E)$, so daß für jedes $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon)\}\, \varphi(x)\, dx = T[\varphi].$$

Beweis. Wir setzen $\mathscr{F}^{-1} T = S$ und zerlegen S in $S = S_0 + S_+ + S_-$, wobei S_0 eine Distribution mit kompaktem Träger in $[-\delta, \delta]$ ist, und S_+ bzw. S_- Träger in $[0, +\infty)$ bzw. $(-\infty, 0]$ haben. Nach Lemma 3 und der anschließenden Bemerkung sind $\tilde{S}_+$ bzw. $\tilde{S}_-$ aus $H^-(1, E)$ bzw. $H^+(1, E)$, während die Einschränkung von $\mathscr{F}\mathscr{L}(S_0)$ auf die obere Halbebene ein Element von $H^{e+}(1, E)$ ist. Folglich ist die Funktion f, welche in der oberen Halbebene als $\tilde{S}_- + \mathscr{F}\mathscr{L}(S_0)$ und in der unteren Halbebene als $-\tilde{S}_+$ definiert ist, ein Element von $H^e(1, E)$. Falls E ein Banachraum ist, folgt aus Meise [11], Lemma 2, daß durch

$$U[\varphi] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon)\}\, \varphi(x)\, dx$$

eine temperierte Distribution U mit Werten in E definiert wird. Diese stimmt aufgrund von Satz 1 und § 1, Satz 1, mit $\mathscr{F} S_- + \mathscr{F} S_0 + \mathscr{F} S_+ = \mathscr{F} S = T$ überein.

Ist E ein beliebiger vollständiger lokalkonvexer Raum, so kann man E als projektiven Limes von Banachräumen E_α darstellen. Bezeichnen wir mit $\pi_\alpha : E \to E_\alpha$ die kanonischen Abbildungen, so gilt $\pi_\alpha \circ \tilde{S}_\pm = (\widetilde{\pi_\alpha \circ S_\pm})$ und $\pi_\alpha \circ \mathscr{F}\mathscr{L}(S_0) = \mathscr{F}\mathscr{L}(\pi_\alpha \circ S_0)$. Wegen $\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}), E) = \operatorname{proj}_{\leftarrow \alpha} \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}), E_\alpha)$ folgt der allgemeine Fall aus dem Banachraumfall.

Bemerkung. Wie sich aus dem obigen Beweis ergibt, existiert zu jedem $\delta > 0$ ein f, welches T repräsentiert und welches für jede stetige Halbnorm p auf E der Abschätzung

$$p(f(z)) \leqq C_p(1+|z|)^{n(p)} e^{\delta|\mathrm{Im}(z)|} \cdot \begin{cases} |\mathrm{Im}(z)| & \text{für} \quad |\mathrm{Im}(z)| < 1 \\ 1 & \text{für} \quad |\mathrm{Im}(z)| \geqq 1 \end{cases}$$

genügt.

Satz 4. *Ist E ein vollständiger lokalkonvexer Raum, so kann man eine lineare Abbildung $R: H^e(1, E) \to \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}), E)$ definieren durch*

$$\begin{aligned} R(f)[\varphi] &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_\varepsilon[\varphi] \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon)\}\, \varphi(x)\, dx\,; \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Dann ist R stetig und surjektiv.

Beweis. Die Surjektivität von R wurde in Satz 3 bewiesen. Die Stetigkeit von R folgt im Fall, daß E ein Banachraum ist, durch analoge Abschätzungen wie in Satz 2 in Meise [11]. Die Stetigkeit im allgemeinen Fall folgt daraus, daß man E als projektiven Limes eines projektiven Spektrums $\{E_\alpha, \pi_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in A}$ aus Banachräumen E_α darstellen kann. Dann gilt $H^e(1, E) = \operatorname{proj}_{\leftarrow \alpha} H^e(1, E_\alpha)$ sowie $\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}), E) \cong \operatorname{proj}_{\leftarrow \alpha} \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}), E_\alpha)$, und R ist die Einschränkung der Abbildung $\prod_{\alpha \in A} R_\alpha$ auf $\operatorname{proj}_{\leftarrow \alpha} H^e(1, E_\alpha)$.

Lemma 4. *Für jeden vollständigen lokalkonvexen Raum E ist das folgende Diagramm kommutativ.*

$$\begin{array}{ccc} H^e(1, \mathbb{C}) \hat{\otimes} E & \xrightarrow{\Phi} & H^e(1, E) \\ {\scriptstyle R_S \hat{\otimes} \mathrm{id}_E} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle R} \\ \mathscr{S}'(\mathbb{R}) \hat{\otimes} E & \xrightarrow{\Psi} & \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}), E)\,. \end{array}$$

Dabei sind Φ und Ψ die kanonischen Isomorphismen.

Beweis. Ist $f \otimes e \in H^e(1, \mathbb{C}) \otimes E$, so gilt

$$\begin{aligned} &\Psi \circ (R_s \hat{\otimes} \mathrm{id}_E)(f \otimes e)[\varphi] \\ &= R_s(f)[\varphi] \cdot e = e \cdot \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon)\}\, \varphi(x)\, dx \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \{e \cdot f(x+i\varepsilon) - e \cdot f(x-i\varepsilon)\}\, \varphi(x)\, dx = R(\Phi(f \otimes e))[\varphi] \end{aligned}$$

Da alle auftretenden Abbildungen stetig sind, und die lineare Hülle der Elemente der Form $f \otimes e$ in $H^e(1, \mathbb{C}) \hat{\otimes} E$ dicht liegt, ist das Diagramm kommutativ.

Folgerung. *Die in Satz 4 definierte Abbildung R ist auch offen, d. h. es gilt $H^e(1, E)/\mathrm{Kern}\, R \cong \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}), E)$.*

Beweis. Im Fall $E=\mathbb{C}$ sind $H^e(1,\mathbb{C})$ und $\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}),\mathbb{C})$ vollständige bornologische (DF)-Räume, so daß die Offenheit von R nach einem Satz von Robertson-Robertson (vgl. Horváth [8], S. 306, Proposition 11) bereits aus der Stetigkeit und der Surjektivität von R folgt. Da R_s und id_E offene Abbildungen sind, ist auch $R_S \hat{\otimes} \mathrm{id}_E$ offen, woraus die Behauptung mittels Lemma 4 folgt.

Über die Gestalt von Kern R gibt für den Fall einer Variablen der folgende Satz Auskunft.

Satz 5. *Der Kern der Abbildung $R: H^e(1,E)\to\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}),E)$ besteht aus allen Funktionen f, die Fourier-Laplace-Transformierte von E-wertigen Distributionen mit fastkompaktem Träger sind.*

Beweis. a) Wir nehmen zunächst an, daß $E=\mathbb{C}$ ist. Aus analogen Abschätzungen wie in Meise [11], Satz 2, folgt, daß für jedes $f\in H^e(1,\mathbb{C})$ ein n-faches unbestimmtes Integral von f in der oberen bzw. unteren Halbebene stetige, langsam wachsende Randwerte auf $\mathbb{R}$ hat. Bezeichnen wir diese mit $f_+^{[-n]}$ und $f_-^{[-n]}$, so gilt für $f\in\operatorname{Kern} R$

$$0=R(f)[\varphi]=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\{f(x+i\varepsilon)-f(x-i\varepsilon)\}\,\varphi(x)\,dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}\{f_+^{[-n]}(x+i\varepsilon)-f_-^{[-n]}(x-i\varepsilon)\}\,\varphi^{(n)}(x)\,dx$$

$$=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}\{f_+^{[-n]}(x+i0)-f_-^{[-n]}(x-i0)\}\,\varphi^{(n)}(x)\,dx;\quad \varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Dann ist aber $f_+^{[-n]}(x+i0)-f_-^{[-n]}(x-i0)$ ein Polynom vom Grad kleiner als n. Man kann also durch geeignete Wahl der Integrationskonstanten erreichen, daß die stetigen Randwerte von $f_+^{[-n]}$ und $f_-^{[+n]}$ auf $\mathbb{R}$ übereinstimmen und daher eine ganze Funktion $f^{[-n]}$ definieren. Wie man aus Abschätzungen analog zu Satz 2 in Meise [11] ersieht, ist $f^{[-n]}$ aus $F(1,\mathbb{C})$, d. h. es gibt ein $T\in\mathscr{E}'(\mathbb{R})$, so daß $f^{[-n]}=\mathscr{F}\mathscr{L}(T)$. Da mit T auch $(-ix)^n T$ eine Distribution mit kompaktem Träger ist, folgt aus

$$f(z)=(f^{[-n]})^{(n)}(z)=((-ix)^n T)_x[(2\pi)^{-1/2}e^{-ixz}],$$

daß auch f aus $F(1,\mathbb{C})$ ist.

Umgekehrt ist klar, daß jede Fourier-Laplace-Transformierte eine Distribution mit kompaktem Träger durch Einschränken auf $(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ ein Element von $H^e(1,\mathbb{C})$ definiert, welches in $\operatorname{Kern} R$ liegt.

b) Ist nun E ein vollständiger lokalkonvexer Raum und $f\in H^e(1,E)$ mit $R(f)=0$, so gilt für jedes $e'\in E'$ und jedes $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$

$$R_S(e'\circ f)[\varphi]=e'(R(f)[\varphi])=0. \tag{3}$$

Nach Teil a) ist $e'\circ f\in F(1,\mathbb{C})$ für jedes $e'\in E'$, so daß dann auch $f\in F(1,E)$ gilt. Die Behauptung $F(1,E)\subset\operatorname{Kern} R$ folgt ebenfalls aus (3) und Teil a).

§ 3 Der N-dimensionale Fall

Definition. Ist der Raum E vollständig und lokalkonvex, so kann man eine Darstellungsabbildung $R: H^e(N, E) \to \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E)$ folgendermaßen definieren

$$R(f)[\varphi] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_\varepsilon[\varphi]$$
$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^N} \left(\prod_{j=1}^N \sigma_j \right) f(x + i\sigma\varepsilon) \right\} \varphi(x)\, dx, \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N).$$

Nach Meise [11], Lemma 1, sind die f_ε aus $\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E)$. Für Banachräume E folgt die Existenz des Limes analog wie in [11], Lemma 2. Der allgemeine Fall wird durch Betrachten projektiver Limites auf den Banachraum-Fall zurückgeführt. Die f_ε konvergieren in der starken Topologie von $\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E)$ gegen $R(f)$.

Lemma 1. *Die oben definierte Abbildung R ist stetig.*

Beweis. Falls E ein Banachraum ist, verläuft der Beweis analog wie der von Satz 2 in Meise [11]. Im allgemeinen Fall stellt man wieder E als projektiven Limes von Banachräumen E_α dar und beachtet, daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd}
H^e(N, E) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "R"'] & \underset{\leftarrow \alpha}{\operatorname{proj}} H^e(N, E_\alpha) \arrow[d, "S"] \\
\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E) \arrow[r, "\Psi"] & \underset{\leftarrow \alpha}{\operatorname{proj}} \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E_\alpha)
\end{tikzcd}$$

Dabei ist Ψ die in Meise [10], § 1, Satz 1, definierte Abbildung, Φ wurde in Meise [10] in der Bemerkung nach Satz 4 in § 2 erklärt, und S ist die Einschränkung der Abbildung $\prod_{\alpha \in A} R_\alpha$ auf $\underset{\leftarrow \alpha}{\operatorname{proj}} H^e(N, E_\alpha)$.

Lemma 2. *Für jeden lokalkonvexen Raum E und je zwei natürliche Zahlen p und q ist das folgende Diagramm kommutativ.*

$$\begin{tikzcd}
H^e(p, \mathbb{C}) \hat{\otimes} H^e(q, \mathbb{C}) \hat{\otimes} E \arrow[r, "J"] \arrow[d, "R_p \hat{\otimes} R_q \hat{\otimes} \mathrm{id}_E"'] & H^e(p+q, E) \arrow[d, "R"] \\
\mathscr{S}'(\mathbb{R}^p) \hat{\otimes} \mathscr{S}'(\mathbb{R}^q) \hat{\otimes} E \arrow[r, "I"] & \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^{p+q}), E)
\end{tikzcd}$$

Dabei sind I und J die natürlichen Isomorphismen.

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Satz 7 in Meise [11].

Satz 1. *Für jeden vollständigen lokalkonvexen Raum E und jede natürliche Zahl N ist die Abbildung* $R: H^e(N, E) \to \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N), E)$ *stetig, surjektiv und offen.*

Beweis. a) Die Stetigkeit von R wurde in Lemma 1 bewiesen.

b) Die Surjektivität ist für $N=1$ und alle lokalkonvexen vollständigen Räume E im Paragraphen 2 bewiesen worden. Lemma 2 erlaubt nun einen Induktionsbeweis. Dazu nehmen wir an, daß $R_p: H^e(p,E) \to \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^p),E)$ für alle lokalkonvexen vollständigen Räume E surjektiv ist und betrachten das folgende Diagramm, welches nach Lemma 2 kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd}
H^e(1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} H^e(p,\mathbb{C}) \hat{\otimes} E \arrow[r, "J"] \arrow[d, "R_1 \hat{\otimes} \mathrm{id}_{H^e(p,\mathbb{C})} \hat{\otimes} \mathrm{id}_E"'] \arrow[dd, bend right=60, "R_1 \hat{\otimes} R_p \hat{\otimes} \mathrm{id}_E"'] & H^e(p+1,E) \arrow[dd, "R_{p+1}"] \\
\mathscr{S}'(\mathbb{R}) \hat{\otimes} H^e(p,\mathbb{C}) \hat{\otimes} E \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathscr{S}'(\mathbb{R})} \hat{\otimes} R_p \hat{\otimes} \mathrm{id}_E"'] & \\
\mathscr{S}'(\mathbb{R}) \hat{\otimes} \mathscr{S}'(\mathbb{R}^p) \hat{\otimes} E \arrow[r, "I"'] & \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^{p+1}),E)
\end{tikzcd}$$

Da Lemma 4 aus § 2 auch für N Variable gilt, folgen aus dem Induktionsanfang und der Induktionsannahme, daß $R_1 \hat{\otimes} R_p \hat{\otimes} \mathrm{id}_E$ und damit auch R_{p+1} surjektiv ist.

c) Für den Fall $E=\mathbb{C}$ folgt die Offenheit von R wie im Fall einer Variablen. Der allgemeine Fall ergibt sich aus der Verallgemeinerung von § 2, Lemma 4, auf N Variable und der Bemerkung, daß das Tensorprodukt offener Abbildungen offen ist.

Folgerung. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 gilt*

$$\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N),E) \cong H^e(N,E)/\mathrm{Kern}\, R\,.$$

Der Bestimmung von $\mathrm{Kern}\, R$ dient das folgende Lemma.

Lemma 3. *Für jeden lokalkonvexen vollständigen Raum E besteht der Kern der Abbildung $R \hat{\otimes} \mathrm{id}_E: H^e(1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} E \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}) \hat{\otimes} E$ aus $F(1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} E$.*

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus § 2, Satz 5, und der Kommutativität des folgenden Diagrammes

$$\begin{tikzcd}
F(1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} E \arrow[r] \arrow[d, hook] & F(1,E) \arrow[d, hook] \\
H^e(1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} E \arrow[r] \arrow[d, "R_S \hat{\otimes} \mathrm{id}_E"'] & H^e(1,E) \arrow[d, "R"] \\
\mathscr{S}'(\mathbb{R}) \hat{\otimes} E \arrow[r] & \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}),E)\,.
\end{tikzcd}$$

Satz 2. *Ist E ein lokalkonvexer vollständiger Raum, so besteht der Kern der Abbildung $R: H^e(N,E) \to \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N),E)$ aus allen $f \in H^e(N,E)$, welche die Gestalt $f = \sum_{j=1}^{N} f_j$ haben, wobei $f_j(z_1,\dots,z_N) = g_j(z_1,\dots,z_{j-1}, z_{j+1},\dots,z_N)[z_j]$ und $g_j \in H^e(N-1, F(1,E))$. Dabei ist $H^e(0,F(1,E)) = F(1,E)$ zu setzen.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion. Nach Satz 5 aus § 2 ist die Aussage für $N=1$ richtig. Da

$$H^e(N-1, F(1,E)) \cong H^e(N-1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} F(1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} E,$$

besagt die Behauptung, gelesen in $\underbrace{H^e(1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} H^e(1,}_{N}\mathbb{C}) \hat{\otimes} E$, daß

$f = \sum_{j=1}^{N} f_j$, wobei

$$f_j \in \underbrace{H^e(1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} H^e(1,}_{j-1}\mathbb{C}) \hat{\otimes} F(1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} \underbrace{H^e(1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} H^e(1,}_{N-j}\mathbb{C}) \hat{\otimes} E.$$

Nehmen wir an, daß die Behauptung für alle vollständigen lokalkonvexen Räume E und bis zur Dimension p bewiesen ist. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^e(p,\mathbb{C}) \hat{\otimes} H^e(1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} E \arrow[r, "J"] \arrow[d, "S = R_p \hat{\otimes} \mathrm{id}_{H^e(1,\mathbb{C})} \hat{\otimes} \mathrm{id}_E"] & H^e(p+1,E) \arrow[dd, "R_{p+1}"] \\
\mathscr{S}'(\mathbb{R}^p) \hat{\otimes} H^e(1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} E \arrow[d, "T = \mathrm{id}_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^p)} \hat{\otimes} R_1 \hat{\otimes} \mathrm{id}_E"] & \\
\mathscr{S}'(\mathbb{R}^p) \hat{\otimes} \mathscr{S}'(\mathbb{R}) \hat{\otimes} E \arrow[r, "I"'] & \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^{p+1}),E)
\end{tikzcd}$$

Gilt für ein $u \in H^e(p,\mathbb{C}) \hat{\otimes} H^e(1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} E$ $R_{p+1}(J(u)) = 0$, so folgt $I \circ T \circ S(u) = 0$ und daher $T(S(u)) = 0$. Nach Lemma 3 ist dann $S(u) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^p) \hat{\otimes} F(1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} E$. Da die Darstellungsabbildung R_p für alle lokalkonvexen vollständigen Räume surjektiv ist, gibt es ein $w \in H^e(p,\mathbb{C}) \hat{\otimes} F(1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} E$, so daß $S(w) = S(u)$. Also ist $S(u-w) = 0$. Nach Induktionsannahme ist $u - w = \sum_{i=1}^{p} h_i$ mit

$$h_i \in H^e(i-1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} F(1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} H^e(p-i-1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} H^e(1,\mathbb{C}) \hat{\otimes} E,$$

so daß $u = \sum_{i=1}^{p+1} h_i$ mit $h_{p+1} = w$.

Daß alle Funktionen f der oben angegebenen Gestalt im Kern von R_{p+1} liegen, folgt leicht aus der Kommutativität des Diagramms.

Literatur

1. Beltrami, E. J., Wohlers, M. R.: Distributions and the Boundary Values of Analytic Functions. New York: Academic Press, 1966.
2. Bremermann, H.: Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms. Reading Mass.: Addison Wesley, 1965.
3. Carmichael, R. D.: Functions Analytic in an Octant and Boundary Values of Distributions. J. Math. Anal. Appl. **33**, 616—626 (1971).
4. —Distributional Boundary Values of Functions Analytic in Tubular Radial Domains. Indiana Uni. Math. J. **20**, 843—853 (1971).
5. Friedman, A.: Generalized Functions and Partial Differential Equations. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall 1963.
6. Grothendieck, A.: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Memoirs of the AMS 1966.
7. Hörmander, L.: Linear Partial Differential Operators. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1963.
8. Horváth, J.: Topological Vector Spaces and Distributions I. Reading Mass.: Addison Wesley 1965.
9. Komura, T.: Semigroups of Operators in Locally Convex Spaces. J. Functional Analysis **2**, 258—296 (1968).
10. Meise, R.: Räume holomorpher Vektorfunktionen mit Wachstumsbedingungen und topologische Tensorprodukte. Erscheint demnächst.
11. — Darstellung temperierter vektorwertiger Distributionen durch holomorphe Funktionen I. Math. Annalen **198**, 147—159 (1972).
12. Schwartz, L.: Théorie des distributions. Hermann, Paris 1966.
13. — Théorie des distributions à valeurs vectorielles I, II. Ann. Inst. Fourier **7**, 1—142 (1957); **8**, 1—210 (1958).
14. Tillmann, H. G.: Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen. Math. Z. **59**, 61—83 (1953).
15. — Distributionen als Randverteilungen analytischer Funktionen. Math. Z. **76**, 5—21 (1961).
16. Darstellung der Schwartzschen Distributionen durch analytische Funktionen. Math. Z. **77**, 106 – 124 (1961).
17. — Darstellung vektorwertiger Distributionen durch holomorphe Funktionen. Math. Annalen **151**, 286—295 (1963).
18. Wloka, J.: Grundräume und verallgemeinerte Funktionen. Lecture Notes in Mathematics. Berlin Heidelberg New York: Springer 1969.
19. Yosida, K.: Functional Analysis. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.

Reinhold Meise
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität
D-6500 Mainz
Saarstraße 21
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 29. Februar 1972)