Über die Primzahl-Zählfunktion, die n-te Primzahl und verallgemeinerte Ramanujan-Primzahlen

Inaugural-Dissertation

Zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Christian Axler

aus Düsseldorf

Düsseldorf, Januar 2013

Aus dem Mathematischen Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Gedruckt mit der Genehmigung der
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent: Prof. Dr. B. Klopsch
Korreferent: Prof. Dr. S. Schröer

Tag der mündlichen Prüfung: 25.03.2013

Kurzfassung

In dieser Arbeit erzielen wir bezüglich der Verteilung von Primzahlen eine Reihe von neuen Resultaten, insbesondere neue Abschätzungen für die Primzahl-Zählfunktion, die n-te Primzahl, die Summe der ersten n Primzahlen sowie für Ramanujan-Primzahlen. Damit verbessern wir einerseits bekannte Ergebnisse, z.B. von Dusart (1998, 2010) und Sondow (2009, 2011), und beweisen andererseits erstmals Vermutungen, z.B. von Mitra, Paul & Sarkar (2009).

Mit Hilfe einer von Rosser & Schoenfeld eingeführten Funktion sowie oberer Schranken für die Differenz $|\theta(x) - x|$ beweisen wir neue obere und untere Schranken für die Primzahl-Zählfunktion $\pi(x)$, die die in der Literatur bewiesenen Abschätzungen verschärfen. Mit Hilfe dieser neuen Abschätzungen ergibt sich unter anderem, dass das Intervall $(x, x + 1.274x/\log^3 x]$ für alle $x \geq 58833$ stets eine Primzahl enthält und wir verbessern somit ein Resultat von Dusart, wonach im Intervall $(x, x + x/(25\log^2 x)]$ für alle $x \geq 396738$ stets eine Primzahl liegt.

Für die n-te Primzahl p_n zeigen wir mit Hilfe der neuen Abschätzungen für $\pi(x)$ jeweils eine neue explizite obere und untere Schranke für die n-te Primzahl, die die derzeit in der Literatur anerkannten Abschätzungen verschärfen.

Für die Summe der ersten n Primzahlen leiten wir eine allgemeine asymptotische Formel her, die die bisher bekannten asymptotischen Formeln impliziert. Mandl vermutete und Dusart zeigte, dass die Ungleichung $D_n := np_n/2 - \sum_{k \leq n} p_k > 0$ für alle $n \geq 9$ gilt. Wir beweisen eine asymptotische Formel für D_n sowie untere und obere Schranken für D_n, die die bisher bekannten Abschätzungen verbessern. Mit Hilfe dieser Abschätzungen sowie den gezeigten Abschätzungen für die n-te Primzahl leiten wir die derzeit schärfsten expliziten unteren und oberen Schranken für die Summe der ersten n Primzahlen her. In diesem Zusammenhang beweisen wir eine weitere Ungleichung, die bislang nur unter Annahme der Riemannschen Vermutung galt.

Sei $k \in \mathbb{R}$ mit $k > 1$. Wir untersuchen die sogenannten verallgemeinerten Ramanujan-Primzahlen $R_n^{(k)}$. Amersi, Beckwith, Miller, Ronan & Sondow verallgemeinerten die asymptotische Formel $R_n^{(2)} = R_n \sim p_{2n}$ auf k-Ramanujan-Primzahlen. Sie bewiesen, dass $R_n^{(k)} \sim p_{\lceil kn/(k-1) \rceil}$. Wir zeigen erstmalig, dass sich die Ungleichung $R_n > p_{2n}$ von Sondow auch auf k-Ramanujan-Primzahlen verallgemeinern lässt, indem wir mit Hilfe einer unkonventionellen Abschätzung für $\pi(x)$ ein explizites $n_0(k) \in \mathbb{N}$ konstruieren, so dass die Ungleichung $R_n^{(k)} > p_{\lceil kn/(k-1) \rceil}$ für alle $n \geq n_0(k)$ erfüllt ist. Ist $N(k)$ die kleinste solche natürliche Zahl, so zeigen wir, dass die explizite Formel $N(k) = \pi(3k) - 1$ für alle $k \geq 745.8$ gilt. Außerdem konstruieren wir für $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ mit $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$ ein $x_0 > 0$ so, dass $R_n^{(k)} \leq (1 + \varepsilon_1) p_{\lceil (1+\varepsilon_2)kn/(k-1) \rceil}$ für alle $n \geq x_0$ erfüllt ist und folgern daraus die derzeit schärfste obere Schranke für R_n, die für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, nämlich $R_n \leq p_{\lceil 2.53n \rceil}$. Mit Hilfe dieser Schranke lässt sich Noes Algorithmus zur Berechnung von k-Ramanujan-Primzahlen effizienter anwenden. Ferner leiten wir für die Differenz $R_n^{(k)} - p_{\lceil kn/(k-1) \rceil}$ sowie für $\pi_k(x)/\pi(x) - (k-1)/k$ explizite Schranken her, die die bewiesenen Schranken von Amersi, Beckwith, Miller, Ronan & Sondow verschärfen. Außerdem beweisen wir mit Hilfe unserer neuen Resultate für die n-te k-Ramanujan-Primzahl, dass eine Vermutung von Mitra, Paul & Sarkar für alle hinreichend große natürliche Zahlen richtig ist.

Abstract

In this thesis we achieve a number of new results concerning the distribution of prime numbers, in particular, new estimates for the prime counting function, the nth prime number, the sum of the first n primes and for the Ramanujan primes. Thus, on the one hand, we improve well-known results, for example from Dusart (1998, 2010) and Sondow (2009, 2011) and on the other hand we prove some conjectures, for example from Mitra, Paul & Sarkar (2009), for the first time.

By using a function introduced by Rosser & Schoenfeld, as well as some upper estimates for the difference $|\theta(x) - x|$, we derive new upper and lower bounds for the prime counting function $\pi(x)$ which improve the estimates proved in literature. With the help of these new estimates we get particulary that the interval $(x, x + 1.274x/\log^3 x]$ always contains a prime for all $x \geq 58833$ and thus, we improve a result of Dusart, which states, that there always exists a prime in the interval $(x, x + x/(25 \log^2 x)]$ for all $x \geq 396738$.

With the aid of the new bounds for $\pi(x)$, we show an explicit new upper bound and lower bound for the nth prime, which improve the currently acknowledged estimates in literature.

For the sum of the first n prime numbers, we deduce a general asymptotic formula which implices the so far known asymptotic formulas for this sum. Mandl conjectured that the inequality $D_n := np_n/2 - \sum_{k \leq n} p_k > 0$ holds for all $n \geq 9$, which was shown by Dusart. We prove an asymptotic formula for D_n as well as upper and lower bounds, which improve the presently known bounds for D_n. By means of these new bounds, as well as the new shown bounds for the nth prime we deduce the currently sharpest explicit upper and lower bounds for the sum of the first n primes. In this context we prove another inequality, which up to now has only been proved under the assumption of Riemann's hypothesis.

Let $k \in \mathbb{R}$ with $k > 1$. We investigate the so-called generalized Ramanujan primes $R_n^{(k)}$. Amersi, Beckwith, Miller, Ronan & Sondow generalized the asymptotic formula $R_n^{(2)} = R_n \sim p_{2n}$ to k-Ramanujan primes by showing $R_n^{(k)} \sim p_{\lceil kn/(k-1) \rceil}$. For the first time, we show that the inequality $R_n > p_{2n}$, proved by Sondow, can also be generalized to k-Ramanujan primes, by constructing an explicit $n_0(k) \in \mathbb{N}$ with help of an unconventional estimate for $\pi(x)$, so that the inequality $R_n^{(k)} > p_{\lceil kn/(k-1) \rceil}$ is fulfilled for alle $n \geq n_0(k)$. If we denote the smallest such positive integer by $N(k)$, we show that the explicit formula $N(k) = \pi(3k) - 1$ holds for all $k \geq 745.8$. Furthermore, we construct for $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ with $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$ a $x_0 > 0$ such that the inequality $R_n^{(k)} \leq (1 + \varepsilon_1) p_{\lceil (1+\varepsilon_2) kn/(k-1) \rceil}$ holds for all $n \geq x_0$. This leads to the so far sharpest upper bound for R_n which is fulfilled for all $n \in \mathbb{N}$, namely $R_n \leq p_{\lceil 2.53n \rceil}$. With the aid of this estimate, Noe's algorithm for the calculation of k-Ramanujan primes can be applied more efficiently. Also, we prove explicit estimates for the differences $R_n^{(k)} - p_{\lceil kn/(k-1) \rceil}$ and $\pi_k(x)/\pi(x) - (k-1)/k$, which improve the currently best known such estimates, shown by Amersi, Beckwith, Miller, Ronan & Sondow. In addition, by means of our new results concerning the nth k-Ramanujan prime we prove that a conjecture, stated by Mitra, Paul & Sarkar, is true for all sufficiently large positive integers.

Inhaltsverzeichnis

Notationen

In dieser Arbeit verwenden wir die folgenden Notationen.

1. Der Buchstabe $\mathbb{R}$ steht für die Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{Q}$ für die Menge der rationalen Zahlen, $\mathbb{Z}$ für die Menge der ganzen Zahlen und $\mathbb{N}$ für die Menge der natürlichen Zahlen. Die Menge der Primzahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{P}$. Der Buchstabe x steht stets für eine reelle Zahl, der Buchstabe n für eine natürliche Zahl und der Buchstabe p für eine Primzahl. Mit p_n bezeichnen wir die n-te Primzahl, wobei $p_1 = 2$.

2. (Gauß-Klammern) Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$$

sowie

$$\lceil x \rceil := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\}.$$

Die folgenden Notationen, die in dieser Arbeit an mehreren Stellen auftreten, entnehmen wir aus dem 1976 erschienenen Buch „*Introduction to Analytic Number Theory*“ von Apostol [2].

3. (O-Notation) Ist $g(x) > 0$ für alle $x \geq a$, so schreiben wir

$$f(x) = O(g(x)),$$

falls ein Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$|f(x)| \leq Cg(x)$$

für alle $x \geq a$ gilt. Unter einer Gleichung der Form

$$f(x) = g(x) + O(h(x))$$

verstehen wir, dass

$$f(x) - g(x) = O(h(x)).$$

4. (o-Notation) Wir schreiben

$$f(x) = g(x) + o(h(x)) \qquad (x \to \infty),$$

falls

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - g(x)}{h(x)} = 0.$$

5. Zwei Funktionen f, g heißen *asymptotisch äquivalent* für $x \to \infty$, falls

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

gilt und wir schreiben in diesem Fall

$$f(x) \sim g(x) \qquad (x \to \infty).$$

Einleitung

In dieser Arbeit werden wir die Primzahl-Zählfunktion

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$$

in Hinblick auf untere bzw. obere Schranken untersuchen und deren Auswirkungen für Abschätzungen der n-ten Primzahl p_n sowie der Summe der ersten n Primzahlen studieren. Darüber hinaus werden wir in Kapitel 4 eine Reihe von neuen Resultaten zu den sogenannten k-Ramanujan-Primzahlen herleiten, die die bisher in der Literatur bekannten Resultate verallgemeinern und verschärfen.

Historischer Überblick

Die Primzahlen faszinieren seit je her Menschen aus aller Welt. Seit Euklid [18] vor ca. 2000 Jahren im 9. Buch seines Werkes *Die Elemente* mit Proposition 20 bewiesen hatte, dass die Menge der Primzahlen $\mathbb{P}$ nach oben unbeschränkt ist, stellte sich die Frage, wie schnell die Anzahl der Primzahlen $\leq x$ für $x \to \infty$ anwächst. Gauß [19] vermutete, wie aus einem Brief an Encke aus dem Jahr 1849 hervorgeht, bereits im Jahr 1793, dass

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t} \qquad (x \to \infty) \tag{1}$$

gilt. Mittels partieller Integration folgt, dass (1) äquivalent ist zu

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad (x \to \infty). \tag{2}$$

Im Jahr 1896 bewiesen Hadamard [20] und de la Vallée-Poussin [64] unabhängig voneinander die asymptotische Relation (2), die heute als *Primzahlsatz* bekannt ist. Aus den Arbeiten von Korobov [25] und Vinogradov [65] aus dem Jahr 1958 über einen nullstellenfreien Bereich der Riemannschen Zeta-Funktion $\zeta(s)$ in der Menge $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$ folgt, dass eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(x \exp\left(-\frac{c(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}\right)\right) \tag{3}$$

gilt. Der Mathematiker von Koch [24] konnte 1901 zeigen, dass

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(\sqrt{x}\log x)$$

äquivalent zur Riemannschen Vermutung ist.

Über die Primzahl-Zählfunktion $\pi(x)$

Mit Hilfe sukzessiver partieller Integration in (3) ergibt sich die asymptotische Formel

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \frac{6x}{\log^4 x} + \ldots + \frac{(n-1)!x}{\log^n x} + O\left(\frac{x}{\log^{n+1} x}\right). \tag{4}$$

Da $\pi(x)$ im Allgemeinen schwer zu berechnen ist und (4) nur wenig über die Größenordnung von $\pi(x)$ für ein festes x aussagt, interessieren wir uns in Kapitel 1 für untere bzw. obere Schranken für $\pi(x)$. Die in Kapitel 1 gezeigten Abschätzungen sollten dabei stets im Zusammenhang mit dem asymptotischen Verhalten betrachten werden. Bereits im Jahr 1962 konnten Rosser & Schoenfeld [49] in Hinblick auf (4) zeigen, dass

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x}$$

für alle $x \geq 17$ erfüllt ist. Die derzeit schärfsten Abschätzungen für $\pi(x)$ stammen von Dusart [14]. Er bewies im Jahr 2010, dass die Ungleichung

$$\pi(x) \leq \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2.334x}{\log^3 x} \tag{5}$$

für alle $x \geq 2953652287$ und dass die Ungleichung

$$\pi(x) \geq \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} \tag{6}$$

für alle $x \geq 88783$ erfüllt ist. Diese Abschätzungen werden wir in Kapitel 1 wie folgt verbessern. Dabei wird die von mehreren Parametern abhängige, von Rosser & Schoenfeld [49] eingeführte, Funktion

$$J_{k,\eta_k,x_1(k)}(x) := \pi(x_1(k)) - \frac{\theta(x_1(k))}{\log x_1(k)} + \frac{x}{\log x} + \frac{\eta_k x}{\log^{k+1} x} + \int_{x_1(k)}^{x} \left(\frac{1}{\log^2 t} + \frac{\eta_k}{\log^{k+2} t}\, dt \right)$$

eine zentrale Rolle spielen, wobei $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq 4$, $\eta_k > 0$ und $x_1(k) > 1$ so gewählt sind, dass für die Tchebychev-Funktion

$$\theta(x) := \sum_{p \leq x} \log p$$

die Ungleichung

$$|\theta(x) - x| < \frac{\eta_k x}{\log^k x}$$

für alle $x \geq x_1(k)$ gilt. Mit dem Abelschen Summationssatz folgt

$$J_{k,-\eta_k,x_1(k)}(x) \leq \pi(x) \leq J_{k,-\eta_k,x_1(k)}(x) \tag{7}$$

für alle $x \geq x_1(k)$. In Abschnitt 1.2.1 beweisen wir hiermit die folgende obere Schranke für $\pi(x)$, welche die obere Schranke (5) verschärft.

Theorem A. *Für alle $x > 1$ gilt*

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \frac{6.352x}{\log^4 x} + \frac{24.352x}{\log^5 x} + \frac{121.76x}{\log^6 x} + \frac{730.56x}{\log^7 x} + \frac{6802x}{\log^8 x}. \tag{8}$$

Panaitopol [42] präzisierte die asymptotische Relation (2). Er zeigte, dass

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x - 1 - \frac{k_1}{\log x} - \frac{k_2}{\log^2 x} - \ldots - \frac{k_n(1+\alpha_n(x))}{\log^n x}} \tag{9}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, wobei $\lim_{x\to\infty} \alpha_n(x) = 0$ und $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ durch die Rekursionsformel

$$k_n + 1!k_{n-1} + 2!k_{n-2} + \ldots + (n-1)!k_1 = n \cdot n!$$

gegeben sind. Motiviert durch dieses Resultat, werden wir in Abschnitt 1.2 das folgende Theorem beweisen, mit dem wir insbesondere für alle hinreichend große x die Ungleichung (8) verbessern werden.

Theorem B. *Für alle $x \geq 49$ gilt*

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{3.352}{\log^2 x} - \frac{12.648}{\log^3 x} - \frac{71.704}{\log^4 x} - \frac{466.156096}{\log^5 x} - \frac{4726.6}{\log^6 x}}.$$

In Abschnitt 1.2.2 zeigen wir mit Hilfe von (7), dass die folgende untere Schranke für die Primzahl-Zählfunktion $\pi(x)$ erfüllt ist.

Theorem C. *Für alle* $x \geq 1332470021$ *gilt*

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{2.648}{\log^2 x} - \frac{13.352}{\log^3 x} - \frac{70.296}{\log^4 x} - \frac{455.596096}{\log^5 x} - \frac{3404.179904}{\log^6 x}}.$$

Mit Hilfe dieses Theorems werden wir das folgende Resultat über eine untere Schranke für $\pi(x)$ beweisen, mit dem wir die untere Schranke (6) von Dusart [14] verbessert.

Theorem D. *Für alle* $x \geq 1332433009$ *gilt*

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \frac{5.648x}{\log^4 x} + \frac{23.648x}{\log^5 x} + \frac{118.24x}{\log^6 x} + \frac{709.44x}{\log^7 x} + \frac{4966.08x}{\log^8 x}.$$

In Abschnitt 1.3 untersuchen wir, in wie weit wir mit den Ergebnissen aus Kapitel 1 neue Resultate über ein spezielles Problem in der Theorie der Primzahlverteilung, und zwar über die Existenz von Primzahlen in kleinen Intervallen, herleiten können. Der Ursprung dieses Problems ist Bertrands Postulat, das unter anderem von Tchebychev [62] und Erdös [17] bewiesen wurde. Dieses besagt, dass im Intervall $(n, 2n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stets eine Primzahl liegt. Nachdem dieses Reultat von diversen Mathematikern verschärft wurde, konnte Dusart [14] im Jahr 2010 beweisen, dass für alle $x \geq 396738$ stets eine Primzahl p mit

$$x < p \leq x\left(1 + \frac{1}{25\log^2 x}\right)$$

existiert. In Abschnitt 1.4 werden wir dazu das folgende Resultat zeigen.

Theorem E. *Für alle* $x \geq 58833$ *existiert stets eine Primzahl* p *mit*

$$x < p \leq x\left(1 + \frac{1.274}{\log^3 x}\right).$$

Über die n-te Primzahl p_n

Das Ziel in Kapitel 2 ist, die zur Zeit besten Abschätzungen für die n-te Primzahl p_n zu verschärfen. Im Jahr 1902 bewies Cipolla [8] insbesondere, dass

$$p_n = n\left(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 6\log\log n + 11}{2\log^2 n}\right) + O\left(\frac{n(\log\log n)^3}{\log^3 n}\right) \quad (10)$$

gilt. Eine erste Abschätzung gelang Rosser [47] im Jahr 1939. Er bewies, dass die Ungleichung

$$p_n > n\log n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Nach mehreren Verschärfungen stammen die aktuell schärfsten Abschätzungen für die n-te Primzahl p_n von Dusart [14]. Er konnte im Jahr 2010 beweisen, dass die obere Schranke

$$p_n \leq n\left(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2}{\log n}\right) \quad (11)$$

für alle $n \geq 688383$ und dass die untere Schranke

$$p_n \geq n\left(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2.1}{\log n}\right) \quad (12)$$

für alle $n \geq 3$ erfüllt ist. In Abschnitt 2.1 werden wir mit Hilfe der gezeigten Abschätzungen für $\pi(x)$ aus Kapitel 1 durch mehrere technische Voraussetzungen eine arithmetische Funktion $b(n)$ sowie ein $N_0 \in \mathbb{N}$ konstruieren so, dass das folgende Theorem gilt.

Theorem F. *Für alle $n \geq N_0$ gilt*

$$p_n < n\left(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 6\log\log n + b(n)}{2\log^2 n}\right).$$

Indem wir die folgende Ungleichung mit Hilfe eines Computers und Theorem F in Hinblick auf (10) in zwei Schritten zeigen werden, verbessern wir insbesondere die Ungleichung (11).

Korollar G. *Für alle $n \geq 8009824$ gilt*

$$p_n < n\left(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 6\log\log n + 10.273}{2\log^2 n}\right). \tag{13}$$

In Abschnitt 2.2 werden wir mit Hilfe der gezeigten Abschätzungen für $\pi(x)$ aus Kapitel 1 durch eine Reihe von technischen Voraussetzungen eine arithmetische Funktion $c(n)$ sowie ein $N_1 \in \mathbb{N}$ konstruieren so, dass das folgende Theorem über eine untere Schranke für die n-te Primzahl gilt.

Theorem H. *Für alle $n \geq N_1$ gilt*

$$p_n > n\left(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 6\log\log n + c(n)}{2\log^2 n}\right).$$

Mit Hilfe eines Computers werden wir in drei Schritten die folgende Ungleichung zeigen, welche insbesondere die untere Schranke (12) verschärft.

Korollar I. *Für alle $n \geq 2$ gilt*

$$p_n > n\left(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 6\log\log n + 11.847}{2\log^2 n}\right). \tag{14}$$

Die Summe der ersten n Primzahlen

In Kapitel 3 werden wir die Summe der ersten n Primzahlen

$$\sum_{k\leq n} p_k$$

studieren. Dazu werden wir in Abschnitt 3.1 eine asymptotische Formel für diese Summe herleiten, die die bisher bekannten asymptotischen Formeln für diese Summe verallgemeinern werden. Um obere und untere Schranken für diese Summe zu beweisen, die die derzeit in der Literatur bewiesenen Abschätzungen verbessern werden, betrachten wir in Abschnitt 3.2 zunächst die Differenz

$$C_n := np_n - \sum_{k\leq n} p_k, \tag{15}$$

da diese aufgrund der Formel

$$C_n = \int_2^{p_n} \pi(x)\,dx \tag{16}$$

leichter zu handhaben ist. In Abschnitt 3.2.1 leiten wir, mit Hilfe von (15), der in Abschnitt 3.1 gezeigten asymptotischen Foreml für $\sum_{k\leq n} p_k$ und der asymptotischen Formel für p_n von Cipolla [8], eine asymptotische Formel für C_n her. Ferner leiten wir in diesem Abschnitt unter Verwendung von (16) und (4) eine weitere asymptotische Relation für C_n her. In Abschnitt 3.2.2 bzw. Abschnitt 3.2.3 beweisen wir mit Hilfe von (16) und der in Theorem A und D gezeigten Abschätzungen für $\pi(x)$, untere bzw. obere Schranken für C_n. Im Jahr 1975 erwähnten Rosser & Schoenfeld [49] eine Vermutung von Mandl über die Summe der ersten n Primzahlen, wonach die Ungleichung

$$\frac{n}{2}p_n > \sum_{k\leq n} p_k$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 9$ gilt. Diese Vermutung wurde im Jahr 1998 von Dusart [12, Théorème 1.14] bewiesen. In Abschnitt 3.3 werden wir die Differenz

$$D_n := \frac{n}{2} p_n - \sum_{k \leq n} p_k$$

genauer studieren. Dazu werden wir in Abschnitt 3.3.1, mit Hilfe von einer der beiden asymptotischen Formeln für C_n, eine asymptotische Formel für D_n herleiten. Die derzeit schärfste untere Schranke für die Differenz D_n stammt von Sun [59] aus dem Jahr 2012 und besagt, dass

$$D_n > \frac{n^2}{4}$$

für alle $n \geq 417$ gilt. In Abschnitt 3.3.2 werden wir mit Hilfe einer unteren Schranke für C_n die folgende schärfere untere Schranke für D_n beweisen.

Theorem J. *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 348247$ gilt*

$$D_n > \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4 \log n} - \frac{n^2(\log \log n - 2.092)}{4 \log^2 n}. \tag{17}$$

In Abschnitt 3.3.3 werden wir mit dem folgenden Theorem erstmals eine obere Schranke für D_n beweisen.

Theorem K. *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 26219$ gilt*

$$D_n < \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4 \log n} - \frac{n^2(\log \log n - 5.228)}{4 \log^2 n}. \tag{18}$$

Mit Hilfe dieser Abschätzungen für D_n und den neuen Abschätzungen für die n-te Primzahl p_n aus Kapitel 3 werden wir in Abschnitt 3.4 eine neue obere und untere Schranke für die Summe der ersten n Primzahlen herleiten, die die bisher in der Literatur bekannten Abschätzungen wie folgt verschärfen werden. Massias & Robin [33] zeigten unter Annahme der Riemannschen Vermutung, dass die n-te Primzahl die Ungleichung

$$p_n \leq n \left(\log n + \log \log n - 1 + \frac{\log \log n - 1.8}{\log n} \right) \tag{19}$$

für alle $n \geq 27076$ erfüllt und folgerten daraus, dass die Ungleichung

$$\sum_{k \leq n} p_k \leq \frac{n^2}{2} \left(\log n + \log \log n - \frac{3}{2} + \frac{\log \log n - 2.29}{\log n} \right) \tag{20}$$

für alle $n \geq 10134$ erfüllt ist. Dadurch, dass Dusart [12] in seiner Doktorarbeit beweisen konnte, dass die Ungleichung (19) auch ohne die Annahme der Riemannschen Vermutung richtig ist, folgt, dass die Ungleichung (20) für alle $n \geq 10134$ erfüllt ist. In Abschnitt 3.4.1 werden wir mit Hilfe von (13) und (17) die bislang schärfste obere Schranke (20) für die Summe der ersten n Primzahlen durch das folgende Theorem verbessern.

Theorem L. *Für alle $n \geq 353889$ gilt*

$$\sum_{k \leq n} p_k < \frac{n^2}{2} \left(\log n + \log \log n - \frac{3}{2} + \frac{\log \log n - 5/2}{\log n} - \frac{(\log \log n)^2 - 7 \log \log n + 12.365}{2 \log^2 n} \right).$$

Die derzeit schärfste untere Schranke für die Summe der ersten n Primzahlen

$$\sum_{k \leq n} p_k > \frac{n^2}{2} \left(\log n + \log \log n - \frac{3}{2} \right)$$

ist für alle $n \geq 305494$ erfüllt und stammt von Dusart [12] aus dem Jahr 1998. Mit Hilfe von (14) und (18) erhalten wir in Abschnitt 3.4.2 das folgende Resultat.

Theorem M. *Für alle $n \geq 2$ gilt*

$$\sum_{k \leq n} p_k > \frac{n^2}{2}\left(\log n + \log\log n - \frac{3}{2} + \frac{\log\log n - 5/2}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 7\log\log n + 17.075}{2\log^2 n}\right).$$

Unter Annahme der Riemannschen Vermutung bewiesen Massias & Robin [33, Théorème D(iv)] beispielsweise, dass die Ungleichung

$$\sum_{p \leq x} p > \frac{x^2}{2\log x} + \frac{x^2}{4\log^2 x} \tag{21}$$

für alle $x \geq 302971$ gilt. Ohne die Annahme der Riemannschen Vermutung zeigten sie [33, Théorème D(iv)], dass die Ungleichung (21) für alle $302971 \leq x \leq e^{98}$ und alle $x \geq e^{63864}$ erfüllt ist. Als eine Anwendung von Theorem A und Theorem D werden wir in Abschnitt 3.5 mit Hilfe des Abelschen Summationssatzes diese Lücke schließen.

k-Ramanujan-Primzahlen

Sei $k \in \mathbb{R}$ mit $k > 1$. In Kapitel 4 werden wir die sogenannten k-Ramanujan-Primzahlen $R_n^{(k)}$ studieren. Aus dem Primzahlsatz folgt, dass $\pi(x) - \pi(x/k) \to \infty$ für $x \to \infty$ gilt. Wir definieren $R_n^{(k)} \in \mathbb{N}$ als die kleinste natürliche Zahl, so dass

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{k}\right) \geq n$$

für alle $x \geq R_n^{(k)}$ gilt. Die Zahlen $R_n^{(k)}$ sind stets Primzahlen und werden *k-Ramanujan-Primzahlen* genannt. Im Fall $k = 2$ schreiben wir $R_n = R_n^{(2)}$ und sprechen von *Ramanujan-Primzahlen*. Im Jahr 2009 zeigte Sondow [58], dass die Ramanujan-Primzahlen die asymptotische Relation

$$R_n \sim p_{2n} \qquad (n \to \infty) \tag{22}$$

erfüllen. Gleichzeitig bewies er, dass die untere Schranke

$$R_n > p_{2n} \tag{23}$$

für alle $n \geq 2$ gilt. Amersi, Beckwith, Miller, Ronan & Sondow [1] konnten im Jahr 2011 die asymptotische Relation (22) auf k-Ramanujan-Primzahlen verallgemeinern, indem sie zeigten,

$$R_n^{(k)} \sim p_{\lceil kn/(k-1) \rceil} \qquad (n \to \infty). \tag{24}$$

Es stellen sich nun zwei Fragen: Die erste Frage, ist, ob sich die Ungleichung (23) in Hinblick auf (24) nun auch auf k-Ramanujan-Primzahlen verallgemeinern lässt. In Abschnitt 4.2.1 werden wir beweisen, dass dies in der Tat der Fall ist. Dazu konstruieren wir mit Hilfe von zwei Abschätzungen für $\pi(x)$ ein $n_0(k) \in \mathbb{N}$ so, dass die Ungleichung

$$\pi(p_{\lceil kn/(k-1) \rceil}) - \pi\left(\frac{p_{\lceil kn/(k-1) \rceil}}{k}\right) < n$$

für alle $n \geq n_0(k)$ gilt und erhalten somit das folgende Theorem.

Theorem N. *Für alle $n \geq n_0(k)$ gilt*

$$R_n^{(k)} > p_{\lceil kn/(k-1) \rceil}. \tag{25}$$

Die zweite Frage, die sich in diesem Zusammenhang stellt, ist die nach einem *minimalen* $n_0(k) \in \mathbb{N}$, so dass die Ungleichung (25) für alle $n \geq n_0(k)$ gilt. Dazu definieren wir

$$N(k) := \min\{m \in \mathbb{N} \mid R_n^{(k)} > p_{\lceil kn/(k-1) \rceil} \; \forall\, n \geq m\}. \tag{26}$$

In Abschnitt 4.2.1 werden wir beweisen, dass

$$N(k) \geq \pi(3k) - 1 \tag{27}$$

für alle $k > 1$ gilt, indem wir zeigen, dass die Ungleichung (25) für $n = \pi(3k) - 2$ nicht erfüllt ist. Mit dem folgenden Theorem zeigen wir, dass für $k \geq 745.8$ in (27) sogar Gleichheit gilt.

Theorem O. *Für alle $k \geq 745.8$ gilt*
$$N(k) = \pi(3k) - 1.$$

Nachdem wir mit (25) eine untere Schranke für die n-te k-Ramanujan-Primzahl gezeigt haben, werden wir mit dem folgenden Theorem eine obere Schranke für die n-te k-Ramanujan-Primzahl beweisen. Dazu konstruieren wir in Abschnitt 4.2.2 ein explizites von mehreren Parametern abhängiges $n_1 \in \mathbb{N}$ sowie mit Hilfe der in Kapitel 1 gezeigten Abschätzungen für $\pi(x)$ eine untere Schranke $\Upsilon_k(x)$ von $\pi(x) - \pi(x/k)$ und zeigen anschließend, dass
$$\Upsilon_k(x) \geq n$$
für alle $x \geq (1+\varepsilon_1)p_{\lceil (1+\varepsilon_2)kn/(k-1)\rceil}$ ist. Aus der Definition von $R_n^{(k)}$ ergibt sich somit das folgende Theorem.

Theorem P. *Seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ mit $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$. Dann gibt es ein $n_1 = n_1(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{N}$ so, dass*
$$R_n^{(k)} \leq (1+\varepsilon_1)p_{\lceil (1+\varepsilon_2)kn/(k-1)\rceil}$$
für alle $n \geq n_1$ gilt.

Für den Algorithmus von Noe [39] zur Berechnung von k-Ramanujan-Primzahlen wird eine obere Schranke für die n-te Ramanujan-Primzahl benötigt, die für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. In Abschnitt 4.2.2 weren wir sehen, wie durch Verbesserung der oberen Schranke für R_n der Algorithmus effizienter angewendet werden kann. In Abschnitt 4.3 werden wir mit Hilfe von Theorem P eine weitere obere Schranke für $R_n^{(k)}$ herleiten. Im Jahr 2011 bewiesen Amersi, Beckwith, Miller, Ronan & Sondow [1], dass eine Konstante $\beta_1 = \beta_1(k) > 0$ existiert, so dass
$$|R_n^{(k)} - p_{\lfloor kn/(k-1)\rfloor}| < \beta_1 n \log\log n \tag{28}$$
für alle hinreichend große n gilt. Nachdem wir mit (25) bereits eine untere Schranke für $R_n^{(k)}$ bewiesen haben, die insbesondere die untere Schranke in (28) verbessert, werden wir in Abschnitt 4.3 mit der gleichen Beweisstrategie wie in [1] eine bessere obere Schranke für $R_n^{(k)}$ beweisen.

Theorem Q. *Zu $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ existiert ein $n_0(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $\gamma_1 = \gamma_1(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$, so dass die Ungleichung*
$$R_n^{(k)} < p_{\lceil nk/(k-1)\rceil} + \gamma_1 n$$
für alle $n \geq n_0(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ erfüllt ist.

Dabei geben wir in Abschnitt 4.3 ein solches $n_0(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ und eine Konstante $\gamma_1(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ explizit an. Bezeichnen wir mit $\pi_k(x)$ die Anzahl der k-Ramanujan-Primzahlen $\leq x$, so konnten Amersi, Beckwith, Miller, Ronan & Sondow [1] mit Hilfe des Primzahlsatzes beweisen, dass eine Konstante $\beta_2 = \beta_2(k) > 0$ existiert, so dass
$$\left| \frac{k-1}{k} - \frac{\pi_k(n)}{\pi(n)} \right| \leq \frac{\beta_2 \log\log n}{\log n} \tag{29}$$
für alle hinreichend große n gilt. In Abschnitt 4.4 werden wir sowohl die untere als auch die obere Schranke für die Differenz
$$\frac{k-1}{k} - \frac{\pi_k(n)}{\pi(n)}$$
wie folgt verbessern. Im ersten Theorem sei $N(k)$ wie in (26) definiert.

Theorem R. *Für alle $x \geq R_{N(k)}^{(k)}$ gilt*
$$\frac{\pi_k(x)}{\pi(x)} < \frac{k-1}{k}.$$

Um die obere Schranke aus (29) zu verschärfen, konstruieren wir ein $x_0 \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $c > 0$, die jeweils von mehreren Parametern abhängen, so dass das folgende Theorem gilt.

Theorem S. *Für alle $x \geq x_0$ gilt*
$$\frac{k-1}{k} - \frac{c}{\log x} < \frac{\pi_k(x)}{\pi(x)}.$$

In Abschnitt 4.5 beschäftigen wir uns mit einer Vermutung von Mitra, Paul & Sarkar [36] aus dem Jahr 2009. Sie besagt, dass die Ungleichung

$$\pi(mn) - \pi(n) \geq m - 1$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \lceil 1.1 \log(2.5m) \rceil$ erfüllt ist. Wir werden mit Hilfe von Theorem P beweisen, dass diese Vermutung für alle hinreichend große m erfüllt ist.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit ergreifen und mich recht herzlich bei Prof. Dr. Benjamin Klopsch bedanken, dass er die Betreuung übernommen hat sowie für die vielen Anregungen zu dieser Arbeit. Er nahm sich stets Zeit, mir bei meinen Fragen weiter zu helfen. Vielen Dank auch an Thomas Leßmann für die vielen, vielen spannenden mathematischen und nicht-mathematischen Diskussionen, sowie für die zahlreichen Kommentare zu dieser Arbeit. Außerdem möchte ich mich bei Bertold Nöckel bedanken, der mir immer bei meinen Computerproblemen weiterhelfen konnte. Nicht zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, die mich während dieser Arbeit stets unterstützt hat.

Kapitel 1

Neue Abschätzungen für die Primzahl-Zählfunktion $\pi(x)$

In diesem Kapitel verschärfen wir mehrere in der Literatur bereits bewiesene Abschätzungen für die Primzahl-Zählfunktion $\pi(x)$, die wie folgt definiert ist.

Definition. Die Primzahl-Zählfunktion $\pi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist durch

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$$

definiert und beschreibt die Anzahl der Primzahlen $\leq x$.

Obwohl keine einfache Formel für $\pi(x)$ bekannt ist, lassen sich Aussagen über die Größenordnung von $\pi(x)$ machen. Basierend auf Primzahltafeln vermutete Gauß [19], wie aus einem Brief von an Encke aus dem Jahr 1849 hervorgeht, bereits im Jahr 1793, dass die Primzahl-Zählfunktion $\pi(x)$ und die Funktion

$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \mathrm{li}(x) - \mathrm{li}(2) \approx \mathrm{li}(x) - 1.04516... \tag{1.1}$$

asymptotisch äquivalent sind, wobei die hier auftretende Funktion $\mathrm{li}(x)$ *Integrallogarithmus* heißt und für $x > 1$ durch

$$\mathrm{li}(x) := \int_0^x \frac{dt}{\log t} := \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\log t} \right\}$$

definiert ist. Mittels partieller Integration und der Ungleichung

$$\frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \leq \frac{\log x}{x} \left(\frac{\sqrt{x} - 2}{\log^2 2} + \frac{x - \sqrt{x}}{\log^2 \sqrt{x}} \right)$$

ergibt sich

$$\mathrm{li}(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad (x \to \infty)$$

und die Vermutung von Gauß [19] ist äquivalent zu

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad (x \to \infty). \tag{1.2}$$

Im Jahr 1848 gelang Tchebychev [61, Théorème III] ein erster Schritt in Richtung eines Beweises von (1.2). Er zeigte, dass, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x}$$

existiert, dieser gleich 1 sein muss. Infolge eines weiteren Artikels von Tchebychev [62] aus dem Jahr 1850 konnte mit folgendem Satz bewiesen werden, dass $x/\log x$ die richtige Größenordnung von $\pi(x)$ ist.

Satz 1.1. *Es gibt Konstanten $c_1 > 1 > c_2 > 0$, so dass für alle $x \geq 2$ gilt*

$$c_2 \frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq c_1 \frac{x}{\log x}.$$

Beweis. Siehe Brüdern [7, Satz 1.1.3] oder Narkiewicz [38, pp. 104–112]. □

Die entscheidenen Ideen für den Beweis der asymptotischen Relation (1.2) stammen von Riemann [45] aus dem Jahr 1859. Er studierte die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

als Funktion einer komplexen Variablen s und zeigte unter anderem, dass die Funktion $\zeta(s)$ eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ sowie einen Pol erster Ordnung bei $s = 1$ besitzt. Außerdem konnte er zeigen, dass die Funktion $\zeta(s)$ durch die Gleichung

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^{\infty} \frac{F(x)}{x^{s+1}}\, dx,$$

wobei die Funktion $F(x)$ für alle $x > 1$ durch

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(x^{1/n})}{n} = \mathrm{li}(x) - \sum_{\mathrm{Im}\,\rho > 0} (\mathrm{li}(x^{\rho}) + \mathrm{li}(x^{1-\rho})) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log t} - \log 2 \tag{1.3}$$

gegeben ist, in direkter Verbindung mit der Primzahl-Zählfunktion $\pi(x)$ steht. Dabei wird in der Summe über alle, nach aufsteigendem Imaginärteil angeordneten, komplexen Nullstellen ρ der Riemannschen Zeta-Funktion $\zeta(s)$ summiert. Die letzte Gleichheit in (1.3) wurde von Riemann [45] veröffentlicht und im Jahr 1895 von von Mangoldt [31] bewiesen. Mit Hilfe von (1.3) und der Möbius-Inversionsformel (siehe Edwards [15, pp. 217–218]) folgt, dass die, von den Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion $\zeta(s)$ abhängige, Formel

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} F(x^{1/n}) \tag{1.4}$$

für alle $x > 1$ erfüllt ist, wobei $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ die sogenannte *Möbius-Funktion* ist und durch

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ (-1)^r & \text{falls } n = p_{i_1} \cdots p_{i_r} \text{ mit } p_{i_j} \neq p_{i_k} \text{ für } j \neq k, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist. Approximieren wir $F(x)$ in (1.4) durch $\mathrm{li}(x)$, so ergibt sich Riemanns berühmte Approximation

$$R(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{li}(x^{1/n}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^n x}{n! n \zeta(n+1)}$$

für $\pi(x)$, wobei die letzte Gleichheit unter anderem aus der von Nielsen [41, Part II, p.3] im Jahr 1965 bewiesenen Formel

$$\mathrm{li}(x) = \gamma + \log\log x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log^k x}{k \cdot k!},$$

wobei $\gamma = 0.57721...$ die Euler-Konstante ist, folgt (siehe Riesel [46]).

Bemerkung. In seinem Artikel vermutete Riemann [45] unter anderem, dass die Nullstellen von $\zeta(s)$ in der Menge $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$ alle auf der Geraden $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ liegen. Diese Vermutung ist heute als *Riemannsche Vermutung* bekannt und konnte bisher weder bewiesen noch widerlegt werden.

Im Jahr 1896 bewiesen HADAMARD [20] und DE LA VALLÉE-POUSSIN [64] unabhängig voneinander, dass $\zeta(1+it) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt und folgerten daraus (siehe EDWARDS [15, Chapter 4 & Chapter 5] oder NARKIEWICZ [38, Chapter 5]) die asymptotische Relation (1.2), die heute als *Primzahlsatz* bekannt ist.

SATZ 1.2 (*Primzahlsatz*)**.** *Es gilt*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad (x \to \infty). \tag{1.5}$$

BEMERKUNG. In ihren Beweisen benutzten HADAMARD [20] und DE LA VALLÉE-POUSSIN [64] neben Eigenschaften der Riemannschen Zeta-Funktion $\zeta(s)$, unter anderem auch Resultate aus der Funktionentheorie. Lange Zeit war nicht bekannt, ob ein Beweis des Primzahlsatzes ohne Hilfsmittel aus der Funktionentheorie möglich sei, bis ERDÖS [16] und SELBERG [54] im Jahr 1949 den Primzahlsatz mit ausschließlich elementaren Abschätzungen von arithmetischen Funktionen bewiesen.

Insgesamt erhalten wir, dass

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \sim \mathrm{Li}(x) \sim \mathrm{li}(x) \sim R(x) \qquad (x \to \infty) \tag{1.6}$$

gilt. Einen Eindruck über die Genauigkeit der jeweiligen Approximationen aus (1.6) für $\pi(x)$ liefert RIESEL [46, pp. 380–383]. Hier ein kleiner Auszug dieser Tabelle:

x	$\pi(x)$	$[\pi(x) - x/\log x]$	$[\mathrm{li}(x) - \pi(x)]$	$[R(x) - \pi(x)]$
10^9	50847534	2592592	1701	−79
10^{10}	455052511	20758029	3104	−1828
10^{11}	4118054813	169923159	11588	−2318
10^{12}	37607912018	1416705193	38263	−1476
10^{13}	346065536839	11992858452	108971	−5773
10^{14}	3204941750802	102838308636	314890	−19200
10^{15}	29844570422669	891604962452	1052619	73218
10^{16}	279238341033925	7804289844393	3214632	327052
10^{17}	2623557157654233	68883734693928	7956589	−598255
10^{18}	24739954287740860	612483070893536	21949555	−3501366

Dabei ist $[x] \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$[x] := \begin{cases} k & \text{falls } k - 1/2 < x < k + 1/2 \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, \\ k & \text{falls } x = k + 1/2 \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \text{ gerade}, \\ k+1 & \text{falls } x = k + 1/2 \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \text{ ungerade}. \end{cases}$$

PANAITOPOL [42, Theorem 1] präzisierte die asymptotische Relation (1.5), indem er zeigte, dass

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x - 1 - \frac{k_1}{\log x} - \frac{k_2}{\log^2 x} - \ldots - \frac{k_n(1+\alpha_n(x))}{\log^n x}} \tag{1.7}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, wobei $\lim_{x\to\infty} \alpha_n(x) = 0$ und $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ durch die Rekursionsformel

$$k_n + 1!k_{n-1} + 2!k_{n-2} + \ldots + (n-1)!k_1 = n \cdot n!$$

gegeben sind.

BEISPIEL. Es gilt $k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 13, k_4 = 71, k_5 = 461$ und $k_6 = 3441$.

1.1 Historischer Überblick

Da $\pi(x)$ im Allgemeinen nur schwer zu berechnen ist und die asymptotischen Relationen (1.6) nur wenig über die Größenordnung von $\pi(x)$ für festes x aussagen, interessieren wir uns in Hinblick auf die folgenden Kapitel für obere und untere Schranken der Primzahl-Zählfunktion $\pi(x)$.

Eine der ersten Abschätzungen für $\pi(x)$ stammt aus dem Jahr 1793. Gauß [19] rechnete nach, dass

$$\pi(x) < \mathrm{li}(x) \tag{1.8}$$

für alle $2 \leq x \leq 3000000$ gilt.

Bemerkung. Gauß [19] vermutete, dass die Ungleichung (1.8) für alle $x \geq 2$ erfüllt ist. Littlewood [30] konnte im Jahr 1914 jedoch zeigen, dass $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ unendlich oft das Vorzeichen wechselt, indem er bewies, dass eine Konstante $K > 0$ existiert, so dass die Mengen

$$\left\{ x \geq 2 \mid \pi(x) - \mathrm{li}(x) > \frac{K\sqrt{x}\log\log\log x}{\log x} \right\}$$

und

$$\left\{ x \geq 2 \mid \pi(x) - \mathrm{li}(x) < -\frac{K\sqrt{x}\log\log\log x}{\log x} \right\}$$

nicht leer und nach oben unbeschränkt sind. Der Beweis von Littlewood [30] ist jedoch ein reiner Existenzbeweis und bis heute ist kein x bekannt, so dass $\pi(x) > \mathrm{li}(x)$ gilt. Definieren wir

$$\Xi := \min\{x \in \mathbb{R} \mid \pi(x) > \mathrm{li}(x)\},$$

so stammt die erste obere Schranke für Ξ, die ohne die Annahme der Riemannschen Vermutung bewiesen wurde, von Skewes [56] aus dem Jahr 1955 und lautet

$$\Xi < 10^{10^{10^{10^3}}}.$$

Die Zahl auf der rechten Seite ist in der Literatur auch als *Skewes-Zahl* bekannt. Mit seinem Artikel aus dem Jahr 1966 konnte Lehman [29] diese obere Schranke deutlich verschärfen, indem er zeigte, dass $\Xi < 1.65 \cdot 10^{1165}$ gilt. Nach mehreren Verbesserungen stammt die derzeit beste obere Schranke

$$\Xi < e^{727.951346802} \leq 1.397182091 \cdot 10^{316}$$

aus dem Jahr 2010 und wurde von Zegowitz [66, Theorem 6.0.23] mit Hilfe des Artikels von Lehman [29] bewiesen. Eine untere Schranke für Ξ liefert die Rechnung von Gauß [19], wonach $\Xi > 3000000$ gilt. Dies wurde unter anderem im Jahr 1975 von Brent [6] zu $\Xi > 8 \cdot 10^{10}$ verbessert.

Im Jahr 2008 konnte Kotnik [26] mit dem folgenden Satz zeigen, dass $\Xi > 10^{14}$ ist.

Satz 1.3 (Kotnik, *2008*). *Für alle $x \leq 10^{14}$ gilt*

$$\pi(x) < \mathrm{li}(x).$$

Bemerkung. Für den Fehlerterm von $|\pi(x) - \mathrm{li}(x)|$ existieren mehrere Abschätzungen. In Brüdern [7] wird beispielsweise gezeigt, dass es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(x\exp(-c(\log x)^{1/10})\right) \tag{1.9}$$

gilt. Die zur Zeit schärfste Abschätzung für den Fehlerterm resultiert aus den Arbeiten von Korobov [25] und Vinogradov [65] aus dem Jahr 1958 über einen nullstellenfreien Bereich der Riemannschen Zeta-Funktion $\zeta(s)$ in der Menge $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$ und lautet

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(x\exp\left(-\frac{c(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}\right)\right),$$

wobei $c > 0$ eine absolute Konstante ist. Im Jahr 1901 konnte VON KOCH [24] zeigen, dass

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(\sqrt{x}\log x)$$

genau dann gilt, wenn die Riemannsche Vermutung gilt.

Aus (1.7) folgt insbesondere, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_0 = x_0(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass

$$\frac{x}{\log x - 1 + \varepsilon} < \pi(x) < \frac{x}{\log x - 1 - \varepsilon}$$

für alle $x \geq x_0$ gilt. ROSSER [48, Theorem 29] zeigte beispielsweise für $\varepsilon = 3$, dass

$$\frac{x}{\log x + 2} < \pi(x) < \frac{x}{\log x - 4}$$

für alle $x \geq 55$ gilt. Im Jahr 1962 bewiesen ROSSER & SCHOENFELD [49] in Hinblick auf Satz 1.2, dass

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x} \tag{1.10}$$

für alle $x \geq 17$ erfüllt ist. ROSSER, SCHOENFELD & YOHE [51] zeigten im Jahr 1968, dass die Abschätzungen

$$\frac{x}{\log x - \frac{3}{4}} < \pi(x) < \frac{x}{\log x - \frac{5}{4}}$$

für alle $x \geq 347$ gelten. Im Jahr 1998 bewies DUSART [12, Théorème 1.10] die folgenden Abschätzungen.

SATZ 1.4 (DUSART, *1998*)**.** *Für alle $x \geq 5393$ gilt*

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x - 1}$$

und für alle $x \geq 60184$ gilt

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x - 1.1}.$$

MINCU [35, Section 2, Lemma 1 und Lemma 2] verschärfte mit dem folgenden Satz aus dem Jahr 2003 die Abschätzungen aus Satz 1.4.

SATZ 1.5 (MINCU, *2003*)**.** *Die Ungleichung*

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1.51}{\log x}} \tag{1.11}$$

ist für alle $x \geq 6.22$ erfüllt und für alle $x \geq 70111$ gilt

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x - 1 - \frac{0.7}{\log x}}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe von (1.1) und sukzessiver partieller Integration erhalten wir, dass

$$\mathrm{li}(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \ldots + \frac{(n-1)!x}{\log^n x} + O\left(\frac{x}{\log^{n+1} x}\right) \tag{1.12}$$

gilt. Zusammen mit (1.9) folgt

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \ldots + \frac{(n-1)!x}{\log^n x} + O\left(\frac{x}{\log^{n+1} x}\right). \tag{1.13}$$

Dies bezüglich zeigte DUSART [12, Théorème 1.10] im Jahr 1998, dass die Ungleichung

$$\pi(x) \geq \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{1.8x}{\log^3 x}$$

für alle $x \geq 32299$ und dass die Ungleichung

$$\pi(x) \leq \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2.51x}{\log^3 x}$$

für alle $x \geq 355991$ gilt. Im Jahr 2010 bewies DUSART [14, Theorem 6.9] in Hinblick auf (1.13) mit dem folgenden Satz die bislang schärfsten Abschätzungen für die Primzahl-Zählfunktion $\pi(x)$.

SATZ 1.6 (DUSART, *2010*). *Für alle* $x \geq 88783$ *gilt*

$$\pi(x) \geq \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x}. \tag{1.14}$$

Für alle $x \geq 2953652287$ *gilt*

$$\pi(x) \leq \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2.334x}{\log^3 x}. \tag{1.15}$$

1.2 Schärfere Abschätzungen für $\pi(x)$

In diesem Kapitel werden wir mit Hilfe von Satz 1.3 mehrere neue Abschätzungen für $\pi(x)$ beweisen, mit denen wir unter anderem in Kapitel 3 neue Abschätzungen für die n-te Primzahl p_n und in Kapitel 4 neue Abschätzungen für die Summe der ersten n Primzahlen zeigen werden, die die derzeit bekannten Abschätzungen verschärfen werden. Grundlegend dafür ist der sogenannte *Abelsche Summationssatz.*

SATZ 1.7 (ABELscher Summationssatz). *Für eine arithmetische Funktion* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *sei* $A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$, *wobei* $A(x) = 0$ *für* $x < 1$ *ist. Besitzt* f *eine stetige Ableitung auf dem Intervall* $[y, x]$, *so gilt*

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\, dt.$$

Beweis. Siehe APOSTOL [2, Theorem 4.2]. □

Wir führen die sogenannte TCHEBYCHEV-Funktion $\theta(x)$ ein.

DEFINITION. Für $x > 0$ sei TCHEBYCHEVs θ-Funktion definiert durch

$$\theta(x) := \sum_{p \leq x} \log p. \tag{1.16}$$

Mit Hilfe von Satz 1.7 lässt sich die folgende Beziehung zwischen $\pi(x)$ und $\theta(x)$ herleiten.

SATZ 1.8. *Für alle* $x \geq 2$ *gilt*

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t \log^2 t}\, dt \tag{1.17}$$

und

$$\theta(x) = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\, dt.$$

Beweis. Siehe APOSTOL [2, Theorem 4.3]. □

BEMERKUNG. Ursprünglich zeigten HADAMARD [20] und DE LA VALLÉE-POUSSIN [64] in ihren Beweisen des Primzahlsatzes, dass die asymptotische Relation

$$\theta(x) \sim x \qquad (x \to \infty)$$

gilt, die eine äquivalente Aussage des Primzahlsatzes ist, wie man mit Satz 1.8 leicht sieht.

Bevor wir im nächsten Abschnitt ein erste neue Abschätzung für $\pi(x)$ zeigen werden, notieren wir noch ein Resultat über den Abstand von x und der TCHEBYCHEV-Funktion $\theta(x)$ von DUSART [14, Theorem 5.2, Table 6.4 & Table 6.5] aus dem Jahr 2010, das im Folgenden eine sehr wichtige Rolle spielen wird.

SATZ 1.9 (DUSART, *2010*)**.** *Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq 4$. Dann ist die Ungleichung*

$$|\theta(x) - x| < \frac{\eta_k x}{\log^k x}$$

für alle $x \geq x_0(k)$ erfüllt, wobei

k	1	2	3	3	4
η_k	0.001	0.01	0.78	0.352	1300
$x_0(k)$	908994923	7713133853	158822621	$2 \cdot 10^{13}$	2

.

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq 4$ und seien $\eta_k, x_1(k)$ mit $x_1(k) > 1$ so, dass

$$|\theta(x) - x| < \frac{\eta_k x}{\log^k x} \tag{1.18}$$

für alle $x \geq x_1(k)$ gilt. ROSSER & SCHOENFELD [49, p.81] führten die folgende Funktion ein, die im Folgenden ebenfalls eine sehr wichtige Rolle spielen wird.

DEFINITION**.** Für alle $x > 1$ definieren wir

$$J_{k,\eta_k,x_1(k)}(x) := \pi(x_1(k)) - \frac{\theta(x_1(k))}{\log x_1(k)} + \frac{x}{\log x} + \frac{\eta_k x}{\log^{k+1} x} + \int_{x_1(k)}^{x} \left(\frac{1}{\log^2 t} + \frac{\eta_k}{\log^{k+2} t}\, dt \right). \tag{1.19}$$

BEMERKUNG**.** Aus (1.19) erhalten wir

$$J'_{k,\eta_k,x_1(k)}(x) = \frac{1}{\log x} + \frac{\eta_k}{\log^{k+1} x} - \frac{k\eta_k}{\log^{k+2} x} \tag{1.20}$$

Sei $x \geq x_1(k)$. Mit Hilfe von (1.17) erhalten wir

$$\pi(x) = \pi(x_1(k)) - \frac{\theta(x_1(k))}{\log(x_1(k))} + \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_{x_1(k)}^{x} \frac{\theta(t)}{t \log^2 t}\, dt.$$

Zusammen mit (1.19) und (1.18) folgt also

$$\begin{aligned}
J_{k,\eta_k,x_1(k)}(x) - \pi(x) &= \frac{x}{\log x} + \frac{\eta_k x}{\log^{k+1} x} + \int_{x_1(k)}^{x} \left(\frac{1}{\log^2 t} + \frac{\eta_k}{\log^{k+2} t}\, dt \right) - \frac{\theta(x)}{\log x} - \int_{x_1(k)}^{x} \frac{\theta(t)}{t \log^2 t}\, dt \\
&> \frac{x}{\log x} + \frac{\eta_k x}{\log^{k+1} x} + \int_{x_1(k)}^{x} \frac{1 + \frac{\eta_k}{\log^k t}}{\log^2 t}\, dt - \frac{x + \frac{\eta_k x}{\log^k x}}{\log x} - \int_{x_1(k)}^{x} \frac{t + \frac{\eta_k t}{\log^k t}}{t \log^2 t}\, dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\pi(x) - J_{k,-\eta_k,x_1(k)}(x) &= \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_{x_1(k)}^{x} \frac{\theta(t)}{t \log^2 t}\, dt - \frac{x}{\log x} + \frac{\eta_k x}{\log^{k+1} x} - \int_{x_1(k)}^{x} \left(\frac{1}{\log^2 t} + \frac{\eta_k}{\log^{k+2} t}\, dt \right) \\
&> \frac{x - \frac{\eta_k x}{\log^k x}}{\log x} + \int_{x_1(k)}^{x} \frac{t + \frac{\eta_k t}{\log^k t}}{t \log^2 t}\, dt - \frac{x}{\log x} + \frac{\eta_k x}{\log^{k+1} x} - \int_{x_1(k)}^{x} \frac{1 + \frac{\eta_k}{\log^k t}}{\log^2 t}\, dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also, dass

$$J_{k,-\eta_k,x_1(k)}(x) \leq \pi(x) \leq J_{k,\eta_k,x_1(k)}(x) \tag{1.21}$$

für alle $x \geq x_1(k)$ erfüllt ist.

1.2.1 Neue obere Schranken für $\pi(x)$

In diesem Abschnitt werden wir mit Hilfe von (1.21), Satz 1.3 und unter Verwendung eines Computers neue Abschätzungen für die Primzahl-Zählfunktion $\pi(x)$ beweisen, die die bisher in der Literatur bekannten Abschätzungen für $\pi(x)$ verschärfen werden.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Aus (1.13) folgt, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_0(n, \varepsilon)$ existiert, so dass

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \frac{6x}{\log^4 x} + \frac{24x}{\log^5 x} + \ldots + \frac{(n-2)!\, x}{\log^{n-1} x} + \frac{(\varepsilon + (n-1)!)x}{\log^n x}$$

für alle $x \geq x_0(n, \varepsilon)$ gilt. Im Gegensatz zu Dusart, der in Satz 1.6 den Fall $n = 2$ betrachtete, beweisen wir für $n = 8$ das folgende Theorem, mit dem wir insbesondere die obere Schranke in (1.15) für alle $x \geq 10825794009$ verschärfen.

Theorem 1.10. *Für alle $x > 1$ gilt*

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \frac{6.352x}{\log^4 x} + \frac{24.352x}{\log^5 x} + \frac{121.76x}{\log^6 x} + \frac{730.56x}{\log^7 x} + \frac{6802x}{\log^8 x}.$$

Beweis. Zunächst bezeichnen wir die rechte Seite der behaupteten Ungleichung mit $\psi(x)$. Sei $k = 3$ und $x_1 = x_1(k) = 10^{14}$. Dann folgt aus Satz 1.9, dass

$$|\theta(x) - x| < \frac{0.352x}{\log^3 x}$$

für alle $x \geq x_1$ gilt. Aus (1.21) folgt somit

$$\pi(x) \leq J_{3,0.352,x_1}(x) \tag{1.22}$$

für alle $x \geq x_1$. Als erstes vergleichen wir die Funktion $\psi(x)$ mit $J_{3,0.352,x_1}(x)$. Es gilt

$$\psi'(x) = \frac{\log^8 x + 0.352 \log^5 x - 1.056 \log^4 x + 1688.08 \log x - 54416}{\log^9 x}$$

und wir erhalten mit (1.20), dass

$$\psi'(x) - J'_{3,0.352,x_1}(x) = \frac{1688.08 \log x - 54416}{\log^9 x} \geq 0 \tag{1.23}$$

für alle $x \geq 10^{14} \geq \exp(54416/1688.08)$ erfüllt ist. Es gilt $\log 10^{14} \leq 32.2362$ und somit

$$\pi(x_1) - \frac{\theta(x_1)}{\log x_1} = \pi(10^{14}) - \frac{\theta(10^{14})}{\log 10^{14}} \leq 3204941750802 - \frac{99999990573246}{32.2362} \leq 102839438084, \tag{1.24}$$

da $\theta(10^{14}) \geq 99999990573246$ nach Dusart [14, Table 6.2] und $\pi(10^{14}) = 3204941750802$ gilt. Es folgt

$$\begin{aligned}
\psi(x_1) - J_{3,0.352,x_1}(x_1) &\geq \frac{x_1}{32.2362^2} + \frac{2x_1}{32.2362^3} + \frac{6x_1}{32.2362^4} + \frac{24.352x_1}{32.2362^5} + \frac{121.76x_1}{32.2362^6} + \frac{730.56x_1}{32.2362^7} \\
&\quad + \frac{6802x_1}{32.2362^8} - \pi(x_1) + \frac{\theta(x_1)}{\log x_1} \\
&\geq 96230405728 + 5970331846 + 555617459 + 69954463 + 10850296 \\
&\quad + 2019523 + 583291 - 102839438084 \\
&= 324522.
\end{aligned}$$

In Kombination mit (1.23) und (1.22) folgt $\psi(x) > J_{3,0.352,x_1}(x_1) \geq \pi(x)$ für alle $x \geq 10^{14}$.

Als nächstes vergleichen wir die Funktion $\psi(x)$ mit dem Integrallogarithmus $\mathrm{li}(x)$. Da $\mathrm{li}'(x) = 1/\log x$ gilt, folgt

$$\psi'(x) - \mathrm{li}'(x) = \frac{0.352 \log^5 x - 1.056 \log^4 x + 1688.08 \log x - 54416}{\log^9 x}.$$

Sei $x \geq 5 \cdot 10^5$. Dann gilt $\log x \geq 13.1$ und wir erhalten

$$\psi'(x) - \mathrm{li}'(x) = \frac{(0.352\log x - 1.056)\log^4 x + 1688.08\log x - 54416}{\log^9 x} \geq \frac{3.55\log^4 x + 1688.08\log x - 54416}{\log^9 x}.$$

Daraus folgt

$$\psi'(x) - \mathrm{li}'(x) \geq \frac{(3.55 \cdot 13.1^3 + 1688.08)\log x - 54416}{\log^9 x} \geq \frac{9668\log x - 54416}{\log^9 x} \geq 0,$$

da $x \geq 5 \cdot 10^5 \geq \exp(54416/9668)$. Da außerdem $\psi(5 \cdot 10^5) - \mathrm{li}(5 \cdot 10^5) \geq 2.4 > 0$ ist, folgt $\psi(x) > \mathrm{li}(x)$ für alle $x \geq 5 \cdot 10^5$. Zusammen mit Satz 1.3 erhalten wir, dass $\psi(x) > \pi(x)$ für alle $5 \cdot 10^5 \leq x \leq 10^{14}$ gilt.

Da $\log 47 \geq 3.85$ und somit $0.352\log 47 - 1.056 \geq 0$ gilt, folgt

$$\psi'(x) \geq \frac{\log^8 x + 1688.08\log x - 54416}{\log^9 x} \geq \frac{48270 + 6499 - 54416}{\log^9 x} \geq 0$$

für alle $x \geq 47$. Um die Behauptung für alle $47 \leq x \leq 5 \cdot 10^5$ zu zeigen, genügt es also mit einem Computer nachzurechnen, dass $\psi(p_i) > \pi(p_i)$ für alle $15 = \pi(47) \leq i \leq \pi(5 \cdot 10^5) + 1 = 41539$ gilt.

Da $\pi(46) < \psi(46)$ gilt und da

$$\psi'(x) \leq \frac{\log^8 x + 0.352\log^5 x + 1688.08\log x - 54416}{\log^9 x} \leq \frac{46301 + 291 + 6466 - 54416}{\log^9 x} < 0$$

für alle $1 < x \leq 46$ gilt, folgt $\psi(x) > \pi(x)$ für alle $1 < x \leq 46$.

Bleibt das Intervall $[46, 47]$ zu betrachten. Es gilt $\pi(x) \leq 15$ für alle $x \in [46, 47]$. Da $\log 47 \leq 3.86$ gilt, folgt

$$\psi(x) \geq \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1}{\log x}\right) \geq \frac{46}{3.86}\left(1 + \frac{1}{3.86}\right) > 15 \geq \pi(x)$$

für alle $46 \leq x \leq 47$. Damit folgt die Behauptung. □

Aus (1.7) folgt insbesondere, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_2(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{3+\varepsilon}{\log^2 x}} \tag{1.25}$$

für alle $x \geq x_2(\varepsilon)$ gilt. Dazu erhalten wir mit Hilfe von Theorem 1.10 das folgende Resultat. Dabei seien

$$\begin{aligned} S(y) = {} & 14814.62752y^6 + 25854.312737792y^5 + 85014.53465y^4 + 321273.194247168y^3 \\ & + 1458776.8942848y^2 + 6953741.49773824y + 624136.5368 \end{aligned}$$

und

$$T(y) = y - 1 - \frac{1}{y} - \frac{3.352}{y^2} - \frac{12.648}{y^3} - \frac{71.704}{y^4} - \frac{466.156069}{y^5} - \frac{5178.147904}{y^6},$$

wobei $T(y) > 0$ für alle $y \geq 4.07$ ist.

Proposition 1.11. *Für alle $x \geq 59$ gilt*

$$\pi(x) < \frac{x}{T(\log x)}\left(1 - \frac{S(\log x)}{\log^{14} x}\right).$$

Beweis. Für $y > 0$ setzen wir

$$P(y) = 1 + \frac{1}{y} + \frac{2}{y^2} + \frac{6.352}{y^3} + \frac{24.352}{y^4} + \frac{121.76}{y^5} + \frac{730.56}{y^6} + \frac{6802}{y^7}.$$

Außerdem sei $R(y) = y^6 T(y)$. Dann gilt $R(y) > 0$ und

$$P(y) = \frac{y^{14} - S(y)}{y^7 R(y)}$$

für alle $y \geq 4.07$. Setzen wir $y = \log x$, so ergibt sich mit Hilfe von Theorem 1.10 die Ungleichung

$$\pi(x) \leq \frac{xP(\log x)}{\log x} = \frac{x}{T(\log x)} - \frac{xS(\log x)}{T(\log x)\log^{14} x} \tag{1.26}$$

für alle $x \geq 59 \geq \exp(4.07)$. Es folgt die Behauptung. □

Wir erhalten das folgende Korollar.

Korollar 1.12. *Für alle $x \geq 51$ gilt*

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{3.352}{\log^2 x} - \frac{12.648}{\log^3 x} - \frac{71.704}{\log^4 x} - \frac{466.156096}{\log^5 x} - \frac{5178.147904}{\log^6 x}}.$$

Beweis. Für alle $x \geq 59$ folgt die Behauptung aus Proposition 1.11. Bleibt das Intervall $[51, 59]$ zu betrachten. Bezeichnen wir die rechte Seite der behaupteten Ungleichung mit $f(x)$, so gilt

$$f(x) \geq \frac{51}{\log 59 - 1 - \frac{1}{\log 59}} \geq \frac{51}{3.08 - \frac{100}{408}} \geq 17.9 > 17 = \pi(59) \geq \pi(x)$$

für alle $51 \leq x \leq 59$, da $\log 59 \leq 4.08$ ist. Es folgt die Behauptung. □

In Hinblick auf (1.25) beweisen wir nun im Folgenden mit Hilfe von Satz 1.3 das folgende Theorem, mit dem wir für alle hinreichend große x die obere Schranke aus Proposition 1.11 und, wegen (1.26), die obere Schranke aus Theorem 1.10 verschärfen werden.

Theorem 1.13. *Für alle $x \geq 49$ gilt*

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{3.352}{\log^2 x} - \frac{12.648}{\log^3 x} - \frac{71.704}{\log^4 x} - \frac{466.156096}{\log^5 x} - \frac{4726.6}{\log^6 x}}.$$

Bevor wir dieses Theorem beweisen, zeigen wir zunächst das folgende Lemma.

Lemma 1.14. *Sei*

$$g(t) = t^7 - t^6 - t^5 - 3.352t^4 - 12.648t^3 - 71.704t^2 - 466.156096t - 4726.6.$$

Dann gilt $g(t) > 0$ für alle $t \geq 3.891$.

Beweis. Es gilt $g^{(6)}(t) = 5040t - 720 \geq 0$ für alle $t \geq 1/7$. Zusammen mit $g^{(5)}(0.5) = 150$ folgt $g^{(5)}(t) > 0$ für alle $t \geq 0.5$. In Kombination mit $g^{(4)}(0.8) = 23.232$ erhalten wir, dass $g^{(4)}(t) > 0$ für alle $t \geq 0.8$ gilt. Da außerdem $g^{(3)}(1.3) = 54.2706$ ist, ergibt sich, dass die Ungleichung $g^{(3)}(t) > 0$ für alle $t \geq 1.3$ gilt. Zusammen mit $g^{(2)}(1.9) = 79.01474$ erhalten wir $g^{(2)}(t) > 0$ für alle $t \geq 0.5$. Mit $g'(2.7) = 191.409383$ folgt, dass $g'(t) > 0$ für alle $t \geq 2.7$ gilt. In Kombination mit $g(3.891) \geq 1.3463$ folgt die Behauptung. □

Es folgt der Beweis von Theorem 1.13.

Beweis. Wir bezeichnen die rechte Seite der behaupteten Ungleichung mit $\xi(x)$. Sei $k = 3$ und $x_1 = x_1(k) = 10^{14}$. Dann ist nach Satz 1.9 und (1.21) die Ungleichung

$$\pi(x) \leq J_{3,0.352,x_1}(x) \tag{1.27}$$

für alle $x \geq x_1$ erfüllt. Als erstes zeigen wir, dass

$$\xi(x) > J_{3,0.352,x_1}(x)$$

für alle $x \geq x_1$ gilt, womit nach (1.27) die Behauptung für alle $x \geq 10^{14}$ folgt. Dazu zeigen wir zunächst, dass $\xi'(x) \geq J'_{3,0.352,x_1}(x)$ für alle $x \geq x_1$ gilt. Sei $g(t)$ wie in Lemma 1.14. Dann gilt

$$\begin{aligned}\xi'(x) - J'_{3,0.352,x_1}(x) = {} & \frac{1236.532096\log^{11} x - 39365.149248\log^{10} x - 14244.946654208\log^9 x}{g^2(\log x)\log^5 x} \\ & - \frac{46495.953715712\log^8 x + 199052.883212288\log^7 x}{g^2(\log x)\log^5 x} \\ & - \frac{888556.135881846784\log^6 x + 4408583.119370313728\log^5 x}{g^2(\log x)\log^5 x} \\ & - \frac{22355022.27343017984\log^4 x + 118233.279152544940032\log^3 x}{g^2(\log x)\log^5 x} \\ & - \frac{605885.466839247355904\log^2 x + 3210502.9932371968\log x}{g^2(\log x)\log^5 x} \\ & + \frac{23591829.42336}{g^2(\log x)\log^5 x}.\end{aligned}$$

Setzen wir

$$\begin{aligned}h(t) := {} & 1236.532t^{10} - 39365.15t^9 - 14244.9467t^8 - 46495.96t^7 - 199052.89t^6 \\ & - 888557t^5 - 4408584t^4 - 22355023t^3 - 118234t^2 - 605886t - 3210503,\end{aligned}$$

so folgt analog zum Beweis von Lemma 1.14, dass $h(t) \geq 0$ für alle $t \geq 32.23619$ gilt. Daraus folgt

$$\xi'(x) - J'_{3,0.352,x_1}(x) \geq \frac{h(\log x)}{g^2(\log x)\log^4 x} \geq 0 \tag{1.28}$$

für alle $x \geq 10^{14} \geq e^{32.23619}$. Als nächstes zeigen wir, dass $\xi(x_1) \geq J_{3,0.352,x_1}(x_1)$ gilt. Sei $K_1 = 102839438084, a = 32.23619$ und $b = 32.236192$. Wir definieren

$$\begin{aligned}f(s,t) := {} & K_1t^7 + (K_1+s)t^6 + (3.3K_1+s)t^5 + (12K_1+3s)t^4 + (71K_1+13s)t^3 + (466K_1+72s)t^2 \\ & + (4726K_1+467s)t + 4731s\end{aligned}$$

und erhalten $f(x_1, a) \geq b^8K_1$. Da $a \leq \log x_1 \leq b$ ist, folgt somit

$$f(x_1, \log x_1) \geq K_1\log^8 x_1.$$

Daraus ergibt sich erst recht die Ungleichung

$$\begin{aligned}& x_1\log^6 x_1 + x_1\log^5 x_1 + 3x_1\log^4 x_1 + 13x_1\log^3 x_1 + 72.056x_1\log^2 x_1 + 467.336x_1\log x_1 + 4731.052096x_1 \\ & \geq K_1\log^8 x_1 - K_1\log^7 x_1 - K_1\log^6 x_1 - 3.352K_1\log^5 x_1 - 12.648K_1\log^4 x_1 \\ & \quad - 71.704K_1\log^3 x_1 - 466.156096K_1\log^2 x_1 - 4726.6K_1\log x_1.\end{aligned}$$

Multiplizieren wir beide Seiten der letzten Ungleichung mit $\log^3 x_1$ und setzen anschließend die Definition von $g(t)$ ein, so folgt erst recht

$$\begin{aligned}& x_1\log^9 x_1 + x_1\log^8 x_1 + 3x_1\log^7 x_1 + 13x_1\log^6 x_1 + 72.056x_1\log^5 x_1 + 467.336x_1\log^4 x_1 \\ & \quad + 4731.052096x_1\log^3 x_1 + 25.239808x_1\log^2 x_1 + 164.086945792x_1\log x_1 + 1663.7632x_1 \\ & > K_1g(\log x_1)\log^4 x_1.\end{aligned}$$

Da die linke Seite dieser Ungleichung gleich $x_1(\log^{10} x_1 - (\log^3 x_1 + 0.352)g(\log x_1))$ ist, erhalten wir

$$x_1\log^{10} x_1 > (K_1\log^4 x_1 + x_1(\log^3 x_1 + 0.352))g(\log x_1).$$

Nach Lemma 1.14 gilt $g(\log x_1) > 0$ und da $K_1 \geq \pi(x_1) - \theta(x_1)/\log x_1$ nach (1.24) gilt, erhalten wir

$$x_1 \log^{10} x_1 > \left(\left(\pi(x_1) - \frac{\theta(x_1)}{\log x_1} \right) \log^4 x_1 + x_1(\log^3 x_1 + 0.352) \right) g(\log x_1).$$

Teilen wir beide Seiten durch $g(\log x_1)\log^4 x_1 > 0$, so folgt

$$\xi(x_1) = \frac{x_1}{g(\log x_1)} \log^6 x_1 > \pi(x_1) - \frac{\theta(x_1)}{\log x_1} + \frac{x_1}{\log x_1} + \frac{0.352 x_1}{\log^4 x_1} = J_{3,0.352,x_1}(x_1).$$

Zusammen mit (1.28) und (1.27) folgt also $\xi(x) > J_{3,0.352,x_1}(x) \geq \pi(x)$ für alle $x \geq 10^{14}$.

Um die Behauptung für alle $50000 \leq x \leq 10^{14}$ zu beweisen, vergleichen wir die Funktion $\xi(x)$ mit dem Integrallogarithmus $\mathrm{li}(x)$. Sei $\omega(x) = \xi(x) - \mathrm{li}(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\omega'(x) = {} & \frac{0.352 \log^{11} x - 1.76 \log^{10} x + 1.76 \log^9 x - 0.599808 \log^8 x + 1235.307136 \log^7 x}{g^2(\log x) \log x} \\
& - \frac{39385.787712 \log^6 x + 14392.134851584 \log^5 x + 48620.474620416 \log^4 x}{g^2(\log x) \log x} \\
& - \frac{186414.587015168 \log^3 x + 895133.758637961216 \log^2 x + 4406666.8067072 \log x}{g^2(\log x) \log x} \\
& - \frac{22340747.56}{g^2(\log x) \log x}
\end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\omega'(x) \geq \frac{r(\log x)}{g^2(\log x) \log x}, \tag{1.29}$$

wobei das Polynom $r(t)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
r(t) = {} & 0.352 t^{11} - 1.76 t^{10} + 1.76 t^9 - 0.6 t^8 + 1235.3 t^7 - 39386 t^6 \\
& - 14392 t^5 - 48621 t^4 - 186415 t^3 - 895134 t^2 - 4406667 t - 22340748.
\end{aligned}$$

Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $r(t) \geq 0$ für alle $t \geq 10.7$ gilt. Zusammen mit (1.29) folgt, dass $\xi'(x) \geq \mathrm{li}'(x)$ für alle $x \geq 50000 \geq e^{10.7}$ gilt. Da außerdem $\omega(50000) > 0.12$ ist, folgt $\xi(x) > \mathrm{li}(x)$ für alle $x \geq 50000$. In Kombination mit Satz 1.3 folgt die Behauptung für alle $50000 \leq x \leq 10^{14}$.

Sei nun $101 < x < 50000$. Wir setzen

$$s(t) = t^8 - 2t^7 - t^6 - 4.352 t^5 - 19.352 t^4 - 109.648 t^3 - 752.972096 t^2 - 7057.38048 t - 28359.6.$$

Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $s(t) \geq 0$ für alle $t \geq 4.61$ gilt, wobei $s'(t) \geq 0$ für alle $t \geq 3.51$ gilt. Daraus folgt

$$\frac{g(\log x)^2 \xi'(x)}{\log^5 x} = s(\log x) \geq 0 \tag{1.30}$$

für alle $x \geq 101 \geq e^{4.61}$. Da $g(\log x) > 0$ für alle $x \geq 49 \geq e^{3.891}$ nach Lemma 1.14 gilt, erhalten wir, dass $\xi'(x) > 0$ für alle $101 \leq x \leq 50000$ gilt. Um die Behauptung also für alle $101 \leq x \leq 50000$ zu zeigen, genügt es, die Ungleichung $\xi(p_n) > \pi(p_n)$ für alle $26 = \pi(101) \leq n \leq \pi(50000) + 1 = 5134$ mit einem Computer nachzuprüfen.

Sei nun $49 \leq x < e^{4.6}$. Da $s(4.6) = -1219.12507392$ ist, erhalten wir, dass $s(\log x) < 0$ ist. Zusammen mit (1.30) folgt also, dass $\xi(x)$ auf dem Intervall $[49, e^{4.6})$ streng monoton fallend ist. Zusammen mit $99 \leq e^{4.6}$ und

$$\xi(99) \geq \frac{99}{4.6 - 1} = \frac{99}{3.6} = 27.5 > 25 = \pi(99)$$

folgt die Behauptung für alle $49 \leq x \leq 99$.

Schließlich betrachten wir das Intervall $[99, 101]$. Es gilt

$$\xi(x) \geq \frac{99}{4.616 - 1} = \frac{99}{3.616} \geq 27 > 25 = \pi(x)$$

für alle $x \in [99, 101]$, da $\log 101 \leq 4.616$ gilt. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung. Die obere Schranke aus Theorem 1.13 ist eine Verschärfung von (1.11), da die Ungleichung

$$0.51 \geq \frac{3.352}{\log x} + \frac{12.648}{\log^2 x} + \frac{71.704}{\log^3 x} + \frac{466.156096}{\log^4 x} + \frac{4726.6}{\log^5 x}$$

für alle $x \geq 71002$ erfüllt ist. Außerdem gilt

$$\frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{3.352}{\log^2 x} - \frac{12.648}{\log^3 x} - \frac{71.704}{\log^4 x} - \frac{466.156096}{\log^5 x} - \frac{4726.6}{\log^6 x}} < \frac{x}{T(\log x)} \left(1 - \frac{S(\log x)}{\log^{14} x}\right)$$

genau dann, wenn

$$451.547904 \log^{14} x > g(\log x) S(\log x),$$

wobei $g(t)$ wie in Lemma 1.14 definiert ist. Da der Grad des Polynoms in $\log x$ auf der rechten Seite gleich 13 ist, erhalten wir, dass die obere Schranke aus Theorem 1.13 für alle hinreichend große x schärfer ist als die obere Schranke aus Proposition 1.11 und wegen (1.26) schärfer als die obere Schranke aus Theorem 1.10.

Mit Hilfe von Theorem 1.13 erhalten wir die folgende implizite untere Schranke für die n-te Primzahl p_n, die in Kapitel 3 eine wichtige Rolle spielen wird.

Proposition 1.15. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$p_n \geq n \left(\log p_n - 1 - \frac{1}{\log p_n} - \frac{3.352}{\log^2 p_n} - \frac{12.648}{\log^3 p_n} - \frac{71.704}{\log^4 p_n} - \frac{466.156096}{\log^5 p_n} - \frac{4726.6}{\log^6 p_n}\right).$$

Beweis. Sei zunächst $n \geq 17$. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := \log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{3.352}{\log^2 x} - \frac{12.648}{\log^3 x} - \frac{71.704}{\log^4 x} - \frac{466.156096}{\log^5 x} - \frac{4726.6}{\log^6 x}.$$

Dann gilt $f(x) \geq f(e^4) > 0.4$ für alle $x \geq 55 \geq e^4$. Da $n \geq 17$ ist, gilt $p_n \geq 59$ und es folgt $f(p_n) > 0$. Zusammen mit Theorem 1.13 folgt die Behauptung für alle $n \geq 17$. Eine Überprüfung mit dem Computer zeigt, dass die behauptete Ungleichung auch für alle $1 \leq n \leq 16$ erfüllt ist. Es folgt die Behauptung. $\square$

Mit Hilfe eines Computers und Theorem 1.13 erhalten wir die folgenden schwächeren Abschätzungen für $\pi(x)$, die wir insbesondere in Kapitel 4 benutzen werden.

Proposition 1.16. *Für alle $x \geq 22.06$ gilt*

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{3.352}{\log^2 x} - \frac{12.648}{\log^3 x} - \frac{91}{\log^4 x}}. \tag{1.31}$$

Weiterhin gilt

$$p_n > n \left(\log p_n - 1 - \frac{1}{\log p_n} - \frac{3.352}{\log^2 p_n} - \frac{12.648}{\log^3 p_n} - \frac{91}{\log^4 p_n}\right) \tag{1.32}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = 91 - \left(71.704 + \frac{466.156096}{\log x} + \frac{4726.6}{\log^2 x}\right).$$

Dann gilt $f(x) \geq f(e^{31.85}) \geq 0.000616$ für alle $x \geq 7 \cdot 10^{13} \geq e^{31.85}$. Somit folgt die Behauptung zusammen mit Theorem 1.13 für alle $x \geq 7 \cdot 10^{13}$.

Um die Behauptung für alle $2 \cdot 10^7 \leq x \leq 7 \cdot 10^{13}$ zu beweisen, vergleichen wir die Funktion

$$h(x) = \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{3.352}{\log^2 x} - \frac{12.648}{\log^3 x} - \frac{91}{\log^4 x}}$$

mit dem Integrallogarithmus $\mathrm{li}(x)$. Dazu setzen wir $r(t) = 0.352t^7 - 1.76t^6 + 21.056t^5 - 582.531904t^4 - 266.792192t^3 - 770.035904t^2 - 2301.936t - 8281$ und erhalten analog zum Beweis von Lemma 1.14, dass $r(\log x) > 0$ für alle $x \geq 1.8 \cdot 10^5 \geq e^{12.1}$ gilt. Daraus folgt

$$h'(x) - \mathrm{li}'(x) = \frac{r(\log x)}{(\log^5 x - \log^4 x - \log^3 x - 3.352\log^2 x - 12.648\log x - 91)^2 \log x} \geq 0$$

für alle $x \geq 1.8 \cdot 10^5$. Zusammen mit $h(2 \cdot 10^6) - \mathrm{li}(2 \cdot 10^6) \geq 2.95992$ erhalten wir, dass $h(x) > \mathrm{li}(x)$ für alle $x \geq 2 \cdot 10^6$ gilt. In Kombination mit Satz 1.3 folgt die Behauptung für alle $2 \cdot 10^6 \leq x \leq 10^{14}$.

Definieren wir $s(t) = t^6 - 2t^5 - t^4 - 4.352t^3 - 19.352t^2 - 128.944t - 364$, so ergibt sich analog zum Beweis von Lemma 1.14, dass $s(t) \geq 0$ für alle $t \geq 3.9$ gilt. Daraus folgt

$$h'(x) = \frac{s(\log x)\log^3 x}{(\log^5 x - \log^4 x - \log^3 x - 3.352\log^2 x - 12.648\log x - 91)^2} \geq 0$$

für alle $x \geq 50 \geq e^{3.9}$. Damit reicht es für $50 \leq x \leq 2 \cdot 10^6$ mit Hilfe eines Computers nachzurechnen, dass $\pi(p_i) < h(p_i)$ für alle $15 = \pi(50) \leq i \leq \pi(2 \cdot 10^6) + 1 = 148934$ gilt.

Für $28 \leq x < 50$ gilt

$$h(x) \geq \frac{28}{\log 50 - 1 - \frac{1}{\log 50} - \frac{3.352}{\log^2 50} - \frac{12.648}{\log^3 50} - \frac{91}{\log^4 50}} \geq 15.23 > \pi(x)$$

und für $22.06 \leq x < 28$ erhalten wir

$$h(x) \geq \frac{22.06}{\log 28 - 1 - \frac{1}{\log 28} - \frac{3.352}{\log^2 28} - \frac{12.648}{\log^3 28} - \frac{91}{\log^4 28}} \geq 33.924 > \pi(x).$$

Somit gilt die Ungleichung (1.31) für alle $x \geq 22.06$.

Um die zweite Behauptung zu beweisen, betrachten wir zunächst den Fall $n \geq 9$. Da $p_n \geq 23$ ist, folgt die Behauptung aus (1.31). Für $1 \leq n \leq 8$ überprüfen wir die Ungleichung mit einem Computer. □

Korollar 1.17. *Für alle $x \geq 14.38$ gilt*

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{3.352}{\log^2 x} - \frac{15.5}{\log^3 x}}. \tag{1.33}$$

Weiterhin gilt

$$p_n > n\left(\log p_n - 1 - \frac{1}{\log p_n} - \frac{3.352}{\log^2 p_n} - \frac{15.5}{\log^3 p_n}\right) \tag{1.34}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir setzen

$$f(x) = 15.5 - \left(12.648 + \frac{71.704}{\log x} + \frac{466.156096}{\log^2 x} + \frac{4726.6}{\log^3 x}\right).$$

Dann gilt $f(x) \geq f(e^{32}) \geq 0.0117$ für alle $x \geq 8 \cdot 10^{13} \geq e^{32}$. Somit folgt die Behauptung zusammen mit Theorem 1.13 für alle $x \geq 8 \cdot 10^{13}$.

Indem wir die rechte Seite von (1.33) mit $h(x)$ bezeichnen und mit dem Integrallogarithmus $\mathrm{li}(x)$ vergleichen, erhalten wir analog zum Beweis von Proposition 1.16, dass $h(x) > \mathrm{li}(x)$ für alle $2 \cdot 10^7 \leq x \leq 8 \cdot 10^{13}$ gilt. Zusammen mit Satz 1.3 folgt die Behauptung für alle $2 \cdot 10^7 \leq x \leq 8 \cdot 10^{13}$.

Wir definieren $s(t) = t^5 - 2t^4 - t^3 - 4.352t^2 - 22.204t - 46.5$. Analog zum Beweis von Lemma 1.14 ergibt sich, dass $s(t) \geq 0$ für alle $t \geq 3.5$ gilt. Daraus folgt

$$h'(x) = \frac{s(\log x)\log^2 x}{(\log^4 x - \log^3 x - \log^2 x - 3.352\log x - 15.5)^2} \geq 0$$

für alle $x \geq 34 \geq e^{3.5}$. Damit reicht es für $34 \leq x \leq 2 \cdot 10^7$ mit Hilfe eines Computers nachzurechnen, dass $\pi(p_i) < h(p_i)$ für alle $11 = \pi(34) \leq i \leq \pi(2 \cdot 10^7) + 1 = 1270608$ gilt.

Für $18 \leq x < 34$ gilt

$$h(x) \geq \frac{18}{\log 34 - 1 - \frac{1}{\log 34} - \frac{3.352}{\log^2 34} - \frac{15.5}{\log^3 34}} \geq 11.11 > \pi(x)$$

und für $14.38 \leq x < 18$ erhalten wir

$$h(x) \geq \frac{14.38}{\log 18 - 1 - \frac{1}{\log 18} - \frac{3.352}{\log^2 18} - \frac{15.5}{\log^3 18}} \geq 28.687 > \pi(x).$$

Somit gilt die Ungleichung (1.33) für alle $x \geq 14.38$.

Um die zweite Behauptung zu beweisen, betrachten wir zunächst den Fall $n \geq 7$. Da $p_n \geq 17$ ist, folgt die Behauptung aus (1.33). Für $1 \leq n \leq 6$ überprüfen wir die Ungleichung mit einem Computer. □

Die folgende Abschätzung für $\pi(x)$ taucht an verschiedenen Stellen dieser Arbeit auf.

Korollar 1.18. *Für alle $x \geq 9.3$ gilt*

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{3.84}{\log^2 x}}. \tag{1.35}$$

Weiterhin gilt

$$p_n > n\left(\log p_n - 1 - \frac{1}{\log p_n} - \frac{3.84}{\log^2 p_n}\right) \tag{1.36}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es gilt

$$\frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{3.352}{\log^2 x} - \frac{15.5}{\log^3 x}} \leq \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{3.84}{\log^2 x}}$$

genau dann, wenn $x \geq 6.3 \cdot 10^{13} \geq e^{15.5/0.488}$ ist. Daher folgt die Behauptung für alle $x \geq 6.3 \cdot 10^{13}$ aus Proposition 1.16.

Bezeichnen wir die rechte Seite (1.35) mit $h(x)$, so folgt analog wie im Beweis von Proposition 1.16, dass $h(x) > \mathrm{li}(x)$ für alle $2 \cdot 10^9 \leq x \leq 6.3 \cdot 10^{13}$ gilt. Zusammen mit Satz 1.3 folgt die Behauptung für alle $2 \cdot 10^9 \leq x \leq 6.3 \cdot 10^{13}$.

Definieren wir $s(t) = t^4 - 2t^3 - t^2 - 4.84t - 7.68$, so ergibt sich analog zum Beweis von Lemma 1.14, dass $s(t) \geq 0$ für alle $t \geq 3.1$ gilt. Daraus folgt

$$h'(x) = \frac{s(\log x)\log x}{(\log^3 x - \log^2 x - \log x - 3.84)^2} \geq 0$$

für alle $x \geq 23 \geq e^{3.1}$. Damit genügt es für $23 \leq x \leq 2 \cdot 10^9$ mit Hilfe eines Computers nachzurechnen, dass $\pi(p_i) < h(p_i)$ für alle $9 = \pi(23) \leq i \leq \pi(2 \cdot 10^9) + 1 = 98222288$ gilt.

Für alle $12 \leq x < 23$ gilt

$$h(x) \geq \frac{12}{\log 23 - 1 - \frac{1}{\log 23} - \frac{3.84}{\log^2 23}} \geq 8.4 > \pi(x)$$

und für alle $9.3 \leq x < 12$ erhalten wir

$$h(x) \geq \frac{9.3}{\log 12 - 1 - \frac{1}{\log 12} - \frac{3.84}{\log^2 12}} \geq 20 > \pi(x).$$

Somit gilt die Ungleichung (1.35) für alle $x \geq 9.3$.

Um die zweite Behauptung zu beweisen, betrachten wir zunächst den Fall $n \geq 5$. Da $p_n \geq 11$ ist, folgt die Behauptung aus (1.35). Für $1 \leq n \leq 4$ überprüfen wir die Ungleichung mit einem Computer. □

Schließlich notieren wir noch die folgende Abschätzung für $\pi(x)$.

Korollar 1.19. *Für alle $x \geq 5.43$ gilt*

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1.17}{\log x}}. \tag{1.37}$$

Insbesondere gilt

$$p_n \geq n \left(\log p_n - 1 - \frac{1.17}{\log p_n} \right) \tag{1.38}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es gilt

$$\frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{3.84}{\log^2 x}} \leq \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1.17}{\log x}}$$

genau dann, wenn $x \geq 6.456 \cdot 10^9 \geq e^{3.84/0.17}$ gilt. Daher folgt die erste Behauptung für alle $x \geq 6.456 \cdot 10^9$ aus Korollar 1.18.

Setzen wir $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1.17x - 1.17$, so folgt, analog zum Beweis von Lemma 1.14, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2.62$ gilt. Bezeichnen wir die rechte Seite von (1.37) mit $h(x)$, so folgt

$$h'(x) = \frac{f(\log x)}{(\log^2 x - \log x - 1.17)^2} \geq 0$$

für alle $x \geq 14 \geq e^{2.62}$. Um die erste Behauptung für alle $17 \leq x \leq 6.456 \cdot 10^9$ zu beweisen, genügt es, die Ungleichung $\pi(p_i) < h(p_i)$ für alle $7 = \pi(17) \leq i \leq \pi(6.456 \cdot 10^9) + 1 = 299763612$ mit Hilfe eines Computers nachzurechnen.

Für alle $9 \leq x < 17$ gilt

$$h(x) \geq \frac{9}{\log 17 - 1 - \frac{1.17}{\log 17}} > 6 \geq \pi(x)$$

und für alle $5.43 \leq x < 9$ erhalten wir

$$h(x) \geq \frac{5.43}{\log 9 - 1 - \frac{1.17}{\log 9}} > 8 > \pi(x).$$

Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

Für $n \geq 4$ gilt $p_n \geq 7$ und die zweite Behauptung folgt aus (1.37). Für $1 \leq n \leq 3$ überprüfen wir die Ungleichung mit einem Computer. □

1.2.2 Neue untere Schranken für $\pi(x)$

Als nächstes wollen wir untere Schranken für die Primzahl-Zählfunktion $\pi(x)$ beweisen, die die bisher in der Literatur bekannten unteren Schranken, verschärfen werden. Nach (1.7) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_3(\varepsilon) > 0$, so dass

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{3-\varepsilon}{\log^2 x}} \tag{1.39}$$

für alle $x \geq x_3(\varepsilon)$ gilt. Mincu [35] konnte mit Satz 1.5 zeigen, dass die Ungleichung

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x - 1 - \frac{0.7}{\log x}}$$

für alle $x \geq 70111$ gilt. Die folgende untere Schranke für $\pi(x)$ stammt von Hassani [21, Theorem 2.1].

Satz 1.20 (Hassani, *2006*). *Sei $0 < \varepsilon \leq \frac{21}{20}$. Dann gilt*

$$\pi(x) \geq \frac{x}{\log x - 1 - \frac{0.8-\varepsilon}{\log x}}$$

für alle

$$x \geq \max\left(32299, \exp\left(\frac{13 - 5\varepsilon + \sqrt{169 + 14\varepsilon - 155\varepsilon^2}}{10\varepsilon}\right)\right).$$

Diese beiden unteren Schranken für $\pi(x)$ werden wir nun im Folgenden verschärfen, indem wir in Hinblick auf (1.39) das folgende Theorem beweisen werden.

Theorem 1.21. *Für alle $x \geq 1332470021$ gilt*

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{2.648}{\log^2 x} - \frac{13.352}{\log^3 x} - \frac{70.296}{\log^4 x} - \frac{455.596096}{\log^5 x} - \frac{3404.179904}{\log^6 x}}.$$

Beweis. Wir setzen

$$\varphi(x) = \log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{2.648}{\log^2 x} - \frac{13.352}{\log^3 x} - \frac{70.296}{\log^4 x} - \frac{455.596096}{\log^5 x} - \frac{3404.179904}{\log^6 x}. \tag{1.40}$$

Dann gilt $\varphi(x) > 0$ für alle $x \geq 45$. Setzen wir außerdem $\phi(x) = x/\varphi(x)$, so müssen wir zeigen, dass $\pi(x) > \phi(x)$ für alle $x \geq 1332470021$ gilt. Als erstes zeigen wir die Behauptung für alle $x \geq 10^{14}$. Sei $k = 3$ und $x_1 = x_1(k) = 10^{14}$. Aus Satz 1.9 und (1.21) erhalten wir

$$\pi(x) \geq J_{3,-0.352,x_1}(x) \tag{1.41}$$

für alle $x \geq x_1$. Mit Hilfe von (1.20) ergibt sich

$$\begin{aligned}
J'_{3,-0.352,x_1}(x) - \phi'(x) &= \frac{28711.86848 \log^{10} x + 11243.091233792 \log^9 x + 36359.576652288 \log^8 x}{(\varphi(x)\log^6 x)^2 \log^5 x} \\
&\quad + \frac{146043.034046464 \log^7 x + 690994.875589750784 \log^6 x}{(\varphi(x)\log^6 x)^2 \log^5 x} \\
&\quad + \frac{3101214.060654665728 \log^5 x + 11570999.402231779328 \log^4 x}{(\varphi(x)\log^6 x)^2 \log^5 x} \\
&\quad - \frac{77895.172712848556032 \log^3 x + 367261.78981440323584 \log^2 x}{(\varphi(x)\log^6 x)^2 \log^5 x} \\
&\quad - \frac{803564.739202058420224 \log x - 12237393.504650106372096}{(\varphi(x)\log^6 x)^2 \log^5 x}.
\end{aligned}$$

Damit gilt offensichtlich

$$J'_{3,-0.352,x_1}(x) \geq \phi'(x) \tag{1.42}$$

für alle $x \geq e$. Als nächstes zeigen wir, dass $J_{3,-0.352,x_1}(x_1) > \phi(x_1)$ gilt. Es gilt

$$\pi(x_1) - \frac{\theta(x_1)}{\log x_1} = \pi(10^{14}) - \frac{\theta(10^{14})}{\log 10^{14}} \geq 3204941750802 - \frac{99999990573247}{32.23619} \geq 102838475779,$$

da $\theta(10^{14}) \leq 99999990573247$ nach Dusart [14, Table 6.2], $\pi(10^{14}) = 3204941750802$ und $\log 10^{14} \geq 32.23619$ gilt. Zusammen mit (1.19) ergibt sich die Ungleichung

$$J_{3,-0.352,x_1}(x_1) - \phi(x_1) \geq 102838475779 + \frac{10^{14}}{32.2362} - \frac{0.352 \cdot 10^{14}}{32.23619^4} - \frac{10^{14}}{\varphi(e^{32.23619})} \geq 329778,$$

da $32.23619 \leq \log 10^{14} \leq 32.2362$ ist. In Kombination mit (1.42) und (1.41) erhalten wir, dass die Ungleichung $\pi(x) \geq J_{3,-0.352,x_1}(x) > \phi(x)$ für alle $x \geq x_1$ erfüllt ist.

Als nächstes zeigen wir die Behauptung für alle $8 \cdot 10^9 \leq x \leq 10^{14}$. Setzen wir $k = 2, x_1 = x_1(k) = 8 \cdot 10^9$, so gilt nach Satz 1.9 und (1.21), dass die Ungleichung

$$\pi(x) \geq J_{2,-0.01,x_1}(x) \tag{1.43}$$

für alle $x \geq x_1$ erfüllt ist. Wir definieren

$$\begin{aligned} h(x) = -0.01x^{15} &+ 0.392x^{14} - 1.79x^{13} + 1.77296x^{12} + 0.033968x^{11} - 3.02528x^{10} + 28700.39194688x^9 \\ &+ 11140.502064896x^8 + 34939.884111488x^7 + 155012.80498448384x^6 + 686038.868350585856x^5 \\ &+ 3101015.290873960448x^4 + 11584678.30388961808384x^3 - 17295.25621180891136x^2 \\ &- 53847.1652142123008x + 231768.81637594898432. \end{aligned}$$

Für alle $29 \leq x \leq 33$ erhalten wir

$$\begin{aligned} h(x) &\geq (-0.01 \cdot 33 + 0.392)x^{14} - 1.79x^{13} + 1.77296x^{12} - 3.02528x^{10} \\ &\geq (0.062 \cdot 29 - 1.79)x^{13} + 1.77296x^{12} - 3.02528x^{10} \\ &\geq (0.008 \cdot 29 + 1.77296)x^{12} - 3.02528x^{10} \\ &= 2.00496x^{12} - 3.02528x^{10}, \end{aligned}$$

d.h. $h(x) > 0$ für alle $29 \leq x \leq 33$. Für alle $23 \leq x \leq 29$ ergibt sich

$$\begin{aligned} h(x) &\geq (-0.01 \cdot 29 + 0.392)x^{14} - 1.79x^{13} + 1.77296x^{12} - 3.02528x^{10} \\ &\geq (0.102 \cdot 23 - 1.79)x^{13} + 1.77296x^{12} - 3.02528x^{10} \\ &\geq (0.556 \cdot 23 + 1.77296)x^{12} - 3.02528x^{10}, \end{aligned}$$

d.h. $h(x) > 0$ für alle $23 \leq x \leq 29$. Daraus folgt

$$J'_{2,-0.01,x_1}(x) - \phi'(x) = \frac{h(\log x)}{(\varphi(x)\log^6 x)^2 \log^4 x} \geq 0 \tag{1.44}$$

für alle $e^{23} \leq 8 \cdot 10^9 \leq x \leq 10^{14} \leq e^{33}$. Wir wollen nun zeigen, dass $J_{2,-0.01,x_1}(x_1) > \phi(x_1)$ ist. Es gilt

$$\pi(x_1) - \frac{\theta(x_1)}{\log x_1} = \pi(8 \cdot 10^9) - \frac{\theta(8 \cdot 10^9)}{\log 8 \cdot 10^9} \geq 367783654 - \frac{7999890793}{22.8027} \geq 16952796,$$

da $\theta(8 \cdot 10^9) \leq 7999890793$ nach Dusart [14, Table 6.1], $\pi(8 \cdot 10^9) = 367783654$ und $\log(8 \cdot 10^9) \geq 22.8027$ gilt. Zusammen mit (1.19) gilt

$$J_{2,-0.01,x_1}(x_1) - \phi(x_1) \geq 16952796 + \frac{8 \cdot 10^9}{22.8028} - \frac{0.01 \cdot 8 \cdot 10^9}{22.8^3} - \frac{8 \cdot 10^9}{\varphi(e^{22.8027})} \geq 2422,$$

da $22.8027 \leq \log(8 \cdot 10^9) \leq 22.8028$. In Kombination mit (1.44) und (1.43) folgt die Behauptung für alle $8 \cdot 10^9 \leq x \leq 10^{14}$.

Damit bleibt die Behauptung für alle $1332470021 \leq x \leq 8 \cdot 10^9$ zu zeigen. Dazu setzen wir

$$r(x) = x^8 - 2x^7 - x^6 - 3.648x^5 - 18.648x^4 - 110.352x^3 - 736.780096x^2 - 5682.160384x - 20425.079424.$$

Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $r(x) \geq 0$ für alle $x \geq 4.51$ gilt. Daraus folgt

$$\phi'(x) = \frac{r(\log x)\log^5 x}{(\varphi(x)\log^6 x)^2} \geq 0$$

für alle $x \geq 91 \geq e^{4.51}$. Es genügt also mit einem Computer nachzurechnen, dass die Ungleichung $\pi(p_i) \geq \phi(p_{i+1})$ für alle $66774564 = \pi(1332470021) \leq i \leq \pi(8 \cdot 10^9) + 1 = 367783655$ gilt. Für alle $1332470020.7 \leq x \leq 1332470021$ gilt $\pi(x) - \phi(x) < 66774563 - 66774563 = 0$. Es folgt die Behauptung. $\square$

Wir erhalten die folgende implizite obere Schranke für die n-te Primzahl, die in Kapitel 3 und Kapitel 4 eine wichtige Rolle spielen wird.

Proposition 1.22. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$p_n < n\left(\log p_n - 1 - \frac{1}{\log p_n} - \frac{2.648}{\log^2 p_n} - \frac{13.352}{\log^3 p_n} - \frac{70.296}{\log^4 p_n} - \frac{455.596096}{\log^5 p_n} - \frac{3404.179904}{\log^6 p_n}\right).$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $n \geq 66774564$. Definieren wir $\varphi(x)$ wie in (1.40), so gilt $\varphi(x) > 0$ für alle $x \geq 45$. Da $p_n \geq 1332470021$ ist, folgt für alle $n \geq 66774564$ die Behauptung aus Theorem 1.21. Für $1 \leq n \leq 66774563$ überprüfen wir die Ungleichung mit einem Computer. Es folgt die Behauptung. □

Mit Hilfe eines Computers und Theorem 1.21 erhalten wir die folgenden schwächeren Abschätzungen für die Primzahl-Zählfunktion $\pi(x)$.

Korollar 1.23. *Für alle $x \geq x_0$ gilt*

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{a}{\log^2 x} - \frac{b}{\log^3 x} - \frac{c}{\log^4 x} - \frac{d}{\log^5 x}}.$$

wobei

a	2.648	2.648	2.648	2.648	2.648	2.648	2.648
b	13.352	13.352	13.352	13.352	13.352	13.215	11.719
c	70.296	70.296	46.477	34.817	6.747	0	0
d	293	87	0	0	0	0	0
x_0	1245750277	909050951	768343973	547068751	374127529	235834891	166221001
a	2.648	2.648	2.648	2.648	2.627	2.154	0.998
b	9.868	8.658	7.791	4.69	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	0	0
x_0	123080927	93811451	65953577	38168479	16590617	6695389	1146703

Beweis. Wir zeigen, dass die untere Schranke

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{2.648}{\log^2 x} - \frac{13.352}{\log^3 x} - \frac{70.296}{\log^4 x} - \frac{293}{\log^5 x}} \tag{1.45}$$

für alle $x \geq 1245750277$ erfüllt ist. Die restlichen unteren Schranken folgen analog. Bezeichnen wir die rechte Seite von (1.45) mit $f(x)$, so gilt

$$f(x) < \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{2.648}{\log^2 x} - \frac{13.352}{\log^3 x} - \frac{70.296}{\log^4 x} - \frac{455.596096}{\log^5 x} - \frac{3404.179904}{\log^6 x}}$$

für alle $x > 1$ gilt und die Behauptung folgt für alle $x \geq 1332470021$ aus Theorem 1.21.

Bezeichnen wir den Nenner von $f(x)$ mit $h(x)$, so gilt $h(x) > 0$ für alle $x \geq 27$. Setzen wir $r(t) = t^7 - 2t^6 - t^5 - 3.648t^4 - 18.648t^3 - 110.352t^2 - 574.184t - 1465$, so folgt zum Beweis von Lemma 1.14, dass $r(t) \geq 0$ für alle $t \geq 4.1$ gilt. Daraus folgt

$$f'(x) = \frac{r(\log x)\log^4 x}{(h(x)\log^5 x)^2} \geq 0$$

für alle $x \geq 61 \geq e^{4.1}$. Es genügt also zu zeigen, dass die Ungleichung $\pi(p_i) \geq f(p_{i+1})$ für alle $62640411 = \pi(1245750277) \leq i \leq \pi(1332470021) = 66774564$ erfüllt ist. Für $1245750269 < x < 1245750277$ gilt $\pi(x) - f(x) < 62640410 - 62640410 = 0$. Es folgt die Behauptung. □

Die folgende untere Schranke für $\pi(x)$ taucht an verschiedenen Stellen dieser Arbeit auf.

Korollar 1.24. *Für alle $x \geq 468049$ gilt*

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x}}.$$

Beweis. Aus Korollar 1.23 folgt die Behauptung bereits für alle $x \geq 1146703 = p_{89061}$. Bezeichnen wir die rechte Seite der behaupteten Ungleichung mit $f(x)$, so gilt

$$f'(x) = \frac{1}{(\log x - 1 - \frac{1}{\log x})^2} \left(\log x - 2 - \frac{1}{\log x} - \frac{1}{\log^2 x} \right) > 0$$

für alle $x \geq 12.8$. Also genügt es zu zeigen, dass $\pi(p_i) > f(p_{i+1})$ für alle $39071 = \pi(468049) \leq i \leq \pi(1146703) = 89061$ gilt. Es folgt die Behauptung. □

Sei $n \in \mathbb{N}$. Aus (1.13) folgt, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_4(n, \varepsilon)$ existiert, so dass

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \frac{6x}{\log^4 x} + \frac{24x}{\log^5 x} + \ldots + \frac{(n-2)!\, x}{\log^{n-1} x} + \frac{((n-1)! - \varepsilon)x}{\log^n x}$$

für alle $x \geq x_4(n, \varepsilon)$ gilt. Dies bezüglich betrachten wir im Gegensatz zu Dusart, der in Satz 1.6 den Fall $n = 2$ betrachtete, den Fall $n = 8$ und beweisen die folgende untere Schranke für die Primzahl-Zählfunktion $\pi(x)$, die in Kapitel 4 eine wichtige Rolle spielen wird und insbesondere die Schranke in (1.14) verschärft.

Theorem 1.25. *Für alle $x \geq 1332433009$ gilt*

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \frac{5.648x}{\log^4 x} + \frac{23.648x}{\log^5 x} + \frac{118.24x}{\log^6 x} + \frac{709.44x}{\log^7 x} + \frac{4966.08x}{\log^8 x}.$$

Beweis. Für $y > 0$ setzen wir

$$R(y) = 1 + \frac{1}{y} + \frac{2}{y^2} + \frac{5.648}{y^3} + \frac{23.648}{y^4} + \frac{118.24}{y^5} + \frac{709.44}{y^6} + \frac{4966.08}{y^7}$$

und

$$S(y) = y - 1 - \frac{1}{y} - \frac{2.648}{y^2} - \frac{13.352}{y^3} - \frac{70.296}{y^4} - \frac{455.596096}{y^5} - \frac{3404.179904}{y^6}.$$

Dann gilt $S(y) > 0$ für alle $y \geq 4$ und $y^{13}R(y)S(y) = y^{14} - T(y)$, wobei

$$\begin{aligned} T(y) &= 11016.771520y^6 + 19467.343966208y^5 + 60935.166336y^4 + 250549.623160832y^3 \\ &\quad + 1074823.88587520y^2 + 4677588.05151744y + 16905429.73765632. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Theorem 1.21 erhalten wir, dass die Ungleichung

$$\pi(x) > \frac{x}{S(\log x)} > \frac{x}{S(\log x)} \left(1 - \frac{T(\log x)}{\log^{14} x} \right)$$

für alle $x \geq 1332470021$ erfüllt ist. Da

$$\frac{x}{S(\log x)} \left(1 - \frac{T(\log x)}{\log^{14} x} \right) = \frac{xR(\log x)}{\log x}$$

gilt, folgt die Behauptung für alle $x \geq 1332470021$. Damit bleibt die Behauptung für alle $1332433009 \leq x \leq 1332470021$ zu zeigen. Dazu setzen wir

$$U(x) = \frac{xR(\log x)}{\log x}$$

und $u(x) = x^8 - 0.352x^5 + 1.056x^4 - 39728.64$. Dann gilt, analog zum Beweis von Lemma 1.14, dass $u(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3.8$ gilt. Daraus folgt

$$U'(x) = \frac{u(\log x)}{\log^9 x} \geq 0$$

für alle $x \geq 45 \geq e^{3.8}$. Es genügt also mit einem Computer nachzurechnen, dass die Ungleichung $\pi(p_i) > U(p_{i+1})$ für alle $66772781 = \pi(1332433009) \leq i \leq \pi(1332470021) = 66774564$ gilt. Für alle $1332433008 \leq x \leq 1332433009$ gilt $\pi(x) - U(x) < 66772780 - 66772780 = 0$. Es folgt die Behauptung. □

1.3 Über die Existenz von Primzahlen in kurzen Intervallen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einer direkten Anwendung der Ergebnisse aus Kapitel 1. Dazu untersuchen wir, in wie weit wir mit diesen Ergebnissen ein neues Resultat über die Existenz von Primzahlen in kleinen Intervallen herleiten können. BERTRANDS Postulat besagt, dass das Intervall $(n, 2n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stets eine Primzahl enthält. SCHOENFELD [53, Theorem 12] verschärfte dies im Jahr 1976. Er zeigte, dass im Intervall

$$(x, x + x/16597)$$

für alle $x \geq 2010759.9$ stets eine Primzahl liegt. Im Jahr 2003 konnten RAMARÉ & SAOUTER [44, Theorem 3] dies verbessern und zeigten, dass das Intervall

$$\left(x, x\left(1 + \frac{1}{28313999}\right)\right]$$

für alle $x \geq 10726905041$ stets eine Primzahl enthält. DUSART [12, Théorème 1.9] konnte im Jahr 1998 zeigen, dass für alle $x \geq 3275$ stets eine Primzahl p mit

$$x < p \leq x\left(1 + \frac{1}{2\log^2 x}\right)$$

existiert. Im Jahr 2010 verschärfte er dieses Resultat [14, Proposition 6.8], indem er zeigte, dass für alle $x \geq 396738$ stets eine Primzahl p mit

$$x < p \leq x\left(1 + \frac{1}{25\log^2 x}\right) \tag{1.46}$$

existiert und verbesserte das Resultat von RAMARÉ & SAOUTER für alle $x \geq e^{1064.219}$. Wir werden nun das folgende Theorem zeigen und verbessern somit das Resultat von SCHOENFELD für alle $x \geq e^{27.653}$, das Resultat von RAMARÉ & SAOUTER für alle $x \geq e^{330.413}$ und das Resultat (1.46) von DUSART für alle $x \geq e^{31.85}$.

THEOREM 1.26. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 58833$ existiert stets eine Primzahl p mit*

$$x < p \leq x\left(1 + \frac{1.274}{\log^3 x}\right).$$

Für den Beweis dieses Theorems ist das folgende Lemma hilfreich. Dabei seien $a, b \in \mathbb{R}$ sowie

$$y_1(a) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \pi(x) > \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{a}{\log^2 x}} \quad \forall x \geq k\right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

und

$$y_2(b) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \pi(x) < \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{b}{\log^2 x}} \quad \forall x \geq k\right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

LEMMA 1.27. *Sei $y_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und sei $c : (y_0, \infty) \to [1, \infty)$ eine Funktion. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\pi(c(x)x) - \pi(x) > &\frac{(c(x)-1)(\log x - 1 - \frac{1}{\log x}) - \log c(x) - \frac{c(x)\log c(x) + bc(x) - a}{\log^2 x}}{(\log(c(x)x) - 1 - \frac{1}{\log(c(x)x)} - \frac{a}{\log^2(c(x)x)})(\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{b}{\log^2 x})} \\ &- \frac{\frac{2bc(x)\log c(x)}{\log^3 x} + \frac{bc(x)\log^2 c(x)}{\log^4 x}}{(\log(c(x)x) - 1 - \frac{1}{\log(c(x)x)} - \frac{a}{\log^2(c(x)x)})(\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{b}{\log^2 x})}\end{aligned}$$

für alle $x \geq \max\{\lfloor y_0 \rfloor + 1, y_2(b), y_3(a)\}$, wobei $y_3(a) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k\,c(k) \geq y_1(a)\}$.

Beweis. Sei $x \geq \max\{y_0, y_2(b), y_3(a)\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\pi(c(x)x) - \pi(x) &> \frac{c(x)x}{\log(c(x)x) - 1 - \frac{1}{\log(c(x)x)} - \frac{a}{\log^2(c(x)x)}} - \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{b}{\log^2 x}} \\
&= \frac{(c(x)-1)(\log x - 1) - \log c(x) - \frac{c(x)-1}{\log(c(x)x)} - \frac{c(x)\log c(x)}{\log x \log(c(x)x)} - \frac{bc(x)-a}{\log^2 c(x)x}}{(\log(c(x)x) - 1 - \frac{1}{\log(c(x)x)} - \frac{a}{\log^2(c(x)x)})(\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{b}{\log^2 x})} \\
&\quad - \frac{\frac{2bc(x)\log c(x)}{\log x \log^2(c(x)x)} + \frac{bc(x)\log^2 c(x)}{\log^2 x \log^2(c(x)x)}}{(\log(c(x)x) - 1 - \frac{1}{\log(c(x)x)} - \frac{a}{\log^2(c(x)x)})(\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{b}{\log^2 x})} \\
&\geq \frac{(c(x)-1)(\log x - 1 - \frac{1}{\log x}) - \log c(x) - \frac{c(x)\log c(x) + bc(x) - a}{\log^2 x}}{(\log(c(x)x) - 1 - \frac{1}{\log(c(x)x)} - \frac{a}{\log^2(c(x)x)})(\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{b}{\log^2 x})} \\
&\quad - \frac{\frac{2bc(x)\log c(x)}{\log^3 x} + \frac{bc(x)\log^2 c(x)}{\log^4 x}}{(\log(c(x)x) - 1 - \frac{1}{\log(c(x)x)} - \frac{a}{\log^2(c(x)x)})(\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{b}{\log^2 x})}.
\end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. □

Es folgt der Beweis von Theorem 1.26.

Beweis. Setzen wir $a = 2.648$ und $b = 3.84$, so erhalten wir $y_1(a) \leq 38168479$ nach Korollar 1.23 und $y_2(b) = 10$ nach Korollar 1.18. Wie im Beweis von Korollar 1.23 beschrieben, prüfen wir mit einem Computer nach, dass $y_1(a) = 36917561$ gilt. Wir setzen außerdem $y_0 = 1$ und

$$c(x) = 1 + \frac{1.274}{\log^3 x}.$$

Dann gilt $y_3(a) = 36908672$. Wir betrachten zunächst die Funktion

$$g(x) = 0.082x^2 - 2.548x - 1.274 - \frac{6.16616}{x} - \frac{9.78432}{x^2} - \frac{4.89216}{x^3} - \frac{1.623076}{x^4} - \frac{12.46522368}{x^5} - \frac{7.940347484}{x^9}.$$

Dann gilt $g'(x) \geq 0.164x - 2.548 \geq 0$ für alle $x \geq 15.5$. Zusammen mit $g(31.7) \geq 0.1509$ erhalten wir, dass $g(x) \geq 0$ für alle $x \geq 31.7$ gilt. Setzen wir nun

$$\begin{aligned}
f(x) &= (c(x)-1)(\log^5 x - \log^4 x - \log^3 x) - \log^4 x \log c(x) - (c(x)\log c(x) + 3.84c(x) - 2.648)\log^2 x \\
&\quad - 2 \cdot 3.84c(x)\log c(x)\log x - 3.84c(x)\log^2 c(x) \\
&= 1.274\log^2 x - 1.274\log x - 1.274 - \log^4 x \log\left(1 + \frac{1.274}{\log^3 x}\right) - \log\left(1 + \frac{1.274}{\log^3 x}\right)\log^2 x \\
&\quad - \frac{1.274}{\log x}\log\left(1 + \frac{1.274}{\log^3 x}\right) - 1.192\log^2 x - \frac{4.89216}{\log x} - 7.68\log x \log\left(1 + \frac{1.274}{\log^3 x}\right) \\
&\quad - \frac{9.78432}{\log^2 x}\log\left(1 + \frac{1.274}{\log^3 x}\right) - 3.84\log\left(1 + \frac{1.274}{\log^3 x}\right) - \frac{4.89216}{\log^3 x}\log^2\left(1 + \frac{1.274}{\log^3 x}\right),
\end{aligned}$$

so erhalten wir mit Hilfe der Ungleichung $\log(1+t) \leq t$, die für alle $t > -1$ erfüllt ist, dass die Ungleichung $f(x) \geq g(\log x) \geq 0$ für alle $x \geq e^{31.7}$ erfüllt ist. Zusammen mit Lemma 1.27 erhalten wir

$$\pi\left(x\left(1 + \frac{1.274}{\log^3 x}\right)\right) - \pi(x) > \frac{f(x)/\log^4(x)}{(\log(c(x)x) - 1 - \frac{1}{\log(c(x)x)} - \frac{2.648}{\log^2(c(x)x)})(\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{3.84}{\log^2 x})} \geq 0$$

für alle $x \geq \max\{2, 10, 36908672, e^{31.7}\} = e^{31.7}$. Für alle $396738 \leq x \leq e^{31.7}$ folgt die Behauptung bereits aus (1.46). Um die Behauptung für alle $58889 = p_{5950} \leq x \leq 396738$ zu zeigen, prüfen wir die Ungleichung

$$p_n\left(1 + \frac{1.274}{\log^3 p_n}\right) > p_{n+1}$$

für alle $5950 \leq n \leq 33609 = \pi(396738) + 1$ mit einem Computer nach. Da außerdem

$$\pi\left(x + \frac{1.274x}{\log^3 x}\right) > 5949 = \pi(x)$$

für alle $58833 \leq x < p_{5950} = 58889$ gilt, folgt die Behauptung. $\square$

Für alle hinreichend große x lassen sich diese Resultate verbessern. Im Jahr 1930 konnte HOHEISEL [23] zeigen, dass die asymptotische Relation

$$\pi(x + x^\theta) - \pi(x) \sim \frac{x^\theta}{\log x} \qquad (x \to \infty)$$

gilt, wobei

$$\theta = 1 - \frac{1}{33000}.$$

Der Wert für θ wurde im Laufe der Jahre immer weiter verbessert, wobei das zur Zeit beste Resultat von BAKER, HARMAN & PINTZ [5, Theorem 1] aus dem Jahr 2001 stammt. Sie zeigten, dass das Intervall

$$(x, x + x^{0.525}]$$

für alle hinreichend große x stets eine Primzahl enthält.

Unter der Annahme der Riemannschen Vermutung lassen sich jedoch viel kleinere Intervalle angeben, die stets eine Primzahl enthalten. CRAMER [9] konnte unter Annahme der Riemannschen Vermutung im Jahr 1936 zeigen, dass für eine hinreichend große Konstante $A > 0$ im Intervall

$$(x, x + A\sqrt{x}\log x]$$

für alle hinreichend große x stets eine Primzahl liegt. RAMARÉ & SAOUTER [44, Theorem 1] bewiesen im Jahr 2003 unter der Annahme der Riemannschen Vermutung, dass das Intervall

$$(x - \frac{8}{5}\sqrt{x}\log x, x]$$

für alle $x \geq 2$ stets eine Primzahl enthält. Abgeleitet aus einer Vermutung von CRAMER [9] aus dem Jahr 1936, stammt jedoch die viel schärfere Vermutung, dass zu jedem $k > 1$ ein $x_0(k)$ existiert, so dass das Intervall

$$[x, x + k\log^2 x]$$

für alle $x \geq x_0(k)$ stets eine Primzahl enthält.

Kapitel 2

Neue Abschätzungen für die n-te Primzahl

Mit Hilfe des Primzahlsatzes lässt sich leicht zeigen (siehe [2, Theorem 4.5]), dass

$$p_n \sim n \log n \qquad (n \to \infty) \tag{2.1}$$

gilt. Bereits im Jahr 1902 lieferte CIPOLLA [8] mit dem folgenden Satz eine genauere Aussage.

SATZ 2.1 (CIPOLLA, *1902*)**.** *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann existieren eindeutig bestimmte normierte Polynome $R_k \in \mathbb{Q}[x]$, wobei $1 \leq k \leq m$ und $\mathrm{grad}(R_k) = k$, so, dass*

$$p_n = n \left(\log n + \log \log n - 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1} R_k(\log \log n)}{k \log^k n} \right) + O\left(\frac{n(\log \log n)^{m+1}}{\log^{m+1} n} \right).$$

Insbesondere gilt $R_1(x) = x - 2$ und $R_2(x) = x^2 - 6x + 11$.

BEMERKUNG. Für weitere Terme siehe CIPOLLA [8] oder SALVY [52].

Mit Hilfe dieser asymptotischen Formel für die n-te Primzahl p_n folgt sofort, dass die Ungleichung

$$p_n > n \log n \tag{2.2}$$

für alle hinreichend große n erfüllt ist. Im Jahr 1939 konnte ROSSER [47, Theorem 1] schließlich zeigen, dass die Ungleichung (2.2) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Im selben Artikel zeigte ROSSER [47, Theorem 2] außerdem, dass die obere Schranke

$$p_n < n(\log n + 2 \log \log n) \tag{2.3}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt. Im Jahr 1961 konnten ROSSER & SCHOENFELD [49, Theorem 3] die Ungleichungen (2.2) und (2.3) verschärfen, indem sie zeigten, dass die Ungleichung

$$p_n < n(\log n + \log \log n - 0.5) \tag{2.4}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 20$ gilt. Im Jahr 1998 bewies DUSART ([12, §1.4., Théorème 1.5], [13]) in Hinblick auf Satz 2.1, dass die Ungleichung

$$p_n \geq n(\log n + \log \log n - 1) \tag{2.5}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ erfüllt ist. Unter der Annahme der Riemannschen Vermutung zeigten MASSIAS & ROBIN [33, Théorème A(vi)] im Jahr 1996, dass

$$p_n \leq n \left(\log n + \log \log n - 1 + \frac{\log \log n - 1.8}{\log n} \right) \tag{2.6}$$

für alle $n \geq 27076$ erfüllt ist. Nur zwei Jahre später zeigte Dusart [12, Théorème 1.7] in seiner Doktorarbeit, dass die Ungleichung (2.6) auch ohne die Annahme der Riemannschen Vermutung für alle $n \geq 27076$ erfüllt ist. Ferner bewies er dort, dass die untere Schranke

$$p_n \geq n \left(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2.25}{\log n} \right) \tag{2.7}$$

für alle $n \geq 2$ gilt. Die zur Zeit schärfsten Abschätzungen stammen von Dusart [14, Proposition 6.6 & 6.7]. Er konnte im Jahr 2010 seine eigenen Abschätzungen (2.6) und (2.7) verschärfen, indem er zeigte, dass die Ungleichung

$$p_n \leq n \left(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2}{\log n} \right) \tag{2.8}$$

für alle $n \geq 688383$ und dass die Ungleichung

$$p_n \geq n \left(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2.1}{\log n} \right) \tag{2.9}$$

für alle $n \geq 3$ erfüllt ist.

Unser Ziel in diesem Kapitel ist, mit Hilfe von Proposition 1.15 und Proposition 1.22 die Abschätzungen (2.8) und (2.9) zu verschärfen. Der Übersicht halber führen wir die folgende Notation ein.

Notation. Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ sei $\ell(n) := \log\log n$.

2.1 Eine neue obere Schranke für die n-te Primzahl

In diesem Abschnitt werden wir die obere Schranke (2.8) für die n-te Primzahl p_n verschärfen. Dazu zeigen wir zunächst die folgende Proposition, mit der wir eine untere Schranke für $1/\log p_n$ beweisen. Dabei und im Folgenden seien

- $P_1(x) = 3x^2 - 6x + 5$
- $P_2(x) = 5x^3 - 24x^2 + 39x - 14$
- $P_3(x) = 7x^4 - 48x^3 + 120x^2 - 124x + 51$
- $P_4(x) = 9x^5 - 80x^4 + 280x^3 - 480x^2 + 405x - 124$.

Proposition 2.2. *Für alle $n \geq 688383$ gilt*

$$\frac{1}{\log p_n} \geq \frac{1}{\log n} - \frac{\ell(n)}{\log^2 n} + \frac{\ell^2(n) - \ell(n) + 1}{\log^2 n \log p_n} + \frac{1}{\log p_n} \left(\frac{P_1(\ell(n))}{2\log^3 n} - \frac{P_2(\ell(n))}{6\log^4 n} + \frac{P_3(\ell(n))}{12\log^5 n} - \frac{P_4(\ell(n))}{20\log^6 n} \right).$$

Für den Beweis dieser Proposition sind die folgenden drei Lemmata sehr hilfreich.

Lemma 2.3. *Setzen wir*

- $P_5(x) = 11x^6 - 120x^5 + 540x^4 - 1280x^3 + 1680x^2 - 1146x + 325$
- $P_6(x) = 13x^7 - 168x^6 + 924x^5 - 2800x^4 + 5040x^3 - 5376x^2 + 3143x - 762$
- $P_7(x) = 4x^8 - 84x^7 + 630x^6 - 2492x^5 + 5915x^4 - 8764x^3 + 7966x^2 - 4064x + 896$,

so gilt

$$\frac{P_5(\ell(n))}{30} - \frac{P_6(\ell(n))}{42\log n} + \frac{P_7(\ell(n))}{28\log^2 n} \geq 0$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$.

Beweis. Wir setzen

$$f(x) = 14e^{2x}P_5(x) - 10e^x P_6(x) + 15P_7(x).$$

Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $P_5(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2$ ist. Daraus folgt

$$f(x) \geq \left(14\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)P_5(x) - 10P_6(x)\right)e^x + 15P_7(x)$$

für alle $x \geq 2$. Setzen wir

$$g(x) = 14\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)P_5(x) - 10P_6(x),$$

so folgt analog zum Beweis von Lemma 1.14, dass $g(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2$ gilt. Sei

$$h(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)g(x) + 15P_7(x).$$

Analog zum Beweis von Lemma 1.14 ergibt sich, dass die Ungleichung $h(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2.3$ erfüllt ist. Daraus folgt

$$f(x) \geq e^x g(x) + 15P_7(x) \geq h(x) \geq 0$$

für alle $x \geq 2.3$. Setzen wir $x = \ell(n)$ in $f(x)$ ein und teilen anschließend durch $420\log^2 n$, so folgt

$$\frac{P_5(\ell(n))}{30} - \frac{P_6(\ell(n))}{42\log n} + \frac{P_7(\ell(n))}{28\log^2 n} = \frac{f(\ell(n))}{420\log^2 n} \geq 0$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 21466 \geq \exp(\exp(2.3))$. Für alle $2 \leq n \leq 21465$ verifizieren wir die Ungleichung mit einem Computer. □

Es folgen fünf Ungleichungen, die für alle hinreichend große x offensichtlich erfüllt sind.

Lemma 2.4. *Setzen wir*

- $Q_1(x) = 12x^7 - 138x^6 + 676x^5 - 1819x^4 + 2914x^3 - 2782x^2 + 1468x - 328,$
- $Q_2(x) = 90x^6 - 700x^5 + 2405x^4 - 4506x^3 + 4801x^2 - 2732x + 648,$
- $Q_3(x) = 50x^5 - 275x^4 + 662x^3 - 833x^2 + 538x - 140,$
- $Q_4(x) = 30x^4 - 114x^3 + 181x^2 - 136x + 40,$
- $Q_5(x) = 18x^3 - 43x^2 + 38x - 12,$

so gilt $Q_i(x) \geq 0$*, wobei* $1 \leq i \leq 5$*, für alle* $x \geq 2$*.*

Beweis. Jeweils analog zum Beweis von Lemma 1.14. □

Schließlich gilt das folgende Lemma, das an verschiedenen Stellen dieses Kapitels auftaucht.

Lemma 2.5. *Für alle natürlichen Zahlen* $n \geq 31$ *gilt*

$$0 \leq \frac{\ell(n) - 1}{\log n} + \frac{\ell(n) - 2}{\log^2 n} \leq 1.$$

Beweis. Die untere Schranke ist für alle $n \geq 1619 \geq \exp(\exp(2))$ offensichtlich erfüllt. Für $31 \leq n \leq 1618$ rechnen wir die untere Schranke mit einem Computer nach. Zusammen mit der Ungleichung $\log n \geq 2\,\ell(n)$, die für alle $n \geq 2$ erfüllt ist, folgt die Behauptung. □

Es folgt der Beweis von Proposition 2.2.

Beweis. Sei $n \geq 688383$, d.h. $\ell(n) \geq 2.59$. Der Übersicht halber schreiben wir $w = \ell(n), y = \log n$ und $z = \log p_n$. Mit Hilfe der Ungleichung (2.8) erhalten wir

$$-y^2 + (y-w)z \leq -w^2 + (y-w)\log\left(1 + \frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right). \tag{2.10}$$

Da die Ungleichung $\log(1+x) \leq \sum_{k=1}^{7}(-1)^{k+1}x^k/k$ für alle $x \geq 0$ erfüllt ist, folgt zusammen mit (2.10) und Lemma 2.5 die Ungleichung

$$-y^2 + (y-w)z \leq -w^2 + (y-w)\sum_{k=1}^{7}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^k.$$

Multiplizieren wir die rechte Seite aus, so erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned}-y^2 + (y-w)z \leq -w^2 + w - 1 &- \frac{P_1(w)}{2y} + \frac{P_2(w)}{6y^2} - \frac{P_3(w)}{12y^3} + \frac{P_4(w)}{20y^4} - \frac{P_5(w)}{30y^5} + \frac{P_6(w)}{42y^6} - \frac{P_7(w)}{28y^7} \\ &- \frac{(w-2)Q_1(w)}{12y^8} - \frac{(w-2)^2Q_2(w)}{30y^9} - \frac{(w-2)^3Q_3(w)}{10y^{10}} - \frac{(w-2)^4Q_4(w)}{6y^{11}} \\ &- \frac{(w-2)^5Q_5(w)}{6y^{12}} - \frac{(w-2)^6(7w^2-8w+2)}{7y^{13}} - \frac{w(w-2)^7}{7y^{14}},\end{aligned}$$

wobei $Q_1(x), \dots, Q_5(x)$ wie in Lemma 2.4 definiert sind. Da $7x^2 - 8x + 2 \geq 0$ für alle $x \geq 0.8$ und $x(x-2)^7 \geq 0$ für alle $x \geq 2$ gilt, erhalten wir zusammen mit Lemma 2.3 und Lemma 2.4 die Ungleichung

$$-y^2 + (y-w)z \leq -w^2 + w - 1 - \frac{P_1(w)}{2y} + \frac{P_2(w)}{6y^2} - \frac{P_3(w)}{12y^3} + \frac{P_4(w)}{20y^4}.$$

Teilen wir nun beide Seiten durch y^2z, so erhalten wir die behauptete Ungleichung. □

Wir erhalten die beiden folgenden Korollare.

Korollar 2.6. *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 456914$ gilt*

$$\frac{1}{\log p_n} \geq \frac{1}{\log n} - \frac{\ell(n)}{\log^2 n} + \frac{\ell^2(n) - \ell(n) + 1}{\log^2 n \log p_n} + \frac{P_1(\ell(n))}{2\log^3 n \log p_n} - \frac{P_2(\ell(n))}{6\log^4 n \log p_n}.$$

Beweis. Wir setzen $h(x) = 2x^3 + 9x^2 - 63x + 79$. Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $h(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$ gilt. Setzen wir $g(x) = 20(1+x)P_3(x) - 12P_4(x)$, so folgt $g'(x) = 80(x-1)h(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1$. Zusammen mit $g(1) = 120$ folgt, dass $g(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1$ ist. Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $P_3(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2$ ist. Setzen wir $f(x) = 20e^xP_3(x) - 12P_4(x)$, so folgt $f(x) \geq g(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2$. Substituieren wir $x = \ell(n)$ in $f(x)$ und teilen anschließend durch $240\log^4 n$, so ergibt sich, dass

$$\frac{P_3(\ell(n))}{12\log^3 n} - \frac{P_4(\ell(n))}{20\log^4 n} \geq 0 \tag{2.11}$$

für alle $n \geq 1619 \geq \exp(\exp(2))$ erfüllt ist. Zusammen mit Proposition 2.2 folgt die Behauptung für alle $n \geq 688383$. Für $456914 \leq n \leq 688382$ verifizieren wir die behauptete Ungleichung mit einem Computer. □

Korollar 2.7. *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 71$ gilt*

$$\frac{1}{\log p_n} \geq \frac{1}{\log n} - \frac{\ell(n)}{\log^2 n} + \frac{\ell^2(n) - \ell(n) + 1}{\log^2 n \log p_n}.$$

Beweis. Wir setzen $f(x) = 3e^xP_1(x) - P_2(x)$. Da $P_1(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$ gilt, folgt

$$f(x) \geq 3(1+x)P_1(x) - P_2(x) = 4x^3 + 15x^2 - 42x + 29 =: g(x). \tag{2.12}$$

Es gilt $g'(x) = 6(2x+7)(x-1)$. Wegen $g''(1) > 0$ ist $x = 1$ ein lokales Minimum. Aus $g(1) = 7$ folgt zusammen mit (2.12), dass $f(x) \geq g(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$ ist. Setzen wir $x = \ell(n)$ in $f(x)$ ein und teilen anschließend durch $6\log^2 n$, so folgt, dass die Ungleichung

$$\frac{P_1(\ell(n))}{2\log n} - \frac{P_2(\ell(n))}{6\log^2 n} \geq 0 \tag{2.13}$$

für alle $n \geq 3 \geq \exp(\exp(0))$ erfüllt ist. Mit einem Computer rechnen wir nach, dass die Ungleichung (2.13) auch für $n = 2$ gilt. Aus Korollar 2.6 folgt somit, dass die Behauptung für alle $n \geq 456914$ gilt. Mit einem Computer rechnen wir nach, dass die behauptete Ungleichung auch für alle $71 \leq n \leq 456913$ gilt. □

Wir wollen nun das Hauptresultat dieses Abschnitts formulieren. Dazu führen wir die folgenden Notationen ein. Sei $A_0 \in \mathbb{R}$ mit $0 < A_0 \leq 455.596096$ und sei $F_0 : \mathbb{N}_{\geq 2} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} F_0(n) = {} & \frac{A_0}{\log^5 p_n} + \frac{(\ell^2(n) - 3.648\,\ell(n) + 14.352)(\ell^2(n) - \ell(n) + 1)}{\log^4 n \log p_n} + \frac{2.648 P_1(\ell(n))}{2\log^3 n \log^2 p_n} + \frac{2.648 P_1(\ell(n))}{2\log^4 n \log p_n} \\ & + \frac{13.352(\ell^2(n) - \ell(n) + 1)}{\log^2 n \log^2 p_n}\left(\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log p_n}\right) - \frac{70.296\,\ell(n)}{\log^3 n \log^2 p_n} - \frac{70.296\,\ell(n)}{\log^2 n \log^3 p_n} - \frac{P_2(\ell(n))}{6\log^4 n \log p_n}. \end{aligned}$$

Dann gilt $F_0(n) \geq 0$ für alle hinreichend große n und wir definieren

$$N_0 = N(A_0) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid F_0(n) \geq 0 \ \ \forall\, n \geq k\}. \tag{2.14}$$

Sei $0 < A_1 < 1$ und $F_1 : \mathbb{N}_{\geq 2} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F_1(n) = \log n - A_1 \log p_n.$$

Nach (2.1) gilt $F_1(n) \geq 0$ für alle hinreichend große n und wir definieren

$$N_1 = N(A_1) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid F_1(n) \geq 0 \ \text{ für alle } n \geq k\}.$$

Im Folgenden seien $a : \mathbb{N}_{\geq 2} \to \mathbb{R}$ eine arithmetische Funktion mit

$$a(n) \geq -\ell^2(n) + 6\,\ell(n) \tag{2.15}$$

und $N_2, N_3, N_4 \geq 2$ drei Konstanten, die von der arithmetischen Funktion a abhängen, so dass

$$0 \leq \frac{\ell(n) - 1}{\log n} + \frac{\ell(n) - 2}{\log^2 n} - \frac{\ell^2(n) - 6\,\ell(n) + a(n)}{2\log^3 n} \leq 1 \tag{2.16}$$

für alle $n \geq N_2$ sowie

$$\frac{\ell(n) - 2}{\log^2 n} - \frac{\ell^2(n) - 6\,\ell(n) + a(n)}{2\log^3 n} \geq 0 \tag{2.17}$$

für alle $n \geq N_3$ und

$$p_n < n\left(\log n + \ell(n) - 1 + \frac{\ell(n) - 2}{\log n} - \frac{\ell^2(n) - 6\,\ell(n) + a(n)}{2\log^2 n}\right) \tag{2.18}$$

für alle $n \geq N_4$ gilt. Setzen wir

$$\begin{aligned} G(x) = {} & \frac{2x^3 - 21x^2 + 78x - 100.112}{6e^{3x}} - \frac{x^4 - 14x^3 + 52.592x^2 - 101.408x + 17}{4e^{4x}} \\ & + \frac{2x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 110x^2 + 150x - 42}{10e^{5x}} - \frac{3x^4 - 44x^3 + 156x^2 - 96x + 64}{24e^{6x}} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} b(n) = 10.296 &+ \frac{2A_2}{\log^3 n} + \frac{2A_3}{\log^4 n} + \frac{a(n)}{\log n}\left(1 - \frac{\ell(n)-1}{\log n} - \frac{\ell(n)-2}{\log^2 n} + \frac{2\,\ell^2(n) - 12\,\ell(n) + a(n)}{4\log^3 n}\right) \\ &- 2\,G(\ell(n))\log^2 n + \frac{A_1((5.296A_1 + 8.296)\,\ell^2(n) - (32A_1+38)\,\ell(n) + 145.888A_1 + 10.296)}{\log^2 n} \\ &+ \frac{2\cdot 70.296A_1^3(\ell^2(n) - \ell(n) + 1)}{\log^4 n} + \frac{2\cdot 70.296A_1^4(\ell^2(n) - \ell(n) + 1)}{\log^4 n}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

wobei $A_2 := (455.596096 - A_0)A_1^5$ und $A_3 := 3404.179904A_1^6$ seien, so erhalten wir das folgende Theorem.

Theorem 2.8. *Für alle $n \geq \max\{N_0, N_1, N_2, N_3, N_4, 688383\}$ gilt*

$$p_n < n\left(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 6\log\log n + b(n)}{2\log^2 n}\right).$$

Für den Beweis von Theorem 2.8 sind die folgenden zwei Lemmata hilfreich.

Lemma 2.9. *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt*

$$\frac{13.352P_1(\ell(n))}{2\log^4 n\log^2 p_n} + \frac{13.352P_1(\ell(n))}{2\log^3 n\log^3 p_n} + \geq \frac{13.352P_2(\ell(n))}{6\log^5 n\log^2 p_n} + \frac{13.352P_2(\ell(n))}{6\log^4 n\log^3 p_n}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus (2.13). □

Schließlich notieren wir das letzte Lemma, das für den Beweis von Theorem 2.8 hilfreich sein wird.

Lemma 2.10. *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt*

$$\begin{aligned} &\frac{(\ell^2(n) - 3.648\,\ell(n) + 14.352)P_1(\ell(n))}{2\log^5 n\log p_n} + \frac{2.648P_2(\ell(n))}{6\log^5 n\log p_n} + \frac{P_3(\ell(n))}{12\log^5 n\log p_n} \\ &\quad\geq \frac{(\ell^2(n) - 3.648\,\ell(n) + 14.352)P_2(\ell(n))}{6\log^6 n\log p_n} + \frac{2.648P_2(\ell(n))}{6\log^4 n\log^2 p_n} + \frac{P_4(\ell(n))}{20\log^6 n\log p_n}. \end{aligned}$$

Beweis. Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt $P_2(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0.5$. Da außerdem $x^2 - 3.648x + 14.352 \geq 0$ für alle $x \geq 0$ gilt, folgt zusammen mit (2.11) und (2.13) die Behauptung. □

Es folgt der Beweis von Theorem 2.8.

Beweis. Sei $n \geq \max\{N_0, N_1, N_2, N_3, N_4, 688383\}$. Der Übersicht halber schreiben wir im Folgenden $w = \ell(n), y = \log n$ und $z = \log p_n$. Multiplizieren wir die Ungleichung aus Korollar 2.6 mit $1/z$, so folgt

$$\frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{yz} - \frac{w}{y^2z} + \frac{w^2 - w + 1}{y^2z^2} + \frac{P_1(w)}{2y^3z^2} - \frac{P_2(w)}{6y^4z^2}.\frac{P_2(\ell(n))}{6y^4z^2}. \tag{2.20}$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit z/y, so gilt

$$\frac{1}{yz} \geq \frac{1}{y^2} - \frac{w}{y^3} + \frac{w^2 - w + 1}{y^3z} + \frac{P_1(w)}{2y^4z} - \frac{P_2(w)}{6y^5z}. \tag{2.21}$$

Kombinieren wir diese Unlgeichung mit (2.20), so erhalten wir

$$\frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{y^2} - \frac{w}{y^3} - \frac{w}{y^2z} + \frac{w^2 - w + 1}{y^3z} + \frac{w^2 - w + 1}{y^2z^2} + \left(\frac{P_1(w)}{2y^3z} - \frac{P_2(w)}{6y^4z}\right)\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \tag{2.22}$$

und mit Hilfe von (2.13) folgt daraus

$$\frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{y^2} - \frac{w}{y^3} - \frac{w}{y^2z} + \frac{w^2 - w + 1}{y^3z} + \frac{w^2 - w + 1}{y^2z^2}. \tag{2.23}$$

Da $F_1(n) \geq 0$ ist und da $2.648x^2 - 16x + 72.944 \geq 0$ für alle $x \geq 0$ gilt, folgt

$$\frac{2.648\,\ell^2(n) - 16\,\ell(n) + 72.944}{\log^2 p_n} \geq \frac{A_1(5.296\,\ell^2(n) - 32\,\ell(n) + 145.888)}{2\log n \log p_n}. \tag{2.24}$$

Definieren wir

$$f(x) = (5.296A_1 + 8.296)x^2 - (32A_1 + 38)x + 145.888A_1 + 10.296,$$

so gilt $f(x) \geq 12.268x^2 - 70x + 119.712 \geq 0$ für alle $x \geq 0$. Zusammen mit $F_1(n) \geq 0$ und (2.24) folgt

$$\begin{aligned}\frac{2.648\,\ell^2(n) - 16\,\ell(n) + 72.944}{\log^2 p_n} &+ \frac{8.296\,\ell^2(n) - 38\,\ell(n) + 10.296}{2\log n \log p_n} \\ &\geq \frac{A_1((5.296A_1 + 8.296)\,\ell^2(n) - (32A_1 + 38)\,\ell(n) + 145.888A_1 + 10.296)}{\log^2 n}.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Ferner folgt aus $F_1(n) \geq 0$ zusammen mit den Definitionen von A_2 und A_3, dass die Ungleichungen

$$\frac{A_2}{\log^5 n} + \frac{A_3}{\log^6 n} \leq \frac{455.596096 - A_0}{\log^5 p_n} + \frac{3404.179904}{\log^6 p_n} \tag{2.26}$$

und

$$\frac{70.296A_1^3}{\log^6 n} + \frac{70.296A_1^4}{\log^6 n} \leq \frac{70.296}{\log^3 n \log p_n} + \frac{70.296}{\log^2 n \log^4 p_n} \tag{2.27}$$

erfüllt sind. Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned}G(w) = \frac{10.296 - b(n)}{2y^2} &+ \frac{A_1((5.296A_1 + 8.296)w^2 - (32A_1 + 38)w + 145.888A_1 + 10.296)}{2y^4} \\ &+ \frac{A_2}{y^5} + \frac{A_3}{y^6} + \frac{a(n)}{2y^3}\left(1 - \frac{w-1}{y} - \frac{w-2}{y^2} + \frac{2w^2 - 12w + a(n)}{4y^3}\right) \\ &+ \frac{70.296A_1^3(w^2 - w + 1)}{y^6} + \frac{70.296A_1^4(w^2 - w + 1)}{y^6}.\end{aligned}$$

In Kombination mit (2.25), (2.26) und (2.27) gilt somit

$$\begin{aligned}\frac{10.296 - b(n)}{2y^2} + \frac{2.648w^2 - 16w + 72.944}{y^2z^2} &+ \frac{8.296w^2 - 38w + 10.296}{2y^3z} + \frac{455.596096 - A_0}{z^5} \\ &+ \frac{3404.179904}{z^6} + \frac{70.296(w^2 - w + 1)}{y^3z^3} + \frac{70.296(w^2 - w + 1)}{y^2z^4} \\ &\geq G(w) - \frac{a(n)}{2y^3}\left(1 - \frac{w-1}{y} - \frac{w-2}{y^2} + \frac{2w^2 - 12w + a(n)}{4y^3}\right).\end{aligned}$$

Zusammen mit Lemma 2.9 und Lemma 2.10 folgt somit

$$\begin{aligned}\frac{5.148}{y^2} - \frac{b(n)}{2y^2} &+ \frac{2.648w^2 - 16w + 72.944}{y^2z^2} + \frac{8.296w^2 - 38w + 10.296}{2y^3z} + \frac{455.596096 - A_0}{z^5} + \frac{3404.179904}{z^6} \\ &+ \frac{70.296(w^2 - w + 1)}{y^2z^4} + \frac{70.296(w^2 - w + 1)}{y^3z^3} - \frac{13.352P_2(w)}{6y^5z^2} - \frac{13.352P_2(w)}{6y^4z^3} + \frac{13.352P_1(w)}{2y^3z^3} \\ &- \frac{2.648P_2(w)}{6y^4z^2} + \frac{13.352P_1(w)}{2y^4z^2} + \frac{(w^2 - 3.648w + 14.352)P_1(w)}{2y^5z} + \frac{2.648P_2(w)}{6y^5z} + \frac{P_3(w)}{12y^5z} \\ &- \frac{P_4(w)}{20y^6z} - \frac{(w^2 - 3.648w + 14.352)P_2(w)}{6y^6z} \\ \geq G(w) &- \frac{a(n)}{2y^3}\left(1 - \frac{w-1}{y} - \frac{w-2}{y^2} + \frac{2w^2 - 12w + a(n)}{4y^3}\right).\end{aligned}$$

Addieren wir die linke Seite dieser Ungleichung mit $F_0(n) \geq 0$, so ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\frac{5.148}{y^2} - \frac{b(n)}{2y^2} + \frac{2.648w^2 - 16w + 2.648}{y^2z^2} + \frac{70.296}{y^2z^2} + \frac{8.296w^2 - 38w + 10.296}{2y^3z} + \frac{455.596096}{z^5} \\
&\quad + \frac{3404.179904}{z^6} + \frac{70.296(w^2 - w + 1)}{y^2z^4} + \frac{70.296(w^2 - w + 1)}{y^3z^3} - \frac{13.352P_2(w)}{6y^5z^2} - \frac{13.352P_2(w)}{6y^4z^3} \\
&\quad + \frac{13.352P_1(w)}{2y^3z^3} - \frac{2.648P_2(w)}{6y^4z^2} + \frac{13.352P_1(w)}{2y^4z^2} + \frac{(w^2 - 3.648w + 14.352)P_1(w)}{2y^5z} + \frac{2.648P_2(w)}{6y^5z} \\
&\quad + \frac{P_3(w)}{12y^5z} - \frac{P_4(w)}{20y^6z} - \frac{(w^2 - 3.648w + 14.352)P_2(w)}{6y^6z} + \frac{2.648P_1(w)}{2y^3z^2} + \frac{2.648P_1(w)}{2y^4z} - \frac{70.296w}{y^3z^2} \\
&\quad - \frac{70.296w}{y^2z^3} + \frac{(w^2 - 3.648w + 14.352)(w^2 - w + 1)}{y^4z} - \frac{P_2(w)}{6y^4z} + \frac{13.352(w^2 - w + 1)}{y^2z^2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\
&\geq G(w) - \frac{a(n)}{2y^3}\left(1 - \frac{w-1}{y} - \frac{w-2}{y^2} + \frac{2w^2 - 12w + a(n)}{4y^3}\right). \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Multiplizieren wir die Ungleichung (2.23) mit $70.296/z^2$ und wenden die so erhaltene Ungleichung auf (2.28) an, so folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{5.148}{y^2} - \frac{b(n)}{2y^2} + \frac{2.648w^2 - 16w + 2.648}{y^2z^2} + \frac{70.296}{z^4} + \frac{8.296w^2 - 38w + 10.296}{2y^3z} + \frac{455.596096}{z^5} \\
&\quad + \frac{3404.179904}{z^6} - \frac{13.352P_2(w)}{6y^5z^2} - \frac{13.352P_2(w)}{6y^4z^3} + \frac{13.352P_1(w)}{2y^3z^3} - \frac{2.648P_2(w)}{6y^4z^2} \\
&\quad + \frac{13.352P_1(w)}{2y^4z^2} + \frac{(w^2 - 3.648w + 14.352)P_1(w)}{2y^5z} + \frac{2.648P_2(w)}{6y^5z} + \frac{P_3(w)}{12y^5z} - \frac{P_4(w)}{20y^6z} \\
&\quad - \frac{(w^2 - 3.648w + 14.352)P_2(w)}{6y^6z} + \frac{2.648P_1(w)}{2y^3z^2} + \frac{2.648P_1(w)}{2y^4z} \\
&\quad + \frac{(w^2 - 3.648w + 14.352)(w^2 - w + 1)}{y^4z} - \frac{P_2(w)}{6y^4z} + \frac{13.352(w^2 - w + 1)}{y^2z^2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\
&\geq G(w) - \frac{a(n)}{2y^3}\left(1 - \frac{w-1}{y} - \frac{w-2}{y^2} + \frac{2w^2 - 12w + a(n)}{4y^3}\right).
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$H(x) = G(x) + \frac{x^2 - 3.648x + 14.352}{e^{3x}} - \frac{x^3 - 3.648x^2 + 14.352x}{e^{4x}} - \frac{2.648x}{e^{3x}},$$

so folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\frac{5.148}{y^2} - \frac{b(n)}{2y^2} + \frac{2.648(w^2 - w + 1)}{y^2z^2} - \frac{13.352w}{y^2z^2} + \frac{70.296}{z^4} + \frac{8.296w^2 - 11.296w + 10.296}{2y^3z} - \frac{13.352w}{y^3z} \\
&\quad + \frac{455.596096}{z^5} + \frac{3404.179904}{z^6} - \frac{13.352P_2(w)}{6y^5z^2} - \frac{13.352P_2(w)}{6y^4z^3} + \frac{13.352P_1(w)}{2y^3z^3} - \frac{2.648P_2(w)}{6y^4z^2} \\
&\quad + \frac{13.352P_1(w)}{2y^4z^2} + \frac{P_3(w)}{12y^5z} + \frac{(w^2 - 3.648w + 14.352)P_1(w)}{2y^5z} + \frac{2.648P_2(w)}{6y^5z} \\
&\quad - \frac{(w^2 - 3.648w + 14.352)P_2(w)}{6y^6z} - \frac{P_4(w)}{20y^6z} + \frac{(w^2 - 3.648w + 14.352)(w^2 - w + 1)}{y^4z} \\
&\quad - \frac{P_2(w)}{6y^4z} + \frac{2.648P_1(w)}{2y^3z^2} + \frac{2.648P_1(w)}{2y^4z} + \frac{13.352(w^2 - w + 1)}{y^2z^2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\
&\quad + \frac{w^2 - 3.648w + 14.352}{y^3} - \frac{w^3 - 3.648w^2 + 14.352w}{y^4} - \frac{2.648w}{y^3} \\
&\geq H(w) - \frac{a(n)}{2y^3}\left(1 - \frac{w-1}{y} - \frac{w-2}{y^2} + \frac{2w^2 - 12w + a(n)}{4y^3}\right). \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

Multiplizieren wir die Ungleichung (2.21) mit

$$\frac{w^2 - 3.648w + 14.352}{y} \geq 0,$$

und wenden die so erhaltene Ungleichung auf (2.29) an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{5.148}{y^2} &- \frac{b(n)}{2y^2} + \frac{2.648(w^2 - w + 1)}{y^2 z^2} - \frac{13.352w}{y^2 z^2} + \frac{70.296}{z^4} + \frac{8.296w^2 - 11.296w + 10.296}{2y^3 z} - \frac{13.352w}{y^3 z} \\ &+ \frac{455.596096}{z^5} + \frac{3404.179904}{z^6} - \frac{13.352P_2(w)}{6y^5 z^2} - \frac{13.352P_2(w)}{6y^4 z^3} + \frac{13.352P_1(w)}{2y^3 z^3} - \frac{2.648P_2(w)}{6y^4 z^2} \\ &+ \frac{13.352P_1(w)}{2y^4 z^2} + \frac{P_3(w)}{12y^5 z} + \frac{2.648P_2(w)}{6y^5 z} + \frac{w^2 - 3.648w + 14.352}{y^2 z} - \frac{P_4(w)}{20y^6 z} - \frac{P_2(w)}{6y^4 z} \\ &+ \frac{2.648P_1(w)}{2y^3 z^2} + \frac{2.648P_1(w)}{2y^4 z} + \frac{13.352(w^2 - w + 1)}{y^2 z^2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \frac{2.648w}{y^3} \\ &\geq H(w) - \frac{a(n)}{2y^3}\left(1 - \frac{w-1}{y} - \frac{w-2}{y^2} + \frac{2w^2 - 12w + a(n)}{4y^3}\right). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Indem wir die Ungleichung (2.22) mit $13.352/z$ multiplizieren, ergibt sich aus der so gewonnenen Ungleichung in Kombination mit (2.30) die Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{5.148}{y^2} &- \frac{b(n)}{2y^2} + \frac{2.648(w^2 - w + 1)}{y^2 z^2} + \frac{13.352}{z^3} + \frac{70.296}{z^4} + \frac{8.296w^2 - 11.296w + 10.296}{2y^3 z} + \frac{455.596096}{z^5} \\ &+ \frac{3404.179904}{z^6} - \frac{2.648P_2(w)}{6y^4 z^2} + \frac{P_3(w)}{12y^5 z} + \frac{2.648P_2(w)}{6y^5 z} + \frac{w^2 - 3.648w + 1}{y^2 z} - \frac{P_4(w)}{20y^6 z} - \frac{P_2(w)}{6y^4 z} \\ &+ \frac{2.648P_1(w)}{2y^3 z^2} + \frac{2.648P_1(w)}{2y^4 z} - \frac{2.648w}{y^3} \\ &\geq H(w) - \frac{a(n)}{2y^3}\left(1 - \frac{w-1}{y} - \frac{w-2}{y^2} + \frac{2w^2 - 12w + a(n)}{4y^3}\right). \end{aligned}$$

Diese ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \frac{5}{2y^2} &- \frac{b(n)}{2y^2} + \frac{2.648}{y^2} - \frac{2.648w}{y^3} - \frac{2.648w}{y^2 z} + \frac{2.648(w^2 - w + 1)}{y^3 z} + \frac{2.648(w^2 - w + 1)}{y^2 z^2} + \frac{2.648P_1(w)}{2y^4 z} \\ &+ \frac{2.648P_1(w)}{2y^3 z^2} - \frac{2.648P_2(w)}{6y^5 z} - \frac{2.648P_2(w)}{6y^4 z^2} + \frac{13.352}{z^3} + \frac{70.296}{z^4} + \frac{455.596096}{z^5} + \frac{3404.179904}{z^6} \\ &+ \frac{w^2 - w + 1}{y^2 z} + \frac{P_1(w)}{2y^3 z} - \frac{P_2(w)}{6y^4 z} + \frac{P_3(w)}{12y^5 z} - \frac{P_4(w)}{20y^6 z} \\ &\geq H(w) - \frac{a(n)}{2y^3}\left(1 - \frac{w-1}{y} - \frac{w-2}{y^2} + \frac{2w^2 - 12w + a(n)}{4y^3}\right). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Multiplizieren wir Ungleichung (2.22) mit 2.648 und wenden die so erhaltene Ungleichung auf (2.31) an, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{5}{2y^2} &- \frac{b(n)}{2y^2} + \frac{2.648}{z^2} + \frac{13.352}{z^3} + \frac{70.296}{z^4} + \frac{455.596096}{z^5} + \frac{3404.179904}{z^6} + \frac{w^2 - w + 1}{y^2 z} + \frac{P_1(w)}{2y^3 z} - \frac{P_2(w)}{6y^4 z} \\ &+ \frac{P_3(w)}{12y^5 z} - \frac{P_4(w)}{20y^6 z} \\ &\geq H(w) - \frac{a(n)}{2y^3}\left(1 - \frac{w-1}{y} - \frac{w-2}{y^2} + \frac{2w^2 - 12w + a(n)}{4y^3}\right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Proposition 2.2 folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{2y^2} - \frac{b(n)}{2y^2} + \frac{2.648}{z^2} + \frac{13.352}{z^3} + \frac{70.296}{z^4} + \frac{455.596096}{z^5} + \frac{3404.179904}{z^6} - \frac{1}{y} + \frac{w}{y^2} + \frac{1}{z} \\
&\quad \geq H(w) - \frac{a(n)}{2y^3}\left(1 - \frac{w-1}{y} - \frac{w-2}{y^2} + \frac{2w^2 - 12w + a(n)}{4y^3}\right).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$\begin{aligned}
H(w) &- \frac{a(n)}{2y^3}\left(1 - \frac{w-1}{y} - \frac{w-2}{y^2} + \frac{2w^2 - 12w + a(n)}{4y^3}\right) \\
&= -\frac{w^2 - 6w + a(n)}{2y^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2} - \frac{w^2 - 6w + a(n)}{2y^3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^3 \\
&\quad - \frac{1}{4}\left(\frac{w-1}{y}\right)^4 + \frac{1}{5}\left(\frac{w-1}{y}\right)^5 + \frac{w^2 - 2w + 1}{2y^2}.
\end{aligned}$$

Daher ist die Ungleichung (2.32) äquivalent zu

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{2.648}{z^2} + \frac{13.352}{z^3} + \frac{70.296}{z^4} + \frac{455.596096}{z^5} + \frac{3404.179904}{z^6} - \frac{w^2 - 4w - (4 - b(n))}{2y^2} \\
&\quad \geq -\frac{w^2 - 6w + a(n)}{2y^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2} - \frac{w^2 - 6w + a(n)}{2y^3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^3 \\
&\qquad - \frac{1}{4}\left(\frac{w-1}{y}\right)^4 + \frac{1}{5}\left(\frac{w-1}{y}\right)^5.
\end{aligned}$$

Addieren wir beide Seiten dieser Ungleichung mit $(w-1)/y + (w-2)/y^2$ und benutzen, dass $g(x) = x^3/3$ monoton wachsend und $h(x) = -x^4/4 + x^5/5$ monoton fallend auf $[0,1]$ ist, so ergibt sich zusammen mit (2.15), (2.16) und (2.17) die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\frac{w-2}{y} + \frac{1}{z} + \frac{2.648}{z^2} + \frac{13.352}{z^3} + \frac{70.296}{z^4} + \frac{455.596096}{z^5} + \frac{3404.179904}{z^6} - \frac{w^2 - 6w + b(n)}{2y^2} \\
&\quad \geq \frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2} - \frac{w^2 - 6w + a(n)}{2y^3} + \sum_{k=2}^{5} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2} - \frac{w^2 - 6w + a(n)}{2y^3}\right)^k.
\end{aligned}$$

Es ist $\log(1+t) \leq \sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} t/k$ für alle $t \geq 0$. Mit (2.16) folgt also

$$\begin{aligned}
&\frac{w-2}{y} + \frac{1}{z} + \frac{2.648}{z^2} + \frac{13.352}{z^3} + \frac{70.296}{z^4} + \frac{455.596096}{z^5} + \frac{3404.179904}{z^6} - \frac{w^2 - 6w + b(n)}{2y^2} \\
&\quad \geq \log\left(1 + \frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2} - \frac{w^2 - 6w + a(n)}{2y^3}\right).
\end{aligned}$$

Addieren wir beide Seiten mit $y + w$, so ergibt sich mit Hilfe von (2.18) die Ungleichung

$$y + w + \frac{w-2}{\log n} - \frac{w^2 - 6w + b(n)}{2\log^2 n} \geq z - \frac{1}{z} - \frac{2.648}{z^2} - \frac{13.352}{z^3} - \frac{70.296}{z^4} - \frac{455.596096}{z^5} - \frac{3404.179904}{z^6}.$$

Addieren wir beiden Seiten dieser Ungleichung mit -1, setzen die Definition von w, y, z ein und multiplizieren anschließend mit n, so folgt mit Hilfe von Proposition 1.22 die Behauptung. □

In Hinblick auf Satz 2.1 zeigen wir nun die folgende explizite obere Schranke für die n-te Primzahl, mit der wir insbesondere die obere Schranke aus der Ungleichung (2.8) von Dusart [14] verschärfen.

Korollar 2.11. *Für alle $n \geq 8009824$ gilt*

$$p_n < n\left(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 6\log\log n + 10.273}{2\log^2 n}\right).$$

Für den Beweis benötigen wir die sechs folgenden Lemmata. Mit dem ersten Lemma bestimmen wir für $A_1 = 0.866$ die Konstante N_1.

Lemma 2.12. *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 477537210$ gilt*

$$\log n \geq 0.866 \log p_n.$$

Beweis. Um die Behauptung zu zeigen, setzen wir

$$f(x) = e^x - 0.866 \left(e^x + x + \log\left(1 + \frac{x-1}{e^x} + \frac{x-2}{e^{2x}}\right)\right).$$

Dann gilt

$$f'(x) = 0.134e^x - 0.866 \left(1 + \frac{e^{2x} - e^x(x-1) - 2x + 5}{e^{2x} + e^x(x-1) + x - 2}\right).$$

Da die Ungleichung

$$\frac{e^{2x} - e^x(x-1) - 2x + 5}{e^{2x} + e^x(x-1) + x - 2} \leq 1$$

genau dann gilt, wenn $2e^x(x-1) + 3x \geq 7$ ist, folgt $f'(x) \geq 0.1312e^x - 2 \cdot 0.866 \geq 0$ für alle $x \geq 2$. Zusammen mit $f(3) \geq 0.0093$ folgt also $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$. Setzen wir $x = \ell(n)$ in $f(x)$ ein, so folgt die Behauptung für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8 \geq \exp(\exp(3))$. Mit Hilfe eines Computer prüfen wir nach, dass die Ungleichung auch für alle $477537210 \leq n \leq 5.3 \cdot 10^8$ gilt. □

Als nächstes bestimmen wir die Konstante N_0 aus (2.14) für $A_0 = 152.2262$.

Lemma 2.13. *Sei $A_0 = 152.2262$. Dann gilt $N_0 = 37350275$.*

Beweis. Sei $n \geq 5.3 \cdot 10^8$. Der Übersicht halber schreiben wir $w = \ell(n), y = \log n, z = \log p_n$. Es gilt

$$\begin{aligned} F_0(n) = {} & \frac{152.2262}{z^5} + \frac{6w^4 - 32.888w^3 + 161.832w^2 - 194.664w + 139.832}{6y^4 z} \\ & + \frac{34.648w^2 - 183.184w + 39.944}{2y^3z^2} + \frac{13.352w^2 - 83.648w + 13.352}{y^2z^3}. \end{aligned}$$

Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $f(x) = 6x^4 - 32.888x^3 + 161.832x^2 - 194.664x + 139.832 \geq 0$ für alle $x \geq 0.75$ erfüllt ist. Daher gilt $f(w)/6y^4z \geq f(w)/6y^3z^2$ und es genügt zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} & \frac{152.2262}{z^5} + \frac{6w^4 - 32.888w^3 + 265.776w^2 - 744.216w + 259.664}{6y^3z^2} \\ & \qquad \geq -\frac{13.352w^2 - 83.648w + 13.352}{y^2z^3} \end{aligned} \tag{2.33}$$

erfüllt ist. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned} g(x) = {} & (6x^4 - 32.888x^3 + 265.776x^2 - 744.216x + 259.664)(e^x + x) \\ & + 6e^x(13.352x^2 - 83.648x + 13.352 + 152.2262 \cdot 0.866^2). \end{aligned}$$

Analog zum Beweis von Lemma 1.14 erhalten wir, dass

$$h_1(x) = 6x^4 - 8.888x^3 + 247.224x^2 - 554.328x - 221.3502877168 \geq 0$$

für alle $x \geq 2.47$ und

$$h_2(x) = 30x^4 - 131.552x^3 + 797.328x^2 - 1488.432x + 259.664 \geq 0$$

für alle $x \geq 2.09$ gilt. Somit gilt $g'(x) = h_1(x)e^x + h_2(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2.47$. Zusammen mit $g(3) \geq 0.0087$ erhalten wir, dass $g(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$ gilt. Setzen wir $x = w$ in $g(x)$ ein, benutzen die Ungleichung (2.2) und teilen anschließend durch $6 \log^3 n \log^3 p_n$, so folgt, dass die Ungleichung

$$\begin{aligned}\frac{152.2262 \cdot 0.866^2}{y^2 z^3} &+ \frac{6w^4 - 32.888w^3 + 265.776w^2 - 744.216w + 259.664}{6y^3 z^2} \\ &\geq -\frac{13.352w^2 - 83.648w + 13.352}{y^2 z^3}\end{aligned}$$

für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8 \geq \exp(\exp(3))$ erfüllt ist. Zusammen mit Lemma 2.12 folgt die Ungleichung (2.33) und somit die Behauptung für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8$. Für $37350275 \leq n \leq 5.3 \cdot 10^8$ prüfen wir die behauptete Ungleichung mit einem Computer nach. □

Der Beweis von Korollar 2.11 besteht aus zwei Schritten. Für den ersten Schritt benötigen wir die beiden folgenden Lemmata, deren Beweise jeweils im Appendix am Ende dieses Kapitels aufgeführt sind.

Lemma 2.14. *Sei $W_1(x) = 9.84e^x - 120x^3 + 960x^2 - 2880x + 4806.72$. Dann gilt*

$$W_1(x) \geq \begin{cases} 1352 & \textit{falls } 0 \leq x < 4.293, \\ 289 & \textit{falls } 4.293 \leq x < 5.7, \\ 102 & \textit{falls } x \geq 5.7. \end{cases}$$

Lemma 2.15. *Sei*

$$W_2(x) = W_1(x)e^x + 60x^4 - 600x^3 + 2574.252x^2 - 8539.02x + 9122.472.$$

Dann gilt $W_2(x) \geq 6158$ für alle $x \geq 1.21$.

Für den zweiten Schritt im Beweis von Korollar 2.11 benutzen wir die beiden folgenden Lemmata, deren Beweise ebenfalls im Appendix am Ende dieses Kapitels aufgeführt sind.

Lemma 2.16. *Sei $Y_1(x) = 5.52e^x - 120x^3 + 1140x^2 - 3840x + 6292.62$. Dann gilt*

$$Y_1(x) \geq \begin{cases} 1476 & \textit{falls } 0 \leq x < 4.871, \\ 707 & \textit{falls } 4.871 \leq x < 5.863 \\ 118 & \textit{falls } x \geq 5.863. \end{cases}$$

Lemma 2.17. *Setzen wir*

$$Y_2(x) = Y_1(x)e^x + 60x^4 - 720x^3 + 3234.252x^2 - 9649.74x + 9377.832.$$

so gilt $Y_2(x) \geq 6229$ für alle $x \geq 1.16$.

Es folgt der Beweis von Korollar 2.11.

Beweis. Der Übersicht halber schreiben wir $w = \ell(n), y = \log n, z = \log p_n$. Wir setzen $A_0 = 152.2262$ und $A_1 = 0.866$ und erhalten $N_0 = 37350275$ nach Lemma 2.13 sowie $N_1 = 477537210$ nach Lemma 2.12. Dann gilt

$$A_2 = (455.596096 - A_0)A_1^5 \geq 153.1194$$

sowie

$$A_3 = 3404.179904A_1^6 \geq 1435.8856.$$

Wie bereits erwähnt, verläuft der Beweis dieses Korollars in zwei Schritten ab. Im ersten Schritt setzen wir $a(n) = -w^2 + 6w$. Nach (2.19) gilt dann

$$b(n) \geq 10.296 + g(n), \tag{2.34}$$

wobei $g(n)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} g(n) = &-\frac{2w^3 - 18w^2 + 60w - 100.112}{3y} + \frac{w^4 - 12w^3 + 60.9042w^2 - 203.2212w + 253.6518}{2y^2} \\ &- \frac{2w^5 - 10w^4 + 30w^3 - 70w^2 + 90w - 1573.194}{5y^3} - \frac{8w^3 - 2092.59w^2 + 2140.6w - 36569.8488}{12y^4}. \end{aligned}$$

Es gilt $N_2 = 31$ nach Lemma 2.5 und $N_3 = 1619 \geq \exp(\exp(2))$ sowie $N_4 = 688383$ nach (2.8). Wir zeigen nun, dass $g(n) \geq -0.041$ für alle $n \geq 29$ ist. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} g_1(x) = 2.46e^{4x} &- 20(2x^3 - 18x^2 + 60x - 100.112)e^{3x} \\ &+ 30(x^4 - 12x^3 + 60.9042x^2 - 203.2212x + 253.6518)e^{2x} \\ &- 12(2x^5 - 10x^4 + 30x^3 - 70x^2 + 90x - 1573.194)e^x \\ &- 5(8x^3 - 2092.59x^2 + 2140.6x - 36569.8488) \end{aligned}$$

und

$$W_3(x) = 6158e^x - 24x^5 + 120x^3 - 240x^2 + 600x + 17798.328.$$

Dann gilt offenbar $W_3(x) \geq 17798.328$ für alle $x \geq 0$. Sei $W_2(x)$ wie in Lemma 2.15 definiert. Dann gilt

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= W_2(x)e^{2x} + (-24x^5 + 120x^3 - 240x^2 + 600x + 17798.328)e^x - 120x^2 + 480x - 480 \\ &\geq W_3(x)e^x - 120x^2 + 20925.9x - 10703, \end{aligned}$$

d.h. $g_1'(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1.21$. Zusammen mit $g_1(1.21) \geq 311229.941$ erhalten wir, dass $g_1(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1.21$ gilt. Setzen wir nun $x = w$ in $g_1(x)$ ein und teilen anschließend durch $60y^4$, so folgt, dass $g(n) \geq -0.041$ für alle $n \geq 29 \geq \exp(\exp(1.21))$ erfüllt ist. Zusammen mit (2.34) erhalten wir, dass

$$b(n) \geq 10.255$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 29$ gilt. Aus Theorem 2.8 folgt somit, dass die Ungleichung

$$p_n < n\left(y + w - 1 + \frac{w-2}{y} - \frac{w^2 - 6w + 10.255}{2y^2}\right)$$

für alle $n \geq \max\{37350275, 31, 1619, 688383, 477537210, 688383, 29\} = 477537210$ erfüllt ist. Mit einem Computer überprüfen wir, dass diese Ungleichung auch für $7978451 \leq n \leq 477537209$ erfüllt ist.

Es folgt der zweite Schritt des Beweises. Dazu setzen wir $a(n) = 10.255$. Setzen wir $f(x) = 2e^x(x-2) - x^2 + 6x - 10.255$, so gilt $f'(x) = 2e^x(x-2) + 2(e^x - x) + 6 \geq 0$ für alle $x \geq 2$. Zusammen mit $f(2.13) \geq 0.176$ folgt, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2.13$ gilt. Setzen wir $x = w$ in $f(x)$ ein und teilen anschließend durch $2y^3$, so ergibt sich, dass die Ungleichung

$$\frac{w-2}{y^2} - \frac{w^2 - 6w + 10.255}{2y^3} \geq 0$$

für alle $n \geq 4514 \geq \exp(\exp(2.13))$ erfüllt ist. Mit einem Computer rechnen wir nach, dass diese Ungleichung auch für alle $4203 \leq n \leq 4513$ erfüllt ist, d.h. $N_3 = 4203$. Daraus folgt

$$\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2} - \frac{w^2 - 6w + 10.255}{2y^3} \geq 0 \tag{2.35}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq \max\{\exp(\exp(1)), 4203\} = 4203$. Mit Hilfe eines Computers rechnen wir nach, dass diese Ungleichung auch für alle $43 \leq n \leq 4202$ erfüllt ist. Da $w^2 - 6w + 10.255 \geq 0$ für alle $n \geq 3$ gilt, folgt mit Lemma 2.5, dass die Ungleichung

$$\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2} - \frac{w^2 - 6w + 10.255}{2y^3} \leq 1$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 31$ erfüllt ist. Zusammen mit (2.35) folgt $N_2 = 43$. Desweiteren gilt, wie im ersten Schritt gesehen, $N_4 = 7978451$. Nach (2.19) folgt

$$b(n) \geq 10.296 + h(n), \tag{2.36}$$

wobei $h(n)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} h(n) = &-\frac{2w^3 - 21w^2 + 78w - 130.877}{3y} + \frac{w^4 - 14w^3 + 74.9042w^2 - 235.7312w + 274.1618}{2y^2} \\ &- \frac{2w^5 - 10w^4 + 35w^3 - 110w^2 + 201.275w - 1675.744}{5y^3} \\ &+ \frac{3w^4 - 44w^3 + 2262.12w^2 - 2509.78w + 36885.3438}{12y^4}. \end{aligned}$$

Wir werden nun zeigen, dass $h(n) \geq -0.023$ für alle $n \geq 25$ ist. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned} h_1(x) = 1.38e^{4x} &- 20(2x^3 - 21x^2 + 78x - 130.877)e^{3x} \\ &+ 30(x^4 - 14x^3 + 74.9042x^2 - 235.7312x + 274.1618)e^{2x} \\ &- 12(2x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 110x^2 + 201.275x - 1675.744)e^x \\ &+ 5(3x^4 - 44x^3 + 2262.12x^2 - 2509.78x + 36885.3438) \end{aligned}$$

und

$$Y_3(x) = 6229e^x - 24x^5 + 60x^3 + 60x^2 + 224.7x + 17693.628.$$

Dann gilt offenbar $Y_3(x) \geq 17693.628$ für alle $x \geq 0$ und wir erhalten mit Lemma 2.17 die Ungleichung

$$\begin{aligned} h_1'(x) &= Y_2(x)e^{2x} + (-24x^5 + 60x^3 + 60x^2 + 224.7x + 17693.628)e^x + 60x^3 - 660x^2 + 2175.3x - 2325.9 \\ &\geq Y_3(x)e^x + 60x^3 - 660x^2 + 22621.2x - 12548.9, \end{aligned}$$

d.h. $h_1'(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1.16$. In Kombination mit $h_1(1.16) \geq 311643.63$, folgt, dass $h_1(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1.16$ gilt. Setzen wir $x = w$ in $h_1(x)$ ein und teilen anschließend durch $60y^4$, so erhalten wir, dass die Ungleichung $h(n) \geq -0.023$ für alle $n \geq 25 \geq \exp(\exp(1.16))$ erfüllt ist. Zusammen mit (2.36) ergibt sich, dass

$$b(n) \geq 10.273$$

für alle natülichen Zahlen $n \geq 25$ gilt. Aus Theorem 2.8 folgt somit, dass die Ungleichung

$$p_n < n\left(y + w - 1 + \frac{w-2}{\log n} - \frac{w^2 - 6w + 10.273}{2y^2}\right)$$

für alle natülichen Zahlen $n \geq \max\{37350275, 43, 4203, 7978451, 477537210, 688383, 25\} = 477537210$ gilt. Für $8009824 \leq n \leq 477537209$ prüfen wir diese Ungleichung mit einem Computer nach. $\square$

Im folgenden Beispiel notieren wir, wie groß der Fehler der Approximation aus Korollar 2.11 und der n-ten Primzahl p_n für $n = 10^k$, wobei $n = 7, \ldots, 20$, ist und vergleichen dies mit dem Fehler der bisher schärfsten Approximation aus (2.8) und der n-ten Primzahl p_n.

Beispiel. Bezeichnen wir die rechte Seite der Ungleichung (2.8) mit $S(n)$ und die rechte Seite der Ungleichung aus Korollar 2.11 mit $T(n)$, so erhalten wir mit [57] die folgende Tabelle:

n	p_n	$\lceil S(n) - p_n \rceil$	$\lceil T(n) - p_n \rceil$
10^7	$1.79424673 \cdot 10^8$	$3.9602 \cdot 10^4$	$1.4170 \cdot 10^4$
10^8	$2.038074743 \cdot 10^9$	$2.99689 \cdot 10^5$	$1.11006 \cdot 10^5$
10^9	$2.2801763489 \cdot 10^{10}$	$2.522619 \cdot 10^6$	$1.039366 \cdot 10^6$
10^{10}	$2.52097800623 \cdot 10^{11}$	$2.0510784 \cdot 10^7$	$8.329634 \cdot 10^6$
10^{11}	$2.760727302517 \cdot 10^{12}$	$1.72884400 \cdot 10^8$	$6.9476053 \cdot 10^7$
10^{12}	$2.9996226887623 \cdot 10^{13}$	$1.467320920 \cdot 10^9$	$5.67013014 \cdot 10^8$
10^{13}	$3.23780508946331 \cdot 10^{14}$	$1.2732767836 \cdot 10^{10}$	$4.740841143 \cdot 10^9$
10^{14}	$3.475385758524527 \cdot 10^{15}$	$1.12026014682 \cdot 10^{11}$	$4.0006469680 \cdot 10^{10}$
10^{15}	$3.7124508045065437 \cdot 10^{16}$	$9.98861791991 \cdot 10^{11}$	$3.42135312855 \cdot 10^{11}$
10^{16}	$3.94906913903735329 \cdot 10^{17}$	$9.004342407404 \cdot 10^{12}$	$2.959229800111 \cdot 10^{12}$
10^{17}	$4.185296581467695669 \cdot 10^{18}$	$8.1924060077026 \cdot 10^{13}$	$2.5855580229579 \cdot 10^{13}$
10^{18}	$4.4211790234832169331 \cdot 10^{19}$	$7.51154982343786 \cdot 10^{14}$	$2.27885170895556 \cdot 10^{14}$
10^{19}	$4.65675465116607065549 \cdot 10^{20}$	$6.932757377044651 \cdot 10^{15}$	$2.024104632306122 \cdot 10^{15}$
10^{20}	$4.892055594575155744537 \cdot 10^{21}$	$6.4346895915006554 \cdot 10^{16}$	$1.8101441747096207 \cdot 10^{16}$

2.2 Eine neue untere Schranke für die n-te Primzahl

In diesem Abschnitt wollen wir ein Analogon von Theorem 2.8 für untere Schranken beweisen. Dazu sein im Folgenden

- $P_8(x) = 3x^2 - 6x + 5.2$
- $P_9(x) = x^3 - 6x^2 + 11.4x - 4.2$
- $P_{10}(x) = 2x^3 - 7.2x^2 + 8.4x - 4.41$
- $P_{11}(x) = x^3 - 4.2x^2 + 4.41x$
- $P_{12}(x) = 9.704x^2 - 12.704x + 11.904.$

Wir erhalten die folgende Proposition über eine obere Schranke von $1/\log p_n$.

Proposition 2.18. *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log p_n} \leq \frac{1}{\log n} - \frac{\ell(n)}{\log^2 n} + \frac{\ell^2(n) - \ell(n) + 1}{\log^2 n \log p_n} + \frac{P_8(\ell(n))}{2\log^3 n \log p_n} - \frac{P_9(\ell(n))}{2\log^4 n \log p_n} \\ - \frac{P_{10}(\ell(n))}{2\log^5 n \log p_n} - \frac{P_{11}(\ell(n))}{2\log^6 n \log p_n}.\end{aligned}$$

Zunächst beweisen wir das folgende Lemma, das für den Beweis von Proposition 2.18 hilfreich sein wird.

Lemma 2.19. *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 33$ gilt*

$$0 \leq \frac{\ell(n) - 1}{\log n} + \frac{\ell(n) - 2.1}{\log^2 n} \leq 1.$$

Beweis. Für alle $n \geq 3520 \geq \exp(\exp(2.1))$ folgt die Behauptung mit Hilfe von Lemma 2.5. Für $33 \leq n \leq 3519$ prüfen wir die Behauptung mit einem Computer nach. $\square$

Es folgt der Beweis von Proposition 2.18.

Beweis. Betrachten wir zunächst den Fall $n \geq 33$. Der Übersicht halber schreiben wir $w = \ell(n), y = \log n$ und $z = \log p_n$. Mit Hilfe von (2.9) erhalten wir die Ungleichung

$$-y^2 + (y-w)z \geq -w^2 + (y-w)\log\left(1 + \frac{w-1}{y} + \frac{w-2.1}{y^2}\right). \tag{2.37}$$

Mit der Ungleichung $\log(1+t) \geq t - t^2/2$, die für alle $t \geq 0$ erfüllt ist, erhalten wir zusammen mit (2.37) und Lemma 2.19 die Ungleichung

$$-y^2 + (y-w)z \geq -w^2 + (y-w)\sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2.1}{y^2}\right)^k.$$

Multiplizieren wir die rechte Seite aus und teilen anschließend beide Seiten durch $\log^2 n \log p_n$, so folgt die Behauptung. Für $2 \leq n \leq 32$ prüfen wir die Ungleichung mit einem Computer nach. □

Wir erhalten die beiden folgenden Abschwächungen von Proposition 2.18.

Korollar 2.20. *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt*

$$\frac{1}{\log p_n} \leq \frac{1}{\log n} - \frac{\ell(n)}{\log^2 n} + \frac{\ell^2(n) - \ell(n) + 1}{\log^2 n \log p_n} + \frac{P_8(\ell(n))}{2\log^3 n \log p_n} - \frac{P_9(\ell(n))}{2\log^4 n \log p_n} - \frac{P_{10}(\ell(n))}{2\log^5 n \log p_n}.$$

Beweis. Für $n \geq 3$ gilt $P_{11}(\ell(n)) = \ell(n)(\ell(n) - 2.1)^2 \geq 0$. Zusammen mit Proposition 2.18 folgt die Behauptung für alle $n \geq 3$. Für $n = 2$ überprüfen wir die Ungleichung mit einem Computer. □

Korollar 2.21. *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt*

$$\frac{1}{\log p_n} \leq \frac{1}{\log n} - \frac{\ell(n)}{\log^2 n} + \frac{\ell^2(n) - \ell(n) + 1}{\log^2 n \log p_n} + \frac{P_8(\ell(n))}{2\log^3 n \log p_n} - \frac{P_9(\ell(n))}{2\log^4 n \log p_n}.$$

Beweis. Es gilt $P_{10}(x) = 2(x-2.1)(x^2 - 1.5x + 1.05) \geq 0$ genau dann, wenn $x \geq 2.1$ gilt. Zusammen mit Korollar 2.20 folgt die Behauptung für alle $n \geq 3520 \geq \exp(\exp(2.1))$. Für $2 \leq n \leq 3519$ prüfen wir die Behauptung mit einem Computer. □

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist, die untere Schranke aus der Ungleichung (2.9) zu verschärfen. Dazu sei $B_0 \in \mathbb{R}$ eine Konstante mit $B_0 < 1$ sowie

$$F_0(n) = \log n - B_0 \log p_n.$$

Nach (2.1) folgt, dass $F_0(n) \geq 0$ für alle hinreichend große n gilt. Wir definieren

$$N_0 := M_0(B_0) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid F_0(n) \geq 0 \;\; \forall\, n \geq k\}.$$

Seien

- $Q_6(x) = (x^2 - x + 1)P_{12}(x) + (x^2 - x + 1)P_8(x) - 3.352P_9(x) - P_{10}(x) + 12.648P_8(x)$
- $Q_7(x) = 3.352P_{10}(x) + 12.648P_9(x)$
- $Q_8(x) = 2(x^2 - x + 1)P_9(x) - P_8(x)P_{12}(x)$

und seien $B_1, \ldots, B_{10} \in \mathbb{R}$ positive Konstanten mit

$$B_6 + B_7 + B_8 + B_9 + B_{10} \leq 3.352. \tag{2.38}$$

Dann definieren wir für $1 \leq i \leq 10$ die arithmetischen Funktionen $F_i : \mathbb{N}_{\geq 2} \to \mathbb{R}$ durch

- $F_1(n) = \dfrac{B_1\,\ell(n)}{\log^3 n \log p_n} - \dfrac{Q_6(\ell(n))}{2\log^5 n \log p_n} + \dfrac{Q_7(\ell(n))}{2\log^5 n \log^2 p_n} + \dfrac{Q_8(\ell(n))}{4\log^6 n \log p_n} + \dfrac{12.648P_9(\ell(n))}{2\log^4 n \log^3 p_n}$

- $F_2(n) = \dfrac{B_2\,\ell(n)}{\log^3 n \log p_n} + \dfrac{12.648\,\ell(n)}{\log^2 n \log^2 p_n} - \dfrac{71.704}{\log^4 p_n}$
- $F_3(n) = \dfrac{B_3\,\ell(n)}{\log^3 n \log p_n} - \dfrac{3.352 P_8(\ell(n))}{2\log^3 n \log^2 p_n} - \dfrac{12.648(\ell^2(n) - \ell(n) + 1)}{\log^3 n \log^2 p_n}$
- $F_4(n) = \dfrac{B_4\,\ell(n)}{\log^3 n \log p_n} + \dfrac{3.352 P_9(\ell(n))}{2\log^4 n \log^2 p_n} - \dfrac{12.648 P_8(\ell(n))}{2\log^4 n \log^2 p_n}$
- $F_5(n) = \dfrac{B_5\,\ell(n)}{\log^3 n \log p_n} + \dfrac{P_9(\ell(n)) - 3.352 P_8(\ell(n))}{2\log^4 n \log p_n} - \dfrac{12.648(\ell^2(n) - \ell(n) + 1)}{\log^4 n \log p_n} - \dfrac{(\ell^2(n) - \ell(n) + 1)^2}{\log^4 n \log p_n}$
- $F_6(n) = \dfrac{B_6\,\ell(n)}{\log^2 n \log p_n} + \dfrac{(12.648 - B_1 - B_2 - B_3 - B_4 - B_5)\,\ell(n)}{\log^3 n \log p_n} - \dfrac{3.352(\ell^2(n) - \ell(n) + 1)}{\log^2 n \log^2 p_n}$
- $F_7(n) = \dfrac{B_7\,\ell(n)}{\log^2 n \log p_n} - \dfrac{12.648 P_8(\ell(n))}{2\log^3 n \log^3 p_n}$
- $F_8(n) = \dfrac{B_8\,\ell(n)}{\log^2 n \log p_n} - \dfrac{12.648(\ell^2(n) - \ell(n) + 1)}{\log^2 n \log^3 p_n}$
- $F_9(n) = \dfrac{B_9\,\ell(n)}{\log^2 n \log p_n} - \dfrac{466.156096}{\log^5 p_n}$
- $F_{10}(n) = \dfrac{B_{10}\,\ell(n)}{\log^2 n \log p_n} - \dfrac{4726.6}{\log^6 p_n}$.

Für $1 \leq i \leq 10$ gilt $F_i(n) \geq 0$ für jeweils alle hinreichend große n. Wir definieren

$$M_i(B_i) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid F_i(n) \geq 0 \;\; \forall\, n \geq k\}$$

und setzen

$$N_1 := \max_{1 \leq i \leq 10} M_i(B_i).$$

Im Folgenden sei $a : \mathbb{N}_{\geq 2} \to \mathbb{R}$ eine arithmetische Funktion und $N_2, N_3, N_4 \in \mathbb{N}$ von a abhängige Konstanten, so dass

$$p_n > n\left(\log n + \ell(n) - 1 + \frac{\ell(n) - 2}{\log n} - \frac{\ell^2(n) - 6\,\ell(n) + a(n)}{2\log^2 n}\right) \tag{2.39}$$

für alle $n \geq N_2$ und

$$a(n) > -\ell^2(n) + 6\,\ell(n) \tag{2.40}$$

für alle $n \geq N_3$ gilt sowie

$$0 \leq \frac{\ell(n) - 1}{\log n} + \frac{\ell(n) - 2}{\log^2 n} - \frac{\ell^2(n) - 6\,\ell(n) + a(n)}{2\log^3 n} \leq 1 \tag{2.41}$$

für alle $n \geq N_4$ gilt. Wir definieren ferner die Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} G(x) = {} & \frac{2x^3 - 15x^2 + 42x - 14}{6e^{3x}} + \frac{3.352x}{e^{3x}} - \frac{12.648}{e^{3x}} - \frac{x^2 - x + 1}{e^{3x}} - \frac{x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 17}{4e^{4x}} \\ & + \frac{x^3 - x^2 + x}{e^{4x}} - \frac{P_{12}(x)}{2e^{4x}} + \frac{12.648x}{e^{4x}} - \frac{x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 15x + 6}{e^{5x}} + \frac{P_{12}(x)x}{2e^{5x}} \\ & - \frac{9x^4 - 56x^3 + 129x^2 - 132x + 52}{6e^{6x}} - \frac{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8}{e^{7x}}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$b(n) = 11.704 - 2\,G(\ell(n))\log^2 n + \frac{a(n)}{\log n} - \frac{2B_0(3.352 - (B_6 + B_7 + B_8 + B_9 + B_{10}))\,\ell(n)}{\log n}, \tag{2.42}$$

so erhalten wir das folgende Theorem.

Theorem 2.22. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \max\{N_0, N_1, N_2, N_3, N_4, 3520\}$ gilt*

$$p_n > n\left(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 6\log\log n + b(n)}{2\log^2 n}\right).$$

Bevor wir mit dem Beweis von Theorem 2.22 beginnen, zeigen wir zunächst das folgende Lemma.

Lemma 2.23. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 6$ gilt*

$$\frac{12.648P_9(\ell(n))}{2\log^6 n \log p_n} + \frac{3.352P_{10}(\ell(n))}{2\log^6 n\log p_n} + \frac{P_{11}(\ell(n))}{2\log^6 n \log p_n} \geq 0.$$

Beweis. Setzen wir $f(x) = 12.648P_9(x) + 3.352P_{10}(x) + P_{11}(x)$, so folgt analog zum Beweis von Lemma 1.14, dass $f(\ell(n)) \geq 0$ für alle $n \geq 588 \geq \exp(\exp(1.85))$. Für alle $6 \leq n \leq 587$ prüfen wir die behauptete Ungleichung mit einem Computer nach. □

Lemma 2.24. *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 27$ gilt*

$$\frac{P_9(\ell(n))P_{12}(\ell(n))}{4\log^7 n\log p_n} + \frac{12.648P_{10}(\ell(n))}{2\log^7 n \log p_n} + \frac{3.352P_{11}(\ell(n))}{2\log^7 n\log p_n} + \frac{3.352P_{11}(\ell(n))}{2\log^6 n\log^2 p_n} \geq \frac{(\ell(n)-2)^4}{4\log^8 n}.$$

Beweis. Da $x \geq 8\log^3 x$ für alle $x \geq 4913$ gilt, folgt zusammen mit (2.4), dass die Ungleichung

$$n^4 \geq n^3(2\log n)^3 \geq n^3(\log n + \log\log n)^3 \geq p_n^3$$

und somit

$$\log n \geq 0.75\log p_n \tag{2.43}$$

für alle $n \geq 4913$ gilt. Mit einem Computer rechnen wir nach, dass die Ungleichung (2.43) auch für alle $255 \leq n \leq 4913$ erfüllt ist. Wir setzen

$$f(x) = P_9(x)P_{12}(x) + 2\cdot 12.648P_{10}(x) + 2\cdot 3.352P_{11}(x) + 0.75\cdot 2\cdot 3.352P_{11}(x).$$

Analog zum Beweis von Lemma 1.14 erhalten wir, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1.5$ ist. Setzen wir $g(x) = 0.75f(x) - (x-2)^4$, so folgt, analog zum Beweis von Lemma 1.14, dass $g(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1.5$ ist. Zusammen mit (2.43) erhalten wir

$$\frac{f(\ell(n))}{4\log^7 n\log p_n} - \frac{(\ell(n)-2)^4}{4\log^8 n} \geq \frac{0.75f(\ell(n))}{4\log^8 n} - \frac{(\ell(n)-2)^4}{4\log^8 n} = \frac{g(\ell(n))}{4\log^8 n} \geq 0$$

für alle $n \geq 255$. Da $P_{11}(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$ ist, erhalten wir mit (2.43), dass die Behauptung für alle $n \geq 255$ erfüllt ist. Für $27 \leq n \leq 254$ prüfen wir die Behauptung mit einem Computer. □

Es folgt der Beweis von Theorem 2.22.

Beweis. Sei $n \geq \max\{N_0, N_1, N_2, N_3, N_4, 3520\}$. Der Einfachheit halber schreiben wir $w = \ell(n), y = \log n, z = \log p_n$ und $d(n) := 11.704 - b(n)$. Analog zum Beweis von (2.22) ergibt sich mit Hilfe von Proposition 2.18 die Ungleichung

$$-\frac{1}{z^2} \geq -\frac{1}{y^2} + \frac{w}{y^3} + \frac{w}{y^2z} - \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{w^2-w+1}{y^2z} + \frac{P_8(w)}{2y^3z} - \frac{P_9(w)}{2y^4z} - \frac{P_{10}(w)}{2y^5z} - \frac{P_{11}(w)}{2y^6z}\right). \tag{2.44}$$

Da $P_{11}(x) = x(x-2.1)^2 \geq 0$ für alle $x \geq 0$ und $P_{10}(x) = 2(x-2.1)(x^2-1.5x+1.05) \geq 0$ genau dann gilt, wenn $x \geq 2.1$ ist, folgt $P_{10}(w) \geq 0$, da $n \geq 3520 \geq \exp(\exp(2.1))$ ist, und somit die Ungleichung

$$-\frac{1}{z^2} \geq -\frac{1}{y^2} + \frac{w}{y^3} + \frac{w}{y^2z} - \frac{w^2-w+1}{y^3z} - \frac{w^2-w+1}{y^2z^2} - \frac{P_8(w)}{2y^4z} - \frac{P_8(w)}{2y^3z^2} + \frac{P_9(w)}{2y^5z} + \frac{P_9(w)}{2y^4z^2}.$$

Daraus folgt

$$-\frac{1}{z^3} \geq -\frac{1}{y^2 z} + \frac{w}{y^3 z} + \frac{w}{y^2 z^2} - \frac{w^2 - w + 1}{y^3 z^2} - \frac{w^2 - w + 1}{y^2 z^3} - \frac{P_8(w)}{2y^4 z^2} - \frac{P_8(w)}{2y^3 z^3} + \frac{P_9(w)}{2y^5 z^2} + \frac{P_9(w)}{2y^4 z^3}. \tag{2.45}$$

Indem wir die Ungleichung aus Korollar 2.20 mit $-1/y^2 \geq 0$ multiplizieren, erhalten wir

$$-\frac{1}{y^2 z} \geq -\frac{1}{y^3} + \frac{w}{y^4} - \frac{w^2 - w + 1}{y^4 z} - \frac{P_8(w)}{2y^5 z} + \frac{P_9(w)}{2y^6 z} + \frac{P_{10}(w)}{2y^7 z}$$

und in Kombination mit (2.45) erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z^3} \geq & -\frac{1}{y^3} + \frac{w}{y^4} + \frac{w}{y^3 z} + \frac{w}{y^2 z^2} - \frac{w^2 - w + 1}{y^4 z} - \frac{w^2 - w + 1}{y^3 z^2} - \frac{w^2 - w + 1}{y^2 z^3} - \frac{P_8(w)}{2y^5 z} - \frac{P_8(w)}{2y^4 z^2} \\ & - \frac{P_8(w)}{2y^3 z^3} + \frac{P_9(w)}{2y^6 z} + \frac{P_9(w)}{2y^5 z^2} + \frac{P_9(w)}{2y^4 z^3} + \frac{P_{10}(w)}{2y^7 z}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Nach Definition von $b(n)$ gilt

$$G(w) + \frac{b(n) - 11.704}{2y^2} - \frac{a(n)}{2y^3} + \frac{B_0(3.352 - (B_6 + B_7 + B_8 + B_9 + B_{10}))w}{y^3} = 0.$$

Da $F_0(n) \geq 0$ gilt, erhalten wir zusammen mit (2.38) und der Definition von $d(n)$ die Ungleichung

$$\frac{d(n)}{2y^2} \leq G(w) - \frac{a(n)}{2y^3} + \frac{(3.352 - (B_6 + B_7 + B_8 + B_9 + B_{10}))w}{y^2 z}.$$

Indem wir die rechte Seite dieser Ungleichung mit $\sum_{i=1}^{10} F_i(n) \geq 0$ addieren, erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{d(n)}{2y^2} \leq G(w) & - \frac{a(n)}{2y^3} + \frac{3.352w}{y^2 z} - \frac{Q_6(w)}{2y^5 z} + \frac{Q_7(w)}{2y^5 z^2} + \frac{Q_8(w)}{4y^6 z} + \frac{12.648 P_9(w)}{2y^4 z^3} + \frac{12.648w}{y^2 z^2} - \frac{71.704}{z^4} \\ & - \frac{3.352 P_8(w)}{2y^3 z^2} - \frac{12.648(w^2 - w + 1)}{y^3 z^2} + \frac{3.352 P_9(w)}{2y^4 z^2} - \frac{12.648 P_8(w)}{2y^4 z^2} + \frac{P_9(w)}{2y^4 z} - \frac{3.352 P_8(w)}{2y^4 z} \\ & - \frac{12.648(w^2 - w + 1)}{y^4 z} - \frac{(w^2 - w + 1)^2}{y^4 z} + \frac{12.648w}{y^3 z} - \frac{3.352(w^2 - w + 1)}{y^2 z^2} - \frac{12.648 P_8(w)}{2y^3 z^3} \\ & - \frac{12.648(w^2 - w + 1)}{y^2 z^3} - \frac{466.156096}{z^5} - \frac{4726.6}{z^6}. \end{aligned}$$

Zusammen mit Lemma 2.23 und Lemma 2.24 ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{d(n)}{2y^2} \leq G(w) & - \frac{a(n)}{2y^3} + \frac{3.352w}{y^2 z} + \frac{12.648 P_9(w)}{2y^6 z} + \frac{3.352 P_{10}(w)}{2y^6 z} + \frac{P_{11}(w)}{2y^6 z} - \frac{Q_6(w)}{2y^5 z} + \frac{Q_7(w)}{2y^5 z^2} + \frac{Q_8(w)}{4y^6 z} \\ & + \frac{12.648 P_9(w)}{2y^4 z^3} + \frac{12.648w}{y^2 z^2} - \frac{71.704}{z^4} - \frac{3.352 P_8(w)}{2y^3 z^2} - \frac{12.648(w^2 - w + 1)}{y^3 z^2} + \frac{3.352 P_9(w)}{2y^4 z^2} \\ & - \frac{12.648 P_8(w)}{2y^4 z^2} + \frac{P_9(w)}{2y^4 z} - \frac{3.352 P_8(w)}{2y^4 z} - \frac{12.648(w^2 - w + 1)}{y^4 z} - \frac{(w^2 - w + 1)^2}{y^4 z} + \frac{12.648w}{y^3 z} \\ & - \frac{3.352(w^2 - w + 1)}{y^2 z^2} - \frac{12.648 P_8(w)}{2y^3 z^3} - \frac{12.648(w^2 - w + 1)}{y^2 z^3} - \frac{466.156096}{z^5} - \frac{4726.6}{z^6} \\ & + \frac{P_9(w) P_{12}(w)}{4y^7 z} + \frac{12.648 P_{10}(w)}{2y^7 z} + \frac{3.352 P_{11}(w)}{2y^7 z} + \frac{3.352 P_{11}(w)}{2y^6 z^2} - \frac{(w-2)^4}{4y^8}. \end{aligned}$$

Setzen wir die Definitionen von $Q_6(x), Q_7(x), Q_8(x)$ und $G(x)$ ein, so folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\frac{d(n)}{2y^2} \leq \frac{2w^3-15w^2+42w-14}{6y^3} &+ \frac{3.352w}{y^3} - \frac{12.648}{y^3} - \frac{w^2-w+1}{y^3} - \frac{w^4-8w^3+24w^2-32w+17}{4y^4} \\
&+ \frac{w^3-w^2+w}{y^4} - \frac{P_{12}(w)}{2y^4} + \frac{12.648w}{y^4} - \frac{w^4-6w^3+14w^2-15w+6}{y^5} + \frac{P_{12}(w)w}{2y^5} \\
&- \frac{9w^4-56w^3+129w^2-132w+52}{6y^6} - \frac{w^4-7w^3+18w^2-20w+8}{y^7} - \frac{a(n)}{2y^3} + \frac{3.352w}{y^2z} \\
&+ \frac{12.648P_9(w)}{2y^6z} + \frac{3.352P_{10}(w)}{2y^6z} + \frac{P_{11}(w)}{2y^6z} - \frac{(w^2-w+1)P_{12}(w)}{2y^5z} - \frac{(w^2-w+1)P_8(w)}{2y^5z} \\
&+ \frac{3.352P_9(w)}{2y^5z} + \frac{P_{10}(w)}{2y^5z} - \frac{12.648P_8(w)}{2y^5z} + \frac{3.352P_{10}(w)}{2y^5z^2} + \frac{12.648P_9(w)}{2y^5z^2} + \frac{12.648P_9(w)}{2y^4z^3} \\
&+ \frac{(w^2-w+1)P_9(w)}{2y^6z} - \frac{P_8(w)P_{12}(w)}{4y^6z} + \frac{12.648w}{y^2z^2} - \frac{71.704}{z^4} - \frac{3.352P_8(w)}{2y^3z^2} \\
&- \frac{12.648(w^2-w+1)}{y^3z^2} + \frac{3.352P_9(w)}{2y^4z^2} - \frac{12.648P_8(w)}{2y^4z^2} + \frac{P_9(w)}{2y^4z} - \frac{3.352P_8(w)}{2y^4z} \\
&- \frac{12.648(w^2-w+1)}{y^4z} - \frac{(w^2-w+1)^2}{y^4z} + \frac{12.648w}{y^3z} - \frac{3.352(w^2-w+1)}{y^2z^2} - \frac{12.648P_8(w)}{2y^3z^3} \\
&- \frac{12.648(w^2-w+1)}{y^2z^3} - \frac{466.156096}{z^5} - \frac{4726.6}{z^6} + \frac{P_9(w)P_{12}(w)}{4y^7z} + \frac{12.648P_{10}(w)}{2y^7z} \\
&+ \frac{3.352P_{11}(w)}{2y^7z} + \frac{3.352P_{11}(w)}{2y^6z^2} - \frac{(w-2)^4}{4y^8}. \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

Multiplizieren wir die Ungleichung (2.46) mit 12.648 und wenden die so erhaltene Ungleichung auf (2.47) an, so folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d(n)}{2y^2} \leq \frac{2w^3-15w^2+42w-14}{6y^3} &+ \frac{3.352w}{y^3} - \frac{12.648}{z^3} - \frac{w^2-w+1}{y^3} - \frac{w^4-8w^3+24w^2-32w+17}{4y^4} \\
&+ \frac{w^3-w^2+w}{y^4} - \frac{P_{12}(w)}{2y^4} - \frac{w^4-6w^3+14w^2-15w+6}{y^5} + \frac{P_{12}(w)w}{2y^5} \\
&- \frac{9w^4-56w^3+129w^2-132w+52}{6y^6} - \frac{w^4-7w^3+18w^2-20w+8}{y^7} - \frac{a(n)}{2y^3} + \frac{3.352w}{y^2z} \\
&+ \frac{3.352P_{10}(w)}{2y^6z} + \frac{P_{11}(w)}{2y^6z} - \frac{(w^2-w+1)P_{12}(w)}{2y^5z} - \frac{(w^2-w+1)P_8(w)}{2y^5z} \\
&+ \frac{3.352P_9(w)}{2y^5z} + \frac{P_{10}(w)}{2y^5z} + \frac{3.352P_{10}(w)}{2y^5z^2} + \frac{(w^2-w+1)P_9(w)}{2y^6z} - \frac{P_8(w)P_{12}(w)}{4y^6z} \\
&- \frac{71.704}{z^4} - \frac{3.352P_8(w)}{2y^3z^2} + \frac{3.352P_9(w)}{2y^4z^2} + \frac{P_9(w)}{2y^4z} - \frac{3.352P_8(w)}{2y^4z} - \frac{(w^2-w+1)^2}{y^4z} \\
&- \frac{3.352(w^2-w+1)}{y^2z^2} - \frac{466.156096}{z^5} - \frac{4726.6}{z^6} + \frac{P_9(w)P_{12}(w)}{4y^7z} + \frac{3.352P_{11}(w)}{2y^7z} \\
&+ \frac{3.352P_{11}(w)}{2y^6z^2} - \frac{(w-2)^4}{4y^8}. \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-2x+1}{2y^2} - \frac{x^3-6x^2+12x-7}{3y^3} &- \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{y}+\frac{x-2}{y^2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{y}+\frac{x-2}{y^2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x-1}{y}+\frac{x-2}{y^2}\right)^4 \\
&= -\frac{x^4-8x^3+24x^2-32x+17}{4y^4} - \frac{x^4-6x^3+14x^2-15x+6}{y^5} \\
&\quad - \frac{9x^4-56x^3+129x^2-132x+52}{6y^6} - \frac{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}{y^7} - \frac{(x-2)^4}{4y^8}.
\end{aligned}$$

Setzen wir in diese Gleichheit $x = w$ ein, so erhalten wir zusammen mit (2.48) die Ungleichung

$$\begin{aligned}\frac{d(n)}{2y^2} \leq{} & \frac{2w^3 - 15w^2 + 42w - 14}{6y^3} + \frac{3.352w}{y^3} - \frac{12.648}{z^3} - \frac{w^2 - w + 1}{y^3} + \frac{w^2 - 2w + 1}{2y^2} - \frac{w^3 - 6w^2 + 12w - 7}{3y^3} \\ & - \frac{1}{2}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^4 + \frac{w^3 - w^2 + w}{y^4} \\ & - \frac{P_{12}(w)}{2y^4} + \frac{P_{12}(w)w}{2y^5} - \frac{a(n)}{2y^3} + \frac{3.352w}{y^2 z} + \frac{3.352P_{10}(w)}{2y^6 z} + \frac{P_{11}(w)}{2y^6 z} - \frac{(w^2 - w + 1)P_{12}(w)}{2y^5 z} \\ & - \frac{(w^2 - w + 1)P_8(w)}{2y^5 z} + \frac{3.352P_9(w)}{2y^5 z} + \frac{P_{10}(w)}{2y^5 z} + \frac{3.352P_{10}(w)}{2y^5 z^2} + \frac{(w^2 - w + 1)P_9(w)}{2y^6 z} \\ & - \frac{P_8(w)P_{12}(w)}{4y^6 z} - \frac{71.704}{z^4} - \frac{3.352P_8(w)}{2y^3 z^2} + \frac{3.352P_9(w)}{2y^4 z^2} + \frac{P_9(w)}{2y^4 z} - \frac{3.352P_8(w)}{2y^4 z} \\ & - \frac{(w^2 - w + 1)^2}{y^4 z} - \frac{3.352(w^2 - w + 1)}{y^2 z^2} - \frac{466.156096}{z^5} - \frac{4726.6}{z^6} + \frac{P_9(w)P_{12}(w)}{4y^7 z} \\ & + \frac{3.352P_{11}(w)}{2y^7 z} + \frac{3.352P_{11}(w)}{2y^6 z^2}. \qquad (2.49)\end{aligned}$$

Indem wir die Ungleichung aus Korollar 2.21 mit $-P_{12}(w)/(2y^3) < 0$ multipilzieren, ergibt sich mit der so erhaltenden Ungleichung und (2.49) die Ungleichung

$$\begin{aligned}\frac{d(n)}{2y^2} \leq{} & \frac{2w^3 - 15w^2 + 42w - 14}{6y^3} + \frac{3.352w}{y^3} - \frac{12.648}{z^3} - \frac{w^2 - w + 1}{y^3} + \frac{w^2 - 2w + 1}{2y^2} - \frac{w^3 - 6w^2 + 12w - 7}{3y^3} \\ & - \frac{1}{2}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^4 + \frac{w^3 - w^2 + w}{y^4} \\ & - \frac{P_{12}(w)}{2y^3 z} - \frac{a(n)}{2y^3} + \frac{3.352w}{y^2 z} + \frac{3.352P_{10}(w)}{2y^6 z} + \frac{P_{11}(w)}{2y^6 z} - \frac{(w^2 - w + 1)P_8(w)}{2y^5 z} + \frac{3.352P_9(w)}{2y^5 z} \\ & + \frac{P_{10}(w)}{2y^5 z} + \frac{3.352P_{10}(w)}{2y^5 z^2} + \frac{(w^2 - w + 1)P_9(w)}{2y^6 z} - \frac{71.704}{z^4} - \frac{3.352P_8(w)}{2y^3 z^2} + \frac{3.352P_9(w)}{2y^4 z^2} \\ & + \frac{P_9(w)}{2y^4 z} - \frac{3.352P_8(w)}{2y^4 z} - \frac{(w^2 - w + 1)^2}{y^4 z} - \frac{3.352(w^2 - w + 1)}{y^2 z^2} - \frac{466.156096}{z^5} - \frac{4726.6}{z^6} \\ & + \frac{3.352P_{11}(w)}{2y^7 z} + \frac{3.352P_{11}(w)}{2y^6 z^2}. \qquad (2.50)\end{aligned}$$

Multiplizieren wir nun die Ungleichung aus Korollar 2.21 mit $-(w^2 - w + 1)/y^2 < 0$, so folgt

$$\begin{aligned}-\frac{w^2 - w + 1}{y^2 z} \geq{} & -\frac{w^2 - w + 1}{y^3} + \frac{w^3 - w^2 + w}{y^4} - \frac{(w^2 - w + 1)^2}{y^4 z} - \frac{(w^2 - w + 1)P_8(w)}{2y^5 z} \\ & + \frac{(w^2 - w + 1)P_9(w)}{2y^6 z}.\end{aligned}$$

In Kombination mit (2.50) erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned}\frac{d(n)}{2y^2} \leq{} & \frac{2w^3 - 15w^2 + 42w - 14}{6y^3} + \frac{3.352w}{y^3} - \frac{12.648}{z^3} - \frac{w^2 - w + 1}{y^2 z} + \frac{w^2 - 2w + 1}{2y^2} - \frac{w^3 - 6w^2 + 12w - 7}{3y^3} \\ & - \frac{1}{2}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^4 - \frac{P_{12}(w)}{2y^3 z} - \frac{a(n)}{2y^3} \\ & + \frac{3.352w}{y^2 z} + \frac{3.352P_{10}(w)}{2y^6 z} + \frac{P_{11}(w)}{2y^6 z} + \frac{3.352P_9(w)}{2y^5 z} + \frac{P_{10}(w)}{2y^5 z} + \frac{3.352P_{10}(w)}{2y^5 z^2} - \frac{71.704}{z^4} \\ & - \frac{3.352P_8(w)}{2y^3 z^2} + \frac{3.352P_9(w)}{2y^4 z^2} + \frac{P_9(w)}{2y^4 z} - \frac{3.352P_8(w)}{2y^4 z} - \frac{3.352(w^2 - w + 1)}{y^2 z^2} - \frac{466.156096}{z^5} \\ & - \frac{4726.6}{z^6} + \frac{3.352P_{11}(w)}{2y^7 z} + \frac{3.352P_{11}(w)}{2y^6 z^2}. \qquad (2.51)\end{aligned}$$

Es gilt $P_{12}(x) = P_8(x) + 2 \cdot 3.352(x^2 - x + 1)$. Zusammen mit (2.51) und der Definition von $d(n)$ folgt somit

$$\begin{aligned}\frac{5-b(n)}{2y^2} \leq & -\frac{3.352}{y^2} + \frac{2w^3-15w^2+42w-14}{6y^3} + \frac{3.352w}{y^3} - \frac{12.648}{z^3} - \frac{w^2-w+1}{y^2z} + \frac{w^2-2w+1}{2y^2} \\ & - \frac{w^3-6w^2+12w-7}{3y^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^3 \\ & - \frac{1}{4}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^4 - \frac{P_8(w)}{2y^3z} - \frac{3.352(w^2-w+1)}{y^3z} - \frac{a(n)}{2y^3} + \frac{3.352w}{y^2z} + \frac{3.352P_{10}(w)}{2y^6z} \\ & + \frac{P_{11}(w)}{2y^6z} + \frac{3.352P_9(w)}{2y^5z} + \frac{P_{10}(w)}{2y^5z} + \frac{3.352P_{10}(w)}{2y^5z^2} - \frac{71.704}{z^4} - \frac{3.352P_8(w)}{2y^3z^2} + \frac{3.352P_9(w)}{2y^4z^2} \\ & + \frac{P_9(w)}{2y^4z} - \frac{3.352P_8(w)}{2y^4z} - \frac{3.352(w^2-w+1)}{y^2z^2} - \frac{466.156096}{z^5} - \frac{4726.6}{z^6} + \frac{3.352P_{11}(w)}{2y^7z} \\ & + \frac{3.352P_{11}(w)}{2y^6z^2}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Indem wir die Ungleichung (2.44) mit 3.352 multiplizieren und die so erhaltene Ungleichung auf (2.52) anwenden, erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned}\frac{5-b(n)}{2y^2} \leq & -\frac{3.352}{z^2} + \frac{2w^3-15w^2+42w-14}{6y^3} - \frac{12.648}{z^3} - \frac{w^2-w+1}{y^2z} + \frac{w^2-2w+1}{2y^2} \\ & - \frac{w^3-6w^2+12w-7}{3y^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^3 \\ & - \frac{1}{4}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^4 - \frac{P_8(w)}{2y^3z} - \frac{a(n)}{2y^3} + \frac{P_{11}(w)}{2y^6z} + \frac{P_{10}(w)}{2y^5z} - \frac{71.704}{z^4} \\ & + \frac{P_9(w)}{2y^4z} - \frac{466.156096}{z^5} - \frac{4726.6}{z^6}. \end{aligned}$$

Zusammen mit Proposition 2.18 ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned}\frac{5-b(n)}{2y^2} \leq & -\frac{3.352}{z^2} + \frac{2w^3-15w^2+42w-14}{6y^3} - \frac{12.648}{z^3} - \frac{1}{z} + \frac{1}{y} - \frac{w}{y^2} + \frac{w^2-2w+1}{2y^2} \\ & - \frac{w^3-6w^2+12w-7}{3y^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^3 \\ & - \frac{1}{4}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^4 - \frac{a(n)}{2y^3} - \frac{71.704}{z^4} - \frac{466.156096}{z^5} - \frac{4726.6}{z^6}. \end{aligned}$$

Diese ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}-\frac{1}{y} \leq & \frac{w^2-6w+b(n)}{2y^2} + \frac{w-2}{y^2} - \frac{w^2-6w+a(n)}{2y^3} - \frac{1}{z} - \frac{3.352}{z^2} - \frac{12.648}{z^3} - \frac{71.704}{z^4} - \frac{466.156096}{z^5} \\ & - \frac{4726.6}{z^6} - \frac{1}{2}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^4. \end{aligned}$$

Addieren wir beide Seiten dieser Ungleichung mit $(w-1)/y$, so folgt

$$\begin{aligned}\frac{w-2}{y} \leq & \frac{w-1}{y} + \frac{w^2-6w+b(n)}{2y^2} + \frac{w-2}{y^2} - \frac{w^2-6w+a(n)}{2y^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^2 \\ & + \frac{1}{3}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^4 - \frac{1}{z} - \frac{3.352}{z^2} - \frac{12.648}{z^3} - \frac{71.704}{z^4} \\ & - \frac{466.156096}{z^5} - \frac{4726.6}{z^6}. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Da $g_1(x) = -x^2/2+x^3/3$ und $g_2(x) = -x^4/4$ auf dem Intervall $[0,1]$ monoton fallend sind, folgt zusammen mit (2.40) und (2.41) die Ungleichung

$$\begin{aligned}\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2} - \frac{w^2-6w+a(n)}{2y^3} + \sum_{k=2}^{4} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^k \\ \leq \sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2} - \frac{w^2-6w+a(n)}{2y^3}\right)^k.\end{aligned} \tag{2.54}$$

In Kombination mit der Ungleichung

$$\log(1+t) \geq \sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^{k+1}t^k}{k},$$

die für alle $t \geq 0$ erfüllt ist, folgt zusammen mit (2.41) und (2.54) die Ungleichung

$$\begin{aligned}\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2} - \frac{w^2-6w+a(n)}{2y^3} + \sum_{k=2}^{4} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2}\right)^k \\ \leq \log\left(1 + \frac{w-1}{\log n} + \frac{w-2}{\log^2 n} - \frac{w^2-6w+a(n)}{2\log^3 n}\right).\end{aligned}$$

Zusammen mit (2.53) erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{w-2}{y} - \frac{w^2-6w+b(n)}{2y^2} \leq \log\left(1 + \frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2} - \frac{w^2-6w+a(n)}{2y^3}\right) - \frac{1}{z} - \frac{3.352}{z^2} - \frac{12.648}{z^3} \\ - \frac{71.704}{z^4} - \frac{466.156096}{z^5} - \frac{4726.6}{z^6}.\end{aligned}$$

Addieren wir beide Seiten mit $y+w-1$ und benutzen die vorausgesetzte Ungleichung (2.39), so folgt

$$z - 1 - \frac{1}{z} - \frac{3.352}{z^2} - \frac{12.648}{z^3} - \frac{71.704}{z^4} - \frac{466.156096}{z^5} - \frac{4726.6}{z^6} \geq y + w - 1 + \frac{w-2}{\log n} - \frac{w^2-6w+b(n)}{y}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit n, so folgt mit Hilfe von Proposition 1.15 die Behauptung. □

Als nächstes wollen wir mit Hilfe von Theorem 2.22 die folgende explizite untere Schranke für die n-te Primzahl p_n beweisen, mit der wir insbesondere die Unleichung (2.9) verschärfen.

Korollar 2.25. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt*

$$p_n > n\left(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 6\log\log n + 11.847}{2\log^2 n}\right).$$

Die folgende Tabelle liefert für $1 \leq i \leq 10$ bei gegebenen Konstanten B_i explizit die in diesem Abschnitt definierten Konstanten $M_i(B_i)$, die für den Beweis von Korollar 2.25 benötigt werden.

i	1	2	3	4	5
B_i	0.2901	4.5868	1.616	0.0605	2.652
$M_i(B_i)$	525022390	527049593	518359123	521742955	517219090
i	6	7	8	9	10
B_i	0.166	0.0028	0.055	0.2171	0.095
$M_i(B_i)$	498928429	485761116	516894988	526864370	525611331

Die jeweiligen Beweise, dass $F_i(n) \geq 0$, wobei $1 \leq i \leq 10$, für alle $n \geq M_i(B_i)$ ist, sind im Appendix am Ende dieses Kapitels aufgeführt. Es folgt der Beweis von Korollar 2.25. Dieser besteht aus drei Schritten.

Beweis. Der Übersicht halber schreiben wir $w = \ell(n), y = \log n$ und $z = \log p_n$. Wir setzen $B_0 = 0.866$ und erhalten

$$N_0 = 477537210 \tag{2.55}$$

nach Lemma 2.12. Mit der obigen Tabelle ergibt sich

$$3.352 - (B_6 + B_7 + B_8 + B_9 + B_{10}) = 2.8161 \tag{2.56}$$

und

$$N_1 = \max_{1 \leq i \leq 10} M_i(B_i) = 527049593. \tag{2.57}$$

Der Beweis verläuft in drei Schritten ab. Im ersten Schritt setzen wir $a(n) = 0.2y - w^2 + 6w$. Dann gilt $N_2 = 3$ nach (2.9) sowie $N_4 = 33$ nach Lemma 2.19. Da außerdem $N_3 = 2$ gilt, erhalten wir zusammen mit Theorem 2.22, dass die Ungleichung

$$p_n > n\left(y + w - 1 + \frac{w-2}{y} - \frac{w^2 - 6w + b(n)}{2y^2}\right) \tag{2.58}$$

für alle $n \geq \max\{477537210, 527049593, 3, 2, 33, 3520\} = 527049593$ erfüllt ist, wobei

$$\begin{aligned} b(n) = 11.904 &- \frac{2w^3 - 18w^2 + 64.7444556w - 95.888}{3y} + \frac{w^4 - 12w^3 + 47.408w^2 - 112w + 40.808}{2y^2} \\ &+ \frac{2w^4 - 21.704w^3 + 40.704w^2 - 41.904w + 12}{y^3} + \frac{9w^4 - 56w^3 + 129w^2 - 132w + 52}{3y^4} \\ &+ \frac{2(w^4 - 7w^3 + 18w^2 - 20w + 8)}{y^5} \end{aligned}$$

nach (2.42) und (2.56) ist. Wir zeigen nun, dass $b(n) \leq 11.905$ für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8$ gilt. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned} \alpha(x) = 0.006e^{5x} &+ 2(2x^3 - 18x^2 + 64.7444556x - 95.888)e^{4x} \\ &- 3(x^4 - 12x^3 + 47.408x^2 - 112x + 40.808)e^{3x} \\ &- 6(2x^4 - 21.704x^3 + 40.704x^2 - 41.904x + 12)e^{2x} \\ &- (18x^4 - 112x^3 + 258x^2 - 264x + 104)e^x \\ &- 12x^4 + 84x^3 - 216x^2 + 240x - 96. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\alpha(w) = 6(11.905 - b(n))y^5. \tag{2.59}$$

Definieren wir

$$q_1(x) = 3.75e^x + 1024x^3 - 6144x^2 + 17021.1612672x - 22473.4947328,$$

so gilt, analog zum Beweis von Lemma 1.14, dass $q_1'(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2$ gilt. In Kombination mit $q_1(2.94) \geq 555.45$ ergibt sich, dass $q_1(x) \geq 555$ für alle $x \geq 2.94$ gilt. Setzen wir nun

$$r_1(x) = q_1(x)e^x - 243x^4 + 1620x^3 - 1800.144x^2 + 7295.616x + 13531.464,$$

so gilt

$$r_1(x) \geq 555e^x - 243x^4 + 1620x^3 - 1800.144x^2 + 7295.616x + 13531.464$$

für alle $x \geq 2.94$. Bezeichnen wir die rechte Seite dieser Ungleichung mit $s_1(x)$, so erhalten wir, analog zum Beweis von Lemma 1.14, dass $s_1(x) \geq 51959$ und somit $r_1(x) \geq 51959$ für alle $x \geq 2.94$ gilt. Definieren wir

$$t_1(x) = r_1(x)e^x - 192x^4 + 547.584x^3 + 5137.92x^2 + 4840.704x + 1133.568,$$

so folgt

$$t_1(x) \geq 51959e^x - 192x^4 + 547.584x^3 + 5137.92x^2 + 4840.704x + 1133$$

für alle $x \geq 2.94$ und wir erhalten zusammen mit $e^x \geq x^4/(4!)$, dass die Ungleichung

$$t_1(x) \geq 1972x^4 + 547.584x^3 + 5137.92x^2 + 4840.704x + 1133$$

und somit $t_1(x) \geq 1133$ für alle $x \geq 2.94$ erfüllt ist. Setzen wir nun

$$u_1(x) = t_1(x)e^x - 18x^4 - 176x^3 - 210x^2 + 504x + 112,$$

so ergibt sich

$$u_1(x) \geq 1133 \sum_{k=0}^{4} \frac{x^k}{k!} - 18x^4 - 176x^3 - 210x^2 + 504x + 112 \geq 29x^4 + 12x^3 + 356x^2 + 1637x + 1245$$

für alle $x \geq 2.94$. Somit erhalten wir

$$\alpha^{(4)}(x) = u_1(x)e^x - 288 \geq 0$$

für alle $x \geq 2.94$. Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $\alpha(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$ gilt. Zusammen mit (2.59) folgt, dass $b(n) \leq 11.905$ für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8 \geq \exp(\exp(3))$ gilt und wir erhalten mit (2.58), dass

$$p_n > n\left(y + w - 1 + \frac{w-2}{y} - \frac{w^2 - 6w + 11.905}{2y^2}\right)$$

für alle $n \geq \max\{527049593, 5.3 \cdot 10^8\} = 5.3 \cdot 10^8$ gilt. Mit Hilfe eines Computer rechnen wir nach, dass diese Ungleichung auch für $2 \leq n \leq 5.3 \cdot 10^8$ erfüllt ist.

Im zweiten Schritt setzen wir $a(n) = 11.905$. Wie gerade gesehen, gilt $N_2 = 2$. Offenbar gilt $N_3 = 2$. Um N_4 zu bestimmen, setzen wir $g(x) = 0.2e^x - x^2 + 6x - 11.905$. Analog zum Beweis von Lemma 1.14 erhalten wir, dass $g(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2.71$ gilt. Setzen wir $x = w$ in $g(x)$ ein und teilen anschließend durch $2y^3$, so folgt

$$\frac{0.1}{y^2} > \frac{w^2 - 6w + 11.905}{2y^3}$$

für alle $n \geq 3366135 \geq \exp(\exp(2.71))$. Zusammen mit Lemma 2.19 folgt, dass

$$\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2} - \frac{w^2 - 6w + 11.905}{2y^3} \geq 0 \tag{2.60}$$

für alle für alle $n \geq 3366135$ gilt. Mit einem Computer rechnen wir nach, dass dies auch für alle $49 \leq n \leq 3366134$ gilt. Da außerdem $w^2 - 6w + 11.905 \geq 0$ für alle $n \geq 2$ gilt, folgt aus Lemma 2.5, dass

$$\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2} - \frac{w^2 - 6w + 11.905}{2y^3} \leq 1$$

für alle $n \geq 31$ ist. In Kombination mit (2.60) erhalten wir $N_4 = 49$. Zusammen mit (2.55), (2.57) und Theorem 2.22 erhalten wir, dass die Ungleichung

$$p_n > n\left(y + w - 1 + \frac{w-2}{y} - \frac{w^2 - 6w + b(n)}{2y^2}\right) \tag{2.61}$$

für alle $n \geq \max\{477537210, 527049593, 2, 2, 49, 3520\} = 527049593$ erfüllt ist, wobei

$$\begin{aligned} b(n) = 11.704 &- \frac{2w^3 - 21w^2 + 82.7444556w - 131.603}{3y} + \frac{w^4 - 12w^3 + 47.408w^2 - 112w + 40.808}{2y^2} \\ &+ \frac{2w^4 - 21.704w^3 + 40.704w^2 - 41.904w + 12}{y^3} + \frac{9w^4 - 56w^3 + 129w^2 - 132w + 52}{3y^4} \\ &+ \frac{2(w^4 - 7w^3 + 18w^2 - 20w + 8)}{y^5} \end{aligned}$$

nach (2.42) und (2.56) ist. Im Folgenden zeigen wir, dass $b(n) \leq 11.85$ für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8$ gilt. Setzen wir

$$\begin{aligned}\beta(x) = 0.876e^{5x} &+ (4x^3 - 42x^2 + 165.4889112x - 263.206)e^{4x} \\ &+ (-3x^4 + 36x^3 - 142.224x^2 + 336x - 122.424)e^{3x} \\ &+ (-12x^4 + 130.224x^3 - 244.224x^2 + 251.424x - 72)e^{2x} \\ &+ (-18x^4 + 112x^3 - 258x^2 + 264x - 104)e^x - 12x^4 + 84x^3 - 216x^2 + 240x - 96,\end{aligned}$$

so gilt

$$\beta(w) = 6(11.85 - b(n))y^5. \tag{2.62}$$

D.h. es genügt zu zeigen, dass $\beta(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$ gilt. Dazu setzen wir

$$q_2(x) = 109.5e^x + 256x^3 - 2112x^2 + 6847.2903168x - 9885.7162624.$$

Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $q_2'(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2.2$ gilt. Zusammen mit $q_2(2.8) \geq 149$ folgt, dass $q_2(x) \geq 149$ für alle $x \geq 2.8$ gilt. Setzen wir

$$r_2(x) = q_2(x)e^x - 81x^4 + 648x^3 - 1248.048x^2 + 3263.904x + 3422.52,$$

so folgt

$$r_2(x) \geq 149e^x - 81x^4 + 648x^3 - 1248.048x^2 + 3263.904x + 3422.52$$

für alle $x \geq 2.8$. Bezeichnen wir die rechte Seite der letzten Ungleichung mit $s_2(x)$, so folgt, analog zum Beweis von Lemma 1.14, dass $s_2'(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2.6$ gilt. In Kombination mit $s_2(2.5) \geq 13165$ erhalten wir, dass $r_2(x) \geq s_2(x) \geq 13165$ für alle $x \geq 2.8$ gilt. Definieren wir

$$t_2(x) = r_2(x)e^x - 96x^4 + 465.792x^3 + 1870.272x^2 + 550.08x + 291.744,$$

so gilt

$$t_2(x) \geq 13165e^x - 96x^4 + 465.792x^3 + 1870.272x^2 + 550.08x + 291.744$$

für alle $x \geq 2.8$. Zusammen mit $e^x \geq \sum_{k=0}^4 x^k/(k!)$ ergibt sich die Ungleichung

$$t_2(x) \geq 452x^4 + 2659x^3 + 8452x^2 + 13715x + 13456$$

und somit $t_2(x) \geq 13456$ für alle $x \geq 2.8$. Setzen wir nun

$$u_2(x) = t_2(x)e^x - 18x^4 - 104x^3 + 102x^2 + 300x - 188,$$

so folgt

$$u_2(x) \geq 13456 \sum_{k=0}^{4} \frac{x^4}{k!} - 18x^4 - 104x^3 - 188 \geq 542x^4 + 2138x^3 + 6728x^2 + 13456x + 13268.$$

für alle $x \geq 2.8$. Damit gilt die Ungleichung

$$\beta'''(x) = u_2(x)e^x - 288x + 504 \geq 0$$

für alle $x \geq 2.8$. Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $\beta(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$ gilt. In Kombination mit (2.62) erhalten wir also, dass $b(n) \leq 11.85$ für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8 \geq \exp(\exp(3))$ gilt. Zusammen mit (2.61) folgt somit, dass

$$p_n > n\left(y + w - 1 + \frac{w-2}{y} - \frac{w^2 - 6w + 11.85}{2y^2}\right)$$

für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8$ gilt. Mit einem Computer überprüfen wir, dass diese Ungleichung auch für alle $2 \leq n \leq 5.3 \cdot 10^8$ gilt.

Im dritten und letzten Schritt setzen wir nun $a(n) = 11.85$. Wie wir gerade gesehen haben, gilt $N_2 = 2$. Offenbar gilt $N_3 = 2$ Aus (2.60) folgt, dass

$$\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2} - \frac{w^2 - 6w + 11.85}{2y^3} \geq 0 \tag{2.63}$$

für alle $n \geq 49$ gilt. Wie man leicht mit einem Computer nachrechnet, gilt die Ungleichung auch für $n = 48$. Da $w^2 - 6w + 11.85 \geq 0$ für alle $n \geq 2$ ist, folgt mit Lemma 2.5, dass

$$\frac{w-1}{y} + \frac{w-2}{y^2} - \frac{w^2 - 6w + 11.85}{2y^3} \leq 1$$

für alle $n \geq 31$ ist. In Kombination mit (2.63) folgt somit $N_4 = 48$. Wir erhalten zusammen mit Theorem 2.22, dass die Ungleichung

$$p_n > n\left(y + w - 1 + \frac{w-2}{y} - \frac{w^2 - 6w + b(n)}{2y^2}\right) \tag{2.64}$$

für alle $n \geq \max\{477537210, 527049593, 2, 2, 48, 3520\} = 527049593$ erfüllt ist, wobei

$$\begin{aligned}
b(n) = 11.704 &- \frac{2w^3 - 21w^2 + 82.7444556w - 131.438}{3y} + \frac{w^4 - 12w^3 + 47.408w^2 - 112w + 40.808}{2y^2} \\
&+ \frac{2w^4 - 21.704w^3 + 40.704w^2 - 41.904w + 12}{y^3} + \frac{9w^4 - 56w^3 + 129w^2 - 132w + 52}{3y^4} \\
&+ \frac{2(w^4 - 7w^3 + 18w^2 - 20w + 8)}{y^5}
\end{aligned}$$

nach (2.42) und (2.56) ist. Wir zeigen, dass $b(n) \leq 11.847$ für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8 \geq \exp(\exp(3))$ gilt. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned}
\gamma(x) = 0.858e^{5x} &+ (4x^3 - 42x^2 + 165.4889112x - 262.876)e^{4x} \\
&+ (-3x^4 + 36x^3 - 142.224x^2 + 336x - 122.424)e^{3x} \\
&+ (-12x^4 + 130.224x^3 - 244.224x^2 + 251.424x - 72)e^{2x} \\
&+ (-18x^4 + 112x^3 - 258x^2 + 264x - 104)e^x - 12x^4 + 84x^3 - 216x^2 + 240x - 96.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\gamma(w) = 6(11.847 - b(n))y^5 \tag{2.65}$$

genügt es zu zeigen, dass $\gamma(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$ gilt. Dazu definieren wir

$$q_3(x) = 107.25e^x + 256x^3 - 2112x^2 + 6847.2903168x - 9864.5962624.$$

Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $q_3'(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2.2$ gilt. Da außerdem $q_3(2.8) \geq 133.13$ gilt, folgt $q_3(x) \geq 133$ für alle $x \geq 2.8$. Wir setzen

$$r_3(x) = q_3(x)e^x - 81x^4 + 648x^3 - 1248.048x^2 + 3263.904x + 3422.52.$$

Dann gilt

$$r_3(x) \geq 133e^x - 81x^4 + 648x^3 - 1248.048x^2 + 3263.904x + 3422.52$$

für alle $x \geq 2.8$. Bezeichnen wir die rechte Seite der letzten Ungleichung mit $s_3(x)$, so erhalten wir, analog zum Beweis von Lemma 1.14, dass $s_3'(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2.7$ gilt. Zusammen mit $s_3(2.7) \geq 13565.7$ erhalten wir, dass $r_3(x) \geq s_3(x) \geq 13565$ für alle $x \geq 2.8$ gilt. Setzen wir nun

$$t_3(x) = r_3(x)e^x - 96x^4 + 465.792x^3 + 1870.272x^2 + 550.08x + 291.744,$$

so folgt

$$t_3(x) \geq 13565 \sum_{k=0}^{4} \frac{x^k}{k!} - 96x^4 + 291.744 \geq 469x^4 + 2260x^3 + 6782x^2 + 13565x + 13856.744$$

und somit $t_3(x) \geq 13856$ für alle $x \geq 2.8$. Schließlich setzen wir

$$u_3(x) = t_3(x)e^x - 18x^4 - 104x^3 + 102x^2 + 300x - 188.$$

Dann gilt

$$u_3(x) \geq 13856 \sum_{k=0}^{4} \frac{x^k}{k!} - 18x^4 - 104x^3 - 188 \geq 559x^4 + 2205x^3 + 6928x^2 + 13856x + 13668$$

für alle $x \geq 2.8$. Somit erhalten wir

$$\gamma'''(x) = u_3(x)e^x - 288x + 504 \geq 0$$

für alle $x \geq 2.8$. Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $\gamma(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$ ist. Mit Hilfe von (2.65) folgt somit, dass $b(n) \leq 11.847$ für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8 \geq \exp(\exp(3))$ gilt. Zusammen mit (2.64) erhalten wir, dass die behauptete Ungleichung für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8$ erfüllt ist. Mit Hilfe eines Computers verifizieren wir, dass diese Ungleichung auch für alle $2 \leq n \leq 5.3 \cdot 10^8$ gilt. Damit ist das Korollar bewiesen. □

Beispiel. Bezeichnen wir die rechte Seite der Ungleichung (2.9) mit $r(n)$ und die rechte Seite der Ungleichung aus Korollar 2.25 mit $s(n)$, so erhalten wir mit [57] folgende Tabelle:

n	p_n	$\lceil p_n - r(n) \rceil$	$\lceil p_n - s(n) \rceil$
10^7	$1.79424673 \cdot 10^8$	$2.2441 \cdot 10^4$	$1.6124 \cdot 10^4$
10^8	$2.038074743 \cdot 10^9$	$2.43180 \cdot 10^5$	$1.20928 \cdot 10^5$
10^9	$2.2801763489 \cdot 10^{10}$	$2.302876 \cdot 10^6$	$7.93195 \cdot 10^5$
10^{10}	$2.52097800623 \cdot 10^{11}$	$2.2918665 \cdot 10^7$	$6.514108 \cdot 10^6$
10^{11}	$2.760727302517 \cdot 10^{12}$	$2.21928766 \cdot 10^8$	$5.3199490 \cdot 10^7$
10^{12}	$2.9996226887623 \cdot 10^{13}$	$2.151799763 \cdot 10^9$	$4.63802303 \cdot 10^8$
10^{13}	$3.23780508946331 \cdot 10^{14}$	$2.0674500003 \cdot 10^{10}$	$4.042437292 \cdot 10^9$
10^{14}	$3.475385758524527 \cdot 10^{15}$	$1.98184329536 \cdot 10^{11}$	$3.5726900498 \cdot 10^{10}$
10^{15}	$3.7124508045065437 \cdot 10^{16}$	$1.896434754032 \cdot 10^{12}$	$3.17586489582 \cdot 10^{11}$
10^{16}	$3.94906913903735329 \cdot 10^{17}$	$1.8139062711550 \cdot 10^{13}$	$2.839106354115 \cdot 10^{12}$
10^{17}	$4.185296581467695669 \cdot 10^{18}$	$1.73543282219005 \cdot 10^{14}$	$2.5506843835523 \cdot 10^{13}$
10^{18}	$4.4211790234832169331 \cdot 10^{19}$	$1.661592139340947 \cdot 10^{15}$	$2.30254969685124 \cdot 10^{14}$
10^{19}	$4.65675465116607065549 \cdot 10^{20}$	$1.5924846933652812 \cdot 10^{16}$	$2.087734856562025 \cdot 10^{15}$
10^{20}	$4.892055594575155744537 \cdot 10^{21}$	$1.52800345036619338 \cdot 10^{17}$	$1.9007909639938812 \cdot 10^{16}$

Bemerkung. Aus Satz 2.1 folgt insbesondere, dass die Ungleichung

$$p_n > n\left(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 6\log\log n + 11}{2\log^2 n}\right) \tag{2.66}$$

für alle hinreichend große n erfüllt ist. Setzen wir

$$r_3 := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \geq k \text{ gilt } (2.66)\},$$

so zeigten Arias de Reyna & Toulisse [3, Theorem 6.4] im Jahr 2012, dass

$$39 \cdot 10^{29} < r_3 \leq 39.58 \cdot 10^{29}$$

unter Annahme der Riemannschen Vermutung gilt.

2.3 Appendix

Es folgen die Beweise von Lemma 2.14, Lemma 2.15, Lemma 2.16 und Lemma 2.17.

Beweis. (LEMMA 2.14) Wir schreiben $w(x) = W_1(x)$ und $w_k(x) = w^{(k)}(x)$ für die k-te Ableitung. Sei

$$T(x, y) := 9.84e^x - 120y^3 + 960x^2 - 2880y + 4806.72.$$

Dann gilt $w(x) \geq T(x_0, y_0)$ für alle $x_0 \leq x \leq y_0$. Als erstes zeigen wir, dass $w(x) \geq 102$ für alle $x \geq 5.7$ gilt. Es gilt $w_3(x) = 9.84e^x - 720 \geq 0$ für alle $x \geq 4.293$. Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $w(x) \geq 102$ für alle $x \geq 6.19$ gilt. Um zu zeigen, dass $w(x) \geq 102$ für alle $5.7 \leq x < 6.19$ gilt, zerlegen wir das Intervall $[5.7, 6.19)$ in zwei Intervalle I_1 und I_2:

(1) $I_1 = [6.18, 6.19)$:
Da $w_1(6.18) \leq -11.02$ und $w_k(x) \geq 0$ für alle $k \geq 2$ und $x \geq 6.18$ gilt, folgt

$$w(x) \geq w(6.18) + w_1(6.18)(x - 6.18) \geq w(6.18) + w_1(6.18)(6.19 - 6.18) \geq 102.07$$

für alle $x \in I_1$.

(2) $I_2 = [5.7, 6.18)$:
Es gilt $w_2(x) \geq 0$ für alle $x \in I_2$. Zusammen mit $w_1(6.18) \leq -11.023$ erhalten wir, dass $w_1(x) \leq 0$ für alle $x \in I_2$ ist. Da außerdem $w(6.18) \geq 102.1$ gilt, folgt, dass $w(x) \geq 102$ für alle $x \in I_2$ ist.

Als nächstes zeigen wir, dass $w(x) \geq 298$ für alle $4.293 \leq x < 5.7$ gilt. Dazu zerlegen wir das Intervall $[4.293, 5.7)$ in drei Teilintervalle.

(3) $I_3 = [5.24, 5.7)$:
Es gilt $w_2(x) \geq 0$ für alle $x \in I_3$. Zusammen mit $w_1(5.7) \leq -691.54$ folgt, dass $w_1(x) \leq 0$ für alle $x \in I_3$ ist. In Kombination mit $w(5.7) \geq 298.8$ erhalten wir, dass $w(x) \geq 298$ für alle $x \in I_3$ gilt.

(4) $I_4 = [5.23, 5.24)$:
Für alle $x \in I_4$ gilt $w(x) \geq T(5.23, 5.24) \geq 547$.

(5) $I_5 = [4.293, 5.23)$:
Da $w_3(x) \geq 0$ für alle $x \in I_5$ ist, folgt mit $w_2(5.23) \leq -7.55$, dass $w_2(x) \leq 0$ für alle $x \in I_5$ gilt. Mit $w_1(5.23) \leq -847.4$ ergibt sich, dass $w_1(x) \leq 0$ für alle $x \in I_5$ ist. Da außerdem $w(5.23) \geq 674.46$ gilt, folgt insbesondere, dass $w(x) \geq 298$ für alle $x \in I_5$ ist.

Schließlich zeigen wir, dass $w(x) \geq 1352$ für alle $0 \leq x < 4.293$ gilt.

(6) $I_6 = [4.292, 4.293)$:
Für alle $x \in I_6$ erhalten wir $w(x) \geq T(4.292, 4.293) \geq 1352.39$.

(7) $I_7 = [2.921, 4.292)$:
Es gilt $w_3(x) \leq 0$ für alle $0 \leq x \leq 4.292$. Zusammen mit $w_2(2.921) \leq -0.49$ folgt, dass $w_2(x) \leq 0$ für alle $x \in I_6$ gilt. Da $w_1(2.921) \leq -160.65$ ist, erhalten wir also, dass $w_1(x) \leq 0$ für alle $x \in I_6$ gilt. In Kombination mit $w(4.292) \geq 1361.91$ folgt insbesondere, dass $w(x) \geq 102$ für alle $x \in I_6$ gilt.

(8) $I_8 = [2.92, 2.921)$:
Für alle $x \in I_8$ erhalten wir $w(x) \geq T(2.92, 2.921) \geq 1771.3$.

(9) $I_9 = [0, 2.92)$:
Es gilt $w_3(x) \leq 0$ für alle $x \in I_9$ und $w_2(2.92) \geq 0.04$. Damit gilt $w_2(x) \geq 0$ für alle $x \in I_9$. Da $w_1(2.92) = -160.65$ ist, erhalten wir, dass $w_1(x) \leq 0$ für alle $x \in I_9$ gilt. Zusammen mit $w(2.92) \geq 1777.25$ folgt insbesondere, dass $w(x) \geq 1352$ für alle $x \in I_9$ gilt.

Somit gilt also $w(x) \geq 1352$ für alle $0 \leq x < 4.293$. Es folgt die Behauptung. □

Als nächstes beweisen wir Lemma 2.15.

Beweis. (LEMMA 2.15) Wir betrachten als erstes den Fall $x \geq 5.7$. Nach Lemma 2.14 gilt dann $W_1(x) \geq 102$. Daraus folgt

$$W_2(x) \geq 102e^x + 60x^4 - 600x^3 + 2574.252x^2 - 8539.02x + 9122.472 =: Q_1(x). \tag{2.67}$$

Dann gilt $Q_1^{(4)}(x) = 102e^x + 1440 \geq 0$ für alle $x \geq 0$. Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $Q_1'(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3.3$ ist. Mit $Q_1(5.7) \geq 26792.18$ und (2.67) folgt $W_2(x) \geq 26792$ für alle $x \geq 5.7$.

Als nächstes betrachten wir den Fall $4.293 \leq x < 5.7$. Nach Lemma 2.14 ist $W_1(x) \geq 298$ und somit

$$W_2(x) \geq 298e^x + 60x^4 - 600x^3 + 2574.252x^2 - 8539.02x + 9122.472 =: Q_2(x). \tag{2.68}$$

Es gilt $Q_2^{(4)}(x) = 298e^x + 1440 \geq 0$ für alle $x \geq 0$. Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $Q_2'(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2.4$ ist. Zusammen mit $Q_2(4.293) \geq 14624.82$ und (2.68) erhalten wir, dass $W_2(x) \geq 14624$ für alle $4.293 \leq x < 5.7$ gilt.

Schließlich betrachten wir den Fall $1.21 \leq x < 4.293$. Nach Lemma 2.14 gilt $W_1(x) \geq 1352$ und es folgt

$$W_2(x) \geq 1352e^x + 60x^4 - 600x^3 + 2574.252x^2 - 8539.02x + 9122.472 =: Q_3(x). \tag{2.69}$$

Wir erhalten $Q_3^{(4)}(x) = 1352e^x + 1440 \geq 0$ für alle $x \geq 0$. Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $Q_3'(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1.21$ ist. Mit $Q_3(1.21) \geq 6158.81$ und (2.69) folgt, dass $W_2(x) \geq 6158$ für alle $1.21 \leq x \leq 4.293$ gilt. Es folgt die Behauptung. □

Es folgt der Beweis von Lemma 2.16.

Beweis. (LEMMA 2.16) Wir schreiben $y(x) = Y_1(x)$ und $y_k(x) = y^{(k)}(x)$ für die k-te Ableitung. Sei

$$R(x, y) := 5.52e^x - 120y^3 + 1140x^2 - 3840y + 6292.62.$$

Es gilt $y_3(x) = 5.52e^x - 720 \geq 0$ für alle $x \geq 4.871$. Analog zu Lemma 1.14 folgt, dass $y_1(x) \geq 0$ für alle $x \geq 6.812$ gilt. Mit $y(6.812) \geq 118.53$ ergibt sich, dass $y(x) \geq 118$ für alle $x \geq 6.812$ gilt. Um zu zeigen, dass $y(x) \geq 118$ für alle $x \in [5.863, 6.812)$ gilt, zerlegen wir das Intervall $[5.863, 6.812)$ wie folgt in Teilintervalle:

(1) $J_1 = [6.811, 6.812)$:
Sei $x \in J_1$. Da $y_1(6.811) \leq 0$ und $y_k(x) \geq 0$ für alle $k \geq 2$ gilt, folgt somit

$$y(x) \geq y(6.811) + y_1(6.811)(x - 6.811) \geq y(6.811) + y_1(6.811)(6.812 - 6.811) \geq 118.53.$$

(2) $J_2 = [5.863, 6.811)$:
Es gilt $y_2(x) \geq 0$ für alle $x \in J_2$. Da $y_1(6.811) \leq -0.28$ gilt, folgt, dass $y_1(x) \leq 0$ für alle $x \in J_2$ ist. Zusammen mit $y(6.811) \geq 118.53$ ergibt sich, dass $y(x) \geq 118$ für alle $x \in J_2$ ist.

Als nächstes zeigen wir, dass $y(x) \geq 707$ für alle $4.871 \leq x < 5.863$ gilt.

(3) $J_3 = [5.862, 5.863)$:
Für alle $x \in J_3$ gilt $y(x) \geq R(5.862, 5.863) \geq 707.91$.

(4) $J_4 = [4.871, 5.862)$:
Es gilt $y_3(x) \geq 0$ für alle $x \in J_4$. In Kombination mit $y_2(5.862) \leq -0.766$ erhalten wir, dass $y_2(x) \leq 0$ für alle $x \in J_4$ ist. Da $y_1(4.871) \leq -555.61$ gilt, erhalten wir also, dass $y_1(x) \leq 0$ für alle $x \in J_4$ ist. Da außerdem $y(5.862) \geq 724.12$ gilt, erhalten wir insbesondere, dass $y(x) \geq 707$ für alle $x \in J_4$ ist.

Es bleibt zu zeigen, dass $y(x) \geq 1476$ für alle $0 \leq x < 4.871$ gilt.

(5) $J_5 = [4.87, 4.871)$:
Für alle $x \in J_5$ gilt $y(x) \geq R(4.87, 4.871) \geq 1476.1$.

(6) $J_6 = [3.4, 4.87)$:
Für alle $x \in J_6$ gilt $y_3(x) \leq 0$. Da $y_2(3.4) \leq -2.59$ gilt, folgt $y_2(x) \leq 0$ für alle $x \in J_6$. In Kombination mit $y_1(3.4) \leq -84.19$ ergibt sich, dass $y_1(x) \leq 0$ für alle $x \in J_6$ ist. Da $y(4.87) \geq 1488.48$ gilt, erhalten wir insbesondere, dass $y(x) \geq 1476$ für alle $x \in J_6$ ist.

(7) $J_7 = [3.39, 3.4)$:
Für alle $x \in J_7$ gilt $y(x) \geq R(3.39, 3.4) \geq 1785.07$.

(8) $J_8 = [0, 3.39)$:
Da $y_3(x) \leq 0$ für alle $x \in J_8$ und $y_2(3.39) \geq 2.95$ gilt, folgt $y_2(x) \geq 0$ für alle $x \in J_8$. Zusammen mit $y_1(3.39) \leq -84.19$ erhalten wir, dass $y_1(x) \leq 0$ für alle $x \in J_8$ gilt. In Kombination mit $y(3.39) \geq 1864.96$ folgt insbesondere, dass $y(x) \geq 1476$ für alle $x \in J_8$ gilt.

Damit folgt die Behauptung. □

Schließlich bleibt noch Lemma 2.17 zu beweisen.

Beweis. (Lemma 2.17) Zunächst zeigen wir die Behauptung für alle $x \geq 5.863$. Nach Lemma 2.16 gilt dann

$$Y_2(x) \geq 118e^x + 60x^4 - 720x^3 + 3234.252x^2 - 9649.74x + 9377.832 =: Z_1(x). \tag{2.70}$$

Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $Z_1(x) \geq 31277$ für alle $x \geq 5.863$ gilt. Zusammen mit (2.70) folgt die Behauptung für alle $x \geq 5.863$.

Für $4.871 \leq x < 5.863$ gilt $Y_1(x) \geq 707$ nach Lemma 2.16. Daher folgt

$$Y_2(x) \geq 707e^x + 60x^4 - 720x^3 + 3234.252x^2 - 9649.74x + 9377.832 =: Z_2(x) \tag{2.71}$$

für alle $4.871 \leq x < 5.863$. Wir erhalten, analog zum Beweis von Lemma 1.14, dass $Z_2'(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1.7$ ist. Mit $Z_2(4.871) \geq 81905.98$ und (2.71) folgt, dass $Y_2(x) \geq 81905$ für alle $4.871 \leq x < 5.863$ gilt.

Damit bleibt das Intervall $[0, 4.871)$ zu betrachten. Mit Hilfe von Lemma 2.16 gilt

$$Y_2(x) \geq 1476e^x + 60x^4 - 720x^3 + 3234.252x^2 - 9649.74x + 9377.832 =: Z_3(x) \tag{2.72}$$

für alle $0 \leq x < 4.871$. Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $Z_3'(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1.16$ gilt. In Kombination mit $Z_3(1.16) \geq 6229.27$ und (2.72) folgt die Behauptung. □

In Abschnitt 2.2 notierten wir in der folgenden Tabelle explizite Werte für $M_i(B_i)$, wobei $1 \leq i \leq 10$, bei gegebenen Konstanten B_i, die für den Beweis von Korollar 2.25 benötigt wurden:

i	1	2	3	4	5
B_i	0.2901	4.5868	1.616	0.0605	2.652
$M_i(B_i)$	525022390	527049593	518359123	521742955	517219090
i	6	7	8	9	10
B_i	0.166	0.0028	0.055	0.2171	0.095
$M_i(B_i)$	498928429	485761116	516894988	526864370	525611331

Als nächstes wollen wir beweisen, dass $F_i(n) \geq 0$ tatsächlich für alle $n \geq M_i(B_i)$ gilt. Dies geschieht durch eine Reihe von Lemmata.

Lemma A1. *Es gilt $M_1(0.2901) = 525022390$.*

Beweis. Da $Q_7''(x) = 116.112x - 200.0448 \geq 0$ für alle $x \geq 1.8$ gilt, folgt analog zum Beweis von Lemma 1.14, dass $Q_7(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1.8$ gilt. Ferner gilt $Q_8''(x) = 63.066x - 126.132 \geq 0$ für alle $x \geq 2$. Analog zum Beweis von Lemma 1.14 erhalten wir, dass $Q_8(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2.5$ gilt. Zusammen mit Lemma 2.12 gilt, dass die Ungleichung

$$F_1(n) \geq \frac{f(\ell(n))}{4 \log^6 n \log p_n} \tag{2.73}$$

für alle $n \geq 477537210$ erfüllt ist, wobei

$$f(x) = 4 \cdot 0.2901xe^{3x} - 2Q_6(x)e^x + 2 \cdot 0.866Q_7(x) + 2 \cdot 0.866^2Q_8(x) + Q_9(x).$$

Wir wollen zeigen, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$ gilt. Dazu setzen wir

$$g(x) = (125.3232 + 93.9924x)e^{2x} - 25.408x^4 - 333.008x^3 - 1174.672x^2 - 1296.1184x - 510.6568.$$

Dann gilt

$$g'''(x) = 2130.4944e^{2x} + 751.9392xe^{2x} - 609.792x - 1998.048 \geq 0$$

für alle $x \geq 0$. Analog zum Beweis von Lemma 1.14 erhalten wir, dass $g'(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1.2$ gilt. In Kombination mit $g(1.7) \geq 585.93$ ergibt sich, dass $g(x) \geq 585$ für alle $x \geq 1.7$ gilt. Dann gilt

$$f^{(4)}(x) = g(x)e^x + 240x - 1034.688 \geq 588x + 240x - 1034.688 \geq 0$$

für alle $x \geq 1.7$. Wir erhalten analog zum Beweis von Lemma 1.14, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$ gilt. Setzen wir $x = \ell(n)$ in f ein und teilen durch $4\log^6 n \log p_n$, so erhalten wir mit (2.73), dass $F_1(n) \geq 0$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5.3 \cdot 10^8 \geq \exp(\exp(3))$ ist. Mit Hilfe eines Computers rechnen wir nach, dass die Ungleichung $F_1(n) \geq 0$ auch für alle $525022390 \leq n \leq 5.3 \cdot 10^8$ erfüllt ist. □

Bevor wir die Konstante $M_2(4.5868)$ bestimmen, führen wir die folgende Funktion ein.

Definition. Für $x \geq 1$ definieren wir

$$\Phi(x) = e^x + x + \log\left(1 + \frac{x-1}{e^x} + \frac{x-2.1}{e^{2x}}\right).$$

Lemma A2. *Die Funktion $\Phi(x)$ besitzt die folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für alle $x \geq 1$ gilt*

$$\Phi'(x) \geq e^x + 3/4. \tag{2.74}$$

(ii) *Für alle $x \geq 1.25$ gilt*

$$\Phi(x) \geq e^x + x. \tag{2.75}$$

(iii) *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ gilt*

$$\Phi(\ell(n)) \leq \log p_n. \tag{2.76}$$

Beweis. (i) Es gilt $\Phi'(x) \geq e^x + 3/4$ genau dann, wenn

$$g(x) = e^{2x} - 3xe^x + 7e^x - 7x + 18.7 \geq 0$$

ist. Da $g''(x) = 4e^{2x} - (3x-1)e^x \geq 0$ für alle $x \geq 0$ gilt folgt zusammen mit $g'(1) \geq 10.49$, dass $g'(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1$ gilt. Da außerdem $g(1) \geq 29.96$ gilt, erhalten wir, dass $g(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1$ gilt.

(ii) Die zweite Aussage ist genau dann erfüllt, wenn $(x-1)e^x + x - 2.1 \geq 0$ ist. Da die letzte Ungleichung für alle $x \geq 1.25$ erfüllt ist, folgt die Behauptung.

(iii) Die dritte Aussage folgt aus (2.9). □

Nun bestimmen wir für $B_2 = 4.5868$ die Konstante $M_2(B_2)$.

Lemma A3. *Es gilt $M_2(4.5868) = 527049593$.*

Beweis. Wir definieren die Funktion

$$f(x) = 12.648xe^x\Phi^2(x) + 4.5868x\Phi^3(x) - 71.704e^{3x}$$

und wollen zeigen dass $f(x) \geq 0$ für $x \geq 3$ erfüllt ist. Es gilt

$$f'(x) = 12.648(1+x)e^x\Phi^2(x) + 25.296xe^x\Phi(x)\Phi'(x) + 4.5868\Phi^3(x) + 13.7604x\Phi^2(x)\Phi'(x) - 215.112e^{3x}.$$

Zusammen mit (2.74) und (2.75) erhalten wir also

$$f'(x) \geq 12.648e^x(e^x+x)^2 + 26.4084xe^x(e^x+x)^2 + 25.296xe^{2x}(e^x+x) + 4.5868(e^x+x)^3 - 215.112e^{3x}$$

für alle $x \geq 1.25$. Bezeichnen wir die rechte Seite dieser Ungleichung mit $h(x)$, so folgt

$$\begin{aligned}h'''(x) = 26.4084xe^x(e^x+x)^2 + 158.4504xe^x(e^x+1)^2 + 475.3512e^x(e^x+x)(e^x+1)\\ + 462.0024xe^{2x}(e^x+1) + 413.6352xe^{2x}(e^x+x) + 379.44e^{2x}(e^x+1)\\ + 158.4504xe^x(e^x+x)(e^x+1) + 105.6336e^x(e^x+x)^2 + 177.072xe^{3x} + 234.3384e^x(e^x+1)^2\\ + 563.1864e^{2x}(e^x+x) + 75.888e^{3x} + 27.5208(e^x+1)^3 - 5808.024e^{3x}.\end{aligned}$$

Da $e^x + x \geq e^x$ und $e^x + 1 \geq e^x$ gilt, folgt

$$h'''(x) \geq (1396.0188x - 3946.6656)e^{3x} \geq 0$$

für alle $x \geq 2.828 \geq 3946.6656/1396.0188$. Analog zum Beweis von Lemma 1.14 erhalten wir, dass $h(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$ gilt. Somit gilt $f'(x) \geq h(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$. Zusammen mit $f(3) \geq 3.4651$ folgt, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$ gilt. Setzen wir nun $x = \ell(n)$ in f ein, so erhalten wir, dass

$$12.648\,\ell(n)\Phi^2(\ell(n))\log n + 4.5868\,\ell(n)\Phi^3(\ell(n)) - 71.704\log^3 n \geq 0$$

für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8 \geq \exp(\exp(3))$ gilt. Mit Hilfe von (2.76) folgt also

$$12.648\,\ell(n)\log n\log^2 p_n + 4.5868\,\ell(n)\log^3 p_n - 71.704\log^3 n \geq 0$$

für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8$. Teilen wir beide Seiten durch $\log^3 n \log^4 p_n$, so folgt $F_2(n) \geq 0$ für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8$. Mit einem Computer prüfen wir nach, dass die Ungleichung $F_2(n) \geq 0$ auch für alle natürlichen Zahlen $527049593 \leq n \leq 5.3 \cdot 10^8$ erfüllt ist. Es folgt die Behauptung. □

Lemma A4. *Es gilt* $M_3(1.616) = 518359123$.

Beweis. Um die Behauptung zu zeigen, setzen wir

$$f(x) = 3.232x\Phi(x) - 35.352x^2 + 45.408x - 42.7264.$$

Mit Hilfe von (2.74) und (2.75) folgt nun

$$f'(x) \geq 3.232(1+x)e^x - 67.472x \geq (3.232e^x + 3.232 - 67.472)x \geq 0$$

für alle $x \geq 3$. In Kombination mit $f(3) \geq 0.106$ erhalten wir, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$ gilt. Substituieren wir $x = \ell(n)$ in f, benutzen die Ungleichung (2.76) und teilen anschließend durch $2\log^3 n \log^2 p_n$, so folgt $F_3(n) \geq 0$ für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8 \geq \exp(\exp(3))$. Für $518359123 \leq n \leq 5.3 \cdot 10^8$ prüfen wir mit einem Computer, dass $F_3(n) \geq 0$ gilt. Es folgt die Behauptung. □

Lemma A5. *Es gilt* $M_4(0.0605) = 521742955$.

Beweis. Setzen wir die Definitionen von $P_8(x)$ und $P_9(x)$ ein, so folgt

$$F_4(n) = \frac{0.0605\,\ell(n)}{\log^3 n \log p_n} + \frac{3.352\,\ell^3(n) - 58.056\,\ell^2(n) + 114.1008\,\ell(n) - 79.1776}{2\log^4 n \log^2 p_n}.$$

Wir definieren die Funktion

$$f(x) = 0.121xe^x\Phi(x) + 3.352x^3 - 58.056x^2 + 114.1008x - 79.1776.$$

Zusammen mit (2.74) und (2.75) erhalten wir

$$f'(x) \geq 0.121(xe^x(e^x+x) + xe^{2x}) + 10.056x^2 - 116.112x \geq (0.121(e^x(e^x+x) + e^{2x}) - 85.944)x \geq 0$$

für alle $x \geq 3$. Da außerdem $f(3) \geq 0.149$ gilt, folgt $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$. Setzen wir $x = \ell(n)$ in f ein, benutzen die Ungleichung (2.76) und teilen anschließend durch $2\log^4 n \log^2 p_n$, so folgt $F_4(n) \geq 0$ für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8 \geq \exp(\exp(3))$. Für $521742955 \leq n \leq 5.3 \cdot 10^8$ prüfen wir die behauptete Ungleichung mit einem Computer nach. □

Lemma A6. *Es gilt* $M_5(2.652) = 517219090$.

Beweis. Setzen wir die Definitionen von $P_8(x)$ und $P_9(x)$ ein, so ergibt sich

$$F_5(n) = \frac{2.652\,\ell(n)}{\log^3 n \log p_n} - \frac{2\,\ell^4(n) - 5\,\ell^3(n) + 47.352\,\ell^2(n) - 60.808\,\ell(n) + 48.7264}{2\log^4 n \log p_n}.$$

Um die Behauptung zu zeigen, setzen wir

$$f(x) = 5.304xe^x - 2x^4 + 5x^3 - 47.352x^2 + 60.808x - 48.7264.$$

Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$ gilt. Setzen wir $x = \ell(n)$ in f ein und teilen anschließend durch $2\log^4 n \log p_n$, so folgt $F_5(n) \geq 0$ für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8 \geq \exp(\exp(3))$. Für $517219090 \leq n \leq 5.3 \cdot 10^8$ prüfen wir die behauptete Ungleichung mit einem Computer nach. □

Addieren wir die Konstanten $B_1, \ldots, B_5$ aus Lemma A1, Lemma A3, Lemma A4, Lemma A5 und Lemma A6, so ergibt sich

$$12.648 - B_1 - B_2 - B_3 - B_4 - B_5 = 3.4426.$$

Setzen wir nun $B_6 = 0.166$, so erhalten wir den folgenden Wert für $M_6(B_6)$.

Lemma A7. *Es ist* $M_6(0.166) = 498928429$.

Beweis. Wir setzen

$$f(x) = (0.166e^x + 3.4426)x\Phi(x) - 3.352(x^2 - x + 1)e^x$$

und wollen zeigen, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$ gilt. Dazu definieren wir die Funktion $h(x) = 0.664(1 + x)e^x - 3.186x^2 - 6.1154x$. Dann gilt $h(2.9) \geq 2.53$ und

$$h'(x) = 0.664e^x + 0.664(1+x)e^x - 6.372x - 6.1154 \geq 0$$

für alle $x \geq 2.3$. Somit gilt $h(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2.83$. Setzen wir

$$g(x) = 0.166xe^x(e^x + x) + (0.166e^x + 3.4426)(e^x + x) + (0.166e^x + 3.4426)x\left(e^x + \frac{3}{4}\right) - 3.352xe^x(1+x),$$

so gilt

$$\begin{aligned} g'(x) = {} & 0.166xe^x(e^x + x) + 0.332e^x(e^x + x) + 0.166xe^x(e^x + 1) + (0.166e^x + 3.4426)(e^x + 1) \\ & + 0.166xe^x\left(e^x + \frac{3}{4}\right) + (0.166e^x + 3.4426)\left(e^x + \frac{3}{4}\right) + (0.166e^x + 3.4426)xe^x \\ & - 10.056xe^x - 3.352e^x - 3.352x^2e^x \\ \geq {} & 0.166xe^x(e^x + x) + 0.332e^x(e^x + x) + 0.166xe^x(e^x + 1) + (0.166e^x + 3.4426)(e^x + 1) + 0.166xe^{2x} \\ & + (0.166e^x + 3.4426)e^x + (0.166e^x + 3.4426)xe^x - 10.056xe^x - 3.352e^x - 3.352x^2e^x. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die rechte Seite dieser Ungleichung aus, so erhalten wir, dass die Ungleichung

$$g'(x) \geq h(x)e^x + 3.6992e^x + 3.4426 \geq 0$$

für alle $x \geq 2.83$ gilt. Zusammen mit $g(3) \geq 3.035$ erhalten wir, dass $g(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$ gilt. Wir betrachten nun wieder die eingangs definierte Funktion f. Es gilt

$$f'(x) = 0.166xe^x\,\Phi(x) + (0.166e^x + 3.4426)\Phi(x) + (0.166e^x + 3.4426)x\,\Phi'(x) - 3.352xe^x(1+x).$$

Zusammen mit (2.74) und (2.75) erhalten wir, dass $f'(x) \geq g(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$ gilt. Zusammen mit $f(3) \geq 0.022$ folgt, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$ gilt. Substituieren wir nun $x = \ell(n)$ in f, benutzen die Ungleichung (2.76) und teilen anschließend durch $\log^3 n \log^2 p_n$, so folgt $F_7(n) \geq 0$ für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8 \geq \exp(\exp(3))$. Für $498928429 \leq n \leq 5.3 \cdot 10^8$ prüfen wir die behauptete Ungleichung mit einem Computer. □

Lemma A8. *Es gilt* $M_7(0.0028) = 485761116$.

Beweis. Setzen wir die Definition von $P_8(x)$ ein, so folgt

$$F_7(n) = \frac{0.0028\,\ell(n)}{\log^2 n \log p_n} - \frac{37.944\,\ell^2(n) - 75.888\,\ell(n) + 65.7696}{2\log^3 n \log^3 p_n}.$$

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = 0.0056xe^x\Phi^2(x) - 37.944x^2 + 75.888x - 65.7696.$$

Mit Hilfe von (2.74) und (2.75) erhalten wir

$$f'(x) \geq (0.0056e^x(e^x+x)^2 + 0.0112e^x(e^x+x)e^x - 75.888)x \geq 0$$

für alle $x \geq 2.74$. Da ferner $f(3) \geq 0.232$ gilt, folgt $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$. Setzen wir $x = \ell(n)$ in f ein, benutzen die Ungleichung (2.76) und teilen schließlich durch $2\log^3 n \log^3 p_n$, so folgt $F_7(n) \geq 0$ für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8 \geq \exp(\exp(3))$. Für $485761116 \leq n \leq 5.3 \cdot 10^8$ überprüfen wir die behauptete Ungleichung mit einem Computer. □

Für $B_8 = 0.055$ erhalten wir den folgenden Wert für $M_8(B_8)$.

Lemma A9. *Es ist* $M_8(0.055) = 516894988$.

Beweis. Wir setzen

$$f(x) = 0.055x\,\Phi^2(x) - 12.648(x^2 - x + 1).$$

Wenden wir die Ungleichung (2.74) und (2.75) auf $f'(x)$ an, so folgt

$$f'(x) \geq 0.055((e^x+x)^2 + 2xe^x(e^x+x)) - 25.296x \geq (0.055(3e^x + x + 2e^x(e^x+x)) - 25.296)x \geq 0$$

für alle $x \geq 2.6$. Zusammen mit $f(3) \geq 0.139$ folgt $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$. Setzen wir nun $x = \ell(n)$ in f ein, benutzen anschließend (2.76) und teilen dann durch $\log^2 n \log^3 p_n$, so folgt $F_8(n) \geq 0$ für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8 \geq \exp(\exp(3))$. Mit Hilfe eines Computers rechnen wir nach, dass $F_8(n) \geq 0$ auch für alle $516894988 \leq n \leq 5.3 \cdot 10^8$ gilt. □

Lemma A10. *Es gilt* $M_9(0.2171) = 526864370$.

Beweis. Wir definieren

$$f(x) = 0.2171x\,\Phi^4(x) - 466.156096e^{2x}.$$

Wenden wir (2.74) und (2.75) auf $f'(x)$ an, so erhalten wir, dass

$$f'(x) \geq (0.2171(e^{2x} + 4xe^x + 6x^2) + 0.8684xe^x(e^x+3x) - 932.312192)e^{2x} \geq 0$$

für alle $x \geq 2.73$ gilt. In Kombination mit $f(3) \geq 53.224$ folgt

$$f(\ell(n)) = 0.2171\,\ell(n)\,\Phi^4(\ell(n)) - 466.156096\log^2 n \geq 0$$

für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8 \geq \exp(\exp(3))$. Wenden wir darauf nun (2.76) an und teilen dann durch $\log^2 n \log^5 p_n$, so folgt $F_9(n) \geq 0$ für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8$. Für $526864370 \leq n \leq 5.3 \cdot 10^8$ prüfen wir die Ungleichung mit einem Computer nach. Es folgt die Behauptung. □

Lemma A11. *Es gilt* $M_{10}(0.095) = 525611331$.

Beweis. Sei

$$f(x) = 0.095x\,\Phi^5(x) - 4726.6e^{2x}.$$

Wegen (2.74) und (2.75) folgt

$$f'(x) \geq 0.475x(e^x+x)^4e^x - 9453.2e^{2x} \geq (0.475x(e^x+x)^3 - 9453.2)e^{2x} \geq 0$$

für alle $x \geq 3$. Zusammen mit $f(3) \geq 1446.01$ erhalten wir, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3$ gilt. Setzen wir $x = \ell(n)$ in f ein, benutzen (2.76) und teilen anschließend durch $\log^2 n \log^6 p_n$, so erhalten wir, dass $F_{10}(n) \geq 0$ für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8 \geq \exp(\exp(3))$ erfüllt ist. Mit Hilfe eines Computers rechnen wir nach, dass die Ungleichung $F_{10}(n) \geq 0$ auch für $525611331 \leq n \leq 5.3 \cdot 10^8$ erfüllt ist. □

Kapitel 3

Über die Summe der ersten n Primzahlen

In diesem Kapitel werden wir die Summe der ersten n Primzahlen

$$\sum_{k \leq n} p_k$$

studieren. Dazu werden wir eine asymptotische Formel herleiten, die die bisher bewiesenen asymptotischen Formeln verallgemeinern wird, sowie neue obere und untere Schranken für diese Summe zeigen, die die derzeit in der Literatur bekannten Schranken verschärfen werden.

3.1 Eine asymptotische Formel für $\sum_{k \leq n} p_k$

In diesem Abschnitt wollen wir eine asymptotische Formel für die Summe der ersten n Primzahlen herleiten. Dazu führen wir zunächst die folgende Definition ein.

Definition. Seien $s, i, j, r \in \mathbb{N}_0$ mit $j \geq r$. Dann seien die Zahlen $b_{s,i,j,r} \in \mathbb{Z}$ durch die folgenden Rekursionsformeln definiert:

- Für $j = r = 0$ sei
$$b_{s,i,0,0} := 1. \tag{3.1}$$
- Für $j \geq 1$ sei
$$b_{s,i,j,j} := b_{s,i,j-1,j-1} \cdot (-(i - (j-1))). \tag{3.2}$$
- Für $j \geq 1$ sei
$$b_{s,i,j,0} := b_{s,i,j-1,0} \cdot (s + j - 1). \tag{3.3}$$
- Für $j > r \geq 1$ sei
$$b_{s,i,j,r} := b_{s,i,j-1,r} \cdot (s + j - 1) + b_{s,i,j-1,r-1} \cdot (-(i - (r-1))). \tag{3.4}$$

Proposition 3.1. *Ist $r > i$, so gilt*

$$b_{s,i,j,r} = 0.$$

Beweis. Sei $r > i$. Aus (3.2) folgt

$$b_{s,i,i+1,i+1} = 0. \tag{3.5}$$

Induktiv erhalten wir, dass

$$b_{s,i,k,k} = 0 \tag{3.6}$$

für alle $k \geq i+1$ gilt. Durch wiederholtes Anwenden von (3.4) erhalten wir zusammen mit (3.5), dass

$$b_{s,i,k,i+1} = b_{s,i,k-1,i+1} \cdot (s+k-1) = b_{s,i,i+1,i+1} \cdot (s+k-1) \cdot \ldots (s+(i+2)-1) = 0$$

für alle $k \geq i+2$ erfüllt ist. In Kombination mit (3.5) folgt also, dass

$$b_{s,i,k,i+1} = 0 \tag{3.7}$$

für alle $k \geq i+1$ erfüllt ist. Wir wollen nun per Induktion nach n zeigen, dass die Gleichheit

$$b_{s,i,k,i+n} = 0 \tag{3.8}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \geq i+n$ erfüllt ist. Für $k = i+n$ ist $b_{s,i,k,i+n} = 0$ nach (3.6) erfüllt. D.h. es genügt, die Gleichung (3.8) für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \geq i+n+1$ zu beweisen. Für $n = 1$ folgt die Behauptung bereits aus (3.7). Wir schreiben $k = i+n+t$ mit $t \in \mathbb{N}$. Mit (3.4) und der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\begin{aligned} b_{s,i,t+i+n,i+n} &= b_{s,i,t+i+n-1,i+n} \cdot (s+(t+i+n)-1) \\ &= b_{s,i,i+n,i+n} \cdot (s+(t+n+i)-1) \cdot \ldots \cdot (s+(i+n+1)-1). \end{aligned}$$

Da $b_{s,i,i+n,i+n} = 0$ nach (3.6) ist, folgt $b_{s,i,k,i+n} = b_{s,i,t+i+n,i+n} = 0$. Da $t \in \mathbb{N}$ beliebig war, erhalten wir (3.8). Es folgt die Behauptung. □

Bereits zu Beginn des 20. Jahrhunderts konnte Landau [28, §61] zeigen, dass

$$\sum_{k \leq n} p_k \sim \frac{n^2}{2} \log n \qquad (n \to \infty)$$

gilt. Nicolas [40] konnte im Jahr 1965 beweisen, dass

$$\sum_{k \leq n} p_k = \frac{n^2}{2} \left(\log n + \log\log n - \frac{3}{2} \right) + o(n^2) \qquad (n \to \infty) \tag{3.9}$$

gilt. Im Jahr 1996 konnten Massias & Robin [33] die asymptotische Formel (3.9) präzisieren, indem sie zeigten, dass

$$\sum_{k \leq n} p_k = \frac{n^2}{2} \left(\log n + \log\log n - \frac{3}{2} + \frac{\log\log n - 5/2}{\log n} \right) + O\left(\frac{n^2 (\log\log n)^2}{\log^2 n} \right) \tag{3.10}$$

gilt.

Das Ziel dieses Abschnitts ist, die asymptotische Formel (3.10) zu verallgemeinern. Sei $m \in \mathbb{N}$ fest. Nach Satz 2.1 existieren eindeutig bestimmte $a_{is} \in \mathbb{Q}$, wobei $a_{0s} = 1$ für alle $1 \leq s \leq m$, so, dass

$$p_n = n \left(\log n + \log\log n - 1 + \sum_{s=1}^{m} \frac{(-1)^{s+1}}{s \log^s n} \sum_{i=0}^{s} a_{is} (\log\log n)^i \right) + O(c_m(n)) \tag{3.11}$$

gilt, wobei

$$c_m(n) := \frac{n (\log\log n)^{m+1}}{\log^{m+1} n}.$$

Setzen wir

$$g(n) = \log n + \log\log n - \frac{3}{2}$$

sowie

$$h_m(n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{(j-1)!}{2^j \log^j n},$$

so erhalten wir die folgende asymptotische Formel für die Summe der ersten n Primzahlen.

Theorem 3.2. *Es gilt*

$$\sum_{k\leq n} p_k = \frac{n^2}{2}\left(g(n) - h_m(n) + \sum_{s=1}^{m} \frac{(-1)^{s+1}}{s\log^s n}\sum_{i=0}^{s} a_{is} \sum_{j=0}^{m-s}\sum_{r=0}^{\min\{i,j\}} \frac{b_{s,i,j,r}(\log\log n)^{i-r}}{2^j \log^j n}\right) + O(nc_m(n)).$$

Für den Beweis dieses Theorems benötigen wir die beiden folgenden Lemmata.

Lemma 3.3. *Seien $x, a \in \mathbb{R}$ mit $x \geq a > 1$. Dann gilt*

$$\int_a^x \frac{t\,dt}{\log t} = \mathrm{li}(x^2) - \mathrm{li}(a^2).$$

Beweis. Siehe Dusart [12, Lemme 1.6]. □

Lemma 3.4. *Seien $m, m_0 \in \mathbb{N}$ mit $m \geq m_0$ und f eine Funktion, die stetig auf $[m_0, \infty)$ und zusätzlich nicht-negativ und monoton wachsend auf $[m, \infty)$ ist. Dann gilt*

$$\sum_{k=m_0}^{n} f(k) = \int_{m_0}^{n} f(x)\,dx + O(f(n)).$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Abschätzung des Integrals durch Ober- und Untersumme. □

Es folgt der Beweis von Theorem 3.2.

Beweis. Wir setzen

$$\tau(x) = x\left(\log x + \log\log x - 1 + \sum_{s=1}^{m}\frac{(-1)^{s+1}}{s\log^s x}\sum_{i=0}^{s} a_{is}(\log\log x)^i\right).$$

Sei $x_0 = x_0(m) \in \mathbb{N}$ mit $x_0 \geq 3$ minimal so, dass $\tau(x)$ eine monoton steigende und nicht-negative Funktion für alle $x \geq x_0$ ist. Mit (3.11) erhalten wir, dass die asymptotische Formel

$$p_k = \tau(k) + O(c_m(k)) \tag{3.12}$$

gilt. Daraus folgt

$$\sum_{k\leq n} p_k = \sum_{k=3}^{n} \tau(k) + O(nc_m(n)).$$

Zusammen mit Lemma 3.4 und (3.12) folgt somit

$$\sum_{k\leq n} p_k = \int_3^n \tau(x)\,dx + O(\tau(n)) + O(nc_m(n)) = \int_3^n \tau(x)\,dx + O(p_n) + O(nc_m(n)).$$

Da $p_n \sim n\log n$ für $n \to \infty$ gilt, folgt

$$\sum_{k\leq n} p_k = \int_3^n \tau(x)\,dx + O(nc_m(n)). \tag{3.13}$$

Um die Behauptung zu zeigen, integrieren wir zunächst die ersten drei Terme von $\tau(x)$. Es gilt

$$\int_3^n x\log x\,dx = \frac{n^2\log n}{2} - \frac{n^2}{4} + O(1)$$

sowie

$$-\int_3^n x\,dx = -\frac{n^2}{2} + O(1).$$

Mit Hilfe von partieller Integration, Lemma 3.3 und (1.12) folgt

$$\begin{aligned}\int_3^n x\log\log x\,dx &= \frac{n^2\log\log n}{2} - \frac{1}{2}\int_3^n \frac{x\,dx}{\log x} + O(1)\\ &= \frac{n^2\log\log n}{2} - \frac{\mathrm{li}(n^2)}{2} + O(1)\\ &= \frac{n^2\log\log n}{2} - \frac{n^2}{2}h_m(n) + O\left(\frac{n^2}{\log^{m+1} n}\right).\end{aligned}$$

Somit erhalten wir mit (3.13) und der Definition von $g(n)$ und $h_m(n)$ die asymptotische Formel

$$\sum_{k\le n} p_k = \frac{n^2}{2}(g(n)-h_m(n)) + \sum_{s=1}^{m}\frac{(-1)^{s+1}}{s}\sum_{i=0}^{s} a_{is}\int_3^n \frac{x(\log\log x)^i}{\log^s x}\,dx + O(nc_m(n)). \tag{3.14}$$

Sei $1\le s\le m$ und $0\le i\le s$. Per Induktion zeigen wir, dass

$$\begin{aligned}\int_3^n \frac{x(\log\log x)^i}{\log^s x}\,dx = \sum_{j=0}^{t}\sum_{r=0}^{\min\{i,j\}} \frac{b_{s,i,j,r}n^2(\log\log n)^{i-r}}{2^{j+1}\log^{s+j} n}&\\ + \int_3^n \sum_{r=0}^{\min\{i,t+1\}} \frac{b_{s,i,t+1,r}x(\log\log x)^{i-r}}{2^{t+1}\log^{s+t+1} x}\,dx + O(1)&\end{aligned} \tag{3.15}$$

für alle $t\ge 0$ gilt. Mit partieller Integration erhalten wir

$$\int_3^n \frac{x(\log\log x)^i}{\log^s x}\,dx = \frac{n^2(\log\log n)^i}{2\log^s n} - \frac{i}{2}\int_3^n \frac{x(\log\log x)^{i-1}}{\log^{s+1} x}\,dx + \frac{s}{2}\int_3^n \frac{x(\log\log x)^i}{\log^{s+1} x}\,dx + O(1),$$

d.h. die Behauptung folgt für $t=0$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\int_3^n \frac{x(\log\log x)^i}{\log^s x}\,dx = \sum_{j=0}^{t-1}\sum_{r=0}^{\min\{i,j\}} \frac{b_{s,i,j,r}n^2(\log\log n)^{i-r}}{2^{j+1}\log^{s+j} n} + \sum_{r=0}^{\min\{i,t\}}\int_3^n \frac{b_{s,i,t,r}x(\log\log x)^{i-r}}{2^t\log^{s+t} x}\,dx + O(1)$$

und mit partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_3^n \frac{x(\log\log x)^i}{\log^s x}\,dx = \sum_{j=0}^{t-1}\sum_{r=0}^{\min\{i,j\}} \frac{b_{s,i,j,r}n^2(\log\log n)^{i-r}}{2^{j+1}\log^{s+j} n} + \sum_{r=0}^{\min\{i,t\}} \frac{b_{s,i,t,r}n^2(\log\log n)^{i-r}}{2^{t+1}\log^{s+t} n}\,dx&\\ + \sum_{r=0}^{\min\{i,t\}}\int_3^n \frac{b_{s,i,t,r}((s+t)(\log\log x)^{i-r}-(i-r)(\log\log x)^{i-r-1})x}{2^{t+1}\log^{s+t+1} x}\,dx + O(1).&\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}\int_3^n \frac{x(\log\log x)^i}{\log^s x}\,dx = \sum_{j=0}^{t}\sum_{r=0}^{\min\{i,j\}} \frac{b_{s,i,j,r}n^2(\log\log n)^{i-r}}{2^{j+1}\log^{s+j} n} + O(1)&\\ + \int_3^n \sum_{r=0}^{\min\{i,t\}} \frac{b_{s,i,t,r}((s+t)(\log\log x)^{i-r}-(i-r)(\log\log x)^{i-r-1})x}{2^{t+1}\log^{s+t+1} x}\,dx.&\end{aligned} \tag{3.16}$$

Mit einer Indexverschiebung erhalten wir

$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{\min\{i,t\}} b_{s,i,t,r}((s+t)(\log\log x)^{i-r}-(i-r)(\log\log x)^{i-r-1})\\ &\quad= \sum_{r=1}^{\min\{i,t\}} (b_{s,i,t,r}(s+t)-b_{s,i,t,r-1}(i-(r-1)))(\log\log x)^{i-r} + b_{s,i,t,0}(s+t)(\log\log x)^i\\ &\qquad - b_{s,i,t,\min\{i,t\}}(i-\min\{i,t\})(\log\log x)^{i-(\min\{i,t\}+1)}\end{aligned}$$

und mit Hilfe von (3.3) und (3.4) folgt

$$\sum_{r=0}^{\min\{i,t\}} b_{s,i,t,r}((s+t)(\log\log x)^{i-r} - (i-r)(\log\log x)^{i-r-1})$$
$$= \sum_{r=0}^{\min\{i,t\}} b_{s,i,t+1,r}(\log\log x)^{i-r} - b_{s,i,t,\min\{i,t\}}(i-\min\{i,t\})(\log\log x)^{i-(\min\{i,t\}+1)}. \tag{3.17}$$

Ist $i > t$, so folgt

$$-b_{s,i,t,\min\{i,t\}}(i-\min\{i,t\}) = -b_{s,i,t,t}(i-t).$$

Zusammen mit (3.2) gilt

$$-b_{s,i,t,\min\{i,t\}}(i-\min\{i,t\}) = b_{s,i,t+1,t+1}. \tag{3.18}$$

Ist $i \leq t$, so folgt

$$-b_{s,i,t,\min\{i,t\}}(i-\min\{i,t\}) = 0$$

und mit (3.7) erhalten wir die Gleichheit

$$-b_{s,i,t,\min\{i,t\}}(i-\min\{i,t\}) = b_{s,i,t+1,i+1}.$$

Zusammen mit (3.18) folgt also, dass

$$-b_{s,i,t,\min\{i,t\}}(i-\min\{i,t\}) = b_{s,i,t+1,\min\{i,t\}+1}.$$

In Kombination mit (3.17) ergibt sich somit

$$\sum_{r=0}^{\min\{i,t\}} b_{s,i,t,r}((s+t)(\log\log x)^{i-r} - (i-r)(\log\log x)^{i-r-1}) = \sum_{r=0}^{\min\{i,t\}+1} b_{s,i,t+1,r}(\log\log x)^{i-r}.$$

Da $b_{s,i,t+1,i+1} = 0$ nach (3.7) gilt, folgt

$$\sum_{r=0}^{\min\{i,t\}} b_{s,i,t,r}((s+t)(\log\log x)^{i-r} - (i-r)(\log\log x)^{i-r-1}) = \sum_{r=0}^{\min\{i,t+1\}} b_{s,i,t+1,r}(\log\log x)^{i-r}.$$

Setzen wir dies in (3.16) ein, so erhalten wir (3.15). Setzen wir nun $t = m-s$ in (3.15) ein, so folgt

$$\int_3^n \frac{x(\log\log x)^i}{\log^s x}\,dx = \sum_{j=0}^{m-s}\sum_{r=0}^{\min\{i,j\}} \frac{b_{s,i,j,r}n^2(\log\log n)^{i-r}}{2^{j+1}\log^{s+j} n} + O\left(\frac{n^2(\log\log n)^i}{\log^{m+1} n}\right)$$

und mit (3.14) ergibt sich somit

$$\begin{aligned}\sum_{k\leq n} p_k &= \frac{n^2}{2}(g(n)-h_m(n)) + \sum_{s=1}^{m}\frac{(-1)^{s+1}}{s}\sum_{i=0}^{s} a_{is}\sum_{j=0}^{m-s}\sum_{r=0}^{\min\{i,j\}}\frac{b_{s,i,j,r}n^2(\log\log n)^{i-r}}{2^{j+1}\log^{s+j} n}\\ &\quad + O\left(\sum_{s=1}^{m}\frac{(-1)^{s+1}}{s}\sum_{i=0}^{s} a_{is}\frac{n^2(\log\log n)^i}{\log^{m+1} n}\right) + O(nc_m(n))\\ &= \frac{n^2}{2}(g(n)-h_m(n)) + \sum_{s=1}^{m}\frac{(-1)^{s+1}}{s}\sum_{i=0}^{s} a_{is}\sum_{j=0}^{m-s}\sum_{r=0}^{\min\{i,j\}}\frac{b_{s,i,j,r}n^2(\log\log n)^{i-r}}{2^{j+1}\log^{s+j} n} + O(nc_m(n)).\end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. □

Wir erhalten das folgende Korollar, mit dem wir insbesondere die asymptotische Formel (3.10) verallgemeinern werden.

Korollar 3.5. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann existieren eindeutig bestimmte normierte Polynome $T_s \in \mathbb{Q}[x]$, wobei $1 \leq s \leq m$ und $\operatorname{grad}(T_s) = s$ ist, so, dass*

$$\sum_{k \leq n} p_k = \frac{n^2}{2} \left(\log n + \log\log n - \frac{3}{2} + \sum_{s=1}^{m} \frac{(-1)^{s+1} T_s(\log\log n)}{s \log^s n} \right) + O(nc_m(n)).$$

Insbesondere gilt $T_1(x) = x - 5/2$ und $T_2(x) = x^2 - 7x + 29/2$.

Beweis. Die erste Behauptung folgt sofort aus Theorem 3.2. Setzen wir $m = 2$ in Theorem 3.2, so ergeben sich zusammen mit Satz 2.1 die Polynome T_1 und T_2. □

Bemerkung. Der Vorteil von Theorem 3.2 ist, dass wir, mit Hilfe von Theorem 3.2 und den Rekursionsformeln (3.1)-(3.4) für die ganzen Zahlen $b_{s,i,j,r}$, die Polynome T_s, wobei $1 \leq s \leq m$, für alle $m \in \mathbb{N}$ explizit berechnen können.

Bemerkung. Der erste Teil von Korollar 3.5 wurde bereits von Sinha [55, Theorem 2.3] im Jahr 2010 bewiesen. Außerdem gab er dort die Polynome $T_1(x) = x - 3$ und $T_2(x) = x^2 - 7x + 27/2$ an, die jedoch beide aufgrund eines Rechenfehlers beim Integral

$$\int_3^n \frac{x \log\log x}{\log x}\, dx$$

nicht richtig sind.

Bemerkung. Ist $m \in \mathbb{N}$, so konnten Massias & Robin [33] im Jahr 1996 zeigen, dass

$$\sum_{k \leq n} p_k = \frac{n^2}{2} \left(\log n + \sum_{k=0}^{m} \frac{B_{k+1}(\log\log n)}{\log^k n} \right) + O(nc_m(n))$$

gilt, wobei die Polynome $B_1(x), \ldots, B_{m+1}(x)$ die Gleichung

$$B'_{k+1}(x) = B'_k(x) - (n-1)B_k(x)$$

erfüllen. Dabei ist $B_0(x) := 1$. Der Nachteil dieser Formel ist, dass sie keines der $B_1, \ldots, B_{m+1}$ liefert.

Im Folgenden wollen wir obere und untere Schranken für die Summe der ersten n Primzahlen beweisen.

3.2 Über die Differenz $C_n := np_n - \sum_{k \leq n} p_k$

Um obere und untere Schranken für die Summe der ersten n Primzahlen herzuleiten, betrachten wir zunächst die Differenz

$$C_n := np_n - \sum_{k \leq n} p_k.$$

Wir werden in diesem Abschnitt zwei asymptotische Formeln sowie untere und obere Schranken für die Differenz C_n herleiten.

3.2.1 Asymptotische Formeln für C_n

Die erste asymptotische Formel für C_n erhalten wir mit Hilfe von Theorem 3.2 und (3.11).

Proposition 3.6. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} C_n = {} & \frac{n^2}{2} \left(\log n + \log\log n - \frac{1}{2} + h_m(n) \right) \\ & + \frac{n^2}{2} \sum_{s=1}^{m} \frac{(-1)^{s+1}}{s \log^s n} \sum_{i=0}^{s} a_{is} \left(2(\log\log n)^i - \sum_{j=0}^{m-s} \sum_{r=0}^{\min\{i,j\}} \frac{b_{s,i,j,r} (\log\log n)^{i-r}}{2^j \log^j n} \right) + O(nc_m(n)). \end{aligned}$$

Beweis. Multiplizieren wir die asymptotische Formel aus (3.11) mit n und subtrahieren anschließend die asymptotische Formel aus Theorem 3.2, so folgt die Behauptung. □

Wir erhalten das folgende Korollar.

KOROLLAR 3.7. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann existieren eindeutig bestimmte normierte Polynome $U_s \in \mathbb{Q}[x]$, wobei $1 \leq s \leq m$ und $\operatorname{grad}(U_s) = s$, so dass*

$$C_n = \frac{n^2}{2}\left(\log n + \log\log n - \frac{1}{2} + \sum_{s=1}^{m} \frac{(-1)^{s+1}U_s(\log\log n)}{s\log^s n}\right) + O(nc_m(n))$$

gilt. Insbesondere gilt $U_1(x) = x - 3/2$ und $U_2(x) = x^2 - 5x + 15/2$.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus Proposition 3.6. Setzen wir $m = 2$ in Proposition 3.6, so erhalten wir zusammen mit Satz 2.1 und den Rekursionsformeln (3.1)-(3.4) für $b_{s,i,j,r}$ die Polynome U_1 und U_2. □

Wir werden nun im Folgenden mit Hilfe von (1.13) eine weitere asymptotische Formel für C_n herleiten. Dazu sind die folgenden Lemmata hilfreich.

LEMMA 3.8. *Seien $x, a \in \mathbb{R}$ mit $x \geq a > 1$. Dann gilt*

$$\int_a^x \frac{t\,dt}{\log^2 t} = 2\operatorname{li}(x^2) - 2\operatorname{li}(a^2) - \frac{x^2}{\log x} + \frac{a^2}{\log a}.$$

Beweis. Siehe DUSART [12, Lemme 1.6]. □

LEMMA 3.9. *Seien $r, s \in \mathbb{R}$ mit $s \geq r > 1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\int_r^s \frac{x\,dx}{\log^{n+1} x} = \frac{r^2}{n\log^n r} - \frac{s^2}{n\log^n s} + \frac{2}{n}\int_r^s \frac{x}{\log^n x}\,dx.$$

Beweis. Die Behauptung erfolgt mittels partieller Integration. □

Die nächste Proposition wird im Folgenden eine wichtige Rolle spielen.

PROPOSITION 3.10. *Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$. Seien $a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ und $r, s \in \mathbb{R}$ mit $s \geq r > 1$. Dann gilt*

$$\sum_{k=2}^{m} a_k \int_r^s \frac{x\,dx}{\log^k x} = t_{m-1,1}\int_r^s \frac{x\,dx}{\log^2 x} - \sum_{k=2}^{m-1} t_{m-1,k}\left(\frac{s^2}{\log^k s} - \frac{r^2}{\log^k r}\right),$$

wobei

$$t_{i,j} := (j-1)!\sum_{l=j}^{i} \frac{2^{l-j}a_{l+1}}{l!}. \tag{3.19}$$

Wir beweisen diese Proposition per Induktion nach m und mit Hilfe des folgenden Lemmas.

LEMMA 3.11. *Seien $r, s \in \mathbb{R}$ mit $s \geq r > 1$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ gilt*

$$\int_r^s \frac{x\,dx}{\log^m x} = \frac{2^{m-2}}{(m-1)!}\int_r^s \frac{x\,dx}{\log^2 x} - \sum_{k=2}^{m-1} \frac{2^{m-1-k}(k-1)!}{(m-1)!}\left(\frac{s^2}{\log^k s} - \frac{r^2}{\log^k r}\right).$$

Beweis. Die Behauptung erfolgt mit Hilfe von Lemma 3.9 per Induktion nach m. □

Es folgt der Beweis von Proposition 3.10.

Beweis. Für $m = 2$ ist die Behauptung offensichtlich. Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$\sum_{k=2}^{m+1} a_k \int_r^s \frac{x\,dx}{\log^k x} = t_{m-1,1} \int_r^s \frac{x\,dx}{\log^2 x} - \sum_{k=2}^{m-1} t_{m-1,k} \left(\frac{s^2}{\log^k s} - \frac{r^2}{\log^k r} \right) + a_{m+1} \int_r^s \frac{x\,dx}{\log^{m+1} x}.$$

Wenden wir nun Lemma 3.9 an, so folgt

$$\sum_{k=2}^{m+1} a_k \int_r^s \frac{x\,dx}{\log^k x} = t_{m-1,1} \int_r^s \frac{x\,dx}{\log^2 x} - \sum_{k=2}^{m-1} t_{m-1,k} \left(\frac{s^2}{\log^k s} - \frac{r^2}{\log^k r} \right) + \frac{2a_{m+1}}{m} \int_r^s \frac{x\,dx}{\log^m x}$$
$$- \frac{a_{m+1}s^2}{m \log^m s} + \frac{a_{m+1}r^2}{m \log^m r}.$$

Benutzen wir nun Lemma 3.11, so erhalten wir

$$\sum_{k=2}^{m+1} a_k \int_r^s \frac{x\,dx}{\log^k x} = t_{m-1,1} \int_r^s \frac{x\,dx}{\log^2 x} - \sum_{k=2}^{m-1} t_{m-1,k} \left(\frac{s^2}{\log^k s} - \frac{r^2}{\log^k r} \right) - \frac{a_{m+1}s^2}{m \log^m s} + \frac{a_{m+1}r^2}{m \log^m r}$$
$$+ \frac{2a_{m+1}}{m} \left(\frac{2^{m-2}}{(m-1)!} \int_r^s \frac{x\,dx}{\log^2 x} - \sum_{k=2}^{m-1} \frac{2^{m-1-k}(k-1)!}{(m-1)!} \left(\frac{s^2}{\log^k s} - \frac{r^2}{\log^k r} \right) \right).$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=2}^{m+1} a_k \int_r^s \frac{x\,dx}{\log^k x} = t_{m,1} \int_r^s \frac{x\,dx}{\log^2 x} - \sum_{k=2}^{m-1} \left(\frac{2^{m-k} a_{m+1}(k-1)!}{m!} + t_{m-1,k} \right) \left(\frac{s^2}{\log^k s} - \frac{r^2}{\log^k r} \right)$$
$$- \frac{a_{m+1}(m-1)!}{m!} \left(\frac{s^2}{\log^m s} - \frac{r^2}{\log^m r} \right).$$

Wegen

$$\frac{2^{m-k} a_{m+1}(k-1)!}{m!} + t_{m-1,k} = (k-1)! \sum_{i=k}^{m} \frac{2^{i-k} a_{i+1}}{i!} = t_{m,k}$$

und $t_{m,m} = a_{m+1}(m-1)!/(m!)$, folgt die Behauptung per Induktion nach m. □

Um eine weitere asymptotische Formel für die Differenz C_n zu zeigen, notieren wir die folgende Identität, die eine Möglichkeit liefert, die Differenz C_n über Abschätzungen für $\pi(x)$ aus Kapitel 1 einzugrenzen.

Lemma 3.12. *Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$C_n = \int_2^{p_n} \pi(x)\,dx. \tag{3.20}$$

Beweis. Da $\pi(x)$ auf allen Intervallen der Form $[p_{k-1}, p_k)$ konstant gleich $k-1$ ist, erhalten wir

$$\int_2^{p_n} \pi(x)\,dx = \sum_{k=2}^{n} (p_k - p_{k-1})(k-1) = \sum_{k=2}^{n} (kp_k - (k-1)p_{k-1}) - \sum_{k=2}^{n} p_k = C_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ fest. Mit (3.20) und (1.13) erhalten wir

$$C_n = \sum_{k=1}^{m} (k-1)! \int_2^{p_n} \frac{x\,dx}{\log^k x} + O\left(\int_2^{p_n} \frac{x\,dx}{\log^{m+1} x} \right).$$

Nach Lemma 3.9 gilt

$$\int_2^{p_n} \frac{x\,dx}{\log^{m+1} x} = -\frac{p_n^2}{m \log^m p_n} + \frac{2}{m} \int_2^{p_n} \frac{x\,dx}{\log^m x} + O(1) = -\frac{p_n^2}{m \log^m p_n} + O\left(\frac{p_n^2}{\log^m p_n} \right) = O\left(\frac{p_n^2}{\log^m p_n} \right).$$

Somit ergibt sich die asymptotische Formel

$$C_n = \int_2^{p_n} \frac{x\,dx}{\log x} + \sum_{k=2}^{m} (k-1)! \int_2^{p_n} \frac{x\,dx}{\log^k x} + O\left(\frac{p_n^2}{\log^m p_n}\right)$$

und zusammen mit Proposition 3.10 folgt

$$C_n = \int_2^{p_n} \frac{x\,dx}{\log x} + (2^{m-1}-1) \int_2^{p_n} \frac{x\,dx}{\log^2 x} - \sum_{k=2}^{m-1} \left(\frac{(k-1)!(2^{m-k}-1)p_n^2}{\log^k p_n}\right) + O\left(\frac{p_n^2}{\log^m p_n}\right).$$

Mit Hilfe von Lemma 3.3 und Lemma 3.8 erhalten wir also

$$C_n = (2^m-1)\,\mathrm{li}(p_n^2) - \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{(k-1)!(2^{m-k}-1)p_n^2}{\log^k p_n}\right) + O\left(\frac{p_n^2}{\log^m p_n}\right).$$

In Kombination mit der asymptotischen Formel (1.12) folgt

$$C_n = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(k-1)!(2^m-1)\,p_n^2}{2^k \log^k p_n} - \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{(k-1)!(2^{m-k}-1)p_n^2}{\log^k p_n}\right) + O\left(\frac{p_n^2}{\log^m p_n}\right).$$

Fasst man beide Summen zusammen, ergibt sich die folgende asymptotische Formel für C_n.

Proposition 3.13. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$C_n = \sum_{k=1}^{m-1} (k-1)! \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \frac{p_n^2}{\log^k p_n} + O\left(\frac{p_n^2}{\log^m p_n}\right). \tag{3.21}$$

Im folgenden Korollar notieren wir die ersten sieben Terme der asymptotischen Formel (3.21). Dabei ist

$$\chi(n) = \frac{45p_n^2}{8\log^4 p_n} + \frac{93p_n^2}{4\log^5 p_n} + \frac{945p_n^2}{8\log^6 p_n} + \frac{5715p_n^2}{8\log^7 p_n}.$$

Korollar 3.14. *Es gilt*

$$C_n = \frac{p_n^2}{2\log p_n} + \frac{3p_n^2}{4\log^2 p_n} + \frac{7p_n^2}{4\log^3 p_n} + \chi(n) + O\left(\frac{p_n^2}{\log^8 p_n}\right).$$

Beweis. Wir setzen $m = 8$ in Proposition 3.13 ein. □

Mit Hilfe von Proposition 3.13 und der asymptotischen Formel (1.12) erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 3.15. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{k \le n} p_k = \mathrm{li}(p_n^2) + O\left(\frac{p_n^2}{\log^m p_n}\right).$$

Beweis. Da $n = \pi(p_n)$ ist, folgt mit Hilfe von Proposition 3.13 und der Definition von C_n, dass die asymptotische Formel

$$\sum_{k \le n} p_k = \pi(p_n)p_n - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(k-1)!\,p_n^2}{\log^k p_n} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(k-1)!\,p_n^2}{2^k \log^k p_n} + O\left(\frac{p_n^2}{\log^m p_n}\right)$$

erfüllt ist. Zusammen mit (1.12) und (1.13) folgt die Behauptung. □

Aus Korollar 3.15 sowie den asymptotischen Formeln (1.12) und (1.13) ergibt sich das folgende Resultat.

Korollar 3.16. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{k \le n} p_k = \pi(p_n^2) + O\left(\frac{p_n^2}{\log^m p_n}\right).$$

In den beiden folgenden Abschnitten werden wir mit Hilfe von Lemma 3.12 und Abschätzungen für die Primzahl-Zählfunktion $\pi(x)$ aus Kapitel 1 untere und obere Schranken für C_n beweisen.

3.2.2 Eine untere Schranke für C_n

Dusart [12, p. 50] bewies, dass die Ungleichung

$$C_n \geq c + \frac{p_n^2}{2\log p_n} + \frac{3p_n^2}{4\log^2 p_n} \tag{3.22}$$

für alle $n \geq 109$ erfüllt ist, wobei

$$c = \int_2^{599} \pi(t)\,dt - 3\mathrm{li}(599^2) + \frac{599^2}{\log 599} \approx -47.1.$$

Das Ziel dieses Abschnitts ist, eine untere Schranke für C_n zu beweisen, die die Ungleichung (3.22) verschärfen wird. Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ und seien $a_2, \ldots, a_m, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\pi(x) \geq \frac{x}{\log x} + \sum_{k=2}^{m} \frac{a_k x}{\log^k x} \tag{3.23}$$

für alle $x \geq x_0$ und

$$\mathrm{li}(x) \geq \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(j-1)!x}{\log^j x} \tag{3.24}$$

für alle $x \geq y_0$ gilt. Dann ergibt sich für C_n die folgende untere Schranke.

Proposition 3.17. *Für alle $n \geq \max\{\pi(x_0)+1, \pi(\sqrt{y_0})+1\}$ gilt*

$$C_n \geq d_0 + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{(k-1)!}{2^k}(1+2t_{k-1,1}) \right) \frac{p_n^2}{\log^k p_n},$$

wobei die $t_{i,j}$ wie in (3.19) *definiert sind und die Konstante d_0 gegeben ist durch*

$$d_0 = d_0(m, a_2, \ldots, a_m, x_0) = \int_2^{x_0} \pi(x)\,dx - (1+2t_{m-1,1})\,\mathrm{li}(x_0^2) + \sum_{k=1}^{m-1} t_{m-1,k} \frac{x_0^2}{\log^k x_0}.$$

Beweis. Da $n \geq \max\{\pi(x_0)+1, \pi(\sqrt{y_0})+1\}$ vorausgesetzt ist, gilt $p_n \geq x_0$ und $p_n^2 \geq p_{\pi(\sqrt{y_0})+1}^2 \geq y_0$. Zusammen mit (3.20) und (3.24) erhalten wir somit

$$C_n = \int_2^{x_0} \pi(x)\,dx + \int_{x_0}^{p_n} \pi(x)\,dx \geq \int_2^{x_0} \pi(x)\,dx + \int_{x_0}^{p_n} \frac{x\,dx}{\log x} + \sum_{k=2}^{m} a_k \int_{x_0}^{p_n} \frac{x\,dx}{\log^k x}.$$

Wenden wir Lemma 3.3 an, so folgt

$$C_n \geq \int_2^{x_0} \pi(x)\,dx - \mathrm{li}(x_0^2) + \mathrm{li}(p_n^2) + \sum_{k=2}^{m} a_k \int_{x_0}^{p_n} \frac{x\,dx}{\log^k x}.$$

Mit Hilfe von Proposition 3.10 erhalten wir

$$C_n \geq \int_2^{x_0} \pi(x)\,dx - \mathrm{li}(x_0^2) + \mathrm{li}(p_n^2) + t_{m-1,1} \int_{x_0}^{p_n} \frac{x\,dx}{\log^2 x} - \sum_{k=2}^{m-1} t_{m-1,k} \left(\frac{p_n^2}{\log^k p_n} - \frac{x_0^2}{\log^k x_0} \right).$$

Wenden wir nun Lemma 3.8 an, so folgt

$$C_n \geq d_0 + (1+2t_{m-1,1})\,\mathrm{li}(p_n^2) - \sum_{k=1}^{m-1} t_{m-1,k} \frac{p_n^2}{\log^k p_n}.$$

Da $p_n^2 \geq y_0$ ist, ergibt sich zusammen mit (3.24) die Ungleichung

$$C_n \geq d_0 + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{(k-1)!}{2^k} + \frac{(k-1)!}{2^{k-1}} t_{m-1,1} - t_{m-1,k} \right) \frac{p_n^2}{\log^k p_n}. \tag{3.25}$$

Aus der Definition (3.19) von $t_{i,j}$ folgt

$$\frac{(k-1)!}{2^{k-1}} t_{m-1,1} - t_{m-1,k} = \frac{(k-1)!}{2^{k-1}} t_{k-1,1}. \tag{3.26}$$

Zusammen mit (3.25) folgt die Behauptung. □

Bevor wir $m = 9$ in Proposition 3.17 setzen werden, zeigen wir zunächst eine untere Schranke für $\mathrm{li}(x)$.

Lemma 3.18. *Für alle $x \geq 4171$ gilt*

$$\mathrm{li}(x) \geq \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \frac{6x}{\log^4 x} + \frac{24x}{\log^5 x} + \frac{120x}{\log^6 x} + \frac{720x}{\log^7 x} + \frac{5040x}{\log^8 x}.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \mathrm{li}(x) - \left(\frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \frac{6x}{\log^4 x} + \frac{24x}{\log^5 x} + \frac{120x}{\log^6 x} + \frac{720x}{\log^7 x} + \frac{5040x}{\log^8 x} \right).$$

Dann gilt $f(4171) \geq 0.00019$ und $f'(x) = 40320/\log^9 x$. Es folgt die Behauptung. □

Sei nun $m = 9$. Wählen wir $a_2 = 1$ und $a_3 = 2$, so ist $d_0 = d_0(9, 1, 2, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, x_0)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} d_0 = {} & \int_2^{x_0} \pi(x)\,dx - \Delta\,\mathrm{li}(x_0^2) + \frac{(\Delta-1)x_0^2}{2\log x_0} + \frac{(\Delta-3)x_0^2}{4\log^2 x_0} + \frac{(\Delta-7)x_0^2}{4\log^3 x_0} + \frac{(3\Delta-21-4a_4)x_0^2}{8\log^4 x_0} \\ & + \frac{(3\Delta-21-4a_4-2a_5)x_0^2}{4\log^5 x_0} + \left(\frac{a_7}{6} + \frac{a_8}{21} + \frac{a_9}{84}\right)\frac{x_0^2}{\log^6 x_0} + \left(\frac{a_8}{7} + \frac{a_9}{28}\right)\frac{x_0^2}{\log^7 x_0} + \frac{a_9 x_0^2}{8\log^8 x_0}, \end{aligned}$$

wobei

$$\Delta = \Delta(a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9) := 7 + \frac{4a_4}{3} + \frac{2a_5}{3} + \frac{4a_6}{15} + \frac{4a_7}{45} + \frac{8a_8}{315} + \frac{2a_9}{315} \tag{3.27}$$

ist. Wir erhalten das folgende Resultat.

Proposition 3.19. *Für alle $n \geq \max\{\pi(x_0)+1, 19\}$ gilt*

$$\begin{aligned} C_n \geq {} & d_0 + \frac{p_n^2}{2\log p_n} + \frac{3p_n^2}{4\log^2 p_n} + \frac{7p_n^2}{4\log^3 p_n} + \left(\frac{21}{8} + \frac{a_4}{2}\right)\frac{p_n^2}{\log^4 p_n} + \left(\frac{21}{4} + a_4 + \frac{a_5}{2}\right)\frac{p_n^2}{\log^5 p_n} \\ & + \left(\frac{105}{8} + \frac{5a_4}{2} + \frac{5a_5}{4} + \frac{a_6}{2}\right)\frac{p_n^2}{\log^6 p_n} + \left(\frac{315}{8} + \frac{15a_4}{2} + \frac{15a_5}{4} + \frac{3a_6}{2} + \frac{a_7}{2}\right)\frac{p_n^2}{\log^7 p_n} \\ & + \left(\frac{2205}{16} + \frac{105a_4}{4} + \frac{105a_5}{8} + \frac{21a_6}{4} + \frac{7a_7}{4} + \frac{a_8}{2}\right)\frac{p_n^2}{\log^8 p_n}. \end{aligned}$$

Beweis. Setzen wir $m = 9, a_2 = 1$ und $a_3 = 2$ in Proposition 3.17, so folgt zusammen mit Lemma 3.18 die Behauptung für alle $n \geq \max\{\pi(x_0)+1, \pi(\sqrt{4171})+1\}$. Da $\pi(\sqrt{4171})+1 = 19$ ist, folgt die Behauptung. □

Bevor wir ein Korollar aus dieser Proposition folgern werden, zeigen wir zunächst die folgende Proposition.

Proposition 3.20. *Es gilt*

$$d_0(9, 1, 2, 5.648, 23.648, 118.24, 709.44, 4966.08, 0, 1332433009) \geq 5 \cdot 10^{10}.$$

Für den Beweis von Proposition 3.20 wird die folgende obere Schranke für $\mathrm{li}(x)$ nützlich sein.

LEMMA 3.21. *Für alle* $x \geq 10^{16}$ *gilt*

$$\mathrm{li}(x) \leq \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \frac{6x}{\log^4 x} + \frac{24x}{\log^5 x} + \frac{120x}{\log^6 x} + \frac{900x}{\log^7 x}.$$

Beweis. Wir definieren

$$f(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \frac{6x}{\log^4 x} + \frac{24x}{\log^5 x} + \frac{120x}{\log^6 x} + \frac{900x}{\log^7 x} - \mathrm{li}(x).$$

Dann gilt $f(10^{16}) \geq 366018.118$. Da außerdem $f'(x)\log^8 x = 180(\log x - 35) \geq 0$ für alle $x \geq 10^{16} \geq e^{35}$ gilt, folgt die Behauptung. □

Es folgt der Beweis von Proposition 3.20.

Beweis. Sei $x_0 = 1332433009$. Nach Theorem 1.25 gilt

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \frac{5.648x}{\log^4 x} + \frac{23.648x}{\log^5 x} + \frac{118.24x}{\log^6 x} + \frac{709.44x}{\log^7 x} + \frac{4966.08x}{\log^8 x}$$

für alle $x \geq x_0$. Dann ist $d_0 = d_0(9, 1, 2, 5.648, 23.648, 118.24, 709.44, 4966.08, 0, x_0)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} d_0 = \int_2^{x_0} \pi(x)\,dx - \frac{753.032}{3}\,\mathrm{li}(x_0^2) + \frac{375.016x_0^2}{3\log x_0} + \frac{186.008x_0^2}{3\log^2 x_0} + \frac{183.008x_0^2}{3\log^3 x_0} + \frac{88.68x_0^2}{\log^4 x_0} + \frac{165.536x_0^2}{\log^5 x_0} \\ + \frac{354.72x_0^2}{\log^6 x_0} + \frac{709.44x_0^2}{\log^7 x_0}. \end{aligned}$$

Da $x_0^2 \geq 10^{16}$ ist, folgt zusammen mit Hilfe von Lemma 3.21, dass die Ungleichung

$$d_0 \geq \int_2^{x_0} \pi(x)\,dx - \frac{x_0^2}{2\log x_0} - \frac{3x_0^2}{4\log^2 x_0} - \frac{7x_0^2}{4\log^3 x_0} - \frac{5.449x_0^2}{\log^4 x_0} - \frac{22.722x_0^2}{\log^5 x_0} - \frac{115.925x_0^2}{\log^6 x_0} - \frac{1055.47875x_0^2}{\log^7 x_0}$$

erfüllt ist. Wegen $\log x_0 \geq 21.01027$, folgt

$$\begin{aligned} d_0 &\geq \int_2^{x_0} \pi(x)\,dx - 4.22502358 \cdot 10^{16} - 0.30163988 \cdot 10^{16} - 0.03349915 \cdot 10^{16} - 0.00496456 \cdot 10^{16} \\ &\quad - 0.00098532 \cdot 10^{16} - 0.00023926 \cdot 10^{16} - 0.00010368 \cdot 10^{16} \\ &= \int_2^{x_0} \pi(x)\,dx - 4.56645543 \cdot 10^{16}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Da $x_0 = p_{66772781}$ gilt, rechnet man mit Hilfe von Lemma 3.12 und einem Computer nach, dass

$$\int_2^{x_0} \pi(x)\,dx = C_{66772781} = 66772781\,p_{66772781} - \sum_{k \leq 66772781} p_k = 45664611127913487$$

gilt. Zusammen mit (3.28) folgt die Behauptung. □

Definieren wir

$$\Theta(n) = \frac{43.592p_n^2}{8\log^4 p_n} + \frac{90.888p_n^2}{4\log^5 p_n} + \frac{927.4p_n^2}{8\log^6 p_n} + \frac{702.495p_n^2}{\log^7 p_n} + \frac{4941.7725p_n^2}{\log^8 p_n}, \tag{3.29}$$

so erhalten wir mit Hilfe von Theorem 1.25 in Hinblick auf Korollar 3.14 das folgende Korollar, mit dem wir die Ungleichung (3.23) verschärfen werden.

KOROLLAR 3.22. *Für alle* $n \geq 52217015$ *gilt*

$$C_n \geq \frac{p_n^2}{2\log p_n} + \frac{3p_n^2}{4\log^2 p_n} + \frac{7p_n^2}{4\log^3 p_n} + \Theta(n).$$

Beweis. Sei $x_0 = 1332433009$. Nach Theorem 1.25 gilt

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \frac{5.648x}{\log^4 x} + \frac{23.648x}{\log^5 x} + \frac{118.24x}{\log^6 x} + \frac{709.44x}{\log^7 x} + \frac{4966.08x}{\log^8 x}$$

für alle $x \geq x_0$. Setzen wir $a_4 = 5.648, a_5 = 23.648, a_6 = 118.24, a_7 = 709.44, a_8 = 4966.08$ und $a_9 = 0$ in Proposition 3.19 ein, so ergibt sich zusammen mit Proposition 3.20, dass die Ungleichung

$$C_n \geq \frac{p_n^2}{2\log p_n} + \frac{3p_n^2}{4\log^2 p_n} + \frac{7p_n^2}{4\log^3 p_n} + \Theta(n)$$

für alle $n \geq \max\{\pi(x_0)+1, 19\} = 66772782$ gilt. Für $52217015 \leq n \leq 66772781$ prüfen wir die Ungleichung mit einem Computer nach. Es folgt die Behauptung. $\square$

3.2.3 Eine obere Schranke für C_n

In diesem Abschnitt werden wir erstmals eine obere Schranke für C_n beweisen. Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$. Seien $a_2, \ldots, a_m, x_1 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\pi(x) \leq \frac{x}{\log x} + \sum_{k=2}^{m} \frac{a_k x}{\log^k x} \tag{3.30}$$

für alle $x \geq x_1$ gilt und $\lambda, y_1 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\operatorname{li}(x) \leq \sum_{j=1}^{m-2} \frac{(j-1)!x}{\log^j x} + \frac{\lambda x}{\log^{m-1} x} \tag{3.31}$$

für alle $x \geq y_1$ gilt. Setzen wir

$$d_1 := d_1(m, a_2, \ldots, a_m, x_1) = \int_2^{x_1} \pi(x)\,dx - (1+2t_{m-1,1})\operatorname{li}(x_1^2) + \sum_{k=1}^{m-1} t_{m-1,k} \frac{x_1^2}{\log^k x_1},$$

wobei die $t_{m-1,k}$ wie in (3.19) definiert sind, so erhalten wir das folgende Theorem.

Theorem 3.23. *Für alle $n \geq \max\{\pi(x_1)+1, \pi(\sqrt{y_1})+1\}$ gilt*

$$C_n \leq d_1 + \sum_{k=1}^{m-2} \left(\frac{(k-1)!}{2^k}(1+2t_{k-1,1}) \right) \frac{p_n^2}{\log^k p_n} + \left(\frac{(1+2t_{m-1,1})\lambda}{2^{m-1}} - \frac{a_m}{m-1} \right) \frac{p_n^2}{\log^{m-1} p_n}.$$

Beweis. Sei $n \geq \max\{\pi(x_1)+1, \pi(\sqrt{y_1})+1\}$. Dann folgt $p_n \geq x_1$ und $p_n^2 \geq p_{\pi(\sqrt{y_1})+1}^2 \geq y_1$. Zusammen mit (3.20) und (3.30) ergibt sich die Ungleichung

$$_n = \int_2^{x_1} \pi(x)\,dx + \int_{x_1}^{p_n} \pi(x)\,dx \leq \int_2^{x_1} \pi(x)\,dx + \int_{x_1}^{p_n} \frac{x\,dx}{\log x} + \sum_{k=2}^{m} a_k \int_{x_1}^{p_n} \frac{x\,dx}{\log^k x}.$$

Mit Hilfe von Lemma 3.3 erhalten wir

$$C_n \leq \int_2^{x_1} \pi(x)\,dx - \operatorname{li}(x_1^2) + \operatorname{li}(p_n^2) + \sum_{k=2}^{m} a_k \int_{x_1}^{p_n} \frac{x\,dx}{\log^k x}.$$

Wenden wir nun Proposition 3.10 an, so ergibt sich

$$C_n \leq \int_2^{x_1} \pi(x)\,dx - \operatorname{li}(x_1^2) + \operatorname{li}(p_n^2) + t_{m-1,1} \int_{x_1}^{p_n} \frac{x\,dx}{\log^2 x} - \sum_{k=2}^{m-1} t_{m-1,k} \left(\frac{p_n^2}{\log^k p_n} - \frac{x_1^2}{\log^k x_1} \right).$$

Aus Lemma 3.8 folgt somit

$$C_n \leq d_1 + (1 + 2t_{m-1,1})\,\mathrm{li}(p_n^2) - \sum_{k=1}^{m-1} t_{m-1,k} \frac{p_n^2}{\log^k p_n}.$$

In Kombination mit der Ungleichung (3.31) folgt

$$C_n \leq d_1 + \sum_{k=1}^{m-2} \left(\frac{(k-1)!}{2^k} + \frac{t_{m-1,1}(k-1)!}{2^{k-1}} - t_{m-1,k} \right) \frac{p_n^2}{\log^k p_n} + \left(\frac{(1+2t_{m-1,1})\lambda}{2^{m-1}} - t_{m-1,m-1} \right) \frac{p_n^2}{\log^{m-1} p_n}$$

und zusammen mit (3.26) und $t_{m-1,m-1} = a_m/(m-1)$ folgt die Behauptung. □

Sei $m = 9$. Setzen wir $a_2 = 1$ und $a_3 = 2$, so ist $d_1 = d_1(9, 1, 2, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, x_1)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} d_1 = & \int_2^{x_1} \pi(x)\,dx - \Delta\,\mathrm{li}(x_1^2) + \frac{(\Delta-1)x_1^2}{2\log x_1} + \frac{(\Delta-3)x_1^2}{4\log^2 x_1} + \frac{(\Delta-7)x_1^2}{4\log^3 x_1} + \frac{(3\Delta-21-4a_4)x_1^2}{8\log^4 x_1} \\ & + \frac{(3\Delta-21-4a_4-2a_5)x_1^2}{4\log^5 x_1} + \left(\frac{a_7}{6} + \frac{a_8}{21} + \frac{a_9}{84}\right)\frac{x_1^2}{\log^6 x_1} + \left(\frac{a_8}{7} + \frac{a_9}{28}\right)\frac{x_1^2}{\log^7 x_1} + \frac{a_9 x_1^2}{8\log^8 x_1}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

wobei $\Delta = \Delta(a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$ wie in (3.27) definiert ist, und wir erhalten die folgende Proposition.

Proposition 3.24. *Für alle $n \geq \max\{\pi(x_1)+1, \pi(\sqrt{y_1})+1\}$ gilt*

$$\begin{aligned} C_n \leq & d_1 + \frac{p_n^2}{2\log p_n} + \frac{3p_n^2}{4\log^2 p_n} + \frac{7p_n^2}{4\log^3 p_n} + \left(\frac{21}{8} + \frac{a_4}{2}\right)\frac{p_n^2}{\log^4 p_n} + \left(\frac{21}{4} + a_4 + \frac{a_5}{2}\right)\frac{p_n^2}{\log^5 p_n} \\ & + \left(\frac{105}{8} + \frac{5a_4}{2} + \frac{5a_5}{4} + \frac{a_6}{2}\right)\frac{p_n^2}{\log^6 p_n} + \left(\frac{315}{8} + \frac{15a_4}{2} + \frac{15a_5}{4} + \frac{3a_6}{2} + \frac{a_7}{2}\right)\frac{p_n^2}{\log^7 p_n} \\ & + \left(\frac{\lambda\Delta}{256} - \frac{a_9}{8}\right)\frac{p_n^2}{\log^8 p_n}. \end{aligned}$$

Beweis. Wir setzen $m = 9, a_2 = 1$ und $a_3 = 2$ in Theorem 3.23 ein und erhalten die Behauptung. □

Mit Hilfe der oberen Schranke für $\pi(x)$ aus Theorem 1.10 erhalten wir das folgende Korollar. Dabei sei

$$\Omega(n) = \frac{46.408p_n^2}{8\log^4 p_n} + \frac{95.112p_n^2}{4\log^5 p_n} + \frac{962.6p_n^2}{8\log^6 p_n} + \frac{5810.04p_n^2}{8\log^7 p_n} + \frac{59429p_n^2}{8\log^8 p_n}. \tag{3.33}$$

Korollar 3.25. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$C_n \leq \frac{p_n^2}{2\log p_n} + \frac{3p_n^2}{4\log^2 p_n} + \frac{7p_n^2}{4\log^3 p_n} + \Omega(n).$$

Für den Beweis dieses Korollars benötigen wir die beiden folgenden Lemmata.

Lemma 3.26. *Für alle $x \geq 10^{18}$ gilt*

$$\mathrm{li}(x) \leq \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \frac{6x}{\log^4 x} + \frac{24x}{\log^5 x} + \frac{120x}{\log^6 x} + \frac{720x}{\log^7 x} + \frac{6300x}{\log^8 x}.$$

Beweis. Sei

$$f(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \frac{6x}{\log^4 x} + \frac{24x}{\log^5 x} + \frac{120x}{\log^6 x} + \frac{720x}{\log^7 x} + \frac{6300x}{\log^8 x} - \mathrm{li}(x).$$

Dann gilt $f'(x) = 1260(\log x - 40)/\log^9 x \geq 0$ für alle $x \geq 2.36 \cdot 10^{17} \geq e^{40}$. Zusammen mit $f(10^{18}) \geq 646355.66$ folgt die Behauptung. □

Lemma 3.27. *Es gilt*

$$d_1(9, 1, 2, 6.352, 24.352, 121.76, 730.56, 6802, 0, 18) \leq 562.44.$$

Beweis. Nach Theorem 1.10 gilt

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \frac{6.352x}{\log^4 x} + \frac{24.352x}{\log^5 x} + \frac{121.76x}{\log^6 x} + \frac{730.56x}{\log^7 x} + \frac{6802x}{\log^8 x}$$

für alle $x > 1$. Setzen wir also $a_4 = 6.352, a_5 = 24.352, a_6 = 121.76, a_7 = 730.56, a_8 = 6802, a_9 = 0$ und $x_1 = 18$ in (3.32) ein, so erhalten wir zusammen mit $\mathrm{li}(18^2) \geq 72.5128, \log 18 \geq 2.89$ und $301.86 \leq \Delta \leq 301.87$ die Ungleichung

$$d_1 \leq 434 - 301.86 \cdot 72.5128 + \frac{150.435 \cdot 18^2}{2.89} + \frac{74.7175 \cdot 18^2}{2.89^2} + \frac{73.7175 \cdot 18^2}{2.89^3} + \frac{107.40025 \cdot 18^2}{2.89^4} + \frac{202.6245 \cdot 18^2}{2.89^5} + \frac{445.67 \cdot 18^2}{2.89^6} + \frac{971.72 \cdot 18^2}{2.89^7}.$$

Rechnen wir den Ausdruck auf der rechten Seite aus, so folgt die Behauptung. □

Es folgt der Beweis von Korollar 3.25.

Beweis. Nach Theorem 1.10 und Lemma 3.26 sind die Ungleichungen (3.30) und (3.31) für $a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 6.352, a_5 = 24.352, a_6 = 121.76, a_7 = 730.56, a_8 = 6802, \lambda = 6300, x_1 = 18$ und $y_1 = 10^{18}$ erfüllt. Setzen wir diese Werte in Proposition 3.24 ein, so erhalten wir, dass die Ungleichung

$$C_n \leq d_1 + \frac{p_n^2}{2\log p_n} + \frac{3p_n^2}{4\log^2 p_n} + \frac{7p_n^2}{4\log^3 p_n} + \Omega(n) - \frac{0.075p_n^2}{8\log^8 p_n} \tag{3.34}$$

für alle $n \geq \max\{8, \pi(\sqrt{10^{18}}) + 1\} = 50847535$ erfüllt ist. Setzen wir $f(x) = 0.075x^2/(8\log^8 x)$, so gilt $f(2 \cdot 10^7) \geq 587.8$ und $f'(x) = 0.075 \cdot 2x(\log x - 4)/(8\log^9 x) \geq 0$ für alle $x \geq e^4$. Mit Hilfe von Lemma 3.27 folgt somit

$$d_1 \leq \frac{0.075p_n^2}{8\log^8 p_n}$$

für alle $n \geq \pi(2 \cdot 10^7) + 1 = 1270608$. Zusammen mit (3.34) folgt, dass die behauptete Ungleichung für alle $n \geq 50847535$ erfüllt ist. Für $1 \leq n \leq 50847534$ überprüfen wir die Ungleichung mit einem Computer. □

3.3 Über die Differenz $D_n := np_n/2 - \sum_{k\leq n} p_k$

In einem Artikel von Rosser & Schoenfeld [49] aus dem Jahr 1975 wird eine Vermutung von Mandl über eine obere Schranke für die Summe der ersten n Primzahlen erwähnt. Sie besagt, dass

$$\sum_{k\leq n} p_k < \frac{n}{2}p_n \tag{3.35}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 9$ gilt und wurde im Jahr 1998 von Dusart [12, Théorème 1.14] bewiesen. Wir werden in diesem Abschnitt die Differenz

$$D_n := \frac{n}{2}p_n - \sum_{k\leq n} p_k$$

genauer studieren. Dazu leiten wir im Folgenden erstmals eine asymptotische Formel für D_n her und beweisen, mit Hilfe der in Kapitel 1 bewiesenen Abschätzungen für $\pi(x)$, untere und obere Schranken für D_n, welche die in der Literatur bisher bekannten Abschätzungen für D_n deutlich verschärfen werden und mit deren Hilfe wir obere und untere Schranken für die Summe der ersten n Primzahlen herleiten werden.

3.3.1 Eine asymptotische Formel für D_n

Mit Hilfe von (3.11) und Theorem 3.2 erhalten wir die folgende asymptotische Formel für D_n.

Proposition 3.28. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$D_n = \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{2} h_m(n) + \frac{n^2}{2} \sum_{s=1}^{m} \frac{(-1)^s}{s \log^s n} \sum_{i=0}^{s} a_{is} \sum_{j=1}^{m-s} \sum_{r=0}^{\min\{i,j\}} \frac{b_{s,i,j,r} (\log\log n)^{i-r}}{2^j \log^j n} + O(nc_m(n)).$$

Beweis. Multiplizieren wir die asymptotische Formel aus (3.11) mit $n/2$ und subtrahieren anschließend die asymptotische Formel aus Theorem 3.2, so folgt

$$\begin{aligned} D_n = \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{2} h_m(n) + \frac{n^2}{2} \sum_{s=1}^{m} \frac{(-1)^{s+1}}{s \log^s n} \sum_{i=0}^{s} a_{is} \left((\log\log n)^i - \sum_{j=0}^{m-s} \sum_{r=0}^{\min\{i,j\}} \frac{b_{s,i,j,r} (\log\log n)^{i-r}}{2^j \log^j n} \right) \\ + O(nc_m(n)). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Es gilt

$$\sum_{j=0}^{m-s} \sum_{r=0}^{\min\{i,j\}} \frac{b_{s,i,j,r} (\log\log n)^{i-r}}{2^j \log^j n} = b_{s,i,0,0} (\log\log n)^i + \sum_{j=1}^{m-s} \sum_{r=0}^{\min\{i,j\}} \frac{b_{s,i,j,r} (\log\log n)^{i-r}}{2^j \log^j n}.$$

Da $b_{s,i,0,0} = 1$ nach (3.1) ist, folgt zusammen mit (3.36) die Behauptung. □

Wir erhalten die beiden folgenden Korollare.

Korollar 3.29. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann existieren eindeutig bestimmte Polynome $V_s \in \mathbb{Q}[x]$, wobei $2 \leq s \leq m$ und* $\mathrm{grad}(V_s) = s - 1$, *so dass*

$$D_n = \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4 \log n} + \frac{n^2}{2} \sum_{s=2}^{m} \frac{(-1)^{s+1} V_s(\log\log n)}{s \log^s n} + O(nc_m(n)).$$

Beweis. Die Behauptung folgt offenbar aus Proposition 3.28. □

Korollar 3.30. *Es gilt*

$$D_n = \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4 \log n} - \frac{n^2(\log\log n - 7/2)}{4 \log^2 n} + O\left(\frac{n^2 (\log\log n)^3}{\log^3 n} \right).$$

Beweis. Wir setzen $m = 2$ in Proposition 3.28 und zusammen mit Satz 2.1 sowie den Rekursionsformeln (3.1)-(3.4) für $b_{s,i,j,r}$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Aus Korollar 3.30 folgt insbesondere, dass $V_2(x) = x - 7/2$ ist. Sinha [55, Lemma 3.1] hatte in seinem Artikel aufgrund von zwei Rechenfehlern das Polynom $V_2(x) = x - 49/2$ angegeben.

3.3.2 Neue untere Schranken für D_n

Dusart [12, Théorème 1.14] konnte mit dem Beweis der Ungleichung (3.35) zeigen, dass

$$D_n > 0$$

für alle $n \geq 9$ gilt. Dies konnte Hassani [22, Kapitel 2] im Jahr 2007 verschärfen, indem er zeigte, dass $D_n > n^2/14$ für alle $n \geq 10$ gilt. Die zur Zeit beste untere Schranke für die Differenz D_n stammt von Sun [59, Theorem 1.1]. Er bewies im Jahr 2012, dass die Ungleichung

$$D_n > \frac{n^2}{4} \tag{3.37}$$

für alle $n \geq 417$ gilt.

Bemerkung. Sinha [55] vermutete im Jahr 2010, basierend auf mehreren Überprüfungen, dass die Ungleichung

$$D_n > \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{2\log n} - \frac{n^2 \log\log n}{4\log^2 n}$$

für alle $n \geq 835$ gilt, womit er die Ungleichung (3.38) deutlich verschärfen würde. Nach Korollar 3.30 ist diese Ungleichung jedoch für alle hinreichend große n falsch.

Das Ziel in diesem Abschnitt ist, mit Hilfe von Korollar 3.22 zu beweisen, dass die Ungleichung

$$D_n > \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4\log n} - \frac{n^2(\log\log n - 2.092)}{4\log^2 n} \tag{3.38}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 348247$ erfüllt ist, womit wir insbesondere die untere Schranke (3.37) verschärfen werden. Dazu setzen wir

$$\rho(n) = \frac{2.092\log^2 n}{4\log^2 p_n} + \frac{\log^2 p_n \log^2 n + 16.296\log^2 n - \log^3 p_n \log n + \log^3 p_n \log\log n}{4\log^3 p_n}$$

und erhalten das folgende Theorem.

Theorem 3.31. *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 842019$ gilt*

$$D_n > \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4\log n} - \frac{n^2\log\log n}{4\log^2 n} + \frac{\rho(n)n^2}{\log^2 n}.$$

Für den Beweis dieses Theorems ist das folgende Lemma hilfreich.

Lemma 3.32. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$927p_n^2\log p_n + 5619.96p_n^2 > 118n^2\log^3 p_n + 762np_n\log^2 p_n.$$

Beweis. Aus der oberen Schranke für $\pi(x)$ aus Satz 1.4 folgt, dass

$$p_n > n(\log p_n - 1.1) \tag{3.39}$$

für alle $n \geq 6077 = \pi(60184) + 1$ gilt. Sei zunächst $n \geq 6077$. Aus (3.39) folgt dann

$$927p_n^2\log p_n > 927np_n(\log p_n - 1.1)\log p_n = 762np_n\log^2 p_n + 165np_n\log^2 p_n - 1019.7np_n\log p_n. \tag{3.40}$$

Da mit Hilfe von (3.39) die Ungleichung

$$165np_n\log^2 p_n > 165n^2(\log p_n - 1.1)\log^2 p_n = 47n^2\log^3 p_n + 118n^2\log^3 p_n - 181.5n^2\log^2 p_n$$

erfüllt ist, erhalten wir zusammen mit (3.40) die Ungleichung

$$927p_n^2\log p_n > 762np_n\log^2 p_n + 47n^2\log^3 p_n + 118n^2\log^3 p_n - 181.5n^2\log^2 p_n - 1019.7np_n\log p_n. \tag{3.41}$$

Da $n \geq 6077$ ist, folgt $\log p_n \geq 11 > 181.5/47$. In Kombination mit (3.41) ergibt sich

$$927p_n^2\log p_n > 762np_n\log^2 p_n + 118n^2\log^3 p_n - 1019.7np_n\log p_n. \tag{3.42}$$

Es gilt $\log p_n \geq 1.1/0.75$ und zusammen mit (3.39) folgt

$$p_n > n(\log p_n - 1.1) \geq 0.25n\log p_n.$$

Somit gilt $5619.96p_n^2 > 1019.7np_n\log p_n$. Zusammen mit (3.42) folgt die Behauptung für alle $n \geq 6077$. Für $1 \leq n \leq 6076$ prüfen wir die Ungleichung mit einem Computer nach. Es folgt die Behauptung. □

Es folgt der Beweis von Theorem 3.31.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $n \geq 52217015$. Sei $\Theta(n)$ wie in (3.29) definiert. Wir werden im Folgenden zeigen, dass die Ungleichung

$$\frac{p_n^2}{2\log p_n} + \frac{3p_n^2}{4\log^2 p_n} + \frac{7p_n^2}{4\log^3 p_n} + \Theta(n) > \frac{n}{2}\,p_n + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4\log n} - \frac{n^2\log\log n}{4\log^2 n} + \frac{\rho(n)n^2}{\log^2 n} \tag{3.43}$$

erfüllt ist, womit nach Korollar 3.22 die Behauptung folgt, da $C_n = D_n + np_n/2$ ist. Der Übersicht halber schreiben wir im Folgenden $p = p_n$, $y = \log n$ und $z = \log p$. Mit Lemma 3.32 und der Definition von $\rho(n)$ erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} &2n^2z^7y^2 + 4.184n^2z^6y^2 + 32.592n^2z^5y^2 + 927.4p^2z^2y^2 + 5619.96p^2zy^2 + 39534.18p^2y^2 \\ &\quad > 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\rho(n)n^2z^8 + 117.10328n^2z^4y^2 + 761.71624npz^3y^2. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Wir setzen

$$\Psi_0(x) = x - 1.1,$$

Dann ist die Ungleichung (3.44) äquivalent zu

$$\begin{aligned} &2n^2z^7y^2 + 4.184n^2z^6y^2 + 53.48n^2z^4y^2\Psi_0(z) + 927.4p^2z^2y^2 + 5619.96p^2zy^2 + 39534.18p^2y^2 \\ &\quad > 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\rho(n)n^2z^8 + 20.888n^2z^5y^2 + 58.27528n^2z^4y^2 + 761.71624npz^3y^2. \end{aligned}$$

Zusammen mit (3.39) ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned} &2n^2z^7y^2 + 4.184n^2z^6y^2 + 53.48npz^4y^2 + 927.4p^2z^2y^2 + 5619.96p^2zy^2 + 39534.18p^2y^2 \\ &\quad > 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\rho(n)n^2z^8 + 20.888n^2z^5y^2 + 58.27528n^2z^4y^2 + 761.71624npz^3y^2. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} &2n^2z^7y^2 + 4.184n^2z^6y^2 + 181.776npz^3y^2\Psi_0(z) + 927.4p^2z^2y^2 + 5619.96p^2zy^2 + 39534.18p^2y^2 \\ &\quad > 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\rho(n)n^2z^8 + 20.888n^2z^5y^2 + 58.27528n^2z^4y^2 + 128.296npz^4y^2 \\ &\qquad + 561.76264npz^3y^2 \end{aligned}$$

und in Kombination mit (3.39) folgt

$$\begin{aligned} &2n^2z^7y^2 + 4.184n^2z^6y^2 + 181.776p^2z^3y^2 + 927.4p^2z^2y^2 + 5619.96p^2zy^2 + 39534.18p^2y^2 \\ &\quad > 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\rho(n)n^2z^8 + 20.888n^2z^5y^2 + 58.27528n^2z^4y^2 + 128.296npz^4y^2 \\ &\qquad + 561.76264npz^3y^2. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Setzen wir

$$\Psi_1(x) = x - 1 - \frac{1.17}{x},$$

so ist die Ungleichung (3.45) äquivalent zu

$$\begin{aligned} &2n^2z^7y^2 + 10.184n^2z^5y^2\Psi_1(z) + 181.776p^2z^3y^2 + 927.4p^2z^2y^2 + 5619.96p^2zy^2 + 39534.18p^2y^2 \\ &\quad > 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\rho(n)n^2z^8 + 6n^2z^6y^2 + 10.704n^2z^5y^2 + 46.36n^2z^4y^2 \\ &\qquad + 128.296npz^4y^2 + 561.76264npz^3y^2 \end{aligned}$$

und mit (1.38) erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} &2n^2z^7y^2 + 10.184npz^5y^2 + 181.776p^2z^3y^2 + 927.4p^2z^2y^2 + 5619.96p^2zy^2 + 39534.18p^2y^2 \\ &\quad > 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\rho(n)n^2z^8 + 6n^2z^6y^2 + 10.704n^2z^5y^2 + 46.36n^2z^4y^2 \\ &\qquad + 128.296npz^4y^2 + 561.76264npz^3y^2. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}2n^2z^7y^2 &+ 43.592npz^4y^2\Psi_1(z) + 181.776p^2z^3y^2 + 927.4p^2z^2y^2 + 5619.96p^2zy^2 + 39534.18p^2y^2 \\ &> 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\rho(n)n^2z^8 + 6n^2z^6y^2 + 10.704n^2z^5y^2 + 46.36n^2z^4y^2 + 33.408npz^5y^2 \\ &\quad + 84.704npz^4y^2 + 510.76npz^3y^2\end{aligned}$$

und mit Hilfe von (1.38) ergibt sich

$$\begin{aligned}2n^2z^7y^2 + 8\Theta(n)z^8y^2 &> 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\rho(n)n^2z^8 + 6n^2z^6y^2 + 10.704n^2z^5y^2 + 46.36n^2z^4y^2 \\ &\quad + 33.408npz^5y^2 + 84.704npz^4y^2 + 510.76npz^3y^2. \end{aligned}\tag{3.46}$$

Setzen wir

$$\Psi_2(x) = x - 1 - \frac{1}{x} - \frac{3.84}{x^2},$$

so ist die Ungleichung (3.46) äquivalent zu

$$\begin{aligned}4n^2z^6y^2\Psi_2(z) + 8\Theta(n)z^8y^2 &> 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\rho(n)n^2z^8 + 2n^2z^7y^2 + 2n^2z^6y^2 + 6.704n^2z^5y^2 \\ &\quad + 31n^2z^4y^2 + 33.408npz^5y^2 + 84.704npz^4y^2 + 510.76npz^3y^2\end{aligned}$$

und mit (1.36) ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned}4npz^6y^2 + 8\Theta(n)z^8y^2 &> 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\rho(n)n^2z^8 + 2n^2z^7y^2 + 2n^2z^6y^2 + 6.704n^2z^5y^2 \\ &\quad + 31n^2z^4y^2 + 33.408npz^5y^2 + 84.704npz^4y^2 + 510.76npz^3y^2.\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}14npz^5y^2\Psi_2(z) + 8\Theta(n)z^8y^2 &> 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\rho(n)n^2z^8 + 2n^2z^7y^2 + 2n^2z^6y^2 + 6.704n^2z^5y^2 \\ &\quad + 31n^2z^4y^2 + 10npz^6y^2 + 19.408npz^5y^2 + 70.704npz^4y^2 + 457npz^3y^2.\end{aligned}$$

In Kombination mit (1.36) erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned}14p^2z^5y^2 + 8\Theta(n)z^8y^2 &> 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\rho(n)n^2z^8 + 2n^2z^7y^2 + 2n^2z^6y^2 + 6.704n^2z^5y^2 \\ &\quad + 31n^2z^4y^2 + 10npz^6y^2 + 19.408npz^5y^2 + 70.704npz^4y^2 + 457npz^3y^2.\end{aligned}$$

Setzen wir

$$\Psi_3(x) = x - 1 - \frac{1}{x} - \frac{3.352}{x^2} - \frac{15.5}{x^3},$$

so ist die letzte Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned}2n^2z^7y^2\Psi_3(z) + 14p^2z^5y^2 + 8\Theta(n)z^8y^2 &> 2n^2z^8y^2 + 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\rho(n)n^2z^8 + 10npz^6y^2 \\ &\quad + 19.408npz^5y^2 + 70.704npz^4y^2 + 457npz^3y^2.\end{aligned}$$

Dann folgt zusammen mit (1.34), dass die Ungleichung

$$\begin{aligned}2npz^7y^2 + 14p^2z^5y^2 + 8\Theta(n)z^8y^2 &> 2n^2z^8y^2 + 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\rho(n)n^2z^8 + 10npz^6y^2 \\ &\quad + 19.408npz^5y^2 + 70.704npz^4y^2 + 457npz^3y^2\end{aligned}$$

erfüllt ist. Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}6npz^6y^2\Psi_3(z) + 14p^2z^5y^2 + 8\Theta(n)z^8y^2 &> 2n^2z^8y^2 + 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\rho(n)n^2z^8 + 4npz^7y^2 \\ &\quad + 4npz^6y^2 + 13.408npz^5y^2 + 50.592npz^4y^2 + 364npz^3y^2\end{aligned}$$

und mit Hilfe von (1.34) folgt somit

$$\begin{aligned}6p^2z^6y^2 + 14p^2z^5y^2 + 8\Theta(n)z^8y^2 &> 2n^2z^8y^2 + 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\rho(n)n^2z^8 + 4npz^7y^2 + 4npz^6y^2 \\ &\quad + 13.408npz^5y^2 + 50.592npz^4y^2 + 364npz^3y^2.\end{aligned}\tag{3.47}$$

Setzen wir schließlich

$$\Psi_4(x) = x - 1 - \frac{1}{x} - \frac{3.352}{x^2} - \frac{12.648}{x^3} - \frac{91}{x^4},$$

so folgt zusammen mit (3.47), dass die Ungleichung

$$\begin{aligned}4npz^7y^2\Psi_4(z) &+ 6p^2z^6y^2 + 14p^2z^5y^2 + 8\Theta(n)z^8y^2\\ &> 4npz^8y^2 + 2n^2z^8y^2 + 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\rho(n)n^2z^8\end{aligned}$$

erfüllt ist und in Kombination mit (1.32) erhalten wir

$$\begin{aligned}4p^2z^7y^2 &+ 6p^2z^6y^2 + 14p^2z^5y^2 + 8\Theta(n)z^8y^2\\ &> 4npz^8y^2 + 2n^2z^8y^2 + 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\rho(n)n^2z^8.\end{aligned}$$

Setzen wir die Definitionen von y und z ein und teilen anschließend beide Seiten durch $8\log^8 p\log^2 n$, so folgt die Ungleichung (3.43) und somit die Behauptung für alle $n \geq 52217014$. Für $842019 \leq n \leq 52217014$ prüfen wir die behauptete Ungleichung mit einem Computer nach. □

Mit dem folgenden Korollar beweisen wir die untere Schranke (3.38) für D_n und verschärfen somit die Ungleichung (3.37).

Korollar 3.33. *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 348247$ gilt*

$$D_n > \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4\log n} - \frac{n^2(\log\log n - 2.092)}{4\log^2 n}.$$

Das folgende Lemma wird für den Beweis von Korollar 3.33 hilfreich sein.

Lemma 3.34. *Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt*

$$\frac{3.092(\log\log n - 2)}{\log n} + \frac{2.092(\log\log n - 1)}{\log n} + \frac{2.092(\log\log n - 2)}{\log^2 n} \leq 1.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wir setzen $f(x) = \log x - 3 \cdot 3.092(\log\log x - 2)$. Dann gilt $f'(x) \geq 0$ genau dann, wenn $x \geq e^{9.276}$. Zusammen mit $f(e^{9.276}) \geq 7.166$ folgt $f(x) \geq 0$ für alle $x > 1$. Daraus folgt

$$\frac{3.092(\log\log n - 2)}{\log n} + \frac{2.092(\log\log n - 2)}{\log^2 n} \leq 2 \cdot \frac{3.092(\log\log n - 2)}{\log n} \leq \frac{2}{3}. \tag{3.48}$$

Definieren wir $g(x) = \log x - 3 \cdot 2.092(\log\log x - 1)$, so gilt $g'(x) \geq 0$ genau dann, wenn $x \geq e^{6.276}$. In Kombination mit $g(e^{6.276}) \geq 1.024$ folgt, dass $g(x) \geq 0$ für alle $x > 1$. Daraus folgt

$$\frac{2.092(\log\log n - 1)}{\log n} \leq \frac{1}{3}.$$

Zusammen mit (3.48) folgt die Behauptung. □

Es folgt der Beweis von Korollar 3.33.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $n \geq 842019$. Nach Theorem 3.31 genügt es zu zeigen, dass $\rho(n) \geq 2.092/4$ gilt. Der Übersicht halber schreiben wir erneut $y = \log n$ und $z = \log p_n$. Da $x^2 - 5.184x + 16.296 \cdot 0.75^2 \geq 0$ für alle $x \geq 0$ gilt, erhalten wir die Ungleichung

$$(\log^2 y - (1 + 4.184)\log y + 16.296 \cdot 0.75^2)z^2 + 2.092z\log^2 y - 2.092z(\log y - 1) \geq 0.$$

Wenden wir die Ungleichung (2.43) an, so folgt

$$16.296y^2 + (\log^2 y - (1 + 4.184)\log y)z^2 + 2.092z\log^2 y - 2.092z(\log y - 1) \geq 0. \tag{3.49}$$

Mit (2.8) gilt

$$z \leq y + \log y + \log\left(1 + \frac{\log y - 1}{y} + \frac{\log y - 2}{y^2}\right) \tag{3.50}$$

und mit Hilfe der Ungleichung $\log(1+t) \leq t$, die für alle $t > -1$ erfüllt ist, sowie Lemma 2.5 folgt

$$z \leq y + \log y + \frac{\log y - 1}{y} + \frac{\log y - 2}{y^2}. \tag{3.51}$$

Aus (2.2) erhalten wir insbesondere

$$-z + \log y \leq -y. \tag{3.52}$$

Somit gilt die Ungleichung

$$-2.092z^2 \log y + 2.092z \log^2 y \leq -2.092zy \log y$$

und zusammen mit (3.49) folgt

$$16.296y^2 + z^2(\log y - 1 - 2.092)\log y - 2.092zy\log y - 2.092z(\log y - 1) \geq 0. \tag{3.53}$$

Multiplizieren wir die Ungleichung aus Lemma 3.34 mit z^2, so erhalten wir zusammen mit (3.53) die Ungleichung

$$\begin{aligned} &z^2 + 16.296y^2 + z^2(\log y - 1 - 2.092)\log y \\ &\quad \geq \frac{(z^2 + 2.092z^2)(\log y - 2)}{y} + 2.092z(y\log y + \log y - 1) + \frac{2.092z^2}{y}\left(\log y - 1 + \frac{\log y - 2}{y}\right). \end{aligned}$$

Da $z^2 > z$ und $\log y - 2 > 0$ ist, folgt daraus

$$\begin{aligned} &z^2 + 16.296 + z^2(\log y - 1 - 2.092)\log y \\ &\quad \geq \frac{(z^2 + 2.092z)(\log y - 2)}{y} + 2.092z(y\log y + \log y - 1) + \frac{2.092z^2}{y}\left(\log y - 1 + \frac{\log y - 2}{y}\right) \end{aligned}$$

und dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} &z^2 + 16.296y^2 + 2.092zy^2 + z^2(\log y - 1 - 2.092)\log y \\ &\quad \geq 2.092zy\left(y + \log y + \frac{\log y - 1}{y} + \frac{\log y - 2}{y^2}\right) + \frac{z^2(\log y - 2)}{y} + \frac{2.092z^2}{y}\left(\log y - 1 + \frac{\log y - 2}{y}\right). \end{aligned}$$

Zusammen mit (3.51) folgt

$$\begin{aligned} &z^2 + 16.296y^2 + 2.092zy^2 + z^2(\log y - 1 - 2.092)\log y \\ &\quad \geq 2.092z^2 y + \frac{z^2(\log y - 2)}{y} + \frac{2.092z^2}{y}\left(\log y - 1 + \frac{\log y - 2}{y}\right). \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} &z^2 + 16.296y^2 + 2.092zy^2 + z^2(\log y - 1)\log y \\ &\quad \geq 2.092z^2\left(y + \log y + \frac{\log y - 1}{y} + \frac{\log y - 2}{y^2}\right) + \frac{z^2(\log y - 2)}{y}. \end{aligned}$$

Wir erhalten erneut mit Hilfe von (3.51) die Ungleichung

$$z^2 + 16.296y^2 + 2.092zy^2 + z^2(\log y - 1)\log y \geq 2.092z^3 + \frac{z^2(\log y - 2)}{y}.$$

Zusammen mit (3.52) ergibt sich die Ungleichung

$$16.296y^2 + 2.092zy^2 + z^2(z-y)\log y \geq z^2(\log y - 1) + 2.092z^3 + \frac{z^2(\log y - 2)}{y}$$

und diese ist äquivalent zu

$$z^2y^2 + 16.296y^2 + 2.092zy^2 \geq z^2 y\left(y + \log y + \frac{\log y - 1}{y} + \frac{\log y - 2}{y^2}\right) - z^3\log y + 2.092z^3.$$

Aus (3.51) folgt nun

$$z^2y^2 + 16.296y^2 + 2.092zy^2 \geq z^3y - z^3\log y + 2.092z^3.$$

Dividieren wir beide Seiten mit $4z^3$, so folgt mit Hilfe der Definition von $\rho(n)$, dass die Ungleichung

$$\rho(n) \geq \frac{2.092}{4}$$

erfüllt ist. Zusammen mit Theorem 3.31 folgt die Behauptung für alle natürlichen Zahlen $n \geq 842019$. Für $348247 \leq n \leq 842018$ prüfen wir die Ungleichung mit einem Computer nach. □

3.3.3 Neue obere Schranken für D_n

Als nächstes wollen wir erstmals eine obere Schranke für die Differenz D_n herleiten. Aus Korollar 3.30 folgt insbesondere, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$D_n < \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4\log n} - \frac{n^2(\log\log n - (7/2 + \varepsilon))}{4\log^2 n}$$

für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ gilt. Dies bezüglich werden wir in diesem Abschnitt mit Hilfe von Korollar 3.25 zeigen, dass

$$D_n < \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4\log n} - \frac{n^2(\log\log n - 5.228)}{4\log^2 n} \tag{3.54}$$

für alle $n \geq 26219$ erfüllt ist. Dazu setzen wir

$$r(x) = 35.408x^3 + 213.968x^2 + 1479.238464x + 30203.919424 \tag{3.55}$$

und definieren wir

$$\kappa(n) = \frac{\log p_n \log^2 n + 4.908\log^2 n - \log^2 p_n \log n + \log^2 p_n \log\log n}{4\log^2 p_n} + \frac{r(\log p_n)\log^2 n}{8\log^6 p_n}.$$

Dann gilt das folgende Theorem.

Theorem 3.35. *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt*

$$D_n < \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4\log n} - \frac{n^2\log\log n}{4\log^2 n} + \frac{\kappa(n)n^2}{\log^2 n}.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $n \geq 66774564$. Dann gilt $p_n \geq 1332470021$. Wir werden im Folgenden zeigen, dass die Ungleichung

$$\frac{np_n}{2} + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4\log n} - \frac{n^2\log\log n}{4\log^2 n} + \frac{\kappa(n)n^2}{\log^2 n} > \frac{p_n^2}{2\log p_n} + \frac{3p_n^2}{4\log^2 p_n} + \frac{7p_n^2}{4\log^3 p_n} + \Omega(n), \tag{3.56}$$

wobei $\Omega(n)$ wie in (3.33) definiert ist, erfüllt ist. Nach Korollar 3.25 folgt dann die Behauptung für alle $n \geq 66774564$, da $C_n = D_n + np_n/2$ ist. Der Übersicht halber schreiben wir $p = p_n$, $y = \log n$ und $z = \log p$. Aus der Definition von $\kappa(n)$ folgt

$$2z^8y - 2z^8\log y + 8\kappa(n)z^8 = 2z^7y^2 + 9.816z^6y^2 + r(z)z^2y^2.$$

Setzen wir die Definition von $r(z)$ ein und multiplizieren beide Seiten mit n^2, so erhalten wir

$$\begin{aligned}&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8\\&\quad = n^2(2z^7y^2 + 9.816z^6y^2 + 35.408z^5y^2 + 213.968z^4y^2 + 1479.238464z^3y^2 + 30203.919424z^2y^2).\end{aligned}$$

Definieren wir $\Phi_1(x) := x$, so ist die letzte Gleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned}&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 3994.647616n^2z^2y^2\\&\quad = 2n^2z^7y^2 + 9.816n^2z^6y^2 + 35.408n^2z^5y^2 + 213.968n^2z^4y^2 + 1479.238464n^2z^3y^2\\&\qquad + 34198.56704n^2zy^2\Phi_1(z).\end{aligned} \tag{3.57}$$

Indem wir $x = p$ in (1.10) einsetzen, erhalten wir, dass die Ungleichung

$$p < n\Phi_1(z) \tag{3.58}$$

erfüllt ist. In Kombination mit (3.57) folgt also

$$\begin{aligned}&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 3994.647616n^2z^2y^2\\&\quad > 2n^2z^7y^2 + 9.816n^2z^6y^2 + 35.408n^2z^5y^2 + 213.968n^2z^4y^2 + 1479.238464n^2z^3y^2\\&\qquad + 34198.56704npzy^2.\end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 3994.647616n^2z^2y^2 + 25230.43296npzy^2\\&\quad > 2n^2z^7y^2 + 9.816n^2z^6y^2 + 35.408n^2z^5y^2 + 213.968n^2z^4y^2 + 1479.238464n^2z^3y^2\\&\qquad + 59429npy^2\Phi_1(z).\end{aligned}$$

Zusammen mit (3.58) ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned}&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 3994.647616n^2z^2y^2 + 25230.43296npzy^2\\&\quad > 2n^2z^7y^2 + 9.816n^2z^6y^2 + 35.408n^2z^5y^2 + 213.968n^2z^4y^2 + 1479.238464n^2z^3y^2\\&\qquad + 59429p^2y^2.\end{aligned} \tag{3.59}$$

Setzen wir $\Phi_2(x) := x - 1$, so ergibt sich mit (3.59) die Ungleichung

$$\begin{aligned}&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 624.000768n^2z^3y^2 + 1891.408384n^2z^2y^2 + 25230.43296npzy^2\\&\quad > 2n^2z^7y^2 + 9.816n^2z^6y^2 + 35.408n^2z^5y^2 + 213.968n^2z^4y^2 + 2103.239232n^2z^2y^2\Phi_2(z)\\&\qquad + 59429p^2y^2.\end{aligned} \tag{3.60}$$

Mit Hilfe der unteren Schranke für $\pi(x)$ aus Satz 1.4 folgt insbesondere, dass die Ungleichung

$$p < n\Phi_2(z) \tag{3.61}$$

erfüllt ist. In Kombination mit (3.60) erhalten wir

$$\begin{aligned}&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 624.000768n^2z^3y^2 + 1891.408384n^2z^2y^2 + 25230.43296npy^2\\&\quad > (2n^2z^7 + 9.816n^2z^6 + 35.408n^2z^5 + 213.968n^2z^4 + 2103.239232npz^2 + 59429p^2)y^2.\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 624.000768n^2z^3y^2 + 1891.408384n^2z^2y^2 + 3706.800768npz^2y^2\\&\quad + 19420.39296npzy^2\\&\quad > (2n^2z^7 + 9.816n^2z^6 + 35.408n^2z^5 + 213.968n^2z^4 + 5810.04npz\Phi_2(z) + 59429p^2)y^2\end{aligned}$$

und mit (3.61) ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned}&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 624.000768n^2z^3y^2 + 1891.408384n^2z^2y^2 + 3706.800768npz^2y^2\\&\quad + 19420.39296npzy^2\\&\quad > (2n^2z^7 + 9.816n^2z^6 + 35.408n^2z^5 + 213.968n^2z^4 + 5810.04p^2z + 59429p^2)y^2.\end{aligned} \tag{3.62}$$

Wir definieren

$$\Phi_3(x) := x - 1 - \frac{1}{x}.$$

Zusammen mit (3.62) gilt

$$\begin{aligned}&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 113.632n^2z^4y^2 + 296.400768n^2z^3y^2 + 1563.808384n^2z^2y^2\\&\quad + 3706.800768npz^2y^2 + 19420.39296npzy^2\\&\quad > (2n^2z^7 + 9.816n^2z^6 + 35.408n^2z^5 + 327.6n^2z^3\Phi_3(z) + 5810.04p^2z + 59429p^2)y^2.\end{aligned} \tag{3.63}$$

Aus Korollar 1.24 folgt, dass die Ungleichung

$$p < n\Phi_3(z) \tag{3.64}$$

erfüllt ist. In Kombination mit (3.63) erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned}&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 113.632n^2z^4y^2 + 296.400768n^2z^3y^2 + 1563.808384n^2z^2y^2\\&\quad + 3706.800768npz^2y^2 + 19420.39296npzy^2\\&\quad > (2n^2z^7 + 9.816n^2z^6 + 35.408n^2z^5 + 327.6npz^3 + 5810.04p^2z + 59429p^2)y^2.\end{aligned}$$

Wie man leicht nachrechnet, ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned}&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 113.632n^2z^4y^2 + 296.400768n^2z^3y^2 + 1563.808384n^2z^2y^2\\&\quad + 635npz^3y^2 + 2744.200768npz^2y^2 + 18457.79296npzy^2\\&\quad > (2n^2z^7 + 9.816n^2z^6 + 35.408n^2z^5 + 962.6npz^2\Phi_3(z) + 5810.04p^2z + 59429p^2)y^2\end{aligned}$$

und mit der Ungleichung (3.64) folgt

$$\begin{aligned}&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 113.632n^2z^4y^2 + 296.400768n^2z^3y^2 + 1563.808384n^2z^2y^2\\&\quad + 635npz^3y^2 + 2744.200768npz^2y^2 + 18457.79296npzy^2\\&\quad > (2n^2z^7 + 9.816n^2z^6 + 35.408n^2z^5 + 962.6p^2z^2 + 5810.04p^2z + 59429p^2)y^2.\end{aligned} \tag{3.65}$$

Setzen wir

$$\Phi_4(x) := x - 1 - \frac{1}{x} - \frac{2.648}{x^2},$$

so ist die Ungleichung (3.65) äquivalent zu

$$\begin{aligned}&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 25.112n^2z^5y^2 + 53.112n^2z^4y^2 + 235.880768n^2z^3y^2\\&\quad + 1403.551424n^2z^2y^2 + 635npz^3y^2 + 2744.200768npz^2y^2 + 18457.79296npzy^2\\&\quad > (2n^2z^7 + 9.816n^2z^6 + 60.52n^2z^4\Phi_4(z) + 962.6p^2z^2 + 5810.04p^2z + 59429p^2)y^2.\end{aligned} \tag{3.66}$$

Mit Hilfe von Korollar 1.23 erhalten wir die Ungleichung

$$p < n\Phi_4(z) \tag{3.67}$$

und zusammen mit (3.66) folgt

$$\begin{aligned}&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 25.112n^2z^5y^2 + 53.112n^2z^4y^2 + 235.880768n^2z^3y^2\\&\quad + 1403.551424n^2z^2y^2 + 635npz^3y^2 + 2744.200768npz^2y^2 + 18457.79296npzy^2\\&\quad > (2n^2z^7 + 9.816n^2z^6 + 60.52npz^4 + 962.6p^2z^2 + 5810.04p^2z + 59429p^2)y^2.\end{aligned}$$

Durch Ausklammern erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 25.112n^2z^5y^2 + 53.112n^2z^4y^2 + 235.880768n^2z^3y^2 \\
&\quad + 1403.551424n^2z^2y^2 + 129.704npz^4y^2 + 444.776npz^3y^2 + 2553.976768npz^2y^2 \\
&\quad + 17954.079808npzy^2 \\
&\quad > (2n^2z^7 + 9.816n^2z^6 + 190.224npz^3\Phi_4(z) + 962.6p^2z^2 + 5810.04p^2z + 59429p^2)y^2
\end{aligned}$$

und die erneute Anwendung von (3.67) liefert

$$\begin{aligned}
&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 25.112n^2z^5y^2 + 53.112n^2z^4y^2 + 235.880768n^2z^3y^2 \\
&\quad + 1403.551424n^2z^2y^2 + 129.704npz^4y^2 + 444.776npz^3y^2 + 2553.976768npz^2y^2 \\
&\quad + 17954.079808npzy^2 \\
&\quad > (2n^2z^7 + 9.816n^2z^6 + 190.224p^2z^3 + 962.6p^2z^2 + 5810.04p^2z + 59429p^2)y^2.
\end{aligned}$$

Definieren wir

$$\Phi_5(x) := x - 1 - \frac{1}{x} - \frac{2.648}{x^2} - \frac{13.352}{x^3},$$

so ist die letzte Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned}
&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 6n^2z^6y^2 + 9.296n^2z^5y^2 + 37.296n^2z^4y^2 + 194n^2z^3y^2 \\
&\quad + 1192.376192n^2z^2y^2 + 129.704npz^4y^2 + 444.776npz^3y^2 + 2553.976768npz^2y^2 \\
&\quad + 17954.079808npzy^2 \\
&\quad > (2n^2z^7 + 15.816n^2z^5\Phi_5(z) + 190.224p^2z^3 + 962.6p^2z^2 + 5810.04p^2z + 59429p^2)y^2. \qquad (3.68)
\end{aligned}$$

Aus Korollar 1.23 folgt, dass die Ungleichung

$$p < n\Phi_5(z) \qquad (3.69)$$

erfüllt ist und zusammen mit der Ungleichung (3.68) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 6n^2z^6y^2 + 9.296n^2z^5y^2 + 37.296n^2z^4y^2 + 194n^2z^3y^2 \\
&\quad + 1192.376192n^2z^2y^2 + 129.704npz^4y^2 + 444.776npz^3y^2 + 2553.976768npz^2y^2 \\
&\quad + 17954.079808npzy^2 \\
&\quad > (2n^2z^7 + 15.816npz^5 + 190.224p^2z^3 + 962.6p^2z^2 + 5810.04p^2z + 59429p^2)y^2.
\end{aligned}$$

Durch Ausklammern ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 6n^2z^6y^2 + 9.296n^2z^5y^2 + 37.296n^2z^4y^2 + 194n^2z^3y^2 \\
&\quad + 1192.376192n^2z^2y^2 + 30.592npz^5y^2 + 83.296npz^4y^2 + 398.368npz^3y^2 \\
&\quad + 2431.088384npz^2y^2 + 17334.440192npzy^2 \\
&\quad > (2n^2z^7 + 46.408npz^4\Phi_5(z) + 190.224p^2z^3 + 962.6p^2z^2 + 5810.04p^2z + 59429p^2)y^2,
\end{aligned}$$

wodurch mit Hilfe von (3.69) und der Definition von $\Omega(n)$ aus (3.33) die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 6n^2z^6y^2 + 9.296n^2z^5y^2 + 37.296n^2z^4y^2 + 194n^2z^3y^2 \\
&\quad + 1192.376192n^2z^2y^2 + 30.592npz^5y^2 + 83.296npz^4y^2 + 398.368npz^3y^2 \\
&\quad + 2431.088384npz^2y^2 + 17334.440192npzy^2 \\
&\quad > 2n^2z^7y^2 + 8\Omega(n)z^8y^2
\end{aligned}$$

folgt. Setzen wir

$$\Phi_6(x) := x - 1 - \frac{1}{x} - \frac{2.648}{x^2} - \frac{13.352}{x^3} - \frac{70.296}{x^4},$$

so ist die letzte Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned}
2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 2n^2z^7y^2 + 2n^2z^6y^2 + 5.296n^2z^5y^2 + 26.704n^2z^4y^2 + 140.592n^2z^3y^2 \\
+ 911.192192n^2z^2y^2 + 30.592npz^5y^2 + 83.296npz^4y^2 + 398.368npz^3y^2 + 2431.088384npz^2y^2 \\
+ 17334.440192npzy^2 \\
> 4n^2z^6y^2\Phi_6(z) + 8\Omega(n)z^8y^2. \qquad (3.70)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Korollar 1.23 erhalten wir

$$p < n\Phi_6(z) \qquad (3.71)$$

und mit (3.70) folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned}
2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 2n^2z^7y^2 + 2n^2z^6y^2 + 5.296n^2z^5y^2 + 26.704n^2z^4y^2 + 140.592n^2z^3y^2 \\
+ 911.192192n^2z^2y^2 + 30.592npz^5y^2 + 83.296npz^4y^2 + 398.368npz^3y^2 + 2431.088384npz^2y^2 \\
+ 17334.440192npzy^2 \\
> 4npz^6y^2 + 8\Omega(n)z^8y^2,
\end{aligned}$$

welche äquivalent ist zu

$$\begin{aligned}
2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 2n^2z^7y^2 + 2n^2z^6y^2 + 5.296n^2z^5y^2 + 26.704n^2z^4y^2 + 140.592n^2z^3y^2 \\
+ 911.192192n^2z^2y^2 + 10npz^6y^2 + 16.592npz^5y^2 + 69.296npz^4y^2 + 361.296npz^3y^2 \\
+ 2244.160384npz^2y^2 + 16350.296192npzy^2 \\
> 14npz^5y^2\Phi_6(z) + 8\Omega(n)z^8y^2.
\end{aligned}$$

Zusammen mit (3.71) erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned}
2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 2n^2z^7y^2 + 2n^2z^6y^2 + 5.296n^2z^5y^2 + 26.704n^2z^4y^2 + 140.592n^2z^3y^2 \\
+ 911.192192n^2z^2y^2 + 10npz^6y^2 + 16.592npz^5y^2 + 69.296npz^4y^2 + 361.296npz^3y^2 \\
+ 2244.160384npz^2y^2 + 16350.296192npzy^2 \\
> 14p^2z^5y^2 + 8\Omega(n)z^8y^2.
\end{aligned}$$

Wir definieren

$$\Phi_7(x) := x - 1 - \frac{1}{x} - \frac{2.648}{x^2} - \frac{13.352}{x^3} - \frac{70.296}{x^4} - \frac{455.596096}{x^5}.$$

Dann ist die letzte Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned}
2n^2z^8y^2 + 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 10npz^6y^2 + 16.592npz^5y^2 + 69.296npz^4y^2 \\
+ 361.296npz^3y^2 + 2244.160384npz^2y^2 + 16350.296192npzy^2 \\
> 2n^2z^7y^2\Phi_7(z) + 14p^2z^5y^2 + 8\Omega(n)z^8y^2. \qquad (3.72)
\end{aligned}$$

Da aus Proposition 1.22 die Ungleichung

$$p < n\Phi_7(z) \qquad (3.73)$$

folgt, ergibt sich in Kombination mit (3.72) die Ungleichung

$$\begin{aligned}
2n^2z^8y^2 + 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 10npz^6y^2 + 16.592npz^5y^2 + 69.296npz^4y^2 \\
+ 361.296npz^3y^2 + 2244.160384npz^2y^2 + 16350.296192npzy^2 \\
> 2npz^{13}y^2 + 14p^2z^{11}y^2 + 8\Omega(n)z^{14}y^2.
\end{aligned}$$

Wie man leicht nachrechnet, ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned}
2n^2z^8y^2 + 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 4npz^7y^2 + 4npz^6y^2 + 10.592npz^5y^2 + 53.408npz^4y^2 \\
+ 281.184npz^3y^2 + 1822.384384npz^2y^2 + 13616.719616npzy^2 \\
> 6npz^6y^2\Phi_7(z) + 14p^2z^5y^2 + 8\Omega(n)z^8y^2
\end{aligned}$$

und mit Hilfe von (3.73) ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned}2n^2z^8y^2 + 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 + 4npz^7y^2 + 4npz^6y^2 + 10.592npz^5y^2 + 53.408npz^4y^2 \\ + 281.184npz^3y^2 + 1822.384384npz^2y^2 + 13616.719616npzy^2 \\ > 6p^2z^6y^2 + 14p^2z^5y^2 + 8\Omega(n)z^8y^2.\end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\Phi_8(x) := x - 1 - \frac{1}{x} - \frac{2.648}{x^2} - \frac{13.352}{x^3} - \frac{70.296}{x^4} - \frac{455.596096}{x^5} - \frac{3404.179904}{x^6},$$

so ergibt sich aus der letzten Ungleichung die Ungleichung

$$\begin{aligned}4npz^8y^2 + 2n^2z^8y^2 + 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 \\ > 4npz^7y^2\Phi_8(z) + 6p^2z^6y^2 + 14p^2z^5y^2 + 8\Omega(n)z^8y^2.\end{aligned} \tag{3.74}$$

Schließlich erhalten wir mit Proposition 1.22 die Ungleichung

$$p < n\Phi_8(z)$$

und zusammen mit (3.74) folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned}4npz^8y^2 + 2n^2z^8y^2 + 2n^2z^8y - 2n^2z^8\log y + 8\kappa(n)n^2z^8 \\ > 4p^2z^7y^2 + 6p^2z^6y^2 + 14p^2z^5y^2 + 8\Omega(n)z^8y^2.\end{aligned}$$

Teilen wir beide Seiten durch $8z^8y^2$, so erhalten wir die Ungleichung (3.56) und somit die Behauptung für alle $n \geq 66774564$. Mit Hilfe eines Computers rechnen wir nach, dass die behauptete Ungleichung auch für alle $2 \leq n \leq 66774563$ gilt. Damit folgt die Behauptung. □

Wie bereits zu Anfang des Abschnitts erwähnt, wollen wir nun zeigen, dass die Ungleichung (3.54) für alle $n \geq 26219$ erfüllt ist.

Korollar 3.36. *Für alle $n \geq 26219$ gilt*

$$D_n < \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4\log n} - \frac{n^2(\log\log n - 5.228)}{4\log^2 n}.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $n \geq 5.3\cdot 10^8$. Der Übersicht halber schreiben wir wieder $y = \log n$ und $z = \log p_n$. Wir setzen $a_1 = 0.08$ und betrachten die Funktion $h_1(x) = 8a_1x - 8a_1 - 2\log x$. Dann gilt $h_1'(x) \geq 0$ für alle $x \geq 3.25 \geq 1/4a_1$. Zusammen mit $h_1(8) \geq 0.153$ folgt, dass $h_1(x) \geq 0$ für alle $x \geq 8$ gilt. Setzen wir

$$h(x) = 8a_1x - 8a_1\log x - \log^2 x + 16a_1,$$

so gilt $h'(x) = h_1(x)/x \geq 0$ für alle $x \geq 8$. Zusammen mit $h(8) \geq 0.554$ erhalten wir, dass $h(x) \geq 0$ für alle $x \geq 8$ gilt. Daraus folgt

$$\frac{4a_1}{x} - \frac{4a_1\log x - 8a_1}{x^2} - \frac{\log^2 x}{2x^2} = \frac{h(x)}{2x^2} \geq 0 \tag{3.75}$$

für alle $x \geq 8$. Definieren wir

$$g(x) = 4a_1x - 2\log x + 1,$$

so gilt $g'(x) = 4a_1 - 2/x \geq 0$ für alle $x \geq 6.5 \geq 1/2a_1$. In Kombination mit $g(14) \geq 0.033$ ergibt sich, dass $g(x) \geq 0$ für alle $x \geq 14$ ist. Somit gilt

$$4a_1 - \frac{2\log x - 1}{x} = \frac{g(x)}{x} \geq 0 \tag{3.76}$$

für alle $x \geq 14$. Wir betrachten nun die Funktion

$$f(x) = 4a_1(x + \log x) + (x + 4a_1)\log\left(1 + \frac{\log x - 1}{x}\right) - \log^2 x - \log x \log\left(1 + \frac{\log x - 1}{x} + \frac{\log x - 2}{x^2}\right)$$

und wollen zeigen, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 20$ gilt. Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) = 4a_1 + \frac{4a_1}{x} + \frac{8a_1 - 4a_1 \log x}{x(x + \log x - 1)} + \log\left(1 + \frac{\log x - 1}{x}\right) + \frac{2 - \log x}{x + \log x - 1} - \frac{2\log x}{x} \\ - \frac{1}{x}\log\left(1 + \frac{\log x - 1}{x} + \frac{\log x - 2}{x^2}\right) + \frac{x\log^2 x - 2x\log x + 2\log x - 5}{x^3 + x^2(\log x - 1) + x(\log x - 2)}. \end{aligned}$$

Für $x \geq e^{2.5}$ ist der letzte Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung größer-gleich 0. Daher folgt

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 4a_1 + \frac{4a_1}{x} + \frac{8a_1 - 4a_1 \log x}{x(x + \log x - 1)} + \log\left(1 + \frac{\log x - 1}{x}\right) + \frac{2 - \log x}{x + \log x - 1} - \frac{2\log x}{x} \\ - \frac{1}{x}\log\left(1 + \frac{\log x - 1}{x} + \frac{\log x - 2}{x^2}\right) \end{aligned} \tag{3.77}$$

für alle $x \geq e^{2.5}$. Für $x \geq e^{2.5}$ gilt offensichtlich $(\log x - 1)/x \geq 0$. Zusammen mit der Ungleichung $\log(1+t) \geq t - t^2/2$, die für alle $t \geq 0$ erfüllt ist, und (3.77) folgt

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 4a_1 + \frac{4a_1}{x} + \frac{8a_1 - 4a_1 \log x}{x(x + \log x - 1)} + \frac{\log x - 1}{x} - \frac{\log^2 x - 2\log x + 1}{2x^2} + \frac{2 - \log x}{x + \log x - 1} - \frac{2\log x}{x} \\ - \frac{1}{x}\log\left(1 + \frac{\log x - 1}{x} + \frac{\log x - 2}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Da $\log x - 2 \geq 0$ für alle $x \geq e^2$ ist, folgt zusammen mit der Ungleichung $\log(1+t) \leq t$, die für alle $t > -1$ erfüllt ist, dass die Ungleichung

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 4a_1 + \frac{4a_1}{x} + \frac{8a_1 - 4a_1 \log x}{x^2} + \frac{\log x - 1}{x} - \frac{\log^2 x - 2\log x + 1}{2x^2} + \frac{2 - \log x}{x} - \frac{2\log x}{x} \\ &\quad - \frac{\log x - 1}{x^2} - \frac{\log x - 2}{x^3} \\ &= 4a_1 + \frac{4a_1}{x} + \frac{8a_1 - 4a_1 \log x}{x^2} - \frac{\log^2 x}{2x^2} - \frac{2\log x - 1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{\log x - 2}{x^3} \end{aligned}$$

für alle $x \geq e^{2.5}$ gilt. Zusammen mit (3.75) und (3.76) erhalten wir, dass die Ungleichung

$$f'(x) \geq \frac{1}{2x^2} - \frac{\log x - 2}{x^3} \tag{3.78}$$

für alle $x \geq \max\{e^{2.5}, 14\} = 14$ erfüllt ist. Setzen wir $s(x) = x - 2\log x + 4$, so gilt $s'(x) = 1 - 2/x \geq 0$ für alle $x \geq 2$. Da außerdem $s(2) \geq 4.613$ gilt, folgt $s(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2$. Mit (3.78) folgt somit $f'(x) \geq s(x)/2x^3 \geq 0$ für alle $x \geq 14$. Zusammen mit $f(20) \geq 0.0252$ erhalten wir, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 20$ gilt. Da $n \geq 5.3 \cdot 10^8$ gilt, folgt $y \geq 20$ und wir erhalten die Ungleichung $f(y) \geq 0$. D.h.

$$\begin{aligned} 4a_1\left(y + \log y + \left(1 + \frac{\log y - 1}{y}\right)\right) + y\log\left(1 + \frac{\log y - 1}{y}\right) \\ \geq \log^2 y + \log y \log\left(1 + \frac{\log y - 1}{y} + \frac{\log y - 2}{y^2}\right). \end{aligned} \tag{3.79}$$

Mit (2.4) folgt die Ungleichung

$$z \geq y + \log y + \log\left(1 + \frac{\log y - 1}{y}\right). \tag{3.80}$$

Zusammen mit (3.79) folgt

$$4a_1 z + y\log\left(1 + \frac{\log y - 1}{y}\right) \geq \log^2 y + \log y \log\left(1 + \frac{\log y - 1}{y} + \frac{\log y - 2}{y^2}\right).$$

Dies ist äquivalent zu

$$4a_1z + y\log y + y\log\left(1+\frac{\log y - 1}{y}\right) \geq \log y\left(y + \log y + \log\left(1+\frac{\log y-1}{y}+\frac{\log y-2}{y^2}\right)\right).$$

In Kombination mit (3.50) ergibt sich also die Ungleichung

$$4a_1z + y\log y + y\log\left(1+\frac{\log y - 1}{y}\right) \geq z\log y.$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$4a_1z + y\left(y + \log y + \log\left(1+\frac{\log y - 1}{y}\right)\right) \geq y^2 + z\log y.$$

Zusammen mit (3.80) folgt, dass die Ungleichung

$$4a_1z + zy \geq y^2 + z\log y$$

erfüllt ist. Multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung mit $2z^5$, so erhalten wir die Ungleichung

$$8a_1z^6 \geq 2z^5y^2 - 2z^6y + 2z^6\log y. \tag{3.81}$$

Wir setzen nun $a_2 = 1.227$ und wollen zeigen, dass

$$t(x) := 16a_2x^3\log x + 8a_2x^2\log^2 x - r(x) \geq 0$$

für alle $x \geq 17$ gilt, wobei $r(x)$ wie in (3.55) definiert ist. Sei $x \geq 17$. Da $\log 17 \geq 2.83$ gilt, folgt $16a_2\log x - 35.408 \geq 20.15056$ und somit

$$t(x) \geq 20.15056x^3 + 8a_2x^2\log^2 x - 213.968x^2 - 1479.238464x - 30203.919424.$$

Da außerdem $20.15056x + 8a_2\log^2 x - 213.968 \geq 207.2$ gilt, erhalten wir, dass die Ungleichung

$$t(x) \geq 207.2x^2 - 1479.238464x - 30203.919424$$

erfüllt ist. Daraus folgt $t(x) \geq 0$ für alle $x \geq 17$ und wir erhalten

$$16a_2z^5y^2\log z + 8a_2z^4y^2\log^2 z - r(z)y^2 + 8a_2z^6y^2 - 9.816z^6y^2 \geq 0. \tag{3.82}$$

Da die Funktion $w(t) = \log(t)/t$ für alle $t \geq e$ monoton fallend ist, folgt $\log(y)/y \geq \log(z)/z$. Zusammen mit (3.82) ergibt sich die Ungleichung

$$8a_2z^6y^2 + 16a_2z^6y\log y + 8a_2z^6\log^2 y - r(z)y^2 - 9.816z^6y^2 \geq 0.$$

Das ist äquivalent zu

$$8a_2z^6(y+\log y)^2 - r(z)y^2 - 9.816z^6y^2 \geq 0.$$

Aus (3.80) folgt, dass $z \geq y + \log y$ ist und wir erhalten somit die Ungleichung

$$8a_2z^8 \geq r(z)y^2 + 9.816z^6y^2.$$

Zusammen mit (3.81) ergibt sich also

$$10.456z^8 = 8(a_1+a_2)z^8 \geq 2z^7y^2 - 2z^8y + 2z^8\log y + r(z)y^2 + 9.816z^6y^2 = 8\kappa(n)z^8.$$

Daraus folgt $\kappa(n) \leq 5.228/4$. In Kombination mit Theorem 3.35 folgt also die Behauptung für alle $n \geq 5.3 \cdot 10^8$. Für $26219 \leq n \leq 5.3 \cdot 10^8$ prüfen wir die Ungleichung mit einem Computer nach. □

3.4 Neue obere und untere Schranken für $\sum_{k\leq n} p_k$

Sei $n \in \mathbb{N}$. In diesem Abschnitt wollen wir nun mit Hilfe der Schranken für D_n, die wir in Abschnitt 3.3 gezeigt haben, die in der Literatur bekannten Abschätzungen für die Summe

$$\sum_{k\leq n} p_k$$

verschärfen.

Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ fest. CIPOLLA [8] hatte mit Satz 2.1 gezeigt, dass eindeutig bestimmte normierte Polynome $R_1, \ldots, R_m \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\mathrm{grad}(R_s) = s$, wobei $s = 1, \ldots, m$, existieren, so dass

$$p_n = n\left(\log n + \log\log n - 1 + \sum_{s=1}^{m} \frac{(-1)^{s+1} R_s(\log\log n)}{s \log^s n}\right) + O\left(\frac{n(\log\log n)^{m+1}}{\log^{m+1} n}\right).$$

In Korollar 3.29 haben wir gezeigt, dass es eindeutig bestimmte normierte Polynome $V_2, \ldots, V_m \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\mathrm{grad}(V_s) = s - 1$, wobei $s = 2, \ldots, m$, gibt, so dass

$$D_n = \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4\log n} + \frac{n^2}{2} \sum_{s=2}^{m} \frac{(-1)^{s+1} V_s(\log\log n)}{s \log^s n} + O\left(\frac{n^2(\log\log n)^{m+1}}{\log^{m+1} n}\right).$$

3.4.1 Eine neue obere Schranke für $\sum_{k\leq n} p_k$

Aus Korollar 3.5 folgt insbesondere, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0(\varepsilon)$ existiert, so dass

$$\sum_{k\leq n} p_k < \frac{n^2}{2}\left(\log n + \log\log n - \frac{3}{2} + \frac{\log\log n - 5/2}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 7\log\log n + 29/2 - \varepsilon}{2\log^2 n}\right) \tag{3.83}$$

für alle $n > N_0(\varepsilon)$ gilt. Bereits im Jahr 1989 zeigten MASSIAS, NICOLAS & ROBIN [34, Lemma 4(i)], dass

$$\sum_{k\leq n} p_k \leq \frac{n^2}{2}\left(\log n + \log\log n - \frac{3}{2} + \frac{1.866\log\log n}{\log n}\right)$$

für alle $n \geq 3688$ gilt. Wie wir leicht mit einem Computer nachrechnen, gilt dies auch für alle $16 \leq n \leq 3687$. MASSIAS & ROBIN [33, Théorème C(vi)] verschärften im Jahr 1996 die letzte Ungleichung, indem sie zeigten, dass die Ungleichung

$$\sum_{k\leq n} p_k \leq \frac{n^2}{2}\left(\log n + \log\log n - \frac{3}{2} + \frac{1.805\log\log n}{\log n}\right)$$

für alle $n \geq 18$ erfüllt ist. Ferner bewiesen sie [33, Théorème A(vi)] unter Annahme der Riemannschen Vermutung, dass

$$p_n \leq n\left(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 1.8}{\log n}\right) \tag{3.84}$$

für alle $n \geq 27076$ gilt und folgerten [33, Théorème C(viii)] unter der Annahme von (3.84), dass die Ungleichung

$$\sum_{k\leq n} p_k \leq \frac{n^2}{2}\left(\log n + \log\log n - \frac{3}{2} + \frac{\log\log n - 2.29}{\log n}\right) \tag{3.85}$$

für alle $n \geq 10134$ erfüllt ist. DUSART [12, Théorème 1.7] konnte im Jahr 1998 beweisen, dass die Ungleichung (3.84) auch ohne die Annahme der Riemannschen Vermutung für alle $n \geq 10134$ gilt, d.h. insbesondere, dass die Ungleichung (3.85) in der Tat für alle $n \geq 10134$ erfüllt ist.

Das Ziel in diesem Abschnitt ist, die obere Schranke aus (3.85) zu verschärfen. Dazu sei $\widetilde{R}_m \in \mathbb{Q}[x]$ ein Polynom mit $\mathrm{grad}(\widetilde{R}_m) = m$ sowie $N_1 = N_1(m, \widetilde{R}_m) \in \mathbb{N}$ minimal so, dass

$$p_n < n\left(\log n + \log\log n - 1 + \sum_{s=1}^{m-1} \frac{(-1)^{s+1} R_s(\log\log n)}{s \log^s n} + \frac{(-1)^{m+1}\widetilde{R}_m(\log\log n)}{m \log^m n}\right) \tag{3.86}$$

für alle $n \geq N_1$ gilt. Außerdem sei $\widetilde{V}_m \in \mathbb{Q}[x]$ ein Polynom mit $\mathrm{grad}(\widetilde{V}_m) = m-1$ sowie $N_2 = N_2(m, \widetilde{V}_m) \in \mathbb{N}$ minimal so, dass

$$D_n > \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4\log n} + \frac{n^2}{2}\sum_{s=2}^{m-1} \frac{(-1)^{s+1} V_s(\log\log n)}{s \log^s n} + \frac{n^2}{2}\frac{(-1)^{m+1}\widetilde{V}_m(\log\log n)}{m \log^m n} \tag{3.87}$$

für alle $n \geq N_2$ gilt. Dann erhalten wir das folgende Resultat.

Proposition 3.37. *Für alle $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ gilt*

$$\sum_{k\leq n} p_k < \frac{n^2}{2}\left(\log n + \log\log n - \frac{3}{2} + \frac{R_1(\log\log n) - 1/2}{\log n} + \sum_{s=2}^{m-1} \frac{(-1)^{s+1}(R_s(\log\log n) - V_s(\log\log n))}{s\log^s n}\right)$$
$$+ \frac{n^2}{2}\frac{(-1)^{m+1}(\widetilde{R}_m(\log\log n) - \widetilde{V}_m(\log\log n))}{m\log^m n}.$$

Beweis. Da $\sum_{k\leq n} p_k = np_n/2 - D_n$ ist, folgt die Behauptung offenbar aus (3.86) und (3.87). □

Setzen wir $m = 2$, so erhalten wir in Hinblick auf (3.83) die folgende obere Schranke für die Summe der ersten n Primzahlen, mit der wir insbesondere die Ungleichung (3.85) verschärfen.

Korollar 3.38. *Für alle $n \geq 353889$ gilt*

$$\sum_{k\leq n} p_k < \frac{n^2}{2}\left(\log n + \log\log n - \frac{3}{2} + \frac{\log\log n - 5/2}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 7\log\log n + 12.365}{2\log^2 n}\right).$$

Beweis. Sei $m = 2$. Nach Satz 2.1 gilt $R_1(x) = x - 2$. Setzen wir $\widetilde{R}_2(x) = x^2 - 6x + 10.273$, so ist die Ungleichung (3.86) nach Korollar 2.11 für alle $n \geq N_1 = 8009824$ erfüllt. Setzen wir $\widetilde{V}_2(x) = x - 2.092$, so ist nach Korollar 3.33 die Ungleichung (3.87) für alle $n \geq N_2 = 348247$ erfüllt. Zusammen mit Proposition 3.37 folgt die Behauptung für alle $n \geq \max\{8009824, 348247\} = 8009824$. Mit Hilfe eines Computers prüfen wir nach, dass die behauptete Ungleichung auch für alle $353889 \leq n \leq 8009823$ erfüllt ist. □

3.4.2 Eine neue untere Schranke für $\sum_{k\leq n} p_k$

Aus Korollar 3.5 folgt insbesondere, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\sum_{k\leq n} p_k > \frac{n^2}{2}\left(\log n + \log\log n - \frac{3}{2} + \frac{\log\log n - 5/2}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 7\log\log n + 29/2 + \varepsilon}{2\log^2 n}\right) \tag{3.88}$$

für alle $n \geq N_3(\varepsilon)$ gilt. Im Jahr 1996 konnten Massias & Robin [33, Théorème C(i)] zeigen, dass

$$\sum_{k\leq n} p_k \geq \frac{n^2}{2}\log n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ferner bewiesen sie [33, Théorème C(iv)], dass die Ungleichung

$$\sum_{k\leq n} p_k > \frac{n^2}{2}\left(\log n + \log\log n - \frac{3}{2} - \frac{3.568}{\log n}\right)$$

für alle $n \geq 2$ erfüllt ist. Unter Annahme der Riemannschen Vermutung zeigten sie [33, Théorème C(iii)], dass die untere Schranke

$$\sum_{k \leq n} p_k \geq \frac{n^2}{2} \left(\log n + \log \log n - \frac{3}{2} \right) \tag{3.89}$$

für alle $n \geq 305494$ gilt. DUSART [12, Lemme 1.7] konnte im Jahr 1998 zeigen, dass diese untere Schranke auch ohne die Annahme der Riemanschen Vermutung für alle $n \geq 305494$ gilt.

Das Ziel in diesem Abschnitt ist, die Ungleichung (3.89) zu verschärfen. Sei $\widehat{R}_m \in \mathbb{Q}[x]$ ein Polynom mit $\mathrm{grad}(\widehat{R}_m) = m$ sowie $N_4 = N_4(m, \widehat{R}_m) \in \mathbb{N}$ minimal so, dass

$$p_n > n \left(\log n + \log \log n - 1 + \sum_{s=1}^{m-1} \frac{(-1)^{s+1} R_s(\log \log n)}{s \log^s n} + \frac{(-1)^{m+1} \widehat{R}_m(\log \log n)}{m \log^m n} \right) \tag{3.90}$$

für alle $n \geq N_4$ gilt. Ferner sei $\widehat{V}_m \in \mathbb{Q}[x]$ ein Polynom mit $\mathrm{grad}(\widehat{V}_m) = m-1$ sowie $N_5 = N_5(m, \widehat{V}_m) \in \mathbb{N}$ minimal so, dass

$$D_n < \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4 \log n} + \frac{n^2}{2} \sum_{s=2}^{m-1} \frac{(-1)^{s+1} V_s(\log \log n)}{s \log^s n} + \frac{n^2}{2} \frac{(-1)^{m+1} \widehat{V}_m(\log \log n)}{m \log^m n} \tag{3.91}$$

für alle $n \geq N_5$ gilt. Dann erhalten wir die folgende Proposition.

PROPOSITION 3.39. *Für alle $n \geq \max\{N_4, N_5\}$ gilt*

$$\sum_{k \leq n} p_k > \frac{n^2}{2} \left(\log n + \log \log n - \frac{3}{2} + \frac{R_1(\log \log n) - 1/2}{\log n} + \sum_{s=2}^{m-1} \frac{(-1)^{s+1} (R_s(\log \log n) - V_s(\log \log n))}{s \log^s n} \right)$$
$$+ \frac{n^2}{2} \frac{(-1)^{m+1} (\widehat{R}_m(\log \log n) - \widehat{V}_m(\log \log n))}{m \log^m n}.$$

Beweis. Analog zum Beweis von Proposition 3.37. □

Setzen wir $m = 2$, so erhalten wir mit Hilfe von Korollar 2.25 und Korollar 3.36 in Hinblick auf (3.88) die folgende untere Schranke für $\sum_{k \leq n} p_k$, mit der wir insbesondere die Ungleichung (3.89) verschärfen werden.

KOROLLAR 3.40. *Für alle $n \geq 2$ gilt*

$$\sum_{k \leq n} p_k > \frac{n^2}{2} \left(\log n + \log \log n - \frac{3}{2} + \frac{\log \log n - 5/2}{\log n} - \frac{(\log \log n)^2 - 7 \log \log n + 17.075}{2 \log^2 n} \right).$$

Beweis. Sei $m = 2$. Nach Satz 2.1 gilt $R_1(x) = x - 2$. Setzen wir $\widehat{R}_2(x) = x^2 - 6x + 11.847$, so ist die Ungleichung (3.90) nach Korollar 2.25 für alle $n \geq N_4 = 2$ erfüllt. Setzen wir außerdem $\widehat{V}_2(x) = x - 5.228$, so ist nach Korollar 3.36 die Ungleichung (3.91) für alle $n \geq N_5 = 26219$ erfüllt. Zusammen mit Proposition 3.39 folgt die Behauptung für alle $n \geq \max\{2, 26219\} = 26219$. Für $2 \leq n \leq 26218$ prüfen wir die Ungleichung mit einem Computer nach. □

3.5 Neue Schranken für die Funktion $S(x) := \sum_{p \leq x} p$

In diesem Abschnitt betrachten wir die Funktion

$$S(x) = \sum_{p \leq x} p,$$

die auf allen Intervallen der Form $[p_i, p_{i+1})$ konstant ist und $S(p_n) = \sum_{k \leq n} p_k$ erfüllt. Aus einem Satz von Szalay [60, Lemma 1] aus dem Jahr 1980 geht insbesondere hervor, dass ein $a > 0$ existiert, so dass die asymptotische Formel

$$S(x) = \mathrm{li}(x^2) + O(x^2 e^{-a\sqrt{\log x}}) \tag{3.92}$$

gilt, welche die asymptotische Formel aus Korollar 3.15 verschärft. Unter der Annahme der Riemannschen Vermutung konnten Deléglise & Nicolas [11, Lemma 2.5] im Jahr 2012 zeigen, dass

$$|S(x) - \mathrm{li}(x^2)| \leq \frac{5}{24\pi} x^{3/2} \log x$$

für alle $x \geq 41$ gilt. Massias & Robin [33, Théorème D] zeigten im Jahr 1996, zum Teil unter Annahme der Riemannschen Vermutung, weitere explizite Schranken für die Funktion $S(x)$.

Das Ziel in diesem Abschnitt ist, diese bestehenden Abschätzungen für $S(x)$ zu verschärfen und in Hinblick auf (3.92) explizite Abschätzungen für $S(x) - \mathrm{li}(x^2)$ zu beweisen. Dabei betrachten wir als erstes obere Schranken. Aufgrund der asymptotischen Formel (1.12) erhalten wir zusammen mit (3.92), dass

$$S(x) \sim \frac{x^2}{2\log x} \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{2^k \log^k x} \qquad (x \to \infty) \tag{3.93}$$

alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $x_0(\varepsilon) > 1$, so dass

$$S(x) < \frac{x^2}{2\log x} + \frac{x^2}{4\log^2 x} + \frac{x^2}{4\log^3 x} + \frac{(3+\varepsilon)x^2}{8\log^4 x}$$

für alle $x \geq x_0(\varepsilon)$ gilt. Dies bezüglich zeigen wir das folgende Theorem und verbessern somit insbesondere die derzeit schärfste obere Schranke für $S(x)$. Sie stammt von Massias & Robin [33, Théorème D(v)] aus dem Jahr 1996 und besagt, dass

$$S(x) \leq \frac{x^2}{2\log x} + \frac{3x^2}{10\log^2 x}$$

für alle $x \geq 24281$ gilt.

Proposition 3.41. *Für alle $x \geq 355992$ gilt*

$$S(x) < \frac{x^2}{2\log x} + \frac{x^2}{4\log^2 x} + \frac{x^2}{4\log^3 x} + \frac{7.224x^2}{8\log^4 x} + \frac{6.52x^2}{4\log^5 x} + \frac{46.68x^2}{8\log^6 x} + \frac{224.52x^2}{8\log^7 x} + \frac{14881.82x^2}{8\log^8 x}.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $x \geq 1332433009$ und bezeichnen die rechte Seite der behaupteten Ungleichung mit $f(x)$. Dann gilt

$$f'(t) = \frac{t}{\log t}\left(1 + \frac{1.056}{\log^3 t} - \frac{0.352}{\log^4 t} + \frac{3.52}{\log^5 t} + \frac{21.12}{\log^6 t} + \frac{1}{\log^7 t}\left(3524 - \frac{14881.82}{\log t}\right)\right) > 0 \tag{3.94}$$

für alle $t \geq 149 \geq e^5$, d.h. $f(t)$ ist auf dem Intervall $[149, \infty)$ eine streng monoton wachsende Funktion. Sei weiter $n = \pi(x)$. Dann gilt

$$S(x) = \sum_{k \leq n} p_k. \tag{3.95}$$

Da $x \geq 1332433009$ ist, folgt $n \geq 66772781$. Mit (3.95), Korollar 3.22 und Theorem 1.10 erhalten wir somit

$$S(x) = np_n - C_n \leq \pi(p_n)p_n - \frac{p_n^2}{2\log p_n} - \frac{3p_n^2}{4\log^2 p_n} - \frac{7p_n^2}{4\log^3 p_n} - \Theta(n) \leq f(p_n).$$

Zusammen mit (3.94) folgt die Behauptung für alle $x \geq 1332433009 = p_{66772781}$. Mit einem Computer prüfen wir nach, dass $f(p_i) \geq S(p_i)$ für alle $30457 \leq i \leq 66772781$ gilt, womit $f(x) \geq S(x)$ für alle $x \geq 356023 = p_{30457}$ folgt. Für $x = p_{30456}$ gilt $f(x) < S(x)$. Damit bleibt nur noch das Intervall $I = (p_{30456}, p_{30457}) = (355969, 356023)$ zu betrachten. Es gilt $S(x) = 5171616645$ für alle $x \in I$. Mit einem Computer rechnen wir nach, dass $f(355992) \geq 5171616645$ ist. Es folgt die Behauptung. □

In Hinblick auf (3.92) und Korollar 3.15 erhalten wir nun das folgende Korollar.

Korollar 3.42. *Für alle $x \geq 355992$ gilt*

$$S(x) < \mathrm{li}(x^2) + \frac{0.528x^2}{\log^4 x} + \frac{0.88x^2}{\log^5 x} + \frac{3.96x^2}{\log^6 x} + \frac{22.44x^2}{\log^7 x} + \frac{1840.54x^2}{\log^8 x}.$$

Beweis. Aus Proposition 3.41 und Lemma 3.18 folgt die Behauptung für alle $x \geq 355992$. Bezeichnen wir die rechte Seite der behaupteten Ungleichung mit $f(x)$, so gilt $f(355991) - S(355991) < -1691$, d.h. $\min\{k \in \mathbb{N} \mid f(x) > S(x) \ \forall\, x \geq k\} = 355992$. Es folgt die Behauptung. $\square$

Nun wollen wir untere Schranken für $S(x)$ beweisen. Mit Hilfe der Abschätzungen für $\pi(x)$ aus Kapitel 1 sowie Proposition 3.10 erhalten wir die folgende untere Schranke für $S(x)$.

Proposition 3.43. *Für alle $x \geq 65404349$ gilt*

$$\begin{aligned} S(x) > {} & \frac{9540.128x^2}{63\log x} + \frac{4770.064x^2}{63\log^2 x} + \frac{4770.064x^2}{63\log^3 x} + \frac{2373.944x^2}{21\log^4 x} + \frac{4751.584x^2}{21\log^5 x} + \frac{11842x^2}{21\log^6 x} \\ & + \frac{11768.08x^2}{7\log^7 x} + \frac{4966.08x^2}{\log^8 x} - \frac{19017.256}{63}\,\mathrm{li}(x^2), \end{aligned}$$

Beweis. Wir bezeichnen die rechte Seite der behaupteten Ungleichung mit $g(x)$ und betrachten zunächst den Fall $x \geq 1332433009$. Seien $y = 1$, $f(t) = t$ und

$$a(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in \mathbb{P}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Hilfe von Satz 1.7 folgt

$$S(x) = \sum_{1<n\leq x} a(n)f(n) = x\pi(x) - \int_1^x \pi(t)\,dt = x\pi(x) - 181 - \int_{31}^x \pi(t)\,dt.$$

Zusammen mit Theorem 1.25 und Theorem 1.10 erhalten wir

$$\begin{aligned} S(x) > {} & \frac{x^2}{\log x} + \frac{x^2}{\log^2 x} + \frac{2x^2}{\log^3 x} + \frac{5.648x^2}{\log^4 x} + \frac{23.648x^2}{\log^5 x} + \frac{118.24x^2}{\log^6 x} + \frac{709.44x^2}{\log^7 x} + \frac{4966.08x^2}{\log^8 x} - 181 \\ & - \int_{31}^x \left(\frac{t}{\log t} + \frac{t}{\log^2 t} + \frac{2t}{\log^3 t} + \frac{6.352t}{\log^4 t} + \frac{24.352t}{\log^5 t} + \frac{121.76t}{\log^6 t} + \frac{730.56t}{\log^7 t} + \frac{6802t}{\log^8 t} \right) dt. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Proposition 3.10, Lemma 3.3 und Lemma 3.8 folgt somit

$$S(x) > E_1 + g(x), \tag{3.96}$$

wobei

$$\begin{aligned} E_1 := {} & \frac{19017.256}{63}\,\mathrm{li}(31^2) - \frac{9477.128 \cdot 31^2}{63\log 31} - \frac{4707.064 \cdot 31^2}{63\log^2 31} - \frac{4644.064 \cdot 31^2}{63\log^3 31} - \frac{2255.336 \cdot 31^2}{21\log^4 31} \\ & - \frac{4254.976 \cdot 31^2}{21\log^5 31} - \frac{9358.96 \cdot 31^2}{21\log^6 31} - \frac{6802 \cdot 31^2}{7\log^7 31} - 181. \end{aligned}$$

Da $E_1 \geq 210.155 > 0$ ist, folgt zusammen mit (3.96) die Behauptung für alle $x \geq 1332433009$. Definieren wir $h(t) = 125t^8 - 132t^5 + 44t^4 - 440t^3 - 2640t^2 - 221990t - 4996080$, so gilt offenbar $h^{(3)}(t) = 42000t^5 - 7920t^2 + 1056t - 2640 \geq 0$ für alle $t \geq 1$. Analog zum Beweis von Lemma 1.14 erhalten wir, dass $h(t) > 0$ für alle $x \geq 4$ gilt. Daraus folgt

$$g'(x) = \frac{xh(\log x)}{125\log^9 x} > 0$$

für alle $x \geq 55 \geq e^4$, d.h. $g(x)$ ist eine streng monoton wachsende Funktion im Intervall $[55, \infty)$. Mit einem Computer prüfen wir nach, dass $S(p_i) > g(p_{i+1})$ für alle $3862924 = \pi(65404349) \leq i \leq \pi(1332433009) = 66772781$ gilt. Für alle $65404344 \leq x < 65404349$ gilt $g(x) - S(x) > 2.918 \cdot 10^6$. Es folgt die Behauptung. $\square$

Aus der asymptotischen Formel (3.93) folgt insbesondere, dass

$$S(x) > \frac{x^2}{2\log x} + \frac{x^2}{4\log^2 x} \tag{3.97}$$

für alle hinreichend große x gilt. Im Jahr 1984 konnte MASSIAS [32, Lemme 6] zeigen, dass die Ungleichung

$$S(x) \geq \frac{x^2}{2\log x} + \frac{9x^2}{52\log^2 x} + \frac{x^2}{4\log^3 x}$$

für alle $x \geq 11813$ erfüllt ist. MASSIAS & ROBIN [33, THÉORÈME D(II)] konnten diese Ungleichung im Jahr 1996 verschärfen, indem sie zeigten, dass die Ungleichung

$$S(x) \geq \frac{x^2}{2\log x} + \frac{0.954x^2}{4\log^2 x}$$

für alle $x \geq 70841$ erfüllt ist. Unter Annahme der Riemannschen Vermutung zeigten MASSIAS & ROBIN [33, THÉORÈME D(IV)], dass die Ungleichung (3.97) für alle $x \geq 302971$ gilt. Ohne die Annahme der Riemannschen Vermutung zeigten sie [33, THÉORÈME D(IV)], dass die Ungleichung (3.97) für alle $302971 \leq x \leq e^{98}$ und alle $x \geq e^{63864}$ erfüllt ist. Mit dem folgenden Korollar zu Proposition 3.43 gelingt es uns insbesondere diese Lücke zu schließen.

KOROLLAR 3.44. *Für alle $x \geq 54936653$ gilt*

$$S(x) > \frac{x^2}{2\log x} + \frac{x^2}{4\log^2 x} + \frac{x^2}{4\log^3 x} - \frac{0.153x^2}{\log^4 x} - \frac{0.13x^2}{\log^5 x} - \frac{2.085x^2}{\log^6 x} - \frac{16.815x^2}{\log^7 x} - \frac{2462.535625x^2}{\log^8 x}.$$

Beweis. Aus Proposition 3.43 und Lemma 3.26 erhalten wir, dass die behauptete Ungleichung für alle $x \geq 10^9$ erfüllt ist. Bezeichnen wir nun die rechte Seite der behaupteten Ungleichung mit $f(x)$ und setzen

$$g(x) = \frac{x}{\log x}\left(1 - \frac{1.056}{\log^3 x} - \frac{3.52}{\log^5 x} - \frac{21.12}{\log^6 x} - \frac{4807.367}{\log^7 x}\right)$$

so gilt $g(x)\log(x)/x > 0.681$ für alle $x \geq e^4$. Daraus folgt $f'(x) \geq g(x) > 0$ für alle $x \geq e^4$. Mit Hilfe eines Computers rechnen wir nach, dass $S(p_i) \geq f(p_{i+1})$ für alle $3278563 \leq i \leq \pi(10^9) = 50847533$ gilt. Damit folgt $S(x) \geq f(x)$ für alle $x \geq p_{3278563} = 54936653$. Für $i = 3278562$ gilt $f(p_{i+1}) - S(p_i) = f(54936653) - S(54936649) > 10^6 > 0$. Da f stetig ist, gibt es ein $p_{3278562} \leq x_0 < p_{3278563}$, so dass $f(x) - S(x) > 0$ für alle $x \in [x_0, p_{3278563})$ gilt. Es folgt die Behauptung. □

BEMERKUNG. Da die Ungleichung

$$\frac{1}{4} - \frac{0.153}{\log x} - \frac{0.13}{\log^2 x} - \frac{2.085}{\log^3 x} - \frac{441.31}{\log^4 x} \geq 0$$

für alle $x \geq 823$ erfüllt ist, folgt aus Korollar 3.44, dass die Ungleichung (3.97) auch ohne die Riemannsche Vermutung für alle $x \geq 302971$ erfüllt ist.

Aus Proposition 3.43 und Lemma 3.26 folgt nun in Hinblick auf (3.92) und Korollar 3.15 die folgende untere Schranke für $S(x)$.

KOROLLAR 3.45. *Für alle $x \geq 65404357$ gilt*

$$S(x) > \mathrm{li}(x^2) - \frac{0.528x^2}{\log^4 x} - \frac{0.88x^2}{\log^5 x} - \frac{3.96x^2}{\log^6 x} - \frac{22.44x^2}{\log^7 x} - \frac{2487.145x^2}{\log^8 x}.$$

Beweis. Mit Hilfe von Proposition 3.43 erhalten wir, dass die Ungleichung

$$S(x) \geq \mathrm{li}(x^2) + \frac{9540.128x^2}{63\log x} + \frac{4770.064x^2}{63\log^2 x} + \frac{4770.064x^2}{63\log^3 x} + \frac{2373.944x^2}{21\log^4 x} + \frac{4751.584x^2}{21\log^5 x} + \frac{11842x^2}{21\log^6 x} + \frac{11768.08x^2}{7\log^7 x} + \frac{4966.08x^2}{\log^8 x} - \frac{19080.256}{63}\,\mathrm{li}(x^2)$$

für alle $x \geq 54936653$ erfüllt ist. Zusammen mit Lemma 3.26 folgt die Behauptung für alle $x \geq 10^9$. Bezeichnen wir die rechte Seite der behaupteten Ungleichung mit $f(x)$, so folgt

$$f'(x) \geq \frac{x}{\log x}\left(1 - \frac{1.056}{\log^3 x} - \frac{3.52}{\log^5 x} - \frac{21.12}{\log^6 x} - \frac{4817.21}{\log^7 x}\right) \geq 0$$

für alle $x \geq 55 \geq e^4$. Somit genügt es mit Hilfe eines Computers nachzurechnen, dass $S(p_i) > f(p_{i+1})$ für alle $3862926 = \pi(65404357) \leq i \leq \pi(10^9) = 50847534$ gilt. Damit folgt die Behauptung, Für alle $65404356 \leq x < 65404357$ gilt $f(x) - S(x) \geq f(65404356) - S(65404356) > 2 \cdot 10^7$. $\square$

Kapitel 4

Über k-Ramanujan-Primzahlen

In diesem Kapitel werden wir mit Hilfe der in Kapitel 1 gezeigten Abschätzungen für $\pi(x)$ eine Reihe von neuen Resultaten zu den nach Srinivasa Ramanujan benannten *Ramanujan-Primzahlen* zeigen.

4.1 Ramanujan-Primzahlen und k-Ramanujan-Primzahlen

Erstmalig eingeführt wurden Ramanujan-Primzahlen im Jahr 2005 von Sondow [58]. Bevor wir die Definition einer Ramanujan-Primzahl einführen, erinnern wir uns an dieser Stelle zunächst an Bertrands Postulat, das beispielsweise von Tchebychev [62] und Erdös [17] bewiesen wurde.

Satz 4.1 (Bertrands Postulat)**.** *Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$.*

In einem zweiseitigen Artikel konnte Ramanujan [43] im Jahr 1919 eine Verschärfung von Bertrands Postulat beweisen, indem er, mit Hilfe der von ihm in diesem Artikel gezeigten Ungleichung

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{x - 18\sqrt{x}}{6\log x}, \tag{4.1}$$

die für alle $x > 1$ gilt, zeigte, dass

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) \geq 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

für jeweils alle

$$x \geq 2, 11, 17, 29, 41, \ldots \tag{4.2}$$

gilt. Dabei folgt aus der Tatsache, dass $\pi(x) - \pi(x/2) \geq 1$ für alle $x \geq 2$ gilt, Bertrands Postulat. Aus (4.1) ergibt sich insbesondere, dass $\pi(x) - \pi(x/2) \to \infty$ für $x \to \infty$ gilt, d.h. zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $x_0(n) > 0$, so dass $\pi(x) - \pi(x/2) \geq n$ für alle $x \geq x_0(n)$ gilt. Dies führt zu folgender Definition.

Definition**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$R_n := \min\{m \in \mathbb{N} \mid \pi(x) - \pi(x/2) \geq n \quad \forall\, x \geq m\}.$$

Ramanujan rechnete mit (4.2) aus, dass $R_1 = 2$, $R_2 = 11$, $R_3 = 17$, $R_4 = 29$ und $R_5 = 41$ gilt. Wie man leicht sieht, gilt $R_n \in \mathbb{P}$ für $1 \leq n \leq 5$. Das dies für alle $n \in \mathbb{N}$ der Fall ist, zeigt der folgende Satz.

Satz 4.2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist R_n stets eine Primzahl.*

Beweis. Angenommen, R_n sei für ein $n \in \mathbb{N}$ keine Primzahl. Sei $x \in [R_n - 1, R_n)$. Dann gilt

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) \geq \pi(R_n - 1) - \pi\left(\frac{R_n}{2}\right) = \pi(R_n) - \pi\left(\frac{R_n}{2}\right) \geq n,$$

was im Widerspruch zur Minimalität von R_n steht. □

Aufgrund dieser Eigenschaft der Zahlen R_n führte Sondow [58] im Jahr 2005 die folgende Definition ein.

Definition. Die Zahl R_n heißt die *n-te Ramanujan-Primzahl*.

Dies lässt sich nun wie folgt verallgemeinern. Sei $k \in \mathbb{R}$ mit $k > 1$ fest. Mit Hilfe der Abschätzungen aus Satz 1.4 erhalten wir, dass die Ungleichung

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{k}\right) > \frac{x}{\log x - 1} - \frac{x/k}{\log(x/k) - 1.1} = \frac{(k-1)x}{k(\log(x/k) - 1.1)} - \frac{x(\log k + 0.1)}{(\log(x/k) - 1.1)(\log x - 1)}$$

für alle $x \geq 60184k$ erfüllt ist. Da der Ausdruck auf der rechten Seite für $x \to \infty$ gegen ∞ geht, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_0(n,k) > 0$, so dass $\pi(x) - \pi(x/k) \geq n$ für alle $x \geq x_0(n,k)$ gilt.

Definition. Sei $k \in \mathbb{R}$ mit $k > 1$ fest. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$R_n^{(k)} := \min\{m \in \mathbb{N} \mid \pi(x) - \pi(x/k) \geq n \quad \forall\, x \geq m\}.$$

Analog zum Beweis von Satz 4.2 erhalten wir die folgende Proposition.

Proposition 4.3. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $R_n^{(k)}$ stets eine Primzahl.*

Definition. Die Zahl $R_n^{(k)}$ heißt *n-te k-Ramanujan-Primzahl*.

Bemerkung. Da $R_n^{(2)} = R_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, werden die Zahlen $R_n^{(k)}$ auch *verallgemeinerte Ramanujan-Primzahlen* genannt.

Offensichtlich gelten für die k-Ramanujan-Primzahlen die beiden folgenden Eigenschaften.

Bemerkung. Sind $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ mit $k_2 > k_1 > 1$, so gilt $R_n^{(k_1)} \geq R_n^{(k_2)}$.

Bemerkung. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$R_n^{(k)} \geq p_n. \tag{4.3}$$

Bevor wir im nächsten Abschnitt obere und untere Schranken für die n-te k-Ramanujan-Primzahl beweisen werden, notieren wir zunächst noch eine Reihe von Eigenschaften der k-Ramanujan-Primzahlen. Wir beginnen mit der folgenden Proposition.

Proposition 4.4. *Für alle $k \geq 2$ gilt*

$$R_{\pi(k)}^{(k)} = p_{\pi(k)}.$$

Für den Beweis dieser Proposition benötigen wir das folgende Lemma (siehe [4, Korollar 1.3.3]).

Lemma 4.5. *Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\pi(m) + \pi(n) \leq \pi(mn).$$

Es folgt der Beweis von Proposition 4.4.

Beweis. Sei $t = \lfloor k \rfloor$ und $x \geq k$. Sei $m \in \mathbb{N}$ so, dass $mk \leq x < (m+1)k$ ist. Mit Hilfe von Lemma 4.5 folgt

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{k}\right) \geq \pi(mk) - \pi(m) \geq \pi(mt) - \pi(m) \geq \pi(t) = \pi(k).$$

Daraus folgt $R_{\pi(k)}^{(k)} \leq k < p_{\pi(k)+1}$ für alle $k \geq 2$. Mit Proposition 4.3 folgt, dass die Ungleichung

$$R_{\pi(k)}^{(k)} \leq p_{\pi(k)} \tag{4.4}$$

für alle $k \geq 2$ erfüllt ist. Zusammen mit (4.3) folgt die Behauptung. □

Proposition 4.6. *Sei $k > 1$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $R_n^{(k)} = p_n$. Dann gilt $R_m^{(k)} = p_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$.*

Für den Beweis dieser Proposition ist das folgende Lemma hilfreich.

Lemma 4.7. *Seien $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i > j$. Dann gilt $R_i^{(k)} > R_j^{(k)}$.*

Beweis. Es gilt $\pi(x)-\pi(x/k) \geq i \geq j+1$ für alle $x \geq R_i^{(k)}$, d.h. $R_j^{(k)} \leq R_i^{(k)}$. Da außerdem $\pi(x)-\pi(x/k) \geq j$ für alle $R_i^{(k)} - 1 \leq x \leq R_i^{(k)}$ gilt, folgt $R_j^{(k)} \leq R_i^{(k)} - 1$ und somit die Behauptung. □

Es folgt der Beweis von Proposition 4.6.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $R_n^{(k)} = p_n$. Mit Hilfe von Lemma 4.7 erhalten wir $R_{n-1}^{(k)} < R_n^{(k)} = p_n$. Mit Proposition 4.3 folgt $R_{n-1}^{(k)} \leq p_{n-1}$ und zusammen mit (4.3) folgt $R_{n-1}^{(k)} = p_{n-1}$. Induktiv folgt die Behauptung. □

Proposition 4.8. *Es gelten:*

(i) *Für $1 < k < 5/3$ gilt $R_n^{(k)} > p_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Für $5/3 \leq k < 2$ gilt $R_n^{(k)} = p_n$ genau dann, wenn $n = 1$ ist.*

(iii) *Sei $k \geq 2$. Für alle $n = 1, \ldots, \pi(k)$ gilt $R_n^{(k)} = p_n$.*

Beweis. (i) Wir betrachten zwei Fälle. Ist $1 < k < 3/2$, so setzen wir $x = 2k$ und erhalten $\pi(x) - \pi(x/k) = \pi(2k)-\pi(2) = 0$, d.h. $R_1^{(k)} > 2k > p_1$. Zusammen mit Proposition 4.3 und Lemma 4.7 folgt die Behauptung. Ist $3/2 \leq k < 5/3$ und $x = 3k$, so folgt analog zum ersten Fall die Behauptung.

(ii) Sei $n = 1$. Mit Hilfe von (4.3) gilt $p_1 \leq R_1^{(k)} \leq R_1^{(5/3)} = 2 = p_1$, also $R_1^{(k)} = p_1$. Sei $n \geq 2$. Es gilt $p_2 < 11 = R_2^{(2)} \leq R_2^{(k)}$. In Kombination mit Proposition 4.3 und Lemma 4.7 folgt die Behauptung.

(iii) Die Behauptung folgt aus Proposition 4.4 und Proposition 4.6. □

Die folgende Eigenschaft werden wir insbesondere in Abschnitt 4.3 benutzen.

Proposition 4.9. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\pi(R_n^{(k)}) - \pi\left(\frac{R_n^{(k)}}{k}\right) = n.$$

Beweis. Nach Definition von $R_n^{(k)}$ gibt es ein $t_0 \in [R_n^{(k)} - 1, R_n^{(k)})$, so dass $\pi(t_0) - \pi(t_0/k) < n$ ist. Es folgt

$$\pi(R_n^{(k)}) - \pi\left(\frac{R_n^{(k)}}{k}\right) \geq n \geq \pi(t_0) - \pi\left(\frac{t_0}{k}\right) + 1 \geq \pi(R_n^{(k)} - 1) - \pi\left(\frac{R_n^{(k)}}{k}\right) + 1. \tag{4.5}$$

Nach Proposition 4.3 gilt $\pi(R_n^{(k)} - 1) + 1 = \pi(R_n^{(k)})$. Zusammen mit (4.5) folgt die Behauptung. □

Schließlich notieren wir noch die folgende Eigenschaft der k-Ramanujan-Primzahlen.

Proposition 4.10. *Sei $p \in \mathbb{P}$ mit $p \geq 3$. Dann gilt*

$$R_n^{(k)} \neq kp - 1$$

für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Ist $kp \notin \mathbb{N}$, so ist die Behauptung offensichtlich. Sei also $kp \in \mathbb{N}$. Angenommen, es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $R_n^{(k)} = kp - 1$. Da $kp - 1 \in \mathbb{P}$ nach Proposition 4.3 und $kp - 1 > 2$ gilt, folgt $kp \notin \mathbb{P}$. Sei $r \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq r < 1$. Mit Hilfe von Proposition 4.9 folgt dann

$$\pi(kp + r) - \pi\left(\frac{kp + r}{k}\right) = \pi(kp - 1) - \left(\pi\left(\frac{kp - 1}{k}\right) + 1\right) = \pi(R_n^{(k)}) - \pi\left(\frac{R_n^{(k)}}{k}\right) - 1 = n - 1,$$

was im Widerspruch zur Definition von $R_n^{(k)}$ steht. □

4.2 Abschätzungen für die n-te k-Ramanujan-Primzahl $R_n^{(k)}$

In seinem Artikel aus dem Jahr 2009 konnte Sondow [58, Theorem 2] mit Hilfe der von Rosser & Schoenfeld [50] gezeigten Ungleichung

$$\pi(2x) \leq 2\pi(x)$$

die für alle $x \geq 3$ gilt, sowie einer unteren Schranke für $\pi(2x) - \pi(x)$ beweisen, dass

$$p_{2n} < R_n < 4n \log 4n \tag{4.6}$$

für alle $n \geq 2$ gilt. Mit Hilfe von (2.2) folgt somit

$$p_{2n} < R_n < p_{4n}$$

für alle $n \geq 2$. Gleichzeitig bewies er, dass $\pi(p_{3n}) - \pi(p_{3n}/2) > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und vermutete daraufhin, dass $R_n < p_{3n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Bereits ein Jahr später konnte Laishram [27, Theorem 2] die Ungleichung

$$R_n < p_{3n} \tag{4.7}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe einer bekannten Abschätzung für die Tchebychev-Funktion $\theta(x)$, die in (1.16) definiert wurde, beweisen. Im Jahr 2011 verschärften Nicholson, Noe & Sondow [39, Theorem 4] die Ungleichung (4.7), indem sie zeigten, dass

$$\max_{n \in \mathbb{N}} \frac{R_n}{p_{3n}} = \frac{R_5}{p_{15}} = \frac{41}{47} \tag{4.8}$$

gilt. Mit Hilfe des Primzahlsatzes verschärfte Sondow [58, Theorem 3] die rechte Seite von (4.6), indem er zeigte, dass die Ungleichung

$$R_n < (2 + \varepsilon) n \log n \tag{4.9}$$

für alle hinreichend große n gilt, welche in Kombination mit (4.6) die asymptotische Relation

$$R_n \sim p_{2n} \qquad (n \to \infty) \tag{4.10}$$

zur Folge hat.

Bemerkung. Laishram [27, Theorem 1] gab für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ an, so dass die Ungleichung (4.9) für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ erfüllt ist.

Das Ziel in diesem Abschnitt ist, erstmals Abschätzungen für die n-te k-Ramanujan-Primzahl zu beweisen, mit denen wir insbesondere (4.8) verschärfen werden. Dazu seien im Folgenden $m_1 \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_{m_1} \in \mathbb{R}$,

$$A(x) = \sum_{j=1}^{m_1} \frac{a_j}{\log^j x}$$

und $X_0 := X_0(a_1, \ldots, a_{m_1}) > 1$ so, dass $\log x - 1 - A(x) > 0$ und

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x - 1 - A(x)}$$

für alle $x \geq X_0$ gilt. Desweiteren seien im Folgenden $m_2 \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_{m_2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$B(x) = \sum_{j=1}^{m_2} \frac{b_j}{\log^j x}$$

und $X_1 := X_1(b_1, \ldots, b_{m_2}) > 1$ so, dass

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x - 1 - B(x)} \tag{4.11}$$

für alle $x \geq X_1$ gilt. Daraus folgt insbesondere, dass $\log x - 1 - B(x) > 0$ für alle $x \geq X_1$ gilt.

Bemerkung. Aus den Definitionen von $A(x)$ und $B(x)$ folgt unmittelbar, dass $B(x) > A(x)$ für alle $x \geq \max\{X_0, X_1\}$ und somit $b_1 > a_1$ ist.

4.2.1 Eine untere Schranke für die n-te k-Ramanujan-Primzahl

In diesem Abschnitt wollen wir eine untere Schranke für die n-te k-Ramanujan-Primzahl beweisen. Sondow [58] konnte mit (4.11) zeigen, dass Ramanujan-Primzahlen die asymptotische Relation

$$R_n \sim p_{2n} \qquad (n \to \infty) \tag{4.12}$$

erfüllen. Gleichzeitig bewies er mit (4.6) in Hinblick auf (4.12), dass die untere Schranke

$$R_n > p_{2n} \tag{4.13}$$

für alle $n \geq 2$ gilt. Amersi, Beckwith, Miller, Ronan & Sondow [1, Theorem 1.1] konnten im Jahr 2011 die asymptotische Relation (4.12) auf k-Ramanujan-Primzahlen verallgemeinern. Sie zeigten, dass

$$R_n^{(k)} \sim p_{\lfloor kn/(k-1) \rfloor} \qquad (n \to \infty) \tag{4.14}$$

gilt. Da $p_{n+1} \sim p_n$ für $n \to \infty$ gilt, folgt

$$R_n^{(k)} \sim p_{\lceil kn/(k-1) \rceil} \qquad (n \to \infty). \tag{4.15}$$

Die Frage, die sich nun stellt, ist, ob sich die Ungleichung (4.13) in Hinblick auf (4.14) bzw. (4.15) auch auf k-Ramanujan-Primzahlen verallgemeinern lässt. Das dies in der Tat der Fall ist, zeigt das folgende Theorem. Dabei sei $X_2 = X_2(a_1, \ldots, a_{m_1}) \in \mathbb{R}$ so, dass $\log x - 1 - A(x) > 0$ und

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x - 1 - A(x)} + 1$$

für alle $x \geq X_2$ gilt. Außerdem sei $X_3 = X_3(k, a_1, \ldots, a_{m_1}, b_1, \ldots, b_{m_2}) \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\log k - B(kx) + A(x) \geq 0 \tag{4.16}$$

für alle $x \geq X_3$ gilt.

Theorem 4.11. *Sei* $X_4 = X_4(k, a_1, \ldots, a_{m_1}, b_1, \ldots, b_{m_2}) := \max\{X_1, kX_2, kX_3\}$. *Dann gilt*

$$R_n^{(k)} > p_{\lceil kn/(k-1) \rceil} \tag{4.17}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ *mit*

$$n \geq \frac{k-1}{k}(\pi(X_4) + 1).$$

Beweis. Sei $n \geq (k-1)(\pi(X_4)+1)/k$ und $x \geq X_4/k$. Dann ist die Ungleichung (4.16) äquivalent zu

$$\frac{x}{\log x - 1 - A(x)} \geq \frac{x}{\log(kx) - 1 - B(kx)}$$

und wir erhalten, dass die Ungleichung

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x - 1 - A(x)} + 1 \geq \frac{x}{\log kx - 1 - B(kx)} + 1 > \frac{\pi(kx)}{k} + 1 \tag{4.18}$$

erfüllt ist. Es gilt $p_{\lceil kn/(k-1) \rceil} \geq p_{\pi(X_4)+1} \geq X_4$. Setzen wir also $x = p_{\lceil kn/(k-1) \rceil}/k$ in (4.18) ein, so folgt

$$\pi\left(\frac{1}{k}\, p_{\lceil kn/(k-1) \rceil}\right) > \frac{1}{k}\left\lceil \frac{nk}{k-1} \right\rceil + 1 \geq \frac{n}{k-1} + 1.$$

Daraus folgt

$$\pi(p_{\lceil kn/(k-1) \rceil}) - \pi\left(\frac{1}{k}\, p_{\lceil kn/(k-1) \rceil}\right) < \left\lceil \frac{nk}{k-1} \right\rceil - \frac{n}{k-1} - 1 \leq \frac{nk}{k-1} + 1 - \frac{n}{k-1} - 1 = n,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Setzen wir nun $m_1 = 1, m_2 = 2, a_1 = 1, b_1 = 1$ und $b_2 = 3.84$, so erhalten wir das folgende Korollar. Dabei ist

$$r(k) := \frac{1}{k} \exp\left(\sqrt{\max\left\{\frac{3.84}{\log k} - 1, 0\right\}}\right).$$

Korollar 4.12. *Sei $X_5 = X_5(k) := k \cdot \max\{470077, r(k)\}$. Dann gilt*

$$R_n^{(k)} > p_{\lceil kn/(k-1) \rceil}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit

$$n \geq \frac{k-1}{k}(\pi(X_5) + 1).$$

Für den Beweis des Korollars benötigen wir das folgende Lemma, wonach $X_2 = X_2(1) = 470077$ gilt.

Lemma 4.13. *Für alle $x \geq 470077$ gilt*

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x}} + 1.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $g(x) = 2.648x - \log^4 x$. Dann gilt $x^2 g''(x)/\log^2 x = 4(\log x - 3) \geq 0$ für alle $x \geq e^3$. Analog zum Beweis von Lemma 1.14 folgt, dass $g(x) > 0$ für alle $x \geq e^7$ gilt. Setzen wir

$$f(x) = 2.648x \log x - (\log^3 x - \log^2 x - \log x - 2.648)(\log^2 x - \log x - 1),$$

so folgt $f(x) \geq g(x) \log x > 0$ für alle $x \geq e^7$. Daraus ergibt sich, dass die Ungleichung

$$\begin{aligned} x\left(\log x - 1 - \frac{1}{\log x}\right) > x &\left(\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{2.648}{\log^2 x}\right) \\ &+ \left(\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{2.648}{\log^2 x}\right)\left(\log x - 1 - \frac{1}{\log x}\right) \end{aligned}$$

für alle $x \geq e^7$ erfüllt ist. Da $\log x - 1 - 1/\log x > 0$ sowie $\log x - 1 - 1/\log x - 2.648/\log^2 x > 0$ für alle $x \geq e^7$ gilt, erhalten wir, dass die Ungleichung

$$\frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{2.648}{\log^2 x}} > \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x}} + 1$$

für alle $x \geq 1097 \geq e^7$ gilt. Zusammen mit Korollar 1.23 folgt die Behauptung für alle $x \geq 38168479$. Setzen wir $g(x) = x/(\log x - 1 - 1/\log x)$, so gilt, wie im Beweis von Korollar 1.24 gesehen, dass die Ungleichung $g'(x) \geq 0$ für alle $x \geq 12.8$. Es genügt also mit Hilfe eines Computers nachzurechnen, dass $\pi(p_i) \geq g(p_{i+1})+1$ für alle $39227 = \pi(470077) \leq i \leq \pi(38168479) = 2328673$ gilt. Für alle $470076 \leq x < 470077$ gilt $\pi(x) = 39226 < g(x) + 1$. Es folgt die Behauptung. □

Es folgt der Beweis von Korollar 4.12.

Beweis. Da $m_1 = 1$ und $a_1 = 1$ ist, gilt $A(x) = 1/\log x$. Da $\log x - 1 - A(x) > 0$ für alle $x \geq 5.1 \geq e^{(1+\sqrt{5})/2}$ ist, folgt zusammen mit Lemma 4.13, dass $X_2 = 470077$ ist. Da außerdem $m_2 = 2, b_1 = 1$ und $b_2 = 3.84$ ist, folgt mit Hilfe von Korollar 1.17, dass die Ungleichung (4.11) für alle $x \geq X_1 = 9.3$ erfüllt ist. Sei $x \geq r(k)$. Dann gilt $\log^2 kx \geq 3.84/\log k - 1$. Daraus folgt

$$\left(\log^2 kx - \frac{3.84}{\log k} + 1\right) \log x + \log k \geq 0.$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\log k \log x \log^2 kx - \log x \log kx - 3.84 \log x + \log^2 kx \geq 0.$$

Teilen wir nun durch $\log x \log^2 kx > 0$, so erhalten wir die Ungleichung (4.16). Nach Theorem 4.11 folgt somit die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq (k-1)(\pi(X_5) + 1)/k$. □

Eine Frage, die sich in natürlicher Weise stellt, ist die nach einem *minimalen* $n_0(k)$, so dass die Ungleichung (4.17) für alle $n \geq n_0(k)$ erfüllt ist. Dazu führen wir die folgende Definition ein.

DEFINITION. Für $k > 1$ definieren wir

$$N(k) := \min\{m \in \mathbb{N} \mid R_n^{(k)} > p_{\lceil kn/(k-1)\rceil} \ \forall\, n \geq m\}. \tag{4.19}$$

Aus Korollar 4.12 folgt, dass die Ungleichung

$$N(k) \leq \left\lceil \frac{k-1}{k}(\pi(\max\{470077k, kr(k)\}) + 1) \right\rceil \tag{4.20}$$

für alle $k > 1$ erfüllt ist. Für alle $k \geq 745.8$ erhalten wir die folgende obere Schranke für $N(k)$.

THEOREM 4.14. *Für alle $k \geq 745.8$ gilt*

$$N(k) \leq \pi(3k) - 1.$$

Für den Beweis von Theorem 4.14 ist das folgende Lemma nützlich.

LEMMA 4.15. *Sei $k > 1$. Dann gilt*

$$R_n^{(k)} > p_{n+1}.$$

für alle $n \geq \pi(3k) - 1$.

Beweis. Da $\pi(3k) - \pi(3k/k) = \pi(3k) - 2 < \pi(3k) - 1$ gilt, folgt $R_{\pi(3k)-1}^{(k)} > 3k \geq p_{\pi(3k)}$. Zusammen mit Proposition 4.3 und Lemma 4.7 folgt die Behauptung. □

Es folgt der Beweis von Theorem 4.14.

Beweis. Wir setzen $A(x) = -7.1/\log x$. Dann gilt $\log x - 1 - A(x) > 0$ für alle $x > 1$. Analog zum Beweis von Lemma 4.13 erhalten wir, dass die Ungleichung

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x - 1 + \frac{7.1}{\log x}} + 1$$

für alle $x \geq 3$ gilt, d.h. $X_2 = 3$. Setzen wir $B(x) = 1.17/\log x$, so ist die Ungleichung (4.11) nach Korollar 1.19 für alle $x \geq X_1 = 5.43$ erfüllt. Sei

$$\widetilde{r}(k) := \exp\left(\sqrt{7.1 + \frac{1}{4}\left(\log k - \frac{8.27}{\log k}\right)^2} - \frac{1}{2}\left(\log k - \frac{8.27}{\log k}\right)\right)$$

und sei $x \geq \widetilde{r}(k)$. Dann gilt

$$\log^2 x + \left(\log k - \frac{8.27}{\log k}\right)\log x - 7.1 \geq 0.$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit $\log k$ und teilen anschließend durch $\log x \log kx$, so folgt die Ungleichung (4.16). Setzen wir nun $X_6 = X_6(k) := \max\{5.43, 3k, k\widetilde{r}(k)\}$, so gilt $R_n^{(k)} > p_{\lceil kn/(k-1)\rceil}$ nach Theorem 4.11 für alle

$$n \geq \frac{k-1}{k}(\pi(X_6) + 1).$$

Aus der Definition von $N(k)$ folgt somit

$$N(k) \leq \left\lceil \frac{k-1}{k}(\pi(X_6) + 1) \right\rceil. \tag{4.21}$$

Es gilt

$$\widetilde{r}(k) = \exp\left(\frac{7.1}{\sqrt{7.1 + \frac{1}{4}\left(\log k - \frac{8.27}{\log k}\right)^2} + \frac{1}{2}\left(\log k - \frac{8.27}{\log k}\right)}\right).$$

Offenbar ist $\widetilde{r}(k)$ monoton fallend. Zusammen mit $\widetilde{r}(745.8) \leq 2.999966$ erhalten wir, dass $\widetilde{r}(k) \leq 3$ und somit $X_6 = 3k$ für alle $k \geq 745.8$ gilt. Mit Hilfe von Satz 1.5 erhalten wir die Ungleichung

$$0 < \frac{\pi(3k)}{k} + \frac{1}{k} \leq \frac{3}{\log 3k - 1 - \frac{1.51}{\log 3k}} + \frac{1}{k} \leq 1$$

für alle $k \geq 745.8$. Da $N(k) \in \mathbb{N}$ ist, ergibt sich mit (4.21) die Ungleichung $N(k) \leq \pi(3k) + 1$. Zusammen mit den Ungleichungen

$$R^{(k)}_{\pi(3k)-1} > p_{\pi(3k)} = p_{\lceil k(\pi(3k)-1)/(k-1) \rceil}$$

und

$$R^{(k)}_{\pi(3k)} > p_{\pi(3k)+1} = p_{\lceil k(\pi(3k))/(k-1) \rceil},$$

die nach Lemma 4.15 erfüllt sind, folgt die Behauptung. □

Beispiel. Bezeichnen wir die rechte Seite von (4.20) bzw. (4.21) mit $L(k)$ bzw. $M(k)$ und setzen $P(k) := \min\{L(k), M(k)\}$, so erhalten wir mit Hilfe von Noes Algorithmus [39] zur Berechnung von k-Ramanujan-Primzahlen die folgende Tabelle:

k	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	3
$P(k)$	3894	7730	11256	15263	18980	22651	26308	29927	26312	12092	434
$N(k)$	1	1	1	1	1	3	2	4	4	2	4
k	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$P(k)$	163	103	80	69	63	59	57	56	55	53	52
$N(k)$	6	7	8	9	10	12	13	14	15	16	17

Als nächstes wollen wir eine untere Schranke für $N(k)$ beweisen. Wie man leicht aus der Tabelle ablesen kann, gilt $N(k) > \pi(k)$ für die jeweiligen k. Da

$$R^{(k)}_{\pi(k)} < p_{\lceil k\pi(k)/(k-1) \rceil} \tag{4.22}$$

nach (4.4) für alle $k \geq 2$ gilt, folgt, dass die Ungleichung

$$N(k) > \pi(k) \tag{4.23}$$

für alle $k \geq 2$ erfüllt ist. Da (4.23) auch für alle $1 < k < 2$ erfüllt ist, erhalten wir das folgende Resultat.

Proposition 4.16. *Für alle $k > 1$ gilt*

$$N(k) > \pi(k).$$

Im Folgenden beweisen wir eine schärfere untere Schranke für $N(k)$. Dazu zeigen wir zunächst die folgende Proposition, die insbesondere Lemma 4.5 verschärft.

Proposition 4.17. *Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq 5$ und $\max\{m, n\} \geq 18$ gilt*

$$\pi(m) + \pi(n) \leq \pi\left(\frac{mn}{3}\right).$$

Für den Beweis dieser Proposition ist das folgende Lemma hilfreich.

Lemma 4.18. *Seien $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r > s > 0$. Dann gilt*

$$\pi(r) + \pi(t) \leq \pi\left(\frac{rt}{s}\right).$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t \geq s/r \cdot R^{(r/s)}_{\pi(r)}$.

Beweis. Sei $t \geq s/r \cdot R_{\pi(r)}^{(r/s)}$. Dann gilt $rt/s \geq R_{\pi(r)}^{(r/s)}$ und wir erhalten

$$\pi\left(\frac{rt}{s}\right) - \pi(t) = \pi\left(\frac{rt}{s}\right) - \pi\left(\frac{rt/s}{r/s}\right) \geq \pi(r),$$

womit die Behauptung folgt. □

Es folgt der Beweis von Proposition 4.17.

Beweis. Sei ohne Einschränkung $m \geq n$. Wir betrachten zunächst den Fall $m \geq n \geq 20$. Trost [63, §40] konnte zeigen, dass

$$\pi(x) < \frac{8x}{5\log x}$$

für alle $x > 1$ gilt. Zusammen mit (1.10) erhalten wir

$$\pi\left(\frac{mn}{3}\right) - \pi(m) \geq \frac{mn}{3\log(mn/3)} - \frac{8m}{5\log m} \geq \frac{mn}{6\log m} - \frac{8m}{5\log m} = \frac{m(5n-48)}{30\log m} \geq \frac{8m}{5\log m} > \pi(n).$$

Damit folgt die Behauptung für alle $m \geq n \geq 20$. Mit Hilfe des Algorithmus von Noe [39] zur Berechnung von k-Ramanujan-Primzahlen erhalten wir die folgende Tabelle:

m	20	19	18
$\lceil 3/m \cdot R_{\pi(m)}^{(m/3)} \rceil$	5	5	4

Setzen wir $s = 3, r = m$ und $t = n$ in Lemma 4.18, so folgt die Behauptung. □

Mit Hilfe von Proposition 4.17 erhalten wir die folgende untere Schranke für $N(k)$.

Theorem 4.19. *Für alle $k > 1$ gilt*

$$N(k) \geq \pi(3k) - 1.$$

Beweis. Für $1 < k < 5/3$ ist die Behauptung offensichtlich. Für $5/3 \leq k < 7/3$ gilt $\pi(3k) - 2 = 1$ und

$$R_{\pi(3k)-2}^{(k)} = R_1^{(k)} \leq R_1^{(5/3)} = 2 = p_1 < p_{\lceil k(\pi(3k)-2)/(k-1)\rceil},$$

d.h. $N(k) > \pi(3k) - 2$. Ist $7/3 \leq k < 11/3$, so folgt $\pi(3k) - 2 = 2$. Dann gilt

$$R_{\pi(3k)-2}^{(k)} = R_2^{(k)} \leq R_2^{(7/3)} = 5 = p_3 \leq p_{\lceil k(\pi(3k)-2)/(k-1)\rceil}$$

und wir erhalten $N(k) > \pi(3k) - 2$. Für $11/3 \leq k < 13/3$ gilt $\pi(3k) - 2 = 3$ und somit

$$R_{\pi(3k)-2}^{(k)} = R_3^{(k)} \leq R_3^{(11/3)} = 5 = p_3 < p_{\lceil k(\pi(3k)-2)/(k-1)\rceil},$$

d.h. $N(k) > \pi(3k) - 2$. Ist $13/3 \leq k < 17/3$, so folgt $\pi(3k) - 2 = 4$ und

$$R_{\pi(3k)-2}^{(k)} = R_4^{(k)} \leq R_4^{(13/3)} = 11 = p_5 \leq p_{\lceil k(\pi(3k)-2)/(k-1)\rceil},$$

also $N(k) > \pi(3k) - 2$. Sei $17/3 \leq k < 19/3$. Dann gilt $\pi(2k) = 5$ und

$$R_{\pi(3k)-2}^{(k)} = R_5^{(k)} \leq R_5^{(17/3)} = 13 = p_6 \leq p_{\lceil k(\pi(3k)-2)/(k-1)\rceil},$$

also $N(k) > \pi(3k) - 2$. Somit folgt die Behauptung für alle $1 < k < 19/3$. Sei nun $k \geq 19/3$. Ist $p_{\pi(3k)-1} \leq x < 3k$, so erhalten wir die Ungleichung

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{k}\right) \geq \pi(3k) - 1 - \pi(2) = \pi(3k) - 2.$$

Sei $3k \leq x < 5k$. Dann gilt

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{k}\right) \geq \pi(3k) - 2.$$

Sei also $x \geq 5k$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 5$ so, dass $mk \leq x < (m+1)k$ gilt. Setzen wir $n = \lfloor 3k \rfloor$, so gilt $n \geq 19$ und mit Hilfe von Proposition 4.17 erhalten wir sogar die Ungleichung

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{k}\right) \geq \pi(mk) - \pi(m) = \pi\left(\frac{m(3k)}{3}\right) - \pi(m) \geq \pi\left(\frac{mn}{3}\right) - \pi(m) \geq \pi(n) = \pi(3k).$$

Also ist die Ungleichung

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{k}\right) \geq \pi(3k) - 2$$

für alle $x \geq p_{\pi(3k)-1}$ erfüllt ist. Daraus ergibt sich

$$R^{(k)}_{\pi(3k)-2} \leq p_{\pi(3k)-1} \leq p_{\lceil k(\pi(3k)-2)/(k-1)\rceil} \tag{4.24}$$

und wir erhalten die Ungleichung $N(k) > \pi(3k) - 2$. Es folgt die Behauptung. □

Für alle $k \geq 745.8$ erhalten wir nun die folgende explizite Formel für $N(k)$.

Korollar 4.20. *Für alle $k \geq 745.8$ gilt*

$$N(k) = \pi(3k) - 1.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus Theorem 4.14 und Theorem 4.19. □

Ersetzen wir die definierende Eigenschaft von $N(k)$ durch die schwächere Bedingung

$$R^{(k)}_n \geq p_{\lceil kn/(k-1)\rceil} \; \forall n \geq m,$$

so führt dies zu folgender Definition.

Definition. Für $k > 1$ sei

$$N_0(k) := \min\{m \in \mathbb{N} \mid R^{(k)}_n \geq p_{\lceil kn/(k-1)\rceil} \; \forall n \geq m\}.$$

Offensichtlich gilt $N_0(k) \leq N(k)$. Da offenbar $N_0(k) > \pi(k)$ für alle $1 < k < 2$ gilt, folgt zusammen mit (4.22), dass

$$N_0(k) > \pi(k)$$

für alle $k > 1$ gilt. Für alle $k \geq 11/3$ erhalten wir die folgende schärfere untere Schranke für $N_0(k)$.

Theorem 4.21. *Für alle $k \geq 11/3$ gilt*

$$N_0(k) \geq \pi(2k).$$

Beweis. Sei $k \geq 11/3$. Wir zeigen zunächst, dass die Ungleichung

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{k}\right) \geq \pi(2k) - 1 \tag{4.25}$$

für alle $x \geq p_{\pi(2k)-1}$ erfüllt ist. Für $p_{\pi(2k)-1} \leq x < 2k$ und $2k \leq x < 3k$ ist die Ungleichung (4.25) jeweils offensichtlich erfüllt. Sei $3k \leq x < 5k$. Da

$$\pi(3t) - \pi(2t) = \pi(3t) - \pi\left(\frac{3t}{3/2}\right) \geq 1$$

für alle $t \geq 11/3 = 1/3 \cdot R^{(3/2)}_1$ gilt, folgt

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{k}\right) \geq \pi(3k) - 2 \geq \pi(2k) - 1.$$

Sei $x \geq 5k$ und $l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq 5$ so, dass $lk \leq x < (l+1)k$ gilt. Analog zum Beweis von Proposition 4.17 ergibt sich, dass die Ungleichung

$$\pi(m) + \pi(n) \leq \pi\left(\frac{mn}{2}\right) \tag{4.26}$$

für alle natürlichen Zahlen $m, n \geq 4$ mit $\max\{m, n\} \geq 6$ erfüllt ist. Setzen wir $n = \lfloor 2k \rfloor$, so gilt $n \geq 7$ und mit Hilfe von (4.26) erhalten wir sogar die Ungleichung

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{k}\right) \geq \pi(lk) - \pi(l) \geq \pi\left(\frac{ln}{2}\right) - \pi(l) \geq \pi(n) = \pi(2k). \tag{4.27}$$

Damit ist die Ungleichung (4.25) für alle $x \geq p_{\pi(2k)-1}$ bewiesen. Wir erhalten die Ungleichung

$$R^{(k)}_{\pi(2k)-1} \leq p_{\pi(2k)-1} < p_{\lceil k(\pi(2k)-1)/(k-1)\rceil} \tag{4.28}$$

und somit die Behauptung. □

Mit Hilfe von (4.28) erhalten wir für $k \geq 11/3$ die folgende Verschärfung von Proposition 4.8(iii).

Korollar 4.22. *Sei $k \geq 11/3$. Dann gilt $R^{(k)}_n = p_n$ für alle $1 \leq n \leq \pi(2k) - 1$.*

Beweis. Aus (4.3), der linken Ungleichung von (4.28) und Proposition 4.6 ergibt sich die Behauptung. □

Für $k \geq 29/3$ gelten sogar die folgenden Resultate.

Proposition 4.23. *Sei $k \geq 29/3$. Dann gelten:*

(i) *Es gilt $R^{(k)}_n = p_n$ genau dann, wenn $1 \leq n \leq \pi(2k) - 1$.*

(ii) *Es gilt $R^{(k)}_n = p_{n+1}$ genau dann, wenn $\pi(2k) \leq n \leq \pi(3k) - 2$.*

Für den Beweis dieses Theorems benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 4.24. *Für alle $k \geq 29/3$ gilt*

$$R^{(k)}_{\pi(2k)} = p_{\pi(2k)+1}.$$

Beweis. Es gilt $\pi(2k) - \pi(2k/k) = \pi(2k) - 1 < \pi(2k)$, d.h. $R^{(k)}_{\pi(2k)} > 2k$. Da $p_{\pi(2k)} \leq 2k < p_{\pi(2k)+1}$ gilt, folgt $R^{(k)}_{\pi(2k)} \geq p_{\pi(2k)+1}$ nach Proposition 4.3.

Schließlich zeigen wir, dass die Ungleichung

$$R^{(k)}_{\pi(2k)} \leq p_{\pi(2k)+1}$$

für alle $k \geq 29/3$ erfüllt ist. Dazu reicht es zu zeigen, dass die Ungleichung

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{k}\right) \geq \pi(2k) \tag{4.29}$$

für alle $x \geq p_{\pi(2k)+1}$ erfüllt ist. Für alle $p_{\pi(2k)+1} \leq x < 3k$ erhalten wir die Ungleichung

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{k}\right) \geq \pi(2k) + 1 - \pi(2) = \pi(2k).$$

Sei $3k \leq x < 5k$. Da

$$\pi(3t) - \pi(2t) = \pi(3t) - \pi\left(\frac{3t}{3/2}\right) \geq 2$$

für alle $t \geq 29/3 = 1/3 \cdot R^{(3/2)}_2$ gilt, folgt

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{k}\right) \geq \pi(3k) - 2 \geq \pi(2k).$$

Da wir bereits in (4.27) bewiesen haben, dass die Ungleichung (4.29) auch für alle $x \geq 5k$ erfüllt ist, erhalten wir insgesamt, dass die Ungleichung (4.29) für alle $x \geq p_{\pi(2k)+1}$ gilt. Es folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Die Zahl 29/3 in Lemma 4.24 ist im folgenden Sinne minimal. Wir definieren

$$\delta := \min\{s \in \mathbb{R} \mid R^{(k)}_{\pi(2k)} = p_{\pi(2k)+1} \; \forall\, k \geq s\}.$$

Aus Lemma 4.24 folgt $\delta \leq 29/3$. Sei $0 < \varepsilon < 1/6$ und $k = 29/3 - \varepsilon$. Dann gilt $\pi(2k) = 8$. Setzen wir $x = 29 - 3\varepsilon$, so folgt $\pi(x) - \pi(x/k) = 7$, d.h. $R^{(k)}_{\pi(2k)} = R^{(k)}_8 \geq 29 = p_{10} > p_9 = p_{\pi(2k)+1}$. Also gilt $\delta = 29/3$.

Es folgt der Beweis von Proposition 4.23.

Beweis. (i) Aus Lemma 4.24 und Proposition 4.3 folgt insbesondere, dass $R^{(k)}_n > p_n$ für alle $n \geq \pi(2k)$ gilt. Zusammen mit Korollar 4.22 folgt die Behauptung.

(ii) Wie gerade gesehen, gilt $R^{(k)}_n \geq p_{n+1}$ für alle $n \geq \pi(2k)$. Angenommen, es existiert ein $n_0 \in \{\pi(2k), \ldots, \pi(3k) - 2\}$ mit $R^{(k)}_{n_0} > p_{n_0+1}$. Dann erhalten wir mit Proposition 4.3 und Lemma 4.7 die Ungleichung

$$R^{(k)}_{\pi(3k)-2} > p_{\pi(3k)-1},$$

was im Widerspruch zu (4.24) steht. Zusammen mit (i) und Lemma 4.15 folgt die Behauptung. □

Mit Hilfe von Lemma 4.24 beweisen wir nun, dass in Theorem 4.21 für alle $k \geq 144$ sogar Gleichheit gilt.

Theorem 4.25. *Für alle $k \geq 144$ gilt*

$$N_0(k) = \pi(2k).$$

Für den Beweis dieses Theorems ist die folgende Proposition hilfreich. Dabei ist X_3 wie in (4.16) definiert.

Proposition 4.26. *Sei $X_7 = X_7(k) := \max\{kX_0, X_1, kX_3\}$. Dann gilt*

$$R^{(k)}_n \geq p_{\lceil kn/(k-1) \rceil}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit

$$n \geq \frac{k-1}{k}(\pi(X_7) + 2).$$

Beweis. Sei $x \geq X_7/k$. Dann ist die Ungleichung (4.16) äquivalent zu

$$\frac{x}{\log x - 1 - A(x)} \geq \frac{x}{\log(kx) - 1 - B(kx)}$$

und es folgt

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x - 1 - A(x)} \geq \frac{x}{\log kx - 1 - B(kx)} > \frac{\pi(kx)}{k}. \tag{4.30}$$

Es gilt $p_{\lceil kn/(k-1) \rceil - 1} \geq p_{\pi(X_7)+1} \geq X_7$. Setzen wir $x = p_{\lceil kn/(k-1) \rceil - 1}/k$ in (4.30) ein, so folgt

$$\pi\left(\frac{1}{k}\, p_{\lceil kn/(k-1) \rceil - 1}\right) > \frac{1}{k}\left(\left\lceil \frac{kn}{k-1} \right\rceil - 1\right).$$

Daraus ergibt sich die Ungleichung

$$\pi(p_{\lceil kn/(k-1) \rceil - 1}) - \pi\left(\frac{1}{k}\, p_{\lceil kn/(k-1) \rceil - 1}\right) < \frac{k-1}{k}\left(\left\lceil \frac{kn}{k-1} \right\rceil - 1\right) \leq n,$$

also $R^{(k)}_n > p_{\lceil kn/(k-1) \rceil - 1}$. Zusammen mit Proposition 4.3 folgt die Behauptung. □

Es folgt der Beweis von Theorem 4.25.

Beweis. Wir werden im Folgenden zeigen, dass die Ungleichung $N_0(k) \leq \pi(2k)$ für alle $k \geq 144$ erfüllt ist. Zusammen mit Theorem 4.21 folgt dann die Behauptung. Wir setzen $A(x) = -3.3/\log x$. Dann gilt $\log x - 1 - A(x) > 0$ für alle $x > 1$. Analog zum Beweis von Korollar 1.24 ergibt sich, dass die Ungleichung

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x - 1 + \frac{3.3}{\log x}}$$

für alle $x \geq 2$ erfüllt ist, d.h. $X_0 = 2$. Setzen wir $B(x) = 1.17/\log x$, so erhalten wir, dass die Ungleichung (4.11) nach Korollar 1.19 für alle $x \geq X_1 = 5.43$ gilt. Sei

$$z(k) := \exp\left(\sqrt{3.3 + \frac{1}{4}\left(\log k - \frac{4.47}{\log k}\right)^2} - \frac{1}{2}\left(\log k - \frac{4.47}{\log k}\right)\right)$$

und sei $x \geq z(k)$. Dann gilt

$$\log^2 x + \left(\log k - \frac{4.47}{\log k}\right)\log x - 3.3 \geq 0.$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit $\log k$ und teilen anschließend durch $\log x \log kx$, so ergibt sich die Ungleichung (4.16). Setzen wir nun $X_8 = X_8(k) := \max\{2k, 5.43, kz(k)\}$, so gilt $R_n^{(k)} \geq p_{\lceil kn/(k-1)\rceil}$ nach Proposition 4.26 für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq (k-1)(\pi(X_8)+2)/k$. Aus der Definition von $N_0(k)$ folgt somit

$$N_0(k) \leq \left\lceil \frac{k-1}{k}(\pi(X_8)+2)\right\rceil. \tag{4.31}$$

Im Beweis von Theorem 4.14 haben wir gezeigt, dass $\widetilde{r}(k) \leq 3$ für alle $k \geq 745.8$ gilt. Analog ergibt sich, dass $z(k) \leq 2$ und somit $X_8 = 2k$ für alle $k \geq 144$ gilt. Sei nun $k \geq 144$. Da mit Hilfe von Satz 1.5 die Ungleichung

$$0 < \frac{\pi(2k)}{k} + \frac{2}{k} \leq \frac{2}{\log 2k - 1 - \frac{1.51}{\log 2k}} + \frac{2}{k} < 1$$

erfüllt ist, folgt mit (4.31), dass

$$N_0(k) \leq \left\lceil \pi(2k) + 2 - \frac{\pi(2k)}{k} - \frac{2}{k}\right\rceil = \pi(2k) + 2. \tag{4.32}$$

Aus Lemma 4.24 folgt

$$R_{\pi(2k)}^{(k)} = p_{\pi(2k)+1} = p_{\lceil k\pi(2k)/(k-1)\rceil}$$

sowie

$$R_{\pi(2k)+1}^{(k)} \geq p_{\pi(2k)+2} = p_{\lceil k(\pi(2k)+1)/(k-1)\rceil}.$$

Zusammen mit (4.32) folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Aus dem Beweis von Theorem 4.25 geht hervor, dass die Ungleichung (4.31) für alle $k > 1$ erfüllt ist.

Anhand von mehreren Überprüfungen stellen wir an dieser Stelle die folgende Vermutung auf, welche Theorem 4.25 verschärft.

Vermutung 4.27. *Für alle $k \geq 11/3$ gilt*

$$N_0(k) = \pi(2k).$$

4.2.2 Eine obere Schranke für die n-te k-Ramanujan-Primzahl

Nachdem wir mit Theorem 4.11 eine untere Schranke für die n-te k-Ramanujan-Primzahl bewiesen haben, werden wir in diesem Abschnitt ein Theorem über obere Schranken für die n-te k-Ramanujan-Primzahl beweisen. Grundlegend dafür ist die folgende Proposition. Dabei ist

$$\Upsilon_k(x) = \Upsilon_{k,a_1,\ldots,a_{m_1},b_1,\ldots,b_{m_2}}(x) := \frac{x}{\log x - 1 - A(x)}\left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k}\,\frac{\log k - A(x) + B(x/k)}{\log(x/k) - 1 - B(x/k)}\right).$$

PROPOSITION 4.28. *Für alle $x \geq \max\{X_0, kX_1\}$ gilt*

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{k}\right) > \Upsilon_k(x).$$

Beweis. Sei $x \geq \max\{X_0, kX_1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{k}\right) &> \frac{x}{\log x - 1 - A(x)} - \frac{x/k}{\log(x/k) - 1 - B(x/k)}\\ &= \frac{(1-1/k)x(\log(x/k) - 1 - B(x/k)) - x(\log(k)/k + B(x/k)/k - A(x)/k)}{(\log x - 1 - A(x))(\log(x/k) - 1 - B(x/k))}.\end{aligned}$$

Da der letzte Ausdruck gleich $\Upsilon_k(x)$ ist, folgt die Behauptung. □

Wir erhalten das folgende Korollar, mit dem wir insbesondere für $k = 2$ die Ungleichung (4.1) verschärfen.

KOROLLAR 4.29. *Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda < 1 - 1/k$. Dann gilt*

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{k}\right) > \frac{\lambda x}{\log x - 1 - A(x)}$$

für alle hinreichend große x.

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda < 1 - 1/k$. Dann existiert ein $X_9 = X_9(\lambda, k, a_1, \ldots, a_{m_1}, b_1, \ldots, b_{m_2})$, so dass

$$\lambda < 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k}\,\frac{\log k - A(x) + B(x/k)}{\log(x/k) - 1 - B(x/k)} \tag{4.33}$$

für alle $x \geq X_9$ gilt. Zusammen mit Proposition 4.28 folgt die Behauptung. □

Wir notieren noch eine Eigenschaft von $\Upsilon_k(x)$, die im Laufe dieses Kapitels an mehreren Stellen auftritt.

PROPOSITION 4.30. *Für alle hinreichend große x gilt $\Upsilon_k'(x) > 0$.*

Beweis. Setzen wir

$$F(x) = F_{a_1,\ldots,a_{m_1}}(x) = \frac{x}{\log x - 1 - A(x)}$$

sowie

$$G(x) = G_{k,a_1,\ldots,a_{m_1},b_1,\ldots,b_{m_2}}(x) = 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k}\,\frac{\log k - A(x) + B(x/k)}{\log(x/k) - 1 - B(x/k)},$$

so gilt $F(x) > 0$ für alle $x \geq X_0$. Nach (4.33) gibt es für $\lambda = 0$ ein $X_9 = X_9(k, a_1, \ldots, a_{m_1}, b_1, \ldots, b_{m_2})$, so dass $G(x) > 0$ für alle $x \geq X_9$ gilt. Es gilt

$$\begin{aligned}G'(x) = {}& \frac{1}{kx(\log(x/k) - 1 - B(x/k))}\left(\sum_{j=1}^{m_2}\frac{j\cdot b_j}{\log^{j+1}(x/k)} - \sum_{i=1}^{m_1}\frac{i\cdot a_i}{\log^{i+1}x}\right)\\ &+ \left(\frac{1}{x} + \sum_{j=1}^{m_2}\frac{j\cdot b_j}{x\log^{j+1}(x/k)}\right)\frac{\log k - A(x) + B(x/k)}{k(\log(x/k) - 1 - B(x/k))^2}.\end{aligned}$$

Da $k > 1$ ist, folgt $B(x/k) > B(x) > A(x)$ sowie $\log(x/k) \leq \log x$ und $\log(x/k) - 1 - B(x/k) > 0$ für alle $x \geq \max\{X_0, kX_1\}$ gilt. Daraus folgt

$$G'(x) > \frac{1}{k(\log(x/k) - 1 - B(x/k))} \left(\sum_{j=1}^{m_2} \frac{j \cdot b_j}{\log^{j+1} x} - \sum_{i=1}^{m_1} \frac{i \cdot a_i}{\log^{i+1} x} \right) \tag{4.34}$$

für alle $x \geq \max\{X_0, kX_1\}$. Da $b_1 > a_1$ ist, existiert ein $X_{10} = X_{10}(a_1, \ldots, a_{m_1}, b_1, \ldots, b_{m_2})$, so dass

$$\sum_{j=1}^{m_2} \frac{j \cdot b_j}{\log^{j+1} x} - \sum_{i=1}^{m_1} \frac{i \cdot a_i}{\log^{i+1} x} \geq 0$$

für alle $x \geq X_{10}$ gilt. Damit gilt $G'(x) > 0$ für alle $x \geq \max\{X_0, kX_1, X_{10}\}$. Desweiteren existiert ein $X_{11} = X_{11}(a_1, \ldots, a_{m_1})$, so dass

$$\log x - 2 - A(x) - \sum_{i=1}^{m_1} \frac{i \cdot a_i}{\log^{i+1} x} > 0$$

für alle $x \geq X_{11}$ gilt. Daraus folgt

$$F'(x) = \frac{1}{(\log x - 1 - A(x))^2} \left(\log x - 2 - A(x) - \sum_{i=1}^{m_1} \frac{i \cdot a_i}{\log^{i+1} x} \right) > 0$$

für alle $x \geq \max\{X_0, X_{11}\}$ und wir erhalten, dass $\Upsilon_k'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) > 0$ für alle $x \geq \max\{X_0, kX_1, X_9, X_{10}, X_{11}\}$ erfüllt ist. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Um ein Theorem über obere Schranken für die n-te k-Ramanujan-Primzahl zu beweisen, setzen wir $m_1 = m_2 = 1$, d.h. $A(x) = a_1/\log x$ und $B(x) = b_1/\log x$, und führen die folgenden Notationen ein.

Notation. Seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ mit $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$. Wir setzen

$$\varepsilon := \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{falls } \varepsilon_1 \neq 0, \\ \varepsilon_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$\lambda := \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon_2 \cdot \operatorname{sign}(\varepsilon_1) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Ferner sei $S = S(k, a_1, b_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ durch

$$S := \exp\left(\sqrt{b_1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{(k-1)\varepsilon} \left(b_1 - a_1 + \frac{a_1 \log k}{\log kX_1} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{(1+\varepsilon)\log k}{(k-1)\varepsilon} \right)^2} + \frac{1}{2} + \frac{(1+\varepsilon)\log k}{(k-1)\varepsilon} \right)$$

sowie $T = T(a_1, b_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ durch

$$T := \exp\left(\sqrt{b_1 + \frac{b_1 - a_1}{\lambda} + \frac{a_1 \log(1+\varepsilon_1)}{\lambda} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\log(1+\varepsilon_1)}{2\lambda} \right)^2} + \frac{1}{2} + \frac{\log(1+\varepsilon_1)}{2\lambda} \right)$$

definiert.

Nach Proposition 4.30 existiert ein $X_{12} := X_{12}(k, a_1, b_1) > 1$, so dass $\Upsilon_k'(x) > 0$ für alle $x \geq X_{12}$ gilt. Ferner sei $n_0 = n_0(b_1) \in \mathbb{N}$ so, dass

$$p_n \geq n(\log p_n - 1 - b_1/\log p_n)$$

für alle $n \geq n_0$ ist. Definieren wir nun $X_{13} = X_{13}(k, a_1, b_1, X_0, X_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, X_{12})$ durch

$$X_{13} := \max\left\{ \frac{X_0}{1+\varepsilon_1}, \frac{kX_1}{1+\varepsilon_1}, \frac{k\,S(k, a_1, b_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2)}{1+\varepsilon_1}, T(a_1, b_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2), \frac{X_{12}}{1+\varepsilon_1} \right\}, \tag{4.35}$$

so erhalten wir in Hinblick auf (4.15) das folgende Theorem.

Theorem 4.31. *Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$n \geq \frac{k-1}{k(1+\varepsilon_2)} \max\{\pi(X_{13})+1, n_0\}$$

gilt die Ungleichung

$$R_n^{(k)} \leq (1+\varepsilon_1) p_{\lceil (1+\varepsilon_2)kn/(k-1) \rceil}.$$

Beweis. Der Übersicht halber schreiben wir $t = t(n,k,\varepsilon_2) := \lceil (1+\varepsilon_2)nk/(k-1) \rceil$. Da

$$n \geq \frac{k-1}{k(1+\varepsilon_2)} \max\left\{\pi\left(\frac{X_0}{1+\varepsilon_1}\right)+1, \pi\left(\frac{kX_1}{1+\varepsilon_1}\right)+1, \pi\left(\frac{X_{12}}{1+\varepsilon_1}\right)+1\right\}$$

vorausgesetzt ist, folgt

$$(1+\varepsilon_1)p_t \geq \max\{X_0, kX_1, X_{12}\}.$$

Zusammen mit Proposition 4.28 folgt, dass die Ungleichung

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{k}\right) > \Upsilon(x) \geq \Upsilon((1+\varepsilon_1)p_t)$$

für alle $x \geq (1+\varepsilon_1)p_t$ erfüllt ist. Um die Behauptung zu beweisen, genügt es also zu zeigen, dass

$$\Upsilon((1+\varepsilon_1)p_t) \geq n \tag{4.36}$$

gilt. Dazu zeigen wir zunächst, dass

$$1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k}\,\frac{\log k - a_1/\log((1+\varepsilon_1)p_t) + b_1/\log((1+\varepsilon_1)p_t/k)}{\log((1+\varepsilon_1)p_t/k) - 1 - b_1/\log((1+\varepsilon_1)p_t/k)} > \frac{k-1}{k}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}\right) \tag{4.37}$$

gilt. Da

$$n \geq \frac{k-1}{k(1+\varepsilon_2)}\left(\pi\left(\frac{k\,S(k,a_1,b_1,\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{1+\varepsilon_1}\right)+1\right)$$

ist, folgt $(1+\varepsilon_1)p_t/k \geq S(k,a_1,b_1,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ und wir erhalten die Ungleichung

$$\log((1+\varepsilon_1)p_t/k) \geq \sqrt{b_1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{(k-1)\varepsilon}\left(b_1 - a_1 + \frac{a_1 \log k}{\log kX_1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{(1+\varepsilon)\log k}{(k-1)\varepsilon}\right)^2} + \frac{1}{2} + \frac{(1+\varepsilon)\log k}{(k-1)\varepsilon}.$$

Daraus folgt

$$\log^2((1+\varepsilon_1)p_t/k) - \left(1 + \frac{2(1+\varepsilon)\log k}{(k-1)\varepsilon}\right)\log((1+\varepsilon_1)p_t/k) > b_1 + \frac{2(1+\varepsilon)}{(k-1)\varepsilon}\left(b_1 - a_1 + \frac{a_1\log k}{\log kX_1}\right)$$

und somit

$$\frac{\varepsilon(k-1)}{2(1+\varepsilon)}\left(\log^2((1+\varepsilon_1)p_t/k) - \log((1+\varepsilon_1)p_t/k) - b_1\right) > \log k \log((1+\varepsilon_1)p_t/k) + b_1 - a_1 + \frac{a_1\log k}{\log kX_1}. \tag{4.38}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$n \geq \frac{k-1}{k(1+\varepsilon_2)}\left(\pi\left(\frac{kX_1}{1+\varepsilon_1}\right)+1\right),$$

also $(1+\varepsilon_1)p_t/k \geq X_1 > 1$. Zusammen mit (4.38) ergibt sich die Ungleichung

$$\frac{\varepsilon(k-1)}{2(1+\varepsilon)}\left(\log^2((1+\varepsilon_1)p_t/k) - \log((1+\varepsilon_1)p_t/k) - b_1\right) > \log k \log((1+\varepsilon_1)p_t/k) + b_1 - \frac{a_1\log((1+\varepsilon_1)p_t/k)}{\log(1+\varepsilon_1)p_t}.$$

Teilen wir nun beide Seiten der letzten Ungleichung durch $k\log((1+\varepsilon_1)p_t/k) > 0$, so erhalten wir

$$\frac{\varepsilon(k-1)}{2k(1+\varepsilon)}\left(\log((1+\varepsilon_1)p_t/k) - 1 - \frac{b_1}{\log((1+\varepsilon_1)p_t/k)}\right) > \frac{\log k}{k} + \frac{b_1}{k\log((1+\varepsilon_1)p_t/k)} - \frac{a_1}{k\log(1+\varepsilon_1)p_t}.$$

Teilen wir nun durch $\log((1+\varepsilon_1)p_t/k) - 1 - b_1/\log((1+\varepsilon_1)p_t/k) > 0$, so folgt

$$\frac{\varepsilon(k-1)}{2k(1+\varepsilon)} - \frac{1}{k}\,\frac{\log k - a_1/\log((1+\varepsilon_1)p_t) + b_1/\log((1+\varepsilon_1)p_t/k)}{\log((1+\varepsilon_1)p_t/k) - 1 - b_1/\log((1+\varepsilon_1)p_t/k)} > 0.$$

Addieren wir beiden Seiten dieser Ungleichung mit $(k-1)/k$, so folgt die Ungleichung (4.37). Für den Beweis der Ungleichung (4.36) genügt es somit zu zeigen, dass die Ungleichung

$$\frac{k-1}{k}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}\right)\cdot\frac{(1+\varepsilon_1)p_t}{\log(1+\varepsilon_1)p_t - 1 - a_1/\log((1+\varepsilon_1)p_t)} \geq n \tag{4.39}$$

erfüllt ist. Nach Voraussetzung ist

$$n \geq \frac{k-1}{k(1+\varepsilon_2)}(\pi(T(a_1,b_1,\varepsilon_1,\varepsilon_2)) + 1),$$

d.h. $p_t \geq T(a_1,b_1,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$. Mit der Definition von $T(a_1,b_1,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ erhalten wir die Ungleichung

$$\left(\log p_t - \left(\frac{1}{2} + \frac{\log(1+\varepsilon_1)}{2\lambda}\right)\right)^2 \geq b_1 + \frac{b_1 - a_1}{\lambda} + \frac{a_1\log(1+\varepsilon_1)}{\lambda} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\log(1+\varepsilon_1)}{2\lambda}\right)^2.$$

Daraus folgt

$$\log^2 p_t - \left(1 + \frac{\log(1+\varepsilon_1)}{\lambda}\right)\log p_t - b_1 - \frac{b_1 - a_1}{\lambda} \geq \frac{a_1\log(1+\varepsilon_1)}{\lambda}.$$

Da $p_t = p_{\lceil(1+\varepsilon_2)kn/(k-1)\rceil} \geq p_{n+1} \geq 3$ gilt, erhalten wir

$$\log^2 p_t - \left(1 + \frac{\log(1+\varepsilon_1)}{\lambda}\right)\log p_t - b_1 - \frac{b_1 - a_1}{\lambda} \geq \frac{a_1\log(1+\varepsilon_1)}{\lambda\log((1+\varepsilon_1)p_t)}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\log^2 p_t - \log p_t - b_1 \geq \frac{\log(1+\varepsilon_1)}{\lambda}\log p_t + \frac{b_1}{\lambda} - \frac{a_1\log p_t}{\lambda\log((1+\varepsilon)p_t)}.$$

Teilen wir beide Seiten der Ungleichung durch $\log(p_t)/\lambda > 0$, so folgt

$$\lambda(\log p_t - 1 - b_1/\log(p_t)) \geq \log(1+\varepsilon_1) + b_1/\log(p_t) - a_1/\log((1+\varepsilon_1)p_t)$$

und wir erhalten mit Hilfe der Definition von λ, dass die Ungleichung

$$(1 + \varepsilon_2\cdot\operatorname{sign}(\varepsilon_1))\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)(\log p_t - 1 - b_1/\log(p_t)) \geq \log((1+\varepsilon_1)p_t) - 1 - a_1/\log((1+\varepsilon_1)p_t)$$

erfüllt ist. Teilen wir beide Seiten durch $\log((1+\varepsilon_1)p_t) - 1 - a_1/\log((1+\varepsilon_1)p_t)$, so folgt mit

$$(1 + \varepsilon_2\cdot\operatorname{sign}(\varepsilon_1))\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\left(1 - \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}\right)$$

die Ungleichung

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}\right)\frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(\log p_t - 1 - b_1/\log(p_t))}{\log((1+\varepsilon_1)p_t) - 1 - a_1/\log((1+\varepsilon_1)p_t)} \geq 1.$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Ungleichung mit n, so folgt

$$\frac{k-1}{k}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}\right)\frac{nk}{k-1}\cdot\frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(\log p_t - 1 - b_1/\log(p_t))}{\log((1+\varepsilon_1)p_t) - 1 - a_1/\log((1+\varepsilon_1)p_t)} \geq n$$

und somit erst recht

$$\frac{k-1}{k}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}\right)\cdot\frac{(1+\varepsilon_1)\,t\,(\log p_t - 1 - b_1/\log(p_t))}{\log((1+\varepsilon_1)p_t) - 1 - a_1/\log((1+\varepsilon_1)p_t)} \geq n. \tag{4.40}$$

Da $n \geq (k-1)n_0/(k(1+\varepsilon_2))$ nach Voraussetzung gilt, folgt $t \geq n_0$ und somit $p_t > t(\log p_t - 1 - b_1/\log(p_t))$. Zusammen mit (4.40) erhalten wir die Ungleichung (4.39) und es folgt die Behauptung. □

Wir setzen nun $m_1 = m_2 = 1, a_1 = 1$ und $b_1 = 1.17$. Dann ist $A(x) = 1/\log x$ und $B(x) = 1.17/\log x$. Mit dem nächsten Lemma bestimmen wir ein $X_{14} = X_{14}(k)$, so dass $\Upsilon_k'(x) > 0$ für alle $x \geq X_{14}$ gilt. Dabei sei

$$X_{15} = X_{15}(k) := \exp\left(\sqrt{1.17 + \frac{1.17}{k-1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\log k}{2(k-1)}\right)^2} + \frac{1}{2} + \frac{\log k}{2(k-1)}\right).$$

Lemma 4.32. *Setzen wir $X_{14} = X_{14}(k) := \max\{kX_{15}, 12.8, 5.43k\}$, so gilt $\Upsilon_k'(x) > 0$ für alle $x \geq X_{14}$.*

Beweis. Wir setzen $F(x) = x/(\log x - 1 - 1/\log x)$ und

$$G(x) = \frac{k-1}{k} - \frac{1}{k}\,\frac{\log k - 1/\log x + 1.17/\log(x/k)}{\log(x/k) - 1 - 1.17/\log(x/k)}.$$

Da $x \geq 12.8$ ist, folgt $F(x) > 0$ und, wie im Beweis von Korollar 1.24 gesehen, $F'(x) > 0$. Für alle $x \geq 5.43k$ gilt $\log(x/k) - 1 - 1.17/\log(x/k) > 0$ und zusammen mit (4.34) erhalten wir die Ungleichung $G'(x) > 0$. Wie wir leicht nachrechnen, ist die Ungleichung $x \geq kX_{15}$ äquivalent zu

$$k - 1 \geq \frac{\log k + 1.17/\log(x/k)}{\log(x/k) - 1 - 1.17/\log(x/k)}.$$

Somit gilt

$$G(x) = \frac{k-1}{k} - \frac{1}{k}\,\frac{\log k - 1/\log x + 1.17/\log(x/k)}{\log(x/k) - 1 - 1.17/\log(x/k)} \geq \frac{k-1}{k} - \frac{1}{k}\,\frac{\log k + 1.17/\log(x/k)}{\log(x/k) - 1 - 1.17/\log(x/k)} \geq 0$$

und wir erhalten, dass $\Upsilon_k'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) > 0$ für alle $x \geq \max\{kX_{15}, 12.8, 5.43k\}$ gilt. □

Somit erhalten wir das folgende Korollar zu Theorem 4.31.

Korollar 4.33. *Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$n \geq \frac{k-1}{k(1+\varepsilon_2)}(\pi(X_{16}) + 1),$$

wobei $X_{16} = X_{16}(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) := X_{13}(k, 1, 1.17, 468049, 5.43, \varepsilon_1, \varepsilon_2, X_{14})$, gilt die Ungleichung

$$R_n^{(k)} \leq (1 + \varepsilon_1)p_{\lceil (1+\varepsilon_2)kn/(k-1)\rceil}.$$

Beweis. Nach Korollar 1.24, Korollar 1.19 bzw. Lemma 4.32 können wir $X_0 = 468049, X_1 = 5.43$ bzw. $X_{12} = X_{14}$ in Theorem 4.31 wählen. Zusammen mit (1.38) folgt die Behauptung. □

Für Ramanujan-Primzahlen erhalten wir mit Hilfe von Korollar 4.33 und des Algorithmus von Noe [39] zur Berechnung von k-Ramanujan-Primzahlen das folgende Resultat, mit dem wir insbesondere die Ungleichung (4.7) von Laishram [27] verschärfen.

Proposition 4.34. *Sei $t > 48/19$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung*

$$R_n \leq p_{\lceil tn \rceil}.$$

Beweis. Sei $t > 48/19$ und sei $s = 48/19$. Wir setzen $k = 2$, $\varepsilon_1 = 0$ und $\varepsilon_2 = 5/19$ in Korollar 4.33 ein und erhalten, dass die Ungleichung $R_n \leq p_{\lceil sn \rceil}$ für alle $n \geq 19536$ erfüllt ist. Mit Hilfe des Algorithmus von Noe [39] verifizieren wir, dass die Ungleichung $R_n \leq p_{\lceil sn \rceil}$ für alle $20 \leq n \leq 19535$ und für alle $1 \leq n \leq 18$ mit einem Computer. Für $n = 19$ gilt $R_{19} = 227 = p_{49} \leq p_{\lceil 19t \rceil}$. Es folgt die Behauptung. □

Korollar 4.35. *Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$R_n \leq p_{\lceil 2.53n \rceil}.$$

Die folgende Proposition zeigt, dass Korollar 4.35 eine Verschärfung von (4.8) liefert.

Proposition 4.36. *Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 11$ gilt*

$$p_{\lceil 2.53n\rceil} < \frac{41}{47} p_{3n}.$$

Beweis. Wir setzen $f(x) = \log 3x - \log(2.53x + 1)$. Da $f'(x) = 1/(x(2.53x + 1)) \geq 0$ für alle $x > 0$ gilt, folgt zusammen mit $f(4) \geq 0.076$, dass $f(x) \geq 0.076$ für alle $x \geq 4$ gilt. Setzen wir ferner $g(x) = (\log\log 2.53x - 2)/\log 2.53x$, so gilt

$$g'(x) = -\frac{\log\log 2.53x + 3}{x \log^2 2.53x}.$$

Also gilt $g'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = e^{e^3}/2.53$ ist. Offenbar ist $t_0 = e^{e^3}/2.53$ ein lokales Maximum und wir erhalten $g(x) \leq g(t_0) = 1/e^3 \leq 0.05$ für alle $x \geq 1$. Daraus folgt $f(x) > g(x)$ für alle $x \geq 4$. Für $x \geq 1200 \geq e^{e^{2.1}}/3$ folgt somit

$$\log 3x + \log\log 3x + \frac{\log\log 3x - 2.1}{\log 3x} > \log(2.53x + 1) + \log\log(2.53x + 1) + \frac{\log\log 2.53x - 2}{\log 2.53x}. \tag{4.41}$$

Wir betrachten zunächst den Fall $n \geq 272088$. Dann gilt $\lceil 2.53n\rceil \geq 688383$. Mit Hilfe von $\lceil 2.53n\rceil < 2.53n + 1$ sowie (2.8) und (2.9) folgt

$$\begin{aligned}\frac{41}{47} p_{3n} - p_{\lceil 2.53n\rceil} \geq{}& \frac{41\cdot 3}{47} n \left(\log 3n + \log\log 3n - 1 + \frac{\log\log 3n - 2.1}{\log 3n}\right)\\ &- (2.53n + 1)\left(\log(2.53n + 1) + \log\log(2.53n + 1) - 1 + \frac{\log\log\lceil 2.53n\rceil - 2}{\log\lceil 2.53n\rceil}\right).\end{aligned}$$

Definieren wir nun $h(x) = (\log\log x)/\log x$, so gilt $h'(x) \leq 0$ für alle $x \geq e^e$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{41}{47} p_{3n} - p_{\lceil 2.53n\rceil} \geq{}& \frac{41\cdot 3}{47} n \left(\log 3n + \log\log 3n - 1 + \frac{\log\log 3n - 2.1}{\log 3n}\right)\\ &- (2.53n + 1)\left(\log(2.53n + 1) + \log\log(2.53n + 1) - 1 + \frac{\log\log 2.53n - 2}{\log 2.53n}\right).\end{aligned}$$

Da $3n\cdot 41/47 \geq 2.53n+1$ für alle $n \geq 12$ gilt, folgt zusammen mit (4.41) die Behauptung für alle $n \geq 272088$. Für $11 \leq n \leq 272087$ prüfen wir die behauptete Ungleichung mit einem Computer nach. □

Bemerkung. Im Algorithmus von Noe [39] zur Berechnung von k-Ramanujan-Primzahlen wird eine obere Schranke für die n-te Ramanujan-Primzahl benötigt, die für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Bislang wurde im Algorithmus die Abschätzung (4.7) verwendet. Durch Korollar 4.35 kann der Algorithmus von Noe [39] effizienter angewendet werden.

4.3 Über den Fehlerterm von $R_n^{(k)} - p_{\lceil nk/(k-1)\rceil}$

Eine Frage, die sich in Bezug auf (4.15) stellt, ist die nach der Größe des Fehlerterms von

$$R_n^{(k)} - p_{\lceil nk/(k-1)\rceil}. \tag{4.42}$$

Amersi, Beckwith, Miller, Ronan & Sondow [1, Theorem 1.1] konnten im Jahr 2011 in Hinblick auf (4.14) zeigen, dass es eine Konstante $\beta_1 = \beta_1(k) > 0$ gibt, so dass

$$|R_n^{(k)} - p_{\lfloor nk/(k-1)\rfloor}| \leq \beta_1\, n \log\log n \tag{4.43}$$

für alle hinreichend große n gilt. Mit Theorem 4.11 haben wir bereits eine untere Schranke für (4.42) bewiesen, die die untere Schranke in (4.43) verschärft. Mit dem nächsten Theorem beweisen wir nun eine obere Schranke für (4.42). Dazu setzen wir $A(x) = 0$ und $B(x) = 1.17/\log x$. Dann folgt analog zum

Beweis von Lemma 4.32 unter Verwendung von Satz 1.4, dass $\Upsilon'_k(x) \geq 0$ für alle $x \geq X_{17} = X_{17}(k) := \max\{kX_{15}, 5393, 5.43k\}$ gilt. Desweiteren sei

$$\eta(k) = k\left(\sqrt{2.34 + \left(\frac{1+\log k}{2}\right)^2} + \frac{1+\log k}{2}\right)$$

sowie $X_{18} = X_{18}(k) := \max\{7477, 5.43k, \eta(k)\}$ und $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Wir setzen außerdem

$$X_{19} = X_{19}(k, \varepsilon_1) := X_{13}(k, 0, 1.17, 5393, 5.43, \varepsilon_1, 0, X_{17})$$

und

$$X_{20} = X_{20}(k, \varepsilon_2) := X_{13}(k, 0, 1.17, 5393, 5.43, 0, \varepsilon_2, X_{17}),$$

wobei $X_{13}(a_1, b_1, X_0, X_1, k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, X_{12})$ wie in (4.35) definiert ist, sowie

$$\gamma_1 = \gamma_1(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) := \left(\frac{(2\log k + 2)(1+\varepsilon_2)}{k-1} + \log\frac{13(1+\varepsilon_1)}{10}\right)\frac{k}{k-1}.$$

Definieren wir nun

$$X_{21} = X_{21}(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) := \max\left\{\pi(X_{18}) + 1, \frac{k-1}{k}(\pi(X_{19}) + 1), \frac{k-1}{k(1+\varepsilon_2)}(\pi(X_{20}) + 1)\right\},$$

so erhalten wir das folgende Theorem.

Theorem 4.37. *Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq X_{21}$ gilt die Ungleichung*

$$R_n^{(k)} - p_{\lceil nk/(k-1)\rceil} < \gamma_1 n.$$

Für den Beweis des Korollars benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 4.38. *Für alle $x \geq 7477$ gilt*

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x - 1} + 1.$$

Beweis. Aus Lemma 4.13 folgt die Behauptung bereits für alle $x \geq 470077$. Setzen wir $f(x) = x/(\log x - 1)$, so gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \geq 12.8 \geq e^2$. Es genügt also mit Hilfe eines Computers nachzurechnen, dass $\pi(p_i) \geq f(p_{i+1}) + 1$ für alle $946 = \pi(7477) \leq i \leq \pi(470077) = 39227$ gilt. Für alle $7476 \leq x < 7477$ gilt $\pi(x) - (g(x) + 1) < -0.0045$. Es folgt die Behauptung. $\square$

Es folgt der Beweis von Theorem 4.37.

Beweis. Mit Hilfe von Satz 1.4 und Korollar 1.19 gilt

$$\begin{aligned}\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{k}\right) &> \frac{x}{\log x - 1} - \frac{x/k}{\log x/k - 1 - 1.17/\log(x/k)}\\ &= \frac{(k-1)x}{k(\log x - 1)} - \frac{x}{k(\log x - 1)} \cdot \frac{\log k + 1.17/\log(x/k)}{\log x/k - 1 - 1.17/\log(x/k)}\end{aligned} \tag{4.44}$$

für alle $x \geq \max\{5393, 5.43k\}$. Da

$$\frac{1}{\log x/k - 1 - \frac{1.17}{\log x/k}} = \frac{1}{\log x - 1}\left(1 + \frac{\log k + 1.17/\log(x/k)}{\log x/k - 1 - 1.17/\log(x/k)}\right) \leq \frac{2}{\log x - 1}.$$

für alle $x \geq \eta(k)$ erfüllt ist, erhalten wir zusammen mit (4.44) und der Ungleichung $1.17 \leq \log x/k$, die für alle $x \geq ke^{1.17}$ erfüllt ist, dass die Ungleichung

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{k}\right) > \frac{(k-1)x}{k(\log x - 1)} - \frac{2(\log k + 1)}{k} \cdot \frac{x}{(\log x - 1)^2} \tag{4.45}$$

für alle $x \geq X_{18}$ erfüllt ist. Da $n \geq \pi(X_{18}) + 1$ ist, folgt mit Hilfe von (4.3), dass die Ungleichung $R_n^{(k)} \geq p_n \geq X_{18}$ erfüllt ist. Setzen wir nun $x = R_n^{(k)}$ in (4.45) ein, so folgt mit Proposition 4.9 die Ungleichung

$$n > \frac{k-1}{k} \frac{R_n^{(k)}}{\log R_n^{(k)} - 1} - \frac{2(\log k + 1)}{k} \cdot \frac{R_n^{(k)}}{(\log R_n^{(k)} - 1)^2}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Ungleichung mit $k(\log R_n^{(k)} - 1)/(k-1) > 0$, so ergibt sich

$$R_n^{(k)} - \frac{kn}{k-1} \log R_n^{(k)} < \frac{2\log k + 2}{k-1} \cdot \frac{R_n^{(k)}}{\log R_n^{(k)} - 1} - \frac{kn}{k-1}.$$

Da $R_n^{(k)} \geq X_{18} \geq 7477$ ist, folgt mit Hilfe von Lemma 4.38 die Ungleichung

$$R_n^{(k)} - \frac{kn}{k-1} \log R_n^{(k)} < \frac{2\log k + 2}{k-1} (\pi(R_n^{(k)}) - 1) - \frac{kn}{k-1}. \tag{4.46}$$

Da $n \geq (k-1)(\pi(X_{20}) + 1)/(k(1+\varepsilon_2))$ ist, erhalten wir mit Hilfe von Theorem 4.31 und (1.38), dass $R_n^{(k)} \leq p_{\lceil (1+\varepsilon_2)nk/(k-1)\rceil}$ und somit $\pi(R_n^{(k)}) \leq (1+\varepsilon_2)nk/(k-1) + 1$ erfüllt ist. Zusammen mit (4.46) folgt

$$R_n^{(k)} - \frac{kn}{k-1} \log R_n^{(k)} < \frac{(2\log k + 2)(1+\varepsilon_2)kn}{(k-1)^2} - \frac{kn}{k-1}.$$

Daraus folgt

$$R_n^{(k)} - p_{\lceil nk/(k-1)\rceil} < \frac{(2\log k + 2)(1+\varepsilon_2)kn}{(k-1)^2} - \frac{kn}{k-1} + \frac{kn}{k-1} \log R_n^{(k)} - p_{\lceil nk/(k-1)\rceil}. \tag{4.47}$$

Mit Hilfe von (2.5) erhalten wir die Ungleichung

$$p_{\lceil nk/(k-1)\rceil} \geq \frac{kn}{k-1} \left(\log \left\lceil \frac{kn}{k-1} \right\rceil + \log\log \left\lceil \frac{kn}{k-1} \right\rceil - 1 \right) \tag{4.48}$$

Da $n \geq (k-1)(\pi(X_{19}) + 1)/k$ ist, ergibt sich mit Hilfe von Theorem 4.31 und (1.38), dass die Ungleichung $R_n^{(k)} \leq (1+\varepsilon_1) p_{\lceil nk/(k-1)\rceil}$ erfüllt ist. Zusammen mit (2.4) erhalten wir

$$\frac{kn}{k-1} \log R_n^{(k)} \leq \frac{kn}{k-1} \log(1+\varepsilon_1) + \frac{kn}{k-1} \log \left\lceil \frac{kn}{k-1} \right\rceil + \frac{kn}{k-1} \log \left(\log \left\lceil \frac{kn}{k-1} \right\rceil + \log\log \left\lceil \frac{kn}{k-1} \right\rceil \right).$$

Da $\log\log x \leq 3/10 \cdot \log x$ für alle $x \geq 380$ gilt und $n \geq \pi(X_{18}) + 1 \geq 712$ ist, folgt

$$\frac{kn}{k-1} \log R_n^{(k)} \leq \frac{kn}{k-1} \log \frac{13(1+\varepsilon_1)}{10} + \frac{kn}{k-1} \log \left\lceil \frac{kn}{k-1} \right\rceil + \frac{kn}{k-1} \log\log \left\lceil \frac{kn}{k-1} \right\rceil.$$

Zusammen mit (4.48) erhalten wir die Ungleichung

$$\frac{kn}{k-1} \log R_n^{(k)} - p_{\lceil nk/(k-1)\rceil} \leq \frac{kn}{k-1} \left(\log \frac{13(1+\varepsilon_1)}{10} + 1 \right).$$

In Kombination mit (4.47) folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Die obere Schranke für $R_n^{(k)}$ aus Theorem 4.37 liefert eine Verschärfung der oberen Schranke aus (4.43). Ist nämlich $nk/(k-1) \in \mathbb{N}$, so gilt $p_{\lceil nk/(k-1)\rceil} = p_{\lfloor nk/(k-1)\rfloor}$ und wir erhalten mit Theorem 4.37 offensichtlich eine schärfere obere Schranke für die n-te k-Ramanujan-Primzahl. Ist $nk/(k-1) \notin \mathbb{N}$, so setzen wir $m = \lfloor nk/(k-1)\rfloor$ und erhalten mit Hilfe von (2.4) und (2.5), dass die Ungleichung

$$\begin{aligned} p_{m+1} - p_m &\leq (m+1)(\log(m+1) + \log\log(m+1)) - m(\log m + \log\log m - 1) \\ &\leq m \log\left(1 + \frac{1}{m}\right) + \log(m+1) + m \log\left(1 + \frac{\log(1+1/m)}{\log n}\right) + \log\log(m+1) + m \\ &\leq 2 + 2\log(m+1) + m \\ &< n(\beta_1 \log\log n - \gamma_1) \end{aligned}$$

für alle hinreichend große n erfüllt ist. Daraus folgt

$$p_{\lceil nk/(k-1)\rceil} + \gamma_1 n < p_{\lfloor nk/(k-1)\rfloor} + \beta_1 n \log\log n$$

für alle hinreichend große n.

4.4 Über die Anzahl der k-Ramanujan-Primzahlen $\leq x$

Wir führen die folgende Definition ein.

Definition. Mit $\pi_k(x)$ bezeichnen wir die Anzahl der k-Ramanujan-Primzahlen $\leq x$.

Mit Hilfe des Primzahlsatzes erhalten wir das folgende Resultat.

Proposition 4.39. *Sei $k > 1$. Dann gilt*

$$\pi_k(x) \sim \left(1 - \frac{1}{k}\right)\pi(x) \qquad (x \to \infty).$$

Beweis. Wie wir bereits aus (4.15) wissen, gilt $R_n^{(k)} \sim p_{\lceil nk/(k-1)\rceil}$ für $n \to \infty$ und zusammen mit (2.1) folgt

$$R_{\pi_k(x)}^{(k)} \sim \frac{k}{k-1}\,\pi_k(x)\log\pi_k(x) \qquad (x \to \infty). \tag{4.49}$$

Somit ergibt sich $R_{\pi_k(x)+1}^{(k)} \sim R_{\pi_k(x)}^{(k)}$ für $x \to \infty$. Da $R_{\pi_k(x)}^{(k)} \leq x \leq R_{\pi_k(x)+1}^{(k)}$ gilt, erhalten wir $x \sim R_{\pi_k(x)}^{(k)}$ für $x \to \infty$. In Kombination mit (4.49) erhalten wir

$$x \sim \frac{k}{k-1}\pi_k(x)\log\pi_k(x) \qquad (x \to \infty)$$

und somit

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)\frac{x}{\log x} \sim \frac{\pi_k(x)\log\pi_k(x)}{\log(k/k-1) + \log\pi_k(x) + \log\log\pi_k(x)} \sim \pi_k(x) \qquad (x \to \infty).$$

Mit Hilfe des Primzahlsatzes folgt nun die Behauptung. □

Amersi, Beckwith, Miller, Ronan & Sondow [1] studierten die Größe des Fehlerterms von

$$\frac{k-1}{k} - \frac{\pi_k(x)}{\pi(x)}$$

und konnten zeigen [1, Theorem 1.1], dass eine Konstante $\beta_2 = \beta_2(k) > 0$ existiert, so dass

$$\left|\frac{k-1}{k} - \frac{\pi_k(n)}{\pi(n)}\right| \leq \frac{\beta_2 \log\log n}{\log n} \tag{4.50}$$

für alle hinreichend große n gilt. In Hinblick auf Proposition 4.39 beweisen wir nun die folgende Proposition, mit der wir die untere Schranke aus (4.50) verschärfen. Dabei ist $N(k)$ wie in (4.19) definiert.

Proposition 4.40. *Für alle $x \geq R_{N(k)}^{(k)}$ gilt*

$$\frac{\pi_k(x)}{\pi(x)} < \frac{k-1}{k}.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(k)$ so, dass $R_n^{(k)} \leq x < R_{n+1}^{(k)}$ gilt. Dann gilt $\pi_k(x) = n$. Da $n \geq N(k)$ gilt, folgt $R_n^{(k)} > p_{\lceil nk/(k-1)\rceil}$ und wir erhalten zusammen mit Proposition 4.3 die Ungleichung

$$\pi(x) \geq \pi(R_n^{(k)}) > \left\lceil \frac{nk}{k-1} \right\rceil \geq \frac{nk}{k-1}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\pi_k(x)}{\pi(x)} < \frac{n}{\frac{nk}{k-1}} = \frac{k-1}{k}$$

und es folgt die Behauptung. □

Mit der selben Beweismethode, die Amersi, Beckwith, Miller, Ronan & Sondow [1] in ihrem Artikel benutzt haben, werden wir die obere Schranke aus (4.50) mit Hilfe des folgenden Lemmas verschärfen.

Lemma 4.41. *Sei $s \in \mathbb{R}$ mit $s \geq 0$ und sei*

$$c_0(s) := \max\{4, 4s, (\pi(2+s) - 1)\log 2\}.$$

Dann ist die Ungleichung

$$\pi(p_n + sn) - \pi(p_n) \leq \frac{c_0 n}{\log p_n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Beweis. Für $s = 0$ ist die Behauptung offensichtlich. Sei also $s > 0$. Ist $n = 1$, so gilt

$$\pi(p_n + sn) - \pi(p_n) = \pi(2+s) - \pi(2) = \frac{(\pi(2+s) - 1)\log 2}{\log 2}. \tag{4.51}$$

Sei $n \geq 2$. Ist $n < 3/s$, so gilt

$$\pi(p_n + sn) - \pi(p_n) \leq 1 \leq \frac{n}{\log p_n}. \tag{4.52}$$

Sei also $n \geq \max\{2, 3/s\}$. Montgomery & Vaughan [37, Theorem 2] bewiesen, dass

$$\pi(M+N) - \pi(M) \leq \frac{2N}{\log N}$$

für alle $M, N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2$ erfüllt ist. Setzen wir nun $M = p_n$ und $N = \lfloor sn \rfloor$, so folgt die Ungleichung

$$\pi(p_n + sn) - \pi(p_n) \leq \frac{2\lfloor sn \rfloor}{\log\lfloor sn \rfloor} \leq \frac{2sn}{\log sn}.$$

Zusammen mit der Ungleichung $p_n \leq n^2$, die für alle $n \geq 2$ erfüllt ist, folgt

$$\pi(p_n + sn) - \pi(p_n) < \frac{2\max\{1, s\}n}{\log n} \leq \frac{4\max\{1, s\}n}{\log p_n}.$$

Zusammen mit (4.51) und (4.52) folgt die Behauptung. □

Mit dem folgenden Theorem verschärfen wir die obere Schranke aus (4.50). Dabei sei

$$M := M(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) := \max\left\{X_{21}(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2), \log\frac{k}{k-1}\right\}.$$

Theorem 4.42. *Für alle $x \geq p_{\lceil kM/(k-1)\rceil + 1}$ gilt*

$$\frac{k-1}{k} - \frac{c}{\log x} \leq \frac{\pi_k(x)}{\pi(x)},$$

wobei $c = c(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) := 2(1.02 + c_0(\gamma_1))$ ist.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung zunächst für $x = p_n$. Nach Theorem 4.37 gilt

$$R_n^{(k)} < p_{\lceil nk/(k-1) \rceil} + \gamma_1 n \tag{4.53}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq M$. Sei $n \geq \lceil kM/(k-1) \rceil + 1$ und sei $m \in \mathbb{N}$ so, dass $\lceil mk/(k-1) \rceil = n$ gilt. Dann folgt

$$\left\lceil \frac{mk}{k-1} \right\rceil = n \geq \left\lceil \frac{kM}{k-1} \right\rceil + 1,$$

d.h. $m \geq M$. Aus (4.53) folgt somit $R_m^{(k)} < p_n + \gamma_1 m$. Da $m \leq n$ ist, erhalten wir

$$R_m^{(k)} < p_n + \gamma_1 n. \tag{4.54}$$

Es gilt

$$\pi_k(p_n) = \pi_k(p_n + \gamma_1 n) - (\pi_k(p_n + \gamma_1 n) - \pi_k(p_n)).$$

Zusammen mit (4.54) erhalten wir

$$\pi_k(p_n) \geq m - (\pi_k(p_n + \gamma_1 n) - \pi_k(p_n)).$$

Da im Intervall $(p_n, p_n + \gamma_1 n]$ höchstens so viele k-Ramanujan-Primzahlen wie Primzahlen liegen, folgt

$$\pi_k(p_n) \geq m - (\pi(p_n + \gamma_1 n) - \pi(p_n)).$$

Zusammen mit Lemma 4.41 erhalten wir die Ungleichung

$$\pi_k(p_n) \geq m - \frac{c_0(\gamma_1) n}{\log p_n}.$$

Teilen wir beide Seiten der Ungleichung durch $\pi(p_n) = n$, so folgt

$$\frac{\pi_k(p_n)}{\pi(p_n)} \geq \frac{m}{n} - \frac{c_0(\gamma_1)}{\log p_n}. \tag{4.55}$$

Es gilt

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{\lceil \frac{mk}{k-1} \rceil} \geq \frac{m}{\frac{mk}{k-1} + 1} = \frac{k-1}{k} - \frac{(k-1)^2}{mk^2 + k(k-1)} \geq \frac{k-1}{k} - \frac{1}{m}. \tag{4.56}$$

Mit Hilfe der Ungleichung (2.4) sowie $n = \lceil mk/(k-1) \rceil \leq (m+1)k/(k-1)$ und $\log \log x \leq \log x$ folgt

$$\log p_n \leq \log \frac{k}{k-1} + \log(m+1) + \log \left(2 \log \frac{k}{k-1} + 2 \log(m+1) \right).$$

Zusammen mit $m \geq M \geq \log(k/(k-1))$ folgt daraus

$$\log p_n \leq m + \log(m+1) + \log(2m + 2\log(m+1)).$$

Da $m \geq M \geq X_{21}(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \geq \pi(X_{18}) + 1 \geq \pi(7477) + 1 = 947$ gilt, folgt $\log(m+1) + \log(2m + 2\log(m+1)) \leq m/50$ und somit $\log p_n \leq 1.02m$. In Kombination mit (4.56) erhalten wir, dass die Ungleichung

$$\frac{m}{n} \geq \frac{k-1}{k} - \frac{1.02}{\log p_n}$$

erfüllt ist. In Kombination mit (4.55) folgt also die Ungleichung

$$\frac{\pi_k(p_n)}{\pi(p_n)} \geq \frac{k-1}{k} - \frac{c_2}{\log p_n}, \tag{4.57}$$

wobei $c_2 = 1.02 + c_0(\gamma_1)$. Damit gilt die Behauptung für $x = p_n$.

Sei nun $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq p_{\lceil kM/(k-1) \rceil + 1}$. Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ so, dass $p_n \leq x < p_{n+1}$ gilt. Dann ist $n \geq kM/(k-1) + 1$. Mit (4.57) erhalten wir

$$\frac{\pi_k(x)}{\pi(x)} = \frac{\pi_k(p_n)}{\pi(p_n)} \geq \frac{k-1}{k} - \frac{c_2}{\log p_n}.$$

Aus Satz 4.1 folgt insbesondere, dass $p_n^2 \geq 2p_n \geq p_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Somit ergibt sich die Ungleichung

$$\frac{\pi_k(x)}{\pi(x)} \geq \frac{k-1}{k} - \frac{c_2}{\log p_n} \geq \frac{k-1}{k} - \frac{2c_2}{\log p_{n+1}} \geq \frac{k-1}{k} - \frac{c}{\log x}.$$

Es folgt die Behauptung. □

4.5 Über eine Vermutung von Mitra, Paul & Sarkar

Im Jahr 2009 stellten Mitra, Paul & Sarkar [36, Conjecture 3] die folgende Vermutung auf.

Vermutung 4.43 (Mitra, Paul & Sarkar, *2009*). *Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \lceil 1.1 \log 2.5m \rceil$ gilt*

$$\pi(mn) - \pi(n) \geq m - 1.$$

Wir werden beweisen, dass diese Vermutung für alle hinreichend große m richtig ist. Dazu zeigen wir die folgende Proposition, welche die Vermutung 4.43 für alle hinreichend große m impliziert.

Proposition 4.44. *Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt*

$$\pi(mx) - \pi(x) \geq m - 1$$

für alle hinreichend große $m \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq (1+\varepsilon)p_m/m$.

Beweis. Für $m = 1$ ist die Aussage trivial. Sei also $m \geq 2$. Wir setzen $A(x) = 0$ und $B(x) = 1.17/\log x$. Dann gilt $X_0 = 5393$ nach Satz 1.4 und nach (1.37) ist die Ungleichung (4.11) für alle $x \geq X_1 = 5.43$ erfüllt. Sei $0 < \varepsilon_1 < 0.1$ und $\varepsilon_2 = 0$. Nach Theorem 4.31 und (1.38) folgt somit, dass die Ungleichung

$$R_n^{(m)} \leq (1+\varepsilon) p_{\lceil mn/(m-1) \rceil} \tag{4.58}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq (m-1)(\pi(X_{22}) + 1)/m$ erfüllt ist, wobei

$$X_{22} = X_{22}(m, \varepsilon) := \max\left\{\frac{5393}{1+\varepsilon}, \frac{5.43m}{1+\varepsilon}, \frac{mS(m, 0, 1.17, \varepsilon, 0)}{1+\varepsilon}, T(0, 1.17, \varepsilon, 0), \frac{mX_{14}(m)}{1+\varepsilon}\right\}.$$

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\frac{\pi(X_{22}) + 1}{m} \leq 1$$

gilt. Dann folgt

$$m - 1 \geq \frac{m-1}{m}(\pi(X_{22}) + 1)$$

und zusammen mit (4.58) erhalten wir die Ungleichung $R_{m-1}^{(m)} \leq (1+\varepsilon)p_m$. Daraus folgt

$$\pi(mx) - \pi(x) \geq m - 1$$

für alle $x \geq (1+\varepsilon)p_m/m$. Es folgt die Behauptung. □

Die Vermutung 4.43 lässt sich nun für alle hinreichend große m leicht aus Proposition 4.44 folgern.

Korollar 4.45. *Die Vermutung von* Mitra, Paul & Sarkar *ist für alle hinreichend große m richtig.*

Beweis. Sei $0 < \varepsilon < 0.1$. Mit Hilfe von (2.4) erhalten wir, dass die Ungleichung

$$(1+\varepsilon)p_m/m \leq (1+\varepsilon)(\log m + \log\log m) \leq \lceil 1.1 \log 2.5m \rceil$$

für alle hinreichend große m erfüllt ist. Zusammen mit Proposition 4.44 folgt die Behauptung. □

Literaturverzeichnis

[1] Amersi, N., Beckwith, O., Miller, S.J., Ronan, R., Sondow, J., *Generalized Ramanujan Primes*, arXiv:1108.0475v4 (2011).

[2] Apostol, T., *Introduction to analytic number theory*, Springer, New York–Heidelberg, 1976.

[3] Arias de Reyna, J., Toulisse, J., *The n-th prime asymptotically*, arXiv:1203.5413v2 (2012).

[4] Axler, C., *Über die Verteilung der Primzahlen*, Diplom-Arbeit, 2007.

[5] Baker, R.C., Harman, G., Pintz, J., *The difference between consecutive primes II*, Proc. London Math. Soc. (3) **83** (2001), no. 3, 532–562.

[6] Brent, R.P., *Irregularities in the distribution of primes and twin primes*, Math. Comp. **29** (1975), 43–56.

[7] Brüdern, J., *Einführung in die analytische Zahlentheorie*, Springer, Berlin, 1995.

[8] Cipolla, M., *La determinazione assintotica dell' n^{imo} numero primo*, Rend. Accad. Sci. Fis-Mat. Napoli (3) **8** (1902), 132-166.

[9] Cramér, H., *On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers*, Acta Arith. **2**, 23–46.

[10] Deléglise, M., Rivat, J., *Computing $\pi(x)$: The Meissel, Lehmer, Lagarias, Miller, Odlyzko method*, Math. Comp. **65** (1996), no. 213, 235–245.

[11] Deléglise, M., Nicolas, J.-L., *Maximal product of primes whose sum is bounded*, arXiv: 1207.0603v1 (2012).

[12] Dusart, P., *Autour de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers*, Dissertation, Université de Limoges, 1998.

[13] —, *The kth prime is greater than $k(\log k + \log\log k - 1)$ for $k \geq 2$*, Math. Comp. **68** (1999), no. 225, 411–415.

[14] —, *Estimates of some functions over primes without R.H.*, arXiv:1002.0442v1 (2010).

[15] Edwards, H.W., *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, New York, 1974.

[16] Erdös, P., *On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **35** (1949), 374–384.

[17] —, *Beweis eines Satzes von Tschebyschef*, Acta Litt. Sci. Szeged **5** (1932), 194–198.

[18] Euklid *Die Elemente*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1933-1937.

[19] Gauß, C.F., *Werke*, 2 ed., Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1876.

[20] Hadamard, J., *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **24** (1896), 199–220.

[21] Hassani, M., *Approximation of* $\pi(x)$ *by* $\Psi(x)$, J. Inequal. Pure and Appl. Math. **7**(1), Art. 7 (2006), 1–7.

[22] —, *A remark on the Mandl's inequality*, arXiv:0606765v3 (2006).

[23] Hoheisel, G., *Primzahlprobleme in der Analysis*, Berliner Sitzungsberichte (1930), 580–588.

[24] von Koch, H., *Sur la distribution des nombres premiers*, Acta Math. **24** (1901), 159–182.

[25] Korobov, N. M., *Estimates of trigonometric sums and their applications* (Russian), Uspehi Mat. Nauk **13** (1958) no. 4 (82) 185–192.

[26] Kotnik, T., *The prime-counting function and its analytic approximations:* $\pi(x)$ *and its approximations*, Adv. Comput. Math. **29** (2008), no. 1, 55–70.

[27] Laishram, S., *On a conjecture on Ramanujan primes*, Int. J. Number Theory **6** (2010), 1869–1873.

[28] Landau, E., *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Vol. 1, Teubner, Leipzig und Berlin, 1909.

[29] Lehman, R.S., *On the difference* $\pi(x) - li(x)$, Acta Arith. **11** (1966), no. 4, 397–410.

[30] Littlewood, J.E., *Sur la distribution des nombres premiers*, Comptes Rendues **158** (1914), 1869–1872.

[31] von Mangoldt, H., *Zu Riemann's Abhandlung 'Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebener Grösse'*, J. Reine Angew. Math. **114** (1895), 255–305.

[32] Massias, J.-P., *Majoration explicite de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique*, Annales de la faculté des sciences de Toulouse, Sér. 5, **6**, no. 3-4 (1984), 269–281.

[33] Massias, J.-P., Robin, G., *Bornes effectives pour certaines fonctions concernant les nombres premiers*, Journal Th. Nombres de Bordeaux, Vol. **8** (1996), 213–238.

[34] Massias, J.-P., Nicolas, J.-L., Robin, G., *Effective Bounds for the maximal order of an element in the symmetric group*, Math. Comp. **53** (1989), no. 188, 665–678.

[35] Mincu, G., *A few inequalities involving* $\pi(x)$, An. Univ. Bucuresti Mat. **52** (2003), no.1, 55–64.

[36] Mitra, A., Paul, G., Sarkar, U., *Some conjectures on the number of primes in certain intervals*, arXiv:0906.0104v1 (2009).

[37] Montgomery, H.L., Vaughan, R.C., *The large sieve*, Mathematika **20** (1973), 119–134.

[38] Narkiewicz, W., *The Development of Prime Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[39] Nicholson, J.W., Noe, T.D., Sondow, J., *Ramanujan primes: Bounds, Runs, Twins, and Gaps*, J. Integer Seq. **14** (2011) Article 11.6.2.

[40] Nicolas, J.-L., *Sur l'ordre maximum d'un élément dans le groupe* S_n *des permutations, I*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, 7 no. 2 (1965-1966), Exp. No. 13.

[41] Nielsen, N., *Die Gammafunktion*, Chelsea Publ. Co., New York, 1965.

[42] Panaitopol, L., *A formula for* $\pi(x)$ *applied to a result of Koninck-Ivić*, Nieuw Arch. Wiskd. (5) **1** (2000), no. 1, 55–56.

[43] Ramanujan, S., *A proof of Bertrand's postulate*, J. Indian Math. Soc. **11** (1919), 181–182.

[44] Ramaré, O., Saouter, Y., *Short effective intervals containing primes*, J. Number Theory **98** (2003), no.1, 10–33.

[45] Riemann, B., *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebener Grösse*, Monats. Preuss. Akad. Wiss. (1859), 671–680.

[46] Riesel, H., *Prime numbers and Computer Methods for Factorization*, Second Edition, Birkhäuser, Boston, 1994.

[47] Rosser, J.B., *The n-th prime is greater than $n \log n$*, Proc. London Math. Soc., ser. 2, **45** (1939), 21–44.

[48] —, *Explicit bounds for some functions of prime numbers*, Amer. J. Math. **63** (1941), 211–232.

[49] Rosser, J.B., Schoenfeld, L., *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math. **6**:1 (1962), 64–94.

[50] —, *Abstract of scientific communications*, Intern. Congr. Math. Moscow, Section 3: Theory of Numbers (1966).

[51] Rosser, J.B., Schoenfeld, L., Yohe, J.M., *Rigorous computation and the zeros of the Riemann zeta functions*, Proc. IFIP Edinburgh, Vol. I: Mathematics Software, North-Holland, Amsterdam, 1969, 70–76.

[52] Salvy, B., *Fast Computation of some Asymptotic Functional Inverses*, J. Symbolic Comput. **17** (1994), no. 3, 227–236.

[53] Schoenfeld, L., *Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$ II*, Math. Comp. **30** (1976), no.134, 337–360.

[54] Selberg, A., *An elementary proof of the Prime number theorem*, Ann. of Math. **50**, 305–313.

[55] Sinha, N.K., *On the asymptotic expansion of the sum of the first n primes*, arXiv:1011.1667v1 (2010).

[56] Skewes, S., *On the difference $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$* (II), Proc. London Math. Soc. (3) **5** (1955), 48–70.

[57] Sloane, N.J.A., Wilson v, R.G., *Sequence A006988: 10^n-th prime*, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, http://oeis.org/A006988.

[58] Sondow, J., *Ramanujan primes and Bertrand's Postulate*, Amer. Math. Monthly **116** (2009), 630–635.

[59] Sun, Z.-W., *On some inequalities for primes*, arXiv:1209.3729v3 (2012).

[60] Szalay, M., *On the maximal order in S_n and S_n^**, Acta Arith. **37** (1980), 321–331.

[61] Tchebychev, P., *Sur la totalité des nombres premiers in férieurs à une limite donnée*, Mémoires des savants étrangers de l'Acad. Sci. St.Pétersbourg **6** (1848), 1–19. [Auch in: Journal de mathématiques pures et appliques **17** (1852), 341–365.]

[62] —, *Mémoire sur les nombres premiers*, Mémoires des savants étrangers de l'Acad. Sci. St.Pétersbourg **7** (1850), 17–33. [Auch in: Journal de mathématiques pures et appliques **17** (1852), 366–390.]

[63] Trost, E., *Primzahlen*, Birkhäuser, Basel/Stuttgart, 1953.

[64] de la Vallée-Poussin, C.-J., *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, $\mathbf{20}_2$ (1896), 183–256, 281–297.

[65] Vinogradov, I.M., *A new estimate of the function $\zeta(1 + it)$*, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **22** (1958), 161–164.

[66] Zegowitz, S., *On the positive region of $\pi(x) - Li(x)$*, Master Thesis, University of Manchester, 2010.