Elementare Moduln ohne Selbsterweiterungen

Inaugural-Dissertation

zur
Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Claudio Schmidt-Wegenast

aus Düsseldorf

Juni 2009

Aus dem Mathematischen Institut

der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Gedruckt mit der Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent: Prof. Dr. O. Kerner

Koreferent: Prof. Dr. F. Grunewald

Tag der mündlichen Prüfung: 14.07.09

Kurzfassung

Die unzerlegbaren Moduln über einer zusammenhängenden, endlich-dimensionalen, wilden, erblichen Algebra H lassen sich in drei Klassen unterteilen: In präinjektive, präprojektive und reguläre Moduln. Die unzerlegbaren präprojektiven und präinjektiven Moduln kann man mittels ihrer Dimensionsvektoren, durch die sie eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt sind, konstruieren. Bei regulären Moduln ist das jedoch im allgemeinen nicht der Fall.
Elementare Moduln spielen für das Verständnis der regulären Moduln eine wichtige Rolle: Die volle Unterkategorie $H-$reg der regulären Moduln über einer wilden erblichen Algebra ist abgeschlossen unter Bildern und Erweiterungen, jedoch nicht unter Kernen und Cokernen.
Die Klasse der elementaren Moduln ist die kleinste Klasse von Moduln, deren Erweiterungs-Abschluss $H -$ reg ist.
Es gibt nur endlich viele Coxeter-Bahnen von Dimensionsvektoren von elementaren Moduln. Das bedeutet jedoch im allgemeinen nicht dass es nur endlich viele τ-Bahnen von elementaren Moduln gibt, da Moduln im allgemeinen durch ihren Dimensionvektor nicht eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt sind.
Unzerlegbare Moduln ohne Selbsterweiterungen hingegen schon, es gibt also bis auf Isomorphie nur endlich viele τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen.
In jeder zusammenhängenden, wilden erblichen Algebra mit mindestens drei Isomorphieklassen von einfachen Moduln gibt es elementare Moduln ohne Selbsterweiterungen, es ist jedoch im allgemeinen nicht bekannt wie viele.
Es gibt jedoch einen Zusammenhang zwischen elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen und präprojektiven Kippmoduln: Man kann elementare Moduln ohne Selbsterweiterungen konstruieren, indem man reguläre Komplemente zu fast vollständigen präprojektiven Kippmoduln findet. Damit erhält man alle τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen.

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist eine, auf diese Weise erstellte, vollständige Liste aller τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen für Wegealgebren über einem Köcher mit 3 oder 4 Punkten. Eine wilde erbliche Algebra mit 4 Punkten hat maximal 8 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen; eine wilde erbliche Algebra mit 3 Punkten maximal 3.

Weiterhin wurde für eine Wegealgebra H über einem Köcher ohne Spitze gezeigt:
Ist E ein elementarer H-Modul ohne Selbsterweiterungen, dann gibt es ein $l \in \mathbb{N}$ und einen präprojektiven Kippmodul M, so dass für $H' = \mathrm{End}_H(M)$ der Modul $\tau_{H'} \operatorname{Hom}_H(M, \tau_H^{-l} E)$ präprojektiv über einer Faktoralgebra von H' nach einem Idempotent ist.

Abstract

The indecomposable modules over a connected finite-dimensional wild hereditary algebra H can be distinguished into three classes: preinjective, preprojective and regular ones. Since the indecomposable preprojective and preinjective modules are, up to isomorphism, uniquely determined by their dimension vectors, they can be constructed. For regular modules this is in general not the case.

Elementary modules play an important role for the understanding of regular modules: The full subcategory $H - \text{reg}$ of regular modules over a wild hereditary algebra is closed under images and extensions, but not under kernels and cokernels. The class of elementary modules is the smallest class of modules whose extension-closure is $H - \text{reg}$.

There are only finitely many Coxeter-orbits of dimension vectors of elementary modules. In general this does not mean that there are only finitely many τ-orbits of elementary modules, since in general modules are not uniquely determined by their dimension vector up to isomorphism.
But indecomposable modules without selfextensions are. Therefore there are, up to isomorphism, only finitely many τ-orbits of elementary modules without selfextensions.
However, there are indecomposable modules without selfextensions in any connected wild hereditary algebra with at least three isomorphism classes of simple modules. But it is not known how many there are.

There is a connection between elementary modules without selfextensions and preprojective tilting modules:
One can construct elementary modules without selfextensions by finding regular complements of almost complete preprojective tilting modules. Thereby one obtains all τ-orbits of elementary modules without selfextensions.

The main result of this elaboration is a complete list of all τ-orbits of elementary modules without selfextensions for all pathalgebras over quivers with 4 or 3 points. There are at the most 8 τ-orbits of elementary modules without selfextensions in the four point case, and at most three in the thee point case.

Furthermore, for a pathalgebra H over a quiver without a tip a second result is presented: For each elementary H-module E without selfextensions there is an $l \in \mathbb{N}$ and a preprojective tilting module M, such that for $H' = \text{End}_H(M)$ the module $\tau_{H'} \text{Hom}_H(M, \tau_H^{-l} E)$ is preprojective over a factoralgebra of H' by an idempotent.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **4**

2 Kipptheorie **12**

3 Cluster-Kategorien **16**

4 Elementare Moduln **21**

5 Schnittmoduln und Köcher ohne Spitzen **23**

6 Erbliche Köcher mit 4 Punkten **30**

6.1 Alle Parameter sind ungleich 0 32
6.2 Fall $b = 0$ 33
6.3 Fall $c = 0$ 35
6.4 Fall $e = 0$ 36
6.5 Fall $f = 0$ 38
6.6 Fall $e = f = 0$ und $abcd > 1$ 39
6.7 Fall $b = c = 0$ und $adef > 1$ 41
6.8 Fall $a = d = 0$ und $bcef > 1$ 42
6.9 Fall $a = e = 0$ 43
6.10 Fall $f = d = 0$ 45
6.11 Fall $e = d = 0$ 48
6.12 Fall $e = b = 0$ 50
6.13 Fall $f = b = 0$ 52
6.14 Fall $e = c = 0$ 54
6.15 Fall $a = d = e = 0$ und $bcf > 1$ 56
6.16 Fall $d = e = f = 0$ und $abc > 1$ 59
6.17 Fall $c = d = f = 0$ und $abc > 1$ 60

7 Erbliche Köcher mit 3 Punkten **62**

7.1 Fall $a, b, c \neq 0$ 62
7.2 Fall $a = 0$ und $bc > 1$ 63
7.3 Fall $c = 0$ und $ab > 1$ 64

8 Anzahl der τ-Bahnen für spezielle Köcher **66**
8.1 Ein Köcher mit 2 Armen und 5 Punkten 70
8.2 Ein Köcher mit 2 Armen der Länge 3 73

Literaturverzeichnis **78**

Einleitung

Die unzerlegbaren Moduln über einer zusammenhängenden, endlich-dimensionalen, wilden, erblichen Algebra H lassen sich in drei Klassen unterteilen: In präinjektive, präprojektive und reguläre Moduln. Die unzerlegbaren präprojektiven und präinjektiven Moduln kann man mittels ihrer Dimensionsvektoren, durch die sie eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt sind, konstruieren. Bei den regulären Moduln ist das jedoch im allgemeinen nicht der Fall.

Elementare Moduln spielen für das Verständnis der regulären Moduln eine wichtige Rolle: Die volle Unterkategorie $H-\text{reg}$ der regulären Moduln über einer wilden erblichen Algebra ist abgeschlossen unter Bildern und Erweiterungen, jedoch nicht unter Kernen und Cokernen.
Ein regulärer Modul E, der keinen regulären Untermodul $U \neq 0$ hat, so dass $0 \neq E/U$ wieder regulär ist, heißt elementar.
Die Klasse $\mathcal{E}$ der elementaren Moduln ist dann die kleinste Klasse von Moduln, so dass jeder reguläre Modul R eine Filtrierung $R = X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_{r-1} \supset X_r = 0$ von regulären Moduln besitzt, so dass X_i/X_{i+1} wieder in dieser Klasse liegt.
In dieser Hinsicht entsprechen die elementaren Moduln in wilden erblichen Algebren den quasi-einfachen Moduln von zahmen erblichen Algebren (Gemeinsamkeiten und Unterschiede siehe [12], [14]).
$\mathcal{E}$ ist also die kleinste Klasse von Moduln deren Erweiterungs-Abschluss $H-\text{reg}$ ist.

Jetzt ist natürlich interessant, wie "klein" die Klasse $\mathcal{E}$ ist: Es gibt nur endlich viele Coxeter-Bahnen von Dimensionsvektoren von elementaren Moduln [12]. Das bedeutet jedoch im allgemeinen nicht, dass es nur endlich viele τ-Bahnen von elementaren Moduln gibt, da Moduln im allgemeinen durch ihren Dimensionvektor nicht eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt sind.
Unzerlegbare Moduln ohne Selbsterweiterungen hingegen schon. Also folgt aus [12] direkt, dass es, bis auf Isomorphie, nur endlich viele τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen gibt.

In jeder zusammenhängenden, wilden erblichen Algebra mit mindestens drei Isomorphieklassen von einfachen Moduln gibt es elementare Moduln ohne Selbsterweiterungen.
Darüberhinaus gibt es unendlich viele Algebren, in denen alle elementaren Moduln keine Selbsterweiterungen haben; in denen es also, bis auf Isomorphie, nur endlich viele τ-Bahnen von elementaren Moduln gibt [12].
Es ist jedoch nicht bekannt, wieviele τ-Bahnen von elementaren Moduln mit oder ohne Selbsterweiterungen es gibt. Es gibt jedoch einen Zusammenhang zwischen elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen und präprojektiven Kippmoduln:
Ein regulärer Modul E ohne Selbsterweiterungen ist genau dann elementar, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\tau^{-l}E$ für alle $l \geq N$ ein präprojektives Kippkomplement hat (Siehe [11]).
Man kann also elementare Moduln ohne Selbsterweiterungen konstruieren, indem man reguläre Komplemente zu fast vollständigen präprojektiven Kippmoduln findet. Dies ist ein großer Vorteil, da die präprojektiven Moduln vollständig konstruierbar sind.
Kennt man also alle regulären Komplemente zu allen fast vollständigen präprojektiven Kippmoduln, so kennt man alle elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen.
Die Frage ist jetzt natürlich, wie man diese Komplemente findet und wie viele man berechnen muss, um alle τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen zu erhalten.
Zu jedem fast vollständigen präprojektiven Kippmodul T' gibt es maximal zwei Komplemente X und X^*; außerdem gibt es, modulo der τ-Verschiebung und Isomorphie, auch nur endlich viele präprojektive Kippmoduln. Man muss also nur endlich viele Komplemente finden.
Diese Konstruktion ist allerdings nicht injektiv, es gibt nämlich, auch modulo τ-Verschiebung und Isomorphie, verschiedene fast vollständige präprojektive Kippmoduln, die reguläre Komplemente in derselben τ-Bahn haben.

Ist ein Komplement X von T' bekannt, so kann X^* mit Hilfe von 2.6 konstruiert werden: X^* ist der Cokern der minimalen links $\mathrm{add}(T')$-Approximation von X.
Es reicht natürlich, den Dimensionsvektor von X^* zu berechnen, da Moduln ohne Selbsterweiterungen durch diesen eindeutig bestimmt sind.
Durchläuft T nun alle präprojektiven Kippmoduln und X alle direkten Summanden von T, so liefert X^* alle möglichen Komplemente. Ist ein Komplement regulär, dann ist es auch elementar und hat keine Selbsterweiterungen. Man erhält also alle τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen.

In den Kapiteln 6 und 7 folgt eine vollständige Liste aller τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen für Wegealgebren über einem

Köcher mit 3 oder 4 Punkten über einem beliebigen Körper. Denn unzerlegbare Moduln ohne Selbsterweiterungen sind durch ihre Dimensionsvektoren eindeutig bestimmt. Dies haben Kac ([9]) für positive Charakteristik und Schofield ([16]) für Charakteristik 0 gezeigt. Eine wilde erbliche Algebra mit 4 Punkten hat maximal 8 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen; eine wilde erbliche Algebra mit 3 Punkten maximal 3.

Für einen Köcher ohne Spitze enthält man

Proposition:

Sei E ein elementarer H-Modul ohne Selbsterweiterungen. Dann gilt:
Es gibt ein $l \in \mathbb{N}$ und einen präprojektiven Kippmodul M, so dass für $H' = \operatorname{End}_H(M)$ der Modul $\tau_{H'} \operatorname{Hom}_H(M, \tau_H^{-l} E)$ präprojektiv über einer Faktoralgebra von H' nach einem Idempotent ist.
Für einen Köcher vom Typ

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl, "x_1"'] & 3 \arrow[l, "\alpha_2"'] & \cdots & l_1 & l_1+1 \arrow[l, "\alpha_{l_1}"'] & \\
1 & & \vdots & & \vdots & & \bullet_n \arrow[ul, "y_1"'] \arrow[dl, "y_m"] \\
 & l_1+\ldots+l_{m-1}+2 \arrow[ul, "x_m"] & l_1+\ldots l_{m-1}+3 \arrow[l] & \cdots & n-2 & n-1 \arrow[l, "\alpha_{n-2}"'] &
\end{tikzcd}$$

gibt es maximal $2^{m+1} + 2n - 8$ τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen, die man auch explizit angeben kann (siehe Proposition 8.2).

An dieser Stelle möchte ich Prof. Dr. O. Kerner herzlich danken. Ohne seine ständige Gesprächsbereitschaft und Anregungen hätte diese Arbeit nicht entstehen können.

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Abschnitt werden zunächst die elementaren Definitionen und Konzepte aus der Algebra und der Darstellungstheorie wiederholt, um einen kurzen Einblick in die Theorie zu liefern.

- Ein *Köcher* $\mathcal{Q}$ ist ein gerichteter Graph, das heißt ein Tupel $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1)$, bestehend aus der Menge der Punkte (der Knoten) $\mathcal{Q}_0$ und der Menge der Pfeile (der gerichteten Kanten) $\mathcal{Q}_1$. Wir werden im folgenden nur lokal endliche Köcher betrachten; das sind Köcher, in denen in jedem Punkt nur endlich viele Pfeile starten und enden. Es ist jedoch ausdrücklich zugelassen, dass $\mathcal{Q}_0$ und $\mathcal{Q}_1$ unendlich sind.

- Ein Köcher heißt *endlich*, wenn $\mathcal{Q}_0$ und $\mathcal{Q}_1$ endliche Mengen sind.

- Eine Folge von Pfeilen $\alpha_l \dots \alpha_1$ ist genau dann ein *Weg der Länge l*, wenn für alle $1 \leq i \leq l-1$ gilt: Der Endpunkt von α_i ist der Startpunkt von α_{i+1}. Um bei der Konstruktion der Wegealgebra eine Algebra mit Eins zu erhalten, werden die Punkte des Köchers als Wege e_i der Länge 0 betrachtet.

- Ein Weg, der mindestens einen Pfeil enthält, heißt *orientierter Zykel*, wenn sein Startpunkt mit seinem Endpunkt übereinstimmt. Bei den weiteren Überlegungen werden wir nur Köcher ohne orientierte Zykel zulassen.

- Die *Wegealgebra* $k\,\mathcal{Q}$ eines Köchers $\mathcal{Q}$ ist ein k-Vektorraum, dessen Basis die Wege in $\mathcal{Q}$ sind. Die Multiplikation ist dabei folgendermaßen definiert: Sind $\omega_1 = \alpha_s \dots \alpha_1$ und $\omega_2 = \beta_r \dots \beta_1$ zwei Wege, so ist das Produkt $\omega_1\omega_2 = \alpha_s \dots \alpha_1\beta_r \dots \beta_1$ falls dies ein Weg ist und 0 sonst. Mit dieser Multiplikation wird $k\,\mathcal{Q}$ eine k-Algebra (mit Eins $\sum_{i\in\mathcal{Q}_0} e_i$ falls $\mathcal{Q}_0$ endlich ist). Die Wegealgebra ist genau dann endlich-dimensional, wenn $\mathcal{Q}$ ein endlicher Köcher ohne orientierte Zykel ist.

- Die *Wegekategorie* $\mathcal{W}(\mathcal{Q})$ eines Köchers $\mathcal{Q}$ enthält die Punkte als Objekte; die Morphismen sind die Wege in $\mathcal{Q}$. (Da wir die leeren Wege hinzugenommen haben, ist $\mathcal{W}(\mathcal{Q})$ eine Kategorie.)

- Eine endlich dimensionale k-lineare *Darstellung* von $\mathcal{Q}$ ist ein kovarianter Funktor von $\mathcal{W}(\mathcal{Q})$ in die Kategorie der endlich-dimensionalen k-Vektorräume. Das heißt, eine Darstellung M lässt sich auffassen als ein Tupel von zwei Familien $M = ((M(i))_{i\in\mathcal{Q}_0}, (M(\alpha))_{\alpha\in\mathcal{Q}_1})$, wobei die $M(i)$ endlich-dimensionale Vektorräume und die $M(\alpha)$ k-lineare Abbildungen sind, die den Pfeilen in $\mathcal{Q}$ entsprechen.

- Ein *Morphismus* zwischen zwei Darstellungen ist eine natürliche Transformation der beiden Funktoren. Das heißt, ein Morphismus ist eine Familie von Abbildungen $(f_i)_{i\in\mathcal{Q}_0}$, die die entsprechenden Diagramme kommutativ machen.

- Damit wird die Gesamtheit der endlich-dimensionalen k-linearen Darstellungen zu der Kategorie $\operatorname{rep}_k \mathcal{Q}$.

- Für einen endlichen Köcher $\mathcal{Q}$ sind die Kategorie der Linksmoduln über der Wegealgebra $k\,\mathcal{Q}$-mod und $\operatorname{rep}_k \mathcal{Q}$ äquivalent.

Nachdem nun einige elementare Definitionen der Darstellungstheorie eingeführt wurden, folgen Bezeichnungen für wichtige Köcher:

- Sei $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1)$ ein zusammenhängender Köcher und I ein Intervall in $\mathbb{Z}$, dann ist $I\,\mathcal{Q}$ der Köcher mit den Punkten $\{(u,v) \mid u \in I, v \in \mathcal{Q}_0\}$ und, wenn $b+1 \in I$ und $\alpha : x \longrightarrow y$ in $\mathcal{Q}_1$ ist, den Pfeilen $(a,\alpha) : (a,x) \longrightarrow (a,y)$ und $(b,\alpha)' : (b,y) \longrightarrow (b+1,x)$.

- $\mathcal{Q}^*$ ist der duale Köcher zu $\mathcal{Q}$ (das heißt alle Pfeile werden umgedreht).

- A_∞ ist der Köcher $\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots$

Als nächstes werden die Bedingungen an die Algebra, die ab jetzt H heißt, erläutert. Die Kategorie der endlich-dimensionalen H-Linksmoduln bezeichnen wir dann mit H-mod.
H sei eine endlich-dimensionale k-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Diese Voraussetzung vereinfacht die Situation, weil es dann bis auf Isomorphie außer k keine endlich-dimensionale k-Divisionsalgebra gibt. Die weiteren Eigenschaften, die H erfüllen soll (zusammenhängend wild erblich), werden nun erklärt:

Definition 1.1. *Eine Algebra A heißt* erblich, *falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*
(i) Die globale Dimension von A ist kleiner gleich 1.
(ii) Der Funktor $\operatorname{Ext}^2_A(-,-)$ verschwindet.
(iii) Untermoduln von projektiven A-Linksmoduln sind projektiv.

Definition 1.2. *Eine endlich-dimensionale Algebra A heißt* Basisalgebra, *falls aus $A = \bigoplus_{i=1}^n P_i$ mit P_i unzerlegbar projektiv bereits $P_i \ncong P_j$ für $i \neq j$ folgt.*

Eine beliebige endlich-dimensionale Algebra A ist von der Form $A = \bigoplus_{i=1}^{n} P(i)^{m_i}$ mit $m_i \in \mathbb{N}$, $P(i)$ unzerlegbar Projektiv und $P_i \ncong P_j$ für $i \neq j$. In diesem Fall ist $\Lambda := \mathrm{End}_A(\bigoplus_{i=1}^{n} P_i)$ eine Basisalgebra, und die Kategorien A-mod und Λ-mod sind äquivalent (siehe [2, S.35 Proposition 2.5]); A und Λ heißen dann Morita-Äquivalent.
Weiterhin gilt: Ist C eine beliebige endlich-dimensionale erbliche Basisalgebra, dann ist C isomorph zu der Wegealgebra eines eindeutig bestimmten Köchers ohne orientierte Zykel und ohne Relationen, der genau n Punkte enthält.
H ist also Morita-Äquivalent zu der Wegealgebra eines Köchers $\mathcal{Q}$ mit dieser Eigenschaft. $\mathcal{Q}$ bezeichnen wir im folgenden auch als den zu H gehörigen Köcher.

Definition 1.3. *Eine endlich-dimensionale erbliche k-Algebra A heißt* wild erblich *falls es zu jeder endlich-dimensionalen k-Algebra B einen additiven, treuen, exakten und vollen Funktor* $F_B : B - \mathrm{mod} \longrightarrow A - \mathrm{mod}$ *gibt.*

Äquivalent dazu ist, dass der zugehörige Köcher $\mathcal{Q}$ wild ist, das heißt weder vom Dynkinschen noch vom Euklidischen Typ ist.
Eine Begründung, warum wild erbliche Algebren von besonderem Interesse sind, ist direkt aus der Definition ersichtlich: einige Aussagen in A-mod können mittels F_B auf B-mod zurückgeführt werden.

Definition 1.4. *Eine endlich-dimensionale Algebra A heißt* zusammenhängend, *falls alle primitiven Idempotente in A in folgender Relation stehen:* $e \sim f \Leftrightarrow \exists\, e_1 = e, \ldots, e_r = f$ *mit* $e_i A e_{i+1} \neq 0$ *oder* $e_{i+1} A e_i \neq 0$.

A ist genau dann zusammenhängend, wenn der zugehörige Köcher $\mathcal{Q}$ ein zusammenhängender Graph ist.

Die Kategorie H-mod ist dann äquivalent zu $k\,\mathcal{Q}$-mod und damit auch zu $\mathrm{rep}_k\,\mathcal{Q}$, wobei $\mathcal{Q}$ ein endlicher, zusammenhängender, wilder Köcher ohne orientierte Zykel und ohne Relationen ist. Wir werden deshalb diese Kategorien nicht unterscheiden.
Im folgenden sei n die Anzahl der Punkte von $\mathcal{Q}$; sie stimmt überein mit der Anzahl der Isomorphieklassen von einfachen H-Moduln.

Nachdem nun die Eigenschaften von H erläutert worden sind, wird nun der Auslander-Reiten-Köcher beschrieben. Dazu benötigen wir jedoch noch einige Definitionen:

Definition 1.5. *Die Auslander-Reiten-Verschiebung* τ *in* $\Gamma(H)$ *und in H-mod ist der Funktor* $D\mathrm{Ext}^1_H(-, H)$, *wobei* D=$\mathrm{Hom}_H(-, K)$ *die Dualität ist.*

- Weil H erblich ist, ist τ voll und linksexakt.
- Für einen H-Modul X heißt die Menge $\{\tau^i X \mid i \in \mathbb{Z}\}$ die τ-Bahn von X.

Definition 1.6. *Ein Morphismus $f : N \longrightarrow M$ in H-mod heißt* rechtsminimal, *falls gilt: Ist $\alpha \in \mathrm{End}_H(N)$ mit $f = \alpha f$, dann ist $\alpha \in \mathrm{Aut}_H(N)$. Dual dazu heißt f* linksminimal, *falls gilt: Ist $\beta \in \mathrm{End}_H(M)$ mit $f\beta = f$, dann ist $\beta \in \mathrm{Aut}_H(M)$.*

- Ein Monomorphismus ist rechtsminimal.
- Ein Epimorphismus ist linksminimal.

Definition 1.7. *Ein Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ in H-mod heißt* rechtsfastzerfallend, *falls gilt:*
(i) f ist kein zerfallender Epi.
(ii) Ist $h : Z \longrightarrow Y$ in H-mod kein zerfallender Epi, dann faktorisiert h über f.
Dual dazu heißt ein Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ in H-mod linksfastzerfallend, *falls gilt:*
(i) f ist kein zerfallender Mono.
(ii) Ist $g : X \longrightarrow Z$ in H-mod kein zerfallender Mono, dann faktorisiert g über f.

Definition 1.8. *Ein rechtsminimaler rechtsfastzerfallender Morphismus in H-mod heißt* Senkenabbildung. *Ein linksminimaler linksfastzerfallender Morphismus in H-mod heißt* Quellenabbildung.

Definition 1.9. *Eine kurze exakte Folge $\eta : 0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ heißt* Auslander-Reiten-Folge *oder* fast zerfallende Folge, *falls gilt:*
(i) η zerfällt nicht.
(ii) Ist $M \in H$-mod und $\phi : X \longrightarrow M$ kein zerfallender Mono, dann faktorisiert ϕ über f.
(iii) Ist $N \in H$-mod und $\psi : N \longrightarrow Z$ kein zerfallender Epi, dann faktorisiert ψ über g.

Ist $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ eine Auslander-Reiten-Folge, dann gilt:

- X ist nicht injektiv und Z ist nicht projektiv (wegen (i)).
- X und Z sind unzerlegbar (wegen (ii),(iii)).
- Der Mittelterm Y ist im allgemeinen nicht unzerlegbar (siehe "quasieinfach").
- f ist eine Quellenabbildung und g ist eine Senkenabbildung.
- Ist $\eta : \quad 0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Folge, α eine Quellenabbildung und β eine Senkenabbildung, dann ist η eine Auslander-Reiten-Folge.

Ist $Z \in H$-mod unzerlegbar und nicht projektiv, so gibt es genau eine Auslander-Reiten-Folge, die in Z endet; sie startet in τZ. Dual dazu gibt es für einen unzerlegbaren nicht injektiven Modul X genau eine Auslander-Reiten-Folge, die in X startet; sie endet in $\tau^{-}X$.

Definition 1.10. *Für zwei H-Moduln X und Y seien*

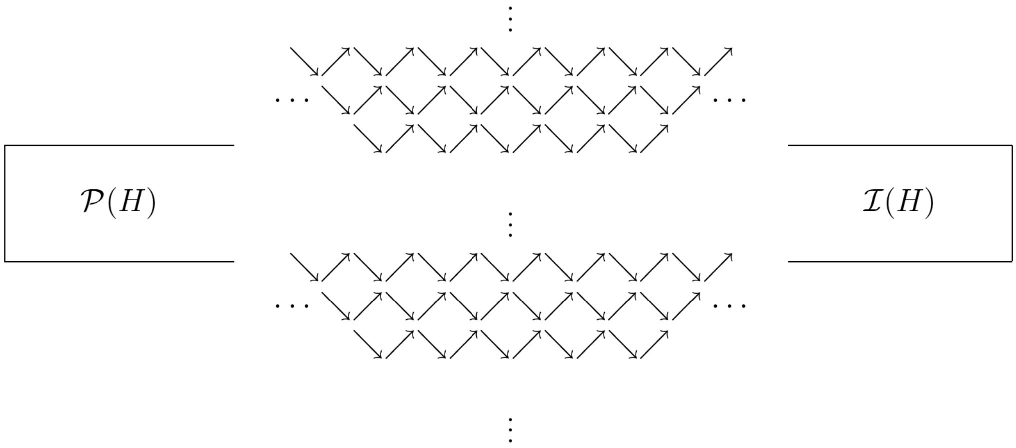
- $\operatorname{rad}(X,Y) \;=\; \{f \in \operatorname{Hom}_H(X,Y) \mid \forall\, g \in \operatorname{Hom}_H(Y,X) : id_X - fg \in \operatorname{Aut}_H(X)\}$
- $\operatorname{rad}^2(X,Y) \;=\; \{f \in \operatorname{Hom}_H(X,Y) \mid \exists\, Z \in H\text{-}mod \text{ mit } f \in \operatorname{rad}(X,Z)\operatorname{rad}(Z,Y)\}$
- $Irr(X,Y) \;=\; \operatorname{rad}(X,Y)/\operatorname{rad}^2(X,Y)$

Definition 1.11. *Ein Morphismus $f \neq 0$ zwischen zwei H-Moduln heißt* irreduzibel*, falls er weder ein zerfallender Epi, noch ein zerfallender Mono ist und für jede Faktorisierung $f = \alpha\beta$ gilt: α ist ein zerfallender Mono oder β ist ein zerfallender Epi.*

- Sind X, Y unzerlegbare H-Moduln, dann ist eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ genau dann irreduzibel, wenn ihre Restklasse in $\operatorname{Irr}(X,Y)\backslash\{0\}$ liegt.

- Ist $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ eine Auslander-Reiten-Folge, dann sind f und g irreduzibel.

Der Auslander-Reiten-Köcher:
Der Auslander-Reiten-Köcher von H wird mit $\Gamma(H)$ bezeichnet. Üblicherweise werden die Punkte dieses Köchers mit den Isomorphieklassen von unzerlegbaren Moduln identifiziert. Für die in dieser Arbeit vorgestellten Betrachtungen ist diese Darstellung jedoch sehr unpraktisch. Deshalb wählen wir aus jeder dieser Isomorphieklassen einen festen Repräsentanten aus und erhalten somit ein festes, vollständiges Repräsentanten-System von Isomorphieklassen von unzerlegbaren H-Moduln. Die Punkte von $\Gamma(H)$ identifizieren wir mit den unzerlegbaren Moduln, die als Repräsentanten gewählt wurden. Die Repräsentanten der Isomorphieklassen von einfachen Moduln werden dann mit $S_1, \ldots, S_n$ bezeichnet, die ihrer projektiven Überlagerungen mit $P_1, \ldots, P_n$ und die ihrer injektiven Hüllen mit $I_1, \ldots, I_n$.
Die Pfeile zwischen den Punkten entsprechen irreduziblen Abbildungen, dabei gibt es für zwei Repräsentanten X und Y genau $\dim_k \operatorname{Irr}(X,Y)$ Pfeile von X nach Y. Die Zusammenhangskomponenten des Graphen $\Gamma(H)$ heißen hier schlicht Komponenten. Genau eine Komponente des Auslander-Reiten-Köchers ist von der Form $\mathbb{N}\,\mathcal{Q}^*$. Sie heißt die präprojektive Komponente $\mathcal{P}(H)$ und besteht aus genau n τ^--Bahnen, die je mit einem P_i beginnen. Dual hierzu existiert genau eine Komponente, die von der Form $-\mathbb{N}\,\mathcal{Q}^*$ ist. Sie heißt die präinjektive Komponente $\mathcal{I}(H)$ und besteht ebenfalls aus genau n τ-Bahnen, die je mit einem I_i enden. Weil H zusammenhängend und wild-erblich ist, besteht $\Gamma(H)$ neben diesen Komponenten aus unendlich vielen weiteren Komponenten; sie heißen reguläre Komponenten und sind alle vom Typ $\mathbb{Z}A_\infty$. $\Gamma(H)$ lässt sich folgendermaßen visualisieren:



Jetzt folgt eine Einführung der den weiteren Überlegungen zugrundeliegenden Konzepte. Zunächst werden die grundlegenden Definitionen und Aussagen eingeführt, einige bekannte Aussagen über die Struktur der regulären Komponenten rekapituliert. Für Details dieser Ergebnisse und weitere Informationen über den Auslander-Reiten-Köcher siehe [2],[15].

Notation:
Morphismen in H-mod werden rechts von dem Argument geschrieben (das heißt $(x)f$ statt $f(x)$); Kompositionen von Morphismen in H-mod werden von links nach rechts geschrieben, aber Kompositionen von Ringhomomorphismen von rechts nach links. Das heißt: Sind $X_1, X_2, X_3 \in H$-mod und $f_1 : X_1 \longrightarrow X_2$, $f_2 : X_2 \longrightarrow X_3$, dann ist $f_1 f_2 : X_1 \longrightarrow X_3$ die Komposition.

Definition 1.12. *Ein unzerlegbarer H-Modul X heißt* präprojektiv/regulär/präinjektiv, *falls der Repräsentant der Isomorphieklasse von X ein Punkt in einer präprojektiven/reguläreren/präinjektiven Komponente von $\Gamma(H)$ ist. Ein H-Modul heißt* präprojektiv/regulär/präinjektiv, *falls alle seine unzerlegbaren direkten Summanden präprojektiv/regulär/präinjektiv sind.*

- X ist genau dann präprojektiv bzw. präinjektiv, wenn $\tau^r X = 0$ bzw. $\tau^{-r} X = 0$ für ein $r > 0$ gilt. X ist genau dann regulär, wenn $\tau^{-r}\tau^r X \cong X$ für alle $r \in \mathbb{Z}$ gilt.
- Reguläre Moduln bilden nur trivial in präprojektive Moduln ab und präinjektive Moduln nur trivial in reguläre und präprojektive Moduln.

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Betrachtung der Homomorphismenräume von Moduln ist die Auslander-Reiten-Formel:

Satz 1.13. [Auslander-Reiten-Formel für erbliche Algebren] *Sind X, Y H-Moduln, dann existieren funktorielle Isomorphismen*

$$\mathrm{Hom}_H(Y, \tau X) \simeq \mathrm{DExt}^1_H(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_H(\tau^- Y, X)$$

Beweis. siehe [15, 2.4 (6) und (6*)].

- τ induziert eine Bijektion auf den Objekten von H-reg der vollen Unterkategorie der regulären Moduln von H-mod; mit der Auslander-Reiten-Formel folgt dann, dass τ eine Äquivalenz mit Äquivalenzinversem τ^- auf H-reg ist.
- H-reg ist abgeschlossen unter Bildern und Erweiterungen.

Definition 1.14. *Ein unzerlegbarer regulärer Modul X heißt* quasieinfach, *falls die Auslander-Reiten-Sequenzen, die in X starten oder enden, einen unzerlegbaren Mittelterm haben.*

- X ist genau dann quasieinfach, wenn $\tau^i X$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ quasieinfach ist.
- Ist X quasieinfach, so sind alle $Y \cong X$ auch quasieinfach.

Definition 1.15. *Ein unzerlegbarer H-Modul X heißt* Ziegel, *falls* $\mathrm{End}_H(X) \simeq k$.

- Im allgemeinen ist X ein Ziegel, wenn $\mathrm{rad}\,\mathrm{End}_H(X) = 0$ gilt, also wenn $\mathrm{End}_H(X)$ eine k-Divisionsalgebra ist. Weil k algebraisch abgeschlossen ist, gibt es jedoch außer k keine endlich-dimensionalen k-Divisionsalgebren, das heißt $\mathrm{End}_H(X) \cong k$.
- Ist Z ein Ziegel, dann sind auch alle $Y \cong Z$ Ziegel.

Definition 1.16. *Ein A-Modul M heißt aufrichtig falls für jeden unterlegbar projektiven A-Modul P gilt* $\mathrm{Hom}_A(P, M) \neq 0$.

Definition 1.17. *Sei $\mathcal{C}$ eine volle Unterkategorie von $A - \mathrm{mod}$, $C \in \mathcal{C}$ und $M \in A - \mathrm{mod}$. Ein Morphismus $f : C \longrightarrow M$ heißt rechts $\mathcal{C}$-Approximation, falls gilt: Ist $C' \in \mathcal{C}$ und $g : C' \longrightarrow M$, so existiert ein $\hat{g} : C' \longrightarrow C$ mit $\hat{g}f = g$.*

Dual dazu definiert man:

Definition 1.18. *Sei $\mathcal{C}$ eine volle Unterkategorie von $A - \mathrm{mod}$, $C \in \mathcal{C}$ und $M \in A - \mathrm{mod}$. Ein Morphismus $g : M \longrightarrow C$ heißt links $\mathcal{C}$-Approximation falls gilt: Ist $C' \in \mathcal{C}$ und $h : M \longrightarrow C'$, so existiert ein $\hat{h} : C \longrightarrow C'$ mit $g\hat{h} = h$.*

Bemerkungen:

- Eine rechtsminimale rechts $\mathcal{C}$-Approximation heißt minimale rechts $\mathcal{C}$-Approximation.
- $f : M \longrightarrow N$ in $H - \mathrm{mod}$ ist rechtsminimal genau dann, wenn kein nichttrivialer direkter Summand von M in $\ker f$ liegt.

- Ist $f: C \longrightarrow M$ eine rechts $\mathcal{C}$-Approximation, dann existiert eine minimale rechts $\mathcal{C}$-Approximation $f_0 : C_0 \longrightarrow M$. Diese ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt; d.h. ist $f_0' : C' \longrightarrow M$ eine weitere, dann ist $C \cong C'$.
- Für links $\mathcal{C}$-Approximation gelten die dualen Aussagen.

Es ist viel einfacher, die Dimensionsvektoren der Moduln in der τ-Bahn eines Moduls zu berechnen als die Moduln.

Definition 1.19.

- $\underline{\dim}\, X := \big(\dim \operatorname{Hom}_H(P(i), X)\big)_{1\le i\le n}$ *heißt Dimensionsvektor von* X.
- $C_H := \begin{pmatrix} \underline{\dim}\, P(1) \\ \vdots \\ \underline{\dim}\, P(n) \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ *heißt Cartanmatrix.*
- $\Phi_H := -C_H^{-t} C_H \in \mathrm{GL}(n, Z)$ *heißt Coxetermatrix.*
- *Die Abbildung* $\Phi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n, \quad x \mapsto x\Phi_H$ *heißt Coxetertransformation.*

Der i-te Eintrag des Dimensionsvektors eines Moduls ist also die Dimension des Vektorraums an der Stelle der zugehörigen Darstellung.

Corollar 1.20.
(a) Sei M *ein unzerlegbarer nicht projektiver Modul in* $H - \mathrm{mod}$*, dann gilt:* $\underline{\dim}\, \tau M = \Phi_H(\underline{\dim}\, M)$.
(b) Sei N *ein unzerlegbarer nicht injektiver Modul in* $H - \mathrm{mod}$*, dann gilt:* $\underline{\dim}\, \tau^- N = \Phi_H^-(\underline{\dim}\, N)$.

Beweis: Siehe z.B. [1, Kap.4, Corollar 2.9].

Bemerkung:
Mittels der Coxetertransformation können also die Dimensionsvektoren der Moduln in der τ-Bahn eines Moduls leicht berechnet werden.
Moduln ohne Selbsterweiterungen sind durch ihren Dimensionsvektor eindeutig bestimmt, also können mit der Coxetertransformation die τ-Bahnen dieser Moduln berechnet werden. Denn wenn X keine Selbsterweiterungen hat, so hat auch $\tau^{\pm} X$ keine.
Insbesondere können also auch alle präprojektiven und präinjektiven Moduln damit bestimmt werden.

Lemma 1.21. *Seien* $X, Y \in H$*-mod,* x_i *die* i*-te Komponente von* $\underline{\dim}\, X$ *(analog für* y_i*) und* p_{ij} *die Anzahl der Pfeile von* i *nach* j *. Dann gilt*

$$\dim_k \operatorname{Hom}_H(X, Y) - \dim_k \operatorname{Ext}^1_H(X, Y) = <\underline{\dim}\, X, \underline{\dim}\, Y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{1\le i,j\le n} p_{ij} x_i y_j$$

Beweis. siehe [15, S.71].

Kapitel 2

Kipptheorie

Definition 2.1. *Ein A-Modul T heißt partieller Kippmodul, falls* $\mathrm{pd}T \leq 1$ *und* $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) = 0$.

Für erbliche Algebren ist die erste Bedingung natürlich trivial und wird deswegen weggelassen.

Definition 2.2. *Ein partieller Kippmodul T heißt fast vollständiger Kippmodul, wenn T genau $n-1$ nicht-isomorphe direkte Summanden hat.*

Definition 2.3. *Ein partieller Kippmodul T heißt Kippmodul, falls es eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow T' \longrightarrow T'' \longrightarrow 0$$

mit T', T'' in $\mathrm{add}(T)$ *gibt.*

Bemerkungen:
Ein partieller Kippmodul T ist ein Kippmodul genau dann, wenn er n nicht-isomorphe direkte Summanden hat.
Ein unzerlegbarer Modul X heißt Komplement zu einem fast vollständigen Kippmodul T, wenn $X \oplus T$ ein Kippmodul ist.

Definition 2.4. *Ein Modul M heißt quadratfrei, falls es keinen Modul $X \neq 0$ gibt mit $X^2|M$.*

Wir werden ab jetzt ohne Einschränkung annehmen, dass jeder (partielle) Kippmodul quadratfrei ist.

Das Bongartz-Lemma (siehe [3]) besagt, dass man jeden partiellen Kippmodul zu einem Kippmodul vervollständigen kann. D.h. jeder fast vollständige Kippmodul hat mindestens ein Komplement. Maximal gibt es zwei Komplemente und es ist auch bekannt, wieviele Komplemente es genau gibt:

Satz 2.5 (Happel-Unger). *Ein fast vollständiger Kippmodul M hat genau zwei nicht-isomorphe Komplemente, genau dann wenn M aufrichtig ist.*

Beweis Siehe [7]

Satz 2.6. *Sei T' ein aufrichtiger fast vollständiger Kippmodul mit nichtisomorphen Komplementen M_1 und M_2. Dann gibt es eine kurze exakte Folge $0 \longrightarrow M_i \longrightarrow B \longrightarrow M_j \longrightarrow 0$ in $H - \mathrm{mod}$ mit $i \neq j$, wobei $B \longrightarrow M_j$ eine minimale rechts* $\mathrm{add}(T')$*-Approximation ist.*

Beweis Siehe [7]

Bemerkungen:
Dual dazu ist $M_i \longrightarrow B$ dann eine minimale links $\mathrm{add}(T')$-Approximation.
Gibt es zu einem fast vollständigen Kippmodul zwei Komplemente und ein Komplement M ist bekannt, so kann mit dieser Folge das zweite Komplement ausgerechnet werden. Dieses wird üblicherweise mit M^* bezeichnet. Allerdings ist a priori nicht klar, ob M Start- oder Endterm dieser kurzen exakten Folge ist. Es gibt also zwei Möglichkeiten: Die Folge kann entweder so $0 \longrightarrow M^* \longrightarrow B \longrightarrow M \longrightarrow 0$ oder so $0 \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow M^* \longrightarrow 0$ aussehen.

Definition 2.7. *Ein Paar $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$ von vollen Unterkategorien von A-mod heißt Torsionspaar, falls gilt:*
(a) $\mathrm{Hom}_A(M, N) = 0 \ \forall M \in \mathcal{T}, N \in \mathcal{F}$
(b) $\mathrm{Hom}_A(M, -)_{|\mathcal{F}} = 0$ *impliziert* $M \in \mathcal{T}$
(c) $\mathrm{Hom}_A(-, N)_{|\mathcal{T}} = 0$ *impliziert* $N \in \mathcal{F}$

D.h. es gibt keine Homomorphismen ($\neq 0$) von $\mathcal{T}$ nach $\mathcal{F}$ und die Klassen sind maximal mit dieser Eigenschaft. Die Klasse $\mathcal{T}$ heißt dann Torsionsklasse und $\mathcal{F}$ heißt torsionsfreie Klasse.

Notation:
Für einen Kippmodul T in $A - \mathrm{mod}$ und $B = \mathrm{End}_A(T)$ definiert man:
$\mathcal{T}(T) = \{M \in A - \mathrm{mod} \,|\, \mathrm{Ext}^1_A(T, M) = 0\}$,
$\mathcal{F}(T) = \{M \in A - \mathrm{mod} \,|\, \mathrm{Hom}_A(T, M) = 0\}$,
$\mathcal{X}(T) = \{M \in B - \mathrm{mod} \,| T_B \otimes_B M = 0\}$ und
$\mathcal{Y}(T) = \{M \in B - \mathrm{mod} \,|\, \mathrm{Tor}^B_1(T_B, M) = 0\}$
Dann gilt folgendes

Lemma 2.8. *Sei T ein Kippmodul und $B = \mathrm{End}_A(T)$. Dann gilt:*
(a) $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ ist ein Torsionspaar in $A - \mathrm{mod}$.
(b) $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ ist ein Torsionspaar in $B - \mathrm{mod}$.

Beweis: siehe z.B. [6, Kap.3.4]

Proposition 2.9. *(a) Sei $\mathcal{T}$ eine volle Unterkategorie von $A-\mathrm{mod}$. Dann sind äquivalent:*
(i) $\mathcal{T}$ ist die Torsionsklasse eines Torsionspaares $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ in $A-\mathrm{mod}$.
(ii) $\mathcal{T}$ ist abgeschlossen unter Bildern, direkten Summen und Erweiterungen.
(b) Sei $\mathcal{F}$ eine volle Unterkategorie von $A-\mathrm{mod}$. Dann sind äquivalent:
(i) $\mathcal{F}$ ist die torsionsfreie Klasse eines Torsionspaares $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ in $A-\mathrm{mod}$.
(ii) $\mathcal{F}$ ist abgeschlossen bezüglich Untermoduln, direkten Produkten und Erweiterungen.

Beweis: Siehe z.B. [1, Kap.6 Proposition 1.4]

Definition 2.10. *Ein Torsionspaar $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ in $A-\mathrm{mod}$ heißt zerfallend, falls gilt: Jeder unzerlegbare A-Modul liegt entweder in $\mathcal{T}$ oder in $\mathcal{F}$.*

Proposition 2.11. *Sei $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ ein Torsionspaar in $A-\mathrm{mod}$. Dann sind äquivalent:*
(a) $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ zerfällt.
(b) $\mathrm{Ext}^1_A(N,M)=0$ für alle $M\in\mathcal{T}$ und $N\in\mathcal{F}$.
(c) Für $M\in\mathcal{T}$ gilt $\tau^-M\in\mathcal{T}$.
(d) Für $N\in\mathcal{F}$ gilt $\tau N\in\mathcal{F}$.

Beweis: Siehe z.B. [1, Kap.6 Proposition 1.7]

Definition 2.12. *Sei A eine Algebra T ein Kippmodul in $A-\mathrm{mod}$ und $B=\mathrm{End}(T)$. Dann heißt T*
(a) separierend, wenn das Torsionspaar $(\mathcal{T}(T),\mathcal{F}(T))$ in $A-\mathrm{mod}$ zerfällt, und
(b) zerfallend, wenn das Torsionspaar $(\mathcal{X}(T),\mathcal{Y}(T))$ in $B-\mathrm{mod}$ zerfällt.

Der folgende Satz von Hoshino [8] gibt eine Klassifikation von zerfallenden und separierenden Kippmoduln:

Satz 2.13. *Sei A eine Algebra, T ein Kippmodul in $A-\mathrm{mod}$ und $B=\mathrm{End}(T)$.*
(a) T ist separierend genau dann, wenn $\mathrm{pd}\,X\leq 1$ für alle $X\in\mathcal{X}(T)$.
(b) T ist zerfallend genau dann, wenn $\mathrm{id}\,N\leq 1$ für alle $N\in\mathcal{F}(T)$.

Beweis Siehe z.B.[1, Kap.6 Theorem 5.6]

Für erbliche Algebren bedeutet das natürlich:

Corollar 2.14. *Ist H eine erbliche Algebra, dann ist jeder Kippmodul in $H-\mathrm{mod}$ zerfallend.*

Satz 2.15. *[Brenner-Butler] Sei T ein Kippmodul und $B = \mathrm{End}_A(T)$. Dann gilt:*
(a) T_B ist ein Kippmodul und $A \cong \mathrm{End}_B(T_B)$.
(b) Die Einschränkungen der Funktoren $\mathrm{Hom}_A(T, -) : A - \mathrm{mod} \longrightarrow B - \mathrm{mod}$ und $T_B \otimes_B - : B - \mathrm{mod} \longrightarrow A - \mathrm{mod}$ auf $\mathcal{T}(T)$ und $\mathcal{Y}(T)$ sind zueinander quasi-inverse Äquivalenzen.
(c) Die Einschränkungen der Funktoren $\mathrm{Ext}^1_A(T, -) : A - \mathrm{mod} \longrightarrow B - \mathrm{mod}$ und $\mathrm{Tor}_1^B(T_B, -) : B - \mathrm{mod} \longrightarrow A - \mathrm{mod}$ auf $\mathcal{F}(T)$ und $\mathcal{X}(T)$ sind zueinander quasi-inverse Äquivalenzen.

Beweis: (a) siehe [1, Kap.6 Satz3.8]; (b),(c) siehe z.B. [6, Kap.3.4]

Satz 2.16. *Die Funktoren $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ und $T \otimes_B -$ induzieren zueinander inverse Äquivalenzen zwischen den triangulierten Kategorien $\mathcal{D}^b(A)$ und $\mathcal{D}^b(B)$*

Beweis:[6, Kap.3.2]

Kapitel 3

Cluster-Kategorien

Sei $\mathcal{D} := \mathcal{D}^b(H) := \mathcal{D}^b(H - \text{mod})$ und $F = \tau^-[1]$, wobei [1] der shift-Funktor von $\mathcal{D}$ ist.

In diesem Kapitel werden einige Ergebnisse aus [4] und [5] aufgeführt. Weitere Grundlagen und Resultate sind in diesen Artikeln zu finden.
Cluster-Kategorien werden in den Kapiteln 6-8 benutzt um die τ-Bahnen zu bestimmen. Diese können auch ohne die Verwendung von Cluster-Kategorien berechnet werden, allerdings vereinfacht insbesondere Satz 3.14 die Überlegungen.

Definition 3.1. *$\mathcal{C} = \mathcal{D}^b(H)/F$ heißt Cluster-Kategorie.*

Cluster-Kategorien ermöglichen eine "Vervollständigung" der Kipptheorie von erblichen Algebren: Jeder H-Kippmodul induziert ein entsprechendes Kippobjekt in $\mathcal{C}$. Jedoch besitzt in $\mathcal{C}$ jedes fast vollständige Kippobjekt, im Gegensatz zu H, immer genau zwei Komplemente. Jeder aufrichtige fast vollständige H-Kippmodul besitzt zwar immer zwei Komplemente, jedoch gibt es nicht aufrichtige fast vollständige H-Kippmoduln T'. Dies geschieht, wenn unzerlegbare direkte Summanden von T' in der präinjektiven Komponente $\mathcal{P}$ oder der präprojektiven Komponente $\mathcal{I}$ zu nahe an den injektiven bzw. projektiven Moduln liegen. Gibt es direkte Summanden in $\mathcal{P}$ aber nicht in $\mathcal{I}$ oder umgekehrt, so kann T' soweit in τ_H^- bzw. in τ_H-Richtung verschoben werden, bis man einen aufrichtigen Modul erhält. Dann gibt es zwei Komplemente. Dies ist nicht möglich, wenn in $\mathcal{P}$ und in $\mathcal{I}$ direkte Summanden liegen, da bei der τ_H bzw. τ_H^--Verschiebung irgendwann die projektiven bzw. injektiven Moduln erreicht sind, und diese im Kern von τ_H bzw. τ_H^- liegen.
In $\mathcal{C}$ hingegen ist die Situation viel schöner. $\mathcal{P}$ und $\mathcal{I}$ werden in $\mathcal{C}$ eine zusammenhängende Komponente und $\tau_{\mathcal{C}}$ ist eine Äquivalenz auf $\mathcal{C}$.

Satz 3.2. *(a) $\mathcal{C}$ ist trianguliert und der natürliche Funktor $\pi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ ist trianguliert.*
(b) $\mathcal{C}$ ist eine Krull-Schmidt Kategorie.
(c) Die Dreiecke in $\mathcal{D}$ induzieren Dreiecke in $\mathcal{C}$ und $\Gamma(\mathcal{C}) = \Gamma(\mathcal{D})/\phi(F)$, wobei $\phi(F)$ der durch F induzierte Graphautomorphismus ist.

Beweis: (a) [10], (b) [4, Prop. 1.2.]; (c) [4, Prop. 1.3.]

Sei $S = \mathrm{ind}(H - \mathrm{mod} \vee H[1])$, also die Menge der unzerlegbaren H-Moduln zusammen mit den Objekten $P[1]$, wobei P ein unzerlegbar projektiver H-Modul ist. S enthält dann aus jedem F-Orbit auf $\mathrm{ind}\,\mathcal{D}$ genau einen Repräsentanten und kann als Fundamentalbereich von F auf $\mathrm{ind}\,\mathcal{D}$ gesehen werden. Ist $X \in \mathcal{D}$ so bezeichne $\tilde{X}$ das entsprechende Objekt in $\mathcal{C}$.

Proposition 3.3. *Die Serre-Dualitäts-Formel in $\mathcal{D}$ induziert eine entsprechende Formel in $\mathcal{C}$, die in $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ funktoriell ist:* $\mathrm{D}\,\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{Y}, \tau_{\mathcal{C}}\tilde{X})$

Beweis: [4, Prop. 1.4]

Proposition 3.4. *Die unzerlegbaren Objekte in $\mathcal{C}$ sind von der Form $\tilde{X}$ für ein Objekt X in S.*

Beweis: [4, Prop. 1.6.]

Es gelten folgende Formeln:

Proposition 3.5.
(a) Für X, Y in $\mathcal{D}$ gilt: $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(Y, X) \simeq \mathrm{D}\,\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(FX, Y)$.
(b) Für $\tilde{X}, \tilde{Y}$ in $\mathcal{C}$ gilt: $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \simeq \mathrm{D}\,\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\tilde{Y}, \tilde{X})$.
(c) Für unzerlegbare H-Moduln X, Y gilt: $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \simeq \mathrm{Ext}^1_H(X, Y) \bigoplus \mathrm{Ext}^1_H(Y, X)$.
(d) Sind X, Y unzerlegbare H-Moduln und X ist projektiv, dann gilt: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \simeq \mathrm{Hom}_H(X, Y)$.

Beweis: [4, Prop. 1.7.]

Definition 3.6. *Ein Objekt T in $\mathcal{C}$ heißt partielles Kippobjekt, falls* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(T, T) = 0$.

Definition 3.7. *Ein partielles Kippobjekt T in $\mathcal{C}$ heißt Kippobjekt, falls die Anzahl der nicht-isomorphen direkten Summanden von T maximal ist.*

Definition 3.8. *Ein Objekt T in $\mathcal{C}$ heißt quadratfrei falls kein unzerlegbarer direkter Summand von T isomorph zu einem anderen ist.*

Jedes quadratfreie partielle Kippobjekt kann zu einem quadratfreien Kippobjekt ergänzt werden ([4, Prop. 3.2]).

Definition 3.9. *Ein quadratfreies partielles Kippobjekt T' in $\mathcal{C}$ heißt fast vollständiges quadratfreies Kippobjekt, falls es ein unzerlegbares Objekt M in $\mathcal{C}$ gibt sodass $T' \oplus M$ ein quadratfreies Kippobjekt ist.*

M heißt dann Komplement von T'.

Satz 3.10.
(a)Sei T ein quadratfreies Kippobjekt in $\mathcal{C}$. Dann gilt
(i) Es gibt eine erbliche Algebra H', die deriviert Äquivalent zu H ist, so dass T durch einen quadratfreien Kippmodul in $H' - \mathrm{mod}$ induziert wird.
(ii) T hat n unzerlegbare direkte Summanden.
(b) Jeder quadratfreie Kippmodul in $H - \mathrm{mod}$ induziert ein quadratfreies Kippobjekt in $\mathcal{C}$.

Beweis: [4, Thm. 3.3.]

Der folgende Satz zeigt einen wichtigen Unterschied zwischen $\mathcal{C}$ und $H - \mathrm{mod}$: In der Modulkategorie gibt es nicht immer zwei Komplemente.

Satz 3.11. *Ein fast vollständiges quadratfreies Kippobjekt in $\mathcal{C}$ kann auf genau zwei verschiedene Weisen zu einem quadratfreien Kippobjekt ergänzt werden.*

Beweis: [4, Thm. 5.1.]

Der folgende Satz ist die Satz 2.5 entsprechende Aussage für Clusterkategorien.

Satz 3.12. *Sei T' ein fast vollständiges partielles Kippobjekt in $\mathcal{C}$ und M ein Komplement von T'. Dann erhält man das andere Komplement M^* indem man die minimale rechts $\mathrm{add}(T')$-Approximation $f : B \longrightarrow M$ von M zu einem Dreieck ergänzt: $M^* \longrightarrow B \xrightarrow{f} M \longrightarrow M^*[1]$.*

Beweis: [4, Thm 6.8.]

Die duale Konstruktion mit minimalen links $\mathrm{add}(T')$-Approximationen geht genauso und führt zu einem isomorphen Objekt.

Definition 3.13. *Sei Q ein endlicher Köcher und k ein Punkt in Q. Die Mutation $\mu_k(Q)$ von Q in Richtung k berechnet man wie folgt:*
(1) Füge einen neuen Punkt k^* zu Q hinzu.
(2) Für jeden Weg $i \longrightarrow k \longrightarrow j$ in Q füge einen Pfeil von i nach j zu Q hinzu.
(3) Ersetze für jeden Punkt i alle Pfeile $i \xrightarrow{\alpha} k$ durch Pfeile $i \xleftarrow{\alpha} k^*$ und ersetze für jeden Punkt j alle Pfeile $k \xrightarrow{\alpha} j$ durch Pfeile $k^* \xleftarrow{\alpha} j$
(4) Entferne den Punkt k.
(5) Kürze alle 2-Zykel wie folgt: Sind $r \xrightarrow{\alpha} i$ und $r \xleftarrow{\beta} i$ zwei Pfeile in Q, dann entferne die Pfeile α und β aus Q.

Ist T ein Kippobjekt in $\mathcal{C}$ und sei Q der Köcher von $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(T)$. Man kann die Punkte von Q mit den unzerlegbaren direkten Summanden von T identifizieren. Oft betrachtet man auch den Hom-Köcher Q_T von T, dies ist der duale Köcher zu Q. Für viele Betrachtungen ist das suggestiver, da die Pfeile im Hom-Köcher in dieselbe Richtung zeigen wie die entsprechenden Abbildungen zwischen den direkten Summanden. Ersetzt man nun einen unzerlegbaren direkten Summanden M von T durch das entsprechende andere Komplement, so erhält man ein neues Kippobjekt und natürlich auch einen anderen Köcher Q'. Der folgende Satz liefert die Antwort auf die Frage wie die Köcher Q und Q' zusammenhängen.

Satz 3.14. *Sei T' ein fast vollständiges Kippobjekt in $\mathcal{C}$ mit Komplementen M und M^*. Seien $B = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(T' \coprod M)$, $B' = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(T' \coprod M^*)$ und Q_B und $Q_{B'}$ die Köcher von B und B'. Sei k der Punkt in Q_B der M entspricht. Dann gilt:*
$\mu_k(Q_B) = Q_{B'}$

Beweis: [5, Theorem 1.3]

Proposition 3.15. *Sei A eine triangulierte Kategorie und (f, g, h) ein Morphismus von dem Dreieck (X, Y, Z, u, v, w) in das Dreieck (X', Y', Z', u', v', w'). Sind f und g Isomorphismen so ist auch h ein Isomorphismus.*

Beweis: [6, 1.2 Proposition]

Sei und T' ein aufrichtiger fast vollständiger Kippmodul in $H-\mathrm{mod}$ mit Komplementen M und M^{*_H} und der kurzen exakten Folge $\eta\ :\ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M^{*_H} \longrightarrow 0$ aus Satz 2.6. Dies induziert in $\mathcal{C}$ ein fast vollständiges Kippobjekt $\tilde{T}'$ mit Komplementen $\tilde{M}$ und $\tilde{M}^{*_H}$. Berechnet man das zweite Komplement zu $\tilde{T}'$ in $\mathcal{C}$ so erhält man $\widetilde{M}^{*_{\mathcal{C}}}$. Das nächste Lemma zeigt, dass $\widetilde{M}^{*_{\mathcal{C}}}$ von M^{*_H} induziert wird. Es spielt also keine Rolle ab das Komplement in H oder in $\mathcal{C}$ berechnet wird.

Lemma 3.16. $\widetilde{M^{*_H}} \cong \widetilde{M}^{*_{\mathcal{C}}}$

Beweis. Erinnerung: $\mathcal{C}$ ist eine triangulierte Kategorie und [1] ist der Translatiosfunktor von $\mathcal{C}$.
Nach Satz 2.6 ist $0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow M^{*_H} \longrightarrow 0$ eine kurz exakte Folge in $H-\mathrm{mod}$ und induziert ein Dreieck $\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{E} \longrightarrow \widetilde{M^{*_H}} \longrightarrow \widetilde{M}[1]$ in $\mathcal{C}$. Nach Satz 3.11 ist $\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{E} \longrightarrow \widetilde{M^{*_C}} \longrightarrow \widetilde{M}[1]$ auch ein Dreieck in $\mathcal{C}$. Also:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{M} \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & \widetilde{E} \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & \widetilde{M^{*_H}} \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \widetilde{M}[1] \\
\widetilde{M} \arrow[r] & \widetilde{E} \arrow[r] & \widetilde{M^{*_C}} \arrow[r] & \widetilde{M}[1]
\end{tikzcd}$$

Nach Proposition 3.15 ist dann h ein Isomorphismus. ∎

Kapitel 4

Elementare Moduln

Lemma 4.1. *Ist $X \neq 0$ regulär, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq N$ und alle regulären Moduln R gilt:*
(i) Alle Morphismen in $\operatorname{Hom}_H(\tau^m X, R)$ haben regulären Kern.
(ii) Alle Morphismen in $\operatorname{Hom}_H(R, \tau^{-m} X)$ haben regulären Cokern.

Beweis. Siehe (i): [12, Lemma 1.2] (ii): Duale Version

Lemma 4.2. *Sei Z quasieinfacher regulärer H-Modul, dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*
(a) $\tau^m Z$ hat keine nichttrivialen regulären Faktormoduln für $m \gg 0$.
(b) $\tau^{-m} Z$ hat keine nichttrivialen regulären Untermoduln für $m \gg 0$.
(c) Ist R regulär und $f : Z \longrightarrow R$ nicht die Nullabbildung, dann ist $\ker f$ präprojektiv.
(d) Ist R regulär und $f : R \longrightarrow Z$ nicht die Nullabbildung, dann ist $\operatorname{coker} f$ präinjektiv.
(e) Es gibt keine kurze exakte Folge $0 \longrightarrow U \longrightarrow Z \longrightarrow V \longrightarrow 0$ mit $U, V \neq 0$ und regulär.

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (c): Sei $f : Z \longrightarrow R$ nicht Null, dann ist $0 \neq \operatorname{Im} \tau^m f$ nach (a) ein trivialer Faktormodul, also $\operatorname{Im} \tau^m f = \tau^m Z$. Folglich ist $\ker \tau^m f = 0$, das heißt $\ker f$ muss präprojektiv sein. (b) $\Longrightarrow$ (d): dual
(c) $\Longrightarrow$ (e): Eine solche kurze exakte Folge $0 \longrightarrow U \longrightarrow Z \xrightarrow{f} V \longrightarrow 0$ kann nicht existieren, weil $0 \neq U \cong \ker f$ präprojektiv sein muß. (d) $\Longrightarrow$ (e): dual
(e) $\Longrightarrow$ (a): Gäbe es einen nichttrivialen regulären Faktormodul V von $\tau^m Z$ für $m \gg 0$, dann sei $0 \longrightarrow U \longrightarrow \tau^m Z \longrightarrow V \longrightarrow 0$ die zugehörige kurze exakte Folge. Nach Lemma 4.1 wäre U regulär, dann gäbe es aber folgende kurze exakte Folge: $0 \longrightarrow \tau^{-m} U \longrightarrow Z \longrightarrow \tau^{-m} V \longrightarrow 0$ mit $\tau^{-m} U, \tau^{-m} V \neq 0$ und regulär. Dies ist aber ein Widerspruch zu (e).
(e) $\Longrightarrow$ (b): dual

■

Definition 4.3. *Ein quasieinfacher Modul Z heißt* elementar*, falls eine der äquivalenten Bedingungen aus Lemma 4.2 erfüllt ist.*

Bemerkung:

- Ist Z elementar, so ist auch $\tau^i Z$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ elementar.
- Seien A, B, C elementar und $f_1 : A \longrightarrow B, f_2 : B \longrightarrow C$ nicht Null, dann gilt $f_1 f_2 \neq 0$.
  Beweis. $\operatorname{Im} f_1$ ist regulär und $\ker f_2$ ist präprojektiv. Da reguläre Moduln nur trivial in präprojektive abbilden, kann $\operatorname{Im} f_1 \subseteq \ker f_2$ nicht gelten.
- Elementare Moduln sind Ziegel.
  Beweis. Sei Z elementar und $f \in \operatorname{End}_H(Z) \backslash \{0\}$, dann gilt für alle $l \in \mathbb{N}$: $f^l \neq 0$ (s.o.), also kann f nicht im Radikal liegen.

Satz 4.4. *Für einen unzerlegbar regulären Modul E sind äquivalent:*
(a) E ist elementar ohne Selbsterweiterungen.
(b) Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass der Modul $\tau^l E$ für alle $l \geq N$ ein präinjektives Kippkomplement hat.

Beweis: (a)$\Longrightarrow$ (b):[11, Theorem], (b)$\Longleftarrow$ (b):[11, Prop. 3.3]
Bemerkung: Die duale Aussage zu (b) ist natürlich auch äquivalent dazu:
(b') Es gibt ein $M \in \mathbb{N}$, so dass der Modul $\tau^{-l} E$ für alle $l \geq M$ ein präprojektives Kippkomplement hat.

Kapitel 5

Schnittmoduln und Köcher ohne Spitzen

Definition 5.1. *Sei S eine volle Unterkategorie von $H-\mathrm{mod}$, die abgeschlossen unter direkten Summen und direkten Summanden ist. Dann heißt S Schnitt, falls gilt:*
(α) S enthält einen aufrichtigen Modul.
(β) Sind M_1 und M_2 in S und es gibt einen Weg von M_1 über X nach M_2, dann liegt X in S.
(γ) Ist X unzerlegbar und nicht projektiv, dann liegt höchstens eines von $X, \tau X$ in S.
(δ) Sind X, M unzerlegbar, $f : X \longrightarrow M$ irreduzibel und $M \in S$, dann ist entweder $X \in S$ oder X ist nicht injektiv und $\tau^{-}X \in S$.

Ringel hat gezeigt:

Satz 5.2. *Sei T ein Kippmodul und $\mathrm{End}(T) = B$. Dann ist $\mathrm{add}\,\mathrm{Hom}(T, \mathrm{D}(H_H))$ ein Schnitt in $B-\mathrm{mod}$ und jeder Schnitt in einer Modulkategorie tritt auf diese Weise auf.*

Beweis: [15, 4.2]
Dies führt zu folgender

Definition 5.3. *Sei M quadratfrei und $S = \mathrm{add}\,M$ ein Schnitt in $B-\mathrm{mod}$, dann heißt M Schnittmodul.*

Bemerkungen:
Alle unzerlegbaren direkten Summanden von M liegen in derselben Komponente vom Auslander-Reiten-Köcher von B (siehe z.B. [6, III, 5.2]).
$\mathrm{End}(M)$ ist wieder erblich, es gilt sogar:

Satz 5.4. *Sei T ein Kippmodul in $H-\mathrm{mod}$. Dann gilt:*
$\mathrm{End}_H(T)$ ist genau dann erblich, wenn T ein Schnittmodul ist.

Beweis: Siehe [6, III, 5.6]

Mit Satz2.13 erhält man dann folgendes

Corollar 5.5. *Sei H erblich und T ein Kippmodul und ein Schnittmodul, dann ist T separierend und zerfallend.*

Lemma 5.6. *Sei T ein Kippmodul und ein Schnittmodul in $H-\mathrm{mod}$ und $B=\mathrm{End}(T)$. Dann gilt:*
(a) Ist $M \in \mathcal{T}(T)$ ein unzerlegbarer H-Modul und η : $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} \tau^{-}M \longrightarrow 0$ eine Auslander-Reiten-Folge, so ist $\mathrm{Hom}(T,\eta)$ eine Auslander-Reiten-Folge in $B-\mathrm{mod}$.
(b) Ist N ein partieller Kippmodul in $H-\mathrm{mod}$, dann ist $\mathrm{Hom}(T,N)$ ein partieller Kippmodul in $B-\mathrm{mod}$.
(c) Seien M und M^* zwei Komplemente eines fast vollständigen Kippmoduls X und $M, M^*, X \in \mathcal{T}(T)$, dann sind $\mathrm{Hom}(T,M)$ und $\mathrm{Hom}(T,M^*)$ die beiden Komplemente von $\mathrm{Hom}(T,X)$

Beweis. (a) Weil T ein Schnittmodul ist, zerfällt nach Corollar 5.5 das Torsionspaar $(\mathcal{T}(T),\mathcal{F}(T))$. Mit Proposition 2.11 folgt dann $\tau^{-}M \in \mathcal{T}(T)$, mit Proposition 2.9 ist $E \in \mathcal{T}(T)$ und mit Satz 2.15 ist $\mathrm{Hom}(T,\eta)$ eine nichtzerfallende kurze exakte Folge in $\mathcal{T}(T)$.
Sei $0 \neq \phi : \mathrm{Hom}(T,M) \longrightarrow X$ kein zerfallender Mono. Wegen $\mathrm{Hom}_B(\mathcal{X}(T),\mathcal{Y}(T)) = 0$ ist $X \in \mathcal{Y}(T)$. Also faktorisiert ϕ wegen Satz 2.15 über $\mathrm{Hom}(T,f)$, d.h. $\mathrm{Hom}(T,f)$ ist linksfastzerfallend. $\mathrm{Hom}(T,f)$ ist natürlich auch linksminimal. Dual: $\mathrm{Hom}(T,g)$ ist Senkenabbildung.
(b) Da T ein Schnittmodul ist, ist B wieder erblich, also $\mathrm{pd}\,\mathrm{Hom}(T,N) \leq 1$. Wegen Satz 2.15 hat $\mathrm{Hom}(T,M)$ ebenfalls keine Selbsterweiterungen.
(c) Da $\mathcal{T}(T)$ abgeschlossen unter Bildern ist, gilt $M^* \in \mathcal{T}(T)$ .Nach (b) sind dann $\mathrm{Hom}(T, M \oplus X)$ und $\mathrm{Hom}(T, M^* \oplus X)$ Kippmoduln in $B-\mathrm{mod}$, da sie die richtige Anzahl von direkten Summanden haben. Also sind $\mathrm{Hom}(T,M)$ und $\mathrm{Hom}(T,M^*)$ die beiden Komplemente von $\mathrm{Hom}(T,X)$.

■

Bemerkung:
Insbesondere existieren auch in $B-\mathrm{mod}$ zwei Komplemente zu $\mathrm{Hom}(T,X)$.
Es gilt also $\mathrm{Hom}(T,\tau_H^{-}M) \cong \tau_B^{-}\,\mathrm{Hom}(T,M)$

Definition 5.7. *Ein Punkt $x \in Q_0$ heißt Spitze, falls x durch genau einen Pfeil mit $Q_0 \backslash \{x\}$ verbunden ist.*

Die Köcher von Typ $\tilde{A}_m$ sind die einzigen Köcher ohne Spitze, die nicht wild sind.

Satz 5.8. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
(a) Q hat keine Spitze.
(b) Jede Abbildung ungleich Null zwischen zwei präprojektiven H-Moduln ist injektiv.
(c) Jede Abbildung ungleich Null zwischen zwei präinjektiven H-Moduln ist surjektiv.
(d) Jeder präprojektive Kippmodul ist ein Schnittmodul.
(e) Jeder präinjektive Kippmodul ist ein Schnittmodul.

Beweis: [13, 6.1 und 6.2]

Für den Rest dieses Kapitels sei immer vorausgesetzt, dass der Köcher Q keine Spitze habe.

Der Hom-Köcher Q_T des Kippmoduls T ist genau wie bei Kippobjekten der duale Köcher zu $\mathrm{End}_H(T)$, wobei wieder die Punkte mit den unzerlegbaren direkten Summanden identifiziert werden.

In dem folgenden Lemma sind einige elementare Aussagen über die Struktur eines präprojektiven Kippmoduls, der auch ein Schnittmodul ist, zusammengefasst:

Lemma 5.9. *(a) T enthält aus jeder τ-Bahn eines unzerlegbar projektiven Moduls genau einen direkten Summanden.*
(b)Seien $s \neq t$, γ ein Pfeil von t nach s und $l \geq 0$. Dann gilt:
(i) Aus $\tau^{-l}P_s|T$ folgt: Entweder $\tau^{-l}P_t|T$ oder $l \neq 0$ und $\tau^{-l+1}P_t|T$
(ii) Aus $\tau^{-l}P_t|T$ folgt: Entweder $\tau^{-l}P_s|T$ oder $\tau^{-l-1}P_s|T$.
(iii) In Q_T gibt es genau dann einen Pfeil von s nach t, wenn es ein $l \geq 0$ gibt mit $\tau^{-l}P_t|T$ und $\tau^{-l}P_s|T$.
(iv) In Q_T gibt es genau dann einen Pfeil von t nach s, wenn es ein $l \geq 0$ gibt mit $\tau^{-l}P_t|T$ und $\tau^{-l-1}P_s|T$.

Beweis. (a) Da T aufrichtig ist gibt es für jeden unzerlegbar projektiven Modul P einen direkten Summanden T_{j_P} von T mit $\mathrm{Hom}_H(P, T_{j_P}) \neq 0$. Es gibt also eine Kette von irreduziblen Abbildungen von P nach T_{j_P}. Mit der Eigenschaft δ von Schnitten (modulo τ-Verschiebung) folgt dann das ein Modul aus der τ-Bahn von P im Schnitt liegt, also ein direkter Summand von T ist. Darüber hinaus hat T genau so viele direkte Summanden, wie es unzerlegbar projektive Moduln gibt.
(b): (i) Es gilt $0 \neq \mathrm{Hom}_H(P_s, P_t)$ und $0 \neq \mathrm{Hom}_H(P_t, \tau^- P_s)$ und wegen Satz 5.8 ist für $m > 0$ und $0 < m' \leq l$ auch $\mathrm{Hom}_H(P_s, \tau^{-m+1}P_t) \neq 0$ und $\mathrm{Hom}_H(\tau^{-l+m'}P_t, \tau^{-l}P_s) \neq 0$. Es folgt $0 \neq \mathrm{Hom}_H(\tau^{-l}P_s, \tau^{-l-m+1}P_t) \cong \mathrm{D}\,\mathrm{Ext}^1_H(\tau^{-l-m}P_t, \tau^{-l}P_s)$ und $0 \neq \mathrm{Hom}_H(\tau^{-l+m'}P_t, \tau^{-l}P_s) \cong \mathrm{D}\,\mathrm{Ext}^1_H(\tau^{-l}P_s, \tau^{-l+m'+1}P_t)$. Also können nur

noch $\tau^{-l}P_t$ oder $\tau^{-l+1}P_t$ direkte Summanden des Kippmoduls T sein. Wegen γ kann nicht beides eintreten.
(ii) analog.
(iii)+(iv) Sei ohne Einschränkung $\tau^{-l}P_t|T$. Nach (ii) ist dann entweder $\tau^{-l}P_s|T$ oder $\tau^{-l-1}P_s|T$. Wegen $\mathrm{Hom}(\tau^{-l}P_s, \tau^{-l}P_t) \cong \mathrm{Hom}(P_s, P_t) \neq 0$ und $\mathrm{Hom}(\tau^{-l}P_t, \tau^{-l}P_s) \cong \mathrm{Hom}(P_t, P_s) = 0$ gilt $\tau^{-l}P_s|T$ genau dann, wenn es in Q_T einen Pfeil von s nach t gibt und wegen $\mathrm{Hom}(\tau^{-l}P_t, \tau^{-l-1}P_s) \cong \mathrm{Hom}(P_t, \tau^{-}P_s) \neq 0$ und $\mathrm{Hom}(\tau^{-l-1}P_s, \tau^{-l}P_t) \cong \mathrm{Hom}(\tau^{-}P_s, P_t) = 0$ gilt $\tau^{-l-1}P_s|T$ genau dann, wenn es in Q_T einen Pfeil von t nach s gibt. ■

Bemerkung:
Alle Pfeile in Q werden also zu Pfeilen im Hom-Köcher Q_T von T.
T ist also von der Gestalt $\bigoplus_{i=1}^{n} T_i$ mit $T_i = \tau^{-r_i}P_i$ für geeignete r_i.

Lemma 5.10. *Sei $T_j|T$ unzerlegbar. Dann gilt:*
(a) Ist T_j eine Quelle von Q_T, so ist $T_j^* = \tau^{-}T_j$.
(b) Ist T_j eine Senke von Q_T und nicht projektiv, so ist $T_j^* = \tau T_j$.

Beweis. (a) 1.Fall: Es gibt einen Pfeil in Q, der in j startet und in einem r endet.
Sei l so dass $\tau^{-l}P_r|T$. Wegen Lemma 5.9 ist dann $T_j = \tau^{-l+1}P_j$, weil der entsprechende Pfeil in Q_T von T_j nach T_r gehen muss, da T_j eine Quelle in Q_T ist. Dieser Pfeil geht dann in $Q_{T'\oplus T_j^*}$ von T_r nach T_j^*, also ist nach Lemma 5.9 $T_j^* = \tau^{-l}P_j = \tau^{-}\tau^{-l+1}P_j = \tau^{-}T_j$.
2. Fall: Es gibt einen Pfeil in Q, der in einem s startet und in j endet.
Sei l so, dass $\tau^{-l}P_s|T'$. Wegen Lemma 5.9 ist dann $T_j = \tau^{-l}P_j$, weil der entsprechende Pfeil in Q_T von T_j nach T_s gehen muss, da T_j eine Quelle in Q_T ist. Dieser Pfeil geht dann in $Q_{T'\oplus T_j^*}$ von T_s nach T_j^*, also ist nach Lemma 5.9 $T_j^* = \tau^{-l-1}P_j = \tau^{-}\tau^{-l}P_j = \tau^{-}T_j$.
(b) Dual. ■

Lemma 5.11. *$T_{i_0}^*$ ist ein elementarer Modul ohne Selbsterweiterungen genau dann wenn T_{i_0} weder Senke noch Quelle in Q_T ist.*

Beweis. Ist T_{i_0} eine Quelle oder nicht projektive Senke in Q_T, folgt nach 5.10, dass $T_{i_0}^*$ präprojektiv ist. Ist T_{i_0} eine projektive Senke in Q_T, so gibt es kein zweites Komplement $T_{i_0}^*$.
Sei also T_{i_0} weder Senke noch Quelle in Q_T und $T = T_{i_0} \oplus T'$. Da T_{i_0} weder Quelle noch Senke in Q_T ist, gibt es α_i Pfeile von T_i nach T_{i_0}, β_j Pfeile von T_{i_0} nach T_j und $\gamma \geq 0$ Pfeile von i nach j für geeignete i, j. In dem Hom-Köcher $\mu_{i_0}Q_T$ von $T_{i_0}^* \oplus T'$ gibt es dann nach Satz 3.14 α_i Pfeile von $T_{i_0}^*$ nach T_i, β_j Pfeile von T_j nach $T_{i_0}^*$ und $\gamma + \alpha_i\beta_j$ Pfeile von T_i nach T_j. Es gibt also einen orientierten Zykel in $\mu_{i_0}Q_T$ und damit ist $\mathrm{End}(T_{i_0}^* \oplus T')$ keine erbliche Algebra mehr. D.h. $T_{i_0}^* \oplus T'$

kann kein präprojektiver Kippmodul sein.
$T_{i_0}^*$ kann auch nicht präinjektiv sein:
Angenommen $T_{i_0}^* = \tau^s I_j$, dann ist $\tau^{-s}T' \oplus I_j$ ein Kippmodul und damit ist $P_j \oplus \tau^{-s-2}T'$ ein präprojektiver Kippmodul, der keine direkten Summanden von Typ $\tau^- P$ für ein projektives P enthält. Dies kann aber nicht sein, weil alle präprojektiven Kippmoduln auch Schnittmoduln sind. Also ist $T_{i_0}^*$ regulär und natürlich auch ohne Selbsterweiterungen. Dann ist $T_{i_0}^*$ nach Satz 4.4 auch elementar. ∎

Lemma 5.12. *Sei $T = \bigoplus_{i=1}^n \tau_H^{-r_i} P_i$ mit $r_{i_1}, \dots, r_{i_s} = 0$. Dann sind die unzerlegbar präprojektiven H-Moduln $\tau_H^{-r_i+1} P_i$ mit $r_i \neq 0$ an den Stellen $i_1, \dots, i_s$ nicht aufrichtig.*

Beweis. Für $j \in \{i_1, \dots, i_s\}$ und $r_i \neq 0$ gilt $0 = \mathrm{D}\,\mathrm{Ext}_H^1(\tau^{-r_i}P_i, P_j) \cong \mathrm{Hom}(P_j, \tau^{-r_i+1}P_i)$

∎

Bemerkung:
Sind N die nichtprojektiven direkten Summanden von T, so lässt sich $\tau_H N$ also als $B = H/ < e_{i_1}, \dots, e_{i_s} >$ Modul auffassen und ist ein präprojektiver Kippmodul in $B - \mathrm{mod}$. ($\tau_H N$ hat in $H - \mathrm{mod}$ keine Selbsterweiterungen, also auch nicht in $B - \mathrm{mod}$, außerdem hat $\tau_H N$ genau soviele direkte Summanden wie $B - \mathrm{mod}$ einfache Moduln hat.)

Ist X ein direkter Summand von $\tau_H N$, so sei $\bar{X}$ der durch X induzierte B Modul.

Sei $T = P \oplus T' \oplus T_{i_0}$ mit $P \neq 0$ projektiv, T', T_{i_0} nicht projektiv und T_{i_0} unzerlegbar. Weiterhin sei T_{i_0} keine Quelle oder Senke von Q_T und alle echten Vorgänger von T_{i_0} in Q_T projektiv in $H-\ \mathrm{mod}$. In $H - \mathrm{mod}$ ist $T_{i_0}^{*H}$ das andere Komplement von $P \oplus T'$. In $B - \mathrm{mod}$ ist $\overline{\tau_H T'} \oplus \overline{\tau_H T_{i_0}}$ ein Kippmodul und $\overline{\tau_H T_{i_0}}$ ein Komplement von $\overline{\tau_H T'}$ und $\overline{\tau_H T_{i_0}}^{*B}$ das andere.
Mit diesen Bezeichnungen gilt dann folgendes

Lemma 5.13. $(\overline{\tau_H T_{i_0}})^{*B} \simeq \tau_H(T_{i_0}^{*H})$

Beweis. Nach Satz 2.6 gibt es eine kurze exakte Folge $\eta_1 : 0 \longrightarrow T_{i_0} \longrightarrow M_1 \longrightarrow T_{i_0}^{*H} \longrightarrow 0$ mit $M_1 \in \mathrm{add}(P \oplus T')$, so dass $T_{i_0} \longrightarrow M_1$ die minimale $\mathrm{add}(P \oplus T')$ links-Approximation von T_{i_0} ist, oder eine kurze exakte Folge $\eta_2 : 0 \longrightarrow T_{i_0}^{*H} \longrightarrow M_2 \longrightarrow T_{i_0} \longrightarrow 0$ mit $M_2 \in \mathrm{add}(P \oplus T')$,so dass $T_{i_0}^{*H} \longrightarrow M_2$ die minimale $\mathrm{add}(P \oplus T')$ links-Approximation von $T_{i_0}^{*H}$ ist.
Angenommen letzteres ist der Fall, dann muss nach Voraussetzung M_2 projektiv sein, weil es ein Vorgänger von T_{i_0} ist, d.h. $M_2 \in \mathrm{add}(P)$. Nach Lemma 5.11 ist $T_{i_0}^{*H}$ aber elementar, also insbesondere regulär und bildet damit nur trivial nach M_2 ab, was natürlich nicht sein kann.
In $B - \mathrm{mod}$ ist $\overline{\tau_H T_{i_0}}$ projektiv, kann also nicht Endterm einer nicht-zerfallenden

kurzen exakten Folge sein, also bleibt dort auch nur eine Möglichkeit.
Sei also $0 \longrightarrow \overline{\tau_H T_{i_0}} \longrightarrow M \longrightarrow \overline{(\tau_H T_{i_0})}^{*B} \longrightarrow 0$ die minimale $\operatorname{add}(\overline{\tau_H T'})$ links-Approximation von $\overline{\tau_H T_{i_0}}$ in $B-\operatorname{mod}$ und $0 \longrightarrow T_{i_0} \longrightarrow N \longrightarrow T_{i_0}^{*H} \longrightarrow 0$ die minimale $\operatorname{add}(P \oplus T')$ links-Approximation von T_{i_0} in $H-\operatorname{mod}$.
T_{i_0} ist nicht projektiv, bildet also nur trivial nach $\operatorname{add}(P)$ ab. Also ist $N \in \operatorname{add}(T')$. Der Funktor τ_H liefert dann die kurze exakte Folge $0 \longrightarrow \tau_H T_{i_0} \longrightarrow \tau_H N \longrightarrow \tau_H(T_{i_0}^{*H}) \longrightarrow 0$ mit der minimalen $\operatorname{add}(\tau_H T')$ links-Approximation von $\tau_H T_{i_0}$ in $H-\operatorname{mod}$. Da minimale Approximationen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind und $\operatorname{add}\tau_H T'$ mit $\operatorname{add}(\overline{\tau_H T'})$ identifiziert werden kann, erhält man:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tau_H T_{i_0} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \tau_H N \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \tau_H(T_{i_0}^{*H}) \arrow[r] \arrow[d, "\Longrightarrow\simeq"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{\tau_H T_{i_0}} \arrow[r] & M \arrow[r] & \overline{(\tau_H T_{i_0})}^{*B} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

■

Bemerkung:
Insbesondere gilt also $(\tau_H T_{i_0})^* = \tau_H(T_{i_0}^*)$.

Lemma 5.14. *Sei T ein präprojektiver Kippmodul, $T_{i_0}|T$ nicht projektiv und weder Senke noch Quelle in Q_T. Dann gibt es einen präprojektiven Kippmodul M so dass $T \in \mathcal{T}(M)$ und alle echten Vorgänger von $\operatorname{Hom}(M, T_{i_0})$ in $Q_{\operatorname{Hom}(M,T)}$ projektive $\operatorname{End}(M)$ Moduln sind.*

Beweis. Sei V ein echter Vorgänger von T_{i_0}. Da T ein Kippmodul ist, gilt: $0 = \operatorname{D}\operatorname{Ext}^1_H(T_{i_0}, V) = \operatorname{Hom}_H(V, \tau T_{i_0})$. Dann ist auch $\operatorname{Hom}(V, \tau^2 T_{i_0}) = 0$, da es sonst nicht-triviale Abbildungen von V über $\tau^2 T_{i_0}$ nach τT_{i_0} geben würde. Also ist auch $\operatorname{D}\operatorname{Ext}^1_H(\tau T_{i_0}, V) = \operatorname{Hom}_H(V, \tau^2 T_{i_0}) = 0$. D.h. τT_{i_0} zusammen mit allen echten Vorgängern von T_{i_0} in Q_T ist ein partieller Kippmodul. Dieser kann dann zu einem Kippmodul M ergänzt werden. In $Q_{\operatorname{Hom}(M,T)}$ sind dann alle echten Vorgänger von $\operatorname{Hom}(M, T_{i_0})$ in $Q_{\operatorname{Hom}(M,T)}$ projektiv. ■

Proposition 5.15. *Sei Q ein Köcher ohne Spitze und E ein elementarer H-Modul ohne Selbsterweiterungen. Dann gilt:*
Es gibt ein $l \in \mathbb{N}$ und einen präprojektiven Kippmodul M, so dass für $H' = \operatorname{End}_H(M)$ der Modul $\tau_{H'} \operatorname{Hom}_H(M, \tau_H^{-l} E)$ präprojektiv über einer Faktoralgebra von H' nach einem Idempotent ist.

Beweis. Nach Satz 4.4 gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $l \geq N$ der Modul $\tau_H^{-l} E$ ein präprojektives Kippkomplement T' hat. Dieses kann dann mit dem zweiten Komplement X zu einem präprojektiven Kippmodul $T = T' \oplus X$ ergänzt werden. Modulo τ-Verschiebung ist X ohne Einschränkung nicht projektiv. Nach

Lemma 5.11 ist X dann weder Senke noch Quelle in Q_T. Also gibt es nach Lemma 5.14 einen präprojektiven Kippmodul M, so dass alle echten Vorgänger von $\mathrm{Hom}_H(M, X)$ projektiv in $H' = \mathrm{End}_H(M)$ sind. Mit Lemma 5.6 ist $\mathrm{Hom}_H(M, T)$ wieder ein Kippmodul in $H' - \mathrm{mod}$ und mit Lemma 5.12 induzieren die nichtprojektiven direkten Summanden N von $\mathrm{Hom}(M, T)$ einen Kippmodul $\tau_{H'} N$ in einer Faktoralgebra B von H' nach einem Idempotent. In $Q_{\tau_{H'} N}$ ist $\tau_{H'} \mathrm{Hom}(M, X)$ eine Quelle und damit ist mit Lemma 5.10 $(\tau_{H'} \mathrm{Hom}_H(M, X))^{*_B}$ präprojektiv. Nach Lemma 5.13 und Lemma 5.6 (c) ist dann $(\tau_{H'} \mathrm{Hom}_H(M, X))^{*_B} \simeq \tau_{H'}(\mathrm{Hom}_H(M, X)^{*_{H'}}) \simeq \tau_{H'} \mathrm{Hom}_H(M, X^{*_H}) = \tau_{H'} \mathrm{Hom}_H(M, \tau_H^{-l} E)$. ■

Kapitel 6

Erbliche Köcher mit 4 Punkten

Es gibt im allgemeinen in einem Köcher mehrere Pfeile mit demselben Start- und Endpunkt. Deshalb verwendet man Mehrfachpfeile: $p \xrightarrow{x} q$ bedeutet es gibt $x \geq 0$ Pfeile von p nach q. Für $x = 0$ wird der entsprechende Mehrfachpfeil normalerweise weggelassen. Dann ist jeder erbliche Köcher mit 4 Punkten von der Gestalt Q:

$$\begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[dl, "x_1"'] \arrow[dd, "x_2"] & \\
1 & & 4 \arrow[ll, "x_4"] \arrow[ul, "x_5"'] \arrow[dl, "x_3"] \\
 & 2 \arrow[ul, "x_6"] &
\end{tikzcd}$$

für geeignete $x_1, \ldots, x_6$.

Die Modulkategorie $kQ-\mathrm{mod}$ ändert sich natürlich, wenn ein x_j geändert wird. Dabei gibt es für jedes x_j drei interessante Fälle: (i.) $x_j = 0$, (ii.) $x_j = 1$, (iii.) $x_j \geq 2$.
Deshalb sind im folgenden alle Köcher mit 4 Punkten getrennt aufgeführt, je nachdem welche $x_j = 0$ sind. Alle verbleibenden Parameter in $\{a, b, c, d, e, f\}$ sind dabei immer mindestens eins. In einigen Fällen entsteht dadurch, dass einer der Parameter gleich eins ist, eine Spitze im Köcher. Dann gibt es präprojektive Kippmoduln, die keine Schnittmoduln sind. Diese Situationen werden dann gesondert betrachtet.

Das Ziel ist es, alle τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen für alle Wegealgebren von Köchern mit 4 Punkten zu bestimmen. Dabei wird Satz 4.4 benutzt: Ist E ein elementarer Modul ohne Selbsterweiterungen, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\tau^{-l}E$ für alle $l \geq N$ ein präprojektives Kippkomplement T' besitzt. Bestimmt man also alle möglichen präprojektiven Kippmoduln T und alle möglichen X^* von allen unzerlegbaren direkten Summanden $X|T$, so erhält man alle elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen, da nach Satz 4.4 jede τ-Bahn eines elementaren Moduls ohne Selbsterweiterungen getroffen wird. Es müssen also nur noch die X^*, die nicht elementar sind aussortiert werden. X^* kann man dann mittels der kurzen exakten Folge aus Satz 2.6 ausrechnen.

Zuerst werden also die präprojektiven Kippmoduln bestimmt und danach alle Kippmoduln vom Typ $T_j = P \oplus X^*$ mit P, X präprojektiv, X unzerlegbar und X^* elementar. So erhält man alle τ-Bahnen von elementaren Moduln. Natürlich treten einige τ-Bahnen mehrfach auf, denn es gibt im allgemeinen verschiedene Kippmoduln vom obigen Typ $T_1 = P \oplus X_1^*$ und $T_2 = P' \oplus X_2^*$, so dass X_1^* und X_2^* in der selben τ-Bahn liegen. In dieser Situation sagt man, " T_1 und T_2 liefern dieselbe τ-Bahn".

Nach Lemma 5.13 reicht es alle präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung zu bestimmen. Man kann also ohne Einschränkung annehmen, dass jeder präprojektive Kippmodul einen projektiven direkten Summanden hat. Das Unangenehme bei dieser Vereinfachung ist, dass es passieren kann, dass ein präprojektiver Kippmodul T kein zweites Komplement hat, aber $\tau^- T$ schon. Dies kann man leicht vermeiden indem man die Komplemente von den, durch die Kippmoduln induzierten, Kippobjekten in der Cluster-Kategorie sucht. Dort tritt dieses Problem nicht auf, da es immer zwei Komlemente gibt.

Bestimmt man nun die Komplemente, so kann man mit Lemma 5.11 bereits an dem Hom-Köcher des Kippmoduls ablesen welcher direkte Summand ausgetauscht werden muss um ein elementares Komplement zu erhalten.

Wenn einer oder mehrere der Parameter a, b, c, d, e, f gleich eins sind, können verschiedene τ-Bahnen zusammenfallen. Dies wird durch einen ungerichteten Graphen G folgendermaßen dargestellt:
Die Punkte von G sind Repräsentanten der τ-Bahnen und zwischen zwei Punkten i und j gibt es genau dann eine Kante, wenn es einen Parameter p gibt, so dass für $p = 1$ die τ-Bahnen von i und j gleich sind. Diese Kante wird dann mit p bezeichnet, also $i \overset{p}{\text{———}} j$. Punkte ohne Kanten repräsentieren τ-Bahnen, die nicht mit anderen zusammenfallen.

Um eine vollständige Liste aller elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen über allen Wegealgebren von Köchern mit vier Punkten zu erhalten, werden hier alle möglichen zusammenhängenden Köcher mit vier Punkten aufgeführt. Viele der hier aufgeführten Köcher lassen sich durch (iterierte) Mutationen in Quellen oder Senken, aus anderen konstruieren, modulo Numerierung der Punkte und Bezeichnung der Pfeile. Es ist bei den jeweiligen Köchern jeweils nur ein Beispiel dafür angegeben.
Entsteht ein Köcher Q' durch eine Mutation in einer Quelle oder Senke i aus einem Köcher Q, so lassen sie die einzelnen Dimensionsvektoren v' der Moduln in kQ' mittels der Reflexion s_i aus den Dimensionsvektoren v der Moduln in kQ berechnen, also $s_i(v) = v'$. Siehe z.B. [1, Kapitel 7 Lemma 5.9].

Die Reflexionen s_i sind dabei wie folgt definiert:

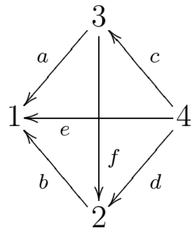
Definition 6.1. *Für $i \in Q_0$ sei $s_i : \mathbb{Q}^n \longrightarrow \mathbb{Q}^n$ definiert durch*

$$s_i(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{i-1}, -x_i + \sum_{k \;—\; i} x_k, x_{i+1}, ..., x_n)$$

wobei die Summe über alle Kanten k — i läuft.

6.1 Alle Parameter sind ungleich 0

Der Köcher Q hat also die Gestalt



Dann gibt es folgende τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen:

$$(0,1,0,0) \overset{b}{-\!\!-\!\!-\!\!-} (1,0,a,ac+e) \qquad (0,0,1,0) \overset{c}{-\!\!-\!\!-\!\!-} (bd+e,d,0,1)$$

$$(e,0,0,1) \overset{e}{-\!\!-\!\!-\!\!-} (1,0,0,e) \qquad (a,0,1,0) \overset{f}{-\!\!-\!\!-\!\!-} (0,1,0,d)$$

Es gibt also für jeden Parameter b, c, e, f der 1 ist genau eine τ-Bahn weniger und mindestens vier τ-Bahnen.

Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1) $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$
(2) $P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1$
(3) $P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$
(4) $P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:

Von (1):
$T_1 = P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_2^*$ wobei $P_2^* = \tau^-(0,1,0,0) = \tau^{-2}(b, b^2-1, ab+b^2f-f, abc+b^2cf+b^2d+be-cf-d)$
$T_2 = P_1 \oplus P_2 \oplus P_4 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0) = \tau^{-2}(a, ab+f, a^2+abf+f^2-1, a^2c+abcf+abd+ae+cf^2-c+df)$
Von (2):
$T_3 = P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(a,0,1,0) = \tau^{-2}(0, f, f^2-1, cf^2-c+df)$
$T_4 = P_2 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(e,0,0,1) = \tau^{-2}(0, d, c+df, c^2+cdf+d^2-1)$

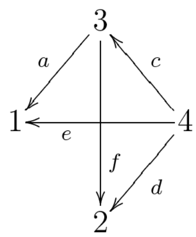
Von (3):
$T_5 = P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(b^2 - 1, b, 0, 0) = \tau^{-2}(1, 0, a, ac + e)$
$T_6 = P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(bd + e, d, 0, 1) = \tau^{-2}(0, 0, c, c^2 - 1)$
Von (4):
$T_7 = P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(a^2 + abf + b^2 - 1, af + b, a, 0) = \tau^{-2}(1, 0, 0, e)$
$T_8 = P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(af + bf^2 - b, f^2 - 1, f, 0) = \tau^{-2}(0, 1, 0, d)$

Es gibt also maximal 8 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen: Die von $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(a, 0, 1, 0)$, $(e, 0, 0, 1)$, $(1, 0, a, ac + e)$, $(bd + e, d, 0, 1)$, $(1, 0, 0, e)$ und $(0, 1, 0, d)$.
Ob a oder b Einfach- oder Mehrfachpfeile sind spielt keine Rolle. Sind $b, c, e, f \geq 2$ gibt es genau 8 τ-Bahnen und es fallen

- für $b = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 1, 0, 0)$ und $(1, 0, a, ac + e)$ zusammen,
- für $c = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 0, 1, 0)$ und $(bd + e, d, 0, 1)$ zusammen,
- für $e = 1$ die τ-Bahnen von $(e, 0, 0, 1)$ und $(1, 0, 0, e)$ zusammen und
- für $f = 1$ die τ-Bahnen von $(a, 0, 1, 0)$ und $(0, 1, 0, d)$ zusammen.

6.2 Fall $b = 0$

Der Köcher Q hat also die Gestalt



Dann gibt es folgende τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen:

$$(e, 0, 0, 1) \overset{e}{\text{———}} (1, 0, 0, e) \overset{a}{\text{———}} (0, f, 1, 0) \qquad (e, d, 0, 1) \overset{c}{\text{———}} (0, 0, 1, 0)$$

$$(0, d, 0, 1) \overset{d}{\text{———}} (0, 1, 0, d) \overset{f}{\text{———}} (a, 0, 1, 0)$$

Es gibt also für jeden Parameter a, c, d, e, f der 1 ist genau eine τ-Bahn weniger und mindestens drei τ-Bahnen.

Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1) $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$
(2) $P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1$

(3) $P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$
(4) $P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(5) $P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_2$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:

Von (1):
$T_1 = P_1 \oplus P_2 \oplus P_4 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0) = \tau^{-2}(a, f, a^2 + f^2 - 1, a^2c + ae + cf^2 + df - c)$
Von (2):
$T_2 = P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(a,0,1,0) = \tau^{-2}(0, f, f^2 - 1, cf^2 - c + df)$
$T_3 = P_2 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(e,0,0,1) = \tau^{-2}(0, d, c+df, c^2+d^2+cdf-1)$
Von (3):
$T_4 = P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(e,d,0,1) = \tau^{-2}(0,0,c,c^2-1)$
Von (4):
$T_5 = P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(a^2-1, af, a, 0) = \tau^{-2}(1,0,0,e)$
$T_6 = P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(af, f^2-1, f, 0) = \tau^{-2}(0,1,0,d)$
Von (5):
$T_7 = P_1 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,f,1,0) = \tau^{-2}(a, 0, a^2-1, a^2c+ae-c)$
$T_8 = P_1 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(0,d,0,1) = \tau^{-2}(e, 0, ae+c, ace+c^2+e^2-1)$

Es gibt also maximal 8 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen: Die von $(0,0,1,0)$, $(a,0,1,0)$, $(e,0,0,1)$, $(e,d,0,1)$, $(1,0,0,e)$, $(0,1,0,d)$, $(0,f,1,0)$ und $(0,d,0,1)$.
Sind $a, c, d, e, f \geq 2$ gibt es genau 8 τ-Bahnen und es fallen

- für $a = 1$ die τ-Bahnen von $(1,0,0,e)$ und $(0,f,1,0)$ zusammen,
- für $c = 1$ die τ-Bahnen von $(0,0,1,0)$ und $(e,d,0,1)$ zusammen,
- für $d = 1$ die τ-Bahnen von $(0,1,0,d)$ und $(0,d,0,1)$ zusammen,
- für $e = 1$ die τ-Bahnen von $(e,0,0,1)$ und $(1,0,0,e)$ zusammen und
- für $f = 1$ die τ-Bahnen von $(a,0,1,0)$ und $(0,1,0,d)$ zusammen.

6.3 Fall $c = 0$

Der Köcher Q hat also die Gestalt

$$\begin{tikzcd} & 3 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dd, "f"] & \\ 1 & & 4 \arrow[ll, "e"] \arrow[dl, "d"] \\ & 2 \arrow[ul, "b"] & \end{tikzcd}$$

Einen Köcher von diesem Typ erhält man auch indem man den Köcher 6.2 erst in dem Punkt 1 und dann in 2 mutiert.
Dann gibt es folgende τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen:

$$\begin{tikzcd} (0,1,0,d) \arrow[r, dash, "f"] & (a,0,1,0) \arrow[r, dash, "a"] & (1,0,a,0) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (1,0,a,e) \arrow[r, dash, "b"] & (0,1,0,0) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (1,0,0,e) \arrow[r, dash, "e"] & (e,0,0,1) \arrow[r, dash, "d"] & (0,1,f,0) \end{tikzcd}$$

Es gibt also für jeden Parameter a, b, d, e, f der 1 ist genau eine τ-Bahn weniger und mindestens drei τ-Bahnen.

Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1) $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$
(2) $P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1$
(3) $P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$
(4) $P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(5) $P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_4$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:

Von (1):
$T_1 = P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_2^*$ wobei $P_2^* = \tau^-(0,1,0,0) = \tau^{-2}(b, b^2-1, ab+b^2f-f, b^2d+be-d)$
Von (2):
$T_2 = P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(a,0,1,0) = \tau^{-2}(0, f, f^2-1, df)$
$T_3 = P_2 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(e,0,0,1) = \tau^{-2}(0, d, df, d^2-1)$
Von (3):
$T_4 = P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(b^2-1, b, 0, 0) = \tau^{-2}(1,0,a,e)$
Von (4):
$T_5 = P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(a^2+b^2+abf-1, af+b, a, 0) = \tau^{-2}(1,0,0,e)$
$T_6 = P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(af+bf^2-b, f^2-1, f, 0) =$

$\tau^{-2}(0,1,0,d)$
Von (5):
$T_7 = P_3 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_4 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(b^2+e^2+bde-1, b+de, 0, e) = \tau^-(1,0,a,0)$
$T_8 = P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_4 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(bd^2-b+de, d^2-1, 0, d) = \tau^{-2}(0,1,f,0)$

Es gibt also maximal 8 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen: Die von $(0,1,0,0)$, $(a,0,1,0)$, $(e,0,0,1)$, $(1,0,a,e)$, $(1,0,0,e)$, $(0,1,0,d)$, $(1,0,a,0)$ und $(0,1,f,0)$.
Sind $a,b,d,e,f \geq 2$ gibt es genau 8 τ-Bahnen und es fallen

- für $a=1$ die τ-Bahnen von $(a,0,1,0)$ und $(1,0,a,0)$ zusammen,
- für $b=1$ die τ-Bahnen von $(0,1,0,0)$ und $(1,0,a,e)$ zusammen,
- für $d=1$ die τ-Bahnen von $(e,0,0,1)$ und $(0,1,f,0)$ zusammen,
- für $e=1$ die τ-Bahnen von $(e,0,0,1)$ und $(1,0,0,e)$ zusammen und
- für $f=1$ die τ-Bahnen von $(a,0,1,0)$ und $(0,1,0,d)$ zusammen.

6.4 Fall $e = 0$

Der Köcher Q hat also die Gestalt

$$\begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dd, "f"] & \\
1 & & 4 \arrow[ul, "c"'] \arrow[dl, "d"] \\
 & 2 \arrow[ul, "b"] &
\end{tikzcd}$$

Einen Köcher von diesem Typ erhält man auch indem man den Köcher 6.2 in dem Punkt 2 mutiert.
Dann gibt es folgende τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen:

$$(0,1,0,0) \stackrel{b}{\text{———}} (1,0,a,ac) \stackrel{a}{\text{———}} (a,0,1,c) \qquad (a,0,1,0) \stackrel{f}{\text{———}} (0,1,0,d)$$

$$(0,0,1,0) \stackrel{c}{\text{———}} (bd,d,0,1) \stackrel{d}{\text{———}} (b,1,0,d)$$

Es gibt also für jeden Parameter a,b,c,d,f der 1 ist genau eine τ-Bahn weniger und mindestens drei τ-Bahnen.

Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1) $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$
(2) $P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1$
(3) $P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$

(4) $P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(5) $P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:

Von (1):
$T_1 = P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_2^*$ wobei $P_2^* = \tau^-(0,1,0,0) = \tau^{-2}(b, b^2-1, ab+b^2f-f, abc+b^2cf+b^2d-cf-d)$
$T_2 = P_1 \oplus P_2 \oplus P_4 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0) = \tau^{-2}(a, ab+f, a^2+abf+f^2-1, a^2c+abcf+abd+cf^2-c+df)$
Von (2):
$T_3 = P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(a,0,1,0) = \tau^{-2}(0, f, f^2-1, cf^2-c+df)$
Von (3):
$T_4 = P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(b^2-1, b, 0, 0) = \tau^{-2}(1, 0, a, ac)$
$T_5 = P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(bd, d, 0, 1) = \tau^{-2}(0, 0, c, c^2-1)$
Von (4):
$T_6 = P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2) = \tau^-(af+bf^2-b, f^2-1, f, 0) = \tau^{-2}(0,1,0,d)$
Von (5):
$T_7 = P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(a^2b + ab^2f + af + b^3 + bf^2 - 2b, abf + b^2 + f^2 - 1, ab + f, 0) = \tau^{-2}(b,1,0,d) = \tau^{-3}(0, d^2-1, cd+d^2f-f, c^2d+cd^2f-cf+d^3-2d)$
$T_8 = P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus (\tau^- P_3)^*$ wobei $(\tau^- P_3)^* = \tau^-(a^3+a^2bf+ab^2-2a-bf, a^2f+ab-f, a^2-1, 0) = \tau^{-2}(a,0,1,c) = \tau^{-3}(0, cd+f, c^2+cdf+f^2-1, c^3+c^2df+cd^2+cf^2-2c+df)$

Es gibt also maximal 8 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen. Sind $a, b, c, d, f \geq 2$ gibt es genau 8 τ-Bahnen: Die von $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(a,0,1,0)$, $(1,0,a,ac)$, $(bd,d,0,1)$, $(0,1,0,d)$, $(b,1,0,d)$ und $(a,0,1,c)$. Es fallen

- für $a = 1$ die τ-Bahnen von $(1,0,a,ac)$ und $(a,0,1,c)$ zusammen,
- für $b = 1$ die τ-Bahnen von $(0,1,0,0)$ und $(1,0,a,ac)$ zusammen,
- für $c = 1$ die τ-Bahnen von $(0,0,1,0)$ und $(bd,d,0,1)$ zusammen,
- für $d = 1$ die τ-Bahnen von $(bd,d,0,1)$ und $(b,1,0,d)$ zusammen und
- für $f = 1$ die τ-Bahnen von $(a,0,1,0)$ und $(0,1,0,d)$ zusammen.

6.5 Fall $f = 0$

Der Köcher Q hat also die Gestalt

$$\begin{tikzcd} & 3 \arrow[dl, "a"'] & \\ 1 & & 4 \arrow[ll, "e"'] \arrow[ul, "c"'] \arrow[dl, "d"] \\ & 2 \arrow[ul, "b"] & \end{tikzcd}$$

Einen Köcher von diesem Typ erhält man auch indem man den Köcher 6.3 in dem Punkt 1 mutiert.
Dann gibt es folgende τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen:

$$(1, b, 0, bd + e) \overset{a}{\text{———}} (0, 0, 1, 0) \overset{c}{\text{———}} (bd + e, d, 0, 1)$$

$$(e, 0, 0, 1) \overset{e}{\text{———}} (1, 0, 0, e)$$

$$(1, 0, a, ac + e) \overset{b}{\text{———}} (0, 1, 0, 0) \overset{d}{\text{———}} (ac + e, 0, c, 1)$$

Es gibt also für jeden Parameter a, b, c, d, e der 1 ist genau eine τ-Bahn weniger und mindestens drei τ-Bahnen.

Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1) $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$
(2) $P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1$
(3) $P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$
(4) $P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(5) $P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_1$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:

Von (1):
$T_1 = P_1 \oplus P_2 \oplus P_4 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0, 0, 1, 0) = \tau^{-2}(a, ab, a^2 - 1, a^2c + abd + ae - c)$
$T_2 = P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_2^*$ wobei $P_2^* = \tau^-(0, 1, 0, 0) = \tau^{-2}(b, b^2 - 1, ab, abc + b^2d + be - d)$
Von (2):
$T_3 = P_2 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(e, 0, 0, 1) = \tau^{-2}(0, d, c, c^2 + d^2 - 1)$
Von (3):
$T_4 = P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(b^2 - 1, b, 0, 0) = \tau^{-2}(1, 0, a, ac + e)$

$T_5 = P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(bd+e, d, 0, 1) = \tau^{-2}(0, 0, c, c^2 - 1)$
Von (4):
$T_6 = P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(a^2 + b^2 - 1, b, a, 0) = \tau^{-2}(1, 0, 0, e)$
Von (5):
$T_7 = P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(a^2 - 1, 0, a, 0) = \tau^{-2}(1, b, 0, bd + e)$
$T_8 = P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(ac+e, 0, c, 1) = \tau^{-2}(0, d, 0, d^2 - 1)$

Es gibt also maximal 8 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen. Sind $a, b, c, d, e \geq 2$ gibt es genau 8 τ-Bahnen: Die von $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(e, 0, 0, 1)$, $(1, 0, a, ac+e)$, $(bd+e, d, 0, 1)$, $(1, 0, 0, e)$, $(1, b, 0, bd+e)$ und $(ac + e, 0, c, 1)$.
Es fallen

- für $a = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 0, 1, 0)$ und $(1, b, 0, bd + e)$ zusammen,
- für $b = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 1, 0, 0)$ und $(1, 0, a, ac + e)$ zusammen,
- für $c = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 0, 1, 0)$ und $(bd + e, d, 0, 1)$ zusammen,
- für $d = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 1, 0, 0)$ und $(ac + e, 0, c, 1)$ zusammen und
- für $e = 1$ die τ-Bahnen von $(e, 0, 0, 1)$ und $(1, 0, 0, e)$ zusammen.

6.6 Fall $e = f = 0$ und $abcd > 1$

Der Köcher Q hat also die Gestalt

$$\begin{tikzcd} & 3 \arrow[dl, "a"'] & \\ 1 & & 4 \arrow[ul, "c"'] \arrow[dl, "d"] \\ & 2 \arrow[ul, "b"] & \end{tikzcd}$$

Dann gibt es folgende τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen:

$$\begin{tikzcd} (1,0,a,ac) \arrow[r, dash, "a"] \arrow[d, dash, "b"'] & (a,0,1,c) \arrow[d, dash, "c"] \\ (0,1,0,0) \arrow[r, dash, "d"'] & (ac,0,c,1) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (1,b,0,bd) \arrow[r, dash, "a"] \arrow[d, dash, "b"'] & (0,0,1,0) \arrow[d, dash, "c"] \\ (b,1,0,d) \arrow[r, dash, "d"'] & (bd,d,0,1) \end{tikzcd}$$

Es gibt also für jeden Parameter a, b, c, d der 1 ist genau 2 τ-Bahnen weniger, solange noch mindestens eine Mehrfachpfeilgruppe übrigbleibt. Sind alle Parameter 1 so ist der Köcher eine Orientierung von $\tilde{A}_3$ und damit euklidisch.

Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1) $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$

(2) $P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1$
(3) $P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$
(4) $P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(5) $P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(6) $P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_1$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
Von (1):
$T_1 = P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_2^*$ wobei $P_2^* = \tau^-(0,1,0,0) = \tau^{-2}(b, b^2-1, ab, abc + b^2d - d)$
$T_2 = P_1 \oplus P_2 \oplus P_4 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0) = \tau^-2(a, ab, a^2-1, a^2c + abd - c)$
Von (3):
$T_3 = P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(b^2-1, b, 0, 0) = \tau^{-2}(1, 0, a, ac)$
$T_4 = P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(bd, d, 0, 1) = \tau^{-2}(0, 0, c, c^2 - 1)$
Von (5):
$T_5 = P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^{-2}(b, 1, 0, d) = \tau^-(a^2b + b^3 - 2b, b^2 - 1, ab, 0)$
$T_6 = P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus (\tau^- P_3)^*$ wobei $(\tau^- P_3)^* = \tau^{-2}(a, 0, 1, c) = \tau^{-3}(0, cd, c^2 - 1, c^3 + cd^2 - 2c)$
Von (6):
$T_7 = P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)* = \tau^-(a^2-1, 0, a, 0) = \tau^{-2}(1, b, 0, bd)$
$T_8 = P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(ac, 0, c, 1) = \tau^{-2}(0, d, 0, d^2 - 1)$

Es gibt also maximal 8 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen. Sind $a, b, c, d \geq 2$ gibt es genau 8 τ-Bahnen: Die von $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(1,0,a,ac)$, $(bd,d,0,1)$, $(b,1,0,d)$, $(a,0,1,c)$, $(1,b,0,bd)$ und $(ac,0,c,1)$.
Es fallen

- für $a = 1$ die τ-Bahnen von $(1,0,a,ac)$ und $(a,0,1,c)$ und die von $(0,0,1,0)$ und $(1,b,0,bd)$ zusammen,
- für $b = 1$ die τ-Bahnen von $(b,1,0,d)$ und $(1,b,0,bd)$ und die von $(0,1,0,0)$ und $(1,0,a,ac)$ zusammen,
- für $c = 1$ die τ-Bahnen von $(a,0,1,c)$ und $(ac,0,c,1)$ und die von $(0,0,1,0)$ und $(bd,d,0,1)$ zusammen und
- für $d = 1$ die τ-Bahnen von $(bd,d,0,1)$ und $(b,1,0,d)$ und die von $(0,1,0,0)$ und $(ac,0,c,1)$ zusammen.

6.7 Fall $b = c = 0$ und $adef > 1$

Der Köcher Q hat also die Gestalt

$$\begin{tikzcd} & 3 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dd, "f"] & \\ 1 & & 4 \arrow[ll, "e"] \arrow[dl, "d"] \\ & 2 & \end{tikzcd}$$

Einen Köcher von diesem Typ erhält man auch indem man den Köcher 6.6 in dem Punkt 1 mutiert.
Es gibt folgende τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen:

$$\begin{tikzcd} (a,0,1,0) \arrow[r, dash, "a"] \arrow[d, dash, "f"'] & (1,0,a,0) \arrow[d, dash, "e"] \\ (0,1,0,d) \arrow[r, dash, "d"'] & (0,d,0,1) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (e,0,0,1) \arrow[r, dash, "e"] \arrow[d, dash, "d"'] & (1,0,0,e) \arrow[d, dash, "a"] \\ (0,1,f,0) \arrow[r, dash, "f"'] & (0,f,1,0) \end{tikzcd}$$

Es gibt also für jeden Parameter a, d, e, f der 1 ist genau 2 eine τ-Bahn weniger, solange noch mindestens eine Mehrfachpfeilgruppe übrigbleibt. Sind alle Parameter 1 so ist der Köcher eine Orientierung von $\tilde{A}_3$ und damit euklidisch.

Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1): $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$
(2): $P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1$
(3): $P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$
(4): $P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(5): $P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_2$
(6): $P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_4$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
Von (2):
$T_1 = P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(a,0,1,0) = \tau^{-2}(0,f,f^2-1,df)$
$T_2 = P_2 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(e,0,0,1) = \tau^{-2}(0,d,df,d^2-1)$
Von (4):
$T_3 = P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(a^2-1,af,a,0) = \tau^{-2}(1,0,0,e)$
$T_4 = P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(af,f^2-1,f,0) = \tau^{-2}(0,1,0,d)$
Von (5):
$T_5 = P_1 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,f,1,0) = \tau^{-2}(a,0,a^2-1,ae)$
$T_6 = P_1 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(0,d,0,1) = \tau^{-2}(e,0,ae,e^2-1)$
Von (6):

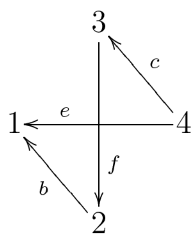
$T_7 = P_3 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_4 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(e^2 - 1, de, 0, e) = \tau^{-2}(1, 0, a, 0)$
$T_8 = P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_4 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(de, d^2 - 1, 0, d) = \tau^{-2}(0, 1, f, 0)$

Es gibt also maximal 8 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen. Sind $a, d, e, f \geq 2$ gibt es genau 8 τ-Bahnen: Die von $(a, 0, 1, 0)$, $(e, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 0, e)$, $(0, 1, 0, d)$, $(0, f, 1, 0)$, $(0, d, 0, 1)$, $(1, 0, a, 0)$ und $(0, 1, f, 0)$. Es fallen

- für $a = 1$ die τ-Bahnen von $(a, 0, 1, 0)$ und $(1, 0, a, 0)$ und von $(1, 0, 0, e)$ und $(0, f, 1, 0)$ zusammen,
- für $d = 1$ die τ-Bahnen von $(e, 0, 0, 1)$ und $(0, 1, f, 0)$ und von $(0, 1, 0, d)$ und $(0, d, 0, 1)$ zusammen,
- für $e = 1$ die τ-Bahnen von $(e, 0, 0, 1)$ und $(1, 0, 0, e)$ und von $(1, 0, a, 0)$ und $(0, d, 0, 1)$ zusammen und
- für $f = 1$ die τ-Bahnen von $(a, 0, 1, 0)$ und $(0, 1, 0, d)$ und von $(0, 1, f, 0)$ und $(0, f, 1, 0)$ zusammen.

6.8 Fall $a = d = 0$ und $bcef > 1$

Der Köcher Q hat also die Gestalt



Dann gibt es folgende τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen:

$$\begin{tikzcd}
(0,1,0,0) \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "b"] & (0,0,1,0) \arrow[d, dash, "c"] \\
(1,0,0,e) \arrow[r, dash, "e"] & (e,0,0,1)
\end{tikzcd}$$

Es gibt also für jeden Parameter b, c, e, f der 1 ist genau eine τ-Bahn weniger, solange noch mindestens eine Mehrfachpfeilgruppe übrigbleibt. Sind alle Parameter 1 so ist der Köcher eine Orientierung von $\tilde{A}_3$ und damit euklidisch.

Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1): $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$
(2): $P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1$
(3): $P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$

(4): $P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
Von (1):
$T_1 = P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_2^*$ wobei $P_2^* = \tau^-(0,1,0,0) = \tau^{-2}(bf^2 - b, f^2 - 1, f, 0)$
$T_2 = P_1 \oplus P_2 \oplus P_4 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0) = \tau^{-2}(0, f, f^2 - 1, cf^2 - c)$
Von (2):
$T_3 = P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0) = \tau^{-2}(0, f, f^2 - 1, cf^2 - c)$
$T_4 = P_2 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(e,0,0,1) = \tau^{-2}(0,0,c,c^2 - 1)$
Von (3):
$T_5 = P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(b^2 - 1, b, 0, 0) = \tau^{-2}(1, 0, a, ac + e)$
$T_6 = P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(e,0,0,1) = \tau^{-2}(0,0,c,c^2 - 1)$
Von (4):
$T_7 = P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(1,0,0,e) = \tau^{-2}(b^2 - 1, b, 0, 0)$
$T_8 = P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei$(\tau^- P_2)^* = \tau^-(bf^2 - b, f^2 - 1, f, 0) = \tau^{-2}(0,1,0,0)$

T_3 liefert dieselbe τ-Bahn wie T_2, T_4 dieselbe wie T_6, T_5 dieselbe wie T_7 und T_8 dieselbe wie T_1. Es gibt also maximal 4 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen. Sind $b, c, e, f \geq 2$ gibt es genau 4 τ-Bahnen: Die von $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(e,0,0,1)$ und $(1,0,0,e)$.
Es fallen

- für $b = 1$ die τ-Bahnen von $(0,1,0,0)$ und $(1,0,0,e)$ zusammen,
- für $c = 1$ die τ-Bahnen von $(0,0,1,0)$ und $(e,0,0,1)$ zusammen,
- für $e = 1$ die τ-Bahnen von $(e,0,0,1)$ und $(1,0,0,e)$ zusammen und
- für $f = 1$ die τ-Bahnen von $(0,1,0,0)$ und $(0,0,1,0)$ zusammen.

6.9 Fall $a = e = 0$

Der Köcher Q hat also die Gestalt

$$\begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[dd, "f"] & \\
1 & & 4 \arrow[ul, "c"'] \arrow[dl, "d"] \\
 & 2 \arrow[ul, "b"] &
\end{tikzcd}$$

Für $b \geq 2$ gibt es folgende τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(b,1,0,d) \arrow[r, dash, "d"] & (bd,d,0,1) \arrow[r, dash, "c"] & (0,0,1,0) \arrow[r, dash, "f"] & (0,1,0,d) \\
& (0,1,0,0) & (b^3-2b, b^2-1, 0, 0) &
\end{tikzcd}$$

Es gibt also für jeden Parameter c, d, f der 1 ist genau eine τ-Bahn weniger.

Ist $b = 1$ erhält man:
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(0,1,0,d) \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "d"'] & (0,0,1,0) \arrow[r, dash, "c"] & (d,d,0,1) \arrow[d, dash, "d"] \\
(0,d,0,1) & (0,f,1,0) \arrow[r, dash, "f"'] & (1,1,0,d)
\end{tikzcd}$$

Es gibt also mindestens eine τ-Bahn und für $d \neq 1$ und $f \neq 1$ je 2 zusätzliche und für $c \neq 1$ eine weitere.

Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1): $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$
(2): $P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1$
(3): $P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$
(4): $P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(5): $P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(6): $P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_2$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
Von (1):
$T_1 = P_1 \oplus P_2 \oplus P_4 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0) = \tau^{-2}(0, f, f^2-1, cf^2 - c + df)$
$T_2 = P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_2^*$ wobei $P_2^* = \tau^-(0,1,0,0) = \tau^{-2}(b, b^2-1, b^2 f - f, b^2 cf + b^2 d - cf - d)$
Von (2):
$T_3 = P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0) = \tau^{-2}(0, f, f^2-1, cf^2 - c + df)$
Von (3):
$T_4 = P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(bd, d, 0, 1) = \tau^{-2}(0, 0, c, c^2-1)$
Von (4):
$T_5 = P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(bf^2 - b, f^2 - 1, f, 0) = \tau^{-2}(0,1,0,d)$
Von (5):
$T_6 = P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(b^3 + bf^2 - 2b, b^2 + f^2 - 1, f, 0) = \tau^{-2}(b,1,0,d)$
Von (6):
$T_7 = P_3 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(bd, d, 0, 1) = \tau^{-2}(0, 0, c, c^2-1)$
$T_8 = P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(b^3 - 2b, b^2 - 1, 0, 0) =$

$\tau^{-2}(b, 1, f, cf + d)$

T_1 liefert dieselbe τ-Bahn wie T_3, und T_4 dieselbe wie T_7. Es gibt also maximal 6 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen. Sind $b, c, d, f \geq 2$ gibt es genau 6 τ-Bahnen: Die von $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(bd, d, 0, 1)$, $(0, 1, 0, d)$, $(b, 1, 0, d)$ und $(b^3 - 2b, b^2 - 1, 0, 0)$.
Sei nun $b \geq 2$. Dann fallen

- für $c = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 0, 1, 0)$ und $(bd, d, 0, 1)$ zusammen,
- für $d = 1$ die τ-Bahnen von $(bd, d, 0, 1)$ und $(b, 1, 0, d)$ zusammen, und
- für $f = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 0, 1, 0)$ und $(0, 1, 0, d)$ zusammen.

Spezialfall: $b = 1$
In diesem Fall ist 1 eine Spitze von Q und es gibt, modulo τ-Verschiebung, genau einen zusätzlichen präprojektiven Kippmodul:
(7): $P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^{-2} P_1$
Dieser führt, modulo τ-Verschiebung, zu genau zwei weiteren Kippmoduln vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
$T_9 = P_1 \oplus P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0, f, 1, 0) = \tau^{-2}(f, f, f^2 - 1, cf^2 - c + df)$
$T_{10} = P_1 \oplus P_3 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(0, d, 0, 1) = \tau^{-2}(d, d, c + df, c^2 + cdf + d^2 - 1)$

Für $b = 1$ ist aber $\tau^- P_1 = (0, 1, 0, 0)$ und $I_1 = (1, 1, f, cf + d)$ also liefern T_2 und T_8 keine τ-Bahnen von regulären Moduln mehr. Es gibt also wieder maximal 6 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen; für $c, d, f \geq 2$ sind es genau 6: $(0, 0, 1, 0)$, $(d, d, 0, 1)$, $(0, 1, 0, d)$, $(1, 1, 0, d)$, $(0, f, 1, 0)$ und $(0, d, 0, 1)$.
Dann fallen

- für $c = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 0, 1, 0)$ und $(d, d, 0, 1)$ zusammen,
- für $d = 1$ die τ-Bahnen von $(d, d, 0, 1)$ und $(1, 1, 0, d)$ und von $(0, 1, 0, d)$ und $(0, d, 0, 1)$ zusammen und
- für $f = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 0, 1, 0)$ und $(0, 1, 0, d)$ und von $(1, 1, 0, d)$ und $(0, f, 1, 0)$ zusammen.

6.10 Fall $f = d = 0$

Der Köcher Q hat also die Gestalt

$$\begin{tikzcd}
& 3 \arrow[dl, "a"'] & \\
1 & & 4 \arrow[ll, "e"] \arrow[ul, "c"'] \\
& 2 \arrow[ul, "b"] &
\end{tikzcd}$$

Einen Köcher von diesem Typ erhält man auch indem man den Köcher 6.9 in

dem Punkt 1 mutiert.
Für $b \geq 2$ gibt es folgende τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen:

$$\begin{tikzcd}
(1,b,0,e) \arrow[r, dash, "a"] & (0,0,1,0) \arrow[r, dash, "c"] & (e,0,0,1) \arrow[r, dash, "e"] & (1,0,0,e) \\
& (1,0,a,ac+e) & (1,b,0,0) &
\end{tikzcd}$$

Es gibt also für jeden Parameter a, c, e der 1 ist genau eine τ-Bahn weniger.

Ist $b = 1$ erhält man:
$$\begin{tikzcd}
(1,1,0,e) \arrow[r, dash, "a"] \arrow[d, dash, "e"'] & (0,0,1,0) \arrow[r, dash, "c"] & (e,0,0,1) \arrow[d, dash, "e"] \\
(e,e,0,1) & (a,a,1,0) \arrow[r, dash, "a"'] & (1,0,0,e)
\end{tikzcd}$$

Es gibt also mindestens eine τ-Bahn und für $a \neq 1$ und $e \neq 1$ je 2 zusätzliche und für $c \neq 1$ eine weitere.
Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1): $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$
(2): $P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1$
(3): $P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$
(4): $P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(5): $P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_1$
(6): $P_2 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_1$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
Von (1):
$T_1 = P_1 \oplus P_2 \oplus P_4 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0) = (ac^2 + ce - a, 0, c^2 - 1, c)$
Von (2):
$T_2 = P_2 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(e,0,0,1) = \tau^{-2}(0,0,c,c^2-1)$
Von (3):
$T_3 = P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(b^2 - 1, b, 0, 0) = \tau^{-2}(1,0,a,ac+e)$
$T_4 = P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(e,0,0,1) = \tau^{-2}(0,0,c,c^2-1)$
Von (4):
$T_5 = P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(1,0,0,e) = \tau^{-2}(a^2 + b^2 - 1, b, a, 0)$
Von (5):
$T_6 = P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(a^2 - 1, 0, a, 0) = \tau^{-2}(1,b,0,e)$
Von (6):
$T_7 = P_2 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(a^2 + ace + e^2 - 1, 0, a + ce, e) = \tau^{-2}(1,b,0,0)$

$T_8 = P_2 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus (\tau^- P_3)^*$ wobei $(\tau^- P_3)^* = \tau^-(ac^2 + ce - a, 0, c^2 - 1, c) = \tau^{-2}(0, 0, 1, 0)$

T_2 liefert dieselbe τ-Bahn wie T_4, und T_1 dieselbe wie T_8. Es gibt also maximal 6 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen. Sind $a, b, c, e \geq 2$ gibt es genau 6 τ-Bahnen: Die von $(0, 0, 1, 0)$, $(e, 0, 0, 1)$, $(1, 0, a, ac+e)$, $(1, 0, 0, e)$, $(1, b, 0, e)$ und $(1, b, 0, 0)$.
Sei nun $b \geq 2$. Dann fallen

- für $a = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 0, 1, 0)$ und $(1, b, 0, e)$ zusammen,
- für $c = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 0, 1, 0)$ und $(e, 0, 0, 1)$ zusammen und
- für $e = 1$ die τ-Bahnen von $(e, 0, 0, 1)$ und $(1, 0, 0, e)$ zusammen.

Spezialfall: $b = 1$
In diesem Fall ist 2 eine Spitze von Q und es gibt, modulo τ-Verschiebung, genau einen zusätzlichen präprojektiven Kippmodul:
(7): $P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^{-2} P_2$
Dieser führt, modulo τ-Verschiebung, zu genau zwei weiteren Kippmoduln vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
$T_9 = P_2 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus (\tau^- P_3)^*$ wobei $(\tau^- P_3)^* = \tau^-(a^3 + a^2ce + ac^2 + ae^2 - 2a + ce, 0, a^2 + ace + c^2 - 1, ae + c) = \tau^{-2}(a, a, 1, 0) = \tau^{-3}(a, 0, a^2 - 1, a^2c + ae - c)$
$T_{10} = P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus (\tau^- P_4)^*$ wobei $(\tau^- P_4)^* = \tau^{-2}(e, e, 0, 1) = \tau^{-3}(e, 0, ae + c, ace + c^2 + e^2 - 1)$

Für $b = 1$ ist aber $P_2 = (1, 1, 0, 0)$ und $I_2 = (0, 1, 0, 0)$ also liefern T_3 und T_7 keine τ-Bahnen von regulären Moduln mehr. Es gibt also wieder maximal 6 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen; für $a, c, e \geq 2$ sind es genau 6: Die von $(0, 0, 1, 0)$, $(e, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 0, e)$, $(1, 1, 0, e)$, $(a, a, 1, 0)$ und $(e, e, 0, 1)$.
Dann fallen

- für $a = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 0, 1, 0)$ und $(1, 1, 0, e)$ und von $(1, 0, 0, e)$ und $(a, a, 1, 0)$ zusammen,
- für $c = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 0, 1, 0)$ und $(e, 0, 0, 1)$ und
- für $e = 1$ die τ-Bahnen von $(e, 0, 0, 1)$ und $(1, 0, 0, e)$ und von $(1, 1, 0, e)$ und $(e, e, 0, 1)$ zusammen.

6.11 Fall $e = d = 0$

Der Köcher Q hat also die Gestalt

$$\begin{tikzcd} & 3 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dd, "f"] & \\ 1 & & 4 \arrow[ul, "c"'] \\ & 2 \arrow[ul, "b"] & \end{tikzcd}$$

Einen Köcher von diesem Typ erhält man auch indem man den Köcher 6.10 erst in dem Punkt 1 und dann in 2 mutiert.
Für $c \geq 2$ gibt es folgende τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen:

$$\begin{tikzcd} (a,0,1,c) \arrow[r, dash, "a"] & (1,0,a,ac) \arrow[r, dash, "b"] & (0,1,0,0) \arrow[r, dash, "f"] & (a,0,1,0) \\ & (0,0,c^2-1,c^3-2c) & (0,0,1,0) & \end{tikzcd}$$

Es gibt also für jeden Parameter a, b, f der 1 ist genau eine τ-Bahn weniger.

Ist $c = 1$ erhält man:

$$\begin{tikzcd} (a,0,1,0) \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "a"'] & (0,1,0,0) \arrow[r, dash, "b"] & (1,0,a,a) \arrow[d, dash, "a"] \\ (1,0,a,0) & (0,1,f,0) \arrow[r, dash, "f"'] & (a,0,1,1) \end{tikzcd}$$

Es gibt also mindestens eine τ-Bahn und für $a \neq 1$ und $f \neq 1$ je 2 zusätzliche und für $b \neq 1$ eine weitere.
Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1): $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$
(2): $P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1$
(3): $P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$
(4): $P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(5): $P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(6): $P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus \tau^- P_3$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
Von (1):
$T_1 = P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_2^*$ wobei $P_2^* = \tau^-(0,1,0,0) = \tau^{-2}(b, b^2-1, ab+b^2f-f, abc+b^2cf-cf)$
$T_2 = P_1 \oplus P_2 \oplus P_4 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0) = \tau^{-2}(a, ab+f, a^2+abf+f^2-1, a^2c+abcf+cf^2-c)$
Von (2):
$T_3 = P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(a,0,1,0) = \tau^{-2}(0, f, f^2-1, cf^2-c)$

Von (3):
$T_4 = P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(b^2-1, b, 0, 0) = \tau^{-2}(1, 0, a, ac)$
Von (4):
$T_5 = P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(af + bf^2 - b, f^2 - 1, f, 0) = \tau^{-2}(0, 1, 0, 0)$
Von (5):
$T_6 = P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus (\tau^- P_3)^*$ wobei $(\tau^- P_3)^* = \tau^-(a^3 + a^2bf + ab^2 - 2a - bf, a^2f + ab - f, a^2 - 1, 0) = \tau^{-2}(a, 0, 1, c) = \tau^{-3}(0, f, c^2 + f^2 - 1, c^3 + cf^2 - 2c)$
Von (6):
$T_7 = P_4 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^{-2} P_1)^*$ wobei $(\tau^{-2} P_1)^* = \tau^{-2}(b^2 - 1, b, 0, 0) = \tau^{-3}(1, 0, a, ac)$
$T_8 = P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus (\tau^- P_3)^*$ wobei $(\tau^- P_3)^* = \tau^{-2}(a + bf, f, 1, c) = \tau^{-3}(0, 0, c^2 - 1, c^3 - 2c)$

T_1 liefert dieselbe τ-Bahn wie T_5, und T_4 dieselbe wie T_7. Es gibt also maximal 6 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen. Sind $a, b, c, f \geq 2$ gibt es genau 6 τ-Bahnen: Die von $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(a, 0, 1, 0)$, $(1, 0, a, ac)$, $(a, 0, 1, c)$, und $(0, 0, c^2 - 1, c^3 - 2c)$.
Sei nun $c \geq 2$. Dann fallen

- für $a = 1$ die τ-Bahnen von $(1, 0, a, ac)$ und $(a, 0, 1, c)$ zusammen,
- für $b = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 1, 0, 0)$ und $(1, 0, a, ac)$ zusammen und
- für $f = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 1, 0, 0)$ und $(a, 0, 1, 0)$ zusammen.

Spezialfall: $c = 1$
In diesem Fall ist 4 eine Spitze von Q und es gibt, modulo τ-Verschiebung, genau einen zusätzlichen präprojektiven Kippmodul:
(7): $P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus \tau^{-2} P_4$
Dieser führt, modulo τ-Verschiebung, zu genau zwei weiteren Kippmoduln vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
$T_9 = P_4 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus \tau^{-2} P_4 \oplus (\tau^{-2} P_1)^*$ wobei $(\tau^{-2} P_1)^* = \tau^{-2}(a^2 + abf + b^2 - 1, af + b, a, a) = \tau^{-3}(1, 0, a, 0)$
$T_{10} = P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_4 \oplus (\tau^{-2} P_2)^*$ wobei $(\tau^{-2} P_2)^* = \tau^{-2}(af + bf^2 - b, f^2 - 1, f, f) = \tau^{-3}(0, 1, f, 0)$

Für $c = 1$ ist aber $P_4 = (a + bf, f, 1, 1)$ und $\tau I_3 = (0, 0, 1, 0)$, also liefern T_8 und T_2 keine τ-Bahnen von regulären Moduln mehr. Es gibt also wieder maximal 6 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen; für $a, b, f \geq 2$ sind es genau 6: Die von $(0, 1, 0, 0)$, $(a, 0, 1, 0)$, $(1, 0, a, a)$, $(a, 0, 1, 1)$, $(1, 0, a, 0)$ und $(0, 1, f, 0)$.
Dann fallen

- für $a = 1$ die τ-Bahnen von $(1, 0, a, a)$ und $(a, 0, 1, 1)$ und von $(a, 0, 1, 0)$ und $(1, 0, a, 0)$ zusammen,

- für $b = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 1, 0, 0)$ und $(1, 0, a, a)$ und
- für $f = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 1, 0, 0)$ und $(a, 0, 1, 0)$ und von $(a, 0, 1, 1)$ und $(0, 1, f, 0)$ zusammen.

6.12 Fall $e = b = 0$

Der Köcher Q hat also die Gestalt

$$\begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dd, "f"] & \\
1 & & 4 \arrow[ul, "c"'] \arrow[dl, "d"] \\
 & 2 &
\end{tikzcd}$$

Einen Köcher von diesem Typ erhält man auch indem man den Köcher 6.9 in dem Punkt 4 mutiert.
Für $a \geq 2$ gibt es folgende τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen:

$$\begin{tikzcd}
(0,0,1,0) \arrow[r, dash, "c"] & (0,d,0,1) \arrow[r, dash, "d"] & (0,1,0,d) \arrow[r, dash, "f"] & (a,0,1,0) \\
 & (a,0,1,c) & (0,f,1,0) &
\end{tikzcd}$$

Es gibt also für jeden Parameter c, d, f der 1 ist genau eine τ-Bahn weniger.

Ist $a = 1$ erhält man:

$$\begin{tikzcd}
(1,0,1,0) \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "c"'] & (0,1,0,d) \arrow[r, dash, "d"] & (0,d,0,1) \arrow[d, dash, "c"] \\
(0,cf+d,c,1) & (0,f^2-1,f,0) \arrow[r, dash, "f"'] & (0,0,1,0)
\end{tikzcd}$$

Es gibt also mindestens eine τ-Bahn und für $c \neq 1$ und $f \neq 1$ je 2 zusätzliche und für $d \neq 1$ eine weitere.

Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1): $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$
(2): $P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1$
(3): $P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$
(4): $P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(5): $P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(6): $P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_2$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
Von (1):

$T_1 = P_1 \oplus P_2 \oplus P_4 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0) = \tau^{-2}(a, f, a^2 + f^2 - 1, a^2c + cf^2 - c + df)$
Von (2):
$T_2 = P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(a,0,1,0) = \tau^{-2}(0, f, f^2-1, cf^2+df-c)$
Von (3):
$T_3 = P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(0,d,0,1) = \tau^{-2}(0,0,c,c^2-1)$
Von (4):
$T_4 = P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(af, f^2-1, f, 0) = \tau^{-2}(0,1,0,d)$
Von (5):
$T_5 = P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(af, f^2-1, f, 0) = \tau^{-2}(0,1,0,d)$
$T_6 = P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus (\tau^- P_3)^*$ wobei $(\tau^- P_3)^* = t^-(a^3-2a, a^2f-f, a^2-1, 0) = \tau^{-2}(a,0,1,c)$
Von (6):
$T_7 = P_1 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,f,1,0) = \tau^{-2}(a,0,a^2-1,a^2c-c)$
$T_8 = P_1 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(0,d,0,1) = \tau^{-2}(0,0,c,c^2-1)$

T_4 liefert dieselbe τ-Bahn wie T_5, und T_3 dieselbe wie T_8. Es gibt also maximal 6 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen. Sind $a, c, d, f \geq 2$ gibt es genau 6 τ-Bahnen: Die von $(0,0,1,0)$, $(a,0,1,0)$, $(0,d,0,1)$, $(0,1,0,d)$, $(a,0,1,c)$ und $(0,f,1,0)$.
Sei nun $a \geq 2$. Dann fallen

- für $c = 1$ die τ-Bahnen von $(0,0,1,0)$ und $(0,d,0,1)$ zusammen,
- für $d = 1$ die τ-Bahnen von $(0,d,0,1)$ und $(0,1,0,d)$ zusammen und
- für $f = 1$ die τ-Bahnen von $(a,0,1,0)$ und $(0,1,0,d)$ zusammen.

Spezialfall: $a = 1$
In diesem Fall ist 1 eine Spitze von Q und es gibt, modulo τ-Verschiebung, genau einen zusätzlichen präprojektiven Kippmodul:
(7): $P_1 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^{-2} P_1$
Dieser führt, modulo τ-Verschiebung, zu genau zwei weiteren Kippmoduln vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
$T_9 = P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(0, cf+d, c, 1) = \tau^{-2}(c, 0, c, c^2-1)$
$T_{10} = P_1 \oplus P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(0, f^2-1, f, 0) = \tau^{-2}(f, 1, f, cf+d)$

Da $P_1 = (1,0,0,0)$ und $I_1 = (1,0,1,c)$ ist, liefern T_6 und T_7 für $a = 1$ keine τ-Bahnen von regulären Moduln mehr. Es gibt also wieder maximal 6 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen; für $c, d, f \geq 2$ sind es genau 6: Die von $(0,0,1,0)$, $(1,0,1,0)$, $(0,d,0,1)$, $(0,1,0,d)$, $(0, cf+d, c, 1)$ und $(0, f^2-1, f, 0)$.
Dann fallen

- für $c = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 0, 1, 0)$ und $(0, d, 0, 1)$ und von $(1, 0, 1, 0)$ und $(0, cf + d, c, 1)$ zusammen,
- für $d = 1$ die τ-Bahnen von $(0, d, 0, 1)$ und $(0, 1, 0, d)$ und
- für $f = 1$ die τ-Bahnen von $(1, 0, 1, 0)$ und $(0, 1, 0, d)$ und von $(0, 0, 1, 0)$ und $(0, f^2 - 1, f, 0)$ zusammen.

6.13 Fall $f = b = 0$

Der Köcher Q hat also die Gestalt

$$\begin{tikzcd}
& 3 \arrow[dl, "a"'] & \\
1 & & 4 \arrow[ll, "e"] \arrow[ul, "c"'] \arrow[dl, "d"] \\
& 2 &
\end{tikzcd}$$

Einen Köcher von diesem Typ erhält man auch indem man den Köcher 6.11 in dem Punkt 4 mutiert.
Für $d \geq 2$ gibt es folgende τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen:

$$\begin{tikzcd}
(e,d,0,1) \arrow[r, dash, "c"] & (0,0,1,0) \arrow[r, dash, "a"] & (1,0,0,e) \arrow[r, dash, "e"] & (e,0,0,1) \\
& (0,d,0,1) & (ac+e,0,c,1) &
\end{tikzcd}$$

Es gibt also für jeden Parameter a, c, e der 1 ist genau eine τ-Bahn weniger.

Ist $d = 1$ erhält man:

$$\begin{tikzcd}
(e,1,0,1) \arrow[r, dash, "c"] \arrow[d, dash, "e"'] & (0,0,1,0) \arrow[r, dash, "a"] & (1,0,0,e) \arrow[d, dash, "e"] \\
(1,e,0,e) & (0,c,1,c) \arrow[r, dash, "c"'] & (e,0,0,1)
\end{tikzcd}$$

Es gibt also mindestens eine τ-Bahn und für $c \neq 1$ und $e \neq 1$ je 2 zusätzliche und für $a \neq 1$ eine weitere.

Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1): $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$
(2): $P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1$
(3): $P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$
(4): $P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(5): $P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_2$
(6): $P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ

$T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
Von (1):
$T_1 = P_1 \oplus P_2 \oplus P_4 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0) = \tau^{-2}(a,0,a^2-1,a^2c+ae-c)$
Von (2):
$T_2 = P_2 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(e,0,0,1) = \tau^{-2}(0,d,c,c^2+d^2-1)$
Von (3):
$T_3 = P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(e,d,0,1) = \tau^{-2}(0,0,c,c^2-1)$
Von (4):
$T_4 = P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(a^2-1,0,a,0) = \tau^{-2}(1,0,0,e)$
Von (5):
$T_5 = P_1 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0) = \tau^{-2}(a,0,a^2-1,a^2c+ae-c)$
$T_6 = P_1 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(0,d,0,1) = \tau^{-2}(e,0,ae+c,ace+c^2+e^2-1)$
Von (6):
$T_7 = P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(a^2-1,0,a,0) = \tau^{-2}(1,0,0,e)$
$T_8 = P_2 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(ac+e,0,c,1) = \tau^{-2}(0,d,0,d^2-1)$

T_1 liefert dieselbe τ-Bahn wie T_5, und T_4 dieselbe wie T_7. Es gibt also maximal 6 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen. Sind $a,c,d,e \geq 2$ gibt es genau 6 τ-Bahnen: Die von $(0,0,1,0)$, $(e,0,0,1)$, $(e,d,0,1)$, $(1,0,0,e)$, $(0,d,0,1)$ und $(ac+e,0,c,1)$.
Sei nun $d \geq 2$. Dann fallen

- für $a = 1$ die τ-Bahnen von $(0,0,1,0)$ und $(1,0,0,e)$ zusammen,
- für $c = 1$ die τ-Bahnen von $(0,0,1,0)$ und $(e,d,0,1)$ zusammen und
- für $e = 1$ die τ-Bahnen von $(e,0,0,1)$ und $(1,0,0,e)$ zusammen.

Spezialfall: $d = 1$
In diesem Fall ist 2 eine Spitze von Q und es gibt, modulo τ-Verschiebung, genau einen zusätzlichen präprojektiven Kippmodul:
(7): $P_2 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^{-2} P_2$
Dieser führt, modulo τ-Verschiebung, zu genau zwei weiteren Kippmoduln vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
$T_9 = P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(a^2+ace+e^2-1,0,a+ce,e) = \tau^{-2}(1,e,0,e)$
$T_{10} = P_2 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus (\tau^- P_3)^*$ wobei $(\tau^- P_3)^* = \tau^-(ac^2-a+ce,0,c^2-1,c) = \tau^{-2}(0,c,1,c)$

Für $d = 1$ ist aber $P_2 = (0,1,0,0)$ und $I_2 = (0,1,0,1)$ also liefern T_6 und T_8 keine τ-Bahnen von regulären Moduln mehr. Es gibt also wieder maximal 6 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen; für $a,c,e \geq 2$ sind es genau 6: Die von $(0,0,1,0)$, $(e,0,0,1)$, $(e,1,0,1)$, $(1,0,0,e)$, $(1,e,0,e)$ und

$(0,c,1,c)$.
Dann fallen

- für $a=1$ die τ-Bahnen von $(0,0,1,0)$ und $(1,0,0,e)$ zusammen,
- für $c=1$ die τ-Bahnen von $(0,0,1,0)$ und $(e,1,0,1)$ zusammen und von $(e,0,0,1)$ und $(0,c,1,c)$ zusammen und
- für $e=1$ die τ-Bahnen von $(e,0,0,1)$ und $(1,0,0,e)$ zusammen und von $(e,1,0,1)$ und $(1,e,0,e)$ zusammen.

6.14 Fall $e=c=0$

Der Köcher Q hat also die Gestalt

$$\begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dd, "f"] & \\
1 & & 4 \arrow[dl, "d"] \\
 & 2 \arrow[ul, "b"] &
\end{tikzcd}$$

Einen Köcher von diesem Typ erhält man auch indem man den Köcher 6.12 in dem Punkt 1 mutiert.
Für $d \geq 2$ gibt es folgende τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen:

$$\begin{tikzcd}
(0,1,0,0) \arrow[r, dash, "b"] & (1,0,a,0) \arrow[r, dash, "a"] & (a,0,1,0) \arrow[r, dash, "f"] & (0,1,0,d)
\end{tikzcd}$$

$$(b,1,0,d) \qquad (0,1,f,0)$$

Es gibt also für jeden Parameter a,b,f der 1 ist genau eine τ-Bahn weniger.
Ist $d=1$ erhält man:

$$\begin{tikzcd}
(0,1,0,1) \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "b"'] & (a,0,1,0) \arrow[r, dash, "a"] & (1,0,a,0) \arrow[d, dash, "b"] \\
(1,b,a+bf,0) & (0,f,f^2-1,0) \arrow[r, dash, "f"'] & (0,1,0,0)
\end{tikzcd}$$

Es gibt also mindestens eine τ-Bahn und für $b \neq 1$ und $f \neq 1$ je 2 zusätzliche und für $a \neq 1$ eine weitere.

Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1): $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$
(2): $P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1$
(3): $P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$
(4): $P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$

(5): $P_4 \oplus \tau^{-2}P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(6): $P_3 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
Von (1):
$T_1 = P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_2^*$ wobei $P_2^* = \tau^-(0,1,0,0) = \tau^{-2}(b, b^2-1, ab+b^2f-f, b^2d-d)$
Von (2):
$T_2 = P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(a,0,1,0) = \tau^{-2}(0, f, f^2-1, df)$
Von (3):
$T_3 = P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(b^2-1, b, 0, 0) = \tau^{-2}(1,0,a,0)$
Von (4):
$T_4 = P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(af+bf^2-b, f^2-1, f, 0) = \tau^{-2}(0,1,0,d)$
Von (5):
$T_5 = P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(a^2b+ab^2f+af+b^3+bf^2-2b, abf+b^2+f^2-1, ab+f, 0) = \tau^{-2}(b,1,0,d) = \tau^{-3}(0, d^2-1, d^2f-f, d^3-2d)$
$T_6 = P_4 \oplus \tau^{-2}P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus (\tau^- P_3)^*$ wobei $(\tau^- P_3)^* = \tau^{-2}(a,0,1,0) = \tau^{-3}(0, f, f^2-1, df)$
Von (6):
$T_7 = P_3 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(bd^2-b, d^2-1, 0, d) = \tau^{-2}(0,1,f,0)$
$T_8 = P_3 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(b^2-1, b, 0, 0) = \tau^{-2}(1,0,a,0)$

T_2 liefert dieselbe τ-Bahn wie T_6, und T_3 dieselbe wie T_8. Es gibt also maximal 6 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen. Sind $a,b,d,f \geq 2$ gibt es genau 6 τ-Bahnen: Die von $(0,1,0,0)$, $(a,0,1,0)$, $(1,0,a,0)$, $(0,1,0,d)$, $(b,1,0,d)$ und $(0,1,f,0)$.
Sei nun $d \geq 2$. Dann fallen

- für $a = 1$ die τ-Bahnen von $(a,0,1,0)$ und $(1,0,a,0)$ zusammen,
- für $b = 1$ die τ-Bahnen von $(0,1,0,0)$ und $(1,0,a,0)$ zusammen und
- für $f = 1$ die τ-Bahnen von $(a,0,1,0)$ und $(0,1,0,d)$ zusammen.

Spezialfall$d = 1$:
In diesem Fall ist 4 eine Spitze von Q und es gibt, modulo τ-Verschiebung, genau einen zusätzlichen präprojektiven Kippmodul:
(7): $P_4 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_4$
Dieser führt, modulo τ-Verschiebung, zu genau zwei weiteren Kippmoduln vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
$T_9 = P_4 \oplus \tau^{-2}P_1 \oplus \tau^{-2}P_4 \oplus (\tau^- P_3)^*$ wobei $(\tau^- P_3)^* = \tau^{-2}(a+bf, f, 1, f) = \tau^{-3}(0, f, f^2-1, 0)$
$T_{10} = P_4 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^{-2}P_4 \oplus (\tau^{-2}P_1)^*$ wobei $(\tau^{-2}P_1)^* = \tau^{-2}(b^2-1, b, 0, b) =$

$\tau^{-3}(1, b, a + bf, 0)$

Da $P_4 = (b, 1, 0, 1)$ und $I_4 = (0, 0, 0, 1)$ ist liefern T_5 und T_7 für $d = 1$ keine τ-Bahnen von regulären Moduln mehr. Es gibt also wieder maximal 6 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen; für $a, b, f \geq 2$ sind es genau 6: Die von $(0, 1, 0, 0)$, $(a, 0, 1, 0)$, $(1, 0, a, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, f, f^2 - 1, 0)$ und $(1, b, a+bf, 0)$. Dann fallen

- für $a = 1$ die τ-Bahnen von $(a, 0, 1, 0)$ und $(1, 0, a, 0)$ zusammen,
- für $b = 1$ die τ-Bahnen von $(0, 1, 0, 0)$ und $(1, 0, a, 0)$ zusammen und von $(0, 1, 0, 1)$ und $(1, b, a + bf, 0)$ zusammen und
- für $f = 1$ die τ-Bahnen von $(a, 0, 1, 0)$ und $(0, 1, 0, 1)$ zusammen und von $(0, 1, 0, 0)$ und $(0, f, f^2 - 1, 0)$ zusammen.

6.15 Fall $a = d = e = 0$ und $bcf > 1$

Der Köcher Q hat also die Gestalt

$$\begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[dd, "f"] & \\
1 & & 4 \arrow[ul, "c"'] \\
 & 2 \arrow[ul, "b"] &
\end{tikzcd}$$

Es gibt die folgenden τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen und keine weiteren:

$b, c, f \geq 2$	$(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(bf, f, 1, c)$ und $(b, 1, f, cf)$
$b = 1,\ c, f \geq 2$	$(0, 0, 1, 0)$, $(f, f, 1, c)$, $(0, f, 1, 0)$ und $(0, f, 1, c)$
$c = 1,\ b, f \geq 2$	$(0, 1, 0, 0)$, $(b, 1, f, f)$, $(0, 1, f, 0)$ und $(b, 1, f, 0)$
$f = 1,\ c, b \geq 2$	$(0, 0, 1, 0)$ und $(b, 1, 1, c)$
$b = c = 1,\ f \geq 2$	$(0, f, 1, 0)$, $(0, f, 1, 1)$, $(0, 1, f, 0)$ und $(1, 1, f, 0)$
$b = f = 1,\ c \geq 2$	$(0, c, c, 1)$ und $(0, 0, c, 1)$
$c = f = 1,\ b \geq 2$	$(1, b, b, 0)$ und $(1, b, 0, 0)$

Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1): $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$
(2): $P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1$
(3): $P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$
(4): $P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(5): $P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(6): $P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus \tau^- P_3$
(7): $P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_2$
(8): $P_4 \oplus \tau^{-3} P_1 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus \tau^- P_3$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ

$T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
Von (1):
$T_1 = P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_2^*$ wobei $P_2^* = \tau^-(0,1,0,0) = \tau^{-2}(b, b^2-1, b^2f-f, cb^2f-cf)$
$T_2 = P_1 \oplus P_2 \oplus P_4 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0) = \tau^{-2}(0, f, f^2-1, cf^2-c)$
Von (2):
$T_3 = P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0) = \tau^{-2}(0, f, f^2-1, cf^2-c)$
Von (4):
$T_4 = P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(bf^2-b, f^2-1, f, 0) = \tau^{-2}(0,1,0,0)$
Von (6):
$T_5 = P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus (\tau^- P_3)^*$ wobei $(\tau^- P_3)^* = \tau^-(b^3f + bf^3 - 3bf, b^2f + f^3 - 2f, f^2-1, 0) = \tau^{-2}(bf, f, 1, c) = \tau^{-3}(0,0,c^2-1, c^3-2c)$
Von (7):
$T_6 = P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(b^3-2b, b^2-1, 0, 0) = \tau^{-2}(b, 1, f, cf) = \tau^{-3}(0, f^2-1, c^2f + f^3 - 2f, c^3f + cf^3 - 3cf)$
Von (8):
$T_7 = P_4 \oplus \tau^{-3} P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^{-2} P_2)^*$ wobei $(\tau^{-2} P_2) = \tau^-(bf^2-b, f^2-1, f, 0) = \tau^{-2}(0,1,0,0)$

T_2 liefert dieselbe τ-Bahn wie T_3, und T_1 dieselbe wie T_4 und T_7. Es gibt also maximal 4 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen. Sind $b, c \geq 2$ gibt es genau 4 τ-Bahnen wenn $f \geq 2$ ist: Die von $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(bf, f, 1, c)$ und $(b, 1, f, cf)$.

- für $f = 1$ fallen die τ-Bahnen von $(0,1,0,0)$ und $(0,0,1,0)$ und von $(bf, f, 1, c)$ und $(b, 1, f, cf)$ zusammen,

Es ergibt sich also folgendes Bild:

$$(0,1,0,0) \overset{f}{\longrightarrow} (0,0,1,0)$$

$$(bf, f, 1, c) \underset{f}{\longrightarrow} (b, 1, f, fc)$$

Es gibt für $f = 1$ also genau zwei τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen: Die von $(0,0,1,0)$ und $(b,1,1,c)$.

1. Spezialfall: $b = 1$, $c, f \geq 2$.
In diesem Fall ist 1 eine Spitze von Q und es gibt, modulo τ-Verschiebung, genau zwei zusätzliche präprojektive Kippmoduln:
(9): $P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^{-2} P_1$
(10): $P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^{-3} P_1$
Diese führen, modulo τ-Verschiebung, zu genau zwei weiteren Kippmoduln vom

Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
Von (9):
$T_8 = P_1 \oplus P_4 \oplus \tau^{-2}P_1 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0, f, 1, 0) = \tau^{-2}(f, f, f^2 - 1, cf^2 - c)$
Von (10):
$T_9 = P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^{-3}P_1 \oplus (\tau^- P_3)^*$ wobei $(\tau^- P_3)^* = \tau^-(f^3 - 2f, f^3 - 2f, f^2 - 1, 0) = \tau^{-2}(0, f, 1, c)$

Für $b = 1$ liefern dafür T_6 und T_1 keine τ-Bahn von regulären Moduln mehr, weil $P_1 = (1, 0, 0, 0)$ und $I_1 = (1, 1, f, fc)$ ist. Es gibt für $b = 1$ und $c, f \geq 2$ also genau vier τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen: Die von $(0, 0, 1, 0)$, $(f, f, 1, c)$, $(0, f, 1, 0)$ und $(0, f, 1, c)$.

Der 2. Spezialfall $c = 1$ und $b, f \geq 2$
Dieser Fall ist dual und liefert die τ-Bahnen von $(0, 1, 0, 0)$,$(b, 1, f, f)$, $(0, 1, f, 0)$ und $(b, 1, f, 0)$.

3. Spezialfall: $b = f = 1$, $c \geq 2$.
Hier gibt es zusätzlich zu den präprojektiven Kippmoduln aus dem Fall $b = 1$, modulo τ-Verschiebung, noch genau vier weitere:
(11): $P_1 \oplus P_4 \oplus \tau^{-2}P_1 \oplus \tau^{-2}P_2$
(12): $P_1 \oplus P_4 \oplus \tau^{-2}P_2 \oplus \tau^{-3}P_1$
(13): $P_1 \oplus P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^{-3}P_1$
(14): $P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^{-3}P_1$
Dies führt, modulo τ-Verschiebung, zu genau vier weiteren Kippmoduln vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
Von (11):
$T_{10} = P_1 \oplus \tau^{-2}P_1 \oplus \tau^{-2}P_2 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(0, c, c, 1) = \tau^{-2}(c, c, c, c^2 - 1)$
Von (12):
$T_{11} = P_1 \oplus \tau^{-2}P_1 \oplus \tau^{-3}P_1 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(0, c, c, 1) = \tau^{-2}(c, c, c, c^2 - 1)$
Von (13):
$T_{12} = P_1 \oplus P_2 \oplus \tau^{-3}P_1 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(0, 0, c, 1) = \tau^{-2}(0, c, c, c^2 - 1)$
Von (14):
$T_{13} = P_2 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^{-3}P_1 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(0, 0, c, 1) = \tau^{-2}(0, c, c, c^2 - 1)$

T_{10} und T_{11} liefern also dieselben τ-Bahnen, ebenso T_{12} und T_{13}.
Für $f = b = 1$ liefern aber die τ-Bahn von T_1 (die mit der τ-Bahn von T_2 zusammenfällt) und die τ-Bahn von T_6 (die mit der τ-Bahn von T_5 zusammenfällt) keine τ-Bahnen von regulären Moduln mehr, da $P_1 = (1, 0, 0, 0)$ und $I_1 = (1, 1, 1, c)$ ist. Zudem liefern in diesem Fall T_8 und T_9 keine τ-Bahnen von regulären Moduln mehr, da $P_2 = (1, 1, 0, 0)$ und $I_2 = (0, 1, 1, c)$ ist. Es gibt also für $c \neq 1$ genau zwei τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen: Die von $(0, c, c, 1)$ und $(0, 0, c, 1)$.

4. Spezialfall: $c, f = 1$, $b \geq 2$.
Dieser Fall ist wieder dual und liefert die τ-Bahnen von $(1, b, b, 0)$ und $(1, b, 0, 0)$.

5. Spezialfall: $b, c = 1$, $f \geq 2$.
Dann gibt es zusätzlich zu den präprojektiven Kippmoduln aus dem Fall $b = 1$, modulo τ-Verschiebung, noch genau zwei weitere:
(15): $P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus \tau^{-2} P_4$
(16): $P_4 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus \tau^{-2} P_4 \oplus \tau^{-3} P_1$
Dies führt zusätzlich zu $T_1, \ldots, T_9$, modulo τ-Verschiebung, zu genau zwei weiteren Kippmoduln vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
Von (15):
$T_{14} = P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_4 \oplus (\tau^{-2} P_2)^*$ wobei $(\tau^{-2} P_2)^* = \tau^{-2}(f^2 - 1, f^2 - 1, f, f,) = \tau^{-3}(0, 1, f, 0)$
Von (16):
$T_{15} = P_4 \oplus \tau^{-2} P_4 \oplus \tau^{-3} P_1 \oplus (\tau^{-2} P_2)^*$ wobei $(\tau^{-2} P_2)^* = \tau^{-2}(f^2 - 1, f^2, f, f) = \tau^{-3}(1, 1, f, 0)$
Für $b, c = 1$ liefern allerdings T_1, T_2, T_5 und T_6 keine τ-Bahnen von regulären Moduln mehr da $P_4 = (f, f, 1, 1)$, $I_1 = (1, 1, f, f)$, $\tau^- P_1 = (0, 1, 0, 0)$ und $\tau I_4 = (0, 0, 1, 0)$ ist. Es gibt also für $f \neq 1$ genau vier τ-Bahnen von elementaren Moduln ohen Selbsterweiterungen: Die von $(0, f, 1, 0)$, $(0, f, 1, 1)$, $(0, 1, f, 0)$ und $(1, 1, f, 0)$.

Für $b = c = f = 1$ ist der Köcher vom Dynkin-Typ A_4, also gibt es keine regulären Moduln.

6.16 Fall $d = e = f = 0$ und $abc > 1$

Der Köcher Q hat also die Gestalt

$$\begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[dl, "a"'] & \\
1 & & 4 \arrow[ul, "c"'] \\
 & 2 \arrow[ul, "b"] &
\end{tikzcd}$$

Einen Köcher von diesem Typ erhält man auch indem man den Köcher 6.15 in dem Punkt 1 mutiert.
Da dieser Fall recht aufwendig ist, ist es wesentlich einfacher die Dimensionsvektoren mittels der Reflexionen aus denen von 6.15 zu berechnen. Dann gibt es die folgenden τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen und keine weiteren:

$b, c, a \geq 2$	$(1, b, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(a, 0, 1, c)$ und $(1, 0, a, ac)$
$b = 1,\ c, a \geq 2$	$(0, 0, 1, 0)$, $(a, 0, 1, c)$, $(a, a, 1, 0)$ und $(a, a, 1, c)$
$c = 1,\ b, a \geq 2$	$(1, b, 0, 0)$, $(1, 0, a, a)$, $(1, b, a, 0)$ und $(1, 0, a, 0)$
$a = 1,\ c, b \geq 2$	$(0, 0, 1, 0)$ und $(1, 0, 1, c)$
$b = c = 1,\ a \geq 2$	$(a, a, 1, 0)$, $(a, a, 1, 1)$, $(1, 1, a, 0)$ und $(1, 0, a, 0)$
$b = a = 1,\ c \geq 2$	$(c, c, c, 1)$ und $(0, 0, c, 1)$
$c = a = 1,\ b \geq 2$	$(b, 1, b, b)$ und $(b, 1, b, 0)$

6.17 Fall $c = d = f = 0$ und $abc > 1$

Der Köcher Q hat also die Gestalt

$$\begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[dl, "a"'] & \\
1 & & 4 \arrow[ll, "e"'] \\
 & 2 \arrow[ul, "b"] &
\end{tikzcd}$$

Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1): $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$
(2): $P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1$
(3): $P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$
(4): $P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(5): $P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_1$
(6): $P_2 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_1$
(7): $P_2 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_4$
(8): $P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_4$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
Von (3):
$T_1 = P_3 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(b^2 - 1, b, 0, 0) = \tau^{-2}(1, 0, a, e)$
Von (4):
$T_2 = P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(a^2 + b^2 - 1, b, a, 0) = \tau^{-2}(1, 0, 0, e)$
Von (5):
$T_3 = P_2 \oplus P_4 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(a^2 - 1, 0, a, 0) = \tau^{-2}(1, b, 0, e)$
Von (6):
$T_4 = P_2 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(a^2 + e^2 - 1, 0, a, e) = \tau^{-2}(1, b, 0, 0)$
Von (7):
$T_5 = P_2 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_4 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(e^2 - 1, 0, 0, e) = \tau^{-2}(1, b, a, 0)$
Von (8):
$T_6 = P_3 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_4 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(b^2 + e^2 - 1, b, 0, e) =$

$\tau^{-2}(1,0,a,0)$

Sind $a,b,e \geq 2$ gibt es also genau 6 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen: Die von $(1,0,a,e)$, $(1,0,0,e)$, $(1,b,0,e)$, $(1,b,0,0)$, $(1,b,a,0)$ und $(1,0,a,0)$.
und

- für $a = 1$ sind $(1,b,0,e)$ und $(1,0,a,0)$ keine regulären Moduln da dann $I_3 = (0,0,1,0)$ und $P_3 = (1,0,1,0)$ sind,
- für $b = 1$ sind $(1,0,a,e)$ und $(1,b,0,0)$ keine regulären Moduln da dann $I_2 = (0,1,0,0)$ und $P_2 = (1,1,0,0)$ sind und
- für $e = 1$ sind $(1,0,0,e)$ und $(1,b,a,0)$ keine regulären Moduln da dann $I_4 = (0,0,0,1)$ und $P_4 = (1,0,0,1)$ sind.

Es gibt also für jeden Parameter der eins ist genau 2 τ-Bahnen weniger.
Sind $a = b = e = 1$ ist der Köcher dynkinsch vom Typ D_4 ist; es gibt also keine regulären Moduln.

Kapitel 7

Erbliche Köcher mit 3 Punkten

Ein erbilcher Köcher mit 3 Punkten ist von der Gestalt

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "a"'] & \\ 1 & & 3 \arrow[ul, "b"'] \arrow[ll, "c"] \end{tikzcd}$$

für geeignete x_i. Unterscheidet man wieder ob ein Parameter gleich Null ist, so erhält man die drei Fälle $a, b, c \neq 0$, $a = 0$ und $c = 0$. Für $b = 0$ ist der Köcher dual zu dem Köcher für $a = 0$, also ist dieser Fall nicht interessant.

7.1 Fall $a, b, c \neq 0$

Der Köcher Q hat also die Gestalt

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "a"'] & \\ 1 & & 3 \arrow[ul, "b"'] \arrow[ll, "c"] \end{tikzcd}$$

Es gibt folgende τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen:

$$\begin{tikzcd} (c,0,1) \arrow[r, dash, "c"] \arrow[dr, dash, "b"'] & (1,0,c) \arrow[d, dash, "a"] \\ & (0,1,0) \end{tikzcd}$$

Es gibt also für jeden Parameter a, b, c der 1 ist genau eine τ-Bahn weniger solange mindestens eine Mehrfachpfeilgruppe übrig bleibt. Sind alle Parameter eins so ist der Köcher eine Orientierung von $\tilde{A}_2$ und damit euklidisch.

Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1): $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$

(2): $P_2 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_1$
(3): $P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
Von (1):
$T_1 = P_1 \oplus P_3 \oplus P_2^*$ wobei $P_2^* = \tau^-(0,1,0) = \tau^{-2}(a, a^2-1, a^2b+ac-b)$
Von (2):
$T_2 = P_2 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(c,0,1) = \tau^{-2}(0, b, b^2-1)$
Von (3):
$T_3 = P_3 \oplus \tau^- P_2 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(a^2-1, a, 0) = \tau^{-2}(1, 0, c)$

Es gibt also maximal 3 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen: Die von $(0,1,0)$, $(c,0,1)$ und $(1,0,c)$.
Sind $a, b, c \geq 2$ gibt es genau 3 τ-Bahnen und es fallen

- für $a = 1$ die τ-Bahnen von $(0,1,0)$ und $(1,0,c)$ zusammen,
- für $b = 1$ die τ-Bahnen von $(0,1,0)$ und $(c,0,1)$ zusammen und
- für $c = 1$ die τ-Bahnen von $(c,0,1)$ und $(1,0,c)$ zusammen.

7.2 Fall $a = 0$ und $bc > 1$

Der Köcher Q hat also die Gestalt

$$\begin{tikzcd} & 2 & \\ 1 & & 3 \arrow[ul, "b"'] \arrow[ll, "c"] \end{tikzcd}$$

Es gibt folgende τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen:
Für $b, c \geq 2$: $(c,0,1)$ und $(0,b,1)$.
Für $b = 1$ und $c \neq 1$: $(1,c,c)$.
Für $c = 1$ und $b \neq 1$: $(b,1,b)$.
Für $b = c = 1$ ist der Köcher vom dynkin Typ A_3, also gibt es keine regulären Moduln.

Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1): $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$
(2): $P_2 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_1$
(3): $P_1 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_2$
(4): $P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
Von (2):

$T_1 = P_2 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(c, 0, 1) = \tau^{-2}(0, b, b^2 - 1)$
Von (3):
$T_2 = P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0, b, 1) = \tau^{-2}(c, 0, c^2 - 1)$

Es gibt also maximal 2 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen: Die von $(c, 0, 1)$ und $(0, b, 1)$. Sind $b, c \geq 2$ gibt es genau 2 τ-Bahnen.

Spezialfall: $b = 1$
In diesem Fall ist 2 eine Spitze von Q und es gibt, modulo τ-Verschiebung, genau einen zusätzlichen präprojektiven Kippmodul:
(5): $P_2 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^{-2} P_2$
Dieser führt, modulo τ-Verschiebung, zu genau einem weiteren Kippmoduln vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
$T_3 = P_2 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(c^2 - 1, 0, c) = \tau^{-2}(1, c, c)$

Für $b = 1$ liefern T_1 und T_2 keine τ-Bahnen von regulären Moduln mehr, da $\tau^- P_2 = (c, 0, 1)$ und $I_2 = (0, 1, 1)$ sind. Es gibt also maximal eine τ-Bahn von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen: Die von $(1, c, c)$.
Ist $c \geq 2$ gibt es genau eine τ-Bahn.
Der Fall $c = 1$ ist analog.

7.3 Fall $c = 0$ und $ab > 1$

Der Köcher Q hat also die Gestalt $1 \xleftarrow{a} 2 \xleftarrow{b} 3$

Es gibt folgende τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen:
Für $a, b \geq 2$: $(0, 1, 0)$ und $(a, 1, b)$.
Für $a = 1$ und $b \neq 1$: $(0, b, 1)$.
Für $b = 1$ und $a \neq 1$: $(1, a, 0)$.
Für $a = b = 1$ ist der Köcher vom dynkin Typ A_3, also gibt es keine regulären Moduln.

Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1): $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$
(2): $P_2 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_1$
(3): $P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$
(4): $P_3 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^{-2} P_1$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ

$T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
Von (1):
$T_1 = P_1 \oplus P_3 \oplus P_2^*$ wobei $P_2^* = \tau^-(0,1,0) = \tau^{-2}(a, a^2-1, a^2b-b)$
Von (4):
$T_2 = P_3 \oplus \tau^{-2}P_1 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(a^3-2a, a^2-1, 0) = \tau^{-2}(a,1,b)$
Es gibt also maximal 2 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen: Die von $(0,1,0)$ und $(a,1,b)$. Sind $a, b \geq 2$ gibt es genau 2 τ-Bahnen.

Spezialfall: $a = 1$
In diesem Fall ist 1 eine Spitze von Q und es gibt, modulo τ-Verschiebung, genau einen zusätzlichen präprojektiven Kippmodul:
(5): $P_1 \oplus P_3 \oplus \tau^{-2}P_1$
Dieser führt, modulo τ-Verschiebung, zu genau einem weiteren Kippmoduln vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
$T_3 = P_1 \oplus \tau^{-2}P_1 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,b,1) = \tau^{-2}(b,b,b^2-1)$

Für $a = 1$ liefern T_1 und T_2 keine τ-Bahnen von regulären Moduln mehr, da $\tau^- P_1 = (0,1,0)$ und $I_1 = (1,1,b)$ sind. Es gibt also maximal eine τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen: Die von $(0,b,1)$.
Ist $b \geq 2$ gibt es genau eine τ-Bahn.
Der Fall $b = 1$ ist dual und liefert die τ-Bahn von $(1,a,0)$.

Kapitel 8

Anzahl der τ-Bahnen für spezielle Köcher

Lemma 8.1. *Sei Q ein Köcher vom Typ*

$$\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[dl, "x_1"'] & 3 \arrow[l, "\alpha_2"'] & \cdots & l_1 & l_1+1 \arrow[l, "\alpha_{l_1}"'] & \\
1 & & \vdots & & \vdots & & \bullet_n \arrow[ul, "y_1"'] \arrow[dl, "y_m"] \\
& l_1+\ldots+l_{m-1}+2 \arrow[ul, "x_m"] & l_1+\ldots l_{m-1}+3 \arrow[l, "\alpha_{l_1+\ldots+l_{m-1}+2}"'] & \cdots & n-2 & n-1 \arrow[l, "\alpha_{n-2}"'] &
\end{tikzcd}$$

mit m Armen der Längen $l_j \geq 1$ von n nach 1. Dann sind äquivalent:
(a) Δ ist eine Orientierung von Q mit folgender Eigenschaft: Die Anzahl der Pfeile von rechts nach links ist in jedem Arm gleich.
(b) Δ ist der Hom-Köcher eines präprojektiven Kippmoduls von kQ.

Beweis. $(b) \Longrightarrow (a)$: Sei Δ der Hom-Köcher von $T = \bigoplus_{i=1}^{n} \tau^{-r_i} P_i$. Dann kann T soweit in τ-Richtung verschoben werden, bis mindestens ein direkter Summand von T projektiv ist. Ohne Einschränkung sei also $T_{i_0} = P_{i_0}$ projektiv. Dann ist nach Lemma 5.9 auch $T_n = P_n$ projektiv. Außerdem folgt mit Lemma 5.9, dass jeder Pfeil von rechts nach links in einem Arm von Δ, also ein Pfeil von j nach i mit $i < j$, eine Abbildung von $\tau^{-l_j} P_j$ nach $\tau^{-l_j - 1} P_i$ entspricht. Jeder Pfeil von links nach rechts in einem Arm von Δ, also ein Pfeil von i nach j mit $i < j$, bedeutet eine Abbildung von $\tau^{-l_i} P_i$ nach $\tau^{-l_i} P_j$. Also ist insgesamt die Anzahl der Pfeile von rechts nach links in einem Arm gleich r_1. Insbesondere also für alle Arme gleich.
$(a) \Longrightarrow (b)$: Sei Δ ein Köcher mit dieser Eigenschaft. Dann kann wie folgt ein Hom-Köcher vom Typ Δ eines präprojektiven Kippmoduls konstruiert werden: Ersetze den Punkt n durch P_n und iteriere.
Ist $a \longleftarrow \tau^{-r_i} P_i$ ein Pfeil in Δ dann ersetze a durch $\tau^{-r_i - 1} P_{i-1}$.

Ist $b \longrightarrow \tau^{-r_i}P_i$ ein Pfeil in Δ dann ersetze b durch $\tau^{-r_i}P_{i-1}$.
Damit erhält man einen präprojektiven Kippmodul und Schnittmodul T: Sind $T_i = \tau^{-r_i}P_i$ und $T_j = \tau^{-r_j}P_j$ zwei unzerlegbare direkte Summanden von T so gibt es zwei Möglichkeiten:
1. Fall: i und j sind in Q durch einen Weg verbunden:
Sei ohne Einschränkung $i < j$. Dann ist $r_j < r_i$, also ist $\mathrm{Ext}^1(\tau^{-r_j}P_j, \tau^{-r_i}P_i) = \mathrm{Ext}^1(P_j, \tau^{-r_i+r_j}P_i) = 0$.
Außerdem gilt $r_i - r_j \leq j - i$, also $r_i - r_j - 1 < j - i$ und damit auch $\mathrm{Ext}^1(\tau^{-r_i}P_i, \tau^{-r_j}P_j) = \mathrm{Ext}^1(\tau^{-r_i+r_j}P_i, P_j) = \mathrm{D}\,\mathrm{Hom}(P_j, \tau^{-r_i+r_j+1}P_i) = 0$.
2.Fall: i und j sind in Q nicht durch einen Weg verbunden:
Es gilt also insbesondere $1 < j, i < n$ und i und j liegen nicht auf demselben Arm. Sei ohne Einschränkung $r_i \leq r_j$. Dann ist $\mathrm{Ext}^1(\tau^{-r_i}P_i, \tau^{-r_j}P_j) = \mathrm{Ext}^1(P_i, \tau^{-r_j+r_i}P_j) = 0$.
Sei j_1 die Anzahl der Pfeile von rechts nach links zwischen 1 und j und sei i_1 die Anzahl der Pfeile von rechts nach links zwischen 1 und i. Dann ist $r_j = r_1 - j_1$ und $r_1 - r_i = i_1$. Es folgt $r_j - r_i = r_1 - r_i - j_1 = i_1 - j_1$ und $r_j - r_i - 1 \leq i_1 - j_1 + j_1 - 1 = i_1 - 1$.
Weiterhin ist $\mathrm{Hom}(P_i, \tau^{-i_1+1}P_1) = 0$ und damit auch $\mathrm{Hom}(P_i, \tau^{-i_1+1}P_j) = 0$ also ist $\tau^{-i_1+1}P_j$ an der Stelle i nicht aufrichtig. Weil der Köcher keine Spitze hat, ist mit Satz 5.8 auch $\tau^{-r_j+r_i+1}P_j$ an der Stelle i nicht aufrichtig, da es einen Mono von $\tau^{-r_j+r_i+1}P_j$ nach $\tau^{-i_1+1}P_j$ gibt. Also folgt $0 = \mathrm{D}\,\mathrm{Hom}(P_i, \tau^{-r_j+r_i+1}P_j) = \mathrm{Ext}^1(\tau^{-r_j+r_i}P_j, P_i) = \mathrm{Ext}^1(\tau^{-r_j}P_j, \tau^{-r_i}P_i)$.

■

Definiert man die folgenden Moduln

- Für $1 < i < n$ sei $V_i = (v_1, \ldots, v_n)$ mit:
  für $j < i$ ist v_j die Anzahl der Wege von i nach j,
  für $j > i$ ist v_j die Anzahl der Wege von j nach i,
  und $v_i = 1$.

- Für $1 \leq s \leq m-1$ und $I = \{i_1, \ldots, i_s\} \subset \{2, l_1+2, l_1+l_2+2, \ldots, l_1 + \ldots + l_{m-1}+2\}$ sei $W_I = (w_1, \ldots, w_n)$ mit:
  $w_1 = \sum_{j=1}^{s} x_{i_j}^2 - 1$,
  $w_{i_j} = x_{i_j}$ und alle restlichen $w_l = 0$.

- Für $1 \leq s \leq m-1$ und $I = \{i_1, \ldots, i_s\} \subset \{l_1+1, l_1+l_2+1, \ldots, n-1\}$ sei $Z_I = (z_1, \ldots, z_n)$ mit:
  $z_n = \sum_{j=1}^{s} y_{i_j}^2 - 1$,
  $z_{i_j} = y_{i_j}$ und alle restlichen $z_l = 0$.

so gilt:

Proposition 8.2. *Sei Q wie oben. Dann gibt es in kQ maximal $2^{m+1} + 2n - 8$ τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen und folgende Liste ist eine vollständige Aufzählung aller τ-Bahnen:*
W_I und Z_I wobei I alle nicht-leeren echten Teilmengen von $\{1, \ldots, m\}$ durchläuft und $S_2, \ldots, S_{n-1}$.

Beweis. Nach Lemma 8.1 entspricht jeder präprojektive Kippmodul einer Orientierung Δ von Q mit der Eigenschaft aus Lemma 8.1.
Jeder elementare Modul ohne Selbsterweiterungen ist von der Form T_i^* für einen präprojektiven Kippmodul T und einen direkten Summanden T_i von T.

Sei $i \notin \{1, n\}$ ein Punkt in Q und p, q die beiden benachbarten Punkte mit $p < i < q$. Bei einer Mutation in i gibt es genau 4 Möglichkeiten wie Δ lokal aussehen kann:
(1) $p \longrightarrow i \longleftarrow q$ Mutation in i ergibt $p \longleftarrow i \longrightarrow q$ also wieder einen erblichen Köcher.
(2) $p \longleftarrow i \longrightarrow q$ Mutation in i ergibt $p \longrightarrow i \longleftarrow q$ also wieder einen erblichen Köcher.
(3)
$$\begin{tikzcd} p \arrow[d, "a"'] & \\ i \arrow[r, "b"'] & q \end{tikzcd}$$
Mutation in i ergibt
$$\begin{tikzcd} p \arrow[dr, "ab"] & \\ i \arrow[u, "a"] & q \arrow[l, "b"] \end{tikzcd}$$
also keinen erblichen Köcher, d.h. T_i^* ist elementar.
(4)
$$\begin{tikzcd} p & \\ i \arrow[u, "a"] & q \arrow[l, "b"] \end{tikzcd}$$
Mutation in i ergibt
$$\begin{tikzcd} p \arrow[d, "a"'] & \\ i \arrow[r, "b"'] & q \arrow[ul, "ab"'] \end{tikzcd}$$
also keinen erblichen Köcher, d.h. T_i^* ist elementar.
Nur bei (3) und (4) erhält man also ein elementares T_i^*. Modulo einer Permutation der Arme ist dann $p = i - 1$ und $p = i + 1$.
Für $2 < i < n$ sei α_i die Anzahl der Pfeile die in i enden (alle Pfeile, die in $i \neq 1$ enden, starten in dem selben Punkt).
Benutze: $(*)$ Ist $\underline{\dim}\, P_i = (p_1, \ldots, p_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0)$, dann ist $\underline{\dim}\, P_{i+1} = (\alpha_i p_1, \ldots, \alpha_i p_{i-1}, \alpha_i, 1, 0, \ldots, 0)$.
Der Fall (3):
Der Hom-Köcher des entsprechenden präprojektiven Kippmoduls $T' \oplus T_i$ sieht also lokal so aus: $\tau^{-l_i} P_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} \tau^{-l_i} P_i \xrightarrow{\alpha_i} \tau^{-l_i} P_{i+1}$. Die minimale links $\mathrm{add}(T')$-Approximation liefert dann die kurze exakte Folge $0 \longrightarrow \tau^{-l_i} P_i \longrightarrow \tau^{-l_i} P_{i+1}^{\alpha_i} \longrightarrow (\tau^{-l_i} P_i)^* \longrightarrow 0$.
Also ergibt sich mit $(*)$ für die Dimensionsvektoren: $\underline{\dim}(\tau^{-l_i} P_i)^* = \alpha_i \underline{\dim}(\tau^{-l_i} P_{i+1}) - \underline{\dim}(\tau^{-l_i} P_i) = (\alpha_i \underline{\dim}\, P_{i+1} - \underline{\dim}\, P_i)\Phi^{-l_i} = ((\alpha_i^2 - 1)p_1, \ldots, (\alpha_i^2 - 1)p_{i-1}, (\alpha_i^2 - 1), \alpha_i, 0 \ldots, 0)\Phi^{-l} = (S_i)\Phi^{-l_i - 1}$ denn $((\alpha_i^2 - 1)p_1, \ldots, (\alpha_i^2 - 1)p_{i-1}, (\alpha_i^2 - 1), \alpha_i, 0 \ldots, 0)\Phi = S_i$. Dieser Fall führt also

zu $n-2$ τ-Bahnen von elementaren Moduln, nämlich denen der $S_2, \ldots, S_{n-1}$.
Der Fall (4):
Der Hom-Köcher des entsprechenden präprojektiven Kippmoduls $T' \oplus T_i$ sieht also lokal so aus: $\tau^{-l_i-1}P_{i-1} \xleftarrow{\alpha_{i-1}} \tau^{-l_i}P_i \xleftarrow{\alpha_i} \tau^{-l_i+1}P_{i+1}$. Die minimale links add$(T')$-Approximation liefert dann die kurze exakte Folge $0 \longrightarrow \tau^{-l_i}P_i \longrightarrow \tau^{-l_i-1}P_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \longrightarrow (\tau^{-l_i}P_i)^* \longrightarrow 0$.
Also ergibt sich mit $(*)$ für die Dimensionsvektoren: $\underline{\dim}(\tau^{-l_i}P_i)^* = \alpha_{i-1}\,\underline{\dim}(\tau^{-l_i-1}P_{i-1}) - \underline{\dim}(\tau^{-l_i}P_i) = (\alpha_{i-1}\,\underline{\dim}\,P_{i-1} - (\underline{\dim}\,P_i)\Phi)\Phi^{-l_i-1} = (\alpha_{i-1}\,\underline{\dim}\,P_{i-1} - \underline{\dim}\,I_i)\Phi^{-l_i-1} = (\underline{\dim}\,P_i - \underline{\dim}\,S_i - \underline{\dim}\,I_i)\Phi^{-l_i-1} = (v_1, \ldots, v_n)$
und
für $j < i$ ist v_j die Anzahl der Wege von i nach j,
für $j > i$ ist v_j die Anzahl der Wege von j nach i,
und $v_i = 1$.
Dieser Fall liefert also $n-2$ weitere τ-Bahnen von elementaren Moduln.

Sei nun $i = 1$ ein Punkt in Q.
Seien $i_1, \ldots, i_s \in \{2, l_1+2, l_1+l_2+2, \ldots, l_1+\ldots+l_{m-1}+2\}$ alle Punkte in denen Pfeile starten die in 1 enden. Es gibt also x_{i_j} Pfeile von i_j nach 1. Nur für $s = 0$ oder $s = m$ ergibt eine Mutation in 1 wieder einen präprojektiven Kippmodul.
Sei also $1 \leq s \leq m-1$. Die minimale links add(T')-Approximation liefert dann, für ein geeignetes l, die kurze exakte Folge $0 \longrightarrow \tau^{-l}P_1 \longrightarrow \tau^{-l}P_{i_1}^{x_{i_1}} \oplus \ldots \oplus \tau^{-l}P_{i_s}^{x_{i_s}} \longrightarrow (\tau^{-l}P_1)^* \longrightarrow 0$.
$\underline{\dim}\,P_{i_j}$ hat genau zwei Einträge, die nicht Null sind: an der Stelle 1 steht x_{i_j} und an der Stelle i_j steht eine 1. Also ergibt sich für die Dimensionsvektoren: $\underline{\dim}(\tau^{-l}P_1)^* = (\sum_{j=1}^{s} x_{i_j}\,\underline{\dim}\,P_{i_j} - \underline{\dim}\,P_1)\Phi^{-l} = (-1 + \sum_{j=1}^{s} x_{i_j}^2, 0\ldots, 0, x_{i_1}, 0, \ldots, 0x_{i_s}, 0\ldots, 0,)\Phi^{-l}$. Wobei die x_{i_j} an den Stellen i_j stehen.
Der Fall $i = n$ ist dual und liefert für $\{i_1, \ldots i_s\} \subset \{l_1+1, l_1+l_2+1, \ldots, l_1+\ldots+l_m+1\}$ die τ-Bahnen von $(0, \ldots, 0, y_{i_1}, 0\ldots, 0, y_{i_s}, 0\ldots, 0, -1+\sum_{j=1}^{s} y_{i_j}^2)$, wobei die y_{i_j} wieder an den Stellen i_j stehen. Für jeden dieser beiden Fälle gib es für jedes $1 \leq s \leq m-1$ genau $\binom{m}{s}$ Möglichkeiten, die Teilmengen $\{i_1, \ldots i_s\}$ auszuwählen und einen dieser elementaren Moduln zu erhalten. Also insgesamt $2^m - 2$ Möglichkeiten. Zusammen mit den anderen Fällen erhält man dann $2(n-2) + 2(2^m-2) = 2^{m+1} + 2n - 8$ τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen.

■

Ist Q ein Köcher von obigen Typ mit nur zwei Armen, also eine Orientierung von $\tilde{A}_{n-1}$ mit Mehrfachpfeilen, so gilt:

Corollar 8.3. *Gibt es genau p Pfeilgruppen mit nur einem Pfeil in Q, so gibt es maximal $2(n-p)$ verschiedene τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen, solange $p \neq n$ ist, also Q nicht euklidisch ist.*

Beweis. Ist $x_1 = 1$, so fallen die τ-Bahnen von S_2 und $W_{\{2\}}$ zusammen.
Die τ-Verschiebung von $W_{\{l_1+2\}}$ kann folgendermaßen mit den Reflexionen s_i aus Kapitel 6 ausgerechnet werden: $\tau W_{\{l_1+2\}} = s_n \dots s_1 W_{\{l_1+2\}}$ (Siehe [1, Kapitel 7, Lemma 5.8 und Lemma 5.9]). Sei Q' der volle Unterköcher von Q der von 1, n und den Punkten des oberen Armes aufgespannt wird und sei I'_1 der unzerlegbar injektive kQ'-Modul zu dem Punkt 1. Dann ist $V_2 \cong I'_1$ als kQ'-Modul und es gilt $\tau W_{\{l_1+2\}} = s_n \dots s_1 W_{\{l_1+2\}} = s_n \dots s_3(1,1,0,\dots,0) \cong I'_1 \cong V_2$. Es gibt also insgesamt zwei τ-Bahnen weniger.
Entsprechendes gilt für x_2, y_1, y_2.
Besteht eine Pfeilgruppe innnerhalb eines Armes nur aus einem Pfeil, gibt es Punkte a, b sodass Q lokal so aussieht: $a \longleftarrow b$. Es fallen dann die τ-Bahnen von V_a und V_b zusammen; und die von S_a und S_b, da diese beiden einfachen Moduln dann nebeneinander in derselben τ-Bahen liegen. ■

Es folgen zwei Beispiele in denen für Köcher dieses Typs die genaue Anzahl der τ-Bahnen bestimmt wird.

8.1 Ein Köcher mit 2 Armen und 5 Punkten

Der Köcher Q hat also die Gestalt

$$\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[dl, "a"'] & & 3 \arrow[ll, "b"'] & \\
1 & & & & 5 \arrow[ul, "c"'] \arrow[dll, "e"] \\
& & 4 \arrow[ull, "d"] & &
\end{tikzcd}$$

Es gibt folgende τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen:

$$\begin{tikzcd}
(d^2-1,0,0,d,0) \arrow[r, dash, "a"] \arrow[d, dash, "d"] & (a,1,b,0,bc) \arrow[r, dash, "b"] & (ab,b,1,0,c) \arrow[dl, dash, "c"] \\
(0,0,0,1,0) \arrow[r, dash, "e"] & (0,0,0,e,e^2-1) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(a^2-1,a,0,0,0) \arrow[r, dash, "a"] \arrow[d, dash, "d"] & (0,1,0,0,0) \arrow[r, dash, "b"] & (0,0,1,0,0) \arrow[dl, dash, "c"] \\
(d,0,0,1,e) \arrow[r, dash, "e"] & (0,0,c,0,c^2-1) &
\end{tikzcd}$$

Sind alle Parameter gleich eins, so ist der Köcher eine Orientierung von $\tilde{A}_4$ und damit euklidisch.

Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1): $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_5$
(2): $P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_5 \oplus \tau^- P_1$
(3): $P_2 \oplus P_3 \oplus P_5 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_4$
(4): $P_3 \oplus P_4 \oplus P_5 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_1$
(5): $P_3 \oplus P_5 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$
(6): $P_3 \oplus P_5 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^{-2} P_1$
(7): $P_4 \oplus P_5 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(8): $P_5 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_4$
(9): $P_5 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_4$
(10): $P_5 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_4$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
Von (1):
$T_1 = P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_5 \oplus P_4^*$ wobei $P_4^* = \tau^-(0,0,0,1,0) = \tau^{-2}(d, ad, abd, d^2-1, abcd + d^2e - e)$
Von (2):
$T_2 = P_2 \oplus P_4 \oplus P_5 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0,0) = \tau^{-2}(0, b, b^2-1, 0, b^2c - c)$
Von (3):
$T_3 = P_2 \oplus P_3 \oplus P_5 \oplus \tau^- P_4 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(d^2-1, 0, 0, d, 0) = \tau^{-2}(1, a, ab, 0, abc)$
$T_4 = P_2 \oplus P_5 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_4 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0,0) = \tau^{-2}(0, b, b^2-1, 0, b^2c - c)$
$T_5 = P_2 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_4 \oplus P_5^*$ wobei $P_5^* = \tau^-(de, 0, 0, e, 1) = \tau^{-2}(0, 0, c, 0, c^2-1)$
Von (4):
$T_6 = P_3 \oplus P_4 \oplus P_5 \oplus \tau^- P_2 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(a^2-1, a, 0, 0, 0) = \tau^{-2}(1, 0, 0, d, de)$
Von (5):
$T_7 = P_3 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_5^*$ wobei $P_5^* = \tau^-(de, 0, 0, e, 1) = \tau^{-2}(0, 0, c, 0, c^2-1)$
Von (6):
$T_8 = P_3 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus P_5^*$ wobei $P_5^* = \tau^-(de, 0, 0, e, 1) = \tau^{-2}(0, 0, c, 0, c^2-1)$
$T_9 = P_3 \oplus P_5 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus (\tau^- P_4)^*$ wobei $(\tau^- P_4)^* = \tau^-(a^2d + d^3 - 2d, ad, 0, d^2-1, 0) = \tau^{-2}(d, 0, 0, 1, e)$
$T_{10} = P_3 \oplus P_5 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(a^3 + ad^2 - 2a, a^2 - 1, 0, ad, 0) = \tau^{-2}(a, 1, b, 0, bc)$
Von (7):
$T_{11} = P_4 \oplus P_5 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(a^2-1, a, 0, 0, 0) = \tau^{-2}(1, 0, 0, d, de)$
$T_{12} = P_4 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus P_5^*$ wobei $P_5^* = \tau^-(abc, bc, c, 0, 1) =$

$\tau^{-2}(0,0,0,e,e^2-1)$
$T_{13} = P_4 \oplus P_5 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(ab^2-a, b^2-1, b, 0, 0) = \tau^{-2}(0,1,0,0,0)$
Von (8):
$T_{14} = P_5 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_4 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(ab^2-a, b^2-1, b, 0, 0) = \tau^{-2}(0,1,0,0,0)$
Von (9):
$T_{15} = P_5 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_4)^*$ wobei $(\tau^- P_4)^* = \tau^-(a^2d+d^3-2d, ad, 0, d^2-1, 0) = \tau^{-2}(d,0,0,1,e)$
Von (10):
$T_{16} = P_5 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_4 \oplus (\tau^{-2} P_1)^*$ wobei $(\tau^{-2} P_1)^* = \tau^{-2}(a^2-1, a, 0, 0, 0) = \tau^{-3}(1,0,0,d,de)$
$T_{17} = P_5 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus \tau^- P_4 \oplus (\tau^- P_3)^*$ wobei $(\tau^- P_3)^* = \tau^{-2}(ab, b, 1, 0, c) = \tau^{-3}(0,0,c^2-1, ce, c^3+ce^2-2c)$
$T_{18} = P_5 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_4)^*$ wobei $(\tau^- P_4)^* = \tau^-(a^2d+d^3-2d, ad, 0, d^2-1, 0) = \tau^{-2}(d,0,0,1,e)$

Dabei liefern die folgenden Kippmoduln dieselbe τ-Bahn:

- T_2 und T_4 liefern die τ-Bahn von $(0,0,1,0,0)$
- T_5, T_7 und T_8 liefern die τ-Bahn von $(0,0,c,0,c^2-1)$
- T_6, T_{11} und T_{16} liefern die τ-Bahn von $(a^2-1,a,0,0,0)$
- T_9, T_{15} und T_{18} liefern die τ-Bahn von $(d,0,0,1,e)$
- T_{13} und T_{14} liefern die τ-Bahn von $(0,1,0,0,0)$

Es gibt also maximal 10 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen: Die von $(0,0,0,1,0)$, $(0,0,1,0,0)$, $(d^2-1,0,0,d,0)$, $(0,0,c,0,c^2-1)$, $(a^2-1,a,0,0,0)$, $(d,0,0,1,e)$, $(a,1,b,0,bc)$, $(0,0,0,e,e^2-1)$, $(0,1,0,0,0)$ und $(ab,b,1,0,c)$.

Es fallen

- für $a=1$ die τ-Bahnen von $(d^2-1,0,0,d,0)$ und $(a,1,b,0,bc)$ und von $(a^2-1,a,0,0,0)$ und $(0,1,0,0,0)$ zusammen,
- für $b=1$ die τ-Bahnen von $(0,0,1,0,0)$ und $(0,1,0,0,0)$ und von $(a,1,b,0,bc)$ und $(ab,b,1,0,c)$ zusammen,
- für $c=1$ die τ-Bahnen von $(0,0,1,0,0)$ und $(0,0,c,0,c^2-1)$ und von $(0,0,0,e,e^2-1)$ und $(ab,b,1,0,c)$ zusammen,
- für $d=1$ die τ-Bahnen von $(0,0,0,1,0)$ und $(d^2-1,0,0,d,0)$ und von $(a^2-1,a,0,0,0)$ und $(d,0,0,1,e)$ zusammen,
- für $e=1$ die τ-Bahnen von $(0,0,c,0,c^2-1)$ und $(d,0,0,1,e)$ und von $(0,0,0,1,0)$ und $(0,0,0,e,e^2-1)$ zusammen und

8.2 Ein Köcher mit 2 Armen der Länge 3

Q sei der folgende Köcher:

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl, "a"'] & 3 \arrow[l, "b"'] & \\
1 & & & 6 \arrow[ul, "c"'] \arrow[dl, "f"] \\
 & 4 \arrow[ul, "d"] & 5 \arrow[l, "e"] &
\end{tikzcd}$$

Es gibt folgende τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen:

$$\begin{tikzcd}
(d^2-1,0,0,d,0,0) \arrow[r, dash, "a"] \arrow[d, dash, "d"] & (a,1,b,0,0,bc) \arrow[r, dash, "b"] & (ab,b,1,0,0,c) \arrow[d, dash, "c"] \\
(0,0,0,1,0,0) \arrow[r, dash, "e"] & (0,0,0,0,1,0) \arrow[r, dash, "f"] & (0,0,0,0,f,f^2-1)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(a^2-1,a,0,0,0,0) \arrow[r, dash, "a"] \arrow[d, dash, "d"] & (0,1,0,0,0,0) \arrow[r, dash, "b"] & (0,0,1,0,0,0) \arrow[d, dash, "c"] \\
(d,0,0,1,e,ef) \arrow[r, dash, "e"] & (de,0,0,e,1,f) \arrow[r, dash, "f"] & (0,0,c,0,0,c^2-1)
\end{tikzcd}$$

Sind alle Parameter gleich eins, so ist der Köcher eine Orientierung von $\tilde{A}_5$ und damit euklidisch.

Vollständige Liste aller präprojektiven Kippmoduln modulo τ-Verschiebung:
(1): $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_5 \oplus P_6$
(2): $P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_1$
(3): $P_2 \oplus P_3 \oplus P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_4$
(4): $P_2 \oplus P_3 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_5$
(5): $P_3 \oplus P_4 \oplus P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2$
(6): $P_3 \oplus P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_4$
(7): $P_3 \oplus P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^{-2} P_1$
(8): $P_3 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_5$
(9): $P_3 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_5 \oplus \tau^{-2} P_1$
(10): $P_3 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_5 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_4$
(11): $P_4 \oplus P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3$
(12): $P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_4$
(13): $P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^{-2} P_1$
(14): $P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_2$
(15): $P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_5$
(16): $P_6 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_5 \oplus \tau^{-2} P_1$

(17): $P_6 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_5 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_4$
(18): $P_6 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_5 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus \tau^{-2} P_4 \oplus \tau^{-3} P_1$

Vollständige Liste aller Kippmoduln, modulo τ-Verschiebung, vom Typ $T = P \oplus E$ mit präprojektivem P und elementarem E:
Von (2):
$T_1 = P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_5^*$ wobei $P_5^* = \tau^-(0,0,0,0,1,0) = \tau^{-2}(0,0,0,e,e^2-1,e^2 f - f)$
$T_2 = P_2 \oplus P_4 \oplus P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0,0,0) = \tau^{-2}(0,b,b^2-1,0,0,b^2 c - c)$
Von (3):
$T_3 = P_2 \oplus P_3 \oplus P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_4 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(d^2-1,0,0,d,0,0) = \tau^{-2}(1,a,ab,0,0,abc)$
$T_4 = P_2 \oplus P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_4 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0,0,0) = \tau^{-2}(0,b,b^2-1,0,0,b^2 c - c)$
Von (4):
$T_5 = P_2 \oplus P_3 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_5 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(d^2-1,0,0,d,0,0) = \tau^{-2}(1,a,ab,0,0,abc)$
$T_6 = P_2 \oplus P_3 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_5 \oplus (\tau^- P_4)^*$ wobei $(\tau^- P_4)^* = \tau^-(de^2-d,0,0,e^2-1,e,0) = \tau^{-2}(0,0,0,1,0,0)$
$T_7 = P_2 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_5 \oplus P_3^*$ wobei $P_3^* = \tau^-(0,0,1,0,0,0) = \tau^{-2}(0,b,b^2-1,0,0,b^2 c - c)$
$T_8 = P_2 \oplus P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_5 \oplus P_6^*$ wobei $P_6^* = \tau^-(def,0,0,ef,f,1) = \tau^{-2}(0,0,c,0,0,c^2-1)$
Von (5):
$T_9 = P_3 \oplus P_4 \oplus P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_2 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(a^2-1,a,0,0,0,0) = \tau^{-2}(1,0,0,d,de,def)$
$T_{10} = P_3 \oplus P_4 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus P_5^*$ wobei $P_5^* = \tau^-(0,0,0,0,1,0) = \tau^{-2}(0,0,0,e,e^2-1,e^2 f - f)$
Von (7):
$T_{11} = P_3 \oplus P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(a^3 + ad^2 - 2a, a^2-1, 0, ad, 0, 0) = \tau^{-2}(a,1,b,0,0,bc)$
$T_{12} = P_3 \oplus P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus (\tau^- P_4)^*$ wobei $(\tau^- P_4)^* = \tau^-(a^2 d + d^3 - 2d, ad, 0, d^2-1, 0, 0) = \tau^{-2}(d,0,0,1,e,ef)$
Von (8):
$T_{13} = P_3 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_5 \oplus (\tau^- P_4)^*$ wobei $(\tau^- P_4)^* = \tau^-(de^2-d,0,0,e^2-1,e,0) = \tau^{-2}(0,0,0,1,0,0)$
$T_{14} = P_3 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_5 \oplus P_6^*$ wobei $P_6^* = \tau^-(def,0,0,ef,f,1) = \tau^{-2}(0,0,c,0,0,c^2-1)$
Von (9):
$T_{15} = P_3 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_5 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(a^3 + ad^2 - 2a, a^2-1, 0, ad, 0, 0) = \tau^{-2}(a,1,b,0,0,bc)$
$T_{16} = P_3 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_5 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus P_6^*$ wobei $P_6^* = \tau^-(def,0,0,ef,f,1) =$

$\tau^{-2}(0,0,c,0,0,c^2-1)$
Von (10):
$T_{17} = P_3 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_5 \oplus \tau^{-2} P_4 \oplus (\tau^{-2} P_1)^*$ wobei $(\tau^{-2} P_1)^* = \tau^{-2}(d^2-1,0,0,d,0,0) = \tau^{-3}(1,a,ab,0,0,abc)$
$T_{18} = P_3 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_5 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_4 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(a^3+ad^2-2a,a^2-1,0,ad,0,0) = \tau^{-2}(a,1,b,0,0,bc)$
Von (11):
$T_{19} = P_4 \oplus P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_1)^*$ wobei $(\tau^- P_1)^* = \tau^-(a^2-1,a,0,0,0,0) = \tau^{-2}(a,0,0,d,de,def)$
$T_{20} = P_4 \oplus P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(ab^2-a,b^2-1,b,0,0,0) = \tau^{-2}(0,1,0,0,0,0)$
$T_{21} = P_4 \oplus P_5 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus P_6^*$ wobei $P_6^* = \tau^-(abc,bc,c,0,0,1) = \tau^{-2}(0,0,0,0,f,f^2-1)$
$T_{22} = P_4 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus P_5^*$ wobei $P_5^* = \tau^-(0,0,0,0,1,0) = \tau^{-2}(0,0,0,e,e^2-1,e^2 f-f)$
Von (12):
$T_{23} = P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_4 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(ab^2-a,b^2-1,b,0,0,0) = \tau^{-2}(0,1,0,0,0,0)$
$T_{24} = P_5 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_4 \oplus P_6^*$ wobei $P_6^* = \tau^-(abc,bc,c,0,0,1) = \tau^{-2}(0,0,0,0,f,f^2-1)$
Von (13):
$T_{25} = P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus (\tau^- P_4)^*$ wobei $(\tau^- P_4)^* = \tau^-(a^2 d+d^3-2d,ad,0,d^2-1,0,0) = \tau^{-2}(d,0,0,1,e,ef)$
$T_{26} = P_5 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus P_6^*$ wobei $P_6^* = \tau^-(abc,bc,c,0,0,1) = \tau^{-2}(0,0,0,0,f,f^2-1)$
Von (14):
$T_{27} = P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus (\tau^{-2} P_1)^*$ wobei $(\tau^{-2} P_1)^* = \tau^{-2}(a^2-1,a,0,0,0,0) = \tau^{-3}(1,0,0,d,de,def)$
$T_{28} = P_5 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus P_6^*$ wobei $P_6^* = \tau^-(abc,bc,c,0,0,1) = \tau^{-2}(0,0,0,0,f,f^2-1)$
$T_{29} = P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus (\tau^- P_3)^*$ wobei $(\tau^- P_3)^* = \tau^{-2}(ab,b,1,0,0,c) = \tau^{-3}(0,0,c^2-1,0,cf,c^3+cf^2-2c)$
$T_{30} = P_5 \oplus P_6 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus (\tau^- P_4)^*$ wobei $(\tau^- P_4)^* = \tau^-(a^2 d+d^3-2d,ad,0,d^2-1,0,0) = \tau^{-2}(d,0,0,1,e,ef)$
Von (15):
$T_{31} = P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_4 \oplus \tau^- P_5 \oplus (\tau^- P_2)^*$ wobei $(\tau^- P_2)^* = \tau^-(ab^2-a,b^2-1,b,0,0,0) = \tau^{-2}(0,1,0,0,0,0)$
$T_{32} = P_6 \oplus \tau^- P_1 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_5 \oplus (\tau^- P_4)^*$ wobei $(\tau^- P_4)^* = \tau^-(de^2-d,0,0,e^2-1,e,0) = \tau^{-2}(0,0,0,1,0,0)$
Von (17):
$T_{33} = P_6 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_5 \oplus \tau^{-2} P_4 \oplus (\tau^{-2} P_1)^*$ wobei $(\tau^{-2} P_1)^* = \tau^{-2}(d^2-1,0,0,d,0,0) = \tau^{-3}(1,a,ab,0,0,abc)$
$T_{34} = P_6 \oplus \tau^- P_2 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^{-2} P_1 \oplus \tau^{-2} P_4 \oplus (\tau^- P_5)^*$ wobei $(\tau^- P_5)^* =$

$\tau^{-2}(de,0,0,e,1,f) = \tau^{-3}(0,0,cf,0,f^2-1,c^2f+f^3-2f)$
Von (18):
$T_{35} = P_6 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_5 \oplus \tau^{-2}P_4 \oplus \tau^{-3}P_1 \oplus (\tau^{-2}P_2)^*$ wobei $(\tau^{-2}P_2)^* = \tau^{-2}(a^3+ad^2-2a, a^2-1,0,ad,0,0) = \tau^{-3}(a,1,b,0,0,bc)$
$T_{36} = P_6 \oplus \tau^- P_5 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus \tau^{-2}P_4 \oplus \tau^{-3}P_1 \oplus (\tau^{-}P_3)^*$ wobei $(\tau^{-}P_3)^* = \tau^{-2}(ab,b,1,0,0,c) = \tau^{-3}(0,0,c^2-1,0,cf,c^3+cf^2-2c)$
$T_{37} = P_6 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^- P_5 \oplus \tau^{-2}P_2 \oplus \tau^{-3}P_1 \oplus (\tau^{-2}P_4)^*$ wobei $(\tau^{-2}P_4)^* = \tau^{-2}(a^2d+d^3-2d, ad, 0, d^2-1,0,0) = \tau^{-3}(d,0,0,1,e,ef)$
$T_{38} = P_6 \oplus \tau^- P_3 \oplus \tau^{-2} P_2 \oplus \tau^{-2}P_4 \oplus \tau^{-3}P_1 \oplus (\tau^{-}P_5)^*$ wobei $(\tau^{-}P_5)^* = \tau^{-2}(de,0,0,e,1,f) = \tau^{-3}(0,0,cf,0,f^2-1,c^2f+f^3-2f)$

Dabei liefern die folgenden Kippmoduln dieselbe τ-Bahn:

- T_1, T_{10} und T_{22} liefern die τ-Bahn von $(0,0,0,0,1,0)$
- T_2, T_4 und T_7 liefern die τ-Bahn von $(0,0,1,0,0,0)$
- T_3, T_5,T_{17} und T_{33} liefern die τ-Bahn von $(d^2-1,0,0,d,0,0)$
- T_6, T_{13} und T_{32} liefern die τ-Bahn von $(0,0,0,1,0,0)$
- T_8, T_{14} und T_{16} liefern die τ-Bahn von $(0,0,c,0,0,c^2-1)$
- T_9, T_{19} und T_{27} liefern die τ-Bahn von $(a^2-1,a,0,0,0,0)$
- T_{11}, T_{15}, T_{18} und T_{35} liefern die τ-Bahn von $(a,1,b,0,0,bc)$
- T_{12}, T_{25}, T_{30} und T_{37} liefern die τ-Bahn von $(d,0,0,1,e,ef)$
- T_{20}, T_{23} und T_{31} liefern die τ-Bahn von $(0,1,0,0,0,0)$
- T_{21}, T_{24}, T_{26} und T_{28} liefern die τ-Bahn von $(0,0,0,0,f,f^2-1)$
- T_{29} und T_{36} liefern die τ-Bahn von $(ab,b,1,0,0,c)$
- T_{34} und T_{38} liefern die τ-Bahn von $(de,0,0,e,1,f)$

Es gibt also maximal 12 τ-Bahnen von elementaren Moduln ohne Selbsterweiterungen: Die von $(0,0,0,0,1,0)$, $(0,0,1,0,0,0)$, $(d^2-1,0,0,d,0,0)$, $(0,0,0,1,0,0)$, $(0,0,c,0,0,c^2-1)$, $(a^2-1,a,0,0,0,0)$, $(a,1,b,0,0,bc)$, $(d,0,0,1,e,ef)$, $(0,1,0,0,0,0)$, $(0,0,0,0,f,f^2-1)$, $(ab,b,1,0,0,c)$ und $(de,0,0,e,1,f)$.

Es fallen

- für $a=1$ die τ-Bahnen von $(d^2-1,0,0,d,0,0)$ und $(a,1,b,0,0,bc)$ und von $(a^2-1,a,0,0,0,0)$ und $(0,1,0,0,0,0)$ zusammen,
- für $b=1$ die τ-Bahnen von $(0,0,1,0,0,0)$ und $(0,1,0,0,0,0)$ und von $(a,1,b,0,0,bc)$ und $(ab,b,1,0,0,c)$ zusammen,
- für $c=1$ die τ-Bahnen von $(0,0,0,0,f,f^2-1)$ und $(ab,b,1,0,0,c)$ und von $(0,0,c,0,0,c^2-1)$ und $(0,0,1,0,0,0)$ zusammen und
- für $d=1$ die τ-Bahnen von $(d^2-1,0,0,d,0,0)$ und $(0,0,0,1,0,0)$ und von $(a^2-1,a,0,0,0,0)$ und $(d,0,0,1,e,ef)$ zusammen.

- für $e = 1$ die τ-Bahnen von $(0,0,0,0,1,0)$ und $(0,0,0,1,0,0)$ und von $(d,0,0,1,e,ef)$ und $(de,0,0,e,1,f)$ zusammen und
- für $f = 1$ die τ-Bahnen von $(0,0,0,0,f,f^2-1)$ und $(0,0,0,0,1,0)$ und von $(0,0,c,0,0,c^2-1)$ und $(de,0,0,e,1,f)$ zusammen.

Literaturverzeichnis

[1] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. London Math. Soc. Student Texts **65**,(2006).

[2] M. Auslander, I. Reiten and S. Smalø. Representation theory of Artin algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics (1995).

[3] K. Bongartz. Tilted algebras. Proc. of ICRA III, Lecture Notes in Math. **903**, 26-38, (1981).

[4] A. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, G. Todorov. Tilting theory and cluster combinatorics. Adv. Math. **204**, 572-618 ,(2006)

[5] A. Buan, R. Marsh, I. Reiten. Cluster mutation via quiver representations. Comment. Math. Helv. **83**, 143-177, (2008), no. 1.

[6] D. Happel. Triangulated categories and the representation theory of finite-dimensional algebras, LMS Lecture Note Series **119** (1988)

[7] D. Happel, L. Unger. Almost complete tilting modules. Proc. Am. Math. Soc. 107, No.3, 603-610, (1989).

[8] M. Hoshino. Splitting torsion theories induced by tilting modules. Comm. Algebra **11**, 427-439, (1983)

[9] V. Kac. Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory I. Invent. Math. **56** (1980), no. 1, 57-92.

[10] B. Keller. On triangulated orbit categories. Doc. Math. **10**, 551-581, (2005)

[11] O. Kerner. Elementary stones. Comm. Algebra **22**, 1797-1806, (1994), no. 5.

[12] O. Kerner and F. Lukas. Elementary modules. Math. Z. **223**, No.3, 421-434 (1996).

[13] O. Kerner, M. Takane. Mono orbits, epi orbits and elementary vertices of representation infinite quivers. Comm. Algebra **25**, 51-77, (1997), no. 1.

[14] F. Lukas. Elementare Moduln über wilden erblichen Algebren. Dissertation, Düsseldorf 1992

[15] C. M. Ringel. Tame algebras and integral quadratic forms. Springer Lecture Notes **1099** (1984)

[16] A. Schofield. The field of definition of a real representation of a quiver Q. Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), no. 2, 293-295.